

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Curso de Licenciatura em Matemática

**A Importância da Tutoria como
ferramenta de nivelamento na
disciplina de Cálculo Vetorial e
Geometria Analítica da Universidade
Federal da Paraíba**

Mykela Darley de Carvalho Ferreira

Abril/2020
João Pessoa - PB

A Importância da Tutoria como ferramenta de nivelamento na disciplina de Cálculo Vetorial e Geometria Analítica da Universidade Federal da Paraíba

Mykela Darley de Carvalho Ferreira

Sob a orientação do

Prof. Dr. Adriano Alves de Medeiros

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como parte integrante dos requisitos necessários para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

13 de Abril de 2020

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

F383i Ferreira, Mykela Darley de Carvalho.

A importância da Tutoria como ferramenta de nivelamento na disciplina de Cálculo Vetorial e Geometria Analítica da Universidade Federal da Paraíba / Mykela Darley de Carvalho Ferreira. - João Pessoa, 2020.
24 f. : il.

Orientação: Adriano Alves de Medeiros.
Monografia (Graduação) - UFPB/CCEN.

1. Tutoria, Teorema de Cramer, Sistemas Lineares. 2. Vetores, Dependência Linear. I. Medeiros, Adriano Alves de. II. Título.

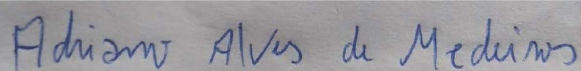
UFPB/CCEN

A Importância da Tutoria como ferramenta de nivelamento na disciplina de Cálculo Vetorial e Geometria Analítica da Universidade Federal da Paraíba

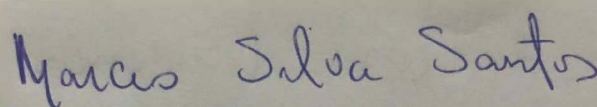
Mykela Darley de Carvalho Ferreira

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como parte integrante dos requisitos necessários para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

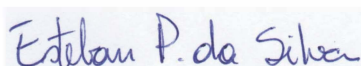
Aprovada por:



Prof. Adriano Alves de Medeiros-UEPB (Orientador)



Prof. Márcio Silva Santos-UEPB



Prof. Esteban Pereira da Silva - UEPB

13 de Abril de 2020



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA**

ATA Nº 10 / 2020 - CCEN-CGM (11.01.14.44)

Nº do Protocolo: 23074.026435/2020-51

João Pessoa-PB, 06 de Maio de 2020

**AVALIAÇÃO DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE
CURSO DO CURSO DE MATEMÁTICA**

Aluno(a): Myikela Darley de Carvalho Ferreira

Matrícula: 11510584

Data da Defesa: 13/04/2020

Modalidade: Licenciatura

Forma de Avaliação:

**Título do Trabalho: A IMPORTÂNCIA DA TUTORIA COMO FERRAMENTA DE
NIVELAMENTO NA DISCIPLINA DE CÁLCULO VETORIAL E GEOMETRIA
ANALÍTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA**

PROF ADRIANO ALVES DE MEDEIROS (Orientador)

Banca Examinadora: PROF. ESTEBAN PEREIRA DA SILVA

PROF. MARCIO SILVA SANTOS

Nota do Trabalho 8,3

(Assinado digitalmente em 07/05/2020 14:19)
ADRIANO ALVES DE MEDEIROS
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
Matrícula: 2130828

Para verificar a autenticidade deste documento entre em <https://sipac.ufpb.br/documentos/> informando seu número: **10**, ano: **2020**, documento(espécie): **ATA**, data de emissão: **06/05/2020** e o código de verificação: **4da1489ee8**

*A Deus, pela coragem e força, enfim,
pela minha vida; aos meus familiares,
em especial meus pais e minha filha,
pela dedicação, compreensão e amor.
Dedico.*

