UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA A DISTÂNCIA

GIOVANY DA SILVA XAVIER

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO NOÇÕES BÁSICAS DE FUNÇÕES

CONCEIÇÃO-PB
2020

GIOVANY DA SILVA XAVIER

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO NOÇÕES BÁSICAS DE FUNÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância, da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes

CONCEIÇÃO-PB
2020

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

X3r Xavier, Giovany da Silva.
Resolução de problemas envolvendo noções básicas de funções / Giovany Xavier da Silva. - João Pessoa, 2020.
47 f. : il.

Orientação: Elisandra de Fátima Gloss de Moraes.
TCC (Graduação) - UFPB/CCEN.

1. Ensino de matemática. 2. Ensino - Aprendizagem. 3. Funções em matemática. 4. Resolução de problemas matemáticos. I. Moraes, Elisandra de Fátima Gloss de. II. Título.

UFPB/CCEN CDU 51 (07)

Elaborado por ANA ROBERTA SOUSA MOTA - CRB-15/101

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

FOLHA Nº 1 / 2020 - CCEN-DM (11.01.14.04)

Nº do Protocolo: 23074.067682/2020-39

João Pessoa-PB, 28 de Agosto de 2020

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO NOÇÕES BÁSICAS DE FUNÇÕES

GIOVANY DA SILVA XAVIER

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância, da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Elisandra de Fátima Gloss de Moraes

Aprovado em 27 de julho de 2020

COMISSÃO EXAMINADORA

Profa. Dra. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes - UFPB

Profa. Dra. Gabriela Albuquerque Wanderley - UFPB

Prof. Ms. Jorge Costa Duarte Filho - UFPB

(Assinado digitalmente em 28/08/2020 19:39)
ELISANDRA DE FATIMA GLOSS DE MORAES
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
Matrícula: 1737844

(Assinado digitalmente em 31/08/2020 08:43)
GABRIELA ALBUQUERQUE WANDERLEY
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
Matrícula: 1622615

(Assinado digitalmente em 30/08/2020 09:04)
JORGE COSTA DUARTE FILHO
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
Matrícula: 332446

Dedico este trabalho a minha esposa Sâmmya Thays e aos meus filhos Isaac Lima Xavier e Bianca Lima Xavier, razões do meu esforço e dedicação, e também dedico este trabalho a toda a minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por tudo.

Agradeço ao meu pai Joaquim Xavier Neto, a minha mãe Maria do Socorro, a minha irmã Jéssica Maiara, ao meu irmão Joanderson Xavier e a toda a minha família que sempre tiveram admiração por mim, e sempre estiveram me apoiando e me motivando a chegar aos meus objetivos.

Agradeço a minha esposa Sâmmya Thays e aos meus filhos Isaac Lima Xavier e Bianca Lima Xavier, que sempre tiveram grande carinho e admiração por mim, e me motivam a conquistar tudo.

Agradeço ao meu tio Egídio Dias Xavier, que além de professor, é um grande amigo que sempre me motivou e ajudou a enfrentar quaisquer dificuldades deste curso para chegar à conclusão do mesmo.

Agradeço ao meu colega de curso, grande amigo e parente Cristiano Frade, que durante todo este curso me deu uma grande força para que eu conseguisse chegar à conclusão do mesmo.

Agradeço ao meu amigo e tutor presencial de curso, do polo de Itaporanga, Maxwell Madeiro, que durante todo esse curso me deu total apoio, e também contribuiu para a minha formação.

Agradeço à professora Elisandra Gloss (UFPB) pelo total compromisso e dedicação com a orientação de todo este trabalho, bem como uma grande contribuição para o desenvolvimento do mesmo.

Agradeço aos professores Jorge Duarte (UFPB) e Gabriela Wanderley (UFPB) pela grande contribuição a este trabalho.

Agradeço ao professor Dr. Ivelton (IFPB) e ao professor Dr. Erick (UFOPA) por toda a força que me deram desde o início deste curso.

Finalmente, agradeço a todos que contribuíram de algum modo para a realização deste trabalho.

RESUMO

A educação matemática tem sida aperfeiçoada aos poucos devido ao avanço em estudos sobre diversas metodologias de ensino de matemática. Este trabalho trata de uma pesquisa que visa propor um estudo, análise e reflexões sobre o ensino de noções básicas de funções a partir de resolução de problemas. Percebe-se atualmente que o ensino da matemática tem sido um desafio em vários contextos de aprendizagem, e que as funções são um tema que exigem metodologias significativas para uma maior possibilidade de compreensão do mesmo. Partindo disso, esta pesquisa ressalta para o professor a importância de se trabalhar com a resolução de problemas, seguindo o método heurístico de Pólya (2006), propondo que o aluno seja orientado a compreender e resolver situações-problemas em diversas situações, de tal forma que o mesmo seja motivado a construir ou adquirir o conteúdo abordado.

PALAVRAS CHAVES: Resolução de problemas; funções; aprendizagem significativa; processo ensino-aprendizagem.

ABSTRACT

Mathematical education has been gradually improved due to the advancement of studies on various mathematics teaching methodologies. This work deals with a research that aims to propose a study, analysis and reflections on the teaching of basic notions of functions based on problem solving. It is now perceived that the teaching of mathematics has been a challenge in various learning contexts, and that functions are a topic that require significant methodologies for a greater possibility of understanding it. Based on this, this research emphasizes to the teacher the importance of working with problem solving, following the heuristic method of Pólya (2006), proposing that the student be guided to understand and solve problem-situations in different situations, in such a way that he is motivated to build or acquire the content covered.

KEYWORDS: Problem solving; functions; meaningful learning; teaching-learning process.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho foi feito um estudo sobre uma metodologia de ensino que pode ser significativa, que é a resolução de problemas, partindo basicamente das ideias de Pólya(2006), Dante(1991), Dante(2009) e Dante(2010), os quais possuem referenciais teóricos e técnicos que podem ser uma das metodologias de ensino de êxito na maior parte da prática de ensino de Matemática atualmente. Este trabalho poderá servir como uma proposta para o uso do recurso didático da resolução de problemas aos professores que pouco a utilizam, gerando uma reflexão da possibilidade de encontrar meios de explorar as habilidades que podem ser alcançadas pelos alunos, ressaltando a importância de se trabalhar com a resolução de problemas de modo que seja adequado o máximo possível ao contexto social e educacional do aluno. Visando um processo de ensino-aprendizagem significativo, percebe-se a grande possibilidade de despertar um maior interesse no aluno para que ele realmente pense matematicamente e tenha autonomia para tomada de decisões. Segundo Schoenfeld, o "pensar matemático":

> Significa "Ver o mundo de um ponto de vista matemático (tendo predileção por matematizar: modelar, simbolizar, abstrair e aplicar ideias matemáticas a uma larga gama de situações) e (b) ter os instrumentos para tirar proveito para matematizar com sucesso." Assim, o pensar matematicamente permite conectar o sujeito ao mundo em uma perspectiva mais ampla, possibilitando exercer um papel de cidadão, tendo o pensar matematicamente como instrumento de tomada de decisões e escolhas. Schoenfeld (1998. p. 59)

Este trabalho consiste em demonstrar a importância da situação-problema para a aprendizagem do aluno, utilizando-se de noções básicas de funções. A situação-problema é desafiadora, mas também é uma possibilidade de desenvolver a investigação e a exploração de como chegar a um resultado consolidado de um determinado problema, ou seja,

> A situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las. Brasil (1998. p.40).

É apresentado um estudo seguindo as 4 etapas do método heurístico de Pólya(2006); as considerações sobre problemas de Dante(1991), Dante(2009) e Dante(2010); noções de Funções de Dante(2011) e Dante(2013); história da matemática de Eves(2004); além das contribuições de Fourier(1822), Cláudia(2014), Caraça(2000), Julyette(2011), Nanci(1997), Mendes(1994), Silva(2013), Lara(2012), Romanatto(2008), Schoenfeld(2008), Vasconcelos(2010), Huanca(2006), Brasil(1998), Soares e Pinto(2001), Paiva e Rego(2009), Brasil(2008) e Roballo(2014).

Tem-se como problemática de que forma as metodologias de ensino podem contribuir para a melhor compreensão do estudante no aprendizado em matemática. E por meio deste, propõe-se um recurso didático que pode despertar um envolvimento maior na aprendizagem, assim promovendo a mesma.

No Capítulo 1 deste trabalho foi feito uma introdução expondo em que consiste este trabalho; foi feito uma justificativa abordando por que a resolução de problemas é importante para o ensino da matemática; foram feitos os objetivos geral e específicos, mencionando qual a finalidade deste trabalho; e também foi feito um memorial acadêmico expondo a trajetória do autor durante todo curso de licenciatura plena em matemática.

No Capítulo 2 deste trabalho, foram feitos uma breve análise histórica de fatos importantes sobre a evolução do conceito de função para que possamos situar o leitor no contexto histórico moderno de funções, utilizando as ideias de Eves(2004), além de trazer informações na visão de alguns autores importantes para o tema, como Dante(2011), Mendes (1994), e Fourier(1822), bem como uma abordagem teórica explorando as Funções Afim, Quadrática, Exponencial e Logarítmica. Serão apresentadas as principais propriedades destas funções, seus gráficos, e também noções de crescimento e decrescimento, injetividade, sobrejetividade e bijeção, composta e inversas de funções.

No Capítulo 3 é tratado o Método de Resolução de Problemas expondo pensamentos e técnicas de Pólya(2006) sobre as quatro etapas para se resolver um problema matemático, bem como as considerações de Dante(1991) e Dante(2009) sobre o que é uma situação-problema e qual a importância da mesma para o processo ensino-aprendizagem. Além disto, trata-se também o papel do professor no trabalho com a resolução de problemas, usando as ideias de Romanatto(2008), Vasconcelos e Rego (2010) e Dante(1991). Por fim, são apresentadas aplicações da resolução de problemas utilizando noções básicas de funções como conteúdo explorado, com objetivo de propor reflexões sobre a importância do trabalho com a resolução de problemas para uma possível aprendizagem significativa.

1.1. Justificativa

O ato de resolver problemas é um contexto importante desde a antiguidade, antes da criação dos números. Segundo Huanca(2006), os primeiros homens antes da criação dos números, precisaram desenvolver estratégias para resolver problemas de sua realidade. Eles criaram maneiras de comparar, classificar e ordenar, medir, quantificar e inferir elementos fundamentais que a tradição da cultura nomeia de Matemática.

Segundo Romanatto(2008), a Resolução de Problemas é uma parte integrante do aprendizado matemático e não deveria ser tratada como uma parte isolada do programa de matemática. Percebe-se que a Resolução de Problemas deve abranger todos os níveis de ensino, e por meio disso, os contextos dos problemas devem relacionar-se com situações da vida dos estudantes e também nas ciências do mundo do trabalho.

Esta tendência no ensino de matemática no Brasil tem sido fortificada com o passar dos anos, pois, podemos perceber que o texto dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, PCN's(1998) diz:

> "A resolução de problemas, na perspectiva indicada pelos educadores matemáticos, possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão ao seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que têm dos problemas da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança" Brasil(1998. p.40).

Trabalhar com a resolução de problemas implica na valorização do processo de resolução feito pelo aluno, porque aumenta o desenvolvimento cognitivo do mesmo. Assim reforçam os PCN's(1998):

> "Resolver um problema não se resume em compreender o que foi proposto e em dar respostas aplicando procedimentos adequados. Aprender a dar uma resposta correta, que tenha sentido, pode ser suficiente para que ela seja aceita e até seja convincente, mas não é garantia de apropriação do conhecimento envolvido. Além disso, é necessário desenvolver habilidades que permitam provas os resultados, testar seus efeitos, comparar diferentes caminhos para obter a solução. Nessa forma de trabalho, a importância da resposta correta cede lugar à importância do processo de resolução" Brasil(1998. p. 42).

Trabalhar com este recurso didático permite-nos ressaltar que, segundo Soares e Pinto(2001), há necessidade de que os alunos obtenham habilidades e estratégias que lhes proporcionem a apreensão, por si mesmos, de novos conhecimentos e não apenas a obtenção de conhecimentos prontos e acabados.

O desenvolvimento da capacidade das habilidades e estratégias no aluno ocorre quando tratamos a resolução de problemas "como metodologia de ensino que ajuda a desenvolver a estrutura cognitiva do aluno, que exercita sua criatividade e o torna capaz de aprender significativamente podendo, assim, aplicar o conhecimento adquirido em diferentes contextos da própria Matemática" Paiva e Rego(2009, p. 9).

