Universidade Federal da Paraíba

Centro de Tecnologia

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

– MESTRADO –

ANÁLISE NÃO LINEAR DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO COM MÉTODO SECANTE

Por

Gabriel Figueiredo de Melo

Dissertação de Mestrado apresentada à Universidade Federal da Paraíba para obtenção do grau de Mestre

João Pessoa – Paraíba **Abril de 2019**

Universidade Federal da Paraíba

Centro de Tecnologia

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

– MESTRADO –

ANÁLISE NÃO LINEAR DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO COM MÉTODO SECANTE

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre.

Gabriel Figueiredo de Melo

Orientador: Prof. Dr. André Jacomel Torii

João Pessoa – Paraíba **Abril de 2019**

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

M528a Melo, Gabriel Figueiredo de.
ANÁLISE NÃO LINEAR DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO COM MÉTODO SECANTE / Gabriel Figueiredo de Melo. - João Pessoa, 2019.
97 f.

Orientação: André Jacomel Torii.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CT.

1. concreto armado. 2. análise não linear. 3. relação momento-curvatura. 4. método dos elementos finitos. 5. método secante. I. Torii, André Jacomel. II. Título.

UFPB/BC

"ANÁLISE NÃO LINEAR DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO COM MÉTODO SECANTE"

GABRIEL FIGUEIREDO DE MELO
Dissertação aprovada em 29 de abril de 2019

Período Letivo: 2019.1

Prof. Dr. André Jacomel Torii – UFPB
Orientador

Prof. Dr. Roberto Leal Pimentel – UFPB
Examinador Interno

Prof. Dr. Leandro Fleck Fadel Miguel – UFSC
Examinador Externo

João Pessoa/PB
2019

Aos meus pais,
Maria Auxiliadora e Adalberto,
dedico este trabalho.

AGRADECIMENTOS

Ao professor André Jacomel Torii pela atenção, ensinamentos e excelente orientação durante a realização deste trabalho.

Aos meus pais Adalberto e Maria Auxiliadora pelo grande apoio e incentivo dado para que eu sempre consiga cumprir meus objetivos.

Aos meus irmãos Lucas e Júlia, pelo apoio e carinho.

À Cibele, pelo incentivo, apoio incondicional, paciência, amor e carinho.

Aos colegas de trabalho da Prefeitura Universitária da UFPB, pela amizade, compreensão e grande apoio na realização deste trabalho.

Aos professores e funcionários do PPGECAM pelo apoio, atenção e colaboração.

Aos colegas do PPGECAM pela amizade, apoio e compartilhamento de conhecimentos ao longo do período de convivência.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo desenvolver e implementar rotinas computacionais de um modelo de elementos finitos simples e eficiente para análise não linear de vigas de concreto armado, considerando a não linearidade dos materiais através do uso das relações momento-curvatura das seções transversais obtidas antes da análise estrutural. Foram desenvolvidas rotinas computacionais para obter as relações momento-curvatura de seções genéricas de concreto armado, utilizado um desenvolvimento alternativo ao tradicional método das lamelas. As rotinas desenvolvidas são simples, gerais e flexíveis, permitindo um uso prático e amplo, podendo ser utilizada com diferentes leis constitutivas do aço e concreto. Em seguida, foi desenvolvido um modelo de elementos finitos para análise não linear de vigas de concreto armado baseado nas relações momento-curvatura, adotando o elemento de viga de Euler-Bernoulli. A fim de resolver as equações de equilíbrio não lineares e obter os deslocamentos e esforços internos da viga, foi adotado o método iterativo secante. Neste método a matriz de rigidez secante da estrutura é atualizada a cada iteração, utilizando os valores das curvaturas dos nós e os diagramas momento-curvatura para calcular as matrizes de rigidez dos elementos. O modelo de elementos finitos desenvolvido foi implementado através de rotinas computacionais, sendo, então, validado através de comparações com resultados de exemplos numéricos e experimentais da literatura. Com base nos resultados obtidos nos exemplos, pode-se concluir que as rotinas computacionais para análise não linear de vigas de concreto armado desenvolvidas neste trabalho se mostraram precisas e eficientes.

PALAVRAS-CHAVE: concreto armado, análise não linear, relação momento-curvatura, método dos elementos finitos, método secante.

ABSTRACT

This work aims to develop and implement computational routines of a simple and efficient finite element model for nonlinear analysis of reinforced concrete beams, considering the material nonlinearity using the moment-curvature relation of cross sections, that are obtained before structural analysis. Computational routines were developed to obtain the moment-curvature relations of general reinforced concrete cross sections, using an alternative development of the traditional fibers approach. The routines are simple, general and flexible, allowing practical employment, and can also be used with different constitutive laws of steel and concrete. Then, a finite element model was developed for nonlinear analysis of reinforced concrete beams based on the moment-curvature relation, employing the Euler-Bernoulli beam element. In order to solve the nonlinear equilibrium equations and obtain the internal displacements and stresses, the Secant iterative method is employed. In this method, the secant stiffness matrix of the structure is updated at each iteration, using the values of the node curvatures and the moment-curvature relations to obtain the stiffness matrices of the elements. The finite element model developed was implemented in computational routines and validated by comparisons with numerical and experimental results from the literature. Based on the results obtained it can be concluded that the computational routines for nonlinear analysis of reinforced concrete beams developed in this work are accurate and efficient.

KEYWORDS: reinforced concrete, nonlinear analysis, moment-curvature relation, finite element method, secant method.

SUMÁRIO

RESUMO ..... **V**

ABSTRACT ..... **VI**

LISTA DE FIGURAS ..... **X**

LISTA DE TABELAS ..... **XII**

LISTA DE SIMBOLOS ..... **XIII**

1 INTRODUÇÃO **1**

1.1 OBJETIVOS 2

1.1.1 Objetivo Geral 2

1.1.2 Objetivos Específicos 2

1.2 ORGANIZAÇÃO DOS CAPÍTULOS 3

2 REFERENCIAL TEÓRICO **4**

2.1 FONTES DA NÃO LINEARIDADE FÍSICA DO CONCRETO ARMADO 4

2.2 ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS RETICULADAS DE CONCRETO ARMADO 5

2.3 MODELOS CONSTITUTIVOS PARA OS MATERIAIS 7

2.3.1 Concreto 8

2.3.1.1 Concreto sob compressão uniaxial 9

2.3.1.2 Concreto sob tração uniaxial 11

2.3.2 Aço para armadura de concreto armado 14

2.4 ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS COM MEF 16

2.4.1 Solução das equações não lineares do MEF 17

2.5 MODELOS PARA ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO 19

2.6 RELAÇÃO MOMENTO-CURVATURA 22

2.6.1 Cálculo da Relação Momento-Curvatura 25

2.6.2 Diagrama momento-curvatura do concreto armado 25

3 MÉTODO PARA OBTENÇÃO DO DIAGRAMA MOMENTO-CURVATURA PARA SEÇÕES GENÉRICAS DE CONCRETO ARMADO 27

3.1 MODELO ESTRUTURAL DA SEÇÃO TRANSVERSAL 27
3.2 REGRA DA QUADRATURA: MÉTODO DAS LAMELAS 29
3.3 RELAÇÃO MOMENTO-CURVATURA 33
3.4 LEIS CONSTITUTIVAS ADOTADAS PARA OS EXEMPLOS 33
3.4.1 Concreto 34
3.4.2 Aço 34
3.5 EXEMPLOS 35
3.5.1 Seção Transversal Retangular 35
3.5.2 Seção Transversal Elipsoidal 36

4 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISE DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO 38

4.1 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS DE VIGA 38
4.1.1 Elemento Finito de Viga 38
4.1.2 Não linearidade física do modelo 45
4.1.3 Cálculo da matriz de rigidez secante 45
4.2 SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES NÃO LINEARES 47
4.2.1 Método da rigidez secante utilizando a curva momento-curvatura 48

5 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL 51

5.1 ALGORITMO GERAL 51
5.2 ROTINA PARA CÁLCULO DO DIAGRAMA MOMENTO-CURVATURA 54
5.3 ROTINA PARA ANÁLISE NÃO LINEAR DE UMA VIGA DE CONCRETO ARMADO COM O MÉTODO SECANTE 55

6 COMPARAÇÃO COM RESULTADOS NÚMERICOS 58

6.1 VIGA SIMPLESMENTE APOIADA V1 58
6.1.1 Modelo Constitutivo 59
6.1.1.1 Concreto 59
6.1.1.2 Aço 60
6.1.2 Parâmetros 62

6.1.3 Resultados 64
6.2 VIGA J-4 ENSAIADA POR BURN E SIESS 67
6.2.1 Leis Constitutivas 67
6.2.2 Parâmetros 69
6.2.3 Resultados 70
7 RESULTADOS E CONCLUSÕES 74
8 REFERÊNCIAS 77

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Análise da seção transversal sob flexão. (Bentz, 2000) 6
Figura 2 - Método das lamelas. a) Discretização da seção em lamelas. b) Distribuição de deformações. c) Distribuição de tensões. d)Esforços totais. (Chimello, 2003). 7
Figura 3 - Relação tensão-deformação do concreto sob compressão uniaxial. 9
Figura 4 - Modelo da NBR6118 para f_{ck} até 50MPa. 10
Figura 5 - Diagrama tensão-deformação de Hognestad. 11
Figura 6 - Diagrama tensão-deformação do concreto não fissurado na tração. 12
Figura 7 - Tensão entre fissuras no concreto tracionado. (Bentz, 2000) 12
Figura 8 - Gráfico tensão-deformação do concreto na tração. (Stramandinoli, 2008) 14
Figura 9 - Modelo elasto-plástico perfeito. 15
Figura 10 - Modelo elasto-plástico com endurecimento linear. 15
Figura 11 - Modelo trilinear. 15
Figura 12 - Método de Newton-Raphson modificado com incrementos de carga. 17
Figura 13 - Método da rigidez secante com uso do diagrama momento-curvatura. 18
Figura 14 - Viga sob esforços de flexão. (Hibbeler, 2011) 22
Figura 15 - Elemento infinitesimal *dz* de uma viga sob flexão. (Hibbeler, 2011) 22
Figura 16 - Etapas do gráfico momento-curvatura. 26
Figura 17 - Eixos na seção transversal. 27
Figura 18 - Campo de deformações. 28
Figura 19 - Seção transversal 29
Figura 20 - Seção transversal Ω e domínio de integração $\bar{\Omega}$ 30
Figura 21 - Malha de quadratura uniforme. 31
Figura 22 - Relação tensão-deformação para o concreto com f_c=30 MPa. 34
Figura 23 - Relação tensão-deformação para o aço com f_y=400 MPa. 35
Figura 24 - Seção transversal retangular. 36
Figura 25 - Momento-curvatura da seção transversal retangular. 36
Figura 26 - Seção Transversal Elipsoidal. 37
Figura 27 - Momento-curvatura para a seção transversal elipsoidal. 37
Figura 28 - Elemento finito de viga com 2 nós e 4 graus de liberdade. 38
Figura 29 - Funções de forma unidimensionais cúbicas do elemento finito de viga. (a) função N1, (b) função N2, (c) função N3, (d) função N4. 42
Figura 30 - Esforços nodais no elemento de barra. 43
Figura 31 - Rigidez secante no gráfico momento-curvatura. 49
Figura 32 - Fluxograma Simplificado do algoritmo geral. 53
Figura 33 - Funções da rotina ANASEC. 55
Figura 34 - Fluxograma simplificado da rotina VIGANL. 57
Figura 35 - Dimensões e seção transversal da viga V1 (medidas em m). 59
Figura 36 - Curva tensão-deformação para o aço. (Stramandinoli, 2007) 60
Figura 37 - Gráfico tensão-deformação do Concreto da viga V1. 61
Figura 38 - Gráfico tensão-deformação do aço da viga V1. 62
Figura 39 - Amostra de pontos da seção transversal da viga v1. 62
Figura 40 - Malhas de elementos finitos para o tipo 1 de carregamento. 63
Figura 41 - Malhas de elementos finitos para o tipo 2 de carregamento. 64
Figura 42 - Relação momento-curvatura da viga V1. 65
Figura 43 - Gráfico carga-deslocamento para o caso 1 de carregamento da viga V1. 65
Figura 44 - Gráfico carga-deslocamento para o caso 2 de carregamento da viga V1. 66

Figura 45 - Dimensões e seção transversal da viga J-4 (medidas em m). 67
Figura 46 - Gráfico tensão-deformação do aço da viga J-4. 68
Figura 47 - Gráfico tensão-deformação do concreto da viga J-4. 68
Figura 48 - Amostra de pontos da seção transversal 69
Figura 49 - Malhas de elementos finitos para a viga j-4. 70
Figura 50 - Relação momento-curvatura da seção transversal da viga J-4. 71
Figura 51 - Gráfico carga-deslocamento vertical da viga J-4 com diferentes malhas. 72
Figura 52 - Gráfico carga-deslocamento vertical para a viga J-4. 72

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Propriedades dos materiais da viga V1. 58
Tabela 2 - Propriedades dos materiais da viga J-4. 67

LISTA DE SIMBOLOS

Gregos

α	parâmetro de "*tension-stiffening*"
α_n	coeficientes de Ritz
γ	tolerância para parada do método iterativo
ε	deformação normal
ε_0	deformação na tensão máxima f_{cm}
ε_c	deformação no concreto
ε_{c2}	deformação do concreto no início do patamar elástico
ε_{cr}	deformação na tensão máxima de tração f_{ct}
ε_{ct}	deformação no concreto tracionado
ε_{cu}	deformação última do concreto na ruptura
ε_s	deformação no aço
ε_{s2}	deformação no início do terceiro trecho da curva
ε_{su}	deformação última do aço
ε_u	deformação última
ε_z	deformação normal na direção z
ε_y	deformação correspondente ao início do escoamento do aço
θ	rotação
κ	curvatura
π	funcional de energia
π_p	energia potencial de deformação
ρ	raio de curvatura
σ	tensão normal
σ_c	tensão no concreto
σ_{ct}	tensão no concreto tracionado
σ_s	tensão no aço

σ_{sj}	tensões nas armaduras
σ_z	tensão normal na direção z
υ	deslocamento transversal
$\boldsymbol{\psi}$	vetor das variáveis
Ω	domínio da seção transversal
$\bar{\Omega}$	domínio de integração

Romanos

A	área
A_s	área de aço
A_{sj}	áreas da seção transversal das armaduras
$\bar{A}$	área do domínio de integração
$\mathbf{a}$	vetor dos coeficientes α_n
$\mathbf{B}$	vetor das segundas derivadas das funções N
E	módulo de elasticidade
E_s	módulo de elasticidade do aço
EI	rigidez à flexão
EI_1	função da variação da rigidez devido ao nó 1 elemento
EI_2	função da variação da rigidez devido ao nó 2 do elemento
$EI_{sec,1}$	rigidez secante no nó 1 do elemento
$EI_{sec,2}$	rigidez secante no nó 2 do elemento
EI_{sec}	rigidez secante
$\mathbf{F}$	vetor de forças externas da estrutura
f_{cd}	resistência à compressão de cálculo
f_{ck}	resistência característica do concreto
f_{ct}	resistência à tração do concreto
f_{cm}	resistência à compressão do concreto
f_{tm}	resistência à tração do concreto
f_y	tensão de escoamento do aço

h_{ef}	altura efetiva da zona tracionada
I	momento de inércia
$\mathbf{K}$	matriz de rigidez global da estrutura
$\mathbf{k}$	matriz de rigidez do elemento
L	comprimento do elemento
M	momento fletor
$\mathbf{N}$	vetor das funções de interpolação de Hermite
N	esforço normal
n	tamanho da amostra
n_r	número de armaduras
q	cargas externas
S	conjunto de amostras
S_h	fator de encruamento do aço "*strain hardening*"
$\mathbf{U}$	vetor de deslocamentos nodais da estrutura
$\mathbf{u}$	vetor dos deslocamentos nodais do elemento
V	volume total do elemento ou esforço cortante
W	trabalho das cargas externas
w_i	pesos da quadratura
x	direção do eixo horizontal na seção transversal
y	direção do eixo transversal
y_c	posição da linha neutra medida na direção y
z	direção do eixo longitudinal

1 INTRODUÇÃO

O desenvolvimento das tecnologias na engenharia tem permitido a construção de estruturas cada vez maiores e mais complexas. Surge, assim, a necessidade de se obter modelos e métodos de cálculos mais precisos e que descrevem de forma mais realista o comportamento dos materiais, a fim de tornar a análise estrutural mais eficiente e segura.

O concreto armado é um dos materiais mais utilizados no mundo para construção de estruturas. O dimensionamento destas estruturas deve ser feito de forma a garantir a segurança em relação ao colapso, além de não apresentar deformações excessivas. A engenharia tradicional utiliza métodos simplificados para o dimensionamento do concreto armado, pois são de fácil aplicação e resolução. Dessa forma, estruturas de concreto armado são geralmente dimensionadas considerando comportamento elástico não linear dos materiais (modelo parábola-retângulo). Já a determinação dos deslocamentos é geralmente feita utilizando-se comportamento elástico linear. Este método, entretanto, não reflete o comportamento real destas estruturas, podendo levar a resultados inadequados.

A análise das estruturas de concreto armado pode ser bastante complexa, pois deve considerar os comportamentos de dois materiais distintos, o concreto e o aço, trabalhando em conjunto para resistir aos esforços solicitantes. Para realizar a análise de uma estrutura de concreto armado de forma mais realista, portanto, deve-se levar em consideração a não linearidade física no comportamento dos materiais, os quais possuem uma relação tensão-deformação não linear. Diferentes modelos constitutivos podem ser adotados para descrever o comportamento físico não linear do concreto armado na estrutura, considerando efeitos como a fissuração do concreto com o aumento das tensões, contribuição do concreto entre fissuras na rigidez ("*tension-stiffening*"), mecanismos de aderência-deslizamento entre aço e concreto ("*bond-slip*") e a fluência do concreto. Estes modelos, no entanto, podem ser bastante complexos e difíceis de serem implementados em rotinas computacionais.

Um dos métodos numéricos com melhores resultados para a análise não linear de estruturas é o Método dos Elementos Finitos (MEF), o qual é largamente utilizado no meio técnico-científico para resolver problemas de engenharia, devido a sua grande eficiência e fácil implementação em rotinas computacionais. Embora vários modelos utilizando o MEF tenham sido desenvolvidos para realizar análises não lineares de estruturas, ainda é um tema bastante estudado devido as dificuldades de se modelar a não linearidade no comportamento dos materiais. A maioria destes modelos são complexos, pois utilizam métodos

incrementais-iterativos para resolver as equações de equilíbrio não lineares, realizando integrações das tensões nas seções transversais para avaliar os esforços a cada iteração, o que exige uma grande quantidade de recursos computacionais e a convergência do cálculo numérico não é sempre garantida.

Diante disso, o desenvolvimento de modelos que consideram a não linearidade física dos materiais que combinem uma facilidade de aplicação, eficiência computacional e resultados adequados, têm uma grande importância para o desenvolvimento da análise de estruturas de concreto armado em situações práticas de projeto.

Uma maneira simples e adequada de considerar a não linearidade física do concreto armado é a utilização de diagramas momento-curvatura das seções transversais, que podem ser previamente calculados e utilizados para obter os esforços e deslocamentos de uma estrutura de forma direta com o método iterativo secante. Esta abordagem evita, portanto, a utilização de métodos iterativo-incrementais que precisam realizar a integração das tensões na seção transversal a cada iteração, reduzindo bastante o esforço computacional.

Neste contexto, o presente trabalho pretende desenvolver e implementar computacionalmente um modelo para realizar a análise estrutural de vigas de concreto armado utilizando o MEF, considerando o comportamento não linear físico dos materiais com o uso de diagramas de momento-curvatura que serão obtidos antes da análise estrutural. As equações de equilíbrio não lineares serão resolvidas utilizando o método iterativo secante.

As rotinas computacionais desenvolvidas têm importante aplicação prática, podendo ser utilizadas para verificar os estados de serviço e último de vigas de concreto armado com maior precisão e eficiência.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo Geral

Desenvolver um modelo numérico baseado em elementos finitos com o método secante para análise estrutural de vigas de concreto armado, considerando a não linearidade física do material, utilizando para isso diagramas de momento-curvatura.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Realizar uma revisão bibliográfica sobre os modelos para analise não linear de estruturas de concreto armado, modelos para obtenção do momento-curvatura das

seções transversais, aspectos não lineares dos materiais concreto e aço e como eles podem ser considerados dentro do modelo.

- Implementar computacionalmente métodos numéricos para obter os diagramas momento-curvatura para seções transversais genéricas de concreto armado.

- Desenvolver e implementar computacionalmente um modelo para análise estrutural de vigas de concreto armado com um comportamento físico não linear, utilizando o MEF com o método secante.

- Validar o modelo através da comparação dos resultados com aqueles obtidos por outras abordagens.

1.2 ORGANIZAÇÃO DOS CAPÍTULOS

Uma revisão bibliográfica acerca dos principais temas do trabalho foi realizada no Capítulo 2, a fim de esclarecer os fundamentos teóricos do assunto e levantar um breve histórico do desenvolvimento da análise não linear de estruturas de concreto armado. No Capítulo 3 descreve-se o modelo desenvolvido para obter os diagramas momento-curvatura de seções transversais genéricas de vigas de concreto armado. No Capítulo 4 descreve-se o modelo matemático de elementos finitos desenvolvido e a sua implementação computacional é exposta no Capítulo 5. No Capítulo 6 são demonstrados exemplos para validar o modelo comparando os resultados obtidos com o de outras abordagens. Por fim, no Capítulo 7, são apresentadas as conclusões do trabalho.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

A análise não linear de estruturas aborda o comportamento dos elementos de forma mais realista, através da consideração de efeitos não lineares físicos e geométricos. No entanto, o modelo estrutural se torna bem mais complexo, o que aumenta a dificuldade de se obter a solução matemática. No modelo, portanto, é preciso escolher quais fontes de não linearidade são relevantes e como será a sua representação.

Na análise não linear há diversos aspectos que podem ser consideradas no modelo e, além disso, existem diversas formas de modelar cada um desses aspectos, que dependem de simplificações ou considerações realizadas.

O comportamento não linear em estruturas geralmente é agrupado em dois tipos:

- Não linearidade física – Está relacionada às características do material, quando sua relação tensão deformação não é linear.

- Não linearidade geométrica – Ocorre quando a hipótese dos pequenos deslocamentos não pode ser aceita, devendo, então, ser feita uma análise da estrutura deformada, formulando as equações de equilíbrio para essa configuração.

Neste trabalho serão consideradas apenas as não linearidades físicas.

2.1 FONTES DA NÃO LINEARIDADE FÍSICA DO CONCRETO ARMADO

O concreto armado é um material de comportamento não linear bastante complexo, apresentando diferentes comportamentos na compressão e na tração, fissuramento quando sob tensão e efeitos dependentes do tempo como a retração e a fluência. Quando combinado com a armaduras de aço, o comportamento se torna ainda mais complexo devido às interações entre os dois materiais.

A precisão da análise não linear de uma estrutura de concreto armado depende em grande parte de como são modelados o concreto, o aço e a interação entre ambos, e qual o método de discretização é usado. O comportamento do concreto e do aço sob várias condições de carga tem sido estudado experimentalmente por muito tempo e é bem descrito

na literatura; a descrição matemática do comportamento do concreto, entretanto, ainda é ativamente investigada (BRATINA et al., 2004).

As estruturas de concreto armado apresentam um comportamento bastante complexo devido ao comportamento dos materiais aço e concreto trabalhando em conjunto para resistir aos esforços solicitantes. Portanto, incrementos no carregamento não irão resultar em incrementos proporcionais de deslocamento.

Durante o carregamento o concreto não sofre apenas deformações elásticas, mas também deformações inelásticas e dependentes do tempo causadas por mudanças microestruturais. Segundo Ngo e Scordelis (1967) algumas das complexidades ao se modelar o concreto armado se dão pelos seguintes motivos:

- O sistema estrutural é tridimensional e composto por dois diferentes materiais, o aço e o concreto.
- O sistema estrutural apresenta um caráter de constante mudança devido à fissuração do concreto sob um carregamento crescente.
- Efeitos do "*Dowel action*" na armadura de aço, ligação entre aço e concreto, mecanismo de aderência-deslizamento da armadura com o concreto ("*bond-slip*") são difíceis de incorporar a um modelo analítico geral.
- A relação tensão-deformação do concreto é não linear e é função de muitas variáveis.
- Deformações do concreto são influenciadas pela fluência e retração do concreto e são dependentes do tempo.

Apesar destas dificuldades terem sido amplamente estudadas ao longo das últimas décadas, vale salientar que a modelagem destes aspectos ainda constitui tema de amplo debate científico.

2.2 ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS RETICULADAS DE CONCRETO ARMADO

Existem muitos modelos que tratam o comportamento constitutivo não linear das estruturas de concreto armado. Dentre eles, os modelos unidimensionais são bastante utilizados devido a sua simplicidade e bons resultados obtidos. Com o uso desses modelos é possível realizar duas diferentes abordagens numéricas para solução do problema não linear

físico através da análise da seção transversal dos elementos: O método das lamelas e o método que utiliza as relações momento-curvatura das seções.

Para realizar a análise de uma seção transversal é preciso realizar a integração das tensões na seção, encontrar o eixo neutro e avaliar os esforços resultantes. Um exemplo da distribuição de tensões e deformações em uma seção transversal de concreto armado pode ser visto na Figura 1.

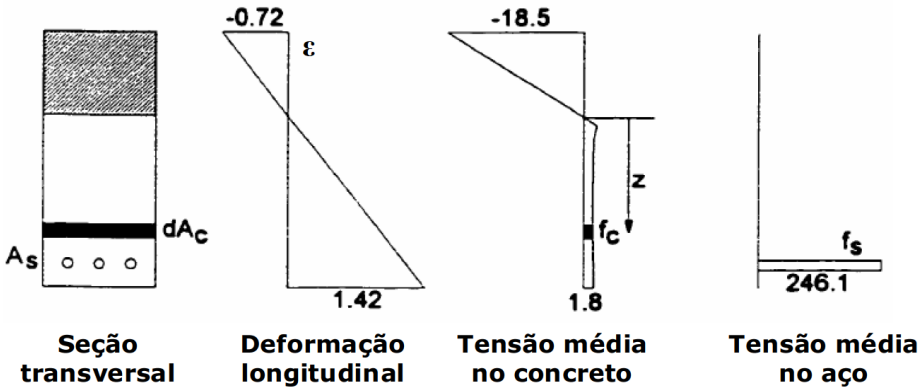


Figura 1 - Análise da seção transversal sob flexão. (Bentz, 2000)

O método das lamelas utiliza as leis tensão-deformação dividindo as seções transversais em diversas camadas, as decompondo em várias áreas menores. Em cada uma dessas camadas são avaliadas as relações tensão-deformação não lineares dos materiais e feita a integral dos esforços na seção para obter a resposta da seção ao estado de deformação existente. Obtidas as deformações, pode ser determinada os esforços para cada seção transversal e a matriz de rigidez de cada elemento. Com isso, as forças internas e deslocamentos podem ser obtidos. Essa é uma abordagem precisa, permitindo incluir vários fenômenos dos materiais, no entanto possui um alto custo computacional, pois necessita da integração de tensões na seção transversal em cada ponto Gaussiano de um elemento e em cada iteração. Essa abordagem é a utilizada pela maioria dos pesquisadores. Um esquema do método pode ser visto na Figura 2.

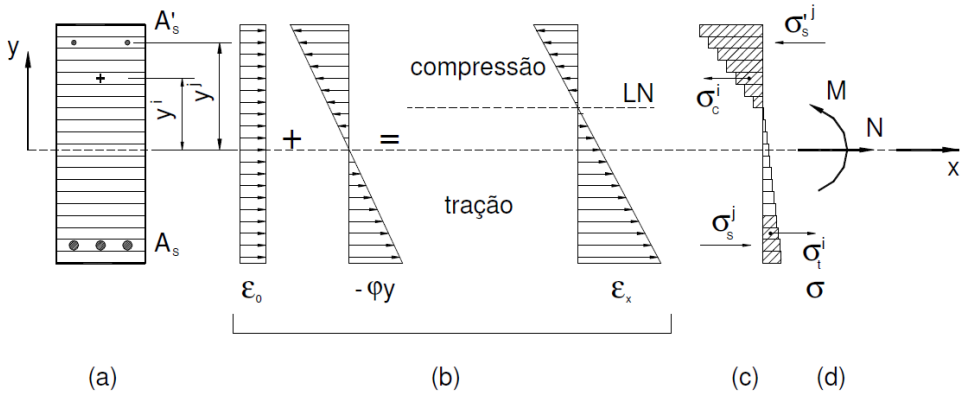


Figura 2 - Método das lamelas. a) Discretização da seção em lamelas. b) Distribuição de deformações. c) Distribuição de tensões. d)Esforços totais. (Chimello, 2003).