Agradecimentos

- Primeiramente a Deus, pela coragem, força e sabedoria a mim concedida, para realização deste trabalho. Obrigada por tudo, Senhor! Só tu sabes o quão difícil foi essa jornada, mas graças a Ti, eu venci!
- A todos os meus amigos e familiares que direta ou indiretamente estiveram junto comigo nessa jornada, em especial, a minha amada mãe Maria do Socorro de Carvalho Ferreira, a meu amado pai José Ferreira Gomes, e ao meu maior presente, minha filha amada, Ana Laura Carvalho de Oliveira, por me inspirar todos os dias com todo seu amor. Muito obrigada, amo vocês!
- Aos meus amigos, os quais lutaram junto comigo a mesma batalha: Douglas Medeiros, Izabela, Almir, Raquel, Ricardo (Lafon) e Anderson Severo, amo vocês!
- Ao meu orientador, Professor Adriano, pela paciência e dedicação
- Aos professores do Departamento de Matemática - UFPB pelos conhecimentos transmitidos, em especial Jorge Costa Duarte, Bruno Ribeiro, Joedson, Giulliana, e todos que indiretamente torceram por mim, meu muito obrigada!

Agradeço a Todos de coração!

"Quanto melhor é adquirir a sabedoria do que o ouro! e quanto mais excelente é escolher o entendimento do que a prata." (Prov. 16:16)

Resumo

Neste trabalho apresentamos a importância do projeto de tutoria como ferramenta de nivelamento na disciplina de Cálculo Vetorial e Geometria Analítica da UFPB. Em particular, exibimos resultados concretos obtidos pelo projeto coordenado pela professora Julice Dutra do Departamento de Engenharia Química da UFPB. Além disso, apontamos tópicos que julgamos necessários no programa de nivelamento, como o Teorema de Cramer, que é utilizado para auxiliar o estudo de Dependência Linear no Cálculo Vetorial.

Palavras-chaves: Tutoria, Teorema de Cramer, Sistemas Lineares, Vetores, Dependência Linear.

Abstract

In this work we present the importance of the tutoring project as a tool leveling in the discipline of Vector Calculus and Analytical Geometry at UFPB. In particular, we exhibit concrete results obtained by the project coordinated by Professor Julice Dutra, Department of Chemical Engineering, UFPB. Beyond addition, we point out topics that we deem necessary in the leveling program, like Cramer's Theorem, which is used to aid the study of Dependence Linear in Vector Calculation.

Keywords: Tutoring, Cramer's Theorem, Linear Systems, Vectors, Vector Calculus, Linear Dependence.

Sumário

	Introdução	1
1	ESTUDO DA DEPENDÊNCIA LINEAR DE VETORES E CO- ORDENADAS DE UM VETOR NUMA BASE NO $\mathbb{R}^3$ COM O AUXÍLIO DO TEOREMA DE CRAMER.	3
1.1	Vetores	3
1.2	Dependência e Independência Linear no $\mathbb{R}^3$	3
1.2.1	Teorema de Cramer	4
1.2.2	Regra de Sarrus	6
1.2.3	Teorema de Laplace	8
1.3	Auxílio do Teorema de Cramer no estudo da dependência li- near de vetores e coordenadas de um vetor numa base no $\mathbb{R}^3$	10
2	A IMPORTÂNCIA DE UM PROJETO DE TUTORIA PARA DISCIPLINA DE CÁLCULO VETORIAL	12
	Conclusão	15
	Bibliografia	16

Introdução

A Matemática é uma ciência ampla, onde todas as outras ciências estão diretamente relacionadas a ela. O Cálculo Vetorial, por exemplo, é uma área da Matemática que é extensivamente usada na Física e Engenharia, na Geometria Diferencial e no estudo das Equações Diferenciais Parciais também, afinal vetores e grandezas vetoriais estão presentes em nossa vida de forma bastante ampla, por exemplo, velocidade, aceleração, são grandezas físicas modeladas por vetores, que fazem parte do nosso dia a dia. A importância do estudo de vetores para vários cursos na área das ciências exatas e da natureza, dá-se pela necessidade de entendimento das relações que envolvem grandezas vetoriais, dessa forma, passamos a compreender a necessidade de aprendê-la.