Dante(1991) considera que é importante que o problema possa gerar muitos processos de pensamento. Levantar muitas hipóteses e propiciar várias estratégias de solução. O pensar e o fazer criativo devem ser componentes fundamentais no processo de resolução de problemas.

A aprendizagem matemática do aluno tem uma forte dependência da prática da proposição de situação-problema para o desenvolvimento da aprendizagem do mesmo, ou seja,

> A aprendizagem matemática depende fortemente da proposição de situação-problema adequada aos alunos, uma das principais competências do professor de matemática que acaba por se constituir na busca dessas situações a serem propostas aos seus alunos. Brasil(2008. p. 212).

Logo, percebemos que o aluno poderá ser estimulado a resolver situações-problema e desenvolver suas capacidades de dedução e argumentação, compreensão e interpretação, de diversos contextos matemáticos, desde as noções básicas, até um ponto mais aprofundado, o qual dependerá das suas investigações e envolvimento no processo de aprendizagem.

1.2. Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

- Incitar um estudo, análise e reflexão sobre uma metodologia que pode promover uma aprendizagem significativa para os alunos de matemática.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Aprimorar a metodologia de ensino-aprendizagem em matemática;
- Interpretar e refletir sobre a evolução histórica das Funções no contexto moderno;
- Analisar, explorar e refletir sobre aspectos teóricos relevantes de noções básicas de Funções;
- Compreender e refletir sobre as considerações de Dante sobre a definição e tipos de problemas;
- Compreender, interpretar e refletir sobre o método de resolução de problemas, bem como as etapas do Método Heurístico de Pólya(2006) e suas contribuições para o ensino da matemática;
- Refletir sobre possibilidades de aprendizagem significativa do aluno quando propomos a aplicação da resolução de problemas em situações que envolvam noções básicas de Funções.

1.3. Memorial Acadêmico

Recordo-me do ensino fundamental nos anos iniciais onde estudei na Escola Estadual de Ensino Infantil e Fundamental Terezinha Gomes, no município de Conceição-PB, que hoje não funciona mais. Percebia muitos colegas que, embora estivessem aparentemente com problemas familiares e financeiros, sempre éramos motivados a estudar sem cessar. No ensino fundamental nos anos finais, estudei na Escola Estadual de Ensino Fundamental José Leite no município de Conceição-PB, onde atuo hoje como professor contratado de matemática das 8° e 9° séries. Ainda hoje percebo uma gestão de qualidade e dedicação, que sempre zelaram pela aprendizagem dos alunos, e por tudo o que pudesse promover o aprendizado dos mesmos. Estudei o meu ensino médio na escola particular Instituto João Siqueira de Figueiredo como bolsista da metade da mensalidade. Percebi uma grande infraestrutura e equipe pedagógica de competência e dedicação com a aprendizagem dos alunos.

Iniciei meus estudos na Universidade Federal da Paraíba em março de 2013, por meio da aprovação pelo Vestibular Especial da UFPB à Distância, obtendo uma nota de 500 pontos. O primeiro ano de curso foi ano de sobrevivência porque não conhecia os colegas da Universidade para ter interações e discussões em grupos para um estudo coletivo, visto que EaD é muito rigoroso quando se estuda só. No primeiro ano fui me adaptando aos poucos com a metodologia à distância. No segundo fui melhorando minha adaptação com a metodologia EaD, e também consegui um emprego de professor no Estado da Paraíba, no qual até o momento leciono matemática no ensino fundamental e médio. Após a metade do curso, superei meus obstáculos e consegui acompanhar as disciplinas. No decorrer do curso, aprendi a gostar de matemática porque percebia a matemática importante para a minha vida, não apenas como meio trabalhista, mas também por vocação a esta excelente disciplina. Hoje, consegui chegar até o momento neste curso, graças a Deus primeiramente, e também graças à minha família, parentes e amigos que sempre me motivaram a não desistir deste curso, embora ele fosse muito avançado e complexo.

2. CONTEXTO HISTÓRICO E CONCEITOS DE FUNÇÕES

2.1. A evolução do conceito matemático de função

O comportamento entre determinadas grandezas define um marco crucial para a compreensão de Funções. Segundo Eves(2004), alguns filósofos e matemáticos já estudavam por volta do século XIII o comportamento de algumas grandezas em relação ao tempo, temperatura, velocidade, distância, consumo e lucro entre outros problemas da época. Estudavam variações entre as grandezas e, no século XIV, descreveram essas oscilações por meio de um sistema de duas dimensões, horizontal e vertical, no qual conseguiam demonstrar as intensidades dessas grandezas (eixo vertical) em função do tempo (eixo horizontal).

Com a ajuda do desenvolvimento da álgebra, Descartes e Fermat, no século XVII, definiram um sistema de eixos coordenados no plano, associando variações dessas coordenadas às expressões algébricas que representavam curvas de diferentes naturezas. A curva formada nesse plano era formada por todos os pontos, cujas coordenadas satisfizessem uma determinada equação. Essas variações das coordenadas que anteriormente eram associadas em tabelas, agora ganhariam forma no plano cartesiano. Eves(2004).

É importante destacar a participação de Newton no desenvolvimento e consolidação do conteúdo das funções. Em uma de suas teorias, Newton idealizava curvas cujas variações eram contínuas e que atualmente podemos associar às imagens de um domínio real. Caraça(2000).

Porém, para Eves(2004), o termo função só foi realmente citado pelo filósofo alemão Von Leibniz, na década de 1690, que o utilizou para descrever as coordenadas dos pontos para formação de uma determinada curva, posteriormente para representar inclinações de reta que futuramente usaria nas teorias de integral.

Ao longo do tempo, outros matemáticos definiram o conceito de função e, depois, foram moldando essas definições até as definições estudadas atualmente.

Segundo Eves(2004), Bernoulli em 1718 cria uma definição bem complexa e superficial, na qual "uma função de uma variável é quantidade composta de alguma maneira qualquer dessa variável e de constantes".

Já Lagrange, em 1797, cita que: "Chama-se de função de uma ou várias quantidades variáveis qualquer expressão para cálculo em que essas quantidades entrem em alguma forma qualquer, misturadas ou não com outras quantidades, que são consideradas como dadas, e valores invariáveis enquanto as quantidades da função podem tomar todos os valores possíveis". Mendes(1994)

Bernoulli e Lagrange traduzem de forma algébrica o que é uma função, ou seja, que ela só pode ser descrita por meio de uma expressão algébrica com duas ou mais variáveis. O que diferencia das definições atuais são as representações geométricas dessas grandezas, o que ajuda a demonstrar o comportamento que as expressões analíticas tomam.

> "Em geral, a função f(x) representa uma sucessão de valores ou ordenadas, cada uma das quais arbitrárias. Sendo dada uma infinidade de valores para a abscissa x, haverá um número igual de ordenadas f(x). Todas têm valores numéricos verdadeiros, ou positivos, ou negativos, ou nulos. Nós não supomos que essas ordenadas estão sujeitas a uma lei comum; elas sucedem umas às outras em alguma maneira arbitrária qualquer, e cada uma delas é dada como se fosse uma quantidade isolada" Fourier(1822).

A definição de Fourier(1822) trata-se do conceito de eixos coordenados que exemplifica como ocorre no plano.

Estabelecida a teoria do conjunto dos números reais e o surgimento de novos problemas devido à aparição de novas tecnologias, foram sendo estruturados novos conceitos para a definição de função.

Pode-se concluir que as definições de função, bem como suas aplicações, foram desenvolvidas e criadas a partir dos problemas com que os matemáticos se deparavam. Com isso o conceito foi se aperfeiçoando e se adaptando.

O conceito de função tem base na ideia de correspondência, ou seja, estudar a associação ou não de dois conjuntos.

Caraça(2000) e Eves(2004) defendem a importância da definição formal de função, mas destacam a necessidade inicial de desenvolver uma interpretação intuitiva.

No estudo sobre Funções, Caraça cita a noção de variável. Segundo ele, para tornar a função de fácil manejo é necessária uma associação simbólica aos conjuntos.

> "Essa representação simbólica consegue-se introduzindo o conceito de variável, o que se faz da seguinte forma: Seja (E) um conjunto qualquer de números, conjunto finito ou infinito, e convencionamos representar qualquer dos seus elementos por um símbolo, por ex. x. A esse símbolo, representativo de qualquer um dos elementos do conjunto (E), chamamos variável." Caraça(2000)

Caraça destaca nesta definição a importância da dependência entre grandezas de forma abrangente.

Estabelecido o conceito de variável, o mesmo constrói o conceito de domínio de uma função: "uma variável é o que for determinado pelo conjunto numérico que ela representa - a sua substância, o seu domínio como daqui em diante diremos". Caraça (2000).

Após destacar e detalhar os termos utilizados, Caraça define função utilizando três conceitos que se conectam para o melhor entendimento do conteúdo. Inicialmente ele cria ideia baseada na teoria de conjuntos:

> Sejam x e y duas variáveis representadas de conjuntos de números, diz-se que y é função de x e escreve-se y = f(x) se entre as duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido x → y. A x chama-se variável independente, a y variável dependente. Caraça(2000)

O foco do pensamento em Caraça é que, além dessa definição, ele define também a função de maneira analítica, que significa a aplicação do conteúdo de função por meios de expressões polinomiais, criando assim uma associação de dependência de grandezas. Ou seja, a definição analítica mencionada por ele é a função sendo utilizada como ferramenta das outras ciências.

Por fim ele cita a chamada definição geométrica de uma função, na qual trabalha com o 'sistema de referência cartesiano' para representar uma curva que representa todos os pares (x, y) que satisfazem a condição da função em sua definição analítica.

Podemos perceber que o autor traz importantes abordagens de tais conceitos que facilitará na compreensão do conceito de função.

2.2. Conceitos

Precisa-se que sejam estabelecidos como pré-requisitos alguns símbolos e termos importantes. Dentre os conjuntos numéricos teremos:

i) Para o conjunto dos números Naturais utilizaremos: $\mathbb{N}$
ii) Para o conjunto dos números Inteiros utilizaremos: $\mathbb{Z}$
iii) Para o conjunto dos números Racionais utilizaremos: $\mathbb{Q}$
iv) Para o conjunto dos números Reais utilizaremos: $\mathbb{R}$
iv) Para o conjunto dos números Irracionais utilizaremos: $\mathbb{I}$

Do século XVII até os dias atuais, o conceito de função foi sendo evoluído até certo desempenho. Para uma melhor compreensão, podemos exemplificar esse conceito em muitas situações-problema do nosso cotidiano. Para análise das definições, tomamos como base autores como Luiz Roberto Dante.

Definição 2.2.1 Dados dois conjuntos, A e B, não vazios, uma função f de A em B é uma relação que associa cada elemento de x de A a único elemento y em B.

Notação:

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\to y = f(x) \end{aligned}$$

Observações: O conjunto A é chamado de *domínio* da função, representado por *Dom(f)*, enquanto o conjunto B é o *contradomínio* da função. Além disso, a variável x é denominada variável independente e a variável y é denominada variável dependente.

Definição 2.2.2 Seja $f : A \to B$ uma função. A imagem de f, denotada por $\text{Im}(f)$, é o conjunto de todos $y \in B$ para os quais existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$, isto é,

$$\text{Im}(f) = \{y \in B; \exists x \in A \,/\, y = f(x)\}.$$

Existem muitos tipos de funções, mas, neste trabalho veremos as essenciais para o ensino médio regular, que compõem a grade curricular básica de Álgebra. Eis as principais funções que serão discutidas:

i) Função Afim – que tem como modelo $f(x) = ax + b$, onde a, b são constantes;

ii) Função Quadrática – que tem como modelo $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são números reais, com $a \neq 0$;

iii) Função Exponencial – que tem como estrutura básica $f(x) = a^x$, onde $0 < a \neq 1$.

iv) Função Logarítmica – que tem como estrutura básica $f(x) = \log_a x$, com $x > 0$, $0 < a \neq 1$.

