

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática



Alguns Resultados sobre o Operador de Laplace

por

Aiury Silva Azerêdo

Junho/2018
João Pessoa - PB

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Curso de Bacharelado em Matemática

Alguns Resultados sobre o Operador de Laplace

por

Aiury Silva Azerêdo

sob orientação do

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó

Monografia apresentada ao Corpo Docente do Programa de Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Junho/2018
João Pessoa - PB

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

A993a Azeredo, Aiury Silva.

Alguns resultados sobre o operador de Laplace / Aiury
Silva Azeredo. - João Pessoa, 2018.

58 f.

Orientação: João Marcos Bezerra do Ó.
Monografia (Graduação) - UFPB/CCEN.

1. Operador laplaciano. 2. Problema do autovalor. 3.
Funções harmônicas. I. do Ó, João Marcos Bezerra. II.
Título.

UFPB/CCEN

Alguns Resultados sobre o Operador de Laplace

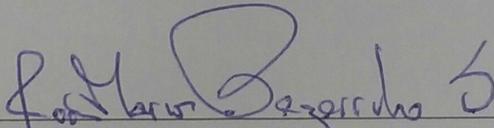
por

Aiury Silva Azerêdo

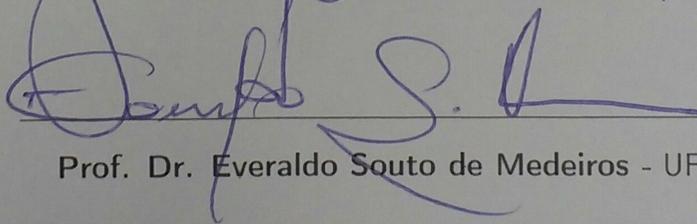
Monografia apresentada ao Corpo Docente do Programa de Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Área de Concentração: Análise

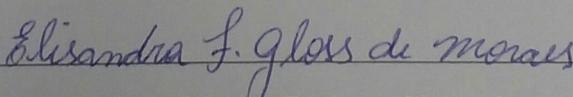
COMISSÃO EXAMINADORA



Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó - UFPB (Orientador)



Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros - UFPB



Prof^a. Dr^a. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes - UFPB

Junho/2018

Agradecimentos

- Acima tudo, agradeço à minha família por ser o ponto de apoio durante todos os momentos. Em especial, à minha tia Gerlane, que me acolheu em sua casa durante grande parte da minha graduação.
- Deixo aqui o meu agradecimento à professora Flávia por acreditar no meu potencial, bem como ao professor João Marcos por me orientar na iniciação científica e neste trabalho.
- A todos os meus amigos do Laboratório Milênio, em especial a Marcelo, Julian e Raoni, pelos conhecimentos compartilhados.
- A Leiliane, que mesmo longe, esteve comigo todos os dias.
- Finalmente, gostaria de agradecer a: Everaldo Souto Medeiros e Elisandra Gloss, que aceitaram participar da banca.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é estudar fatos acerca do laplaciano, operador diferencial que desempenha um papel crucial em vários fenômenos físicos. Mostraremos o comportamento do operador de Laplace sob ação de rotações e translações e discutiremos brevemente o problema do autovalor para domínios específicos do espaço euclidiano, bem como propriedades básicas das funções harmônicas. Um significado geométrico para o laplaciano também será abordado.

Palavras-Chave: Operador de Laplace, Problema do autovalor, Funções Harmônicas.

ABSTRACT

The purpose of this work is to study facts and applications about the Laplacian, a differential operator that plays a crucial role in many physical phenomena. We will show the behavior of the Laplace operator under the action of rotations and translations and it will briefly be discussed the eigenvalue problem for some specific Euclidean domains, as well as some basic properties of harmonic functions. A geometrical significance of the Laplacian will also be presented.

Keywords: Laplace operator, Eigenvalue problem, Harmonic Functions.

SUMÁRIO

Resumo	iv
Abstract	v
Introdução	1
1 Preliminares	3
Preliminares	3
1.1 Diferenciabilidade em \mathbb{R}^n	3
1.2 Resultados sobre Integração	6
1.2.1 Coordenadas Polares	7
1.2.2 Teorema da Divergência e Identidades de Green	8
2 Por que estudar o laplaciano?	11
Por que estudar o laplaciano?	11
2.1 Onde encontramos Δ ?	11
2.1.1 Fluido Estacionário	12

2.1.2	Campo eletrostático	13
2.1.3	Difusão do Calor em Ω	13
2.1.4	Equação da Onda	14
2.2	Sobre a ação de rotações e translações	15
2.3	Interpretação Geométrica do laplaciano	23
3	O Problema do Autovalor	26
	O Problema do Autovalor	26
3.1	Os Autovalores do laplaciano	26
3.1.1	Propriedades dos Autovalores	28
3.1.2	Entendendo os Autovalores de Δ	30
3.2	Intervalo	32
3.3	Retângulo	34
3.4	Disco	35
3.5	Isometrias e o Problema Isospectral	37
4	Funções Harmônicas	42
	Funções Harmônicas	42
4.1	Princípio do Máximo Forte e o Teorema do Valor Médio	43
4.2	A Recíproca do Teorema do Valor Médio	46
	Referências	49

INTRODUÇÃO

“How can this one mathematical tool play a role in such diverse phenomena as sound and light, quantum mechanics and classical mechanics, heat, concentration and electrostatics?”

— Daniel Styer.

A citação acima, feita pelo físico Daniel Styer em um de seus artigos, traduz o sentimento que motiva este trabalho. O operador de Laplace, denotado por Δ , desempenha um papel importantíssimo em toda a Análise Moderna, especialmente na área de Equações Diferenciais.

Para aqueles não familiarizados com o tema, o operador laplaciano, como também ficou conhecido o operador de Laplace, surge naturalmente em muitos fenômenos físicos: no problema da perturbação de uma corda com extremidades fixas, da condução do calor em uma barra metálica, do potencial de velocidades de um fluido irrotacional, do potencial elétrico de um campo elétrico, os exemplos são diversos (e envolvem outras áreas do conhecimento).

O nosso principal objetivo é explorar propriedades do laplaciano em dois

aspectos que se mesclam: o primeiro consiste em olhar laplaciano apenas como um operador (diferencial) linear; o segundo, busca informações sobre o comportamento de funções a partir de dados sobre seu laplaciano, de modo a conseguir resultados clássicos que são extensamente utilizados na teoria de EDP's.

Com o intuito de situar o leitor nas notações e noções necessárias, apresentamos no Capítulo 1 as definições e teoremas auxiliares que serão utilizados no decorrer do trabalho, assim como as respectivas referências escolhidas. O capítulo conta com resultados sobre diferenciabilidade no \mathbb{R}^n , integração em coordenadas polares e Identidades de Green. Usamos como base [1], [2], [4] e [3].

No Capítulo 2, damos início ao estudo do laplaciano, motivando-o a partir das inúmeras situações onde tal operador surge. Destacamos ainda uma propriedade peculiar: o laplaciano comuta com translações e rotações e é, de certa forma, o único operador de segunda ordem que cumpre essa exigência. Tivemos como principal referência [5]. Ainda no fim deste capítulo, damos um significado geométrico para laplaciano, utilizando [6].

No terceiro capítulo, introduzimos o problema do autovalor para o laplaciano, e buscamos explicitar alguns desses autovalores para domínios específicos do espaço euclidiano. Não utilizamos as ferramentas modernas de Análise Funcional ou Teoria Variacional, mas a inclusão deste capítulo ressalta a importância do laplaciano enquanto provedor de informações geométricas sobre o domínio onde é considerado o problema do autovalor. Nossa principal referência foi [7].

No quarto e último capítulo, estudamos as propriedades básicas das funções harmônicas, funções que são caracterizadas pela equação $\Delta(\cdot) = 0$. Derivamos resultados clássicos como os Princípios do Máximo Fraco e Forte, a Desigualdade do Valor Médio para funções sub-harmônicas ($\Delta(\cdot) \leq 0$) e super-harmônicas ($\Delta(\cdot) \geq 0$) e mostramos também que $\Delta(\cdot) = 0$ nos dá informações sobre a regularidade da função. Nossas principais referências foram [3] e [5].

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentaremos noções e resultados auxiliares que serão utilizados no decorrer do trabalho, de modo a facilitar a compreensão dos demais capítulos. Dividimos este capítulo em três seções contendo apenas os resultados que serão usados posteriormente. As demonstrações dos teoremas citados serão indicadas nas referências dadas acima.

1.1 Diferenciabilidade em \mathbb{R}^n

A seguir, as funções terão como contradomínio \mathbb{R}^m . No entanto, nos capítulos que seguem, estaremos interessados apenas em funções reais. No resto do texto, utilizaremos as notações e_i para designar o vetor de \mathbb{R}^n dado por $(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, com 1 na i -ésima coordenada e 0 nas demais; $B_r(x)$ e $S_r(x)$ denotarão a bola aberta e esfera de centro x e raio r , respectivamente.

Definição 1.1.1. *Uma aplicação $u : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, diz-se diferenciável no ponto $x \in U$ quando existir uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$*

tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x) - T(h)}{\|h\|} = 0.$$

É fácil verificar que T é única. A transformação linear T é denotada por $Du(x)$ e é chamada a derivada de u em x . Uma função $u : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ diz-se diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ quando é diferenciável em todos os pontos de U .

Observação 1.1.1. Se $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ for uma transformação linear, então $DS(x) = S$ em todo ponto $x \in \mathbb{R}^n$. Basta observar que S satisfaz o limite acima. Outra verificação direta é a seguinte: dado $a \in \mathbb{R}^n$, a função translação τ_a (por a) possui derivada (em todos os pontos) igual à transformação linear identidade.

Definição 1.1.2. Sejam $u : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função definida no aberto U , e $x \in U$. Dado $i \in 1, \dots, n$ a derivada parcial de u com respeito a x_i no ponto x é definida por

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x + te_i) - u(x)}{t}.$$

caso esse limite exista.

Note que os vetores e_i na definição acima não desempenham um papel crucial, o que nos permite definir de forma mais geral

Definição 1.1.3. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $u : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função e $\nu \neq 0$ um vetor do \mathbb{R}^n . Dizemos que u possui **derivada direcional** em $x_0 \in U$ na direção ν quando existe o limite

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \partial_\nu u(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + t\nu) - u(x_0)}{t}.$$

Observação 1.1.2. É possível mostrar que, se $u : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável no ponto $x \in U$, satisfazendo as condições da Definição 1, existem todas as derivadas direcionais de u em x e

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = Du(x) \cdot \nu.$$

Para mais detalhes, vide [1].

