

Dêivid Rodrigo da Silva

**Efeito Casimir Fermiônico na Conjectura de
Violação da Simetria de Lorentz do Tipo
Horava-Lifshitz**

Brasil

Setembro - 2019

Dêivid Rodrigo da Silva

Efeito Casimir Fermiônico na Conjectura de Violação da Simetria de Lorentz do Tipo Horava-Lifshitz

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba como requisito para a conclusão do Curso de Mestrado em Física.

Universidade Federal da Paraíba – UFPB

Programa de Pós-Graduação em Física

Orientador: Eugênio Ramos Bezerra de Mello

Brasil

Setembro - 2019

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586e Silva, Deivid Rodrigo da.

Efeito Casimir Fermiônico na Conjectura de Violação da
Simetria de Lorentz do Tipo Horava-Lifshitz / Deivid
Rodrigo da Silva. - João Pessoa, 2019.
80 f. : il.

Orientação: Eugênio Ramos Bezerra de Mello Mello.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Física. 2. Efeito Casimir. 3. Horava-Lifshitz. 4.
Violação de Lorentz. 5. Equação de Dirac. 6. Sacola do
MIT. I. Mello, Eugênio Ramos Bezerra de Mello. II.
Título.

UFPB/BC

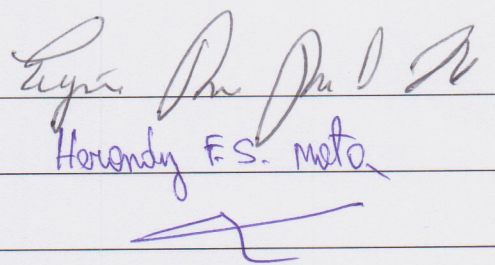
Ata da Sessão Pública da Defesa de
Dissertação de **Mestrado** do aluno **Deivid
Rodrigo da Silva**, candidato ao Título de
Mestre em Física na Área de Concentração
Física das Partículas Elementares e Campos.

Aos vinte e dois dias do mês de julho do ano de dois mil e dezenove, às 14:00, na sala de reuniões do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para examinar o candidato ao grau de Mestre em Física na área de Física das Partículas Elementares e Campos, **Deivid Rodrigo da Silva**. A comissão examinadora composta pelos professores doutores: Eugênio Ramos Bezerra de Mello (DF/UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, Herondy Francisco Santana Mota (DF/UFPB) e Azadeh Mohammadi (UFPE). Dando início aos trabalhos, o Prof. Eugênio Ramos Bezerra de Mello comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra o candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de dissertação intitulado "*Efeito Casimir fermiônico na conjectura de violação da simetria de Lorentz do tipo Horava-Lifhitz*". Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora que emitiu o seguinte parecer: "**aprovado**". Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Mestre em Física na forma da lei. E para constar, eu, Danilo Wilson Lemos Menezes, lavrei esta ata que vai assinada por mim e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, **22 de julho de 2019**.

Prof. Dr. Eugênio Ramos Bezerra de Mello
Orientador - UFPB

Prof. Dr. Herondy Francisco Santana Mota
UFPB

Profa. Dra. Azadeh Mohammadi
UFPE



The block contains three handwritten signatures in blue ink, each written over a horizontal line. The first signature is 'Eugênio R. B. de Mello', the second is 'Herondy F.S. Mota', and the third is 'Azadeh Mohammadi'.

Agradecimentos

A realização desse trabalho só foi possível graças ao apoio de familiares, amigos, professores e dos gigantes da Física que pavimentaram as estradas que nós, estudantes e pesquisadores, desbravamos. Um agradecimento especial à minha mãe, Joseilda Maria da Silva, por me incentivar e me ajudar em todos os momentos de dificuldade. Sou imensamente grato a orientação do Prof. Eugênio Ramos Bezerra de Melo, que realizou muito bem seu papel como educador, estando sempre disponível para discutir o trabalho por nós desenvolvido. Sou grato a outros professores, que no passado, perceberam meu interesse pela Física e Matemática e me incentivaram. Entre esses educadores meus agradecimentos maiores vão ao Prof. Paulo Peixoto e a Prof.^a Valéria Pimental.

Esse trabalho só foi possível graças ao auxílio da CAPES, que fomenta pesquisa em todo o país e ajuda milhares de estudantes a realizar seus sonhos de se tornarem pesquisadores e contribuir de alguma forma com o desenvolvimento do conhecimento humano.

“Qual é a diferença entre um dragão invisível, incorpóreo, flutuante, que cospe fogo atômico, e um dragão inexistente?”
(Carl Sagan, O mundo assombrado pelos demônios)

Resumo

Nessa Dissertação analisamos as consequências da violação de Lorentz no efeito Casimir fermiônico. Nesse sentido, adotamos a conjectura de Horava-Lifshitz, a qual apresenta de forma explícita uma assimetria entre as variáveis temporal e espaciais. Também adotamos o campo fermiônico sem massa. O efeito Casimir é construído admitindo que o campo fermiônico esteja confinado entre duas grandes placas paralelas. Esse confinamento é implementado através da condição de sacola do MIT nas referidas placas. Encontramos que o caráter atrativo ou repulsivo da força de Casimir depende explicitamente dos parâmetros associados à violação de Lorentz considerada. A condição de sacola do MIT foi desenvolvida para confinar férmions no regime padrão, entretanto, mostramos que a mesma condição é adequada para confinar os férmions que obedecem à equação de Dirac modificada. Também discutimos a conservação de probabilidade, encontrando explicitamente as expressões para a densidade de probabilidade e corrente de probabilidade do modelo.

Palavras-chave: Efeito Casimir. Horava-Lifshitz. Violação de Lorentz. Equação de Dirac. Sacola do MIT.

Abstract

In this thesis we analyze the consequences of the Lorentz violation in the fermionic Casimir effect. In this sense, we adopt the Horava-Lifshitz conjecture, which explicitly presents an asymmetry between temporal and spatial variables. We also adopt the massless fermionic field. The Casimir effect is constructed by assuming that the fermionic field is confined between two large parallel plates. This confinement is implemented through the MIT bag model on the plates. We find that the attractive or repulsive character of the Casimir force depends explicitly on the parameters associated with the considered Lorentz violation. The MIT bag condition was developed to confine fermions in the standard regime, however, we have shown that the same condition is adequate to confine the fermions that obey the modified Dirac equation. We also discuss the conservation of probability, finding the explicit expressions for the probability density and probability current of the model.

Keywords: Casimir Effect. Horava-Lifshitz. Lorentz Violation. Dirac Equation. MIT bag Condition.

Lista de ilustrações

Figura 1	– O vetor de onda $\mathbf{k}$ indica a direção da propagação da onda que descreve o potencial vetor $\mathbf{A}$. Para cada $\mathbf{k}$ há duas polarizações ortogonais possíveis: $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_2$. Esses vetores de polarização indicam a direção do potencial vetor, são unitários e ortogonais entre si.	26
Figura 2	– Esquema de duas placas paralelas de área L^2 e separadas por uma distância a (onde $L \gg a$).	29
Figura 3	– Esquema da sacola do MIT. Nessa condição de contorno adequada para férmions, as partículas estão restritas na região esférica de raio R . O versor $\hat{n}$ indica a direção normal a qualquer ponto na superfície da esfera.	34
Figura 4	– Módulo da pressão de Casimir fermiônica admitindo a violação de Lorentz proposta por H-L. O comportamento da pressão também depende do valor adotado para o expoente crítico ξ	65

Lista de quadros

Quadro 1 – Conjunto de configurações possíveis para os espinores u_r e v_r	51
Quadro 2 – Forma funcional do módulo da pressão de Casimir para diferentes valores do expoente crítico.	64

Sumário

1	INTRODUÇÃO	19
2	QUANTIZAÇÃO DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO E EFEITO CASIMIR	21
2.1	Equações de Maxwell e transformações de calibre	21
2.2	Densidade de energia eletromagnética	23
2.3	A quantização do campo eletromagnético	25
2.4	Efeito Casimir	28
3	EQUAÇÃO DE DIRAC	31
3.1	Conservação de probabilidade e condição de contorno do MIT	32
3.2	A interpretação da função de onda de Dirac	36
3.3	Estudo da partícula livre e o campo de Dirac	38
4	MODELO DE VIOLAÇÃO DE LORENTZ DE HORAVA-LIFSHITZ	43
5	CAMPO DE DIRAC COM VIOLAÇÃO DE LORENTZ	47
5.1	Forma funcional do campo fermiônico quando ξ assume valores pares	48
5.2	Forma funcional do campo fermiônico quando ξ assume valores ímpares	52
6	ENERGIA E PRESSÃO DE CASIMIR	59
6.1	Energia de Casimir quando ξ assume valores pares	60
6.2	Energia e pressão de Casimir quando ξ assume valores ímpares	62
7	CORRENTE FERMIÔNICA	67
8	CONCLUSÃO	73
	REFERÊNCIAS	75
	APÊNDICES	77
	APÊNDICE A – PROPRIEDADES DAS MATRIZES M	79

1 Introdução

A Teoria Quântica de Campos (TQC) é um formalismo que unifica os paradigmas da Mecânica Quântica com os princípios da Relatividade Restrita. Em sua descrição, um campo é um conjunto infinito de osciladores harmônicos independentes. Diferentemente da Mecânica Quântica, a TQC trata as equações que descrevem as partículas como operadores, não como funções de onda. Essa mudança de tratamento fornece uma série de resultados inéditos na história da Física. Vários fenômenos só podem ser compreendidos dentro do arcabouço teórico da TQC, como o momento magnético anômalo do elétron, a emissão espontânea de fótons por um elétron ligado a um núcleo, o desvio de Lamb etc. O fenômeno explicado pela TQC que daremos ênfase nesse texto é o efeito Casimir, descoberto em 1948 por Hendrik Casimir. O efeito é a atração entre duas placas condutoras, aterradas e muito próximas. Casimir explica esse fenômeno afirmando que na região entre as placas a densidade energética do vácuo, associada aos fótons, é menor que na região externa ao par de placas. Essa diferença energética faz com que exista uma força que tende a aproximar essas placas. A primeira tentativa de detecção experimental deste fenômeno foi realizada por Marcus Sparnaay em 1958, com um altíssimo erro experimental. Apenas no ano de 1997, o efeito Casimir foi detectado experimentalmente com alto grau de precisão, por Steve K. Lamoreaux.

Experimentalmente, apenas a força de Casimir associada ao campo eletromagnético foi detectada. Entretanto, teoricamente, não existe um motivo para outros campos não apresentarem efeito Casimir. Na literatura existem investigações do efeito Casimir associado ao campo de Klein-Gordon e o campo de Dirac também. Mostrando que o formalismo é autêntico para uma série de campos físicos.

A TQC é invariante por transformações de Lorentz, o que indica um igual tratamento entre o tempo e o espaço em seu formalismo. Essa invariância é denominada de simetria de Lorentz, sendo um dos pilares da Física Teórica moderna. Entretanto, alguns autores já começaram a investigar se essa simetria pode ser quebrada em escalas muito altas de energia. Todas as propostas de violação da simetria de Lorentz estão associadas a tentativa de quantizar o campo gravitacional. Uma dessas propostas de violação de Lorentz é a de Horava-Lifshitz, proposta em 2009. Nesse modelo, o reescalonamento do tempo é distinto do reescalonamento das coordenadas espaciais. Esse modelo, proposto inicialmente para gravitação, pode ser estendido para outros campos.

O objetivo dessa Dissertação é investigar como a energia e pressão de Casimir associada ao campo de Dirac é modificada pelo formalismo de Horava-Lifshitz. Aqui, desenvolveremos este estudo, utilizando a construção mais simples e canônica do cálculo

do efeito Casimir: a interação entre duas placas muito extensas, paralelas e muito próximas uma da outra. Utilizamos a aproximação de férmions leves, o que nos permite ignorar a massa. Essa aproximação simplifica a álgebra. Mesmo nessa simplificação, é perceptível que tanto a intensidade quanto o caráter atrativo ou repulsivo da força entre as placas é modificado e dependem diretamente dos parâmetros associados ao modelo considerado de violação de Lorentz.

O efeito Casimir fermiônico exige que o campo que descreve as partículas de spin $1/2$ fique confinado na região de interesse, no nosso caso é a região entre as duas placas. Esse confinamento é feito, para o caso padrão, através da imposição da condição de sacola do MIT. Nesse texto foi feita a análise da compatibilidade dessa condição de contorno com a descrição fermiônica proposta.

Este texto é organizado da seguinte maneira: no [Capítulo 2](#), revisamos a quantização do campo eletromagnético e o efeito Casimir associado a ele. No [Capítulo 3](#), estudamos algumas características importantes do campo de Dirac, entre elas a conservação de probabilidade, a condição de contorno do MIT e a quantização do campo fermiônico. No [Capítulo 4](#), revisamos a proposta de Horava-Lifshitz e mostramos a lagrangiana de Dirac modificada para esse formalismo. No [Capítulo 5](#), a equação de Dirac modificada é encontrada e resolvida, impondo a condição de contorno do MIT nos campos. No [Capítulo 6](#) encontramos a energia e a pressão de Casimir associados ao modelo proposto no capítulo anterior. No [Capítulo 7](#) investigamos a adequação da condição de sacola do MIT para o modelo considerado, ou seja, se essa condição de contorno confina o campo fermiônico na região desejada. Nesse mesmo capítulo, provamos que a equação de Dirac modificada garante a interpretação probabilística tradicional do espinor, isto é, mostramos que existe conservação de probabilidade no modelo considerado.

Ao longo de toda a dissertação, com exceção do [Capítulo 2](#), utilizamos as unidades naturais: $c = \hbar \equiv 1$. Esse sistema de unidade é extremamente comum em textos de TQC, e simplifica bastante as notações. Além disso, utilizamos a assinatura $(+, -, -, -)$ para o tensor métrico, $g^{\mu\nu}$.

2 QUANTIZAÇÃO DO CAMPO ELETRO-MAGNÉTICO E EFEITO CASIMIR

Neste capítulo vamos revisar algumas discussões consagradas do Eletromagnetismo que são importantes para a compreensão dos principais resultados encontrados neste texto. A primeira discussão que será realizada é a invariância de calibre das equações de Maxwell, isto é, o campo elétrico $\mathbf{E}$ e o magnético $\mathbf{B}$ são insensíveis a transformações de calibre. Entretanto, dependendo do calibre adotado, as equações para determinar o potencial escalar $\phi(\mathbf{x}, t)$ e o potencial vetorial $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ podem ser simplificadas ou complicadas enormemente. Por isso, em problemas de eletrodinâmica é importante utilizar um calibre adequado a situação estudada. Adotaremos o calibre de Coulomb para quantizar o campo eletromagnético e com isso estudaremos o efeito Casimir.

2.1 Equações de Maxwell e transformações de calibre

As equações de Maxwell em conjunto com a força de Lorentz são cinco equações que descrevem todos os fenômenos eletromagnéticos. As equações de Maxwell foram descobertas antes dos trabalhos pioneiros de Einstein sobre a relatividade, entretanto, sua formulação matemática tem carácter relativístico e apresenta invariância sobre as transformações de Lorentz [1]. Experimentalmente essas equações são adequadamente escritas com as unidades do SI, entretanto no universo da Teoria Quântica de Campos o sistema mais utilizado é o gaussiano, e é esse sistema de unidades que utilizaremos nas discussões apresentadas no presente capítulo.

As quatro equações seguintes descrevem totalmente a dinâmica dos campos eletromagnéticos e são denominadas equações de Maxwell.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho(\mathbf{x}, t), \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (2.4)$$

De acordo com a [Equação 2.3](#) o campo magnético pode ser expresso como o rotacional de um vetor, isto é,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.5)$$

onde $\mathbf{A}$ é denominado potencial vetor. Por consequência, a [Equação 2.2](#) fica assim reescrita:

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (2.6)$$

Essa identidade só pode ser verdadeira se a parte interna aos parênteses for equivalente a um gradiente de alguma função, que é denominada potencial escalar, ou seja,

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (2.7)$$

Para determinar os campo $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ basta determinar o potencial escalar ϕ e o potencial vetor $\mathbf{A}$. O próximo passo é demonstrar que esses potenciais dependem exclusivamente da distribuição de cargas e correntes. Primeiramente, aplicamos a [Equação 2.7](#) em (2.1) e obtemos a seguinte relação:

$$\nabla^2 \phi + \frac{1}{c} \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = -4\pi \rho. \quad (2.8)$$

O segundo passo é aplicar (2.5) e (2.7) em (2.4) para obter a seguinte identidade:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right). \quad (2.9)$$

Com o uso da relação

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}, \quad (2.10)$$

apresentada em [1], a segunda equação que relaciona $\mathbf{A}$ com ϕ torna-se:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi}{c^2} \mathbf{J}. \quad (2.11)$$

As equações obtidas não são simples, mas em princípio resolvem o problema de determinar as quantidades desejadas. Entretanto, há uma característica importante que pode simplificar bastante as expressões encontradas: existe certa liberdade na escolha do divergente do potencial vetor. Para entender isso basta lembrar que a quantidade física mensurável são $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, então se fizermos alterações em $\mathbf{A}$ e em ϕ que mantenham as identidades (2.5) e (2.7) inalteradas, não estamos modificando a física do problema.

Como o campo magnético é o rotacional do potencial vetor, adicionar o gradiente de uma função genérica não altera a física do problema, ou seja, a transformação

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f(\mathbf{x}, t), \quad (2.12)$$

não altera o campo magnético.

Essa mudança também não pode alterar o campo elétrico, logo dada a mudança acima no potencial vetor, o potencial escalar deve se transformar da seguinte forma:

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (2.13)$$

As duas equações anteriores são denominadas transformações de calibre. Há várias possíveis escolhas para a função $f(\mathbf{x}, t)$. Na literatura há inúmeros exemplos de calibres adequados a problemas da eletrodinâmica. Neste texto vamos nos concentrar no calibre de Coulomb.

De acordo com as transformações de calibre, não podemos alterar o rotacional do potencial vetor, mas podemos escolher o divergente do mesmo da maneira mais adequada possível. Para entender isso perceba que

$$\nabla \cdot \mathbf{A} \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 f, \quad (2.14)$$

logo podemos adequar o divergente do potencial vetor as nossas necessidades. O calibre de Coulomb consiste em torná-lo nulo, ou seja,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (2.15)$$

Isso reescreve as equações que determinam ϕ e $\mathbf{A}$ da seguinte forma:

$$\nabla^2 \phi = -4\pi\rho, \quad (2.16)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi. \quad (2.17)$$

Uma das vantagens do calibre de Coulomb é que o potencial escalar depende exclusivamente da distribuição das cargas.¹ Ainda neste capítulo, essa característica será bem explorada para determinar os campos eletromagnéticos em uma região entre duas placas condutoras descarregadas.

2.2 Densidade de energia eletromagnética

No estudo do efeito Casimir é necessário utilizar a energia contida nos campos eletromagnéticos para determinar a energia do estado de vácuo. A energia contida nos campos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{E}$ pode ser determinada utilizando a força de Lorentz,

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right), \quad (2.18)$$

conjuntamente com a definição de trabalho, a lei da conservação da energia e as equações de Maxwell.

O trabalho realizado pelos campos eletromagnéticos para mover uma carga dq , com velocidade $\mathbf{v}$, em uma trajetória $d\mathbf{l}$ é calculado da seguinte forma:

$$dW = dq \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \cdot d\mathbf{l}. \quad (2.19)$$

¹ Em TQC, adotar o Calibre de Coulomb implica na existência de duas polarizações fotônicas.

A contribuição do trabalho é totalmente elétrica porque as componentes de $\mathbf{F}$ relacionadas ao campo magnético sempre são ortogonais a trajetória. Logo, a expressão do trabalho torna-se:

$$dW = \mathbf{E} \cdot (dq\mathbf{v})dt = \mathbf{E} \cdot (\rho\mathbf{v})d^3xdt = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}d^3xdt. \quad (2.20)$$

Consequentemente, a variação temporal do trabalho realizado sobre todas as cargas é

$$\frac{dW}{dt} = \int d^3x \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}. \quad (2.21)$$

Utilizando a [Equação 2.4](#), podemos reescrever o produto $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$ da seguinte forma:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \frac{c}{4\pi} \left[\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \frac{1}{c} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right]. \quad (2.22)$$

Em [\[1\]](#) a seguinte relação do Cálculo Vetorial é apresentada:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}). \quad (2.23)$$

Essa identidade conjuntamente com a [Equação 2.2](#) reescreve o produto $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$ na forma abaixo, que é mais sugestiva e adequada aos nossos propósitos.

