



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física
Programa de Pós-Graduação em Física

DOUGLAS ALVES FERREIRA

Aspectos de estruturas tipo-*kink* e modelos de
branas espessas

João Pessoa - PB

2020

DOUGLAS ALVES FERREIRA

Aspectos de estruturas tipo-*kink* e modelos de branas espessas

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação do departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Dionísio Bazeia Filho.

João Pessoa - PB

2020

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

F383a Ferreira, Douglas Alves.

Aspectos de estruturas tipo-kink e modelos de branas
espessas / Douglas Alves Ferreira. - João Pessoa, 2020.
106 f.

Orientação: Dionísio Bazeia Filho.
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Campos escalares reais. 2. estruturas tipo-kink. 3.
branas espessas. I. Dionísio Bazeia Filho. II. Título.

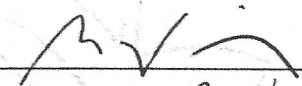
UFPB/BC

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de
Doutorado do aluno **Douglas Alves Ferreira**,
candidato ao Título de Doutor em Física na Área
de Concentração Física das Partículas
Elementares e Campos.

1 Aos vinte e nove dias do mês de julho do ano de dois mil e vinte, às 14:00, reuniram-se,
2 remotamente, os membros da Banca Examinadora constituída para examinar o candidato
3 ao grau de Doutor em Física na área de Física das Partículas Elementares e Campos,
4 **Douglas Alves Ferreira**. A comissão examinadora foi composta pelos professores
5 doutores: *Dionisio Bazeia Filho* (UFPB), orientador e presidente da banca examinadora,
6 *Francisco de Assis de Brito* (UFPB), *Herondy Francisco Santana Mota* (UFPB), *João*
7 *Rafael Lúcio dos Santos* (UFCG) e Bruno Geraldo Carneiro da Cunha (UFPE). Dando
8 início aos trabalhos, o Prof. Dionisio Bazeia Filho comunicou aos presentes a finalidade
9 da reunião. A seguir, passou a palavra para que o candidato fizesse, oralmente, a
10 exposição do trabalho de tese intitulado "*Aspectos de estruturas tipo-kink e modelos de*
11 *branas espessas*". Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca
12 Examinadora, que emitiu o seguinte parecer: "**aprovado**". Assim sendo, deve a
13 Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutor em Física na
14 forma da lei. E para constar, eu, Jose Sérgio Trindade Silva, redigi esta ata que vai
15 assinada por mim e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **29 de**
16 **julho de 2020**.

17

Prof. Dr. Dionisio Bazeia Filho
Orientador – PPGF/UFPB
Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito
PPGF/UFPB
Prof. Dr. Herondy Francisco Santana Mota
PPGF/UFPB
Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos
UFCG
Prof. Dr. Bruno Geraldo Carneiro da Cunha
UFPE


p/ Francisco Brito
p/ Herondy Mota
p/ João Santos
p/ Bruno Cunha

18 Link da reunião

meet.google.com/pam-sxeo-mhr
meet.google.com/tmr-dehb-wpa

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus pela dádiva da vida e por me envolver de pessoas bem intencionadas que sempre quiseram o melhor para mim.

Agradeço aos meus pais e aos meus avós, pela educação, pelo incentivo e por me mostrarem o valor da perseverança. Agradeço a minha esposa, Narayane, e a minha filha, Júlia, pelo apoio e por entenderem minha ausência em vários momentos importantes de suas vidas. Sou grato também aos meus tios, Hilton, Eriana e Erivânia, que me receberam de braços abertos e nunca mediram esforços para me ajudar.

Em especial, quero agradecer ao meu orientador Prof. Dionísio, pelas discussões e ensinamentos, que contribuíram enormemente para minha formação acadêmica.

Agradeço aos meus colegas da pós-graduação, em especial, a Antônio e a Bugley, pela receptividade desde o meu primeiro dia na UFPB e pelas boas conversas nos intervalos de trabalho.

Por fim, agradeço a CAPES pelo suporte financeiro.

RESUMO

Nesta tese, discutimos diversas características de estruturas tipo-*kink* tanto no espaço plano quanto no espaço curvo. Inicialmente, revisamos alguns aspectos gerais sobre teorias clássicas de campos descritas por campos escalares que suportam estruturas localizadas. Investigamos essas teorias no espaço-tempo plano bidimensional e também no cenário de mundo brana com uma única dimensão extra de extensão infinita. Depois disso, discutimos nossas contribuições para o assunto. Primeiro, usando o método da deformação, mostramos como obter modelos distintos de teorias de campos escalares que apresentam o mesmo potencial de estabilidade. A partir de sistemas que interagem polinomialmente ou hiperbolicamente, usamos uma função deformadora que nos permitiu construir outras teorias com a característica de desenvolver os mesmos potenciais de estabilidade. Essa função deformadora leva a potenciais suaves de acordo com uma escolha específica de um único parâmetro. Também mostramos que, para modelos com setores topológicos assimétricos, o surgimento de um novo potencial estabilidade é possível. Por fim, apresentamos novos modelos de branas espessas em um sistema com dois campos escalares que interagem entre si de uma maneira muito específica. O mecanismo é novo, capaz de gerar estruturas tipo-*kink* que engendram modificações importantes na densidade de energia do sistema. Sob apropriadas considerações, mostramos que o mecanismo também funciona para gerar modelos com perfil assimétrico.

Palavras-chave: campos escalares reais, estruturas tipo-*kink*, branas espessas.

ABSTRACT

In this thesis, we discuss several features of kinklike structures in both flat and curved space. Initially, we review some general aspects about classical field theories described by scalar fields that support localized structures. We investigate these theories in the two-dimensional flat space-time and also in the braneworld scenario with a single extra dimension of infinite extension. After that, we discussed our contributions to the subject. First, using the deformation method, we show how to obtain different models of scalar field theories that have the same stability potential. From systems that interact polynomially or hyperbolically, we use a deformation function that allowed us to build other theories with the characteristic of developing the same stability potentials. This deformation function leads to smooth potentials according to a specific choice of a single parameter. We also show that for models with asymmetric topological sectors, the appearance of a new stability potential is possible. Finally, we present new models of thick branes in a system with two scalar fields that interact with each other in a very specific way. The mechanism is new, capable of generating kinklike configurations that engender important modifications in the energy density of the system. Under appropriate considerations, we show that the mechanism also works to built models with an asymmetric profile.

Keywords: real scalar fields, kinklike structures, thick branes.

LISTA DE PUBLICAÇÕES

Artigos publicados durante o doutorado:

- BAZEIA, D.; FERREIRA, D.A.; LIMA, E.E.M.; LOSANO, L. Novel results for kinklike structures and their connections to quantum mechanics. **Annals of Physics**, v. 395, p. 275-300, 2018.
- FERREIRA, D.A. New lump-like structures in models with hyperbolic interactions. **Modern Physics Letters A**, v. 34, n. 01, p. 1950002, 2019.
- BAZEIA, D.; FERREIRA, D.A. New results on asymmetric thick branes. **Annals of Physics**, v. 411, p. 167975, 2019.
- BAZEIA, D.; FERREIRA, D.A.; MOREIRA, D.C. First-order formalism for thick branes in modified gravity with Lagrange multiplier. **Europhysics Letters**, v. 129, n. 1, p. 11004, 2020.
- BAZEIA, D.; FERREIRA, D.A.; MARQUES, M.A. Symmetric and asymmetric thick brane structures. **The European Physical Journal Plus**, v. 135, p. 587, 2020.

Sumário

1	Introdução	1
2	Tópicos em teorias de campos escalares reais	6
2.1	Teoria de um campo escalar real	6
2.1.1	Formalismo BPS	10
2.1.2	Estabilidade Linear	11
2.1.3	Modelos	13
2.1.4	Método da deformação	19
2.2	Teoria de dois campos escalares reais	20
2.2.1	Formalismo BPS	22
2.2.2	Estabilidade linear	24
2.2.3	Modelo BNRT	25
3	Branas espessas	29
3.1	Branas modeladas por um campo escalar	29
3.2	Estabilidade	33
3.3	Modelos	36
3.3.1	Modelo 1	36
3.3.2	Modelo 2	38
3.3.3	Modelo 3	40
4	Novos resultados para <i>kinks</i> e suas conexões com a mecânica quântica	43
4.1	Generalidades	44
4.2	Procedimento	45
4.3	Aplicações	48
4.3.1	Modelos polinomiais	48

4.3.2	Modelos hiberbólicos	59
5	Modelos de branas espessas simétricas e assimétricas	72
5.1	Formalismo	72
5.2	Modelos	75
5.2.1	Modelo 1	75
5.2.2	Modelo 2	77
5.2.3	Modelo 3	78
5.3	Brana assimétrica	80
6	Conclusões e Perspectivas	83
	Referências Bibliográficas	86

Lista de Figuras

2.1	Potencial (2.39), soluções (2.43) <i>kink</i> (linha sólida) e anti- <i>kink</i> (linha tracejada), densidade de energia (2.44) e potencial de estabilidade (2.45) associados ao modelo ϕ^4	14
2.2	Potencial (2.47), soluções (2.51) <i>kink</i> (linha sólida) e anti- <i>kink</i> (linha tracejada) com $k = 0$, densidade de energia (2.52) e potencial de estabilidade (2.53) associados ao modelo seno-Gordon.	16
2.3	Potencial (2.55), soluções (2.57) $\phi_+(x)$ (linha sólida) e $\phi_-(x)$ (linha tracejada), densidade de energia (2.58) e potencial de estabilidade (2.59) associados ao modelo 3.	19
2.4	Potencial do modelo BNRT (2.90) com $r = 1/4$	26
2.5	Soluções (2.98) com sinais positivos, nas quais os valores do parâmetro são: $r = 1/5$ (linha sólida), $r = 1/4$ (linha tracejada) e $r = 1/3$ (linha ponto-tracejada).	28
3.1	Fator de deformação do modelo RS.	30
3.2	Potencial, campo escalar, fator de deformação e densidade de energia associados ao modelo 1. Os valores dos parâmetros são $\lambda = 1/2$ (linha sólida), $\lambda = 1$ (linha tracejada) e $\lambda = 3/2$ (linha ponto-tracejada) com $\eta = 1$	37
3.3	Potencial, campo escalar, fator de deformação e densidade de energia associados ao modelo 2. Os valores dos parâmetros são $p = 1$ (linha sólida), $p = 3$ (linha tracejada) e $p = 5$ (linha ponto-tracejada). Para melhor visualização dos gráficos do potencial e da densidade de energia, usamos $V_1/10$ e $\rho_1/10$	39
3.4	Potencial, campo escalar, fator de deformação e densidade de energia associados ao modelo 3. Os valores dos parâmetros são $n = 1$ (linha ponto-tracejada), $n = 2$ (linha tracejada) e $n = 60$ (linha sólida).	41

4.1	Potencial (4.14).	46
4.2	No painel esquerdo, plotamos os potenciais (4.15a) (linha sólida) e (4.15b) (linha tracejada). No painel direito, plotamos o potencial (4.16) (linha sólida). Em ambos os casos, usamos $c = 3/2$.	47
4.3	Potencial (4.18).	49
4.4	Potencial de estabilidade (4.19).	49
4.5	Potencial (4.21).	50
4.6	Potenciais de estabilidade (4.24a) (linha sólida) e (4.24b) (linha tracejada).	50
4.7	Potencial (4.26) para $c = 1$.	51
4.8	Potencial (4.28) para $c = 1/\sqrt{3}$.	53
4.9	Potenciais de estabilidade (4.32) (linha sólida) e (4.24b) (linha tracejada).	53
4.10	Potencial (4.33).	54
4.11	Potencial de estabilidade (4.36), para $n = 1$ (linha sólida), $n = 2$ (linha tracejada) e $n = 3$ (linha ponto-tracejada).	54
4.12	Potencial (4.38).	55
4.13	Potencial (4.40).	57
4.14	Potencial (4.45).	57
4.15	Potencial (4.54).	60
4.16	Potencial de estabilidade (4.58).	60
4.17	Potencial (4.59) para $c = \operatorname{arcsinh}(1)$.	61
4.18	Potencial (4.61).	62
4.19	Potencial de estabilidade (4.64a) (linha sólida) e (4.64b) (linha tracejada).	62
4.20	Potencial (4.65) para $c = \operatorname{arcsinh}(1)$.	63
4.21	Potencial (4.65) para $c = 1/2$.	64
4.22	Potencial de estabilidade (4.70) (linha sólida) e (4.64b) (linha tracejada).	65
4.23	Potencial (4.71).	66
4.24	Potencial de estabilidade (4.74), para $n = 1$ (linha sólida), $n = 2$ (linha tracejada) e $n = 3$ (linha ponto-tracejada).	66
4.25	Potencial (4.75) para $c = \operatorname{arcsinh}(1)$.	67
4.26	Potencial (4.75) para $c = 2/3$.	69
4.27	Potencial (4.75) para $c = \operatorname{arcsinh}(1/\sqrt{7})$.	70

5.1	Campos escalares, fator de deformação e densidade de energia associados ao modelo 1.	76
5.2	Campos escalares, fator de deformação e densidade de energia associados ao modelo 2. Os valores do parâmetro são $\alpha = 1$ (linha sólida), $\alpha = 1/2$ (linha tracejada) e $\alpha = 1/4$ (linha ponto-tracejada).	78
5.3	Campos escalares, fator de deformação e densidade de energia associados ao modelo 3. Os valores do parâmetro são $\alpha = 1/2$ (linha sólida), $\alpha = 1/4$ (linha tracejada) com $n = 2$	79
5.4	Fator de deformação e densidade de energia associados a versão assimétrica do modelo 3. Os valores do parâmetro são $c = 0.1$ (linha sólida) e $c = 0.2$ (linha tracejada) com $n = 2$ e $\alpha = 1/2$	81

Capítulo 1

Introdução

Defeitos topológicos são estruturas que desempenham um papel importante em diversas áreas da Física [1–7]. Em teoria de campos, os defeitos surgem como soluções clássicas das equações de movimento. Essas soluções, chamadas de não-triviais, são espacialmente localizadas e possuem energia finita. Podemos também encontrar as soluções triviais que resolvem as equações de movimento, contudo, essas não suportam defeitos. De um ponto de vista topológico, as soluções não-triviais são configurações estáveis, uma vez que elas não podem ser continuamente deformadas para soluções triviais por um custo finito de energia. Existem diversos tipos de defeitos topológicos em teoria de campos. Em particular, pode-se encontrar os *kinks*, os vórtices e os monopólos magnéticos que aparecem em sistemas com uma, duas e três dimensões espaciais, respectivamente.

Nesta tese, focamos nossa atenção sobre os *kinks*. Essas estruturas usualmente aparecem em teorias de um campo escalar real, nas quais o potencial do modelo estudado é auto-interagente e controla a não-linearidade do sistema. O potencial também deve conter dois ou mais mínimos globais degenerados. Cada par de mínimos define um setor topológico, o qual é dotado de duas soluções (*kink* e *anti-kink*) que interpolam entre esses mínimos. É importante dizer que para se chegar as soluções tipo-*kink* é necessário resolver equações diferenciais de segunda ordem não-lineares que podem ser difíceis de serem tratadas analiticamente. Por esse motivo, pode-se recorrer ao formalismo de primeira ordem proposto nas Refs. [8,9], o que facilita o estudo analítico das soluções. Esse método também possibilita a obtenção da energia mínima do sistema.

Existem várias motivações para se estudar *kinks*, dentre elas pode-se usar os *kinks* para modelar estruturas unidimensionais que aparecem em materiais magnéticos na escala

nanométrica [10–12]. Por exemplo, na Ref. [10], os autores têm mostrado experimentalmente que o perfil do *kink* pode mudar quando ele é investigado sob restrições geométricas. Também, na Ref. [11] foi dada evidências experimentais de que pulsos elétricos podem contribuir para a mudança de polaridade da estrutura tipo-*kink*. Mais recentemente, autores têm realizado investigações teóricas sugerindo como entender a interação de ondas elásticas com estruturas tipo-*kink* na Ref. [12]. Para aspectos gerais sobre *kinks* em materiais magnéticos veja a Ref. [13]. Outra linha de investigação de corrente interesse consiste em encontrar estruturas tipo-*kink* em modelos mais intrincados envolvendo simetrias extras [14–16] e com dois ou mais campos escalares [17–25].

Um fato importante sobre os *kinks* diz respeito à estabilidade linear, cuja análise leva a uma direta conexão com supersimetria e mecânica quântica [26,27]. Essa conexão é uma questão antiga e tem sido explorada em vários trabalhos, em particular nas Refs. [28–36]. Ao longo dos anos, tem sido mostrado que esse assunto engendra duas interessantes rotas, uma das quais vai de uma teoria de campos para a mecânica quântica. Isso acontece porque, ao se investigar a estabilidade clássica das estruturas tipo-*kink* em um modelo de teoria de campos, é possível obter uma equação tipo-Schrödinger unidimensional, cujo potencial de estabilidade simula um potencial quântico. A outra rota é chamada de procedimento de reconstrução e nela um modelo de teoria de campos é construído a partir das características de um dado potencial quântico. Nas Refs. [32,33], os autores apresentaram investigações interessantes sobre a reconstrução de teorias de campos a partir do espectro de potenciais quânticos e esses estudos motivaram os trabalhos [34–36] a explorar ainda mais o assunto, trazendo novos resultados. Por exemplo, na Ref. [34] foi mostrado que uma mesma teoria de campo escalar pode levar a sistemas com distintos potenciais quânticos e na Ref. [35] foi demonstrado que a reconstrução de um modelo de teoria de campos não é única, isto é, pode-se reconstruir distintas teorias de campo a partir do espectro de um mesmo potencial quântico. Esses resultados são de interesse atual e, mais recentemente, a investigação [36] tem oferecido a possibilidade de construir vários modelos de teorias de campo que levam ao mesmo potencial de estabilidade, e consequentemente, ao mesmo potencial quântico.

O interesse em estruturas tipo-*kink* também ocorre no espaço curvo, em particular no cenário de mundo brana. Em 1999, L. Randall e R. Sundrum propuseram na Ref. [37] um modelo de mundo brana, o qual lida com uma geometria deformada engendrando

uma única dimensão espacial extra de extensão infinita. Nesse modelo, a brana é considerada infinitamente fina e imersa em um espaço-tempo de Anti-de-Sitter 5-dimensional. Posteriormente, nas Refs. [38, 39] os autores têm investigado versões generalizadas desse modelo, nas quais a espessura da brana é considerada. Essas são chamadas de branas espessas e surgem devido a presença de um campo escalar acoplado à gravidade. Nesse caso, o campo escalar suporta uma estrutura tipo-*kink* que é responsável pela modelagem da brana espessa. Desde então, o estudo de modelos de branas espessas têm ganhado bastante atenção nas últimas duas décadas, veja por exemplo, as Refs. [40–50] ou a Ref. [51] para uma revisão sobre o assunto.

Uma questão bastante relevante que emerge no cenário de mundo brana consiste no perfil assimétrico que a brana pode assumir, quando o modelo não possui simetria de reflexão. Nesse caso, a brana pode conectar assintoticamente diferentes espaços-tempo 5-dimensional, onde os parâmetros do *bulk* podem ser diferentes em cada lado da brana. A característica assimétrica da brana tem sido estudada por vários autores com diferentes motivações [52–59]. Por exemplo, nas Refs. [52, 53], foi investigada a aceleração cósmica a partir de branas assimétricas que produzem modificações infravermelhas da gravidade. Na Ref. [54], as equações de Friedmann foram obtidas, para um *bulk* Anti-de-Sitter 5-dimensional, com diferentes constantes cosmológicas em cada lado da brana. Mais recentemente, na Ref. [55], um modelo chamado de brana de Bloch assimétrica foi proposto, sob apropriadas suposições, para abordar o problema da hierarquia. Além disso, nos trabalhos [56–59] têm sido explorado novos mecanismos para gerar modelos robustos de branas espessas assimétricas.

Essa tese é o resultado de alguns estudos que foram realizados nos últimos quatro anos, no qual damos particular atenção aos resultados originais presentes nas Refs. [60, 61]. O núcleo da tese é formado por quatro capítulos que podem ser divididos em duas partes. A primeira parte é constituída pelos capítulos 2 e 3, nos quais apresentamos alguns aspectos gerais sobre *kinks* e branas espessas, respectivamente. Os capítulos 4 e 5 formam a segunda parte da tese e nela apresentamos nossas contribuições para o assunto. Abaixo, damos uma descrição sucinta do que é abordado em cada capítulo.

No capítulo 2, apresentamos alguns dos principais aspectos de teorias de campos relativísticas que são descritas por um e dois campos escalares reais. Para ambos os casos, analisamos as equações de movimento e as condições para se obter soluções com energia

finita. Também, apresentamos um formalismo de primeira ordem, o qual permite obter soluções que minimizam a energia. No estudo de cada teoria, damos particular atenção ao estudo da estabilidade linear e discutimos alguns modelos conhecidos na literatura.

O capítulo 3 é destinado a revisão de cenários de mundo brana modeladas por um único campo escalar real. Iniciamos o capítulo buscando pelas equações de campo que governam o sistema. Tais equações são não-lineares e algumas delas apresentam termos de segunda ordem o que dificulta o tratamento das soluções. Por essa razão, é mostrado que um formalismo de primeira ordem pode ser obtido se o potencial escalar assumir uma forma especial. Após isso, investigamos a estabilidade do setor gravitacional da brana espessa, no qual mostramos que o sistema é linearmente estável frente a pequenas flutuações na métrica. O restante do capítulo é dedicado a alguns modelos conhecidos na literatura, que ajudam a entender como o procedimento funciona.

No capítulo 4, descrevemos o procedimento adotado no trabalho [60], no qual buscamos corroborar e aprofundar os resultados apresentados nas Refs. [34–36]. Para tanto, usamos o método da deformação, primeiramente proposto na Ref. [62], para obter distintas teorias de campos associadas a um mesmo potencial de estabilidade. Dentro dessa proposta, sugerimos diferentes modelos relacionados pelo método de deformação, os quais permitem escrever uma restrição que assegura a igualdade entre os potenciais de estabilidade dos modelos. Uma simples função deformadora que satisfaz tal restrição permite investigar vários exemplos que engendram a característica indicada acima. O procedimento adotado funciona da seguinte maneira: dado um modelo inicial, a deformação é aplicada para fornecer novos modelos que apresentam o mesmo potencial de estabilidade do modelo inicial. O modelo tomado como ponto de partida pode conter setores simétricos e assimétricos. No caso de setores assimétricos, o método da deformação possibilita a existência de um novo setor com um potencial de estabilidade modificado, além daqueles que engendram o mesmo potencial de estabilidade.

Os exemplos estudados nesse trabalho destacam potenciais com interação polinomial e hiperbólica. Esses tipos de modelos são de grande utilidade para investigar estruturas topológicas [63, 64], cenário de mundo brana com um única dimensão extra de extensão infinita [37], produção de pares *kink-antikink* em colisões de estados tipo-partícula [65], colisões *kink-antikink* [66, 67] e sucessões de transições de fase em teoria de campos [68]. Além disso, esses modelos podem ser empregados para explorar aspectos de integrabili-

dade [69–72].

No capítulo 5, discutimos os resultados obtidos no artigo [61]. Em cenários de mundo brana, a presença de fontes de campos escalares que admitem estruturas tipo-*kink* capazes de gerar modelos de branas espessas têm aumentado o interesse no estudo de estruturas localizadas. Nesse sentido, consideramos um modelo descrito por dois campos escalares, os quais são acoplados de uma forma muito específica. Tal modelo é inspirado no trabalho recente [106], no qual os autores propuseram um modelo de dois campos escalares reais, cujo acoplamento entre os dois campos modifica o termo cinético de um dos dois campos e isso permite a presença de novas estruturas localizadas. Assim, nosso objetivo foi analisar como estruturas tipo-*kink* que aparecem nesse modelo podem contribuir para modelagem de branas espessas. Inicialmente, estudamos esse modelo no cenário de mundo brana com uma única dimensão extra infinita e encontramos as equações de movimento que descrevem o sistema. Como usual, desenvolvemos um formalismo de primeira ordem que facilita a análise das soluções do modelo. Em seguida, ilustramos nossas descobertas a partir de vários exemplos, os quais revelam diferentes comportamentos na estrutura da brana. Por fim, mostramos que, sob apropriadas considerações, os novos modelos de branas também podem exibir um perfil assimétrico.

No capítulo final encontra-se uma discussão sobre os resultados obtidos e algumas perspectivas futuras. Ao longo dessa tese, as coordenadas do espaço-tempo de Minkowski em $(D, 1)$ dimensões serão representadas por $x^\mu = (t, x^i)$ com $i = 1, 2, \dots, D$. O tensor métrico $\eta_{\mu\nu}$ é tal que $\eta_{00} = 1$, $\eta_{11} = \eta_{22} = \dots = \eta_{DD} = -1$ e $\eta_{\mu\nu} = 0$ se $\mu \neq \nu$. Além disso, usaremos o sistema de unidades naturais, $\hbar = c = 1$.

Capítulo 2

Tópicos em teorias de campos escalares reais

Em teorias de campos, os modelos mais simples são aqueles descritos por campos escalares. Neste capítulo, estudaremos soluções de defeitos que aparecem em sistemas governados por um e dois campos escalares reais no espaço-tempo plano. Para ambos os casos, analisamos as equações de movimento e as condições para se obter soluções com energia finita. Ademais, discutimos o formalismo BPS e estabilidade linear das soluções. No final de cada estudo, ilustramos os resultados a partir de modelos conhecidos na literatura.

2.1 Teoria de um campo escalar real

A ação associada a um único campo escalar real em $(D + 1)$ dimensões espaço-temporais pode ser escrita na forma

$$S = \int d^{D+1}x \mathcal{L}, \quad (2.1)$$

onde a densidade lagrangiana $\mathcal{L}$ é função do campo escalar $\phi = \phi(x^\mu)$ e de suas derivadas primeiras, $\partial_\mu \phi = \partial \phi / \partial x^\mu$.

A variação da ação (2.1), com relação ao campo escalar, fornece a equação de movimento:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}. \quad (2.2)$$

Usando o teorema de Noether, que estabelece uma conexão entre simetrias e leis de conservação, pode-se mostrar que a invariância da ação sob transformações infinitesimais no espaço-tempo leva a conservação do tensor energia-momento, que possui a forma

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (2.3)$$

Esse tensor é simétrico sob permutação de índices, isto é, $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$.

Vamos nos concentrar no estudo de modelos descritos pela densidade lagrangiana dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (2.4)$$

onde o primeiro termo contém as contribuições cinética e gradiente; o segundo termo é a densidade de potencial, que de agora em diante chamaremos apenas de potencial. Como estamos usando unidades naturais, temos que as coordenadas espaço-temporais têm dimensão de inverso da energia. Portanto, em D dimensões espaciais, o potencial $V(\phi)$ possui dimensão de energia elevado à potência $D + 1$ e o campo escalar possui dimensão de energia elevado à potência $(D - 1)/2$.

A massa clássica é definida por

$$M_i^2 = \left. \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right|_{\phi=v_i}, \quad (2.5)$$

onde v_i representa os mínimos do potencial. Para a densidade lagrangiana (2.4) a equação de movimento (2.2) assume a forma

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (2.6)$$

e o tensor energia-momento (2.3) passa a ser expresso como

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \eta_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - V(\phi) \right). \quad (2.7)$$

No caso em que lidamos com $(1+1)$ dimensões, as componentes do tensor energia-momento

são

$$T_{00} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\phi'^2 + V, \quad (2.8a)$$

$$T_{11} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\phi'^2 - V, \quad (2.8b)$$

$$T_{01} = T_{10} = \dot{\phi}\phi', \quad (2.8c)$$

com os símbolos ponto e linha representando derivadas com respeito as coordenadas temporal e espacial, respectivamente. Ou seja, $\dot{\phi} = d\phi/dt$ e $\phi' = d\phi/dx$. A componente T_{00} corresponde a densidade de energia (ρ) enquanto que T_{11} representa o estresse, ou pressão (p). A componente T_{01} (T_{10}) é chamada de fluxo de energia (densidade de momento).

A equação de movimento (2.6) fica

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (2.9)$$

Como estamos interessados em soluções de defeitos, podemos focar apenas nas soluções estáticas. Além disso, a invariância relativística da teoria permite obtermos soluções dependentes do tempo realizando um *boost* de Lorentz. Desse modo, a equação acima simplifica e assume a forma

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{dV}{d\phi}. \quad (2.10)$$

Podemos multiplicá-la por $d\phi/dx$ e, após algumas manipulações, realizamos uma integração para obter

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 = V + c, \quad (2.11)$$

onde c é uma constante de integração. Note que, comparando a equação acima com a componente T_{11} , identificamos c como a pressão, isto é, $c = p$. As componentes $T_{01} = T_{10}$ são nulas e a componente T_{00} dá a densidade de energia:

$$\rho(x) = \frac{1}{2}\phi'^2 + V(\phi), \quad (2.12)$$

que integrada em todo o espaço, fornece a energia total do sistema

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx \rho(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{1}{2}\phi'^2 + V(\phi) \right). \quad (2.13)$$

Soluções de interesse físico são aquelas que possuem energia finita. Para garantir isso, as soluções estáticas devem satisfazer as condições:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) \rightarrow v_{\pm}, \quad (2.14a)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi'(x) \rightarrow 0, \quad (2.14b)$$

onde $v_{\pm}$ são dois mínimos adjacentes do potencial, tal que $V(v_{\pm}) = 0$. A condição (2.14a) que estabelece uma conexão entre o infinito espacial e os mínimos do potencial, pode ser representada em termos de uma corrente topológica dada por [2, 73]

$$j_T^{\mu} = \epsilon^{\mu\nu} \partial_{\nu} \phi, \quad (2.15)$$

onde $\epsilon^{\mu\nu}$ é o símbolo de Levi-Civita. A anti-simetria de $\epsilon^{\mu\nu}$ garante a conservação dessa corrente, isto é, $\partial_{\mu} j_T^{\mu} = 0$. Para soluções estáticas, a carga topológica é

$$Q_T = \int_{-\infty}^{\infty} dx j_T^0 = \phi(\infty) - \phi(-\infty). \quad (2.16)$$

Em contraste com as cargas conservadas obtidas pelo teorema de Noether, a carga topológica não está associada com uma simetria da ação. Essa carga possibilita diferenciar dois tipos de soluções: soluções topológicas e soluções não-topológicas.

