

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

RILDERSON PEDROZA DO NASCIMENTO

APLICAÇÕES DO TRIÂNGULO ARITMÉTICO PARA O ENSINO FUNDAMENTAL NOS
ANOS FINAIS

JOÃO PESSOA

2020

RILDERSON PEDROZA DO NASCIMENTO

APLICAÇÕES DO TRIÂNGULO ARITMÉTICO PARA O ENSINO FUNDAMENTAL NOS
ANOS FINAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Coordenação do curso de Licenciatura em
Matemática da Universidade Federal da Paraíba
como requisito parcial para obtenção do título de
licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Roosevelt Imperiano da Silva

JOÃO PESSOA

2020

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

N244a Nascimento, Rilderson Pedroza do.

Aplicação do triângulo aritmético para o ensino
fundamental nos anos finais / Rilderson Pedroza do
Nascimento. - João Pessoa, 2020.

54 f. : il.

Orientação: Roosevelt Imperiano da Silva.

TCC (Graduação) - UFPB/CCEN.

1. Triângulo aritmético. 2. Aritmética. 3. Matemática.
4. Produtos notáveis. I. Imperiano da Silva, Roosevelt.
II. Título.

UFPB/CCEN

CDU 51

RILDERSON PEDROZA DO NASCIMENTO

APLICAÇÕES DO TRIÂNGULO ARITMÉTICO PARA O ENSINO FUNDAMENTAL NOS
ANOS FINAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Coordenação do curso de Licenciatura em Matemática
da Universidade Federal da Paraíba como requisito
parcial para obtenção do título de licenciado em
Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Roosevelt Imperiano da Silva

Aprovado em: 08 de Outubro de 2020.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Roosevelt Imperiano da Silva (Orientador)

Prof. MSc. João Batista Alves Parente (Avaliador)

Prof^ª. Dr^a. Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia (Avaliadora)



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

ATA Nº 20 / 2020 - CCEN-CGM (11.01.14.44)

Nº do Protocolo: 23074.093704/2020-16

João Pessoa-PB, 09 de Novembro de 2020

ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO DO RILDERSON PEDROZA DO NASCIMENTO MATRÍCULA 20170121230, DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA.

Ao oitavo dia de outubro de dois mil e vinte (08/10/2020), às 16:00 horas, por videoconferência via plataforma Google Meet, através do link <https://meet.google.com/ucd-rijq-kpz>, em conformidade com a portaria nº 231/GR/REITORIA de 22 de julho de 2020, que dispõe sobre a regulamentação, em caráter excepcional e temporário, das atividades da graduação da Universidade Federal da Paraíba durante o período de isolamento social imposto pela pandemia de coronavírus (covid-19), reuniram-se em caráter de solenidade pública, os membros da comissão designada para avaliar RILDERSON PEDROZA DO NASCIMENTO. Foram componentes da Banca Examinadora, os professores Dr. Roosevelt Imperiano da Silva (Orientador), Dra. Jacqueline Fabíola Rojas Arancibia (UFPB) e Ms. João Batista Parente (UFPB). Dando início aos trabalhos, o Presidente da Banca, Roosevelt Imperiano da Silva, após declarar os objetivos da reunião, apresentou o candidato a quem concedeu a palavra para que dissertasse, oral e sucintamente, sobre o tema apresentado, intitulado “Aplicações da Triângulo Aritmético para o Ensino Fundamental nos anos Finais”. Após discorrer sobre o referido tema, o candidato foi arguido pelos examinadores na forma regimental. Ato contínuo passou a comissão, em caráter secreto, a proceder à avaliação e julgamento do trabalho, **concluindo por atribuir-lhe a nota 9,7 (nove vírgula sete)**, sendo esta o resultado da média aritmética das notas 10,00 (Prof. Dr. Roosevelt Imperiano da Silva), 10,00 (Prof. Dr. João Batista Alves) e 9,0 (Profa. Dra. Jacqueline Faiola Rojas Arancibia) e, portanto, o conceito **Aprovado**.

(Assinado digitalmente em 09/11/2020 18:26)

JACQUELINE FABIOLA ROJAS
ARANCIBIA
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
Matrícula: 1174310

(Assinado digitalmente em 16/11/2020 16:57)

JOAO BATISTA ALVES PARENTE
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
Matrícula: 331489

(Assinado digitalmente em 16/11/2020 17:25)

MIRIAM DA SILVA PEREIRA
COORDENADOR DE CURSO
Matrícula: 1818769

(Assinado digitalmente em 09/11/2020 17:19)

ROOSEVELT IMPERIANO DA SILVA
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
Matrícula: 337361

Dedico este trabalho a Deus e a todos aqueles que estiveram comigo estudando, enfrentando desafios em tempos difíceis e não desistiram. Dedico a todos que me auxiliaram para a concretização desta etapa, aos meus professores do fundamental ao ensino médio, professores da universidade e colegas de curso. Não conseguiria chegar aqui sozinho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a **Deus** por ter me guiado e me ouvido em um momento difícil da minha vida.

Agradeço a minha mãe **Rizoneide Pedroza Ferreira** que sempre esteve comigo todo o tempo.

Agradeço ao meu orientador **Prof. Dr. Roosevelt Imperiano da Silva** por ter me dado a oportunidade de fazer meu trabalho.

Agradeço aos meus professores participantes da banca examinadora **Prof. MSc. João Batista Alves Parente** e a **Prof^a. Dr^a. Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia**, pela disposição e presença para a conclusão de mais uma etapa na minha vida.

Agradeço à **Prof^a. Dr^a Rogéria Gaudêncio do Rêgo**, por ter me ajudado com dicas importantes para a minha formação.

Agradeço a **Raquel Cardoso de Lima Cruz** que acreditou em mim quando nem mesmo eu acreditava.

“Se alguém quer acompanhar-me, negue-se a si mesmo, tome diariamente sua cruz e siga-me”

Lucas 9:23b

RESUMO

Com o objetivo de levar o Triângulo Aritmético para o Ensino Fundamental nos anos finais, nosso trabalho de pesquisa bibliográfica tem natureza qualitativa e consiste na análise documental de duas coleções de livros didáticos: Matemática Realidade & Tecnologia de Souza (2018) e Matemática Bianchini de Bianchini (2015). Estes foram selecionados nas escolas públicas: Escola Municipal de Ensino Fundamental Índio Piragibe (EMIP) e na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Professor José Batista de Mello em João Pessoa/PB, no bairro de Mangabeira VII. Que foi resultado das vivências dos estágios supervisionados I, II, III, e IV, junto com o Programa de Melhoria da Educação Básica (PROMEB), do ano de 2016. Expondo as aplicações do Triângulo Aritmético que foi pesquisado em trabalhos acadêmicos, livros pedagógicos e artigos científicos, de forma que as aplicações do Triângulo Aritmético venham a ser desenvolvidas como um novo caminho ou outra alternativa para a solução de problemas. Isto é, que sejam introduzidos produtos notáveis nos anos finais da educação do ensino fundamental, porque os alunos apresentam dificuldades no desenvolvimento deste conteúdo.

Palavras-chave: Triângulo Aritmético; Livros Didáticos; Aplicações; Produtos Notáveis

ABSTRACT

With the objective of taking the Arithmetic Triangle to Elementary Education in the final years, our bibliographic research work is qualitative in nature and consists of the documentary analysis of two textbook collections: Mathematics Reality & Tecnology of Souza (2018) and Mathematics Bianchini of Bianchini (2015). These were selected in public schools: Municipal School of Elementary Education Índio Piragibe (EMIP) and in the State School of Elementary and High School Professor José Batista de Mello in João Pessoa / PB, in the district of Mangabeira VII. Which was the result of the experiences of supervised internships I, II, III, and IV, together with the Basic Education Improvement Program (PROMEB), in 2016. Exposing the applications of the Arithmetic Triangle that was researched in academic works, books pedagogical and scientific articles, so that the applications of the Arithmetic Triangle will be developed as a new path or another alternative for solving problems. That is, that notable products are introduced in the final years of elementary education, because students have difficulties in developing this content.