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{8\pi} (|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2) \right] - \frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \quad (2.24)$$

É esperado que a realização do trabalho dW varie alguma outra forma de energia não eletromagnética, ou seja,

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \int d^3x \mathcal{E}, \quad (2.25)$$

onde $\mathcal{E}$ é a densidade de energia não eletromagnética que varia por conta da realização do trabalho dW . Ao comparar as duas expressões encontradas para dW/dt , a [Equação 2.21](#) com a [Equação 2.25](#), a seguinte igualdade é obtida:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \int d^3x \mathcal{E} = \int d^3x \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \Rightarrow \partial_t \left[\mathcal{E} + \frac{1}{8\pi} (|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2) \right] + \nabla \cdot \left(\frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \right) = 0. \quad (2.26)$$

Essa expressão é uma equação de continuidade que garante a conservação de energia do problema em questão. O termo $(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2)/(4\pi)$ é interpretado como a densidade de energia eletromagnética, enquanto o termo no interior do gradiente é a corrente de energia que flui na superfície que contorna todo o volume especificado [\[1\]](#). Em síntese, a expressão abaixo é a energia eletromagnética em um volume especificado.

$$E_{\text{em}} = \frac{1}{8\pi} \int d^3x (|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2). \quad (2.27)$$

2.3 A quantização do campo eletromagnético

Adotando o calibre de Coulomb, na ausência de cargas e correntes, o potencial escalar ϕ pode ser considerado nulo, e a equação que descreve o potencial vetorial (2.17) adquire a seguinte forma:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.28)$$

Ou seja, $\mathbf{A}$ obedece a equação de onda livre e admite soluções na forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\varepsilon} e^{\pm i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}. \quad (2.29)$$

onde o vetor constante $\boldsymbol{\varepsilon}$, a frequência ω e o vetor de onda $\mathbf{k}$ são parâmetros que serão determinados pelas restrições impostas a $\mathbf{A}$. As soluções acima quando aplicadas em (2.28) geram a seguinte relação de dispersão²:

$$\omega^2 = c^2 \mathbf{k}^2. \quad (2.30)$$

Ao multiplicar a equação acima por $\hbar^2$, recuperamos a relação energia-momento para fótons, isto é, a frequência e o vetor de onda estão relacionadas a energia e ao momento, respectivamente, de acordo com as seguintes identidades:

$$E = \hbar \omega, \quad (2.31)$$

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}. \quad (2.32)$$

Falta compreender o significado do parâmetro $\boldsymbol{\varepsilon}$. Isso é alcançado encontrando o divergente do vetor de onda:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{k} = 0. \quad (2.33)$$

Consequentemente, o potencial vetor é ortogonal ao vetor de onda, ou seja, para um determinado vetor de onda $\mathbf{k}$ há duas possibilidades de polarização: $\boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{k})$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_2(\mathbf{k})$ (para uma melhor visualização consulte a Figura 1), onde,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = 0 \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{k}) = \delta_{rs}. \quad (2.34)$$

Isso significa que uma solução particular do potencial vetor carrega quatro números quânticos: um relacionado a polarização da solução (r) e três relacionados as componentes do momento (k_x , k_y e k_z).

A determinação dos vetores de onda acessíveis ao sistema dependem do problema a ser estudado. Nossa intenção é expressar $\mathbf{A}$ como uma série de Fourier. Tradicionalmente,

² O termo relação de dispersão pode ser utilizado para se referir a relação entre o vetor de onda $\mathbf{k}$ e a frequência ω , ou para referenciar a relação entre a energia E e o momento $\mathbf{p}$. Nesta dissertação o termo será utilizado em ambos os contextos.

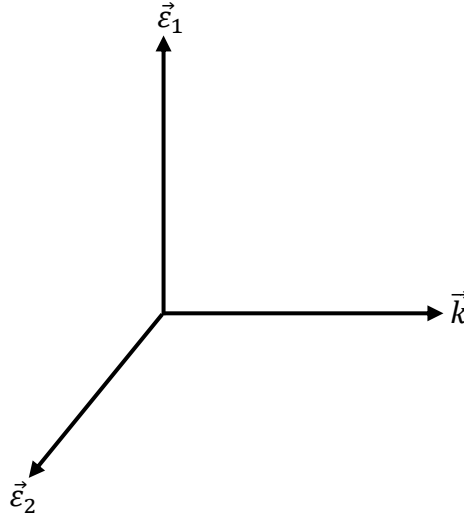


Figura 1 – O vetor de onda $\mathbf{k}$ indica a direção da propagação da onda que descreve o potencial vetor $\mathbf{A}$. Para cada $\mathbf{k}$ há duas polarizações ortogonais possíveis: $\boldsymbol{\epsilon}_1$ e $\boldsymbol{\epsilon}_2$. Esses vetores de polarização indicam a direção do potencial vetor, são unitários e ortogonais entre si.

esse procedimento é realizado impondo condições de periodicidade ao potencial vetor, algo que as vezes é denominado de “normalização na caixa” [2, 3, 4]. Em termos matemáticos, a condição de periodicidade em uma caixa de volume $V = L_x L_y L_z$ é expressa da seguinte forma:

$$\mathbf{A}_{r,\mathbf{k}}(0, y, z, t) = \mathbf{A}_{r,\mathbf{k}}(L_x, y, z, t), \quad (2.35)$$

$$\mathbf{A}_{r,\mathbf{k}}(x, 0, z, t) = \mathbf{A}_{r,\mathbf{k}}(x, L_y, z, t), \quad (2.36)$$

$$\mathbf{A}_{r,\mathbf{k}}(x, y, 0, t) = \mathbf{A}_{r,\mathbf{k}}(x, y, L_z, t). \quad (2.37)$$

O que discretiza as componentes do vetor de onda da seguinte maneira:

$$k_j = \frac{2\pi n_j}{L_j} \quad \text{com} \quad n_j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.38)$$

Consequentemente, a expansão de A em uma série de Fourier é garantida, ou seja, podemos expandir o potencial vetor como um conjunto infinito de osciladores independentes:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_r \sum_{\mathbf{k}} F(r, \mathbf{k}) \boldsymbol{\epsilon}_r(\mathbf{k}) \left[a_r(\mathbf{k}) e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + a_r^*(\mathbf{k}) e^{i(\omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right], \quad (2.39)$$

onde $a_r(\mathbf{k})$ e $a_r^*(\mathbf{k})$ são os coeficientes da expansão e podem ser determinados com as condições de contorno apropriadas ao problema estudado; e o fator $F(r, \mathbf{k})$ é algum número real que definiremos futuramente para tornar o significado da energia do sistema mais claro. Esse fator pode ter as propriedades que desejarmos, contando que seja independente

das coordenadas espaço-temporais. É também importante notar que a expansão acima garante que o potencial vetor seja sempre real.

Utilizando a definição dos seguintes quadrivetores:

$$k^\mu \equiv \left(\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{c}, \mathbf{k} \right) \quad \text{e} \quad x_\mu \equiv (ct, -\mathbf{x}), \quad (2.40)$$

a expansão de Fourier para o potencial vetor fica reescrita da seguinte forma:

$$\mathbf{A}(x, t) = \sum_r \sum_{\mathbf{k}} F(r, \mathbf{k}) \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \left[a_r(\mathbf{k}) e^{-ik^\mu x_\mu} + a_r^*(\mathbf{k}) e^{ik^\mu x_\mu} \right]. \quad (2.41)$$

Aplicando a equação acima nas equações (2.5) e (2.7), conjuntamente com o fato do potencial escalar ser nulo na situação em questão, encontramos as expansões em série de Fourier para o campo elétrico $\mathbf{E}$ e para o campo magnético $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{E}(x, t) = i \sum_r \sum_{\mathbf{k}} F(r, \mathbf{k}) \left(\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{c} \right) \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \left[a_r(\mathbf{k}) e^{-ik^\mu x_\mu} - a_r^*(\mathbf{k}) e^{ik^\mu x_\mu} \right], \quad (2.42)$$

$$\mathbf{B}(x, t) = -i \sum_r \sum_{\mathbf{k}} F(r, \mathbf{k}) [\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \times \mathbf{k}] \left[a_r(\mathbf{k}) e^{-ik^\mu x_\mu} - a_r^*(\mathbf{k}) e^{ik^\mu x_\mu} \right]. \quad (2.43)$$

Aplicando as duas equações acima em (2.27) a seguinte expressão para a energia é obtida:

$$E_{\text{em}} = \frac{1}{2} \sum_r \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}} [a_r^*(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) + a_r(\mathbf{k}) a_r^*(\mathbf{k})]. \quad (2.44)$$

Onde sua obtenção ocorre fazendo uso do seguinte conjunto de identidades:

- $\int_0^{L_j} dx_j e^{-i(k_j - q_j)x_j} = L_j \delta_{k_j q_j};$
- $F(r, -\mathbf{k}) = F(r, \mathbf{k}) \equiv \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2};$ ³
- $\omega_{\mathbf{k}} = c|\mathbf{k}|;$
- $[\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \times \mathbf{k}] \cdot [\boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{k}) \times \mathbf{k}] = \mathbf{k}^2 \delta_{rs}.$

A expressão acima para E_{em} tem uma estrutura idêntica a energia de infinitos osciladores harmônicos independentes [5], ou seja, podemos interpretar que $a_r(\mathbf{k})$ é análogo ao operador de abaixamento, $a_r^*(\mathbf{k})$ assume o papel do operador de levantamento. A quantização canônica da radiação eletromagnética se faz promovendo os coeficientes da série de Fourier, $a_r^*(\mathbf{k})$ e $a_r(\mathbf{k})$, a operadores de criação e aniquilação de partículas, respectivamente [4]. Se estendermos a analogia postulando que os operadores de criação e aniquilação obedecem a álgebra de comutação dos operadores escada do oscilador harmônico,

$$[a_r(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{q})] = \delta_{rs} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{q}}, \quad (2.45)$$

³ O fator $F(r, \mathbf{k})$ é adicionado para normalizar a combinação linear de soluções que descrevem o potencial vetor. As imposições feitas a este fator são utilizadas para realizar a tarefa de normalização.

então a expressão do operador hamiltoniano em questão torna-se:

$$\hat{H}_{em} = \sum_r \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \left[\hat{a}_r^\dagger(\mathbf{k}) \hat{a}_r(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right]. \quad (2.46)$$

O espaço de ação do operador acima é o espaço de Fock, que contém todas as configurações fotônicas possíveis, isto é, o estado $|n_r(\mathbf{k})\rangle$ tem n fótons com polarização r e vetor de onda $\mathbf{k}$. O estado sem nenhum fóton é denominado de estado de vácuo e sua representação é $|0\rangle$.

Uma consequência imediata de todo o formalismo desta seção é que a energia do vácuo é infinita, ou seja, o valor esperador do hamiltoniano no estado de vácuo diverge:

$$E_I \equiv \langle 0 | \hat{H}_{em} | 0 \rangle = \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}} = \sum_{k_x, k_y, k_z} \hbar c \left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \right)^{1/2} \rightarrow \infty. \quad (2.47)$$

A interpretação padrão para esse resultado é que a energia que medimos no mundo físico é a energia calculada fornecida pela teoria quântica de campos, menos a energia divergente do vácuo. Essa diferença entre dois números infinitos oferece um resultado finito. De certa forma, o que é medido são as flutuações do vácuo.

Ao considerar uma caixa infinita, isto é, adotando $L_x = L_y = L_z \equiv L \gg 1$, o somatório da equação acima torna-se a seguinte integral:

$$E_I = \frac{L^3 \hbar c}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}. \quad (2.48)$$

Expressando o vetor de onda em coordenadas esféricas, a integral acima fica reescrita da seguinte forma:

$$E_I = \frac{L^3 \hbar c}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} dk \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi k^3 \sin\theta = \frac{L^3 \hbar c}{2\pi^2} \int_0^{\infty} dk k^3. \quad (2.49)$$

Esse resultado afirma que a energia do vácuo em todo o espaço é infinita. Esse infinito é não detectável, mas possui um papel importante dentro da TQC.⁴ A energia divergente do vácuo é comumente utilizada para redefinir a energia que medimos, ou seja, ao calcular a energia de alguma situação física, o valor provavelmente será infinito. Mas essa divergência pode ser removida ao subtrair E_I do resultado encontrado.

2.4 Efeito Casimir

Na seção anterior, a energia associada ao estado de vácuo foi encontrada aplicando a condição de periodicidade ao potencial vetor. O intuito dessa seção é discutir a energia do

⁴ É possível que esse infinito seja apenas uma formalidade matemática, mas a interpretação padrão é que o vácuo possui uma estrutura muito rica, formado por infinitos osciladores independentes no estado fundamental. [2].

vácuo associada a existência de duas placas extensas, condutoras, paralelas e descarregadas. A área das placas é L^2 e a distância entre as duas é a , com $a \ll L$. A Figura 2 é um esquema da configuração entre as placas. O sistema de referência adotado é o cartesiano, com os eixos x e y paralelos as placas e o eixo z ortogonal a ambas.

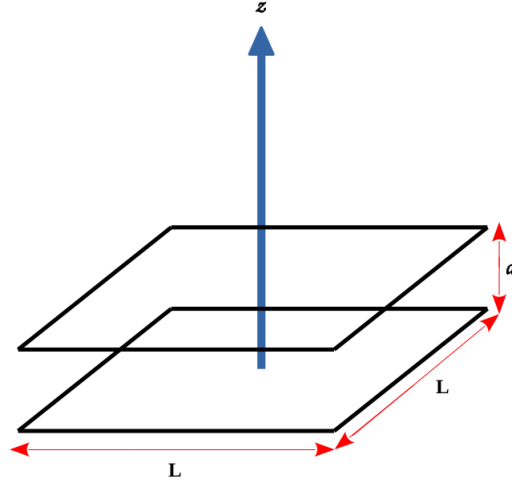


Figura 2 – Esquema de duas placas paralelas de área L^2 e separadas por uma distância a (onde $L \gg a$).

Na configuração da Figura 2, a componente k_z do comprimento de onda é múltiplo de π/a , ou seja,

$$k_z = \frac{n\pi}{a}, \quad \text{com } n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.50)$$

Isso significa que na região entre as placas, a densidade de energia é menor que na região externa. A justificativa disso é que entre as placas, apenas alguns comprimentos de onda são permitidos, enquanto na ausência de placas, todos os comprimentos de onda são acessíveis. Essa diferença de comprimentos de onda acessíveis produz o efeito de atração entre as placas. O próximo passo é demonstrar matematicamente essa característica do sistema.

Na seção anterior encontramos que a energia do vácuo era o somatório das energias dos estados fundamentais dos osciladores harmônicos independentes que descreviam o sistema. Considerando a discretização acima para a componente k_z , essa energia assume o seguinte valor:

$$E_0 \equiv \sum_{k_x, k_y, n} \hbar c \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}. \quad (2.51)$$

Estamos assumindo placas com áreas grandes, logo o somatório em relação as componentes k_x e k_y tornam-se integrais:

$$E_0 = \frac{L^2 \hbar c}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}. \quad (2.52)$$

Essa expressão fica mais simples utilizando coordenadas polares:

$$E_0 = \frac{L^2 \hbar c}{2\pi} \int_0^\infty dk k \sum_{n=0}^\infty \sqrt{k^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}. \quad (2.53)$$

O valor de E_0 é divergente. Na seção anterior descobrimos que a energia do vácuo na ausência de placas E_I também divergia. O resultado surpreendente é que a diferença entre essas energias é finita, e comumente denominada de energia de Casimir E_c [2].

$$\frac{E_c}{L^2} \equiv \frac{E_0 - E_I}{L^2} = -\frac{\pi^2}{720a^3}. \quad (2.54)$$

Com o resultado acima, podemos encontrar a força que tende a aproximar as placas. Essa força por unidade de área é denominada pressão de Casimir e seu valor é

$$P_c \equiv -\frac{1}{L^2} \frac{\partial E_c}{\partial a} = -\frac{\pi^2}{240a^4}. \quad (2.55)$$

Esse resultado foi proposto teoricamente por Hendrik Casimir em 1948, e foi detectado experimentalmente, com bom grau de precisão, por Steve K. Lamoreaux em 1997. No texto original de Casimir, apenas a quantização do campo eletromagnético foi considerado. Mas o mesmo procedimento pode ser feito para todos os campos conhecidos. Em [6], o efeito Casimir é investigado para o campo de Klein-Gordon e de Dirac.

3 EQUAÇÃO DE DIRAC

A equação de Klein-Gordon foi uma das primeiras propostas de uma teoria quantum-relativística. Inicialmente sua estrutura foi duramente criticada por dois motivos: a não existência de uma densidade de probabilidade com positividade definida e a possibilidade de partículas livres com energia negativa. No ano de 1928, Paul Dirac propôs uma equação relativística que superava um dos aparentes fracassos da proposta de Klein-Gordon.¹ Dirac propôs o seguinte operador hamiltoniano²:

$$\hat{H} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \beta m. \quad (3.1)$$

Onde $\hat{\mathbf{p}} = -i\nabla$ é o operador momento e m é a massa da partícula. Nessa equação, α^i e β são quatro objetos matemáticos determinados com a seguinte exigência: a dupla aplicação do operador hamiltoniano na nova “função de onda” deve fornecer a equação de Klein-Gordon [3].

De acordo com a Mecânica Quântica Ondulatória:

$$\hat{H}\psi(\mathbf{x}, t) = i\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \hat{H}^2\psi(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(\mathbf{x}, t). \quad (3.2)$$

Adotando o hamiltoniano (3.1) a seguinte expressão é obtida:

$$\left[\partial_t^2 - \frac{1}{2}(\alpha^j \alpha^k + \alpha^k \alpha^j) \partial_j \partial_k - im(\alpha^j \beta + \beta \alpha^j) \partial_j + m^2 \beta^2 \right] \psi(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (3.3)$$

A equação de Klein-Gordon é recuperada se as seguintes relações forem satisfeitas:

$$\alpha^j \alpha^k + \alpha^k \alpha^j = 2\delta^{jk}; \quad (3.4)$$

$$\alpha^j \beta + \beta \alpha^j = 0; \quad (3.5)$$

$$\beta^2 = I. \quad (3.6)$$

Essa não é a álgebra dos números reais. Logo é natural admitir que estamos tratando de uma álgebra matricial. Em [3] é apresentado o seguinte conjunto de matrizes 4×4 que obedecem as relações acima:

$$\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \alpha^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Onde σ^j são as notórias matrizes de Pauli e I é a matriz identidade 2×2 .

¹ Após alguns estudos foi observado que a equação de Klein-Gordon descrevia adequadamente partículas sem spin. A densidade associada a essa equação foi reinterpretada como densidade de carga [2]. Logo, a equação de Klein-Gordon admite conservação de carga.

² No capítulo anterior escrevemos explicitamente as constantes c e $\hbar$. A partir de agora, utilizaremos as unidades naturais: $c = \hbar \equiv 1$.

Definindo $\gamma^0 \equiv \beta$ e $\gamma^j \equiv \beta\alpha^j$, todas as propriedades envolvendo as matrizes β e α^j ficam sumarizadas na álgebra de Clifford:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad (3.8)$$

onde $g^{\mu\nu}$ é o tensor métrico de Minkowski, dado por $g^{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$. Pela definição das matrizes gama, a matriz γ^0 é hermitiana, enquanto as matrizes γ^i são anti-hermitianas. Além disso, $(\gamma^0)^2 = I$ e $(\gamma^i)^2 = -I$. As formas explícitas das matrizes gama são fornecidas abaixo:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

A equação de Dirac é obtida ao aplicar o hamiltoniano (3.1) na equação de Schrödinger dependente do tempo:

$$\hat{H}\psi(\mathbf{x}, t) = i\partial_t\psi(\mathbf{x}, t) \Rightarrow [i\partial_t + i\alpha^j\partial_j - m\beta]\psi = 0 \Rightarrow (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0. \quad (3.10)$$

Onde o espinor ψ é uma matriz coluna de quatro componentes.

A equação de Dirac tem todos os bons ingredientes de uma teoria relativística: tempo e espaço são tratados com o mesmo grau de importância (propriedade denominada simetria de Lorentz), existe uma densidade de probabilidade positiva-definida (informação explorada na seção 3.1) e a relação de dispersão da partícula livre é dada por $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ (ver seção 3.3). Além disso, a informação spinorial da partícula está contida na própria estrutura da equação que determina o campo ψ . Na mecânica quântica não relativística, a existência do spin das partículas é um postulado feito para a descrição teórica concordar com os experimentos. Nos estudos relacionados ao campo de Dirac a existência do momento angular intrínseco da partícula surge automaticamente, sem a necessidade de postulados extras (isso é explorado na seção 3.2).

3.1 Conservação de probabilidade e condição de contorno do MIT

Na Mecânica Quântica convencional, o módulo quadrático da função de onda é interpretado como a densidade de probabilidade de encontrar uma partícula em um ponto específico do espaço. A equação de Dirac permite que a função de onda de Dirac tenha uma interpretação semelhante. Para demonstrar isso é preciso provar que existe uma equação de continuidade associada a equação de Dirac, e que esta equação permite uma densidade de probabilidade positiva-definida. Essa demonstração será feita seguindo os passos expostos em [3]. Primeiramente a equação de Dirac (3.10) é multiplicada por $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$ pela esquerda:

$$i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi = 0. \quad (3.11)$$

Sequencialmente, o conjugado hermitiano de (3.10) é tomado e depois multiplicado por ψ pela direita³:

$$i(\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu \psi + m\bar{\psi}\psi = 0. \quad (3.12)$$

A soma das duas expressões anteriores fornece a equação de continuidade almejada:

$$\partial_\mu (\bar{\psi}\gamma^\mu \psi) \equiv \partial_\mu j^\mu = 0. \quad (3.13)$$

A densidade de probabilidade j^0 é positiva-definida: $j^0 = \psi^\dagger \psi \geq 0$. Isso só foi possível porque a derivada temporal na equação de Dirac é de primeira ordem [2]. Uma rápida digressão mostra que a derivada temporal na equação de Schrödinger é de primeira ordem, e sua interpretação probabilística já era bem corroborada experimentalmente no florescer da Mecânica Quântica Relativística. A dificuldade da equação de Klein-Gordon ter a interpretação probabilística vem do fato que em sua estrutura a derivada temporal é de segunda ordem. Segundo [2], Dirac percebeu que a derivada temporal que descreve partículas relativísticas devia ser de primeira ordem. Isso o motivou a propor o hamiltoniano (3.1). A Mecânica Quântica inteira é baseada no conceito probabilístico, e provavelmente Dirac e os outros físicos da época não estavam muito dispostos a abandonar essa característica fundamental da função de onda.

