

Raphael Reichmann Rolim

**Preâmbulos Aritméticos: da função Zeta às
fórmulas explícitas**

**João Pessoa – PB
Agosto 2020**

Raphael Reichmann Rolim

**Preâmbulos Aritméticos: da função Zeta às fórmulas
explícitas**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
como exigência para o título de Licenciatura
em Matemática, pela Universidade Federal
da Paraíba – UFPB, Campus João Pessoa.

Universidade Federal da Paraíba – UFPB
Departamento de Matemática
Programa de Graduação

Orientador: Uberlandio Batista Severo

João Pessoa – PB
Agosto 2020

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

R748p Rolim, Raphael Reichmann.

Preâmbulos Aritméticos: da função Zeta às fórmulas explícitas / Raphael Reichmann Rolim. - João Pessoa, 2020.

148 f.

Orientação: Uberlandio Batista Severo.
Monografia (Graduação) - UFPB/CCEN.

1. Teoria analítica dos números. 2. Função Zeta. 3. Números primos. 4. Aritmética. I. Severo, Uberlandio Batista. II. Título.

UFPB/CCEN

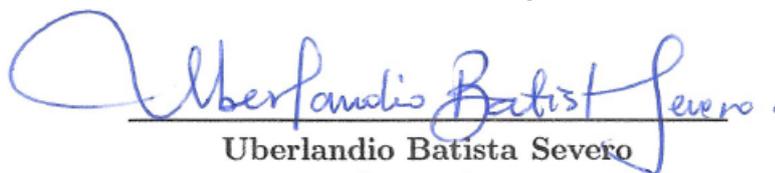
CDU 511

Raphael Reichmann Rolim

Preâmbulos Aritméticos: da função Zeta às fórmulas explícitas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como exigência para o título de Licenciatura em Matemática, pela Universidade Federal da Paraíba – UFPB, Campus João Pessoa.

Trabalho aprovado. João Pessoa – PB, 07 de Agosto de 2020:


Uberlandio Batista Severo

Orientador



Daniel Marinho Pellegrino

Convidado 1



Everaldo Souto de Medeiros

Convidado 2

João Pessoa – PB
Agosto 2020

A Fernando Cabral e Matheus Viana.

Agradecimentos

Agradeço.

Agradeço aos meus pais, cuja significância torna supérfluo o discurso.

Agradeço a Saline, por acompanhar-me com amor neste caminho.

Agradeço a Uberlandio pela participação ao longo destes anos em meu desenvolvimento, e pela porta que abriu ao incentivar a desejada produção deste trabalho um tanto quanto distinto das linhas de pesquisa mais estabelecidas no departamento.

Agradeço aos professores Daniel e Everaldo, que para minha felicidade aceitaram compor a banca avaliadora.

Agradeço a Edson, que forneceu documentos para a formatação e especialmente a Joaquim, que salvou-me tanto tempo crítico ao fornecer a programação já escrita, muito melhor do que a que constaria.

Agradeço à UFPB, pelas boas coisas que me proporcionou. Às más demorarei mais para agradecer. Agradeço desde todos os séculos cujo trabalho me educou nas matérias deste livro ao meu provedor de internet.

Finalmente, agradeço a mim por ter posto a idéia da obra em movimento, agora concrecionada e quase estacionando.

*“Segundo o nosso modo de ver, o número, em seu conjunto, é o Ser.”
(Platão em “Sofista”, 238 b.)*

*“Tu conhecerás, tanto quanto é possível a um mortal, que a Natureza é em tudo
semelhante a si mesma.”
(Versos áureos de Pitágoras)*

Resumo

O objetivo geral deste trabalho é iniciar a organização e exposição dos resultados fundamentais da teoria analítica dos números para a língua portuguesa. Discorreremos sobre a história da teoria contextualizada na história da matemática. Fazemos um levantamento de assuntos diversos importantes para a compreensão dos resultados. Analisamos brevemente a função Gamma e sua importância aritmética. Apresentamos a função Zeta e a conexão fundamental que estabelece entre os números naturais e primos, assim como sua avaliação nos inteiros e propriedades destes números. Discutiremos brevemente a localização e relevância de suas raízes. Definiremos uma série de Dirichlet, suas propriedades básicas e construções particulares a partir da Zeta. Mostraremos como a continuação analítica e teoremas tauberianos fornecem resultados como o Teorema dos Números Primos. Apresentaremos as teorias de Weierstrass e Hadamard sobre a representação de funções com fatorações explícitas de suas raízes. Finalizamos o trabalho apresentando as fórmulas explícitas da teoria dos números, as quais servem de orientação final a grande parte da teoria aqui desenvolvida.

Palavras-chave: Teoria analítica dos números. Função Zeta. Séries de Dirichlet. Números primos. Fórmulas explícitas.

Abstract

The main aim of this study is to begin the organization and presentation of the fundamental results of analytic number theory to the Portuguese language. I elaborate over the history of the theory in the context of the history of mathematics. Several subjects important to the understanding of the results are gathered. The Gamma function and its arithmetical importance are briefly analyzed. The Zeta function and the fundamental connection it establishes between natural and prime numbers is presented, as well as its evaluation on the integers and properties of these numbers. The location and relevance of its roots are briefly discussed. Dirichlet series are defined, its basic properties and particular constructions are studied using the Zeta function. How analytic continuation and tauberian theorems provide results such as the Prime Number Theorem is shown. I will present the theories of Weierstrass and Hadamard on the representation of functions with explicit factors of their roots. I conclude the work by presenting the explicit formulae of number theory, which serve as final guidance for most of the theory here developed.

Keywords: Analytic number theory. Zeta function. Dirichlet series. Prime numbers. Explicit formulae.

Sumário

| | Página |
|-------|--|
| | DA NOTAÇÃO USADA NESTE TRABALHO 19 |
| | PROBLEMÁTICA 23 |
| | INTRODUÇÃO 25 |
| 1 | BREVES CONSIDERAÇÕES HISTÓRICAS 31 |
| 2 | PRELIMINARES 39 |
| 2.1 | O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA 39 |
| 2.2 | AS FUNÇÕES DE TCHEBYCHEFF E A FUNÇÃO CONTAGEM DE PRIMOS 41 |
| 2.3 | A TRANSFORMADA DE MELLIN 42 |
| 2.3.1 | Exemplos 44 |
| 2.4 | A FUNÇÃO DE MÖBIUS 45 |
| 2.4.1 | A Inversão de Möbius 47 |
| 2.5 | A SOMA DE POISSON 50 |
| 2.5.1 | A função Teta de Jacobi 51 |
| 2.6 | SOMAÇÃO POR PARTES 51 |
| 2.7 | A INTEGRAL LOGARÍTMICA 54 |
| 2.7.1 | Sua transformada de Mellin 55 |
| 3 | A FUNÇÃO GAMMA 57 |
| 3.1 | RESULTADOS ACERCA DOS NÚMEROS PRIMOS 61 |
| 3.1.1 | Breve justificativa dos métodos analíticos 64 |
| 3.2 | CRITÉRIOS DE PRIMALIDADE ATRAVÉS DO FATORIAL 65 |
| 4 | A FUNÇÃO ZETA 67 |
| 4.1 | AVALIAÇÃO DA FUNÇÃO NOS INTEIROS 70 |
| 4.1.1 | Avaliação da função nos naturais pares 70 |
| 4.1.2 | Avaliação da função nos inteiros negativos 72 |
| 4.1.3 | Expressões combinatórias dependentes destes valores 74 |
| 4.2 | OS ZEROS DA FUNÇÃO ZETA 77 |
| 4.2.1 | A Hipótese de Riemann 77 |
| 4.2.2 | O significado da Hipótese 78 |
| 4.2.3 | Da inexistência de raízes em $Re(s) \geq 1$ 79 |
| 4.3 | TEOREMAS DA UNIVERSALIDADE E INDEPENDÊNCIA DIFERENCIAL 80 |
| 5 | SÉRIES DE DIRICHLET 83 |

| | | |
|--------|---|-----|
| 5.1 | ALGUMAS PROPRIEDADES DESTAS SÉRIES | 83 |
| 5.1.1 | Unicidade das séries de Dirichlet | 83 |
| 5.1.2 | Soma, produto e potências de séries de Dirichlet | 84 |
| 5.1.3 | Exponencial de uma série de Dirichlet | 84 |
| 5.1.4 | Logaritmo de uma série de Dirichlet | 85 |
| 5.1.5 | Caracterização dos primos através da exponenciação | 87 |
| 5.1.6 | Expressões aritméticas implicadas | 87 |
| 5.1.7 | Produto de Euler para séries de Dirichlet multiplicativas | 89 |
| 5.1.8 | Séries de Dirichlet como transformações de Mellin | 90 |
| 5.2 | CONSTRUÇÃO DE ALGUMAS SÉRIES DE DIRICHLET A PARTIR DA FUNÇÃO ZETA | 92 |
| 5.2.1 | Exemplo 1 | 93 |
| 5.2.2 | Exemplo 2 | 93 |
| 5.2.3 | Exemplo 3 | 93 |
| 5.2.4 | Exemplo 4 | 94 |
| 5.2.5 | Exemplo 5 | 95 |
| 5.2.6 | Exemplo 6 | 95 |
| 5.2.7 | Exemplo 7 | 96 |
| 5.2.8 | Exemplo 8 | 97 |
| 5.2.9 | Exemplo 9 | 98 |
| 5.2.10 | Exemplo 10 | 98 |
| 5.2.11 | Exemplo 11 | 98 |
| 5.2.12 | Exemplo 12 | 99 |
| 5.2.13 | Exemplo 13 | 102 |
| 6 | DA CONTINUAÇÃO ANALÍTICA DE FUNÇÕES E TEOREMAS TAUBERIANOS | 105 |
| 6.1 | SOMAS DE CESÀRO | 107 |
| 6.1.1 | Aplicação do método para a teoria das séries de Fourier | 109 |
| 6.2 | SOMAS DE ABEL | 110 |
| 6.3 | TEOREMAS TAUBERIANOS | 111 |
| 6.4 | CONTINUAÇÃO ANALÍTICA DA FUNÇÃO ZETA | 114 |
| 6.4.1 | O comportamento de $\zeta(s)$ quando $s \rightarrow 1^+$ | 116 |
| 6.4.2 | A equação funcional | 117 |
| 6.4.3 | Demonstração do Teorema dos Números Primos | 120 |
| | Aplicação a $M(x)$ | 120 |
| | Aplicação a $J(x)$ | 121 |
| | Aplicação a $\psi(x)$ | 122 |
| 7 | DA REPRESENTAÇÃO POR RAÍZES EXPLÍCITAS | 125 |
| 7.1 | ALGUNS EXEMPLOS CONSTRUTÍVEIS | 125 |
| 7.2 | TEOREMA DA FATORAÇÃO DE WEIERSTRASS | 128 |
| 7.3 | DA REPRESENTAÇÃO DE FUNÇÕES INTEGRAIS DE ORDEM FINITA | 129 |
| 7.4 | A REPRESENTAÇÃO DA FUNÇÃO ZETA | 132 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 8 | FÓRMULAS EXPLÍCITAS DA TEORIA DOS NÚMEROS . | 137 |
| 8.1 | A FUNÇÃO $J(x)$ | 137 |
| 8.1.1 | A função $\pi(x)$ | 139 |
| 8.2 | A FUNÇÃO $\psi(x)$ | 139 |
| 8.3 | APLICAÇÕES DO CÁLCULO DE RESÍDUOS | 140 |
| 8.3.1 | A função $M(x)$ | 141 |
| 8.3.2 | A soma $\Phi(x)$ | 141 |
| 8.3.3 | A soma $L(x)$ | 141 |
| 8.3.4 | Da quantidade $Q(x)$ | 142 |
| | CONCLUSÕES | 143 |
| | REFERÊNCIAS | 145 |

DA NOTAÇÃO USADA NESTE TRABALHO

Estabelecemos aqui notações e algumas definições úteis que valerão por todo este trabalho.

As letras $n, k \dots$ sempre denotarão números naturais. O conjunto \mathbb{N} geralmente partirá de 1, a menos que contextual e explicitamente afirmado o contrário. A letra p sempre denotará um número primo, isto é, um número que tenha precisamente dois divisores. Escrever $k|n$ significa que k é divisor de n , que é o mesmo que afirmar a existência de um natural c tal que $kc = n$. Caso contrário, escreve-se $k \nmid n$. Já x representará uma variável contínua, em \mathbb{R} , e z ou s um número complexo, cujas partes reais poderão ser escritas como σ .

Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, g positiva. Quando g **limita** o crescimento de f , ou mais precisamente: quando existe alguma constante $c \in \mathbb{R}(c \geq 0)$ tal que para $x > x_0$

$$|f(x)| \leq c \cdot g(x),$$

escrevemos

$$f(x) = O(g(x)).$$

Chamamos esta notação de “‘O’ grande”, assim como difundido por Landau. Quando a constante c puder ser arbitrariamente pequena, isto é, valer

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0,$$

escrevemos

$$f = o(g),$$

e a chamamos de “‘o’ pequeno”. Neste caso o crescimento de g **supera bastante** o de f . Repare que $f = o(g)$ implica $f = O(g)$.¹

Quando f e g têm a **mesma ordem de grandeza**, isto é, existem constantes positivas A_1, A_2 tais que

$$A_1g(x) \leq f(x) \leq A_2g(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ ou a partir de algum x_0 , escrevemos

$$f \asymp g.$$

¹ Também podemos usar um limite para algum ponto $a \in \mathbb{R}$, ao invés do infinito, usualmente para compreender o comportamento de uma função ao redor de uma singularidade.

Quando f , g tem proporcionalmente o mesmo crescimento, ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 1,$$

dizemos f é **assintótica** à g , e simbolizamos

$$f \sim g.$$

É importante ressaltar que mesmo crescimento proporcional ou relativo não implica mesmo crescimento em diferença ou absoluto: pode dar-se $f \sim g$ até mesmo quando $|f - g| \rightarrow \infty$.²

Define-se a **densidade natural** ou **aritmética** de um conjunto $J \subset \mathbb{N}$ como o número real $\alpha \in [0, 1]$, quando existir, pelo limite

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_J(n)}{n},$$

onde $Q_J(n)$ é a quantidade de elementos de J menores ou iguais a n . Note que $Q_{\mathbb{N}}(n) = n$. Assim a densidade natural dos números naturais será 1, dos múltiplos de 2 será 1/2, dos de 3 será 1/3, fornecendo uma noção de tamanho destes conjuntos distinta da usual cardinalidade ou bijeção.³

A função $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{N}$ denotada por $f(x) = \lfloor x \rfloor$ é conhecida como a **parte inteira** de x , e dá o maior número natural menor que x .

Chamamos de **função aritmética** qualquer seqüência $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$. Normalmente a designação só é dada quando a seqüência codifica alguma informação aritmética ou relativa aos números naturais, como as funções dadas a seguir, as quais chamamos *notáveis*.

A **função de Möbius** ou Moebius caracteriza um número natural n pela presença de divisores quadrados perfeitos ou pela paridade da quantidade dos primos distintos nos quais se fatora:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n=1; \\ 1, & \text{se } n \text{ é produto de um número par de primos distintos;} \\ -1, & \text{se } n \text{ é produto de um número ímpar de primos distintos;} \\ 0, & \text{se } n \text{ é divisível por quadrados perfeitos maiores que 1.} \end{cases}$$

A **função de Mertens** é definida para todo $x \in \mathbb{R}^+$, como a soma parcial da função de Möbius:

$$M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n),$$

² Um exemplo simples seria tomar $f(x) = x$ e $g(x) = x + \ln x$, ou quaisquer polinômios com mesmo coeficiente principal e coeficientes distintos para algum termo de grau menor, a menos de grau zero.

³ Algumas densidades excedem-se em apelo estético; vejamos o caso da densidade dos números naturais livres de quadrados, isto é, sem qualquer divisor quadrado perfeito: $6/\pi^2$ (HARDY e WRIGHT, 2008, p. 355).

com $M(x) = 0$ para $0 < x < 1$.

A **função totiente de Euler**⁴ conta a quantidade de números menores e coprimos com o valor n dado:

$$\varphi(n) = \#\{k \in \mathbb{N} : k < n, \text{mdc}(k, n) = 1\} = n \cdot \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

a última igualdade estabelecida desde Euler.

A **quantidade de divisores** de n é escrita como

$$d(n) = \#\{k \in \mathbb{N} : k|n\}.$$

A **soma dos divisores** de n é escrita como

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d.$$

Mais geralmente, escrevemos

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k,$$

com $\sigma_0(n) = d(n)$ e $\sigma_1(n) = \sigma(n)$.

As **funções ômega** $\Omega(n)$ e $\omega(n)$ contam a quantidade de fatores primos do número n , a primeira respeitando a multiplicidade e a segunda ignorando-a, contando apenas os primos distintos. Assim $\Omega(12) = 3$ e $\omega(12) = 2$.

A **função de Liouville** nos indica a paridade da quantidade total de fatores primos de n :

$$\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}.$$

Para números n livres de quadrados, vale $\lambda(n) = \mu(n)$.

A **função de von Mangoldt** é definida como:

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln(P), & \text{se há } m \in \mathbb{N} \text{ tal que } n = P^m, P \text{ primo;} \\ 0, & \text{noutros casos.} \end{cases}$$

Os chamados **números harmônicos** são a soma dos recíprocos dos naturais até dada quantidade:

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

⁴ Assim nomeada por James Joseph Sylvester (1814-1897).

A **função contagem de primos**, definida para $n \in \mathbb{N}$ ou $x \in \mathbb{R}$, nos dá o número de primos abaixo da ou igual à dada quantidade, e a denotamos por

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1.$$

A **função contagem de múltiplos de n primos** menores ou iguais à dada quantidade será denotada por

$$\pi_n(x) = \sum_{p_1 \cdots p_n \leq x} 1,$$

onde, neste caso, os índices k de p_k nos servem apenas para nos indicar um total de n primos, distintos ou não, ignorando-se diferenças de ordem.

Importantes funções para o estudo dos primos são a **primeira** e **segunda funções de Tchebycheff**, definidas respectivamente como

$$\vartheta(n) = \sum_{p \leq n} \ln p \quad e$$
$$\psi(n) = \sum_{p^k \leq n} \ln p, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Por último, lembramos ao leitor, que supomos já estar familiarizado com as constantes π e e , da definição usual da constante de Euler-Mascheroni γ

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} H_n - \ln(n).$$

PROBLEMÁTICA

O pitagorismo grego estabeleceu-se como um dos principais berços da filosofia e matemática ocidentais através das eras, de onde acredita-se que os próprios termos se originam - *Mathesis*, instrução; *philosophia*, amor à sabedoria. Suas considerações, de amplo espectro, buscam pela universalidade da compreensão do mundo, atingida mais profundamente pela contemplação do número e sua manifestação como a harmonia mesma em todas as ordens da realidade, razão de sua inteligibilidade⁵. Ante a tensão entre as formas primeiras - logoi -, entre a Unidade e a Ordem - cosmos -, observam-se os princípios de todos os seres limitados e ilimitados e a gênese de seu movimento.

Em conjunto com o uso técnico - de utilidade prática - dos números, vemos no pitagorismo o mais antigo indício de uma organização lógica e demonstrativa de asserções de cunho matemático, tomadas sinteticamente, cujo impacto cultural em toda civilização grega é imensurável, possivelmente o principal catalisador histórico do processo de construção do mito grego da demonstração. É neste contexto que surge o solo fértil ao desenvolvimento da lógica, da descoberta e estudo sistemático das proporções incomensuráveis e tantas outras investigações, que propiciaram o surgimento de uma literatura rica, quase que totalmente perdida, cujo exemplo mais emblemático é a sintetização de Euclides em “Os Elementos”.

Da era moderna à contemporânea, constatamos um desenvolvimento e riqueza crescentes da matemática, numa proporção nunca antes vista; não nos retenhamos em pronunciarmos participantes do auge histórico desta ciência, que, de tão grande que tornou-se, não pode, nem mesmo nos resultados fundamentais, ser totalmente abarcada por um indivíduo. É certo que, em sua imensidão, distancia-se de seu significado histórico, processo no qual participa principalmente sua evolução e fortalecimento, mas também sua decadência.

Os números naturais são, em princípio, as coisas mais simples que conhecemos; no entanto, a complexidade de suas proporções caminha racional e imperativamente para o caos incognoscível. Representam, pois, um território inesgotável para o deleite de nossa curiosidade, na fronteira entre o caos e a ordem. Perguntas tão simples e belas são por eles nos sugeridas, e as perguntamos. As respostas, porém, são elusivas; o quão freqüentemente terminamos perplexos e de mão vazias, mesmo equipados das mais poderosas técnicas desenvolvidas?

Como estudante de matemática, tomei para meus estudos do tema quase que unicamente livros da literatura estrangeira, como os maravilhosos livros de Hardy e co-autorias, e os de Titchmarsh e Edwards. Só muito adiantado em minhas pesquisas vim a conhecer, para minha benesse, dois livros nacionais sobre temas relacionados: “Teoria dos números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro” de Martinez, Moreira, Saldanha e Tengan; e “Números primos: Velhos mistérios e novos recordes”, de Ribenboim. Excelentes livros, não tratam focalmente, porém, da teoria dos números analítica. O mais próximo que o autor encontrou nesta direção na literatura foi o “apêndice A” do primeiro destes, escrito por Jorge Aarão, e citações de resultados no segundo. Um

⁵ Vejamos alguns fragmentos atribuídos a Filolau: “O ser, que pertence ao mundo (cosmos), é um composto harmônico de elementos ilimitados e elementos limitados: é assim tanto do mundo (cosmos) como um todo, como de todas as coisas que ele encerra.” Ainda: “E todas as coisas, as que pelo menos são conhecidas, tem número; pois não é possível que uma coisa qualquer seja ou pensada ou conhecida sem o número.” (SANTOS, 2000, p. 85 e 86)

levantamento na internet mostra um cenário de pouca produção neste sentido: os poucos livros sobre teoria dos números que o autor encontrou não tratam de aprofundamentos da análise sobre funções aritméticas.

Neste âmbito, o autor pôs-se a principiar um projeto de divulgação dos avanços e resultados desta área tão bela para dentro do território nacional e para todos os outros falantes da língua portuguesa, colocando como partida a pergunta central: **o que é a função Zeta e quais são suas aplicações dentro da teoria analítica dos números?**

INTRODUÇÃO

Este projeto originou-se de uma busca por compreender e destrinchar o artigo de 1859 de Riemann, “Ueber die Anzahl...”, alargando-se até abarcar um levantamento parcial da literatura da teoria analítica dos números, que aqui apresentamos de forma bastante compacta. O artigo paradigmático de Riemann permaneceu, até a conclusão deste projeto, a essência de sua estrutura.

No **capítulo 1**, buscamos contextualizar o leitor historicamente acerca do desenvolvimento milenar desta ciência, do pouco que nos resta dos primórdios até o presente apogeu. Passearemos levemente pela história da aritmética e ciências relacionadas até o desenvolvimento das teorias das quais o trabalho efetivamente trata, que apresentaremos com mais pormenores.

No **capítulo 2**, buscamos oferecer um apanhado de assuntos que, relevantes em si mesmos, nos oferecem resultados úteis para o restante do livro. Redigido com esta finalidade, não requer, portanto, leitura linear, e pode mesmo ser ignorado, se assim se fizer bom ao leitor. Apresentamos nele o Teorema Fundamental da Aritmética; as funções de Tchebycheff; a transformada de Mellin e sua inversa, bem como sua conexão com as transformadas de Fourier e Laplace; a função de Möbius com seus teoremas de inversão; a soma de Poisson; a somação por partes e a integral logarítmica.

No **capítulo 3**, introduziremos a função Gamma como uma integral de Euler de segundo tipo, e provaremos que interpola o fatorial nos naturais. Estudaremos ainda várias simetrias e equações funcionais que a função Gamma respeita, área esta cuja pesquisa é viva e produtiva. Neste capítulo também estudaremos como o fatorial é, dentre todas as funções aritméticas notáveis, o melhor candidato para oferecer resultados assintóticos sobre números primos, fato notado e aproveitado destacadamente por Tchebycheff circa 1850, e desenvolvido por muitos outros décadas mais tarde, como Mertens. Inúmeros resultados assintóticos da teoria dos números primos são obtidos por vias elementares na associação entre a fatoração do fatorial em elementos primos e a fórmula de Stirling para seu crescimento assintótico, exemplificados neste trabalho pela obtenção de

$$\sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p} = \ln n + O(1).$$

Discutimos as limitações dos resultados obtidos⁶ por estes métodos e a necessidade de um caminho mais sólido e estruturado para a obtenção de resultados mais precisos, como o Teorema dos Números Primos:

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\ln(n)}.$$

Como veremos mais adiante, o estudo da função Zeta fornece precisamente estas vias, de forma direta, elegante e geral. Mais que isso, fornece resultados sobre um sem números de assintóticas de funções aritméticas notáveis, sem se limitar a isto. Argumentamos da

⁶ Na verdade, a menos de uma constante, vale $o(1)$ no lugar de $O(1)$ no resultado acima, fato equivalente ao Teorema dos Números Primos.

importância dos métodos analíticos no estudo da função Zeta, e sua superioridade sobre os métodos anteriores. Finalmente, apresentamos sucintamente o uso do fatorial para critérios de primalidade.

No **capítulo 4**, definimos a função Zeta para $Re(s) > 1$ como a série de Dirichlet

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

e investigamos algumas de suas propriedades, provando o célebre produto de Euler para a função absolutamente convergente em $Re(s) > 1$,

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}},$$

onde o produto se estende sobre primos ordenados em ordem qualquer. A igualdade entre estas duas representações é o coração da teoria inteira, e reflete o Teorema Fundamental da Aritmética em uma expressão analítica. Em seguida, partimos para a avaliação de valores particulares da função Zeta, nomeadamente nos inteiros, estudo este que fornece resultados que falam por si só. Em particular, mostramos a solução do problema de Basel como Euler primeiro a apresentou. Discutimos também neste capítulo a célebre - ou infame - hipótese de Riemann, dissecando seu significado e que tipo de consequências ela implica. Também provamos a inexistência de raízes da função em $Re(s) \geq 1$, que acaba por implicar, com sua equação funcional, também na inexistência de raízes não reais em $Re(s) \leq 0$. Por último, citamos dois teoremas bastante dissociados do espírito deste trabalho, mas que acabam por satisfazer os matematicamente curiosos: os teoremas da universalidade e da independência diferencial.

No **capítulo 5**, introduzimos o conceito de série de Dirichlet, provando resultados básicos sobre a soma, produto e potência destas séries. Também apresentamos a forma geral de sua exponenciação e logaritmo naturais, que não conhecemos na literatura. Assim como a multiplicação de duas séries de Dirichlet de coeficientes $f(n)$ e $g(n)$ geram coeficientes conhecidos como convoluções de Dirichlet

$$(f * g) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{a*b=n} f(a)g(b),$$

a exponenciação e logaritmo naturais de séries de Dirichlet geram coeficientes da forma⁷

$$\sum_{a_1^{b_1} \dots a_k^{b_k} = n} \frac{\alpha_{a_1}^{b_1}}{b_1!} \cdot \dots \cdot \frac{\alpha_{a_k}^{b_k}}{b_k!}$$

e

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{a_1 \dots a_k = n} \beta_{a_1} \cdot \dots \cdot \beta_{a_k},$$

⁷ É necessário recorrer ao capítulo 5 para compreender os índices destas somas.

respectivamente. Notamos como os primos podem ser unicamente caracterizados como invariantes da exponenciação natural destas séries. Apresentamos o produto de Euler para séries de Dirichlet cujos coeficientes são funções multiplicativas, total ou parcialmente. Por fim, mostramos como, no domínio de convergência, estas séries podem ser compreendidas como transformações de Mellin da soma parcial de seus coeficientes. A segunda seção deste capítulo é uma das partes mais importantes deste trabalho, onde demonstramos copiosamente a importância do estudo da função Zeta ao apresentar 13 exemplos de construções de séries de Dirichlet a partir de manipulações da função Zeta, dentre elas muitas cujos coeficientes são funções aritméticas notáveis: os exemplos 8 e 10 fornecem a conexão mais importante para o estudo dos números primos:

$$\ln(\zeta(s)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(ns)}{n}, \quad (\text{Exemplo 8})$$

onde $P(s)$ é a série de Dirichlet conhecida como função Zeta Prima, cujos coeficientes são indicadores de números primos. No exemplo 12, discutimos a representação das séries de Dirichlet compostas apenas por números de k fatores primos a partir de manipulações da função Zeta Prima e demonstramos o formato geral destas representações, *talvez a maior contribuição deste trabalho para a teoria, em conjunto com as equações (5.2) e (5.3)*. De fato, o resultado obtido implica, em particular, que dado qualquer subconjunto $A \subseteq \mathbb{N}^*$, a série de Dirichlet $A(s)$ cujos coeficientes indicam pertencimento a A pode ser usada para construir a série $A_k(s)$ cujos coeficientes são indicadores de números passíveis de fatoração em k números pertencentes a A , respeitando a forma

$$A_k(s) = \sum_{\substack{j_1 g_1 + \dots + j_t g_t = n \\ g_1 < \dots < g_t}} A^{j_1}(g_1 s) \cdot \dots \cdot A^{j_t}(g_t s) \cdot \frac{1}{g_1^{j_1} j_1! \cdot \dots \cdot g_t^{j_t} j_t!},$$

e fornecendo uma conexão com a teoria de partições.

No **capítulo 6**, apresentaremos a idéia geral de uma continuação analítica e como a analiticidade justifica a concordância da atribuição de valores que tantos métodos distintos fazem às séries divergentes. Exemplificamos através de dois dos métodos de somação mais difundidos, as somas de Cesàro e Abel. Em seguida, apresentamos os teoremas e condições tauberianos para, dada a convergência de uma série com um método mais forte, deduzir sua convergência por um método mais fraco. São citados o primeiro e segundo teoremas de Tauber, e em seguida o generalíssimo teorema de Wiener. Provamos o teorema tauberiano de Newman, que aplicamos posteriormente na prova do Teorema dos Números Primos. Finalmente, obtemos a continuação meromórfica da função Zeta para todo o plano, a menos de seu único polo em $s = 1$. Estudamos o comportamento da função ao redor do polo e provamos a equação funcional pelo mesmo método originalmente empregado por Riemann, aproveitando-se das propriedades da função Teta de Jacobi. Finalizamos demonstrando o Teorema dos Números Primos. Neste capítulo, deduzimos a estimativa

$$\sum_{n=1}^k \frac{1}{n^s} = \zeta(s) + \frac{1}{1-s} \cdot \frac{1}{(k+1)^{s-1}} + o(1),$$

válida para $Re(s) > 0$, $s \neq 1$, que não conhecíamos na literatura⁸. $\zeta(s)$ em $0 < Re(s) \leq 1$ deve ser compreendida como a continuação analítica da série de Dirichlet que a define em $Re(s) > 1$. Este resultado fornece uma excelente aproximação do comportamento das somas parciais $\sum_{n=1}^k 1/n^s$ nesta região; por exemplo, mostra que para $Re(s) = 1$, $s \neq 1$, a soma tende a um ciclo limite.

No **capítulo 7**, buscamos apresentar superficialmente a teoria de representações de funções com raízes explícitas, em analogia com a fatoração obtida para polinômios. Exemplificamos a teoria através da construção de representações históricas das funções Gamma e Seno, que fornecem conexões com os valores particulares da função Zeta nos inteiros. Em seguida, motivamos e apresentamos o Teorema da Fatoração de Weierstrass, um teorema existencial para funções analíticas que permite sua representação como um produtório cujos termos explicitam suas raízes, a custo da multiplicação por uma função analítica sem raízes. Em seguida, acompanhamos a análise de Hadamard acerca das funções integrais de ordem finita para concluir um teorema muito mais refinado, sagrado como Teorema da Fatoração de Hadamard. Diferentemente do teorema de Weierstrass, é dada à função sem raízes envolvida um formato muito mais preciso: forçosamente a exponenciação natural de um polinômio complexo. Após a conclusão de que

$$s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

é uma função integral de ordem 1, a teoria é aplicada para concluir-se a representação da função Zeta com raízes não triviais explícitas na forma de um produtório absolutamente convergente para todo $s \in \mathbb{C}$:

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{2(s-1)\Gamma(s/2+1)} \prod_{\rho^+} \left[\left(1 - \frac{s}{\rho^+}\right) \left(1 - \frac{s}{1-\rho^+}\right) \right],$$

onde os ρ^+ são as raízes não triviais da função cuja parte imaginária é positiva, ordenadas pela magnitude desta.

O **capítulo 8** coroa o trabalho, onde aplicamos boa parte da teoria desenvolvida para anunciar, oferecendo algumas noções das demonstrações, as fórmulas explícitas da teoria dos números, cujos dois exemplos mais famosos são a *contagem ponderada de primos*, de Riemann,

$$\begin{aligned} J(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(x^{1/n})}{n} \\ &= Li(x) - \sum_{\rho^+} \left[Li(x^{\rho^+}) + Li(x^{1-\rho^+}) \right] + \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)\ln t} - \ln 2, \end{aligned}$$

para x distinto de uma potência de um primo, de outra forma valendo a expressão à direita a média dos limites laterais nos pontos de descontinuidade; e a *segunda função de Tchebycheff*

⁸ Após a defesa deste trabalho, o autor encontrou uma referência.

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \ln(MMC(1, \dots, \lfloor x \rfloor)) \\ &= x - \sum_{\rho^+} \left[\frac{x^{\rho^+}}{\rho^+} + \frac{x^{1-\rho^+}}{1-\rho^+} \right] - \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) - \ln(2\pi)\end{aligned}$$

nas mesmas condições da fórmula anterior. Além destes dois exemplos provados nos anos 1890 por von Mangoldt, equipado com a teoria de Hadamard e inspirado pela publicação extremamente sintética e carente de provas de Riemann décadas antes, fornecemos algumas fórmulas explícitas para o somatório de funções aritméticas notáveis obtidos pelo cálculo de resíduos, tal como em Baillie (2011); nem todas, pelo que sabe o autor, atualmente provadas.

1 BREVES CONSIDERAÇÕES HISTÓRICAS

A inteligibilidade do mundo e a observação das coisas enquanto distintas requer necessariamente algum conceito rudimentar de número, ainda que inconsciente. É possível constatar nos poucos fragmentos do passado restantes o quanto as civilizações do mundo antigo valorizaram a ciência aritmética e a avançaram, além de desenvolverem a geometria e álgebra.

Temos por certo, devido às evidências sobreviventes, que os gregos foram os primeiros a atingir um patamar da explicitação lógica e formal do estudo da harmonia, ao ponto de formularem argumentos apodícticos acerca de fatos isolados em número suficiente para que grandes sistematizações se tornassem possíveis. “Os Elementos”, de Euclides, é uma das grandes conquistas dessa tendência¹, que no entanto foi muito mais abrangente que este livro e quase que totalmente perdida (como fonte direta, é claro; muitos dos resultados desta era foram transportados pelas gerações); deste período data também o célebre crivo de Eratóstenes. A descoberta das proporções incomensuráveis pode ser colocada como uma das maiores crises intelectuais da humanidade, que permitiu grande crescimento e florescimento, até o ponto da teoria de Eudoxo e o estabelecimento lógico da ordem sobre o conjunto dos incomensuráveis, sobre o qual os cortes de Dedekind, mais de dois mil anos posterior, representam pequeno avanço. O quanto não deve ter explorado Arquimedes, que, como sabemos, aplicava fluentemente processos de exaustão e calculava a proporção do arco de círculo pelo diâmetro com precisão nunca antes vista? Curvemo-nos ante os esforços do passado, o auge de nossa era é seu auge e fruto do trabalho das gerações.

Definidos e estudados pelos gregos há mais de dois mil e trezentos anos, os números primos permanecem um dos exemplos de contraste abismal entre simplicidade e caos: definidos clara e simplesmente, no entanto persistentemente avessos à investigação sistemática e compreensão como um todo. A sistematização de Euclides é nossa melhor fonte da compreensão que tinha-se destes números no passado. N’Os Elementos, vemos uma série de provas e caracterizações deles, e já se nos torna claro que os compreendiam como as simplicidades irreduzíveis aos quais se reduzem em medida (divisão) todos os outros números (naturais positivos), e que, em sua demonstrada infinitude, acabavam por formar uma totalidade bastante complexa. Não é conhecida pelo autor qualquer caracterização desta totalidade para além do Teorema Fundamental da Aritmética até os tempos de Euler.

Comentários de autores indianos do século XVI, como Sankara Variar, indicam o conhecimento por Madhava de Sangamagrama (c. 1340- c. 1425) da expressão de funções trigonométricas como resultados de séries de potências traduzidas para nossa notação como

$$\theta = \tan(\theta) - \frac{\tan^3(\theta)}{3} + \frac{\tan^5(\theta)}{5} - \frac{\tan^7(\theta)}{7} + \dots$$

¹ Cujas investigações ainda sugerem problemas até hoje não resolvidos, após quase dois milênios e meio. Nas proposições 35 e 36 do livro IX, Euclides prova uma igualdade entre razões equivalente à expressão fechada para a soma parcial da série geométrica e prova que se uma progressão de razão dois, de 1 a 2^n , soma um primo p , $2^n p$ será igual a soma dos divisores menores que ele, ou seja, será perfeito (DICKSON, 1919, p.3). Euler provou que todos os números perfeitos pares hão de ser dessa forma; não sabemos, no entanto, da existência ou inexistência de números perfeitos ímpares.

por meio da qual se fazia sabido que²

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \cdots$$

além de séries equivalentes às que conhecemos para a função seno, representando *jivas*, mostrando a exuberância da matemática proveniente da Escola de Kerala, quase mil anos após Aryabhata. Por séculos o mar Índico vivenciou as maiores transações comerciais e culturais do mundo até então, conectando os mundos árabe, indiano e chinês; em conjunto as ciências destes países floresceram. As matemáticas árabe e indiana seriam carregadas para a Europa, como por Fibonacci após viver entre os árabes africanos, e comporiam um papel decisivo no renascimento europeu.