Keywords: Arithmetic Triangle; Didatic Books; Applications; Notable products

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Indianos Associados ao Triângulo Aritmético	19
Quadro 2: Chineses Associados ao Triângulo Aritmético	19
Quadro 3: Matemáticos Europeus Associados ao Triângulo Aritmético	20
Quadro 4: Organização Geral da Coleção Bianchini	38
Quadro 5: Os Produtos Notáveis Bianchini	41
Quadro 6: Organização Geral da Coleção Matemática Realidade & Tecnologia	45
Quadro 7: Produtos Notáveis Matemática Realidade & Tecnologia	47
Quadro 8: Atribuições ao Triângulo Aritmético	49

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Blaise Pascal	20
Figura 2: Triângulo Aritmético em Cinco Passos	21
Figura 3: Relação de Stifel	22
Figura 4: Teorema das Linhas	22
Figura 5: Teorema das Colunas	23
Figura 6: Teorema das Diagonais	23
Figura 7: Sequência dos Números Triangulares	24
Figura 8: Pirâmide de Base Triangular	24
Figura 9: Números que Definem um Tetraedro	25
Figura 10: Binômio de Newton e Combinatória	25
Figura 11: Desenvolvimento do Binômio de Newton	26
Figura 12: Coeficientes Binomiais nos Produtos Notáveis	26
Figura 13: Triângulo Aritmético Através dos Números Binomiais	26
Figura 14: Produtos Notáveis e o Triângulo Aritmético	27
Figura 15: Código de Habilidades Específicas	31
Figura 16: Livro didático Bianchini	36
Figura 17: Bianchini Os Produtos Notáveis	42
Figura 18: Livro didático Matemática Realidade & Tecnologia	43
Figura 19: Matemática Realidade & Tecnologia, Produtos Notáveis	48

LISTA DE SIGLAS

AEE- Atendimento Educacional Especializado

BNCC- Base Nacional Comum Curricular

EJA- Educação de Jovens e Adultos

EMIP- Escola Municipal Índio Piragibe

FTD- Frère Théophane Durand

LEPAC- Laboratório de Estudos e Pesquisa da Aprendizagem Científica

PNLD- Programa Nacional do Livro Didático

PROMEB- Programa de Melhoria do Ensino Básico

UFPB- Universidade Federal da Paraíba

LISTA DE ABREVIATURAS

EF06MA03- Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.

EF06MA14- Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas.

EF08MA01- Efetuar cálculos com potências de expoentes inteiros e aplicar esse conhecimento na representação de números em notação científica.

EF08MA02- Resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação, para representar uma raiz como potência de expoente fracionário.

EF08MA09- Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.

EF09MA06- Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numéricas, algébricas e gráficas e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

EF09MA07- Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica.

EF09MA08- Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas. Inclusive, escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.

EF09MA09- Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	16
1.1 JUSTIFICATIVA DO TEMA	18
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	19
2.1 QUANDO O TRIÂNGULO ARITMÉTICO FOI RECONHECIDO	18
2.2 PRINCIPAL CONTRIBUIÇÃO PARA O TRIÂNGULO ARITMÉTICO	20
2.3 CONSTRUÇÃO DO TRIÂNGULO ARITMÉTICO	21
2.4 SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS E GEOMETRIA	24
2.5 PRODUTOS NOTÁVEIS E O TRIÂNGULO ARITMÉTICO	25
2.6 UNIDADES TEMÁTICAS DA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR	28
2.7 COMPETÊNCIAS GERAIS DA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR	28
2.8 COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL	29
2.9 HABILIDADES ESPECÍFICAS DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL NOS ANOS FINAIS	31
3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	32
3.1 OBJETIVO GERAL	32
3.1.1 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	32
3.2 METODOLOGIA	32
3.2.1 UNIVERSO	33
3.2.2 SUJEITOS DA PESQUISA	34
3.3 INSTRUMENTO DE COLETA DE DADOS	35
4 ANÁLISE DOS DADOS	36
4.1 COLEÇÃO BIANCHINI NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL	36
4.1.1 VISÃO GERAL DA OBRA.	37
4.1.2 CAPÍTULOS EM QUE APARECEM OS PRODUTOS NOTÁVEIS.	41
4.2 COLEÇÃO MATEMÁTICA & REALIDADE NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL	43
4.2.1 VISÃO GERAL DA OBRA.	43
4.2.2 CAPÍTULOS EM QUE APARECEM OS PRODUTOS NOTÁVEIS.	47
4.3 SUGESTÃO DE ABORDAGEM	49
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	51
REFERÊNCIAS	53

1 INTRODUÇÃO

Lecionar os produtos notáveis não é algo que costuma ser fácil, muitas vezes o professor precisa recorrer a outros meios para que o assunto apresentado em sala seja assimilado melhor pelos alunos. Assim, trazer à tona mais um caminho para o ensino fundamental é uma forma de contribuir na aprendizagem dos alunos e de auxiliar o professor a sair de sua rotina.

Nesse sentido, qual a relação entre o Triângulo Aritmético e os Produtos Notáveis? Quais unidades temáticas, habilidades e competências da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) podem ser aplicadas ao Triângulo Aritmético? Essas são algumas questões que responderemos ao longo deste trabalho.

A proposta da nossa pesquisa é ajudar no processo de ensino e aprendizagem, mostrando outra forma de solucionar um problema recorrente nos livros didáticos, que já foi estudado e aprimorado no decorrer da história da matemática. Contudo, vale salientar que a questão que moveu a pesquisa foi a seguinte: por que no ensino fundamental os alunos não entendem bem problemas relacionados com produtos notáveis?

Temos como fonte de inspiração a dissertação de mestrado de Santiago (2016), esta versa sobre o “Triângulo de Pascal: aplicações no Ensino Fundamental e Médio”, e mostra as aplicações do Triângulo Aritmético na educação básica e no ensino médio.

Com a finalidade de levar o Triângulo Aritmético para o ensino fundamental, através da pesquisa bibliográfica, notamos que este é um tema pouco explorado nos anos finais do ensino básico. Dessa forma, apontamos a sua relevância para a educação matemática a partir da BNCC, apresentando através do que foi publicado na literatura educativa, as unidades temáticas, habilidades, objetivos gerais e específicos propostos como resultado das informações coletadas na análise para o ensino fundamental nos anos finais.

Encontramos na Monografia de Soares (2011), intitulada de “Sequências e Progressões: Possibilidades de Contextualização na Escola”, uma possibilidade de contextualização nas escolas. Isso, porque Soares (2011) trouxe à tona algumas aplicações, em sala de aula, que serviu de referencial teórico para embasar este trabalho. Do mesmo modo, temos como referência o trabalho de dissertação de mestrado de Santana (2012) de título “Currículo de Matemática da Educação de Jovens e Adultos: Uma Análise Baseada Em Livros Didáticos”.

Este trabalho foi produto de uma pesquisa realizada em duas coleções de livros didáticos, onde fizemos uma análise destes, buscando onde pode ser aplicado o Triângulo Aritmético. Com isso, temos a iniciativa de expor as aplicações do Triângulo Aritmético, podendo ser aproveitadas nos livros didáticos, guiando as possibilidades de contextualização nas obras

literárias que são distribuídas nas escolas públicas. E mostrando quais competências gerais e específicas satisfazem à temática do Triângulo Aritmético ou de Pascal segundo a BNCC. De maneira que, através dos resultados obtidos podemos concluir que é possível apresentar o Triângulo Aritmético diretamente associando a outros assuntos nos livros didáticos do ensino fundamental.

O presente trabalho surgiu como resultado das vivências e práticas no ambiente escolar, possibilitadas pelas disciplinas de estágio supervisionado I, II, III, IV e pelo Programa de Melhoria da Educação Básica (PROMEB), do ano de 2016. A observação e as práticas de instrução em sala de aula trouxeram a temática que será aqui discutida.

A pesquisa foi feita nas escolas públicas Escola Municipal Índio Piragibe e na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Professor José Batista de Mello. Lá foram encontrados dois livros didáticos comuns a ambas as escolas: Matemática Realidade & Tecnologia (SOUZA, 2018) e Bianchini (BIANCHINI, 2015).

Para a análise dos livros didáticos organizamos e listamos categorias. A metodologia utilizada foi à metodologia da sala de aula invertida. Segundo Valente (2018), os alunos devem ter conhecimentos prévios sobre o assunto estudado, como procedimento de pesquisa analisamos primeiro as coleções dos livros didáticos para encontrar e analisar o assunto do Triângulo Aritmético. Contudo não tinha nos livros didáticos (LAKATOS; MARCONI, 1991, p. 176).

Apresentamos o Triângulo Aritmético como mais uma forma de solucionar problemas relacionados aos produtos notáveis no ensino fundamental nos anos finais.

Este trabalho foi estruturado em cinco capítulos, organizados da seguinte forma: no Capítulo 1 temos a Introdução e a justificativa da pesquisa, com uma breve inserção às motivações que nos fizeram investigar o conteúdo escolhido.

No Capítulo 2 apresentamos a fundamentação teórica, onde descrevemos a história do Triângulo Aritmético e seu uso nos produtos notáveis nas séries finais do ensino fundamental.

No Capítulo 3 encontra-se o nosso procedimento metodológico, onde apresentamos os objetivos gerais e específicos da presente pesquisa.

No Capítulo 4 realizamos a análise dos dados obtidos, comparando com o que foi apresentado na fundamentação teórica.

Por fim temos o Capítulo 5, neste concluímos que o Triângulo Aritmético é mais uma forma de solucionar problemas que envolvam produtos notáveis. Segundo os dados obtidos da BNCC, o Triângulo Aritmético cumpre habilidades, objetivos gerais e específicos incluídos, sendo possível aplicar o Triângulo Aritmético diretamente na sala de aula através dos livros didáticos.

