

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Unicidade de Pontos Críticos e Aplicação a um Problema Elíptico Quasilinear

Angélica de Carvalho Costa Ponciano

JOÃO PESSOA – PB
JULHO DE 2020

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Unicidade de Pontos Críticos e Aplicação a um Problema Elíptico Quasilinear

por

Angélica de Carvalho Costa Ponciano

sob a orientação do

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo

João Pessoa – PB
Julho de 2020

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

P795u Ponciano, Angélica de Carvalho Costa.
Unicidade de Pontos Críticos e Aplicação a um Problema
Elíptico Quasilinear / Angélica de Carvalho Costa
Ponciano. - João Pessoa, 2020.
96 f.

Orientação: Uberlandio Batista Severo.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Pontos críticos - unicidade. 3.
Equações Diferenciais Parciais - EDP. I. Severo,
Uberlandio Batista. II. Título.

UFPB/BC

CDU 51(043)

Unicidade de Pontos Críticos e Aplicações a um Problema Elíptico Quasilinear

por

Angélica de Carvalho Costa Ponciano 

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

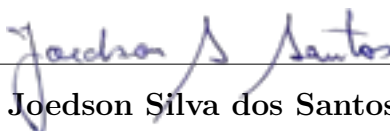
Área de Concentração: Análise

Aprovada em 31 de julho de 2020.

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Uberlândio Batista Severo – UFPB
(Orientador)



Prof. Dr. Joedson Silva dos Santos – UFPB
(Examinador Interno)



Prof. Dr. Augusto Cesar dos Reis Costa – UFPA
(Examinador Externo)



Prof. Dr. Disson Soares dos Prazeres – UFS
(Examinador Externo)

¹A autora foi bolsista da CAPES durante a elaboração desta dissertação.

A Deus, que graciosamente me capacitou e por meio do qual estive entre matemáticos talentosos que me auxiliaram nessa difícil jornada. E também me permitiu contar com grandes incentivadores, sobre os quais se destaca minha amada mãe.

Agradecimentos

Ao meu marido, Raoní Cabral Ponciano, que diariamente esteve ao meu lado; com incentivos incontáveis e graciosa ajuda que se fazia presente mesmo quando meu limitado cérebro insistia em não entender suas inúmeras tentativas de explicações dos problemas em questão. Também à sua tão querida família (que agora também é minha), pelos apoios prestados e palavras de incentivo que muitas vezes confortaram o meu coração. Especialmente aos meus queridos e amados sogros, tantas vezes solidários e donos de uma fé em minha capacidade que nem eu mesma tenho.

Aos meus pais, por estarem sempre ao meu lado, apesar da distância física tantas vezes indesejada. Especialmente a minha mãe, que incondicionalmente esteve verdadeiramente presente em minha caminhada acadêmica, mesmo agora com seus sutis e severos lembretes de que devo me dedicar ao máximo para concluir a dissertação. Além disso, por sua delicada forma de me fazer aprender mesmo com os erros que tenho cometido, como foi quando reprovei (pasmem!) em matemática na sétima série do Ensino Fundamental...atrasando um ano de minha formação, mas entendendo que tudo faz parte do misterioso plano de Deus.

Ao professor Doutor Uberlandio Batista Severo, que não faz jus ao sobrenome e se colocou a disposição de orientar alguém que não estava no patamar de seus admiravelmente inteligentes orientandos anteriores. Também por seu fiel compromisso em sanar minhas dúvidas e grande paciência nesse processo. Além disso (ainda que não podendo citar todos), agradeço aos professores que estiveram ministrando as disciplinas necessárias para que se tornasse possível a conclusão desse trabalho, sobre os quais se destaca minha admirável e amada professora Elisandra de Fátima Gloss de Moraes.

Aos amigos e colegas que estudaram comigo, pelos momentos inesquecíveis e noites de estudos antes das provas mais difíceis de nossa jornada acadêmica, mas que com eles pareciam ser coisas fáceis e simples de se enfrentar. Também aos amigos e colegas que não faziam parte do meio acadêmico e, mesmo assim, estiveram fazendo parte de minha vida e da torcida para a finalização desta etapa da minha jornada.

Por fim, e de grande importância, meu sincero agradecimento ao CAPES. Uma fundação que atua na expansão e consolidação da pós-graduação stricto sensu em todos os estados brasileiros e que esteve grandemente me apoiando, não só na finalização deste trabalho escrito mas também na conclusão de cada disciplina e etapa do curso.

Resumo

Neste trabalho, estudamos alguns resultados que garantem a unicidade de pontos críticos para um funcional Fréchet diferenciável definido num espaço normado e fazemos uma aplicação a um problema elíptico quasilinear que surge na Física. As principais ferramentas usadas na aplicação são métodos variacionais, a saber, argumentos de minimização, teoria de regularidade e Princípio de Máximo. Salientamos que os resultados abstratos que apresentamos podem ser aplicados em número maior de problemas advindos da Física Matemática.

Palavras-chave: Pontos críticos, Equações Diferenciais Parciais, Existência, Unicidade.

Abstract

In this work, we study some results that guarantee uniqueness of critical points for a differential Fréchet functional defined in a normed space and we do an application to a elliptic quasilinear problem that appears in physics. The main tools used in the application are variational methods, namely, minimization arguments, regularity theory and Maximum Principle. We accentuate that the abstract results we present can be applied to a greater number of problems arising from Mathematical Physics.

Keywords: Critical points, Partial Differential Equations, Existence, Uniqueness.

Sumário

Introdução	1
0 Preliminares	5
0.1 Definições e Resultados Preliminares	5
1 Resultados Abstratos	10
1.1 Resultados Principais	10
1.2 Resultados Auxiliares	19
2 Um Problema de Autovalor Não-linear da Física Matemática	41
2.1 Equação de Schrödinger Quasilinear	41
2.2 Resultados Básicos	45
2.3 Casos Ω Domínio Regular Limitado e $\Omega = \mathbb{R}^N$	54
A Resultados Complementares	80
Referências Bibliográficas	86

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- X' denota o dual topológico de um espaço de Banach X ;
- $K, C, c_0, c_1, c_2, \dots$ denotam constantes positivas, possivelmente diferentes;
- $\blacksquare$ denota o final de uma demonstração;
- $|\cdot|$ denota a norma euclidiana do $\mathbb{R}^N$;
- T.C.D.L. denotará o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue;
- L.I. denota Linearmente Independente;
- B_r denota a bola aberta de raio r , centrada na origem;
- $\partial\Omega$ denota a fronteira de Ω ;
- $\overline{\Omega}$ denota o fecho de Ω .

Introdução

Neste trabalho, com base no artigo [10], de autoria de Denis Bonheure, Juraj Földes, Ederson Moreira dos Santos, Alberto Saldaña e Hugo Tavares, estudamos questões relacionadas a unicidade de pontos críticos e uma aplicação numa Equação Diferencial Parcial.

Geralmente são utilizados argumentos diretos ou Método Minimax para se obter a existência de pontos críticos de um funcional. Mas a unicidade desses pontos é uma questão mais delicada, que depende tanto de propriedades locais quanto globais do funcional, bem como de onde o mesmo está definido. O teorema abaixo trata-se de um bom resultado utilizado para se obter a unicidade de pontos críticos no cálculo variacional.

Teorema 1.1 *Sejam X um espaço normado e $U \subseteq X$ convexo e aberto. Se $I: U \subseteq X \rightarrow \mathbb{R}$ é Fréchet diferenciável e estritamente convexo, então I possui no máximo um ponto crítico. Além disso, se I possui um ponto crítico então esse ponto crítico é de mínimo global.*

Para mais detalhes acerca desse resultado, veja [4, Teorema 1.5.9] e também que, como I é estritamente convexo, temos $I(x) > I(y) + I'(y)(x - y)$; donde segue o teorema, para todo $x, y \in U$ distintos. No entanto, geralmente, os problemas envolvem domínios não convexos e, mesmo quando eles o são, o funcional não será necessariamente estritamente convexo, já que esta é uma hipótese um tanto quanto forte.

Nosso trabalho está dividido em três capítulos e um apêndice.

No Capítulo 0, veremos definições essenciais para a compreensão dos conteúdos vistos ao longo do trabalho e também resultados cujas demonstrações foram omitidas mas estão todas indicadas.

No Capítulo 1, apresentaremos a demonstração do resultado principal, que está formulado em uma estrutura abstrata geral para permitir que o mesmo seja aplicado na resolução de diversos problemas. Seu enunciado é o seguinte:

Teorema 1.1 *Sejam $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado, $I: X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional Fréchet diferenciável e $A \subseteq X$ um subconjunto de pontos críticos de I . Se, para todo $u, v \in A$ existe um caminho $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ tal que*

a) $\gamma(0) = u, \gamma(1) = v$;

b) γ é localmente Lipschitziano em $t = 0$, isto é,

$$\|\gamma(t) - u\| \leq ct,$$

para todo $t \in [0, \delta]$ e algum $c, \delta > 0$;

c) $t \mapsto I(\gamma(t))$ é convexa em $[0, 1]$, então vale o seguinte:

i) I é constante em A ;

ii) $t \mapsto I(\gamma(t))$ é uma função constante;

iii) se a condição c) garante a convexidade estrita, para todo $u \neq v$, então A possui no máximo um elemento.

Note que o resultado acima não exige que o funcional seja convexo e nem estritamente convexo. Trata-se de um resultado que tem por hipótese a convexidade estrita de um funcional apenas em um caminho ligando dois pontos críticos, o que é algo muito mais fraco do que a convexidade de I . Isto sem contar que o funcional I pode ser convexo nestes caminhos sem estar necessariamente definido em conjunto convexo. Mas caso ele seja estritamente convexo, obteremos as condições a)-c) do Teorema 1.1 com a desigualdade estrita em c); e, caso seja apenas convexo, ainda conseguiremos as condições a)-c), onde consideramos em ambos os casos o caminho $\gamma(t) = (1 - t)u + tv$. Isso significa que temos em mãos um resultado mais geral, o que é muito bom. Mesmo quando estamos diante de problemas nos quais não podemos obter a unicidade, o Teorema 1.1 nos permite chegar a algumas conclusões. A exemplo disto, considere $u \in A$ um ponto de mínimo global de I . Então, $I(u) = \min_{x \in X} I(x)$. Daí, sendo $v \in A$ ponto crítico, por i), existe $k > 0$ constante tal que $I(v) = k$. Mas, também por i), $I(v) = k = I(u) = \min_{x \in X} I(x)$. Ou seja, quando A contém um mínimo global de I , todo ponto de A é de mínimo global.

Além disso, veremos que a estrutura vetorial de X não é essencial e que podemos substituí-la por uma estrutura diferencial, uma vez que é o mínimo a se pedir para se ter a noção de pontos críticos. Para isso, será demonstrado um resultado que segue do teorema anterior.

Corolário 1.1 *Sejam X, Y espaços de Banach, $I: X \rightarrow \mathbb{R}$ e $R: X \rightarrow Y$ Fréchet diferenciáveis. Supondo que zero é valor regular de R , considere $S := R^{-1}(0)$ e $A \subseteq S$ um subconjunto de pontos críticos de $I|_S$. Se, para todos $u, v \in A$ existe $\gamma: [0, 1] \rightarrow S$ satisfazendo as condições a)-c) do Teorema 1.1, então as implicações i)-iii) do Teorema 1.1 valem para I substituído por $I|_S$.*

O artigo que estudamos não é o primeiro a usar este tipo de ideia para provar a unicidade através de hipóteses de convexidade generalizada. Encontra-se em [5] o resultado mais próximo do que fora trabalhado pelos autores do artigo. Muitos outros trabalhos aplicam a ideia de [5] em diferentes estruturas (por exemplo, [7, 8]), mas nestes não podem ser encontrados resultados gerais como o Teorema 1.1 e o Corolário 1.1.

Veremos também as demonstrações de resultados abstratos que são utilizados ao longo do Capítulo 2 e o Lema 1.5 que traz uma importante consequência que é exigida em muitas aplicações. Ao tratar equações elípticas envolvendo o operador p -Laplaciano, [5] trabalha com a desigualdade

$$\|\nabla\gamma(t)\|_{L^p}^p \leq (1-t)\|\nabla u\|_{L^p}^p + t\|\nabla v\|_{L^p}^p, \quad \text{para } u, v > 0;$$

onde $\gamma(t) := ((1-t)u^p(x) + tv^p(x))^{\frac{1}{p}}$. O Lema 1.5 tem como consequência esta desigualdade. Com o intuito de mostrar a unicidade de soluções positivas para equações elípticas na Física Matemática, muitos autores usaram este caminho γ .

Já no Capítulo 2, mostraremos uma aplicação a um problema de autovalor não linear, bem como resultados essenciais para a aplicação estudada. Os resultados principais se aplicam a muitos problemas como, por exemplo, sistemas de equações envolvendo p -Laplaciano e de equações do tipo curvatura média. Mas em nosso trabalho, abordamos apenas uma aplicação a um problema de autovalor para uma equação quasilinear, que veremos ter solução única quando consideramos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio regular limitado ou $\Omega = \mathbb{R}^N$. Trata-se de um problema envolvendo a equação de Schrödinger quasilinear

$$-\Delta u - u\Delta(u^2) + V(x)u + u^3 = \omega u, \tag{1}$$

onde $V(x)$ é uma função potencial adequada e $\omega \in \mathbb{R}$ é fixado ou, quando a norma L^2 for fixada, ω aparece como um multiplicador de Lagrange. Ao considerarmos um domínio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, procuramos soluções clássicas $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega; \end{cases}$$

com $f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo certas hipóteses. Para isto, procuramos soluções fracas deste problema, que significa buscar pontos críticos do funcional $I: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} F(x, u) dx,$$

onde $F(x, s) = \int_0^s f(x, t)dt$. Na mecânica dos fluidos, por exemplo, há um problema mais geral do qual (1) é um caso particular, que surge quando se olha para as ondas estacionárias de uma equação do tipo Schrödinger. Esta teoria encontra-se bem explicada em [14, 25], onde são mostrados outros problemas físicos dos quais a equação de Schrödinger quasilinear é um caso particular. O Teorema 1.1 e o Corolário 1.1 podem ser aplicados em vários problemas de Equações Diferenciais Parciais com estrutura variacional, nas quais a hipótese *a)* é facilmente demonstrada. O principal desafio encontra-se na construção de caminhos γ satisfazendo *b)* e *c)*. Para aplicar o Teorema 1.1, é necessário que tenhamos a continuidade de γ que, por sua vez, pode ser garantida quando obtivermos comparações para as soluções fracas positivas de (1). Em se tratando de $\Omega = \mathbb{R}^N$, encontrar tais comparações é a principal dificuldade na aplicação do resultado principal. Veremos a estimativa de decaimento

$$u(x) \sim |x|^{\frac{\omega-N}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{2}} \text{ quando } |x| \rightarrow \infty,$$

demonstrada para problemas transformados com a parte principal simplificada, que é suficiente para obtermos a comparação desejada.

Finalmente, no Apêndice, encontram-se afirmações e observações extras que foram verificadas e são importantes para a conclusão das demonstrações feitas nos capítulos anteriores e para a compreensão de fatos interessantes ao conteúdo desenvolvido.

Capítulo 0

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos definições básicas para o desenvolvimento do trabalho, bem como resultados essenciais durante demonstrações e cujas provas, apesar de terem sido omitidas, estão todas indicadas.

0.1 Definições e Resultados Preliminares

Para tornar a leitura deste trabalho mais compreensível, disponibilizamos aqui algumas definições e resultados a serem utilizados na demonstração de teoremas, lemas, afirmações e observações. Ressaltamos que a medida trabalhada é a medida de Lebesgue.

Definição 0.1. Chamamos de $L^p(\Omega)$ o conjunto das funções $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ mensuráveis à Lebesgue tais que

$$\left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

onde $p \in [1, \infty)$. E $L^\infty(\Omega)$ denota o conjunto das funções limitadas, a menos de um conjunto de medida nula.

Definição 0.2. O espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ representa o conjunto das funções de $L^p(\Omega)$ cujas derivadas fracas estão em $L^p(\Omega)$.

Definição 0.3. O fecho em $W^{1,p}(\Omega)$ do conjunto das funções suaves de suporte compacto em Ω é representado por $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Definição 0.4. $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$.

Definição 0.5. O fecho em $H^1(\Omega)$ do conjunto das funções suaves de suporte compacto em Ω é representado por $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.

Definição 0.6. Chamamos de C^n as funções tais que suas derivadas parciais d ordem n existem e são contínuas.

Definição 0.7. Chamamos de $C^{n,\gamma}$ as funções C^n que são Hölder contínuas.

Definição 0.8. O conjunto dos operadores ortogonais $O(N)$ é o conjunto das transformações lineares $g: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ tais que $g \circ g^T = Id$.

Definição 0.9. Dizemos que $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é radial se existir, para algum $a \in (0, \infty]$, uma função $v: [0, a) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $u(x) = v(|x|)$.

Definição 0.10. Dizemos que uma determinada propriedade vale em quase toda parte (q.t.p.) se o subconjunto N de X , onde não vale a propriedade, possui medida nula, isto é, $\mu(N) = 0$ e a propriedade vale sobre o complementar de N .

Definição 0.11. Uma função real mensurável definida em X é integrável se suas partes positiva e negativa possuem integrais finitas com respeito a medida μ .

Teorema 0.1 (Theorem 4.2 em [11]). (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) Sejam Ω um espaço de medida e (f_n) uma sequência de funções integráveis que satisfaz

- (a) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ q.t.p. em Ω ;
- (b) existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ tal que, para todo n , $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p. em Ω .

Então, $f \in L^1(\Omega)$ e $\|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0$.

Teorema 0.2 (Lemma 4.1 em [11]). (Lema de Fatou) Sejam Ω um espaço de medida (f_n) uma sequência de funções em L^1 que satisfaz

- (a) para todo n , $f_n \geq 0$ q.t.p. em Ω
- (b) $\sup_n \int_{\Omega} f_n < \infty$.

Para quase todo $x \in \Omega$, definimos $f(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \leq +\infty$. Então, $f \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_{\Omega} f \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n.$$

Teorema 0.3 (Theorem 4.6 em [11]). (Desigualdade de Hölder). Seja Ω um espaço de medida. Suponha $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq p, q \leq \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então, $fg \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_{\Omega} |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Teorema 0.4 (Teorema na página 123 de [19]). *(Teorema do Valor Médio). Seja $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^N$. Suponhamos que o segmento de reta que liga a a $a + v$ esteja contido em U , que a restrição de f a esse segmento seja contínua e que exista a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$, segundo v , em todo ponto x do segmento. Então existe $\theta \in (0, 1)$ tal que*

$$f(a + v) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial v}(a + \theta v).$$

Proposição 0.1 (Proposição 3.5 em [11]). *Seja (x_n) uma sequência que converge fraco para um $x_0 \in E$. Então (x_n) é limitada e $\|x_0\| \leq \liminf \|x_n\|$.*

Teorema 0.5 (Theorem 3.18 em [11]). *Sejam E um espaço reflexivo e (x_n) uma sequência limitada. Então existe uma subsequência (x_{n_k}) que converge fraco para algum $x \in E$.*

Teorema 0.6 (Theorem 3 na página 628 em [16]). *(Identidade de Green). Seja $u, v \in C^2(\bar{U})$, onde $U \subset \mathbb{R}^N$ aberto limitado suave. Então*

$$\int_U u \Delta u dx + \int_U \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\partial U} \frac{\partial v}{\partial \nu} u dS,$$

onde ν é a normal exterior de U .

Definição 0.12. *Seja $T: D \subset X \rightarrow Y$ uma função continuamente Fréchet diferenciável com D aberto e X, Y espaços de Banach. Dizemos que $x_0 \in D$ é ponto regular se $T'(x_0): X \rightarrow Y$ é sobrejetora. Além disso, dizemos que $\theta \in Y$ é valor regular de T se todo $x \in T^{-1}(\theta)$ é ponto regular de T .*

Teorema 0.7 (Theorem 1 de §9.3 em [22]). *(Teorema dos multiplicadores de Lagrange). Sejam $f: D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: X \rightarrow Y$ funções continuamente Fréchet diferenciáveis com X, Y espaços de Banach e D aberto de X . Suponha $\theta \in Y$ valor regular de g . Se existe $x_0 \in D$ com $f(x_0) = \inf_{x \in g^{-1}(\theta)} f(x)$ ou $f(x_0) = \sup_{x \in g^{-1}(\theta)} f(x)$, então existe $\lambda \in Y'$ tal que $f'(x_0) = \lambda \circ g'(x_0)$.*

Teorema 0.8 (Theorem 6 de §5.6.3 em [16]). *Seja U um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira C^1 . Seja $u \in W^{k,p}(U)$.*

(i) *Se $n > kp$, então $u \in L^q(U)$, onde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$. Além disso,*

$$\|u\|_{L^q(U)} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(U)},$$

onde $C > 0$ é uma constante dependendo apenas de k, p, n e U .

(ii) Se $n < kp$, então $u \in C^{k-\lceil \frac{n}{p} \rceil - 1, \gamma}(\overline{U})$, onde

$$\gamma = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + 1 - \frac{n}{p}, & \text{se } \frac{n}{p} \text{ não é inteiro;} \\ \text{qualquer número positivo } < 1, & \text{se } \frac{n}{p} \text{ é um inteiro.} \end{cases}$$

Além disso,

$$\|u\|_{C^{k-\lceil \frac{n}{p} \rceil - 1, \gamma}(\overline{U})} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(U)},$$

onde $C > 0$ é uma constante dependendo apenas de k, p, n, γ e U .

Teorema 0.9 (Theorem 1 de §5.7 em [16]). (Teorema de Compacidade de Rellich-Kondrachov) Seja U aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ com ∂U sendo C^1 . Suponha $1 \leq p < n$. Então para cada $1 \leq q < p^*$ (onde $p^* = \frac{pn}{n-p}$) tem-se

$$W^{1,p}(U) \subset\subset L^q(U).$$

Ou seja, $W^{1,p}(U) \subset L^q(U)$, a função inclusão é contínua e toda sequência em $W^{1,p}(U)$ limitada possui uma subsequência convergente em $L^q(U)$.

Definição 0.13. Seja $L: C^2(U) \rightarrow C(U)$ um operador dado por

$$L(u) = - \sum_{i,j=1}^N a^{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^N b^i u_{x_i} + cu,$$

onde os coeficientes a^{ij}, b^i, c são contínuos. Dizemos que L é elíptico se existe $\Lambda > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \Lambda |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Lema 0.1 (Lemma na página 330 em [16]). (Lema de Hopf). Seja L um operador elíptico. Suponha $u \in C^2(U) \cap C^1(\overline{U})$ e $c \geq 0$ em U , onde U é domínio suave e limitado de $\mathbb{R}^N$. Se $L(u) \geq 0$ e existe $x_0 \in \partial U$ tal que $u(x_0) \leq 0$ e $u(x_0) < u(x)$ para todo $x \in U$, então

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0,$$

onde ν é a normal exterior de U .

Teorema 0.10 (Theorem 4 na página 333 em [16]). (Princípio do Máximo Forte). Seja L um operador elíptico com $c \geq 0$ em U , onde U é aberto conexo. Suponha $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$.

(i) Se $L(u) \leq 0$ em U e u atinge máximo não negativo no interior de U , então u é constante;

(ii) Se $L(u) \geq 0$ em U e u atinge mínimo não positivo no interior de U , então u é constante.

Teorema 0.11 (Theorem 9.15 em [17]). *Sejam Ω um domínio em $\mathbb{R}^n$ e L um operador estritamente elíptico com coeficientes $a^{ij} \in C^0(\overline{\Omega})$, $b^i, c \in L^\infty(\Omega)$ com $i, j = 1, \dots, n$ e $c \leq 0$. Então, se $f \in L^p(\Omega)$ e $\varphi \in W^{2,p}(\Omega)$ com $1 < p < \infty$, o problema de Dirichlet $Lu = f$ em Ω , $u - \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tem única solução $u \in W^{2,p}(\Omega)$.*

Teorema 0.12 (Theorem 6.13 em [17]). *Sejam $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e L um operador estritamente elíptico num domínio limitado Ω com $c \leq 0$. Suponha f e os coeficientes de L em $L^\infty(\Omega) \cap C^{0,\alpha}(\Omega)$. Também suponha Ω satisfazendo a condição da bola exterior em cada ponto da fronteira. Então, se φ é contínua em $\partial\Omega$, o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} Lu = f, & \text{em } \Omega; \\ u = \varphi, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

possui única solução $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^{2,\alpha}(\Omega)$.

Teorema 0.13 (Théorème 3.3 e Proposition 3.8 em [18]). *Seja $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ positiva. Então existe $u^* \in H^1(\mathbb{R}^n)$ radial tal que*

$$\|u^*\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \text{ e } \|\nabla u^*\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Capítulo 1

Resultados Abstratos

Neste capítulo, veremos a demonstração do principal resultado a ser utilizado ao longo do trabalho, bem como uma consequência dele e resultados similares que exigem hipóteses mais fracas. Este resultado garante, sob certas circunstâncias, a unicidade de pontos críticos e, portanto, de soluções do problema a ser estudado no Capítulo 2.

1.1 Resultados Principais

Teorema 1.1. *Sejam $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado, $I: X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional Fréchet diferenciável e $A \subseteq X$ um subconjunto de pontos críticos de I . Se, para todo $u, v \in A$ existe um caminho $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ tal que*

a) $\gamma(0) = u, \gamma(1) = v;$

b) γ é localmente Lipschitziano em $t = 0$, isto é,

$$\|\gamma(t) - u\| \leq ct,$$

para todo $t \in [0, \delta]$ e algum $c, \delta > 0;$

c) $t \mapsto I(\gamma(t))$ é convexa em $[0, 1]$, então

i) I é constante em $A;$

ii) $t \mapsto I(\gamma(t))$ é uma função constante;

iii) se a condição c) garante a convexidade estrita, para todo $u \neq v$, então A possui no máximo um elemento.

Demonstração. Para demonstrarmos i), suponha que existem $u, v \in A$ tais que

$$I(v) < I(u)$$

e defina $N := I(v) - I(u) < 0$. Por hipótese, existe um caminho $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\gamma(0) = u$ e $\gamma(1) = v$. Além disso, dado $t \in (0, 1)$, obtemos do item *c*) que

$$\begin{aligned} I(\gamma(t)) &= I(\gamma((1-t) \cdot 0 + t \cdot 1)) \\ &\leq (1-t)I(\gamma(0)) + tI(\gamma(1)) \\ &= (1-t)I(u) + tI(v), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} I(\gamma(t)) - I(u) &\leq t(I(v) - I(u)) \\ &= tN, \quad \forall t \in (0, 1). \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{I(\gamma(t)) - I(u)}{t} \leq N < 0, \quad \forall t \in (0, 1). \quad (1.1)$$

Perceba que $\gamma(t) \neq u$, pois caso contrário $N \geq 0$, absurdo. Por outro lado, a condição *b*) implica que existem $\delta, c > 0$ tais que

$$\|\gamma(t) - u\| \leq ct, \quad \forall t \in [0, \delta]. \quad (1.2)$$

Como I é Fréchet diferenciável e u é ponto crítico de I , por (1.2) e (1.1) obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|I(\gamma(t)) - I(u) - I'(u)(\gamma(t) - u)|}{\|\gamma(t) - u\|} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|I(\gamma(t)) - I(u)|}{\|\gamma(t) - u\|} \\ &\geq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|I(\gamma(t)) - I(u)|}{tc} \\ &\geq \frac{|N|}{c} \\ &> 0, \end{aligned}$$

o que é um absurdo. Portanto, I é constante em A . Para provarmos *ii*), defina

$$\begin{aligned} f &:= I \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto I(\gamma(t)). \end{aligned}$$

Dado $t \in (0, 1)$ tal que $\gamma(t) \neq \gamma(0)$, já que u é ponto crítico de I , temos

$$\begin{aligned}\frac{|f(t) - f(0)|}{t} &= \frac{|I(\gamma(t)) - I(u) - I'(u)(\gamma(t) - \gamma(0))|}{t} \\ &= \frac{|I(\gamma(t)) - I(u) - I'(u)(\gamma(t) - \gamma(0))|}{\|\gamma(t) - u\|} \cdot \frac{\|\gamma(t) - u\|}{t}.\end{aligned}$$

Daí, como I é Fréchet diferenciável, usamos (1.2) para obtermos

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|f(t) - f(0)|}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|I(\gamma(t)) - I(u) - I'(u)(\gamma(t) - \gamma(0))|}{\|\gamma(t) - u\|} \cdot \frac{\|\gamma(t) - u\|}{t} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Assim, $f'(0) = 0$. Logo, $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que $f'(0) = 0$ e

$$f(0) = I(\gamma(0)) = I(u) = I(v) = I(\gamma(1)) = f(1),$$

pois vimos anteriormente que I é constante em A . Além disso, pelo item c), f é convexa em $[0, 1]$ e, assim, dados $t \in (0, 1)$ e $h \in (0, 1 - t)$, o que nos dá $0 < t + h < 1$, segue que

$$\begin{aligned}f(h) &= f\left(h \cdot \frac{t+h}{t+h} + \frac{t}{t+h} \cdot 0\right) \\ &\leq \frac{h}{t+h} \cdot f(t+h) + \frac{t}{t+h} f(0) \\ &= \frac{1}{t+h} [hf(t+h) + tf(0)].\end{aligned}$$

Daí,

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} \leq \frac{f(t+h) - f(h)}{t}.$$

Fazendo o limite $h \rightarrow 0^+$, obtemos

$$0 = f'(0) \leq \frac{f(t) - f(0)}{t}.$$

Com isso,

$$\begin{aligned}f(0) &\leq f(t) \\ &= f((1-t) \cdot 0 + t \cdot 1) \\ &\leq (1-t)f(0) + tf(1) \\ &= (1-t)f(0) + tf(0) \\ &= f(0), \quad \forall t \in (0, 1).\end{aligned}$$

Portanto, f é constante em $[0, 1]$. Finalmente, vejamos que vale o item *iii*). Para isso, suponha que existem $u, v \in A$, com $u \neq v$. Por hipótese, existe $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\gamma(0) = u$ e $\gamma(1) = v$. Se o item *c*) garantisse convexidade estrita, teríamos pelo que foi mostrado em *ii*) que

$$\begin{aligned} k &= (I \circ \gamma)((1-t) \cdot 0 + t \cdot 1) \\ &< (1-t)(I \circ \gamma)(0) + t(I \circ \gamma)(1) \\ &= (1-t) \cdot k + tk \\ &= k, \quad \forall t \in (0, 1), \end{aligned}$$

o que é um absurdo. Portanto, A possui no máximo um elemento. ■

Corolário 1.1. *Sejam X, Y espaços de Banach, $I: X \rightarrow \mathbb{R}$ e $R: X \rightarrow Y$ Fréchet diferenciáveis. Supondo que zero é valor regular de R , considere $S := R^{-1}(0)$ e $A \subseteq S$ um subconjunto de pontos críticos de $I|_S$. Se, para todos $u, v \in A$ existe $\gamma: [0, 1] \rightarrow S$ satisfazendo as condições a)-c) do Teorema 1.1, então as condições i)-iii) do Teorema 1.1 valem para I substituído por $I|_S$.*

Demonstração. Temos que u é ponto crítico de $I|_S$ e, assim, pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange 0.7, obtemos que existe $\lambda \in Y'$ (λ é linear e contínua) tal que

$$\begin{aligned} I'(u) &= \lambda \circ R'(u) \Rightarrow I'(u) - \lambda \circ R'(u) = 0 \\ J'(u) &= I'(u) - \lambda'(R(u)) \circ R'(u) = 0. \end{aligned}$$

O que implica que u é ponto crítico do funcional $J: X \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $J = I - \lambda \circ R$. Além disso, dado $t \in [0, 1]$,

$$(J \circ \gamma)(t) = I(\gamma(t)) - (\lambda \circ R)(\gamma(t)).$$

Como $\gamma(t) \in S$ para todo $t \in [0, 1]$, obtemos

$$\begin{aligned} (J \circ \gamma)(t) &= I(\gamma(t)) - \lambda(0) \\ &= I(\gamma(t)), \quad \forall t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que $J \circ \gamma = I \circ \gamma$. Assim, $t \mapsto J(\gamma(t))$ é convexa em $t \in [0, 1]$. Daí, podemos aplicar o Teorema 1.1 para o funcional Fréchet diferenciável J , pois todas as hipóteses são satisfeitas. Logo, i)-iii) valem para J . Mas, sabemos que $J|_S = I|_S$. Daí,

como J é constante em S , por $i)$, temos que $I|_S$ é constante. E também

$$I|_S(\gamma(t)) = J|_S(\gamma(t)) = J(\gamma(t)),$$

que é constante para todo $t \in [0, 1]$, isto é, $t \mapsto I|_S(\gamma(t))$ é constante. Por fim, se a condição $c)$ garante convexidade estrita para $I|_S$, então $J|_S = I|_S$ também é estritamente convexa em $[0, 1]$. Daí, por $iii)$, temos que A possui no máximo um elemento. Portanto, as condições $i)-iii)$ valem para I substituído por $I|_S$. ■

Agora, apresentaremos um resultado similar ao Teorema 1.1, onde consideramos A um subconjunto de X que contém apenas um mínimo local de I . Este resultado não é equivalente ao Teorema 1.1, pois o Teorema 1.1 não implica no mesmo por não obtermos γ contínua e o resultado a seguir não implica o Teorema 1.1 por não garantirmos o item $c)$. No entanto, pedimos uma desigualdade e não a convexidade de $t \rightarrow I(\gamma(t))$, isto é, enfraquecemos nossas hipóteses. Além disso, apresentamos um resultado correspondente ao do Corolário 1.1, dentro dessa estrutura mais fraca.