No decorrer da dissertação estaremos interessados em explorar a dinâmica do campo de Dirac. A expressão campo de Dirac significa que ψ ganha o status de operador, ou seja, a perspectiva de função de onda é abandonada. Comumente o primeiro passo de uma teoria quântica de campos é determinar a densidade de lagrangiana do modelo estudado.⁴ Com auxílio da equação de Euler-Lagrange pode-se verificar que a seguinte lagrangiana descreve o campo de Dirac:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi, \quad (3.14)$$

onde ψ e $\bar{\psi}$ são tratados como campos independentes [4].

Sabe-se que a equação de Dirac descreve férmions de spin 1/2 (isso será melhor explorado na próxima seção). Uma questão que pode surgir é como aprisionar esses férmions livres em uma região do espaço? Esse é um problema bem comum em todas as áreas da física: no estudo de um gás ideal que ocupa um volume V [7], a força de atração entre duas placas descarregadas no vácuo [8] etc. Essa restrição dos férmions é feita por uma condição de contorno denominada sacola do MIT, onde a partícula sem massa⁵ está confinada em

³ Nessa etapa do processo é necessário utilizar a seguinte propriedade das matrizes gama: $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$.

⁴ Por simplicidade, ao longo do texto o termo lagrangiana é utilizada em detrimento de densidade de lagrangiana. Isso é quase uma linguagem universal adotada nos livros de Teoria Quântica de Campos, e raramente produz algum tipo de confusão. Normalmente não se tem muito interesse na própria lagrangiana e sim em sua densidade.

⁵ Em [9] a condição de sacola do MIT é desenvolvida considerando quarks leves. Essa é a referência para a dedução que será aqui desenvolvida. Este texto é tomado como referência porque no decorrer da dissertação apenas férmions sem massa são considerados. A única exceção é o desenvolvimento apresentado na seção 3.3, onde férmions com massa são utilizados para uma melhor compreensão das soluções da equação de Dirac.

uma região esférica de raio R (a sacola) e é descrita pela seguinte lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \left\{ \frac{i}{2} [\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi] - B \right\} \theta(R - r) - \frac{1}{2} \bar{\psi} \psi \delta(r - R), \quad (3.15)$$

onde B é uma constante energética⁶, $\theta(R - r)$ é a função degrau que assume valor unitário no interior da esfera e valor nulo no exterior, e $\delta(r - R)$ é a função delta de Dirac que assume o valor nulo em todos os pontos do espaço com exceção dos pontos situados na superfície da esfera. Para uma melhor visualização, consulte a [Figura 3](#).

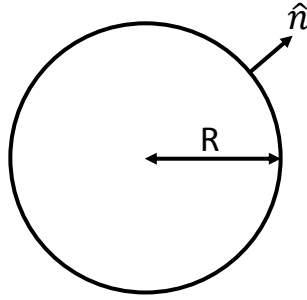


Figura 3 – Esquema da sacola do MIT. Nessa condição de contorno adequada para férmions, as partículas estão restritas na região esférica de raio R . O versor $\hat{n}$ indica a direção normal a qualquer ponto na superfície da esfera.

A lagrangiana (3.15) tem uma estrutura diferente da lagrangiana (3.14), entretanto, com o uso da equação de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \bar{\psi})} \right) = 0, \quad (3.16)$$

ambas geram a equação de Dirac para partículas sem massa. A vantagem de (3.15) é que sua estrutura confina o campo na região esférica da [Figura 3](#). Esse é o papel da função degrau e da delta de Dirac.

O primeiro termo que precisa ser determinado é

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = \frac{i}{2} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) \theta(R - r) - \frac{1}{2} \psi \delta(r - R). \quad (3.17)$$

O segundo termo necessário é

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \bar{\psi})} = -\frac{i}{2} \gamma^\nu \psi \theta(R - r). \quad (3.18)$$

Consequentemente,

$$\partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \bar{\psi})} \right) = -\frac{i}{2} \gamma^\nu (\partial_\nu \psi) \theta(R - r) - \frac{i}{2} \gamma^\nu \psi \frac{\partial \theta(R - r)}{\partial x^\nu}. \quad (3.19)$$

⁶ Aqui não estaremos interessados no valor de B . Sua expressão é encontrada em [9].

A última derivada do lado direito tem suas sutilezas e por esse motivo calcularemos ela com cautela. A sacola é fixa, logo $\theta(R - r)$ não tem dependência temporal, consequentemente, $\partial\theta(R - r)/\partial x^0 = 0$. Quando $\nu = j = 1, 2, 3$ a derivada tem o seguinte valor:

$$\frac{\partial\theta(R - r)}{\partial x^j} = -\delta(R - r)\frac{\partial r}{\partial x^j} = -\delta(R - r)\frac{\partial}{\partial x^j} \left[\sum_k (x^k)^2 \right]^{1/2} = -\delta(R - r)\frac{x^j}{r} = -\delta(R - r)(\hat{n})^j, \quad (3.20)$$

onde $\hat{n}$ é o versor que sempre aponta para direção normal da superfície da esfera (Figura 3). Definindo

$$n^\mu \equiv (0, \hat{n}), \quad (3.21)$$

os dois resultados encontrados da derivada da função degrau ficam sumarizados na seguinte equação:

$$\frac{\partial\theta(R - r)}{\partial x^\nu} = \delta(R - r)n_\nu. \quad (3.22)$$

Portanto, o segundo termo da equação de Euler-Lagrange é

$$\partial_\nu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\psi)} \right) = -\frac{i}{2}\gamma^\nu(\partial_\nu\psi)\theta(R - r) - \frac{i}{2}\gamma^\nu\psi\delta(R - r)n_\nu. \quad (3.23)$$

Aplicando as equações (3.17) e (3.23) em (3.16) a seguinte relação é obtida:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu\psi)\theta(R - r) + \frac{1}{2}(i\gamma^\mu n_\mu\psi - \psi)\delta(r - R) = 0. \quad (3.24)$$

Isso significa que no interior da sacola o campo obedece a equação de Dirac para partículas com massa nula,

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi = 0, \quad (3.25)$$

e na superfície da sacola o campo fermiônico obedece a relação de contorno do MIT:

$$\psi_{sacola} = i\gamma^\mu n_\mu\psi_{sacola}. \quad (3.26)$$

O incrível é que partimos do pressuposto que o campo de Dirac descrevia partículas sem massa e estavam confinados na região da sacola (no interior da esfera da Figura 3). Mas, a condição de contorno acima também confina o campo fermiônico com massa. Para mostrar isso faremos uso da corrente fermiônica (3.13) conjuntamente com a condição de contorno (3.26):

$$j_{sacola}^\mu n_\mu = \bar{\psi}_{sacola}\gamma^\mu n_\mu\psi_{sacola} = \bar{\psi}_{sacola}\gamma^\mu n_\mu(i\gamma^\nu n_\nu\psi_{sacola}). \quad (3.27)$$

Utilizando a identidade $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$ [3], podemos reescrever a condição de contorno do MIT da seguinte forma:

$$\bar{\psi}_{sacola} = -i\bar{\psi}_{sacola}\gamma^\mu n_\mu. \quad (3.28)$$

Essa equação aplicada na expressão da corrente (Equação 3.13) fornece o seguinte resultado:

$$j_{sacola}^\mu n_\mu = \left(-i\bar{\psi}_{sacola}\gamma^\nu n_\nu \right) \gamma^\mu n_\mu\psi_{sacola}. \quad (3.29)$$

Adicionando as expressões (3.27) e (3.29), a seguinte equação é obtida:

$$(J^\mu n_\mu)_{\text{sacola}} = 0. \quad (3.30)$$

A equação acima significa que a componente da corrente j^μ que é perpendicular à sacola zera na superfície da mesma, confinando o campo fermiônico nessa região. Fica então concluído o estudo teórico do confinamento do campo de Dirac em uma região do espaço. É claro que esse confinamento vai gerar estados ligados. Se a partícula for livre não há discretização, isto é, o momento da partícula vai poder assumir qualquer valor. Entretanto, uma partícula confinada não goza dessa liberdade. Então, a condição de contorno do MIT vai discretizar a componente do momento ortogonal à superfície da sacola, e por consequência a energia da partícula também é discretizada.

3.2 A interpretação da função de onda de Dirac

Há inúmeras formas de argumentar que o campo de Dirac descreve partículas de spin 1/2. Em [2] é feito o uso do operador helicidade para convencer o leitor dessa característica importante da equação de Dirac. Em [10] a ferramenta de análise utilizada para relacionar ψ a partículas de spin meio é o limite não-relativístico. Achemos essa segunda abordagem muito rica e por isso a utilizaremos.

De acordo com [10], o hamiltoniano de Dirac ao sofrer uma mudança denominada acoplamento mínimo descreve uma partícula na presença de um campo eletromagnético. Vamos supor que essa interação seja exclusivamente magnética, logo, o hamiltoniano adequado a essa situação é

$$\hat{H} = \boldsymbol{\alpha} \cdot (\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}) + \beta m \equiv \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}} + \beta m, \quad (3.31)$$

onde q é a carga da partícula e $\mathbf{A}$ é o potencial vetor associado ao campo magnético $\mathbf{B} \equiv \nabla \times \mathbf{A}$.

O próximo passo é encontrar os autovetores desse hamiltoniano. Como o autovalor deve ser a energia da partícula, vamos denotá-lo por E . Já os autovetores são matrizes colunas com quatro componentes.

$$\hat{H}\psi = E\psi \Rightarrow \begin{pmatrix} m & \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

A equação acima fornece duas equações acopladas que relacionam as matrizes φ e χ :

$$\chi = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}}}{E + m} \varphi \quad \text{e} \quad \varphi = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}}}{E - m} \chi. \quad (3.33)$$

No limite não relativístico, onde $m^2 \gg \mathbf{p}^2$, a soma $E + m \approx 2m$ e a diferença $E - m$ é a energia clássica das partículas, a mesma energia que surge na equação de

Schrödinger independente do tempo e por esse motivo denotamos $E_S \equiv E - m$. Essas informações reescrevem as equações acima na seguinte forma:

$$\chi = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}}}{2m} \varphi \quad \text{e} \quad \varphi = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}}}{E_S} \chi. \quad (3.34)$$

A substituição da primeira equação na segunda fornece a igualdade abaixo.

$$E_S \varphi = \frac{1}{2m} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}})^2 \varphi. \quad (3.35)$$

Desejamos obter uma forma mais sugestiva do termo $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}})^2$. Primeiramente expandimos o produto:

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}})^2 = \delta_{ab} \delta_{cd} \sigma^a \sigma^c \hat{\pi}^b \hat{\pi}^d. \quad (3.36)$$

A álgebra de comutação e anti-comutação das matrizes de Pauli fornecem a seguinte relação:

$$[\sigma^a, \sigma^c] + \{\sigma^a, \sigma^c\} = 2i\epsilon_{ack} \sigma^k + 2\delta^{ac} \Rightarrow \sigma^a \sigma^c = i\epsilon_{ack} \sigma^k + \delta^{ac}. \quad (3.37)$$

O que reescreve $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}})^2$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}})^2 &= \delta_{ab} \delta_{cd} (i\epsilon_{ack} \sigma^k + \delta^{ac}) \hat{\pi}^b \hat{\pi}^d \\ &= i\epsilon_{ack} \sigma^k \hat{\pi}^a \hat{\pi}^c + \delta_{ab} \delta_{ad} \hat{\pi}^b \hat{\pi}^d \\ &= i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\boldsymbol{\pi}} \times \hat{\boldsymbol{\pi}}) + \hat{\boldsymbol{\pi}}^2. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Aplicando a equação acima em (3.35) a seguinte relação é obtida:

$$E_S \varphi = \frac{1}{2m} [\hat{\boldsymbol{\pi}}^2 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\boldsymbol{\pi}} \times \hat{\boldsymbol{\pi}})] \varphi. \quad (3.39)$$

Vamos explorar um pouco a ação do operador $\hat{\boldsymbol{\pi}} \times \hat{\boldsymbol{\pi}}$ na matriz φ .

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\pi}} \times \hat{\boldsymbol{\pi}} \varphi &= (\hat{\boldsymbol{p}} - q\mathbf{A}) \times (\hat{\boldsymbol{p}} - q\mathbf{A}) \varphi = -q [\hat{\boldsymbol{p}} \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \hat{\boldsymbol{p}}] \varphi \\ &= -q [-i\boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{A}\varphi) - i\mathbf{A} \times (\boldsymbol{\nabla}\varphi)] \\ &= iq [(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A})\varphi - \mathbf{A} \times (\boldsymbol{\nabla}\varphi) + \mathbf{A} \times (\boldsymbol{\nabla}\varphi)] \\ &= iq\mathbf{B}\varphi. \end{aligned} \quad (3.40)$$

No desenvolvimento da equação acima foi utilizada a seguinte relação do cálculo vetorial exposta em [5]:

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\varphi \mathbf{A}) = \varphi (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\boldsymbol{\nabla}\varphi). \quad (3.41)$$

A aplicação da (3.40) em (3.39) fornece a equação de Schrödinger independente do tempo para uma partícula de spin 1/2, com carga q , interagindo com um campo magnético $\mathbf{B}$ e com razão giromagnética $q/2m$ [10]:

$$E_S \varphi = \left[\frac{1}{2m} \hat{\boldsymbol{\pi}}^2 - \frac{q}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \right] \varphi. \quad (3.42)$$

Esse resultado é muito esclarecedor. A equação de Dirac no limite não-relativístico recai na descrição de partículas quânticas de spin $1/2$, o que nos fornece uma forte argumentação para interpretar a função de onda de Dirac como um objeto matemático que contém todas as informações acessíveis para essas partículas fermiônicas num regime relativístico. É importante frisar que essa visão se sustenta experimentalmente. Para um melhor detalhamento de concordância entre a interpretação teórica dada e os fatos experimentais consulte [2, 3, 4].⁷

Outro ponto relevante a ser reforçado é que a maneira aqui exposta não é a única forma de argumentar que o campo de Dirac está associado a férmions de spin $1/2$. Em [4] o teorema de Noether é utilizado para argumentar sobre a natureza spinorial do campo de Dirac. Como já foi citado, em [2] o operador helicidade é a principal fonte de argumentação da interpretação discutida. Essa argumentação fazendo uso do operador helicidade também é encontrada em [3, 11].

É esperado que uma teoria científica mais abrangente recaia numa mais restrita quando aplicada as condições que garantem a funcionalidade da mesma. A Equação 3.42 mostra claramente isso. Nas condições que definem uma física não relativística, a equação relativística para as partículas de spin $1/2$ recai no caso “clássico”.

3.3 Estudo da partícula livre e o campo de Dirac

Na seção 3.1 foi discutido que o campo de Dirac admite uma densidade de probabilidade positiva definida, que é interpretada como a probabilidade de encontrar uma partícula em um ponto do espaço. Como ocorre na Mecânica Quântica, é exigido que a função de onda de Dirac seja contínua, característica oriunda da conservação de probabilidade. A existência da densidade positiva definida nos permite normalizar ψ e realizar uma série de procedimentos padrões de uma teoria quântica. Na seção 3.2 uma análise do limite clássico evidencia que o campo de Dirac descreve partículas relativísticas com spin $1/2$, logo seu uso é adequado para escrever elétrons. Nesta seção é dada continuidade ao estudo do campo definido por (3.10).

O objetivo é encontrar o conjunto de funções que obedecem a Equação 3.10. A equação é linear, então nada mais natural procurar soluções na forma de ondas livres,

$$\psi = Nu \exp(-ik_\mu x^\mu), \quad (3.43)$$

onde k_μ é um quadrivetor, N é a constante de normalização e u é o spinor constante da solução, e a estrutura de todos será determinada futuramente. A equação acima aplicada

⁷ De fato, a Equação 3.42 corresponde a generalização da equação de Schrödinger, feita por Pauli [10], baseada no experimento de Stern-Gerlach.

em (3.10) fornece a seguinte relação:

$$(\gamma^\mu k_\mu - m)u = 0. \quad (3.44)$$

Como a solução desejada é a não trivial, o quadrivetor k^μ obedece a seguinte identidade:

$$\gamma^\mu k_\mu = m \Rightarrow \gamma^\mu \gamma^\nu k_\mu k_\nu = m^2 \Rightarrow k_\mu k^\mu = m^2. \quad (3.45)$$

Mas essa equação é exatamente a relação que o quadrimomento $p^\mu = (|E|, \mathbf{p})$ deve obedecer. Logo, o quadrivetor k^μ é o quadrimomento.⁸ Essa solução é autovetor do operador $\hat{H}$ com autovalor $|E|$. Então existem infinitas soluções que obedecem a equação de Dirac, cada uma carregando um índice quântico relativo ao momento da partícula descrita, isto é, $\psi_{\mathbf{p}}$ que representa uma partícula com momento $\mathbf{p}$ e energia $E_{\mathbf{p}} \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$.

O próximo passo é determinar a forma do spinor $u \equiv \text{coluna}(\varphi, \chi)$. Para isso utilizaremos a estrutura das matrizes gama e a Equação 3.44:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} (E_{\mathbf{p}} - m) & \sigma^i p_i \\ -\sigma^i p_i & -(E_{\mathbf{p}} + m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = 0, \quad (3.46)$$

onde o spinor φ será determinado na ortonormalidade dos estados e o spinor χ obedece ao seguinte vínculo:

$$\chi = -\frac{\sigma^i p_i}{E_{\mathbf{p}} + m} \varphi. \quad (3.47)$$

A densidade de probabilidade $\psi^\dagger \psi$ fornece o molde para normalização da função de onda de Dirac:

$$\int_V d^3x \psi^\dagger \psi = 1 \Rightarrow |N|^2 V [\varphi^\dagger \varphi + \chi^\dagger \chi] = |N|^2 V \varphi^\dagger \varphi \left[1 + \frac{\mathbf{p}^2}{(E_{\mathbf{p}} + m)^2} \right] = |N|^2 \frac{2V E_{\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{p}} + m} \varphi^\dagger \varphi \quad (3.48)$$

Definindo N da seguinte forma:

$$N \equiv \left(\frac{m}{V E_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2}, \quad (3.49)$$

a expressão da normalização torna-se⁹:

$$\frac{2m}{E_{\mathbf{p}} + m} \varphi^\dagger \varphi = 1 \Rightarrow \varphi_1 = \sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}} + m}{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \varphi_2 = \sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}} + m}{2m}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$

⁸ A relação entre o quadrimomento p^μ e o quadrivetor k^μ é $p^\mu = \hbar k^\mu$. Em unidades naturais, esses dois quadrivetores são idênticos.

⁹ Nessa etapa do texto é utilizado a normalização do Bjorken-Drell [11]. Infelizmente essa normalização apresenta dificuldades para massa nula. No Capítulo 5 as soluções da equação de Dirac modificada para um sistema com violação de simetria de Lorentz serão encontradas. Os passos desses cálculos serão muito semelhantes aos apresentados aqui. Mas lá os férmions são leves e podem ter suas massas desprezadas, por esse motivo não utilizaremos a normalização aqui apresentada nessa futura situação. Dependendo do objeto de estudo, as normalizações utilizadas devem ser adequadas ao problema. Isso não gera nenhuma consequência na física. Uma alteração na constante de normalização altera o spinor, e essas ambas alterações acabam se ajustando e oferecendo sempre os mesmos resultados.