1.1 JUSTIFICATIVA DO TEMA

Este trabalho de conclusão de curso se mostra importante por trazer uma alternativa para o desenvolvimento dos produtos notáveis nos anos finais do ensino fundamental. Tendo como ferramenta o Triângulo Aritmético, para entregar ao professor mais uma possibilidade de ensino, com uma apresentação diferente da exposta nos livros didáticos.

De maneira a ajudar o aluno a entender melhor o desenvolvimento dos produtos notáveis, isto é, sem o uso da distributividade ou do cálculo de área, abrindo também espaço para a apresentação de outros assuntos. A exemplo de: combinatória, binômio de Newton e o desenvolvimento dos produtos notáveis, facilitando, assim, a compreensão do aluno ao entrar no ensino médio.

Aproveitando nossa temática estamos dispondo também da BNCC, para que através dela possamos ter uma noção de quais unidades temáticas, habilidades, objetivos gerais e específicos estão presentes em nossos livros didáticos e quais podem ser usados para a apresentação do Triângulo Aritmético.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste item foi feito um breve histórico do Triângulo Aritmético, quando foi reconhecido, um pouco sobre o seu principal contribuinte, a sua construção, as sequências numéricas, geometria e sobre a relação entre os produtos notáveis. Em sua dissertação de mestrado, na introdução de seu trabalho, Rosadas (2017) aponta que esse tema é pouco explorado na educação básica.

Rosadas (2017) afirma que o Triângulo Aritmético é muito associado ao estudo do Binômio de Newton ou a combinatória. O objetivo do seu trabalho é investigar o que o Triângulo Aritmético tem a oferecer através de aplicações importantes, usando-o como instrumento de motivação para incentivar professores ao estudo da matemática.

Na escola básica, o tema Triângulo Aritmético (mais conhecido nos livros como Triângulo de Pascal) é pouco explorado. Na grande maioria das vezes, é utilizado como introdução ao estudo do Binômio de Newton ou como complementação ao conceito de Combinações Simples. A questão abordada neste trabalho, é de como empregar o Triângulo Aritmético como ferramenta para o Ensino Básico, tendo como principal objetivo trabalhar riquezas do Triângulo através de algumas de suas importantes aplicações, motivando professores da escola básica a explorá-lo não só como objeto de transmissão de conhecimento, mas também como um instrumento interessante para motivar o estudo da matemática (ROSADAS, 2017, p.13).

Assim como outros pesquisadores, Rosadas (2017) tem como referencial teórico os trabalhos de Affonso (2014) e Silva (2015), para enriquecer o seu trabalho acadêmico com informações importantes sobre a história do Triângulo Aritmético.

2.1 QUANDO O TRIÂNGULO ARITMÉTICO FOI RECONHECIDO

Segundo Affonso (2014), o primeiro registro que se tem do Triângulo Aritmético foi feito pelo erudito Pingala (200 a.C.), em sua obra “Chandra Sutra”. O Triângulo Aritmético teve origem em decorrência de uma junção de livros indianos.

Lopes, M. S.; Carneiro, R. Dos S.; Carneiro, R. Dos S. (2020) teceram em uma breve história sobre o Triângulo Aritmético, tendo como base de estudo também o trabalho de Rosadas (2017). Para tanto, apresentam um quadro em ordem cronológica a respeito dos matemáticos, épocas e livros associados ao triângulo, os árabes e indianos foram os pioneiros até 950 d.C., como podemos ver no Quadro 1.

Quadro 1: Indianos Associados ao Triângulo Aritmético

Matemático	Época	Livros associados ao Triângulo
Desconhecido	300 a.C.	Bhagabati Sutra
Desconhecido	200 a.C.	Sthananga Sutra
Pingala	200 a.C.	Chanda Sutra
Mahavira	850 d.C.	Ganita Sara Samgraha
Halayudha	950 d.C.	Mritasanjivani

Fonte: LOPES, M. S.; CARNEIRO, R. DOS S.; CARNEIRO, R. DOS S. 2020. p. 77

Em seguida Affonso (2014) prossegue comentando sobre as descobertas e avanços na China sobre o Triângulo Aritmético. Logo em sequência segue a tabela com os principais matemáticos, a época em que viveram e os seus livros associados ao Triângulo Aritmético, como consta no Quadro 2.

Quadro 2: Chineses Associados ao Triângulo Aritmético

Matemático	Época	Livros associados ao Triângulo
Liu Hui	250 d.C.	Jiuzhangsuanshu. (Comentários sobre os “Nove Capítulos da Arte Matemática”.)
Jia Xian	1050 d.C.	Jia Xian suanjing. (Manual de Matemática de Jia Xian.)
Yang Hui	1250 d.C.	Xiangjiejiuzhangsuanfa. (Uma análise detalhada dos métodos do livro “Nove Capítulos”); Yang Hui 1250 d.C. Fasuanquyongbenmo. (Alfa e ômega de uma seleção de aplicações de métodos aritméticos.)
Zhu Shijie	1300 d.C.	Siyanyujian. (Precioso espelho dos quatro elementos.)

Fonte: LOPES, M. S.; CARNEIRO, R. DOS S.; CARNEIRO, R. DOS S. 2020. p. 78

O Triângulo Aritmético, também conhecido como Triângulo de Pascal, foi nomeado de diversas formas: Triângulo Combinatório, Triângulo de Yang Hui e Triângulo de Tartaglia, considerando que foi estudado por diversos matemáticos, o mesmo será simplesmente denominado de Triângulo Aritmético. Os matemáticos europeus contribuíram para o Triângulo Aritmético escrevendo em seus livros, como está presente no Quadro 3.

Quadro 3: Matemáticos Europeus Associados ao Triângulo Aritmético

Matemático	Época	Livros associados ao Triângulo
Apianus	1527	Rechnung. (Cálculo.)
Stifel	1544	Arithmetica Integra.
Tartaglia	1556	General Tratatodineri et misure.
Peletier	1549	Arithmétique.

Fonte: LOPES, M. S.; CARNEIRO, R. DOS S.; CARNEIRO, R. DOS S. 2020. p. 80

Como podemos ver o Triângulo Aritmético foi desenvolvido em diversos lugares do mundo e possui vários nomes de referência, nas mais diferentes regiões. Apesar disso, atribuímos o nome de Triângulo de Pascal em homenagem a Pascal presente na Figura 1, como veremos no próximo item.

2.2 PRINCIPAL CONTRIBUIÇÃO PARA O TRIÂNGULO ARITMÉTICO

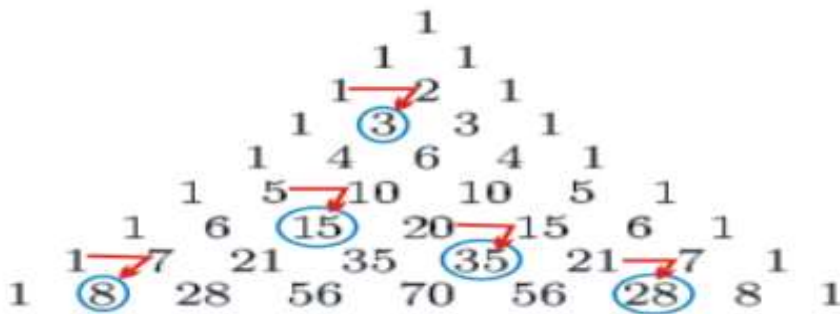
Figura 1: Blaise Pascal

Fonte: Revista de Ciência Elementar, 2014. Apud CHAQUIAM, 2017, p. 138

Segundo Chaquiam (2017), o matemático e filósofo francês Blaise Pascal nasceu em 19 de junho de 1623. Pascal realizou grandes feitos para a matemática, em 1647 quando se dedicou aos estudos da aritmética desenvolveu o cálculo da probabilidade, o Triângulo Aritmético entre outras coisas. Pascal Morreu em 19 de agosto de 1662.

Com o intuito de apresentar quatro teoremas para a construção do Triângulo Aritmético, Santos (2017) apresenta quatro particularidades do triângulo que são: a) relação de Stifel; b) teorema das linhas; c) teorema das colunas e d) teorema das diagonais. Não nos aprofundamos nestas para não fugir do tema de nossa pesquisa, a relação de Stifel foi apresentada nos 5 primeiros passos a cima, com uma forma de fácil assimilação, como mostra a Figura 3.

Figura 3: Relação de Stifel

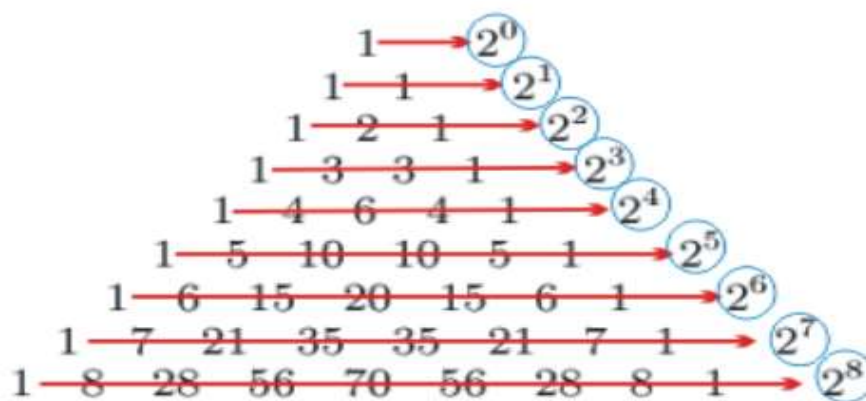


Fonte: SANTOS, 2017, p. 27

O teorema das linhas diz que: “qualquer que seja a linha de um triângulo de Pascal, somando os números contidos nela, sempre obterá como resultado uma potência de base 2, cujo expoente é o próprio número da linha menos um”.