A matemática, como as outras ciências, passaria a ser continuamente revolucionada em solo europeu ao longo dos séculos seguintes. Dentre todas as revoluções, como deve ser sabido ao leitor, a mais influente foi o desenvolvimento do cálculo infinitesimal por Newton e Leibniz. Não foi à toa, porém, que, quando o cálculo foi descoberto, o foi simultaneamente por dois grandes matemáticos: o campo estava arado e fértil. Tantos foram os envolvidos no desenvolvimento das matemáticas nesta era que não nos delongaremos para neste espaço fazer-lhes justiça. Nos restringiremos a citar o interesse pelos primos por Descartes e Mersenne, e os tantos resultados posteriormente anunciados por Fermat. Citamos também a descoberta dos polinômios de Faulhaber e muitos casos iniciais das formas fechadas das somas das potências dos naturais pelo próprio Faulhaber no século XVII. A forma final publicada destas foi publicada em 1713, no póstumo *Ars Conjectandi* de Jacob Bernoulli, que escrevemos como

$$\sum_{k=1}^n k^j = \sum_{k=0}^j B_k \frac{j!}{k!(j-k)!} n^{j-k+1},$$

sendo B_k os chamados números de Bernoulli

$$B_k = \sum_{n=0}^k \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} \frac{(m+1)^k}{n+1},$$

onde $B_1 = +1/2$.

Após os gregos, o estudo dos primos só veio a encontrar progresso a passos largos com a definição e estudo da função Zeta ζ por Euler para valores inteiros, nos anos 30 do século XVIII:

$$\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$$

Em 1650 Pietro Mengoli havia proposto o que se tornaria o célebre problema de Basel, solucionado pela primeira vez por Leonhard Euler em 1734.

² Hoje não mais conhecida meramente como série de Leibniz, mas de Leibniz-Madhava. Madhava con-feriu ainda um termo de erro aproximado para a série, de $(-1)^n(n^2 + 1)/(4n^3 + 5n)$.

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Seu método permitia muito naturalmente a solução para todos os naturais pares, dependentes da representação da função seno por meio da explicitação de seus zeros em um produto, cuja demonstração formal de convergência para a função seno, aparentemente, o eludiu por toda vida (em 1742 encontra uma prova independente para o problema de Basel). É creditada a Weierstrass a primeira das muitas provas da representação de Euler, aproximadamente 100 anos depois, quando este começa a desenvolver a teoria da representação de funções analíticas por explicitação de seus zeros.

O virtuosismo de Euler, aliado com a beleza substancial da matéria de estudo, levou-o a desenvolver muitíssimos métodos para a valoração de séries divergentes, relevantes até os dias de hoje. Em Euler (1760) podemos ver com que graça encontra estes valores para tantas séries, inclusive a série divergente que a tantos havia derrotado, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n!$. Sua agudeza é evidenciada no tratamento das séries divergentes $\zeta(-n)$, $n > 0$. Ainda em pleno século XVIII, tão prolífico, conjectura corretamente (EULER, 1768) a equação funcional da função Eta,

$$\frac{\eta(1-n)}{\eta(n)} = \frac{-(n-1)!(2^n-1)}{(2^{n-1}-1)\pi^n} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right),$$

da qual a equação funcional da Zeta pode ser encontrada. Testa-a para valores particulares de n e mesmo $1/2$ ao redor de 1748, 100 anos antes dos trabalhos de Schlömilch e Riemann.

Desde a antigüidade, como nos atestam “*Os Elementos*”, de Euclides, sabia-se que todo número natural se fatora unicamente como um produto de números primos; Euler, no entanto, expressou essa relação numa forma analítica por volta de 1748, constatando que

$$\prod_p \frac{1}{1-p^{-n}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n},$$

para valores particulares de n (Euler, 1768). Estas considerações o levaram, neste mesmo ano, a concluir a divergência da soma dos recíprocos dos primos, cuja velocidade de crescimento era semelhante a $\ln \ln(n)$. Escreveu:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \dots = \ln \ln(\infty).$$

É possível, por métodos elementares, mostrar que $\sum_{p \leq x} 1/p - \ln \ln(x)$ é limitado. Um teorema mais profundo, de que esta diferença converge, é conhecido como o segundo teorema de Mertens e só foi atingido mais de 100 anos mais tarde. Apenas um detalhe acerca da velocidade com que o erro do limite acima tende a zero é equivalente ao Teorema dos Números Primos $\pi(x) \sim x/\ln(x)$; no entanto, este detalhe nunca foi superado por Mertens nem outros que, em sua época, estudavam a questão por meios elementares.

A gênese da busca pelo Teorema dos Números Primos pode ser considerada as conjecturas de Legendre de 1798 (ano em que publica seu seminal “*Essai sur le theorie des nombres*” que, em conjunto com o “*Disquisitiones Arithmeticae*” de Gauss, organizam

sistematicamente os resultados em teoria dos números de séculos) e 1808, de que a quantidade de primos abaixo de dado valor x era assintótica a uma função da forma

$$\frac{x}{\ln(x) - A(x)},$$

com $A(x) \sim c \approx 1$. A conjectura provinha do crivo de Legendre, baseado no crivo de Eratóstenes (RIBENBOIM, 2014, p. 155). Ao redor da mesma época o jovem Gauss, como o próprio recontou algumas décadas mais tarde, foi levado empiricamente a conjecturar que a densidade dos primos ao redor do ponto x era aproximadamente $1/\ln(x)$, e deu a excelente estimativa $\pi(x) \sim Li(x) = \int_0^x dx/\ln(x)$. Esta aproximação, depois também estudada por Dirichlet e provavelmente muitos outros, se mostraria a mais precisa. Os primeiros resultados palpáveis e conhecidos neste sentido só seriam alcançados 50 anos após estas conjecturas, pelos trabalhos do russo Tchebycheff a partir da função fatorial. Neste meio tempo, a pesquisa desta disciplina (e da matemática como um todo) cresceu ao ponto de ultrapassar qualquer tentativa de narrativa simples. Podemos citar os trabalhos de Legendre e Gauss; os resultados de Abel; as generalizações de Eisenstein; a volumosa e densa produção de Jacobi; as investigações de Möbius sobre a função que levaria seu nome.

Dirichlet, ao estudar intensamente suas séries epônimas, desenvolveu o produto de Euler para as séries com coeficientes multiplicativos e o aplicou àquelas (as funções L) cujos coeficientes hoje são conhecidos como caracteres de Dirichlet $\chi(n)$. Provando que $\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)/n \neq 0$ para caracteres não triviais, Dirichlet acaba por concluir (pela divergência destas séries em $s = 1$) a infinitude de primos presentes nas progressões aritméticas em h da forma $hk + l$, k e l primos entre si (RINCÓN, 2002, p. 5 e 6).

Em 1895-6, de la Vallée-Poussin viria a provar que a quantidade de primos presentes em progressões aritméticas em h da forma $hk + l$, k e l primos entre si, (DICKSON, 1919, p. 416) é assintótica a

$$\frac{1}{\varphi(k)} \frac{x}{\ln(x)},$$

resultado depois aprimorado por Landau. Antes disso, de 1848-1852, Tchebycheff encontrava os resultados mais fortes até então obtidos, determinando não só que $\pi(x) \asymp x/\ln(x)$ como constantes pouco abaixo e acima de 1 que satisfaziam a relação de grandeza. Seus resultados partem de uma análise do fatorial, e, principalmente, da fatoração prima deste, que acaba por revelar importantes informações sobre o “ritmo” dos primos e sua densidade. Seus trabalhos foram pioneiros, pela primeira vez aproximando-se das respostas às conjecturas da Gauss e Legendre e mostrando a falsidade de algumas hipóteses do último. Foram influentes e espalharam-se por toda Europa. Nas décadas seguintes, muitos matemáticos passaram a obter resultados novos sobre a densidade dos números primos. Dentre todos, o mais célebre foi Mertens ao redor de 1880 - este que viria a trabalhar até mesmo no aprimoramento dos resultados de de la Vallée-Poussin na virada do século. Hadamard, quando publicava seus trabalhos nos anos 1890, chegava a pronunciar Stieltjes como detentor de resultados muito mais fortes, como clamavam outros em sua época. De fato, Stieltjes contou à Hermite ter em mãos a demonstração de que $\sum_{n=1}^{\infty} (\mu(n)/n^{1/2+\epsilon})$ convergia para todo $\epsilon > 0$, resultado que nunca publicou e, se existiu, não foi encontrado. Todos os métodos utilizados para resultados deste gênero acabaram por encontrar barreiras intransponíveis e o Teorema dos Números primos permanecia inalcançado. Isso só se

alteraria quando um projeto de décadas realizou-se: a colocação das teorias de Riemann em solos apodícticos, analisando-se as raízes e polo da função Zeta $\zeta(s)$.

A compreensão da tradução de propriedades importantes dos polos e raízes das séries de Dirichlet e generalizações abriu campo para muitas conexões de grande beleza. Dentre todas, podemos citar sobretudo duas espécies de resultados: a **primeira**, localizada em uma linha de pesquisa separada das pretensões deste trabalho, nasce em conexão inicial com formas quadráticas e teorias de congruência de Gauss (já presente em seu *Disquisitiones* da juventude, em particular seus artigos 302 e 306 sobre a determinação do número de gêneros e classes de formas binárias de segundo grau propriamente positivas), na forma da Fórmula para Número de Classe de Dirichlet³. Após décadas, estas fórmulas tomam muitas faces, a exemplo do resultado

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} (s-1)\zeta_K(s) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2} \text{Reg}_K h_K}{w_K \sqrt{|D_K|}},$$

sendo K um corpo numérico algébrico, r_1 e r_2 o número de imersões (homomorfismos injetivos) reais e complexos de K , h_K o número de classe de K , Reg_K o regulador de K , w_K o número de raízes de unidade em K , D_K o discriminante da extensão K/\mathbb{Q} e

$$\zeta_K(s) = \sum_{I \subseteq O_K} \frac{1}{N_{K/\mathbb{Q}}(I)^s}$$

a função Zeta de Dedekind, sendo o índice estendido pelos anéis não nulos I do anel de inteiros O_K . Os denominadores podem ser entendidos como $N_{K/\mathbb{Q}}(I) = [O_K : I]$. A **segunda** - as fórmulas explícitas da teoria analítica dos números - descreve precisamente como representar as somas parciais dos coeficientes das séries de Dirichlet a partir de informações precisas dos polos destas funções. Este modelo de investigação foi inaugurado por Riemann em seu artigo de 1859.

Neste artigo, Riemann primeiramente considera a função Zeta $\zeta(s)$ pela série de Dirichlet de coeficientes 1, semelhantemente às considerações de Euler, mas para todo número complexo s com $\text{Re}(s) > 1$. Em seguida, encontra uma maneira de expressar $\zeta(s)$ dependente de uma função Teta já investigada por Jacobi. As propriedades de Teta descobertas por Jacobi levam rapidamente Riemann a encontrar uma continuação analítica convergente em todo plano complexo, a menos de um polo simples em $s = 1$, e que respeitava a equação funcional

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) = \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \pi^{-\frac{1-s}{2}} \zeta(1-s),$$

Estas considerações o levam, estando ciente dos trabalhos de Weierstrass da década anterior, que discorriam sobre caracterizações precisas de funções a partir de suas raízes, a formular uma representação de $\zeta(s)$ como um produto com fatores que explicitam as raízes da função. O objetivo era uma caracterização independente da função Zeta.

Por que perseguiria este resultado? Para tanto teve que estudar intensamente a função Zeta, atingindo resultados tais como a fórmula de aproximação e a densidade das raízes

³ Aos interessandos, buscar por “Algebraic number theory”, de Jurgen Neukirch, publicado pela Springer em 1999. Também recomendamos o artigo de Rincón listado nas referências.

na faixa crítica da função, cujas provas nunca foram por ele publicadas e criaram grande expectativa na comunidade (von Mangoldt provaria este resultado mais de 30 anos depois), tão profundas que o levariam mesmo a levantar sua Hipótese tão conhecida...

A resposta se encontra na outra face de seu trabalho. Ao usar o produto de Euler para mostrar que $\ln(\zeta(s))$ se expressa como uma série de Dirichlet cujos coeficientes α_n eram nulos ou $1/k$, se n é k -ésima potência de um primo, parte para mostrar como a série (em um processo generalizável para toda série de Dirichlet) poderia ser expressa como uma transformada de Fourier da função $J(x)$ que soma parcialmente seus coeficientes, concluindo que esta função de soma pode ser representada por um transformada inversa da função original. Obtém

$$J(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\ln(\zeta(s))}{s} x^s ds,$$

para qualquer $a > 1$, sendo a identidade válida apenas nos pontos de continuidade de $J(x)$, de outra forma valendo a média dos limites laterais. É exatamente por esta razão que Riemann buscava uma caracterização independente de $\zeta(s)$ (note que a menos do polo em $s = 1$, são as raízes de ζ que geram os polos de $\ln(\zeta(s))$). Seu resultado final foi escrito como

$$J(x) = Li(x) - \sum_{\alpha} [Li(x^{1/2+\alpha i}) + Li(x^{1/2-\alpha i})] + \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)\ln t} + \ln(\xi(0)),$$

que carregava consigo as conseqüências da Hipótese de Riemann, sendo α os números positivos em ordem crescente que satisfazem $\zeta(1/2 + i\alpha) = 0$.

Hadamard desenvolveu em generalidade a teoria da representação com raízes explícitas de funções inteiras de ordem finita nos anos 1880, e prova incondicionalmente (da Hipótese) a representação de Riemann em 1893. von Mangoldt prova em 1895, apoiado em Hadamard, a validade da representação incondicional

$$J(x) = Li(x) - \sum_{\rho^+} [Li(x^{\rho^+}) + Li(x^{1-\rho^+})] + \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)\ln t} - \ln 2.$$

Estes resultados levaram Hadamard e de la Vallée-Poussin a provar em 1896 o Teorema dos Números Primos, a partir da dedução de que não haviam raízes de $\zeta(s)$ cuja parte real fosse 1. Como em todas as fórmulas explícitas ocorre da localização dos polos da série em questão tornarem-se expoentes de termos envolvidos, a parte real destes polos indica o crescimento ou decaimento destes termos. A inexistência de raízes de $\zeta(s)$ em $Re(s) \geq 1$ os levou decididamente a concluir que o crescimento de $J(x)$, a soma ponderada de Riemann que conta a quantidade de primos abaixo de $x + 1/2$ a quantidade de quadrados de primos abaixo de $x + \dots$ era dominada pelo termo correspondente ao polo de $\ln(\zeta(s))$ em $s = 1$, cuja parte real supera à de todos os outros, proveniente não de uma raiz de $\zeta(s)$, mas de seu único polo.

No fim do século, Mertens calcula copiosamente os valores tomados pelo função $\mu(n)$ e anuncia a conjectura, como fizera Stieltjes, de que $\sum_{n \leq x} \mu(n) < \sqrt{x}$. Em bases empíricas, muitos poderiam concordar com Mertens; no entanto, ao considerarmos que $\sum_{n \leq x} \mu(n) < x^{1/2-\epsilon}$ implica na inexistência de zeros não triviais da Zeta, podemos baixar o ânimo.

Quase 100 anos mais tarde, Odlyzko e te Riele (1985) anunciam ser falsa a conjectura de Mertens, por um método computacional que não fornece o primeiro valor que a falsifica. Até hoje não é conhecido quando a soma ultrapassa \sqrt{x} , e as cotas superiores encontradas estão na casa da 10^{40} -ésima e 10^{60} -ésima potência de 10.

O início do século XX, levado pelo entusiasmo gerado pela prova do Teorema dos Números Primos, foi extremamente rico na compreensão dos temas. Nesta eram, surgem alguns dos mais importantes livros acerca da teoria analítica dos números, escritos por Edmund Landau a partir de 1909. Traduzidos para várias línguas, foram talvez as obras que mais educaram sobre o tema já escritas; hoje, um tanto quanto datadas, caem em desuso (para o prejuízo dos curiosos, pois os livros de Landau permanecem uma fonte generosa). Landau, colocado por Hardy como a pessoa mais devota à matemática que conhecia, teria um fim acadêmico em anos confusos, sendo expulso de sua terra por um nazismo esquizotípico que nunca chegaria a ver findado.

Koch (1900, p. 21) mostrou que a hipótese de Riemann é equivalente a

$$\frac{\psi(x)}{x} - 1 = O(x^{-1/2+\epsilon}), \quad \forall \epsilon > 0,$$

inaugurando as investigações do tipo. Nesta época despontam Littlewood e Hardy, que trazem muitos novos resultados à teoria, tal como a demonstração da infinitude de raízes de $\zeta(s)$ em $Re(s) = 1/2$. Hardy permaneceria ativo no campo por mais 30 anos. Seus tantos livros didáticos são alguns dos mais influentes publicados no século XX, e resultaram num enorme florescimento destas ciências matemáticas. Ramanujam é também descoberto, e dele nascem muitos campos de pesquisa. Franel demonstra a equivalência da hipótese de Riemann com afirmações sobre a distribuição das seqüências de Farey, em conjunto com Landau.

A hipótese de Riemann, feita tão precocemente em seu trabalho, foi objeto de fascínio de toda geração deste então, almejada por tantos, sem que dela tenhamos nos aproximado nada desde os tempos de Riemann, no sentido de determinar, por menor que seja, um δ tal que $\zeta(s)$ não tenha zeros em $Re(s) > 1 - \delta$. O método mais eficiente para determinar uma região livre de zeros na faixa crítica, devido a Vinogradov, não o consegue: a região aproxima-se mais e mais das fronteiras da faixa à medida que cresce a parte imaginária.

A equação funcional da função Zeta, com todo seu apelo, não é suficiente para a prova da inexistência de zeros fora da reta de simetria $Re(s) = 1/2$. Davenport e Heilbronn encontraram ainda em 1936 inúmeras séries de Dirichlet e generalizações que satisfaziam várias formas de equação funcional no espírito da função Zeta, mas que tinham raízes espalhadas pelo plano. Titchmarsh, dentre outros, também executaram este tipo de investigação. De fato, é possível encontrar séries de Dirichlet que satisfaçam equações funcionais semelhantes à da Zeta que tenham raízes arbitrariamente próximas a qualquer número complexo fornecido (VAUGHAN, 2015).

Datam destas décadas muito amadurecimento, abrangência e síntese da teoria. Os teoremas de Wiener colocam a teoria tauberiana em outro patamar e provam o Teorema dos Números Primos diretamente a partir da inexistência de raízes da Zeta em $Re(s) = 1$, sem condições adicionais de limitação assintótica. Diversas generalizações da função despontam e levam a resultados profundos. As congruências de Kummer são reestudadas e mais tarde fornecem material para a definição das funções Zeta p-ádicas.

Atle Selberg encontra em 1948 a primeira fórmula elementar profunda o suficiente para provar o teorema dos números primos (SELBERG, 1949, p. 3). Analisando a soma

$$\sum_{n \leq x} \sum_{d|n} \mu(d) \ln^2 \left(\frac{x}{d} \right)$$

de duas maneiras diferentes, encontra a sua famosa expressão fundamental

$$\vartheta(x) \ln(x) + \sum_{p \leq x} \vartheta \left(\frac{x}{p} \right) \ln p = 2x \ln x + O(x),$$

usada por ele e Erdős para provar o Teorema dos Números Primos.⁴ Selberg desenvolveu novos métodos de crivo e vislumbrou a sua Fórmula de Traço em generalidade, no contexto da análise harmônica não comutativa.

Ao longo dos anos outras provas “elementares” surgiram, como a de Daboussi em 1984, Hildebrand em 1986, e MacNamara e Richter em 2020 (RICHTER, 2020). Ademais, carregamos um século de generalizações, sem resultados conclusivos para as raízes da Zeta. Desde Hardy e outros, sabemos que quase todos os zeros da função estão na reta prevista por Riemann, mas as estimativas permanecem insuficientes.

Artin introduziu em 1924 funções zeta de variedades sobre corpos finitos, e formulou uma hipótese equivalente para elas. Sua hipótese foi provada em um caso particular por Hasse, para alguns anos mais tarde ser provada em generalidade por André Weil. Isso levou Weil a várias conjecturas relacionadas, no contexto de variedades algébricas, provadas nos anos 60, por Dwork e Grothendieck, culminando na prova da conjectura de Weil análoga à hipótese de Riemann por Deligne em 1973. Os objetos deste contexto apresentam, porém, propriedades particulares que não analogam-se com qualquer estrutura conhecida do caso clássico.

Em 1863 morre Kulik. Seus escritos dos últimos 20 anos são depositados na Academia de ciências de Viena: a faturação prima de pouco mais de 100 milhões de números, desprezados os múltiplos de 2, 3 e 5, totalizando 4212 páginas (RIBENBOIM, 2014, p. 166). Hoje, um enorme processamento computacional está disponível, e as investigações dos grandes números foi facilitada; o avanço humano, porém, é matéria de muito maior dificuldade.

⁴ Há um conflito histórico acerca da busca da prova e a prioridade de publicação entre os dois. O capítulo de Goldfeld (2004) é elucidador e recomendado.

2 PRELIMINARES

Este capítulo não exige leitura linear, sendo construído a fim de servir de apoio ao leitor, seja por mostrar resultados específicos úteis à compreensão dos demais capítulos, seja para trazer introduzir o leitor a assuntos e métodos utilizados na área.

2.1 O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA

O Teorema Fundamental da Aritmética expressa que todos os números naturais podem ser expressos como um produto de números primos de maneira única.

Gauss é considerado o primeiro a colocar o teorema nesta exata forma, no artigo 16^o de seu *Disquisitiones* (GAUSS, 1801, p. 14). No entanto, o estudo destas relações é muito antigo, já presente no livro *Os Elementos*, de Euclides. Em particular no tomo VII, proposições 30, 31, 32, e IX, proposição 14, vemos:

“Se dois números por multiplicação fazem outro, e qualquer número primo mede o produto, mede também um dos dois números originais”;

“Todo número composto é medido por algum número primo”;

“Todo número ou é primo ou é medido por um primo”;

“Se um número é o menor medido por números primos, não será medido por nenhum outro primo além dos que originalmente o mediam”.

Provaremos a Proposição 30, que usaremos na prova do Teorema Fundamental da Aritmética. Antes disto, vejamos um lema de Gauss (1801, p. 13), apresentado com poucas alterações do original.

Lema 2.1.0.1 (Artigo 13^o, *Disquisitiones Arithmeticae*) *Sejam $a, b \in \mathbb{N}$, com $a, b \geq 1$. Se $a, b < p$, p primo, então $p \nmid a \cdot b$.*

Dem.: Primeiramente, se a ou b valer 1, sendo $a, b < p$, não pode valer $p|ab$. Suponhamos $a, b > 1$. Temos, certamente, $p = bq + r$, com $q \geq 1$ e $1 \leq r < b$, pois $b < p$ ($r \neq 0$, uma vez que p é primo). Por absurdo, suponhamos que $p|ab$, isto é, que exista k tal que $kp = ab$, com $a, b < p$. Temos, portanto, $ap = abq + ar = pkq + ar$, ou seja, $ar = p(a - kq)$. Em particular, $p|ar$.

Em resumo, dados $a, b \in \mathbb{N}$ positivos que satisfaçam $a, b < p$, $p|ab$, encontramos em generalidade um outro número positivo menor ¹ $1 \leq r < b$ que satisfaz $a, r < p$, $p|ar$; em outras palavras, $\{n \in \mathbb{N} : p|n \cdot a, n, a \geq 1, n, a < p\} \subset \mathbb{N}$ não tem menor elemento, e contraria a Boa Ordenação. Contradição!

Alternativamente, pode-se explicitamente proceder para r como procedemos para b e obter $r_2 \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq r_2 < r < b$, r_m tal que $1 \leq r_m < r_{m-1} < \dots < r < b$, e b haveria de ser maior que qualquer número natural. Contradição!

¹ Mais precisamente, $2 \leq r < b$, assim como $a, b \geq 2$, afinal, se qualquer um, digamos a , valer 1, entramos em contradição com $p|ab = b$ e $b < p$.

Conclue-se que se a, b são naturais positivos e $a, b < p$, necessariamente $p \nmid ab$.

Lema 2.1.0.2 (Proposição 30, tomo VII, Os Elementos) *Se p é primo e $p|ab$, então $p|a$ ou $p|b$.*

Dem².: Certamente existem $q_1, q_2, r_1, r_2 \in \mathbb{N}$, com $0 \leq r_1, r_2 < p$ tais que $a = p \cdot q_1 + r_1$, $b = p \cdot q_2 + r_2$. Assim $ab = p^2 q_1 q_2 + p(q_1 r_2 + q_2 r_1) + r_1 r_2$.

Se $p|ab$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $ab = pk$, e assim

$$r_1 r_2 = p(k - p q_1 q_2 - (q_1 r_2 + q_2 r_1)) = p k_2,$$

ou seja, $p|r_1 r_2$. Acontece que $r_1, r_2 < p$. Pelo artigo 13^o provado acima, isso não pode se dar para r_1, r_2 positivos. Conclui-se que ao menos um dos dois vale zero, isto é, vale $p|a$ ou $p|b$.

Anunciemos agora o teorema em sua forma moderna e o provemos.

Teorema 2.1.1 (Teorema Fundamental da Aritmética) *Seja n um número natural. Então n ou é primo, ou é escrito de forma única como um produto de primos, a menos de ordem.*

Dem.:

(Existência da fatoração) Se n é primo, a prova está terminada.

Se n é composto, então podemos decompor n em $n = a \cdot b$, com $a, b \in \mathbb{N}$, $a, b \geq 2$, o que faz:

$$n = ab \geq 4.$$

Se a, b , são primos, a prova está terminada; se ao menos um dos dois for composto, digamos a , então podemos igualmente decompor-lo como $a = c \cdot d$, $c, d \geq 2$, e assim:

$$n = ab = (cd)b \geq 8.$$

Após k decomposições de n ou fatores de n , podemos afirmar que $n \geq 2^{k+1}$, de sorte que n há de admitir somente um quantidade finita destas decomposições (caso contrário, n seria maior que qualquer número natural), ou seja, chegaremos a uma fatoração de n sem qualquer número composto. Isto prova que todo número natural pode ser escrito como um produto de números primos.

(Unicidade da fatoração) Suponhamos agora que hajam duas fatorações distintas de n em fatores primos. Se são distintas, há um primo p que divide a primeira das fatorações no máximo k vezes e divide a segunda no máximo m vezes, com, digamos, $k < m$. Isto é o mesmo que afirmar que n/p^k admite uma primeira fatoração em primos sem qualquer fator p , e uma segunda com um fator p^{m-k} , com $m - k \geq 1$. Em particular, esta segunda fatoração ainda é divisível por p , o que implica que a primeira também o é. Em resumo,

² A prova que consta n'Os Elementos é bastante diferente desta, e apela a frações irredutíveis.

concluimos que p divide um produto de primos, todos distintos de p . Pela Proposição 30 provada acima aplicada repetidas vezes, p há de dividir algum destes primos. Mas o único primo a dividir um primo é ele mesmo! Contradição!

2.2 AS FUNÇÕES DE TCHEBYCHEFF E A FUNÇÃO CONTAGEM DE PRIMOS

Os números primos são alguns dos objetos mais fascinantes da matemática, e a busca por compreendê-los, ainda em andamento, foi um grande propulsor do desenvolvimento da aritmética superiora, hoje mais conhecida como teoria dos números.

Como vimos, a quantidade de números primos abaixo de uma dada quantidade n , $\pi(n)$, começou a ser devidamente estudada no final do século XVIII; o crivo de Legendre, baseado no crivo de Eratóstenes, forneceu em 1798 a primeira conjectura publicada razoável acerca dessa quantidade (RIBENBOIM, 2014, p. 155).

Tchebycheff alcançou ao redor de 1850 os melhores resultados até então descobertos, analisando não propriamente $\pi(x)$, mas as funções hoje conhecidas pelo seu nome

$$\vartheta(n) = \sum_{p \leq n} \ln p \quad e$$

$$\psi(n) = \sum_{p^k \leq n} \ln p,$$

isto é, a primeira soma os logaritmos $\ln p$ dos primos p menores que n , e a segunda soma $\ln p$ para cada uma das potências naturais de p menores que a quantidade n ou x dada.

Estas funções podem parecer pouco naturais, quando comparadas com $\pi(n)$; no entanto, é claro que

$$\vartheta(n) = \ln(\#n),$$

onde $\#n$, hoje conhecido como o *primorial* de n , tem certo apelo estético:

$$\#n = \prod_{p \leq n} p = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{\pi(n)};$$

Mais que isso, temos que a segunda função de Tchebycheff é o logaritmo de uma função fundamental, o Mínimo Múltiplo Comum de todos os números naturais até o n ou x dado (HARDY e WRIGHT, 2008, p. 451):

$$\psi(x) = \ln(\text{MMC}(1, 2, \dots, \lfloor x \rfloor)).$$

Além disso, pode-se expressar $\psi(x)$ explicitando a quantidade de termos $\ln(p)$ somados como

$$\psi(x) = \sum_{p \leq x} \left\lfloor \frac{\ln(x)}{\ln(p)} \right\rfloor \ln(p).$$

Como

$$\vartheta(x^{1/m}) = \sum_{p \leq x^{1/m}} \ln p = \sum_{p^m \leq x} \ln p,$$

podemos escrever a seguinte relação entre as duas funções de Tchebycheff

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta(x^{1/n}). \quad (2.1)$$

(HARDY e WRIGHT, 2008, p. 452)

A segunda função de Tchebycheff relaciona-se de uma forma simples com o logaritmo do fatorial:³

$$\ln([x]!) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\lfloor x/2 \rfloor} \psi\left(\frac{x}{n}\right). \quad (2.2)$$

(TCHEBYCHEFF, 1852; LANDAU, 1909, p. 76)

O leitor que já estiver íntimo da inversão de Möbius poderá encontrar uma expressão de $\psi(x)$ como combinações do logaritmo do fatorial. Por meios elementares, analisando-se combinações de fatoriais, é possível obter as estimativas

$$\vartheta(n) < 2n \ln(2) \quad \text{e} \quad \psi(n) \geq \frac{n}{4} \ln(2), \quad n \geq 2;$$

em particular, tem-se $\vartheta(n) \asymp \psi(n) \asymp n$.

Como vale a relação

$$\psi(x) \sim \vartheta(x) \sim \ln(x)\pi(x),$$

a afirmação anterior também nos indica $\pi(n) \asymp n/\ln(n)$, conforme obtido por Tchebycheff.

O Teorema dos Números Primos $\pi(x) \sim \ln(x)/x$ é portanto equivalente a $\psi(x) \sim x$, $\vartheta(x) \sim x$, ou mesmo $(\#n)^{1/n} \rightarrow e$ e $x^{\pi(x)/x} \rightarrow e$ (HILDEBRAND, 2005, p. 103).

2.3 A TRANSFORMADA DE MELLIN

A transformada de Mellin é nomeada em homenagem à Hjalmar Mellin, aluno de Weierstrass. Como outras transformadas, decompõe uma dada função como combinação de uma família de funções, e respeita uma inversa que recombina esta expressão de volta à função original. Próxima da transformada de Laplace bilateral e a transformada de Fourier, suas aparições são historicamente contextualizadas na teoria analítica dos números.

Para uma função $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$, sua transformada de Mellin é definida como

³ Isso é imediatamente equivalente ao fatorial poder ser expresso como um produto de termos da forma $\text{MMC}(1, 2, \dots, [x]/n)$. Não provaremos aqui, mas o leitor pode aproveitar-se da expressão em termos de primos dada em 3.1 para obter o resultado, após uma análise do comportamento de $\text{MMC}(1, \dots, n)$

$$\mathcal{M}(f(x), s) = \int_0^{\infty} f(x)x^{s-1}dx.$$

Em geral, a transformada não está definida para todos os valores $s \in \mathbb{C}$, mas em uma faixa aberta $\sigma_1 < \operatorname{Re}(s) < \sigma_2$ do plano ou mesmo um semiplano (BERTRAND et al, 2000).

Substituindo x por e^{-x} na definição, pode-se ver que

$$\mathcal{M}(f, s) = \int_0^{\infty} f(x)x^{s-1}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(e^{-x})e^{-sx}dx;$$

tomando $s = 2\pi it$ na última integral, escrevemos

$$\mathcal{M}(f, 2\pi it) = \int_{-\infty}^{\infty} f(e^{-x})e^{-2\pi itx}dx.$$

Em resumo, isso significa que a relação entre as transformadas de Mellin, Laplace e Fourier é da forma⁴

$$\mathcal{M}(f(x), s) = \mathcal{L}(f(e^{-x}), s) = \mathcal{F}(f(e^{-x}), -i \cdot \frac{s}{2\pi}).$$

Para os acostumados com a transformada de Laplace, a faixa de definição da transformada de Mellin coincide com as intersecções dos semiplanos de definição das transformadas laterais de Laplace (BERTRAND et al, 2000).

Assim como as outras transformadas, a transformada de Mellin tem sua própria fórmula de inversão:

Teorema 2.3.1 *Suponhamos que $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ seja seccionalmente contínua e que sua transformada de Mellin convirja absolutamente na faixa $\sigma_1 < \operatorname{Re}(s) < \sigma_2$. Então*

$$f_0(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \mathcal{M}(f, s)x^{-s}dx,$$

onde $f_0(x) = f(x)$ sempre que esta última for contínua, valendo a médias dos limites laterais nos pontos de descontinuidade (precisamente como na teoria de Fourier), e $\sigma_1 < a < \sigma_2$.

Pode-se atingir a transformada através da forma invertida ao supor analiticidade na faixa $\sigma_1 < a < \sigma_2$ e que $\mathcal{M}(f, s) \rightarrow 0$ uniformemente quando $\operatorname{Im}(s) \rightarrow \pm\infty$.

Como era de se esperar, a transformada respeita uma forma do teorema de Parseval, nas condições adequadas:

$$\int_0^{\infty} \frac{f(x)^2}{x}dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{M}(f, ix)^2dx.$$

⁴ Neste trabalho, será comum vermos a transformada com sinal invertido $-s$, afinal as séries de Dirichlet atingem naturalmente integrais neste formato.

A transformada de Mellin e sua inversa podem ser entendidas como um caso limite da relação entre uma série de potências e seus coeficientes, assim como a transformada de Fourier e sua inversa o são para as séries de Fourier. Neste contexto, é interessante citar o teorema de Ramanujan.⁵

Teorema 2.3.2 (Teorema da Interpolação de Ramanujan) *Seja $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica no semiplano $\operatorname{Re}(s) > -\delta$, $\delta > 0$, e existam $C, P, A \in \mathbb{R}$, $|A| < \pi$ tais que $|\phi(s)| < Ce^{P \cdot \operatorname{Re}(s) + A \cdot |\operatorname{Im}(s)|}$. Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica cujos coeficientes de sua expansão de Taylor são*

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \phi(n) s^n,$$

ou seja, seus coeficientes são determinados pela avaliação de ϕ nos números naturais.

Então

$$\mathcal{M}(f, s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \phi(-s).$$

para $0 < \operatorname{Re}(s) < \delta$.

Em outras palavras, a transformada de Mellin de uma função analítica recupera, em condições apropriadas, a função geradora dos coeficientes de sua expansão em série de potências (HARDY, 1940, p. 186-191). Ademais, a hipótese $|A| < \pi$, necessária para a obtenção do teorema em generalidade, pode ser afrouxada em alguns contextos particulares interessantes (Ibid, p. 191).

Como corolário deste teorema, pode-se citar o teorema de Carlson, geralmente obtido através do teorema de Phragmén-Lindelöf (TITCHMARSH, 1939, p. 185-186). O enunciaremos no capítulo 6.

2.3.1 Exemplos

Damos aqui dois exemplos da aplicação do método de Ramanujan, onde algumas transformadas de Mellin são obtidas.

$$\int_0^{\infty} \ln(1+x) x^{s-1} dx = -\Gamma(s)\Gamma(-s) = \frac{\pi}{s \cdot \sin(\pi s)}$$

para $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$.

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x} x^{s-1} dx = \Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$

para $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$.

Os exemplos mais importantes serão vistos ao longo deste trabalho, onde veremos como as séries de Dirichlet podem ser compreendidas como transformadas de Mellin de somas de caráter discreto da forma $f(x) = \sum_{n < x} a_n$, para as respectivas sequências (a_n) que caracterizem a série de Dirichlet.

⁵ Ramanujan utilizou extensamente este método; não ofereceu, porém, uma prova de sua validade ou mesmo limites de sua aplicação, que certamente existem.

2.4 A FUNÇÃO DE MÖBIUS

A função de Möbius é definida como

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n=1; \\ 1, & \text{se } n \text{ é produto de um número par de primos distintos;} \\ -1, & \text{se } n \text{ é produto de um número ímpar de primos distintos;} \\ 0, & \text{se } n \text{ é divisível por quadrados perfeitos maiores que 1.} \end{cases}$$

Suas primeiras aparições são ao menos em 1748, nos trabalhos de Euler acerca da função Zeta (HARDY e WRIGHT, 2008, p. 316), onde surge muito naturalmente⁶. Mostrou-se presente também no 81^o artigo do *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss (1801, p. 62) sob a forma da soma

$$\mu(n) = \sum_{\text{mdc}(k,n)=1} e^{2\pi i \frac{k}{n}},$$

a soma das raízes primitivas da unidade⁷. Apenas em 1832 foi estudada sistematicamente por August Ferdinand Möbius (HARDY e WRIGHT, 2008, p. 316).

Seus valores para os primeiros 30 números são: 1, -1, -1, 0, -1, 1, -1, 0, 0, 1, -1, 0, -1, 1, 1, 0, -1, 0, -1, 0, 1, 1, -1, 0, 0, 1, 0, 0, -1, -1... A simetria destes valores não é evidente e ainda é mal compreendida. Uma compreensão mais profunda de sua distribuição nos levaria a grandes conseqüências acerca da estrutura dos números naturais, e portanto de muitas das funções aritméticas notáveis expressáveis a partir de algum conhecimento acerca dos

⁶ Veremos isto adequadamente no capítulo 4. É igualmente digno de nota sua conexão com o princípio de Inclusão-Exclusão. Como 1/2 dos números naturais são divisíveis por 2, em termos de **densidade natural**; da metade restante, 1/3 é divisível por 3, ou seja, 1/6 dos naturais não é divisível por 2 e é divisível por 3; do terço restante, 1/5 é divisível por 5, e etc., seguindo-se este padrão com números primos, temos

$$1 = \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{3} + \left(1 - \left(\frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{3}\right)\right) \cdot \frac{1}{5} \\ + \left(1 - \left(\frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{3} + \left(1 - \left(\frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{3}\right)\right) \cdot \frac{1}{5}\right)\right) \cdot \frac{1}{7} + \dots$$

já que 1 é a densidade natural do conjunto dos números naturais e a soma à direita esgota todos os números naturais, uma vez que vale o Teorema Fundamental da Aritmética. Reordenação à parte (onde reside a real dificuldade), isto reflete a identidade

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0,$$

cujas equivalências com o Teorema dos Números Primos é constatada, por exemplo, em Hardy e Littlewood (1916, p. 120), seguindo trabalhos de Landau e Axen.

