



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
Mestrado - Doutorado

**ANÁLISE TEÓRICA DA CONVECÇÃO FORÇADA NA ENTRADA
TÉRMICA DE FLUIDOS PARTICIPANTES EM DUTOS,
CONSIDERANDO OS EFEITOS SIMULTÂNEOS DA RADIAÇÃO
E DA CONDUÇÃO AXIAL**

por

Dhiego Luiz de Andrade Veloso

Tese de Doutorado apresentada à Universidade Federal da Paraíba para
obtenção do Título de Doutor.

DHIEGO LUIZ DE ANDRADE VELOSO

**ANÁLISE TEÓRICA DA CONVECÇÃO FORÇADA NA ENTRADA
TÉRMICA DE FLUIDOS PARTICIPANTES EM DUTOS,
CONSIDERANDO OS EFEITOS SIMULTÂNEOS DA RADIAÇÃO
E DA CONDUÇÃO AXIAL**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Doutor.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: TERMOFLUIDOS

ORIENTADOR: PROF. DR. CARLOS ANTÔNIO CABRAL DOS SANTOS

JOÃO PESSOA – PB

JANEIRO – 2019

V443a Veloso, Dhiego Luiz de Andrade.

Análise teórica da convecção forçada na entrada térmica de fluidos participantes em dutos, considerando os efeitos simultâneos da radiação e da condução axial / Dhiego Luiz de Andrade Veloso. - João Pessoa, 2019. 170 f. : il.

Orientação: Carlos Antônio Cabral dos Santos.
Tese (Doutorado) - UFPB/CT.

1. Fluidos participantes. 2. GITT. 3. Campo de Temperatura. 4. Nusselt. I. Santos, Carlos Antônio Cabral dos. II. Título.

UFPB/BC

ANÁLISE TEÓRICA DA CONVECÇÃO FORÇADA NA ENTRADA TÉRMICA DE FLUIDOS PARTICIPANTES EM DUTOS, CONSIDERANDO OS EFEITOS SIMULTÂNEOS DA RADIAÇÃO E DA CONDUÇÃO AXIAL

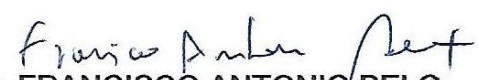
por

Dhiego Luiz de Andrade Veloso

Tese de doutorado aprovada em 31 de janeiro de 2019

Período letivo 2018.2


Prof. Dr. CARLOS ANTONIO CABRAL DOS SANTOS
Orientador - UFPB


Prof. Dr. FRANCISCO ANTONIO BELO
Examinador Interno – UFPB


Prof. Dr. ABEL CAVALCANTE LIMA FILHO
Examinador Interno – UFPB


Prof. Dr. LAURIVAN DA SILVA DINIZ
Examinador Externo - IFPB


Prof. Dr. FRANK WERLEY XAVIER DA SILVA
Examinador Externo - IFAL

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha família, razão fundamental para o meu desenvolvimento:

Minha avó, Lúcia Freire Veloso (in memoriam), por todo incentivo e estímulo, sempre me mostrando os aprazíveis caminhos do conhecimento.

Meus pais, Luiz Alberto Freire Veloso e Walmira de Andrade Veloso, pelo amor incondicional, pelo constante apoio e esforço para que eu pudesse concluir toda a minha formação.

Minha esposa, Márcia Amaro Brasil Veloso, aguerrida e inigualável mulher, por todo amor e apoio, por todo o suporte fornecido para a conclusão deste trabalho.

Meus filhos amados, Mateus Amaro Veloso e Mariana Amaro Veloso, maiores tesouros que a vida me concedeu.

Meus irmãos, Thiago Luiz de Andrade Veloso e Higor Luiz de Andrade Veloso, pela amizade e pelo amor que construímos ao longo dos anos.

Todas as minhas realizações científicas estão ligadas a vocês. Este trabalho é tão meu quanto de vocês.

“Não é o conhecimento, mas o ato de aprender, não a posse mas o ato de chegar lá, que concede a maior satisfação.”

Carl Friedrich Gauss

“Os encantos dessa sublime ciência se revelam apenas àqueles que tem coragem de ir a fundo nela.”

Carl Friedrich Gauss

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, dono de toda a sabedoria, por seu sublime amor, por sua infinita bondade e misericórdia.

De forma muito especial, agradeço ao professor Carlos Antônio Cabral dos Santos pela oportunidade de desenvolver um trabalho de doutorado sob a sua orientação. Agradeço pelo apoio e incentivo sempre constantes, pelos ensinamentos e pelas agradáveis e proveitosas discussões sobre GITT.

Agradeço aos colegas do PPGEM – Fábio, Pedro, Gustavo, Juanice, Allan, Flávio – pela amizade construída nesse árduo caminho da pós-graduação, pelo companheirismo e pelas parcerias que nos renderam publicações de trabalhos.

A todos os professores e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFPB.

Ao Instituto Federal da Paraíba (IFPB) pela liberação total de minhas atividades docentes para dedicação exclusiva ao doutoramento.

Aos membros da banca – Prof. Abel Cavalcante Lima Filho, Prof. Francisco Antônio Belo, Prof. Laurivan da Silva Diniz e Prof. Frank Werley Xavier da Silva – pelas contribuições e sugestões que agregam valor científico ao trabalho.

A todos os meus familiares e amigos.

ANÁLISE TEÓRICA DA CONVECÇÃO FORÇADA NA ENTRADA TÉRMICA DE FLUIDOS PARTICIPANTES EM DUTOS, CONSIDERANDO OS EFEITOS SIMULTÂNEOS DA RADIAÇÃO E DA CONDUÇÃO AXIAL

RESUMO

Muitas aplicações de engenharia são capazes de produzir gases de escape com alta temperatura, tornando a análise do escoamento de fluidos participantes relevante e necessária em diversas situações, tais como: caldeiras flamotubulares, sistemas de propulsão, motores turboalimentados, entre outros. O presente trabalho visa analisar a transferência de calor no escoamento laminar e turbulento de fluidos participantes no interior de dutos circulares e retangulares. Trata-se de um problema de transferência simultânea de calor por convecção e radiação, hidrodinamicamente desenvolvido e termicamente em desenvolvimento. O fluido é tratado como cinzento, puramente absorvedor e emissor de radiação térmica. A parede do duto é considerada cinza e perfeitamente difusa, sendo mantida à temperatura constante. Utiliza-se, no presente estudo, uma aproximação diferencial para modelar a transferência radiativa, baseada no método dos momentos, em conformidade com alguns trabalhos encontrados na literatura especializada. Aplica-se um método híbrido, numérico-analítico, denominado Técnica de Transformada Integral Generalizada (GITT), para resolver simultaneamente a equação da energia e a equação de transferência radiativa. Os resultados, apresentados na forma de tabelas e gráficos, permitem analisar a influência que os parâmetros condução-radiação, espessura óptica, emissividades da superfície de contorno, número de Peclet, número de Prandtl e número de Reynolds exercem no campo de temperatura e nos números de Nusselt Convectivo, Radiativo e Total. Investiga-se a significância da radiação térmica e o comportamento do processo convectivo com e sem a inclusão da radiação. No estudo do escoamento laminar, utilizam-se três modelagens matemáticas distintas para a solução do problema, que são comparadas entre si e demonstram a versatilidade da GITT. Na análise do escoamento turbulento, diferentes modelos de turbulência são adotados, com diferentes formulações para a distribuição de velocidade e para a difusividade turbulenta dinâmica; quatro situações são analisadas, baseadas em expressões analíticas propostas para o perfil universal de velocidade – “Lei da Parede”. Os resultados obtidos no presente trabalho foram confrontados com existentes na literatura aberta, de forma a validar o modelo apresentado.

Palavras – chave: Fluidos participantes. GITT. Campo de temperatura. Nusselt.

THEORETICAL ANALYSIS OF FORCED CONVECTION IN THE THERMAL ENTRANCE OF PARTICIPATING FLUID IN DUCTS, CONSIDERING THE SIMULTANEOUS EFFECTS OF RADIATION AND AXIAL CONDUCTION

ABSTRACT

Many engineering applications are capable of producing high temperature exhaust gases, making analysis of the flow of participating fluids relevant and necessary in different situations, such as: boilers fire-pipes, propulsion systems, turbocharged engines, among others. The present work aims to analyze the heat transfer in laminar and turbulent flow of participating fluids inside circular and rectangular ducts. It is a problem of simultaneous heat transfer by convection and radiation, hydrodynamically developed and thermally developing. The fluid is treated as gray, purely absorber and emitter of thermal radiation. The duct wall is considered gray and perfectly diffused, being maintained at constant temperature. In the present study, a differential approximation is used to model radiative transference, based on the method of moments, in accordance with some works found in the specialized literature. A hybrid method, numerical-analytical, called Generalized Integral Transformation Technique (GITT), is applied to simultaneously solve the energy equation and the radiative transfer equation. The results, presented in the form of tables and graphs, allow to analyze the influence that the parameters conduction-radiation, optical thickness, contour surface emissivity, Peclet number, Prandtl number and Reynolds number exert in the temperature field and in the Convective, Radiative and Total Nusselt numbers. The significance of the thermal radiation and the behavior of the convective process with and without the inclusion of the radiation is investigated. In the study of laminar flow, three different mathematical models are used to solve the problem, which are compared to each other and demonstrate the versatility of the GITT. In the analysis of the turbulent flow, different turbulence models will be adopted, with different formulations for velocity distribution and for the momentum eddy diffusivity; four situations will be analyzed, based on analytical expressions proposed for the universal velocity profile - "Law of the Wall". The results obtained in the present work were confronted with existing ones in the open literature, in order to validate the presented model.

Keywords: Participating Fluids. GITT. Temperature Field. Nusselt.

SUMÁRIO

DEDICATÓRIA.....	v
AGRADECIMENTOS.....	vi
RESUMO.....	vii
ABSTRACT.....	viii
LISTA DE FIGURAS.....	xii
LISTA DE TABELAS.....	xxii
LISTA DE SÍMBOLOS.....	xxiv

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO AO ESTUDO

1. INTRODUÇÃO.....	28
1.1. UM POUCO SOBRE OS FLUIDOS PARTICIPANTES.....	29
1.2. ASPECTOS MOTIVACIONAIS.....	29
1.3. JUSTIFICATIVAS.....	30
1.4. APLICAÇÕES DO ESTUDO.....	31
1.4.1. MOTORES TURBOALIMENTADOS.....	31
1.4.2. CALDEIRAS FLAMOTUBULARES.....	33
1.4.3. SISTEMAS MODERNOS DE PROPULSÃO.....	35
1.5. METODOLOGIA.....	36
1.6. OBJETIVO GERAL.....	37
1.7. OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	37
1.8. ESCOPO DO TRABALHO.....	38

CAPÍTULO 2 – ESTADO DA ARTE

2. REVISÃO DA LITERATURA.....	40
--------------------------------------	-----------

CAPÍTULO 3 – ANÁLISE DA CONVECÇÃO FORÇADA LAMINAR DE FLUIDOS PARTICIPANTES

3. PROBLEMA FÍSICO.....	51
--------------------------------	-----------

3.1.	INTRODUÇÃO.....	51
3.2.	MODELAMENTO MATEMÁTICO.....	52
3.3.	ADIMENSIONALIZAÇÃO DO PROBLEMA.....	55
3.4.	APLICAÇÃO DE FILTROS MATEMÁTICOS.....	57
3.5.	PROBLEMAS AUXILIARES DE AUTOVALOR NA DIREÇÃO RADIAL.....	58
3.5.1.	PROBLEMA AUXILIAR PARA O CAMPO DE TEMPERATURA.....	58
3.5.2.	PROBLEMA AUXILIAR PARA O CAMPO DE RADIAÇÃO.....	59
3.6.	TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL.....	60
3.6.1.	PAR TRANSFORMADA-INVERSA PARA O CAMPO DE TEMPERATURA.....	60
3.6.2.	PAR TRANSFORMADA-INVERSA PARA O CAMPO DE RADIAÇÃO.....	61
3.6.3.	TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES.....	61
3.7.	CÁLCULO DE PARÂMETROS DE INTERESSE PRÁTICO.....	63
3.8.	SOLUÇÕES ALTERNATIVAS.....	63
3.8.1.	MODELAGEM 2.....	64
3.8.2.	MODELAGEM 3.....	66
3.9.	RESULTADOS OBTIDOS.....	69
3.9.1.	CASO DE PURA CONVECÇÃO.....	69
3.9.1.1.	SEM DIFUSÃO AXIAL.....	69
3.9.1.2.	COM DIFUSÃO AXIAL.....	81
3.9.2.	ACOPLAMENTO CONVECÇÃO/RADIAÇÃO.....	85
3.9.2.1.	ANÁLISE DA CONVERGÊNCIA.....	85
3.9.2.2.	VALIDAÇÃO DOS RESULTADOS.....	87
3.9.2.3.	APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS.....	90

CAPÍTULO 4 – ANÁLISE DA CONVECÇÃO FORÇADA TURBULENTA DE FLUIDOS PARTICIPANTES

4.	PROBLEMA FÍSICO.....	97
4.1.	INTRODUÇÃO.....	97
4.2.	MODELOS EM CAMADAS.....	98
4.3.	MODELAGEM MATEMÁTICA.....	99
4.4.	MODELOS DE TURBULÊNCIA.....	101
4.5.	APLICAÇÃO DE FILTROS MATEMÁTICOS.....	104
4.6.	APLICAÇÃO DA GITT.....	105
4.6.1.	PROBLEMA AUXILIAR PARA O CAMPO DE TEMPERATURA.....	105
4.6.2.	PROBLEMA AUXILIAR PARA O CAMPO DE RADIAÇÃO.....	106
4.6.3.	PAR TRANSFORMADA-INVERSA PARA O CAMPO DE TEMPERATURA.....	106

4.6.4.	PAR TRANSFORMADA-INVERSA PARA O CAMPO DE RADIAÇÃO.....	107
4.6.5.	TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES.....	107
4.7.	CÁLCULO DE PARÂMETROS DE INTERESSE PRÁTICO.....	108
4.8.	RESULTADOS OBTIDOS.....	109
4.8.1.	CASO DE PURA CONVECÇÃO TURBULENTA.....	110
4.8.1.1.	AVALIAÇÃO DO NÚMERO DE NUSSELT LOCAL.....	113
4.8.1.2.	AVALIAÇÃO DO CAMPO DE TEMPERATURA.....	116
4.8.2.	ACOPLAMENTO CONVECÇÃO TURBULENTA/RADIAÇÃO.....	122
4.8.2.1.	ANÁLISE DA CONVERGÊNCIA.....	123
4.8.2.2.	VALIDAÇÃO DOS RESULTADOS.....	124
4.8.2.3.	APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS.....	125
 CAPÍTULO 5 – CONSIDERAÇÕES FINAIS DO TRABALHO		
5.	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	129
5.1.	CONCLUSÕES DO TRABALHO.....	129
5.2.	SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS.....	130
 REFERÊNCIAS		132

LISTA DE FIGURAS

Capítulo 1

Figura 1.1:	Desenho esquemático da turboalimentação em um motor.	32
Figura 1.2:	Esquema representativo de uma caldeira flamotubular multitubular.	33
Figura 1.3:	Imagem do lançamento de um foguete da Nasa.	35

Capítulo 3

Figura 3.1:	Ilustração do problema.	51
Figura 3.2:	Solução do problema transformado em função da distância axial adimensional para 104 autovalores (Modelagem 1).	71
Figura 3.3:	Solução do problema transformado em função da distância axial adimensional para 105 autovalores (Modelagem 1).	71
Figura 3.4:	Campo de temperatura para o escoamento de um fluido newtoniano entre placas planas (Modelo 1).	79
Figura 3.5:	Campo de temperatura para o escoamento de um fluido newtoniano no interior de um tubo circular (Modelo 1).	79
Figura 3.6:	Campo de temperatura para o escoamento de um fluido newtoniano entre placas planas (Modelo 2).	80
Figura 3.7:	Campo de temperatura para o escoamento de um fluido newtoniano no interior de um tubo circular (Modelo 2).	80
Figura 3.8:	Campo de temperatura para o escoamento de um fluido newtoniano entre placas planas (Modelo 3).	80
Figura 3.9:	Campo de temperatura para o escoamento de um fluido newtoniano no interior de um tubo circular (Modelo 3).	80

Figura 3.10:	Nusselt local em função da distância axial adimensional para o escoamento com condução axial entre placas planas.	83
Figura 3.11:	Nusselt local em função da distância axial adimensional para o escoamento com condução axial no interior de um tubo circular.	83
Figura 3.12:	Temperatura média global adimensional em função da distância axial adimensional para o escoamento com condução axial entre placas planas.	83
Figura 3.13:	Temperatura média adimensional em função da distância axial adimensional para o escoamento com condução axial no interior de um tubo circular.	83
Figura 3.14:	Campo de temperatura para o escoamento uniforme com condução axial entre placas planas, considerando $Pe = 1$.	84
Figura 3.15:	Campo de temperatura para o escoamento uniforme com condução axial no interior de um tubo, considerando $Pe = 1$.	84
Figura 3.16:	Campo de temperatura para o escoamento uniforme com condução axial entre placas planas, considerando $Pe = 10$.	84
Figura 3.17:	Campo de temperatura para o escoamento uniforme com condução axial no interior de um tubo, considerando $Pe = 10$.	84
Figura 3.18:	Campo de temperatura para o escoamento uniforme com condução axial entre placas planas, considerando $Pe = 100$.	84
Figura 3.19:	Campo de temperatura para o escoamento uniforme com condução axial no interior de um tubo, considerando $Pe = 100$.	84
Figura 3.20:	Campo de temperatura para o escoamento uniforme com condução axial entre placas planas, considerando $Pe = 1000$.	85
Figura 3.21:	Campo de temperatura para o escoamento uniforme com condução axial no interior de um tubo, considerando $Pe = 1000$.	85
Figura 3.22:	Convergência do número de Nusselt total para o escoamento laminar de fluidos participantes entre placas planas (Modelo 1).	86

Figura 3.23:	Convergência do número de Nusselt total para o escoamento laminar de fluidos participantes no interior de um tubo circular (Modelo 1).	86
Figura 3.24:	Convergência do número de Nusselt total para o escoamento laminar de fluidos participantes entre placas planas (Modelo 2).	86
Figura 3.25:	Convergência do número de Nusselt total para o escoamento laminar de fluidos participantes no interior de um tubo circular (Modelo 2).	86
Figura 3.26:	Convergência do número de Nusselt total para o escoamento laminar de fluidos participantes entre placas planas (Modelo 3).	87
Figura 3.27:	Convergência do número de Nusselt total para o escoamento laminar de fluidos participantes no interior de um tubo circular (Modelo 3).	87
Figura 3.28:	Análise comparativa do número de Nusselt total para o escoamento laminar de fluidos participantes newtonianos no interior de um tubo circular, considerando diferentes valores para a espessura óptica.	89
Figura 3.29:	Análise comparativa do número de Nusselt total para o escoamento laminar de fluidos participantes não-newtonianos no interior de um tubo circular, considerando diferentes valores para o índice lei de potência.	89
Figura 3.30:	Análise comparativa do número de Nusselt total para o escoamento laminar, tipo pistão, entre placas planas, considerando diferentes valores para o parâmetro condução-radiação.	89
Figura 3.31:	Nusselt total em função da distância axial para o escoamento laminar entre placas planas, considerando diferentes valores para a emissividade da parede.	90
Figura 3.32:	Nusselt total em função da distância axial para o escoamento laminar no interior de um tubo circular, considerando diferentes valores para a emissividade da parede.	90
Figura 3.33:	Campo de temperatura para o escoamento laminar de fluidos participantes entre placas planas, considerando $\varepsilon_w = 0,1$.	91

Figura 3.34:	Campo de temperatura para o escoamento laminar de fluidos participantes no interior de um tubo circular, considerando $\varepsilon_w = 0,1$.	91
Figura 3.35:	Campo de temperatura para o escoamento laminar de fluidos participantes entre placas planas, considerando $\varepsilon_w = 1$.	91
Figura 3.36:	Campo de temperatura para o escoamento laminar de fluidos participantes no interior de um tubo circular, considerando $\varepsilon_w = 1$.	91
Figura 3.37:	Nusselt total em função da distância axial para o escoamento laminar entre placas planas, considerando diferentes valores para a espessura óptica.	92
Figura 3.38:	Nusselt total em função da distância axial para o escoamento laminar no interior de um tubo circular, considerando diferentes valores para a espessura óptica.	92
Figura 3.39:	Campo de temperatura para o escoamento laminar de fluidos participantes entre placas planas, considerando $\tau = 5$.	93
Figura 3.40:	Campo de temperatura para o escoamento laminar de fluidos participantes no interior de um tubo circular, considerando $\tau = 5$.	93
Figura 3.41:	Campo de temperatura para o escoamento laminar de fluidos participantes entre placas planas, considerando $\tau = 20$.	93
Figura 3.42:	Campo de temperatura para o escoamento laminar de fluidos participantes no interior de um tubo circular, considerando $\tau = 20$.	93
Figura 3.43:	Nusselt total em função da distância axial para o escoamento laminar entre placas planas, considerando diferentes valores para o parâmetro condução-radiação.	94
Figura 3.44:	Nusselt total em função da distância axial para o escoamento laminar no interior de um tubo, considerando diferentes valores para o parâmetro condução-radiação.	94
Figura 3.45:	Campo de temperatura para o escoamento laminar de fluidos participantes entre placas planas, considerando $N = 0,1$.	94

Figura 3.46:	Campo de temperatura para o escoamento laminar de fluidos participantes no interior de um tubo circular, considerando $N = 0,1$.	94
Figura 3.47:	Campo de temperatura para o escoamento laminar de fluidos participantes entre placas planas, considerando $N = 1$.	94
Figura 3.48:	Campo de temperatura para o escoamento laminar de fluidos participantes no interior de um tubo circular, considerando $N = 1$.	94
Figura 3.49:	Nusselt total em função da distância axial para o escoamento laminar entre placas planas, considerando diferentes valores para a temperatura adimensional de entrada do fluido.	95
Figura 3.50:	Nusselt total em função da distância axial para o escoamento laminar no interior de um tubo, considerando diferentes valores para a temperatura adimensional de entrada do fluido.	95
Figura 3.51:	Campo de temperatura para o escoamento laminar de fluidos participantes entre placas planas, considerando $\Theta_e = 0,1$.	95
Figura 3.52:	Campo de temperatura para o escoamento laminar de fluidos participantes no interior de um tubo circular, considerando $\Theta_e = 0,1$.	95
Figura 3.53:	Campo de temperatura para o escoamento laminar de fluidos participantes entre placas planas, considerando $\Theta_e = 0,5$.	96
Figura 3.54:	Campo de temperatura para o escoamento laminar de fluidos participantes no interior de um tubo circular, considerando $\Theta_e = 0,5$.	96

Capítulo 4

Figura 4.1:	Perfil universal de velocidade para o escoamento turbulento hidrodinamicamente desenvolvido.	99
Figura 4.2:	Número de Nusselt local para o caso de pura convecção turbulenta, considerando $Pr = 0.72$ e o fator de fricção de Filonenko (placas planas).	113

Figura 4.3:	Número de Nusselt local para o caso de pura convecção turbulenta, considerando $Pr = 0.72$ e o fator de fricção de Filonenko (tubo circular).	113
Figura 4.4:	Número de Nusselt local para o caso de pura convecção turbulenta, considerando $Pr = 1$ e o fator de fricção de Filonenko (placas planas).	113
Figura 4.5:	Número de Nusselt local para o caso de pura convecção turbulenta, considerando $Pr = 1$ e o fator de fricção de Filonenko (tubo circular).	113
Figura 4.6:	Número de Nusselt local para o caso de pura convecção turbulenta, considerando $Pr = 2$ e o fator de fricção de Filonenko (placas planas).	114
Figura 4.7:	Número de Nusselt local para o caso de pura convecção turbulenta, considerando $Pr = 2$ e o fator de fricção de Filonenko (tubo circular).	114
Figura 4.8:	Número de Nusselt local para o caso de pura convecção turbulenta, considerando $Pr = 1$ e modelo de turbulência de Prandtl e Taylor (placas planas).	115
Figura 4.9:	Número de Nusselt local para o caso de pura convecção turbulenta, considerando $Pr = 1$ e modelo de turbulência de Prandtl e Taylor (tubo circular).	115
Figura 4.10:	Número de Nusselt local para o caso de pura convecção turbulenta, considerando $Pr = 1$ e modelo de turbulência de Von Karman (placas planas).	115
Figura 4.11:	Número de Nusselt local para o caso de pura convecção turbulenta, considerando $Pr = 1$ e modelo de turbulência de Von Karman (tubo circular).	115
Figura 4.12:	Número de Nusselt local para o caso de pura convecção turbulenta, considerando $Pr = 1$ e modelo de turbulência de Rannie (placas planas).	115
Figura 4.13:	Número de Nusselt local para o caso de pura convecção turbulenta, considerando $Pr = 1$ e modelo de turbulência de Rannie (tubo circular).	115

Figura 4.14:	Número de Nusselt local para o caso de pura convecção turbulenta, considerando $Pr = 1$ e modelo de turbulência de Reichardt e Spalding (placas planas).	116
Figura 4.15:	Número de Nusselt local para o caso de pura convecção turbulenta, considerando $Pr = 1$ e modelo de turbulência de Reichardt e Spalding (tubo circular).	116
Figura 4.16:	Campo de temperatura para o escoamento turbulento entre placas planas, considerando $Pr = 1$, $Re = 1.10^4$, fator de atrito de Filonenko e modelo 1 de turbulência.	117
Figura 4.17:	Campo de temperatura para o escoamento turbulento no interior de um tubo circular, considerando $Pr = 1$, $Re = 1.10^4$, fator de atrito de Filonenko e modelo 1 de turbulência.	117
Figura 4.18:	Campo de temperatura para o escoamento turbulento entre placas planas, considerando $Pr = 1$, $Re = 1.10^4$, fator de atrito de Filonenko e modelo 2 de turbulência.	117
Figura 4.19:	Campo de temperatura para o escoamento turbulento no interior de um tubo circular, considerando $Pr = 1$, $Re = 1.10^4$, fator de atrito de Filonenko e modelo 2 de turbulência.	117
Figura 4.20:	Campo de temperatura para o escoamento turbulento entre placas planas, considerando $Pr = 1$, $Re = 1.10^4$, fator de atrito de Filonenko e modelo 3 de turbulência.	117
Figura 4.21:	Campo de temperatura para o escoamento turbulento no interior de um tubo circular, considerando $Pr = 1$, $Re = 1.10^4$, fator de atrito de Filonenko e modelo 3 de turbulência.	117
Figura 4.22:	Campo de temperatura para o escoamento turbulento entre placas planas, considerando $Pr = 1$, $Re = 1.10^4$, fator de atrito de Filonenko e modelo 4 de turbulência.	118
Figura 4.23:	Campo de temperatura para o escoamento turbulento no interior de um tubo circular, considerando $Pr = 1$, $Re = 1.10^4$, fator de atrito de Filonenko e modelo 4 de turbulência.	118
Figura 4.24:	Campo de temperatura para o escoamento turbulento entre placas planas, considerando $Pr = 1$, $Re = 1.10^5$, fator de atrito de Filonenko e modelo 1 de turbulência.	119

Figura 4.25:	Campo de temperatura para o escoamento turbulento entre placas planas, considerando $Pr = 1$, $Re = 1.10^5$, fator de atrito de Filonenko e modelo 2 de turbulência.	119
Figura 4.26:	Campo de temperatura para o escoamento turbulento entre placas planas, considerando $Pr = 1$, $Re = 1.10^5$, fator de atrito de Filonenko e modelo 3 de turbulência.	119
Figura 4.27:	Campo de temperatura para o escoamento turbulento entre placas planas, considerando $Pr = 1$, $Re = 1.10^5$, fator de atrito de Filonenko e modelo 4 de turbulência.	119
Figura 4.28:	Campo de temperatura para o escoamento turbulento entre placas planas, considerando $Pr = 0.72$, $Re = 1.10^4$, fator de atrito de Filonenko e modelo 1 de turbulência.	120
Figura 4.29:	Campo de temperatura para o escoamento turbulento entre placas planas, considerando $Pr = 0.72$, $Re = 1.10^4$, fator de atrito de Filonenko e modelo 2 de turbulência.	120
Figura 4.30:	Campo de temperatura para o escoamento turbulento entre placas planas, considerando $Pr = 0.72$, $Re = 1.10^4$, fator de atrito de Filonenko e modelo 3 de turbulência.	120
Figura 4.31:	Campo de temperatura para o escoamento turbulento entre placas planas, considerando $Pr = 0.72$, $Re = 1.10^4$, fator de atrito de Filonenko e modelo 4 de turbulência.	120
Figura 4.32:	Convergência do número de Nusselt total para o escoamento turbulento de fluidos participantes entre placas planas (Modelo 1 de turbulência).	123
Figura 4.33:	Convergência do número de Nusselt total para o escoamento turbulento de fluidos participantes entre placas planas (Modelo 2 de turbulência).	123
Figura 4.34:	Convergência do número de Nusselt total para o escoamento turbulento de fluidos participantes entre placas planas (Modelo 3 de turbulência).	123
Figura 4.35:	Convergência do número de Nusselt total para o escoamento turbulento de fluidos participantes entre placas planas (Modelo 4 de turbulência).	123

Figura 4.36:	Convergência do número de Nusselt total para o escoamento turbulento de fluidos participantes no interior de um tubo (Modelo 1 de turbulência).	124
Figura 4.37:	Convergência do número de Nusselt total para o escoamento turbulento de fluidos participantes no interior de um tubo (Modelo 2 de turbulência).	124
Figura 4.38:	Convergência do número de Nusselt total para o escoamento turbulento de fluidos participantes no interior de um tubo (Modelo 3 de turbulência).	124
Figura 4.39:	Convergência do número de Nusselt total para o escoamento turbulento de fluidos participantes no interior de um tubo (Modelo 4 de turbulência).	124
Figura 4.40:	Análise comparativa do número de Nusselt total para o escoamento turbulento de fluidos participantes no interior de um tubo circular, considerando diferentes valores para o parâmetro condução-radiação.	125
Figura 4.41:	Nusselt total em função da distância axial para o escoamento turbulento entre placas planas, considerando diferentes valores para a espessura óptica.	126
Figura 4.42:	Nusselt total em função da distância axial para o escoamento turbulento no interior de um tubo circular, considerando diferentes valores para a espessura óptica.	126
Figura 4.43:	Campo de temperatura para o escoamento turbulento de fluidos participantes entre placas planas, considerando $\tau = 5$.	126
Figura 4.44:	Campo de temperatura para o escoamento turbulento de fluidos participantes no interior de um tubo circular, considerando $\tau = 5$.	126
Figura 4.45:	Campo de temperatura para o escoamento turbulento de fluidos participantes entre placas planas, considerando $\tau = 20$.	126
Figura 4.46:	Campo de temperatura para o escoamento turbulento de fluidos participantes no interior de um tubo circular, considerando $\tau = 20$.	126

Figura 4.47:	Nusselt total em função da distância axial para o escoamento turbulento entre placas planas, considerando diferentes valores para o parâmetro condução-radiação.	127
Figura 4.48:	Nusselt total em função da distância axial para o escoamento turbulento no interior de um tubo, considerando valores distintos para o parâmetro condução-radiação.	127
Figura 4.49:	Campo de temperatura para o escoamento turbulento de fluidos participantes entre placas planas, considerando $N = 0,01$.	128
Figura 4.50:	Campo de temperatura para o escoamento turbulento de fluidos participantes no interior de um tubo circular, considerando $N = 0,01$.	128
Figura 4.51:	Campo de temperatura para o escoamento turbulento de fluidos participantes entre placas planas, considerando $N = 0,1$.	128
Figura 4.52:	Campo de temperatura para o escoamento turbulento de fluidos participantes no interior de um tubo circular, considerando $N = 0,1$.	128

LISTA DE TABELAS

Capítulo 2

Tabela 2.1:	Levantamento bibliográfico dos trabalhos que consideram a transferência simultânea de calor por convecção e radiação.	48
-------------	---	----

Capítulo 3

Tabela 3.1:	Temperatura média adimensional para o escoamento de um fluido newtoniano no interior de um tubo circular, desprezando a condução axial.	70
Tabela 3.2:	Nusselt médio e local para o escoamento de um fluido newtoniano no interior de um tubo circular, desprezando a condução axial.	72
Tabela 3.3:	Temperatura média adimensional, Nusselt médio e local para o escoamento de um fluido não-newtoniano no interior de um tubo circular, com $n=0,2$ e desprezando a condução axial.	73
Tabela 3.4:	Temperatura média adimensional, Nusselt médio e local para o escoamento de um fluido não-newtoniano no interior de um tubo circular, com $n=0,6$ e desprezando a condução axial.	74
Tabela 3.5:	Temperatura média adimensional, Nusselt médio e local para o escoamento de um fluido newtoniano no interior de um canal de placas planas, desprezando a condução axial.	75
Tabela 3.6:	Nusselt local para o escoamento de fluidos não-newtonianos no interior de um canal de placas planas, considerando diferentes índices lei de potência e desprezando a condução axial.	77
Tabela 3.7:	Nusselt local para o escoamento tipo pistão no interior de um tubo circular, desprezando a condução axial.	78

Tabela 3.8:	Nusselt local para o escoamento tipo pistão no interior de um canal de placas planas, desprezando a condução axial.	79
Tabela 3.9:	Nusselt local para o escoamento tipo pistão no interior de um canal de placas planas, considerando a condução axial.	82
Tabela 3.10:	Nusselt local para o escoamento tipo pistão no interior de um tubo circular, considerando a condução axial.	82
Tabela 3.11:	Análise comparativa do Número de Nusselt Total para o escoamento laminar de fluidos participantes newtonianos no interior de um tubo circular.	88

Capítulo 4

Tabela 4.1:	Nusselt local convergido considerando diferentes números de Reynolds e Prandtl para o escoamento turbulento entre placas planas, negligenciando o efeito radiativo.	111
Tabela 4.2:	Nusselt local convergido considerando diferentes números de Reynolds e Prandtl para o escoamento turbulento no interior de um tubo circular, negligenciando o efeito radiativo.	112
Tabela 4.3:	Comprimento adimensional de entrada térmica para o escoamento turbulento entre placas planas, considerando diferentes números de Reynolds e Prandtl e negligenciando o efeito radiativo.	121
Tabela 4.4:	Comprimento adimensional de entrada térmica para o escoamento turbulento no interior de um tubo circular, considerando diferentes números de Reynolds e Prandtl e negligenciando o efeito radiativo.	122

LISTA DE SÍMBOLOS

C	Parâmetro adimensional definido pela eq. 4.3l.
c_p	Calor específico à pressão constante.
CR_{1ij}	Coeficiente gerado no processo de transformação integral da ETR.
CR_{2ij}	Coeficiente gerado no processo de transformação integral da ETR.
CR_{3ij}	Coeficiente gerado no processo de transformação integral da ETR.
CR_{4ij}	Coeficiente gerado no processo de transformação integral da ETR.
CT_{1ij}	Coeficiente gerado no processo de transformação integral da equação da energia.
CT_{1ik}	Coeficiente gerado no processo de transformação integral da equação da energia.
CT_{2ij}	Coeficiente gerado no processo de transformação integral da equação da energia.
CT_{2ik}	Coeficiente gerado no processo de transformação integral da equação da energia.
CT_{3ij}	Coeficiente gerado no processo de transformação integral da equação da energia.
CT_{4ij}	Coeficiente gerado no processo de transformação integral da equação da energia.
CT_{4ik}	Coeficiente gerado no processo de transformação integral da equação da energia.
CT_{5ij}	Coeficiente gerado no processo de transformação integral da equação da energia.
CT_{6ij}	Coeficiente gerado no processo de transformação integral da equação da energia.
CT_{7ij}	Coeficiente gerado no processo de transformação integral da equação da energia.
CT_{8ij}	Coeficiente gerado no processo de transformação integral da equação da energia.
D_h	Diâmetro hidráulico do duto.
$d\omega$	Elemento infinitesimal do ângulo sólido elementar.
$E_h(R)$	Difusividade total de calor adimensional.
f	Fator de atrito (ou fator de fricção).
f_i	Coeficiente gerado no processo de transformação integral da equação da energia.
$G(x,r)$	Campo de intensidade de radiação total.
$G^*(X,R)$	Intensidade de radiação total adimensional.
$G^{**}(X,R)$	Intensidade de radiação total adimensional onde a GITT é aplicada.

g_i	Coeficiente gerado no processo de transformação integral da ETR.
$G_i(X)$	Campo de radiação total adimensional transformado.
$I_0(\Omega, s)$	Intensidade de radiação de um feixe monocromático.
$I_b(T)$	Intensidade de radiação do corpo negro.
K	Índice de consistência do fluido.
k	Condutividade térmica do fluido.
K_i	Normas do problema auxiliar do campo de radiação total.
m	Índice relativo a geometria ($m=0$: placas planas e $m=1$: tubo circular).
n	Índice lei de potência.
N	Parâmetro condução-radiação.
N_i	Normas do problema auxiliar do campo de temperatura.
$Nu_C(X)$	Número de Nusselt convectivo local.
$Nu_{C\infty}$	Número de Nusselt convectivo assintótico.
$Nu_{mT}(X)$	Número de Nusselt total médio.
$Nu_R(X)$	Número de Nusselt radiativo local.
$Nu_T(X)$	Número de Nusselt total local.
P	Campo de pressão.
p	Índice relativo ao tipo de escoamento ($p=0$: pistão e $p=1$: lei de potência).
Pe	Número de Peclet.
Pr	Número de Prandtl.
Pr_t	Número de Prandtl turbulento.
q^r	Vetor fluxo de calor radiativo.
R	Distância radial adimensional.
r	Coordenada radial.
R^+	Parâmetro adimensional definido pela eq. 4.4u.
r_0	Comprimento característico do duto.
Re	Número de Reynolds.
s	Coordenada associada ao caminho da radiação.

$T(x,r)$	Campo de Temperatura.
T_e	Temperatura de entrada.
T_w	Temperatura da parede.
$U(R)$	Perfil de velocidade adimensional.
$u(r)$	Perfil de velocidade.
u^+	Velocidade turbulenta adimensional definida pela eq. 4.4v.
u_m	Velocidade média do escoamento.
$u_{m\acute{a}x}$	Velocidade máxima do escoamento.
X	Distância axial adimensional.
x	Coordenada axial.
y^+	Coordenada transversal adimensional definida pela eq. 4.4t.

SÍMBOLOS GREGOS

α	Difusividade térmica do fluido.
β	Coeficiente espectral de extinção.
β_i	Autovalores do problema auxiliar do campo de radiação total.
δ_{ij}	Delta de Kronecker.
∇	Operador nabla.
ε_h	Difusividade turbulenta térmica.
ε_m	Difusividade turbulenta dinâmica.
ε_w	Coeficiente de emissividade da parede.
$\Theta(X)_{m\acute{e}dia}$	Temperatura média adimensional.
$\Theta(X,R)$	Campo de temperatura adimensional.
$\Theta^*(X,R)$	Campo de temperatura adimensional onde a GITT é aplicada.
Θ_e	Parâmetro adimensional definido pela eq. 3.3q.
$\Theta_i(X)$	Campo de temperatura adimensional transformado.
Θ_w	Parâmetro adimensional definido pela eq. 4.3e.
κ	Coeficiente volumétrico de absorção da radiação.

$\mu(u_r)$	Parâmetro definido pela eq. 3.2b.
μ_i	Autovalores do problema auxiliar do campo de temperatura.
ν	Viscosidade cinemática.
ρ	Massa específica do fluido.
σ	Constante de Stefan-Boltzmann [= 5.670x10 ⁻⁸ W / m ² · K ⁴].
τ	Espessura óptica.
τ_w	Tensão de cisalhamento na parede.
$\Phi_i(\beta_i, R)$	Autofunções do problema auxiliar do campo de radiação total.
$\Psi_i(\mu_i, R)$	Autofunções do problema auxiliar do campo de temperatura.
Ω	Coordenada associada a direção da radiação.

SUBSCRITOS

c	Relativo a convecção.
e	Relativo a entrada.
i , j , k	Índices produzidos pela transformação integral.
m	Relativo a médio.
r	Relativo a radiação.
T	Relativo a total.
t	Relativo a turbulento.
w	Relativo a parede.

ABREVIÇÃO

ETR	Equação da transferência radiativa.
GITT	Técnica de Transformada Integral Generalizada.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO AO ESTUDO

1. INTRODUÇÃO

Com o grande avanço tecnológico da modernidade torna-se providencial um conhecimento aprofundado sobre os processos reais de transferência de calor, bem como surge uma necessidade de analisá-los quantitativamente. Tal avanço faz surgir, cada vez mais, problemas extremamente complexos na área de engenharia, requerendo soluções precisas em curto intervalo de tempo que proporcione a otimização dos recursos empregados e que satisfaça a necessidade do mercado. Dentro deste contexto, os métodos numéricos vêm ganhando força e conseguindo obter boas aproximações para as soluções pretendidas.

É importante ressaltar o indiscutível avanço que a ciência (de uma maneira geral) teve a partir do desenvolvimento dos métodos numéricos. Problemas em que a matemática analítica exata não poderia solucionar começam a serem resolvidos por meio de soluções aproximadas propostas pelos métodos numéricos (ou até mesmo híbridos, analítico/numéricos). Com o advento dos computadores de alta tecnologia, esses problemas, que na sua grande maioria não apresentam solução analítica, podem ser tratados por métodos de aproximação numérica que são bastante úteis nas aplicações de engenharia (**Diniz, 2005**). Hoje em dia temos pacotes computacionais, como por exemplo o **Ansys 18.0**, que possuem métodos numéricos intrínsecos em seu algoritmo computacional na qual permitem fazer simulações computacionais em diversas áreas da engenharia, com grande grau de confiabilidade. Atualmente, a indústria, de uma maneira geral, é possível citar especificamente a indústria automobilística, tem dado abertura às simulações computacionais em vez de testes ou ensaios experimentais, que em geral demandam muito tempo. A esse respeito (**Veronese et al., 2012**) declara:

Devido à necessidade cada vez maior de soluções exatas em curto intervalo de tempo, as técnicas de aproximação numérica vêm ganhando espaço sobre a experimentação e aos métodos analíticos clássicos. Isto ocorre, pois a experimentação é quase sempre demorada, dispendiosa e os gastos com aquisição e aferição de equipamentos são enormes para cada nova situação, e os métodos analíticos clássicos apresentam certas limitações. (2012, pág.1)

O presente trabalho propõe-se a utilizar um método híbrido analítico/numérico, discutido a seguir, para solucionar a transferência de calor no escoamento laminar e turbulento de fluidos participantes no interior de dutos circulares e retangulares. A seguir, para maiores esclarecimentos, é feita uma breve discussão sobre os fluidos participantes.

1.1. UM POUCO SOBRE OS FLUIDOS PARTICIPANTES

No estudo da transferência de calor simultânea por radiação, convecção e/ou condução é necessário avaliar a natureza do fluido em escoamento e verificar se o mesmo é participante ou transparente. Fluidos participantes são fluidos que interagem no processo de radiação, são capazes de emitir, absorver e espalhar energia radiante. Exemplos típicos de fluidos participantes incluem gases tais como o monóxido de carbono, dióxido de carbono, vapor de água e metano. Já os fluidos transparentes são fluidos que não participam da transferência radiativa, o ar e os gases monoatômicos podem ser tratados como tais.

Em altos níveis de temperatura, a radiação térmica pode afetar significativamente as características térmicas de um fluido participante que se move no interior de um duto. Nestas condições, a radiação térmica exerce um papel fundamental no processo interno de transferência de calor do fluido, bem como na troca de calor entre o fluido e as superfícies circundantes. A omissão do efeito radiativo oferece um erro apreciável na computação da taxa de transferência de calor. Para condições de elevadas temperaturas, foi estabelecido que as correlações convencionais do número de Nusselt para pura convecção não são mais válidas. Além disso, ainda não existem correlações que incluam a parcela de energia radiante na taxa de transferência de calor. Esses são apenas alguns dos aspectos motivacionais que impulsionam o desenvolvimento deste trabalho, outros aspectos podem ser encontrados no tópico a seguir.

1.2. ASPECTOS MOTIVACIONAIS

A transferência de calor no escoamento de fluidos participantes é de extrema relevância em muitas aplicações de engenharia, dentre as quais pode-se destacar: reatores de alta temperatura refrigerados a gás (tradução da sigla em inglês HTGR), câmaras de combustão, geradores de vapor e equipamentos de geração de potência, fornalhas industriais para processamento de materiais, motores e turbinas a gás, entre outros. Esse problema é reconhecidamente importante dentro da engenharia térmica e tem sido amplamente estudado pela literatura especializada.

Muitos processos industriais, como a produção de aço inoxidável, alumínio e vidro, bem como a incineração de resíduos, são capazes de produzir gases de escape de alta temperatura. Estes gases de escape contêm grandes quantidades de energia que, se recuperadas, podem representar economias significativas ao sistema. Para recuperar parte dessa energia, podem ser instalados trocadores de calor de alta temperatura nos fluxos de escape. Trocadores de calor de alta temperatura também são usados como caldeiras flamotubulares. Para projetar um trocador de calor de alta temperatura e avaliar o seu desempenho, uma análise completa das características da transferência de calor deve ser analisada. A análise é complicada pela presença da radiação térmica, além disso, a transferência de calor por radiação deve ser associada aos processos básicos de convecção e/ou condução. Nessas aplicações, os fluidos de trabalho são geralmente produtos de combustão constituída principalmente por dióxido de carbono, vapor de água e nitrogênio. Como o dióxido de carbono e o vapor de água são capazes de emitir e absorver radiação térmica, a análise se concentra no escoamento de fluidos participantes, objeto de estudo do presente trabalho.

Essas e muitas outras aplicações do presente estudo proporcionaram o ímpeto para o desenvolvimento da pesquisa sobre a transferência de calor no escoamento de fluidos participantes.

1.3. JUSTIFICATIVAS

Estudos para incluir a radiação podem seguir duas direções distintas: medidas experimentais ou soluções numéricas, a partir das equações fundamentais. Apesar de complexa, a teoria básica da transferência de calor por radiação e convecção em dutos está bem estabelecida atualmente. Isso torna a solução numérica possível e desejável em relação à experimental, pois são muito menores os custos envolvidos na simulação das diversas condições de interesse (**França, 1995**).

É um fato bem conhecido que a transferência de calor considerando o acoplamento da radiação térmica e da convecção forçada é um problema bastante complexo e de difícil resolução. Essas dificuldades estão relacionadas principalmente à modelagem dos processos de transporte. Além das equações da continuidade, da quantidade de movimento e da energia, é necessário adicionar mais uma equação no modelamento matemático: a equação da transferência radiativa (ETR). Para problemas hidrodinamicamente desenvolvidos, uma vez que os campos de pressão e velocidade já estão estabelecidos, resta à resolução simultânea das equações da energia e da transferência radiativa.

Várias são as dificuldades encontradas com a introdução do efeito radiativo, dentre elas pode-se destacar: o tratamento espectral da radiação térmica (dependência espectral dos parâmetros radiativos), bem como o acoplamento e não-linearidade das equações da energia e da transferência radiativa. A equação da transferência radiativa é do tipo integro-diferencial possuindo resolução bastante laboriosa, tendo sido desenvolvidos vários métodos aproximados para a sua solução, dentre eles: método F_N , método de Galerkin, método dos harmônicos esféricos, método das ordenadas discretas, método das soluções elementares, método das projeções, método dos elementos finitos, etc.

Normalmente, no tratamento da equação da transferência radiativa, algumas considerações podem ser feitas para facilitar a obtenção de sua solução, tais como: considerar o meio puramente difusor, considerar o meio cinzento, considerar o meio puramente absorvedor e emissor, etc. No presente trabalho considera-se o fluido cinzento, puramente absorvedor e emissor de radiação térmica. Em geral, tem sido recomendado pela literatura especializada que o modelo de gás cinza fornece uma aproximação de primeira ordem na análise de gases irradiantes, não obstante, este modelo foi adotado como um primeiro passo no desenvolvimento de um projeto que visa conceber soluções para modelos mais complexos.

O estudo realizado no presente trabalho é de grande relevância, uma vez que visa fornecer parâmetros para melhor dimensionamento dos equipamentos térmicos, bem como proporcionar-lhes uma otimização energética no processo de transferência de calor.

1.4. APLICAÇÕES DO ESTUDO

Conforme destacado anteriormente, o estudo da transferência de calor para o acoplamento convecção/radiação é muito importante em muitas aplicações de engenharia, tais como trocadores de calor operando em altas temperaturas. A seguir destacam-se, com fins de contextualização do estudo realizado no presente trabalho, três aplicações onde a análise do escoamento de fluidos participantes se torna relevante. São eles: Motores Turboalimentados, Caldeiras Flamotubulares e os Sistemas Modernos de Propulsão.

1.4.1 MOTORES TURBOALIMENTADOS

O uso de motores turboalimentados leva a um aumento significativo na temperatura dos gases de escape. No motor a gasolina com turboalimentação, por exemplo, essa temperatura pode

chegar até os 1050°C, enquanto que sem a turboalimentação os gases de escape atingem uma temperatura em torno de 370-600°C. Várias vantagens atribuem aos motores turboalimentados uma melhor performance em relação aos motores de aspiração natural, fazendo com que cada vez mais essa técnica avançada de alimentação seja aceita no mercado. Dentre essas vantagens é possível destacar:

- O consumo de combustível de um motor turbo é menor, quando comparado com um motor de aspiração natural de mesma potência;
- A combustão do motor turbo é mais completa e mais limpa, o nível de emissão de poluentes de um motor turbo é menor;
- A relação potência/peso do motor turboalimentado é muito melhor do que a do motor de aspiração natural.
- A performance em altitudes elevadas de um motor turboalimentado é significativamente melhor.

Em contrapartida, devido aos elevados valores de temperaturas no escapamento do automóvel, o desenvolvimento desta técnica representa também novos desafios para a engenharia. Tornando-se necessário o desenvolvimento de estudos sobre o escoamento de gases de combustão em escapamentos de veículos automotores turboalimentados. Estes estudos fomentam a seleção de materiais mais adequados para a produção e funcionamento dos escapamentos, bem como permite um melhor controle da ação corrosiva, estendendo o tempo de vida de uso do veículo.

Na figura 1.1 ao lado, é possível observar o princípio de funcionamento de um motor de combustão interna turboalimentado.

Admitindo-se que o mesmo seja acionado por um motor a pistão de quatro tempos, tendo em vista a sua grande aplicabilidade no mercado, que possui, para cada ciclo operacional, quatro cursos do pistão que contempla os estágios de admissão, compressão, explosão e exaustão. A diferença dos motores turboalimentados em relação aos motores de aspiração natural é que os gases que saem no coletor de escape do motor e seriam jogados na atmosfera são redirecionados para a turbina, aproveitando a energia cinética que esses gases

ainda possuem para fazer a turbina girar.



Figura 1.1 - Desenho esquemático da turboalimentação em um motor.

Fonte: Adaptado de TurboDynamics.co.uk

Acoplado ao mesmo eixo da turbina está um compressor, daí o nome turbocompressor. O turbocompressor possui um par de rotores axiais, fixado em um único eixo, que de um lado opera como turbina e do outro lado atua como compressor. Quando os gases de escape são redirecionados à turbina fazem tanto o rotor da turbina como o do compressor girarem conjuntamente. Ao girar, o compressor aspira um grande volume de ar filtrado, comprime-o, fornecendo-o posteriormente ao motor. Em muitas situações ainda se utiliza um intercooler para intensificar a compressão na entrada do coletor de admissão. Tudo isso motivado pelo fato de que a potência de um motor pode ser elevada quando a quantidade de ar/combustível admitida em cada ciclo é aumentada, esse aumento pode ser obtido elevando-se a pressão (ou densidade) na admissão do motor.

O estudo desenvolvido no presente trabalho tem aplicação no esquema apresentado nesta seção, correspondente à turboalimentação por gás de escape. Determinar o campo térmico no escoamento dos gases de combustão ao longo do escapamento de veículos automotores turboalimentados, a fim de contribuir com os projetistas da indústria automobilística na produção e funcionamento dos escapamentos é uma aplicação que enobrece e impulsiona o presente estudo.

1.4.2 CALDEIRAS FLAMOTUBULARES

Foi na primeira Revolução Industrial, no século XVIII, que surgiram as primeiras máquinas a vapor. Graças a essas máquinas, empresários burgueses começaram a investir na instalação de indústrias tendo em vista o grande aumento na produção de mercadorias e nos lucros. A evolução dos protótipos surgidos durante a primeira Revolução Industrial fez surgir a caldeira a vapor tal como conhecemos hoje. Elas foram inicialmente construídas com o objetivo prioritário de diminuir os inconvenientes causados pela queima do carvão. Com o advento das caldeiras a vapor, a combustão

se concentrava em apenas um ponto da indústria, e o calor era distribuído através das tubulações de vapor.

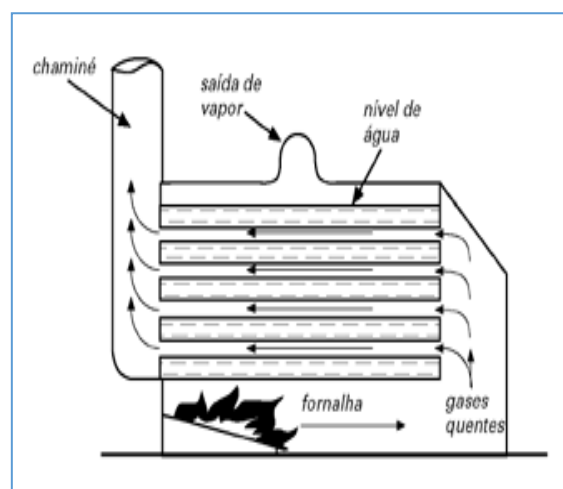


Figura 1.2 – Esquema representativo de uma caldeira flamotubular multitubular.

Fonte: (Galarça, 2006)

As caldeiras podem ser classificadas de acordo com o fluido que escoar no interior dos tubos, podendo ser flamotubular, aquatubular ou mista. As caldeiras flamotubulares, também denominadas de fumotubular, ou fogotubular, ou ainda pirotubular, como o próprio prefixo “flamo” indica, comportam o “fogo” dentro dos tubos; isso significa que os produtos de combustão (fumaça e os gases resultantes da queima) circulam pelo interior dos tubos, que ficam imersos na água a ser vaporizada. Já nas caldeiras aquatubulares, como o próprio prefixo “aqua” sugere, a água a ser vaporizada é que circula no interior dos tubos, e os produtos da combustão estão pelo exterior deles. As caldeiras mistas são híbridas, possuindo características tanto das caldeiras flamotubulares quanto das caldeiras aquatubulares. Desses três tipos de caldeiras, uma atenção maior deve ser dada às flamotubulares, tendo em vista que a mesma possui aplicação direta no estudo desenvolvido no presente trabalho, por se tratar do escoamento de gases participantes.

Outros critérios, secundários, geram outras classificações para as caldeiras, com base na disposição e quantidade dos tubos, bem como na localização da fornalha. Na figura 1.2 é possível observar uma caldeira flamotubular multitubular, que, como o próprio nome sugere, possui vários tubos fixados no interior dos quais circulam os gases provenientes da combustão da fornalha, que saem posteriormente pela chaminé.

As vantagens oferecidas por estas unidades são devido aos seguintes fatores: limpeza fácil da fuligem (em comparação com outras configurações); fácil substituição de eventual dano nos tubos; dispensa de tratamento rigoroso da água de alimentação; menor custo de aquisição e manutenção. As desvantagens ficam nos limites de capacidade e pressão, maior espaço ocupado e baixo rendimento térmico, porém atualmente já se consegue projetar equipamentos com faixas mais amplas (*Spring, 1940 ; Mesny, 1961*).

A norma regulatória que orienta o trabalho com caldeiras a fim de estabelecer medidas mínimas de segurança e garantir a preservação da saúde do trabalhador é a Norma Regulatória nº 13 (NR-13). As caldeiras são dispositivos capazes de dar muita força ao processo produtivo de uma indústria, mas carece de muito cuidado por envolver uma combinação perigosa de elevadas temperaturas e pressões que podem culminar numa trágica explosão. Diante disso, a sua manutenção periódica é de fundamental importância. Um dos fatores que oferece risco ao sistema é o processo de corrosão que ocorre no interior dos tubos. Um conhecimento aprofundado sobre o processo de transferência de calor que ocorre no interior do tubo, durante o escoamento dos gases de combustão, auxilia numa melhor compreensão do processo de

corrosão, estendendo o tempo de vida da caldeira e promovendo sua melhor performance (rendimento); o presente trabalho tem aplicações visando dar esta contribuição.

1.4.3 SISTEMAS MODERNOS DE PROPULSÃO

Define-se propulsão como sendo o processo capaz de alterar o estado de repouso ou de movimento de um corpo em relação a um sistema de referência. Veículos espaciais, aviões, trens, navios, submarinos e automóveis fazem uso dos meios de propulsão como forma de vencer a inércia e adquirir uma aceleração.

A propulsão pode ser obtida de várias formas distintas, a partir de fontes de energia variadas, dentre elas pode-se destacar às provenientes da energia química, nuclear, elétrica, etc. Independente do método utilizado, todos eles possuem vantagens e desvantagens, fazendo com que esta área de pesquisa sempre esteja em constante atividade.



Figura 1.3 – Imagem do lançamento de um foguete da Nasa. *Fonte: Nasa*

A cada dia a literatura especializada apresenta novas pesquisas e conceitos no fascinante campo da propulsão, área de estudos que abriu os caminhos do espaço para o homem. Diversos conceitos avançados de propulsão têm sido estudados, dentre eles pode-se destacar a propulsão nuclear e propulsão utilizando anti-matéria. A propulsão nuclear utiliza a energia proveniente de reações nucleares, que, muito embora possua níveis energéticos altíssimos, ainda precisa superar algumas dificuldades para que se torne operacional. A propulsão por anti-matéria utiliza a energia oriunda da reação explosiva entre matéria e anti-matéria para produzir o impulso do veículo espacial; muitos estudos analisam a viabilidade deste método e as principais dificuldades estão associadas à criação e armazenamento de anti-matéria.

Atualmente o acesso espacial tem sido realizado através da propulsão química dos motores de foguetes, que produzem empuxo utilizando a energia proveniente das ligações químicas moleculares. De acordo com (**Ferreira et al., 2018**), a propulsão química possui um alto custo operacional, pois além de utilizar componentes químicos com preços elevados, os mesmos

exigem alta destreza, transporte e armazenamento cuidadosos, que dificultam o acesso ao espaço e, conseqüentemente, o lançamento de cargas úteis na órbita da Terra.