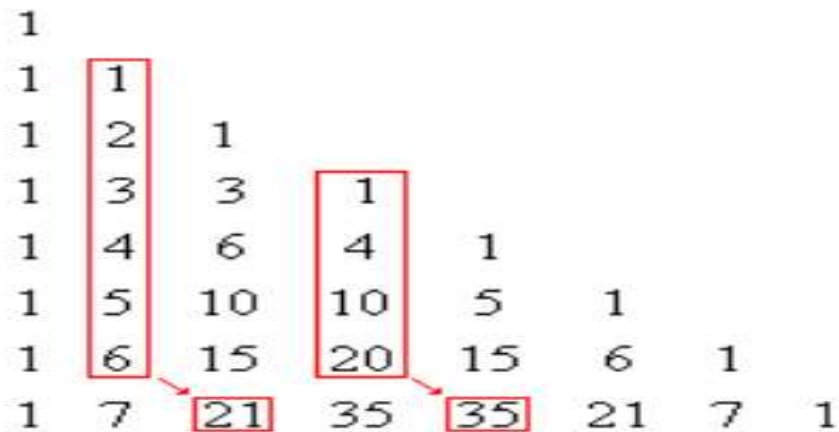
O que está apresentado no exemplo da Figura 4.

Figura 4: Teorema das Linhas



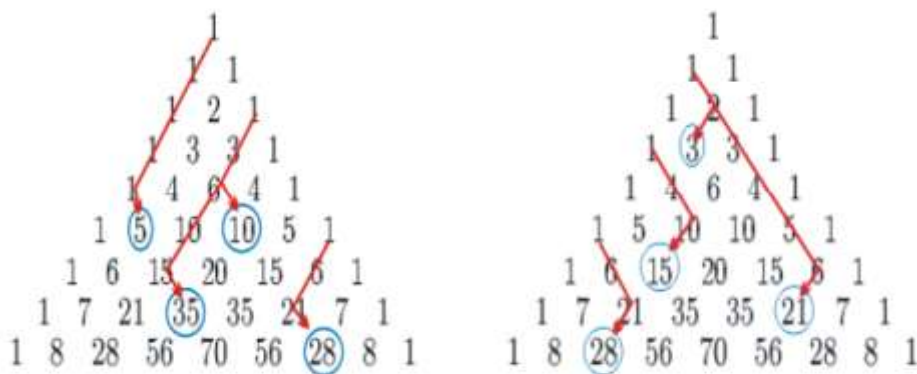
Fonte: SANTOS, 2017, p. 29

O teorema das colunas diz que: “a soma de elementos de qualquer coluna, do primeiro até um n qualquer, é igual ao elemento situado na coluna à direita da coluna somada e na linha imediatamente abaixo”. Como pode ser visto na Figura 5.

Figura 5: Teorema das Colunas

Fonte: SANTOS, 2017, p. 31

O teorema das diagonais afirma que: “somando-se os primeiros números de uma diagonal qualquer até uma certa linha n , o total obtido será igual ao número da linha seguinte”. Ver a Figura 6 a seguir.

Figura 6: Teorema das Diagonais

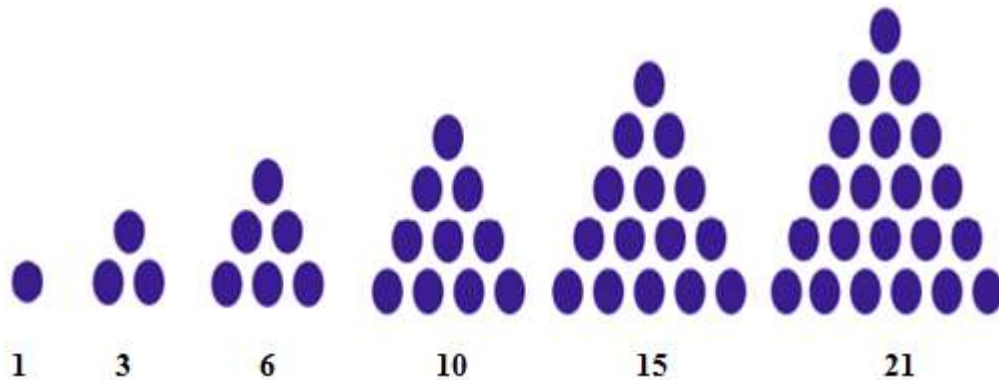
Fonte: SANTOS, 2017, p. 32

2.4. SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS E GEOMETRIA

Em seu trabalho Santos (2017) apresenta a propriedade dos números triangulares, prova e em sequência demonstra os números triangulares [1, 3, 6, 10, 15, 21, ...].

Apresentados na Figura 7.

Figura 7: Sequência dos Números Triangulares



Fonte: Autor, 2020.

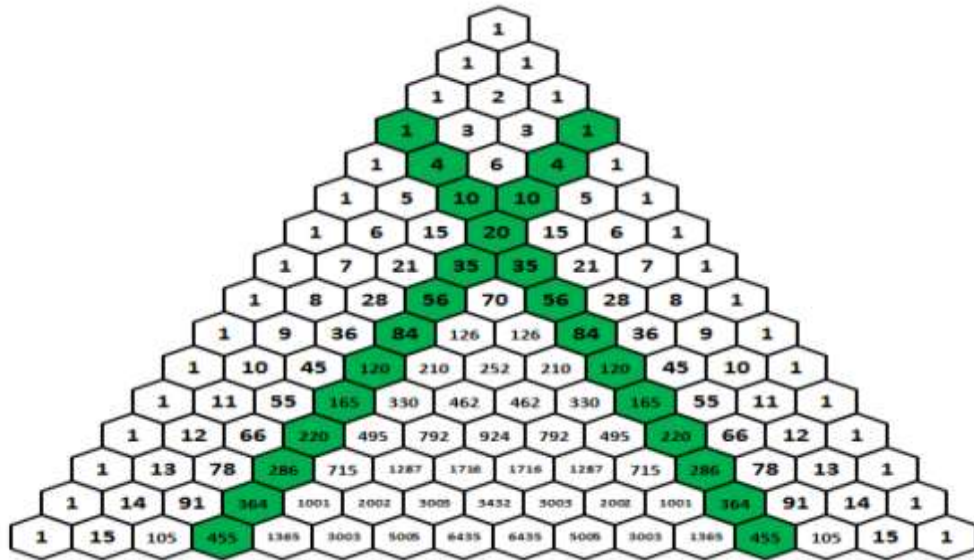
Assim como os números triangulares os números piramidais seguem uma progressão aritmética, obtida no Triângulo Aritmético, e que pode ser aproveitada para o uso de sequências numéricas e para a inserção na geometria. Como podemos ver na Figura 8 a quantidade de laranjas empilhadas de forma que formem uma pirâmide são a próxima sequência numérica presente no Triângulo Aritmético em seguida.

Figura 8: Pirâmide de Base Triangular



Fonte: SANTOS, 2017

Como podemos ver na Figura 8 as sequências numéricas, que foram apresentadas geometricamente, representam uma fileira do Triângulo Aritmético, que se correspondem com a fileira destacada na Figura 9.

Figura 9: Números que Definem um Tetraedro

Fonte: SANTOS, 2017. p. 40

2.5. PRODUTOS NOTÁVEIS E O TRIÂNGULO ARITMÉTICO

De acordo com Rosadas (2017), alguns conceitos matemáticos importantes para o entendimento do Triângulo Aritmético são estes: o número binomial e a combinação, já o binômio de Newton é descrito como uma combinação da seguinte forma, como podemos visualizar na Figura 10.

Figura 10: Binômio de Newton e Combinatória

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$$

Fonte: AUTOR, 2020; ROSADAS, 2017. p. 26

Onde p e n são números naturais com n maior ou igual que p, o desenvolvimento do produto notável é feito da seguinte forma, ver a Figura 11.

$$(a + b)^n \text{ tal que } n \in \{0, 1, 2\} \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$$

Figura 14: Produtos Notáveis e o Triângulo Aritmético

$$(a + b)^0 = 1a^0b^0$$

$$(a + b)^1 = 1a^1b^0 + 1a^0b^1$$

$$(a + b)^2 = 1a^2b^0 + 2a^1b^1 + 1a^0b^2$$

Fonte: AUTOR, 2020. p. 26

2.6 UNIDADES TEMÁTICAS DA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

Neste item vamos apresentar as unidades temáticas da BNCC, que foram desenvolvidas com a finalidade de direcionar a identificação dos progressos das habilidades que podem ser desenvolvidas durante o processo de aprendizagem dos alunos do 6º ao 9º ano. Nos livros didáticos, segundo a BNCC, as unidades temáticas tem por definição alcançar os objetos de conhecimento adequados às especificidades dos diferentes componentes curriculares.