⁷ Uma enésima raiz da unidade é primitiva se não é também raiz k-ésima da unidade para algum $k < n$, isto é, se a fração de denominador n do expoente mostrar-se irredutível. Como nesta soma não intervêm a multiplicação complexa, pode ser interpretada geometricamente como uma simples soma vetorial, e portanto entendida como relações entre os polígonos regulares.

números primos. Em particular, resultados como $M(k) = \sum_{n=1}^k \mu(n) = O(k^{1/2+\epsilon})$, $\forall \epsilon > 0$ equivalem à famosa hipótese de Riemann⁸ (TITCHMARSH, 1986, p. 370).

Passemos a uma breve análise da simetria sutil da função de Möbius.

Definição 2.4.1 *Uma função aritmética $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$ é dita **multiplicativa** se $f(1) = 1$ e, ao menos para $a, b \in \mathbb{N}^*$ primos entre si, é válida a expressão*

$$f(ab) = f(a)f(b).$$

Teorema 2.4.1 *A função de Möbius é multiplicativa.*

Dem.: Sejam a e b primos entre si.

Se algum dos dois for 1, a validade é evidente, afinal $\mu(1) = 1$.

Se algum dos dois é divisível por um quadrado perfeito, ab é divisível pelo mesmo quadrado, de sorte que

$$\mu(ab) = 0 = \mu(a)\mu(b).$$

Se ambos a e b são livres de quadrados, podemos supor que são um produto de k e j primos distintos, respectivamente, e assim ab é um produto de $k+j$ primos distintos, uma vez que a e b são primos entre si. Se k, j forem ímpares, $k+j$ é par, e temos

$$\mu(ab) = 1 = (-1)(-1) = \mu(a)\mu(b).$$

Se k, j forem pares, $k+j$ é par, e temos

$$\mu(ab) = 1 = (1)(1) = \mu(a)\mu(b).$$

Finalmente, se algum deles, digamos k , for par, e j for ímpar, $k+j$ é ímpar, e assim temos

$$\mu(ab) = -1 = (1)(-1) = \mu(a)\mu(b).$$

Uma propriedade fundamental da função de Möbius é exposta a seguir (HARDY e WRIGHT, 2008, p. 304).

Teorema 2.4.2 *A função de Möbius cumpre com a expressão*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1; \\ 0, & \text{se } n \geq 2, \end{cases} \quad (2.3)$$

⁸ Veja, por exemplo, o teorema (5.1.4), e, mais precisamente, seu corolário (5.1.1), e hipótese implica que $1/\zeta(s)$ converge para $Re(s) = 1/2 + \epsilon$, e assim $\zeta(s)$ não tem raízes nesta região.

onde a soma se estende por divisores d de n .

Dem.: O caso $n = 1$ é evidente. Para mostrarmos que a soma vale 0 para todo outro $n \in \mathbb{N}^*$, escrevamos $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$. Temos que

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d) &= 1 + \sum_i \mu(p_i) + \sum_{i,j} \mu(p_i p_j) + \dots \\ &= 1 - k + \binom{k}{2} - \binom{k}{3} + \dots = (1 - 1)^k = 0. \end{aligned}$$

Esta propriedade nos permite uma aplicação prática muito geral e importante, da qual falamos abaixo.

2.4.1 A Inversão de Möbius

Provamos aqui a famosa inversão de Möbius, em sua forma original (HARDY e WRIGHT, 2008, p. 305), para em seguida provar um resultado bastante geral.

Teorema 2.4.3 *Sejam f, g funções aritméticas. Vale a expressão*

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \tag{2.4}$$

se, e somente se,

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right). \tag{2.5}$$

Em outras palavras, podemos inverter as expressões e isolar as funções envolvidas, quando assim se desejar.

Dem.:

\Rightarrow) Se (2.4) é válida, podemos concluir que, se k é tal que $k|n$,

$$f\left(\frac{n}{k}\right) = \sum_{d|\frac{n}{k}} g(d),$$

de forma que

$$\begin{aligned} \sum_{k|n} \mu(k) f\left(\frac{n}{k}\right) &= \sum_{k|n} \mu(k) \left(\sum_{d|\frac{n}{k}} g(d) \right) = \sum_{cd|n} \mu(c) g(d) \\ &= \sum_{d|n} g(d) \left(\sum_{k|\frac{n}{d}} \mu(k) \right) = g(n), \end{aligned}$$

uma vez que é vale a expressão fundamental (2.3).

\Leftrightarrow) Por outro lado, se vale (2.5), podemos somar

$$\begin{aligned} \sum_{k|n} g(k) &= \sum_{k|n} g\left(\frac{n}{k}\right) = \sum_{k|n} \sum_{d|\frac{n}{k}} \mu\left(\frac{n}{kd}\right) f(d) = \sum_{kd|n} \mu\left(\frac{n}{kd}\right) f(d) \\ &= \sum_{d|n} f(d) \sum_{k|\frac{n}{d}} \mu\left(\frac{n}{kd}\right) = f(n), \end{aligned}$$

igualmente por (2.3).

Provemos agora um resultado mais geral, inspirado nos teoremas 268-270 de Hardy e Wright (2008, p. 307), de grande utilidade prática.

Teorema 2.4.4 *Seja $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ uma família de funções de A em B subconjuntos de \mathbb{C} . Esteja bem definida uma família $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ pela relação*

$$g_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{nk}(z).$$

Então

$$f_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) g_{nk}(z),$$

desde que certa reordenação dos termos seja permissível. O leitor pode observar que a recíproca é igualmente verdadeira, assim como nos casos anteriores de inversão.

Dem.:

Ao tomarmos

$$g_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{nk}(z),$$

podemos somar

$$\sum_{l=1}^{\infty} \mu(l) g_{lk}(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(l) f_{nlk}(z) = \sum_{c=1}^{\infty} f_{ck}(z) \sum_{d|c} \mu(d) = f_k(z),$$

com a última igualdade implicada pela expressão fundamental (2.3). Nota-se que para a segunda igualdade supusemos alguma forma de convergência comutativa ao reordenarmos para o índice $c = l \cdot n$. Não é de conhecimento do autor uma caracterização precisa da permissibilidade desta reordenação. Uma condição suficiente é, analogamente ao dado por Hardy e Wright (2008, p. 308), a convergência da série $\sum_{l,n} |f_{nlk}(z)| = \sum_c d(c) |f_{ck}(z)|$, onde $d(n)$ é a quantidade de divisores de n , embora não seja necessária.

Vejamos alguns corolários do teorema (2.4.4). Primeiramente, temos como corolários os teoremas 268-270 de Hardy e Wright (2008, p. 307).

Corolário 2.4.1 *Seja $x \in \mathbb{R}^+$. Valem as relações*

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} F\left(\frac{x}{n}\right) \\ \iff F(x) &= \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} \mu(n)G\left(\frac{x}{n}\right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} F(nx) \\ \iff F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)G(nx), \end{aligned}$$

no mínimo para a região onde cumpre-se a condição suficiente do teorema anterior.

Dem.: Aplicação direta do teorema anterior para primeiramente $g_k(x) = G(x/k)$, $f_k(x) = F(x/k)$, e em segundo lugar $g_k(x) = G(kx)$, $f_k(x) = F(kx)$.

Corolário 2.4.2 *Seja $x \in \mathbb{R}^+$. Consideremos*

$$\lfloor x/m \rfloor = \sum_{1 \leq n \leq x/m} 1 = \sum_{n=1}^{\infty} f_{nm}(x),$$

onde escrevemos

$$f_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < k; \\ 1, & \text{se } x \geq k. \end{cases}$$

Podemos aplicar o teorema (2.4.4) para obter⁹

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \lfloor x/nk \rfloor = f_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < k; \\ 1, & \text{se } x \geq k. \end{cases}$$

Corolário 2.4.3 *Sejam $x \in \mathbb{R}^+$, $m, k \in \mathbb{N}^*$. Temos que*

$$M\left(\frac{x}{m}\right) = \sum_{n \leq x/m} \mu(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)g_{mn}(x),$$

⁹ Também pode-se facilmente obter esta identidade diretamente da expressão fundamental (2.3).

onde escrevemos

$$g_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < k; \\ 1, & \text{se } x \geq k. \end{cases}$$

Aplicando a recíproca de (2.4.4), obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} M\left(\frac{x}{kn}\right) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < k; \\ 1, & \text{se } x \geq k. \end{cases}$$

Esta identidade pode vir a ser uma surpresa para qualquer um que já tenha visto a errática representação de $M(x)$ em um plano cartesiano.

Evocaremos o teorema (2.4.4) várias vezes ao longo deste trabalho.

2.5 A SOMA DE POISSON

Após os trabalhos de Fourier, floresceu um grande interesse pelo estudo de séries trigonométricas e exponenciais, rendendo intensa e profícua exploração nos anos 20 e 30 do século XIX. Dentre muitos eminentes matemáticos, destacam-se Poisson e Jacobi. Vejamos um dos mais famosos resultados do primeiro, a Fórmula da Soma de Poisson:

Consideremos uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que esteja bem definida a função

$$F(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+k).$$

Primeiramente, constatemos que $F(x)$ é periódica de período 1, uma vez que $F(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+1+k) = F(x+1)$. Ao calcularmos os enésimos coeficientes da série de Fourier de F , obtemos a transformada de Fourier de f avaliada em n :

$$\begin{aligned} c_n &= \int_0^1 F(x) e^{2\pi i n x} dx = \int_0^1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+k) e^{2\pi i n x} dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+k) e^{2\pi i n x} dx \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+1} f(x) e^{2\pi i n x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i n x} dx = \hat{f}(n), \end{aligned}$$

onde supusemos poder comutar o somatório e a integral. Nestas condições, assumindo convergência da série de Fourier para a função associada,¹⁰ obtemos

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}, |n| < T} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}.$$

Em particular, tomando $x \in \mathbb{Z}$, temos que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k)$$

Aplicaremos este resultado a seguir.

¹⁰ Para as hipóteses assumidas valerem, é suficiente assumir continuidade e variação total finita (PATTERSON, 1988, p. 14).

2.5.1 A função Teta de Jacobi

Jacobi publica “*Fundamenta nova theoriae Functionum Ellipticarum*”, em 1829, um tratado denso no qual, dentre muitas outras coisas, estuda suas várias funções Teta. Aqui nos limitamos somente a mostrar a seguinte equação funcional para uma de suas funções Teta:

Teorema 2.5.1 *A função $\theta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, com $\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi x}$, é tal que*

$$\theta\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{x} \cdot \theta(x) \quad (2.6)$$

Dem.: É uma aplicação direta da Soma de Poisson. Ao considerarmos $f_x(n) = e^{-n^2\pi x}$ e calcularmos suas transformadas $\widehat{f}_x(n)$, para x fixo, obtemos

$$\begin{aligned} \widehat{f}_x(n) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2\pi x} e^{-2\pi itn} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2\pi x - 2\pi itn} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2\pi x - 2\pi itn + \frac{\pi n^2}{x} - \frac{\pi n^2}{x}} dt \\ &= e^{-\frac{\pi n^2}{x}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x(t + \frac{in}{x})^2} dt = e^{-\frac{\pi n^2}{x}} \int_{-\infty + \frac{in}{x}}^{\infty + \frac{in}{x}} e^{-\pi xz^2} dz = e^{-\frac{\pi n^2}{x}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi xz^2} dz \\ &= \frac{e^{-\frac{\pi n^2}{x}}}{\sqrt{\pi x}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2} dr = \frac{e^{-\frac{\pi n^2}{x}}}{\sqrt{x}}, \end{aligned}$$

uma vez que a última integral, conhecida como integral Gaussiana, ou de Euler-Poisson, vale $\sqrt{\pi}$. Assim, pela Soma de Poisson, escreve-se

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\pi n^2}{x}}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \theta\left(\frac{1}{x}\right).$$

Retornaremos a este resultado no capítulo 6, ao demonstrarmos a equação funcional da função Zeta.

2.6 SOMAÇÃO POR PARTES

A somação por partes é uma técnica básica de bastante utilidade, tão utilizada por Landau em seu Handbüch. Expressa de várias formas, pode ser colocada como uma relação entre as somas parciais de termos de seqüências e a soma parcial do produto destes termos.

Seja $g(n) = \sum_{k=1}^n \alpha_k$, $g(0) = 0$ e $f(n) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k$. Aproveitando o fato de que $\alpha_k = g(k) - g(k-1)$, podemos escrever

$$\begin{aligned} f(n) &= \sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k = \sum_{k=1}^n (g(k) - g(k-1)) \beta_k = \sum_{k=1}^n g(k) \beta_k - \sum_{k=1}^n g(k-1) \beta_k \\ &= \sum_{k=1}^n g(k) \beta_k - \sum_{k=0}^{n-1} g(k) \beta_{k+1} = g(n) \beta_{n+1} + \sum_{k=1}^n g(k) (\beta_k - \beta_{k+1}). \end{aligned}$$

Este tipo de consideração tem muitas aplicações, como para traduzir o crescimento assintótico de uma série conhecida para uma suficientemente relacionada. Vejamos um exemplo.

Teorema 2.6.1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0$$

implica

$$M(k) = \sum_{n=1}^k \mu(n) = o(k).$$

Ambas afirmações são exemplos das investigações do fim do século XIX, equivalentes ao Teorema dos Números Primos.

Dem.: Basta aplicarmos a teoria acima para estas funções, expressando a segunda soma em termos da primeira, isto é, fazendo $\alpha_n = \mu(n)/n$ e $\beta_n = n$. Tem-se, assim,

$$f(k) = \sum_{n=1}^k \mu(n) = g(k)(k+1) - \sum_{n=1}^k g(n);$$

como $g(n) = o(1)$, $\sum_{n=1}^k g(n) = o(k)$, e além disso claramente $g(k)(k+1) = o(k)$ (uma vez que $(k+1)/k \rightarrow 1$ e $g(k) \rightarrow 0$), segue o teorema.

Estas considerações também podem ser expressa por integrais. Compreendamos isto através de uma análise do seguinte resultado acerca de assintóticas passível de aplicação da somação por partes.

Teorema 2.6.2 *Sejam $\alpha_n \in \mathbb{R}$. Para $T \rightarrow \infty$, vale a seguinte relação entre assintóticas de somas¹¹:*

$$\sum_{n=1}^T \alpha_n \sim T \Rightarrow \sum_{n=1}^T \frac{\alpha_n}{n} \sim \ln T.$$

Dem.:

Notemos primeiramente que

$$\frac{1}{n} = \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2},$$

e assim podemos escrever

¹¹ Ao invés de meramente T e $\ln T$, o teorema é válido para algumas outras $f(T)$ e $\ln(f(T))$, respectivamente. A série de potências para $\ln(1/(1-x))$ é um exemplo.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^T \frac{\alpha_n}{n} &= \sum_{n=1}^T \alpha_n \int_n^\infty \frac{dx}{x^2} = \int_1^\infty \left(\sum_{n \leq \min(x, T)} \alpha_n \right) \frac{dx}{x^2} \\
&= \int_1^T \left(\sum_{n \leq x} \alpha_n \right) \frac{dx}{x^2} + \int_T^\infty \left(\sum_{n=1}^T \alpha_n \right) \frac{dx}{x^2} \\
&= \int_1^T \frac{\sum_{n \leq x} \alpha_n}{x} \frac{dx}{x} + \frac{\sum_{n=1}^T \alpha_n}{T}.
\end{aligned}$$

Por hipótese,

$$\sum_{n=1}^T \alpha_n \sim T,$$

de sorte que, dado $\epsilon > 0$, existe T_0 tal que, se $T > T_0$,

$$1 - \epsilon < \frac{\sum_{n \leq T} \alpha_n}{T} < 1 + \epsilon,$$

e assim

$$\begin{aligned}
1 - \epsilon + (1 - \epsilon) \int_{T_0}^T \frac{dx}{x} + C &< \sum_{n=1}^T \frac{\alpha_n}{n} < 1 + \epsilon + (1 + \epsilon) \int_{T_0}^T \frac{dx}{x} + C \\
\Rightarrow 1 - \epsilon + (1 - \epsilon)(\ln(T) - \ln(T_0)) + C &< \sum_{n=1}^T \frac{\alpha_n}{n} < 1 + \epsilon + (1 + \epsilon)(\ln(T) - \ln(T_0)) + C
\end{aligned} \tag{2.7}$$

onde

$$C(T_0) = \int_1^{T_0} \frac{\sum_{n \leq x} \alpha_n}{x} \frac{dx}{x}.$$

Dividindo (2.7) por $\ln(T)$ e fazendo $T \rightarrow \infty$, obtemos

$$1 - \epsilon \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{\sum_{n=1}^T \frac{\alpha_n}{n}}{\ln T} \right) \leq 1 + \epsilon.$$

Como ϵ é arbitrário,

$$\sum_{n=1}^T \frac{\alpha_n}{n} \sim \ln T$$

e concluímos a prova.

2.7 A INTEGRAL LOGARÍTMICA

Chama-se integral logarítmica a integral

$$Li(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln(t)} \quad (2.8)$$

tomada no sentido do valor principal de Cauchy ao redor do polo do integrando em $t = 1$, isto é,

$$Li(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_0^{1-\epsilon} \frac{dt}{\ln(t)} + \int_{1+\epsilon}^x \frac{dt}{\ln(t)} \right].$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, pode-se compreender que a característica mais simples desta função é sua derivada avaliada em x ser

$$Li'(x) = \frac{1}{\ln(x)}.$$

Isso implica que $Li''(x) = -1/x \ln^2(x)$, de forma que $Li(x)$ é **estritamente côncava** em $0 < x < 1$ e em $x > 1$.

Além disso, pode-se observar que o comportamento de $Li(x)$ quando $x \rightarrow \infty$ é

$$Li(x) \sim \frac{x}{\ln(x)},$$

uma vez que, integrando (2.8) por partes temos

$$Li(x) = \frac{x}{\ln(x)} + \int_0^x \frac{dt}{\ln^2(t)},$$

e $1/\ln(t) - 1/\ln^2(t) \sim 1/\ln(t)$. O mesmo argumento nos mostra que

$$Li(x) \sim \frac{x}{\ln(x)} + \frac{x}{\ln^2(x)} + \dots + \frac{x(n-1)!}{\ln^n(x)},$$

afinal

$$Li(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x(k-1)!}{\ln^k(x)} + n! \int_0^x \frac{dt}{\ln^{n+1}(t)}.$$

Historicamente, sua maior relevância parece ter se dado após as considerações do jovem Gauss nos anos 1790, como este reconta muitas décadas mais tarde, considerações estas que o levaram a conjecturar que a quantidade de primos $\pi(x)$ crescia semelhantemente a $1/\ln(x)$. O caminho para demonstrar a veracidade de sua conjectura foi estabelecido por Riemann 60 anos mais tarde, 4 anos após a morte de Gauss.

Para atingirmos este resultado, nos será útil discutir a transformada da integral logarítmica a seguir.

2.7.1 Sua transformada de Mellin

Em Riemann (1859, p. 6 e 7) e Edwards (1974, p. 26-29) vemos uma análise da transformada de Mellin inversa de $\ln(s-1)$, onde concluem que é precisamente $Li(x)$, a integral logarítmica.

Mostramos aqui como pode-se calcular diretamente a transformada de Mellin¹² de $Li(x)$, simplificando o processo.

Teorema 2.7.1 Para $Re(s) > 1$, vale

$$-\ln(s-1) = L + s \int_1^{\infty} Li(x)x^{-s-1}dx,$$

onde $L \in \mathbb{R}$ é uma constante igual a ou muito próxima de 0, e $\ln(s-1)$ é qualquer ramo de logaritmo real para os valores reais nos quais está definido e holomórfico em $Re(s) > 1$.

Dem.: Para $a, b > 1$, podemos considerar a integral $\int_a^b Li(x)x^{-s-1}dx$ e, se $Re(s) > 0$, integrar por partes obtendo

$$\int_a^b Li(x)x^{-s-1}dx = \frac{1}{s}(Li(a)a^{-s} - Li(b)b^{-s}) + \frac{1}{s} \int_a^b \frac{x^{-s}}{\ln(x)}dx.$$

Notemos como, se $Re(s) > 1$, a integral $\int_a^b (x^{-s}/\ln(x))dx$ tem derivada em s da forma

$$= \int_a^b \frac{(-\ln x)x^{-s}}{\ln(x)}dx = - \int_a^b x^{-s}dx = \frac{b^{1-s} - a^{1-s}}{s-1},$$

pela regra de Leibniz para integrais (LIMA, 2014 (2), p. 147-148); isso nos leva a concluir que $s \int_a^b Li(x)x^{-s-1}dx - Li(a)a^{-s} + Li(b)b^{-s}$ é primitiva da expressão acima em $s > 1$, e assim, sendo $1 < r < t$,

$$\int_r^t \frac{b^{1-s} - a^{1-s}}{s-1}ds = \int_a^b Li(x)(tx^{-t-1} - rx^{-r-1})dx - Li(a)(a^{-t} - a^{-r}) + Li(b)(b^{-t} - b^{-r});$$

Nossa prova está quase concluída. Fazendo $a \rightarrow 1^+$ e $b \rightarrow \infty$, o lado esquerdo da expressão acima é por continuidade simplesmente

$$- \int_r^t \frac{1}{s-1}ds = \ln(r-1) - \ln(t-1),$$

uma vez que $Re(s) > 1$ implica $b^{1-s} \rightarrow 0$, quando $b \rightarrow \infty$. Já para o lado esquerdo, pode-se analisar por l'Hôpital que tanto $\lim_{a \rightarrow 1^+} Li(a)(a^{-t} - a^{-r}) = 0$ como $\lim_{b \rightarrow \infty} Li(b)(b^{-t} - b^{-r}) = 0$, sabendo que $Li'(x) = 1/\ln(x)$. Disto conclui-se que

$$\ln(r-1) - \ln(t-1) = \int_1^{\infty} Li(x)(tx^{-t-1} - rx^{-r-1})dx;$$

¹² Quase isto; na verdade, como tão comumente, a transformada com a mudança de sinal para $-s$, e partindo de 1.

Isolando os termos dependentes de r de um lado da equação e de t do outro, finaliza-se concluindo que são constantes. Obtemos

$$-\ln(t-1) = L + t \int_1^{\infty} Li(x)x^{-t-1} dx,$$

onde L é uma constante igual a

$$L = -2 \int_1^{\infty} \frac{Li(x)}{x^3} dx \approx 0.$$

O resultado final segue notando que a integral converge para qualquer entrada complexa cuja parte real é $t > 1$, e portanto define uma função holomórfica em $Re(s) > 1$, que há de coincidir com $\ln(s-1)$ por analiticidade.

3 A FUNÇÃO GAMMA

O fatorial é uma das mais famosas e ensinadas operações aritméticas. Dado $n \in \mathbb{N}$, o fatorial de n é normalmente definido como

$$n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (\dots) \cdot (n-1) \cdot n.$$

Podemos também defini-la recursivamente como a única função de $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que simultaneamente $1! = 1$ e $(n-1)! = \frac{n!}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Notemos que esta segunda definição implica $0! = 1$, mas não estende a definição a nenhum negativo, exigindo uma divisão por zero.

Há um resultado notável sobre o crescimento do fatorial, originado nos trabalhos de de Moivre e James Stirling (TITCHMARSH, 1939, p. 57 e 58).

Teorema 3.0.1 (A aproximação de Stirling) *O crescimento do fatorial $n!$ de n obedece à seguinte lei:*

$$n! \sim \frac{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n}{e^n}.$$

Alternativamente, pode-se escrever

$$n! = \frac{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n}{e^n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right).$$

No século XVIII descobriu-se como interpolar com sucesso a função fatorial, dando origem à função Gamma¹, contínua e analítica em \mathbb{R}^+ . As primeiras aparições da função Gamma deram-se em cartas de Daniel Bernoulli (GRONAU, 2003) e Euler (DAVIS, 1959) em 1729, ambos ao corresponderem-se com Goldbach. Euler encontrou múltiplas formas de defini-la; aqui partiremos da integral de Euler de segundo tipo, na classificação de Legendre.

Definição 3.0.1 *A função Gamma, inicialmente definida como $\Gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, é expressa por*

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

¹ Este problema de interpolação não tem solução única: outra famosa extensão é a de Hadamard (DAVIS, 1959), assim como a de Luschny. No século XX a Gamma original foi finalmente unicamente caracterizada, tal como expresso no teorema de Bohr-Mollerup-Artin anunciado abaixo. Após o teorema de Carlson (ao analisar $\ln \Gamma$) e alguma análise da ordem da função Gamma, era de se esperar que também se possa caracterizá-la unicamente no plano complexo. Aos interessados, buscar pelo teorema de Helmut Wielandt, descoberto em 1939 (REMMERT, 1996).

Notemos que $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$. Além disso, A função foi construída para satisfazer a seguinte equação funcional:

Teorema 3.0.2 *Para todo $x \in \text{Dom}(\Gamma)$, vale*

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x).$$

Dem.:

Integrando por partes, obtemos

$$\Gamma(x + 1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt = 0 + x \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = x\Gamma(x).$$

Seu valor em $x = 1$ e a equação funcional nos levam a concluir² que, se $n \in \mathbb{N}^$,*

$$\Gamma(n) = (n - 1)!$$

isto é, a função interpola a operação fatorial com sucesso!

Além disso, podemos usar a expressão analítica

$$\Gamma(x - 1) = \frac{\Gamma(x)}{x - 1}$$

e estender analiticamente a função para valores negativos, excetuando os inteiros negativos e zero, onde eventualmente a expressão exigiria uma divisão por zero!

Uma das mais simples caracterizações da função Gamma para os números reais é a dada a seguir, que a distingue dentre todas as interpolações do fatorial.

Teorema 3.0.3 (Bohr-Mollerup-Artin) *A função Gamma de Euler $\Gamma(x)$ é a única função definida para $x > 0$ que*

- i) é positiva;*
- ii) satisfaz $\Gamma(1) = 1$;*
- iii) satisfaz a equação funcional $x\Gamma(x) = \Gamma(x + 1), \forall x$;*
- iv) e é logaritmicamente convexa.*

A demonstração deste teorema, omitida aqui, acaba por mostrar que as hipóteses nos levam rapidamente a concluir que a função que caracterizam é única e da forma do limite que veremos no capítulo 7, o produto de Euler para a função Gamma.

² Esta translação de uma unidade tem motivos históricos. Riemann, entre outros, utilizava simplesmente $\Pi(n) = \Gamma(n + 1) = n!$; apesar disso, a versão transladada manteve-se a mais difundida.

Teorema 3.0.4 (Representação de Gauss³ para a função Gamma) *A identidade*

$$\Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^s}{s} \prod_{k=1}^n \frac{k}{s+k} \right)$$

é válida para ao menos para $\operatorname{Re}(s) > 0$, onde a integral está bem definida.

Dem.: Ao considerarmos uma integral da forma

$$\int_0^T \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{s-1} dx,$$

podemos constatar, em vista de que $e^{-x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$, $\forall x \in \mathbb{R}$, que podemos tomar os limites $n \rightarrow \infty$ e $T \rightarrow \infty$ para obter $\Gamma(s)$. Como para $\operatorname{Re}(s) > 0$ (3.0.1) converge absolutamente (e uniformemente), podemos tomar os limites em n, T na ordem que quisermos; em particular, podemos tomar $n = T$.

A seqüência em n das integrais

$$G_n(s) = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{s-1} dx$$

têm portanto limite $\Gamma(s)$ quando $n \rightarrow \infty$.

Além disso, $G_n(s)$ pode ser integrada por partes a fim de se eliminar o monômio y^n , $y = \left(1 - \frac{x}{n}\right)$:

$$\begin{aligned} G_n(s) &= \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{s-1} dx = \frac{1}{s} \left[\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^s \Big|_0^n + \frac{1}{s} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} x^s dx \right] \\ &= 0 + \frac{1}{s+1} \left[\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} x^{s(s+1)} \Big|_0^n + \frac{1}{s(s+1)} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-2} x^{s(s+1)} dx \right] \\ &= 0 + 0 + 0 + \frac{1}{s(s+1)(s+2)} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-3} x^{s(s+2)} dx \\ &= \frac{1}{s(s+1)(s+2) \cdots (s+n-1)} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-n} x^{s(s+n-1)} dx \\ &= \frac{1}{s(s+1)(s+2) \cdots (s+n-1)} \int_0^n x^{s(s+n-1)} dx \\ &= \frac{n^{s+n}}{s(s+1)(s+2) \cdots (s+n)} \\ &= \frac{n^s}{s} \prod_{k=1}^n \frac{k}{s+k}, \end{aligned}$$

de onde se conclui o teorema.

Desta representação, pouco mais foi necessário a Weierstrass para escrever sua representação de $\Gamma(s)$ com polos explícitos, que veremos no capítulo 7.

Teorema 3.0.5 *A função gamma pode ser analiticamente continuada para uma única função definida em todo o plano complexo, exceto nos inteiros negativos e zero, onde apresenta polos.*

Estas ideias serão vistas com mais detalhe no capítulo 7. Em particular, escreveremos

$$\Gamma(s+1) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1 + \frac{1}{k})^s}{1 + \frac{s}{k}},$$

produto convergente para todo $s \in \mathbb{C}$, exceto onde explicitamente apresenta polos.

A função Gamma apresenta muitas simetrias interessantes e fornece um grande campo de investigação. Dentre elas, as mais conhecidas são a reflexão de Euler e a duplicação de Legendre (TITCHMARSH, 1939, p. 55-57; EDWARDS, 1969, p. 421-423;).

Teorema 3.0.6 (Reflexão de Euler para a função Gamma) *Vale, para todo $s \in \mathbb{C}$ onde as funções estão bem definidas,*

$$\frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)} = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}.$$

Dem.: Convidamos o leitor a demonstrar o teorema através das representações por raízes ou polos explícitos para as funções Gamma e Seno presentes no capítulo 7.

Teorema 3.0.7 (Duplicação de Legendre para a função Gamma) *Vale*

$$\sqrt{\pi}\Gamma(2s) = 2^{2s-1}\Gamma(s)\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right)$$

para todo $s \in \mathbb{C}$ onde as funções estão bem definidas.

A demonstração desta identidade envolve a função Beta, que não abordaremos neste trabalho.

Muitas generalizações desta identidade existem. De maneira mais geral, vale

Teorema 3.0.8 (Fórmula de multiplicação de Gauss)

$$\Gamma(s) \cdot \Gamma\left(s + \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(s + \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \Gamma\left(s + \frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1-2ns}{2}} \Gamma(ns).$$

Assim encerramos esta breve introdução à função Gamma. A seguir, mostramos como o estudo do fatorial pode render resultados sobre os números primos.

3.1 RESULTADOS ACERCA DOS NÚMEROS PRIMOS

A imensa importância do fatorial para o estudo dos números primos evidencia-se pelos resultados obtidos por Tchebycheff em meados do século XIX (TCHEBYCHEFF, 1852). De fato, é um dos poucos exemplos em que as assimetrias dos primos encontram um encaixe inteligível:

$$n! = (1) \cdot (2) \cdot (3) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (5) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (7) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 5) \cdot \dots \cdot n.$$

Note que cada termo adiciona ao fatorial sua decomposição prima, o que estabelece um ritmo de crescimento governado pelas potências dos primos. Podemos sumarizar esta relação na fórmula⁴ (HARDY e WRIGHT, 2008, p. 454):

$$n! = \prod_{1 \leq k \leq \log_2 n} \prod_{p \leq n^{1/k}} p^{\lfloor n/p^k \rfloor}. \quad (3.1)$$

Esta fórmula⁵, aliada ao bem compreendido crescimento do fatorial, já nos permite imediatamente obter assintóticas para expressões dependentes de números primos. Mais precisamente, podemos encontrar resultados tais como⁶:

Teorema 3.1.1

$$\prod_{p \leq n} p^{\lfloor n/p \rfloor} \sim c \cdot n,$$

onde o produto se estende a primos p menores ou iguais a n e $c = \frac{1}{A \cdot e}$ é uma constante.

Dem.:

Ao retirarmos a enésima raiz de ambos os lados de (3.1) e explicitarmos o termo correspondente a $k = 1$, escrevemos:

⁴ Modificamos os índices dos produtos apenas para evidenciar seu caráter finito.

⁵ Como

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lfloor n/p^k \rfloor = \frac{n - (n_{0_p} + n_{1_p} + \dots + n_{l_p})}{p - 1},$$

onde $n = n_{l_p} p^l + n_{l-1_p} + \dots + n_{0_p}$ expressa o desenvolvimento p -ádico de n (RIBENBOIM, 2014, p. 21), também pode-se expressar (3.1) na linguagem da análise p -ádica.

⁶ Para resultados históricos mais precisos, indicamos a busca do primeiro, segundo e terceiro teoremas de Mertens (MERTENS, 1874). Este último, e mais famoso, nos entrega:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n) \prod_{p \leq n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = e^{-\gamma},$$

onde γ é a constante de Euler-Mascheroni.

$$n!^{1/n} = \left(\prod_{p \leq n} p^{\lfloor n/p \rfloor} \right) \cdot \left(\prod_{2 \leq k \leq \log_2 n} \prod_{p \leq n^{1/k}} p^{\lfloor n/p^k \rfloor} \right). \quad (3.2)$$

Afirmção 1: o termo em parênteses à direita tende para uma constante A à medida que $n \rightarrow \infty$.

Dem. (Afirmção 1):

Chamemos o dito termo de $g(n)$. Ao retirarmos seu logaritmo natural, obtemos

$$\ln(g(n)) = \sum_{2 \leq k \leq \log_2 n} \sum_{p \leq n^{1/k}} \frac{\ln p}{n} \lfloor n/p^k \rfloor,$$

de onde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(g(n)) = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_p \frac{\ln p}{p^k},$$

se esta soma convergir⁷. Sua convergência pode ser deduzida pela majoração de $\ln p/p^k$ por $\ln n/n^k$, de onde

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} \sum_p \frac{\ln p}{p^k} &\leq \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^k} = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^k} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n(n-1)}, \end{aligned}$$

que pelo teste da integral certamente é convergente, onde a mudança da ordem da soma é justificada pela convergência absoluta. Alternativamente, podemos então escrever

$$A = \prod_p p^{\frac{1}{p(p-1)}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{6}} \cdot 5^{\frac{1}{20}} \cdot 7^{\frac{1}{42}} \cdot 11^{\frac{1}{110}} \cdot \dots$$

Retornemos à prova do teorema (3.1.1). Como, pelo teorema (3.0.1), temos

$$n! = \frac{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n}{e^n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right),$$

podemos expressar (3.2) como

⁷ Mais tarde poderemos reconhecê-la como a soma da derivada da função zeta prima avaliada nos naturais $k \geq 2$, com sinal invertido. Isso nos leva também a concluir que $\ln A = \lim_{s \rightarrow 1^+} (\zeta'(s)/\zeta(s) - P'(s))$.

$$\frac{(2\pi n)^{1/2n} \cdot n}{e} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{1/n} = \left(\prod_{p \leq n} p^{\frac{\lfloor n/p \rfloor}{n}}\right) \cdot \left(\prod_{2 \leq k \leq \log_2 n} \prod_{p \leq n^{1/k}} p^{\frac{\lfloor n/p^k \rfloor}{n}}\right).$$

Concluimos que

$$\frac{\prod_{p \leq n} p^{\frac{\lfloor n/p \rfloor}{n}}}{n} = \frac{(2\pi n)^{1/2n}}{e} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{1/n} \cdot \frac{1}{\prod_{2 \leq k \leq \log_2 n} \prod_{p \leq n^{1/k}} p^{\frac{\lfloor n/p^k \rfloor}{n}}},$$

e pela afirmação 1, temos, para $n \rightarrow \infty$,

$$\frac{\prod_{p \leq n} p^{\frac{\lfloor n/p \rfloor}{n}}}{n} \rightarrow \frac{1}{A \cdot e},$$

finalizando o teorema.

Isso já nos permite escrever o seguinte corolário:

Corolário 3.1.1 *Vale*

$$\sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p} = \ln n + O(1). \quad (3.3)$$

Em particular,

$$\sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p} \sim \ln n. \quad (3.4)$$

Dem.:

Retirando o logaritmo natural do resultado anterior, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{p \leq n} \ln p \cdot \frac{1}{n} \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor - \ln c - \ln n \right) = 0.$$

Recordemos que $\vartheta(n) = \sum_{p \leq n} \ln p = O(n)$, de sorte que

$$\sum_{p \leq n} \ln p \cdot \frac{1}{n} \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor = \sum_{p \leq n} \ln p \cdot \frac{1}{n} \left(\frac{n}{p} + O(1) \right) = \sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p} + O(1)$$

e o limite acima equivale a

$$\ln(n) + \ln c - \epsilon < \sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p} + O(1) < \ln(n) + \ln c + \epsilon,$$

de onde claramente

$$1 + o(1) < \frac{\sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p}}{\ln n} < 1 + o(1),$$

ou seja, o resultado segue.

3.1.1 Breve justificativa dos métodos analíticos

Como pode ter percebido o leitor, concluímos o resultado assintótico anterior como consequência particular de que $\sum_{p \leq n} \ln p/p - \ln n$ é limitado. Se pudéssemos concluir que, mais que simplesmente limitado, o limite quando $n \rightarrow \infty$ exista, poderíamos imediatamente concluir o Teorema dos Números Primos, por uma soma por partes (NEWMAN, 1980).

A prova da existência do limite é equivalente a mostrar que

$$\frac{\prod_{p \leq n} p^{\frac{n/p}{n}}}{\prod_{p \leq n} p^{\frac{\lfloor n/p \rfloor}{n}}} = \prod_{p \leq n} p^{\frac{n - \text{mod } p}{pn}} \rightarrow 1, \text{ quando } n \rightarrow \infty, \quad (3.5)$$

uma vez que isso nos permitiria substituir a versão *com* a função parte inteira por uma versão *sem* a mesma no teorema (3.1.1), de onde imediatamente concluiríamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p} + 1 + \ln A - \ln n \right) = 0,$$

simplesmente retirando o logaritmo natural, analogamente ao que já fizemos.

Muitos procedimentos de manipulação de funções aritméticas notáveis relacionadas rendem facilmente resultados que utilizam expressões dependentes de *partes inteiras*, inclusive passíveis de relação direta com informações sobre os números primos, sem no entanto permitir resultados semelhantes independentes destas partes inteiras, necessárias para resultados mais profundos.

