



Universidade Federal da Paraíba Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Departamento de Física

Tese de Doutorado

**Aplicações do Setor John da Gravidade de Horndeski nos
Cenários de Brana Negra e Relação de viscosidade/entropia,
Mundo Brana e Cosmologia**

Fabiano Francisco dos Santos

JOÃO PESSOA

- Fevereiro 2020 -

Universidade Federal da Paraíba Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Departamento de Física

Tese de Doutorado

Aplicações do Setor John da Gravidade de Horndeski nos Cenários de Brana Negra e Relação de viscosidade/entropia, Mundo Brana e Cosmologia

Fabiano Francisco dos Santos

Tese submetida ao Departamento de Física da
Universidade Federal da Paraíba, sob orienta-
ção do professor Dr. Francisco de Assis de
Brito, como parte dos requisitos para obtenção
do título de Doutor em Física.

JOÃO PESSOA

- Fevereiro 2020 -

Catálogo na publicação
Seção de Catálogo e Classificação

S237a Santos, Fabiano Francisco Dos.
Aplicações do Setor John da Gravidade de Horndeski nos
Cenários de Brana Negra e Relação de
viscosidade/entropia, Mundo Brana e Cosmologia /
Fabiano Francisco Dos Santos. - João Pessoa, 2020.
84 f.

Orientação: Francisco de Assis Brito.
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Gravidade de Horndeski - Correspondência AdS/CFT. 2.
Mundo Brana - Cosmologia. I. Brito, Francisco de Assis.
II. Título.

UFPB/BC

*"The distance between insanity
and genius is measured only by
success."*

Bruce Feirstein

Agradeço ao Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito, pela orientação.

Aos funcionários e professores do Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal da Paraíba pelo aprendizado. Em especial aos meus amigos Anderson Alexandre, Messias de Brito Cruz, Helena Cristina de Albuquerque, Ivana Ribeiro, Igor Andrade, Natália Freitas e seu Mariano pelo café e momentos de descontração durante o meu doutorado.

A minha professora de Inglês Tammara Oliveira pelas aulas que foram de crucial importância nas minhas apresentações e interações durante minhas visitas ao International Institute of Physics-UFRN.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro.

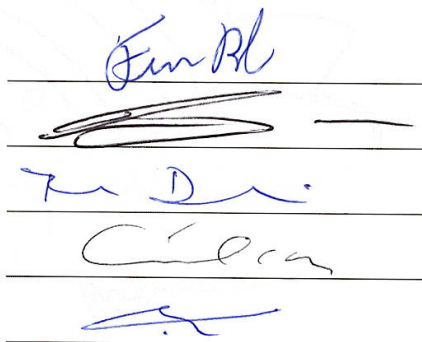
À minha mãe (em memória).

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de
Doutorado do aluno **Fabiano Francisco dos Santos**, candidato ao Título de Doutor em Física na Área de Concentração Física das Partículas Elementares e Campos.

1 Aos vinte dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e vinte, às 14:00, no Auditório da
2 Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade
3 Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para
4 examinar o candidato ao grau de Doutor em Física na área de Física das Partículas
5 Elementares e Campos, **Fabiano Francisco dos Santos**. A comissão examinadora foi
6 composta pelos professores doutores: *Francisco de Assis Brito* (UFPB), orientador e
7 presidente da banca examinadora, *Albert Petrov* (UFPB), *Fábio Dahia* (UFPB), *Amilcar*
8 *Rabelo de Queiroz* (UFCG) e *Azadeh Mohammadi* (UFPE). Dando início aos trabalhos,
9 o Prof. Francisco de Assis Brito comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A
10 seguir, passou a palavra para que o candidato fizesse, oralmente, a exposição do trabalho
11 de tese intitulado “*Aplicações do setor John da gravidade de Horndeski nos cenários de*
12 *Brana Negra e relação de viscosidade/entropia, cosmologia e mundo brana*”. Concluída
13 a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o seguinte
14 parecer: “**aprovado**”. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o
15 respectivo diploma de Doutor em Física na forma da lei. E para constar, eu, Danilo Wilson
16 Lemos Menezes, redigi esta ata que vai assinada por mim e pelos membros da Banca
17 Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **20 de fevereiro de 2020**.

18

Prof. Dr. Francisco de Assis Brito
Orientador – PPGF/UFPB
Prof. Dr. Albert Petrov
PPGF/UFPB
Prof. Dr. Fábio Dahia
PPGF/UFPB
Prof. Dr. Amilcar Rabelo de Queiroz
UFCG
Profa. Dra. Azadeh Mohammadi
UFPE



19

Sumário

Resumo	vii
Abstract	viii
1 Introdução	1
2 Teorias de Gravidade de Lovelock e Gravidade de Horndeski	7
2.1 Teorias de gravidade de Lovelock	7
2.2 Teorias de gravidade de Horndeski	10
3 Correspondência holográfica e hidrodinâmica	14
3.1 Teoria de Campo Conforme	15
3.2 Álgebra Conforme	16
3.3 Operador de Campo Local	17
3.4 Correlação Conforme	20
3.5 Função de Partição	24
3.6 Coeficientes de Transporte	26
3.7 Relação viscosidade de cisalhamento/densidade de entropia	27
4 Brana negra no espaço-tempo assintoticamente de Lifshitz e relação de viscosidade/entropia na gravidade de Horndeski	31

4.1	Brana negra no espaço-tempo assintoticamente de Lifshitz na gravidade de Horndeski	32
4.1.1	Termodinâmica	36
4.2	Relação viscosidade/densidade de entropia	37
5	Mundo brana na gravidade de Horndeski	43
5.1	Mundo Brana	43
5.2	Exemplos	45
5.3	Solução Numérica	47
6	Modelagem do setor escuro na gravidade de Horndeski no formalismo de primeira ordem	49
6.1	A gravidade de Horndeski no Cenário Cosmológico	50
6.2	Formalismo de Primeira Ordem	50
6.3	Soluções Numéricas	52
6.4	Observáveis Cosmológicos	53
7	Conclusões	59
	Referências Bibliográficas	62

Resumo

Neste trabalho abordamos aplicações do setor John da gravidade de Horndeski nos cenários de brana negra, mundo brana e cosmologia. Especificamente, estudamos a correspondência AdS/CFT no contexto da gravidade de Horndeski para avaliar a razão de viscosidade/entropia, em função de um expoente crítico fixo e dos parâmetros da teoria. No cenário de mundo brana abordamos a questão de encontrar soluções para a gravidade de Horndeski em 5 dimensões e discutimos a localização da gravidade. Finalmente, no cenário cosmológico, encontramos soluções usando o formalismo de primeira ordem na gravidade de Horndeski que restringe o superpotencial e implica que nenhuma escolha do potencial escalar é permitida. A equação de estado do campo escalar descreve bem o cenário cosmológico no momento atual e nos permite concluir que ela pode simular a energia escura na gravidade de Horndeski.

Palavras-chave: Gravidade de Horndeski; Correspondência *AdS/CFT*; Mundo Brana; Cosmologia.

Abstract

In this thesis, we approached the applications of the John sector of the Horndeski gravity in the scenarios of black brane, braneworld and cosmology. Specially, we study AdS/CFT correspondence in the context of the Horndeski gravity to evaluate the viscosity/entropy density ratio, as a function of the fixed exponent and parameters of theory. In the braneworld, we address the issue of finding braneworld solutions in a five-dimensional Horndeski gravity and discuss gravity localization. Finally, in the cosmological scenario we finding solutions by using first-order formalism in the Horndeski gravity that constrains the superpotential and implies that no free choice of scalar potential is allowed. The scalar field equation of state reflects well the cosmological scenario at the present time and allows us to conclude that it can simulate the dark energy in the Horndeski gravity.

Keywords: Horndeski Gravity; *AdS/CFT* Correspondence; Braneworld; Cosmology.

Capítulo 1

Introdução

Desde 1915 [1, 2, 3], a Relatividade Geral tem passado por vários testes experimentais, os quais tem sido executados de forma notável. Alguns deles vão desde a medição de Eddington's da deflexão da luz em 1919 [4] à recente observação direta de ondas gravitacionais pela colaboração LIGO [5]. Porém, na escala de Planck [6, 7] tanto os efeitos gravitacionais quanto os efeitos da mecânica quântica se tornam importantes e uma descrição quântica da gravidade se torna necessária. No entanto, devido à sua não-renormalização a Relatividade Geral não pode fornecer tal descrição.

As observações do nosso universo recente tem mostrado que a expansão é acelerada [8, 9] sugerindo que seu conteúdo energético deve ser dominado por energia escura. Um modelo que é bem conhecido envolvendo energia escura que pode ser tomado como exemplo é o conhecido Λ CDM, o qual é obtido adicionando um termo de constante cosmológica positiva na equação de Einstein. Porém, apesar das boas previsões fenomenológicas, este modelo pode ser considerado não satisfatório do ponto de vista teórico. A razão para isso é que um dos problemas mais conhecidos envolvendo esse modelo é o problema da constante cosmológica, ou seja, o qual relaciona à discrepância entre a escala natural e a

medida do valor de Λ [10]. De fato, a contribuição da energia de vácuo esperada para Λ , no contexto da física de partículas é mais de cem ordens de magnitude que o observado. Para explicar a pequenez observada de Λ , seu valor "nulo" deve ser tal que quase cancele questões da energia do vácuo.

Devido a essas questões modificações da Relatividade Geral foram propostas. Uma delas foi proposta por Lovelock em 1971 e 1972 [11, 12], essa modificação da Relatividade Geral, mantém algumas de suas propriedades essenciais, tais como equações de movimento de segunda ordem surgindo de uma ação invariante por difeomorfismo e transformações de Lorentz [13, 14]. Esta modificação da Relatividade Geral introduz graus de liberdade de propagação extras no setor gravitacional, tais como campos escalares, vetores ou tensores.

Esses estudos levaram à descoberta da gravidade de Horndeski. A gravidade de Horndeski é uma teoria escalar-tensorial mais geral que foi descoberta em 1974 [15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23] e é caracterizada por uma teoria com equações de campo também de segunda ordem. O lagrangiano produz equações de segunda ordem de movimento como discutido em [19, 20, 24, 25, 26, 27, 30] incluindo quatro funções arbitrárias do campo escalar e seu termo cinético [28, 29]. O termo que devemos focar nossa atenção inclui um acoplamento não-mínimo entre o termo cinético escalar padrão e o tensor de Einstein. Esta teoria segue a mesma classe de teorias de tensores e escalares acopladas, como a teoria de Brans-Dicke, cujo campo escalar é acoplado de forma não mínima ao termo de Einstein-Hilbert. A principal diferença aqui é que o tensor de Einstein se une não minimamente à derivada quadrada de um campo escalar dinâmico. Como veremos mais tarde, este é o chamado setor John da gravidade de Horndeski. Além do interesse cosmológico, essa teoria também atraiu a atenção em astrofísica, como na busca de soluções de buracos negros. Em uma investigação mais recente desta teoria, foi mostrado que ela admite a construção

de buracos negros [19, 31]. Outros exemplos de soluções esfericamente simétricas no contexto do sistema solar e outros cenários astrofísicos também podem ser encontrados, por exemplo, no estudo do deslocamento do periélio e desvio da luz [32] e nas questões que envolvem experiência de sonda de gravidade B [33].

No presente trabalho iremos estudar aplicações do setor John da gravidade de Horndeski nos cenários de brana negra [16], mundo brana [15] e cosmologia [17]. Investigações de branas negras em espaço-tempo assintoticamente Lifshitz foram consideradas anteriormente em [34, 35, 36, 37, 38]. Buracos negros de Lifshitz com um campo escalar dependente do tempo na teoria de Horndeski foram estudados em [39]. No nosso caso, encontramos buracos negros estáticos de Lifshitz relacionados com a constante cosmológica $\Lambda = (1 + 2z)/L^2$ para expoente crítico z .

A descrição holográfica de modelos envolvendo a escala de Lifshitz atraiu forte interesse nos últimos anos, principalmente devido a aplicações em sistemas de matéria condensada [34]. Especialmente, os buracos negros planares envolvendo supercondutores Lifshitz com um campo de axion como proposto em [34] são de especial interesse no contexto da correspondência AdS/CFT devido à aplicação em sistemas supercondutores não convencionais.

Mais recentemente, várias considerações da correspondência AdS/CFT no contexto da gravidade de Horndeski foram apresentadas em [42, 43, 44, 45, 46]. Usando esta correspondência [47, 48, 49, 50], uma relação importante conhecida como a relação entre a viscosidade de cisalhamento e a densidade de entropia [35, 51, 52, 53, 54, 55] pode ser computada na teoria de campo dual conforme. Esta razão de densidade de viscosidade/entropia, que é dada pelo limite $\eta/s \geq 1/(4\pi)$, pode ser violada pela adição de termos de curvatura de ordem superior [56, 57]. No entanto, como mostrado em [35]

usando a gravidade de Horndeski, essa relação pode ser simplesmente violada ajustando os parâmetros de Horndeski α e γ , sem a presença de qualquer termo de curvatura de ordem mais alta. Para mais investigações sobre estas questões, veja [58] para gravidade de Horndeski e [53] para gravidade massiva AdS_4 .

Como mostraremos, em nossa solução de brana negra, a violação da razão de densidade viscosidade/entropia é desenvolvida por um expoente crítico específico. Em nossas análises, a violação do limite 'universal' [51, 54] $\eta/s = 1/(4\pi)$ é devido ao expoente crítico $z = 1/2$ com $\alpha \gg \gamma\Lambda$ que implica em $\eta/s < 1/(4\pi)$ e confirma as violações mencionadas de tal limite.

No estudo de mundo brana [59, 60, 61, 62, 63, 64], foram encontradas soluções através do formalismo de primeira ordem [65, 66] na gravidade de Horndeski [15]. Porém, sabemos que modelos envolvendo mundo brana tais como Randall-Sundrum [59, 60], mostram que a localização da gravidade em uma 3-brana [59] surge no sentido de ser uma alternativa para compactação envolvendo dimensões extras. Nos cenários de Randall-Sundrum [59, 60, 61], 3-branas são incorporadas em um espaço ambiente AdS_5 com uma constante cosmológica negativa ($\Lambda_5 < 0$) e fontes funções delta.

Além da proposta de Randall-Sundrum [59, 60, 61] outros cenários de localização de gravidade em branas espessas foram apresentados [62]. Estes cenários são dirigidos por campos escalares reais com dinâmica padrão utilizando o formalismo de primeira ordem [67].

No cenário cosmológico [17] iremos considerar a teoria de Horndeski usando o formalismo de equação de primeira ordem que foi apresentado recentemente para a gravidade de Horndeski em um cenário de mundo brana [15]. Investigamos as equações de segunda ordem através do formalismo de primeira ordem, porque em geral simplifica-se o estudo de

soluções analíticas ou numéricas. No nosso caso, consideramos as equações de Friedmann sem curvatura e assumimos a dominância da energia escura. Em nossas investigações, considerando métodos numéricos, mostramos que as soluções do tipo kink de equações de primeira ordem representam um Universo de Sitter. Abordamos várias questões importantes em observáveis cosmológicos, como a função de Hubble, o parâmetro de desaceleração e a equação de estado da energia escura. Investigamos sua evolução em pequenos redshifts para um potencial escalar geral escrito em termos de um superpotencial. A natureza do potencial escalar é muito satisfatória para descrever a energia escura.

Esse trabalho está organizado da seguinte maneira: O Capítulo 2 apresenta uma revisão sobre teorias de gravidade de Lovelock e Horndeski. O Capítulo 3 apresenta uma revisão da correspondência holográfica e hidrodinâmica [68, 69, 70, 71, 72] e de ferramentas que serão utilizadas para calcular a relação de densidade de viscosidade/entropia [54, 55, 73]. No Capítulo 4 faz-se uma aplicação da gravidade de Horndeski no cenário de brana negra no espaço-tempo assintoticamente de Lifshitz. Uma relação de interesse a ser computada é a relação de densidade de viscosidade/entropia [54, 55, 74, 75, 76, 77, 78] e mostramos uma violação do limite 'universal' $\eta/s = 1/(4\pi)$. No Capítulo 5 apresentamos a gravidade de Horndeski no cenário de mundo brana. Este é apresentado via formalismo de primeira ordem em cinco dimensões. No Capítulo 6 encontramos soluções cosmológicas que representam um Universo de Sitter. Discutimos os seguintes observáveis cosmológicos: a função Hubble, o parâmetro de desaceleração e o parâmetro de equação de estado de energia escura em pequenos redshifts. Finalmente, no Capítulo 7 apresentamos nossas conclusões.

Capítulo 2

Teorias de Gravidade de Lovelock e Gravidade de Horndeski

2.1 Teorias de gravidade de Lovelock

Na Relatividade Geral o campo gravitacional é descrito pela geometria do espaço-tempo. Uma relação entre a curvatura do espaço-tempo e seu conteúdo de matéria é estabelecida pela equação de Einstein da forma:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (2.1)$$

Note que o tensor de Einstein é simétrico dependendo da métrica e da sua primeira e segunda derivadas. Este fato implica que as equações de movimento são de segunda ordem e o campo gravitacional é mediado pelo tensor métrico e devido ao difeomorfismo covariante da teoria (princípio de covariância geral), ambos os lados da equação (2.1) devem ser livres de divergência. Isto é verificado quando as equações de movimento para os campos de matéria são satisfeitos [1]. Esta condição não impõe qualquer outra restrição no espaço-tempo, pois é uma consequência da identidade diferencial de Bianchi,

a qual assegura que a divergência do tensor de Einstein sempre esteja desaparecendo identicamente. Assim, uma teoria que satisfaz a essas propriedades é a Relatividade Geral [13].

Teorema 1 (Lovelock [11]). Em quatro dimensões os únicos tensores de ordem 2 livres de divergência dependendo apenas da métrica e de suas primeira e segunda derivadas são o tensor de Einstein e o próprio tensor métrico.

Para obter uma teoria de gravidade modificada assumimos o **Teorema 1**, ou seja, se as teorias tem equações de campo de segunda ordem, são difeomorfismo-covariante surgindo a partir de um princípio de mínima ação, temos duas maneiras possíveis de modificar a Relatividade Geral:

- (i) Podemos considerar o espaço-tempo com mais de quatro dimensões;
- (ii) Podemos adicionar graus de liberdade mantendo o campo gravitacional (em espaço-tempo de quatro dimensões).

No primeiro caso, temos como grau de liberdade o tensor métrico, e assim obtemos as teorias de Lovelock. Com relação ao segundo caso podemos adicionar graus de liberdade escalar, vetorial ou tensorial. Assim, o caso mais simples que consiste na adição de um campo escalar não minimamente acoplado levou as bem conhecidas teorias de Horndeski [18].

Teorema 2 (Lovelock [12]). O tensor de ordem 2 simétrico mais geral, que é livre de divergência e só depende da métrica e sua primeira e segunda derivadas é o tensor de Lovelock dado como a seguir:

$$A_\nu^\mu \equiv \sum_{p \geq 0} \kappa_p \delta_{\nu \beta_1 \dots \beta_{2p}}^{\mu \alpha_1 \dots \alpha_{2p}} R_{\alpha_1 \alpha_2}^{\beta_1 \beta_2} \dots R_{\alpha_{2p-1} \alpha_{2p}}^{\beta_{2p-1} \beta_{2p}}, \quad (2.2)$$

Onde κ_p são constantes de acoplamento dimensionais, ou seja, $[\kappa_p] = [\text{comprimento}]^{2(p-1)}$.

