



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
UNIDADE DE EDUCAÇÃO À DISTÂNCIA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MANOEL GONÇALVES DA SILVA NETO

**UMA INTRODUÇÃO ÀS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS COM APLICAÇÕES
PARA O ENSINO MÉDIO**

João Pessoa-PB
2020



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
UNIDADE DE EDUCAÇÃO À DISTÂNCIA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MANOEL GONÇALVES DA SILVA NETO

**UMA INTRODUÇÃO ÀS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS COM APLICAÇÕES
PARA O ENSINO MÉDIO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Coordenação do Curso de Licenciatura em
Matemática a Distância da Universidade Federal
da Paraíba como requisito para obtenção de título
de licenciado em Matemática.

Orientador Prof. Dr. Eraldo Almeida Lima Júnior

João Pessoa-PB
2020

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586i Silva Neto, Manoel Gonçalves.

Uma introdução às geometrias não Euclidianas com
aplicações para o ensino médio / Manoel Gonçalves Silva
Neto. - João Pessoa, 2020.

36 f. : il.

Orientação: Eraldo Almeida Lima Júnior.
TCC (Graduação) - UFPB/CCEN.

1. Geometria não Euclidiana. 2. Ensino médio. 3.
Geometria. I. Lima Júnior, Eraldo Almeida. II. Título.

UFPB/CCEN

CDU 514 (043.2)

UMA INTRODUÇÃO ÀS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS COM APLICAÇÕES PARA O ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática à Distância da Universidade Federal da Paraíba como requisito para obtenção do título de licenciado em Matemática.

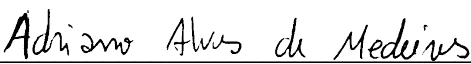
Orientador: Prof. Dr. Eraldo Almeida Lima Júnior

Aprovado em: ____/____/____

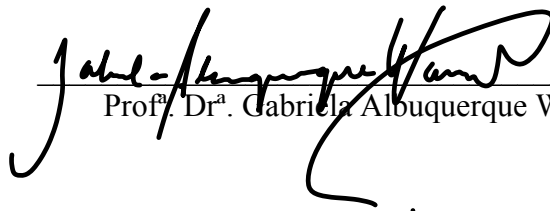
COMISSÃO EXAMINADORA:



Prof. Dr. Eraldo Almeida Lima Júnior (Orientador)



Prof. Dr. Adriano Alves de Medeiros



Prof.^a Dr.^a Gabriela Albuquerque Wanderley

A meus pais, pilares de minha educação e apoiadores incondicionais de minhas decisões.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Grande Arquiteto do Universo por sua bondade e misericórdia e por guiar os meus passos, proporcionando-me sabedoria para concluir este trabalho.

Agradeço aos meus pais por todo investimento realizado durante minha vida escolar e pelo amor incondicional a mim dispensado.

Agradeço a minha esposa e as minhas filhas pela companhia e compreensão pelo tempo ausente que são fontes inesgotáveis de apoio em minha vida.

Agradeço a minha irmã, Lidiane, pelo incentivo durante toda minha vida.

Agradeço aos colegas de turma por todo o companheirismo e incentivo durante toda jornada acadêmica, em especial a Itomésio, Josvy, Helen, Rodolfo, Jonas, Lucas e Ruth.

Agradeço aos meus amigos do futebol, da pedalada e do Corpo de Bombeiro.

Agradeço aos meus professores da Educação Básica até os da Formação acadêmica pelos ensinamentos.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Eraldo Almeida Lima Júnior, pela paciência e orientações durante a confecção deste trabalho, sempre me incentivando nos momentos difíceis.

"Não há nenhum ramo da matemática, não importa o quão abstrato, que não possa algum dia ser aplicado a fenômenos do mundo real."

Nikolai Ivanovich Lobachevsky

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Hipótese de Saccheri.....	15
Figura 2 – Reta r paralela as demais retas na geometria hiperbólica.....	19
Figura 3 – Modelo de Disco de Poincaré.....	20
Figura 4 – Triângulo hiperbólico.....	21
Figura 5 – Triângulo esférico.....	23
Figura 6 – Métrica do taxista.....	26
Figura 7 – Táxi circunferência.....	26
Figura 8 – A Última Ceia de da Vinci.....	28
Figura 9 – A Anunciação de Duccio e a A Última Ceia de Giotto.....	28
Figura 10 – Imagem de um Toro ou Toróide.....	29
Figura 11 – Segmento de uma curva geodésica de um Toro.....	29
Figura 12 – Toro flat.....	30
Figura 13 – Geodésicas de uma superfície cilíndrica.....	30
Figura 14 – Mundo hipotético em superfícies cilíndricas e do Toro.....	31

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Comparações entre conteúdos da geometria euclidiana e hiperbólica.....	22
Quadro 2 - Comparações entre conteúdos da geometria euclidiana e elíptica.....	24
Quadro 3 - Comparações entre conteúdos da geometria euclidiana e do taxista.....	27

LISTA DE ABREVIATURAS/SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
PSS	Processo Seletivo Seriado
UFPB	Universidade Federal da Paraíba

RESUMO

Este trabalho tem o objetivo de propor uma introdução do ensino da geometria não euclidiana ao Ensino Médio através da análise da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), do Ministério da Educação, com base nas competências específicas de matemática para o ensino médio, bem como pelas habilidades a serem alcançadas pelos discentes durante o processo de ensino-aprendizagem, elencadas no texto da Base supracitada. Para isso, foi realizado um levantamento bibliográfico a partir de uma revisão da literatura sobre as principais teorias que norteiam o trabalho científico no que tange o conteúdo da geometria não euclidiana e as diretrizes de ensino-aprendizagem da BNCC, oferecendo um subsídio aos docentes de matemática do ensino médio para uma possível inserção dessa temática no currículo da disciplina.

Palavras-chave: Geometria Não Euclidiana. Ensino Médio. BNCC.

ABSTRACT

This work aims to propose an introduction to the teaching of Non-Euclidean Geometry to Secondary Education through the analysis of the National Common Curricular Base (BNCC), of the Ministry of Education, based on the specific mathematics competencies for secondary education, as well as the skills to be achieved by students during the teaching-learning process, listed in the text of the aforementioned Base. To this end, a bibliographic survey was carried out based on a literature review on the main theories that guide scientific work regarding the content of non-Euclidean geometry and the teaching-learning guidelines of the BNCC, offering a subsidy to mathematics teachers in high school for a possible insertion of this theme in the discipline's curriculum.

Keywords: Non-Euclidean geometry. High school. BNCC.