Teorema 1.1.1 (Regra da Cadeia). *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$ abertos, $u : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciável no ponto a , com $f(U) \subset V$, e $v : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ diferenciável no ponto $u(a)$. Então $v \circ u : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ é diferenciável no ponto a , com a derivada dada por*

$$D(v \circ u)(a) = Dv(u(a)) \cdot Du(a) \quad (1.1)$$

Prova. Vide Teorema 5.3.1 em [1]. ■

Se as derivadas parciais de $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ existem em todos os pontos $x \in U$, e as funções $\frac{\partial u}{\partial x_i} : x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$ são contínuas, para cada $i = 1, \dots, n$, dizemos que u é de classe C^1 . Analogamente, podemos questionar a diferenciabilidade dessas derivadas parciais, isto é, verificar a existência, $j = 1, \dots, n$, das funções $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} : x \mapsto \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}(x)$, as chamadas derivadas parciais de segunda ordem de u . Se elas estão bem definidas e são contínuas, dizemos que u é de classe C^2 (mais geralmente, para qualquer natural $k \geq 1$, dizemos que u é de classe C^k se existem as derivadas parciais de ordem $k - 1$, definidas indutivamente, e estas são contínuas).

Teorema 1.1.2 (Schwarz). *Se $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^2 no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, então para quaisquer $i, j = 1, \dots, n$ e $x \in U$, tem-se*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x). \quad (1.2)$$

Prova. Vide Teorema 3.3.4 em [1]. ■

Teorema 1.1.3 (Fórmula de Taylor). *Seja $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Fixando $x_0 \in U$, para todo $x = (x_1, \dots, x_n) \in B_r(x_0) \subset U$, tem-se*

$$u(x) - u(x_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0)x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)x_i x_j + \rho(x), \quad (1.3)$$

onde $\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\rho(x)}{\|x\|^2} = 0$.

Prova. Vide Teorema 3.4.5 em [1]. ■

1.2 Resultados sobre Integração

Apesar de sua construção abstrata, a Teoria da Medida, quando aplicada ao espaço euclidiano, assume propriedades semelhantes (até melhores) às da integração que já estamos acostumados a fazer. Os conceitos de **medida** (de Lebesgue) e **funções mensuráveis** e **integráveis** (a Lebesgue), assim como suas respectivas propriedades básicas, serão assumidas como verdade. Para mais detalhes, vide [2] e [9].

Teorema 1.2.1. (Convergência Dominada de Lebesgue). Sejam (X, Σ, μ) um espaço de medida e (f_n) uma sequência de funções integráveis convergindo quase sempre para uma função mensurável real ou complexa f . Se existe uma função integrável g tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ para todos $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e

$$\int_X f \, d\mu = \lim \int_X f_n \, d\mu.$$

Prova. Vide Teorema 5.6 em [9]. ■

Corolário 1.2.1.1. Seja $f : X \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ com $x \mapsto f(x, t)$ mensurável para qualquer $t \in [a, b]$. Se para algum $t_0 \in [a, b]$, $x \mapsto f(x, t_0)$ é integrável em X , existe $\partial f / \partial t$ e existe g integrável tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x) \quad \forall x \in X \text{ e } t \in [a, b],$$

então $\int f(x, t) \, d\mu$ é diferenciável em t_0 e

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \int_X f(x, t) \, d\mu = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) \, d\mu.$$

Prova. Vide Corolário 5.9 em [9]. ■

Teorema 1.2.2. *Seja $a \in \mathbb{R}^n$. Defina $\tau_a(x) = x + a$. Se $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ for mensurável, então $u \circ \tau_a$ também o será. Além disso, se $\int |u| < \infty$, vale*

$$\int (u \circ \tau_a) \, dx = \int u \, dx$$

Prova. Vide Teorema 2.42 em [2]. ■

A seguir, denotamos por $GL_n(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes reais invertíveis de ordem n .

Teorema 1.2.3. *Seja $T \in GL_n(\mathbb{R})$. Se $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ for mensurável, então $u \circ T$ também o é. Além disso, se $\int |u| < \infty$, vale*

$$\int u \, dx = |\det T| \int (u \circ T) \, dx.$$

Prova. Vide Teorema 2.44 em [2]. ■

1.2.1 Coordenadas Polares

Sabemos, das nossas experiências no plano e no espaço, que nem sempre o sistema cartesiano de coordenadas é o mais conveniente para resolução de problemas. Muitas vezes, é mais natural trabalharmos com **coordenadas polares** (ou esféricas, como é comum nos referirmos em \mathbb{R}^3).

Entretanto, as conhecidas mudanças $(x = r \cos \theta, y = r \sin \theta)$ e $(x = r \sin \phi \cos \theta, y = r \sin \phi \sin \theta, z = r \cos \phi)$, a medida que acrescentamos dimensões, tornam-se proporcionalmente complicadas. Para a maioria dos problemas, no entanto, é suficiente mostrar que a medida de Lebesgue é o produto (veja [2], seção 2.5) da medida $r^{n-1} dr$ em $(0, \infty)$ e de uma certa “medida de superfície” em $S_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, a esfera unitária.

Se $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, as coordenadas polares de x são

$$r = \|x\| \in (0, \infty), \quad x' = \frac{x}{\|x\|} \in S_1(0).$$

A função $\Phi(x) = (r, x')$ é um homeomorfismo de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ em $(0, \infty) \times S_1(0)$. É possível induzir uma medida de Borel em $(0, \infty) \times S_1(0)$ a partir dessa bijeção pelos conjuntos mensuráveis a Lebesgue de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Denotando por m a medida

de Lebesgue, definimos essa nova medida m_* por $m_*(E) = m(\Phi^{-1}(E))$. Apenas no fator $(0, \infty)$, defina a medida ρ_n por $\rho_n(E) = \int_E r^{n-1} dr$. Temos o seguinte resultado:

Teorema 1.2.4. *Existe uma única medida de Borel σ em $S_1(0)$ tal que $m_* = \rho \times \sigma$.*

Se u for Borel mensurável em \mathbb{R}^n e $\int |u| < \infty$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x) dx = \int_0^\infty \int_{S_1(0)} u(rx') r^{n-1} d\sigma(x') dr.$$

Em particular, sobre $B_R(x_0)$,

$$\int_{B_R(x_0)} u(x) dx = \int_0^R \int_{S_1(0)} u(rx' + x_0) r^{n-1} d\sigma(x') dr$$

e pode-se definir

$$\int_{S_r(x)} u d\sigma(x) = \int_{S_1(0)} u(rx' + x_0) r^{n-1} d\sigma(x').$$

Prova. Veja Teorema 2.49 em [2]. ■

É possível calcular a medida $\sigma(S_1(0))$ e $m(B_1(0))$ a partir da fórmula acima e do uso da **função gama**. Para demonstrações, vide [2]:

Corolário 1.2.4.1. *Sejam $B_1(0)$ e $S_1(0)$ em \mathbb{R}^n . Então*

$$m(B_1(0)) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} = \omega_n, \quad \sigma(S_1(0)) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} = n\omega_n.$$

Observação 1.2.1. *Também usaremos as notações $|B_r|$ e $|S_r|$ para denotar $m(B_r)$ e $\sigma(S_r)$, respectivamente.*

1.2.2 Teorema da Divergência e Identidades de Green

Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ é dito uma **hiperfície de classe C^k** ($1 \leq k \leq \infty$) se para cada $x_0 \in S$, existe um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$ e uma função real ϕ definida em V tal que $\nabla\phi \neq 0$ em $S \cap V$ e

$$S \cap V = \{x \in V : \phi(x) = 0\}.$$

Dizemos que S é **orientada** se for possível escolher, para cada $x \in S \cap V$, um vetor unitário $\nu(x)$ (variando continuamente com x) perpendicular a S em x . Para mais detalhes sobre hiperfícies, vide [1], Cap. 4, Seção 2.

Neste trabalho, trabalharemos apenas sobre a esfera $S_r(x_0)$. Note que as retas que passam pelo centro de $S_r(x_0)$ são perpendiculares à esfera, de modo que o vetor normal é dado por

$$\nu(x) = \frac{x - x_0}{r},$$

e a derivada na direção de ν é

$$\frac{\partial}{\partial \nu} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i}) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Teorema 1.2.5. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado, com $S = \partial\Omega$ de classe C^1 , e $F : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 . Então*

$$\int_S F(y) \cdot \nu(y) \, d\sigma(y) = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x) \, dx. \quad (1.4)$$

O resultado acima, conhecido com *Teorema da Divergência*, é consequência do mais geral *Teorema de Stokes*, cuja demonstração pode ser encontrada em [4].

Corolário 1.2.5.1 (Identidades de Green). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto com fronteira S de classe C^1 e $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$ funções reais. Então valem as fórmulas*

$$\int_S v \partial_{\nu} u \, d\sigma = \int_{\Omega} (v \Delta u + \nabla u \cdot \nabla v) \, dx \quad (1.5)$$

$$\int_S (v \partial_{\nu} u - u \partial_{\nu} v) \, d\sigma = \int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) \, dx \quad (1.6)$$

Prova. Para mostrar (1.5), considere $F = v \nabla u$ em (1.4). Como $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$, F tem pelo menos classe C^1 e de fato podemos aplicar o Teorema. Segue que

$$\int_S v(\nabla u \cdot \nu) \, d\sigma = \int_S v \partial_{\nu} u \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} (v \nabla u) \, dx = \int_{\Omega} (v \Delta u + \nabla u \cdot \nabla v) \, dx,$$

como queríamos.

No caso de (1.6), basta escolhermos $G = u \nabla v$ em (1.4) e subtrairmos o resultado de (1.5).



CAPÍTULO 2

POR QUE ESTUDAR O LAPLACIANO?

Neste capítulo apresentamos alguns fenômenos físicos nos quais o operador laplaciano desempenha um papel importante e exibimos uma propriedade interessante desse operador.

2.1 Onde encontramos Δ ?

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e considere $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Em todo ponto $x \in \Omega$ onde existem as derivadas de segunda ordem da função u , os números $h_{ij}(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ formam uma matriz $\mathbf{H}(x) = [h_{ij}(x)]_{i,j}$, chamada de *matriz hessiana* da função u . Sabemos por (1.2) que se u é de classe C^2 , então a matriz hessiana de u é simétrica.

Definição 2.1.1. *Seja $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. O laplaciano de u é a função $\Delta u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, definida por*

$$\Delta u = \operatorname{tr} \mathbf{H},$$

onde \mathbf{H} é a matriz hessiana da função u . Portanto, para cada $x \in \Omega$,

$$\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x) + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x).$$

Nota. Pela definição acima, também podemos escrever

$$\Delta u = \operatorname{div} \nabla u.$$

De fato, temos

$$\operatorname{div} \nabla u = \operatorname{div} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = \Delta u.$$

Esta observação, apesar de parecer elementar nesse caso, é de extrema importância. Em contextos mais gerais, a saber, no estudo das variedades riemannianas, o laplaciano pode ser definido a partir desses dois outros operadores. Mostramos agora alguns exemplos de onde o laplaciano desempenha um papel central:

2.1.1 Fluido Estacionário

Se quisermos estudar a velocidade $v(x_1, x_2, x_3, t)$ de um dado fluido, sob certas condições, temos que resolver a equação $\Delta u = 0$. Com efeito, digamos que o fluido em questão seja:

1. **estacionário:** o campo de velocidade v associado a cada ponto do espaço independe do tempo (variável t).
2. **irrotacional:** o rotacional de v é nulo. Escrevemos $\operatorname{rot} v = 0$. Uma forma de obtermos isso é exigindo que $v = -\nabla u$, para alguma função u conhecida como potencial de velocidade.
3. **incompressível:** vale $\operatorname{div} v = 0$ para todo ponto do espaço. Nesse caso, interpretamos que o fluido não perde volume ao longo do movimento.