Considerando uma delta de Kronecker generalizada como:

$$\delta_{\nu\beta_1\ldots\beta_p}^{\mu\alpha_1\ldots\alpha_p} = p! \delta_{\nu}^{[\mu} \delta_{\alpha_2}^{\alpha_1} \ldots \delta_{\beta_p}^{\alpha_p]}. \quad (2.3)$$

As teorias de Lovelock são teorias de gravidade mais gerais sobre difeomorfismo-covariante envolvendo apenas o tensor métrico e, por sua vez tendo equações de movimento de segunda ordem como na forma:

$$A_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (2.4)$$

Assumindo as constantes de acoplamento de forma normalizada, pode-se concluir que $\kappa_0 = \Lambda$ e $\kappa_1 = -1/4$. Os dois primeiros termos da equação (2.2) coincidem com os que aparecem nas equações de Einstein

$$A_{\nu}^{\mu} = \Lambda \delta_{\nu}^{\mu} + G_{\nu}^{\mu} + \sum_{p \geq 2} \delta_{\nu\beta_1\ldots\beta_{2p}}^{\mu\alpha_1\ldots\alpha_{2p}} R_{\alpha_1\alpha_2}^{\beta_1\beta_2} \ldots R_{\alpha_{2p-1}\alpha_{2p}}^{\beta_{2p-1}\beta_{2p}}. \quad (2.5)$$

Devido à anti-simetria da delta de Kronecker generalizada, a qual garante que a soma é finita, todos os termos com $2p > (d - 1)$ desaparecem de forma idêntica. Este fato implica que em $d = 4$ -dimensões as teorias de Lovelock se reduzem à Relatividade Geral de Einstein.

A densidade de lagrangiana para as teorias de Lovelock é dada por:

$$\mathcal{L} = - \sum_{p \geq 0} 2\kappa_p \mathcal{L}_p = \mathcal{L}_{EH} - \sum_{p \geq 2} 2\kappa_p \mathcal{L}_p \quad (2.6)$$

Onde $\mathcal{L}_{EH}$ é o termo usual de Einstein-Hilbert e cada $\mathcal{L}_p$ corresponde à densidade generalizada de Euler de uma variedade $2p$ -dimensional. Assim, para $\mathcal{L}_{EH}$ e $\mathcal{L}_p$ tem-se:

$$\mathcal{L}_{EH} = R - 2\Lambda \quad (2.7)$$

$$\mathcal{L}_p = \delta_{\beta_1\ldots\beta_{2p}}^{\alpha_1\ldots\alpha_{2p}} R_{\alpha_1\alpha_2}^{\beta_1\beta_2} \ldots R_{\alpha_{2p-1}\alpha_{2p}}^{\beta_{2p-1}\beta_{2p}}. \quad (2.8)$$

De acordo com o teorema de Chern-Gauss-Bonnet, o termo em p de Lovelock da ação se torna topológico, ou seja, o termo correspondente na ação é um invariante topológico que

não produz qualquer contribuição para as equações de movimento em $d = 2p$ [79]. Logo, pode-se observar que em $d = 4$ a ação de Lovelock se reduz à ação de Einstein-Hilbert. De maneira análoga, Einstein-Hilbert se torna topológico em $d = 2$.

2.2 Teorias de gravidade de Horndeski

Agora vamos abordar a teoria de Horndeski. Considerando o espaço-tempo de quatro-dimensões, o teorema de Lovelock diz que para obter uma teoria de gravidade diferente da Relatividade Geral, mantendo a segunda ordem das equações de movimento, precisamos adicionar graus extras de liberdade. O grau de liberdade extra mais simples à ser considerado é o escalar. Estas teorias modificadas são conhecidas como teorias escalar-tensorial. Como já foi comentado neste trabalho o grau de liberdade escalar não minimamente acoplado leva as teorias de Horndeski [18]. A teoria de Horndeski [21] é determinada pela seguinte densidade de lagrangeana

$$\mathcal{L}_H = (\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_5), \quad (2.9)$$

$$\mathcal{L}_2 = G_2(X, \phi), \quad (2.10)$$

$$\mathcal{L}_3 = G_3(X, \phi) \square \phi, \quad (2.11)$$

$$\mathcal{L}_4 = G_4(X, \phi) R + \partial_X G_4(X, \phi) \delta_{\alpha\beta}^{\mu\nu} \nabla_\mu^\alpha \phi \nabla_\nu^\beta \phi, \quad (2.12)$$

$$\mathcal{L}_5 = G_5(X, \phi) G_{\mu\nu} \nabla^{\mu\nu} \phi - \frac{1}{6} \partial_X G_5(X, \phi) \delta_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho} \nabla_\mu^\alpha \phi \nabla_\nu^\beta \phi \nabla_\rho^\gamma \phi, \quad (2.13)$$

Em que $X \equiv -\frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi$. Os acoplamentos da teoria de Horndeski diferem daqueles da teoria de Brans-Dicke. De fato nas teorias de Horndeski o escalar se acopla através de sua derivada aos tensores de curvatura [35]. Desta maneira as teorias de Horndeski acomodam uma ampla gama de modelos de energia escura, invariante de Lorentz com um grau de liberdade escalar-incluindo quintessência, k -essência, gravidade $f(R)$, teoria de

Brans-Dicke e Galileons [80]. Contudo, a teoria de Horndeski é difícil de ser analisada sem especificar as funções $G_k(X, \phi)$. Há uma subclasse especial desta teoria, às vezes chamada de Fab Four (F4) [22, 23], para a qual os coeficientes são escolhidos tal que a lagrangiana seja escrita na forma

$$\mathcal{L}_{F4} = (\mathcal{L}_{John} + \mathcal{L}_{Paul} + \mathcal{L}_{George} + \mathcal{L}_{Ringo} - 2\Lambda), \quad (2.14)$$

$$\mathcal{L}_{John} = U_{John}(\phi) G_{\mu\nu} \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi, \quad (2.15)$$

$$\mathcal{L}_{Paul} = U_{Paul}(\phi) P_{\mu\nu\rho\sigma} \nabla^\mu \phi \nabla^\rho \phi \nabla^{\nu\sigma} \phi, \quad (2.16)$$

$$\mathcal{L}_{George} = U_{George}(\phi) R, \quad (2.17)$$

$$\mathcal{L}_{Ringo} = U_{Ringo}(\phi) (R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2), \quad (2.18)$$

Dessas equações podemos notar que qualquer teoria de tensor escalar com auto-ajuste, a qual é baseada no princípio de equivalência, deve ser construída a partir do Fab Four (F4). Contudo, temos que o mais fraco dos quatro termos é o Ringo, devido ao fato de não poder dar origem ao auto-ajuste sem ”uma pequena ajuda de seus amigos”, John e Paul. Assim, neste caso, como é discutido por [22, 23] o Ringo tem um efeito não trivial sobre a dinâmica cosmológica, contudo, ele não estraga o auto-ajuste. George também tem dificuldades em seguir sozinho, nesse sentido quando $U_{George} = \text{const.}$, temos apenas Relatividade Geral e não temos auto ajuste. Porém, quando $U_{George} \neq \text{const.}$, temos a gravidade de Brans-Dicke, que se auto-ajusta. Dessa maneira, é esperado que sempre se deva incluir John e/ou Paul pelas razões que foram apresentadas, e porque suas interações derivadas não triviais podem dar origem a efeitos de Vainshtein que ajudaria a passar nos testes do sistema solar [22]. Aqui o dual duplo do tensor de Riemann é dado por

$$P_{\alpha\beta}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} \delta_{\sigma\lambda\alpha\beta}^{\mu\nu\gamma\delta} R_{\gamma\delta}^{\sigma\lambda} = -R_{\alpha\beta}^{\mu\nu} + 2R_{[\alpha}^{\mu} \delta_{\beta]}^{\nu} - 2R_{[\alpha}^{\nu} \delta_{\beta]}^{\mu} - R \delta_{[\alpha}^{\mu} \delta_{\beta]}^{\nu}, \quad (2.19)$$

Cuja contração $P_{\nu\alpha}^{\mu\nu} = G_{\nu}^{\mu}$ é o tensor de Einstein. Um modelo particular relacionado com as teorias F4 pode ser obtido configurando as funções potenciais para valores constantes, $U_J = \gamma/2$, $U_P = U_R = 0$, $U_G = \kappa$ e adicionando um termo extra o termo cinético padrão X para o escalar, dá o modelo que corresponde a lagrangiana de John [21] e adicionando um potencial escalar $V(\phi)$ [15, 16, 18, 19, 20], tem-se a ação da forma

$$S[g_{\mu\nu}, \phi] = \int \sqrt{-g} d^4x \left[\kappa(R - 2\Lambda) - \frac{1}{2}(\alpha g_{\mu\nu} - \gamma G_{\mu\nu}) \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi - V(\phi) \right] + S_{mat}. \quad (2.20)$$

Note que há um acoplamento tensor-escalar não-mínimo. Esta última consideração é feita com o intuito de reduzir a ordem das equações de movimento no setor gravitacional de segunda ordem para primeira ordem. Este campo tem dimensão $(mass)^2$ e os parâmetros α e γ controlam a força dos acoplamentos cinéticos, α é adimensional e γ tem dimensão $(massa)^{-2}$. E S_{mat} é assumida para descrever um fluido perfeito. Notemos que para $\alpha = 1$ e $\gamma = 0$ corresponde à teoria usual de campo Einstein-escalar, ou seja, gravidade minimamente acoplada ao campo escalar ϕ com potencial $V(\phi)$. As equações de movimento de Horndeski podem ser obtidas variando a ação (2.20) com respeito a métrica e o campo escalar

$$E_{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S[g_{\mu\nu}, \phi]}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \quad (2.21)$$

$$E_\phi \equiv -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S[g_{\mu\nu}, \phi]}{\delta \phi} = 0. \quad (2.22)$$

As equações (2.21) e (2.22) fornecem:

$$\begin{aligned} E_{\mu\nu} = & G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu} V(\phi)}{2\kappa} - \frac{\alpha}{2\kappa} \left(\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \phi \nabla^\lambda \phi \right) \\ & - \frac{\gamma}{2\kappa} \left(\frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi R - 2 \nabla_\lambda \phi \nabla_{(\mu} \phi R_{\nu)}^\lambda - \nabla^\lambda \phi \nabla^\rho \phi R_{\mu\lambda\nu\rho} \right) \\ & - \frac{\gamma}{2\kappa} \left(-(\nabla_\mu \nabla^\lambda \phi)(\nabla_\nu \nabla_\lambda \phi) + (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi) \square \phi + \frac{1}{2} G_{\mu\nu} (\nabla \phi)^2 \right) \\ & - \frac{\gamma}{2\kappa} \left[-g_{\mu\nu} \left(-\frac{1}{2} (\nabla^\lambda \nabla^\rho \phi)(\nabla_\lambda \nabla_\rho \phi) + \frac{1}{2} (\square \phi)^2 - (\nabla_\lambda \phi \nabla_\rho \phi) R^{\lambda\rho} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$E_\phi = \nabla_\mu [(\alpha g^{\mu\nu} - \gamma G^{\mu\nu}) \nabla_\nu \phi] - V_\phi(\phi). \quad (2.24)$$

Assim, podemos escrever para $E_{\mu\nu} = 0$:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{1}{2\kappa} T_{\mu\nu}, \quad (2.25)$$

O tensor $T_{\mu\nu}$ em equação (2.25) é dado como na forma $T_{\mu\nu} = \alpha T_{\mu\nu}^{(1)} - g_{\mu\nu} V(\phi) + \gamma T_{\mu\nu}^{(2)}$ com $\kappa = (16\pi G)^{-1}$ e para a equação do campo escalar $E_\phi = 0$:

$$\nabla_\mu [(\alpha g^{\mu\nu} - \gamma G^{\mu\nu}) \nabla_\nu \phi] = V_\phi(\phi). \quad (2.26)$$

Os tensores energia-momento $T_{\mu\nu}^{(1)}$ e $T_{\mu\nu}^{(2)}$ são escritos na forma

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{(1)} &= \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \phi \nabla^\lambda \phi \\ T_{\mu\nu}^{(2)} &= \frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi R - 2 \nabla_\lambda \phi \nabla_{(\mu} \phi R_{\nu)}^\lambda - \nabla^\lambda \phi \nabla^\rho \phi R_{\mu\lambda\nu\rho} \\ &\quad - (\nabla_\mu \nabla^\lambda \phi)(\nabla_\nu \nabla_\lambda \phi) + (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi) \square \phi + \frac{1}{2} G_{\mu\nu} (\nabla \phi)^2 \\ &\quad - g_{\mu\nu} \left[-\frac{1}{2} (\nabla^\lambda \nabla^\rho \phi)(\nabla_\lambda \nabla_\rho \phi) + \frac{1}{2} (\square \phi)^2 - (\nabla_\lambda \phi \nabla_\rho \phi) R^{\lambda\rho} \right]. \end{aligned} \quad (2.27)$$

No modelo da teoria de Horndeski o interesse é pelo termo cinético do campo escalar da forma $(\alpha g_{\mu\nu} - \gamma G_{\mu\nu}) \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi$, em que $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein.

Capítulo 3

Correspondência holográfica e hidrodinâmica

A correspondência AdS/CFT conjectura a existência de uma dualidade entre uma Teoria Super Yang-Mills $\mathcal{N} = 4$, no qual vive o espaço-tempo em quatro dimensões na teoria de campo conforme, a uma Teoria de Supercordas definida no espaço $\text{AdS}_5 \times S^5$ [47, 48, 49, 50]. O sentido holográfico dessa correspondência, é que teoria de campo conforme CFT reside no contorno do espaço de Anti de Sitter AdS e dessa maneira podemos reconstruir todo o AdS a partir desse contorno. Assim, no lado AdS da correspondência nos referimos ao “bulk” e no lado do CFT nos referimos ao contorno da teoria. Na correspondência AdS/CFT há manifestação de diferentes espaço-tempo manifesta diferentes estados na teoria de contorno, ou seja, o estado de vácuo no lado CFT corresponde a um AdS puro. Nesse sentido, uma perturbação da métrica no lado AdS corresponde ao valor esperado do tensor energia-momento no CFT.

3.1 Teoria de Campo Conforme

Teorias de campo conforme CFT são teorias clássicas ou quânticas de campos QFT que descrevem sistemas que possuem um tipo de simetria conhecida como simetria conforme, estas simetrias são invariantes sobre transformação conforme. Podemos entender o termo conforme como uma transformação de ângulos, as quais são preservadas nessa transformação [68, 69, 70]. A importância de teorias de campo conforme é como pontos extremos do grupo de renormalização no espaço de teorias efetivas. Em que o conhecimento dessas teorias e de suas modificações parcialmente relevantes é que podemos organizar o espaço da teoria de campo Fig. 3.1.

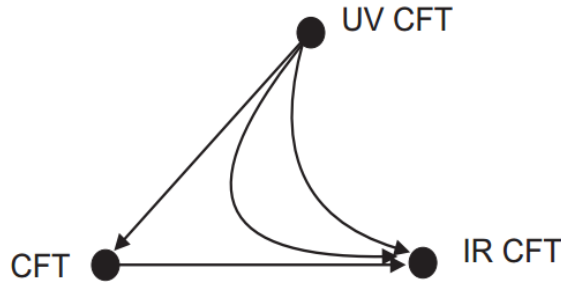


Figura 3.1: A figura apresenta uma organização do espaço CFT. Figura com adaptações retirada de [68].

Transformações de escalas na teoria quântica de campos QFT locais ou quase-locais no regime de infravermelho-IR, este é conhecido como comprimento de onda grande, nos fornece uma teoria de campo local invariante de escala. Porém, uma transformação de escala no regime de ultravioleta-UV, conhecido como comprimento de onda curta leva a uma teoria de campo local que é invariante de escala, um exemplo que podemos considerar e que é muito conhecido também são teorias de Yang-Mills em um espaço-tempo de quatro dimensões e uma exceção é teoria de cordas pequenas não locais.

3.2 Álgebra Conforme

O grupo conforme em um espaço-tempo de d -dimensões é um grupo de transformação que preserva a forma da métrica de espaço plano por um fator local [68], podemos exemplificar essa afirmação na seguinte equação

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \Lambda^2(x)g_{\mu\nu}(x) \quad (3.1)$$

O grupo conforme é um grupo que inclui o grupo de Poincaré e a simetria de inversão

$$x^\mu \rightarrow \frac{x^\mu}{x^2} \quad (3.2)$$

Os geradores de grupo que são relacionados ao grupo conforme considerando $d > 2$, são transformações (rotações) de Lorentz, mais a translação, a dilatação e a transformação especial conforme, estão podem ser expressas, respectivamente, como na forma

$$M_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu), \quad (3.3)$$

$$P^\mu = -i\partial_\mu, \quad (3.4)$$

$$D = -ix^\mu\partial_\mu, \quad (3.5)$$

$$K_\mu = -i(2x_\mu x^\nu\partial_\nu - x^2\partial_\mu). \quad (3.6)$$

Estes geradores obedecem as seguintes relações de álgebra conforme

$$[D, K_\mu] = iK_\mu, \quad (3.7)$$

$$[D, P_\mu] = -iP_\mu, \quad (3.8)$$

$$[P_\mu, K_\nu] = 2i(M_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}D), \quad (3.9)$$

$$[K_\rho, M_{\mu\nu}] = i(g_{\rho\mu}K_\nu - g_{\rho\nu}K_\mu), \quad (3.10)$$

$$[P_\rho, M_{\mu\nu}] = i(g_{\rho\mu}P_\nu - g_{\rho\nu}P_\mu), \quad (3.11)$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(g_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} + g_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}L_{\mu\rho}). \quad (3.12)$$

Aqui não apresentamos as outras relações de comutação nulas mais o leitor interessado pode vir a verificar facilmente efetuando os calculos cuidadosamente. Quando introduzimos os geradores em $(2d + 1)$ -dimensões de rotações P_μ , D e K_μ [68], temos

$$M_\mu^{d+1} := \frac{1}{2}(K_\mu - P_\mu), \quad (3.13)$$

$$M_\mu^{d+2} := \frac{1}{2}(K_\mu + P_\mu), \quad (3.14)$$

$$[P_\mu, K_\nu] = 2i(M_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}D), \quad (3.15)$$

$$M^{d+1,d+2} := D. \quad (3.16)$$

Podemos notar que estas relações nos mostram que há um isomorfismo entre o grupo conforme d -dimensões é equivalente ao grupo $SO(d, 2)$ com assinatura de Minkowski ao grupo $SO(d + 1, 1)$ para assinatura euclidiana.

3.3 Operador de Campo Local

Na teoria quântica de campos usual podemos classificar os operadores de campo local $\mathcal{O}(x^\mu)$, devido a suas propriedades de transformações do grupo $SO(d) \times SO(2)$ do grupo conforme [68, 71]. Assim, para a quantização radial com assinatura euclidiana apresenta que a redução do grupo $SO(d)$ é o spin do campo. Enquanto que para a carga sob o subgrupo $SO(2)$ é a dimensão da escala, que pode ser representada por Δ e dessa maneira podemos representar o operador de campo local como

$$\mathcal{O}(\lambda x^\mu) = \lambda^{-\Delta} \mathcal{O}_\Delta(x^\mu), \quad (3.17)$$

E a álgebra de comutação nos fornece que

$$[D, \mathcal{O}_\Delta(0)] = -i\Delta \mathcal{O}(0). \quad (3.18)$$

Para a realização da quantização radial é feita uma foliação do espaço euclidiano em d -dimensões expresso como na forma $\mathbb{R}^d$ em $(d-1)$ -esferas, que possui uma representação da forma S^{d-1} que são concêntricas na origem. Assim, podemos definir o estado do espaço de Hilbert para a teoria de campo conforme CFT para uma dada fatia radial. Para um melhor entendimento das afirmações anteriores podemos considerar um exemplo de visualização consideremos o esquema apresentado na Fig. 3.2 em que temos um cilindro que representa o espaço euclidiano que é projetado no plano complexo, dessa maneira x^0 corresponde a coordenada temporal t .