O segundo método é mais simples, considera as seções transversais homogêneas e utiliza as relações momento-curvatura previamente calculadas (ver KWAK e KIM (2002)). Com essa formulação, a seção transversal pode ser representada por leis que associam os esforços solicitantes na seção com as deformações correspondentes. Assim, é utilizada a relação entre os esforços e suas deformações (curvaturas). Com o uso das relações momento-curvatura é possível, portanto, estimar os esforços na seção para um estado de deformação e obter a matriz de rigidez dos elementos. É possível, desse modo, obter as forças internas e a trajetória de equilíbrio. O método apresenta como desvantagem a necessidade de calcular previamente as relações momento-curvatura das seções transversais da estrutura. No entanto, após obtidas essas relações, os esforços na seção podem ser obtidos de forma direta, sem a necessidade de realizar a integração na seção transversal. Essa estratégia, portanto, possui um custo computacional menor que o método das lamelas. No presente trabalho essa será a abordagem escolhida para fazer a análise não linear de vigas de concreto armado, por se tratar de um método simples, porém com uma grande eficiência computacional.

2.3 MODELOS CONSTITUTIVOS PARA OS MATERIAIS

Para implementar um modelo de análise não linear de estruturas deve-se definir quais os modelos constitutivos para os materiais serão adotados. No caso do concreto armado, é preciso definir um modelo matemático para representar os comportamentos físico e mecânico do aço, concreto e a interação entre eles, quando sob diferentes combinações de carregamento. Para realizar uma análise não linear é necessário, portanto, estudar o comportamento dos materiais para definir um modelo matemático que represente bem suas características predominantes e que possa ser implementado em uma análise computacional.

Vários modelos já foram desenvolvidos para descrever o comportamento dos materiais, sendo representados através de leis constitutivas que definem a relação tensão-deformação do material sob carregamento. O modelo mais utilizado para representar o comportamento do concreto armado é o modelo elástico, pois trata-se do modelo mais simples para realizar análise de estruturas. Nesse modelo se considera que o material possui uma deformação elástica, ou seja, quando é retirado o carregamento ele retorna a sua configuração inicial, sem apresentar deformação residual. Quando aumentos na tensão resultam em aumentos proporcionais de deformação, o comportamento do material é elástico linear, caso contrário é considerado não linear.

Outro modelo igualmente importante para descrever o comportamento dos materiais é o modelo plástico, o qual se caracteriza pelo aparecimento de deformações residuais quando retirado o carregamento da estrutura. Existem ainda modelos que combinam os comportamentos elásticos e plásticos dos materiais, resultando em modelos elasto-plásticos. Existem também modelos baseados na mecânica da fratura e do dano, que tentam descrever o mecanismo de surgimento de fraturas e microfissuras que surgem em materiais frágeis. Estes modelos estão fora do escopo deste trabalho.

A escolha do modelo constitutivo a ser implementado em um modelo de análise não linear de estruturas vai depender de vários fatores: do objetivo da análise, tipo de estrutura a ser analisada, tipo de carregamentos aplicados, simplicidade de implementação computacional e facilidade de se obter as variáveis necessárias no modelo.

2.3.1 Concreto

O comportamento físico do concreto é complexo e de difícil determinação, pois apresenta diversos fatores que influenciam em suas características, como por exemplo as proporções de seus materiais constituintes, o tipo de materiais utilizados e as condições de adensamento e cura das peças. Além disso, o concreto já apresenta microfissuras antes mesmo de ser submetido a um carregamento, devido a retração e liberação de calor. Com a aplicação das cargas essas microfissuras se propagam, colaborando com o comportamento não linear do material.

O comportamento da curva tensão-deformação do concreto pode ser modelado de diversas maneiras, que serão descritas a seguir.

2.3.1.1 Concreto sob compressão uniaxial

Os materiais componentes do concreto isoladamente, quando sob carregamento de compressão uniaxial, apresentam um comportamento próximo do linear e com ruptura frágil. O concreto, no entanto, apresenta um comportamento não linear com relativa ductilidade devido à interação entre estes materiais e, também, devido a propagação da fissuração na pasta de cimento. Como pode ser visto na Figura 3 a curva tensão-deformação do concreto pode ser dividida em quatro diferentes trechos:

1) Inicialmente apresenta uma fase elástica, onde a tensão aumenta de forma aproximadamente linear com a deformação.
2) No segundo trecho, há uma redução gradual na rigidez, quando as microfissuras começam a se propagar a cerca de 30% da tensão máxima.
3) Quando o carregamento atinge 75% até 100% da resistência, a propagação de fissuras é instável, ou seja, apresentam crescimento rapidamente mesmo com nível de tensão mantidos constantes. Essas fissuras crescem até atingir o nível de tensão máxima.
4) A parte de final da curva apresenta um aumento da deformação mesmo com a diminuição da tensão, devido à propagação de fissuras que se tornam macroscópicas. Esse comportamento é conhecido como amolecimento ou "*tension softening*".

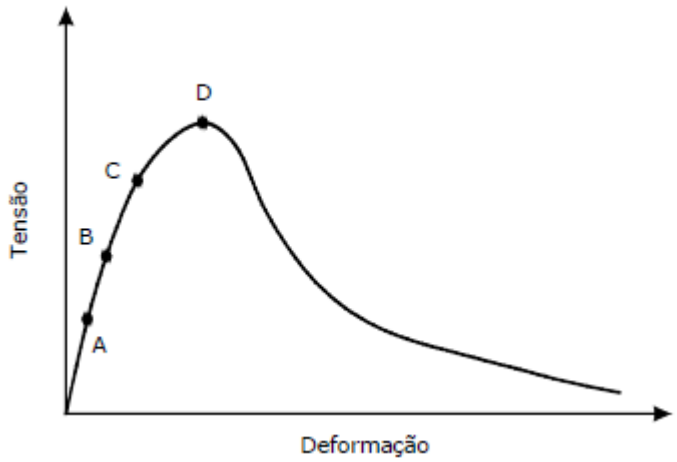


Figura 3 - Relação tensão-deformação do concreto sob compressão uniaxial.

Existem vários modelos constitutivos para representar o comportamento do concreto sob compressão uniaxial. Entre eles pode-se citar os modelos propostos por

Hognestad(1951), Popovics(1970), do código CEB-FIP(1990) e da NBR6118, este último baseado no modelo CEB-FIP (1990).

2.3.1.1.1 Modelo da NBR6118

No modelo apresentado pela norma brasileira para projetos de concreto armado, baseado no CEB-FIP (1990), para análises no estado-limite último é adotado o diagrama tensão-deformação parábola-retângulo, como o mostrado na Figura 4, descrito pelas seguintes expressões:

$$\begin{cases} \sigma_c = 0.85\,f_{cd}\left[1-\left(1-\dfrac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}}\right)^n\right] \text{ para } \varepsilon_c \le \varepsilon_{c2} \\ \sigma_c = 0.85\,f_{cd} \text{ para } \varepsilon_{c2} \le \varepsilon_c \le \varepsilon_{cu} \end{cases} \quad (2.1)$$

Para $f_{ck} \le 50$ MPa: $n = 2$.

Para $f_{ck} \ge 50$ MPa: $n = 1.4 + 23.4\left[(90 - f_{ck})/100\right]^4$.

onde σ_c é a tensão no concreto, f_{cd} a resistência à compressão de cálculo, f_{ck} a resistência característica do concreto, ε_c a deformação no concreto, ε_{c2} a deformação do concreto no início do patamar elástico e ε_{cu} a deformação do concreto na ruptura. Para concretos com até 50 MPa de resistência característica: $\varepsilon_{c2} = 2‰$ e $\varepsilon_{cu} = 3{,}5‰$.

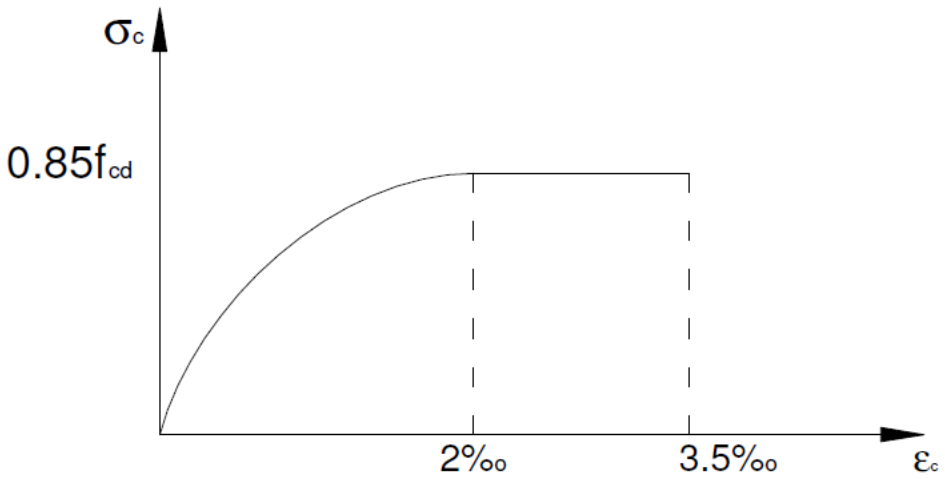


Figura 4 - Modelo da NBR6118 para f_{ck} até 50MPa.

2.3.1.1.2 Modelo de Hognestad

O modelo apresenta uma relação tensão-deformação com uma curva de uma equação do 2º grau para a parte ascendente, e no ramo descendente, após a tensão atingir o valor de

resistência, uma reta decrescente até atingir o valor de deformação último. A curva pode ser vista na Figura 5. Este modelo é bastante aceito e já foi utilizado por diversos pesquisadores, como: Marí (1984) e Stramandinoli e Rovere (2008). A curva pode ser obtida pela seguinte equação:

$$\begin{cases} \sigma_c = \mathrm{f_{cm}}\left[2\left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0}\right)-\left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0}\right)^2\right] \text{ para } \varepsilon_c < \varepsilon_0 \\ \sigma_c = \mathrm{f_{cm}}\left[1-0.15\left(\frac{\varepsilon_c-\varepsilon_0}{\varepsilon_u-\varepsilon_0}\right)\right] \text{ para } \varepsilon_0 < \varepsilon_c < \varepsilon_u \end{cases} \quad (2.2)$$

onde σ_c é a tensão no concreto, $\mathrm{f_{cd}}$ a resistência à compressão média obtida em ensaios uniaxiais, ε_c a deformação no concreto, ε_0 a deformação na tensão máxima $\mathrm{f_{cm}}$ e ε_u a deformação última no concreto.

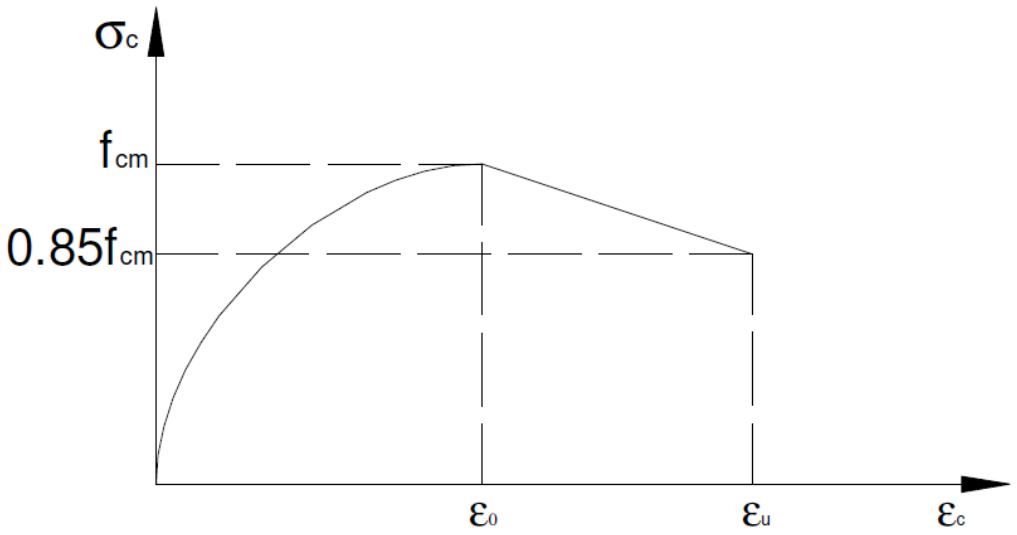


Figura 5 - Diagrama tensão-deformação de Hognestad.

2.3.1.2 Concreto sob tração uniaxial

O concreto quando sob tração apresenta um comportamento mais frágil que quando sob compressão. A sua relação tensão-deformação é quase linear até a primeira fissura, com uma rigidez definida pelo módulo de elasticidade tangente inicial à compressão do concreto, até alcançar a sua resistência a tração, quando ocorre sua fissuração. Após esse ponto a curva possui um ramo descendente onde a tensão decresce rapidamente até zero. A fissuração é um fenômeno muito importante no comportamento do concreto à tração. Seu comportamento é usualmente descrito através de conceitos da mecânica da fratura.

Existem modelos simplificados que descrevem o comportamento do concreto não fissurado à tração uniaxial, como por exemplo o modelo bilinear sugerido pela NBR6118 mostrado na Figura 6.

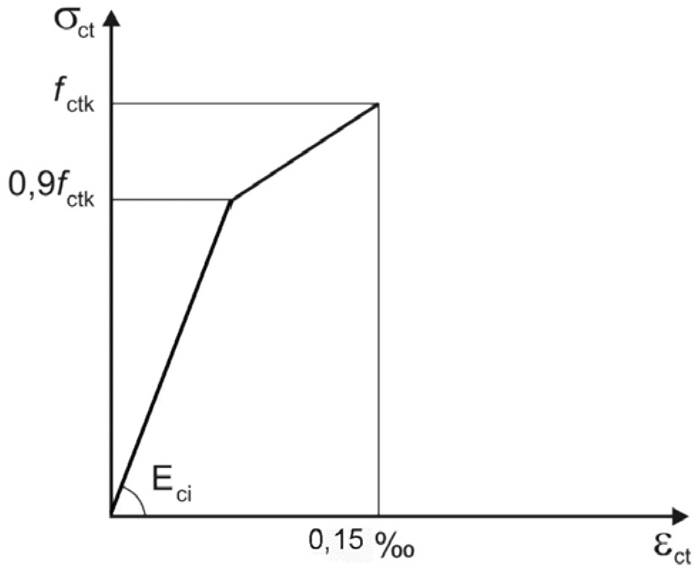


Figura 6 - Diagrama tensão-deformação do concreto não fissurado na tração.

O concreto armado possui um comportamento diferente na tração, devido à interação entre o aço e o concreto. O concreto, após fissurado, continua possuindo capacidade de transmitir tensão entre as fissuras através da força de aderência com o aço (ver Figura 7). Isso faz com que o aço não resista sozinho ao esforço de tração, aumentando a rigidez do elemento. Esse fenômeno é conhecido como "*tension-stiffening*".

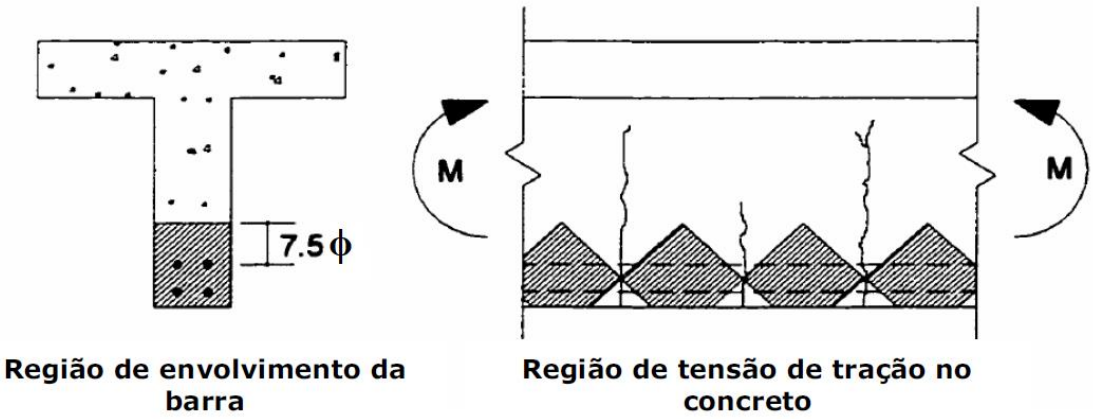


Figura 7 - Tensão entre fissuras no concreto tracionado. (Bentz, 2000)

Existem modelos simplificados que descrevem o trecho da curva tensão-deformação do concreto após a fissuração considerando o efeito "*tension-stiffening*", adotando uma tensão média na região do concreto fissurado que decai de acordo com uma curva. Entre

esses modelos estão os de Vecchio e Collins (1986), Collins e Mitchell (1991) e Stramandinoli e La Rovere (2008).

2.3.1.2.1 Modelo de Stramandinoli e La Rovere (2008)

Stramandinoli e La Rovere (2008) desenvolveram um modelo constitutivo para o concreto armado na tração uniaxial levando em consideração a colaboração do concreto entre fissuras ("*tension-stiffening*"), onde a tensão média no concreto fissurado é representada por uma curva de decaimento no gráfico tensão-deformação. A curva é descrita por uma função exponencial, definida por um parâmetro que depende da taxa de armadura e da relação entre os módulos de elasticidade do concreto e do aço. O modelo de "*tension-stiffening*" é baseado no modelo constitutivo do CEB (1985) e utiliza o conceito de decaimento exponencial de Gupta e Maestrini (1990).

O modelo é simples e de fácil implementação computacional, pois modifica apenas a lei constitutiva do concreto, considerando que toda zona fissurada do concreto possui uma mesma tensão média. O concreto tracionado possui comportamento elástico linear até atingir a resistência à tração, após este ponto a curva passar a ter um decaimento exponencial em função de um parâmetro α. A curva tensão-deformação apresenta três trechos, como mostrado na Figura 8, descritas pelas seguintes expressões:

$$\begin{cases} \sigma_{ct} = E_c.\varepsilon_{ct} & \text{para } \varepsilon_{ct} < \varepsilon_{cr} \\ \sigma_{ct} = \mathrm{f_{ct}}.e^{-\alpha.\frac{\varepsilon_{ct}-\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_{cr}}} & \text{para } \varepsilon_{cr} < \varepsilon_{ct} < \varepsilon_{s2} \\ \sigma_{ct} = \mathrm{f_{ct}}.e^{-\alpha.\frac{\varepsilon_{s2}-\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_{cr}}} - (\varepsilon_{ct}-\varepsilon_{s2}).\dfrac{\mathrm{f_{ct}}.e^{-\alpha.\frac{\varepsilon_{s2}-\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_{cr}}}}{\varepsilon_y-\varepsilon_{s2}} & \text{para } \varepsilon_{s2} < \varepsilon_{ct} < \varepsilon_y \\ \sigma_{ct} = 0 & \text{para } \varepsilon_y < \varepsilon_{ct} \end{cases} \quad (2.3)$$

onde σ_{ct} é a tensão no concreto tracionado, $\mathrm{f_{ct}}$ a resistência à tração do concreto, ε_{ct} a deformação no concreto tracionado, ε_{cr} a deformação na tensão máxima de tração $\mathrm{f_{ct}}$ (início da fissuração no concreto), ε_{s2} a deformação no início do terceiro trecho da curva e ε_y a deformação no início do escoamento do aço.

O parâmetro α é dado pela seguinte equação:

$$\alpha = 0.017 + 0.255(\mathrm{n\rho}) - 0.106(\mathrm{n\rho})^2 + 0.016(\mathrm{n\rho})^3 \quad (2.4)$$

Onde ρ é a taxa de armadura e n é a relação entre os módulos de elasticidade do aço e do concreto (E_s/E_c).

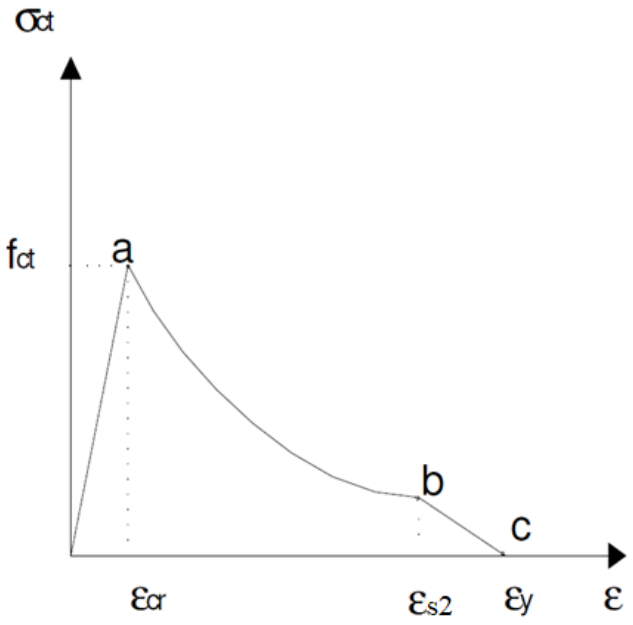


Figura 8 - Gráfico tensão-deformação do concreto na tração. (Stramandinoli, 2008)

2.3.2 Aço para armadura de concreto armado

O aço utilizado para reforçar as estruturas de concreto armado possui comportamento muito semelhante na compressão e tração uniaxial. Suas propriedades físicas são influenciadas por seu processo de fabricação que podem ser de tratamento a quente ou tratamento a frio. Os aços com tratamento a quente apresentam um patamar de escoamento no gráfico tensão-deformação, já os com tratamento a frio não apresentam este patamar.

Para representar a curva tensão-deformação os modelos mais utilizados são: elasto-plástico perfeito, elasto-plástico com endurecimento ou os trilineares. Os modelos são mostrados nas Figuras 9, 10 e 11.

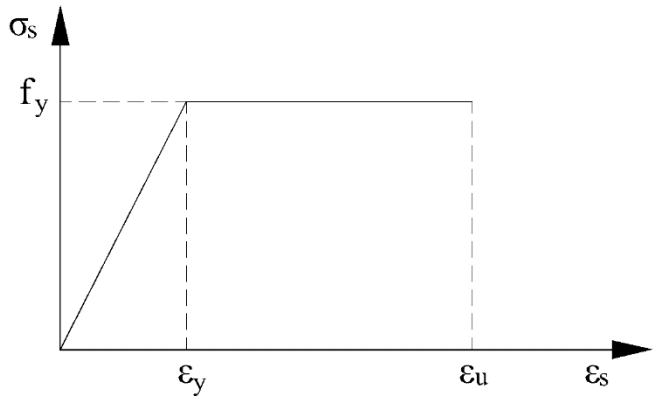


Figura 9 - Modelo elasto-plástico perfeito.

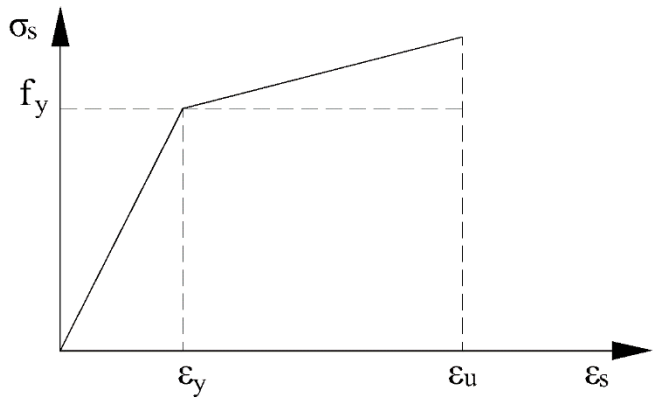


Figura 10 - Modelo elasto-plástico com endurecimento linear.

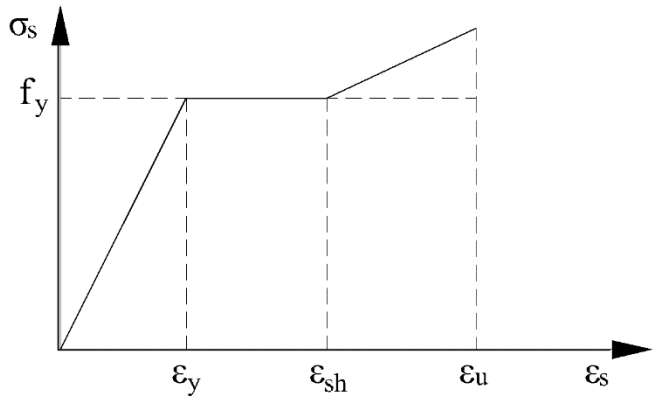


Figura 11 - Modelo trilinear.

2.4 ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS COM MEF

O MEF é um método numérico largamente utilizado na engenharia, utilizado para resolver problemas que seriam de difícil solução por métodos analíticos. O método se baseia na discretização do meio contínuo, através da divisão do domínio em subdomínios denominados elementos finitos, os quais estão unidos por nós.

O MEF pode ser utilizado para modelar estruturas de concreto armado por elementos finitos de barra, elementos planos, elementos de casca ou placa ou elementos sólidos. Neste trabalho será adotado o modelo de elementos finitos de barra com dois nós e dois graus de liberdade por nó, com as hipóteses de viga de Euler-Bernoulli. Na teoria de viga de Euler-Bernoulli as seções permanecem planas e normais à linha neutra após a deformação, os efeitos de deformação por cisalhamento, portanto, não são considerados. Este elemento é também chamado de elemento de viga fina.

Para aplicar o MEF para análise estrutural deve-se primeiro estabelecer as equações governantes do problema na mecânica do contínuo. Depois deve-se escolher as funções interpoladoras para as coordenadas dos elementos e para os deslocamentos nodais. Por fim são obtidas as equações de equilíbrio.

Para o MEF, assumindo que os deslocamentos serão pequenos e que as condições de contorno não variam ao longo do tempo, assim como as cargas aplicadas, o sistema da equação de equilíbrio é da forma (BATHE, 1982; COOK et al., 2001):

$$\mathbf{KU} = \mathbf{F} \tag{2.5}$$

onde **K** é a matriz de rigidez global do sistema, **U** é o vetor de deslocamentos e **F** é o vetor das forças totais aplicadas.

Segundo Cook et al. (2001), problemas ligados a não linearidade geométrica e do material são não lineares porque a matriz de rigidez, e em alguns casos o vetor das forças aplicadas, se tornam funções dos deslocamentos e deformações. Portanto, na equação de equilíbrio da equação (2.5), a matriz **K** e o vetor **F** se tornam funções de **U** para um problema não linear. Logo, não é possível determinar imediatamente o vetor **U**, uma vez que as informações necessárias para desenvolver a matriz de rigidez e o vetor de forças não são encontradas de forma direta. Assim, torna-se necessária a utilização de um processo de solução iterativo.

2.4.1 Solução das equações não lineares do MEF

Para que seja avaliado o vetor de deslocamentos **U** para um conjunto de forças aplicadas **F**, deve-se considerar um deslocamento inicial $\mathbf{U}_0$ e aplicar uma solução iterativa do tipo:

$$\mathbf{K}_n \mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{F} \tag{2.6}$$

onde $\mathbf{K}_n$ representa a matriz de rigidez calculada com o deslocamento $\mathbf{U}_n$, na iteração *n*.

A consideração inicial para o vetor $\mathbf{U}_0$ é geralmente o vetor nulo. Métodos como o de Newton-Raphson ou o de Newton-Raphson modificado podem ser utilizados para se resolver o problema (BATHE, 1982). Existem outros métodos que podem ser empregados, sendo um dos mais utilizados o processo de incremento-iterativo, que combina as iterações do método de Newton-Raphson com um método incremental. A ideia principal deste método é aplicar tais iterações para vários níveis de carga $\Delta\mathbf{F}$. Por exemplo, para um primeiro ciclo, obtém-se uma solução para um nível de carga $\Delta\mathbf{F}$. No ciclo posterior, um incremento de carga adicional $\Delta\mathbf{F}$ é aplicado e a solução é atualizada. O processo é então repetido para os demais níveis de carga. Um esquema gráfico do método pode ser visto na Figura 12.

