Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Existência e Multiplicidade de Soluções não negativas para uma classe de problemas Elípticos

José Pereira Gomes

João Pessoa – PB
Fevereiro de 2019

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Existência e Multiplicidade de Soluções não negativas para uma classe de problemas Elípticos

por

José Pereira Gomes

sob a orientação de

Profª. Drª. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes

João Pessoa – PB
Fevereiro de 2019

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

G633e Gomes, José Pereira.
Existência e Multiplicidade de Soluções não negativas para uma classe de problemas Elípticos / José Pereira Gomes. - João Pessoa, 2019.
63 f.

Orientação: Elisandra de Fátima Gloss de Moraes Moraes.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Problemas Elípticos. 3. Métodos variacionais. 4. Problemas lineares. 5. Problemas assintoticamente lineares. 6. Problemas superlineares. I. Moraes, Elisandra de Fátima Gloss de Moraes. II. Título.

UFPB/CCEN

Existência e Multiplicidade de Soluções não negativas para uma classe de problemas Elípticos

por

José Pereira Gomes [1]

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada em 28 de Fevereiro de 2019.

Banca Examinadora:

Elisandra F. Gloss de Moraes

Prof[a]. Dr[a]. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes - UFPB
(Orientadora)

Francisco Sibério B. Albuquerque

Prof. Dr. Francisco Sibério Bezerra Albuquerque – UEPB
(Examinador Externo)

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo – UFPB
(Examinador Interno)

[1]O autor foi bolsista da CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Ao meu filho Matheus

Agradecimentos

Quero expressar meus sinceros agradecimentos a todos que contribuíram para realização deste trabalho, em especial, à Deus, pois sem ele nada disso teria sentido.

Aos meus pais, Nelson Pereira do Egito e Maria de Lourdes Gomes, por todos os ensinamentos, incentivo e apoio essenciais para minha formação.

À minha esposa, Jailma de Souza Nascimento e meu filho Matheus Henrique, pela paciência e apoio; esses foram o combustível para concretização desse objetivo.

A todos meus irmãos, em especial, ao meu irmão Izaac pelo apoio financeiro.

Aos meus ex-professores da UEPB, em particular aos professores: Aldo Trajano, Castor da Paz, Fernando Luiz, Luciana Rose, Onildo Freire e Vandenberg Lopes.

Ao Grupo Pet - Matemática/Estatística - UFCG, em ESPECIAL ao professor Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros que foi crucial na minha formação.

Aos meus colegas da graduação, mestrado e demais amigos bem como:
Aliandro Serafim, Caio Antony, Douglas Magno, Erivan Barbosa, Fábio Monteiro, Geovani Júnior, Hector Alan, Ismael Sandro, João Paulo, Joesley Ambrósio, José Lucas, Johnatan Costa, Josivaldo Pereira, Kaline Ambrósio, Léo Miller, Lenin Almeida, Maciel Araújo, Rafael Yago, Renato Silvestre, Rubens Silva, Thiago de Paiva, Yuri Silva.

Aos membros da banca: Prof. Dr. Francisco Sibério Bezerra Albuquerque – UEPB e Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo – UFPB por aceitarem o convite para compor a banca examinadora.

Agradeço aos professores: Bruno Ribeiro, Elisandra Gloss, Flank David, Gabriela Albuquerque, Jaqueline Rojas, Márcio Santos e Miriam Silva os quais me deram uma sólida formação por meio das disciplinas cursadas no mestrado. Agradeço à profª. Drª. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes por aceitar esse enorme desafio de me orientar.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, estudamos a existência e multiplicidade de soluções não negativas para alguns problemas elípticos em um domínio limitado. Tratamos dos casos linear, assintoticamente linear e superlinear. As ferramentas utilizadas para garantir a existência de tais soluções foram os Métodos Variacionais, mais especificamente, o Teorema do Passo da Montanha e o Princípio Variacional de Ekeland. Para estudar o sinal destas soluções usamos o princípio do máximo.

Palavras-chave: Problemas elípticos, métodos variacionais, problemas lineares, assintoticamente lineares, superlineares.

Abstract

In this work, we study the existence and multiplicity of non-negative solutions for some elliptic problems in a bounded domain. We deal with linear, asymptotically linear and superlinear cases. The tools used to guarantee the existence of such solutions were the Variational Methods, more specifically, the Mountain Pass Theorem and the Ekeland's Variational Principle. To study the signal of the solutions we use the maximum principle.

Keywords: Elliptic problems, Variational methods, linear, asymptotically linear and superlinear problems.

Sumário

Introdução **1**

1 Equações com não linearidade do tipo côncavo convexo **4**

1.1 Apresentação do problema 4

1.2 Existência de solução via Princípio Variacional de Ekeland 6

1.3 Existência de solução via Teorema do Passo da Montanha 15

2 Existência e multiplicidade de soluções para problemas assintoticamente lineares **24**

2.1 Apresentação do problema 24

2.2 Geometria do passo da montanha 25

2.3 Existência de solução do tipo passo da montanha 27

3 Existência e não existência de soluções positivas para problemas parametrizados **33**

3.1 Apresentação do Problema 33

3.2 Resultados de existência e não existência 34

A Resultados Auxiliares **40**

B Resultados complementares **44**

Referências Bibliográficas **52**

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- X denota um espaço de Banach;
- X^* denota o dual topológico de um espaço de Banach X;
- id denota a aplicação identidade;
- $\mathbb{R}^N$ denota o espaço euclidiano N-dimensional;
- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ denota um aberto limitado;
- $C, C_1, C_2, \ldots$ denotam constantes positivas, possivelmente diferentes;
- $B_\delta(x)$ bola aberta de centro x e raio δ;
- $|A|$ medida de Lebesgue de um conjunto A;
- $\square$ denota o final de uma demonstração;
- $supp(u)$ denota o suporte da função u;
- $C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega); supp(u) \subset \Omega \text{ é compacto}\}$
- $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $u^- = \max\{-u, 0\}$;
- $\|\cdot\|_p$ denota a norma de $L^p(\Omega)$;
- $\rightharpoonup, \rightarrow$ denota convergência fraca e forte, respectivamente;
- q.t.p. denota em quase toda parte;

- $X \hookrightarrow Y$ denota que X está imerso em Y;

- $X \subset\subset Y$ denota que X está contido compactamente em Y;

- $L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \quad \text{mensurável}; \int_\Omega |u|^p dx < \infty \right\}$, $1 \leq p < \infty$;

- $\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p \right)^{1/p}$ norma do espaço de Lebesgue $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$;

-

$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}$ mensurável ; $|u(x)| \leq C$ q.t.p sobre Ω para algum $C > 0\}$;

- $\| u\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |u(x)|$ norma do espaço $L^\infty(\Omega)$;

- $\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ laplaciano de u;

- $p^* = \frac{Np}{N-p}$ para $1 \leq p < N$ expoente crítico de Sobolev;

- $f = o(g)$ quando $x \to x_0$ se $\lim_{x\to x_0} |f(x)|/|g(x)| = 0$;

Introdução

Neste trabalho, com base no artigo de Li, Wu e Zhou (veja [7]), vamos estudar a existência e multiplicidade de soluções não negativas em $H_0^1(\Omega)$ para a seguinte classe de problemas elípticos:

$$\begin{cases} -\Delta u = h(x)u^q + f(x,\, u), \;\; x \in \Omega, \\ 0 \leq u \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, $N \geq 1$, $\;0 < q < 1$ e as funções $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $h : \Omega \to \mathbb{R}$ satisfazem algumas condições. Mostraremos a existência e multiplicidade de soluções para o problema (1) usando o Método Variacional, que consiste essencialmente em encontrar pontos críticos do funcional energia associado ao problema em estudo.