Teorema 1.2. *Sejam X um espaço normado, $I: X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional Fréchet diferenciável e $A \subseteq X$ um subconjunto não vazio de pontos críticos de I . Suponha que, dados $u, v \in A$, com $u \neq v$, existe $\gamma \in C([0, 1], X)$ tal que*

$$a) \quad \gamma(0) = u, \gamma(1) = v;$$

$$b) \quad \gamma \text{ é localmente Lipschitziana em } t=0, \text{ isto é,}$$

$$\|\gamma(t) - u\| \leq ct, \quad \forall t \in (0, \delta)$$

$$\text{e algum } c, \delta > 0;$$

$$c) \quad I(\gamma(t)) \leq (1-t)I(u) + tI(v), \text{ para todo } t \in (0, 1).$$

Então,

$$i) \quad I \text{ é constante em } A;$$

$$ii) \quad \text{se } A \text{ contém um mínimo local } u_0 \text{ de } I \text{ e a condição } c) \text{ garante convexidade estrita, então } A = \{u_0\}.$$

Demonstração. Para mostrar $i)$, basta seguirmos como na demonstração do Teorema 1.1, pois usamos o item $a)$ (que equivale ao do Teorema 1.1), o item $c)$ para os pontos 0 e 1 (equivalente ao nosso item $c)$) e os fatos de que I é Fréchet diferenciável e u é ponto crítico de I . Para mostrar $ii)$, suponha que existe $u \in A$, com $u \neq u_0$. Sabemos

que u_0 é ponto crítico, pois é mínimo local. Daí, pelo que foi mostrado em *i*), já que $u, u_0 \in A$, temos

$$\begin{aligned} I(\gamma(t)) &< (1-t)I(u_0) + tI(u) \\ &= (1-t)I(u_0) + tI(u_0) \\ &= I(u_0), \quad \forall t \in (0, 1), \end{aligned}$$

ou seja,

$$I(\gamma(t)) < I(u_0), \quad \forall t \in (0, 1). \quad (1.3)$$

Por outro lado, como u_0 é ponto de mínimo local de I , existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$I(u_0) \leq I(z), \quad \forall z \in B(u_0, \varepsilon). \quad (1.4)$$

Além disso, temos que $\gamma \in C([0, 1], X)$ e, assim, para este ε , existe $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |t| < \delta &\Rightarrow \|\gamma(t) - \gamma(0)\| < \varepsilon \\ &\Rightarrow \|\gamma(t) - u_0\| < \varepsilon \\ &\Rightarrow \gamma(t) \in B(u_0, \varepsilon). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Logo, (1.3), (1.4) e (1.5) nos fornece

$$I(\gamma(t)) < I(u_0) \leq I(\gamma(t)), \quad \forall t \in (0, \delta),$$

o que é um absurdo. Portanto, $A = \{u_0\}$. ■

Corolário 1.2. *Sejam X, Y espaços de Banach, $I: X \rightarrow \mathbb{R}$ e $R: X \rightarrow Y$ Fréchet diferenciáveis. Supondo que zero é valor regular de R , considere $S := R^{-1}(0)$ e $A \subseteq S$ um subconjunto de pontos críticos de $I|_S$. Se, para todos $u, v \in A$, existe $\gamma: [0, 1] \rightarrow S$ satisfazendo as condições a)-c) do Teorema 1.2, então as condições i)-iii) do Teorema 1.2 valem para I substituído por $I|_S$.*

Demonstração. Seguindo como na demonstração do Corolário 1.1, obtemos nossas condições a)-c), o Corolário 1.2 valerá para J e $I \circ \gamma = J \circ \gamma$. Logo, obteremos que as condições i)-iii) valem para $I|_S$, pelo mesmo argumento feito em tal demonstração. ■

Observação 1.1. *Enfatizamos que, no Teorema 1.2 a existência de um mínimo local é essencial a fim de provarmos que A é unitário. De fato, seja $B_1 \subset \mathbb{R}^N$, com $N \geq 1$,*

a bola unitária aberta centrada na origem e considere o problema de Hénon

$$\begin{cases} -\Delta u = |x|^\alpha |u|^{q-2}u, & \text{em } B_1 \\ u = 0, & \text{em } \partial B_1, \end{cases} \quad (1.6)$$

em que $\alpha > 0$, $2 < q$ se $N \in \{1, 2\}$ e $2 < q < \frac{2N}{N-2}$ se $N \geq 3$. Dizemos que $u \in H_0^1(B)$ é solução fraca de (1.6) se

$$\int_{B_1} \nabla u \nabla v dx = \int_{B_1} |x|^\alpha |u|^{q-2} u v dx, \quad \forall v \in H_0^1(B_1).$$

A função $u \in C^2(\overline{B_1})$ é solução clássica de (1.6) se satisfaz (1.6) pontualmente. Veja na Afirmação A.1 a seguir que $u \in H_0^1(B_1)$ ser solução clássica implica que u é ponto crítico do funcional $I_\alpha: H_0^1(B_1) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$I_\alpha(u) = \frac{1}{2} \int_B |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{q} \int_B |x|^\alpha |u|^q dx.$$

Dizemos que $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é radial se existir, para algum $a \in (0, \infty]$, uma função $v: [0, a) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $u(x) = v(|x|)$. Além disso, dizemos que $u \in H_0^1(B_1)$ é uma solução de energia mínima (Least Energy Solution, L. E. S.) de (1.6) se $I'_\alpha(u) = 0$ e $I_\alpha(u) = \min_{v \in S} I_\alpha(v)$, onde $S = \{v \in H_0^1(B_1) \setminus \{0\}; I'_\alpha(v) = 0\}$. Para $\alpha > 0$ suficientemente grande, as soluções energia mínima de (1.6) não são radialmente simétricas (veja [27, 12]). Fixemos um tal $\alpha > 0$ e definamos

$$A = \{u: u \text{ é L. E. S. de (1.6)}\}.$$

Além disso, consideremos a Variedade de Nehari associada ao funcional I_α , a saber

$$\mathcal{N}_\alpha = \{u \in H_0^1(B) - \{0\}: I'_\alpha(u) \cdot u = 0\}$$

e seja

$$c_\alpha := \inf_{v \in \mathcal{N}_\alpha} I_\alpha(v).$$

Sabemos conforme o livro de Willem [29] (pg. 74 e 75), que c_α é o nível de energia mínima e que uma função $v \in H_0^1(B_1) \setminus \{0\}$ tal que $I_\alpha(v) = c_\alpha$ é uma solução de energia mínima. Em suma, $u \in H_0^1(B_1)$ é uma solução de energia mínima de (1.6) se, e somente se, $u \in \mathcal{N}_\alpha$ e $I_\alpha(u) = c_\alpha$. Portanto, temos que

$$I_\alpha(v) = c_\alpha, \text{ para todo } v \in A.$$

Agora, dados $u, v \in A$ (com $u \neq v$), considere o caminho $\gamma: [0, 1] \rightarrow H_0^1(B_1)$

$$\gamma(t) = \begin{cases} (1-2t)u & ; t \in [0, \frac{1}{2}], \\ (2t-1)v & ; t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Concluiremos que todas as hipóteses a)-c) do Teorema 1.2 são satisfeitas com a condição c) satisfazendo a desigualdade estrita. De fato, temos que

$$\gamma(0) = (1 - 2 \cdot 0)u = u, \quad \gamma(1) = (2 \cdot 1 - 1)v = v,$$

o que nos dá o item a); e também para $\delta = \frac{1}{2}$, obtemos

$$\|\gamma(t) - u\| = \|(1-2t)u - u\| = 2\|u\|t = ct, \quad \forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right],$$

onde $c = 2\|u\|$. Além disso,

$$(1-t)I_\alpha(u) + tI_\alpha(v) = (1-t)c_\alpha + tc_\alpha = c_\alpha, \quad \forall t \in [0, 1],$$

e

$$I_\alpha(\gamma(t)) = \begin{cases} \frac{(1-2t)^2}{2} \int_{B_1} |\nabla u|^2 dx - \frac{(1-2t)^q}{q} \int_{B_1} |x|^\alpha |u|^q dx, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{(2t-1)^2}{2} \int_{B_1} |\nabla v|^2 dx - \frac{(2t-1)^q}{q} \int_{B_1} |x|^\alpha |v|^q dx, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Desde que $u, v \in \mathcal{N}_\alpha$, temos que $\int_{B_1} |\nabla u|^2 dx = \int_{B_1} |x|^\alpha |u|^q dx =: a > 0$ e $\int_{B_1} |\nabla v|^2 dx = \int_{B_1} |x|^\alpha |v|^q dx =: b > 0$. Assim,

$$I_\alpha(\gamma(t)) = \begin{cases} a \left[\frac{(1-2t)^2}{2} - \frac{(1-2t)^q}{q} \right], & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ b \left[\frac{(2t-1)^2}{2} - \frac{(2t-1)^q}{q} \right], & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Por outro lado, como $I_\alpha(u) = I_\alpha(v) = c_\alpha$, sabemos que

$$\frac{1}{2}a - \frac{1}{q}a = \frac{1}{2}b - \frac{1}{q}b = c_\alpha.$$

O máximo de $\frac{(1-2t)^2}{2} - \frac{(1-2t)^q}{q}$ para $t \in [0, \frac{1}{2}]$ é $\frac{1}{2} - \frac{1}{q}$ que ocorre somente em $t = 0$ (para mostrar isso, basta ver que a função é não crescente calculando sua derivada) e o máximo de $\frac{(2t-1)^2}{2} - \frac{(2t-1)^q}{q}$ para $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ é $\frac{1}{2} - \frac{1}{q}$ que ocorre somente em $t = 1$ (para mostrar isso, basta ver que a função é não decrescente calculando sua derivada). Portanto, para todo $0 < t < 1$, temos

$$I_\alpha(\gamma(t)) < \begin{cases} a \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ b \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = c_\alpha = (1-t)I_\alpha(u) + tI_\alpha(v).$$

Logo, temos os itens a), b) e c) do Teorema [1.2](#) satisfeitos e com a desigualdade estrita no item c).

No entanto, para $N \geq 2$, o conjunto A não é unitário. De fato, considerando o conjunto $\tilde{A} = \{u^* \circ g; g \in O(N)\}$, vejamos que $\tilde{A} \subset A$. Para isso, tome $u = u^* \circ g \in \tilde{A}$, para alguma u^* L.E.S. e qualquer $g \in O(N)$ e veja que

$$\begin{aligned} I_\alpha(u) &= I_\alpha(u^* \circ g) = \frac{1}{2} \int_{B_1} |\nabla(u^* \circ g)(x)|^2 \cdot |\det g'(x)| dx + \frac{1}{q} \int_{B_1} |x|^\alpha |u^* \circ g|^q dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{B_1} |\nabla(u^*)|^2 dy + \frac{1}{q} \int_{B_1} |g^{-1}(y)|^\alpha |u^*|^q dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{B_1} |\nabla(u^*)|^2 dy + \frac{1}{q} \int_{B_1} |y|^\alpha |u^*|^q dy \\ &= I_\alpha(u^*), \end{aligned}$$

onde usamos o fato de que $|\det g'(x)| = \pm 1$ e fizemos uma mudança de variável. Analogamente,

$$\begin{aligned} I'_\alpha(u) \cdot v &= I'_\alpha(u^* \circ g) \cdot v = \int_{B_1} \nabla(u^* \circ g)(x) \nabla v dx + \int_{B_1} |x|^\alpha |u^* \circ g|^{q-2} (u^* \circ g) v dx \\ &= \int_{B_1} \nabla u^* \nabla v(g^{-1}(y)) dy + \int_{B_1} |y|^\alpha |u^*|^{q-2} (u^*) v(g^{-1}(y)) dy \\ &= I'_\alpha(u^*) (v \circ g^{-1}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, $u \in \tilde{A}$. Como u^* não é radialmente simétrica, o subconjunto $\tilde{A}$ não é unitário (na verdade ele possui infinitos elementos, sendo que nenhum deles é ponto de mínimo local de I_α).

Nesse caso, poderíamos pensar que o Teorema [1.1](#) falhou. Porém, vejamos que

$$\begin{aligned} (I \circ \gamma)''(t) &= (a[(1-2t)(-2) - (1-2t)^{q-1}(-2)])' = a[4 + 2(q-1)(1-2t)^{q-2}(-2)] \\ &= a[4 - 4(q-1)(1-2t)^{q-2}]. \end{aligned}$$

Assim, como $q > 2$,

$$(I \circ \gamma)''(0) = A[4 - 4(q-1)] = A[8 - 4q] < 0,$$

o que nos dá que $I \circ \gamma$ não convexo e, com isso, não satisfaz as hipóteses do Teorema [1.1](#). Além disso, dados $v_1, v_2 \in \tilde{A}$, considere o caminho

$$\hat{\gamma}(t) = u^* \circ [(1-t)g_1 + tg_2],$$

em que $v_1 = u^* \circ g_1$ e $v_2 = u^* \circ g_2$. Daí, $I_\alpha(\widehat{\gamma}(t)) = c_\alpha$, para todo $t \in [0, 1]$, ou seja, existe um caminho entre v_1 e v_2 no qual I é constante. Assim, I é convexa nesse caminho e $\tilde{A}$ não possui no máximo um elemento. Isso nos mostra que a convexidade de I não garante que A tenha no máximo um elemento, mas sim a convexidade estrita.

1.2 Resultados Auxiliares

Nesta seção, apresentaremos resultados que contribuirão para que possamos verificar as hipóteses do Teorema [1.1](#) e do Corolário [1.1](#). Considere W um espaço a ser definido posteriormente e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um domínio (aberto e conexo) que pode ser limitado ou não. Além disso, fixemos $u, v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funções pertencentes a W e tomemos $\gamma: [0, 1] \rightarrow W$, definida por

$$\gamma(t)(x) := Q^{-1}((1-t)Q(u(x)) + tQ(v(x))),$$

para $x \in \Omega$, $t \in [0, 1]$ e $Q: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função crescente (logo, injetora) e, assim, invertível sobre sua imagem. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $Q(0) = 0$. Da expressão que define $\gamma(t)(x)$, temos

$$Q(\gamma(t)) = (1-t)Q(u) + tQ(v), \tag{1.7}$$

em que omitimos a dependência de x para podermos simplificar a notação. Se $p > 1$, as funções da forma $Q(z) = z^p$ satisfazem todas as hipóteses necessárias.

Vejamos, agora, um critério geral para a continuidade Lipschitziana de γ em $t = 0$. No caso das funções modelos acima, para que elas satisfaçam o lema apresentado a seguir e, assim, consigamos a continuidade Lipschitziana de γ em $t = 0$, é necessário supor que u e v são comparáveis, isto é, existe $\delta \geq 1$ tal que

$$\frac{1}{\delta} \leq \frac{u}{v} \leq \delta, \text{ em } \Omega,$$

com $u, v > 0$ em Ω . Não consideramos $u \equiv 0$, pois, nesse caso, obteríamos

$$\gamma(t)^p = (1-t)Q(0) + tQ(v) = tQ(v) = tv^p,$$

ou seja, $\gamma(t) = t^{\frac{1}{p}}v$, e tal γ não é localmente Lipschitziana em $t = 0$, pois tomando $t_n = \frac{1}{n}$ e $s_n = 0$, temos $t_n, s_n \rightarrow 0$, $t_n \neq s_n$, mas

$$\frac{\|\gamma(t_n) - \gamma(s_n)\|}{|t_n - s_n|} = \frac{\frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}\|v\|}{\frac{1}{n}} = n^{1-\frac{1}{p}}\|v\| \rightarrow \infty, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Lema 1.1. *Seja W o espaço $L^p(\Omega)$ ou $W_0^{1,p}(\Omega)$ ou $W^{1,p}(\Omega)$, com $p \geq 1$. Fixe $Q \in C([0, \infty]) \cap C^1((0, \infty))$ tal que*

a) $Q' > 0$ em $(0, \infty)$;

b) para cada $c_0 > 0$ tal que

$$\frac{1}{c_0} \leq \frac{z_1}{z_2} \leq c_0,$$

onde $z_1, z_2 > 0$, existe $c_2 > 0$ tal que

$$\frac{1}{c_2} \leq \frac{Q'(z_1)}{Q'(z_2)} \leq c_2.$$

Se $u, v \in W$ são comparáveis, então $\gamma: [0, 1] \rightarrow W$ dada por (1.7) é localmente Lipschitziana em $t = 0$, caso W seja o espaço $L^p(\Omega)$. Se, além disso, supomos

c) $Q \in C^2((0, \infty))$ e existem $\delta_1 > 1$ e $c_3 > 0$ tais que

$$1 \leq \frac{z_1}{z_2} \leq \delta_1$$

implica

$$\frac{1}{c_3} \leq \frac{Q''(z_1)}{Q''(z_2)},$$

então $\gamma: [0, 1] \rightarrow W$ é localmente Lipschitziana em $t = 0$, para W sendo $L^p(\Omega)$ ou $W_0^{1,p}(\Omega)$ ou $W^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. Continuaremos omitindo a dependência de x das funções. Perceba que

$$\gamma(0) = Q^{-1}(Q(u)) = u, \quad \gamma(1) = Q^{-1}(Q(v)) = v.$$

Daí, como Q e Q^{-1} são crescentes, definindo $m := \min\{u, v\}$ e $M := \max\{u, v\}$, temos

$$\gamma(t) = Q^{-1}(tQ(u) + (1-t)Q(v)) \geq Q^{-1}(tQ(m) + (1-t)Q(m)) = Q^{-1}Q(m) = m$$

e também

$$\gamma(t) = Q^{-1}(tQ(u) + (1-t)Q(v)) \leq Q^{-1}(tQ(M) + (1-t)Q(M)) = Q^{-1}Q(M) = M.$$

Assim,

$$\min\{u, v\} \leq \gamma(t) \leq \max\{u, v\},$$

para todo $t \in [0, 1]$. Se $u(x) \neq v(x)$ e $t \neq 0$, então

$$t(Q(v) - Q(u)) = Q(\gamma(t)) - Q(u),$$

o que nos fornece

$$\begin{aligned} Q(v) - Q(u) &= \frac{Q(\gamma(t)) - Q(u)}{t} \\ &= \frac{Q(\gamma(t)) - Q(u)}{\gamma(t) - u} \frac{\gamma(t) - u}{t}. \end{aligned}$$

Por outro lado, como $Q \in C([0, \infty]) \cap C^1((0, \infty))$, o Teorema do Valor Médio em 0.4 nos dá a existência de $\xi, \eta > 0$ tais que

$$Q(v) - Q(u) = Q'(\xi)(v - u), \quad \frac{Q(\gamma(t)) - Q(u)}{\gamma(t) - u} = Q'(\eta),$$

com ξ entre u e v e η entre $\gamma(t)$ e u , isto é,

$$\min\{u, v\} \leq \xi \leq \max\{u, v\}$$

e

$$\min\{u, v\} \leq \min\{u, \gamma(t)\} \leq \eta \leq \max\{u, \gamma(t)\} \leq \max\{u, v\}.$$

Logo,

$$\frac{\gamma(t) - u}{t} = \frac{Q'(\xi)}{Q'(\eta)}(v - u). \tag{1.8}$$

Por hipótese, u e v são comparáveis. Daí,

$$\frac{1}{\delta} \leq \frac{\min\{u, v\}}{\max\{u, v\}} \leq \frac{u}{v} \leq \frac{\max\{u, v\}}{\min\{u, v\}} \leq \delta,$$

para algum $\delta \geq 1$. Assim,

$$\frac{1}{\delta} \leq \frac{\min\{u, v\}}{\max\{u, v\}} \leq \frac{\xi}{\eta} \leq \frac{\max\{u, v\}}{\min\{u, v\}} \leq \delta.$$

Para este δ , por b), existe $c_2 > 0$ tal que

$$\frac{1}{c_2} \leq \frac{Q'(\xi)}{Q'(\eta)} \leq c_2.$$

Com isso, se $u, v \in W = L^p(\Omega)$, então

$$\begin{aligned}
\|\gamma(t) - u\|_W &= \left\| \frac{tQ'(\xi)(v - u)}{Q'(\eta)} \right\|_{L^p(\Omega)} \\
&= t \left\| \frac{Q'(\xi)(v - u)}{Q'(\eta)} \right\|_{L^p(\Omega)} = t \left(\int_{\Omega} \left(\frac{Q'(\xi)}{Q'(\eta)} \right)^p |v - u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq tc_2 \left(\int_{\Omega} |v - u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = tc_2 \|v - u\|_{L^p(\Omega)} \\
&\leq tc_2 (\|v\|_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}) \\
&= tC, \quad \forall t \in [0, 1],
\end{aligned}$$

onde $C = c_2(\|v\|_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)})$. Portanto, γ é Lipschitziana em $t = 0$. Observe que para $W = W_0^{1,p}$ ou $W^{1,p}$, teríamos

$$\begin{aligned}
\|\gamma(t) - u\|_W &= \left\| \frac{tQ'(\xi)(v - u)}{Q'(\eta)} \right\|_W \\
&= t \left\| \frac{Q'(\xi)(v - u)}{Q'(\eta)} \right\|_W \\
&= t \left\{ \int_{\Omega} \left(\frac{Q'(\xi)}{Q'(\eta)} \right)^p |v - u|^p dx + \int_{\Omega} \left| \nabla \left(\frac{Q'(\xi)}{Q'(\eta)} |v - u| \right) \right|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \\
&\leq t \left\{ c_2 \int_{\Omega} |v - u|^p dx + \int_{\Omega} \left| \nabla \left(\frac{Q'(\xi)}{Q'(\eta)} |v - u| \right) \right|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

o que não nos permite seguir como anteriormente. Por fim, suponha que valem a), b) e c). Desde que $z_1 > 0$ e $\delta_1 > 1$ (por c)), temos $z_1 < \delta_1 z_1$. Daí,

$$\frac{1}{\delta_1} \leq 1 \leq \frac{\delta_1 z_1}{z_1} = \delta_1 \Rightarrow \frac{1}{C_2} \leq c_2 \Rightarrow -c_2 \leq -\frac{1}{c_2} \Rightarrow -(c_2 - 1) \leq \frac{1 - c_2}{c_2}.$$

Assim, por c), existe $c_2 > 0$ tal que

$$\frac{1}{c_2} \leq \frac{Q'(\delta_1 z_1)}{Q'(z_1)} \leq c_2,$$

o que implica que

$$-(c_2 - 1) \leq \frac{1 - c_2}{c_2} \leq \frac{Q'(\delta_1 z_1) - Q'(z_1)}{Q'(z_1)} \leq c_2 - 1.$$

Desde que $Q' > 0$, obtemos

$$(c_2 - 1) \geq \frac{|Q'(\delta_1 z_1) - Q'(z_1)|}{Q'(z_1)} = \frac{|Q''(w)|(\delta_1 z_1 - z_1)}{Q'(z_1)} = (\delta_1 - 1) \frac{|Q''(w)|}{|Q''(z_1)|} \cdot \frac{|Q''(z_1)|}{Q'(z_1)} \cdot z_1,$$

onde a primeira igualdade é obtida pelo Teorema do Valor Médio em 0.4, que nos garante a existência de $w > 0$ tal que $z_1 < w < \delta_1 z_1$. Com isso,

$$\frac{1}{\delta_1} < 1 < \frac{w}{z_1} < \delta_1$$

e, por c), existe $c_3 > 0$ tal que

$$\frac{1}{c_3} \leq \frac{Q''(w)}{Q''(z_1)} \leq c_3.$$

Logo,

$$c_2 - 1 \geq \frac{(\delta_1 - 1)}{c_3} \frac{|Q''(z_1)|}{Q'(z_1)} z_1$$

e, portanto,

$$\frac{|Q''(z_1)|}{Q'(z_1)} z_1 \leq c_1,$$

onde $c_1 = \frac{(c_2-1)c_3}{\delta_1-1}$. Além disso,

$$\begin{aligned} Q'(\gamma(t))\nabla\gamma(t) - Q'(\gamma(t))\nabla u &= (1-t)Q'(u)\nabla u + tQ'(v)\nabla v - Q'(\gamma(t))\nabla u \\ &= [Q'(u) - Q'(\gamma(t))]\nabla u + t[Q'(v)\nabla v - Q'(u)\nabla u] \\ &:= T_1 + T_2. \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema do Valor Médio em 0.4, existe $\zeta > 0$ entre u e $\gamma(t)$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{\|T_1\|_W}{tQ'(\gamma(t))} &= \frac{\|[Q'(u) - Q'(\gamma(t))]\nabla u\|_W}{tQ'(\gamma(t))} = \frac{|Q''(\zeta)|}{Q'(\gamma(t))} \cdot \frac{\|\gamma(t) - u\|_W}{t} |\nabla u| \\ &= \frac{|Q''(\zeta)|}{Q'(\zeta)} \cdot \zeta \cdot \frac{Q'(\zeta)}{Q'(\gamma(t))} \frac{Q'(\xi)}{Q'(\eta)} \frac{\|v - u\|_W}{\zeta} |\nabla u| \\ &\leq C_1 \frac{Q'(\zeta)}{Q'(\gamma(t))} \frac{Q'(\xi)}{Q'(\eta)} \frac{\|v\|_W + \|u\|_W}{\zeta} |\nabla u| \\ &\leq C_1 \bar{c}_3 \tilde{c}_3 \frac{\|v\|_W + \|u\|_W}{\zeta} |\nabla u| \\ &= K_1 |\nabla u|, \end{aligned}$$

onde usamos (1.8) para obter C e o fato de que $\gamma(t)$, ζ e η são mutuamente comparáveis para usarmos b) e obtermos $\bar{c}_3$ e $\tilde{c}_3$ e usamos a notação $K_1 := C_1 \bar{c}_2 \tilde{c}_3 \frac{\|v\|_W + \|u\|_W}{\zeta}$. Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{|T_2|}{tQ'(\gamma(t))} &= \frac{|t(Q'(v)\nabla v - Q'(u)\nabla u)|}{tQ'(\gamma(t))} \leq \frac{Q'(v)}{Q'(\gamma(t))}|\nabla v| + \frac{Q'(u)}{Q'(\gamma(t))}|\nabla u| \\ &\leq \bar{c}_2|\nabla v| + \tilde{c}_2|\nabla u| \leq K_2(|\nabla v| + |\nabla u|), \end{aligned}$$

onde $K_2 = \max\{\bar{c}_2, \tilde{c}_2\}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{|\nabla\gamma(t) - \nabla u|}{t} &= \frac{|T_1 + T_2|}{tQ'(\gamma(t))} \\ &\leq \frac{|T_1|}{tQ'(\gamma(t))} + \frac{|T_2|}{tQ'(\gamma(t))} \\ &\leq K_1|\nabla u| + K_2(|\nabla u| + |\nabla v|) \\ &= (K_1 + K_2)|\nabla u| + K_2|\nabla v| \\ &= K(|\nabla u| + |\nabla v|), \end{aligned}$$

onde $K = K_1 + K_2$. Isso mostra que γ é Lipschitziana em $t = 0$ quando W é $W_0^{1,p}(\Omega)$ ou $W^{1,p}(\Omega)$. Note que já obtivemos este fato quando W é $L^p(\Omega)$. ■

Corolário 1.3. *Seja W o espaço $L^p(\Omega)$ ou $W_0^{1,p}(\Omega)$ ou $W^{1,p}(\Omega)$, com $p \geq 1$. Se $u, v \in W$ são comparáveis, então o caminho $\gamma: [0, 1] \rightarrow W$ dado por*

$$\gamma(t) = ((1-t)u^r - tv^r)^{\frac{1}{r}}, \quad r > 1,$$

é localmente Lipschitziana em $t = 0$.