Soluções topológicas (ou *kinks*) possuem limites assintóticos distintos $\phi(\infty) \neq \phi(-\infty)$, consequentemente existe uma carga topológica não-nula. Como essa carga é conservada, nenhum processo de energia finita pode alterar o comportamento assintótico da solução topológica. Nesse caso, dizemos que a solução é estável.

Soluções não-topológicas (ou *lumps*) possuem o mesmo limite assintótico $\phi(\infty) = \phi(-\infty)$, o que significa que a carga topológica é nula. Nesse caso, a estabilidade da solução não é garantida por argumentos topológicos.

Notemos que usando a equação (2.11), a energia dada pela equação (2.13) pode ser reescrita como

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi'^2 - c \int_{-\infty}^{\infty} dx. \quad (2.17)$$

Então, para que a solução possua energia finita devemos tomar $c = 0$. Nessa situação, a

equação (2.11) pode ser escrita como

$$\phi' = \pm\sqrt{2V}. \quad (2.18)$$

Notemos ainda que como $c = 0$, as soluções com energia finita são aquelas que possuem pressão nula.

2.1.1 Formalismo BPS

Um método muito eficiente no estudo de soluções que suportam defeitos foi proposto, de forma independente, por Bogomol'nyi [8] e por Prasad e Sommerfield [9]. Com o intuito de compreender como esse método funciona, consideremos que o potencial $V(\phi)$ é não-negativo e pode ser escrito em termos de uma função $W(\phi)$ tal que

$$V(\phi) = \frac{1}{2}W_\phi^2, \quad (2.19)$$

onde $W_\phi = dW/d\phi$ com $W(\phi)$ sendo uma função suave do campo escalar, a qual chamaremos de superpotencial. Nesse caso, podemos reescrever a energia (2.13) como

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx (\phi'^2 + W_\phi^2), \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx ((\phi' \pm W_\phi)^2 \mp 2W_\phi\phi'), \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx (\phi' \pm W_\phi)^2 \mp \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{dW}{dx}, \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx (\phi' \pm W_\phi)^2 + E_{BPS}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde

$$E_{BPS} = |W(\phi(\infty)) - W(\phi(-\infty))|. \quad (2.21)$$

A energia E_{BPS} (em homenagem a Bogomol'nyi, Prasad e Sommerfield) é a energia mínima do sistema, a qual ocorre para configurações de campo estáticas que resolvem as equações de primeira ordem

$$\phi' = \pm W_\phi. \quad (2.22)$$

Essas equações resolvem a equação de movimento (2.10). Portanto, ao invés de trabalharmos com equações diferenciais de segunda ordem, o formalismo *BPS* permite lidar

com equações de primeira ordem que são, em geral, mais fáceis de serem analisadas e cujas soluções obtidas são aquelas que minimizam a energia. Outra característica desse formalismo é que podemos determinar a energia do sistema sem conhecermos a solução explicitamente, visto que a energia depende apenas do comportamento assintótico da solução.

2.1.2 Estabilidade Linear

A análise da estabilidade linear consiste em executar pequenas perturbações $\eta(x, t)$ em torno da solução estática $\phi = \phi(x)$. Assim, vamos considerar que a solução perturbada possui a forma

$$\phi(x, t) = \phi(x) + \eta(x, t). \quad (2.23)$$

Substituindo essa solução na equação de movimento (2.9) e realizando uma expansão de Taylor no potencial $V(\phi)$ em torno da solução estática, obtemos:

$$\left. \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right|_{\phi(x)} \eta = 0. \quad (2.24)$$

Para resolver essa equação, usamos o método de separação de variáveis e escrevemos as perturbações $\eta(x, t)$ como:

$$\eta(x, t) = \sum_n \eta_n(x) \cos(\omega_n t). \quad (2.25)$$

Desse modo, a equação (2.24) pode ser escrita na forma

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + U(x) \right) \eta_n(x) = \omega_n^2 \eta_n(x), \quad (2.26)$$

onde $U(x)$ é o potencial de estabilidade, dado por

$$U(x) = \left. \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi(x)}. \quad (2.27)$$

A equação (2.26) é uma equação tipo-Schrödinger unidimensional, na qual o potencial de estabilidade simula um potencial quântico. Observe que a condição (2.14a) revela que $U(x)$ tende assintoticamente às massas clássicas.

Para entender como a equação (2.26) está relacionada a estabilidade do sistema,

vamos reescrevê-la como

$$H\eta_n(x) = \omega_n^2 \eta_n(x), \quad (2.28)$$

onde

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + U(x). \quad (2.29)$$

Podemos notar que, se os autovalores na equação de estabilidade (2.28) forem negativos, a perturbação cresce exponencialmente com o tempo desestabilizando a solução. Portanto, para que a solução seja linearmente estável, os autovalores devem ser não-negativos.

Um aspecto bastante importante sobre a equação (2.28) é que ela sempre possui um estado de autovalor nulo, chamado de modo zero, o qual ocorre devido à invariância translacional da teoria [74]. De fato, derivando a equação (2.10) com relação a x obtemos

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2 V}{d\phi^2}\right) \phi' = 0, \quad (2.30)$$

que é a equação tipo-Schrödinger (2.26) com autovalor nulo. Assim, fica evidente que o modo zero é dado por

$$\eta_0(x) = \mathcal{N}\phi', \quad (2.31)$$

onde $\mathcal{N}$ é uma constante de normalização. Outra maneira de entender a ocorrência do modo zero é percebendo que a invariância translacional garante que se $\phi(x)$ é solução da equação de movimento (2.10), $\phi(x + x_0)$ também é uma solução. Assim, realizando uma expansão de Taylor em $\phi(x + x_0)$ encontramos

$$\phi(x + x_0) = \phi(x) + x_0\phi'. \quad (2.32)$$

Comparando com a solução perturbada (2.23), vemos que a derivada da solução estática corresponde a uma pequena flutuação com autovalor nulo. Também é de interesse conhecer o modo zero para analisar a estabilidade das soluções. Por exemplo, se o modo zero possuir um nó, ele não representa o estado com menor autovalor [75]. Consequentemente, existe um estado com autovalor negativo indicando que o sistema é instável.

Vamos agora analisar a estabilidade de soluções do tipo BPS. Para tanto, usamos (2.19) para reescrever a equação (2.29) da seguinte maneira:

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + W_{\phi\phi}^2 + W_\phi W_{\phi\phi\phi}, \quad (2.33)$$

que pode ser fatorizada como

$$H = S^\dagger S, \quad (2.34)$$

onde

$$S = -\frac{d}{dx} + W_{\phi\phi} \quad \text{e} \quad S^\dagger = \frac{d}{dx} + W_{\phi\phi}. \quad (2.35)$$

Essa fatorização mostra que o operador H é não-negativo, o que proibi a existência de modos com autovalor negativo, ou seja, $\omega_n^2 \geq 0$. Portanto, verificamos que as soluções BPS são estáveis frente a pequenas perturbações. Podemos encontrar o modo zero, fazendo $S\eta_0 = 0$. Nesse caso, temos

$$\frac{d\eta_0}{dx} = W_{\phi\phi}\eta_0, \quad (2.36)$$

que ao ser integrada resulta em

$$\eta_0 = AW_\phi, \quad (2.37)$$

onde A é uma constante de integração.

2.1.3 Modelos

Para melhor entendimento dos tópicos apresentados até aqui, vamos agora estudar alguns modelos bem conhecidos na literatura. Todos os modelos que consideraremos abaixo engendram invariância translacional e, portanto, o centro da solução é arbitrário. Dessa forma, tomaremos sempre a origem como o centro da solução, por simplicidade.

Modelo 1

Um modelo amplamente conhecido em teoria de campos é o modelo $\lambda\phi^4$ que engendra quebra espontânea de simetria. O potencial desse modelo é dado por

$$V(\phi) = \frac{\lambda^2}{2}(v^2 - \phi^2)^2, \quad (2.38)$$

onde λ e v são constantes positivas. No intuito de simplificar o problema, vamos eliminar esses parâmetros fazendo $\phi \rightarrow v\phi$, $x^\mu \rightarrow x^\mu/(v\lambda)$ e $\mathcal{L} \rightarrow \lambda^2 v^4 \mathcal{L}$. Dessa forma, o potencial acima se torna

$$V(\phi) = \frac{1}{2}(1 - \phi^2)^2. \quad (2.39)$$

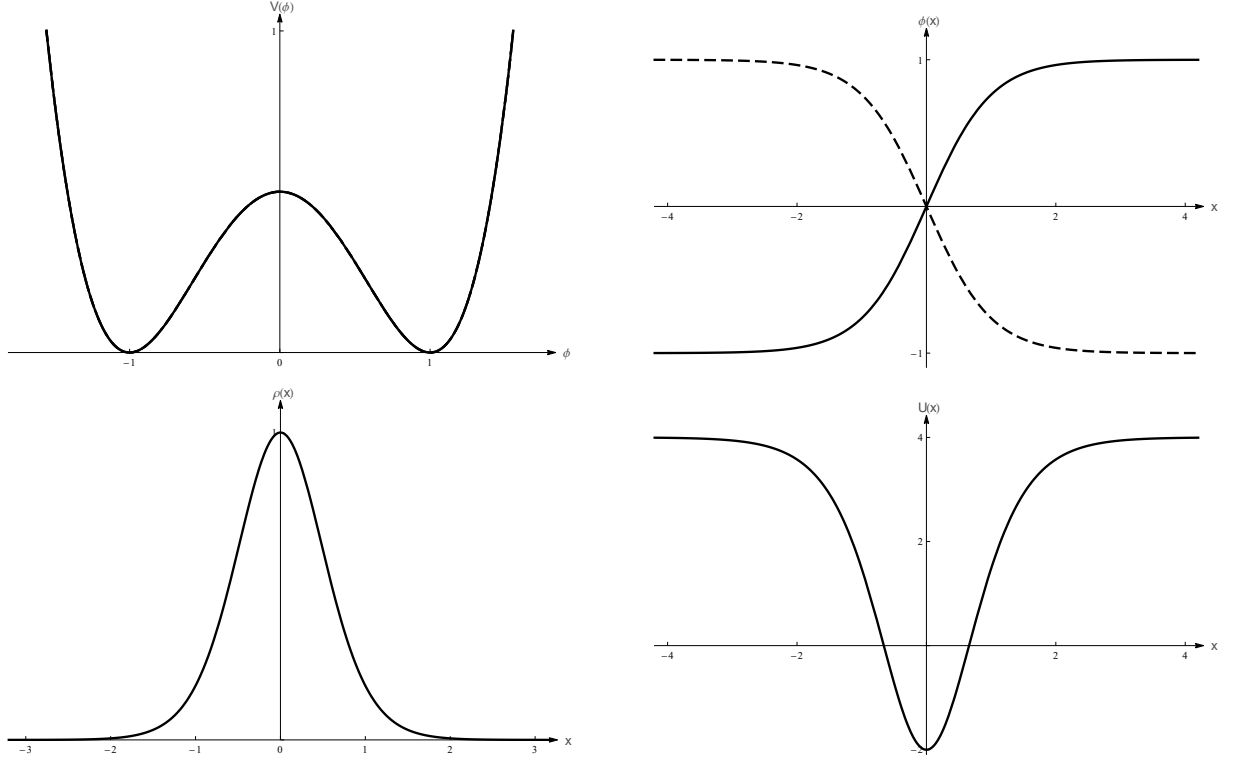


Figura 2.1: Potencial (2.39), soluções (2.43) *kink* (linha sólida) e *anti-kink* (linha tracejada), densidade de energia (2.44) e potencial de estabilidade (2.45) associados ao modelo ϕ^4 .

Esse modelo possui dois mínimos em $\phi_{min} = \pm 1$ e um máximo em $\phi_{max} = 0$. Os dois mínimos do potencial constituem um setor topológico. A massa clássica é a mesma em ambos os mínimos, isto é, $M^2 = 4$. Note que o modelo apresenta simetria Z_2 , já que potencial é invariante pela transformação $\phi \rightarrow -\phi$.

A equação de movimento (2.10) fica

$$\phi'' = 2\phi(\phi^2 - 1). \quad (2.40)$$

Para auxiliar na obtenção das soluções estáticas, faremos uso do formalismo BPS. Nesse caso, o superpotencial W é dado por

$$W(\phi) = \phi - \frac{1}{3}\phi^3, \quad (2.41)$$

e as equações de primeira ordem (2.22) são

$$\phi' = \pm(1 - \phi^2). \quad (2.42)$$

Essas equações admitem duas soluções triviais, $\phi = \pm 1$. Tais soluções apresentam energia nula e correspondem aos mínimos do potencial. As soluções não-triviais são obtidas resolvendo a equação diferencial acima, resultando em

$$\phi(x) = \pm \tanh(x), \quad (2.43)$$

onde a solução com sinal positivo é chamada de *kink* e a solução com sinal negativo é denominada anti-*kink*. Essas soluções interpolam entre os mínimos do potencial. A densidade de energia das soluções é

$$\rho(x) = \text{sech}^4(x). \quad (2.44)$$

Uma vez que as soluções são BPS, podemos obter a energia mínima via a equação (2.21). Logo, a energia é $E_{BPS} = 4/3$.

No que se refere a estabilidade linear, temos que o potencial de estabilidade (2.27) associado a esse modelo tem a forma

$$U(x) = 4 - 6 \text{sech}^2(x), \quad (2.45)$$

que é o potencial de Pöschl-Teller modificado [76, 77], também conhecido com potencial sem reflexão. Ele apresenta dois estados ligados: o modo zero com autovalor nulo e um estado excitado com autovalor $\omega_1^2 = 3$. O modo zero é dado por

$$\eta_0(x) \propto \text{sech}^2(x). \quad (2.46)$$

Como os autovalores associados ao modelo ϕ^4 são não-negativos, temos que as soluções são estáveis frente a pequenas perturbações. A estabilidade das soluções também poderia ser verificada notando-se que o modo zero não possui nó, o que indica que ele representa o estado de menor autovalor.

Na Fig. 2.1, plotamos o potencial, as soluções estáticas, a densidade de energia e o potencial de estabilidade.

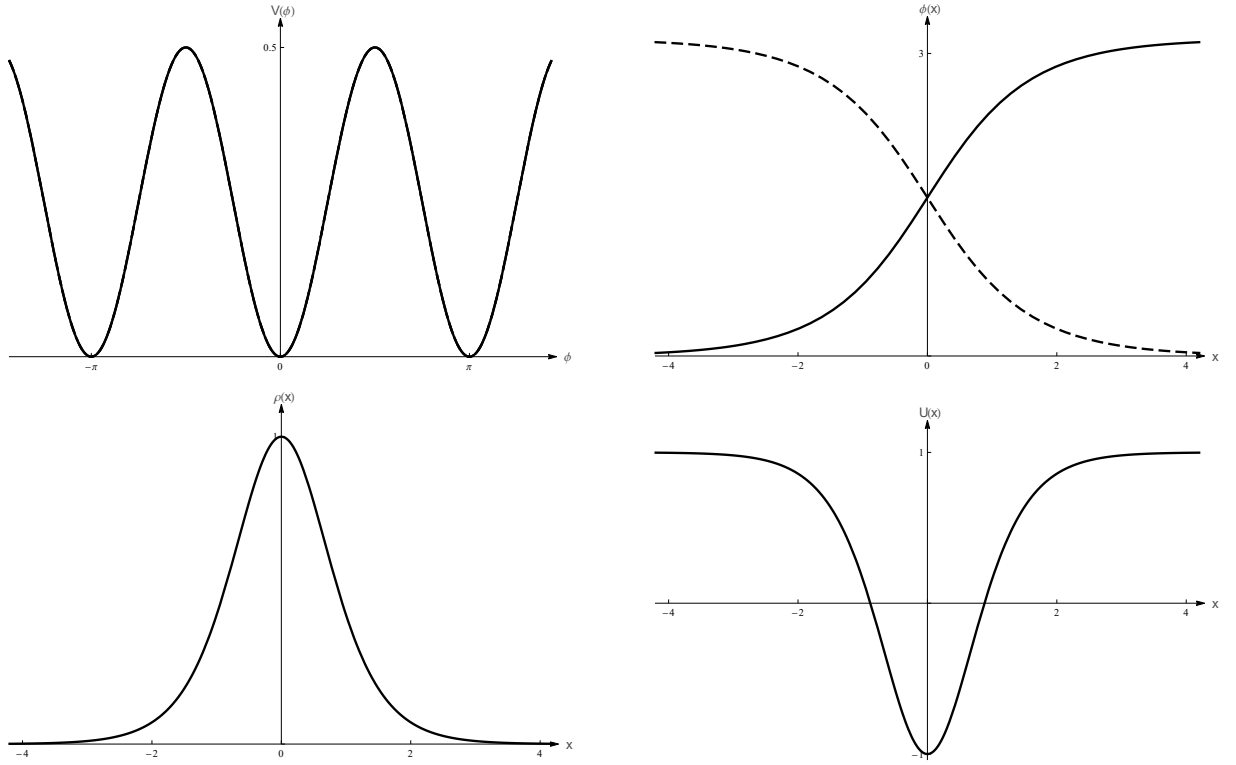


Figura 2.2: Potencial (2.47), soluções (2.51) *kink* (linha sólida) e *anti-kink* (linha tracejada) com $k = 0$, densidade de energia (2.52) e potencial de estabilidade (2.53) associados ao modelo seno-Gordon.

Modelo 2

Vamos agora considerar o modelo chamado de seno-Gordon, cujo potencial é dado por

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \sin^2(\phi). \quad (2.47)$$

Esse modelo é o mais conhecido potencial com interação não-polinomial. Ele possui uma infinidade de mínimos $\phi_{min_k} = k\pi$ e máximos $\phi_{max_k} = (2k - 1)\pi/2$, onde k representa um número inteiro. Cada par de mínimos $k\pi$ e $(k + 1)\pi$, constitui um setor topológico. Logo, o modelo engendra infinitos setores topológicos equivalentes. A massa clássica é a mesma em todos os mínimos, $M^2 = 1$.

Para o presente modelo, a equação de movimento (2.10) pode ser escrita como

$$\phi'' = \frac{1}{2} \sin(2\phi). \quad (2.48)$$

Novamente, usamos o formalismo BPS para facilitar a análise das soluções. Nesse caso, o

superpotencial é

$$W(\phi) = -\cos(\phi), \quad (2.49)$$

consequentemente, as equações de primeira ordem são dadas por

$$\phi' = \pm \sin(\phi). \quad (2.50)$$

Note que as soluções triviais da equação acima representam mínimos do potencial. Já as soluções não-triviais são do tipo-*kink* e podem ser escritas na forma

$$\phi(x) = 2 \tan^{-1}(e^{\pm x}) + k\pi. \quad (2.51)$$

Essas soluções interpolam entre os mínimos $k\pi$ e $(k+1)\pi$. A densidade de energia é dada por

$$\rho(x) = \text{sech}^2(x), \quad (2.52)$$

e a energia é $E_{BPS} = 2$. Finalmente, temos que o potencial de estabilidade é expresso como

$$U(x) = 1 - 2 \text{sech}^2(x). \quad (2.53)$$

O estudo desse potencial revela a presença de um único estado ligado, o modo zero, o qual escrevemos

$$\eta_0(x) \propto \text{sech}(x). \quad (2.54)$$

Na Fig. 2.2, plotamos o potencial, as soluções estáticas, a densidade de energia e o potencial de estabilidade.

Modelo 3

Neste último exemplo consideramos o modelo descrito pelo potencial

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2(1 - \phi^2). \quad (2.55)$$

Esse potencial possui um mínimo em $\phi_{min} = 0$ e dois máximos em $\phi_{max} = \pm 1/\sqrt{2}$, conforme pode ser visto na Fig. 2.3. A massa clássica é $M^2 = 1$. É importante perceber que esse modelo, assim como o modelo ϕ^4 , apresenta simetria Z_2 . Aliás, o potencial (2.55)

pode ser visto como uma versão invertida do potencial do modelo ϕ^4 .

Nesse caso, a equação de movimento (2.10) pode ser escrita como

$$\phi'' = \phi(1 - 2\phi^2). \quad (2.56)$$

Para facilitar o estudo das soluções desse modelo, faremos uso das equações (2.18). Dessa forma, obtemos

$$\phi_{\pm}(x) = \pm \operatorname{sech}(x), \quad (2.57)$$

que são mostradas na Fig. 2.3. Observe que a solução ϕ_+ (ϕ_-) inicia no mínimo do potencial, $\phi_{min} = 0$, crescendo (decrecendo) até a raiz do potencial, $\phi = 1$ ($\phi = -1$), e depois decrescendo (crescendo) até retornar ao mínimo $\phi_{min} = 0$. Analisando o comportamento assintótico dessas soluções vemos que $\phi(\infty) = \phi(-\infty) = 0$, o que mostra que elas apresentam carga topológica nula. Assim, tais soluções são não-topológicas ou *lumps*. É importante destacar que a solução acompanhada de sinal negativo não representa um anti-*lump*. Na verdade, não faz sentido falar de anti-*lump* já que as soluções são invariantes pela transformação $x \rightarrow -x$.

A densidade de energia é dada por

$$\rho(x) = \operatorname{sech}^2(x) \tanh^2(x). \quad (2.58)$$

Observe que ela apresenta valor nulo na origem e possui dois picos simétricos em $x = \pm \operatorname{arcsech}(1/\sqrt{2})$, como pode ser visto na Fig. 2.3. A integração da densidade de energia em todo o espaço dá a energia $E = 2/3$.

No intuito de inspecionar a estabilidade linear das soluções, recorreremos a equação (2.27) para obter o potencial de estabilidade

$$U(x) = 1 - 6 \operatorname{sech}^2(x), \quad (2.59)$$

o qual está plotado na Fig. 2.3. Ele admite dois estados ligados: o modo zero e um estado com autovalor negativo. Portanto, as soluções (2.57) são instáveis frente a pequenas perturbações.

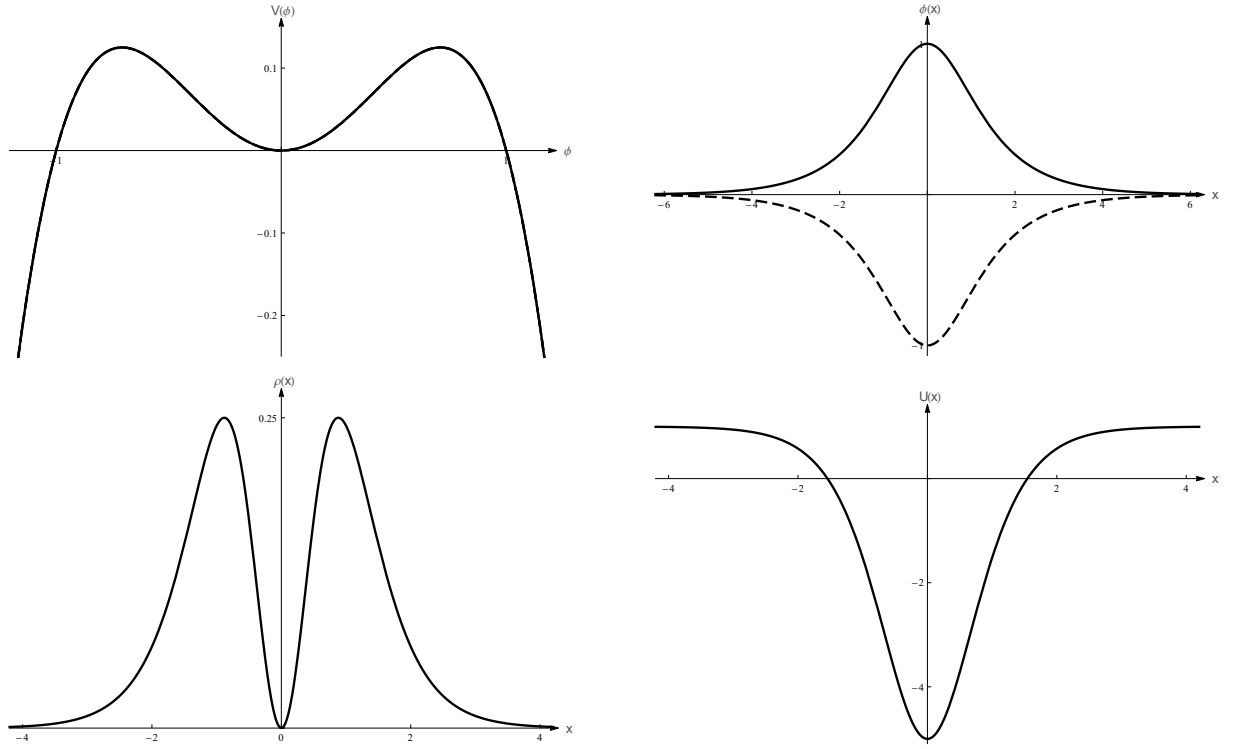


Figura 2.3: Potencial (2.55), soluções (2.57) $\phi_+(x)$ (linha sólida) e $\phi_-(x)$ (linha tracejada), densidade de energia (2.58) e potencial de estabilidade (2.59) associados ao modelo 3.

2.1.4 Método da deformação

Conforme temos visto, a busca por modelos de teoria de campos que suportam defeitos envolve o tratamento de equações diferenciais não-lineares. Essas equações podem ser difíceis de serem resolvidas analiticamente. O método da deformação, proposto na Ref. [62], constitui uma ferramenta interessante para encontrar novos modelos com soluções analíticas a partir de modelos previamente conhecidos.

Com o objetivo de entender como o método funciona, consideremos duas teorias de campos distintas na forma dada pela equação (2.4). Uma delas é descrita pelo potencial $V(\phi)$ enquanto a outra é descrita pelo potencial $\tilde{V}(\chi)$. Para determinar as soluções estáticas de cada modelo, precisamos resolver as equações de primeira ordem:

$$\phi' = \pm\sqrt{2V(\phi)}, \quad (2.60a)$$

$$\chi' = \pm\sqrt{2\tilde{V}(\chi)}. \quad (2.60b)$$

Vamos admitir que o campo ϕ é uma função do campo χ , isto é, $\phi = f(\chi)$. Derivando

isso com respeito a x , podemos usar as equações de primeira ordem para obter

$$\tilde{V}(\chi) = \frac{V(\phi \rightarrow f(\chi))}{(df/d\chi)^2}. \quad (2.61)$$

Para um dado modelo descrito pelo potencial $V(\phi)$ com soluções analíticas conhecidas, $\phi(x)$, o novo modelo descrito pela equação acima, possui soluções estáticas

$$\chi(x) = f^{-1}(\phi(x)), \quad (2.62)$$

onde f^{-1} é a inversa da função deformadora.

Como aplicação desse método, considere o modelo ϕ^4 dado pelo potencial (2.39) com soluções estáticas $\phi(x) = \pm \tanh(x)$. Escolhendo a função deformadora $f(\chi) = \sinh(\chi)$ o potencial deformado (2.61) toma a forma

$$\tilde{V}(\chi) = \frac{1}{2}(1 - \sinh^2(\chi))^2 \text{sech}^2(\chi). \quad (2.63)$$

Esse novo modelo apresenta dois mínimos em $\chi_{min} = \pm \text{arcsinh}(1)$ e um máximo na origem. Para encontrar as soluções estáticas desse modelo basta usar a equação (2.62), o que resulta em

$$\chi(x) = \pm \text{arcsinh}(\tanh(x)). \quad (2.64)$$

2.2 Teoria de dois campos escalares reais

Nessa seção vamos estudar modelos de dois campos escalares reais, ϕ e χ , descritos pela densidade lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - V(\phi, \chi), \quad (2.65)$$

onde $V(\phi, \chi)$ é o potencial que especifica o modelo estudado. Para esse caso, as equações de movimento são

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \quad (2.66a)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \chi + \frac{\partial V}{\partial \chi} = 0. \quad (2.66b)$$

Aqui, o tensor energia-momento é dado por

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \partial_\mu \chi \partial_\nu \chi - \eta_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi + \frac{1}{2} \partial_\alpha \chi \partial^\alpha \chi - V(\phi, \chi) \right). \quad (2.67)$$

Em $(1+1)$ dimensões, as componentes do tensor energia-momento podem ser escritas na forma

$$T_{00} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \dot{\chi}^2 + \frac{1}{2} \phi'^2 + \frac{1}{2} \chi'^2 + V, \quad (2.68a)$$

$$T_{11} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \dot{\chi}^2 + \frac{1}{2} \phi'^2 + \frac{1}{2} \chi'^2 - V, \quad (2.68b)$$

$$T_{01} = T_{10} = \dot{\phi} \phi' + \dot{\chi} \chi'. \quad (2.68c)$$

E as equações de movimento (2.66) ficam

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \quad (2.69a)$$

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial \chi} = 0. \quad (2.69b)$$

Para o caso de soluções estáticas, as equações acima se tornam

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{\partial V}{\partial \phi}, \quad (2.70a)$$

$$\frac{d^2 \chi}{dx^2} = \frac{\partial V}{\partial \chi}. \quad (2.70b)$$

Note que, ao considerarmos o caso estático simplificamos bastante o problema, visto que as equações diferenciais parciais passam a ser ordinárias. Mesmo assim, o sistema apresenta equações diferenciais de segunda ordem que, em geral, são não lineares e acopladas, o que dificulta o tratamento analítico das soluções.

Multiplicando a equação (2.70a) por $d\phi/dx$ e a equação (2.70b) por $d\chi/dx$, podemos somá-las e em seguida realizar uma integração para obter a equação de primeira ordem

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 = V(\phi, \chi) + c, \quad (2.71)$$

com c representando uma constante de integração. Note que, assim como no modelo de um único campo, c corresponde a pressão p .