As unidades temáticas definem um arranjo dos objetos de conhecimento ao longo do Ensino Fundamental adequado às especificidades dos diferentes componentes curriculares. Cada unidade temática contempla uma gama maior ou menor de objetos de conhecimento (BRASIL, 2018, p. 29).

Para a Matemática, a BNCC recomenda que além dos diferentes recursos didáticos é importante incluir a integração de situações que ocasionem a reflexão, contribuam na estruturação e padronize os conceitos matemáticos.

Além dos diferentes recursos didáticos e materiais, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica, é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. Entretanto, esses recursos e materiais precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a

sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos (BRASIL, 2018, p.298).

As unidades temáticas específicas de matemática do 6º ao 9º ano são: números, álgebra, geometria, grandezas e medidas, probabilidade e estatística.

2.7 COMPETÊNCIAS GERAIS DA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

A Base Nacional Comum Curricular é um documento que define um conjunto de aprendizagens essenciais, sobre as quais vamos discorrer neste capítulo. Ou seja, que os alunos devem desenvolver durante a educação básica (BRASIL, 2017), tais aprendizagens precisam coexistir para assegurar aos alunos a apreensão das dez competências gerais, que são estas:

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

2.8 COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL

Segundo Souza (2018), a matemática é destacada como uma área de conhecimento essencial para os alunos da educação básica. Isto é, por suas aplicações e por suas potencialidades na formação de um cidadão crítico e engajado. De maneira que, as competências específicas para o ensino fundamental na área de matemática são as seguintes:

1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos. É uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos, e para alicerçar descobertas e construções, inclusive, com impactos no mundo do trabalho.
2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento. Sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais. De modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive, tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
7. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.

8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas. De modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

2.9 HABILIDADES ESPECÍFICAS DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL NOS ANOS FINAIS

Apresentamos aqui as habilidades específicas da BNCC para o ensino fundamental nos anos finais. No item 5 usamos o código de habilidades específicas que segundo a BNCC mostram o básico de aprendizagem que se deve proporcionar aos alunos nas diferentes situações escolares. Tais situações foram descritas de forma organizada de acordo com uma estrutura específica (BRASIL, 2018), conforme podemos observar no exemplo da Figura 15, abaixo de Educação Física (EF67EF01):

Figura 15: Código de Habilidades Específicas



Fonte: BRASIL, 2018, p. 30

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Apresento neste capítulo os objetivos gerais e específicos da nossa pesquisa. Aqui abordamos a metodologia escolhida para o desenvolvimento deste trabalho, o universo e os sujeitos da pesquisa e o instrumento da coleta de dados.

3.1 OBJETIVO GERAL

Expandir os conhecimentos sobre o Triângulo Aritmético para que o aluno possa desenvolver os produtos notáveis no ensino fundamental nos anos finais.

3.1.1. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Relatar as fontes de inspiração e experiência dos estágios supervisionados;

Apresentar o Triângulo Aritmético;

Apresentar as habilidades e competências da Base Nacional Comum Curricular de Matemática sobre as aplicações do Triângulo Aritmético;

Mostrar possibilidades para futuros pesquisadores sobre as abordagens das sugestões apresentadas;

Induzir o ensino do Triângulo Aritmético através de suas aplicações expostas nos livros didáticos.

3.2 METODOLOGIA

Para o levantamento das informações, com a intenção de complementar os dados dos objetivos e do problema da pesquisa, realizamos uma pesquisa bibliográfica. Para isso foram realizadas análises dos livros didáticos Matemática Realidade & Tecnologia (SOUZA, 2018) e Bianchini (BIANCHINI, 2018), produzimos também tabelas apresentando o aproveitamento dos livros didáticos, onde exploramos estas duas coleções. Como instrumento de análise da BNCC, temos as habilidades e competências gerais e específicas.

A pesquisa bibliográfica teve como base os procedimentos metodológicos descritos por Gil (2020), que são divididos nas seguintes etapas: a) escolha do tema; b) levantamento bibliográfico; c) formulação do problema; d) elaboração do plano provisório do assunto; e) busca das fontes; f) leitura do material; g) fichamento; h) organização lógica do assunto e i)

redação do texto. Ademais, seguiu-se os procedimentos de pesquisa adotados por Gerhardt e Silveira (2009), quais sejam: a) escolher o tipo de pesquisa; b) escolher população e amostra; c) determinar a técnica de coleta de dados e d) técnica de análise de dados.

Nossa abordagem de pesquisa é qualitativa, porque o nosso foco não é a representatividade numérica e sim o aprofundamento e compreensão dos alunos em relação ao Triângulo Aritmético sob a ótica da BNCC apresentada nos livros didáticos (GERHARDT; SILVEIRA, 2009). O objetivo foi gerar conhecimentos novos e úteis para o avanço da ciência, sem aplicação prática prevista em sala de aula de modo presencial, porém, presente em sala, nos livros didáticos.

É explicativa quanto aos seus objetivos, pois tem preocupação em identificar no ensino fundamental, nos anos finais, trechos relacionados ao Triângulo Aritmético ou de Pascal (GIL, 2002). Indutiva, porque buscou nos livros didáticos o material necessário para a investigação e documental quanto aos procedimentos, tendo como fonte os documentos de comunicação em massa que são os livros didáticos. Segundo Ludke e André (1986), se constitui em numa técnica valiosa de aprendizagem de dados qualitativos, seja complementando as informações obtidas por outras técnicas ou desenvolvendo aspectos novos de um tema ou problema. Tudo isso parte da observação de que os alunos apresentam dificuldades em desenvolver os conteúdos de produtos notáveis nas séries finais do ensino fundamental.

3.2.1 UNIVERSO

Nossa pesquisa foi realizada na cidade de João Pessoa, no estado da Paraíba, com os alunos do 6º ao 9º ano, em duas escolas de ensino público, uma estadual e outra municipal, ambas se encontram no bairro de Mangabeira VII. A Escola Estadual de Ensino Fundamental Índio Piragibe se encontra na Rua Beatriz Maria de Oliveira, s/n e foi fundada em 20 de março de 2000. A escola funciona em tempo integral, sendo que o ensino fundamental tem funcionamento em todos os turnos, os graus de ensino são: fundamental I e II, o ensino fundamental regular, e EJA (Educação de Jovens e Adultos).

Em sua infraestrutura temos: sala de diretoria; sala de professores; laboratório de informática; sala de recursos multifuncionais para atendimento educacional especializado (AEE); quadra de esportes coberta; alimentação escolar para os alunos; cozinha; biblioteca; banheiro dentro do prédio; banheiro adequado aos alunos com deficiência ou mobilidade reduzida; dependências e vias adequadas aos alunos com deficiência ou mobilidade reduzida;

sala da secretaria; banheiro com chuveiro; refeitório; despensa; almoxarifado; pátio descoberto e área verde.

Fui bem recebido no turno da tarde, nos estágios que realizei, meu professor foi Adalberto que me acompanhou desde a infância, pois já fui aluno dele na mesma instituição, que me ajudou e me orientou na escolha da turma.

Já a Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Prof. José Baptista de Mello foi regulamentada no dia 25 de maio de 2000. A escola funciona em turno integral, sendo que o ensino fundamental tem funcionamento em todos os turnos e o ensino médio nos turnos matutino e noturno. Os graus de ensino são: fundamental I e II, ensino médio regular e EJA. Sua infraestrutura consiste em: sala de diretoria; secretaria; biblioteca; laboratório de informática; sala para professores; salas de aula; sala de recursos; cozinha; despensa para merenda escolar; banheiro e pátio coberto.

Ao chegar na escola fui bem recebido por todos, a aceitação nos espaços do estágio que tive contato foi positiva. No meu primeiro momento conheci a direção da escola, entretanto, houve uma alteração em meu projeto e tive que mudar de turno, fui bem recebido no turno da manhã. O meu professor foi Antonio Jadilson, ele me ajudou em todas as turmas, com aulas expositivas e práticas.

3.2.2 SUJEITOS DA PESQUISA

Em nossas salas de aula trabalhamos com o ensino fundamental, do turno diurno, que tem aproximadamente 30 alunos por turma. Nosso objetivo principal foi ensinar e aprender junto com os alunos do 6º ao 9º ano, em ambas as escolas de nosso universo, as duas escolas foram bem receptivas e os diretores receberam bem os estagiários.

A aceitação no local de estágio foi boa, em meu primeiro momento conheci a direção da escola. No entanto, houve uma alteração no meu projeto, onde tive a necessidade de mudar de turno, junto com os professores tive acesso aos livros didáticos do professor e do aluno, a partir daí surgiu a ideia da pesquisa. A faixa etária dos alunos é de 11 a 14 anos, aproximadamente, existindo em alguns casos a repetência de alunos nas escolas investigadas.