SUMÁRIO

1	MEMORIAL DO ACADÊMICO	13
1.1	Histórico da formação escolar.....	13
1.2	Histórico da formação universitária.....	13
2	OS POSTULADOS DE EUCLIDES E A GÊNESE DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS	14
3	INSERÇÃO DA GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANA AO ENSINO MÉDIO	17
4	INTRODUÇÃO ÀS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS	20
4.1	Geometria Hiperbólica.....	20
4.2	Geometria Elíptica.....	23
4.3	Geometria do Taxista.....	25
4.3.1	Distância entre pontos.....	26
4.3.2	Táxi circunferência.....	27
4.4	Geometria Projetiva.....	28
4.5	Geometria Cilíndrica e do Toro Flat.....	28
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	33
	REFERÊNCIAS	34

1 MEMORIAL DO ACADÊMICO

1.1 Histórico da formação escolar

Meu histórico escolar teve início no ano de 1988 no pré escolar, com 3 anos incompletos no Instituto Augusto dos Anjos. Ainda no período da pré escola, fui transferido para o colégio Babylândia onde estudei durante 2 anos. Aos 5 anos ingressei na alfabetização, atual 1º ano do Ensino Fundamental, na escola Pollychinelô. Nesta escola, permaneci por 3 anos.

No ano de 1994, aos 8 anos, novamente mudei de escola, o nome era Instituto Nossa Senhora de Fátima. Foi durante esse período que comecei a me interessar pela matemática, ao resolver operações básicas em um processo de ensino tradicional. Nessa Escola estudei a 3ª e 4ª série, atuais 4º e 5º ano respectivamente.

Os anos finais do Ensino Fundamental foram cursados no colégio e Curso Equipe Hipócrates onde estudei 3 anos e foi nessa etapa, em que havia um professor para cada matéria, que os laços com os docentes de matemática foram estreitados, fazendo com que eu me interessasse ainda mais pela disciplina.

Em meados do ano de 1999, minha família mudou-se para a cidade de João Pessoa e comecei a estudar na Escola Cenecista Ana Fonseca de Barros Moreira e nos anos seguintes, com o fechamento dessa escola, fui transferido para o Instituto Rio Branco, escola em que cursei todo o Ensino Médio, concluindo o mesmo no ano de 2002. Com o supra exposto, podemos destacar que todo ensino básico foi cursado na rede privada de ensino e que culminou no êxito de passar no Processo Seletivo Seriado (PSS) da Universidade Federal da Paraíba (UFPB) no Curso de Engenharia Civil.

1.2 Histórico da formação universitária

Ingressei na UFPB no ano de 2003 no curso de bacharelado em Engenharia Civil, curso este que possui algumas semelhanças com o curso de matemática por sua grade curricular conter várias disciplinas de cálculo. Apesar de concluir as disciplinas de cálculo, desisti do curso em 2005 por ter passado em um concurso público e no ano de 2010 voltei a passar no PSS no mesmo curso, porém, foi o período que fui transferido para trabalhar na cidade de Guarabira e novamente desisti do curso de Engenharia Civil.

No ano de 2014 fiz o Exame Nacional do Ensino Médio com o intuito de matricular-me no curso de Licenciatura em Matemática no modelo à distância, porém nos anos seguintes, não foram ofertadas vagas para o referido curso, só sendo disponibilizadas em 2017. E foi nesse contexto que iniciei a licenciatura.

2 OS POSTULADOS DE EUCLIDES E A GÊNESE DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

Euclides foi um matemático que viveu por volta de 300 anos a.C. sendo ele responsável por compilar todo conhecimento matemático daquela época em uma única obra contendo treze livros, intitulado Os elementos. O livro é utilizado até nos dias atuais por muitos estudiosos da matemática, tem o caráter de ser rigorosamente fundamentado e apesar de possuir obras algébricas e aritméticas, é reconhecido principalmente pela teoria Geométrica em que, através de postulados, norteia todo estudo da “batizada” geometria euclidiana, estruturando formalmente essa área da matemática.

Segundo Barbosa (2007), Euclides ficou famoso pela concepção do livro em si, considerado como primeiro tratado científico modelo para todos os outros em qualquer ramo da ciência, e pela escolha que fez dos axiomas. Em Os Elementos foram apresentados 10 axiomas divididos em dois grupos, o primeiro grupo de noções gerais e o segundo dos postulados. Barbosa relata que noções gerais são consideradas hipóteses aceitáveis em todas as ciências ou admissíveis por quaisquer pessoas inteligentes, enquanto os postulados seriam hipóteses peculiares da geometria.

Com o intuito de facilitar o entendimento do texto, passaremos a expor os axiomas supracitados numa linguagem mais usual na atualidade. As noções comuns são as seguintes:

1. Coisas que são iguais a uma mesma coisa são iguais entre si;
2. Juntando iguais a iguais, os totais são iguais;
3. Subtraindo iguais de iguais, as diferenças são iguais;
4. Coisas que coincidem uma com a outra são iguais uma à outra;
5. O todo é maior do que a parte.

Já os postulados são:

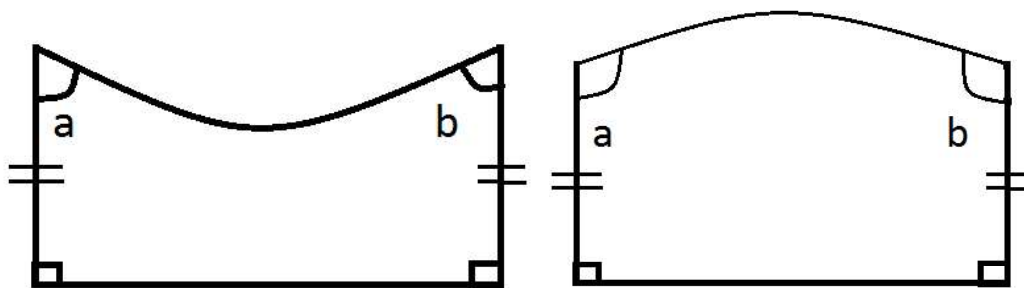
1. Pode-se traçar uma única reta ligando quaisquer dois pontos;
2. Pode-se continuar de uma única maneira qualquer reta finita continuamente em uma reta;
3. Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio;
4. Todos os ângulos retos são iguais;
5. Se uma reta, ao cortar outras duas, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então estas duas retas encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

O 5º postulado de Euclides pode ser interpretado da maneira que se segue, por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela a reta dada. Pinto 2015 esclarece que este postulado chamou a atenção dos matemáticos desde muito cedo e gerou dúvidas e pesquisas durante vários séculos. O enunciado original dado por Euclides é complexo se comparado aos outros postulados e carece da “evidência” que aqueles possuem. Parecia mais uma teoria que um postulado. Muitas investigações foram realizadas e os resultados obtidos influenciaram profundamente a Matemática. Finalmente, no século XIX, foi provada a independência do V Postulado de Euclides em relação aos demais postulados e apareceram as geometrias não-euclidianas pondo ponto final ao debate.