Exemplo 2.2.3 Quais dos seguintes diagramas representam uma função de *A* em *B?*

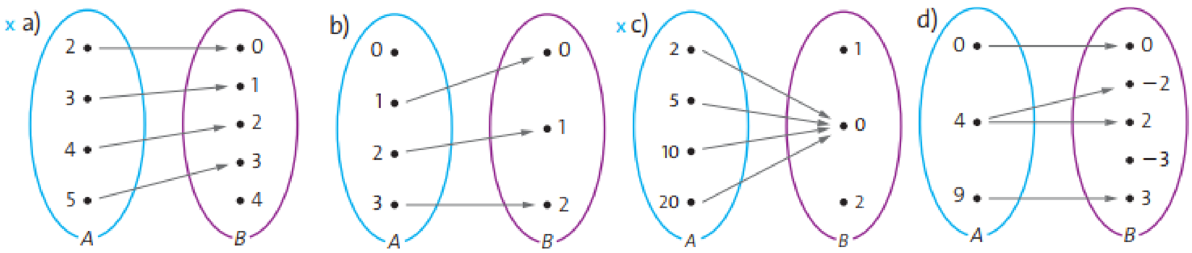


Figura 1: Dante(2013. P. 46)

Solução: Na alternativa a), percebemos que todos os elementos do domínio possuem a sua imagem e ainda não há um elemento no domínio que tenha mais de uma imagem. Na alternativa c), percebemos que, embora todos os elementos do domínio possuam a mesma imagem, não vimos um elemento do domínio que esteja ligada a mais de uma imagem. Com isso, as alternativas a) e c) satisfazem a Definição 2.1. No entanto, em b) há um elemento no conjunto A que não se corresponde com elementos do conjunto B, e em d) o elemento 4 de A está associado a 2 elementos de B. Logo, os diagramas de b) e d) não representam funções.

Exemplo 2.2.4 Dados $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 3, 4\}$ e a correspondência entre *A* e *B* dada por $y = x^2$, com $x \in A$ e $y \in B$, faça um diagrama e diga se *f* é uma função de *A* em *B*.

Solução: Fazendo o diagrama com as devidas correspondências, temos:

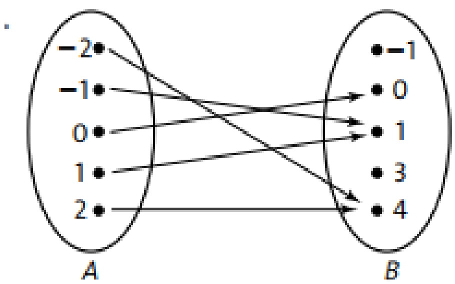


Figura 2: Feita no aplicativo GeoGebra em 02/05/2020

Portanto, satisfaz a Definição 2.2.1, e, logo é uma função.

Exemplo 2.2.5 Determine o Domínio *D(f)* e a Imagem $I_m(f)$ da função $f\colon A \to B$ dada pelo diagrama abaixo:

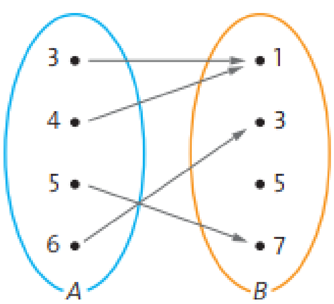


Figura 3: Dante(2013. P. 48)

Solução: Para o domínio, percebemos que são todos os elementos que compõem o conjunto A, ou seja, $D(f) = \{3, 4, 5, 6\}$. Já a imagem é composta pelos elementos de B que possuem relação com algum dos elementos de A por meio da correspondência, ou seja, $\text{Im}(f) = \{1, 3, 7\}$.

Exemplo 2.2.6 Explicite o domínio da função real $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Solução: Observe que $\dfrac{1}{x}$ só é possível em $\mathbb{R}$ se $x \neq 0$, ou seja, não existe divisão por 0. Para cada $x \neq 0$, o valor $\dfrac{1}{x}$ sempre existe e é único (o inverso de x). Logo,

$$D(f) = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*.$$

2.3 Abordagem teórica sobre noções básicas de funções

Coordenadas Cartesianas

A notação (a, b) é usada para indicar o par ordenado de números reais a e b, no qual o número a é a primeira coordenada e o número b é a segunda coordenada. Observe que os pares ordenados (3, 4) e (4, 3) são diferentes, pois a primeira coordenada de (3, 4) é 3, enquanto a primeira coordenada de (4, 3) é 4.

Um sistema de eixos ortogonais é constituído por duas retas perpendiculares, Ox e Oy, que têm a mesma origem O. O sistema de eixos ortogonais é denominado **plano cartesiano**, em homenagem a Descartes. Os eixos ortogonais dividem o plano cartesiano em quatro regiões chamadas **quadrantes**, na ordem indicada a seguir:

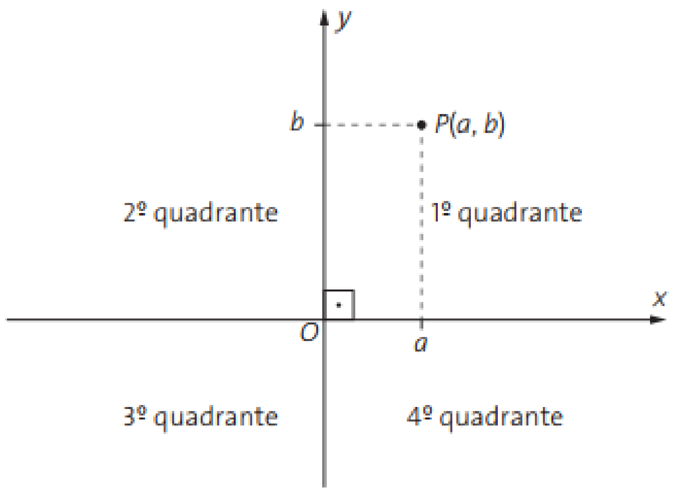


Figura 4: Dante(2013. P. 49)

Usamos esse sistema para localizar pontos no plano. Dado um ponto P desse plano, dizemos que os números a e b são as **coordenadas cartesianas** do ponto P, em que a é a **abscissa** e b é a **ordenada.**

Veja que a cada par ordenado de números reais corresponde um ponto do plano cartesiano e, reciprocamente, a cada ponto do plano corresponde um par ordenado de números reais. Essa correspondência biunívoca entre pares de números reais e pontos do plano permite escrever conceitos e propriedades geométricas em uma linguagem algébrica e, de modo recíproco, interpretar geometricamente relações entre números reais.

Gráfico de uma função

Dada uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, o seu gráfico é o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y), para $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ e $y = f(x)$, ou seja,

$$G(f) = \{(x, y); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \text{ e } y = f(x)\}$$

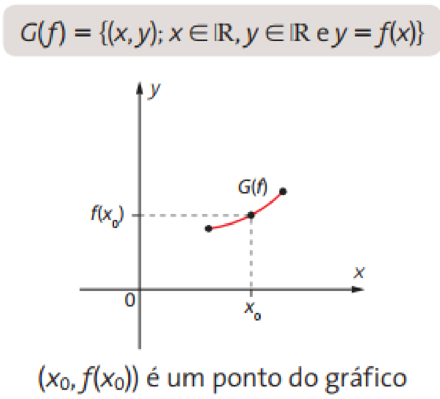


Figura 5: Dante(2013. P. 51)

Percebemos que uma curva no plano é o gráfico de uma função $y = f(x)$ definida em $\mathbb{R}$ se qualquer reta perpendicular ao eixo O_x intersecta esta curva em um único ponto.

Exemplo 2.3.1 Determine se cada uma das curvas abaixo representa uma função:

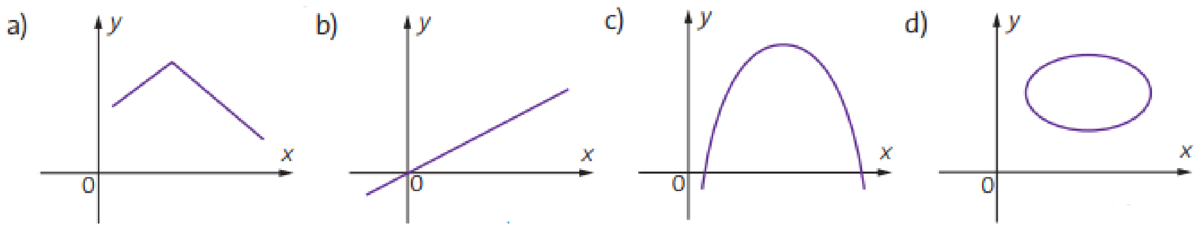


Figura 6: Dante(2013. P. 52)

Solução: As alternativas a), b) e c) apresentam gráficos de funções porque a reta perpendicular ao eixo O_x passam sempre por um único ponto. Já a curva na letra d) não representa função porque a reta perpendicular ao eixo O_x passa por dois pontos.

Função Afim

Definição 2.3.2 Uma função $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ chama-se **função afim** quando existem dois números reais a e b tal que $f(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Para cada número real x_0, o valor de uma função afim $f(x) = ax + b$ em x_0 é dado por

$$f(x_0) = ax_0 + b.$$

O número $b = f(0)$ é dito o valor inicial da função afim $f(x) = ax + b$.

Exemplo 2.3.3 Determine o valor da função afim $f(x)= -3x + 4$ para $x = 1$.

Solução: Basta substituirmos a variável x por 1, ficando

$$f(1) = -3.(1) + 4 = -3 + 4 = 1.$$

Exemplo 2.3.4 Determine o valor inicial de $f(x) = 3x + \frac{2}{3}$.

Solução: Temos que $f(0) = b = 3 \cdot 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$. Logo, o valor inicial é $\frac{2}{3}$.

Definição 2.3.5 O número a é chamado de <u>*Taxa de Variação Média*</u> da função $f(x) = ax + b$ no intervalo $[x, x+h]$.

Dada uma função afim $f(x) = ax + b$ e números reais, x e $x + h$, com $h > 0$, vemos que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a(x+h) + b - (ax+b)}{h} = \frac{ah}{h} = a.$$

Usando a taxa de variação média, percebemos que uma função afim $f(x) = ax + b$ fica <u>inteiramente determinada</u> quando conhecemos quaisquer dois dos seus valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$, com x_1 diferente de x_2. Ou seja, com esses dados determinamos os valores de a e de b por meio de valores conhecidos x em $f(x)$.

Vejamos os detalhes no próximo exemplo.

Exemplo 2.3.6 Determine uma função afim, tal que $f(2) = -2$ e $f(1) = 5$.

Solução: Queremos determinar os valores das constantes a e b na definição de $f(x)=ax+b$. Considerando $x = 1$ e $h = 1$, lembrando que o número a representa a taxa de variação média da função no intervalo [1,2], temos que

$$a = \frac{f(2) - f(1)}{2-1} = \frac{-2-5}{2-1} = \frac{-7}{1} = -7.$$

Assim, $f(x) = -7x + b$. Para obter b escolhemos um dos valores conhecidos, como por exemplo, $f(1) = 5$. Substituindo x por 1, temos

$$5 = f(1) = -7.1 + b \Rightarrow b = 5 + 7 = 12.$$

Então, a função afim é representada por $f(x) = -7x + 12$.

Definição 2.3.7 O valor de x para o qual a função *f(x)* = *ax* + *b* se anula, ou seja, para o qual *f(x)* = *0*, denomina-se <u>zero da função afim</u>. Para determinar o zero de uma função afim basta resolver a equação *ax* + *b* = *0*.

Exemplo 2.3.8 Encontre o zero da função *f(x)* = *2x* + *5*.

Solução: Fazendo $f(x) = 0$, temos

$$2x + 5 = 0 \Rightarrow 2x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}.$$

Logo, o zero da função é $x = -\frac{5}{2}$.

Definição 2.3.9 <u>*Função Modular*</u> é a função *f*: ℝ → ℝ definida por $f(x) = |x|$, onde

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, \, se \ x \geq 0 \\ -x, \, se \ x < 0 \end{cases}.$$

Exemplo 2.3.10 Construa o gráfico da função modular $f(x) = |x|$.

Solução: Observe que, para $x \geq 0$, a função f se comporta como uma função afim. O mesmo ocorre para $x < 0$. Sendo assim, basta conhecer dois de seus valores em cada intervalo para determinar o gráfico de f.

• se $x \geqslant 0 \Rightarrow f(x) = |x| = x$

x	$y = f(x)$
0	0
1	1
2	2

• se $x < 0 \Rightarrow f(x) = |x| = -x$

x	$y = f(x)$
−1	1
−2	2

Figura 7: Dante(2013. P. 95)

Colocando as duas condições em um só gráfico, temos o gráfico de $f(x) = |x|$:

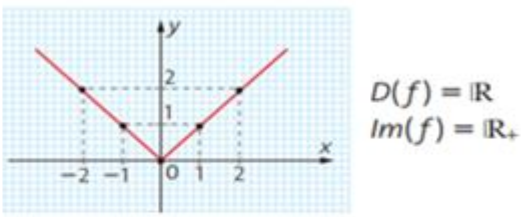


Figura 8: Dante(2013. P. 95)

Função Quadrática

Definição 2.3.11 Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se <u>quadrática</u> quando existem números reais a, b, c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.3.12 A função $f(x) = ax^2 + 2x + 5$ é quadrática para todo número real $a \neq 0$. Já a função $f(x) = -3x^t + 2x + 5$ é quadrática se, e somente se, $t = 2$.