O corolário (3.1.1) já nos sugere o Teorema dos Números Primos. Infelizmente, ele implica apenas que $n/\ln n$ tem a mesma ordem de grandeza de $\pi(n)$, a quantidade de primos menores ou iguais a n , e não um resultado assintótico.

Lembremos do teorema 2.6.2. Se a recíproca deste teorema fosse verdadeira, poderíamos, em vista do corolário (3.1.1), imediatamente concluir que

$$\vartheta(n) = \sum_{p \leq n} \ln p \sim n,$$

que, como vimos, sabidamente é equivalente ao resultado

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n},$$

o Teorema dos Números Primos (HARDY e WRIGHT, 2008, p. 459). No entanto, a recíproca é, em geral, falsa, mesmo para funções monótonas. Notemos que se $\sum_{n=1}^T \alpha_n/n \sim \ln n$, a identidade

$$\sum_{n=1}^T \frac{\alpha_n}{n} = \int_1^T \frac{\sum_{n \leq x} \alpha_n}{x} \frac{dx}{x} + \frac{\sum_{n=1}^T \alpha_n}{T}$$

implica imediatamente que, se $\sum_{n=1}^T \alpha_n \sim x^c$, c há de ser 1, e que também não pode ser o caso de ser assintótica a $x \ln x$, $x \ln \ln x$, etc. O problema reside no caso em que, ainda que

$\vartheta(n)$ tenha a mesma ordem de grandeza de n , o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} (\vartheta(n)/n)$ não exista (como discutimos anteriormente). Por métodos distintos, Tchebycheff mostrou que o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n)}{n/\ln n}$$

não poderia ser outro que não 1, *se existisse*. Nas palavras de Hardy, o Teorema dos Números Primos “[...] seguiria de imediato se pudéssemos provar que $\pi(x)/\frac{n}{\ln x}$ tende para um limite. Infelizmente esta é a real dificuldade na prova do teorema [...]” (HARDY e WRIGHT, 2008, p. 464).

É neste sentido que direcionaram-se muitos dos esforços dos matemáticos da segunda metade do século XIX, culminando na prova do teorema em 1896, alcançada independentemente por Hadamard e de la Vallée Poussin, ao usarem a fórmula obtida por von Mangoldt. Estes, no entanto, não alcançaram a demonstração por qualquer meio elementar, e sim por um poderoso maquinário inserido no contexto da análise complexa. É no sentido da construção deste maquinário que desenvolveremos as idéias dos capítulos 6, 7 e 8, cujo germen encontra-se, sem sombra de dúvidas, no famoso artigo de Riemann (1859).

Trabalhos posteriores em análise complexa ou harmônica simplificaram muito a prova do Teorema dos Números Primos, como os teoremas de Wiener e Ikehara, e o posterior de Newman. No entanto, as fórmulas explícitas obtidas pelos métodos anteriores fornecem resultados de uma natureza muito mais profunda, e seu uso para a demonstração do Teorema dos Números Primos é uma aplicação bastante particular; nada os fez ultrapassados ou obsoletos.

3.2 CRITÉRIOS DE PRIMALIDADE ATRAVÉS DO FATORIAL

Um dos mais conhecidos teoremas do gênero é o teorema de Wilson, cuja primeira prova publicada é de Lagrange em 1771, tendo sido anunciado ao menos tão cedo quanto 1000 d.C. por al-Haytham.

Teorema 3.2.1 (Teorema de Wilson) *Se p é um número primo, então*

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

É, na verdade, um corolário do pequeno teorema de Fermat, primeiramente provado por Euler (RIBENBOIM, 2014, p. 18).

Teorema 3.2.2 (Pequeno Teorema de Fermat) *Se p é um número primo e se a é um número natural, então $a^p \equiv a \pmod{p}$. Em particular, se $p \nmid a$, então $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.*

O fato de que $(n-1)!$ é divisível por n se, e somente se, n é composto, foi aproveitado por vários autores. Destacamos⁸ a expressão encontrada por Willans em 1964 (RIBENBOIM, 2014, p. 130):

⁸ Uma expressão semelhante foi encontrada por G. Andreoli em 1912 (DICKSON, 1919, p. 434).

$$H(j) = \frac{\sin^2 \left(\pi \frac{((j-1)!)^2}{j} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{j} \right)} = \begin{cases} 1, & \text{se } j \text{ é 1 ou primo;} \\ 0, & \text{se } j \text{ é composto.} \end{cases}$$

O argumento de Willans (1964, p. 2) basicamente reside no fato que $(j-1)!^2/j$ ou é um inteiro, se j é 1 ou composto, ou tem parte fracionária igual a $1/j$, quando primo, pelo teorema de Wilson. Este fato leva Willans a se aproveitar da função Seno para construir sua função, cujo quadrado é um tanto supérfluo: não é necessário ir muito além de sua análise para concluir que a função

$$\frac{\sin \left(\pi \frac{((j-1)!)^2}{j} \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{j} \right)}, \quad (3.6)$$

sem quadrados, é 0 para todos os compostos, 1 para $j = 1, 2$ e -1 para todos os outros primos, onde $((j-1)!^2/j = k + 1/j$ é tal que k é ímpar.

Como a representação com raízes explícitas de Seno tem coeficientes aparentados da função Zeta, é possível encontrar uma série cujos coeficientes são governados pela função Zeta com as mesmas propriedades da função acima⁹.

⁹ Veja o teorema (4.1.5).

4 A FUNÇÃO ZETA

Exibamos a expressão primeiramente considerada por Euler

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \dots \quad (4.1)$$

para valores particulares de s .

Notemos inicialmente que, se $s \in \mathbb{C}$, por ser

$$\|\zeta(s)\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\operatorname{Re}(s)}},$$

pela desigualdade triangular, e ainda por

$$\int_1^{\infty} x^{-\operatorname{Re}(s)} < \infty \iff \operatorname{Re}(s) > 1,$$

temos pelo teste da integral que (4.1) converge absolutamente para todo $s \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}(s) > 1$, onde, portanto, define sem ambigüidade uma função. Historicamente, sagrou-se para esta o nome de função Zeta.

A limitação do domínio da expressão (4.1) à $\operatorname{Re}(s) > 1$ parece muito natural, convergindo ela apenas nesta região. No entanto, como veremos adiante, em especial no capítulo 6, a expressão 4.1 é apenas uma das representações da função Zeta, havendo outras representações com suas respectivas regiões de convergência. Veremos ainda que quando quaisquer das regiões de convergência das representações escolhidas apresentarem intersecção não nula, forçosamente convergem para os mesmos valores nesta intersecção, pela unicidade da continuação analítica. Tal fato nos livra de qualquer dificuldade de atribuição de valores à Zeta, tal como a polêmica em torno dos argumentos de Euler, ao utilizar amplamente séries divergentes.

A função Zeta pode ser analiticamente continuada para todo \mathbb{C} , a menos de um único polo em $s = 1$, o que a caracteriza como uma função meromórfica. Em homenagem ao matemático alemão Bernhard Riemann¹, chama-se função Zeta de Riemann a função definida em $\mathbb{C} - \{1\}$ que estende analiticamente (4.1). Para fins práticos utilizaremos apenas Zeta para designá-la ao longo deste trabalho, limitando explícita e contextualmente o domínio quando apropriado.

Vejamos como a função zeta codifica informações aritméticas a partir de alguns exemplos.

Ao tomarmos $\zeta(2s)$, temos uma expressão dependente dos quadrados perfeitos:

$$\begin{aligned} \zeta(2s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2)^s} \\ &= 1 + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{16^s} + \frac{1}{25^s} \end{aligned}$$

¹ Riemann publicou em 1859 “Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse” (Do Número de Primos abaixo de uma dada Quantidade), onde encontra uma fórmula explícita para o número expresso em seu título, dependente das raízes da função Zeta.

Da mesma forma, $\zeta(ns)$ se expressa a partir das enésimas potências dos naturais. Ainda mais curiosamente, $\zeta^2(s)$ tem coeficientes determinados pela quantidade de divisores:

$$\begin{aligned}\zeta^2(s) &= \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \dots\right) + \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} + \dots\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{3^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{9^s} + \dots\right) + \left(\frac{1}{4^s} + \frac{1}{8^s} + \frac{1}{12^s} + \dots\right) + \dots \\ &= \left(1 + \frac{2}{2^s} + \frac{2}{3^s} + \frac{3}{4^s} + \frac{2}{5^s} + \frac{4}{6^s} + \dots\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s}.\end{aligned}$$

O leitor pode se perguntar quantas mais caracterizações de funções aritméticas podem ser alcançadas pelos coeficientes destas séries construídas a partir da função Zeta². Sugere-mos que experimente por si próprio encontrar outras caracterizações e representações. Para os interessados, desenvolveremos mais estas idéias no capítulo 5, seção 5.2.

Prossigamos a demonstrar como a expressão (4.1) traduz-se como um produto de números primos

Teorema 4.0.1 (Produto de Euler) *A identidade*

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - P_k^{-s}} = \zeta(s),$$

onde P_k é o k -ésimo primo, é válida para $\text{Re}(s) > 1$.

Demonstração 4.0.1 De fato para $\text{Re}(s) > 0$ temos $\|P_k^{-s}\| < 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$, de forma que

² Para uma série de potências, digamos de $1/(1-x)$, $|x| < 1$, temos

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x^n,$$

reflexo do fato dos expoentes dos elementos da forma x^k **somarem-se** após a multiplicação de suas bases, isto é, $x^k \cdot x^j = x^{k+j}$. No caso da função Zeta e outras séries de Dirichlet, temos $k^s \cdot j^s = (k \cdot j)^s$, sendo a **multiplicação** fundamental para a posterior reordenação. Podemos nos aproveitar da propriedade básica dos logaritmos $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$ para reverter a soma à multiplicação, construindo uma série de potências logarítmicas $lg : (e, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ que reproduza a codificação da aritmética presente para a Zeta:

$$lg(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{\ln n} = 1 + x^{\ln 2} + x^{\ln 3} + \dots$$

Note como

$$lg^2(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{\ln n}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} d(n)x^{\ln n},$$

assim como para $\zeta^2(s)$! De fato, $lg(x) = \zeta(\ln x)$.

$$\frac{1}{1 - P_k^{-s}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_k^{-ns},$$

e portanto

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - P_k^{-s}} &= \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_k^{-ns} \\ &= (1 + 2^{-s} + 2^{-2s} + 2^{-3s} + \dots)(1 + 3^{-s} + 3^{-2s} + \dots)(1 + 5^{-s} + \dots)(\dots). \end{aligned}$$

Ao aplicarmos a propriedade distributiva do produto³, obtemos uma soma de termos da forma $2^{-k_1s} \cdot 3^{-k_2s} \cdot 5^{-k_3s} \dots$ correspondentes a cada possibilidade de escolha das constantes $k_m \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}^*$, somados nalguma ordem (da qual em $\text{Re}(s) > 1$ o resultado final independe, como veremos ao final da demonstração).

Ao considerarmos as possibilidades de escolha das constantes nas quais não há m tal que k_j seja 0, $\forall j > m$, os termos resultantes são nulos: como $\text{Re}(s) > 0$, de fato são idênticos a um produto de infinitos fatores majorados por $\|1/2^s\| < 1$, e cuja norma portanto é 0.

O Teorema Fundamental da Aritmética (teorema 2.1.1) afirma que (i) todo número natural pode ser fatorado como um produto de primos, e que (ii) tal fatoração é única, a menos de ordem.

Ao considerarmos as possibilidades de escolha das constantes nas quais há m tal que k_j seja 0, $\forall j > m$, os termos resultantes são da forma n^{-s} , $n \in \mathbb{N}$, escritos em sua fatoração prima. Visto serem as constantes escolhidas expoentes de bases primas, por (i) todo número natural há de ser resultado ao menos uma vez, pois sua fatoração claramente corresponde a alguma possibilidade de escolha; por (ii), cada um destes números naturais é resultado de uma única possibilidade de escolha.

Concluimos que uma vez distribuído o produto obtemos uma soma de termos da forma n^{-s} , $n \in \mathbb{N}^*$ sem redundância, precisamente os mesmos de $\zeta(s)$, a menos, possivelmente, de ordem. Como para $\text{Re}(s) > 1$ $\zeta(s)$ converge absolutamente, converge comutativamente, justificando nesta região a convergência do produto para $\zeta(s)$ independentemente da ordem de distribuição escolhida.

O Produto de Euler basicamente expressa o Teorema Fundamental da Aritmética em uma forma apropriada para a análise, explicitando a relação estrutural presente entre os primos e os números naturais. É deste resultado que derivam, essencialmente, todos os resultados acerca da distribuição dos números primos a partir da função Zeta. Dos muitos resultados passíveis de obtenção, o mais direto e marcante é obtido ao tomarmos o logaritmo da Zeta (veja o exemplo 5.2.8).

Vimos brevemente a teoria essencial da função Zeta, e estamos preparados para prosseguir. Antes disto, é interessante notar como o produto de Euler (4.0.1) muito naturalmente nos mostra que, ao menos para⁴ $\text{Re}(s) > 1$,

³ A convergência absoluta do produto justifica o tratamento dos termos em totalidade.

⁴ A hipótese de Riemman é equivalente a validade desta representação para $\text{Re}(s) > 1/2$ (TITCHMARSH, 1986, p. 369-370).

$$\begin{aligned}\frac{1}{\zeta(s)} &= \prod_{k=1}^{\infty} (1 - P_k^{-s}) \\ &= 1 - \frac{1}{2^s} - \frac{1}{3^s} + \frac{0}{4^s} - \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} - \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s},\end{aligned}$$

com $\mu(n)$ sendo a função de Möbius⁵.

4.1 AVALIAÇÃO DA FUNÇÃO NOS INTEIROS

Os valores da função Zeta nos números inteiros são objetos de estudo ao menos desde Euler, que encontrou formas fechadas para os inteiros não positivos e os positivos pares. Expressões para os valores assumidos pela Zeta nos números ímpares ainda não foram encontradas, quase 300 anos após as primeiras buscas de Euler.

Uma das aparições mais destacadas dos valores da Zeta nos naturais são os coeficientes da expansão de Taylor do logaritmo da função Gamma^{6 7}:

$$\ln(\Gamma(1-s)) = \gamma s + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\zeta(n)}{n} \cdot s^n$$

onde γ é a constante de Euler-Mascheroni. Houvesse uma forma distinta de caracterizar os coeficientes desta função, poderíamos obter resultados sobre a avaliação de $\zeta(n)$ para todo natural n , por unicidade dos coeficientes. Se houver tal forma, ainda permanece desconhecida nos dias de hoje⁸. É por unicidade dos coeficientes das séries de potências que Euler originalmente descobriu a estrutura por trás dos valores da Zeta avaliada nos naturais pares.

4.1.1 Avaliação da função nos naturais pares

Aqui apresenta-se a maneira como, em 1734, Euler resolveu o problema de Basel, e que mais tarde o levou a descobrir o valor preciso de $\zeta(2n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ em função de um racional e uma potência de π . Seu método consistia na análise da seguinte representação da função seno⁹:

⁵ Portanto

$$1 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{d|n} \mu(d)}{n^s}$$

nos fornece como subproduto uma outra demonstração da expressão fundamental (2.3).

⁶ A expansão de Taylor da própria função Gamma também rende coeficientes relacionados aos valores da zeta nos naturais, embora não tão elegantemente como a de seu logaritmo.

⁷ A demonstração desta fórmula para o logaritmo da função Gamma requer pouco mais que a aplicação do logaritmo à identidade (7.1) ou (7.2), demonstrada no capítulo 7.

⁸ Escrevo em Abril de 2020.

⁹ Ao que parece, Euler não tinha uma demonstração sólida do produto que encontrara, o que trouxe alguma controvérsia à sua solução do problema de Basel. Em 1741 Euler publicou, em francês, uma

Lema 4.1.1.1 *A identidade*

$$\sin(x) = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) \quad (4.2)$$

é válida $\forall x \in \mathbb{C}$.

Dem.: conferir o capítulo 7.

Notemos que o produto pode ser desenvolvido como uma série de potências da forma

$$\begin{aligned} [x] \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right) (\dots) &= \left[x - \frac{x^3}{\pi^2}\right] \left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right) (\dots) \\ &= \left[x - \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2^2\pi^2}\right)x^3 + \frac{1}{2^2\pi^4}x^5\right] \left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4^2\pi^2}\right) (\dots) \\ &= \left[x - \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2^2\pi^2} + \frac{1}{3^2\pi^2}\right)x^3 + \left(\frac{1}{2^2\pi^4} + \frac{1}{3^2\pi^4} + \frac{1}{6^2\pi^4}\right)x^5 + \frac{1}{6^2\pi^6}\right] \left(1 - \frac{x^2}{4^2\pi^2}\right) (\dots) \\ &= x - \frac{1}{\pi^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right) x^3 + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{\pi^{2n}} \sum_{1 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_n < \infty} \frac{1}{(l_1 \dots l_n)^2} + \dots \end{aligned}$$

e, sendo conhecida a expansão de Taylor da função seno,

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = x - \frac{1}{6}x^3 + \dots \quad ,$$

pela unicidade dos coeficientes da representação por meio de séries de potências somos levados a concluir que, para $n \geq 1$

$$\sum_{1 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_n < \infty} \frac{1}{(l_1 \dots l_n)^2} = \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Em particular, para $n = 1$, tem-se

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (4.3)$$

Para que obtenhamos outros valores de $\zeta(2n)$, pode-se derivar logaritmicamente (4.2) e obter

$$\begin{aligned} \cot(x) &= \frac{1}{x} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{x}{k^2\pi^2}}{1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}} = \frac{1}{x} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k^2\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{k^{2n}\pi^{2n}} = \frac{1}{x} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} \frac{1}{\pi^{2n+2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n+2}} \\ &= \frac{1}{x} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-1} \frac{1}{\pi^{2n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \frac{1}{x} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-1} \frac{1}{\pi^{2n}} \zeta(2n) \end{aligned}$$

solução independente, baseada em uma análise diferencial de um arco de círculo, na série binomial e algumas manipulações algébricas (SANDIFER, 2004).

onde utilizamos a série geométrica e comutamos as somas, que nos é permitido uma vez que há convergência uniforme para $\|x\| \leq a < 1$. Conhecida a expansão de Taylor de $\cot(x)$

$$\cot(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} B_{2n} x^{2n-1}}{(2n)!}$$

concluimos¹⁰ novamente por unicidade dos coeficientes que

Teorema 4.1.1 *A função Zeta avaliada nos naturais pares sempre é escrita como um produto de uma potência de π e um número racional. Mais precisamente,*

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n+1} B_{2n} (2\pi)^{2n}}{2(2n)!}, \quad (4.4)$$

onde B_n são os números de Bernoulli, sempre racionais.¹¹

Conjuntamente com a fórmula de Stirling (3.0.1), obtém-se uma assintótica para o módulo dos números de Bernoulli pares¹²:

Corolário 4.1.1 *Os números de Bernoulli pares respeitam a assintótica*

$$|B_{2n}| \sim 4\sqrt{\pi n} \left(\frac{n}{\pi e}\right)^{2n}$$

Dem.: Basta aplicar diretamente a assintótica dada pela aproximação de Stirling à expressão para $\zeta(2n)$ acima, tendo em mente que $\zeta(x) \rightarrow 1$ quando $x \rightarrow \infty$.

4.1.2 Avaliação da função nos inteiros negativos

Como compreender a função Zeta para os inteiros negativos, uma vez que a série com a qual lidamos não converge no semiplano $Re(s) \leq 1$? A resposta a essa pergunta é dada no capítulo 6, e não há como compreender verdadeiramente esta secção sem antes estudá-lo. Dito isto, vamos em frente.

Para encontrarmos os valores, não há maneira melhor que utilizarmos a equação funcional assimétrica que obteremos em 6.4.2:

$$\zeta(1-s) = 2^{-s+1} \pi^{-s} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(s) \zeta(s).$$

Tomando $s = 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, ela nos mostra imediatamente que $\zeta(-2n) = 0$, afinal $\cos(\pi s/2)$ zera para estes números e todas as outras funções são regulares nestes pontos!

Além disso, ao tomarmos $s = 2n$, $n \in \mathbb{N}^*$, obtemos uma relação da avaliação nos ímpares negativos $\zeta(-2n + 1)$ com os valores pares positivos que obtivemos na secção precedente:

¹⁰ Outro método para a obtenção destes valores consiste no desenvolvimento em séries de Fourier das funções x^{2n} em $(-L, L]$ estendidas $2L$ -periodicamente avaliadas em $x = L$. O método falha para potências ímpares.

¹¹ Note que o termo $(-1)^{n+1}$ compensa a alternância de sinal dos números de Bernoulli.

¹² Os números de Bernoulli ímpares, exceto B_1 , são todos nulos.

$$\begin{aligned}
\zeta(-2n+1) &= 2^{-2n+1} \pi^{-2n} (-1)^n (2n-1)! \zeta(2n) \\
&= 2^{-2n+1} \pi^{-2n} (-1)^n (2n-1)! \frac{(-1)^{n+1} B_{2n} (2\pi)^{2n}}{2(2n)!} \\
&= -\frac{B_{2n}}{2n}.
\end{aligned}$$

Como os números de Bernoulli ímpares maiores que um são todos nulos, podemos escrever em generalidade

$$\zeta(-n) = -\frac{B_{n+1}}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Historicamente, a primeira atribuição de valores a $\zeta(-n)$ foi efetuada por Euler ao redor de 1748, quando produziu seu *Institutiones calculi differentialis* (publicado somente em 1755). Representou¹³ a função Zeta através da função Eta $\eta(s)$:

$$\zeta(s) = \frac{2^{s-1}}{2^{s-1}-1} \cdot \eta(s) = \frac{2^{s-1}}{2^{s-1}-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} - \dots\right).$$

A vantagem do uso da função Eta sobre a Zeta é sua somabilidade pela técnica que hoje conhecemos como somas de Abel,¹⁴ íntima a Euler, que utilizava copiosamente séries de potências como funções geradoras.

O método é bastante direto. Para $\|s\| < 1$, consideremos a série geométrica

$$\frac{1}{1+s} = 1 - s + s^2 - s^3 + \dots$$

Ao tomarmos o limite $s \rightarrow 1^+$, o lado esquerdo da igualdade tende a $1/2$, enquanto o direito, de certa forma, parece tender a $\eta(0)$ “ $=$ ” $1 - 1 + 1 - \dots$. Não paremos por aqui. Percebamos como, ao diferenciar esta expressão termo por termo, os coeficientes tornam-se os números naturais:

$$\frac{1}{(1+s)^2} = 1 - 2s + 3s^2 - \dots$$

No sentido das somas de Abel, podemos atribuir portanto a $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$ o valor de $1/4$.

Multipliquemos ambos os lados por s , para que os expoentes retornem aos números naturais, e diferenciemos novamente. Obtemos ao levar o processo adiante:

¹³ Provaremos a validade da representação mais adiante no capítulo 5, em 5.2.3.

¹⁴ Apresentadas com mais rigor em 6.2, onde o leitor poderá compreender por que o método gera os valores corretos para a continuação analítica da Eta, apesar de não ser aplicável diretamente à Zeta.

$$\begin{aligned}
\frac{1-s}{(1+s)^3} &= 1 - 2^2s + 3^2s^2 - 4^2s^3 + \dots \\
\frac{1-4s+s^2}{(1+s)^4} &= 1 - 2^3s + 3^3s^2 - 4^3s^3 + \dots \\
\frac{1-11s+11s^2-s^3}{(1+s)^5} &= 1 - 2^4s + 3^4s^2 - 4^4s^3 + \dots \\
&\dots \\
\frac{\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k E(n, k) s^k}{(1+s)^{n+1}} &= 1 - 2^n s + 3^n s^2 - 4^n s^3 + \dots \\
&\dots,
\end{aligned}$$

onde $E(n, k) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{n+1}{j} (k+1-j)^n$ são os números Eulerianos, cuja definição pode ser encontrada ao expandirmos o binômio $(1+s)^{n+1}$ e multiplicarmos pela série $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1)^n s^k$.¹⁵

Assim, no sentido de Abel, obtemos também

$$\begin{aligned}
1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots &= 0 \quad (A) \\
1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots &= -\frac{1}{8} \quad (A) \\
1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots &= 0 \quad (A) \\
&\dots
\end{aligned}$$

Os números de Euler tem vasta importância combinatória. Satisfazem a relação

$$\sum_{k=0}^{n-1} E(n, k) = n!$$

e ainda, em vista do resultado que obtivemos anteriormente em função dos números de Bernoulli e da relação entre a Eta e a Zeta, satisfazem a relação

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k E(n, k) = \frac{2^{n+1}(2^{n+1} - 1)}{n+1} B_{n+1}.$$

4.1.3 Expressões combinatórias dependentes destes valores

As possibilidades nesta área de estudo são vastas. Ilustraremos-lo através de alguns exemplos, apenas para motivar o interesse do leitor.

¹⁵ Este processo nos rende também algumas belas identidades combinatórias ao recordarmos que o resultado da multiplicação será um polinômio de grau $n-1$: $E(n, k) = 0$ para todo $k \geq n$ (onde o binômio $\binom{n+1}{j}$ pode ser substituído por $(n+1)_j/j!$, onde $(n+1)_j$ é o símbolo de Pochhammer). Por exemplo: $E(4, 5) = \binom{5}{0}(6)^4 - \binom{5}{1}(5)^4 + \binom{5}{2}(4)^4 - \binom{5}{3}(3)^4 + \binom{5}{4}(2)^4 - \binom{5}{5} = 0$.

Teorema 4.1.2 A soma das partes fracionárias de $\zeta(n)$, $2 \leq n \in \mathbb{N}$, é 1.

$$\sum_{n=2}^{\infty} (\zeta(n) - 1) = 1.$$

Demonstração 4.1.1 Temos

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} (\zeta(n) - 1) &= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^n} = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{k^n} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\frac{1}{k^2}}{1 - \frac{1}{k}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} \\ &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} \dots = 1 \end{aligned}$$

Teorema 4.1.3

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{\zeta(2n)}{n \cdot 4^n}}.$$

Dem.: Ao lembrarmos do célebre Produto de Wallis¹⁶ (1656)

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3}\right) \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5}\right) \left(\frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7}\right) \dots \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k+1} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2}{4k^2-1} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - (4k^2)^{-1}}, \end{aligned}$$

podemos observar que

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 - (4k^2)^{-1}) = -\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-(4k^2)^{-1})^n (-1)^{n+1}}{n} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4k^2)^{-n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 4^n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(2n)}{n \cdot 4^n} \end{aligned}$$

de onde o resultado segue após a exponenciação.

Em breve, vamos discutir superficialmente sobre os zeros da função Zeta e a hipótese de Riemann. Aproveitamos, portanto, para apresentar o critério de Marcel Riesz para esta hipótese, uma afirmação equivalente que depende dos valores assumidos por Zeta nos naturais pares.

Teorema 4.1.4 A afirmação

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)! \zeta(2n)} x^n = O(x^{1/4+\epsilon}), \quad \forall \epsilon > 0$$

é equivalente à hipótese de Riemann (TITCHMARSH, 1986, p. 382).

¹⁶ É possível demonstrá-lo fazendo $x = \frac{\pi}{2}$ no produto de Euler para a função seno. A demonstração da validade desta representação encontra-se no capítulo 7, seção 7.1.

De fato, muitos critérios semelhantes podem ser obtidos para séries de potências cujos coeficientes apresentam os valores $\zeta(n)$ nos denominadores, obteníveis por uma análise de sua transformação de Mellin (ver o teorema 2.3.2).

Terminemos re-expressando (3.6) no espírito desta seção.

Teorema 4.1.5 *A expressão*

$$\Gamma^2(s) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (\Gamma(s)^4 - 1)^n \sum_{1 \leq l_1, \dots, l_n < \infty} \frac{1}{s^{2(l_1 + \dots + l_n)}} \cdot \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_n < \infty} \frac{1}{k_j^2 k_1^{2l_1} \cdot \dots \cdot k_n^{2l_n}}$$

converge para $\|s\| > 1$. Em particular, vale 1 para $s = 1, 2$, -1 para $s = p \geq 3$, p primo, e 0 em $s = n$, n composto.

Dem.: Por (4.2) temos

$$\begin{aligned} \frac{\sin\left(\pi \frac{\Gamma(s)^2}{s}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{s}\right)} &= \frac{\pi \frac{\Gamma(s)^2}{s}}{\frac{\pi}{s}} \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 - \frac{(\pi \frac{\Gamma(s)^2}{s})^2}{k^2 \pi^2}}{1 - \frac{(\pi)^2}{k^2 \pi^2}} \right) \\ &= \Gamma(s)^2 \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{s^2 k^2 - \Gamma(s)^4}{s^2 k^2 - 1} \right) \\ &= \Gamma(s)^2 \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\Gamma(s)^4 - 1}{s^2 k^2 - 1} \right). \end{aligned}$$

O produtório pode ser expandido como

$$\begin{aligned} &1 - (\Gamma(s)^4 - 1) \sum_{1 \leq k < \infty} \frac{1}{s^2 k^2 - 1} + (\Gamma(s)^4 - 1)^2 \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \infty} \frac{1}{s^2 k_1^2 - 1} \cdot \frac{1}{s^2 k_2^2 - 1} - \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (\Gamma(s)^4 - 1)^n \cdot \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_n < \infty} \prod_{j=1}^n \frac{1}{s^2 k_j^2 - 1}. \end{aligned}$$

Como para $\|s\| > 1$

$$\frac{1}{s^2 k_j^2 - 1} = \sum_{l_j=1}^{\infty} \frac{1}{(s k_j)^{2l_j}}$$

converge absolutamente, vale neste domínio

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_n < \infty} \prod_{j=1}^n \frac{1}{s^2 k_j^2 - 1} &= \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_n < \infty} \cdot \sum_{1 \leq l_1, \dots, l_n < \infty} \frac{1}{s^{2(l_1 + \dots + l_n)} k_j^2 k_1^{2l_1} \cdot \dots \cdot k_n^{2l_n}} \\ &= \sum_{1 \leq l_1, \dots, l_n < \infty} \frac{1}{s^{2(l_1 + \dots + l_n)}} \cdot \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_n < \infty} \frac{1}{k_j^2 k_1^{2l_1} \cdot \dots \cdot k_n^{2l_n}} \end{aligned}$$

e o resultado está provado.

4.2 OS ZEROS DA FUNÇÃO ZETA

O produto de Euler implica que $\zeta(s)$ não tem zeros em toda a região no qual é válido, como demonstraremos ainda nesta seção.

Apesar disso, o produto não pode ser utilizado para mostrar diretamente a inexistência de zeros em qualquer região contida em $Re(s) \leq 1$. É neste semiplano, precisamente, onde estão localizados os zeros da função. Em particular, temos zeros para todos os inteiros negativos pares, como já encontramos na seção 4.1.2. Estes são os chamados zeros triviais da função.

Os zeros restantes, por sua vez chamados não triviais, forçosamente encontram-se na faixa crítica $0 \leq Re(s) \leq 1$, afinal vale a equação funcional e não há zeros em $Re(s) > 1$.

Mas qual a importância destes zeros, afinal? Que afetam? Sua importância reside no fato de que geram polos para $1/\zeta(s)$ e $\ln \zeta(s)$. Estes polos determinam muitas características importantes destas funções que, como veremos no capítulo 5, seção 5.2, são blocos básicos de construção de um sem número de outras séries de Dirichlet; equivalentemente, permitem a representação exata de muitas séries aritméticas notáveis através das *fórmulas explícitas*, como exemplificaremos no capítulo 8.

Como nestas fórmulas explícitas os zeros usualmente acabam localizados em expoentes, os zeros triviais quase não contribuem para os valores obtidos por estas representações: suas partes reais negativas implicam decaimento dos termos envolvidos, tornando qualquer erro, ao eliminarmos-los, desprezível. Este não é o caso dos zeros não triviais, pois suas partes reais são positivas: suas contribuições divergem.

A simples extensão do resultado da inexistência de zeros em $Re(s) > 1$ para $Re(s) \geq 1$ já é forte o suficiente para garantir o Teorema dos Números Primos¹⁷, pois coloca o polo em $s = 1$ de $\zeta(s)$ como a única fonte de singularidades de $\ln(\zeta(s))$ em $Re(s) = 1$. Como isso o faz o polo de maior parte real, e relaciona-se com o termo assintoticamente dominante da função cuja transformação de Mellin é $\ln \zeta(s)$, a função de contagem ponderada de potências primas $J(x)$ (veja mais em 5.2.8).

4.2.1 A Hipótese de Riemann

Riemann conjecturou que a parte real de todos os zeros não triviais era exatamente $1/2$. Assim foi originalmente formulada sua hipótese.

A equação funcional para a função Zeta, que provaremos no capítulo 6, nos mostra que todos os zeros não triviais localizados na reta $Re(s) = 1/2$ apresentam-se em pares conjugados. Quaisquer outros zeros não triviais se apresentarão em quadras, simetricamente em relação ao eixo real e à reta $Re(s) = 1/2$.

Em seu artigo de 1859, Riemann já havia analisado profundamente a função Zeta e era de seu conhecimento a existência dos zeros não triviais, muitos dos quais chegou a calcular manualmente. A teoria de representação de funções por raízes explícitas já havia dado seus primeiros passos, com exemplos de Euler e, principalmente a teoria de Weierstrass para representação de funções analíticas, dos anos 1840. Os exemplares de zeros obtidos por Riemann tinham todos a parte real igual a um meio; a facilidade de representação para

¹⁷ Apesar de central desde as primeiras provas do Teorema dos Números Primos nos anos 90 do século XIX, a suficiência da inexistência de zeros em $Re(s) \geq 1$ só foi constatada após os teoremas tauberianos de Wiener, em 1931 (HARDY, 1949, p. 303).

zeros em uma linha fornecia vantagens práticas.¹⁸ Sua fórmula exata para $\pi(x)$ carregava consigo as conseqüências desta hipótese.

Em 1914, Hardy provou que há uma infinidade de zeros na linha $\zeta(1/2+it)$. Até os dias de hoje, *trilhões* de zeros já foram computados, todos tendo a parte real igual a $1/2$. 160 anos após Riemann, desenvolvemos imensas teorias e generalizações, sem que, no entanto, cheguemos a qualquer prova de sua hipótese¹⁹.

4.2.2 O significado da Hipótese

A representação da função Zeta como um produto de funções conhecidas e um produto dependente de suas raízes nos mostra que o conhecimento perfeito destas nos permite expressar funções analíticas que, avaliadas em $n \in \mathbb{N}$, nos retornem sua decomposição prima, ou; o número de fatores primos, ou; a paridade do número destes fatores, ou; se é divisível por um quadrado, ou; quantos são seus divisores, ou; qual a soma de seus divisores; etc.

De fato não é claro o quanto acerca de todos os números naturais está escrito nas raízes e polo da Zeta. A imensa capacidade de expressão da teoria nos faz pensar se não há algum indício de que, fossem conhecidos os zeros, poderia-se provar a consistência da aritmética? Qual o limite do discurso contido nas raízes?

A hipótese de Riemann não é, porém, o conhecimento preciso das raízes não triviais de Zeta, mas sim o de sua parte real. Isto significa ignorância da informação oscilatória presente nos termos das fórmulas explícitas (a não ser sob o aspecto do equilíbrio implicado pela equação funcional), reduzindo nosso conhecimento aos seus módulos. As implicações da hipótese não penetram a aritmética como o conhecimento preciso das raízes, mas fornecem como que um invólucro assintótico minimal das oscilações.

O fim de quase toda busca pela prova da hipótese é um problema não resolvido equivalente. É equivalente às afirmações

i) A função de Mertens $M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n)$ é da forma $O(x^{1/2+\epsilon})$, $\forall \epsilon > 0$;

ii) A diferença $J(x) - Li(x)$ é da forma $O(x^{1/2+\epsilon})$, $\forall \epsilon > 0$;

iii) A diferença $\pi(x) - Li(x)$ é da forma $O(x^{1/2+\epsilon})$, $\forall \epsilon > 0$;

iv) A diferença $\psi(x) - x$ é da forma $O(x^{1/2+\epsilon})$, $\forall \epsilon > 0$;

v) A proporção entre o MMC dos primeiros n números naturais e a exponencial e^n é da forma $e^{g(x)}$, com $g(x) = O(x^{1/2+\epsilon})$, $\forall \epsilon > 0$;

vi) A estrutura racional das seqüências de Farey (considerações sobre a divisão de um intervalo de espaço em frações de inteiros de denominador limitado) é tal que, se a n -ésima seqüência tem k termos²⁰, a soma em i dos módulos das diferenças entre o i -ésimo termo desta seqüência e a i -ésima divisão do intervalo é da forma $O(k^{1/2+\epsilon})$, $\forall \epsilon > 0$;

¹⁸ Só devidamente superadas pela posterior teoria de Hadamard para representação de funções inteiras.

¹⁹ É digno de nota a prova da conjectura de Weil por Deligne em 1973.

²⁰ Mais precisamente, $k = 1 + \sum_{l=1}^n \varphi(l)$.

vii) Uma limitação geral para a soma de divisores como $\sigma(n) < e^\gamma n \ln \ln(n)$, $\forall n \geq 5041$, em conexão com a pesquisa de Ramanujan sobre números colossalmente abundantes (ROBIN, 1984, p. 188).

viii) $\sigma(n) \leq H_n + \exp(H_n) \ln(H_n)$, com igualdade apenas para $n = 1$ (LAGARIAS, 2001)

ix) Certas funções analíticas têm a ordem de crescimento limitada, tal como a de Riesz (que citamos no capítulo 4), por $O(x^{1/4+\epsilon})$, assim como muitas outras funções cujas definições dependam irremediavelmente dos números naturais;

dentre tantas outras.

4.2.3 Da inexistência de raízes em $Re(s) \geq 1$

Teorema 4.2.1 $\zeta(s)$ não tem raízes em $Re(s) > 1$.

Dem.: Veremos em 5.2.8 a prova da seguinte identidade:

$$\ln(\zeta(s)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^s},$$

sendo $\alpha_n = 1/k$, $k \in \mathbb{N}^*$ se n é a k -ésima potência de um primo, e nulo em todos os outros casos.

Percebamos que $\ln(\zeta(x))$ converge em $x > 1$ por comparação termo a termo com $\zeta(x)$. Como para qualquer série de Dirichlet, podemos separar sua parte real e imaginária através da fórmula de Euler

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^{a+bi}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \cos(b \ln(n))}{n^a} - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \sin(b \ln(n))}{n^a},$$

partes estas que convergem em $a > 1$ por comparação com $\ln(\zeta(x))$. Concluímos que $\ln(\zeta(s))$ converge em todo o semiplano $Re(s) > 1$, o que implica que $\zeta(s)$ não tem raízes no semiplano (afinal o logaritmo tem uma singularidade em 0).