De posse dessas três hipóteses, chegamos a conclusão de que nosso potencial u deve satisfazer a equação

$$0 = \operatorname{div} v = -\operatorname{div} \nabla u = -\Delta u. \quad (2.1)$$

2.1.2 Campo eletrostático

Sabemos das nossas aulas de física básica que o campo elétrico \vec{E} gerado por cargas é conservativo, isto é, existe uma função u conhecida como potencial elétrico que cumpre a condição $E = -\nabla u$. Sabemos ainda que vale a identidade $\operatorname{div} E = 4\pi\rho$, onde ρ é a densidade de cargas da região considerada. Portanto, nosso potencial u satisfaz, repetindo o que foi feito em (2.1)

$$-\Delta u = 4\pi\rho,$$

e na ausência de cargas ($\rho = 0$),

$$\Delta u = 0.$$

2.1.3 Difusão do Calor em Ω

Suponhamos que uma região $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ seja aquecida e queremos estudar como o calor se propaga através dela ao longo do tempo. Temos então que resolver a *Equação do Calor* dada por

$$\Delta u(x, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t), \quad (2.2)$$

onde c é uma constante positiva associada à condutividade térmica de Ω e $u(x, t)$ é a temperatura no ponto $x \in \Omega$ no instante t .

Podemos também considerar a situação em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é uma região termicamente isolada e aplicamos a $\partial\Omega$ uma temperatura inicial. Fisicamente, sabemos que a região atinge o equilíbrio térmico, o que equivale a procurar uma solução estacionária de (2.2), i.e., $\partial_t u(x, t) = 0$. Mais uma vez, encontramos $\Delta u = 0$.

Nota. As funções que satisfazem a chamada equação de Laplace $\Delta u = 0$, como as mostradas em [2.1.1](#), [2.1.2](#) e [2.1.3](#), possuem muitas aplicações em outros ramos da ciência e são conhecidas como *funções harmônicas*. Elas são exploradas no Capítulo 3 desse trabalho.

2.1.4 Equação da Onda

Imagine que tenhamos um tambor, isto é, um instrumento musical formado por uma membrana fina $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ esticada e fixa em um aro fechado $\partial\Omega$. Quando batemos no tambor para escutarmos seu som, ocorre uma perturbação na membrana, e a vibração transversal de cada um dos pontos da membrana é modelada pela famosa *Equação da Onda* dada por

$$\Delta u(x, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t),$$

onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante que depende da velocidade do som e do material de que é feita a membrana, e $u(x, t)$ denota a posição transversal no ponto $x \in \Omega$ no instante $t \geq 0$.

Como as extremidades da membrana estão fixas, nossa solução deve satisfazer $u|_{\partial\Omega} = 0$. Em outras palavras, a parte da membrana “amarrada” no aro não se move.

Como podemos ver, o operador laplaciano surge naturalmente em uma gama de fenômenos físicos de extrema importância. De fato, o que apresentamos nestas últimas seções são apenas alguns exemplos, os quais dão margem para muitos outros, envolvendo desde o problema mais aplicado de Engenharia, até os mais teóricos da Física Quântica.

2.2 Sobre a ação de rotações e translações

Mas o que tem de especial o laplaciano para desempenhar um papel tão crucial nos fenômenos físicos? Por que não outro operador surge com tanta frequência? Exibimos agora uma propriedade do laplaciano que pode nos ajudar a responder essas perguntas.

Proposição 2.2.1. *Seja $a \in \mathbb{R}^n$ e $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $T(x) = x + a$. Então para toda $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$, vale que*

$$\Delta u(T(x)) = \Delta u(x + a) = \Delta(u \circ T)(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Dizemos, nesse caso, que o laplaciano comuta com translações.

Prova. A demonstração é feita por computação direta. Primeiro, note que $DT(p) = Id_{\mathbb{R}^n}$, para todo $p \in \mathbb{R}^n$. Assim, dado $x \in \mathbb{R}^n$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u \circ T)}{\partial x_i}(x) &= D(u \circ T)(x) \cdot e_i \\ &= Du(T(x))DT(x) \cdot e_i \\ &= Du(T(x)) \cdot e_i \\ &= \frac{\partial u}{\partial x_i}(T(x)). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Analogamente, derivando (2.3) em relação a x_i , concluímos que

$$\frac{\partial^2(u \circ T)}{\partial x_i^2}(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(T(x)).$$

Tomando o somatório em i , mostramos o que queríamos. ■

Agora que sabemos que o laplaciano comuta com translações, nos perguntamos se tal propriedade vale também para rotações. Com efeito, dado $0 < \theta \leq 2\pi$, considere a transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ associada à matriz

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

Por que estudar o laplaciano?

Verifiquemos que $\Delta u(T(x, y)) = \Delta(u \circ T)(x, y)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Observe que a fórmula explícita de T é dada por $T(x, y) = (x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta)$. Repetindo o mesmo processo utilizado (2.3), computamos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(u \circ T)}{\partial x}(x, y) &= D(u \circ T)(x, y) \cdot (1, 0) \\
 &= Du(T(x, y))DT(x, y) \cdot (1, 0) \\
 &= Du(T(x, y)) \cdot T(1, 0) \\
 &= Du(T(x, y)) \cdot (\cos \theta, -\sin \theta) \\
 &= \cos \theta Du(T(x, y)) \cdot (1, 0) - \sin \theta Du(T(x, y)) \cdot (0, 1) \\
 &= \cos \theta \frac{\partial u}{\partial x}(T(x, y)) - \sin \theta \frac{\partial u}{\partial y}(T(x, y))
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Analogamente, obtemos:

$$\frac{\partial(u \circ T)}{\partial y}(x, y) = \sin \theta \frac{\partial u}{\partial x}(T(x, y)) + \cos \theta \frac{\partial u}{\partial y}(T(x, y)) \tag{2.6}$$

Calculando em (2.5) e (2.6) as derivadas em relação a x e y , respectivamente, temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2(u \circ T)}{\partial x^2}(x, y) &= \cos \theta D \left(\frac{\partial u}{\partial x} \circ T \right) (x, y) \cdot (1, 0) - \sin \theta D \left(\frac{\partial u}{\partial y} \circ T \right) (x, y) \cdot (1, 0) \\
 &= \cos \theta D \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) (T(x, y)) \cdot T(1, 0) - \sin \theta D \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) (T(x, y)) \cdot T(1, 0) \\
 &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(T(x, y)) - 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(T(x, y)) \\
 &\quad + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(T(x, y)).
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2(u \circ T)}{\partial y^2}(x, y) &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(T(x, y)) - 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(T(x, y)) \\
 &\quad + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(T(x, y))
 \end{aligned}$$

Nas duas expressões, utilizamos o Teorema de Schwarz para permutar as derivadas mistas, já que por hipótese a função u tem regularidade C^2 . Segue das equações acima que

$$\Delta u(T(x, y)) = \Delta(u \circ T)(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

como queríamos.

Pela observação acima, podemos dizer que o laplaciano comuta com as rotações do plano. Como generalizar esse resultado para dimensão n ? Mostramos a seguir que o laplaciano comuta, na verdade, com uma certa classe de transformações lineares, a qual inclui todas as rotações que já conhecemos do plano e do espaço.

Definição 2.2.1. Dizemos que uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é **ortogonal** se T for invertível e $T^{-1} = T^t$, isto é, $TT^t = T^tT = Id_{\mathbb{R}^n}$, onde T^t é a transformação transposta de T .

Observação 2.2.1. Observe que os elementos da matriz associada à transformação T são dados por $\langle Te_i, e_k \rangle$, com $i, k = 1, \dots, n$. Dizer que T é ortogonal significa que $\sum_{i=1}^n \langle Te_i, e_k \rangle \langle Te_i, e_j \rangle = \delta_{kj}$.

Note que, pela definição acima, a transformação T associada à matriz (2.4) é ortogonal, pois

$$[T][T]^t = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Enfim, podemos enunciar:

Proposição 2.2.2. Sejam $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ e $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação linear ortogonal. Então

$$\Delta u(T(x)) = \Delta(u \circ T)(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Por que estudar o laplaciano?

Prova. Derivando $u \circ T$ com relação a x_i , obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(u \circ T)}{\partial x_i}(x) &= D(u \circ T)(x)e_i \\
 &= Du(T(x))DT(x)e_i \\
 &= Du(T(x))Te_i \\
 &= Du(T(x)) \sum_{k=1}^n \langle Te_i, e_k \rangle e_k \\
 &= \sum_{k=1}^n \langle Te_i, e_k \rangle Du(T(x))e_k \\
 &= \sum_{k=1}^n \langle Te_i, e_k \rangle \frac{\partial u}{\partial x_k} \circ T(x).
 \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2(u \circ T)}{\partial x_i^2}(x) &= D \left(\frac{\partial(u \circ T)}{\partial x_i} \right) (x) \cdot e_i \\
 &= D \left(\sum_{k=1}^n \langle Te_i, e_k \rangle \frac{\partial u}{\partial x_k} \circ T \right) (x) \cdot e_i \\
 &= \sum_{k=1}^n \langle Te_i, e_k \rangle D \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right) (T(x)) Te_i \\
 &= \sum_{k=1}^n \langle Te_i, e_k \rangle D \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right) (T(x)) \sum_{j=1}^n \langle Te_i, e_j \rangle e_j \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \langle Te_i, e_k \rangle \langle Te_i, e_j \rangle D \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right) (T(x)) \cdot e_j \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \langle Te_i, e_k \rangle \langle Te_i, e_j \rangle \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} (T(x)),
 \end{aligned}$$

para cada $i = 1, 2, \dots, n$. Tomando o somatório em i dessas expressões, temos

$$\begin{aligned}
 \Delta(u \circ T)(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2(u \circ T)}{\partial x_i^2}(x) \\
 &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \langle T e_i, e_k \rangle \langle T e_i, e_j \rangle \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}(T(x)) \\
 &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \delta_{kj} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}(T(x)) \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}(T(x)) \\
 &= \Delta u(T(x)).
 \end{aligned}$$

■

Concluimos que o laplaciano comuta com translações e transformações ortogonais. Tal propriedade do laplaciano pode explicar porque ele surge em fenômenos que do ponto de vista físico são homogêneos (independentes da posição) e isotrópicos (independentes da direção), como a propagação de ondas e calor.