Nesse sentido, visando o fácil acesso ao espaço, a propulsão a laser é uma proposta avançada e atraente para lançar cargas úteis na órbita da Terra, pois é capaz de gerar grande impulso para o veículo espacial (*Feikema, 2000*). Há muito tempo engenheiros e escritores de ficção científica têm sonhado com veículos espaciais movidos por feixes de luz, capazes de colocar uma nave em órbita com pouco ou nenhum combustível a bordo. Essa tecnologia está sendo desenvolvida e pode revolucionar o campo da exploração espacial. Esse sistema inovador poderá deixar os lançamentos espaciais mais baratos, mais seguros, poderá aumentar a carga útil do foguete, reduzir o uso de combustíveis e diminuir a emissão de gases causadores do aquecimento global.

A propulsão a laser é uma forma de propulsão que utiliza o poder de um feixe de laser de alta potência para gerar a propulsão. O projeto consiste em uma base terrestre que projeta raios laser na traseira de um veículo espacial, onde, através do uso de um espelho parabólico, esse feixe será refletido e concentrado na região de ionização. Essa concentração faz com que o ar no ponto focal se incendeie, criando plasma, e esse plasma se expande e gera o impulso necessário ao lançamento (*Ferreira et al., 2018*).

Quando se trata de sistemas de propulsão de veículos espaciais, um ponto comum entre eles é que, geralmente, o empuxo é produzido através da ejeção de gases com altas temperaturas que fluem através de uma tubeira, ou bocal, até atingirem a superfície externa. Isso confere ao tema a possibilidade de aplicar os conhecimentos adquiridos no presente estudo, por se tratar mais uma vez do escoamento de fluidos participantes.

1.5. METODOLOGIA

Em meados dos anos 70, a Rússia e outros países do Leste Europeu avançaram no desenvolvimento de métodos analíticos, ao mesmo tempo em que os Estados Unidos e outros países da Europa desenvolviam métodos puramente numéricos. Percebendo as grandes dificuldades associadas às manipulações matemáticas tradicionais, bem como o grande esforço computacional exigido no uso dos métodos puramente numéricos, esses grupos tenderam a se unificar com o objetivo de desenvolver metodologias alternativas no tratamento de problemas matemáticos com grande grau de complexidade. Desta interação surgiram os métodos híbridos, analítico/numéricos, que permitiram um grande avanço no tratamento de problemas

inerentemente difíceis. Dentre esses métodos destaca-se a Técnica de Transformada Integral Generalizada (GITT), que se apresenta como uma metodologia consagrada tendo sido utilizada com sucesso em várias classes de modelos de transferência de calor e mecânica dos fluidos.

O desenvolvimento da GITT, como ferramenta matemática robusta, por se tratar de um método híbrido analítico-numérico, tem permitido o avanço em soluções de problemas de difusão de calor e massa cada vez mais complexos, e tem produzido soluções para os campos de temperatura e radiação com extensões para parâmetros de interesses práticos, tais como: número de Nusselt, intensidade radiativa, fluxo de calor radiativo e divergente do fluxo de calor por radiação.

Para se determinar o campo térmico em um problema de transferência de calor com acoplamento convecção-radiação, hidrodinamicamente desenvolvido, é necessário resolver simultaneamente a equação da energia e a equação da transferência radiativa (ETR). A equação da energia e a equação radiativa são de natureza não linear, sujeitas a condições de contorno envolvendo a troca de calor por radiação e convecção entre o fluido e o meio. No presente trabalho é feita uma modelagem matemática para que a equação da energia e a equação da transferência radiativa sejam resolvidas empregando-se a metodologia da GITT, apresentada por (Cotta, 1993). Neste sentido o presente trabalho apresenta um caráter inovador, pois problemas desta natureza nunca foram tratados usando-se exclusivamente a GITT como metodologia de solução.

1.6. OBJETIVO GERAL

O presente trabalho tem como objetivo geral:

- Analisar a transferência de calor no escoamento laminar e turbulento de fluidos participantes no interior de dutos circulares e retangulares, sendo capaz de, através do uso da GITT na resolução simultânea das equações da energia e da transferência radiativa, solucionar o campo térmico e o campo de radiação.

1.7. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

O presente trabalho tem como objetivos específicos:

- Analisar a influência que os parâmetros condução-radiação, espessura óptica, emissividades da superfície de contorno, número de Peclet, número de Prandtl e número de Reynolds exercem no perfil de temperatura e nos números de Nusselt Convectivo, Radiativo e Total;
- Determinar grandezas de interesse prático para a engenharia, tais como: intensidade radiativa, fluxo líquido de calor radiativo e divergente do fluxo de calor por radiação em qualquer ponto do meio;
- No uso da GITT, analisar as soluções obtidas para os campos térmico e radiativo por diferentes modelagens no problema auxiliar;
- Na análise do escoamento turbulento de fluidos participantes, considerar diferentes modelos de turbulência e comparar os resultados obtidos entre si;
- Avaliar a significância da radiação térmica e o comportamento do processo convectivo com e sem a inclusão da radiação térmica.

1.8. ESCOPO DO TRABALHO

O presente trabalho é composto de 5 capítulos, cujos assuntos abordados são:

Capítulo 1. Introdução: apresenta-se os aspectos motivacionais, justificativas e aplicações do presente estudo. A metodologia aplicada no presente trabalho é exposta, bem como os objetivos geral e específicos.

Capítulo 2. Revisão Bibliográfica: apresenta-se uma breve evolução do estado da arte, expondo trabalhos que envolvem a transferência de calor no escoamento laminar e turbulento de fluidos participantes no interior de dutos circulares e retangulares, com diferentes condições de contorno e modelos de fluidos.

Capítulo 3. Acoplamento da convecção laminar e radiação: analisa-se a interação da convecção forçada laminar e radiação térmica. Na aplicação da GITT utiliza-se 3 modelagens matemáticas distintas para a solução do problema (expansão em diferentes autofunções), que são comparadas entre si e demonstram a versatilidade da técnica.

Capítulo 4. Acoplamento da convecção turbulenta e radiação: analisa-se a interação da convecção forçada turbulenta e radiação térmica. Quatro modelos de turbulência são investi-

gados e comparados entre si, com base nos trabalhos de *Prandtl* (1910) e *Taylor* (1916); *Von Karman* (1939); *Rannie* (1956); *Reichardt* (1951) e *Spalding* (1961).

Capítulo 5. Considerações finais: apresenta-se as conclusões do trabalho e as sugestões para trabalhos futuros.

Em sequência, relaciona-se todas as referências bibliográficas utilizadas no presente trabalho. Como parte complementar apresenta-se os apêndices A-E, que reproduzem o desenvolvimento de cálculos contidos no presente estudo.

CAPÍTULO 2

ESTADO DA ARTE

2. REVISÃO DA LITERATURA

A seguir, será feito um breve levantamento literário a respeito dos problemas combinados de convecção-radiação. Vários estudos teóricos foram realizados na análise da transferência de calor no escoamento laminar e turbulento de fluidos participantes, considerando diferentes geometrias, condições de contorno e modelos de fluidos; com as mais diversas metodologias para a sua solução. Alguns trabalhos clássicos são destacados.

Pearce e Emery (1970) analisam a transferência de calor considerando o acoplamento da radiação térmica e da convecção forçada na região de entrada de um tubo com seção transversal circular. A parede do tubo é considerada preta e isotérmica, e o fluido entra com uma distribuição de velocidade totalmente desenvolvida (parabólica ou uniforme). Modelos por bandas de absorção foram aplicados para o tratamento das propriedades espectrais dos gases participantes, que são considerados tanto cinzas quanto não-cinzas. O escoamento dos gases é considerado laminar, incluindo-se a dependência das propriedades físicas do gás em relação à temperatura. O estudo é aplicado ao monóxido de carbono e ao dióxido de carbono. Os resultados permitem a análise do quão dominante é o processo de radiação na transferência de calor.

Echigo et al. (1975) estudam a transferência simultânea de calor por convecção e radiação, com um fluxo laminar no interior de um tubo circular, hidrodinamicamente desenvolvido e termicamente em desenvolvimento. O fluxo de energia radiante é considerado bidimensional (fluxo nas direções axial e radial do duto). A parede do tubo é considerada cinza e perfeitamente difusa, sendo mantida à temperatura constante. O gás é considerado cinza, puramente emissor e absorvedor de radiação, com propriedades físicas constantes. Usando técnicas de diferenças finitas, os autores examinaram a equação da energia com a transferência de calor por radiação

bidimensional, avaliando o campo de temperatura e os números de Nusselt convectivo, radiativo e total.

Jeng et al. (1976) estudam teoricamente a transferência de calor no escoamento laminar de gases participantes na região de entrada térmica de um tubo circular. O estudo é aplicado ao monóxido de carbono, dióxido de carbono, vapor de água e metano. O gás é considerado não-cinza, absorvente e emissor, mas não dispersivo de radiação, com propriedades físicas constantes, tendo um perfil de velocidade totalmente desenvolvido na entrada do duto. A parede do tubo é considerada cinza e isotérmica. Para a formulação radiante considera-se apenas o fluxo radial. As propriedades espectrais do gás são modeladas por meio de bandas de absorção. Utilizaram-se também duas condições para simplificar o tratamento da radiação térmica: gás pouco e muito espesso. As metodologias empregadas (dois limites ópticos e bandas de absorção) são confrontadas. Os resultados incluem a temperatura média do gás, a temperatura na linha de centro ao longo do escoamento e o fluxo de calor total ao longo da direção axial.

Nakra e Smith (1977) analisam o escoamento de gases participantes fluindo através de um tubo circular com perfil uniforme de velocidade. A parede do duto é considerada preta e isotérmica. As propriedades radiativas do gás são avaliadas a partir do modelo de soma ponderada de gases cinzas com fatores de ponderação e coeficientes de absorção de gás cinzento aplicáveis a uma mistura equimolar de dióxido de carbono e vapor de água. A condução axial de calor é negligenciada e a convecção foi introduzida através de coeficientes de película supostos inicialmente conhecidos. O método das zonas é empregado para avaliar a troca de calor radiante dentro do gás, bem como entre o gás e as superfícies circundantes.

Smith et al. (1985) examinam a transferência de calor, em regime laminar e turbulento, no escoamento de gases participantes na região de entrada térmica de um duto circular. O gás emite e absorve radiação térmica, sendo as suas propriedades radiativas avaliadas a partir do modelo de soma ponderada de gases cinzas. A parede do tubo é negra e possui temperatura uniforme. A condução axial de calor é desprezada e o método das zonas é empregado para avaliar a troca de calor, considerando-se zonas toroidais que permitem a determinação do fluxo de calor convectivo a partir do balanço de energia aplicado em cada zona de gás. O perfil de temperatura do gás, o fluxo de calor na parede e o número de Nusselt são avaliados para vários valores dos parâmetros do sistema.

Campo e Schuler (1988a) analisam numericamente a interação da convecção forçada laminar e radiação térmica. **Schuler e Campo** (1988b) analisam o escoamento de gases participantes considerando um fluxo turbulento com perfil de velocidade completamente desenvolvido. **Campo e Schuler** (1989) estudam a transferência de calor para o acoplamento da convecção forçada laminar e turbulenta com a radiação térmica. Em todos estes trabalhos o método dos momentos é usado para descrever aproximadamente o fluxo de calor radiativo na equação de energia, proporcionando uma boa performance e redução no tempo computacional de simulação. Sob a idealização de ser cinza, estes trabalhos também consideram o gás como sendo puramente emissor e absorvedor de radiação, com propriedades físicas constantes. A parede do tubo é considerada cinza e possui temperatura constante, em todos eles. O procedimento numérico utilizado nestes trabalhos corresponde ao método de linhas em conjunto com volumes de controle na direção radial (MOLCV). O campo de temperatura e o número de Nusselt são avaliados para vários valores da espessura óptica e do parâmetro condução-radiação.

Tsai e Özisik (1989) analisam a interação da radiação e convecção forçada laminar de um fluido não-newtoniano, cinzento, que absorve, emite e espalha a radiação isotropicamente, através de um tubo circular com parede preta e isotérmica. O perfil de velocidade é completamente desenvolvido, estabelecido por meio do modelo da lei de potência. A equação da energia é resolvida por um método implícito de diferenças finitas, enquanto a parte da radiação do problema é resolvida pelo método de colocação. O número de Nusselt local ao longo do tubo é analisado para o caso da lei de potência quando $n = 1/3$, 1 e 3, em que o caso em que $n = 1$ corresponde ao fluido newtoniano.

Yang e Ebadian (1991) investigam a combinação da convecção forçada laminar e da radiação térmica na região de entrada térmica de um tubo circular com condução de calor axial e radiação térmica. O método dos momentos é aplicado para modelar o processo de transporte de calor por radiação. As equações governantes são resolvidas através da aplicação do algoritmo SIMPLE do Pantakar. Os efeitos do número de Peclet e sua interação com o parâmetro condução-radiação e espessura óptica na transferência de calor na região de entrada térmica são investigados.

Yang e Ebadian (1992) estudam o escoamento de gases participantes em dutos de formas retangulares e equilátero-triangulares. A contribuição da transferência de calor por radiação é modelada por um método diferencial, o método dos momentos. As equações governantes tridimensionais do momento e energia são discretizadas por um algoritmo explícito de diferenças

finitas, o método das linhas (MOL). Este sistema de equações algébricas discretizadas é então resolvido pelo Método de Runge-Kutta de quarta ordem. Os efeitos dos três parâmetros principais que afetam a transferência de calor combinada por convecção e radiação, ou seja, parâmetro condução-radiação, espessura óptica e emissividade da parede, são analisados em detalhes.

Seo et al. (1994) estudam a transferência simultânea de calor por convecção e radiação em um escoamento laminar com desenvolvimento simultâneo dos campos de velocidade e temperatura. Os autores utilizam uma aproximação P-1 para simplificar os termos íntegro-diferenciais, provenientes do balanço de energia radiante, por meio de diferenciais de primeira ordem. Considera-se a dependência espectral do coeficiente de absorção do gás, que são modeladas por meio de bandas de absorção. O fluido é uma mistura de dióxido de carbono, água e nitrogênio, com propriedades físicas constantes. A parede do duto é considerada cinza, perfeitamente difusa e isotérmica. Investiga-se a variação da temperatura média do fluido, os perfis de temperatura e os números de Nusselt, para uma temperatura de entrada uniforme e várias temperaturas de parede constantes.

França (1995) estuda a transferência de calor no escoamento de gases participantes em dutos de seção circular revestidos com isolamento não-ideal, implicando na perda de calor para o meio externo. O gás possui temperatura uniforme na entrada do duto, sendo considerada a região de desenvolvimento térmico. O perfil de velocidade é completamente desenvolvido em todo o duto, analisando-se as situações de escoamento laminar e turbulento. O fluido é uma mistura de dióxido de carbono, vapor de água e nitrogênio, com propriedades físicas uniformes. As propriedades radiantes são dependentes da temperatura e são modeladas pela soma ponderada de gases cinzas. Para a solução do campo de temperatura do gás, utiliza-se o método de volumes de controle *Flux-Spline*. As trocas radiativas são avaliadas pelo método das zonas. Os resultados incluem as distribuições de temperatura no gás e os números de Nusselt total, convectivo e radiante.

França e Goldstein (1998) analisam a transferência de calor no fluxo turbulento de um gás participante com alta temperatura através de um tubo de seção transversal circular cuja superfície externa é coberta por isolamento não-ideal. O gás é considerado não-cinza, e suas propriedades radiativas são avaliadas pela soma ponderada de gases cinzas. As propriedades de transporte e densidade do gás são consideradas uniformes em todo o duto. As trocas radiativas são avaliadas pelo método das zonas. Avalia-se os efeitos da temperatura de entrada do gás, do

diâmetro interno do tubo e do número de Reynolds turbulento sobre os números de Nusselt convectivo, radiativo e total.

Baek et al. (1999) investigam um problema combinado de transferência de calor por convecção e radiação. Considera-se um escoamento no interior de um tubo cilíndrico, hidrodinamicamente desenvolvido (do tipo Poiseuille) e se desenvolvendo termicamente. A equação de transferência radiativa, íntegro-diferencial, é resolvida pelo método de ordenadas discretas em uma geometria axissimétrica. O método de ordenadas discretas é comparado com o resolvido pelo método integral. Um estudo paramétrico é também realizado para o parâmetro condução-radiação, espessura óptica, emissividade da parede, albedo de espalhamento e coeficiente de dispersão anisotrópico linear. Os resultados mostram a significância do efeito da radiação nas características térmicas.

Bergero et al. (1999) estudam a transferência combinada de calor, convectiva e radiativa, em um duto retangular tridimensional com desenvolvimento simultâneo dos campos de pressão, velocidade e temperatura. O gás é assumido como cinzento, incompressível, absorvente, emissor e dispersor isotrópico de radiação. As paredes do duto são consideradas isotérmicas, com diferentes temperaturas assumidas para cada parede, cinzentas e perfeitamente difusas. O método dos volumes finitos é adotado para descrever a transferência de calor convectiva e radiativa. A equação da continuidade, quantidade de movimento, energia e transferência radiativa são resolvidas numericamente, analisando-se o fluxo de calor convectivo, radiativo e total. Os efeitos da espessura óptica, albedo de espalhamento e emissividade da parede também são investigados.

Sediki et al. (2002) analisam a transferência de calor no escoamento de gases participantes, em desenvolvimento simultâneo, na região de entrada de um duto circular horizontal. Os autores investigam duas situações: uma unidimensional (na direção radial) e outra bidimensional (radial e axial). Foram feitas simulações numéricas considerando o meio participante como sendo o dióxido de carbono ou o vapor de água. A parede é considerada negra em todas as situações analisadas, possuindo temperatura constante. Para o tratamento das propriedades espectrais dos gases, o problema foi solucionado de duas formas: utilizando-se modelos de bandas de absorção CK- *Correlated-k* ou o modelo global ADF – *Absorption Distribution Function*. Em continuação desses estudos, **Sediki et al.** (2003) resolvem um problema semelhante, porém com a orientação do duto na vertical e, além dos gases serem analisados de forma separada, uma mistura de dióxido de carbono e vapor de água também foi incluída. Os resultados incluem os campos de

temperatura e de intensidade de radiação juntamente com a evolução das temperaturas de mistura e dos coeficientes de transferência de calor.

Zheng et al. (2003) estudam numericamente a transferência turbulenta para o acoplamento convecção-radiação de um fluido participante na região de entrada de um tubo curvo. O fluido de trabalho é considerado cinza, absorvedor, emissor e dispersor isotrópico de radiação. O problema é resolvido utilizando o CFD (Computational Fluid Dynamics) através do solver FLUENT, que usa um método de elemento finito de volume de controle (CVFEM) para resolver as equações governantes. O efeito de diferentes parâmetros físicos, como a espessura óptica e a emissividade da parede, são sistematicamente analisados.

Galarça (2006) investiga a transferência de calor combinando convecção e radiação térmica no escoamento de gases participantes em dutos de seção circular. O escoamento é turbulento e o perfil de velocidade é plenamente desenvolvido desde a entrada do duto. Duas misturas de gases são tratadas, ambas constituídas por dióxido de carbono, vapor de água e nitrogênio. As propriedades físicas dos gases são admitidas uniformes em todo o duto, e as propriedades radiantes são modeladas pela soma ponderada de gases cinzas. Propõe-se correlações para o número de Nusselt total, levando em consideração tanto a radiação quanto a convecção.

Talukdar e Simonson (2007) analisam a transferência de calor com acoplamento convecção-radiação no escoamento de fluidos participantes através de placas planas. O fluxo é hidrodinâmico e termicamente em desenvolvimento. Considera-se o estudo de situações correspondentes ao aquecimento e resfriamento do fluido. As equações de quantidade de movimento e energia são resolvidas com o CFD, com base no método de volumes finitos. A transferência de calor por radiação é também tratada pelo método do volume finito. O fluido é considerado cinzento com propriedades constantes. Considera-se as transferências de calor axial e transversal, e mostra-se o efeito da radiação axial para diferentes parâmetros ópticos, comparando os resultados com e sem radiação axial.

Mazgar et al. (2008) investigam a geração de entropia induzida pela transferência de calor acoplada da convecção forçada e da radiação térmica na região de entrada de um duto cilíndrico. Um fluxo laminar de vapor de água superaquecido foi analisado. O fluido é considerado não-cinzento, emissivo e absorvente de radiação térmica. As distribuições de geração de entropia são analisadas. Os desenvolvimentos dos campos de velocidade e de temperatura também são apresentados neste estudo.

Trabelsi et al. (2013) analisam numericamente a transferência de calor no escoamento de gases participantes na região de entrada de um duto circular horizontal. Os autores analisam o escoamento, em desenvolvimento simultâneo, de gases emissores e absorvedores, mas não dispersantes, de radiação. O estudo é apresentado em casos de situações práticas, como a combustão de gás natural, propano e combustível. O fluido é uma mistura de dióxido de carbono, vapor de água e nitrogênio. As misturas de gás são assumidas obedecendo à lei dos gases perfeitos e as suas propriedades termofísicas são aproximadas por funções dependentes da temperatura. As paredes são consideradas cinzas com uma emissividade constante, emitindo e refletindo radiação térmica isotropicamente. Utiliza-se o CFD para resolver simultaneamente as equações de conservação da massa, momento e energia. Os resultados incluem a evolução axial da temperatura média e dos números de Nusselt convectivo, radiativo e total para diferentes misturas produzidas pela combustão com oxigênio.

Ansari e Nassab (2013) investigam o escoamento de gases participantes na região de entrada de um duto retangular com um degrau inclinado. O fluido é tratado como um meio cinzento absorvente, emissor e dispersivo. As equações do momento e energia são resolvidas numericamente pelas técnicas computacionais de dinâmica de fluidos, para obter os campos de velocidade e temperatura. A equação de transferência radiativa é resolvida numericamente pelas ordenadas discretas. Nos resultados numéricos os efeitos do ângulo de inclinação, da espessura óptica, do albedo de espalhamento e do parâmetro de condução de radiação são investigados.

Pachpute et al. (2015) estudam a transferência simultânea de calor por convecção e radiação no escoamento, em desenvolvimento simultâneo, de um gás participante cinzento que absorve, emite e espalha isotropicamente radiação térmica. O escoamento ocorre no interior de um canal de placas planas paralelas através do qual o gás participante irá fluir contornando um cilindro inserido na direção perpendicular do escoamento. A parede do duto retangular é considerada cinza e perfeitamente difusa, sendo mantida à temperatura constante. Simulações são realizadas para fluxos laminares e turbulentos. Os resultados incluem os perfis de temperatura e o número de Nusselt para vários valores dos coeficientes de absorção e espalhamento.

Veloso (2015) estuda a transferência de calor na convecção forçada laminar, considerando os efeitos simultâneos da condução e da radiação axial. Considera-se diferentes perfis de velocidade na região de entrada térmica de um tubo circular, atendendo as situações de escoamento uniforme, escoamento de fluidos newtonianos e não-newtonianos. O campo de temperatura e o número de Nusselt local são avaliados para vários valores do número de Peclet e uma condição

de contorno do primeiro tipo. Os resultados permitem analisar a influência que o índice lei de potência e o número de Peclet exercem no perfil de temperatura.

Rayeni e Nassab (2016) investigam a transferência combinada de calor por convecção e radiação, tridimensional, no escoamento de um gás participante sobre um degrau inclinado para frente em um duto retangular horizontal. O fluido é tratado como um meio cinzento, absorvente, emissor e dispersor. As equações para o fluxo do gás são resolvidas numericamente usando a técnica CFD para obter os campos de temperatura e velocidade. Para computação do termo radiativo na equação de energia, a equação de transferência radiativa é resolvida numericamente pelo método das ordenadas discretas para encontrar a divergência do fluxo de calor radiativo. Os efeitos da espessura óptica, do parâmetro condução-radiação e do albedo de espalhamento são analisados na transferência de calor.

Asghari e Nassab (2016) estudam numericamente o efeito da radiação no fluxo de convecção forçada turbulenta sobre um duto bidimensional com uma expansão súbita. O gás participante é tratado como cinza, absorvendo, emitindo e dispersando radiação térmica. As equações bidimensionais de Navier-Stokes, juntamente com a equação de energia e a energia cinética de turbulência, bem como suas taxas de dissipação, são resolvidas numericamente pelas técnicas de dinâmica de fluidos computacional (CFD) para obter as distribuições de velocidade e temperatura. O modelo de baixo número de Reynolds é empregado para o cálculo de flutuações de turbulência. O método de volumes finitos é adotado para resolver as equações governantes, enquanto a equação de transferência radiativa é resolvida pelo método de ordenadas discretas. Duas condições de contorno térmico diferentes são consideradas e os resultados mostram que o efeito radiativo produz implicações significativas na transferência de calor. Os efeitos do parâmetro condução-radiação, espessura óptica, albedo de espalhamento e emissividade da parede são avaliados sobre as distribuições do campo de temperatura e números de Nusselt.

Com base nos trabalhos listados anteriormente, e tendo como principais referências as tabelas contidas nos trabalhos de (**França, 1995** e **Galarça, 2006**), é possível fazer um breve resumo dos trabalhos que consideram a transferência simultânea de calor por convecção e radiação na tabela a seguir:

Tabela 2.1 – Levantamento bibliográfico dos trabalhos que consideram a transferência simultânea de calor por convecção e radiação.

<i>Trabalho</i>	<i>Escoamento</i>	<i>Condição de contorno na parede</i>	<i>Superfície do duto</i>	<i>Modelo de gás</i>	<i>Fluxo de energia radiante</i>
Pearce e Emery (1970)	Uniforme e Laminar	Temperatura uniforme	Negra	Bandas de absorção	Radial e axial
Echigo <i>et al.</i> (1975)	Laminar	Temperatura uniforme	Cinza	Cinza	Radial e axial
Jeng <i>et al.</i> (1976)	Laminar	Temperatura uniforme	Cinza	Bandas de absorção	Radial
Nakra e Smith (1977)	Uniforme	Temperatura uniforme	Negra	Soma ponderada de gases cinzas	Radial e axial
Smith <i>et al.</i> (1985)	Laminar e Turbulento	Temperatura uniforme	Negra	Soma ponderada de gases cinzas	Radial e axial
Campo e Schuler (1988a)	Laminar	Temperatura uniforme	Cinza	Cinza	Radial
Campo e Schuler (1988b)	Turbulento	Temperatura uniforme	Cinza	Cinza	Radial
Campo e Schuler (1989)	Laminar e Turbulento	Temperatura uniforme	Cinza	Cinza	Radial
Tsai e Özisik (1989)	Lei de Potência	Temperatura uniforme	Negra	Cinza	Radial
Yang e Ebadian (1991)	Laminar	Temperatura uniforme	Cinza	Cinza	Radial e axial
Yang e Ebadian (1992)	Laminar	Temperatura uniforme	Cinza	Cinza	Radial e tangencial
Seo <i>et al.</i> (1994)	Laminar	Temperatura uniforme	Cinza	Bandas de absorção	Radial
França (1995)	Laminar e Turbulento	Temperatura uniforme	Cinza	Soma ponderada de gases cinzas	Radial e axial
França e Goldstein (1998)	Turbulento	Temperatura uniforme	Cinza	Soma ponderada de gases cinzas	Radial e axial
Baek <i>et al.</i> (1999)	Laminar	Temperatura uniforme	Cinza	Cinza	Radial e axial
Bergero <i>et al.</i> (1999)	Laminar	Temperatura uniforme	Cinza	Cinza	3D
Sediki <i>et al.</i> (2002)	Laminar	Temperatura uniforme	Negra	Bandas de absorção	Radial e axial

<i>Trabalho</i>	<i>Escoamento</i>	<i>Condição de contorno na parede</i>	<i>Superfície do duto</i>	<i>Modelo de gás</i>	<i>Fluxo de energia radiante</i>
Sediki <i>et al.</i> (2003)	Laminar (<i>vertical</i>)	Temperatura uniforme	Negra	Bandas de absorção	Radial e axial
Zheng <i>et al.</i> (2003)	Turbulento (<i>curvo</i>)	Temperatura uniforme	Cinza	Cinza	Axial
Galarça (2006)	Turbulento	Temperatura uniforme	Cinza	Soma ponderada de gases cinzas	Radial e axial
Talukdar e Simonson (2007)	Laminar	Temperatura uniforme	Cinza	Cinza	Radial e axial
Mazgar <i>et al.</i> (2008)	Laminar	Temperatura uniforme	Negra	Bandas de absorção	Radial e axial
Trabelsi <i>et al.</i> (2013)	Laminar	Temperatura uniforme	Cinza	Bandas de absorção	Radial e axial
Ansari e Nassab (2013)	Laminar	Temperatura uniforme	Cinza	Cinza	Radial e axial
Pachpute <i>et al.</i> (2015)	Laminar e Turbulento	Temperatura uniforme	Cinza	Cinza	Axial
Veloso (2015)	Uniforme, Laminar e Lei de Potência	Temperatura uniforme	Cinza	Cinza	Radial e axial
Rayeni e Nassab (2016)	Laminar	Temperatura uniforme	Cinza	Cinza	3D
Asghari e Nassab (2016)	Turbulento	Temperatura uniforme	Cinza	Cinza	Radial e axial

O presente trabalho visa colaborar no desenvolvimento do estado da arte acrescentando nos estudos a análise do escoamento de gases participantes para diferentes modelos de turbulência. Não existe uma forma unívoca, ou uma teoria fundamental, para o tratamento da turbulência, entretanto existem relações empíricas ou semi-empíricas que possibilitam este estudo através de modelos de turbulência. Os cálculos de parâmetros de interesses práticos, tais como fatores de atrito e coeficientes de transferência de calor, são totalmentes dependentes do modelo de turbulência adotado. Cada modelo de turbulência apresenta uma margem de precisão em relação aos resultados obtidos, mas nada pode assegurar que um modelo seja melhor do que outro. Levando este fato em consideração, o presente trabalho utiliza quatro modelos de turbulência distintos, baseados em trabalhos relevantes encontrados na literatura especializada, que são

investigados e comparados entre si. Isso permite analisar o comportamento médio dos resultados obtidos e permite avaliar a curva de tendência para as medidas investigadas.

A metodologia empregada na solução simultânea das equações governantes, para os casos laminar e turbulento, através do uso da GITT, também representa um aspecto diferencial do presente trabalho. A GITT é validada para o caso laminar, sendo estendida a análise ao caso de escoamento turbulento.

CAPÍTULO 3

ANÁLISE DA CONVECÇÃO FORÇADA LAMINAR DE FLUIDOS PARTICIPANTES

Neste capítulo será analisada a transferência de calor no escoamento laminar de fluidos participantes na região de entrada térmica de dutos retangulares e circulares. Utiliza-se uma aproximação diferencial para modelar a transferência radiativa, baseada no método dos momentos, em conformidade com os trabalhos de (*Yang e Ebdian*, 1991 e 1992) e (*Campo e Schuler*, 1988a, 1988b, 1989). A Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) é aplicada para resolver a equação da energia e a equação da transferência radiativa. Diferentes formulações matemáticas são utilizadas na solução do problema físico proposto, mostrando a versatilidade na escolha do problema auxiliar no uso da GITT.

3. PROBLEMA FÍSICO

3.1. INTRODUÇÃO

O problema a ser estudado neste capítulo trata-se do escoamento completamente desenvolvido de um fluido participante no interior de um canal de placas planas paralelas ou tubo circular, conforme ilustrado na figura 3.1. Considera-se que o fluido tenha uma temperatura de entrada uniforme (T_e) e que a temperatura das paredes do tubo/placas planas seja mantida fixa (T_w). O fluido é tratado como um meio cinzento, puramente absorvedor e emissor de radiação.

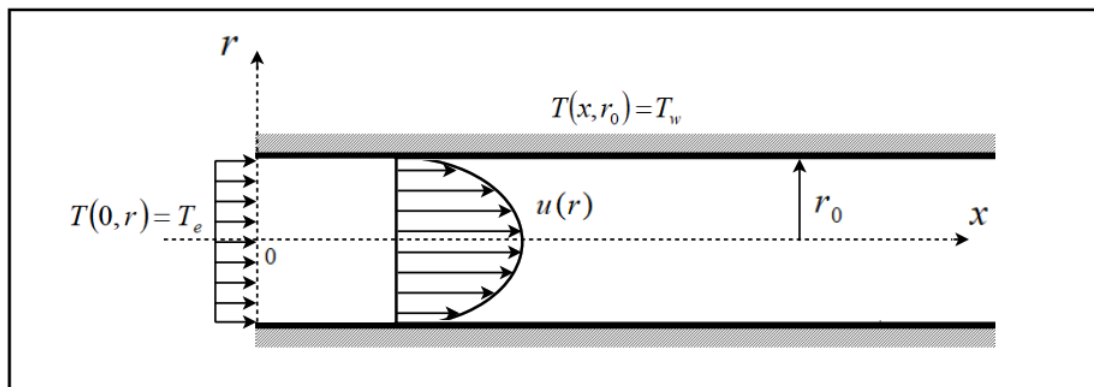


Figura 3.1 - Ilustração do problema.

3.2. MODELAMENTO MATEMÁTICO

Para a modelagem matemática do problema físico proposto, foram feitas as seguintes considerações:

- Escoamento laminar, em regime permanente;
- Fluido incompressível;
- As propriedades térmicas do fluido são consideradas constantes;
- O perfil de velocidade é completamente desenvolvido na entrada térmica;
- Os efeitos da dissipação viscosa não serão considerados;
- Impermeabilidade e não-deslizamento nas paredes;
- Desprezando as forças de corpo;
- Gradiente de pressão uniforme na direção axial;
- O comprimento axial do canal/tubo é muito maior do que o seu comprimento radial;
- O fluido é cinzento, que emite, absorve e não dispersa radiação, de modo que todas as suas propriedades radiativas são independentes da frequência de onda.
- A parede do duto é cinza e perfeitamente difusa, sendo mantida à temperatura constante.

Levando-se em conta as hipóteses simplificadoras apresentadas, as equações governantes que descrevem a transferência de calor para o acoplamento convecção/radiação do problema físico proposto podem ser escritas da seguinte forma:

Equação da quantidade de movimento no eixo x

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{K}{\rho} \frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^m \mu(u_r) \frac{\partial u}{\partial r} \right]; \quad x \geq 0 \text{ e } 0 \leq r \leq r_0 \\ \text{onde:} \quad \mu(u_r) = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \\ \text{condições de contorno:} \quad r = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad r = r_0 \rightarrow u = 0 \end{array} \right. \quad (3.2a-d)$$

cuja solução, discutida com mais detalhes no apêndice A, é dada por:

$$u(r) = \frac{1 + (2+m)n}{1+n} u_m \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{1+n}{n}} \right] \quad (3.2e)$$

onde $u(r)$ representa o campo de velocidade completamente desenvolvido, no modelo lei de potência, para um escoamento laminar na entrada térmica de um tubo circular ou entre placas planas. Sendo u_m a velocidade média de escoamento e r_0 o comprimento característico. No caso

em que $n=1$ o fluido será newtoniano (modelo parabólico), se $1 < n < \infty$ o fluido será não-newtoniano do tipo dilatante e se $0 \leq n < 1$ o fluido será não-newtoniano do tipo pseudoplástico. O fator m está associado à geometria, caso $m = 0$ o escoamento será entre placas planas, e se $m = 1$ será no interior de um duto circular.

Para que o presente estudo também possa ser aplicado aos escoamentos do tipo pistão (perfil uniforme de velocidade), acrescenta-se um expoente p no campo de velocidade tal que:

$$u(r) = u_m \left\{ \frac{1 + (2 + m)n}{1 + n} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{1+n}{n}} \right] \right\}^p ; \quad \begin{cases} p = 0 \rightarrow \text{tipo pistão} \\ p = 1 \rightarrow \text{lei de potência} \end{cases} \quad (3.2f)$$

Equação da energia

$$\rho C_p u(r) \frac{\partial T(x, r)}{\partial x} = k \left[\frac{\partial^2 T(x, r)}{\partial x^2} + \frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^m \frac{\partial T(x, r)}{\partial r} \right) \right] - \nabla \cdot \mathbf{q}^r \quad ; \quad x \geq 0 \text{ e } 0 \leq r \leq r_0 \quad (3.2g)$$

onde k , c_p e ρ representam, respectivamente, a condutividade térmica, o calor específico à pressão constante e a massa específica do fluido.

Equação da transferência radiativa

Apesar da parte radiativa do problema ser caracterizada por uma equação não-linear do tipo integro-diferencial, muitos pesquisadores fizeram aproximações diferenciais para modelar a transferência radiativa. No presente trabalho utiliza-se o *método dos momentos*, também conhecido por “*The Milne-Eddington approximation*”, descrito em (Ozisik, 1973 e Modest, 1993) e utilizado por (Yang e Ebdian, 1991 e 1992) e (Campo e Schuler, 1988a, 1988b, 1989), para analisar o efeito da radiação.

O divergente do fluxo de calor por radiação, dado por $\nabla \cdot \mathbf{q}^r$, que representa a energia líquida emitida ou absorvida pelo fluido, sobre todas as frequências da radiação, por unidades de tempo e volume no espaço esférico, pode ser calculado através da expressão:

$$\nabla \cdot \mathbf{q}^r = - \int_{4\pi} \kappa \left[I_0(\vec{\Omega}, S) - I_b(T) \right] d\omega = -\kappa(G - 4\sigma T^4) \quad (3.2h)$$

sendo κ o coeficiente volumétrico de absorção da radiação, $I_0(\vec{\Omega}, S)$ representa a intensidade de radiação de um feixe monocromático ao atravessar um meio na direção Ω ao longo do caminho S , $I_b(T)$ representa a intensidade de radiação monocromática do corpo negro na temperatura local $T=T(x, r)$, $d\omega$ é o ângulo sólido elementar cuja radiação vai ser espalhada, σ é a constante

de Stefan-Boltzmann e $G = 4\pi I_0$ é a intensidade de radiação total que, segundo o *método dos momentos*, pode ser encontrada pela solução da equação de transferência radiativa (ETR):

$$\frac{\partial^2 G(x, r)}{\partial x^2} + \frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^m \frac{\partial G(x, r)}{\partial r} \right) = 3\beta\kappa [G(x, r) - 4\sigma T^4] \quad (3.2i)$$

onde β é o coeficiente espectral de extinção.

Na apresentação das equações (energia e transferência radiativa) fica claro o acoplamento do problema, de modo que a distribuição de temperatura do fluido é obtida através da solução da equação da energia, e essa, por sua vez, envolve o divergente do fluxo de calor por radiação, que é determinado a partir da solução da equação da transferência radiativa que depende da temperatura elevada a quarta potência. No presente trabalho utiliza-se a Técnica da transformada Integral Generalizada (GITT) para resolver as equações da energia e da transferência radiativa. A solução geral do problema físico proposto corresponde a solução simultânea destas duas equações.

Organizando os termos da equação (3.2g), a equação da energia pode ser reescrita na forma:

Equação da energia

$$u(r) \frac{\partial T(x, r)}{\partial x} = \alpha \left[\frac{\partial^2 T(x, r)}{\partial x^2} + \frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^m \frac{\partial T(x, r)}{\partial r} \right) \right] + \frac{\kappa}{\rho C_p} [G(x, r) - 4\sigma T^4(x, r)] \quad (3.2j)$$

onde: $\alpha = \frac{k}{\rho C_p}$ é a difusividade térmica do fluido.

Equação da transferência radiativa (ETR)

$$\frac{\partial^2 G(x, r)}{\partial x^2} + \frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^m \frac{\partial G(x, r)}{\partial r} \right) = 3\beta\kappa [G(x, r) - 4\sigma T^4(x, r)] \quad (3.2k)$$

Condições de contorno

$$\frac{\partial T(x, r)}{\partial r} = 0 ; \quad x > 0 \quad e \quad r = 0 \quad (3.2l)$$

$$\frac{\partial G(x, r)}{\partial r} = 0 ; \quad x > 0 \quad e \quad r = 0 \quad (3.2m)$$

$$T(x, r) = T_w ; \quad x > 0 \quad e \quad r = r_0 \quad (3.2n)$$

$$\frac{\partial G(x, r)}{\partial r} = -\frac{3\xi_w \kappa}{2(2 - \xi_w)} [G(x, r) - 4\sigma T_w^4] ; \quad x > 0 \quad e \quad r = r_0 \quad (3.2o)$$

Condições de entrada

$$T(x, r) = T_e ; \quad x = 0 \quad e \quad 0 < r < r_0 \quad (3.2p)$$

$$\frac{\partial G(x, r)}{\partial x} = -\frac{3}{2} \kappa [G(x, r) - 4\sigma T_e^4] ; \quad x = 0 \quad e \quad 0 < r < r_0 \quad (3.2q)$$

Condições de saída

$$T(x, r) = T_w ; \quad x = \infty \quad e \quad 0 < r < r_0 \quad (3.2r)$$

$$\frac{\partial G(x, r)}{\partial x} = 0 ; \quad x = \infty \quad e \quad 0 < r < r_0 \quad (3.2s)$$

onde ξ_w é o coeficiente de emissividade da parede.

As condições de contorno dadas pelas equações (3.2l) e (3.2m) remetem à simetria dos perfis de temperatura e intensidade de radiação. Na equação (3.2o) verifica-se uma condição de contorno do 3º tipo, considerando a participação do efeito radiativo. Na abertura de entrada do duto considera-se que a radiação não é refletida, fazendo jus à suposição de uma “parede pseudo-preta” para a radiação, como posto na equação (3.2q). Na saída do duto, a distribuição uniforme de temperatura sugere que a intensidade de radiação total não irá mudar com a localização axial, como dado na equação (3.2s).

3.3. ADIMENSIONALIZAÇÃO DO PROBLEMA

Define-se os seguintes parâmetros adimensionais, dados pelas equações (3.3a-j), com o objetivo de se resolver não só um problema particular, mas uma classe de problemas que sejam definidos pelo mesmo modelo proposto:

$$X = \frac{x}{D_h Pe} \quad R = \frac{r}{r_0} \quad U(R) = \frac{u(r)}{u_m} \quad G^*(X, R) = \frac{G(x, r)}{4\sigma T_w^4} \quad \tau = \kappa D_h \quad (3.3a-e)$$

$$\Theta(X, R) = \frac{T(x, r)}{T_w} \quad N = \frac{k \kappa}{4\sigma T_w^3} \quad R_e = \frac{D_h u_m}{\nu} \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad P_e = R_e \cdot Pr = \frac{D_h u_m}{\alpha} \quad (3.3f-j)$$

onde ν representa a viscosidade cinemática, r_0 é o comprimento característico, $D_h = 2 \cdot (2-m) \cdot r_0$ é o diâmetro hidráulico, τ é a espessura óptica, N é o parâmetro condução-radiação, e Pr , R_e e Pe são, respectivamente, os números de Prandtl, Reynolds e Peclet.

Aplicando os parâmetros adimensionais nas equações (3.2j-s), encontra-se as equações da energia e da transferência radiativa, as condições de contorno, a condição de entrada e a condição de saída na forma adimensionalizada:

Equação adimensional da energia

$$U(R) \frac{\partial \Theta(X, R)}{\partial X} = \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 \Theta(X, R)}{\partial X^2} + \frac{4(2-m)^2}{R^m} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \Theta(X, R)}{\partial R} \right) + \frac{\tau^2}{N} [G^*(X, R) - \Theta^4(X, R)] \quad (3.3k)$$

Equação adimensional da transferência radiativa

$$\frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 G^*(X, R)}{\partial X^2} + \frac{4(2-m)^2}{R^m} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial G^*(X, R)}{\partial R} \right) = 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} [G^*(X, R) - \Theta^4(X, R)] \quad (3.3l)$$

Condições de contorno adimensionais

$$\frac{\partial \Theta(X, R)}{\partial R} = 0 ; X > 0 \quad e \quad R = 0 \quad (3.3m)$$

$$\frac{\partial G^*(X, R)}{\partial R} = 0 ; X > 0 \quad e \quad R = 0 \quad (3.3n)$$

$$\Theta(X, R) = 1 ; X > 0 \quad e \quad R = 1 \quad (3.3o)$$

$$\frac{\partial G^*(X, R)}{\partial R} = -\frac{3\xi_w \tau}{4(2-m)(2-\xi_w)} [G^*(X, R) - 1] ; X > 0 \quad e \quad R = 1 \quad (3.3p)$$

Condições de entrada adimensionais

$$\Theta(X, R) = \Theta_e = \frac{T_e}{T_w} ; X = 0 \quad e \quad 0 < R < 1 \quad (3.3q)$$

$$\frac{\partial G^*(X, R)}{\partial X} = -\frac{3}{2} \tau Pe [G^*(X, R) - \Theta_e^4] ; X = 0 \quad e \quad 0 < R < 1 \quad (3.3r)$$

Condições de saída adimensionais

$$\Theta(X, R) = 1 \quad ; \quad X = \infty \quad e \quad 0 < R < 1 \quad (3.3s)$$

$$\frac{\partial G^*(X, R)}{\partial X} = 0 \quad ; \quad X = \infty \quad e \quad 0 < R < 1 \quad (3.3t)$$

3.4. APLICAÇÃO DE FILTROS MATEMÁTICOS

O problema original possui condições de contorno não homogêneas na direção radial, dadas pelas equações (3.3o) e (3.3p). Como nesta direção, seguindo a metodologia da GITT, serão formulados problemas auxiliares que necessitam, obrigatoriamente, ter condições de contorno homogêneas, introduziremos filtros matemáticos para homogeneizar estas condições de contorno a fim de aplicar a GITT adequadamente, bem como melhorar a performance computacional no quesito aceleração de convergência. O filtro proposto para o campo da temperatura e para o campo da radiação é simples, e será da forma:

$$\Theta(X, R) = \Theta^*(X, R) + 1 \quad (3.4a)$$

$$G^*(X, R) = G^{**}(X, R) + 1 \quad (3.4b)$$

Após aplicação dos filtros supracitados, as equações adimensionais tornam-se:

Equação da energia

$$U(R) \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial X} = \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 \Theta^*(X, R)}{\partial X^2} + \frac{4(2-m)^2}{R^m} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial R} \right) + \frac{\tau^2}{N} \left\{ G^{**}(X, R) + 1 - [\Theta^*(X, R) + 1]^4 \right\} \quad (3.4c)$$

Equação da transferência radiativa (ETR)

$$\frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 G^{**}(X, R)}{\partial X^2} + \frac{4(2-m)^2}{R^m} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial R} \right) = 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \left[G^{**}(X, R) + 1 - [\Theta^*(X, R) + 1]^4 \right] \quad (3.4d)$$

Condições de contorno

$$\frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial R} = 0 \quad ; \quad X > 0 \quad e \quad R = 0 \quad (3.4e)$$

$$\frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial R} = 0 \quad ; \quad X > 0 \quad e \quad R = 0 \quad (3.4f)$$

$$\Theta^*(X, R) = 0 \quad ; \quad X > 0 \quad e \quad R = 1 \quad (3.4g)$$

$$\frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial R} + \frac{3\xi_w \tau}{4(2-m)(2-\xi_w)} G^{**}(X, R) = 0 \quad ; \quad X > 0 \quad e \quad R = 1 \quad (3.4h)$$

Condições de entrada

$$\Theta^*(X, R) = \Theta_e - 1 \quad ; \quad X = 0 \quad e \quad 0 < R < 1 \quad (3.4i)$$

$$\frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial X} = -\frac{3}{2} \tau \cdot Pe \left[G^{**}(X, R) + 1 - \Theta_e^4 \right] \quad ; \quad X = 0 \quad e \quad 0 < R < 1 \quad (3.4j)$$

Condições de saída

$$\Theta^*(X, R) = 0 \quad ; \quad X = \infty \quad e \quad 0 < R < 1 \quad (3.4k)$$

$$\frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial X} = 0 \quad ; \quad X = \infty \quad e \quad 0 < R < 1 \quad (3.4l)$$

A GITT será aplicada para obtenção da solução de $\Theta^*(X, R)$ e $G^{**}(X, R)$. De posse das mesmas, utilizar-se-á as equações (3.4a) e (3.4b) para encontrar a solução geral do problema físico proposto.

3.5. PROBLEMAS AUXILIARES DE AUTOVALOR NA DIREÇÃO RADIAL

Os problemas auxiliares devem conter o maior número de informações do problema original, satisfazendo o primeiro passo para o uso da Técnica de Transformada Integral Generalizada (GITT) na solução simultânea das equações da energia e da transferência radiativa. Como o modelo proposto é descrito por um sistema de equações diferenciais parciais de segunda ordem, os problemas auxiliares recaem sobre o problema típico de Sturm-Liouville. Os problemas auxiliares de autovalor para a determinação dos campos de temperatura e intensidade de radiação total são apresentados a seguir.

3.5.1. PROBLEMA AUXILIAR PARA O CAMPO DE TEMPERATURA

O problema auxiliar escolhido para a determinação do campo de temperatura é escrito da seguinte forma:

$$\frac{1}{R^m} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, R)}{\partial R} \right) + \mu_i^2 \cdot \Psi_i(\mu_i, R) = 0 \quad ; \quad 0 < R < 1 \quad (3.5.1a)$$

$$\frac{\partial \Psi_i(\mu_i, R)}{\partial R} = 0 \quad ; \quad R = 0 \quad (3.5.1b)$$

$$\Psi_i(\mu_i, R) = 0 \quad ; \quad R = 1 \quad (3.5.1c)$$

Os autovalores (μ_i), as autofunções, $\Psi_i(\mu_i, R)$, e as normas (N_i), para o problema de autovalor mencionado, possuem solução analítica clássica. Após manipulações matemáticas simples, obtém-se que:

Para placas planas (m=0):

$$\text{Autofunções : } \Psi_i(\mu_i, R) = \cos(\mu_i \cdot R) \quad (3.5.1d)$$

$$\text{Autovalores : } \cos(\mu_i) = 0 \rightarrow \mu_i = \left(i - \frac{1}{2} \right) \pi \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.5.1e)$$

$$\text{Norma : } N_i = \int_0^1 \Psi_i^2(\mu_i, R) dR = \frac{1}{2} \quad (3.5.1f)$$

Para tubo circular (m=1):

$$\text{Autofunções : } \Psi_i(\mu_i, R) = J_0(\mu_i \cdot R) \quad (3.5.1g)$$

$$\text{Autovalores : } J_0(\mu_i) = 0 \quad (3.5.1h)$$

$$\text{Norma : } N_i = \int_0^1 R \Psi_i^2(\mu_i, R) dR = \frac{1}{2} J_1^2(\mu_i) \quad (3.5.1i)$$

3.5.2. PROBLEMA AUXILIAR PARA O CAMPO DE RADIAÇÃO TOTAL

Para a determinação do campo de intensidade de radiação total foi escolhido o seguinte problema auxiliar:

$$\frac{1}{R^m} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \phi_i(\beta_i, R)}{\partial R} \right) + \beta_i^2 \phi_i(\beta_i, R) = 0 \quad ; \quad 0 < R < 1 \quad (3.5.2a)$$

$$\frac{\partial \phi_i(\beta_i, R)}{\partial R} = 0 \quad ; \quad R = 0 \quad (3.5.2b)$$

$$\frac{\partial \phi_i(\beta_i, R)}{\partial R} + \frac{3\xi_w \tau}{4(2-m)(2-\xi_w)} \phi_i(\beta_i, R) = 0 \quad ; \quad R = 1 \quad (3.5.2c)$$

Os autovalores (β_i), as autofunções, $\phi_i(\beta_i, R)$, e as normas (K_i), para o problema de autovalor descrito, podem ser desenvolvidos analiticamente de modo que:

Para placas planas (m=0):

$$\text{Autofunções : } \phi_i(\beta_i, R) = \cos(\beta_i \cdot R) \quad (3.5.2d)$$

$$\text{Autovalores : } -\beta_i \cdot \text{sen}(\beta_i) + \frac{3\xi_w \tau}{8(2 - \xi_w)} \cos(\beta_i) = 0 \quad (3.5.2e)$$

$$\text{Norma : } K_i = \int_0^1 \phi_i^2(\beta_i, R) dR = \frac{1}{2} + \frac{\text{sen}(2\beta_i)}{4\beta_i} \quad (3.5.2f)$$

Para tubo circular (m=1):

$$\text{Autofunções : } \phi_i(\beta_i, R) = J_0(\beta_i \cdot R) \quad (3.5.2g)$$

$$\text{Autovalores : } -\beta_i J_1(\beta_i) + \frac{3\xi_w \tau}{4(2 - \xi_w)} J_0(\beta_i) = 0 \quad (3.5.2h)$$

$$\text{Norma : } K_i = \int_0^1 R \phi_i^2(\beta_i, R) dR = \frac{1}{2} [J_0^2(\beta_i) + J_1^2(\beta_i)] \quad (3.5.2i)$$

Para superar as dificuldades impostas pelas equações transcendentais (3.5.2e) e (3.5.2h), no cálculo dos autovalores para cada valor de ξ_w e τ , utilizou-se o método da contagem de sinal, descrito por (Mikhailov e Vulchanov, 1983), e a subrotina DZBREN do IMSL para validação dos resultados obtidos.

3.6. TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL

O processo de transformação integral tem por finalidade reduzir o problema original, que se trata de um sistema acoplado de equações diferenciais parciais, num sistema infinito e acoplado de equações diferenciais ordinárias, onde esses podem ser resolvidos de maneira mais simples, e a partir da sua solução pode-se construir a solução do problema original permitindo um controle sobre o erro relativo dos resultados. Para que esta transformação se torne possível é necessário definir um par transformada-inversa para cada campo analisado.

3.6.1. PAR TRANSFORMADA-INVERSA PARA O CAMPO DE TEMPERATURA

Com base no problema auxiliar definido para o campo de temperatura, levando-se em conta a propriedade de ortogonalidade das autofunções, define-se o par transformada-inversa do campo de temperatura como sendo:

$$\bar{\Theta}_i(X) = \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 R^m \cdot \Psi_i(\mu_i, R) \Theta^*(X, R) dR, \quad \text{Transformada} \quad (3.6.1a)$$

$$\Theta^*(X, R) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \bar{\Theta}_i(X)}{N_i^{1/2}}, \quad \text{Inversa} \quad (3.6.1b)$$

3.6.2. PAR TRANSFORMADA-INVERSA PARA O CAMPO DE RADIAÇÃO TOTAL

Considerando, mais uma vez, a propriedade de ortogonalidade das autofunções no problema auxiliar definido anteriormente, o par transformada-inversa para o campo de intensidade de radiação total é definido como:

$$\bar{G}_i(X) = \frac{1}{K_i^{1/2}} \int_0^1 R^m \cdot \phi_i(\beta_i, R) G^{**}(X, R) dR, \quad \text{Transformada} \quad (3.6.2a)$$

$$G^{**}(X, R) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi_i(\beta_i, R) \bar{G}_i(X)}{K_i^{1/2}}, \quad \text{Inversa} \quad (3.6.2b)$$

3.6.3. TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES

Aplicando operadores integrais nas equações governantes do problema, dadas pelas equações (3.4c-l), com o auxílio dos problemas auxiliares e dos pares transformada-inversa predefinidos, pode-se transformar o sistema de equações originais num sistema de equações diferenciais ordinárias dado por:

Equação da energia transformada

$$\begin{aligned} \frac{1}{Pe^2} \frac{d^2 \bar{\Theta}_i(X)}{dX^2} - \sum_{j=1}^{\infty} CT_{1ij} \frac{d \bar{\Theta}_j(X)}{dX} - 4(2-m)^2 \mu_i^2 \bar{\Theta}_i(X) + \frac{\tau^2}{N} \sum_{k=1}^{\infty} CT_{2ik} \bar{G}_k(X) + \\ - \frac{\tau^2}{N} \sum_{j=1}^{\infty} CT_{3ij} \bar{\Theta}_j^4(X) - \frac{\tau^2}{N} \sum_{j=1}^{\infty} CT_{4ij} \bar{\Theta}_j^3(X) - \frac{\tau^2}{N} \sum_{j=1}^{\infty} CT_{5ij} \bar{\Theta}_j^2(X) - \frac{4\tau^2}{N} \bar{\Theta}_i(X) = 0 \end{aligned} \quad (3.6.3a)$$

Submetida às condições de entrada e saída transformadas:

$$\bar{\Theta}_i(X=0) = (\Theta_e - 1) \bar{f}_i \quad (3.6.3b)$$

$$\bar{\Theta}_i(X=\infty) = 0 \quad (3.6.3c)$$

Os coeficientes integrais gerados a partir do processo de transformação integral são definidos como:

$$CT\ 1_{ij} = \int_0^1 R^m U(R) \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR \quad CT\ 2_{ik} = \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \phi_k(\beta_k, R)}{N_i^{1/2} K_k^{1/2}} dR \quad (3.6.3d-e)$$

$$CT\ 3_{ij} = \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j^4(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^2} dR \quad CT\ 4_{ij} = \int_0^1 4R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j^3(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{3/2}} dR \quad (3.6.3f-g)$$

$$CT\ 5_{ij} = \int_0^1 6R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j^2(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j} dR \quad \bar{f}_i = \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} dR \quad (3.6.3h-i)$$

Equação da transferência radiativa transformada

$$\begin{aligned} \frac{1}{Pe^2} \frac{d^2 \bar{G}_i(X)}{dX^2} - 4(2-m)^2 \beta_i^2 \bar{G}_i(X) - 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \bar{G}_i(X) + 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} CR1_{ij} \bar{\Theta}_j^4(X) + \\ + 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} CR2_{ij} \bar{\Theta}_j^3(X) + 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} CR3_{ij} \bar{\Theta}_j^2(X) + 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} CR4_{ij} \bar{\Theta}_j(X) = 0 \end{aligned} \quad (3.6.3j)$$

Submetida às condições de entrada e saída transformadas:

$$\left. \frac{d\bar{G}_i(X)}{dX} \right|_{X=0} + \frac{3}{2} \tau \cdot Pe \bar{G}_i(X) \Big|_{X=0} = -\frac{3}{2} \tau \cdot Pe [1 - \Theta_e^4] \bar{g}_i \quad (3.6.3k)$$

$$\left. \frac{d\bar{G}_i(X)}{dX} \right|_{X=\infty} = 0 \quad (3.6.3l)$$

Os coeficientes integrais gerados a partir do processo de transformação integral da ETR são definidos como:

$$CR1_{ij} = \int_0^1 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j^4(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^2} dR \quad CR2_{ij} = \int_0^1 4R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j^3(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^{3/2}} dR \quad (3.6.3m-n)$$

$$CR3_{ij} = \int_0^1 6R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j^2(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j} dR \quad CR4_{ij} = \int_0^1 4R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR \quad (3.6.3o-p)$$

$$\bar{g}_i = \frac{1}{K_i^{1/2}} \int_0^1 R^m \phi_i(\beta_i, R) dR \quad (3.6.3q)$$

Maiores detalhes sobre o processo de transformação integral das equações governantes pode ser encontrado no Apêndice B.