Definição 2.3.13 Um número real x é dito um zero de uma função quadrática f se $f(x) = 0$.

Vamos assumir alguns fatos conhecidos sobre estas funções. Usaremos o fato de que os zeros de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são obtidos pela famosa Fórmula de Bhaskara,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

e esses só existem quando o radicando $\Delta = b^2 - 4ac$ for não negativo. Além disso, usando as relações de Girard, vemos que quando existirem as duas raízes (iguais ou diferentes) da equação do segundo grau $f(x) = 0$ tem-se a soma e o produto destas raízes dados respectivamente por $-\frac{b}{a}$ e $\frac{c}{a}$.

O gráfico de toda função do segundo grau é uma parábola. Quando $a > 0$ a parábola tem concavidade voltada para cima e seu vértice, o ponto (x_v, y_v) de coordenadas

$$x_v = -\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad y_v = -\frac{\Delta}{4a},$$

é um ponto de mínimo de f, ou seja, $y_v = f(x_v)$ é o menor valor da função quadrática f. Quando $a < 0$, a concavidade da parábola é voltada para baixo e o vértice é um ponto onde f atinge seu valor máximo.

Simbolicamente,

$$a > 0 \leftrightarrow y_v \text{ é o valor mínimo de } f \leftrightarrow Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq y_v\}$$
$$a < 0 \leftrightarrow y_v \text{ é o valor máximo de } f \leftrightarrow Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq y_v\}.$$

Exemplo 2.3.14 Trace o gráfico da função $f(x) = 2x^2$.

Solução: Percebemos que nesta função o número $a = 2$ é positivo, então sabemos que a concavidade da parábola é voltada para cima. Já o vértice está localizado na origem (0,0) porque:

I) $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2 \cdot 2} = 0$ II) $y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-\sqrt{0^2 - 4 \cdot 2 \cdot 0}}{4 \cdot 2} = \frac{-0}{8} = 0.$

Com esses cálculos e análises, podemos traçar o gráfico do seguinte modo:

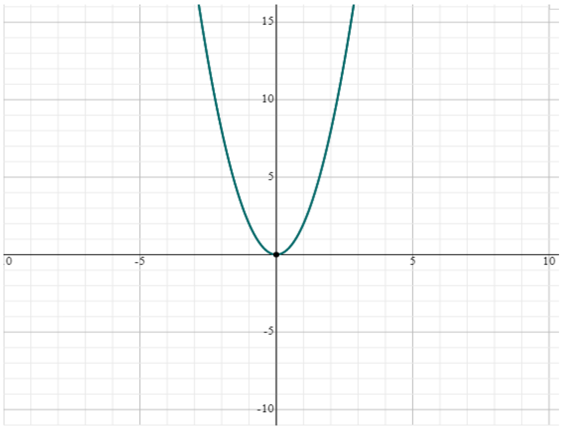


Figura 9: Feita no aplicativo Geogebra em 15/06/2020

Exemplo 2.3.15 Determine a Im*(f)* e o valor máximo ou mínimo da função quadrática dada pela lei $f(x) = x^2 + 4x - 2$.

Solução: Como $a = 1 > 0$, então a concavidade da parábola é voltada para cima e

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(16+8)}{4} = 6$$

é o valor mínimo da função. Assim, $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -6\}$.

Função crescente e função decrescente

Definição 2.3.16 Considere $f: A \rightarrow B$ uma função. Se para quaisquer números a e b de A com $a > b$ tivermos $f(a) > f(b)$, diremos que f é uma função **crescente** em A. Se for válida a desigualdade inversa, ou seja, se para quaisquer a e b em A com $a > b$ tivermos $f(a) < f(b)$, diremos que f é **decrescente** em A.

Exemplo 2.3.17 Estude os intervalos onde a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por $f(x) = -x^2$ é crescente ou decrescente.

Solução: Percebemos que, por causa da lei de formação que contém grau 2, o gráfico de f é uma parábola com concavidade para baixo, já que o coeficiente da variável com maior grau é negativo. Como o vértice é o ponto (0,0), podemos fazer suposição de valores mais próximos da origem para facilitar nossa compreensão. Deste modo, temos:

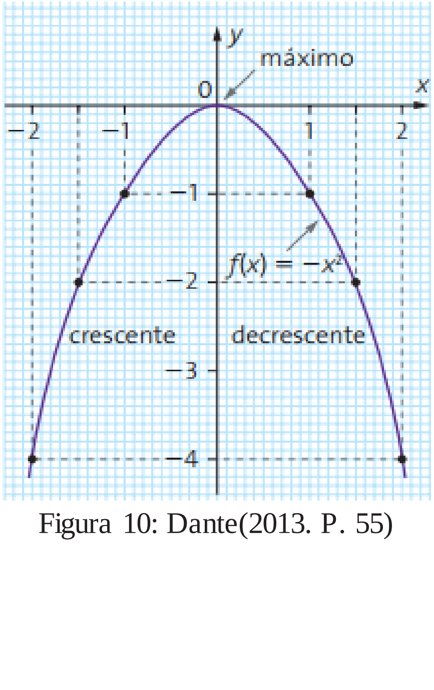


Figura 10: Dante(2013. P. 55)

Com isso, percebemos que:

- para $x \leq 0$, essa função é crescente;
- para $x \geq 0$, essa função é decrescente;
- para $x = 0$, $f(x) = 0$;
- para análise geométrica, o gráfico é simétrico em relação ao eixo O_y.

Função injetiva, sobrejetiva e bijetiva

Definição 2.3.18 Uma função *f: A → B* é **injetiva** quando elementos diferentes de *A* são transformados por *f* em elementos diferentes de *B,* ou seja, não há elemento em *B* que seja imagem de mais de um elemento de *A*. Assim, *f* é injetiva quando dados $x_1, x_2 \in A$ obtivermos $f(x_1) \neq f(x_2)$ isto é, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Definição 2.3.19 Uma função *f: A → B* é **sobrejetiva** quando, para qualquer elemento $y \in B$, pode-se encontrar um elemento $x \in A$ tal que *f(x) = y*. Ou seja, *f* é sobrejetiva quando todo elemento de *B* é imagem de pelo menos um elemento de *A*, isto é, *Im(f) = B*.

Definição 2.3.20 Uma função *f: A → B* é **bijetiva** se ela for, simultaneamente, injetiva e sobrejetiva. Quando isso ocorre, dizemos que há uma **bijeção** entre *A* e *B*.

Segue da definição que toda função crescente, ou decrescente, é injetiva.

Comparando em diagrama de flechas, temos que as três funções são representadas no modo exemplar abaixo:

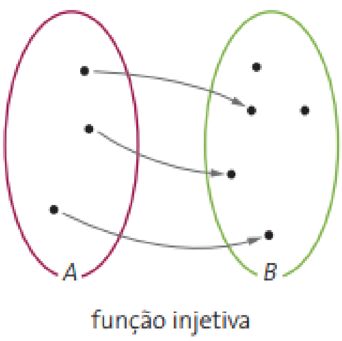


Figura 11: Dante(2013. P. 60)

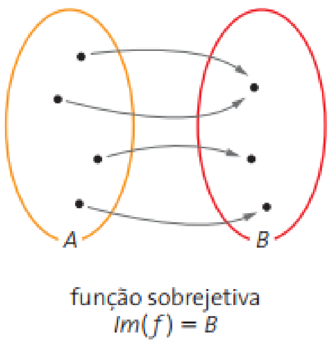


Figura 12: Dante(2013. P. 61)

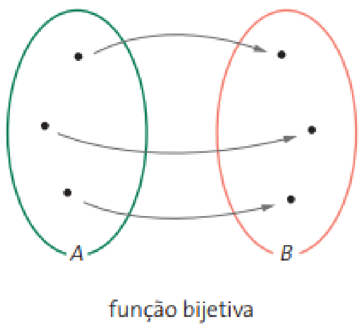


Figura 13: Dante(2013. P. 62)

Função Composta

Definição 2.3.21 Dadas duas funções *f: A → B* e *g: B → C*, podemos chamar de *Função Composta* de *g* com *f* a função $g \circ f: A \to C$ definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, para *x* em *A*.

Exemplo 2.3.22 Determine a função composta $f \circ g$ das funções reais dadas pelas leis

$$f(x) = x^4 \quad \text{e} \quad g(x) = x + 1.$$

Solução: Utilizando a definição de função composta, temos que $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Ao inserirmos $g(x)$ em $f(x)$ formamos a função $f(g(x) = (x+1)^4$. Distribuindo em formas de potência temos:

$$\begin{aligned} f(g(x) &= (x+1)^4 = [(x+1)^2]^2 = (x^2+2x+1)^2 = (x^2+2x+1)(x^2+2x+1) \\ &= x^4+2x^3+x^2+2x^3+4x^2+2x+x^2+2x+1 \\ &= x^4+4x^3+6x^2+4x+1 \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Função Inversa

Seja $f\colon A \to B$ uma função bijetiva. Para cada $b \in B$ existe um único elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Então fica bem definida uma função $g\colon B \to A$ dada por $g(b) = a$. Note que

$$g(b) = a \Leftrightarrow b = f(a).$$

Definição 2.3.23 Com as condições acima, a função $g\colon B \to A$ é dita a função Inversa de *f*. Notação: $g(x) = f^{-1}(x)$.

Exemplo 2.3.24 Determine a inversa $f^{-1}(x)$ da função $f(x) = 3x - 5$.

Solução: Fazendo $y = f(x)$ e $x = g(y)$ na expressão $y = 3x - 5$, teremos:

$$y = 3x - 5 \Rightarrow 3x = y + 5 \Rightarrow x = \frac{y+5}{3},$$

ou seja, $g(y) = x = \frac{x+5}{3}$. Para manter a notação com variável independente x, trocamos y por x e teremos

$$f^{-1}(x) = g(x) = \frac{x+5}{3}.$$

Função Exponencial

Definição 2.3.25 Dado um número real a, $0 < a \neq 1$, denomina-se função exponencial de base a uma função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = a^x$ ou $y = a^x$.

Exemplo 2.3.26 *Construa o gráfico da função* $f(x) = 2^x$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^0	2^1	2^2	2^3
$y = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

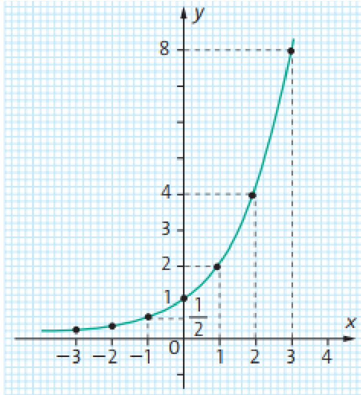


Figura 14: Dante(2013. P. 159)

Exemplo 2.3.27 *Construa o gráfico da função f(x) =* $\left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{0}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{3}$
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

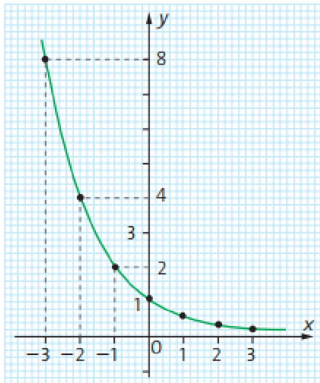


Figura 15: Dante(2013. P. 160)

Uma função exponencial é crescente se $a > 0$, e decrescente se $a < 0$. Em particular, toda função exponencial é injetiva, ou seja, para $a > 0$ *e* $a \neq 1$, *temos*

$$a^{x_1} = a^{x_2} \leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Além disso, vemos que f assume valores positivos tão grandes e tão pequenos quanto se queira, de modo que sua imagem é o intervalo $(0, \infty)$. Sendo assim, $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ é uma função bijetiva.

Função Logarítmica

Definição 2.3.28. Dados os números reais positivos a e b, com $a \neq 1$, e $b = a^c$, então o expoente c chama-se logaritmo de b na base a e denotado por log_{a^b}. Ou seja,

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

com a e b positivos e $a \neq 1$.