Após a publicação de Os Elementos vários matemáticos tentaram demonstrar o 5º postulado que o transformaria em um teorema, ou seja, uma proposição que poderia ser provada pelos quatro primeiros postulados. Foram muitas tentativas de demonstração, contudo, sempre continham erros. Ptolomeu(século II) demonstrou, porém, Proclo (século V) o desmentiu ao verificar que em uma das proposições estabelecidas era necessário assumir a validade do 5º postulado de Euclides. Os estudiosos Ibn-al-Haitham (aproximadamente 965-1039), Omar Khayyam (1050-1123), Nasiraddin-Tusi (1201-1274), Gerberto de Aurillac (940-1003), Gersonides (1288-1344), Girolamo Saccheri (1667-1733), Johann Heinrich Lambert (26 de agosto de 1728 - 25 de setembro de 1777), Adrien-Marie Legendre (1752-1833), Franz Adolph Taurinus (1794 -1874) também analisaram o 5º postulado com o intuito de demonstrá-lo, porém, sem êxito, todavia, foi a partir dessas tentativas e estudos que as geometrias não-euclidianas tiveram sua gênese, contudo, ainda sem uma estruturação bem definida.

Um matemático que se destacou nessa análise foi Saccheri que tentou, pelo método da redução por absurdo, considerar que $a=b<90^\circ$, sabendo do caso de congruência dos triângulos formados pelas diagonais do quadrilátero (figura 1). Com essa demonstração, Saccheri não conseguiu chegar a nenhuma contradição utilizando os quatro primeiros postulados de Euclides, ou seja, com as afirmações obtidas, é possível verificar que a soma dos ângulos internos de um triângulo pode ser menor que 180° ao levarmos em consideração apenas os quatro primeiros postulados de Euclides. Porém quando ele considerou a hipótese de que $a=b>90^\circ$ encontrou uma contradição. Lambert também debruçou-se nessa temática e seus estudos eram semelhante ao de Saccheri, porém ele considerava apenas um dos ângulos do quadrilátero como sendo agudo ou obtuso e foi Lambert que chegou mais longe ao tentar demonstrar o 5º postulado de Euclides.

Figura 1 – Hipótese de Saccheri



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020

Foi no século XIX que Carl F. Gauss, Nicolai I. Lobachevsky, Janos Bolyai e Georg Bernhard RIEMANN criaram geometrias consistentes que admitiam um 5º postulado diferente do de Euclides e que seria admissível passar mais de uma ou nenhuma paralela a uma reta dada por um ponto fora dela e também seria possível que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer poderia ser menor ou maior que dois ângulos retos, essas geometrias foram intituladas de geometria hiperbólica e elíptica.

Além do surgimento de geometrias devido a tentativa de demonstrar o 5º postulado de Euclides, nasceram também outras geometrias relacionadas a métricas diferentes da euclidiana, como a geometria do taxista, e a tentativa de fundamentar matematicamente as técnicas de desenho em perspectiva durante o período Renascentista no século XVII que é a geometria projetiva.

3 INSERÇÃO DA GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANA NO ENSINO MÉDIO

Ao propor uma inserção de determinado assunto na educação básica do Brasil, devemos ter ciência de como é norteado e construído o currículo que será incluído no processo de ensino-aprendizagem de cada escola, seja ela pública ou privada.

O currículo do Ensino Médio é norteado pela BNCC, é essa Base que determina as competências a serem desenvolvidas durante a educação básica, garantindo aos discentes a igualdade de conhecimentos e habilidades em quaisquer partes do país com o intuito de quebrar as barreiras da desigualdade educacional e buscando o nivelamento da qualidade do ensino. Segundo a BNCC o conceito de competência, citado no parágrafo anterior, é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho (Brasil).

E são a partir desse norte que as escolas devem elaborar seus currículos através do Plano Pedagógico, que é construído, segundo a Lei de Diretrizes Básicas, por vários atores, inclusive os professores que têm uma importância fundamental nessa elaboração. Desta maneira, podemos concluir que o currículo da educação básica é responsável por, além de estabelecer a forma de como se ensina, de como se avalia e de como se organiza o tempo no ambiente escolar, estabelecer o que se ensina.

Após esse introdutório sobre a construção do currículo no contexto escolar, podemos nos aprofundar nas competências e habilidades estabelecidas pela BNCC para propor a inserção do conteúdo de geometria não euclidiana no currículo do Ensino Médio, analisando as duas primeiras Competências Gerais da Educação Básica, que são:

Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

Antes de adentrarmos na análise das competências específicas e habilidades voltadas ao processo de ensino e aprendizagem da geometria, vamos analisar a forma de como as competências gerais contextualizam-se com a geometria não euclidiana. Ao abordamos esse tipo de geometria no Ensino Médio, estamos valorizando a construção histórica do

conhecimento geométrico, além de promover a inclusão democrática dos discentes em assuntos relacionados com o cotidiano, fazendo-os compreender, através da curiosidade intelectual, a utilização dessas novas geometrias no campo científico, computacional e das artes. Vogado (2005) destaca que a geometria hiperbólica, usada por Albert Einstein na Teoria da Relatividade, é utilizada no campo científico. Souza e Azevedo dizem que a geometria elíptica é usada principalmente nos estudos da geolocalização. Melencio informa que no campo computacional e das artes destacamos a geometria projetiva que também faz parte do nosso cotidiano. Na indústria, enfatizamos o uso da geometria cilíndrica em objetos importantes na dissipação de calor destacado por Oliveira (2014). Já a geometria do taxista é importante no setor de logística, segundo Pavani (2017).

Analizando também a primeira e a quinta Competência Específica de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio, que são respectivamente:

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

(...)

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Analizando essas duas competências, podemos visualizar que procedimentos matemáticos expostos através de geometrias não euclidianas podem ser contextualizada nas atividades cotidianas dos alunos, como por exemplo, a escolha do melhor percurso de sua casa para escola, ou fatos das Ciências da Natureza, contextualizando com outras disciplinas como Física que utiliza da geometria hiperbólica no estudo da Teoria da Relatividade ou ainda em Ciências Humanas ao vincular o estudo da geolocalização em nosso planeta com a geometria elíptica. Nessas geometrias vamos investigar conceitos que poderiam parecer óbvios, mas ao refletir sobre outros pontos de vista, veremos o nosso mundo de maneira mais holística.

E por fim, ponderando sobre as habilidades EM13MAT103 e EM13MAT509, que expõe:

(EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos

(EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.

A BNCC orienta a construir o currículo das escolas, baseando-se nas habilidades elencadas em seu texto, porém, não descarta que a construção seja complementada seguindo critérios também estabelecidos nessa Base ao concluir que (BRASIL) Na (re)elaboração dos currículos e das propostas pedagógicas, é possível adotar outras organizações, recorrendo tanto às habilidades definidas nesta BNCC quanto a outras que sejam necessárias e que contemplem especificidades e demandas próprias dos sistemas de ensino e das escolas. Apesar disso, é fundamental preservar a articulação, proposta nesta BNCC, entre os vários campos da Matemática, com vistas à construção de uma visão integrada de Matemática e aplicada à realidade. Além disso, é importante que os saberes matemáticos, do ponto de vista pedagógico e didático, sejam fundamentados em diferentes bases, de modo a assegurar a compreensão de fenômenos do próprio contexto cultural do indivíduo e das relações interculturais.