Para o seguinte teorema, nos baseamos na exposição de Titchmarsh (1986, p. 46-47) dos argumentos originais de Hadamard.

Teorema 4.2.2 $\zeta(s)$ não tem raízes em $Re(s) = 1$.

Esboço da demonstração.: A idéia essencial desta prova baseia em dois pontos: primeiro²¹, que $\zeta(s) \sim 1/(s-1)$ quando $s \rightarrow 1^+$, que acaba por implicar $\ln(\zeta(s)) \sim -\ln(s-1)$ nas mesmas condições; a outra, que, como vimos acima, uma translação vertical da entrada de uma série de Dirichlet é governada por termos trigonométricos.

Se $\rho = 1 + bi$ fosse uma raiz de ζ , teríamos $Re(\ln(\zeta(s))) \sim \ln(s-1)$ quando $s \rightarrow \rho^+$, invertendo o sinal da aproximação em $s \rightarrow (1 + 0i)^+$. Como, por outro lado, isto foi

²¹ Provaremos isto em 6.4.1.

causado por uma alteração nos termos trigonométricos, fazendo $s \rightarrow (1 + 2bi)^+$ obtém-se $Re(\ln(\zeta(s))) \sim -\ln(s - 1)$ novamente, como quando tendíamos a 1. Isto, porém, é impossível, pois implicaria que $\zeta(s)$ tem polo em $1 + 2bi$, e o único polo de ζ é o de $s = 1$.

Veremos mais adiante a apresentação e prova da equação funcional para a função Zeta. Para o leitor interessado: busque enxergar na associação da equação funcional e os teoremas acima a inexistência de raízes de $\zeta(s)$ não reais em $Re(s) \leq 0$.

4.3 TEOREMAS DA UNIVERSALIDADE E INDEPENDÊNCIA DIFERENCIAL

Citamos aqui um dos teoremas mais pitorescos acerca da função Zeta, o teorema da universalidade. Originado em trabalhos de Voronin de 1975, apresentamo-lo na forma dada em Karatsuba e Voronin²² (1992, p. 251):

Teorema 4.3.1 (Teorema da Universalidade da Função Zeta) *Seja $0 < r < 1/4$. Suponha que $f(s)$ é uma função analítica para $\|s\| < r$ e contínua para $\|s\| \leq r$. Se $f(s) \neq 0$ para $\|s\| < r$, então para qualquer $\epsilon > 0$ existe $T = T(\epsilon)$ tal que*

$$\max_{\|s\| \leq r} \left| f(s) - \zeta\left(s + \frac{3}{4} + iT\right) \right| < \epsilon.$$

Em outras palavras, simples translações da função Zeta no eixo imaginário podem aproximar arbitrariamente qualquer função analítica que não se anule na região! Tendo o leitor se assombrado ou não com este resultado, saiba que aproximações uniformes arbitrariamente perfeitas de sua expressão facial encontram-se gravadas nesta faixa da função Zeta.

Tomando-se uma região em \mathbb{C} onde a Zeta não se anule e nem contenha seu polo em $s = 1$, de forma que nesta região seja analítica, os valores de $\zeta(s)$ nesta região são aproximados arbitrariamente na faixa crítica; assim a função Zeta apresenta uma forma de auto-similaridade. Esta auto-similaridade rende um critério para a hipótese de Riemann (GLEINIG, 2014, p. 30), devido a Bagchi (STEUDING, 2002, p. 55), de certa forma antecipado por trabalhos de Harald Bohr sobre quase-periodicidade em 1922:

Teorema 4.3.2 *A hipótese de Riemann é equivalente a, para qualquer subconjunto compacto K de $1/2 < Re(s) < 1$ com complemento conexo e qualquer $\epsilon > 0$, dar-se*

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{meas}\{\tau \in [0, T] : \max_{s \in K} \|\zeta(s + i\tau) - \zeta(s)\| < \epsilon\} > 0.$$

Hilbert interessou-se em dado momento por encontrar alguma equação diferencial satisfeita por $\zeta(s)$ (KARATSUBA e VORONIN, 1992, p. 252). O Teorema da Universalidade é forte o suficiente para responder a estes questionamentos no sentido em que implica o seguinte resultado:

²² O leitor pode-se perguntar se o número $3/4$ presente no teorema é central para o resultado. É apenas na medida em que força a região a permanecer dentro da metade da faixa crítica, uma vez que é tomado $r < 1/4$; desde os trabalhos de Voronin, estes resultados foram postos em formas mais gerais.

Teorema 4.3.3 (Teorema da Independência Diferencial de $\zeta(s)$) Se

$$F(\zeta(s), \zeta'(s), \dots, \zeta^{n-1}(s)) = 0$$

identicamente em $s \in \mathbb{C}$, onde $F(z_0, \dots, z_{n-1})$ é uma função contínua, então F é identicamente zero.

5 SÉRIES DE DIRICHLET

Anteriormente vimos alguns exemplares de combinações lineares de termos da forma n^{-s} , $n \in \mathbb{N}$.

Definição 5.0.1 *Uma série de Dirichlet em s é qualquer série da forma*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^s}.$$

A variável s costumeiramente é real ou pertencente a uma região do plano complexo, e os coeficientes α_n possivelmente complexos, ainda que freqüentemente lidemos apenas com casos de coeficientes racionais.

5.1 ALGUMAS PROPRIEDADES DESTAS SÉRIES

Começemos por provar sua unicidade de representação.

5.1.1 Unicidade das séries de Dirichlet

Provemos que se duas séries de Dirichlet são iguais, hão de ter os mesmos coeficientes (HARDY e WRIGHT, 2008, p. 319).

Teorema 5.1.1 *Sejam $F(x)$, $G(x)$ séries de Dirichlet convergentes em $x > x_0$ cujos coeficientes são, respectivamente, α_n e β_n . Se $F(x) = G(x)$ em $x > x_0$, então $\alpha_n = \beta_n$, $\forall n$.*

Dem.: Por hipótese, temos $H(x) = F(x) - G(x) = 0$ para $x > x_0$. Devemos provar que seus coeficientes $h_n = \alpha_n - \beta_n$ são todos nulos.

Suponhamos que h_k seja o primeiro coeficiente não nulo. Temos

$$\begin{aligned} 0 = H(x) &= h_k k^{-x} \left(1 + \frac{h_{k+1}}{h_k} \left(\frac{(m+1)}{m} \right)^{-x} + \frac{h_{k+2}}{h_k} \left(\frac{(m+2)}{m} \right)^{-x} + \dots \right) \\ &= h_k k^{-x} (1 + D(x)), \end{aligned}$$

digamos. Se $x_0 < x_1 < x$, então

$$\left(\frac{k+n}{k} \right)^{-x} \leq \left(\frac{k+1}{k} \right)^{-(x-x_1)} \cdot \left(\frac{k+n}{k} \right)^{-x_1},$$

de forma que

$$|D(x)| \leq \frac{1}{|h_k|} \left(\frac{k+1}{k} \right)^{-(x-x_1)} k^{x_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_{k+n}}{(k+n)^{x_1}},$$

que tende a 0 quando $x \rightarrow \infty$. Assim, para x suficientemente grande, temos $|1 + D(x)|$ maior que, digamos, $1/2$. Pela primeira equação, isso nos mostra que, para x suficientemente grande, $0 < |h_k|k^{-x} \cdot 1/2 < |h_k k^{-x}(1 + D(x))| = |H(x)| = 0$. Mas assumimos $h_k \neq 0$, contradição!

Passemos a estudar operações com estas séries.

5.1.2 Soma, produto e potências de séries de Dirichlet

O leitor pode perceber¹ que em geral a soma de duas séries de Dirichlet também é uma série de Dirichlet, pois

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^s} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n + \beta_n}{n^s},$$

e analogamente para a multiplicação, pois havendo ao menos uma região convergente, há uma região onde é comutativamente convergente, nos permitindo escrever

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{d|n} (\alpha_d \beta_{\frac{n}{d}})}{n^s}$$

nesta região.

A mesma lógica nos permite encontrar a forma de qualquer potência natural de uma série de Dirichlet:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^s} \right)^k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}, \quad (5.1)$$

com

$$f(n) = \sum_{a_1 \cdots a_k = n} \alpha_{a_1} \cdots \alpha_{a_k},$$

onde $a_i \in \mathbb{N}^*$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$, e a combinação do índice da soma **deve** levar em conta diferenças de ordem.

Podemos ir além.

5.1.3 Exponencial de uma série de Dirichlet

Como veremos no exemplo 5.2.8, há casos onde considerar o logaritmo ou a exponencial de uma série de Dirichlet é bastante proveitoso. Desconhecemos na literatura a obtenção geral destas séries, e convidamos o leitor a descobri-las conosco.

Dada uma série de Dirichlet $f(s)$, o autor calculou em generalidade, assumindo a existência de uma região com convergência comutativa, que

¹ Apesar de datado, o leitor pode tirar muito proveito do livro "The General Theory of Dirichlet's Series", de Hardy e Riesz, 1915.

$$\begin{aligned}
e^{f(s)} &= \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^s}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{\alpha_n}{n^s}} = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\alpha_n}{n^s}\right)^k}{k!} \\
&= e^{\alpha_1} \left(1 + \frac{\alpha_2}{1! \cdot 2^s} + \frac{\alpha_2^2}{2! \cdot 2^{2s}} + \frac{\alpha_2^3}{3! \cdot 2^{3s}} + \dots\right) \left(1 + \frac{\alpha_3}{1! \cdot 3^s} + \dots\right) \left(1 + \frac{\alpha_4}{1! \cdot 4^s} + \dots\right) \dots,
\end{aligned}$$

o que nos permite escrever

$$\begin{aligned}
e^{f(s)-\alpha_1} &= 1 + \frac{\alpha_2}{2^s} + \frac{\alpha_3}{3^s} + \frac{\alpha_4 + \frac{\alpha_2^2}{2}}{4^s} + \frac{\alpha_5}{5^s} + \frac{\alpha_6 + \alpha_2\alpha_3}{6^s} + \frac{\alpha_7}{7^s} + \frac{\alpha_8 + \alpha_4\alpha_2 + \frac{\alpha_2^3}{6}}{8^s} + \dots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{n^s}, \tag{5.2}
\end{aligned}$$

sendo

$$\beta_n = \sum_{\substack{a_1^{b_1} \dots a_k^{b_k} = n \\ a_i \geq 2, \forall i}} \frac{\alpha_{a_1}^{b_1}}{b_1!} \cdot \dots \cdot \frac{\alpha_{a_k}^{b_k}}{b_k!}, \quad \beta_1 = 1.$$

com $a_i \neq a_j$, se $i \neq j$, e $a_i \in \mathbb{N}^*$ ($a_i \geq 2$), $b_i \in \mathbb{N}^*$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$, e a combinação do índice da soma **não deve** levar em conta diferenças de ordem dos termos multiplicados (note que se $f(s)$ tem termo α_{a_i}/a_i^s com coeficiente $\alpha_{a_i} = 0$, suas combinações são naturalmente desconsideradas).

Em particular, séries de exponenciais de séries (de Dirichlet) tem primeiro coeficiente e^{α_1} não nulo.

5.1.4 Logaritmo de uma série de Dirichlet

Nos ateremos ao logaritmo de séries de Dirichlet cujo primeiro coeficiente é 1: para qualquer primeiro coeficiente $t \neq 0$, reduz-se a este caso por divisão. Se $t = 0$, não existe representação de seu logaritmo como série de Dirichlet, pois, caso houvesse, teria exponencial com primeiro termo nulo.

Escrevendo os β_n coeficientes de $g(s) = e^{f(s)-\alpha_1}$

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= 1 \\
\beta_2 &= \alpha_2 \\
\beta_3 &= \alpha_3 \\
\beta_4 &= \alpha_4 + \frac{\alpha_2^2}{2} \\
&\dots
\end{aligned}$$

e encontrando os α_n a partir dos β_n

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= \beta_2 \\
\alpha_3 &= \beta_3 \\
\alpha_4 &= \beta_4 - \frac{\beta_2^2}{2} \\
\alpha_5 &= \beta_5 \\
&\dots
\end{aligned}$$

podemos encontrar também a série de Dirichlet do logaritmo de qualquer outra série de Dirichlet cujo primeiro coeficiente é 1.

$$\begin{aligned}
\ln(g(s)) &= f(s) - \alpha_1 \\
&= \frac{\beta_2}{2^s} + \frac{\beta_3}{3^s} + \frac{\beta_4 - \frac{\beta_2^2}{2}}{4^s} + \frac{\beta_5}{5^s} + \frac{\beta_6 - \beta_2\beta_3}{6^s} + \frac{\beta_7}{7^s} + \frac{\beta_8 - \beta_4\beta_2 + \frac{\beta_2^3}{3}}{8^s} + \dots
\end{aligned}$$

De fato, em vista da equação (5.1), encontra-se em generalidade que, dada

$$A(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\beta_n}{n^s},$$

onde $\beta_1 = 0$, temos²

$$\begin{aligned}
\ln(1 + A(s)) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} A(s)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{a_1 \dots a_k = n} \beta_{a_1} \cdot \dots \cdot \beta_{a_k} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n^s},
\end{aligned} \tag{5.3}$$

escrevendo

$$B_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{\substack{a_1 \dots a_k = n \\ a_i \geq 2, \forall i}} \beta_{a_1} \cdot \dots \cdot \beta_{a_k},$$

onde $a_i \in \mathbb{N}^*$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$ e sendo esta última soma em k finita, uma vez que $\beta_1 = 0$ acarreta que para todo i , $a_i \geq 2$, e assim tanto $B_1 = 0$ como todos os termos do somatório são nulos a partir de dado momento (no mínimo após $k > \log_2(n)$). Relembremos que, respeitando a forma de (5.1), o arranjo no índice do somatório interno **deve** levar em conta mudanças de ordem dos termos.

² Para tanto, supomos inicialmente que $\|A(s)\| < 1$, muito embora a expressão final convirja em um semiplano, como toda série de Dirichlet.

5.1.5 Caracterização do conjunto dos números primos como invariantes da exponenciação do espaço destas séries

Definição 5.1.1 Definamos como *espaço natural* o conjunto de todas as séries de Dirichlet.

$$E = \{f : \mathbb{C} \in \mathbb{C} : f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n/n^s, \alpha_n \in \mathbb{C}\}$$

Vimos que a adição, multiplicação são operações fechadas em E, e que a exponenciação e logaritmo são fechadas em E.

Notemos que os coeficientes da exponenciação e logaritmo em (5.2) e (5.3) implicam que coeficientes α_p dos elementos primos p^{-s} da base permanecem inalterados por estas operações, enquanto todos os outros são passíveis de alteração, a depender da série em particular.

O conjunto P dos números primos pode portanto ser caracterizado como o subconjunto dos elementos da base cujas coordenadas são invariantes pela exponenciação do espaço natural:

$$P = \{n \in \mathbb{N} : \alpha_n = \beta_n, \forall f(s) \in E\}.$$

tendo a série de Dirichlet de $f(s)$ coeficientes α_n e de $e^{f(s)}$ coeficientes β_n .

5.1.6 Da profundidade das expressões aritméticas implicadas no exponencial e logaritmo

Em analogia à convolução de Dirichlet, que para duas funções aritméticas constrói uma terceira

$$(f * g) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$$

que é a precisa relação entre os coeficientes de uma multiplicação de séries de Dirichlet, podem as identidades presentes nos coeficientes de (5.2) e (5.3) nos render interessantes identidades combinatórias.

Um estudo básico das convoluções de Dirichlet não poderia passar sem a função $\mu(n)$, que lhe é muito natural. É possível que as identidades da do exponencial e logaritmo também tenham suas aplicações mais naturais. Não me debrucei sobre matéria deste gênero para relatar.

Uma aplicação pontual destas relações é para as somas parciais função Zeta. Se a soma parcial é $\zeta_v(s) = \sum_{n=1}^v 1/n^s$, $\zeta_v(s)$ está definida em todo plano, e $\zeta_v(0) = v$. Seu primeiro termo é 1 e portanto podemos aplicar (5.3) para calcular $\ln(\zeta_v(s))$. Tomando a exponencial e fazendo $s = 0$ (quando possível), obtém-se

$$\exp\left(\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{\substack{a_1 \cdots a_k = n \\ 2 \leq a_i \leq v, \forall i}} 1\right) = v,$$

isto é, uma relação profunda entre o número de Euler e uma expressão combinatória de certa complexidade, dependente dos números passíveis de decomposição³ em fatores menores que v , $v \in \mathbb{N}(v \geq 2)$. Em particular, temos a conhecida expressão

$$e^{1-1/2+1/3-1/4+\dots} = 2.$$

Infelizmente, a expressão não converge para $v > 2$, pois neste caso $\zeta_v(s)$ sempre apresenta raízes de parte real positiva, o que implica na presença de polos de parte real positiva para $\ln(\zeta_v(s))$ e na divergência da série de Dirichlet desta em $s = 0$. Apesar disso, estas podem ser meromorficamente continuadas para $s = 0$, nos permitindo atribuir valores às séries divergentes da forma $v > 2$:

$$e^{1+1-1/2-1+1/3-1/2+1-1/4+\dots} = 3,$$

$$e^{1+1+1/2-1-2/3-1/2+1/4+\dots} = 4, \text{ etc.}$$

Semelhantemente, a identidade (5.2) rende resultados. Como $\exp(\zeta_k(s) - 1) \rightarrow 1$ quando $s \rightarrow \infty$, seu primeiro coeficiente é 1. Em particular, podemos aplicar (5.3) e avaliar em $s = 0$. Obtém-se

$$\ln \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{a_1^{b_1} \dots a_k^{b_k} = n \\ 2 \leq a_i \leq v, \forall i}} \frac{e}{b_1! \dots b_k!} \right) = v,$$

que expressa uma propriedade profunda entre o logaritmo natural e combinações dependentes das potências de números naturais, estes maiores ou iguais a 2 e menores ou iguais a v , e rende aplicações similares.

As considerações presentes no exemplo 5.2.8 que veremos adiante também nos levam à identidade

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{a_1 \dots a_k = n} 1 = \begin{cases} 1/k, & \text{se } n = p^k \text{ para algum } p \text{ primo;} \\ 0, & \text{noutros casos.} \end{cases},$$

que achamos digna de nota (o índice neste caso é, como já vimos, um arranjo, dependente assim da ordem dos fatores). Somando ambos os lados para $n \leq x$, obtém-se⁴

$$J(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} D(k, x),$$

³ Veja os detalhes do teorema, como a contagem de todos os arranjos.

⁴ Pode-se encontrar o mesmo resultado pela transformada de Mellin inversa aplicada a $\ln(1 + (\zeta(s) - 1))$.

onde $D(k, x) = \sum_{n \leq x} \sum_{a_1 \dots a_k = n} 1$, sendo os $a_i \geq 2$, que conecta o problema dos primos com o do crescimento das funções decompositoras $D(k, x)$. Algumas considerações a mais rendem

$$\pi(x) = \sum_{c=1}^{\infty} \frac{1}{c} \sum_{d|c} \mu(d) (-1)^{c/d+1} D(x^{1/d}, c/d).$$

Finalmente, evidenciamos a identidade obtida pela exponenciação seguida da tirada do logaritmo de uma série de Dirichlet qualquer, que nos retorna a própria série com coeficientes α_n inalterados. A unicidade dos coeficientes nos rende que, se $n \geq 2$,

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{m_1 \dots m_k = n} \left[\left(\sum_{a_1^{b_1} \dots a_k^{b_k} = m_1} \frac{\alpha_{a_1}^{b_1}}{b_1!} \dots \frac{\alpha_{a_k}^{b_k}}{b_k!} \right) \dots \left(\sum_{a_1^{b_1} \dots a_k^{b_k} = m_k} \frac{\alpha_{a_1}^{b_1}}{b_1!} \dots \frac{\alpha_{a_k}^{b_k}}{b_k!} \right) \right],$$

onde os índices em m_i são arranjos e em a_i , combinações, conforme já visto. Como cada α_i é uma variável independente, a expressão fornece um curioso cancelamento de todas as variáveis α_i , $i \neq n$ do lado direito da igualdade. Não buscamos uma demonstração combinatória independente.

5.1.7 Produto de Euler para séries de Dirichlet multiplicativas

Isto é, para séries de Dirichlet cujos coeficientes são funções multiplicativas. Muitas séries de Dirichlet têm representações similares ao produto de Euler (4.0.1) para a função Zeta.

Teorema 5.1.2 *Seja*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^s}$$

e sejam α_n tais que $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_{nk} = \alpha_n \alpha_k$ para n, k coprimos (ou seja, uma função multiplicativa). Além disso, seja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha_n|}{n^s}$$

convergente. Então

$$F(s) = \prod_p \left(1 + \frac{\alpha_p}{p^s} + \frac{\alpha_{p^2}}{p^{2s}} + \frac{\alpha_{p^3}}{p^{3s}} + \dots \right).$$

(HARDY e WRIGHT, 2008, p. 326)

Teorema 5.1.3 *Sejam $F(s)$, α_n como no teorema anterior, mas desta vez α_n totalmente multiplicativa, isto é, a propriedade multiplicativa vale mesmo sem coprimidade. Então, se $\operatorname{Re}(s) > 0$,*

$$F(s) = \prod_p \left(1 - \frac{\alpha_p}{p^s}\right)^{-1}.$$

Dem.: Para todo p, n , $\alpha_{p^n} = \alpha_p^n$, pois a multiplicatividade é total, de forma que para $\operatorname{Re}(s) > 0$ os termos do produtório do teorema anterior tomam o formato de uma série geométrica usual.

A seção 5.2 fornecerá alguns exemplos de séries com produtos de Euler, expressáveis a partir de manipulações da função Zeta. Conferimos aqui dois exemplos para séries independentes da função Zeta:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^s} &= 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \dots \\ &= \prod_q \frac{1}{1 - q^{-s}} \prod_r \frac{1}{1 + r^{-s}}, \end{aligned}$$

onde o primeiro produto tem índices primos da forma $q \pmod{4} = 1$ e o segundo da forma $r \pmod{4} = 3$ (HARDY, 1940, p. 61).

Outro digno de nota é a série de Dirichlet $f(s)$ cujos coeficientes β_n são indicadores de que n pode ser expresso como a soma de dois quadrados, ou seja, valem 1 em caso positivo e 0 em caso negativo (Ibid):

$$f(s) = \frac{1}{1 - 2^{-s}} \prod_q \frac{1}{1 - q^{-s}} \prod_r \frac{1}{1 - r^{-2s}}.$$

5.1.8 Séries de Dirichlet como transformações de Mellin

Vejamos agora um resultado fundamental acerca das séries de Dirichlet, que, a despeito de uma mudança de sinal, as expressa como uma transformação de Mellin, e, conseqüentemente, de Fourier ou Laplace.

Teorema 5.1.4 *Seja $f(s)$ uma série de Dirichlet de coeficientes α_n . Se a soma parcial de seus coeficientes for $\sum_{n < x} \alpha_n = O(x^c)$, então $f(s)/s$ pode ser compreendida como uma transformação de Mellin⁵ da soma parcial dos coeficientes em $\operatorname{Re}(s) > c$ na variável $-s$:*

$$f(s) = s \int_1^{\infty} \left(\sum_{n < x} \alpha_n \right) x^{-s-1} dx \quad (5.4)$$

⁵ Notemos que para $0 < x < 1$ temos $(\sum_{n < x} \alpha_n) = 0$.

Dem.: Como qualquer integral da forma $\int_a^b x^w dx$ é igual a $\frac{b^{w+1}-a^{w+1}}{w+1}$, se $w \neq -1$, ou a $\ln(b) - \ln(a)$, se $w = -1$, $\int_1^\infty x^w dx$ converge se e somente se $\operatorname{Re}(w) < -1$, e para o valor $\frac{-1}{w+1}$. Assim, para $\operatorname{Re}(s) > 0$

$$\frac{1}{n^s} = s \int_n^\infty x^{-s-1} dx$$

e portanto

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^T \frac{\alpha_n}{n^s} &= \sum_{n=1}^T \alpha_n s \int_n^\infty x^{-s-1} dx \\ &= s \left(\alpha_1 \int_1^\infty x^{-s-1} dx + \alpha_2 \int_2^\infty x^{-s-1} dx + \cdots + \alpha_T \int_T^\infty x^{-s-1} dx \right) \\ &= s \int_1^\infty \left(\sum_{n < \min(x, T)} \alpha_n \right) x^{-s-1} dx \\ &= s \int_1^T \left(\sum_{n < x} \alpha_n \right) x^{-s-1} dx + s \sum_{n < T} \alpha_n \int_T^\infty x^{-s-1} dx \\ &= s \int_1^T \left(\sum_{n < x} \alpha_n \right) x^{-s-1} dx + \frac{\sum_{n < T} \alpha_n}{T^s}. \end{aligned}$$

Se $\sum_{n < x} \alpha_n = O(x^c)$ e $\operatorname{Re}(s) > c$, $\sum_{n < x} \alpha_n = o(x^{\operatorname{Re}(s)})$, isto é,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n < T} \alpha_n}{T^s} = 0,$$

de onde segue que

$$f(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^T \frac{\alpha_n}{n^s} = s \int_1^\infty \left(\sum_{n < x} \alpha_n \right) x^{-s-1} dx.$$

Corolário 5.1.1 Se $\sum_{n < x} \alpha_n = O(x^c)$, a série de Dirichlet é uma função bem definida para a região $\operatorname{Re}(s) > c$.

Dem.: Pelo teorema anterior e pela desigualdade triangular temos que

$$\|f(s)\| = \left\| \sum_{n=1}^\infty \frac{\alpha_n}{n^s} \right\| = \left\| s \int_1^\infty \left(\sum_{n < x} \alpha_n \right) x^{-s-1} dx \right\| \leq \|s\| \int_1^\infty \left\| \sum_{n < x} \alpha_n \right\| x^{-\operatorname{Re}(s)-1} dx$$

Ainda por $\sum_{n < x} \alpha_n = O(x^c)$, há $x_0, k \in \mathbb{R}$ não negativos tal que, se $x > x_0$, $|\sum_{n < x} \alpha_n| < kx^c$ e portanto

$$\begin{aligned}
\|f(s)\| &\leq \|s\| \int_1^\infty \left| \sum_{n < x} \alpha_n \right| x^{-\operatorname{Re}(s)-1} dx \\
&< \|s\| \int_1^{x_0} \left| \sum_{n < x} \alpha_n \right| x^{-\operatorname{Re}(s)-1} dx + \|s\| \int_{x_0}^\infty kx^c x^{-\operatorname{Re}(s)-1} dx \\
&= A + k\|s\| \int_{x_0}^\infty x^{-\operatorname{Re}(s)-1+c} dx.
\end{aligned}$$

que converge para $-\operatorname{Re}(s) - 1 + c < -1$, ou seja, $\operatorname{Re}(s) > c$, uma vez que x_0 é positivo.

A representação de uma série de Dirichlet como uma transformação de Mellin nos permite, analogamente, representar a função aritmética associada (a soma de seus coeficientes) a partir da série de Dirichlet, através da transformada inversa. Este resultado é conhecido como a fórmula de Perron, em homenagem a Oskar Perron.

Teorema 5.1.5 (Fórmula de Perron) *Se $f(s) = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n/n^s$, então, se $x \notin \mathbb{N}$,*

$$\sum_{n \leq x} \alpha_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{f(s)}{s} x^s ds,$$

onde $a \in \mathbb{R}$ é tal como no teorema (2.3.1). Para $x \in \mathbb{N}$, onde a soma é descontínua, a integral converge para a média dos limites laterais, tal como uma série de Fourier.

Dem.: Aplicação direta do teorema de inversão de Mellin para $f(s)/s$.

Este é um resultado central à teoria, sem o qual não seria possível obter as fórmulas explícitas. Riemann, antes de Mellin ou Perron, já havia encontrado estas representações, uma vez que era versado nos teoremas de Fourier. Perron é creditado como o primeiro a prová-la em generalidade (HARDY e RIESZ, 1915, p. 12-14).

5.2 CONSTRUÇÃO DE ALGUMAS SÉRIES DE DIRICHLET A PARTIR DA FUNÇÃO ZETA

A finalidade desta seção é mostrar como muitas outras séries de Dirichlet cujos coeficientes são funções aritméticas notáveis podem ser expressas a partir de manipulações da função Zeta, e portanto como uma compreensão aprofundada desta função fundamental pode render resultados sobre todas as outras.⁶

Vejamos novamente a forma em série de Dirichlet da função Zeta, válida para $\operatorname{Re}(s) > 1$:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Sabemos que a série tem um polo em $s = 1$. Mais que isso, o crescimento de $\zeta(s)$ quando $s \rightarrow 1^+$ é como o da série geométrica. Mais precisamente, $\zeta(s) = 1/(s-1) + O(1)$ (HARDY e WRIGHT, 2008, 322).⁷

⁶ Muitos destes exemplos, além de outros, podem ser encontrados em Titchmarsh (1986, p. 4-12).

⁷ Provaremos isto no capítulo 6, seção 6.4.1.

Além disso, vimos que o produto de Euler implica

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s},$$

onde $\mu(n)$ é a função de Möbius. O polo de $\zeta(s)$ em $s = 1$ aqui torna-se um zero. Semelhantemente, qualquer zero de $\zeta(s)$ torna-se, para esta função, um polo.

5.2.1 Exemplo 1

Simplemente trasladando o argumento por uma constante a , temos uma série em s da forma

$$\zeta(s+a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{n^s},$$

com $q_n = n^{-a}$. O teorema (5.1.4) nos permite escrever

$$\zeta(s+a) = s \int_1^{\infty} \left(\sum_{n < x} \frac{1}{n^a} \right) x^{-s-1} dx.$$

5.2.2 Exemplo 2

Ao derivarmos a função zeta termo a termo, obtemos

$$\zeta'(s) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^s}.$$

Assim, escrevemos

$$-\zeta'(s) = s \int_1^{\infty} \ln([x]!) x^{-s-1} dx.$$

A identidade (2.2) reflete-se diretamente na relação da integral acima com a integral do exemplo 5.2.10, após as respectivas mudanças de variável.

5.2.3 Exemplo 3

Podemos perceber que $(1/k^s)\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/(kn)^s$. Com isto podemos escrever, por exemplo,

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) &= \zeta(s) - \frac{1}{2^s} \zeta(s) \\ &= 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \dots, \end{aligned}$$

ou ainda a série **Eta** de Dirichlet (estudada para valores particulares desde Euler)

$$\begin{aligned}\eta(s) &= \left(1 - \frac{2}{2^s}\right) \zeta(s) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} - \dots.\end{aligned}$$

O leitor pode perceber a grande variedade de construções que tais procedimento nos permitem executar, ao combinarmos elementos da forma $(1/k^s)\zeta(s)$.

A mais clara vantagem de obter-se uma expressão como a Eta é que seus coeficientes alternam de sinal, e portanto tem soma limitada. Em outras palavras,

$$\eta(s) = s \int_1^{\infty} \left(\sum_{n < x} (-1)^{n+1} \right) x^{-s-1} dx$$

implica, pelo corolário (5.1.1), que a expressão converge para $Re(s) > 0$, de forma que

$$\zeta(s) = \frac{2^{s-1}}{2^{s-1} - 1} \eta(s)$$

nos fornece uma continuação válida⁸ para $\zeta(s)$ em $Re(s) > 0$. Esta expressão também nos permite concluir que a função Eta tem zeros ao longo da linha $Re(s) = 1$, uma vez que $2^{s-1}/(2^{s-1} - 1)$ tem polos ao longo desta linha, enquanto $\zeta(s)$ tem um polo apenas em $s = 1$.

5.2.4 Exemplo 4

Encontramos no capítulo anterior a expressão

$$\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s}.$$

Mais geralmente, temos

$$\zeta(s)\zeta(s-k) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n^s} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(n)}{n^s},$$

de onde

$$\zeta(s)\zeta(s-k) = s \int_1^{\infty} \left(\sum_{n < x} \sigma_k(n) \right) x^{-s-1} dx.$$

Assim podemos também concluir que as somas $\sum_{n < x} \sigma_k(n)$ crescem segundo um termo linear e outro de ordem $k+1$, devido aos polos de $\zeta(s)\zeta(s-k)$, além de um erro sublinear.

⁸ A chave para compreender a utilidade de tais extensões é que o holomorfismo garante unicidade da continuação. Em outras palavras, a expressão de $\zeta(s)$ dada em função de $\eta(s)$ concordará com qualquer outra continuação igualmente holomórfica.

5.2.5 Exemplo 5

Ramanujan publicou em 1915 (HARDY, 1940) um trabalho onde expôs uma forma de gerar uma série de Dirichlet cujos coeficientes são um produto de duas funções $\sigma_k(n)$ a partir da função zeta:

$$S(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_a(n)\sigma_b(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)\zeta(s-a)\zeta(s-b)\zeta(s-a-b)}{\zeta(2s-a-b)}, \quad (5.5)$$

onde todos os argumentos à direita devem ter parte real maior que 1. Em particular, para $Re(s) > 1$, vale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2(n)}{n^s} = \frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)}$$

A demonstração deste resultado, omitida aqui, leva em conta o teorema (5.1.2) e a representação

$$\sigma_k(p^\lambda) = \frac{p^{(n+1)k} - 1}{p^k - 1},$$

com $n \in \mathbb{N}$, p primo, que após algumas manipulações pode chegar num produto de produtórios de Euler igual ao lado direito de (5.5).

Esta série e sua expressão a partir de manipulações da função Zeta podem render uma prova de que não há raízes de Zeta em $Re(s) = 1$, encontrada por Ingham (HARDY, 1940, p. 60).

5.2.6 Exemplo 6

Podemos gerar a série de Dirichlet cujos coeficientes são a função Tociente de Euler $\varphi(n)$, que leva todo número natural n à quantidade de números naturais menores coprimos com n , ao considerarmos a série

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \frac{\prod_p \frac{1}{1-p^{1-s}}}{\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}} = \prod_p \frac{1-p^{-s}}{1-p^{1-s}} = \prod_p \left(1 + \left(1 - \frac{1}{p} \right) \left(\frac{p}{p^s} + \frac{p^2}{p^{2s}} + \dots \right) \right),$$

onde assumimos $Re(s) > 1 > 0$ para expandirmos a geométrica, e, além disso, obtermos convergência absoluta. A partir da última igualdade, pode-se efetuar a distributiva entre os termos do produtório semelhantemente ao que já fizemos para o produto de Euler para a função Zeta, com termos da fatoração prima e da forma $(1-1/p)$ adicionais acumulando-se nos numeradores. Para n fatorado como $n = p_{\alpha_1}^{\beta_1} \cdot \dots \cdot p_{\alpha_k}^{\beta_k}$, obtemos (TITCHMARSH, 1986, p. 7) o numerador de

$$n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_{\alpha_1}} \right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_{\alpha_k}} \right) = \varphi(n),$$

isto é,

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s}.$$

Outra forma de constatar a identidade acima é através da forma da multiplicação de séries de Dirichlet vista no início da secção 5.1, caso já se saiba da identidade

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} d \cdot \mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

Sendo assim, vale

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = s \int_1^{\infty} \left(\sum_{n < x} \varphi(n) \right) x^{-s-1} dx,$$

de forma que $\sum_{n < x} \varphi(n)$ tem crescimento quadrático (após a inversão de Mellin, o resíduo do polo em $s = 2$ domina os outros termos). Mais que isso, como não há raízes de $\zeta(s)$ em $Re(s) = 1$, temos que seu crescimento é assintótico a $6x/\pi^2$ devido ao polo simples em $s = 2$ e o valor de $1/\zeta(2)$. Os zeros da zeta contribuem para o erro da aproximação apenas sublinearmente.

5.2.7 Exemplo 7

Podemos aproveitar o produto de Euler (4.0.1) para obter muitos outros resultados. Sendo $\lambda(n)$ a função de Liouville, ao escrevermos

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1+p^{-s}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^s} \right)^{-1},$$

em vista de

$$\zeta(2s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-2s}} = \prod_p \left(\frac{1}{1-p^{-s}} \cdot \frac{1}{1+p^{-s}} \right) = \zeta(s)L(s),$$

temos imediatamente

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} \text{ e } L^{-1}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}.$$

Assim escrevemos, para $Re(s)$ suficientemente grande,

$$\begin{aligned} \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} &= s \int_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{n < x} \lambda(n) \right) x^{-s-1} dx \text{ e} \\ \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} &= s \int_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{n < x} |\mu(n)| \right) x^{-s-1} dx, \end{aligned}$$

onde a primeira apresenta um polo em $s = 1/2$ e onde quer que $\zeta(s)$ tenha zeros; a segunda, em $s = 1$ e, para sua continuação analítica, onde $\zeta(2s)$ tiver zeros. Isso já sugere que $\sum_{n < x} |\mu(n)|$ tem crescimento linear e que $\sum_{n < x} \lambda(n) = O(x^{\max(\text{Re}(\rho)) + \epsilon})$, $\forall \epsilon > 0$, onde os ρ são as raízes de $\zeta(s)$. De fato, podemos ver que $\sum_{n < x} \lambda(n) = O(x^{1/2 + \epsilon})$, $\forall \epsilon > 0$ implica diretamente a hipótese de Riemann.

5.2.8 Exemplo 8

Chegamos aqui a um dos exemplos mais importantes para a investigação dos números primos. Ao tomarmos o logaritmo natural do produto de Euler (4.0.1), obtemos

$$\begin{aligned} \ln(\zeta(s)) &= - \sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 - P_k^{-s}) = - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (-P_k^{-s})^n}{n} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_k^{-ns}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} P_k^{-ns} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(ns)}{n} \\ &= 0 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{0}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{8^s} + \frac{1}{9^s} + \dots \end{aligned} \quad (5.6)$$

onde $P(s)$ é a série de Dirichlet cujos coeficientes valem 1 para termos da forma P_k^{-s} e 0 a todos os demais, a chamada função zeta prima. Note que a comutação das séries é permitida para $\text{Re}(s) > 1$, onde convergem absolutamente.