Por outro lado, temos que a componente 00 tensor energia-momento (2.68a) nos permite escrever a energia associada as soluções estáticas como

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{1}{2} \phi'^2 + \frac{1}{2} \chi'^2 + V(\phi, \chi) \right). \quad (2.72)$$

Logo, para se ter soluções com energia finita, ϕ' , χ' e V devem ir a zero quando $x \rightarrow \pm\infty$. Sendo assim, a equação (2.71) nos permite concluir que $c = 0$, o que implica em pressão nula.

2.2.1 Formalismo BPS

No intuito de implementar o formalismo BPS no modelo de dois campos, vamos considerar que o potencial tem a forma

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2} W_\phi^2 + \frac{1}{2} W_\chi^2, \quad (2.73)$$

onde $W(\phi, \chi)$ é uma função suave dos campos escalares. Além disso, W_ϕ e W_χ representam derivadas parciais com relação aos campos ϕ e χ , respectivamente. Dessa forma, podemos reescrever a energia (2.72) como

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx (\phi'^2 + \chi'^2 + W_\phi^2 + W_\chi^2), \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx ((\phi' \pm W_\phi)^2 \mp 2W_\phi\phi' + (\chi' \pm W_\chi)^2 \mp 2W_\chi\chi'), \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx ((\phi' \pm W_\phi)^2 + (\chi' \pm W_\chi)^2) \mp \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{dW}{dx}, \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx ((\phi' \pm W_\phi)^2 + (\chi' \pm W_\chi)^2) + E_{BPS}, \end{aligned} \quad (2.74)$$

onde

$$E_{BPS} = |W(\phi(\infty), \chi(\infty)) - W(\phi(-\infty), \chi(-\infty))| \quad (2.75)$$

representa a energia mínima do sistema. É perceptível que a minimização da energia ocorre para configurações de campos que satisfazem as equações de primeira ordem

$$\phi' = \pm W_\phi, \quad (2.76a)$$

$$\chi' = \pm W_\chi. \quad (2.76b)$$

Note que $W_\phi = 0$ e $W_\chi = 0$ fornecem os mínimos do potencial (2.73) e cada par de mínimos (ϕ_i, χ_i) e (ϕ_j, χ_j) define um setor topológico que pode ser BPS ou não-BPS. O setor e as soluções correspondentes são do tipo BPS quando $W(\phi_i, \chi_i) \neq W(\phi_j, \chi_j)$, isto é, quando $E_{BPS} \neq 0$. Caso contrário, se $W(\phi_i, \chi_i) = W(\phi_j, \chi_j)$, tanto o setor quanto as soluções são do tipo não-BPS.

Podemos ainda eliminar a dependência em x nas equações de primeira ordem o que nos permite obter a equação

$$W_\chi d\phi - W_\phi d\chi = 0, \quad (2.77)$$

que descreve as órbitas no espaço dos campos. Esta equação diferencial é exata se, e somente se,

$$W_{\chi\chi} = -W_{\phi\phi}. \quad (2.78)$$

Desse modo, se $W(\phi, \chi)$ é uma função harmônica no espaço dos campos, a equação diferencial (2.77) é exata e sua respectiva solução descreve uma órbita, $F(\phi, \chi) = 0$, a qual é obtida pelas equações

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} = W_\chi \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial \chi} = -W_\phi. \quad (2.79)$$

Com o conhecimento da órbita, podemos usá-la para desacoplar as equações de primeira ordem. Nesse caso, todas as soluções encontradas são do tipo BPS [78, 79].

No caso em que o superpotencial $W(\phi, \chi)$ não é uma função harmônica, podemos usar o método do fator integrante. Tal método consiste em multiplicar a equação da órbita por uma função $I = I(\phi, \chi)$, chamada de fator integrante, fazendo com que a condição de diferencial exata seja

$$\frac{\partial(IW_\chi)}{\partial \chi} = -\frac{\partial(IW_\phi)}{\partial \phi}. \quad (2.80)$$

Dessa forma, a nova solução, $\mathcal{F}(\phi, \chi) = 0$, é obtida através das equações

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi} = IW_\chi \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \chi} = -IW_\phi. \quad (2.81)$$

O problema em utilizar o fator integrante é que nem sempre é possível encontrá-lo para as equações de primeira ordem. Essa dificuldade levou ao desenvolvimento do trabalho [18], no qual os autores usaram o método das órbitas tentativas [17], para lidar com as equações de primeira ordem. Tal método pode ser resumido em três passos [22]:

- 1) Selecione um setor BPS. Isso é feito a partir da escolha de dois mínimos (ϕ_i, χ_i)

e (ϕ_j, χ_j) , tais que $W(\phi_i, \chi_i) \neq W(\phi_j, \chi_j)$;

2) Escolha uma órbita. Isso é feito através de uma função $F(\phi, \chi) = 0$ que satisfaça $F(\phi_i, \chi_i) = 0$ e $F(\phi_j, \chi_j) = 0$;

3) Teste a compatibilidade entre a órbita escolhida e as equações de primeira ordem. Isso é feito diferenciando a órbita com respeito a x e em seguida usando as equações de primeira ordem para obter

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} W_\phi + \frac{\partial F}{\partial \chi} W_\chi = 0. \quad (2.82)$$

Quando cada par de mínimos que resolvem a órbita também resolvem a equação acima, dizemos que a órbita é adequada e podemos usá-la para desacoplar as equações de primeira ordem.

2.2.2 Estabilidade linear

O estudo da estabilidade linear em modelos de dois campos escalares se dá de maneira análoga ao que é feito em modelos com um único campo. Sendo assim, consideremos pequenas perturbações em torno das soluções estáticas, $\phi(x)$ e $\chi(x)$, tal que

$$\phi(x, t) = \phi(x) + \eta(x, t), \quad (2.83a)$$

$$\chi(x, t) = \chi(x) + \xi(x, t). \quad (2.83b)$$

Usando as expressões acima nas equações de movimentos (2.69) e em seguida realizando uma expansão de Taylor no potencial $V(\phi, \chi)$ em torno das soluções estáticas, encontramos:

$$\left. \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right|_{\phi(x), \chi(x)} \eta + \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi \partial \chi} \right|_{\phi(x), \chi(x)} \xi = 0, \quad (2.84a)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \chi^2} \right|_{\phi(x), \chi(x)} \xi + \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \chi \partial \phi} \right|_{\phi(x), \chi(x)} \eta = 0. \quad (2.84b)$$

Podemos separar as variáveis x e t admitindo que as as flutuações são dadas por

$$\eta(x, t) = \sum_n \eta_n(x) \cos(\omega_n t), \quad (2.85a)$$

$$\xi(x, t) = \sum_n \xi_n(x) \cos(\omega_n t). \quad (2.85b)$$

Dessa forma, é possível mostrar que as equações (2.84) podem ser representadas por uma equação do tipo-Schrödinger,

$$H\psi_n(x) = \omega_n^2 \psi_n(x), \quad (2.86)$$

na qual

$$H = \begin{bmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} + V_{\phi\phi} & V_{\phi\chi} \\ V_{\chi\phi} & -\frac{d^2}{dx^2} + V_{\chi\chi} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \psi_n(x) = \begin{bmatrix} \eta_n(x) \\ \xi_n(x) \end{bmatrix}. \quad (2.87)$$

No caso de potenciais escritos no formato da equação (2.73), o operador H pode ser fatorizado na forma $H = S^\dagger S$, com

$$S = \begin{bmatrix} -\frac{d}{dx} + W_{\phi\phi} & W_{\phi\chi} \\ W_{\chi\phi} & -\frac{d}{dx} + W_{\chi\chi} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S^\dagger = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} + W_{\phi\phi} & W_{\phi\chi} \\ W_{\chi\phi} & \frac{d}{dx} + W_{\chi\chi} \end{bmatrix}. \quad (2.88)$$

Essa fatorização garante que a equação (2.86) não admite estados com autovalores negativos. Assim, verificamos que as soluções BPS também são estáveis para modelos envolvendo dois campos escalares.

2.2.3 Modelo BNRT

Para ilustrar os resultados discutidos acima, vamos considerar o modelo introduzido nas Refs. [18, 19], o qual é comumente chamado de modelo BNRT (em homenagem a Bazeia, Nascimento, Ribeiro e Toledo). Esse modelo é descrito pelo superpotencial

$$W(\phi, \chi) = \phi - \frac{1}{3}\phi^3 - r\phi\chi^2, \quad (2.89)$$

com r sendo um parâmetro real não-negativo que controla a interação entre os campos escalares. Nesse caso, o potencial é dado por

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2} (1 - \phi^2 - r\chi^2)^2 + 2(r\chi\phi)^2. \quad (2.90)$$

Podemos observar que esse potencial é uma função par em cada um dos campos escalares, isto é, $V(-\phi, \chi) = V(\phi, -\chi) = V(\phi, \chi)$, portanto, ele possui simetria $Z_2 \times Z_2$. O perfil desse potencial pode ser visto, por diferentes ângulos, na Fig. 2.4.

Além disso, o potencial tem quatro mínimos $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (-1, 0)$, $v_3 = (0, \sqrt{1/r})$ e $v_4 = (0, -\sqrt{1/r})$ que identificam seis setores topológicos. Notemos que $W(1, 0) =$

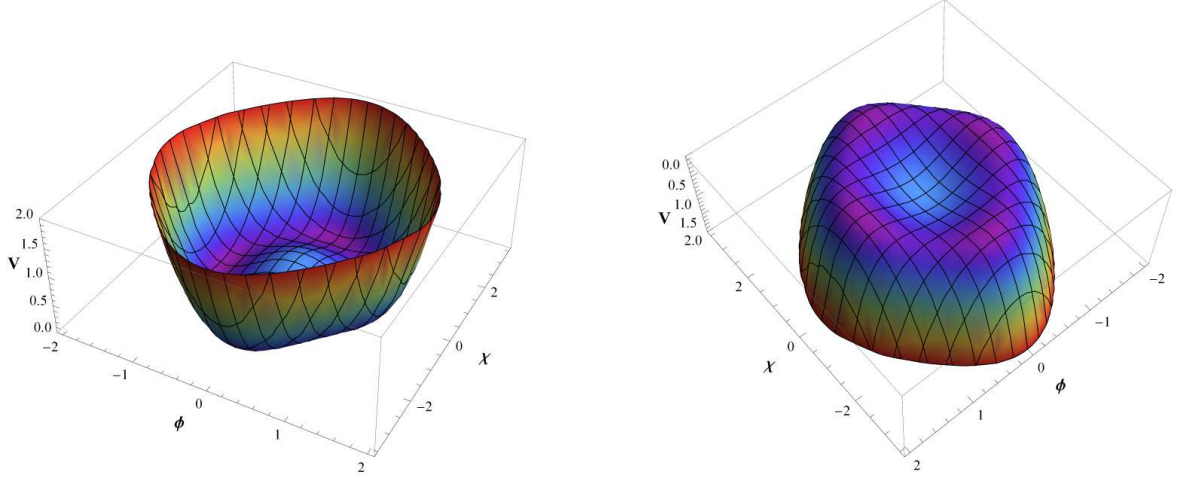


Figura 2.4: Potencial do modelo BNRT (2.90) com $r = 1/4$.

$-W(-1, 0) = 2/3$ e $W(0, \sqrt{1/r}) = -W(0, -\sqrt{1/r}) = 0$, sendo assim, existem cinco setores BPS e um setor não-BPS. Nos setores BPS, quatro deles possuem energia degenerada e seu valor é $E_{BPS} = 2/3$; o setor restante tem energia $E_{BPS} = 4/3$.

No caso de soluções estáticas, as equações de movimento tomam a forma

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 2\phi((2r+1)r\chi^2 + \phi^2 - 1), \quad (2.91a)$$

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} = 2r\chi((2r+1)\phi^2 + r\chi^2 - 1). \quad (2.91b)$$

E as equações de primeira ordem são

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm(1 - \phi^2 - r\chi^2), \quad (2.92a)$$

$$\frac{d\chi}{dx} = \mp 2r\phi\chi. \quad (2.92b)$$

Para obter as soluções explicitamente vamos considerar, inicialmente, os casos mais simples. Fazendo $\chi = 0$ nas equações de movimento, encontramos a equação

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -2\phi(1 - \phi^2). \quad (2.93)$$

Logo, temos as seguintes soluções

$$\phi(x) = \pm \tanh(x) \quad \text{e} \quad \chi(x) = 0. \quad (2.94)$$

No espaço dos campos, essas soluções descrevem um segmento de reta que conecta os mínimos v_1 e v_2 . A energia desse setor, como vimos anteriormente, é $E_{BPS} = 4/3$.

Agora, tomando $\phi = 0$ nas equações de movimento, obtemos a equação

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} = -2r\chi(1 - r\chi^2). \quad (2.95)$$

Nesse caso, as soluções são

$$\phi(x) = 0 \quad \text{e} \quad \chi(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{r}} \tanh(\sqrt{r}x), \quad (2.96)$$

com energia $E = 4/(3\sqrt{r})$. Observe que essas soluções são do tipo não-BPS, uma vez que elas não satisfazem as equações de primeira ordem. De fato, se usarmos $\phi = 0$ nas equações de primeira ordem, obtemos as soluções triviais $\chi = \pm\sqrt{1/r}$. Portanto, não existe uma órbita reta que conecte os mínimos v_3 e v_4 descrevendo estados BPS nesse modelo.

Podemos também utilizar o método das órbitas tentativas para investigar a presença de soluções BPS no modelo. Dessa forma, consideramos os mínimos v_1 e v_2 e escolhemos a órbita $\phi^2 + b\chi^2 - 1 = 0$. Derivando essa órbita com relação à variável x e usando as equações de primeira ordem, obtemos $\phi^2 + (1 + 2b)r\chi^2 - 1 = 0$. Sendo assim, para que a órbita que estamos utilizando seja compatível com as equações de primeira ordem, devemos ter $b = r/(1 - 2r)$. Portanto, a órbita é

$$\phi^2 + \frac{r}{1 - 2r}\chi^2 = 1, \quad (2.97)$$

com $r \in (0, 1/2)$. Observe que essa órbita descreve elipses no plano (ϕ, χ) . Podemos usá-la para desacoplar as equações de primeira ordem e obter as seguintes soluções

$$\phi(x) = \pm \tanh(2rx) \quad \text{e} \quad \chi(x) = \pm \sqrt{\frac{1 - 2r}{r}} \operatorname{sech}(2rx), \quad (2.98)$$

que estão plotadas na Fig. 2.5 para diversos valores de r . Analisando essas soluções, vemos

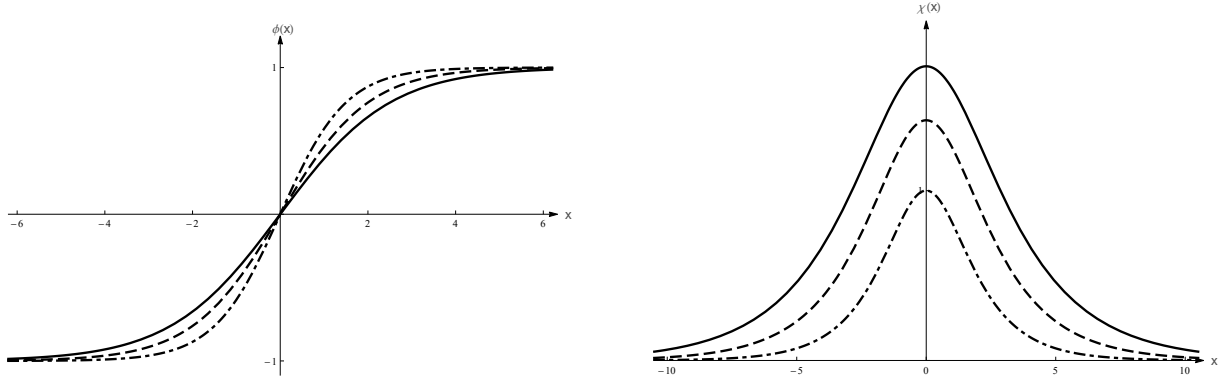


Figura 2.5: Soluções (2.98) com sinais positivos, nas quais os valores do parâmetro são: $r = 1/5$ (linha sólida), $r = 1/4$ (linha tracejada) e $r = 1/3$ (linha ponto-tracejada).

que o campo χ assume seu valor máximo em $x = 0$ que corresponde ao centro do *kink*, descrito pelo campo ϕ . Vemos também que no limite $r \rightarrow 1/2$ as soluções acima tendem às soluções (2.94), que representam uma órbita reta no mesmo setor topológico.

Podemos também, usando o método das órbitas tentativas, encontrar as soluções estáticas para os quatro setores que possuem energia degenerada. Para os setores $v_1 \longleftrightarrow v_3$ e $v_1 \longleftrightarrow v_4$, usaremos a órbita $r\chi^2 + \phi = 1$. Derivando essa órbita com relação a variável x e usando as equações de primeira ordem, verificamos que $r = 1/4$. Desse modo, a órbita pode ser expressa na forma

$$\frac{\chi^2}{4} + \phi = 1. \quad (2.99)$$

Essa órbita nos permite desacoplar as equações de primeira ordem para obter as soluções

$$\phi(x) = \frac{1}{2} (1 \mp \tanh(x/2)) \quad \text{e} \quad \chi(x) = \pm \sqrt{2(1 \pm \tanh(x/2))}. \quad (2.100)$$

Para os dois setores restantes $v_2 \longleftrightarrow v_3$ e $v_2 \longleftrightarrow v_4$, utilizamos a órbita $r\chi^2 - \phi = 1$. Realizando um procedimento análogo ao caso anterior, chegamos as seguintes soluções

$$\phi(x) = -\frac{1}{2} (1 \mp \tanh(x/2)) \quad \text{e} \quad \chi(x) = \pm \sqrt{2(1 \pm \tanh(x/2))}. \quad (2.101)$$

Capítulo 3

Branas espessas

No início dos anos 80, K. Akama [81] e V.A. Rubakov e M.E. Shaposhnikov [82] propuseram, de forma independente, a ideia de que nós vivemos em uma hipersuperfície 4-dimensional (chamada de brana) que estaria imersa em um espaço-tempo de dimensão superior (chamado de *bulk*). Nesse cenário, conhecido como mundo brana, os campos do modelo padrão estariam confinados na brana enquanto a gravidade poderia propagar-se por todas as dimensões. Contudo, uma questão bastante importante que emerge nesse cenário diz respeito a localização da gravidade na brana. Um modelo amplamente estudado na literatura, que lida com essa questão, foi introduzido por Randall e Sundrum (RS) [37] no final da década de 90. Tal modelo é constituído de uma brana infinitamente fina imersa em um espaço-tempo de Anti-de-Sitter 5-dimensional (AdS_5), no qual a dimensão extra possui extensão infinita. Posteriormente, foi investigado nas Refs. [38, 39] versões generalizadas desse modelo, nas quais a espessura da brana é considerada. Essas são chamadas de branas espessas e nós vamos estudar algumas de suas principais características neste capítulo.

3.1 Branas modeladas por um campo escalar

Cenários de mundo brana com uma única dimensão extra de extensão infinita podem ser descritos pelo elemento de linha:

$$ds_5^2 = e^{2A} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dy^2, \quad (3.1)$$

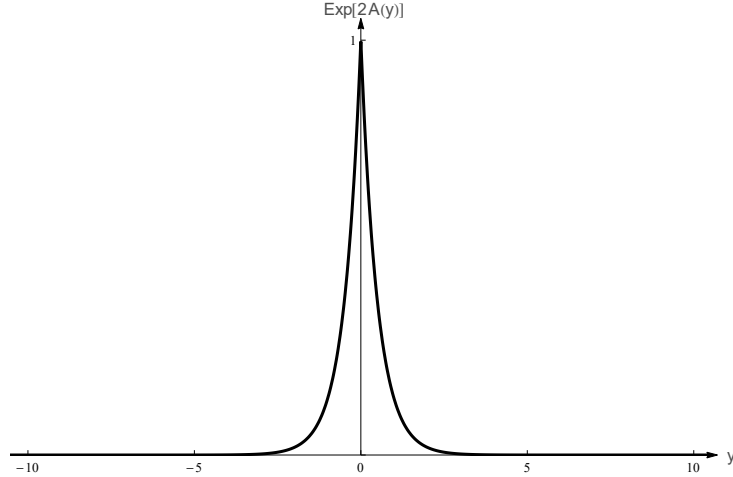


Figura 3.1: Fator de deformação do modelo RS.

onde $A = A(y)$ é a função de deformação (e^{2A} é chamado de fator de deformação), y é a dimensão extra e $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$ representa o tensor métrico de Minkowski quadridimensional ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$).

No modelo RS [37], a função de deformação é proporcional à $-|y|$. Como consequência, o fator de deformação possui um bico em $y = 0$ e decai exponencialmente com o módulo de y , conforme pode ser visto na Fig. 3.1. Por esse motivo, o modelo RS é comumente chamado de brana fina.

Como foi dito anteriormente, existem também modelos de branas espessas os quais aparecem devido a inclusão de campos escalares acoplados à gravidade. Nesse cenário, a ação em $(4 + 1)$ dimensões pode ser escrita na forma

$$S = \int dx^4 dy \sqrt{|g|} \left(-\frac{R}{4} + \mathcal{L} \right), \quad (3.2)$$

onde g é o determinante da métrica $g_{ab} = \text{diag}(e^{2A}, -e^{2A}, -e^{2A}, -e^{2A}, -1)$, R é o escalar de Ricci e $\mathcal{L}$ representa a densidade de lagrangiana associada ao campo escalar. Além disso, estamos assumindo que $4\pi G_5 = 1$ por simplicidade.

Para modelos de um único campo escalar com dinâmica padrão, a densidade de lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{ab} \partial^a \phi \partial^b \phi - V(\phi), \quad (3.3)$$

assim, a variação da ação (3.2) com relação ao campo escalar resulta na equação de

movimento

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_a(\sqrt{|g|}g^{ab}\partial_b\phi) + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (3.4)$$

Por outro lado, a variação da ação (3.2) com relação a métrica g_{ab} nos dá as equações de Einstein

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = 2T_{ab}, \quad (3.5)$$

onde R_{ab} é o tensor de curvatura, o qual pode ser escrito em termos dos símbolos de Christoffel:

$$R_{ab} = \partial_c\Gamma_{ba}^c - \partial_b\Gamma_{ca}^c + \Gamma_{cd}^c\Gamma_{ba}^d - \Gamma_{bd}^c\Gamma_{ca}^d, \quad (3.6)$$

com

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(\partial_b g_{cd} + \partial_c g_{db} - \partial_d g_{bc}). \quad (3.7)$$

Para a geometria deformada (3.1), os símbolos de christoffel não nulos são:

$$\Gamma_{4\mu}^\mu = \Gamma_{\mu 4}^\mu = A', \quad (3.8a)$$

$$\Gamma_{00}^4 = -\Gamma_{ii}^4 = A'e^{2A}, \quad (3.8b)$$

onde $i = 1, 2, 3$ e linha $(')$ representa derivada com relação a y . Portanto, o tensor de Ricci (3.6) passa a ser

$$R_{00} = -R_{ii} = e^{2A}(A'' + 4A'^2), \quad (3.9a)$$

$$R_{44} = -4(A'' + A'^2), \quad (3.9b)$$

e o escalar de Ricci fica

$$R = g^{ab}R_{ab} = 8A'' + 20A'^2. \quad (3.10)$$

Note que nós temos calculado todas as quantidades de interesse associadas ao lado esquerdo das equações de Einstein.

Vamos agora focar nossa atenção na parte relacionada a fonte de matéria. O tensor energia-momento pode ser definido como [83, 84]

$$T_{ab} = \frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{ab}}, \quad (3.11)$$

com

$$S_M = \int dx^4 dy \sqrt{|g|} \mathcal{L}, \quad (3.12)$$

representando a ação para a matéria. Desse modo, para a densidade de lagrangiana (3.3) o tensor energia-momento pode ser expresso na forma

$$T_{ab} = \partial_a \phi \partial_b \phi - g_{ab} \left(\frac{1}{2} g^{cd} \partial_c \phi \partial_d \phi - V(\phi) \right). \quad (3.13)$$

Assumindo que o campo escalar só depende da dimensão extra, isto é $\phi = \phi(y)$, temos que

$$T_{00} = -T_{ii} = e^{2A} \left(\frac{1}{2} \phi'^2 + V(\phi) \right), \quad (3.14a)$$

$$T_{44} = \frac{1}{2} \phi'^2 - V(\phi). \quad (3.14b)$$

Portanto, as equações de Einstein são

$$3A'' + 6A'^2 = -\phi'^2 - 2V(\phi), \quad (3.15a)$$

$$6A'^2 = \phi'^2 - 2V(\phi). \quad (3.15b)$$

ou ainda,

$$A'' = -\frac{2}{3} \phi'^2, \quad (3.16a)$$

$$A'^2 = \frac{1}{6} \phi'^2 - \frac{1}{3} V(\phi). \quad (3.16b)$$

Além disso, temos que a equação de movimento (3.4) passa a ser

$$\phi'' + 4A'\phi' = \frac{dV}{d\phi}. \quad (3.17)$$

Observe que o conjunto de equações (3.16) e (3.17) são não-lineares e, em geral, difíceis de ser tratadas analiticamente. Contudo, podemos implementar um formalismo de primeira ordem que facilita a análise dessas equações. Para tanto, devemos considerar que

o potencial escalar tem a forma específica [38]:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}W_\phi^2 - \frac{4}{3}W^2, \quad (3.18)$$

onde W é uma função arbitrária do campo ϕ . Consequentemente, temos que as equações de primeira ordem

$$\phi' = W_\phi, \quad (3.19a)$$

$$A' = -\frac{2}{3}W, \quad (3.19b)$$

resolvem as equações (3.16) e (3.17).

A densidade de energia é dada pela componente 00 do tensor energia-momento

$$\rho(y) = e^{2A} \left(\frac{1}{2} \phi'^2 + V(\phi) \right), \quad (3.20)$$

que, usando as equações (3.18) e (3.19), pode ser reescrita como

$$\rho(y) = \frac{d}{dy} (e^{2A} W). \quad (3.21)$$

Portanto, a energia total é dada por

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dy \rho(y) = \left(e^{2A(y)} W(y) \right) \Big|_{y=-\infty}^{y=\infty}. \quad (3.22)$$

Em geral, a função $e^{2A(y)} W(y) \rightarrow 0$ conforme $y \rightarrow \pm\infty$, consequentemente, a energia associada a brana espessa é nula.

3.2 Estabilidade

No intuito de investigar a estabilidade do setor gravitacional da brana espessa, seguiremos o procedimento adotado nas Refs. [85, 86]. Inicialmente, fazemos a redefinição $dy = e^A dz$ em (3.1) para obter

$$ds^2 = e^{2A} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dz^2) = e^{2A} \eta_{ab} dx^a dx^b = g_{ab} dx^a dx^b, \quad (3.23)$$

com $\eta_{ab} = \tilde{g}_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1, -1)$. Uma vez que a métrica (3.23) é conformalmente plana, podemos usar a relação geral que conecta o tensor de Einstein para métricas na forma $g_{ab} = \Omega^2 \tilde{g}_{ab}$:

$$G_{ab} = \tilde{G}_{ab} + (d-2) \left[\tilde{\nabla}_a \ln \Omega \tilde{\nabla}_b \ln \Omega - \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \ln \Omega + \tilde{g}_{ab} \left(\tilde{\nabla}_c \tilde{\nabla}^c \ln \Omega + \frac{(d-3)}{2} \tilde{\nabla}_c \ln \Omega \tilde{\nabla}^c \ln \Omega \right) \right], \quad (3.24)$$

onde d é o número de dimensões e $\tilde{\nabla}$ é a derivada covariante, avaliada com respeito a métrica $\tilde{g}_{ab}$. No presente caso, temos que $d = 5$ e $\Omega^2 = e^{2A}$, então a equação acima assume a forma

$$G_{ab} = \tilde{G}_{ab} + 3 \left[\tilde{\nabla}_a A \tilde{\nabla}_b A - \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b A + \tilde{g}_{ab} \left(\tilde{\nabla}_c \tilde{\nabla}^c A + \tilde{\nabla}_c A \tilde{\nabla}^c A \right) \right]. \quad (3.25)$$

Agora, vamos considerar pequenas perturbações na métrica tal que

$$ds^2 = e^{2A}(\eta_{ab} + h_{ab}(x, z))dx^a dx^b, \quad (3.26)$$

com $h_{a4} = 0$. Além disso, vamos admitir que as perturbações h_{ab} satisfazem o calibre transversal de traço nulo, ou seja, $\partial_\mu h^{\mu\nu} = 0$ e $h^\mu_\mu = 0$. Nesse caso, a perturbação linearizada do tensor de Einstein (3.25) pode ser escrita como

$$\delta G_{ab} = -\frac{1}{2} \partial^c \partial_c h_{ab} - \frac{3}{2} \partial_c h_{ab} \partial^c A + 3 h_{ab} (\partial_c \partial^c A + \partial_c A \partial^c A), \quad (3.27)$$

onde temos usado $\delta \tilde{G}_{ab} = -\frac{1}{2} \partial^c \partial_c h_{ab}$. Em termos das componentes $\mu\nu$, esse tensor assume a forma

$$\delta G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \partial^c \partial_c h_{\mu\nu} - \frac{3}{2} \partial_c h_{\mu\nu} \partial^c A + 3 h_{\mu\nu} (\partial_c \partial^c A + \partial_c A \partial^c A). \quad (3.28)$$

Por outro lado, a partir da equação (3.25) podemos inferir que o tensor energia-momento é dado por

$$T_{ab} = \frac{3}{2} [\partial_a A \partial_b A - \partial_a \partial_b A + \eta_{ab} (\partial_c \partial^c A + \partial_c A \partial^c A)]. \quad (3.29)$$

A perturbação linearizada do tensor energia-momento, nas componentes $\mu\nu$, pode então ser expressa como

$$\delta T_{\mu\nu} = \frac{3}{2} h_{\mu\nu} (\partial_c \partial^c A + \partial_c A \partial^c A). \quad (3.30)$$

Portanto, a equação de Einstein linearizada, $\delta G_{\mu\nu} = 2\delta T_{\mu\nu}$, resulta em

$$\partial^c \partial_c h_{\mu\nu} + 3\partial^c A \partial_c h_{\mu\nu} = 0. \quad (3.31)$$

Como $\partial^c \partial_c = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu - \partial_z^2$ e $A = A(z)$, podemos ainda reescrever a equação acima da seguinte maneira:

$$(\square - \partial_z^2 - 3A_z \partial_z) h_{\mu\nu} = 0. \quad (3.32)$$

A fim de compreender como essa equação está relacionada com a estabilidade do sistema sob pequenas perturbações na métrica, podemos fazer a definição:

$$h_{\mu\nu}(x, z) = e^{ipx} e^{-3A/2} H_{\mu\nu}(z), \quad (3.33)$$

que nos permite obter uma equação do tipo-Schrödinger unidimensional:

$$(-\partial_z^2 + U(z)) H_{\mu\nu} = p^2 H_{\mu\nu}, \quad (3.34)$$

onde $U(z)$ é o potencial, dado por

$$U(z) = \frac{9}{4} A_z^2 + \frac{3}{2} A_{zz}. \quad (3.35)$$

A equação (3.34) rege a estabilidade do sistema. Note que tal equação pode ser fatorizada na forma

$$\left(-\partial_z - \frac{3}{2} A_z\right) \left(\partial_z - \frac{3}{2} A_z\right) H_{\mu\nu} = Q^\dagger Q H_{\mu\nu} = p^2 H_{\mu\nu}. \quad (3.36)$$

Essa fatorização garante que não há modos com autovalor negativo, ou seja, $p^2 \geq 0$. Portanto, o sistema é estável sob pequenas flutuações na métrica.