3.3 INSTRUMENTO DE COLETA DE DADOS

Nosso procedimento se deu através da análise dos livros didáticos Matemática Realidade & Tecnologia (SOUZA, 2018) e Bianchini (BIANCHINI, 2015). Onde analisamos os livros com a finalidade de encontrar o Triângulo Aritmético, visando à solução dos produtos notáveis e não encontramos (LAKATOS, MARCONI, 1991). A partir daí analisamos as duas coleções de livros didáticos que foram usadas em quatro turmas nas duas escolas, através da aula invertida (VALENTE, 2018). Organizamos a literatura didática segundo a metodologia de Bianchini (2018), para apresentar todos os conteúdos de forma clara e encontrar em qual série e capítulo apresenta-se os produtos notáveis. A partir de então tivemos uma visão geral da obra, dos capítulos e incluímos os conteúdos da BNCC como instrumento da coleta de dados para a obtenção das unidades temáticas, habilidades e objetivos gerais e específicos presentes nos livros da educação básica.

4 ANÁLISE DOS DADOS

Tendo como base a fundamentação teórica, o que foi introduzido sobre os pesquisadores e apoiando-se nos referenciais teóricos que são os livros didáticos do ensino fundamental, nossa pesquisa está organizada e descrita com as categorias que serão utilizadas para a análise dos livros pedagógicos voltados para o ensino fundamental nos anos finais. Este trabalho teve como metodologia a sala de aula invertida, onde o aluno precisa ter conhecimento prévio sobre o assunto (VALENTE, 2018).

Como procedimento de pesquisa realizamos inicialmente a observação das coleções dos livros didáticos, com a intenção de encontrar o assunto sobre o Triângulo Aritmético, então organizamos da seguinte forma:

1. Visão Geral da Obra;
2. Capítulos em que se apresentam os produtos notáveis;
3. Conteúdos da BNCC em que se apresentam os produtos notáveis.

4.1. COLEÇÃO BIANCHINI NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Figura 16: Livro didático Matemática Bianchini



Fonte: Bianchini. 2015. p. 1

A coleção Bianchini na Figura 16, que foi entregue aos alunos do ensino fundamental nos anos finais, foi aceita pela editora Moderna e teve a sua 9ª edição publicada em 2018. A obra

tem quatro publicações, com doze capítulos cada, a estrutura do livro é bem didática e com explicações que ajudam o professor e o aluno.

4.1.1. VISÃO GERAL DA OBRA.

A obra que foi destinada ao aluno está inclusa no livro do professor. Cada volume contém doze unidades, a sua estrutura inclui o desenvolvimento teórico juntamente com as atividades, o bloco de atividades conta com exercícios propostos, complementares e atividades diferenciadas que se relacionam as unidades temáticas da BNCC.

As seleções especiais são distribuídas ao longo do capítulo. Logo, na capa temos a abertura do capítulo com imagem e texto motivador, os exercícios propostos apresentam atividades com indicação no hora de criar. Ao final de cada capítulo temos exercícios complementares, segundo o autor podem ser explorados de maneiras diferentes pelo professor, como a sua utilização em sala, em sua obra temos ainda quatro seções.

Na seção pense mais um pouco temos atividades e desafios de aprofundamento do que foi estudado, sobre a seção para saber mais encontramos conteúdos e atividades que são fundamentadas em contextos diversos e relacionam a matemática a outras áreas. Geralmente no final se encontra em destaque agora é com você, na seção trabalhando a informação encontramos como conteúdos trabalhos de probabilidade e estatística. Por fim, na seção diversificando encontramos atividades relacionadas a outros contextos que despertam interesse nos alunos, como jogos, aplicações e desafios.

Nesse sentido, desenvolvemos um quadro para expor todos os conteúdos e capítulos que estão presentes na obra, para possamos identificar onde se encontram os produtos notáveis na coleção de Bianchini. Podemos vê-lo no Quadro 4.

Quadro 4: Organização Geral da Coleção Bianchini

Ano	Capítulo 1	Capítulo 2	Capítulo 3
Sexto	Números	Operação com Números Naturais	Estudando Figuras Geométricas
Sétimo	Números Inteiros	Números Racionais	Operações com Números Racionais
Oitavo	Potência e Raízes	Construções Geométricas e Lugares Geométricos	Estatística e Probabilidade
Nono	Números Reais	Operações com Números Reais	Grandezas Proporcionais

Capítulo 4	Capítulo 5	Capítulo 6	Capítulo 7	Capítulo 8
Divisibilidade	Um Pouco de Álgebra	Um pouco de Geometria Plana	Números Racionais na Forma de Fração	Operações com Números Racionais na Forma
Ângulos	Equações	Inequações	Sistemas de Equações	Simetria e Ângulos
Cálculo Algébrico	Polinômio e Frações Algébricas	Produtos Notáveis e Fatoração	Estudos dos Triângulos	A Geometria Demonstrativa
Proporcionalidade em Geometria	Semelhança	Um Pouco Mais Sobre Estatística	Equações do Segundo Grau	Triângulo Retângulo

Capítulo 9	Capítulo 10	Capítulo 11	Capítulo 12
Números Racionais na Forma decimal e Operações	Polígonos e Poliedros	Comprimentos e Áreas	Outras Unidades de Medida
Razões Proporções e Porcentagens	Estudos dos Polígonos	Sobre Área e Volume	Estudo da Circunferência e do Círculo
Estudo dos Quadriláteros	Sistemas de Equações do Primeiro Grau Com Duas Incógnitas	Área de Regiões Poligonais	De Áreas a Volumes
Razões Trigonométricas nos Triângulos Retângulos	Estudo das Funções	Circunferências Arcos e Relações Trigonométricas	Polígonos Regulares e Áreas

Fonte: Autor. Matemática Bianchini. 2015. p. 16

4.1.2 CAPÍTULOS EM QUE APARECEM OS PRODUTOS NOTÁVEIS.

No oitavo ano, no capítulo seis, encontramos o conteúdo dos produtos notáveis associado à álgebra como unidade temática. Compreendendo as unidades temáticas, competências gerais e específicas de matemática, conforme podemos verificar no Quadro 5.

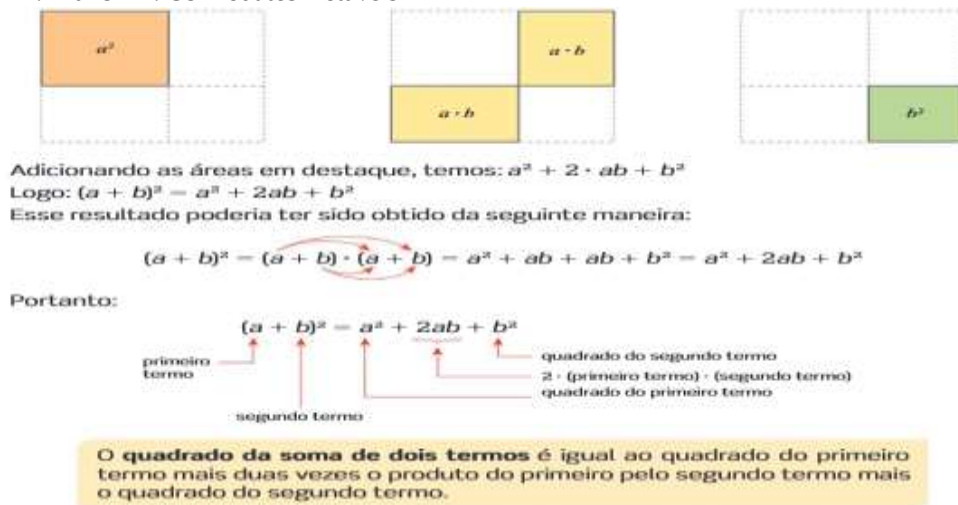
Quadro 5: Os Produtos Notáveis Bianchini

Ano	8
Capítulo	6
Conteúdo	Os produtos notáveis
Unidade Temática	Álgebra
Habilidade	EF08MA01 EF08MA02 EF08MA09
Competência Geral	1 2 8
Competência Específica de Matemática	1 4 7

Fonte: AUTOR. 2020.

Nesse mesmo capítulo Bianchini (2018) expõe o desenvolvimento do produto notável, e quadrado da soma com a ajuda de figuras geométricas, induzindo o aluno pelo cálculo de área e, por fim, usando a distributiva como mostra a Figura 17.

Figura 17: Bianchini. Os Produtos Notáveis



Fonte: Bianchini. 2015. p. 128

Outra forma de solucionar o mesmo problema no ensino fundamental, apresentado nas duas coleções dos livros didáticos, é por meio do desenvolvimento do Triângulo Aritmético e da associação com os coeficientes do produto notável. Isto é, para fazer o aluno pensar, simplificar o trabalho e induzi-lo a desenvolver outros produtos notáveis, assim como Rosadas (2017), Santos (2017) e Soares (2011) deixaram exposto na fundamentação teórica. Segundo Rosadas (2017), se fez necessário a observação entre os coeficientes dos termos algébricos e os produtos notáveis, como binômio de Newton presente na Figura 14, que está presente na fundamentação teórica, como podemos ver nos produtos notáveis.