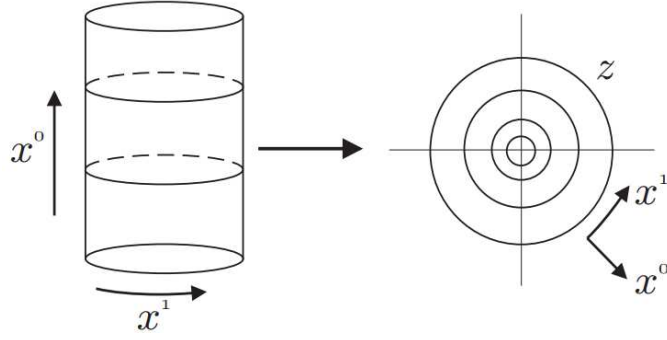


Figura 3.2: A figura apresenta uma representação da foliação do espaço euclidiano $\mathbb{R}^d$ em uma S^{d-1} -esferas. Figura com adaptações retirada de [68, 72].

Em mecânica quântica como sabemos o operador de translação temporal é o hamiltoniano do sistema. Assim, aqui em nossa prescrição para a teoria conforme o operador que faz o papel da evolução temporal é a dilatação- D , esta por sua vez gera a evolução temporal dos diferentes estados de tempo para a fatia do espaço conforme. Para um estado de vácuo conforme representado por um ket $|0\rangle$, este é aniquilado para todos os geradores da álgebra conforme. Assim, cada operador local $\mathcal{O}(x^\mu)$ dá origem a um estado, ou seja, no limte de raio tendendo para zero na fatia, temos $\mathcal{O}(0)|0\rangle$. Dessa maneira na teoria de campo conforme, temos que a invariância de escala representa um estado sobre

qualquer tamanho da esfera S^{d-1} ao redor da origem. Então, qualquer estado criado sobre a esfera representada por S^{d-1} pela ação dos operadores no menor raio pode ser escrito como um estado criado por um dado operador local inserido na origem pelo encolhimento da esfera [68].

Podemos notar olhando para as equações (3.7) e (3.8), que o operador P_μ levanta a dimensão do campo, enquanto que o operador K_μ baixa a dimensão. Para a teoria de campo unitária há um limite inferior na dimensão do campo, em que cada representação do grupo conforme que surge tem algum operador de dimensão menor que é aniquilado pelo operador K_μ em $x = 0$, estes operadores são considerados como operadores primários. A ação do grupo conforme para esses operadores são dadas de acordo com [68] da seguinte maneira

$$[P_\mu, \mathcal{O}_\Delta(x)] = i\partial\mathcal{O}_\Delta(x), \quad (3.19)$$

$$[M_{\mu\nu}, \mathcal{O}_\Delta(x)] = \left[i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) + \sum_{\mu\nu}^R \right] \mathcal{O}_\Delta(x), \quad (3.20)$$

$$[D, \mathcal{O}_\Delta(x)] = i(x_\mu\partial_\mu - \Delta)\mathcal{O}_\Delta(x), \quad (3.21)$$

$$[K_\mu, \mathcal{O}_\Delta(x)] = \left[i(x_2\partial_\mu - 2x_\mu x^\nu\partial_\nu + 2x_\mu\Delta) - 2x^\nu \sum_{\mu\nu}^R \right] \mathcal{O}_\Delta(x). \quad (3.22)$$

Em que podemos notar que $\sum_{\mu\nu}^R$ representa as matrizes do spin irreduzível R do operador primário atuando sobre os índices do spin, desse modo $\Delta \in R$ representa a dimensão conforma do operador primário.

3.4 Correlação Conforme

Podemos obter as correlações conformes de campos descendentes tomando como ponto de partida a derivação de campos primários. A variação conforme nos fornece a forma das correlações de campos primários que são dadas em termos da escala da

dimensão- Δ e dos spins [68]. Dessa maneira surgem coeficientes indeterminados das funções de invariância conforme na posição dos operadores. Para um exemplo de verificação tomando campos escalares, temos a seguinte forma para as funções de 2, 3, 4-pontos

$$\langle \mathcal{O}_{\Delta_1}(x_1) \mathcal{O}_{\Delta_2}(x_2) \rangle = \delta_{1,2} \prod_{i < j}^3 |x_{ij}|^{-\Delta}, \quad (3.23)$$

$$\langle \mathcal{O}_{\Delta_1}(x_1) \mathcal{O}_{\Delta_2}(x_2) \mathcal{O}_{\Delta_3}(x_3) \rangle = c_{123} \prod_{i < j}^3 |x_{ij}|^{-\Delta - 2\Delta_i - 2\Delta_j}, \quad (3.24)$$

$$\langle \mathcal{O}_{\Delta_1}(x_1) \mathcal{O}_{\Delta_2}(x_2) \mathcal{O}_{\Delta_3}(x_3) \mathcal{O}_{\Delta_4}(x_4) \rangle = c_{1234}(u, v) \prod_{i < j}^4 |x_{ij}|^{-\frac{1}{3}\Delta - \Delta_i - \Delta_j}, \quad (3.25)$$

Em que $x_{ij} := x_i - x_j$ e $\Delta = \sum_i \Delta_i$ são somas de dimensões de operadores da correlação. No caso da função de correlação de 2-pontos, temos que a δ de Kronecker é relacionada com a normalização do campo primário. Os coeficientes c_{ijk} na função de correlação de 3-pontos dada pela equação (3.24) são coeficientes constantes indeterminados, enquanto que os coeficientes $c_{ijk}(u, v)$ é uma função também indeterminada de dois pontos de invariância conforme independente, está é dado por

$$u := \frac{|x_{12}| |x_{34}|}{|x_{13}| |x_{24}|}, \quad (3.26)$$

$$v := \frac{|x_{14}| |x_{23}|}{|x_{13}| |x_{24}|}. \quad (3.27)$$

A correspondência entre estado e operadores implica em um produto de dois campos primários quaisquer pode ser reescrito como combinação linear de operadores conforme inseridos na proximidade dos pontos. Essa combinação linear resulta em uma expansão que é chamada de expansão do produto de operadores de dois campos primários e como um exemplo, podemos considerar o caso de campos escalares, estes podem ser expandidos da seguinte forma

$$\mathcal{O}_{\Delta_i}(x_i) \mathcal{O}_{\Delta_j}(x_j) = \sum_k c_{ijk} |x|^{-\Delta_i - \Delta_j - \Delta_k} (\mathcal{O}_{\Delta_k}(0) + \text{campos descendentes}). \quad (3.28)$$

A soma Σ é realizada sobre todos os campos primários e descendentes e os coeficientes dos campos descendentes é determinada pela invariância conforme. Podemos notar que realizando uma comparação entre os coeficientes dos campos primários da equação (3.28) e da equação (3.24), eles são os mesmos. Contudo, para n -pontos, temos que as correlações são determinadas pela expansão do produto de operadores e assim por meio dessa expansão, podemos substituir qualquer n -funções por uma soma infinita de funções de $(n - 1)$ -pontos. Então dessa maneira, podemos determinar completamente uma teoria de campo conforme por meio de Δ_i , spins e c_{ijk} para todos os campos primários [68]. Contudo, devido a unitariedade e associatividade da expansão do produto de operadores, este fato implicará em relações bastante complicadas entre os Δ_i , spins e c_{ijk} e dessa maneira não teremos uma teoria de campo conforme consistente. Podemos resolver este problema construindo uma teoria de campo conforme por meio da correspondência AdS/CFT. Esta correspondência fornece uma maneira de construir a função de partição em que todas as correlações podem ser reconstruídas, podemos escrever as funções de correlações para a teoria de campo conforme em termos da função de partição Z como na forma

$$Z[\Phi_{\Delta_i}(x)] = \langle \exp \left(\int d^d x \Phi_{\Delta_i}(x) \mathcal{O}_{\Delta_i}(x) \right) \rangle_{CFT}. \quad (3.29)$$

Esta equação é um funcional da fonte clássica $\Phi_{\Delta_i}(x)$ que é associado com cada operador de campo da teoria de campo conforme que é gerado pelas funções de correlações que são tomados na derivada de $Z[\Phi_{\Delta_i}(x)]$ com respeito a fonte

$$\langle \mathcal{O}_{\Delta_1}(x_1) \mathcal{O}_{\Delta_2}(x_2) \dots \rangle = \left| \frac{\partial Z[\Phi_{\Delta_i}(x)]}{\partial \Phi_{\Delta_1}(x_1) \partial \Phi_{\Delta_2}(x_2) \dots} \right|_{\Phi_{\Delta_i}(x)=0}. \quad (3.30)$$

As correlações são invariantes conformes sob uma transformação da forma $x \rightarrow \lambda x$, podemos realizar a seguinte operação da forma

$$\int d^d x \Phi_{\Delta_i}(x) \mathcal{O}_{\Delta_i}(x) = \int d^d(\lambda x) \Phi_{\Delta_i}(\lambda x) \mathcal{O}_{\Delta_i}(\lambda x) = \lambda^{d-\Delta} \int d^d(x) \Phi_{\Delta_i}(x) \mathcal{O}_{\Delta_i}(x) \quad (3.31)$$

Assim, podemos notar que a função de partição Z é invariante conforme sob a seguinte transformação de escala

$$\Phi_{\Delta_i}(x) = \lambda^{d-\Delta} \Phi_{\Delta_i}(\lambda x). \quad (3.32)$$

A fonte $\Phi_{\Delta_i}(x)$ transforma-se de acordo com o grupo conforme, enquanto a função de partição $Z[\Phi_{\Delta_i}(x)]$ é invariante sobre a combinação desse campos. Contudo, a ideia principal da correspondência AdS/CFT é garantir que a função de partição $Z[\Phi_{\Delta}(\vec{x})]$ seja conformalmente invariante. Contudo, esse fato não garante que todas as teorias de campo conforme sejam consistentes, mas que um subconjunto dessa classe seja consistente. Até o presente momento temos apresentado os elementos da teoria de campo conforme CFT. Contudo, passaremos agora para uma apresentação da geometria AdS [68, 69, 70, 71, 72]. Na esfera de Lorentz ou pseudoesfera é o hiperboloide dado por

$$\vec{X}^2 + V_+^2 - V_-^2 = R^2, \quad (3.33)$$

Em que $\vec{X}^2 := X_1, X_2, \dots, X_d$ e $V_{\pm}$ são as coordenadas cartesianas sobre o espaço em d -dimensões como na forma $R^{d+1,1}$, podemos representar este espaço pela seguinte métrica

$$ds^2 = d\vec{X}^2 + dV_+^2 - dV_-^2. \quad (3.34)$$

Podemos observar que a superfície em $R^{d+1,1}$ apresentada na equação (3.33) é conhecida como o espaço de $(d+1)$ -dimensões Anti de Sitter representado por AdS_{d+1} com raio R . Nas coordenadas de Poincarè, temos que

$$\vec{X} = \frac{R}{z} \vec{x}, \quad (3.35)$$

$$V_+ = \frac{1}{2} \left(z + \frac{\vec{x}^2 + R^2}{z} \right), \quad (3.36)$$

$$V_- = \frac{1}{2} \left(z + \frac{\vec{x}^2 - R^2}{z} \right), \quad (3.37)$$

Podemos substituir estas relações na equação (3.33) para obter

$$\left(\frac{R}{z}\right)\vec{x}^2 = 0, \quad (3.38)$$

Em que temos uma parametrização da solução do hiperboloide para $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$ para $z > 0$.

Agora estamos prontos para escrever a métrica do AdS_{d+1} , podemos realizar esse processo substituindo as equações (3.35), (3.36) e (3.37) na equação (3.34) e assim obtemos

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2}(dz^2 + d\vec{x}^2) \quad (3.39)$$

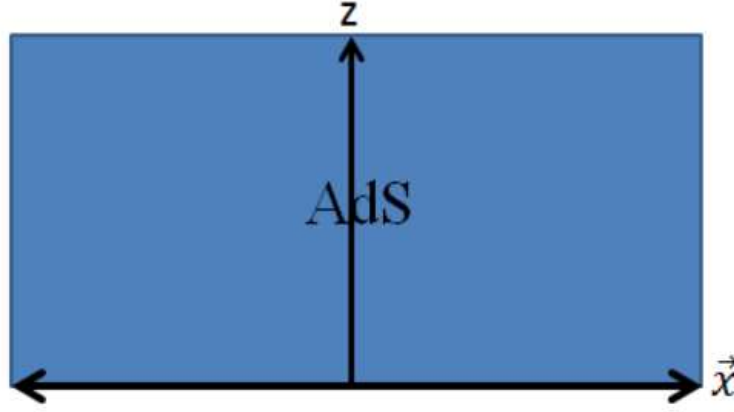


Figura 3.3: A figura mostra uma representação do AdS_{d+1} que é conforme sobre a metade do plano $\mathbb{R}^{d+1}$ em $z > 0$. Podemos notar que nessas coordenadas, o contorno do AdS_{d+1} é conforme para $\mathbb{R}^d$ em $z = 0$. Figura com adaptações retirada de [68, 72].

Podemos ainda escrever a equação (3.39) usando as coordenadas $\vec{x}$ e $r = R/z$ como na seguinte forma

$$ds^2 = \frac{R^2}{r^2}dr^2 + \frac{r^2}{R^2}d\vec{x}^2 \quad (3.40)$$

Em que r é a coordenada radial do AdS. Assim, nessa nova configuração, quando tomamos os limites $z \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$, temos o contorno do AdS, e quando $z \rightarrow \infty$ e $r = 0$, temos o caso conhecido como horizonte. Podemos ainda passar para a assinatura do

espaço-tempo de Minkowski substituindo $d\vec{x}^2 = -dt^2 + d\vec{x}_i^2$ na equação (3.40), em que $\vec{x}_i = (x_1, x_2, \dots, x_{d-1})$. Assim, como apresentamos a teoria de campo conforme CFT e as implicações da geometria do espaço AdS, estamos prontos para determinar a função de partição associada ao campo sobre o espaço AdS e em seguida realizar uma comparação da função de partição da teoria de campo conforme CFT dada pela equação (3.29) [68].

3.5 Função de Partição

A função covariante do campo $\Phi(z, \vec{x})$ sobre o espaço do AdS é conformalmente invariante. Dessa maneira, sabemos que o grupo conforme atua sobre o espaço-tempo em d -dimensões: A translação atua como $\{z, \vec{x}\} \rightarrow \{z, \vec{x} + \vec{\alpha}\}$, a rotação como $\{z, \vec{x}\} \rightarrow \{z, \Lambda \vec{x}\}$ e a transformação de escala como $\{z, \vec{x}\} \rightarrow \{\lambda z, \lambda \vec{x}\}$ [68]. Em nossa descrição z representa a dimensão extra do campo $\Phi(z, \vec{x})$ e por esse motivo ela é restringida de modo que preserve a covariância do espaço completo do AdS_{d+1} e ainda isometrias do grupo conforme em d -dimensões. Essa restrição é feita sobre o contorno do AdS_{d+1} quando tomamos o limite $\lim_{z \rightarrow 0} \Phi(z, \vec{x})$, que transforma-se do mesmo modo como o grupo conforme sobre o espaço-tempo.

A função de partição covariante do campo no contorno é identificada como a função de partição de uma teoria de campo conforme CFT. Podemos escrever para uma classe de tais funções uma integração funcional dos campos $\Phi(z, \vec{x})$ sobre o espaço AdS_{d+1} e mantendo a covariância de forma fixa como $\Phi(0, \vec{x}) \approx \bar{\Phi}(\vec{x})$, e de posse dessas afirmações podemos escrever a função de partição como na forma

$$Z[\bar{\Phi}(x)] = \int_{\Phi(z, \vec{x})|_{\partial \text{AdS}} = \bar{\Phi}(\vec{x})} D\Phi(z, \vec{x}) e^{-S[\Phi(x)]}. \quad (3.41)$$

A função de partição Z é invariante sobre transformação de escala, nesse sentido para

o campo escalar $\Phi(z, \vec{x}) \rightarrow \Phi(\lambda z, \lambda \vec{x})$. Dessa maneira para $\Phi(z, \vec{x})$ próximo ao contorno podemos escrever

$$\Phi(z, \vec{x}) \approx z^{d-\Delta} \bar{\Phi}(\vec{x}) + O(z^{d-\Delta+1}), \quad (3.42)$$

Podemos notar que o campo no contorno sofre uma transformação de escala do tipo $\bar{\Phi}(\vec{x}) = \lambda^{d-\Delta} \bar{\Phi}(\lambda \vec{x})$ e comparando essa equação com a equação (3.32), vemos que $\bar{\Phi}(\vec{x}) \equiv \bar{\Phi}_{\Delta_i}(\vec{x})$ é a fonte de um operador primário $\mathcal{O}_{\Delta}(\vec{x})$ com dimensão Δ do CFT. Olhando para as equações (3.29) e $\bar{\Phi}(\vec{x}) = \lambda^{d-\Delta} \bar{\Phi}(\lambda \vec{x})$, podemos notar que a função de partição da teoria quântica de campo conforme para a gravidade sobre um espaço-tempo assintoticamente AdS_{d+1} representa a função do campo do contorno de uma função de partição de uma CFT_d com contorno atuando como a fonte do operador primário. Podemos resumir a ideia básica sobre a correspondência AdS/CFT como

$$Z_{\text{grav}}[\bar{\Phi}] = Z[\bar{\Phi}]_{\text{CFT}} \quad (3.43)$$

A equação (3.43) nos diz que a função de partição $Z_{\text{grav}}[\bar{\Phi}]$ é calculada e é interpretada no lado CFT. Como resultado temos um rico comportamento que inclui a transição de fase como a função da temperatura. Com a função de partição $Z_{\text{grav}}[\bar{\Phi}]$ podemos extrair todas as características da mecânica estatística padrão quando consideramos um buraco negro por exemplo.

3.6 Coeficientes de Transporte

A correspondência AdS/CFT é uma ferramenta importante que nos fornece uma formulação holográfica com respeito a dinâmica da teoria de campo em termos da dinâmica gravitacional clássica em uma dimensão superior de espaço-tempo [47, 48, 49, 50]. Contudo, no limite da correspondência, temos que o principal interesse, em particular, é obter

uma dinâmica simplificada da teoria de campo para a dinâmica de fluidos clássica efetiva. Assim, temos que nesse limite da correspondência AdS/CFT, surge uma relação entre a física dos fluidos e a gravidade, a qual é chamada de correspondência gravidade/fluido [81]. Nessa correspondência gravidade/fluido, temos uma dualidade real entre a descrição hidrodinâmica e a dinâmica gravitacional. Este fato, implica que se pode desenhar uma conexão quantitativa precisa entre a descrição hidrodinâmica e a dinâmica gravitacional e assim nos permite entender aspectos da estrutura de fase das soluções de buracos negros e sua estabilidade em termos do modelo de fluido.