Como vimos anteriormente, toda função exponencial f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_+$, dada por $f(x) = a^x$ com $a > 0$ e diferente de 1, é bijetiva. Portanto, possui inversa.

Definição 2.3.29 A inversa da função exponencial de base a é a função $log_a: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, que associa a cada número real positivo x o número real $log_a x$, com a real positivo e $a \neq 1$.

Uma vez que as funções exponencial e logarítmica são inversas vemos que:

i) $a^{\log_a x} = x$, para todo $x > 0$.

ii) $\log_a a^x = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.3.30 Encontre $\log_3 81$.

Solução: Usando a definição de logaritmo, temos:

$$\log_3 81 = x \Leftrightarrow 3^x = 81 \Leftrightarrow 3^x = 3^4 \Leftrightarrow x = 4 .$$

Com a definição de logaritmo, para todo $0 < a \neq 1$, obtemos as seguintes consequências:

a) $\log_a 1 = 0$.

b) $\log_a a = 1$.

c) $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$ com $x, y > 0$.

Vejamos algumas propriedades importantes. Em todos os itens $x, y > 0$ e $0 < a \neq 1$ e $0 < b \neq 1$.

I) $\log_a (x . y) = \log_a x + \log_b y$

II) $\log_a (\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_b y$

III) $\log_a x^y = y \log_a x$

IV) $\log_b y = \dfrac{\log_a y}{\log_a b}$. Em particular $\log_b a = \dfrac{\log_a a}{\log_a b} = \dfrac{1}{\log_a b}$.

Exemplo 2.3.31 Trace o gráfico da função $f(x) = \log_2 x$.

x	$y = f(x)$
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2

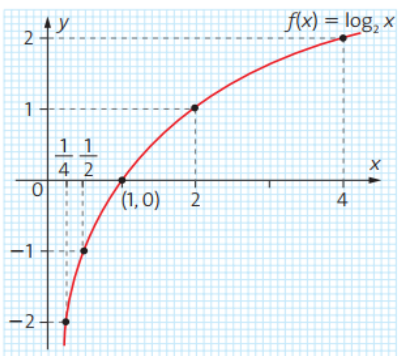


Figura 16: Dante(2013. P. 189)

3. O MÉTODO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Quando este método é bem trabalhado pelo docente, o processo ensino-aprendizagem de noções básicas de funções poderá ser mais atraente e motivador aos alunos, uma vez que a maioria dos alunos apenas se interessa por determinados assuntos da matemática. Esta metodologia facilita na compreensão e interpretação do conteúdo em relação à abordagem do cotidiano exposto no problema e despertará no aprendente uma visão de não apenas memorizar tais noções, mas também de saber utilizá-las em diversas situações em seu cotidiano, bem como despertar uma prática de exploração, dedução e auto avaliação em matemática.

Para Dante(1991. p. 9), "Um problema matemático é qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná- la."

Polya(2006) aborda dois tipos de problemas que são de "determinação" e os de "demonstração". Determinação implica, conforme o autor, a indicação por análise, cálculo ou avaliação, de uma explicação ou indicação exata aplicada sobre uma definição ou descrição das características apresentadas no problema. Já a demonstração é qualquer método capaz de demonstrar a veracidade ou a autenticidade de algum problema, buscando uma ideia de teoria para a questão desejada a se resolver.

Dante(2009) classifica os problemas matemáticos desde exercícios de reconhecimento até problemas emergentes de uma situação real. O mesmo classifica esses como: problemas padrão; problemas de processo ou heurísticos; problemas de aplicação e problemas de quebra-cabeça. Os "problemas padrão" são situações matemáticas, cuja solução está contida no próprio enunciado, tendo apenas de transformar a linguagem usual na linguagem matemática, para que se possa resolvê-lo através de algum algoritmo conhecido.

Em "problemas heurísticos" a solução não está contida no enunciado, exigindo um plano de ação e/ou estratégias para sua resolução. É importante ressaltar que "heurístico" está associado à arte ou à ciência do descobrimento.

Os "problemas de aplicação" retratam situações reais do dia-a-dia, também chamados de situações-problema contextualizadas. Consiste na matematização de uma situação real e geralmente exigem uma pesquisa e levantamento de dados para sua resolução.

Já os "problemas de quebra-cabeça" são desafios. A sua solução depende, quase sempre, de um golpe de sorte sobremaneira como encarar o problema para que se possa perceber algum truque ou regularidade que leve à resolução.

Além destas considerações, temos a principal parte, que é a compreensão do procedimento de Pólya, para deste modo resolvermos e compreendermos melhor as situações-problema em nosso cotidiano. O método chamado "heurístico" proposto pelo autor, é importante para o ensino e aprendizagem porque prioriza-se a possibilidade de desenvolvermos o raciocínio heurístico, ou seja,

> Raciocínio heurístico é aquele que não se considere final e rigoroso, mas apenas provisório e plausível, e que tem por objetivo descobrir a solução do problema que se apresenta. Somos muitas vezes levados a usar o raciocínio heurístico. Temos a absoluta certeza quando chegamos à solução completa, mas frequentemente,

> antes de chegarmos à certeza absoluta, teremos de nos satisfazer com uma estimativa mais ou menos plausível. É possível que precisemos do provisório antes de atingirmos o final. Para chegarmos a uma demonstração rigorosa, é necessário o raciocínio heurístico, assim como andaimes são necessários à construção de um edifício. Polya(2006. p.152)

Pólya destaca que é importante o professor assumir quando necessário à posição de aluno para, desta forma, poder identificar com mais agilidade e adequação quais pontos os alunos possuem maiores dificuldades.

Ressalta,

> Ao procurarmos a solução, podemos variar continuamente o nosso ponto de vista, a nossa maneira de encarar o problema. Temos de mudar de posição de quando em quando. É provável que a nossa concepção de problema seja muito incompleta no princípio; a nossa perspectiva é outra depois de feito algum progresso; ela é ainda mais diferente quando estamos quase a chegar à solução. Polya(2006. p. 4)

Para detalhar melhor as etapas do método heurístico, Pólya aborda:

> Primeiro, temos de compreender o problema, temos de perceber claramente o que é necessário. Segundo, temos de ver como os diversos itens estão inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos a ideia da resolução, para estabelecermos um plano. Terceiro, executamos o nosso plano. Quarto, fazermos um retrospecto da resolução completa, revendo-a e discutindo-a. Polya(2006. p. 4-5)

Fase I: Compreensão do Problema:

Trata-se de entender o que o problema menciona, e saber a finalidade do mesmo, ou seja,

> O aluno precisa compreender o problema, mas não só isto: deve também desejar resolvê-lo. Se lhe faltar compreensão e interesse, isto nem sempre será culpa sua. O problema deve ser bem escolhido. Nem muito difícil nem muito fácil, natural e interessante, e um certo tempo deve ser dedicado à sua apresentação natural e interessante. Polya (2006. p. 5)

Fase II: Estabelecimento de um Plano:

Nesta etapa, o aluno é provocado a tentar formular um plano de ação, ou seja,

> Temos um plano quando conhecemos, pelo menos de um modo geral, quais as contas, os cálculos ou os desenhinhos que precisamos executar para obter a

incógnita. O caminho que vai desde a compreensão do problema até o estabelecimento de um plano, pode ser longo e tortuoso. Realmente o principal feito na resolução de um problema é a concepção da ideia de um plano. Esta ideia pode surgir gradualmente ou, então, após tentativas infrutíferas e um período de hesitação, aparecer repentinamente, num lampejo, como uma "ideia brilhante". A melhor coisa que um professor pode fazer por seu aluno é propiciar-lhe, discretamente, uma ideia luminosa. As indagações e sugestões que passamos a discutir tendem a provocar tal ideia. Polya(2006. p. 7)

Fase III: Execução do Plano:

Neste momento coloca-se em prática todo o processo estabelecido nas fases anteriores. O interesse do aluno e a motivação do professor também são importantes para este passo no processo ensino-aprendizagem. O aluno precisa conhecer todo o problema porque este momento é decisivo visto que qualquer erro implica em falha de todo o processo das quatro fases.

Pólya(2006) afirma que "executar o plano é muito mais fácil, paciência é o de que mais precisa." O aluno necessita analisar rigorosamente quais teorias matemáticas irá precisar para resolver tal problema.

Fase IV: Retrospecto:

Feitas as etapas anteriores, o aluno precisará reanalisar as etapas anteriores. Esse é o processo de verificar se o resultado satisfaz as condições do enunciado.

Até mesmo alunos razoavelmente bons, uma vez chegados à solução do problema e escrita a demonstração, fecham os livros e passam a outros assuntos. Assim fazendo, eles perdem uma fase importante e instrutiva do trabalho da resolução. Se fizerem um retrospecto da resolução completa, reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que levou até este, eles poderão consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar a sua capacidade de resolver problemas. Um bom professor precisa compreender e transmitir a seus alunos o conceito de que problema algum fica completamente esgotado. Resta sempre alguma coisa a fazer. Com estudo e aprofundamento, podemos melhorar qualquer resolução e, seja como for, é sempre possível aperfeiçoar a nossa compreensão da resolução. Polya(2006. p. 12).

Dante(2010) ressalta a importância de se trabalhar com a resolução de problemas em sala de aula, quando tratamos da grande possibilidade que o aluno tem de envolver-se no processo de aprendizagem, desenvolvendo sua autonomia em procurar a solução de um problema, e desse modo, consolidando seu papel de sujeito ativo nesse processo.

> "Buscar a solução de um problema que os desafia é mais dinâmica e motivadora do que a que segue o clássico esquema de explicar e repetir. O real prazer de estudar matemática está na satisfação que surge quando o aluno por si só resolve um problema. Quanto mais difícil, maior a satisfação em resolvê-lo. Um bom problema suscita a curiosidade e desencadeia no aluno um comportamento de pesquisa, diminuindo sua passividade e conformismo." Dante(2010. p.21)

3.1 O papel do professor no trabalho com a resolução de problemas

O papel principal dos professores neste processo de ensino-aprendizagem é desenvolver a autonomia do aluno para que ele tenha produtividade em sua aprendizagem.

Romanatto(2008) defende que a resolução de problemas se apresenta como um dos caminhos mais promissores para o "fazer matemática" dentro da sala de aula. Dentre as práticas educativas atuais, percebemos que este método tem sido êxito em diversos contextos. Para Romanatto(2008), Descartes diz que "Não nos tornaremos matemáticos, mesmo que decoremos todas as demonstrações, se o nosso espírito não for capaz, por si, de resolver qualquer espécie de problema."

O professor precisa fazer com que o aluno classifique os problemas como desafios que lhes permitam construir o conhecimento de conceitos, princípios e procedimentos matemáticos. Neste processo metodológico, o professor deve valorizar os conhecimentos prévios dos alunos no processo de construção do conhecimento. Os alunos, neste processo de aprendizagem, precisam ser desafiados a elaborar seu próprio método estratégico para resolver situações-problema, para despertar novas compreensões e novas habilidades para a aprendizagem em matemática. Os professores devem perceber que é fundamental auxiliar os alunos durante esse processo, o qual exige tempo, prática, dedicação e princípios firmes.

A resolução de problemas na matemática precisa abranger diferentes níveis de ensino na educação matemática, permitindo ao aluno envolver-se no contexto de seus problemas em relação ao meio social, escolar e na prática da cidadania. O professor deve despertar no aluno uma compreensão de que, as ciências do mundo do trabalho estão estreitamente relacionadas ao hábito de resolver quaisquer tipos de problemas. Porém, segundo Vasconcelos e Rego(2010), muitos conteúdos seriam descartados por não terem aplicabilidade concreta e imediata. Por meio deste, vale a pena ressaltar que, o professor precisa ficar atento a qual tipo de problema é mais adequado a um conteúdo, para que facilite e torne o trabalho de resolução de problemas uma prática pedagógica significativa.

Dante(1991) menciona algumas razões pelas quais os professores deveriam refletir e utilizar com mais frequência a aplicabilidade da Resolução de Problemas em sala de aula:

- Resolver problemas faz com que o aluno pense de forma produtiva;
- Desenvolve o raciocínio;
- Ensina o aluno a enfrentar novas situações;
- Torna as aulas mais interessantes e desafiadoras;
- Equipa o aluno com estratégias para resolver problemas e dá condições para que as pessoas possam entender o mundo matematicamente organizado.