3.7. CÁLCULO DE PARÂMETROS DE INTERESSE PRÁTICO

A partir das soluções dos problemas transformados, pode-se encontrar as soluções para $\Theta^*(X, R)$ e $G^{**}(X, R)$ utilizando as fórmulas da inversa, dadas pelas equações (3.6.1b) e (3.6.2b). De posse das mesmas, pode-se determinar a solução geral do problema físico proposto usando as equações (3.4a) e (3.4b). Uma vez conhecida as expressões de $\Theta(X, R)$ e $G^*(X, R)$, torna-se possível calcular parâmetros de interesse práticos, tais como: temperatura média, número de Nusselt convectivo, Nusselt radiativo e Nusselt Total (local e médio), que são definidos, respectivamente, pelas expressões:

$$\Theta(X)_{\text{média}} = \frac{\int_0^1 R^m U(R) \Theta(X, R) dR}{\int_0^1 R^m U(R) dR} \quad (3.7a)$$

$$Nu_c(X) = -\frac{2(2-m)}{\Theta(X)_{\text{média}} - \Theta(X)_{\text{parede}}} \left. \frac{\partial \Theta(X, R)}{\partial R} \right|_{R=1} \quad (3.7b)$$

$$Nu_r(X) = -\frac{1}{3N} \left[\frac{2(2-m)}{\Theta(X)_{\text{média}} - \Theta(X)_{\text{parede}}} \right] \left. \frac{\partial G^*(X, R)}{\partial R} \right|_{R=1} \quad (3.7c)$$

$$Nu_T(X) = Nu_c(X) + Nu_r(X) \quad (3.7d)$$

$$Nu_{mT}(X) = \frac{1}{X} \int_0^X Nu_T(X') dX' \quad (3.7e)$$

3.8. SOLUÇÕES ALTERNATIVAS

O problema físico proposto no presente capítulo também foi solucionado adotando-se diferentes formulações para o problema auxiliar, e conseqüentemente para o par transformada-inversa, do campo de temperatura. A análise feita nesta seção permite verificar a versatilidade da GITT na escolha da base para expansão da solução, assim como mostrar que, independente da escolha do problema auxiliar, a solução geral do problema proposto converge a um valor comum.

Duas formulações alternativas são consideradas para o problema auxiliar do campo de temperatura. Em todos os casos analisados, a formulação do problema auxiliar para o campo de

intensidade de radiação total é preservado (Eqs. 3.5.2a-c). A modelagem apresentada nas seções 3.5 e 3.6 será denotada por **Modelagem 1**, enquanto que as outras duas formulações propostas serão denominadas por **Modelagem 2** e **Modelagem 3**, indicadas a seguir.

3.8.1 MODELAGEM 2

Na modelagem 2 inclui-se o perfil de velocidade $U(R)$ no problema auxiliar do campo de temperatura, o que modifica, em relação a modelagem 1, os resultados dos autovalores (μ_i), das autofunções, $\psi_i(\mu_i, R)$, e das normas (N_i). Com a inclusão do perfil de velocidade, a definição do par transformada-inversa sofre modificação, bem como a relação de ortogonalidade das autofunções, ambas acrescentando-se o fator peso $U(R)$.

Desta forma, o problema auxiliar escolhido para a determinação do campo de temperatura, na modelagem 2, é escrito da seguinte forma:

$$\frac{1}{R^m} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, R)}{\partial R} \right) + \mu_i^2 U(R) \Psi_i(\mu_i, R) = 0 ; \quad 0 < R < 1 \quad (3.8.1a)$$

$$\frac{\partial \Psi_i(\mu_i, R)}{\partial R} = 0 ; \quad R = 0 \quad (3.8.1b)$$

$$\Psi_i(\mu_i, R) = 0 ; \quad R = 1 \quad (3.8.1c)$$

O problema de autovalor mencionado possui solução analítica com extremo grau de dificuldade, exceto para o caso em que o perfil de velocidade é uniforme. Salvo o caso em que o escoamento é pistão, as autofunções são expressas em termos de funções especiais que, muitas vezes, não são tradicionais. No caso em que $m=0$, $p=1$ e $n=1$, por exemplo, (**Cotta**, 2001) afirma que as autofunções possuem solução exata dada em termos da função Hipergeométrica. Devido as grandes dificuldades de manipulações analíticas no problema de autovalor supracitado, o presente estudo utiliza métodos consagrados no tratamento de problemas de autovalor com estrutura semelhante ao problema típico de Sturm-Liouville, são eles: Método da contagem de sinal, descrito por (**Mikhailov e Vulchanov**, 1983), e o Método da transformação integral desenvolvido por (**Cotta**, 1993).

O par transformada-inversa do campo de temperatura, na modelagem 2, com base no problema auxiliar definido para o campo de temperatura (Eqs. 3.8.1a-c), e levando-se em conta a propriedade de ortogonalidade das autofunções, é dado por:

$$\bar{\Theta}_i(X) = \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 R^m U(R) \Psi_i(\mu_i, R) \Theta^*(X, R) dR, \quad \text{Transformada} \quad (3.8.1d)$$

$$\Theta^*(X, R) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \bar{\Theta}_i(X)}{N_i^{1/2}}, \quad \text{Inversa} \quad (3.8.1e)$$

Conforme informado anteriormente, a formulação do problema auxiliar, na modelagem 2, para o campo de intensidade de radiação total, é igual ao da modelagem 1, dada pelas (Eqs. 3.5.2a-c). Conseqüentemente, a definição do par transformada-inversa, na modelagem 2, para o campo de radiação também não sofre alteração sendo dada pelas (Eqs. 3.6.2a-b).

Após manipulações matemáticas, analisadas com maiores detalhes no Apêndice C, o problema transformado torna-se:

Equação da energia transformada

$$\begin{aligned} \frac{1}{Pe^2} \sum_{j=1}^{\infty} CT_{1ij} \frac{d^2 \bar{\Theta}_j(X)}{dX^2} - \frac{d \bar{\Theta}_i(X)}{dX} - 4(2-m)^2 \mu_i^2 \bar{\Theta}_i(X) + \frac{\tau^2}{N} \sum_{k=1}^{\infty} CT_{2ik} \bar{G}_k(X) + \\ - \frac{\tau^2}{N} \sum_{j=1}^{\infty} CT_{3ij} \bar{\Theta}_j^4(X) - \frac{\tau^2}{N} \sum_{j=1}^{\infty} CT_{4ij} \bar{\Theta}_j^3(X) - \frac{\tau^2}{N} \sum_{j=1}^{\infty} CT_{5ij} \bar{\Theta}_j^2(X) - \frac{\tau^2}{N} \sum_{j=1}^{\infty} CT_{6ij} \bar{\Theta}_j(X) = 0 \end{aligned} \quad (3.8.1f)$$

Submetida às condições de entrada e saída transformadas:

$$\bar{\Theta}_i(X=0) = (\Theta_e - 1) \bar{f}_i \quad (3.8.1g)$$

$$\bar{\Theta}_i(X=\infty) = 0 \quad (3.8.1h)$$

Os coeficientes integrais gerados a partir do processo de transformação integral são definidos como:

$$CT_{1ij} = \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR \quad CT_{2ik} = \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \phi_k(\beta_k, R)}{N_i^{1/2} K_k^{1/2}} dR \quad (3.8.1i-j)$$

$$CT_{3ij} = \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j^4(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^2} dR \quad CT_{4ij} = \int_0^1 4R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j^3(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{3/2}} dR \quad (3.8.1k-l)$$

$$CT_{5ij} = \int_0^1 6R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j^2(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j} dR \quad CT_{6ij} = \int_0^1 4R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR \quad (3.8.1m-n)$$

$$\bar{f}_i = \int_0^1 R^m U(R) \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} dR \quad (3.8.1o)$$

Equação da transferência radiativa transformada

$$\begin{aligned} \frac{1}{Pe^2} \frac{d^2 \bar{G}_i(X)}{dX^2} - 4(2-m)^2 \beta_i^2 \bar{G}_i(X) - 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \bar{G}_i(X) + 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} CR1_{ij} \bar{\Theta}_j^4(X) + \\ + 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} CR2_{ij} \bar{\Theta}_j^3(X) + 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} CR3_{ij} \bar{\Theta}_j^2(X) + 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} CR4_{ij} \bar{\Theta}_j(X) = 0 \end{aligned} \quad (3.8.1p)$$

Submetida às condições de entrada e saída transformadas:

$$\left. \frac{d\bar{G}_i(X)}{dX} \right|_{X=0} + \frac{3}{2} \tau \cdot Pe \bar{G}_i(X) \Big|_{X=0} = -\frac{3}{2} \tau \cdot Pe [1 - \Theta_e^4] \bar{g}_i \quad (3.8.1q)$$

$$\left. \frac{d\bar{G}_i(X)}{dX} \right|_{X=\infty} = 0 \quad (3.8.1r)$$

Os coeficientes integrais gerados a partir do processo de transformação integral da ETR são definidos como:

$$CR1_{ij} = \int_0^1 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j^4(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^2} dR \quad CR2_{ij} = \int_0^1 4R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j^3(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^{3/2}} dR \quad (3.8.1s-t)$$

$$CR3_{ij} = \int_0^1 6R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j^2(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j} dR \quad CR4_{ij} = \int_0^1 4R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR \quad (3.8.1u-v)$$

$$\bar{g}_i = \frac{1}{K_i^{1/2}} \int_0^1 R^m \phi_i(\beta_i, R) dR \quad (3.8.1w)$$

3.8.2 MODELAGEM 3

Na modelagem 3 propõe-se um problema auxiliar que possui uma estrutura independente do sistema de coordenadas do problema estudado. Em outras palavras, independente do problema ser formulado em coordenadas cilíndricas ou retangulares, o problema auxiliar será o mesmo.

O problema auxiliar escolhido, na modelagem 3, para a determinação do campo de temperatura é escrito da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 \Psi_i(\mu_i, R)}{\partial R^2} + \mu_i^2 \cdot \Psi_i(\mu_i, R) = 0 \quad ; \quad 0 < R < 1 \quad (3.8.2a)$$

$$\frac{\partial \Psi_i(\mu_i, R)}{\partial R} = 0 \quad ; \quad R = 0 \quad (3.8.2b)$$

$$\Psi_i(\mu_i, R) = 0 \quad ; \quad R = 1 \quad (3.8.2c)$$

Os autovalores (μ_i), as autofunções, $\Psi_i(\mu_i, R)$, e as normas (N_i), para o problema de autovalor mencionado, possuem solução analítica clássica, dada por:

$$\text{Autofunções : } \Psi_i(\mu_i, R) = \cos(\mu_i \cdot R) \quad (3.8.2d)$$

$$\text{Autovalores : } \cos(\mu_i) = 0 \rightarrow \mu_i = \left(i - \frac{1}{2}\right)\pi ; i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.8.2e)$$

$$\text{Norma : } N_i = \int_0^1 \Psi_i^2(\mu_i, R) dR = \frac{1}{2} \quad (3.8.2f)$$

O aspecto diferencial da modelagem 3 em relação as outras modelagens é que a mesma permite expandir a solução, no caso de coordenadas cilíndricas, na base dos cossenos. Isso não ocorria nas modelagens anteriores.

O par transformada-inversa do campo de temperatura, na modelagem 3, é dado por:

$$\bar{\Theta}_i(X) = \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \Psi_i(\mu_i, R) \Theta^*(X, R) dR, \quad \text{Transformada} \quad (3.8.2g)$$

$$\Theta^*(X, R) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \bar{\Theta}_i(X)}{N_i^{1/2}}, \quad \text{Inversa} \quad (3.8.2h)$$

Igualmente as modelagens anteriores, a formulação do problema auxiliar para o campo de intensidade de radiação total é dada pelas (Eqs. 3.5.2a-c). Por conseguinte, o par transformada-inversa para o campo de radiação também é mantido pelas (Eqs. 3.6.2a-b).

Após manipulações matemáticas, analisadas com maiores detalhes no Apêndice D, o problema transformado torna-se:

Equação da energia transformada

$$\begin{aligned} \frac{1}{Pe^2} \sum_{j=1}^{\infty} CT_{2,ij} \frac{d^2 \bar{\Theta}_j(X)}{dX^2} - \sum_{j=1}^{\infty} CT_{1,ij} \frac{d \bar{\Theta}_j(X)}{dX} - 4(2-m)^2 \mu_i^2 \bar{\Theta}_i(X) + 4(2-m)^2 \sum_{j=1}^{\infty} CT_{3,ij} \bar{\Theta}_j(X) + \\ + \frac{\tau^2}{N} \sum_{k=1}^{\infty} CT_{4,ik} \bar{G}_k(X) - \frac{\tau^2}{N} \sum_{j=1}^{\infty} CT_{5,ij} \bar{\Theta}_j^4(X) - \frac{\tau^2}{N} \sum_{j=1}^{\infty} CT_{6,ij} \bar{\Theta}_j^3(X) + \\ - \frac{\tau^2}{N} \sum_{j=1}^{\infty} CT_{7,ij} \bar{\Theta}_j^2(X) - \frac{\tau^2}{N} \sum_{j=1}^{\infty} CT_{8,ij} \bar{\Theta}_j(X) = 0 \end{aligned} \quad (3.8.2i)$$

Submetida às condições de entrada e saída transformadas:

$$\bar{\Theta}_i(X=0) = (\Theta_e - 1) \bar{f}_i \quad (3.8.2j)$$

$$\bar{\Theta}_i(X=\infty) = 0 \quad (3.8.2k)$$

Os coeficientes integrais gerados a partir do processo de transformação integral são definidos como:

$$CT1_{ij} = \int_0^1 R^m U(R) \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR \quad CT2_{ij} = \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR \quad (3.8.2l - m)$$

$$CT3_{ij} = \int_0^1 \frac{(1-R^m)}{N_i^{1/2} N_j^{1/2}} \frac{\partial \Psi_j(\mu_j, R)}{\partial R} \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, R)}{\partial R} dR \quad CT4_{ik} = \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \phi_k(\beta_k, R)}{N_i^{1/2} K_k^{1/2}} dR \quad (3.8.2n - o)$$

$$CT5_{ij} = \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j^4(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^2} dR \quad CT6_{ij} = \int_0^1 4R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j^3(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{3/2}} dR \quad (3.8.2p - q)$$

$$CT7_{ij} = \int_0^1 6R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j^2(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j} dR \quad CT8_{ij} = \int_0^1 4R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR \quad (3.8.2r - s)$$

$$\bar{f}_i = \int_0^1 \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} dR \quad (3.8.2t)$$

Equação da transferência radiativa transformada

$$\begin{aligned} \frac{1}{Pe^2} \frac{d^2 \bar{G}_i(X)}{dX^2} - 4(2-m)^2 \beta_i^2 \bar{G}_i(X) - 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \bar{G}_i(X) + 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} CR1_{ij} \bar{\Theta}_j^4(X) + \\ + 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} CR2_{ij} \bar{\Theta}_j^3(X) + 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} CR3_{ij} \bar{\Theta}_j^2(X) + 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} CR4_{ij} \bar{\Theta}_j(X) = 0 \end{aligned} \quad (3.8.2u)$$

Submetida às condições de entrada e saída transformadas:

$$\left. \frac{d\bar{G}_i(X)}{dX} \right|_{X=0} + \frac{3}{2} \tau \cdot Pe \bar{G}_i(X) \Big|_{X=0} = -\frac{3}{2} \tau \cdot Pe [1 - \Theta_e^4] \bar{g}_i \quad (3.8.2v)$$

$$\left. \frac{d\bar{G}_i(X)}{dX} \right|_{X=\infty} = 0 \quad (3.8.2w)$$

Os coeficientes integrais gerados a partir do processo de transformação integral da ETR são definidos como:

$$CR1_{ij} = \int_0^1 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j^4(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^2} dR \quad CR2_{ij} = \int_0^1 4R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j^3(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^{3/2}} dR \quad (3.8.2x - y)$$

$$CR3_{ij} = \int_0^1 6R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j^2(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j} dR \quad CR4_{ij} = \int_0^1 4R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR \quad (3.8.2z - za)$$

$$\bar{g}_i = \frac{1}{K_i^{1/2}} \int_0^1 R^m \phi_i(\beta_i, R) dR \quad (3.8.2zb)$$

3.9. RESULTADOS OBTIDOS

O problema transformado foi resolvido por meio de código computacional escrito em linguagem de programação Fortran, utilizando o software **Fortran Powerstation 4.0**. O código foi implementado através da subrotina DBVPFD, da biblioteca do IMSL, usando uma tolerância de 10^{-6} para determinar o erro automático na avaliação dos campos de temperatura e radiação. O software **Wolfram Mathematica 9.0** foi utilizado como ponto de apoio para validação nos cálculos dos coeficientes, bem como para simulações em casos assintóticos. Os resultados estão apresentados na forma de gráficos e tabelas. A análise da solução é feita levando-se em conta a influência que a espessura óptica, o parâmetro condução-radiação e o número de Peclet exercem no campo de temperatura e nos números de Nusselt Total e Radiativo. Para todos os casos analisados no presente trabalho considera-se que $\beta/\kappa = 1$.

Para fins de *benchmarking* os resultados do presente trabalho foram confrontados com resultados encontrados na literatura especializada. Para uma análise mais detalhada, o estudo também é avaliado para casos particulares onde a condução (ou difusão) axial e a radiação podem ser negligenciadas.

3.9.1 CASO DE PURA CONVECÇÃO

De acordo com **Diniz** (2005), o efeito radiativo no processo de transferência de calor pode ser negligenciado quando o fator de acoplamento condução–radiação for grande ($N \rightarrow \infty$), pois nestes casos a transferência interna de calor ocorre predominantemente por condução. O efeito radiativo também pode ser desprezado quando o problema se tratar de corpos opticamente finos ($\tau \rightarrow 0$), onde a radiação térmica atravessa o meio sem que haja tempo de modificar sua energia interna.

No caso de pura convecção ($N \rightarrow \infty$ ou $\tau \rightarrow 0$), para todas as situações analisadas no presente estudo, considera-se que $\Theta_e = T_e/T_w \rightarrow 0$. Nas seções a seguir discutir-se-á o caso de pura convecção sob dois aspectos: sem e com difusão axial.

3.9.1.1. SEM DIFUSÃO AXIAL

Uma vez desprezado o efeito da radiação térmica na transferência de calor, assim como negligenciando o efeito da condução axial ($Pe \rightarrow \infty$), o problema estudado recai sobre o problema clássico de Graetz. Segundo **Biage** (1983), problemas de transferência de calor em que o perfil

de temperatura está em desenvolvimento, acompanhado de um perfil de velocidade completamente desenvolvido, com distribuição de temperatura uniforme na entrada do duto e que não há fluxo de calor nessa região, iniciando-se a transmissão de calor em regiões posteriores, são chamados de “problemas de entrada” ou “problemas de Graetz”.

O problema de Graetz constitui-se como um dos problemas mais antigos e mais, relativamente, “simples” da transferência de calor por convecção. Tem muitas aplicações e foi amplamente estudado desde Graetz (1885) e Nusselt (1910), tanto numericamente como analiticamente para várias condições de contorno. Estudos acerca do problema de Graetz podem ser encontrados nos trabalhos de (Brown, 1960; Rohsenow & Choi, 1961; McKillop, 1964; Shah, 1975; Shih, 1978; Gottifredi, 1983; Cotta e Ozisik, 1986; Santos, 1992; Johnston, 1994; Chalhub, 2011; Lima *et al.*, 2018; Veloso *et al.*, 2018; Assad *et al.*, 2018).

Através das tabelas que seguem, para fins de validação, é possível comparar os resultados obtidos no presente trabalho (pelas 3 metodologias supracitadas) com os resultados existentes na literatura aberta. Analisa-se, para cada posição axial adimensional, os valores da temperatura média adimensional, do número de Nusselt local e médio. Em todos os casos apresentados pode-se verificar uma boa concordância. Fato este que demonstra a robustez e a eficácia da GITT na solução do problema físico proposto, bem como sinaliza a flexibilidade existente na escolha da base para expansão da solução do problema clássico de Graetz.

Tabela 3.1 - Temperatura média adimensional para o escoamento de um fluido newtoniano no interior de um tubo circular, desprezando a condução axial.

$X = \frac{x}{D_h Pe}$	Brown (1960)	Shah (1975)	Shih (1978)	Gottifredi (1983)	Johnston (1994)	Lima <i>et al.</i> (2018)	Presente Trabalho (Modelo 1)	Presente Trabalho (Modelo 2)	Presente Trabalho (Modelo 3)
0,0005	0,038715	0,03825	0,038251	0,038247	0,03825	0,03825	0,03825	0,03825	0,03825
0,0010	0,059736	0,05968	0,059683	0,059659	0,05968	0,05968	0,05968	0,05968	0,05968
0,0025	0,106572	-	0,10658	0,106451	0,10657	0,10657	0,10657	0,10657	0,10657
0,0050	0,163781	0,16378	0,163814	0,163482	0,16378	0,16378	0,16378	0,16378	0,16378
0,0100	0,248894	0,24889	0,249035	0,248405	0,24889	0,24889	0,24889	0,24889	0,24889
0,0250	0,421213	-	0,422248	0,42135	0,42121	0,42121	0,42121	0,42121	0,42121
0,0500	0,604701	0,6047	0,610085	0,605891	0,6047	0,6047	0,6047	0,6047	0,6047
0,1000	0,81029	0,81029	0,840523	0,81031	0,81029	0,81029	0,81029	0,81029	0,81029

Na tabela 3.1 compara-se, para o escoamento de um fluido newtoniano ($n=1$) no interior de um tubo circular ($m=1$), o valor da temperatura média adimensional com diferentes referências

da literatura especializada. Pode-se observar, para as 3 modelagens consideradas, uma excelente concordância entre os resultados. Vale salientar que, por possuírem estruturas matemáticas distintas, os problemas formulados nas modelagens consideradas possuem diferentes números de autovalores que estabelecem a convergência da solução. E ainda mais, a depender da formulação considerada, a mesma irá possuir um número máximo de autovalores a partir do qual a solução não mais converge. A simulação feita no **Wolfram Mathematica 9.0**, utilizando a subrotina NDSolve pode ilustrar o que foi mencionado, conforme segue abaixo.

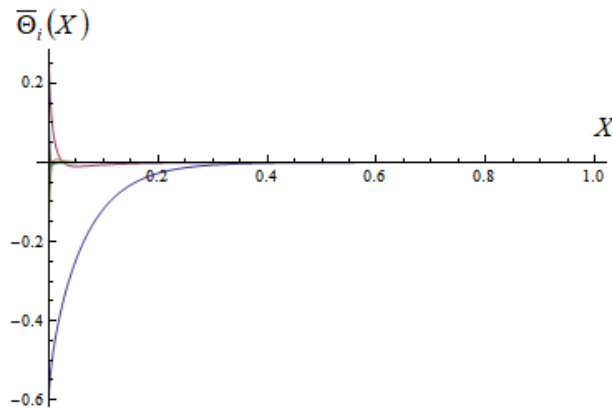


Figura 3.2- Solução do problema transformado em função da distância axial adimensional para 104 autovalores (Modelagem 1)

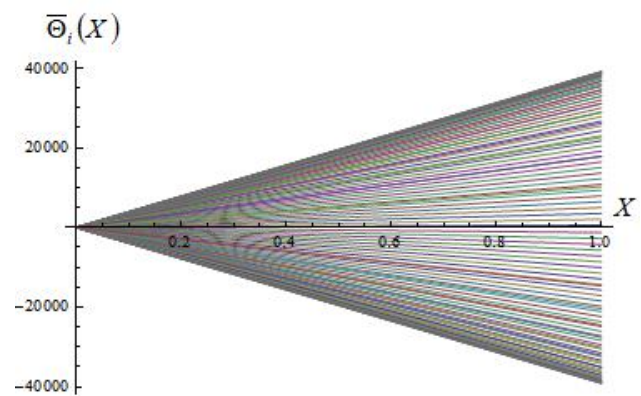


Figura 3.3- Solução do problema transformado em função da distância axial adimensional para 105 autovalores (Modelagem 1)

Nas figuras 3.2 e 3.3 pode-se observar o comportamento da solução do problema transformado, na modelagem 1, utilizando-se, respectivamente, 104 e 105 autovalores. Para que o problema possua solução fisicamente aceitável é necessário que o problema transformado tenha comportamento assintótico para grandes valores da posição axial adimensional, conforme ocorreu com 104 autovalores (Fig. 3.2). Ao passo que foi introduzido mais um autovalor, totalizando 105, a solução deixa de ter um comportamento assintótico e passa a ter um comportamento divergente que compromete a solução geral do problema físico proposto. Na modelagem 2, diferentemente do que ocorre na modelagem 1, o problema não diverge seja qual for o número de autovalores utilizados. A justificativa para este fato é que, utilizando a modelagem 2, o problema, nas condições impostas de negligenciar a radiação e a condução axial, possui solução analítica proporcional a $e^{-4\mu_i^2 X}$, o que faz com que o comportamento assintótico seja uma realidade independente do número de autovalores. Enquanto isto, na modelagem 3 um comportamento semelhante ao da modelagem 1 é observado, desta vez o problema converge com um valor máximo de autovalores igual a 103.

Tabela 3.2 - Nusselt médio e local para o escoamento de um fluido newtoniano no interior de um tubo circular, desprezando a condução axial.

$X = \frac{x}{D_h Pe}$	Nusselt Médio					
	Shah (1975)	Johnston (1994)	Lima <i>et al.</i> (2018)	Presente Trabalho (Modelo 1)	Presente Trabalho (Modelo 2)	Presente Trabalho (Modelo 3)
0,0005	19,501	19,49998	19,50024	19,5002	19,5005	19,5003
0,0010	15,384	15,38399	15,38404	15,3841	15,3842	15,3841
0,0015	13,398	13,39798	13,39798	13,3980	13,3981	13,3980
0,0050	8,9432	8,94322	8,94321	8,94323	8,94324	8,94323
0,0100	7,1552	7,15521	7,1552	7,15522	7,15522	7,15522
0,0150	6,3211	6,32108	6,32107	6,32109	6,32109	6,32109
0,0500	4,6406	4,64057	4,64056	4,64057	4,64057	4,64057
0,1000	4,1556	4,15565	4,15564	4,15565	4,15565	4,15565
0,1500	3,9895	3,98948	3,98947	3,98947	3,98947	3,98947
$X = \frac{x}{D_h Pe}$	Nusselt Local					
	Shah (1975)	Johnston (1994)	Lima <i>et al.</i> (2018)	Presente Trabalho (Modelo 1)	Presente Trabalho (Modelo 2)	Presente Trabalho (Modelo 3)
0,0005	12,824	12,82477	12,82738	12,8243	12,8242	12,8243
0,0010	10,13	10,13042	10,13271	10,1302	10,1302	10,1302
0,0015	8,8404	8,84051	8,84258	8,8404	8,8404	8,8404
0,0050	6,0015	6,00155	6,00301	6,00151	6,00151	6,00152
0,0100	4,9161	4,91608	4,91729	4,91606	4,91606	4,91607
0,0150	4,4406	4,4406	4,4417	4,44059	4,44059	4,4406
0,0500	3,71	3,71	3,71091	3,70999	3,70998	3,70999
0,1000	3,658	3,65808	3,65898	3,65807	3,65807	3,65807
0,1500	3,6568	3,65683	3,65773	3,65681	3,65679	3,65681

Na tabela 3.2 é possível verificar os valores do Nusselt local e do Nusselt médio para diferentes posições axiais adimensionais, ainda para o caso de escoamento de um fluido newtoniano ($n=1$) no interior de um tubo circular ($m=1$). Em todos os casos analisados utilizou-se o recurso do balanço integral (Cotta, 1993) para o cálculo do número de Nusselt local, sendo a modelagem 3 o caso em que demonstrou maior necessidade deste recurso. O balanço integral, na verdade, consistiu em ajustar a derivada da temperatura na parede para que o cálculo do número de Nusselt local tivesse uma melhor convergência. Mais uma vez os resultados se mostram satisfatórios para as 3 modelagens consideradas. O Nusselt local assintótico converge para 3,66, conforme prevê a literatura especializada.

Tabela 3.3 - Temperatura média adimensional, Nusselt médio e local para o escoamento de um fluido não-newtoniano no interior de um tubo circular, com $n=0,2$ e desprezando a condução axial.

$X = \frac{x}{D_h Pe}$	1 – Temperatura Média Adimensional				
	Johnston (1994)	Lima <i>et al.</i> (2018)	Presente Trabalho (Modelo 1)	Presente Trabalho (Modelo 2)	Presente Trabalho (Modelo 3)
0,0005	0,95278	0,95277	0,95277	0,95277	0,95277
0,0010	0,92673	0,92673	0,92673	0,92673	0,92673
0,0015	0,90556	0,90556	0,90556	0,90556	0,90556
0,0050	0,80309	0,80309	0,80309	0,80309	0,80309
0,0100	0,70499	0,70499	0,70499	0,70499	0,70499
0,0150	0,6298	0,6298	0,6298	0,6298	0,6298
0,0500	0,32274	0,32274	0,32274	0,32274	0,32274
0,1000	0,13094	0,13095	0,13095	0,13095	0,13095
0,1500	0,05324	0,05324	0,05324	0,05324	0,05324
$X = \frac{x}{D_h Pe}$	Nusselt Médio				
	Johnston (1994)	Lima <i>et al.</i> (2018)	Presente Trabalho (Modelo 1)	Presente Trabalho (Modelo 2)	Presente Trabalho (Modelo 3)
0,0005	24,18758	24,18909	24,1889	24,1892	24,1889
0,0010	19,02287	19,0234	19,0233	19,0235	19,0233
0,0015	16,53387	16,53415	16,5341	16,5342	16,5341
0,0050	10,96443	10,96447	10,9645	10,9645	10,9645
0,0100	8,73935	8,73935	8,73936	8,73937	8,73936
0,0150	7,70598	7,70598	7,70599	7,70599	7,70599
0,0500	5,65452	5,65451	5,65452	5,65452	5,65452
0,1000	5,08244	5,08243	5,08244	5,08244	5,08244
0,1500	4,88821	4,88819	4,8882	4,8882	4,8882
$X = \frac{x}{D_h Pe}$	Nusselt Local				
	Johnston (1994)	Lima <i>et al.</i> (2018)	Presente Trabalho (Modelo 1)	Presente Trabalho (Modelo 2)	Presente Trabalho (Modelo 3)
0,0005	15,80691	15,80936	15,8055	15,8054	15,8056
0,0010	12,43572	12,43822	12,4352	12,4351	12,4352
0,0015	10,82536	10,8277	10,8250	10,8250	10,8250
0,0050	7,29647	7,29821	7,29640	7,29640	7,29640
0,0100	5,96000	5,96145	5,95997	5,95997	5,95997
0,0150	5,38189	5,38311	5,38187	5,38187	5,38187
0,0500	4,54516	4,54627	4,54514	4,54514	4,54515
0,1000	4,50028	4,50139	4,50026	4,50026	4,50026
0,1500	4,49957	4,50068	4,49956	4,49958	4,49953

Tabela 3.4 - Temperatura média adimensional, Nusselt médio e local para o escoamento de um fluido não-newtoniano no interior de um tubo circular, com $n=0,6$ e desprezando a condução axial.

$X = \frac{x}{D_h Pe}$	1 – Temperatura Média Adimensional				
	Johnston (1994)	Lima <i>et al.</i> (2018)	Presente Trabalho (Modelo 1)	Presente Trabalho (Modelo 2)	Presente Trabalho (Modelo 3)
0,0005	0,95987	0,95987	0,95987	0,95987	0,95987
0,0010	0,93745	0,93745	0,93745	0,93745	0,93745
0,0050	0,82898	0,82898	0,82898	0,82898	0,82898
0,0100	0,74078	0,74078	0,74078	0,74078	0,74078
0,0150	0,67191	0,67191	0,67191	0,67191	0,67191
0,0500	0,37725	0,37725	0,37725	0,37725	0,37725
0,1000	0,17386	0,17386	0,17386	0,17386	0,17386
0,1500	0,08032	0,08033	0,08032	0,08032	0,08032
$X = \frac{x}{D_h Pe}$	Nusselt Médio				
	Johnston (1994)	Lima <i>et al.</i> (2018)	Presente Trabalho (Modelo 1)	Presente Trabalho (Modelo 2)	Presente Trabalho (Modelo 3)
0,0005	20,47644	20,47688	20,4768	20,4771	20,4767
0,0010	16,14723	16,14734	16,1473	16,1475	16,1473
0,0050	9,37777	9,37776	9,37777	9,37779	9,37777
0,0100	7,50139	7,50138	7,50139	7,50140	7,50139
0,0150	6,62727	6,62726	6,62727	6,62727	6,62727
0,0500	4,87425	4,87424	4,87425	4,87425	4,87425
0,1000	4,37377	4,37376	4,37377	4,37377	4,37377
0,1500	4,2028	4,20279	4,20279	4,20279	4,20279
$X = \frac{x}{D_h Pe}$	Nusselt Local				
	Johnston (1994)	Lima <i>et al.</i> (2018)	Presente Trabalho (Modelo 1)	Presente Trabalho (Modelo 2)	Presente Trabalho (Modelo 3)
0,0005	13,45447	13,4571	13,4539	13,4537	13,4539
0,0010	10,62249	10,62485	10,6223	10,6222	10,6222
0,0050	6,28887	6,2904	6,28884	6,28883	6,28883
0,0100	5,15346	5,15473	5,15345	5,15344	5,15345
0,0150	4,65813	4,65927	4,65811	4,65811	4,65811
0,0500	3,91058	3,91155	3,91058	3,91058	3,91057
0,1000	3,86164	3,8626	3,86163	3,86164	3,86164
0,1500	3,8606	3,86155	3,86056	3,86063	3,8606

Nas tabelas 3.3 e 3.4 é possível verificar os valores do número de Nusselt local, do Nusselt médio e do fator 1 (Hum) – (menos) Temperatura Média Adimensional, para diferentes posições axiais adimensionais no escoamento de um fluido não-newtoniano no interior de um tubo circular, com índices lei de potência respectivamente iguais a 0,2 e 0,6. Este mesmo estudo foi realizado por (Johnston,1994) e (Lima *et al.*, 2018), onde uma comparação é feita com os resultados obtidos no presente trabalho utilizando as 3 modelagens susomencionadas. Uma excelente aproximação de resultados pode ser observada. No uso da modelagem 1, o problema converge até um valor máximo de 136 autovalores quando $n=0,2$, e 110 autovalores quando $n=0,6$. Na modelagem 2, pelos mesmos argumentos sobreditos, o problema não diverge independente do número de autovalores. Para a modelagem 3, o problema converge até um valor máximo de 135 autovalores quando $n=0,2$, e 110 autovalores quando $n=0,6$.

Na tabela 3.5 o escopo volta-se para a análise do escoamento de um fluido newtoniano ($n=1$) no interior de um canal de placas planas paralelas ($m=0$). O número de Nusselt local, o Nusselt médio e o fator 1-Temperatura Média Adimensional são avaliados para diferentes posições axiais adimensionais, e os resultados são comparados com os valores obtidos por (Shah,1975), (Cotta e Ozisik,1986) e (Assad *et al.*, 2018). Mais uma vez os resultados obtidos são validados, para as 3 modelagens utilizadas. O Nusselt local assintótico converge para 7,54, conforme prevê a literatura especializada. Um comportamento semelhante ao observado nas figuras 3.2 e 3.3 também ocorre nesta situação, limitando o número máximo de autovalores para análise da convergência da solução. Na situação de escoamento entre placas planas as modelagens 1 e 3 são equivalentes, convergindo com um número máximo de autovalores igual a 53. A modelagem 2 não diverge seja qual for o número de autovalores utilizados.

Tabela 3.5 - Temperatura média adimensional, Nusselt médio e local para o escoamento de um fluido newtoniano no interior de um canal de placas planas, desprezando a condução axial.

$X = \frac{x}{D_h Pe}$	1 – Temperatura Média Adimensional				
	Shah (1975)	Cotta e Ozisik (1986)	Presente Trabalho (Modelo 1)	Presente Trabalho (Modelo 2)	Presente Trabalho (Modelo 3)
0,001	0,92774	0,92774	0,92774	0,92774	0,92774
0,002	0,88604	0,88604	0,88604	0,88604	0,88604
0,003	0,85137	0,85137	0,85138	0,85138	0,85138
0,004	0,82065	0,82065	0,82065	0,82065	0,82065
0,005	0,79258	0,79258	0,79258	0,79258	0,79258
0,006	0,76648	0,76648	0,76648	0,76648	0,76648

$X = \frac{x}{D_h Pe}$	1 – Temperatura Média Adimensional				
	Shah (1975)	Cotta e Ozisik (1986)	Presente Trabalho (Modelo 1)	Presente Trabalho (Modelo 2)	Presente Trabalho (Modelo 3)
0,007	0,74191	0,74191	0,74191	0,74191	0,74191
0,008	0,71860	0,71860	0,71860	0,71860	0,71860
0,009	0,69636	0,69636	0,69636	0,69636	0,69636
0,010	0,67503	0,67503	0,67503	0,67503	0,67503
0,100	0,04459	0,04459	0,04459	0,04459	0,04459
0,200	0,00218	0,00218	0,00218	0,00218	0,00218
$X = \frac{x}{D_h Pe}$	Nusselt Médio				
	Shah (1975)	Assad <i>et al.</i> (2018)	Presente Trabalho (Modelo 1)	Presente Trabalho (Modelo 2)	Presente Trabalho (Modelo 3)
0,001	18,752	18,75215	18,7519	18,7521	18,7519
0,002	15,125	15,12462	15,1245	15,1246	15,1245
0,003	13,409	13,40860	13,4085	13,4086	13,4085
0,004	12,354	12,35352	12,3535	12,3535	12,3535
0,005	11,623	11,62291	11,6229	11,6229	11,6229
0,006	11,081	11,08128	11,0813	11,0813	11,0813
0,007	10,662	10,66168	10,6617	10,6617	10,6617
0,008	10,326	10,32649	10,3265	10,3265	10,3265
0,009	10,053	10,05262	10,0526	10,0526	10,0526
0,010	9,8249	9,82489	9,82487	9,82488	9,82487
0,100	7,7755	7,77551	7,77550	7,77550	7,77550
0,200	7,6581	7,65811	7,65806	7,65803	7,65806
$X = \frac{x}{D_h Pe}$	Nusselt Local				
	Shah (1975)	Cotta e Ozisik (1986)	Presente Trabalho (Modelo 1)	Presente Trabalho (Modelo 2)	Presente Trabalho (Modelo 3)
0,001	12,822	12,822	12,8218	12,8217	12,8218
0,002	10,545	10,545	10,5448	10,5448	10,5448
0,003	9,5132	9,5132	9,51326	9,51325	9,51326
0,004	8,9100	8,9100	8,90999	8,90999	8,90999
0,005	8,5166	8,5166	8,51664	8,51664	8,51664
0,006	8,2456	8,2456	8,24558	8,24557	8,24558
0,007	8,0532	8,0532	8,05323	8,05323	8,05323
0,008	7,9146	7,9146	7,91461	7,91461	7,91461
0,009	7,8139	7,8139	7,81392	7,81393	7,81392
0,010	7,7405	7,7405	7,74050	7,74049	7,74050

$X = \frac{x}{D_h Pe}$	Nusselt Local				
	Shah (1975)	Cotta e Ozisik (1986)	Presente Trabalho (Modelo 1)	Presente Trabalho (Modelo 2)	Presente Trabalho (Modelo 3)
0,100	7,5407	7,5407	7,54069	7,54059	7,54069
0,200	7,5407	7,5407	7,54058	7,54020	7,54058

Na tabela 3.6 é possível verificar os valores do número de Nusselt local para diferentes posições axiais adimensionais no escoamento de um fluido não-newtoniano no interior de um canal de placas planas paralelas, considerando diferentes índices lei de potência ($n = 0,5 ; 1 ; 2 ; 10$ e 50). Os resultados do presente estudo são confrontados com os resultados obtidos por (Chalhub,2011) e (Assad *et al.*, 2018). As referências mencionadas utilizam o Método de Volumes Finitos (FVM, sigla do nome em inglês), a GITT e a Técnica de Transformada Integral Clássica (CITT, sigla do nome em inglês) para solucionar o problema físico proposto, conforme especificado na tabela abaixo. A metodologia empregada não afeta a concordância numérica com o presente trabalho. Mais uma vez, na análise da convergência da solução, se estabelece um valor máximo de autovalores no uso das modelagens 1 e 3. Para $n = 0.5$ o problema converge até 59 autovalores, quando $n = 2$ são necessários 49 autovalores, para $n = 10$ precisa-se de 46 autovalores, e 45 autovalores são requeridos quando $n = 50$.

Tabela 3.6 - Nusselt local para o escoamento de fluidos não-newtonianos no interior de um canal de placas planas, considerando diferentes índices lei de potência e desprezando a condução axial.

n $X = \frac{x}{D_h Pe}$	$X = 1,25 \cdot 10^{-3}$					
	FVM Chalhub (2011)	GITT Chalhub (2011)	CITT Assad <i>et al.</i> (2018)	Presente Trabalho (Modelo 1)	Presente Trabalho (Modelo 2)	Presente Trabalho (Modelo 3)
n=0,5	12,9082	12,9082	12,9082	12,9083	12,9082	12,9083
n=1,0	12,0145	12,0145	12,0145	12,0146	12,0145	12,0146
n=2,0	11,4618	11,4618	11,4618	11,4618	11,4618	11,4618
n=10	10,9469	10,9469	10,9469	10,9469	10,9469	10,9469
n=50	10,8343	10,8343	10,8343	10,8343	10,8343	10,8343
n $X = \frac{x}{D_h Pe}$	$X = 1,25 \cdot 10^{-2}$					
	FVM Chalhub (2011)	GITT Chalhub (2011)	CITT Assad <i>et al.</i> (2018)	Presente Trabalho (Modelo 1)	Presente Trabalho (Modelo 2)	Presente Trabalho (Modelo 3)
n=0,5	8,04903	8,04903	8,04903	8,04903	8,04903	8,04903
n=1,0	7,63215	7,63215	7,63215	7,63215	7,63215	7,63215

$X = \frac{x}{D_h Pe}$ n	$X = 1,25 \cdot 10^{-2}$					
	FVM Chalhub (2011)	GITT Chalhub (2011)	CITT Assad <i>et al.</i> (2018)	Presente Trabalho (Modelo 1)	Presente Trabalho (Modelo 2)	Presente Trabalho (Modelo 3)
n=2,0	7,35890	7,35890	7,35890	7,35890	7,35889	7,35890
n=10	7,09586	7,09586	7,09586	7,09586	7,09586	7,09586
n=50	7,03742	7,03742	7,03742	7,03742	7,03742	7,03742
$X = \frac{x}{D_h Pe}$ n	$X = 1,25 \cdot 10^{-1}$					
	FVM Chalhub (2011)	GITT Chalhub (2011)	CITT Assad <i>et al.</i> (2018)	Presente Trabalho (Modelo 1)	Presente Trabalho (Modelo 2)	Presente Trabalho (Modelo 3)
n=0,5	7,93976	7,93976	7,93976	7,93970	7,93955	7,93970
n=1,0	7,54070	7,54070	7,54070	7,54064	7,54070	7,54064
n=2,0	7,27790	7,27790	7,27790	7,27784	7,27775	7,27784
n=10	7,02415	7,02415	7,02415	7,02412	7,02398	7,02412
n=50	6,96769	6,96769	6,96769	6,96762	6,96774	6,96762

Na tabela 3.7 analisa-se o comportamento do número de Nusselt Local para o escoamento tipo pistão no interior de um tubo circular. Os resultados obtidos no presente estudo, usando as 3 modelagens matemáticas, são comparados com (Rohsenow & Choi, 1961), (McKillop, 1964), (Johnston, 1994) e (Velooso *et al.*, 2018). É possível verificar uma ótima coerência entre os resultados, onde o Nusselt local assintótico converge, no caso de escoamento pistão no interior de um tubo circular, para 5,783 conforme prevê a literatura especializada.

Tabela 3.7 - Nusselt local para o escoamento tipo pistão no interior de um tubo circular, desprezando a condução axial.

$X = \frac{x}{D_h Pe}$	Nusselt Local						
	Rohsenow and Choi (1961)	McKillop (1964)	Johnston (1994)	Velooso <i>et al.</i> (2018)	Presente Trabalho (Modelo 1)	Presente Trabalho (Modelo 2)	Presente Trabalho (Modelo 3)
0,0025	---	13,04	13,069	13,072	13,0687	13,0687	13,0687
0,005	9,88	9,89	9,884	9,886	9,88389	9,88389	9,88388
0,01	---	7,75	7,744	7,746	7,74415	7,74414	7,74414
0,015	6,89	6,89	6,886	6,888	6,88581	6,88582	6,88581
0,025	6,18	6,18	6,179	6,180	6,17894	6,17893	6,17893
0,05	5,82	5,82	5,817	5,818	5,81674	5,81674	5,81675
0,10	---	5,78	5,783	5,785	5,78345	5,78344	5,78344

Na tabela 3.8 o comportamento do número de Nusselt Local para o escoamento tipo pistão novamente é investigado, agora analisando o escoamento no interior de um canal de placas planas. Os resultados também são validados, convergindo o Nusselt local assintótico para $\pi^2 = 9,8696$.

Tabela 3.8 - Nusselt local para o escoamento tipo pistão no interior de um canal de placas planas, desprezando a condução axial.

$X = \frac{x}{D_h Pe}$	Nusselt Local			
	Veloso <i>et al.</i> (2018)	Presente Trabalho (Modelo 1)	Presente Trabalho (Modelo 2)	Presente Trabalho (Modelo 3)
0,001	20,81169	20,8117	20,8117	20,8117
0,005	11,71892	11,7189	11,7189	11,7189
0,01	10,24142	10,2414	10,2414	10,2414
0,015	9,94640	9,9464	9,9464	9,9464
0,025	9,87287	9,87287	9,87287	9,87287
0,05	9,86961	9,86961	9,86961	9,86961
0,10	9,86960	9,86960	9,86960	9,86960

A seguir, o campo de temperatura é avaliado através das curvas de contorno (Isotermas), apresentadas nas figuras 3.4-3.9, obtidas com o auxílio do software **Matlab**. Para cada modelagem matemática analisada o comprimento de desenvolvimento térmico é explicitado, fixando o estudo ao escoamento de um fluido newtoniano. No presente trabalho define-se o comprimento de entrada térmica como o comprimento axial máximo necessário para que o fluido atinja a sua temperatura final com uma margem de 10% de diferença relativa.

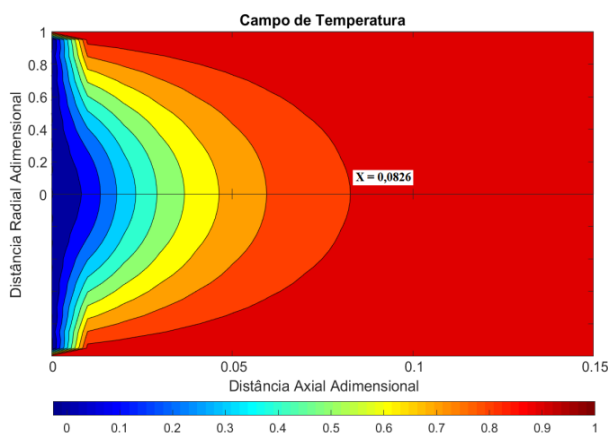


Figura 3.4 – Campo de temperatura para o escoamento de um fluido newtoniano entre placas planas (Modelo 1)

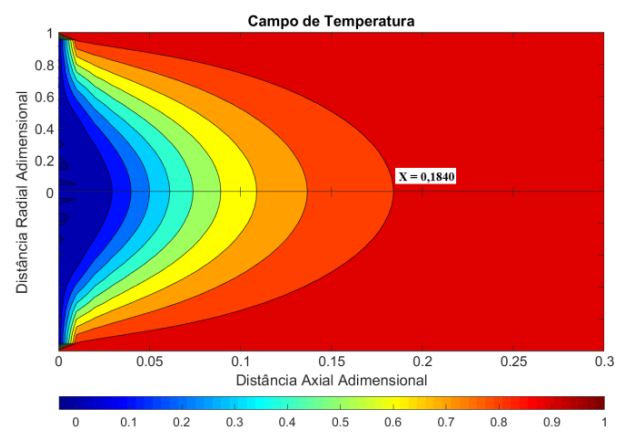


Figura 3.5 - Campo de temperatura para o escoamento de um fluido newtoniano no interior de um tubo circular (Modelo 1)

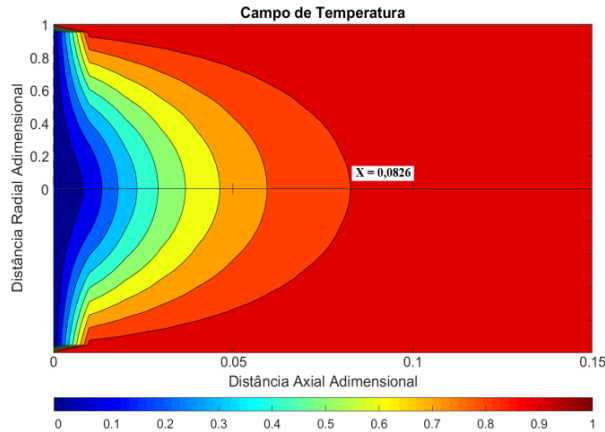


Figura 3.6 - Campo de temperatura para o escoamento de um fluido newtoniano entre placas planas (Modelo 2)

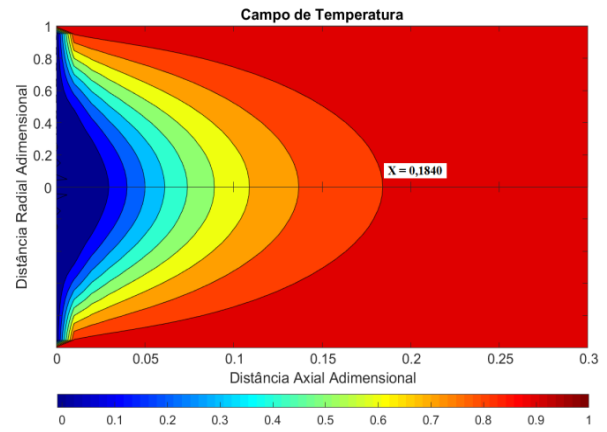


Figura 3.7 - Campo de temperatura para o escoamento de um fluido newtoniano no interior de um tubo circular (Modelo 2)

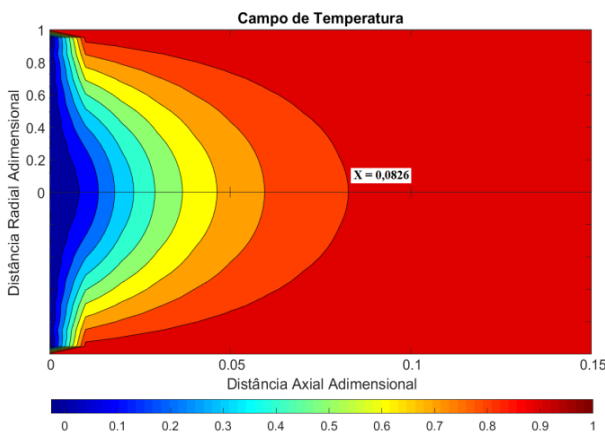


Figura 3.8 - Campo de temperatura para o escoamento de um fluido newtoniano entre placas planas (Modelo 3)

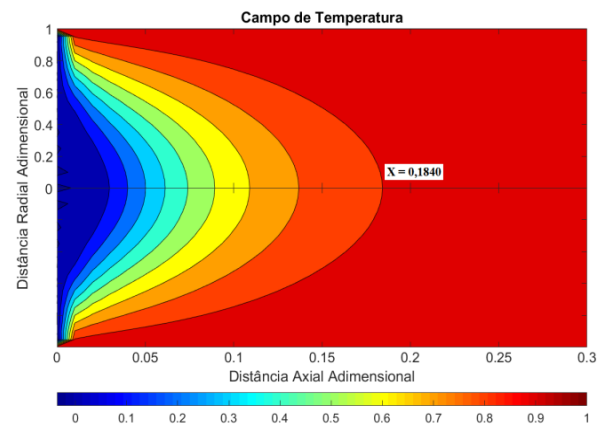


Figura 3.9 - Campo de temperatura para o escoamento de um fluido newtoniano no interior de um tubo circular (Modelo 3)

A primeira conclusão que pode ser obtida através da análise das figuras 3.4-3.9 é que a solução geral do campo de temperatura independe da base utilizada na expansão da solução, inclusive por encontrar o mesmo comprimento de entrada térmica para as 3 modelagens matemáticas utilizadas, tanto para placas planas como para tubo circular. No caso de escoamento no interior de um canal de placas planas paralelas, o comprimento de desenvolvimento térmico obtido é igual a 0,0826, em concordância com o trabalho de (Assad *et al.*, 2018) que obteve o valor de 0,0823 e com o trabalho de (Velo e Santos, 2018) que encontraram o valor de 0,0824. No caso de escoamento no interior de um tubo circular, o comprimento de entrada térmica encontrado foi 0,1840, em concordância com o trabalho de (Lima *et al.*, 2018) que obteve o mesmo valor.

3.9.1.2. COM DIFUSÃO AXIAL

Nesta seção a análise volta-se à transferência de calor que ainda negligencia o efeito da radiação térmica, porém considera os efeitos da condução axial, em um problema que ficou conhecido na literatura especializada como o *Problema de Graetz estendido*. Em situações que envolvem baixos números de Peclet, a consideração dos efeitos de condução axial no fluido desempenha um papel importante nos problemas de transferência de calor e a sua omissão oferece um erro apreciável na computação da taxa de transferência de calor.

O número de Peclet representa a relação entre a energia convectada e a energia conduzida axialmente no fluido. Quando o Peclet é grande, significa que a contribuição da convecção no escoamento se torna mais relevante em relação à condução axial. Da mesma forma, se o Peclet é pequeno, significa que a contribuição da convecção no escoamento se torna pouco relevante em relação à condução axial, sinalizando a efetiva importância da condução axial.

A transferência de calor na convecção forçada laminar na região de entrada térmica de dutos circulares e retangulares, com condução axial no fluido, tem sido estudada tanto analiticamente (Hsu, 1971; Papoutsakis *et al.*, 1980; Bayazitoglu e Özisik, 1980; Vick *et al.*, 1980; Nagasue, 1981; Vick e Özisik, 1981; Vick *et al.*, 1983; Laohakul *et al.*, 1985; Ebadian e Zhang, 1989; Johnston, 1991; Santos, 1992; Johnston, 1994; Telles *et al.*, 2001; Haji-Sheikh *et al.*, 2008; Weigand e Abdelmoula, 2014; Veloso *et al.*, 2018) como numericamente (Hennecke, 1968; Verhofi e Fisher, 1973; Michelson e Villadsen, 1974; Ku e Hatzivramidis, 1984; Nguyen, 1992; Bilir, 1992; Girgin, 1998; Nogueira, 2009; Queiroz, 2010) para as várias condições de contorno. Uma revisão bastante abrangente da literatura pode ser encontrada nos trabalhos de (Kakaç *et al.*, 2014 e Shah e London, 2014).

A seguir, a análise concentra-se no estudo do escoamento tipo pistão com condução axial. Como para o caso de escoamento uniforme entre placas planas as 3 modelagens mencionadas são equivalentes, todos os resultados apresentados a seguir são realizados utilizando-se a modelagem 1 como referência. Através das tabelas que seguem, para fins de validação, é possível comparar os resultados obtidos no presente trabalho com os resultados existentes na literatura aberta. Analisa-se, para cada posição axial adimensional e um Peclet especificado, os valores do número de Nusselt local. Em todos os casos apresentados pode-se verificar uma boa concordância.

Tabela 3.9 - Nusselt local para o escoamento tipo pistão no interior de um canal de placas planas, considerando a condução axial.

$X = \frac{x}{D_h Pe}$	Nusselt Local							
	$Pe = 1$		$Pe = 5$		$Pe = 10$		$Pe = 20$	
	Solução analítica exata - (Santos, 1992)	Presente Trabalho	Solução analítica exata - (Santos, 1992)	Presente Trabalho	Solução analítica exata - (Santos, 1992)	Presente Trabalho	Solução analítica exata - (Santos, 1992)	Presente Trabalho
0.001	647,782	647,78206	136,487	136,48742	72,6169	72,61688	41,6751	41,67510
0.002	328,466	328,46574	72,0052	72,00520	40,0572	40,05720	24,9633	24,96331
0.003	221,802	221,80198	50,3685	50,36848	29,0988	29,09882	19,2675	19,26750
0.004	168,369	168,36896	39,499	39,49898	23,5915	23,59154	16,386	16,38599
0.005	136,253	136,25313	32,9559	32,95587	20,2822	20,28223	14,6523	14,65232
0.006	114,808	114,80778	28,5849	28,58489	18,0798	18,07983	13,503	13,50296
0.008	87,944	87,94402	23,1163	23,11633	15,3486	15,34861	12,0981	12,09813
0.01	71,7822	71,78220	19,8418	19,84177	13,7428	13,74276	11,3012	11,30116
0.05	19,6808	19,68077	10,2978	10,29778	9,89798	9,89798	9,87024	9,87024
0.1	13,3287	13,32871	9,88881	9,88881	9,8697	9,86970	9,8696	9,86960
0.5	9,88613	9,88613	9,8696	9,86960	9,8696	9,86960	9,8696	9,86960
1	9,86964	9,86964	9,8696	9,86960	9,8696	9,86960	9,8696	9,86960

Tabela 3.10 - Nusselt local para o escoamento tipo pistão no interior de um tubo circular, considerando a condução axial.

$X = \frac{x}{D_h Pe}$	Nusselt Local							
	$Pe = 1$		$Pe = 5$		$Pe = 10$		$Pe = 20$	
	Solução analítica exata - (Santos, 1992)	Presente Trabalho	Solução analítica exata - (Santos, 1992)	Presente Trabalho	Solução analítica exata - (Santos, 1992)	Presente Trabalho	Solução analítica exata - (Santos, 1992)	Presente Trabalho
0.001	646,41	646,41006	135,092	135,09242	71,2486	71,24859	40,3554	40,35544
0.002	327,074	327,07420	70,5435	70,54355	38,5864	38,58644	23,509	23,50899
0.003	220,393	220,39278	48,8475	48,84747	27,5363	27,53632	17,6916	17,69163
0.004	166,943	166,94335	37,9228	37,92283	21,9432	21,94324	14,695	14,69504
0.005	134,812	134,81198	31,3275	31,32748	18,5521	18,55211	12,8503	12,85028
0.006	113,352	113,35176	26,9064	26,90641	16,2709	16,27085	11,5927	11,59272
0.008	86,4598	86,45981	21,3425	21,34248	13,3887	13,38868	9,9786	9,97860
0.01	70,2713	70,27133	17,9774	17,97735	11,6391	11,63914	8,98165	8,98165
0.05	17,7508	17,75082	7,12531	7,12531	6,1511	6,15110	5,88837	5,88837
0.1	10,9809	10,98085	6,03936	6,03936	5,80956	5,80956	5,78553	5,78553
0.5	6,00161	6,00161	5,78319	5,78319	5,78319	5,78319	5,78319	5,78319
1	5,79256	5,79256	5,78319	5,78319	5,78319	5,78319	5,78319	5,78319

Através das figuras 3.10 – 3.13 é possível observar a influência do número de Peclet sobre o número de Nusselt local e sobre a temperatura média global adimensional. As curvas abaixo demonstram que para diferentes valores de Peclet os resultados são bastante diferentes. Pode-se perceber que o número de Nusselt local decresce com o aumento do número de Peclet. Quando o Peclet é muito grande, a curva recai assintoticamente para a solução clássica do problema de Graetz com perfil de velocidade uniforme e temperatura especificada na parede, onde a condução axial é negligenciada. Para o problema de Graetz mencionado: $Nu(x \rightarrow \infty) = 9,8696$ entre placas planas e $Nu(x \rightarrow \infty) = 5,78$ no tubo circular, em conformidade com os resultados obtidos na seção anterior. As Figuras 3.12 e 3.13 mostram os resultados obtidos para a temperatura média global em função da distância axial adimensional, para vários valores do número de Peclet. Pode-se perceber que quanto menor o valor do Peclet (condução axial significativa) mais a temperatura média global diminui lentamente com a distância axial adimensionalizada.