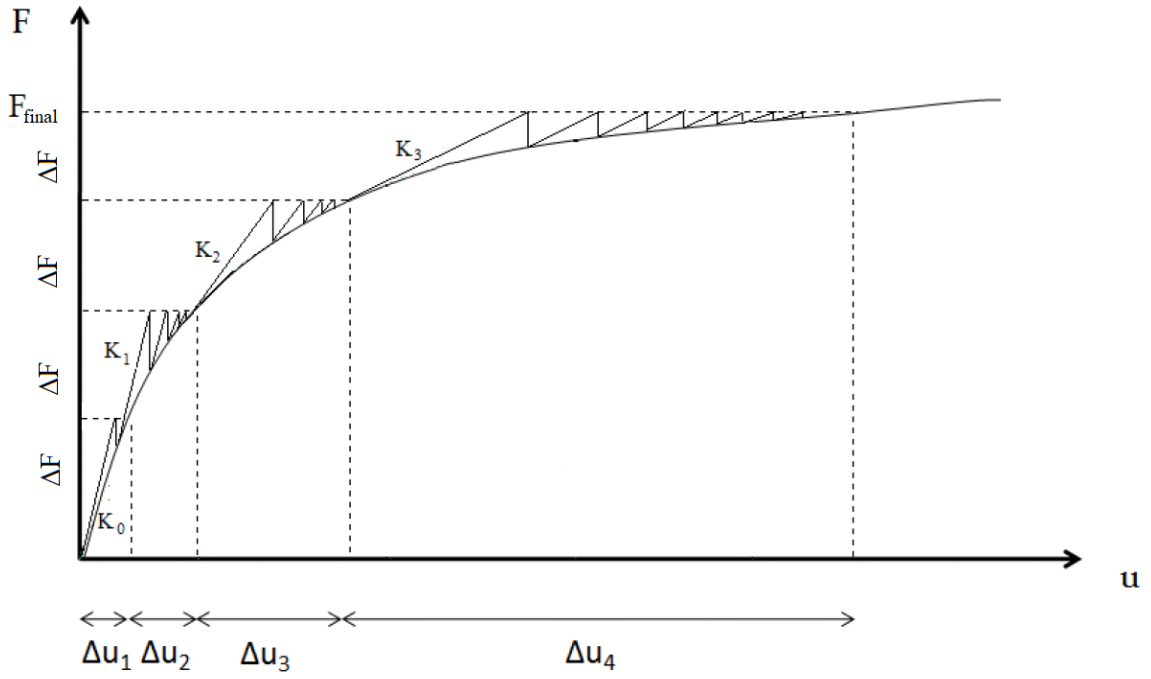


Figura 12 - Método de Newton-Raphson modificado com incrementos de carga.

Em problemas que apresentam uma solução fortemente não linear, o método de Newton-Raphson apresenta uma desvantagem, pois se torna ineficiente quando o caminho de equilíbrio apresenta ponto limite, dificultando a convergência do método quando há uma

mudança brusca da rigidez da estrutura. Isso ocorre porque o método realiza a iteração com o uso da rigidez tangente. Porém, a matriz de rigidez tangente torna-se quase singular quando a estrutura se aproxima do ponto de colapso, o que dificulta a solução numérica do problema.

Neste trabalho, para a solução das equações de equilíbrio não lineares, foi adotado o método iterativo da rigidez secante com a uso dos diagramas momento-curvatura, que será mostrado em mais detalhes no capítulo 4. Um esquema gráfico do método pode ser visto na Figura 13. No método da rigidez secante, a rigidez da estrutura é atualizada a cada iteração a partir da atualização da rigidez secante EI_{sec} que é obtida pela reta secante ao ponto considerado na curva momento-curvatura, até a convergência do sistema. O método não apresenta problemas de convergência quando o caminho de equilíbrio apresenta pontos limite, pois a matriz de rigidez secante não se torna singular próximo ao ponto de colapso, como ocorre com a matriz de rigidez tangente. Assim, o método secante tende a ser mais estável do que o método incremental baseado na rigidez tangente. Além disso é possível obter os resultados sem a necessidade de incrementos de carga.

O procedimento iterativo é parado quando a diferença entre os deslocamentos de duas iterações consecutivas é menor que uma dada tolerância. Quando a estrutura não é capaz de suportar as cargas aplicadas (i.e. a Equação (2.6) não pode ser satisfeita), para nenhuma combinação de deslocamentos, afirma-se que o procedimento iterativo não convergiu. Isto ocorre quando a estrutura atinge um estado de instabilidade ou, na maior parte dos casos, de colapso estrutural.

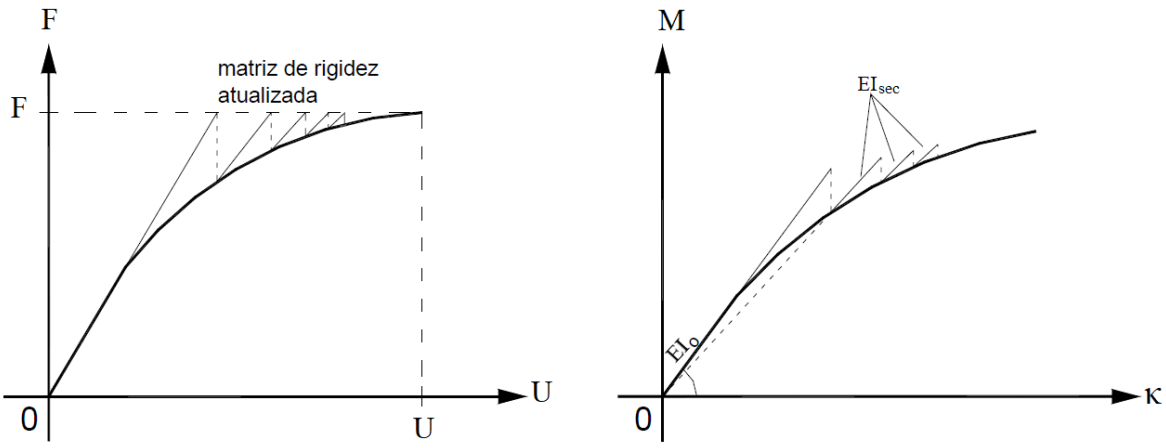


Figura 13 - Método da rigidez secante com uso do diagrama momento-curvatura.

2.5 MODELOS PARA ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO

Com o surgimento da técnica numérica denominada MEF no final da década de 1950, foi possível desenvolver métodos cada vez mais precisos e eficientes para analisar estruturas de concreto armado. Com isso, vários trabalhos foram publicados nas últimas décadas envolvendo análise de estruturas de concreto armado sob diversas condições de carregamento e comportamentos físicos-geométricos não lineares. Devido à grande dificuldade de se modelar corretamente o concreto numa análise de elementos finitos, surgiram vários modelos diferentes para essa finalidade.

O primeiro trabalho a utilizar o MEF para fazer a análise de uma estrutura de concreto armado foi o de Ngo e Scordelis (1967), que aplicou o método para analisar vigas de concreto armado. Neste trabalho foi utilizado uma malha de elementos finitos triangulares de deformação constante com dois graus de liberdade em cada nó e um elemento de ligação que consistia em duas molas lineares, utilizadas para representar as interações entre concreto e aço.

A fissuração no concreto é uma das principais razões do seu comportamento não linear. Tasuji et al (1978) criaram modelos não lineares para os elementos. Foi utilizado um método de carregamento incremental para analisar a não linearidade do concreto e aço. Em seu modelo quatro elementos triangulares de deformação constante são combinados para formar um elemento quadrilateral. Para implementar o comportamento de fissuração, quando um elemento quadrilateral é fissurado, as forças nesse elemento são omitidas e as iterações continuam.

Um levantamento das pesquisas no campo da análise não linear de elementos finitos de estruturas de concreto armado e protendido é feito por Mang e Meschke (1991). Bergan e Holand (1979) fizeram uma revisão sobre o assunto em seu artigo, mostrando as principais fontes de não linearidade em estruturas de concreto armado, fazendo uma revisão sobre modelos que podem ser utilizados para descrever o concreto em seus estados fissurados, não fissurado, o aço e a interação entre os dois materiais. Um levantamento sobre o estado da arte para a análise não linear de estruturas mistas de aço e concreto pode ser vista em Spacone e El-Tawil (2004).

Muitos dos modelos desenvolvidos para a análise não linear das estruturas de concreto armado possuem uma preocupação em simular corretamente o complexo comportamento do material e incluem modelos que alteram as leis constitutivas dos

materiais, sendo capazes de considerar o comportamento do concreto na compressão e na tração, a fissuração do concreto, efeitos da interação entre aço e concreto, a relação tensão-deformação não linear do concreto e efeitos dependentes do tempo (fluência e retração). Wang e Hsu (2001) aplicaram a análise de elementos finitos não lineares a vários tipos de estruturas de concreto armado usando um novo conjunto de modelos constitutivos. Bratina et al. (2004) apresentaram um estudo sobre análise não linear física e geométrica de estruturas planas de concreto armado, tratando das equações constitutivas baseadas no método das lamelas para o concreto e o aço. Pankaj e Lin (2005) usaram dois modelos para examinar a influência da modelagem do material na resposta sísmica de estruturas de estruturas de concreto armado.

Uma característica importante no comportamento do concreto armado é o efeito do enrijecimento do concreto entre fissuras na tração ou "tension stiffening". Esse efeito não exerce muita influência na resistência última dos elementos de concreto armado, no entanto é importante para o cálculo das deformações para cargas de serviço. Stramandinoli e Rovere (2008) propuseram um modelo constitutivo para o elemento de concreto armado baseado no modelo CEB (1985) de "*tension-stiffening*" para levar em consideração a capacidade do concreto intacto entre as fissuras resistir à tração, contribuindo, assim, na rigidez do elemento. Dede e Ayvas (2009) fizeram uma comparação de dois modelos de analise não linear de vigas de concreto armado utilizando o MEF, sendo um considerando o efeito "*tension-stiffening*" e o outro não considerando este efeito. Nos dois modelos a capacidade de carga última foram semelhantes, entretanto o modelo que considerou o "*tension-stiffening*" apresentou comportamento mais dúctil.

Para realizar a análise não linear de estruturas reticuladas de concreto armado, foram desenvolvidos modelos com diferentes tipos de elementos finitos, além de diferentes métodos para a solução das equações de equilíbrio não lineares. Carol e Murcia (1989) utilizaram uma formulação híbrida de elementos finitos para implementar em um modelo para análise não linear física de pórticos planos de concreto armado no programa CONS. Nela é obtida a variação dos esforços ao longo da seção transversal através de uma solução analítica e são utilizadas as expressões matemáticas dos esforços da seção transversal como funções de interpolação destes esforços ao longo do elemento. Como as funções de interpolação são exatas, não é necessário um grande refinamento da malha.

Rasheed e Dinno (1994) desenvolveram modelos para análise não linear física de estruturas reticuladas de concreto armado. O modelo desenvolvido apresenta uma

formulação simplificada onde se admite uma distribuição parabólica para a flexibilidade ao longo do eixo do elemento na flexão. Obtida a flexibilidade nas seções das extremidades e do meio do elemento e utilizando as funções de interpolação, pode-se calcular a flexibilidade ao longo de todo o elemento para uma dada distribuição de momentos. A matriz de flexibilidade é depois invertida para a obtenção da matriz de rigidez. O modelo físico considerou os efeitos do amolecimento do concreto ("*tension softening*"), da colaboração do concreto entre fissuras na rigidez ("*tension-stiffening*"), e aderência-deslizamento das armaduras ("*bond-slip*"). O modelo utilizado para o aço foi o elasto-plástico com encruamento.

Kwak e Kim (2002) desenvolveram um modelo para análise não linear de vigas de concreto armado utilizando a relação momento-curvatura das seções de concreto armado previamente calculadas através da análise das seções transversais, ao invés de utilizar o sofisticado método das lamelas. Na solução das equações de equilíbrios não lineares foi utilizado um método iterativo-incremental com o uso da rigidez tangente. No seu modelo físico, a curva tensão-deformação do concreto sob compressão foi a desenvolvido por Scott et al (1982) que considera o ramo de suavização da rigidez ("tension-softening") e sob tração considerou dois trechos lineares, um trecho até a fissuração e outro trecho de decaimento linear para considerar o efeito da colaboração do concreto entre fissuras na rigidez ("*tension-stiffening*"). Considerou ainda o mecanismo de aderência-deslizamento da armadura com o concreto ("Bond Slip") e aplicou na relação momento-curvatura. O aço foi modelado como elasto-plástico com encruamento. No seu trabalho, no entanto, não foi dada ênfase de como os diagramas momento-curvatura foram obtidos.

Stramandinoli (2007) desenvolveu em sua tese modelos de elementos finitos para análise não linear de vigas e pórticos 2D de concreto armado, utilizando os elementos de viga de Euler-Bernoulli e de Timoshenko. O elemento utilizado foi o de 3 nós e 7 graus de liberdade. Para o modelo de pórticos foi inserido um elemento híbrido plano com 4 nós para representar as ligações entre vigas e pilares e elementos de transição para conectar os elementos planos aos de barra. Para realizar a análise dos esforços na seção transversal foi utilizado o método das lamelas, onde a seção transversal é subdividida em camadas onde é realizada a integração de Gauss. O seu modelo foi implementado em um programa computacional denominado ANALEST. Para a solução das equações de equilíbrio não lineares foi utilizado o método incremental e iterativo de Newton-Raphson e o método do comprimento do arco para capturar o ramo descendente da curva carga-deslocamento.

2.6 RELAÇÃO MOMENTO-CURVATURA

Uma viga simplesmente apoiada sob esforço predominante de flexão, possui configuração deformada de acordo com a Figura 14. Considera-se a hipótese de viga de Euler-Bernoulli, onde as deformações por cisalhamento são desprezíveis e as seções transversais permanecem planas após o carregamento.

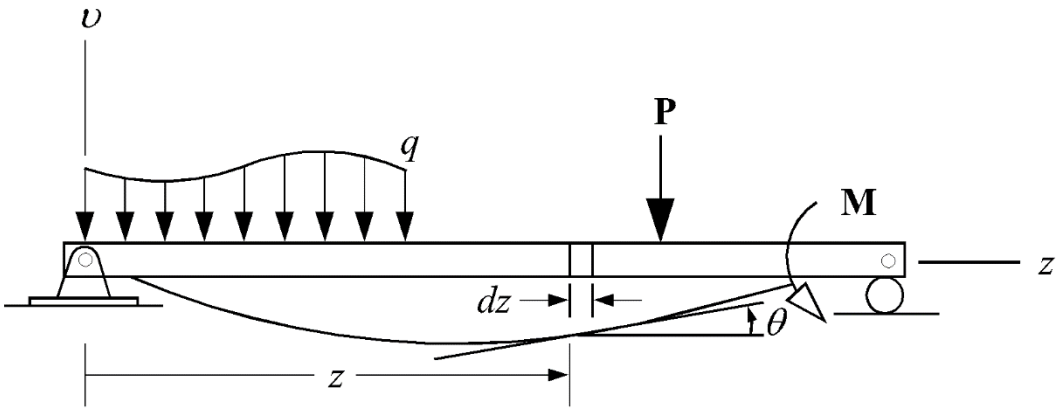


Figura 14 - Viga sob esforços de flexão. (Hibbeler, 2011)

Considera-se um elemento infinitesimal *dz* da viga, como o mostrado na Figura 15.

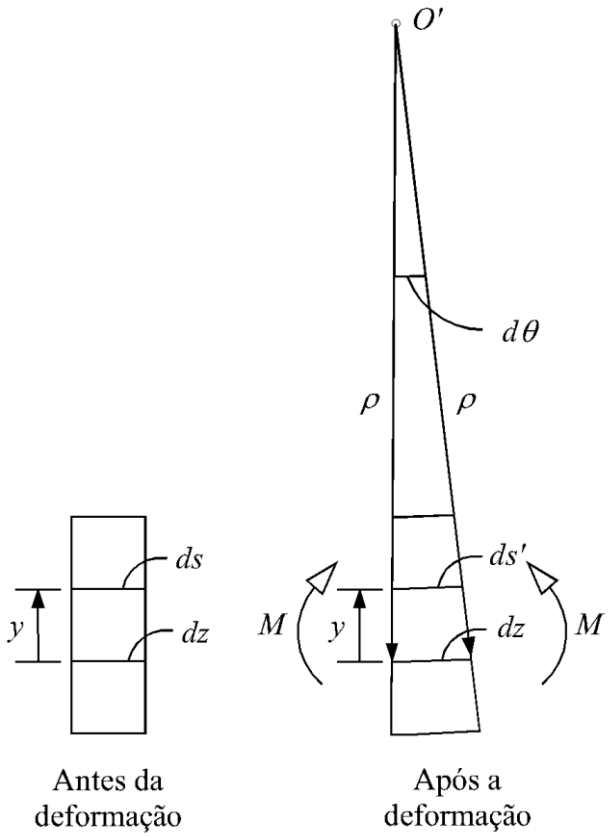


Figura 15 - Elemento infinitesimal *dz* de uma viga sob flexão. (Hibbeler, 2011)

O comprimento de arco *ds*, por onde passa a linha neutra, pode ser obtido em função do ângulo θ e o raio da curvatura ρ:

$$ds = dz = \rho d\theta \tag{2.7}$$

A curvatura pode ser definida como o inverso do comprimento do raio ρ,

$$\frac{1}{\rho} = \kappa \tag{2.8}$$

O valor do arco *ds* quando deformado é *ds´* e pode ser obtido pela seguinte expressão:

$$ds' = (\rho - y)\, d\theta \tag{2.9}$$

A deformação no arco *ds*, localizado em uma posição *y* em relação ao eixo neutro é:

$$\varepsilon = \frac{(ds' - ds)}{ds} \tag{2.10}$$

Substituindo as equações (2.7) e (2.9) em (2.10), tem-se:

$$\varepsilon = \frac{\left[(\rho - y)\, d\theta - \rho d\theta\right]}{\rho d\theta} \tag{2.11}$$

Fazendo a substituição de (2.8) em (2.11), obtém-se:

$$\kappa = -\frac{\varepsilon}{y} \tag{2.12}$$

Considerando a lei de Hooke para o material elástico:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \tag{2.13}$$

onde σ é a tensão transversal e *E* é o módulo de elasticidade do material.

Admitindo-se pequenos deslocamentos e pequenas rotações, a equação para a tensão na flexão é:

$$\sigma = -\frac{My}{I} \tag{2.14}$$

sendo *M* o momento fletor e *I* a inércia da seção transversal.

Pode-se, então, obter a relação entre o momento fletor e a curvatura em uma dada seção da viga, substituindo (2.13) e (2.14) em (2.12). Esta operação resulta em:

$$\frac{M}{\kappa} = EI \tag{2.15}$$

Outra forma de obter a relação momento-curvatura é a partir da equação diferencial da linha elástica da viga. Pode-se, de acordo com (2.7) e (2.8), definir também a curvatura como a razão da variação da rotação dθ por unidade de comprimento dz:

$$\kappa = \frac{d\theta}{dz} \tag{2.16}$$

Considerando a curva da linha elástica desta viga como visto na Figura 14, onde υ é o deslocamento vertical, pode-se definir o ângulo θ, para pequenas deformações e pequenas rotações, como:

$$\theta \cong \tan\theta = \frac{d\upsilon}{dz} \tag{2.17}$$

Substituindo em (2.16) fica:

$$\kappa = \frac{d^2\upsilon}{dz^2} \tag{2.18}$$

Considerando a equação diferencial clássica para a linha elástica:

$$\frac{d^2\upsilon}{dz^2} = \frac{M}{EI} \tag{2.19}$$

Portanto, substituindo (2.18) em (2.19) pode se chegar novamente à equação (2.15), M/κ=EI.

A relação momento-curvatura de uma seção é, portanto, definida de acordo com as dimensões da seção de concreto e as propriedades dos materiais concreto e aço. Além disso, o gradiente da relação momento-curvatura é igual a rigidez na flexão elástica EI que inclui todas as propriedades da seção em uma condição de carregamento.

O diagrama momento-curvatura reflete as leis tensão-deformação não lineares do aço e do concreto, quando se admite a teoria de Euler-Bernoulli para vigas, onde a seção transversal permanece plana após se deformar. Assim, a curvatura é igual ao gradiente de deformações na seção transversal na flexão (equação (2.12)), e também igual a variação da rotação por unidade de comprimento da barra (equação (2.16)) de modo que a deformação longitudinal seja diretamente proporcional à distância da linha neutra de deformação zero.

Usar a relação momento-curvatura previamente calculada no modelo de análise estrutural ao invés de usar a abordagem das lamelas, portanto, abrevia os cálculos sofisticados que acompanham a análise não linear. A relação momento-curvatura, no entanto, deve ser calculada previamente.

2.6.1 Cálculo da Relação Momento-Curvatura

Várias abordagens para obter a relação momento-curvatura foram propostas por pesquisadores ao longo dos anos. Em geral, a diferença mais significativa entre elas diz respeito à forma como é feita a integração do campo de tensões. Conceitualmente, a avaliação da relação momento-curvatura requer a integração do campo de tensões sobre a seção transversal a fim de avaliar a força e o momento resultante. Segundo Papanikolaou (2012), a maioria das abordagens pode ser amplamente classificada em métodos que empregam: a) integração analítica; b) integração de camadas e c) integração numérica.

A integração analítica do campo de tensão só é possível no caso de seções muito simples e com leis constitutivas simples. Por esta razão, abordagens baseadas em integração analítica são geralmente limitadas a seções simples e leis constitutivas polinomiais. Caso contrário, é preciso algum modelo computacional.

No caso do método das lamelas ou camadas (TSAO e HSU (1993); SPACONE et al. (1996); SFAKIANAKIS (2002)), a seção transversal é dividida em retângulos (camadas). A força e os momentos resultantes são, então, calculados considerando a contribuição de cada camada. A principal vantagem desta abordagem é a sua simplicidade conceitual e computacional, já que emprega a noção intuitiva de soma da contribuição das camadas em vez de esquemas abstratos de quadraturas para integração numérica. Como consequência, também é muito flexível e geral.

2.6.2 Diagrama momento-curvatura do concreto armado

O concreto armado apresenta três etapas distintas quando submetidas à esforços de flexão crescentes até atingir sua ruptura. Essas etapas podem ser vistas no gráfico idealizado do momento-curvatura de uma viga de concreto armado, como visto na Figura 16.

A primeira etapa, corresponde ao estádio I, é caracterizada pelo comportamento elástico-linear do aço e concreto. A segunda etapa se inicia quando ocorre a fissuração do concreto devido a atingir sua resistência à tração, correspondendo ao estádio II. Nesta etapa a inércia da peça diminui devido a fissuração da seção, diminuindo a rigidez e, por conseguinte, muda a inclinação da curva momento-curvatura neste trecho. Se a seção de concreto armado for sub-armada, a terceira etapa corresponde ao estádio III, onde a seção atinge o momento de plastificação, ou seja, a armadura de aço atinge a sua tensão de escoamento. Neste trecho da curva, a curvatura aumenta sem acréscimo significativo do momento até atingir o momento máximo e, em seguida, seu colapso.

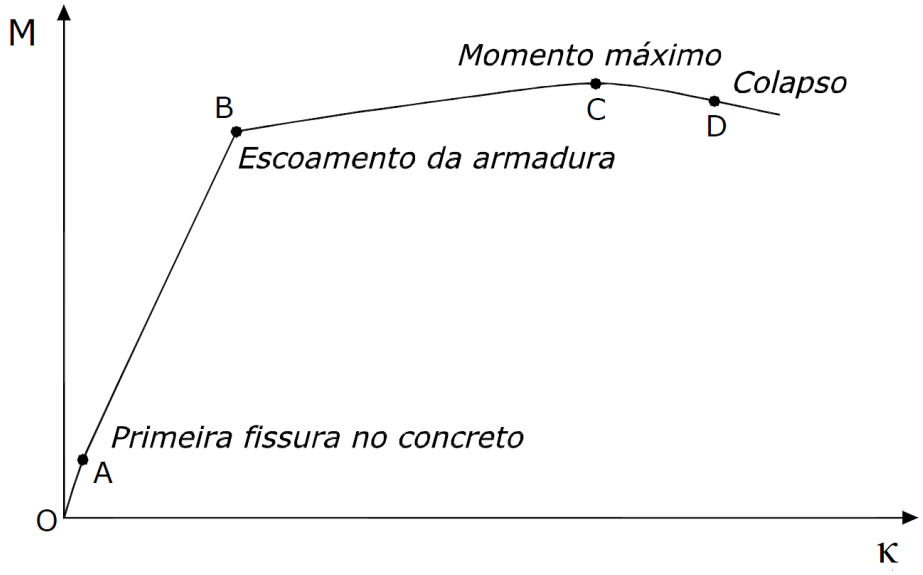


Figura 16 - Etapas do gráfico momento-curvatura.

3 MÉTODO PARA OBTENÇÃO DO DIAGRAMA MOMENTO-CURVATURA PARA SEÇÕES GENÉRICAS DE CONCRETO ARMADO

Neste capítulo será desenvolvido um conjunto de rotinas computacionais gerais, flexíveis e simples para a construção do diagrama momento-curvatura de seções genéricas de concreto armado. A integração do campo de tensões é feita usando o método das lamelas ou camadas. Todavia, é proposto um desenvolvimento alternativo do método das lamelas. O algoritmo resultante não exige divisão da seção transversal em células de integração e não apresenta problemas com leis constitutivas descontínuas. Os resultados são comparados com os obtidos com a resposta do software response 2000, que é descrito em detalhe por Bentz (2000).

3.1 MODELO ESTRUTURAL DA SEÇÃO TRANSVERSAL

Assume-se que o eixo *z* está alinhado ao eixo longitudinal da viga, o eixo *x* é a direção do momento fletor aplicado e o eixo *y* é ortogonal a ambos eixos *x* e *z*. Desse modo, a seção transversal é definida no plano *xy*, com o momento fletor aplicado na direção de *x*. Os eixos são representados na Figura 17.

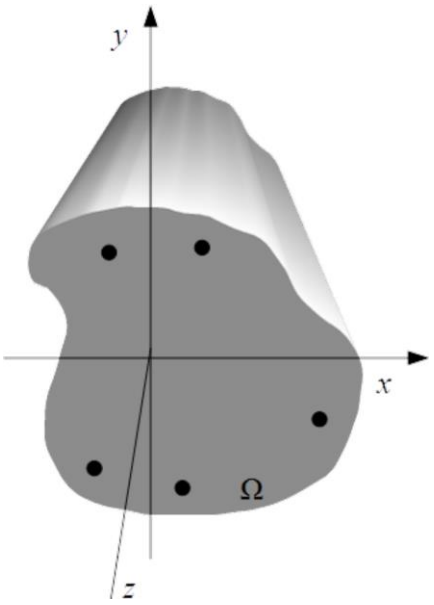


Figura 17 - Eixos na seção transversal.

A curvatura κ em algum ponto de uma viga é (TIMOSHENKO (1940); HIBBELER (2011))

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d^2\upsilon / dz^2}{[1+(d\upsilon / dz)^2]^{3/2}} \tag{3.1}$$

onde ρ é o raio de curvatura, υ é o deslocamento transversal e z é o eixo longitudinal. A rotação é

$$\theta = \frac{d^2\upsilon}{dz^2} \tag{3.2}$$

Para pequenas deformações tem-se que $(d\upsilon/dz)^2 \to 0$ e, da equação (3.1), $\kappa \approx \theta$. Isso indica que a curvatura é aproximadamente igual à rotação para pequenas inclinações.

Supondo que as seções transversais permanecem planas após a deformação, o campo de tensões na seção transversal pode ser escrito como

$$\varepsilon(y, \theta, y_c) = (y - y_c)\tan\theta \tag{3.3}$$

onde θ é a rotação da seção transversal e y_c é a posição da linha neutra medida na direção de y.

O campo de deformações resultante é representado na Figura 18. As tensões de compressão são presumidas como positivas. Finalmente, é possível verificar que o campo de deformações varia linearmente ao longo do comprimento da seção transversal y e depende de θ e y_c.

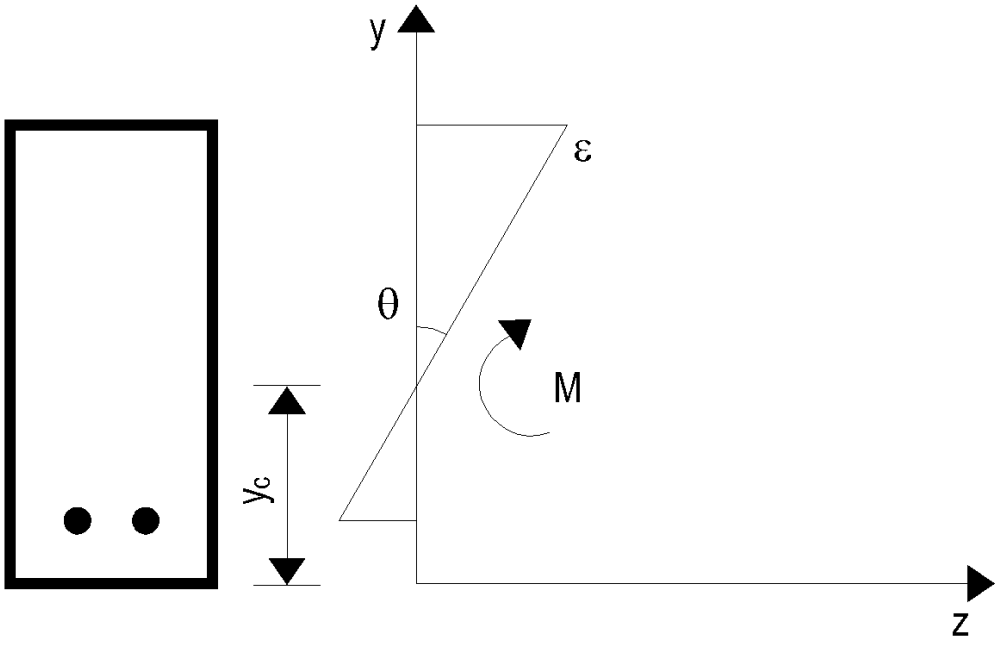


Figura 18 - Campo de deformações.