Ao longo do trabalho vamos assumir que a função $h : \Omega \to \mathbb{R}$ satisfaz a condição
$(h1) : h(x) \in L^\infty(\Omega)$ e $h(x) \not\equiv 0$;
e eventualmente também assumiremos a condição
$(h2)$: existe $v \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega h(x)(v^+)^{q+1}\, dx > 0.$$

Quanto a não linearidade $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, inicialmente vamos assumir que satisfaz as seguintes condições:
$(f1) : f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$; $f(x,0) \equiv 0$; $f(x,s) \geq (\not\equiv) 0$ para quaisquer $s \geq 0$, $x \in \Omega$;
$(f2) : \lim_{s \to 0^+} \dfrac{f(x,s)}{s} = \mu \in [0, \lambda_1)$; $\lim_{s \to +\infty} \dfrac{f(x,s)}{s} = +\infty$ uniformemente em $x \in \Omega$,
onde $\lambda_1 > 0$ é o primeiro autovalor de $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$;
$(f3) : f$ é subcrítica, isto é, existe $k \in (1, (N+2)/(N-2))$ se $N \geq 3$, ou $k \in (1, +\infty)$ se $N = 1, 2$, tal que

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{f(x,s)}{s^k} = 0 \quad \text{uniformemente em } x \in \Omega;$$

$(f4)$: $\dfrac{f(x,s)}{s}$ é não decrescente em $s > 0$.

Para este caso, em que f é superlinear no infinito, mostraremos a existência e multiplicidade de soluções para o Problema (1) utilizando o Princípio Variacional de Ekeland e uma versão do Teorema do Passo da Montanha.

Em seguida, estudaremos o caso em que f é assintoticamente linear no infinito. Mais precisamente, estudaremos o problema (1) supondo $(f1)$ e a condição

$(\overline{f2})$: $\lim\limits_{s\to 0^+} \dfrac{f(x,s)}{s} = \mu \in [0,\lambda_1)\,;\ \lim\limits_{s\to+\infty} \dfrac{f(x,s)}{s} = l \in (\lambda_1,+\infty)$,

uniformemente em $x \in \Omega$.

Assim como no caso anterior, mostraremos a existência e multiplicidade de solução para o problema (1) através do Princípio Variacional de Ekeland e a versão do Teorema do Passo da Montanha aqui abordada.

Por fim, vamos investigar a existência de solução para o problema (1) considerando f linear com respeito a u, mais especificamente, $f(x,u) = \lambda u$ com $\lambda > 0$. Para este caso, vamos investigar a existência ou não existência de soluções não negativas através de uma relação entre λ e λ_1 levando em conta o sinal de h. Vamos usar o Teorema do Passo da Montanha para provar a existência de solução para o problema (1), para certos valores de λ. A seguir, detalharemos como este trabalho está escrito.

Esta dissertação está dividida em três capítulos e dois apêndices organizados da seguinte forma: No Capítulo 1, mostraremos a existência de duas soluções não negativas em $H_0^1(\Omega)$ para o problema (1) usando os métodos variacionais. Dividimos este capítulo em três seções. Na primeira seção, apresentaremos o problema. Na segunda, mostraremos que, sob as condições $(f1)-(f3)$ e $(h1)-(h2)$, o Problema (1) possui uma solução não negativa em $H_0^1(\Omega)$, com energia negativa e, além disso, veremos que a solução encontrada é positiva desde que $h(x)$ seja não negativa. Para mostrarmos a existência faremos uso do Princípio Variacional de Ekeland e a positividade segue do princípio do máximo. Na última seção, usando o Teorema do Passo da Montanha, mostraremos que, sob as condições $(f1)-(f4)$ e $(h1)$ e algumas condições adicionais, o problema (1) possui uma segunda solução não negativa em $H_0^1(\Omega)$, com energia positiva e além disso, veremos através do princípio do máximo, que tal solução é positiva desde que a priori tenhamos $h(x)$ não negativa. Nestes dois resultados de existência exigimos que $\|h\|_\infty$ seja pequena. Tal restrição não é necessária se h for uma função não positiva.

No Capítulo 2, assim como fizemos no anterior, mostraremos a existência e multiplicidade de soluções não negativas em $H_0^1(\Omega)$ para o problema (1) usando o Teorema do Passo da Montanha e o Princípio Variacional de Ekeland. Este capítulo possui três seções. Na primeira seção, apresentamos o problema. Na seguinte, provaremos a geometria do Passo da Montanha e usando o Princípio Variacional de

Ekeland mostraremos que sob as condições $(f1) - (\overline{f2})$, e $(h1) - (h2)$, existe uma constante $m = m(\mu, q, f, N, \Omega) > 0$ tal que qualquer que seja $h \in L^\infty(\Omega)$ com $\|h\|_\infty < m$, o problema (1) tem uma solução não negativa em $H_0^1(\Omega)$ com energia negativa. Além disso, se $h(x)$ é não negativa, usando o princípio do máximo veremos que tal solução é positiva q.t.p. em Ω. Na última seção, usando o Teorema do Passo da Montanha mostraremos que sob as condições $(f1) - (\overline{f2})$ e $(h1)$ existe uma constante $m = m(\mu, q, f, N, \Omega)$ tal que qualquer que seja $h \in L^\infty(\Omega)$ com $\|h\|_\infty < m$, o problema (1) possui uma segunda solução não negativa em $H_0^1(\Omega)$ com energia positiva e além disso, o princípio do máximo nos garante que tal solução é positiva desde que tenhamos $h(x)$ não negativa.

No Capítulo 3, mostraremos que, quando f é linear, alguns dos resultados obtidos anteriormente ainda podem ser aplicados. Vamos investigar a existência ou não existência de solução, através de uma relação entre λ e λ_1 para o problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = h(x)u^q + \lambda u, \; x \in \Omega, \\ 0 \le u \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{2}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, $N \ge 1$, $0 < q < 1$ e $\lambda > 0$.

Usaremos o Teorema do Passo da Montanha para mostrar que:
Sendo $h(x)$ não negativa em $L^\infty(\Omega)$, o problema (2) não possui solução para $\lambda \ge \lambda_1$, porém para $\lambda < \lambda_1$ o problema (2) tem pelo menos uma solução positiva.

Se existe $\delta > 0$ tal que $h(x) \le -\delta$ em $L^\alpha(\Omega)$ para algum $\alpha \in [2^*/(2^* - 1 - q), +\infty]$, então o problema (2) tem sempre uma solução não negativa em $H_0^1(\Omega)$ com energia positiva para todo $\lambda > \lambda_1$.

Sendo $h(x)$ negativa, então o problema (2) não tem solução positiva para $\lambda \le \lambda_1$.

Se $h(x) \equiv 0$, então o problema (2) tem solução positiva desde que $\lambda = \lambda_1$.

No apêndice A, enunciamos alguns resultados clássicos que foram utilizados no decorrer deste trabalho, os quais não foram aqui demonstrados, indicamos apenas as referências para eventuais consultas. Por fim, no apêndice B, provaremos alguns resultados utilizados no decorrer deste trabalho.

Capítulo 1

Existência e multiplicidade de soluções para uma classe de equações com não linearidade do tipo côncavo convexo

1.1 Apresentação do problema

Neste capítulo, mostraremos a existência de soluções não negativas em $H_0^1(\Omega)$ para o seguinte problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta u = h(x)u^q + f(x,\, u), \;\; x \in \Omega, \\ 0 \leq u \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, $N \geq 1$, $\;0 < q < 1$. Assumimos que a função $h : \Omega \to \mathbb{R}$ satisfaz
$(h1) : h(x) \in L^\infty(\Omega)\,\mathrm{e}\,h(x) \not\equiv 0$;
e a não linearidade $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes condições:
$(f1) : f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R});\; f(x,0) \equiv 0;\; f(x,s) \geq 0$ para quaisquer $s \geq 0,\, x \in \Omega$;
$(f2) : \lim\limits_{s \to 0^+} \dfrac{f(x,s)}{s} = \mu \in [0, \lambda_1)\,;\, \lim\limits_{s \to +\infty} \dfrac{f(x,s)}{s} = +\infty$ uniformemente em $x \in \Omega$,
onde $\lambda_1 > 0$ é o primeiro autovalor de $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$, isto é,

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega u^2 dx} : u \in H_0^1(\Omega),\, u \not\equiv 0 \right\}; \tag{1.2}$$

$(f3) : f$ é subcrítica, isto é, existe $k \in (1, (N+2)/(N-2))$ se $N \geq 3$, ou $k \in (1, +\infty)$

se $N = 1, 2$, tal que

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{f(x,s)}{s^k} = 0 \quad \text{uniformemente em } x \in \Omega; \tag{1.3}$$

Além disso, vamos usar a seguinte condição de monotonicidade

$(f4)$: $\dfrac{f(x,s)}{s}$ é não decrescente em $s > 0$.