Demonstração. Considere $Q: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $Q(z) = z^r$. Sabemos que $Q \in C([0, \infty)) \cap C^1((0, \infty))$ e valem:

a) $Q'(z) = rz^{r-1} > 0$, para todo $z \in (0, \infty)$;

b) Dado $c_0 > 0$ tal que

$$\frac{1}{c_0} \leq \frac{z_1}{z_2} \leq c_0,$$

então, como $r > 1$, obtemos

$$\frac{1}{c_0^{r-1}} \leq \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{r-1} \leq c_0^{r-1}.$$

Daí, tomando $c_2 = c_0^{r-1} > 0$, temos

$$\frac{1}{c_2} \leq \frac{Q'(z_1)}{Q'(z_2)} = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{r-1} \leq c_2,$$

isto é,

$$\frac{1}{c_2} \leq \frac{Q'(z_1)}{Q'(z_2)} \leq c_2;$$

c) Se $Q \in C^2((0, \infty))$ e $r \geq 2$, $\delta_1 = 2$ e $c_3 = 1$ são tais que $1 \leq \frac{z_1}{z_2} \leq \delta_1$ implica

$$\frac{Q''(z_1)}{Q''(z_2)} = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{r-2} \geq 1^{r-2} = \frac{1}{c_3}.$$

Caso $r < 2$, $\delta_1 = 2$ e $c_3 = 2^{r-2}$ são tais que $1 \leq \frac{z_1}{z_2} \leq \delta_1$ implica

$$\frac{Q''(z_1)}{Q''(z_2)} = \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{2-r} \geq \frac{1}{\delta_1^{2-r}} = \frac{1}{2^{2-r}} \frac{1}{c_3}.$$

Portanto, pelo Lema [1.1](#), temos que γ é localmente Lipschitziana em $t = 0$ com W sendo $L^p(\Omega)$ ou $W_0^{1,p}(\Omega)$ ou $W^{1,p}(\Omega)$. Desde que

$$Q(\gamma(t)) = (1-t)Q(u) - tQ(v),$$

concluimos

$$\gamma(t)^r = (1-t)u^r - tv^r,$$

donde segue o desejado. ■

Lema 1.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, com $N \geq 1$, um domínio suave limitado. Suponha que $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ satisfazem*

a) $u, v > 0$ em Ω e $u, v = 0$ em $\partial\Omega$;

b) $\frac{\partial u}{\partial \nu} < 0$ e $\frac{\partial v}{\partial \nu} < 0$ em $\partial\Omega$.

Então, dado $x_0 \in \partial\Omega$, existem $U_{x_0} \subset \overline{\Omega}$ vizinhança de x_0 e $\delta_0 > 0$ tais que $u(x) \leq \delta_0 v(x)$, para todo $x \in U_{x_0}$.

Demonstração. Como $\partial\Omega$ é C^1 (Ω é suave), dado $x_0 \in \partial\Omega$, existem $V_{x_0} \subset \mathbb{R}^N$ vizinhança de x_0 , $\tilde{V}_0 \subset \mathbb{R}^N$ vizinhança do zero, $\phi: V_{x_0} \rightarrow \tilde{V}_0$ e $\psi: \tilde{V}_0 \rightarrow V_{x_0}$ difeomorfismos tais que $\psi = \phi^{-1}$, $\psi'(y)(-e_n) = \nu$ para todo $y \in \tilde{V}_0$, $\phi(V_{x_0} \cap \partial\Omega) = \tilde{V}_0 \cap (\mathbb{R}^N \times \{0\})$ e $\phi(V_{x_0} \cap \Omega) = V_{x_0} \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times (0, \infty))$. Defina

$$\tilde{u} := u \circ \psi: \tilde{V}_0 \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times (0, \infty)) \rightarrow \mathbb{R}$$

e

$$\tilde{v} := v \circ \psi: \tilde{V}_0 \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times (0, \infty)) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Vejamos que ambas satisfazem as seguintes condições:

i) $\tilde{u}, \tilde{v} \in C^1(\tilde{V}_0 \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times [0, \infty)))$, pois $\psi \in C^1$ e $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$;

ii) $\tilde{u}, \tilde{v} > 0$ em $\tilde{V}_0 \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times (0, \infty))$, pois para cada $y \in \tilde{V}_0 \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times (0, \infty))$, $\psi(y) \in \Omega$ e, assim,

$$\tilde{u}(y) = u(\psi(y)), \tilde{v}(y) = v(\psi(y)) > 0;$$

iii) $\tilde{u}, \tilde{v} = 0$ em $\tilde{V}_0 \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\})$, pois para cada $y \in \tilde{V}_0 \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\})$, temos que $\psi(y) \in \partial\Omega$ e, assim,

$$\tilde{u}(y) = u(\psi(y)) = \tilde{v}(y) = v(\psi(y)) = 0;$$

iv) $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial(-e_N)}, \frac{\partial \tilde{v}}{\partial(-e_N)} < 0$ em $\tilde{V}_0 \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\})$, pois para cada $y \in \tilde{V}_0 \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\})$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}(y)}{\partial(-e_N)} &= \tilde{u}'(y)(-e_N) = (u \circ \psi)'(y) \cdot (-e_N) = u'(\psi(y))(\psi'(y)(-e_N)) \\ &= u'(\psi(y)) \cdot \nu = \frac{\partial u}{\partial \nu}(\psi(y)) < 0 \end{aligned}$$

e, analogamente, $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial(-e_N)}(y) < 0$.

Agora, vejamos que existem $\tilde{U}_0 \subset \tilde{V}_0$ vizinhança do zero e $\delta_0 > 0$ tais que

$$\tilde{u}(y) \leq \delta_0 \tilde{v}(y), \quad \forall y \in \tilde{U}_0 \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times (0, \infty)).$$

Para isso, fixe $r > 0$ pequeno, a ser determinado, tal que $B_r(0) \subset \tilde{V}_0$. Dado $y = (y_1, \dots, y_N) \in B_r(0) \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times (0, \infty))$, pelo item *iii*) e pelo Teorema do Valor Médio em 0.4, existem $t_y, s_y \in (0, 1)$ tais que

$$\begin{aligned} \tilde{u}(y) &= \tilde{u}(y) - \tilde{u}(y_1, \dots, y_{N-1}, 0) = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial(y_N e_N)}(y_1, \dots, y_{N-1}, t_y y_N) \\ &= -y_N \frac{\partial \tilde{u}}{\partial(-e_N)}(y_1, \dots, y_{N-1}, t_y y_N) < y_N \alpha, \end{aligned}$$

onde $\alpha > 0$, obtido pelos itens i) e iv), é tal que

$$-\alpha < \frac{\partial \tilde{u}}{\partial(-e_N)}(y), \quad \forall y \in B_{r_1}(0) \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times (0, \infty)),$$

para algum $r_1 > 0$. Isto ocorre pelo fato que $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial(-e_N)}$ é contínua (item i)) e, logo, ainda será negativa em uma vizinhança do zero (que denotamos por $B_{r_1}(0) \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times (0, \infty))$),

já que é negativa (item iv)); e podemos considerar $-\alpha = 2\frac{\partial \tilde{u}}{\partial(-e_N)}(0)$. Além disso,

$$\tilde{v}(y) = -y_N \frac{\partial \tilde{v}}{\partial(-e_N)}(y_1, \dots, y_{N-1}, s_y y_N) > y_N \beta,$$

onde $\beta > 0$, também obtido pelos itens i) e iv), é tal que

$$-\beta > \frac{\partial \tilde{v}}{\partial(-e_N)}(y), \quad \forall y \in B_{r_2}(0) \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times (0, \infty)),$$

para algum $r_2 > 0$, devido ao fato que $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial(-e_N)}$ é contínua (item i)) e, logo, ainda será negativa em uma vizinhança do zero (que chamamos de $B_{r_2}(0) \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times (0, \infty))$), já que é negativa (item iv)); e podemos considerar $-\beta = \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial(-e_N)}(0)$. Assim, obtemos que

$$\tilde{u}(y) < y_N \alpha = y_N \beta \frac{\alpha}{\beta} < \tilde{v}(y) \delta_0, \quad \forall y \in B_r(0) \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times (0, \infty)),$$

onde $\delta_0 = \frac{\alpha}{\beta} > 0$ e $r > 0$ é menor que r_1 e r_2 e tal que $B_r(0) \cap \tilde{V}_0$. Finalmente, dado $x \in U_{x_0} := \phi^{-1}(B_r(0) \cap \mathbb{R}^{N-1} \times (0, \infty))$, existe $y \in B_r(0) \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times (0, \infty))$ tal que

$$u(x) = u(\psi(y)) = \tilde{u}(y) \leq \delta_0 \tilde{v}(y) = \delta_0 (v \circ \psi)(y) = \delta_0 v(x),$$

isto é,

$$u(x) \leq \delta_0 v(x), \quad \forall x \in U_{x_0},$$

e isto finaliza a prova. ■

Lema 1.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, com $N \geq 1$, um domínio suave limitado. Suponha que $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ satisfazem*

a) $u, v > 0$ em Ω e $u, v = 0$ em $\partial\Omega$;

b) $\frac{\partial u}{\partial \nu} < 0$ e $\frac{\partial v}{\partial \nu} < 0$ em $\partial\Omega$.

Então, existe $\delta \geq 1$ tal que $\delta^{-1}v \leq u \leq \delta v$ em Ω .

Demonstração. Sabemos do Lema 1.2 que, dado $x_0 \in \partial\Omega$, existem $\delta_0 > 0$ e $U_{x_0} \subset \overline{\Omega}$ tais que $u(x) \leq \delta_0 v(x)$, para todo $x \in U_{x_0}$. Considere a cobertura aberta de $\partial\Omega$

$$\bigcup_{x_0 \in \partial\Omega} U_{x_0} \supseteq \partial\Omega.$$

Como $\partial\Omega$ é compacta, existem $x_1, \dots, x_n \in \partial\Omega$ tais que

$$\partial\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}.$$

Para cada $x \in \Omega \cap U_{x_i}$, $i = 1, \dots, n$, denote $\delta_i > 0$ tal que $u(x) \leq \delta_i v(x)$ (que existe pelo Lema [1.2](#)). Por outro lado, considere

$$K = \overline{\Omega} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n U_{x_i} \right).$$

Assim, como

$$K^c = \overline{\Omega}^c \cup \left(\bigcup_{i=1}^n U_{x_i} \right)$$

que é um aberto, obtemos que K^c é aberto, ou seja, K é fechado. Como K é limitado, dado $x \in K$, temos que $u(x) \leq \delta_K v(x)$, para algum $\delta_K > 0$, pois

$$u(x) \leq \max_{x \in K} u(x) = \frac{\max_{x \in K} u(x)}{\min_{x \in K} v(x)} \cdot \min_{x \in K} v(x) \leq \frac{\max_{x \in K} u(x)}{\min_{x \in K} v(x)} \cdot v(x) =: \delta_K v(x),$$

onde usamos o fato de que $u, v > 0$. Portanto, tomando $\tilde{\delta} = \max\{\delta_1, \dots, \delta_n, \delta_K\}$, dado $x \in \Omega$, obtemos

$$\begin{cases} x \in \bigcup_{i=1}^n U_{x_i} & \Rightarrow u(x) \leq \delta_i v(x) \leq \tilde{\delta} v(x); \\ x \in K & \Rightarrow u(x) \leq \delta_K v(x) \leq \tilde{\delta} v(x). \end{cases}$$

Com isso, dado $x \in \Omega$, existe $\tilde{\delta} > 0$ tal que

$$u(x) \leq \tilde{\delta} v(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

Agora, trocamos u por v , e vice-versa, na demonstração anterior e obtemos $\bar{\delta} > 0$ tal que

$$v(x) \leq \bar{\delta} u(x) \Rightarrow \bar{\delta}^{-1} v(x) \leq u(x).$$

Logo, tomando $\delta = \max\{\tilde{\delta}, \bar{\delta}\}$, segue

$$\delta^{-1} v(x) \leq \bar{\delta}^{-1} v(x) \leq u(x) \leq \tilde{\delta} v(x) \leq \delta v(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

Em particular, $\delta^{-1} v(x) \leq \delta v(x)$ e, com isso, $\delta^2 \geq 1$. Como $\delta > 0$, temos que $\delta \geq 1$, o que finaliza a prova. ■

Lema 1.4. *Sejam $u, v \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap W$ com $u, v > 0$ em Ω e $Q, M \in C([0, \infty)) \cap C^1((0, \infty))$ tais que $Q(0) = 0$ e $Q', M' > 0$ em $(0, \infty)$. Seja $\gamma(t) = Q^{-1}((1-t)Q(u) + tQ(v))$ e consideremos*

$$F_1 := Q' \circ Q^{-1}, \quad F_2 := M^{-1}.$$

Se para algum $\Gamma \in (M(0), \infty]$ a função $F: (z_1, z_2) \mapsto F_1(z_1)F_2(z_2)$ é côncava em

$(0, \infty) \times (M(0), \Gamma)$, então para cada $|\nabla u|, |\nabla v| \in M^{-1}((M(0), \Gamma))$, vale a desigualdade pontual

$$M(|\nabla \gamma(t)|) \leq (1-t)M(|\nabla u|) + tM(|\nabla v|),$$

para todo $t \in [0, 1]$ e a aplicação $t \mapsto M(|\nabla \gamma(t, \cdot)|)$ é estritamente convexa.

Demonstração. Derivando (1.7), obtemos

$$Q'(\gamma(t))\nabla \gamma(t) = (1-t)Q'(u)\nabla u + tQ'(v)\nabla v,$$

para todo $t \in [0, 1]$. Daí, como $Q' > 0$,

$$\begin{aligned} Q'(\gamma(t))|\nabla \gamma(t)| &= |(1-t)Q'(u)\nabla u + tQ'(v)\nabla v| \leq (1-t)Q'(u)|\nabla u| + tQ'(v)|\nabla v| \\ &= (1-t)Q' \circ Q^{-1} \circ Q(u)M^{-1} \circ M(|\nabla u|) + tQ' \circ Q^{-1} \circ Q(v)M^{-1} \circ M(|\nabla v|) \\ &= (1-t)F_1(Q(u))F_2(|\nabla u|) + tF_1(Q(v))F_2(|\nabla v|), \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, 1]$, desde que Q e M são injetoras (pois são crescentes) e, assim, invertíveis sobre sua imagem. Logo,

$$\begin{aligned} Q'(\gamma(t))|\nabla \gamma(t)| &= (1-t)F_1(Q(u))F_2(|\nabla u|) + tF_1(Q(v))F_2(|\nabla v|) \\ &= (1-t)F(Q(u), M(|\nabla u|)) + tF(Q(v), M(|\nabla v|)) \\ &\leq F((1-t)(Q(u), M(|\nabla u|)) + t(Q(v), M(|\nabla v|))) \quad (1.9) \\ &= F((1-t)Q(u) + tQ(v), (1-t)M(|\nabla u|) + tM(|\nabla v|)) \\ &= F_1(Q(\gamma(t)))F_2((1-t)M(|\nabla u|) + tM(|\nabla v|)) \\ &= Q' \circ Q^{-1} \circ Q(\gamma(t))M^{-1}((1-t)M(|\nabla u|) + tM(|\nabla v|)) \\ &= Q'(\gamma(t))M^{-1}((1-t)M(|\nabla u|) + tM(|\nabla v|)), \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, 1]$, onde usamos o fato que F é côncava em $(0, \infty) \times (M(0), \Gamma)$ e, consequentemente, em $(0, \infty) \times [M(0), \Gamma]$. Além disso, $|\nabla u|, |\nabla v| \in M^{-1}([M(0), \Gamma])$. Portanto, como $Q' > 0$, M é crescente e $|\nabla \gamma(t)| \geq 0$, obtemos

$$M(|\nabla \gamma(t)|) \leq (1-t)M(|\nabla u|) + tM(|\nabla v|), \quad (1.10)$$

para todo $t \in [0, 1]$, donde segue que $|\nabla \gamma(t)| \in M^{-1}(M(0), \Gamma)$, para todo $t \in [0, 1]$. De fato, como M é crescente e $|\nabla u|, |\nabla v| \in M^{-1}((M(0), \Gamma))$,

$$\begin{aligned}
M(0) &\leq M(|\nabla \gamma(t)|) \leq (1-t)M(|\nabla u|) + tM(|\nabla v|) \\
&\leq (1-t)\Gamma + t\Gamma = (1-t+t)\Gamma \\
&= \Gamma,
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0, 1]$ e obtemos o desejado. Agora, vejamos que a aplicação $t \mapsto M(|\nabla \gamma(t, \cdot)|)$ é convexa. De fato, dados $t_1, t_2, \theta \in [0, 1]$, defina $\gamma_{uv} := \gamma$ apenas para evidenciar a dependência de γ dos extremos u e v . Note que

$$\begin{aligned}
\gamma_{uv}((1-\theta)t_1 + \theta t_2) &= Q^{-1}((1 - [(1-\theta)t_1 + \theta t_2])Q(u) + [(1-\theta)t_1 + \theta t_2]Q(v)) \\
&= Q^{-1}((1 - t_1 + \theta t_1 - \theta t_2)Q(u) + ((1-\theta)t_1 + \theta t_2)Q(v)) \\
&= Q^{-1}((1 - t_1 - \theta + \theta t_1 + \theta - \theta t_2)Q(u) + ((1-\theta)t_1 + \theta t_2)Q(v)) \\
&= Q^{-1}([(1-\theta)(1-t_1) + \theta(1-t_2)]Q(u) + ((1-\theta)t_1 + \theta t_2)Q(v)) \\
&= Q^{-1}((1-\theta)((1-t_1)Q(u) + t_1Q(v)) + \theta((1-t_2)Q(u) + t_2Q(v))) \\
&= Q^{-1}((1-\theta)Q(U_1) + \theta Q(U_2)) \\
&= \gamma_{U_1 U_2},
\end{aligned} \tag{1.11}$$

onde $U_i = Q^{-1}((1-t_i)Q(u) + t_iQ(v))$, $i = 1, 2$. Perceba que $U_i = \gamma_{uv}(t_i) \in W$, $i = 1, 2$ e desde que existe $K > 0$ tal que $u, v \leq K$ q.t.p., pois $u, v \in L^\infty(\Omega)$, obtemos

$$\begin{aligned}
U_i &= Q^{-1}((1-t_i)Q(u) + t_iQ(v)) \leq Q^{-1}((1-t_i)Q(K) + t_iQ(K)) \\
&= Q^{-1}(Q(K)) \\
&= K, \text{ q.t.p.,}
\end{aligned}$$

isto é, $U_i \in L^\infty(\Omega)$. Além disso, usando (1.10) e o fato de que $|\nabla u|, |\nabla v| \in M^{-1}([M(0), \Gamma])$, temos

$$\begin{aligned}
|(U_i)_{x_j}| &\leq |\nabla U_i| = |\nabla \gamma_{uv}(t_i)| \leq M^{-1}((1-t_i)M(|\nabla u|) + t_iM(|\nabla v|)) \\
&\leq M^{-1}((1-t_i)\Gamma + t_i\Gamma) = M^{-1}(\Gamma), \quad j = 1, \dots, N,
\end{aligned}$$

o que implica que $(U_i)_{x_j} \in L^\infty(\Omega)$, $j = 1, \dots, N$; e, assim, $U_i \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $i = 1, 2$. Daí também obtemos

$$M(|\nabla U_i|) \leq \Gamma, \quad i = 1, 2;$$

isto é, $|\nabla U_i| \in M^{-1}([M(0), \Gamma])$, $i = 1, 2$. Também sabemos que $U_i > 0$, $i = 1, 2$, pela definição de Q^{-1} . Por tudo isso, podemos usar o que já foi provado em (1.10),

substituindo γ_{uv} por $\gamma_{U_1U_2}$, para concluir que

$$\begin{aligned} M(|\nabla\gamma_{uv}((1-\theta)t_1 + \theta t_2)|) &= M(|\nabla\gamma_{U_1U_2}(\theta)|) \\ &\leq (1-\theta)M(|\nabla\gamma_{U_1U_2}(0)|) + \theta M(|\nabla\gamma_{U_1U_2}(1)|) \\ &= (1-\theta)M(|\nabla U_1|) + \theta M(|\nabla U_2|) \\ &= (1-\theta)M(|\nabla\gamma_{uv}(t_1)|) + \theta M(|\nabla\gamma_{uv}(t_2)|), \end{aligned}$$

isto é, $t \mapsto M(\nabla\gamma(t, \cdot))$ é convexa. Agora, provemos a concavidade estrita. Para isso, vejamos primeiro que dados $t \in (0, 1)$, $z \in (0, \infty) \times [M(0), \Gamma]$ e $\bar{z} \in (0, \infty) \times (M(0), \Gamma)$, teremos

$$F((1-t)z + t\bar{z}) > (1-t)F(z) + tF(\bar{z}). \quad (1.12)$$

De fato, já sabemos que F é estritamente côncava em $(0, \infty) \times (M(0), \Gamma)$. Se existir $t_0 \in (0, 1)$ tal que

$$F((1-t_0)z + t_0\bar{z}) = (1-t_0)F(z) + t_0F(\bar{z}), \quad (1.13)$$

denote $w_0 = (1-t_0)z + t_0\bar{z}$ e considere $w = \frac{w_0+z}{2}$ o ponto médio entre w_0 e z . Escrevendo w em função de z e $\bar{z}$, obtemos

$$w = \frac{(1-t_0)z + t_0\bar{z} + z}{2} = \left(1 - \frac{t_0}{2}\right)z + \frac{t_0}{2}\bar{z}. \quad (1.14)$$

Como $z = 2w - w_0$, temos

$$w_0 = (1-t_0)z + t_0\bar{z} = (1-t_0)(2w - w_0) + t_0\bar{z}, \quad (1.15)$$

ou seja,

$$(2-t_0)w_0 = 2(1-t_0)w + t_0\bar{z}.$$

Daí,

$$w_0 = \frac{2(1-t_0)}{2-t_0}w + \frac{t_0}{2-t_0}\bar{z} = \left(1 - \frac{t_0}{2-t_0}\right)w + \frac{t_0}{2-t_0}\bar{z}.$$

Sendo assim,

$$F(w_0) > \left(\frac{2(1-t_0)}{2-t_0}F(w)\right) + \frac{t_0}{2-t_0}F(\bar{z}),$$

pois F é estritamente côncava em $(0, \infty) \times (M(0), \Gamma)$ e $w, \bar{z} \in (0, \infty) \times (M(0), \Gamma)$. De (1.13), segue que

$$\begin{aligned}
(1 - t_0)F(z) + t_0F(\bar{z}) &> \left(1 - \frac{t_0}{2 - t_0}\right) F(w) + \frac{t_0}{2 - t_0} f(\bar{z}) \\
\Rightarrow \frac{2(1 - t_0)}{2 - t_0} F(w) &< \left(1 - \frac{t_0}{2}\right) F(z) + \frac{t_0}{2} F(\bar{z}) \\
\Rightarrow F(w) &< \left(1 - \frac{t_0}{2}\right) F(z) + \frac{t_0}{2} F(\bar{z}).
\end{aligned}$$

Usando (1.14), isto significa

$$F\left(\left(1 - \frac{t_0}{2}\right)z + \frac{t_0}{2}\bar{z}\right) < 1 - \frac{t_0}{2}F(z) + \frac{t_0}{2}\bar{z}F(\bar{z}),$$

o que é um absurdo, pois F é côncava em $(0, \infty) \times [M(0), \Gamma]$. Portanto, para tais $\bar{z}, z$ e t a desigualdade em (1.12) é satisfeita. Assim, teremos a desigualdade estrita em (1.9) e, com isso, segue a desigualdade estrita em (1.10). Argumentando como antes, obteremos a convexidade estrita de $t \mapsto M(\nabla\gamma(t, \cdot))$. ■

Observação 1.2. *Um caso particular do Lema que abordaremos mais adiante encontra-se em [6], com $Q(z) = M(z) = z^2$. Já em [6, Lema 1], foi analisado o caso em que $Q(z) = M(z) = z^p$. No entanto, os resultados que obtivemos é demonstrado de modo diferente, pois utilizamos basicamente a concavidade e isso, de certa forma, é algo muito bom. No Capítulo 2 deste trabalho, veremos o caso em que $M(z) = z^2$ e $Q(z) = f^2(z)$, sendo f uma função ímpar que satisfaz o problema de Cauchy*

$$\begin{cases} f'(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2f(t)^2}}, & \text{em } (0, \infty); \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

Observação 1.3. *As hipóteses consideradas aqui foram as mínimas possíveis para obtermos o resultado desejado, pois, caso F não seja côncava, teremos a desigualdade oposta em (1.9). Isso é bom, mas exatamente por tal hipótese ser exigida não se espera que (1.10) seja, em geral, verdade.*

Observação 1.4. *Sabemos que $F_1, F_2 \geq 0$ e, assim, se $(z_1, z_2) \mapsto F_1(z_1)F_2(z_2)$ é côncava, então*

$$\begin{aligned}
F((1 - t)(z_1, z_2) + t(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)) &\geq (1 - t)F(z_1, z_2) + tF(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) \\
\Rightarrow F(((1 - t)z_1, (1 - t)z_2) + (t\tilde{z}_1, t\tilde{z}_2)) &\geq (1 - t)F_1(z_1)F_2(z_2) + tF_1(\tilde{z}_1)F_2(\tilde{z}_2) \\
\Rightarrow F((1 - t)z_1 + t\tilde{z}_1, (1 - t)z_2 + t\tilde{z}_2) &\geq (1 - t)F_1(z_1)F_2(z_2) + tF_1(\tilde{z}_1)F_2(\tilde{z}_2) \\
\Rightarrow F_1((1 - t)z_1 + t\tilde{z}_1)F_2((1 - t)z_2 + t\tilde{z}_2) &\geq (1 - t)F_1(z_1)F_2(z_2) + tF_1(\tilde{z}_1)F_2(\tilde{z}_2)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_1((1-t)z_1 + t\tilde{z}_1) \geq (1-t)F_1(z_1) \frac{F_2(z_2)}{F_2((1-t)z_2 + t\tilde{z}_2)} + tF_1(\tilde{z}_1) \frac{F_2(\tilde{z}_2)}{F_2((1-t)z_2 + t\tilde{z}_2)} \\ F_2((1-t)z_2 + t\tilde{z}_2) \geq (1-t)F_2(z_2) \frac{F_1(z_1)}{F_1((1-t)z_1 + t\tilde{z}_1)} + tF_2(\tilde{z}_2) \frac{F_1(\tilde{z}_1)}{F_1((1-t)z_1 + t\tilde{z}_1)} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{z_1=\tilde{z}_1, z_2=\tilde{z}_2} \begin{cases} F_1((1-t)z_1 + t\tilde{z}_1) \geq (1-t)F_1(z_1) + tF_1(\tilde{z}_1) \\ F_2((1-t)z_2 + t\tilde{z}_2) \geq (1-t)F_2(z_2) + tF_2(\tilde{z}_2), \end{cases}$$

ou seja, F_1 e F_2 são côncavas. Além disso, o determinante da matriz Hessiana de F é não negativo, isto é, omitindo a dependência de F_i de z_i , obtemos

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial z_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z_2 \partial z_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_2^2} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} F_1'' F_1 & F_1' F_2' \\ F_2' F_1' & F_2'' F_1 \end{pmatrix} = F_1 F_1'' F_2 F_2'' - (F_1' F_2')^2 \geq 0.$$

Daí, $F_1 F_1'' F_2 F_2'' \geq (F_1' F_2')^2$. Desde que $F_2' = (M^{-1})' = \frac{1}{M'} > 0$, se $F_1' \neq 0$ obtemos

$$\begin{aligned} \left(\left(\frac{F_1}{F_1'} \right)' - 1 \right) \left(\left(\frac{F_2}{F_2'} \right)' - 1 \right) &= \left(\frac{F_1}{F_1'} \right)' \left(\frac{F_2}{F_2'} \right)' - \left(\frac{F_1}{F_1'} \right)' - \left(\frac{F_2}{F_2'} \right)' + 1 \\ &= \frac{(F_1')^2 - F_1 F_1''}{(F_1')^2} \frac{(F_2')^2 - F_2 F_2''}{(F_2')^2} - \frac{(F_1')^2 - F_1 F_1''}{(F_1')^2} \\ &\quad - \frac{(F_2')^2 - F_2 F_2''}{(F_2')^2} + 1 \\ &= 1 - \frac{(F_1')^2 F_2 F_2''}{(F_1')^2 (F_2')^2} - \frac{(F_2')^2 F_1 F_1''}{(F_1')^2 (F_2')^2} + \frac{F_1 F_1'' F_2 F_2''}{(F_1')^2 (F_2')^2} \\ &\quad - 1 + \frac{F_1 F_1''}{(F_1')^2} - 1 + \frac{F_2 F_2''}{(F_2')^2} + 1 \\ &= \frac{F_1 F_1'' F_2 F_2''}{(F_1')^2 (F_2')^2} \\ &\geq 1. \end{aligned}$$

Assim,

$$1 \leq \frac{F_1 F_1'' F_2 F_2''}{(F_1')^2 (F_2')^2} = \left(\left(\frac{F_1}{F_1'} \right)' - 1 \right) \left(\left(\frac{F_2}{F_2'} \right)' - 1 \right). \quad (1.16)$$

Perceba que a expressão do primeiro parêntese depende apenas de z_1 e a do segundo apenas de z_2 e lembre-se que $F_2 := M^{-1}$ está associada à parte principal do funcional.