A força axial e o momento fletor resultantes são dados por

$$N(\theta, y_c) = \int_\Omega \sigma_c dxdy + \sum_{j=1}^{n_r} A_{sj}\sigma_{sj} \tag{3.4}$$

$$M(\theta, y_c) = \int_\Omega (y_c - y)\sigma_c dxdy + \sum_{j=1}^{n_r} (y_c - y_{sj})A_{sj}\sigma_{sj} \tag{3.5}$$

onde Ω representa o domínio de seção transversal (ver a Figura 19), σ_c é o campo de tensões no concreto, A_{sj} são as áreas da seção transversal das armaduras, σ_{sj} são as tensões nas armaduras, y_{sj} são as posições das armaduras e n_r é o número de armaduras. É possível verificar que ambos N e M dependem de θ e y_c, uma vez que estas duas variáveis definem o campo de deformações e, consequentemente, o campo de tensões.

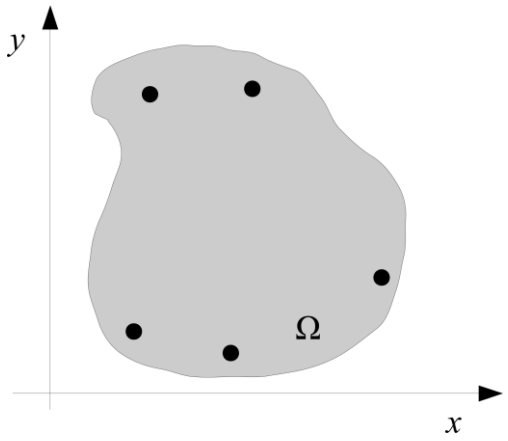


Figura 19 - Seção transversal.

3.2 REGRA DA QUADRATURA: MÉTODO DAS LAMELAS

Para valores dados de θ e y_c, as contribuições das armaduras para N e M((3.4) e (3.5)) podem ser calculadas por somatório. A avaliação da contribuição do concreto, por outro lado, requer a integração do campo de tensões da seção transversal, sendo essa a principal dificuldade na avaliação da relação momento-curvatura para seções transversais arbitrárias. Se a geometria da seção transversal e a lei constitutiva são simples, as integrais necessárias podem ser calculadas analiticamente. Quando a seção transversal tem geometria complexa, contudo, as integrais em (3.4) e (3.5) requerem quadraturas numéricas.

Neste trabalho, a abordagem das lamelas é empregada para a integração do campo de tensões (TSAO e HSU (1993); SPACONE et al. (1996); SFAKIANAKIS (2002)). No

entanto, é apresentado um desenvolvimento alternativo. Para esse fim, primeiro é definido um domínio de integração retangular

$$\bar{\Omega} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_l \le x \le x_u, y_l \le y \le y_u\right\} \tag{3.6}$$

que contém toda a seção transversal, ou seja, que satisfazem

$$\Omega \subseteq \bar{\Omega} \tag{3.7}$$

O domínio de integração $\bar{\Omega}$ e a seção transversal Ω são representados na Figura 20. O domínio de integração, logo, é uma caixa que contém toda a seção transversal.

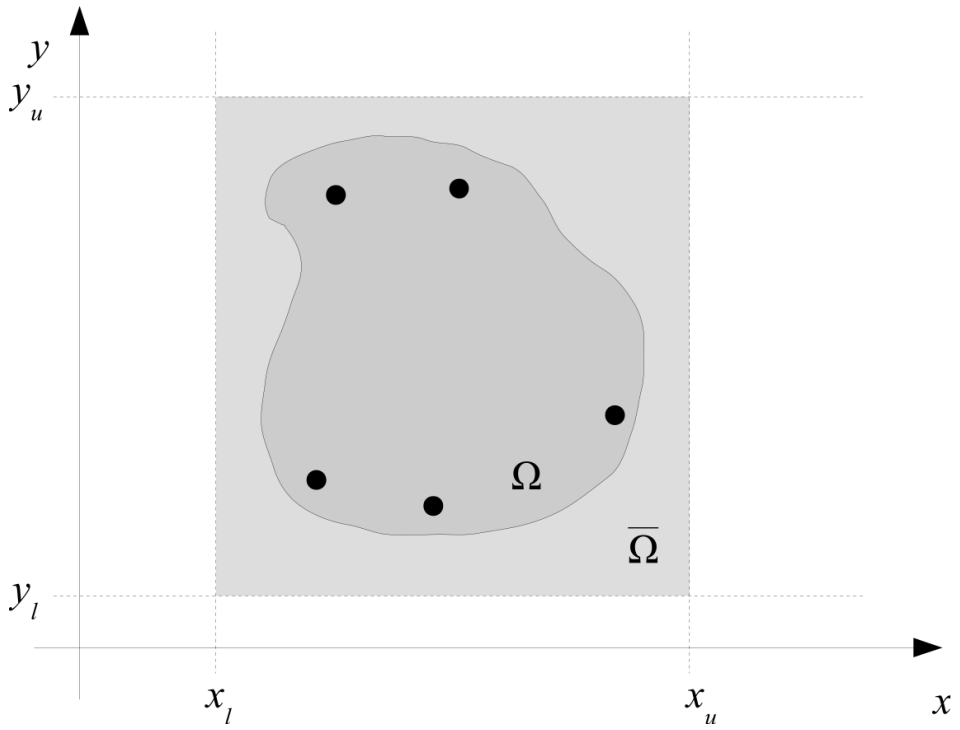


Figura 20 - Seção transversal Ω e domínio de integração $\bar{\Omega}$.

A geometria da seção transversal é, então, representada usando uma função indicadora definida como

$$I(x, y) = \begin{cases} 1, (x, y) \in \Omega \\ 0, (x, y) \notin \Omega \end{cases} \tag{3.8}$$

A função indicadora simplesmente retorna 1 se o ponto (*x*, *y*) está dentro da seção transversal com domínio Ω e 0 caso contrário.

A integração de uma função *f* (*x*, *y*) na seção transversal Ω pode então ser escrita como

$$\int_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = \int_{\bar{\Omega}} I(x,y)\, f(x,y)\,dxdy \tag{3.9}$$

Neste caso, a integração na seção transversal Ω é substituída pela integração em todo o domínio de integração $\bar{\Omega}$. A multiplicação pela função indicadora é empregada a fim de que apenas os pontos dentro do domínio Ω sejam considerados.

Em seguida, é gerada uma amostra de pontos com distribuição uniforme no domínio de integração Ω. Neste trabalho é utilizada uma malha de pontos espaçados igualmente em cada direção, ilustrado na Figura 21.

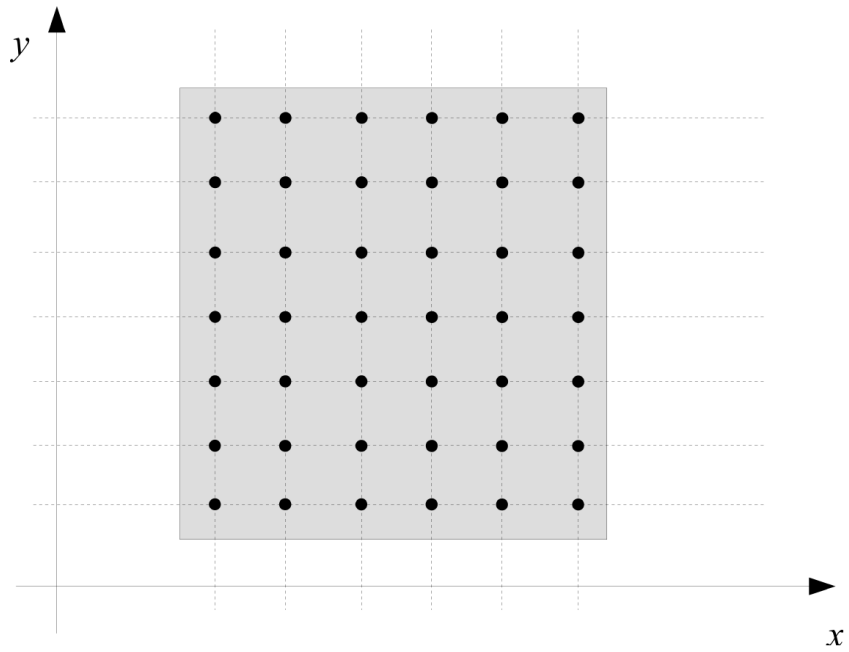


Figura 21 - Malha de quadratura uniforme.

Se são n_x pontos empregados em cada direção, então o número total de pontos da malha é $n = n_x^2$. Esses pontos da malha são coletados no conjunto de amostras

$$S = \{(x_1,y_1),(x_2,y_2),...,(x_n,y_n)\} \tag{3.10}$$

onde *n* é o tamanho da amostra. A regra da quadratura para a integral da Equação (3.9) pode então ser escrita como

$$\int_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int_{\bar{\Omega}} I(x,y)\, f(x,y)dxdy \approx \sum_{i=1}^{n} w_i I(x_i,y_i)\, f(x_i,y_i) \tag{3.11}$$

onde w_i são pesos da quadratura e os pontos da malha (x_i, y_i) são definidos como os nós da quadratura.

A fim de obter os pesos da quadratura, a área do domínio de integração é dada por

$$\bar{A} = (x_u - x_l)(y_u - y_l) \tag{3.12}$$

Aplicando a regra da quadratura da Equação (3.11) obtém-se

$$\bar{A} = \int_{\bar{\Omega}} 1 dxdy \approx \sum_{i=1}^{n} w_i \tag{3.13}$$

Visto que os pontos da amostragem seguem uma distribuição uniforme, é possível supor que todos os pontos da quadratura têm o mesmo peso w_i e da Equação (3.13) tem-se

$$w_i = \frac{\bar{A}}{n} \tag{3.14}$$

Substituindo os pesos da quadratura na Equação (3.11), resulta a regra de quadratura

$$\int_{\Omega} f(x,y) dxdy \approx \bar{A}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(x_i, y_i) f(x_i, y_i)\right] \tag{3.15}$$

Da Equação (3.11) observa-se que a integral é dada pela multiplicação da área do domínio de integração $\bar{A}$ pela média amostral do integrando. Finalmente, multiplicando por $I(x_i, y_i)$ na Equação (3.15) implica que apenas pontos da quadratura dentro da seção transversal são realmente considerados. Consequentemente, a soma de Equação (3.15) pode ser calculada descartando pontos da quadratura fora da seção transversal.

Do emprego da regra da quadratura da Equação (3.15) para as Equações (3.4) e (3.5) resulta

$$N(\theta, y_c) \approx \bar{A}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(x_i, y_i)\sigma_c(x_i, y_i)\right] + \sum_{j=1}^{n_r} A_{sj}\sigma_{sj} \tag{3.16}$$

$$M(\theta, y_c) \approx \bar{A}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(x_i, y_i)(y_c - y_i)\sigma_c(x_i, y_i)\right] + \sum_{j=1}^{n_r} (y_c - y_{sj}) A_{sj}\sigma_{sj} \tag{3.17}$$

onde $\sigma_c(x_i, y_i)$ é a tensão sobre o concreto na posição (x_i, y_i).

3.3 RELAÇÃO MOMENTO-CURVATURA

A fim de obter o diagrama momento-curvatura, o momento resultante é calculado para um conjunto ou rotações prescritas θ_0, θ_1, θ_2, ... em um determinado intervalo [0, θ_f]. Assumindo que *m* incrementos de rotações são aplicados tem-se

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 \\ \theta_1 = \theta_0 + \Delta\theta \\ \theta_2 = \theta_1 + \Delta\theta \\ \vdots \\ \theta_m = \theta_{m-1} + \Delta\theta \end{cases} \tag{3.18}$$

onde

$$\Delta\theta = \frac{\theta_f}{m} \tag{3.19}$$

é o incremento de rotação.

Para uma determinada rotação θ_i , a posição da linha neutra y_c é a raiz da equação

$$N(\theta_i, y_c) = 0 \tag{3.20}$$

onde pode ser considerado, sem perda de generalidade, que não se apliquem forças axiais. Neste trabalho a raiz da Equação (3.20) é obtida com o método da bisseção (ATKINSON (1989); BURDEN e FAIRES (2011)). A força axial resultante é calculada usando a equação (3.16). Após a posição da linha neutra y_c ser encontrada, o momento resultante pode ser calculado usando a Equação (3.17).

3.4 LEIS CONSTITUTIVAS ADOTADAS PARA OS EXEMPLOS

A abordagem proposta é geral e pode ser empregada em conjunto com qualquer lei constitutiva para concreto e aço. Para os próximos exemplos serão empregadas leis constitutivas simples a fim de focar no método ao invés das propriedades mecânicas dos materiais. Leis constitutivas mais refinadas podem ser encontradas em diversos trabalhos na literatura, Chen (1982); CEB-FIP (1993); Bentz (2000) e outras referências mais recentes sobre o assunto.

3.4.1 Concreto

No caso do concreto, a resistência na tensão é desconsiderada e o modelo parabólico da NBR6118 é empregado na compressão. A relação tensão-deformação resultante é

$$\sigma_c(\varepsilon_c) = \begin{cases} 0 & ,\varepsilon_c < 0 \\ \mathrm{f_c}\left[1-\left(1-\dfrac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}}\right)^2\right] & ,0 \le \varepsilon_c < \varepsilon_{c2} \\ \mathrm{f_c} & ,\varepsilon_{c2} \le \varepsilon_c < \varepsilon_{cu} \\ 0 & ,\varepsilon_c > \varepsilon_{cu} \end{cases} \tag{3.21}$$

onde ε_c é a deformação no concreto, $\mathrm{f_c}$ é a resistência à compressão, $\varepsilon_{c2} = 2.0/1000$ e $\varepsilon_{cu} = 3.5/1000$.

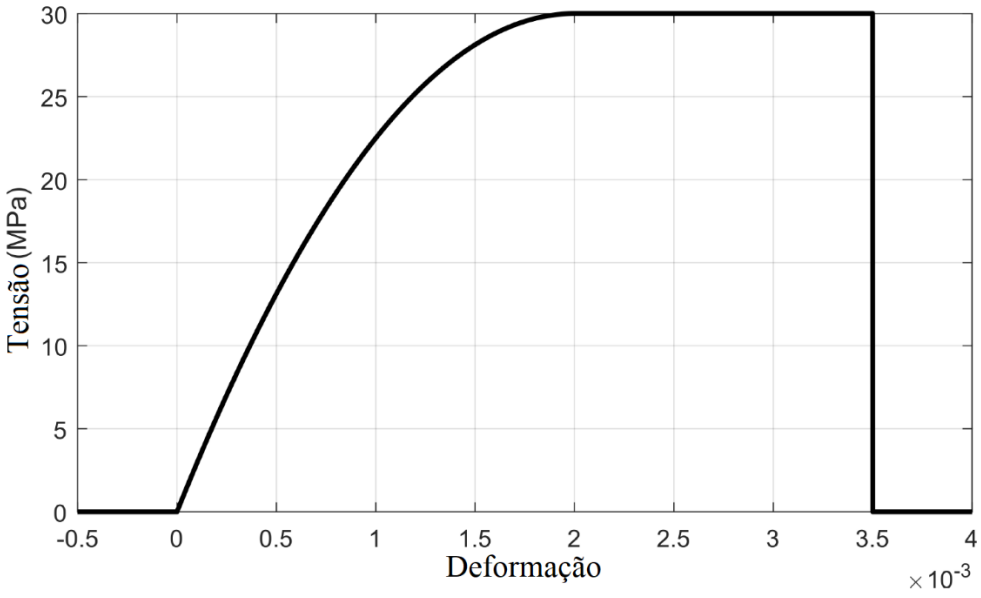


Figura 22 - Relação tensão-deformação para o concreto com $\mathrm{f_c} = 30$ MPa.

3.4.2 Aço

Para o aço, um modelo elástico-perfeitamente plástico é empregado. Também é considerada uma aderência perfeita entre aço e concreto, resultando na relação tensão-deformação

$$\sigma_s(\varepsilon_s) = \begin{cases} \varepsilon_s E_s & ,0 \leq |\varepsilon_s| \leq \varepsilon_{sy} \\ \mathrm{f_y}\, \varepsilon_s / |\varepsilon_s| & ,\varepsilon_{sy} \leq |\varepsilon_s| \leq \varepsilon_{su} \\ 0 & ,|\varepsilon_s| > \varepsilon_{su} \end{cases} \tag{3.22}$$

onde ε_s é a deformação no aço, $\mathrm{f_y}$ é a tensão de escoamento, $\varepsilon_{su} = 10/1000$, $\varepsilon_{sy} = \mathrm{f_y}/E_s$ e $E_s = 210$ GPa. Na equação acima, a expressão $\varepsilon_s/|\varepsilon_s|$ só é empregada para considerar o sinal da deformação.

Deve-se notar que os sinais positivos são utilizados para compressão. A relação tensão-deformação para o concreto com $\mathrm{f_c} = 30$ MPa e para o aço com $\mathrm{f_y} = 400$ MPa são apresentadas nas Figuras 22 e 23, para finalidade de exemplo da aplicação do método.

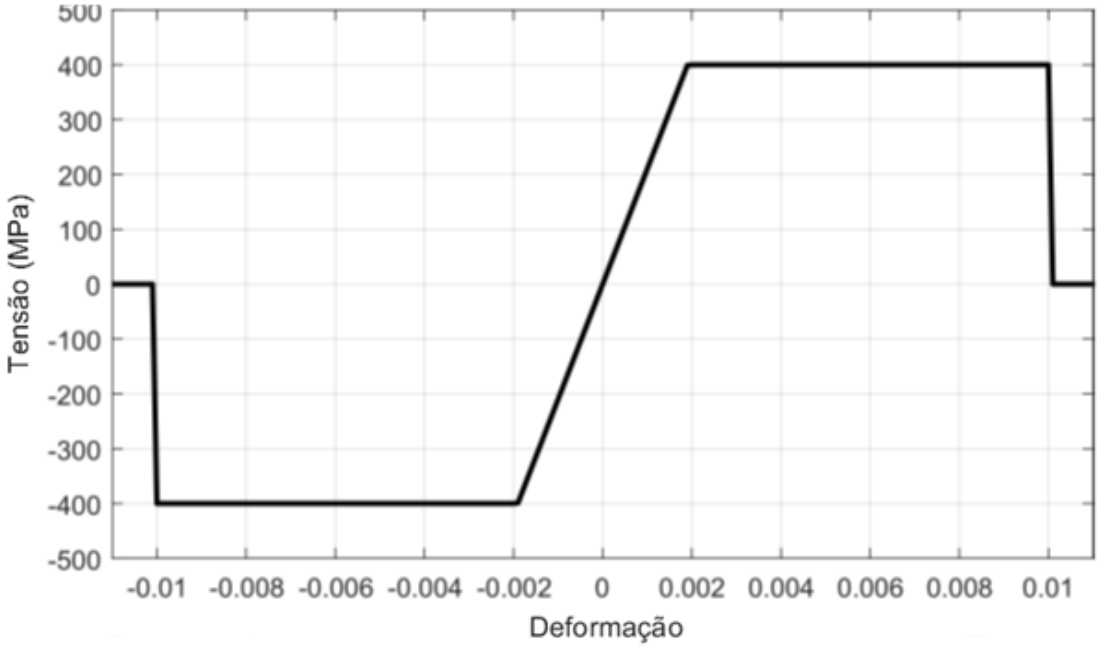


Figura 23 - Relação tensão-deformação para o aço com $\mathrm{f_y} = 400$ MPa.

3.5 EXEMPLOS

3.5.1 Seção Transversal Retangular

No primeiro exemplo é estudada a seção transversal da Figura 24. A seção transversal é um retângulo com largura $b = 200$ mm e altura $h = 500$ mm. As propriedades dos materiais foram tomadas como $\mathrm{f_c} = 40$ MPa e $\mathrm{f_y} = 500$ MPa. Os centroides das três barras inferiores e duas barras são posicionados em 40 mm e 460 mm da parte inferior da seção transversal, respectivamente. Cada armadura tem uma área da seção transversal igual a $A_{sj} = 123$ mm^2.

Os limites do domínio de integração foram definidos como $x_l = y_l = 0$ mm, $x_u = 200$ mm e $y_u = 500$ mm. O tamanho da amostra empregada para a quadratura numérica foi $n = 10^4$.

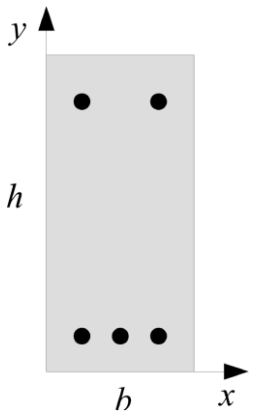


Figura 24 - Seção transversal retangular.

Os resultados obtidos com a abordagem proposta neste trabalho são comparados com os resultados obtidos com o response 2000 na Figura 25. Como pode-se observar, os resultados obtidos são muito semelhantes, o que valida a abordagem proposta. As pequenas diferenças observadas são consequência provável de alguns parâmetros que não podem ser modificados pelo usuário no response 2000.

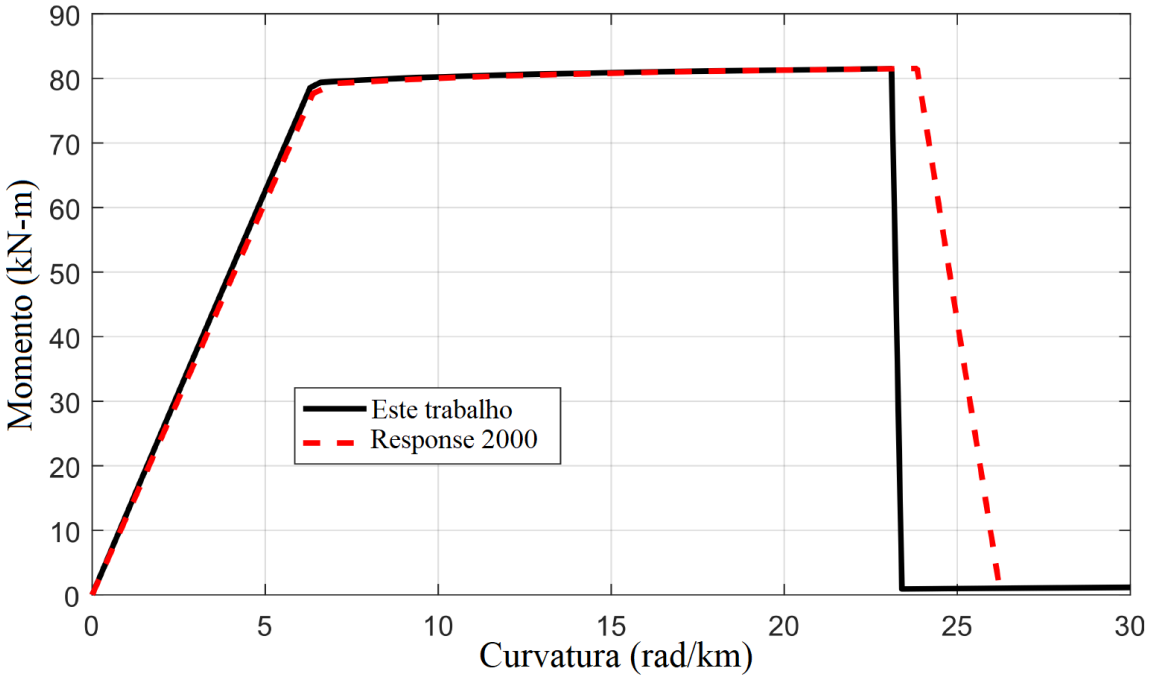


Figura 25 - Momento-curvatura da seção transversal retangular.

3.5.2 Seção Transversal Elipsoidal

No segundo exemplo, é avaliada a seção transversal da Figura 26. A seção transversal é uma elipse com raio $a = 100$ mm e $b = 200$ mm nos eixos x e y. As propriedades dos

materiais foram tomadas como $f_c = 40$ MPa e $f_y = 500$ MPa. As barras têm área da seção transversal $A_s = 123$ mm^2 com centroides posicionados em (−30, −150) mm, (+30, −150) mm, (−70, 0) mm, (+70, 0) mm e (0, +150) mm. Os limites do domínio de integração foram definidos como $x_l = y_l = -200$ mm e $x_u = y_u = +200$ mm. O tamanho da amostra empregado para a quadratura numérica foi $n = 10^4$.

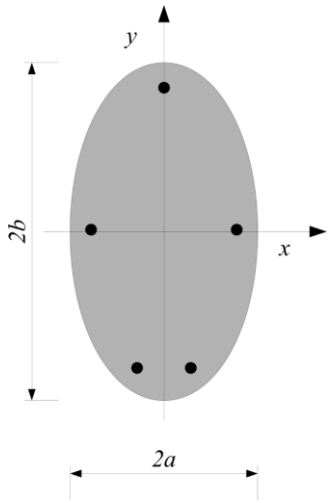


Figura 26 - Seção Transversal Elipsoidal.

O diagrama momento-curvatura é apresentado na Figura 27. Os resultados são comparados com os obtidos pelo response 2000. Novamente, os resultados são parecidos, indicando que a abordagem proposta é capaz de obter resultados precisos.

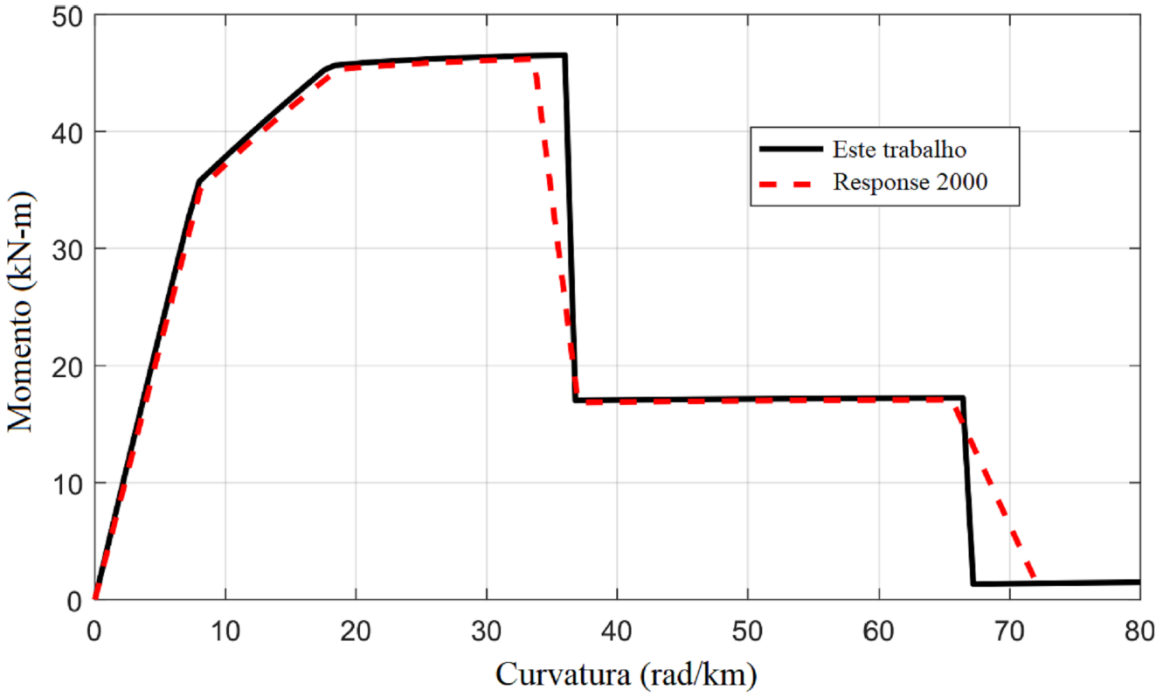


Figura 27 - Momento-curvatura para a seção transversal elipsoidal.

4 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISE DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO

Será desenvolvido, neste capítulo, um modelo para análise não linear de vigas de concreto armado utilizando o elemento finito de barra e aplicando a abordagem que utiliza os diagramas momento-curvatura previamente calculados para realizar a análise física não linear através do método iterativo secante.