O modo zero ($p^2 = 0$) é obtido fazendo $Q H_{\mu\nu}^{(0)} = 0$, o que resulta em

$$H_{\mu\nu}^{(0)} = N_{\mu\nu} e^{3A(z)/2}, \quad (3.37)$$

onde $N_{\mu\nu}$ é um fator de normalização. Para que a gravidade 4-dimensional seja recuperada na brana o modo zero deve ser normalizável, isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{3A(z)} = \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{2A(y)} < \infty. \quad (3.38)$$

Essa condição implica que o fator de deformação deve ir a zero no limite $y \rightarrow \pm\infty$.

3.3 Modelos

3.3.1 Modelo 1

No intuito de exemplificar um modelo de brana espessa, analisaremos o modelo apresentado na Ref. [87] (veja também a Ref. [88]). A função do campo escalar $W(\phi)$ é dada por

$$W(\phi) = \lambda \left(\eta^2 \phi - \frac{\phi^3}{3} \right). \quad (3.39)$$

Essa função já foi estudada no capítulo anterior, no qual vimos que ela corresponde ao superpotencial do modelo ϕ^4 no espaço-tempo plano.

O potencial escalar pode ser obtido por meio da equação (3.18), assim temos

$$V(\phi) = \lambda^2 \left(\frac{1}{2} (\eta^2 - \phi^2)^2 - \frac{4}{3} \left(\eta^2 \phi - \frac{\phi^3}{3} \right)^2 \right), \quad (3.40)$$

que está plotado na Fig. 3.2. Usando a equação (3.19a), encontramos a solução para o campo escalar

$$\phi(y) = \eta \tanh(\eta \lambda y), \quad (3.41)$$

que, como vimos anteriormente, é uma solução tipo-*kink*. Na Fig. 3.2, podemos ver o gráfico da solução para alguns valores de λ , com η fixo. Note que, a medida que o parâmetro λ aumenta, a espessura da solução diminui.

Para esse modelo, a equação (3.19b) assume a forma

$$A' = -\frac{2}{3} \lambda \eta^3 \left(\tanh(\eta \lambda y) - \frac{1}{3} \tanh^3(\eta \lambda y) \right). \quad (3.42)$$

A integração da equação acima fornece uma expressão analítica para a função de deformação, dada por

$$A(y) = \frac{1}{9} \eta^2 \left(\operatorname{sech}^2(\eta \lambda y) - 4 \ln(\cosh(\eta \lambda y)) - 1 \right). \quad (3.43)$$

Como usual, usamos a condição $A(0) = 0$. Além disso, encontramos o fator de deformação e densidade de energia do modelo, que estão plotados na Fig. 3.2 para vários valores de

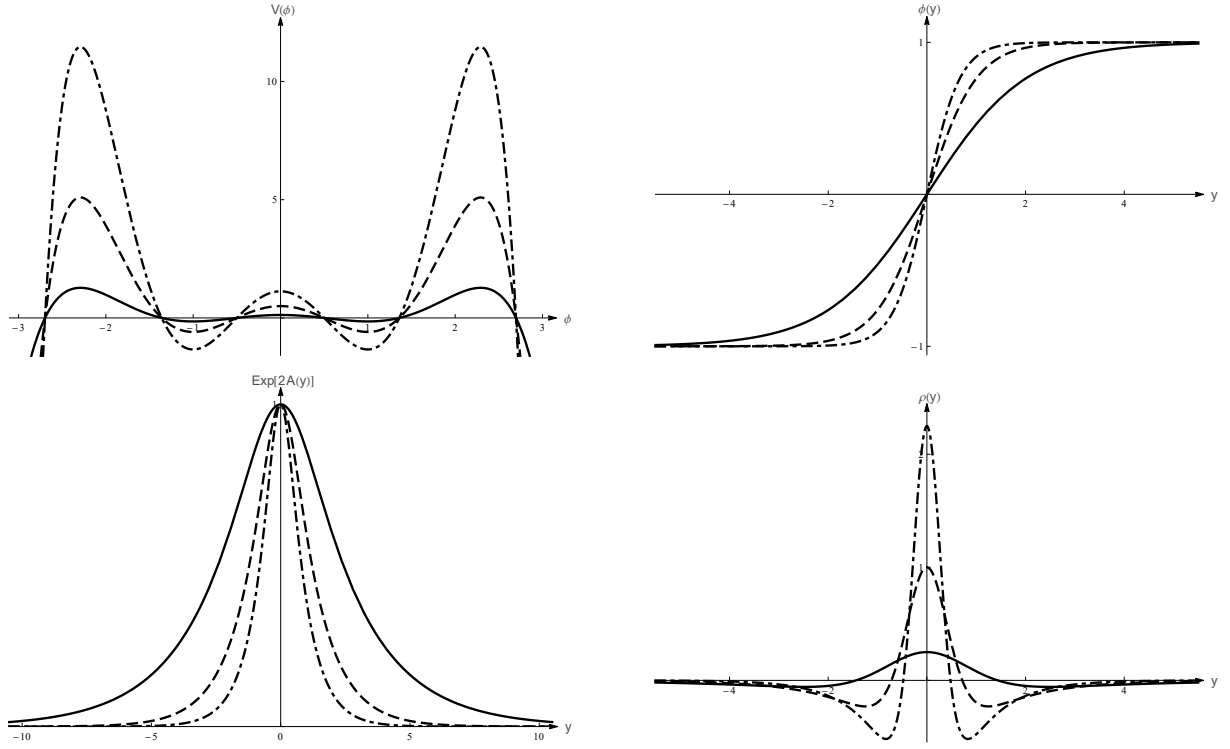


Figura 3.2: Potencial, campo escalar, fator de deformação e densidade de energia associados ao modelo 1. Os valores dos parâmetros são $\lambda = 1/2$ (linha sólida), $\lambda = 1$ (linha tracejada) e $\lambda = 3/2$ (linha ponto-tracejada) com $\eta = 1$.

λ , mantendo η fixo.

Um aspecto bastante interessante desse modelo consiste no chamado limite de parede fina. Nesse limite, tomamos $\lambda \rightarrow \infty$ e $\eta \rightarrow 0$, com $\lambda\eta^3$ fixo. Isso significa que podemos aproximar a solução tipo-*kink* dada pela equação (3.41) a uma função sinal, dada por

$$\phi(y) \simeq \eta \operatorname{sgn}(y). \quad (3.44)$$

Consequentemente, a equação (3.42) muda e passa a ser escrita como

$$A' = -\frac{4}{9}\lambda\eta^3 \operatorname{sgn}(y). \quad (3.45)$$

A integração da equação acima resulta na seguinte função de deformação:

$$A(y) = -k|y|, \quad (3.46)$$

com $k = \frac{4}{9}\lambda\eta^3$. Portanto, vemos que essa função de deformação é equivalente a que

aparece no modelo RS. Além disso, observe que

$$\phi'^2 = \sigma\delta(y), \quad W^2 = \frac{1}{4}\sigma^2, \quad (3.47)$$

onde $\sigma = 4\lambda\eta^3/3 = 3k$ é chamada de tensão da brana. Assim, a ação (3.2) escrita explicitamente como

$$S = \int dx^4 dy \sqrt{|g|} \left(-\frac{R}{4} + \frac{1}{2}g_{ab}\partial^a\phi\partial^b\phi - \frac{1}{2}W_\phi^2 + \frac{4}{3}W^2 \right), \quad (3.48)$$

nesse limite, passa a ser dada por

$$S = \int dx^4 dy \sqrt{|g|} \left(-\frac{R}{4} + \frac{\sigma^2}{3} - \sigma\delta(y) \right). \quad (3.49)$$

Aqui, o termo $-\sigma^2/3$ é identificado como sendo a constante cosmológica 5-dimensional, isto é, $\Lambda_5 = -\sigma^2/3 = -3k^2$. Esse é precisamente o ajuste fino do modelo RS.¹

3.3.2 Modelo 2

Vamos agora estudar um outro modelo, cuja função W é dada por

$$W(\phi) = \frac{p}{2p-1}\phi^{\frac{2p-1}{p}} - \frac{p}{2p+1}\phi^{\frac{2p+1}{p}}. \quad (3.50)$$

Aqui, o parâmetro p é um número inteiro ímpar que controla a forma com a qual o campo escalar auto-interage. Esse modelo foi primeiramente estudado na Ref. [90], e analisado no contexto de mundo brana na Ref. [91].

O potencial escalar associado a esse modelo pode ser escrito como

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \left(\phi^{\frac{p-1}{p}} - \phi^{\frac{p+1}{p}} \right)^2 - \frac{4}{3} \left(\frac{p}{2p-1}\phi^{\frac{2p-1}{p}} - \frac{p}{2p+1}\phi^{\frac{2p+1}{p}} \right)^2, \quad (3.51)$$

que está plotado na Fig. 3.3. Para o campo escalar, temos que a equação de primeira ordem é

$$\phi' = \phi^{\frac{p-1}{p}} - \phi^{\frac{p+1}{p}}. \quad (3.52)$$

¹No modelo RS, o ajuste fino é dado por $\Lambda_5 = -24M^3k^2$, com M sendo a massa de Planck 5-dimensional. Uma vez que, adotamos $4\pi G_5 = 1$ por simplicidade, a relação $M^3 = 1/32\pi G_5$ (veja por exemplo, [89]) implica em $M^3 = 1/8$.

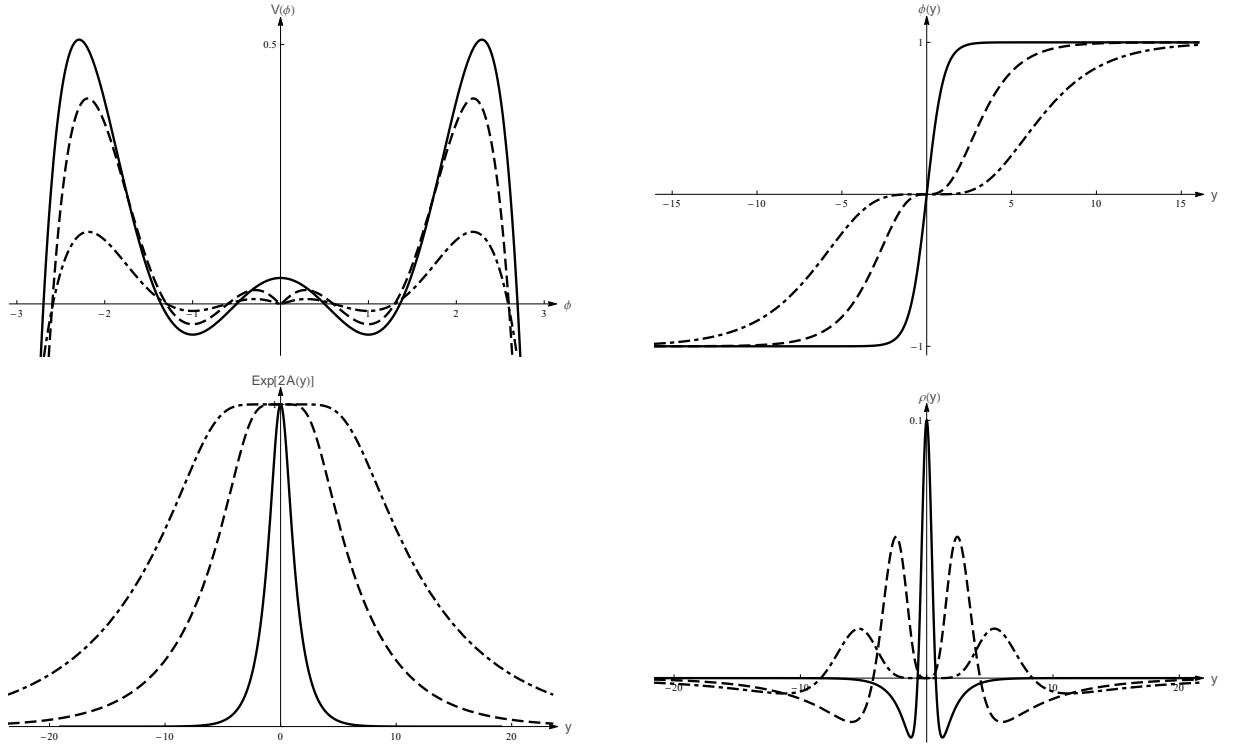


Figura 3.3: Potencial, campo escalar, fator de deformação e densidade de energia associados ao modelo 2. Os valores dos parâmetros são $p = 1$ (linha sólida), $p = 3$ (linha tracejada) e $p = 5$ (linha ponto-tracejada). Para melhor visualização dos gráficos do potencial e da densidade de energia, usamos $V_1/10$ e $\rho_1/10$.

Essa equação possui solução analítica dada por

$$\phi(y) = \tanh^p \left(\frac{y}{p} \right). \quad (3.53)$$

Note que, para $p = 1$, a solução é um *kink* usual. Contudo, para $p = 3, 5, 7, \dots$, o comportamento da solução muda e o campo agora passa a ser um duplo-*kink*, conforme pode ser visto na Fig. 3.3.

Vamos agora investigar a função de deformação desse modelo. Usando a equação (3.42) temos que

$$A' = -\frac{2}{3} \left(\frac{p}{2p-1} \tanh^{2p-1} \left(\frac{y}{p} \right) - \frac{p}{2p+1} \tanh^{2p+1} \left(\frac{y}{p} \right) \right), \quad (3.54)$$

cuja solução resulta em

$$A(y) = -\frac{1}{3} \frac{p}{2p+1} \tanh^{2p} \left(\frac{y}{p} \right) - \frac{4}{3} \frac{p^2}{4p^2-1} \left(\ln \left(\cosh \left(\frac{y}{p} \right) \right) - \sum_{n=1}^{p-1} \frac{1}{2n} \tanh^{2n} \left(\frac{y}{p} \right) \right). \quad (3.55)$$

A partir desse resultado, podemos facilmente obter o fator de deformação e a densidade de energia do modelo. O comportamento dessas quantidades podem ser vistos na Fig. 3.3. Observe que, quando $p = 1$, a densidade de energia tem apenas um máximo em $y = 0$. No entanto, quando $p = 3, 5, 7, \dots$, a densidade de energia se divide e passa a exibir dois máximos simétricos. Na literatura, modelos de branas que apresentam essa característica são comumente chamadas de branas com estrutura interna. Esses modelos têm sido amplamente estudados nos últimos anos, por vários autores com distintas motivações [92–100]. Em particular, nas Refs. [98–100] têm sido mostrado que a estrutura interna desempenha um papel importante no estudo de localização de férmions na brana.

3.3.3 Modelo 3

O terceiro modelo que iremos investigar é descrito pela função

$$W(\phi) = \phi - \frac{\phi^{2n+1}}{2n+1}, \quad (3.56)$$

onde n é um número inteiro, $n \geq 1$. Esse modelo foi analisado no cenário de mundo brana na Ref. [101] e tem sido inspiração para outros trabalhos na mesma direção [102–105]. Para esse modelo, o potencial escalar é dado por

$$V(\phi) = \frac{1}{2}(1 - \phi^{2n})^2 - \frac{4}{3}\phi^2 \left(1 - \frac{\phi^{2n}}{2n+1}\right)^2. \quad (3.57)$$

Esse potencial possui mínimos em $\phi_{\pm} = \pm 1$, conforme podemos ver na Fig. 3.4. Assim, temos que $V(\pm 1) = -4/3(2n/(2n+1))^2$, o qual tende a $-4/3$ para valores muito grandes do parâmetro n . Para o campo escalar, temos a seguinte equação:

$$\phi' = 1 - \phi^{2n}, \quad (3.58)$$

cujas soluções são obtidas numericamente e estão plotadas na Fig. 3.4. Observe que, para valores muito grandes de n , a solução tipo-*kink* se torna compacta.

A função de deformação associada a esse modelo pode ser escrita em função do campo escalar, isto é,

$$A(\phi) = -\frac{1}{3} \frac{\phi^2}{2n+1} - \frac{2n\phi^2}{3} \frac{{}_2F_1(1, 1/n; 1 + 1/n; \phi^{2n})}{2n+1}, \quad (3.59)$$

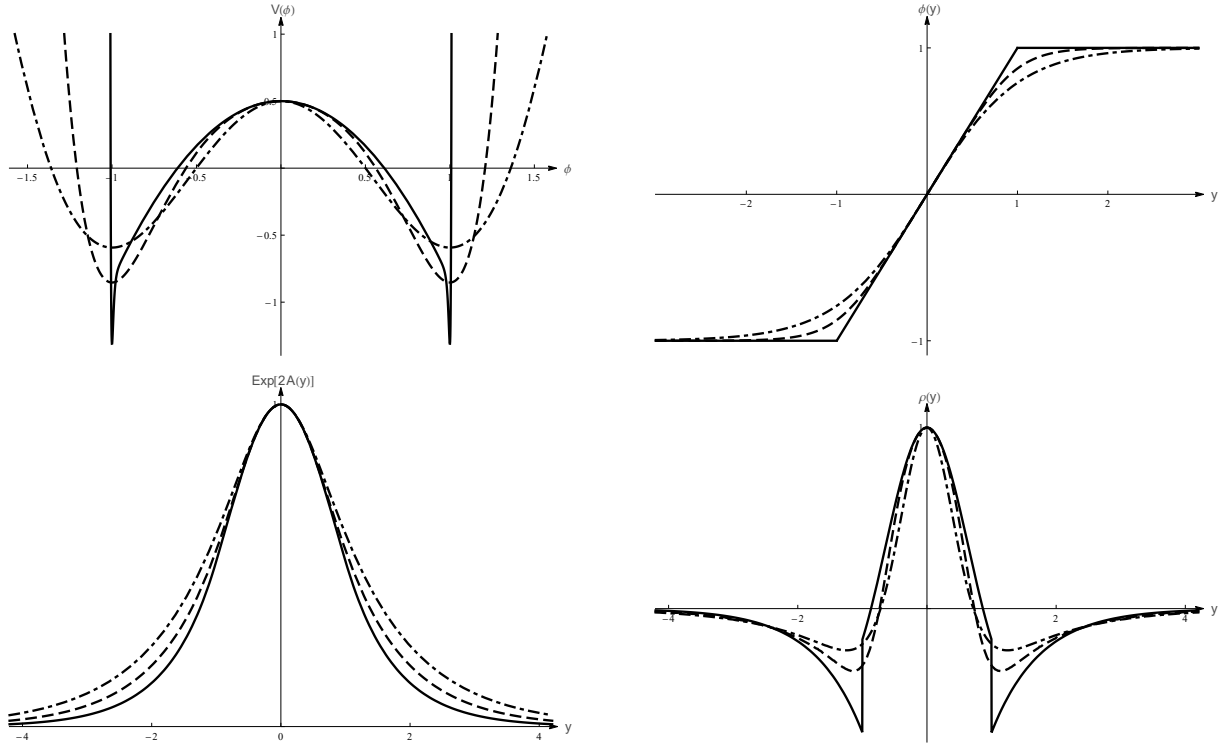


Figura 3.4: Potencial, campo escalar, fator de deformação e densidade de energia associados ao modelo 3. Os valores dos parâmetros são $n = 1$ (linha ponto-tracejada), $n = 2$ (linha tracejada) e $n = 60$ (linha sólida).

com ${}_2F_1$ sendo a função hipergeométrica. Assim, usando a solução do campo escalar, podemos encontrar as expressões para o fator de deformação e densidade de energia em funções da dimensão extra. O comportamento dessas quantidades pode ser visto na Fig. 3.4.

No limite no qual n é muito grande, encontramos um resultado analítico para a função de deformação, dado por

$$A(y) = \begin{cases} -\frac{1}{3}y^2, & |y| \leq 1, \\ -\frac{2}{3}|y| + \frac{1}{3}, & |y| > 1. \end{cases} \quad (3.60)$$

Esse resultado permite concluir que a brana é espessa dentro do intervalo compacto $[-1, 1]$, porém, ela tem o perfil de brana fina fora desse intervalo. Devido a esse comportamento híbrido, esse modelo de brana é chamado de brana híbrida. Além disso, notamos que

nesse mesmo limite a densidade de energia assume a forma

$$\rho(y) = e^{2A(y)} \begin{cases} -\frac{4}{3}y^2 + 1, & |y| \leq 1, \\ -\frac{4}{3}, & |y| > 1. \end{cases} \quad (3.61)$$

Aqui, é importante destacar que a densidade de energia apresenta uma descontinuidade finita em $|y| = 1$. Apesar disso, a energia é nula, do mesmo modo que ocorre com branas espessas.

Capítulo 4

Novos resultados para *kinks* e suas conexões com a mecânica quântica

Os capítulos anteriores são de revisão e constituem uma base teórica importante para o entendimento de nossas contribuições sobre o assunto, que serão apresentadas neste e no próximo capítulo. No presente capítulo, trataremos do artigo [60], no qual investigamos modelos de um único campo escalar real em $(1 + 1)$ dimensões espaço-temporais. Inspirados pela Refs. [34–36], focamos nossa atenção em vários aspectos relacionados ao potencial de estabilidade. Nessa perspectiva, utilizamos o procedimento de deformação e exploramos a rota para obter modelos distintos de teoria de campos que apresentam o mesmo potencial de estabilidade. A partir de sistemas que interagem polinomialmente ou hiperbolicamente, usamos uma função deformadora que nos permitiu construir outros modelos de teorias de campos com a característica de ter o mesmo potencial de estabilidade. Essa função deformadora leva a potenciais suaves de acordo com uma escolha específica de um único parâmetro. Entre os resultados, mostramos que, para modelos com setores topológicos assimétricos, o surgimento de um novo potencial de estabilidade também é possível.

4.1 Generalidades

Inicialmente, consideramos dois modelos definidos pelas densidades de langragiana

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - \tilde{V}(\chi), \quad (4.1a)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (4.1b)$$

onde χ e ϕ são os campos escalares reais; $\tilde{V}(\chi)$ e $V(\phi)$ são potencias que descrevem as auto-interações dos campos. Podemos então utilizar o método da deformação e introduzir uma função deformadora $f = f(\phi)$, a qual vincula o modelo (4.1a) com o modelo deformado (4.1b) relacionando os potenciais $\tilde{V}(\chi)$ e $V(\phi)$ da seguinte maneira

$$V(\phi) = \frac{\tilde{V}(\chi \rightarrow f(\phi))}{(df/d\phi)^2}. \quad (4.2)$$

Isso permite mostrar que, se o modelo inicial possui a solução estática $\chi(x)$, então o modelo deformado possui a solução estática dada por $\phi(x) = f^{-1}(\chi(x))$, onde f^{-1} representa a função inversa de f .

Conforme já foi discutido, o estudo da estabilidade linear leva a uma equação tipo-Schrödinger, que para o campo $\chi(x)$ escrevemos

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \tilde{U}(x) \right) \tilde{\eta}_n(x) = \tilde{\omega}_n^2 \tilde{\eta}_n(x), \quad (4.3)$$

onde $\tilde{U}(x)$ é o potencial de estabilidade, dado por

$$\tilde{U}(x) = \left. \frac{d^2 \tilde{V}}{d\chi^2} \right|_{\chi=\chi(x)}. \quad (4.4)$$

Esse potencial admite pelo menos um estado ligado, o modo zero, que está presente devido a invariância translacional. Ele é dado por

$$\tilde{\eta}_0(x) = \tilde{\mathcal{N}} \frac{d\chi(x)}{dx}, \quad (4.5)$$

onde $\tilde{\mathcal{N}}$ é uma constante de normalização.

Consideramos que o potencial pode ser escrito na forma alternativa $\tilde{V}(\chi) = (1/2) \tilde{W}_\chi^2$,

onde $\widetilde{W} = \widetilde{W}(\chi)$ e $\widetilde{W}_\chi = d\widetilde{W}/d\chi$. A densidade de energia é expressa como

$$\widetilde{\rho}(x) = \left(\frac{d\chi(x)}{dx} \right)^2. \quad (4.6)$$

Além disso, a equação (4.3) pode ser fatorizada em $\widetilde{A}^\dagger \widetilde{A} \widetilde{\eta}_n(x) = \widetilde{\omega}_n^2 \widetilde{\eta}_n(x)$, onde

$$\widetilde{A}^\dagger = -\frac{d}{dx} - \widetilde{W}_{\chi\chi} \quad \text{e} \quad \widetilde{A} = \frac{d}{dx} - \widetilde{W}_{\chi\chi}.$$

Isso leva à autovalores $\widetilde{\omega}_n^2$ não-negativos, indicando que as soluções estáticas da teoria não-deformada (4.1a) são linearmente estáveis.

De maneira análoga, o estudo da estabilidade linear associada ao campo escalar $\phi(x)$, resulta em uma equação tipo-Schrödinger, cujo potencial de estabilidade é dado por

$$U(x) = \left. \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right|_{\phi(x)=f^{-1}(\chi(x))}. \quad (4.7)$$

Já o modo zero pode ser escrito como

$$\eta_0(x) = \mathcal{N} \frac{d\phi(x)}{dx}. \quad (4.8)$$

Do mesmo modo do caso anterior, assumimos que o potencial deformado (4.2) pode ser escrito como $V(\phi) = (1/2)W_\phi^2$, onde $W = W(\phi)$ e $W_\phi = dW/d\phi$. A densidade de energia é dada por

$$\rho(x) = \left(\frac{d\phi(x)}{dx} \right)^2, \quad (4.9)$$

e a equação tipo-Schrödinger para esse sistema pode também ser fatorizada na forma $A^\dagger A \eta_n(x) = \omega_n^2 \eta_n(x)$, assegurando que as soluções estáticas são linearmente estáveis.