De fato o Cálculo Vetorial é de suma importância, porém para estudá-lo temos alguns obstáculos, um deles é aprender na matemática do Ensino Médio, assuntos que serão muito utilizados no Ensino Superior. O que ocorre é que essa transição da matemática vista no Ensino Médio para a do Ensino Universitário ocasiona grandes dificuldades para os alunos. A introdução de ideias matemáticas bastante abstratas implica numa mudança radical na forma de raciocinar do aluno, considerando que muitos assuntos do Ensino Médio são passados de forma superficial para esses alunos, como é o caso do, Teorema de Cramer, Teorema de Laplace, e Regra de Sarrus, os quais terão uso na disciplina de Cálculo Vetorial e Geometria Analítica, como veremos neste trabalho. O objetivo deste é mostrar a importância da tutoria como ferramenta de nivelamento desta disciplina, através de um estudo sobre a importância do Teorema de Cramer no cálculo de coeficientes da combinação linear de vetores no $\mathbb{R}^3$ e com isso no estudo da dependência linear no Cálculo Vetorial. Para isso, vemos a necessidade de trabalhar esse teorema na Tutoria dessa disciplina, para que os alunos não tenham tanta dificuldade.

Este trabalho é dividido em duas partes: na primeira parte foram feitas definições sobre vetores, Dependência e Independência Linear no $\mathbb{R}^3$, Teorema de Cramer, Regra de Sarrus, Teorema de Laplace, e por fim, ilustramos como o Teorema de Cramer pode auxiliar no estudo da dependência linear de vetores e coordenadas de um vetor numa base no $\mathbb{R}^3$. Na segunda parte, apresentamos a importância de se ensinar Regra de Cramer na Tutoria da disciplina de Cálculo Vetorial.

Esperamos contribuir para o ensino do Cálculo Vetorial, de modo que os alunos

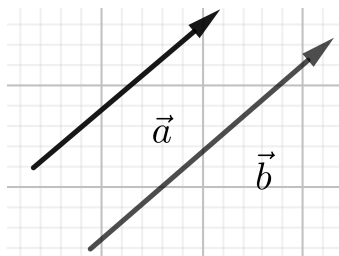
venham a compreender melhor a importância de se aprender o Teorema de Cramer através das explicações e exemplos aqui expostos, e que, conseqüentemente, isto ajude os professores (tutores) de tal disciplina nos seus ensinamentos.

1

Estudo da Dependência Linear de Vetores e coordenadas de um vetor numa base no $\mathbb{R}^3$ com o auxílio do Teorema de Cramer.

1.1 Vetores

Tomando como base a apostila de Cálculo Vetorial e Geometria Analítica, de Jorge Costa e Maria Silva, um vetor é a coleção de todos os segmentos orientados equipolentes (quando têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento) a um segmento orientado dado. Se o vetor é designado por $\overrightarrow{AB}$, qualquer segmento orientado equipolente a $\overrightarrow{AB}$ é chamado de um representante do vetor $\overrightarrow{AB}$. Esses são denotados usando letras minúsculas com uma flecha, como $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e assim por diante e podem estar localizados em qualquer ponto do espaço tridimensional.



Exemplos de vetores

1.2 Dependência e Independência Linear no $\mathbb{R}^3$

Para estudarmos a dependência linear de vetores do $\mathbb{R}^3$, podemos contar com o auxílio do Teorema de Cramer. Por definição, vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são LI (Linearmente Independentes) se, e somente se, a equação $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$ tiver apenas a solução nula, isto é, $x = y = z = 0$, caso contrário, dizemos que os vetores são LD (Linearmente Dependentes). A solução da equação vetorial é equivalente à solução do sistema linear associado. Para mais detalhes sobre o tema, sugerimos a apostila de Cálculo Vetorial e Geometria Analítica (Jorge Costa e Maria Sílvia).