A equação acima afirma que uma partícula com momento $\mathbf{p}$ pode possuir duas polarizações distintas, então a função de onda para uma partícula carrega quatro números quânticos: três relativos as componentes do momento $\mathbf{p}$ e outro relativo a polarização da solução $r = 1, 2$. Como a solução encontrada até o momento é auto-valor de $\hat{H}$ com energia $E_{\mathbf{p}}$, vamos denotá-la da seguinte forma:

$$\psi_{r,\mathbf{p}}^{(+)} = \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} u_r(\mathbf{p}) \exp(-ip_{\mu}x^{\mu}), \quad (3.51)$$

onde $u_r \equiv \text{coluna}(\varphi_r, \chi_r)$. As expressões para χ_r são encontradas aplicando as expressões obtidas de φ_1 e φ_2 em (3.47). Suas expressões explícitas são fornecidas abaixo:

$$\chi_1 = -\frac{1}{\sqrt{2m(E_{\mathbf{p}} + m)}} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \chi_2 = -\frac{1}{\sqrt{2m(E_{\mathbf{p}} + m)}} \begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix}. \quad (3.52)$$

Uma característica surpreendente da Equação 3.10 é a existência de soluções que são autofunções do operador hamiltoniano com autovalor $-|E| \equiv -E_{\mathbf{p}}$. A interpretação padrão da Teoria de Campos para essas soluções de energia negativa é que elas descrevem anti-partículas, que são objetos físicos com cargas opostas as partículas. Um exemplo que ilustra isso é o pósitron, que tem a mesma massa do elétron e sua carga é $-e$ [11]. Uma verificação direta, que segue passos análogos aos que geraram a Equação 3.51, mostra que as antipartículas são descritas pela seguinte função de onda:

$$\psi_{r,\mathbf{p}}^{(-)} = \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} v_r(\mathbf{p}) \exp(ip_{\mu}x^{\mu}). \quad (3.53)$$

Onde foi mantida a normalização encontrada no caso de energia positiva. As matrizes $v_1(\mathbf{p})$ e $v_2(\mathbf{p})$ são os espinores associados as soluções acima, suas estruturas podem ser determinadas resolvendo a seguinte equação:

$$(\gamma^{\mu}p_{\mu} + m)v_r(\mathbf{p}) = 0. \quad (3.54)$$

Entretanto, na literatura é usual encontrar a equação acima na seguinte estrutura:

$$[(\gamma^{\mu}p_{\mu} + m)v_r(\mathbf{p})]^{\dagger} = 0 \Rightarrow \bar{v}_r(\mathbf{p})(\gamma^{\mu}p_{\mu} + m) = 0. \quad (3.55)$$

Onde a seguinte notação padrão foi utilizada: $\bar{v}_r \equiv v_r^{\dagger}\gamma^0$.

A forma explícita para os espinores $\bar{v}_r$ segue o procedimento análogo ao que foi realizado para obter os espinores u_r . Em [3, 8] esses cálculos são realizados.

Não será dada continuidade a abordagem de função de onda para as soluções da equação de Dirac. O conjunto de soluções encontradas são a base do operador ψ definido como se segue [4]:

$$\hat{\psi} = \sum_r \sum_{\mathbf{p}} \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \left[\hat{c}_r(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p})e^{-ip_{\mu}x^{\mu}} + \hat{d}_r^{\dagger}(\mathbf{p})v_r(\mathbf{p})e^{ip_{\mu}x^{\mu}} \right]. \quad (3.56)$$

A solução geral de uma equação linear é a combinação linear de todas as soluções particulares. A equação acima promove a função de onda ψ a um operador que age no espaço de configurações. O operador $\hat{c}_r(\mathbf{p})$ destrói uma partícula e $\hat{d}_r^\dagger$ cria uma antipartícula com momento $\mathbf{p}$ e polarização r . Essa expansão é semelhante a realizada no [Capítulo 2](#), significando que a equação de Dirac está sendo tratada como uma equação de campo. Isso fica bem claro ao analisarmos a equação acima, onde o campo é tratado como osciladores independentes e que tem como parâmetro o tempo e o espaço.

Para entender o processo de criação de partículas e o de destruição de antipartículas é necessário definir o seguinte campo:

$$\hat{\psi}^\dagger \gamma^0 \equiv \hat{\bar{\psi}} = \sum_r \sum_{\mathbf{p}} \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \left[\hat{d}_r(\mathbf{p}) \bar{v}_r(\mathbf{p}) e^{-ip_\mu x^\mu} + \hat{c}_r^\dagger(\mathbf{p}) \bar{u}_r(\mathbf{p}) e^{ip_\mu x^\mu} \right], \quad (3.57)$$

onde $\hat{d}_r(\mathbf{p})$ destrói uma antipartícula e $\hat{c}_r^\dagger(\mathbf{p})$ cria uma partícula com momento $\mathbf{p}$ e polarização r .

Na TQC os operadores de campo em conjunto com técnicas de soluções perturbativas são utilizados para resolver uma série de problemas que a Mecânica Quântica não-relativística é incapaz de tratar adequadamente. Processos de colisão que geram ou destroem partículas só podem ser entendidos nesse formalismo, por exemplo. O campo fermiônico acoplado com o campo eletromagnético fornece uma das teorias mais robustas da física: a Eletrodinâmica Quântica (EDQ).

O processo de promover as funções de onda em operadores, muitas vezes denominado de segunda quantização, gera resultados muito precisos. Antes do desenvolvimento da EDQ, os físicos tentavam entender o motivo de uma discrepância energética entre alguns orbitais do átomo de hidrogênio. Alguns desses orbitais deveriam ter as mesmas energias, mas em acuradas medições experimentais era constatado desvios dos valores teoricamente esperados. Esse fenômeno, denominado desvio de Lamb, só pode ser entendido com o uso da EDQ em conjunto com outras técnicas da TQC [4].

A necessidade da segunda quantização vem das lacunas do modos operandi da Mecânica Quântica. O tratamento de função de onda é incapaz de fornecer explicações a diversos fenômenos já citados nessa dissertação. Expandir ψ como uma série de Fourier e converter essa série a operadores, a primeira vista parece algo arbitrário ou mesmo sem sentido. Entretanto as confirmações experimentais das informações fornecidas pela TQC são inegáveis. Em geral, a comunidade física está convencida que o processo de quantizar os campos é a melhor forma de entender processos fundamentais.

No capítulo anterior foi comentado que a álgebra dos operadores de criação e aniquilação do campo eletromagnético era uma álgebra de comutadores. Para o caso fermiônico essa álgebra torna-se uma álgebra de anticomutação. Isso faz sentido porque um sistema composto por dois férmions idênticos quando tem as posições trocadas geram uma

função de onda antissimétrica ao caso anterior. Isso é o carácter estatístico dos férmions [5, 7]. Então, ao trabalhar com os operadores de criação e aniquilação fermiônicos as seguintes relações devem ser obedecidas:

$$\{c_r(\mathbf{p}), c_s^\dagger(\mathbf{q})\} = \{d_r(\mathbf{p}), d_s^\dagger(\mathbf{q})\} = \delta_{rs}\delta_{\mathbf{p}\mathbf{q}}; \quad (3.58)$$

$$\{c_r(\mathbf{p}), c_s(\mathbf{q})\} = \{d_r(\mathbf{p}), d_s(\mathbf{q})\} = \{c_r^\dagger(\mathbf{p}), c_s^\dagger(\mathbf{q})\} = \{d_r^\dagger(\mathbf{p}), d_s^\dagger(\mathbf{q})\} = 0; \quad (3.59)$$

$$\{c_r(\mathbf{p}), d_s(\mathbf{q})\} = \{c_r^\dagger(\mathbf{p}), d_s^\dagger(\mathbf{q})\} = \{c_r(\mathbf{p}), d_s^\dagger(\mathbf{q})\} = \{c_r^\dagger(\mathbf{p}), d_s(\mathbf{q})\} = 0. \quad (3.60)$$

Nas equações acima a indicação de operador foi omitida. Essa será uma prática aderida em todo o restante do texto. Isso agiliza, simplifica e descarrega a notação inúmeras vezes. Normalmente, nos desenvolvimentos envolvendo TQC, os operadores e os autovalores correspondentes a esses operadores não são facilmente confundidos. Essa postura de permitir que o contexto diga se a letra utilizada é ou não um operador é adotada em muitos livros de Mecânica Quântica e de Teoria Quântica de Campos.

Os operadores acima definidos atuam no espaço de Fock, de forma semelhante aos operadores de criação e aniquilação fotônicos. O estado de vácuo $|0\rangle$ é então definido como o estado que obedece as seguintes relações:

$$c_r(\mathbf{p}) |0\rangle = d_r(\mathbf{p}) |0\rangle \equiv 0. \quad (3.61)$$

O estado de um férmion de momento $\mathbf{p}$ e polarização r são obtidos pela ação dos operadores de criação no estado de vácuo:

$$c_r^\dagger(\mathbf{k}) |0\rangle = |1r, \mathbf{p}\rangle. \quad (3.62)$$

Com a álgebra dos operadores de criação, podemos verificar que o formalismo desenvolvido está de acordo com a estatística de Fermi-Dirac:

$$c_r^\dagger(\mathbf{k})c_s^\dagger(\mathbf{q}) |0\rangle = -c_s^\dagger(\mathbf{q})c_r^\dagger(\mathbf{k}) |0\rangle \Rightarrow |1r\mathbf{p}; 1s\mathbf{q}\rangle = -|1s\mathbf{q}; 1r\mathbf{p}\rangle. \quad (3.63)$$

A consequência imediata da expressão acima é o princípio de exclusão de Pauli:

$$|1r\mathbf{p}; 1r\mathbf{p}\rangle = 0. \quad (3.64)$$

4 MODELO DE VIOLAÇÃO DE LORENTZ DE HORAVA-LIFSHITZ

Há vários fenômenos físicos que só podem ser satisfatoriamente entendidos quando as soluções das equações que descrevem partículas relativísticas são consideradas campos que agem no espaço de Fock [2]. No [Capítulo 2](#) foi discutido um desses processos denominado efeito Casimir, que descreve a atração entre duas placas descarregadas no vácuo. Essa atração é explicada como uma flutuação na densidade da energia do vácuo na região entre as placas. A riqueza estrutural do vácuo é uma característica inerente a uma teoria quântica de campos (TQC), que não tem análogo na mecânica quântica padrão.

A Mecânica Quântica Relativística falha ao adotar a perspectiva de função de onda porque exige a conservação do número de partículas [2]. Na relatividade, os processos interativos podem destruir ou criar partículas, algo que também é intrínseco ao processo de segunda quantização [4].

A TQC é extremamente robusta e oferece inúmeros exemplos do poder de sua estrutura teórica. Normalmente os processos físicos nesse formalismo são estudados utilizando a aproximação perturbativa, conjuntamente com o processo de segunda quantização. A Eletrodinâmica Quântica (EDQ) perturbativa é uma estrutura da TQC relacionada a quantização do campo de Dirac acoplado ao campo eletromagnético, que descreve muitos processos envolvendo elétrons, pósitrons e fótons [4]. Entretanto, a EDQ perturbativa possui infinitos em suas descrições dos processos físicos. Há três exemplos notáveis dessas divergências na EDQ em [4]. O primeiro exemplo é o infinito associado ao processo de propagação de um férmion que emite um fóton virtual e em seguida absorve esse fóton. O segundo exemplo é a divergência relacionada a um fóton que perturba o vácuo e faz com que uma partícula e uma antipartícula virtuais sejam criadas e em seguida aniquiladas. O terceiro exemplo ocorre quando um férmion emite (ou absorve) um fóton real conjuntamente com a emissão de um fóton virtual, em seguida emite o férmion absorve o mesmo fóton virtual. Esses três infinitos são utilizados para redefinir a carga e a massa do elétron. Essa redefinição absorve os infinitos, em um processo denominado renormalização.

É exigido que todos os campos sejam renormalizados, isto é, os infinitos que surgem nos processos interativos sejam classificados em um número finito de tipos, utilizados para redefinir grandezas físicas. As interações eletromagnéticas, forte e fraca são renormalizáveis, enquanto o campo gravitacional não é [12]. Afirmar que a gravidade quântica não é renormalizável é o mesmo que admitir que sua estrutura demanda que infinitos parâmetros físicos sejam redefinidos. Contudo, é desejado que todos os campos fundamentais sejam quantizados, logo um dos pontos em aberto da Física Teórica atual é compatibilizar a

Relatividade Geral com a Teoria Quântica de Campos.

Existem diversas propostas para quantizar a gravitação. Todas são extremamente ousadas e propõe mudanças drásticas em algumas concepções fundamentais. Um exemplo disso é a proposta de discretização do espaço e do tempo, denominada Loop Quântico.¹ Outro modelo que vem ganhando bastante destaque é a Teoria das Cordas, onde as estruturas fundamentais da matéria são as cordas, objetos que vibram, e um dos estados de vibração está relacionado a gravidade [13]. Há modelos que também quebram a isotropia do espaço-tempo. A isotropia pode ser violada detectando que em altas escalas de energia o universo apresenta uma direção preferencial [14], ou que nessa escala energética o espaço e tempo são assimétricos e reescalados de formas distintas [15]. Essas duas últimas hipóteses violam o igual tratamento do tempo e espaço da Relatividade Restrita.²

Quando se procura medir uma variável dinâmica é necessário utilizar uma escala adequada para a grandeza em questão. Sempre que existe um processo adequado de reescalonamento nas grandezas físicas também é esperado não haver mudanças nas leis da natureza que governam esse fenômeno [12]. Isso significa que, em princípio, as teorias de campos devem ser invariantes por transformações de escalas.

Para o campo de Klein-Gordon sem massa a transformação de escala $t \rightarrow \lambda t$ e $\mathbf{x} \rightarrow \lambda \mathbf{x}$ não modifica a equação do movimento:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = \partial_\mu \partial^\mu \frac{1}{\lambda^2} \phi = 0. \quad (4.1)$$

O mesmo ocorre para o campo de Dirac sem massa:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi = i\gamma^\mu \partial_\mu \frac{1}{\lambda} \psi = 0. \quad (4.2)$$

Evidentemente, o parâmetro λ é uma constante que não depende das coordenadas espaciais ou temporais. É importante frisar que nas duas equações acima, o tempo e o espaço são reescalados da mesma forma, o que mantém a invariância de Lorentz das equações relativísticas.

A proposta de Horava-Lifshitz (H-L) é admitir uma assimetria de reescalonamento entre o tempo e o espaço [15]. Em seu modelo, as equações que tem simetria por reescalonamento tempo-espacial são invariantes quando as seguintes mudanças de escalas são aplicadas:

$$t \rightarrow b^\xi t \quad \text{e} \quad \mathbf{x} \rightarrow b\mathbf{x}, \quad (4.3)$$

¹ Na TQC convencional o espaço e o tempo são variáveis contínuas.

² A Teoria da Relatividade Especial de Einstein exige que tempo e espaço sejam tratados no mesmo pé de igualdade [16]. Isso significa que as potências que envolvem a posição e o tempo devem ser da mesma ordem. O cerne de uma teoria de campo é conciliar a mecânica quântica com a relatividade restrita. Assim, qualquer teoria de campos deve, em princípio, ser invariante por meio das transformações de Lorentz. Essa importante exigência relativística é denominada simetria de Lorentz. As equações de Klein-Gordon e de Dirac são exemplos clássicos de teorias que obedecem essa simetria [3].

onde $\xi \geq 1$ é um parâmetro denominado expoente crítico.

Infelizmente, esse reescalonamento não deixa as lagrangianas de Klein-Gordon e Dirac para campos sem massa invariantes³:

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2} \partial_\mu \partial^\mu \phi \rightarrow \mathcal{L}'_{KG} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{b^{2\xi}} (\partial_t \phi')^2 + \frac{1}{b^2} (\partial_i \phi') (\partial^i \phi') \right], \quad (4.4)$$

$$\mathcal{L}_D = i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi \rightarrow \mathcal{L}'_D = \frac{i}{b^\xi} \bar{\psi}' \gamma^0 \partial_0 \psi' + \frac{i}{b} \bar{\psi}' \gamma^j \partial_j \psi'. \quad (4.5)$$

O que consequentemente muda a equação de movimento dos campos em questão. A equação de movimento não é alterada quando a mudança de escala faz a nova lagrangiana ser proporcional a lagrangiana não-reescalada, ou seja, apenas uma constante de proporcionalidade deve distinguir $\mathcal{L}$ de $\mathcal{L}'$.

Então, na teoria de H-L as lagrangianas que descrevem os campos de Klein-Gordon e de Dirac devem ser modificadas para apresentar invariância por reescalonamento. Utilizando as discussões apresentadas em [17, 18], podemos escrever a seguinte lagrangiana compatível com a quebra de simetria de H-L e que descreve um campo escalar sem massa:

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2} \left\{ (\partial_0 \phi)^2 - l^{2(\xi-1)} [(\partial_i \phi) (\partial^i \phi)]^\xi \right\}. \quad (4.6)$$

Onde l é um parâmetro adicionado para deixar todas as parcelas da igualdade acima com unidade de densidade de energia. O parâmetro ξ é denominado expoente crítico e está associado à forma da violação de Lorentz.

O reescalonamento (4.3) torna a lagrangeana acima invariante e reescalona a própria lagrangeana da seguinte forma:

$$\mathcal{L}_{KG} \rightarrow \frac{1}{b^{2\xi}} \mathcal{L}_{KG}. \quad (4.7)$$

Em [18] há uma discussão que nos permite escrever a seguinte lagrangeana para férmions sem massa e compatível com a violação de Lorentz do tipo H-L:

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi} \left[i \gamma^0 \partial_t + i^\xi l^{\xi-1} (\gamma^j \partial_j)^\xi \right] \psi. \quad (4.8)$$

O reescalonamento (4.3) torna a lagrangeana acima invariante e a reescalada da seguinte forma:

$$\mathcal{L}_D \rightarrow \frac{1}{b^\xi} \mathcal{L}_D. \quad (4.9)$$

De certa forma, na proposta de Horava-Lifshitz abre-se mão da invariância de Lorentz para manter a invariância por reescalonamento. Um questionamento natural que

³ Considerar campos com massa não é importante para os desenvolvimentos dessa dissertação. Em todo o restante do texto a discussão será restrita a campos fermiônicos relacionados a partículas leves, onde a massa pode ser desconsiderada. É claro que isso é apenas uma aproximação, atualmente é desconhecido a existência de qualquer férmion sem massa.

surge é a real necessidade de considerar uma assimetria entre o tempo e o espaço. A questão central é quantizar a gravitação e os modelos que aparentemente conseguem realizar esse feito sempre envolvem algum tipo de violação da simetria de Lorentz, seja uma violação muito drástica⁴ ou mais leve⁵. Em [14], V. A. Kostelecky e S. Samuel exploram a possibilidade da violação espontânea da simetria de Lorentz na Teoria de Cordas. Nesse formalismo, essa violação ocorre na escala de Planck. Como essa escala ainda é inacessível aos aceleradores de partículas atuais, a detecção direta desse possível fenômeno ainda não foi feita.⁶

Essa dissertação não se trata de comparar ou discutir esses inúmeros modelos de quebra de simetria de Lorentz. Os comentários anteriores servem de motivação para a investigações desse tema. Aqui, a única forma de violação de Lorentz que será explorada é a proposta por Horava-Lifshitz, que trata espaço e tempo com pesos diferentes e exige que as lagrangianas para os campos escalares e fermiônicos sem massa sejam modificadas, mas preservam a invariância por reescalonamento assimétrico entre o tempo e o espaço (Equação 4.3).

⁴ O modelo de H-L é uma estrutura de violação forte da simetria de Lorentz.

⁵ Em [14], a violação de Lorentz tratada é mais amena que a violação proposta por H-L em [15].

⁶ No universo jovem é possível cogitar que a densidade de energia fosse tão intensa ao ponto de haver a quebra de simetria de Lorentz. Existem alguns trabalhos que utilizam essa premissa para buscar indiretamente os valores numéricos dos parâmetros da violação e as suas consequências. Essas inferências envolvem observações de fenômenos drásticos da natureza, como buracos negros, ou a busca de alguma espécie de radiação residual. Esses temas fogem do escopo dessa dissertação. Para um esclarecimento desses intrigantes pontos da física teórica consulte [19].

5 CAMPO DE DIRAC COM VIOLAÇÃO DE LORENTZ

O objetivo principal desse capítulo é encontrar as soluções normalizadas da equação de Dirac modificada considerando a violação da simetria de Lorentz, adotando a prescrição de H-L. Nesse contexto, a densidade de lagrangiana é dada por:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \left[i\gamma^0 \partial_t + i^\xi l^{\xi-1} (\gamma^j \partial_j)^\xi \right] \psi. \quad (5.1)$$

Essa lagrangiana serve para descrever a dinâmica de um campo fermiônico sem massa ψ e trata as coordenadas espaciais e temporais com pesos distintos. Como foi discutido na seção anterior, sua construção segue o modelo apresentado em [18] e abre mão da simetria de Lorentz para conservar a simetria de reescalonamento proposta por H-L (Equação 4.3). Esse tipo de violação é muito intensa e o seu principal é o parâmetro expoente crítico ξ , que assume apenas valores inteiros positivos. Quando $\xi = 1$, a lagrangiana acima descreve o campo de Dirac padrão para férmions sem masa. O parâmetro l possui a função de manter todas as parcelas da igualdade acima com a mesma dimensão, ou seja, l tem dimensão de comprimento.

Com a equação de Euler-Lagrange encontramos a equação que descreve a dinâmica do campo ψ :

$$\left[i\gamma^0 \partial_t + i^\xi l^{\xi-1} (\gamma^j \partial_j)^\xi \right] \psi = 0. \quad (5.2)$$

Essa equação tem estruturas diferentes dependendo do valor considerado para o expoente crítico. Essas estruturas podem ser resumidas em dois grupos: quando ξ assume valores pares e ímpares. Essa classificação tem origem na álgebra de comutação das matrizes de Dirac, como será visto a seguir.