4.2 Procedimento

Nesta seção, o objetivo é gerar o mesmo potencial de estabilidade a partir de diferentes modelos de teoria de campos. Assumindo que $\chi = f(\phi)$ e derivando a equação (4.2), duas vezes, com respeito ao campo ϕ , obtemos

$$U(x) = \widetilde{U}(x) - \left(\frac{3f_{\phi\phi}}{f_\phi^2} \frac{d\widetilde{V}}{d\chi} \right) \bigg|_{\phi(x)=f^{-1}(\chi(x))} + \left(\frac{6f_{\phi\phi}^2}{f_\phi^4} \widetilde{V} - \frac{2f_{\phi\phi\phi}}{f_\phi^3} \widetilde{V} \right) \bigg|_{\phi(x)=f^{-1}(\chi(x))}, \quad (4.10)$$

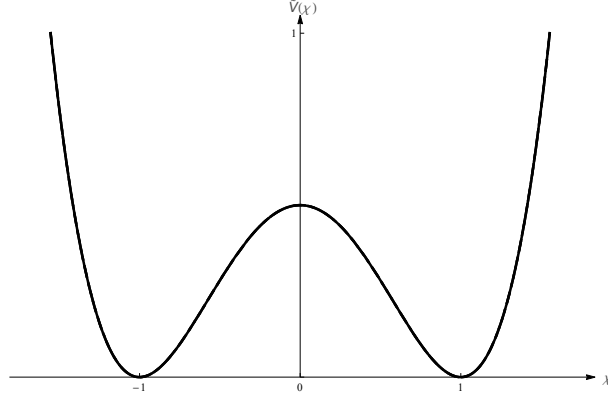


Figura 4.1: Potencial (4.14).

onde $f_\phi = df/d\phi$, $f_{\phi\phi} = d^2f/d\phi^2$ e $f_{\phi\phi\phi} = d^3f/d\phi^3$. Então, para termos o mesmo potencial de estabilidade para ambas as teorias de campo (4.1a) e (4.1b), isto é $\tilde{U}(x) = U(x)$, a função deformadora $f(\phi)$ deve satisfazer a restrição dada por

$$f_\phi f_{\phi\phi\phi} - 3f_{\phi\phi}^2 + \frac{3}{2}f_\phi^2 f_{\phi\phi} \frac{1}{\tilde{V}} \frac{d\tilde{V}}{d\chi} = 0. \quad (4.11)$$

Para qualquer potencial inicial $\tilde{V}(\chi)$, a restrição acima pode ser resolvida pela função

$$f(\phi) = a\phi + b, \quad (4.12)$$

com a e b sendo constantes reais. Agora, consideremos as duas funções deformadoras abaixo

$$f_1(\phi) = \phi + c, \quad (4.13a)$$

$$f_2(\phi) = \phi - c, \quad (4.13b)$$

onde $c > 0$ é uma constante real. Como primeiro passo para entender como nosso procedimento funciona, aplicamos essas deformações no potencial χ^4 dado por

$$\tilde{V}(\chi) = \frac{1}{2}(1 - \chi^2)^2, \quad (4.14)$$

o qual possui um setor topológico, conforme ilustrado na Fig. 4.1. Tal modelo é caracterizado por possuir dois mínimos $\chi_{\min} = \pm 1$, solução estática $\chi(x) = \pm \tanh(x)$ e densidade de energia $\tilde{\rho}(x) = \text{sech}^4(x)$. As equações (4.13) combinadas com a equação (4.2) nos

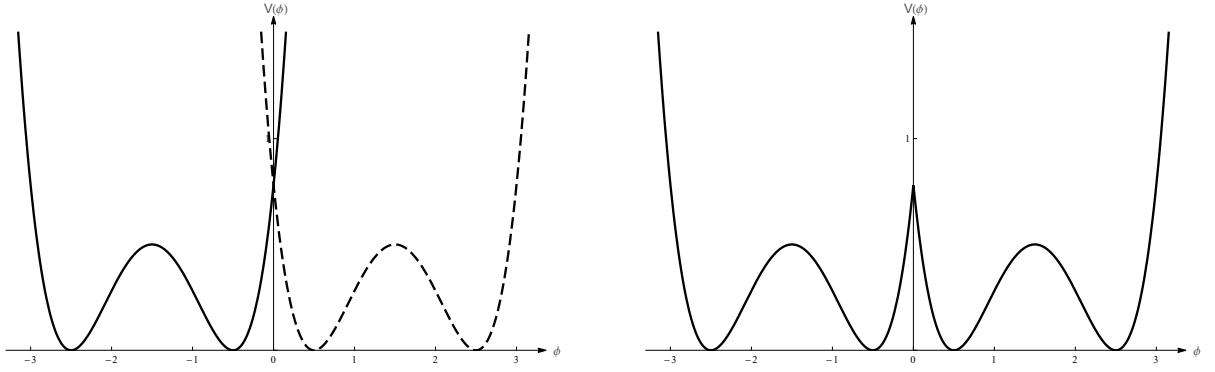


Figura 4.2: No painel esquerdo, plotamos os potenciais (4.15a) (linha sólida) e (4.15b) (linha tracejada). No painel direito, plotamos o potencial (4.16) (linha sólida). Em ambos os casos, usamos $c = 3/2$.

permite obter dois potenciais deformados dados respectivamente por

$$V_1(\phi) = \frac{1}{2} (1 - c^2 - 2c\phi - \phi^2)^2, \quad (4.15a)$$

$$V_2(\phi) = \frac{1}{2} (1 - c^2 + 2c\phi - \phi^2)^2. \quad (4.15b)$$

Note que esses potenciais produzem deslocamentos no modelo χ^4 , como pode ser visto no lado esquerdo da Fig. 4.2, onde o primeiro causa um deslocamento para esquerda e o segundo causa um deslocamento para a direita. Além disso, esses dois potenciais (4.15) podem ser vinculados em apenas um potencial dado por

$$V(\phi) = \frac{1}{2} (1 - c^2 + 2c|\phi| - \phi^2)^2, \quad (4.16)$$

que é obtido através do potencial (4.14) com a função deformadora

$$f(\phi) = c - |\phi|. \quad (4.17)$$

Observe que cada valor de c determina o ponto em que os dois potenciais deformados (4.15) são “cortados” para serem vinculados na forma da equação (4.16), como ilustrado no lado direito da Fig. 4.2. Para obter potenciais deformados como funções suaves, devemos escolher os valores de c que sejam máximos ou mínimos do potencial não-deformado, lembrando que é necessário usar $c > 0$ para obter novos potenciais.

4.3 Aplicações

Uma vez que o procedimento para encontrar diferentes modelos de teoria de campos, tendo o mesmo potencial de estabilidade, foi construído na seção anterior, podemos dar sequência a este trabalho investigando especificamente diversos modelos que auto-interagem polinomialmente ou hiperbolicamente, os quais são relacionados por uma função deformadora e admitem a característica indicada para o potencial de estabilidade.

4.3.1 Modelos polinomiais

Exemplo 1

Vamos explorar mais propriedades do potencial (4.16), o qual foi obtido considerando a função deformadora (4.17) atuando sobre o modelo χ^4 . Como foi dito anteriormente, tal potencial é uma função suave para $c = 1$ que corresponde a um mínimo do potencial não-deformado (4.14). Portanto, a equação (4.16) se torna

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2(2 - |\phi|)^2, \quad (4.18)$$

que agora possui dois setores topológicos, como ilustrado na Fig. 4.3. As soluções estáticas são $\phi(x) = \pm \tanh(x) \pm 1$ com densidade energia dada por $\rho(x) = \text{sech}^4(x)$. A partir da equação (4.7), obtemos o mesmo potencial de estabilidade para ambos os setores topológicos, dado por

$$U(x) = 4 - 6 \text{sech}^2(x), \quad (4.19)$$

que é um potencial Pöschl-Teller modificado equivalente ao obtido pelo modelo χ^4 , como pode ser visto na Fig. 4.4. Ele possui dois estados ligados, o modo zero com autovalor $\omega_0^2 = 0$ e um modo excitado com autovalor $\omega_1^2 = 3$; o modo zero é dado por

$$\eta_0(x) = \mathcal{N} \text{sech}^2(x). \quad (4.20)$$

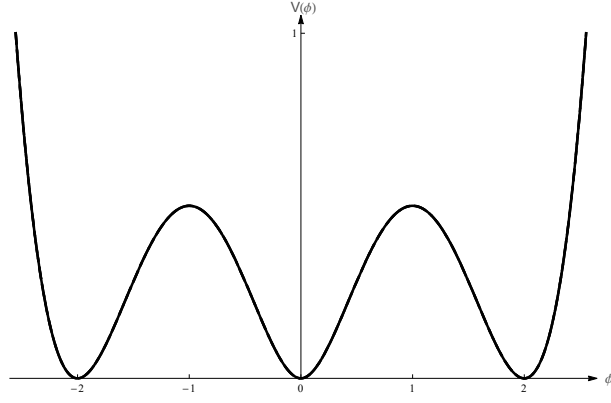


Figura 4.3: Potencial (4.18).

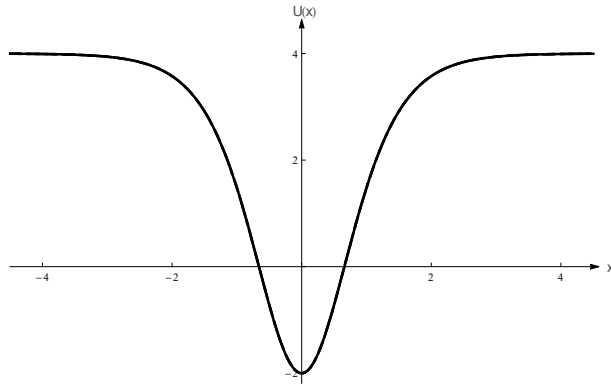


Figura 4.4: Potencial de estabilidade (4.19).

Exemplo 2

Agora, consideremos o modelo χ^6 como o modelo não-deformado,

$$\tilde{V}(\chi) = \frac{1}{2}\chi^2(1 - \chi^2)^2, \quad (4.21)$$

o qual possui os mínimos $\chi_{\min} = 0, \pm 1$ e os máximos $\chi_{\max} = \pm 1/\sqrt{3}$, caracterizando dois setores topológicos, como pode ser visto na Fig. 4.5. As soluções tipo-*kink* do modelo são dadas por

$$\chi_1(x) = -\sqrt{\frac{1 - \tanh(x)}{2}}, \quad (4.22a)$$

$$\chi_2(x) = \sqrt{\frac{1 + \tanh(x)}{2}}, \quad (4.22b)$$

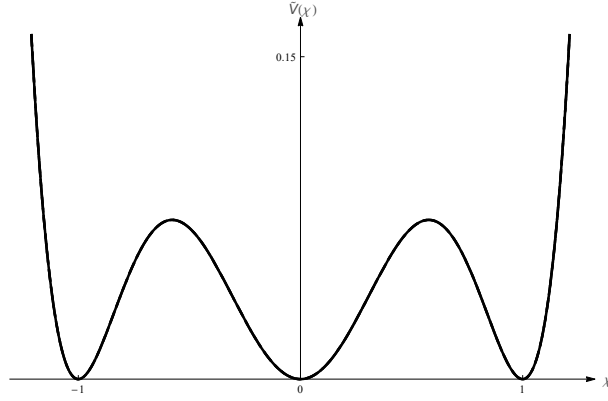


Figura 4.5: Potencial (4.21).

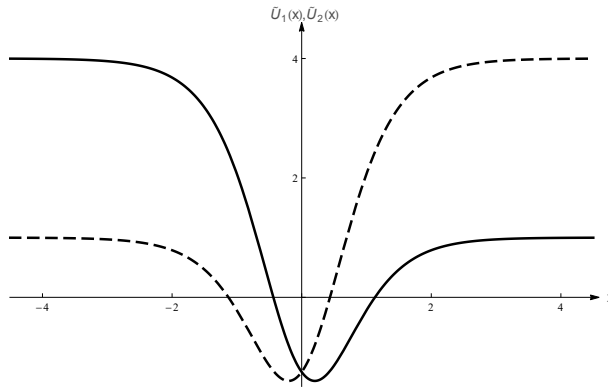


Figura 4.6: Potenciais de estabilidade (4.24a) (linha sólida) e (4.24b) (linha tracejada).

onde $\chi_1(x)$ e $\chi_2(x)$ estão associadas respectivamente aos setores esquerdo e direito do modelo χ^6 . A densidade de energia correspondente a essas soluções são respectivamente

$$\tilde{\rho}_1(x) = \frac{1}{8} \text{sech}^2(x) (1 + \tanh(x)), \quad (4.23a)$$

$$\tilde{\rho}_2(x) = \frac{1}{8} \text{sech}^2(x) (1 - \tanh(x)). \quad (4.23b)$$

Substituindo o potencial (4.21) e as soluções (4.22) na equação (4.4), obtemos os potenciais de estabilidade

$$\tilde{U}_1(x) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \tanh(x) - \frac{15}{4} \text{sech}^2(x), \quad (4.24a)$$

$$\tilde{U}_2(x) = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \tanh(x) - \frac{15}{4} \text{sech}^2(x), \quad (4.24b)$$

que possuem apenas um estado ligado com autovalor nulo, isto é, o modo zero [80]. Esses potenciais estão plotados na Fig. 4.6.

Então, aplicando a função deformadora (4.17) para o potencial (4.21), como mos-

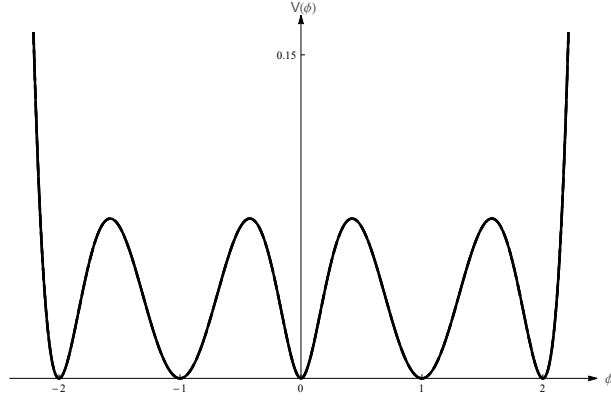


Figura 4.7: Potencial (4.26) para $c = 1$.

trado na equação (4.2), obtemos o modelo deformado

$$V(\phi) = \frac{1}{2}(c - |\phi|)^2 (1 - c^2 + 2c|\phi| - \phi^2)^2, \quad (4.25)$$

o qual é uma função suave de ϕ para $c = 1$ e $1/\sqrt{3}$.

Para $c = 1$, o potencial (4.25) é escrito como

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2(2 - |\phi|)^2(1 - |\phi|)^2, \quad (4.26)$$

que possui quatro setores topológicos, conforme pode ser visto na Fig. 4.7. As soluções estáticas, da esquerda para a direita, são dadas, respectivamente por

$$\phi_i(x) = -1 - \chi_i(x), \quad i = (1, 2), \quad (4.27a)$$

$$\phi_j(x) = 1 + \chi_{j-2}(x), \quad j = (3, 4), \quad (4.27b)$$

com $\chi_k(x)$ dado por (4.22). As densidades de energia são dadas pelas equações (4.23), assim, podemos verificar que $\rho_1(x) = \rho_3(x) = \tilde{\rho}_1(x)$ e $\rho_2(x) = \rho_4(x) = \tilde{\rho}_2(x)$. A partir da equação (4.7), os dois setores relacionados às soluções $\phi_1(x)$ e $\phi_3(x)$ fornecem o potencial de estabilidade (4.24a), e os outros dois setores topológicos relacionados às soluções $\phi_2(x)$ e $\phi_4(x)$ fornecem o potencial de estabilidade (4.24b).

Para $c = 1/\sqrt{3}$, o potencial (4.25) assume a forma

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - |\phi| \right)^2 \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}|\phi| - \phi^2 \right)^2, \quad (4.28)$$

que possui três setores topológicos, como pode ser visto na Fig. 4.8. Para os dois setores laterais, as soluções tipo-*kink* são dadas por

$$\phi_1(x) = -\frac{1}{\sqrt{3}} + \chi_1(x), \quad (4.29a)$$

$$\phi_3(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} + \chi_2(x), \quad (4.29b)$$

que também produzem os potenciais de estabilidade (4.24a) e (4.24b), respectivamente, $U_1(x) = \tilde{U}_1(x)$ e $U_3(x) = \tilde{U}_2(x)$, e as densidades de energia (4.23a) e (4.23b), respectivamente, $\rho_1(x) = \tilde{\rho}_1(x)$ e $\rho_3(x) = \tilde{\rho}_2(x)$. No entanto, o setor central é um novo setor, e as soluções estáticas podem ser escritas como

$$\phi_2(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{1 + \tanh(x - x_0)}{2}}, & x \leq 0, \\ \frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{1 - \tanh(x + x_0)}{2}}, & x > 0, \end{cases} \quad (4.30)$$

onde $x_0 = \operatorname{arctanh}(1/3)$ é um ajustamento feito devido a simetria do setor central. A densidade de energia correspondente a esse setor é

$$\rho_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} \operatorname{sech}^2(x - x_0) (1 - \tanh(x - x_0)), & x \leq 0, \\ \frac{1}{8} \operatorname{sech}^2(x + x_0) (1 + \tanh(x + x_0)), & x > 0. \end{cases} \quad (4.31)$$

Além disso, o potencial de estabilidade é encontrado substituindo (4.28) e (4.30) na equação (4.7), assim

$$U_2(x) = \begin{cases} \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \tanh(x - x_0) - \frac{15}{4} \operatorname{sech}^2(x - x_0), & x \leq 0, \\ \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \tanh(x + x_0) - \frac{15}{4} \operatorname{sech}^2(x + x_0), & x > 0, \end{cases} \quad (4.32)$$

que está ilustrado na Fig. 4.9 em comparação com o potencial de estabilidade (4.24b). Ele possui apenas o modo zero como estado ligado.

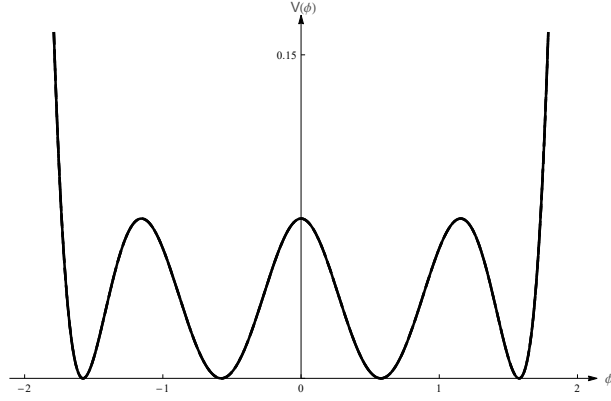


Figura 4.8: Potencial (4.28) para $c = 1/\sqrt{3}$.

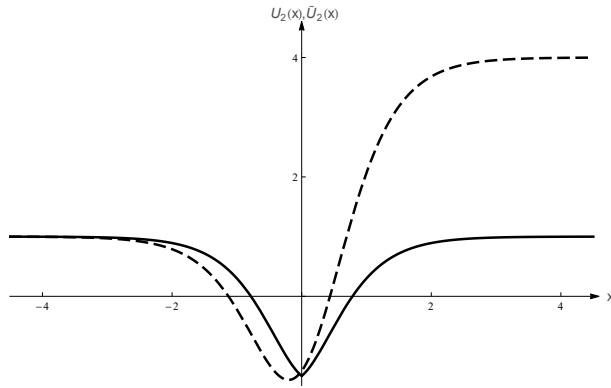


Figura 4.9: Potenciais de estabilidade (4.32) (linha sólida) e (4.24b) (linha tracejada).

Exemplo 3

Vamos agora considerar o potencial χ^8 , dado por

$$\tilde{V}(\chi) = \frac{8}{9} (1 - \chi^2)^2 \left(\frac{1}{4} - \chi^2 \right)^2, \quad (4.33)$$

o qual possui quatro mínimos em $\chi_{\min} = \pm 1/2, \pm 1$ e três máximos em $\chi_{\max} = 0, \pm \sqrt{5/8}$, descrevendo três setores topológicos, conforme pode visto na Fig. 4.10. As soluções tipo-*kink*, da esquerda para direita, são dadas, respectivamente por

$$\chi_n(x) = \cos \left(\frac{1}{3} \theta(x) + \frac{(3-n)}{3} \pi \right), \quad (4.34)$$

onde $n = 1, 2, 3$. Além disso, $\theta(x) = \arccos(\tanh(x))$ e conseqüentemente $\theta(x) \in [0, \pi]$.

As densidades de energia das soluções podem ser escritas na forma

$$\tilde{\rho}_n(x) = \frac{1}{9} \text{sech}^2(x) \sin^2 \left(\frac{1}{3} \theta(x) + \frac{(3-n)}{3} \pi \right). \quad (4.35)$$

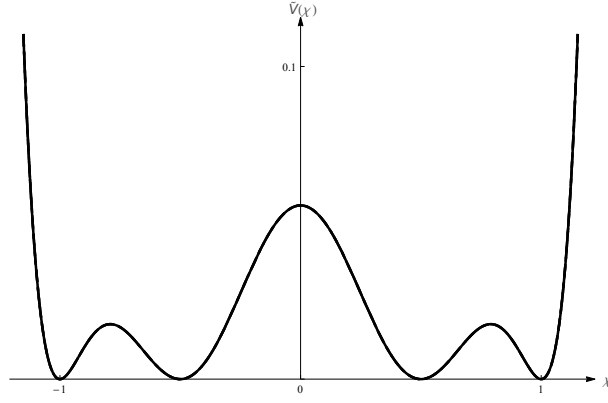


Figura 4.10: Potencial (4.33).

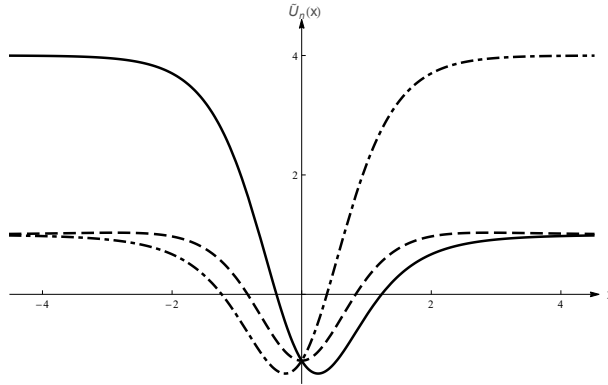


Figura 4.11: Potencial de estabilidade (4.36), para $n = 1$ (linha sólida), $n = 2$ (linha tracejada) e $n = 3$ (linha ponto-tracejada).

Substituindo a equação (4.33) na equação (4.4), obtemos três potenciais de estabilidade, que escrevemos como

$$\tilde{U}_n(x) = -\frac{10}{9} + 22\chi_n^2(x) - \frac{200}{3}\chi_n^4(x) + \frac{448}{9}\chi_n^6(x), \quad (4.36)$$

com $\chi_n(x)$ dado por (4.34). Na Fig. 4.11 mostramos o perfil de cada um dos potenciais de estabilidade.

Aqui, consideramos a função deformadora (4.17) aplicada ao potencial (4.33), então obtemos o potencial deformado dado por

$$V(\phi) = \frac{1}{18} (1 - c^2 + 2c|\phi| - \phi^2)^2 (1 - 4c^2 + 8c|\phi| - 4\phi^2)^2. \quad (4.37)$$

Esse modelo é uma função suave para $c = 1$, $\sqrt{5/8}$, e $1/2$, como vamos considerar abaixo.

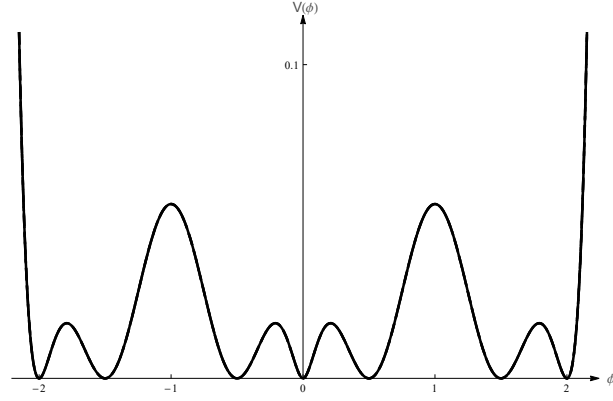


Figura 4.12: Potencial (4.38).

Para $c = 1$, o potencial (4.37) é escrito na forma

$$V(\phi) = \frac{1}{18} \phi^2 (2 - |\phi|)^2 (3 + 4\phi^2 - 8|\phi|)^2, \quad (4.38)$$

o qual possui seis setores topológicos, como podemos ver na Fig. 4.12. As soluções estáticas, da esquerda para a direita, são dadas em sequência

$$\phi_i(x) = -1 - \chi_i(x), \quad i = (1, 2, 3), \quad (4.39a)$$

$$\phi_j(x) = 1 + \chi_{j-3}(x), \quad j = (4, 5, 6), \quad (4.39b)$$

com $\chi_k(x)$ dado por (4.34). As correspondentes densidades de energia são equivalentes aquelas obtidas na equações (4.35), isto é, $\rho_1(x) = \rho_4(x) = \tilde{\rho}_1(x)$, $\rho_2(x) = \rho_5(x) = \tilde{\rho}_2(x)$ e $\rho_3(x) = \rho_6(x) = \tilde{\rho}_3(x)$. Além disso, a partir da equação (4.7), as soluções topológicas acima fornecem os potenciais de estabilidade (4.36) duplamente repetidos, $U_1(x) = U_4(x) = \tilde{U}_1(x)$, $U_2(x) = U_5(x) = \tilde{U}_2(x)$ e $U_3(x) = U_6(x) = \tilde{U}_3(x)$.

Para $c = \sqrt{5/8}$, o potencial (4.37) é escrito como

$$V(\phi) = \frac{1}{18} \left(\frac{3}{8} - \phi^2 + \sqrt{\frac{5}{2}} |\phi| \right)^2 \left(\frac{3}{2} + 4\phi^2 - 2\sqrt{10} |\phi| \right)^2, \quad (4.40)$$

o qual possui cinco setores topológicos, conforme mostrado na Fig. 4.13. As soluções

estáticas, correspondentes aos setores da esquerda e da direita, são

$$\phi_i(x) = -\sqrt{\frac{5}{8}} - \chi_i(x), \quad i = (1, 2), \quad (4.41a)$$

$$\phi_j(x) = \sqrt{\frac{5}{8}} + \chi_{j-2}(x), \quad j = (4, 5), \quad (4.41b)$$

onde $\chi_k(x)$ dado por (4.34). Essas soluções também produzem as densidades de energia (4.35), com $\rho_1(x) = \tilde{\rho}_1(x)$, $\rho_2(x) = \rho_4(x) = \tilde{\rho}_2(x)$ e $\rho_5(x) = \tilde{\rho}_3(x)$; e o mesmo potencial de estabilidade (4.36), com $U_1(x) = \tilde{U}_1(x)$, $U_2(x) = U_4(x) = \tilde{U}_2(x)$ e $U_5(x) = \tilde{U}_3(x)$. Para o setor topológico central a solução tipo-*kink* é dada por

$$\phi_3(x) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{5}{8}} + \cos\left(\frac{1}{3}\theta(x+x_0)\right), & x \leq 0, \\ \sqrt{\frac{5}{8}} + \cos\left(\frac{1}{3}\theta(x-x_0) + \frac{2}{3}\pi\right), & x > 0, \end{cases} \quad (4.42)$$

onde $\theta(x-x_0) = \arccos(\tanh(x-x_0))$, $\theta(x+x_0) = \arccos(\tanh(x+x_0))$ e $x_0 = \operatorname{arctanh}\left(\cos\left(3\arccos(\sqrt{5/8})\right)\right)$. A densidade de energia associada a essa solução é escrita como

$$\rho_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}\operatorname{sech}^2(x+x_0)\sin^2\left(\frac{1}{3}\theta(x+x_0)\right), & x \leq 0, \\ \frac{1}{9}\operatorname{sech}^2(x-x_0)\sin^2\left(\frac{1}{3}\theta(x-x_0) + \frac{2}{3}\pi\right), & x > 0. \end{cases} \quad (4.43)$$

Além disso, o potencial de estabilidade é diferente em relação aos do modelo não-deformado; ele pode ser expresso na forma

$$U_3(x) = \begin{cases} -\frac{10}{9} + 22\tilde{\chi}_3^2(x) - \frac{200}{3}\tilde{\chi}_3^4(x) + \frac{448}{9}\tilde{\chi}_3^6(x), & x \leq 0, \\ -\frac{10}{9} + 22\tilde{\chi}_1^2(x) - \frac{200}{3}\tilde{\chi}_1^4(x) + \frac{448}{9}\tilde{\chi}_1^6(x), & x > 0, \end{cases} \quad (4.44)$$

onde $\tilde{\chi}_1(x) = \cos(1/3\arccos(\tanh(x-x_0)) + 2\pi/3)$ e $\tilde{\chi}_3(x) = \cos(1/3\arccos(\tanh(x+x_0)))$.

Para $c = 1/2$, o potencial (4.37) toma a forma

$$V(\phi) = \frac{1}{18}\phi^2(1-|\phi|)^2(3-4\phi^2+4|\phi|)^2, \quad (4.45)$$

o qual possui quatro setores topológicos, como podemos ver na Fig. 4.14. Nesse caso, as

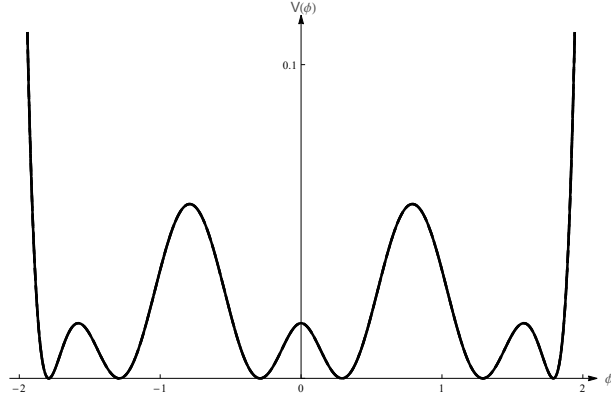


Figura 4.13: Potencial (4.40).

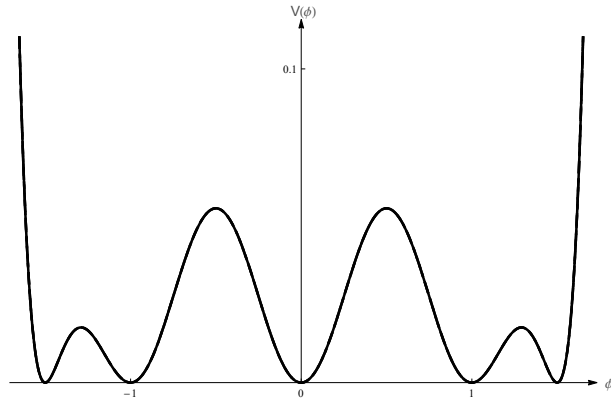


Figura 4.14: Potencial (4.45).

soluções tipo-*kink* são dadas por

$$\phi_i(x) = -\frac{1}{2} - \chi_i(x), \quad i = (1, 2), \quad (4.46a)$$

$$\phi_j(x) = \frac{1}{2} + \chi_{j-1}(x), \quad j = (3, 4), \quad (4.46b)$$

com $\chi_k(x)$ dado por (4.34). A densidade de energia e o potencial de estabilidade são idênticos aqueles vistos nas equações (4.35) e (4.36), respectivamente. Para os quatros setores, temos as densidades de energia $\rho_1(x) = \tilde{\rho}_1(x)$, $\rho_2(x) = \rho_3(x) = \tilde{\rho}_2(x)$ e $\rho_4(x) = \tilde{\rho}_3(x)$; e os potenciais de estabilidade $U_1(x) = \tilde{U}_1(x)$, $U_2(x) = U_3(x) = \tilde{U}_2(x)$ e $U_4(x) = \tilde{U}_3(x)$.