O espaço adequado para tratarmos deste problema, usando métodos variacionais, é o espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{para} \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

Usaremos $\| \cdot \|_p$ para denotar a norma usual em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p \leq \infty$. Uma vez que procuramos soluções não negativas, o funcional definido em $H_0^1(\Omega)$ associado ao problema (1.1) é dado por:

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{q+1} \int_\Omega h(x)(u^+)^{q+1}\, dx - \int_\Omega F(x, u^+)\, dx, \tag{1.4}$$

onde $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)\, ds$.

Graças às condições $(f1) - (f3)$ tem-se que $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ (veja Teorema B.1 no Apêndice B) com

$$I'(u)\varphi = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi\, dx - \int_\Omega h(x)(u^+)^q \varphi\, dx - \int_\Omega f(x, u^+)\varphi\, dx, \ \forall\, u,\, \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{1.5}$$

Definição 1.1. Diremos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca positiva (não negativa) do problema (1.1) se $u > 0$ $(u \geq 0)$ q.t.p. em Ω e satisfaz

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi\, dx = \int_\Omega h(x) u^q\, \varphi\, dx + \int_\Omega f(x,\, u)\, \varphi\, dx, \quad \forall\, \varphi \in\, H_0^1(\Omega). \tag{1.6}$$

Por (1.5) - (1.6), encontrar uma solução fraca não negativa do problema (1.1) equivale a encontrar um ponto crítico não negativo do funcional I, definido em (1.4).

Pelo Princípio do Máximo Forte, Teorema A.14, veremos que, os pontos críticos não nulos do funcional I, dado em (1.4) são soluções positivas do problema (1.1) se $h(x) \geq 0$.

Para provar os resultados deste capítulo, ou seja, a existência de duas soluções não negativas em $H_0^1(\Omega)$ para o problema (1.1), usaremos o Princípio Variacional de Ekeland e uma versão do Teorema do Passo da Montanha.

1.2 Existência de solução via Princípio Variacional de Ekeland

Nesta seção, mostraremos a existência de solução não negativa em $H_0^1(\Omega)$, com energia negativa, para o problema (1.1). Para isso, além das condições $(h1)$, $(f1)-(f3)$ referidas anteriormente, assumiremos uma condição adicional. A fim de provar o principal resultado da seção, (e da próxima) usaremos o seguinte lema, que mostra que o funcional I tem a geometria do passo da montanha.

Lema 1.1. Suponha que a função $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz as condições $(f1) - (f3)$ e que a função $h : \Omega \to \mathbb{R}$ satisfaz a condição $(h1)$. Então existe uma constante $m = m(\mu, q, f, N, \Omega) > 0$ tal que qualquer que seja $h \in L^\infty(\Omega)$ com $\|h\|_\infty < m$ temos:

(i) Existem constantes $\rho, \eta > 0$ tais que $I(u) \geq \eta > 0$, $\forall u \in H_0^1(\Omega)$, com $\|u\| = \rho$.

(ii) Supondo $(f4)$, existe $e \in H_0^1(\Omega)$ com $\|e\| > \rho$ tal que $I(e) < 0$.

Demonstração. (i) Sabemos que

$$h(x) \leq |h(x)| \leq \|h\|_\infty \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega h(x)(u^+)^{q+1}\, dx \leq \|h\|_\infty \int_\Omega (u^+)^{q+1}\, dx. \tag{1.7}$$

Pelas condicões $(f1) - (f3)$ temos também

$$F(x, u^+) \leq \frac{\mu + \epsilon_0}{2}(u^+)^2 + C_0(u^+)^{k+1} \tag{1.8}$$

onde $k \in \left(1, \frac{N+2}{N-2}\right)$ se $N \geq 3$ ou $k \in (1, \infty)$ se $1 \leq N < 3$ (veja Observação B.1 para detalhes). Isso implica

$$\int_\Omega F(x, u^+)\, dx \leq \frac{\mu + \epsilon_0}{2} \int_\Omega (u^+)^2 dx + C_0 \int_\Omega (u^+)^{k+1} dx. \tag{1.9}$$

Usando (1.2), (1.4), (1.7) - (1.9) e a continuidade da imersão de Sobolev obtemos

$$\begin{aligned}
I(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega h(x)(u^+)^{q+1}\, dx - \int_\Omega F(x, u^+)\, dx \\
&\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\|h\|_\infty}{q+1}\int_\Omega (u^+)^{q+1}\, dx - \frac{\mu + \epsilon_0}{2}\int_\Omega u^2\, dx - C_0 \int_\Omega |u|^{k+1}\, dx \\
&\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\|h\|_\infty}{q+1}\int_\Omega (u^+)^{q+1}\, dx - \frac{\mu + \epsilon_0}{2}\frac{\|u\|^2}{\lambda_1} - C_0 \int_\Omega |u|^{k+1}\, dx \\
&\geq C_1\|u\|^2 - C_2\|h\|_\infty \|u\|^{q+1} - C_3\|u\|^{k+1} \\
&\geq \left(C_1 - C_2\|h\|_\infty\|u\|^{q-1} - C_3\|u\|^{k-1}\right)\|u\|^2,
\end{aligned} \tag{1.10}$$

onde $C_1 = \frac{1}{2}(1 - \frac{\mu+\epsilon_0}{\lambda_1}) > 0$, $C_2 = C_2(q, N, \Omega) > 0$ e $C_3 = C_3(C_0, k, N, \Omega)$. Considere agora

$$g(t) = C_2\|h\|_\infty t^{q-1} + C_3 t^{k-1} \quad \text{para } t \geq 0.$$

Derivando g com relação a t tem-se

$$g'(t) = C_2(q-1)\|h\|_\infty t^{q-2} + C_3(k-1)t^{k-2} \quad \text{para } t > 0.$$

Fazendo $g'(t_0) = 0$ temos

$$g'(t_0) = C_2(q-1)\|h\|_\infty t_0^{q-2} + C_3(k-1)t_0^{k-2} = 0,$$

o que implica

$$t_0^{k-q} = \frac{C_2(1-q)\|h\|_\infty}{C_3(k-1)} \quad \Rightarrow \quad t_0 = [C_4\|h\|_\infty]^{\frac{1}{k-q}},$$

com $C_4 = \frac{C_2(1-q)}{C_3(k-1)}$. Daí segue que

$$g(t_0) = C_2\|h\|_\infty (C_4\|h\|_\infty)^{\frac{q-1}{k-q}} + C_3(C_4\|h\|_\infty)^{\frac{k-1}{k-q}} = C_5\|h\|_\infty^{\frac{k-1}{k-q}},$$

onde

$$C_5 = C_5(q, k, \mu, f, N, \Omega) = C_2 C_4^{\frac{q-1}{k-q}} + C_3 C_4^{\frac{k-1}{k-q}} \quad \text{e} \quad \frac{k-1}{k-q} > 0$$

uma vez que $0 < q < 1 < k$. Assim, para $k > 1$ fixado, existe $m = m(\mu, q, f, N, \Omega) > 0$ tal que $g(t_0) < C_1$ se $\|h\|_\infty < m$. Então, se $\|h\|_\infty < m$, considere $\rho = t_0$ em (1.10) e isso completa a prova de (i).