4.1 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS DE VIGA

O elemento de viga, ou de barra sob flexão, é um elemento reto, onde uma de suas dimensões é suficiente maior que as de sua seção transversal.

Para a representação matemática do modelo de viga de concreto armado é adotada a teoria da viga de Euler-Bernoulli, na qual as seções permanecem planas e normais à linha neutra após a deformação. Os efeitos da deformação por cisalhamento, portanto, não são considerados. O modelo desenvolvido considera apenas carregamentos monotônicos.

4.1.1 Elemento Finito de Viga

Para utilizar o MEF em vigas adota-se o elemento de barra com dois nós e quatro graus de liberdade, sendo dois deslocamentos por ponto nodal: deslocamento transversal e deslocamento angular ou rotação. O elemento pode ser visto na Figura 28.

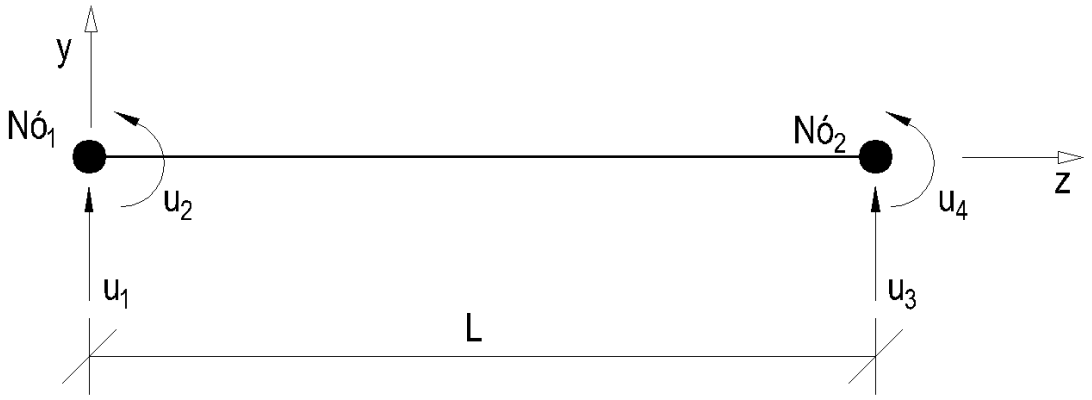


Figura 28 - Elemento finito de viga com 2 nós e 4 graus de liberdade.

Para formulação do MEF será utilizado o método de Rayleight-Ritz, que utiliza os princípios variacionais.

De acordo com Hutton (2004), a deformação normal na direção longitudinal do eixo como resultado da flexão é:

$$\varepsilon_z = -y\frac{d^2\upsilon}{dz^2} \tag{4.1}$$

e a tensão normal correspondente,

$$\sigma_z = E\varepsilon_z = -Ey\frac{d^2\upsilon}{dz^2} \tag{4.2}$$

onde υ é o deslocamento transversal em função do eixo longitudinal da barra *z*, *E* o módulo de elasticidade longitudinal e *y* a distância da fibra ao eixo longitudinal baricêntrico da barra.

A obtenção da equação governante do problema de flexão de uma viga pode ser obtida pelo balanço das forças ou, alternativamente, pela condição de estacionaridade do funcional de energia. Para problemas estáticos, o funcional de energia $\pi(\upsilon(z))$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$\pi = \pi_p - W \tag{4.3}$$

onde π_p é a energia potencial de deformação e *W* é o trabalho das cargas externas.

A energia potencial de deformação é dada pela seguinte expressão:

$$\pi_p = \frac{1}{2}\int_V \sigma_z\varepsilon_z dV \tag{4.4}$$

onde *V* é o volume total do elemento.

E o trabalho das cargas externas para um carregamento aplicado no sentido transversal na direção e sentido positivo do eixo y, de valor *q*(*z*) por unidade de comprimento da barra é

$$W = \int_0^L q\upsilon dz \tag{4.5}$$

onde *q* é o carregamento externo e L o comprimento do elemento.

Substituindo a lei de Hooke e as relações cinemáticas, equações (4.1) e (4.2), na energia de deformação, equação (4.4), seu funcional pode ser escrito como:

$$\pi_p = \frac{1}{2}\int_V Ey^2\left(\frac{d^2\upsilon}{dz^2}\right)^2 dV \tag{4.6}$$

Desenvolvendo a equação (4.6) fica:

$$\pi_p = \frac{1}{2}\int_0^L\int_A E\left(\frac{d^2\upsilon}{dz^2}\right)^2 y^2 dAdz \tag{4.7}$$

onde A é a área da seção transversal.

Mas $I = \int_A y^2 dA$ é o momento de inercia da seção transversal. Logo, pode-se escrever:

$$\pi_p = \frac{1}{2}\int_0^L EI\left(\frac{d^2\upsilon}{dz^2}\right)^2 dz \tag{4.8}$$

onde o produto *EI* representa a rigidez da seção transversal.

Substituindo (4.8) e (4.5) em (4.3), obtém-se

$$\pi(\upsilon) = \frac{1}{2}\int_0^L EI\left(\frac{d^2\upsilon}{dz^2}\right)^2 dz - \int_0^L q\upsilon dz \tag{4.9}$$

A equação (4.9) representa o funcional de energia potencial total, em função do deslocamento transversal *υ(z)*.

Pelos princípios variacionais, a condição de estacionaridade do funcional (4.9) é:

$$\delta\pi(\upsilon) = \int_0^L EI\left(\frac{d^2\upsilon}{dz^2}\right)\delta\left(\frac{d^2\upsilon}{dz^2}\right)dz - \int_0^L q\delta\upsilon dz = 0 \tag{4.10}$$

onde $\delta\pi(\upsilon)$ representa a primeira variação do funcional.

Para aplicar o MEF é preciso resolver a equação (4.10) em termos dos deslocamentos e esforços nodais do elemento. Para isso, deve ser utilizada uma aproximação para a função *υ(z)*.

A função aproximadora para o deslocamento da viga será de terceiro grau do tipo:

$$\upsilon(z) = \alpha_1 + \alpha_2 z + \alpha_3 z^2 + \alpha_4 z^3 \tag{4.11}$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e α_4 são os coeficientes de Ritz a serem determinados.

Pode-se escrever matricialmente

$$\upsilon = \begin{bmatrix} 1 & z & z^2 & z^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\psi}.\mathbf{a} \tag{4.12}$$

onde é possível identificar os seguintes termos:

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} 1 & z & z^2 & z^3 \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \tag{4.14}$$

Os deslocamentos nodais podem ser representados na forma matricial **u**. Onde os deslocamentos e rotações nos nós podem ter a seguinte notação no elemento:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \tag{4.15}$$

onde u_1 é o deslocamento vertical no nó 1, u_2 a rotação no nó 1, u_3 o deslocamento vertical no nó 2 e u_4 a rotação no nó 2. Assim como visto na Figura 28.

As seguintes condições de contorno são impostas para escrever a função aproximadora em função dos deslocamentos nodais **u**:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{z=0} \\ u'_{z=0} \\ u_{z=L} \\ u'_{z=L} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\psi}_0 . \mathbf{a} \tag{4.16}$$

Resolvendo para a matriz **a**:

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\psi}_0^{-1} . \mathbf{u} \tag{4.17}$$

Substituindo (4.17) em (4.12):

$$\upsilon = \boldsymbol{\psi} . \boldsymbol{\psi}_0^{-1} . \mathbf{u} \tag{4.18}$$

Matricialmente fica:

$$\upsilon = \begin{bmatrix} 1 & z & z^2 & z^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \tag{4.19}$$

A solução em termos dos deslocamentos nodais fica então:

$$\upsilon = N_1(z)u_1 + N_2(z)u_2 + N_3(z)u_3 + N_4(z)u_4 \tag{4.20}$$

Ou matricialmente:

$$\upsilon = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{N} . \mathbf{u} \tag{4.21}$$

onde as funções N_1, N_2, N_3 e N_4 são chamadas funções de interpolação ou de forma e representam os campos de deslocamentos nodais dentro do elemento.

De acordo com (4.18)

$$\mathbf{N} = \boldsymbol{\psi}.\boldsymbol{\psi}_0^{-1} \tag{4.22}$$

Logo, as funções de interpolação ficam

$$\begin{cases} N_1 = 1 - \dfrac{3z^2}{L^2} + \dfrac{2z^3}{L^3} \\ N_2 = z - \dfrac{2z^2}{L} + \dfrac{z^3}{L^2} \\ N_3 = \dfrac{3z^2}{L^2} - \dfrac{2z^3}{L^3} \\ N_4 = -\dfrac{z^2}{L} + \dfrac{z^3}{L^2} \end{cases} \tag{4.23}$$

De acordo com Soriano (2009), as funções de interpolação (4.23) são conhecidas como funções de interpolação de Hermite, utilizadas quando é necessário interpolar parâmetros nodais das variáveis primárias e de algumas de suas derivadas.

Essas funções estão representadas na Figura 29, no caso de um elemento unitário.

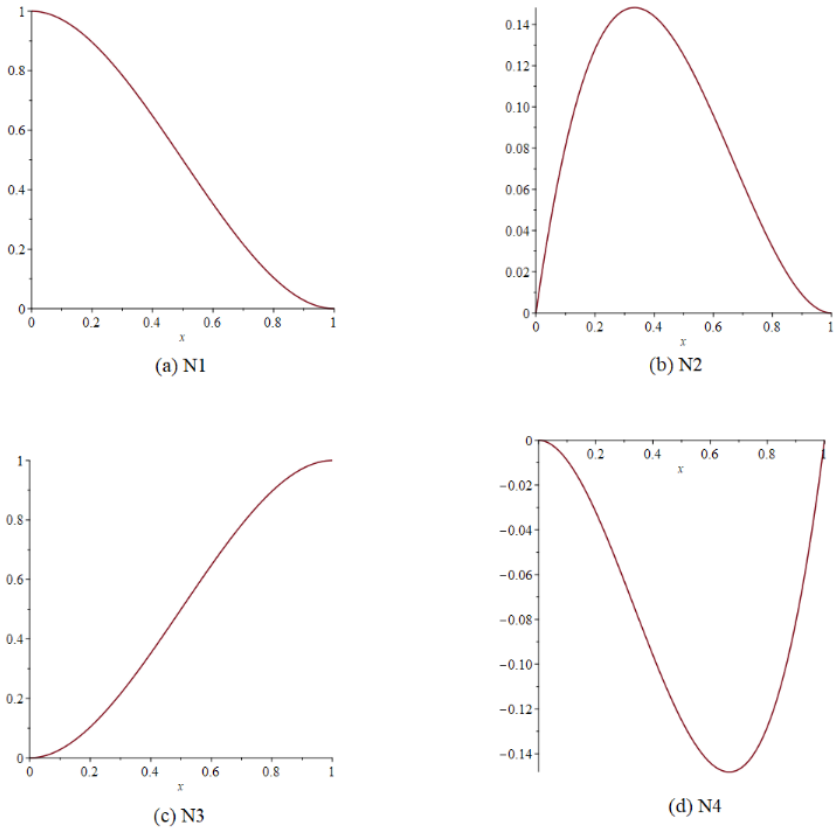


Figura 29 - Funções de forma unidimensionais cúbicas do elemento finito de viga. (a) função N1, (b) função N2, (c) função N3, (d) função N4.

A partir das equações (4.23) que definem os campos de deslocamentos, podemos escrever sua derivada segunda como sendo:

$$\frac{d^2\upsilon}{dz^2} = \left(\frac{d^2\mathbf{N}}{dz^2}\right)\mathbf{u} \tag{4.24}$$

Portanto:

$$\frac{d^2\upsilon}{dz^2} = \left[-\frac{6}{L^2}+\frac{12z}{L^3} \quad -\frac{4}{L}+\frac{6z}{L^2} \quad \frac{6}{L^2}-\frac{12z}{L^3} \quad \frac{6z}{L^2}-\frac{2}{L}\right]\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{Bu} \tag{4.25}$$

A matriz linha **B** é a segunda derivada da matriz das funções de forma **N** em relação a *z*.

$$\mathbf{B} = \frac{d^2\mathbf{N}}{dz^2} \tag{4.26}$$

As cargas externas também devem ser representadas em termos de esforços nodais, então consideram-se cargas concentradas aplicadas nos nós e na direção dos graus de liberdade, conforme representado na Figura 30.

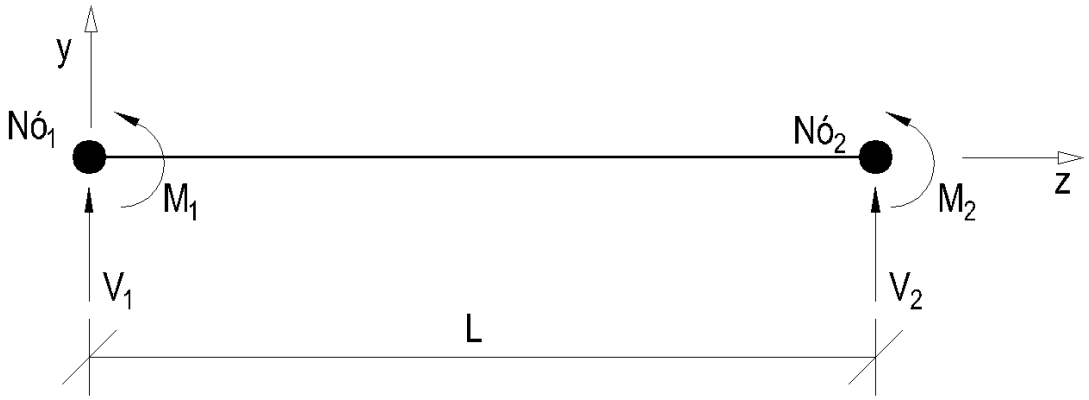


Figura 30 - Esforços nodais no elemento de barra.

O trabalho das cargas externas em termos dos esforços nodais pode, portanto, ser escrito da seguinte forma:

$$W = \mathbf{u}^T\left(\int_0^L \mathbf{N}^{\mathbf{T}} q\,dx\right) + \mathbf{u}^T\begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \tag{4.27}$$

onde a primeira parcela refere-se ao trabalho do carregamento distribuído no elemento *q* e a segunda parcela ao trabalho dos esforços de momento fletor (M_1 e M_2) e força vertical na direção de *y* (V_1 e V_2) aplicados nos nós.

Fazendo as substituições das equações (4.21), (4.25) e (4.27) na condição de estacionaridade (4.10) obtém-se:

$$\delta\pi(u) = \delta\mathbf{u}^T \left(\int_0^L \mathbf{B}^\mathbf{T} EI\mathbf{B} dx \right) \mathbf{u} - \delta\mathbf{u}^T \left(\int_0^L \mathbf{N}^\mathbf{T} q dx \right) - \delta\mathbf{u}^T \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = 0 \tag{4.28}$$

Como $\delta\mathbf{u}$ são quaisquer variações, então $\delta\mathbf{u} \neq 0$. Obtém-se, assim, o sistema de equações algébricas do elemento:

$$\left(\int_0^L \mathbf{B}^\mathbf{T} EI\mathbf{B} dz \right) \mathbf{u} = \left(\int_0^L \mathbf{N}^\mathbf{T} q dz \right) + \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \tag{4.29}$$

onde pode-se identificar os termos:

$$\mathbf{k} = \left(\int_0^L \mathbf{B}^\mathbf{T} EI\mathbf{B} dz \right) \tag{4.30}$$

$$\mathbf{f} = \left(\int_0^L \mathbf{N}^\mathbf{T} q dz \right) + \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \tag{4.31}$$

onde **k** é a matriz de rigidez do elemento, que representa a relação entre forças e deslocamentos no elemento e **f** o vetor das forças nodais do elemento.

Se o carregamento *q* tiver um valor constante ao longo do elemento, o vetor **f** fica:

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \\ \frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \tag{4.32}$$

Então, pode-se chegar na expressão (2.5) mais compacta que relaciona os deslocamentos com as forças externas no elemento.

$$\mathbf{ku} = \mathbf{f} \tag{4.33}$$

onde **k** é a matriz de rigidez do elemento, **u** o vetor dos deslocamentos nodais e **f** o vetor das cargas nodais.

4.1.2 Não linearidade física do modelo

No caso da análise não linear de estruturas, a matriz de rigidez do elemento **k** varia em função dos deslocamentos nodais **u**. Portanto, na equação de equilíbrio (4.33), a matriz **k** torna-se função de **u**, fazendo com que a equação seja não linear. Logo, não é possível determinar imediatamente o vetor **u**, uma vez que as informações necessárias para desenvolver a matriz de rigidez não são encontradas de forma direta. Assim, torna-se necessária a utilização de um processo de solução iterativo. A não linearidade física do modelo é, então, inserida através da rigidez secante EI_{sec}, calculada pela equação (2.15), que varia de acordo com a curvatura (κ) dos nós dos elementos e o momento fletor (M) correspondente, os quais, por sua vez, dependem dos deslocamentos **u**.

4.1.3 Cálculo da matriz de rigidez secante

Para calcular a matriz de rigidez **k** do elemento, através da equação (4.30), é preciso determinar primeiro a rigidez *EI* no elemento.

Da equação (2.15), considerando a rigidez secante EI_{sec}, tem-se:

$$EI_{\text{sec}} = \frac{M}{\kappa} \tag{4.34}$$

Para resolver a equação é necessário, portanto, calcular os valores da curvatura (κ) nos nós dos elementos, para então obter o momento fletor (M) correspondente, utilizando o diagrama momento-curvatura da seção transversal, previamente calculado de acordo com o método descrito no capítulo 3.

Combinando as equações (2.18) e (4.25) pode-se chegar na expressão que relaciona a curvatura ao longo do elemento com os deslocamentos nodais:

$$\kappa = \frac{d^2\upsilon}{dz^2} = \mathbf{Bu} = \left[-\frac{6}{L^2} + \frac{12z}{L^3} \quad -\frac{4}{L} + \frac{6z}{L^2} \quad \frac{6}{L^2} - \frac{12z}{L^3} \quad \frac{6z}{L^2} - \frac{2}{L} \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \tag{4.35}$$

As curvaturas nos nós são obtidas substituindo os valores de z=0 para o nó 1 e z=L para o nó 2 do elemento. As curvaturas nodais ficam:

$$\kappa_1 = \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} & -\frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & -\frac{2}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = -\frac{6}{L^2}u_1 - \frac{4}{L}u_2 + \frac{6}{L^2}u_3 - \frac{2}{L}u_4 \tag{4.36}$$

$$\kappa_2 = \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{6}{L^2}u_1 + \frac{2}{L}u_2 - \frac{6}{L^2}u_3 + \frac{4}{L}u_4 \tag{4.37}$$

onde κ_1 e κ_2 são as curvaturas nos nós 1 e 2 do elemento, respectivamente.

Como o valor de EI varia ao longo do elemento, é preciso fazer a interpolação da rigidez em função da rigidez nos nós.

Neste trabalho foi adotada uma variação linear da rigidez ao longo do elemento, dada por:

$$\mathbf{EI} = \left(1 - \frac{z}{L}\right) EI_{\text{sec},1} + \left(\frac{z}{L}\right) EI_{\text{sec},2} \tag{4.38}$$

onde pode-se identificar dois termos:

$$EI_1 = \left(1 - \frac{z}{L}\right) EI_{\text{sec},1} \tag{4.39}$$

$$EI_2 = \left(\frac{z}{L}\right) EI_{\text{sec},2} \tag{4.40}$$

EI_1 e EI_2 são funções que representam a contribuição na variação da rigidez ao longo do elemento devido à rigidez secante dos nós 1($EI_{\text{sec},1}$) e 2($EI_{\text{sec},2}$) do elemento, respectivamente. Os valores de $EI_{\text{sec},1}$ e $EI_{\text{sec},2}$ são obtidos através do diagrama da relação momento-curvatura de acordo com as curvaturas κ_1 e κ_2 nos nós.

Logo a equação para a matriz de rigidez do elemento fica:

$$\mathbf{k} = \left(\int_0^L \mathbf{B}^{\mathbf{T}} \left(1 - \frac{z}{L}\right) EI_{\text{sec},1} \mathbf{B} dz \right) + \left(\int_0^L \mathbf{B}^{\mathbf{T}} \left(\frac{z}{L}\right) EI_{\text{sec},2} \mathbf{B} dz \right) \tag{4.41}$$

Calculando as integrais tem-se:

$$\mathbf{k}_1 = \left(EI_{\text{sec},1} \int_0^L \mathbf{B}^{\mathbf{T}} \left(1 - \frac{z}{L} \right) \mathbf{B} dz \right) = EI_{\text{sec},1} \begin{bmatrix} \frac{6}{L^3} & \frac{4}{L^2} & -\frac{6}{L^3} & \frac{2}{L^2} \\ \frac{4}{L^2} & \frac{3}{L} & -\frac{4}{L^2} & \frac{1}{L} \\ -\frac{6}{L^3} & -\frac{4}{L^2} & \frac{6}{L^3} & -\frac{2}{L^2} \\ \frac{2}{L^2} & \frac{1}{L} & -\frac{2}{L^2} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \tag{4.42}$$

$$\mathbf{k}_2 = \left(EI_{\text{sec},2} \int_0^L \mathbf{B}^{\mathbf{T}} \left(\frac{z}{L} \right) \mathbf{B} dz \right) = EI_{\text{sec},2} \begin{bmatrix} \frac{6}{L^3} & \frac{2}{L^2} & -\frac{6}{L^3} & \frac{4}{L^2} \\ \frac{2}{L^2} & \frac{1}{L} & -\frac{2}{L^2} & \frac{1}{L} \\ -\frac{6}{L^3} & -\frac{2}{L^2} & \frac{6}{L^3} & -\frac{4}{L^2} \\ \frac{4}{L^2} & \frac{1}{L} & -\frac{4}{L^2} & \frac{3}{L} \end{bmatrix} \tag{4.43}$$

Logo a matriz de rigidez do elemento é da seguinte forma:

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \tag{4.44}$$

Note que a matriz do elemento é, então, dada pela soma de duas matrizes, $\mathbf{k}_1$ e $\mathbf{k}_2$. Estas matrizes são relacionadas à rigidez no nó 1 e 2 do elemento de viga, respectivamente. Além disso, a soma da Equação (4.44) assume que a rigidez ao longo do elemento varia linearmente. Por fim, note que a soma indicada acima mostra que adotar uma variação de rigidez linear ao longo do elemento é computacionalmente simples.

Obtida a matriz de rigidez de cada elemento **k**, é possível formar a matriz de rigidez global **K** da estrutura somando-se a contribuição de todos os elementos. As matrizes de rigidez dos elementos, portanto, podem ser sobrepostas de acordo com as suas conectividades para montar a matriz de rigidez global da estrutura.

4.2 SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES NÃO LINEARES

Após a formação do sistema de equações globais da estrutura com o vetor das forças da estrutura **F**, deve-se restringir os graus de liberdade referentes aos apoios da viga, aplicando as condições de contorno. Com isso, será possível montar o sistema de equações de equilíbrio não lineares (2.5) da estrutura (**KU**=**F**). Para resolver o problema não linear e obter os deslocamentos, será necessário empregar um método iterativo, pois a rigidez **K** é uma função dos deslocamentos **U**.

Para resolver a equação (2.5) e encontrar os valores dos deslocamentos da estrutura **U**, na iteração n+1, será utilizada a matriz de rigidez global da viga **K** calculada com os deslocamentos **U** da iteração n. O método iterativo é dado da solução do seguinte sistema de equações:

$$\mathbf{K}_n\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{F} \tag{4.45}$$

onde $\mathbf{K}_n$ é a matriz de rigidez da estrutura obtida com os deslocamentos $\mathbf{U}_n$ na iteração n.

É possível perceber que a solução do problema de não linearidade física se dá no cálculo dos valores das rigidezes secantes nos nós ($EI_{\text{sec},1}$ e $EI_{\text{sec},2}$). Esses valores são obtidos de acordo com a curvatura κ nos nós dos elementos, calculados com as equações (4.36) e (4.37), que dependem dos seus deslocamentos **u**, obtidos na iteração anterior.

No modelo desenvolvido neste trabalho, a solução do problema físico não linear se dará por um método iterativo da rigidez secante utilizando a curva momento-curvatura para obtenção da matriz de rigidez secante. A obtenção da curva momento-curvatura se dá através da análise prévia das seções transversais e obtenção de diagramas momento-curvatura. Neste método não é necessário o uso do método da carga incremental, pois os deslocamentos são obtidos de forma direta, aplicando-se o carregamento total e obtendo os deslocamentos finais através do método iterativo secante.

Os diagramas momento-curvatura serão obtidos utilizando o método descrito no capítulo anterior. Com a análise da seção transversal já realizada, os valores de $EI_{\text{sec},1}$ e $EI_{\text{sec},2}$ podem, então, ser obtidos de forma direta através do diagrama momento-curvatura da seção transversal da viga.

4.2.1 Método da rigidez secante utilizando a curva momento-curvatura

No método da rigidez secante a matriz de rigidez da estrutura é atualizada a cada iteração a partir da atualização da rigidez secante EI_{sec} que é obtida pela reta secante ao ponto considerado na curva momento-curvatura até a convergência do sistema.

Neste método é adotado o momento fletor M em função da curvatura κ. A rigidez secante EI_{sec}, é, então, obtida de acordo com equação (2.15), através da seguinte relação:

$$EI_{\text{sec}} = \frac{M(\kappa)}{\kappa} \tag{4.46}$$

onde M(κ) é uma função não linear, que pode ser descrita por um diagrama momento-curvatura que relaciona as curvaturas de uma seção transversal com seus respectivos

momentos fletores. EI_{sec} é a rigidez à flexão secante, pois seu valor é a inclinação da reta secante na curva momento-curvatura, como mostrado na Figura 31.

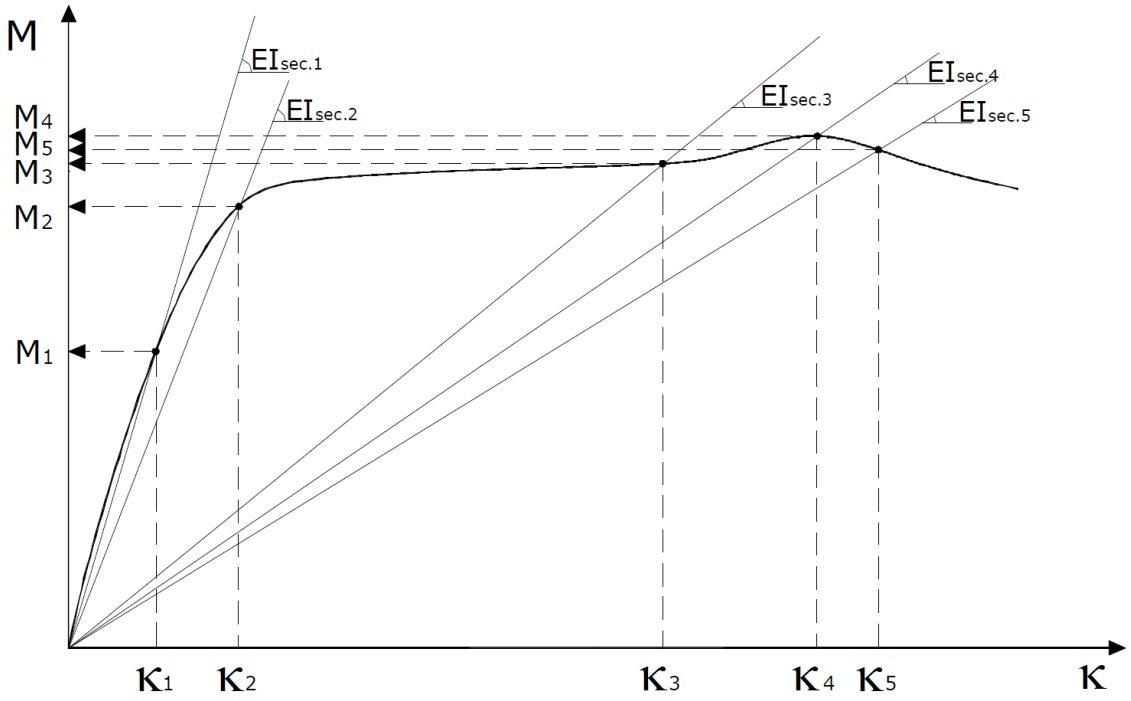


Figura 31 - Rigidez secante no gráfico momento-curvatura.