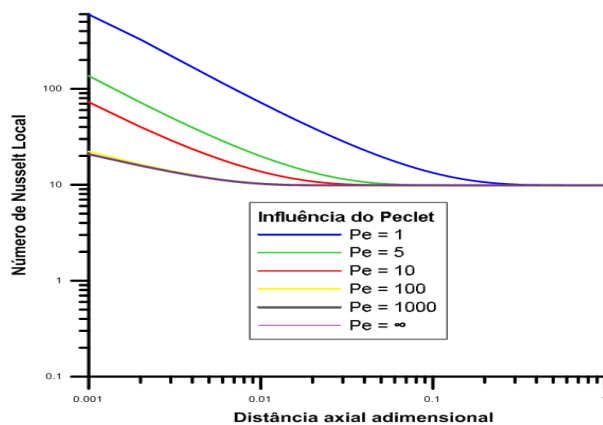


Figura 3.10 – Nusselt local em função da distância axial adimensional para o escoamento com condução axial entre placas planas.

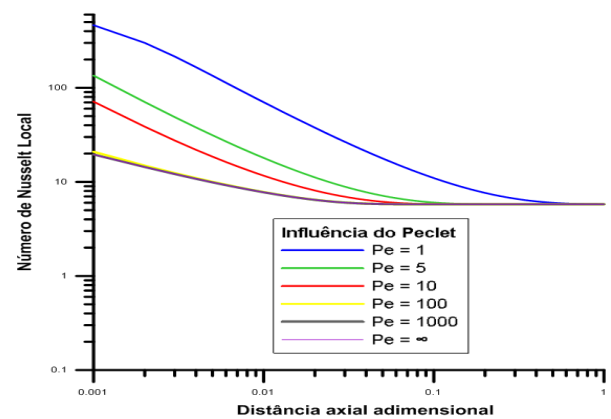


Figura 3.11 - Nusselt local em função da distância axial adimensional para o escoamento com condução axial no interior de um tubo circular.

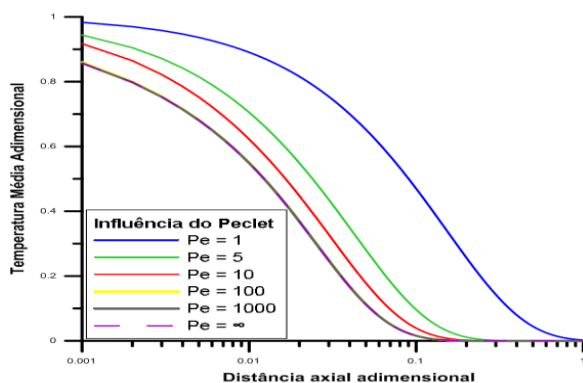


Figura 3.12 – Temperatura média global adimensional em função da distância axial adimensional para o escoamento com condução axial entre placas planas.

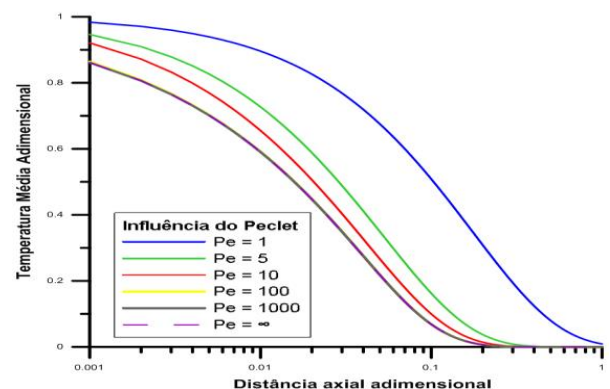


Figura 3.13 - Temperatura média adimensional em função da distância axial adimensional para o escoamento com condução axial no interior de um tubo circular.

A seguir, apresenta-se a influência do Peclet sobre o campo de temperatura, explicitando o comprimento de desenvolvimento térmico para cada situação avaliada. Por meio das figuras 3.14 – 3.21 percebe-se que o número de Peclet influencia diretamente na distribuição do campo de temperatura. Quando compara-se o escoamento entre placas planas e no tubo circular, para um dado Peclet, verifica-se que o comprimento axial de desenvolvimento térmico é sempre maior na geometria cilíndrica. Para uma mesma geometria, conclui-se que a distância axial que caracteriza o desenvolvimento térmico é sempre maior quanto menor o número de Peclet.

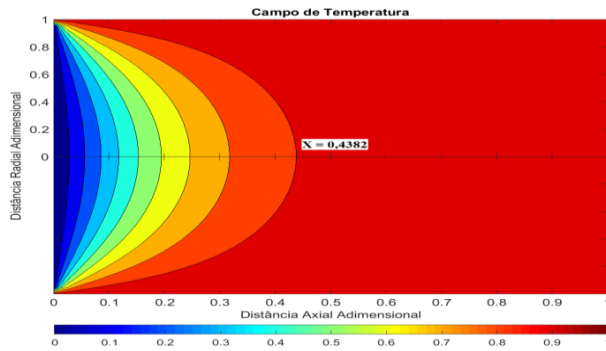


Figura 3.14 – Campo de temperatura para o escoamento uniforme com condução axial entre placas planas, considerando $Pe = 1$.

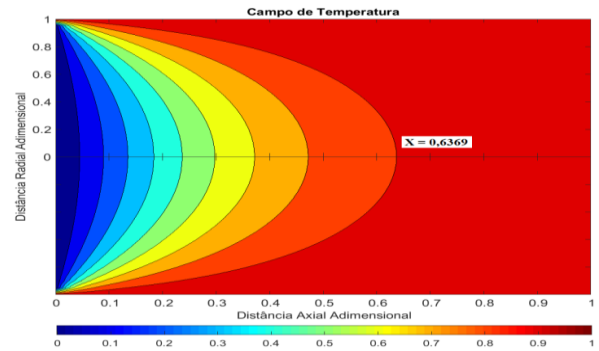


Figura 3.15 - Campo de temperatura para o escoamento uniforme com condução axial no interior de um tubo, considerando $Pe = 1$.

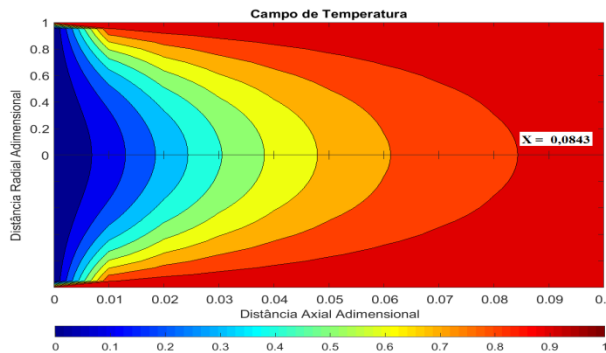


Figura 3.16 – Campo de temperatura para o escoamento uniforme com condução axial entre placas planas, considerando $Pe = 10$.

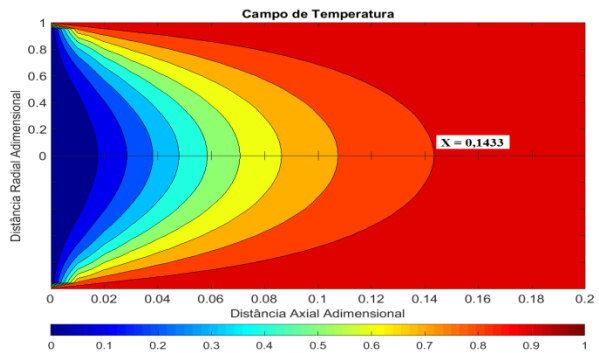


Figura 3.17 - Campo de temperatura para o escoamento uniforme com condução axial no interior de um tubo, considerando $Pe = 10$.

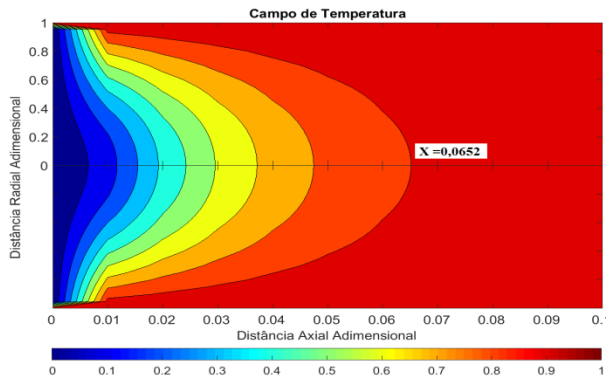


Figura 3.18 – Campo de temperatura para o escoamento uniforme com condução axial entre placas planas, considerando $Pe = 100$.

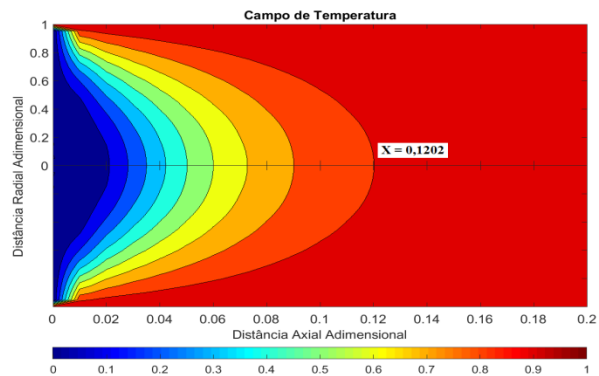


Figura 3.19 - Campo de temperatura para o escoamento uniforme com condução axial no interior de um tubo, considerando $Pe = 100$.

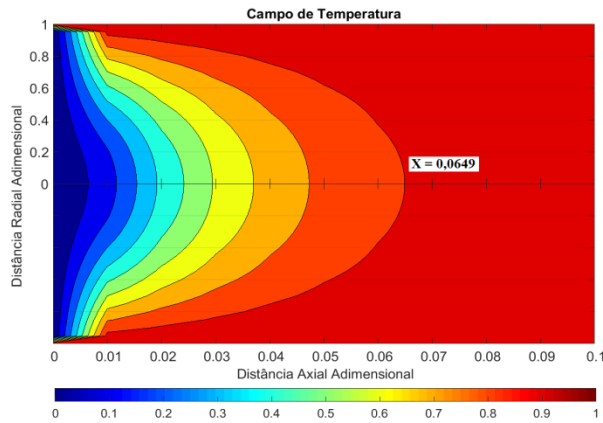


Figura 3.20 – Campo de temperatura para o escoamento uniforme com condução axial entre placas planas, considerando $Pe = 1000$.

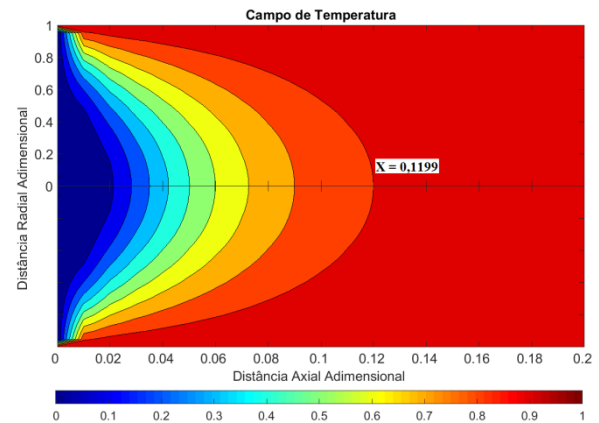


Figura 3.21 - Campo de temperatura para o escoamento uniforme com condução axial no interior de um tubo, considerando $Pe = 1000$.

Através das figuras 3.14 – 3.21 percebe-se que, nas condições de pequenos números de Peclet, o fluido tende a variar a sua temperatura mais lentamente ao longo da direção axial, de modo ao comprimento de desenvolvimento térmico ser sempre maior para estas situações. Conclui-se também que a partir de Peclet igual a 100 o desenvolvimento do campo de temperatura apresenta modificações muito pequenas, de modo a não haver mais mudanças relativamente significativas no comprimento axial de desenvolvimento térmico, o que é justificado pelo fato do efeito da condução axial já começar a ser desprezível e o problema estudado recair sobre o problema clássico de Graetz, discutido na seção anterior.

3.9.2 ACOPLAMENTO CONVECÇÃO/RADIAÇÃO

A partir desta seção assume real interesse o estudo da transferência de calor combinando os efeitos da convecção laminar e radiação. Os efeitos radiativos agora são considerados, sendo afetados pelos principais parâmetros associados à radiação térmica: espessura óptica, parâmetro condução-radiação e emissividade da parede. Com finalidade de analisar a estabilidade das soluções encontradas no presente estudo, investiga-se, a seguir, a convergência dos resultados.

3.9.2.1. ANÁLISE DA CONVERGÊNCIA

Para cada campo analisado, temperatura e radiação, foi construído um problema de autovalores associado. A partir daí foram construídas bases ortonormais que permitem expandir as soluções em torno das quais. A convergência dos resultados deve ser analisada sob o aspecto do número de autovalores que definem a ordem de truncamento dessas expansões.

A seguir serão apresentadas figuras de convergência para a solução numérica do número de Nusselt Total, considerando um perfil parabólico de velocidade (escoamento de fluidos participantes newtonianos). Analisa-se os casos de escoamento no interior de um tubo circular e entre placas planas, para uma espessura óptica, uma emissividade da parede e um parâmetro condução-radiação especificados. Para o escoamento entre placas planas considera-se $N = 0,5$; $\tau = 5$ e $\varepsilon_w = 1$. Para o escoamento no duto circular considera-se $N = 0,5$; $\tau = 10$ e $\varepsilon_w = 1$. Em todas as situações considerou-se $\Theta_e = 0$, $Pe \gg 1$ e analisou-se a convergência de 10 em 10 autovalores. Os resultados, em forma de gráficos, são apresentados logo abaixo, onde pode ser feita uma análise quanto a qualidade obtida em termos de convergência.

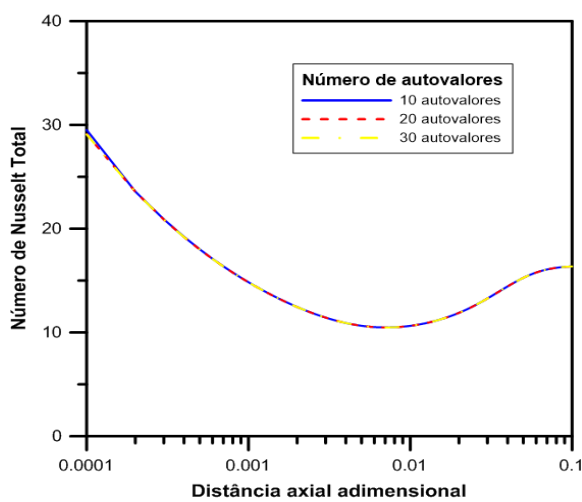


Figura 3.22 – Convergência do número de Nusselt total para o escoamento laminar de fluidos participantes entre placas planas (Modelo 1).

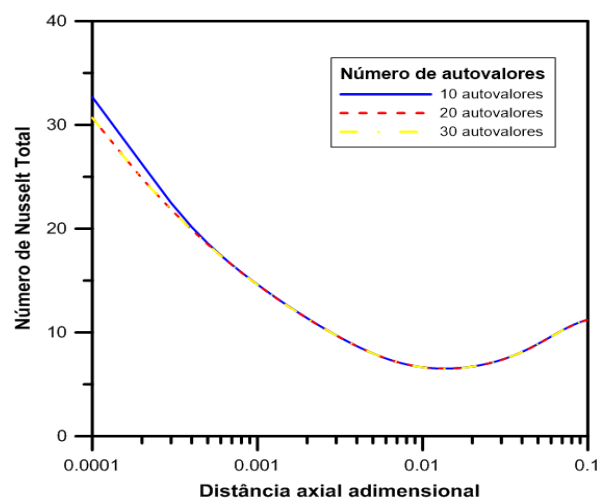


Figura 3.23 – Convergência do número de Nusselt total para o escoamento laminar de fluidos participantes no interior de um tubo circular (Modelo 1).

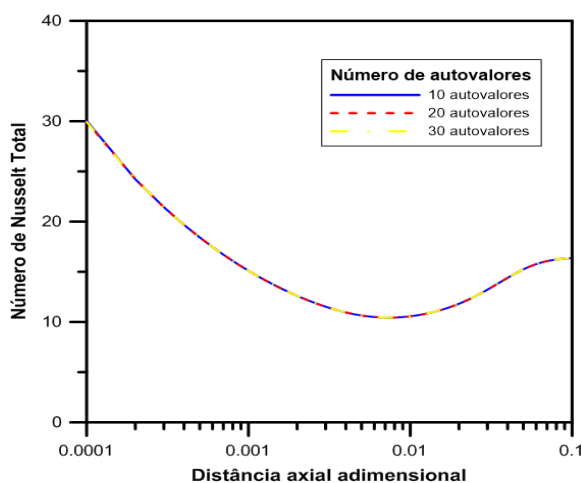


Figura 3.24 – Convergência do número de Nusselt total para o escoamento laminar de fluidos participantes entre placas planas (Modelo 2).

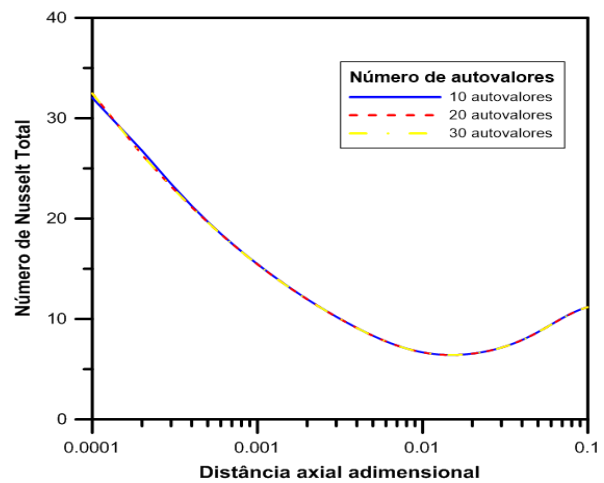


Figura 3.25 – Convergência do número de Nusselt total para o escoamento laminar de fluidos participantes no interior de um tubo circular (Modelo 2).

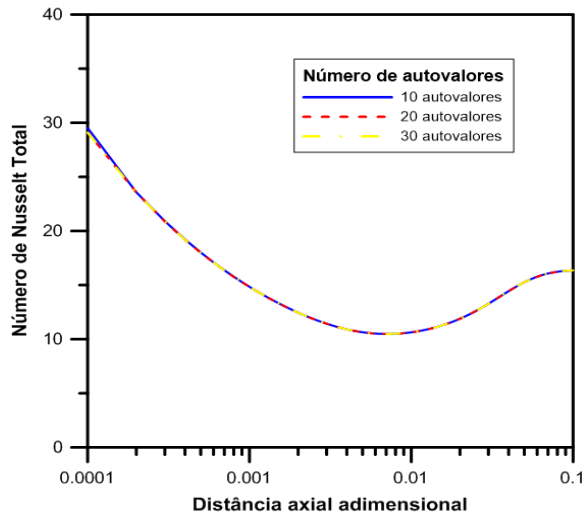


Figura 3.26 – Convergência do número de Nusselt total para o escoamento laminar de fluidos participantes entre placas planas (Modelo 3).

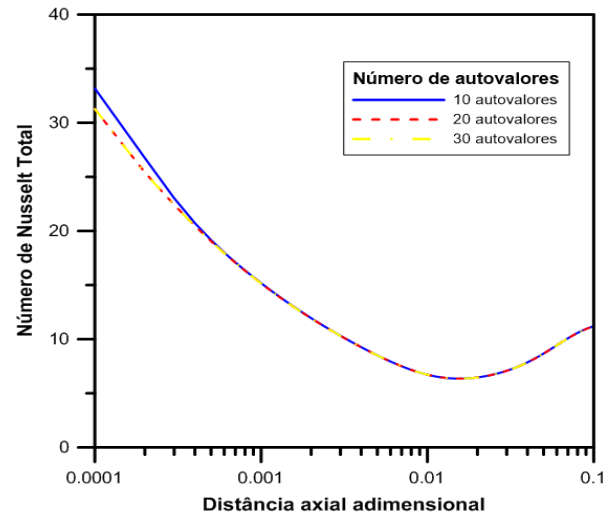


Figura 3.27 – Convergência do número de Nusselt total para o escoamento laminar de fluidos participantes no interior de um tubo circular (Modelo 3).

Com base nos resultados apresentados nas figuras 3.22 – 3.27, pode-se considerar que a metodologia de resolução usada neste trabalho apresenta forte estabilidade e baixo custo computacional (por requerer um número baixo de autovalores). Além disso, fica estabelecido que a convergência para os pontos escolhidos, com posições axiais adimensionais a partir de 1.10^{-4} , ocorre, em todas as modelagens, satisfatoriamente com o uso de 30 autovalores.

3.9.2.2. VALIDAÇÃO DOS RESULTADOS

Uma vez investigada a estabilidade das soluções em termos da convergência, torna-se necessário, como passo posterior, validar os resultados encontrados no presente estudo comparando-os com os resultados obtidos pela literatura especializada. O presente trabalho utiliza como referências os trabalhos de (Yang e Ebadian, 1991), (Tsai e Özisik, 1989) e (Diniz et al., 2005), que desenvolveram estudos semelhantes ao proposto, considerando o acoplamento da convecção laminar com a radiação térmica.

Na tabela 3.11 é possível comparar os resultados obtidos para o número de Nusselt Total em diferentes posições axiais adimensionais e considerando diferentes valores para a espessura óptica e para o parâmetro condução-radiação. A análise é feita comparando os resultados obtidos através das 3 modelagens propostas no presente estudo com os resultados obtidos por (Yang e Ebadian, 1991). Em todas as situações investigadas considerou-se um perfil parabólico de velocidade, $\varepsilon_w = 1$, $Pe \gg 1$ e $\Theta_e = 0,1$. A análise dos resultados permite verificar que as 3 mo-

delagens reproduzem soluções aproximativas para o problema, que possuem boa concordância entre si e, em algumas situações, apresentam pequenas variações em relação a referência.

Tabela 3.11 – Análise comparativa do Número de Nusselt Total para o escoamento laminar de fluidos participantes newtonianos no interior de um tubo circular.

$X = \frac{x}{D_h Pe}$	Número de Nusselt Total							
	N = 0.1 e $\tau = 3$				N = 0.25 e $\tau = 3$			
	Yang e Ebadian (1991)	Presente Trabalho (Modelo 1)	Presente Trabalho (Modelo 2)	Presente Trabalho (Modelo 3)	Yang e Ebadian (1991)	Presente Trabalho (Modelo 1)	Presente Trabalho (Modelo 2)	Presente Trabalho (Modelo 3)
0.004	12.6	12.1	12.7	13.4	8.82	8.64	9.05	9.40
0.007	12.0	11.3	11.5	11.8	7.88	7.59	7.82	8.10
0.010	12.0	11.5	11.4	11.5	7.46	7.16	7.27	7.47
0.030	16.1	17.6	17.3	17.3	7.48	7.71	7.56	7.54
0.050	21.5	22.0	21.9	21.9	8.67	9.18	9.05	9.06
$X = \frac{x}{D_h Pe}$	Número de Nusselt Total							
	N = 1 e $\tau = 3$				N = 0.25 e $\tau = 1$			
	Yang e Ebadian (1991)	Presente Trabalho (Modelo 1)	Presente Trabalho (Modelo 2)	Presente Trabalho (Modelo 3)	Yang e Ebadian (1991)	Presente Trabalho (Modelo 1)	Presente Trabalho (Modelo 2)	Presente Trabalho (Modelo 3)
0.004	7.04	6.96	7.09	7.19	7.03	6.92	7.04	7.16
0.007	6.03	5.94	6.03	6.13	6.02	5.95	6.02	6.12
0.010	5.52	5.43	5.49	5.58	5.51	5.45	5.51	5.58
0.030	4.68	4.65	4.63	4.63	4.66	4.63	4.62	4.61
0.050	4.69	4.76	4.72	4.71	4.66	4.68	4.66	4.63
$X = \frac{x}{D_h Pe}$	Número de Nusselt Total							
	N = 0.25 e $\tau = 10$				N = 0.25 e $\tau = 20$			
	Yang e Ebadian (1991)	Presente Trabalho (Modelo 1)	Presente Trabalho (Modelo 2)	Presente Trabalho (Modelo 3)	Yang e Ebadian (1991)	Presente Trabalho (Modelo 1)	Presente Trabalho (Modelo 2)	Presente Trabalho (Modelo 3)
0.004	11.9	10.8	11.2	11.5	13.1	11.2	11.5	11.6
0.007	10.9	9.6	9.5	9.5	11.7	10.3	10.0	9.8
0.010	10.4	9.7	9.4	9.3	11.3	10.6	10.2	9.9
0.030	12.2	13.9	13.5	13.4	13.5	16.0	15.5	15.4
0.050	16.2	17.6	17.5	17.5	18.5	20.0	19.8	19.8

Vale salientar que a comparação realizada na tabela 3.11 é feita ponto a ponto, e esta apresenta poucas chances de reproduzir perfeita conformidade nos valores, tendo em vista a complexidade e não-linearidade do problema estudado. A seguir, apresenta-se uma comparação gráfica dos resultados. O número de Nusselt total em função da distância axial adimensional é analisado e comparado com trabalhos consagrados na literatura especializada. Na figura 3.28 compara-se, mais uma vez, os resultados obtidos no presente estudo com os de (Yang e Ebadian, 1991), considerando o parâmetro condução-radiação igual a $N = 0,25$ e a espessura óptica assumindo os valores $\tau = 1, 3$ e 20 . Na figura 3.29 a comparação é feita com os resultados obtidos por (Tsai e Özisik, 1989), cuja análise considera um perfil de velocidade no modelo lei

de potência, $N = 0,04$, $\varepsilon_w = 1$, $\tau = 2$, $\Theta_e = 0,5$ e o índice lei de potência assume os valores $n = 1/3$, 1 e 3. Por fim, na figura 3.30 compara-se com os resultados encontrados por (Diniz et al., 2005), considerando um escoamento uniforme entre placas planas, $\varepsilon_w = 1$, $\Theta_e = 0$, $\tau = 4$ e o parâmetro condução-radiação assumindo os valores $N = 0,1$; 0,5 e 10. Em todos os casos considera-se $Pe \gg 1$, e uma boa aproximação pode ser observada.

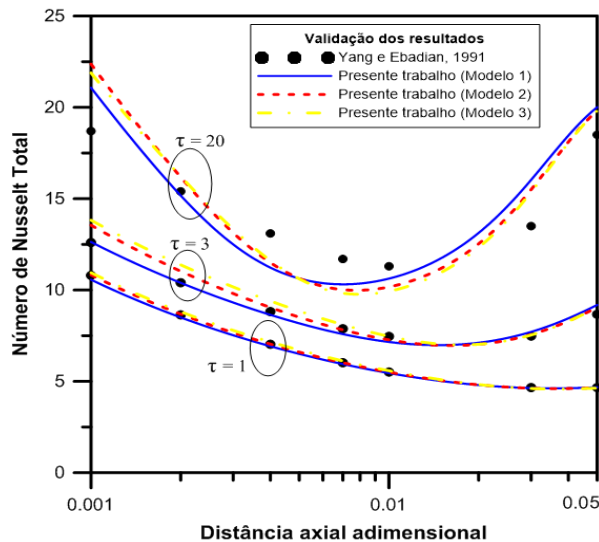


Figura 3.28 – Análise comparativa do número de Nusselt total para o escoamento laminar de fluidos participantes newtonianos no interior de um tubo circular, considerando diferentes valores para a espessura óptica.

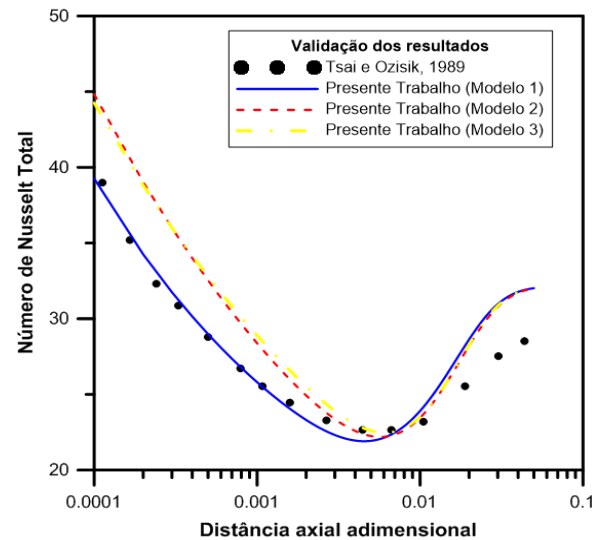


Figura 3.29 - Análise comparativa do número de Nusselt total para o escoamento laminar de fluidos participantes não-newtonianos no interior de um tubo circular, considerando diferentes valores para o índice lei de potência.

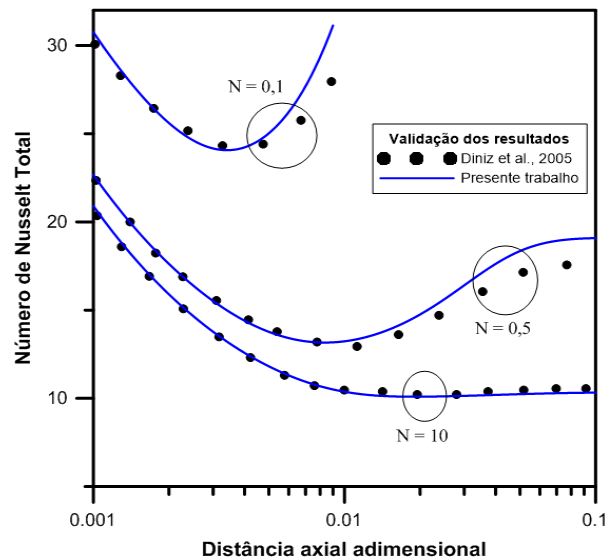


Figura 3.30 – Análise comparativa do número de Nusselt total para o escoamento laminar, tipo pistão, entre placas planas, considerando diferentes valores para o parâmetro condução-radiação.

3.9.2.3. APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

Neste subitem discutir-se-á a influência dos principais parâmetros que interferem no desenvolvimento do campo térmico, são eles: espessura óptica, parâmetro condução-radiação, emissividade da parede e temperatura de entrada adimensional. Para uma análise mais sistemática e detalhada da influência destes parâmetros sobre os campos térmico e radiativo, os resultados são divididos em partes, onde em cada uma delas considera-se constante um dos parâmetros e variam-se os demais. Em todos os casos apresentados nesta subseção considera-se um perfil parabólico de velocidade e $Pe \gg 1$.

Inicialmente, investiga-se a influência da emissividade da parede sobre o campo de temperatura e sobre o número de Nusselt Total. Nas figuras 3.31 e 3.32 analisa-se, para o escoamento laminar de fluidos participantes em dutos retangulares e circulares, o desenvolvimento do número de Nusselt Total em função da distância axial adimensional; para esta análise considera-se $N = 0,25$, $\tau = 10$, $\Theta_e = 0$ e a emissividade da parede assumindo os valores $\varepsilon_w = 0,1$; $0,5$ e 1 . Os resultados são apresentados para as 3 modelagens matemáticas consideradas, onde mais uma vez pode-se verificar uma boa concordância nos valores obtidos.

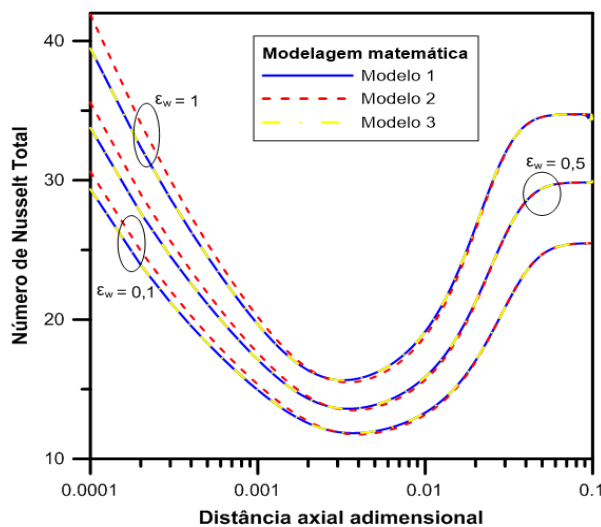


Figura 3.31 – Nusselt total em função da distância axial para o escoamento laminar entre placas planas, considerando diferentes valores para a emissividade da parede.

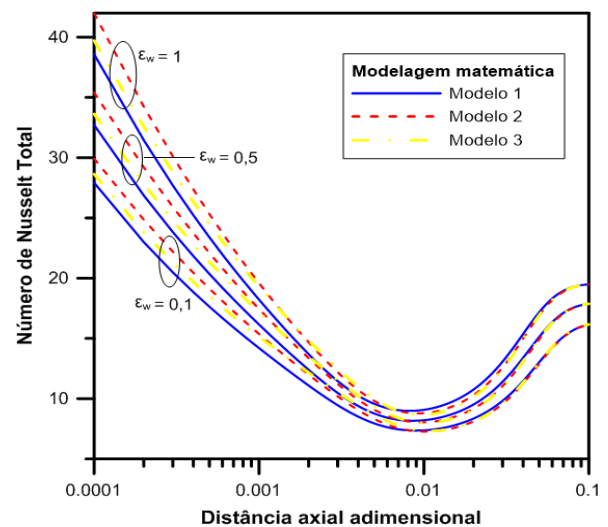


Figura 3.32 - Nusselt total em função da distância axial para o escoamento laminar no interior de um tubo circular, considerando diferentes valores para a emissividade da parede.

De acordo com as figuras 3.31 e 3.32 é possível verificar que as 3 modelagens propostas mostram-se com boa aproximação, demonstrando, mais uma vez, a versatilidade da GITT na escolha do problema auxiliar. Pode-se observar que o número de Nusselt total assume valores maiores quanto maior a medida da emissividade.

Ainda investigando a influência da emissividade da parede, a análise volta-se ao seu efeito sobre o desenvolvimento do campo de temperatura. Nas mesmas condições estabelecidas no estudo feito nas figuras 3.31 e 3.32, o campo de térmico é avaliado para diferentes emissividades da superfície de contorno. Nas figuras 3.33 – 3.36 é possível observar o campo de temperatura no escoamento laminar de fluidos participantes, considerando a emissividade da parede assumindo os valores $\varepsilon_w = 0,1$ e 1. Em todas as curvas de contorno apresentadas abaixo considera-se a modelagem 1 como referência. Conforme análise destas figuras é possível verificar que a temperatura do fluido nas proximidades da parede varia mais rapidamente no caso em que a emissividade da parede é maior, consequência do seu aumento de capacidade de troca de calor por radiação.

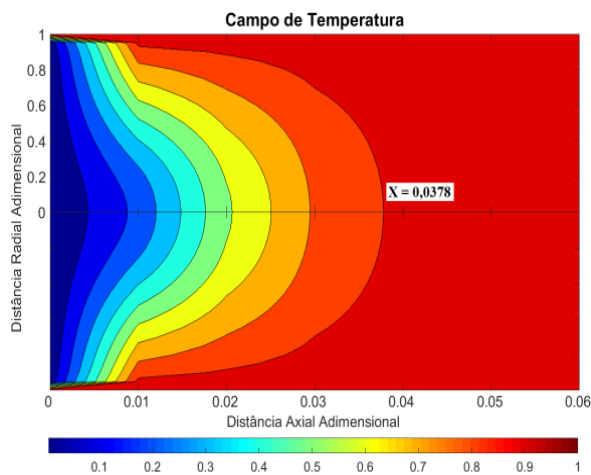


Figura 3.33 – Campo de temperatura para o escoamento laminar de fluidos participantes entre placas planas, considerando $\varepsilon_w = 0,1$.

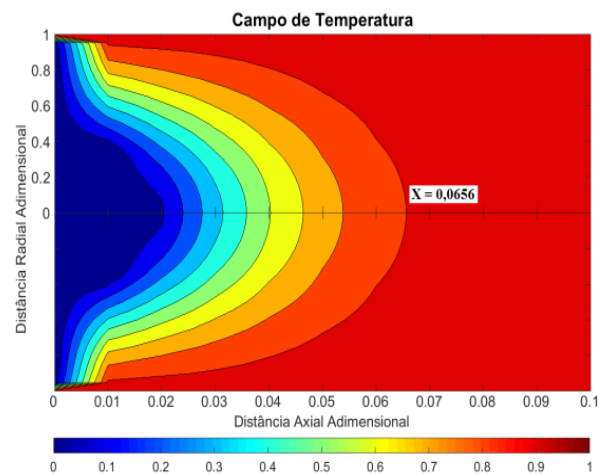


Figura 3.34 – Campo de temperatura para o escoamento laminar de fluidos participantes no interior de um tubo circular, considerando $\varepsilon_w = 0,1$.

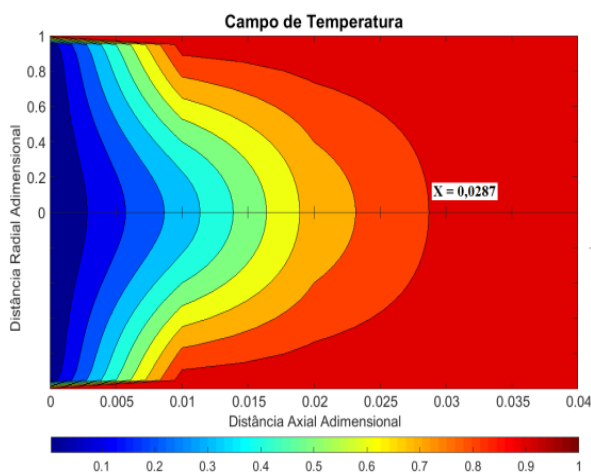


Figura 3.35 – Campo de temperatura para o escoamento laminar de fluidos participantes entre placas planas, considerando $\varepsilon_w = 1$.

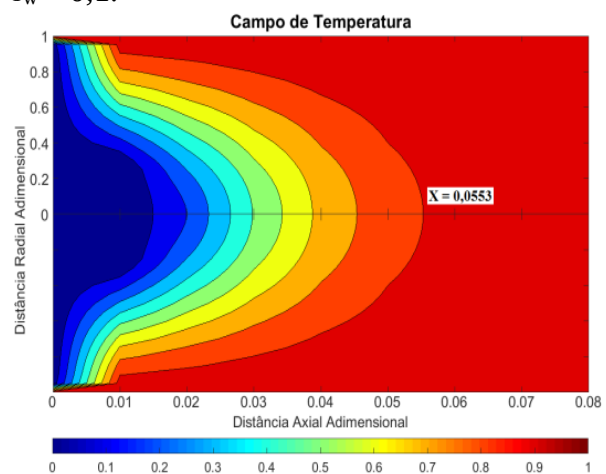


Figura 3.36 – Campo de temperatura para o escoamento laminar de fluidos participantes no interior de um tubo circular, considerando $\varepsilon_w = 1$.

A seguir, investiga-se a influência da espessura óptica sobre o desenvolvimento do campo térmico e do número de Nusselt total. Para esta análise considera-se $N = 0,5$, $\varepsilon_w = 1$, $\Theta_e = 0$ e a espessura óptica assumindo os valores $\tau = 5$, 10 e 20. Os resultados são apresentados logo abaixo, nas figuras 3.37 – 3.42.

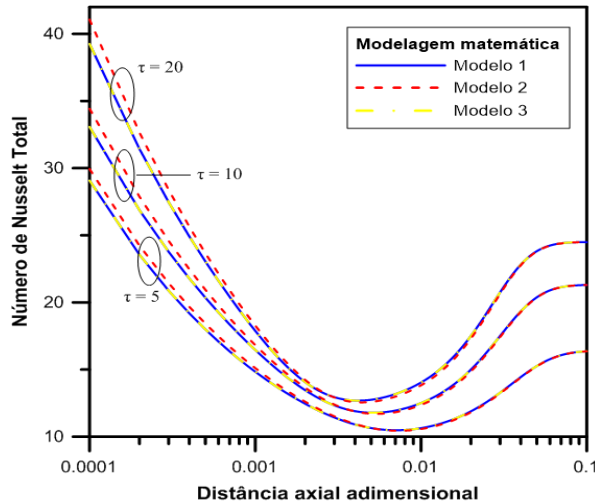


Figura 3.37 – Nusselt total em função da distância axial para o escoamento laminar entre placas planas, considerando diferentes valores para a espessura óptica.

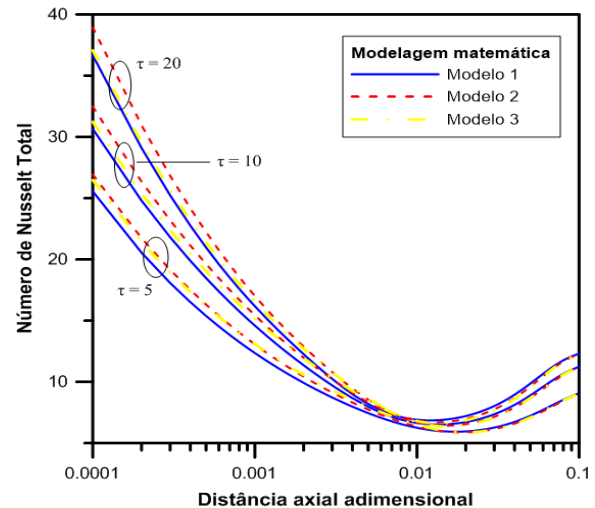


Figura 3.38 - Nusselt total em função da distância axial para o escoamento laminar no interior de um tubo circular, considerando diferentes valores para a espessura óptica.

As figuras 3.37 e 3.38 permitem concluir que a espessura óptica influencia diretamente na distribuição do número de Nusselt total. Na figura 3.37 pode-se observar que os valores atingidos pelo número de Nusselt diminuem juntamente com a espessura óptica. Esse mesmo comportamento também foi observado na figura 3.28. As curvas apresentadas tendem a uma curva assintótica (caso de pura convecção) no limite em que $\tau \rightarrow 0$.

O campo de temperatura também é investigado para diferentes valores da espessura óptica, sendo possível observar o efeito representativo deste parâmetro através das curvas isotérmicas apresentadas nas figuras 3.39 – 3.42, cuja observação permite verificar que o aumento do efeito radiativo, devido ao aumento da espessura óptica, faz aumentar as taxas de transferência de calor e, por consequência, provoca uma redução no comprimento adimensional de entrada térmica. Este mesmo argumento pode ser utilizado quando as situações são comparadas com o caso de pura convecção, apresentado na subseção 3.9.1.1, cujo valor encontrado para o comprimento adimensional de desenvolvimento térmico foi 0,1840. Portanto, a medida que a espessura óptica diminui o comprimento de entrada térmica aumenta, tendendo a 0,1840, que representa o caso de pura convecção ($\tau=0$).

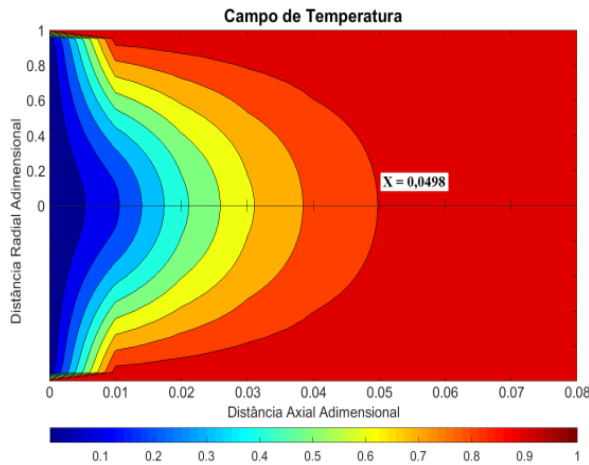


Figura 3.39 – Campo de temperatura para o escoamento laminar de fluidos participantes entre placas planas, considerando $\tau = 5$.

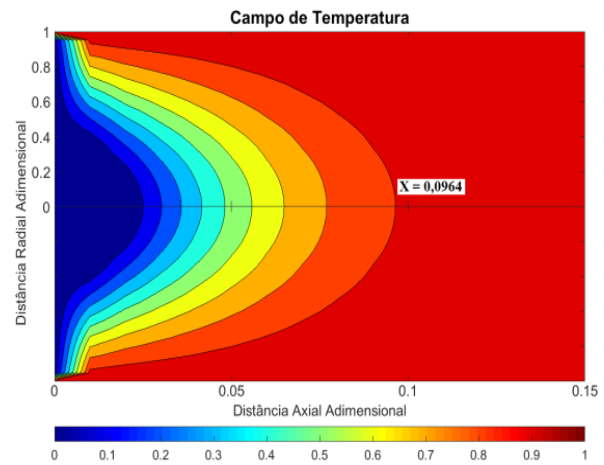


Figura 3.40 – Campo de temperatura para o escoamento laminar de fluidos participantes no interior de um tubo circular, considerando $\tau = 5$.

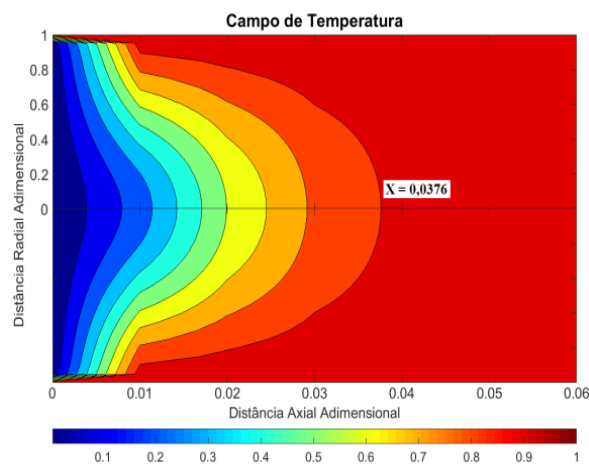


Figura 3.41 – Campo de temperatura para o escoamento laminar de fluidos participantes entre placas planas, considerando $\tau = 20$.

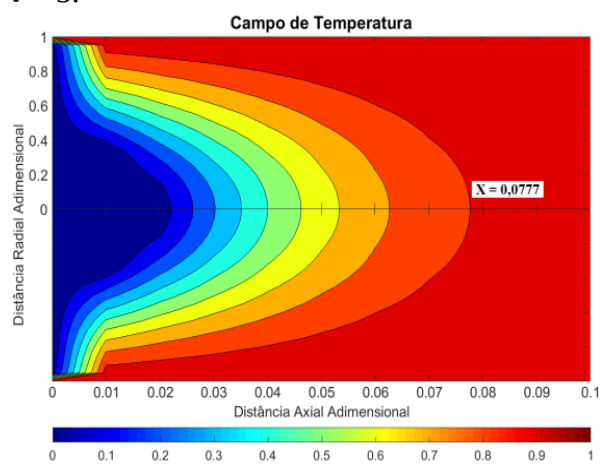


Figura 3.42 – Campo de temperatura para o escoamento laminar de fluidos participantes no interior de um tubo circular, considerando $\tau = 20$.

Agora, é investigada a influência do parâmetro condução-radiação sobre o campo de temperatura e o número de Nusselt total. Para esta análise considerou-se $\tau = 3$, $\varepsilon_w = 1$, $\Theta_e = 0$ e o parâmetro condução-radiação assumindo os valores $N = 0,1$; $0,25$ e 1 . Os resultados são apresentados na página seguinte, nas figuras 3.43 – 3.48. Nas figuras 3.43 e 3.44 observa-se o desenvolvimento do Número de Nusselt total, mostrando a interferência que o parâmetro condução-radiação exerce sobre ele; é possível concluir que o efeito radiativo é reduzido com o aumento do valor do parâmetro condução-radiação, de modo que a curva tende a não apresentar mais o comportamento crescente em vista de um comportamento assintótico, de forma semelhante ao caso de pura convecção que ocorre no limite em que $N \rightarrow \infty$. Nas figuras 3.45 – 3.48 avalia-se o comportamento do campo de temperatura para diferentes valores do parâmetro condução-radiação; através dessas figuras é possível verificar que, ainda utilizando a modelagem 1 como referência, o aumento do efeito radiativo, neste caso introduzido pela diminuição no valor do parâmetro condução-radiação, produz uma redução no comprimento de entrada térmica.

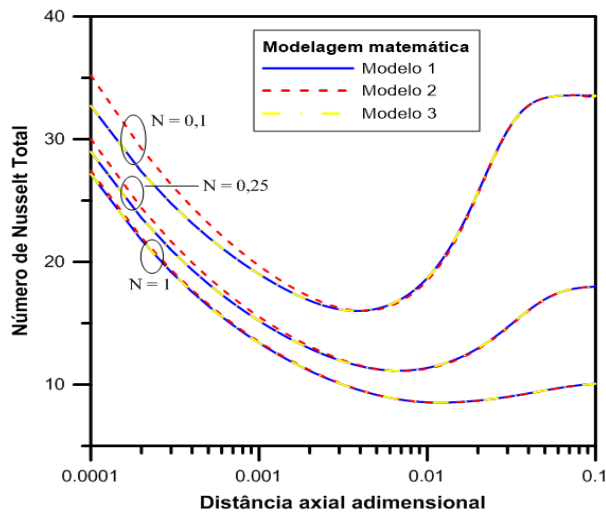


Figura 3.43 – Nusselt total em função da distância axial para o escoamento laminar entre placas planas, considerando diferentes valores para o parâmetro condução-radiação.

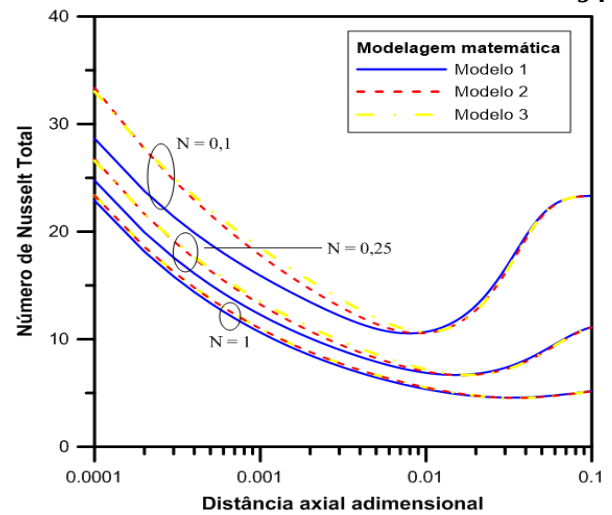


Figura 3.44 - Nusselt total em função da distância axial para o escoamento laminar no interior de um tubo, considerando diferentes valores para o parâmetro condução-radiação.

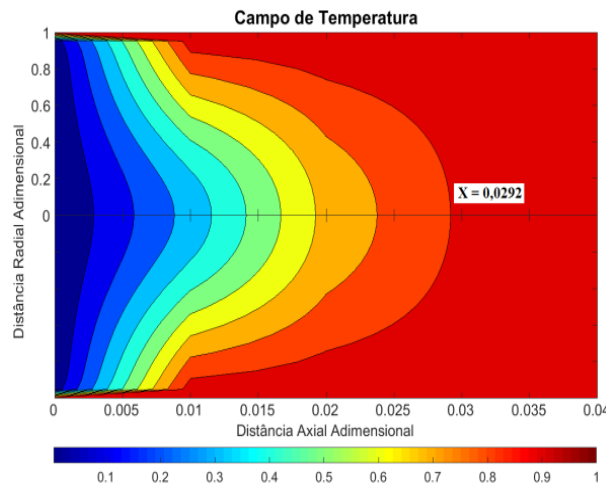


Figura 3.45 – Campo de temperatura para o escoamento laminar de fluidos participantes entre placas planas, considerando $N = 0,1$.

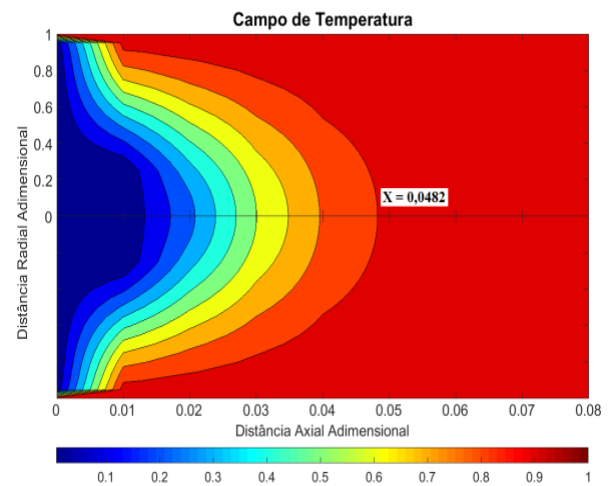


Figura 3.46 – Campo de temperatura para o escoamento laminar de fluidos participantes no interior de um tubo circular, considerando $N = 0,1$.

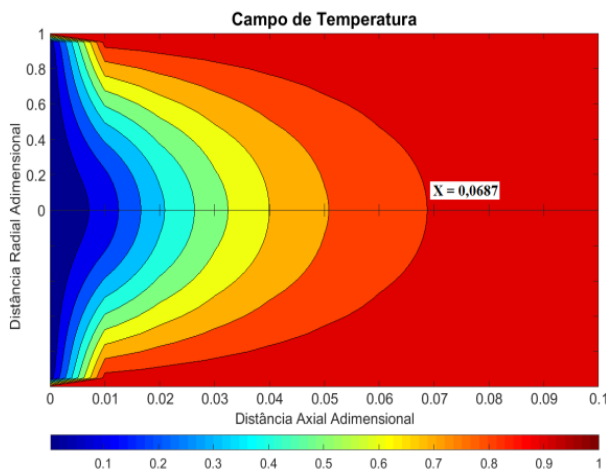


Figura 3.47 – Campo de temperatura para o escoamento laminar de fluidos participantes entre placas planas, considerando $N = 1$.

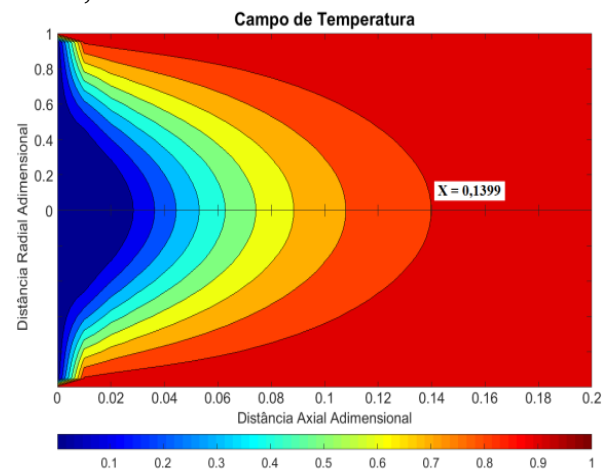


Figura 3.48 – Campo de temperatura para o escoamento laminar de fluidos participantes no interior de um tubo circular, considerando $N = 1$.

A influência da temperatura adimensional de entrada do fluido sobre o campo de temperatura e o número de Nusselt total também é analisada. Considera-se, nesta análise, $\tau = 15$, $\varepsilon_w = 1$, $N = 0,5$ e a temperatura de entrada adimensional assumindo os valores $\Theta_e = 0,1$; $0,3$ e $0,5$. Nas figuras 3.49 e 3.50 avalia-se o desenvolvimento do número de Nusselt total, enquanto que nas figuras 3.51 – 3.54 analisa-se o comportamento do campo térmico.

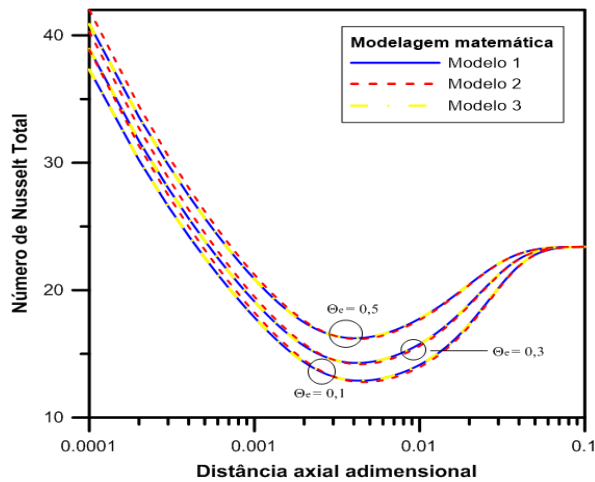


Figura 3.49 – Nusselt total em função da distância axial para o escoamento laminar entre placas planas, considerando diferentes valores para a temperatura adimensional de entrada do fluido.

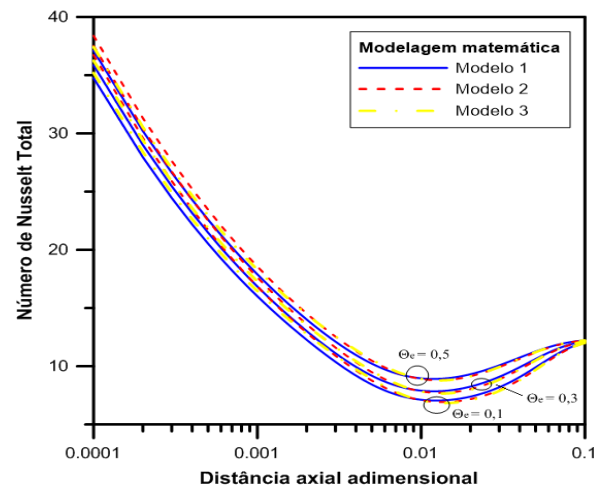


Figura 3.50 - Nusselt total em função da distância axial para o escoamento laminar no interior de um tubo, considerando diferentes valores para a temperatura adimensional de entrada do fluido.

Analisando as figuras 3.49 e 3.50 conclui-se que a temperatura adimensional de entrada do fluido exerce influência direta na distribuição do número de Nusselt total. Percebe-se que quanto maior o valor da temperatura de entrada maiores são os valores atingidos pelo Nusselt total.

