

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Edson Rafael Braga do Nascimento

Geometria Lorentziana: causalidade e teoremas de comparação

João Pessoa – PB

2020

Edson Rafael Braga do Nascimento

Geometria Lorentziana: causalidade e teoremas de comparação

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Coordenação de Curso de Licenciatura em Ma-
temática da Universidade Federal da Paraíba
como requisito para obtenção do título de Licen-
ciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Eraldo Almeida Lima
Júnior

João Pessoa – PB

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

N244g Nascimento, Edson Rafael Braga do.
Geometria Lorentziana: causalidade e teoremas de
comparação / Edson Rafael Braga do Nascimento. - João
Pessoa, 2020.
69 f. : il.

Orientação: Eraldo Almeida Lima Júnior.
TCC (Graduação) - UFPB/CCEN.

1. Tópicos de geometria Lorentziana. 2. Teoremas de
comparação. I. Lima Júnior, Eraldo Almeida. II. Título.

UFPB/CCEN CDU 514(043.2)

Geometria Lorentziana: Causalidade e Teoremas de Comparação

por

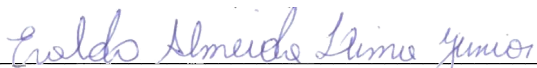
Edson Rafael Braga do Nascimento

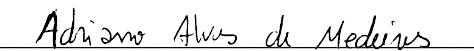
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito para obtenção do título de Licenciatura em Matemática.

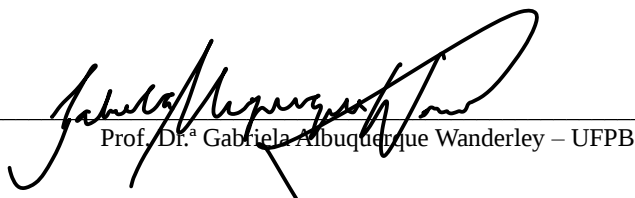
Orientador: Prof. Dr. Eraldo Almeida Lima Júnior

Aprovado em: 09 / 11 / 2020

COMISSÃO EXAMINADORA:


Prof. Dr. Eraldo Almeida Lima Júnior – UFPB


Prof. Dr. Adriano Alves de Medeiros – UFPB


Prof. Dr.^a Gabriela Albuquerque Wanderley – UFPB

Novembro de 2020

A minha mãe, meu exemplo de força, ao meu pai,
minha família e amigos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, aos meus pais, que tanto me apoiaram, a minha irmã e família.

Agradeço ao professor Márcio, que no ensino fundamental 2 me despertou o gosto pela matemática, e o professor Marcos, que no primeiro ano do ensino médio me motivou, também, neste caminho, trazendo-me diversas experiências novas.

Principalmente, agradeço ao professor Ambrósio Elias, que foi o que mais me incentivou, que por dois anos do ensino médio dispensou de recursos físicos e financeiros para minha formação matemática.

Agradeço por ter, na jornada acadêmica universitária, cruzado com professores como Adriano Alves, Allan George, Antônio de Andrade, Bruno Henrique, Daniel Pellegrino, Everaldo Medeiros, Gabriela Albuquerque, Jacqueline Fabiola, José de Assis, Manasses Xavier, Maurício Cardoso, Marivaldo Pereira, Aurélio Menegon, Cleto Brasileiro, Flank David, João Marcos, Jorge Costa, Márcio Silva, Milton Lacerda, Miriam da Silva, Pedro Venegas e Uberlândio Batista, com os quais fortaleci meu sonho de um dia ser professor. E, em especial, a professora Flávia Jerônimo, que, carinhosamente, me recebeu quando eu ainda era um iniciante no ensino médio.

Também agradeço a Carlos, Joaquim e Harllen que se tornaram grandes amigos.

Por fim, mas, de forma alguma, não menos especial, agradeço ao meu professor orientador Eraldo Lima, que há muitos anos me acompanha nessa jornada acadêmica.

RESUMO

Neste trabalho iremos estudar alguns tópicos da geometria Lorentziana global como, por exemplo, os conceitos básicos em variedades semi-Riemannianas, a função distância Lorentziana, o cut locus Lorentziano e, por fim, alguns teoremas clássicos da geometria Riemanniana em ambientes Lorentzianos como o teorema de Bonnet-Myers e os teoremas de comparação de Rauch e do Índice e, por fim, as ondas gravitacionais planas.

Palavras-chaves: Tópicos de Geometria Lorentziana. Função Distância Lorentziana. Cut Locus Lorentziano. Teoremas de Comparação. Ondas Gravitacionais Planas.

ABSTRACT

In this work we will study some topics of global Lorentzian geometry such as, for example, the basic concepts in semi-Riemannian manifolds, the Lorentzian distance function, the Lorentzian cut locus and, finally, some classic theorems of Riemannian geometry in Lorentzian environments such as the Bonnet-Myers theorem and the comparison theorems of Rauch and the Index and finally the gravitational plane wave.

Keywords: Topics of Global Lorentzian Geometry. Lorentzian Distance Function. Lorentzian Cut Locus. Comparison Theorems. Gravitational Plane Wave.

INTRODUÇÃO

Por volta de 1970, o progresso na teoria da causalidade, na teoria das singularidades e na teoria dos buracos negros na relatividade geral resultaram em um grande interesse na geometria Lorentziana que é a teoria matemática usada para o estudo da relatividade geral, sendo esta última uma das mais famosas teorias recentes da física. Assim o estudo da geometria Lorentziana cria uma importante ponte entre estas duas teorias, a saber, a teoria matemática da geometria diferencial moderna e a teoria física da relatividade geral.

Neste trabalho iremos estudar alguns tópicos da geometria Lorentziana global. Inicialmente, nós apresentamos os conceitos básicos necessários para o início do estudo no ambiente Lorentziano, isto é feito logo no início do capítulo com a apresentação da definição de métrica semi-Riemanniana e as definições de conexão, geodésicas, curvatura, campos de Jacobi e, por fim, destacamos as características causais que um vetor poder ter no ambiente Lorentziano. Em seguida começamos, de fato, o estudo de alguns tópicos da geometria Lorentziana, sendo o primeiro deles o entendimento do espaço-tempo sob o ponto de vista matemático, com este conceito bem estabelecido, iniciamos o estudo da função distância Lorentziana que tem diversas propriedades análogas com a distância Riemanniana, mas também possui diversas outras propriedades bastantes diferentes. Também estudamos o cut locus Lorentziano e algumas versões de teoremas Lorentzianos análogos a teoremas Riemannianos clássicos, como o teorema de Bonnet-Myers e os teoremas de comparação de Rauch e do Índice. Ressaltamos aqui que, para um melhor entendimento do trabalho, serão necessários alguns conhecimentos da teoria básica da geometria Riemanniana, como os conceitos e propriedades dos campos de Jacobi e pontos conjugados, como também conhecimentos mais avançados como, por exemplo, a teoria do índice de Morse, a teoria do cut locus e alguns dos teoremas clássicos Riemannianos. Por fim, apresentamos o conceito de ondas gravitacionais planas e, com isto, mostramos que as geodésicas em hiperplanos tipo-luz contidos nestas classes de variedades são completas e, assim, finalizamos este trabalho.

Sumário

1	Conceitos Básicos em Variedades Semi-Riemannianas	11
2	O Espaço-Tempo	17
2.1	Relação entre Cone de Luz e Métrica Semi-Riemanniana	17
2.2	Tempo-orientabilidade	19
3	Distância Lorentziana e Cut Locus Lorentziano	21
3.0.1	Conceitos Básicos e Definições	22
3.0.2	Homotetias e Isometrias	30
3.0.3	Função Distância Lorentziana e Causalidade	33
3.0.4	Segmentos de Geodésicas Maximais e Causalidade Local	43
3.1	O Cut Locus Lorentziano	45
3.1.1	O Cut Locus Tipo-Tempo	47
3.1.2	O Cut Locus Tipo-Luz e o Cut Locus Causal	51
4	Alguns Resultados em Geometria Lorentziana Global	57
4.1	Versão Lorentziana do Teorema de Bonnet-Myers	57
4.2	Teoremas de Comparação no Ambiente Lorentziano	61
5	Ondas Gravitacionais Planas	66
5.1	Métrica, Geodésica e Curvatura	66

Capítulo 1

Conceitos Básicos em Variedades Semi-Riemannianas

Neste capítulo iremos definir os diversos conceitos básicos da geometria Lorentziana, de maneira análoga como eles são definidos no ambiente Riemanniano. Iniciaremos com o conceito de variedade semi-Riemanniana, mas para isso precisamos definir o que seria uma métrica semi-Riemanniana. Estes conceitos podem ser encontrados no capítulo 2 de [1].

Definição 1.0.1. *Uma métrica semi-Riemanniana em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que para cada ponto $p \in M$ associa uma métrica que varia diferenciavelmente, é bilinear, simétrica e não-degenerada $g|_p : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ de assinatura $(-, \dots, -, +, \dots, +)$.*

Definição 1.0.2. *Uma variedade diferenciável M com uma dada métrica g semi-Riemanniana chama-se variedade semi-Riemanniana.*

Da mesma forma, como feito anteriormente, denotamos o fibrado tangente de M por TM e o espaço tangente em $p \in M$ por T_pM . Além disso, se (U_α, x_α) é um sistema de coordenadas em torno de p , então $(x_1, \dots, x_n)$ denotará as coordenadas locais em M e $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}_{i=1}^n$ denotará a base do espaço tangente T_pM associada ao sistema de coordenadas (U_α, x_α) .

Assim como no caso Riemanniano definimos uma conexão ∇ em uma variedade semi-Riemanniana (M, g) e, pelas propriedades da métrica g , vemos que esta conexão ∇ satisfaz as mesmas propriedades do caso Riemanniano. Além disso, destacamos que, assim como no caso Riemanniano, dada uma variedade M com uma métrica semi-Riemanniana g de assinatura $(-, \dots, -, +, \dots, +)$ possui uma única conexão ∇ que é simétrica e compatível com a métrica, a qual chamamos de conexão de Levi-Civita de (M, g) . Consequentemente, geodésicas, curvaturas, curvatura de Ricci, curvatura escalar e curvatura seccional se definem da mesma forma que no caso Riemanniano, com exceção da curvatura seccional quando consideramos seções degeneradas do espaço tangente quando (M, g) não é de curvatura constante, nestes casos a curvatura seccional não está definida.

Destacamos também que o vetor $\nabla_{X(p)}Y = \nabla_X Y|_p$ no ponto $p \in M$ depende apenas da conexão ∇ , do valor $X(p)$ e dos valores de Y ao longo de qualquer curva suave que passa por p e é tangente a $X(p)$ em p . Para ver isso, seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base para o espaço tangente em cada ponto de uma vizinhança de p formada por campos vetoriais definidos próximos de p . Então $X(p) = \sum_i x_i(p)e_i(p)$ e $Y = \sum_i y_i e_i$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} \nabla_X Y|_p &= \nabla_{X(p)} \left(\sum_{i=1}^n y_i e_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n y_i(p) \nabla_{X(p)} e_i + \sum_{i=1}^n (X y_i)(p) e_i(p) \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_j(p) y_i(p) \nabla_{e_j(p)} e_i + \sum_{i=1}^n (X y_i)(p) e_i(p). \end{aligned}$$

Segue-se que $x_i(p)$, $y_i(p)$ e $(X y_i)(p)$ determinam $\nabla_X Y|_p$ completamente se os $\nabla_{e_j(p)} e_i$ são conhecidos.

Um campo vetorial Y ao longo de uma curva $c : [a, b] \rightarrow M$ é um mapeamento suave $Y : [a, b] \rightarrow TM$, de modo que $Y(t) \in T_{c(t)}M$, para cada $t \in [a, b]$. Para $t_0 \in [a, b]$ podemos estender localmente Y para um campo vetorial suave definido em uma vizinhança de $c(t_0)$. Então, podemos considerar o campo vetorial $\nabla_c Y$ ao longo de c . Os argumentos anteriores mostram que esse campo vetorial ao longo de c é independente da extensão local e, conseqüentemente, $\nabla_c Y$ está bem definido. Assim, podemos definir os conceitos de transporte paralelo e geodésica a partir da conexão associada a variedade (M, g) .

Definição 1.0.3. Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : [a, b] \rightarrow M$ é chamado paralelo quando $\nabla_c V(t) = 0$, para todo $t \in [a, b]$.

Definição 1.0.4. Uma geodésica $c : (a, b) \rightarrow M$ é uma curva suave de M tal que o vetor tangente c' se move por transporte paralelo ao longo de c . Em outras palavras, c é uma geodésica se

$$\nabla_c c' = 0. \quad (\text{equação geodésica})$$

Uma pré-geodésica é uma curva suave c que pode ser reparametrizada para ser uma geodésica. Qualquer parâmetro no qual c é uma geodésica é chamado de parâmetro afim. Se s e t são dois parâmetros afins para uma mesma geodésica, então $s = at + b$ para algumas constantes $a, b \in \mathbb{R}$. Uma pré-geodésica é dita ser completa se para alguma parametrização afim (e, portanto, para toda parametrização afim) o domínio da parametrização afim é todo $\mathbb{R}$.

A partir da definição de colchetes, dada no capítulo anterior, podemos definir o tensor torção da

seguinte maneira.

Definição 1.0.5. O tensor torção T de ∇ é a função $T : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ dada por:

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

Observação 1.0.1. Veja que a conexão ∇ ser simétrica é equivalente a torção ser nula.

Dizemos que o mapeamento T é f -bilinear se é linear em ambos os argumentos e também satisfaz $T(fX, Y) = T(X, fY) = fT(X, Y)$, com f uma função suave. O valor $T(X, Y)|_p$ depende apenas da conexão ∇ e dos valores $X(p)$ e $Y(p)$, conseqüentemente T determina um mapeamento bilinear $T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$ para cada ponto $p \in M$. Além disso, usando a anticomutatividade dos colchetes, verificamos que $T(X, Y) = -T(Y, X)$ e, portanto, T é anticomutativo.

Como já vimos, $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0$, para todo $1 \leq i, j \leq n$, então

$$T\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Assim, o tensor torção fornece uma medida de não simetria dos coeficientes da conexão, portanto, $T = 0$ se, e somente se, esses coeficientes são simétricos. Uma conexão ∇ tal que $T = 0$ é chamada de torção livre ou simétrica.

Agora iremos tratar da curvatura e da mesma forma como definimos no caso Riemanniano definimos a curvatura numa variedade semi-Riemanniana, ou seja, dada uma variedade semi-Riemanniana M , a curvatura R de M é uma correspondência que associa a cada $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathcal{X}(M).$$

Definição 1.0.6. A curvatura covariante (ou curvatura de Riemann-Christoffel) em uma variedade semi-Riemanniana M é um 4-tensor $\tilde{R} : T_p M \times T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ dado por:

$$\tilde{R}(W, Z, X, Y) = g(W, R(X, Y)Z),$$

onde R é a curvatura de M .

Dados $v, w \in T_p M$ considere a restrição da curvatura covariante $\tilde{R}|_{\{v\} \times \{w\}} : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\tilde{R}|_{\{v\} \times \{w\}}(x, y) = g(R(x, w)v, y)$, então seu traço é a *curvatura de Ricci*, ou seja, para cada $p \in M$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ base ortonormal de $T_p M$, a curvatura de Ricci, $Ric_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ é a

forma bilinear simétrica dada por:

$$Ric(v, w) = \sum_{i=1}^n g(e_i, e_i) g(R(e_i, w)v, e_i),$$

ou ainda, $Ric(v, w) = \sum_{i=1}^n g(e_i, e_i) \tilde{R}(e_i, v, e_i, w)$. Já a *curvatura escalar* τ é o traço da curvatura de Ricci, ou seja, se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é base ortonormal de $T_p M$, temos:

$$\tau = \sum_{i=1}^n g(e_i, e_i) Ric(e_i, e_i).$$

Finalmente, o último conceito básico que iremos tratar é a curvatura seccional, portanto, considere (M, g) uma variedade semi-riemanniana. Chamamos um subespaço vetorial bidimensional E de seção plana, além disso, se v e w formam uma base da seção plana E , então $g(v, v)g(w, w) - [g(v, w)]^2$ é uma quantidade não nula se, e somente se, E é não-degenerado, pois, caso contrário, se E é degenerado basta tomar um vetor v do tipo-luz, o qual definiremos a seguir, e teremos $g(v, v)g(w, w) - [g(v, w)]^2 = 0$. O plano E é dito tipo-tempo se a assinatura de $g_p|_E$ é $(-, +)$ e tipo-espaço quando a assinatura é $(+, +)$. O plano cuja métrica restrita é degenerada é chamado plano tipo-luz cuja assinatura é $(0, +)$.

A curvatura seccional de uma seção plana não-degenerada E com base $\{v, w\}$ é dada por:

$$K(p, E) = \frac{g(R(w, v)v, w)}{g(v, v)g(w, w) - [g(v, w)]^2} = \frac{\tilde{R}(w, v, w, v)}{g(v, v)g(w, w) - [g(v, w)]^2}.$$

Observe que se w for um vetor unitário em p numa variedade Riemanniana (M, g) , estendendo para uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_{n-1}, e_n = w\}$, e sendo $E_i = span\{e_i, w\}$ para $1 \leq i \leq n-1$, temos que:

$$Ric(w, w) = \sum_{i=1}^{n-1} g(R(e_i, w)w, e_i) = \sum_{i=1}^{n-1} K(p, E_i).$$

Já se u for um vetor tipo-tempo em p numa variedade semi-Riemanniana (M, g) , estendendo para uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_{n-1}, e_n = u\}$ e $E_i = span\{e_i, u\}$ com $1 \leq i \leq n-1$. Então:

$$Ric(u, u) = \sum_{i=1}^{n-1} g(R(e_i, u)u, e_i) = \sum_{i=1}^{n-1} -K(p, E_i).$$

Como já vimos, podemos definir pontos conjugados ao longo de uma geodésica usando os campos de Jacobi. Intuitivamente, um campo de Jacobi representa o afastamento de geodésicas próximas e, em particular, se c é uma geodésica tipo-tempo, então c representa a trajetória de uma partícula em queda livre cuja velocidade é menor que a da luz. Lembre que sendo $c : (a, b) \rightarrow M$ uma geodésica,

então o campo de vetores $J : (a, b) \rightarrow TM$ em c é um campo de Jacobi se satisfaz a equação de Jacobi abaixo:

$$J'' + R(J, c')c' = 0,$$

onde $J'' = \nabla_{c'}(\nabla_{c'}J)$. Tome J um campo de Jacobi ortogonal ao vetor c' , interpretamos J como o vetor da partícula original para outra partícula movendo-se sobre uma geodésica próxima tipo-tempo e interpretamos J'' como a aceleração relativa da segunda partícula medida pela primeira. Se $g(J, J) \neq 0$, então a definição de curvatura seccional junto com $g(c', c') = -1$ e $g(J, c') = 0$, temos que

$$K(c', J) = \frac{g(R(J, c')c', J)}{-g(J, J)} = \frac{g(-R(J, c')c', J)}{g(J, J)}.$$

Assim, nos pontos onde J não se anula, o vetor $J/\sqrt{g(J, J)}$ é um vetor unitário na direção de J . Usando que $J'' = -R(J, c')c'$, temos que o componente radial da aceleração é dado por:

$$\begin{aligned} \frac{g(J'', J)}{\sqrt{g(J, J)}} &= \frac{g(-R(J, c')c', J)}{\sqrt{g(J, J)}} \\ &= \left(\frac{g(-R(J, c')c', J)}{g(J, J)} \right) \sqrt{g(J, J)} \\ &= K(c', J) \sqrt{g(J, J)} \\ &= K(c', J) |J|. \end{aligned}$$

A equação acima mostra que, para partículas suficientemente próximas, a componente radial da aceleração varia diretamente com a distância de afastamento $|J|$ e a curvatura seccional $K(c', J)$ de uma seção plana contendo c' e J . Assim, um plano tipo-tempo com curvatura seccional positiva corresponde a partículas em queda livre acelerando para longe uma da outra. Já a curvatura seccional negativa de um plano tipo-tempo corresponde a partículas acelerando uma em direção a outra.

Finalizamos esta seção destacando que dado um vetor tangente $v \in T_pM$, iremos classificá-lo da seguinte forma:

$$\begin{aligned} g(v, v) &< 0, & (\text{vetor tipo-tempo}); \\ g(v, v) &\leq 0, & (\text{vetor causal}); \\ g(v, v) &= 0, & (\text{vetor tipo-luz}); \\ g(v, v) &> 0, & (\text{vetor tipo-espaço}). \end{aligned}$$

Uma variedade Riemanniana (M, g) é uma variedade semi-Riemanniana de assinatura $(+, \dots, +)$. Portanto, para cada espaço tangente T_pM a métrica $g|_p$ é positiva-definida, assim, todo vetor $v \in$

$T_p M$ é do tipo-espaço.

Já uma variedade Lorentziana (M, g) é uma variedade semi-Riemanniana de assinatura $(-, +, \dots, +)$.

Portanto, cada ponto de uma variedade Lorentziana possui vetores tangentes do tipo-tempo, tipo-luz e tipo-espaço.

Capítulo 2

O Espaço-Tempo

Entendido o conceito de variedade Lorentziana, partimos agora em busca de compreendermos a definição matemática de espaço-tempo, visto que este tipo de variedade tem grande importância na teoria da relatividade geral de Einstein. Assim, o propósito principal deste capítulo é compreendermos o que seria um espaço-tempo, conceito este que será muito utilizado no decorrer de todo este trabalho.

2.1 Relação entre Cone de Luz e Métrica Semi-Riemanniana

Um dos resultados da relatividade geral afirma que a métrica do espaço-tempo é determinada pelo conjunto dos vetores tipo-luz. Nesta seção, que pode ser consultada no capítulo 2 de [1], iremos examinar de forma mais geral até que ponto os vetores tipo-luz de um produto interno indefinido, não-degenerado determina o próprio produto interno.

Iniciamos com a apresentação do lema a seguir, cuja demonstração será omitida por ser pouco construtiva com relação aos propósitos deste texto.

Lema 2.1.1. *Seja V um espaço vetorial (sobre o corpo dos números reais) com $\dim(V) = n$, $n \geq 2$. Considere g e h dois produtos internos indefinidos, não-degenerados em V com assinatura arbitrária. Suponha que, para todo $v \in V$, temos $g(v, v) = 0$ se, e somente se, $h(v, v) = 0$, então:*

1. *O produto interno g tem a mesma assinatura de h ou de $-h$;*
2. *Existe $\lambda \neq 0$ tal que $h(v, w) = \lambda g(v, w)$, para todo $v, w \in V$.*

Além disso, sendo (r, s) a assinatura de g e $r \neq s$, se g e h tem a mesma assinatura, então $\lambda > 0$, já se g e $-h$ tem a mesma assinatura, então $\lambda < 0$.

Assim, vemos que o lema acima mostra que conhecido o conjunto dos vetores tipo-luz de um espaço vetorial conseguimos, de certa forma, determinar uma equivalência entre todos os produtos

internos que compartilham deste mesmo conjunto de vetores tipo-luz. O corolário a seguir segue imediatamente do lema anterior.

Corolário 2.1.1. *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais com $\dim(V) = n$, $n \geq 3$ e suponha que V é munido de produtos internos g e h , ambos Lorentzianos, ou seja, a assinatura é $(-, +, \dots, +)$. Se g e h determinam os mesmos vetores tipo-luz, então $h = \lambda g$, para algum $\lambda > 0$.*

Para cada ponto $p \in M$, quando aplicamos o corolário anterior no espaço tangente $T_p M$, o qual iremos supor ser do tipo-tempo, ou seja, a métrica $g|_p$ em $T_p M$ é não degenerada e indefinida, concluímos o teorema a seguir.