Quando ξ assume valores pares, a parte diferencial espacial da equação acima fica reescrita da seguinte forma:

$$(\gamma^j \partial_j)^\xi \psi = (\gamma^a \gamma^b \partial_a \partial_b)^{\xi/2} \psi = \left(\frac{1}{2} \{ \gamma^a, \gamma^b \} \partial_a \partial_b \right)^{\xi/2} \psi = (-\nabla^2)^{\xi/2} \psi. \quad (5.3)$$

Consequentemente, a equação que descreve o campo ψ nessa situação é

$$\left[i\gamma^0 \partial_t + i^\xi l^{\xi-1} (-\nabla^2)^{\xi/2} \right] \psi = 0. \quad (5.4)$$

Para valores ímpares de ξ , a parte diferencial espacial da equação (5.2) assume a seguinte forma:

$$(\gamma^j \partial_j)^\xi \psi = \left[(\gamma^j \partial_j)^2 \right]^{\frac{\xi-1}{2}} \gamma^i \partial_i \psi = \gamma^i \partial_i (-\nabla^2)^{\frac{\xi-1}{2}} \psi. \quad (5.5)$$

Portanto, a equação que descreve o campo ψ nesse contexto é

$$\left[i\gamma^0 \partial_t + i^\xi l^{\xi-1} \gamma^j \partial_j \left(-\nabla^2 \right)^{\frac{\xi-1}{2}} \right] \psi = 0. \quad (5.6)$$

As estruturas das equações (5.4) e (5.6) são muito diferentes. Isso motiva estudar separadamente as soluções pares e ímpares. Entretanto, ambas equações aceitam soluções na forma

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{x}) \\ \chi(\mathbf{x}) \end{pmatrix} e^{-iEt}, \quad (5.7)$$

onde $\varphi(\mathbf{x})$ (solução “up”) e $\chi(\mathbf{x})$ (solução “down”) são matrizes 2×1 associadas ao estado espinorial da solução considerada. A variável E indica a energia da solução. Como padrão em uma teoria quântica de campos, há soluções com energia positiva, $\psi^{(+)}$ com $E \equiv \omega > 0$, e soluções com energia negativa, $\psi^{(-)}$ com $E \equiv -\omega < 0$.

5.1 Forma funcional do campo fermiônico quando ξ assume valores pares

Assumindo $\xi = 2, 4, 6, 8, \dots$ e adotando soluções na forma (5.7), a equação (5.4) gera as seguintes equações diferenciais parciais:

$$E\varphi + l^{\xi-1} \left(\nabla^2 \right)^{\xi/2} \varphi = 0; \quad (5.8)$$

$$E\chi - l^{\xi-1} \left(\nabla^2 \right)^{\xi/2} \chi = 0. \quad (5.9)$$

É extremamente interessante que a estrutura das equações acima se assemelham mais ao caso bosônico padrão que o fermiônico. A equação de Dirac sem violação de Lorentz gera equações acopladas entre φ e χ com dependência explícita das matrizes de Pauli [3]. Já as soluções da equação de Klein-Gordon (K-G) não apresenta nenhuma espécie de dependência com as matrizes de Pauli.¹ Além disso, na equação de K-G o operador diferencial que surge é o laplaciano. Tudo isso revela algo surpreendente: se o expoente crítico for par os férmions tem um caráter muito semelhante aos bósons. Essa semelhança se estende por todo o desenvolvimento dessa seção.

No conjunto de equações acima não há potencial associado, consequentemente, as soluções φ e χ devem possuir a forma funcional de ondas livres, ou seja, se o momento da onda livre for $\mathbf{k}$ então $\nabla^2 \varphi = -\mathbf{k}^2 \varphi$ e $\nabla^2 \chi = -\mathbf{k}^2 \chi$. Nessa conjuntura, esse par de equações pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\left[E + l^{\xi-1} \left(-\mathbf{k}^2 \right)^{\xi/2} \right] \varphi = 0, \quad (5.10)$$

$$\left[E - l^{\xi-1} \left(-\mathbf{k}^2 \right)^{\xi/2} \right] \chi = 0. \quad (5.11)$$

¹ Não há sentido haver matrizes de Pauli nas soluções de Klein-Gordon porque o spin dos bósons descritos por ela é zero [4].

Diferenciando a natureza energética das soluções, as equações acima ficam reescritas da seguinte forma:

$$\left[\omega \pm l^{\xi-1} (-\mathbf{k}^2)^{\xi/2} \right] \varphi^{(\pm)} = 0, \quad (5.12)$$

$$\left[\omega \mp l^{\xi-1} (-\mathbf{k}^2)^{\xi/2} \right] \chi^{(\pm)} = 0, \quad (5.13)$$

onde o índice superior $(\pm)$ referem-se a soluções de energia positiva e energia negativa.

O sinal de $(-\mathbf{k}^2)^{\xi/2}$ alterna dependendo do valor de ξ . Quando o parâmetro l é positivo ² a alternância de sinal vai eliminar as seguintes soluções: $\varphi^{(-)} = \chi^{(+)} = 0$ quando $\xi = 2, 6, 10, \dots$ e $\varphi^{(+)} = \chi^{(-)} = 0$ quando $\xi = 4, 8, 12, \dots$. Além disso, em todos os casos considerados, a relação de dispersão é

$$\omega = l^{\xi-1} (\mathbf{k}^2)^{\xi/2}. \quad (5.14)$$

Anteriormente haviam quatro componentes de ψ a ser determinadas: duas relativas a φ e mais duas pertencentes a χ . Como um desses spinors sempre é zero, o objetivo torna-se encontrar as duas componentes do spinor restante, renomeado de $f(\mathbf{x})$.

O interesse principal desse texto é utilizar as soluções de ψ para investigar o efeito Casimir. Portanto, as soluções procuradas são campos fermiônicos confinados em uma região delimitada por duas placas extensas, idênticas, paralelas e separadas por uma pequena distância a (Figura 2).

Para o campo fermiônico padrão, isto é, o campo de Dirac sem violação da simetria de Lorentz, o confinamento de ψ na região entre as placas da Figura 2 é feito utilizando a condição de contorno do MIT (Equação 3.26). No Capítulo 7 apresentamos uma discussão sobre a validade da aplicação dessa condição de contorno no contexto de quebra de simetria de H-L. Nessa etapa, vamos assumir que a condição de contorno padrão do MIT também confina o campo fermiônico definido por (5.2), ou seja,

$$\psi_{placas} = i\gamma^\mu n_\mu \psi_{placas}. \quad (5.15)$$

Onde n^μ é um quadri-versor que indica a direção normal a superfície das placas:

$$n^\mu \equiv \begin{cases} (0, 0, 0, -1) & \text{na placa inferior } (z = 0), \\ (0, 0, 0, +1) & \text{na placa superior } (z = a). \end{cases} \quad (5.16)$$

Ao considerar soluções do tipo “up”, soluções na forma $\psi(\mathbf{x}, t = 0) = \text{coluna}(f(\mathbf{x}), 0)$, a equação (5.15) fornece que $f(z = 0) = f(z = a) = 0$:

$$\begin{pmatrix} f_{placas} \\ 0 \end{pmatrix} = i n_3 \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{placas} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f_{placas} = 0. \quad (5.17)$$

² É possível considerar $l < 0$, mas essa mudança de sinal não gera novas soluções linearmente independentes (LI). Portanto, as soluções que serão apresentadas posteriormente para o problema considerado são gerais. Elas formarão um conjunto completo de soluções LI adequadas, independente do sinal de l .

Considerando soluções do tipo “down”, soluções na forma $\psi(\mathbf{x}, t = 0) = \text{coluna}(0, f(\mathbf{x}))$, o resultado é o mesmo:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ f_{placas} \end{pmatrix} = in_3 \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f_{placas} \end{pmatrix} \Rightarrow f_{placas} = 0. \quad (5.18)$$

A forma da matriz $f(\mathbf{x})$ que obedece aos critérios exigidos,

$$\nabla^2 f = -\mathbf{k}^2 f \quad \text{e} \quad f_{placas} = 0, \quad (5.19)$$

é explicitada abaixo.

$$f(\mathbf{x}) = Ae^{i(k_x x + k_y y)} \text{sen}(k_z z) = Ae^{i(k_x x + k_y y)} \text{sen}\left(\frac{n\pi z}{a}\right), \quad (5.20)$$

onde, n é qualquer número natural não nulo. A matriz A é uma matriz sem dependência espacial que será determinada pela exigência da normalização de ψ . Como os campos são confinados apenas na direção z , as componentes k_x e k_y são números reais quaisquer e $k_z = n\pi/a$ é discretizado. Essa discretização significa que nem todos os comprimentos de ondas são permitidos na região entre as placas. Essa limitação dos comprimentos de onda acessíveis ao sistema sempre ocorre quando um campo é confinado em uma região.

O último passo é normalizar ψ . Entretanto, k_x e k_y são variáveis contínuas, consequentemente, a normalização utilizada deve ser via a função delta de Dirac [5]. Vamos considerar o produto interno de dois estados $\psi_{\mathbf{k}}$ e $\psi_{\mathbf{q}}$, onde o primeiro spinor descreve uma partícula com momento $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z = n\pi/a)$, enquanto o segundo spinor descreve uma partícula com momento $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z = k_z = n\pi/a)$, ou seja, as duas soluções tem o mesmo valor para a componente z do momento. Consequentemente, a normalização é calculada a partir da identidade abaixo.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_0^a dz \psi_{k_x, k_y, n}^\dagger \psi_{q_x, q_y, n} = \delta(k_x - q_x) \delta(k_y - q_y). \quad (5.21)$$

Entretanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_0^a dz \psi_{k_x, k_y, n}^\dagger \psi_{q_x, q_y, n} = (2\pi^2 a) A^\dagger A \delta(k_x - q_x) \delta(k_y - q_y). \quad (5.22)$$

O que fornece a seguinte identidade:

$$(2\pi^2 a) A^\dagger A = 1. \quad (5.23)$$

Consequentemente, há duas escolhas para a matriz A :

$$A_1 = \frac{1}{\pi\sqrt{2a}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A_2 = \frac{1}{\pi\sqrt{2a}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.24)$$

Isso significa que para cada momento $\mathbf{k}$ há duas soluções LI, ou seja, o campo fermiônico carrega quatro números quânticos: r , indicando o estado de spin e podendo

assumir os valores 1 ou 2, k_x , k_y e n . Como esperado, existe um conjunto infinito de soluções $\{\psi_{r,\mathbf{k}}^{(\pm)}\}$ que obedecem a [Equação 5.4](#) na região delimitada pela [Figura 2](#) e que satisfaz a condição de contorno do MIT ([Equação 5.15](#)). Esse conjunto de soluções são denominados modos normais e serão de extrema importância no processo de segunda quantização.

A generalização da forma funcional dos modos normais é uma consequência imediata do que foi desenvolvido até o momento.

Para os casos de energia positiva:

$$\psi_{r,k_x,k_y,n}^{(+)} = \frac{1}{\pi\sqrt{2a}} e^{i(k_x x + k_y y)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi z}{a}\right) u_r e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}. \quad (5.25)$$

Para os casos de energia negativa:

$$\psi_{r,k_x,k_y,n}^{(-)} = \frac{1}{\pi\sqrt{2a}} e^{-i(k_x x + k_y y)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi z}{a}\right) v_r e^{i\omega_{\mathbf{k}} t}. \quad (5.26)$$

Nas equações acima, u_r e v_r são matrizes que carregam o comportamento spinorial das soluções. Elas dependem do valor de ξ e estão explicitadas no [Quadro 1](#).

É muito curioso a “inversão” da lógica dos espinores ao considerar a quebra de simetria de Lorentz nos casos pares. Normalmente os espinores coluna(1, 0, 0, 0) e coluna(0, 1, 0, 0) estão associados aos estados de energias positivas, enquanto os espinores coluna(0, 0, 1, 0) e coluna(0, 0, 0, 1) estão associados aos estados de energia negativa [\[2\]](#). Essa lógica é preservada quando $\xi = 2, 6, 10, \dots$, entretanto, isso se inverte nos outros casos pares. Aparentemente não há nenhuma razão profunda por trás dessa sutiliza. Entretanto, isso revela que estranhezas, por menores que sejam, surgem quando o tratamento viola a simetria de Lorentz.

Quadro 1 – Conjunto de configurações possíveis para os espinores u_r e v_r .

ξ	u_1	u_2	v_1	v_2
2, 6, 10, $\dots$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
4, 8, 12, $\dots$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

5.2 Forma funcional do campo fermiônico quando ξ assume valores ímpares

Considerando $\xi = 1, 3, 5, \dots$ e adotando soluções na forma (5.7), a equação (5.6) gera o seguinte sistema de equações diferenciais parciais:

$$E\varphi + il^{\xi-1}\sigma^j\partial_j\left(\nabla^2\right)^{\frac{\xi-1}{2}}\chi = 0, \quad (5.27)$$

$$E\chi + il^{\xi-1}\sigma^j\partial_j\left(\nabla^2\right)^{\frac{\xi-1}{2}}\varphi = 0. \quad (5.28)$$

Quando ξ assume valores pares, os spinores φ e χ são independentes. Entretanto, assumindo que ξ é ímpar, esses espinores estão acopladas, um comportamento que também surge no caso fermiônico sem violação de Lorentz [11].

Assumindo soluções de energia positiva ($E = \omega > 0$), o sistema acima fica reescrito da seguinte forma:

$$\omega\varphi^{(+)} + il^{\xi-1}\sigma^j\partial_j\left(\nabla^2\right)^{\frac{\xi-1}{2}}\chi^{(+)} = 0, \quad (5.29)$$

$$\chi^{(+)} = -\frac{il^{\xi-1}}{\omega}\sigma^j\partial_j\left(\nabla^2\right)^{\frac{\xi-1}{2}}\varphi^{(+)}. \quad (5.30)$$

Para desacoplar os espinores basta realizar uma substituição direta da expressão (5.30) na equação imediatamente acima da mesma. Este procedimento gera uma equação diferencial parcial que determina $\varphi^{(+)}$:

$$\omega^2\varphi^{(+)} + l^{2(\xi-1)}\sigma^a\sigma^b\partial_a\partial_b\left(\nabla^2\right)^{\xi-1}\varphi^{(+)} = 0 \Rightarrow \omega^2\varphi^{(+)} + l^{2(\xi-1)}\left(\nabla^2\right)^{\xi}\varphi^{(+)} = 0. \quad (5.31)$$

É natural assumir que a solução da equação acima tem a seguinte forma funcional:

$$\varphi^{(+)} = Ne^{i(k_x x + k_y y)}\left(A^{(+)}e^{ik_z z} + B^{(+)}e^{-ik_z z}\right), \quad (5.32)$$

onde $A^{(+)}$ e $B^{(+)}$ são matrizes 2×1 sem dependência espacial, e N é uma constante de normalização. Esses parâmetros serão determinados pela exigência da normalização de ψ , em conjunto com a condição de contorno do MIT (5.15).

A proposta de solução (5.32) é autofunção do operador laplaciano ($\nabla^2\varphi^{(+)} = -\mathbf{k}^2\varphi^{(+)}$), o que permite reescrever (5.31) da seguinte forma:

$$\left[\omega^2 - l^{2(\xi-1)}\left(\mathbf{k}^2\right)^{\xi}\right]\varphi^{(+)} = 0. \quad (5.33)$$

Logo, a relação de dispersão é

$$\omega = l^{\xi-1}\left(\mathbf{k}^2\right)^{\xi/2}. \quad (5.34)$$

Isso revela uma característica importante: a relação de dispersão tem a mesma estrutura genérica em todos os casos, isto é, ξ sendo par ou ímpar, a relação entre o

momento e a energia da partícula livre é $\omega = l^{\xi-1} (\mathbf{k}^2)^{\xi/2}$. Na equação acima, a relação de dispersão é encontrada utilizando os casos de energia positiva, mas, a priori, não há razão nenhuma para considerar que nos casos de energia negativa essa relação se transforma. Como será visto, a equação acima também surge na conjuntura de soluções com energia negativa.

Substituindo (5.32) em (5.30) a seguinte expressão é obtida:

$$\chi^{(+)} = \frac{l^{\xi-1} (-\mathbf{k}^2)^{\frac{\xi-1}{2}}}{\omega} N e^{i(k_x x + k_y y)} \left[Q(k_z) A^{(+)} e^{ik_z z} + Q(-k_z) B^{(+)} e^{-ik_z z} \right], \quad (5.35)$$

onde foi utilizada a seguinte notação:

$$\sigma^1 k_x + \sigma^2 k_y \pm \sigma^3 k_z \equiv Q(\pm k_z). \quad (5.36)$$

Para confinar o campo fermiônico na região entre as placas da [Figura 2](#), faremos uso da condição de sacola do MIT ([Equação 5.15](#)). Em $z = 0$ (placa inferior) a condição de contorno gera a seguinte relação:

$$\left(\varphi^{(+)} - i\sigma^3 \chi^{(+)} \right) \Big|_{z=0} = 0. \quad (5.37)$$

Aplicando (5.32) e (5.35) na equação acima, uma relação direta entre as matrizes $A^{(+)}$ e $B^{(+)}$ é encontrada. Essa relação é:

$$M_1 A^{(+)} + M_2 B^{(+)} = 0 \Rightarrow B^{(+)} = -M_2^{-1} M_1 A^{(+)}, \quad (5.38)$$

onde a seguinte notação foi utilizada:

$$M_1 \equiv \omega I - i l^{\xi-1} (-\mathbf{k}^2)^{\frac{\xi-1}{2}} \sigma^3 Q(k_z), \quad (5.39)$$

$$M_2 \equiv \omega I - i l^{\xi-1} (-\mathbf{k}^2)^{\frac{\xi-1}{2}} \sigma^3 Q(-k_z). \quad (5.40)$$

Na placa $z = a$ (placa superior) a condição de contorno do MIT gera mais uma relação entre $A^{(+)}$ e $B^{(+)}$:

$$\left(\varphi^{(+)} + i\sigma^3 \chi^{(+)} \right) \Big|_{z=a} = 0 \Rightarrow M_3 A^{(+)} e^{ik_z a} + M_4 B^{(+)} e^{-ik_z a} = 0, \quad (5.41)$$

onde a seguinte notação foi utilizada:

$$M_3 \equiv \omega I + i l^{\xi-1} (-\mathbf{k}^2)^{\frac{\xi-1}{2}} \sigma^3 Q(k_z), \quad (5.42)$$

$$M_4 \equiv \omega I + i l^{\xi-1} (-\mathbf{k}^2)^{\frac{\xi-1}{2}} \sigma^3 Q(-k_z). \quad (5.43)$$

O próximo passo é aplicar (5.38) em (5.41) para determinar a discretização de k_z .

$$\left[I e^{ik_z a} - M_3^{-1} M_4 M_2^{-1} M_1 e^{-ik_z a} \right] A^{(+)} = 0. \quad (5.44)$$

No [Apêndice A](#) é demonstrado que $M_3^{-1}M_4M_2^{-1}M_1 = -I$, logo, a equação acima fica reescrita da seguinte forma:

$$\left(e^{ik_z a} + e^{-ik_z a}\right) A^{(+)} = 0 \Rightarrow \cos(k_z a) = 0 \Rightarrow k_z = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{a}, \quad (5.45)$$

onde $n = 0, 1, 2, \dots$.

As componentes k_x e k_y são contínuas, enquanto k_z é discretizada. Assim, para as duas primeiras componentes do momento a normalização é via a função delta de Dirac, algo que também ocorreu nos casos pares. A normalização vai determinar os valores aceitáveis para a matriz $A^{(+)}$ e por consequência direta de (5.38) a matriz $B^{(+)}$ também será determinada. Uma solução com um momento específico é denotada por $\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}$, e sua normalização é realizada solucionando a seguinte equação:

$$\int d^3x \left(\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\right)^\dagger \psi_{\mathbf{q}}^{(+)} = e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{q}})t} \int d^3x \left[\left(\varphi_{\mathbf{k}}^{(+)}\right)^\dagger \varphi_{\mathbf{q}}^{(+)} + \left(\chi_{\mathbf{k}}^{(+)}\right)^\dagger \chi_{\mathbf{q}}^{(+)} \right] \equiv \delta(k_x - q_x) \delta(k_y - q_y), \quad (5.46)$$

onde, $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ e $\mathbf{q} = (q_x, q_y, k_z)$.

Para simplificar a notação, ignoraremos os índices que indicam a positividade energética das soluções. Após o desenvolvimento realizado, retornaremos com os índices.

Primeiramente, será desenvolvido o primeiro termo do centro da [Equação 5.46](#):

$$\begin{aligned} \int d^3x \varphi_{\mathbf{k}}^\dagger \varphi_{\mathbf{q}} = & |N|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-i(k_x - q_x)x} \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-i(k_y - q_y)y} \int_0^a dz \left[A^\dagger A + A^\dagger B e^{-2ik_z z} + \right. \\ & \left. + B^\dagger A e^{2ik_z z} + B^\dagger B \right]. \end{aligned} \quad (5.47)$$

As duas primeiras integrais do lado direito são reescritas em termos da função delta de Dirac:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-i(k_x - q_x)x} \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-i(k_y - q_y)y} = 4\pi^2 \delta(k_x - q_x) \delta(k_y - q_y). \quad (5.48)$$

Em (5.47), o ideal é reescrever as parcelas compostas por B em termos de A . A condição de normalização precisa apenas determinar uma dessas matrizes, a outra é encontrada fazendo uso da [Equação 5.38](#). Primeiramente, vamos reescrever $B^\dagger B$ da seguinte forma:

$$B^\dagger B = \left(-M_2^{-1}M_1A\right)^\dagger \left(-M_2^{-1}M_1A\right) = A^\dagger \left(M_2^{-1}M_1\right)^\dagger \left(M_2^{-1}M_1\right) A = A^\dagger A. \quad (5.49)$$

Onde foi utilizado a expressão (A.2) para demonstrar que $\left(M_2^{-1}M_1\right)^\dagger \left(M_2^{-1}M_1\right) = I$.