O professor deve perceber também a participação ativa do aluno em meio aos problemas de situações do cotidiano e, conforme o aluno for expondo sua forma de pensar, o educador deve fazer seu papel em promover a aprendizagem de modo significativa.

Logo, o professor precisa sempre levar o aluno a alcançar habilidades de fazer argumentos sobre situações, bem como deduções e generalizações para assim possibilitar e trazer uma autonomia consolidada por meio de ações e procedimentos de êxito.

3.2 Aplicações da resolução de problemas envolvendo funções

Nesta seção está trabalhada a aplicação do método de resolução de problemas envolvendo noções básicas de funções, ressaltando a praticidade de leitura e interpretação de problemas, bem como a importância de se utilizar este recurso didático para trabalhar a matemática em sala de aula.

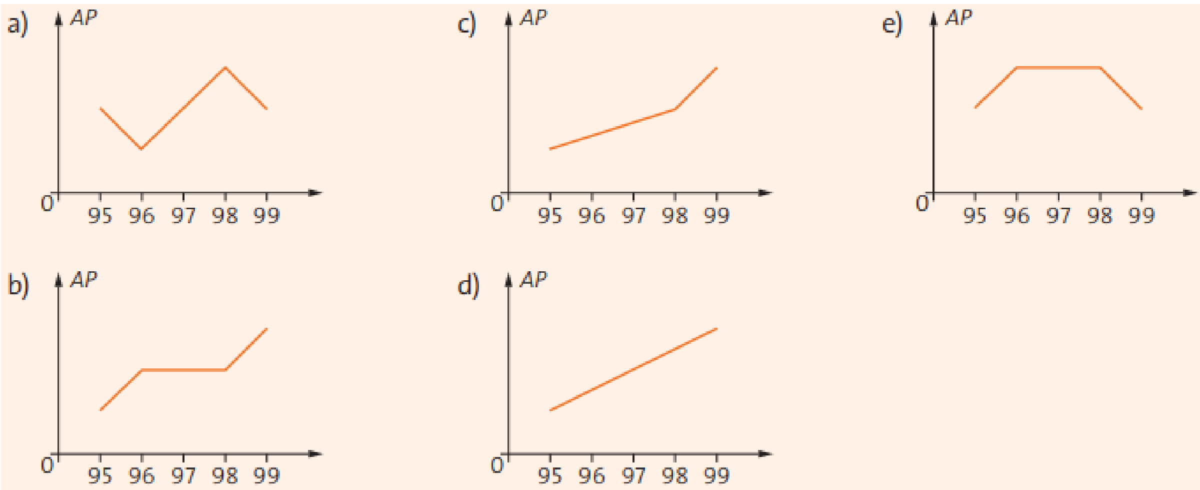
Vejamos quatro aplicações, baseadas em Dante(2011) e Pólya(2006).

Situação-problema 1:

(Enem) O quadro apresenta a produção de algodão de uma cooperativa de agricultores entre 1995 e 1999.

	Safra				
	1995	**1996**	**1997**	**1998**	**1999**
Produção (em mil toneladas)	30	40	50	60	80
Produtividade (em kg/hectare)	1500	2500	2500	2500	4000

O gráfico que melhor representa a área plantada (*AP*) no período considerado é:



Passo 1: Compreendendo o problema:

O que é dado no problema? São dadas duas grandezas em cada ano considerando: a produção, em milhares de toneladas, e a produtividade, em quilogramas por hectare (kg/hectare). O que se pede? O melhor gráfico para representar a variação da área plantada ao longo dos cinco anos considerados.

Passo 2: Elaborando um plano

Devemos usar as informações da tabela para calcular a área plantada. Como temos a produção em milhares de toneladas e a produtividade em quilogramas por hectare, será possível obter a área plantada em hectares. Para fazer isso, precisamos compreender a relação entre as grandezas dadas: isso pode ser feito ao observar as unidades das grandezas. Assim, percebemos que a produtividade é a divisão da produção pela área plantada. Dessa relação, obteremos a área plantada que precisamos para compor o traçado do gráfico. Primeiro, vamos igualar as unidades, escrevendo a produção em quilogramas. Como uma tonelada equivale a 1000 quilogramas, então 1000 toneladas equivalem a 1 milhão de quilogramas.

Passo 3: Executando o plano

De acordo com nossa estratégia, podemos pensar na relação:

$$\text{produtividade} = \frac{produção}{área\ plantada}$$

e, portanto,

$$\text{área plantada} = \frac{produção}{produtividade}.$$

Assim, vamos criar uma nova linha na tabela fornecida, na qual dividiremos os valores dados. Vamos também escrever os valores da produção em quilogramas, lembrando que 1000 toneladas = 10^6 quilogramas.

	Safra				
	1995	**1996**	**1997**	**1998**	**1999**
Produção (em kg)	$30 \cdot 10^6$	$40 \cdot 10^6$	$50 \cdot 10^6$	$60 \cdot 10^6$	$80 \cdot 10^6$
Produtividade (em kg/hectare)	1500	2500	2500	2500	4000
Área plantada (*AP*) (em hectares)	$\frac{30 \cdot 10^6}{1500}$ = 20 mil	16 mil	20 mil	24 mil	20 mil

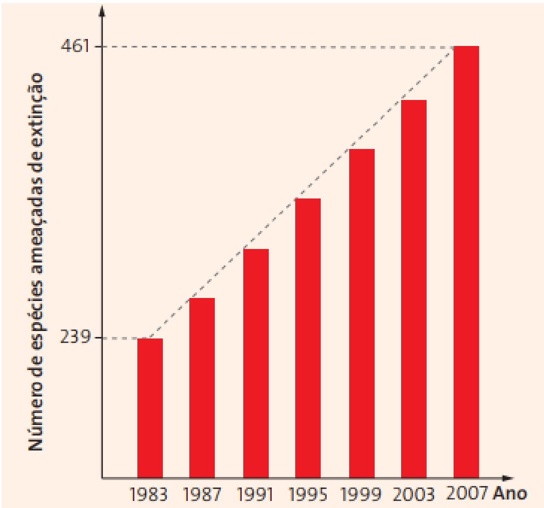
Analisando a nossa linha com valores da área plantada, percebemos que de 1995 a 1996 ela é decrescente, de 1996 a 1998 ela é crescente, e de 1998 a 1999 é novamente decrescente.

Passo 4: Retrospecto

O gráfico escolhido como possível resposta tem um valor mínimo em 1996 e um valor máximo em 1998. Analisando os valores de AP obtidos, verificamos que a menor área plantada ocorre em 1996 e a maior, em 1998. A escolha do gráfico da alternativa **a** nessas condições foi a adequada.

Situação-problema 2:

(Enem) O gráfico abaixo, obtido a partir de dados do Ministério do Meio Ambiente, mostra o crescimento do número de espécies da fauna brasileira ameaçadas de extinção.



Se mantida pelos próximos anos a tendência de crescimento mostrada no gráfico, o número de espécies ameaçadas de extinção em 2011 será igual a:

a)465 b)493 c)498 d)538 e)699

Passo 1: Compreendendo o problema

O que é dado no problema? Um gráfico de barras com o número de espécies em extinção de 1983 a 2007. O que se pede? O número de espécies em extinção em 2011.

Passo 2: Elaborando um plano

Devemos usar o gráfico do enunciado para fazer a projeção do número de espécies em extinção em 2011. É essencial perceber esse gráfico de função afim e, portanto, devemos obter a taxa de variação dessa função.

Passo 3: Executando o plano

Precisamos obter a lei da função afim que relaciona o número de espécies em extinção com o ano. Do gráfico, temos que $f(1983) = 239$ e $f(2007) = 461$. Genericamente, uma função afim é do tipo: $f(x) = ax + b$. Vamos obter a taxa de variação a dessa função fazendo:

$$a = \frac{f(2007) - f(1983)}{2007 - 1983} = \frac{461 - 239}{2007 - 1983} = \frac{222}{24} = \frac{37}{4}.$$

Então, se há $\frac{37}{4}$ espécies ameaçadas de extinção por ano, então a cada 4 anos temos 37 novas espécies ameaçadas de extinção. Se em 2007 temos 461 espécies ameaçadas de extinção, então 4 anos depois (em 2011) teríamos $461 + 37 = 498$ espécies ameaçadas de extinção.

Passo 4: Retrospecto

Sabemos que a sequência das imagens do gráfico será de valores gerados por instrumentos iguais (Δy). Como temos 7 elementos no domínio, temos 6 incrementos em x e, portanto, 6 incrementos em y. Os valores de y variam de $y_1 = 239$ até $y_7 = 461$, ou seja, 6 incrementos em y geram uma variação de 239 até 461. Assim, a diferença entre y_7 e y_1 equivale a 6 incrementos:

$$6\Delta y = 461 - 239 \rightarrow 6\Delta y = 222 \rightarrow \Delta y = 37.$$

Portanto, para obter y_8, basta adicionar 37 ao valor y_7:

$$y_8 = 461 + 37 = 498.$$

Isso verifica a resposta.

Situação-problema 3:

(Enem) Um boato tem um público-alvo e alastra-se com determinada rapidez. Em geral, essa rapidez é diretamente proporcional ao número de pessoas desse público que conhecem o boato e diretamente proporcional também ao número de pessoas que não o conhecem. Em outras palavras, sendo R a rapidez de propagação, P o público-alvo e x o número de pessoas que conhecem o boato, tem-se: $R(x) = k \cdot x \cdot (P - x)$, onde k é uma constante positiva característica do boato. Considerando o modelo acima descrito, se o público-alvo é de 44 mil pessoas, então a máxima rapidez de propagação ocorrerá quando o boato for conhecido por um número de pessoas igual a:

a) 11000 b) 22000 c) 33000 d) 38000 e) 44000

Passo 1: Compreendendo o problema

O que é dado no problema? É dada uma fórmula que relaciona a rapidez de propagação do boato com o número de pessoas que o conhecem, para determinado público-alvo. O que se pede? Um boato se espalha de forma devagar quando poucos o conhecem, e a velocidade de propagação do boato vai aumentando conforme mais gente o conheça e passe a propagá-lo. Entretanto, se muitas pessoas já sabem do boato, a sua velocidade de propagação também vai ser baixa, pois tanta gente sabe dele que fica mais raro encontrar quem não saiba. Assim, existe determinado número de pessoas que torna a velocidade de propagação máxima. Queremos determinar qual é esse número de pessoas.

Passo 2: Elaborando um plano

Observando a fórmula dada, verificamos que ela é uma função quadrática:

$$R(x) = k \cdot x \cdot (P - x) \rightarrow R(x) = -kx^2 + kPx\ .$$

Sabemos que, em funções quadráticas, o máximo (ou o mínimo) valor ocorre no vértice. Assim, para obter o valor que maximiza a rapidez de propagação do boato, basta obter o valor da abscissa do vértice, ou seja, de X_v.

Passo 3: Executando o plano

Para um público-alvo de 44000 pessoas, a função quadrática será:

$$R(x) = kx(44000 - x) = -kx^2 + 44000kx.$$

Então, temos $a = -k$ e $b = 44000k$. O X_v é dado por $X_v = \frac{-b}{2a}$. Assim:

$$X_v = \frac{-(44000k)}{2(-k)} = 22000.$$

Portanto, a quantidade de pessoas que maximiza a propagação de boato, neste caso, é 22000.

Passo 4: Retrospecto

Substituindo $x = 22000$ na equação dada, com P = 44000, temos:

$$R(22000) = k \cdot 22000 \cdot (44000 - 22000) = 484000000k.$$

Para verificar se ele é o máximo, vamos calcular também $R(21999)$ e $R(22001)$ e comparar com $R(22000)$. Observe que propositalmente escolhemos o antecessor e o sucessor de $x = 22000$:

$$R(21999) = k \cdot 21999 \cdot (44000 - 21999) = 483999999k < 484000000k.$$
$$R(22001) = k \cdot 21001 \cdot (44000 - 22001) = 483999999k < 484000000k.$$

Ambos são menores que $R(22\ 000)$. Como $R(x)$ é uma função quadrática cujo gráfico é uma parábola (e possui apenas um valor máximo), então $x = 22\ 000$ é o valor que maximiza $R(x)$. Convém observar aqui que a parábola tem concavidade voltada para baixo, visto que $a = -k < 0$.

Isso basta para verificar a resposta.