Teorema 2.1.1. *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão $n \geq 3$ com métricas g e h , ambas Lorentzianas, de assinatura $(-, +, \dots, +)$. Suponha que para todo $v \in TM$, $g(v, v) = 0$ se, e somente se, $h(v, v) = 0$. Então existe uma função diferenciável $\Omega : M \rightarrow (0, \infty)$ tal que $h = \Omega g$.*

Como mencionamos anteriormente, a existência da função $\Omega : M \rightarrow (0, \infty)$ segue do fato que para cada espaço tangente $T_p M$ do tipo-tempo, existe um $\lambda > 0$, tal que $h = \lambda g$. Já a diferenciabilidade de Ω segue do fato que o produto interno h e g variam diferencialmente, logo Ω deve também ser diferenciável.

Agora iremos entender o conceito de aplicação conforme e, então, apresentar um corolário decorrente do teorema anterior.

Um difeomorfismo global $F : (M, g) \rightarrow (N, h)$ entre duas variedades semi-Riemannianas (M, g) e (N, h) é dito uma aplicação conforme global se existe uma função diferenciável $\Omega : M \rightarrow (0, \infty)$ tal que

$$h(F_*(v), F_*(w)) = \Omega(p)g(v, w), \quad (2.1)$$

para todos $v, w \in T_p M$ e $p \in M$.

É claro que se a condição 2.1 for satisfeita, então (M, g) e (N, h) têm a mesma assinatura, pois Ω é uma função positiva. Já se (M, g) e (N, h) são duas variedades semi-Riemannianas satisfazendo

$$g(v, v) = 0 \iff h(F_*(v), F_*(v)) = 0, \quad (2.2)$$

aplicando o lema 2.1.1 em g e F^*h obtemos que F é uma aplicação conforme global sobre (N, h) ou $(N, -h)$.

Especialmente para o espaço-tempo, que é uma variedade Lorentziana tempo-orientável, temos o corolário a seguir, cuja demonstração decorre da discussão feita anteriormente.

Corolário 2.1.2. *Sejam (M, g) e (N, h) variedades diferenciáveis de dimensão $n \geq 3$ com assinatura Lorentziana $(-, +, \dots, +)$. Se $f : M \rightarrow N$ é um difeomorfismo que satisfaz a condição 2.2, então f é uma aplicação conforme global de (M, g) em (N, h) .*

Em outras palavras, um difeomorfismo do espaço-tempo que preserva vetores tipo-luz é uma aplicação conforme.

2.2 Tempo-orientabilidade

Nesta seção, que pode ser consultada no capítulo 1 de [4], iremos estudar o conceito de orientabilidade em variedades Lorentzianas nas quais aparecem os conceitos de passado e futuro, para isso vamos considerar (M, g) uma variedade Lorentziana conexa, ou seja, cuja assinatura é $(-, +, \dots, +)$, e $\Pi : TM \rightarrow M$ a aplicação projeção, que é dada por $\Pi(p, v) = p$.

O caráter causal de um vetor é a propriedade deste vetor ser do tipo-espaço, tipo-tempo ou tipo-luz.

Definição 2.2.1. *Definimos o caráter causal de $(p, v) \in TM$ como sendo o caráter causal de $v \in T_pM$.*

Definição 2.2.2. *O conjunto $\mathcal{L}_0 \subset T_pM$, $p \in M$, de todos os vetores tipo-luz de T_pM é chamado cone de luz em T_pM .*

Proposição 2.2.1. *O cone de luz $\mathcal{L}_0$ é uma subvariedade do tipo-luz.*

Demonstração. Suponhamos que $v \in \mathcal{L}_0$, então $g(v, v) = 0$ e $v \neq 0$, logo existe U vizinhança de v que não contém o vetor nulo. Defina $\tilde{g} : U \rightarrow \mathbb{R}$, por $\tilde{g}(w) = g(w, w)$, para todo $w \in U$, então $\tilde{g}^{-1}(0) = \mathcal{L}_0 \cap U$ e, mais que isso, $d\tilde{g}$ não possui zeros em U , pois g é não-degenerado. Portanto, pelo teorema da função implícita, $\mathcal{L}_0$ é uma subvariedade de T_pM .

Para mostrarmos que $\mathcal{L}_0$ é do tipo-luz, tomamos $v \in \mathcal{L}_0$ e precisamos mostrar que $T_v\mathcal{L}_0$ é do tipo-luz. Para isso, considere $w \in T_v(T_pM)$ e seja $\phi_v : T_v(T_pM) \rightarrow T_pM$ o isomorfismo canônico, então $w \in T_v\mathcal{L}_0$ é equivalente a $g(\phi_v(w), v) = 0$ que também é equivalente a $g(w, \phi_v^{-1}(v)) = 0$. Portanto, $T_v\mathcal{L}_0 = (\phi_v^{-1}(v))^\perp$, onde $\phi_v^{-1}(v) \in T_v(T_pM)$ é do tipo-luz, pois $g(\phi_v^{-1}(v), \phi_v^{-1}(v)) = g(v, v) = 0$. Logo $T_v\mathcal{L}_0$ é do tipo-luz, o que implica que $\mathcal{L}_0$ é do tipo-luz. $\square$

Proposição 2.2.2. *O conjunto $\mathcal{T} \subset TM$ dos pontos tipo-tempo é um conjunto aberto em TM que é também subvariedade de TM . Além disso, $\mathcal{T}$ é formado por uma ou duas componentes conexas.*

Demonstração. Observe que TM é uma variedade Lorentziana, pois da mesma forma que, sendo M uma variedade Riemanniana, podemos munir TM de uma estrutura diferenciável de maneira que TM se torne uma variedade diferenciável, também podemos munir TM de tal forma que ela se torne uma variedade Lorentziana (ou semi-Riemanniana) quando M é uma variedade Lorentziana

(ou semi-Riemanniana). Assim, definimos a aplicação $\Psi : TM \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $\Psi(p, v) = g(v, v)$, que é suave, pois $\Psi = g \circ \Pi$. Portanto, $\mathcal{T} = \Psi^{-1}(-\infty, 0)$ é um aberto de TM e, assim, uma subvariedade de TM , pois é um aberto.

Considere agora $\mathcal{A}$ uma componente conexa de $\mathcal{T}$ e seja $\varphi : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ um homeomorfismo definido por $\varphi(p, v) = (p, -v)$. Como $\mathcal{A}$ é uma componente conexa e φ é um homeomorfismo, temos que $\varphi(\mathcal{A})$ também é uma componente conexa.

Seja $\mathcal{B} = \mathcal{A} \cup \varphi(\mathcal{A})$ e $\mathcal{C} = \mathcal{T} - \mathcal{B}$, note que $\mathcal{A}$ e $\varphi(\mathcal{A})$ são abertos e fechados em $\mathcal{T}$, pois são componentes conexas, logo $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são abertos e fechados em $\mathcal{T}$ e, consequentemente, abertos e fechados em TM , pois $\mathcal{T}$ é aberto.

Observe que, pela definição de $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, temos que $\Pi(\mathcal{B}) \cap \Pi(\mathcal{C}) = \emptyset$, pois caso contrário teríamos algum v tangente a M , tal que $v \in \mathcal{A} \cup \varphi(\mathcal{A})$ e $v \notin \mathcal{A} \cup \varphi(\mathcal{A})$. Assim, $\Pi(\mathcal{B}) \cap \Pi(\mathcal{C}) = \emptyset$ e $\Pi(\mathcal{B}) \cup \Pi(\mathcal{C}) = M$, além disso, como M é conexa temos

$$\Pi(\mathcal{C}) = \emptyset \Rightarrow \mathcal{C} = \emptyset \Rightarrow \mathcal{T} = \mathcal{A} \cup \varphi(\mathcal{A}).$$

Assim, se $\mathcal{A} \cap \varphi(\mathcal{A}) = \emptyset$, então $\mathcal{T}$ tem duas componentes conexas, caso contrário $\mathcal{A} = \Psi(\mathcal{A})$ e $\mathcal{T}$ tem apenas uma componente conexa.

□

Definição 2.2.3. *Uma variedade Lorentziana conexa (M, g) é tempo-orientável se $\mathcal{T}$ tem duas componentes conexas.*

Supondo que (M, g) é tempo-orientável, então denotamos uma de duas componentes conexas por $\mathcal{T}^+$ e chamamos de futuro, enquanto o complementar de $\mathcal{T}^+$ denotamos por $\mathcal{T}^-$ e chamamos passado. Também, supondo que V é um campo de vetores causais em (M, g) , ou seja, $g(V, V) \leq 0$, e considere a aplicação sobrejetiva e suave $\phi : \mathcal{T} \rightarrow (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, dada por $\phi(p, W) = g(V, W)$, com $V = V(p)$, então $\mathcal{T}$ não é conexo e, portanto, (M, g) é tempo-orientável. Assim, denotando $\phi^{-1}(-\infty, 0) = \mathcal{T}^+$, diremos que (M, g) é tempo-orientada por V . Neste caso, o futuro é a componente de $\mathcal{T}$ cujo fecho contém $V(p)$, para todo $p \in M$.

Já se (M, g) é uma variedade Lorentziana tempo-orientável com dimensão ≥ 3 , definimos, para cada $p \in M$, o conjunto $\mathcal{T}_p^+ = \mathcal{T}^+ \cap \Pi^{-1}(p) \subset T_p M$ e a componente correspondente a $\mathcal{L}_p^+ = \{v \in \mathcal{L}_p \mid g(v, X) < 0, X \in \mathcal{T}_x^+\}$ do cone de luz em $T_p M$ denominamos de cone de luz do futuro em $T_p M$. Por fim, dizemos que o vetor Y é futuro-dirigido se $Y \in \mathcal{T}_p^+ \cup \mathcal{L}_p^+$.

De forma análoga, definimos os conceitos de cone de luz do passado e vetor passado-dirigido.

Finalizamos esta seção destacando a seguinte definição de espaço-tempo.

Definição 2.2.4. *(Espaço-Tempo) Um espaço-tempo (M, g) é uma variedade Lorentziana conexa, tempo-orientável cuja dimensão é ≥ 2 .*

Capítulo 3

Distância Lorentziana e Cut Locus Lorentziano

Com o estudo do espaço-tempo feito no capítulo anterior, podemos agora iniciar o estudo da função distância Lorentziana em espaços-tempo, o qual pode ser consultado no capítulo 4 de [1]. Esta distância tem muitas similaridades com a função distância Riemanniana, mas também tem muitas diferenças. Desde que a função distância Lorentziana é menos conhecida, iremos apresentar algumas propriedades da função distância Riemanniana e, então, compará-las com os resultados correspondentes da função distância Lorentziana.

Para isso denote (N, g_0) uma variedade Riemanniana e (M, g) uma variedade Lorentziana. Portanto, N é uma variedade diferenciável equipada com um produto interno positivo-definido $g_0|_p : T_p N \times T_p N \rightarrow \mathbb{R}$ em cada espaço tangente $T_p N$. Então a estrutura Riemanniana (N, g_0) define a função distância Riemanniana

$$d_0 : N \times N \rightarrow [0, \infty)$$

da seguinte forma. Seja $\Lambda_{p,q}$ o conjunto das curvas suaves por partes em N de p a q , dada uma curva $c \in \Lambda_{p,q}$, com $c : [0, 1] \rightarrow N$, existe uma partição finita $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_k = 1$, tal que $c|_{[t_i, t_{i+1}]}$ é suave para cada i . Então o comprimento de arco Riemanniano de c com respeito a g_0 é definido como

$$L_0(c) = \sum_{i=1}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{g_0(c'(t), c'(t))}.$$

Assim, a distância Riemanniana $d_0(p, q)$ entre p e q é definido como

$$d_0(p, q) = \inf\{L_0(c) \mid c \in \Omega_{p,q}\} \geq 0.$$

A função $d_0 : N \times N \rightarrow [0, \infty)$ cumpre as seguintes propriedades:

1. $d_0(p, q) = d_0(q, p), \forall p, q \in N$;

2. $d_0(p, q) \leq d_0(p, r) + d_0(r, q), \forall p, q, r \in N$;
3. $d_0(p, q) = 0 \iff p = q$;
4. $d_0 : N \times N \rightarrow [0, \infty)$ é contínua e a família das bolas $B(p, \epsilon) = \{q \in N \mid d_0(p, q) < \epsilon\}$, para todo $p \in N$ e $\epsilon > 0$, forma uma base para a topologia da variedade dada.

Um segmento geodésico $c \in \Omega_{p,q}$, com $L_0(c) = d_0(p, q)$, é chamado segmento geodésico minimal e, veja que, $L_0(\gamma) \geq d_0(p, q), \forall \gamma \in \Lambda_{p,q}$.

A seguir apresentaremos o teorema de Hopf-Rinow, que garante uma equivalência entre a variedade ser completa e geodesicamente completa, além disso, garante que variedades Riemannianas compactas são completas.

Teorema 3.0.1. *(Hopf-Rinow) Para toda variedade Riemanniana (N, g_0) as seguintes condições são equivalentes:*

1. *Completude: (N, d_0) é um espaço métrico completo;*
2. *Geodesicamente Completa: Para todo $v \in TN$ a geodésica $c(t)$ em N , com $c'(0) = v$, é definida para todo $t \in \mathbb{R}$;*
3. *Para algum $p \in N$, a aplicação exponencial $\exp_p$ é definida para todo espaço tangente $T_p N$ de N em p ;*
4. *Todo subconjunto K de N limitado, com relação a d_0 , tem fecho compacto;*
5. *Dados $p, q \in N$, existe um segmento geodésico suave c de p para q com $L_0(c) = d_0(p, q)$.*

Dizemos que (N, g_0) é completa se satisfaz uma das condições do teorema acima.

3.0.1 Conceitos Básicos e Definições

Feita esta breve apresentação de algumas propriedades da distância Riemanniana vamos iniciar o estudo da função distância Lorentziana, para isso e a fim de entender alguns conceitos mencionados no decorrer deste capítulo iremos apresentar alguns conceitos, nos quais consideramos um espaço-tempo (M, g) , ou seja, uma variedade Lorentziana tempo-orientável.

Primeiramente, diremos que uma curva suave por partes do tipo-tempo em um espaço-tempo (M, g) é futuro-dirigida se todo vetor tangente aponta para o futuro. Iremos usar a seguinte notação $p \ll q$ se existir uma curva suave por partes tipo-tempo futuro-dirigida em M de p para q e $p \leq q$ se $p = q$ ou existe uma curva suave por partes causal futuro-dirigida em M de p para q .

Definição 3.0.1. *O passado e futuro cronológico são dados, respectivamente, por $I^-(p) = \{q \in M \mid q \ll p\}$ e $I^+(p) = \{q \in M \mid p \ll q\}$. Já o passado e futuro causal são dados, respectivamente, por $J^-(p) = \{q \in M \mid q \leq p\}$ e $J^+(p) = \{q \in M \mid p \leq q\}$.*

A estrutura causal de um espaço-tempo (M, g) é definida como a coleção do passado e futuro de cada ponto de M junto com suas propriedades. Dizemos que um espaço-tempo (M, g) é cronológico se $p \notin I^+(p), \forall p \in M$, ou seja, M não contém curvas tipo-tempo fechadas e dizemos que um espaço-tempo (M, g) é causal se não existem pontos $p, q \in M, p \neq q$, tais que $p \leq q \leq p$, ou seja, M não contém curvas causais fechadas.

Em geral, curvas causais fechadas geram paradoxos envolvendo a causalidade. Mesmo espaços-tempo que não contenham curvas causais fechadas podem conter um ponto $p \in M$ tal que existe uma curva causal futuro-dirigida saindo de vizinhanças arbitrariamente pequenas de p e então retornando. Este comportamento é dito ser uma violação da causalidade forte em p . Os espaços-tempo sem essa violação são ditos fortemente causais.

Definição 3.0.2. *(Globalmente hiperbólico) Um espaço-tempo fortemente causal (M, g) é dito globalmente hiperbólico se para todo $p, q \in M$ o conjunto $J^+(p) \cap J^-(q)$ é compacto.*

Definição 3.0.3. *(Convergência de curvas na topologia C^0) Suponha que γ e todas as curvas da sequência $\{\gamma_n\}$ estejam definidas no intervalo $[a, b]$. Dizemos que a sequência $\{\gamma_n\}$ converge para γ na topologia C^0 se $\gamma_n(a) \rightarrow \gamma(a), \gamma_n(b) \rightarrow \gamma(b)$ e, dado qualquer conjunto aberto V contendo γ , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma_n \subset V$, para todo $n \geq n_0$.*

Com as propriedades básicas de métricas Riemannianas em mente, buscaremos, neste capítulo, relacionar-las com as propriedades de distância Lorentziana e mostrar como a distância Lorentziana se relaciona com a estrutura causal de um espaço-tempo.

Seja (M, g) uma variedade Lorentziana de dimensão $n \geq 2$. Dados $p, q \in M$ com $p \leq q$, defina $\Omega_{p,q}$ o conjunto das curvas causais suaves por partes futuro-dirigida, $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$, com $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$. A função comprimento de arco Lorentziano $L = L_g: \Omega_{p,q} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida como segue. Dado $\gamma \in \Omega_{p,q}$, tome uma partição $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$, tal que $\gamma|_{(t_i, t_{i+1})}$ é suave para cada $i = 0, 1, \dots, n-1$. Então defina:

$$L(\gamma) = L_g(\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{-g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt.$$

A partir da definição acima, concluímos que uma curva do tipo-luz tem seu comprimento nulo. Mais ainda, fixados $p, q \in M$, com $p \ll q$, então para qualquer curva γ tipo-tempo de p para q é tal que $L(\gamma) > 0$, porém podemos tomar uma sequência de curvas suaves por partes quase sempre tipo-luz $\gamma_n: [0, 1] \rightarrow M$, com $\gamma_n(0) = p$ e $\gamma_n(1) = q$, tais que $\gamma_n \rightarrow \gamma$ em C^0 . Ou seja, o ínfimo dos

comprimentos de arco Lorentziano das curvas $\gamma \in \Omega_{p,q}$ é nulo. No entanto, se p e q pertencem a uma vizinhança geodesicamente convexa U , o segmento geodésico futuro dirigido em U de p a q tem o maior comprimento de arco Lorentziano dentre todas as curvas causais em U de p a q . Portanto, é natural a seguinte definição da função distância Lorentziana $d = d(g) : M \times M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ de (M, g) .

Definição 3.0.4. (*Função Distância Lorentziana*) Dado $p \in M$, se $q \notin J^+(p)$, então $d(p, q) = 0$, já se $q \in J^+(p)$, então $d(p, q) = \sup\{L_g(\gamma) \mid \gamma \in \Omega_{p,q}\}$.

É imediato da definição que:

$$d(p, q) > 0 \iff q \in I^+(p). \quad (3.1)$$

Assim, a função distância Lorentziana determina o passado e futuro cronológico de cada ponto $p \in M$. Mas, geralmente, a função distância Lorentziana falha em determinar o passado e futuro causal de um ponto p , visto que $d(p, q) = 0$ não implica que $q \in J^+(p) \setminus I^+(p)$, mesmo a recíproca sendo verdadeira, ou seja, se $q \in J^+(p) \setminus I^+(p)$, então $d(p, q) = 0$.

Devemos enfatizar que a distância Lorentziana $d(p, q)$ não precisa ser finita. Um exemplo, o qual veremos no lema seguinte, surge quando a causalidade é violada.

Definição 3.0.5. Um espaço-tempo é dito ser patológico em $p \in M$ se $I^+(p) \cap I^-(p) = M$ e totalmente patológico se $I^+(p) \cap I^-(p) = M, \forall p \in M$.

Lema 3.0.1. Seja (M, g) um espaço-tempo qualquer:

- (1) Se $p \in I^+(p)$, então $d(p, p) = \infty$. Portanto, para cada $p \in M$ temos que $d(p, p) = 0$ ou $d(p, p) = \infty$.
- (2) (M, g) é totalmente patológico se, e somente se, $d(p, q) = \infty, \forall p, q \in M$.
- (3) Se (M, g) é patológico em p , então (M, g) é totalmente patológico.

Demonstração.

- (1) Se $p \in I^+(p)$, então existe uma curva tipo-tempo fechada $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$, com $\gamma(0) = p = \gamma(1)$ e $L(\gamma) > 0$. Se $\sigma_n \in \Omega_{p,p}$ é uma curva tipo-tempo que percorre γ exatamente n vezes, então $L(\sigma_n) = nL(\gamma)$, logo $L(\sigma_n) \rightarrow \infty$, o que implica que $d(p, p) = \infty$.

Portanto, se $p \notin I^+(p)$, então $d(p, p) = 0$, por definição, e se $p \in I^+(p)$, então $d(p, p) = \infty$.

- (2) Suponha que (M, g) é totalmente patológico, ou seja, $I^+(p) \cap I^-(p) = M, \forall p \in M$. Como $p \in I^+(p)$, então para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\gamma_1 \in \Omega_{p,p}$, tal que $L(\gamma_1) > n$. Além disso, como $q \in I^+(p)$

existe uma curva γ_2 tipo-tempo de p para q . Portanto, a curva $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2 \in \Omega_{p,q}$ é uma curva tipo-tempo com $L(\gamma) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2) > n$, logo $d(p, q) = \infty$.

Reciprocamente, suponha que $d(p, q) = \infty, \forall p, q \in M$. Dado $r \in M$, temos que $d(r, p) > 0$, logo $p \in I^+(r)$, pela equação 3.1, também $d(p, r) > 0$, logo $r \in I^+(p)$, ou ainda, $p \in I^-(r)$. Portanto, $M = I^+(r) \cap I^-(r)$.

(3) Seja $q \in M = I^+(p) \cap I^-(p)$. Note que $q \in I^+(p)$ implica que $p \in I^-(q)$ e, pela transitividade de $\ll$, concluímos que $I^-(p) \subset I^-(q)$. Analogamente, de $p \in I^-(q)$ concluímos que $I^+(p) \subset I^+(q)$, logo $M = I^+(p) \cap I^-(p) \subset I^+(q) \cap I^-(q)$. $\square$

Pela definição 3.0.4, se $I^+(p) \neq M$, então existe $q \in M$ tal que $d(p, q) = 0$, mas $p \neq q$. Assim vemos que a distância Lorentziana não é necessariamente positiva-definida. Além disso, vimos que é possível $d(p, p) > 0$, mas se (M, g) é cronológico, então $d(p, p) = 0$, para todo $p \in M$. Por fim, a distância Lorentziana costuma não ser simétrica, para isso vejamos a proposição a seguir.

Proposição 3.0.1. *Se $p \neq q$ e as distâncias $d(p, q)$ e $d(q, p)$ são finitas, então ou $d(p, q) = 0$ ou $d(q, p) = 0$. Equivalentemente, se $d(p, q) > 0$ e $d(q, p) > 0$, então $d(p, q) = d(q, p) = \infty$.*

Demonstração. Se $d(p, q) > 0$ e $d(q, p) > 0$, então existem curvas do tipo-tempo futuro-dirigida γ_1 de p para q e γ_2 de q para p . Definindo a sequência $\gamma_n = \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_1)^n \in \Omega_{p,q}$, temos que $L(\gamma_n) \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, logo $d(p, q) = \infty$. De forma análoga podemos mostrar que $d(q, p) = \infty$. $\square$

Observação 3.0.1. *A função distância Lorentziana cumpre a desigualdade triangular inversa, ou seja, se $p \leq r \leq q$, então $d(p, q) \geq d(p, r) + d(r, q)$.*

Agora vamos discutir propriedades da distância Lorentziana que são ferramentas úteis em Relatividade Geral e Geometria Lorentziana. Primeiramente veremos que a função distância Lorentziana quando finita é semi-contínua inferiormente, como mostra o lema abaixo. Porém, em geral, a função distância Lorentziana falha com a propriedade de semi-continuidade superior.