Em vista do teorema (5.3), isso nos mostra que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{a_1 \dots a_k = n} 1 = \begin{cases} 1/k, \text{ se } n = p^k \text{ para algum } p \text{ primo;} \\ 0, \text{ noutros casos.} \end{cases}$$

A identidade (5.6) nos permite escrever, em vista do teorema (5.1.4),

$$\ln(\zeta(s)) = s \int_1^{\infty} J(x) x^{-s-1} dx,$$

onde

$$J(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(x^{1/n})}{n},$$

já que $\pi(x^{1/n}) = \sum_{p < x^{1/n}} 1 = \sum_{p^n < x} 1$ e $P(ns) = s \int_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{p^n < x} 1 \right) x^{-s-1} dx$.

É este resultado que já se encontra presente em Riemann (1859). A Inversão de Mellin, no formato da Fórmula de Perron (5.1.5), nos dá portanto uma representação de $J(x)$ em termos de $\ln(\zeta(s))$! A fórmula explícita para $J(x)$ resultará desta representação e da representação independente de $\ln(\zeta(s))$ em função de seus zeros (veja 8.1).

5.2.9 Exemplo 9

Estamos agora em condições de expressar a função zeta prima em termos da função zeta. Pelo teorema (2.4.4), de (5.6) temos que

$$\begin{aligned} P(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \ln(\zeta(ns)) \\ &= \ln(\zeta(s)) - \frac{\ln(\zeta(2s))}{2} - \frac{\ln(\zeta(3s))}{3} + \frac{0}{4} - \frac{\ln(\zeta(5s))}{5} + \frac{\ln(\zeta(6s))}{6} - \dots \end{aligned} \quad (5.7)$$

ao menos para a região onde $\sum_{l,n} |P(nls)/nl| = \sum_c d(c)|P(cs)/c|$ converge. Escrevemos

$$P(s) = s \int_1^{\infty} \pi(x)x^{-s-1} dx.$$

Sua derivada $P'(s) = \sum_p \ln p/p^s$ se mostra a transformação de Mellin da *primeira função de Tchebycheff*:

$$P'(s) = s \int_1^{\infty} \vartheta(x)x^{-s-1} dx.$$

5.2.10 Exemplo 10

Ao derivarmos logaritmicamente o produto de Euler, obtemos

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \ln(P_k) P_k^{-ns} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

onde os coeficientes respeitam a forma $\Lambda(n)$, a função de von Mangoldt. É a transformação de Mellin da *segunda função de Tchebycheff*

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s \int_1^{\infty} \psi(x)x^{-s-1} dx$$

Também podemos escrever

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} P'(ns), \quad (5.8)$$

Isto reflete a relação (2.1) entre as duas funções de Tchebycheff.

5.2.11 Exemplo 11

Podemos perceber que a exponencial de $P(s)$ já nos aproxima bastante de $\zeta(s)$, em vista de (5.6) e de que para $n \geq 2$ os $P(ns)$ têm contribuição irrisória para os coeficientes

de $\ln(\zeta(s))$ (no sentido que seus polos reais estão em $1/n$ e a soma de seus coeficientes são da ordem de $O(x^{1/n+\epsilon})$).

Por (5.2), temos

$$\begin{aligned} e^{P(s)} &= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{\frac{1}{2}}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{\frac{1}{6}}{8^s} + \frac{\frac{1}{2}}{9^s} + \frac{1}{10^s} + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{n^s}, \end{aligned}$$

sendo

$$g_n = \frac{1}{b_1! \cdot \dots \cdot b_k!}$$

onde a fatoração prima de n é $n = p_1^{b_1} \cdot \dots \cdot p_k^{b_k}$. A expectativa é de que a soma destes coeficientes tenha crescimento assintótico a x .

Por (5.7), ao menos para $Re(s) > 1$ temos

$$\begin{aligned} e^{P(s)} &= \prod_{n=1}^{\infty} \zeta(ns)^{\frac{\mu(n)}{n}} \\ &= \zeta(s) \cdot \frac{1}{(\zeta(2s))^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{(\zeta(3s))^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{1}{(\zeta(5s))^{\frac{1}{5}}} \cdot (\zeta(6s))^{\frac{1}{6}} \dots \end{aligned}$$

Estas duas considerações nos encaminham a concluir que existe $c = \zeta(2)^{1/2} \cdot \zeta(3)^{1/3} \cdot \dots$ tal que

$$c \cdot e^{P(s)} \sim \zeta(s) \sim \frac{1}{s-1},$$

quando $s \rightarrow 1^+$, resultado este que pode ser aprimorado de uma assintótica para uma convergência das diferenças, em vista de (6.4.1).

De (6.4.1) e do teorema (6.3.4) que veremos pode-se concluir que

$$c \cdot \sum_{n < x} g_n - x = o(x),$$

que é equivalente a $c \cdot \sum_{n < x} g_n \sim x$.

5.2.12 Exemplo 12

Podemos encontrar as séries de Dirichlet $P_k(s)$ referentes à soma de termos $1/n^s$, tendo n exatos k fatores primos, através de somas e multiplicações de potências de $P(ms)$, $m \in \mathbb{N}$. Por expressarem a transformação de Mellin de $\pi_k(x)$ em termos de $P(s)$ e, em última instância, $\zeta(s)$, estas expressões podem ser utilizadas para a obtenção de fórmulas explícitas para os $\pi_k(x)$ em função dos zeros e polos da função Zeta, possivelmente levando a resultados mais precisos que os de Landau (1909, p. 208):

$$\pi_k(x) \sim \frac{1}{(k-1)!} \frac{x(\ln \ln x)^{k-1}}{\ln x}.$$

Evidentemente, $P_1(s) = P(s)$. Para encontrarmos a representação de $P_2(s)$ em termos de $P(s)$ (e, conseqüentemente, de $\zeta(s)$), podemos prosseguir da seguinte forma:

Ao tomarmos $P^2(s)$, temos quase o que queríamos, pois esta série tem coeficientes não nulos de valor 2 para produtos de primos distintos e 1 para produtos de primos iguais, isto é, quadrados de primos. Acontece que $P(2s)$ é a série com quadrados de primos! Assim, podemos compensar a diferença e com isto encontrar

$$P_2(s) = \frac{1}{2}(P^2(s) + P(2s)).$$

O processo, com crescente complexidade, pode ser aplicado aos próximos $P_k(s)$ para obter:

$$P_3(s) = \frac{1}{6}(P^3(s) + 3P(2s)P(s) + 2P(3s))$$

$$P_4(s) = \frac{1}{24}(P^4(s) + 6P(2s)P^2(s) + 8P(3s)P(s) + 6P(4s) + 3P^2(2s))$$

$$P_5(s) = \frac{1}{120}(P^5(s) + 10P(2s)P^3(s) + 20P(3s)P^2(s) + 30P(4s)P(s) + 24P(5s) + 15P^2(2s)P(s) + 20P(3s)P(2s))$$

$$P_6(s) = \frac{1}{720}(P^6(s) + 15P(2s)P^4(s) + 40P(3s)P^3(s) + 90P(4s)P^2(s) + 144P(5s)P(s) + 120P(6s) + 90P^2(2s)P^2(s) + 48P^3(2s) + 120P(3s)P(2s)P(s) + 40P^2(3s) + 90P(4s)P(2s))$$

...

O autor reorganizou os termos acima de forma que algo de sua estrutura, à medida que k cresce, se nos faça clara. Especificamente, que o leitor possa apreciar alguma simetria combinatória relacionada aos números triangulares e o dobro dos tetraedrais na segunda e terceira colunas, e com o triângulo de Pascal (cuja aparição, como logo veremos, não se dá absolutamente por conta dos números primos). Estas fórmulas foram construídas manual e laboriosamente sem conhecimento de uma fórmula as gerasse. No entanto, caso queiramos calcular as fórmulas explícitas de $\pi_k(x)$ para k geral, devemos ter uma expressão igualmente geral para $P_k(s)$, e outro método se faz necessário.

O autor não conhecia qualquer processo similar na literatura, de modo que se pôs a descobri-lo. Ao considerarmos o produto similar ao de Euler

$$K((\alpha_n), t, s) = \prod_{\alpha_n} \frac{1}{1 - t \cdot \alpha_n^{-s}}$$

para $s, t \in \mathbb{C}$ e uma seqüência (α_n) que satisfaça⁹ $\|t \cdot \alpha_n^{-s}\| < 1$ para alguma região de $t, s \in \mathbb{C}$, podemos expandi-lo formalmente para a série de potências

⁹ Para alguma seqüência crescente, por exemplo. A condição é para que possamos expandir o termo do produto para a série geométrica usual.

$$K((\alpha_n), t, s) = \sum_{m=0}^{\infty} v_m t^m,$$

com

$$v_m = \sum_{\substack{l_i \in (\alpha_n) \\ 1 \leq i \leq m}} (l_1 \cdot \dots \cdot l_m)^{-s}, \quad v_0 = 1,$$

sendo os l_i **membros iguais ou distintos de** (α_n) , e **não levando em conta** diferenças de ordem para os termos do somatório.

Ao mesmo tempo, obtemos formalmente

$$\ln(K(\alpha_n), t, s) = \sum_{m=1}^{\infty} t^m \frac{1}{m} \sum_{\alpha_n} \alpha_n^{-ms} = \sum_{m=1}^{\infty} t^m \frac{1}{m} A(ms),$$

onde definimos, por comodidade, $A(s) = \sum_{\alpha_n} \alpha_n^{-s}$. Estamos agora em condições de re-combinar a série acima retomando a exponencial. Obtemos:

$$\begin{aligned} K((\alpha_n), t, s) &= \prod_{m=1}^{\infty} \exp\left(\frac{t^m A(ms)}{m}\right) = \prod_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{mk} A^k(ms)}{m^k k!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n h(n), \end{aligned}$$

com

$$h(n) = \sum_{\substack{j_1 g_1 + \dots + j_t g_t = n \\ g_1 < \dots < g_t}} A^{j_1}(g_1 s) \cdot \dots \cdot A^{j_t}(g_t s) \cdot \frac{1}{g_1^{j_1} j_1! \cdot \dots \cdot g_t^{j_t} j_t!}.$$

onde a quantidade de termos somados à direita da última igualdade coincide com o **número de partições de** n . Por unicidade dos coeficientes de uma série de potências, somos levados a concluir que $v_n = h_n$, ou seja,

$$\sum_{\substack{l_i \in (\alpha_n) \\ 1 \leq i \leq n}} (l_1 \cdot \dots \cdot l_n)^{-s} = \sum_{\substack{j_1 g_1 + \dots + j_t g_t = n \\ g_1 < \dots < g_t}} A^{j_1}(g_1 s) \cdot \dots \cdot A^{j_t}(g_t s) \cdot \frac{1}{g_1^{j_1} j_1! \cdot \dots \cdot g_t^{j_t} j_t!}.$$

Por exemplo, tomar $n = 2$ nos rende

$$v_2 = \sum_{\substack{l_i \in (\alpha_n) \\ i=1, 2.}} (l_1 \cdot l_2)^{-s} = \frac{1}{2!} \left(\sum_{\alpha_n} \alpha_n^{-s} \right)^2 + \frac{1}{2!} \sum_{\alpha_n} \alpha_n^{-2s}.$$

Uma aplicação particular deste teorema para a teoria das séries de Dirichlet é obtida considerando uma seqüência $(\alpha_n) \in \mathbb{N}^*$ injetiva, que imediatamente satisfaz a condição $\|t \cdot \alpha_n^{-s}\| < 1$ para alguma região de $t, s \in \mathbb{C}$, $Re(s) > 0$, $\|t\| < 1$. Note como, ao tomarmos os α_n como a seqüência dos primos, a condição para a expansão geométrica é satisfeita para $Re(s) > 0$, $\|t\| < 1$, a comutação dos termos é permitida para $Re(s) > 1$ e o resultado acima é exatamente o primeiro caso, $2 \cdot P_2(s) = P^2(s) + P(2s)$. O caso geral para os primos toma assim a forma

$$P_n(s) = \sum_{\substack{j_1 g_1 + \dots + j_t g_t = n \\ g_1 < \dots < g_t}} P^{j_1}(g_1 s) \cdot \dots \cdot P^{j_t}(g_t s) \cdot \frac{1}{g_1^{j_1} j_1! \cdot \dots \cdot g_t^{j_t} j_t!}.$$

Encaminhamos assim a descoberta da fórmula geral dos $P_k(s)$ em função de $P(s)$, que após inversões de Mellin rendem expressões para os $\pi_k(x)$ dependentes dos zeros da função Zeta, e que, além disso, oferece uma conexão com a teoria de partições.

A teoria da função $K((\alpha_n), t, s)$ gera muitos resultados similares, permitindo extensa investigação combinatória. Nos limitemos a mostrar mais um exemplo de fórmulas do gênero, como a fórmula análoga obtida pela consideração da expansão em série de potências na variável t de $K^{-1}((\alpha_n), t, s)$

$$\sum_{\substack{l_i \in (\alpha_k) \\ 1 \leq i \leq n}} (l_1 \cdot \dots \cdot l_n)^{-s} = \sum_{\substack{j_1 g_1 + \dots + j_t g_t = n \\ g_1 < \dots < g_t}} A^{j_1}(g_1 s) \cdot \dots \cdot A^{j_t}(g_t s) \cdot \frac{(-1)^{j_1 + \dots + j_t}}{g_1^{j_1} j_1! \cdot \dots \cdot g_t^{j_t} j_t!}.$$

desta vez sendo os l_i **necessariamente membros distintos de** (α_n) , e igualmente **não levando em conta** diferenças de ordem na construção dos termos do somatório à esquerda.

5.2.13 Exemplo 13

Pode-se ver pela definição que $P(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \infty$. Em particular, a partir¹⁰ de um dado x_0 , temos $P(x) < 1$ para $x > x_0$. Assim, nesta região, podemos falar da série de Dirichlet associada a $1/(1 - P(s))$ expandindo a geométrica usual:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - P(s)} &= 1 + P(s) + P^2(s) + P^3(s) + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{2}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{8^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{2}{10^s} + \frac{1}{11^s} + \frac{3}{12^s} + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}, \end{aligned}$$

onde $b_n = \Omega(n)! / (c_1! \cdot \dots \cdot c_k!)$ se a fatoração prima de n é $n = h_1^{c_1} \cdot \dots \cdot h_k^{c_k}$, para h_1, \dots, h_k primos distintos.

Em x_0 , temos $P(x_0) = 1$, e a série aqui considerada tem um polo, como é sempre o caso para a fronteira de convergência de séries de Dirichlet de coeficientes positivos (HARDY e RIESZ, 1915, p. 10). Percebam que a continuação analítica desta série para

¹⁰ x_0 pode ser calculado através da análise geral presente em Hardy e Riesz (1915, p. 6-8).

valores no semiplano esquerdo à x_0 terá zeros em todos os polos da função zeta prima, e em particular, em todos os polos gerados pelos zeros da função zeta na forma da expressão 5.7!

6 DA CONTINUAÇÃO ANALÍTICA DE FUNÇÕES E TEOREMAS TAUBERIANOS

Por vezes nos deparamos com expressões válidas em diferentes domínios particulares que, no entanto, correspondem-se perfeitamente com uma mesma função num domínio mais abrangente. Vejamos, por exemplo,

$$\frac{1}{1-s} = \sum_{n=0}^{\infty} s^n, \quad \|s\| < 1; \text{ e}$$

$$\frac{1}{1-s} = - \sum_{n=1}^{\infty} s^{-n}, \quad \|s\| > 1.$$

As séries apresentadas convergem, no sentido usual, somente nos domínios apresentados; em ambos os casos, porém, podemos considerar expressão $1/(1-s)$ como uma extensão muito natural de ambas as séries para todo o domínio $\mathbb{C} - \{1\}$.

Este fato contribuiu para fortes argumentos nas discussões arrastadas por séculos quanto a atribuição de valores a séries divergentes, a exemplo da série de Grandi

$$\frac{1}{2} = \lim_{s \rightarrow -1^+} \frac{1}{1-s} = \lim_{s \rightarrow -1^+} \sum_{n=0}^{\infty} s^n \text{ “=” } 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots,$$

com o valor dado por Leibniz para a referida série divergente (EULER, 1760). Em seu trabalho “De seriebus divergentibus”, Euler mostra inúmeras técnicas para atribuir valores a séries divergentes, algumas das quais manifestamente expressando seu virtuosismo e habilidade ao manipular tais séries, em particular a série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n!$, que recusava-se a render resultados por muitas das técnicas mais conhecidas¹. A habilidade de Euler foi suficiente para, através destas manipulações de séries divergentes, conjecturar corretamente a equação funcional da função Eta (da qual a equação funcional da Zeta sai facilmente) em 1749 (HARDY, 1949, p. 24), após conferir sua validade para números inteiros e alguns fracionários. Seu trabalho aparentemente permaneceu esquecido até 1894, quando Cahen os percebeu (HARDY, 1949, p. 39), 45 anos após Schlömilch provar rigorosamente equações funcionais relacionadas e 35 anos após Riemann já ter publicado seu artigo paradigmático.

Um interessante fato é que as técnicas conhecidas por Euler e muitos de seus contemporâneos costumavam apresentar concordância nos valores atribuídos. Isto, por si só, favorecia o ânimo para a edificação de uma nova ciência, cujo fundamento permanecia um tanto quanto obscuro. Muitos outros envolveriam-se neste tipo de investigação até meados do século XIX. A partir daí, argumentos rigorosos começaram a ser formulados. Escolhemos primeiro apresentar estes argumentos, para apenas depois exemplificar alguns métodos de atribuição de valores a estas séries.

¹ A tradução para o inglês deste trabalho pode ser facilmente encontrado na internet. Apesar de pouco elucidativo no que toca a validade das técnicas, recomenda-se altamente que qualquer um interessado em séries divergentes o leia.

A chave para explicar esta concordância, isto é, unicidade dos valores atribuídos às séries divergentes, é a analiticidade².

Veamos a seguir o Teorema da Identidade.³

Teorema 6.0.1 (Teorema da Identidade) *Sejam $A \subset \mathbb{R}$ aberto e conexo e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função analítica em A que se anule em um aberto $B \subset A$. Então $f \equiv 0$ em todo A (analogamente, o teorema vale para \mathbb{C} , f holomórfica).*

Esboço da demonstração.: Basta notarmos que se f se anula no aberto B , $f^{(k)}(t) = 0$ para qualquer $t \in B$, de forma que a expansão de Taylor em t de f é

$$f(x) = 0 + 0 \cdot (x - t) + 0 \cdot (x - t)^2 + \dots ,$$

identicamente nula e cujo raio de convergência é infinito. Como f é analítica em todo A , e A é conexo, a expansão acima é idêntica a f em todo A e portanto $f \equiv 0$ em A .⁴

Corolário 6.0.1 *Nas condições do teorema anterior, se funções f, g analíticas reais ou complexas são tais que $f = g$ em B , então $f = g$ em A .*

Dem.: Aplicação direta do teorema anterior à $h = f - g$.

Em outras palavras, métodos aplicados à expansão do domínio válido de funções analíticas que preservem sua analiticidade atribuirão necessariamente os mesmos valores nestas novas regiões. Em particular, quando antes o domínio era restringido por questões de convergência, os métodos atribuirão os mesmos valores às séries divergentes associadas.

Métodos para se somar séries e integrais divergentes são inúmeros, organizados dentro da Teoria da Somabilidade. Recomendamos sem ressalvas o livro “Divergent Series”, o último livro de Godfrey Harold Hardy, no qual algumas das secções seguintes estão baseadas. Estes métodos, quase sempre, buscam atribuir valores a séries divergentes sem, no entanto, modificar os valores de aderência das séries já usualmente convergentes.

Definição 6.0.1 *Quando um destes métodos, aplicado a qualquer série convergente que convirja para, digamos, A , retorna o mesmo valor A , sem quaisquer alterações, o método chama-se **regular**.*

Apesar de não o provarmos, os métodos que logo exporemos **resultam em funções analíticas**, de forma que, quando estendem a região usual de convergência de uma série para uma região maior onde antes divergia, a série toma num ponto desta região mais ampla o mesmo valor para todos os métodos, por unicidade da continuação analítica, como expusemos. Uma atribuição distinta de valores implica necessariamente a quebra da analiticidade.⁵

² Recomendamos aos leitores o estudo das páginas 402 e 403 de Curso de Análise, Vol. 1, de Elon Lages Lima.

³ É possível exigir menos nas hipóteses do que como colocamos, mas escolhemos apresentar assim por simplicidade.

⁴ Não sendo conexo, poderia-se ter definido patológica ou artificialmente f como duas funções analíticas completamente distintas em cada um dos conjuntos disjuntos, e por definição f ainda seria analítica.

⁵ Deve-se ter cuidado com esta afirmação, pois refere-se à extensão da convergência de uma série de potências, e não mera atribuição de valores a uma série numérica divergente. Pode-se pensar na série

Antes de prosseguirmos para compreender os dois métodos mais difundidos de somabilidade, apresentaremos o teorema de Carlson, que nos mostra um surpreendente fato acerca das funções holomórficas (já sugerido neste trabalho pela interpolação de Ramanujan (2.3.2)): dadas algumas condições (por vezes extrapoláveis), as funções holomórficas são unicamente determinadas pelos seus valores nos números naturais!

Teorema 6.0.2 (Teorema de Carlson) *Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analítica em $\operatorname{Re}(s) > 0$, e contínua em $\operatorname{Re}(s) \geq 0$. Então, se*

$$i) \text{ existe } t \in \mathbb{R} \text{ tal que } f(s) = O(e^{t\|s\|}),$$

$$ii) \text{ existe } c < \pi \text{ tal que } f(ix) = O(e^{cx}), x \in \mathbb{R}, e$$

$$iii) f(n) = 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

f é identicamente nula (TITCHMARSH, 1939, p. 185-186).

Que duas funções que cumpram as condições iniciais, i) e ii) e são idênticas nos números naturais devem ser idênticas em todo o domínio de analiticidade segue diretamente da aplicação do teorema à sua diferença.

A condição ii) requer desigualdade estrita, uma vez que funções como $\sin(\pi s)$ satisfazem todas as outras condições, sem no entanto ser identicamente nula. Isso decorre do fato de que $\sin(i\pi x) = i \sinh(\pi x) = i(e^{\pi x} - e^{-\pi x})/2$ tem crescimento da forma $e^{\pi x}$.

Vejamos agora dois dos métodos mais utilizados para o tratamento de séries divergentes.

6.1 SOMAS DE CESÀRO

A soma Cesàro de uma série⁶ $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ é o limite das médias de suas somas parciais $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k.$$

Quando S converge, as S_n acumulam-se em S , e é de esperar-se portanto que a soma Cesàro de qualquer série convergente preserve o valor de convergência, ou seja, que seja um método *regular*. De fato, neste caso temos que, dado $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que se $n > n_0$, tem-se $-\epsilon < S_n - S < \epsilon$, e assim, como

$1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - x^7 + x^9 - x^{10} + x^{12} - x^{13} + \dots$ como gerando em $x = 1$ a série $1 - 1 + 1 - \dots$; no entanto, o valor atribuído não será de $1/2$, afinal, apesar de analítica onde converge, é outra função inteiramente que $1/(1+x)$. Apesar disso, das duas atribuições de valor, pode-se argumentar a favor da maior naturalidade da primeira atribuição à série de Grandi. Mais precisamente, como o leitor perceberá ao lidar com a média Cesàro, os coeficientes nulos não podem ser ignorados, sendo mais preciso afirmar que a série dada acima gera a soma divergente $1 - 1 + 0 + 1 - 1 + 0 + 1 - 1 + 0 + 1 - 1 + 0 + 1 - 1 + \dots$.

⁶ Este tipo de soma já havia sido utilizada ao menos desde 1713, por Leibniz, e em mais casos por Daniel Bernoulli em 1771. Também apresenta-se implicitamente em trabalhos de Frobenius e Hölder em 1880 e 1882. Apenas em seu trabalho de 1890 Ernesto Cesàro desenvolveu teórica e rigorosamente este tipo de somas, e é também considerado o primeiro trabalho em que uma teoria sobre séries divergentes é desenvolvida explicitamente (HARDY, 1949, p. 8)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{1 \leq k \leq n_0} S_k + \sum_{n_0 < k \leq n} S_k \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{n_0 < k \leq n} S_k \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{n_0 < k \leq n} S_k - S + S \right) \end{aligned}$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - n_0}{n} (S - \epsilon) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{n_0 < k \leq n} S_k - S + S \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - n_0}{n} (S + \epsilon),$$

obtemos prontamente a convergência da soma Cesàro para S por arbitrariedade de ϵ .

Por outro lado, temos para a série de Grandi $S = 1 - 1 + 1 - \dots$ as somas parciais $S_{2n} = 0$ e $S_{2n-1} = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, de forma que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} S_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \left(\sum_{k=1}^n S_{2k-1} + \sum_{k=1}^n S_{2k} \right) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Note como a soma $S = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ converge Cesàro para $1/2$, mas a soma $T = 1 - 1 + 0 + 1 - 1 + 0 + 1 - 1 + 0 + 1 - 1 + 0 + \dots$ converge Cesàro para $1/3$! Suas somas parciais são $T_{3n-2} = 1$, $T_{3n-1} = 0$ e $T_{3n} = 0$, de forma que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n T_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{3n} T_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n} \left(\sum_{k=1}^n T_{3k-2} + \sum_{k=1}^n T_{3k-1} + \sum_{k=1}^n T_{3k} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Fica evidente que **os termos nulos das séries não podem ser ignorados** e modificam o resultado final.

A depender do crescimento dos termos, a soma Cesàro pode muito bem não conferir imediatamente um valor de convergência, mas suas aplicações sucessivas podem. É o caso da soma $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots$, que, apesar de não convergir mesmo em médias, converge nas médias das somas parciais das médias. Este processo, de repetidas aplicações da média Cesàro, é conhecida como média Hölder (HARDY, 1949, p. 94), de ordem k para k iterações.

As médias Cesàro de ordem k de uma série $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ são definidas pelo limite⁷

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k(S),$$

onde $C_n^k(S) = S_n^k / E_n^k$, com

⁷ O leitor não deve ler k como expoentes de C_n , S_n e E_n , são somente índices de ordem.

$$S_n^k = \sum_{r=1}^n S_n^{k-1},$$

$$S_n^0 = S_n = \sum_{r=1}^n a_n$$

e $E_n^k = S_n^k$ para a seqüência $a_1 = 1$, $a_n = 0 \quad \forall n > 1$, isto é, $E_n^0 = 1$, $E_n^1 = n$, $E_n^2 = n(n+1)/2, \dots$, $E_n^k = \binom{n+k}{k}$.

Quando o limite existe e vale A , dizemos que a soma S é (C, k) -somável para A (HARDY, 1949, p. 96). Ademais, como $\binom{n+k}{k} \sim n^k/k!$, a somabilidade (C, k) de S para A equivale a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k!}{n^k} S_n^k = A.$$

As médias Cesàro e Hölder de ordem k são equivalentes, isto é, a somabilidade de uma série em um tipo implica na somabilidade do outro e para o mesmo valor (HARDY, 1949, p. 103).

6.1.1 Aplicação do método para a teoria das séries de Fourier

O estudo da convergência das séries de Fourier, desenvolvidas pelo próprio no trabalho “Théorie analytique de la chaleur”⁸ (publicado em 1822, cujos temas já haviam sido apresentados à Academia de Paris em 1807-1811) após as empreitadas determinantes de Bernoulli, Euler, D’Alembert e Lagrange no século XVIII, motivou muitos esforços dos matemáticos do início do século XIX. O primeiro resultado efetivo conhecido é dado como o de Dirichlet sobre funções de variação limitada, apesar disso, Carslaw (1906, p. 4-5), assim como Darboux, afirmam haver nisto um erro histórico, tendo Fourier já estudado aprofundada e rigorosamente a convergência de suas séries para uma ampla classe de funções, tendo mesmo expressado um objeto muito semelhante ao núcleo de Dirichlet. Muitos matemáticos acreditaram, por décadas, haver convergência das séries de Fourier de qualquer função periódica contínua. Em 1876, du Bois-Reymond abalou os paradigmas da época ao construir uma série de Fourier para uma função periódica contínua que divergia em um ponto. Mais tarde, construiu uma função cuja série de Fourier associada divergia em um conjunto denso (FIGUEIREDO, 1977, p. 42).

Tendo isto em vista, os resultados acerca da convergência pontual ou uniforme das séries de Fourier para as funções associadas exigem, costumeiramente, **diferenciabilidade** em secções, (FIGUEIREDO, 1977, p. 21, 69), convergindo a série de Fourier para a média dos limites laterais em qualquer ponto de descontinuidade destas funções. Tendo isto em mente, pode-se apreciar o seguinte teorema, posto quase um século após a difusão das séries de Fourier.

Teorema 6.1.1 (Teorema de Fejér) *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente contínua e periódica de período $2L$, F sua série de Fourier associada. Então $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^1(F)$*

⁸ Os autores Figueiredo e Carslaw escrevem “mathématique” ao invés de “analytique”; Carslaw o faz provavelmente ao confundir-se com o trabalho de Poisson que cita em seguida, e supomos que Figueiredo baseou-se em Carslaw.

(a média das somas parciais) converge para a média dos limites laterais de f , uniformemente em qualquer intervalo fechado que não contenha postos de descontinuidade de f (FIGUEIREDO, 1977, p. 80-84).

Em particular, temos garantida a convergência uniforme das séries de Fourier contínuas, no sentido de Cesàro.⁹

6.2 SOMAS DE ABEL

Um dos mais antigos métodos de atribuição de valores a uma série divergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, usado ao menos desde o século XVII, consiste na observação do valor do limite

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n,$$

onde a série deve ser convergente para $\|x\| < 1$ (no mínimo). Este limite, quando existe, é chamado de soma de Abel de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.¹⁰

Assim, diz-se que a série $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ $1/2$ é *A-somável* para $1/2$ ¹¹, à medida que

$$\frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{1+x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n$$

De maneira mais geral, para uma seqüência real estritamente crescente, não negativa $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que tenda ao infinito, se

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda(n)x}$$

converge para todo $x > 0$ e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = s$$

dizemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é (A, λ_n) -somável (HARDY, 1949, p. 71).

⁹ Mais que isso, há convergência pontual da média Cesàro das somas parciais da série de Fourier para qualquer função limitada integrável, ou mesmo ilimitada, desde que a integral $\int_{-L}^L f(x) dx$ convirja absolutamente (CARSLAW, 1906, p. 234-235).

¹⁰ Abel as estudou em uma época onde o rigor matemático encorpava-se na França e Alemanha e as séries divergentes eram postas como excentricidades do passado. A soma ganhou seu nome devido a seu teorema sobre a continuidade da série de potências (HARDY, 1949, p. 8). É famosa sua afirmação “Séries divergentes um tanto quanto terríveis, e é vergonhoso basear nelas qualquer demonstração que seja”, em carta à Holmboe, em 16 de Janeiro de 1826 (ROUSSEAU, 2015), onde também demonstra interesse em estudá-las mais a fundo.

¹¹ Veja a nota 5. Isto é válido caso os coeficientes nulos sejam respeitados; caso contrário, a soma $1 - 1 + 1 - \dots$ pode tomar muitos outros valores (HARDY, 1949, p. 73)

A soma de Abel é mais forte que a soma de Cesàro de ordem qualquer, isto é, se uma soma formal S é $S = a(C, k)$, $k \in \mathbb{N}$, é necessariamente $S = a(A)$, $\forall k$.

Se o termos da série são todos não-negativos, ou se são limitados, a somabilidade Abel equivale à Cesàro (Hardy, 1949, p. 154).

A soma de Abel é **regular**. Este fato que acabou por conferir ao método seu nome, através do teorema da continuidade. Exemplos de seu uso englobam uma grande parte da tão frutífera teoria de funções geradoras. Alguns podem ser vistos em 4.1.2, de sorte que não nos debruçaremos sobre mais exemplos.

Sabemos, portanto, que a somabilidade de Abel nos confere valores a algumas séries divergentes, e retorna a séries convergente seu valor de aderência habitual. Podemos nos perguntar que condições a mais são necessárias para que uma série convirja, dada que sua soma Abel exista e seja conhecida, isto é, uma recíproca do teorema de Abel. Este resultado e todos os deste gênero, que obtém convergência por um método mais fraco a partir da convergência por um método mais forte com hipóteses adicionais, são conhecidos como **teoremas tauberianos**¹².

6.3 TEOREMAS TAUBERIANOS

Como comentamos, os teoremas tauberianos são recíprocos aos teoremas abelianos de regularidade. Em outras palavras, sabendo-se que uma série formal converge para um certo método de somabilidade, a condição tauberiana estabelece suficiência para convergência num sentido mais fraco. Vejamos dois exemplos de teoremas tauberianos para séries de potências (HARDY, 1949, p. 149-152).

Teorema 6.3.1 (Primeiro Teorema de Tauber) *Se $\sum_n a_n$ é A -somável para s e $a_n = O(n^{-1})$, então $\sum_n a_n$ converge para s .*

Na verdade o primeiro teorema de Tauber utilizava o ao invés de O ; reproduzimos a generalização efetuada pelo teorema 90 de Hardy (1949, p. 154).

Teorema 6.3.2 (Segundo Teorema de Tauber) *Seja $\sum_n a_n$ A -somável para s . A convergência usual da série para s é equivalente à condição*

$$a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n = o(n).$$

Os teoremas tauberianos mais gerais e famosos e gerais são os teoremas de Norbert Wiener, encaixados no contexto da análise funcional. Podem ser expressos de variadas formas; aqui colocamos a encontrada em Hardy (1949, p. 286).

Teorema 6.3.3 (Teoremas Tauberianos de Wiener) *Seja $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tais que*

- i) g é função $L(-\infty, \infty)$, ou seja, sua integral em \mathbb{R} converge;*
- ii) a transformada de Fourier de g não se anula em nenhum $t \in \mathbb{R}$;*

¹² Em homenagem a Alfred Tauber, que Hardy (1949, p.149) credita como o primeiro a provar teoremas deste tipo. Mais tarde viria a ser assassinado em Theresienstadt.

iii) h é função $L(-\infty, \infty)$;

iv) f é limitada,

então

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x-t)f(t)dt \rightarrow l \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt$$

implica

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x-t)f(t)dt \rightarrow l \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt,$$

onde l é uma constante.

O principal avanço deste teorema em relação à teoria anterior é a força e generalidade dos resultados obtidos em relação à relativa fraqueza das hipóteses. Dada f como no teorema, a existência de uma única função como g leva o resultado a toda a classe de funções $L(-\infty, \infty)$.

Provaremos agora o único teorema tauberiano que aplicaremos neste trabalho, devido a Donald Newman (1980), que, baseado nos teoremas de Ikehara e Wiener, distingue-se pela simplicidade (requer basicamente o conhecimento do Teorema de Cauchy). Divulgado por Korevaar, reproduzimos aqui o argumento tal como aparece em Zagier (1997), com tradução própria¹³.

Teorema 6.3.4 (Teorema Tauberiano de Newman) *Seja $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e localmente integrável. Esteja definida $g(z)$ em $Re(z) > 0$ tal que $g(z) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-zt}dt$. Então, se g pode ser estendida holomorficamente para $Re(z) \geq 0$, $\int_0^{\infty} f(t)dt$ existe e vale $g(0)$.*

Dem.: Para $T > 0$ definamos $g_T(z) = \int_0^T f(t)e^{-zt}dt$, que é holomórfica para todo $z \in \mathbb{C}$. Devemos mostrar que $\lim_{T \rightarrow \infty} g_T(0) = g(0)$.

Seja R suficientemente grande e seja C a fronteira da região $\{z \in \mathbb{C} : \|z\| \leq R, Re(z) \geq -\delta\}$, onde $\delta > 0$ é suficientemente pequeno (dependendo de R) tal que $g(z)$ é holomórfico na fronteira e interior de C ¹⁴. Então

$$g(0) - g_T(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C (g(z) - g_T(z))e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z}$$

¹³ O próprio livro de análise complexa que Newman co-autorou acabou por usar a exposição de Zagier (BAK e NEWMAN; 2010, p. vi, p. 285).

¹⁴ O autor questiona a validade deste passo, presente nas três fontes consultadas do teorema, uma vez que, ainda que g seja holomórfica em $Re(z) \geq 0$, pode não o ser para qualquer região $Re(z) > -\delta$, isto é, pode haver uma seqüência de polos de g cuja parte real tende a 0 pela esquerda. Até hoje não há qualquer estimativa deste tipo para os zeros de $\zeta(1+s)$, para o qual o teorema foi desenvolvido: nem mesmo o método mais forte conhecido, devido a Vinogradov, o fornece. Em vista disto, o autor sugere uma mudança da vizinhança de $Re(z) = 0$ tomada, devendo respeitar alguma forma de aproximação pela esquerda da reta $Re(z) = 0$ à medida que cresce a parte imaginária.

pelo Teorema de Cauchy. No semicírculo $C_+ = C \cap \{Re(z) > 0\}$ o integrando é limitado por $2B/R^2$, onde $B = \max_{t \geq 0} |f(t)|$, pois

$$\|g(z) - g_T(z)\| = \left\| \int_T^\infty f(t)e^{-zt} dt \right\| \leq B \int_T^\infty \|e^{-zt}\| dt = \frac{Be^{-Re(z)T}}{Re(z)} \quad (Re(z) > 0)$$

e

$$\left\| e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \frac{1}{z} \right) \right\| = e^{Re(z)T} \cdot \frac{2Re(z)}{R^2}.$$

Desta forma a contribuição de $g(0) - g_T(0)$ da integral sobre C_+ é limitada absolutamente por B/R . Para a integral sobre $C_- = C \cap \{Re(z) < 0\}$, olhemos para $g(z)$ e $g_T(z)$ separadamente. Desde que g_T é inteira, o caminho de integração para a integral envolvendo g_T pode ser substituído pelo semicírculo $C'_- = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, Re(z) < 0\}$, e a integral sobre C'_- é limitada absolutamente por $2\pi B/R$ pela mesma estimativa anterior, desde que

$$\|g_T(z)\| = \left\| \int_0^T f(t)e^{-zt} dt \right\| \leq B \int_{-\infty}^T \|e^{-zt}\| dt = \frac{Be^{-Re(z)T}}{|Re(z)|} \quad (Re(z) < 0).$$

Finalmente, a integral restante sobre C_- tende a 0 quando $T \rightarrow \infty$, pois o integrando é o produto das funções $g(z)(1 + z^2/R^2)/z$, que é independente de T , e a função e^{zT} , que vai para 0 rapidamente e uniformemente em conjuntos compactos quando $T \rightarrow \infty$ no semiplano $Re(z) < 0$. Assim $\lim_{T \rightarrow \infty} \sup |g(0) - g_T(0)| \leq 2B/R$. Como R é arbitrário, o teorema está provado.