Família 1

Generalizando esses resultados, consideramos uma família de potenciais não-deformados com interações polinomiais, primeiramente proposto na Ref. [63]. Sendo

$$\tilde{V}_m^{(1)}(\chi) = \frac{1}{2m^2}(1 - \chi^2)^2 U_{m-1}^2(\chi), \quad (4.47)$$

onde $m = 1, 2, 3, 4, \dots$ e $U_{m-1}(\chi)$ representa os polinômios de Chebyshev de segundo tipo, que escrevemos na forma

$$U_{m-1}(\chi) = \frac{\sin(m \arccos(\chi))}{\sin(\arccos(\chi))}. \quad (4.48)$$

Para cada valor específico de m , o potencial (4.47) possui m setores topológicos e $m + 1$ mínimos dados por

$$\chi_{\min}^{(1)} = \cos\left(\frac{k\pi}{m}\right), \quad (4.49)$$

com $k = 0, 1, \dots, m$. As soluções estáticas associadas a esses setores são

$$\chi_{m,n}^{(1)}(x) = \cos\left(\frac{1}{m}\theta(x) + \frac{(m-n)}{m}\pi\right), \quad (4.50)$$

onde $n = 1, \dots, m$ fornece as soluções tipo-*kink* conectando distintos setores topológicos de $\tilde{V}_m^{(1)}(\chi)$. As densidades de energia das soluções podem ser escritas como

$$\tilde{\rho}_{m,n}^{(1)}(x) = \frac{1}{m^2} \text{sech}(x)^2 \sin^2\left(\frac{1}{m}\theta(x) + \frac{(m-n)}{m}\pi\right). \quad (4.51)$$

Usando as equações (4.47) e (4.50), obtemos os potenciais de estabilidade a partir da equação (4.4), isto é,

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{m,n}^{(1)}(x) &= \frac{3}{m} \cot\left(\frac{1}{m}\theta(x) + \frac{(m-n)}{m}\pi\right) \text{sech}(x) \tanh(x) \\ &\quad + 1 - \left(2 + \frac{1}{m^2}\right) \text{sech}^2(x). \end{aligned} \quad (4.52)$$

Aplicando a função deformadora (4.17) no potencial geral (4.47), encontramos o modelo deformado

$$V_m^{(1)}(\phi) = \frac{1}{2m^2} (1 - c^2 + 2c|\phi| - \phi^2)^2 U_{m-1}^2(c - |\phi|), \quad (4.53)$$

para cada valor de m , esse potencial deformado é uma função suave de ϕ quando c é igual a um mínimo ou um máximo de $\tilde{V}_m^{(1)}(\chi)$. A equação acima estabelece um conjunto de potenciais polinomiais controlados pelos parâmetros m e c , os quais produzem novos modelos com densidades de energia e potenciais de estabilidade como os obtidos por $\tilde{V}_m^{(1)}(\chi)$, veja equações (4.51) e (4.52). Os exemplos vistos nessas três últimas subseções são casos particulares dessa família geral de potenciais.

4.3.2 Modelos hiberbólicos

Exemplo 4

Vamos agora considerar o potencial não-deformado com interação hiperbólica, dado por

$$\tilde{V}(\chi) = \frac{1}{4} (1 - \sinh^2(\chi))^2, \quad (4.54)$$

que possui mínimos em $\chi_{\min} = \pm \operatorname{arcsinh}(1)$ e um máximo na origem, como podemos ver na Fig. 4.15. Esse modelo tem um setor topológico com solução tipo-*kink*

$$\chi(x) = \operatorname{arcsinh} \left(\frac{\tanh(x)}{\sqrt{2 - \tanh^2(x)}} \right). \quad (4.55)$$

Usando algumas relações entre funções hiperbólicas, podemos ainda reescrever a solução acima como

$$\chi(x) = \operatorname{arctanh} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \tanh(x) \right). \quad (4.56)$$

A densidade de energia correspondente a essa solução é

$$\tilde{\rho}(x) = \frac{2 \operatorname{sech}^4(x)}{(2 - \tanh^2(x))^2}. \quad (4.57)$$

Para esse modelo, o potencial de estabilidade é expresso na forma

$$\begin{aligned} \tilde{U}(x) = & 1 - 2 \operatorname{sech}^2(x) + \frac{3 \tanh^4(x)}{2 - \tanh^2(x)} \\ & - \operatorname{sech}^2(x) \tanh^2(x) \frac{(6 + \tanh^2(x))}{(2 - \tanh^2(x))^2}, \end{aligned} \quad (4.58)$$

que está plotado na Fig. 4.16.

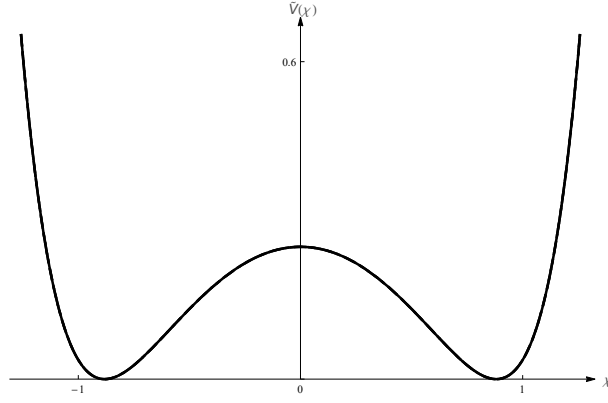


Figura 4.15: Potencial (4.54).

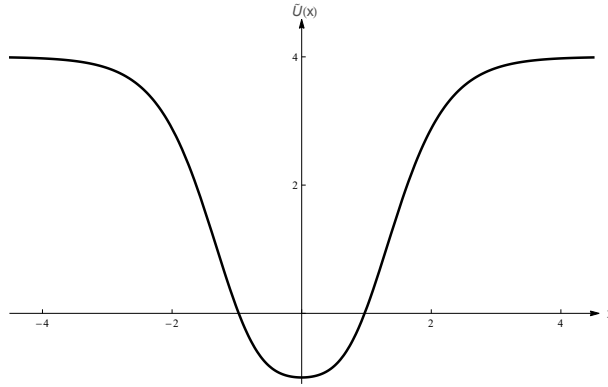


Figura 4.16: Potencial de estabilidade (4.58).

Podemos agora aplicar a função deformadora (4.17) para o potencial (4.54), então obtemos o seguinte potencial deformado:

$$V(\phi) = \frac{1}{4} \left(1 - \sinh^2(c - |\phi|) \right)^2, \quad (4.59)$$

o qual é uma função suave para $c = \operatorname{arcsinh}(1)$. Quando o parâmetro c é igual a esse valor, o modelo possui dois setores topológicos como ilustrado na Fig. 4.17. As soluções tipo-*kink* associadas a esses setores são dadas por

$$\phi_1(x) = -\operatorname{arcsinh}(1) + \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tanh(x)\right), \quad (4.60a)$$

$$\phi_2(x) = \operatorname{arcsinh}(1) + \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tanh(x)\right). \quad (4.60b)$$

Além disso, a partir da equação (4.7), verificamos que os dois setores admitem o mesmo potencial de estabilidade, que é idêntico ao do potencial de estabilidade $\tilde{U}(x)$ dado pela equação (4.58).

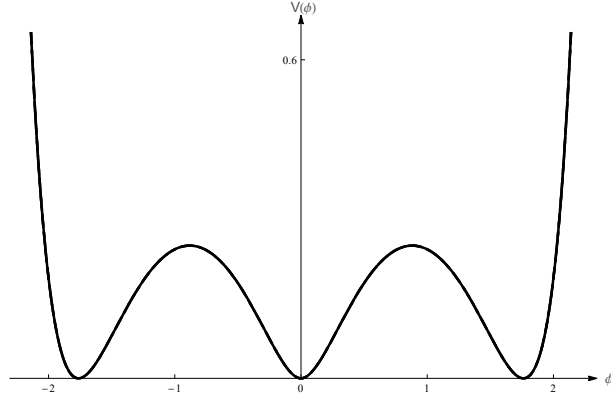


Figura 4.17: Potencial (4.59) para $c = \text{arcsinh}(1)$.

Exemplo 5

Neste exemplo, assumimos o potencial não-deformado

$$\tilde{V}(\chi) = \frac{1}{2} \tanh^2(\chi) (1 - \sinh^2(\chi))^2, \quad (4.61)$$

onde os mínimos são $\chi_{\min} = 0, \pm \text{arcsinh}(1)$ e os máximos são $\chi_{\max} \approx \pm 1/2$. A Fig. 4.18 mostra o perfil desse potencial. Ele possui dois setores topológicos com soluções tipo-*kink* dadas por

$$\chi_1(x) = -\text{arctanh} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \left(\frac{1}{2} \theta(x) \right) \right), \quad (4.62a)$$

$$\chi_2(x) = \text{arctanh} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \left(\frac{1}{2} \theta(x) \right) \right), \quad (4.62b)$$

onde $\theta(x)$ tem a mesma definição da subseção anterior. As densidades de energia associadas a essas soluções são

$$\tilde{\rho}_1(x) = \frac{\cos^2 \left(\frac{1}{2} \theta(x) \right)}{2 \left(2 - \sin^2 \left(\frac{1}{2} \theta(x) \right) \right)^2} \text{sech}^2(x), \quad (4.63a)$$

$$\tilde{\rho}_2(x) = \frac{\sin^2 \left(\frac{1}{2} \theta(x) \right)}{2 \left(2 - \cos^2 \left(\frac{1}{2} \theta(x) \right) \right)^2} \text{sech}^2(x). \quad (4.63b)$$

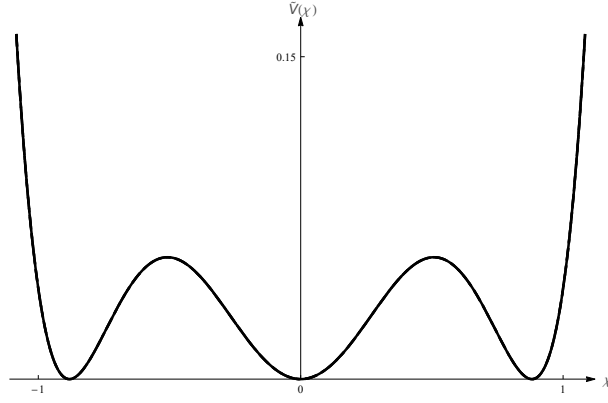


Figura 4.18: Potencial (4.61).

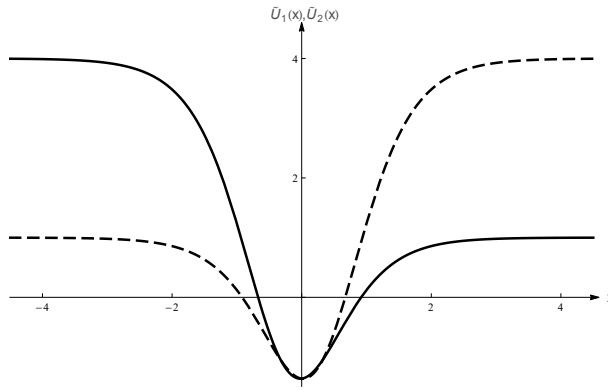


Figura 4.19: Potencial de estabilidade (4.64a) (linha sólida) e (4.64b) (linha tracejada).

Além disso, os potenciais de estabilidade são, respectivamente

$$\begin{aligned}
 \tilde{U}_1(x) = & 1 - 2 \operatorname{sech}^2(x) - \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}\theta(x)\right) \tan\left(\frac{1}{2}\theta(x)\right)}{2 - \sin^2\left(\frac{1}{2}\theta(x)\right)} \\
 & \times \frac{3}{2} \operatorname{sech}(x) \tanh(x) - \frac{(6 + \sin^2\left(\frac{1}{2}\theta(x)\right))}{(2 - \sin^2\left(\frac{1}{2}\theta(x)\right))^2} \\
 & \times \frac{1}{4} \sin^2\left(\frac{1}{2}\theta(x)\right) \operatorname{sech}^2(x),
 \end{aligned} \tag{4.64a}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{U}_2(x) = & 1 - 2 \operatorname{sech}^2(x) + \frac{\cos^2\left(\frac{1}{2}\theta(x)\right) \cot\left(\frac{1}{2}\theta(x)\right)}{2 - \cos^2\left(\frac{1}{2}\theta(x)\right)} \\
 & \times \frac{3}{2} \operatorname{sech}(x) \tanh(x) - \frac{(6 + \cos^2\left(\frac{1}{2}\theta(x)\right))}{(2 - \cos^2\left(\frac{1}{2}\theta(x)\right))^2} \\
 & \times \frac{1}{4} \cos^2\left(\frac{1}{2}\theta(x)\right) \operatorname{sech}^2(x),
 \end{aligned} \tag{4.64b}$$

os quais estão plotados na Fig. 4.19.

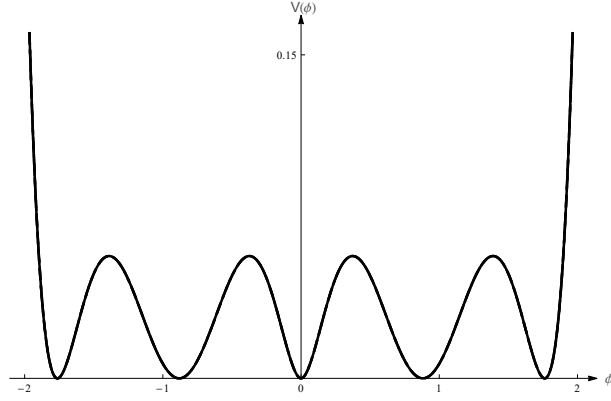


Figura 4.20: Potencial (4.65) para $c = \text{arcsinh}(1)$.

Considerando a função de deformação (4.17) no potencial (4.61), obtemos

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \tanh^2(c - |\phi|) (1 - \sinh^2(c - |\phi|))^2. \quad (4.65)$$

Tal potencial é uma função suave para $c = \text{arcsinh}(1)$ e $c \approx 1/2$, como vamos considerar abaixo.

Para $c = \text{arcsinh}(1)$, o modelo apresenta quatro setores topológicos, como podemos ver na Fig. 4.20. Esses setores, da esquerda para a direita, engendram as soluções estáticas

$$\phi_i(x) = -\text{arcsinh}(1) - \chi_i(x), \quad i = (1, 2), \quad (4.66a)$$

$$\phi_j(x) = \text{arcsinh}(1) + \chi_{j-2}(x), \quad j = (3, 4), \quad (4.66b)$$

com $\chi_k(x)$ dado por (4.62). As densidades de energia são as mesmas dadas pelas equações (4.63), com a correspondência $\rho_1(x) = \rho_3(x) = \tilde{\rho}_1(x)$ e $\rho_2(x) = \rho_4(x) = \tilde{\rho}_2(x)$. Já os potenciais de estabilidade são idênticos aqueles vistos na equações (4.64), com $U_1(x) = U_3(x) = \tilde{U}_1(x)$ e $U_2(x) = U_4(x) = \tilde{U}_2(x)$.

Para $c = 1/2$, o modelo (4.65) exhibe três setores topológicos, conforme podemos ver na Fig. 4.21. Os dois setores laterais possuem soluções estáticas dadas por

$$\phi_1(x) = -\frac{1}{2} + \chi_1(x), \quad (4.67a)$$

$$\phi_3(x) = \frac{1}{2} + \chi_2(x), \quad (4.67b)$$

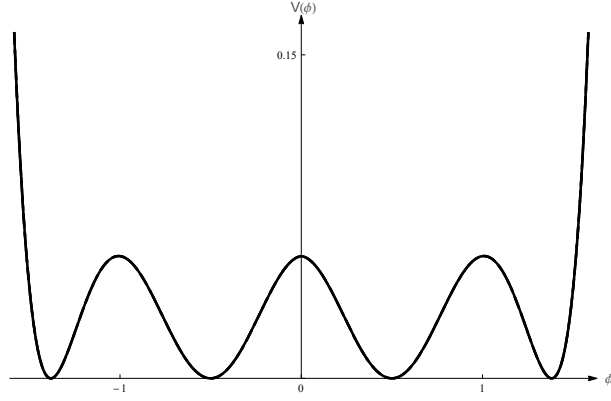


Figura 4.21: Potencial (4.65) para $c = 1/2$.

e o setor central possui solução tipo-*kink*, que pode ser escrita como

$$\phi_2(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} + \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{1}{2}\theta(x - x_0)\right)\right), & x \leq 0, \\ \frac{1}{2} - \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{1}{2}\theta(x + x_0)\right)\right), & x > 0, \end{cases} \quad (4.68)$$

onde $x_0 \approx \operatorname{arctanh}\left(\cos\left(2 \arcsin(\sqrt{2}\tanh(1/2))\right)\right)$. As densidades de energia são dadas em termos das equações (4.63), para os setores laterais $\rho_1(x) = \tilde{\rho}_1(x)$ e $\rho_3(x) = \tilde{\rho}_2(x)$, enquanto para o setor central temos

$$\rho_2(x) = \begin{cases} \tilde{\rho}_2(x - x_0), & x \leq 0, \\ \tilde{\rho}_1(x + x_0), & x > 0. \end{cases} \quad (4.69)$$

Consequentemente, os potenciais de estabilidade relacionados aos dois setores laterais são análogos à equação (4.64), isto é, $U_1(x) = \tilde{U}_1(x)$ e $U_3(x) = \tilde{U}_2(x)$. Contudo, o potencial de estabilidade associado ao setor central é dado por

$$U_2(x) = \begin{cases} \tilde{U}_2(x - x_0), & x \leq 0, \\ \tilde{U}_1(x + x_0), & x > 0, \end{cases} \quad (4.70)$$

o qual está plotado na Fig. 4.22, juntamente com o potencial de estabilidade (4.64b).

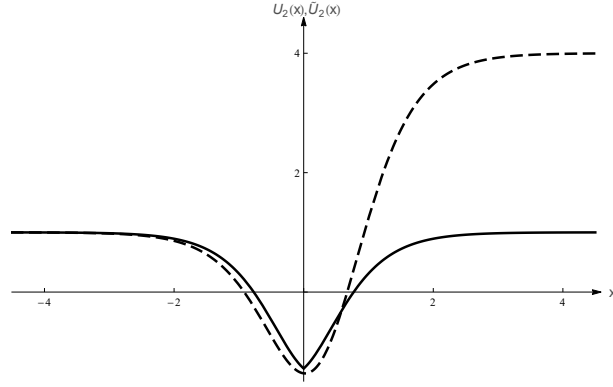


Figura 4.22: Potencial de estabilidade (4.70) (linha sólida) e (4.64b) (linha tracejada).

Exemplo 6

Neste último exemplo, vamos escolher o potencial

$$\tilde{V}(\chi) = \frac{1}{36} \text{sech}^4(\chi) (1 - 7 \sinh^2(\chi))^2 (1 - \sinh^2(\chi))^2, \quad (4.71)$$

o qual possui mínimos em $\chi_{\min} = \pm \text{arcsinh}(1)$, $\pm \text{arcsinh}(1/\sqrt{7})$, e máximos em $\chi_{\max} = 0$ e $\chi_{\max} \approx \pm 2/3$. Esse modelo tem três setores topológicos, como pode ser visto na Fig. 4.23, com suas respectivas soluções tipo-*kink* dadas por

$$\chi_n(x) = \text{arctanh} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \left(\frac{1}{3} \theta(x) + \frac{(3-n)}{3} \pi \right) \right), \quad (4.72)$$

onde $n = 1, 2, 3$. As densidades de energia dessas soluções são expressas na forma

$$\tilde{\rho}_n(x) = \frac{2 \sin^2 \left(\frac{1}{3} \theta(x) + \frac{(3-n)}{3} \pi \right) \text{sech}^2(x)}{9 \left(2 - \cos^2 \left(\frac{1}{3} \theta(x) + \frac{(3-n)}{3} \pi \right) \right)^2}, \quad (4.73)$$

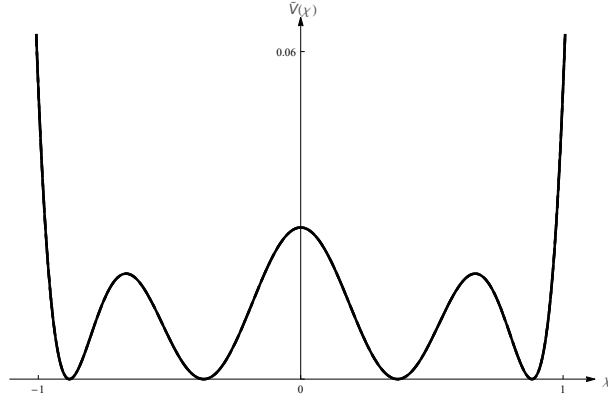


Figura 4.23: Potencial (4.71).

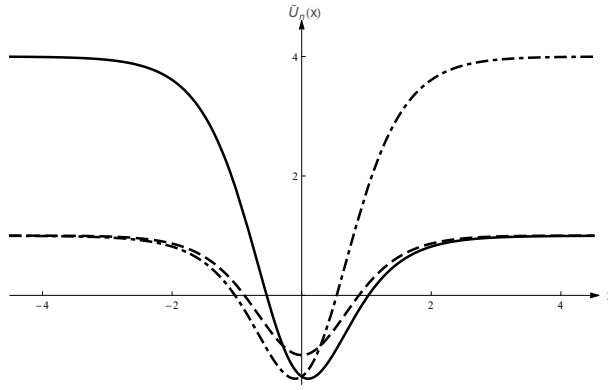


Figura 4.24: Potencial de estabilidade (4.74), para $n = 1$ (linha sólida), $n = 2$ (linha tracejada) e $n = 3$ (linha ponto-tracejada).

Já os potenciais de estabilidades são dados por

$$\begin{aligned}
 \tilde{U}_n(x) = & 1 - 2\text{sech}^2(x) + \cot\left(\frac{1}{3}\theta(x) + \frac{(3-n)}{3}\pi\right) \times \\
 & \frac{\cos^2\left(\frac{1}{3}\theta(x) + \frac{(3-n)}{3}\pi\right)}{2 - \cos^2\left(\frac{1}{3}\theta(x) + \frac{(3-n)}{3}\pi\right)} \text{sech}(x)\tanh(x) \\
 & - \frac{1}{9}\text{sech}^2(x) \cos^2\left(\frac{1}{3}\theta(x) + \frac{(3-n)}{3}\pi\right) \times \\
 & \frac{6 + \cos^2\left(\frac{1}{3}\theta(x) + \frac{(3-n)}{3}\pi\right)}{\left(2 - \cos^2\left(\frac{1}{3}\theta(x) + \frac{(3-n)}{3}\pi\right)\right)^2},
 \end{aligned} \tag{4.74}$$

que está plotado na Fig. 4.24 para $n = 1, 2, 3$.

Assumindo a função deformadora (4.17) aplicada ao potencial (4.71), encontramos

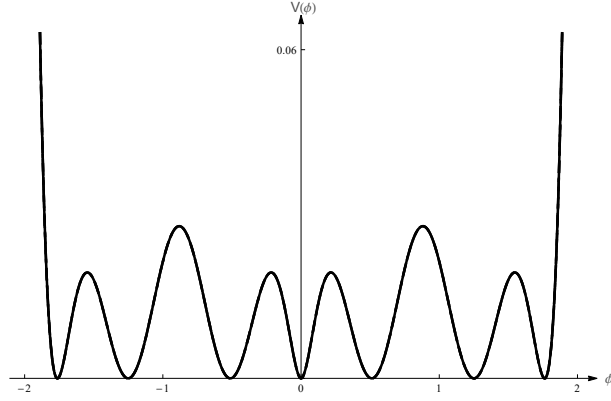


Figura 4.25: Potencial (4.75) para $c = \text{arcsinh}(1)$.

o seguinte potencial deformado

$$V(\phi) = \frac{1}{36} \text{sech}^4(c - |\phi|) (1 - 7 \sinh^2(c - |\phi|))^2 \times (1 - \sinh^2(c - |\phi|))^2, \quad (4.75)$$

Tal potencial é uma função suave para $c = \text{arcsinh}(1)$, $2/3$ e $\text{arcsinh}(1/\sqrt{7})$, como vamos considerar abaixo.

Para $c = \text{arcsinh}(1)$, o modelo apresenta seis setores topológicos, conforme pode ser visto na Fig. 4.25. Esses setores admitem as seguintes soluções estáticas

$$\phi_i(x) = -\text{arcsinh}(1) - \chi_i(x), \quad i = (1, 2, 3), \quad (4.76a)$$

$$\phi_j(x) = \text{arcsinh}(1) + \chi_{j-3}(x), \quad j = (4, 5, 6), \quad (4.76b)$$

com $\chi_k(x)$ dado por (4.72). As densidades de energia associadas a essas soluções são as mesmas dadas pelas equações (4.73), com $\rho_1(x) = \rho_4(x) = \tilde{\rho}_1(x)$, $\rho_2(x) = \rho_5(x) = \tilde{\rho}_2(x)$ e $\rho_3(x) = \rho_6(x) = \tilde{\rho}_3(x)$. Já os potenciais de estabilidades são equivalentes aqueles da equação (4.74) de modo que $U_1(x) = U_4(x) = \tilde{U}_1(x)$, $U_2(x) = U_5(x) = \tilde{U}_2(x)$ e $U_3(x) = U_6(x) = \tilde{U}_3(x)$.

Para $c = 2/3$, o modelo (4.75) apresenta cinco setores topológicos, conforme mostrado na Fig. 4.26. As soluções estáticas, com exceção da solução associada ao setor

central, são dadas por

$$\phi_i(x) = -\frac{2}{3} - \chi_i(x), \quad i = (1, 2), \quad (4.77a)$$

$$\phi_j(x) = \frac{2}{3} + \chi_{j-2}(x), \quad j = (4, 5), \quad (4.77b)$$

com $\chi_k(x)$ dado por (4.72). Essas soluções possuem densidades de energia equivalentes a (4.73), com $\rho_1(x) = \tilde{\rho}_1(x)$, $\rho_2(x) = \rho_4(x) = \tilde{\rho}_2(x)$ e $\rho_5(x) = \tilde{\rho}_3(x)$. Já os potenciais de estabilidade são equivalentes a (4.74) com $U_1(x) = \tilde{U}_1(x)$, $U_2(x) = U_4(x) = \tilde{U}_2(x)$ e $U_5(x) = \tilde{U}_3(x)$. Para o setor topológico central, a solução tipo-*kink* pode ser expressa na forma

$$\phi_3(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3} + \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{1}{3}\theta_1(x)\right)\right), & x \leq 0, \\ \frac{2}{3} + \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{1}{3}\theta_2(x) + \frac{2\pi}{3}\right)\right), & x > 0, \end{cases} \quad (4.78)$$

onde $\theta_1(x) = \theta(x + x_0) = \arccos(\tanh(x + x_0))$, $\theta_2(x) = \theta(x - x_0) = \arccos(\tanh(x - x_0))$ e $x_0 = \operatorname{arctanh}\left(\cos\left(3 \arccos(\sqrt{2}\tanh(2/3))\right)\right)$. Para essa solução, a densidade de energia é dada por

$$\rho_3(x) = \begin{cases} \tilde{\rho}_3(x + x_0), & x \leq 0, \\ \tilde{\rho}_1(x - x_0), & x > 0, \end{cases} \quad (4.79)$$

onde $\tilde{\rho}_3(x + x_0)$ e $\tilde{\rho}_1(x - x_0)$ são dados pela equação (4.73) substituindo $x \rightarrow x + x_0$ e $x \rightarrow x - x_0$, respectivamente. Além disso, o potencial de estabilidade é

$$U_3(x) = \begin{cases} \tilde{U}_3(x + x_0), & x \leq 0, \\ \tilde{U}_1(x - x_0), & x > 0, \end{cases} \quad (4.80)$$

onde $\tilde{U}_3(x + x_0)$ e $\tilde{U}_1(x - x_0)$ são dados pela equação (4.74).

Para $c = \operatorname{arcsinh}(1/\sqrt{7})$, o modelo (4.75) apresenta quatro setores topológicos, conforme é mostrado na Fig. 4.27. Para esse caso, as soluções estáticas podem ser escritas

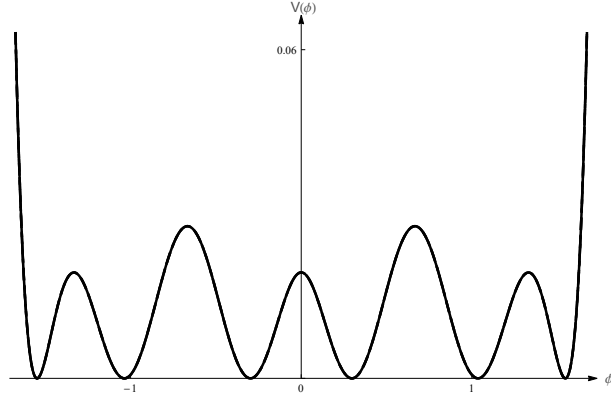


Figura 4.26: Potencial (4.75) para $c = 2/3$.

como

$$\phi_i(x) = -\operatorname{arcsinh}(1/\sqrt{7}) - \chi_i(x), \quad i = (1, 2), \quad (4.81a)$$

$$\phi_j(x) = \operatorname{arcsinh}(1/\sqrt{7}) + \chi_{j-1}(x), \quad j = (3, 4), \quad (4.81b)$$

com $\chi_k(x)$ dado por (4.72). Essas soluções possuem densidades de energia idênticas a (4.73), com a correspondência $\rho_1(x) = \tilde{\rho}_1(x)$, $\rho_2(x) = \rho_3(x) = \tilde{\rho}_2(x)$ e $\rho_4(x) = \tilde{\rho}_3(x)$. Já os potenciais de estabilidade são idênticos a (4.74) com $U_1(x) = \tilde{U}_1(x)$, $U_2(x) = U_3(x) = \tilde{U}_2(x)$ e $U_4(x) = \tilde{U}_3(x)$.