Situação-problema 4:

(Uneb-BA) A expressão $P(t) = k \cdot 2^{0,05t}$ fornece o número P de milhares de habitantes de uma cidade, em função do tempo t, em ano. Se em 1990 essa cidade tinha 300.000 habitantes, quantos habitantes, aproximadamente, espera-se que ela tenha no ano 2000?

a) 352000
b) 401000
c) 423000
d) 439000
e) 441000

Passo 1: Compreendendo o problema

O que é dado no problema? É dada uma função exponencial que relaciona o número esperado de habitantes da cidade com o ano: $P(t) = k \cdot 2^{0,05t}$. Também é dada a população da cidade em 1990: 300 mil habitantes. O que se pede? O número esperado de habitantes na cidade citada no ano 2000.

Passo 2: Elaborando um plano

A função dada relaciona a população esperada da cidade com o ano. Entretanto, a função não é inteiramente conhecida, pois existe uma constante k que precisaremos determinar para conhecer a função e depois obter a população no ano 2000. Para obter a constante k, usaremos um dado conhecido: em 1990 a população era de 300 mil habitantes. Então, uma primeira estratégia a ser seguida pode ser: 1°) obter k usando os dados conhecidos de 1990; 2°) substituir o valor de K na função para conhecê-la; 3°) usar a função para estimar a população da cidade em 2000.

Passo 3: Executando o plano

Se em 1990 a população era de 300 mil habitantes, temos P(1990) = 300 000. Então:

$$300000 = k \cdot 2^{0,05 \cdot 1990} \rightarrow 300000 = k \cdot 2^{99,5} \rightarrow k = \frac{300000}{2^{99,5}}.$$

Não há necessidade de desenvolver melhor o valor de k, uma vez que seu valor está sendo determinado apenas para que a função exponencial seja conhecida completamente. Vamos substituí-los na função:

$$P(t) = \frac{300000}{2^{99,5}} \cdot 2^{0,05t}.$$

Com a função completamente determinada, podemos agora obter P(2000), que é a população esperada no ano 2000.

$$P(2000) = \frac{300000}{2^{99,5}} \cdot 2^{0,05t \cdot 2000} = \frac{300000}{2^{99,5}} \cdot 2^{100}$$

Neste momento, observe a ocorrência de uma das propriedades da potenciação – divisão de potências de mesma base:

$$\frac{2^{100}}{2^{99,5}} = 2^{100-99,5} = 2^{0,5}.$$

Assim, temos $P(2000) = 300000 \cdot 2^{0,5}$. Percebe-se que potências com expoentes racionais são raízes: $2^{0,5} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$. Agora temos P(2000) = 300000$\cdot\sqrt{2}$. Estimamos $\sqrt{2}$ como decimal 1,41, temos:

$$P(2000) = 300000 \cdot 1{,}41 = 423000.$$

Então, em 2000, espera-se que a população seja de, aproximadamente, 423000 habitantes.

Passo 4: Retrospecto

Vamos resolver essa questão de outra maneira:

$$P(1990) = k \cdot 2^{0,05 \cdot 1990} = k \cdot 2^{99,5} \rightarrow k = \frac{P(1990)}{2^{99,5}}.$$

$$P(2000) = k \cdot 2^{0,05 \cdot 2000} = k \cdot 2^{100}.$$

Substituindo k na expressão anterior, obtemos:

$$P(2000) = \frac{P(1990)}{2^{99,5}} \cdot 2^{100} = 300000 \cdot \frac{2^{100}}{2^{99,5}} = 300000 \cdot 2^{0,5} = 300000 \cdot 1{,}41 = 423000.$$

Portanto, isso confirma o resultado obtido.

A seguir são apresentados mais quatro problemas mais recentes, bem como suas resoluções por meio do método de Pólya(2006).

Problema 1

Um aluno do ensino médio, João, foi à loja de eletrodomésticos e percebeu, ao conversar com seu amigo Pedro, que era gerente da loja e organizava os dados no computador, que o lucro $f(x)$ de um eletrodoméstico A é obtido em função da quantidade x de unidades vendidas desse produto por meio da relação $f(x) = 20x + 10$. O gerente queria saber, por meio do programa do computador, quantos eletrodomésticos A precisava vender para obter um lucro de R$210,00. O aluno João, que já havia estudado Função Afim no 1° bimestre do 1° ano do ensino médio, ficou interessado pela situação e resolveu o problema, obtendo a quantidade x de eletrodomésticos A igual a:

a)8 b)9 c)10 d)11 e)12

Passo 1: Compreendendo o problema

O que é dado no problema? É dada uma função afim que relaciona o lucro $f(x)$ de um eletrodoméstico A com a quantidade x de unidades vendidas desse produto. O que se pede? O número x de unidades que devem ser vendidas para se obter um lucro de R$210,00.

Passo 2: Elaborando um plano

A função f é inteiramente conhecida, e com isso, pode-se atribuir o valor 210 à $f(x)$ na relação entre lucro e quantidade de vendas $f(x) = 20x + 10$ e isolar o x, formando, desse modo, uma equação de 1° grau. Basta encontrar o valor de x e teremos a resposta, que é a quantidade de vendas exata para um lucro de R$210,00.

Passo 3: Executando o plano

Se $f(x) = 210$, então:

$$210 = f(x) = 20x + 10 \rightarrow 20x = 210 - 10 = 200 \rightarrow x = \frac{200}{20} = 10.$$

Percebe-se com isso que a quantidade de vendas adequada para o lucro de R$210,00 são 10 vendas. Portanto, a resposta correta é a alternativa "**c**".

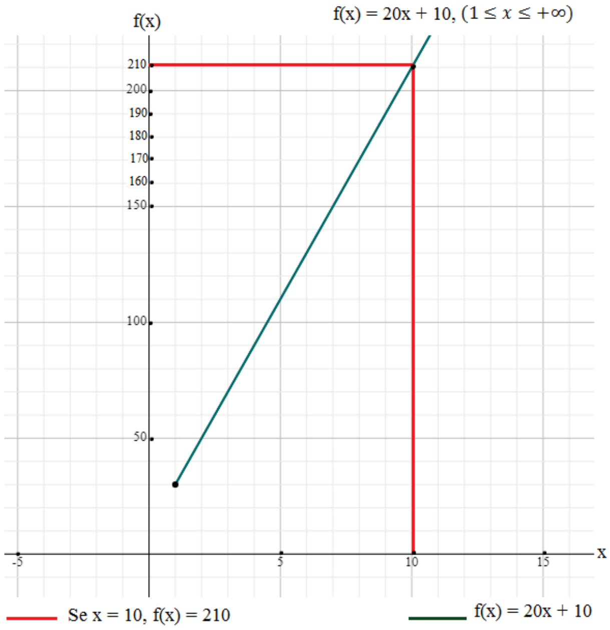
Passo 4: Retrospecto

Podemos fazer uma verificação testando se $x = 10$ é verdadeira para a igualdade $f(x) = 210$ quando $f(x) = 20x + 10$. Fazendo isso, temos:

$$210 = 20 \cdot 10 + 10 = 200 + 10 = 210$$

que é uma relação verdadeira. Portanto, $x = 10$ satisfaz às condições do enunciado.

Podemos também reanalisar essa resolução quando compreendemos e interpretamos o gráfico da função $f(x) = 20x + 10$, considerando o Domínio(f) como sendo $[1, +\infty)$ e cuja Imagem(f) é $[30, +\infty)$. Ao analisarmos o gráfico da função, é importante identificarmos a relação de $f(x) = 210$ com $x = 10$ no respectivo gráfico.



Geogebra Geometria e Paint – 10/06/2020

Problema 2

O aluno Pedro foi ao parque de diversões com finalidade de passear pela montanha russa com sua família. Em certo momento, ao andar no carro dessa montanha russa, em um determinado percurso de A até B, o aluno Pedro percebeu um contexto matemático o qual se relacionava com a função quadrática. Esse percurso da montanha russa se relaciona com a função $y = -(1/2)x^2 + 5x + 6$ no Domínio(f) em $(0 \leq x \leq 20)$, onde y é a altura em metros e x é o tempo em segundos após o carro de montanha russa iniciar tal percurso.

Nessas condições, o tempo em que o carro de montanha russa atingiu a altura máxima no percurso de A até B, em segundos, foi:

a)1 b)2 c)3 d)4 e)5

Passo 1: Compreendendo o problema

O que é dado no problema? É dada a função quadrática $y = -(1/2)x^2 + 5x + 6$ que relaciona a altura (y) com o tempo (x) em que o carro de montanha russa percorreu durante certo momento de A até B. O que se pede? O tempo em segundos em que o carro de montanha russa atinge a altura máxima.

Passo 2: Elaborando um plano

A função quadrática é inteiramente conhecida, e com isso, pode-se encontrar o ponto de máximo desta função, já que o coeficiente de x^2 é negativo e sua concavidade está voltada para baixo. O ponto de máximo ocorre no vértice da parábola (x_v, y_v) em que

$$x_v = \frac{-b}{2a} \quad \text{e} \quad y_v = \frac{-\Delta}{4a}.$$

O ponto de máximo corresponde ao momento em x segundos em que o carro de montanha russa atinge a altura máxima em y metros. Com isso, basta encontrar as coordenadas do vértice da parábola e encontraremos o resultado.

Passo 3: Executando o plano

Em $y = -(1/2)x^2 + 5x + 6$, o vértice da parábola (x_v, y_v) pode ser encontrado fazendo:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-5}{2\cdot(-(1/2))} = \frac{-5}{-1} = 5 \quad \text{e}$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-[25 - 4\cdot(-1/2)\cdot 6]}{4\cdot(-1/2)} = \frac{-[25+12]}{-2} = \frac{-37}{-2} = 18{,}5\cdot$$

Percebemos com isso, que o tempo em que o carro de montanha russa atinge a altura máxima são 5 segundos, e consequentemente, a altura máxima é de 18,5 metros. Logo, a alternativa correta é a **e**.

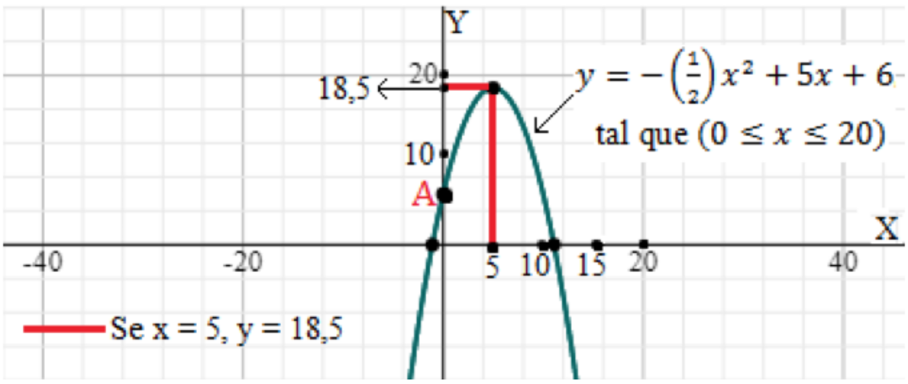
Passo 4: Retrospecto

Podemos fazer uma verificação testando se $x = 5$ é verdadeira para a igualdade de $y = -(1/2)x^2 + 5x + 6$ quando $y = 18{,}5$. Fazendo isso, temos:

$$18{,}5 = -(1/2).(5)^2 + 5\cdot 5 + 6 = -(1/2).25 + 25 + 6 = (1/2).25 + 6$$

que é verdadeira. Assim, $x = 5$ satisfaz às condições do enunciado.

Podemos também reanalisar essa resolução através do gráfico da função $y = -(1/2)x^2 + 5x + 6$. É importante identificarmos a relação de $y = 18{,}5$ com $x = 5$ no respectivo gráfico.



Geogebra Geometria e Paint – 10/06/2020

Problema 3

Na sismologia, utiliza-se atualmente como principal escala, a Escala de Magnitude de Momento(MMS) a qual é mais precisa que a escala de Richter. A escala MMS leva em conta a área de ruptura da falha geológica onde ocorrem o terremoto e o deslocamento médio dessa área, e também essa escala é logarítmica de base 10. A escala MMS é simbolizada por M_w sendo definida como um número adimensional:

$$M_w(M_0) = \frac{2}{3} \cdot log_{10}(M_0) - 10{,}7$$

em que M_0 é o momento sísmico, onde a M_w possui unidade dina·cm. (Ver Roballo(2014))

Suponha que em um local A tenha acontecido um terremoto de magnitude $M_w = 5{,}3$. Por meio de M_w, pode-se afirmar que o momento sísmico M_0 do terremoto no local A foi, em dina·cm, igual a:

a)10^{21} b)10^{22} c)10^{23} d)10^{24} e)10^{25}

Passo 1: Compreendendo o problema

O que é dado no problema? É dada uma função logarítmica que relaciona a Escala de Magnitude do Momento M_w com o momento sísmico M_0. O que se pede? O momento sísmico M_0 do terremoto no local A.