Isso nos habilitará a provar o Teorema dos Números Primos, o que também mostrará a razão deste ser considerado um teorema tauberiano.

O leitor talvez não tenha muita dificuldade em mostrar que a série de Dirichlet

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s},$$

tem limite 0 quando $s \rightarrow 1^+$. No entanto, isto não implica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0.$$

Implica, de fato, que a soma só pode convergir para este valor, mas não que haja convergência de todo. É precisamente isto que o último teorema nos habilita a fazer. Na verdade, esta última equação é equivalente ao teorema dos números primos, e é a primeira aplicação que o próprio Newman (1980) fez de seu teorema.

6.4 CONTINUAÇÃO ANALÍTICA DA FUNÇÃO ZETA

Por (5.1.4), temos

$$\zeta(s) = s \int_1^{\infty} [x]x^{-s-1}dx.$$

Podemos nos aproveitar do crescimento linear do termo $[x]$ para estender meromorficamente a definição da função zeta de $Re(s) > 1$ para $Re(s) > 0$, a menos do ponto $s = 1$.

Teorema 6.4.1 *A expressão*

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \left(\int_1^{\infty} (x - [x])x^{-s-1}dx \right) \quad (6.1)$$

é válida para $Re(s) > 0$, a menos da singularidade em $s = 1$.

Demonstração 6.4.1 *Como afirmado no início da demonstração de (5.1.4), na região $Re(w) < -1$ temos que $\int_1^{\infty} x^w dx$ converge para $\frac{-1}{w+1}$, e assim para $Re(s) > 1$*

$$\frac{1}{s-1} = \int_1^{\infty} xx^{-s-1}dx,$$

de onde escrevemos

$$\frac{s}{s-1} - \zeta(s) = s \left(\int_1^{\infty} (x - [x])x^{-s-1}dx \right)$$

Notemos imediatamente que, como $0 \leq x - [x] < 1$, a integral $\int_1^{\infty} (x - [x])x^{-s-1}dx$ converge ao menos para $Re(s) > 0$. Já obtém-se assim uma continuação meromórfica da função Zeta de $Re(s) > 1$ para $Re(s) > 0$, cujo único polo está em $s = 1$, correspondente ao termo $\frac{s}{s-1}$, completando o teorema:

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \left(\int_1^{\infty} (x - [x])x^{-s-1}dx \right).$$

Titchmarsh (1986, p. 14), utilizando uma expressão que difere por poucas manipulações de (6.1), consegue convergência até $Re(s) > -1$. Deixaremos para compreender $\zeta(s)$ em $Re(s) \leq 0$ via a equação funcional.

A expressão obtida acima nos rende uma excelente aproximação da soma parcial de $\zeta(s)$ até o k -ésimo termo em $0 < Re(s) \leq 1$, resultado que desconhecemos na literatura¹⁵:

¹⁵ Após a defesa deste trabalho, o autor encontrou uma referência deste resultado no artigo de Gram (1903). Gram fornece ainda a expansão semiconvergente

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^s} - \frac{k^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{2}k^{-s} + \frac{s}{2!}B_1k^{-s-1} - \frac{s(s+1)(s+2)}{4!}B_3k^{-s-3} - \dots,$$

sendo os B_n os números de Bernoulli.

$$\sum_{n=1}^k \frac{1}{n^s} \approx \frac{1}{(1-s)(k+1)^{s-1}}.$$

Mais precisamente, a diferença entre os dois converge e o valor de convergência é a própria continuação analítica de ζ nesta faixa.¹⁶

Teorema 6.4.2 Para $Re(s) > 0$, é válida a expressão

$$\zeta(s) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\sum_{n=1}^k \frac{1}{n^s} - \frac{1}{(1-s)(k+1)^{s-1}} \right],$$

onde ζ é sempre compreendida como a extensão analítica da soma $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$.

Dem.: Ao considerarmos a expressão válida para todo $s \neq 1$ tal que $Re(s) > 0$

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{s}{s-1} - s \left(\int_1^{\infty} (x - [x])x^{-s-1} dx \right) \\ &= \frac{s}{s-1} - s \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} (x-n)x^{-s-1} dx \right) \end{aligned}$$

e integrarmos por partes, obtemos que

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{s}{s-1} - s \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{-s} \left[(x-n)x^{-s} \Big|_n^{n+1} + \frac{1}{s} \int_n^{n+1} x^{-s} dx \right] \right) \\ &= \frac{s}{s-1} - s \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{-s(n+1)^s} + \frac{1}{s(-s+1)} \left(\frac{1}{(n+1)^{s-1}} - \frac{1}{n^{s-1}} \right) \right) \\ &= \frac{s}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^s} + \frac{1}{s-1} \left(\frac{1}{(n+1)^{s-1}} - \frac{1}{n^{s-1}} \right) \\ &= \frac{s}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s+n}{(s-1)(n+1)^s} - \frac{1}{(s-1)n^{s-1}} \\ &= \frac{s}{s-1} + \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{s+1}{(s-1)2^s} - \frac{1}{s-1} \right) + \left(\frac{s+2}{(s-1)3^s} - \frac{2}{(s-1)2^s} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{s+3}{(s-1)4^s} - \frac{3}{(s-1)3^s} \right) + \dots + \left(\frac{s+k}{(s-1)(k+1)^s} - \frac{k}{(s-1)k^s} \right) \right], \end{aligned}$$

que por sua vez é uma soma telescópica que nos retorna

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{s}{s-1} - \frac{1}{s-1} + \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{s-1}{(s-1)2^s} + \frac{s-1}{(s-1)3^s} + \dots + \frac{s-1}{(s-1)k^s} + \frac{s+k}{(s-1)(k+1)^s} \right] \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\sum_{n=1}^k \frac{1}{n^s} + \frac{s+k}{(s-1)(k+1)^s} \right] = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\sum_{n=1}^k \frac{1}{n^s} - \frac{1}{(1-s)(k+1)^{s-1}} \right], \end{aligned}$$

¹⁶ A aproximação é perfeita, portanto, precisamente para as raízes não triviais de ζ !

para todo $s \neq 1$ tal que $Re(s) > 0$, e o teorema está concluído. Em particular, como para $Re(s) > 1$ o termo $1/(1-s)(k+1)^{s-1}$ tende a zero, a expressão acima nos retorna neste semiplano a definição usual de $\zeta(s)$.

Isso nos mostra que $\zeta(s)$ pode ser melhor compreendida como o termo constante da expansão assintótica em k da soma parcial $\sum_{n=1}^k 1/n^s$, a exemplo de

$$\sum_{n=1}^k \frac{1}{n^s} = \zeta(s) + \frac{1}{(1-s)(k+1)^{s-1}} + o(1)$$

para $Re(s) > 0$.

Escrevendo

$$\sum_{n=1}^k \frac{1}{n^s} = \zeta(s) + \frac{1}{(1-s)(k+1)^{s-1}} + g(s, k)$$

com $g(s, k) \rightarrow 0$ quando $Re(s) > 0$, $k \rightarrow \infty$ e notando que $g(s, k) \rightarrow 1/2$ quando $s = 0$, $\forall k$, é possível obter toda uma gama de resultados, a exemplo de

$$\sum_{n=1}^{k^2} \sum_{\substack{d|n \\ n/k \leq d \leq k}} 1 = k^2,$$

parente do Problema dos Divisores, resolvido parcialmente por Dirichlet (sobre o crescimento da soma parcial $\sum_{n < x} \sum_{d|n} 1$).

6.4.1 O comportamento de $\zeta(s)$ quando $s \rightarrow 1^+$

Nota-se portanto que $\zeta(s) \sim 1/(s-1)$, quando $s \rightarrow 1^+$, pois

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} (s-1)\zeta(s) = \lim_{s \rightarrow 1^+} \left(s - (s-1)s \int_1^\infty (x - [x])x^{-s-1} dx \right) = 1$$

Mais ainda: como $s/(s-1) - 1/(s-1) = 1$, a diferença $\zeta(s) - 1/(s-1)$ quando $s \rightarrow 1^+$ é finita e igual à constante de Euler-Mascheroni γ :

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 1^+} \left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right) &= 1 - \int_1^\infty \frac{(x - [x])}{x^2} dx \\ &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_1^n \frac{1}{x} dx - \sum_{m=1}^{n-1} m \int_m^{m+1} \frac{dx}{x^2} \right) \\ &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln(n) - \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{m=1}^n \frac{1}{m} - \ln(n) \right) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma. \quad (\text{TITCHMARSH, 1986, p. 16}) \end{aligned}$$

6.4.2 A equação funcional

Existem muitas maneiras de se provar a equação funcional para a função Zeta, que exhibe uma importante simetria. Apenas em Titchmarsh, vemos um total de 7 métodos distintos para sua prova, sem contar variantes. Aqui optamos por uma das duas provas originais de Riemann (1859, p. 3).

Teorema 6.4.3 (Riemann, 1859) *A função $\zeta(s)$ pode ser analiticamente estendida para uma função meromórfica definida em todo \mathbb{C} , a menos de um único polo em $s = 1$, cujo resíduo vale 1, e que respeita o a equação funcional*

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) = \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \pi^{-\frac{1-s}{2}} \zeta(1-s). \quad (6.2)$$

Demonstração 6.4.2 *Como já vimos em (6.4.1), $\zeta(s)$ tem uma extensão para $\operatorname{Re}(s) > 0$, com único polo em $s = 1$ de resíduo 1. Basta-nos agora provar a equação funcional, conseguindo assim uma extensão para $\operatorname{Re}(s) \leq 0$, e concluir que nesta região não há polos.*

Consideremos a função gamma avaliada em $s/2$:

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} e^{-x} dx.$$

Fazendo a substituição $x = n^2\pi y$, segue que

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) &= \int_0^{\infty} n^s \pi^{\frac{s}{2}} y^{\frac{s}{2}-1} e^{-n^2\pi y} dy \\ \Rightarrow \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \frac{1}{n^s} &= \int_0^{\infty} y^{\frac{s}{2}-1} e^{-n^2\pi y} dy \\ \Rightarrow \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} &= \int_0^{\infty} y^{\frac{s}{2}-1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi y} dy \\ &= \int_0^1 y^{\frac{s}{2}-1} \varphi(y) dy + \int_1^{\infty} y^{\frac{s}{2}-1} \varphi(y) dy, \end{aligned}$$

com $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x}$ e a comutação da série e integral da terceira linha justificada pela convergência absoluta. Observemos que, substituindo $y = 1/x$,

$$\int_0^1 y^{\frac{s}{2}-1} \varphi(y) dy = \int_{\infty}^1 x^{1-\frac{s}{2}} \varphi\left(\frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = \int_1^{\infty} x^{-\frac{s}{2}-1} \varphi\left(\frac{1}{x}\right) dx. \quad (6.3)$$

*Até aqui, aparentemente só conseguimos novas complicações. De fato a substituição $x = n^2\pi y$ que fizemos de início poderia ter sido feita em qualquer transformação de Mellin, podendo nos render uma expressão com a função Zeta. Acontece que a função $\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi x}$ já havia sido feita conhecida por Jacobi ao publicar seu *Fundamenta*, de forma que Riemann já conhecia a identidade (2.6), da qual, por meio de*

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi x} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x} = 1 + 2\varphi(x),$$

temos

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x} = \frac{\theta(x)}{2} - \frac{1}{2},$$

e portanto

$$\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi}{x}} = \frac{\theta\left(\frac{1}{x}\right)}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{x}\theta(x)}{2} - \frac{1}{2} = \sqrt{x} \cdot \varphi(x) + \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2}.$$

Substituindo em (6.3), obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 y^{\frac{s}{2}-1} \varphi(y) dy &= \int_1^{\infty} x^{-\frac{s}{2}-1} \left(\sqrt{x}\varphi(x) + \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2} \right) dx \\ &= \int_1^{\infty} x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} \varphi(x) dx + \frac{1}{2} \int_1^{\infty} x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} dx - \frac{1}{2} \int_1^{\infty} x^{-\frac{s}{2}-1} dx \\ &= \int_1^{\infty} x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} \varphi(x) dx + \frac{1}{s(s-1)}, \end{aligned}$$

donde conclui-se que

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) &= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{\infty} x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} \varphi(x) dx + \int_1^{\infty} y^{\frac{s}{2}-1} \varphi(y) dy \\ &= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{\infty} (x^{\frac{1-s}{2}-1} + x^{\frac{s}{2}-1}) \varphi(x) dx. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Chamando de $r(s)$ o lado direito da expressão (6.4), encontrada por Riemann, podemos constatar a simetria:

$$\begin{aligned} r(s) &= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{\infty} (x^{\frac{1-s}{2}-1} + x^{\frac{s}{2}-1}) \varphi(x) dx \\ &= \frac{1}{(s-1)s} + \int_1^{\infty} (x^{\frac{s}{2}-1} + x^{\frac{1-s}{2}-1}) \varphi(x) dx = r(1-s), \end{aligned}$$

da qual, finalmente, se escreve a equação funcional simétrica

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s).$$

De fato, (6.4) é uma expressão analítica que concorda com $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ para $\text{Re}(s) > 1$, onde este somatório converge. Logo, nos permite imediatamente estender $\zeta(s)$, de forma única, para uma função analítica definida em $\text{Re}(s) < 0$ via a equação funcional. Também já podemos concluir que $\zeta(s)$ não apresenta polos em $\text{Re}(s) \leq 0$, mas preferimos fazê-lo no formato do teorema seguinte.

Esta equação funcional admite muitas formas, variações e generalizações. Nos limitamos a demonstrar sua variante mais famosa, a equação funcional assimétrica.

Teorema 6.4.4 *A função Zeta $\zeta(s)$ respeita a equação funcional*

$$\zeta(1-s) = 2^{-s+1}\pi^{-s} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(s)\zeta(s) \quad (6.5)$$

Dem.: Multiplicando ambos os lados da equação funcional simétrica por $\Gamma((s+1)/2)$, escrevemos

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\zeta(1-s).$$

Aplicando diretamente a reflexão de Euler (3.0.6) (note que $\Gamma((1-s)/2) = \Gamma(1-(1+s)/2)$) e duplicação de Legendre (3.0.7), obtém-se

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\frac{\sqrt{\pi}}{2^{s-1}}\Gamma(s)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\frac{\pi}{\cos(\pi s/2)}\zeta(1-s),$$

e o resultado segue. Em particular, nenhuma das funções do lado direito da igualdade tem polos em $Re(s) > 1$; além disso, o único polo em $Re(s) = 1$ apresentado por $\zeta(s)$ em $s = 1$ é cancelado pelo zero simples de $\cos(\pi s/2)$. Conclui-se que $\zeta(1-s)$ não tem polos em $Re(s) \geq 1$, isto é, $\zeta(s)$ não tem polos em $Re(s) \leq 0$.

Relembremos o Princípio da Reflexão para funções de uma variável complexa.

Teorema 6.4.5 *Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica em uma região D interseccionada pelo eixo \mathbb{R} , e tal que $f(x) \in \mathbb{R}$, se $x \in \mathbb{R} \cap D$. Então $f(z)$ toma valores conjugados para valores de z .*

$$f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$$

Dem.: A função é igual a sua expansão de Taylor em qualquer ponto interior de D , em particular, um $c \in \mathbb{R} \cap \text{int}(D)$. Todos os coeficientes da expansão podem ser calculados tomando-se caminhos em \mathbb{R} (onde, por hipótese, $f \in \mathbb{R}$), de forma que são reais.

Toda série de potências com coeficientes reais toma valores conjugados para entradas conjugadas, e assim concluímos que o teorema vale para o círculo de convergência da expansão em c . O resultado final segue por continuação, uma vez que séries de potências ao redor de pontos conjugados sempre terão coeficientes conjugados (TITCHMARSH, 1939, p. 155).

Podemos perceber que a função $\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ satisfaz as condições do teorema acima após multiplicarmos-la por $s-1$ em todo o plano \mathbb{C} . Além disso, têm como raízes precisamente as raízes não triviais da função Zeta, uma vez que os polos simples da função Gamma cancelam precisamente os zeros triviais de Zeta.

A equação funcional e o princípio de reflexão nos levam a uma importante conclusão sobre a distribuição das raízes não triviais de Zeta no plano complexo: pela equação funcional, se $\rho \in \mathbb{C}$, $\rho \notin \mathbb{R}$ e $\zeta(\rho) = 0$, certamente $\zeta(1-\rho) = 0$; pelo princípio de reflexão, também há de valer $\zeta(\bar{\rho}) = 0$.

Na reta $Re(s) = 1/2$, estes dois fatos carregam a mesma informação, afinal $1 - 1/2 - bi = 1/2 - bi$. Assim, nesta reta, sabemos que as raízes dão-se em pares conjugados.

Caso hajam raízes não triviais fora desta reta, contrariando a hipótese de Riemann, distribuem-se “retangularmente” em quadras de zeros, simétricos tanto ao eixo real como

à reta $Re(s) = 1/2$. Dessa forma, se houver algum termo $r(x)$ de ordem de grandeza $r(x) \asymp x^c, c \in (1/2, 1)$ no crescimento de $J(x)$ (veja o exemplo 5.2.8), deve haver ainda outro de ordem $r(x) \asymp x^v, v \in (0, 1/2)$, uma vez que as raízes de $\zeta(s)$ são polos de $\ln(\zeta(s))$, gerados pela transformação de Mellin de um termo de ordem de grandeza igual à parte real dos polos em consideração.

Esta simetria da distribuição das raízes ao redor da reta $Re(s) = 1/2$ nos leva a suspeitar que a função $\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ deva assumir valores reais nesta reta. A equação (6.4) nos permite encontrar a forma precisa desta função em $s = 1/2 + it$:

$$\begin{aligned}\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) &= -\frac{1}{1/4 + t^2} + \int_1^\infty (x^{-i\frac{t}{2}} + x^{i\frac{t}{2}})x^{-\frac{3}{4}}\varphi(x)dx \\ &= -\frac{1}{1/4 + t^2} + 2 \int_1^\infty \cos(\ln(x)t/2)x^{-\frac{3}{4}}\varphi(x)dx\end{aligned}$$

afinal $x^{-i\frac{t}{2}} + x^{i\frac{t}{2}} = \cos(t/2 \ln(x)) - i \sin(t/2 \ln(x)) + \cos(t/2 \ln(x)) + i \sin(t/2 \ln(x))$. Esta representação é historicamente relevante e aparece quase nesta forma no artigo de Riemann (1859).

6.4.3 Demonstração do Teorema dos Números Primos

Este teorema, geralmente enunciado como

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x},$$

é na verdade multifacetado: muitas funções aritméticas ligam-se umas às outras intimamente, e é possível por elas expressar equivalentemente este teorema. Como já discutimos, exemplos destas equivalências são $J(x) \sim x/\ln x$; $\psi(x) \sim x$; $\vartheta(x) \sim x$; $M(x) = o(x)$, ou mesmo $\sum_{n \leq x} \mu(n)/n = 0$, que implica na condição anterior.

Apresentamos provas destes resultados através da teoria geral aqui desenvolvida. A essência de todas estas provas reside em três fatos:

i) As transformadas de Mellin com sinal invertido destas funções rende expressões dependentes da função Zeta, como visto extensivamente em 5.2;

ii) Os polos dessa função tem duas origens: o polo da função Zeta e sua raízes. O teorema (6.4.1) nos permite descrever a proximidade da função Zeta à expressão geométrica $1/(s-1)$, de onde compreendemos seu polo. Já sobre as raízes, apelamos à seção 4.2.3, onde mostramos que a função Zeta $\zeta(s)$ não tem qualquer raiz em $Re(s) \geq 1$.

iii) A possibilidade do cancelamento dos respectivos polos em $s = 1$, quando existem, e a obtenção de funções holomorfas em $Re(s) \geq 1$. A aplicação do teorema tauberiano de Newman nos confere a convergência das funções avaliadas em $s = 1$.

Aplicação a $M(x)$

A mais simples das aplicações é deduzir que $M(x) = o(x)$. De fato, a aplicação do teorema de Newman para $1/\zeta(s+1)$, permitida por não haverem raízes com parte

real não negativa para $\zeta(s+1)$, rende imediatamente que $1/\zeta(1)$ converge, cujo valor de convergência é precisamente $\lim_{s \rightarrow 1^+} 1/\zeta(s) = 0$. Em outras palavras, vale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0$$

que implica¹⁷ $M(x) = o(x)$.

Aplicação a $J(x)$

Essencialmente, o teorema deriva do fato de $\ln(\zeta(s))$ ter seu polo de maior parte real em $s = 1$ cujo crescimento pela direita é como o de $\ln(s-1)$. Tenhamos em mente (2.7.1), que fornece uma representação de $\ln(s-1)$ semelhante à transformada de Mellin da integral logarítmica $Li(x)$.

Formalizemos a prova. Pelo teorema (6.4.1) temos que

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} \cdot A(s),$$

sendo $A(s)$ regular para $Re(s) > 0$. Conclui-se que

$$\ln(\zeta(s)) + \ln(s-1) = \ln(A(s)). \quad (6.6)$$

Analisemos (6.6). Por um lado, podemos nos lembrar do exemplo (5.2.8) e teorema (2.7.1) e escrever, para $Re(s) > 1$,

$$\ln(\zeta(s)) + \ln(s-1) = \ln(\zeta(s)) = -L + s \int_1^{\infty} (J(x) - Li(x))x^{-s-1} dx, \quad (6.7)$$

onde L é uma constante ou nula ou muito próxima de zero.

Por outro lado, $A(s)$ é regular para $Re(s) > 0$. Pelo visto na seção 4.2.3 e sua definição poucas linhas acima, também podemos saber que $A(s)$ não tem raízes em $Re(s) \geq 1$. Disto conclui-se que $\ln(A(s))$ é regular para $Re(s) \geq 1$. Por (6.6) e (6.8), podemos compreender que

$$-L + s \int_1^{\infty} (J(x) - Li(x))x^{-s-1} dx = \ln(A(s))$$

permite extensão holomorfa para $Re(s) \geq 1$, precisamente a condição do teorema (6.3.4), a menos de uma translação! A aplicação do teorema nos rende a convergência da integral¹⁸

$$\int_1^{\infty} \frac{J(x) - Li(x)}{x^2} dx < \infty.$$

Estamos quase finalizados: a convergência da integral acima implica necessariamente que $J(x) \sim Li(x)$. O argumento para tanto é o mais delicado dentre os três casos aqui demonstrados e o omitiremos.

¹⁷ Veja 2.6.

¹⁸ Como $A(s) \rightarrow 1$ quando $s \rightarrow 1^+$, de fato o valor para o qual converge é L , próximo de ou igual a zero.

Aplicação a $\psi(x)$

Considerações muito semelhantes às que expomos para $\ln(\zeta(s))$ podem ser feitas para $\zeta'(s)/\zeta(s)$, que expressa a transformação de $\psi(x)$ (veja 5.2.10). Tudo que afirmamos acerca da equação

$$\ln(\zeta(s)) + \ln(s-1) = \ln(A(s))$$

pode ser transportado via derivação para a afirmação de que

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1} = \frac{A'(s)}{A(s)}$$

é uma função holomorfa em $\operatorname{Re}(s) \geq 1$. Como fizemos para $J(x)$, nos aproveitamos das funções à esquerda serem resultado de transformações de Mellin de funções conhecidas

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1} = -1 - s \int_1^\infty (\psi(x) - x)x^{-s-1} dx,$$

e aplicamos o teorema tauberiano para concluir a convergência da integral em $s = 1$, isto é,

$$\int_1^\infty \frac{\psi(x) - x}{x^2} dx < \infty. \quad (6.8)$$

Podemos concluir agora que $\psi(x) \sim x$. Vejamos os argumentos de Korevaar adaptados segundo o raciocínio de Jorge Aarão em Martinez et al (2010, p. 436 e 437).

Afirmação: $\psi(x) \sim x$.

Provemos por contradição. Suponhamos que $\limsup(\psi(x)/x) > 1$. Então podemos considerar $\delta > 0$ e uma seqüência $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $y_n \rightarrow \infty$ tais que $0 < 2\delta < \limsup(\psi(x)/x) - 1$ e $\psi(y_n) > (1 + 2\delta)y_n$, $\forall n$.

Como $\psi(x)$ é não decrescente, podemos escrever para $y_n < x < \lambda y_n$, $\lambda > 1$ que

$$\psi(x) \geq \psi(y_n) > (1 + 2\delta)y_n > (1 + 2\delta)\frac{x}{\lambda}.$$

Em particular, tomando-se $\lambda = (1 + 2\delta)/(1 + \delta) > 1$, obtém-se

$$\psi(x) > (1 + \delta)x$$

e portanto

$$\frac{\psi(x) - x}{x} > \delta.$$

Disso concluímos que

$$\int_{y_n}^{\lambda y_n} \frac{\psi(x) - x}{x^2} dx > \int_{y_n}^{\lambda y_n} \frac{\delta}{x} dx = \delta \ln(\lambda),$$

que independe de n . Agora basta aplicarmos a desigualdade triangular para obter que

$$\delta \ln(\lambda) < \left| \int_{y_n}^{\lambda y_n} \frac{\psi(x) - x}{x^2} dx \right| \leq \left| \int_{y_n}^{\infty} \frac{\psi(x) - x}{x^2} dx \right| + \left| \int_{\lambda y_n}^{\infty} \frac{\psi(x) - x}{x^2} dx \right|.$$

Como sabemos da convergência de (6.8), as integrais à direita acima podem ser feitas arbitrariamente pequenas, à medida que aumenta n (e conseqüentemente y_n). Em particular, n pode ser tomado tal que cada uma some uma quantidade $\epsilon < \delta \ln(\lambda)/2$, contrariando o fato de que somadas superam $\delta \ln(\lambda)$.

O argumento para \liminf é totalmente análogo; em resumo: $\psi(x) \sim x$ é verdadeiro!

7 A REPRESENTAÇÃO DE FUNÇÕES COM RAÍZES EXPLÍCITAS

O Teorema Fundamental da Álgebra nos garante que qualquer polinômio em \mathbb{C} de grau n tem exatamente n raízes complexas, não necessariamente distintas¹. Podemos escrevê-lo como um produto de fatores lineares nos quais as raízes se apresentam explícitas, para $c_n \neq 0$, usualmente na forma:

$$p(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k = c_n \prod_{k=1}^n (x - \gamma_k),$$

onde $p(\gamma_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$. Tal representação é útil por diversas razões; aqui nos servirá como primeira motivação para o estudo da teoria da representação de funções com raízes explícitas², através de trabalhos como o de Weierstrass e Hadamard, a fim de nos prepararmos para o capítulo 8 e atingirmos as fórmulas explícitas da teoria dos números. Prossigamos a motivação com duas representações equivalentes da função Gamma³, por Euler e Weierstrass, respectivamente.

7.1 ALGUNS EXEMPLOS CONSTRUTÍVEIS

Para encontrar o produtório de Euler para a função Gamma⁴, notemos primeiramente que, para $m \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n!(n+1)^m}{(n+m)!} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)(n+1)\dots(n+1)}{(n+1)(n+2)\dots(n+m)} \right) = 1.$$

Multiplicando ambos os lados por $m!$, obtemos

$$\begin{aligned} m! &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m!n!(n+1)^m}{(n+m)!} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n!(n+1)^m}{(1+m)(2+m)\dots(n+m)} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)^m}{(1+m)(1+\frac{m}{2})\dots(1+\frac{m}{n})} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(1+\frac{1}{1})^m(1+\frac{1}{2})^m\dots(1+\frac{1}{n})^m}{(1+m)(1+\frac{m}{2})\dots(1+\frac{m}{n})} \right) \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1+\frac{1}{k})^m}{1+\frac{m}{k}} \end{aligned}$$

¹ Apesar de tal teorema não ser válido para \mathbb{R} , podemos afirmar que qualquer polinômio de coeficientes reais pode ser escrito como um produto de fatores lineares ou quadráticos. Tal constatação pode ser deduzida ao combinarmos o Teorema Fundamental da Álgebra com o fato de que as raízes complexas destes polinômios vêm em pares conjugados.

² O estudo é naturalmente generalizável para polos e misturas quaisquer. Para os fins deste trabalho, nos ateremos aos resultados clássicos sobre raízes.

³ De fato, $\Gamma(s)$ não apresenta raízes complexas. No entanto, ao apresentar polos, a inversa $\frac{1}{\Gamma(s)}$ apresenta zeros, equivalentemente.

⁴ A rigor o produtório original de Euler era um pouco distinto. Apresentamo-lo, porém, em sua versão mais difundida.

Podemos considerar uma extensão do fatorial para todo $s \in \mathbb{C}$ distinto dos inteiros negativos, onde apresenta polos explícitos:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1 + \frac{1}{k})^s}{1 + \frac{s}{k}}. \quad (7.1)$$

Para mostrar que este produto é equivalente à integral de Euler de segundo tipo $\Gamma(s+1)$ (def. 3.0.1) onde esta converge, podemos utilizar a representação de Weierstrass que apresentaremos em seguida, uma vez que sabemos que esta certamente converge para $\Gamma(s)$.⁵

A representação de Weierstrass segue outra via. Ao nos recordamos do teorema (3.0.4), podemos averiguar que

$$\Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^s}{s} \prod_{k=1}^n \frac{k}{s+k} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{\ln(s)}}{s} \prod_{k=1}^n \frac{k}{s+k} \right).$$

Weierstrass aproveitou-se do fato de que $H_n - \ln(n) \rightarrow \gamma$ para fazer

$$\begin{aligned} \Gamma(s) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{s \ln(n) - s H_n + s H_n}}{s} \prod_{k=1}^n \frac{k}{s+k} \right) \\ &= \frac{e^{-\gamma s}}{s} \prod_{k=1}^{\infty} e^{\frac{s}{k}} \frac{k}{s+k} = \frac{e^{-\gamma s}}{s} \prod_{k=1}^{\infty} e^{\frac{s}{k}} \frac{1}{1 + \frac{s}{k}}, \end{aligned} \quad (7.2)$$

encontrando assim outra forma válida para representar⁶ $\Gamma(s)$ com polos explícitos nos inteiros negativos, cujo formato encontra-se apropriadamente inserido no contexto de sua teoria de representação de funções analíticas, que veremos abaixo com brevidade.

Vejamos agora como encontrar **a representação da função seno** com raízes explícitas. O caminho será mais indireto que para a função Gamma⁷. De fato, calcularemos a série de Fourier em x para $\cos(rx)$ no intervalo⁸ $(-\pi, \pi]$ estendida 2π periodicamente à toda reta

⁵ Ao retirarmos os logaritmos de ambos os produtos e os expressarmos como séries de potências, a igualdade segue da constatação de que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \zeta(n)}{n} = \sum_{k=1}^{\infty} (1/k - \ln(1 + 1/k)) = \lim_{n \rightarrow \infty} [H_n - \ln(n)] = \gamma,$$

obtida representando $\zeta(n)$ pela sua série de Dirichlet, comutando a ordem da soma e utilizando a expansão de Laurent para $\ln(1 + 1/x)$.

⁶ Mantivemos a escrita da equação nesta forma por motivos históricos; notemos que poderíamos por simplicidade se valer de $s\Gamma(s) = \Gamma(s+1)$.

⁷ O autor tomou conhecimento do seguinte método, o qual adaptou e generalizou, pela resposta do usuário "Norbert" à pergunta feita no endereço eletrônico <https://math.stackexchange.com/questions/157372/proving-frac-sin-xx-left1-fracx2-pi2-right-left1-fracx22>.

⁸ Note que a função $\cos(rx)$ é $2\pi/r$ periódica, e não 2π periódica.

para dela encontrarmos uma representação de $\cot(r)$ à la Mittag Leffler, que mostraremos ser equivalente à desejada representação da função seno.⁹

Seja $g(x) = \cos(rx)$ em $(-\pi, \pi]$, estendida 2π periodicamente à toda reta. Como $g(x)$ é uma função par, seus coeficientes de Fourier podem ser calculados como (FIGUEIREDO, 1977, p. 24)

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(rx) dx = \frac{2 \sin(\pi r)}{\pi r}$$

e, onde assumimos $r \notin \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(rx) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos((r+n)x) + \cos((r-n)x)}{2} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(\pi(r+n))}{r+n} + \frac{\sin(\pi(r-n))}{r-n} \right) = \frac{2r \sin(\pi r) \cos(\pi n) - n \sin(\pi n) \cos(\pi r)}{\pi (r^2 - n^2)} \\ &= \frac{2r \sin(\pi r)}{\pi} \frac{(-1)^n}{r^2 - n^2}, \end{aligned}$$

pois $\sin(\pi n) = 0$ e $\cos(\pi n) = (-1)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Concluimos que sua série de Fourier é dada por

$$g(x) = \frac{\sin(\pi r)}{\pi r} + \frac{2r \sin(\pi r)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{r^2 - n^2} \cos(nx),$$

com convergência uniforme (FIGUEIREDO, 1977, p. 69). Sendo $g(x)$ contínua até mesmo nos pontos $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pois $\cos(rx)$ é par, podemos fazer $x = \pi$ e multiplicar ambos os lados por $\pi / \sin(\pi r)$ para obter

$$\pi \cot(\pi r) - \frac{1}{r} = 2r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^2 - n^2} \quad (7.3)$$

Notemos que a cotangente pode ser compreendida como o resultado de uma diferenciação logarítmica de seno, assim como presenciamos no capítulo 4 ao encontrarmos os $\zeta(2n)$. Portanto nos seria útil integrarmos a série acima termo a termo; para tanto, devemos provar que dá-se uma convergência uniforme.

Seja $t \in \mathbb{R}$. Se $r \in (-|t|, |t|)$ temos $|(n^2 - r^2)^{-1}| \leq (n^2 - t^2)^{-1}$ para $n \geq |t|$. Como a série $\sum_{n \geq |t|} 1/(n^2 - t^2)$ converge pelo teste da integral, pelo teste M de Weierstrass a série em (7.3) converge uniformemente para $r \in (-|t|, |t|)$.

Podemos assim integrar (7.3) em r de 0 a t termo a termo a fim de obter¹⁰

⁹ Mantivemos a obtenção dos valores precisos de $\zeta(2n)$, $n \in \mathbb{N}$ a partir de $\sin(x)$ no capítulo 4 por motivos históricos, onde de qualquer forma tivemos que retornar a $\cot(x)$. É possível encontrar a representação de $\sin(x)$ por outros métodos, sem ter de primeiramente calcular esta forma de $\cot(x)$. Os métodos para tanto, porém, dependem de teorias menos conhecidas que a de Fourier, a qual assumimos ter o leitor alguma familiaridade, e acabariam por requerer seções especialmente dedicadas, cujo espaço não dispomos.

¹⁰ O leitor atento pode perceber que a expressão inclui valores negativos dentro de \ln para os $n < |t|$, nos levando à apelar ao logaritmo complexo. Relevaremos este fato aqui por comodidade, uma vez que tomaremos em seguida a exponencial. Ainda que o argumento imaginário presente na avaliação de $\ln(z)$ não seja principal, a exponencial torna isto irrelevante (TITCHMARSH, 1939, p. 16-17).

$$\ln \left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{t^2}{n^2} \right), \quad t \in \mathbb{R},$$

de onde, tomando a exponencial e substituindo $x = \pi t$, tem-se

$$\sin(x) = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2} \right) \quad x \in \mathbb{R}.$$

Nesta integração pudemos ignorar o fato de que exigimos inicialmente $r \notin \mathbb{Z}$, pois sua medida é nula. Para observarmos a validade da expressão para todo $s \in \mathbb{C}$, bastaria mostrar a convergência do produto em todo \mathbb{C} , pois as expressões de ambos os lados são holomórficas, e portanto a igualdade permanece para suas continuações analíticas; em outras palavras, a expressão acima já nos basta para igualar os coeficientes das duas séries de potências relacionadas.

7.2 TEOREMA DA FATORAÇÃO DE WEIERSTRASS

Este teorema é, basicamente, um constatação de que se $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é inteira e tem raízes ρ , com a raiz em $z = 0$ tendo multiplicidade m , a função

$$k(z) = \frac{f(z)}{z^m \prod_{\rho} \left(1 - \frac{z}{\rho} \right)}$$

é também inteira e não tem raízes complexas, uma vez que os fatores $(1 - z/\rho)$ são construídos a fim de que zerem em ρ e cancelem com as raízes de f . Originalmente Weierstrass escreveu $k(z) = e^{h(z)}$, onde $h(z)$ é inteira.

Em geral, a expressão acima pode não fazer sentido, uma vez que a convergência do produto não está garantida para uma seqüência qualquer de raízes. Para tanto, Weierstrass acrescentou fatores que compensassem o crescimento advindo dos $(1 - z/\rho)$, os fatores elementares E_n :

$$E_n(z) = \begin{cases} (1 - z), & \text{se } n=0; \\ (1 - z) \exp(z + z^2/2 + \dots + z^n/n), & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

Qualquer outra mudança ocasionada pela introdução destes fatores poderia ser compensada na função $k(z)$. Isso o permitiu escrever seu teorema de existência (CONWAY, 1978, p. 170):

Teorema 7.2.1 (Teorema da Fatoração de Weierstrass) *Seja f uma função inteira com uma raiz em $z = 0$ de ordem $m \geq 0$ e raízes não nulas ρ_n . Então existem uma função inteira h e números naturais v_n tais que*

$$f(z) = z^m e^{h(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{v_n} \left(\frac{z}{\rho_n} \right).$$

Se $\|\rho_n\| \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, então os números v_n podem ser tão pequenos quanto a condição

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\|\rho_n\|} \right)^{v_n+1} < \infty, \quad \forall r > 0$$

permitir (CONWAY, 1978, p. 169).

7.3 DA REPRESENTAÇÃO DE FUNÇÕES INTEGRAIS DE ORDEM FINITA

O teorema de Weierstrass pode ser refinado a fim de obtermos uma forma muito mais precisa da função $h(z)$. Estudemos alguns resultados sobre funções integrais de ordem finita a fim de alcançarmos esse refinamento através do Teorema da Fatoração de Hadamard.

Definição 7.3.1 *Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Se uma função meromórfica $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ com uma quantidade finita de polos¹¹ é tal que $f(z) = O(e^{\|z\|^\beta})$, $\forall \beta > \alpha$, quando $\|z\| \rightarrow \infty$, então a chamamos de “função integral de ordem finita”, e sua ordem é $\inf(\alpha)$, para os α que satisfazem a condição acima.*

(PATTERSON, 1988, p. 139).

Vejamos a seguir um importante teorema sobre a representação de funções de ordem finita sem polos ou zeros, cuja demonstração apresentada é baseada na encontrada em Patterson¹² (1988, p. 141).