O problema não linear será, então, resolvido utilizando o método iterativo da rigidez secante, que considera a rigidez (EI) como sendo o quociente do momento pela curvatura ($EI_{sec} = M/\kappa$). O valor da curvatura nos nós κ é atualizado a cada iteração, calculado com as equações (4.36) e (4.37), utilizando os deslocamentos **U** obtidos na iteração anterior através da solução do sistema de equações **KU**=**F**. Calculado o valor da curvatura, o momento correspondente pode ser obtido através do diagrama momento-curvatura. Com isso, a rigidez EI_{sec} pode ser calculada pela Equação (4.46). Por fim, a matriz de rigidez é atualizada com os valores de EI_{sec} obtidos. O esquema de atualização da matriz de rigidez utilizando a rigidez secante pode ser visto na Figura 13.

Como para calcular as curvaturas são necessários os deslocamentos dos nós, é utilizado, para a primeira iteração, os primeiros valores de M e κ do diagrama momento-curvatura, referentes ao primeiro passo de rotação. Após obter os deslocamentos nos nós dos elementos é calculado um novo valor para a curvatura e, com isso, atualizado o valor de EI. Em seguida, é determinada uma nova matriz de rigidez dos elementos para calcular os deslocamentos de uma nova iteração. Os deslocamentos obtidos em uma iteração são comparados com os obtidos na iteração anterior, se o valor for menor que o definido como

critério de parada do método iterativo, significa que o resultado convergiu, finalizando o procedimento. É obtida, assim, a configuração deformada da viga e seus esforços internos.

A grande vantagem deste método é que não há a necessidade de se realizar o carregamento incremental e realizar todo o processo iterativo a cada passo de carga para se encontrar a configuração de equilíbrio da viga. O carregamento é aplicado em um único passo, onde são realizadas as iterações e encontrada a configuração de equilíbrio final da estrutura. Isso ocorre porque a análise não linear para a variação da rigidez das seções transversais, de acordo com suas leis constitutivas de relação tensão-deformação, já foi realizada anteriormente. Essa análise foi feita utilizando o método desenvolvido no capítulo anterior, que gera um diagrama momento-curvatura de onde são retirados os dados necessários para calcular a rigidez compatível para uma configuração deformada qualquer na estrutura.

5 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

O modelo de elementos finitos descrito no capítulo anterior foi implementado utilizando a linguagem de programação do software MATLAB que é um sistema interativo para programação amplamente utilizado nos meios acadêmicos e profissionais por ser voltado principalmente para a análise numérica. O MATLAB é bastante eficaz no cálculo com uso de matrizes, já que estas são os elementos básicos da linguagem computacional, além de realizar diversas operações com uma linguagem de programação matemática intuitiva.

As rotinas são gerais e abrangem a análise de vigas com qualquer tipo de material, sendo necessário apenas adaptar no código as suas leis constitutivas, que devem ser inseridas nas rotinas de análise da seção transversal para obter os diagramas momento-curvatura.

5.1 ALGORITMO GERAL

A seguir são enumerados os procedimentos básicos realizados pela rotina computacional implementada.

1. São primeiramente inseridos os dados de entrada, com informações da geometria da viga, propriedades dos materiais, dos carregamentos e condições de apoio.
2. Depois os dados são lidos pelo programa para primeiramente calcular o diagrama momento-curvatura para a seção transversal utilizando a rotina ANASEC. O diagrama será armazenado e utilizado na próxima rotina, que irá fazer a análise estrutural da viga.
3. A análise não linear da viga será realizada na rotina VIGANL. Nela são lidos os dados de entrada e o diagrama momento-curvatura obtido anteriormente.
4. São calculadas as matrizes de rigidez dos elementos utilizando os dados do diagrama momento-curvatura para calcular EI_{sec}, onde a curvatura nos nós dos elementos é calculada com os deslocamentos **u** obtidos na última iteração. Para a primeira iteração é utilizado o primeiro passo de rotação do diagrama a fim de obter o EI_{sec} inicial.
5. A seguir é montada a matriz de rigidez global **K**, a partir da soma das matrizes de rigidez de todos os elementos **k**.
6. É montado o sistema de equações não lineares da estrutura (**KU**=**F**), e então aplicada as restrições de apoio da viga.
7. Para solução do sistema de equações não lineares, é aplicado o método iterativo secante, descrito no item 4.2.1 onde a cada iteração são atualizados os valores da rigidez.
8. É verificado a convergência dos deslocamentos, da seguinte forma:

$$\left\|\mathbf{U}_n - \mathbf{U}_{n-1}\right\| \leq \gamma \tag{5.1}$$

onde $\mathbf{U}_n$ são os deslocamentos na iteração n e γ o valor da tolerância. Portanto, o critério de parada das iterações é verificado quando a diferença entre o deslocamento atual e o obtido na iteração anterior for menor que a tolerância γ. São obtidos, assim, os resultados definitivos para os deslocamentos na estrutura.

Caso a tolerância não seja atingida, repete-se os itens 4, 5, 6, 7 e 8, atualizando a matriz de rigidez, até o número de iterações máximas definidas pelo usuário. Caso seja atingido o número máximo de iterações definidos, significa que não houve convergência dos resultados. Logo, pode-se admitir que a estrutura atingiu o colapso para aquele carregamento, pois não é possível atender às condições de equilíbrio.

A seguir é mostrado na Figura 32 um fluxograma simplificado do processo de análise não linear de uma viga de concreto armado implementado na rotina computacional.

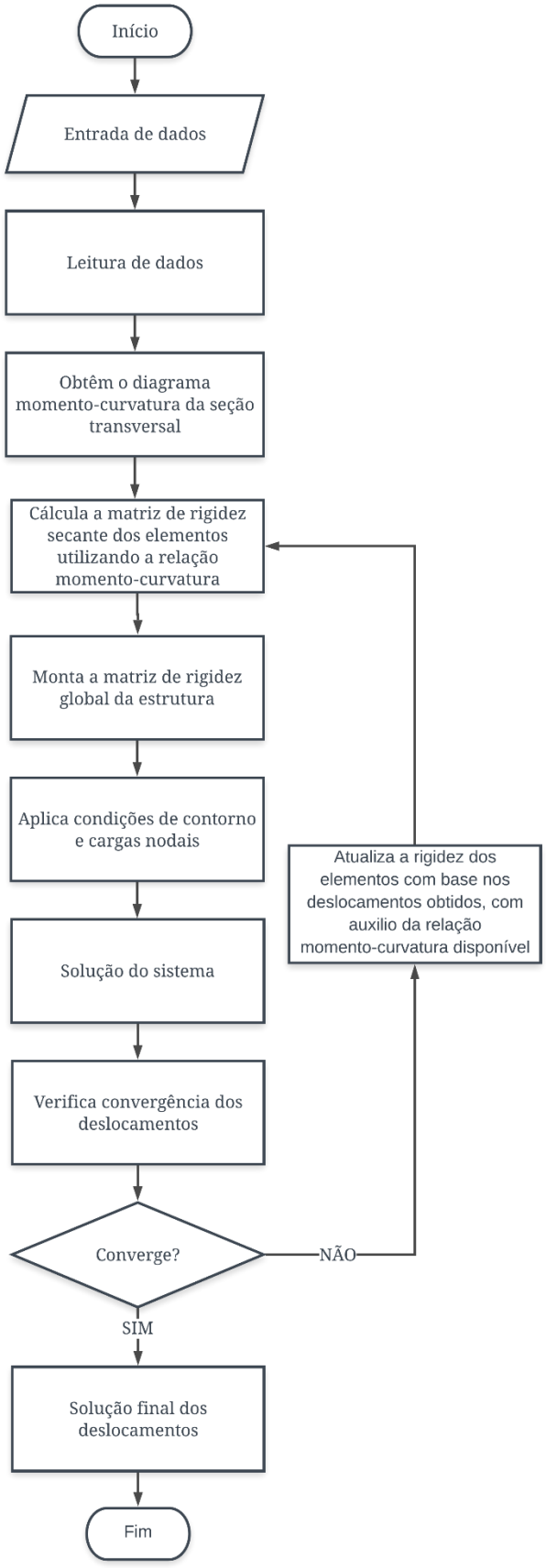


Figura 32 - Fluxograma Simplificado do algoritmo geral.

5.2 ROTINA PARA CÁLCULO DO DIAGRAMA MOMENTO-CURVATURA

A primeira etapa do programa desenvolvido é analisar as seções transversais para obter os diagramas momento-curvatura de acordo com o método desenvolvido no capítulo 3, para isso foi implementada a rotina ANASEC, que possui sub-rotinas ou funções. Um esquema das sub-rotinas pode ser visto na Figura 33.

Os dados de entrada são definidos na função *data*. São inseridos os dados relativos à geometria da seção transversal dos elementos, as resistências do concreto e do aço, a posição das armaduras. Os limites do domínio de integração retangular também são definidos inicialmente. É definido o número de linhas da malha em cada direção. É definido também o critério de parada do método da bisseção para achar a posição da linha neutra. Também é definido a rotação total aplicada na seção e o número de incrementos de rotação. A função indicadora da seção transversal é definida na função *geometry*, que pode ser adaptada a depender do tipo de seção transversal.

Os dados do arquivo de entrada *data* são lidos pela função *diagram* que vai gerar os diagramas de momento curvatura.

A sub-rotina *momrot* calcula o momento resultante para uma dada rotação, para isso calcula a posição da linha neutra utilizando o método da bisseção no intervalo (y_i, y_u). O número de iterações a serem realizadas é avaliado considerando o tamanho do intervalo original h_0 e o critério de parada *tol*, uma vez que cada iteração do método reduz pela metade o intervalo de busca (Atkinson, 1989; Burden e Faires, 2011). As funções *axial* e *moment*, verificam respectivamente as forças axiais e momentos resultantes na seção. Depois que a posição da linha neutra é encontrada, o momento resultante é calculado.

As leis constitutivas para o concreto e o aço são modeladas nas rotinas *sigmac* e *sigmas*, respectivamente.

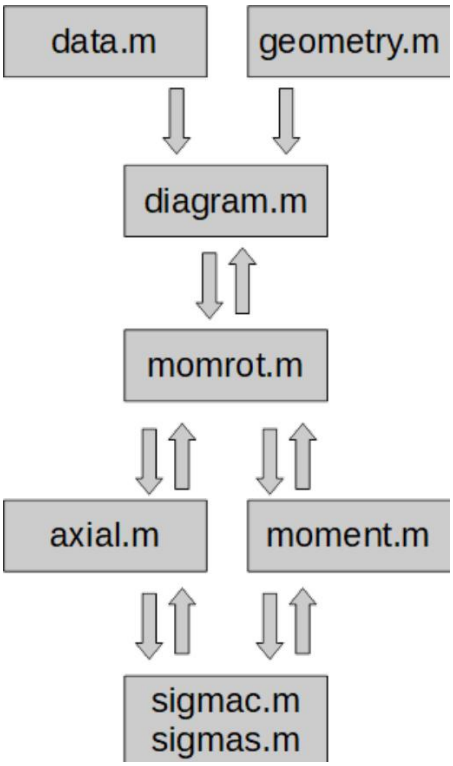


Figura 33 - Funções da rotina ANASEC.

5.3 ROTINA PARA ANÁLISE NÃO LINEAR DE UMA VIGA DE CONCRETO ARMADO COM O MÉTODO SECANTE

Para realizar a análise não linear de uma viga de concreto armado, utilizando o método da rigidez secante com os diagramas momento-curvatura, é utilizada a rotina VIGANL. Primeiro são lidos os dados de entrada. Depois são definidos o vetor dos deslocamentos e a matriz das rotações, sendo atribuídos a eles, valores iniciais iguais a zero para realizar a primeira iteração do método secante.

A função *elemento* é utilizada para calcular as matrizes de rigidez secante dos elementos, utilizando a sub-rotina *momcurv* para obter os valores da rigidez secante $EI_{sec,1}$ e $EI_{sec,2}$ nos nós dos elementos. A sub-rotina *momcurv* recebe os valores da curvatura dos nós do elemento relativos aos deslocamentos obtidos na última iteração e, com esses valores, faz uma interpolação com o diagrama momento-curvatura para obter o valor correspondente de momento fletor. No caso da primeira iteração cujo valor das curvaturas têm valor nulo, é utilizado os primeiros valores do diagrama, correspondentes ao primeiro passo de rotação e respectivo momento fletor. Obtido o valor do momento fletor M, a rigidez correspondente do nó 1 e 2 do elemento é obtida pela relação $EI_{sec}=M/\kappa$.

Depois a sub-rotina *matriz* monta a matriz global da estrutura, através da soma das matrizes de rigidez secante dos elementos obtidas. De acordo com as conectividades dos elementos elas são somadas nas colunas e linhas da matriz global referente a numeração global dos graus de liberdade. Em seguida são aplicadas as restrições dos apoios, para obter a matriz de rigidez global restrita da estrutura.

Com o vetor de forças aplicadas na estrutura **F** e a matriz de rigidez global restrita **K**, são finalmente obtidos os deslocamentos da estrutura **U**.

O próximo passo é realizar a verificação da convergência do método onde é realizada a verificação pela equação (5.1). Se a diferença nos deslocamentos for maior que a tolerância é realizada outra iteração onde primeiramente são obtidas as curvaturas, utilizando a sub-rotina *curv*, nos nós referentes aos deslocamentos obtidos nesta iteração. Esses valores serão utilizados para calcular a rigidez na próxima iteração, atualizando a matriz de rigidez dos elementos e recalculando os deslocamentos.

Quando a diferença dos deslocamentos de duas iterações consecutivas for menor que o valor definido para a tolerância γ, a iteração termina e os valores calculados de $\mathbf{U}_n$ serão os valores finais para a configuração deformada da viga.

O fluxograma simplificado da rotina VIGANL é mostrado na Figura 34.

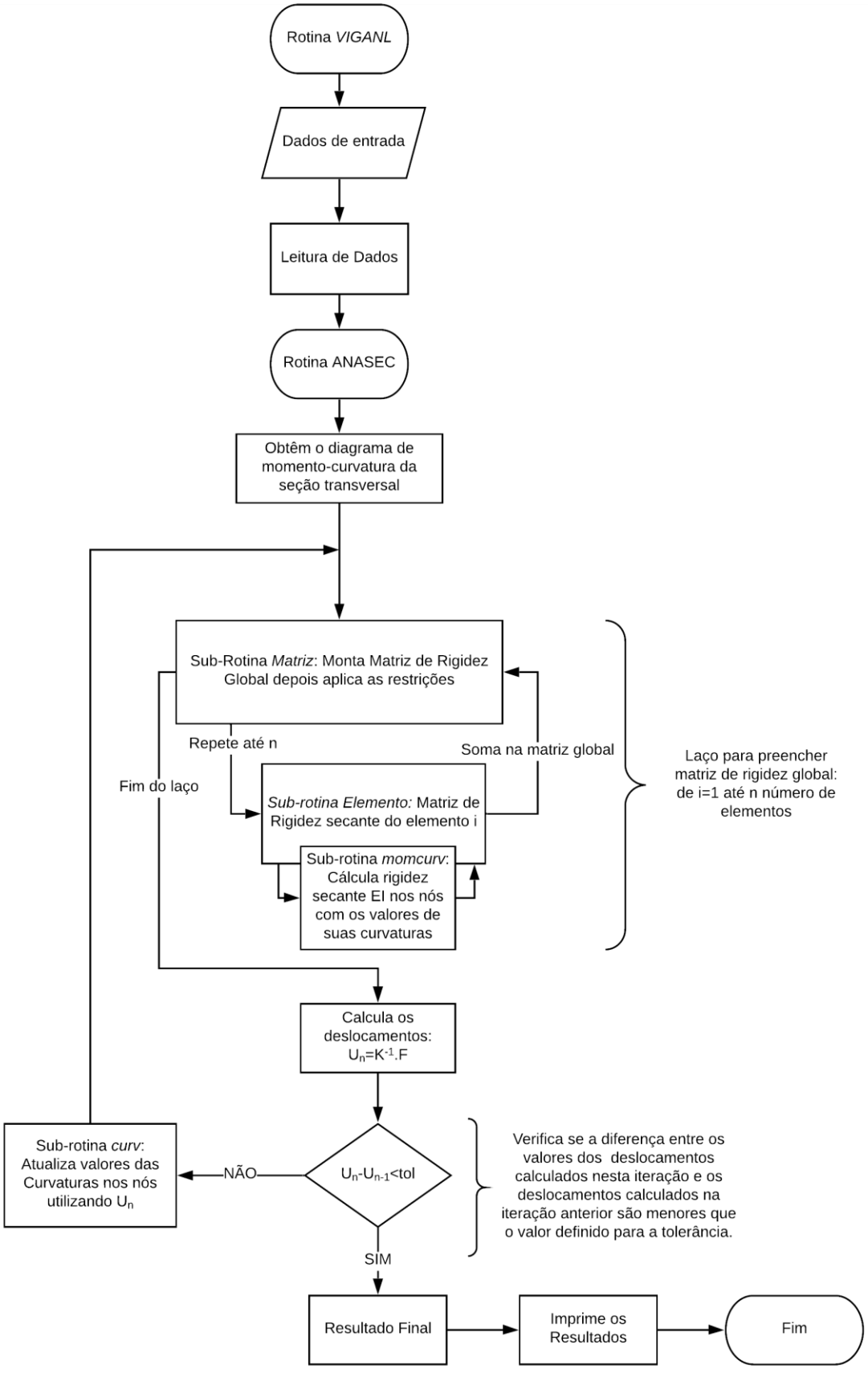


Figura 34 - Fluxograma simplificado da rotina VIGANL.

6 COMPARAÇÃO COM RESULTADOS NÚMERICOS

Para validar o modelo proposto neste trabalho, foram analisados exemplos de vigas simplesmente apoiadas com resultados disponíveis na literatura, a fim de verificar a eficiência e precisão do método em comparação a outros métodos de análise não linear de vigas de concreto armado. Para plotagem dos gráficos foram obtidos os deslocamentos no centro do vão para vários níveis de carregamento até a não convergência dos deslocamentos, que representa o colapso da viga.

O método secante obtém o deslocamento para um determinado carregamento de forma direta, sem a necessidade de resolver as equações de equilíbrio para cada passo de carga como acontece nos métodos mais tradicionais de análise não linear. No entanto, vários carregamentos crescentes foram aplicados a fim de obter o gráfico carga-deslocamento da viga.

Foram escolhidos os exemplos de uma viga teórica e uma viga ensaiada experimentalmente que já foram analisadas em outros trabalhos por modelos analíticos, para comparação dos resultados.

6.1 VIGA SIMPLESMENTE APOIADA V1

Foi analisada a viga teórica V1, que foi estudada em Stramandinoli (2007), com dois casos diferentes de carregamento na viga, o primeiro com flexão a três pontos e o segundo com flexão à quatro pontos. As características geométricas da viga e seção transversal são mostradas na Figura 35 e os dados dos materiais podem ser vistos na Tabela 1.

Tabela 1 - Propriedades dos materiais da viga V1.

f_{cm} (MPa)	f_{tm} (MPa)	ε_o (m)	α	f_y (MPa)	E_s (MPa)	ε_u(m)	S_h
20	2	0.002	0.088	500	200000	0.03	0.05

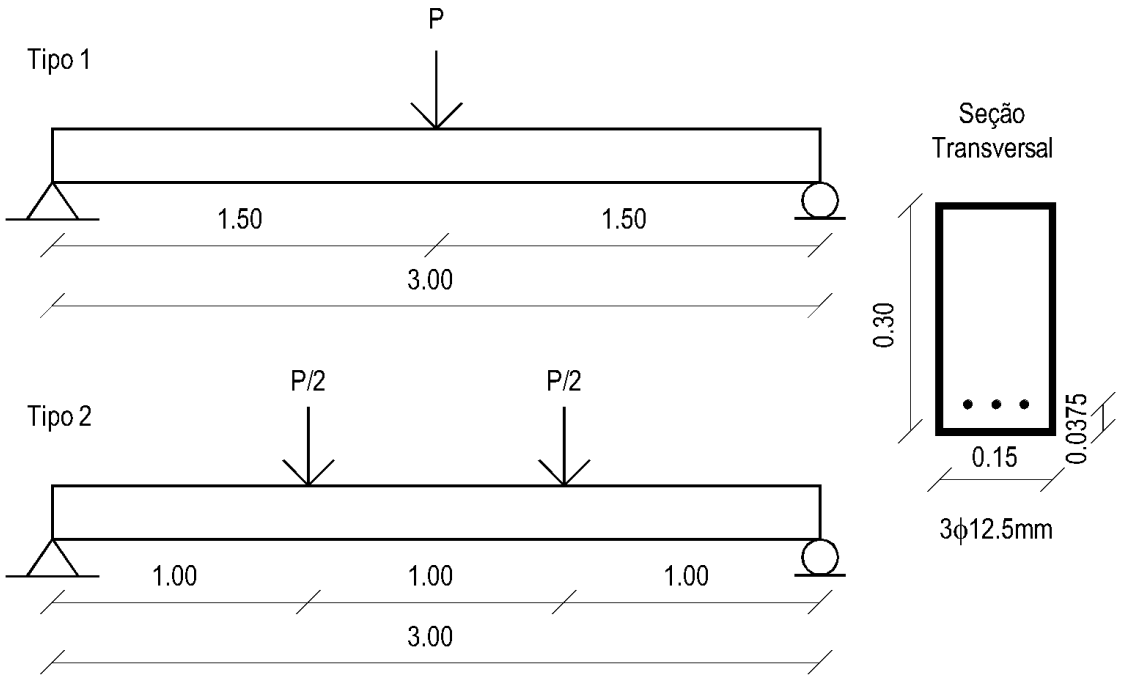


Figura 35 - Dimensões e seção transversal da viga V1 (medidas em m).

6.1.1 Modelo Constitutivo

As leis constitutivas do aço e concreto têm papel fundamental na análise não linear de uma viga de concreto armado, influenciando bastante nos resultados. O método de análise não linear para vigas de concreto armado desenvolvido no presente trabalho é geral e pode ser utilizado com quaisquer leis constitutivas para o aço e o concreto. No entanto, para que o modelo constitutivo não seja uma variável na análise, foram adotadas as mesmas leis constitutivas utilizadas em Stramandinoli (2007), sendo avaliadas somente as variações nos resultados devido ao método empregado para realizar a análise não linear.

6.1.1.1 Concreto

O modelo constitutivo adotado para o concreto na compressão foi o de Hognestad (1951), descrito no item 2.3.1.1.2. Na tração foi adotado o modelo trilinear considerando o efeito "*tension-stiffening*" desenvolvido em Stramandinoli e La Rovere (2008), descrito no item 2.3.1.2.1. O coeficiente α é calculado de acordo com a equação (2.4). O valor obtido de α foi 0.088 para este exemplo. Para aplicação do efeito de "*tension-stiffening*" é considerado uma altura efetiva da zona tracionada aproximada h_{ef}, calculada pela seguinte expressão:

$$h_{ef} \cong \frac{h}{4} \tag{6.1}$$

Onde *h* é altura total da viga.

6.1.1.2 Aço

Para o aço foi adotado o modelo bilinear com encruamento ("*strain hardening*"), adotando uma curva parabólica para interpolação entre os trechos retilíneos do regime elástico e plástico, no trecho entre 0.8 e 1.2ε_y, conforme proposto por La Rovere (1990). A curva tensão-deformação pode ser vista na Figura 36.

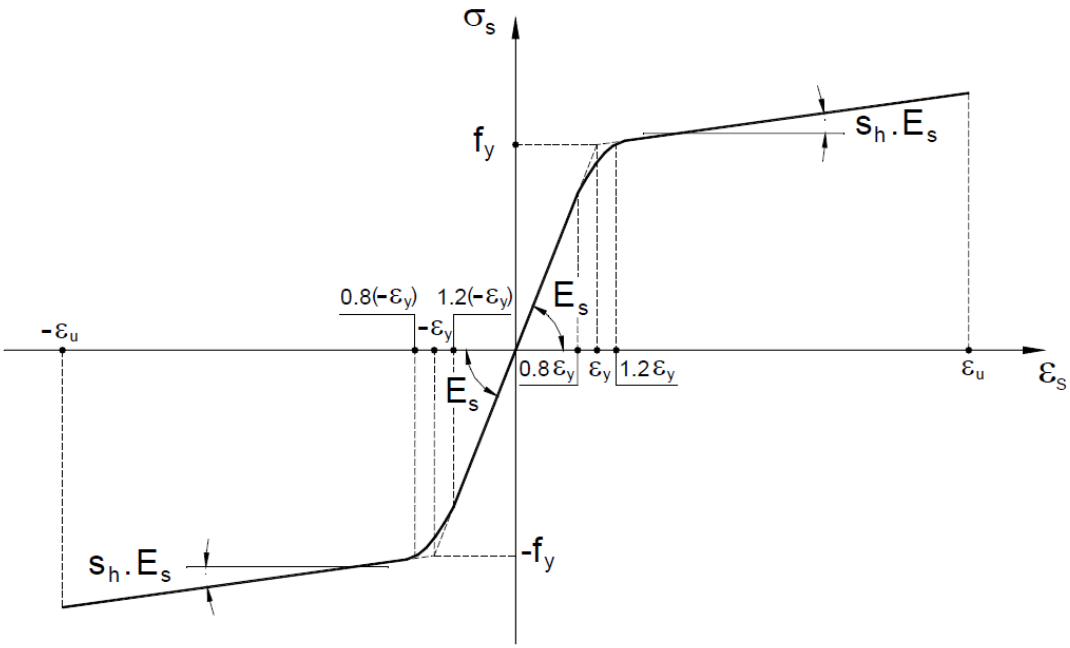


Figura 36 - Curva tensão-deformação para o aço. (Stramandinoli, 2007)

A expressões que descrevem o modelo constitutivo do aço são:

Para $\varepsilon_s < 0.8\varepsilon_y$:

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s \tag{6.2}$$

Para $0.8\varepsilon_y \leq \varepsilon_s \leq 1.2\varepsilon_y$:

$$\sigma_s = E_s \left[\left(S_h - 1\right)\varepsilon_s \frac{\varepsilon_s}{0.8\varepsilon_y} + \left(3 - 2S_h\right)\varepsilon_s - 0.8\varepsilon_y \left(1 - S_h\right) \right] \tag{6.3}$$

Para $\varepsilon_s > 1.2\varepsilon_y$:

$$\sigma_s = \mathrm{f_y} + S_h E_s \left(\varepsilon_s - \varepsilon_y\right) \tag{6.4}$$

onde σ_s é a tensão no aço, E_s o módulo de elasticidade do aço, S_h o fator de encruamento do aço "*strain hardening*", f_y a tensão de início de escoamento do aço, ε_s a deformação no aço, ε_y a deformação no início do escoamento do aço e ε_u a deformação última do aço. O encruamento do aço é considerado através do fator de "*strain-hardening*"(S_h), que foi de 0.05 para este exemplo. Os gráficos tensão-deformação do concreto e do aço obtidos para este exemplo são mostrados nas Figuras 37 e 38.

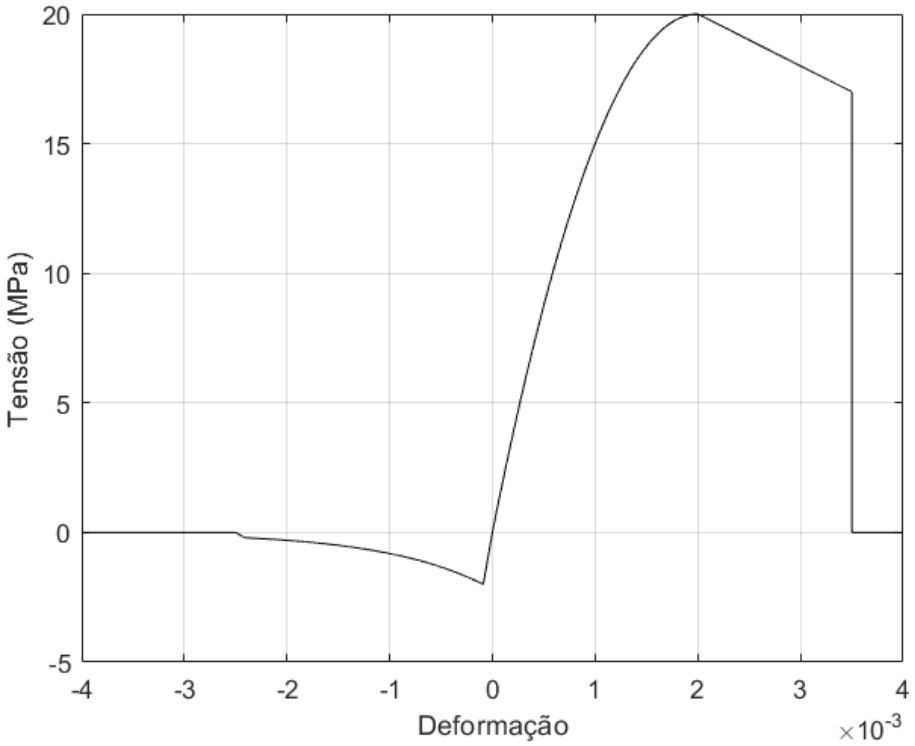


Figura 37 - Gráfico tensão-deformação do Concreto da viga V1.