Passo 2: Elaborando um plano

A função M_w é inteiramente conhecida, e com isso, pode-se atribuir o valor da magnitude $M_w = 5{,}3$ à função $M_w(M_0) = \frac{2}{3} \cdot log_{10}(M_0) - 10{,}7$ e encontrar o momento sísmico M_0 deste terremoto. Sabemos que M_w é uma função logarítmica de base 10. Com isso, basta aplicar a definição e propriedade do logaritmo e também a operação básica com frações, e assim encontraremos o resultado.

Passo 3: Executando o plano

Atribuindo $M_w = 5{,}3$ à função $M_w(M_0) = \frac{2}{3} \cdot log_{10}(M_0) - 10{,}7$, isolamos o M_0:

$$5{,}3 = \frac{2}{3} \cdot log_{10}(M_0) - 10{,}7 \rightarrow 5{,}3 + 10{,}7 = \frac{2}{3} \cdot log_{10}(M_0) \rightarrow 16 = \frac{2}{3} \cdot log_{10}(M_0)$$
$$\rightarrow log_{10}(M_0) = 16 \cdot \frac{3}{2} = 24 \rightarrow 10^{24} = M_0.$$

Portanto, $M_0 = 10^{24}$. Percebe-se com isso que a alternativa correta é a **d**.

Passo 4: Retrospecto

Podemos fazer uma verificação testando se $M_0 = 10^{24}$ é verdadeira para a igualdade de $M_w(M_0) = \frac{2}{3} \cdot log_{10}(M_0) - 10{,}7$ quando $M_w = 5{,}3$. Fazendo isso, temos:

$$5{,}3 = \frac{2}{3} \cdot log_{10}(10^{24}) - 10{,}7 = \frac{2}{3} \cdot 24 \cdot log_{10}10 - 10{,}7 = 16 \cdot 1 - 10{,}7 = 5{,}3$$

que é verdadeira. Sendo assim, $M_0 = 10^{24}$ satisfaz às condições do enunciado.

Problema 4

Os químicos usam um número denotado por pH (potencial hidrogêniônico) para descrever quantitativamente a acidez, neutralidade ou basicidade de uma solução aquosa. Por definição, $pH(H^+) = -log_{10}(H^+)$, em que H^+ é a concentração dos íons hidrogênio, em mols por litro, na solução. Se o pH é menor que 7 indica que a solução é ácida, ou melhor, quanto mais próximo de zero, mais ácida é a solução. Se o $pH = 7$, a solução é neutra. Se o pH é maior que 7, indica a alcalinidade da solução, ou melhor, quanto mais distante de 7, mais básica é a solução. Roballo(2014)

A tabela abaixo informa a concentração dos íons hidrogênio H^+ de algumas substâncias.

Substância	H^+
Vinagre	10^{-2}
Refrigerante tipo cola	$10^{-2,5}$
Café	10^{-5}
Água pura	10^{-7}
Sabonete	10^{-10}

Por meio dessas informações, podemos afirmar que a substância mais ácida da tabela acima é:

a)Vinagre b)Refrigerante tipo cola c) Café d)Água pura e)Sabonete

Passo 1: Compreendendo o problema

O que é dado no problema? É dada uma função logarítmica que relaciona a concentração dos íons hidrogênio H^+ com o potencial hidrogêniônico pH. O que se pede? A substância mais ácida dentre aquelas citadas na tabela do enunciado.

Passo 2: Elaborando um plano

A função pH é inteiramente conhecida, e com isso, podemos atribuir os valores de H^+ de cada substância da tabela à função $pH(H^+) = -log_{10}(H^+)$ e analisarmos o comportamento da mesma. Sabemos que pH é uma função logarítmica de base 10. Com isso, podemos comparar os valores do pH de cada substância e encontrar a alternativa correta.

Passo 3: Executando o plano

É importante analisarmos o comportamento da função pH para cada substância. Atribuindo os valores de H^+ de cada substância à função $pH(H^+) = -log_{10}(H^+)$ e encontrando os valores do pH de cada substância aplicando a definição e a propriedade de logaritmo, temos:

Vinagre:

$$pH(10^{-2}) = -log_{10}(10^{-2}) = (-2) \cdot (-log_{10}10) = (-2) \cdot (-1) = 2$$

Refrigerante tipo cola:

$$pH(10^{-2,5}) = -log_{10}(10^{-2,5}) = (-2,5) \cdot (-log_{10}10) = (-2,5) \cdot (-1) = 2,5$$

Café:

$$pH(10^{-5}) = -log_{10}(10^{-5}) = (-5) \cdot (-log_{10}10) = (-5) \cdot (-1) = 5$$

Água pura:

$$pH(10^{-7}) = -log_{10}(10^{-7}) = (-7) \cdot (-log_{10}10) = (-7) \cdot (-1) = 7$$

Sabonete:

$$pH(10^{-10}) = -log_{10}(10^{-10}) = (-10) \cdot (-log_{10}10) = (-10) \cdot (-1) = 10$$

Com isso, percebemos que o vinagre é a substância com maior acidez porque seu pH é 2, sendo o menor pH das substâncias mencionadas na tabela do enunciado.

Passo 4: Retrospecto

Podemos fazer uma verificação testando se $H^+ = 10^{-2}$ é verdadeira para a igualdade de $pH(H^+) = -log_{10}(H^+)$ quando $pH(10^{-2}) = 2$. Fazendo isso, temos:

$$2 = -log_{10}(H^+) = -log_{10}(10^{-2}) = (-2) \cdot (-log_{10}10) \rightarrow 2 = (-2) \cdot (-1) = 2$$

que é verdadeira. Consequentemente, $H^+ = 10^{-2}$ satisfaz às condições do enunciado.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Um dos principais objetivos do ensino de matemática é fazer o aluno pensar produtivamente e para isso nada melhor do que apresentar situações-problema que o envolvam, o desafiem, e o motivem a querer resolvê-las. Dante(2010).

Este trabalho foi feito com o objetivo de propor esses estudos e reflexões para percebermos a importância da resolução de problemas para o trabalho do professor em sala de aula. Trata-se de uma estratégia de identificar os possíveis pontos de dificuldades nos alunos no ensino da matemática. Percebe-se que Funções é atualmente um dos assuntos essenciais para a formação do currículo matemático do ensino fundamental e médio, porque além de despertar no aluno uma visão ampla do conteúdo por meio da resolução de problemas, desperta uma grande possibilidade para a resolução da maioria dos problemas em que passamos em diferentes situações, seja pessoal, financeira, ambiental, da saúde ou social. Além disso, podemos perceber a importância da compreensão de Funções para alunos que pretendem iniciar cursos superiores na área das ciências exatas como por exemplo, engenharias civil, elétrica, ambiental e mecânica, arquitetura, ITA(Instituto Tecnológico Aeronâutico), Administração, Análise de Sistemas e Matemática Computacional para construção de softweres.

Espera-se que este trabalho sirva de reflexão de um recurso metodológico significativo e influenciador da manutenção da aprendizagem na educação matemática. Também se espera que não desfrutem do uso desta proposta metodológica apenas em sala de aula, mas também em outros ambientes escolares, além de aplicações em ambientes em aulas de campo. Ressalto a importância de também considerar e utilizar esta metodologia em outros conteúdos da matemática, desfrutando suas abordagens e ligações a diferentes temas. Percebe-se possibilidades de relacionar o conteúdo abordado aos temas transversais, como por exemplo ao meio ambiente e o consumo. A resolução de problemas estabelece uma relação constante e importante entre o homem e seu meio social, econômico, escolar e moral. Educar o aluno matematicamente é um processo desafiador, e cabe ao professor manter a resiliência e determinação no processo de ensino e aprendizagem. Logo, "o maior desafio da educação contemporânea é um ensino que prepare o ser humano para a vida e a diversidade que nela se apresenta". Dante(2010. p. 18).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigo apresentado ao Programa de Desenvolvimento Educacional do Paraná – PDE, da Secretaria de Estado da Educação do Paraná, intitulado "**A metodologia da Resolução de Problemas: Uma proposta de estudo envolvendo razão, proporção e regra de três, nos anos finais do Ensino Fundamental**", de Cláudia Adriana Zanini, Barração – PR, 2014.

Brasil, **Parâmetros Curriculares Nacionais: 3° e 4° ciclos do Ensino Fundamental: Matemática.** Brasília/DF: MEC/SEF, 1998.

Brasil, Ministério da Educação. Programa **Gestão da Aprendizagem Escolar – Gestar II.** Brasília: Secretaria de Educação Básica, 2008.

Caraça, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da matemática**. Gradiva, 2000.

Dante, Luiz Roberto. **Didática da resolução de problemas de matemática**. 3ª ed. São Paulo: Editora Ática, 1991.

Dante, Luiz Roberto. **Formulação e resolução de problemas de matemática**. São Paulo: Ática. 2009.

Dante, Luís Roberto. **Formulação e Resolução de Problemas de Matemática Teoria e Prática**. 1° ed. São Paulo: Ática, 2010.

Dante, Luiz Roberto. Matemática: **Contexto & Aplicações** / Luiz Roberto Dante. – São Paulo: Ática, 2011. 1° ano. (5° ed.).

Dante, Luiz Roberto. Matemática: **Contexto & Aplicações** / Luiz Roberto Dante. – São Paulo: Ática, 2013. 1° ano. (2° ed.).

Dissertação de mestrado da UNESP/Campus de Bauru, intitulada **A Metodologia de Resolução de Problemas: concepções e práticas pedagógicas de professores de matemática do ensino fundamental**. Julyette Priscila Redling, Bauru, 2011.

Eves, H. **Introdução à história da matemática**; tradução Higyno H. Domingues. Campinas: Unicamp, 2004.

Fourier, Joseph BJ. **Theorie analytique de la chaleur** Chez Firmin Didot, père et fils, 1822.

Huanca, R. R. H. **A resolução de problemas no processo ensino aprendizagem avaliação de matemática na e além da sala de aula.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro (SP), 2006.

Lara, Wanderson Mendes. Monografia da UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ, intitulada **UM ESTUDO SOBRE A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICA NA 2ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO**. Medianeira-PR, 2012.

Mendes, Maria Helena Monteiro. **O Conteúdo de Função: Aspectos históricos e dificuldades apresentadas por alunos na transição do segundo para o terceiro grau.** Dissertação de mestrado. PUC: Rio de Janeiro, 1994.

Nanci de Oliveira. Dissertação de mestrado intitulada **Conceito de Função: Uma Abordagem do Processo Ensino-Aprendizagem**. PUC-SP, 1997.

Paiva, Jussara Patrícia Andrade Alves; RÊGO, Rogéria Gaudêncio. **Resolução de problemas no processo ensino-aprendizagem de Matemática**, 2009.

Pólya, George. **A arte de resolver problemas**/ G. Polya; [tradução Heitor Lisboa de Araújo]. – Rio de Janeiro: Interciência, 2006.Tradução de: How to solve it: a new aspect of mathematical method. 2006.

Roballo, Murilo Sérgio. **Aplicações de funções exponenciais e logarítmicas.** Dissertação de mestrado. Universidade de Brasília, 2014.

Romanatto, M. C. **O livro didático:** alcances e limites, 2008.
Disponível em: www.sbempaulista.org.br/epem/anais/mesas_redondas/mr19Mauro.doc
Acesso em 10 jan. 2020.

Silva, Solange Pinto. Monografia intitulada **Um Estudo sobre Criação e Resolução de Problemas**. Universidade Estadual de Goiás, Jussara-GO, 2013.

Soares, Maria Teresa Carneiro; Pinto, Neuza Bertoni. **Metodologia da Resolução de Problemas**. Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), 2001.
Disponível em:
http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_24/metodologia.pdf
Acessado em 10/05/2020.

Schoenfeld, Alan. ***Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas?.*** In: ABRANTES, P.; LEAL, L. C.; PONTE J. P. (org.). *Investigar para aprender matemática.* Lisboa: Projeto MPT e APM. 2008.

Vasconcelos, M. B. F.; REGO, R. G. **A Contextualização como recurso para o ensino e aprendizagem da matemática.** VI ENCONTRO PARAIBANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. **Anais...** Monteiro/PB – 09, 10 e 11 de novembro, 2010.