Contudo, nesse sentido, temos que o regime hidrodinâmico é caracterizado por um conjunto de coeficientes de transporte [78, 82]. Dessa maneira, uma vez que grande parte do fluxo de Plasma de Quark-Glúons QGP é um fluxo impulsionado por cisalhamento, temos que a viscosidade de cisalhamento do plasma é a quantidade mais relevante. Nesse sentido, uma maneira de extrair esses coeficientes de transporte é a partir de uma descrição microscópica em termos da QCD [83]. Contudo, a correspondência AdS/CFT fornece uma estrutura teórica para entender algumas das características qualitativas da hidrodinâmica observadas no Plasma de Quark-Glúons QGP, a qual nos fornece uma maneira eficiente de acessar a física de sistemas fortemente acoplados em uma classe das teorias de campo conforme.

3.7 Relação viscosidade de cisalhamento/densidade de entropia

Em anos recentes a dualidade gauge/gravidade tem dado um notável suporte à dinâmica de sistemas fortemente acoplados para a matéria condensada. Limites univer-

sais dos coeficientes de transporte, incluindo a relação bem conhecida da viscosidade de cisalhamento [51, 52], que é conjecturada com base nos modelos holográficos “bottom-up”. Muitos desses limites são violados [35, 53, 16] e considerações da correspondência AdS/CFT no contexto da gravidade de Horndeski foram apresentadas em [35]. A viscosidade de cisalhamento [51, 52] é obtida por meio da formula de Kubo [54, 55, 76] essa pode ser relacionada à função de dois pontos do tensor energia de estresse como da seguinte maneira

$$\eta = -\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega} \text{Im}[G_{ij,kl}^R(\omega)], \quad (3.44)$$

Em que $G_{ij,kl}^R(\omega)$ é dada por

$$G_{ij,kl}^R(\omega) = \int dt d\vec{x} e^{i\omega t} \langle [T_{ij}(t, \vec{x}), T_{kl}(0, 0)] \rangle \quad (3.45)$$

Fisicamente η mede a resistência ao cisalhamento. Para um exemplo de interpretação, pode-se imaginar um fluido colocado entre duas placas paralelas que são separadas ao longo da direção z e se movem com uma velocidade relativa v_x ao longo da direção x de uma maneira não relativística, elas experimentam uma força de atrito devido ao fluido, proporcional à $\eta \partial_z v_x$ Fig. 3.4.

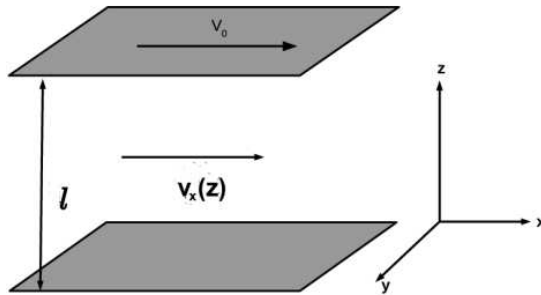


Figura 3.4: A figura apresenta o comportamento do fluxo de um fluido contido entre duas placas paralelas separadas por uma distância l ao longo da direção z . Figura retirada de [76].

Do ponto de vista da correspondência AdS/CFT a função de dois pontos de T_{ij} pode ser calculada em termos do comportamento da métrica, e dessa maneira a viscosidade pode ser obtida. Agora podemos efetuar esse procedimento considerando uma perturbação h_{xz} [76] na métrica como

$$ds^2 = -g_{tt}(u)dt^2 + g_{uu}du^2 + g_{xx}(u)dx^2 + g_{yy}dy^2 + g_{zz}(u)dz^2 + 2e^{-i\omega t}Z(u)g_{xx}(u)dx dz \quad (3.46)$$

A função $Z(u)$ é a perturbação de interesse necessária. Podemos concluir que a função $Z(u)$ obedece a uma equação da seguinte forma

$$\partial_u[\sqrt{-g}P(u)g^{uu}\partial_u Z(u)] - \omega^2 N(u)g^{tt}Z(u) = 0, \quad (3.47)$$

As funções $P(u)$, $N(u)$ são dadas em termos da métrica, com $P(u) = g^{zz}g_{xx}$. De fato a equação (2.20) pode ser colocada na forma de uma ação como

$$S = - \int \sqrt{-g} \frac{1}{16\pi G} \left[P(u) \frac{1}{2} g^{uu} (\partial_u Z)^2 - \frac{1}{2} N(u) g^{tt} (\partial_t Z)^2 \right] \quad (3.48)$$

Usando a correspondência AdS/CFT podemos escrever o momento canônico como

$$\Pi(u, \omega) = \frac{\delta S}{\delta(\partial_u Z)} = - \frac{1}{16\pi G} \sqrt{-g} P(u) g^{uu} \partial_u Z(u) \quad (3.49)$$

A função retardada de Green [73, 76] é dada pela razão da resposta sobre a fonte,

$$G^R(\omega) = - \left. \frac{\Pi(u, \omega)}{Z(u, \omega)} \right|_{u \rightarrow \infty} \quad (3.50)$$

Notemos que a função retardada de Green foi calculada para $q = 0$, o qual é o momento espacial nulo. Foi escolhido trabalhar com a função retardada de Green mais pode-se trabalhar com a função avançada de Green usando o fato que $G^R(k)^* = G^R(-k) = G^A(k)$ para mais discussões ver [73]. Contudo, a equação (3.50) leva ao resultado da equação (3.44)

$$\eta = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left. \frac{\Pi(u, \omega)}{i\omega Z(u, \omega)} \right|_{u \rightarrow \infty} \quad (3.51)$$

Agora iremos mostrar que a equação (3.51) também pode ser avaliada próximo ao horizonte, $u = u_h$, em vez de $u \rightarrow \infty$. Desde que estamos interessados no limite $\omega \rightarrow 0$, podemos negligenciar o segundo termo na equação (3.47), levando a

$$\partial_u \Pi = 0 \quad (3.52)$$

Até $\mathcal{O}(\omega)^2$. Que fornece $\Pi = C$, em que C é independente de u . Notemos, que existe uma solução da equação (3.47) no limite $\omega \rightarrow 0$ em que Z é simplesmente uma constante. Esta solução também atende às condições de contorno corretas em $u \rightarrow \infty$, pois, como pode ser visto na equação (3.46), o modo não normalizável deve ir para uma constante em $u \rightarrow \infty$. Juntando tudo isso, achamos que a ordem principal no limite $\omega \rightarrow 0$ ambos Π e Z são constantes e, portanto, a razão na equação (3.51) sendo independente de u também pode ser avaliada no horizonte. Como um resultado nós temos

$$\eta = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\Pi(u, \omega)}{i\omega Z(u, \omega)} \Big|_{u_h} \quad (3.53)$$

Exigindo regularidade no horizonte futuro, podemos aproximar o comportamento de Z da seguinte maneira

$$Z \sim e^{-i\omega(t+r_*)} \quad (3.54)$$

Em que r_* é a coordenada tartatura,

$$r_* = \int \sqrt{\frac{g_{uu}}{g_{tt}}} du. \quad (3.55)$$

Segue-se então que

$$\eta = \frac{1}{16\pi G} P(u_h) \sqrt{\frac{-g}{g_{tt}g_{uu}}} \Big|_{u_h}. \quad (3.56)$$

A densidade de entropia é

$$s = \frac{1}{4G} \frac{\sqrt{-g}|_{u_h}}{\sqrt{(g_{uu}g_{tt})|_{u_h}}} \quad (3.57)$$

Usando a equação (3.56) e (3.57) podemos escrever a relação viscosidade de cisalhamento/densidade de entropia como na forma

$$\frac{\eta}{s} = \frac{1}{4\pi} \frac{g_{xx}|_{u_h}}{g_{zz}|_{u_h}} \quad (3.58)$$

Podemos observar que sistemas anisotrópicos serão genericamente diferentes dos isotrópicos. A razão é que para uma invariância rotacional do sistema isotrópico implica em $g_{xx}/g_{zz} = 1$ que preserva o limite Kovtun-Son-Starinets (KSS) [51]. Contudo, podemos notar que no caso anisotrópico, em geral, esta relação não será a unidade e, portanto, a relação de η/s pode tornar-se menor que $1/(\pi)$ [76]. No entanto, como iremos mostrar a seguir para um cenário de brana negra no espaço-tempo assintoticamente Lifshitz na gravidade de Horndeski [16], no qual a anisotropia permitirá que para certo valor do expoente crítico leva a violações do limite de KSS.

Capítulo 4

Brana negra no espaço-tempo assintoticamente de Lifshitz e relação de viscosidade/entropia na gravidade de Horndeski

No presente estudo, encontramos soluções de brana negra no espaço-tempo assintoticamente Lifshitz na gravidade de Horndeski [16]. Em sistemas quânticos críticos, o escalão Lifshitz $t \rightarrow \lambda^z t$, $x_i \rightarrow \lambda x_i$, em que z representa um expoente crítico. Esse dimensionamento é semelhante à invariância do dimensionamento do espaço-tempo do AdS puro ($z = 1$) nas coordenadas de Poincaré. O ponto de vista holográfico sugere que esse dimensionamento realiza uma isometria na métrica do espaço-tempo, desde que a coordenada radial seja dimensionada como $r \rightarrow \lambda^{-1} r$. Na relatividade geral, uma brana negra é uma solução que generaliza uma solução de buraco negro. Estas são soluções de buraco negro para a gravidade de Horndeski com topologia de horizonte plano [34, 35]. Investigações

de branas negras em espaço-tempo assintoticamente Lifshitz foram consideradas anteriormente em [34, 36, 37, 38]. Buracos negros de Lifshitz com um campo escalar dependente do tempo na teoria de Horndeski foram estudados em [39].

4.1 Brana negra no espaço-tempo assintoticamente de Lifshitz na gravidade de Horndeski

Vamos considerar para a gravidade de Einstein-Horndeski o seguinte *Ansatz* para uma brana negra em quatro-dimensões de Lifshitz da forma

$$ds^2 = L^2 \left(-r^{2z} f(r) dt^2 + r^2 d\Omega_{2,\epsilon}^2 + \frac{dr^2}{r^2 f(r)} \right). \quad (4.1)$$

Aqui L é o raio do espaço AdS e $d\Omega_{2,\epsilon}^2$ é a métrica da esfera unitária S^2 , do plano ou hiperboloide que corresponde, respectivamente, a $\epsilon = 1, 0, -1$ [35]. Observe também que $d\Omega_{2,\epsilon}^2 = \bar{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ possui uma curvatura constante com o tensor de Ricci fornecido por $\bar{R}_{\mu\nu} = \epsilon \bar{g}_{\mu\nu}$. No entanto, podemos considerar $d\Omega_{2,\epsilon}^2$ como

$$d\Omega_{2,\epsilon}^2 = \frac{du^2}{1 - \epsilon u^2} + u^2 d\Omega_1^2, \quad (4.2)$$

Aqui $d\Omega_1^2$ é a métrica da 1-esfera. Agora computando as equações de movimento considerando $V(\phi) = 0$ em (2.20) com $\alpha \neq 0$ e $\gamma \neq 0$. Então teremos que para a equação (2.25) as componentes tt :

$$\begin{aligned} & r^2 f(r) [\psi^2(r) (3\gamma r^3 f'(r) - \alpha L^2 r^2 + \gamma \epsilon) - 12\kappa L^2] + 4\kappa L^2 (\epsilon - r^3 f'(r) + \Lambda L^2 r^2) + \\ & + \gamma r^4 f(r)^2 \psi(r) (4r\psi'(r) + 7\psi(r)) = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Aqui foi definido um novo campo $\phi' \equiv \psi$. E para as componentes xx ou yy

$$\begin{aligned}
& 2\gamma r^2 f^2(r) \psi(r) [2r(z+1) \psi'(r) + (z(z+3) + 3) \psi(r)] - 4\kappa L^2 r^2 f''(r) + \gamma r^4 \psi^2(r) f'^2(r) + \\
& + f(r) [2\gamma r^4 \psi(r) f'(r) \psi'(r) + r^2 \psi^2(r) (\gamma r(r f''(r) + (5z+7) f'(r)) - 2\alpha L^2) - 8\kappa L^2 (z^2 + z + 1)] + \\
& + 8\kappa \Lambda L^4 - 12\kappa L^2 r(z+1) f'(r) = 0.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Finalmente para as componentes rr encontramos

$$\begin{aligned}
& \frac{\gamma \psi^2(r) [\epsilon - 3r^2(r f'(r) + 2zf(r) + f(r))]}{4\kappa L^2 r^2} - \frac{\Lambda L^2}{r^2 f(r)} - \frac{\alpha \psi^2(r)}{4\kappa} + \\
& + \frac{-\epsilon + r^2(r f'(r) + 2zf(r) + f(r))}{r^4 f(r)} = 0.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Para a equação do campo escalar (2.26) com $V(\phi) = 0$, temos

$$\begin{aligned}
& \phi'(r) [r f'(r) (\gamma r^3 f'(r) + \alpha L^2 r^2 - \gamma \epsilon) + \gamma r^2 (z+3)(2z+1) f^2(r)] + \\
& + f(r) \phi'(r) [\gamma r^3 (r f''(r) + (5z+6) f'(r)) + \alpha L^2 r^2 (z+3) - (1+z) \gamma \epsilon] + \\
& + r f(r) \phi''(r) [\gamma r^2 (r f'(r) + 2zf(r) + f(r)) + \alpha L^2 r^2 - \gamma \epsilon] = 0.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

De acordo com [85], configurações estáticas de simetria esférica de certos Galileons com invariância de deslocamento foram primeiro argumentadas para admitir um teorema *no-hair* (sem-cabelo). O teorema *no-hair* para Galileons requer que o quadrado da corrente conservada $J^\mu = (\alpha g^{\mu\nu} - \gamma G^{\mu\nu}) \nabla_\nu \phi$, definido em (2.26), não deve divergir no horizonte. Assim, para fugir de tal teorema [31, 39, 85, 86], precisamos impor que a componente radial da corrente conservada desapareça identicamente sem qualquer restrição radial [39], nesse sentido temos que:

$$\alpha g_{rr} - \gamma G_{rr} = 0. \tag{4.7}$$

Lembrando que $\phi'(r) \equiv \psi(r)$ podemos facilmente notar que esta condição aniquila $\psi^2(r)$ independentemente do seu comportamento no horizonte. Pode-se mostrar que a equação

(4.6) é satisfeita pela seguinte solução

$$f(r) = -\frac{\alpha L^2}{\gamma(2z+1)} - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{2z+1}, \quad (4.8)$$

$$\psi(r) = \pm iL \sqrt{\frac{2\kappa(\alpha + \gamma\Lambda)}{\alpha\gamma r^2 f(r)}}. \quad (4.9)$$

As equações de campo de Einstein-Horndeski (4.3) e (4.4) são satisfeitas por essas equações contanto que $z = 1/2$ com $\epsilon = 0$ (caso planar) [34, 35]. Para a ação (2.20) quando trata-se de buracos negros estáticos de Lifshitz a constante cosmológica é escrita como na forma $\Lambda = -(1 + 2z)/L^2$ que está de acordo com [36, 37, 38]. Assim, a solução de brana negra em espaço-tempo assintoticamente Lifshitz é dada por

$$f(r) = -\frac{\alpha}{\gamma\Lambda} - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{2z+1}, \quad (4.10)$$

$$\psi(r) = \pm \sqrt{\frac{2\kappa(1 + 2z)(\alpha + \gamma\Lambda)}{\alpha\gamma\Lambda r^2 f(r)}}, \quad (4.11)$$

para $z = 1/2$. Os parâmetros são definidos no intervalo $-\infty < \alpha/(\gamma\Lambda) \leq -1$, com $\alpha, \gamma < 0$ ou $-1 \leq \alpha/(\gamma\Lambda) < 0$, com $\alpha, \gamma > 0$.

Ainda podemos fazer a seguinte transformação na métrica (4.1) com solução (4.10)

$$\begin{aligned} f(r) &\rightarrow -\frac{\alpha}{\gamma\Lambda} f(r), \quad r_0^{2z+1} \rightarrow -\frac{\alpha}{\gamma\Lambda} r_0^{2z+1}, \quad L \rightarrow \left(-\frac{\alpha}{\gamma\Lambda}\right)^{1/2} L, \\ t &\rightarrow -\frac{\gamma\Lambda}{\alpha} t, \quad x \rightarrow \left(-\frac{\gamma\Lambda}{\alpha}\right)^{1/2} x, \quad y \rightarrow \left(-\frac{\gamma\Lambda}{\alpha}\right)^{1/2} y, \end{aligned} \quad (4.12)$$

Para colocar a solução do buraco negro na forma padrão

$$f(r) = 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{2z+1}, \quad (4.13)$$

$$\psi(r) = \pm \sqrt{\frac{2\kappa(1 + 2z)(\alpha + \gamma\Lambda)}{-\alpha^2 r^2 f(r)}}. \quad (4.14)$$

Na Fig. 4.1 é representado o comportamento de $f(r)$ e $\psi(r)$ positivos dados acima, para vários valores de parâmetros e expoente crítico $z = 1/2$. Além disso, o fato de que $\psi^2(r \rightarrow \infty) = 0$ na ação (2.20) garante que esta seja uma solução de vácuo genuína.

Observe também que, a partir das equações (4.13)-(4.14), a geometria do buraco negro é regular em todos os lugares (exceto na singularidade central), a derivada do campo escalar $\psi(r)$ diverge no horizonte [19, 35, 86]—veja a Fig. 4.1, mas o campo escalar não explode no horizonte, pois se aproxima de uma constante próxima ao horizonte como $\phi(r) \sim \left(\Lambda L^2(\alpha + \gamma\Lambda)/\alpha^2 r_0^2 f'(r_0)\right)^{1/2} (r - r_0)^{1/2} + \text{const.}$ Esses fatos estão em total concordância com o teorema *no-hair*, como discutido anteriormente [86]. A equação do campo escalar (4.14) é uma função real fora do horizonte, pois para $r > r_0$ temos $f(r > r_0) > 0$ e o campo escalar é real, por exemplo, no intervalo $-1 < \alpha/(\gamma\Lambda) < 0$, com $\alpha, \gamma > 0$. Podemos ver que no infinito o próprio campo escalar diverge como $\phi(r) \sim \ln r$, mas não sua derivada ψ que estão presentes na ação, que são finitos no infinito assintótico [86]—veja a Fig. 4.1.

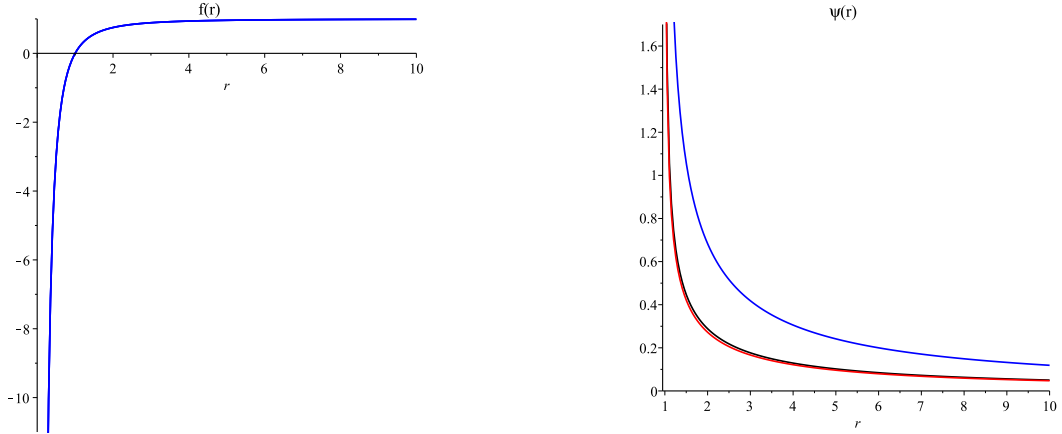


Figura 4.1: A figura apresenta $f(r)$ e $\psi(r)$, Eqs. (4.13)-(4.14), para $\Lambda = -(1 + 2z)/L^2$, $L = 1$, $r_0 = 1$ para o expoente crítico $z = 1/2$ para os valores $\alpha = 1$, $\gamma = 1.2$ (curva azul), $\alpha = 2$, $\gamma = 1.5$ (curva preta) e $\alpha = 3$, $\gamma = 2.5$ (curva vermelha).