Demonstração Sejam $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$, e $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$, vetores, então, tem-se que esses vetores serão L.I se, e somente, se a equação $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$ tiver apenas a solução nula, isto é, $x = y = z = 0$. Então:

$$\begin{aligned} x(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) + y(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) + z(c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}) &= \vec{0} \\ (a_1x + b_1y + c_1z)\vec{i} + (a_2x + b_2y + c_2z)\vec{j} + (a_3x + b_3y + c_3z)\vec{k} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Como $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ são vetores L.I em $\mathbb{R}^3$, obtemos o sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$$

Um sistema homogêneo sempre admite a solução nula $x = y = z = 0$, é nesse momento que podemos utilizar do Teorema de Cramer para determinar se os vetores do $\mathbb{R}^3$ são L.I ou L.D. Se esse sistema for compatível e determinado, terá uma única solução, a solução trivial $x = y = z = 0$. Podemos concluir que os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ serão L.I se, e somente se, o determinante da matriz desse sistema for diferente de 0:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

caso contrário, serão L.D (Linearmente Dependentes). Para entendermos melhor, vamos primeiramente saber o que seria o Teorema de Cramer e como chegaremos nesse estudo da dependência linear de vetores através deste.

1.2.1 Teorema de Cramer

Primeiramente, vamos abordar o que é o Teorema de Cramer. É um algoritmo usado para resolver Equações Lineares pelo uso de determinantes, nomeado em alusão ao matemático Gabriel Cramer (1750), para exibir a solução de qualquer sistema linear com n equações e n incógnitas. Vejamos:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Obs: A solução deste sistema corresponde intersecção dos três planos determinados pelas equações que o compõe .

Sejam D , Dx , Dy e Dz , determinantes dos coeficientes como apresentados abaixo:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, Dx = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, Dy = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, e Dz = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Temos:

$$x = \frac{Dx}{D}, \quad y = \frac{Dy}{D} \quad \text{e} \quad z = \frac{Dz}{D}$$

Vamos ao exemplo de uma equação linear bem simples com duas equações e duas incógnitas:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$$

Resolvendo pelo Teorema de Cramer, temos que calcular primeiro três valores: D , Dx , Dy .

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = (1.1) - (1.2) = -1$$

Agora, vamos encontrar o valor de Dx , onde substituímos a primeira coluna da matriz de coeficientes do sistema pela coluna dos termos independentes e calculamos o determinante:

$$Dx = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = (4.1) - (1.6) = -2$$

Da mesma forma, vamos achar o Dy , onde substituímos a segunda coluna da matriz de coeficientes do sistema pela coluna dos termos independentes e calculamos o determinante:

$$Dy = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = (1.6) - (4.2) = -2$$

Agora, acharemos os valores de x e y :

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{-2}{-1} = 2 \quad y = \frac{Dy}{D} = \frac{-2}{-1} = 2$$

Esse Teorema é também conhecido como "Regra de Cramer" para resolução de sistemas de equações lineares. Podemos perceber que o teorema se refere apenas a um sistema com o mesmo número de equações e de incógnitas, e que só dá a solução quando o determinante da matriz desse sistema é diferente de 0. Antes de mostrar como o utilizaremos no cálculo vetorial para estudarmos a dependência linear dos vetores no $\mathbb{R}^3$, mostraremos primeiro, regras e teoremas que também são utilizados dentro do mesmo, que são: a Regra de Sarrus, que é utilizada mais precisamente quando queremos calcular o determinante de uma matriz de ordem 3 (3x3), e o Teorema de Laplace, que é utilizado no cálculo de determinante de uma matriz de qualquer ordem. Este algoritmo é de grande ajuda no cálculo de determinantes de matrizes de ordem igual ou superior a 4 (4x4).