Definição 2.2.2. Chamamos de *operador diferencial (de ordem k)* uma expressão linear da forma $L = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \partial^\alpha$, que age em funções de classe C^k , onde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, com $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ e

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Cabe a seguinte pergunta: se um outro operador diferencial de segunda ordem (assim como Δ) comuta com translações e rotações, é possível relacioná-lo com o laplaciano? É disto que trata o resultado a seguir.

Proposição 2.2.3. *Seja L um operador diferencial de ordem 2, isto é,*

$$Lu = au + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} c_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j},$$

Por que estudar o laplaciano?

onde $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ e $a, b_i, c_{ij}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas, para cada $i, j = 1, \dots, n$. Suponha ainda que L comute com rotações e translações. Então existem constantes reais a e b tais que $Lu = au + c\Delta u$.

Observação 2.2.2. O fato de tomarmos um somatório crescente ($i \leq j$) acima decorre de (1.2), o qual nos garante $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$ quando $u \in C^2$.

Prova. O primeiro fato a se observar é que se L comuta com as translações, então as funções coeficientes que acompanham u e suas derivadas são constantes. De fato, para qualquer $h \in \mathbb{R}^n$ e $u \in C^2$, temos por hipótese que $Lu(x+h) = L(u \circ \tau_h)(x)$, em cada ponto $x \in \mathbb{R}^n$. Utilizando a expressão geral de L acima, obtemos a igualdade

$$\begin{aligned} Lu(x+h) - L(u \circ \tau_h)(x) &= [a(x+h) - a(x)]u(x+h) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n [b_i(x+h) - b_i(x)] \frac{\partial u}{\partial x_i}(x+h) \\ &\quad + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} [c_{ij}(x+h) - c_{ij}(x)] \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x+h) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Como (2.7) deve valer para toda escolha arbitrária de $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$, tome $u \equiv 1$. Claramente, os termos com derivadas desaparecem e nos resta

$$a(x+h) = a(x),$$

para todo $x, h \in \mathbb{R}^n$. Segue que a é constante. Logo

$$\begin{aligned} Lu(x+h) - L(u(x+h)) &= \sum_{i=1}^n [b_i(x+h) - b_i(x)] \frac{\partial u}{\partial x_i}(x+h) \\ &\quad + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} [c_{ij}(x+h) - c_{ij}(x)] \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x+h) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Tomemos agora $u(x_1, \dots, x_n) = x_k$, onde $k \in \{1, \dots, n\}$. Obviamente, as derivadas de ordem 2 são nulas em (2.8) e $\frac{\partial u}{\partial x_i} = \delta_{ik}$. Nos resta

$$b_k(x+h) = b_k(x),$$

Por que estudar o laplaciano?

para todo $x, h \in \mathbb{R}^n$ e $k \in \{1, \dots, n\}$. Segue que cada b_i é constante. Portanto, resta-nos apenas a equação

$$Lu(x+h) - L(u(x+h)) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} [c_{ij}(x+h) - c_{ij}(x)] \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x+h) = 0.$$

Escolhemos, por fim, $u(x_1, \dots, x_n) = x_k x_l$, com $k, l \in \{1, \dots, n\}$, $k \leq l$. Então

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} [c_{ij}(x+h) - c_{ij}(x)] \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x+h) = \frac{2}{2 - \delta_{kl}} [c_{kl}(x+h) - c_{kl}(x)] = 0,$$

o que implica

$$c_{kl}(x+h) = c_{kl}(x),$$

para todo $x, h \in \mathbb{R}^n$ e $k, l \in \{1, \dots, n\}$. Segue que as funções c_{kl} são constantes, como queríamos demonstrar.

Por hipótese, L comuta com as transformações ortogonais, isto é, $Lu(T(x)) = L(u \circ T)(x)$, para todo $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ e T rotação. Defina, para cada $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$,

$$p_{lk}^{ij} := (1 - \delta_{kl}) \langle Te_i, e_l \rangle \langle Te_j, e_k \rangle + \langle Te_i, e_k \rangle \langle Te_j, e_l \rangle.$$

Logo, vale a igualdade

$$\begin{aligned} Lu(T(x)) - L(u \circ T)(x) &= \sum_{i=1}^n b_i \left[\frac{\partial u}{\partial x_i}(T(x)) - \sum_{k=1}^n \langle Te_i, e_k \rangle \frac{\partial u}{\partial x_k}(T(x)) \right] \\ &+ \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} c_{ij} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(T(x)) - \sum_{1 \leq l \leq k \leq n} p_{lk}^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_k}(T(x)) \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Façamos o mesmo procedimento anterior, escolhendo funções u adequadas. Tomando $u = x_s$, para $s \in \{1, \dots, n\}$, as derivadas de segunda ordem são todas nulas e nos resta

$$\sum_{i=1}^n b_i \left[\delta_{is} - \sum_{k=1}^n \langle Te_i, e_k \rangle \delta_{ks} \right] = 0 \implies \sum_{i=1}^n b_i [\delta_{is} - \langle Te_i, e_s \rangle] = 0. \quad (2.9)$$

Simplificando a equação, obtemos

$$b_s(1 - \langle Te_s, e_s \rangle) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^n b_i \langle Te_i, e_s \rangle.$$

Observe que (2.9) vale para toda rotação T . Escolhendo $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $Te_s = -e_s$ e $Te_i = e_i$, para $i \neq s$, concluímos facilmente que T é ortogonal e $\langle Te_i, e_s \rangle = 0$ na soma acima (já que $i \neq s$). Segue que $b_s = 0$, para todo $s = 1, \dots, n$, o que significa o nosso operador L não possui derivadas de primeira ordem.

Nosso objetivo agora é mostrar que os coeficientes das derivadas mista de segunda ordem são nulos, e os das homogêneas são idênticos, terminando a prova. Pelo que acabamos de mostrar, nos resta a expressão

$$\begin{aligned} Lu(T(x)) - L(u \circ T)(x) &= \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} c_{ij} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(T(x)) - \sum_{1 \leq l \leq k \leq n} p_{lk}^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_k}(T(x)) \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Primeiramente, tomamos $u(x) = x_r x_s$, com $1 \leq r \leq s \leq n$. Isto simplifica a equação acima para

$$c_{rs} - \sum_{1 \leq i \leq j \leq 1} c_{ij} p_{rs}^{ij} = 0.$$

Reorganizando os termos, a expressão toma a forma

$$c_{rs}(1 - p_{rs}^{rs}) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq j \leq n \\ (i,j) \neq (r,s)}} c_{ij} p_{rs}^{ij},$$

isto é,

$$\begin{aligned} c_{rs} [1 - \langle Te_r, e_s \rangle \langle Te_s, e_r \rangle - \langle Te_r, e_r \rangle \langle Te_s, e_s \rangle] &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq j \leq n \\ (i,j) \neq (r,s)}} c_{ij} \langle Te_i, e_s \rangle \langle Te_j, e_r \rangle \\ &+ \sum_{\substack{1 \leq i \leq j \leq n \\ (i,j) \neq (r,s)}} c_{ij} \langle Te_i, e_r \rangle \langle Te_j, e_s \rangle \end{aligned}$$

Por que estudar o laplaciano?

válida para toda transformação T ortogonal. No caso em que $r < s$, tome T de modo que $Te_r = -e_r$ e $Te_i = e_i$ para $i \neq r$. Assim, obtém-se

$$2c_{rs} = 0,$$

de modo que c_{rs} é nulo para quaisquer r e s distintos. Quando $r = s$, basta escolher T de modo que $Te_r = Te_{r+1}$, $Te_{r+1} = Te_r$ (quando $r = n$, tome $Te_n = Te_{n-1}$ e $Te_{n-1} = e_n$) e $Te_i = e_i$ se $i \neq r, r + 1$. Com esses dados, (??) resulta em

$$c_{rr} = c_{(r+1)(r+1)},$$

para cada $r \in \{1, \dots, n-1\}$. Isto implica que

$$c_{11} = c_{22} = \dots = c_{nn}$$

Chamando de c todas essas constantes, o nosso operador L pode ser escrito, como queríamos, na forma

$$Lu = au + c\Delta u.$$

■

2.3 Interpretação Geométrica do laplaciano

No Capítulo 1 deste trabalho, definimos o laplaciano como um operador diferencial dado pelo traço da matriz hessiana, de modo que sua expressão era dada em coordenadas. No entanto, tal definição não nos dá de cara algum significado geométrico para Δ , e é o objetivo deste capítulo realizar essa tarefa.

Segundo [6], “[...] a person is called a ‘nonconformist’ if he/she differs from the average of the people immediately surrounding her/him - by analogy, we say the Laplacian measures the ‘nonconformity’ of a function at a point”. Mas o que significa isso?

A interpretação geométrica que queremos demonstrar decorre de uma propriedade da “média” que o laplaciano possui: o número $\Delta u(x_0)$ mede o quanto o valor $u(x_0)$ de uma função em um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ “se afasta” da média $\frac{1}{|S_r|} \int_{S_r(x_0)} u(x) d\sigma(x)$ dos valores em pontos ao redor de x_0 .

Teorema 2.3.1. *Sejam $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $u : B_R(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Então*

$$\Delta u(x_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2n}{r^2} \left[\frac{1}{|S_r|} \int_{S_r(x_0)} u(x) d\sigma(x) - u(x_0) \right]. \quad (2.10)$$

Prova. Primeiro, note que

$$\begin{aligned} \frac{1}{|S_r|} \int_{S_r(x_0)} u(x) d\sigma(x) - u(x_0) &= \frac{1}{|S_r|} \int_{S_r(x_0)} u(x) d\sigma(x) - \frac{u(x_0)}{|S_r|} \int_{S_r(x_0)} d\sigma(x) \\ &= \frac{1}{|S_r|} \int_{S_r(x_0)} [u(x) - u(x_0)] d\sigma(x). \end{aligned}$$

Considere $\tilde{u} : B_R(0) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\tilde{u}(x) = u(x + x_0)$. Como \tilde{u} tem classe C^2 , pela Fórmula de Taylor, dada em [\(1.3\)](#), escrevendo $x = (x_1, \dots, x_n)$, segue que

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}(0) x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_i \partial x_j}(0) x_i x_j + \rho(x),$$

onde $\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\rho(x)}{\|x\|^2} = 0$. Integrando ambos os lados da equação sobre $S_r(0)$, $r < R$, temos que $\int_{S_r(0)} x_i d\sigma(x) = 0$, $\int_{S_r(0)} x_i x_j d\sigma(x) = 0$, para $i \neq j$, e $\int_{S_r(0)} x_i^2 d\sigma(x) = \int_{S_r(0)} x_j^2 d\sigma(x)$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{S_r(0)} [\tilde{u}(x) - \tilde{u}(0)] d\sigma(x) &= \frac{1}{2n} \Delta \tilde{u}(0) \int_{S_r(0)} \overbrace{(x_1^2 + \dots + x_n^2)}^{r^2} d\sigma(x) \\ &\quad + \int_{S_r(0)} \rho(x) d\sigma(x) \end{aligned}$$