A seguir, abordamos a questão da singularidade através da curvatura invariante dada pelo escalar de Ricci

$$R = \frac{r^2 f''(r) + 3zr f'(r) + 2z^2 f(r) + 5r f'(r) + 4z f(r) + 6f(r)}{L^2}. \quad (4.15)$$

$$= -\frac{3}{2L^2} \left(\frac{17}{3} - \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \right) \quad (4.16)$$

Podemos ver que, para $r = 0$ e $z = 1/2$, encontramos uma singularidade de curvatura, uma vez que o escalar de Ricci diverge, o que implica que encontramos uma solução que é, de fato, uma solução de buraco negro. No entanto, para $z = 1$, temos $R = -12/L^2$, ou seja, $R = 4\Lambda$, que caracteriza o espaço-tempo do AdS₄ [19].

4.1.1 Termodinâmica

Antes de terminar esta seção, para uso posterior, antecipamos as definições de temperatura e densidade de entropia [76] para a brana negra de Lifshitz quadridimensional (4.1) para o caso planar ou seja com $d\Omega_2^2 = dx^2 + dy^2$, temos que

$$T = \frac{-g'_{tt}(r \rightarrow r_0)}{4\pi(\sqrt{-g_{tt}(r \rightarrow r_0)g_{rr}(r \rightarrow r_0)})}, \quad (4.17)$$

$$s = \frac{1}{4G} \frac{\sqrt{-g(r \rightarrow r_0)}}{\sqrt{-g_{tt}(r \rightarrow r_0)g_{rr}(r \rightarrow r_0)}}, \quad (4.18)$$

Em que temos $T = r_0^z(1 + 2z)/(4\pi)$ e $s = L^2 r_0^2/4G$. Usando essas equações, podemos calcular a relação de Smarr [87] através da primeira lei termodinâmica $dM = TdS$ ou em termos de densidade de energia $\mathcal{E} = M/V_2$ e densidade de entropia $s = S/V_2$, $d\mathcal{E} = Tds$. Aqui V_2 é o volume do intervalo de 2-variedades do volume unitário. No nosso caso, que diz respeito a um horizonte toroidal bidimensional, assumimos $V_2 = 1$, como em Ref. [35], tal que S e M coincidem com as densidades. Agora, calculando a densidade de energia, temos

$$\mathcal{E}(r_0) = \int Tds = \int_0^{r_0} T(r_0) \frac{ds(r_0)}{dr_0} dr_0 = \frac{2Ts}{z+2}. \quad (4.19)$$

Este resultado está em acordo com [35, 36, 37, 38].

4.2 Relação viscosidade/densidade de entropia

Apresentamos agora o cálculo da viscosidade de cisalhamento na teoria dos campos de contorno através da correspondência holográfica [35, 51, 53]. Fazemos isso no contexto da gravidade de Horndeski [35, 88], onde é encontrada uma solução de brana negra na presença do espaço-tempo assintoticamente Lifshitz. No lado da gravidade, essa brana negra planar desempenha o papel do dual gravitacional de um certo fluido. Para calcular a viscosidade de cisalhamento através da correspondência holográfica, precisamos linearizar as equações de campo [51, 52, 53]. Assim, a hidrodinâmica efetiva na teoria do campo de contorno é construída em termos de correntes conservadas e tensores de energia-momento considerando pequenas flutuações ao redor do fundo da brana negra $g_{xy} \rightarrow g_{xy} + h_{xy}$, onde $h_{xy} = h_{xy}(t, \vec{x}, r)$ [51, 53, 88, 89] é uma pequena perturbação. Para a métrica (4.1) considerando o caso planar $d\Omega_2^2 = dx^2 + dy^2$ encontramos as flutuações do tensor de Ricci na forma

$$\delta^{(1)}R_{xy} = -\frac{r^2 f(r)}{2L^2} h_{xy}'' + \frac{\ddot{h}_{xy}}{2r^{2z} f(r) L^2} - \frac{(r f(r)(z+3) + r^2 f'(r))}{2L^2} h_{xy}'. \quad (4.20)$$

Aqui foi desconsiderada a dependência de h_{xy} em $\vec{x}$. Utilizando a relação $\bar{T}_{xy} = T_{xy} - g_{xy} T_\alpha^\alpha / 3$ e usando a equação de Einstein-Horndeski na forma $\delta^{(1)}R_{xy} = \delta^{(1)}\bar{T}_{xy} / (2\kappa)$, tal que encontramos uma equação de Klein-Gordon com uma massa dependente da posição da seguinte forma

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha (\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\beta h_{xy}) = -m^2(r) h_{xy}, \quad (4.21)$$

Com $m^2(r)$ dada por

$$m^2(r) = \frac{2(1+2z)}{3L^2} \left[\frac{(4+7z+z^2)}{(-\alpha(1+2z)/(\gamma\Lambda) + 3 + 6z)} \right] + \frac{2(1+z-2z^2)}{3L^2(-\alpha(1+2z)/(\gamma\Lambda) + 3 + 6z)} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{2z+1}. \quad (4.22)$$

Agora considerando uma transformação de Fourier

$$h_{xy}(x, r) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{ikx} \chi(r, k), \quad (4.23)$$

Com $x = (t, \vec{x})$ e $k = (\omega, \vec{q})$. A equação de movimento para as flutuações assume a seguinte forma

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_r (\sqrt{-g} g^{rr} \partial_r \chi(r, k)) = -m^2(r) \chi(r, k). \quad (4.24)$$

Além do termo de massa, em geral, essa equação também contém a contribuição $k^2 = q^2 - \omega^2$, mas consideramos o limite hidrodinâmico $\omega \rightarrow 0$ e o momento espacial $q = 0$.

Em nosso cenário atual, analisamos a razão viscosidade/densidade de entropia para o expoente crítico $z = 1/2$. Expoentes críticos não inteiros apareceram em estudos anteriores, por exemplo, [39, 90, 91, 92, 93, 94]-e suas referências. Especialmente [90, 91] os autores argumentam que, embora os expoentes críticos de Lifshitz na ação de uma teoria quântica de campos em desenvolvimento da simetria de Lifshitz sejam assumidos como inteiros, não existe tal limitação, uma vez que a relação de dispersão obtida na densidade hamiltoniana associada à teoria quantizada mostra a continuação analítica exata para valores não inteiros de z .

A solução geral explícita para a equação diferencial (4.24) pode ser dada por [88]

$$\chi(r) = C_1 \frac{F_1 \left(a_-, a_+, b_-; \left(\frac{r_0}{r} \right)^{2z+1} \right)}{(r/r_0)^{\beta_-}} + C_2 (r/r_0)^{\beta_+} F_1 \left(d_-, d_+, b_+; \left(\frac{r_0}{r} \right)^{2z+1} \right), \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \beta_{\mp} &= \pm \frac{\mp \sqrt{9\gamma\Lambda - 3\alpha} z \mp 2\sqrt{9\gamma\Lambda - 3\alpha}}{2\sqrt{9\gamma\Lambda - 3\alpha}} + \\ &+ \pm \frac{\sqrt{z^2\gamma\Lambda - 20z\gamma\Lambda - 3z^2\alpha + 4\gamma\Lambda - 12z\alpha - 12\alpha}}{2\sqrt{9\gamma\Lambda - 3\alpha}}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} a_{\mp} &= - \frac{\mp \sqrt{9\gamma z\Lambda - 17\gamma\Lambda - 3\alpha z + 3\alpha} \sqrt{z-1} - 2z\sqrt{9\gamma\Lambda - 3\alpha} - \sqrt{9\gamma\Lambda - 3\alpha}}{2(2z+1)\sqrt{9\gamma\Lambda - 3\alpha}} \\ &- \frac{\sqrt{z^2\gamma\Lambda - 20z\gamma\Lambda - 3z^2\alpha + 4\gamma\Lambda - 12z\alpha - 12\alpha}}{2(2z+1)\sqrt{9\gamma\Lambda - 3\alpha}} \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} b_{\mp} &= \mp \frac{\mp \sqrt{9\gamma\Lambda - 3\alpha} z \mp \sqrt{9\gamma\Lambda - 3\alpha}}{(2z+1)\sqrt{9\gamma\Lambda - 3\alpha}} + \\ &+ \frac{\sqrt{z^2\gamma\Lambda - 20z\gamma\Lambda - 3z^2\alpha + 4\gamma\Lambda - 12z\alpha - 12\alpha}}{(2z+1)\sqrt{9\gamma\Lambda - 3\alpha}}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} d_{\mp} &= \frac{\mp \sqrt{9\gamma z\Lambda - 17\gamma\Lambda - 3\alpha z + 3\alpha} \sqrt{z-1} + 2z\sqrt{9\gamma\Lambda - 3\alpha} + \sqrt{9\gamma\Lambda - 3\alpha}}{2(2z+1)\sqrt{9\gamma\Lambda - 3\alpha}} \\ &+ \frac{\sqrt{z^2\gamma\Lambda - 20z\gamma\Lambda - 3z^2\alpha + 4\gamma\Lambda - 12z\alpha - 12\alpha}}{2(2z+1)\sqrt{9\gamma\Lambda - 3\alpha}} \end{aligned} \quad (4.29)$$

No horizonte, esta essa solução é

$$\chi(r_0) = \frac{C_1 \Gamma(b_-) \Gamma(a_- + a_+ - b_-)}{\Gamma(b_- - a_-) \Gamma(b_- - a_+)} + \frac{C_2 \Gamma(b_+) \Gamma(d_+ + d_- - b_+)}{\Gamma(b_+ - d_+) \Gamma(b_+ - d_-)}, \quad (4.30)$$

A qual diverge. Podemos remover a divergência considerando a escolha

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{\Gamma(b_-) \Gamma(b_+ - d_+) \Gamma(b_+ - d_-)}{\Gamma(b_+) \Gamma(b_- - a_-) \Gamma(b_- - a_+)}. \quad (4.31)$$

Isso nos permite encontrar a seguinte solução regularizada

$$\chi(r_0) = \frac{2\pi C_1 \Gamma(b_-)}{\Gamma(b_- - a_-) \Gamma(b_- - a_+)}, \quad (4.32)$$

Isso será crucial para as seguintes considerações. A constante de integração C_1 pode ser configurada para unidade sem perda de generalidade. Vamos agora focar no cálculo da viscosidade de cisalhamento do fluido na teoria de campo de limite dual em $(2+1)$ -dimensões, procedendo da seguinte maneira. Podemos ver que podemos propor uma ação

efetiva para a equação (4.24) escrita como

$$S = -\frac{1}{16\pi G} \int \frac{d^3 k dr}{(2\pi)^3} \left(\frac{N(r)}{2} \frac{d\chi(r, k)}{dr} \frac{d\chi(r, -k)}{dr} - \frac{M(r)}{2} \chi(r, k) \chi(r, -k) \right), \quad (4.33)$$

Em que $N(r) = \sqrt{-g}g^{rr}$ e $M(r) = \sqrt{-g}m^2(r)$. Esta ação na concha de massa reduz ao termo superficial

$$S = -\frac{1}{16\pi G} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{2} N(r) \chi(r, k) \partial_r \chi(r, -k) \right) \Big|_{r_0}^{\infty}. \quad (4.34)$$

Da correspondência holográfica [47, 48, 49, 50, 74, 75, 76, 96], a função retardada de Green pode ser calculada através da função de dois pontos do gerador de funções de correlação conectadas na fronteira, que são dadas em termos da ação clássica (4.34).

Assim, como é conhecido, temos que a função de Green retardada é dada como na forma

$$G_{xy,xy}^R(\omega, 0) = -\frac{2}{16\pi G} (\sqrt{-g}g^{rr}|_{r_0}) [\chi(r, -\omega) \partial_r \chi(r, \omega)|_{r_0}], \quad (4.35)$$

Onde admitimos o momento espacial $q = 0$. Como a parte imaginária da função de Green não depende da coordenada radial, escolhemos convenientemente calculá-la no horizonte $r = r_0$. Agora, a partir da regularidade no horizonte, a derivada de χ no horizonte é dada em termos de $\chi(r_0)$ na primeira ordem em ω [97]. Como tal, podemos escrever a equação (4.35) como na seguinte forma

$$G_{xy,xy}^R(\omega, 0) = -\frac{2i\omega L^2 r_0^2}{16\pi G} \chi^2(r_0). \quad (4.36)$$

A viscosidade de cisalhamento [54, 55, 74, 76, 73] é então dada por

$$\eta = -\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\omega} \text{Im} G_{xy,xy}^R \quad (4.37)$$

$$= \frac{L^2 r_0^2}{16\pi G} \chi^2(r_0), \quad (4.38)$$

Em que $s = r_0^2 L^2 / 4G$ é a densidade de entropia [34]. Assim, agora podemos escrever a relação viscosidade de cisalhamento/densidade de entropia como na forma

$$\frac{\eta}{s} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{2\pi\Gamma(b_-)}{\Gamma(b_- - a_-)\Gamma(b_- - a_+)} \right]^2. \quad (4.39)$$

$-\alpha/(\gamma\Lambda)$	η/s
5	$13.14/4\pi > 1/4\pi$
10	$2.44/4\pi > 1/4\pi$
15	$0.57/4\pi < 1/4\pi$
40	$0.053/4\pi < 1/4\pi$

Tabela 4.1: A tabela mostra a viscosidade de cisalhamento para a razão de densidade de entropia η/s para alguns valores de $-\alpha/(\gamma\Lambda)$ com expoente crítico $z = 1/2$.

notar também que da equação (4.38), temos

$$\frac{\eta}{s} = \frac{1}{4\pi} \chi^2(r_0), \quad (4.40)$$

Nossas análises mostram que, para o expoente crítico fixo $z = 1/2$, o limite ‘universal’ $\eta/s \geq 1/(4\pi)$ não é violado, por exemplo, quando $-\alpha/(\gamma\Lambda) = 5, 10$, mas violado quando $|\alpha/\gamma\Lambda|$ é suficientemente grande, por exemplo, quando $-\alpha/(\gamma\Lambda) = 15, 40$ —veja a tabela 4.1. Além disso, para o caso $\alpha = -\gamma\Lambda$, esse limite satura, ou seja, $\eta/s = 1/(4\pi)$. Isso ocorre porque nesse regime a equação (4.14) fornece $\psi(r) = 0$, que por sua vez substitui a equação (4.24) produz $m(r) = 0$. Assim, resolvendo a equação (4.24), encontramos $\chi(r) = \text{const.}$, em todos os lugares. Então, no horizonte, pode-se supor que a solução normalizada para a unidade $\chi(r_0) = 1$, que de (4.40) satura claramente o limite.

Assim, temos que a razão viscosidade-entropia para algumas substâncias comuns: hélio, nitrogênio e água, a razão é sempre substancialmente maior que seu valor em teorias de gravidade dual [52]. Contudo, o limite $\eta/s \geq 1/(4\pi)$ é mais útil para sistemas

que interagem fortemente, onde estimativas teóricas confiáveis da viscosidade não estão disponíveis. Porém, o sistema de plasma de quarks e glúons (QGP), o qual é criado em colisões de íons pesados que se comportam em muitos aspectos como uma gota de líquido. Para esse sistema há indícios experimentais de que a viscosidade do QGP em temperaturas alcançadas pelo colisor de íons pesados relativístico é surpreendentemente pequena. Assim, nossos resultados concordam com essa análise para a razão $|\alpha/\gamma\Lambda|$, que é suficientemente grande. Contudo, tais temperaturas alcançadas pelo colisor de íons pesados, possivelmente chegam próximo de saturar o limite da viscosidade [98], este fato se torna interessante, devido ao fato que nossa saturação do limite é obtida para a solução normalizada. Contudo, de acordo com [99] nossas descobertas são fisicamente significativas e este fato sugere que a violação do limite ‘universal’ ocorre em materiais com resposta elástica diferente de zero. Usando a ressonância de Feshbach, gases de Fermi com forte interação de átomos foram criados recentemente. Observou-se que esses gases se comportam hidrodinamicamente [100] e devem ter viscosidade finita de cisalhamento em temperaturas diferentes de zero.

Capítulo 5

Mundo brana na gravidade de Horndeski

Neste capítulo iremos estudar o mundo brana na gravidade de Horndeski de cinco dimensões. O qual é realizado via formalismo de primeira ordem em cinco dimensões. Apresentamos exemplos com solução analítica e calculamos soluções numéricas.

5.1 Mundo Brana

Agora iremos investigar o estudo de mundo brana no contexto da gravidade de Horndeski [15, 16, 62, 63, 64] considerando $V(\phi) \neq 0$ na ação (2.20). Para este cenário dado o *Ansatz* da métrica em cinco dimensões da forma

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{MN} dx^M dx^N \\ &= e^{2A(r)} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dr^2 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Em que os índices latinos $M, N = 0, 1, 2, 3$ e 5 correm ao longo do bulk e os índices gregos $\mu, \nu = 0, 1, 2$ e 3 correm ao longo do mundo brana. Podemos computar as equações de movimento para a métrica (5.1), temos as seguintes componentes para as equações de Einstein-Horndeski (2.25), primeiro encontramos as componentes- rr

$$2V(\phi) + 4k(\Lambda + 6A'^2) - \Psi^2(r)[\alpha - 18\gamma A'^2] = 0, \quad (5.2)$$

Em que $\Psi(r) = \phi'(r)$. Esta equação pode ser reescrita na seguinte forma

$$\Psi(r) = \pm \sqrt{\frac{2V(\phi) + 4k\Lambda + 24kA'^2(r)}{\alpha - 18\gamma A'^2(r)}} \quad (5.3)$$

Agora tomando a relação entre $A(r)$ e o superpotencial $W(\phi)$ através da equação de primeira ordem

$$A'(r) = -\frac{1}{3}W(\phi) \quad (5.4)$$

E redefinindo $24k \equiv b$, podemos escrever a equação (5.3) na forma

$$\Psi(r) = \pm \sqrt{\frac{2V(\phi) + \frac{b\Lambda}{6} + \frac{b}{9}W^2(\phi)}{(\alpha - 2\gamma W^2(\phi))}} \quad (5.5)$$

Para um potencial da forma

$$V(\phi) = -\frac{b}{18}W^2(\phi) + \frac{c^2 W_\phi^2(\phi)}{2}(\alpha - 2\gamma W^2(\phi)) \quad (5.6)$$

E tomando $\Lambda = 0$, por simplicidade, definimos

$$\Psi(r) = \pm c W_\phi(\phi) \quad (5.7)$$

Para $\alpha = 1$, $c = 1/2$, $\gamma = 0$ e $b = 6$ (ou seja, $4\pi G = 1$) encontramos o familiar potencial escalar e a equação de campo escalar na gravidade de Einstein de cinco dimensões [64].