Nesse contexto e recorrendo a duas habilidades, EM13MAT103 e EM13MAT509, supracitadas, bem como na necessidade de contemplar especificidades do cotidiano e de conhecimentos científicos que se faz possível implementar o conteúdo de geometria não euclidiana para alunos do Ensino Médio, fazendo com que os mesmos sejam capazes de interpretar textos científicos que envolvam a temática, compreender a deformação de triângulos em outras superfícies além da plana e utilizar o conteúdo em seu cotidiano.

4 INTRODUÇÃO ÀS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

A geometria, tanto euclidiana quanto as não euclidianas são formadas por axiomas, ou seja, de afirmações consideradas verdadeiras e é nesse contexto que de acordo com Kaleff e Nascimento (2004, p. 14) que “para uma geometria ser chamada de não-Euclidiana é preciso que em seu conjunto de axiomas, pelo menos um dos axiomas da geometria euclidiana não seja verdadeiro”. Durante a evolução dos estudos da Geometria, surgiram várias geometrias não euclidianas, como a hiperbólica, a elíptica (esférica), a do taxista e a projetiva, todas elas possuem suas particularidades e diferenças da geometria euclidiana. Nesse estudo vamos expor numa linguagem simples e de fácil assimilação, uma introdução para essas “novas” geometrias.

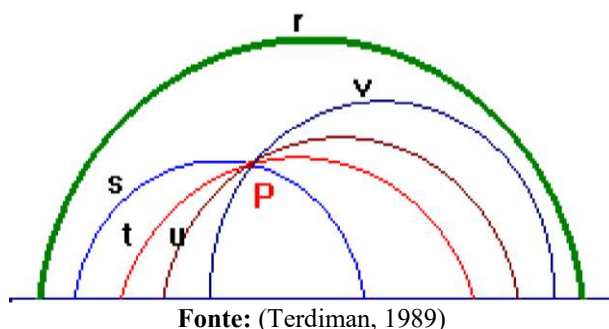
4.1 GEOMETRIA HIPERBÓLICA

A geometria hiperbólica coincide com a euclidiana nos seus quatro primeiros postulados, porém é o quinto postulado, exhaustivamente estudado na história, que encontramos a diferença entre elas. A tentativa de demonstração desse postulado teve como consequência a teoria de que a validade do postulado dependia da superfície trabalhada.

Gauss, ao tentar demonstrar o 5º postulado, desenvolveu uma série de resultados que culminou na descoberta de uma nova geometria consistente e diferente da euclidiana. Nesse período também, Gauss recebeu uma carta de Farkas Boyai que tratava de seus estudos e dos estudos de seu filho, Janos Bolyai, na descoberta da geometria hiperbólica, tendo Gauss respondido por carta também que ele também havia desenvolvido a teoria dessa nova geometria. Na mesma época, Lobachewsky publicou seus estudos de uma nova geometria intitulada de Imaginária que também seria a gênese da geometria hiperbólica.

O 5º Postulado da geometria hiperbólica diz que por um ponto fora de uma reta, podem ser traçadas pelo menos duas retas paralelas que não encontram a reta dada.

Figura 2 – Reta r paralela as demais retas na geometria hiperbólica

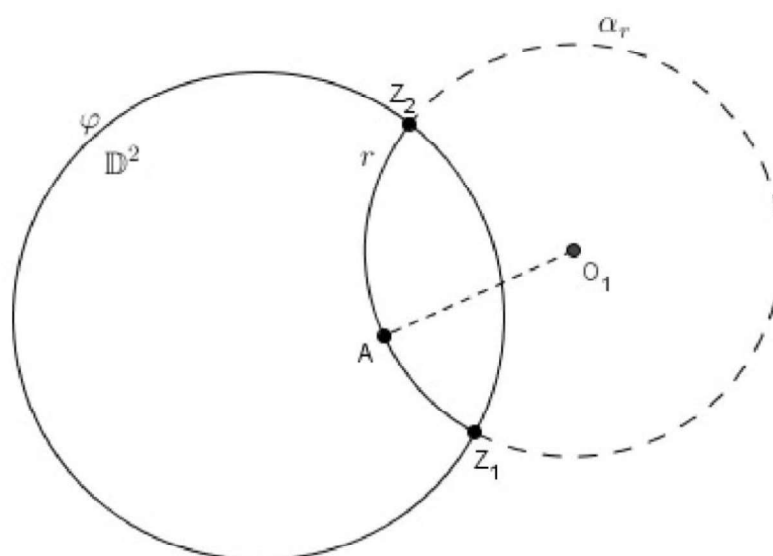


A geometria hiperbólica trabalha em uma superfície de curvatura menor que zero e tem como consequência a formação de triângulos com a soma de seus ângulos internos, menor que 180° . Para ilustrar de maneira visual foram desenvolvidos alguns modelos, como o modelo de Minkowski, o modelo da pseudo esfera, o modelo do disco de Klein e o modelo do disco de Poincaré.

Segundo Souza (2014), o modelo de Minkowski utiliza a folha superior de um hiperbolóide de duas folhas para construir o plano hiperbólico através da intersecção de planos euclidianos com sua origem. Já o modelo da pseudo esfera, construído por Eugenio Beltrami, construiu uma superfície de revolução da curva denominada tractriz em torno de sua assíntota, porém, nesse modelo só foi possível expor a geometria hiperbólica de forma parcial por suas retas não se prolongarem até o infinito. Foi aí que Jules Henri Poincaré desenvolveu o modelo do disco de Poincaré que segundo Souza (2014), foi criado entre 1882 e 1887 e faz uso da Geometria Euclidiana, mas utilizando os postulados da geometria hiperbólica, assim, se houver alguma inconsistência, então, também há inconsistência na geometria euclidiana.

O modelo foi formatado de modo que o círculo euclidiano é o plano hiperbólico, excluindo o perímetro da circunferência, ou seja, um ponto localizado na borda do círculo, não pertence ao plano hiperbólico. Nesse modelo as retas são formadas por retas euclidianas que passam pelo centro da circunferência ou por arcos euclidianos de circunferências ortogonais a circunferência do plano hiperbólico.

Figura 3 – Modelo de Disco de Poincaré



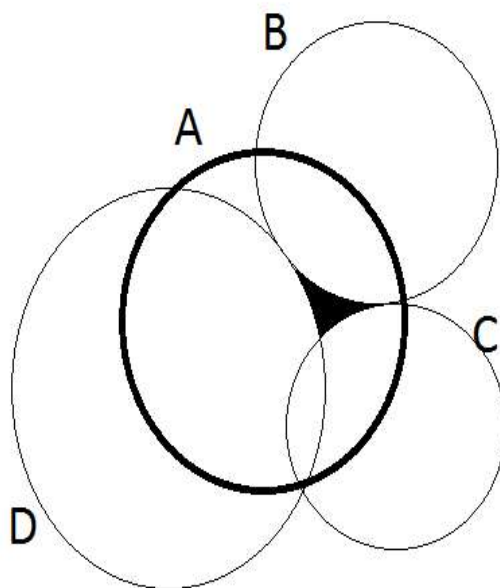
Fonte: (Souza, 2014)

Observando a figura 3 veremos que o plano hiperbólico D^2 formado a partir da

circunferência euclidiana ϕ está sendo interceptado por uma circunferência α_r ortogonal a ela, formando a reta hiperbólica r localizada entre o seguimento $\overline{Z_1 Z_2}$. É importante frisar que os pontos Z_1 e Z_2 não são elementos do plano hiperbólico e são chamados de pontos ideais.