Seja a expressão, com **a** e **b** diferentes de zero, temos:

$$(a + b)^n \text{ tal que } n \in \{0, 1, 2\} \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$$

Figura 14: Produtos Notáveis e o Triângulo Aritmético

$$(a + b)^0 = 1a^0b^0$$

$$(a + b)^1 = 1a^1b^0 + 1a^0b^1$$

$$(a + b)^2 = 1a^2b^0 + 2a^1b^1 + 1a^0b^2$$

Fonte: AUTOR, 2020. p. 26

Como foi verificado Bianchini usou a distributiva e o cálculo de área e não usou o triângulo aritmético para desenvolver o produto notável.

4.2 COLEÇÃO MATEMÁTICA & REALIDADE NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Figura 28: Livro didático Matemática Realidade & Tecnologia



Fonte: Souza. 2018. p. 1

A coleção Matemática Realidade & Tecnologia presente na Figura 18, teve a publicação feita pela PNLD 2020 e foi entregue aos alunos do ensino fundamental nos anos finais. Isto é, foi aceita pela editora FTD e teve a sua 1ª edição publicada em 2018. A obra tem quatro publicações, com oito capítulos cada, a estrutura do livro é bem didática e autoexplicativa, com a intenção de auxiliar o professor em sala de aula.

4.2.1. VISÃO GERAL DA OBRA.

Cada volume contém oito unidades, a sua estrutura no livro do professor inclui unidades temáticas da BNCC trabalhadas na unidade. Os objetos de conhecimento são abordados na unidade, temos as aptidões que apresentam os códigos das habilidades.

As competências gerais e específicas se encontram nas competências e orientações didáticas, onde são expostas orientações sobre os conteúdos. Ademais, são apresentadas questões problematizadoras, sugestões de ampliação de atividades, o que auxilia o professor a tirar dúvidas e planejar estratégias para o ensino.

O livro ainda dispõe de dicas de materiais audiovisuais, sugestões de sites e leituras, ampliando as indicações de planos de desenvolvimento, que podem ser encontrados no material digital do manual do professor. Destinado aos alunos do ensino fundamental e contido no livro do professor, o livro do aluno apresenta atividades que abordam e discutem os conteúdos.

Este dispõe de orientações para auxiliar o entendimento de alguma informação, contribuindo para a compreensão de algum conceito ou resolução de atividades. Já o vocabulário destaca palavras com o significado correspondente, para pensar propõe questões para refletir, analisar e argumentar. Em conexões temos sugestões de sites e de livros que se pode consultar para ampliar o conhecimento sobre o assunto estudado.

Há o fique ligado que apresenta informações complementares ao tema estudado. Na apresentação do tema estudado temos a abertura da unidade organizada em página dupla, apresentando uma diversidade de recursos, imagens, textos e infografia, são propostas também algumas questões, tendo como objetivo verificar o entendimento do aluno.

Temos a seção integrando com que relaciona matemática a outros componentes curriculares, integrando outros conceitos de matemática. Temos também a seção você cidadão que tem por finalidade despertar no aluno o pensamento crítico. O você conectado se localiza ao final de algumas unidades, onde são propostos estudos matemáticos com apoio do geogebra e da planilha calc.

Por fim, o que estudei propõe um momento de reflexão e autoavaliação, dispondo de três questões. A primeira é individual, a segunda pode ser coletiva e a terceira complementar a segunda. Em sequência criamos um quadro para expor todos os conteúdos e capítulos que estão presentes na obra para que possamos identificar onde se encontram os produtos notáveis na coleção de Matemática Realidade & Tecnologia. Podemos ver no Quadro 6 a seguir.

Quadro 6: Organização Geral da Coleção Matemática Realidade & Tecnologia

Ano	Capítulo 1	Capítulo 2	Capítulo 3	Capítulo 4
Sexto	Sistemas de numeração	Operações com números naturais	Figuras geométricas	Medidas de comprimento, massa, tempo e temperatura
Sétimo	Múltiplos, divisores, potências e raízes	Números inteiros	Figuras geométricas planas	Os números racionais
Oitavo	Potências e raízes	Ângulos e simetria	Equação, sistema de equações e inequação	Proporcionalidade e porcentagem
Nono	Conjuntos numéricos, potências e raízes	Circunferência, plano cartesiano e vistas	Expressões algébricas e equações do 2º grau	Proporcionalidade e funções

Capítulo 5	Capítulo 6	Capítulo 7	Capítulo 8
Números racionais na forma de fração	Números racionais na forma decimal	Estatística e probabilidade	Operações com números racionais na forma de fração
Expressões algébricas e equações	Proporcionalidade e simetria	Medidas de superfície e volume	Estatística e probabilidade
Polígonos e círculo	Área de figuras planas	Estatística e probabilidade	Medidas de volume e de capacidade
Semelhança de figuras	Educação financeira e relações métricas no triângulo retângulo	Estatística e probabilidade	Medidas de volume

Fonte: AUTOR, 2020. MATEMÁTICA REALIDADE & TECNOLOGIA 2018.

4.2.2 CAPÍTULOS EM QUE APARECEM OS PRODUTOS NOTÁVEIS.

Encontramos os produtos notáveis no capítulo três do livro do 9º ano, tendo a álgebra como unidade temática, compreendendo as unidades temáticas, competências gerais e específicas de matemática, conforme podemos verificar no Quadro 7.

Quadro 7: Produtos Notáveis Matemática Realidade & Tecnologia

Ano	9
Capítulo	3
Conteúdo	Produtos notáveis
Unidade Temática	Álgebra
Habilidade	EF09MA06 EF09MA07 EF09MA08 EF09MA09
Competência Geral	1 2 8
Competência Específica de Matemática	1 4 7

Fonte: AUTOR, 2020.

Assim como outros autores dos livros didáticos Souza (2018) escolheu seguir o caminho do cálculo de área para apresentar os produtos notáveis, em seguida ele usou a distributividade como podemos ver na Figura 16.

Figura 19: Matemática Realidade & Tecnologia, Produtos Notáveis

Produtos notáveis

Em Matemática, certos produtos de polinômios, por apresentarem características particulares ou aplicações importantes, são chamados de **produtos notáveis**. Alguns deles são: quadrado da soma de dois termos; quadrado da diferença de dois termos; produto da soma pela diferença de dois termos.

Quadrado da soma de dois termos

O quadrado da soma de dois termos pode ser indicado da seguinte maneira:

$$(a + b)^2 \text{ ou } (a + b) \cdot (a + b)$$

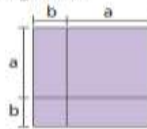
1º termo 2º termo

Utilizando a propriedade distributiva da multiplicação, temos:

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

A expressão obtida possui três termos e é chamada **trinômio quadrado perfeito**.

É possível justificar, por meio de figuras, a igualdade acima para **a** e **b** positivos. Para isso, inicialmente consideramos uma figura de quadrado cujos lados medem **a + b**, decomposto em quatro partes: duas quadradas e duas retangulares.



Fonte: Souza. 2018. p. 28.

Assim como vimos no item da análise dos dados do livro Bianchini, temos o mesmo problema no ensino fundamental, apresentado nas duas coleções dos livros didáticos, por meio do desenvolvimento do Triângulo Aritmético e da associação com os coeficientes do produto notável. Para fazer o aluno pensar, simplificar o trabalho e induzi-lo a desenvolver outros produtos notáveis, assim como Rosadas (2017), Santos (2017) e Soares (2011) deixaram exposto na fundamentação teórica. Segundo Rosadas (2017), se fez necessário a observação entre os coeficientes dos termos algébricos e os produtos notáveis, como binômio de Newton presente na Figura 14, que está presente na fundamentação teórica, como podemos ver nos produtos notáveis.

Seja a expressão, com **a** e **b** diferentes de zero, temos:

$$(a + b)^n \text{ tal que } n \in \{0, 1, 2\} \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$$

Figura 14: Produtos Notáveis e o Triângulo Aritmético

$$(a + b)^0 = 1a^0b^0$$

$$(a + b)^1 = 1a^1b^0 + 1a^0b^1$$

$$(a + b)^2 = 1a^2b^0 + 2a^1b^1 + 1a^0b^2$$

Fonte: AUTOR, 2020. p. 27

Tal como no livro didático de Bianchini (2018), Souza (2018) não usou o triângulo aritmético para desenvolver o produto notável, usando, assim, como recorrência o mesmo procedimento de Bianchini: a distributiva e depois o cálculo de área.

4.3. SUGESTÃO DE ABORDAGEM

De acordo com os livros didáticos elaboramos uma tabela para indicar quais unidades temáticas, habilidades, competências gerais e específicas podem ser estimuladas ao ensinar o Triângulo Aritmético em sequência, como podemos ver no Quadro 8.