Lema 3.0.2. *Para a distância Lorentziana d , se $d(p, q) < \infty$, $p_n \rightarrow p$ e $q_n \rightarrow q$, então d é semi-contínua inferiormente, ou seja, $d(p, q) \leq \liminf d(p_n, q_n)$. Também, se $d(p, q) = \infty$, $p_n \rightarrow p$ e $q_n \rightarrow q$, então $\lim d(p_n, q_n) = \infty$.*

Demonstração. Primeiro consideremos o caso em que $d(p, q) < \infty$. Se $d(p, q) = 0$ não temos nada a mostrar. Se $d(p, q) > 0$, então $q \in I^+(p)$ e a semi-continuidade inferior segue do seguinte fato. Dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar uma curva tipo-tempo γ de comprimento $L(\gamma) > d(p, q) - \varepsilon$ de p para q e vizinhanças U_1 de p e U_2 de q suficientemente pequenas de tal forma que a curva γ pode ser deformada para obtermos uma curva tipo-tempo de comprimento $L' > d(p, q) - \varepsilon$ de qualquer ponto $r \in U_1$ para qualquer ponto $s \in U_2$. Como $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ é semi-contínua inferiormente se dado $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança $U = U_1 \times U_2$ de (p, q) tal que $d(r, s) > d(p, q) - \varepsilon, \forall (r, s) \in U$,

concluimos o que queríamos.

Por fim, consideramos o caso em que $d(p, q) = \infty$, mas $\liminf d(p_n, q_n) = R < \infty$. Desde que $d(p, q) = \infty$, existe uma curva tipo-tempo γ de p para q de comprimento $L(\gamma) > R + 2$. Isto implica que existem vizinhanças U_1 de p e U_2 de q tais que γ pode ser deformada para obtermos uma curva tipo-tempo de comprimento $L' > R + 1$ de qualquer ponto $r \in U_1$ para qualquer ponto $s \in U_2$, o que contradiz $\liminf d(p_n, q_n) = R$. Logo $\liminf d(p_n, q_n) = \lim d(p_n, q_n) = \infty$. $\square$

Antes do próximo lema, iremos apresentar, sem demonstração, as próximas três proposições que podem ser encontradas em [1]. Estas proposições serão usadas para justificar alguns passos da demonstração do lema.

Proposição 3.0.2. *Seja (M, g) um espaço-tempo globalmente hiperbólico. Suponha que $\{p_n\}$ e $\{q_n\}$ são sequências em M convergindo, respectivamente, para p e q , com $p \leq q$, $p \neq q$ e $p_n \leq q_n$, para cada n . Seja γ_n a curva causal futuro-dirigida de p_n a q_n para cada n . Então existe uma curva causal futuro-dirigida γ limite da sequência $\{\gamma_n\}$ que liga p a q .*

Proposição 3.0.3. *Seja (M, g) um espaço-tempo fortemente causal. Suponha que $\{\gamma_n\}$ é uma sequência de curvas causais definidas em $[a, b]$ tais que $\gamma_n(a) \rightarrow p$ e $\gamma_n(b) \rightarrow q$. Uma curva causal $\gamma: [a, b] \rightarrow M$, com $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q$ é limite da sequência $\{\gamma_n\}$ se, e somente se, existe uma subsequência $\{\gamma_m\}$ de $\{\gamma_n\}$ que converge para γ na topologia C^0 .*

Proposição 3.0.4. *Seja (M, g) um espaço-tempo fortemente causal e γ uma curva causal em (M, g) . Se a sequência $\{\gamma_n\}$ de curvas causais converge para γ em C^0 , então $L(\gamma) \geq \limsup L(\gamma_n)$.*

Agora podemos voltar para a apresentação do lema que desejávamos.

Lema 3.0.3. *Para um espaço-tempo globalmente hiperbólico (M, g) , a função distância Lorentziana d é finita e contínua em $M \times M$.*

Demonstração. O fato de d ser finita segue de $J^+(p) \cap J^-(q)$ ser um compacto, logo tomando $\gamma \in \Omega_{p,q}$ podemos cobrir γ por um número finito n de abertos unitários de M , logo $d(p, q) \leq n$.

Para mostrar que d é contínua basta mostrar que ela é semi-contínua superiormente. Suponha, por absurdo, que d não é semi-contínua superiormente em $(p, q) \in M \times M$, então podemos encontrar $\delta > 0$ e sequências $\{p_n\}$ e $\{q_n\}$ convergindo para p e q , respectivamente, tais que $d(p_n, q_n) \geq d(p, q) + 2\delta$, para todo n . Pela definição de $d(p_n, q_n)$, podemos encontrar uma curva causal futuro-dirigida γ_n de p_n para q_n com $L(\gamma_n) \geq d(p, q) + \delta$, para cada n . Pelo primeira proposição anterior, a sequência γ_n tem uma curva causal γ de p para q como limite. Pela segunda proposição anterior, existe uma subsequência $\{\gamma_m\}$ de $\{\gamma_n\}$ que converge para γ na topologia C^0 . Portanto, pela última proposição anterior, $L(\gamma) \geq \limsup L(\gamma_m) \geq L(\gamma_m) \geq d(p, q) + \delta$, o que contraria a definição de distância Lorentziana. Portanto, d é semi-contínua superiormente em (p, q) . $\square$

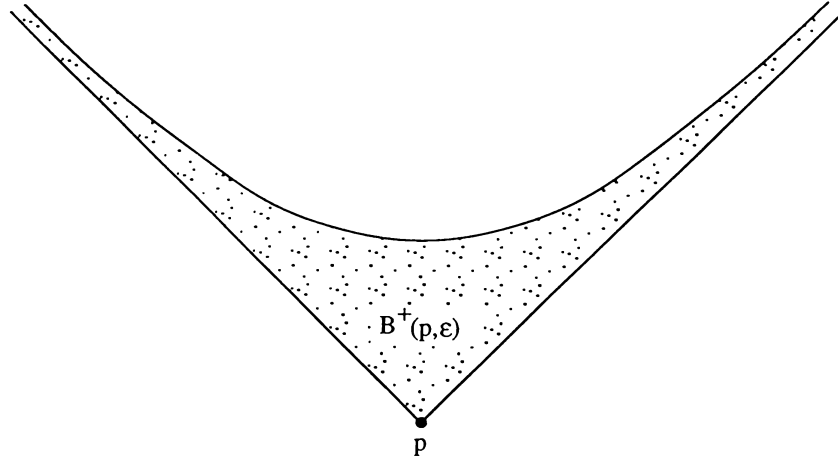
Definição 3.0.6. (Condição de distância finita) O espaço-tempo (M, g) satisfaz a condição de distância finita se $d(g)(p, q) < \infty$, para todo $p, q \in M$.

Com esta definição podemos reescrever o lema anterior da seguinte forma:

Corolário 3.0.1. Se (M, g) é globalmente hiperbólico, então (M, g) satisfaz a condição de distância finita e $d(g) : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua.

Definição 3.0.7. Dizemos que um conjunto é *acrônico* quando não existem dois pontos que possam ser ligados por uma curva tipo-tempo.

Queremos uma base para a topologia de uma variedade Lorentziana, desde que a topologia de uma variedade coincide com a topologia induzida pela métrica para qualquer métrica Riemanniana, é natural considerar os conjuntos $\{m \in I^+(p) \mid d(p, m) < \varepsilon\}$, no entanto, como o espaço de Minkowski mostra esses conjuntos não formam uma base para a topologia desta variedade. De fato, este mesmo exemplo mostra que não importa o quão pequeno seja $\varepsilon > 0$, o conjunto $\{m \in I^+(p) \mid d(p, m) \leq \varepsilon\}$ falha em ser compacto, geodesicamente convexo e difeomorfo ao disco n-dimensional fechado.



A esfera de raio ε no ponto p é dada por $K(p, \varepsilon) = \{q \in M \mid d(p, q) = \varepsilon\}$. Este conjunto não é necessariamente compacto, no entanto a desigualdade triangular inversa implica que $K(p, \varepsilon)$ é *acrônico*, pois dados $q, r \in K(p, \varepsilon)$, temos que $d(q, r) = 0$, caso contrário $\varepsilon = d(p, r) \geq d(p, q) + d(q, r) = \varepsilon + d(q, r) > \varepsilon$, o que é absurdo.

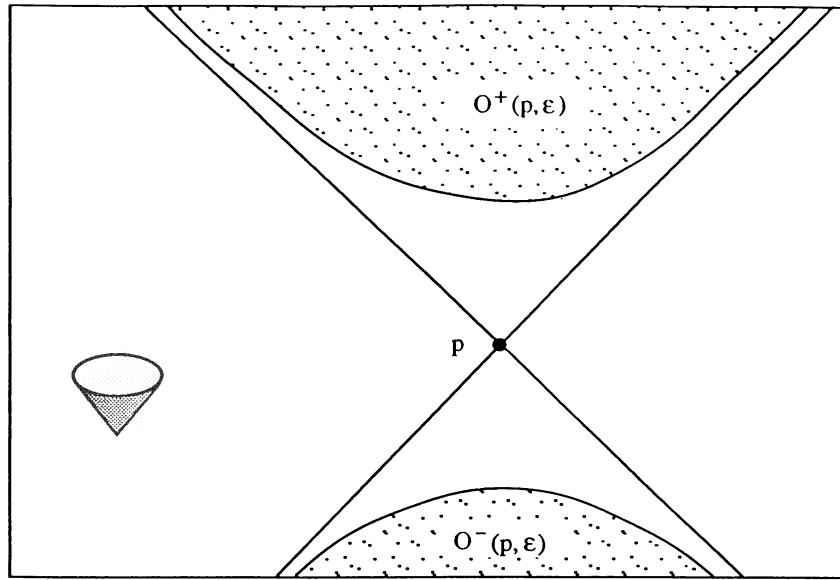
Em espaços-tempo arbitrários nem a bola futuro interior $B^+(p, \varepsilon) = \{q \in I^+(p) \mid d(p, q) < \varepsilon\}$ nem a bola passado interior $B^-(p, \varepsilon) = \{q \in I^-(p) \mid d(q, p) < \varepsilon\}$ precisam ser abertas. Porém se a função distância $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ é contínua, então as bolas interiores devem ser abertas. Nas próximas seções iremos ver que para espaços-tempo distinguíveis com uma função distância contínua as bolas futuro e passado interior formam uma sub-base para a topologia da variedade. Mas logo a seguir veremos que uma sub-base para a topologia de um espaço-tempo fortemente

causal (M, g) com a função distância sendo, possivelmente, descontínua pode ser obtida usando bolas exteriores $O^+(p, \epsilon)$ e $O^-(p, \epsilon)$ no lugar das bolas interiores.

Definição 3.0.8. (*Bolas Exteriores* $O^+(p, \epsilon)$, $O^-(p, \epsilon)$) As bolas exteriores $O^+(p, \epsilon)$ e $O^-(p, \epsilon)$ são definidas respectivamente da seguinte forma:

$$O^+(p, \epsilon) = \{q \in M \mid d(p, q) > \epsilon\},$$

$$O^-(p, \epsilon) = \{q \in M \mid d(q, p) > \epsilon\}.$$



Visto que a função distância Lorentziana é semi-contínua inferiormente quando finita, as bolas exteriores $O^+(p, \epsilon)$ e $O^-(p, \epsilon)$ são abertas em espaços-tempo arbitrários, pois d ser semi-contínua inferiormente significa que dado $\epsilon < d(p, q)$, existe uma vizinhança $U = U_1 \times U_2$ de (p, q) tal que $d(x, y) > \epsilon$, $\forall (x, y) \in U$, logo $U_2 \subset O^+(p, \epsilon)$. Além disso, a desigualdade triangular inversa implica que estes conjuntos têm a propriedade de que se $m, n \in O^+(p, \epsilon)$ (respectivamente, $O^-(p, \epsilon)$), então qualquer curva causal de m para n pertence a $O^+(p, \epsilon)$ (respectivamente, $O^-(p, \epsilon)$), pois dado r nesta curva temos que $d(p, r) \geq d(p, m) + d(m, r) \geq \epsilon + d(m, r) > \epsilon$, assim $r \in O^+(p, \epsilon)$.

Teorema 3.0.2. *Seja (M, g) fortemente causal. Então a coleção*

$$\{O^+(p, \epsilon_1) \cap O^-(q, \epsilon_2) \mid p, q \in M, \epsilon_1, \epsilon_2 > 0\}$$

forma uma base da topologia de M .

Demonstração. Seja $m \in M$ um ponto arbitrário e U uma vizinhança de m . Como M é fortemente causal podemos encontrar U_1 vizinhança causal local com $m \in U_1 \subset U$, isto é, não existe curva

causal que deixa U_1 e então retorna. Escolha $p_1, p_2 \in U_1$ com $p_1 \ll m \ll p_2$ tal que $I^+(p_1) \cap I^-(p_2) \subset U_1$ e note que $d(p_1, m) > 0$ e $d(m, p_2) > 0$. Tome $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, com $0 < \varepsilon_1 < d(p_1, m)$ e $0 < \varepsilon_2 < d(m, p_2)$, então $m \in O^+(p_1, \varepsilon_1) \cap O^-(p_2, \varepsilon_2)$.

Visto que $O^+(p_1, \varepsilon_1) \subset I^+(p_1)$ e $O^-(p_2, \varepsilon_2) \subset I^-(p_2)$, concluímos que $O^+(p_1, \varepsilon_1) \cap O^-(p_2, \varepsilon_2) \subset I^+(p_1) \cap I^-(p_2) \subset U_1 \subset U$ como queríamos. $\square$

Em variedades Riemannianas completas, quaisquer dois pontos podem ser ligados por uma geodésica minimal, que é a curva de menor comprimento ligando os dois pontos. Já em variedades Lorentzianas uma geodésica tipo-tempo γ de p para q é dita maximal se nenhuma pequena variação que mantenha p e q fixos produzam curvas tipo-tempo σ de p para q com $L(\sigma) > L(\gamma)$.

Definição 3.0.9. (*Curva Maximal*) Sejam $p, q \in M$ com $p \leq q$, $p \neq q$. A curva $\gamma \in \Omega_{p,q}$ é chamada de maximal se $L(\gamma) = d(p, q)$.

Segue imediatamente da desigualdade triangular inversa que se $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$, com $\gamma \in \Omega_{p,q}$, é maximal, então para todo s, t , com $0 \leq s < t \leq 1$, temos $d(\gamma(s), \gamma(t)) = L(\gamma|_{[s,t]})$, pois dado $r \in M$ tal que $\gamma(s) \leq r \leq \gamma(t)$, temos que $L(\sigma) \leq L(\gamma|_{[s,t]})$, onde σ é a curva que vai de $\gamma(s)$ para $\gamma(t)$ passando por r .

Finalizamos esta seção apresentando alguns resultados relacionados com geodésicas ligando pontos pertencentes a uma vizinhança convexa. O primeiro resultado a seguir iremos omitir sua demonstração e iremos usá-lo na demonstração do teorema principal logo em seguida.

Proposição 3.0.5. *Seja U uma vizinhança normal convexa centrada em $p \in M$. Para $q \in J^+(p)$, seja $\overline{pq}$ a única geodésica causal $c: [0, 1] \rightarrow U$, com $c(0) = p$ e $c(1) = q$. Se γ é uma curva causal futuro-dirigida em U de p para q com $L(\gamma) = d(p, q)$, então γ coincide com $\overline{pq}$ a menos de uma reparametrização.*

Teorema 3.0.3. *Se $\gamma \in \Omega_{p,q}$ é tal que $L(\gamma) = d(p, q)$, então γ pode ser reparametrizado por uma geodésica suave.*

Demonstração. Fixe $\gamma(t)$ um ponto de γ . Podemos encontrar $\delta > 0$ tal que uma vizinhança convexa centrada em $\gamma(t)$ contém $\gamma([t - \delta, t + \delta])$. A curva $\gamma|_{[t - \delta, t + \delta]}$ é maximal, então pela proposição anterior temos que $\gamma|_{[t - \delta, t + \delta]}$ pode ser reparametrizada para uma geodésica suave. Como t é arbitrário, temos o teorema. $\square$

Corolário 3.0.2. *Se $p \leq q$ e não acontece $p \ll q$, então existe uma geodésica máxima tipo-luz de p para q .*

Demonstração. Como $p \leq q$ e não acontece $p \ll q$, temos que $d(p, q) = 0$. Seja γ uma curva causal futuro-dirigida de p para q . Pela definição de distância Lorentziana $d(p, q) \geq L(\gamma) \geq 0$, logo

$L(\gamma) = d(p, q) = 0$ donde γ é maximal. Pelo teorema anterior γ pode ser reparametrizada por uma geodésica suave $c : [0, 1] \rightarrow M$ de p para q . Desde que $L(c) \leq d(p, q) = 0$, a geodésica c tem que ser tipo-luz. $\square$

3.0.2 Homotetias e Isometrias

O propósito principal desta seção é demonstrarmos o teorema 3.0.4, no qual vemos que uma de suas consequências é a garantia de que uma aplicação que preserva distâncias de um espaço-tempo fortemente causal sobre si mesmo é uma isometria.

Sejam (M_1, g_1) e (M_2, g_2) variedades Lorentzianas. Dizemos que um difeomorfismo $f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$ é uma homotetia se existe uma constante $c > 0$, tal que $g_2(f_*v, f_*w) = cg_1(v, w)$, para todo $v, w \in T_p M_1$ e $p \in M_1$. Em particular, se $c = 1$, então f é uma isometria.

A partir de agora, nesta seção, vamos denotar por d_1 a função distância Lorentziana de (M_1, g_1) e d_2 a de (M_2, g_2) .

Definição 3.0.10. *Uma aplicação $f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$ é chamada de distância homotética se existe uma contante $c > 0$, tal que $d_2(f(p), f(q)) = cd_1(p, q)$, $\forall p, q \in M_1$. Se $c = 1$, dizemos que f preserva distância.*

Note que em variedades Lorentzianas, aplicações que preservam distâncias não são necessariamente contínuas, pois basta tomar (M, g) um espaço-tempo totalmente patológico e ver que $d(p, q) = \infty$, $\forall p, q \in M$, portanto qualquer bijeção $f : M \rightarrow M$ preserva distância, mas não é necessariamente contínua.

Teorema 3.0.4. *Seja (M_1, g_1) um espaço-tempo fortemente causal e (M_2, g_2) um espaço-tempo arbitrário. Se $f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$ é uma distância homotética sobrejetiva (não necessariamente contínua), então f é uma homotetia suave. Isto é, f é um difeomorfismo e existe uma constante $c > 0$, tal que $f^*g_2 = cg_1$. Em particular, toda aplicação de um espaço-tempo fortemente causal (M, g) sobre si mesmo que preserva a distância Lorentziana é uma isomeria.*

A demonstração deste teorema será dividida em alguns lemas.

Lema 3.0.4. *Sejam (M_1, g_1) e (M_2, g_2) espaços-tempo e considere uma aplicação $f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$ sobrejetiva, mas não necessariamente contínua. Se f é uma distância homotética, então:*

$$(1) \quad p \ll q \iff f(p) \ll f(q),$$

$$(2) \quad f(I^+(p) \cap I^-(q)) = I^+(f(p)) \cap I^-(f(q)).$$

Demonstração. (1) Como f é uma distância homotética, então:

$$p \ll q \iff d_1(p, q) > 0 \iff cd_1(p, q) = d_2(f(p), f(q)) > 0 \iff f(p) \ll f(q).$$

(2) Dado $f(r) \in f(I^+(p) \cap I^-(q))$, então $r \in I^+(p) \cap I^-(q)$, ou seja, $p \ll r \ll q$, que equivale por (1) a $f(p) \ll f(r) \ll f(q)$, logo $f(r) \in I^+(f(p)) \cap I^-(f(q))$.

Já se $f(r) \in I^+(f(p)) \cap I^-(f(q))$, então $f(p) \ll f(r) \ll f(q)$, ou seja, $p \ll r \ll q$ e, portanto, $r \in I^+(p) \cap I^-(q)$ e $f(r) \in f(I^+(p) \cap I^-(q))$.

Assim, concluímos a igualdade.

□

Um fato importante do item (2) é que se (M, g) é fortemente causal, então o conjunto $\{I^+(p) \cap I^-(q) \mid p, q \in M\}$ forma uma base para a topologia de M , fato este que poderíamos mostrar de forma análoga à demonstração do teorema 3.0.2.

Lema 3.0.5. *Seja (M_1, g_1) um espaço-tempo fortemente causal e (M_2, g_2) um espaço-tempo arbitrário. Se $f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$ é uma distância homotética sobrejetiva (não necessariamente contínua), então f é uma aplicação aberta injetiva.*

Demonstração. Para mostrar que f é uma aplicação aberta usamos o fato que $\{I^+(p) \cap I^-(q) \mid p, q \in M_1\}$ forma uma base para a topologia de M_1 , assim basta mostrar que $f(I^+(p) \cap I^-(q))$ é aberto, mas pelo item (2) do lema anterior, temos que $f(I^+(p) \cap I^-(q)) = I^+(f(p)) \cap I^-(f(q))$, onde este último é a interseção de dois abertos em M_2 e, portanto, aberto.

Resta mostrar que f é injetiva. Suponha que existam $p, q \in M_1$, $p \neq q$ e $f(p) = f(q)$. Seja $U(p)$ uma vizinhança de p com $q \notin U(p)$ e tal que nenhuma curva causal passa por $U(p)$ mais de uma vez. Escolha $r_1, r_2 \in U(p)$ com $r_1 \ll p \ll r_2$, então $q \notin I^+(r_1) \cap I^-(r_2) \subset U(p)$. Segue do lema anterior que $f(r_1) \ll f(p) = f(q) \ll f(r_2)$, o que implica que $r_1 \ll q \ll r_2$, ou seja, $q \in I^+(p) \cap I^-(q)$, o que é um absurdo. □

Aplicando o lema anterior a f e f^{-1} , obtemos a proposição seguinte.

Proposição 3.0.6. *Seja (M_1, g_1) fortemente causal, (M_2, g_2) um espaço-tempo arbitrário e $f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$ sobrejetiva (não necessariamente contínua). Se f é uma distância homotética, então f é um homeomorfismo e (M_2, g_2) é fortemente causal.*

Demonstração. Desde que f é sobrejetiva, temos, pelo lema anterior, que f é bijetiva. Além disso, também pelo lema anterior, f é uma aplicação aberta, o que garante que f^{-1} é contínua, pois a imagem inversa de um aberto é aberta.

Se mostrarmos que (M_2, g_2) é fortemente causal, teremos que f^{-1} é uma bijeção aberta, logo f será contínua.

Dado $p' \in M_2$, seja $p = f^{-1}(p') \in M_1$. Se $r', q' \in M_2$ são tais que $r' \ll p' \ll q'$, então como f^{-1} é uma distância homotética com constante igual a $1/c$ (pois f é bijetiva), temos que $f^{-1}(r') \ll p \ll f^{-1}(q')$.

Seja $U'(p')$ uma vizinhança de p' e escolha $V'(p')$ vizinhança de p' tal que o fecho compacto $\overline{V'(p')}$ esteja contido numa vizinhança normal convexa $W'(p')$ de p' , logo podemos assumir que $(W'(p'), g_2|_{W'(p')})$ é globalmente hiperbólico.

Seja $\{r'_n\}$ e $\{q'_n\}$ sequências em $V'(p')$ tais que $r'_n \rightarrow p'$, $q'_n \rightarrow p'$ e $r'_n \ll p' \ll q'_n$, para todo n .

Assuma que falhe a causalidade forte de (M_2, g_2) em p' . Isto significa que, para cada n , o conjunto $I^+(r'_n) \cap I^-(q'_n)$ não pode estar contido em $W'(p')$, pois de outra forma curvas causais poderiam sair de vizinhanças arbitrariamente pequenas de $I^+(r'_n) \cap I^-(q'_n)$ e então retornar, o que contraria o fato de $W'(p')$ ser globalmente hiperbólico.