A desigualdade em (1.16) nos permite concluir fatos importantes acerca de Q . Caso a expressão do segundo parêntese mude de sinal, para o M dado, tem-se

$$1 \leq \left(\left(\frac{F_1}{F_1'} \right)' - 1 \right) \cdot a_1 \text{ e } 1 \leq \left(\left(\frac{F_1}{F_1'} \right)' - 1 \right) \cdot a_2,$$

para alguns $a_1 > 0$ e $a_2 < 0$, de onde segue que

$$\left(\frac{F_1}{F'_1}\right)' - 1 \geq \frac{1}{a_1} > 0 \text{ e } \left(\frac{F_1}{F'_1}\right)' - 1 \leq \frac{1}{a_2} < 0.$$

Nesse caso, não pode existir z_1 tal que $F'_1(z_1) \neq 0$. Logo $F'_1(z_1) = 0$, para todo $z_1 \in (0, \infty)$. Assim, existe $a > 0$ tal que $F_1(z_1) = a$, para todo z_1 , isto é, $Q' \circ Q^{-1}(z_1) = a$, $\forall z_1$. Com isso, dado $y \in [0, \infty)$, temos $Q'(y) = Q' \circ Q^{-1}(Q(y)) = a$, o que nos permite concluir que $Q(y) = ay + b$, para algum $b \in \mathbb{R}$. No entanto, como $Q(0) = 0$, as únicas soluções que nos permitirão obter a concavidade desejada são as triviais

$$Q(y) = ay.$$

Agora, se supormos que a expressão do segundo parêntese é limitada por cima por $\frac{1}{c_0} > 0$, obteremos da desigualdade (1.16) que

$$\begin{aligned} 1 &\leq \left(\left(\frac{F_1}{F'_1}\right)' - 1\right) \frac{1}{c_0} \Rightarrow \left(\frac{F_1}{F'_1}\right)' \geq c_0 + 1 \Rightarrow \int_0^{z_1} \left(\frac{F_1}{F'_1}\right)' d\tilde{z}_1 \geq (c_0 + 1)z_1 \\ &\Rightarrow \frac{F_1(z_1)}{F'_1(z_1)} - \frac{F_1(0)}{F'_1(0)} \geq (c_0 + 1)z_1 \Rightarrow \frac{F_1(z_1)}{F'_1(z_1)} \geq (c_0 + 1)z_1 + c_1 \\ &\Rightarrow \frac{F'_1(z_1)}{F_1(z_1)} \leq \frac{1}{(c_0 + 1)z_1 + c_1} \Rightarrow (\log(F_1(z_1)))' \leq \frac{1}{(c_0 + 1)z_1 + c_1} \\ &\Rightarrow \int_1^{z_1} (\log(F_1(\tilde{z}_1)))' d\tilde{z}_1 \leq \int_1^{z_1} \frac{1}{(c_0 + 1)\tilde{z}_1 + c_1} dz_1 \\ &\Rightarrow \log(F_1(z_1)) - \log(F_1(1)) \leq \log((c_0 + 1)\tilde{z}_1 + c_1) \Big|_1^{z_1} \frac{1}{c_0 + 1} \\ &\Rightarrow \log(F_1(z_1)) \leq \log((c_0 + 1)z_1 + c_1) \frac{1}{c_0 + 1} + \tilde{c}_2 \Rightarrow F_1(z_1) \leq e^{\log\left([(c_0+1)z_1+c_1]^{\frac{1}{c_0+1}}\right) + \tilde{c}_2} \\ &\Rightarrow F_1(z_1) \leq c_2 ((c_0 + 1)z_1 + c_1)^{\frac{1}{c_0+1}}, \end{aligned} \tag{1.17}$$

onde

$$c_1 = \frac{F_1(0)}{F'_1(0)} \geq 0, \quad \tilde{c}_2 = \log(F_1(1)) - \frac{1}{c_0 + 1} \log((c_0 + 1) \cdot 1 + c_1) \text{ e } c_2 = e^{\tilde{c}_2} \geq 0.$$

Desde que $F_1 = Q' \circ Q^{-1}$, a desigualdade em (1.17) nos fornece que

$$F_1 \circ Q = Q' \leq c_2((c_0 + 1)Q + c_1)^{\frac{1}{c_0+1}}.$$

No caso em que $c_1 = 0$, teremos que

$$Q'(t) = c_2((c_0 + 1)Q(t))^{\frac{1}{c_0+1}},$$

o que implica

$$Q'(t)Q(t)^{-\frac{1}{c_0+1}} \leq c_2(c_0+1)^{\frac{1}{c_0+1}}. \quad (1.18)$$

Por outro lado,

$$(Q(t)^{1-\frac{1}{c_0+1}})' = \frac{c_0}{c_0+1} Q(t)^{-\frac{1}{c_0+1}} Q'(t),$$

isto é,

$$Q'(t)Q(t)^{-\frac{1}{c_0+1}} = \frac{c_0+1}{c_0} (Q(t)^{\frac{c_0}{c_0+1}})'$$

Substituindo em (1.18), obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{c_0+1}{c_0} (Q(t))^{\frac{c_0}{c_0+1}} \right)' &\leq c_0 c_2 (c_0+1)^{-\frac{c_0}{c_0+1}} \Rightarrow \int_0^t (Q(s)^{\frac{c_0}{c_0+1}})' ds \leq c_0 c_2 (c_0+1)^{-\frac{c_0}{c_0+1}} t \\ &\Rightarrow Q(t)^{\frac{c_0}{c_0+1}} - Q(0)^{\frac{c_0}{c_0+1}} \leq c_0 c_2 (c_0+1)^{-\frac{c_0}{c_0+1}} t \\ &\Rightarrow Q(t) \leq \frac{(c_0 c_2)^{\frac{c_0+1}{c_0}}}{c_0+1} t^{\frac{c_0+1}{c_0}}, \end{aligned}$$

onde usamos o Teorema Fundamental do Cálculo para obter a segunda implicação.

Além disso, $c_1 = 0$ se, e somente se, $Q'(0) = 0$, uma vez que

$$c_1 = \frac{F_1(t)}{F_1'(t)} = \frac{Q'(Q^{-1}(0))}{Q''(Q^{-1}(0))(Q^{-1})'(0)} = \frac{Q'(0)}{Q''(0)(Q^{-1})'(0)}.$$

Caso tenhamos, no Lema 1.4, que a aplicação $(x, y) \mapsto F_1(x)F_2(y)$ é côncava, mas não estritamente côncava, é mais delicado analisar a igualdade em (1.10). Em geral, encontramos um par (u, v) , com a relação não trivial, para o qual a igualdade é satisfeita. Mas, pode ser que a desigualdade seja estrita. O fato é que conseguimos dar um exemplo importante no qual foi possível explicitar uma desigualdade para Q , ao supormos $c_1 = 0$. Neste caso, sendo $1 < \varepsilon < \frac{c_0+1}{c_0}$, a função $Q(t) = t^\varepsilon$ se encaixa em nossas hipóteses ($Q'(t) = \varepsilon t^{\varepsilon-1}$), por exemplo. As ideias seguidas aqui podem ser usadas em configurações mais gerais.

Lema 1.5. Sejam $u, v \in W$, onde W pode ser $W_0^{1,p}(\Omega)$ ou $W^{1,p}(\Omega)$, com $p > 1$, e $u, v > 0$ em Ω . Se $Q(z) = M(z) = z^p$ e γ for como em (1.7), ou seja, $\gamma(t) = ((1-t)u^p + tv^p)^{\frac{1}{p}}$, então a derivada fraca satisfaz

$$|\gamma(t)|^p \leq (1-t)|\nabla u|^p + t|\nabla v|^p$$

e $t \rightarrow |\nabla \gamma(t, x)|^p$ é convexa. Além disso, se $u, v \in C(\bar{\Omega}) \cap W$ são funções linearmente independentes, então $t \rightarrow \|\nabla \gamma(t)\|_{L^p(\Omega)}^p$ é estritamente convexa.

Demonstração. Primeiro, vejamos que $u^p, v^p \in W^{1,1}(\Omega)$. De fato, sabemos que

$u^p \in L^1(\Omega)$, pois $u \in L^p(\Omega)$. Além disso,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |(u^p)_{x_j}| dx &\leq \int_{\Omega} |\nabla(u^p)| dx = p \int_{\Omega} u^{p-1} |\nabla u| dx \\ &\leq p \left(\left(\int_{\Omega} u^p dx \right)^{\frac{p}{p-1}} + \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right) \\ &< \infty, \quad j = 1, \dots, N; \end{aligned}$$

onde usamos a desigualdade de Hölder para $\tilde{p} = \frac{p-1}{p}$ e $\tilde{q} = p$; e também o fato que $u^p, |\nabla u^p| \in L^1(\Omega)$. Isso nos dá $(u^p)_{x_j} \in L^1(\Omega)$, $j = 1, \dots, N$, e portanto, $u^p \in W^{1,1}(\Omega)$. Analogamente, $v^p \in W^{1,1}(\Omega)$. Além disso, seja q o expoente conjugado de p , isto é, $q = p/(p-1)$ e sejam F_1, F_2 como no Lema [1.4](#). Então, desde que $Q(z) = M(z) = z^p$

$$F_1(z_1) = Q'(Q^{-1}(z_1)) = Q'(z_1^{\frac{1}{p}}) = pz_1^{\frac{p-1}{p}} = pz_1^{\frac{1}{q}}$$

e

$$F_2(z_2) = M^{-1}(z_2) = z_2^{\frac{1}{p}}.$$

Assim,

$$\frac{\partial F}{\partial z_1} = F'_1(z_1)F_2(z_2) = \frac{p}{q}z_1^{\frac{1}{q}-1}z_2^{\frac{1}{p}}, \quad \frac{\partial F}{\partial z_2} = F_1(z_1)F'_2(z_2) = pz_1^{\frac{1}{q}}\frac{1}{p}z_2^{\frac{1}{p}-1}.$$

Logo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} &= \frac{p}{q} \left(\frac{1}{q} - 1 \right) z_1^{\frac{1}{q}-2} z_2^{\frac{1}{p}}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z_2^2} = pz_1^{\frac{1}{q}} \frac{1}{p} \left(\frac{1}{p} - 1 \right) z_2^{\frac{1}{p}-2}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial z_2} &= \frac{p}{q} z_1^{\frac{1}{q}-1} \frac{1}{p} z_2^{\frac{1}{p}-1} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z_2 \partial z_1} = p \frac{1}{q} z_1^{\frac{1}{q}-1} \frac{1}{p} z_2^{\frac{1}{p}-1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} &= -\frac{1}{q} z_1^{\frac{1}{q}-2} z_2^{\frac{1}{p}}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z_2^2} = -\frac{1}{q} z_1^{\frac{1}{q}} z_2^{\frac{1}{p}-2}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial z_2} &= \frac{1}{q} z_1^{\frac{1}{q}-1} z_2^{\frac{1}{p}-1} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z_2 \partial z_1} = \frac{1}{q} z_1^{\frac{1}{q}-1} z_2^{\frac{1}{p}-1}. \end{aligned}$$

Isso nos fornece que

$$H(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial z_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z_2 \partial z_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_2^2} \end{pmatrix} = z_1^{\frac{1}{q}-2} z_2^{\frac{1}{p}-2} \frac{1}{q} \begin{pmatrix} -z_2^2 & z_1 z_2 \\ z_1 z_2 & -z_1^2 \end{pmatrix}.$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} -z_2^2 - \lambda & z_1 z_2 \\ z_1 z_2 & -z_1^2 - \lambda \end{pmatrix} &= 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda(z_1 + z_2^2) + z_1^2 z_2^2 - z_1^2 z_2^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda(\lambda + z_1^2 + z_2^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 2. \end{aligned}$$

Então, como o determinate da Hessiana é $0 \cdot 2 = 0$, a Hessiana é não negativa. Desde que F_1 e F_2 nesse caso são côncavas, obtemos pela Observação 1.4 que $(z_1, z_2) \mapsto F_1(z_1)F_2(z_2)$ é côncava. Estamos, então, nas hipóteses do Lema 1.4. Dessa forma, $|\gamma(t)|^p \leq (1-t)|\nabla u|^p + t|\nabla v|^p$ e $t \mapsto |\nabla \gamma(t, x)|^p$ é convexa. Como F não é necessariamente estritamente côncava, o Lema 1.4 não pode ser usado para garantirmos que $t \mapsto \|\nabla \gamma(t)\|_{L^p}^p$ seja estritamente côncava, tendo apenas a hipótese de que $u, v \in C(\overline{\Omega}) \cup W$ são L. I. Uma análise da demonstração do Lema 1.4 será eficaz para o que se deseja obter. Perceba que precisamos mostrar a desigualdade estrita a seguir:

$$\|\nabla \gamma(t)\|_{L^p}^p < (1-t)\|\nabla u\|_{L^p}^p + t\|\nabla v\|_{L^p}^p, \quad (1.19)$$

para tais u e v L. I. Pois, dados $t_1 \neq t_2$ e $t \in (0, 1)$, definimos $\gamma_{uv} = \gamma$, $U_1 = ((1-t_1)u^p + t_1v^p)^{\frac{1}{p}} = \gamma(t_1)$ e $U_2 = (1-t_2)u + t_2v$. Vejamos que U_1 e U_2 são L. I. Uma vez que Q é injetora e homogênea ($Q(\lambda t) = \lambda^p Q(t)$), o fato de u e v serem L. I. implica $Q(u)$ e $Q(v)$ L. I., pois dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, onde supomos sem perda de generalidade que $\alpha \geq 0$, tais que

$$\begin{aligned} \alpha Q(u) + \beta Q(v) &= 0 \Rightarrow Q(\alpha^{\frac{1}{p}} u) = -\beta Q(v) \\ &\Rightarrow Q(\alpha^{\frac{1}{p}} u) = Q((- \beta)^{\frac{1}{p}} v) \\ &\Rightarrow \alpha^{\frac{1}{p}} u = -\beta^{\frac{1}{p}} v \\ &\Rightarrow \alpha^{\frac{1}{p}} = (-\beta^{\frac{1}{p}}) = 0 \\ &\Rightarrow \alpha = \beta = 0. \end{aligned}$$

Assim, como temos (de forma análoga ao que foi feito no Lema 1.4) que $\gamma_{U_1 U_2}(t) = ((1-t)U_1 + tU_2)^{\frac{1}{p}} = \gamma_{uv}((1-t)t_1 + tt_2)$, obtemos

$$\begin{aligned} \alpha U_1 + \beta U_2 &= 0 \Rightarrow \alpha \gamma(t_1) + \beta \gamma(t_2) = 0 \\ &\Rightarrow \alpha((1-t_1)u^p + t_1v^p)^{\frac{1}{p}} + \beta((1-t_2)u^p + t_2v^p)^{\frac{1}{p}} = 0 \\ &\Rightarrow \alpha((1-t_1)u^p + t_1v^p)^{\frac{1}{p}} = -\beta((1-t_2)u^p + t_2v^p)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow ((1-t_1)(\alpha u)^p + t_1(\alpha v)^p)^{\frac{1}{p}} = ((1-t_2)(-\beta u)^p + t_2(-\beta v)^p)^{\frac{1}{p}} \\
&\Rightarrow (1-t_1)(\alpha u)^p + t_1(\alpha v)^p = (1-t_2)(-\beta u)^p + t_2(-\beta v)^p \\
&\Rightarrow [\alpha^p(1-t_1) + (-\beta)^p(1-t_2)] u^p + [\alpha^p t_1 + (-\beta)^p t_2] v^p = 0.
\end{aligned}$$

Usando que u^p e v^p são L.I. tem-se

$$\begin{cases} \alpha^p(1-t_1) + (-\beta)^p(1-t_2) = 0; \\ \alpha^p t_1 + (-\beta)^p t_2 = 0. \end{cases}$$

Logo $\alpha^p + (-\beta)^p = 0$. Note que $0 \leq \alpha^p = -(-\beta)^p \leq 0$ e, dessa forma, $\alpha = \beta = 0$. Daí,

$$\begin{aligned}
&\|\nabla \gamma_{U_1 U_2}(t)\|_{L^p(\Omega)}^p < (1-t)\|\nabla U_1\|_{L^p(\Omega)}^p + t\|\nabla U_2\|_{L^p(\Omega)}^p \\
&\Rightarrow \|\nabla \gamma((1-t)t_1 + tt_2)\|_{L^p(\Omega)}^p < (1-t)\|\nabla \gamma(t_1)\|_{L^p(\Omega)}^p + t\|\nabla \gamma(t_2)\|_{L^p(\Omega)}^p,
\end{aligned}$$

isto é, $t \mapsto \|\nabla \gamma(t)\|_{L^p(\Omega)}^p$ será estritamente convexa. Vejamos que vale (1.19).

Até agora já sabemos do Lema 1.4 que

$$\begin{aligned}
|\nabla \gamma(t)|^p &\leq (1-t)|\nabla u|^p + t|\nabla v|^p \Rightarrow \int_{\Omega} |\nabla \gamma(t)|^p dx \leq (1-t) \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx + t \int_{\Omega} |\nabla v|^p dx \\
&\Rightarrow \|\nabla \gamma(t)\|_{L^p(\Omega)}^p \leq (1-t)\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p + t\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}^p.
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Vejamos que não pode ocorrer a igualdade em (1.20), para nenhum $t \in (0, 1)$. De fato, caso ocorra a igualdade para algum $t \in (0, 1)$, então

$$\int_{\Omega} ((1-t)|\nabla u|^p + t|\nabla v|^p - |\nabla \gamma(t)|^p) dx = 0.$$

E, como $(1-t)|\nabla u|^p + t|\nabla v|^p - |\nabla \gamma(t)|^p \geq 0$, obtemos

$$|\nabla \gamma(t)|^p = (1-t)|\nabla u|^p + t|\nabla v|^p.$$

Perceba que, seguindo como na demonstração do Lema 1.4,

$$\begin{aligned}
p\gamma(t)^{p-1}|\nabla \gamma(t)| &= |(1-t)pu^{p-1}\nabla u + tpv^{p-1}\nabla v| \\
&\leq (1-t)pu^{p-1}|\nabla u| + tpv^{p-1}|\nabla v| \\
&= \dots \\
&= p\gamma(t)^{p-1}[(1-t)|\nabla u|^p + t|\nabla v|^p]^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

e, como $|\nabla \gamma(t)|^p = (1-t)|\nabla u|^p + t|\nabla v|^p$, de fato o que ocorre é a igualdade

$$|(1-t)pu^{p-1}\nabla u + tpv^{p-1}\nabla v| = (1-t)pu^{p-1}|\nabla u| + tpv^{p-1}|\nabla v|.$$

E, como consequência da desigualdade de Cauchy-Schwarz, para cada $x \in \Omega$ existe α_x tal que

$$tpv^{p-1}\nabla v = \alpha_x(1-t)pu^{p-1}\nabla u.$$

Então, considerando $\alpha: \Omega \rightarrow [0, \infty)$ dada por $\alpha(x) = \frac{\alpha_x(1-t)u^{p-1}}{tv^{p-1}}$, temos

$$\nabla v = \alpha \nabla u. \quad (1.21)$$

Por outro lado, seguindo como na demonstração do Lema 1.4, obtemos a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} F[(1-t)(Q(u), M(|\nabla u|)) + t(Q(v), M(|\nabla v|))] \\ = (1-t)F(Q(u), M(|\nabla u|)) + tF(Q(v), M(|\nabla v|)). \end{aligned}$$

Logo, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(Q(u), M(|\nabla u|)) - (Q(v), M(|\nabla v|))$ é múltiplo do autovetor correspondente ao autovalor 0 da hessiana de F no ponto $(Q(u), M(|\nabla u|))$. Assim, existe $\lambda: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$(Q(v) - Q(u), M(|\nabla v|) - M(|\nabla u|)) = \lambda(Q(u), M(|\nabla u|)).$$

Daí, $Q(v) = (\lambda + 1)Q(u)$ e $M(|\nabla v|) = (\lambda + 1)M(|\nabla u|)$. Como $Q(v), Q(u) \geq 0$ tem-se $\lambda + 1 \geq 0$. Denote $\beta: \Omega \rightarrow [0, \infty)$ tal que $\beta^p = \lambda + 1$. Dessa forma,

$$\begin{cases} v^p = \beta^p u^p, \\ |\nabla v|^p = \beta^p |\nabla u|^p. \end{cases}$$

Usando isso com (1.21) tem-se

$$\beta^p |\nabla u|^p = |\nabla v|^p = \alpha^p |\nabla u|^p.$$

Assim, $\alpha = \beta$. Então

$$\begin{cases} v = \alpha u, \\ \nabla v = \alpha \nabla u. \end{cases}$$

Vejamos que $\alpha = \frac{v}{u}$ localmente (para cada $K \subset \Omega$ compacto) pertence a $C(\Omega) \cap W$. Fixe $K \subset \Omega$ compacto, como $u, v \in C(\Omega)$ existem $m_u, m_v, M_u, M_v > 0$ tais que

$$m_u \leq u \leq M_u \text{ e } m_v \leq v \leq M_v \text{ em } K.$$

Assim

$$\int_K |\alpha|^p dx = \int_K \frac{v^p}{u^p} dx \leq \frac{1}{m_u^p} \int_K v^p dx < \infty$$

e

$$\int_K |\nabla \alpha|^p dx = \int_K \left| \frac{u \nabla v - v \nabla u}{u^2} \right|^p dx \leq \frac{M_u^p}{m_u^{2p}} \int_K |\nabla v|^p dx + \frac{M_v^p}{m_u^{2p}} \int_K |\nabla u|^p dx < \infty.$$

Isso conclui que α localmente pertence a $C(\Omega) \cap W$.

Note que a derivada fraca de α satisfaz

$$\nabla \alpha = \nabla \left(\frac{v}{u} \right) = \frac{u \nabla v - v \nabla u}{u^2} = \frac{\alpha u \nabla u - \alpha u \nabla u}{u^2} = 0.$$

Então, como Ω é conexo, α é constante. Portanto, temos uma contradição, já que u e v são L.I. e $v = \alpha u$. ■

Capítulo 2

Um Problema de Autovalor Não-linear da Física Matemática

Os resultados principais obtidos no Capítulo 1 serão aplicados em uma equação elíptica, de modo que aproximaremos problemas do tipo autovalor. Esses problemas são aqueles que podemos escrever na forma

$$Lu = \omega u,$$

onde L é um operador diferencial não-linear. Aqui surgem duas perguntas distintas:

1. Dado ω , existe uma única solução para o problema?
2. Existe um único autovalor satisfazendo a limitação $\int u^2 = 1$?

Em geral, tais estruturas não são equivalentes, pois na segunda questão os autovalores não necessariamente são fixados e aparecem como multiplicadores de Lagrange. Trataremos o primeiro problema no caso da equação de Schrödinger quasilinear, tanto para Ω limitado quanto para $\Omega = \mathbb{R}^N$. E o segundo, para esta mesma equação, apenas quando Ω é limitado.

2.1 Equação de Schrödinger Quasilinear

Ao investigarmos as ondas estacionárias $\phi(t, x) = e^{i\omega t}u(x)$ da equação de Schrödinger quasilinear

$$i\partial_t\phi - \Delta\phi - \phi\Delta(|\phi|^2) + V(x)\phi + \phi^3 = 0, \text{ em } (0, \infty) \times \Omega,$$

que serve como modelo em muitas situações físicas, surge a equação que consideraremos:

$$-\Delta u - u\Delta(u^2) + V(x)u + u^3 = \omega u, \text{ em } \Omega, \quad (2.1)$$

onde $V(x)$ é o potencial $|x|^2$ no caso em que $\Omega = \mathbb{R}^N$, ou $V \in L^\infty(\Omega)$ e $u = 0$ na fronteira no caso em que Ω é um domínio regular limitado, e a dimensão $N \geq 1$.

Em [21, 25] os autores consideraram $\Omega = \mathbb{R}^N$ e $\omega = 0$, e utilizando-se minimização restrita, provou-se pela primeira vez a existência de soluções para (2.1). Em tal equação, a presença do termo $u\Delta(u^2)$ traz consigo algumas dificuldades quando tentamos encontrar soluções de (2.1). De fato, consideremos apenas o problema

$$\begin{cases} -u\Delta(u^2) = f(x), & \text{em } \Omega; \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dada $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, temos que se $u \in C^2(\Omega)$ satisfaz o problema anterior, então

$$\begin{aligned} -u\Delta(u^2)\varphi = f(x)\varphi &\Rightarrow -\int_{\Omega} \Delta(u^2)u\varphi dx = \int_{\Omega} f(x)\varphi dx \\ &\Rightarrow \int_{\Omega} \nabla(u^2)\nabla(u\varphi)dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u^2}{\partial \nu} \cdot u\varphi dx = \int_{\Omega} f(x)\varphi dx \\ &\Rightarrow \int_{\Omega} \nabla(u^2)\nabla u\varphi dx + \int_{\Omega} \nabla(u^2)\nabla\varphi u dx - \int_{\Omega} f(x)\varphi dx = 0 \\ &\Rightarrow 2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 u\varphi dx + 2 \int_{\Omega} u^2 \nabla u \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} f(x)\varphi dx = 0. \end{aligned}$$

Assim, o funcional energia associado ao problema $\phi: H \rightarrow \mathbb{R}$ seria dado por

$$\phi(u) = \int_{\Omega} u^2 |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} f(x) dx,$$

uma vez que

$$\phi'(u)\varphi = 2 \int_{\Omega} u |\nabla u|^2 \varphi dx + 2 \int_{\Omega} u^2 \nabla u \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} f(x) \varphi dx, \text{ para } \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

onde H deve ser escolhido de tal forma que o funcional esteja bem definido. No entanto, não podemos considerar $H = H^1(\Omega)$, uma vez que não conseguimos garantir que

$$\int_{\Omega} u^2 |\nabla u|^2 dx < \infty.$$

Para tentar resolver este problema, uma alternativa seria construir o espaço

$$H = \{u \in H^1(\Omega); \int_{\Omega} u^2 |\nabla u|^2 dx < \infty\}.$$

No entanto, tal H não é sequer um subespaço vetorial de $H^1(\Omega)$. Para contornar este problema, em [21, 13] foi feita uma mudança de variável $u = f(v)$ (cuja derivada é dada em (2.2) a seguir) e isso reduz (2.1) a uma equação semilinear, com o termo de ordem zero mais complicado. Também usada em [14, 11], tal redução permite que trabalhem na configuração de $H_0^1(\Omega)$.

O método dual que foi utilizado em [13] também será aplicado aqui. Para isso, consideremos $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função ímpar satisfazendo

$$f'(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2f^2(t)}}, \text{ em } (0, \infty), \quad f(0) = 0. \quad (2.2)$$

Como pode ser visto em [2, 13], se u é solução para (2.1), então $v = f^{-1}(u)$ é solução para

$$-\Delta v + (V(x) - \omega) \frac{f(v)}{\sqrt{1 + 2f^2(v)}} + \frac{f^3(v)}{\sqrt{1 + 2f^2(v)}} = 0. \quad (2.3)$$

De [13, Lema 2.1], temos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = 1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{\sqrt{t}} = 2^{\frac{1}{4}}, \quad (2.4)$$

e, de [13, Lema 2.2],

$$\frac{1}{2}f(t) \leq \frac{t}{\sqrt{1 + 2f^2(t)}} \leq f(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (2.5)$$

Isto implica nesta outra

$$\frac{f^2(t)}{2} \leq \frac{tf(t)}{\sqrt{1 + 2f^2(t)}} \leq f^2(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Considere $H = H_0^1(\Omega)$ com a norma padrão, se Ω for um domínio regular limitado. No caso que $\Omega = \mathbb{R}^N$, vamos considerar $H = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 |x|^2 dx < \infty\}$ com a norma

$$\|u\|_H^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + |u|^2 |x|^2) dx.$$

Proposição 2.1. *Fixado $\omega \in \mathbb{R}$, as soluções clássicas de (2.3) são pontos críticos do funcional $\mathcal{A}_\omega: H \rightarrow \mathbb{R}$ definido por*

$$\mathcal{A}_\omega(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (V(x) - \omega) f^2(v) dx + \frac{1}{4} \int_{\Omega} f^4(v) dx.$$

Demonstração. Dada $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, obtemos

$$\begin{aligned}
& -\Delta v\varphi + (V(x) - \omega)f(v)f'(v)\varphi + f^3(v)f'(v)\varphi = 0 \\
\Rightarrow & -\int_{\Omega} \Delta v\varphi dx + \int_{\Omega} (V(x) - \omega)f(v)f'(v)\varphi dx + \int_{\Omega} f^3(v)f'(v)\varphi dx = 0 \\
\Rightarrow & \int_{\Omega} \nabla v \nabla \varphi dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} \varphi dx + \int_{\Omega} (V(x) - \omega)f(v)f'(v)\varphi dx + \int_{\Omega} f^3(v)f'(v)\varphi dx = 0 \\
\Rightarrow & \int_{\Omega} \nabla v \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} (V(x) - \omega)f(v)f'(v)\varphi dx + \int_{\Omega} f^3(v)f'(v)\varphi dx = 0 \\
\Rightarrow & \mathcal{A}'_{\omega}(v)\varphi = 0.
\end{aligned}$$

Para entendermos melhor, basta seguirmos um argumento análogo ao que foi feito na Afirmação [A.1](#), do Capítulo 1. ■

Note ainda que $\mathcal{A}_{\omega}$ está bem definida, pois uma vez que temos as desigualdades em [\(2.5\)](#), obteremos $f^2(t) + 2f^4(t) \leq 4t^2$, visto que

$$\begin{aligned}
\frac{f(t)}{2} & \leq \frac{t}{\sqrt{1 + 2f^2(t)}} \Rightarrow f(t)\sqrt{1 + 2f^2(t)} \leq 2t \\
& \Rightarrow f(t)^2(1 + 2f^2(t)) \leq 4t^2 \\
& \Rightarrow f^2(t) + 2f^4(t) \leq 4t^2.
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
|2(V(x) - \omega)f^2(v) + f^4(v)| & \leq 2(\|V\|_{L^{\infty}} + |\omega|)f^2(v) + f^4(v) \leq C(f^2(v) + 2f^4(v)) \\
& \leq 4Cv^2 \in L^1(\Omega).
\end{aligned}$$

Isso conclui que as integrais na definição de $\mathcal{A}_{\omega}$ são finitas. Além disso, mostra-se que $\mathcal{A}_{\omega} \in C^1(H; \mathbb{R})$.