Reorganizando os termos, obtém-se

$$\frac{2n}{r^2} \frac{1}{|S_r|} \int_{S_r(0)} [\tilde{u}(x) - \tilde{u}(0)] d\sigma(x) = \Delta \tilde{u}(0) + \frac{2n}{r^2 |S_r|} \int_{S_r(0)} \rho(x) d\sigma(x). \quad (2.11)$$

Resta mostrar que a última integral acima tende a zero quando $r \rightarrow 0$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta < 0$ tal que $|\rho(x)| < (\varepsilon/4n)\|x\|^2$, sempre que $\|x\| < \delta$. Então,

Por que estudar o laplaciano?

sempre que $r < \delta$,

$$\left| \frac{2n}{|S_r|} \int_{S_r(0)} \frac{\rho(x)}{r^2} d\sigma(x) \right| \leq \frac{2n}{|S_r|} \int_{S_r(x_0)} \frac{\varepsilon}{4n} d\sigma(x) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Segue, tomando o limite em (2.11), que

$$\Delta \tilde{u}(0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2n}{r^2} \left[\frac{1}{|S_r|} \int_{S_r(0)} \tilde{u}(x) d\sigma(x) - \tilde{u}(0) \right].$$

Como o laplaciano comuta com translações, $\Delta \tilde{u}(0) = \Delta(u \circ \tau_{x_0})(0) = \Delta u(x_0)$. Assim,

$$\Delta u(x_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2n}{r^2} \left[\frac{1}{|S_r|} \int_{S_r(x_0)} u(x) d\sigma(x) - u(x_0) \right].$$

■

CAPÍTULO 3

O PROBLEMA DO AUTOVALOR

3.1 Os Autovalores do laplaciano

Em busca de motivar o problema de autovalor para o laplaciano, apresentamos uma ideia para se encontrar a solução da *Equação da Onda* mostrada na subseção

2.1.4:

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado e considere o problema:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u & \text{se } x \in \Omega \text{ e } t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) & \text{se } x \in \bar{\Omega}, \\ u_t(x, 0) = g(x) & \text{se } x \in \bar{\Omega}, \\ u(x, t) = 0 & \text{se } x \in \partial\Omega \text{ e } t \geq 0, \end{cases}$$

onde $c \in \mathbb{R}$, $f \in C^2(\bar{\Omega})$ e $g \in C^1(\bar{\Omega})$. Podemos tentar inocentemente explorar esse problema pelo *método de separação de variáveis*: supomos que a solução do problema pode ser escrita na forma

$$u(x, t) = \alpha(t)\phi(x), \quad x \in \bar{\Omega} \text{ e } t \geq 0,$$

e substituimos esta expressão na equação e obtemos

$$\alpha''(t)\phi(x) = c^2\alpha(t)\Delta\phi(x) \implies \frac{\Delta\phi(x)}{\phi(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{\alpha''(t)}{\alpha(t)} = -\lambda,$$

onde a última igualdade segue do fato de que cada um dos quocientes deve ser independente de x e t , e portanto igual a uma constante λ a ser determinada. Pela condição de fronteira, devemos ter $\alpha(t)\phi(x) = 0$, para todo $x \in \partial\Omega$ e $t \geq 0$. Supondo que nossa solução não é a trivial, vale que $\phi|_{\partial\Omega} = 0$. Isso nos leva a resolver um novo problema dado por

$$\begin{cases} -\Delta\phi = \lambda\phi & \text{se } x \in \Omega \\ \phi = 0 & \text{se } x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

ou seja, λ é um autovalor do laplaciano em Ω .

Portanto, o **problema do autovalor para o laplaciano** consiste em encontrar os valores λ tais

$$-\Delta u = \lambda u \text{ em } \Omega \tag{3.1}$$

admite soluções não triviais. A equação (3.1) também é conhecida como *equação de Helmholtz*. É claro que se estivermos interessados na *Equação de Laplace*, devemos resolver (3.1) com $\lambda = 0$.

Dado um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$, existem duas condições de fronteira tradicionais que podemos impor no problema do autovalor, são elas:

1. **Condição de Dirichlet:** $u|_{\partial\Omega} = 0$.
2. **Condição de Neumann:** $\partial_\nu u|_{\partial\Omega} = 0$, onde ν é o vetor normal que aponta para fora de $\partial\Omega$.

Por exemplo, como vimos na subseção 2.1.4, estando o aro do tambor fixo, devemos impor uma condição de Dirichlet. A utilização de cada uma dessas condições depende, obviamente, do problema em questão.

3.1.1 Propriedades dos Autovalores

Nas próximas seções, quando explorarmos domínios familiares do plano, observaremos que os autovalores do laplaciano formam um conjunto **enumerável**. A demonstração desse fato em geral requer ferramentas mais elaboradas, como minimização de funcionais em Espaços de Sobolev, e por essa razão não a apresentamos aqui. Para mais detalhes, vide [7], Teorema 1.14.

Por outro lado, é possível mostrar que Δ não possui autovalores de Dirichlet negativos. Para isso, precisaremos do Princípio do Máximo Fraco, que enunciaremos e demonstramos a seguir:

Teorema 3.1.1 (Princípio do Máximo Fraco). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.*

Se $\Delta u \geq 0$, então

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u;$$

se $\Delta u \leq 0$, então

$$\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

Em particular, se $\Delta u = 0$, u atinge o máximo e mínimo na fronteira de Ω .

Prova. Escreva

$$M = \max_{\bar{\Omega}} u \quad \text{e} \quad m = \min_{\bar{\Omega}} u$$

Obviamente, temos $m \leq M$. Suponha por contradição que $m < M$. Logo, existe $x_0 \in \Omega - \partial\Omega$ tal que $u(x_0) = M$. Defina a função

$$v(x) = u(x) + \frac{M - m}{4d^2} |x - x_0|^2,$$

onde $d = \text{diam } \Omega$. Se $x \in \partial\Omega$, temos

$$v(x) \leq m + \frac{M - m}{4d^2} d^2 = \frac{3}{4}m + \frac{M}{4} < M.$$

Mas como $v(x_0) = u(x_0) = M$, concluímos que v atinge seu máximo também num ponto de $\Omega - \partial\Omega$, digamos x_1 . Logo

$$\Delta v(x_1) \leq 0.$$

Por outro lado, para todo x vale que

$$\Delta v(x) = \Delta u(x) + \frac{M - m}{2d^2} \geq \frac{M - m}{2d^2} > 0,$$

uma contradição. Segue que u atinge o seu máximo na fronteira de Ω .

No caso em que $\Delta u \leq 0$, basta aplicar o resultado agora mostrado para a função $-u$, já que $\Delta(-u) \geq 0$ e $\min u = -\max(-u)$. Assim,

$$\min_{\bar{\Omega}} u = -\max_{\bar{\Omega}}(-u) = -\max_{\partial\Omega}(-u) = \min_{\partial\Omega} u,$$

como afirmamos. ■

Definição 3.1.1. Dada $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definimos sua parte positiva e parte negativa, respectivamente, por

$$u^+ = \max(u, 0),$$

$$u^- = \min(u, 0).$$

Corolário 3.1.1.1. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado, $\lambda \leq 0$ um número real e $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$.

Se $-\Delta u - \lambda u \leq 0$, então

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+;$$

Se $-\Delta u - \lambda u \geq 0$, então

$$\min_{\bar{\Omega}} u \geq \min_{\partial\Omega} u^-.$$

Em particular, se $-\Delta u = \lambda u$ em Ω , então

$$\max_{\bar{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|$$

de modo que se o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{se } x \in \Omega \\ u = 0 & \text{se } x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

possuir solução em $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, então a solução é a trivial. Consequentemente, o problema de Dirichlet para o laplaciano não possui autovalores negativos ou nulos.

Prova. Consideremos o caso em que $-\Delta u - \lambda u \leq 0$. Se $u \leq 0$ em Ω , o corolário vale trivialmente, pois $\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+ = 0$. Portanto, podemos supor que u é positivo em pelo menos um ponto, isto é, o conjunto $\Omega^+ = \{x \in \Omega : u(x) > 0\} \neq \emptyset$. Como $\lambda u \leq 0$ em Ω^+ , temos por hipótese que $\Delta u \geq -\lambda u \geq 0$ em Ω^+ . Pelo Princípio do Máximo Fraco,

$$\max_{\bar{\Omega}^+} u = \max_{\partial\Omega^+} u.$$

Mas nos pontos de $\partial\Omega^+ \cap \Omega$, claramente $u = 0$, e nos pontos de $\partial\Omega^+ \cap \partial\Omega$, tem-se $u = u^+$. Então

$$\max_{\partial\Omega^+} u \leq \max_{\partial\Omega^+ \cap \partial\Omega} u^+ \leq \max_{\partial\Omega} u^+.$$

Se $-\Delta u - \lambda u \geq 0$, então $-\Delta(-u) - \lambda(-u) \leq 0$, de modo que podemos aplicar o resultado demonstrado acima para a função $-u$, usando a mesma relação $\min u = -\max(-u)$. ■

3.1.2 Entendendo os Autovalores de Δ

No início desta seção, demos uma boa razão para estudarmos os autovalores λ_k de Δ , assim como suas autofunções ϕ_k associadas. No entanto, dado um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, encontrar os seus autovalores não é uma tarefa fácil, e computá-los explicitamente pode ser feito apenas para escolhas específicas de Ω , como retângulos, discos, elipses e alguns tipos de triângulos. Na verdade, mesmo para o hexágono, o primeiro autovalor ainda não é conhecido!

Entretanto, conhecer a fórmula fechada de um autovalor de Δ não é a única forma de conhecê-lo de fato. É possível obter informações qualitativas sobre ele, mesmo sem conseguirmos encontrá-lo de forma explícita.