1.2.2 Regra de Sarrus

É um método utilizado para calcular o determinante de uma matriz quadrada de ordem 3, nomeado em alusão ao matemático Pierre Frederic Sarrus. Seu cálculo é feito da seguinte forma: repetimos as duas primeiras colunas da matriz a sua direita e somamos os produtos dos termos das diagonais principais com o inverso aditivo dos produtos dos termos das diagonais secundárias. Ilustremos este processo a seguir. Seja A uma matriz de ordem 3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Inicialmente, para acharmos o determinante dessa matriz, as duas primeiras colunas são repetidas à direita da mesma:

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Em seguida, os elementos da diagonal principal são multiplicados. Esse processo deve ser feito também com as diagonais que estão à direita da diagonal principal para que seja possível somar os produtos dessas três diagonais:

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\det A_p = a_{11} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}.$$

Fazemos o mesmo processo agora com a diagonal secundária e as demais diagonais à sua direita. Entretanto, é necessário subtrair os produtos encontrados:

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\det A_s = -a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Agora, unindo os dois processos, é possível encontrar o determinante da matriz A:

$$\det A = \det A_p + \det A_s$$

$$\det A = a_{11} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + (-a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33})$$

Exemplo: Vamos agora calcular o determinante de uma matriz B de ordem 3:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Usando a Regra de Sarrus temos:

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\det B_1 = 1 \cdot 0 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \cdot 5 = 0 + (-12) + (-10) = -22$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\det B_2 = -2 \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot (-2) \cdot 5 - 3 \cdot (-1) \cdot 1 = -0 - (-10) - (-3) = -0 + 10 + 3 = 13$$

logo, o $\det B$ é:

$$\det B = (-22) + 13 = -9$$

1.2.3 Teorema de Laplace

É um método utilizado para calcular o determinante de uma matriz quadrada de ordem n . Foi nomeado em alusão ao matemático e físico Pierre Simon Laplace. Esse teorema consiste em escolher uma das filas (linha ou coluna) da matriz e somar os produtos dos elementos dessa fila pelos seus respectivos cofatores.

Ilustração algébrica:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{Vamos escolher a primeira coluna})$$

Então:

$$\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31} + a_{41} \cdot A_{41} \quad (\text{onde } A_{ij} \text{ é o cofator do elemento } a_{ij})$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

Vamos ao exemplo:

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Vamos escolher a primeira coluna para calcular esse determinante:

$$\det C = (-2) \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 3 \cdot A_{31} + 1 \cdot A_{41}$$

Agora vamos encontrar os valores dos cofatores :

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot D_{11}$$

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

Resolvemos $\det D_{11}$ pela Regra de sarrus, a qual vimos anteriormente, e calculando esse determinante acharemos $\det D_{11} = 3$

Desse modo:

$$A_{11} = 1 \cdot 3 = 3$$

Da mesma forma, faremos com os demais coeficientes:

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot D_{31}$$

$$A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\text{Logo, } A_{31} = 1 \cdot 13 = 13$$

$$A_{41} = (-1)^{4+1} \cdot D_{41}$$

$$A_{41} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{Logo, } A_{41} = (-1) \cdot 9 = -9$$

Assim, pelo Teorema de Laplace, o determinante da matriz C é dado pela seguinte expressão:

$$\det C = (-2) \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 3 \cdot A_{31} + 1 \cdot A_{41}$$

$$\det C = (-2) \cdot 3 + 0 + 3 \cdot 13 + 1 \cdot (-9)$$

$$\det C = (-6) + 39 + (-9) = 24$$

Não foi preciso calcular o cofator do elemento da matriz que era igual a zero, afinal, ao multiplicarmos o cofator, o resultado seria zero de qualquer forma. Desse modo, quando nos depararmos com matrizes que possuem muitos zeros em alguma de suas filas, a utilização do Teorema de Laplace se torna interessante, pois não será necessário calcular diversos cofatores.