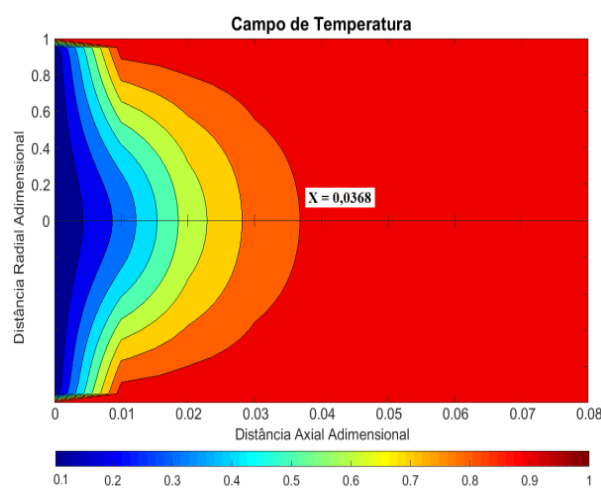


Figura 3.51 – Campo de temperatura para o escoamento laminar de fluidos participantes entre placas planas, considerando $\Theta_e = 0,1$.

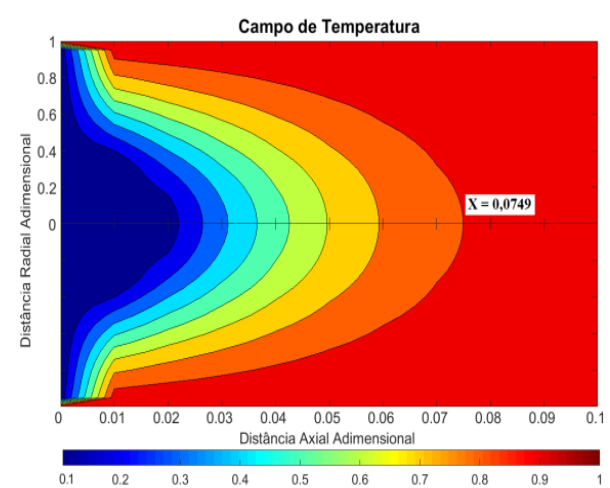


Figura 3.52 – Campo de temperatura para o escoamento laminar de fluidos participantes no interior de um tubo circular, considerando $\Theta_e = 0,1$.

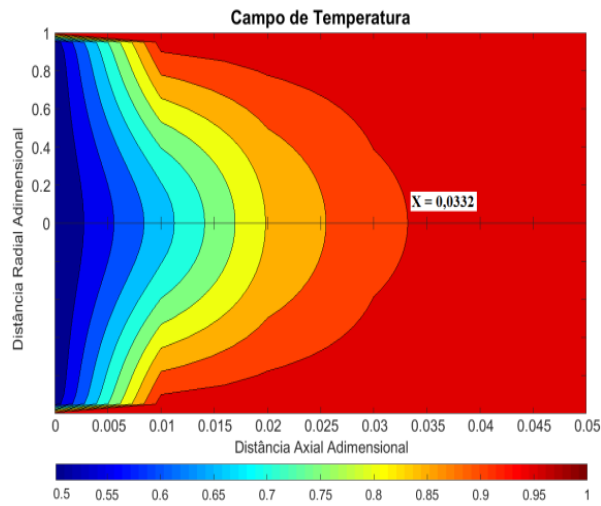


Figura 3.53 – Campo de temperatura para o escoamento laminar de fluidos participantes entre placas planas, considerando $\Theta_e = 0,5$.

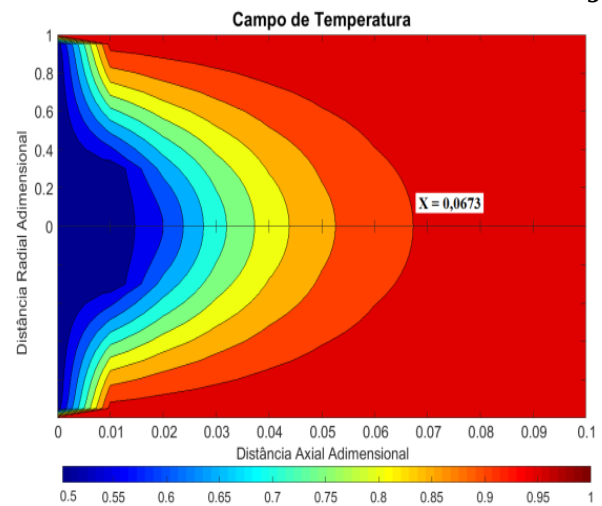


Figura 3.54 – Campo de temperatura para o escoamento laminar de fluidos participantes no interior de um tubo circular, considerando $\Theta_e = 0,5$.

Através das figuras figuras 3.51 – 3.54 é possível concluir que quanto maior for o valor da temperatura de entrada adimensional do fluido menor será o seu comprimento de entrada térmica, pois nessas condições o fluido necessitará trocar menos calor até atingir o equilíbrio térmico com as paredes do duto.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE DA CONVECÇÃO FORÇADA TURBULENTA DE FLUIDOS PARTICIPANTES

O presente capítulo tem como objetivo analisar a transferência de calor em um escoamento turbulento de fluidos participantes na região de entrada térmica de dutos circulares e retangulares. Diferentes modelos de turbulência são adotados, com diferentes formulações para a distribuição de velocidades e para a difusividade turbulenta dinâmica. Quatro situações são analisadas, baseadas em expressões analíticas propostas para o perfil universal de velocidade – “Lei da Parede”. A técnica de transformação integral generalizada (GITT) é usada para resolver a equação de energia. O campo de temperatura e o número de Nusselt local são avaliados para vários valores dos números de Reynolds e Prandtl, da espessura óptica e do parâmetro condução-radiação. Para cada caso analisado, o comprimento da entrada térmica é determinado. Os resultados obtidos foram confrontados com os existentes na literatura aberta, a fim de validar o modelo apresentado.

4. PROBLEMA FÍSICO

4.1. INTRODUÇÃO

O estudo da turbulência assume grande importância na engenharia haja visto o grande número de aplicações práticas em que se faz presente. Na transferência de calor, o envolvimento de um fluido em movimento turbulento aparece na maioria dos processos que envolvem o transporte de energia. Nas áreas aplicadas, tais como projeto de trocadores de calor, engenharia de reatores e engenharia de potência, o escoamento laminar é uma exceção em vez de regra.

Ao longo dos anos, a transferência de calor na convecção forçada turbulenta na região de entrada térmica de dutos circulares e retangulares tem sido amplamente estudada, na busca incessante de calcular parâmetros de interesses práticos que permitam desenvolver projetos e construir dispositivos térmicos otimizados. A grande questão é que os cálculos de parâmetros de

interesses práticos, tais como fatores de atrito e coeficientes de transferência de calor, são totalmente dependentes do modelo de turbulência adotado para descrever a distribuição de velocidade e da difusividade turbulenta dinâmica, e conseqüentemente resultados diferentes são encontrados (*Santos et al., 2001*).

A distribuição de velocidade no escoamento turbulento, hidrodinamicamente desenvolvido, tem sido investigada intensamente devido a sua importância prática, mas nenhuma teoria fundamental já é disponível para determinar esta distribuição por razões puramente teóricas, entretanto relações empíricas e semi-empíricas são usadas para correlacionar o campo de velocidade no escoamento turbulento. Nikuradse, em 1933, foi o investigador inicial que apresentou medidas cuidadosas da distribuição de velocidade no escoamento turbulento através de tubos lisos. A partir daí outros pesquisadores, na tentativa de precisar ainda mais os resultados, trabalharam na extensão das experiências para o escoamento turbulento ao longo de uma placa plana e dentro de um tubo circular. Todas essas tentativas foram realizadas com o objetivo de desenvolver relações empíricas que adequassem, com maior precisão possível, a distribuição de velocidade no escoamento turbulento. A seguir discute-se a lei de distribuição baseada no conceito de separação do campo do fluxo em duas ou três camadas distintas.

4.2. MODELOS EM CAMADAS

Baseado em estudos experimentais surgiram várias expressões analíticas propondo um perfil universal de velocidade. Na figura 4.1 é possível observar uma comparação entre resultados experimentais e expressões analíticas propostas para o perfil universal de velocidade. Estas equações ficaram conhecidas na literatura especializada como a “Lei da Parede”, ou simplesmente, perfil universal de velocidade. A fim de melhor compreender e reproduzir os resultados experimentais, muitos autores separaram o escoamento em duas ou três camadas distintas.

Para estudos que envolvem três camadas, considera-se que:

1. Existe uma camada fina, imediatamente adjacente a parede, na qual as tensões de cisalhamento laminares são dominantes. Denomina-se esta camada de *subcamada laminar*;

2. Adjacente a subcamada laminar existe uma camada onde as tensões de cisalhamento laminares e turbulentas são igualmente importantes, a esta camada dá-se o nome de *subcamada amortecedora*;
3. Adjacente a subcamada amortecedora existe uma terceira e última camada onde as tensões de cisalhamento turbulentas são completamente dominantes. Esta camada recebe o nome de *núcleo turbulento*.

Para estudos que consideram apenas duas camadas, a subcamada amortecedora é desconsiderada. Restando, para esta análise, apenas a subcamada laminar e o núcleo turbulento.

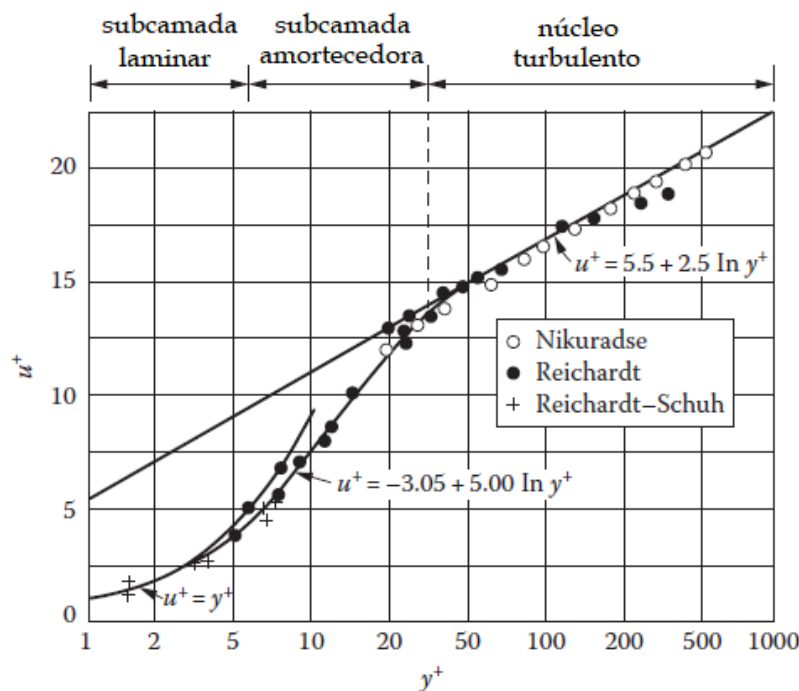


Figura 4.1 – Perfil universal de velocidade para o escoamento turbulento hidrodinamicamente desenvolvido. (Fonte: Kakaç *et al.*, 2014)

4.3. MODELAGEM MATEMÁTICA

As seguintes hipóteses simplificadoras são consideradas na análise do problema:

- Escoamento turbulento, em regime permanente;
- Fluido incompressível;
- Convecção forçada em desenvolvimento térmico, hidrodinamicamente desenvolvido;
- Dissipação viscosa e convecção livre são desprezíveis;
- Efeitos de condução e radiação axial são negligenciados ($Pe \gg 1$, dado o caráter turbulento do escoamento);
- Propriedades termofísicas do fluido são consideradas constantes;
- A parede do duto está submetida a uma temperatura constante (T_w);
- O fluido entra no duto com uma temperatura uniforme (T_e);

- Impermeabilidade e não-deslizamento nas paredes;
- Desprezando as forças de corpo;
- Gradiente de pressão uniforme na direção axial;
- O comprimento axial do canal/tubo é muito maior do que o seu comprimento radial;
- O fluido é considerado cinzento, que emite, absorve e não dispersa radiação.

O problema físico proposto no presente capítulo envolve a combinação da convecção forçada turbulenta com a radiação térmica. Em conformidade com o tratamento dado no capítulo anterior, para analisar o efeito da radiação, mais uma vez utiliza-se o *método dos momentos* para modelar a transferência radiativa. A formulação matemática para este problema, na forma adimensional, é escrita da seguinte forma:

Equação adimensional da energia

$$U(R) \frac{\partial \Theta(X, R)}{\partial X} = \frac{1}{R^m} \frac{\partial}{\partial R} \left[R^m E_h(R) \frac{\partial \Theta(X, R)}{\partial R} \right] + \frac{4\tau}{N} [G^*(X, R) - \Theta^4(X, R)] \quad (4.3a)$$

Equação adimensional da transferência radiativa

$$\frac{1}{R^m} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial G^*(X, R)}{\partial R} \right) = 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} [G^*(X, R) - \Theta^4(X, R)] \quad (4.3b)$$

Condições de contorno adimensionais

$$\frac{\partial \Theta(X, R)}{\partial R} = 0 ; \quad X > 0 \quad e \quad R = 0 \quad (4.3c)$$

$$\frac{\partial G^*(X, R)}{\partial R} = 0 ; \quad X > 0 \quad e \quad R = 0 \quad (4.3d)$$

$$\Theta(X, R) = \Theta_w = \frac{T_w}{T_e} ; \quad X > 0 \quad e \quad R = 1 \quad (4.3e)$$

$$\frac{\partial G^*(X, R)}{\partial R} = -\frac{3\xi_w \tau}{2(2 - \xi_w)} [G^*(X, R) - \Theta_w^4] ; \quad X > 0 \quad e \quad R = 1 \quad (4.3f)$$

Condições de entrada adimensionais

$$\Theta(X, R) = 1 ; \quad X = 0 \quad e \quad 0 < R < 1 \quad (4.3g)$$

$$\frac{\partial G^*(X, R)}{\partial X} = -\frac{3}{2} \frac{C \cdot \text{Re} \cdot \text{Pr}}{2^{(2-m)}} \cdot \tau [G^*(X, R) - 1] ; \quad X = 0 \quad e \quad 0 < R < 1 \quad (4.3h)$$

Para a análise do problema foram definidos os seguintes parâmetros adimensionais, dados pelas equações (4.3i-t):

$$X = \frac{2^{(4-2m)} \left(\frac{x}{D_h} \right)}{C \cdot \text{Re} \cdot \text{Pr}} ; \quad R = \frac{r}{r_0} ; \quad U(R) = \frac{u(r)}{u_{\max}} = \frac{u(r)}{C u_m} ; \quad C = \frac{u_{\max}}{u_m} ; \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} \quad (4.3i-m)$$

$$\text{Pr}_t = \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_h} ; \quad \text{Re} = \frac{D_h \cdot u_m}{\nu} ; \quad \Theta(X, R) = \frac{T(x, r)}{T_e} ; \quad E_h(R) = 1 + \frac{\varepsilon_h}{\alpha} = 1 + \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_t} \frac{\varepsilon_m}{\nu} \quad (4.3n-q)$$

$$G^*(X, R) = \frac{G(x, r)}{4\sigma T_e^4} ; \quad \tau = \kappa \cdot r_0 ; \quad N = \frac{k}{\sigma \cdot r_0 T_e^3} \quad (4.3r-t)$$

onde u_m é a velocidade média do escoamento, $u_{\max}$ é a velocidade máxima, C representa a relação entre a velocidade máxima e a velocidade média, Pr_t corresponde ao número de Prandtl turbulento, ε_m é a difusividade turbulenta dinâmica e ε_h representa a difusividade turbulenta térmica.

4.4. MODELOS DE TURBULÊNCIA

No presente estudo consideram-se diferentes modelos de turbulência, com diferentes formulações para a distribuição de velocidades e para a difusividade turbulenta dinâmica. Quatro situações são analisadas, baseadas em expressões analíticas propostas para o perfil universal de velocidade – “Lei da Parede” (Kestin e Richardson, 1963; Kakaç *et. al*, 2014 e Santos *et al.*, 2001).

1º Caso: O modelo de turbulência é o modelo completamente desenvolvido de duas camadas para a distribuição de velocidade em conjunto com o modelo de duas camadas para a difusividade turbulenta dinâmica, baseado nos trabalhos de Prandtl, 1910 e Taylor, 1916 (Schlichting, 1960).

A distribuição de velocidade turbulenta de duas camadas é dada por:

$$u^+ = y^+ ; \quad \text{para } 0 \leq y^+ \leq 11.5 , \text{ subcamada laminar} \quad (4.4a)$$

$$u^+ = 5.5 + 2.5 \ln(y^+) ; \quad \text{para } y^+ > 11.5 , \text{ núcleo turbulento} \quad (4.4b)$$

O modelo de duas camadas para a difusividade turbulenta dinâmica é dado por:

$$E_h(R) = 1 + \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_t} \left(\frac{\varepsilon_m}{\nu} \right) = 1 \quad ; \quad \text{para } 0 \leq y^+ \leq 11.5 \quad (4.4c)$$

$$E_h(R) = 1 + \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_t} \left(\frac{\varepsilon_m}{\nu} \right) = 1 + \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_t} (0.4y^+ - 1); \quad \text{para } y^+ > 11.5 \quad (4.4d)$$

2° Caso: O modelo de turbulência é o modelo completamente desenvolvido de três camadas para a distribuição de velocidade juntamente com o modelo de três camadas para a difusividade turbulenta dinâmica, baseado nos trabalhos de (Von Karman, 1939).

A distribuição de velocidade turbulenta de três camadas é dada por:

$$u^+ = y^+ \quad ; \quad \text{para } 0 \leq y^+ < 5 \text{ , subcamada laminar} \quad (4.4e)$$

$$u^+ = -3.05 + 5 \ln(y^+) \quad ; \quad \text{para } 5 \leq y^+ \leq 30 \text{ , subcamada amortecedora} \quad (4.4f)$$

$$u^+ = 5.5 + 2.5 \ln(y^+) \quad ; \quad \text{para } y^+ > 30 \text{ , núcleo turbulento} \quad (4.4g)$$

O modelo de três camadas para a difusividade turbulenta dinâmica é dado por:

$$E_h(R) = 1 + \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_t} \left(\frac{\varepsilon_m}{\nu} \right) = 1 \quad ; \quad \text{para } 0 \leq y^+ < 5 \quad (4.4h)$$

$$E_h(R) = 1 + \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_t} \left(\frac{\varepsilon_m}{\nu} \right) = 1 + \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_t} (0.2y^+ - 1); \quad \text{para } 5 \leq y^+ \leq 30 \quad (4.4i)$$

$$E_h(R) = 1 + \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_t} \left(\frac{\varepsilon_m}{\nu} \right) = 1 + \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_t} (0.4y^+ - 1); \quad \text{para } y^+ > 30 \quad (4.4j)$$

3° Caso: O modelo de turbulência é completamente desenvolvido de duas camadas para a distribuição de velocidade em conjunto com o modelo de duas camadas para a difusividade turbulenta dinâmica, baseado nos trabalhos de (Rannie, 1956).

A distribuição de velocidade turbulenta de duas camadas é dada por:

$$u^+ = 14.53 \tanh \left(\frac{y^+}{14.53} \right) \quad ; \quad \text{para } 0 \leq y^+ \leq 27.5 \text{ , subcamada laminar e amortecedora} \quad (4.4k)$$

$$u^+ = 5.5 + 2.5 \ln(y^+) \quad ; \quad \text{para } y^+ > 27.5 \text{ , núcleo turbulento} \quad (4.4l)$$

O modelo de duas camadas para a difusividade turbulenta dinâmica é dado por:

$$E_h(R) = 1 + \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_t} \left(\frac{\varepsilon_m}{\nu} \right) = 1 + \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_t} \left[\sinh^2 \left(\frac{y^+}{14.53} \right) \right]; \quad \text{para } 0 \leq y^+ \leq 27.5 \quad (4.4m)$$

$$E_h(R) = 1 + \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_t} \left(\frac{\varepsilon_m}{\nu} \right) = 1 + \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_t} (0.4y^+ - 1); \quad \text{para } y^+ > 27.5 \quad (4.4n)$$

4º Caso: O modelo de turbulência é o modelo completamente desenvolvido de três camadas para a distribuição de velocidade (Reichardt, 1951; Kays and Crawford, 1980), juntamente com o modelo de duas camadas para a difusividade turbulenta dinâmica (Reichardt, 1951 and Spalding, 1961).

A distribuição de velocidade turbulenta de três camadas é dada por:

$$u^+ = y^+ \quad ; \quad \text{para } 0 \leq y^+ < 5, \text{ subcamada laminar} \quad (4.4o)$$

$$u^+ = -3.05 + 5 \ln(y^+) \quad ; \quad \text{para } 5 \leq y^+ \leq 30, \text{ subcamada amortecedora} \quad (4.4p)$$

$$u^+ = 5.5 + 2.5 \ln \left[y^+ \frac{1.5(1+R)}{(1+2R^2)} \right]; \quad \text{para } y^+ > 30, \text{ núcleo turbulento} \quad (4.4q)$$

O modelo de duas camadas para a difusividade turbulenta dinâmica é dado por:

$$\frac{\varepsilon_m}{\nu} = \frac{k_2}{E} \left[e^{k_2 u^+} - 1 - k_2 u^+ - \frac{(k_2 u^+)^2}{2!} - \frac{(k_2 u^+)^3}{3!} \right]; \quad \text{para } y^+ < 40 \quad (4.4r)$$

$$\frac{\varepsilon_m}{\nu} = \frac{k_1 R^+}{6} (1 - R^2)(1 + 2R^2) \quad ; \quad \text{para } y^+ \geq 40 \quad (4.4s)$$

onde $k_1=0,4$; $k_2=0,407$ e $E=10$.

Vários grupos adimensionais foram incluídos nas equações (4.4a-s), onde são definidos da seguinte forma:

$$y^+ = (1-R)R^+; \quad R^+ = \frac{\text{Re}}{2^{(2-m)}} \sqrt{\frac{f}{8}}; \quad u^+ = \frac{u(r)}{u_m \sqrt{\frac{f}{8}}}; \quad f = \frac{4\tau_w}{\frac{\rho u_m^2}{2}} \quad (4.4t-w)$$

onde f é o fator de atrito. No presente trabalho utilizam-se correlações empíricas para quantificar o fator de atrito, baseadas nos trabalhos de (Filonenko, 1954; Dean, 1978; Bhatti e Shah, 1987).

A correlação de Filonenko, válida para tubo circular ou canal de placas paralelas, é dada por:

$$\frac{f}{4} = [1.58 \ln(\text{Re}) - 3.28]^{-2} ; \quad 1 \times 10^4 \leq \text{Re} \leq 1 \times 10^7 \quad (4.4x)$$

A correlação de Dean, válida para canal de placas paralelas, é dada por:

$$\frac{f}{4} = 0.073 \left(\frac{\text{Re}}{2} \right)^{-0.25} ; \quad 1.2 \times 10^4 \leq \text{Re} \leq 1.2 \times 10^6 \quad (4.4y)$$

A correlação de Bhatti e Shah, com validade para tubo circular ou canal de placas paralelas, é dada por:

$$\frac{f}{4} = 0.00128 + \frac{0.1143}{\text{Re}^{1/3.2154}} ; \quad 4 \times 10^3 \leq \text{Re} \leq 1 \times 10^7 \quad (4.4z)$$

4.5. APLICAÇÃO DE FILTROS MATEMÁTICOS

O problema original possui condições de contorno não homogêneas, dadas pelas equações (4.3e) e (4.3f). A fim de aplicar a GITT adequadamente, bem como melhorar a performance computacional, filtros matemáticos são introduzidos com o objetivo de homogeneizar estas condições de contorno. O filtro proposto para o campo da temperatura e para o campo da radiação será da forma:

$$\Theta(X, R) = \Theta^*(X, R) + \Theta_w \quad (4.5a)$$

$$G^*(X, R) = G^{**}(X, R) + \Theta_w^4 \quad (4.5b)$$

Após aplicação dos filtros supracitados, as equações adimensionais tornam-se:

Equação da energia

$$U(R) \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial X} = \frac{1}{R^m} \frac{\partial}{\partial R} \left[R^m E_h(R) \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial R} \right] + \frac{4\tau}{N} \left\{ G^{**}(X, R) + \Theta_w^4 - [\Theta^*(X, R) + \Theta_w]^4 \right\} \quad (4.5c)$$

Equação da transferência radiativa

$$\frac{1}{R^m} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial R} \right) = 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \left\{ G^{**}(X, R) + \Theta_w^4 - [\Theta^*(X, R) + \Theta_w]^4 \right\} \quad (4.5d)$$

Condições de contorno

$$\frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial R} = 0 ; \quad X > 0 \quad e \quad R = 0 \quad (4.5e)$$

$$\frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial R} = 0 ; \quad X > 0 \quad e \quad R = 0 \quad (4.5f)$$

$$\Theta^*(X, R) = 0 ; \quad X > 0 \quad e \quad R = 1 \quad (4.5g)$$

$$\frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial R} + \frac{3\xi_w \tau}{2(2 - \xi_w)} G^{**}(X, R) = 0 ; \quad X > 0 \quad e \quad R = 1 \quad (4.5h)$$

Condições de entrada

$$\Theta^*(X, R) = 1 - \Theta_w ; \quad X = 0 \quad e \quad 0 < R < 1 \quad (4.5i)$$

$$\frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial X} = -\frac{3}{2} \frac{C \cdot \text{Re} \cdot \text{Pr}}{2^{(2-m)}} \cdot \tau [G^{**}(X, R) + \Theta_w^4 - 1] ; \quad X = 0 \quad e \quad 0 < R < 1 \quad (4.5j)$$

A GITT será aplicada para obtenção da solução de $\Theta^*(X, R)$ e $G^{**}(X, R)$. De posse das mesmas, utilizar-se-á as equações (4.5a) e (4.5b) para encontrar a solução geral do problema físico proposto.

4.6. APLICAÇÃO DA GITT

Seguindo a metodologia da GITT é necessário estabelecer um problema auxiliar e um par transformada-inversa para cada campo analisado. A seguir, os problemas auxiliares e os pares transformada-inversa são apresentados, para o campo de temperatura e para o campo de radiação total.

4.6.1. PROBLEMA AUXILIAR PARA O CAMPO DE TEMPERATURA

O problema auxiliar escolhido para a determinação do campo de temperatura é escrito da seguinte forma:

$$\frac{1}{R^m} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m E_h(R) \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, R)}{\partial R} \right) + \mu_i^2 U(R) \Psi_i(\mu_i, R) = 0, \quad 0 < R < 1 \quad (4.6.1a)$$

$$\frac{\partial \Psi_i(\mu_i, R)}{\partial R} = 0 ; \quad R = 0 \quad (4.6.1b)$$

$$\Psi_i(\mu_i, R) = 0 ; \quad R = 1 \quad (4.6.1c)$$

Vários estudos apontam grandes dificuldades no cálculo dos autovalores no problema auxiliar mencionado, devido às limitações nos esquemas numéricos utilizados (Santos *et al.*, 2001 e Özisik *et al.*, 1989). A dificuldade reside essencialmente na discretização das funções $E_h(R)$ e $U(R)$, devido o modelo em camadas. Isso fez tardar o surgimento de soluções analíticas para o campo térmico no estudo da convecção forçada turbulenta. (Özisik *et al.*, 1989; Brown *et al.*, 1997 e Santos *et al.*, 2001) empregaram o método de contagem de sinais (Mikhailov e Vulchanov, 1983 e Mikhailov e Özisik, 1984) para contornar as dificuldades associadas ao problema do autovalor. (Cotta, 1993) desenvolveu um método usando a técnica de transformação integral, baseado nas idéias da técnica de transformada integral generalizada (GITT), que permite resolver problemas de autovalor com elevado grau de dificuldade. No presente trabalho utiliza-se o método da transformação integral para a determinação dos autovalores (μ_i), das autofunções, $\psi_i(\mu_i, R)$, e das normas (N_i), conforme descrito por (Cotta, 1993).

4.6.2. PROBLEMA AUXILIAR PARA O CAMPO DE RADIAÇÃO TOTAL

Para a determinação do campo de intensidade de radiação total foi escolhido o seguinte problema auxiliar:

$$\frac{1}{R^m} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \phi_i(\beta_i, R)}{\partial R} \right) + \beta_i^2 \phi_i(\beta_i, R) = 0 \quad ; \quad 0 < R < 1 \quad (4.6.2a)$$

$$\frac{\partial \phi_i(\beta_i, R)}{\partial R} = 0 \quad ; \quad R = 0 \quad (4.6.2b)$$

$$\frac{\partial \phi_i(\beta_i, R)}{\partial R} + \frac{3\xi_w \tau}{2(2 - \xi_w)} \phi_i(\beta_i, R) = 0 \quad ; \quad R = 1 \quad (4.6.2c)$$

O problema de autovalor mencionado possui solução analítica conforme descrito na seção 3.5.2. Para a resolução das equações transcendentais e conseqüente obtenção dos autovalores (β_i), utiliza-se a subrotina **FindRoot** do *Wolfram Mathematica 9.0*.

4.6.3. PAR TRANSFORMADA-INVERSA PARA O CAMPO DE TEMPERATURA

O par transformada-inversa do campo de temperatura, com base no problema auxiliar definido para o campo de temperatura (Eqs. 4.6.1a-c), e levando-se em conta a propriedade de ortogonalidade das autofunções, é dado por:

$$\bar{\Theta}_i(X) = \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 R^m U(R) \Psi_i(\mu_i, R) \Theta^*(X, R) dR, \quad \text{Transformada} \quad (4.6.3a)$$

$$\Theta^*(X, R) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \bar{\Theta}_i(X)}{N_i^{1/2}}, \quad \text{Inversa} \quad (4.6.3b)$$

4.6.4. PAR TRANSFORMADA-INVERSA PARA O CAMPO DE RADIAÇÃO TOTAL

O par transformada-inversa para o campo de intensidade de radiação total é definido como:

$$\bar{G}_i(X) = \frac{1}{K_i^{1/2}} \int_0^1 R^m \phi_i(\beta_i, R) G^{**}(X, R) dR, \quad \text{Transformada} \quad (4.6.4a)$$

$$G^{**}(X, R) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi_i(\beta_i, R) \bar{G}_i(X)}{K_i^{1/2}}, \quad \text{Inversa} \quad (4.6.4b)$$

4.6.5. TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES

Aplicando operadores integrais nas equações governantes do problema, dadas pelas equações (4.5c-j), com o auxílio dos problemas auxiliares e dos pares transformada-inversa predefinidos, pode-se transformar o sistema de equações originais num sistema de equações diferenciais ordinárias dado por:

Equação da energia transformada

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\Theta}_i(X)}{dX} + \mu_i^2 \bar{\Theta}_i(X) - \frac{4\tau}{N} \sum_{k=1}^{\infty} CT_{1_{ik}} \bar{G}_k(X) + \frac{4\tau}{N} \sum_{j=1}^{\infty} CT_{2_{ij}} \bar{\Theta}_j^4(X) + \\ + \frac{4\tau}{N} \sum_{j=1}^{\infty} CT_{3_{ij}} \bar{\Theta}_j^3(X) + \frac{4\tau}{N} \sum_{j=1}^{\infty} CT_{4_{ij}} \bar{\Theta}_j^2(X) + \frac{4\tau}{N} \sum_{j=1}^{\infty} CT_{5_{ij}} \bar{\Theta}_j(X) = 0 \end{aligned} \quad (4.6.5a)$$

Submetida à condição de entrada transformada:

$$\bar{\Theta}_i(X=0) = (1 - \Theta_w) \bar{f}_i \quad (4.6.5b)$$

Os coeficientes integrais gerados a partir do processo de transformação integral são definidos como:

$$CT_{1_{ik}} = \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \phi_k(\beta_k, R)}{N_i^{1/2} K_k^{1/2}} dR \quad CT_{2_{ij}} = \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j^4(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^2} dR \quad (4.6.5c-d)$$

$$CT\ 3_{ij} = \int_0^1 4\Theta_w R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)\Psi_j^3(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{3/2}} dR \quad CT\ 4_{ij} = \int_0^1 6\Theta_w^2 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)\Psi_j^2(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j} dR \quad (4.6.5e-f)$$

$$CT\ 5_{ij} = \int_0^1 4\Theta_w^3 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)\Psi_j(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR \quad \bar{f}_i = \int_0^1 R^m U(R) \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} dR \quad (4.6.5g-h)$$

Equação da transferência radiativa transformada

$$\left[\beta_i^2 + 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \right] \bar{G}_i(X) - 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} CR1_{ij} \bar{\Theta}_j^4(X) - 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} CR2_{ij} \bar{\Theta}_j^3(X) + \\ - 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} CR3_{ij} \bar{\Theta}_j^2(X) - 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} CR4_{ij} \bar{\Theta}_j(X) = 0 \quad (4.6.5i)$$

Submetida à condição de entrada transformada:

$$\left. \frac{d\bar{G}_i(X)}{dX} \right|_{X=0} + \frac{3}{2} \frac{C.Re.Pr.\tau}{2^{(2-m)}} \bar{G}_i(X) \Big|_{X=0} = -\frac{3}{2} \frac{C.Re.Pr.\tau}{2^{(2-m)}} [\Theta_w^4 - 1] \bar{g}_i \quad (4.6.5j)$$

Os coeficientes integrais gerados a partir do processo de transformação integral da ETR são definidos como:

$$CR1_{ij} = \int_0^1 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R)\Psi_j^4(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^2} dR \quad CR2_{ij} = \int_0^1 4\Theta_w R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R)\Psi_j^3(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^{3/2}} dR \quad (4.6.5k-l)$$

$$CR3_{ij} = \int_0^1 6\Theta_w^2 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R)\Psi_j^2(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j} dR \quad CR4_{ij} = \int_0^1 4\Theta_w^3 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R)\Psi_j(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR \quad (4.6.5m-n)$$

$$\bar{g}_i = \frac{1}{K_i^{1/2}} \int_0^1 R^m \phi_i(\beta_i, R) dR \quad (4.6.5o)$$

Maiores detalhes sobre o processo de transformação integral das equações governantes pode ser encontrado no Apêndice E.

4.7. CÁLCULO DE PARÂMETROS DE INTERESSE PRÁTICO

A partir das soluções dos problemas transformados, pode-se encontrar as soluções para $\Theta(X, R)$ e $G^*(X, R)$ combinando as equações (4.6.3b), (4.6.4b), (4.5a) e (4.5b). Uma vez conhecida a solução geral do problema físico proposto, torna-se possível calcular parâmetros de interesse práticos, tais como: temperatura média, número de Nusselt convectivo, Nusselt radiativo e Nusselt total, que são definidos, respectivamente, pelas expressões:

$$\Theta(X)_{média} = \frac{\int_0^1 R^m U(R) \Theta(X, R) dR}{\int_0^1 R^m U(R) dR} \quad (4.7a)$$

$$Nu_C(X) = -\frac{2(2-m)}{\Theta(X)_{média} - \Theta(X)_{parede}} \left. \frac{\partial \Theta(X, R)}{\partial R} \right|_{R=1} \quad (4.7b)$$

$$Nu_R(X) = -\frac{4}{3\tau \cdot N} \frac{2(2-m)}{[\Theta(X)_{média} - \Theta(X)_{parede}]} \left. \frac{\partial G^*(X, R)}{\partial R} \right|_{R=1} \quad (4.7c)$$

$$Nu_T(X) = Nu_C(X) + Nu_R(X) \quad (4.7d)$$

Para a avaliação do número de Nusselt convectivo assintótico e validação dos resultados obtidos no presente trabalho para o caso onde a radiação pode ser negligenciada, utiliza-se a expressão obtida por (Gnielinski, 1976) dada por:

$$Nu_{C\infty} = \frac{\left(\frac{f}{2}\right)(Re-1000)Pr}{1 + 12.7\left(\frac{f}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(Pr^{\frac{2}{3}} - 1\right)}, \quad \text{para} \quad \begin{matrix} 2.3 \times 10^3 \leq Re \leq 5 \times 10^6 \\ 0.5 \leq Pr \leq 2000 \end{matrix} \quad (4.7e)$$

Utiliza-se também, para investigação do número de Nusselt convectivo assintótico, a expressão obtida por (Prandtl, 1910 e Taylor, 1916) dada por:

$$Nu_{C\infty} = \frac{\left(\frac{f}{2}\right)Re Pr}{1 + 5\left(\frac{f}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(Pr-1)}, \quad \text{para} \quad \begin{matrix} 5 \times 10^3 \leq Re \leq 5 \times 10^6 \\ Pr \leq 10 \end{matrix} \quad (4.7f)$$

4.8. RESULTADOS OBTIDOS

O problema transformado foi resolvido por meio de código computacional escrito em linguagem de programação Fortran, utilizando o software **Fortran Powerstation 4.0**. Por se tratar de um problema de valor inicial, o código foi implementado através da subrotina DIVPAG, da biblioteca do IMSL, usando uma tolerância de 10^{-10} para determinar o erro automático na avaliação dos campos de temperatura e radiação. O software **Wolfram Mathematica 9.0**, através da subrotina NDSolve, também foi utilizado para validação dos resultados obtidos. Os

resultados são apresentados na forma de gráficos e tabelas, onde analisa-se a influência que a espessura óptica, o parâmetro condução-radiação, o número de Prandtl e o número de Reynolds exercem nos campos de temperatura e radiação, bem como nos números de Nusselt Total e Radiativo. Para todos os casos analisados no presente trabalho considera-se que $\beta/\kappa=1$. Para uma análise mais detalhada, o estudo também é avaliado no caso particular em que a radiação pode ser negligenciada ($N \rightarrow \infty$ ou $\tau \rightarrow 0$).

4.8.1 CASO DE PURA CONVECÇÃO TURBULENTA

Nesta seção discutir-se-á o caso de pura convecção turbulenta, que faz sentido fisicamente quando as temperaturas envolvidas no escoamento do fluido são relativamente baixas tornando o efeito da radiação térmica desprezível. A convecção forçada turbulenta na região de entrada térmica de dutos circulares e retangulares tem sido amplamente estudada, considerando vários modelos de turbulência e diversas condições de contorno. Nos trabalhos de (Sleicher *et al.*, 1970; Notter e Sleicher, 1971; Notter e Sleicher, 1972; Shibani e Özisik, 1977; Özisik *et al.*, 1989; Santos *et al.*, 1995; Brown *et al.*, 1997; Quaresma *et al.*, 2001) é possível fazer uma abrangente revisão acerca da convecção forçada turbulenta em desenvolvimento térmico e hidrodinamicamente desenvolvida, também abordada no presente estudo.

Para fins de *benchmarking* os resultados do presente trabalho foram confrontados com resultados encontrados na literatura especializada, mostrando a eficiência da GITT na resolução do problema físico proposto. A comparação é feita analisando os valores do número de Nusselt local convergido para situações com diferentes números de Reynolds e Prandtl. Para todos os gráficos e tabelas contidos nesta seção foram usados 200 autovalores e 200 autofunções correspondentes, o que garante uma boa convergência da solução ainda na região de entrada térmica. Em todas as simulações realizadas nesta seção considera-se que $\Theta_w = 0$.

Através das tabelas que seguem é possível comparar os valores do número de Nusselt local convergido obtidos no presente trabalho com os resultados encontrados nos trabalhos de (Prandtl, 1910; Taylor, 1916; Gnielinski, 1976; Özisik *et al.*, 1989 e Quaresma *et al.*, 2001). A análise é feita para os quatro modelos de turbulência estabelecidos, onde também é possível comparar os resultados entre si. O fator de atrito é computado com base em correlações empíricas, baseadas nos trabalhos de (Filonenko, 1954; Dean, 1978; Bhatti e Shah, 1987). Para todos os casos analisados no presente trabalho considera-se $Pr_t = 1$, analogamente aos estudos

feitos por (Özisik *et al.*, 1989 e Quaresma *et al.*, 2001). O recurso do balanço integral é utilizado para estimar a variação do número de Nusselt Local, até atingir o valor convergido. Em todos os casos apresentados pode-se verificar uma boa concordância, validando o presente estudo.

Tabela 4.1 - Nusselt local convergido considerando diferentes números de Reynolds e Prandtl para o escoamento turbulento entre placas planas, negligenciando o efeito radiativo.

Placas planas - $Pr_t = 1$								
$Pr = 0.72$			$Pr = 1$			$Pr = 2$		
$Re = 1.10^4$	$Re = 5.10^4$	$Re = 1.10^5$	$Re = 1.10^4$	$Re = 5.10^4$	$Re = 1.10^5$	$Re = 1.10^4$	$Re = 5.10^4$	$Re = 1.10^5$
38.31 ^a	123.91 ^a	211.26 ^a	41.69 ^a	141.75 ^a	247.16 ^a	47.58 ^a	177.16 ^a	326.20 ^a
38.17 ^b	123.82 ^b	210.54 ^b	41.52 ^b	141.64 ^b	246.27 ^b	47.37 ^b	177.03 ^b	324.86 ^b
39.87 ^c	129.41 ^c	219.26 ^c	43.46 ^c	148.23 ^c	257.14 ^c	49.77 ^c	185.74 ^c	341.14 ^c
36.34 ^d	116.95 ^d	198.48 ^d	41.52 ^d	138.27 ^d	237.67 ^d	54.51 ^d	192.93 ^d	339.83 ^d
36.20 ^e	116.87 ^e	197.85 ^e	41.36 ^e	138.16 ^e	236.88 ^e	54.29 ^e	192.79 ^e	338.66 ^e
37.81 ^f	122.17 ^f	205.62 ^f	43.25 ^f	144.58 ^f	246.40 ^f	56.93 ^f	202.15 ^f	352.90 ^f
36.25 ^g	116.89 ^g	198.10 ^g	41.01 ^g	137.03 ^g	235.21 ^g	53.47 ^g	189.67 ^g	332.87 ^g
36.12 ^h	116.81 ^h	197.46 ^h	40.85 ^h	136.93 ^h	234.44 ^h	53.25 ^h	189.52 ^h	331.73 ^h
37.73 ⁱ	122.10 ⁱ	205.21 ⁱ	42.74 ⁱ	143.30 ⁱ	243.85 ⁱ	55.86 ⁱ	198.73 ⁱ	345.56 ⁱ
32.63 ^j	102.43 ^j	174.29 ^j	37.36 ^j	121.95 ^j	209.96 ^j	49.03 ^j	171.32 ^j	301.43 ^j
32.52 ^k	102.36 ^k	173.72 ^k	37.22 ^k	121.86 ^k	209.26 ^k	48.84 ^k	171.19 ^k	300.39 ^k
33.87 ^l	107.01 ^l	180.62 ^l	38.85 ^l	127.54 ^l	217.73 ^l	51.15 ^l	179.51 ^l	312.99 ^l
32.49 ^m	101.00 ^m	171.69 ^m	37.19 ^m	120.21 ^m	206.74 ^m	-----	-----	-----
30.24 ⁿ	105.97 ⁿ	181.85 ⁿ	35.41 ⁿ	128.37 ⁿ	222.65 ⁿ	48.25 ⁿ	185.79 ⁿ	328.93 ⁿ
29.93 ^o	105.78 ^o	180.40 ^o	35.09 ^o	128.15 ^o	220.99 ^o	47.87 ^o	185.52 ^o	326.80 ^o
33.67 ^p	118.33 ^p	198.48 ^p	39.07 ^p	142.23 ^p	241.65 ^p	52.38 ^p	202.91 ^p	353.14 ^p
31.06 ^q	101.59 ^q	173.44 ^q	39.35 ^q	130.99 ^q	224.90 ^q	59.91 ^q	208.59 ^q	363.59 ^q
30.76 ^r	101.41 ^r	172.10 ^r	38.98 ^r	130.76 ^r	223.22 ^r	59.42 ^r	208.27 ^r	361.13 ^r
34.43 ^s	113.02 ^s	188.80 ^s	43.41 ^s	145.14 ^s	244.09 ^s	65.30 ^s	228.67 ^s	391.48 ^s
32.49 ^t	101.00 ^t	171.70 ^t	37.19 ^t	120.20 ^t	206.70 ^t	-----	-----	-----

^a – Presente trabalho: Nusselt com fator de fricção de Filonenko (Modelo 1)

^b – Presente trabalho: Nusselt com fator de fricção de Shah e Bhatti (Modelo 1)

^c – Presente trabalho: Nusselt com fator de fricção de Dean (Modelo 1)

^d – Presente trabalho: Nusselt com fator de fricção de Filonenko (Modelo 2)

^e – Presente trabalho: Nusselt com fator de fricção de Shah e Bhatti (Modelo 2)

^f – Presente trabalho: Nusselt com fator de fricção de Dean (Modelo 2)

^g – Presente trabalho: Nusselt com fator de fricção de Filonenko (Modelo 3)

^h – Presente trabalho: Nusselt com fator de fricção de Shah e Bhatti (Modelo 3)

ⁱ – Presente trabalho: Nusselt com fator de fricção de Dean (Modelo 3)

^j – Presente trabalho: Nusselt com fator de fricção de Filonenko (Modelo 4)

^k – Presente trabalho: Nusselt com fator de fricção de Shah e Bhatti (Modelo 4)

^l – Presente trabalho: Nusselt com fator de fricção de Dean (Modelo 4)

^m – Özisik *et al.*, 1989

ⁿ – Correlação empírica de Gnielinsk com fator de fricção de Filonenko

^o – Correlação empírica de Gnielinsk com fator de fricção de Shah e Bhatti

^p – Correlação empírica de Gnielinsk com fator de fricção de Dean

^q – Correlação empírica de Taylor com fator de fricção de Filonenko

^r – Correlação empírica de Taylor com fator de fricção de Shah e Bhatti

^s – Correlação empírica de Taylor com fator de fricção de Dean

^t – Quaresma *et al.*, 2001

Tabela 4.2 - Nusselt local convergido considerando diferentes números de Reynolds e Prandtl para o escoamento turbulento no interior de um tubo circular, negligenciando o efeito radiativo.

Tubo circular - $Pr_t = 1$								
$Pr = 0.72$			$Pr = 1$			$Pr = 2$		
$Re = 1.10^4$	$Re = 5.10^4$	$Re = 1.10^5$	$Re = 1.10^4$	$Re = 5.10^4$	$Re = 1.10^5$	$Re = 1.10^4$	$Re = 5.10^4$	$Re = 1.10^5$
34.68 ^a	116.63 ^a	201.56 ^a	38.48 ^a	136.46 ^a	241.81 ^a	45.41 ^a	180.15 ^a	346.03 ^a
34.55 ^b	116.54 ^b	200.85 ^b	38.33 ^b	136.35 ^b	240.87 ^b	45.21 ^b	179.99 ^b	344.22 ^b
32.67 ^c	108.85 ^c	187.52 ^c	37.87 ^c	130.09 ^c	228.14 ^c	51.00 ^c	185.40 ^c	345.30 ^c
32.54 ^d	108.77 ^d	186.88 ^d	37.72 ^d	129.99 ^d	227.33 ^d	50.79 ^d	185.25 ^d	343.86 ^d
32.69 ^e	108.67 ^e	185.62 ^e	37.52 ^e	128.74 ^e	222.49 ^e	50.12 ^e	181.44 ^e	322.98 ^e
32.56 ^f	108.59 ^f	185.01 ^f	37.37 ^f	128.65 ^f	221.75 ^f	49.91 ^f	181.29 ^f	321.80 ^f
29.48 ^g	98.01 ^g	168.47 ^g	34.28 ^g	117.51 ^g	204.28 ^g	46.14 ^g	167.06 ^g	300.40 ^g
29.37 ^h	97.94 ^h	167.92 ^h	34.14 ^h	117.42 ^h	203.58 ^h	45.94 ^h	166.93 ^h	299.25 ^h
30.24 ⁱ	105.97 ⁱ	181.85 ⁱ	35.41 ⁱ	128.37 ⁱ	222.65 ⁱ	48.25 ⁱ	185.79 ⁱ	328.93 ⁱ
29.93 ^j	105.78 ^j	180.40 ^j	35.09 ^j	128.15 ^j	220.99 ^j	47.87 ^j	185.52 ^j	326.80 ^j
31.06 ^k	101.59 ^k	173.44 ^k	39.35 ^k	130.99 ^k	224.90 ^k	59.91 ^k	208.59 ^k	363.59 ^k
30.76 ^l	101.41 ^l	172.10 ^l	38.98 ^l	130.76 ^l	223.22 ^l	59.42 ^l	208.27 ^l	361.13 ^l
28.96 ^m	95.58 ^m	164.20 ^m	33.65 ^m	114.50 ^m	198.70 ^m	-----	-----	-----

^a – Presente trabalho: Nusselt com fator de fricção de Filonenko (Modelo 1)

^b – Presente trabalho: Nusselt com fator de fricção de Shah e Bhatti (Modelo 1)

^c – Presente trabalho: Nusselt com fator de fricção de Filonenko (Modelo 2)

^d – Presente trabalho: Nusselt com fator de fricção de Shah e Bhatti (Modelo 2)

^e – Presente trabalho: Nusselt com fator de fricção de Filonenko (Modelo 3)

^f – Presente trabalho: Nusselt com fator de fricção de Shah e Bhatti (Modelo 3)

^g – Presente trabalho: Nusselt com fator de fricção de Filonenko (Modelo 4)

^h – Presente trabalho: Nusselt com fator de fricção de Shah e Bhatti (Modelo 4)

ⁱ – Correlação empírica de Gnielinsk com fator de fricção de Filonenko

^j – Correlação empírica de Gnielinsk com fator de fricção de Shah e Bhatti

^k – Correlação empírica de Taylor com fator de fricção de Filonenko

^l – Correlação empírica de Taylor com fator de fricção de Shah e Bhatti

^m – Quaresma *et al.*, 2001

A avaliação do número de Nusselt convectivo assume grande importância neste estudo, uma vez que o mesmo quantifica, para um fluido, a razão entre a transferência de calor por convecção e a transferência de calor por condução. Além disso, o número de Nusselt convectivo é uma grandeza bastante utilizada para a determinação do coeficiente de transferência de calor por convecção, também denominado de coeficiente de película (h), que exprime a potência térmica do fluido por unidades de área e temperatura.

As tabelas 4.1 e 4.2 mostram a notável influência que os números de Reynolds e Prandtl exercem na predição do número de Nusselt convectivo assintótico. Para um número específico de Reynolds, um aumento no número de Prandtl leva a um aumento no número de Nusselt assintótico. Esse comportamento também ocorre com o aumento do número de Reynolds, mantendo-se o mesmo número de Prandtl. Na comparação da geometria retangular e circular é possível verificar que, geralmente, o número de Nusselt assintótico assume valores menores na geometria circular.

4.8.1.1. AVALIAÇÃO DO NÚMERO DE NUSSELT LOCAL

Nesta seção avalia-se a influência que os números de Prandtl e Reynolds, fator de fricção, modelos de turbulência e geometria exercem na variação do número de Nusselt local. Para início de análise, conforme ilustrado nas figuras 4.2 - 4.7, considera-se o fator de fricção de Filonenko, valores especificados para o número de Reynolds (1.10^4 , 5.10^4 e 1.10^5), valores estabelecidos para o número de Prandtl (0.72, 1 e 2), avaliando o efeito que os modelos de turbulência e geometria exercem sobre a distribuição do número de Nusselt convectivo.

(Legenda das figuras 4.2 – 4.7)

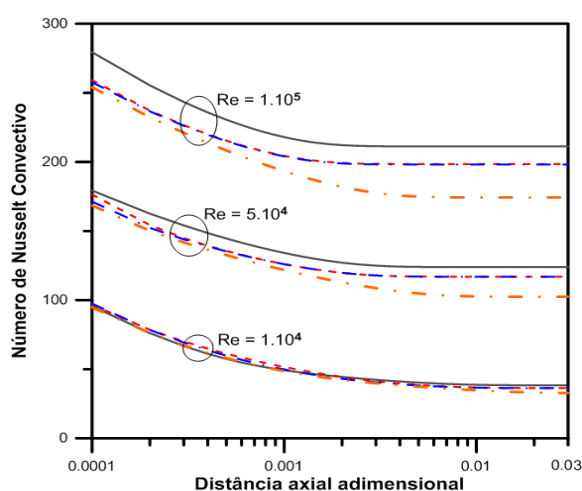
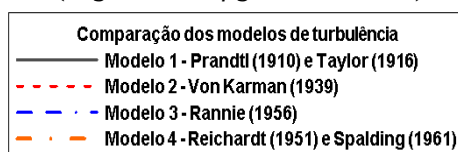


Figura 4.2 – Número de Nusselt local para o caso de pura convecção turbulenta, considerando $Pr = 0.72$ e o fator de fricção de Filonenko (placas planas).

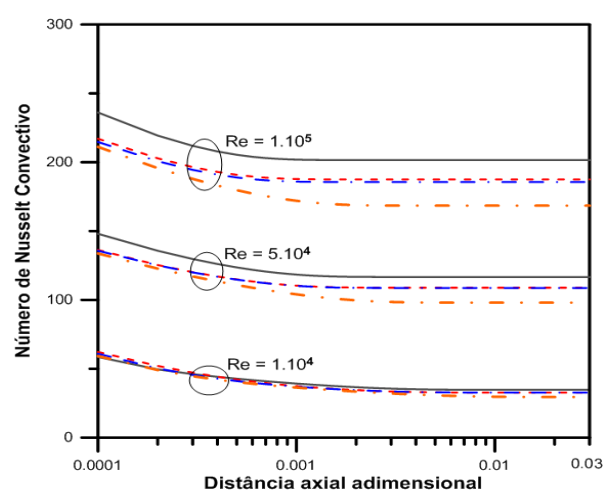


Figura 4.3 – Número de Nusselt local para o caso de pura convecção turbulenta, considerando $Pr = 0.72$ e o fator de fricção de Filonenko (tubo circular).

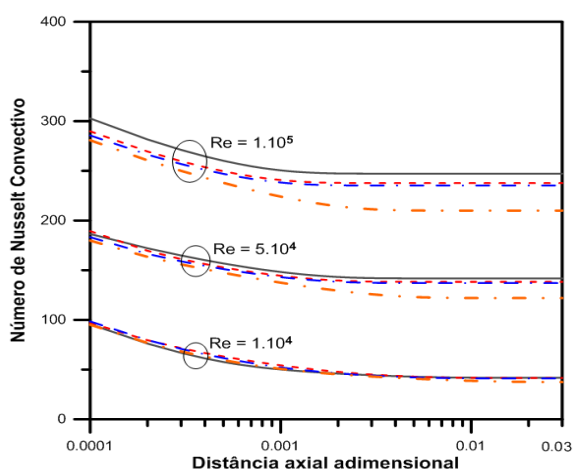


Figura 4.4 – Número de Nusselt local para o caso de pura convecção turbulenta, considerando $Pr = 1$ e o fator de fricção de Filonenko (placas planas).

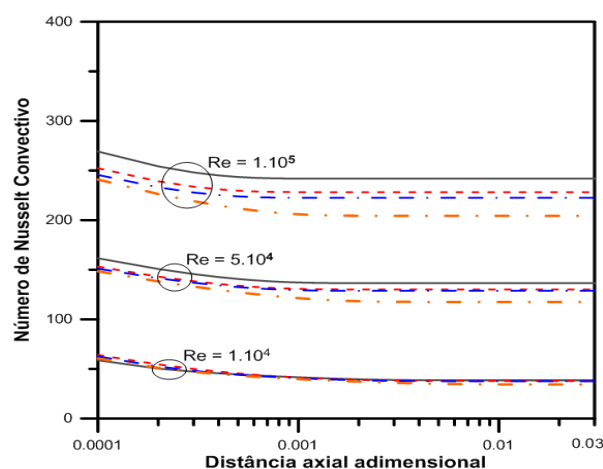


Figura 4.5 – Número de Nusselt local para o caso de pura convecção turbulenta, considerando $Pr = 1$ e o fator de fricção de Filonenko (tubo circular).

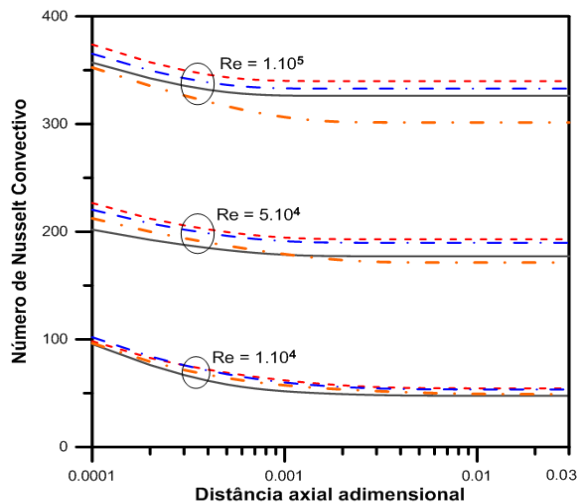


Figura 4.6 – Número de Nusselt local para o caso de pura convecção turbulenta, considerando $Pr = 2$ e o fator de fricção de Filonenko (placas planas).

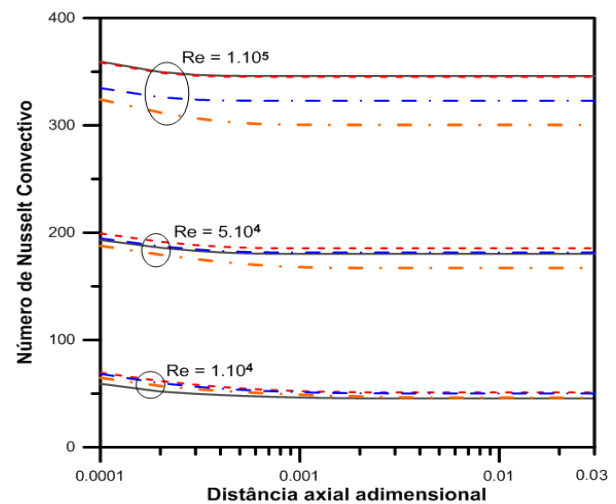


Figura 4.7 – Número de Nusselt local para o caso de pura convecção turbulenta, considerando $Pr = 2$ e o fator de fricção de Filonenko (tubo circular).

Através das figuras 4.2 – 4.7 pode-se verificar que resultados diferentes são encontrados para cada modelo de turbulência considerado. Também é possível perceber a notável influência da geometria sobre o desenvolvimento do número de Nusselt convectivo ao longo da distância axial adimensional. Os modelos de turbulência 2 e 3 sempre reproduzem resultados bem próximos, exceto para o caso apresentado na figura 4.7. Os resultados, para os diferentes modelos de turbulência, para todos os casos investigados, se mostram mais aproximados para o caso em que $Re = 1.10^4$ tanto na geometria retangular como circular. As diferenças entre os resultados aumentam conforme o aumento do número de Reynolds. Em geral o número de Nusselt convectivo assume valores menores na geometria circular, desde a região de entrada térmica.