Proposição 2.2. *Seja $u \in H \cap C^2(\Omega)$ ponto crítico do funcional $\mathcal{A}_{\omega}$. Então u é solução clássica de [\(2.3\)](#).*

Demonstração. Dada $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ tem-se

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} (V(x) - \omega)f(u)f'(u)\varphi dx + \int_{\Omega} f^3(u)f'(u)\varphi dx = 0.$$

Pela Identidade de Green [0.6](#),

$$\int_{\Omega} -\Delta u \varphi dx + \int_{\Omega} (V(x) - \omega)f(u)f'(u)\varphi + \int_{\Omega} f^3(u)f'(u)\varphi = 0.$$

Assim

$$\int_{\Omega} [-\Delta u + (V(x) - \omega)f(u)f'(u) + f^3(u)f'(u)] \varphi dx = 0.$$

Como $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ é arbitrária, temos que

$$-\Delta u + (V(x) - \omega)f(u)f'(u) + f^3(u)f'(u) = 0.$$

Portanto u é solução clássica (2.3). ■

Por outro lado, vamos definir

$$\mathcal{M} := \left\{ v \in H; \int_{\Omega} f^2(v) dx = 1 \right\}$$

e também o funcional energia $\mathcal{E}: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathcal{E}(v) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} V(x) f^2(v) dx + \frac{1}{4} \int_{\Omega} f^4(v) dx.$$

Neste caso, procuramos por pontos críticos de $\mathcal{E}|_{\mathcal{M}}$ e ω aparece como um Multiplicador de Lagrange, pois o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange em 0.7 nos dá a existência de um $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathcal{E}'(u) = \lambda R'(u) \Rightarrow \mathcal{E}'(u) \cdot \varphi = R'(u) \cdot \varphi, \quad \forall \varphi \in H,$$

onde $R: H \rightarrow \mathbb{R}$ é a função C^1 -diferenciável definida por

$$R(v) = \int_{\Omega} f^2(v) dx - 1.$$

Pela expressão de $\mathcal{E}'(u)$ e $R'(u)$, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} V(x) f(u) f'(u) \varphi dx + \int_{\Omega} f^2(u)^3 f'(u) \varphi dx = \lambda 2 \int_{\Omega} f(u) f'(u) \varphi dx \\ \Rightarrow & \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} (V(x) - 2\lambda) f(u) f'(u) \varphi dx + \int_{\Omega} f(u)^3 f'(u) \varphi dx = 0. \end{aligned}$$

Veremos, mais adiante, que $\mathcal{M} = R^{-1}(0)$, com 0 sendo valor regular de R .

2.2 Resultados Básicos

Apresentaremos alguns resultados a serem utilizados na demonstração dos Teoremas 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4. Agora, veremos um lema que nos diz algo a respeito da convexidade do gradiente dos caminhos a serem considerados.

Lema 2.1. *Sejam $u, v \in H \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ tais que $u, v > 0$ em Ω . Se*

$$\gamma(t) = f^{-1} \left(\sqrt{(1-t)f^2(u) + tf^2(v)} \right), \quad \forall t \in [0, 1], \quad (2.6)$$

então $\gamma: [0, 1] \rightarrow H$ está bem definida e, pontualmente em Ω , $t \mapsto |\nabla \gamma(t)|^2$ é convexa em $[0, 1]$.

Demonstração. Inicialmente, vejamos que $t \mapsto |\nabla \gamma(t)|^2$ é convexa em $[0, 1]$ (pontualmente em Ω). Para isso, usaremos o Lema 1.4. Já sabemos que $u, v \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$, pois $H := H_0^1(\Omega)$, e que $u, v > 0$ em Ω . Agora, considere $Q, M \in C([0, \infty)) \cap C^1(0, \infty)$ dadas por hipótese,

$$Q(z) = f^2(z) \quad \text{e} \quad M(z) = z^2.$$

Daí, $Q(0) = (f(0))^2 = 0$ e, dado $z \in (0, \infty)$, temos

$$Q'(z) = (f^2(z))' = 2f(z) \cdot f'(z) = \frac{2f(z)}{\sqrt{1 + 2f^2(z)}} > 0 \quad \text{e} \quad M'(z) = 2z > 0.$$

Também temos que $Q^{-1}(z) = f^{-1}(\sqrt{z})$, pois

$$Q \circ Q^{-1}(z) = f^2(f^{-1}(\sqrt{z})) = (\sqrt{z})^2 = z$$

e

$$Q^{-1} \circ Q(z) = f^{-1}(\sqrt{f^2(z)}) = f^{-1}(f(z)) = z.$$

Assim,

$$\gamma(t) = Q^{-1}((1-t)Q(u) + tQ(v)) = f^{-1}(\sqrt{(1-t)f^2(u) + tf^2(v)}).$$

Além disso, definindo $F_1 := Q' \circ Q^{-1}$ e $F_2 := M^{-1}$, obtemos

$$\begin{aligned} F_1(z_1) &= 2f(f^{-1}(\sqrt{z_1})) \cdot f'(f^{-1}(\sqrt{z_1})) = 2\sqrt{z_1} \frac{1}{\sqrt{1 + 2f^2(f^{-1}(\sqrt{z_1}))}} \\ &= 2(z_1)^{\frac{1}{2}} \cdot (1 + 2z_1)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

e que $F_2(z_2) = z_2^{\frac{1}{2}}$. Com isso, segue que

$$\begin{aligned} F_1'(z_1) &= \frac{1}{2} 2(z_1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1 + 2z_1)^{-\frac{1}{2}} - 2(z_1)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} (1 + 2z_1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2 \\ &= z_1^{-\frac{1}{2}} (1 + 2z_1)^{-\frac{1}{2}} - 2(z_1)^{\frac{1}{2}} (1 + 2z_1)^{-\frac{3}{2}} = z_1^{-\frac{1}{2}} (1 + 2z_1)^{-\frac{3}{2}} ((1 + 2z_1) - 2z_1) \\ &= z_1^{-\frac{1}{2}} (1 + 2z_1)^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$F_1''(z_1) = -\frac{1}{2}z_1^{-\frac{3}{2}}(1+2z_1)^{-\frac{3}{2}} - z_1^{-\frac{1}{2}}\frac{3}{2}(1+2z_1)^{-\frac{3}{2}} < 0$$

e também

$$F_2''(z_2) = \left(\frac{1}{2}z_2^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{4}z_2^{-\frac{3}{2}} < 0,$$

ou seja, F_1 e F_2 são côncavas, visto que ambas têm derivada segunda negativa. Além disso, percebe-se que

$$\left(\frac{F_2(z_2)}{F_2'(z_2)}\right)' - 1 = \left(\frac{\sqrt{z_2}}{\frac{1}{2\sqrt{z_2}}}\right)' - 1 = (2z_2)' - 1 = 1$$

e

$$\begin{aligned} \left(\frac{F_1(z_1)}{F_1'(z_1)}\right)' - 1 &= \left(\frac{\frac{2\sqrt{z_1}}{\sqrt{1+2z_1}}}{\frac{1}{\sqrt{z_1}\sqrt{(1+2z_1)^3}}}\right)' - 1 = \left(\frac{2z_1(1+2z_1)^{\frac{3}{2}}}{(1+2z_1)^{\frac{1}{2}}}\right)' - 1 \\ &= (2z_1(1+2z_1))' - 1 = (2z_1 + 4z_1^2)' - 1 = 2 + 8z_1^2 - 1 \\ &= 1 + 8z_1^2 \geq 1. \end{aligned}$$

Assim, pela Observação [1.4](#), concluímos que $F: (z_1, z_2) \mapsto F_1(z_1)F_2(z_2)$ é côncava em $(0, \infty) \times (0, \infty)$. Portanto, pelo Lema [1.4](#), concluímos que

$$t \mapsto |\nabla \gamma(t)|^2$$

é, pontualmente em Ω , convexa em $[0, 1]$. Por fim, vejamos que γ está bem definida. Sabemos que f^2 é crescente, pois

$$(f^2(z))' = 2f(z)f'(z) \geq 0, \quad \forall z \in [0, \infty).$$

Como $\min\{u, v\} \leq u, v$, obtemos que $f^2(\min\{u, v\}) \leq f^2(u), f^2(v)$. Daí,

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= f^{-1}\left(\sqrt{(1-t)f^2(u) + tf^2(v)}\right) \\ &\geq f^{-1}\left(\sqrt{(1-t)f^2(\min\{u, v\}) + tf^2(\min\{u, v\})}\right) \\ &= f^{-1}\left(\sqrt{f^2(\min\{u, v\})}\right) \\ &= \min\{u, v\}. \end{aligned}$$

Analogamente, $\gamma(t) \leq \max\{u, v\}$. Logo,

$$\min\{u, v\} \leq \gamma(t) \leq \max\{u, v\}, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Com isso,

$$\int_{\Omega} \gamma(t)^2 dx \leq \int_{\Omega} (\max\{u, v\})^2 dx < \int_{\Omega} (u + v)^2 dx < \infty,$$

pois $u, v \in H$, que é um espaço vetorial e, assim, $u + v \in H$. Em seguida, definindo

$$h(t) = \int_{\Omega} |\nabla \gamma(t)|^2 dx,$$

temos que

$$h(0) = \int_{\Omega} |\nabla \gamma(0)|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx < \infty$$

e

$$h(1) = \int_{\Omega} |\nabla \gamma(1)|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx < \infty,$$

pelo fato que $u, v \in H$. Como $t \mapsto |\nabla \gamma(t)|^2$ é convexa em $[0, 1]$, obtemos

$$\begin{aligned} |\nabla \gamma(t)|^2 &= |\nabla \gamma((1-t) \cdot 0 + t \cdot 1)|^2 \\ &\leq (1-t)|\nabla \gamma(0)|^2 + t|\nabla \gamma(1)|^2 \\ &= (1-t)|\nabla u|^2 + t|\nabla v|^2. \end{aligned}$$

Com isso,

$$h(t) = h((1-t) \cdot 0 + t \cdot 1) \leq (1-t)h(0) + th(1) < \infty,$$

para todo $t \in [0, 1]$. Para finalizar, dado $x \in \partial\Omega$,

$$\begin{aligned} \gamma(t)(x) &= f^{-1} \left(\sqrt{(1-t)f^2(u(x)) + tf^2(v(x))} \right) \\ &= f^{-1} \left(\sqrt{(1-t)f^2(0) + tf^2(0)} \right) \\ &= f^{-1}(0) \\ &= 0, \quad \forall t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Logo, $\gamma(t) \in H$ e concluímos que $\gamma: [0, 1] \rightarrow H$ está bem definida. ■

O lema a seguir mostra que γ dada em [2.6](#) é localmente Lipschitziana em $t = 0$, quando supomos u e v comparáveis. Para isto, será usado o Lema [1.1](#), que foi dado no Capítulo 1.

Lema 2.2. *Sejam $u, v \in H$ tais que $u, v > 0$ em Ω e γ como em [\(2.6\)](#). Se existe $\delta \geq 1$ tal que $\delta^{-1}v \leq u \leq \delta v$, em Ω , então $\gamma: [0, 1] \rightarrow H$ satisfaz $\gamma(0) = u$, $\gamma(1) = v$, e γ é localmente Lipschitziana em $t = 0$.*

Demonstração. Sabemos que

$$\gamma(0) = f^{-1} \left(\sqrt{f^2(u)} \right) = f^{-1}(f(u)) = u$$

e

$$\gamma(1) = f^{-1} \left(\sqrt{f^2(v)} \right) = f^{-1}(f(v)) = v.$$

Agora, vamos usar o Lema [1.1](#) para demonstrarmos que γ é localmente Lipschitziana em $t = 0$. Para isso, note, inicialmente, que se considerarmos $Q(z) = f^2(z)$, obteremos

$$Q'(z) = 2f(z) \cdot f'(z) = \frac{2f(z)}{\sqrt{1 + 2f^2(z)}} > 0, \text{ para } z > 0.$$

Isso conclui o item a). Antes de mostrarmos que a hipótese b) do Lema [1.1](#) é satisfeita, vejamos que a função $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(z) = \frac{f(c_0 z)}{f(z)}$$

é limitada, onde consideramos $c_0 > 0$ é como no Lema [1.1](#) (item b)), isto é, $c_0 > 0$ satisfaz

$$\frac{1}{c_0} \leq \frac{z_1}{z_2} \leq c_0,$$

em que $z_1, z_2 > 0$. De fato, desde que

$$\lim_{z \rightarrow 0} g(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(c_0 z)}{f(z)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(c_0 z)}{c_0 z} \frac{z}{f(z)} c_0 = c_0$$

e

$$\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(c_0 z)}{f(z)} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(c_0 z)}{\sqrt{c_0 z}} \frac{\sqrt{z}}{f(z)} \sqrt{c_0} = 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{-\frac{1}{4}} \sqrt{c_0} = \sqrt{c_0}.$$

Além disso, g é contínua, o que mostra que g limitada. Seja K a constante que a limita. Assim,

$$\text{existe } c_2 > 0 \quad \text{tal que} \quad \frac{1}{c_2} \leq \frac{Q'(z_1)}{Q'(z_2)} \leq c_2,$$

pois

$$\begin{aligned} \frac{Q'(z_1)}{Q'(z_2)} &= \frac{\frac{2f(z_1)}{\sqrt{1 + 2f^2(z_1)}}}{\frac{2f(z_2)}{\sqrt{1 + 2f^2(z_2)}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2f^2(z_1)}} \frac{f(z_1)}{f(z_2)} \sqrt{1 + 2f^2(z_2)} \leq \frac{f(z_1)}{z_1} \frac{f(z_1)}{f(z_2)} \frac{2z_2}{f(z_2)} \\ &\leq 2c_0 \left(\frac{f(z_1)}{f(z_2)} \right)^2 \leq 2c_0 \left(\frac{f(c_0 z_2)}{f(z_2)} \right)^2 \leq 2c_0 K^2 =: c_2, \end{aligned}$$

uma vez que $\frac{1}{c_0} \leq \frac{z_1}{z_2} \leq c_0$ (e, assim, $z_1 \leq c_0 z_2$) e f é crescente. Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{Q'(z_1)}{Q'(z_2)} &\geq \frac{f(z_1)}{2z_1} \frac{f(z_1)}{f(z_2)} \frac{z_2}{f(z_2)} \\ &\geq \frac{1}{2c_0} \left(\frac{f(z_1)}{f(z_2)} \right)^2 \\ &\geq \frac{1}{2c_0} \left(\frac{f(z_1)}{f(c_0 z_1)} \right)^2 \\ &\geq \frac{1}{2c_0 K} = \frac{1}{c_2}, \end{aligned}$$

onde usamos o fato que

$$g(z) = \frac{f(c_0 z)}{f(z)} \leq K \Rightarrow \frac{f(z)}{f(c_0 z)} \geq \frac{1}{K}.$$

Desse modo, vale o item b) do Lema [1.1](#). Para finalizar, provemos o item c). Para isso, perceba antes que

$$\begin{aligned} Q''(z) &= \left(2f(z) (1 + 2f^2(z))^{-\frac{1}{2}} \right)' \\ &= 2f'(z) (1 + 2f^2(z))^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} 2f(z) (1 + 2f^2(z))^{-\frac{3}{2}} 4f(z)f'(z) \\ &= 2f'(z) (1 + 2f^2(z))^{-\frac{1}{2}} \left[1 - 2f^2(z) (1 + 2f^2(z))^{-1} \right] \\ &= 2f'(z) (1 + 2f^2(z))^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{1 + 2f^2(z) - 2f^2(z)}{1 + 2f^2(z)} \right] \\ &= 2f'(z) (1 + 2f^2(z))^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{1 + 2f^2(z)} \\ &= \frac{2f'(z)}{\sqrt{(1 + 2f^2(z))^3}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1 + 2f^2(z)} \sqrt{(1 + 2f^2(z))^3}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1 + 2f^2(z)} \sqrt{1 + 2f^2(z)} (1 + 2f^2(z))} \\ &= \frac{2}{(1 + 2f^2(z))^2} \\ &= 2f'(z)^4. \end{aligned}$$

Assim, tomando $\delta = 2$ e $c_3 = 16 \cdot 16$ no Lema [1.1](#), tais que $1 \leq \frac{z_1}{z_2} \leq 2$, obtemos

$$\frac{Q''(z_1)}{Q''(z_2)} = \frac{f'(z_1)^4}{f'(z_2)^4} \geq \frac{f^4(z_1)}{16z_1^4} \cdot \frac{z_2^4}{f^4(z_2)} \geq \frac{1}{16} \cdot \frac{f^4(z_2)}{z_1^4} \cdot \frac{z_2^4}{f^4(z_2)} \geq \frac{1}{16} \frac{1}{2^4} = \frac{1}{c_3},$$

onde usamos (2.5). Logo, vale o item c) do Lema 1.1. Portanto, γ é localmente Lipschitziana em $t = 0$, para $H = H_0^1(\Omega)$. ■

Na demonstração do Teorema 2.4 usa-se um decaimento das soluções positivas do problema, que é demonstrado no Teorema 2.3. O Teorema 2.3, por sua vez, é um caso particular do Lema a seguir que se encontra em [23], na Proposição 6.1.

Lema 2.3. *Sejam $N \geq 1$ e $\gamma < 2$. Fixe $\rho \geq 0$ e uma função não-negativa $W \in C^1([\rho, \infty])$. Se*

$$\lim_{s \rightarrow \infty} W(s) > 0 \quad e \quad \lim_{s \rightarrow \infty} W'(s)s^{1+\beta} = 0 \quad \text{para algum } \beta > 0,$$

então existe uma função radial não-negativa $h: \mathbb{R}^N \setminus \overline{B_\rho(0)} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$-\Delta h(x) + \frac{W^2(|x|)}{|x|^\gamma} h(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{B_\rho(0)} \quad (2.7)$$

e

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} h(|x|)|x|^{\frac{N-1}{2}-\frac{\gamma}{4}} \exp\left(\int_\rho^{|x|} \frac{W(s)}{s^{\frac{\gamma}{2}}} ds\right) = 1. \quad (2.8)$$

Demonstração. Como $\gamma < 2$, podemos supor sem perda de generalidade que $\beta + \frac{\gamma}{2} < 1$, ou seja, que $\beta < 1 - \frac{\gamma}{2}$. Assim como feito na construção da prova do Teorema 3.3 em [3], defina, para $s > \rho$ e $\tau \in \mathbb{R}$,

$$\phi_\tau(s) = -\frac{N-1-\frac{\gamma}{2}}{2s} - \frac{W(s)}{s^{\frac{\gamma}{2}}} + \frac{\tau}{s^{1+\beta}},$$

e, para $x \in \mathbb{R} \setminus \overline{B_\rho}$,

$$\Phi_\tau(x) = \exp\left(\int_\rho^{|x|} \phi_\tau(s) ds\right).$$

Considerando $F(t) = \int_\rho^t \phi_\tau(s) ds$, temos que $F'(t) = \phi_\tau$. Considere também $G(x) = |x|$. Com isto,

$$\frac{\partial F \circ G}{\partial x_i}(x) = F'(G(t)) \cdot \frac{\partial G}{\partial x_i}(x) = \phi_\tau(|x|) \cdot \frac{x_i}{|x|}.$$

Assim,

$$\frac{\partial \Phi_\tau}{\partial x_i}(x) = \phi_\tau(|x|) \frac{x_i}{|x|} \Phi_\tau(x).$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi_\tau}{\partial x_i^2}(x) &= \phi'_\tau(|x|) \frac{x_i^2}{|x|^2} \Phi_\tau(x) + \phi_\tau(|x|) \frac{|x|^2 - x_i^2}{|x|^3} \Phi_\tau(x) \\ &\quad + \phi_\tau(|x|)^2 \frac{x_i^2}{|x|^2} \Phi_\tau(x). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\Delta\Phi_\tau(x) &= \phi'_\tau(|x|)\Phi_\tau(x) + \frac{N-1}{|x|}\phi_\tau(|x|)\Phi_\tau(x) + \phi_\tau(|x|)^2\Phi_\tau(x) \\ &= \left(\phi'_\tau(|x|) + \frac{N-1}{|x|}\phi_\tau(|x|) + \phi_\tau(|x|)^2 \right) \Phi_\tau(x).\end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}-\Delta\Phi_\tau(x) &= -\left[\left(-\frac{(N-1-\frac{\gamma}{2})}{2|x|^2} - \frac{W'(|x|)|x|^{\frac{\gamma}{2}} - \frac{\gamma}{2}|x|^{\frac{\gamma}{2}-1}W(|x|)}{|x|^\gamma} - \frac{(1+\beta)|x|^\beta\tau}{|x|^{2+2\beta}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{N-1}{|x|} \left(-\frac{(N-1-\frac{\gamma}{2})}{2|x|} - \frac{W(|x|)}{|x|^{\frac{\gamma}{2}}} + \frac{\tau}{|x|^{1+\beta}} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(-\frac{(N-1-\frac{\gamma}{2})}{2|x|} - \frac{W(|x|)}{|x|^{\frac{\gamma}{2}}} + \frac{\tau}{|x|^{1+\beta}} \right)^2 \right) \Phi_\tau(x) \right] \\ &= \left(\frac{(N-2)(N-1-\frac{\gamma}{2})}{2|x|^2} + \frac{W'(|x|)}{|x|^{\frac{\gamma}{2}}} + \frac{(N-1-\frac{\gamma}{2})W(|x|)}{|x|^{1+\frac{\gamma}{2}}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(N-2-\beta)\tau}{|x|^{2+\beta}} - \left(\frac{(N-1-\frac{\gamma}{2})}{2|x|} + \frac{W(|x|)}{|x|^{\frac{\gamma}{2}}} - \frac{\tau}{|x|^{1+\beta}} \right)^2 \right) \Phi_\tau(x) \\ &= \left(\frac{(N-2)(N-1-\frac{\gamma}{2})}{2|x|^2} + \frac{W'(|x|)}{|x|^{\frac{\gamma}{2}}} + \frac{(N-1-\frac{\gamma}{2})W(|x|)}{|x|^{1+\frac{\gamma}{2}}} \right. \\ &\quad - \frac{(N-2-\beta)\tau}{|x|^{2+\beta}} - \frac{(N-1-\frac{\gamma}{2})^2}{4|x|^2} - \frac{W(|x|)^2}{|x|^\gamma} - \frac{\tau^2}{|x|^{2+2\beta}} \\ &\quad \left. - \frac{2(N-1-\frac{\gamma}{2})W(|x|)}{2|x|^{1+\frac{\gamma}{2}}} + \frac{2(N-1-\frac{\gamma}{2})\tau}{2|x|^{2+\beta}} + \frac{2W(|x|)\tau}{|x|^{1+\frac{\gamma}{2}+\beta}} \right) \Phi_\tau(x) \\ &= -\frac{W(|x|)^2}{|x|^\gamma} + \frac{1}{|x|^{1+\beta+\frac{\gamma}{2}}} \left[2\tau W(|x|) + W'(|x|)|x|^{1+\beta} + \frac{\tau^2}{|x|^{1+\beta-\frac{\gamma}{2}}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(N-1-\frac{\gamma}{2}+2+\beta-N)\tau}{|x|^{1-\frac{\gamma}{2}}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(N-1-\frac{\gamma}{2})(2(N-2)-(N-1-\frac{\gamma}{2}))}{4|x|^2} \right] \Phi_\tau(x) \\ &= -\frac{W(|x|)^2}{|x|^\gamma} + \frac{1}{|x|^{1+\beta+\frac{\gamma}{2}}} \left[2\tau W(|x|) + W'(|x|)|x|^{1+\beta} + \frac{\tau^2}{|x|^{1+\beta-\frac{\gamma}{2}}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(N-1-\frac{\gamma}{2})(N-3-\frac{\gamma}{2})}{4|x|^{1-\beta-\frac{\gamma}{2}}} + \frac{(1-\frac{\gamma}{2}+\beta)\tau}{|x|^{1-\frac{\gamma}{2}}} \right] \Phi_\tau(x) \\ &= \left(-\frac{W(|x|)^2}{|x|^\gamma} + \frac{2\tau W(|x|) + \omega_\tau(x)}{|x|^{1+\beta+\frac{\gamma}{2}}} \right) \Phi_\tau(x),\end{aligned}$$

onde $\omega_\tau: \mathbb{R}^N \setminus \overline{B}_\rho \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$\omega_\tau(x) = W'(|x|)|x|^{1+\beta} + \frac{\tau^2}{|x|^{1+\beta-\frac{\gamma}{2}}} + \frac{(N-1-\frac{\gamma}{2})(N-3-\frac{\gamma}{2})}{4|x|^{1-\beta-\frac{\gamma}{2}}} + \frac{(1-\frac{\gamma}{2}+\beta)\tau}{|x|^{1-\frac{\gamma}{2}}}.$$

Note que, como $\lim_{|x| \rightarrow \infty} W'(|x|)|x|^{1+\beta} = 0$, $1-\beta-\frac{\gamma}{2} > 0$, $1-\frac{\gamma}{2} > 0$ e $1-\frac{\gamma}{2}+\beta > 0$, obtemos

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \omega_\tau(x) = 0.$$

Tome $\bar{\tau} > 0$ e $\underline{\tau} < 0$. Perceba que $\Phi_{\underline{\tau}}$ é subsolução de (2.7) no exterior da bola $B_{\tilde{R}}$, para $\tilde{R} > \rho$ suficientemente grande, pois

$$\begin{aligned} -\Delta \Phi_{\underline{\tau}}(x) + \frac{W(|x|)^2}{|x|^\gamma} \Phi_{\underline{\tau}}(x) &= \left(-\frac{W(|x|)^2}{|x|^\gamma} + \frac{2\tau W(|x|) + \omega_\tau(x)}{|x|^{1+\beta+\frac{\gamma}{2}}} \right) \Phi_{\underline{\tau}}(x) + \frac{W(|x|)^2}{|x|^\gamma} \Phi_{\underline{\tau}}(x) \\ &= \frac{2\underline{\tau}W(|x|) + \omega_{\underline{\tau}}(x)}{|x|^{1+\frac{\gamma}{2}+\beta}} \Phi_{\underline{\tau}}(x). \end{aligned}$$

Como $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \omega_{\underline{\tau}}(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} W(x) > 0$, para $R > 0$ suficientemente grande, $2\underline{\tau}W(|x|) + \omega_{\underline{\tau}}(x) < 0$. Como também $\Phi_{\underline{\tau}} > 0$, obtemos

$$-\Delta \Phi_{\underline{\tau}}(x) + \frac{W(|x|)^2}{|x|^\gamma} \Phi_{\underline{\tau}}(x) \leq 0.$$

Analogamente, mostra-se que $\Phi_{\bar{\tau}}$ é supersolução de (2.7) no exterior de $B_{\bar{R}}$, para $\bar{R} > \rho$ suficientemente grande. Considere $R = \max\{\tilde{R}, \bar{R}\}$, obtemos que $\Phi_{\underline{\tau}}$ é subsolução e $\Phi_{\bar{\tau}}$ é supersolução de (2.7) no exterior da bola B_R . Assim, pelo Teorema 2.4 em [28], (2.7) admite uma solução radial H em $\mathbb{R}^N \setminus \overline{B}_R$, tal que $\Phi_{\underline{\tau}} \leq H \leq \Phi_{\bar{\tau}}$. Perceba que

$$\begin{aligned} \limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\Phi_{\bar{\tau}}(x)}{\Phi_{\underline{\tau}}(x)} &= \exp \left(\int_\rho^{|x|} \phi_{\bar{\tau}}(s) - \phi_{\underline{\tau}}(s) ds \right) = \exp \left((\bar{\tau} - \underline{\tau}) \int_\rho^{|x|} s^{-(1+\beta)} ds \right) \\ &= \exp \left(-\frac{(\bar{\tau} - \underline{\tau}) s^{-\beta}}{\beta} \Big|_\rho^{|x|} \right) \\ &= \exp \left(-(\bar{\tau} - \underline{\tau}) \frac{1}{|x|^\beta} - \frac{1}{\rho^\beta} \right) \\ &= \exp \left(\frac{\bar{\tau} - \underline{\tau}}{\rho^\beta} \right) < \infty. \end{aligned}$$

Logo,

$$1 \leq \frac{H}{\Phi_{\underline{\tau}}} \leq \frac{\Phi_{\bar{\tau}}}{\Phi_{\underline{\tau}}} \leq c,$$

onde $c > 0$ é a constante que limita o quociente. Mas isto nos dá

$$1 \leq \frac{H}{\exp(\int_{\rho}^{|x|} \phi_{\tau}(s) ds)} \leq c.$$

Por monotonicidade, temos o decaimento assintótico de (2.8).

Podemos estender H continuamente para $\mathbb{R}^N \setminus \overline{B}_{\rho}$. Vejamos que $H: \mathbb{R}^N \setminus \overline{B}_{\rho} \rightarrow \mathbb{R}$ é positiva. Caso contrário, existiria $x_0 \in B_R \setminus \overline{B}_{\rho}$ com $H(x_0) = 0$. Assim, por H ser radial, H é nula em ∂B_r onde $r = (x_0) \in (\rho, R]$. Dado $\varepsilon > 0$, como $\lim_{|x| \rightarrow \infty} H(x) = 0$, existe $R_{\varepsilon} > 0$ tal que

$$H(x) < \varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus B_{R_{\varepsilon}}.$$

Em particular, $H(x) < \varepsilon$, para todo $x \in \partial B_{R_{\varepsilon}}$. Defina $\Omega_{\varepsilon} = B_{R_{\varepsilon}} \setminus \overline{B}_{\rho}$. Note que $\partial \Omega_{\varepsilon} = \partial B_{\rho} \cup \partial B_{R_{\varepsilon}}$ e que

$$\begin{cases} -\Delta H + \frac{W(|x|)^2}{|x|^{\gamma}} = 0, & \text{em } \Omega_{\varepsilon}; \\ H(x) = 0, & \text{sobre } \partial B_{\rho}; \\ H(x) < \varepsilon, & \text{sobre } \partial B_{R_{\varepsilon}}. \end{cases}$$

Como $\frac{W(|x|)^2}{|x|^{\gamma}} \geq 0$, o Princípio do Máximo Forte em 0.10 nos garante que

$$\max_{x \in \overline{\Omega}_{\varepsilon}} H(x) = \max_{x \in \partial \Omega_{\varepsilon}} H(x) < \varepsilon.$$

Assim, $H(x) < \varepsilon$, para todo $x \in \Omega_{\varepsilon}$. Sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário, $H \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus B_{\rho}$, o que é um absurdo. Logo, H é positiva em $\mathbb{R}^N \setminus \overline{B}_{\rho}$. ■

2.3 Casos Ω Domínio Regular Limitado e $\Omega = \mathbb{R}^N$

Nesta seção serão apresentados alguns resultados nos quais provamos, quando Ω é limitado, a unicidade de pontos críticos positivos, tanto para $\mathcal{A}_{\omega}$ quanto para $\mathcal{E}|_{\mathcal{M}}$. Quando $\Omega = \mathbb{R}^N$, lidamos apenas para $\mathcal{A}_{\omega}$.