Uma outra equação das equações de Einstein-Horndeski pode ser encontrada combinando-se as componentes- tt com as componentes- $xx-yy-zz$ para encontrar

$$2V(\phi) + 6\gamma\Psi(r)\Psi'(r)A'(r) + 4k[\Lambda + 6A'^2(r) + 3A''(r)] + \Psi^2(r)[\alpha + 6\gamma A'^2(r) + 3\gamma A''(r)] = 0 \quad (5.8)$$

Uma terceira equação é a equação da dinâmica do campo escalar (2.26)

$$V_\phi(\phi) + 4A' \phi'(r)[- \alpha + 6\gamma A'^2(r) + 3\gamma A''(r)] - (\alpha - 6\gamma A'^2(r))\phi'' = 0 \quad (5.9)$$

Usando as seguintes relações $\phi' = cW_\phi$, $A'' = -cW_\phi^2/3$ podemos escrever essas equações como

$$2cWW_{\phi\phi} + cW_\phi^2 + \frac{4}{3}W^2 - \theta = 0 \quad (5.10)$$

Em que $\theta = \frac{(2\alpha - b/6c)}{\gamma}$. Isto implica que as equações (5.2), (5.8) e (5.9) são consistentes e satisfeitas pela equação (5.4) e (5.7) sob a condição não trivial (5.10) no superpotencial $W(\phi)$. A equação (5.10) pode resolver numericamente, mas precisamos de soluções analíticas para analisar as flutuações gravitacionais.

5.2 Exemplos

A solução exata mais simples pode ser encontrada assumindo $W = W_0 = \text{const.}$ Que, a partir de (5.10), encontra-se $W_0 = \pm\sqrt{3\theta}/2$. Isso fornece a solução $\phi = \text{const.}$ E $A = -(1/3)W_0 r$, que é a solução de vácuo AdS₅. Nesse regime, a gravidade de Horndeski coincide com a gravidade de Einstein. Além disso, é sabido que esta solução localiza a gravidade na brana originada por uma função delta, desde que conectemos as ramificações do AdS $A = \pm kr$ junto com a brana de acordo com a solução $A = -k|r|$, em que nosso caso $k = \sqrt{3\theta}/6$ está relacionado à tensão da brana no limite da parede fina. Este é precisamente o cenário de Randall-Sundrum [59]. A fim de abordar a questão da distribuição de energia da brana de uma maneira mais transparente, suavizamos esta solução de brana como $k|r| \rightarrow \ln \cosh kr$ [63], assim agora temos a solução suave

$$A(r) = -\ln \cosh kr \approx -\frac{k^2}{2}r^2 \quad (5.11)$$

Em que $k \ll 1$ como $\gamma \gg 1$ (o limite suave).

Para $\theta = 2(\alpha - 1)/\gamma$ com $b = 6, c = 1/2$, $A(r)$ está representado na Fig. 5.1 para valores distintos de γ . Um tipo semelhante de geometria já foi considerado para confinar AdS/QCD [102]. A solução escalar discutida acima pode ser entendida como um ‘kink’ muito espesso que possui um declive muito pequeno. Mostraremos numericamente evidências de que a inclinação da solução do tipo kink das equações diferenciais exatas realmente tende a diminuir à medida que γ aumenta.

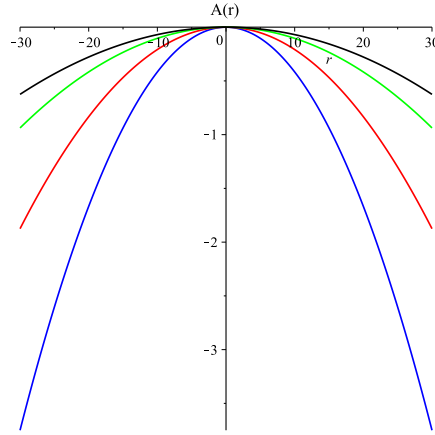


Figura 5.1: A figura mostra $A(r)$ para os valores $\alpha = 1.5$, $\gamma = 10$ -azul, $\gamma = 20$ -vermelho, $\gamma = 40$ -verde e $\gamma = 60$ -preto.

A densidade de energia é dada por

$$\rho(r) = -e^{2A} \left(\frac{3\alpha A''}{2} + 3A'^2 \right) - \frac{9\gamma e^{2A}}{4} (A' A''' - 4A'^2 A'' + A''^2) \quad (5.12)$$

E para tais soluções a densidade de energia é representada na Fig. 5.2 para vários valores grandes de γ .

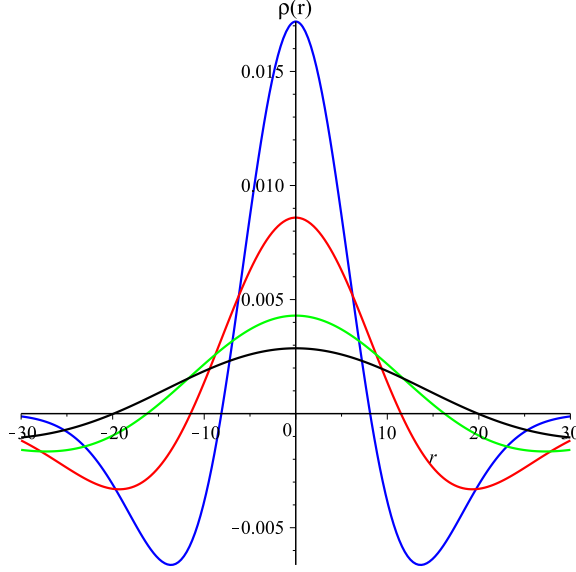


Figura 5.2: Densidade de energia $\rho(r)$ para os valores $\alpha = 1.5$, $\gamma = 10$ -azul, $\gamma = 20$ -vermelho, $\gamma = 40$ -verde e $\gamma = 60$ -preto.

5.3 Solução Numérica

Nos exemplos acima, conseguimos encontrar soluções explícitas em um regime restrito para valores de α e γ . No entanto, o par de equações de primeira ordem (5.4) e (5.7) pode ser resolvido numericamente para um intervalo mais amplo de valores, desde que assumamos condições de contorno apropriadas. Na Fig. 5.3 mostramos o comportamento do perfil da geometria associados às soluções de mundo brana para $\theta = 2$ e 5 para $c = 1/2$, o que significa $2(\alpha - 1)/\gamma = 2$ e 5, respectivamente, que para $\alpha = 3/2$ temos $\gamma = 0.5$ (curva vermelha) e $\gamma = 0.2$ (curva azul). Este é o regime de γ pequeno, que não foi tratado anteriormente no limite não homogêneo da Eq. (5.10). O fator de dobra (*warp factor*) sinaliza a existência de uma brana assimétrica, que em geral não é capaz de localizar o modo zero do gráviton, mas pelo menos uma pode encontrar uma gravidade metaestável. Valores menores de $\gamma < 1$ parecem forçar a assimetria da brana. As condições de contorno usadas foram as seguintes: $W(0) = 1$, $W'(0) = 1$, $\phi(0) = 0$ e $A(0) = 0$.

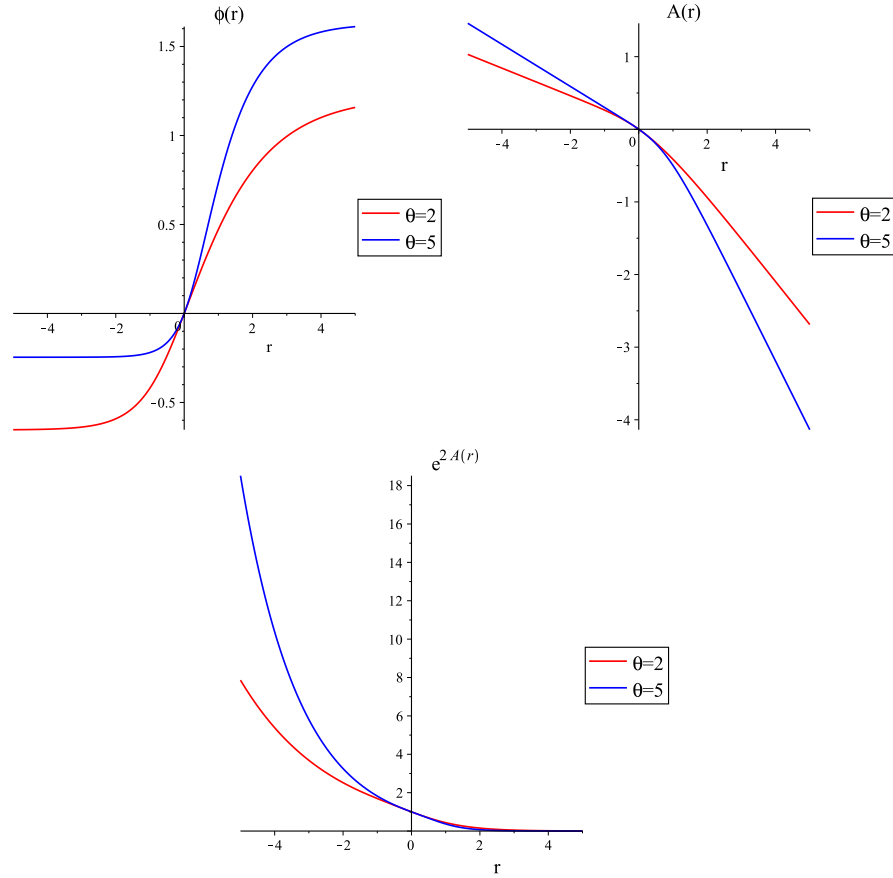


Figura 5.3: A figura mostra os kinks $\phi(r)$ (canto superior esquerdo) e $A(r)$ (canto superior direito) para $\theta = 2$ (vermelho) e $\theta = 5$ (azul) para $c = 1/2$. Na parte inferior mostramos o *warp factor* $\exp(2A(r))$ sinalizando a existência de uma brana assimétrica.

Capítulo 6

Modelagem do setor escuro na gravidade de Horndeski no formalismo de primeira ordem

Neste Capítulo iremos considerar a teoria de Horndeski no contexto cosmológico usando o formalismo de equação de primeira ordem que foi apresentado para a gravidade de Horndeski em um cenário de mundo brana [15]. Iremos considerar as equações de Friedmann sem curvatura e assumimos a dominância da energia escura. Por meio de métodos numéricos, as soluções do tipo kink de equações de primeira ordem representam um Universo de Sitter. Abordamos os observáveis cosmológicos, como a função de Hubble, o parâmetro de desaceleração e a equação de estado da energia escura.

6.1 A gravidade de Horndeski no Cenário Cosmológico

Em nossa presente investigação, abordamos o estudo das soluções de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) no contexto da gravidade de Horndeski, para mais investigações sobre aplicações da gravidade de Horndeski o leitor pode consultar [15, 16, 18, 19, 20, 35]. Aqui estamos interessados em investigar as implicações cosmológicas de teorias com acoplamentos derivativos. Consideramos a métrica plana de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) da forma

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j \quad (6.1)$$

O campo escalar depende apenas do tempo cósmico e o cálculo das componentes- tt das equações de campo de Einstein-Horndeski (2.25) com um potencial escalar $V(\phi) \neq 0$ nos fornece

$$3\dot{a}(t)^2(4\kappa - 3\gamma\psi^2(t)) - a^2(t)[\alpha\psi^2(t) + 2V(\phi)] = 0 \quad (6.2)$$

A equação de campo de Friedmann pode ser facilmente encontrada a partir desta equação que fornece

$$H^2 = \frac{\alpha\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)}{3(4\kappa - 3\gamma\dot{\phi}^2)} \quad (6.3)$$

6.2 Formalismo de Primeira Ordem

O formalismo de equação de primeira ordem é uma ferramenta fundamental no grupo de renormalização (RG) na cosmologia holográfica[65]. Agora usamos o formalismo

de primeira ordem [65, 66], assumindo

$$\begin{aligned} H &= W(\phi), \quad H \equiv \frac{\dot{a}}{a} \\ \dot{\phi} &= -W_\phi(\phi) \end{aligned} \tag{6.4}$$

Em que o superpotencial $W(\phi)$ desempenha um papel central. Através dessas equações e da equação (6.3), podemos escrever o potencial escalar da seguinte forma:

$$V(\phi) = \frac{3}{2}W^2(4k - 3\gamma W_\phi^2) - \frac{\alpha}{2}W_\phi^2 \tag{6.5}$$

Observe que o potencial é semelhante ao encontrado no cenário de mundo brana [15]. Agora continuamos calculando as outras componentes da equação (2.25), as quais são dadas por

$$\dot{a}^2(t)(\gamma\psi^2(t) - 4\kappa) + a(t)[\ddot{a}(t)(2\gamma\psi^2(t) - 8\kappa) + 4\gamma\dot{a}(t)\psi(t)\dot{\psi}(t)] + a^2(t)[- \alpha\psi^2(t) + 2V(\phi)] = 0 \tag{6.6}$$

A equação do campo escalar (2.26) na geometria de FRW é escrita na forma

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{6\gamma\dot{\phi}H\dot{H}}{\alpha + 3\gamma H^2} + \frac{V_\phi(\phi)}{\alpha + 3\gamma H^2} = 0, \tag{6.7}$$

Observe que para $V_\phi = 0$ recuperamos o resultado conhecido em [27]. Agora combinando a equação (6.2) com a equação (6.6), podemos escrever uma equação diferencial para o superpotencial na forma

$$2WW_{\phi\phi} + W_\phi^2 + 3W^2 - \beta = 0 \tag{6.8}$$

Em que $\beta = (1 - \alpha)/\gamma$. Existe uma família de soluções analíticas para o caso homogêneo $\beta = 0$ dado em termos de funções trigonométricas

$$W(\phi) = \left(-C_1 \sin\left(\frac{3\phi}{2}\right) + C_2 \cos\left(\frac{3\phi}{2}\right) \right)^{2/3} \tag{6.9}$$

Da equação (6.4) podemos encontrar uma solução aproximada, para $C_1 = 0$, $C_2 = 1$ e, por exemplo, no limite de uma das funções muito pequena. Aqui assumimos $\phi \approx 1$ para um tempo cosmológico em torno de uma escala de tempo t^* , para encontrar uma solução cosmológica aceitável para acelerar o Universo

$$\begin{aligned}\phi &\approx 2.41t - \phi_0 \\ a(t) &\approx \exp(0.17t).\end{aligned}\tag{6.10}$$

Como veremos abaixo, para valores arbitrários de $\beta \neq 0$, devemos aplicar métodos numéricos para encontrar soluções exatas para as equações (6.4) e (6.8). Nós, no entanto, voltaremos mais tarde à solução analítica acima para fazer uma discussão sobre a linha de divisão fantasma.

6.3 Soluções Numéricas

O par de equações de primeira ordem pode ser resolvido numericamente para um intervalo mais amplo de valores, desde que seja considerado as condições de contorno apropriadas. Na Fig. 6.1 mostramos o comportamento do campo escalar com um perfil de kink (painel da esquerda) e fator de escala (painel da direita) associado com as soluções FRW para $\beta = 23.5$ com $\alpha = 0.06$, $\gamma = 0.04$ (curva azul) e $\beta = 15.3$ com $\alpha = 0.08$, $\gamma = 0.06$ (curva vermelha). O fator de escala sinaliza a existência de um Universo acelerado correspondente a um espaço de De Sitter. Esses regimes de pequenos γ e $\alpha \neq 1$ são necessários para produzir soluções cosmológicas aceitáveis. É claro que essas escolhas de parâmetros levam a um limite de equação não homogênea (6.8) onde nenhuma solução analítica é conhecida. Assim, encontraremos tais soluções cosmológicas usando métodos numéricos. No presente caso, aplicamos o método Runge-Kutta às equações de primeira

ordem (6.4) para as equações $a(t)$ e $\phi(t)$ e segunda ordem (6.8) para $W(\phi)$. As condições de contorno usadas aqui foram as seguintes: $W(0) = 1$, $W'(0) = 1$, $\phi(0) = 0$.

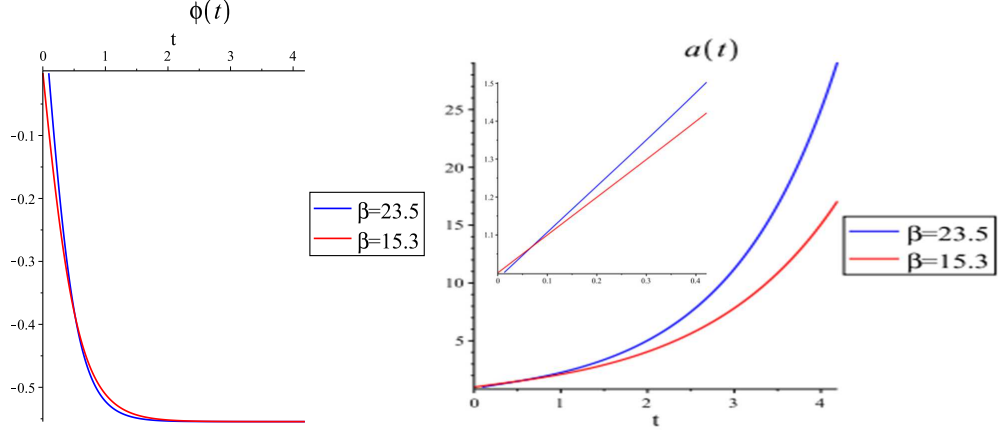


Figura 6.1: A figura apresenta o comportamento das soluções da equação (6.8): $\phi(t)$ (painel esquerdo) para $\beta = 23.5$ com $\alpha = 0.06$, $\gamma = 0.04$ (curva azul) e $\beta = 15.3$ com $\alpha = 0.08$, $\gamma = 0.06$ (curva vermelha); e $a(t)$ (painel direito) para os mesmo valores dos parâmetros. A inserção mostra o comportamento de um $a(t)$ em tempos menores. Particularmente, $a(0) = 1$, para $\beta = 15.3$ (curva vermelha), isso significa o momento em que nosso formalismo começa a descrever o universo atual.

6.4 Observáveis Cosmológicos

Nesta seção, investigamos os observáveis cosmológicos em nossa configuração cosmológica na gravidade de Horndeski. Vários estudos neste contexto já foram considerados e mostraram produzir modelos de sucesso [26, 27, 107], como por exemplo na descrição da energia escura [27].