O problema pode ser posto da seguinte forma: tendo informações sobre Ω , o que podemos dizer sobre os autovalores de Δ ? Muitas respostas para essa pergunta foram feitas ao longo do tempo. Enunciamos duas de destaque:

1. **Conjectura de Rayleigh e a Desigualdade de Faber-Krahn.** O primeiro autovalor λ_1 do laplaciano em um intervalo ou região do plano é chamado de *tom fundamental*. Isto porque quando músicos tocam a corda de um violão ou batem em um tambor, há um tom que “lidera” o som feito por esses instrumentos. Do ponto de vista matemático, olhando para as soluções da *Equação do Calor*, por exemplo, dadas por $u(x, y, t) = \sum_n a_n e^{-\lambda_n t} \phi_n(x, y)$, fica claro que o par (λ_1, ϕ_1) nos dá a informação dominante sobre o comportamento de u quando o tempo passa, já que o termo $e^{-\lambda_1 t} \phi_1(x, y)$ é a parcela da soma que decai mais devagar se $t \rightarrow \infty$. No fim do século XIX, o físico e matemático inglês John William Strutt, conhecido como 3^o Barão de Rayleigh, conjecturou que se considerarmos um domínio Ω e uma bola B de mesmo volume, deve-se ter $\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1(B)$ (a igualdade ocorrendo somente quando Ω for uma bola), isto é, nos termos acima, quanto maior fosse o perímetro de $\partial\Omega$, mais rápido o calor deveria se dissipar. A **Conjectura de Rayleigh**, como ficou conhecida, foi resolvida pelos matemáticos Faber e Krahn em 1923, e, como desejado, se estende para qualquer dimensão n .
2. **Conjectura de Lorentz.** Apesar de seu enunciado ser puramente físico, a Conjectura de Lorentz pode ser enunciada matematicamente da seguinte forma: considere um domínio conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e sejam $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$ os autovalores correspondentes ao problema

$$\Delta\phi_k = \lambda_k\phi_k,$$

em Ω . Então

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{N(\lambda_j)}{\lambda_j} = \frac{\text{area}(\Omega)}{2\pi}, \quad (3.2)$$

onde $N(\lambda_j) = \text{card}\{\lambda_k | \lambda_k < \lambda_j\}$. Esta conjectura foi demonstrada, ainda de forma mais geral, pelo alemão Herman Weyl, em 1911.

O objetivo das próximas três seções é encontrar autovalores e autofunções do laplaciano para intervalos da reta real e domínios específicos do plano euclidiano.

3.2 Intervalo

Seja $[0, l] \subset \mathbb{R}$. Nesse caso, note que $\Delta u = u''$, a segunda derivada de $u : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$. O nosso problema toma então a forma:

$$-u'' = \lambda u, \text{ em } [0, l],$$

uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem, cuja solução geral tem a forma

$$u(t) = A \sin(\sqrt{\lambda}t) + B \cos(\sqrt{\lambda}t), \quad (3.3)$$

onde A e B são constantes reais arbitrárias. Impondo as condições de fronteira de Dirichlet e Neumann, concluímos que:

- No caso da condição de Dirichlet, substituindo $u(0) = u(l) = 0$ em (3.3), obtemos de forma direta que $B = 0$ e que

$$u(l) = A \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0.$$

Como procuramos soluções não-triviais, podemos supor que $A = 1$. Note, daí, que a expressão $\sin(\sqrt{\lambda}l)$ se anula quando

$$\sqrt{\lambda}l = n\pi, \text{ para algum } n \in \mathbb{Z} - \{0\}.$$

Portanto, as autofunções para o problema

$$\begin{cases} u'' = -\lambda u & \text{se } t \in (0, l) \\ u(0) = u(l) = 0 \end{cases}$$

são dadas, para cada $n \in \mathbb{N}$, por

$$u_n(t) = \text{sen} \left(\frac{n\pi}{l} t \right),$$

cujos autovalores associados são

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}.$$

- o caso da condição Neumann é análogo: derivamos uma vez a expressão (3.3), de modo a obter

$$u'(t) = A\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}t) - B\sqrt{\lambda} \text{sen}(\sqrt{\lambda}t).$$

Agora impomos $u'(0) = u'(l) = 0$ na equação acima e conseguimos

$$A\sqrt{\lambda} = 0 \implies A = 0$$

e daí

$$B\sqrt{\lambda} \text{sen}(\sqrt{\lambda}l) = 0.$$

Mais uma vez, como procuramos soluções não-triviais, podemos supor $B = -1$ e a expressão $\text{sen}(\sqrt{\lambda}l)$ se anula quando

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l}.$$

Portanto, as autofunções para o problema

$$\begin{cases} u'' = -\lambda u & \text{se } t \in (0, l) \\ u'(0) = u'(l) = 0 \end{cases}$$

são dadas, para cada $n \in \mathbb{N}$, por

$$u_n(t) = \cos \left(\frac{n\pi}{l} t \right),$$

cujos autovalores associados são

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}.$$

Nesse caso, podemos até verificar a Lei de Weyl, como ficou conhecida a Conjectura de Lorentz, dada por (3.2).

Proposição 3.2.1 (Lei de Weyl para Intervalos). *Seja λ um autovalor de Dirichlet para o laplaciano em $\Omega = [0, l]$. Então*

$$N(\lambda) \sim \frac{l}{\pi}\sqrt{\lambda}.$$

Prova. Observemos primeiro que

$$\begin{aligned} N(\lambda) = \text{card} \{ \lambda_k | \lambda_k \leq \lambda \} &= \max \left\{ k : \frac{k^2\pi^2}{l^2} \leq \lambda \right\} \\ &= \max \left\{ k : k \leq \frac{l}{\pi}\sqrt{\lambda} \right\} \\ &= \left\lfloor \frac{l}{\pi}\sqrt{\lambda} \right\rfloor \end{aligned}$$

Logo, tomando o limite $\lambda \rightarrow \infty$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\left\lfloor \frac{l}{\pi}\sqrt{\lambda} \right\rfloor}{\sqrt{\lambda}} = \frac{l}{\pi},$$

como queríamos demonstrar. ■

3.3 Retângulo

Considere agora $\Omega = [0, l] \times [0, m]$. Suponhamos que a solução tenha variáveis separadas, ou seja, procuremos por soluções da forma $u(x, y) = f(x)g(y)$ para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{se } (x, y) \in (0, l) \times (0, m) \\ u = 0 & \text{se } (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

Repetindo o mesmo processo da seção anterior e impondo a condição [1](#), concluímos que as autofunções são dadas por

$$u_{jk}(x, y) = \operatorname{sen} \left(\frac{j\pi}{l} x \right) \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi}{m} y \right),$$

para $j, k \geq 1$, e os respectivos autovalores

$$\lambda_{jk} = \left(\frac{j\pi}{l} \right)^2 + \left(\frac{k\pi}{m} \right)^2.$$

3.4 Disco

Para termos uma ideia de como são os autovalores do laplaciano no disco $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$, além de utilizarmos variáveis separadas, introduziremos o conveniente sistema de coordenadas polares. Para $r > 0$ e $\theta \in [0, 2\pi)$, escrevemos $x = r \cos \theta$ e $y = r \operatorname{sen} \theta$. A expressão do laplaciano da solução u nesse sistema é obtida a partir das seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \operatorname{sen} \theta \right) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos^2 \theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \operatorname{sen}^2 \theta + 2 \operatorname{sen}(2\theta) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \operatorname{sen}^2 \theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cos^2 \theta - 2 \operatorname{sen}(2\theta) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}, \end{aligned}$$

as quais são verificáveis utilizando a Regra da Cadeia e o Teorema de Schwarz. Note que somando as três expressões, tem-se

$$\Delta u(r, \theta) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Delta u(x, y). \quad (3.4)$$

De posse disso, procuramos soluções na forma $u(r, \theta) = R(r)\phi(\theta)$ para o problema do autovalor. Supondo que $-\Delta u = \lambda u$ e usando o laplaciano dado por [\(3.4\)](#), temos

$$- \left(R''(r)\phi(\theta) + \frac{1}{r} R'(r)\phi(\theta) + \frac{1}{r^2} R(r)\phi''(\theta) \right) = \lambda R(r)\phi(\theta) \quad (3.5)$$

e daí, manipulando formalmente,

$$-\frac{\phi''(\theta)}{\phi(\theta)} = \frac{r^2}{R(r)} \left(\lambda + R''(r) + \frac{R'(r)}{r} \right).$$

Assim, os lados esquerdo e direito da equação acima são independentes de r e θ , respectivamente, de modo que existe n^2 positivo tal que $-\phi''(\theta) = n^2\phi(\theta)$. Nesse caso, como já vimos, ϕ tem a forma geral $\phi(\theta) = A \operatorname{sen}(n\theta) + B \operatorname{cos}(n\theta)$. Estando no sistema de coordenadas polares, é natural procurar por funções 2π -periódicas, que em particular coincidem em 0 e $\pm 2\pi$, o que nos leva a $\operatorname{cos}(n0) = 1 = \operatorname{cos}(2n\pi)$, igualdade que vale apenas quando n é um número inteiro.

Usando essas observações em (3.5), obtemos

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + \left(\lambda - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0. \quad (3.6)$$

Fazendo a substituição $x = \sqrt{\lambda}r$ e $J(x) = R\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$, transformamos (3.6) em

$$x^2 J''(x) + xJ'(x) + (x^2 - n^2)J(x) = 0, \quad (3.7)$$

a bem conhecida *Equação de Bessel*. A solução de (3.7) em série de potências (vide [10]) é chamada de *n -ésima função de Bessel* e é dada por

$$J_n(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(n+l)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2l}.$$

Como $R(r) = J_n(\sqrt{\lambda}r)$, temos que

$$u_n^\lambda(r, \theta) = \phi_n(\theta) J_n(\sqrt{\lambda}r)$$

são as autofunções de Δ , onde $\phi_n(\theta) = a_n \operatorname{cos}(n\theta) + b_n \operatorname{sen}(n\theta)$. Impondo as condições de fronteira:

- Na condição de Dirichlet, impomos $u_n^\lambda(1, \theta) = 0$, para todo $\theta \in [0, 2\pi]$. Isso implica que $J_n(\sqrt{\lambda}) = 0$ e logo λ deve ser o quadrado de um zero da n -ésima função de Bessel.

- Já na condição de Neumann, exigimos que $\partial_r u_n^\lambda(1, \theta) = 0$, para todo $\theta \in [0, 2\pi]$. Isso implica que $J_n'(\sqrt{\lambda}) = 0$ e logo λ deve ser o quadrado de um zero da derivada da n -ésima função de Bessel.

3.5 Isometrias e o Problema Isospectral

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado. Se o problema do autovalor (sob alguma condição de fronteira) possui soluções em Ω , chamamos de **espectro** de Ω essa sequência de autovalores. Dado um outro aberto $\tilde{\Omega}$ em \mathbb{R}^n , dizemos que Ω e $\tilde{\Omega}$ são *isospectrais* se possuem o mesmo espectro (contando multiplicidades).

Mostraremos que se existe uma isometria $h : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$, isto é, se Ω e $\tilde{\Omega}$ são isométricos, então estes abertos são isospectrais. Isto decorre de dois fatos, dos quais um já foi provado no Capítulo 2: o laplaciano comuta com rotações e translações. O outro mostraremos agora.

Definição 3.5.1. *Uma isometria em \mathbb{R}^n é uma função $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que preserva a distância entre pontos, isto é,*

$$\|h(x) - h(y)\| = \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

onde $\|\cdot\|$ indica a norma euclidiana.

Exemplo 3.5.1. *Dado $a \in \mathbb{R}^n$, tem-se que a translação τ_a é uma isometria.*

Usando translações, podemos reduzir o estudo de isometrias à classe das isometrias que fixam 0.