Quadro 8: Atribuições ao Triângulo Aritmético

Ano	Sexto	Sétimo	Oitavo	Nono
Unidade temática	Números Álgebra	x	Números Álgebra	Álgebra
Habilidade	EF06MA03 EF06MA14	x	EF08MA01 EF08MA09	EF09MA09
Competência geral	5 8	x	2 4 5 6	1 2 8

Competências específicas	1	x	2	1
	3		3	4
	5		4	7
			6	
			8	

Fonte: AUTOR. 2020.

Como vimos anteriormente nas análises dos livros didáticos, outra forma de solucionar o mesmo problema no ensino fundamental, apresentado nas duas coleções dos livros didáticos, por meio do desenvolvimento do Triângulo Aritmético e da associação com os coeficientes do produto notável, como podemos ver na Figura 14.

Seja a expressão, com **a** e **b** diferentes de zero, temos:

$$(a + b)^n \text{ tal que } n \in \{0, 1, 2\} \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$$

Figura 14: Produtos Notáveis e o Triângulo Aritmético

$$(a + b)^0 = 1a^0b^0$$

$$(a + b)^1 = 1a^1b^0 + 1a^0b^1$$

$$(a + b)^2 = 1a^2b^0 + 2a^1b^1 + 1a^0b^2$$

Fonte: AUTOR. 2020. p. 26.

Fazendo isso utilizamos as unidades temáticas, habilidades e competências gerais e específicas da BNCC que compreendem a adição e subtração, que usa a relação de Stifel e potências, usando o teorema das linhas.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Considerando o objeto de investigação deste estudo: “Aplicações do Triângulo Aritmético para o ensino fundamental nos anos finais”, podemos observar como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) se posiciona em relação aos produtos notáveis, apresentando as suas unidades temáticas, habilidades e competências gerais e específicas. De maneira que, compreender as dificuldades em relação aos produtos notáveis nos levou a outra forma de desenvolvê-los para ajudar os alunos a entenderem melhor o assunto e os professores a saírem de sua rotina, explorando outros caminhos para ajudar os alunos em seu processo de aprendizagem.

Conseguimos obter por meio de nossa pesquisa um meio de ajudar os alunos a desenvolverem interesse em matemática através do Triângulo Aritmético. Este proporcionou a abertura de um caminho incomum sobre o ensino dos produtos notáveis, que ficou evidenciado nos trabalhos de alguns pesquisadores. A exemplo de Rosadas (2013), pois trouxe a disposição, já a parte da história da matemática foi compilada por Affonso (2014), ambos autores são referências para tantos outros pesquisadores que se interessam por este tema.

Em vínculo ao objeto de estudo escolhido para a nossa pesquisa, que foi aplicações do Triângulo Aritmético no ensino fundamental nos anos finais, observamos que não havia muitos conhecimentos antecedentes. E relacionado à BNCC, para o aproveitamento do uso dos conhecimentos gerais e específicos que podem ser desenvolvidos nos alunos, menos ainda.

Nos livros didáticos verificamos por meio das duas coleções escolhidas, em duas escolas públicas, que estes não apresentam as aplicações do Triângulo Aritmético e quando analisamos não foi apresentada a relação entre o Triângulo Aritmético e os produtos notáveis. Nas duas escolas pesquisadas não apareceu o desenvolvimento do Triângulo Aritmético, tampouco a relação entre ele e os produtos notáveis.

Quando aplicamos na sala de aula alguns alunos que não entenderam bem da forma tradicional conseguiram assimilar melhor o conteúdo e desenvolver os produtos notáveis de forma satisfatória. No entanto, como era de se esperar, alguns alunos entenderam melhor da forma tradicional, com isso os resultados de nossa análise foram positivos em um âmbito geral, porque trouxemos mais uma possibilidade para a solução de um problema.

Quanto a isso concluímos que temos o estímulo para apresentar o Triângulo Aritmético, porque é um assunto que abre muitas possibilidades e provoca o interesse em matemática. Com o triângulo aritmético é possível realizar o estudo de sequências numéricas, dos produtos

notáveis, de combinatória, assim como sobre os binômios de Newton, entre outros assuntos que venham a ser estudados em sequência.

Os pesquisadores trouxeram uma forma de adaptação do Triângulo Aritmético para a sala de aula, porém, esse tema dificilmente é tratado nos livros didáticos. Por diversas vezes é até esquecido, visto que mesmo para os pesquisadores não é um tema de fácil acesso.

Sobre os livros didáticos selecionados nas escolas, escolhemos duas coleções da literatura pedagógica para nossa pesquisa, pois o Triângulo Aritmético não é um tema que é encontrado facilmente, é pouco discutido. E o nosso objetivo foi apresentar o Triângulo Aritmético como mais uma possibilidade de desenvolvimento dos produtos notáveis.

Sendo assim, analisamos as duas coleções com o intuito de encontrar onde os produtos notáveis se localizam nas coleções de livros educativos, o público alvo escolhido foram os alunos dos anos finais do ensino fundamental do 6º ao 9º ano. Buscou-se descobrir quais habilidades e competências podem ser desenvolvidas ao apresentar o Triângulo Aritmético para este grupo de alunos.

Com isso, notamos que apesar de ser algo difícil para os alunos, pois está comumente relacionado a assuntos do ensino médio como combinatória e o binômio de Newton, que tendem a serem deixados de lado nos livros didáticos, ao apresentarmos o Triângulo Aritmético podemos desenvolver os produtos notáveis, que também é uma tarefa delicada, de uma forma mais leve e agradável.

A pesquisa mostrou que desenvolver o conteúdo dos produtos notáveis através do Triângulo Aritmético traz resultados interessantes, no que tange ao desempenho dos alunos sob a ótica da BNCC. E que é possível conduzir o assunto a partir dos livros didáticos nos anos finais do ensino fundamental.

Para futuros pesquisadores deixo os seguintes questionamentos como reflexão: em quais livros didáticos destinados ao EJA se aplicam o Triângulo Aritmético? O Triângulo Aritmético pode ajudar outras áreas fora da Matemática? Em qual ano do ensino fundamental o Triângulo Aritmético pode melhor ser aproveitado?

REFERÊNCIAS

- AFFONSO, Alexandre. **O Triângulo de Pascal e o Binômio de Newton**. 2014. 49 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2014.
- ALVES, Mirtys Maciel. **A importância do livro didático de sociologia através da análise do PNLD em escolas do cariri ocidental da Paraíba**. 2017. 79 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Ciências Sociais) – Universidade Federal de Campina Grande, Sumé, 2017.
- BIANCHINI, Edwaldo, **Matemática Bianchini**. 8. ed. São Paulo: Moderna, 2015.
- BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2. ed. Edgard Blucher, 1996.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria Executiva. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Ministério da Educação, 20 dez. 2017.
- LOPES, M. S.; CARNEIRO, R. DOS S.; CARNEIRO, R. DOS S. **Triângulo de Pascal: Breve História e uma Proposta Didática para o Ensino**. Matemática e Estatística em Foco. Universidade Federal Uberlândia – UFU, v. 7, n. 1, p. 75-97, mai./2020.
- CHAQUIAM, Miguel, **Ensaio Temático História e Matemática em sala de Aula**. BELÉM – PARÁ, 2017.
- GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. (Org.). **Métodos de Pesquisa**. Coordenado pela Universidade Aberta do Brasil – UAB/UFRGS e SEAD/UFRGS. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.
- GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**: 5 ed. São Paulo: Atlas, 2010.
- LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Marina de Andrade. **Fundamentos de Metodologia Científica**. São Paulo: Atlas, 1991.
- LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.
- MORAN, José. (Org.). **Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática**. Porto Alegre: Penso, 2018.
- ROSADAS, Vitor Dutra Soares **Triângulo de Pascal: Curiosidades e Aplicações na Escola Básica**. Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2016.
- SANTANA, Kátia Cristina Lima. **Currículo de Matemática da Educação de Jovens e Adultos: uma análise baseada em livros didáticos**. PUC – São Paulo, 2012.
- SANTIAGO, Tâmara Paiva. **Triângulo de Pascal: Aplicações no Ensino Fundamental e Médio**, Salvador - Bahia Julho de 2016.
- SANTOS, Natânia Laine Paglione, **O misterioso e enigmático mundo de Pascal e Fibonacci**. São José do Rio Preto, 2017.

SILVA, Mariluce Oliveira de. **Do Triângulo à Pirâmide de Pascal**. PROFMAT. UESC, Bahia, 2015.

SOARES, Lúcio Roberto da Silva, **Sequências e Progressões: Possibilidades de Contextualização na Escola**. Mari – Paraíba: Universidade Federal da Paraíba, 2011.

SOUZA, Joamir, **Matemática Realidade & Tecnologia**, São Paulo - 1ª Edição, 2018,

VALENTE, José Armando. **A sala de aula invertida e a possibilidade do ensino personalizado: uma experiência com a graduação em midialogia**. In: BACICH, Lilian. MORAN, José. (Org.). Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018.