No disco de Poincaré o triângulo hiperbólico é formado a partir de três retas hiperbólicas oriundas dos arcos euclidianos de três circunferências ortogonais a ele, como explicitado na região com preenchimento preto da figura 4. Nesse triângulo os vértices são três pontos hiperbólicos não colineares. Na figura 4 o plano hiperbólico representado pelo modelo do disco de Poincaré é a circunferência euclidiana A, enquanto as circunferências euclidianas B, C e D são circunferências ortogonais que formam o triângulo hiperbólico, cujo a soma de seus ângulos internos é menor que 180° .

Figura 4 – Triângulo hiperbólico



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020

A soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico é sempre menor que 180° por causa da curvatura negativa do plano em que ele está inserido. É importante salientar também que as retas paralelas nunca são equidistantes o que é facilmente visualizado no modelo do disco de Poincaré.

Ao compararmos geometria euclidiana com a geometria hiperbólica, verificamos algumas diferenças por causa da consequência do 5º postulado que difere nessas geometrias. O quadro abaixo compara as geometrias euclidiana e hiperbólica.

Quadro 1 - Comparações entre conteúdos da geometria euclidiana e hiperbólica

CONTEÚDO MATEMÁTICA	GEOMETRIA EUCLIDIANA	GEOMETRIA HIPERBÓLICA OU LOBACHEVSKIANA
Duas retas distintas intersectam	Um ponto	Um ponto
Dada uma reta L e um ponto P exterior a L, existe(m)	Uma reta e só uma que passa por P e é paralela a L.	Pelo menos duas retas que passam por P e é paralela a L.
Uma reta	É dividida em duas por um ponto	É dividida em duas por um ponto
As retas paralelas	São equidistantes	Nunca são equidistantes
Se uma reta intercede uma de duas paralelas	Intercede a outra	Pode ou não intercede a outra
Duas retas distintas perpendiculares a uma terceira	São paralelas	São paralelas
A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é	Igual a 180°	Menor do que 180°
A área de um triângulo é	Independente da soma dos seus ângulos	Proporcional ao defeito da soma de seus ângulos
Dois triângulos com ângulos correspondentes iguais são	Semelhantes	Congruentes
Soma dos ângulos internos de quadrilátero	Igual a 360°	Menor do que 360°

Fonte - Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática Comunicação Científica

4.2 GEOMETRIA ELÍPTICA

A geometria elíptica, desenvolvida por Johann Riemann, difere da geometria euclidiana em seu 5º postulado quanto à presença de retas paralelas. Riemann descobriu uma geometria esférica, oposta a geometria hiperbólica em relação a curvatura do plano, no seu estudo ele concluiu que existe a possibilidade de um espaço geométrico finito.

Segundo Azevedo e Souza, na geometria esférica, as retas são as Geodésicas ou Círculos Máximos da superfície. Com essa explicação sobre as retas, Azevedo e Souza destacam importantes conclusões tiradas dessa geometria elíptica que passo a destacar:

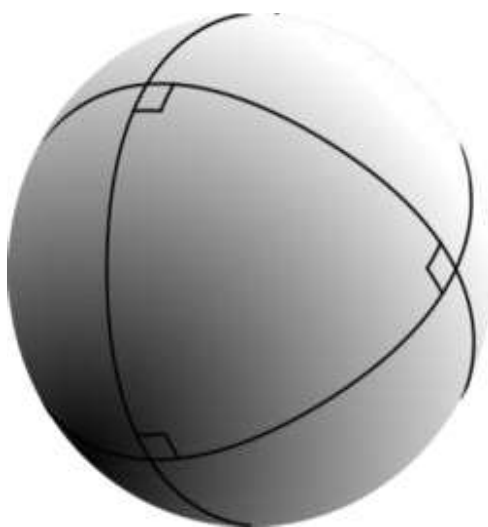
- I) Uma “reta” nessa geometria é ilimitada, mas não é infinita;
- II) Por um ponto P qualquer, fora de uma reta L, não passa nenhuma paralela a L;
- III) A soma dos ângulos internos de um triângulo na geometria elíptica não é constante, mas, é maior que 180° ;
- IV) Os lados de um triângulo são ângulos com vértices no centro da esfera e são medidos em graus;
- V) A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é maior do que 360° ;

VI) A classificação dos triângulos quanto aos ângulos é dada devido a quantidade de ângulos retos que eles têm um, dois ou três, tendo os nomes de retângulo, bi retângulo e tri retângulo, respectivamente;

VII) A classificação dos triângulos quanto aos lados será retilátero, birretilátero ou trirretilátero, caso tenha um lado, dois lados ou três lados medindo 90° respectivamente.

Ao analisar essas conclusões o Postulado de Riemann concluiu que por um ponto fora de uma reta, não podem ser traçadas retas paralelas a reta dada. Essa conclusão é observável ao traçarmos qualquer reta numa superfície esférica, levando em consideração que as retas são as geodésicas, verificamos que elas se tocam em dois pontos.

Figura 5 – Triângulo esférico



Fonte - https://pt.wikipedia.org/wiki/Trigonometria_esf%C3%A9rica

Segundo Mandolesi, a geometria elíptica trabalha em uma superfície de curvatura maior que zero, pois, segundo a teoria das superfícies gaussianas, se $C < 2\pi\ell$, onde ℓ é o raio de um círculo e C é a circunferência formada por esse raio e tem como consequência a formação de triângulos com a soma de seus ângulos internos, maior que 180° . Na construção do triângulo mostrado na figura 5, foi traçado uma reta elíptica que pode ser comparada à linha do equador e mais 2 retas elípticas que podem ser comparadas a dois meridianos que passam pelos pólos, caso a distância das retas comparadas aos meridianos forem distantes em $\frac{1}{4}$ da reta comparada ao equador, então os 3 ângulos internos do triângulo serão retos e sua soma será 270° .

Como consequência da divergência do 5º postulado, a geometria elíptica difere da Euclidiana em alguns pontos que passaremos a comparar no quadro 2 abaixo.