Teorema 7.3.1 *Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ inteira sem zeros, e tal que $f(z) = O(e^{\|z\|^\beta})$, $\forall \beta > \alpha$, ou seja, finita de ordem menor ou igual a α . Então existe um polinômio $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de coeficientes complexos, de grau menor ou igual a α , tal que $f = e^g$.*

Dem.: Seja $g = \ln(f)$. Como f não tem zeros e $g' = \frac{f'}{f}$ está bem definida em todo \mathbb{C} , g está definida e é holomórfica em todo \mathbb{C} . Temos que¹³

$$\operatorname{Re}(g(z)) = \ln \|f(z)\| = O(\|z\|^\beta), \quad (7.4)$$

¹¹ Usualmente não se permitem polos para esta definição. Segundo Patterson, porém, a inclusão destes não altera os resultados propostos e é útil para a Teoria dos Números.

¹² Há várias maneiras de se provar o teorema. Utilizando a limitação de $\operatorname{Re}(g)$, Dupuy (s/d, p. 5), da Universidade de Vermont, o prova pelo teorema de Borel-Caratheodory.

¹³ A afirmação $f(z) = O(e^{\|z\|^\beta})$ implica $\ln \|f(z)\| = O(\|z\|^\beta)$ não é evidente, uma vez que aparentemente pode falhar devido à aproximações muito rápidas de 0 por parte de f , onde $\ln \|f(z)\|$ pode tornar-se muito grande, em vista da singularidade de $\ln x$ em $x = 0$. Primeiramente considerando um erro crônico das referências, o autor reconsiderou e suspeita que a analiticidade de f é a chave para obter o resultado, ou seja, um decaimento grande de $f(z)$ para alguma seqüência α_n , $\|\alpha_n\| \rightarrow \infty$, ocasionaria um crescimento muito grande em outra, para uma função inteira. A prova do teorema que Conway apresenta (1978, p. 289-290) através da anulação da derivada de g de ordem superior à ordem de f não apresenta esta falha, mas exige uma análise muito mais aprofundada por meio de lemas anteriores.

quando $\|z\| \rightarrow \infty$ e $\beta > \alpha$, afinal $f(z) = O(e^{\|z\|^\beta})$.

Como g é holomórfica, é analítica, e podemos escrever

$$g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (a_m + ib_m)z^m. \quad (7.5)$$

Disso conclui-se que

$$g(re^{it}) = \sum_{m=0}^{\infty} (a_m \cos(mt) - b_m \sin(mt))r^m + i \sum_{m=0}^{\infty} (a_m \sin(mt) + b_m \cos(mt))r^m$$

Analisemos agora $g(re^{it})$ no espírito da análise de Fourier com intuito de demonstrar que g é um polinômio.

i) (Prova a anulação dos a_m para $m > \beta$)

Ao considerarmos

$$\operatorname{Re}(g(re^{it})) = \sum_{m=0}^{\infty} (a_m \cos(mt) - b_m \sin(mt))r^m, \quad (7.6)$$

podemos multiplicar ambos os lados por $\cos(kt)$, $k \in \mathbb{N}$ e integrar sobre $(0, 2\pi)$:

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(g(re^{it})) \cos(kt) dt = \int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (a_m \cos(mt) - b_m \sin(mt))r^m \cos(kt) dt.$$

Notemos que o lado esquerdo é limitado por $O(r^\beta)$, devido a (7.4) e $|\cos(kt)| \leq 1$. Já o lado direito é

$$\int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (a_m \cos(mt) - b_m \sin(mt))r^m \cos(kt) dt = \pi a_k r^k$$

devido às relações de ortogonalidade para seno e cosseno (FIGUEIREDO, 1977, p. 17). Daí resulta que

$$\pi a_k r^k = O(r^\beta), \text{ e}$$

$$\|a_k\| \leq c_1 r^{\beta-k}$$

para alguma constante c_1 e para r suficientemente grande. Fazendo $r \rightarrow \infty$ conclui-se que se $k > \beta$, forçosamente $\|a_k\| = 0$.

ii) (Prova a anulação dos b_m para $m > \beta$)

Basta que multipliquemos ambos os lados de por $\sin(kt)$, $k \in \mathbb{N}$ e integrar sobre $(0, 2\pi)$:

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(g(re^{it})) \sin(kt) dt = \int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (a_m \cos(mt) - b_m \sin(mt)) r^m \sin(kt) dt.$$

O lado esquerdo permanece limitado superiormente por $O(r^\beta)$. O lado direito agora será

$$\int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (a_m \cos(mt) - b_m \sin(mt)) r^m \sin(kt) dt = -\pi b_k r^k$$

Concluimos que

$$-\pi b_k r^k = O(r^\beta), \text{ e}$$

$$\|b_k\| \leq c_2 r^{\beta-k}$$

para alguma constante c_2 e para r suficientemente grande. Conclui-se que se $k > \beta$, $\|b_k\| = 0$.

Finalmente, obtém-se que os coeficientes da série de potências de g (7.5) são todos nulos para $m > \beta$, e assim g é um polinômio de grau menor ou igual a β , $\forall \beta > \alpha$, ou seja, g é um polinômio de grau menor ou igual a α .

Nos asseguramos que toda função integral de ordem finita analítica e sem raízes é a exponencial de um polinômio em \mathbb{C} . Antes de chegarmos ao Teorema de Representação de Hadamard, devemos ainda apresentar sem provas¹⁴ o Teorema de Jensen (PATTERSON, 1988, p. 138), que relaciona o crescimento da norma das raízes de f e o supremo dos valores atingidos por f num círculo de raio r (CONWAY, 1978, p. 280).

Teorema 7.3.2 (Teorema de Jensen) *Seja $r > 0$ e seja f uma função analítica na vizinhança de $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$. Suponhamos¹⁵ que $f(0) \neq 0$ e que f não tenha zeros em $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$. Então:*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{it})| dt = \ln(f(0)) + \sum_{\gamma: f(\gamma)=0} \operatorname{ord}_\gamma(f) \ln \left(\frac{r}{|\gamma|} \right),$$

onde $\operatorname{ord}_\gamma(f)$ é a ordem da raiz γ de f .

¹⁴ Quem desejar compreender a prova, pode buscar a referência citada. Em Dupuy (s/d, p. 5) vemos a prova de uma desigualdade semelhante. Há também bastante material disponibilizado pelas universidades na internet.

¹⁵ Patterson e Conway afirmam que também há uma versão válida para $f(0) = 0$.

Corolário 7.3.1 *i) Seja f integral de ordem α . Para qualquer $\beta > \alpha$ temos*

$$\sum_{\gamma: f(\gamma)=0, \infty; |\gamma| \leq r} \text{ord}_{\gamma}(f) = O(r^{\beta}).$$

ii) Para qualquer $\beta > \alpha$ a série

$$\sum_{\gamma: f(\gamma)=0} \frac{\text{ord}_{\gamma}(f)}{|\gamma|^{\beta}}$$

é convergente.

(PATTERSON, 1988, p.140)

Estas limitações são importantes para se obter resultados rigorosos ao manipularmos as expressões naturalmente emergentes da fatoração de Weierstrass, ao dela retirarmos o logaritmo, derivarmos, etc. A mais geral fórmula de Poisson-Jensen é crucial para a demonstração de Conway (1978, p. 287-288) de uma lema que nos leva a concluir que a função $g(z)$ é um polinômio, ou, mais precisamente que toda função inteira de ordem finita é de gênero finito. Vejamos agora o Teorema da Fatoração de Hadamard, tal como em Patterson (1988, p. 141).

Teorema 7.3.3 (Teorema da Fatoração de Hadamard) *Seja f uma função integral de ordem finita α . Seja $m = \lfloor \alpha \rfloor$ e seja $g_{\rho}(z) = z/\rho + 2^{-1}(z/\rho)^2 + \dots + m^{-1}(z/\rho)^m$. Então existe um polinômio G cuja ordem é menor ou igual a m tal que*

$$f(z) = z^{\text{ord}_0(f)} e^{G(z)} \prod_{\substack{\rho: f(\rho)=0 \\ \rho \neq 0}} \left(\left(1 - \frac{z}{\rho} \right) e^{g_{\rho}(z)} \right)^{\text{ord}_{\rho}(f)},$$

onde o produto é absolutamente convergente.

Isso coroa nossa introdução ao tema e nos habilita a aplicar a teoria à função Zeta.

7.4 A REPRESENTAÇÃO DA FUNÇÃO ZETA

Apliquemos a teoria desenvolvida neste capítulo para encontrar uma representação da função Zeta.

Lema 7.4.0.1 *A função*

$$s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

é integral de ordem 1.

Dem.: Considerando que a função não tem polos, basta efetuarmos algumas majorações e aplicarmos a fórmula de Stirling (3.0.1). Como vimos na demonstração de (6.4.2), vale

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) - \frac{1}{s(s-1)} = \int_1^{\infty} (x^{\frac{1-s}{2}-1} + x^{\frac{s}{2}-1}) \varphi(x) dx, \quad (7.7)$$

para todo $s \in \mathbb{C}$, de forma que

$$\begin{aligned} \left| \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) - \frac{1}{s(s-1)} \right| &= \left| \int_1^{\infty} (x^{\frac{1-s}{2}-1} + x^{\frac{s}{2}-1}) \varphi(x) dx \right| \\ &\leq \int_1^{\infty} \|x^{\frac{1-s}{2}-1} + x^{\frac{s}{2}-1}\| |\varphi(x)| dx \\ &\leq \int_1^{\infty} (\|x^{\frac{1-s}{2}-1}\| + \|x^{\frac{s}{2}-1}\|) |\varphi(x)| dx \\ &= \int_1^{\infty} (x^{\frac{1-\operatorname{Re}(s)}{2}-1} + x^{\frac{\operatorname{Re}(s)}{2}-1}) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Como $x^{(1-\operatorname{Re}(s))/2-1} + x^{\operatorname{Re}(s)/2-1} = O(x^\gamma)$, onde $\gamma = \max((1-\operatorname{Re}(s))/2-1, \operatorname{Re}(s)/2-1)$, e, para $1 \leq x \leq \infty$ temos

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n x} = \frac{e^{-\pi x}}{1 - e^{-\pi x}} = O(e^{-x}),$$

concluimos que

$$\left| \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) - \frac{1}{s(s-1)} \right| = O\left(\int_1^{\infty} x^\gamma e^{-x} dx\right) = O(\Gamma(\gamma+1)).$$

Pela fórmula de Stirling (3.0.1), a majoração toma a forma mais precisa

$$\begin{aligned} \left| \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) - \frac{1}{s(s-1)} \right| &= O\left(\frac{\sqrt{2\pi\gamma} \cdot \gamma^\gamma}{e^\gamma} \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)\right) = O(e^{\ln(\gamma)(\gamma+1/2)-\gamma}) \\ &= O(e^{\gamma^{1+\epsilon}}) = O(e^{|s|^{1+\epsilon}}), \end{aligned}$$

Concluimos assim que a função expressa em (7.7) é de ordem 1. A diferença entre esta função e a expressa no lema é apenas a de multiplicação pelo polinômio $s(s-1)$, cujo crescimento é subexponencial, e o resultado segue.

Teorema 7.4.1 *Sejam ρ^+ as raízes não triviais de $\zeta(s)$ tais que $\operatorname{Im}(\rho) > 0$, ordenadas crescentemente¹⁶ pela magnitude da parte imaginária¹⁷. Então*

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{2(s-1)\Gamma(s/2+1)} \prod_{\rho^+} \left[\left(1 - \frac{s}{\rho^+}\right) \left(1 - \frac{s}{1-\rho^+}\right) \right],$$

¹⁶ Esta ordem deve ser respeitada, uma vez que o produto pode convergir para outro valor ou mesmo divergir noutra ordem. Alternativamente, pode-se ordenar pelo módulo.

¹⁷ Dentre estas, caso hajam raízes cuja parte imaginária tenha o mesmo valor, contrariando a hipótese de Riemann, podemos simplesmente ordená-las crescentemente pela parte real.

onde o produtório é absolutamente convergente para todo $s \in \mathbb{C}$ (PATTERSON, 1988, p. 34).

Dem.: A teoria desenvolvida, juntamente com o conhecimento da ordem dada em (7.4.0.1), nos permite concluir que existem $A, B \in \mathbb{C}$ tal que

$$s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = Ae^{Bs} \prod_{\rho} \left(\left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}} \right),$$

onde os ρ são os zeros da função do lado esquerdo, ou seja, os zeros não triviais de $\zeta(s)$.

Podemos determinar A fazendo $s = 0$, uma vez que o lado direito torna-se A e o esquerdo, sabendo que $\zeta(0) = -1/2$ e $s\Gamma(s/2) = 2\Gamma(s/2 + 1)$, torna-se 1:

$$A = 1.$$

Para B , podemos agora aplicar a equação funcional e concluir que

$$e^{Bs} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}} = e^{B(1-s)} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{1-s}{1-\rho}\right) e^{\frac{1-s}{1-\rho}}$$

onde nos permitimos escrever $1 - \rho$ do lado direito, uma vez que, igualmente pela equação funcional, os $1 - \rho$ também caracterizam os zeros da função (PATTERSON, 1988, p. 33).

Isso nos rende a equação

$$e^{B(2s-1)} = \prod_{\rho} \frac{\rho}{1-\rho} e^{-1/(1-\rho)} e^{-s/\rho(1-\rho)},$$

que, ao tirarmos o logaritmo, nos rende¹⁸

$$B = -\frac{1}{2} \sum_{\rho} \frac{1}{\rho(1-\rho)}. \quad (7.8)$$

Como, ao mesmo tempo, podemos expressar

$$e^{Bs} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}} = e^{Bs} \prod_{\rho^+} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) \left(1 - \frac{s}{1-\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho(1-\rho)}},$$

tomando os termos referentes a ρ e $1 - \rho$ conjuntamente, e assim, em vista de (7.8), chegamos a

¹⁸ O autor teve dificuldade de obter este resultado de Patterson, mas opta por manter o resultado como na forma original. Também é possível encontrar uma expressão alternativa para B derivando logaritmicamente o produto que inicialmente pusemos para $\zeta(s)$ e tendendo $s \rightarrow 0$. O processo rende $B = \zeta'(s)/\zeta(s) - 1 - 1/2\Gamma'(1)/\Gamma(1) = \ln(2\pi) - 1 - \gamma/2$ (TITCHMARSH, 1986, p. 31).

$$s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \prod_{\rho^+} \left(1 - \frac{s}{\rho^+}\right) \left(1 - \frac{s}{1-\rho^+}\right),$$

de onde a equação anunciada segue, recordando que $s\Gamma(s) = \Gamma(s+1)$.

Uma vez que a convergência absoluta de um produto $\prod(1+a_n)$ requer apenas a convergência absoluta da série $\sum a_n$ (TITCHMARSH, 1939, p. 15), para mostrar a convergência absoluta do produto em ρ é suficiente mostrar que $\sum_{\rho^+} 1/\rho(1-\rho)$ converge absolutamente (EDWARDS, 1974, p. 21). Para tanto, é necessário saber a densidade dos zeros na faixa crítica em função da magnitude da parte imaginária, que não abordamos neste trabalho. O estudo desta densidade rendeu o resultado sagrado como a fórmula de Riemann-von Mangoldt.

8 FÓRMULAS EXPLÍCITAS DA TEORIA DOS NÚMEROS

Veremos aqui os resultados concernentes às representações de funções aritméticas através da função Zeta e seus zeros, apresentando um esboço das demonstrações. A principal referência para o leitor interessado aprofundar-se é certamente Edwards (1974). Através destas fórmulas explícitas, podemos compreender como as raízes e polo da função Zeta codificam informações absolutamente precisas sobre estruturas finas dos números naturais: cada fórmula traduz este código em um discurso completo sobre as funções das quais tratam.

8.1 A FUNÇÃO $J(x)$

A função $J(x)$, conhecida como função de contagem de primos de Riemann, foi encontrada primeiramente no exemplo 5.2.8 da secção 5.2, capítulo 5, definida como

$$J(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(x^{1/n})}{n},$$

a função que conta as enésimas potências de primos abaixo de x com peso $1/n$. Sua transformação de Mellin, tal como encontramos, nos rende o logaritmo da função Zeta:

$$\ln(\zeta(s)) = s \int_1^{\infty} J(x)x^{-s-1}dx.$$

Ao invertemos a transformada de Mellin, como vimos em 2.3 e na fórmula de Perron (5.1.5), obtemos

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\ln(\zeta(s))}{s} x^s ds,$$

sendo $J_0(x) = J(x)$ para todo x onde $J(x)$ for contínua, e igual à média dos limites laterais de $J(x)$ onde esta for descontínua.

Como visto no teorema (7.4.1), vale

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{2(s-1)\Gamma(s/2+1)} \prod_{\rho^+} \left[\left(1 - \frac{s}{\rho^+}\right) \left(1 - \frac{s}{1-\rho^+}\right) \right],$$

de onde

$$\begin{aligned} \ln(\zeta(s)) &= -\ln(2) + \frac{s}{2} \ln(\pi) - \ln(s-1) - \ln(\Gamma(s/2+1)) \\ &\quad + \sum_{\rho^+} \left(\ln \left(1 - \frac{s}{\rho^+}\right) + \ln \left(1 - \frac{s}{1-\rho^+}\right) \right). \end{aligned}$$

A integração termo a termo dos objetos acima obtidos, quando substituídos na expressão para $J_0(x)$, não convergem separadamente. Para lidar com este problema, Riemann primeiramente realizou uma integral por partes, concluindo¹ que

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\ln(x)} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d \ln(\zeta(s))}{ds} x^s ds.$$

Riemann (1859, p. 6) argumenta que, ao substituirmos a expressão para $\ln(\zeta(s))$ na integral acima, excetuando o termo constante $-\ln(2)$, todos os termos tomam a forma da integral

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\ln(x)} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d \ln(1 - s/\beta)}{ds} x^s ds,$$

para valores $\beta \in \mathbb{C}$, e que todas as integrais dessa forma devem forçosamente valer

$$\int_{\infty}^x \frac{x^{\beta-1}}{\ln x} dx,$$

se $Re(\beta) < 0$, e

$$\int_0^x \frac{x^{\beta-1}}{\ln x} dx = Li(x^\beta),$$

se $Re(\beta) > 0$, onde $Li(x)$ é a famosa integral logarítmica.

A integração da função $\Gamma(s/2 + 1)$ é que rende os β de parte real negativa, uma vez que seus polos encontram-se nos negativos pares, e nos rendem a expressão

$$\int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2 - 1) \ln t},$$

que é extremamente pequena e decresce mais que quadraticamente para 0.

Já as expressões para $\ln(s - 1)$ e dependentes das raízes da Zeta nos rendem

$$Li(x) \sim - \sum_{\rho^+} Li(x^{\rho^+}) + Li(x^{1-\rho^+}).$$

Por último, a integral do termo constante rende o próprio termo inalterado. Em suma, obtém-se a fórmula explícita para $J_0(x)$ (EDWARDS, 1974, p. 48):

$$J_0(x) = Li(x) - \sum_{\rho^+} [Li(x^{\rho^+}) + Li(x^{1-\rho^+})] + \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2 - 1) \ln t} - \ln 2.$$

Não havendo raiz de $\zeta(s)$ cuja parte real é 1, pode-se mostrar que o termo $Li(x)$ domina, proporcionalmente, a expressão à direita, o que nos permite mais uma vez concluir o Teorema dos Números Primos, uma vez que² $Li(x) \sim x/\ln(x)$ e $J(x) \sim \pi(x)$.

¹ O artigo original de Riemann consiste mais em uma exposição dos resultados de suas pesquisas do que um trabalho onde o rigor demonstrativo é posto à prova. Seus comentários sobre este processo de integração pouco ultrapassam uma página e meia. Para realizar esta integração, no entanto, levaríamos facilmente dez páginas.

² Para demonstrar esta assintótica, basta integral $Li(x)$ por partes uma única vez.

8.1.1 A função $\pi(x)$

A fórmula explícita para a quantidade de primos é mais complicada, mas facilmente obtida após sabermos a de $J(x)$. Aplicando o teorema (2.4.4) para

$$J(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(x^{1/n})}{n},$$

chega-se a

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} J(x^{1/n}),$$

e portanto

$$\begin{aligned} \pi_0(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} Li(x^{1/n}) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \sum_{\rho^+} \left[Li(x^{\rho^+/n}) + Li(x^{(1-\rho^+)/n}) \right] \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \int_{x^{1/n}}^{\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)\ln t}, \end{aligned}$$

cujo termo dominante é $R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} Li(x^{1/n})$, a chamada função de Riemann, idêntica à série de Gram³ (RIBENBOIM, 2014, p. 160)

$$R(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi\zeta(n+1)} \cdot \frac{\ln(x)^n}{n!}.$$

8.2 A FUNÇÃO $\psi(x)$

A função $\psi(x)$, a segunda função de Tchebycheff,

$$\psi(x) = \sum_{p \leq x} \ln(p)$$

é mais simples de se trabalhar do que $\pi(x)$ ou mesmo $J(x)$, e foi através dela que von Mangoldt obteve o primeiro exemplo de fórmula explícita cujo rigor foi consensualmente aceito⁴.

Como vimos em 5.2.10, vale

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s \int_1^{\infty} \psi(x) x^{-s-1} dx,$$

³ $R(x)$ e uma variação da série de Gram constavam nas cartas de Ramanujan à Hardy (HARDY, 1940, p. 24-25).

⁴ Através desta fórmula von Mangoldt também chegou à primeira prova aceita da expressão explícita para $J(x)$, através da relação de medidas $d\psi(x) = \ln(x)dJ(x)$, no sentido de Stieltjes.

o que nos rende, ao invertemos a transformação de Mellin,

$$\psi_0(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} -\frac{\zeta'(s)}{s \cdot \zeta(s)} x^s ds,$$

onde, conforme já convencionamos para $J_0(x)$, $\psi_0(x) = \psi(x)$ a menos dos pontos de descontinuidade da última, onde $\psi_0(x)$ vale a média de seus limites laterais.

Ao derivarmos logaritmicamente o produto com raízes explícitas de $\zeta(s)$, obtemos

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{1}{2} \ln(\pi) - \frac{1}{s-1} - \frac{\Gamma'(s/2+1)}{2\Gamma(s/2+1)} - \sum_{\rho^+} \left(\frac{1}{\rho^+ - s} + \frac{1}{1 - \rho^+ - s} \right).$$

Fazendo $s = 0$, retirando a diferença com a igualdade acima e utilizando a representação de Gamma com raízes explícitas (ver 7.1), chega-se a

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{s}{s-1} - \sum_{\rho^+} \left[\frac{s}{\rho^+(s-\rho^+)} + \frac{s}{(1-\rho^+)(s-(1-\rho^+))} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s}{2n(s+2n)} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)},$$

com $\zeta'(0)/\zeta(0) = \ln(2\pi)$.

A substituição desta expressão na integral para $\psi_0(x)$ rende, para o termo geométrico $1/s - 1$, uma contribuição linear x ; para o somatório em n , acaba por gerar um termo da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n}}{2n} = -\frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{1}{x^2} \right);$$

as expressões dependentes das raízes da função Zeta, por sua vez, rendem um somatório da forma

$$-\sum_{\rho^+} \frac{x^{\rho^+}}{\rho^+} + \frac{x^{1-\rho^+}}{1-\rho^+};$$

o termo constante, novamente, passa ileso pela integração.

Finalmente, obtém-se a representação explícita para $\psi_0(x)$:

$$\psi_0(x) = x - \sum_{\rho^+} \left[\frac{x^{\rho^+}}{\rho^+} + \frac{x^{1-\rho^+}}{1-\rho^+} \right] - \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) - \ln(2\pi).$$

8.3 APLICAÇÕES DO CÁLCULO DE RESÍDUOS

A inversão de Mellin é uma integral cujo caminho de integração é uma linha vertical no plano complexo. Seu resultado acaba por fortemente aproximado, quando não igual, aos resíduos das singularidades presentes no semiplano à esquerda da linha de integração (que

geralmente abarca todos os polos da função; de outra forma dará como resultado apenas um termo de erro, omitindo os termos dominantes). Sabendo disto, apresentaremos aqui alguns resultados e representações de funções aritméticas baseados no cálculo de resíduos.

É importante notar todos os resultados aqui apresentados supõe a simplicidade dos zeros da função Zeta, que, como viemos fazendo ao decorrer deste trabalho, são denotados por ρ .

8.3.1 A função $M(x)$

Titchmarsh (1986, p. 372) apresenta em seu livro clássico um resultado que acabou por levar seu nome: a representação da função de Mertens

$$M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n).$$

Teorema 8.3.1 (Teorema de Titchmarsh) *Existe uma seqüência T_v , $v \leq T_v \leq v + 1$, tal que*

$$M_0(x) = \lim_{v \rightarrow \infty} \sum_{\|\rho\| < T_v} \frac{x^\rho}{\rho \zeta'(\rho)} - 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2\pi/x)^{2n}}{(2n)! n \zeta(2n+1)}.$$

8.3.2 A soma $\Phi(x)$

A soma $\Phi(x)$ é definida como o somatório da função cociente de Euler (HARDY e WRIGHT, 2008, p. 353):

$$\Phi(x) = \sum_{n < x} \varphi(n).$$

O cálculo resíduos rende uma aproximação (BAILLIE, 2011, p. 26)

$$\Phi_0(x) \simeq \frac{1}{6} + \frac{3}{\pi^2}x + \lim_{T \rightarrow \infty} 2Re \left(\sum_{\|\rho\| < T} x^\rho \frac{\zeta(\rho-1)}{\rho \zeta'(\rho)} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} x^{-2n} \frac{\zeta(-2n-1)}{(-2k)\zeta(-2k)}.$$

8.3.3 A soma $L(x)$

Entendendo por $L(x)$ a soma parcial da função de Liouville $\lambda(n)$

$$L(x) = \sum_{n \leq x} \lambda(n),$$

vista no exemplo 5.2.7, sua aproximação pelo cálculo de resíduos é dada por (BAILLIE, 2011, p. 29)

$$L_0(x) \simeq 1 + \frac{\sqrt{x}}{\zeta(1/2)} + \lim_{T \rightarrow \infty} 2Re \left(\sum_{\|\rho\| < T} x^\rho \frac{\zeta(2\rho)}{\rho \zeta'(\rho)} \right).$$

8.3.4 Da quantidade $Q(x)$

A quantidade de termos livres de quadrados abaixo de um dado valor x é usualmente denotada por $Q(x)$. Como a função de Möbius tem módulo 1 nestes números naturais e 0 em todos os outros, podemos escrever

$$Q(x) = \sum_{n \leq x} |\mu(n)|.$$

Ainda em vista do exemplo 5.2.7, o cálculo de resíduos rende uma aproximação (BAILLIE, 2011, p. 24)

$$Q_0(x) \simeq 1 + \frac{6}{\pi^2}x + \lim_{T \rightarrow \infty} 2Re \left(\sum_{\|\rho\| < T} x^{\rho/2} \frac{\zeta(\rho/2)}{\rho \zeta'(\rho)} + \sum_{n=1}^{\infty} x^{-n} \frac{\zeta(-n)}{(-2n)\zeta'(-2n)} \right).$$

CONCLUSÕES

Gratifico os leitores que me acompanharam ao longo desta jornada até este ponto. Como nos propusemos, construímos um panorama geral e superficial dos desenvolvimentos em teoria analítica dos números, abarcando principalmente resultados marcantes do século XIX, dentre outros, e mesmo algumas expressões possivelmente originais. Concretizamos o objetivo principal deste trabalho ao definir e estudar o significado essencial da função Zeta, a conexão fundamental que expressa na estrutura dos números naturais e como sua manipulação permite a representação de uma quantidade ilimitada de estruturas aritméticas no discurso, das quais, por vários métodos, podemos extrair informações.

Passeando pelos temas relevantes a fim de cativar o leitor para o estudo especializado de cada um destes assuntos, dirigimos bastante texto para a compreensão do caminho para a demonstração do Teorema dos Números Primos em suas muitas formas e, mais ainda, a obtenção das fórmulas explícitas da teoria dos números.

Estes aspectos levam o autor a se satisfazer muito com a obra, pois sente que cumpriu com sua proposta de começar um movimento de tradução da teoria para os falantes de língua portuguesa e acredita que os leitores já poderão dela tirar proveito. Consciente de que a obra não abarcou uma quantidade imensa do desenvolvimento da teoria, principalmente no século XX⁵, como atestará qualquer um que tenha compartilhado de fontes semelhantes às minhas, pretendo ampliá-la e aprimorá-la em futuras pesquisas. O trabalho careceu de uma revisão minuciosa e mais atenção lhe será dada nesse sentido em sua futura reformulação. O autor também sente que a narrativa histórica apresentada nesta obra merece muito trabalho, ampliação e lapidação, pois queda demasiadamente superficial. O trabalho clama, pois, por muito mais.

Agradeço a todas as instituições e pessoas que tornaram este trabalho possível.

⁵ E mesmo tanto do XIX, marcadamente uma demonstração da fórmula de Riemann-von Mangoldt, e o estudo de Dirichlet sobre as funções L.

Referências

- [1] BAILLIE, R. *Experiments with zeta zeros and Perron's formula*. Postado no ArXiv, 2011.
- [2] BERTRAND, J.; BERTRAND, P.; OVARLEZ, K.. *The Mellin Transform. The Transforms and Applications Handbook: Second Edition*. Ed. Alexander D. Poularikas. Boca Raton: CRC Press LLC, 2000.
- [3] BAK, J; NEWMAN, D. J.. *Complex Analysis*. Terceira edição. Nova Iorque: Springer-Verlag, 2010.
- [4] CARSLAW, H. S.. *Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals*. Originalmente publicado em 1906. Londres: Macmillian and Co. Segunda edição, 1921.
- [5] CONWAY, J. B.. *Functions of one complex variable*. New York: Springer-Verlag, 1978.
- [6] DAVIS, P.J.. *Leonhard Euler's Integral: a historical profile of the Gamma function*. ? : The American Mathematical Monthly, Vol. 66, N^o 10, p. 849-869; 1959.
- [7] DICKSON, L. E.. *History of the Theory of Numbers. Volume I: Divisibility and Primality*. Washington: Carnegie Institution, 1919.
- [8] DUPUY, T.. *Hadamard's theorem and Entire Functions of Finite Order*. Universidade de Vermont; disponível online em <https://www.uvm.edu/~tdupuy/complexspring2017/hadamard.pdf>. Acesso em 23/02/2020.
- [9] EDWARDS, H. M.. *Riemann's Zeta Function*. New York: Academic Press, 1974.
- [10] EDWARDS, H. M.. *Advanced Calculus: a Differential Forms Approach*. Boston: Birkhäuser, 1969. Reimpresso com correções em 1994.
- [11] EULER, L. *De seriebus divergentibus*. Primeiro publicado em "Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 5", 1760, p. 205-237; reimpresso em "Opera Omnia: Series 1", Volume 14, p. 585-617. Tradução para o inglês por Alexander Aycock.
- [12] EULER, L. *Remarques sur un beau rapport entre les series des puissances tant directes que reciproques*. Originalmente publicado em Memoires de l'academie des sciences de Berlin 17, 1768, p. 83- 106. Traduzido para o inglês por Lucas Willis e Thomas J. Osler.
- [13] FIGUEIREDO, D. G.. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*. Rio de Janeiro: IMPA, CNPq, 1977.
- [14] FRANEL, J. *Les suites de Farey et le problème des nombres premiers*. Göttingen:Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, p. 198-201, 1924.

- [15] GAUSS, C. F.. *Disquisitiones Arithmeticae*. Originalmente publicado em Leipzig, 1801. Tradução para o espanhol feita Costa Rica, 1995, publicada pela Academia Colombiana de Ciências exatas, físicas e naturais.
- [16] GOLDFELD, D. *The Elementary Proof of the Prime Number Theorem: An Historical Perspective*. Nova Iorque: Springer, capítulo em Chudnovsky D., Chudnovsky G., Nathanson M. (eds) *Number Theory*, 2004.
- [17] GLEINIG, N.. *On the critical strip of the Riemann zeta-function*. Tese de Bacharel apresentada à Universidade Autônoma de Barcelona sob a supervisão de Fransesc Bars, 2014.
- [18] GRAM, J.. *Note sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann*. Copenhague: Acta Mathematica, 27, p. 289–304, 1903.
- [19] GRONAU, D.. *Why is the Gamma function so as it is?*. Dreceben: Teaching Mathematics and Computer Science, p. 43-53, 2003.
- [20] HARDY, G. H.. *Divergent Series*. Oxford: Clarendon Press, 1949.
- [21] HARDY, G. H.; LITTLEWOOD, J.E.. *Contributions to the theory of the Riemann zeta-function and the theory of the distribution of primes*. Estocolmo: Acta Mathematica, Volume 41, 119-196; 1916.
- [22] HARDY, G. H.; WRIGHT, E. M.. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Sexta edição. Revisão: D. R. Heath-Brown e J. H. Silverman. Oxford: University Press, 2008.
- [23] HARDY, G. H.; RIESZ, M.. *The General Theory of Dirichlet's Series*. Cambridge: University Press, 1915.
- [24] HARDY, G. H.; *Ramanujan: Twelve Lectures on Subjects suggested by his life and work*. Cambridge: University Press, 1940.
- [25] HILDEBRAND, A. J.. *Introduction to Analytic Number Theory*. Notas de palestra, Outono de 2005, Universidade de Illinois, versão de 01/07/2013.
- [26] KARATSUBA, A. A.; VORONIN, S. M.. *The Riemann Zeta-Function*. Nova Iorque: Walter de Gruyter, 1992. Tradução de Neal Koblitz.
- [27] KOCH, H. *Sur la distribution des Nombres Premiers*. Estocolmo: Acta Mathematica, vol. 24, 3 de Julho de 1900, p. 159-182.
- [28] LAGARIAS, J. *An Elementary Problem Equivalent to the Riemann Hypothesis. ?*: 2001.
- [29] LANDAU, E.. *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Vol. 1*. Leipzig: B. G. Teubner, 1909.
- [30] LANDAU, E.. *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Vol. 2*. Leipzig: B. G. Teubner, 1909.
- [31] LANDAU, E.. *Bemerkungen zu der obenstehenden Abhandlung von J. Franel*. Göttingen: Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, p. 202-206, 1924.

- [32] LIMA, E. L.. *Curso de Análise, Vol. 1*. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. Projeto Euclides.
- [33] LIMA, E. L.. *Curso de Análise, Vol. 2*. Rio de Janeiro: IMPA, 2014 (2). Projeto Euclides.
- [34] MARTINEZ, F. E. B.; MOREIRA, C. G. T. de A.; SALDANHA, N. C.; TENGAN, E.. *Teoria dos números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*. Cópia Eletrônica da livraria virtual do IMPA, 2010.
- [35] MERTENS, F.. *Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie*. Berlim: de Gruyter, Journal für die reine und angewandte Mathematik, p. 46-62; 1874. Disponível online em https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN243919689_0078 . Acesso em 02/04/2020
- [36] NEWMAN, D. J.. *Simple Analytic Proof of the Prime Number Theorem*. Oxfordshire: Taylor & Francis; The American Mathematical Monthly, Vol. 87, No. 9 (Novembro, 1980), p. 693-696.
- [37] ODLYZKO, A. M. e TE RIELE, H. J. J.. *Disproof of the Mertens conjecture*. ? : De Gruyter, Journal für die reine und angewandte Mathematik 357, 1985, p. 138–160.
- [38] PATTERSON, S.J.. *An Introduction to the Theory of the Riemann Zeta-Function*. Cambridge: University Press, 1988.
- [39] REMMERT, R. *Wielandt's Theorem About the Γ -Function*. Oxfordshire: Taylor & Francis; The American Mathematical Monthly Vol. 103, No. 3 , pp. 214-220; Março de 1996.
- [40] RIBENBOIM, P. *Números primos: Velhos mistérios e novos records*. 1^a edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2014 (Coleção matemática universitária).
- [41] RICHTER, F. *A new elementary proof of the Prime Number Theorem*. Disponível em <https://arxiv.org/abs/2002.03255v1> .
- [42] RINCÓN, J. A. C.. *The Dedekind Zeta Function and the Class Number Formula*. ? : Maio de 2002.
- [43] ROBIN, G. *Grandes valeurs de la fonction somme des diviseurs et hypothèse de Riemann*. França: Gauthier-Villars, Journal de Mathématiques pures et appliquées, tomo 63, fascículo 2, 1984.
- [44] ROUSSEAU, C. *Divergent series: past, present and future...* Disponível em <https://arxiv.org/pdf/1312.5712.pdf>. Universidade de Montreal. 29 de Outubro de 2015.
- [45] SANDIFER. E.. *How Euler did it: Basel problem with integrals*. Mathematical Association of America Online, 2004. Disponível em: <http://eulerarchive.maa.org/hedi/HEDI-2004-03.pdf> .
- [46] SANTOS, M. F.. *Pitágoras e o tema do número*. São Paulo: IBRASA, 2000.
- [47] SELBERG, A. *An Elementary Proof of the Prime-Number Theorem*. Annals of Mathematics, Segunda Série, Vol. 50, No. 2 (Abril de 1949), p. 305-313.

-
- [48] STEUDING, J.. On the Universality of the Riemann zeta-function. Curso introdutório ofertado na Universidade Johann Wolfgang Goethe - Frankfurt, elaborado em 2002.
- [49] TCHEBYCHEFF, P. L.. *Mémoire sur les nombres premiers*. Paris: Journal de mathématiques pures et appliquées, primeira série, tomo 17, p. 366-390; 1852.
- [50] TITCHMARSH, E. C.. *The Theory of Functions*. Segunda edição. London: Oxford University Press, 1939.
- [51] TITCHMARSH, E. C.. *The Theory of the Riemann Zeta-Function*. Segunda edição. Revisão: D. R. Heath-Brown. Oxford: Clarendon Press, 1986.
- [52] VAUGHAN, R. C.. *Zeros of Dirichlet series*. Amsterdã: Elsevier, *Indagationes Mathematicae*; Volume 26, 5ª edição, p. 897-909, Dezembro de 2015.
- [53] WILLANS, C.P.. *On Formulae for the n th prime number*. *The Mathematical Gazette*, Vol. 48, n. 366, p. 413-415. Dezembro de 1964.
- [54] ZAGIER, D. *Newman's Short Proof of the Prime Number Theorem*. Oxfordshire: Taylor & Francis; *The American Mathematical Monthly*, Vol. 104, No. 8 (Outubro, 1997), p. 705-708.