A seguir, nas figuras 4.8 – 4.15, é possível avaliar o efeito do fator de fricção sobre a distribuição do número de Nusselt local. As correlações empíricas do fator de fricção estabelecidas por Filonenko, Shah e Dean são adotadas, permitindo a verificação da solução em função do uso destas expressões. Para esta análise foi estabelecido $Pr=1$ e Re assumindo os valores 1.10^4 , 5.10^4 e 1.10^5 . Os resultados para os quatro modelos de turbulência estabelecidos, considerando as geometrias retangulares e circulares, são apresentados a seguir.

(Legenda das figuras 4.8 – 4.15)

Comparação dos fatores de fricção	
—	Fator de Filonenko (1954)
- - -	Fator de Bhatti e Shah (1987)
- . -	Fator de Dean (1978)

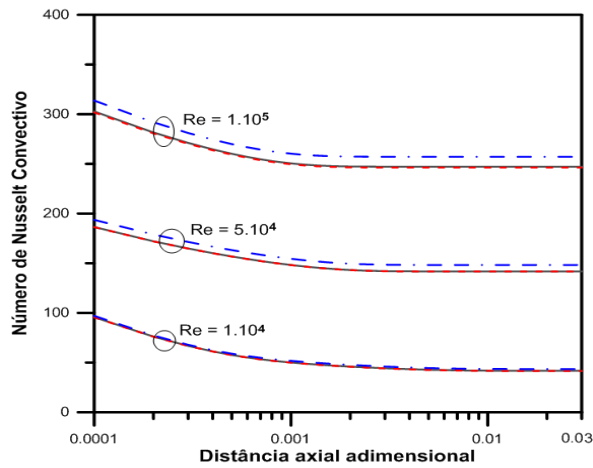


Figura 4.8 – Número de Nusselt local para o caso de pura convecção turbulenta, considerando $Pr = 1$ e modelo de turbulência de Prandtl e Taylor (placas planas).

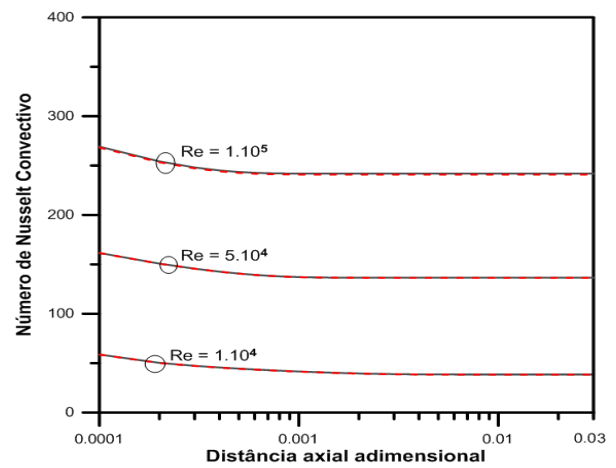


Figura 4.9 – Número de Nusselt local para o caso de pura convecção turbulenta, considerando $Pr = 1$ e modelo de turbulência de Prandtl e Taylor (tubo circular).

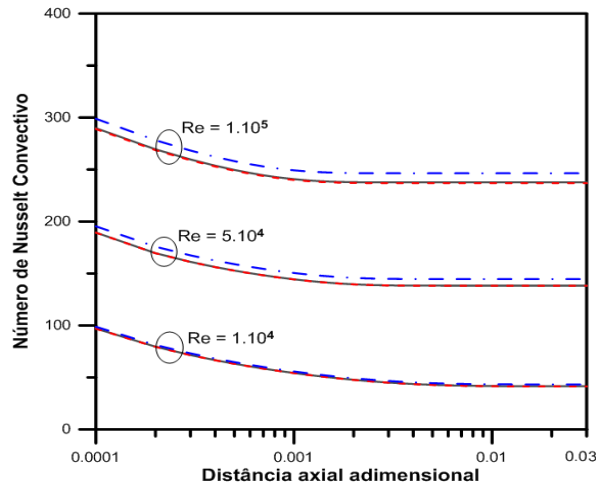


Figura 4.10 – Número de Nusselt local para o caso de pura convecção turbulenta, considerando $Pr = 1$ e modelo de turbulência de Von Karman (placas planas).

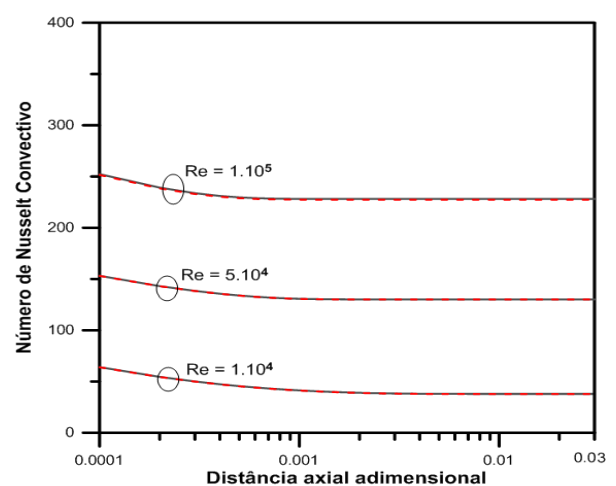


Figura 4.11 – Número de Nusselt local para o caso de pura convecção turbulenta, considerando $Pr = 1$ e modelo de turbulência de Von Karman (tubo circular).

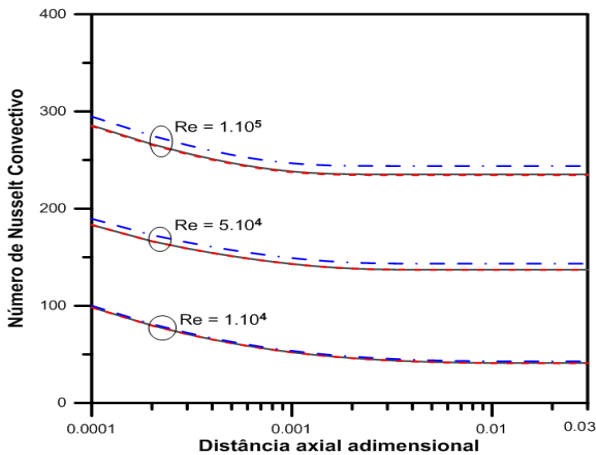


Figura 4.12 – Número de Nusselt local para o caso de pura convecção turbulenta, considerando $Pr = 1$ e modelo de turbulência de Rannie (placas planas).

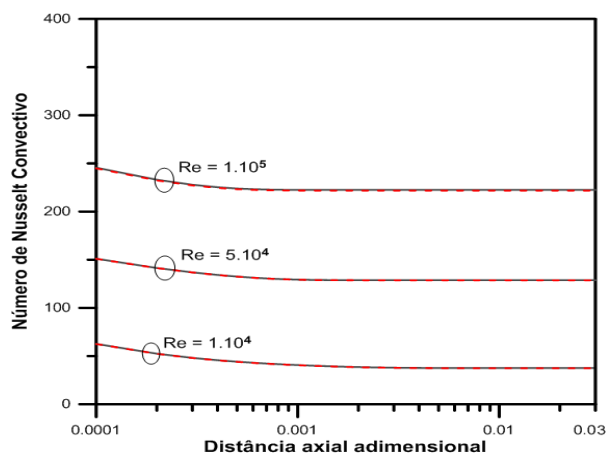


Figura 4.13 – Número de Nusselt local para o caso de pura convecção turbulenta, considerando $Pr = 1$ e modelo de turbulência de Rannie (tubo circular).

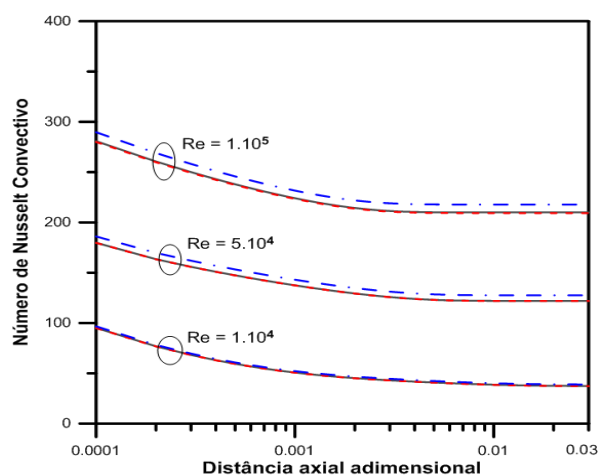


Figura 4.14 – Número de Nusselt local para o caso de pura convecção turbulenta, considerando $Pr = 1$ e modelo de turbulência de Reichardt e Spalding (placas planas).

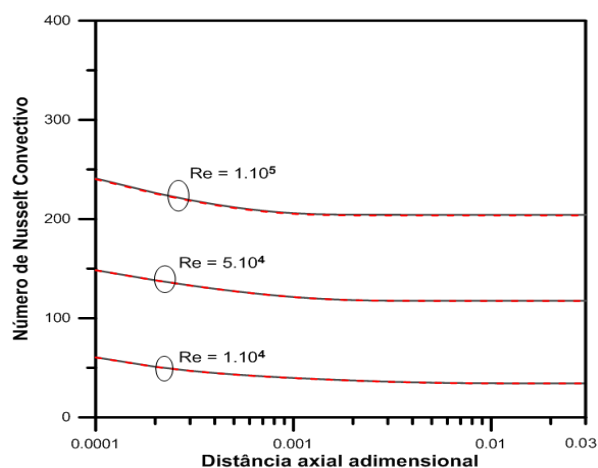


Figura 4.15 – Número de Nusselt local para o caso de pura convecção turbulenta, considerando $Pr = 1$ e modelo de turbulência de Reichardt e Spalding (tubo circular).

Através das figuras 4.8 – 4.15 pode-se verificar a interferência da escolha da correlação do fator de atrito na distribuição do número de Nusselt convectivo. Em todas as situações analisadas, os fatores de fricção de Filonenko e Bhatti-Shah mostram-se aproximados. O uso do fator de Dean atribui ligeira mudança nos resultados obtidos em relação aos outros fatores de fricção, assumindo valores superiores exceto para o caso em que $Re = 1.10^4$. Pode-se concluir, através da observação destas figuras, ao menos graficamente, que a escolha do fator de fricção não interfere de forma significativa na distribuição do número de Nusselt convectivo, pois os resultados mostram-se com boa aproximação em todos os casos investigados.

4.8.1.2. AVALIAÇÃO DO CAMPO DE TEMPERATURA

Neste ponto, o escopo volta-se a influência que os números de Prandtl e Reynolds, fator de fricção, modelos de turbulência e geometria exercem no campo de temperatura. Para que essa análise seja feita de forma sistemática, uma vez que o problema apresenta muitos parâmetros que interferem diretamente na solução, alguns parâmetros serão fixados e analisar-se-á a influência da variação dos demais. Para início das investigações considera-se $Pr = 1$, o fator de fricção de Filonenko, $Re = 1.10^4$, analisando-se o campo de temperatura para os diferentes modelos de turbulência e para as diferentes geometrias consideradas, conforme ilustrado nas figuras 4.16 – 4.23, apresentadas a seguir.

A partir da observação das figuras 4.16 – 4.23 é possível analisar a influência da geometria e dos modelos de turbulência sobre o desenvolvimento do campo térmico.

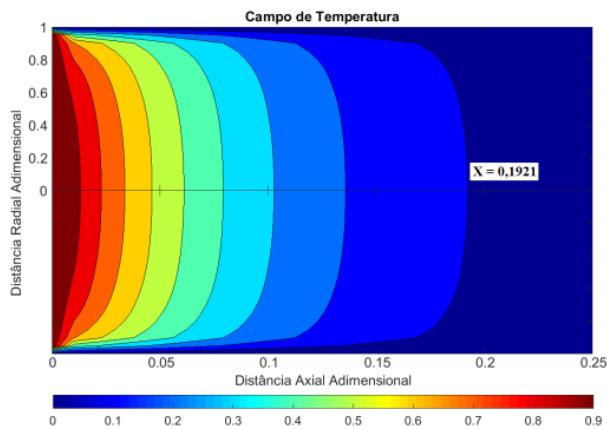


Figura 4.16 – Campo de temperatura para o escoamento turbulento entre placas planas, considerando $Pr = 1$, $Re = 1.10^4$, fator de atrito de Filonenko e modelo 1 de turbulência.

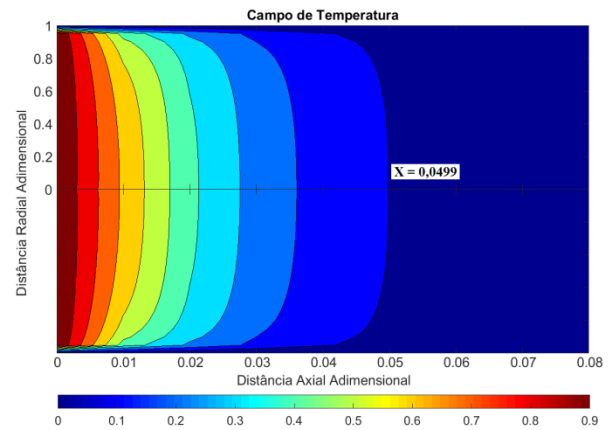


Figura 4.17 – Campo de temperatura para o escoamento turbulento no interior de um tubo circular, considerando $Pr = 1$, $Re = 1.10^4$, fator de atrito de Filonenko e modelo 1 de turbulência.

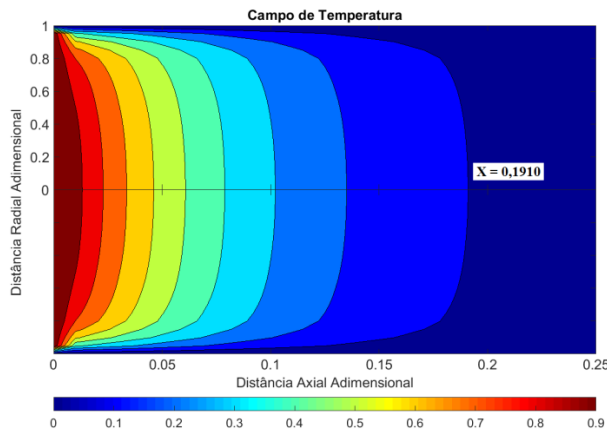


Figura 4.18 – Campo de temperatura para o escoamento turbulento entre placas planas, considerando $Pr = 1$, $Re = 1.10^4$, fator de atrito de Filonenko e modelo 2 de turbulência.

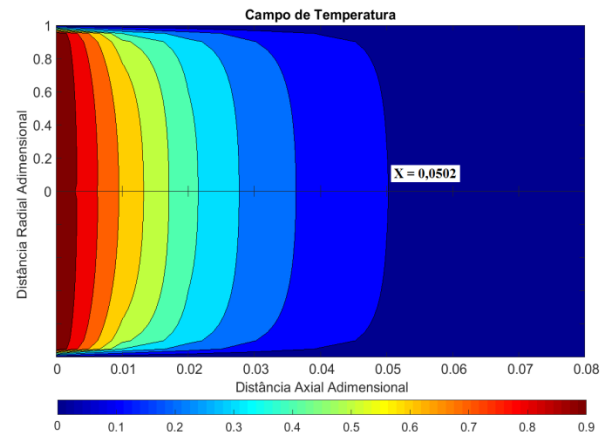


Figura 4.19 – Campo de temperatura para o escoamento turbulento no interior de um tubo circular, considerando $Pr = 1$, $Re = 1.10^4$, fator de atrito de Filonenko e modelo 2 de turbulência.

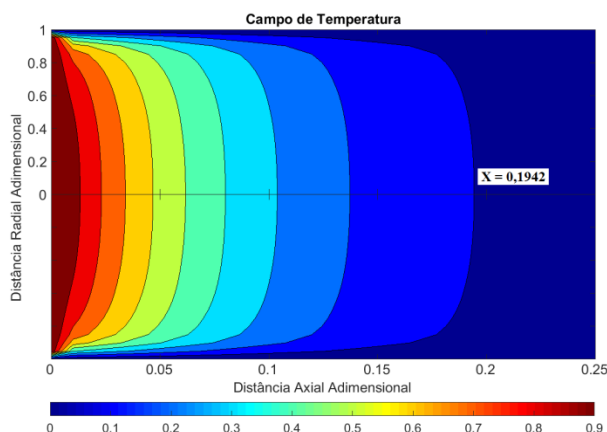


Figura 4.20 – Campo de temperatura para o escoamento turbulento entre placas planas, considerando $Pr = 1$, $Re = 1.10^4$, fator de atrito de Filonenko e modelo 3 de turbulência.

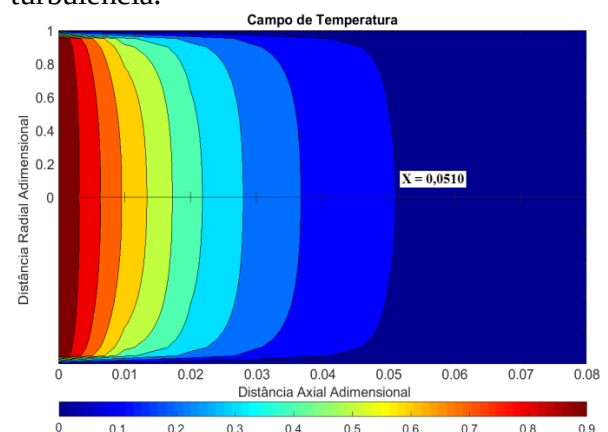


Figura 4.21 – Campo de temperatura para o escoamento turbulento no interior de um tubo circular, considerando $Pr = 1$, $Re = 1.10^4$, fator de atrito de Filonenko e modelo 3 de turbulência.

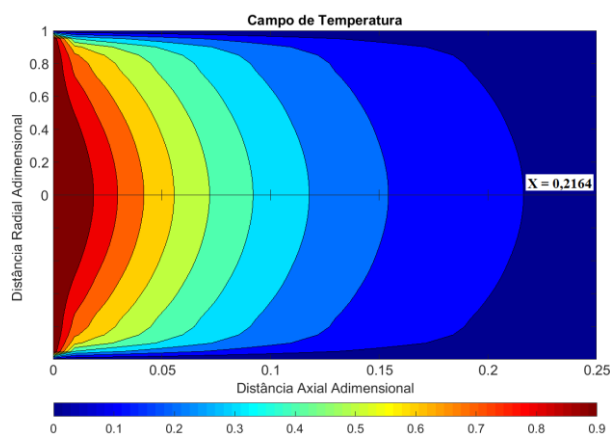


Figura 4.22 – Campo de temperatura para o escoamento turbulento entre placas planas, considerando $Pr = 1$, $Re = 1.10^4$, fator de atrito de Filonenko e modelo 4 de turbulência.

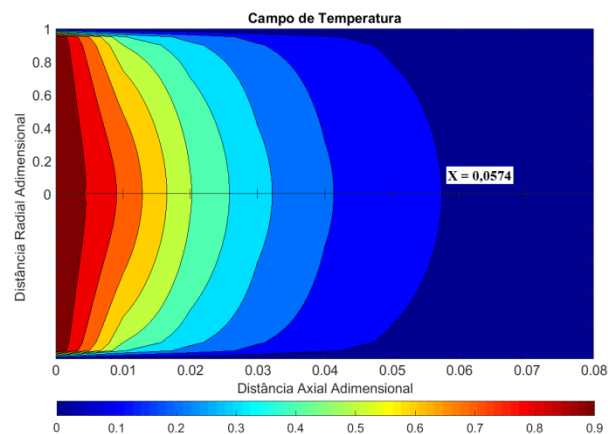


Figura 4.23 – Campo de temperatura para o escoamento turbulento no interior de um tubo circular, considerando $Pr = 1$, $Re = 1.10^4$, fator de atrito de Filonenko e modelo 4 de turbulência.

Através das figuras 4.16 – 4.23 é possível observar que para cada modelo de turbulência corresponde um comprimento de entrada térmica, sendo encontrado valores distintos mas com boas aproximações. Os resultados obtidos para o escoamento turbulento entre placas planas variam entre 0,1910 – 0,2164 e os resultados para o escoamento turbulento no interior de um tubo circular variam em torno de 0,0499 – 0,0574. Essa diferença era esperada, uma vez que, conforme já discutido, os resultados obtidos variam a cada modelo de turbulência considerado. A mesma observação também permite concluir que a distância axial que caracteriza o desenvolvimento térmico é sempre maior no duto que possui seção transversal retangular, de forma oposta ao ocorrido e discutido nos resultados obtidos do capítulo anterior (caso laminar).

Analisa-se agora, em comparação com os resultados apresentados anteriormente, a influência do número de Reynolds sobre o desenvolvimento do campo de temperatura. Para esta investigação, conforme ilustrado nas figuras 4.24 – 4.27, considera-se $Pr=1$, o fator de fricção de Filonenko, $Re = 1.10^5$, analisando-se o campo térmico para os diferentes modelos de turbulência no escoamento no interior de em um duto de seção retangular.

Por meio das figuras 4.24 – 4.27, é possível observar, mais uma vez, a influência dos modelos de turbulência sobre os resultados obtidos para o comprimento adimensional de entrada térmica. Os resultados apresentados variam em torno de 0,0347 – 0,0407. Portanto, em comparação com os resultados apresentados nas figuras 4.16, 4.18, 4.20 e 4.22, é possível concluir que o aumento do número de Reynolds produz uma elevação nas taxas de transferência de calor fazendo com que o comprimento axial de desenvolvimento térmico seja reduzido.

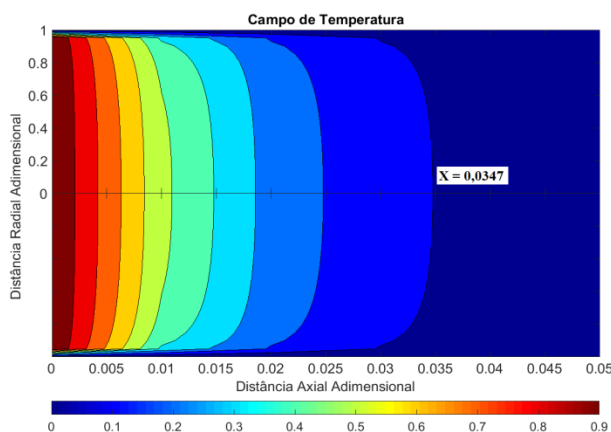


Figura 4.24 – Campo de temperatura para o escoamento turbulento entre placas planas, considerando $Pr = 1$, $Re = 1.10^5$, fator de atrito de Filonenko e modelo 1 de turbulência.

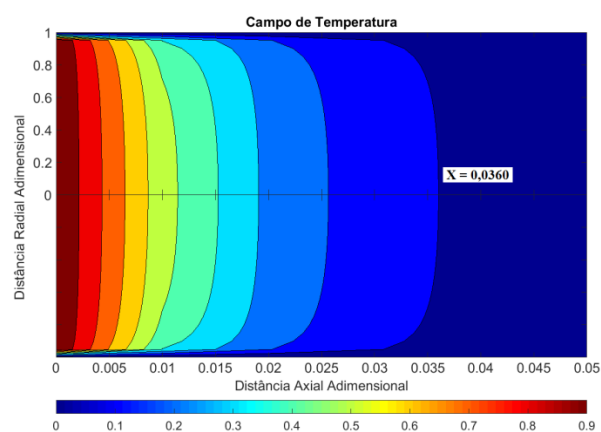


Figura 4.25 – Campo de temperatura para o escoamento turbulento entre placas planas, considerando $Pr = 1$, $Re = 1.10^5$, fator de atrito de Filonenko e modelo 2 de turbulência.

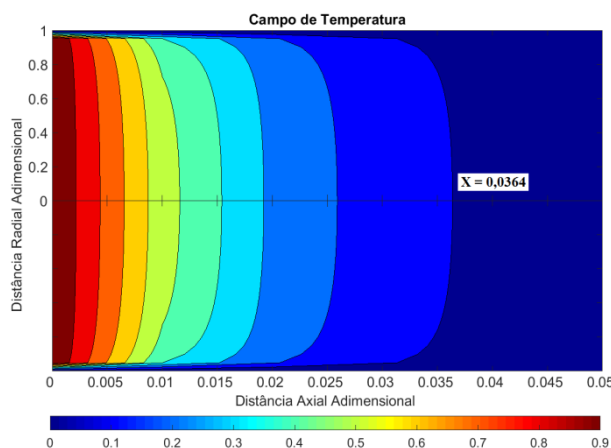


Figura 4.26 – Campo de temperatura para o escoamento turbulento entre placas planas, considerando $Pr = 1$, $Re = 1.10^5$, fator de atrito de Filonenko e modelo 3 de turbulência.

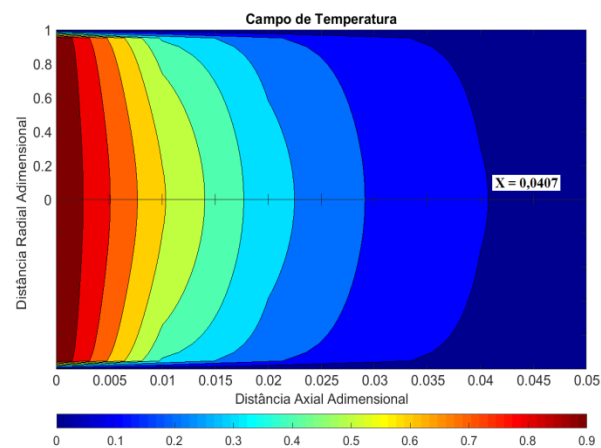


Figura 4.27 – Campo de temperatura para o escoamento turbulento entre placas planas, considerando $Pr = 1$, $Re = 1.10^5$, fator de atrito de Filonenko e modelo 4 de turbulência.

A influência do número de Prandtl é investigada a partir deste ponto. A análise é feita comparando-se os resultados apresentados nas figuras 4.28 – 4.31 com os resultados apresentados anteriormente. A seguir, conforme ilustrado nas figuras 4.28 – 4.31, considera-se $Pr = 0.72$, o fator de fricção de Filonenko, $Re = 1.10^4$ e analisa-se o desenvolvimento do campo de temperatura para os diferentes modelos de turbulência em um duto de seção retangular.

Por meio das figuras 4.28 – 4.31, logo abaixo, é possível observar, mais uma vez, os diferentes resultados obtidos para o comprimento adimensional de entrada térmica na consideração dos diferentes modelos de turbulência. Os resultados variam em torno de 0,2100 – 0,2492. Em comparação com os resultados apresentados nas figuras 4.16, 4.18, 4.20 e 4.22 é possível concluir que para uma mesma geometria um aumento no número Prandtl indica que maiores taxas de transferência de calor são envolvidas. Portanto, menores comprimentos de

entrada são necessários, de modo que a transferência de calor atinge uma região térmica totalmente desenvolvida mais rapidamente.

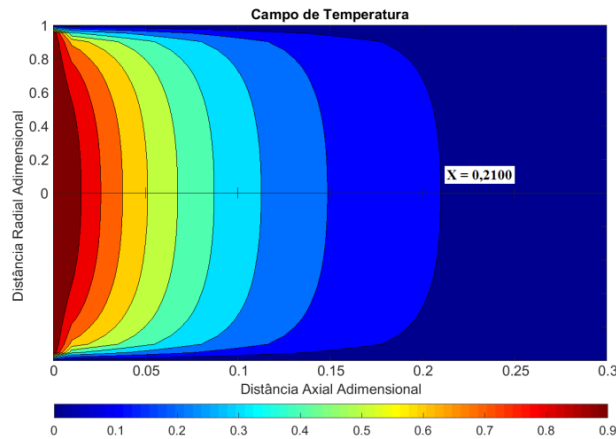


Figura 4.28 – Campo de temperatura para o escoamento turbulento entre placas planas, considerando $Pr = 0.72$, $Re = 1.10^4$, fator de atrito de Filonenko e modelo 1 de turbulência.

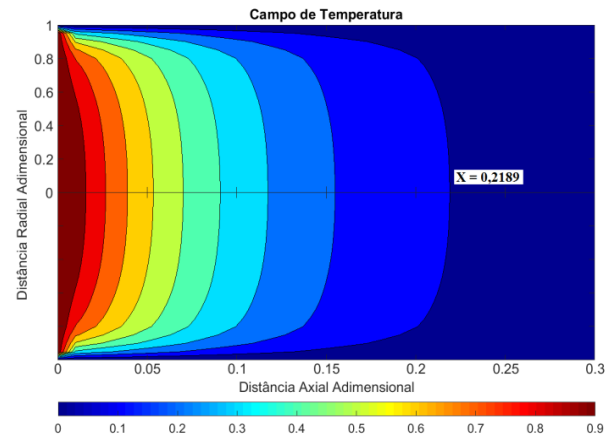


Figura 4.29 – Campo de temperatura para o escoamento turbulento entre placas planas, considerando $Pr = 0.72$, $Re = 1.10^4$, fator de atrito de Filonenko e modelo 2 de turbulência.

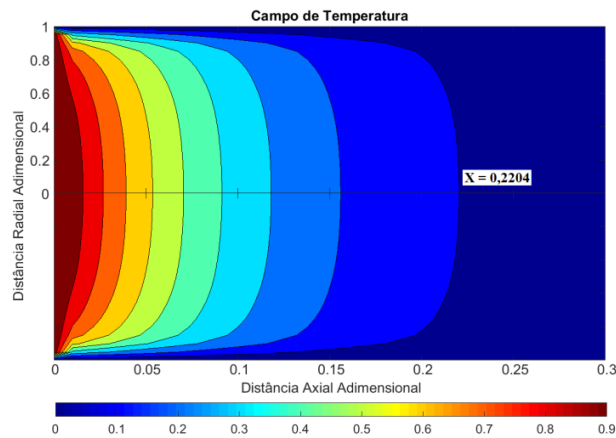


Figura 4.30 – Campo de temperatura para o escoamento turbulento entre placas planas, considerando $Pr = 0.72$, $Re = 1.10^4$, fator de atrito de Filonenko e modelo 3 de turbulência.

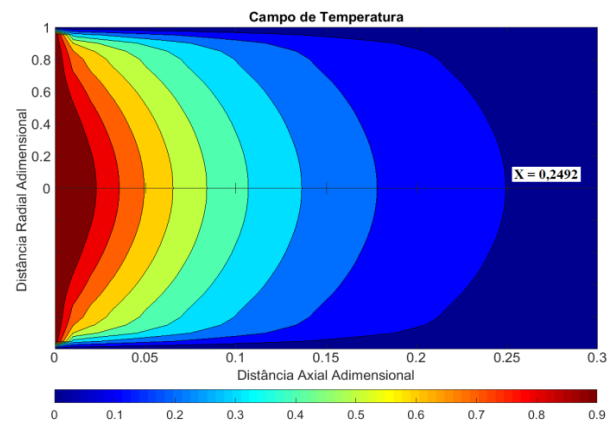


Figura 4.31 – Campo de temperatura para o escoamento turbulento entre placas planas, considerando $Pr = 0.72$, $Re = 1.10^4$, fator de atrito de Filonenko e modelo 4 de turbulência.

As tabelas 4.3 e 4.4 mostram a influência que o fator de atrito e os números de Reynolds e Prandtl exercem na predição do comprimento de entrada térmica adimensional. Na tabela 4.3 analisa-se o caso de escoamento entre placas planas e na tabela 4.4 explora-se a situação de escoamento no interior de um tubo circular. Em ambas tabelas considera-se a combinação de diferentes números de Reynolds (1.10^4 , 5.10^4 e 1.10^5), diferentes números de Prandtl (0.72 , 1 e 2) e diferentes correlações para o fator de atrito (Dean, Filonenko e Bhatti-Shah). Os resultados apresentados permitem estimar, para cada situação investigada, um valor de tendência para o comprimento adimensional de desenvolvimento térmico, que pode representar uma informação extremamente importante em situações práticas.

A lembrar, no presente estudo define-se o comprimento de entrada térmica como o comprimento axial máximo necessário para que o fluido atinja a sua temperatura final com uma margem de 10% de diferença relativa. Em situações práticas essa informação pode ser relevante no processo de dimensionamento do equipamento térmico.

Tabela 4.3 – Comprimento adimensional de entrada térmica para o escoamento turbulento entre placas planas, considerando diferentes números de Reynolds e Prandtl e negligenciando o efeito radiativo.

Placas planas - $Pr_t = 1$								
$Pr = 0.72$			$Pr = 1$			$Pr = 2$		
$Re = 1.10^4$	$Re = 5.10^4$	$Re = 1.10^5$	$Re = 1.10^4$	$Re = 5.10^4$	$Re = 1.10^5$	$Re = 1.10^4$	$Re = 5.10^4$	$Re = 1.10^5$
0.2100 ^a	0.0676 ^a	0.0399 ^a	0.1921 ^a	0.0588 ^c	0.0347 ^a	0.1670 ^a	0.0471 ^a	0.0266 ^a
0.2108 ^b	0.0676 ^b	0.0400 ^b	0.1929 ^b	0.0588 ^b	0.0349 ^b	0.1676 ^b	0.0471 ^b	0.0267 ^b
0.2022 ^c	0.0649 ^c	0.0388 ^c	0.1847 ^c	0.0565 ^c	0.0333 ^c	0.1598 ^c	0.0451 ^c	0.0256 ^c
0.2189 ^d	0.0712 ^d	0.0428 ^d	0.1910 ^d	0.0599 ^d	0.0360 ^d	0.1447 ^d	0.0432 ^d	0.0257 ^d
0.2197 ^e	0.0712 ^e	0.0429 ^e	0.1917 ^e	0.0599 ^e	0.0361 ^e	0.1453 ^e	0.0433 ^e	0.0257 ^e
0.2109 ^f	0.0683 ^f	0.0411 ^f	0.1838 ^f	0.0577 ^f	0.0348 ^f	0.1388 ^f	0.0410 ^f	0.0248 ^f
0.2204 ^g	0.0713 ^g	0.0429 ^g	0.1942 ^g	0.0606 ^g	0.0364 ^g	0.1480 ^g	0.0441 ^g	0.0262 ^g
0.2212 ^h	0.0713 ^h	0.0430 ^h	0.1950 ^h	0.0606 ^h	0.0365 ^h	0.1486 ^h	0.0441 ^h	0.0262 ^h
0.2123 ⁱ	0.0684 ⁱ	0.0412 ⁱ	0.1868 ⁱ	0.0582 ⁱ	0.0352 ⁱ	0.1420 ⁱ	0.0419 ⁱ	0.0253 ⁱ
0.2492 ^j	0.0831 ^j	0.0493 ^j	0.2164 ^j	0.0693 ^j	0.0407 ^j	0.1629 ^j	0.0490 ^j	0.0286 ^j
0.2500 ^k	0.0832 ^k	0.0494 ^k	0.2171 ^k	0.0694 ^k	0.0409 ^k	0.1635 ^k	0.0490 ^k	0.0287 ^k
0.2407 ^l	0.0794 ^l	0.0479 ^l	0.2086 ^l	0.0666 ^l	0.0394 ^l	0.1566 ^l	0.0471 ^l	0.0278 ^l

^a – Comprimento adimensional de entrada térmica com fator de fricção de Filonenko (Modelo 1)

^b – Comprimento adimensional de entrada térmica com fator de fricção de Shah e Bhatti (Modelo 1)

^c – Comprimento adimensional de entrada térmica com fator de fricção de Dean (Modelo 1)

^d – Comprimento adimensional de entrada térmica com fator de fricção de Filonenko (Modelo 2)

^e – Comprimento adimensional de entrada térmica com fator de fricção de Shah e Bhatti (Modelo 2)

^f – Comprimento adimensional de entrada térmica com fator de fricção de Dean (Modelo 2)

^g – Comprimento adimensional de entrada térmica com fator de fricção de Filonenko (Modelo 3)

^h – Comprimento adimensional de entrada térmica com fator de fricção de Shah e Bhatti (Modelo 3)

ⁱ – Comprimento adimensional de entrada térmica com fator de fricção de Dean (Modelo 3)

^j – Comprimento adimensional de entrada térmica com fator de fricção de Filonenko (Modelo 4)

^k – Comprimento adimensional de entrada térmica com fator de fricção de Shah e Bhatti (Modelo 4)

^l – Comprimento adimensional de entrada térmica com fator de fricção de Dean (Modelo 4)

A tabela 4.3 mostra de forma simplificada os valores do comprimento adimensional de entrada térmica para todas as situações analisadas no presente estudo. Para cada resultado contido nesta tabela foi necessário uma simulação computacional que durava uma média de 4 horas de compilação. Através desta tabela é possível fazer uma comparação numérica entre os resultados obtidos para cada modelo de turbulência e fator de fricção utilizados. Conforme previsto, os resultados diferem entre si mas não com uma diferença muito expressiva. Através desta tabela é possível estimar o comprimento dimensional de desenvolvimento térmico através da equação 4.3i, ou seja, é possível encontrar quantos “metros” de duto são necessários para se atingir o desenvolvimento térmico.

Tabela 4.4 – Comprimento adimensional de entrada térmica para o escoamento turbulento no interior de um tubo circular, considerando diferentes números de Reynolds e Prandtl e negligenciando o efeito radiativo.

Tubo Circular - $Pr_t = 1$								
$Pr = 0.72$			$Pr = 1$			$Pr = 2$		
$Re = 1.10^4$	$Re = 5.10^4$	$Re = 1.10^5$	$Re = 1.10^4$	$Re = 5.10^4$	$Re = 1.10^5$	$Re = 1.10^4$	$Re = 5.10^4$	$Re = 1.10^5$
0.0563 ^a	0.0185 ^a	0.0103 ^a	0.0499 ^a	0.0166 ^a	0.0096 ^a	0.0420 ^a	0.0122 ^a	0.0091 ^a
0.0565 ^b	0.0185 ^b	0.0104 ^b	0.0501 ^b	0.0167 ^b	0.0096 ^b	0.0423 ^b	0.0122 ^b	0.0092 ^b
0.0588 ^c	0.0192 ^c	0.0119 ^c	0.0502 ^c	0.0172 ^c	0.0097 ^c	0.0375 ^c	0.0115 ^c	0.0091 ^c
0.0590 ^d	0.0192 ^d	0.0120 ^d	0.0505 ^d	0.0172 ^d	0.0097 ^d	0.0376 ^d	0.0116 ^d	0.0092 ^d
0.0590 ^e	0.0192 ^e	0.0121 ^e	0.0510 ^e	0.0173 ^e	0.0098 ^e	0.0382 ^e	0.0120 ^e	0.0092 ^e
0.0591 ^f	0.0192 ^f	0.0122 ^f	0.0513 ^f	0.0173 ^f	0.0098 ^f	0.0383 ^f	0.0120 ^f	0.0092 ^f
0.0674 ^g	0.0217 ^g	0.0144 ^g	0.0574 ^g	0.0186 ^g	0.0103 ^g	0.0418 ^g	0.0139 ^g	0.0093 ^g
0.0676 ^h	0.0217 ^h	0.0144 ^h	0.0576 ^h	0.0186 ^h	0.0104 ^h	0.0420 ^h	0.0139 ^h	0.0093 ^h

^a – Comprimento adimensional de entrada térmica com fator de fricção de Filonenko (Modelo 1)

^b – Comprimento adimensional de entrada térmica com fator de fricção de Shah e Bhatti (Modelo 1)

^c – Comprimento adimensional de entrada térmica com fator de fricção de Filonenko (Modelo 2)

^d – Comprimento adimensional de entrada térmica com fator de fricção de Shah e Bhatti (Modelo 2)

^e – Comprimento adimensional de entrada térmica com fator de fricção de Filonenko (Modelo 3)

^f – Comprimento adimensional de entrada térmica com fator de fricção de Shah e Bhatti (Modelo 3)

^g – Comprimento adimensional de entrada térmica com fator de fricção de Filonenko (Modelo 4)

^h – Comprimento adimensional de entrada térmica com fator de fricção de Shah e Bhatti (Modelo 4)

A tabela 4.4 mostra, para todas as situações analisadas no presente estudo, os valores do comprimento adimensional de entrada térmica para o caso de escoamento turbulento no interior de um tubo circular. Para cada situação investigada nesta tabela foi necessária uma simulação computacional que durava uma média de 8 horas de compilação. Todos os resultados foram aproximados até a quarta casa decimal, não levando em consideração as diferenças na quinta casa decimal.

Através das tabelas 4.3 e 4.4 é possível observar a notável influência que os números de Reynolds e Prandtl exercem no comprimento axial de desenvolvimento térmico. Para um número Reynolds especificado, um aumento no número de Prandtl leva a uma diminuição no comprimento adimensional de entrada térmica. Esse mesmo comportamento pode ser observado com o aumento do número de Reynolds, mantendo-se o mesmo número de Prandtl. Na comparação da geometria retangular e circular é possível verificar que, em todas as situações, a distância axial que caracteriza o desenvolvimento térmico é sempre maior no duto retangular.

4.8.2 ACOPLAMENTO CONVECÇÃO/RADIAÇÃO

A partir desta seção o interesse volta-se ao estudo do escoamento turbulento de fluidos participantes. A consideração do acoplamento da convecção forçada turbulenta com a radiação

térmica faz o presente estudo atingir o seu maior grau de dificuldade na análise da transferência de calor. Com finalidade de analisar a estabilidade das soluções encontradas no presente estudo, investiga-se, a seguir, a convergência dos resultados.

4.8.2.1. ANÁLISE DA CONVERGÊNCIA

Igualmente ao tratamento dado no capítulo anterior, a convergência dos resultados é analisada sob o aspecto do número de autovalores que definem a ordem de truncamento das expansões das soluções do campo térmico e radiativo.

A seguir são apresentadas figuras de convergência para a solução numérica do número de Nusselt Total, considerando o escoamento turbulento no interior de um tubo circular e entre placas planas. Para a análise da convergência foram especificadas as seguintes variáveis: $Re = 1.10^4$; $Pr = 0,72$; $Pr_t = 0.86$; $N = 0.05$; $\tau = 5$; $\varepsilon_w = 1$ e $\Theta_w = 0$. A partir desta subseção, adotou-se a correlação do fator de atrito proposta por Filonenko em todos os casos investigados. Os resultados, em forma de gráficos, são apresentados logo abaixo, onde pode ser feita uma análise quanto a qualidade obtida em termos de convergência.

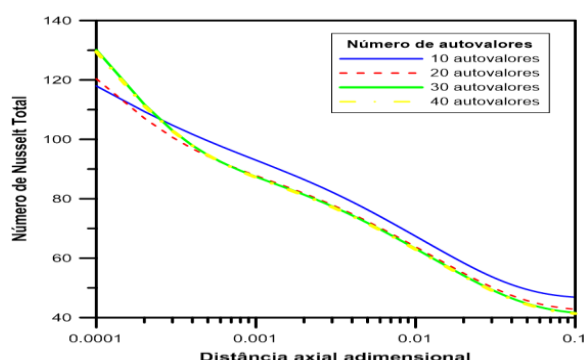


Figura 4.32 – Convergência do número de Nusselt total para o escoamento turbulento de fluidos participantes entre placas planas (Modelo 1 de turbulência).

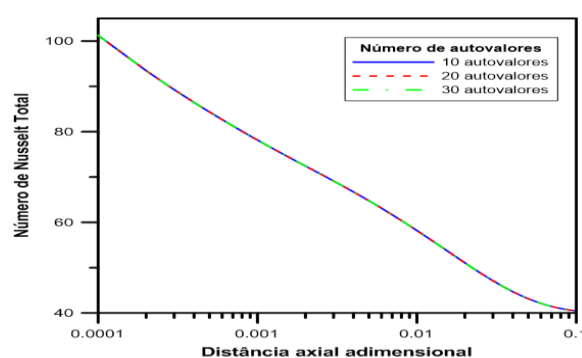


Figura 4.33 – Convergência do número de Nusselt total para o escoamento turbulento de fluidos participantes entre placas planas (Modelo 2 de turbulência).

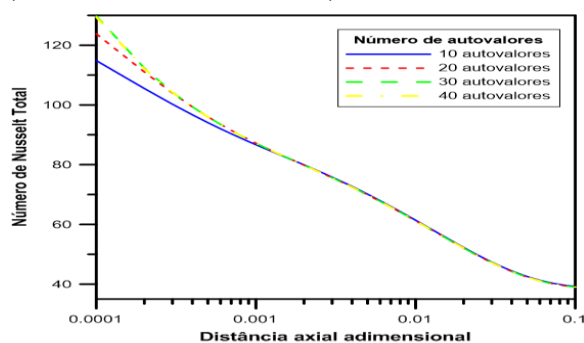


Figura 4.34 – Convergência do número de Nusselt total para o escoamento turbulento de fluidos participantes entre placas planas (Modelo 3 de turbulência).

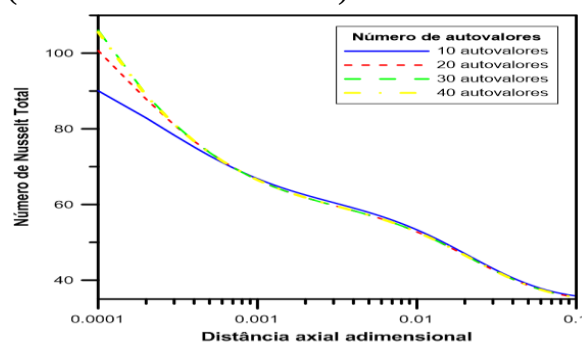


Figura 4.35 – Convergência do número de Nusselt total para o escoamento turbulento de fluidos participantes entre placas planas (Modelo 4 de turbulência).

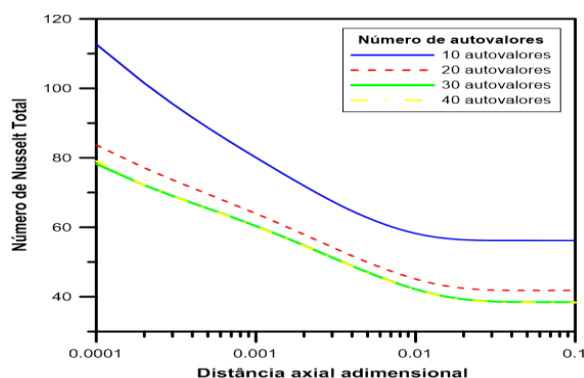


Figura 4.36 – Convergência do número de Nusselt total para o escoamento turbulento de fluidos participantes no interior de um tubo (Modelo 1 de turbulência).

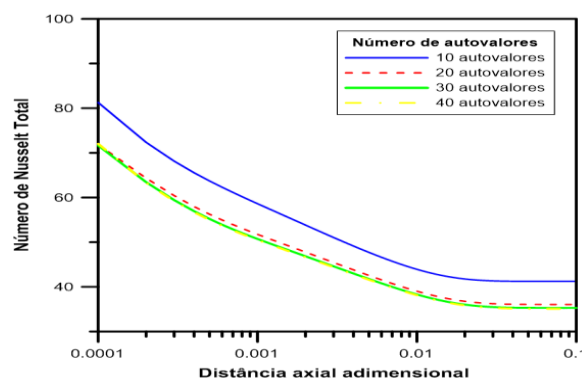


Figura 4.37 – Convergência do número de Nusselt total para o escoamento turbulento de fluidos participantes no interior de um tubo (Modelo 2 de turbulência).

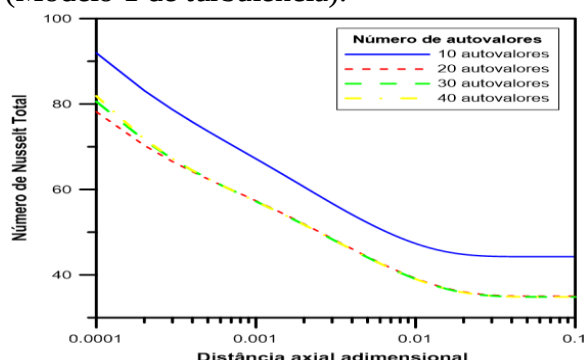


Figura 4.38 – Convergência do número de Nusselt total para o escoamento turbulento de fluidos participantes no interior de um tubo (Modelo 3 de turbulência).

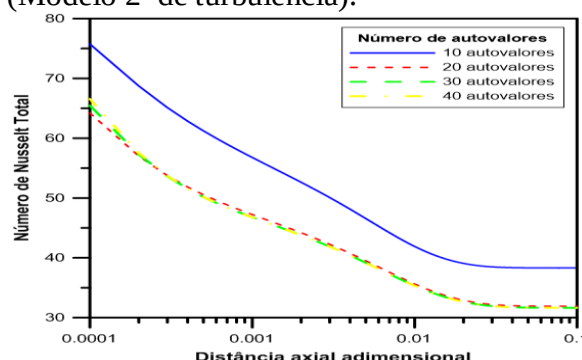


Figura 4.39 – Convergência do número de Nusselt total para o escoamento turbulento de fluidos participantes no interior de um tubo (Modelo 4 de turbulência).

Através das figuras 4.32 – 4.39 é possível observar a convergência do número de Nusselt total para o caso de escoamento turbulento entre placas planas e no interior de um tubo circular, considerando os 4 modelos de turbulência. A convergência varia a cada modelo de turbulência considerado. No escoamento entre placas planas a convergência se estabelece com 30 autovalores para os modelos 1, 3 e 4 de turbulência, e com 20 autovalores para o modelo 2. No escoamento no tubo a convergência ocorre com 30 autovalores em todas as situações.

4.8.2.2. VALIDAÇÃO DOS RESULTADOS

Para validar os resultados encontrados no presente estudo é feita uma comparação com os resultados obtidos pela literatura especializada. O presente trabalho utiliza como referências os trabalhos de (*Campo e Schuler, 1989*) e (*Tsou e Kang, 1976*), que analisam o acoplamento da convecção forçada turbulenta com a radiação térmica no escoamento de gases participantes. Os autores consideram um escoamento no interior de um duto circular e adotam especificados os seguintes parâmetros: $Re = 1.10^4$; $\varepsilon_w = 0,5$; $\Theta_w = 1,8$; $\tau = 1$ e o parâmetro condução-radiação assume os valores $N = 0,04 \times 1.8^3$ e $0,2 \times 1.8^3$.

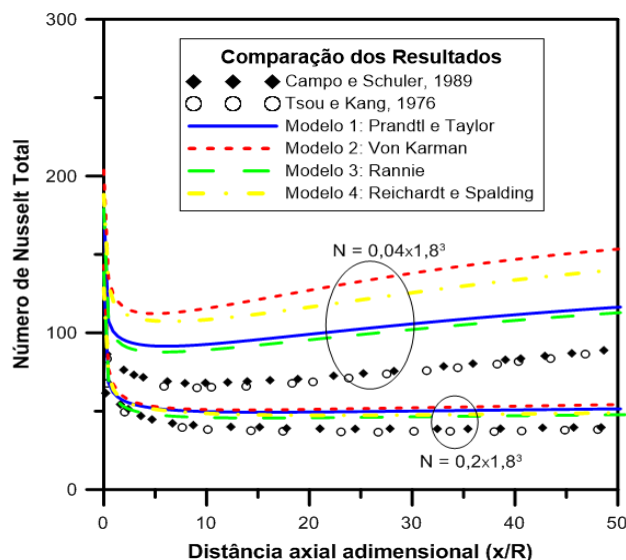


Figura 4.40 – Análise comparativa do número de Nusselt total para o escoamento turbulento de fluidos participantes no interior de um tubo circular, considerando diferentes valores para o parâmetro condução-radiação.

Através da figura 4.40 é possível observar que os resultados variam a cada modelo de turbulência considerado. Os autores (*Campo e Schuler, 1989*) utilizam um modelo K-L de turbulência, que é, portanto, diferente dos modelos de turbulência considerados no presente estudo. Isso justifica os resultados não apresentarem perfeita coincidência, apesar de possuírem comportamentos semelhantes. Através destas figuras também é possível verificar que a distinção entre os resultados, a cada modelo de turbulência adotado, aumenta quando o efeito radiativo se torna mais relevante (o parâmetro condução-radiação diminui).

4.8.2.3. APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

Nesta seção analisam-se as influências que a espessura óptica, o parâmetro condução-radiação, a geometria do duto e o modelo de turbulência exercem sobre o desenvolvimento do campo térmico, avaliando a significância da radiação térmica no processo de transferência de calor no escoamento turbulento de fluidos participantes.

Inicialmente analisa-se a influência da espessura óptica sobre o número de Nusselt total e sobre o campo térmico. Para esta análise considera-se $Re = 1.10^4$; $Pr = 0,72$; $Pr_t = 0,86$; $N = 0,05$; $\epsilon_w = 1$; $\Theta_w = 0$ e a espessura óptica assume os seguintes valores $\tau = 5, 10$ e 20 . Nas figuras 4.41 – 4.42 investiga-se o desenvolvimento do número de Nusselt total para diferentes valores da espessura óptica. Nas figuras 4.43 – 4.46 observa-se a influência da espessura óptica sobre a distribuição do campo de temperatura, explicitando o comprimento axial de desenvolvimento térmico em cada situação investigada. Na análise do campo de temperatura utilizou-se o modelo 3 de turbulência como referência.

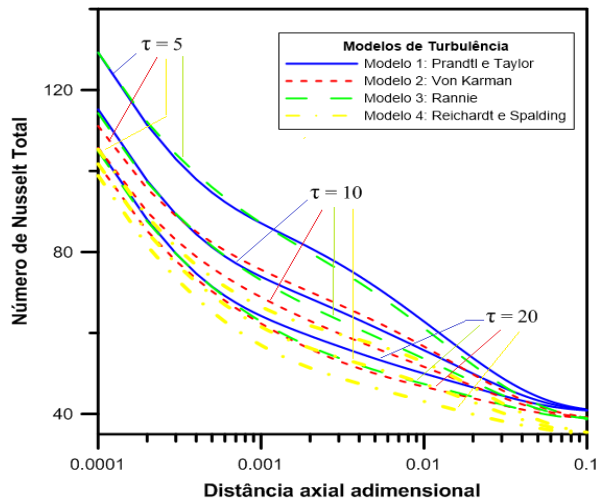


Figura 4.41 – Nusselt total em função da distância axial para o escoamento turbulento entre placas planas, considerando diferentes valores para a espessura óptica.

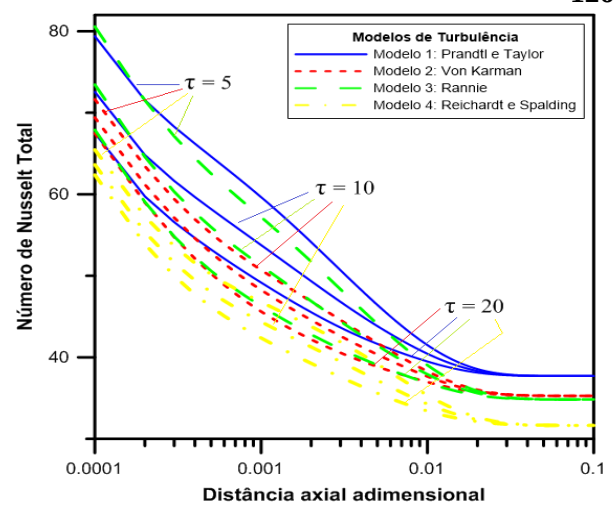


Figura 4.42 - Nusselt total em função da distância axial para o escoamento turbulento no interior de um tubo circular, considerando diferentes valores para a espessura óptica.

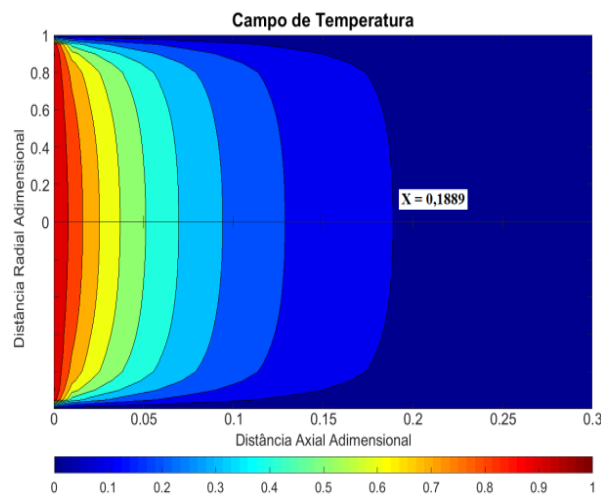


Figura 4.43 – Campo de temperatura para o escoamento turbulento de fluidos participantes entre placas planas, considerando $\tau = 5$.

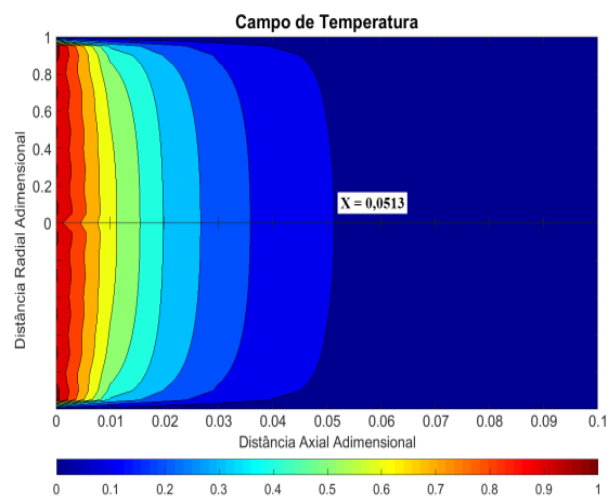


Figura 4.44 – Campo de temperatura para o escoamento turbulento de fluidos participantes no interior de um tubo circular, considerando $\tau = 5$.

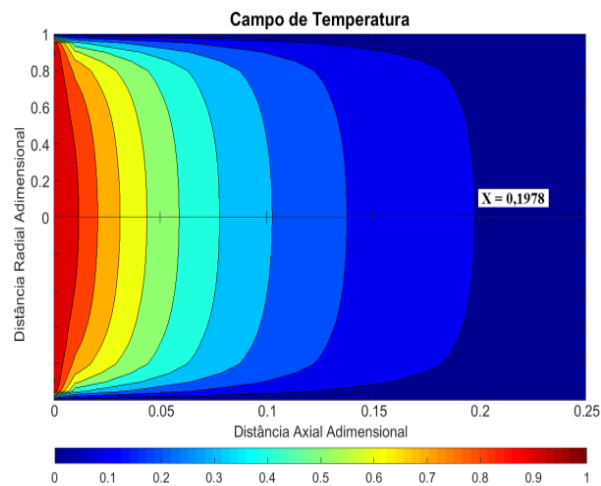


Figura 4.45 – Campo de temperatura para o escoamento turbulento de fluidos participantes entre placas planas, considerando $\tau = 20$.

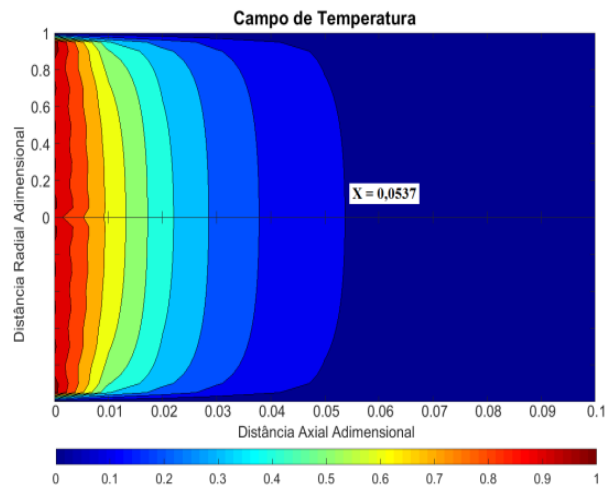


Figura 4.46 – Campo de temperatura para o escoamento turbulento de fluidos participantes no interior de um tubo circular, considerando $\tau = 20$.