Observação 2.1. λ_V é o primeiro autovalor da formulação fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = \lambda u, & \text{em } \Omega; \\ u = 0, & \text{sobre } \partial \Omega. \end{cases}$$

Em outras palavras, λ_V é o menor λ tal que o funcional $\phi: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\phi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (V(x) - \lambda) u^2 dx$$

possua ponto crítico. A caracterização para λ_V é a seguinte:

$$\lambda_V = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} V(x) u^2 dx}{\int_{\Omega} u^2 dx}.$$

Teorema 2.1. *Seja Ω um domínio regular limitado do $\mathbb{R}^N$, com $N \geq 1$. Se $V \in L^\infty(\Omega)$, então para cada $\omega \in \mathbb{R}$ fixado existe no máximo uma solução positiva para (2.1), com $u = 0$ em $\partial\Omega$, ou seja, A_ω tem no máximo um ponto crítico positivo. Tal ponto existe se, e somente se, $\omega > \lambda_V$. Onde λ_V representa o primeiro autovalor do operador $(-\Delta + V(x)I, H_0^1(\Omega))$.*

Demonstração. (Teorema 2.1). Usaremos o Teorema 1.1 para obtermos o desejado. Já temos que $(H, \|\cdot\|)$ é um espaço normado, pois $H := H_0^1(\Omega)$ com a norma usual em Ω domínio regular limitado de $\mathbb{R}^N$. Também temos que $\mathcal{A}_\omega: H \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional Fréchet diferenciável (por ser C^1); que

$$A = \{u \in H; u > 0 \text{ e } \mathcal{A}'_\omega(u) = 0\}$$

é um subconjunto de pontos críticos de $\mathcal{A}_\omega$. Para cada $u, v \in A$, podemos considerar o caminho $\gamma: [0, 1] \rightarrow H$ como em (2.6). Dessa forma

$$\gamma(0) = f^{-1}(\sqrt{f^2(u)}) = u$$

e

$$\gamma(1) = f^{-1}(\sqrt{f^2(v)}) = v,$$

ou seja, obtemos o item a) do Teorema 1.1. Para o item b), usaremos o Lema 2.2. Considerando $w \in H$ uma soluções positiva, podemos escrever (2.3) na forma

$$-\Delta w + a(w)w = 0, \tag{2.9}$$

onde

$$a(w) = (V(x) - \omega) \frac{f(w)}{w \sqrt{1 + 2f^2(w)}} + \frac{f^3(w)}{w \sqrt{1 + 2f^2(w)}} \in L^\infty(\Omega),$$

o que foi provado no início da demonstração do Teorema 2.3. Note que se w é solução de (2.9), então w é solução da equação em que $-\Delta v + a(w)v = 0$. Seja $K = \|V\|_{L^\infty} + |\omega|$.

Então

$$\begin{aligned} L(v) &= -\Delta v + \left[(V(x) - \omega + K) \frac{f(w)}{w\sqrt{1+2f^2(w)}} + \frac{f^3(w)}{w\sqrt{1+2f^2(w)}} \right] v \\ &= K \frac{f(w)}{w\sqrt{1+2f^2(w)}}. \end{aligned}$$

Assim, $L(w) \geq 0$,

$$c = (V(x) - \omega + K) \frac{f(w)}{w\sqrt{1+2f^2(w)}} + \frac{f^3(w)}{w\sqrt{1+2f^2(w)}} \geq 0$$

e, dado $x_0 \in \partial\Omega$,

$$w(x_0) = 0; \quad w(x_0) \leq w(x), \text{ para todo } x \in \Omega.$$

Logo, pelo Lema de Hopf em [0.1](#),

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} < 0.$$

Desse modo, dados $\bar{u}, \bar{v} > 0$ soluções de [\(2.9\)](#), obtemos as hipóteses do Lema [1.3](#) e, assim, concluímos que

$$\frac{1}{\delta} \leq \frac{\bar{u}}{\bar{v}} \leq \delta,$$

para algum $\delta \geq 1$. Portanto, pelo Lema [2.2](#), γ é localmente Lipschitziana em $t = 0$. Para o item c), veremos que $\mathcal{A}_\omega(\gamma(t))$ é soma de aplicações convexas com uma aplicação estritamente convexa. De fato, já sabemos pelo Lema [2.1](#) que $|\nabla \gamma(t)|^2$ é convexa em $[0, 1]$. Assim,

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \gamma(t)|^2 dx$$

é convexa. Além disso,

$$f^2(\gamma(t)) = (1-t)f^2(u) + tf^2(v) \Rightarrow (f^2(\gamma(t)))'' = 0,$$

isto é, $f^2(\gamma(t))$ é convexa. Como a aplicação $t \mapsto t^2$ é estritamente convexa (já que $F(t) = t^2$ é tal que $F''(t) = 2 > 0$), obtemos que $f^4(\gamma(t)) = (f^2(\gamma(t)))^2$ é estritamente convexa. Logo,

$$\mathcal{A}_\omega(\gamma(t)) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \gamma(t)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (V(x) - \omega)(f(\gamma(t)))^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\Omega} (f(\gamma(t)))^4 dx$$

é estritamente convexa em $[0, 1]$. Portanto, pelo Teorema [1.1](#), obtemos que A tem no máximo um elemento. Agora, vejamos que se $\omega \leq \lambda_V$ então A é vazio (assim teremos que A não ser vazio implica que $\omega > \lambda_V$). De fato, seja $v \in A$. Então $u = f(v)$ é

solução de (2.1). Mas, ser solução de (2.1) significa dizer

$$\int_{\Omega} (1 + 2u^2) \nabla u \nabla \varphi dx + 2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 u \varphi dx + \int_{\Omega} V(x) u \varphi dx + \int_{\Omega} u^3 \varphi dx = \omega \int_{\Omega} u \varphi dx,$$

para toda $\varphi \in H$. Assim, para $\varphi = u$, desde que

$$\lambda_V = \inf_{u \in H} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} V(x) u^2 dx}{\int_{\Omega} u^2 dx},$$

obtemos

$$\begin{aligned} \lambda_V \int_{\Omega} u^2 dx &\leq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} V(x) u^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + 4 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 u^2 dx + \int_{\Omega} V(x) u^2 dx \\ &= \omega \int_{\Omega} u^2 dx - \int_{\Omega} u^4 dx \\ &< \omega \int_{\Omega} u^2 dx, \end{aligned}$$

ou seja, $\lambda_V < \omega$, o que é um absurdo, já que supomos $\omega \leq \lambda_V$. Logo, A é vazio. Por fim, vejamos que se $\omega > \lambda_V$, então A é não vazio. Com efeito,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\omega}(v) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (V(x) - \omega) f^2(v) dx + \frac{1}{4} \int_{\Omega} f^4(v) dx \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \frac{\|V\|_{L^{\infty}} + |\omega|}{2} \int_{\Omega} f^2(v) dx + \frac{1}{4} \int_{\Omega} f^4(v) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Omega} (b f^2(v) + a f^4(v)) dx \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + C_1 |\Omega|, \end{aligned}$$

onde $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{\|V\|_{L^{\infty}} + |\omega|}{2}$ e C_1 é o valor mínimo do polinômio $p(t) = at^2 + bt$. Dessa forma, existe $\inf_{v \in H_0^1(\Omega)} \mathcal{A}_{\omega}(v) =: I$. Daí, considere $(v_n) \subset H_0^1(\Omega)$ tal que $\mathcal{A}_{\omega}(v_n) \rightarrow I$ quando $n \rightarrow \infty$ e note que v_n é limitada, pois, caso contrário, teríamos uma subsequência (v_{n_k}) de (v_n) satisfazendo $\|v_{n_k}\| \rightarrow \infty$, o que implicaria $\mathcal{A}_{\omega} \rightarrow \infty$, quando $k \rightarrow \infty$. Mas isso é um absurdo, já que $\mathcal{A}_{\omega}(v_n) \rightarrow I$. Considere $R > 0$ tal que $(v_n) \subseteq B[0, R]$. Pelo Teorema em 0.5, a menos de subsequência, $v_n \rightharpoonup v_0$ em $H_0^1(\Omega)$. Como $H_0^1(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega)$, $v_n \rightarrow v_0$ em $L^2(\Omega)$. Logo, a menos de subsequência, $v_n(x) \rightarrow v_0(x)$ q.t.p. em Ω e, assim, existe $h \in L^2(\Omega)$ tal que $|v_n(x)| \leq h(x)$, q.t.p. em Ω . Portanto,

$$(V(x) - \omega) f^2(v_n) \rightarrow (V(x) - \omega) f^2(v_0) \text{ q.t.p.}$$

Além disso,

$$|(V(x) - \omega)f^2(v_n)| \leq (\|V\|_{L^\infty} + |\omega|)v_n^2 \leq (\|V\|_{L^\infty} + |\omega|)h^2 \in L^1(\Omega),$$

onde usamos o fato que $f^2(t) \leq t^2$. Logo, pelo T. C. D. L. em [0.1](#),

$$\int_{\Omega} (V(x) - \omega)f^2(v_n)dx \rightarrow \int_{\Omega} (V(x) - \omega)f^2(v_0)dx.$$

De maneira análoga, usando a desigualdade $f^2(t) + 2f^4(t) \leq 4t^2$, podemos mostrar que

$$\int_{\Omega} f^4(v_n)dx \rightarrow \int_{\Omega} f^4(v_0)dx.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\omega(v_0) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v_0|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (V(x) - \omega)f^2(v_0)dx + \frac{1}{4} \int_{\Omega} f^4(v_0)dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v_n|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (V(x) - \omega)f^2(v_n)dx + \frac{1}{4} \int_{\Omega} f^4(v_n)dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{A}_\omega(v_n) = I, \end{aligned}$$

uma vez que, pelo Proposição em [0.1](#), tem-se

$$v_n \rightharpoonup v_0 \text{ em } H_0^1(\Omega) \Rightarrow \|v_0\|_{H_0^1} \leq \liminf \|v_n\|_{H_0^1}.$$

Com isso e pelo fato que I é o ínfimo de $\mathcal{A}_\omega(v)$, obtemos que I é negativo e, assim, $v_0 \neq 0$. De fato, considere $\varepsilon > 0$ e φ uma autofunção positiva associada ao autovalor λ_V . Daí,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\omega(\varepsilon\varphi_1) &= \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla \varphi_1|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (V(x) - \omega)f^2(\varepsilon\varphi_1)dx + \frac{1}{4} \int_{\Omega} f^4(\varepsilon\varphi_1)dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} V(x)[f^2(\varphi_1) - \varepsilon^2\varphi_1^2]dx + \frac{\varepsilon^2\lambda_V}{2} \int_{\Omega} \varphi_1^2 dx - \frac{\omega}{2} \int_{\Omega} f^2(\varepsilon\varphi_1)dx + \frac{1}{4} \int_{\Omega} f^4(\varepsilon\varphi_1)dx \\ &= \varepsilon^2 \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} V(x)\varphi_1^2 \left[\left(\frac{f(\varepsilon\varphi_1)}{\varepsilon\varphi_1} \right)^2 - 1 \right] dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \lambda_V \varphi_1^2 - \omega \left(\frac{f(\varepsilon\varphi_1)}{\varepsilon\varphi_1} \right)^2 \varphi_1^2 dx \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \int_{\Omega} \left(\frac{f(\varepsilon\varphi_1)}{\varepsilon\varphi_1} \right)^2 \varepsilon^2 \varphi_1^4 \right\} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varphi_1^2 (\lambda_V - \omega) dx < 0, \end{aligned}$$

onde usamos também o fato que $\frac{f(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$ e que, pela segunda Identidade de Green em [0.6](#), podemos concluir

$$\begin{aligned} -\Delta\varphi_1 + V(x)\varphi_1 &= \lambda_V\varphi_1 \Rightarrow \int_{\Omega} \nabla\varphi_1 \nabla\varphi_1 dx + \int_{\Omega} V(x)\varphi_1\varphi_1 dx = \lambda_V \int_{\Omega} \varphi_1^2 dx \\ &\Rightarrow \int_{\Omega} |\nabla\varphi_1|^2 dx = \lambda_V \int_{\Omega} \varphi_1^2 dx - \int_{\Omega} V(x)\varphi_1^2 dx. \end{aligned}$$

Logo, obtemos $I = \mathcal{A}_{\omega}(v_0) < 0$, uma vez que $\varepsilon\varphi_1 \in H_0^1(\Omega)$, e temos o desejado. Finalmente, podemos supor que $v_0 \geq 0$, pois $\mathcal{A}_{\omega}(v_0) = \mathcal{A}_{\omega}(|v_0|)$ e, assim, $|v_0|$ é ponto de mínimo também (logo crítico), donde poderíamos considerar $\tilde{v}_0 = |v_0| \geq 0$. Mas, sendo $v_0 \neq 0$ e $v_0 \geq 0$, afirmamos que $v_0 > 0$. De fato, sabemos que v_0 é uma solução clássica de

$$-\Delta v + (V(x) - \omega)f(v)f'(v) + f^3(v)f'(v) = 0, \quad \text{em } \Omega. \quad (2.10)$$

Podemos reescrever (2.10) da seguinte forma:

$$-\Delta v + (V(x) - \omega + 2)v = (V(x) - \omega + 2)v - (V(x) - \omega)f(v)f'(v).$$

Chamando $c(x) = V(x) - \omega + 2$, temos

$$\begin{aligned} \Delta v_0 + c(x)v_0 &= (V(x) - \omega + 2)v_0 - (V(x) - \omega)f(v_0)f'(v_0) - f^3(v_0)f'(v_0) \\ &\geq (V(x) - \omega + 2)v_0 - (V(x) - \omega)v_0 \cdot 1 - \frac{f^4(v_0)}{v_0} \\ &\geq 2v_0 - 2v_0 = 0, \end{aligned}$$

onde usamos que $f'(t) \leq 1$, $f(t) \leq t$, $f'(t) \leq \frac{f(t)}{t}$ e $f^4(t) \leq 2t^2$. Assim, caso exista $x_0 \in \Omega$ tal que $v_0(x_0) = 0$ ($\leq v(x)$, para todo $x \in \bar{\Omega}$), pelo Princípio do Máximo Forte em 0.10, $v_0 \equiv 0$, o que é um absurdo, pois $v_0 \neq 0$. Daí, $v_0 \in A$ e, portanto, A não é vazio. ■

Teorema 2.2. *Seja Ω um domínio regular limitado de $\mathbb{R}^N$, com $N \geq 1$. Se $V \in L^\infty(\Omega)$, então existe exatamente um ponto crítico de $\mathcal{E}|_{\mathcal{M}}$.*

Demonstração. Defina

$$A = \{u \in \mathcal{M}; u > 0 \text{ e } \mathcal{E}'|_{\mathcal{M}}(u) = 0\}$$

que é um subconjunto de pontos críticos de $A_0|_{\mathcal{M}} = \mathcal{E}|_{\mathcal{M}}$. Aplicaremos o Corolário 1.1 para obtermos que A tem no máximo um elemento. Já temos que H , $\mathbb{R}$ são espaços de Banach, $A_0 : H \rightarrow \mathbb{R}$ visto no Teorema 2.1 (com $\omega = 0$) e $R : H \rightarrow \mathbb{R}$, dado por

$$R(v) = \int_{\Omega} f^2(v) dx - 1,$$

são Fréchet diferenciáveis. Além disso, 0 é um valor regular de R , pois se v é ponto crítico de R então

$$\begin{aligned} R'(v)w &= 2 \int_{\Omega} f(v)f'(v)w dx = 0, \quad \forall w \in H \Rightarrow f(v)f'(v) = 0, \quad q.t.p. \text{ em } \Omega \\ &\Rightarrow f(v) = 0, \quad q.t.p. \text{ em } \Omega \Rightarrow v = 0, \quad q.t.p. \text{ em } \Omega \Rightarrow R(v) = -1 \Rightarrow v \notin R^{-1}(0). \end{aligned}$$

Note que $\mathcal{M} = R^{-1}(0)$. Para cada $u, v \in A$, vamos considerar o caminho $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$ dado em (2.6), pois se $u, v \in \mathcal{M}$, então $\gamma(t) \in \mathcal{M}$; uma vez que

$$\begin{aligned} R(\gamma(t)) &= \int_{\Omega} f^2(\gamma(t)) dx - 1 = \int_{\Omega} [f(f^{-1}(\sqrt{(1-t)f^2(u) + tf^2(v)}))]^2 dx - 1 \\ &= \int_{\Omega} [(1-t)f^2(u) + tf^2(v)] dx - 1 \\ &= (1-t) \cdot 1 + t \cdot 1 - 1 = 0, \end{aligned}$$

onde usamos o fato que $u, v \in \mathcal{M}$ para obtermos a penúltima igualdade. Também temos

$$\gamma(0) = f^{-1}(\sqrt{f^2(u)}) = u \text{ e } \gamma(1) = f^{-1}(\sqrt{f^2(v)}) = v,$$

que é o item a) do Teorema 2.1. Resta-nos mostrar que A não é vazio. De fato, assim como foi feito para o conjunto A do Teorema 2.1, obtemos

$$\mathcal{E}(v) \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + C_2 |\Omega|, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

onde C_2 é o valor mínimo do polinômio $t \mapsto -\frac{1}{2}\|V\|_{\infty}t^2 + \frac{1}{4}t^4$ e, dessa forma, existe $\inf_{v \in \mathcal{M}} \mathcal{E}(v) =: I$. Ainda de modo análogo ao que foi feito para o conjunto A do Teorema 2.1, podemos considerar $(v_n) \subset \mathcal{M}$ tal que $\mathcal{E}(v_n) \rightarrow I$, teremos (v_n) limitada e, logo, $v_n \rightharpoonup v_0$ em $H_0^1(\Omega)$; que também será tal que $v_n \rightarrow v_0$ em $L^2(\Omega)$, $|v_n| \leq h \in L^2(\Omega)$ para algum h e

$$\mathcal{E}(v_0) \leq \lim \mathcal{E}(v_n) = I. \quad (2.11)$$

Mas note que $v_0 \in \mathcal{M}$. De fato, como $v_n \in \mathcal{M}$, temos

$$\int_{\Omega} f^2(v_n) dx = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, pelo T.C.D.L (uma vez que $f^2(v_n) \leq v_n^2 \leq h^2 \in L^1(\Omega)$), segue que

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f^2(v_n) dx = \int_{\Omega} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f^2(v_n) \right) dx = \int_{\Omega} f^2(v_0) dx,$$

ou seja, $v_0 \in \mathcal{M}$. Logo, por (2.11), temos $\mathcal{E}(v_0) = I := \inf_{v \in \mathcal{M}} \mathcal{E}(v)$. Como $v_0 \in \mathcal{M}$,

temos $v_0 \neq 0$. Daí, seguindo um argumento similar ao feito para o conjunto A do Teorema 2.1, podemos concluir que $v_0 > 0$ ponto crítico de $\mathcal{E}|_{\mathcal{M}}$. Portanto, $v_0 \in A$. ■

As soluções positivas de (2.3) têm um decaimento no infinito e, desde que $v = f^{-1}(u)$, isso também gera um resultado de decaimento para as soluções positivas do problema inicial (2.1). O resultado a seguir trata do decaimento das soluções positivas de (2.3).

Teorema 2.3. *Seja $v \in H$ uma solução positiva da equação*

$$-\Delta v + (|x|^2 - \omega) \frac{f(v)}{\sqrt{1 + 2f^2(v)}} + \frac{(f(v))^3}{\sqrt{1 + 2f^2(v)}} = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^N. \quad (2.12)$$

Então,

$$v(x) \sim |x|^{\frac{\omega-N}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{2}} \quad \text{quando } |x| \rightarrow \infty, \quad (2.13)$$

isto é, existem $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$C_1 |x|^{\frac{\omega-N}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{2}} \leq v(x) \leq C_2 |x|^{\frac{\omega-N}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{2}} \quad \text{para } |x| \text{ suficientemente grande.}$$

Consequentemente, se u é uma solução positiva de

$$-\Delta u - u\Delta u^2 + |x|^2 u + u^3 = \omega u \quad \text{em } \mathbb{R}^N,$$

então

$$u(x) \sim |x|^{\frac{\omega-N}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{2}} \quad \text{quando } |x| \rightarrow \infty.$$

Demonstração. Vejamos, primeiro, que $v(x) \rightarrow 0$ quando $|x| \rightarrow \infty$. Para isso, inicialmente somamos um termo adequado em ambos os lados de (2.12) para obtermos a igualdade

$$-\Delta v + (|x| + 1)v \frac{f(v)}{\sqrt{1 + 2f^2(v)}} + v \frac{f^3(v)}{\sqrt{1 + 2f^2(v)}} = (1 + \omega)v \frac{f(v)}{\sqrt{1 + 2f^2(v)}}.$$

Definindo

$$a(t) = \frac{f(t)}{t\sqrt{1 + 2f^2(t)}} + \frac{f^3(t)}{\sqrt{1 + 2f^2(t)}} \quad \text{e} \quad b(t) = t \frac{f(t)}{t\sqrt{1 + 2f^2(t)}},$$

temos que v é solução de

$$-\Delta v + a(v)v = (1 + \omega)b(v)v.$$

Agora, levando em consideração (2.4) e (2.5), obtemos

$$a(t) \leq \left(\frac{f(t)}{t} \right)^2 + \frac{f^4(t)}{t^2} = \bar{a}(t),$$

onde $\bar{a}: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ é tal que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \bar{a}(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\left(\frac{f(t)}{t} \right)^2 + \left(\frac{f(t)}{t} \right)^4 t^2 \right] = 1 + 0 = 1$$

e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{a}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{f(t)}{\sqrt{t}} \right)^2 \frac{1}{t} + \left(\frac{f(t)}{\sqrt{t}} \right)^4 \right] = 1 \cdot 0 + 2 = 2.$$

Assim, $\bar{a}$ é limitada, isto é, $\bar{a} \in L^\infty(0, +\infty)$. Consequentemente, $a \in L^\infty(0, +\infty)$. Também temos que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} b(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 2f^2(t)}} = 1 \cdot 1 = 1$$

e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} b(t) = \frac{f(t)}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 2f^2(t)}} = 2^{\frac{1}{4}} \cdot 0 \cdot 1 = 0.$$

Daí, b é limitada, ou seja, $b \in L^\infty(0, +\infty)$. Por outro lado, a é limitada inferiormente longe do zero. De fato, já sabemos que

$$a(t) \geq \frac{1}{2} \left(\frac{f(t)}{t} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{f^4(t)}{t^2} = \frac{1}{2} \cdot \bar{a}(t) = \tilde{a}(t)$$

e então

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \tilde{a}(t) = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} \bar{a}(t) = \frac{1}{2} \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{a}(t) = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{a}(t) = 1.$$

Com isso, $\tilde{a}: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ é limitada inferiormente longe do zero. De fato, caso contrário, existiria uma sequência (t_n) , com $t_n \in (0, +\infty)$, tal que $\tilde{a}(t_n) \rightarrow 0$. Se (t_n) não fosse limitada, existiria $t_{n_k} \rightarrow +\infty$ e, assim, $\tilde{a}(t_{n_k}) \rightarrow 1$, mas isso é um absurdo, pois $\tilde{a}(t_n) \rightarrow 0$. Se (t_n) fosse limitada, para uma subsequência (t_{n_k}) de (t_n) teríamos $t_{n_k} \rightarrow t_0$, com $t_0 \geq 0$. Se $t_0 = 0$, então $\tilde{a}(t_{n_k}) \rightarrow \frac{1}{2}$, o que é um absurdo, pois $\tilde{a}(t_n) \rightarrow 0$. Caso $t_0 \in (0, +\infty)$, como $\tilde{a}(t_{n_k}) \rightarrow 0$, então $\tilde{a}(t_0) = 0$, o que é um absurdo, já que $\tilde{a}(t) > 0$, para todo $t \in (0, \infty)$. Logo, existe $k_1 > 0$ tal que $\tilde{a}(t) \geq k_1$. Consequentemente, $a(t) \geq 1$. Obtemos, portanto,

$$-\Delta v + k_1 v \leq k_2 v,$$

onde k_2 é a constante que limita b multiplicada por $1 + \omega$. Com isso, usando um resultado clássico de Brezis-Kato (vide [24] páginas 1264 e 1265), temos $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Raciocinando como em [17], obtemos que $|\nabla v| \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Isso, juntamente com o fato de que $v \in H$ nos dá que $v(x) \rightarrow 0$, quando $|x| \rightarrow +\infty$. Se isso não fosse verdade, existiriam (x_n) e $\varepsilon_0 > 0$ tais que $|x_n| \rightarrow +\infty$ e $|v(x_n)| \geq \varepsilon_0$. Mas, pelo Teorema do Valor Médio em [0.4], dados $x, y \in \mathbb{R}^N$, existe $t_0 \in (0, 1)$ tal que

$$|v(x) - v(y)| = |\nabla v(t_0x + (1 - t_0)y)(x - y)| \leq \|\nabla v\|_{L^\infty} \cdot |x - y|. \quad (2.14)$$

Por outro lado, definindo o conjunto

$$A = \left\{ x \in B_1^c : |v(x)| \geq \frac{\varepsilon_0}{2} \right\},$$

temos que

$$\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \mu(A) \leq \int_A |v|^2 dx \leq \int_{B_1^c} |v|^2 dx < \infty,$$

isto é, $\mu(A) < \infty$. No entanto, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, temos $B(x_n, \frac{\varepsilon_0}{2\|\nabla v\|_{L^\infty}}) \subseteq A$. De fato, se $y \in \mathbb{R}^N$ é tal que $\|y - x_n\| < \frac{\varepsilon_0}{2\|\nabla v\|_{L^\infty}}$, por (2.14), obtemos

$$|v(x_n)| - |v(y)| \leq |v(x_n) - v(y)| \leq \|\nabla v\|_{L^\infty} \|x_n - y\| < \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Dai,

$$|v(y)| > |v(x_n)| - \frac{\varepsilon_0}{2} \geq \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2},$$

ou seja, $y \in A$. Tome uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) satisfazendo

$$B\left(x_{n_k}, \frac{\varepsilon_0}{2\|\nabla v\|_{L^\infty}}\right) \cap B\left(x_{n_l}, \frac{\varepsilon_0}{2\|\nabla v\|_{L^\infty}}\right) = \emptyset, \quad \forall k \neq l.$$

Isto é possível, pois $|x_n| \rightarrow \infty$. Assim,

$$\mu(A) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left[B\left(x_{n_k}, \frac{\varepsilon_0}{2\|\nabla v\|_{L^\infty}}\right)\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_N \left(\frac{\varepsilon_0}{2\|\nabla v\|_{L^\infty}}\right)^N = +\infty,$$

o que é uma contradição com o fato que $\mu(A) < \infty$. Agora, vejamos que existem $C > 0$ e $R > 0$ tais que

$$v(x) \leq Ce^{-\frac{|x|^2}{4}}, \quad \forall |x| \geq R.$$

Somando um termo conveniente em ambos os lados da igualdade em (2.12), obtemos

$$-\Delta v + (|x|^2 - \omega)v = (|x|^2 - \omega) \left(v - \frac{f(v)}{\sqrt{1 + 2f^2(v)}} \right) - \frac{f^3(v)}{\sqrt{1 + 2f^2(v)}}. \quad (2.15)$$

Observando o lado direito da igualdade anterior, note que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(|x|^2 - \omega)v} \left\{ (|x|^2 - \omega) \left(v - \frac{f(v)}{\sqrt{1 + 2f^2(v)}} \right) - \frac{f^3(v)}{\sqrt{1 + 2f^2(v)}} \right\} \\ &= 1 - \frac{f(v)}{v} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 2f^2(v)}} - \frac{1}{|x|^2 - \omega} \cdot \frac{f(v)}{v} \cdot \frac{f(v)}{\sqrt{1 + 2f^2(v)}} \\ &\xrightarrow{v \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

onde usamos (2.4) e o fato que $v \rightarrow 0$ quando $|x| \rightarrow \infty$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que a expressão do lado direito da igualdade em questão é limitada por $(|x|^2 - \omega)\varepsilon v$, para $x \in B_R(0)^C$. Unindo isso a (2.15), concluímos

$$-\Delta v + (|x|^2 - \omega)(1 - \varepsilon)v \leq 0, \text{ em } \mathbb{R}^N \setminus B_R(0).$$

Defina $\rho := \max\{R, \sqrt{\omega}\}$ e $W(s) = \sqrt{(1 - s^{-2}\omega)(1 - \varepsilon)}$. Assim, W satisfaz

$$\lim_{s \rightarrow \infty} W(s) = \sqrt{1 - \varepsilon} > 0,$$

para $0 < \varepsilon < 1$. Além disso,

$$\begin{aligned} W'(s) &= [(1 - s^{-2}\omega)(1 - \varepsilon)^{\frac{1}{2}}]' \\ &= \frac{1}{2}[(1 - s^{-2}\omega)(1 - \varepsilon)]^{-\frac{1}{2}} \cdot 2s^{-3}\omega(1 - \varepsilon) \\ &= \omega\sqrt{1 - \varepsilon}(1 - s^{-2}\omega)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{s^3} \end{aligned}$$

e, para $\beta = 2$, obtemos

$$\lim_{s \rightarrow \infty} W'(s)s^{\beta+1} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\omega\sqrt{1 - \varepsilon}}{\sqrt{1 - s^{-2}\omega}} \cdot \frac{1}{s} = 0.$$

Aplicando o Lema 2.3, para $\gamma = -2$, existe uma função radial positiva $h: \mathbb{R}^N \setminus \overline{B_\rho(0)} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} -\Delta h(x) + \frac{W^2(|x|)}{|x|^{-2}}h(x) &= 0 \Rightarrow -\Delta h(x) + (1 - |x|^{-2}\omega)(1 - \varepsilon)|x|^2h(x) = 0 \\ &\Rightarrow -\Delta h(x) + (|x|^{-2} - \omega)(1 - \varepsilon)h(x) = 0, \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{B_\rho(0)}$.