Teorema 3.5.1. *Toda isometria em \mathbb{R}^n pode ser escrita de forma única como uma composição $\tau_a \circ k$, onde τ_a é uma translação (por a) e k é uma isometria que fixa a origem.*

Prova. Seja $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma isometria. Se $h = \tau_a \circ k$, como acima, então $h(x) = \tau_a(k(x)) = k(x) + a$. Logo $h(0) = a$ e $k(x) = h(x) - h(0)$. Portanto, se for possível escrever h na forma desejada, essa escrita é única. Mas obviamente $\tau_{h(0)}$ e $k(x) = h(x) - h(0)$ são tais que $\tau_{h(0)}(k(x)) = [h(x) - h(0)] + h(0) = h(x)$. ■

Teorema 3.5.2. *Seja $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função. São equivalentes:*

(i) h é uma isometria que fixa a origem;

(ii) $\langle h(x), h(y) \rangle = \langle x, y \rangle$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Prova. (i) \implies (ii). Como, para qualquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, tem-se $\|h(x) - h(y)\| = \|x - y\|$, em particular

$$\|h(x) - h(y)\|^2 = \langle h(x) - h(y), h(x) - h(y) \rangle = \langle x - y, x - y \rangle = \|x - y\|^2.$$

Distribuindo os membros do produto interno acima, obtemos

$$\|h(x)\|^2 + \|h(y)\|^2 - 2\langle h(x), h(y) \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle,$$

o que implica $\langle h(x), h(y) \rangle = \langle x, y \rangle$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(ii) \implies (i). Assumindo que h preserva o produto interno:

$$\begin{aligned} \|h(x) - h(y)\|^2 &= \langle h(x) - h(y), h(x) - h(y) \rangle \\ &= \|h(x)\|^2 + \|h(y)\|^2 - 2\langle h(x), h(y) \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle \\ &= \langle x - y, x - y \rangle \\ &= \|x - y\|^2. \end{aligned}$$

Segue que h é uma isometria que fixa a origem (pois preserva a norma). ■

Corolário 3.5.2.1. *A única isometria que fixa a origem e a base canônica é a identidade.*

Exemplo 3.5.2. *As transformações ortogonais são isometrias. De fato, seja T ortogonal. Então*

$$\langle Tx, Ty \rangle = \langle T^t Tx, y \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Como toda transformação linear fixa a origem, por 3.5.2, T é uma isometria. Denotaremos o conjunto das isometrias ortogonais por $O_n(\mathbb{R})$.

Teorema 3.5.3. *Toda isometria $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que fixa a origem é da forma $h(x) = Tx$, onde $T \in O_n(\mathbb{R})$.*

Prova. Sabemos que h preserva o produto interno. Então, para $i \neq j$,

$$\langle h(e_i), h(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = 0.$$

Defina a matriz T cujas colunas são dadas por $h(e_i)$. Como esses vetores são ortogonais, T é ortogonal e portanto, invertível. Além disso, por definição, $Te_i = h(e_i)$. Segue que a isometria $T^{-1} \circ h$ fixa a origem e a base canônica. Pelo Corolário 3.5.2.1, $T = h$, como queríamos. ■

Segue que todas as isometrias em \mathbb{R}^n são da forma $Tx + a$, onde $T \in O_n(\mathbb{R})$ e $a \in \mathbb{R}^n$. Como o operador laplaciano comuta com translações e rotações (transformações ortogonais), segue que também comutará com qualquer isometria.

Assim, considerando $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ abertos limitados, e denotando por Λ_Ω e $\Lambda_{\tilde{\Omega}}$ os seus respectivos espectros, se houver uma isometria $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $h(\Omega) = \tilde{\Omega}$, é fácil mostrar que $\Lambda_\Omega = \Lambda_{\tilde{\Omega}}$. O único problema é que *a priori* não sabemos se h pode ser escrita na forma $Tx + a$, já que o domínio de h não é todo o \mathbb{R}^n . Entretanto, é possível mostrar que h pode ser estendida para uma outra isometria H , esta sim definida em \mathbb{R}^n . Pelos resultados dessa seção, H possui a forma desejada, e conseqüentemente h .

Supondo que de fato podemos estender h , tome $\lambda \in \Lambda_{\tilde{\Omega}}$. Então existe uma solução clássica \tilde{u} para o problema do autovalor em $\tilde{\Omega}$ (digamos com as condições de Dirichlet), tal que $-\Delta \tilde{u}(\tilde{x}) = \lambda \tilde{u}(\tilde{x})$, para todo $\tilde{x} \in \tilde{\Omega}$. Então $u := \tilde{u} \circ h$ é solução

clássica para o problema de autovalor em Ω , pois h é de classe C^∞ e para todo $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= -\Delta(\tilde{u} \circ h)(x) = -\Delta\tilde{u}(h(x)) &= \lambda\tilde{u}(h(x)) \\ & &= \lambda(\tilde{u} \circ h)(x) \\ & &= \lambda u(x). \end{aligned}$$

Concluimos que $\Lambda_{\tilde{\Omega}} \subset \Lambda_\Omega$. A outra inclusão é análoga, pois H é invertível e sua inversa é uma isometria tal que $H^{-1}(\tilde{\Omega}) = \Omega$, e repetimos o processo. Por fim:

Proposição 3.5.1. *Seja $S \subset H$ subconjunto de um espaço de Hilbert. Então uma isometria $i : S \rightarrow H$ pode ser estendida para uma isometria $I : H \rightarrow H$ se, e só se, H possui dimensão finita.*

Prova. Vide Teorema 11.4 em [11]. ■

Uma questão natural é a seguinte: dois abertos isospectrais são necessariamente isométricos? Para domínios planos, como os polígonos, a questão foi posta de forma mais descontraída por Bers e Kac [12] em 1966: “é possível ouvir o formato de um tambor?”. Isto porque em domínios planos os autovalores podem ser vistos como frequências de vibração produzidas por uma membrana. De qualquer forma, a resposta para essa pergunta é “não”. No caso de variedades riemannianas, Milnor [13] já havia contruído em 1964 um par de variedades isospectrais não-isométricas em dimensão 16 e Vignéras [14] em 1980 conseguiu exibi-las em qualquer dimensão $n \geq 2$. Porém, a questão de Kac para domínios planos só foi respondida em 1992, por Gordon, Webb e Wolpert [15], que usaram técnicas de grupo fundamental e espaços de recobrimento para construir o tal par de domínios planos.

Mesmo que o espectro não seja capaz de caracterizar totalmente a geometria de um domínio, é possível deduzir informações geométricas a partir dos autovalores. Em 1911, Weyl mostrou que a área de um domínio plano é completamente

O Problema do Autovalor

determinada por seu espectro, ou seja, domínios com diferentes áreas nunca podem ter o mesmo espectro. Na verdade, Kac demonstrou que o espectro determina o perímetro e o número de componentes conexas de um domínio plano (veja [12]).

CAPÍTULO 4

FUNÇÕES HARMÔNICAS

Reservamos este capítulo do trabalho para mostrar propriedades básicas acerca das *funções harmônicas*, as quais surgem com muita frequência em problemas estacionários que dão origem à Teoria do Potencial. Vamos ver como a informação $\Delta u = 0$ pode nos fornecer dados sobre a função u .

Definição 4.0.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Uma função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 é dita harmônica quando $\Delta u = 0$ em Ω .*

Observação 4.0.1. *Veremos a seguir que a hipótese $u \in C^2$ pode ser retirada.*

Nas seções seguintes usaremos fortemente resultados de integração em superfícies que são fronteiras de domínios do \mathbb{R}^n , resultados esses apresentados no Capítulo 1.

4.1 Princípio do Máximo Forte e o Teorema do Valor Médio

Derivaremos as propriedades básicas das funções harmônicas a partir destes dois resultados clássicos. Apesar de mais gerais, (no sentido de que consideraremos $\Delta u \leq 0$ e $\Delta u \geq 0$), sua demonstração é análoga ao caso $\Delta u = 0$, e portanto seria um desperdício negar a este trabalho essa pequena generalidade.

Proposição 4.1.1 (Desigualdade do Valor Médio). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $u \in C^2(\Omega)$. Se $\Delta u \leq 0$ em Ω , então para cada bola $B_R(x)$ de centro $x \in \Omega$ e raio $R > 0$, com $B_R(x) \subset\subset \Omega$, vale a desigualdade*

$$u(x) \geq \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R(x)} u = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(x)} u,$$

onde ω_n é o volume da bola unitária em \mathbb{R}^n .

Quando $\Delta u \geq 0$, obtém-se a desigualdade contrária.

Prova. Defina, para cada $r \in (0, R]$, a função

$$\phi(r) = \frac{1}{|S_r|} \int_{S_r(x)} u(y) d\sigma(y).$$

Façamos a mudança de coordenadas $y = x + r\omega$, com objetivo de obter a derivada de ϕ . Assim, temos

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{S_r(x)} u(y) d\sigma(y) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{S_1(0)} u(x + r\omega) d\sigma(\omega) \\ &= \frac{1}{|S_1|} \int_{S_1(0)} u(x + r\omega) d\sigma(\omega). \end{aligned}$$

Daí, derivando sob o sinal da integral, pelo Corolário [1.2.1.1](#), obtemos

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \frac{1}{|S_1|} \int_{S_1(0)} \nabla u(x + r\omega) \cdot \omega d\sigma(\omega) \\ &= \frac{1}{|S_r|} \int_{S_r(x)} \nabla u(y) \cdot \frac{y - x}{r} d\sigma(\omega) \\ &= \frac{1}{|S_r|} \int_{S_r(x)} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma \end{aligned} \tag{4.1}$$

pois o vetor unitário normal a $|S_r(x)|$ é justamente $\frac{y-x}{r}$. Mas, pela identidade de Green (1.5) e pela hipótese $\Delta u \leq 0$, temos

$$\int_{\partial B_r(x)} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma = \int_{B_r(x)} \Delta u \leq 0.$$

Segue que $\phi'(r) \leq 0$, isto é, ϕ é uma função decrescente. Portanto,

$$\frac{1}{|S_r|} \int_{S_r(x)} u d\sigma \geq \frac{1}{|S_R|} \int_{S_R(x)} u d\sigma,$$

para todo $r \in (0, R]$. Mas para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|u(y) - u(x)| < \varepsilon$, sempre que $\|x - y\| < \delta$. Escolha $r < \delta$. Assim

$$\begin{aligned} \left| u(x) - \frac{1}{|S_r|} \int_{S_r(x)} u(y) d\sigma(y) \right| &= \left| \frac{1}{|S_r|} \int_{S_r(x)} [u(x) - u(y)] d\sigma(y) \right| \\ &\leq \frac{1}{|S_r|} \int_{S_r(x)} |u(x) - u(y)| d\sigma(y) \\ &\leq \frac{1}{|S_r|} \varepsilon \int_{S_r(x)} d\sigma(y) \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Segue que a diferença acima, quando $r \rightarrow 0$, torna-se tão pequena quanto quisermos. Assim, tem-se a igualdade

$$u(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|S_r|} \int_{S_r(x)} u(y) d\sigma(y).$$