Através da observação das figuras 4.41 – 4.42 conclui-se que, conforme previsto, o número de Nusselt total depende diretamente da espessura óptica e do modelo de turbulência considerado; através destas figuras percebe-se que o Nusselt total assume maiores valores quando ocorre uma diminuição da espessura óptica. Através da observação das figuras 4.43 – 4.46 observa-se, para ambas geometrias, que o campo de temperatura tende a desenvolver um maior comprimento de entrada térmica nas situações de maior valor da espessura óptica.

Por fim, analisa-se a influência do parâmetro condução-radiação sobre o número de Nusselt total e sobre o campo de temperatura e radiação. Para esta análise considera-se $Re = 1.10^4$; $Pr = 0,72$; $Pr_t = 0.86$; $\tau = 1$; $\varepsilon_w = 1$; $\Theta_w = 0$ e o parâmetro condução-radiação assume os seguintes valores $N = 0,01$; $0,05$ e $0,1$. Nas figuras 4.47 e 4.48 pode-se observar o comportamento do número de Nusselt total para diferentes valores do parâmetro condução-radiação; conforme estas figuras pode-se concluir que o número de Nusselt diminui com o aumento do valor do parâmetro condução-radiação, em conformidade com o que foi apresentado na figura 4.40. Nas figuras 4.49 – 4.52 avalia-se o efeito do parâmetro condução-radiação sobre o campo de temperatura, utilizando o modelo de turbulência do Rannie (modelo 3) como referência para a construção das curvas de contorno. Mais uma vez pode-se observar um comprimento de entrada térmica maior na geometria retangular. O comprimento axial de desenvolvimento térmico é maior para maiores valores do parâmetro condução-radiação, em ambas geometrias analisadas.

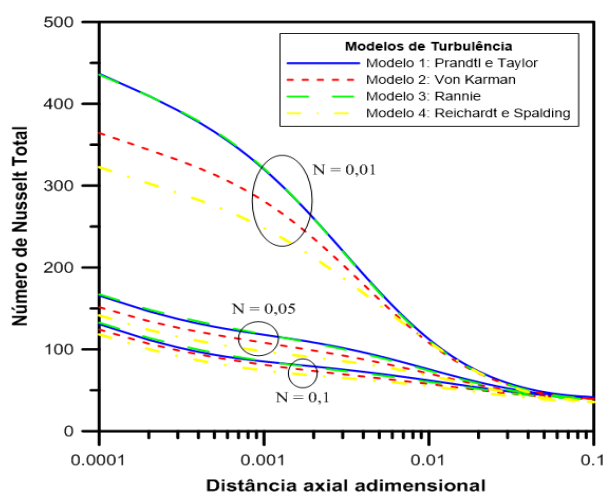


Figura 4.47 – Nusselt total em função da distância axial para o escoamento turbulento entre placas planas, considerando diferentes valores para o parâmetro condução-radiação.

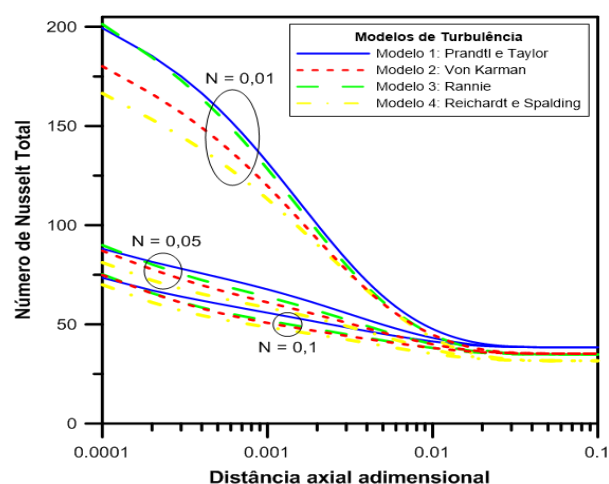


Figura 4.48 - Nusselt total em função da distância axial para o escoamento turbulento no interior de um tubo, considerando valores distintos para o parâmetro condução-radiação.

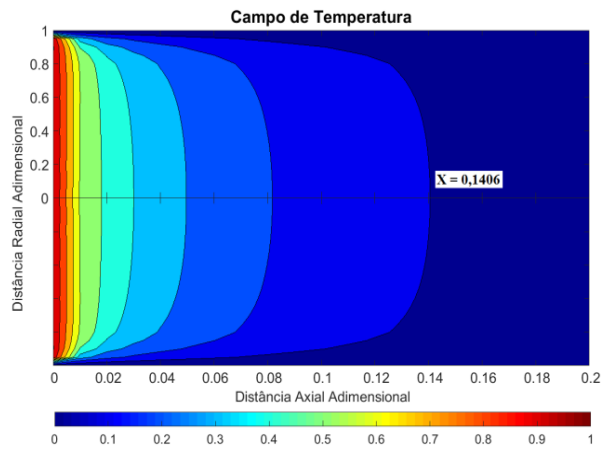


Figura 4.49 – Campo de temperatura para o escoamento turbulento de fluidos participantes entre placas planas, considerando $N = 0,01$.

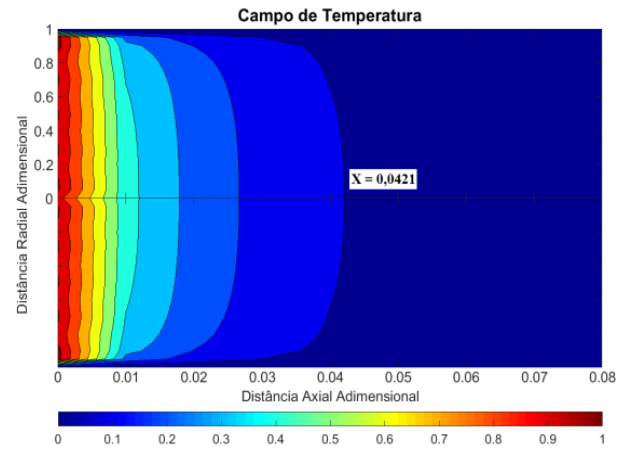


Figura 4.50 – Campo de temperatura para o escoamento turbulento de fluidos participantes no interior de um tubo circular, considerando $N = 0,01$.

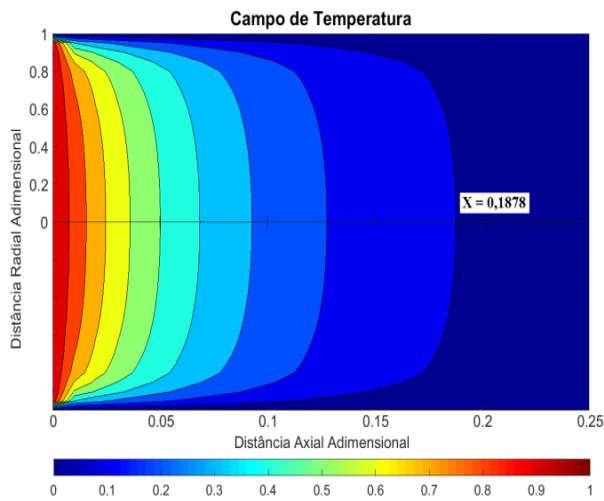


Figura 4.51 – Campo de temperatura para o escoamento turbulento de fluidos participantes entre placas planas, considerando $N = 0,1$.

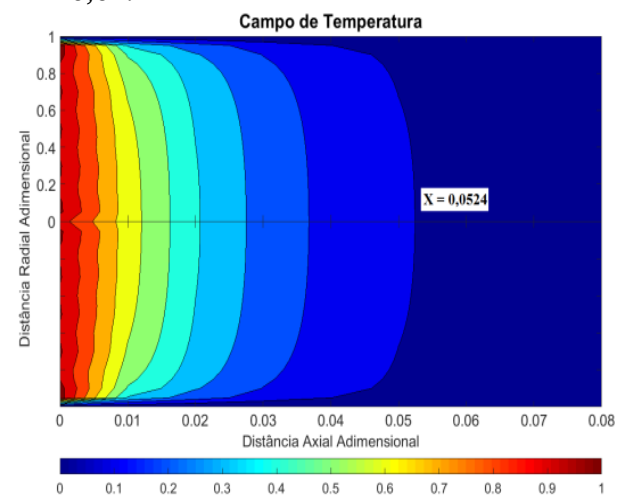


Figura 4.52 - Campo de temperatura para o escoamento turbulento de fluidos participantes no interior de um tubo circular, considerando $N = 0,1$.

Desta forma a análise da transferência de calor no escoamento turbulento de fluidos participantes foi realizada, levando-se em conta a influência dos principais parâmetros que interferem na distribuição do campo de temperatura e do número de Nusselt Total.

CAPÍTULO 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS DO TRABALHO

A partir da análise dos resultados obtidos, verifica-se que a aplicação da GITT se mostra eficaz na resolução do problema proposto, uma vez que as formulações apresentadas foram validadas com os resultados encontrados na literatura especializada, tanto para o regime laminar como turbulento. Desta forma, os objetivos propostos no presente trabalho foram alcançados satisfatoriamente, onde foi mostrado, para o escoamento de fluidos participantes em dutos de seção retangular e circular, a influência dos parâmetros radiativos sobre o desenvolvimento do campo térmico. A partir do estudo teórico realizado pode-se otimizar a performance e o dimensionamento de trocadores de calor que possuam fluidos escoando com altas temperaturas.

5.1. CONCLUSÕES DO TRABALHO

Uma análise dos resultados obtidos no presente trabalho permite as seguintes conclusões:

- A Técnica da Transformada Integral Generalizada permite uma abordagem numérico-analítica sistemática a problemas inerentemente complexos, permitindo, com baixo custo computacional, a obtenção de resultados precisos para o campo de temperatura e para o número de Nusselt total.

Conclusões para o caso de convecção laminar e radiação, tratada no capítulo 3:

- A GITT demonstrou-se extramente versátil no que diz respeito a escolha do problema auxiliar. A escolha da base na qual a solução será expandida fica a critério do autor. Quanto mais informações a base trazer do problema original, menor será o número de coeficientes integrais gerados no processo de transformação integral. Em contrapartida, o cálculo desses coeficientes pode se tornar mais ou menos demorado a depender do software solucionador utilizado.
- No uso do **Wolfram Mathematica 9.0** percebeu-se que a modelagem 3 reproduz o cálculo dos coeficientes integrais de forma mais rápida, por se tratar de uma base tradicional que é escrita em termos de senos e cossenos. O programa completo demora menos tempo para compilar no uso da modelagem 3, apesar de possuir mais coeficientes.

- No uso do **Fortran Powerstation 4.0** o cálculo destes coeficientes não apresentou diferenças significativas, para as três modelagens consideradas. Isto demonstra uma grande capacidade do software no tratamento numérico.
- O aumento da emissividade da parede produz aumento nos valores do número de Nusselt total e faz com que o campo de temperatura se desenvolva mais rapidamente, reduzindo o comprimento de entrada térmica;
- O aumento do parâmetro condução-radiação provoca uma diminuição nos valores do número de Nusselt total, tendo por consequência um aumento no comprimento axial de desenvolvimento térmico;
- O aumento da espessura óptica provoca um aumento no número de Nusselt total, reduzindo o comprimento de entrada térmica;
- Verificou-se que quanto maior for o valor da temperatura de entrada adimensional do fluido menor será o seu comprimento axial de desenvolvimento térmico, produzindo também um aumento no número de Nusselt total.

Conclusões para o caso de convecção turbulenta e radiação, tratada no capítulo 4:

- Os resultados obtidos variam a cada modelo de turbulência considerado;
- O aumento nos números de Reynolds e Prandtl produz uma elevação nas taxas de transferência de calor, fazendo com que o comprimento axial de desenvolvimento térmico seja reduzido;
- O aumento da espessura óptica, para os valores investigados, provoca uma redução nos valores do número de Nusselt total e, por conseguinte, aumenta o comprimento de entrada térmica;
- Em concordância com os resultados obtidos para o caso laminar, verificou-se que o aumento do parâmetro condução-radiação produz uma redução nas taxas de transferência de calor, fazendo com que o comprimento axial de desenvolvimento térmico aumente.

5.2. SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

Pode-se indicar as seguintes sugestões para trabalhos futuros:

- Desenvolver estudos para o acoplamento da convecção forçada e radiação que considere o desenvolvimento simultâneo dos campos de pressão, velocidade, temperatura e radiação, uma vez que no presente estudo considerou-se o escoamento do fluido participante como sendo hidrodinamicamente desenvolvido;
- Estender a modelagem desenvolvida no presente trabalho para o escoamento de fluidos participantes que além de absorver e emitir, também espalhem radiação, uma vez que esta consideração pode ser significativa em determinadas situações;
- Promover modelagens que incluam as propriedades térmicas do fluido dependentes da temperatura, pois, devido as considerações de altas temperaturas no escoamento, é necessário investigar a influência desta dependência no desenvolvimento do campo térmico;
- Solucionar o problema com acoplamento convecção-radiação com condições de contorno mais genéricas, pois, nesse caso, aproxima-se consideravelmente do que ocorre na prática. Pode-se sugerir o uso de condições de contorno do 3º tipo, assimétricas, no estudo do escoamento de fluidos participantes no interior de um canal de placas planas paralelas;
- Ampliar as simulações realizadas no presente estudo, no caso em que o efeito da radiação térmica é significativo, para propor correlações para o número de Nusselt total e para o comprimento de entrada térmica, uma vez que não existem correlações na literatura que façam essas predições.

REFERÊNCIAS

- ADEGUN, I. K. and BELLO-OCHEDE, F. L., 2004, "Mixed Convective and Radiative Heat Transfer in an Inclined Rotating Rectangular Duct with a Centered Circular Tube", *J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Eng.*, Vol. XXVI, N° 3, pp. 323-329.
- AL-AMRI F.G. and EL-SHAARAWI, M.A.I., 2010, "Combined forced convection and surface radiation between two parallel plates", *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, Vol. 20, pp. 218-239.
- ANSARI, A. B. and GANDJALIKHAN NASSAB, S. A., 2013, "Forced convection of radiating gas over an inclined backward facing step using the blocked-off method", *Thermal Science*, Vol. 17, N° 3, pp. 773-786.
- ASGHARI, A. and GANDJALIKHAN NASSAB, S. A., 2016, "Thermal radiation effect on turbulent forced convection flow over a backward facing step in the presence of participating media", *Heat Transfer Research*, Vol. 47, pp. 817-838.
- ASSAD, G.E.; LIMA, J.A.; SANTOS, C.A.C.; LIMA, F.A.; VELOSO, D.L.A.; GONÇALVES, P.G., 2018. "Análise da convecção forçada laminar de fluidos não-newtonianos em dutos retangulares". X Congresso Nacional de Engenharia Mecânica- CONEM 2018.
- BAEK, S. W., YU, M. J. and KIM, T. Y., 1999, "Thermally developing Poiseuille flow affected by radiation", *Numerical Heat Transfer, Part A*, 35: 681-694.
- BAYAZITOGLU, Y. and OZISIK, M. N., 1980. "On the solution of Graetz type problem with axial conduction", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 23, pp. 1399-1402.
- BÉG, O. A.; GHOSH, S. K.; NARAHARI, M. and BÉG, T. A., 2011, "Mathematical Modeling of Thermal Radiation Effects on Transient Gravity-Driven Optically Thick Gray Convection Flow along an Inclined Plane with Pressure Gradient", *Chem. Eng. Comm.*, 198: pp.1630–1644.
- BERGERO, S., NANNEI, E. and SALA, R., 1999, "Combined Radiative and Convective Heat Transfer in a three-dimensional rectangular channel at different wall temperatures", *Heat and Mass Transfer*, Vol. 35, pp. 443-450.
- BHATTI, M.S. and SHAH, R.K., 1987. "Turbulent and Transition Flow Convective Heat Transfer in Ducts", in: Kakaç, S., Shah, R.K. and Aung, W. (Eds.), *Handbook of Single-Phase Convective Heat Transfer*, John Wiley, New York.
- BIAGE, M., 1983. "Uma solução para o problema de Graetz em placas paralelas, com condução axial de calor no fluido e na parede"; Dissertação de mestrado, UFSC.
- BILIR, S., 1992. "Numerical solution of Graetz problem with axial conduction", *Numerical Heat Transfer, Part A*, Vol. 21, pp. 493-500.
- BROWN, D.M., SANTOS, C.A.C., COTTA, R.M. and KAKAÇ, S., 1997. "Analysis of Steady Forced Convection in Thermally Developing Turbulent Duct Flows", *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, 7, 424-437.
- BROWN, G.M., 1960, "Heat or Mass Transfer in a Fluid in Laminar Flow in a Circular or Flat Conduit", *A.I.Ch.E. Journal*, Vol. 6, pp. 179-183.
- CAMPO, A., and SCHULER, C., 1988a, "Thermal radiation and laminar forced convection in a gas pipe flow", *Warme-und Stoffubertragung* 22, pp. 251-257.
- CAMPO, A., and SCHULER, C., 1989, "Laminar/Turbulent forced convection and thermal radiation in an internal gas flow", *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, Vol. 16, pp. 43-54.

- CHALHUB, D. J. N. M., 2011. “Desenvolvimento de Soluções para Problemas da Advecção-Difusão Combinando Transformação Integral e Métodos Discretos”. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia, UFF. Niterói, Rio de Janeiro.
- COTTA, R. M.; ALVES, L. S. B. and MIKHAILOV, M. D., 2001. “Applied Numerical Analysis with Mahematica”, MTC – COPPE/UFRJ and WOLFRAM RESEARCH INC., Rio de Janeiro.
- COTTA, R.M. and OZISIK, M.N., 1986, “Laminar forced convection of power-law non-Newtonian fluids inside ducts”, *Warme- und Stoffubertragung*, Vol. 20, pp. 211-218.
- COTTA, R.M., 1998. “The Integral Transform Method in Thermal and Fluid”. Science and Engineering, Begell House Inc, NY, USA.
- COTTA, R.M., 1993. “Integral Transform in Computational Heat and Fluid Flow”. CRC Press, Boca Raton.
- DEAN, R.B., 1978. “Reynolds Number Dependence of Skin Friction and other Bulk Flow Variables in Two-Dimensional Rectangular Duct Flow”, *Journal of Fluids Engineering*, 100, 215-223.
- DINIZ, L. S., 2005. “Estudo das Tensões Térmicas no Acoplamento Condução-Radiação em Materiais Semitransparentes”; Tese de doutorado, - CT/UFPB.
- DINIZ, L.S.; SANTOS, P.H.D.; CARVALHO, M.; SANTOS, C.A.C., 2005. “Theoretical analysis of the channel flow with radiation in participating media through the use of the generalized integral transform technique” - COBEM 2005.
- EBADIAN, M.A. and ZHANG, H.Y., 1989. “An exact solution of extended Graetz problem with axial heat conduction”, *Int. J. Heat Mass Transfer*. Vol. 32, N°. 9, pp. 1709-1717.
- ECHIGO, R., HASEGAWA, S., and KAMIUTO, K., 1975, “Composite heat transfer in a pipe with thermal radiation of two-dimensional propagation - in connection with the temperature rise in flowing medium upstream from heating section”. *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 18, pp. 1149-1159.
- FEIKEMA D., 2000. “Analysis of the Laser Propelled Lightcraft Vehicle”. In 31st Plasmadynamics and Lasers Conference. AIAA-2000-2348. Denver, United States.
- FERREIRA, B. M. V.; TORO, P. G. P. and COSTA, F. J., 2018. “Optical design for laser propulsion system”, 17th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering - ENCIT 2018, paper n° 0416.
- FILONENKO, G.K., 1954. “Hydraulic Resistance in Pipes (in Russian)”, *Teploenergetika*, 1, 40-44.
- FORTTRAN POWERSTATION, Version 4.0; Microsoft Corporation, 1980.
- FRANÇA, F.H.R. and GOLDSTEIN JR, L., 1998, “ Effects of temperature and geometry on the heat transfer from turbulent flow of a participating gás through a duct”, *Heat Transfer Engineering*, Vol. 19, pp. 25-33.
- FRANÇA, F.H.R., 1995, “Transferência de Calor no Escoamento de Gases Participantes em Alta Temperatura através de dutos de secção circular revestidos com isolamento não ideal”, São Paulo: Universidade Estadual de Campinas – Faculdade de Engenharia Mecânica. Dissertação de Mestrado.
- GALARÇA, M. M., 2006, “Transferência de calor combinando radiação e convecção no interior de dutos de geradores de vapor fumotubulares”, Dissertação de mestrado, PROMEC/UFRGS.

- GANESAN, R.; NARAYANASWAMY, R. and PERUMAL, K., 2015, "Mixed Convection and Radiation Heat Transfer in a Horizontal Duct with Variable Wall Temperature", *Heat Transfer Engineering*, Vol. 36: pp. 335–345.
- GIRGIN, I., 1998. "Axial conduction effects in laminar duct flows", Doctoral Thesis, Naval Postgraduate School.
- GNIELINSKI, V., 1976. "New Equations for Heat and Mass Transfer in Turbulent Pipe and Channel Flow", *International Chemical Engineering*, 16, 359-368.
- GOTTIFREDI, J.C., QUIROGA, O.D. and FLOREE, A.F., 1983, "Heat transfer to Newtonian and non-Newtonian fluids flowing in a laminar regime", *Int. J. Heat Mass Transfer* 26 (8), 1215-1220.
- GRAETZ, L., 1885. "Über die Wärmeleitungsfähigkeit von Flüssigkeiten", *Annalen der Physik*, Vol. 261, N° 7, pp. 337-357.
- Haji-Sheikh, A.; Beck, J.V. and AMOS, D.E., 2008. "Axial heat conduction effects in the entrance region of parallel plate ducts", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 51, pp. 5811-5822.
- HENNECKE, D. K., 1968. "Heat Transfer by Hagen-Poiseuille Flow in the thermal development region with axial conduction", *Wärme- und Stoffübertragung* 1, pp. 177-184.
- HSU, C.J., 1971. "An Exact Analysis of low Peclet number thermal entry region heat transfer in transversely nonuniform velocity fields", *AIChE Journal*, pp. 732-740.
- IMSL, Library, 1989, Math/Lib, Houston, Texas.
- JENG, D.R., LEE, E.J., and DEWITT, K. J., 1976, "A Study of two limiting cases in convective and radiative heat transfer with nongray gases", *Int. Journal Heat Mass Transfer*, Vol. 19, pp. 589-596.
- JOHNSTON, P. R., 1991. "Axial conduction and the Graetz problem for a Bingham Plastic in laminar tube flow", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 34, pp. 1209-1217.
- JOHNSTON, P.R., 1994, "A Solution Method for the Graetz Problem for Non-Newtonian Fluids with Dirichlet and Neumann Boundary Conditions", *Mathl. Comput. Modelling* Vol. 19, N° 2, pp. 1-19.
- KAKAÇ, S. and YENER, Y., 1995. "Convective Heat Transfer", CRC PRESS, Inc., Florida, EUA.
- KAKAÇ, S. YENER, Y. W. and PRAMUANJAROENKIJ, A., 2014. "Convective Heat Transfer", CRC Press, 3rd edition, New York.
- KAYS, W.M. and CRAWFORD, M.E., 1980. "Convective Heat and Mass Transfer", McGraw-Hill, New York.
- KESTIN, J. and RICHARDSON, P. D., 1963. "Heat Transfer Across Turbulent, Incompressible Boundary Layers", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 6, pp. 147-189.
- KU, H. C. and HATZIAVRAMIDIS, D., 1984. "Chebyshev Expansion Methods for the Solution of the Extended Graetz Problem", *Journal of Computational Physics*, Vol. 56, pp. 495-512.
- LAOHAKUL, C.; CHAN, C.Y.; LOOK, K.Y. and TAN, C.W., 1985. "On approximate solutions of the Graetz problem with axial conduction", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 28, pp. 541-545.
- LIMA, F.A.; VELOSO, D.L.A.; ASSAD, G.E.; ; GONÇALVES, P.G.; BELO, F.A. e SANTOS, C.A.C., 2018. "Aplicação da GITT no estudo da convecção laminar em dutos circulares com perfil de velocidade no modelo lei de potência". X Congresso Nacional de Engenharia Mecânica- CONEM 2018.

- MA, J.; SUN, Y. and LI, B., 2017, "Simulation of combined conductive, convective and radiative heat transfer in moving irregular porous fins by spectral element method", *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 118, pp. 475-487.
- MATLAB, Version Release 2017a.
- MAZGAR, A.; NEJMA, F. B. and CHARRADA, K., 2008, "Numerical analysis of coupled radiation and laminar forced convection in the entrance region of a circular duct for non-grey media: entropy generation", *WSEAS Transactions on Heat and Mass Transfer*, Vol. 3, pp. 165-176.
- MCKILLOP, A.A., 1964. "Heat transfer for laminar flow of non-Newtonian fluids in entrance region of a tube", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 7, pp. 853-862.
- MESNY, M., 1961. "Calderas de Vapor: descripción, teoría, manejo y mantenimiento". 3° Ed. Alsima, Buenos Aires.
- MICHELSON, M.L. and VILLADSEN, J., 1974. "The Graetz problem with axial heat conduction", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 17, pp. 1391-1402.
- MIKHAILOV, M. D. and ÖZISIK, M. N., 1984. "Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion", John Wiley, New York.
- MIKHAILOV, M. D. and VULCHANOV, N. L., 1983. "Computational procedure for Sturm-Liouville problems", *Journal of computational Physics*, v. 5, 323-336.
- MODEST, M. F., 1993. "Radiative Heat Transfer", McGraw-Hill Book Company.
- NAGASUE, H., 1981. "Steady-state heat transfer with axial conduction in laminar flow in circular tube with a specified temperature on heat flux wall", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 24, pp. 1823-1832.
- NAKRA, N.K., and SMITH, T. F., 1977, "Combined Radiation-Convection for a real gas", *ASME Journal of Heat Transfer*, pp. 60-65.
- NAVEIRA-COTTA, C.P; LACHI, M.; REBAY, M. and COTTA, R.M., 2009, "Comparison of experiments and hybrid simulations of transient conjugated conduction-convection-radiation", *Int. Symp. on Convective Heat and Mass Transfer in Sustainable Energy*, April 26 – May 1, Tunisia.
- NAVEIRA-COTTA, C.P; LACHI, M.; REBAY, M. and COTTA, R.M., 2010, "Experiments and Simulations in Transient Conjugated Conduction-Convection-Radiation", *Heat Transfer Research*, Vol. 41, N° 3, pp. 209-231.
- NGUYEN, T. V., 1992. "Laminar heat transfer for thermally developing flow in ducts", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 35, N° 7, pp. 1733-1741.
- NOGUEIRA, D., 2009. "Análise de soluções por volumes finitos para convecção forçada em canais de trocadores de calor", *Dissertação de mestrado, PGMEC – UFF*.
- NOTTER, R. H. and SLEICHER, C. A. (1972). "A Solution to the Turbulent Graetz Problem - III. Fully Developed and Entry Region Heat Transfer Rates", *Chemical Engineering Science*, 27, 2073-2093.
- NOTTER, R.H. and SLEICHER, C.A. (1971). "The Eddy Diffusivity in the Turbulent Boundary Layer near a Wall", *Chemical Engineering Science*, 26, 161-171.
- NUSSELT, W., 1910. "Die Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl von der Rohrlänge", *Verein Deutscher Ingenieure*, Vol. 54, N°. 28, pp. 1154–1158.
- ÖZISIK, M. N., 1973. "Radiative Transfer and Interactions with Conduction and Convection", John Wiley, New York.

- ÖZISIK, M.N., COTTA, R.M. and KIM, W.S. (1989). "Heat Transfer in Turbulent Forced Convection between Parallel-Plates", *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 67, 771-776.
- PACHPUTE, S.; PREMACHANDRAN, B. and TALUKDAR, P., 2015, "A Numerical Study of Combined Forced Convection and Gas Radiation From a Circular Cylinder in Cross Flow", *Heat Transfer Engineering*, Vol. 36, pp. 135–151.
- PAPOUTSAKIS, E.; RANKRISHNA, D. and LIM, H. C., 1980. "The extended Graetz problem with Dirichlet wall boundary conditions", *Appl. Sci. Res* 36, pp.13-34.
- PAPOUTSAKIS, E.; RANKRISHNA, D. and LIM, H. C., 1980. "The extended Graetz problem with prescribed wall flux", *Aiche J.* 26, pp. 779-787.
- PEARCE, B. E., and EMERY, A. F., 1970, "Heat Transfer by Thermal Radiation and Laminar Forced Convection to an Absorbing Fluid in the Entry Region of a Pipe", *ASME Journal of Heat Transfer*, pp. 221-230.
- PLETCHER, R. H., 1988. "Progress in Turbulent Forced Convection", *Journal of Heat Transfer*, Vol. 110, pp. 1129-1144.
- PRANDTL, L., 1910. "Eine Beziehung zwischen, Wärmeaustausch und Stromungswiderstand der Flüssigkeit", *Z. Physik*, Vol.11, 1910, pp.1072-1078.
- PRASAD, K. V.; MALLIKARJUN, P. and VAIDYA, H., 2017, "Mixed convective fully developed flow in a vertical channel in the presence of thermal radiation and viscous dissipation", *Int. J. of Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 22, N°1, pp.123-144.
- QUEIROZ, H. R., 2010. "Análise de estratégias de solução por transformada integral para escoamentos em desenvolvimento térmico", *Dissertação de mestrado*, PGMEC – UFF.
- RANNIE, W.D., 1956. "Heat Transfer in Turbulent Shear Flow", *J. Aero. Sci.*, Vol. 23, pp. 485-489.
- RAYENI, A. D. and GANDJALIKHAN NASSAB, S. A., 2016, "Analysis of combined radiation and forced convection heat transfer in 3D laminar flow over an inclined forward facing step", *Journal of Electronics Cooling and Thermal Control*, Vol. 6, pp. 1-18.
- REICHARDT, H., 1951. "Volständige Darstellung der Turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in Glatten Leitungen", *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 31, 208-219.
- ROHSENOW, W.M. and CHOI, H., 1961. "Heat, Mass and Momentum Transfer", Prentice-Hall, New York.
- SANTOS, C.A.C., 1992. "Solução exata para o escoamento tipo pistão com condução axial no fluido", *II Congresso de Engenharia Mecânica Norte-Nordeste*, pp. 287-294.
- SANTOS, C.A.C., BROWN, D.M., KAKAÇ, S. and COTTA, R.M., 1995. "Analysis of Unsteady Forced Convection in Turbulent Duct Flow", *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol. 9, pp. 508-515.
- SANTOS, C.A.C.; QUARESMA, J.N.N. and LIMA, J. A., 2001. "Convective Heat Transfer in Ducts: the Integral Transform Approach", 348 p., E-Papers, ABCM Mechanical Sciences Series, Rio de Janeiro, Brazil.
- SCHLICHTING, H., 1960. "Boundary Layer Theory", translated by J. Kestin (4th ed.), McGraw-Hill, New York.
- SCHULER, C., and CAMPO, A., 1988b, "Numerical prediction of turbulent heat transfer in gas pipe flows subject to combined convection and radiation", *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 9, N° 3, pp. 308-315.

- SEDIKI, E., SOUFIANI, A. and SIFAOU, M. S., 2002, "Spectrally Correlated Radiation and Laminar Forced Convection in the entrance region of a circular duct", *Int. Journal Heat and Mass Transfer*, Vol. 45, pp. 5069-5081.
- SEDIKI, E., SOUFIANI, A. and SIFAOU, M. S., 2003, "Combined Gas radiation and laminar mixed convection in vertical circular tubes", *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 24, pp. 736-746.
- SEO, T., KAMINSKI, D.A. and JENSEN, M. K., 1994, "Combined Convection and Radiation in Simultaneously Developing Flow and Heat Transfer with Nongray Gas Mixtures", *Numerical Heat Transfer, Part A*, Vol. 26, pp. 49-66.
- SHAH, R.K. and LONDON, A.L., 2014. "Laminar Flow Forced Convection in Ducts: A Source Book for Compact Heat Exchanger Analytical Data", vol. 1, Academic Press.
- SHAH, R.K., 1975, "Thermal entry length solutions for the circular tube and parallel plates". *Proc.Natl. Heat Mass Transfer Conf.*, 3rd, Indian Inst. Technol., Bombay, Vol. I, Pap. No. HMT-11-75.
- SHIBANI, A. S. and ÖZISIK, M. N. (1977). "A Solution to Heat Transfer in Turbulent Flow between Parallel Plates", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 20, 565-573.
- SHIH, Y.P. and TSOU J.D., 1978, "Extended Leveque solutions for heat transfer to power-law fluids in laminar flow in a pipe", *Chem. Eng. J.*, Vol. 15, pp. 55-62.
- SHOKOUHI, A. A.; PAYAN, S. ; SHOKOUHI, A. and SARVARI, S. M. H., 2015, "Inverse Boundary Design Problem of Turbulent Forced Convection Between Parallel Plates With Surface Radiation Exchange", *Heat Transfer Engineering*, 36: pp. 488–497.
- SLEICHER, C.A., NOTTER, R.H. and CRIPPEN, M.D. (1970). "A Solution of Turbulent Graetz Problem by Matched Asymptotic Expansions - I. The Case of Uniform Wall Temperature", *Chemical Engineering Science*, 25, 845-857.
- SMITH, T. F., SHEN, Z. F., and ALTURKI, A. M., 1985, "Radiative and convective transfer in a cylindrical enclosure for a real gas", *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 107, pp. 482-485.
- SPALDING, D.B., 1961. "Heat Transfer to a Turbulent Stream from a Surface with a Step-Wise Discontinuity in Wall Temperature", *Proceedings of the International Conference of Developments in Heat Transfer, ASME*, Part II, pp. 439-446, Boulder, USA.
- SPRING, H. M., 1940. "Boiler Operator's Guide", McGraw-Hill. 1 st edition. New York and London.
- TALUKDAR, P. and SIMONSON, C.J., 2007, "Effect of axial radiation on heat transfer in a thermally and hydrodynamically developing flow between parallel plates", *Numerical Heat Transfer, Part A*, 52: 911–934.
- TAYLOR, G.I., 1916. "Conditions at the surface of a hot body exposed to the Wind", *British Advisory Committee for Aeronautics*, 2-R & M, N° 272, pp. 423-429.
- TELLES, A.S.; QUEIROZ, E.M. and FILHO, G.E., 2001. "Solutions of the extended Graetz problem", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 44, pp. 471-483.
- TORABI, M.; YAGHOUBI, H. and AZIZ, A., 2012, "Analytical Solution for Convective–Radiative Continuously Moving Fin with Temperature-Dependent Thermal Conductivity", *Int. J. Thermophys*, 33: pp. 924–941
- TRABELSI, S.; LAKHAL,W.; SEDIKI, E. and MOUSSA, M., 2013, "Nusselt number evaluation for combined radiative and convective heat transfer in flow of gaseous products from combustion", *Thermal Science*, Vol. 17, N° 4, pp. 1093-1106.

- TSAY, J.R., and ÖZISIK, M.N., 1989, "Radiation and laminar forced convection of non-Newtonian fluid in a circular tube", *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 10, N° 4, pp. 361-365.
- TSOU, R.C. and KANG, C.S., 1976, *Letters Heat Mass Transfer* 3, pp. 231-238.
- VELOSO, D. L. de A., 2015, "Análise da convecção forçada laminar em dutos circulares submetidos aos efeitos da condução axial e radiação", *Dissertação de mestrado*, PPGEM/UFPB.
- VELOSO, D.L.A. and SANTOS, C. A. C., 2018. "Analysis of laminar forced convection asymmetric of non-newtonian fluid in the thermal entrance region of a channel of parallel plate", 17th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering - ENCIT 2018, paper n° 0125.
- VELOSO, D.L.A.; LIMA, F.A.; SANTOS, C.A.C.; ASSAD, G.E.; GONÇALVES, P.G., 2018. "Estudo da convecção forçada laminar para o escoamento tipo pistão com condução axial". X Congresso Nacional de Engenharia Mecânica- CONEM 2018.
- VERHOFF, F. H. and FISHER, D. P., 1973. "A numerical solution of the Graetz problem with axial conduction include", *J. Heat Transfer*, Vol. 95, pp. 132-134.
- VERONESE, J. P.; SILVA, S. A.; MARTINS, C. R; LUCENA, D. V. and SANTOS, J. C., 2012. "Análise da convecção forçada laminar de um fluido não newtoniano do tipo pseudoplástico via GITT", VII Congresso Norte-Nordeste de Pesquisa e Inovação .
- VICK, B. and OZISIK, M. N., 1981. "Effects of axial conduction and convective boundary conditions in slug flow inside a circular tube", *Journal of Heat Transfer*, Vol. 103, pp. 436-440.
- VICK, B.; OZISIK, M. N. and BAYAZITOGLU, Y., 1980. "A method of analysis for low Peclet number thermal entry regions problems with axial conduction", *Letters in Heat and Mass Transfer*, Vol. 7, pp. 235-248.
- VICK, B.; OZISIK, M. N. and ULLRICH, D. F., 1983. "Effects of axial conduction in laminar tube flow with convective boundaries", *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 316, N° 2, pp. 159-173.
- VON KARMAN, TH., 1939. "The Analogy between Fluid Friction and Heat Transfer", *Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs.*, Vol.61, pp. 705-710.
- WEIGAND, B. and ABDELMOULA, M., 2014. "Axial heat conduction effects in the entrance region of laminar duct flows: Correlations for the local Nusselt number", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 51, pp. 45–50.
- WOLFRAM MATHEMATICA, Version 9.0, 2012.
- YANG, G. and EBADIAN, M. A., 1991, "Thermal Radiation and laminar forced convection in the entrance region of a pipe with axial conduction and radiation", *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 12, N° 3, 202-209.
- YANG, G. and EBADIAN, M. A., 1992, "Analysis of heat transfer in arbitrary shaped ducts: Interaction of forced convection and radiation", *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, Vol. 19, pp. 103-115.
- ZHENG, B.; LIN, C.X. and EBADIAN, M.A., 2003, "Combined turbulent forced convection and thermal radiation in a curved pipe with uniform wall temperature", *Numerical Heat Transfer, Part A*, 44: 149–167.

APÊNDICE A

CÁLCULO DO PERFIL DE VELOCIDADE COMPLETAMENTE DESENVOLVIDO PARA O CASO DE CONVECÇÃO LAMINAR

Equação da quantidade de movimento no eixo x

$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{K}{\rho} \frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^m \mu(u_r) \frac{\partial u}{\partial r} \right]$	$; x \geq 0 \text{ e } 0 \leq r \leq r_0$	(A1)
--	---	------

onde ρ representa a densidade e K corresponde ao índice de consistência do fluido. A função $\mu(u_r)$ é definida como sendo:

$\mu(u_r) = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}}$	(A2)
--	------

Condições de contorno:

$r = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial r} = 0$	(A3)
---	------

$r = r_0 \rightarrow u = 0$	(A4)
-----------------------------	------

Substituindo a equação (A2) na eq. (A1), segue que:

$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{K}{\rho} \frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^m \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^n \right]$	(A5)
--	------

Multiplicando a equação (A5) por $\rho \cdot r^m$, implica que:

$0 = -r^m \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) + K \frac{\partial}{\partial r} \left[r^m \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^n \right]$	(A6)
---	------

Integrando a equação (A6) na variável r, e considerando o gradiente de pressão na direção axial constante, temos que:

$C_1 = - \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) \frac{r^{m+1}}{m+1} + K \cdot r^m \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^n$	(A7)
---	------

Organizando os termos da equação (A7), segue que:

$\frac{\partial u}{\partial r} = \left[\frac{1}{K} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) \frac{r}{m+1} + \frac{1}{K} \frac{C_1}{r^m} \right]^{\frac{1}{n}}$	(A8)
---	------

Aplicando a condição de contorno dada pela eq. (A3), verifica-se que $C_1=0$ para que não haja divergência no ponto $r = 0$. Portanto, temos que:

$\frac{\partial u}{\partial r} = \left[\frac{1}{K} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) \frac{r}{m+1} \right]^{\frac{1}{n}}$	(A9)
---	------

Integrando a equação (A8) na variável r , segue que:

$u(r) = \frac{n}{n+1} \left[\frac{1}{K} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) \frac{1}{m+1} \right]^{\frac{1}{n}} r^{\frac{n+1}{n}} + C_2$	(A10)
--	-------

Aplicando a condição de contorno dada pela eq. (A4), verifica-se que:

$C_2 = -\frac{n}{n+1} \left[\frac{1}{K} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) \frac{1}{m+1} \right]^{\frac{1}{n}} r_0^{\frac{n+1}{n}}$	(A11)
--	-------

Substituindo a equação (A11) na eq. (A10), encontra-se que:

$u(r) = \frac{n}{n+1} \left[\frac{1}{K} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) \frac{1}{m+1} \right]^{\frac{1}{n}} r^{\frac{n+1}{n}} - \frac{n}{n+1} \left[\frac{1}{K} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) \frac{1}{m+1} \right]^{\frac{1}{n}} r_0^{\frac{n+1}{n}}$	(A12)
--	-------

Organizando os termos, segue que:

$u(r) = -\frac{n}{n+1} \left[\frac{1}{K} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) \frac{1}{m+1} \right]^{\frac{1}{n}} r_0^{\frac{n+1}{n}} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right]$	(A13)
---	-------

A velocidade média do escoamento é definida pela expressão:

$u_m = \frac{\int_0^{r_0} r^m u(r) dr}{\int_0^{r_0} r^m dr}$	(A14)
--	-------

Substituindo a equação (A13) na eq. (A14), temos que:

$u_m = \frac{-\frac{n}{n+1} \left[\frac{1}{K} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) \frac{1}{m+1} \right]^{\frac{1}{n}} r_0^{\frac{n+1}{n}} \int_0^{r_0} r^m \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] dr}{\frac{r_0^{m+1}}{m+1}}$	(A15)
--	-------

Organizando os termos, segue que:

$u_m = -\frac{n}{n+1} \left[\frac{1}{K} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) \frac{1}{m+1} \right]^{\frac{1}{n}} r_0^{\frac{n+1}{n}} \frac{m+1}{r_0^{m+1}} \left\{ \int_0^{r_0} r^m dr - \left(\frac{1}{r_0} \right)^{\frac{n+1}{n}} \int_0^{r_0} r^{\frac{n+1}{n}+m} dr \right\}$	(A16)
--	-------

Resolvendo as integrais, encontra-se que:

$u_m = -\frac{n}{n+1} \left[\frac{1}{K} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) \frac{1}{m+1} \right]^{\frac{1}{n}} r_0^{\frac{n+1}{n}} \frac{m+1}{r_0^{m+1}} \left\{ \frac{r_0^{m+1}}{m+1} - \left(\frac{1}{r_0} \right)^{\frac{n+1}{n}} \cdot \frac{r_0^{\frac{n+1}{n}+m+1}}{\frac{n+1}{n} + m+1} \right\}$	(A17)
--	-------

Simplificando os termos, pode-se encontrar que:

$u_m = -\frac{n}{n+1} \left[\frac{1}{K} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) \frac{1}{m+1} \right]^{\frac{1}{n}} r_0^{\frac{n+1}{n}} (m+1) \left\{ \frac{1}{m+1} - \frac{n}{2n+1+mn} \right\}$	(A18)
---	-------

Organizando os termos, verifica-se que:

$u_m = -\frac{n}{n+1} \left[\frac{1}{K} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) \frac{1}{m+1} \right]^{\frac{1}{n}} r_0^{\frac{n+1}{n}} \left\{ \frac{n+1}{[1+(2+m)n]} \right\}$	(A19)
--	-------

Portanto, resta que:

$-\frac{n}{n+1} \left[\frac{1}{K} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) \frac{1}{m+1} \right]^{\frac{1}{n}} r_0^{\frac{n+1}{n}} = \frac{[1+(2+m)n]}{1+n} u_m$	(A20)
---	-------

Por fim, substituindo a equação (A20) na equação (A13), conclui-se que:

$u(r) = \frac{1+(2+m)n}{1+n} u_m \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{1+n}{n}} \right]$	(A21)
---	-------

APÊNDICE B

TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES PARA A CONVECÇÃO FORÇADA LAMINAR – MODELAGEM 1

Após aplicação dos filtros matemáticos, a equação adimensional da energia tornou-se:

Equação da energia

$U(R) \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial X} = \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 \Theta^*(X, R)}{\partial X^2} + \frac{4(2-m)^2}{R^m} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial R} \right) + \frac{\tau^2}{N} \left\{ G^{**}(X, R) + 1 - [\Theta^*(X, R) + 1]^4 \right\}$	(B1)
--	------

Aplicando o operador integral $\int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} dR$ na equação (B1), segue que:

$\begin{aligned} \frac{d}{dX} \left[\int_0^1 R^m U(R) \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Theta^*(X, R)}{N_i^{1/2}} dR \right] &= \frac{1}{Pe^2} \frac{d^2}{dX^2} \left[\frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 R^m \Psi_i(\mu_i, R) \Theta^*(X, R) dR \right] + \\ &+ 4(2-m)^2 \int_0^1 \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial R} \right) dR + \frac{\tau^2}{N} \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} G^{**}(X, R) dR + \\ &+ \frac{\tau^2}{N} \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} dR - \frac{\tau^2}{N} \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} [\Theta^*(X, R) + 1]^4 dR \end{aligned}$	(B2)
--	------

Usando as definições dos pares transformada-inversa na equação (B2), obtém-se que:

$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d\bar{\Theta}_j(X)}{dX} \left[\int_0^1 R^m U(R) \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR \right] &= \frac{1}{Pe^2} \frac{d^2 \bar{\Theta}_i(X)}{dX^2} + \\ &+ 4(2-m)^2 \int_0^1 \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial R} \right) dR + \frac{\tau^2}{N} \sum_{k=1}^{\infty} \bar{G}_k(X) \left[\int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \phi_k(\beta_k, R)}{N_i^{1/2} K_k^{1/2}} dR \right] + \\ &+ \frac{\tau^2}{N} \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} dR - \frac{\tau^2}{N} \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Psi_j(\mu_j, R) \bar{\Theta}_j(X)}{N_j^{1/2}} + 1 \right]^4 dR \end{aligned}$	(B3)
---	------

Do problema auxiliar do campo de temperatura, temos que:

$\frac{1}{R^m} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, R)}{\partial R} \right) + \mu_i^2 \Psi_i(\mu_i, R) = 0$	(B4)
--	------

Aplicando o operador $4(2-m)^2 \int_0^1 R^m \frac{\Theta^*(X, R)}{N_i^{1/2}} dR$ na equação (B4), segue que:

$4(2-m)^2 \int_0^1 \frac{\Theta^*(X, R)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, R)}{\partial R} \right) dR + 4(2-m)^2 \mu_i^2 \bar{\Theta}_i(X) = 0$	(B5)
--	------

Somando as equações (B5) e (B3), obtém-se que:

$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d\bar{\Theta}_j(X)}{dX} \left[\int_0^1 R^m U(R) \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR \right] &= \frac{1}{Pe^2} \frac{d^2 \bar{\Theta}_i(X)}{dX^2} - 4(2-m)^2 \mu_i^2 \bar{\Theta}_i(X) + \\ &+ 4(2-m)^2 \int_0^1 \left\{ \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial R} \right) - \frac{\Theta^*(X, R)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, R)}{\partial R} \right) \right\} dR + \\ &+ \frac{\tau^2}{N} \sum_{k=1}^{\infty} \bar{G}_k(X) \left[\int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \phi_k(\beta_k, R)}{N_i^{1/2} K_k^{1/2}} dR \right] + \frac{\tau^2}{N} \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} dR + \\ &- \frac{\tau^2}{N} \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Psi_j(\mu_j, R) \bar{\Theta}_j(X)}{N_j^{1/2}} + 1 \right]^4 dR \end{aligned}$	(B6)
--	------

Analisando a integral correspondente a segunda linha na equação (B6), usando o teorema de Green, segue que:

$\begin{aligned} 4(2-m)^2 \int_0^1 \left\{ \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial R} \right) - \frac{\Theta^*(X, R)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, R)}{\partial R} \right) \right\} dR &= \\ &= \frac{4(2-m)^2}{N_i^{1/2}} \left[\Psi_i(\mu_i, R) R^m \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial R} \Big _0^1 - \int_0^1 R^m \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial R} \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, R)}{\partial R} dR \right] + \\ &- \frac{4(2-m)^2}{N_i^{1/2}} \left[\Theta^*(X, R) R^m \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, R)}{\partial R} \Big _0^1 - \int_0^1 R^m \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, R)}{\partial R} \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial R} dR \right] \end{aligned}$	(B7)
--	------

Usando as condições de contorno do problema auxiliar e do problema principal para o campo de temperatura, pode-se mostrar que a equação (B7) assume a forma:

$4(2-m)^2 \int_0^1 \left\{ \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial R} \right) - \frac{\Theta^*(X, R)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, R)}{\partial R} \right) \right\} dR = 0$	(B8)
---	------

Define-se os seguintes coeficientes:

$CT_{1ij} = \int_0^1 R^m U(R) \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR$	(B9)
---	------

$CT_{2ik} = \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \phi_k(\beta_k, R)}{N_i^{1/2} K_k^{1/2}} dR$	(B10)
--	-------

$\bar{f}_i = \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} dR$	(B11)
--	-------

$C_{ij}[\bar{\Theta}_j(X)] = \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Psi_j(\mu_j, R) \bar{\Theta}_j(X)}{N_j^{1/2}} + 1 \right]^4 dR$	(B12)
--	-------

Utilizando as equações (B8-12), verifica-se que a equação (B6) torna-se:

$\sum_{j=1}^{\infty} CT_{1ij} \frac{d\bar{\Theta}_j(X)}{dX} = \frac{1}{Pe^2} \frac{d^2 \bar{\Theta}_i(X)}{dX^2} - 4(2-m)^2 \mu_i^2 \bar{\Theta}_i(X) + \frac{\tau^2}{N} \sum_{k=1}^{\infty} CT_{2ik} \bar{G}_k(X) + \frac{\tau^2}{N} \bar{f}_i - \frac{\tau^2}{N} C_{ij}[\bar{\Theta}_j(X)]$	(B13)
--	-------

O coeficiente $C_{ij}[\bar{\Theta}_j(X)]$, definido na equação (B12), ainda pode ser desenvolvido matematicamente, utilizando-se a clássica fórmula do binômio de Newton. Desta forma, segue que:

$C_{ij}[\bar{\Theta}_j(X)] = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^4(X) \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j^4(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^2} dR + \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^3(X) \int_0^1 4R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j^3(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{3/2}} dR +$ $+ \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^2(X) \int_0^1 6R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j^2(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j} dR + \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j(X) \int_0^1 4R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR + \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} dR$	(B14)
---	-------

Substituindo a equação (B14) na equação (B13), resulta que:

$\sum_{j=1}^{\infty} CT_{1ij} \frac{d\bar{\Theta}_j(X)}{dX} = \frac{1}{Pe^2} \frac{d^2 \bar{\Theta}_i(X)}{dX^2} - 4(2-m)^2 \mu_i^2 \bar{\Theta}_i(X) + \frac{\tau^2}{N} \sum_{k=1}^{\infty} CT_{2ik} \bar{G}_k(X) +$ $- \frac{\tau^2}{N} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^4(X) \left[\int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j^4(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^2} dR \right] - \frac{\tau^2}{N} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^3(X) \left[\int_0^1 4R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j^3(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{3/2}} dR \right] +$ $- \frac{\tau^2}{N} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^2(X) \left[\int_0^1 6R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j^2(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j} dR \right] - \frac{\tau^2}{N} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j(X) \left[\int_0^1 4R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR \right]$	(B15)
---	-------

Os seguintes coeficientes são definidos:

$CT_{3ij} = \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j^4(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^2} dR$	(B16)
--	-------

$CT_{4ij} = \int_0^1 4R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j^3(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{3/2}} dR$	(B17)
---	-------

$CT_{5ij} = \int_0^1 6R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j^2(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j} dR$	(B18)
---	-------

$CT_{6ij} = \int_0^1 4R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR = 4\delta_{ij}$	(B19)
--	-------

Substituindo as equações (B16-19) na equação (B15) encontra-se a equação transformada do campo de temperatura, dada por:

$\frac{1}{Pe^2} \frac{d^2 \bar{\Theta}_i(X)}{dX^2} - \sum_{j=1}^{\infty} CT_{1ij} \frac{d\bar{\Theta}_j(X)}{dX} - 4(2-m)^2 \mu_i^2 \bar{\Theta}_i(X) + \frac{\tau^2}{N} \sum_{k=1}^{\infty} CT_{2ik} \bar{G}_k(X) +$ $- \frac{\tau^2}{N} \sum_{j=1}^{\infty} CT_{3ij} \bar{\Theta}_j^4(X) - \frac{\tau^2}{N} \sum_{j=1}^{\infty} CT_{4ij} \bar{\Theta}_j^3(X) - \frac{\tau^2}{N} \sum_{j=1}^{\infty} CT_{5ij} \bar{\Theta}_j^2(X) - \frac{4\tau^2}{N} \bar{\Theta}_i(X) = 0$	(B20)
--	-------

As condições adimensionais de entrada e saída para o campo de temperatura são dadas por:

$\Theta^*(X, R) = \Theta_e - 1$	(B21)
$\Theta^*(X, R) = 0$	(B22)

Operando as equações (B21) e (B22) por $\int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} dR$, encontra-se que:

$\bar{\Theta}_i(X=0) = (\Theta_e - 1) \bar{f}_i$	(B23)
$\bar{\Theta}_i(X=\infty) = 0$	(B24)

Após aplicação dos filtros matemáticos, a equação adimensional da transferência radiativa tornou-se:

Equação da transferência radiativa

$\frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 G^{**}(X, R)}{\partial X^2} + \frac{4(2-m)^2}{R^m} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial R} \right) = 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \left[G^{**}(X, R) + 1 - [\Theta^*(X, R) + 1]^4 \right]$	(B25)
--	-------

Aplicando o operador integral $\int_0^1 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} dR$ na equação (B25), segue que:

$\frac{1}{Pe^2} \frac{d^2}{dX^2} \left[\frac{1}{K_i^{1/2}} \int_0^1 R^m \phi_i(\beta_i, R) G^{**}(X, R) dR \right] + 4(2-m)^2 \int_0^1 \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial R} \right) dR =$ $= 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \left[\frac{1}{K_i^{1/2}} \int_0^1 R^m \phi_i(\beta_i, R) G^{**}(X, R) dR \right] + 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \left[\frac{1}{K_i^{1/2}} \int_0^1 R^m \phi_i(\beta_i, R) dR \right] +$ $- 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \int_0^1 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} [\Theta^*(X, R) + 1]^4 dR$	(B26)
--	-------

Usando as definições dos pares transformada-inversa na equação (B26), obtém-se que:

$\frac{1}{Pe^2} \frac{d^2 \bar{G}_i(X)}{dX^2} + 4(2-m)^2 \int_0^1 \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial R} \right) dR = 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \bar{G}_i(X) +$ $+ 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \left[\frac{1}{K_i^{1/2}} \int_0^1 R^m \phi_i(\beta_i, R) dR \right] - 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \int_0^1 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Psi_j(\mu_j, R) \bar{\Theta}_j(X)}{N_j^{1/2}} + 1 \right]^4 dR$	(B27)
---	-------

Do problema auxiliar do campo de radiação total, temos que:

$\frac{1}{R^m} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \phi_i(\beta_i, R)}{\partial R} \right) + \beta_i^2 \phi_i(\beta_i, R) = 0$	(B28)
--	-------

Aplicando o operador $-4(2-m)^2 \int_0^1 R^m \frac{G^{**}(X, R)}{K_i^{1/2}} dR$ na equação (B28), segue que:

$-4(2-m)^2 \int_0^1 \frac{G^{**}(X, R)}{K_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \phi_i(\beta_i, R)}{\partial R} \right) dR - 4(2-m)^2 \beta_i^2 \bar{G}_i(X) = 0$	(B29)
--	-------

Somando as equações (B29) e (B27), obtém-se que:

$\begin{aligned} & \frac{1}{Pe^2} \frac{d^2 \bar{G}_i(X)}{dX^2} + 4(2-m)^2 \int_0^1 \left\{ \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial R} \right) - \frac{G^{**}(X, R)}{K_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \phi_i(\beta_i, R)}{\partial R} \right) \right\} dR + \\ & -4(2-m)^2 \beta_i^2 \bar{G}_i(X) = 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \bar{G}_i(X) + 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \left[\frac{1}{K_i^{1/2}} \int_0^1 R^m \phi_i(\beta_i, R) dR \right] + \\ & -3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \int_0^1 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Psi_j(\mu_j, R) \bar{\Theta}_j(X)}{N_j^{1/2}} + 1 \right]^4 dR \end{aligned}$	(B30)
---	-------

Analisando a integral que aparece na primeira linha na equação (B30), usando o teorema de Green, segue que:

$\begin{aligned} & 4(2-m)^2 \int_0^1 \left\{ \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial R} \right) - \frac{G^{**}(X, R)}{K_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \phi_i(\beta_i, R)}{\partial R} \right) \right\} dR = \\ & = \frac{4(2-m)^2}{K_i^{1/2}} \left[\phi_i(\beta_i, R) R^m \frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial R} \right]_0^1 - \int_0^1 R^m \frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial R} \frac{\partial \phi_i(\beta_i, R)}{\partial R} dR + \\ & - \frac{4(2-m)^2}{K_i^{1/2}} \left[G^{**}(X, R) R^m \frac{\partial \phi_i(\beta_i, R)}{\partial R} \right]_0^1 - \int_0^1 R^m \frac{\partial \phi_i(\beta_i, R)}{\partial R} \frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial R} dR \end{aligned}$	(B31)
---	-------

Usando as condições de contorno do problema auxiliar e do problema principal para o campo de radiação total, pode-se mostrar que a equação (B31) assume a forma:

$4(2-m)^2 \int_0^1 \left\{ \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial R} \right) - \frac{G^{**}(X, R)}{K_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \phi_i(\beta_i, R)}{\partial R} \right) \right\} dR = 0$	(B32)
---	-------

Define-se os seguintes coeficientes:

$\bar{g}_i = \frac{1}{K_i^{1/2}} \int_0^1 R^m \phi_i(\beta_i, R) dR$	(B33)
--	-------

$J_{ij}[\bar{\Theta}_j(X)] = \int_0^1 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Psi_j(\mu_j, R) \bar{\Theta}_j(X)}{N_j^{1/2}} + 1 \right]^4 dR$	(B34)
--	-------