Estendemos esses estudos anteriores no contexto do formalismo de primeira ordem, que é no sentido de conectá-los com os cenários cosmológicos em teorias fundamentais,

como a supergravidade e a teoria das cordas, onde as soluções de de Sitter são difíceis de encontrar. Uma das abordagens recentes para superar tal dificuldade é o fluxo do grupo de renormalização holográfica (RG), que é escrito em termos de equações de primeira ordem para um dado superpotencial [66, 65]. O formalismo de primeira ordem também foi aplicado, por exemplo, em $f(R)$ e $f(R, T)$ gravidade, mas isto é a primeira vez em que é investigada na cosmologia de Horndeski. Em nosso estudo, o potencial escalar não pode ser arbitrário, pois depende do superpotencial que obedece a uma equação diferencial que limita os possíveis cenários cosmológicos. Apesar disso, como veremos abaixo, existem alguns valores restritos de parâmetros que permitem descrever a atual aceleração do Universo. Assim, assumiremos uma dominância de energia escura descrita pela dinâmica do campo escalar em pequenos redshifts. Vamos primeiro nos concentrar na equação de estado. Assim, usando o tensor de energia-momento definido como

$$T_{\mu\nu} = \frac{\alpha}{2k} T_{\mu\nu}^{(1)} - g_{\mu\nu} V(\phi) + \frac{\gamma}{2k} T_{\mu\nu}^{(2)} \quad (6.11)$$

As componentes tt e $xx-yy-zz$ do setor efetivo de energia escura com densidade e pressão de energia são dadas por

$$T_{tt} = \rho_{DE} = \frac{\alpha\dot{\phi}^2}{4k} + \frac{V(\phi)}{2k} + \frac{9\gamma H^2 \dot{\phi}^2}{4k} \quad (6.12)$$

$$T_{xx} = p_{DE} = \frac{\alpha\dot{\phi}^2}{4k} - \frac{V(\phi)}{2k} - \frac{\gamma}{2k} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 (3H^2 + 2\dot{H}) + 2H\dot{\phi}\ddot{\phi} \right] \quad (6.13)$$

Em que $T_{xx} = T_{yy} = T_{zz}$. Para verificar a consistência, é interessante ver que usando as equações (6.4)-(6.5), a densidade da energia escura satisfaz $\rho_{DE} = 3H^2$, como esperado.

Assim, a equação de estado é dada por

$$\omega_{DE} = \frac{\alpha\dot{\phi}^2 - 2V(\phi) - 2\gamma \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 (3H^2 + 2\dot{H}) + 2H\dot{\phi}\ddot{\phi} \right]}{\alpha\dot{\phi}^2 + 2V(\phi) + 9\gamma H^2 \dot{\phi}^2} \quad (6.14)$$

Em termos de densidade e pressão de energia escura, a equação de evolução do campo escalar pode ser escrita na forma padrão através da conservação de energia-momento,

$\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0$, isso implica

$$\dot{\rho} + 3H(p_{DE} + \rho_{DE}) = 0 \quad (6.15)$$

Este resultado (6.15) está de acordo com [107]. Podemos agora computar outra quantidade cosmológica interessante chamada parâmetro de desaceleração q , que indica como a expansão do Universo está se acelerando e é dada pela equação

$$q = - \left(1 + \frac{\dot{H}}{H^2} \right). \quad (6.16)$$

Além disso, combinando a equação (6.15) com $\rho_{DE} = 3H^2$ podemos escrever uma relação útil entre o parâmetro de desaceleração e a equação de estado da seguinte forma

$$q = \frac{1}{2}(1 + 3\omega_{DE}) \quad (6.17)$$

A partir deste ponto, faremos uso do parâmetro de redshift adimensional z no lugar da variável de tempo t em nossa configuração cosmológica, uma vez que é usado para comparar resultados teóricos com resultados observacionais. O parâmetro redshift é definido como

$$1 + z = \frac{1}{a} \quad (6.18)$$

Assim, as derivadas de tempo podem agora ser expressas como

$$\frac{d}{dt} = -H(z)(1 + z)\frac{d}{dz} \quad (6.19)$$

E as equações de primeira ordem (6.4) podem ser simplesmente reescritas na nova variável z na forma

$$\begin{aligned} H(z) &= W(\phi(z)) \\ \phi'(z) &= -\frac{W_\phi(z)}{(1 + z)W(z)} \end{aligned} \quad (6.20)$$

Os resultados numéricos também são calculados para a equação (6.14) dada em termos do superpotencial

$$\omega_{DE} = -1 + \frac{2\alpha}{3} \frac{W_\phi^2}{W} + 2\gamma W_\phi^2 + \frac{\gamma W_\phi^4}{3W^2} + \frac{4\gamma W_\phi^2 W_{\phi\phi}}{3W} \quad (6.21)$$

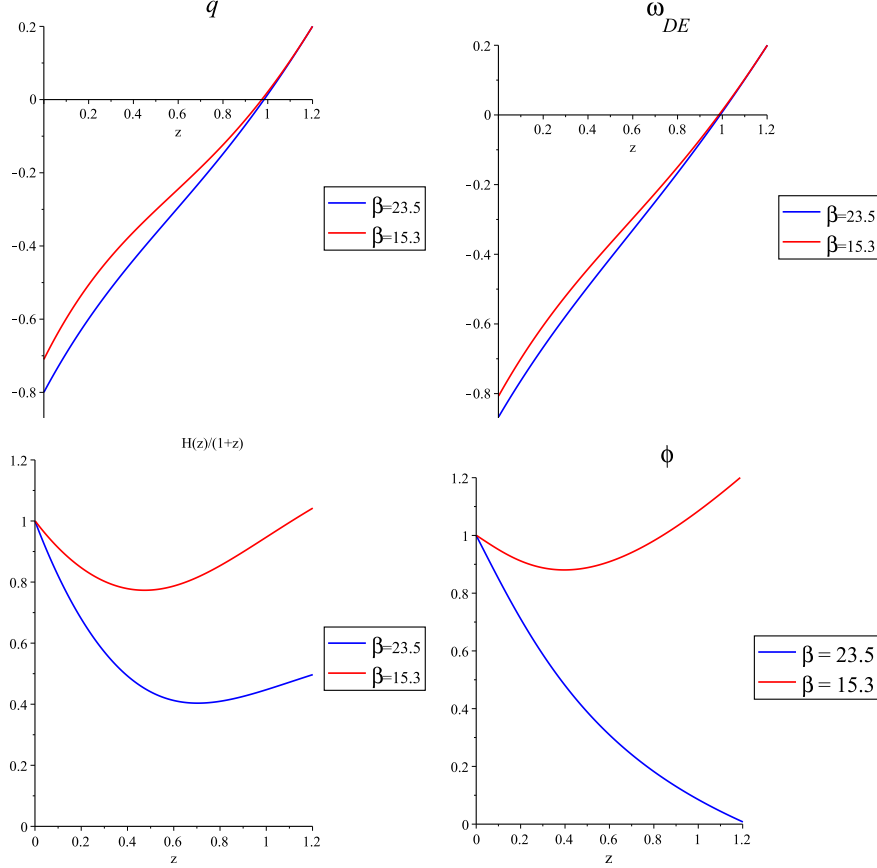


Figura 6.2: O parâmetro de desaceleração q (6.17) (canto superior esquerdo) e a equação de estado de energia escura ω_{DE} (6.14) (canto superior direito) para $\beta = 23.5$, com $\alpha = 0.06$ e $\gamma = 0.04$ (curva azul), $\beta = 15.3$, com $\alpha = 0.08$ e $\gamma = 0.06$ (curva vermelha). O parâmetro Hubble H (canto inferior esquerdo) e o campo escalar ϕ (canto inferior direito) com os mesmos valores dos parâmetros. Todos esses observáveis cosmológicos são dados em função do redshift z .

Nós resumimos da seguinte forma. De acordo com a Fig. 6.2 (canto superior direito), a equação de estado da energia escura ω_{DE} (6.21) adquire valores próximos a $-0,87$

(curva azul).

Observe que nossos observáveis cosmológicos aqui foram calculados apenas no setor de tensor-escalar da gravidade de Horndeski dada pela ação (2.20) sem contribuição de matéria. Sozinho este setor é incapaz de levar em consideração todas as fases do Universo em altos redshifts. Assim, abordamos apenas a dominância da energia escura (escalar) a baixos redshifts. Mas investigações considerando a contribuição da matéria para a extensão desta teoria com vários potenciais escalares já foram consideradas em [107, 108]. Por outro lado, uma fase inflacionária pode ser encontrada para um superpotencial constante $W = H_0$ que satisfaz (6.8). As equações de primeira ordem (6.4) fornecem a solução $a(t) = a_0 \exp(H_0 t)$ e $\phi = \text{const.}$, que caracteriza uma inflação exponencial com equação do estado $\omega = -1$.

Além da equação (6.21) e usando a solução exata do superpotencial dada pela equação (6.9) podemos ver que a equação do estado $\omega_{DE} < -1$, desde que no limite assumido $\phi \approx 1$ esta função é dominada pelo seguinte termo

$$\omega_{DE} = -\frac{5}{9} \left[\frac{1}{\cos\left(\frac{3\phi}{2}\right)} \right]^{8/3} < -1 \quad (6.22)$$

Esta é uma das vantagens da gravidade de Horndeski, onde um comportamento tipo phantom é obtido mesmo que o campo escalar tenha dinâmica canônica. Este efeito é simplesmente alcançado devido ao acoplamento não-mínimo do campo escalar à gravidade de Einstein-Horndeski [107]. As questões da cosmologia fantasma são importantes para serem abordadas, uma vez que os dados observacionais recentes [109] mostraram a possibilidade de $\omega_{DE} < -1$.

A função Hubble na Fig. 6.2 (canto inferior esquerdo) desenvolve um comportamento crescente entre o início em $z = 0,6$ e $z = 0$ (curva azul). Este fato indica uma dominância da fase da energia escura a partir de um período relativamente recente da evo-

lução cosmológica do Universo. O campo escalar na Fig. 6.2 (canto inferior direito) evolui de acordo, aproximando-se de uma constante em $z = 0$ (curva azul e curva vermelha) que representa um Universo de Sitter [107].

Além disso, como podemos ver na Fig. 6.2 (canto superior esquerdo) $q(0) = -0.8$ ou -0.7 é consistente com observações de supernovas que revelam $q(0) = -0.1 \pm 0,4$.

Capítulo 7

Conclusões

No presente estudo obtivemos brana negra com espaço-tempo assintoticamente Lifshitz para o expoente crítico $z = 1/2$ na teoria de Horndeski. Do ponto de vista holográfico, a brana desempenha o papel do dual gravitacional de uma teoria de campos quânticos de contorno que descreve um certo fluido viscoso. A descrição holográfica tornou-se uma ferramenta importante para explorar teorias de campo fortemente acopladas, mais especificamente plasmas fortemente acoplados. Nesse sentido, a descrição holográfica da hidrodinâmica atraiu grande interesse na literatura por razões semelhantes às aquelas que atraíram um interesse especial na aplicação dessa correspondência, por exemplo, a sistemas supercondutores não convencionais, a razão de viscosidade/densidade de entropia é $\eta/s < 1/(4\pi)$, por exemplo, quando $-\alpha/(\gamma\Lambda) = 15, 40$ com $z = 1/2$. Em outras palavras, isso significa que o limite do KSS é violado [95] em nossa configuração no contexto da gravidade de Horndeski. Por outro lado, por exemplo, quando $-\alpha/(\gamma\Lambda) = 5, 10$ com $z = 1/2$, temos $\eta/s > 1/(4\pi)$. Nos dois casos, o sistema não desenvolve um fluido ideal, pois η aumenta ou diminui com a variação dos parâmetros, mas não desaparece. Esse fato caracteriza claramente um fluido viscoso com produção de entropia [82]. O caso

$\alpha = -\gamma\Lambda$ satura o limite, ou seja, $\eta/s = 1/(4\pi)$.

Finalmente, confirmamos as conclusões anteriores de que o limite KSS "universal" pode ser violado em uma ampla classe de teorias convencionais sem termos de derivada mais alta no Lagrangiano.

No presente estudo sobre mundo brana por meio do formalismo de primeira ordem na gravidade de Horndeski foi possível abordar o problema de localização da gravidade em soluções de mundo brana encontradas na gravidade de Horndeski. Encontramos soluções numéricas e soluções explícitas. O parâmetro que desvia tal teoria da gravidade em relação à gravidade de Einstein controla a localização da gravidade quadridimensional de uma maneira não trivial, como pode ser facilmente verificado diretamente na assimetria induzida nas branas. Curiosamente, para valores de γ suficientemente grandes, a gravidade quadridimensional é localizada com segurança na brana, como mostramos no limite suavizado da solução AdS_5 . Esse também é o regime em que é possível encontrar facilmente soluções explícitas para o mundo brana. Por outro lado, consideramos pequenos valores de γ para investigar soluções numéricas. Tais soluções são assimétricas e podem localizar gravidade apenas de forma metaestável.

No presente estudo, aproveitamos o formalismo de primeira ordem na cosmologia de Horndeski. Este formalismo aplica-se à gravidade de Horndeski, bem como às teorias de $f(R)$, $f(R, T)$. O que simplifica a solução do problema tanto da perspectiva analítica quanto da numérica. Além disso, o formalismo de primeira ordem desempenha um papel importante no fluxo da Relatividade Geral na cosmologia holográfica [66, 65].

Nossas soluções numéricas mostraram um bom acordo com a fase atual do Universo, onde o parâmetro Hubble como função do redshift tem um comportamento similar ao encontrado em [109]. Usando o formalismo de primeira ordem apoiado por um super-

potencial restrito a gravidade de Horndeski para o contexto FRW, mostramos, usando métodos numéricos, que a cosmologia tardia é bem descrita pelo campo escalar. As soluções correspondem a um Universo com aceleração para pequenos desvios para o vermelho, o que está de acordo com os dados observacionais atuais que são geralmente associados a um fenômeno conduzido por um fluido de energia escura. O campo escalar não-minimamente acoplado ao setor de gravidade produz soluções do tipo kink que rende um Universo de Sitter na cosmologia tardia, reproduzindo um cenário de energia escura na gravidade de Horndeski no formalismo de primeira ordem.

Referências Bibliográficas

- [1] PAPALLO, G. *Causality and the initial value problem in Modified Gravity*. 2018. Dissertation submitted for the degree of Doctor of Philosophy, University of Cambridge Trinity Hall, (2018).
- [2] EINSTEIN, A. *Die Feldgleichungen der Gravitation*. Sitzungsberichte der Königlich Preufischen Akad. der Wissenschaften, pp. 844-847 (1915).
- [3] EINSTEIN, A. *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*. Ann. Phys., v. 354, pp. 769-822 (1916).
- [4] DYSON, F. W.; EDDINGTON, A. S.; DAVIDSON, C. *A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Field, from Observations Made at the Total Eclipse of May 29, 1919*. Philos. Trans. R. Soc. A. Math. Phys. Eng. Sci., v. 220, pp. 291-333, (1920)
- [5] *The LIGO Collaboration and the VIRGO Collaboration, Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*. Phys. Rev. Lett., v. 116, p. 061102, (2016); [\[arXiv:hep-th/1602.03837\]](#).
- [6] PENROSE, R. *Gravitational collapse and space-time singularities*. Phys. Rev. Lett., v. 14, pp. 57-59, (1965).

- [7] HAWKING, S. W.; ELLIS, G. F. R. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge University Press. (1965)
- [8] RIESS, A. G.; FILIPPENKO, A. V.; CHALLIS, P.; CLOCCHIATTI, A.; DIERCKS, A.; GARNAVICH, P. M. et al. *Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant*. *Astron. J.*, v. 116, pp. 1009-1038, (1965); [[astro-ph/9805201](#)].
- [9] PERLMUTTER, S.; ALDERING, G.; GOLDHABER, G.; KNOP, R. A.; NUGENT, P.; CASTRO, P. G. et al. *Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae*. *Astron. J.*, v. 517, pp. 565-586, (1999); [[astro-ph/9812133](#)].
- [10] JORA, R. *A solution for the cosmological constant problem*. [arXiv:2001.09779](#) [[physics.gen-ph](#)].
- [11] LOVELOCK, D. *The Einstein Tensor and its Generalizations*. *J. Math. Phys.*, v. 12, pp. 498-501, (1971).
- [12] LOVELOCK, D. *The Four-Dimensionality of Space and the Einstein Tensor*. *J. Math. Phys.*, v. 13, pp. 874-876, (1972).
- [13] HEISENBERG, L. *A systematic approach to generalisations of General Relativity and their cosmological implications*. *Phys. Rept.*, v. 796, p. 1, (2019); [[arXiv:gr-qc/1807.01725](#)].
- [14] NICOLIS, A.; RATTAZZI, R.; TRINCHERINI, E. *The Galileon as a local modification of gravity*. *Phys. Rev. D.*, v. 79, p. 064036, (2009); [[arxiv:hep-th/0811.2197](#)].
- [15] BRITO, F. A.; SANTOS, F. F. *Braneworlds in Horndeski gravity*. pp. 14, (2018); [[arXiv:hep-th/1810.08196](#)].

- [16] BRITO, F. A.; SANTOS, F. F. *Black branes in asymptotically Lifshitz spacetime and viscosity/entropy ratios in Horndeski gravity*. pp. 19, (2019); [[arXiv:hep-th/1901.06770](#)].
- [17] SANTOS, F. F.; NEVES, R. M. P.; BRITO F. A. *Modeling dark sector in Horndeski gravity at first-order formalism*. Adv. High Energy Phys. v. 2019, p. 3486805, (2019); [[arXiv:hep-th/1906.11821](#)].
- [18] HORNDESKI, G. W. *Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space*. Int. J. Theor. Phys. v. 10, p. 363, (1974).
- [19] ANABALON, A.; CISTERNA, A.; OLIVA, J. *Asymptotically locally AdS and flat black holes in Horndeski theory*. Phys. Rev. D., v. 89, p. 084050, (2014); [[arXiv:gr-qc/1312.3597](#)].
- [20] CISTERNA, A.; ERICES, C. *Asymptotically locally AdS and flat black holes in the presence of an electric field in the Horndeski scenario*. Phys. Rev. D., v. 89, P. 084038, (2014); [[arXiv:gr-qc/1401.4479](#)].
- [21] STAROBINSKY, A. A.; SUSHKOV, S. V.; VOLKOV, M. S. *The screening Horndeski cosmologies*. JCAP., v. 1606, P. 007, (2016); [[arXiv:hep-th/1604.06085](#)].
- [22] CHARMOUSIS, C.; COPELAND, E. J.; PADILLA, A.; SAFFIN, P. M. *General second order scalar-tensor theory, self tuning, and the Fab Four*. Phys. Rev. Lett., v. 108, P. 051101, (2012); [[arXiv:hep-th/1106.2000](#)].
- [23] CHARMOUSIS, C.; COPELAND, E. J.; PADILLA, A.; SAFFIN, P. M. *Self-tuning and the derivation of a class of scalar-tensor theories*. Phys. Rev. D., v. 85, P. 104040, (2012); [[arXiv:hep-th/1112.4866](#)].

- [24] ACOLEYEN, K. V.; DOORSSELAERE, J. V. *Galileons from Lovelock actions*. Phys. Rev. D., v. 83, p. 084025, (2011); [[arXiv:gr-qc/1102.0487](#)].
- [25] DEFFAYET, C.; GAO, X.; SETTER, D. A.; ZAHARIADE, G. *From k-essence to generalised Galileons*. Phys. Rev. D., v. 84, p. 064039, (2011); [[arXiv:hep-th/1103.3260](#)].
- [26] GOMES, A. R.; AMENDOLA L. *The general form of the coupled Horndeski Lagrangian that allows cosmological scaling solutions*. JCAP., v. 1602, p. 035, (2016); [[arXiv:gr-qc/1511.01004](#)].
- [27] RINALDI, M. *Mimicking dark matter in Horndeski gravity*. Phys. Dark Univ., v. 16, p. 14, (2017); [[arXiv:gr-qc/1608.03839](#)].
- [28] GLEYZES, J.; LANGLIS, D.; PIAZZA, F.; VERNIZZI, F. *Essential Building Blocks of Dark Energy*. JCAP., v. 1308, p. 025 (2013); [[arXiv:hep-th/1304.4840](#)].
- [29] ZUMALACARREGUI, M.; BELLIDO, J. G. *Transforming gravity: from derivative couplings to matter to second-order scalar-tensor theories beyond the Horndeski Lagrangian*. Phys. Rev. D., v. 89, p. 064046, (2014); [[arXiv:gr-qc/1308.4685](#)].
- [30] CISTERNA, A.; HASSAINE, M.; OLIVA, J.; RINALDI M. *Axionic black branes in the k-essence sector of the Horndeski model*. Phys. Rev. D., v. 96, p. 124033, (2017); [[arXiv:hep-th/1708.07194](#)].
- [31] RINALDI, M. *Black holes with non-minimal derivative coupling*. Phys. Rev. D., v. 86, p. 084048, (2012); [[arXiv:gr-qc/1208.0103](#)].
- [32] BHATTACHAYA, S.; CHAKRABORTY, S. *Constraining some Horndeski gravity theories*. Phys. Rev. D., v. 95, p. 044037, (2017); [[arXiv:gr-qc/1607.03693](#)].