Tome uma sequência $\{z'_n\}$ contida na fronteira de $V'(p')$, com $z'_n \in I^+(r'_n) \cap I^-(q'_n)$ para cada n . A sequência $\{z'_n\}$ tem um ponto de acumulação z , pois o fecho de $V'(p')$ é compacto. Além disso, $f^{-1}(z'_n) \in f^{-1}(I^+(r'_n) \cap I^-(q'_n)) = I^+(f^{-1}(r'_n)) \cap I^-(f^{-1}(q'_n))$.

A continuidade de f^{-1} implica que $f^{-1}(r'_n) \rightarrow f^{-1}(p') = p$ e $f^{-1}(q'_n) \rightarrow f^{-1}(p') = p$, já a causalidade forte de M_1 garante que os conjuntos $I^+(f^{-1}(r'_n)) \cap I^-(f^{-1}(q'_n))$ se aproximam de p , portanto, $f^{-1}(z'_n) \rightarrow p$, o que significa que $f^{-1}(z) = p = f^{-1}(p')$. Isto contraria a injetividade de f^{-1} . Consequentemente, M_2 é de fato fortemente causal. $\square$

Considerando um espaço-tempo M fortemente causal, dado $p \in M$, seja $U(p)$ uma vizinhança normal convexa de p . O conjunto $U(p)$ pode ser escolhido tão pequeno que quando $q, r \in U(p)$, com $q \leq r$, a distância $d(q, r)$ é o comprimento do segmento $\alpha(q, r)$ da única geodésica de q até r que pertence a $U(p)$.

Além disso, $U(p)$ pode ser escolhido de forma que se $q, z, r \in U(p)$, com $q \ll z \ll r$, então a desigualdade triangular inversa $d(q, r) \geq d(q, z) + d(z, r)$ tem a igualdade válida se, e somente se, z está no segmento de geodésica que liga q a r em $U(p)$. Portanto, geodésicas tipo-tempo em espaços-tempo fortemente causais são caracterizados pela função distância, logo segue que distâncias homotéticas levam geodésicas tipo-tempo em geodésicas tipo-tempo, pois dado $z \in \alpha(p, q)$, temos que $p \ll z \ll q$ e, como f é uma distância homotética, $f(p) \ll f(z) \ll f(q)$, onde $f(z) \in \alpha(f(p), f(q))$. Queremos mostrar que $\alpha(f(p), f(q))$ é uma geodésica, para isso note que como $z \in \alpha(p, q)$, então

$$d_1(p, q) = d_1(p, z) + d_1(z, q) = \frac{1}{c}d_2(f(p), f(z)) + \frac{1}{c}d_2(f(p), f(z)) = \frac{1}{c}d_2(f(p), f(q)),$$

logo $f(z)$ está sobre a única geodésica que liga $f(p)$ a $f(q)$, ou seja, $\alpha(f(p), f(q))$ é uma geodésica. Este fato também é válido para geodésicas do tipo-luz e isso é mostrado no lema a seguir.

Lema 3.0.6. *Se f é uma distância homotética definida em um espaço-tempo fortemente causal, então f leva geodésicas tipo-luz em geodésicas tipo-luz.*

Demonstração. Seja $U(p)$ uma vizinhança normal convexa de p , tomada suficientemente pequena de tal forma que $f(U(p))$ esteja contida numa vizinhança normal convexa de $f(p)$, como mostra o

parágrafo anterior a este lema.

Seja $\alpha(q, r)$ uma geodésica tipo-luz em $U(p)$. Escolha $q_n \rightarrow q$ e $r_n \rightarrow r$, com $q_n \ll r_n$, para todo n . Pela proposição anterior temos que $f(q_n) \rightarrow f(q)$ e $f(r_n) \rightarrow f(r)$.

Assim, f leva as geodésicas tipo-tempo $\alpha(q_n, r_n)$ nas geodésicas tipo-tempo $\alpha(f(q_n), f(r_n))$.

Desde que a geodésica $\alpha(q_n, r_n)$ converge para $\alpha(q, r)$ e a geodésica $\alpha(f(q_n), f(r_n))$ converge para $\alpha(f(q), f(r))$, segue que f leva $\alpha(q, r)$ em $\alpha(f(q), f(r))$, onde esta última é uma geodésica tipo-luz, pois f é uma distância homotética. $\square$

Demonstração. Agora iremos provar o teorema 3.0.4. O fato de f ser um difeomorfismo segue de um resultado provado por Hawking, King e McCarthy (1976), que afirma que um homeomorfismo que leva geodésicas tipo-luz em geodésicas tipo-luz é um difeomorfismo.

Desde que M_1 e M_2 são fortemente causais, para cada $p \in M_1$, existe uma vizinhança normal convexa $U_1(p)$ tal que para cada $q \in U_1(p)$, com $p \ll q$, o comprimento das geodésicas tipo-tempo ligando p a q e $\alpha(f(p), f(q))$ ligando $f(p)$ a $f(q)$ são dados por $d_1(p, q)$ e $d_2(f(p), f(q))$, respectivamente. Usando que $d_2(f(p), f(q)) = cd_1(p, q)$, segue que f aplica g_1 sobre o tensor $c^{-2}g_2$. $\square$

3.0.3 Função Distância Lorentziana e Causalidade

Nesta seção iremos estudar a relação entre a continuidade e finitude da função distância Lorentziana $d = d(g) : M \times M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ e a estrutura causal de (M, g) .

O lema a seguir reúne alguns resultados das seções anteriores e sua demonstração é análoga às demonstrações que já fizemos.

Lema 3.0.7. *Para um espaço-tempo (M, g) as seguintes propriedades são equivalentes:*

- (i) $I^+(p) = I^+(q)$ (respectivamente, $I^-(p) = I^-(q)$) $\implies p = q$;
- (ii) As funções $I^+ : M \rightarrow P(M)$, $p \mapsto I^+(p)$ (respectivamente, $I^- : M \rightarrow P(M)$, $p \mapsto I^-(p)$) são injetivas, onde $P(M)$ é o conjunto das partes de M .
- (iii) Dado $p \in M$ e U uma vizinhança de p , existe uma vizinhança $V \subset U$ de p tal que qualquer curva causal futuro-dirigida $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, onde $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) \in V$, está totalmente contida em V .
- (iv) Dado $p \in M$ e U vizinhança de p , existe uma vizinhança $V \subset U$ de p tal que $J^+(p, V) = J^+(p) \cap V$ (respectivamente, $J^-(p, V) = J^-(p) \cap V$).

Definição 3.0.11. *Um espaço-tempo (M, g) é chamado futuro (respectivamente, passado) distinguível se uma das propriedades equivalentes no lema anterior é satisfeita. Um espaço-tempo é distinguível se é futuro e passado distinguível.*

Segue da condição (i) do lema acima que em espaços-tempo distinguíveis, pontos distintos têm passado e futuro cronológico distintos. As próximas definições e proposições nos auxiliarão na demonstração do lema que virá logo a seguir.

Definição 3.0.12. *Uma medida de Borel admissível m em (M, g) é dita ser admissível se satisfaz:*

- (1) $m(U) > 0$, para todo conjunto aberto não vazio U ;
- (2) $m(M) < +\infty$;
- (3) $m(\partial(I^+(p))) = m(\partial(I^-(p))) = 0$, $\forall p \in M$.

A função volume passado (respectivamente, futuro) associado a medida m são dadas por $t^-(p) = m(I^-(p))$ e $t^+(p) = -m(I^+(p))$, $\forall p \in M$

Também iremos denotar por $p < q$ quando tivermos uma curva (não-trivial) futuro-dirigida de p para q , ou seja, $p < q$, se $p \leq q$ e $p \neq q$.

Definição 3.0.13. *(Função Tempo Generalizada) Uma função (não necessariamente contínua) $t : (M, g) \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser uma função tempo generalizada se $\forall p, q \in M$, $p < q \implies t(p) < t(q)$.*

Proposição 3.0.7. *Seja t^- (respectivamente, t^+) a função volume passado (respectivamente, futuro) em (M, g) associado a uma medida de Borel admissível. Então:*

- (1) (M, g) é passado-distinguível se, e somente se, t^- é uma função tempo generalizada.
- (2) (M, g) é futuro-distinguível se, e somente se, t^+ é uma função tempo generalizada.

Demonstração. Iremos demonstrar apenas a primeira afirmação, pois a segunda é análoga à primeira.

- (1) Suponhamos que (M, g) seja passado-distinguível e considere $p < q$, então sendo $p \neq q$, temos $I^-(p) \neq I^-(q)$, ou mais ainda, $J^-(p) \subsetneq J^-(q)$. Mas veja que $J^-(p) = \partial(I^-(p)) \cup I^-(p)$, logo $m(I^-(p)) < m(I^-(q))$, pois

$$m(J^-(p)) = m(\partial(I^-(p))) + m(I^-(p)) = 0 + m(I^-(p)) = m(I^-(p)).$$

Portanto, $t^-(p) < t^-(q)$ e t^- é uma função tempo generalizada, como queríamos.

Reciprocamente, se t^- é uma função tempo generalizada e consideramos que $I^-(p) = I^-(q)$, então $J^-(p) = J^-(q)$ e $t^-(p) = t^-(q)$, assim, $p = q$ ou $p \not\leq q$, mas como $p \in J^-(p) = J^-(q)$, temos que não pode ocorrer que $p \not\leq q$, logo $p = q$, e concluímos que (M, g) é passado-distinguível.

□

Definição 3.0.14. *Um espaço-tempo (M, g) é dito estavelmente causal se dado $g \in \text{Lor}(M)$, existe uma vizinhança $U(g)$ de g na topologia C^0 , tal que (M, g_1) é causal para toda $g_1 \in U(g)$.*

O próximo lema traz alguns resultados vistos no decorrer das seções anteriores e que serão resumi- dos aqui. Destacamos também que $\text{Lor}(M)$ denota o espaço de todas as métricas Lorentzianas de M .

Lema 3.0.8. (1) $d(p, q) > 0 \iff q \in I^+(p)$;

(2) O espaço-tempo (M, g) é totalmente patológico se, e somente se, $d(p, q) = \infty, \forall p, q \in M$;

(3) O espaço-tempo (M, g) é cronológico se, e somente se, d é identicamente nulo na diagonal $\Delta(M) = \{(p, p) \mid p \in M\} \subset M \times M$;

(4) O espaço-tempo (M, g) é futuro (respectivamente, passado) distinguível se, e somente se, para cada par de pontos distintos $p, q \in M$, existe algum $x \in M$ tal que ou $d(p, x)$ ou $d(q, x)$ (respectivamente, ou $d(x, p)$ ou $d(x, q)$) é zero;

(5) O espaço-tempo (M, g) é estavelmente causal se, e somente se, dado $g \in \text{Lor}(M)$, existe uma vizinhança U de g na topologia C^0 , tal que $d(g')(p, p) = 0, \forall g' \in U$ e $p \in M$.

Demonstração. Os itens (1), (2) e (3) nos mostramos nas seções anteriores, portanto, iremos pro- var apenas os itens (4) e (5).

(4) Suponhamos que (M, g) seja futuro-distinguível, então dados $p \neq q$, temos que $I^+(p) \neq I^+(q)$, logo podemos encontrar $x \in I^+(p) \setminus I^+(q)$, ou seja, $d(p, x) > 0$ e $d(q, x) = 0$.

Reciprocamente, digamos que $I^+(p) = I^+(q)$, mas $p \neq q$, então não existe $x \in M$ tal que ou $d(p, x) = 0$ ou $d(q, x) = 0$, pois se $d(p, x) > 0$, temos que $x \in I^+(p) = I^+(q)$, logo temos também que $d(q, x) > 0$, o que contraria a hipótese. Portanto, $p = q$.

Analogamente podemos mostrar este fato quando (M, g) é passado-distinguível.

(5) Como (M, g) é estavelmente causal, temos que existe U vizinhança de g na topologia C^0 , tal que (M, g') é causal para todo $g' \in U$, consequentemente, (M, g') é cronológico, ou seja, $p \notin I^+(p)$, logo $d(g')(p, p) = 0$.

Reciprocamente, dado $g \in \text{Lor}(M)$, existe uma vizinhança U de g na topologia C^0 , tal que $d(g')(p, p) = 0, \forall g' \in U$. Ou seja, $d(g')$ é nulo na diagonal $\Delta(M)$, logo (M, g') é cronológico pelo item (3).

□

Relembremos que a função distância Lorentziana falha na semi-continuidade superior, portanto é esperado que a continuidade de $d(g)$ resulte em implicações sobre a estrutura causal de (M, g) , assim, o próximo teorema irá nos mostrar uma destas implicações.

Observação 3.0.2. *Aqui estamos considerando que d é contínua em $(p, q) \in M \times M$, quando $d(p, q) = \infty$, pois $d(p_n, q_n) \rightarrow \infty$, para toda sequência $p_n \rightarrow p$ e $q_n \rightarrow q$.*

Definição 3.0.15. *A função $I^+ : M \rightarrow P(M)$ é dita contínua interiormente em p se para cada compacto $K \subset I^+(p)$, existe uma vizinhança $U(p)$ de p tal que $K \subset I^+(q)$, para todo $q \in U(p)$. E dizemos que a função I^+ é contínua exteriormente em $p \in M$ se para cada compacto $K \subset M \setminus \overline{I^+(p)}$, existe uma vizinhança $U(p)$ de p tal que $K \subset M \setminus \overline{I^+(q)}$, para todo $q \in U(p)$.*

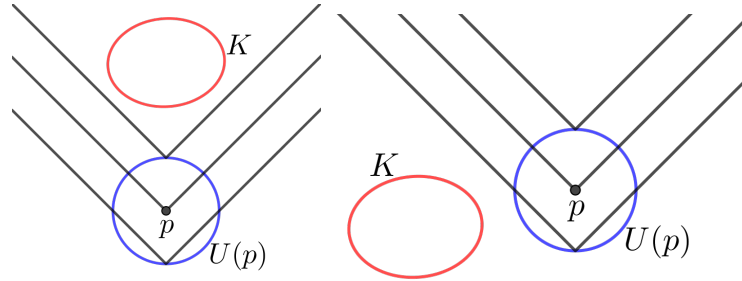


Figura 3.1: A primeira imagem representa a continuidade interior e a segunda a continuidade exterior.

Definição 3.0.16. *Dizemos que um espaço-tempo distinguível é continuamente causal se as funções I^+ e I^- são contínuas exteriormente.*

Foi mostrado por Hawking e Sachs (1974) que as funções I^+ e I^- são sempre contínuas interiormente, logo os espaços-tempo continuamente causais são os espaços-tempo distinguíveis nos quais o passado e futuro cronológico de um ponto varia continuamente com o ponto.

Teorema 3.0.5. *Seja (M, g) um espaço-tempo distinguível. Se $d = d(g) : M \times M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ é contínua, então (M, g) é continuamente causal.*

Demonstração. Para mostrarmos que (M, g) é continuamente causal precisamos mostrar que I^+ e I^- são contínuas exteriormente. Iremos provar que se I^+ não é contínua exteriormente, então d não é contínua.

Assuma que I^+ não é contínua exteriormente em algum $p \in M$, então existe um compacto $K \subset M \setminus \overline{I^+(p)}$ e uma sequência $p_n \rightarrow p$, tal que $K \cap \overline{I^+(p_n)} \neq \emptyset$. Seja $q_n \in K \cap \overline{I^+(p_n)}$ e $\{q_m\}$ uma subsequência de $\{q_n\}$ que converge para um ponto $q \in K$, visto que K é compacto.

Veja que $q_m \rightarrow q$ e $q_m \in \overline{I^+(p_m)}$ implica que podemos construir uma sequência $\{q'_m\}$ convergindo para q tal que $q'_m \in I^+(p)$, para cada m . Como $q \in K \subset M \setminus \overline{I^+(p)}$, temos que $M \setminus \overline{I^+(p)}$ é uma

vizinhança aberta de q , então existe algum $r \in M \setminus \overline{I^+(p)}$ tal que $q \ll r$. Tomando m suficientemente grande, temos que $q'_m \ll r$ e, portanto, $p_m \ll q'_m \ll r$, pois $q'_m \in I^+(p)$.

Assim, $d(p_m, r) \geq d(p_m, q'_m) + d(q'_m, r)$ e, da semi-continuidade inferior de d e por $q \ll r$, temos que $0 < d(q, r) \leq \liminf d(q'_m, r)$. Consequentemente,

$$\liminf d(p_m, r) \geq \liminf d(p_m, q'_m) + \liminf d(q'_m, r) \geq d(p, q) + d(q, r) > d(q, r) > 0,$$

ou seja, para m suficientemente grande, $d(p_m, r) \geq d(q, r) > 0$, mas $r \notin I^+(p)$, logo $d(p, r) = 0$ e, portanto, d não é contínua, visto que $\lim d(p_m, r) \neq d(p, r) = 0$.

Assim, se d é contínua, então I^+ é contínua exteriormente. E analogamente mostramos que se d é contínua, então I^- é contínua exteriormente, de onde concluímos que d contínua implica que (M, g) é continuamente causal. $\square$

Agora iremos retornar para a caracterização de um espaço-tempo fortemente causal em termos da função distância Lorentziana.

Definição 3.0.17. (*Função Distância Local*) A função distância local é o par (D, U) em (M, g) , onde U é uma vizinhança normal convexa e D uma função distância $D : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ induzida em U pelo espaço-tempo $(U, g|_U)$.

Mais explicitamente, dados $p, q \in U$, então $D(p, q) = 0$ se não existe um segmento de geodésica tipo-tempo futuro-dirigida em U de p para q . Caso contrário, $D(p, q)$ é o comprimento de arco Lorentziano do único segmento de geodésica tipo-tempo futuro-dirigida em U de p para q .

Iremos denotar $I^+(p, U)$ (respectivamente, $J^+(p, U)$) o futuro cronológico (respectivamente, causal) de p com respeito ao espaço-tempo $(U, g|_U)$.

Lema 3.0.9. *Seja (M, g) um espaço-tempo e U uma vizinhança normal convexa de (M, g) . Assuma que $D : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ é a função distância de $(U, g|_U)$. Então D é uma função contínua em $U \times U$ e D é diferenciável em $U^+ = \{(p, q) \in U \times U \mid q \in I^+(p, U)\}$.*

Demonstração. Dados $p, q \in U$, com $q \in J^+(p, U)$, seja $c_{pq} : [0, 1] \rightarrow U$ o único segmento de geodésica causal, com $c_{pq}(0) = p$ e $c_{pq}(1) = q$. Então como $c'_{pq}(t)$ é constante para todo $t \in [0, 1]$, temos que:

$$D(p, q) = \int_0^1 \sqrt{-g(c'_{pq}(t), c'_{pq}(t))} dt = \sqrt{-g(c'_{pq}(0), c'_{pq}(0))},$$

logo $D^2(p, q) = -g(c'_{pq}(0), c'_{pq}(0))$. Assim, vemos que a diferenciabilidade de D depende dos pontos p e q , onde é claro que D é contínua em $U \times U$ e diferenciável quando $q \in I^+(p)$, ou seja, D é diferenciável em U^+ . $\square$

Definição 3.0.18. *Uma curva é dita futuro estendível se não possui um ponto final futuro. E passado estendível se não possui um ponto final passado.*

Teorema 3.0.6. *Um espaço-tempo é fortemente causal se, e somente se, todo ponto $r \in M$ tem uma vizinhança normal convexa U tal que a função distância local (D, U) coincide em $U \times U$ com a função distância $d = d(g) : M \times M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.*

Demonstração. Se (M, g) é fortemente causal e $r \in M$, então existe uma vizinhança normal convexa U de r tal que cada curva que deixa U não retorna. Assim, a função distância local em U coincide com $d = d(g)|_{U \times U}$, pois dados $p, q \in U$, temos que $d(g)(p, q) = L_g(c_{pq}) = D(p, q)$, onde $c_{pq} : [0, 1] \rightarrow U$ é o único segmento de geodésica em U ligando p a q .

Reciprocamente, suponha, por absurdo, que a causalidade forte falhe em $r \in M$ e tome U uma vizinhança normal convexa de r , tal que $D(p, q) = d(p, q)$, $\forall p, q \in U$. Assim, existe uma vizinhança $W \subset U$ de r tal que qualquer curva causal futuro dirigida $\gamma : (0, 1] \rightarrow U$, com $\gamma(1) \in W$ e γ passado estendível em U , contém algum ponto não pertencente a $J^+(W, U)$.

Desde que a causalidade forte falhe em r , existe uma curva $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow M$, com $r' = \gamma_1(0) \in W$, $\gamma_1(1/2) \notin U$ e $\gamma_1(1) \in W$. Pela construção de W , existe $p \in \gamma_1 \cap U$, com $p \notin J^+(r', U)$, pois se $p \in J^+(r', U)$, $\forall p \in \gamma_1 \cap U$, teremos que γ_1 é uma curva futuro-dirigida e, portanto, saindo de W não pode mais voltar, o que contraria a definição de γ_1 , logo $D(r', p) = 0$. No entanto, $d(r', p) \geq L_g(\bar{\gamma}_1) > 0$, onde $\bar{\gamma}_1$ é a curva que liga r' a p , ou seja, $D(r', p) \neq d(r', p)$, o que é um absurdo, pois $r', p \in U$. $\square$

Corolário 3.0.3. *Se (M, g) é fortemente causal, então d é contínua em alguma vizinhança de $\Delta(M) = \{(p, p) \mid p \in M\}$ em $M \times M$. Também, dado $m \in M$, existe uma vizinhança normal convexa U de m tal que $d|_{U \times U}$ é finita.*

Antes do próximo lema, iremos apresentar, sem demonstração, as próximas duas proposições e uma definição que podem ser encontradas em [1]. Estas proposições serão usadas para justificar alguns passos da demonstração do lema.

Proposição 3.0.8. *Seja $\{\gamma_n\}$ uma sequência de curvas causais (futuro) estendível em (M, g) . Se p é um ponto de acumulação da sequência $\{\gamma_n\}$, então existe uma curva causal limite γ da sequência $\{\gamma_n\}$ tal que $p \in \gamma$ e γ é futuro estendível.*

Definição 3.0.19. *Seja $\gamma : [a, b) \rightarrow M$ uma curva causal futuro-dirigida. Então dizemos que γ é futuro-aprisionada em um compacto K se existe algum $t_0 < b$, tal que $\gamma(t) \in K$, $\forall t \in (t_0, b)$. Dizemos que a curva é parcialmente futuro-aprisionada no compacto K se existe uma sequência infinita $t_n \uparrow b$ com $\gamma(t_n) \in K$ para todo n .*

Proposição 3.0.9. *Se (M, g) é fortemente causal não existem curvas causais estendível parcialmente futuro-aprisionada em qualquer compacto.*

Agora podemos voltar para a apresentação do lema que desejávamos.