Utilizando as equações (B32-34), verifica-se que a equação (B30) torna-se:

$\frac{1}{Pe^2} \frac{d^2 \bar{G}_i(X)}{dX^2} - 4(2-m)^2 \beta_i^2 \bar{G}_i(X) = 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \bar{G}_i(X) + 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \bar{g}_i - 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} J_{ij}[\bar{\Theta}_j(X)]$	(B35)
--	-------

O coeficiente $J_{ij}[\bar{\Theta}_j(X)]$, definido na equação (B34), pode ser reescrito na forma:

$J_{ij}[\bar{\Theta}_j(X)] = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^4(X) \int_0^1 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j^4(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^2} dR + \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^3(X) \int_0^1 4R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j^3(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^{3/2}} dR +$ $+ \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^2(X) \int_0^1 6R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j^2(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j} dR + \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j(X) \int_0^1 4R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR + \int_0^1 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} dR$	(B36)
---	-------

Substituindo a equação (B36) na equação (B35), resulta que:

$\frac{1}{Pe^2} \frac{d^2 \bar{G}_i(X)}{dX^2} - 4(2-m)^2 \beta_i^2 \bar{G}_i(X) = 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \bar{G}_i(X) - 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^4(X) \left[\int_0^1 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j^4(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^2} dR \right] +$ $- 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^3(X) \left[\int_0^1 4R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j^3(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^{3/2}} dR \right] +$ $- 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^2(X) \left[\int_0^1 6R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j^2(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j} dR \right] +$ $- 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j(X) \left[\int_0^1 4R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR \right]$	(B37)
---	-------

Os seguintes coeficientes são definidos:

$CR1_{ij} = \int_0^1 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j^4(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^2} dR$	(B38)
--	-------

$CR2_{ij} = \int_0^1 4R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j^3(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^{3/2}} dR$	(B39)
---	-------

$CR3_{ij} = \int_0^1 6R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j^2(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j} dR$	(B40)
---	-------

$CR4_{ij} = \int_0^1 4R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR$	(B41)
---	-------

Substituindo as equações (B38-41) na equação (B37) encontra-se a equação transformada do campo de radiação total, dada por:

$\frac{1}{Pe^2} \frac{d^2 \bar{G}_i(X)}{dX^2} - 4(2-m)^2 \beta_i^2 \bar{G}_i(X) - 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \bar{G}_i(X) + 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} CR1_{ij} \bar{\Theta}_j^4(X) +$ $+ 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} CR2_{ij} \bar{\Theta}_j^3(X) + 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} CR3_{ij} \bar{\Theta}_j^2(X) + 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} CR4_{ij} \bar{\Theta}_j(X) = 0$	(B42)
--	-------

As condições adimensionais de entrada e saída para o campo de radiação total são dadas, respectivamente, por:

$\frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial X} + \frac{3}{2} \tau \cdot Pe G^{**}(X, R) = -\frac{3}{2} \tau \cdot Pe [1 - \Theta_e^4]$	(B43)
$\frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial X} = 0$	(B44)

Operando as equações (B43) e (B44) por $\int_0^1 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} dR$, encontra-se que:

$\left. \frac{d\bar{G}_i(X)}{dX} \right _{X=0} + \frac{3}{2} \tau \cdot Pe \bar{G}_i(X) \Big _{X=0} = -\frac{3}{2} \tau \cdot Pe [1 - \Theta_e^4] \bar{g}_i$	(B45)
$\left. \frac{d\bar{G}_i(X)}{dX} \right _{X=\infty} = 0$	(B46)

APÊNDICE C

TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES PARA A CONVECÇÃO FORÇADA LAMINAR – MODELAGEM 2

Após aplicação dos filtros matemáticos, a equação adimensional da energia tornou-se:

Equação da energia

$U(R) \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial X} = \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 \Theta^*(X, R)}{\partial X^2} + \frac{4(2-m)^2}{R^m} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial R} \right) + \frac{\tau^2}{N} \left\{ G^{**}(X, R) + 1 - [\Theta^*(X, R) + 1]^4 \right\}$	(C1)
--	------

Aplicando o operador integral $\int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} dR$ na equação (C1), segue que:

$\begin{aligned} \frac{d}{dX} \left[\int_0^1 R^m U(R) \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Theta^*(X, R)}{N_i^{1/2}} dR \right] &= \frac{1}{Pe^2} \frac{d^2}{dX^2} \left[\frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 R^m \Psi_i(\mu_i, R) \Theta^*(X, R) dR \right] + \\ &+ 4(2-m)^2 \int_0^1 \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial R} \right) dR + \frac{\tau^2}{N} \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} G^{**}(X, R) dR + \\ &+ \frac{\tau^2}{N} \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} dR - \frac{\tau^2}{N} \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} [\Theta^*(X, R) + 1]^4 dR \end{aligned}$	(C2)
--	------

Usando as definições dos pares transformada-inversa na equação (C2), obtém-se que:

$\begin{aligned} \frac{d\bar{\Theta}_i(X)}{dX} &= \frac{1}{Pe^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d^2 \bar{\Theta}_j(X)}{dX^2} \left[\int_0^1 \frac{R^m \Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR \right] + \\ &+ 4(2-m)^2 \int_0^1 \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial R} \right) dR + \frac{\tau^2}{N} \sum_{k=1}^{\infty} \bar{G}_k(X) \left[\int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \phi_k(\beta_k, R)}{N_i^{1/2} K_k^{1/2}} dR \right] + \\ &+ \frac{\tau^2}{N} \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} dR - \frac{\tau^2}{N} \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Psi_j(\mu_j, R) \bar{\Theta}_j(X)}{N_j^{1/2}} + 1 \right]^4 dR \end{aligned}$	(C3)
--	------

Do problema auxiliar do campo de temperatura, temos que:

$\frac{1}{R^m} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, R)}{\partial R} \right) + \mu_i^2 U(R) \Psi_i(\mu_i, R) = 0$	(C4)
---	------

Aplicando o operador $4(2-m)^2 \int_0^1 R^m \frac{\Theta^*(X, R)}{N_i^{1/2}} dR$ na equação (C4), segue que:

$4(2-m)^2 \int_0^1 \frac{\Theta^*(X, R)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, R)}{\partial R} \right) dR + 4(2-m)^2 \mu_i^2 \bar{\Theta}_i(X) = 0$	(C5)
--	------

Somando as equações (C5) e (C3), obtém-se que:

$\begin{aligned} \frac{d\bar{\Theta}_i(X)}{dX} = & \frac{1}{Pe^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d^2 \bar{\Theta}_j(X)}{dX^2} \left[\int_0^1 \frac{R^m \Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR \right] - 4(2-m)^2 \mu_i^2 \bar{\Theta}_i(X) + \\ & + 4(2-m)^2 \int_0^1 \left\{ \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial R} \right) - \frac{\Theta^*(X, R)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, R)}{\partial R} \right) \right\} dR + \\ & + \frac{\tau^2}{N} \sum_{k=1}^{\infty} \bar{G}_k(X) \left[\int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \phi_k(\beta_k, R)}{N_i^{1/2} K_k^{1/2}} dR \right] + \frac{\tau^2}{N} \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} dR + \\ & - \frac{\tau^2}{N} \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Psi_j(\mu_j, R) \bar{\Theta}_j(X)}{N_j^{1/2}} + 1 \right]^4 dR \end{aligned}$	(C6)
---	------

Analisando a integral correspondente a segunda linha na equação (C6), usando o teorema de Green, segue que:

$\begin{aligned} 4(2-m)^2 \int_0^1 \left\{ \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial R} \right) - \frac{\Theta^*(X, R)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, R)}{\partial R} \right) \right\} dR = \\ = \frac{4(2-m)^2}{N_i^{1/2}} \left[\Psi_i(\mu_i, R) R^m \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial R} \Big _0^1 - \int_0^1 R^m \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial R} \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, R)}{\partial R} dR \right] + \\ - \frac{4(2-m)^2}{N_i^{1/2}} \left[\Theta^*(X, R) R^m \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, R)}{\partial R} \Big _0^1 - \int_0^1 R^m \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, R)}{\partial R} \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial R} dR \right] \end{aligned}$	(C7)
---	------

Usando as condições de contorno do problema auxiliar e do problema principal para o campo de temperatura, pode-se mostrar que a equação (C7) assume a forma:

$4(2-m)^2 \int_0^1 \left\{ \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial R} \right) - \frac{\Theta^*(X, R)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, R)}{\partial R} \right) \right\} dR = 0$	(C8)
---	------

Define-se os seguintes coeficientes:

$CT_{1ij} = \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR$	(C9)
--	------

$CT_{2ik} = \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \phi_k(\beta_k, R)}{N_i^{1/2} K_k^{1/2}} dR$	(C10)
--	-------

$C_{ij}[\bar{\Theta}_j(X)] = \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Psi_j(\mu_j, R) \bar{\Theta}_j(X)}{N_j^{1/2}} + 1 \right]^4 dR$	(C11)
--	-------

Utilizando as equações (C8-11), verifica-se que a equação (C6) torna-se:

$\frac{d\bar{\Theta}_i(X)}{dX} = \frac{1}{Pe^2} \sum_{j=1}^{\infty} CT_{1ij} \frac{d^2 \bar{\Theta}_j(X)}{dX^2} - 4(2-m)^2 \mu_i^2 \bar{\Theta}_i(X) + \frac{\tau^2}{N} \sum_{k=1}^{\infty} CT_{2ik} \bar{G}_k(X) +$ $+ \frac{\tau^2}{N} \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} dR - \frac{\tau^2}{N} C_{ij} [\bar{\Theta}_j(X)]$	(C12)
--	-------

O coeficiente $C_{ij}[\bar{\Theta}_j(X)]$, definido na equação (C11), ainda pode ser desenvolvido matematicamente, utilizando-se a clássica fórmula do binômio de Newton. Desta forma, segue que:

$C_{ij}[\bar{\Theta}_j(X)] = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^4(X) \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j^4(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^2} dR + \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^3(X) \int_0^1 4R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j^3(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{3/2}} dR +$ $+ \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^2(X) \int_0^1 6R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j^2(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j} dR + \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j(X) \int_0^1 4R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR + \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} dR$	(C13)
---	-------

Substituindo a equação (C13) na equação (C12), resulta que:

$\frac{d\bar{\Theta}_i(X)}{dX} = \frac{1}{Pe^2} \sum_{j=1}^{\infty} CT_{1ij} \frac{d^2 \bar{\Theta}_j(X)}{dX^2} - 4(2-m)^2 \mu_i^2 \bar{\Theta}_i(X) + \frac{\tau^2}{N} \sum_{k=1}^{\infty} CT_{2ik} \bar{G}_k(X) +$ $- \frac{\tau^2}{N} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^4(X) \left[\int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j^4(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^2} dR \right] - \frac{\tau^2}{N} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^3(X) \left[\int_0^1 4R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j^3(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{3/2}} dR \right] +$ $- \frac{\tau^2}{N} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^2(X) \left[\int_0^1 6R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j^2(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j} dR \right] - \frac{\tau^2}{N} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j(X) \left[\int_0^1 4R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR \right]$	(C14)
---	-------

Os seguintes coeficientes são definidos:

$CT_{3ij} = \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j^4(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^2} dR$	(C15)
--	-------

$CT_{4ij} = \int_0^1 4R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j^3(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{3/2}} dR$	(C16)
---	-------

$CT_{5ij} = \int_0^1 6R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j^2(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j} dR$	(C17)
---	-------

$CT_{6ij} = \int_0^1 4R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR$	(C18)
---	-------

Substituindo as equações (C15-18) na equação (C14) encontra-se a equação transformada do campo de temperatura, dada por:

$\frac{1}{Pe^2} \sum_{j=1}^{\infty} CT_{1ij} \frac{d^2 \bar{\Theta}_j(X)}{dX^2} - \frac{d \bar{\Theta}_i(X)}{dX} - 4(2-m)^2 \mu_i^2 \bar{\Theta}_i(X) + \frac{\tau^2}{N} \sum_{k=1}^{\infty} CT_{2ik} \bar{G}_k(X) +$ $- \frac{\tau^2}{N} \sum_{j=1}^{\infty} CT_{3ij} \bar{\Theta}_j^4(X) - \frac{\tau^2}{N} \sum_{j=1}^{\infty} CT_{4ij} \bar{\Theta}_j^3(X) - \frac{\tau^2}{N} \sum_{j=1}^{\infty} CT_{5ij} \bar{\Theta}_j^2(X) - \frac{\tau^2}{N} \sum_{j=1}^{\infty} CT_{6ij} \bar{\Theta}_j(X) = 0$	(C19)
---	-------

As condições adimensionais de entrada e saída para o campo de temperatura são dadas por:

$\Theta^*(X, R) = \Theta_e - 1$	(C20)
$\Theta^*(X, R) = 0$	(C21)

Operando as equações (C20) e (C21) por $\int_0^1 R^m U(R) \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} dR$, encontra-se que:

$\bar{\Theta}_i(X=0) = (\Theta_e - 1) \bar{f}_i$	(C22)
$\bar{\Theta}_i(X=\infty) = 0$	(C23)

Tal que:

$\bar{f}_i = \int_0^1 R^m U(R) \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} dR$	(C24)
---	-------

Após aplicação dos filtros matemáticos, a equação adimensional da transferência radiativa tornou-se:

Equação da transferência radiativa

$\frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 G^{**}(X, R)}{\partial X^2} + \frac{4(2-m)^2}{R^m} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial R} \right) = 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \left[G^{**}(X, R) + 1 - [\Theta^*(X, R) + 1]^4 \right]$	(C25)
--	-------

Aplicando o operador integral $\int_0^1 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} dR$ na equação (C25), segue que:

$\frac{1}{Pe^2} \frac{d^2}{dX^2} \left[\frac{1}{K_i^{1/2}} \int_0^1 R^m \phi_i(\beta_i, R) G^{**}(X, R) dR \right] + 4(2-m)^2 \int_0^1 \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial R} \right) dR =$ $= 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \left[\frac{1}{K_i^{1/2}} \int_0^1 R^m \phi_i(\beta_i, R) G^{**}(X, R) dR \right] + 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \left[\frac{1}{K_i^{1/2}} \int_0^1 R^m \phi_i(\beta_i, R) dR \right] +$ $- 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \int_0^1 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} [\Theta^*(X, R) + 1]^4 dR$	(C26)
--	-------

Usando as definições dos pares transformada-inversa na equação (C26), obtém-se que:

$\frac{1}{Pe^2} \frac{d^2 \bar{G}_i(X)}{dX^2} + 4(2-m)^2 \int_0^1 \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial R} \right) dR = 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \bar{G}_i(X) +$ $+ 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \left[\frac{1}{K_i^{1/2}} \int_0^1 R^m \phi_i(\beta_i, R) dR \right] - 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \int_0^1 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Psi_j(\mu_j, R) \bar{\Theta}_j(X)}{N_j^{1/2}} + 1 \right]^4 dR$	(C27)
---	-------

Do problema auxiliar do campo de radiação total, temos que:

$\frac{1}{R^m} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \phi_i(\beta_i, R)}{\partial R} \right) + \beta_i^2 \phi_i(\beta_i, R) = 0$	(C28)
--	-------

Aplicando o operador $-4(2-m)^2 \int_0^1 R^m \frac{G^{**}(X, R)}{K_i^{1/2}} dR$ na equação (C28), segue que:

$-4(2-m)^2 \int_0^1 \frac{G^{**}(X, R)}{K_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \phi_i(\beta_i, R)}{\partial R} \right) dR - 4(2-m)^2 \beta_i^2 \bar{G}_i(X) = 0$	(C29)
--	-------

Somando as equações (C29) e (C27), obtém-se que:

$\frac{1}{Pe^2} \frac{d^2 \bar{G}_i(X)}{dX^2} + 4(2-m)^2 \int_0^1 \left\{ \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial R} \right) - \frac{G^{**}(X, R)}{K_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \phi_i(\beta_i, R)}{\partial R} \right) \right\} dR +$ $-4(2-m)^2 \beta_i^2 \bar{G}_i(X) = 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \bar{G}_i(X) + 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \left[\frac{1}{K_i^{1/2}} \int_0^1 R^m \phi_i(\beta_i, R) dR \right] +$ $- 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \int_0^1 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Psi_j(\mu_j, R) \bar{\Theta}_j(X)}{N_j^{1/2}} + 1 \right]^4 dR$	(C30)
--	-------

Analisando a integral que aparece na primeira linha na equação (C30), usando o teorema de Green, segue que:

$4(2-m)^2 \int_0^1 \left\{ \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial R} \right) - \frac{G^{**}(X, R)}{K_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \phi_i(\beta_i, R)}{\partial R} \right) \right\} dR =$ $= \frac{4(2-m)^2}{K_i^{1/2}} \left[\phi_i(\beta_i, R) R^m \frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial R} \right]_0^1 - \int_0^1 R^m \frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial R} \frac{\partial \phi_i(\beta_i, R)}{\partial R} dR +$ $- \frac{4(2-m)^2}{K_i^{1/2}} \left[G^{**}(X, R) R^m \frac{\partial \phi_i(\beta_i, R)}{\partial R} \right]_0^1 - \int_0^1 R^m \frac{\partial \phi_i(\beta_i, R)}{\partial R} \frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial R} dR$	(C31)
---	-------

Usando as condições de contorno do problema auxiliar e do problema principal para o campo de radiação total, pode-se mostrar que a equação (C31) assume a forma:

$4(2-m)^2 \int_0^1 \left\{ \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial R} \right) - \frac{G^{**}(X, R)}{K_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \phi_i(\beta_i, R)}{\partial R} \right) \right\} dR = 0$	(C32)
---	-------

Define-se os seguintes coeficientes:

$\bar{g}_i = \frac{1}{K_i^{1/2}} \int_0^1 R^m \phi_i(\beta_i, R) dR$	(C33)
--	-------

$J_{ij}[\bar{\Theta}_j(X)] = \int_0^1 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Psi_j(\mu_j, R) \bar{\Theta}_j(X)}{N_j^{1/2}} + 1 \right]^4 dR$	(C34)
--	-------

Utilizando as equações (C32-34), verifica-se que a equação (C30) torna-se:

$\frac{1}{Pe^2} \frac{d^2 \bar{G}_i(X)}{dX^2} - 4(2-m)^2 \beta_i^2 \bar{G}_i(X) = 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \bar{G}_i(X) + 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \bar{g}_i - 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} J_{ij}[\bar{\Theta}_j(X)]$	(C35)
--	-------

O coeficiente $J_{ij}[\bar{\Theta}_j(X)]$, definido na equação (C34), pode ser reescrito na forma:

$J_{ij}[\bar{\Theta}_j(X)] = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^4(X) \int_0^1 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j^4(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^2} dR + \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^3(X) \int_0^1 4R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j^3(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^{3/2}} dR +$ $+ \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^2(X) \int_0^1 6R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j^2(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j} dR + \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j(X) \int_0^1 4R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR + \int_0^1 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} dR$	(C36)
---	-------

Substituindo a equação (C36) na equação (C35), resulta que:

$\frac{1}{Pe^2} \frac{d^2 \bar{G}_i(X)}{dX^2} - 4(2-m)^2 \beta_i^2 \bar{G}_i(X) = 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \bar{G}_i(X) - 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^4(X) \left[\int_0^1 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j^4(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^2} dR \right] +$ $- 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^3(X) \left[\int_0^1 4R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j^3(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^{3/2}} dR \right] +$ $- 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^2(X) \left[\int_0^1 6R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j^2(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j} dR \right] +$ $- 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j(X) \left[\int_0^1 4R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR \right]$	(C37)
---	-------

Os seguintes coeficientes são definidos:

$CR1_{ij} = \int_0^1 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j^4(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^2} dR$	(C38)
--	-------

$CR2_{ij} = \int_0^1 4R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j^3(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^{3/2}} dR$	(C39)
---	-------

$CR3_{ij} = \int_0^1 6R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j^2(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j} dR$	(C40)
$CR4_{ij} = \int_0^1 4R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR$	(C41)

Substituindo as equações (C38-41) na equação (C37) encontra-se a equação transformada do campo de radiação total, dada por:

$\frac{1}{Pe^2} \frac{d^2 \bar{G}_i(X)}{dX^2} - 4(2-m)^2 \beta_i^2 \bar{G}_i(X) - 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \bar{G}_i(X) + 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} CR1_{ij} \bar{\Theta}_j^4(X) +$ $+ 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} CR2_{ij} \bar{\Theta}_j^3(X) + 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} CR3_{ij} \bar{\Theta}_j^2(X) + 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} CR4_{ij} \bar{\Theta}_j(X) = 0$	(C42)
--	-------

As condições adimensionais de entrada e saída para o campo de radiação total são dadas, respectivamente, por:

$\frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial X} + \frac{3}{2} \tau \cdot Pe G^{**}(X, R) = -\frac{3}{2} \tau \cdot Pe [1 - \Theta_e^4]$	(C43)
$\frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial X} = 0$	(C44)

Operando as equações (C43) e (C44) por $\int_0^1 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} dR$, encontra-se que:

$\left. \frac{d\bar{G}_i(X)}{dX} \right _{X=0} + \frac{3}{2} \tau \cdot Pe \bar{G}_i(X) \Big _{X=0} = -\frac{3}{2} \tau \cdot Pe [1 - \Theta_e^4] \bar{g}_i$	(C45)
$\left. \frac{d\bar{G}_i(X)}{dX} \right _{X=\infty} = 0$	(C46)

APÊNDICE D

TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES PARA A CONVECÇÃO FORÇADA LAMINAR – MODELAGEM 3

Após aplicação dos filtros matemáticos, a equação adimensional da energia tornou-se:

Equação da energia

$U(R) \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial X} = \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 \Theta^*(X, R)}{\partial X^2} + \frac{4(2-m)^2}{R^m} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial R} \right) + \frac{\tau^2}{N} \left\{ G^{**}(X, R) + 1 - [\Theta^*(X, R) + 1]^4 \right\}$	(D1)
--	------

Aplicando o operador integral $\int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} dR$ na equação (D1), segue que:

$\begin{aligned} \frac{d}{dX} \left[\int_0^1 R^m U(R) \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Theta^*(X, R)}{N_i^{1/2}} dR \right] &= \frac{1}{Pe^2} \frac{d^2}{dX^2} \left[\frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 R^m \Psi_i(\mu_i, R) \Theta^*(X, R) dR \right] + \\ &+ 4(2-m)^2 \int_0^1 \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial R} \right) dR + \frac{\tau^2}{N} \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} G^{**}(X, R) dR + \\ &+ \frac{\tau^2}{N} \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} dR - \frac{\tau^2}{N} \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} [\Theta^*(X, R) + 1]^4 dR \end{aligned}$	(D2)
--	------

Usando as definições dos pares transformada-inversa na equação (D2), obtém-se que:

$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d\bar{\Theta}_j(X)}{dX} \left[\int_0^1 R^m U(R) \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR \right] &= \frac{1}{Pe^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d^2 \bar{\Theta}_j(X)}{dX^2} \left[\int_0^1 \frac{R^m \Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR \right] + \\ &+ 4(2-m)^2 \int_0^1 \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial R} \right) dR + \frac{\tau^2}{N} \sum_{k=1}^{\infty} \bar{G}_k(X) \left[\int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \phi_k(\beta_k, R)}{N_i^{1/2} K_k^{1/2}} dR \right] + \\ &+ \frac{\tau^2}{N} \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} dR - \frac{\tau^2}{N} \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Psi_j(\mu_j, R) \bar{\Theta}_j(X)}{N_j^{1/2}} + 1 \right]^4 dR \end{aligned}$	(D3)
--	------

Usando a integração por partes, temos que:

$4(2-m)^2 \int_0^1 \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial R} \right) dR = \frac{4(2-m)^2}{N_i^{1/2}} \left[\Psi_i(\mu_i, R) R^m \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial R} \Big _0^1 + \int_0^1 R^m \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial R} \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, R)}{\partial R} dR \right]$	(D4)
---	------

Usando as condições de contorno do problema auxiliar e do problema principal para o campo de temperatura, obtém-se que:

$$4(2-m)^2 \int_0^1 \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial R} \right) dR = - \frac{4(2-m)^2}{N_i^{1/2}} \int_0^1 R^m \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial R} \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, R)}{\partial R} dR \quad (D5)$$

Substituindo a equação (D5) em (D3), segue que:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d\bar{\Theta}_j(X)}{dX} \left[\int_0^1 R^m U(R) \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR \right] &= \frac{1}{Pe^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d^2 \bar{\Theta}_j(X)}{dX^2} \left[\int_0^1 \frac{R^m \Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR \right] + \\ &- \frac{4(2-m)^2}{N_i^{1/2}} \int_0^1 R^m \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial R} \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, R)}{\partial R} dR + \frac{\tau^2}{N} \sum_{k=1}^{\infty} \bar{G}_k(X) \left[\int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \phi_k(\beta_k, R)}{N_i^{1/2} K_k^{1/2}} dR \right] + \\ &+ \frac{\tau^2}{N} \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} dR - \frac{\tau^2}{N} \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Psi_j(\mu_j, R) \bar{\Theta}_j(X)}{N_j^{1/2}} + 1 \right]^4 dR \end{aligned} \quad (D6)$$

Do problema auxiliar do campo de temperatura, temos que:

$$\frac{\partial^2 \Psi_i(\mu_i, R)}{\partial R^2} + \mu_i^2 \cdot \Psi_i(\mu_i, R) = 0 \quad (D7)$$

Aplicando o operador $4(2-m)^2 \int_0^1 \frac{\Theta^*(X, R)}{N_i^{1/2}} dR$ na equação (D7), segue que:

$$4(2-m)^2 \int_0^1 \frac{\Theta^*(X, R)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial^2 \Psi_i(\mu_i, R)}{\partial R^2} dR + 4(2-m)^2 \mu_i^2 \bar{\Theta}_i(X) = 0 \quad (D8)$$

Usando a integração por partes, temos que:

$$4(2-m)^2 \int_0^1 \frac{\Theta^*(X, R)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial^2 \Psi_i(\mu_i, R)}{\partial R^2} dR = \frac{4(2-m)^2}{N_i^{1/2}} \left[\Theta^*(X, R) \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, R)}{\partial R} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, R)}{\partial R} \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial R} dR \quad (D9)$$

Usando as condições de contorno do problema auxiliar e do problema principal para o campo de temperatura, obtém-se que:

$$4(2-m)^2 \int_0^1 \frac{\Theta^*(X, R)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial^2 \Psi_i(\mu_i, R)}{\partial R^2} dR = - \frac{4(2-m)^2}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, R)}{\partial R} \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial R} dR \quad (D10)$$

Substituindo a equação (D10) em (D8), obtém-se que:

$$- \frac{4(2-m)^2}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, R)}{\partial R} \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial R} dR + 4(2-m)^2 \mu_i^2 \bar{\Theta}_i(X) = 0 \quad (D11)$$

Somando as equações (D6) e (D11), e usando a fórmula da inversa, obtém-se que:

$ \begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d\bar{\Theta}_j(X)}{dX} \left[\int_0^1 R^m U(R) \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR \right] = \\ = \frac{1}{Pe^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d^2 \bar{\Theta}_j(X)}{dX^2} \left[\int_0^1 \frac{R^m \Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR \right] - 4(2-m)^2 \mu_i^2 \bar{\Theta}_i(X) + \\ + 4(2-m)^2 \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j(X) \left[\int_0^1 \frac{(1-R^m)}{N_i^{1/2} N_j^{1/2}} \frac{\partial \Psi_j(\mu_j, R)}{\partial R} \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, R)}{\partial R} dR \right] \\ + \frac{\tau^2}{N} \sum_{k=1}^{\infty} \bar{G}_k(X) \left[\int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \phi_k(\beta_k, R)}{N_i^{1/2} K_k^{1/2}} dR \right] + \\ + \frac{\tau^2}{N} \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} dR - \frac{\tau^2}{N} \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Psi_j(\mu_j, R) \bar{\Theta}_j(X)}{N_j^{1/2}} + 1 \right]^4 dR \end{aligned} $	(D12)
--	-------

Define-se os seguintes coeficientes:

$CT\ 1_{ij} = \int_0^1 R^m U(R) \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR$	(D13)
$CT\ 2_{ij} = \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR$	(D14)
$CT\ 3_{ij} = \int_0^1 \frac{(1-R^m)}{N_i^{1/2} N_j^{1/2}} \frac{\partial \Psi_j(\mu_j, R)}{\partial R} \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, R)}{\partial R} dR$	(D15)
$CT\ 4_{ik} = \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \phi_k(\beta_k, R)}{N_i^{1/2} K_k^{1/2}} dR$	(D16)
$C_{ij}[\bar{\Theta}_j(X)] = \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Psi_j(\mu_j, R) \bar{\Theta}_j(X)}{N_j^{1/2}} + 1 \right]^4 dR$	(D17)

Utilizando as equações (D13-17), verifica-se que a equação (D12) torna-se:

$ \begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} CT\ 1_{ij} \frac{d\bar{\Theta}_j(X)}{dX} = \frac{1}{Pe^2} \sum_{j=1}^{\infty} CT\ 2_{ij} \frac{d^2 \bar{\Theta}_j(X)}{dX^2} - 4(2-m)^2 \mu_i^2 \bar{\Theta}_i(X) + 4(2-m)^2 \sum_{j=1}^{\infty} CT\ 3_{ij} \bar{\Theta}_j(X) + \\ + \frac{\tau^2}{N} \sum_{k=1}^{\infty} CT\ 4_{ik} \bar{G}_k(X) + \frac{\tau^2}{N} \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} dR - \frac{\tau^2}{N} C_{ij}[\bar{\Theta}_j(X)] \end{aligned} $	(D18)
---	-------

O coeficiente $C_{ij}[\bar{\Theta}_j(X)]$, definido na equação (D17), ainda pode ser desenvolvido utilizando-se o binômio de Newton. Desta forma, segue que:

$ \begin{aligned} C_{ij}[\bar{\Theta}_j(X)] = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^4(X) \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j^4(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^2} dR + \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^3(X) \int_0^1 4R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j^3(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{3/2}} dR + \\ + \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^2(X) \int_0^1 6R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j^2(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j} dR + \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j(X) \int_0^1 4R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR + \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} dR \end{aligned} $	(D19)
--	-------

Substituindo a equação (D19) na equação (D18), resulta que:

$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} CT_{1ij} \frac{d\bar{\Theta}_j(X)}{dX} &= \frac{1}{Pe^2} \sum_{j=1}^{\infty} CT_{2ij} \frac{d^2\bar{\Theta}_j(X)}{dX^2} - 4(2-m)^2 \mu_i^2 \bar{\Theta}_i(X) + 4(2-m)^2 \sum_{j=1}^{\infty} CT_{3ij} \bar{\Theta}_j(X) + \\ &+ \frac{\tau^2}{N} \sum_{k=1}^{\infty} CT_{4ik} \bar{G}_k(X) - \frac{\tau^2}{N} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^4(X) \left[\int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j^4(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^2} dR \right] + \\ &- \frac{\tau^2}{N} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^3(X) \left[\int_0^1 4R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j^3(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{3/2}} dR \right] - \frac{\tau^2}{N} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^2(X) \left[\int_0^1 6R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j^2(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j} dR \right] + \\ &- \frac{\tau^2}{N} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j(X) \left[\int_0^1 4R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR \right] \end{aligned}$	(D20)
--	-------

Os seguintes coeficientes são definidos:

$CT_{5ij} = \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j^4(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^2} dR$	(D21)
$CT_{6ij} = \int_0^1 4R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j^3(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{3/2}} dR$	(D22)
$CT_{7ij} = \int_0^1 6R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j^2(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j} dR$	(D23)
$CT_{8ij} = \int_0^1 4R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR$	(D24)

Substituindo as equações (D21-24) na equação (D20) encontra-se a equação transformada do campo de temperatura, dada por:

$\begin{aligned} \frac{1}{Pe^2} \sum_{j=1}^{\infty} CT_{2ij} \frac{d^2\bar{\Theta}_j(X)}{dX^2} - \sum_{j=1}^{\infty} CT_{1ij} \frac{d\bar{\Theta}_j(X)}{dX} - 4(2-m)^2 \mu_i^2 \bar{\Theta}_i(X) + 4(2-m)^2 \sum_{j=1}^{\infty} CT_{3ij} \bar{\Theta}_j(X) + \\ + \frac{\tau^2}{N} \sum_{k=1}^{\infty} CT_{4ik} \bar{G}_k(X) - \frac{\tau^2}{N} \sum_{j=1}^{\infty} CT_{5ij} \bar{\Theta}_j^4(X) - \frac{\tau^2}{N} \sum_{j=1}^{\infty} CT_{6ij} \bar{\Theta}_j^3(X) + \\ - \frac{\tau^2}{N} \sum_{j=1}^{\infty} CT_{7ij} \bar{\Theta}_j^2(X) - \frac{\tau^2}{N} \sum_{j=1}^{\infty} CT_{8ij} \bar{\Theta}_j(X) = 0 \end{aligned}$	(D25)
--	-------

As condições adimensionais de entrada e saída para o campo de temperatura são dadas por:

$\Theta^*(X, R) = \Theta_e - 1$	(D26)
$\Theta^*(X, R) = 0$	(D27)

Operando as equações (D26) e (D27) por $\int_0^1 \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} dR$, encontra-se que:

$\bar{\Theta}_i(X=0) = (\Theta_e - 1)\bar{f}_i$	(D28)
$\bar{\Theta}_i(X=\infty) = 0$	(D29)

Tal que:

$\bar{f}_i = \int_0^1 \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} dR$	(D30)
--	-------

Após aplicação dos filtros matemáticos, a equação adimensional da transferência radiativa tornou-se:

Equação da transferência radiativa

$\frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 G^{**}(X, R)}{\partial X^2} + \frac{4(2-m)^2}{R^m} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial R} \right) = 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \left[G^{**}(X, R) + 1 - [\Theta^*(X, R) + 1]^4 \right]$	(D31)
--	-------

Aplicando o operador integral $\int_0^1 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} dR$ na equação (D31), segue que:

$\begin{aligned} \frac{1}{Pe^2} \frac{d^2}{dX^2} \left[\frac{1}{K_i^{1/2}} \int_0^1 R^m \phi_i(\beta_i, R) G^{**}(X, R) dR \right] + 4(2-m)^2 \int_0^1 \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial R} \right) dR = \\ = 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \left[\frac{1}{K_i^{1/2}} \int_0^1 R^m \phi_i(\beta_i, R) G^{**}(X, R) dR \right] + 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \left[\frac{1}{K_i^{1/2}} \int_0^1 R^m \phi_i(\beta_i, R) dR \right] + \\ - 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \int_0^1 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} [\Theta^*(X, R) + 1]^4 dR \end{aligned}$	(D32)
--	-------

Usando as definições dos pares transformada-inversa na equação (D32), obtém-se que:

$\begin{aligned} \frac{1}{Pe^2} \frac{d^2 \bar{G}_i(X)}{dX^2} + 4(2-m)^2 \int_0^1 \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial R} \right) dR = 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \bar{G}_i(X) + \\ + 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \left[\frac{1}{K_i^{1/2}} \int_0^1 R^m \phi_i(\beta_i, R) dR \right] - 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \int_0^1 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Psi_j(\mu_j, R) \bar{\Theta}_j(X)}{N_j^{1/2}} + 1 \right]^4 dR \end{aligned}$	(D33)
--	-------

Do problema auxiliar do campo de radiação total, temos que:

$\frac{1}{R^m} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \phi_i(\beta_i, R)}{\partial R} \right) + \beta_i^2 \phi_i(\beta_i, R) = 0$	(D34)
--	-------

Aplicando o operador $-4(2-m)^2 \int_0^1 R^m \frac{G^{**}(X, R)}{K_i^{1/2}} dR$ na equação (D34), segue que:

$-4(2-m)^2 \int_0^1 \frac{G^{**}(X, R)}{K_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \phi_i(\beta_i, R)}{\partial R} \right) dR - 4(2-m)^2 \beta_i^2 \bar{G}_i(X) = 0$	(D35)
--	-------

Somando as equações (D35) e (D33), obtém-se que:

$\begin{aligned} & \frac{1}{Pe^2} \frac{d^2 \bar{G}_i(X)}{dX^2} + 4(2-m)^2 \int_0^1 \left\{ \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial R} \right) - \frac{G^{**}(X, R)}{K_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \phi_i(\beta_i, R)}{\partial R} \right) \right\} dR + \\ & -4(2-m)^2 \beta_i^2 \bar{G}_i(X) = 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \bar{G}_i(X) + 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \left[\frac{1}{K_i^{1/2}} \int_0^1 R^m \phi_i(\beta_i, R) dR \right] + \\ & -3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \int_0^1 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Psi_j(\mu_j, R) \bar{\Theta}_j(X)}{N_j^{1/2}} + 1 \right]^4 dR \end{aligned}$	(D36)
---	-------

Analisando a integral que aparece na primeira linha na equação (D36), usando o teorema de Green, segue que:

$\begin{aligned} & 4(2-m)^2 \int_0^1 \left\{ \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial R} \right) - \frac{G^{**}(X, R)}{K_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \phi_i(\beta_i, R)}{\partial R} \right) \right\} dR = \\ & = \frac{4(2-m)^2}{K_i^{1/2}} \left[\phi_i(\beta_i, R) R^m \frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial R} \right]_0^1 - \int_0^1 R^m \frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial R} \frac{\partial \phi_i(\beta_i, R)}{\partial R} dR + \\ & - \frac{4(2-m)^2}{K_i^{1/2}} \left[G^{**}(X, R) R^m \frac{\partial \phi_i(\beta_i, R)}{\partial R} \right]_0^1 - \int_0^1 R^m \frac{\partial \phi_i(\beta_i, R)}{\partial R} \frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial R} dR \end{aligned}$	(D37)
---	-------

Usando as condições de contorno do problema auxiliar e do problema principal para o campo de radiação total, pode-se mostrar que a equação (D37) assume a forma:

$4(2-m)^2 \int_0^1 \left\{ \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial R} \right) - \frac{G^{**}(X, R)}{K_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \phi_i(\beta_i, R)}{\partial R} \right) \right\} dR = 0$	(D38)
---	-------

Define-se os seguintes coeficientes:

$\bar{g}_i = \frac{1}{K_i^{1/2}} \int_0^1 R^m \phi_i(\beta_i, R) dR$	(D39)
--	-------

$J_{ij}[\bar{\Theta}_j(X)] = \int_0^1 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Psi_j(\mu_j, R) \bar{\Theta}_j(X)}{N_j^{1/2}} + 1 \right]^4 dR$	(D40)
--	-------

Utilizando as equações (D38-40), verifica-se que a equação (D36) torna-se:

$\frac{1}{Pe^2} \frac{d^2 \bar{G}_i(X)}{dX^2} - 4(2-m)^2 \beta_i^2 \bar{G}_i(X) = 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \bar{G}_i(X) + 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \bar{g}_i - 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} J_{ij}[\bar{\Theta}_j(X)]$	(D41)
--	-------

O coeficiente $J_{ij}[\bar{\Theta}_j(X)]$, definido na equação (D40), pode ser reescrito na forma:

$J_{ij}[\bar{\Theta}_j(X)] = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^4(X) \int_0^1 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j^4(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^2} dR + \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^3(X) \int_0^1 4R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j^3(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^{3/2}} dR +$ $+ \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^2(X) \int_0^1 6R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j^2(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j} dR + \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j(X) \int_0^1 4R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR + \int_0^1 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} dR$	(D42)
---	-------

Substituindo a equação (D42) na equação (D41), resulta que:

$\frac{1}{Pe^2} \frac{d^2 \bar{G}_i(X)}{dX^2} - 4(2-m)^2 \beta_i^2 \bar{G}_i(X) = 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \bar{G}_i(X) - 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^4(X) \left[\int_0^1 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j^4(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^2} dR \right] +$ $- 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^3(X) \left[\int_0^1 4R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j^3(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^{3/2}} dR \right] +$ $- 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^2(X) \left[\int_0^1 6R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j^2(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j} dR \right] +$ $- 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j(X) \left[\int_0^1 4R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR \right]$	(D43)
---	-------

Os seguintes coeficientes são definidos:

$CR1_{ij} = \int_0^1 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j^4(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^2} dR$	(D44)
$CR2_{ij} = \int_0^1 4R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j^3(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^{3/2}} dR$	(D45)
$CR3_{ij} = \int_0^1 6R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j^2(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j} dR$	(D46)
$CR4_{ij} = \int_0^1 4R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR$	(D47)

Substituindo as equações (D44-47) na equação (D43) encontra-se a equação transformada do campo de radiação total, dada por:

$\frac{1}{Pe^2} \frac{d^2 \bar{G}_i(X)}{dX^2} - 4(2-m)^2 \beta_i^2 \bar{G}_i(X) - 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \bar{G}_i(X) + 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} CR1_{ij} \bar{\Theta}_j^4(X) +$ $+ 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} CR2_{ij} \bar{\Theta}_j^3(X) + 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} CR3_{ij} \bar{\Theta}_j^2(X) + 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} CR4_{ij} \bar{\Theta}_j(X) = 0$	(D48)
--	-------

As condições adimensionais de entrada e saída para o campo de radiação total são dadas, respectivamente, por:

$\frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial X} + \frac{3}{2} \tau \cdot Pe G^{**}(X, R) = -\frac{3}{2} \tau \cdot Pe [1 - \Theta_e^4]$	(D49)
---	-------

$\frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial X} = 0$	(D50)
--	-------

Operando as equações (D49) e (D50) por $\int_0^1 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} dR$, encontra-se que:

$\left. \frac{d\bar{G}_i(X)}{dX} \right _{X=0} + \frac{3}{2} \tau \cdot Pe \bar{G}_i(X) \Big _{X=0} = -\frac{3}{2} \tau \cdot Pe [1 - \Theta_e^4] \bar{g}_i$	(D51)
--	-------

$\left. \frac{d\bar{G}_i(X)}{dX} \right _{X=\infty} = 0$	(D52)
--	-------

APÊNDICE E

TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES PARA A CONVECÇÃO FORÇADA TURBULENTA

Após aplicação dos filtros matemáticos, a equação adimensional da energia tornou-se:

Equação da energia

$U(R) \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial X} = \frac{1}{R^m} \frac{\partial}{\partial R} \left[R^m E_h(R) \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial R} \right] + \frac{4\tau}{N} \left\{ G^{**}(X, R) + \Theta_w^4 - [\Theta^*(X, R) + \Theta_w]^4 \right\}$	(E1)
---	------

Aplicando o operador integral $\int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} dR$ na equação (E1), segue que:

$\begin{aligned} \frac{d}{dX} \left[\int_0^1 R^m U(R) \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Theta^*(X, R)}{N_i^{1/2}} dR \right] = \\ = \int_0^1 \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left[R^m E_h(R) \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial R} \right] dR + \frac{4\tau}{N} \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} G^{**}(X, R) dR + \\ + \frac{4\tau}{N} \Theta_w^4 \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} dR - \frac{4\tau}{N} \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} [\Theta^*(X, R) + \Theta_w]^4 dR \end{aligned}$	(E2)
---	------

Usando as definições dos pares transformada-inversa na equação (E2), obtém-se que:

$\begin{aligned} \frac{d\bar{\Theta}_i(X)}{dX} = \int_0^1 \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left[R^m E_h(R) \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial R} \right] dR + \frac{4\tau}{N} \sum_{k=1}^{\infty} \bar{G}_k(X) \left[\int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \phi_k(\beta_k, R)}{N_i^{1/2} K_k^{1/2}} dR \right] + \\ + \frac{4\tau}{N} \Theta_w^4 \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} dR - \frac{4\tau}{N} \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Psi_j(\mu_j, R) \bar{\Theta}_j(X)}{N_j^{1/2}} + \Theta_w \right]^4 dR \end{aligned}$	(E3)
--	------

Do problema auxiliar do campo de temperatura, temos que:

$\frac{1}{R^m} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m E_h(R) \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, R)}{\partial R} \right) + \mu_i^2 U(R) \Psi_i(\mu_i, R) = 0$	(E4)
--	------

Aplicando o operador $\int_0^1 R^m \frac{\Theta^*(X, R)}{N_i^{1/2}} dR$ na equação (E4), segue que:

$\int_0^1 \frac{\Theta^*(X, R)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m E_h(R) \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, R)}{\partial R} \right) dR + \mu_i^2 \bar{\Theta}_i(X) = 0$	(E5)
---	------

Somando as equações (E5) e (E3), obtém-se que:

$\begin{aligned} \frac{d\bar{\Theta}_i(X)}{dX} = & \int_0^1 \left\{ \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m E_h(R) \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial R} \right) - \frac{\Theta^*(X, R)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m E_h(R) \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, R)}{\partial R} \right) \right\} dR + \\ & - \mu_i^2 \bar{\Theta}_i(X) + \frac{4\tau}{N} \sum_{k=1}^{\infty} \bar{G}_k(X) \left[\int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \phi_k(\beta_k, R)}{N_i^{1/2} K_k^{1/2}} dR \right] + \\ & + \frac{4\tau}{N} \Theta_w^4 \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} dR - \frac{4\tau}{N} \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Psi_j(\mu_j, R) \bar{\Theta}_j(X)}{N_j^{1/2}} + \Theta_w \right]^4 dR \end{aligned}$	(E6)
--	------

Analisando a integral da primeira linha na equação (E6), usando o teorema de Green, segue que:

$\begin{aligned} \int_0^1 \left\{ \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m E_h(R) \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial R} \right) - \frac{\Theta^*(X, R)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m E_h(R) \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, R)}{\partial R} \right) \right\} dR = \\ = \frac{1}{N_i^{1/2}} \left[\Psi_i(\mu_i, R) R^m E_h(R) \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial R} \right]_0^1 - \int_0^1 R^m E_h(R) \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial R} \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, R)}{\partial R} dR + \\ - \frac{1}{N_i^{1/2}} \left[\Theta^*(X, R) R^m E_h(R) \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, R)}{\partial R} \right]_0^1 - \int_0^1 R^m E_h(R) \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, R)}{\partial R} \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial R} dR \end{aligned}$	(E7)
--	------

Usando as condições de contorno do problema auxiliar e do problema principal para o campo de temperatura, pode-se mostrar que a equação (E7) assume a forma:

$\int_0^1 \left\{ \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m E_h(R) \frac{\partial \Theta^*(X, R)}{\partial R} \right) - \frac{\Theta^*(X, R)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m E_h(R) \frac{\partial \Psi_i(\mu_i, R)}{\partial R} \right) \right\} dR = 0$	(E8)
--	------

Define-se os seguintes coeficientes:

$CT\ 1_{ik} = \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \phi_k(\beta_k, R)}{N_i^{1/2} K_k^{1/2}} dR$	(E9)
--	------

$C_{ij}[\bar{\Theta}_j(X)] = \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Psi_j(\mu_j, R) \bar{\Theta}_j(X)}{N_j^{1/2}} + \Theta_w \right]^4 dR$	(E10)
---	-------

Utilizando as equações (E8-10), verifica-se que a equação (E6) torna-se:

$\frac{d\bar{\Theta}_i(X)}{dX} = -\mu_i^2 \bar{\Theta}_i(X) + \frac{4\tau}{N} \sum_{k=1}^{\infty} CT\ 1_{ik} \bar{G}_k(X) + \frac{4\tau}{N} \Theta_w^4 \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} dR - \frac{4\tau}{N} C_{ij}[\bar{\Theta}_j(X)]$	(E11)
--	-------

O coeficiente $C_{ij}[\bar{\Theta}_j(X)]$, definido na equação (E10), ainda pode ser desenvolvido matematicamente, utilizando-se o binômio de Newton. Desta forma, segue que:

$ \begin{aligned} C_{ij}[\bar{\Theta}_j(X)] = & \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^4(X) \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j^4(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^2} dR + \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^3(X) \int_0^1 4\Theta_w R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j^3(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{3/2}} dR + \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^2(X) \int_0^1 6\Theta_w^2 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j^2(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j} dR + \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j(X) \int_0^1 4\Theta_w^3 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR + \Theta_w^4 \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} dR \end{aligned} $	(E12)
---	-------

Substituindo a equação (E12) na equação (E11), resulta que:

$ \begin{aligned} \frac{d\bar{\Theta}_i(X)}{dX} = & -\mu_i^2 \bar{\Theta}_i(X) + \frac{4\tau}{N} \sum_{k=1}^{\infty} CT_{1_{ik}} \bar{G}_k(X) - \frac{4\tau}{N} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^4(X) \left[\int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j^4(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^2} dR \right] + \\ & - \frac{4\tau}{N} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^3(X) \left[\int_0^1 4\Theta_w R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j^3(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{3/2}} dR \right] + \\ & - \frac{4\tau}{N} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^2(X) \left[\int_0^1 6\Theta_w^2 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j^2(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j} dR \right] + \\ & - \frac{4\tau}{N} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j(X) \left[\int_0^1 4\Theta_w^3 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR \right] \end{aligned} $	(E13)
--	-------

Os seguintes coeficientes são definidos:

$CT_{2_{ij}} = \int_0^1 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j^4(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^2} dR$	(E14)
$CT_{3_{ij}} = \int_0^1 4\Theta_w R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j^3(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{3/2}} dR$	(E15)
$CT_{4_{ij}} = \int_0^1 6\Theta_w^2 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j^2(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j} dR$	(E16)
$CT_{5_{ij}} = \int_0^1 4\Theta_w^3 R^m \frac{\Psi_i(\mu_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{N_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR$	(E17)

Substituindo as equações (E14-17) na equação (E13) encontra-se a equação transformada do campo de temperatura, dada por:

$ \begin{aligned} \frac{d\bar{\Theta}_i(X)}{dX} + \mu_i^2 \bar{\Theta}_i(X) - \frac{4\tau}{N} \sum_{k=1}^{\infty} CT_{1_{ik}} \bar{G}_k(X) + \frac{4\tau}{N} \sum_{j=1}^{\infty} CT_{2_{ij}} \bar{\Theta}_j^4(X) + \\ + \frac{4\tau}{N} \sum_{j=1}^{\infty} CT_{3_{ij}} \bar{\Theta}_j^3(X) + \frac{4\tau}{N} \sum_{j=1}^{\infty} CT_{4_{ij}} \bar{\Theta}_j^2(X) + \frac{4\tau}{N} \sum_{j=1}^{\infty} CT_{5_{ij}} \bar{\Theta}_j(X) = 0 \end{aligned} $	(E18)
---	-------

A condição adimensional de entrada para o campo de temperatura é dada por:

$\Theta^*(X, R) = 1 - \Theta_w$	(E19)
---------------------------------	-------

Operando a equação (E19) por $\int_0^1 R^m U(R) \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} dR$, encontra-se que:

$\bar{\Theta}_i(X=0) = (1 - \Theta_w) \bar{f}_i$	(E20)
--	-------

Tal que:

$\bar{f}_i = \int_0^1 R^m U(R) \frac{\Psi_i(\mu_i, R)}{N_i^{1/2}} dR$	(E21)
---	-------

Após aplicação dos filtros matemáticos, a equação adimensional da transferência radiativa tornou-se:

Equação da transferência radiativa

$\frac{1}{R^m} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial R} \right) = 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \left\{ G^{**}(X, R) + \Theta_w^4 - [\Theta^*(X, R) + \Theta_w]^4 \right\}$	(E22)
---	-------

Aplicando o operador integral $\int_0^1 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} dR$ na equação (E22), segue que:

$\int_0^1 \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial R} \right) dR = 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \left[\frac{1}{K_i^{1/2}} \int_0^1 R^m \phi_i(\beta_i, R) G^{**}(X, R) dR \right] +$ $+ 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \Theta_w^4 \left[\frac{1}{K_i^{1/2}} \int_0^1 R^m \phi_i(\beta_i, R) dR \right] - 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \int_0^1 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} [\Theta^*(X, R) + \Theta_w]^4 dR$	(E23)
--	-------

Usando as definições dos pares transformada-inversa na equação (E23), obtém-se que:

$\int_0^1 \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial R} \right) dR = 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \bar{G}_i(X) + 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \Theta_w^4 \left[\frac{1}{K_i^{1/2}} \int_0^1 R^m \phi_i(\beta_i, R) dR \right] +$ $- 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \int_0^1 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Psi_j(\mu_j, R) \bar{\Theta}_j(X)}{N_j^{1/2}} + \Theta_w \right]^4 dR$	(E24)
---	-------

Do problema auxiliar do campo de radiação total, temos que:

$\frac{1}{R^m} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \phi_i(\beta_i, R)}{\partial R} \right) + \beta_i^2 \phi_i(\beta_i, R) = 0$	(E25)
--	-------

Aplicando o operador $-\int_0^1 R^m \frac{G^{**}(X, R)}{K_i^{1/2}} dR$ na equação (E25), segue que:

$-\int_0^1 \frac{G^{**}(X, R)}{K_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \phi_i(\beta_i, R)}{\partial R} \right) dR - \beta_i^2 \bar{G}_i(X) = 0$	(E26)
--	-------

Somando as equações (E26) e (E24), obtém-se que:

$\int_0^1 \left\{ \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial R} \right) - \frac{G^{**}(X, R)}{K_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \phi_i(\beta_i, R)}{\partial R} \right) \right\} dR - \beta_i^2 \bar{G}_i(X) =$ $= 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \bar{G}_i(X) + 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \Theta_w^4 \left[\frac{1}{K_i^{1/2}} \int_0^1 R^m \phi_i(\beta_i, R) dR \right] - 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \int_0^1 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Psi_j(\mu_j, R) \bar{\Theta}_j(X)}{N_j^{1/2}} + \Theta_w \right]^4 dR$	(E27)
--	-------

Analisando a integral que aparece na primeira linha na equação (E27), usando o teorema de Green, segue que:

$\int_0^1 \left\{ \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial R} \right) - \frac{G^{**}(X, R)}{K_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \phi_i(\beta_i, R)}{\partial R} \right) \right\} dR =$ $= \frac{1}{K_i^{1/2}} \left[\phi_i(\beta_i, R) R^m \frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial R} \right]_0^1 - \int_0^1 R^m \frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial R} \frac{\partial \phi_i(\beta_i, R)}{\partial R} dR +$ $- \frac{1}{K_i^{1/2}} \left[G^{**}(X, R) R^m \frac{\partial \phi_i(\beta_i, R)}{\partial R} \right]_0^1 - \int_0^1 R^m \frac{\partial \phi_i(\beta_i, R)}{\partial R} \frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial R} dR$	(E28)
--	-------

Usando as condições de contorno do problema auxiliar e do problema principal para o campo de radiação total, pode-se mostrar que a equação (E28) assume a forma:

$\int_0^1 \left\{ \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial R} \right) - \frac{G^{**}(X, R)}{K_i^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^m \frac{\partial \phi_i(\beta_i, R)}{\partial R} \right) \right\} dR = 0$	(E29)
--	-------

Define-se os seguintes coeficientes:

$\bar{g}_i = \frac{1}{K_i^{1/2}} \int_0^1 R^m \phi_i(\beta_i, R) dR$	(E30)
--	-------

$J_{ij}[\bar{\Theta}_j(X)] = \int_0^1 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Psi_j(\mu_j, R) \bar{\Theta}_j(X)}{N_j^{1/2}} + \Theta_w \right]^4 dR$	(E31)
---	-------

Utilizando as equações (E29-31), verifica-se que a equação (E27) torna-se:

$-\beta_i^2 \bar{G}_i(X) = 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \bar{G}_i(X) + 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \Theta_w^4 \bar{g}_i - 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} J_{ij}[\bar{\Theta}_j(X)]$	(E32)
--	-------

O coeficiente $J_{ij}[\bar{\Theta}_j(X)]$, definido na equação (E31), pode ser reescrito na forma:

$J_{ij}[\bar{\Theta}_j(X)] = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^4(X) \int_0^1 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j^4(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^2} dR + \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^3(X) \int_0^1 4\Theta_w R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j^3(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^{3/2}} dR +$ $+ \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^2(X) \int_0^1 6\Theta_w^2 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j^2(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j} dR +$ $+ \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j(X) \int_0^1 4\Theta_w^3 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR + \Theta_w^4 \int_0^1 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} dR$	(E33)
---	-------

Substituindo a equação (E33) na equação (E32), resulta que:

$-\beta_i^2 \bar{G}_i(X) = 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \bar{G}_i(X) - 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^4(X) \left[\int_0^1 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j^4(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^2} dR \right] +$ $- 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^3(X) \left[\int_0^1 4\Theta_w R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j^3(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^{3/2}} dR \right] +$ $- 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j^2(X) \left[\int_0^1 6\Theta_w^2 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j^2(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j} dR \right] +$ $- 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Theta}_j(X) \left[\int_0^1 4\Theta_w^3 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR \right]$	(E34)
---	-------

Os seguintes coeficientes são definidos:

$CR1_{ij} = \int_0^1 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j^4(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^2} dR$	(E35)
$CR2_{ij} = \int_0^1 4\Theta_w R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j^3(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^{3/2}} dR$	(E36)
$CR3_{ij} = \int_0^1 6\Theta_w^2 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j^2(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j} dR$	(E37)
$CR4_{ij} = \int_0^1 4\Theta_w^3 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R) \Psi_j(\mu_j, R)}{K_i^{1/2} N_j^{1/2}} dR$	(E38)

Substituindo as equações (E35-38) na equação (E34) encontra-se a equação transformada do campo de radiação total, dada por:

$\left[\beta_i^2 + 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \right] \bar{G}_i(X) - 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} CR1_{ij} \bar{\Theta}_j^4(X) - 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} CR2_{ij} \bar{\Theta}_j^3(X) +$ $- 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} CR3_{ij} \bar{\Theta}_j^2(X) - 3\tau^2 \frac{\beta}{\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} CR4_{ij} \bar{\Theta}_j(X) = 0$	(E39)
--	-------

A condição adimensional de entrada para o campo de radiação total é dada por:

$\frac{\partial G^{**}(X, R)}{\partial X} + \frac{3}{2} \frac{C.Re.Pr.\tau}{2^{(2-m)}} G^{**}(X, R) = -\frac{3}{2} \frac{C.Re.Pr}{2^{(2-m)}} \cdot \tau \left[\Theta_w^4 - 1 \right]$	(E40)
--	-------

Operando a equação (E40) por $\int_0^1 R^m \frac{\phi_i(\beta_i, R)}{K_i^{1/2}} dR$, encontra-se que:

$\left. \frac{d\bar{G}_i(X)}{dX} \right _{X=0} + \frac{3}{2} \frac{C.Re.Pr.\tau}{2^{(2-m)}} \bar{G}_i(X) \Big _{X=0} = -\frac{3}{2} \frac{C.Re.Pr.\tau}{2^{(2-m)}} \left[\Theta_w^4 - 1 \right] \bar{g}_i$	(E41)
---	-------