1.3 Auxílio do Teorema de Cramer no estudo da dependência linear de vetores e coordenadas de um vetor numa base no $\mathbb{R}^3$

Agora que já sabemos o que é o Teorema de Cramer, iremos observar uma aplicação: encontrar as coordenadas de um vetor numa base e, conseqüentemente, determinar se um vetor é L.I (Linearmente Independente) ou L.D (Linearmente Dependente) no $\mathbb{R}^3$. Como vimos anteriormente, os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ do espaço tridimensional são linearmente independentes se e somente se a equação $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$, com $x, y, z \in \mathbb{R}$, só possui a solução nula $x = 0, y = 0, z = 0$.

Definição: Uma base de um espaço tridimensional é um conjunto formado por três vetores linearmente independentes. Este conjunto gera todos os vetores do espaço por meio de combinação linear.

Exemplo 1- Verifiquemos que o conjunto de três vetores $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} \subset \mathbb{R}^3$ é uma base onde,

$$\vec{v}_1 = (1, 1, 0) \quad \vec{v}_2 = (1, 0, 1) \quad \text{e} \quad \vec{v}_3 = (0, 1, 1)$$

Expressemos o valor arbitrário $w = (x, y, z)$ como combinação linear dos vetores de β .

Solução: Consideremos a matriz formada por $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$

$$[\beta] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculamos o seu determinante (usamos Sarrus) e $\det[\beta] = -2$, agora sim usaremos Cramer para calcular os coeficientes da combinação linear dos vetores de $\beta : w = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$. Isto nos leva ao sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Primeiro precisamos das matrizes auxiliares:

$$[w, v_2, v_3] = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad [v_1, w, v_3] = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ 1 & y & 1 \\ 0 & z & 1 \end{bmatrix}; \quad [v_1, v_2, w] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{bmatrix}.$$

Pela Regra de Cramer, os coeficientes procurados são:

$$a_1 = \frac{\det[w, v_2, v_3]}{\det\beta}; \quad a_2 = \frac{\det[v_1, w, v_3]}{\det\beta}; \quad a_3 = \frac{\det[v_1, v_2, w]}{\det\beta}.$$

portanto, $w = (-y + z)v_1 + (-x + y - z)v_2 + (x - y - z)v_3$ é combinação linear de β .

Com isso, vemos que a Regra de Cramer é um processo para resolução de sistemas de equações lineares $n \times n$, sendo bastante útil nas demonstrações, porém, ela é eficiente, apenas, para resolução de sistemas pequenos, 2×2 ou 3×3 . Para sistemas maiores, outros processos de resolução, como escalonamento, por exemplo, são mais práticos.

Vemos que é de extrema importância para os alunos que irão cursar as disciplinas de Cálculo Vetorial e Álgebra Linear, terem a noção de matrizes e determinantes, além do Teorema de Cramer, que nos auxilia a encontrar as coordenadas de um vetor em uma base dados.

2 A importância de um projeto de Tutoria para disciplina de Cálculo Vetorial

A tutoria da disciplina de Cálculo Vetorial e Geometria Analítica da UFPB (Universidade Federal da Paraíba) é estendida não só aos cursos de Física e Matemática, mas também aos cursos de Química Industrial e Engenharia Química, que serão nosso foco neste estudo. Embora exista um bom número de tutores no departamento, os alunos ainda têm apresentado deficiência em conteúdos básicos relacionados a essa disciplina, como por exemplo, matrizes, determinantes, inclusive o Teorema de Cramer ou Regra de Cramer, como queiram chamar. Talvez, devido a essas dificuldades, os curso de Química Industrial e Engenharia Química tenham uma retenção muito grande. Isso dificulta também o desempenho desses alunos na disciplina de Cálculo Vetorial e Geometria Analítica, ofertada no segundo período.

Conversando com um dos Tutores de Cálculo Vetorial, o mesmo explicou das dificuldades que os alunos possuem como, por exemplo, a de estudar a dependência linear de um vetor e encontrar suas coordenadas em uma base dada. Teoricamente, os teoremas e regras utilizados para tal, devem ser estudados no ensino médio, como é o caso do Teorema de Cramer.