Lema 3.0.10. *Seja (M, g) um espaço-tempo fortemente causal. Se $J^+(p) \cap J^-(q)$ tem fecho compacto para todo $p, q \in M$, então (M, g) é globalmente hiperbólico.*

Demonstração. Basta mostrarmos que $J^+(p) \cap J^-(q)$ é fechado para todo $p, q \in M$. Suponhamos, por absurdo, que $r \in \overline{(J^+(p) \cap J^-(q))} \setminus (J^+(p) \cap J^-(q))$. Escolha uma sequência de pontos $\{r_n\} \subset J^+(p) \cap J^-(q)$, com $r_n \rightarrow r$. Para cada n , considere uma curva causal futuro-dirigida e futuro-estendível $\gamma_n : [0, 1) \rightarrow M$ com $\gamma_n(0) = p$ e $r_n, q \in \gamma_n$. Pela primeira proposição anterior existe uma curva causal futuro-dirigida e futuro-estendível γ limite da sequência $\{\gamma_n\}$, e note que $\gamma(0) = p$. Também, pela última proposição anterior, γ não pode ser futuro-aprisionada em qualquer compacto de M , pois (M, g) é fortemente causal. Consequentemente, existe $x \in \gamma$, com $x \notin \overline{(J^+(p) \cap J^-(q))}$. A definição de curva limite garante uma subsequência γ_m de γ_n tal que $x_m \in \gamma_m$ e $x_m \rightarrow x$. Desde que $x \notin \overline{(J^+(p) \cap J^-(q))}$, temos que $x_m \notin J^+(p) \cap J^-(q)$ para m suficientemente grande. Veja que $\gamma_m \subset J^+(p)$, pois $\gamma_m(0) = p$, e $x_m \notin J^-(q)$ para m suficientemente grande. Seja $\gamma[p, x]$ (respectivamente, $\gamma_m[p, x_m]$) o segmento de γ (respectivamente, γ_m) de p até x (respectivamente, x_m). Então podemos tomar uma subsequência de $\gamma_m[p, x_m]$, se necessário, que converge para $\gamma[p, x]$ na topologia C^0 . Desde que $q \in \gamma_m[p, x_m]$ para m suficientemente grande, temos que $q \in \gamma[p, x]$. Mas temos que $r_m \rightarrow r$ e $r_m \leq q$, o que implica que $r \in \gamma[p, q]$, ou seja, $r \in J^+(p) \cap J^-(q)$, o que é absurdo. $\square$

Teorema 3.0.7. *Um espaço-tempo fortemente causal (M, g) é globalmente hiperbólico se, e somente se, (M, g') satisfaz a condição de distância finita para todo $g' \in C(M, g)$.*

Demonstração. Se (M, g) é globalmente hiperbólico, então toda métrica $g' \in C(M, g)$ é tal que (M, g') é globalmente hiperbólico, logo (M, g') satisfaz a condição de distância finita para toda $g' \in C(M, g)$.

Reciprocamente, assuma por absurdo que (M, g) não é globalmente hiperbólico, então pelo lema anterior existe $p, q \in M$ tal que $J^+(p) \cap J^-(q)$ não tem fecho compacto. Seja h uma métrica auxiliar em M positiva definida e geodesicamente completa e $d_0 : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ a função distância Riemanniana induzida em M por h .

Pelo teorema de Hopf-Rinow, temos que todo conjunto de M limitado com respeito a métrica d_0 tem fecho compacto, logo $J^+(p) \cap J^-(q)$ não é limitado. Portanto, para cada n podemos escolher $p_n \in J^+(p) \cap J^-(q)$ tal que $d(p, p_n) > n$. Escolhendo p' e q' com $p' \ll p \ll q \ll q'$, podemos encontrar uma função suave $\Omega : M \rightarrow (0, \infty)$, tal que $d(\Omega g)(p', q') = \infty$. Assim, $\Omega g \in C(M, g)$ não cumprirá a condição de distância finita. $\square$

Agora iremos retornar para a prova de que em espaços-tempo distinguíveis com uma função distância contínua, as bolas interiores formam uma sub-base para a topologia da variedade.

Definindo $f_i : M \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, por $f_1(q) = d(p, q)$ e $f_2(q) = d(q, p)$, temos que $B^+(p, \varepsilon) = f_1^{-1}((0, \varepsilon))$ e $B^-(p, \varepsilon) = f_2^{-1}((0, \varepsilon))$, logo se em (M, g) a função distância é contínua, então as bolas interiores $B^+(p, \varepsilon)$ e $B^-(p, \varepsilon)$ são abertas da topologia de M .

Proposição 3.0.10. *Seja (M, g) um espaço-tempo distinguível com uma função distância contínua. Então a coleção*

$$\{B^+(p, \varepsilon_1) \cap B^-(q, \varepsilon_2) \mid p, q \in M, \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0\}$$

forma uma base para a topologia da variedade M .

Demonstração. Dado $r \in M$ e $U(r)$ vizinhança aberta de r queremos encontrar $p, q \in M$ e $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, com $r \in B^+(p, \varepsilon_1) \cap B^-(q, \varepsilon_2) \subset U(r)$.

Como o espaço-tempo é distinguível e d é contínua, então, pelo teorema 3.0.5, (M, g) é continuamente causal, o que implica que (M, g) é fortemente causal. Portanto podemos escolher uma vizinhança normal convexa V de r com $V \subset U(r)$ tal que uma curva causal que deixa V jamais retorna, e tal que $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ é finita, pelo corolário 3.0.3

Tome $p, q \in V$, com $p \ll r \ll q$, então $r \in I^+(p) \cap I^-(q) \subset V$ e visto que nenhuma curva causal de p para q que deixa V retorna, então as geodésicas que ligam p a r e r a q estão totalmente contidas em V . Seja $\varepsilon_1 = d(p, r) + 1$ e $\varepsilon_2 = d(r, q) + 1$, então $r \in B^+(p, \varepsilon_1) \cap B^-(q, \varepsilon_2) \subset I^+(p) \cap I^-(q) \subset V \subset U(r)$, e concluímos a proposição.

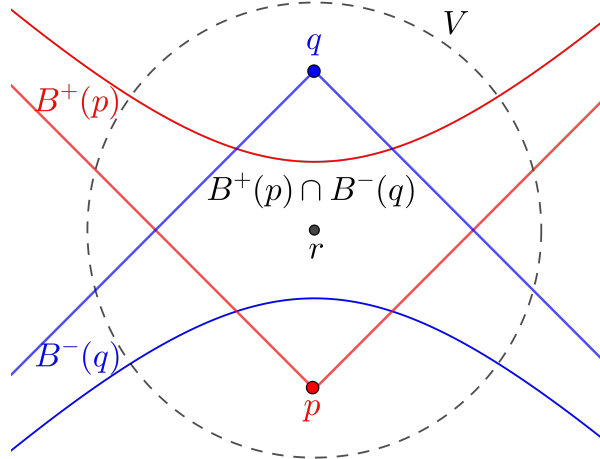


Figura 3.2: Elemento de uma base para topologia de M .

□

Definição 3.0.20. *Dizemos que uma subvariedade N de (M, g) é totalmente geodésica se qualquer geodésica γ de N com a métrica induzida é também uma geodésica em (M, g) .*

Iremos concluir esta seção com a caracterização de subvariedades tipo-tempo totalmente geodésicas em termos da função distância Lorentziana.

Seja (M, g) um espaço-tempo fortemente causal. Suponha que N é uma subvariedade suave de (M, g) , considere também a injeção canônica $i : N \rightarrow M$ e defina $\bar{g} = i^*g$. Lembre que $(N, \bar{g})$ é uma subvariedade tipo-tempo de (M, g) se $\bar{g}|_p : T_p N \times T_p N \rightarrow \mathbb{R}$ é uma métrica Lorentziana para cada $p \in N$.

Sejam $\bar{L}, L$ e $\bar{d}, d$ o funcional comprimento de arco e a função distância Lorentziana de $(N, \bar{g})$ e (M, g) , respectivamente. Então se γ é uma curva suave em $(N, \bar{g})$, temos que $\bar{L}(\gamma) = L(\gamma)$, pois podemos identificar N com $i(N)$ e $i_*(T_p N)$ com $T_p M$ que é subespaço de $T_p M$. Note também que se $q \in I^+(p, N)$ (respectivamente, $q \in J^+(p, N)$), então $p \ll q$ (respectivamente, $p \leq q$) em (M, g) , portanto é imediato da definição de $\bar{d}$ e d que $\bar{d}(m, n) \leq d(m, n)$, para todo $m, n \in N$, pois como $N \subset M$, então $\sup\{\bar{L}(\gamma) \mid \gamma \in \Omega_{m, n}, \gamma \subset N\} \leq \sup\{L(\gamma) \mid \gamma \in \Omega_{m, n}, \gamma \subset M\}$.

Proposição 3.0.11. *Seja $(N, \bar{g})$ uma subvariedade tipo-tempo totalmente geodésica de um espaço-tempo fortemente causal (M, g) . Então dado $p \in N$, existe uma vizinhança V de p em N tal que $d|_{V \times V} = \bar{d}|_{V \times V}$.*

Demonstração. Primeiro, seja W uma vizinhança de p em (M, g) tal que todo par de pontos $m, n \in W$ são ligados por uma única geodésica de (M, g) totalmente contida em W , e se $m \leq n$, então esta geodésica é maximal em (M, g) . Escolha V_0 uma vizinhança de p pequena o suficiente para que se $V = V_0 \cap N$, então V estará contida em uma vizinhança normal convexa U de p em N , com $U \subset W$. Suponha primeiro que $m, n \in V$ e $n \in J^+(m, N)$. Como $V \subset U$, existe uma única geodésica causal γ de $(N, \bar{g})$ em U de m para n . Como N é totalmente geodésica, γ é uma geodésica causal em (M, g) , portanto $\bar{d}(m, n) \geq \bar{L}(\gamma) = L(\gamma) = d(m, n)$, e visto que $\bar{d}(m, n) \leq d(m, n)$, temos a igualdade desejada $\bar{d}(m, n) = d(m, n)$.

Agora consideremos o caso que $m, n \in V$ e $n \notin J^+(m, N)$, então $\bar{d}(m, n) = 0$. Suponha que $d(m, n) > 0$, então existe uma geodésica tipo-tempo γ_1 de (M, g) em W de m para n . Por outro lado, como $m, n \in U$, existe γ_2 de $(N, \bar{g})$ de m a n contida em U que deve ser tipo-espaço, visto que $n \notin J^+(m, N)$. Mas $(N, \bar{g})$ é totalmente geodésica, logo γ_2 é também uma geodésica tipo-espaço de (M, g) de m a n que está contida em $U \subset W$. Portanto, temos duas geodésicas distintas γ_1 e γ_2 em W de m para n , o que é absurdo. Logo $d(m, n) = 0 = \bar{d}(m, n)$, como queríamos. $\square$

Definição 3.0.21. *(Segunda Forma Fundamental) Seja N uma subvariedade não-degenerada de (M, g) . Dado $n \in T_p^\perp N$, defina a segunda forma fundamental $S_n : T_p N \times T_p N \rightarrow \mathbb{R}$ na direção n da seguinte forma: dado $x, y \in T_p N$, estenda para um campo de vetores X, Y tangentes em N , e seja*

$$S_n(x, y) = g(\nabla_X Y|_p - \nabla_X^0 Y|_p, n),$$

com $\nabla_X^0 Y = P(\nabla_X Y)$, onde $P : T_p M \rightarrow T_p N$ é a aplicação projeção ortogonal. A segunda forma fundamental $S : T_p^\perp N \times T_p N \times T_p N \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $S(n, x, y) = S_n(x, y)$.

Proposição 3.0.12. *Seja N uma subvariedade não-degenerada de (M, g) . Então N é totalmente geodésica se, e somente se, a segunda forma fundamental S satisfaz $S = 0$ em N .*

Com a definição e a proposição anterior, a qual omitimos a demonstração, podemos demonstrar o teorema a seguir.

Proposição 3.0.13. *Seja $(N, \bar{g})$ uma subvariedade tipo-tempo de um espaço-tempo fortemente causal (M, g) . Suponha que para todo $p \in N$ existe uma vizinhança V de p em N tal que $d|_{V \times V} = \bar{d}|_{V \times V}$. Então $(N, \bar{g})$ é totalmente geodésica em (M, g) .*

Demonstração. Fixado $p \in N$, basta mostrarmos que a segunda forma fundamental S_n se anula em p . Desde que qualquer vetor em $T_p N$ pode ser escrito como a soma de vetores tangentes causais, é suficiente mostrar que $S_n(v, w) = 0$, para todo vetor tangente causal em $T_p N$. Mas como $S_n(-v, w) = -S_n(v, w)$, é suficiente mostrar que $S(v, w) = 0$, para todo vetor tangente causal futuro-dirigido em $T_p N$.

Seja $v \in T_p N$ um vetor tangente causal futuro-dirigido, então existe uma única geodésica γ em $(N, \bar{g})$, com $\gamma'(0) = v$ e $\gamma(0) = p$. Seja V uma vizinhança de p em N , onde a distância $\bar{d}$ e d coincidem e escolha $t > 0$ tal que se $m = \gamma(t)$, então $m \in V$ e $\bar{d}(p, m) = \bar{L}(\gamma|_{[0, t]})$ é finita. Então

$$d(p, m) \geq L(\gamma|_{[0, t]}) = \bar{L}(\gamma|_{[0, t]}) = \bar{d}(p, m).$$

Como $m \in V$, temos que $d(p, m) = \bar{d}(p, m)$, portanto, $L(\gamma|_{[0, t]}) = d(p, m)$, ou seja, $\gamma|_{[0, t]}$ é uma geodésica em (M, g) , pois se γ satisfaz $L(\gamma) = d(p, m)$, então γ é uma geodésica a menos de uma reparametrização. Assim, $S_n(v, v) = g(\nabla_v v - \nabla_v^0 v, n) = 0$, para todo vetor tangente causal futuro-dirigido.

Desde que a soma de dois vetores causais futuro-dirigido não paralelos é um vetor tipo-tempo futuro-dirigido, temos que $0 = S_n(v + w, v + w) = S_n(v, v) + 2S_n(v, w) + S_n(w, w)$, o que implica que $S_n(v, w) = 0$, para todo vetor causal futuro-dirigido $v, w \in T_p N$, como queríamos. $\square$

Combinando as duas proposições anteriores temos o teorema a seguir que caracteriza subvariedades tipo-tempo totalmente geodésica de espaços-tempo fortemente causais em termos da função distância Lorentziana.

Teorema 3.0.8. *Seja (M, g) um espaço-tempo fortemente causal de dimensão $n \geq 2$ e suponha que (N, i^*g) é uma subvariedade tipo-tempo suave de (M, g) , isto é, $\bar{g} = i^*g$ é uma métrica Lorentziana para N . Então $(N, \bar{g})$ é totalmente geodésica se, e somente se, dado $p \in N$, existe uma vizinhança V de p em N tal que a função distância Lorentziana $\bar{d}$ de $(N, \bar{g})$ e d de (M, g) coincidem em $V \times V$.*

3.0.4 Segmentos de Geodésicas Maximais e Causalidade Local

Iniciaremos esta seção recapitulando alguns fatos vistos até agora. Primeiramente, destacamos que certas condições de causalidade sobre um espaço-tempo estão relacionadas com o comportamento local ou global da função distância, além disso, se (M, g) é globalmente hiperbólico, então todas as métricas conformes g de M além de contínuas satisfazem a condição de distância finita. Por fim se um espaço-tempo é fortemente causal, então dado $p \in M$, existe uma vizinhança U de p tal que a função distância local de $(U, g|_U)$ coincide com a função distância Lorentziana em $U \times U$. Além disso, a função distância tem que ser finita em $U \times U$.

Definição 3.0.22. (*Segmento Maximal*) Dizemos que uma curva causal futuro-dirigida $c : [a, b] \rightarrow (M, g)$ é um segmento maximal se $L(c) = d(c(a), c(b))$ e, portanto, $L(c|_{[s, t]}) = d(c(s), c(t))$, para todo s, t com $a \leq s \leq t \leq b$.

Outros pontos que destacamos é que se um espaço-tempo (M, g) contém um segmento maximal, então (M, g) não pode ser totalmente patológico, visto que a função distância Lorentziana é finita no segmento, enquanto que um espaço-tempo totalmente patológico, $d(p, q) = \infty$, para todo $p, q \in M$. Além disso, Newman (1990) notou uma consequência mais interessante que afirma que a existência de um segmento tipo-tempo maximal $c : [a, b] \rightarrow (M, g)$ garante a causalidade forte em todos os pontos de $c((a, b))$. Desde que a causalidade forte é uma condição aberta, isso gera uma vizinhança U de $c((a, b))$ para a qual a causalidade forte em q é válida para todo $q \in U$. Portanto, não apenas a existência de uma vizinhança causal em um espaço-tempo fortemente causal garante a existência de um segmento maximal, mas também a existência de um segmento tipo-tempo maximal implica que alguma região de (M, g) contendo todos os pontos de um segmento tipo-tempo maximal deve ser fortemente causal.

Lema 3.0.11. *Seja $c : [0, 1] \rightarrow (M, g)$ um segmento de geodésica tipo-luz maximal e $I(c)$ denote o domínio da geodésica tipo-luz futuro-estendível c , partindo de $c(0)$. Então*

1. *Para todo s, t com $0 \leq s < t \leq 1$ e $r \in J^+(c(s)) \cap J^-(c(t))$, temos $d(c(s), r) = d(r, c(t)) = 0$ e, consequentemente, $r \in c(I(c))$;*
2. *Para todo $p, q \in J^+(c(s)) \cap J^-(c(t))$, com $p \leq q$, temos $d(p, q) = 0$;*
3. *A cronologia é válida em todos os pontos de $J^+(c(0)) \cap J^-(c(1))$.*

Demonstração. 1. Como $r \in J^+(c(s)) \cap J^-(c(t))$, então $c(s) \leq r \leq c(t)$, portanto, pela desigualdade triangular, $0 = d(c(s), c(t)) \geq d(c(s), r) + d(r, c(t))$, logo $d(c(s), r) = d(r, c(t)) = 0$. Além disso, desde que $c(s) \leq r \leq c(t)$, existe uma curva causal futuro-dirigida c_1 de $c(s)$ para r e c_2 de r para $c(t)$ tal que ambas tem que ser segmento de geodésica tipo-luz maximal, pois

a distância entre os pontos é zero. Como $c(s)$ e $c(t)$ não tem relação cronológica, a união de c_1 e c_2 deve ser uma geodésica tipo-luz, logo $r \in c(I(c))$.

2. Segue imediatamente da desigualdade triangular inversa aplicada em $c(s) \leq p \leq q \leq c(t)$.
3. Se a cronologia falha em $p \in J^+(c(0)) \cap J^-(c(1))$, então $d(p, p) = \infty$, o que contraria o item anterior quando $p = q$.

□

Os três próximos lemas, cujas demonstrações iremos omitir, nos auxiliarão na demonstração da próxima proposição de Newman.

Lema 3.0.12. *Seja $c : [0, 1] \rightarrow (M, g)$ um segmento causal maximal. Então*

1. *Dado $p, q \in J^+(c(0)) \cap J^-(c(1))$, com $p \leq q$, a distância $d(p, q)$ é finita;*
2. *A cronologia é válida em todos os pontos de $J^+(c(0)) \cap J^-(c(1))$.*

Lema 3.0.13. *Seja $c : [0, 1] \rightarrow (M, g)$ um segmento tipo-tempo maximal. Então temos a causalidade em todos os pontos de $c([0, 1])$.*

Lema 3.0.14. *Seja $p \in (M, g)$. Então a causalidade forte falha em p se, e somente se, existe um ponto $q \in J^-(p)$, com $p \neq q$ tal que $x \ll p$ e $q \ll y$ implica que $x \ll y$, $\forall x, y \in (M, g)$.*

Proposição 3.0.14. *(Newman (1990)) Seja $c : [0, a] \rightarrow (M, g)$ um segmento de geodésica tipo-tempo maximal. Então para todo t_0 , com $0 < t_0 < a$, a causalidade forte é válida em $p = c(t_0)$.*

Demonstração. Vamos assumir que c está parametrizada de tal forma que o vetor velocidade seja unitário, e dado $p = c(t_0)$, tomamos $q \in J^-(p)$ como no lema anterior, tal que $q \in I^+(c(0))$. Assumamos também que falhe a causalidade forte em p .

Primeiro vamos mostrar que $d(q, p) = 0$, assim q é o ponto inicial de um segmento de geodésica tipo-luz de q para p .

Escolha uma sequência $\{y_n\} \subset I^+(q)$, com $y_n \rightarrow q$ e uma sequência $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$, com $0 < t_n < t_0$ e $t_n \rightarrow t_0$. Seja $x_n = c(t_n)$, então $\{x_n\} \subset I^-(p)$ e $x_n \rightarrow p$. Como a função distância é semi-contínua inferiormente em (q, p) , temos que $d(y_n, x_n) > 0$ para n suficientemente grande, logo $y_n \ll x_n$. Por outro lado, o lema anterior garante que $x_n \ll y_n$, assim, concluímos que $x_n \ll x_n$, o que contraria o segundo lema, logo $d(p, q) = 0$ e a geodésica λ de q para p é um segmento maximal tipo-luz.

Agora iremos mostrar como uma curva de $c(0)$ para $c(a)$ de comprimento maior que a pode ser construído, o que contraria a maximalidade do segmento tipo-tempo c . Considere a curva futuro causal futuro-dirigida $\beta = \lambda * c|_{[t_0, a]}$ de q para $c(a)$. Desde que β consiste de uma curva tipo-luz seguida por uma geodésica tipo-tempo e $L(\beta) = L(c|_{[t_0, a]}) = a - t_0$, em torno de p podemos produzir

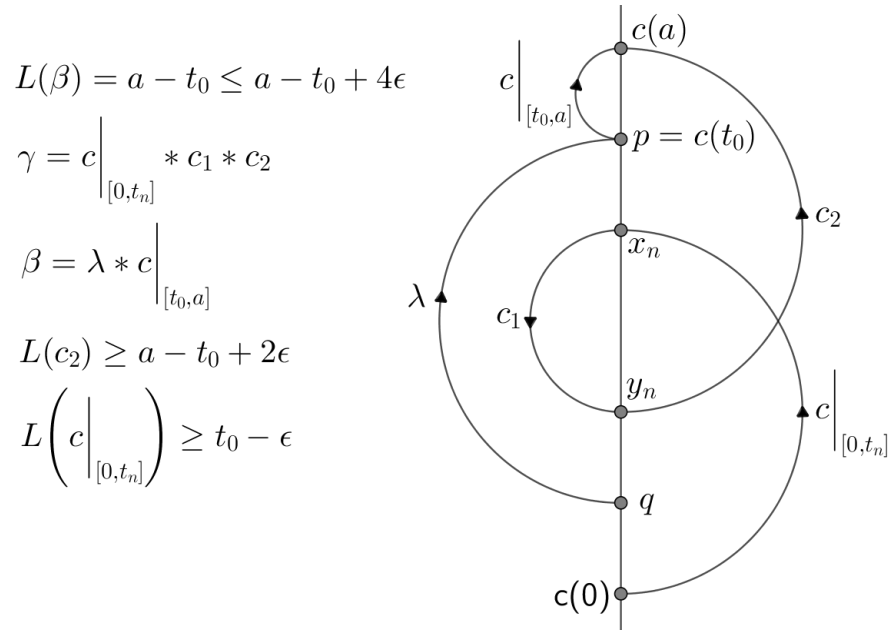
uma curva causal de p para $c(a)$ de comprimento maior que $L(\beta) = a - t_0$. Portanto, existe uma constante $\varepsilon > 0$, tal que $d(q, c(a)) \geq (a - t_0) + 4\varepsilon$.

Pelo lema 3.0.2, podemos encontrar uma vizinhança $U \subset I^+(c(0))$ de q tal que $d(q', c(a)) \geq a - t_0 + 3\varepsilon$, para todo $q' \in U$. Escolha n suficientemente grande tal que $y_n \in U$ e $x_n = c(t_n)$ satisfaz $L(c|_{[0, t_n]}) = d(c(0), c(t_n)) = t_n \geq t_0 - \varepsilon$.

Fixando este n , seja c_1 a curva tipo-tempo futuro-dirigida de x_n para y_n garantida pelo lema anterior e, note também, que dado y_n , pela equação anterior, podemos encontrar uma curva causal c_2 de y_n para $c(a)$, com $L(c_2) \geq a - t_0 + 2\varepsilon$. Finalmente, seja $\gamma = c|_{[0, t_n]} * c_1 * c_2$, que é uma curva causal de $c(0)$ até $c(a)$, então

$$L(\gamma) \geq L(c|_{[0, t_n]}) + L(c_2) \geq (t_0 - \varepsilon) + (a - t_0 + 2\varepsilon) = a + \varepsilon.$$

Mas a igualdade acima contraria a maximalidade do segmento tipo-tempo c , logo devemos ter a validade da causalidade forte em $c(t_0)$.