Agora vamos provar o item (ii). Seja $\varphi_1 > 0$ uma autofunção associada ao autovalor λ_1. Então existem $\Omega_0 \subset \overline{\Omega}_0 \subset\subset \Omega$ com $|\Omega_0| > 0$ e algum $\alpha > 0$ tal que

$$\min_{\overline{\Omega}_0} \varphi_1(x) \geq \alpha > 0. \tag{1.11}$$

Consequentemente, $t\varphi_1(x) \to +\infty$ uniformemente em $\overline{\Omega}_0$. Para $s \geq 0$ fixado, defina

$$\tilde{g}(t) = \frac{1}{2}t^2 f(x, s)s - F(x, ts) \quad \forall\, t \geq 0.$$

Por $(f4)$ temos $f(x, s)/s$ não decrescente para $s > 0$, assim

$$\tilde{g}'(t) = f(x, s)ts - f(x, ts)s = \begin{cases} \geq 0 & \text{se} \quad 0 \leq t \leq 1, \\ \leq 0 & \text{se} \quad t \geq 1. \end{cases}$$

Dessa forma temos $\tilde{g}(t) \leq \tilde{g}(1)$, isto é,

$$\frac{1}{2}t^2 f(x,s)s - F(x,ts) \leq \frac{1}{2}f(x,s)s - F(x,s),$$

quaisquer que sejam $t, s \geq 0$. Em particular, $\tilde{g}(1) \geq \tilde{g}(0) = 0$. Daí obtemos

$$0 \leq 2F(x,t) \leq f(x,t)t, \quad \forall x \in \Omega \text{ e } t > 0,$$

o que implica em

$$f(x,t)t^2 - 2tF(x,t) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

Daí, segue que

$$\frac{d}{dt}[F(x,t)/t^2] = \frac{t^2 f(x,t) - 2tF(x,t)}{t^4} \geq 0,$$

isto é, $F(x,t)/t^2$ é não decrescente em $t > 0$. Lembrando de (1.11), segue da segunda parte de $(f2)$ que

$$\frac{F(x,t\varphi_1)}{t^2\varphi_1^2} \geq \frac{F(x,t\alpha)}{t^2\alpha^2} \to +\infty \quad \text{quando } t \to +\infty,$$

uniformemente em $x \in \overline{\Omega}_0$. Assim, dado $K > 0$, existe $T_0 = T_0(\alpha, K) > 0$ tal que

$$\frac{F(x,t\varphi_1)}{t^2\varphi_1^2} \geq K > 0 \quad \forall\, t \geq T_0, \quad x \in \overline{\Omega}_0.$$

Logo, para todo $t \geq T_0$ tem-se

$$\frac{1}{t^2}\int_\Omega F(x,t\varphi_1)\,dx \geq \int_{\Omega_0} \frac{F(x,t\varphi_1)}{t^2\varphi_1^2}\varphi_1^2\,dx \geq K\int_{\Omega_0}\varphi_1^2\,dx \geq K\alpha^2|\Omega_0|.$$

Por outro lado, sendo $0 < q < 1$, tem-se

$$\frac{t^{q-1}}{q+1} = \frac{1}{(q+1)t^{1-q}} \to 0 \quad \text{quando} \quad t \to +\infty.$$

Note que para T_1 suficientemente grande, temos

$$\left|\frac{t^{q-1}}{q+1}\int_\Omega h(x)\varphi_1(x)^{q+1}\,dx\right| < 1 \qquad \forall\, t \geq T_1.$$

Portanto, para $t > \max\{T_0, T_1\}$, temos

$$\begin{aligned}\frac{I(t\varphi_1)}{t^2} &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\varphi_1|^2\,dx - \int_\Omega \frac{F(x,t\varphi_1)}{t^2}\,dx - \frac{t^{q-1}}{q+1}\int_\Omega h(x)\varphi_1(x)^{q+1}\,dx \\ &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\varphi_1|^2\,dx - \alpha^2 K|\Omega_0| + 1.\end{aligned}$$

Escolhendo K suficientemente grande tal que

$$\left(\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\varphi_1|^2\,dx + 1\right)\frac{1}{\alpha^2|\Omega_0|} < K,$$

temos $I(t\varphi_1)/t^2 < 0$, para t suficientemente grande. Portanto (ii) vale, com $e := t_0\varphi_1$ para t_0 suficientemente grande. $\square$

Agora podemos mostrar nosso primeiro resultado de existência de solução.

Teorema 1.2. *Suponha que a função* $f : \overline{\Omega}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *satisfaça as condições* $(f1)-(f3)$ *e que a função* $h : \Omega \to \mathbb{R}$ *satisfaça a condição* $(h1)$ *e*
$(h2)$: *existe* $v \in C_0^\infty(\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega h(x)(v^+)^{q+1}\,dx > 0.$$

Então, existe uma constante $m = m(\mu, q, f, N, \Omega) > 0$ *tal que qualquer que seja* $h \in L^\infty(\Omega)$ *com* $\|h\|_\infty < m$, *o problema (1.1) tem uma solução não negativa* $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ *com* $I(u_1) < 0$. *Além disso, se* $h(x) \geq 0$, *então* $u_1 > 0$ *q.t.p. em* Ω.

Demonstração. Para $\rho > 0$ dado no Lema 1.1 tal que

$$I(u) \geq \eta > 0 \;\text{ se } ||u|| = \rho, \tag{1.12}$$

considere

$$\overline{B}_\rho = \left\{u \in H_0^1(\Omega); \|u\| \leq \rho\right\}, \quad \partial B_\rho = \left\{u \in H_0^1(\Omega); \|u\| = \rho\right\}.$$

Temos que $\overline{B}_\rho$ é um espaço métrico completo com a distância

$$dist(u,v) = \|u - v\| \text{ para } u, v \in \overline{B}_\rho.$$

Como $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$, em particular, temos $I \in C^1(\overline{B}_\rho, \mathbb{R})$. Consequentemente, I é semicontínua inferior e limitada inferiormente em $\overline{B}_\rho$. Seja

$$c_1 = \inf\left\{I(u); u \in \overline{B}_\rho\right\}.$$

Pelo Princípio Variacional de Ekeland, Teorema A.10, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $u_n \in \overline{B_\rho}$ tal que

$$c_1 \leq I(u_n) \leq c_1 + \frac{1}{n} \tag{1.13}$$

e para todo w em $\overline{B_\rho}$ tem-se

$$I(w) \geq I(u_n) - \frac{1}{n}\|u_n - w\|. \tag{1.14}$$

Faremos a partir de agora, algumas afirmações que nos ajudarão a provar nosso teorema.

Afirmação 1.1. $c_1 = \inf\left\{I(u); u \in \overline{B_\rho}\right\} < 0.$

De fato, sejam $\mu/2 \in (0, \mu)$ e $v \in C_0^\infty(\Omega)$ dado por $(h2)$. Por $(f2)$, existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x,s) \geq \frac{\mu}{2}s \quad \forall\, s \in [0,\delta], \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Daí, se $t \in [0,\delta]$ tem-se

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,s)\,ds \geq \frac{\mu}{2}\int_0^t s\,ds = \frac{\mu}{4}t^2. \tag{1.15}$$

Como $v \in C_0^\infty(\Omega)$, temos $\|v\|_\infty = M > 0$, donde

$$0 \leq v^+(x) \leq M, \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}.$$

Tomando $t \in (0, \frac{\delta}{M})$ temos $0 \leq tv^+(x) \leq (\delta/M)M = \delta$. Donde segue de (1.15) que

$$F(x,\, tv^+) \geq \frac{\mu}{4}(tv^+)^2.$$

Então para $t > 0$ pequeno, tem-se

$$\begin{aligned}
I(tv) &= \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx - \frac{t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega h(x)(v^+)^{q+1}\,dx - \int_\Omega F(x,\,tv^+)\,dx \\
&\leq \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx - \frac{t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega h(x)(v^+)^{q+1}\,dx - \frac{\mu t^2}{4}\int_\Omega (v^+)^2\,dx \\
&= t^2\left[\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx - \frac{t^{q-1}}{q+1}\int_\Omega h(x)(v^+)^{q+1}\,dx - \frac{\mu}{4}\int_\Omega (v^+)^2\,dx\right] \\
&= t^2\left[A - \frac{B}{t^{1-q}} - C\right],
\end{aligned}$$

onde

$$A = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx > 0,\ \ B = \frac{1}{q+1}\int_\Omega h(x)(v^+)^{q+1} > 0,\ \ C = \frac{\mu}{4}\int_\Omega (v^+)^2\,dx > 0.$$

Note que a positividade destes números é garantida por $(h2)$. Como $0 < q < 1$ temos $1/t^{1-q} \to +\infty$ quando $t \to 0^+$. Logo,

$$A - \frac{B}{t^{1-q}} - C < 0$$

para $t > 0$ suficiente pequeno. Daí segue que $I(tv) < 0$ para $t > 0$ pequeno. Como $tv \in \overline{B_\rho}$ para $t > 0$ pequeno, concluímos que

$$c_1 = \inf\left\{I(u); u \in \overline{B}_\rho\right\} < 0,$$

finalizando a demonstração da **Afirmação** 1.1.