O Lema 2.3 também garante que

$$\begin{aligned} & \lim_{|x| \rightarrow \infty} h(|x|) |x|^{\frac{N-1}{2} - \frac{\varepsilon}{4}} \exp \left(\int_\rho^{|x|} \frac{W(s)}{s^{\frac{N}{2}}} ds \right) = 1 \\ \Rightarrow & \lim_{|x| \rightarrow \infty} h(|x|) |x|^{\frac{N}{2}} \exp \left(\int_\rho^{|x|} s \sqrt{(1-s^2\omega)(1-\varepsilon)} ds \right) = 1 \\ \Rightarrow & \lim_{|x| \rightarrow \infty} h(|x|) |x|^{\frac{N}{2}} \exp \left(\int_\rho^{|x|} \sqrt{(s^2 - \omega)(1-\varepsilon)} ds \right) = 1. \end{aligned}$$

Dai,

$$h(x) \sim |x|^{-\frac{N}{2}} \exp \left(\int_\rho^{|x|} \sqrt{(s^2 - \omega)(1-\varepsilon)} ds \right),$$

quando $|x| \rightarrow \infty$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{\frac{-N}{2}} \exp \left(- \int_\rho^t \sqrt{(s^2 - \omega)(1-\varepsilon)} ds \right)}{e^{-\frac{t^2}{4}}} \\ & \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{\frac{-N}{2}} \exp \left(- \sqrt{(1-\varepsilon)} \int_\rho^t (s - \sqrt{|\omega|}) ds \right)}{e^{-\frac{t^2}{4}}} \\ & = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{\frac{-N}{2}} \exp \left(- \sqrt{(1-\varepsilon)} \left[\frac{t^2}{2} - t\sqrt{|\omega|} - \frac{\rho^2}{2} + \rho\sqrt{|\omega|} \right] \right)}{e^{-\frac{t^2}{4}}} \\ & = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{\frac{-N}{2}} \exp \left(- \sqrt{(1-\varepsilon)} \left[\frac{t^2}{2} - t\sqrt{|\omega|} \right] \right) \exp \left(\sqrt{(1-\varepsilon)} \left[\frac{\rho^2}{2} - \rho\sqrt{|\omega|} \right] \right)}{e^{-\frac{t^2}{4}}} \\ & = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{e} t^{-\frac{N}{2}} \exp(t[at + b]) \\ & = 0, \end{aligned}$$

onde $\tilde{e} = \exp \left(\left[\frac{\rho^2}{2} - \rho\sqrt{|\omega|} \right] \right)$, $a = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{1-\varepsilon}}{2} < 0$ e $b = \sqrt{1-\varepsilon}\sqrt{|\omega|}$. Assim, existe $C > 0$ tal que

$$h(x) \leq C e^{-\frac{t^2}{4}}, \quad \text{para } |x| \geq \tilde{R},$$

onde $\tilde{R} > 0$ é suficientemente grande de modo que $\tilde{R} > R$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $v(x) \leq h(x)$ sobre $\partial B_{\tilde{R}(0)}$. De fato, $\partial B_{\tilde{R}(0)}$ é compacta e tanto v quanto h são contínuas em $\partial B_{\tilde{R}(0)}$. Logo v e h atingem o valor máximo em $\partial B_{\tilde{R}(0)}$ e sejam

$$M_v := \max_{x \in \partial B_{\tilde{R}(0)}} v(x) \quad \text{e} \quad m_h := \min_{x \in \partial B_{\tilde{R}(0)}} h(x).$$

Assim,

$$v(x) \leq \frac{M_v}{m_h} m_v \leq ah(x),$$

onde $a = \frac{M_v}{m_h}$. Trocando, então, h por ah (que tem as mesmas propriedades), obtemos o desejado. Agora, como $-\Delta v < 0$ e $\Delta h < 0$, usando o Princípio do Máximo Forte em 0.10, podemos concluir que $v(x) \leq h(x)$ em $\partial \overline{B_{\tilde{R}(0)}}$, o que nos fornece

$$v(x) \leq h(x) \leq Ce^{-\frac{|x|^2}{2}}, \quad \forall |x| \geq \tilde{R}.$$

Por fim, para v suficientemente pequeno, temos por (2.4) que

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{f(v)}{v\sqrt{1+2f^2(v)}}}{v^2} &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{v^2} - \frac{f(v)f'(v)}{v^3} \\ &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{v - f(v)f'(v)}{v^3} \\ &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1 - (f'(v))^2 - f(v)f''(v)}{3v^2} \\ &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{-2f'(v)f''(v) - f'(v)f'''(v) - f(v)f'''(v)}{6v} \\ &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{-3f'(v)f''(v) - f(v)f'''(v)}{6v} \\ &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{(f'(v))^2 f(v)}{v(1+2f^2(v))^{\frac{3}{4}}} - \lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(v)}{v} \cdot \frac{f'''(v)}{6} \\ &= 1 - \frac{f'''(0)}{6}, \end{aligned}$$

onde usamos também o fato que

$$\begin{aligned} f''(v) &= \frac{-\frac{1}{2}((1+2f^2(v))^{-\frac{1}{2}}) \cdot 4f(v)f'(v)}{1+2f^2(v)} \\ &= -\frac{2f(v)f'(v)}{(1+2f^2(v))^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{f^3(v)}{v\sqrt{1+2f^2(v)}} \cdot \frac{1}{v^2} = \lim_{v \rightarrow 0} \left(\frac{f(v)}{v} \right)^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+2f^2(v)}}.$$

Logo, ajustando a constante caso necessário, temos

$$\left| 1 - \frac{f(v)}{v\sqrt{1+2f^2(v)}} \right| \leq cv^2 \leq Ce^{-\frac{|x|^2}{2}}$$

e

$$\frac{f^3(v)}{v\sqrt{1+2f^2(v)}} \leq cv^2 \leq Ce^{-\frac{|x|^2}{2}}.$$

Como consequência desses fatos, obtemos

$$-\Delta v + (|x|^2 - \omega - Ce^{-\frac{|x|}{2}})v \leq 0, \quad \text{em } \mathbb{R}^N \quad (2.16)$$

e

$$-\Delta v + (|x|^2 - \omega + Ce^{-\frac{|x|}{2}})v \geq 0, \quad \text{em } \mathbb{R}^N. \quad (2.17)$$

Agora, defina $W_{\pm}(s) := \sqrt{1 - s^{-2}\omega \pm Cs^{-2}e^{-\frac{s^2}{2}}}$. Daí

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} W_{\pm}(s) &= \lim_{s \rightarrow \infty} \sqrt{1 - s^{-2}\omega \pm Cs^{-2}e^{-\frac{s^2}{2}}} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \sqrt{1 - \frac{\omega}{s^2} \pm \frac{C}{s^2 e^{\frac{s^2}{2}}}} = 1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} W'_{\pm}(s)s^2 &= \lim_{s \rightarrow \infty} ((1 - s^2\omega \pm Cs^{-2}e^{-\frac{s^2}{4}})^{\frac{1}{2}})'s^2 \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{1 - s^2\omega \pm Cs^{-2}e^{-\frac{s^2}{4}}}} \left[2s^{-3}\omega \mp 2Cs^{-3}e^{-\frac{s^2}{4}} \mp Cs^{-2} \left(e^{-\frac{s^2}{4}} \frac{s}{2} \right) \right] s^2 \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{1 - s^2\omega \pm Cs^{-2}e^{-\frac{s^2}{4}}}} \left[2s^{-3}(\omega \mp Ce^{-\frac{s^2}{4}}) \mp \frac{Cs^{-1}e^{-\frac{s^2}{4}}}{2} \right] s^2 \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{1 - s^2\omega \pm Cs^{-2}e^{-\frac{s^2}{4}}}} \left[2s^{-1}(\omega \mp Ce^{-\frac{s^2}{4}}) \mp \frac{Cse^{-\frac{s^2}{4}}}{2} \right] = 0, \end{aligned}$$

ou seja, as hipóteses do Lema [2.3](#) são satisfeitas. Assim, para $\beta = 1$, $\gamma = -2$ e $\tilde{\rho} \geq \tilde{R}$, usamos o Lema [2.3](#) para obtermos a existência de funções positivas h_+ e h_- tais que

$$-\Delta h_{\pm} + \frac{W_{\pm}^2(|x|)}{|x|^{\gamma}} h_{\pm} = -\Delta h_{\pm} + (|x|^2 - \omega \pm Ce^{-\frac{|x|}{2}})h_{\pm} = 0, \quad \forall |x| \geq \tilde{\rho} \quad (2.18)$$

e que

$$\begin{aligned} &\lim_{|x| \rightarrow \infty} h_{\pm}(|x|)|x|^{\frac{N-1}{2} - \frac{\gamma}{4}} \exp \left(\int_{\rho}^{|x|} \frac{W_{\pm}(s)}{s^{\frac{\gamma}{2}}} ds \right) \\ &= \lim_{|x| \rightarrow \infty} h_{\pm}(|x|)|x|^{\frac{N}{2}} \exp \left(\int_{\rho}^{|x|} \sqrt{s^2 - \omega \pm Ce^{-\frac{s^2}{4}}} ds \right) = 1. \end{aligned}$$

Isto significa que

$$h_{\pm}(x) \sim |x|^{-\frac{N}{2}} \exp \left(\int_{\rho}^{|x|} \sqrt{s^2 - \omega \pm C e^{-\frac{s^2}{4}}} ds \right), \quad (2.19)$$

quando $|x| \rightarrow \infty$. Por argumentos análogos aos utilizados anteriormente, existem a_+ , $a_- > 0$ constantes tais que $a_+ h_+ \leq v$ em $\partial B_{\tilde{\rho}}(0)$. Por (2.16), (2.17) e (2.18), usando o Princípio do Máximo Forte em 0.10, concluímos $a_+ h_+(x) \leq v(x) \leq a_- h_-(x)$, para todo $|x| \geq \tilde{\rho}$. Logo,

$$\begin{aligned} & a_+ \tilde{C}_1 |x|^{-\frac{N}{2}} \exp \left(- \int_{\rho}^{|x|} \sqrt{s^2 - \omega + C e^{-\frac{s^2}{4}}} ds \right) \\ & \leq a_+ h_+ \\ & \leq v \\ & \leq a_- h_- \\ & \leq a_- \tilde{C}_2 |x|^{-\frac{N}{2}} \exp \left(- \int_{\rho}^{|x|} \sqrt{s^2 - \omega - C e^{-\frac{s^2}{4}}} ds \right), \end{aligned}$$

onde $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2 > 0$ são as constantes vindas do que já foi obtido (veja no enunciado do Teorema 2.3 o que significa a relação já obtida em 2.19). Por outro lado,

$$\begin{aligned} a_+ h_+ & \geq a_+ \tilde{C}_1 |x|^{-\frac{N}{2}} \exp \left(- \int_{\rho}^{|x|} \sqrt{s^2 - \omega + C e^{-\frac{s^2}{4}}} ds \right) \\ & \geq a_+ \tilde{C}_1 |x|^{-\frac{N}{2}} \exp \left(- \int_{\rho}^{|x|} \sqrt{s^2 - \omega} ds - \int_{\rho}^{|x|} \sqrt{C e^{-\frac{s^2}{4}}} ds \right) \\ & = a_+ \tilde{C}_1 |x|^{-\frac{N}{2}} \exp \left(- \int_{\rho}^{|x|} \sqrt{s^2 - \omega} ds \right) \exp \left(- \int_{\rho}^{|x|} \sqrt{C e^{-\frac{s^2}{4}}} ds \right) \\ & = a_+ \bar{C}_1 |x|^{-\frac{N}{2}} \exp \left(- \int_{\rho}^{|x|} \sqrt{s^2 - \omega} ds \right) \\ & = a_+ \bar{C}_1 |x|^{-\frac{N}{2}} \exp \left(- \frac{1}{2} |x| \sqrt{|x|^2 - \omega} + \frac{\omega}{2} \ln(\sqrt{|x|^2 - \omega} + |x|) - C(\tilde{\rho}) \right) \\ & = a_+ \bar{C}_1 e^{-C(\tilde{\rho})} |x|^{-\frac{N}{2}} \exp \left(- \frac{1}{2} |x| \sqrt{|x|^2 - \omega} \right) \left(\exp \left(\ln(\sqrt{|x|^2 - \omega} + |x|) \right) \right)^{\frac{\omega}{2}} \\ & \geq a_1 \bar{C}_1 e^{-C(\tilde{\rho})} |x|^{-\frac{N}{2}} \exp \left(- \frac{|x|^2}{2} \right) (\sqrt{|x|^2 - \omega} + |x|)^{\frac{\omega}{2}} \\ & \geq a_1 \bar{C}_1 e^{-C(\tilde{\rho})} |x|^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{2}} (m+1)^{\frac{\omega}{2}} |x|^{\frac{\omega}{2}} \\ & = C_1 e^{-\frac{|x|^2}{2}} |x|^{\frac{\omega-N}{2}}, \end{aligned}$$

com m a ser especificado mais adiante. Além disso,

$$\begin{aligned}
 a_- h_- &\leq a_- \tilde{C}_2 |x|^{-\frac{N}{2}} \exp \left(- \int_{\rho}^{|x|} \sqrt{s^2 - \omega - C e^{-\frac{s^2}{4}}} ds \right) \\
 &\leq a_- \tilde{C}_2 |x|^{-\frac{N}{2}} \exp \left(- \int_{\rho}^{|x|} \sqrt{s^2 - \omega} + \sqrt{C e^{-\frac{s^2}{4}}} ds \right) \\
 &= a_- \tilde{C}_2 |x|^{-\frac{N}{2}} \exp \left(\int_{\rho}^{|x|} \sqrt{C e^{-\frac{s^2}{4}}} ds \right) \cdot \frac{1}{\exp \left(\int_{\rho}^{|x|} \sqrt{s^2 - \omega} \right)} \\
 &= a_- \bar{C}_2 |x|^{-\frac{N}{2}} \frac{1}{\exp \left(\frac{1}{2} |x| \sqrt{|x|^2 - \omega} - \frac{\omega}{2} \ln(\sqrt{|x|^2 - \omega} + |x|) + C(\tilde{\rho}) \right)} \\
 &= a_- \bar{C}_2 |x|^{-\frac{N}{2}} \frac{\exp(\ln(\sqrt{|x|^2 - \omega}))^{\frac{\omega}{2}}}{\exp \left(\frac{1}{2} |x| \sqrt{|x|^2 - \omega} \right) e^{C(\tilde{\rho})}} \\
 &\leq a_- \bar{C}_2 e^{-C(\tilde{\rho})} |x|^{-\frac{N}{2}} 2^{\frac{\omega}{2}} |x|^{\frac{\omega-N}{2}} \frac{1}{\exp \left(\frac{|x|^2 - M}{2} \right)} \\
 &= a_- \bar{C}_2 e^{-C(\tilde{\rho})} |x|^{-\frac{N}{2}} 2^{\frac{\omega}{2}} |x|^{\frac{\omega-N}{2}} \frac{e^M}{e^{\frac{|x|^2}{2}}} \\
 &= a_- \bar{C}_2 e^{M-C(\tilde{\rho})} |x|^{-\frac{N}{2}} 2^{\frac{\omega}{2}} |x|^{\frac{\omega-N}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{2}},
 \end{aligned}$$

onde, nestas estimativas, usamos as desigualdades

$$\sqrt{s^2 - \omega - C e^{-\frac{s^2}{4}}} \geq \sqrt{s^2 - \omega} - \sqrt{C e^{-\frac{s^2}{4}}} \quad \text{e} \quad \sqrt{s^2 - \omega + C e^{-\frac{s^2}{4}}} \leq \sqrt{s^2 - \omega} + \sqrt{C e^{-\frac{s^2}{4}}},$$

a integral

$$\int_{\rho}^{|x|} \sqrt{s^2 - \omega} ds = \frac{1}{2} (|x| \sqrt{|x|^2 - \omega} - \omega \ln(\sqrt{|x|^2 - \omega} + |x|) + C(\tilde{\rho})),$$

as estimativas

$$|x|^2 \geq |x|^2 - \omega \Rightarrow |x| \geq \sqrt{|x|^2 - \omega} \geq |x| \sqrt{1 - \frac{\omega}{|x|^2}} \geq |x| \sqrt{1 - \frac{\omega}{\tilde{\rho}^2}} =: m|x|$$

e, finalmente, que

$$\begin{aligned}
 |x|^2 - |x|\sqrt{|x|^2 - \omega} &= |x|(|x| - \sqrt{|x|^2 - \omega}) \\
 &= |x|(|x| - \sqrt{|x|^2 - \omega}) \cdot \frac{|x| + \sqrt{|x|^2 - \omega}}{|x| + \sqrt{|x|^2 - \omega}} \\
 &= \frac{|x|(|x|^2 - |x|\sqrt{|x|^2 - \omega} + |x|\sqrt{|x|^2 - \omega} - |x|^2 + \omega)}{|x| + \sqrt{|x|^2 - \omega}} \\
 &= \frac{|x|\omega}{|x|\left(1 + \sqrt{1 - \frac{\omega}{|x|^2}}\right)} \\
 &\leq \frac{\omega}{1 + \sqrt{1 - \frac{\omega}{\bar{\rho}^2}}} =: M,
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$|x| \geq |x|\sqrt{|x|^2 - \omega} \geq m|x| \quad \text{e} \quad |x|^2 \geq |x|\sqrt{|x|^2 - \omega} \geq |x|^2 - M.$$

Além disso, também usamos a integrabilidade de e^{-t^2} . Portanto,

$$v(x) \sim |x|^{\frac{\omega-N}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{2}}, \quad \text{quando } |x| \rightarrow \infty.$$

Por fim, sendo u solução de

$$-\Delta u - u\Delta u^2 + |x|^2 u + u^3 = \omega u, \quad \text{em } \mathbb{R}^N,$$

temos que $f^{-1}(u)$ é solução de (2.9). Pelo que já vimos,

$$f^{-1}(u(x)) \sim |x|^{\frac{\omega-N}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{2}},$$

isto é,

$$C_1 |x|^{\frac{\omega-N}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{2}} \leq f^{-1}(u) \leq C_2 |x|^{\frac{\omega-N}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{2}}.$$

Isto implica que

$$f(C_1 |x|^{\frac{\omega-N}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{2}}) \leq u(x) \leq f(C_2 |x|^{\frac{\omega-N}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{2}}).$$

Desde que,

$$C_1 |x|^{\frac{\omega-N}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{2}} \rightarrow 0, \quad \text{quando } |x| \rightarrow \infty,$$

consideremos $|x|$ grande tal que $0 < C_1 |x|^{\frac{\omega-N}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{2}} \leq 1$. Como

$$\frac{f(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 1} f(1) > 0 \text{ e } \frac{f(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1,$$

existe $k > 0$ tal que

$$\frac{f(t)}{t} \geq k, \quad \forall t \in (0, 1].$$

Portanto,

$$kC_1|x|^{\frac{\omega-N}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{2}} \leq f(C_1|x|^{\frac{\omega-N}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{2}}),$$

e, conseqüentemente,

$$C_1|x|^{\frac{\omega-N}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{2}} \leq f(C_1|x|^{\frac{\omega-N}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{2}}) \leq u \leq f(C_2|x|^{\frac{\omega-N}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{2}}) \leq C_2|x|^{\frac{\omega-N}{2}},$$

de onde concluímos que $u(x) \sim |x|^{\frac{\omega-N}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{2}}$, para $|x| \rightarrow \infty$. ■

Teorema 2.4. *Sejam $\Omega = \mathbb{R}^N$, com $N \geq 1$, e $V(x) = |x|^2$. Então, para cada $\omega \in \mathbb{R}$ fixado, existe no máximo uma solução positiva de (2.1), ou seja, existe no máximo um ponto crítico positivo de $\mathcal{A}_\omega$. Além disso, existe um ponto crítico positivo de $\mathcal{A}_\omega$ se, e somente se, $\omega > \lambda_V$. Aqui, λ_V representa o primeiro autovalor do operador $(-\Delta + V(x)I, H)$.*

Demonstração. Considere o conjunto de pontos críticos positivos do funcional $\mathcal{A}_\omega$, isto é,

$$A_\omega = \{v \in H; v > 0 \text{ e } \mathcal{A}'_\omega(v) = 0\}.$$

Vejamos, primeiro, que A_ω é vazio ou unitário. De fato, suponha que existem $u, v \in A_\omega$, com $u \neq v$. Já sabemos que γ , dada em (2.6), é tal que $\gamma(0) = u$ e $\gamma(1) = v$, ou seja, temos o item a) do Teorema 1.1. Pelo Teorema 2.3, como u e v são soluções positivas de (2.9), existem $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$C_1 \leq \frac{v(x)}{u(x)} \leq C_2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Assim, o Lema 2.2 nos garante a condição b) do Teorema 1.1, isto é, γ é localmente Lipschitziana em $t = 0$. Para o item c) do Teorema 1.1, temos pelo Lema 2.1 que $|\nabla \gamma(t)|^2$ é convexa em $[0, 1]$ e, desse modo,

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \gamma(t)|^2 dx$$

é convexa. Além disso, $f^2(\gamma(t)) = (1-t)f^2(u) + tf^2(v)$ implica $(f^2(\gamma(t)))'' = 0$, o que

nos dá $f^2(\gamma(t))$ convexa e, portanto,

$$\int_{\Omega} (V(x) - \omega) f^2(v) dx$$

é também convexa. Como a função $t \rightarrow t^2$ é estritamente convexa e $f^4(\gamma(t)) = (f^2(\gamma(t)))^2$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f^4(\gamma(t)) dx$$

também o é. Com isto, a função $t \rightarrow \mathcal{A}_{\omega}(\gamma(t))$ é estritamente convexa e obtemos o item c) juntamente com a condição inicial de iii) no Teorema [1.1](#). Portanto, A_{ω} tem no máximo um elemento, o que é um absurdo pois supomos que existem elementos distintos $u, v \in A_{\omega}$, como queríamos mostrar inicialmente. Agora, vejamos que se $\omega \leq \lambda_V$, então A_{ω} é vazio, isto é, se A_{ω} tem um elemento então $\omega > \lambda_V$. Realmente, se existisse $u \in A_{\omega}$, então $v = f(u)$ seria solução de [\(2.1\)](#), ou seja, satisfaria

$$\int_{\mathbb{R}^N} (1 + 2v^2) \nabla v \nabla \varphi dx + 2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 v \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) v \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} v^3 \varphi dx = \omega \int_{\mathbb{R}^N} v \varphi dx,$$

para toda $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Assim, para $\varphi = v$ e desde que

$$\lambda_V = \inf_{v \in H} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 v^2}{\int_{\mathbb{R}^N} v^2},$$

obtemos

$$\begin{aligned} \lambda_V \int_{\mathbb{R}^N} v^2 dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) v^2 dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx + 4 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 v^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) v^2 dx \\ &= \omega \int_{\mathbb{R}^N} v^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} v^4 dx < \omega \int_{\mathbb{R}^N} v^2 \end{aligned}$$

e, novamente, isso mostra que $\lambda_V < \omega$. O que contraria a nossa hipótese $\omega \leq \lambda_V$. Assim, obtemos que A_{ω} é vazio. Finalmente, mostremos que se $\omega > \lambda_V$ então A_{ω} é não vazio. De fato, primeiro perceba que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\omega}(v) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{2} (|x|^2 - \omega) f^2(v) + \frac{1}{4} f^4(v) \right] dx \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{|x| < \sqrt{|\omega|}} (|x|^2 - |\omega|) f^2(v) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_{|x| \geq \sqrt{|\omega|}} (|x|^2 - |\omega|) f^2(v) dx + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} f^4(x) dx \\
& \geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{|x| < \sqrt{|\omega|}} (|x|^2 - |\omega|) f^2(v) dx + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} f^4(x) dx \\
& \geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx + C_3 |B(0, \sqrt{|\omega|})| \geq C_3 |B(0, \sqrt{|\omega|})|,
\end{aligned}$$

onde $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{|\omega|}{2}$ e C_3 é o valor de mínimo do polinômio $t \rightarrow at^4 + bt^2$. Daí, existe $m := \inf_{v \in H} \mathcal{A}_\omega(v)$. Mas, a presença do termo $\int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 |v|^2 dx$ na definição da norma não nos permite concluir que uma sequência cuja imagem por $\mathcal{A}_\omega$ converge para m seja limitada. De fato, como $\Omega = \mathbb{R}^N$, tem-se

$$\|v\|_H^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 |v|^2 dx$$

e supondo uma sequência (v_n) com $\mathcal{A}_\omega(v_n) \rightarrow m$ não garantimos que (v_n) é limitada usando o mesmo argumento do caso Ω limitado, pois se (v_n) possui subsequência (v_{n_k}) com $\|v_{n_k}\|_H \rightarrow +\infty$, então não necessariamente $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_{n_k}|^2 dx \rightarrow +\infty$ (devido a expressão da norma de H). Assim não teríamos uma contradição com o fato de $\mathcal{A}_\omega(v_{n_k}) \rightarrow m$. Isso nos mostra que não podemos seguir de forma análoga ao caso em que Ω é limitado. Logo, para concluir que existe $v_0 \in A_\omega$ tal que $m = \mathcal{A}_\omega(v_0)$ precisamos seguir por outro caminho. Para tanto, considere $\varepsilon > 0$ e φ_1 a autofunção positiva do autovalor λ_V . Assim, $\varepsilon\varphi_1 \in H$ é tal que

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_\omega(\varepsilon\varphi_1) &= \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi_1|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|x|^2 - \omega) (f(\varepsilon\varphi_1))^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} f^4(\varepsilon\varphi_1) dx \\
&= \frac{\lambda_V \varepsilon^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_1^2 dx - \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 \varphi_1^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|x|^2 - \omega) f^2(\varepsilon\varphi_1) dx \\
&\quad + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} f^4(\varepsilon\varphi_1) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 (f^2(\varepsilon\varphi_1) - \varepsilon^2 \varphi_1^2) dx + \frac{\lambda_V \varepsilon^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_1^2 dx - \frac{\omega}{2} \int_{\mathbb{R}^N} f^2(\varepsilon\varphi_1) dx \\
&\quad + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} f^2(\varepsilon\varphi_1) dx.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_\omega(\varepsilon\varphi_1) &= \varepsilon^2 \left\{ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 \varphi_1^2 \left[\left(\frac{f(\varepsilon\varphi_1)}{\varepsilon\varphi_1} \right)^2 - 1 \right] dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\lambda_V \varphi_1^2 - \omega \left(\frac{f(\varepsilon\varphi_1)}{\varepsilon\varphi_1} \right)^2 \varphi_1^2 \right] dx \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{f(\varepsilon\varphi_1)}{\varepsilon\varphi_1} \right)^4 \varepsilon^2 \varphi_1^2 dx \right\} < 0,
\end{aligned}$$

uma vez que a expressão entre chaves converge para $\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_1(\lambda_V - \omega) dx < 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Assim, multiplicada por $\varepsilon^2 > 0$ ainda é negativa, onde estamos considerando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Também usamos que $\omega > \lambda_V$, $\frac{f(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$ e

$$\begin{aligned} & -\Delta \varphi_1 + |x|^2 \varphi_1 = \lambda_V \\ \stackrel{(I)}{\implies} & \int_{\mathbb{R}^N} \nabla \varphi_1 \nabla \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 \varphi_1^2 \varphi dx = \lambda_V \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_1^2 dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\mathbb{R}^N) \\ \implies & \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi_1|^2 dx = \lambda_V \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_1^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 \varphi_1^2 dx, \end{aligned}$$

onde (I) é devido a Identidade de Green em [0.6](#). Portanto $m < 0$. Assim, sendo $\mathcal{A}_\omega(v_n) \rightarrow m$, temos $\mathcal{A}_\omega(v_n) < 0$, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Daí, $v_n \not\equiv 0$. Podemos supor que $v_n \geq 0$, já que $\mathcal{A}_\omega(|v_n|) = \mathcal{A}_\omega(v_n)$. Sendo assim, consideramos a simetrização de Schwarz de cada v_n , denotada por v_n^* , donde sabemos que $\mathcal{A}_\omega(v_n^*) \leq \mathcal{A}_\omega(v_n)$. Como

$$\mathcal{A}_\omega(v_n) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|x|^2 - \omega) f^2(v_n) dx + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} f^4(v_n) dx < 0,$$

obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{|x|^2 > \omega} (|x|^2 - \omega) f^2(v_n) dx - \frac{1}{2} \int_{|x|^2 < \omega} (\omega - |x|^2) f^2(v_n) dx \\ & + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} f^4(v_n) dx + \int_{|x|^2 < \omega} (\omega - |x|^2) f^2(v_n) dx < \int_{|x|^2 < \omega} (\omega - |x|^2) f^2(v_n) dx \\ \Rightarrow & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{|x|^2 > \omega} ||x|^2 - \omega| f^2(v_n) dx + \frac{1}{2} \int_{|x|^2 < \omega} ||x|^2 - \omega| f^2(v_n) dx \\ & + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} f^4(v_n) dx < \int_{|x|^2 < \omega} (\omega - |x|^2) f^2(v_n) dx \\ \Rightarrow & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} ||x|^2 - \omega| f^2(v_n) dx + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} f^4(v_n) dx \\ & < \int_{|x|^2 < \omega} (\omega - |x|^2) f^2(v_n) dx = \int_{|x|^2 < \omega} 2(\omega - |x|^2) \frac{f^2(v_n)}{2} dx. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} ||x|^2 - \omega| f^2(v_n) dx + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} f^4(v_n) dx \\ & \leq \int_{|x|^2 < \omega} \left[4(\omega - |x|^2)^2 + \frac{1}{4} f^4(v_n) \right] dx \leq 2 \int_{B(0, \sqrt{|\omega|})} \omega^2 dx + \frac{1}{8} \int_{|x|^2 > \omega} f^4(v_n) dx \\ & = 2\omega^2 |B(0, \sqrt{|\omega|})| + \frac{1}{8} \int_{|x|^2 > \omega} f^4(v_n) dx \leq \frac{1}{8} \int_{\mathbb{R}^N} f^4(v_n) dx + C_0(\omega), \end{aligned}$$

onde $C_0 = 2\omega^2|B(0, \sqrt{|\omega|})| > 0$. Logo,

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 - \omega |f^2(v_n)| dx + \frac{1}{8} \int_{\mathbb{R}^N} f^4(v_n) dx \leq C_0(\omega). \quad (2.20)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} f^2(v_n) dx &= \int_{|x|^2 < 2\omega} f^2(v_n) dx + \frac{1}{\omega} \int_{|x|^2 \geq 2\omega} \omega f^2(v_n) dx \\ &\leq \int_{|x|^2 < 2\omega} 1 \cdot f^2(v_n) dx + \frac{1}{\omega} \int_{|x|^2 \geq 2\omega} (|x|^2 - \omega) f^2(v_n) dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{|x|^2 < 2\omega} dx + \frac{1}{2} \int_{|x|^2 < 2\omega} f^4(v_n) dx + \frac{C_0}{\omega} \\ &\leq \frac{1}{2} |B(0, \sqrt{|\omega|})| + 4C_0 + \frac{C_0}{\omega} \\ &=: C_1(\omega), \end{aligned}$$

onde $C_1 > 0$, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f^2(v_n) dx \leq C_1(\omega).$$