□

3.1 O Cut Locus Lorentziano

Neste capítulo, qual pode ser consultado no capítulo 9 de [1], iremos estudar o cut locus Lorentziano, o qual tem conceitos análogos ao cut locus no ambiente Riemanniano, para isso iniciamos considerando uma geodésica $c : [0, \infty) \rightarrow N$ em uma variedade Riemanniana iniciando em $p = c(0)$. Considere o conjunto de todos os pontos $q \in c([0, \infty))$ tais que o segmento de c ligando p a q é a

única e menor curva em N ligando p a q , se este conjunto tem um ponto limite mais distante, este ponto é chamado cut point de p ao longo de c . O cut locus $C(p)$ é definido como o conjunto dos cut points ao longo de todas as geodésicas iniciando em p .

O cut locus desempenhou um papel fundamental na geometria Riemanniana global moderna como por exemplo no teorema da esfera de Rauch, Klingenberg e Berger. A noção de cut point foi relacionado com a noção de ponto conjugado pela primeira vez por Poincaré, ele observou que em uma variedade Riemanniana completa se q está no cut locus de p , então ou q é conjugado de p ou existem segmentos de geodésicas de mesmo comprimento (mais curto) ligando p a q .

A partir dos conceitos de cut locus na geometria Riemanniana obtemos conceitos e resultados análogos para geodésicas tipo-tempo ou tipo-luz em espaços-tempo. Enquanto existem muitas similaridades entre o cut locus Riemanniano e o cut locus e o cut point tipo-tempo em um espaço-tempo, existem também importantes diferenças entre os cut loci Riemanniano e Lorentziano.

Iniciaremos esta seção apresentando o análogo Riemanniano de cut point para obtermos o cut point tipo-tempo. No ambiente Lorentziano as geodésicas tipo-tempo maximizam localmente o comprimento de arco entre dois pontos, portanto é apropriado definir o cut point tipo-tempo considerando o segmento de geodésica tipo-tempo de p a q de maior comprimento entre todas as curvas causais em M ligando p a q . Podemos formular isto usando a função distância Lorentziana, ou seja, dado $\gamma: [0, a) \rightarrow M$ uma geodésica tipo-tempo futuro-dirigida estendível em um espaço-tempo arbitrário, defina

$$t_0 = \sup\{t \in [0, a) \mid d(\gamma(0), \gamma(t)) = L(\gamma|_{[0, t]})\},$$

então se $0 < t_0 < a$, dizemos que $\gamma(t_0)$ é o cut point tipo-tempo futuro de $\gamma(0)$ ao longo de γ . Veja que o cut point tipo-tempo futuro tem as seguintes propriedades, algumas delas as quais já verificamos nas seções anterior e outros que iremos verificar no decorrer desta seção:

- (i) se $t < t_0$, então $\gamma|_{[0, t]}$ é a única curva tipo-tempo maximal de $\gamma(0)$ a $\gamma(t)$ a menos de uma reparametrização;
- (ii) $\gamma|_{[0, t]}$ é maximal para todo $t \leq t_0$;
- (iii) se $t > t_0$, então existe uma curva causal futuro-dirigida σ de $\gamma(0)$ a $\gamma(t)$ com $L(\sigma) > L(\gamma|_{[0, t]})$;
- (iv) o cut point futuro $\gamma(t_0)$ acontece antes ou no primeiro ponto conjugado futuro de $\gamma(0)$ ao longo de γ .

Também estudaremos o cut point tipo-luz, neste caso lembre que uma geodésica tipo-luz tem comprimento de arco nulo, logo podemos definir o cut point tipo-luz usando a função distância Lorentziana, para isso consideramos $\gamma: [0, a) \rightarrow M$ uma geodésica tipo-luz futuro-dirigida estendível com $p = \gamma(0)$ e definimos

$$t_0 = \sup\{t \in [0, a) \mid d(p, \gamma(t)) = 0\},$$

assim se $0 < t_0 < a$, dizemos que $\gamma(t_0)$ é o cut point tipo-luz futuro de $\gamma(0)$ ao longo de γ . O cut point tipo-luz tem as seguinte propriedades:

- (i) γ maximiza a distância até o cut point tipo-luz;
- (ii) não existe uma curva tipo-tempo ligando p a $\gamma(t)$ para qualquer $t \leq t_0$;
- (iii) se $t_0 < t < a$, então existe uma curva tipo-tempo de $\gamma(0)$ a $\gamma(t)$;
- (iv) o cut point tipo-luz futuro acontece antes ou no primeiro ponto conjugado futuro de $\gamma(0)$ ao longo de γ .

3.1.1 O Cut Locus Tipo-Tempo

Inicialmente, relembremos que uma curva causal futuro-dirigida γ de p a q é dita maximal se $d(p, q) = L(\gamma)$. Também vimos que uma curva causal futuro-dirigida maximal pode ser reparametrizada para se tornar uma geodésica. Por fim, lembre que se $p \ll q$ e p, q pertencem a uma vizinhança convexa normal, então p e q podem ser ligados por um segmento geodésico tipo-tempo maximal contido nesta vizinhança. Relembrado estes fatos temos o seguinte lema.

Lema 3.1.1. *Seja $c : [0, a] \rightarrow M$ um segmento geodésico tipo-tempo maximal. Então, para quaisquer s, t com $0 \leq s < t < a$, a curva $c|_{[s, t]}$ é o único segmento geodésico maximal (a menos de uma reparametrização) ligando $c(s)$ a $c(t)$.*

Antes de iniciarmos o estudo do cut locus tipo-tempo, precisamos definir o fibrado futuro unitário $T_{-1}M$.

Definição 3.1.1. *Seja $T_{-1}M = \{v \in TM \mid v \text{ é futuro-dirigido e } g(v, v) = -1\}$. Dado $p \in M$, denotamos por $T_{-1}M|_p$ o fibrado $T_{-1}M$ em p . Dado $v \in T_{-1}M$, denotamos por c_v a única geodésica tipo-tempo tal que $c'_v(0) = v$.*

já vimos que, pela desigualdade triangular inversa, se $\gamma : [0, a) \rightarrow M$ é uma geodésica causal futuro-dirigida e $d(\gamma(0), \gamma(s)) = L(\gamma|_{[0, s]})$, então $d(\gamma(0), \gamma(t)) = L(\gamma|_{[0, t]})$, $\forall t \in [0, s]$, além disso, se $d(\gamma(0), \gamma(s)) > L(\gamma|_{[0, s]})$, então $d(\gamma(0), \gamma(t)) > L(\gamma|_{[0, t]})$, $\forall t \in [s, a)$. Consequentemente, a definição a seguir tem sentido.

Definição 3.1.2. *Defina a função $s : T_{-1}M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ por $s(v) = \sup\{t \geq 0 : d(\pi(v), c_v(t)) = t\}$.*

Podemos observar que se $d(p, p) = \infty$, então $s(v) = 0$, $\forall v \in T_{-1}M$, com $\pi(v) = p$. Também $s(v) > 0$, para todo $v \in T_{-1}M$, se (M, g) é fortemente causal. Podemos interpretar o número $s(v)$ como o “maior” valor do parâmetro t , de modo que c_v é uma geodésica maximal entre $c_v(0)$ e $c_v(t)$. Por fim, o Lema anterior resulta no seguinte resultado.

Corolário 3.1.1. Para $0 < t < s(v)$, a geodésica $c_v : [0, t] \rightarrow M$ é a única curva maximal tipo-tempo (a menos de uma reparametrização) que liga $c_v(0)$ até $c_v(t)$.

Definição 3.1.3. Iremos dizer que um espaço-tempo é tipo-tempo geodesicamente completo quando este espaço-tempo é geodesicamente completo sob o ponto de vista das geodésicas tipo-tempo.

A função s falha em ser semi-contínua superiormente para espaços-tempo arbitrários, mas para espaços-tempo tipo-tempo geodesicamente completos, temos a seguinte proposição.

Proposição 3.1.1. Seja $v \in T_{-1}M$ com $s(v) > 0$ e suponha que ou $s(v) = +\infty$ ou $s(v)$ é finito e $c_v(t) = \exp(tv)$ se estende sobre o intervalo $[0, s(v)]$. Então s é semi-contínua superiormente em $v \in T_{-1}M$. Especialmente, se (M, g) é tipo-tempo geodesicamente completa, então $s : T_{-1}M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ é semi-contínua superiormente em todos os pontos.

Demonstração. Basta mostrarmos que dada uma sequência $v_n \rightarrow v$ em $T_{-1}M$, com $\{s(v_n)\}$ convergindo em $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, então $s(v) \geq \lim s(v_n)$.

Se $s(v) = \infty$, então não temos nada para mostrar. Já no caso em que $s(v)$ é finito, suponhamos, por absurdo, que $s(v) < \lim s(v_n) = A$. Assim, escolhendo $\delta > 0$, tal que $s(v) + \delta < A$, temos para n suficientemente grande que $s(v_n) \geq s(v) + \delta = b$. Supondo que b está no domínio de c_v e denotando $c_n = c_{v_n}$, concluímos que $d(\pi(v_n), c_n(b)) = b$ para todo n . Desde que $v_n \rightarrow v$, nós temos pela semi-continuidade inferior da função distância que

$$d(\pi(v), c_v(b)) \leq \liminf d(\pi(v_n), c_n(b)) = b.$$

Portanto, pela definição do comprimento de arco, temos que $d(\pi(v), c_v(b)) \leq b = L(c_v|_{[0, b]})$. Por outro lado, $d(\pi(v), c_v(b)) \geq L(c_v|_{[0, b]})$, o que implica que $d(\pi(v), c_v(b)) = L(c_v|_{[0, b]}) = b$. Assim, $s(v) \leq b = s(v) + \delta$, o que é absurdo. $\square$

Para provarmos a semi-continuidade inferior de s para os espaços-tempo globalmente hiperbólicos iremos primeiro apresentar o lema a seguir.

Lema 3.1.2. Sejam (M, g) um espaço-tempo globalmente hiperbólico, (p_n) e (q_n) duas sequências com $p_n \rightarrow p$ e $q_n \rightarrow q$, onde $p \ll q$. Assuma que $c_n : [0, d(p_n, q_n)] \rightarrow M$ é um segmento geodésico maximal de p_n a q_n com velocidade unitária e denote $v_n = c'_n(0) \in T_{-1}M$. Então a sequência $\{v_n\}$ tem um vetor tipo-tempo limite $w \in T_{-1}M$. Além disso, $c_w : [0, d(p, q)] \rightarrow M$ é um segmento geodésico maximal de p a q .

Demonstração. Pelo corolário 3.0.2, existe uma curva causal futuro-dirigida c limite de c_n que liga p a q . Pela proposição 3.0.3 e a observação 3.0.4, temos que

$$L(c) \geq \limsup L(c_n) = \lim d(p_n, q_n) = d(p, q) > 0.$$

Assim, como $d(p, q) \geq L(c)$, segue que $L(c) = d(p, q) > 0$. Portanto, o teorema 3.0.3 implica que a curva c pode ser reparametrizada para se tornar um segmento geodésico maximal tipo-tempo de p para q . Finalmente, $w = c'(0)/[-g(c'(0), c'(0))]^{1/2}$ é o vetor tangente necessário. $\square$

Agora podemos demonstrar a semi-continuidade inferior de s para os espaços-tempo globalmente hiperbólicos.

Proposição 3.1.2. *Se (M, g) é globalmente hiperbólico, então a função $s : T_{-1}M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ é semi-contínua inferiormente.*

Demonstração. Para demonstrarmos esta proposição basta mostrarmos que se $v_n \rightarrow v$ em $T_{-1}M$ e $s(v_n) \rightarrow A$ em $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, então $s(v) \leq A$. Se $A = \infty$ não temos nada para mostrar, então suponhamos que $A < \infty$ e $s(v) > A$ para concluirmos uma contradição.

Escolha $\delta > 0$ tal que $A + \delta < s(v)$, pela definição de $s(v)$, temos que o ponto $c_v((A + \delta))$ existe mesmo que c_v não se estenda até $s(v)$. Defina $b_n = s(v_n) + \delta$, $c_n = c_{v_n}$, $p_n = c_n(0)$ e seja N_0 tal que $b_n < s(v)$, para todo $n \geq N_0$. Desde que $v_n \rightarrow v$ e c_v está definido para alguns valores maiores que $A + \delta$, então as geodésias c_n estão definidas para alguns valores menores que b_n sempre que n é maior que algum $N \geq N_0$. Defina $q_n = c_n(b_n)$, para $n \geq N$, e veja que $c_n|_{[0, b_n]}$ não pode ser maximal, pois $b_n \geq s(v_n)$, e como M é globalmente hiperbólica e $c_n(0) \ll c_n(b_n)$, podemos encontrar um segmento geodésico maximal com velocidade unitária $\gamma_n : [0, d(p_n, q_n)] \rightarrow M$ de p_n a q_n . Defina também $w_n = \gamma_n'(0)$ e observe que desde que $c_v|_{[0, s(v)]}$ é uma geodésica maximal e, portanto, não tem pontos conjugados, é impossível que v seja uma direção limite da sequência $\{w_n \mid n \geq N\}$. Portanto, a geodésica maximal c_w ligando p a q (fornecida pelo Lema 3.1.2 quando o aplicamos em $\{w_n\}$) é diferente de c_v e isto implica que $s(v) \leq A + \delta$, o que é um absurdo. $\square$

Assim, combinando a proposições 3.1.1 com a proposição acima, obtemos o seguinte teorema.

Teorema 3.1.1. *Seja (M, g) globalmente hiperbólico, e suponha para $v \in T_{-1}M$ que ou $s(v) = +\infty$ ou $s(v)$ é finito e $c_v(t) = \exp(tv)$ estende-se sobre $[0, s(v)]$, então s é contínua em $v \in T_{-1}M$. Especialmente se (M, g) é globalmente hiperbólico e é tipo-tempo geodesicamente completo, então $s : T_{-1}M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ é contínua.*

A partir de agora podemos definir o cut locus tipo-tempo.

Definição 3.1.4. *(Futuro e Passado Cut Loci Tipo-Tempo) O cut locus tipo-tempo futuro $\Gamma^+(p)$ em T_pM é definido como $\Gamma^+(p) = \{s(v)v \mid v \in T_{-1}M|_p \text{ e } 0 < s(v) < \infty\}$. O cut locus tipo-tempo futuro $C_t^+(p)$ de p em M é definido por $C_t^+(p) = \exp_p(\Gamma^+(p))$. Se $0 < s(v) < \infty$ e $c_v(s(v))$ existe, então o ponto $c_v(s(v))$ será chamado de cut point futuro de $p = c_v(0)$ ao longo de c_v . Analogamente, considerando v passado-dirigido, definiríamos o cut locus tipo-tempo passado $C_t^-(p)$ e o cut point passado.*

Assim, podemos interpretar $s(v)$ como a medida da distância de p até seu cut point futuro ao longo de c_v . Além disso, o teorema anterior implica que para espaços-tempo globalmente hiperbólicos e tipo-tempo geodesicamente completo, a função distância de um ponto $p \in M$ fixo até seu cut point futuro na direção $v \in T_{-1}M|_p$ é uma função contínua de v .

Os próximos dois resultados são análogos de resultados no ambiente Riemanniano, com eles iremos provar um resultado que relaciona cut points e pontos conjugados em espaços-tempo globalmente hiperbólicos.

Teorema 3.1.2. *Uma geodésica tipo-tempo não é maximal após o primeiro ponto conjugado.*

Usando a definição anterior, podemos reformular o teorema anterior para obtermos o corolário a seguir.

Corolário 3.1.2. *O cut point futuro de $p = c_v(0)$ ao longo c_v não acontece após o primeiro ponto conjugado futuro de p ao longo de c_v .*

Teorema 3.1.3. *Seja (M, g) globalmente hiperbólico. Se $q = c(t)$ é o cut point tipo-tempo futuro de $p = c(0)$ ao longo da geodésica tipo-tempo c que liga p a q , então ou uma ou ambas as possibilidades a seguir são garantidas:*

1. *O ponto q é o primeiro ponto conjugado futuro de p ao longo de c ;*
2. *Existem ao menos dois segmentos geodésicos maximais futuro-dirigido tipo tempo de p a q .*

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor que $c = c_v$ para algum $v \in T_{-1}M$ e que $t = d(p, q) = s(v)$. Seja $\{t_n\}$ uma sequência monótona decrescente de números reais convergindo para t . Desde que $c(t) \in M$, os pontos $c(t_n)$ existem para n suficientemente grande. Como (M, g) é globalmente hiperbólico, podemos ligar $c(0)$ a $c(t_n)$ por uma geodésica maximal $c_n = c_{v_n}$ com $v_n \in T_{-1}M|_p$. Lembre que $t_n > t = s(v)$, logo $v \neq v_n$, para todo n . Seja $w \in T_{-1}M$ o vetor tipo-tempo limite da sequência (v_n) fornecido pelo lema 3.1.2. Se $v \neq w$, então c e c_w são dois segmentos geodésicos tipo-tempo maximais de p a q .

Resta mostrarmos que se $v = w$, então q é o primeiro ponto conjugado futuro de p ao longo de c . Se $v = w$, então existe uma subsequência $\{v_m\}$ de $\{v_n\}$ com $v_m \rightarrow v$. Supondo, por absurdo, que q não é ponto conjugado, então $\exp_p : U \rightarrow M$ é injetiva para alguma vizinhança U de v em $T_{-1}M$. Porém, como c_n e $c|_{[0, t_n]}$ são duas geodésicas distintas ligando $c(0)$ a $c(t_n)$ e $v_m \rightarrow v$, temos que tal vizinhança U tal que $\exp_p$ é injetiva não pode existir. Logo q é um ponto conjugado futuro de p ao longo de c e, pelo corolário anterior, q será o primeiro ponto conjugado futuro de p ao longo de c . □

O teorema acima implica que em espaços-tempo globalmente hiperbólicos, temos que $q \in C_t^+(p)$ se, e somente se, $p \in C_t^-(q)$. Além disso, em um espaço-tempo globalmente hiperbólico e tipo-tempo geodesicamente completo temos, pelo teorema anterior, que se $q \in C_t^+(p)$ e q não é um ponto conjugado de p , então existe ao menos dois segmentos geodésicos maximais de p a q , assim, definimos o seguinte conjunto:

$$\text{Seg}(p) = \{q \in C_t^+(p) \mid \text{existe ao menos dois segmentos geodésicos futuro-dirigido maximal de } p \text{ a } q\}.$$

3.1.2 O Cut Locus Tipo-Luz e o Cut Locus Causal

Como já vimos anteriormente, se $\gamma: [0, a) \rightarrow (M, g)$ é uma geodésica tipo-luz futuro-dirigida com ponto final $p = \gamma(0)$. Seja $t_0 = \sup\{t \in [0, a) \mid d(p, \gamma(t)) = 0\}$, se $0 < t_0 < a$, diremos que $\gamma(t_0)$ é o cut point tipo-luz futuro de p em γ . Analogamente definimos o cut point tipo-luz passado. Denotemos por $C_N^+(p)$ (respectivamente, $C_t^-(p)$) o cut locus tipo-luz futuro (respectivamente, passado) de p como sendo o conjunto de todos os cut points tipo-luz futuro.

A definição de $C_N^+(p)$ junto com a semi-continuidade inferior da função distância garante que $d(p, q) = 0$, para todo $q \in C_N^+(p)$. Assim, definimos o cut locus causal futuro como $C^+(p) = C_t^+(p) \cup C_N^+(p)$. Analogamente definimos o cut locus passado.

O significado geométrico do cut point tipo-luz é similar ao cut point tipo-tempo. A geodésica γ maximiza a distância de p ao cut point $\gamma(t_0)$, isto é, $L(\gamma|_{[0, t]}) = d(p, \gamma(t)) = 0$, $\forall t \leq t_0$. Portanto não existe uma curva tipo-tempo ligando p a $\gamma(t)$ para todo t com $t \leq t_0$. Assim como no caso tipo-tempo a geodésica γ maximiza a distância para pontos além de $\gamma(t_0)$, ou seja, qualquer ponto $\gamma(t)$, com $t_0 < t < a$, pode ser ligado a p por uma curva tipo-tempo. Assim, podemos enunciar o próximo lema.

Lema 3.1.3. *Seja (M, g) um espaço-tempo causal. Se existem dois segmentos geodésicos tipo-luz futuro-dirigido de p a q , então q acontece após ou no cut point tipo-luz de p em cada um dos dois segmentos.*

O próximo lema é um resultado análogo ao lema 3.1.2 visto na seção anterior.

Lema 3.1.4. *Seja (M, g) um espaço-tempo globalmente hiperbólico e $p, q \in M$, $p \neq q$, com $p \leq q$ e $d(p, q) = 0$. Suponha que $p_n \rightarrow p$, $q_n \rightarrow q$ e $p_n \leq q_n$. Seja c_n uma geodésica maximal ligando p_n a q_n cujo vetor direção inicial é v_n . Então a sequência $\{v_n\}$ tem como limite a direção w e c_w é uma geodésica maximal tipo-luz que liga p a q .*

Demonstração. Usando o corolário 3.0.2, obtemos uma curva causal futuro-dirigida λ que liga p a q . Como $d(p, q) = 0$, a curva λ deve satisfazer $L(\lambda) = 0$. Logo, resulta que λ pode ser reparametrizada para se tornar uma geodésica tipo-luz maximal. $\square$

Agora com o lema acima podemos obter o análogo do teorema 3.1.3.

Teorema 3.1.4. *Seja (M, g) um espaço-tempo globalmente hiperbólico e $q = c(t)$ o cut point tipo-luz futuro de $p = c(0)$ ao longo da geodésica tipo-luz c . Então uma ou, possivelmente, ambas afirmações abaixo se verificam:*

1. *O ponto q é o primeiro ponto conjugado futuro de p ao longo de c .*
2. *Existem pelo menos dois segmentos geodésicos tipo-luz maximais futuro-dirigidos que ligam p a q .*

Demonstração. Seja $v = c'(0)$ e t_n uma sequência monótona decrescente de números reais com $t_n \rightarrow t$. Desde que $q \in M$, sabemos que $c(t_n)$ existe para n suficientemente grande. Como (M, g) é globalmente hiperbólico, podemos encontrar uma geodésica causal maximal c_n , cuja direção inicial é v_n , ligando p a $c(t_n)$. Pelo lema anterior, a sequência $\{v_n\}$ tem uma direção limite w . Se $v \neq w$, a geodésica c_w é uma segunda geodésica maximal tipo-luz ligando p a q , pois $d(p, q) = 0$. Se $v = w$, então q é ponto conjugado de p ao longo de c . Desde que $d(p, q) = 0$, q será o primeiro ponto conjugado de c . $\square$

Agora iremos estudar o cut locus causal, para isso iniciaremos com a definição de raio de uma geodésica causal a seguir.

Definição 3.1.5. *(Raio de uma geodésica causal futuro-dirigida e passado-dirigida) O raio de uma geodésica causal futuro-dirigida (respectivamente, passado-dirigida) é uma geodésica causal futuro-dirigida (respectivamente, passado-dirigida) futuro-estendível (respectivamente, passado-estendível) $\gamma : [0, a) \rightarrow (M, g)$ tal que $d(\gamma(0), \gamma(t)) = L(\gamma|_{[0, t]})$ (respectivamente, $d(\gamma(t), \gamma(0)) = L(\gamma|_{[0, t]})$) para todo t , com $0 \leq t < a$.*

Lembremos que em uma variedade Riemanniana completa e não compacta, para cada um de seus pontos existe uma direção tal que a geodésica que inicia nesse ponto com esta direção não possui cut points. O análogo Lorentziano desta propriedade para espaços-tempo fortemente causais segue analogamente da existência dos raios de geodésicas causais futuro-dirigido e passado-dirigido para cada um de seus pontos. Este resultado é estabelecido na primeira parte da proposição a seguir.