Afirmação 1.2. A sequência $\{u_n\}$, que satisfaz (1.13) - (1.14), é tal que $\|u_n\| < \rho$ para n suficientemente grande.

De fato, suponha por absurdo que $\|u_n\| = \rho$ para uma infinidade de naturais n. Assim, sem perda de generalidade, suponha que $\|u_n\| = \rho$ para todo $n \geq 1$. Daí $u_n \in \partial B_\rho$, donde segue de (1.12) que

$$I(u_n) \geq \eta > 0. \tag{1.16}$$

Passando ao limite com $n \to +\infty$ em (1.13), obtemos $\lim I(u_n) = c_1$. Daí, pela Afirmação 1.1 e (1.16), temos

$$0 < c_1 < 0,$$

o que é um absurdo. Portanto, nossa **Afirmação** 1.2 está provada.

Afirmação 1.3. $I'(u_n) \to 0$ em $H^{-1}(\Omega)$.

De fato, qualquer que seja $u \in H_0^1(\Omega)$ com $\|u\| = 1$, defina $w_n = u_n + tu$. Assim, para cada $n \geq 1$ fixado, tem-se

$$\|w_n\| = \|u_n + tu\| \leq \|u_n\| + |t|\|u\| = \|u_n\| + |t| < \rho,$$

se $|t| > 0$ é suficientemente pequeno. Isto é, $w_n \in B_\rho$ para $|t| > 0$ suficientemente pequeno. Daí segue de (1.14) que

$$I(w_n) = I(u_n + tu) \geq I(u_n) - \frac{1}{n}\|u_n - (u_n + tu)\| = I(u_n) - \frac{|t|}{n}\|u\|,$$

o que implica

$$\frac{I(u_n + tu) - I(u_n)}{|t|} \geq -\frac{1}{n},$$

donde segue que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{I(u_n + tu) - I(u_n)}{t} \geq -\frac{1}{n} \quad e \quad \lim_{t\to 0^-} \frac{I(u_n + tu) - I(u_n)}{t} \leq \frac{1}{n}.$$

Logo, para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ com $\|u\| = 1$ tem-se $|I'(u_n)u| \leq 1/n$. Donde, $\|I'(u_n)\| \leq 1/n$ e, consequentemente, $I'(u_n) \to 0$ em $H^{-1}(\Omega)$. Assim, nossa **Afirmação** 1.3 está provada.

Como $\{u_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$, existe u_1 em $H_0^1(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência, tem-se:

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u_1 \quad \text{em}\, H_0^1(\Omega), \\ u_n(x) \to u_1(x) \quad q.t.p. \text{ em } \Omega, \\ u_n \to u_1 \quad \text{em } L^r(\Omega), \end{cases} \tag{1.17}$$

para todo $r \in [1, 2^*)$ se $N \geq 3$ ou $r \in [1, +\infty)$ se $N = 1, 2$.

Afirmação 1.4. O limite fraco u_1 é uma solução fraca de (1.1).

De fato, precisamos mostrar que

$$\int_\Omega \nabla u_1 \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega h(x)(u_1^+)^q \varphi \, dx + \int_\Omega f(x,\, u_1^+)\, \varphi \, dx \quad \forall\, \varphi \in\, H_0^1(\Omega), \tag{1.18}$$

ou seja, devemos provar que $I'(u_1)\varphi = 0$ qualquer que seja $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Temos que $I'(u_n)\varphi \to 0$ qualquer que seja φ em $H_0^1(\Omega)$, assim basta mostrar $I'(u_n)\varphi \to I'(u_1)\varphi$.

Analisaremos a convergência de cada parcela de $I'(u_n)\varphi$ separadamente.

Como $u_n \rightharpoonup u_1$ em $H_0^1(\Omega)$ temos

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi \, dx \to \int_\Omega \nabla u_1 \nabla \varphi \, dx, \quad \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Pela compacidade da imersão de Sobolev de $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{q+1}(\Omega)$, tem-se $u_n \to u_1$ em $L^{q+1}(\Omega)$ e, consequentemente, $u_n^+ \to u_1^+$ em $L^{q+1}(\Omega)$. Assim, pelo Teorema A.2, a menos de subsequência, temos $u_n^+(x) \to u_1^+(x)$ q.t.p. em Ω e existe $g \in L^{q+1}(\Omega)$ tal que

$$|u_n^+(x)| = u_n^+(x) \leq g(x) \quad q.t.p. \text{ em } \Omega.$$

Daí, temos

$$h(x)|u_n^+(x)|^q \varphi(x) \to h(x)|u_1^+(x)|^q \varphi(x) \quad q.t.p. \text{ em } \Omega$$

e

$$|h(x)|u_n^+(x)|^q\varphi(x)| \leq |h(x)||u_n^+(x)|^q|\varphi(x)| \leq |h(x)|g(x)^q|\varphi(x)| \quad q.t.p. \text{ em } \Omega.$$

Como $g \in L^{q+1}(\Omega)$ temos que $g^q|\varphi| \in L^1(\Omega)$, pois pela desigualdade de Hölder,

$$\int_\Omega g^q|\varphi|\,dx \leq \left(\int_\Omega g^{q+1}\,dx\right)^{\frac{q}{q+1}} \left(\int_\Omega |\varphi|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, Teorema A.1, temos

$$\int_\Omega h(x)(u_n^+)^q\varphi\,dx \to \int_\Omega h(x)(u_1^+)^q\varphi\,dx.$$

Para concluir falta provar que

$$\int_\Omega f(x,u_n^+)\varphi\,dx \to \int_\Omega f(x,u_1^+)\varphi\,dx.$$

Com efeito, temos $u_n^+ \to u_1^+$ em $L^{k+1}(\Omega)$. Assim, pelo Teorema A.2 segue que, a menos de subsequência, $u_n^+(x) \to u_1^+(x)$ em quase todo ponto $x \in \Omega$ e existe $w \in L^{k+1}(\Omega)$ tal que

$$|u_n^+(x)| = u_n^+(x) \leq w(x) \quad q.t.p. \text{ em } \Omega.$$

Note que, pela continuidade de $f(x,\cdot)$ temos

$$f(x,u_n^+(x)) \to f(x,u_1^+(x)) \quad q.t.p. \quad \text{em } \Omega.$$

Além disso, pela Observação B.2 temos

$$|f(x,u_n^+)| \leq a + b|u_n^+|^k \leq C_1 w^k,$$

para algum $k \in (1, 2^* - 1)$ se $N \geq 3$ ou $k > 1$ se $N = 1, 2$, fixado. Isso implica em

$$|f(x,u_n^+)|^{\frac{k+1}{k}} \leq (C_1 w^k)^{\frac{k+1}{k}} \leq C_2 w^{k+1} \in L^1(\Omega).$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, Teorema A.1 obtemos

$$\|f(\cdot,u_n^+) - f(\cdot,u_1^+)\|_{\frac{k+1}{k}} \to 0.$$

Como $\varphi \in L^{k+1}(\Omega)$ e $f(\cdot,u_n^+) - f(\cdot,u_1^+) \in L^{\frac{k+1}{k}}(\Omega)$, pela desigualdade de Hölder, Teorema A.6 e a Imersão contínua de Sobolev tem-se

$$
\begin{aligned}
\left|\int_\Omega [f(x,u_n^+) - f(x,u_1^+)]\varphi\,dx\right| &\leq \int_\Omega |f(x,u_n^+) - f(x,u_1^+)||\varphi|\,dx. \\
&\leq \|f(\cdot,u_n^+) - f(\cdot,u_1^+)\|_{\frac{k+1}{k}}\|\varphi\|_{k+1} \\
&\leq C\|f(\cdot,u_n^+) - f(\cdot,u^+)\|_{\frac{k+1}{k}}\|\varphi\|.
\end{aligned}
$$

Consequentemente,

$$\int_\Omega f(x,u_n^+)\varphi\,dx \to \int_\Omega f(x,u_1^+)\varphi\,dx,$$

como queríamos. Assim, $I'(u_n)\varphi \to I'(u_1)\varphi$. Como $I'(u_n)\varphi \to 0$ e $I'(u_n)\varphi \to I(u_1)\varphi$, pela unicidade do limite temos $I'(u_1)\varphi = 0$ qualquer que seja φ em $H_0^1(\Omega)$. Ou seja, u_1 satisfaz (1.18), e portanto, é solução do problema (1.1).