Quadro 2 - Comparações entre conteúdos da geometria euclidiana e elíptica

CONTEÚDO MATEMÁTICA	GEOMETRIA EUCLIDIANA	GEOMETRIA ELÍPTICA OU RIEMANNIANA
Duas retas distintas intersectam	Um ponto	Em dois pontos antípodos.
Dada uma reta L e um ponto P exterior a L, existe(m)	Uma reta e só uma que passa por P e é paralela a L.	Não há reta que passa por P e é paralela a L.
Uma reta	É dividida em duas por um ponto	Não é dividida em duas por um ponto
As retas paralelas	São equidistantes	Não existem
Se uma reta intercede uma de duas paralelas	Intercede a outra	Como não há paralelas, isto não ocorre.
Duas retas distintas perpendiculares a uma terceira	São paralelas	Interceptam-se
A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é	Igual a 180°	Maior que 180°
A área de um triângulo é	Independente da soma dos seus ângulos	Proporcional ao excesso da soma de seus ângulos.
Dois triângulos com ângulos correspondentes iguais são	Semelhantes	Congruentes
Soma dos ângulos internos de quadrilátero	Igual a 360°	Maior que 360°

Fonte - Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática Comunicação Científica

4.3 GEOMETRIA DO TAXISTA

Segundo Pavani (2017) a geometria do taxista não é euclidiana por possuir uma maneira diferente de medir distância e, conseqüentemente, alguns resultados da geometria euclidiana não valerão nela, porém, de forma surpreendente, outros valerão. É uma geometria possível de ser trabalhada com os alunos do Ensino Fundamental II e do Ensino Médio, pois muitos dos seus resultados são obtidos através de conteúdos abordados nessas etapas de ensino.

A geometria do taxista difere da euclidiana apenas na maneira de medir distâncias e de acordo com Krause (1986), a geometria do táxi é quase a mesma que a geometria euclidiana. Os pontos são os mesmos, as linhas são as mesmas, e os ângulos são medidos da mesma maneira. Somente a função de distância é diferente, ou seja, para calcular a distância

entre dois pontos, usaremos uma maneira diferente que será apresentada na próxima seção.

É importante lembrar que para uma geometria ser considerada não euclidiana, um dos cinco axiomas deve ser negado e nesta geometria o primeiro axioma “Pode-se traçar uma única reta ligando quaisquer dois pontos” é negado, tendo em vista que a reta é a menor distância entre dois pontos e na geometria do taxista pode existir mais de uma maneira de ligar dois pontos de maneira que a distância permaneça a mesma e seja a menor.

A inclusão dessa geometria para o Ensino Médio possui viabilidade devido a fácil contextualização com o cotidiano dos alunos ao indagarmos, por exemplo, sua rota ao vir para escola, a quantidade de uma tubulação para transpor água do manancial à estação de tratamento da cidade.

Entre vários assuntos que pode ser abordado nessa geometria destacaremos a distância entre pontos e a circunferência, porém em um estudo posterior podemos nos aprofundar e estudar a mediatriz, os casos de congruência de triângulos, os quadrados e o cálculo do número de caminhos possíveis, fazendo um paralelo com a geometria euclidiana.

4.3.1 – Distância entre pontos

A menor distância entre dois pontos nessa geometria é chamada táxi distância e é calculada utilizando linhas verticais e horizontais, como um veículo percorrendo uma cidade ideal em que os quarteirões dessa cidade seriam congruentes, por isso é chamada de geometria do taxista. A equação utilizada para o cálculo seria:

$$d_T(A, B) = |(x_b - x_a)| + |(y_b - y_a)|$$

Em que $d_T(A, B)$ é a táxi distância entre o ponto A e o ponto B e x_a, x_b, y_a e y_b são as coordenadas dos pontos A e B no plano cartesiano.

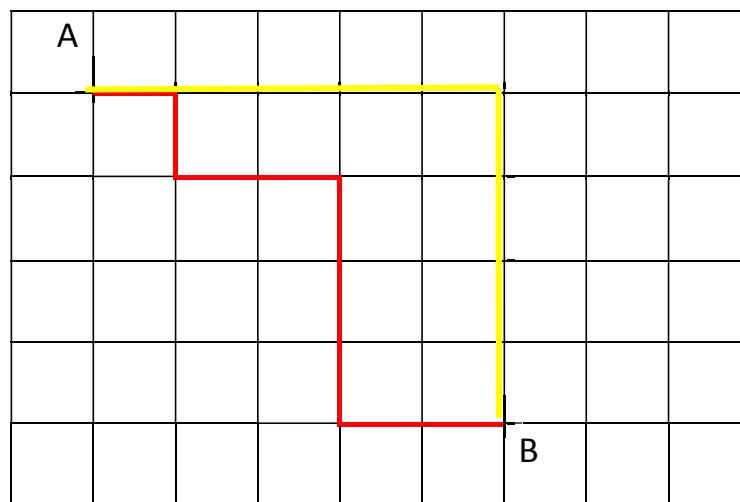
Um exemplo prático que pode ser dado na métrica do taxista é o seguinte:

Observe a figura 6 abaixo e diga quantas unidades de comprimento (U.C.) você percorrerá de sua casa localizada no ponto $A(1,5)$ ao supermercado localizado no ponto $B(6,1)$, sabendo que todos os quarteirões possuem as mesmas medidas e que as linhas são as ruas?

$$d_T(A, B) = |(6 - 1)| + |(1 - 5)| \Rightarrow d_T(A, B) = 5 + 4 \Rightarrow d_T(A, B) = 9U.C.$$

Concluimos assim que você percorreu $9U.C.$, porém é importante salientar que existem várias possibilidades de realizar o percurso com a táxi distância a exemplo dos percursos amarelo e vermelho da figura 6.

Figura 6 – Métrica do taxista



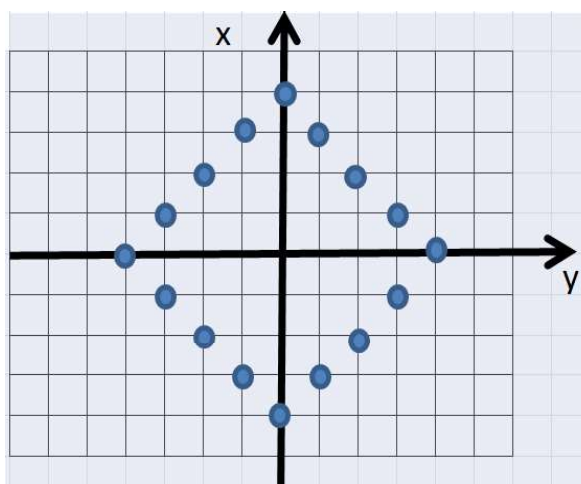
Fonte - Autor

4.3.2 Táxi circunferência

A Táxi circunferência é o lugar geométrico do plano equidistante de um ponto fixo que chamamos de centro, ou seja, temos a mesma definição para uma circunferência euclidiana porém a equidistância é mensurada pela geometria do taxista.