Proposição 3.1.3. *Seja (M, g) um espaço-tempo. Então as seguintes propriedades são válidas:*

1. *Seja (M, g) um espaço-tempo fortemente causal. Dado qualquer ponto $p \in M$, existe um vetor tangente causal futuro-dirigido (ou passado-dirigido) em $T_p M$, tal que a geodésica que parte de p nesta direção não possui cut points.*
2. *Seja (M, g) um espaço-tempo globalmente hiperbólico. Dado $p \in M$, então p não possui um cut point causal mais distante.*

Demonstração. A primeira parte segue do fato que dado $p \in M$ em um espaço-tempo fortemente causal, existe o raio de uma geodésica causal futuro-dirigida $\gamma: [0, a) \rightarrow M$ com $\gamma(0) = p$, isto é, $d(p, \gamma(t)) = L(\gamma|_{[0, t]})$ para todo t , com $0 \leq t < a$.

Para a demonstração da segunda parte, suponha que $q \in M$ é o cut point de p mais distante, então q é o cut point ao longo de um segmento de geodésica maximal γ de p a q . Tome uma sequência de pontos $\{q_n\}$, tal que $q \ll q_n$, para cada n , e $q_n \rightarrow q$. Como (M, g) é globalmente hiperbólico, existe um segmento geodésico maximal tipo-tempo $c_n: [0, d(p, q_n)] \rightarrow M$ de p a q_n , para cada n . Agora estenda cada c_n para obter uma geodésica futuro-estendível e veja que como q é o cut point de p mais distante e $d(p, q_n) \geq d(p, q) + d(q, q_n) > d(p, q)$, concluímos que, para cada n , o raio da geodésica c_n não contém o cut point de p . Pelo lema 3.0.8, a sequência $\{c_n\}$ possui uma curva limite c , que é uma curva causal futuro-dirigida e futuro-estendível, iniciando em p e, passando para uma subsequência, se necessário, podemos assumir que $\{c_n\}$ converge para c na topologia C^0 . Usando o fato de (M, g) ser globalmente hiperbólico e o fato de que $q_n \rightarrow q$, concluímos que $q \in c$, além disso, se $r \in c$ e $r_n \in c_n$ com $r_n \rightarrow r$, então $d(p, r) = \lim d(p, r_n)$, pois a função distância é contínua. Usando a semi-continuidade superior da função distância para espaços-tempo fortemente causais, concluímos que o comprimento de c ligando p a r é pelo menos tão grande quanto $\limsup d(p, r_n) = \lim d(p, r_n) = d(p, r)$, donde concluímos que c é o raio de uma geodésica maximal. Como q é um cut point de p em γ , as geodésias c e γ são geodésicas causais maximais distintas contendo p e q . Assim, ou o lema 3.1.1 ou o lema 3.1.3 nos garante uma contradição para a maximalidade de c além de q . $\square$

Como observado por Klingenberg, para variedades Riemannianas, se q é o cut point de p mais próximo e q não é conjugado de p , então existe uma geodésica em p que passa por q em instantes distintos, ou seja, existe um loop geodésico em p passando por q . No entanto, para variedades Lorentzianas um resultado diferente é válido, pois se $\{q_n\} \subset C_t^+(p)$ converge para $q \in C_N^+(p)$, então $d(p, q_n) \rightarrow 0$ em um espaço-tempo globalmente hiperbólico, pois nestes espaços-tempo a função distância Lorentziana é contínua. Portanto, é natural esperar que, para espaços-tempo globalmente hiperbólico, não existe um cut point tipo-tempo q mais próximo de p que não pe conjugado a p .

Teorema 3.1.5. *Seja (M, g) um espaço-tempo globalmente hiperbólico e assuma que $p \in M$ tem um cut point causal futuro (ou passado) q mais próximo. Então q é um ponto conjugado a p ou q é um cut point tipo-luz de p .*

Demonstração. Seja q um cut point futuro de p que é mais próximo com respeito a distância Lorentziana d . Suponha que q não é conjugado a p e também não é um cut point tipo-luz de p . Então $p \ll q$ e, pelo teorema 3.1.3, existem pelo menos duas geodésicas maximais tipo-tempo futuro-dirigida c_1 e c_2 de p a q . Seja $\gamma: [0, a) \rightarrow M$ uma curva tipo-tempo passado-dirigida iniciando em q . Tomando $a > 0$ suficientemente pequeno, podemos assumir que a imagem de γ está no futuro

cronológico de p , ou seja, $p \ll \gamma(t) \ll q$, para $0 < t < a$, o que implica que

$$d(p, q) \geq d(p, \gamma(t)) + d(\gamma(t), q) > d(p, \gamma(t)).$$

Desde que q é o cut point mais próximo, então $\gamma(t)$ acontece antes de um cut point de p em qualquer geodésica tipo-tempo de p a $\gamma(t)$, portanto qualquer geodésica tipo-tempo de p a $\gamma(t)$ é maximal. Desde que q não é conjugado de p ao longo de c_1 , existe uma geodésica tipo-tempo de p a $\gamma(t)$ próxima de c_1 para todo t suficientemente pequeno. Da mesma forma, existe uma geodésica tipo-tempo de p a $\gamma(t)$ próxima de c_2 para todo t suficientemente pequeno. A existência de duas geodésicas maximais tipo-tempo de p a $\gamma(t)$ implica que $\gamma(t)$ é um cut point de p , o que gera um absurdo, pois $d(p, \gamma(t)) < d(p, q)$. $\square$

O cut locus de qualquer ponto em uma variedade Riemanniana completa é um subconjunto fechado de M . Geralmente, para variedades Lorentzianas, o cut locus tipo-tempo não é um subconjunto fechado de M , porém para espaços-tempo globalmente hiperbólico podemos mostrar que o cut locus causal e o cut locus tipo-luz de qualquer ponto são subconjuntos fechados de M . Iremos mostrar este resultado mais adiante, mas antes precisamos demonstrar o lema a seguir.

Lema 3.1.5. *Seja (M, g) um espaço-tempo fortemente causal. Suponha que $p \leq q_n$ e $q_n \rightarrow q$, com $q \neq p$. Se $\exp_p(v_n) = q_n$, $\exp_p(v) = q$ e as direções dos vetores causais v_n convergem para a direção de v , então $v_n \rightarrow v$.*

Demonstração. Escolha $a_n > 0$ tais que os vetores $w_n = a_n v_n$ convergem para v . Então a sequência de pontos $r_n = \exp_p(w_n)$ está definida para n grande e converge para q . Como (M, g) é causal, existe apenas um valor t_n de t tal que $\exp_p(t_n w_n) = q_n$, ou seja, $t_n = a_n^{-1}$. Usando o fato que $r_n \rightarrow q$, $q_n \rightarrow q$ e a causalidade forte de (M, g) próximo de q , concluímos que $t_n \rightarrow 1$. Como $v_n = t_n w_n$, a sequência $\{v_n\}$ converge para v . $\square$

Fixando $p \in M$, dizemos que $v \in T_p M$ é um ponto conjugado de p em $T_p M$ é um ponto conjugado de p em $T_p M$ se $(\exp_p)_*$ é singular em v . O conjunto dos pontos conjugados de p em $T_p M$ é um subconjunto fechado do domínio de $\exp_p$, pois $(\exp_p)_*$ é não-singular em um subconjunto aberto de $T_p M$. Um ponto $q \in M$ é conjugado de p ao longo de uma geodésica c se existe algum ponto $v \in T_p M$ tal que $\exp_p(v) = q$ e c é (a menos de uma reparametrização) a geodésica $\exp_p(tv)$. Se $q \in M$, $p \leq q$ e q é conjugado de p ao longo de uma geodésica causal, então dizemos que q é um ponto conjugado causal futuro de p . Da mesma forma definimos os pontos conjugados causais passados. Se (M, g) é um espaço-tempo causal, então p não pode estar no conjunto dos pontos conjugados causais futuro ou passado, pois uma geodésica causal passa por p no máximo uma vez e $(\exp_p)_*$ é não-singular na origem de $T_p M$.

Lema 3.1.6. *Seja (M, g) um espaço-tempo globalmente hiperbólico. Então o conjunto dos pontos conjugados causais futuro (ou passado) é um subconjunto fechado de M .*

Demonstração. Suponha que $\{q_n\}$ é uma sequência de pontos conjugados causais futuro de p , com $q_n \rightarrow q$, então $p \neq q$, $p \leq q$ e $p \leq q_n$, para todo n . Seja $v_n \in T_p M$ um vetor causal tal que $(\exp_p)_*$ é singular em v_n e $(\exp_p)(v_n) = q_n$, então $c_n(t) = (\exp_p)(tv_n)$ é uma geodésica futuro-dirigida e futuro-estendível iniciando em p e contendo q_n , assim, pela proposição 3.0.8, a geodésica c_n tem uma curva limite γ . Desde que (M, g) é globalmente hiperbólico, γ contém q e usando os fatos de que (M, g) é fortemente causal e γ é uma curva limite de uma sequência de geodésicas causais, concluimos que γ é uma geodésica causal. Seja v o único vetor causal tangente a γ em $\gamma(0) = p$ tal que $\exp_p(v) = q$, então como γ é uma curva limite de $\{c_n\}$, existe uma subsequência $\{m\}$ de $\{n\}$ tal que os vetores v_m convergem para v e, pelo lema anterior, concluimos que $v_m \rightarrow v$. Desde que os vetores v_m pertencem ao conjunto de todos os conjugados de p em $T_p M$ e este conjunto é um fechado do domínio de $\exp_p$, o vetor v é um ponto conjugado de p em $T_p M$. Como v é um vetor causal futuro-dirigido, o ponto $q = \exp_p(v)$ é um ponto causal futuro de p em M . Isto conclui que o conjunto dos pontos conjugados causais futuro é fechado em M . Da mesma forma podemos mostrar que o conjunto dos pontos conjugados causais passado é fechado em M . $\square$

Proposição 3.1.4. *Seja (M, g) um espaço-tempo globalmente hiperbólico. Para todo $p \in M$, os conjuntos $C_N^+(p), C_N^-(p), C^+(p)$ e $C^-(p)$ são todos subconjuntos fechados de M . Ou seja, o cut locus tipo-luz e o cut locus causal de p são fechados.*

Demonstração. Desde que os quatro casos citados na proposição são similares, nós iremos mostrar apenas que C_N^+ é um conjunto fechado em M . Com este propósito, considere $q_n \in C_N^+(p)$ e $q \rightarrow q$. Como (M, g) é globalmente hiperbólico, temos que $q \neq p$ e $q \in J^+(p)$ e, segue da definição de $C_N^+(p)$ que, $d(p, q_n) = 0$. Usando a continuidade da função distância Lorentziana para espaços-tempo globalmente hiperbólicos, concluimos que $d(p, q) = \lim d(p, q_n) = 0$. Seja γ uma geodésica causal ligando p a q , então $d(p, q) = 0$ implica γ é uma geodésica tipo-luz maximal e o cut point de p ao longo de γ não acontece antes de q .

Devemos considerar dois casos agora. O primeiro é que existem infinitos pontos q_n que são conjugados causais futuro de p , enquanto o segundo caso é que nenhum q_n é conjugado causal futuro de p para n grande. No primeiro caso, aplicamos o lema anterior e descobrimos que se q é um conjugado causal futuro de p ao longo de γ , então q é o cut point ao longo de γ , pois o cut point ao longo de γ acontece antes ou no primeiro ponto conjugado em γ . Se q é um ponto conjugado causal futuro de p ao longo de alguma outra geodésica causal $\bar{\gamma}$, então $\bar{\gamma}$ é do tipo-luz e, pelo lema 3.1.3, concluimos que q é um cut point ao longo de γ e $\bar{\gamma}$.

Assuma que q_n não é um conjugado causal futuro de p , para todo n suficientemente grande. O Teorema 3.1.4 implica que, para n grande, existem pelo menos duas geodésicas tipo-luz maximais

ligando p a q_n . Portanto, para n grande, existem dois vetores tipo-luz futuro-dirigidos v_n e w_n com $\exp_p(v_n) = \exp_p(w_n) = q_n$. As direções causais futuro-dirigidas de p formam um conjunto compacto, portanto as direções determinadas por $\{v_n\}$ e $\{w_n\}$ têm direções limite v e w , respectivamente. Se v e w determinam direções diferentes, aplicamos lema 3.1.4 para obtermos duas geodésias tipo-luz maximais de p a q e, neste caso, q é um cut point de p . Por outro lado, v e w podem determinar a mesma direção, sendo assim, observamos que existem constantes $a > 0$ e $b > 0$, tais que $av = bw$ e $\exp_p(av) = \exp_p(bw) = q$. Assim, pelo lema 3.1.5, segue que, para alguma subsequência de índice $\{m\}$ de $\{n\}$, temos que $v_m \rightarrow av$ e $w_m \rightarrow av$. No entanto, $v_m \neq w_m$ e $\exp_p(v_m) = \exp_p(w_m)$ acarretam que $(\exp_p)_*$ é singular em av , logo q é conjugado de p ao longo de $\gamma(t) = \exp_p(tav)$ e, como $d(p, q) = 0$, concluímos que q é o cut point de p ao longo de $\gamma(t)$. $\square$

Capítulo 4

Alguns Resultados em Geometria Lorentziana Global

Neste capítulo, que pode ser consultado no capítulo 11 de [1], iremos aplicar as técnicas da teoria do Índice de Morse, que podem ser vistas em [1], para obtermos resultados em ambientes Lorentzianos análogos a resultados de geometria Riemanniana global como, por exemplo, o Teorema de Bonnet-Myers que afirma que se uma variedade Riemanniana completa N tem curvatura de Ricci maior ou igual que uma constante maior que zero, então N é compacta, tem diâmetro finito e tem grupo fundamental finito. Também, por fim, veremos os análogos Lorentzianos do Teorema de Comparação de Rauch e do Teorema de Comparação do Índice.

4.1 Versão Lorentziana do Teorema de Bonnet-Myers

Com o propósito de estudarmos o análogo Lorentziano do Teorema de Bonnet-Myers, iremos iniciar com o estudo do diâmetro tipo-tempo em um espaço-tempo. Portanto, inspirado pelo conceito de diâmetro de uma variedade Riemanniana, temos a seguinte definição.

Definição 4.1.1. (*O Diâmetro Tipo-Tempo*) O diâmetro tipo-tempo de um espaço-tempo (M, g) , denotado por $diam(M, g)$, é definido como:

$$diam(M, g) = \sup\{d(p, q) \mid p, q \in M\}.$$

Fisicamente, o diâmetro tipo-tempo representa o supremo dos possíveis tempos próprios que uma partícula poderia experimentar em um espaço-tempo. Um espaço-tempo de diâmetro finito é singular.

Lembremos que um espaço-tempo é dito ser tipo-tempo geodesicamente incompleto se existe alguma geodésica tipo-tempo incompleta, ou seja, não estendível. Já um espaço-tempo causal in-

completo é chamado de espaço-tempo geodesicamente singular.

Se uma variedade Riemanniana completa tem diâmetro finito, então ela é compacta, pelo teorema de Hopf-Rinow. Mesmo assim, como a variedade é geodesicamente completa, temos que todas as suas geodésicas têm comprimento infinito. Porém, para um espaço-tempo (M, g) , desde que $L(\gamma) \leq d(p, q)$ para toda curva causal futuro-dirigida de p a q , temos que toda geodésica tipo-tempo deve satisfazer $L(\gamma) \leq \text{diam}(M, g)$. Portanto, se um espaço-tempo (M, g) tem diâmetro tipo-tempo finito, então toda geodésica tipo-tempo tem comprimento de arco finito e, conseqüentemente, é incompleta. Assim, um espaço-tempo (M, g) com diâmetro tipo-tempo finito é geodesicamente incompleto.

Observação 4.1.1. *Se $\text{diam}(M, g) < \infty$, então toda geodésica tipo-tempo tem comprimento menor ou igual que $\text{diam}(M, g)$ e são, portanto, incompletas.*

Demonstração. Suponha que $c : (a, b) \rightarrow M$ é uma geodésica tipo-tempo satisfazendo $L(c) > \text{diam}(M, g)$. Então podemos encontrar $s, t \in (a, b)$, $s < t$, tal que $L(c|_{[s, t]}) > \text{diam}(M, g)$. Assim, $d(c(s), c(t)) \geq L(c|_{[s, t]}) > \text{diam}(M, g)$, o que é absurdo. $\square$

Para uma variedade Riemanniana (N, g_0) , o diâmetro é finito se a variedade é compacta. Neste caso, existem dois pontos cuja distância atinge o diâmetro. Por outro lado, para espaços-tempo com diâmetro tipo-tempo finito, o diâmetro nunca é alcançado. Para verificar isso, observe a próxima proposição.

Proposição 4.1.1. *Seja (M, g) um espaço-tempo arbitrário e suponha que existam $p, q \in M$ tais que $d(p, q) = \text{diam}(M, g)$. Então $d(p, q) = \infty$.*

Demonstração. Suponha que $d(p, q) = \text{diam}(M, g) < \infty$. Seja $q' \in I^+(q)$ um ponto qualquer, então

$$d(p, q') \geq d(p, q) + d(q, q') > d(p, q) = \text{diam}(M, g),$$

o que é um absurdo. $\square$

Lembrando que um espaço-tempo globalmente hiperbólico satisfaz a condição de distância finita, temos o seguinte corolário da proposição anterior.

Corolário 4.1.1. *1. Para qualquer par de pontos, o diâmetro tipo-tempo não é alcançado em um espaço-tempo cujo diâmetro tipo-tempo é finito.*

2. O diâmetro tipo-tempo nunca é alcançado em um espaço-tempo globalmente hiperbólico.

Agora iremos preparar o caminho para provar o análogo Lorentziano do Teorema de Bonnet e Myers para variedades Riemannianas completas.

Definição 4.1.2. (2-Plano Tipo-Tempo) Um 2-plano tipo-tempo σ é um subespaço bidimensional de $T_p M$, $p \in M$, que é o subespaço gerado por vetores tangentes, sendo um do tipo-espaço e outro do tipo-tempo.

Relembremos que a curvatura seccional do 2-plano tipo-tempo σ pode ser calculado por:

$$K(\sigma) = \frac{g(R(v, w)w, v)}{g(v, v)g(w, w) - [g(v, w)]^2},$$

onde $\{v, w\}$ é uma base de σ com os vetores tangentes um do tipo-espaço e o outro do tipo-tempo.

Observação 4.1.2. Ao invés de considerar todas as curvaturas seccionais, é essencial restringirmos nossa atenção nas curvaturas seccionais tipo-tempo pela seguinte razão. Se (M, g) é um espaço-tempo de dimensão $n \geq 3$ e a curvatura seccional de todos os 2-planos não-singulares são limitadas superiormente ou inferiormente, então (M, g) tem curvatura seccional constante [Kulkarni (1979)]. Aqui um 2-plano é dito não-singular se $g(v, v)g(w, w) - [g(v, w)]^2 \neq 0$, para alguma base $\{v, w\}$ de σ . Por outro lado, espaços-tempo com todas as curvaturas seccionais tipo-tempo $K(\sigma) \leq -k^2$ ou $K(\sigma) \geq k^2$ existem, mas Harris (1982) mostrou que se todas as curvaturas seccionais tipo-tempo são limitadas superiormente e inferiormente, então (M, g) tem curvatura seccional constante.

Antes da próxima proposição precisamos da definição a seguir.

Definição 4.1.3. O conjunto $V^\perp(c)$ denota o $\mathbb{R}$ -espaço vetorial de todos os campos de vetores Y suaves por partes ao longo de $c : [a, b] \rightarrow M$, com $\langle Y(t), c'(t) \rangle = 0$, para todo $t \in [a, b]$. Temos também os conjuntos

$$V_0^\perp(c) = \{Y \in V^\perp(c) \mid Y(a) = Y(b) = 0\} \text{ e } N(c(t)) = \{v \in T_{c(t)}M \mid \langle v, c'(t) \rangle = 0\}.$$

Proposição 4.1.2. Seja (M, g) um espaço-tempo arbitrário de dimensão $n \geq 2$. Suponha que (M, g) satisfaz uma das condições:

1. Todo plano tipo-tempo σ tem curvatura seccional $K(\sigma) \leq -k < 0$.
2. $\text{Ric}(g)(v, v) \geq (n-1)k > 0$, para todo vetor tangente unitário $v \in TM$.

Então, se $c : [0, b] \rightarrow M$ é uma geodésica tipo-tempo qualquer, com $L(c) \geq \pi/\sqrt{k}$, o segmento de geodésica c tem um par de pontos conjugados.

Demonstração. Primeiramente, observe que $(1) \Rightarrow (2)$, pois lembre que se v é um vetor tipo-tempo unitário, então $\text{Ric}(g)(v, v) = \sum_{i=1}^{n-1} -K(\sigma_i)$, onde σ_i é o 2-plano gerado por v e e_i , onde este último

é um vetor tipo-espaço unitário ortogonal a v . Por (1), temos que $K(\sigma_i) \leq -k < 0$, ou ainda, $-K(\sigma_i) \geq k > 0$, para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$, logo:

$$Ric(g)(v, v) = \sum_{i=1}^{n-1} -K(\sigma_i) \geq (n-1)k > 0.$$

Portanto, iremos mostrar apenas que (2) implica a conclusão desejada. Por conveniência, vamos supor que $c : [0, L] \rightarrow M$ é uma geodésica parametrizada com comprimento L de forma que o vetor tangente seja unitário. Seja $e_n(t) = c'(t)$, para todo $t \in [0, L]$, e $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ sejam $n-1$ campos de vetores paralelos tipo-espaço ao longo de c , tal que $\{e_1(t), \dots, e_n(t)\}$ forma uma base Lorentziana ortonormal de $T_{c(t)}M$, para cada $t \in [0, L]$.

Defina $w_i(t) = \sin\left(\frac{\pi t}{L}\right) e_i(t)$, $i = 1, \dots, n-1$, e observe que $w_i \in V_0^\perp(c)$, o que implica que:

$$I(w_i, w_i) = \int_0^L g(w_i'' + R(w_i, c')c', w_i) dt = \int_0^L [g(w_i'', w_i) + g(R(w_i, c')c', w_i)] dt.$$

Agora veja que:

$$w_i'' = -\frac{\pi^2 t^2}{L^2} \sin\left(\frac{\pi t}{L}\right) e_i + \frac{2\pi}{L} \cos\left(\frac{\pi t}{L}\right) e_i' + \sin\left(\frac{\pi t}{L}\right) e_i''$$

e como $g(e_i'', e_i) = g(e_i', e_i') = g\left(\frac{De_i}{dt}, \frac{De_i}{dt}\right) = 0$, pois $\frac{De_i}{dt} = 0$, visto que e_i é um campo de vetores paralelos ao longo de c , temos que $g(w_i'', w_i) = -\frac{\pi^2}{L^2} \sin^2\left(\frac{\pi t}{L}\right)$. Assim,

$$I(w_i, w_i) = \int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi t}{L}\right) \left[g(R(e_i, c')c', e_i) - \frac{\pi^2}{L^2} \right] dt,$$

consequentemente,

$$\sum_{i=1}^{n-1} I(w_i, w_i) = \int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi t}{L}\right) \left[Ric(c'(t), c'(t)) - \frac{(n-1)\pi^2}{L^2} \right] dt.$$

Se $Ric(c'(t), c'(t)) \geq (n-1)k$, para todo $t \in [0, L]$ e $L \geq \frac{\pi}{\sqrt{k}}$, o que implica que

$$(n-1)k \geq \frac{(n-1)\pi^2}{L^2},$$

logo $\sum_{i=1}^{n-1} I(w_i, w_i) \geq 0$ e, portanto, $I(w_i, w_i) \geq 0$, para algum $i \in \{1, \dots, n-1\}$, donde concluímos que c tem um par de pontos conjugados, pois se c não tivesse pontos conjugados teríamos $I(w_i, w_i) < 0$ para cada i . $\square$

Proposição 4.1.3. *Seja (M, g) um espaço-tempo arbitrário de dimensão n satisfazendo uma das condições da proposição anterior. Se $c : [a, b] \rightarrow M$ é uma geodésica tipo-tempo com $L(c) > \pi/\sqrt{k}$, então $t = a$ é um ponto conjugado ao longo de c para algum $t_0 \in (a, b)$ e, conseqüentemente, não maximal.*

Demonstração. Usando que $L(c) > \pi/\sqrt{k}$ e o mesmo campo de vetores w_i da proposição anterior, obtemos que $\sum_{i=1}^{n-1} I(w_i, w_i) > 0$, ou seja, $I(w_i, w_i) > 0$, para algum i , o que implica que c tem pontos conjugados em $(a, b]$, assim, pela definição de $Ind(c)$, que afirma que $Ind(c)$ é igual o número de pontos conjugados ao longo de c contados com sua multiplicidade, temos que $Ind(c) > 0$ e, pelo Teorema do Índice de Morse Tipo-Tempo, veja [1], temos $dim(J_t(c)) \neq 0$, para algum $t \in (a, b)$, donde concluímos que existe $t_0 \in (a, b)$ ponto conjugado a $t = a$. Portanto, como $c : [a, b] \rightarrow M$ contém um ponto conjugado $t_0 \in (a, b)$, concluímos que existe uma variação própria α_s suave por partes de c tal que $L(\alpha_s) > L(c)$, para todo $s \neq 0$, logo c não é maximal. $\square$

Finalmente, unindo as proposições anteriores, concluímos o análogo do teorema de Bonnet-Myers com o teorema a seguir.