- [33] MUKHERJEE, S.; CHAKRABORTY S. *Horndeski theories confront the Gravity Probe B experiment*. Phys. Rev. D., v. 97, p. 124007, (2018); [[arXiv:grqc/1712.00562](#)].
- [34] TALLARITA, G. *Holographic Lifshitz Superconductors with an Axion Field*. Phys. Rev. D., v. 89, p. 106005, (2014); [[arXiv:hep-th/1402.4691](#)].
- [35] FENG, X. H.; LIU, H. S.; LU, H; POPE, C. N. *Black Hole Entropy and Viscosity Bound in Horndeski Gravity*. JHEP., v. 1511, p. 176, (2015); [[arXiv:hep-th/1509.07142](#)].
- [36] BERTOLDI, G.; BURRINGTON, B. A.; PEET, A. W. *Thermodynamics of black branes in asymptotically Lifshitz spacetimes*. Phys. Rev. D., v. 80, p. 126004, (2009); [[arXiv:hep-th/0907.4755](#)].
- [37] BERTOLDI, G.; BURRINGTON, B. A.; PEET, A. W. *Thermal behavior of charged dilatonic black branes in AdS and UV completions of Lifshitz-like geometries*. Phys. Rev. D., v. 82, p. 106013, (2010); [[arXiv:hep-th/1007.1464](#)].
- [38] BERTOLDI, G.; BURRINGTON, B. A.; PEET, A. W. *Black Holes in asymptotically Lifshitz spacetimes with arbitrary critical exponent*. Phys. Rev. D., v. 80, p. 126003, (2009); [[arXiv:hep-th/0905.3183](#)].
- [39] GAETE, M. B.; HASSAINE, M. *Lifshitz black holes with a time-dependent scalar field in a Horndeski theory*. Phys. Rev. D., v. 89, p. 104028, (2014); [[arXiv:hep-th/1312.7736](#)].
- [40] HOYOS, C.; KIM, B. S.; OZ, Y. *Bulk Viscosity in Holographic Lifshitz Hydrodynamics*. JHEP., v. 1403, p. 050, (2014); [[arXiv:hep-th/1312.6380](#)].

- [41] KACHRU, S.; LIU, X.; MULLIGAN, M. *Gravity duals of Lifshitz-like fixed points*. Phys. Rev. D., v. 78, p. 106005, (2008); [[arXiv:hep-th/0808.1725](#)].
- [42] JIANG, W. J.; LIU, H. S.; LU, H.; POPE, C. N. *DC Conductivities with Momentum Dissipation in Horndeski Theories*. JHEP., v. 1707, p. 084, (2017); [[arXiv:hep-th/1703.00922](#)].
- [43] BAGGIOLI, M.; LI, W. J. *Diffusivities bounds and chaos in holographic Horndeski theories*. JHEP., v. 1707, p. 055, (2017); [[arXiv:hep-th/1705.01766](#)].
- [44] LIU, H. S. *Violation of Thermal Conductivity Bound in Horndeski Theory*. Phys. Rev. D., v. 98, p. 061902, (2018); [[arXiv:hep-th/1804.06502](#)].
- [45] LI, Y. Z.; LU, H. *a-theorem for Horndeski gravity at the critical point*. Phys. Rev. D., v. 97, p. 126008, (2018); [[arXiv:hep-th/1803.08088](#)].
- [46] LI, Y. Z.; LU, H.; ZHANG, H. Y. *Scale Invariance vs. Conformal Invariance: Holographic Two-Point Functions in Horndeski Gravity*. Eur. Phys. J. C., v. 79, p. 592 (2019); [[arXiv:hep-th/1812.05123](#)].
- [47] MALDACENA, J. M. *The Large N limit of superconformal field theories and supergravity*. Int. J. Theor. Phys., v. 38, p. 1113, (1999); [Adv. Theor. Math. Phys., v. 2, p. 231 (1998)], 10.4310/ATMP. (1998), .v2.n2.a1, [[hep-th/9711200](#)].
- [48] GUBSER, S. S.; KLEBANOV, I. R.; POLYAKOV, A. M. *Gauge theory correlators from noncritical string theory*. Phys. Lett. B., v. 428, p. 105, (1998); [[hep-th/9802109](#)].
- [49] WITTEN, E. *Anti-de Sitter space and holography*. Adv. Theor. Math. Phys., v. 2, p. 253, (1998); [[hep-th/9802150](#)].

- [50] AHARONY, O.; GUBSER, S. S.; MALDACENA, J. M.; OOGURI, H.; OZ, Y. *Large N field theories, string theory and gravity*. Phys. Rept., v. 323, p. 183, (2000); [\[hep-th/9905111\]](#).
- [51] KOVTUN, P.; SON, D. T.; STARINETS, A. O. *Holography and hydrodynamics: Diffusion on stretched horizons*. JHEP., v. 0310, p. 064, (2003); [\[arxiv:hep-th/0309213\]](#).
- [52] KOVTUN, P.; SON, D. T.; STARINETS, A. O. *Viscosity in strongly interacting quantum field theories from black hole physics*. Phys. Rev. Lett., v. 94, p. 111601, (2005); [\[arxiv:hep-th/0405231\]](#).
- [53] SADEGHI, M. *Black Brane Solution in Rastall AdS Massive Gravity and Viscosity Bound*. Mod. Phys. Lett. A., v. 33, p. 1850220, (2018); [\[arXiv:hep-th/1809.08698\]](#).
- [54] POLICASTRO, G.; SON, D. T.; STARINETS, A. O. *The Shear viscosity of strongly coupled $N=4$ supersymmetric Yang-Mills plasma*. Phys. Rev. Lett., v. 87, p. 081601, (2001); [\[arxiv:hep-th/0104066\]](#).
- [55] POLICASTRO, G.; SON, D. T.; STARINETS, A. O. *From AdS/CFT correspondence to hydrodynamics*. JHEP., v. 0209, p. 043, (2002); [\[arxiv:hep-th/0205052\]](#).
- [56] KATS, Y.; PETROV, P. *Effect of curvature squared corrections in AdS on the viscosity of the dual gauge theory*. JHEP., v. 0901, p. 044, (2009); [\[arXiv:hep-th/0712.0743\]](#).
- [57] BRIGANTE, M.; LIU, H.; MYERS, R. C.; SHENKER, S.; YAJA, S. *Viscosity Bound Violation in Higher Derivative Gravity*. Phys. Rev. D., v. 77, p. 126006, (2008); [\[arXiv:hep-th/0712.0805\]](#).

- [58] FENG, X. H.; LIU, H. S.; LU, H.; POPE, C. N. *Thermodynamics of Charged Black Holes in Einstein-Horndeski-Maxwell Theory*. Phys. Rev. D., v. 93, p. 044030, (2016); [\[arXiv:hep-th/1512.02659\]](#).
- [59] RANDALL, L.; SUNDRUM, R. *An Alternative to Compactification*. Phys. Rev. Lett., v. 83, p. 4690, 1999; [\[arXiv:hep-th/9906064\]](#).
- [60] RANDALL, L.; SUNDRUM, R. *A Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension*. Phys. Rev. Lett., v. 83, p. 3370, (1999); [\[arXiv:hep-ph/9905221\]](#).
- [61] KARCH, A.; RANDALL, L. *Locally Localized Gravity*. JHEP, v. 8, n.5, p. 008, (2001); [\[arXiv:hep-th/0011156\]](#).
- [62] BAZEIA, D.; BRITO, F. A.; GOMES, A. R. *Locally localized gravity and geometric transitions*. JHEP, v. 4, n. 11, p. 070, (2004); [\[arXiv:hep-th/0411088\]](#).
- [63] CSAKI, C.; ERLICH, J.; HOLLOWOOD, T. J.; SHIRMAN, Y. *Universal aspects of gravity localized on thick branes*. Nucl. Phys. B, v. 581, p. 309-338, (2000); [\[arXiv:hep-th/0001033\]](#).
- [64] DEWOLFE, O.; FREEDMAN, D. Z.; GUBSER, S. S.; KARCH, A. *Modeling the fifth-dimension with scalars and gravity*. Phys. Rev. D., v. 62, p. 046008, (2000); [\[arxiv:hep-th/9909134\]](#).
- [65] KIRITSIS, E. *Asymptotic freedom, asymptotic flatness and cosmology*. JCAP v. 1311, p. 011, (2013); [\[arXiv:hep-th/1307.5873\]](#).
- [66] KIRITSIS, E. and TSOUROS, A. *de Sitter versus Anti de Sitter flows and the (super)gravity landscape*. [\[arXiv:hep-th/1901.04546\]](#).

- [67] BAZEIA, D.; BRITO, F. A.; LOSANO, L. *Scalar fields, bent branes, and RG flow*. JHEP., v. 0611, p. 064, (2006); [[arXiv:hep-th/0610233](#)].
- [68] PAPANTONOPOULOS, E. *From gravity to thermal gauge theories: The AdS/CFT correspondence*. Lect. Notes Phys. 828, 1 (2011).
- [69] NASTASE, H. *Introduction to the ADS/CFT Correspondence*.
- [70] HUBENY, V. E. *The AdS/CFT Correspondence*. Class. Quant. Grav., v. 32, p. 124010, (2015); [[arXiv:gr-qc/1501.00007](#)].
- [71] CHU, C. S. and GIATAGANAS D. *AdS/dS CFT Correspondence*. Phys. Rev. D., v. 94, p. 106013, (2016); [[arXiv:hep-th/1604.05452](#)].
- [72] ZWIEBACH, B. *A first course in string theory*. Cambridge, UK: Univ. Pr. (2009).
- [73] SON, D. T.; STARINETS, A. O. *Minkowski space correlators in AdS/CFT correspondence: Recipe and applications*. JHEP., v. 0209, p. 042, (2002); [[arXiv:hep-th/0205051](#)].
- [74] HARTNOLL, S. A.; RAMIREZ, D. M.; SANTOS, J. E. *Entropy production, viscosity bounds and bumpy black holes*. JHEP., v. 1603, p. 170, (2016); [[arXiv:hep-th/1601.02757](#)].
- [75] LUCAS, A. *Conductivity of a strange metal: from holography to memory functions*. JHEP., v. 1503, p. 071, (2015); [[arXiv:hep-th/1501.05656](#)].
- [76] JAIN, S.; SAMANTA, R.; TRIVEDI, S. P. *The Shear Viscosity in Anisotropic Phases*. JHEP., v. 1510, p. 028, (2015); [[arXiv:hep-th/1506.01899](#)].
- [77] ELING, C.; OZ, Y. *A Novel Formula for Bulk Viscosity from the Null Horizon Focusing Equation*. JHEP., v. 1106, v. 007, (2011); [[arXiv:hep-th/1103.1657](#)].

- [78] ELING, C.; OZ, Y. *Holographic Screens and Transport Coefficients in the Fluid/Gravity Correspondence*. Phys. Rev. Lett., v. 107, p. 201602, (2011); [\[arXiv:hep-th/1107.2134\]](#).
- [79] CHERN, S. S. *On the Curvatura Integra in a Riemannian Manifold*. Ann. Math., v. 46, pp. 11, (1945); [Ann. Math. 46 \(1945\) 674](#).
- [80] KASE, R.; TSUJIKAWA, S. *Cosmology in generalized Horndeski theories with second-order equations of motion*. Phys. Rev. D., v.90, p. 044073, (2014); [\[arXiv:hep-th/1407.0794\]](#).
- [81] BHATTACHARYYA, S.; HUBENY, V. E.; MINWALLA, S.; RANGAMANI, M. *Nonlinear Fluid Dynamics from Gravity*. JHEP., v. 0802, p. 045, (2008); [\[arXiv:hep-th/0712.2456\]](#).
- [82] RANGAMANI, M. *Gravity and Hydrodynamics: Lectures on the fluid-gravity correspondence*. Class. Quant. Grav., v. 26, p. 224003, (2009); [\[arXiv:hep-th/0905.4352\]](#).
- [83] AARTS, G. *Two complex problems on the lattice: Transport coefficients and finite chemical potential*. Nucl. Phys. A., v. 820, p. 57, (2009); [\[arXiv:hep-th/0811.1850\]](#).
- [84] LANDAU, L. and LIFSHITZ, E. *Lifshitz Fluid Mechanics: Course of Theoretical Physics*. Vol. 6, Butterworth-Heinemann, 1965.
- [85] HUI, L.; NICOLIS, A. *No-Hair Theorem for the Galileon*. Phys. Rev. Lett., v. 110, p. 241104, (2013); [\[arXiv:hep-th/1202.1296\]](#).
- [86] BABICHEV, E.; CHARMOUSIS, C. *Dressing a black hole with a time-dependent Galileon*. JHEP., v. 1408, p. 106, (2014); [\[arXiv:gr-qc/1312.3204\]](#).

- [87] MANSOORI, S. A. H.; JAHNKE, V.; QAEMMAQAMI, M. M.; OLIVAS, Y. D. *Holographic complexity of anisotropic black branes*. Phys. Rev. D., v. 100, p. 046014 (2018); [[arXiv:hep-th/1808.00067](#)].
- [88] LIU, H. S.; LU, H.; POPE, C. N. *Magnetically-Charged Black Branes and Viscosity/Entropy Ratios*. JHEP., v. 1612, p. 097, (2016); [[arXiv:hep-th/1602.07712](#)].
- [89] BAIER, R.; ROMATSCHKE, P.; SON, D. T.; STARINETS, A. O.; STEPHANOV, M. A. *Relativistic viscous hydrodynamics, conformal invariance, and holography*. JHEP., v. 0804, p. 100, (2008); [[arXiv:hep-th/0712.2451](#)].
- [90] MOZAFFAR, M. R. M.; MOLLABASHI, A. *Entanglement in Lifshitz-type Quantum Field Theories*. JHEP., v. 1707, p. 120, (2017); [[arXiv:hep-th/1705.00483](#)].
- [91] MOZAFFAR, M. R. M.; MOLLABASHI, A. *Logarithmic Negativity in Lifshitz Harmonic Models*. J. Stat. Mech., v. 1805, p. 053113, (2018); [[arXiv:hep-th/1712.03731](#)].
- [92] MOZAFFAR, M. R. M.; MOLLABASHI, A. *Entanglement Evolution in Lifshitz-type Scalar Theories*. JHEP., v. 1901, p. 137, (2019); [[arXiv:hep-th/1811.11470](#)].
- [93] PASSOS, E.; ABREU, E. M. C.; ANACLETO, M. A.; WOTZASEK, C.; ZARRO, C. A. D. *Lifshitz scaling to Lorentz-violating high derivative operator and gamma-ray bursts*. Phys. Rev. D., v. 93, p. 085022, (2016); [[arXiv:hep-th/1603.01558](#)].
- [94] ANACLETO, M. A.; BRITO, F. A.; MACIEL, E.; MOHAMMADI, A.; PASSOS, E.; SANTOS, W. O.; SANTOS, J. R. L. *Lorentz-violating dimension-five operator contribution to the black body radiation*. Phys. Lett. B., v. 785, p. 191, (2018); [[arXiv:hep-th/1806.08273](#)].

- [95] FOSTER, J. W.; LIU, J. T. *Spatial Anisotropy in Nonrelativistic Holography*. (2016); [\[arXiv:hep-th/1612.01557\]](#).
- [96] PANG, D. W. *Conductivity and Diffusion Constant in Lifshitz Backgrounds*. JHEP., v. 1001, p. 120, (2010); [\[arXiv:hep-th/0912.2403\]](#).
- [97] CHAKRABARTI, S. K.; CHAKRABORTTY, S.; JAIN, S. *Proof of universality of electrical conductivity at finite chemical potential*. JHEP., v. 1102, p. 073, (2011); [\[arXiv:hep-th/1011.3499\]](#).
- [98] SHURYAK, E. *Why does the quark gluon plasma at RHIC behave as a nearly ideal fluid?* Prog. Part. Nucl. Phys. v. 53, p. 273, (2004); [\[arxiv:hep-ph/0312227\]](#).
- [99] BAGGIOLI, M. *Gravity, holography and applications to condensed matter*. [arXiv:1610.02681 \[hep-th\]](#).
- [100] O'HARA, K. M.; HEMER, S. L.; GEHM, M. E.; GRANADE, S. R.; THOMAS J. E. *Observation of a Strongly Interacting Degenerate Fermi Gas of Atoms*. Science, v. 298, p. 2179 (2002); [\[cond-mat/0212463 \[cond-mat.supr-con\]\]](#).
- [101] BARDOUX, Y.; CALDARELLI, M. M.; CHARMOUSIS, C. *Shaping black holes with free fields*. JHEP., v. 1205, p. 054, (2012); [\[arXiv:hep-th/1202.4458\]](#).
- [102] ANDREEV, O.; ZAKHAROV, V. I. *Heavy-quark potentials and AdS/QCD*. Phys. Rev. D., v. 74, p. 025023 (2006); [\[arxiv:hep-ph/0604204\]](#).
- [103] FREEDMAN, D. Z.; GUBSER, S. S.; PILCH, K.; WARNER, N. P. *Renormalization group flows from holography supersymmetry and a c theorem*. Adv. Theor. Math. Phys., v. 3, p. 363, (1999); [\[arxiv:hep-th/9904017\]](#).

- [104] CARDOSO, G. L.; DALL'AGATA, G.; LUST, D. *Curved BPS domain walls and RG flow in five-dimensions*. JHEP., v. 0203, p. 044, (2002); [[arxiv:hep-th/0201270](#)].
- [105] KALLOSH, R. and LINDE A. D. *Supersymmetry and the brane world*. JHEP., v. 0002, p. 005, (2000); [[arxiv:hep-th/0001071](#)].
- [106] CVETIC, M. *Domain wall world(s)*. Int. J. Mod. Phys. A., v. 16, p. 891, (2001), [[arxiv:hep-th/0012105](#)].
- [107] HARKO, T.; LOBO, F. S. N.; SARIDAKIS, E. N., TSOUKALAS, M. *Cosmological models in modified gravity theories with extended nonminimal derivative couplings*. Phys. Rev. D., v. 95, p. 044019, (2017); [[arXiv:gr-qc/1609.01503](#)].
- [108] SKUGOREVA, M. A.; SUSHKOV, S. V.; TOPORENSKY, A. V. *Cosmology with nonminimal kinetic coupling and a power-law potential*. Phys. Rev. D., v. 88, p. 083539, (2013); [[arXiv:gr-qc/1306.5090](#)].
- [109] AGHANIM, N. et al. Planck 2018 results. VI. *Cosmological parameters*., [[arXiv:astro-ph.CO/1807.06209](#)].