Ao construir uma táxi circunferência (figura 7) com centro em $O(0, 0)$ e raio 4, notamos que pela métrica taxista os pontos $(4,0)$, $(3,1)$, $(2,2)$, $(1,3)$, $(0,4)$, $(-3,1)$, $(-2,2)$, $(-1,3)$, $(-4,0)$, $(-3,-1)$, $(-2,-2)$, $(-1,-3)$, $(0,-4)$, $(3,-1)$, $(2,-2)$, $(1,-3)$ possuem a táxi distância de 4U.C., atendendo ao conceito da táxi circunferência e ao colocarmos esses pontos no plano cartesianos veremos que a figura construída é um quadrado.

Figura 7 – Táxi circunferência



Fonte - Autor

Uma curiosidade que observamos nessa temática é o valor do “ π ” (quociente da circunferência pelo diâmetro) que é igual 4.

Quadro 3 - Comparações entre conteúdos da geometria euclidiana e do taxista

Referências	Geometria do taxista	Geometria euclidiana
Distância entre pontos	$d_T(A, B) = x_b - x_a + y_b - y_a $	$d_e(A, B) = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$
Circunferência	Quadrada	Redonda
Valor de π	4	3,141...

Fonte – Pavani, 2017

4.4 GEOMETRIA PROJETIVA

A geometria projetiva difere da euclidiana quando afirma que as retas paralelas se encontram em um ponto no infinito, esse ponto foi chamado por Desargues por ponto de fuga e podemos concluir que na geometria projetiva não existe o conceito de paralelismo, ou seja, é uma negação ao 5º postulado. Essa geometria expõe a forma de como nossos olhos enxergam a realidade, porém numa superfície plana. A exposição dá-se quando um objeto é desenhado cada vez menor a medida que a distância aumenta.

Gonçalves (2013) refere-se à geometria projetiva como o ramo da matemática que estuda as propriedades geométricas invariantes de uma projeção, ou ainda o campo da matemática que estuda as relações que se estabelecem entre o objeto real e sua imagem projetada. A geometria projetiva dialoga com o desenho artístico através das regras de perspectiva, e com o desenho técnico através da geometria descritiva. Ela surge no século XVII da tentativa de compreender matematicamente as técnicas de desenho em perspectiva empregadas pelos artistas da Renascença.

A geometria projetiva é uma geometria onde todas as retas de um feixe de retas paralelas concorrem em um ponto no infinito. Naturalmente, nesta nova geometria, havia inúmeros feixes de retas paralelas, concorrendo em inúmeros pontos no infinito. Mais uma vez inspirado pelas técnicas de perspectiva, em que os pontos de fuga localizam-se sobre a linha de fuga (ou linha do horizonte), que não se localiza a uma distância finita do observador

A aplicação dessa geometria é bastante utilizada nas artes e na computação gráfica por obter representações realistas em telas planas.

Figura 8 – A última Ceia de da Vince



Fonte - [https://pt.wikipedia.org/wiki/A_%C3%9Altima_Ceia_\(Leonardo_da_Vinci\)](https://pt.wikipedia.org/wiki/A_%C3%9Altima_Ceia_(Leonardo_da_Vinci))

Figura 9 – A Anunciação de Duccio e A última Ceia de Giotto



Fonte - <https://www.slideshare.net/Aylamerenciio/geometria-projetiva-69732152>

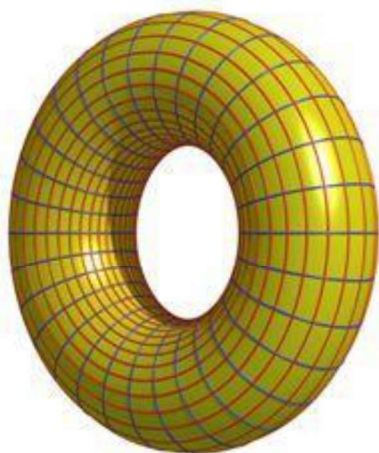
As figuras 8 e 9 mostram obras de arte famosas com a utilização e sem a utilização da geometria projetiva, nos fazendo perceber a importância dessa geometria na teoria dos desenhos.

4.5 GEOMETRIA CILÍNDRICA E DO TORO FLAT

O Toro e o Cilindro são espaços topológicos que apresentam curvas geodésicas que podem ser trabalhadas de forma que podemos construir uma nova geometria ao negar pelo menos um axioma da geometria euclidiana.

Toro é um espaço topológico que tem o formato de uma câmara de ar de acordo com a figura 10. Suas geodésicas podem ser paralelos que estão em vermelho, meridianos que estão em azul (figura 10).

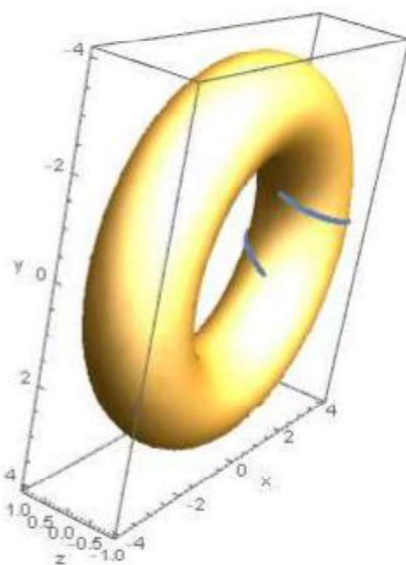
Figura 10 – Imagem de um Toro ou Toróide



Fonte . http://www.dimensions-math.org/Dim_CH7_PT.htm

Porém, nessa figura topológica, também podemos construir curvas geodésicas que não são nem meridianos, nem paralelos e possuem um formato semelhante ao helicoidal (figura 11).

Figura 11 – Segmento de uma curva geodésica de um Toro



Fonte . Bruxel, 2018

É importante salientar que o toro usual só pode ser imerso no $\mathbb{R}^3$ em espaços esféricos, preservando assim o comprimento de suas curvas. Já o toro flat, segundo Hoang,

pode ser imerso isometricamente no $\mathbb{R}^3$ como uma superfície diferenciável. Isso foi provado por Nash através do Teorema de Imersão, ou seja, ele provou que um toro pode ser planificado em um quadrado, porém, não desenvolveu uma imagem de sua prova. E foi através dos estudos de Mendelbrot sobre fractais e do Teorema de Imersão de Nash que uma equipe denominada Hévée, conseguiu ilustrar a imagem de um toro flat.

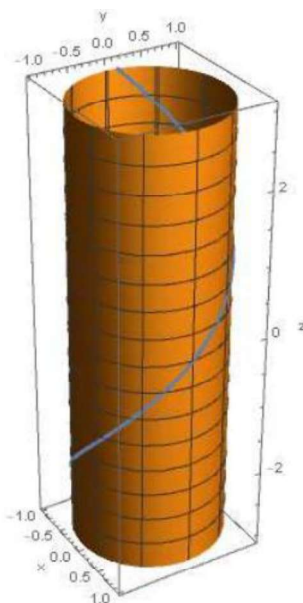
Figura 12 – Toro flat



Fonte - <http://www.science4all.org/article/flat-torus/>

Na superfície cilíndrica, obtida através do encontro de arestas opostas de um plano euclidiano, também podemos identificar os paralelos, meridianos e hélices.