No ano de 2019, surgiu a proposta para o projeto PROTUT (Projeto de Ensino Tutoria), coordenado pela professora Julice Dutra Lopes, juntamente com mais quatro professores colaboradores. O texto da proposta defende a importância da tutoria e do nivelamento para disciplinas de Cálculo do departamento de Engenharia Química da UFPB, e o Cálculo Vetorial e Geometria Analítica está entre essas disciplinas. Esse projeto é focado nos cursos de Química Industrial e Engenharia Química.

Segundo a professora Julice Dutra Lopes, a implantação desse programa de tutoria para tais disciplinas de Cálculo, incluindo o Cálculo Vetorial, para os cursos de Química Industrial e Engenharia Química (que foram os cursos por ela estudados) no ano de 2018, alcançou resultados positivos ao final do programa, com o aumento do índice de aprovação dos alunos matriculados na respectiva disciplina. A Tabela 1, mostra o número de alunos reprovados nos períodos anteriores à implantação do programa de tutoria no curso de Química Industrial

Na Tabela 2, pode ser visualizado o número de alunos reprovados nas disciplinas de Cálculo

Tabela 1 – Número de alunos reprovados do curso de Química Industrial/CT/UFPB nos períodos 2016.1, 2016.2 e 2017.1

Disciplinas	Períodos			TOTAL
	2016.1	2016.2	2017.1	
Cálculo Vetorial e Geometria Analítica	19	26	23	68
Cálculo Diferencial e Integral I	26	13	13	52
Física Geral I	11	10	7	28

Fonte: Sistema Integrado de Gestão de Atividades Acadêmicas da UFPB (2018)

Tabela 2 – Número de alunos reprovados dos cursos de Química Industrial (QI) e Engenharia Química (EQ) dos últimos 2 períodos letivos

3*Disciplinas	Períodos				2*TOTAL	
	2017.2		2018.1		QI	EQ
	QI	QE	QI	QE		
Cálculo Vetorial e Geom. Analítica	1 (de 14*)	13 (de 22*)	0 (de 21*)	13 (de 40 *)	1	26
Cálculo Diferencial e Integral I	1 (de 9*)	9 (de 32*)	7 (de 18 *)	13 (de 34*)	8	22
Física Geral I	14 (de 26*)	19 (de 37 *)	5 (de 18 *)	11 (de 36*)	19	30

*Alunos matriculados excluindo-se reprovados por falta, trancados ou cancelados. Fonte: Sistema Integrado de Gestão de Atividades Acadêmicas da UFPB (2018)

I, Cálculo Vetorial (após a implantação do Programa de Tutoria) e Física Geral I, nos períodos 2017.2 e 2018.1.

Analisando os dados da Tabela 2 e comparando com a Tabela 1, pode-se perceber que houve uma redução significativa do número de alunos reprovados na disciplina de Cálculo Vetorial após a implantação do Programa de Tutoria, chegando a 100% de aprovação no período 2018.1, dentre os alunos que concluíram a disciplina. Isso mostra o quão importante é a tutoria para um melhor desempenho dos alunos nessa disciplina.

Via análise destas tabelas, a professora Julice Dutra Lopes nos mostra a importância do trabalho de revisão dos assuntos mais importantes de Matemática no início de um curso da área de exatas, para que haja uma melhor compreensão das disciplinas oferecidas nos primeiros períodos. Ela ressalta ainda que as aulas de revisão dos conteúdos do Ensino Médio serão ministradas nos quatro primeiros meses do Projeto, e planejadas para aprofundar conceitos básicos da Matemática, ou seja, nesse projeto de tutoria, os quatro primeiros meses são para aulas de revisão desses conteúdos do Ensino Médio, tão necessários para o estudo dessas disciplinas. Nesse sentido, será revisado conteúdos como

Matrizes, Determinantes, Sistemas Lineares e, obviamente, o Teorema de Cramer, assim o tutor mostrará como e onde devemos usar esse teorema e, desse modo, adentrar mais adiante o uso deste no Cálculo Vetorial, mostrando a importância de se aprender esse Teorema, o qual deveria ter sido bem introduzido no Ensino Médio. Após essa revisão, quando os alunos chegarem na parte onde estudarão a dependência linear no $\mathbb{R}^3$, verão que será bem mais fácil entender.