Consequentemente, obtemos a desigualdade

$$u(x) \geq \frac{1}{|S_R|} \int_{S_R(x)} u d\sigma. \quad (4.2)$$

Segue que se $\Delta u \geq 0$, vale uma desigualdade do valor médio sobre esferas (observe que no caso $\Delta u \leq 0$, obtém-se a desigualdade contrária). Para cada $0 \leq r \leq R$, temos a desigualdade

$$n\omega_n r^{n-1} u(x) \geq \int_{S_r(x)} u d\sigma,$$

de modo que integrando a expressão acima de $r = 0$ a $r = R$, obtemos o resultado proposto:

$$\omega_n R^n u(x) \geq \int_0^R \left(\int_{S_r(x)} u d\sigma \right) dr = \int_{B_R(x)} u(y) dy,$$

onde a última igualdade segue do Teorema 1.2.4. ■

Corolário 4.1.0.1 (Teorema da Média para Funções Harmônicas). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $u \in C^2(\Omega)$. Se $\Delta u = 0$ em Ω , então para cada bola $B_R(x)$ de centro $x \in \Omega$ e raio $R > 0$, com $B_R(x) \subset\subset \Omega$, vale a desigualdade*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(x)} u(y) dy,$$

onde ω_n é o volume da bola unitária em \mathbb{R}^n

Teorema 4.1.1 (Princípio do Máximo Forte). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto conexo e $u \in C^2(\Omega)$.*

Se $\Delta u \geq 0$ em Ω e u atinge seu máximo em Ω , então u é constante.

Se $\Delta u \leq 0$ em Ω e u atinge seu mínimo em Ω , então u é constante.

Prova. Mostremos o segundo caso, quando $\Delta u \leq 0$ (o outro é totalmente análogo). Sejam $m := \min_{\Omega} u$ e $A := \{x \in \Omega : u(x) = m\}$. Note que A é não-vazio (u atinge o mínimo, por hipótese) e fechado (u é contínua). Mostremos que A é aberto. Dado $x \in A$, tome uma bola aberta $B_R = B_R(x) \subset\subset \Omega$. Pelo Teorema do Valor Médio, temos

$$m = u(x) \geq \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} u(y) dy \geq m \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} dy = m.$$

Mas se houvesse $y \in B_R$ tal que $u(y) > m$, a última desigualdade acima seria estrita, gerando um absurdo. Segue que A é aberto. Como Ω é conexo, seus únicos subconjuntos abertos e fechados são \emptyset e o próprio Ω , de modo que $A = \Omega$, mostrando o teorema. ■

Corolário 4.1.1.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto conexo e u uma função harmônica. Se u atinge o máximo ou mínimo em Ω , então u é constante.*

Corolário 4.1.1.2 (Princípio do Máximo Fraco). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, conexo e limitado, de modo que $\bar{\Omega}$ seja compacto. Se $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ é harmônica em Ω e contínua em $\bar{\Omega}$, então u atinge seu máximo (e mínimo) em $\partial\Omega$.*

Prova. De fato, como u é contínua em $\bar{\Omega}$, um compacto, o máximo é de fato atingido. Se não for atingido em $\partial\Omega$, deve ser atingido no interior de Ω . Nesse último caso, pelo corolário anterior, já que u é harmônica, deve ser constante em Ω , e portanto constante em $\bar{\Omega}$. Em todo caso, o máximo de u é atingido em $\partial\Omega$. ■

Corolário 4.1.1.3 (Unicidade de solução clássica). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, conexo e limitado, de modo que $\bar{\Omega}$ seja compacto. Se $u_1, u_2 : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ são harmônicas em Ω , contínuas em $\bar{\Omega}$, e coincidem em $\partial\Omega$, então $u_1 = u_2$ em Ω . Em particular, se o problema*

$$\begin{cases} \Delta u = g & \text{se } x \in \Omega \\ u = f & \text{se } x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

possui solução em Ω , ela é única.

Prova. A função $w : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $w = u_1 - u_2$ é harmônica em Ω e contínua em $\bar{\Omega}$. Pelo corolário anterior, w atinge seu máximo e mínimo em $\partial\Omega$. Mas como $w|_{\partial\Omega} = 0$, segue que $w = u_1 - u_2 = 0$ em Ω . ■

4.2 A Recíproca do Teorema do Valor Médio

Mostraremos que se uma função contínua possui a "propriedade da média sobre bolas", enunciada no Corolário 4.1.0.1, então é possível obter informações sobre sua regularidade e sobre seu laplaciano.

Definição 4.2.1. *Considere as seguinte definições:*

(i) *Defina $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ dada por*

$$\eta(x) := \begin{cases} C \exp\left(\frac{1}{\|x\|^2-1}\right) & \text{se } \|x\| < 1 \\ 0 & \text{se } \|x\| \geq 1, \end{cases}$$

onde a constante $C > 0$ é escolhida de modo que $\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, dx = 1$. Note que η acima é uma função radial. isto é, $\eta(x) = \psi(\|x\|)$, para alguma $\psi \in C_c^\infty$.

(ii) Para cada $\varepsilon > 0$, defina

$$\eta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

As funções η_ε são chamadas de **aproximações da identidade**. Além disso, $\eta_\varepsilon \in C^\infty$ e também satisfazem $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon dx = 1$, apesar de $\text{supt } \eta_\varepsilon = B_\varepsilon(0)$.

(iii) **Notação.** Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e $\varepsilon > 0$, defina $\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : \overline{B_\varepsilon(x)} \subset \Omega\}$.

Proposição 4.2.1. Seja $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ integrável no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Então para cada $\varepsilon > 0$ a função

$$u^\varepsilon(x) := \int_{\Omega} \eta_\varepsilon(x-y)u(y) dy = \int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(y)u(x-y) dy$$

é de classe C^∞ em Ω_ε .

Prova. Vide Teorema 6 em C.4, [8] ■

Teorema 4.2.1. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Suponha que $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função contínua satisfazendo a seguinte propriedade: para todo $x \in \Omega$ e $\overline{B_r(x)} \subset\subset \Omega$, tem-se

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{S_r(x)} u(y) d\sigma(y) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S_1(0)} u(x+ry) d\sigma(y)$$

Então $u \in C^\infty(\Omega)$ e $\Delta u = 0$ em Ω .

Prova. Para cada $x \in \Omega_\varepsilon$, a função $y \mapsto \eta_\varepsilon(x - y)$ tem suporte em Ω . Assim,

$$\begin{aligned}
 u^\varepsilon(x) &= \int_{\Omega} u(y)\eta_\varepsilon(x - y)dy = \int_{\Omega} u(x - y)\eta_\varepsilon(y)dy \\
 &= \int_{B_\varepsilon(0)} u(x - y)\eta(\varepsilon^{-1}y)\varepsilon^{-n}dy \\
 &= \int_{B_1(0)} u(x - \varepsilon y)\eta(y)dy \\
 &= \int_0^1 \int_{S_1(0)} u(x - r\varepsilon y)\psi(r)r^{n-1}d\sigma(y)dr \\
 &= n\omega_n u(x) \int_0^1 \psi(r)r^{n-1}dr \\
 &= u(x) \int_0^1 \int_{S_1(0)} \eta(r\varepsilon y)r^{n-1}d\sigma(y)dr \\
 &= u(x) \int \eta(y)dy \\
 &= u(x)
 \end{aligned}$$

Pela Proposição [4.2.1](#) a função u^ε é C^∞ em cada Ω_ε , e como ε é arbitrário, tem-se $u \in C^\infty(\Omega)$. Para concluirmos que u é harmônica em Ω , basta notar que Δu é contínuo e para cada $r > 0$,

$$\begin{aligned}
 \int_{B_r(x)} \Delta u(y)dy &= \int_{S_r(x)} \partial_\nu u(y)d\sigma(y) = r^{n-1} \int_{S_1(0)} \nabla u(x + ry) \cdot y d\sigma(y) \\
 &= r^{n-1} \frac{d}{dr} \int_{S_1(0)} u(x + ry) d\sigma(y) \\
 &= r^{n-1} \frac{d}{dr} (\omega_n u(x)) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Segue que a integral de Δu sobre qualquer bola centrada em x é nula, concluindo que $\Delta u = 0$. ■

Corolário 4.2.1.1. *Se u é harmônica em Ω , então $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Prova. Se u é harmônica em Ω , então pelo Corolário 4.1.0.1, $u(x)$ é a média de u sobre qualquer bola (ou esfera) centrada em x , e portanto pelo Corolário 4.2.1.1, u é $C^\infty(\Omega)$. ■

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] LIMA, E. L. **Análise Real**, v.2. 6 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013. 202 p.
- [2] FOLLAND, Gerald B. **Real analysis: modern techniques and their applications**. 2.ed. A Wiley-Interscience Publication, 1999. 386 p.
- [3] FOLLAND, Gerald B. **Introduction to Partial Differential Equation**. 2 ed. New Jersey: Princeton University Press, 1995. 324 p.
- [4] LIMA, E. L. **Curso de Análise vol.2**. 6 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. 547 p.
- [5] CANZANI, Y. **Analysis on Manifolds via the Laplacian**. Outono de 2013. 114 p. Notas de Aula.
- [6] STYER, D. F. **The geometrical significance of the Laplacian**. American Journal of Physics, **83** (12) 991-997 (2015).
- [7] BIEZUNER, R. J. **Autovalores do laplaciano**. Novembro de 2006. 156 p. Notas de aula.

- [8] EVANS, L. C. **Partial Differential Equations**. American Mathematical Society, 1998. 662 p.
- [9] BARTTLE, R. **The elements of integration and Lebesgue measure**. New York: Jonh Willeys & Songs Inc, 1995. 179 p.
- [10] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Elementary Differential Equations and boundary value problems**. 7 ed. New York: Jonh Willeys & Songs Inc, 2000. 745 p.
- [11] WELLS, J. H.; WILLIAM, L. R. **Embeddings and Extensions in Analysis**. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1975.
- [12] KAC, M. **Can one hear the shape of a drum?**. American Mathematical Monthly 73 (1966), no. 4, parte II, 1-23.
- [13] MILNOR, J. **Eigenvalues of the Laplacian operator on certain manifolds**. Proceedings of the National Academy of Sciences USA 51 (1964), 542.
- [14] VIGNERAS, M. **Variétés riemanniennes isospectrales et non isometriques**. Annals of Mathematics 91 (1980), 21-32.
- [15] GORDON, C.; WEBB, D. L.; WOLPERT, S. **One cannot hear the shape of a drum**. Bulletin of the American Mathematical Society **27** (1992), n. 1, 134-138.