Família 2

Generalizando, consideremos uma família de potenciais não-deformados com interações hiperbólicas, primeiramente estudadas na Ref. [64]. Sendo

$$\tilde{V}_m^{(2)}(\chi) = \frac{1}{4m^2} (1 - \sinh^2(\chi))^2 U_{m-1}^2(\sqrt{2} \tanh(\chi)), \quad (4.82)$$

onde $m = 1, 2, 3, 4, \dots$ e $U_{m-1}(\sqrt{2} \tanh(\chi))$ representa os polinômios de Chebyshev de segundo tipo. Cada valor particular de m leva a $m + 1$ mínimos que podemos escrever como

$$\chi_{\min}^{(2)} = \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{k\pi}{m}\right)\right), \quad (4.83)$$

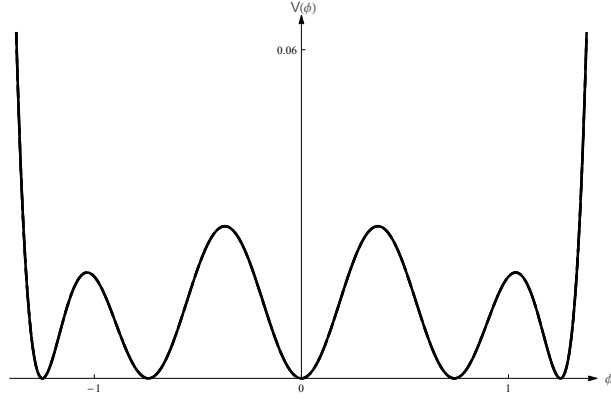


Figura 4.27: Potencial (4.75) para $c = \text{arcsinh}(1/\sqrt{7})$.

com $k = 0, 1, \dots, m$. As soluções estáticas que descrevem distintos setores topológicos de $\tilde{V}_m^{(2)}(\chi)$ são dadas por

$$\chi_{m,n}^{(2)}(x) = \text{arctanh} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \left(\frac{1}{m} \theta(x) + \frac{(m-n)}{m} \pi \right) \right\}, \quad (4.84)$$

onde $n = 1, \dots, m$. As densidades de energia associadas a essas soluções podem ser escritas na forma

$$\tilde{\rho}_{m,n}^{(2)}(x) = \frac{2}{m^2} \frac{\sin^2 \left(\frac{1}{m} \theta(x) + \frac{(m-n)}{m} \pi \right) \text{sech}^2(x)}{\left(2 - \cos^2 \left(\frac{1}{m} \theta(x) + \frac{(m-n)}{m} \pi \right) \right)^2}. \quad (4.85)$$

Substituindo as equações (4.82) e (4.84) na equação (4.4), encontramos os seguintes potenciais de estabilidade

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{m,n}^{(2)}(x) = & 1 - 2\text{sech}^2(x) + \frac{3}{m} \cot \left(\frac{1}{m} \theta(x) + \frac{(m-n)}{m} \pi \right) \times \\ & \frac{\cos^2 \left(\frac{1}{m} \theta(x) + \frac{(m-n)}{m} \pi \right)}{2 - \cos^2 \left(\frac{1}{m} \theta(x) + \frac{(m-n)}{m} \pi \right)} \text{sech}(x) \tanh(x) \\ & - \frac{1}{m^2} \text{sech}^2(x) \cos^2 \left(\frac{1}{m} \theta(x) + \frac{(m-n)}{m} \pi \right) \times \\ & \frac{6 + \cos^2 \left(\frac{1}{m} \theta(x) + \frac{(m-n)}{m} \pi \right)}{\left(2 - \cos^2 \left(\frac{1}{m} \theta(x) + \frac{(m-n)}{m} \pi \right) \right)^2}. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Aplicando a função deformadora (4.17) no potencial genérico (4.82), obtemos o modelo deformado

$$V_m^{(2)}(\phi) = \frac{1}{4m^2} \left(1 - \sinh^2(c - |\phi|) \right)^2 U_{m-1}^2 \left(\sqrt{2} \tanh(c - |\phi|) \right). \quad (4.87)$$

Para cada valor de m , tal potencial é uma função suave de ϕ quando c é igual a um mínimo ou um máximo de $\tilde{V}_m^{(2)}(\chi)$. A equação acima estabelece um conjunto de potenciais com interação hiperbólica controlados pelos parâmetros m e c , os quais produzem novos modelos que apresentam densidades de energia e potenciais de estabilidade equivalentes aos obtidos por $\tilde{V}_m^{(2)}(\chi)$, veja equações (4.85) e (4.86). Os três últimos exemplos vistos nas últimas subseções são casos particulares dessa família geral de potenciais.

Capítulo 5

Modelos de branas espessas simétricas e assimétricas

No capítulo 2 discutimos alguns aspectos de estruturas tipo-*kink* que aparecem em modelos de dois campos escalares reais. Um modelo particularmente interessante envolvendo dois campos escalares no espaço-tempo plano foi proposto na Ref. [106]. Esse modelo é caracterizado pela inclusão de uma função de um dos dois campos, que modifica o termo cinético, associado ao outro campo. Além disso, os autores exploraram uma interessante rota, na qual um dos campos atua independentemente, aprisionando o outro campo, induzindo importantes modificações no perfil da estrutura localizada. Baseado nesse trabalho, propomos na Ref. [61] o estudo desse modelo no cenário de mundo brana, o qual discutiremos no presente capítulo. Nas duas seções seguintes, descrevemos o procedimento e o ilustramos a partir de vários exemplos. Depois disso, mostramos como o procedimento funciona para gerar branas espessas assimétricas.

5.1 Formalismo

Para estudar branas modeladas por campos escalares, vamos usar a geometria deformada (3.1) e considerar a ação

$$S = \int dx^4 dy \sqrt{|g|} \left(-\frac{R}{4} + \mathcal{L} \right), \quad (5.1)$$

com

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}f(\chi)\partial_a\phi\partial^a\phi + \frac{1}{2}\partial_a\chi\partial^a\chi - V(\phi, \chi). \quad (5.2)$$

Aqui, g é o determinante da métrica $g_{ab} = \text{diag}(e^{2A}, -e^{2A}, -e^{2A}, -e^{2A}, -1)$ e ϕ e χ representam campos escalares reais. Além disso, $f(\chi)$ é uma função arbitrária associada ao campo χ . Note que o termo cinético de ϕ apresenta um fator controlado pelo campo χ . Essa densidade lagrangiana foi considerada na Ref. [106] no estudo de configurações multi-*kinks* que aparecem em $(1+1)$ dimensões, onde o campo χ simula, através da função $f(\chi)$, uma restrição geométrica que modifica o usual perfil do *kink*.

Dessa forma, a variação da ação com respeito aos campos escalares ϕ e χ e a métrica g_{ab} leva, respectivamente, as equações de campo

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_a\left(\sqrt{|g|}f\partial^a\phi\right) + V_\phi = 0, \quad (5.3a)$$

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_a\left(\sqrt{|g|}\partial^a\chi\right) - \frac{1}{2}f_\chi\partial_a\phi\partial^a\phi + V_\chi = 0, \quad (5.3b)$$

$$G_{ab} - 2T_{ab} = 0, \quad (5.3c)$$

onde $V_\phi = \partial V/\partial\phi$, $V_\chi = \partial V/\partial\chi$ e $f_\chi = df/d\chi$. Seguimos a rota usual e consideramos que os campos escalares são estáticos e dependem apenas da dimensão extra, isto é, $\phi = \phi(y)$ e $\chi = \chi(y)$. Nesse caso, as equações (5.3a) e (5.3b) se tornam

$$f\phi'' + (4A'f + f_\chi\chi')\phi' - V_\phi = 0, \quad (5.4a)$$

$$\chi'' + 4A'\chi' - \frac{1}{2}f_\chi\phi'^2 - V_\chi = 0, \quad (5.4b)$$

e as componentes não-nulas da equação de Einstein (5.3c) são

$$A'' = -\frac{2}{3}(f\phi'^2 + \chi'^2), \quad (5.5a)$$

$$A'^2 = \frac{1}{6}(f\phi'^2 + \chi'^2) - \frac{1}{3}V. \quad (5.5b)$$

Aqui, linha $(')$ significa derivada com respeito a y , isto é, $A' = dA/dy$, $\phi' = d\phi/dy$ e $\chi' = d\chi/dy$. Uma vez que estamos lidando com equações diferenciais de segunda ordem, exceto a equação (5.5b), é de interesse encontrar equações de primeira ordem que sejam compatíveis com as equações (5.4) e (5.5). Para tanto, seguimos a mesma linha de

investigação das Refs. [38, 107] e implementamos um formalismo de primeira ordem, que surge para potenciais com a forma específica:

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2} \frac{W_\phi^2}{f(\chi)} + \frac{1}{2} W_\chi^2 - \frac{4}{3} W^2, \quad (5.6)$$

onde $W = W(\phi, \chi)$ é uma função arbitrária dos campos escalares. Nesse caso, obtemos as seguintes equações diferenciais de primeira ordem:

$$\phi' = \frac{W_\phi}{f(\chi)}, \quad \chi' = W_\chi, \quad (5.7)$$

e

$$A' = -\frac{2}{3} W, \quad (5.8)$$

que são compatíveis com as equações de movimento (5.4) e as equações de Einstein (5.5). Observe que, em princípio, uma vez que W apresenta termos que acoplam os campos ϕ e χ , as equações (5.7) devem ser resolvidas juntamente como um sistema. No entanto, um caso especial surge quando $W(\phi, \chi) = g(\phi) + h(\chi)$, tal que as equações de primeira ordem se tornam $\phi' = g_\phi/f(\chi)$ e $\chi' = h_\chi$. Nessa situação, a última equação pode ser resolvida independentemente e o campo escalar χ atua como fonte para o campo escalar ϕ . Vale ressaltar que, na Ref. [106], foi mostrado como um mecanismo similar pode ser capaz de simular restrições geométricas em *kinks*, os quais podem dá origem a multi-*kinks*.

Para a densidade lagrangiana (5.2), a definição do tensor energia-momento (3.11) fornece

$$T_{ab} = f(\chi) \partial_a \phi \partial_b \phi + \partial_a \chi \partial_b \chi - g_{ab} \mathcal{L}. \quad (5.9)$$

Então, a densidade de energia do sistema é dada por

$$\rho(y) = T_{00} = e^{2A} \left(\frac{1}{2} f(\chi) \phi'^2 + \frac{1}{2} \chi'^2 + V(\phi, \chi) \right), \quad (5.10)$$

que, a partir do uso das equações (5.6), (5.7) e (5.8), pode ser reescrita como uma derivada total

$$\rho(y) = (e^{2A} W)'. \quad (5.11)$$

Observe que essa expressão é a mesma que foi encontrada no capítulo 3 para o caso de um único campo escalar. Conforme já discutimos, a energia total é nula quando a função

entre parênteses possui o comportamento assintótico $e^{2A(y)}W(y) \rightarrow 0$.

5.2 Modelos

No intuito de exemplificar como esse procedimento funciona para construir modelos de branas espessas, vamos ilustrá-lo a partir de vários modelos, que discutimos abaixo.

5.2.1 Modelo 1

Consideremos o modelo com as seguintes funções

$$W(\phi, \chi) = \left(\phi - \frac{\phi^7}{7} \right) + \left(\chi - \frac{\chi^3}{3} \right), \quad f(\chi) = 3\sqrt[3]{\chi^2}. \quad (5.12)$$

Observe que a contribuição do campo χ é idêntica ao bem conhecido potencial χ^4 no espaço-tempo plano. Por outro lado, os termos ϕ na função W acima, combinados com a função $f(\chi)$, trazem novas e interessantes possibilidades. Para as funções acima, as equações de primeira ordem para os campos escalares (5.7) se tornam

$$\phi' = \frac{(1 - \phi^6)}{3\sqrt[3]{\chi^2}} \quad \text{e} \quad \chi' = (1 - \chi^2). \quad (5.13)$$

Primeiro resolvemos a equação à direita e então substituímos a solução na equação à esquerda. Ao fazer isso, verifica-se que as soluções são

$$\phi(y) = \sqrt[3]{\tanh(y)} \quad \text{e} \quad \chi(y) = \tanh(y), \quad (5.14)$$

que podem ser vistas na parte superior da Fig. 5.1. Note que a solução para o campo ϕ apresenta derivada infinita na origem, que é uma consequência da função $f(\chi)$ combinada com a solução do campo χ . Portanto, nosso método permite modificar a derivada da solução do campo ϕ que desempenha um papel importante na densidade de energia do sistema.

No intuito de calcular a função de deformação, usamos equação (5.8), e escrevemos

$$A' = -\frac{2}{3} \left(\tanh^{\frac{1}{3}}(y) + \tanh(y) - \frac{1}{7} \tanh^{\frac{7}{3}}(y) - \frac{1}{3} \tanh^3(y) \right). \quad (5.15)$$

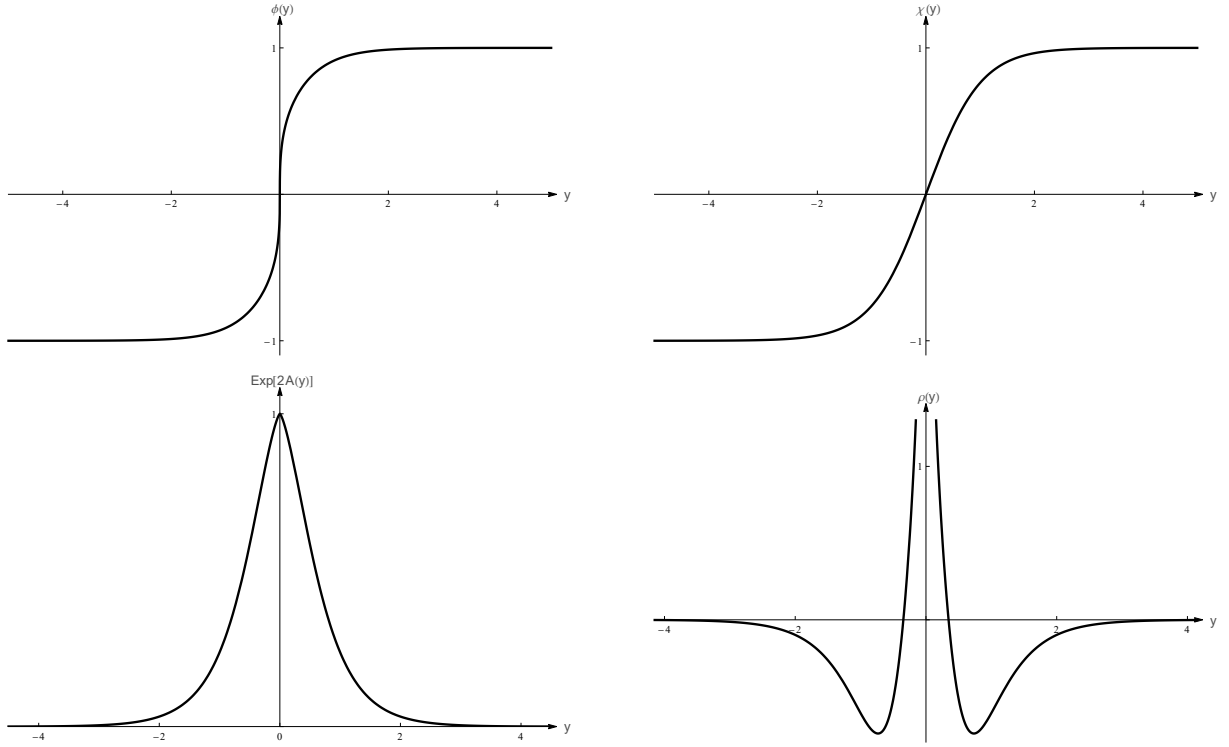


Figura 5.1: Campos escalares, fator de deformação e densidade de energia associados ao modelo 1.

A partir da equação acima, verificamos que $A'(0) = 0$ e $A''(0) \rightarrow -\infty$. Isso significa que a função de deformação apresenta um bico acentuado em $y = 0$, semelhante ao cenário de brana fina proposto na Ref. [37]. Assim, nosso modelo simula essa característica usando estruturas topológicas para gerar a brana.

Nós resolvemos a equação acima e calculamos a função de deformação analiticamente com a condição $A(0) = 0$. Contudo, uma vez que a expressão completa é longa, omitimos ela aqui. Na parte inferior da Fig. 5.1, plotamos o fator de deformação e a densidade de energia do modelo. Observe que, como dissemos anteriormente, em $y = 0$, o fator de deformação exibe um bico acentuado, como uma brana fina, e um suave comportamento de uma brana espessa fora da origem. Esse comportamento híbrido é oposto ao encontrado na Ref. [101] (exemplo 3 do capítulo 3), na qual a brana se comporta como uma brana espessa dentro de um espaço compacto em torno da origem e como uma brana fina fora do espaço compacto. Além disso, a densidade de energia diverge em $y = 0$. Apesar disso, ela é integrável e fornece energia nula, como esperado.

5.2.2 Modelo 2

Prosseguimos a investigação introduzindo um parâmetro para controlar o campo escalar χ na função $W(\phi, \chi)$ e escolhendo uma outra função $f(\chi)$, com

$$W(\phi, \chi) = \left(\phi - \frac{\phi^3}{3} \right) + \alpha \left(\chi - \frac{\chi^3}{3} \right), \quad (5.16a)$$

$$f(\chi) = \frac{1}{\chi^2}, \quad (5.16b)$$

onde α é um parâmetro real não-negativo. Esse modelo é inspirado no modelo encontrado na Ref. [106], o qual simula restrições geométricas que dão origem a perfis duplo-*kink* em magnetização de materiais específicos [10]. Para as funções dadas acima, as equações de primeira ordem (5.7) se tornam

$$\phi' = (1 - \phi^2)\chi^2 \quad \text{e} \quad \chi' = \alpha(1 - \chi^2). \quad (5.17)$$

Note que o parâmetro α controla a inclinação da solução do campo χ . Essas equações admitem soluções tipo-*kink*, dadas por

$$\phi(y) = \tanh(\xi(y)) \quad \text{e} \quad \chi(y) = \tanh(\alpha y), \quad (5.18)$$

com $\xi(y) = y - \tanh(\alpha y)/\alpha$. O perfil de cada solução é mostrado na parte superior da Fig. 5.2. Observe que, próximo à origem, a solução do campo ϕ exibe um platô cuja largura é controlada por α . Isso ocorre porque, para $y \approx 0$, temos que $\phi \propto \alpha^2 y^3$. Portanto, conforme α diminui, o platô aumenta.

A função de deformação é governada pela equação (5.8), a qual escrevemos

$$A' = -\frac{2}{3} \left(\tanh(\xi(y)) - \frac{\tanh^3(\xi(y))}{3} + \alpha \left(\tanh(\alpha y) - \frac{\tanh^3(\alpha y)}{3} \right) \right). \quad (5.19)$$

Nós não fomos capazes de encontrar a função de deformação analiticamente para esse modelo. Assim, realizamos os cálculos numericamente para alguns valores de α . Como antes, tomamos $A(0) = 0$. Na parte inferior da Fig. 5.2 plotamos o fator de deformação e densidade de energia do modelo. É notável que o fator de deformação aumenta conforme α diminui. Na densidade de energia, vemos que α dá origem a uma estrutura interna, que aparece para $\alpha \leq \alpha_{crit} \approx 1/2$. Embora a presença de estrutura interna em branas já tenha

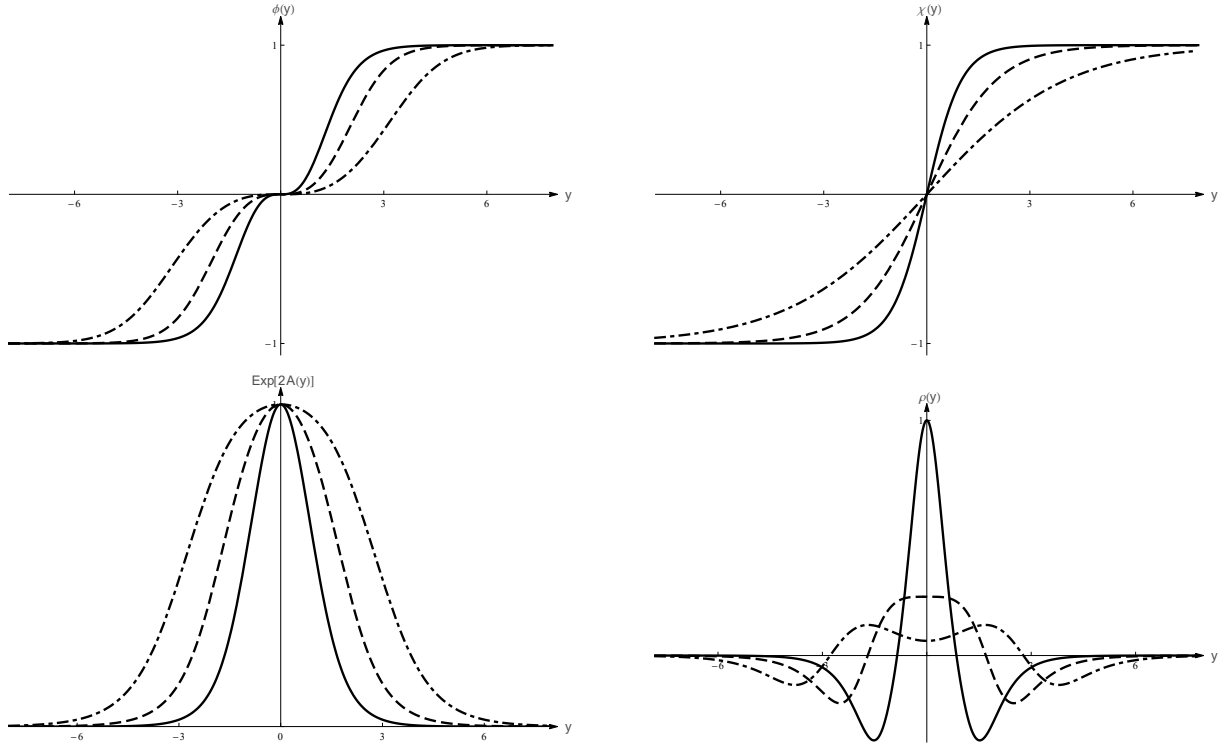


Figura 5.2: Campos escalares, fator de deformação e densidade de energia associados ao modelo 2. Os valores do parâmetro são $\alpha = 1$ (linha sólida), $\alpha = 1/2$ (linha tracejada) e $\alpha = 1/4$ (linha ponto-tracejada).

sido estudada anteriormente na Ref. [91] (exemplo 2 do capítulo 3), nós agora incluimos um parâmetro para ajusta-lá. A medida que α diminui, a estrutura interna aumenta.

5.2.3 Modelo 3

O terceiro modelo é descrito pela mesma função $W(\phi, \chi)$ do modelo anterior, dada pela equação (5.16a), e

$$f(\chi) = \frac{1}{\cos^2(n\pi\chi)}, \quad (5.20)$$

onde $n \in \mathbb{N}$. Como mostrado na Ref. [106], essa característica gera vários platôs na solução do campo ϕ , dependendo do parâmetro n . Aqui, investigamos seus efeitos na modelagem da brana. Para esse modelo, as equações de primeira ordem para os campos escalares são dadas pela equação (5.7), o que nos leva a

$$\phi' = (1 - \phi^2) \cos^2(n\pi\chi) \quad \text{e} \quad \chi' = \alpha(1 - \chi^2). \quad (5.21)$$

Como no modelo anterior, a equação de primeira ordem para o campo χ é resolvida por

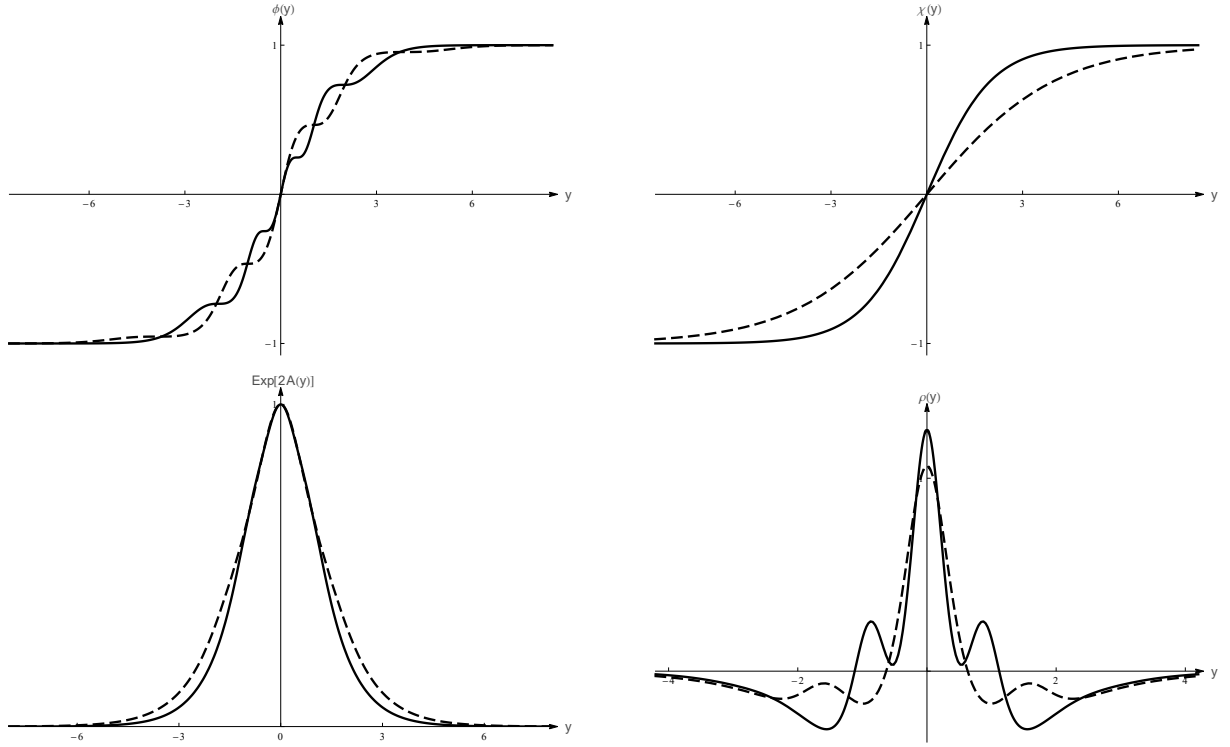


Figura 5.3: Campos escalares, fator de deformação e densidade de energia associados ao modelo 3. Os valores do parâmetro são $\alpha = 1/2$ (linha sólida), $\alpha = 1/4$ (linha tracejada) com $n = 2$.

$\chi(y) = \tanh(\alpha y)$, a qual pode ser vista na parte superior da Fig. 5.3 para alguns valores de α . Usando essa solução na equação de primeira ordem para o campo ϕ , obtemos

$$\phi(y) = \tanh(\eta(y)), \quad (5.22a)$$

$$\eta(y) = \frac{y}{2} + \frac{1}{4\alpha} \left(\text{Ci}(\xi_n^+(y)) - \text{Ci}(\xi_n^-(y)) \right), \quad (5.22b)$$

onde $\text{Ci}(x)$ é o cosseno integral de argumento x e $\xi_n^\pm(y) = 2n\pi(1 \pm \tanh(\alpha y))$. A solução acima está plotada para $\alpha = 1/2$ e $1/4$ com $n = 2$ na parte superior da Fig. 5.3. Note que agora temos uma estrutura multi-*kink* com $2n$ platôs que se tornam mais próximos do centro a medida que α aumenta.

Para calcular a função de deformação, usamos a equação (5.8), que assume a forma

$$A' = -\frac{2}{3} \left(\tanh(\eta(y)) - \frac{\tanh^3(\eta(y))}{3} + \alpha \left(\tanh(\alpha y) - \frac{\tanh^3(\alpha y)}{3} \right) \right). \quad (5.23)$$

Nós não fomos capazes de encontrar a solução analítica para $A(y)$ para esse modelo. Então, realizamos os cálculos numericamente com a condição $A(0) = 0$. Na parte inferior

da Fig. 5.3 plotamos o fator de deformação e a densidade de energia para $\alpha = 1/2$ e $1/4$ com $n = 2$. Observe que, embora o fator de deformação não seja significativamente modificado pelos platôs da solução, a densidade de energia possui uma estrutura interna que se aproxima da origem a medida que α aumenta. Além disso, verificamos que o parâmetro n desempenha um papel importante na formação de estruturas internas, controlando o número de picos na densidade de energia do sistema.

5.3 Brana assimétrica

Podemos ainda explorar a assimetria dos modelos que apresentamos aqui, seguindo a mesma linha de investigação das Refs. [57–59]. Nesse caso, escrevemos a função W na forma

$$\widetilde{W}(\phi, \chi) = W(\phi, \chi) + c, \quad (5.24)$$

onde c representa uma constante real. Observe que as equações (5.7) não mudam com a adição de uma constante e, portanto, as soluções do modelo permanecem as mesmas. No entanto, a equação (5.8) muda e passa a ser escrita como

$$A' = -\frac{2}{3}(W + c). \quad (5.25)$$

Isso causa uma assimetria no fator de deformação e na densidade de energia do modelo, conforme veremos mais adiante. Além disso, temos que o potencial escalar fica

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2} \frac{W_\phi^2}{f(\chi)} + \frac{1}{2} W_\chi^2 - \frac{4}{3} (W + c)^2. \quad (5.26)$$

Uma vez que, o comportamento assintótico do potencial escalar define a constante cosmológica 5-dimensional [108]

$$V(\phi_\pm, \chi_\pm) \equiv \Lambda_5, \quad (5.27)$$

com $\phi_\pm = \phi(y \rightarrow \pm\infty)$ e $\chi_\pm = \chi(y \rightarrow \pm\infty)$. A inclusão da constante c implica em

$$\Lambda_{5\pm} = -\frac{4}{3} (c + W(\phi_\pm, \chi_\pm))^2. \quad (5.28)$$

Para $c = 0$ (caso simétrico) vemos que a constante cosmológica é negativa com o mesmo valor em ambos os lados da brana, conseqüentemente, o espaço é assintoticamente AdS_5 .