Figura 13 –Geodésicas de uma superfície cilíndrica



Fonte . Bruxel, 2018

A geometria na superfície do toro e cilíndrica difere da euclidiana em seu 2º

postulado (pode-se continuar de uma única maneira qualquer reta finita continuamente em uma reta), pois as retas (geodésicas) nesse plano são finitas, com exceção dos meridianos do cilindro.

A aplicação prática dessas superfícies podem ser exemplificadas na construção de jogos como o da cobrinha ou *pac man*, em que os personagens podem sair da tela de uma lado e aparecer do outro. Isso seria possível em mundo no formato dessas superfícies topológicas. Na superfície cilíndrica o personagem poderia transportar-se no sentido em que a geodésica é a circunferência euclidiana, já na superfície do Toro o personagem poderia transportar-se para o lado oposto e qualquer borda.

Figura 14 – Mundo hipotético em superfícies cilíndricas e do Toro



Fonte . Mandolesi, 2018

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante do supra exposto, podemos evidenciar a importância do conhecimento de outras geometrias além da euclidiana no Ensino Médio, promovendo entre os discentes o incentivo a curiosidade intelectual e a visão mais holística dessa área da matemática.

É importante salientar que a discussão dos professores de matemática na formulação dos conteúdos a serem lecionados durante o ano devem ser norteados pela BNCC e que a inclusão da introdução de geometrias não euclidianas é uma possibilidade prevista nas competências gerais e competências específicas, bem como nas habilidades EM13MAT103 e EM13MAT509 da BNCC.

A construção desses conteúdos devem ser pautada e ponderada em avaliações diagnósticas das turmas, sempre as comparando com a geometria euclidiana, que é mais palpável, facilitando a contextualização com o cotidiano em que a comunidade escolar está inserida.

As geometrias não euclidianas elencadas neste trabalho, podem servir como base para que os professores escolham um ou mais de um tipo para incluir no conteúdo de geometria para o ensino médio, podendo os mesmo incluir ou omitir conceitos e aplicações no conteúdo das geometrias escolhidas.

Os tipos de geometrias aqui apresentadas, não esgotam os tipos de geometrias não euclidianas que possam existir, ou ainda serem axiomatizadas, e o aprofundamento da temática por professores e alunos também deve ser incentivado, podendo ser tema de artigos futuros no detalhamento de cada tipo de geometria aqui exposta ou ainda servindo de estímulo para estudos de geometria diferencial em superfícies gaussianas.

REFERÊNCIAS

Azevedo, Rodrigo dos Anjos e Souza, Paulo Roberto de Azevedo. **GEOMETRIA ELÍPTICA OU GEOMETRIA RIEMANNIANA**. Univertix. Três Rios-MG.

Brasil, **Lei de Diretrizes e B.** Lei nº 9.394/96, de 20 de dezembro de 1996. BRASIL, Lei de Diretrizes e B. Lei nº 9.394/96, de 20 de dezembro de 1996.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR**. Brasília, DF, 2016. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/#!/site/inicio>>. Acesso em: 20 de setembro de 2020.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS**: introdução aos parâmetros curriculares nacionais Brasília, DF: MEC/SEF, 1997. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf>>. Acesso em: 20 de setembro de . 2020.

Bruxel, Daniel Argeu. Um estudo sobre curvas geodésicas. Universidade Federal da Fronteira Sul. Chapecó – SC, 2018.

Hoang, Lê Nghiê. **A TORTUOSA GEOMETRIA DO TORO PLANO**. Disponível em : <<http://www.science4all.org/article/flat-torus/>>. Acesso em 28 de outubro de 2020.

Kaleff, Ana Maria; Nascimento, Rogério Santos do. **ATIVIDADES INTRODUTÓRIAS ÀS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS: O EXEMPLO DA GEOMETRIA DO TÁXI**. Boletim GEPEM. Rio de Janeiro, n. 44, p. 13-42.

Jezine, Edineide. **METODOLOGIA DO TRABALHO CIENTÍFICO**. João Pessoa: UFPB, 2010.

Barbosa, João Lucas Marques. **GEOMETRIA HIPERBÓLICA**. Associação Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2007. 3ª Edição.

KRAUSE, Eugene: **TAXICAB GEOMETRY**: An adventure in non-Euclidean geometry. Courier Corporation, 2012.

Leys, Jos. Ghys, Étienne. Alvarez, Aurélien. **UM PASSEIO MATEMÁTICO...** Disponível em: <http://www.dimensions-math.org/Dim_CH7_PT.htm>. Acesso em 26 de outubro de 2020.

Mandolesi, André. **INTRODUÇÃO ÀS VARIEDADES TOPOLÓGICAS**. Departamento de Matemática. Universidade Federal da Bahia. Disponível em <<https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=sites&srcid=ZGVmYXVsdGRvbWVpbnxtYW5k>>

b2xlc2l1ZmJhfGd4OjU0MWVjMTVhOWU2ZDc5YmQ>. Acesso em 26 de outubro de 2020.

Melencio, Ayla. **GEOMETRIA PROJETIVA**. Disponível em: <<https://www.slideshare.net/Aylamerencio/geometria-projetiva-69732152>> Acesso em 20 de outubro de 2020.

Oliveira, Paulo Jorge. **TRANSMISSÃO DE CALOR – CONDUÇÃO ESTACIONÁRIA**. Departamento Engenharia Electromecânica, UBI, Setembro 2014. Disponível em <<http://webx.ubi.pt/~pjpo/TransCal3.pdf>>. Acesso em 09 de outubro de 2020.

Pavani, Victor Vaz. **A GEOMETRIA DO TAXISTA COMO FERRAMENTA DE CONSOLIDAÇÃO DE CONTEÚDOS**. Universidade Federal do ABC. Santo André, 2017.

Rigonatto, Marcelo. "**GEOMETRIA DO TÁXI**"; *Brasil Escola*. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/geometria-taxi.htm>. Acesso em 09 de outubro de 2020.

Souza, Carlos Bino. **GEOMETRIA HIPERBÓLICA: Consistência do Modelo de Disco de Poincaré**. UFRPE. Recife, 2014.

Vogado, Gilberto Emanuel Reis. Et al. **A GEOMETRIA HIPERBÓLICA E O REFLEXO DE SUA UTILIZAÇÃO PARA ALUNOS DO ENSINO MÉDIO**. Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento. Ano 05, Ed. 09, Vol. 03, pp. 99-118. Setembro de 2020. ISSN: 2448-0959, Link de acesso: <https://www.nucleodoconhecimento.com.br/educacao/geometria-hiperbolica>, DOI: 10.32749/nucleodoconhecimento.com.br/educacao/geometria-hiperbolica.

Terdiman, Esther Wajskop. **A GEOMETRIA HIPERBÓLICA E SUA CONSISTÊNCIA**. Dissertação (Mestrado em Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1989.