A equação abaixo é obtida aplicando as identidades (5.48) e (5.49) em (5.47), e realizando a integração no parâmetro z .

$$\int d^3x \varphi_{\mathbf{k}}^\dagger \varphi_{\mathbf{q}} = |N|^2 4\pi^2 \delta(k_x - q_x) \delta(k_y - q_y) \left[2a A^\dagger A + \frac{1}{ik_z} \left(A^\dagger B - B^\dagger A \right) \right]. \quad (5.50)$$

Utilizando a [Equação 5.38](#) em conjunto com a [Equação A.2](#) elimina-se a dependência explícita de B :

$$A^\dagger B - B^\dagger A = A^\dagger \left[(M_2^{-1} M_1)^\dagger - (M_2^{-1} M_1) \right] A = -\frac{2k_z l^{\xi-1}}{i\omega} (-\mathbf{k}^2)^{\frac{\xi-1}{2}} A^\dagger A. \quad (5.51)$$

Consequentemente,

$$\int d^3x \varphi_{\mathbf{k}}^\dagger \varphi_{\mathbf{q}} = |N|^2 8\pi^2 \delta(k_x - q_x) \delta(k_y - q_y) \left[a + \frac{l^{\xi-1} (-\mathbf{k}^2)^{\frac{\xi-1}{2}}}{\omega} \right] A^\dagger A. \quad (5.52)$$

Com o primeiro termo de (5.46) já determinado, a tarefa restante para obter a normalização de ψ é calcular a segunda integral. Boa parte do procedimento necessário já foi desenvolvido na obtenção da equação acima. Apenas alguns novos passos serão necessários. Por esse motivo, não é preciso expor o passo a passo desse desenvolvimento. O valor da segunda integral de (5.46) é

$$\begin{aligned} \int d^3x \chi_{\mathbf{k}}^\dagger \chi_{\mathbf{q}} &= |N|^2 4\pi^2 \frac{l^{2(\xi-1)} (-\mathbf{k}^2)^{\xi-1}}{\omega_{\mathbf{k}}^2} \delta(k_x - q_x) \delta(k_y - q_y) \times \\ &\times \left\{ 2a \mathbf{k}^2 A^\dagger A + \frac{1}{ik_z} A^\dagger \left[(M_2^{-1} M_1)^\dagger Q^\dagger(-k_z) Q(k_z) - Q^\dagger(k_z) Q(-k_z) (M_2^{-1} M_1) \right] A \right\} \\ \Rightarrow \int d^3x \chi_{\mathbf{k}}^\dagger \chi_{\mathbf{q}} &= |N|^2 8\pi^2 \delta(k_x - q_x) \delta(k_y - q_y) \left[a - \frac{l^{\xi-1} (-\mathbf{k}^2)^{\frac{\xi-1}{2}}}{\omega} \right] A^\dagger A. \end{aligned} \quad (5.53)$$

A equação acima foi determinada utilizando a seguinte lista de identidades:

- $2\pi\delta(k - q) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-i(k-q)x};$
- $Q^\dagger(k_z) Q(k_z) = Q^\dagger(-k_z) Q(-k_z) = \mathbf{k}^2 I;$
- $B^\dagger B = A^\dagger A;$
- $\int_0^a dz e^{-2ik_z z} = 1/(ik_z);$
- $(M_2^{-1} M_1)^\dagger Q^\dagger(-k_z) Q(k_z) - Q^\dagger(k_z) Q(-k_z) (M_2^{-1} M_1) = [2k_z \mathbf{k}^2 (-\mathbf{k}^2)^{\frac{\xi-1}{2}} / (i\omega)] I.$

Todas as relações necessárias para determinar a constante de normalização e a forma das matrizes $A^{(+)}$ e $B^{(+)}$ foram encontradas. Aplicando (5.52) e (5.53) na [Equação 5.46](#) (e voltando a utilizar o índice que indica a positividade da energia) a seguinte expressão é obtida:

$$\int d^3x (\psi_{\mathbf{k}}^{(+)})^\dagger \psi_{\mathbf{q}}^{(+)} = |N|^2 16\pi^2 a \delta(k_x - q_x) \delta(k_y - q_y) (A^{(+)})^\dagger A^{(+)} \equiv \delta(k_x - q_x) \delta(k_y - q_y). \quad (5.54)$$

Consequentemente, a constante de normalização é

$$N = \frac{1}{4\pi\sqrt{a}}, \quad (5.55)$$

e qualquer par de matrizes 2×1 , LI e com norma unitária são adequadas para o problema em questão. Aqui, as duas escolhas para $A^{(+)}$ consideradas são:

$$A_1^{(+)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A_2^{(+)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.56)$$

A equação acima em conjunto com (5.38) determina as possibilidades para $B^{(+)}$:

$$B_{1,\mathbf{k}}^{(+)} = \frac{l^{\xi-1}(-\mathbf{k}^2)^{\frac{\xi-1}{2}}}{i\omega_{\mathbf{k}}} \begin{pmatrix} k_z \\ -(k_x + ik_y) \end{pmatrix}, \quad (5.57)$$

$$B_{2,\mathbf{k}}^{(+)} = \frac{l^{\xi-1}(-\mathbf{k}^2)^{\frac{\xi-1}{2}}}{i\omega_{\mathbf{k}}} \begin{pmatrix} k_x - ik_y \\ k_z \end{pmatrix}. \quad (5.58)$$

A conclusão imediata é a existência de uma infinidade de módulos normais $\psi_{r,\mathbf{k}}^{(+)}$, onde r indica o estado spinorial da solução (com $r = 1, 2$) e $\mathbf{k}$ é o momento da partícula que a solução descreve. Nada disso é novidade. Toda teoria quântica de campos exige um conjunto de funções ortonormalizadas que formem uma base para descrever qualquer estado genérico. O que foi desenvolvido nesse capítulo é a demonstração que um campo fermiônico sem massa com violação de Lorentz do tipo H-L obedece a todos critérios desejados para a construção de uma teoria quântica de campo coerente. Ainda não encontramos as soluções para as energias negativas quando ξ é ímpar. Entretanto, podemos já antecipar que existem infinitas soluções ortonormalizadas que devem ser utilizadas para descrever um estado fermiônico genérico. A prova formal disso pode ser extensa e trabalhosa (como foi visto), mas o entendimento é imediato. Na verdade, poderíamos ter apenas postulado que as soluções encontradas são ortonormais, sem nos preocupar em buscar as formas explícitas das matrizes A e B para isso ser verdadeiro. Mas, consideramos que desenvolver a demonstração da ortonormalidade dos modos normais é um importante exercício que evidencia o aumento de dificuldade algébrica ao trabalhar com uma teoria que trata espaço e tempo com pesos diferentes.

Para desenvolver as soluções com energia negativa quando ξ assume valores ímpares, vamos adotar soluções na forma (5.7), onde $E = -\omega < 0$. Essas informações aplicadas na Equação 5.6 geram o seguinte conjunto de equações:

$$\varphi^{(-)} = \frac{il^{\xi-1}}{\omega} \sigma^j \partial_j (\nabla^2)^{\frac{\xi-1}{2}} \chi^{(-)}, \quad (5.59)$$

$$\omega \chi^{(-)} - il^{\xi-1} \sigma^j \partial_j (\nabla^2)^{\frac{\xi-1}{2}} \varphi^{(-)} = 0. \quad (5.60)$$

Substituindo a equação de cima na equação inferior a seguinte EDP é obtida:

$$\omega^2 \chi^{(-)} + l^{2(\xi-1)} (\nabla^2)^\xi \chi^{(-)} = 0. \quad (5.61)$$

As soluções para a equação acima possuem a seguinte forma funcional:

$$\chi^{(-)} = N e^{-i(k_x x + k_y y)} \left(A^{(-)} e^{ik_z z} + B^{(-)} e^{-ik_z z} \right). \quad (5.62)$$

Aplicando a equação acima em (5.61), a relação de dispersão (5.14) é obtida. Não há surpresa nisso. Não existe nenhuma razão para a estrutura da frequência ω ser diferente nos casos de energia positiva ou negativa. Também não há razão para a discretização de k_z ou a constante de normalização serem distintas para as duas possibilidades energéticas.

Aplicando (5.62) em (5.59) a forma funcional de $\varphi^{(-)}$ é obtida:

$$\varphi^{(-)} = \frac{l^{\xi-1} (-\mathbf{k}^2)^{\frac{\xi-1}{2}}}{\omega} N e^{-i(k_x x + k_y y)} \left[Q(-k_z) A^{(-)} e^{ik_z z} + Q(k_z) B^{(-)} e^{-ik_z z} \right]. \quad (5.63)$$

A condição de contorno do MIT (Equação 5.15) gera as seguintes relações entre as matrizes $A^{(-)}$ e $B^{(-)}$:

$$B^{(-)} = -M_3^{-1} M_4 A^{(-)}, \quad (5.64)$$

$$\left[e^{ik_z a} - M_2^{-1} M_1 M_3^{-1} M_4 e^{-ik_z a} \right] A^{(-)} = \left(e^{ik_z a} + e^{-ik_z a} \right) A^{(-)} = 0. \quad (5.65)$$

A segunda equação discretiza k_z . Como esperado, a expressão de quantização da componente z do momento é idêntica a Equação 5.45. A normalização é garantida adotando o valor de N expresso em (5.55) e exigindo que $(A^{(-)})^\dagger A^{(-)} \equiv 1$. Consequentemente, obtemos que para cada momento $\mathbf{k}$ há duas soluções LI: $\psi_{1,\mathbf{k}}^{(-)}$ e $\psi_{2,\mathbf{k}}^{(-)}$ com as seguintes matrizes associadas:

$$A_r^{(+)} = A_r^{(-)}, \quad (5.66)$$

$$B_{1,\mathbf{k}}^{(-)} = -\frac{l^{\xi-1} (-\mathbf{k}^2)^{\frac{\xi-1}{2}}}{i\omega_{\mathbf{k}}} \begin{pmatrix} k_z \\ k_x + ik_y \end{pmatrix}, \quad (5.67)$$

$$B_{2,\mathbf{k}}^{(-)} = -\frac{l^{\xi-1} (-\mathbf{k}^2)^{\frac{\xi-1}{2}}}{i\omega_{\mathbf{k}}} \begin{pmatrix} -(k_x - ik_y) \\ k_z \end{pmatrix}. \quad (5.68)$$

Fica então concluída a demonstração da existência dos modos normais. O próximo passo é fazer uso dos modos normais encontrados para construir o operador de campo fermiônico que atua no espaço de Fock. Esse processo será detalhado no próximo capítulo para determinar a energia de Casimir para o campo descrito por (5.2).

6 ENERGIA E PRESSÃO DE CASIMIR

O objetivo desse capítulo é determinar a energia de Casimir, e por consequência a pressão de Casimir para os campos fermiônicos sem massa descritos pela lagrangeana (5.1) e confinados na região delimitada na Figura 2. No capítulo anterior foi encontrado o conjunto dos modos normais que expressam o campo em questão. Utilizando o procedimento de uma Teoria Quântica de Campos, a combinação desses modos normais é adotada para construir um operador que age no espaço de configurações, as vezes denominado espaço de Fock [2], isto é,

$$\psi = \sum_r \int dk_x \int dk_y \sum_n \left[c_r(\mathbf{k}) \psi_{r,\mathbf{k}}^{(+)} + d_r^\dagger(\mathbf{k}) \psi_{r,\mathbf{k}}^{(-)} \right], \quad (6.1)$$

onde $c_r(\mathbf{k})$ é o operador que destrói uma partícula com momento $\mathbf{k}$ e polarização r , e $d_r^\dagger(\mathbf{k})$ cria uma antipartícula com momento $\mathbf{k}$ e polarização r . Como as componentes k_x e k_y são contínuas, o somatório se transformou em uma integral. O número quântico n está associado a componente k_z . Tudo de acordo com o que foi desenvolvido no Capítulo 5.

Para encontrar a energia de Casimir é necessário determinar o operador $\mathcal{H}$ (densidade de hamiltoniano). Isso é feito tomando a transformada de Legendre da lagrangeana (5.1):

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\psi} + \bar{\pi} \dot{\bar{\psi}} - \mathcal{L} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \dot{\psi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}} \dot{\bar{\psi}} - \mathcal{L} = i \psi^\dagger \dot{\psi} - \mathcal{L}. \quad (6.2)$$

Comparando (5.1) e (5.2) constata-se que $\mathcal{L} = 0$ na camada de massa. Logo,

$$\mathcal{H} = i \psi^\dagger \dot{\psi}. \quad (6.3)$$

Essa expressão é idêntica à densidade de hamiltoniano do campo de Dirac padrão [3].

A energia do vácuo E_0 é definida como o valor esperado do operador hamiltoniano no estado de vácuo:

$$E_0 = \langle 0 | H | 0 \rangle = i \int_V d^3x \langle 0 | \psi^\dagger \dot{\psi} | 0 \rangle. \quad (6.4)$$

O volume de integração considerado é a região entre as placas paralelas ($V = aL^2$). Nessa região os modos normais são ortonormalizados. Além disso, apenas os termos que envolvem os operadores número, $c_r^\dagger(\mathbf{k})c_r(\mathbf{k})$, e $d_r^\dagger(\mathbf{k})d_r(\mathbf{k})$, e o conjugado hermitiano desses operadores sobrevivem na equação acima. Os termos restante são nulos por envolvem a ação de dois operadores de criação ou dois operadores de aniquilação no estado do vácuo. Consequentemente,

$$E_0 = \sum_r \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \sum_n \omega_{\mathbf{k}} \langle 0 | c_r^\dagger(\mathbf{k})c_r(\mathbf{k}) - d_r(\mathbf{k})d_r^\dagger(\mathbf{k}) | 0 \rangle. \quad (6.5)$$

Vamos exigir que os operadores de criação e aniquilação tenham as mesmas relação de anticomutação do caso sem violação de Lorentz:

$$\{d_r(\mathbf{k}), d_s^\dagger(\mathbf{q})\} = \{c_r(\mathbf{k}), c_s^\dagger(\mathbf{q})\} \equiv \delta_{rs}\delta(k_x - q_x)\delta(k_y - q_y)\delta_{nm}, \quad (6.6)$$

$$\{d_r(\mathbf{k}), d_s(\mathbf{q})\} = \{c_r(\mathbf{k}), c_s(\mathbf{q})\} = \{c_r(\mathbf{k}), d_s(\mathbf{q})\} = 0, \quad (6.7)$$

$$\{c_r^\dagger(\mathbf{k}), c_s^\dagger(\mathbf{q})\} = \{d_r^\dagger(\mathbf{k}), d_s^\dagger(\mathbf{q})\} = \{c_r^\dagger(\mathbf{k}), d_s^\dagger(\mathbf{q})\} = 0, \quad (6.8)$$

$$\{c_r(\mathbf{k}), d_s^\dagger(\mathbf{q})\} = \{c_r^\dagger(\mathbf{k}), d_s(\mathbf{q})\} = 0. \quad (6.9)$$

Para dar continuidade ao cálculo de E_0 é preciso utilizar somente a primeira relação de anticomutação:

$$\{d_r(\mathbf{k}), d_r^\dagger(\mathbf{k})\} = \delta(k_x - q_x = 0)\delta(k_y - q_y = 0) = \frac{L^2}{4\pi^2}. \quad (6.10)$$

Assim,

$$E_0 = -\frac{L^2}{4\pi^2} \sum_r \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \sum_n \omega_{\mathbf{k}}. \quad (6.11)$$

Em todos os casos calculados na seção anterior, a relação de dispersão tem a mesma forma:

$$\omega_{\mathbf{k}} = l^{\xi-1} (\mathbf{k}^2)^{\xi/2}. \quad (6.12)$$

Portanto,

$$E_0 = -\frac{L^2}{4\pi^2} \sum_r \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \sum_n l^{\xi-1} [k_x^2 + k_y^2 + k_z^2]^{\xi/2}. \quad (6.13)$$

As coordenadas k_x e k_y são contínuas e podem assumir quaisquer valores reais, enquanto k_z é discretizado e com estrutura diferente para os casos pares ($\xi = 2, 4, 6, \dots$) e ímpares ($\xi = 3, 5, 7, \dots$). É natural fazer uso de coordenadas polares no plano $k_x k_y$, ou seja, $k_x = k \cos \theta$ e $k_y = k \sin \theta$ (onde $k \in [0, \infty)$ e $\theta \in [0, 2\pi]$). Assim,

$$E_0 = -\frac{L^2 l^{\xi-1}}{\pi} \int_0^\infty dk k \sum_n [k^2 + k_z^2(n)]^{\xi/2}. \quad (6.14)$$

Isso é o mais geral possível. Para desenvolver o somatório em relação ao número quântico n , é necessário diferenciar os casos pares dos ímpares.

6.1 Energia de Casimir quando ξ assume valores pares

Assumindo $\xi = 2, 4, 6, \dots$ a componente z do momento é

$$k_z = \frac{n\pi}{a}, \quad (6.15)$$

com $n = 1, 2, 3, \dots$. Aplicando essa informação em (6.14), a seguinte expressão é obtida:

$$E_0 = -\frac{L^2 l^{\xi-1}}{\pi} \int_0^\infty dk k \sum_{n=1}^\infty \left[k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \right]^{\xi/2}. \quad (6.16)$$

Uma maneira de efetuar o somatório acima é utilizar a fórmula de Abel-Plana ¹:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = -\frac{1}{2}f(0) + \int_0^{\infty} dt f(t) + i \int_0^{\infty} \frac{f(it) - f(-it)}{e^{2\pi t} - 1} dt. \quad (6.17)$$

Para calcular E_0 é necessário considerar

$$f(n) = \left[k^2 + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right]^{\xi/2}. \quad (6.18)$$

Consequentemente, o primeiro termo da energia do vácuo é

$$(E_0)_{\text{primeiro termo}} \propto \int_0^{\infty} dk k^{\xi+1} \rightarrow \infty. \quad (6.19)$$

O segundo termo,

$$(E_0)_{\text{segundo termo}} \propto \int_0^{\infty} dk k \int_0^{\infty} dt \left(k^2 + \frac{t^2 \pi^2}{a^2} \right)^{\xi/2}, \quad (6.20)$$

também diverge.

Esses termos divergentes estão associados a energia do vácuo com a ausência de placas e com a presença de uma única placa [17], e devem ser subtraídos em um processo de renormalização. Logo, a energia do vácuo sem esses infinitos, denominada energia de Casimir, é:

$$E_c = -i \frac{L^2 l^{\xi-1}}{\pi} \int_0^{\infty} dk k \int_0^{\infty} dt \frac{[k^2 + (it\pi/a)^2]^{\xi/2} - [k^2 + (-it\pi/a)^2]^{\xi/2}}{e^{2\pi t} - 1}. \quad (6.21)$$

Por conveniência, faremos a seguinte mudança de variável: $u = \pi t/a$. Portanto,

$$E_c = -i \frac{L^2 a l^{\xi-1}}{\pi^2} \int_0^{\infty} dk k \int_0^{\infty} du \frac{[k^2 + (iu)^2]^{\xi/2} - [k^2 + (-iu)^2]^{\xi/2}}{e^{2au} - 1}. \quad (6.22)$$

Para efetuarmos a integral na variável u , devemos adotar o seguinte procedimento: dividir o intervalo de integração em dois segmentos, de $[0, k]$ e de $[k, \infty]$. No primeiro intervalo, $u < k$, podemos escrever

$$[k^2 + (\pm iu)^2]^{\xi/2} = [k^2 - u^2]^{\xi/2}. \quad (6.23)$$

Assim a diferença $[k^2 + (iu)^2]^{\xi/2} - [k^2 + (-iu)^2]^{\xi/2} = 0$. Cancelando a contribuição da integral acima nesse intervalo. Para o segundo intervalo, $u > k$, a diferença $[k^2 + (iu)^2]^{\xi/2} - [k^2 + (-iu)^2]^{\xi/2}$ adquire o seguinte valor:

$$\begin{aligned} [k^2 + (iu)^2]^{\xi/2} - [k^2 + (-iu)^2]^{\xi/2} &= [i^2(u^2 - k^2)]^{\xi/2} - [(-i)^2(u^2 - k^2)]^{\xi/2} \\ &= (e^{i\xi\pi/2} - e^{-i\xi\pi/2}) (u^2 - k^2)^{\xi/2} \\ &= 2i \sin(\xi\pi/2) (u^2 - k^2)^{\xi/2}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Ao considerar ξ par, o $\sin(\xi\pi/2)$ é nulo, portanto a fórmula acima sempre fornece um valor nulo. Consequentemente, a energia de Casimir é zero:

$$(E_c)_{\text{casos pares}} = 0. \quad (6.25)$$

¹ Em [6] é feito o uso da fórmula de Abel-Plana para calcular a energia de Casimir no caso eletromagnético e fermiônico padrão.