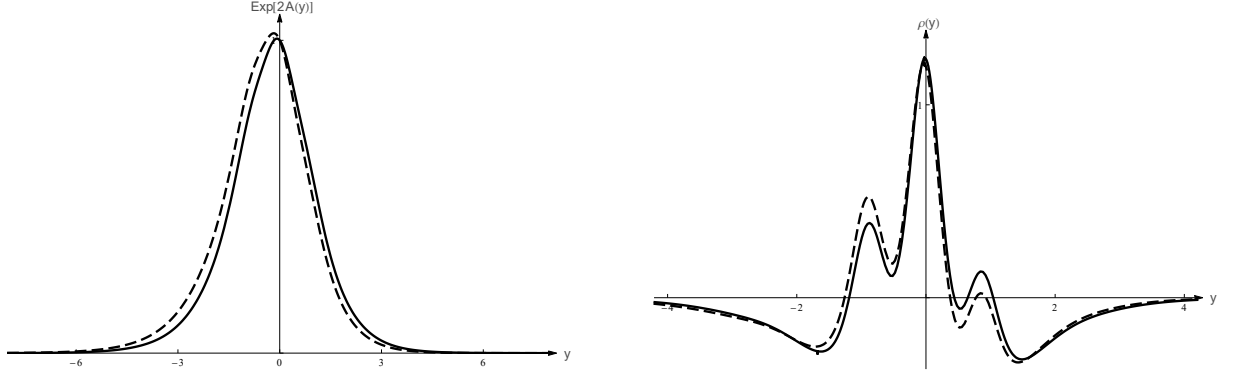


Figura 5.4: Fator de deformação e densidade de energia associados a versão assimétrica do modelo 3. Os valores do parâmetro são $c = 0.1$ (linha sólida) e $c = 0.2$ (linha tracejada) com $n = 2$ e $\alpha = 1/2$.

Contudo, para $c \neq 0$ temos outras novas e interessantes possibilidades.

Primeiro consideramos o intervalo $c \in (W_-, W_+)$, onde $W_- = W(\phi_-, \chi_-)$ e $W_+ = W(\phi_+, \chi_+)$. Nesse caso, a brana conecta assintoticamente dois espaços AdS_5 com distintas constantes cosmológicas.

Para $c = W_-$ ou $c = W_+$, em um dos lados da brana a constante cosmológica é negativa e, assim, o espaço é assintoticamente AdS_5 . Porém, do outro lado da brana a constante cosmológica é nula, mostrando que o espaço é assintoticamente Minkowski ($\mathbb{M}_5$). Esse caso pode, em princípio, ser fisicamente inaceitável, visto que o fator de deformação não é normalizável. Apesar disso, conforme mostrado nas Refs. [109–111], essa situação também é de interesse e nela pode-se obter a chamada quase-localização da gravidade.

Para entender melhor como o procedimento funciona, vamos aplicá-lo no modelo 3. Usando a função W dada pela equação (5.16a) e tomando $\alpha = 1/2$, as constantes cosmológicas no *bulk* ficam

$$\Lambda_{5\pm} = -\frac{4}{3}(c \pm 1)^2. \quad (5.29)$$

Aqui, c está restrito a variar no intervalo $[-1, 1]$ para evitar divergências no fator de deformação do modelo. Para $c \in (-1, 1)$, a brana conecta duas geometrias AdS_5 com distintas constantes cosmológicas. Já para $c = \pm 1$ a brana conecta geometrias AdS_5 e $\mathbb{M}_5$.

Observe que a equação (5.25), para o modelo 3, é dada por

$$A' = -\frac{2}{3} \left(\tanh(\eta(y)) - \frac{\tanh^3(\eta(y))}{3} + \alpha \left(\tanh(\alpha y) - \frac{\tanh^3(\alpha y)}{3} \right) + c \right). \quad (5.30)$$

Logo, podemos obter a função de deformação numericamente para alguns valores de c , fixando $n = 2$ e $\alpha = 1/2$. Na Fig. 5.4 plotamos o fator de deformação e a densidade de energia do modelo assimétrico, no qual podemos ver que a assimetria é controlada pelo parâmetro c . Note que o fator de deformação não tem um máximo em $y = 0$ como no caso simétrico. Ao invés disso, ele é suavemente deslocado para uma posição y_{max} que se afasta da origem conforme c aumenta.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Nesta tese, estudamos estruturas localizadas que surgem em teorias de campos descritas por campos escalares reais, tanto no espaço plano quanto no espaço curvo. No capítulo 2, apresentamos alguns resultados gerais sobre teorias de campos escalares, na qual analisamos estruturas tipo-*kink* no espaço-tempo plano. Em seguida, no capítulo 3, estudamos cenários de mundo brana, os quais lidam com uma geometria AdS_5 engendrando uma dimensão extra infinita. Nesse cenário, mostramos como o campo escalar, que suporta estruturas tipo-*kink*, é responsável pela modelagem da brana. Depois disso, apresentamos nossas contribuições para o assunto nos capítulos 4 e 5, nos quais exploramos os resultados dos trabalhos [60] e [61], respectivamente. Alguns comentários e perspectivas sobre cada um deles é feita abaixo.

No trabalho [60], investigamos teorias clássicas de campos com um único campo escalar real em $(1 + 1)$ dimensões e exploramos vários aspectos relacionados aos seus potenciais de estabilidade. Essa proposta foi inspirada nos resultados obtidos recentemente em [35], que mostrou que é possível usar o procedimento de reconstrução para partir de um potencial quântico e terminar com dois modelos distintos de teoria de campos, revelando que o procedimento de reconstrução da teoria de campos a partir da mecânica quântica supersimétrica não é único. Além disso, fomos motivados por outro resultado recente [36], que revelou a possibilidade de usar o procedimento de deformação para escrever modelos distintos de teoria de campos, possuindo o mesmo potencial de estabilidade.

O objetivo principal desse trabalho foi encontrar modelos distintos apresentando os mesmos potenciais de estabilidade e, para isso, consideramos o procedimento de deformação em que a conexão entre os modelos é obtida através de uma função deformadora.

Em seguida, encontramos uma relação estabelecendo uma conexão entre os modelos, que assegura a construção de sistemas distintos com potenciais de estabilidade semelhantes. Feito isso, introduzimos exemplos de potenciais com interações polinomiais e hiperbólicas, classificados em duas famílias distintas de modelos, que foram deformadas por uma função que contém um parâmetro que controla a suavidade do potencial deformado. Verificamos também que, se o modelo inicial possui setores topológicos assimétricos, um novo setor com potencial de estabilidade modificado pode surgir no modelo deformado. Portanto, os resultados encontrados no nosso trabalho consolidam a motivação incluída nas Refs. [35, 36].

Além disso, analisamos as soluções tipo-*kink* e as densidades de energia desses sistemas. Como resultado extra, observamos que, para escolhas específicas dos modelos, os potenciais inicial e deformado podem definir modelos gêmeos [112], uma vez que, desenvolvem as mesmas densidades de energia, potenciais de estabilidade e soluções estáticas deslocadas por uma constante.

No trabalho [61], estudamos a modelagem de branas com o uso de dois campos escalares acoplados na forma dada pela densidade lagrangiana (5.2). Calculamos as equações de movimento que descrevem o sistema e, também, mostramos que a energia da brana espessa é nula. Como as equações de movimento apresentam termos de segunda ordem, para simplificar o problema, desenvolvemos um formalismo de primeira ordem. Para fazer isso, assumimos que o potencial possui uma forma específica, na qual o acoplamento entre os campos escalares aparece.

Nesse contexto, exploramos um caso especial das equações de primeira ordem, nas quais um campo pode ser usado como fonte para a equação de primeira ordem que descreve o outro campo. Estudamos então três modelos distintos, o primeiro gerando uma característica surpreendente: o fator de deformação apresenta um bico acentuado na origem, o que lembra o comportamento da brana fina, e um comportamento suave fora da origem, como uma brana espessa usual. Isso induz uma divergência na densidade de energia, em $y = 0$, mas essa divergência é integrável e a energia total ainda é zero. No segundo modelo, adotamos configurações específicas para o campo escalar que engendram um parâmetro que é útil para ajustar uma estrutura interna na brana. No terceiro modelo, usamos a nova configuração do tipo-*kink* descrita anteriormente na Ref. [106] para criar uma brana com múltiplas estruturas internas, na qual um parâmetro ajusta suas

distâncias ao centro da brana. Por fim, mostramos que a adição de uma constante real no superpotencial, possibilita a construção de modelos de branas assimétricas. A assimetria muda a constante cosmológica em cada lado da brana. Sendo assim, a brana pode conectar duas geometrias AdS_5 com constantes cosmológicas distintas ou conectar geometrias AdS_5 e M_5 .

Uma perspectiva interessante para esse trabalho poderia ser a adição de férmions ou campos de gauge, para ver como eles podem ser aprisionados na brana e como a assimetria pode influenciar no aprisionamento. Isso pode ser implementado seguindo a mesma linha de investigação das Refs. [98, 99, 113–115]. Outras possibilidades incluem o estudo de branas espessas em cenários cosmológicos [116] ou em teorias de gravidade modificada, como, por exemplo, em teorias de gravidade $F(R)$ [117–119]. Essas e outras possibilidades estão sendo analisadas e esperamos relatá-las em um futuro próximo.

Referências Bibliográficas

- [1] Rajaraman, R. **Solitons and Instantons. An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory**. North Holland, 1982.
- [2] VILENKIN, A.; SHELLARD, E.P.S. **Cosmic strings and other topological defects**. Cambridge University Press, 2000.
- [3] MANTON, N.; SUTCLIFFE, P. **Topological solitons**. Cambridge University Press, 2004.
- [4] VACHASPATI, T. **Kinks and domain walls: An introduction to classical and quantum solitons**. Cambridge University Press, 2006.
- [5] WEINBERG, E.J. **Classical solutions in quantum field theory: Solitons and Instantons in High Energy Physics**. Cambridge University Press, 2012.
- [6] FRADKIN, E. **Field theories of condensed matter physics**. Cambridge University Press, 2013.
- [7] SHNIR, Y.M. **Topological and non-topological solitons in scalar field theories**. Cambridge University Press, 2018.
- [8] BOGOMOL'NYI, E.B. The stability of classical solutions. **Sov. J. Nucl. Phys.**, v. 24, p. 449, 1976.
- [9] PRASAD, M.K; SOMMERFIELD, C.M. Exact Classical Solution for the 't Hooft Monopole and the Julia-Zee Dyon. **Physical Review Letters**, v. 35, p. 760, 1975.
- [10] JUBERT, P.-O.; ALLENSPACH, R.; BISCHOF, A. Magnetic domain walls in constrained geometries. **Physical Review B**, v. 69, n. 22, p. 220410, 2004.
- [11] VANHAVERBEKE, A.; BISCHOF, A.; ALLENSPACH, R. Control of domain wall polarity by current pulses. **Physical Review Letters**, v. 101, n. 10, p. 107202, 2008.
- [12] KIM, S.K.; HILL, D.; TSERKOVNYAK, Y. Mechanical actuation of magnetic domain-wall motion. **Physical Review Letters**, v. 117, n. 23, p. 237201, 2016.

- [13] KOSEVICH, A.M.; IVANOV, B.A.; KOVALEV, A.S. Magnetic solitons. **Physics Reports**, v. 194, n. 3-4, p. 117-238, 1990.
- [14] VACHASPATI, T. Class of kinks in $SU(N) \times Z_2$. **Physical Review D**, v. 63, n. 10, p. 105010, 2001.
- [15] POGOSIAN, L.; VACHASPATI, T. Space of kink solutions in $SU(N) \times Z_2$. **Physical Review D**, v. 64, n. 10, p. 105023, 2001.
- [16] POGOSIAN, L. Kink interactions in $SU(N) \times Z_2$. **Physical Review D**, v. 65, n. 6, p. 065023, 2002.
- [17] RAJARAMAN, R. Solitons of coupled scalar field theories in two dimensions. **Physical Review Letters**, v. 42, n. 4, p. 200, 1979.
- [18] BAZEIA, D.; DOS SANTOS, M.J.; RIBEIRO, R.F. Solitons in systems of coupled scalar fields. **Physics Letters A**, v. 208, n. 1-2, p. 84-88, 1995.
- [19] BAZEIA, D. et al. Soliton stability in systems of two real scalar fields. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, v. 30, n. 23, p. 8157, 1997.
- [20] BAZEIA, D.; BOSCHI-FILHO, H.; BRITO, F.A. Domain defects in systems of two real scalar fields. **Journal of High Energy Physics**, v. 1999, n. 04, p. 028, 1999.
- [21] IZQUIERDO, A.A.; LEON, M.A.G.; GUILARTE, J.M. Kink variety in systems of two coupled scalar fields in two space-time dimensions. **Physical Review D**, v. 65, n. 8, p. 085012, 2002.
- [22] BAZEIA, D. et al. Topological defects and the trial orbit method. **Modern Physics Letters A**, v. 17, n. 29, p. 1945-1953, 2002.
- [23] BAZEIA, D.; LOSANO, L.; SANTOS, J.R.L. Kinklike structures in scalar field theories: from one-field to two-field models. **Physics Letters A**, v. 377, n. 25-27, p. 1615-1620, 2013.
- [24] BAZEIA, D.; LOSANO, L.; WOTZASEK, C. Domain walls in three-field models. **Physical Review D**, v. 66, n. 10, p. 105025, 2002.
- [25] SANTOS, J.R.L. et al. Building analytical three-field cosmological models. **The European Physical Journal C**, v. 78, n. 2, p. 169, 2018.
- [26] COOPER, F.; KHARE, A.; SUKHATME, U. Supersymmetry and quantum mechanics. **Physics Reports**, v. 251, n. 5-6, p. 267-385, 1995.
- [27] JUNKER, G. **Supersymmetric Methods in Quantum and Statistical Mechanics**. Springer, 1996.

- [28] CHRIST, N.H.; LEE, T.D. Quantum expansion of soliton solutions. **Physical Review D**, v. 12, n. 6, p. 1606, 1975.
- [29] KWONG, W.; ROSNER, J.L. Supersymmetric quantum mechanics and inverse scattering. **Progress of Theoretical Physics Supplement**, v. 86, p. 366-376, 1986.
- [30] BOYA, L.J.; CASAHORRAN, J. General scalar bidimensional models including kinks. **Annals of Physics**, v. 196, n. 2, p. 361-385, 1989.
- [31] FLORES-HIDALGO, G.; SVAITER, N.F. Constructing bidimensional scalar field theory models from zero mode fluctuations. **Physical Review D**, v. 66, n. 2, p. 025031, 2002.
- [32] BORDAG, M.; YUROV, A. Spontaneous symmetry breaking and reflectionless scattering data. **Physical Review D**, v. 67, n. 2, p. 025003, 2003.
- [33] VACHASPATI, T. Reconstruction of field theory from excitation spectra of defects. **Physical Review D**, v. 69, n. 4, p. 043510, 2004.
- [34] BAZEIA, D.; BEMFICA, F.S. From scalar field theories to supersymmetric quantum mechanics. **Modern Physics Letters A**, v. 32, n. 12, p. 1750073, 2017.
- [35] BAZEIA, D.; BEMFICA, F.S. From supersymmetric quantum mechanics to scalar field theories. **Physical Review D**, v. 95, n. 8, p. 085008, 2017.
- [36] BAZEIA, D.; LOSANO, L. A novel connection between scalar field theories and quantum mechanics. **Europhysics Letters**, v. 121, n. 1, p. 10006, 2018.
- [37] RANDALL, L; SUNDRUM, R. An alternative to compactification. **Physical Review Letters**, v. 83, n. 23, p. 4690, 1999.
- [38] DEWOLFE, O. et al. Modeling the fifth dimension with scalars and gravity. **Physical Review D**, v. 62, n. 4, p. 046008, 2000.
- [39] GREMM, M. Four-dimensional gravity on a thick domain wall. **Physics Letters B**, v. 478, n. 4, p. 434-438, 2000.
- [40] KOBAYASHI, S.; KOYAMA, K.; SODA, J. Thick brane worlds and their stability. **Physical Review D**, v. 65, n. 6, p. 064014, 2002.
- [41] AFONSO, V.I.; BAZEIA, D.; LOSANO, L. First-order formalism for bent brane. **Physics Letters B**, v. 634, n. 5-6, p. 526-530, 2006.
- [42] DAHIA, F.; ROMERO, C. Confinement and stability of the motion of test particles in thick branes. **Physics Letters B**, v. 651, n. 2-3, p. 232-238, 2007.

- [43] LIU, Y. et al. Fermions on thick branes in the background of sine-Gordon kinks. **Physical Review D**, v. 78, n. 6, p. 065025, 2008.
- [44] ADAM, C. et al. K fields, compactons and thick branes. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, v. 41, n. 21, p. 212004, 2008.
- [45] BAZEIA, D.; GOMES, A.R.; LOSANO, L. Gravity localization on thick branes: a numerical approach. **International Journal of Modern Physics A**, v. 24, n. 06, p. 1135-1160, 2009.
- [46] GUO, H. et al. Thick branes with a nonminimally coupled bulk-scalar field. **Physical Review D**, v. 85, n. 12, p. 124033, 2012.
- [47] MENEZES, R. First-order formalism for thick branes in modified teleparallel gravity. **Physical Review D**, v. 89, n. 12, p. 125007, 2014.
- [48] PEYRAVI, M.; RIAZI, N.; LOBO, F.S.N. Soliton models for thick branes. **The European Physical Journal C**, v. 76, n. 5, p. 247, 2016.
- [49] ZHONG, Y. et al. Thick branes with inner structure in mimetic gravity. **The European Physical Journal C**, v. 78, n. 1, p. 45, 2018.
- [50] BAZEIA, D.; FERREIRA, D.A.; MOREIRA, D.C. First-order formalism for thick branes in modified gravity with Lagrange multiplier. **Europhysics Letters**, v. 129, n. 1, p. 11004, 2020.
- [51] DZHUNUSHALIEV, V.; FOLOMEEV, V.; MINAMITSUJI, M. Thick brane solutions. **Reports on Progress in Physics**, v. 73, n. 6, p. 066901, 2010.
- [52] PADILLA, A. Cosmic acceleration from asymmetric branes. **Classical and Quantum Gravity**, v. 22, n. 4, p. 681, 2005.
- [53] PADILLA, A. Infra-red modification of gravity from asymmetric branes. **Classical and Quantum Gravity**, v. 22, n. 6, p. 1087, 2005.
- [54] GERGELY, L.A.; MAARTENS, R. Asymmetric brane-worlds with induced gravity. **Physical Review D**, v. 71, n. 2, p. 024032, 2005.
- [55] DUTRA, A.S.; BRITO, G.P.; SILVA, J.M.H. Asymmetrical Bloch branes and the hierarchy problem. **Europhysics Letters**, v. 108, n. 1, p. 11001, 2014.
- [56] MENEZES, R.; MOREIRA, D.C. New models for asymmetric kinks and branes. **Annals of Physics**, v. 383, p. 662-679, 2017.
- [57] BAZEIA, D.; MENEZES, R.; DA ROCHA, R. A note on asymmetric thick branes. **Advances in High Energy Physics**, v. 2014, 2014.

- [58] AHMED, A.; DULNY, L.; GRZADKOWSKI, B. Generalized Randall–Sundrum model with a single thick brane. **The European Physical Journal C**, v. 74, n. 4, p. 2862, 2014.
- [59] BAZEIA, D.; FERREIRA, D.A. New results on asymmetric thick branes. **Annals of Physics**, v. 411, p. 167975, 2019.
- [60] BAZEIA, D. et al. Novel results for kinklike structures and their connections to quantum mechanics. **Annals of Physics**, v. 395, p. 275-300, 2018.
- [61] BAZEIA, D.; FERREIRA, D.A.; MARQUES, M.A. Symmetric and asymmetric thick brane structures. **The European Physical Journal Plus**, v. 135, p. 587, 2020.
- [62] BAZEIA, D.; LOSANO, L.; MALBOUISSON, J. M. C. Deformed defects. *Physical Review D*, v. 66, n. 10, p. 101701, 2002.
- [63] BAZEIA, D. et al. Deformed defects for scalar fields with polynomial interactions. **Physical Review D**, v. 73, n. 10, p. 105008, 2006.
- [64] BAZEIA, D.; LIMA, E.E.M.; LOSANO, L. Kinks and branes in models with hyperbolic interactions. **International Journal of Modern Physics A**, v. 32, n. 26, p. 1750163, 2017.
- [65] ROMANCZUKIEWICZ, T.; SHNIR, Ya. Oscillon resonances and creation of kinks in particle collisions. **Physical Review Letters**, v. 105, n. 8, p. 081601, 2010.
- [66] DOREY, P. et al. Kink-antikink collisions in the ϕ^6 model. **Physical Review Letters**, v. 107, n. 9, p. 091602, 2011.
- [67] BAZEIA, D.; BELENDRYASOVA, E.; GANI, V.A. Scattering of kinks of the sinh-deformed φ^4 model. **The European Physical Journal C**, v. 78, n. 4, p. 340, 2018.
- [68] KHARE, A.; CHRISTOV, I.C.; SAXENA, A. Successive phase transitions and kink solutions in ϕ^8 , ϕ^{10} , and ϕ^{12} field theories. **Physical Review E**, v. 90, n. 2, p. 023208, 2014.
- [69] KLOTZEK, A.; THIES, M. Kink dynamics, sinh-Gordon solitons and strings in AdS3 from the Gross–Neveu model. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, v. 43, n. 37, p. 375401, 2010.
- [70] AGUIRRE, A.R. et al. $N = 1$ super sinh-Gordon model with defects revisited. **Journal of High Energy Physics**, v. 2015, n. 2, p. 175, 2015.
- [71] AGUIRRE, A.R. et al. Type-II super-Bäcklund transformation and integrable defects for the $N = 1$ super sinh-Gordon model. **Journal of High Energy Physics**, v. 2015, n. 6, p. 125, 2015.

- [72] BERTINI, B.; PIROLI, L.; CALABRESE, P. Quantum quenches in the sinh-Gordon model: steady state and one-point correlation functions. **Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment**, v. 2016, n. 6, p. 063102, 2016.
- [73] SKYRME, T.H.R. Particle states of a quantized meson field. **Proc. Roy. Soc. Lond. A**, v. 262, p. 237, 1961.
- [74] JACKIW, R. Quantum meaning of classical field theory. **Reviews of Modern Physics**, v. 49, n. 3, p. 681, 1977.
- [75] GRIFFITHS, D. **Introduction to Quantum Mechanics**. 2. ed. Pearson Prentice Hall, 2005.
- [76] MORSE, P.M.; FESHBACH, H. **Methods of Theoretical Physics**. McGraw-Hill, 1953.
- [77] FLÜGGE, S. **Practical Quantum Mechanics**. Springer, 1994.
- [78] BAZEIA, D.; MENEZES, J.; SANTOS, M. M. Complete factorization of equations of motion in Wess–Zumino theory. **Physics Letters B**, v. 521, n. 3-4, p. 418-420, 2001.
- [79] BAZEIA, D.; MENEZES, J.; SANTOS, M. M. Complete factorization of equations of motion in supersymmetric field theories. **Nuclear Physics B**, v. 636, n. 1-2, p. 132-140, 2002.
- [80] LOHE, M.A. Soliton structures in $P(\varphi)_2$. **Physical Review D**, v. 20, n. 12, p. 3120, 1979.
- [81] AKAMA, K. An Early Proposal of "Brane World". **Lect. Notes Phys.**, v. 176, n. SMC-PHYS-160, p. 267-271, 1982.
- [82] RUBAKOV, V.A.; SHAPOSHNIKOV, M.E. Do we live inside a domain wall?. **Physics Letters B**, v. 125, n. 2-3, p. 136-138, 1983.
- [83] CARROL, S. **Spacetime and Geometry: an introduction to General Relativity**. Addison Wesley, 2004.
- [84] WALD, R.M. **General Relativity**. The University of Chicago Press, 1984.
- [85] CSAKI, C. et al. Universal aspects of gravity localized on thick branes. **Nuclear Physics B**, v. 581, n. 1-2, p. 309-338, 2000.
- [86] CSAKI, C. Extra dimensions and branes. In: **From Fields to Strings: Circumnavigating Theoretical Physics: Ian Kogan Memorial Collection (In 3 Volumes)**. 2005. p. 967-1060.

- [87] BRITO, F.A.; CVETIC, M.; YOON, S.C. From a thick to a thin supergravity domain wall. **Physical Review D**, v. 64, n. 6, p. 064021, 2001.
- [88] BAZEIA, D.; BRITO, F.A.; GOMES, A.R. Locally localized gravity and geometric transitions. **Journal of High Energy Physics**, v. 2004, n. 11, p. 070, 2004.
- [89] GIBBONS, G.; KALLOSH, R.; LINDE, A. Brane world sum rules. **Journal of High Energy Physics**, v. 2001, n. 01, p. 022, 2001.
- [90] BAZEIA, D.; MENEZES, J.; MENEZES, R. New global defect structures. **Physical review letters**, v. 91, n. 24, p. 241601, 2003.
- [91] BAZEIA, D.; FURTADO, C.; GOMES, A.R. Brane structure from a scalar field in warped spacetime. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, v. 2004, n. 02, p. 002, 2004.
- [92] CAMPOS, A. Critical phenomena of thick branes in warped spacetimes. **Physical review letters**, v. 88, n. 14, p. 141602, 2002.
- [93] BAZEIA, D.; GOMES, A.R. Bloch brane. **Journal of High Energy Physics**, v. 2004, n. 05, p. 012, 2004.
- [94] DUTRA, A.S.; DE FARIA, A.; HOTT, M. Degenerate and critical Bloch branes. **Physical Review D**, v. 78, n. 4, p. 043526, 2008.
- [95] CRUZ, W.T.; LIMA, A.R.P; ALMEIDA, C.A.S. Gauge field localization on the Bloch Brane. **Physical Review D**, v. 87, n. 4, p. 045018, 2013.
- [96] CRUZ, W.T.; MALUF, R.V.; ALMEIDA, C.A.S. Kalb–Ramond field localization on the Bloch brane. **The European Physical Journal C**, v. 73, n. 8, p. 2523, 2013.
- [97] ZHONG, Yi et al. Thick branes with inner structure in mimetic gravity. **The European Physical Journal C**, v. 78, n. 1, p. 45, 2018.
- [98] MELFO, A.; PANTOJA, N.; TEMPO, J.D. Fermion localization on thick branes. **Physical Review D**, v. 73, n. 4, p. 044033, 2006.
- [99] ALMEIDA, C.A.S. et al. Fermion localization and resonances on two-field thick branes. **Physical Review D**, v. 79, n. 12, p. 125022, 2009.
- [100] CRUZ, W.T.; GOMES, A.R.; ALMEIDA, C.A.S. Fermions on deformed thick branes. **The European Physical Journal C**, v. 71, n. 11, p. 1790, 2011.
- [101] BAZEIA, D. et al. From kinks to compactons. **Physics Letters B**, v. 736, p. 515-521, 2014.

- [102] BAZEIA, D.; MARQUES, M.A.; MENEZES, R. Models for asymmetric hybrid brane. **Physical Review D**, v. 92, n. 8, p. 084058, 2015.
- [103] VERAS, D.F.S. et al. Gravity localization on hybrid branes. **Physics Letters B**, v. 754, p. 201-207, 2016.
- [104] BAZEIA, D.; LIMA, E.; LOSANO, L. Hybrid Bloch brane. **The European Physical Journal C**, v. 77, n. 2, p. 1-8, 2017.
- [105] ALMEIDA, C.A.S.; DANTAS, D.M.; VERAS, D.F.S. Corrections to Newton's law of gravitation-application to hybrid Bloch brane. **In: J. Phys. Conf. Ser.**, v.965, p. 012002, 2018.
- [106] BAZEIA, D.; LIAO, M.A.; MARQUES, M.A. Geometrically constrained kinklike configurations. **The European Physical Journal Plus**, v. 135, n. 4, p. 383, 2020.
- [107] BAZEIA, D. et al. First-order formalism for flat branes in generalized N-field models. **Physical Review D**, v. 88, n. 4, p. 045001, 2013.
- [108] BAZEIA, D.; BRITO, F.; LOSANO, L. Scalar fields, bent branes, and RG flow. **Journal of High Energy Physics**, v. 2006, n. 11, p. 064, 2006.
- [109] GREGORY, R.; RUBAKOV, V.A.; SIBIRYAKOV, S.M. Opening up extra dimensions at ultralarge scales. **Physical Review Letters**, v. 84, n. 26, p. 5928, 2000.
- [110] DVALI, G.; GABADADZE, G.; PORRATI, M. Metastable gravitons and infinite volume extra dimensions. **Physics Letters B**, v. 484, n. 1-2, p. 112-118, 2000.
- [111] CSAKI, C.; ERLICH, J.; HOLLOWOOD, T.J. Quasilocalization of gravity on a brane by resonant modes. **Physical Review Letters**, v. 84, n. 26, p. 5932, 2000.
- [112] ANDREWS, M. et al. Distinguishing k-defects from their canonical twins. **Physical Review D**, v. 82, n. 10, p. 105006, 2010.
- [113] GUERRERO, R. et al. Gauge field localization on brane worlds. **Physical Review D**, v. 81, n. 8, p. 086004, 2010.
- [114] CHUMBES, A.E.R.; DA SILVA, J.M.H.; HOTT, M.B. Model to localize gauge and tensor fields on thick branes. **Physical Review D**, v. 85, n. 8, p. 085003, 2012.
- [115] CRUZ, W.T.; LIMA, A.R.P.; ALMEIDA, C. A.S. Gauge field localization on the Bloch Brane. **Physical Review D**, v. 87, n. 4, p. 045018, 2013.
- [116] AHMED, A.; GRZADKOWSKI, B.; WUDKA, J. Thick-brane cosmology. **Journal of High Energy Physics**, v. 2014, n. 4, p. 61, 2014.

- [117] AFONSO, V.I. et al. $f(R)$ -brane. **Physics Letters B**, v. 658, n. 1-3, p. 71-76, 2007.
- [118] ZHONG, Y.; LIU, Y.X.; YANG, K. Tensor perturbations of $f(R)$ -branes. **Physics Letters B**, v. 699, n. 5, p. 398-402, 2011.
- [119] BAZEIA, D. et al. Braneworld solutions for $F(R)$ models with non-constant curvature. **Physics Letters B**, v. 729, p. 127-135, 2014.