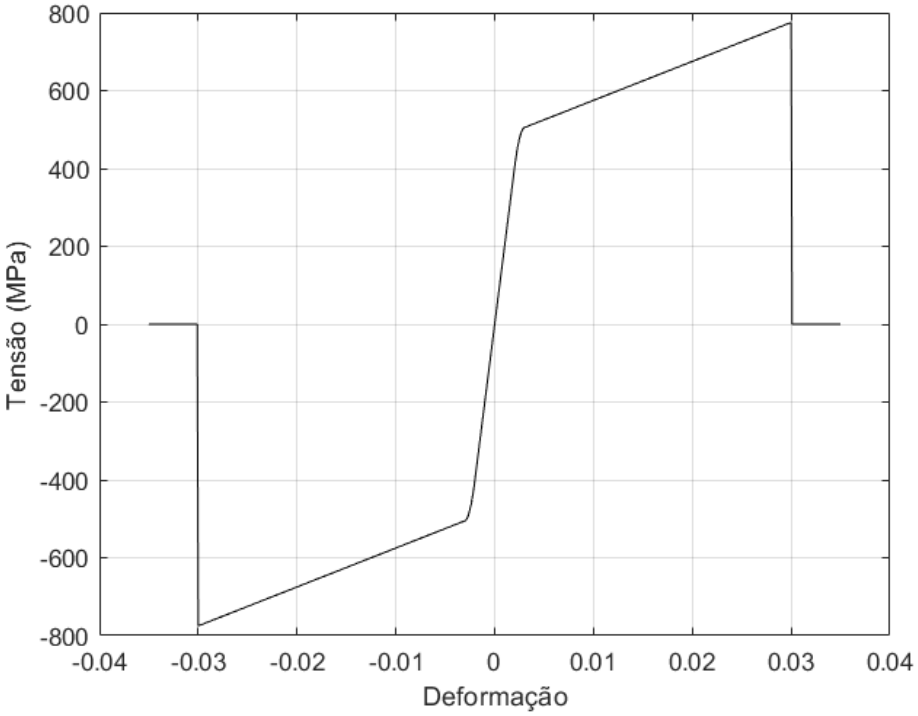


Figura 38 - Gráfico tensão-deformação do aço da viga V1.

6.1.2 Parâmetros

Em ambos os casos, para obtenção do diagrama momento-curvatura, foram adotados uma malha de 50 por 50 pontos de integração na seção transversal e 500 incrementos de rotação. A amostra de pontos da seção transversal pode ser vista na Figura 39.

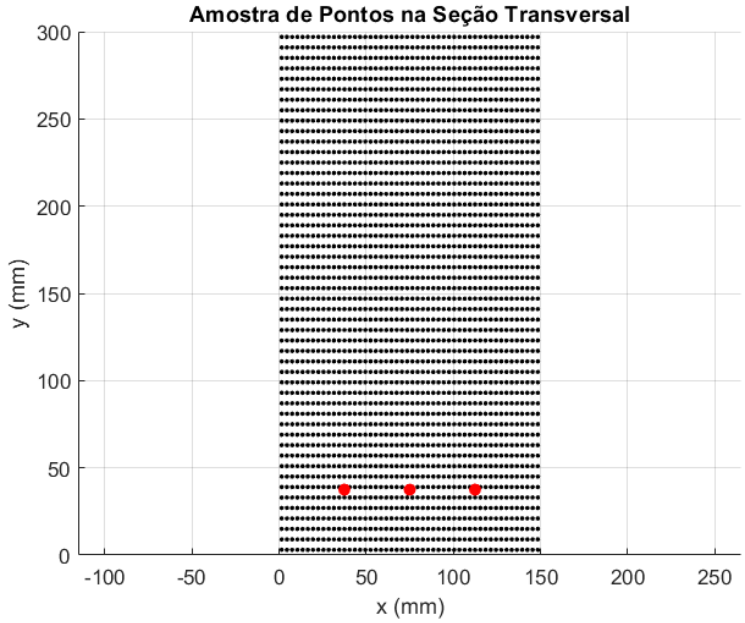
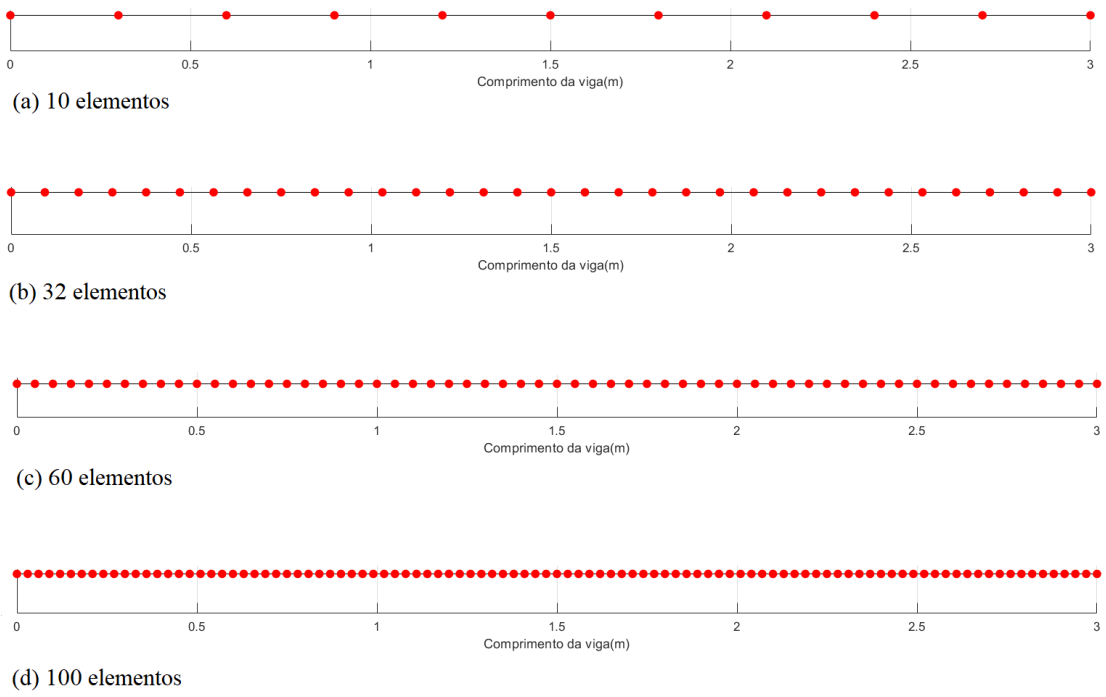


Figura 39 - Amostra de pontos da seção transversal da viga v1.

Para o caso 1 foram adotados 4 tipos de malhas de elementos finitos para avaliar a sua influência na convergência dos resultados, sendo as malhas com 10, 32, 60 e 100 elementos. As malhas de elementos finitos possuem elementos com as mesmas dimensões, ou seja, com nós igualmente espaçados. Logo quanto mais elementos na malha, menor seu comprimento. As malhas de elementos finitos para o caso 1 podem ser vistas na Figura 40.



(a) 10 elementos

(b) 32 elementos

(c) 60 elementos

(d) 100 elementos

Figura 40 - Malhas de elementos finitos para o tipo 1 de carregamento.

Para o caso 2 foram adotados 3 tipos de malhas com 6, 12 e 36 elementos respectivamente. As malhas de elementos finitos adotadas para o caso 2 podem ser vistas na Figura 41.

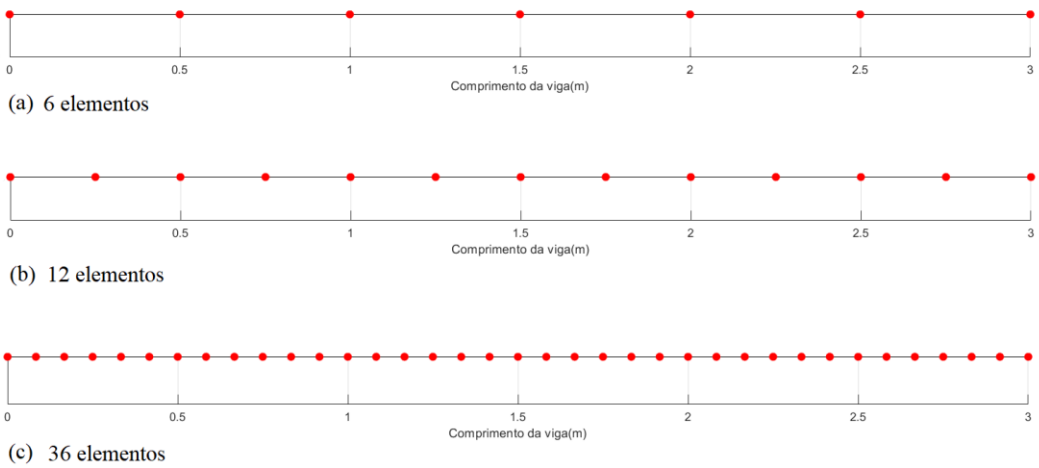


Figura 41 - Malhas de elementos finitos para o tipo 2 de carregamento.

6.1.3 Resultados

A relação momento-curvatura para a seção transversal é mostrada na Figura 42. Os resultados obtidos para o deslocamento vertical no centro do vão de acordo com o carregamento total são mostrados na Figura 43, para o caso 1 de carregamento, e na Figura 44, para o caso 2. Para comparação, é mostrado também os resultados obtidos por Stramandinoli (2007) que utiliza em seu modelo o elemento de viga de Euler-Bernoulli, sendo uma malha de 32 elementos para o caso 1 de carregamento e 24 elementos para o caso 2 de carregamento.

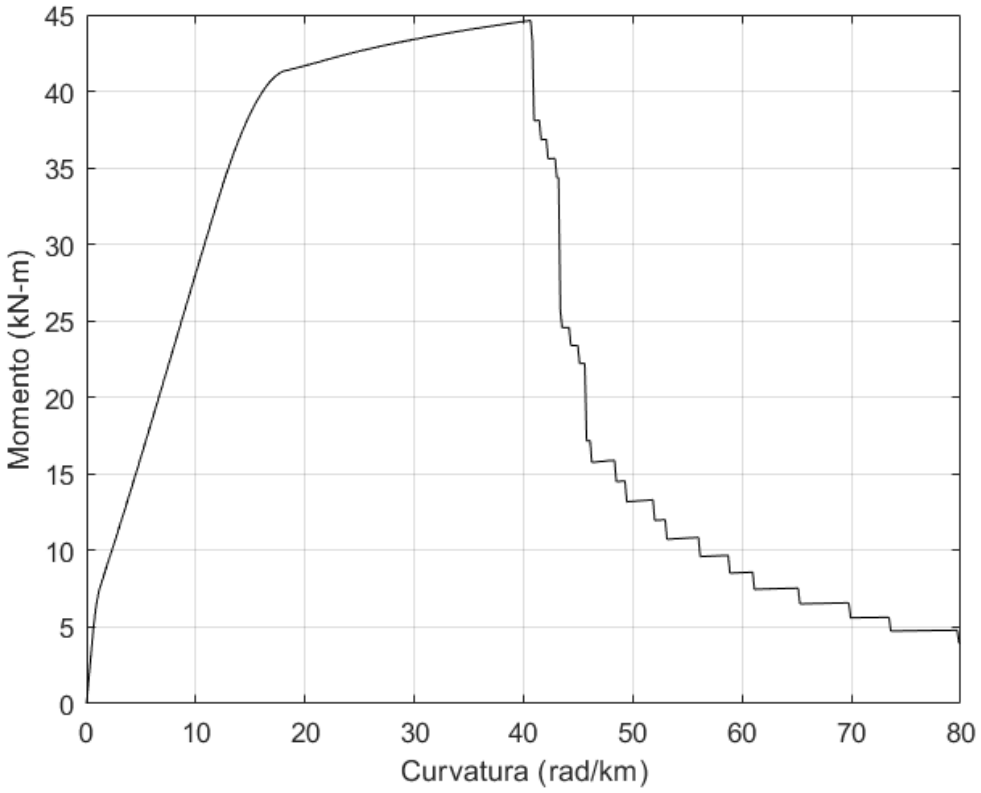


Figura 42 - Relação momento-curvatura da viga V1.

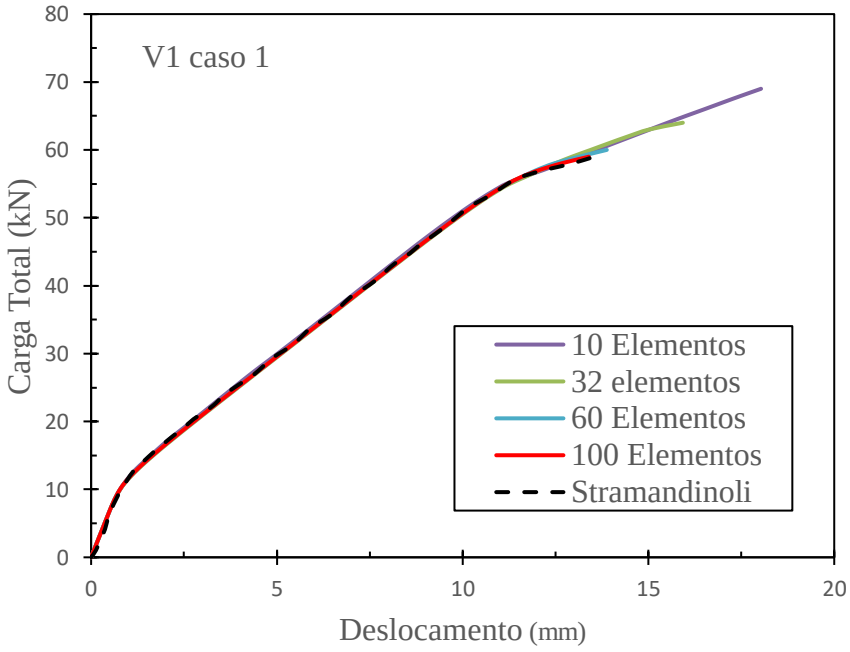


Figura 43 - Gráfico carga-deslocamento para o caso 1 de carregamento da viga V1.

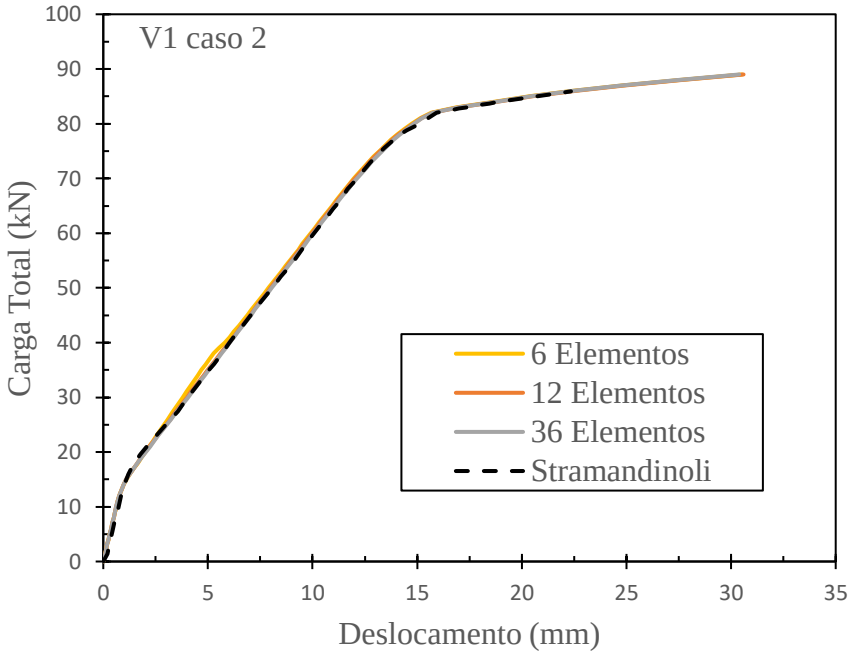


Figura 44 - Gráfico carga-deslocamento para o caso 2 de carregamento da viga V1.

No caso 1 de carregamento, é possível observar que as curvas de deslocamentos estão sobrepostas até chegar próximo a carga de ruína, onde os resultados divergem entre si. Quanto maior a quantidade de elementos na malha, menor foi a carga de rompimento e mais próximo dos resultados obtidos por Stramandinoli. Seus resultados coincidiram por completo com a malha de 100 elementos, inclusive com a mesma carga de ruptura de aproximadamente 59 kN. Pode-se perceber, portanto, que no caso de uma única carga concentrada é necessária uma grande quantidade de elementos para capturar a parte final da curva até seu rompimento. Isso ocorre devido a formação de rótulas plásticas, que são capturadas de forma mais precisa quando há uma grande quantidade de elementos nas zonas de esforços máximos da viga.

Para o caso de carregamento 2, onde ocorre flexão pura no centro do vão, há uma convergência mais rápida dos resultados. A partir da malha de 12 elementos todas a curvas possuem valores muito próximos. Os resultados também coincidiram com os obtidos por Stramandinoli, porém a carga de rompimento foi maior para as curvas obtidas com o método desenvolvido neste trabalho, apresentando um resultado de 89 kN para todas as malhas, enquanto Stramandinoli obteve 86 kN.

Estes resultados também indicam que é interessante refinar a malha de elementos finitos apenas em regiões onde ocorram rótulas plásticas, ou seja, em regiões onde a variação de rigidez seja elevada. Este assunto poderá ser tema de pesquisas futuras.

6.2 VIGA J-4 ENSAIADA POR BURN E SIESS

A viga J-4 foi ensaiada por Burn e Siess (1962) com flexão a três pontos. A mesma viga também foi analisada por modelos analíticos para análise não linear de estruturas de diversos autores na literatura como: Stramandinoli (2007), Kwak e Kim (2002), Choi e Kwak (1990). A geometria da viga, sua seção transversal e carregamento são mostradas na Figura 45. Os dados dos materiais são mostrados na Tabela 2.

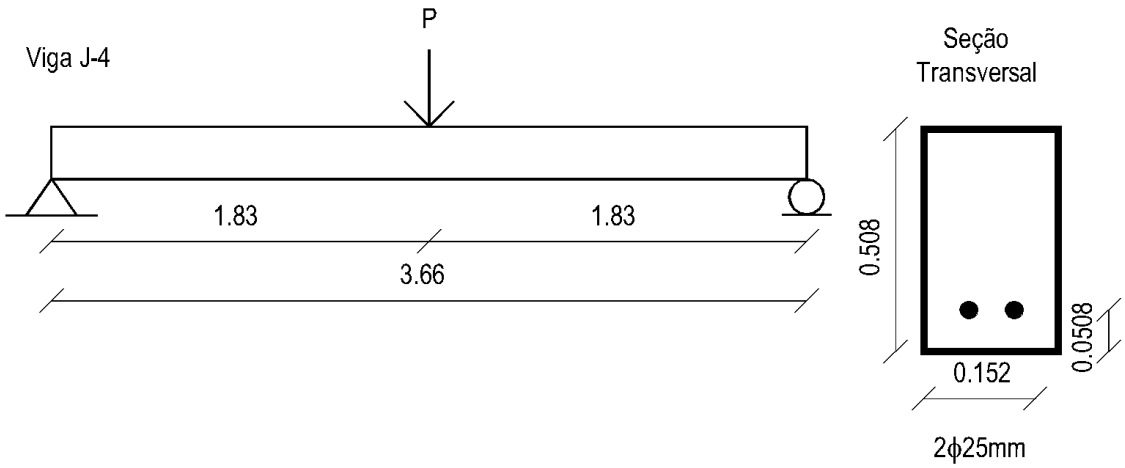


Figura 45 - Dimensões e seção transversal da viga J-4 (medidas em m).

Tabela 2 - Propriedades dos materiais da viga J-4.

f_{cm} (MPa)	f_{tm} (MPa)	ε_o	α	f_y (MPa)	E_s (MPa)	ε_u	S_h
33.23	2.39	0.002	0.08	309.60	203000	0.05	0.01

6.2.1 Leis Constitutivas

As leis constitutivas adotadas para as armaduras e o concreto foram as mesmas do exemplo anterior. Os gráficos tensão-deformação obtidos para o aço e concreto na viga j-4 são mostrados nas Figuras 46 e 47, respectivamente.

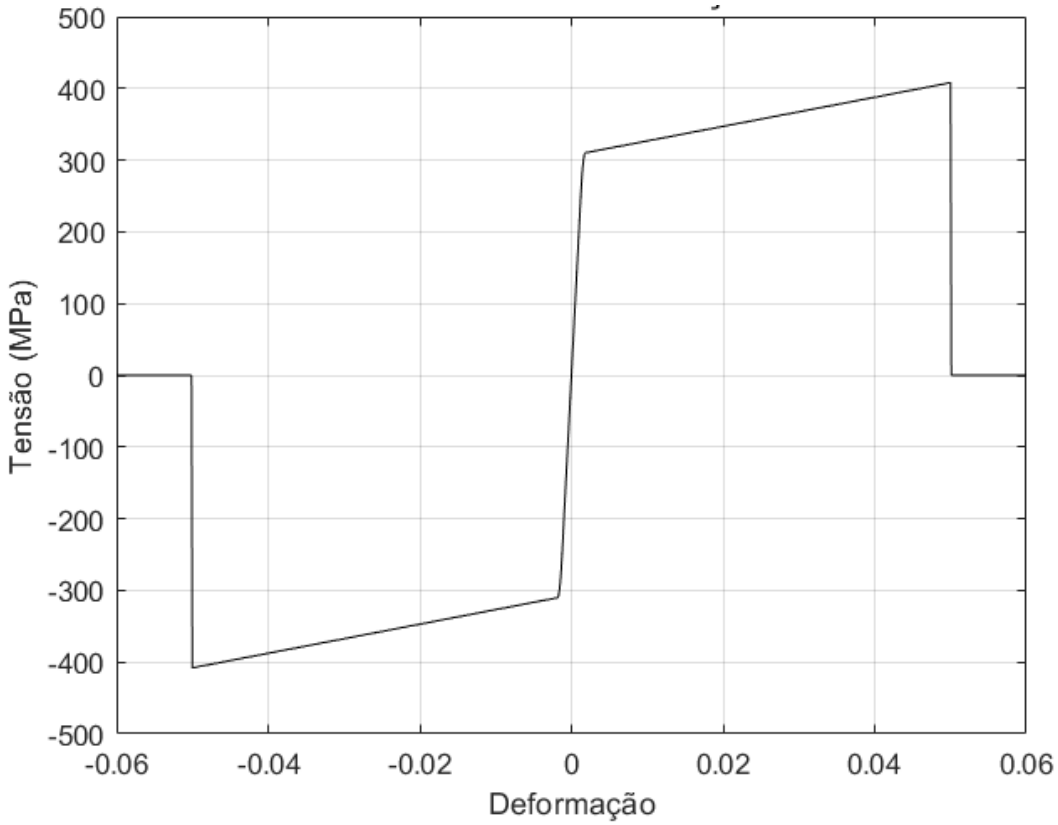


Figura 46 - Gráfico tensão-deformação do aço da viga J-4.

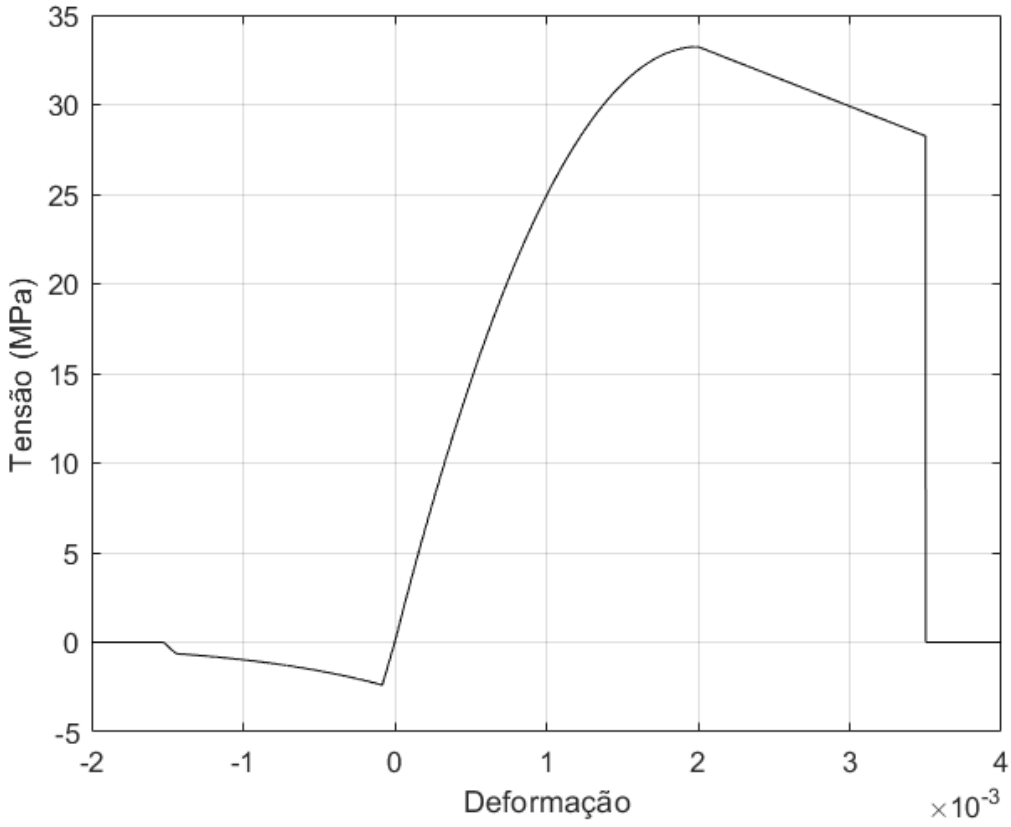


Figura 47 - Gráfico tensão-deformação do concreto da viga J-4.

6.2.2 Parâmetros

Para obtenção do diagrama momento-curvatura, foi adotada uma malha de 100 por 100 pontos de integração na seção transversal e 500 incrementos de rotação. A amostra de pontos na seção transversal pode ser vista na Figura 48.

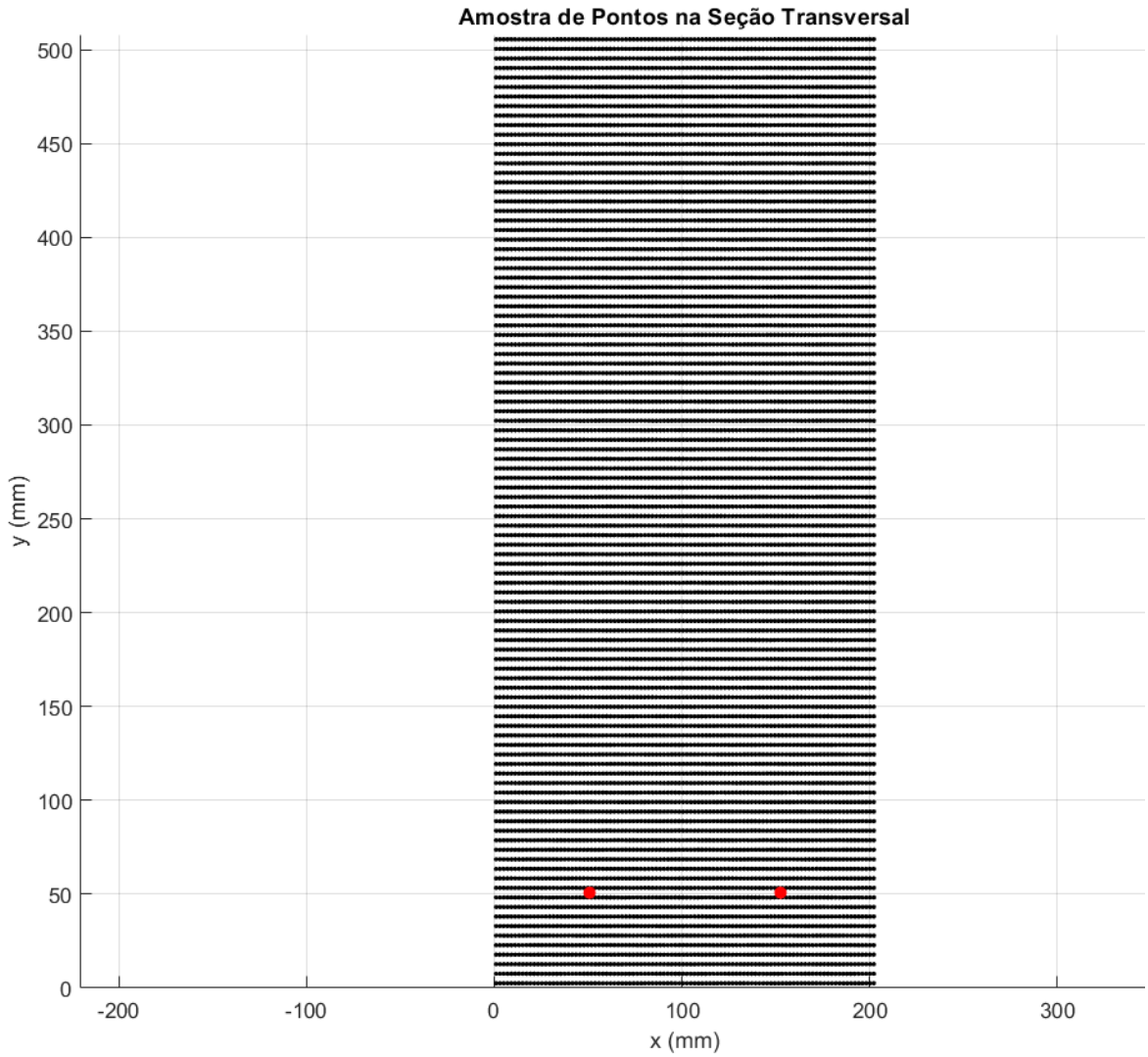
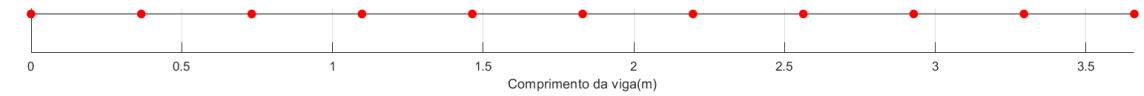
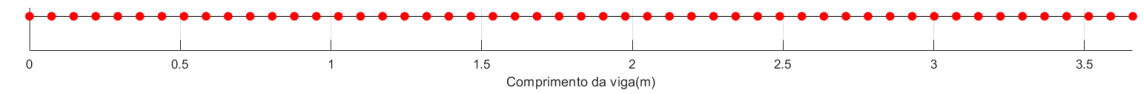


Figura 48 - Amostra de pontos da seção transversal

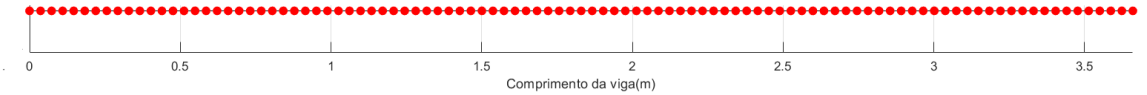
Para o estudo das malhas de elementos finitos foram adotadas as malhas com 10, 50, 100 e 200 elementos finitos com nós igualmente espaçados. As malhas de elementos finitos adotadas podem ser vistas na Figura 49.