6.2 Energia e pressão de Casimir quando ξ assume valores ímpares

Quando $\xi = 1, 3, 5, \dots$ a componente z do momento é

$$k_z = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{a}, \quad (6.26)$$

com $n = 0, 1, 2, \dots$. Essa informação aplicada em (6.14) fornece a seguinte expressão:

$$E_0 = -\frac{L^2 l^{\xi-1}}{\pi} \int_0^\infty dk k \sum_{n=0}^\infty \left\{ k^2 + \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{a} \right]^2 \right\}^{\xi/2}. \quad (6.27)$$

Novamente, temos uma soma de infinitos termos que pode ser realizada utilizando a fórmula de Abel-Plana para semi-inteiros [6]:

$$\sum_{n=0}^\infty f(n + 1/2) = \int_0^\infty dt f(t) - i \int_0^\infty dt \frac{f(it) - f(-it)}{e^{2\pi t} + 1}. \quad (6.28)$$

Para prosseguir com o desenvolvimento da energia do vácuo, assumimos que

$$f(n + 1/2) = \left\{ k^2 + \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{a} \right]^2 \right\}^{\xi/2}. \quad (6.29)$$

Portanto, o primeiro termo da energia do vácuo é

$$(E_0)_{\text{primeiro termo}} \propto \int_0^\infty dk k \int_0^\infty dt f(t). \quad (6.30)$$

Que diverge. Logo, ao subtrair esse infinito a energia do vácuo fica renormalizada e é denominada energia de Casimir, que depende apenas da segunda integral de (6.28).

$$E_c = i \frac{L^2 l^{\xi-1}}{\pi} \int_0^\infty dk k \int_0^\infty dt \frac{\left[k^2 + \left(\frac{it\pi}{a} \right)^2 \right]^{\xi/2} - \left[k^2 + \left(\frac{-it\pi}{a} \right)^2 \right]^{\xi/2}}{e^{2\pi t} + 1}. \quad (6.31)$$

Utilizando a mudança de variável $u = t\pi/a$, a expressão acima torna-se:

$$E_c = i \frac{L^2 a l^{\xi-1}}{\pi^2} \int_0^\infty dk k \int_0^\infty du \frac{[k^2 + (iu)^2]^{\xi/2} - [k^2 + (-iu)^2]^{\xi/2}}{e^{2au} + 1}. \quad (6.32)$$

Na seção anterior, foi discutido que $[k^2 + (iu)^2]^{\xi/2} - [k^2 + (-iu)^2]^{\xi/2}$ tem valor nulo quando $u < k$, e para $u > k$ tem a forma (6.24). Logo, o intervalo de integração acima, com respeito a u , tem que ser dividido em dois: $0 \leq u < k$ e $k \leq u < \infty$. No primeiro intervalo a integral é nula, fornecendo a seguinte expressão para a energia de Casimir:

$$E_c = -\frac{2L^2 a l^{\xi-1}}{\pi^2} \text{sen}(\xi\pi/2) \int_0^\infty dk k \int_k^\infty du \frac{(u^2 - k^2)^{\xi/2}}{e^{2au} + 1}. \quad (6.33)$$

Usando a mudança de variável $u = kt$, podemos reescrever a expressão anterior da seguinte forma:

$$E_c = -\frac{2L^2 a l^{\xi-1}}{\pi^2} \text{sen}(\xi\pi/2) \int_0^\infty dt (t^2 - 1)^{\xi/2} \int_0^\infty dk \frac{k^{\xi+2}}{e^{2akt} + 1}. \quad (6.34)$$

A integração com relação ao parâmetro k pode ser computada utilizando a seguinte fórmula apresentada em [20, p.1036]:

$$\int_0^\infty dt \frac{t^{z-1}}{e^t + 1} = (1 - 2^{1-z}) \Gamma(z) \zeta(z) \quad \text{se } \operatorname{Re}(z) > 0, \quad (6.35)$$

onde $\Gamma(z)$ e $\zeta(z)$ são as funções gama e zeta de Riemann, respectivamente [21].

Para fazer uso da integral acima é necessário mudar a variável de integração k para $v = 2akt$. Consequentemente,

$$\int_0^\infty dk \frac{k^{\xi+2}}{e^{2akt} + 1} = \frac{1}{(2at)^{\xi+3}} \int_0^\infty dv \frac{v^{\xi+2}}{e^v + 1} = \frac{1}{(2at)^{\xi+3}} \left(1 - \frac{1}{2^{\xi+2}}\right) \Gamma(\xi+3) \zeta(\xi+3). \quad (6.36)$$

Por fim, para determinar a energia de Casimir resta desenvolver a integral com relação a variável t :

$$E_c = -\operatorname{sen}(\xi\pi/2) \frac{L^2 l^{\xi-1}}{\pi^2 (2a)^{\xi+2}} \left(1 - \frac{1}{2^{\xi+2}}\right) \Gamma(\xi+3) \zeta(\xi+3) \int_1^\infty dt \frac{(t^2 - 1)^{\xi/2}}{t^{\xi+3}}. \quad (6.37)$$

A integral remanescente tem a seguinte solução analítica:

$$\int_1^\infty dt \frac{(t^2 - 1)^{\xi/2}}{t^{\xi+3}} = \left. \frac{(t^2 - 1)^{\frac{\xi+2}{2}}}{(\xi+2)t^{\xi+2}} \right|_1^\infty = \frac{1}{\xi+2}. \quad (6.38)$$

Portanto,

$$E_c = -\operatorname{sen}(\xi\pi/2) \frac{L^2 l^{\xi-1}}{\pi^2 (2a)^{\xi+2}} \left(1 - \frac{1}{2^{\xi+2}}\right) \Gamma(\xi+2) \zeta(\xi+3). \quad (6.39)$$

Onde foi utilizado a seguinte identidade: $\Gamma(\xi+3)/(\xi+2) = \Gamma(\xi+2)$.

Quando $\xi = 1$, a [Equação 6.39](#) fornece a seguinte energia de Casimir por unidade de área:

$$\frac{E_c}{L^2} = -\frac{1}{\pi^2 (2a)^3} \left(1 - \frac{1}{8}\right) 2! \frac{\pi^4}{90} = -\frac{7}{4} \left(\frac{\pi^2}{720a^3}\right). \quad (6.40)$$

Esse resultado é compatível com a expressão da energia de Casimir para o campo de Dirac sem massa desenvolvida em [22]. Ou seja, quando $\xi = 1$ a física encontrada recai no caso padrão. Mas isso já era esperado: observando a lagrangeana (5.1), fica perceptível que quando o expoente crítico é a unidade, ela recai na descrição fermiônica sem violação de Lorentz. Além disso, se impormos valores pares para ξ , a [Equação 6.39](#) gera zeros, ou seja, o resultado obtido para os casos ímpares também é válido para os casos pares!

A expressão da energia de Casimir relacionada com um campo de Klein-Gordon sem massa, com violação do tipo H-L e obedecendo a condições de contorno mistas (campo e derivada do campo na direção z anulados nas placas) desenvolvidas em [17] é muito similar a (6.39). A única diferença é um fator $-\frac{1}{4}$, ou seja,

$$(E_c)_{\text{campo escalar com violação H-L}} = -\frac{1}{4} (E_c)_{\text{campo fermiônico com violação H-L}}. \quad (6.41)$$

Essa diferença é esperada porque férmions obedecem ao princípio de exclusão de Pauli [5], logo, tendem a ocupar mais estados energéticos que os bósons.

De acordo com a mecânica hamiltoniana, uma força generalizada é o negativo da derivada do hamiltoniano (a energia em quase todos os casos de interesse) com relação a uma coordenada generalizada [16]. Logo, para a energia de Casimir há uma força relacionada, a força de Casimir, expressa por:

$$F_c = -\frac{\partial E_c}{\partial a} = -\sin(\xi\pi/2) \frac{2L^2 l^{\xi-1}}{\pi^2 (2a)^{\xi+3}} \left(1 - \frac{1}{2^{\xi+2}}\right) \Gamma(\xi+3) \zeta(\xi+3). \quad (6.42)$$

A pressão de Casimir é a força por unidade de área:

$$P_c = \frac{F_c}{L^2} = -\sin(\xi\pi/2) \frac{2l^{\xi-1}}{\pi^2 (2a)^{\xi+3}} \left(1 - \frac{1}{2^{\xi+2}}\right) \Gamma(\xi+3) \zeta(\xi+3). \quad (6.43)$$

O [Quadro 2](#) fornece o valor explícito da intensidade da pressão de Casimir quando $\xi = 1, 3, 5, 7, 9, 11$.

Quadro 2 – Forma funcional do módulo da pressão de Casimir para diferentes valores do expoente crítico.

$P_c l^4$	$x \equiv \frac{2a}{l}$
$\xi = 1$	$-\frac{7\pi^2}{60x^4}$
$\xi = 3$	$\frac{31\pi^4}{126x^6}$
$\xi = 5$	$-\frac{127\pi^6}{120x^8}$
$\xi = 7$	$\frac{511\pi^8}{66x^{10}}$
$\xi = 9$	$-\frac{14144777\pi^{10}}{1630x^{12}}$
$\xi = 11$	$\frac{8191\pi^{12}}{6x^{14}}$

A pressão de Casimir é detectada apenas quando a distância entre as placas paralelas é muito pequena. A [Equação 6.43](#) mostra que a violação da simetria de Lorentz torna a intensidade da pressão de Casimir maior que o caso padrão, ou seja, no caso padrão a $P_c \propto 1/a^4$, e no caso com violação do tipo H-L a $F_c \propto 1/a^{\xi+3}$. Graficamente, essas propriedades estão sintetizadas na [Figura 4](#). Outra importante propriedade da [Equação 6.43](#) é que o carácter atrativo ou repulsivo da força de Casimir depende do expoente crítico (ξ). Na literatura, usualmente a força de Casimir para o campo vetorial é atrativa, entretanto há montagens experimentais que podem tornar a força repulsiva [23]. Aqui, os parâmetros da violação aparecem explicitamente na expressão da força de Casimir e controlam essa característica de atração ou repulsão.

É importante mencionar que todo o desenvolvimento apresentado aqui foi realizado considerando que o expoente crítico é um número inteiro. Entretanto, a [Equação 6.43](#) é

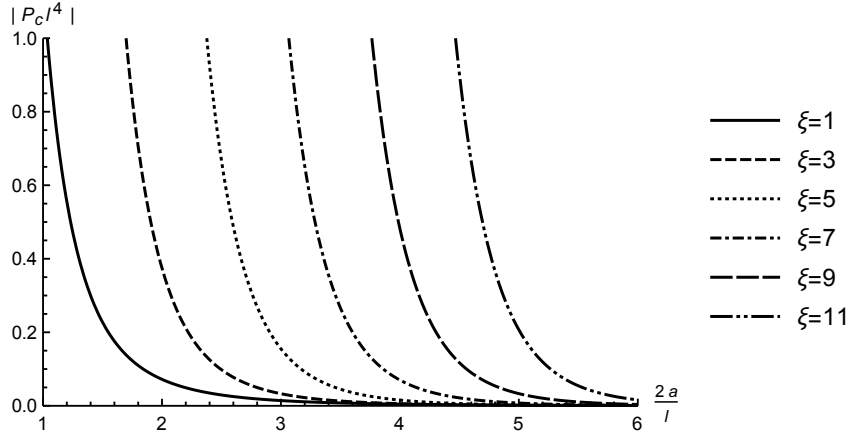


Figura 4 – Módulo da pressão de Casimir fermiônica admitindo a violação de Lorentz proposta por H-L. O comportamento da pressão também depende do valor adotado para o expoente crítico ξ .

uma função analítica do expoente crítico, e por continuidade analítica é válida para um ξ real qualquer, isto é, existe pressão de Casimir para valores não inteiros do expoente crítico. A teoria de H-L não fornece os valores dos parâmetros associados a violação de simetria de Lorentz. Essas novas constantes da natureza só podem ser determinadas se houver detecção experimental.

7 CORRENTE FERMIÔNICA

O confinamento de um campo em uma determinada região é feito através de alguma condição de contorno. Na mecânica quântica não-relativística, uma partícula numa caixa é confinada utilizando condições de nulidade da função de onda nas fronteiras dessa caixa [5]. Para confinar o campo escalar padrão há três possibilidades de condições de contorno: Dirichlet (que exige um valor nulo do campo nas fronteiras de confinamento), Neumann (onde a derivada do campo na direção perpendicular a fronteira de confinamento é nula) ou a mista (uma combinação da condição de contorno de Dirichlet e Neumann) [17]. Para o campo de Dirac padrão, o confinamento em uma região é feito através da condição de sacola do MIT [6].

No [Capítulo 5](#), encontramos um conjunto de funções $(\psi_{r,\mathbf{k}}^{(\pm)})$ que obedeciam a equação de Dirac com violação de Lorentz ([Equação 5.2](#)) e utilizamos a condição de sacola do MIT para quantizar a componente k_z do momento. Também afirmamos que essa condição confinava o campo fermiônico na região delimitada pela [Figura 2](#). Para o caso padrão isso é verdadeiro, como é bem demonstrado em [9]. Contudo, faltou demonstrar que essa mesma condição de contorno é aplicável ao modelo de H-L. O objetivo deste capítulo é mostrar que a utilização da condição do MIT não foi uma imposição infundada.

Na prática, confinar o campo fermiônico é construir uma corrente de probabilidade nula na fronteira de confinamento. Para ser mais exato e compatível com o que foi desenvolvimento aqui, devemos mostrar que a corrente nas placas é nula.

Falar de corrente de probabilidade é o mesmo que exigir uma equação de continuidade. Logo, o primeiro objetivo é provar que as equações (5.4) e (5.6) tem uma equação de continuidade associada. Para realizar essa tarefa, seguimos a mesma estratégia exposta em [3].

No momento, focaremos nossa atenção na construção de uma corrente de probabilidade para os casos pares ($\xi \equiv 2n$). Ao multiplicar (5.4) por $\psi^\dagger$ pela esquerda, obtemos a seguinte expressão:

$$\psi^\dagger \dot{\psi} - i l^{2n-1} \bar{\psi} (\nabla^2)^n \psi = 0. \quad (7.1)$$

A expressão abaixo é o conjugado hermitiano de (5.4) multiplicado por ψ pela direita.

$$\dot{\psi}^\dagger \psi + i l^{2n-1} [(\nabla^2)^n \bar{\psi}] \psi = 0. \quad (7.2)$$

A soma das duas expressões encontradas gera a seguinte equação:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi^\dagger \psi) + i l^{2n-1} \left\{ [(\nabla^2)^n \bar{\psi}] \psi - \bar{\psi} (\nabla^2)^n \psi \right\} \equiv \frac{\partial}{\partial t}(\psi^\dagger \psi) + i l^{2n-1} F_n = 0. \quad (7.3)$$

A expressão acima remete a uma equação de continuidade, onde a densidade de probabilidade é

$$\rho \equiv \psi^\dagger \psi, \quad (7.4)$$

e a corrente de probabilidade deve obedecer ao seguinte critério:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} \equiv i l^{2n-1} F_n. \quad (7.5)$$

Após alguns passos intermediários, conseguimos deduzir que o vetor corrente é dado por:

$$\mathbf{J} = i l^{2n-1} \sum_{i=1}^n \left\{ \left[\nabla (\nabla^2)^{i-1} \bar{\psi} \right] (\nabla^2)^{n-i} \psi - \left[(\nabla^2)^{i-1} \bar{\psi} \right] \nabla (\nabla^2)^{n-i} \psi \right\}. \quad (7.6)$$

Para provar isso, basta aplicar o divergente na equação anterior e obter a expressão (7.5):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{J} / (i l^{2n-1}) &= \sum_{i=1}^n \left[(\nabla^2)^i \bar{\psi} \right] (\nabla^2)^{n-i} \psi + \sum_{i=1}^n \nabla \left[(\nabla^2)^{i-1} \bar{\psi} \right] \cdot \nabla \left[(\nabla^2)^{n-i} \psi \right] + \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \nabla \left[(\nabla^2)^{i-1} \bar{\psi} \right] \cdot \nabla \left[(\nabla^2)^{n-i} \psi \right] - \sum_{i=1}^n \left[(\nabla^2)^{i-1} \bar{\psi} \right] (\nabla^2)^{n+1-i} \psi. \end{aligned} \quad (7.7)$$

O segundo e o terceiro somatório se anulam, restando:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} / (i l^{2n-1}) = \sum_{i=1}^n \left[(\nabla^2)^i \bar{\psi} \right] (\nabla^2)^{n-i} \psi - \sum_{i=1}^n \left[(\nabla^2)^{i-1} \bar{\psi} \right] (\nabla^2)^{n+1-i} \psi. \quad (7.8)$$

Retirando do primeiro somatório o n -ésimo termo e do segundo somatório o primeiro termos, obtemos:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{J} / (i l^{2n-1}) &= \left[(\nabla^2)^n \bar{\psi} \right] \psi - \bar{\psi} (\nabla^2)^n \psi + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} \left[(\nabla^2)^i \bar{\psi} \right] (\nabla^2)^{n-i} \psi - \sum_{i=2}^n \left[(\nabla^2)^{i-1} \bar{\psi} \right] (\nabla^2)^{n+1-i} \psi. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Reescrevendo $i \rightarrow i + 1$ no último somatório, ele se torna igual ao primeiro. Consequentemente, os dois somatórios se cancelam, restando apenas

$$\nabla \cdot \mathbf{J} / (i l^{2n-1}) = \left[(\nabla^2)^n \bar{\psi} \right] \psi - \bar{\psi} (\nabla^2)^n \psi. \quad (7.10)$$

Que é exatamente a [Equação 7.5](#).

Esse desenvolvimento mostra que existe uma densidade de probabilidade e uma corrente de probabilidade definida para o campo fermiônico ψ quando ξ assume valores pares. É importante perceber que a corrente (7.6) é hermitiana, ou seja, $\mathbf{J}^\dagger = \mathbf{J}$. Não poderia ser diferente, operadores que representam variáveis dinâmicas devem ser hermitianos [5]. Isso significa, que para a Mecânica Quântica, além de existir uma equação de continuidade, a densidade de probabilidade e a corrente devem ser hermitianos, ou não faria sentido falar dessas medidas físicas. O próximo passo é mostrar que as mesmas propriedades são

obedecidas pelas soluções ímpares, isto é, existe uma corrente de probabilidade e uma densidade de probabilidade hermitianas quando $\xi = 1, 3, 5, \dots$.