Afirmação 1.5. A função u_1, solução fraca de 1.1, é tal que $I(u_1) < 0$.

Com efeito, inicialmente veremos que $u_n \to u_1$ em $H_0^1(\Omega)$. Sendo $\{u_n\}$ limitada em $H_0^1(\Omega)$ e $I'(u_n) \to 0$ tem-se

$$0 \leq |I'(u_n)u_n| \leq \|I'(u_n)\|\|u_n\| \to 0 \quad \Rightarrow \quad I'(u_n)u_n \to 0.$$

Com argumentos similares aos usados na Afirmação 1.4 vemos que

$$\int_\Omega h(x)\,(u_n^+)^{q+1}\,dx \to \int_\Omega h(x)\,(u_1^+)^{q+1}\,dx$$

e ainda

$$\int_\Omega f(x,u_n^+)u_n\,dx \to \int_\Omega f(x,u_1^+)u_1\,dx.$$

Uma vez que

$$I'(u_n)u_n = \|u_n\|^2 - \int_\Omega h(x)\,(u_n^+)^{q+1}\,dx - \int_\Omega f(x,u_n^+)u_n\,dx,$$

lembrando que $I'(u_1) = 0$, segue que

$$
\begin{aligned}
\lim \|u_n\|^2 &= \lim\left(I'(u_n)u_n + \int_\Omega h(x)\,(u_n^+)^{q+1}\,dx + \int_\Omega f(x,u_n^+)u_n\,dx\right) \\
&= 0 + \int_\Omega h(x)\,(u_1^+)^{q+1}\,dx + \int_\Omega f(x,u_1^+)u_1\,dx \\
&= \|u_1\|^2 - I'(u_1)u_1 \;=\; \|u_1\|^2,
\end{aligned}
$$

isto é, $\|u_n\| \to \|u_1\|$. Como $u_n \rightharpoonup u_1$ e $\|u_n\| \to \|u_1\|$, então pelo Teorema A.7 temos $u_n \to u_1$ em $H_0^1(\Omega)$ e consequentemente, $I(u_n) \to I(u_1)$ em $H_0^1(\Omega)$. Como $I(u_n) \to c_1$ e pela Afirmação 1.1 tem-se $c_1 < 0$, obtemos $I(u_1) = c_1 < 0$ como queríamos.

Verificaremos agora que u_1 é uma função não negativa. De fato, tomando $\varphi = u_1^-$ como função teste em (1.18) temos

$$\int_\Omega \nabla u_1 \nabla u_1^- \, dx = \int_\Omega h(x)(u_1^+)^q u_1^- \, dx + \int_\Omega f(x, u_1^+) u_1^- \, dx.$$

Uma vez que $f(x,s) = 0$ para $s < 0$ vemos que

$$\int_\Omega |\nabla u_1^-|^2 \, dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \|u_1^-\| = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1^- = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1 \geq 0.$$

Além disso, se $h(x) \geq 0$ então, como u_1 é solução não trivial de (2.1) segue do Princípio do Máximo, Teoremas A.13 e A.14, que $u_1 > 0$. □

1.3 Existência de solução via Teorema do Passo da Montanha

Já sabemos, pelo Lema 1.1, que o funcional I tem a geometria do passo da montanha. A fim de provarmos nosso segundo resultado de existência, precisamos de mais um lema técnico.

Lema 1.3. Seja $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo as condições $(f1) - (f4)$ e h satisfazendo $(h1)$ com $h \leq 0$. Suponha ainda que exista uma sequência $\{u_n\}$ em $H_0^1(\Omega)$ tal que $I'(u_n)u_n \to 0$. Então, para qualquer que seja $t > 0$, existe uma subsequência de $\{u_n\}$ e uma sequência $\varepsilon_n \to 0$ tais que

$$I(tu_n) \leq \frac{(t^2+1)\varepsilon_n}{2} + \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^{q+1}}{q+1}\right] \int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1} \, dx + I(u_n), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Como por hipótese $I'(u_n)u_n \to 0$, temos

$$-\varepsilon_n \leq I'(u_n)u_n \leq \varepsilon_n, \quad \forall\, n \geq 1,$$

com $\varepsilon_n \to 0$. Isto é,

$$-\varepsilon_n \leq \|u_n\|^2 - \int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1} \, dx - \int_\Omega f(x, u_n^+) u_n^+ \, dx \leq \varepsilon_n, \tag{1.19}$$

o que implica

$$-\varepsilon_n + \int_\Omega f(x, u_n^+) u_n^+ \, dx \leq \|u_n\|^2 - \int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1} \, dx \leq \varepsilon_n + \int_\Omega f(x, u_n^+) u_n^+ \, dx.$$

Note que de (1.19) temos

$$\|u_n\|^2 \leq \varepsilon_n + \int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}\,dx + \int_\Omega f(x,u_n^+)u_n^+\,dx,$$

donde

$$\frac{t^2}{2}\|u_n\|^2 \leq \frac{t^2\varepsilon_n}{2} + \frac{t^2}{2}\int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}\,dx + \frac{t^2}{2}\int_\Omega f(x,u_n^+)u_n^+\,dx. \tag{1.20}$$

Para qualquer $t > 0$, pela definição de I e (1.20) temos

$$\begin{aligned} I(tu_n) &= \frac{t^2}{2}\|u_n\|^2 - \frac{t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}\,dx - \int_\Omega F(x,tu_n^+)\,dx \\ &\leq \frac{t^2\varepsilon_n}{2} + \frac{t^2}{2}\int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}\,dx + \frac{t^2}{2}\int_\Omega f(x,u_n^+)u_n^+\,dx \\ &\quad -\frac{t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}\,dx - \int_\Omega F(x,tu_n^+)\,dx \\ &= \frac{t^2\varepsilon_n}{2} + \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^{q+1}}{q+1}\right]\int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}\,dx \\ &\quad + \int_\Omega \left[\frac{t^2}{2}f(x,u_n^+)u_n^+ - F(x,tu_n^+)\right]\,dx. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Graças à condição $(f4)$, como vimos no Lema 1.1, tem-se

$$\frac{1}{2}t^2 f(x,s)s - F(x,ts) \leq \frac{1}{2}f(x,s)s - F(x,s), \quad \forall\, s,t\, \geq 0.$$

Consequentemente,

$$\int_\Omega \left[\frac{t^2}{2}f(x,u_n^+)u_n^+ - F(x,tu_n^+)\right]\,dx \leq \int_\Omega \left[\frac{1}{2}f(x,u_n^+)u_n^+ - F(x,u_n^+)\right]\,dx.$$

Daí, substituindo em (1.21) obtemos

$$\begin{aligned} I(tu_n) &\leq \frac{t^2\varepsilon_n}{2} + \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^{q+1}}{q+1}\right]\int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}\,dx \\ &\quad + \int_\Omega \left[\frac{1}{2}f(x,u_n^+)u_n^+ - F(x,u_n^+)\right]\,dx. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Por outro lado, observe também que de (1.19) temos

$$-\varepsilon_n + \int_\Omega f(x,u_n^+)u_n^+\,dx + \int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}\,dx \leq \|u_n\|^2,$$

o que implica

$$-\frac{\varepsilon_n}{2} + \frac{1}{2}\int_\Omega f(x,u_n^+)u_n^+\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}\,dx \le \frac{1}{2}\|u_n\|^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
I(u_n) &= \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{1}{q+1}\int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}\,dx - \int_\Omega F(x,u_n^+)\,dx \\
&\ge -\frac{\varepsilon_n}{2} + \frac{1}{2}\int_\Omega f(x,u_n^+)u_n^+\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}\,dx \\
&\quad -\frac{1}{q+1}\int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}\,dx - \int_\Omega F(x,u_n^+)\,dx \\
&= -\frac{\varepsilon_n}{2} + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right]\int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}\,dx \\
&\quad + \int_\Omega \left[\frac{1}{2}f(x,u_n^+)u_n^+ - F(x,u_n^+)\right]\,dx \\
&\ge -\frac{\varepsilon_n}{2} + \int_\Omega \left[\frac{1}{2}f(x,u_n^+)u_n^+ - F(x,u_n^+)\right]\,dx,
\end{aligned}$$

desde que $h(x) \le 0$, pois $0 < q < 1$. Ou seja, desde que $h(x) \le 0$, temos

$$\int_\Omega \left[\frac{1}{2}f(x,u_n^+)u_n^+ - F(x,u_n^+)\right]\,dx \le \frac{\varepsilon_n}{2} + I(u_n). \tag{1.23}$$