Com isso, pelo que já vimos em (2.20), temos

$$\begin{aligned} \frac{\omega + 1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} f^2(v_n) dx &\leq \frac{\omega + 1}{2} C_1(\omega) \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|x|^2 - \omega) dx \leq \tilde{C}_0 \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} f^2(v_n) (|x|^2 + 1) dx &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} f^2(v_n) (|x|^2 - \omega + \omega + 1) dx \\ &\leq \tilde{C}_0 + \frac{\omega + 1}{2} C_1(\omega) \\ &= C_2(\omega), \end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|x|^2 + 1) f^2(v_n) dx \leq C_2(\omega).$$

Consequentemente

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|x|^2 + 1) f^2(v_n) dx + \frac{1}{8} \int_{\mathbb{R}^N} f^4(v_n) dx \leq C_3(\omega). \quad (2.21)$$

Pelo Lema Radial (Lemma A.II. em [9]) como $v_n \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é radial, podemos supor $v_n \in C(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$. Assim, cada $M_n := v_n(1)$ está bem definido. Da equação (2.21), segue que

$$\begin{aligned}
 C_3(\omega) &\geq \frac{1}{8} \int_{\mathbb{R}^N} f^4(v_n) dx \geq \frac{1}{8} \int_{|x|<1} f^4(v_n(x)) dx \geq \frac{1}{8} \int_{|x|<1} f^4(v_n(1)) dx \\
 &= \frac{f^4(M_n)}{8} \int_{|x|<1} dx \\
 &= \frac{f^4(M_n) \mu(B_1)}{8}.
 \end{aligned}$$

Daí,

$$f(M_n) \leq \left(\frac{8C_3(\omega)}{\mu(B_1)} \right)^{\frac{1}{4}} =: \tilde{C}_4(\omega).$$

Assim, pelo fato que $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ é uma bijeção crescente, concluímos

$$M_n \leq f^{-1}(\tilde{C}_4(\omega)) = C_4(\omega).$$

Daí, definindo $g : (0, C_4(\omega)] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(t) = \frac{f(t)}{t}$, como $\frac{f(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$, obtemos

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 1 \text{ e } \lim_{t \rightarrow C_4(\omega)} g(t) = g(C_4(\omega)).$$

Logo, g é limitada. Portanto, existe $C_5(\omega)$ tal que $t \leq C_5(\omega)f(t)$, para todo $t \in [0, C_4(\omega)]$. Assim, por (2.5) e (2.21), obtemos

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 v_n^2 dx &= \int_{|x| \leq 1} |x|^2 v_n^2 dx + \int_{|x| > 1} |x|^2 v_n^2 dx \\
 &\leq \int_{|x| \leq 1} v_n^2 dx + \int_{|x| > 1} |x|^2 \left(\frac{v_n}{f(v_n)} \right)^2 f^2(v_n) dx \\
 &\leq \int_{|x| \leq 1} v_n^2 dx + C_5^2(\omega) \int_{|x| > 1} |x|^2 f^2(v_n) dx \\
 &\leq \int_{|x| \leq 1} f^2(v_n) (1 + 2f^2(v_n)) dx + C_5^2(\omega) \int_{|x| > 1} |x|^2 f^2(v_n) dx \\
 &= \int_{|x| \leq 1} (f^2(v_n) + 2f^4(v_n)) dx + C_5^2(\omega) \int_{|x| > 1} |x|^2 f^2(v_n) dx \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}^N} (f^2(v_n) + 2f^4(v_n)) dx + C_5^2(\omega) \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 f^2(v_n) dx \leq C_6(\omega).
 \end{aligned}$$

Logo, (v_n) é limitada em H . Com isso, $v_n \rightharpoonup v$ em H e, pela Observação A.1, $v_n \rightarrow v$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Queremos mostrar que $\mathcal{A}_\omega(v) = m$. Para isso, note que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|x|^2 - \omega) f^2(v) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} (|x|^2 - \omega) f^2(v_n) dx. \quad (2.22)$$

De fato, já sabemos que $|x|^2 f^2(v_n) \geq 0$ e que $|x|^2 f^2(v) \rightarrow |x|^2 f^2(v_n)$ q.t.p. Além disso,

$$\sup_n \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 f^2(v_n) dx \leq \sup_n \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 v_n^2 dx \leq \sup_n \|v_n\|_H^2 < \infty,$$

pois $f(t) \leq t$ e (v_n) é limitada em H . Além disso, $|x|^2 f^2(v_n) \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Logo, pelo Lema de Fatou em [0.2](#),

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 f^2(v) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 f^2(v_n) dx. \quad (2.23)$$

Como $v_n \rightarrow v$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$, existe $h \in L^2(\mathbb{R}^N)$ tal que $|v_n| \leq h$. Daí,

$$f^2(v_n) \leq v_n^2 \leq h^2 \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Assim, como $f^2(v_n) \rightarrow f^2(v)$ q.t.p., pelo T.C.D.L., concluímos

$$\int_{\mathbb{R}^N} f^2(v) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} f^2(v_n) dx. \quad (2.24)$$

De [\(2.23\)](#) e [\(2.24\)](#), segue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (|x|^2 - \omega) f^2(v) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 f^2(v) dx - \omega \int_{\mathbb{R}^N} f^2(v) dx \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 f^2(v_n) dx - \omega \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} f^2(v_n) dx \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 f^2(v_n) dx + \liminf_{n \rightarrow \infty} (-\omega) \int_{\mathbb{R}^N} f^2(v_n) dx \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} (|x|^2 - \omega) f^2(v_n) dx, \end{aligned}$$

donde concluímos [\(2.22\)](#). Além disso,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f^4(v) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} f^4(v_n) dx. \quad (2.25)$$

Já temos que $f^4(v_n) \geq 0$ e que $f^4(v_n) \rightarrow f^4(v)$. Também veja que

$$\sup_n \int_{\mathbb{R}^N} f^4(v_n) dx \leq 2 \sup_n \int_{\mathbb{R}^N} v_n^2 dx = 2 \sup_n \|v_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 < \infty,$$

visto que $2f^4(t) \leq f^2(t) + 2f^4(t) \leq 4t^2$ e que $v_n \rightarrow v$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$ implica (v_n) limitada em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Isso também nos dá que $f^4(v_n) \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Desse modo, pelo Lema de Fatou em [0.2](#), concluímos [\(2.25\)](#). Por fim, mostremos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx. \quad (2.26)$$

Se mostrarmos que $v_n \rightharpoonup v$ em $(H, \|\cdot\|_\nabla)$, onde

$$\|v\|_\nabla^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx,$$

concluiremos $\|v\|_\nabla \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_\nabla$, que é o que diz (2.26). Sabemos que $v_n \rightharpoonup v$ em $(H, \|\cdot\|_H)$ que ocorre, se e só se,

$$\varphi(v_n) \rightarrow \varphi(v), \quad \forall \varphi \in H'. \quad (2.27)$$

Daí, existe $C > 0$ tal que

$$|\varphi(w)| \leq C\|w\|_H, \quad \forall w \in H.$$

Assim, dado $\psi : (H, \|\cdot\|_\nabla) \rightarrow \mathbb{R}$ linear e contínuo, concluímos

$$|\psi(w)| \leq C\|w\|_\nabla \leq C\|w\|_H, \quad \forall w \in H.$$

Logo, $\psi : (H, \|\cdot\|_H) \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear contínuo. Por (2.27), $\psi(v_n) \rightarrow \psi(v)$, o que implica que $v_n \rightharpoonup v$ em $(H, \|\cdot\|_\nabla)$. Portanto, usando (2.22), (2.25) e (2.26) temos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\omega(v) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|x|^2 - \omega) f^2(v) dx + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} f^4(v) dx \\ &\leq \frac{1}{2} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx + \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} (|x|^2 - \omega) f^2(v_n) dx \\ &\quad + \frac{1}{4} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} f^4(v_n) dx \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{A}_\omega(v_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{A}_\omega(v_n) = m, \end{aligned}$$

como desejado. Uma vez que $v \in H$ é solução fraca da equação

$$-\Delta v + (|x|^2 - \omega) f(v) f'(v) + f^3(v) f'(v) = 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \quad (2.28)$$

por [26], segue que $v \in C_{loc}^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ e, assim, é solução clássica de (2.28). Por outro lado, podemos reescrever (2.28) na seguinte forma:

$$-\Delta v + |x|^2 v f'(v) + v^3 f'(v) = |x|^2 v f'(v) - |x|^2 f(v) f'(v) + v^3 f'(v) - f^3(v) f'(v) + \omega f(v) f'(v),$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} -\Delta v + (|x|^2 f'(v) + v^2 f'(v))v &= |x|^2(v - f(v))f'(v) \\ &+ \omega f(v)f'(v) + (v^3 - f^3(v))f'(v). \end{aligned}$$

Chamando $c(x) = |x|^2 f'(v) + v^2 f'(v) \geq 0$, temos

$$-\Delta v + c(x)v = |x|^2(v - f(v))f'(v) + \omega f(v)f'(v) + (v^3 - f^3(v))f'(v). \quad (2.29)$$

Por fim, já sabemos que $v(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Caso exista $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que $v(x_0) = 0$, consideramos uma bola arbitrária $B_r(x_0)$ centrada em x_0 . Como $v \geq f(v) \geq 0$, $f'(v) > 0$, $|x|^2 \geq 0$ e $\omega > 0$, por (2.29), temos $-\Delta v + c(x) \geq 0$ em $B_r(x_0)$. Pelo Princípio do Máximo Forte em 0.10, $v \equiv 0$ em $B_r(x_0)$. Sendo $r > 0$ arbitrário, segue que $v \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N$, o que é um absurdo, pois $\mathcal{A}_\omega(v) < 0$. Portanto, $v > 0$ e, portanto, $v \in A_\omega$. Isto finaliza a prova. ■

Apêndice A

Resultados Complementares

Afirmção A.1. Soluções clássicas de (1.6) são pontos críticos do funcional I_α . De fato, se $u \in C^2(\overline{B})$ é solução clássica de (1.6), então

$$\begin{aligned} -\Delta u = |x|^\alpha |u|^{q-2} u &\Rightarrow - \int_B \Delta u \cdot v dx = \int_B |x|^\alpha |u|^{q-2} u v dx, \quad \forall v \in C_0^\infty(B) \\ &\Rightarrow \int_B \nabla u \nabla v dx = \int_B |x|^\alpha |u|^{q-2} u v dx, \quad \forall v \in C_0^\infty(B), \end{aligned}$$

onde usamos a Identidade de Green (Teorema 0.6). Além disso, u e ∇u são contínuas em $\overline{B}$ compacto, já que $u \in C^2(\overline{B})$. Daí, u e ∇u são limitadas em $L^\infty(B)$ e, assim,

$$\int_B |u|^2 dx \leq k^2 \int_B dx = k\mu(B) < \infty$$

e

$$\int_B |\nabla u|^2 dx \leq \tilde{k}^2 \int_B dx = \tilde{k}^2 \mu(B) < \infty,$$

onde k e $\tilde{k}$ são as constantes que limitam u e ∇u , respectivamente. Ou seja, como $Tu = u|_{\partial B} = 0$ por u ser contínua, obtemos $u \in H_0^1(B)$. Logo, u é solução fraca. Por outro lado, u é ponto crítico do funcional I_α se, e somente se

$$\begin{aligned} I_\alpha(u) \cdot v = 0, \quad \forall v \in H_0^1(B) &\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I(u + tv) - I(u)}{t} = 0, \quad \forall v \in H_0^1(B) \\ &\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} \int_B \frac{|\nabla(u + tv)|^2}{t} dx - \frac{1}{q} \int_B \frac{|x|^\alpha |u + tv|^q}{t} dx \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_B \frac{|\nabla u|^2}{t} dx + \frac{1}{q} \int_B \frac{|x|^\alpha |u|^q}{t} dx \right] = 0, \quad \forall v \in H_0^1(B) \\ &\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_B \frac{|\nabla(u + tv)|^2 - |\nabla u|^2}{t} dx \\ &\quad - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{q} \int_B \frac{|x|^\alpha (|u + tv|^q - |u|^q)}{t} dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(B). \end{aligned}$$

Como $|\nabla(u + tv)|^2 = |\nabla u|^2 + 2t\nabla u \nabla v + t^2|\nabla v|^2$, obtemos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|\nabla(u + tv)|^2 - |\nabla u|^2}{t} = 2\nabla u \nabla v.$$

Por outro lado, definimos $f(t) = |u + tv|^q$. Daí,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|u + tv|^q - |u|^q}{t} = f'(0) = q|u|^{q-2}uv,$$

pois $f'(t) = q|u + tv|^{q-1} \cdot \frac{u+tv}{|u+tv|} \cdot v$, para todo t que satisfaz $u + tv \neq 0$. Além disso, pelo Teorema do Valor Médio em [0.4](#), existe $s = s(t)$ entre 0 e t tal que

$$\frac{|u + tv|^q - |u|^q}{t} \leq f'(s) = q|u + sv|^{q-2}(u + sv) \leq q|u + sv|^{q-1}|v|.$$

Fixado $x \in B$, defina $g_x: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por $g_x(t) = |u + s(t)v|(x)$, que é contínua q.t.p. $x \in B$. Logo, existe $t_0(x) \in [-1, 1]$ ponto de máximo de g_x . Denotando $w(x) = u(x) + s(t_0(x))v(x)$, temos que

$$\left(\int_B |w|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_B |u|^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_B |s(t_0(x))|^q |v|^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

isto é, $w \in L^q(B)$. Assim,

$$|x|^\alpha \cdot \frac{|u + tv|^q - |u|^q}{t} \leq q|w|^{q-1} \cdot |v|.$$

Logo, pela Desigualdade de Hölder em [0.3](#),

$$\int_B |w|^{q-1}|v| \leq \left(\int_B |w|^{(q-1)\frac{q}{q-1}} \right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_B |v|^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Daí, $|w|^{q-1}|v| \in L^1(B)$. Portanto, pelo T. C. D. L. em [0.1](#), obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{q} \int_B \frac{|x|^\alpha (|u + tv|^q - |u|^q)}{t} dx &= \frac{1}{q} \int_B |x|^\alpha \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|u + tv|^q - |u|^q}{t} dx \\ &= \frac{1}{q} \int_B |x|^\alpha q|u|^{q-2}uv dx. \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} I'_\alpha(u)v = 0, \quad \forall v \in H_0^1(B) &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_B 2\nabla u \nabla v dx - \frac{1}{q} \int_B |x|^\alpha q|u|^{q-2}uv dx, \quad \forall v \in H_0^1(B) \\ &\Leftrightarrow \int_B \nabla u \nabla v dx = \int_B |x|^\alpha |u|^{q-2}uv dx, \quad \forall v \in H_0^1(B), \end{aligned}$$

isto é, $u \in H_0^1(B)$ é solução fraca. Portanto, soluções clássicas de (1.6) são pontos críticos do funcional I_α dado anteriormente.

As seis afirmações a seguir foram usadas ao longo da demonstração do Teorema 2.1.

Afirmção A.2. Se $u \in L^p(\Omega)$, então $F(x, u) \in L^p(\Omega)$.

De fato,

$$|(V(x) - \omega)f(u)f'(u)| \leq (\|V\|_{L^\infty} + |\omega|)|u| \in L^p(\Omega)$$

e

$$|f^3(u)f'(u)| \leq \frac{f^4(u)}{|u|} \leq \frac{2u^2}{|u|} = 2|u| \in L^p(\Omega),$$

onde usamos o fato de que $f'(t) \leq \frac{f(t)}{t}$ e $2f^4(t) \leq 4t^2$, para todo $t > 0$. Isso conclui a afirmação.

Afirmção A.3. Como $u \in L^2(\Omega)$, então $u \in C^{0,\gamma}(\Omega)$.

De fato, pela Afirmção A.2, $F(x, u) \in L^2(\Omega)$. Daí, por regularidade (veja 0.11), $u \in W^{2,2}(\Omega)$. Note ainda que, por imersão de Sobolev (veja 0.8), temos

- i) se $\frac{1}{2} - \frac{2}{N} < 0$, então $u \in C^{0,\gamma}(\Omega)$, para algum $\gamma \in (0, 1)$;
- ii) se $\frac{1}{2} - \frac{2}{N} = 0$, então $u \in L^p(\Omega)$, para todo $p \geq 1$. Assim, pela Afirmção A.2, $F(x, u) \in L^p(\Omega)$. Por regularidade (veja 0.11) novamente, obtemos $u \in W^{2,p}(\Omega)$. Tomando p suficientemente grande temos $\frac{1}{p} - \frac{2}{N} < 0$, o que implica que $u \in C^{0,\gamma}(\Omega)$;
- iii) se $\frac{1}{2} - \frac{2}{N} > 0$, então $u \in L^{q_1}(\Omega)$, onde $\frac{1}{q_1} = \frac{1}{2} - \frac{2}{N}$. Pela Afirmção A.2, $F(x, u) \in L^{q_1}(\Omega)$. Daí, por regularidade (veja 0.11), $u \in W^{2,q_1}(\Omega)$. Se $\frac{1}{q_1} - \frac{2}{N} \leq 0$, pelos casos anteriores, obteremos $u \in C^{0,\gamma}(\Omega)$. Mas, se $\frac{1}{q_1} - \frac{2}{N} > 0$, definimos

$$\frac{1}{q_2} := \frac{1}{q_1} - \frac{2}{N} = \frac{1}{2} - \frac{2}{N} - \frac{2}{N},$$

Caso $\frac{1}{q_2} - \frac{2}{N} \leq 0$, estaremos nas hipóteses dos casos anteriores e portanto $u \in C^{0,\gamma}(\Omega)$. Do contrário, seguimos o argumento anterior obtendo $q_3, q_4, \dots$; onde podemos definir q_n a partir do q_{n-1} se

$$\frac{1}{q_n} - \frac{2}{N} > 0.$$

Note que não podemos definir q_n para todo $n \in \mathbb{N}$, pois caso contrário

$$\frac{1}{q_n} - \frac{2}{N} > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, como $\frac{1}{q_n} = \frac{1}{q_{n-1}} - \frac{2}{N} = \dots = \frac{1}{2} - n\frac{2}{N}$, temos

$$\frac{1}{2} - n\frac{2}{N} > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

o que é um absurdo. Assim, existe q_k , com k o maior possível. Então, $\frac{1}{q_k} - \frac{2}{N} \leq 0$. Daí, $u \in C^{0,\gamma}(\Omega)$. Ficando, assim, demonstrada a afirmação.

Agora, desde que $u \in C^{0,\gamma}(\Omega)$ e $V \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, vejamos outras afirmações.

Afirmção A.4. $f(u) \in C^{0,\gamma}(\Omega)$.

De fato, dados $x, y \in \Omega$, pelo Teorema do Valor Médio em [0.4](#), existe ξ_{xy} entre $u(x)$ e $u(y)$ tal que

$$|f(u(x)) - f(u(y))| = |f'(\xi)(u(x) - u(y))| \leq 1 \cdot c|x - y|^\gamma,$$

pois $f'(t) \leq 1$ e $u \in C^{0,\gamma}(\Omega)$. Ficando assim, demonstrada a afirmação.

Afirmção A.5. $f'(u) \in C^{0,\gamma}(\Omega)$.

De fato, da mesma forma como na Afirmção [A.4](#), basta mostrarmos que $|f''(t)| \leq c$, para todo $t \in \mathbb{R}$, e usar o Teorema do Valor Médio em [0.4](#) para garantir o desejado. Sendo assim, desde que

$$f'(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2f^2(t)}} = (1 + 2f^2(t))^{-\frac{1}{2}},$$

obtemos

$$f''(t) = -\frac{1}{2}(1 + 2f^2(t))^{-\frac{3}{2}}4f(t)f'(t) = -2f'(t)^4f(t).$$

Logo, como $f^2(t) \leq \sqrt{2}|t|$ e $f'(t) \leq \frac{f(t)}{t}$, para todo $t \neq 0$, concluímos que

$$|f''(t)| = 2|f'(t)|^3 \frac{f(t)}{|t|} \leq 2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}|t|}{|t|} = 2\sqrt{2},$$

de onde segue a prova da afirmação.

Afirmção A.6. Se $g \in C^{0,\alpha}$ e $h \in C^{0,\beta}$, então $f + g$, $f \cdot g \in C^{0,\min\{\alpha,\beta\}}$.

De fato, dados $x, y \in \Omega$, temos

$$\begin{aligned} |(g + h)(x) - (g + h)(y)| &= |g(x) - g(y) + h(x) - h(y)| \leq |g(x) - g(y)| + |h(x) - h(y)| \\ &\leq c_1|x - y|^\alpha + c_2|x - y|^\beta \leq c(|x - y|^\alpha|x - y|^\beta) \\ &= c|x - y|^{\min\{\alpha,\beta\}}(|x - y|^{\alpha - \min\{\alpha,\beta\}} + |x - y|^{\beta - \min\{\alpha,\beta\}}) \\ &\leq C|x - y|^{\min\{\alpha,\beta\}}, \end{aligned}$$

onde $c = \max\{c_1, c_2\}$ e C é obtida pelo fato que Ω é limitado e podemos trocar a norma do lado direito da igualdade acima por uma constante. Além disso,

$$\begin{aligned}
 |g(x)h(x) - g(y)h(y)| &= |g(x)h(x) - g(x)h(y) + g(x)h(y) - g(y)h(y)| \\
 &\leq |g(x)||h(x) - h(y)| + |h(x)||g(x) - g(y)| \\
 &\leq c_1 \cdot \tilde{c}_1 |x - y|^\beta + c_2 \tilde{c}_2 |x - y|^\alpha \\
 &\leq c(|x - y|^\beta + |x - y|^\alpha) \\
 &= c|x - y|^{\min\{\alpha, \beta\}} (|x - y|^{\beta - \min\{\alpha, \beta\}} + |x - y|^{\alpha - \min\{\alpha, \beta\}}) \\
 &\leq C|x - y|^{\min\{\alpha, \beta\}},
 \end{aligned}$$

sendo C obtida como anteriormente. Assim, fica demonstrada a afirmação.

Afirmção A.7. $u \in C^{2,\lambda}(\Omega)$, onde $\lambda = \min\{\alpha, \gamma\}$.

De fato, já sabemos da Afirmção A.4, Afirmção A.5 e Afirmção A.6 que $F(x, u) \in C^{0,\lambda}$, com $\lambda = \min\{\alpha, \gamma\}$. Assim, por regularidade de Schauder (veja 0.12), $u \in C^{2,\lambda}(\Omega)$, como queríamos.

Observação A.1. O espaço H está compactamente contido em $L^2(\mathbb{R}^N)$. De fato, dada $u \in H$, temos

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx &= \int_{B_1} u^2 dx + \int_{B_1^c} 1 \cdot u^2 dx \\
 &\leq \int_{B_1} 1 \cdot u^2 dx + \int_{B_1^c} V(x) u^2 dx \\
 &\leq \left(\int_{B_1} 1^{(\frac{2^*}{2})'} dx \right)^{\frac{1}{(\frac{2^*}{2})'}} \cdot \left(\int_{B_1} |u|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} + \int_{B_1^c} V(x) u^2 dx \\
 &\leq \bar{c}_N \cdot \left(\int_{B_1} |u|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx \\
 &\leq \bar{c} \cdot \tilde{c}_N \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + 1 \cdot \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx \\
 &\leq c_N \|u\|_H^2,
 \end{aligned}$$

onde $c_N = \max\{\bar{c} \cdot \tilde{c}, 1\}$ e usamos a Desigualdade de Hölder em 0.3 e o fato que $\|u\|_{2^*} \leq \|\nabla u\|_{L^2}$. Assim, H está continuamente contido em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Por fim, considere $(v_n) \subset H$ sequência limitada. Desde que H é reflexivo, o Teorema em 0.5 nos dá que, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u \in H$, que podemos supor $u = 0$ (caso contrário, consideraríamos $u_n - u \rightharpoonup 0$ e seguiríamos analogamente). Agora, note que H está

continuamente imerso em $H^1(\mathbb{R}^N)$, pois, dada $u \in H$, temos

$$\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx \leq \|u\|_H^2 + c_N \|u\|_H^2 = (c_N + 1) \|u\|_H^2.$$

Assim, em particular, $u_n \rightharpoonup 0$ em $H^1(B_R(0))$ (de fato, temos tal convergência em todo $\mathbb{R}^N$), onde $R > 0$ será especificado. Desde que $H^1(B_R(0))$ está compactamente imerso em $L^2(B_R(0))$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_{B_R(0)} u_n^2 dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Além disso, como (u_n) é limitada em H , usamos a definição da norma em H para obter a constante $c > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x) u_n^2 dx \leq c.$$

Logo, para R suficientemente grande de modo que $\frac{1}{R^2}c < \frac{\varepsilon}{2}$, segue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 dx &= \int_{B_R(0)} u_n^2 dx + \int_{B_R(0)^c} u_n^2 dx \leq \int_{B_R(0)} u_n^2 dx + \frac{1}{R^2} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 u^2 dx \\ &\leq \int_{B_R(0)} u_n^2 dx + \frac{1}{R^2} c \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

ou seja, $u_n \rightarrow 0$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Portanto, concluímos que H está compactamente imerso em $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Referências Bibliográficas

- [1] ADACHI, S.; WATANABE, T. *Uniqueness of the ground state solutions of quasilinear Schrödinger equations*. Nonlinear Anal., 75(2):819-833, 2012.
- [2] AFTALION, A.; NORIS, B.; SOURDIS, C. *Thomas-Fermi approximation for co-existing two component Bose-Einstein condensates and nonexistence of vortices for small rotation*. Comm. Math. Phys., 336(2):509-579, 2015.
- [3] AGMON, S. *Lectures on exponential decay of solutions of second-order elliptic equations: bounds on eigenfunctions of N-body Schrödinger operators*. Mathematical Notes, vol. 29, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1982. ↑12, 29, 30
- [4] BADIALE, M.; SERRA, E. *Semilinear Elliptic Equations for Beginners: Existence Results via the Variational Approach*. New York: Springer-Verlag, 2011.
- [5] BELLONI, M.; KAWOHL, B. *A direct uniqueness proof for equations involving the p-Laplace operator*. Manuscripta Math., 109(2):229-231, 2002.
- [6] BENGURIA, R.; BRÉZIS, H.; LIEB, E. H. *The Thomas-Fermi-von Weizsäcker theory of atoms and molecules*. Math. Phys., 79(2):167-180, 1981.
- [7] BRANDOLINI, B.; TROMBETTI, C. *A symmetrization result for Monge-Ampère type equations*. Math. Nachr., 280(5-6):467-478, 2007.
- [8] BRASCO, L.; FRANZINA, G. *A note on positive eigenfunctions and hidden convexity*. Arch. Math. (Basel), 99(4):367-374, 2012.
- [9] BERESTYCKI, H., LIONS, P. *Nonlinear scalar field equations, I existence of a ground state*. Arch. Rational Mech. Anal. 82, 313-345 (1983).
- [10] BONHEURE, D.; FÖLDES, J.; SANTOS, E. M.; SALDAÑA, A.; TAVARES, H. *Paths to uniqueness of critical points and applications to partial differential equations*. Transactions of the American Mathematical Society, Providence, AMS, v. 370, n. 10, p. 7081-7127, 2018.

- [11] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010.
- [12] BYEON, J.; WANG, Z. *On the Hénon equation: asymptotic profile of ground states. I.* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 23(6):803-828, 2006.
- [13] COLIN, M.; JEANJEAN, L. *Solutions for a quasilinear Schrödinger equation: a dual approach.* Nonlinear Anal., 56(2):213-226, 2004.
- [14] COLIN, M.; JEANJEAN, L.; SQUASSINA, M. *Stability and instability results for standing waves of quasi-linear Schrödinger equations.* Nonlinearity, 23(6):1353-1385, 2010.
- [15] DÍAS, J. I.; SAÁ, J. E. *Existence et unicité de solutions positives pour certaines équations elliptiques quaselinéaires.* C. R. Acad Sci. Paris Sér. I Math., 305(12):521-524, 1987.
- [16] EVANS, L. C. *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1997.
- [17] GILBARD, D.; TRUDINGER, N. S. *Elliptic partial differential equation of second order.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.
- [18] KAVIAN, O. *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques.* Volume 13 of Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]. Springer-Verlag, Paris, 1993.
- [19] LIMA, E. L. *Curso de Análise Vol. 2.* 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- [20] LIU, J.; WANG, Y.; WANG, Z. *Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations. II.* J. Differential Equations, 187(2):473-493, 2003.
- [21] LIU, J.; WANG, Z. *Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations. I.* Proc. Amer. Math. Soc., 131(2):441-448 (electronic), 2003.
- [22] LUENBERGER, D. G. *Optimization by vector space methods.* John Wiley & Sons, Inc, 1997.
- [23] MOROZ, V.; SCHAFTINGEN, J. V. *Nonexistence and optimal decay of supersolutions to Choquard equations in exterior domains.* J. Differential Equations, 254(8):3089-3145, 2013.

- [24] NORIS, B.; TAVARES, H.; TERRACINI, S.; VERZINI, G. *Convergence of minimax structures and continuation of critical points for singularly perturbed systems*. J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 14(4):1245-1273, 2012.
- [25] POPPENBERG, M.; SCHMITT, K.; WANG, Z. *On the existence of solution solutions to quasilinear Schrödinger equations*. Calc. Var. Partial Differential Equations, 14(3):329-344, 2002.
- [26] SEVERO, UBERLANDIO BATISTA. *Estudo de uma classe de equações de Schrödinger quase-lineares*. 2007. 128p. Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matematica, Estatística e Computação Científica, Campinas, SP.
- [27] SMETS, D.; WILLEM, M.;SU, J. *Non-radial ground states for the Hénon equation*. Commun. Contemp. Math., 4(3):467-480, 2002.
- [28] STRUWE, M. *Variational Methods*, Springer, 2008.
- [29] WILLEM, M. *Minimax theorems*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996.