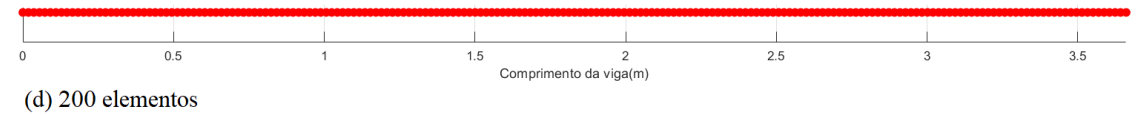
(a) 10 elementos



(b) 50 elementos



(c) 100 elementos



(d) 200 elementos

Figura 49 - Malhas de elementos finitos para a viga j-4.

6.2.3 Resultados

O gráfico com a relação momento-curvatura pode ser visto na Figura 50, com os resultados obtidos neste trabalho e, para comparação, os obtidos por Kwak & Kim, que também utilizam um modelo baseado nas relações momento-curvatura. No entanto, eles utilizam um modelo constitutivo diferente, cujos resultados são mostrados apenas para ilustração da importância do modelo constitutivo a fim de aproximar os resultados de vigas reais.

Na Figura 51 é mostrado o resultado da deformação da viga J-4 sob carregamento para diferentes malhas de elementos finitos. É possível observar que até uma carga de 150 kN os resultados convergem para todas as malhas, contudo após esse carregamento os resultados diferem, sendo que quanto menor a malha de elementos finitos maior a carga de rompimento. No trecho após a carga de 150 kN os resultados só começam a convergir a partir da malha de 100 elementos. Isso ocorre devido a formação de uma rótula plástica no meio do vão, fazendo com que o deslocamento aumente sem ser preciso um aumento significativo de carga. Esse efeito só consegue ser bem representado no modelo com uma malha de elementos finitos mais densa na região do carregamento concentrado.

Foi adotada, portanto, uma malha de elementos finitos com 200 elementos para a viga J-4, como mostrada na Figura 52, para fazer a comparação com os resultados de outros

autores. A alta densidade da malha de elementos finitos se justifica para alcançar uma maior precisão nos resultados do trecho pós escoamento da curva carga-deslocamento.

Na Figura 52 são mostrados os resultados experimentais da viga ensaiada, e, para comparação dos resultados, são mostradas as curvas carga-deslocamento obtidas por Stramandinoli (2007) e dois resultados por Kwak & Kim (2002), sendo um que considera o efeito de escorregamento das armaduras ("*Bond-slip*") e outro que não considera este efeito.

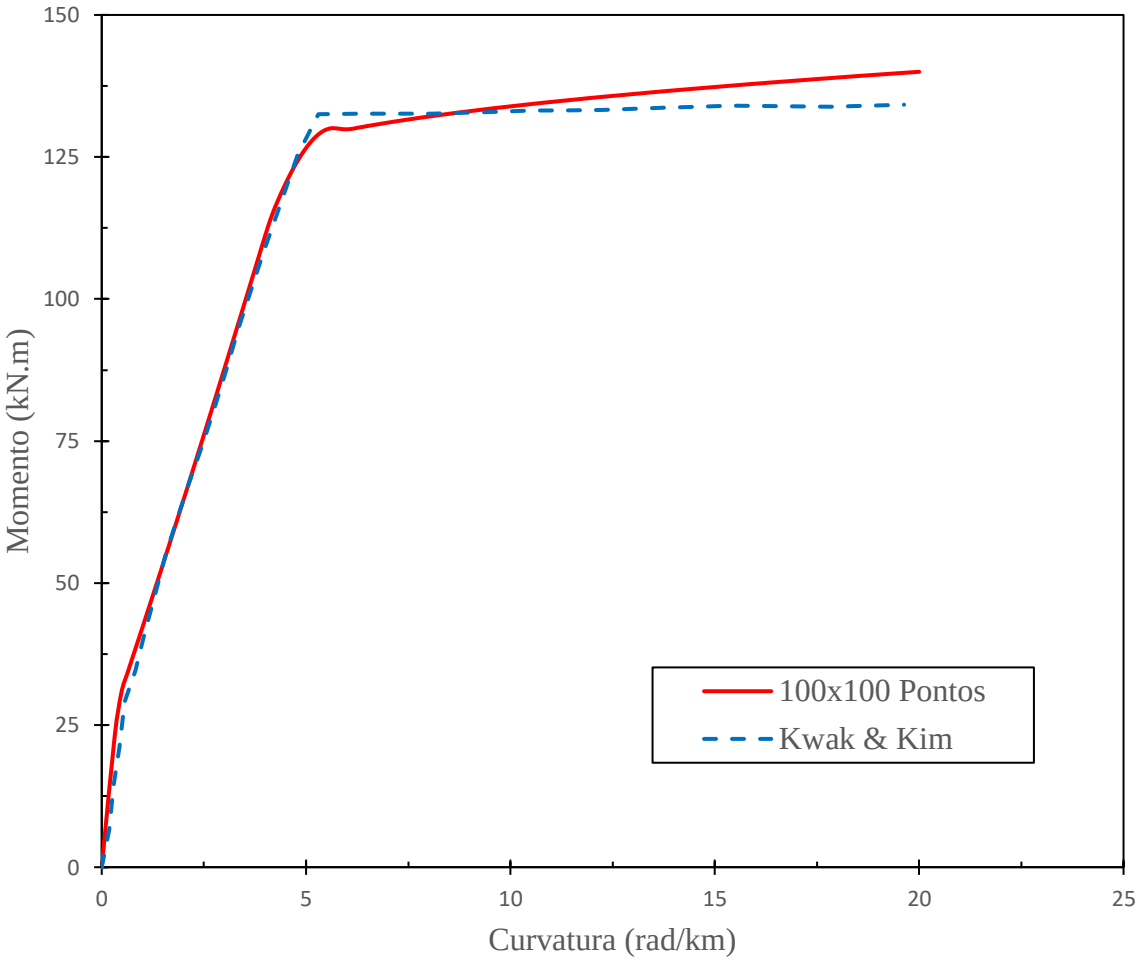


Figura 50 - Relação momento-curvatura da seção transversal da viga J-4.

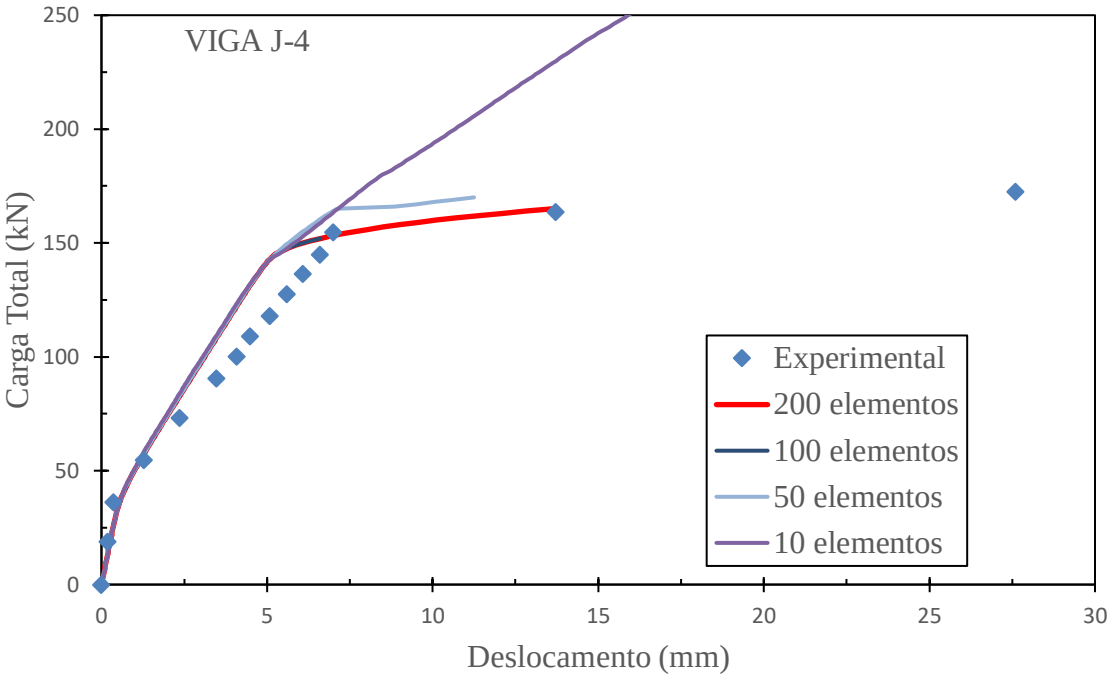


Figura 51 - Gráfico carga-deslocamento vertical da viga J-4 com diferentes malhas.

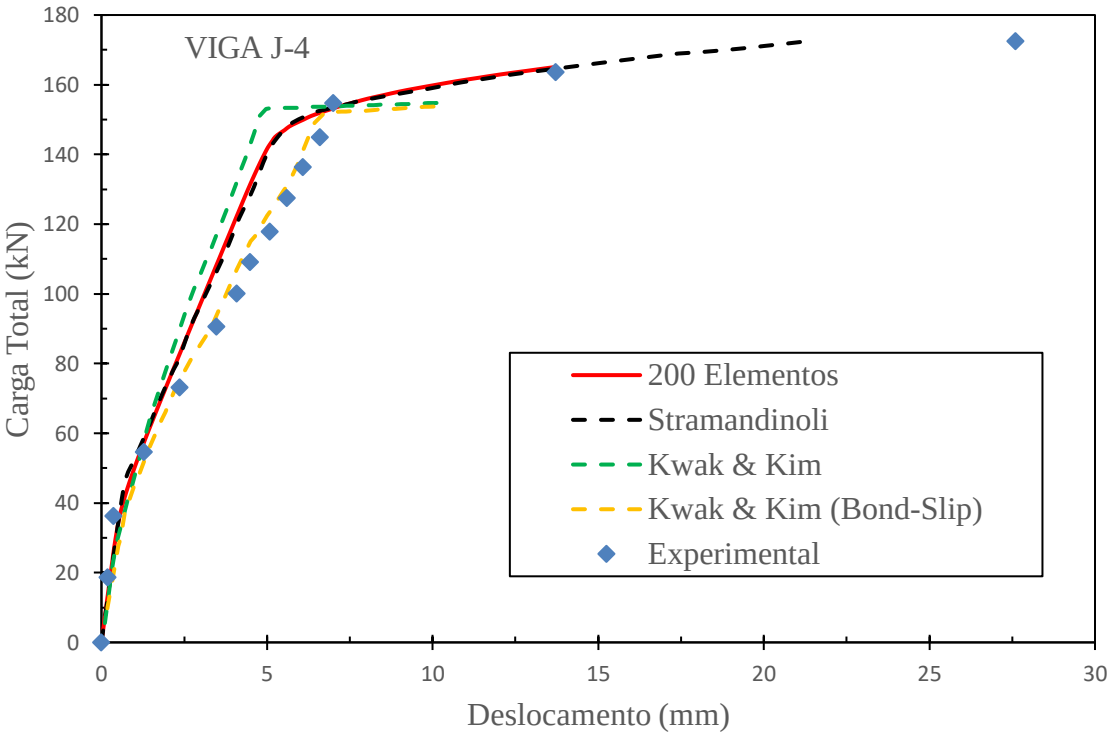


Figura 52 - Gráfico carga-deslocamento vertical para a viga J-4.

Embora tenham sido utilizados modelos constitutivos diferentes dos adotados por Kwak & Kim, as curvas da relação momento-curvatura obtidas para a viga J-4 foram parecidas, apresentando uma pequena diferença no trecho inicial da curva, devido ao efeito do "*tension-stiffening*", e no trecho pós-escoamento, devido ao fator de endurecimento do aço ("*strain hardening*") utilizado nos modelos serem diferentes.

Para a viga J-4 os resultados dos deslocamentos obtidos foram muito semelhantes aos obtidos por Stramandinoli, contudo apresentou uma carga de ruptura um pouco menor. Os resultados também ficaram próximos aos obtidos experimentalmente, mas apresentou uma maior rigidez na zona pós-fissuração do concreto, a partir dos 60 kN de carga total, voltando a se aproximar da curva experimental no trecho pós-escoamento. A maior rigidez no trecho pós-fissuração do concreto se dá devido ao modelo não incorporar o efeito de escorregamento das armaduras ("*Bond-slip*"). Este efeito foi considerado no modelo de Kwak & Kim o qual obteve resultados próximos ao experimental nesse trecho da curva. Já no outro modelo de Kwak & Kim, que não considerou este efeito, também se observa uma maior rigidez em relação aos resultados experimentais no trecho pós-fissuração. As diferenças dos resultados em relação aos obtidos por Kwak & Kim já eram esperados, já que este utilizou um modelo constitutivo diferente do adotado no presente trabalho para este exemplo. Já os resultados muito próximos aos obtidos por Stramandinoli, mostram que apesar de utilizar métodos de análise não linear diferentes, os resultados ficaram próximos, pois foram utilizadas as mesmas leis constitutivas para os materiais. A diferença nas curvas mostra como diferentes modelos constitutivos para os materiais podem afetar os resultados.

Por fim, vale salientar novamente que estes resultados indicam que a malha deve ser refinada nas regiões de formação de rótulas plásticas. Assim, sugere-se como trabalho futuro um refino adaptativo automático das malhas em regiões onde observe-se grandes rotações, com o intuito de permitir a obtenção de resultados precisos sem desperdício de esforço computacional.

7 RESULTADOS E CONCLUSÕES

Este trabalho teve como objetivo desenvolver e implementar rotinas computacionais de um modelo de elementos finitos simples e eficiente para análise não linear de vigas de concreto armado, considerando a não linearidade física dos materiais através do uso das relações momento-curvatura das seções transversais calculadas previamente. O algoritmo para solução das equações de equilíbrio não lineares foi desenvolvido com o método iterativo secante.

O modelo foi implementado em rotinas computacionais que primeiramente calculam os diagramas momento-curvatura de uma seção transversal e depois realiza a análise não linear de esforços e deslocamentos da viga sob carregamento.

Foram, primeiramente, desenvolvidas rotinas computacionais para obtenção das relações momento-curvatura de seções genéricas de concreto armado. Para isso, foi utilizado um desenvolvimento alternativo do tradicional método das lamelas. As rotinas são simples, gerais e flexíveis, permitindo um uso prático e amplo, podendo ser utilizada com diferentes leis constitutivas do aço e concreto. As rotinas foram validadas através de exemplos numéricos.

Em seguida, foi desenvolvido um modelo para análise não linear de vigas de concreto armado baseado nas relações momento-curvatura previamente calculadas. Foi utilizado o MEF, com o elemento de viga de Euler-Bernoulli. Para solução do problema não linear e obtenção dos deslocamentos da viga foi utilizado o método iterativo secante. Neste método a matriz de rigidez secante da estrutura é atualizada a cada iteração baseada na curvatura obtida nos nós dos elementos, até a convergência dos deslocamentos. O modelo desenvolvido foi implementado através de rotinas computacionais para análise não linear de vigas de concreto armado. Em seguida, o modelo foi validado através de comparações com resultados de exemplos numéricos e experimentais.

Através dos estudos e resultados obtidos neste trabalho, pode-se chegar às seguintes conclusões:

- As rotinas desenvolvidas para obtenção dos diagramas momento-curvatura da seção transversal se mostraram precisas, como visto nos exemplos apresentados.

- As rotinas desenvolvidas para análise da seção transversal e obtenção dos diagramas momento-curvatura são gerais e flexíveis, podendo ser adaptadas para diversos modelos constitutivos para o aço e o concreto.
- O modelo desenvolvido no presente trabalho para análise não linear de vigas de concreto armado foi preciso em prever o comportamento não linear de vigas de concreto armado sob carregamento. Isso pôde ser verificado nos exemplos realizados comparando com resultados experimentais de vigas e resultados obtidos por outros modelos da literatura. Porém, o refino uniforme da malha não é eficiente e deve ser substituído, no futuro, pelo refino adaptativo em regiões de curvatura elevada (rótulas plásticas).
- Mesmo utilizado um modelo simplificado, considerando o elemento de viga com hipótese de Euler-Bernoulli, desconsiderando os deslocamentos causados pelo esforço de cisalhamento, foram obtidos bons resultados para vigas com o comportamento predominante de flexão.
- Em comparação com modelos incrementais-iterativos, este modelo se mostrou eficiente pois dispensa a integração da seção transversal a cada incremento de carga, pois utiliza as relações momento-curvatura previamente calculadas e obtém os deslocamentos para um certo carregamento de forma direta, através da rigidez secante.
- Na análise não linear das vigas utilizando as rotinas computacionais desenvolvidas neste trabalho, o tempo de processamento computacional foi muito maior na etapa de obtenção do diagrama momento-curvatura da seção transversal do que na análise não linear da viga com o MEF, realizada em seguida quando os diagramas já estão calculados. Isso ocorre pois o maior esforço computacional acontece na etapa de obtenção do diagrama momento-curvatura. Após obtido o diagrama, o esforço computacional para realizar a análise estrutural não linear é bastante reduzido.
- O método secante para obtenção da matriz de rigidez se mostrou eficiente, pois dispensa o método de carregamento incremental normalmente utilizado com os métodos numéricos mais comuns para análise não linear de estruturas.
- O uso das relações momento-curvatura para prever o comportamento não linear no deslocamento de vigas de concreto armado se mostrou válido, com bons resultados quando comparado com outros métodos.

- Quando há um carregamento concentrado é preciso utilizar uma malha de elementos finitos mais refinada na região dos esforços máximos, a fim de captar a formação de rótulas plásticas. Assim, é possível prever com mais precisão os deslocamentos da estrutura no trecho da curva carga-deslocamento pós-escoamento e sua respectiva carga última.
- Para conseguir resultados próximos ao de vigas reais é preciso adotar modelos constitutivos que representem bem o comportamento real da estrutura. O desenvolvimento de modelos constitutivos, porém, estava fora do escopo deste trabalho.

Com base nos resultados obtidos nos exemplos, pode-se concluir que as rotinas computacionais para análise não linear de vigas de concreto armado desenvolvidas neste trabalho se mostraram eficientes. Elas podem ser utilizadas para verificar as deformações em serviço, como também realizar a análise em estado limite último de vigas de concreto armado predominantemente sob flexão, desde que utilizada uma malha de elementos finitos suficientemente refinada nos pontos de esforço máximo.

Sugestões para trabalhos futuros:

Apresentam-se as seguintes sugestões para futuros trabalhos:

- Ampliar a formulação do modelo de elementos finitos para análise de pórticos 2D e 3D.
- Ampliar a formulação do modelo de elementos finitos para análise de lajes.
- Adaptar as rotinas para considerar o efeito da fluência no concreto.
- Adaptar as rotinas para considerar leis constitutivas mais complexas que considerem os efeitos da interação entre os dois materiais, como por exemplo o escorregamento das armaduras "*bond slip*".
- Implementar um refinamento automático da malha de elementos finitos nos locais onde os esforços são máximos, para uma maior eficiência computacional do programa.

8 REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR6118**: projeto de estruturas de concreto - procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

ATKINSON, K.E. **Introduction to Numerical Analysis**, 2nd edn. John Wiley & Sons, 1989.

BATHE, K.J. **Finite Element Procedures in Engineering Analysis**. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1982.

BENTZ, E.C. **Sectional Analysis of Reinforced Concrete Members**. PhD thesis, Department of Civil Engineering, University of Toronto, 2000.

BERGAN, P.G. and HOLAND, I. **Nonlinear finite element analysis of concrete structures. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 17-18(PART 2), pp. 443-467, 1979.

BRATINA, S.; SAJE, M.; PLANINC, I. **On materially and geometrically non-linear analysis of reinforced concrete planar frames.** International Journal of Solids and Structures, v. 41, n. 24-25, p. 7181-7207, 2004.

BURDEN, R.L., FAIRES, J.D. **Numerical Analysis**, 9th edn. Brooks/Cole, 2011.

BURNS, N. H.; SIESS, C. P. **Load-deformation characteristics of beam-column connections in reinforced concrete**. Urbana, 1962. Civil Engineering Studies, SRS No. 234 – University of Illinois.

CAROL, I.; MURCIA, J. **Nonlinear time-dependent analysis of planar frames using an 'exact' formulation – I. Theory**. Computers & Structures, v. 33, n. 1, p. 79-87, 1989(a).

CHEN, W.F. **Plasticity in Reinforced Concrete**. McGraw-Hill, 1982.

CHIMELLO, A. A. **Análise não linear de vigas de concreto armado reforçadas com laminados de PRFC**. Florianópolis, 2003. 116 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade Federal de Santa Catarina.

CHOI, C. K.; KWAK, H. G. **The effect of finite element mesh size in nonlinear analysis of reinforced concrete structures**. Computers & Structures, v. 36, n. 5, p. 807-815, 1990.

COLLINS, M.P. and MITCHELL, D. **Prestressed Concrete Structures.** Prentice-Hall 1991, 760 pp.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **CEB-FIP Model Code 1990.** London, Thomas Telford, 1993.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **Design manual on cracking and deformations, Bulletin d'Informtion No. 185-E.** Paris, France, 1985.

COOK, R. D.; MALKUS, D. S. PLESHA, M.E. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. 3.ed. Ed. Jonh Wiley & Sons, Inc., 1989.

DEDE, T. AYVAZ, Y. **Nonlinear analysis of reinforced concrete beam with/without tension stiffening effect.** Materials and Design, v.30, p.3846–3851, 2009.

GERE, J. M.; WEAVER Jr, W. **Análise de estruturas reticuladas**. Rio de Janeiro: Guanabara, 1987.

GUPTA, A.; MAESTRINI, S. R. **Tension-stiffness model for reinforced concrete bars**. Journal of Structural Engineering (ASCE), v. 116, n. 3, p. 769-791, 1990.

HIBBELER, R.C. **Mechanics of Materials**, 8th edn. Prentice Hall, 2011.

HOGNESTAD, E. **A study of combined bending and axial load in reinforced concrete members.** Urbana, Illinois, 1951. Bulletin Series, 399:128 - University of Illinois.

HUTTON, DAVID V. **Fundamentals of finite element analysis.** McGraw-Hill 1st ed., 2004.

KWAK, H. G.; SONG, J. I. **Cracking analysis of RC members using polynomial strain distribution function**. Engineering Structures, v. 24, n. 4, p. 455- 468, 2002.

KWAK, H.G., KIM, S.P. **Simplified monotonic moment curvature relation considering fixed-end rotation and axial force effect.** Engineering Structures 32(1):69– 79, 2010.

KWAK, H.G.; KIM, S. P. **Nonlinear analysis of RC beams based on moment – curvature relation.** Computers & Structures, v. 80, n. 7-8, p.615-628, 2002.

LA ROVERE, H. L. **Nonlinear analysis of reinforced concrete masonry walls under simulated seismic loadings**. Ph.D. Dissertation (Structural Engineering) - University of California. San Diego, 1990.

MANG HA, MESCHKE G. **Nonlinear finite element analysis of reinforced and prestressed concrete structures.** Engineering Structures;13(2):211–26, 1991.

MCGUIRE, W. **Matrix structural analysis.** 2nd ed. Chichester, Wiley, New York, 1999.

MARI, A. R. **Nonlinear geometric, material and time dependent analysis of three dimensional reinforced and prestressed concrete frames**. Berkeley, 1984. Report n. UCB/SESM – 84/12 – Department of Civil Engineering, University of California.

NGO, D. SCORDELIS, A. C. **Finite element analysis of reinforced concrete beams,** ACI Journal, v. 64, n.3, 1967.

PANKAJ P, LIN E. **Material modeling in the seismic response analysis for the design of RC frames structures**. Engineering Structures; 27:1014–23, 2005.

PANKAJ, P. LIN, E. **Material modelling in the seismic response analysis for the design of RC framed structures.** Engineering Structures, V. 27, n.7, P. 1014-1023, 2005.

PAPANIKOLAOU, V.K. **Analysis of arbitrary composite sections in biaxial bending and axial load.** Computers & Structures 98-99:33–54, 2012.

RASHEED, H. A. S.; DINNO, K. S. **An efficient nonlinear analysis of RC sections.** Computers & Structures, v. 53, n. 3, p. 613-623, 1994(a).

SFAKIANAKIS, M.G. **Biaxial bending with axial force of reinforced, composite and repaired concrete sections of arbitrary shape by fiber model and computer graphics.** Advances in Engineering Software 33(4):227–242, 2002.

SORIANO, H. L. **Elementos Finitos Formulação e Aplicação na estática e dinâmica das estruturas.** Editora Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2009.

SPACONE, E. E EL-TAWIL, S. **Nonlinear Analysis of Steel-Concrete Composite Structures: State of the Art.** Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 130(2), p. 159 – 168, 2004.

SPACONE, E., FILIPPOU, F.C., TAUCER, F.F. **Fibre beam-column model for nonlinear analysis of r/c frames: part i. formulation.** Earthquake Engineering & Structural Dynamics 25(7):711725, 1996.

STRAMANDINOLI, R.S.B. e LA ROVERE, H.L. **An Efficient Tension-Stiffening Model for Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Members.** Engineering Structures v.30, n.7, p.2069-80, Ed. Elsevier, 2008.

STRAMANDINOLI, R.S.B. **Modelos de elementos finitos para análise não linear física e geométrica de vigas e pórticos planos de concreto armado**. 189 p. Tese (doutorado) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2007.

TASUJI, M.E., SLATE, F.O. and NILSON, A.H. **Stress-Strain Response and Fracture of Concrete in Biaxial Loading**. Journal of ACI, Vol. 75, No. 3, pp. 306-312, 1978

TIMOSHENKO, S. **Strength of Materials**, 2nd edn. D. Van Nostrand, 1940.

TSAO, W.H., HSU, C.T.T. **A nonlinear computer analysis of biaxially loaded l shaped slender reinforced concrete columns.** Computers & Structures 49(4):579– 588, 1993.

VECCHIO, F. J.; COLLINS, M. P. **The modified compression field theory for reinforced concrete elements subjected to shear.** ACI Journal, v. 83, n. 2, p. 219-231, 1986.

WANG, T.; HSU, T.T.C. **Nonlinear finite element analysis of concrete structures using new constitutive models**. Computers & Structures, v. 79, n. 32, p. 2781-2791, 2001.