Quando o expoente crítico assume valores ímpares ($\xi = 2n + 1$) a forma da corrente de probabilidade difere do caso anterior. Para obter sua expressão, faremos o mesmo processo que gerou a equação de continuidade nos casos pares. Primeiro, multiplicamos a expressão (5.6) por $\psi^\dagger$ pela esquerda:

$$\psi^\dagger \dot{\psi} + l^{2n} \bar{\psi} \gamma^j \partial_j (\nabla^2)^n \psi = 0. \quad (7.11)$$

Em seguida, toma-se o conjugado hermitiano de (5.6), multiplicado por ψ pela direita:

$$\dot{\psi}^\dagger \psi + l^{2n} \left[\partial_j (\nabla^2)^n \bar{\psi} \right] \gamma^j \psi = 0. \quad (7.12)$$

A soma das duas expressões anteriores fornece o molde da construção da equação de continuidade:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi) + l^{2n} \left\{ \bar{\psi} \gamma^j \partial_j (\nabla^2)^n \psi + \left[\partial_j (\nabla^2)^n \bar{\psi} \right] \gamma^j \psi \right\} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + l^{2n} G_n = 0. \quad (7.13)$$

Ou seja, para estabelecer uma corrente, precisamos encontrar um vetor $\mathbf{J}$ que obedeça a seguinte relação:

$$\partial_j J^j = l^{2n} G_n. \quad (7.14)$$

Tomando a Equação 7.6 como inspiração, testaremos o seguinte candidato à corrente de probabilidade:

$$J_{\text{teste}}^j / l^{2n} = \bar{\psi} \gamma^j (\nabla^2)^n \psi + \sum_{i=1}^n \left\{ \left[\partial_k (\nabla^2)^{i-1} \bar{\psi} \right] \gamma^k \partial^j (\nabla^2)^{n-i} \psi - \left[\partial^j \partial_k (\nabla^2)^{i-1} \bar{\psi} \right] \gamma^k (\nabla^2)^{n-i} \psi \right\}. \quad (7.15)$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \frac{1}{l^{2n}} \partial_j J_{\text{teste}}^j &= (\partial_j \bar{\psi}) \gamma^j (\nabla^2)^n \psi + \boxed{\bar{\psi} \gamma^j \partial_j (\nabla^2)^n \psi} + \\ &+ \sum_{i=1}^n \left\{ \left[\partial_k (\nabla^2)^i \bar{\psi} \right] \gamma^k (\nabla^2)^{n-i} \psi - \left[\partial_k (\nabla^2)^{i-1} \bar{\psi} \right] \gamma^k (\nabla^2)^{n+1-i} \psi \right\}. \end{aligned} \quad (7.16)$$

O segundo termo do lado direito foi destacado porque ele é exatamente o primeiro termo de G_n . Retirando o n -ésimo termo da primeira parcela do somatório e o primeiro termo da segunda parcela do somatório, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{l^{2n}} \partial_j J_{\text{teste}}^j &= \boxed{\bar{\psi} \gamma^j \partial_j (\nabla^2)^n \psi + \left[\partial_k (\nabla^2)^n \bar{\psi} \right] \gamma^k \psi} + (\partial_j \bar{\psi}) \gamma^j (\nabla^2)^n \psi - (\partial_k \bar{\psi}) \gamma^k (\nabla^2)^n \psi + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \left[\partial_k (\nabla^2)^i \bar{\psi} \right] \gamma^k (\nabla^2)^{n-i} \psi - \sum_{i=2}^n \left[\partial_k (\nabla^2)^{i-1} \bar{\psi} \right] \gamma^k (\nabla^2)^{n+1-i} \psi. \end{aligned} \quad (7.17)$$

O termo em destaque é o próprio G_n . Como todos os outros termos se cancelam, fica demonstrado que

$$\partial_j J_{\text{teste}}^j = l^{2n} G_n. \quad (7.18)$$

Aparentemente, J_{teste}^j é a corrente procurada. Mas há um problema associado ao operador J_{teste}^j : o mesmo não é hermitiano. Entretanto, com o auxílio de J_{teste}^j podemos construir o operador corrente desejado. O conjugado hermitiano da equação acima é

$$\partial_j \left(J_{\text{teste}}^j \right)^\dagger = l^{2n} G_n^\dagger = l^{2n} G_n. \quad (7.19)$$

Ou seja, a corrente que procuramos é

$$J^j = \frac{1}{2} \left[J_{\text{teste}}^j + \left(J_{\text{teste}}^j \right)^\dagger \right]. \quad (7.20)$$

Os férmions sem massa que obedecem a proposta de quebra de simetria de H-L tem conservação de probabilidade, isto é, existe uma densidade de probabilidade e uma corrente de probabilidade bem definidas que obedecem a forma padrão de uma equação de continuidade. Quando $\xi = 1$ a corrente fornecida por (7.20) é a padrão de Dirac: $J^j = \bar{\psi} \gamma^j \psi$. Infelizmente, para todos os outros valores de ξ , a estrutura da corrente é muito mais complicada que o caso padrão.

O questionamento que fica é: há fluxo de partícula fora da região entre as placas? Ou seja, adoando a condição de sacola do MIT, o objetivo de confinar o campo fermiônico na região entre as placas é obtido com sucesso? Poderíamos aplicar as soluções gerais nas equações de continuidade obtidas. Entretanto, suas expressões são muito trabalhosas e para demonstrar isso há um caminho mais simples.

Com o uso do teorema do divergente [24], podemos mostrar que se ρ é uma função normalizada no volume $V = L^2 a$, então o fluxo de corrente na superfície que contorna todo o volume é zero.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \Rightarrow \int_{V=L^2 a} d^3 x \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{d}{dt} \int_{V=L^2 a} d^3 x \rho = -\frac{d}{dt} \int_{V=L^2 a} d^3 x \psi^\dagger \psi = -\frac{d}{dt} (1) = 0. \quad (7.21)$$

Consequentemente,

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = 0. \quad (7.22)$$

A equação acima afirma que o fluxo nas placas é zero, para isso há duas possibilidades: o fluxo de entrada de partículas em uma placa é igual ao fluxo de saída de partículas na outra placa ou não há partículas entrando ou saindo, o que implica uma corrente nula nas planas. Se a primeira possibilidade for verdadeira há densidade de probabilidade nas placas, caso a segunda possibilidade seja a correta, então $\rho_{\text{placas}} = 0$. Mas há um ponto sutil nisso. A condição de contorno do MIT anula a densidade e a corrente nas placas do caso padrão. A densidade de probabilidade no caso com quebra de simetria tem a mesma

estrutura do caso padrão: $\rho = \psi^\dagger \psi$, logo a densidade nas placas é zero quando há ou não violação de simetria. Portanto, a primeira possibilidade que explica o valor nulo do fluxo de corrente não é aceitável no contexto em questão. Sobrando apenas a situação onde não há corrente alguma nas placas! ¹

¹ Quando ξ é par, podemos demonstrar que $\mathbf{J} = 0$, sem muitas dificuldades. Na expressão (7.6) o ψ é uma combinação linear de todos os módulos normais $\psi_{r,\mathbf{k}}^{(\pm)}$, que dependem explicitamente de $\sin(n\pi z/a)$. O laplaciano não muda essa dependência, ou seja, todas as parcelas da corrente tem o fator $\sin(n\pi z/a)$. Essa função trigonométrica tem valor nulo para $z = 0$ e $z = a$. Por conta disso, a corrente é zero nas placas.

8 Conclusão

Na Mecânica Clássica, a energia de uma partícula livre é proporcional ao quadrado do momento da mesma. A Teoria da Relatividade Restrita muda um pouco esse paradigma, mostrando que a energia de uma partícula livre obedece a relação $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$.¹ Quando a massa da partícula é nula, a relação energia-momento recai na expressão $E = |\mathbf{p}|$. A primeira grande mudança contida no formalismo de violação de Lorentz de H-L é a modificação nessa relação de dispersão. Uma partícula com massa muito inferior ao momento nesse formalismo tem uma energia que depende do momento de acordo com a relação $\omega = l^{\xi-1}(\mathbf{k}^2)^{\xi/2}$, que recai no caso “clássico” ao assumir $\xi = 1$.² Entretanto, no formalismo de H-L o valor do expoente crítico deve ser distinto da unidade.

Nesta Dissertação mostramos que o modelo de H-L aplicado a férmions leves continua fornecendo resultados canônicos da Teoria Quântica de Campos, entre eles, mostramos que nesse formalismo a energia do vácuo ainda permanece infinita e deve ser tomada como constante de renormalização das energias. Também mostramos que nesse formalismo podemos estudar o efeito Casimir, e encontramos as modificações que o formalismo de H-L produz nesse efeito. Essas mudanças no efeito Casimir são drásticas. No caso fermiônico padrão, isto é, férmions que obedecem a equação de Dirac e são confinados entre duas placas paralelas, a força de Casimir é atrativa e fica mais intensa com a redução da proximidade entre as placas. Quando a violação de Lorentz do tipo H-L é aplicada, a natureza atrativa ou repulsiva da força entre as placas depende diretamente do expoente crítico, ou seja, é um dos parâmetros da violação de Lorentz que determina se as placas vão tender a se aproximar ou se afastarem. Com violação, as placas continuam interagindo mais fortemente com um redução na distância que as separa, contudo, comparando com o caso padrão, essa interação é muito mais intensa. Isso significa que o efeito Casimir é potencializado na conjectura aqui considerada.

Um outro ponto importante e intrigante que nos deparamos são as diferenças entre a equação que descreve a dinâmica dos férmions no nosso formalismo e a equação de Dirac padrão, quando o valor expoente crítico é par. Nesse caso, as componentes “up” e “down” dos espinores são independentes, algo que não ocorre no caso fermiônico padrão. Além disso, quando o expoente crítico é par, os espinores não têm dependência explícita das matrizes γ^j , com $j = 1, 2, 3$; algo que também não ocorre nas soluções da equação de Dirac padrão. Mostramos também que quando ξ assume valores pares, não existe efeito Casimir. Enquanto no caso padrão, sempre há efeito Casimir, quando consideramos o

¹ Estamos adotando $c = \hbar \equiv 1$.

² O parâmetro l e ξ estão associados a violação de Lorentz. O primeiro não recebe nenhum nome, já o segundo recebe o nome de expoente crítico.

campo fermiônico confinado na região entre as duas placas.

Nessa Dissertação não especulamos qual é o valor do expoente crítico. Encontramos que se ξ for par, não existe efeito Casimir. Já quando ξ assume valores ímpares, ocorre efeito Casimir. Todas as características dos parâmetros da violação de Lorentz do tipo H-L são muito incertas e seus valores devem ser investigados quando houver a possibilidade do teste experimental do modelo de H-L.

Outro ponto que discutimos no texto está associado com o postulado de conservação de probabilidade da Mecânica Quântica (MQ). A interpretação padrão da MQ exige que a função de onda esteja associada a densidade de probabilidade de encontrar a partícula em uma região do espaço [5]. A equação de Dirac padrão fornece a equação de continuidade associada a conservação de probabilidade [3]. Equações de conservação são intrínsecas aos modelos relativísticos, e não é diferente para a equação de Dirac modificada pela violação de Lorentz do tipo H-L. O expoente crítico assumindo valores pares ou ímpares fornecem campos que conservam a probabilidade. Isso só foi possível porque a modificação na lagrangiana de Dirac ocorreu apenas na parte espacial. As correntes de probabilidade não são simples como no caso padrão, mas foram encontradas, garantindo a existência das leis de conservação citadas.

Todo esse trabalho é apenas o começo de uma longa investigação. Utilizamos a aproximação de massa nula para investigar as características do campo de Dirac modificado e do efeito Casimir. O próximo passo natural é adicionar a massa e investigar como essa adição modifica a energia de Casimir. O interesse principal dessa primeira abordagem, aqui realizada, foi examinar algumas das características desse novo modelo para descrição de campos quânticos. A adição da massa é interessante porque é desconhecido a existência de férmions sem massa. Entretanto, numa primeira aproximação, neutrinos tem uma massa extremamente pequena, o que fornece ao trabalho aqui desenvolvido uma ótima descrição do campo modificado para essas partículas.

Referências

- 1 GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Electrodynamics*. [S.l.]: Pearson Education, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 21, 22 e 24.
- 2 SAKURAI, J. J.; COMMINS, E. D. *Modern quantum mechanics, revised edition*. [S.l.]: AAPT, 1995. Citado 10 vezes nas páginas 26, 28, 30, 31, 33, 36, 38, 43, 51 e 59.
- 3 GREINER, W. et al. *Relativistic quantum mechanics*. [S.l.]: Springer, 1990. v. 3. Citado 11 vezes nas páginas 26, 31, 32, 35, 38, 40, 44, 48, 59, 67 e 74.
- 4 MANDL, F.; SHAW, G. *Quantum field theory*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2010. Citado 8 vezes nas páginas 26, 27, 33, 38, 40, 41, 43 e 48.
- 5 GRIFFITHS, D. J.; SCHROETER, D. F. *Introduction to quantum mechanics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2018. Citado 8 vezes nas páginas 27, 37, 42, 50, 64, 67, 68 e 74.
- 6 BORDAG, M. et al. *Advances in the Casimir effect*. [S.l.]: OUP Oxford, 2009. v. 145. Citado 4 vezes nas páginas 30, 61, 62 e 67.
- 7 SALINAS, S. R. *Introdução a física estatística vol. 09*. [S.l.]: Edusp, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 42.
- 8 ITZYKSON, C.; ZUBER, J.-B. *Quantum field theory*. [S.l.]: Courier Corporation, 2012. 138 p. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 40.
- 9 DETAR, C. The mit bag model. In: *Quantum Flavordynamics, Quantum Chromodynamics, and Unified Theories*. [S.l.]: Springer, 1980. p. 393–450. Citado 3 vezes nas páginas 33, 34 e 67.
- 10 SHANKAR, R. *Principles of quantum mechanics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 36, 37 e 38.
- 11 BJORKEN, J. D.; DRELL, S. D. *Relativistic quantum mechanics*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1965. Citado 4 vezes nas páginas 38, 39, 40 e 52.
- 12 BIRRELL, N. D.; DAVIES, P. *Quantum fields in curved space*. [S.l.]: Cambridge university press, 1984. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 44.
- 13 GREEN, M. et al. *Superstring Theory: Volume 1, Introduction*. Cambridge University Press, 1988. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). ISBN 9780521357524. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=ItVsHqjJo4gC>>. Citado na página 44.
- 14 KOSTELECKÝ, V. A.; SAMUEL, S. Spontaneous breaking of lorentz symmetry in string theory. *Physical Review D*, APS, v. 39, n. 2, p. 683, 1989. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 46.
- 15 HOŘAVA, P. Quantum gravity at a lifshitz point. *Physical Review D*, APS, v. 79, n. 8, p. 084008, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 46.

- 16 TAYLOR, J. R. *Mecânica clássica*. [S.l.]: Bookman Editora, 2013. Citado 2 vezes nas páginas [44](#) e [64](#).
- 17 ULION, I. M.; MELLO, E. B. de; PETROV, A. Y. Casimir effect in horava-lifshitz-like theories. *International Journal of Modern Physics A*, World Scientific, v. 30, n. 36, p. 1550220, 2015. Citado 4 vezes nas páginas [45](#), [61](#), [63](#) e [67](#).
- 18 FARIAS, C. et al. Effective potential for horava-lifshitz-like theories. *Physical Review D*, APS, v. 85, n. 12, p. 127701, 2012. Citado 2 vezes nas páginas [45](#) e [47](#).
- 19 SANTOS, P. V. d.; PASSOS, E. M. R. d.; BRITO, F. d. A. The lorentz symmetry breaking and his implications on the quantum electrodynamics. 2011. Citado na página [46](#).
- 20 JEFFREY, A.; ZWILLINGER, D. *Table of integrals, series, and products*. [S.l.]: Elsevier, 2007. Citado na página [63](#).
- 21 ARFKEN, G.; WEBER, H. H. *Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física*. [S.l.]: Elsevier, 2007. Citado na página [63](#).
- 22 PAOLA, R. D.; RODRIGUES, R.; SVAITER, N. Casimir energy of massless fermions in the slab-bag. *Modern Physics Letters A*, World Scientific, v. 14, n. 34, p. 2353–2361, 1999. Citado na página [63](#).
- 23 JIANG, Q.-D.; WILCZEK, F. Chiral casimir forces: Repulsive, enhanced, tunable. *Physical Review B*, APS, v. 99, n. 12, p. 125403, 2019. Citado na página [64](#).
- 24 STEWART, J. Cálculo vol. ii. *Pioneira Thompson Learning*, 2001. Citado na página [70](#).
- 25 RILEY, K. F.; HOBSON, M. P.; BENCE, S. J. *Mathematical methods for physics and engineering: a comprehensive guide*. [S.l.]: Cambridge university press, 2006. Citado na página [80](#).

Apêndices

APÊNDICE A – PROPRIEDADES DAS MATRIZES M

No [Capítulo 5](#), a quantização da componente k_z do momento foi encontrada utilizando uma séries de identidades envolvendo as matrizes M_1 , M_2 , M_3 e M_4 , definidas pelas equações (5.39), (5.40), (5.42) e (5.43), respectivamente. O conjunto de propriedades utilizadas, envolvendo as matrizes M , estão listadas abaixo:

$$M_3^{-1}M_4 = \frac{l^{\xi-1}(-\mathbf{k}^2)^{\frac{\xi-1}{2}}}{i\omega} \begin{pmatrix} k_z & -(k_x - ik_y) \\ k_x + ik_y & k_z \end{pmatrix}; \quad (\text{A.1})$$

$$M_2^{-1}M_1 = \frac{l^{\xi-1}(-\mathbf{k}^2)^{\frac{\xi-1}{2}}}{i\omega} \begin{pmatrix} k_z & k_x - ik_y \\ -(k_x + ik_y) & k_z \end{pmatrix}; \quad (\text{A.2})$$

$$M_3^{-1}M_4M_2^{-1}M_1 = -I. \quad (\text{A.3})$$

O objetivo desse apêndice é demonstrar todas essas relações. Para realizar essa tarefa é necessário fazer uso das matrizes de Dirac:

$$\sigma^1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma^3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

A forma matricial de M_1 é obtida fazendo uso da [Equação 5.39](#):

$$M_1 = \begin{pmatrix} \omega - il^{\xi-1}(-\mathbf{k}^2)^{\frac{\xi-1}{2}}k_z & -il^{\xi-1}(-\mathbf{k}^2)^{\frac{\xi-1}{2}}(k_x - ik_y) \\ il^{\xi-1}(-\mathbf{k}^2)^{\frac{\xi-1}{2}}(k_x + ik_y) & \omega - il^{\xi-1}(-\mathbf{k}^2)^{\frac{\xi-1}{2}}k_z \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

A definição (5.40) fornece a forma matricial de M_2 :

$$M_2 = \begin{pmatrix} \omega + il^{\xi-1}(-\mathbf{k}^2)^{\frac{\xi-1}{2}}k_z & -il^{\xi-1}(-\mathbf{k}^2)^{\frac{\xi-1}{2}}(k_x - ik_y) \\ il^{\xi-1}(-\mathbf{k}^2)^{\frac{\xi-1}{2}}(k_x + ik_y) & \omega + il^{\xi-1}(-\mathbf{k}^2)^{\frac{\xi-1}{2}}k_z \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

A relação (5.42) fornece a estrutura matricial de M_3 :

$$M_3 = \begin{pmatrix} \omega + il^{\xi-1}(-\mathbf{k}^2)^{\frac{\xi-1}{2}}k_z & il^{\xi-1}(-\mathbf{k}^2)^{\frac{\xi-1}{2}}(k_x - ik_y) \\ -il^{\xi-1}(-\mathbf{k}^2)^{\frac{\xi-1}{2}}(k_x + ik_y) & \omega + il^{\xi-1}(-\mathbf{k}^2)^{\frac{\xi-1}{2}}k_z \end{pmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Analogamente, a identidade (5.43) gera a estrutura matricial de M_4 :

$$M_4 = \begin{pmatrix} \omega - il^{\xi-1}(-\mathbf{k}^2)^{\frac{\xi-1}{2}}k_z & il^{\xi-1}(-\mathbf{k}^2)^{\frac{\xi-1}{2}}(k_x - ik_y) \\ -il^{\xi-1}(-\mathbf{k}^2)^{\frac{\xi-1}{2}}(k_x + ik_y) & \omega - il^{\xi-1}(-\mathbf{k}^2)^{\frac{\xi-1}{2}}k_z \end{pmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

Para deduzir as relações (A.1), (A.2) e (A.3) é necessário determinar as matrizes inversas M_2^{-1} e M_3^{-1} . Uma maneira simples de encontrar a inversa de matrizes 2×2 é fazer o uso do teorema abaixo, discutido em [25].

Teorema 1 *Uma matriz inversível $A \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tem como inversa a matriz*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

O primeiro passo para encontrar as matrizes inversas desejadas é calcular os determinantes de M_2 e M_3 :

$$\det M_2 = \det M_3 = 2i\omega l^{\xi-1}(-\mathbf{k}^2)^{\frac{\xi-1}{2}} k_z. \quad (\text{A.10})$$

A equação acima conjuntamente com o Teorema 1 fornece a inversa de M_2 :

$$M_2^{-1} = \frac{1}{2i\omega l^{\xi-1}(-\mathbf{k}^2)^{\frac{\xi-1}{2}} k_z} \begin{pmatrix} \omega + il^{\xi-1}(-\mathbf{k}^2)^{\frac{\xi-1}{2}} k_z & il^{\xi-1}(-\mathbf{k}^2)^{\frac{\xi-1}{2}} (k_x - ik_y) \\ -il^{\xi-1}(-\mathbf{k}^2)^{\frac{\xi-1}{2}} (k_x + ik_y) & \omega + il^{\xi-1}(-\mathbf{k}^2)^{\frac{\xi-1}{2}} k_z \end{pmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

De forma análoga,

$$M_3^{-1} = \frac{1}{2i\omega l^{\xi-1}(-\mathbf{k}^2)^{\frac{\xi-1}{2}} k_z} \begin{pmatrix} \omega + il^{\xi-1}(-\mathbf{k}^2)^{\frac{\xi-1}{2}} k_z & -il^{\xi-1}(-\mathbf{k}^2)^{\frac{\xi-1}{2}} (k_x - ik_y) \\ il^{\xi-1}(-\mathbf{k}^2)^{\frac{\xi-1}{2}} (k_x + ik_y) & \omega + il^{\xi-1}(-\mathbf{k}^2)^{\frac{\xi-1}{2}} k_z \end{pmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

A prova da igualdade (A.1) segue diretamente das equações (A.12) e (A.8). Analogamente, a dedução da identidade (A.2) segue diretamente das equações (A.11) e (A.5). Restando provar apenas a última identidade (Equação A.3). Para realizar tal tarefa se faz uso das duas identidades já demonstradas:

$$\begin{aligned} M_3^{-1} M_4 M_2^{-1} M_1 &= - \frac{l^{2(\xi-1)}(\mathbf{k}^2)^{\xi-1}}{\omega^2} \begin{pmatrix} k_z & -(k_x - ik_y) \\ k_x + ik_y & k_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_z & k_x - ik_y \\ -(k_x + ik_y) & k_z \end{pmatrix} \\ &\quad - \frac{l^{2(\xi-1)}(\mathbf{k}^2)^{\xi}}{\omega^2} I = -I. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Onde foi utilizada a relação de dispersão $\omega = l^{\xi-1}(\mathbf{k}^2)^{\xi/2}$.