Teorema 4.1.1. *Seja (M, g) um espaço-tempo globalmente hiperbólico de dimensão n satisfazendo uma das seguintes condições:*

1. $K(\sigma) \leq -k < 0$, para toda curvatura seccional tipo-tempo $K(\sigma)$.
2. $Ric(v, v) \geq (n-1)k > 0$, para todo vetor unitário tipo-tempo $v \in TM$.

Então $diam(M, g) \leq \pi/\sqrt{k}$.

Demonstração. Suponha que $diam(M, g) > \pi/\sqrt{k}$, então pela definição de $diam(M, g)$ existem $p, q \in M$, tais que $d(p, q) > \pi/\sqrt{k}$. Como (M, g) é globalmente hiperbólico, então $d(p, q) < \infty$, pois (M, g) satisfaz a condição de distância finita, logo existe um segmento de geodésica tipo-tempo maximal $c : [0, 1] \rightarrow M$, com $c(0) = p$ e $c(1) = q$. Assim, $L(c) = d(p, q) > \pi/\sqrt{k}$ e, pela proposição anterior, c não é maximal, o que é absurdo. $\square$

4.2 Teoremas de Comparação no Ambiente Lorentziano

Nesta seção iremos apresentar a versão Lorentziana de duas ferramentas importantes da Geometria Riemanniana Global, o Teorema de Comparação do Índice e o Teorema de Comparação de Rauch. Usando este último resultado iremos mostrar que em um espaço-tempo onde a curvatura seccional de todo 2-plano tipo-tempo é não-negativa, então a diferencial da aplicação exponencial

$$(\exp_p)_* : T_v(T_p M) \rightarrow T_{\exp_p(v)} M$$

tem norma não decrescente para todo vetor causal tangente.

No decorrer desta seção adotaremos $\dim(M_1) \leq \dim(M_2)$. Também, $c_i : [0, L] \rightarrow M_i$, $i = 1, 2$, um segmento de geodésica tipo-tempo futuro-dirigida com vetor velocidade unitário. A forma índice em $V^\perp(c_1)$ e $V^\perp(c_2)$ serão denotadas por I e as métricas g_1 e g_2 por $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Primeiro precisamos definir um isomorfismo

$$\phi : V^\perp(c_1) \rightarrow V^\perp(c_2),$$

de modo que $g_2(\phi X(t), \phi X(t)) = g_1(X(t), X(t))$, para todo $t \in [0, L]$. Isto pode ser feito seguindo a construção usual de transporte paralelo na Geometria Riemanniana.

Primeiro defina uma isometria $\phi_t : T_{c_1(t)}M_1 \rightarrow T_{c_2(t)}M_2$ da seguinte forma. Seja

$$\begin{aligned} P_t : T_{c_1(t)}M_1 &\longrightarrow T_{c_1(0)}M_1 \\ v &\longmapsto Y(0), \end{aligned}$$

onde Y é o único transporte paralelo ao longo de c_1 tal que $Y(t) = v$. E, de forma similar, defina $Q_t : T_{c_2(t)}M_2 \rightarrow T_{c_2(0)}M_2$, e note que P_t e Q_t são isomorfismo lineares que preservam o produto interno Lorentziano. Escolha uma aplicação linear injetiva que preserve produto interno Lorentziano

$$i : (T_{c_1(0)}M_1, g_1|_{c_1(0)}) \rightarrow (T_{c_2(0)}M_2, g_2|_{c_2(0)}),$$

onde $i(c'_1(0)) = c'_2(0)$. Então a aplicação

$$\phi_t : (T_{c_1(t)}M_1, g_1|_{c_1(t)}) \rightarrow (T_{c_2(t)}M_2, g_2|_{c_2(t)}),$$

dada por $\phi_t = Q_t^{-1} \circ i \circ P_t$ é uma isometria, desde que transporte paralelos preservam estrutura Lorentziana. Finalmente, definimos a aplicação $\phi : V^\perp(c_1) \rightarrow V^\perp(c_2)$ por $\phi X(t) = \phi_t(X(t))$. E segue que $(\phi X)' = \phi(X')$, onde a primeira é a derivada covariante em M_2 e a segunda é em M_1 .

Por fim, denote por $G_{2,t}(c_i)$, $i = 1, 2$, o conjunto de todos os 2-planos tipo-tempo σ contendo $c'_i(t)$. Então existe uma aplicação induzida $\phi_t : G_{2,t}(c_1) \rightarrow G_{2,t}(c_2)$, tal que se $\sigma \in G_{2,t}(c_1)$, então $\sigma = \text{span}\{v, c'_1(t)\}$, com v um vetor tipo-espaço. Assim, $\phi_t(\sigma) = \text{span}\{\phi_t(v), c'_2(t)\} \in G_{2,t}(c_2)$.

Agora estamos preparados para provarmos os próximos teoremas.

Teorema 4.2.1. (Teorema da Comparação do Índice Tipo-Tempo) *Seja (M_1, g_1) e (M_2, g_2) espaços-tempo com $\dim(M_1) \leq \dim(M_2)$ e $c_1 : [0, \beta] \rightarrow M_1$, $c_2 : [0, \beta] \rightarrow M_2$ geodésicas tipo-tempo futuro-dirigida com vetores velocidade unitários. Suponha que para todo $t \in [0, \beta]$ e todo plano tangente $\sigma \in G_{2,t}(c_1)$ a curvatura seccional $K_{M_1}(\sigma) \geq K_{M_2}(\phi_t \sigma)$, então para todo $X \in V^\perp(c_1)$, temos:*

$$1. I(X, X) \leq I(\phi X, \phi X);$$

$$2. \text{Ind}(c_1) \leq \text{Ind}(c_2);$$

$$3. \text{Ind}_0(c_1) \leq \text{Ind}_0(c_2).$$

Demonstração. Lembre que $\langle c'_1, c'_1 \rangle = -1$ e $\langle X, c'_1 \rangle = 0$, logo

$$K(X, c'_1) = \frac{\langle R(X, c'_1)c'_1, X \rangle}{\langle X, X \rangle \langle c'_1, c'_1 \rangle - \langle X, c'_1 \rangle^2} \Rightarrow \langle R(X, c'_1)c'_1, X \rangle = -\langle X, X \rangle K(X, c'_1).$$

Como $K_{M_1}(\sigma) \geq K_{M_2}(\phi_t \sigma)$, temos que

$$\langle R(X, c'_1)c'_1, X \rangle = -\langle X, X \rangle K(X, c'_1) \leq -\langle \phi X, \phi X \rangle K(\phi X, c'_2) = \langle R(\phi X, c'_2)c'_2, \phi X \rangle.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} I(\phi X, \phi X) &= \int_0^\beta [-\langle (\phi X)', (\phi X)' \rangle + \langle R(\phi X, c'_2)c'_2, \phi X \rangle] dt \\ &= \int_0^\beta [-\langle \phi(X'), \phi(X') \rangle + \langle R(\phi X, c'_2)c'_2, \phi X \rangle] dt \geq \int_0^\beta [-\langle X', X' \rangle + \langle R(X, c'_1)c'_1, X \rangle] dt \\ &= I(X, X). \end{aligned}$$

□

Teorema 4.2.2. (*Teorema da Comparação de Rauch Tipo-Tempo*) Sejam (M_1, g_1) e (M_2, g_2) espaços-tempo com $\dim(M_1) \leq \dim(M_2)$. Seja $c_1 : [0, L] \rightarrow M_1$ e $c_2 : [0, L] \rightarrow M_2$ segmentos de geodésicas tipo-tempo futuro-dirigida com vetor velocidade unitário. Suponha que para todo $t \in [0, L]$ e todo $\sigma \in G_{2,t}(c_1)$, temos $K_{M_1}(\sigma) \geq K_{M_2}(\phi_t \sigma)$. Seja $Y_1 \in V^\perp(c_1)$ e $Y_2 \in V^\perp(c_2)$ campos de Jacobi em M_1 e M_2 , respectivamente, satisfazendo as condições iniciais

$$1. Y_1(0) = Y_2(0) = 0;$$

$$2. g_1(Y'_1(0), Y'_1(0)) = g_2(Y'_2(0), Y'_2(0)).$$

Se c_2 não tem pontos conjugados para $t = 0$ em $(0, L)$, então

$$g_1(Y_1(t), Y_1(t)) \geq g_2(Y_2(t), Y_2(t)),$$

para todo $t \in [0, L]$. Em particular, c_1 não tem pontos conjugados para $t = 0$ em $(0, L)$.

Omitiremos a demonstração do teorema acima, mas mostraremos o seguinte corolário abaixo. Antes disso vamos definir o isomorfismo canônico e o produto interno em $T_v(T_p M)$.

Definição 4.2.1. O isomorfismo canônico $\tau_v : T_p M \rightarrow T_v(T_p M)$ é dado por $\tau_v(w) = \phi'_w(0)$, onde $\phi_w(t) = v + tw$.

Definição 4.2.2. O produto interno $\langle\langle, \rangle\rangle : T_v(T_p M) \times T_v(T_p M) \rightarrow \mathbb{R}$ associado com a métrica Lorentziana $\langle, \rangle$ em M é dado por

$$\langle\langle a, b \rangle\rangle = \langle \tau_v^{-1}(a), \tau_v^{-1}(b) \rangle,$$

para todo $a, b \in T_v(T_p M)$.

Corolário 4.2.1. Seja (M, g) um espaço-tempo com curvatura seccional tipo-tempo não-negativa em todos os pontos e $v \in T_p M$ um vetor tangente tipo-tempo futuro-dirigido com $g(v, v) = -1$. Então para todo vetor tangente causal futuro-dirigido $w \in T_p M$, o vetor $b = \tau_v(w) \in T_v(T_p M)$ satisfaz a inequação

$$g((\exp_p)_* b, (\exp_p)_* b) \geq g(w, w) = \langle\langle b, b \rangle\rangle.$$

Demonstração. Primeiro, vamos mostrar a desigualdade para $b = \tau_v(w) \in T_v(T_p M)$, com $g(v, w) = 0$. Aplicamos o Teorema anterior com $(M_1, g_1) = (M, g)$ e (M_2, g_2) o espaço-tempo de Minkowski $(\mathbb{R}_1^n, g_0)$, com $n = \dim(M)$, também definimos $c_1(t) = \exp_p(tv)$ e $Y_1 \in V^\perp(c_1)$ o único campo de Jacobi que satisfaz $Y_1(0) = 0$ e $Y_1'(0) = w$, o qual podemos escrever como

$$Y_1(1) = (\exp_p)_*(\tau_{c_1'(0)} w) = (\exp_p)_* b.$$

Agora, seja $c_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_1^n$ uma geodésica tipo-tempo com vetor velocidade unitário, e escolha $\bar{w} \in N(c_2(0))$, com $g_0(\bar{w}, \bar{w}) = g_1(w, w)$. Seja $Y_2 \in V^\perp(c_2)$ o único campo de Jacobi que satisfaz $Y_2(0) = 0$ e $Y_2'(0) = \bar{w}$. Então $Y_2(t) = tP_t(\bar{w})$, onde P_t denota o transporte paralelo Lorentziano ao longo de c_2 do ponto $c_2(0)$ até $c_2(t)$. Aplicando o Teorema anterior, temos:

$$\begin{aligned} g_1((\exp_p)_* b, (\exp_p)_* b) &= g_1(Y_1(1), Y_1(1)) \geq g_0(Y_2(1), Y_2(1)) = g_0(P_1(\bar{w}), P_1(\bar{w})) = g_0(\bar{w}, \bar{w}) \\ &= g_1(w, w) = \langle\langle b, b \rangle\rangle. \end{aligned}$$

No caso geral, podemos decompor $w = w_1 + w_2$, onde $w_1 = \lambda v$, para algum $\lambda > 0$ e $g(v, w_2) = 0$. Seja $b_i = \tau_v(w_i)$, $i = 1, 2$, de modo que $b = b_1 + b_2$, pois

$$b = \tau_v(w) = \tau_v(w_1 + w_2) = \tau_v w_1 + \tau_v w_2 = b_1 + b_2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} g((\exp_p)_* b, (\exp_p)_* b) &= g((\exp_p)_* b_1, (\exp_p)_* b_1) + 2g((\exp_p)_* b_1, (\exp_p)_* b_2) \\ &\quad + g((\exp_p)_* b_2, (\exp_p)_* b_2). \end{aligned}$$

Aplicando o Lema de Gauss nos dois primeiros termos, pois $b_1 = \tau_v(\lambda v)$, temos:

$$g((\exp_p)_*b, (\exp_p)_*b) = \langle \langle b_1, b_1 \rangle \rangle + 2\langle \langle b_1, b_2 \rangle \rangle + g((\exp_p)_*b_2, (\exp_p)_*b_2),$$

e como $\langle \langle b_1, b_2 \rangle \rangle = \langle \tau_v^{-1}(\tau_v(w_1)), \tau_v^{-1}(\tau_v(w_2)) \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle = 0$ e pela primeira parte da prova, temos que:

$$g((\exp_p)_*b, (\exp_p)_*b) \geq \langle \langle b_1, b_1 \rangle \rangle + \langle \langle b_2, b_2 \rangle \rangle = \langle \langle b_1 + b_2, b_1 + b_2 \rangle \rangle = \langle \langle b, b \rangle \rangle.$$

□

Capítulo 5

Ondas Gravitacionais Planas

Finalizamos este trabalho apresentando o conceitos das ondas gravitacionais planas, os quais podem ser consultados no capítulo 13 de [1], além disso, um dos propósitos desta seção será mostrar a completude de geodésicas em um hiperplano tipo-luz numa certa classe de espaços-tempo, os quais veremos mais adiante.

5.1 Métrica, Geodésica e Curvatura

Os espaços-tempo que serão apresentados a seguir foram vistos originalmente com H. Brinkmann (1925) e em alguns passos dos trabalhos de Einstein. Tais métricas voltaram a ganhar atenção da comunidade relativística nos anos de 1950 com I. Robinson.

Primeiramente, vamos considerar $M = \mathbb{R}^4$ com as coordenadas (y, z, v, u) . Podemos pensar inicialmente no espaço de Minkowski com suas coordenadas usuais e a métrica $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ e definir:

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(t - x) \quad e \quad v = -\frac{1}{\sqrt{2}}(t + x).$$

Nas coordenadas (y, z, v, u) a métrica de Minkowski η tem a forma:

$$\eta = 2dudv + dy^2 + dz^2.$$

Também vamos escolher uma tempo-orientação conveniente, na qual $\frac{\partial}{\partial v}$ é um vetor tipo-luz passado-dirigido em todos os pontos.

Portanto, a coleção das ondas frontais planas pode ser definida como as métricas de $M = \mathbb{R}^4$ com as coordenadas (y, z, v, u) que podem ser escritas da forma

$$\xi = \eta + H(y, z, u)du^2,$$

onde $H(y, z, u)$ tem um grau de regularidade apropriado e não se anula em nenhum ponto.

A coordenada $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ cumpre uma importante regra na geometria diferencial destas classes de espaço-tempo e ainda mais importante para uma subclasse das ondas gravitacionais planas que serão definidas mais a seguir. A onda frontal plana ξ tem a interessante propriedade de que a curvatura escalar é nula sem que curvatura de Ricci seja, necessariamente, nula, a menos que

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) H(y, z, u) = 0.$$

Não podemos fazer nenhuma declaração sobre a completude de geodésicas nesta classe de espaços-tempo, a não ser que a geodésica pertença a um hiperplano tipo-luz

$$P(u_0) = \{(y, z, v, u) \in \mathbb{R}^4 \mid u = u_0\},$$

assim, nos próximos passos desta seção iremos mostrar que, de fato, as geodésicas nestes hiperplanos são completas. Relembramos também que nestes hiperplanos a métrica é degenerada.

Denotando y, z, v, u por 1, 2, 3, 4, respectivamente, iremos calcular os símbolos de Christoffel. Para isso veja que:

$$(\xi_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & H \end{pmatrix}, \quad (\xi^{km}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -H & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e $\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \xi_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} \xi_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} \xi_{ij} \right\} \xi^{km}$. Assim, os únicos símbolos de Christoffel que não se anulam são:

$$\begin{aligned} \Gamma_{44}^3 &= \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial u}, \\ \Gamma_{14}^3 &= \Gamma_{41}^3 = -\Gamma_{44}^1 = \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial y}, \\ \Gamma_{24}^3 &= \Gamma_{42}^3 = -\Gamma_{44}^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial z}. \end{aligned}$$

Tomando $c : (a, b) \rightarrow M$ uma geodésica, iremos escrever $c(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)) = (y(t), z(t), v(t), u(t))$. Veja que a equação diferencial de geodésicas

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \cdot \frac{dx_i}{dt} \cdot \frac{dx_j}{dt} = 0,$$

nos dá o seguinte sistema

$$\begin{cases} v'' + \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial u} (u')^2 = 0 \\ v'' + \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial y} u' y' = 0 \\ y'' - \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial y} (u')^2 = 0 \\ v'' + \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial z} z' u' = 0 \\ z'' - \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial z} (u')^2 = 0 \end{cases},$$

e como $\Gamma_{ij}^4 = 0$, temos que $u''(t) = 0$. Portanto, no caso em que $u(t) = u_0$, para todo $t \in (a, b)$, temos que $c(t)$ é uma reta em $P(u_0)$ sob a forma $c(s) = (a_1 s + a_2, b_1 s + b_2, c_1 s + c_2, u_0)$ que é claramente completa.

Já no caso em que $u(s)$ é não constante, como $u''(s) = 0$, podemos escrever $u(s) = s$, ou seja, $c(s) = (y(s), z(s), v(s), s)$ e este caso estudaremos mais adiante.

Definição 5.1.1. (*Ondas Gravitacionais Planas*) A variedade $M = \mathbb{R}^4$ com a onda frontal plana $\xi = \eta + H(y, z, u)du^2$, sendo H uma forma quadrática da forma

$$H(y, z, u) = f(u)(y^2 - z^2) + 2g(u)yz$$

ou em notação matricial

$$H(y, z, u) = \begin{pmatrix} y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(u) & g(u) \\ g(u) & -f(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix},$$

com $f(u)$ ou $g(u)$ não nulas, é chamada onda gravitacional plana. A onda é dita polarizada se $g(u) = 0$ e chamada de onda sanduíche se f e g tem suporte compacto em u .

Um fato interessante é que a equação

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}'' = \begin{pmatrix} f(u) & g(u) \\ g(u) & -f(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

decorrente da forma quadrática H dada na definição acima aparece no estudo de campos de Killing, campos de Jacobi e geodésicas destes espaços-tempo. Também, toda onda gravitacional plana é geodesicamente completa, como veremos a seguir.

Agora iremos voltar e discutir mais cuidadosamente sobre as geodésicas de uma onda gravitacional plana que são transversais ao plano tipo-luz $P(u_0)$. Como visto anteriormente, tais geodésicas podem ser parametrizadas pela identidade $u(s) = s$ ou, equivalentemente, como

$$c(u) = (y(u), z(u), v(u), u).$$

Assim, no caso da onda gravitacional, os símbolos de Christoffel são dados por:

$$\begin{aligned}\Gamma_{44}^3 &= \frac{1}{2}[f'(u)(y^2 - z^2) + 2g'(u)yz] \\ \Gamma_{14}^3 &= \Gamma_{41}^3 = -\Gamma_{44}^1 = f(u)y + g(u)z \\ \Gamma_{24}^3 &= \Gamma_{42}^3 = -\Gamma_{44}^2 = g(u)y - f(u)z.\end{aligned}$$

Portanto, as componentes y e z da geodésica satisfazem:

$$\begin{aligned}y''(u) &= f(u)y + g(u)z \\ z''(u) &= g(u)y - f(u)z,\end{aligned}$$

como afirmado anteriormente. Assim, se f e g são diferenciáveis, então a equação acima tem solução para todo valor de u .

Ao invés de usar a equação diferencial de geodésicas para encontrar $v(u)$ é conveniente usar o seguinte argumento. Suponha que desejamos encontrar a geodésica $c(t)$, com $\xi(c', c') = \lambda$. Como $c'(u) = (y'(u), z'(u), v'(u), 1)$, temos:

$$\begin{aligned}\lambda &= g(c', c') = (y')^2 + (z')^2 + 2v'(u) \cdot 1 + [f(u)(y^2 - z^2) + 2g(u)yz] \cdot 1 \cdot 1 \\ &= (y')^2 + (z')^2 + (f(u)y + g(u)z)y + (g(u)y - f(u)z)z + 2v' \\ &= (y')^2 + (z')^2 + y''y + z''z + 2v',\end{aligned}$$

assim, $v'(u) = \frac{1}{2}[-(yy')' - (zz')' + \lambda]$ e, integrando, temos:

$$v(u) = \frac{1}{2}[-y(u)y'(u) - z(u)z'(u) + \lambda u + c]$$

que mostra que sendo $y(u)$ e $z(u)$ diferenciáveis para todo valor de u , então podemos calcular $v(u)$ para todo $u \in \mathbb{R}$. Com a condição inicial $y(u_0) = z(u_0) = v(u_0) = 0$, a equação anterior se resume a

$$v(u) = \frac{1}{2}[-y(u)y'(u) - z(u)z'(u) + \lambda(u - u_0)].$$

Este cálculo junto com nossos conhecimentos prévios sobre geodésicas no hiperplano tipo-luz $P(u_0)$ nos dá uma prova direta da completude das geodésicas para esta classe de métricas.

Referências Bibliográficas

- [1] Beem, John K.; Ehrlich, Paul E. Global Lorentzian Geometry. 2 ed. New York: Marcel Dekker, 1996.
- [2] do Carmo, Manfredo Perdigão. Geometria Riemanniana. 5 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.
- [3] O'Neill, Barret. Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity. 1 ed. California: Academic Press, 1983.
- [4] Sachs, Rainer Kurt; Wu, Hung-Hsi. General Relativity for Mathematicians. 1 ed. New York: Springer, 1977.
- [5] do Carmo, Manfredo Perdigão. Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies. 4 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.
- [6] Montiel, Sebastián; Ros, Antonio. Curves and Surfaces. 2 ed. USA: American Mathematical Society, 2009.