Portanto, de (1.22) e (1.23) obtemos

$$\begin{aligned}
I(tu_n) &\le \frac{t^2\varepsilon_n}{2} + \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^{q+1}}{q+1}\right]\int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}\,dx \\
&\quad + \int_\Omega \left[\frac{1}{2}f(x,u_n^+)u_n^+ - F(x,u_n^+)\right]\,dx \\
&\le \frac{t^2\varepsilon_n}{2} + \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^{q+1}}{q+1}\right]\int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}\,dx + \frac{\varepsilon_n}{2} + I(u_n),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$I(tu_n) \le \frac{(t^2+1)\varepsilon_n}{2} + \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^{q+1}}{q+1}\right]\int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}\,dx + I(u_n),$$

como desejado. □

Vamos ao segundo resultado de existência de solução deste capítulo. Usaremos a seguinte versão do Teorema do Passo da Montanha.

Proposição 1.4 (**Teorema do Passo da Montanha**)**.** Seja E um espaço de Banach real. Suponha que $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ é um funcional satisfazendo a condição

$$\max\{I(0), I(e)\} \leq \nu < \eta \leq \inf_{\|u\|=\rho} I(u)$$

para algum $\rho > 0$ e $e \in E$ com $\|e\| > \rho$. Seja $c \geq \eta$ caracterizado por

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq \tau \leq 1} I(\gamma(\tau)),$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E); \quad \gamma(0) = 0, \quad \gamma(1) = e\}$. Então, existe uma sequência $\{u_n\}$ em E tal que

$$I(u_n) \to c \quad \text{e} \quad (1 + \|u_n\|)\|I'(u_n)\|_{E^*} \to 0. \tag{1.24}$$

Observação 1.1. Uma sequência que satisfaz (1.24) é dita sequência de Cerami para o funcional I no nível c..

De posse deste teorema, vamos ao nosso resultado.

Teorema 1.5. *Sejam $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo as condições $(f1) - (f4)$ e $h : \Omega \to \mathbb{R}$ satisfazendo a condição $(h1)$. Então:*

(i) Se, para quaisquer que sejam $\sigma \in (0,1)$ e $\tau > 0$ suficientemente pequeno com $\sigma > q + (1+q)\tau$, tem-se:
$(f2)'$: $\lim_{s \to +\infty} \frac{f(x,s)}{s} = +\infty$, mas $\lim_{s \to +\infty} \frac{f(x,s)}{s^{1+\tau}} = 0$ uniformemente em $x \in \Omega$;
(fF) : $\lim_{s \to +\infty} \frac{f(x,s)s - 2F(x,s)}{s^{1+\sigma}} = \gamma$ uniformemente em $x \in \Omega$, onde γ pode ser $+\infty$, então existe $m > 0$ tal que, qualquer que seja $h \in L^\infty(\Omega)$ com $\|h\|_\infty < m$, o problema (1.1) possui uma solução não negativa $u_2 \in H_0^1(\Omega)$ com $I(u_2) > 0$. Além disso, u_2 é positiva se $h(x) > 0$.

(ii) Se $h(x) \leq 0$, então o problema (1.1) possui uma solução não negativa $u_2 \in H_0^1(\Omega)$ com $I(u_2) > 0$.

Demonstração. (i) Note que as funções f e h satisfazem as hipóteses do Lema 1.1 e, consequentemente, I tem a geometria do passo da montanha. Mostraremos que o Problema (1.1) possui uma solução u_2 do tipo passo da montanha. Pelo Teorema do Passo da Montanha, Proposição 1.4, sabemos que existe uma sequência $\{u_n\}$ em $H_0^1(\Omega)$ tal que

$$I(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{1}{q+1}\int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}\,dx - \int_\Omega F(x, u_n^+)\,dx = c + o(1), \tag{1.25}$$

$$I'(u_n)u_n = \int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dx - \int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}\,dx - \int_\Omega f(x,\, u_n^+)\,u_n\,dx = o(1), \tag{1.26}$$

e para toda $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ temos

$$I'(u_n)\varphi = \int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi \, dx - \int_\Omega h(x)(u_n^+)^q \, \varphi \, dx - \int_\Omega f(x,\, u_n^+) \, \varphi \, dx = o(1). \quad (1.27)$$

Veremos que $\{u_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$. De fato, por $(f2)'$ dado $\epsilon > 0$, existe $T_1 > 0$ tal que

$$f(x,t) \leq \epsilon t^{1+\tau} \quad \forall\, t \geq T_1,\ x \in \Omega, \quad (1.28)$$

e segue de (fF) que existe $T_2 > 0$ tal que

$$f(x,t)t - 2F(x,t) \geq \frac{\gamma}{2} t^{1+\sigma} > 0 \quad \forall\, t \geq T_2,\, x \in \Omega. \quad (1.29)$$

Tome $T = \max\{T_1, T_2\}$, para cada $n \geq 1$ defina

$$A_n = \{x \in \Omega; |u_n(x)| \geq T\}, \quad B_n = \{x \in \Omega; |u_n(x)| \leq T\}.$$

Pela continuidade de f e definição de B_n, existe $C_0 = C_0(T) > 0$ tal que

$$-\, C_0 \leq \int_{B_n} [f(x,u_n)u_n - 2F(x,u_n)] \; dx \leq C_0. \quad (1.30)$$

Observe que pela definição do conjunto A_n e (1.29), temos também

$$f(x,u_n^+)u_n^+ - 2F(x,u_n^+) \geq 0, \quad \forall x \in A_n. \quad (1.31)$$

Para $T > 0$ acima, multiplicando (1.25) por -2 somando com (1.27) temos

$$\left(\frac{2}{q+1} - 1\right) \int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1} \, dx + 2c + o(1) = \int_\Omega \left[f(x,u_n^+)u_n^+ - 2F(x,u_n^+)\right] \, dx,$$

donde segue de (1.30) - (1.31), que

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{q+1} - 1\right) \int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1} \, dx + 2c + o(1) \;\; &\geq \;\; \int_{A_n} \left[f(x,u_n^+)u_n^+ - 2F(x,u_n^+)\right] \, dx \\ &\geq \;\; \frac{\gamma}{2} \int_{A_n} (u_n^+)^{1+\sigma} \, dx - C_0,\end{aligned}$$

o que implica que existem $C_1 = C_1(C_0, c, \gamma) > 0$, $C_2 = C_2\left(\gamma, \|h\|_\infty, q\right) > 0$ tais que

$$\int_{A_n} (u_n^+)^{1+\sigma} \, dx \leq C_1 + C_2 \|u_n\|^{q+1} + o(1). \quad (1.32)$$

Por outro lado, fixado $m = (1+q)/q > 2$, visto que $q \in (0,1)$. Multiplicando (1.25) por $-1/m$ e somando com (1.27) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1-q}{2(1+q)}\|u_n\|^2 &- \frac{1-q}{q+1}\int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}\,dx - \int_\Omega \left[F(x,u_n^+) - \frac{1}{m}f(x,u_n^+)u_n^+\right]dx \\ &= c + o(1). \end{aligned} \tag{1.33}$$

Note que, pela continuidade de f e definição de B_n, existe $C_3 > 0$ tal que

$$\left|\int_{B_n}\left[F(x,u_n^+) - \frac{1}{m}f(x,u_n^+)u_n^+\right]dx\right| \le C_3.$$

Então, segue de (1.30) - (1.33) que

$$\begin{aligned} \frac{1-q}{2(1+q)}\|u_n\|^2 + o(1) &\le c + C_3 + \int_{A_n}\left[F(x,u_n^+) - \frac{1}{m}f(x,u_n^+)u_n^+\right]dx \\ &\quad + \frac{1-q}{q+1}\int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}\,dx \\ &\le c + C_3 + \int_{A_n}\left[\frac{1}{2}f(x,u_n^+)u_n^+ - \frac{1}{m}f(x,u_n^+)u_n^+\right]dx \\ &\quad + \frac{1-q}{q+1}\int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}\,dx. \end{aligned}$$