Esse projeto PROTUT, por ser focado apenas nos cursos de Química Industrial e Engenharia Química, proporciona um melhor planejamento do mesmo, uma vez que, estudar um grupo específico facilita a identificação de dificuldades existentes no mesmo. Além disso, o horário dessa tutoria é escolhido de modo que todos possam participar, o que complica bastante quando o objetivo é acompanhar vários cursos ao mesmo tempo. Desse modo, esse projeto vem como uma ferramenta de nivelamento para essas disciplinas, onde os alunos dos cursos supracitados poderão adentrar no ensino superior, todos com o mesmo nível de conhecimento, diminuindo, assim, a evasão destes cursos e também o índice de reprovação e repetição dessa disciplina.

Como vimos no capítulo anterior, o Teorema de Cramer é de grande valia para o estudo de vetores no Cálculo Vetorial, portanto, é de extrema importância que os alunos possam, durante a tutoria, ter uma revisão desse conteúdo.

Conclusão

O desenvolvimento do presente estudo possibilitou uma análise da importância do Teorema de Cramer para a disciplina de Cálculo Vetorial e também o quanto importante é um projeto de tutoria para a apresentação desse assunto e consequente evolução dos alunos na disciplina estudada.

Para se atingir uma compreensão dessa realidade, definiram-se dois objetivos específicos. O primeiro, de definir e identificar o uso do Teorema de Cramer no estudo da dependência linear e cálculo de coordenadas de uma base no $\mathbb{R}^3$, onde demonstramos, através de exemplos, o uso desse Teorema. O outro objetivo seria mostrar a importância de se ter um Projeto de Tutoria voltado para essa disciplina de Cálculo Vetorial e Geometria Analítica, onde foi discutido o projeto coordenado pela professora Julice Dutra Lopes. Neste projeto, vimos dados que mostraram o quanto este foi importante e significativo para evolução dos alunos de Química Industrial e Engenharia Química na disciplina abordada.

O enfoque desta pesquisa foi neste conteúdo porque, quando fiz essa disciplina de Cálculo Vetorial e Geometria Analítica, senti bastante dificuldade no estudo da dependência linear, e vi o quanto importante é se ter uma revisão dos assuntos do ensino médio, assim, essas dificuldades serão minimizadas no Ensino Superior. Esse trabalho proporcionou-me também uma busca em outras áreas da matemática como, por exemplo, a Álgebra Linear, além de uma grande aprendizagem para minha formação.

Por fim, venho destacar a importância de oferecermos uma revisão, não só o Teorema de Cramer, mas também, de outros assuntos do Ensino Médio que estejam ligados à disciplina de Cálculo Vetorial, por meio de projetos de tutoria voltados para cada curso de exatas, onde as dificuldades de cada aluno poderão ser acompanhadas de perto, e os mesmos terão mais oportunidades de acompanhar a disciplina de forma nivelada e com mais chances de aprendizado e consequente aprovação.

Bibliografia

1. COSTA, Jorge; SILVIA, Maria. Cálculo Vetorial e Geometria Analítica. UFPB, 2016.
2. BOLDRINI, José Luiz et al. Álgebra Linear. 3 ed. São Paulo: Harbra, 1986.
3. IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. Fundamentos da Matemática Elementar. 2 ed. São Paulo: Atual Editora, 1977.
4. DUTRA, Julice et al. A tutoria como ferramenta de nivelamento para as disciplinas de Cálculo e Física do Departamento de Engenharia Química do CT /UFPB. 2019. 14f. Projeto de Ensino Tutoria/PROTUT. Universidade Federal Da Paraíba/PB.