Usando a continuidade da imersão de Sobolev e tomando $\epsilon = 2(1+q)/(1-q)$ em (1.28), segue que

$$\begin{aligned} \frac{1-q}{2(1+q)}\|u_n\|^2 + o(1) &\le c + C_3 + \frac{1-q}{2(1+q)}\int_{A_n} f(x,u_n^+)u_n^+\,dx \\ &\quad + \frac{C(1-q)}{1+q}\|h(x)\|_\infty\|u_n^+\|^{q+1} \\ &\le c + C_3 + \int_{A_n}(u_n^+)^{2+\tau}\,dx + C\|h(x)\|_\infty\|u_n^+\|^{q+1}. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, Teorema A.6, com expoentes conjugados sendo $p = (1+\sigma)/(1+\tau)$ e $p' = (1+\sigma)/(\sigma-\tau)$ e usando novamente a imersão de Sobolev seque que

$$\begin{aligned} \frac{1-q}{2(1+q)}\|u_n\|^2 + o(1) &\le c + C_3 + \left(\int_{A_n}(u_n^+)^{1+\sigma}\,dx\right)^{\frac{1+\tau}{1+\sigma}}\left(\int_{A_n}(u_n^+)^{\frac{1+\sigma}{\sigma-\tau}}\,dx\right)^{\frac{\sigma-\tau}{\sigma+1}} \\ &\quad + C\|h(x)\|_\infty\|u_n^+\|^{q+1} \\ &\le c + C_3 + C\left(\int_{A_n}(u_n^+)^{1+\sigma}\,dx\right)^{\frac{1+\tau}{1+\sigma}}\|u_n\| \\ &\quad + C\|h(x)\|_\infty\|u_n^+\|^{q+1}. \end{aligned}$$

Daí, usando a desigualdade de Young, com $\varepsilon = (1-q)/(1+q)$, Teorema A.5, obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{1-q}{2(1+q)}\|u_n\|^2 + o(1) &\leq c + C_3 + \frac{1-q}{4(1+q)}\|u_n\|^2 + \frac{(1+q)C^2}{1-q}\left(\int_{A_n}(u_n^+)^{1+\sigma}\,dx\right)^{\frac{2(1+\tau)}{1+\sigma}} \\
&\quad + C\|h(x)\|_\infty \|u_n^+\|^{q+1} \\
&\leq + C\|h(x)\|_\infty \|u_n^+\|^{q+1} + c + C_3 + \frac{1-q}{4(1+q)}\|u_n\|^2 \\
&\quad + \frac{(1+q)C^2}{1-q}\left(C_2\|u_n\|^{q+1} + C_1\right)^{\frac{2(1+\tau)}{1+\sigma}}.
\end{aligned}
$$

Isso implica que $\{u_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$ uma vez que temos $0 < q < 1$ e temos $[2(1+q)(1+\tau)]/(1+\sigma) < 2$ pois $q + (1+q)\tau < \sigma < 1$.

Sendo $\{u_n\}$ uma sequência limitada, sabemos que ela converge fracamente em $H_0^1(\Omega)$, a menos de subsequência. Tomando u_2 este limite fraco, graças à compacidade da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ temos $u_n \to u_2$ em $L^r(\Omega)$ para todo $r \in [1, 2^*)$, se $N \geq 3$ ou $r \in [1, +\infty)$, se $N = 1, 2$, e $u_n(x) \to u_2(x)$ q.t.p. em Ω. Daí, como na Afirmação 1.4, vemos que u_2 é uma solução fraca do Problema (1.1). Com argumentos análogos aos usados na Afirmação 1.5, vemos que $u_n \to u_2$ em $H_0^1(\Omega)$ e assim $I(u_2) = c > 0$, onde c é o nível do passo da montanha. Além disso, segue do Princípio do Máximo que $u_2 > 0$ se $h \geq 0$.

(ii) Observamos primeiramente que, sendo $h \leq 0$, não há restrição em $\|h\|_\infty$ para que o funcional I tenha a geometria do passo da montanha. Analisando a demonstração do Lema 1.1, ao invés de (1.10) obtemos

$$
\begin{aligned}
I(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega h(x)(u^+)^{q+1}\,dx - \int_\Omega F(x,u^+)\,dx \\
&\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x,u^+)\,dx \geq \left(C_1 - C_3\|u\|^{k-1}\right)\|u\|^2,
\end{aligned}
$$

o que garante que $u = 0$ é um mínimo local estrito para I. A segunda parte da geometria não se altera e assim vemos que o resultado do Lema 1.1 também vale neste caso. Usaremos novamente a Proposição 1.4 para provar que o Problema (1.1) possui uma solução do tipo passo da montanha. É suficiente mostrar que a sequência $\{u_n\}$ em $H_0^1(\Omega)$ que satisfaz (1.25) - (1.27) é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Feito isso, o resultado segue como fizemos no item (i). Suponha por contradição que $\|u_n\| \to +\infty$ e para $c > 0$ dado na Proposição 1.4 defina

$$
t_n = \frac{2\sqrt{c}}{\|u_n\|} \qquad \text{e} \qquad w_n = t_n u_n = \frac{2\sqrt{c}\,u_n}{\|u_n\|}. \tag{1.34}
$$

Dessa forma, temos $\{w_n\}$ limitada em $H_0^1(\Omega)$, pois $\|w_n\| = 2\sqrt{c}$ e a menos de subsequência existe $w \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} w_n \rightharpoonup w \quad \text{em } H_0^1(\Omega), \\ w_n(x) \to w(x) \quad q.t.p. \text{ em } \Omega, \\ w_n \to w \quad \text{em } L^r(\Omega), \end{cases}$$

onde $1 \leq r < 2^*$, se $N \geq 3$ ou $r \in [1, +\infty)$ se $N = 1, 2$. Analogamente, considerando $w_n^+ = 2\sqrt{c} u_n^+ / \|u_n\|$ tem-se

$$\begin{cases} w_n^+(x) \to w^+(x) \quad q.t.p. \quad \text{em } \Omega, \\ w_n^+ \to w^+ \quad \text{em } L^r(\Omega). \end{cases} \tag{1.35}$$

Observe que $w^+ \not\equiv 0$. De fato, se $w^+ \equiv 0$ então por (1.35) temos $w^+ \to 0$ em $L^2(\Omega)$ e $w^+ \to 0$ em $L^{q+1}(\Omega)$. Assim, segue de (1.35) e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, Teorema A.1, que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega F(x, w_n^+(x))\, dx = \lim_{n \to +\infty} \int_\Omega h(x)(w_n^+)^{q+1}\, dx = 0. \tag{1.36}$$

Daí, tem-se

$$I(w_n) = \frac{1}{2}\|w_n\|^2 - \frac{1}{q+1} \int_\Omega h(x)(w_n^+)^{q+1}\, dx - \int_\Omega F(x, w_n^+)\, dx = 2c - o(1). \tag{1.37}$$

Por outro lado, por (1.34), temos que $t_n \to 0$ quando $n \to +\infty$, pois $\|u_n\| \to +\infty$. Assim, segue do Lema 1.3 que

$$\begin{aligned} I(w_n) &= I(tu_n) \leq \frac{(t_n^2 + 1)\varepsilon_n}{2} + \left[\frac{t_n^2}{2} - \frac{t_n^{q+1}}{q+1}\right] \int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}\, dx + I(u_n) \\ &= \frac{(t_n^2 + 1)\varepsilon_n}{2} + \left[\frac{t_n^{1-q}}{2} - \frac{1}{q+1}\right] \int_\Omega h(x)(w_n^+)^{q+1}\, dx + I(u_n). \end{aligned} \tag{1.38}$$

Passando ao limite em (1.38) e usando (1.36) temos que $I(w_n) \to c$, o que contradiz (1.37). Portanto, $w^+ \not\equiv 0$. Considere

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega; w^+(x) = 0\}, \quad \Omega_2 = \{x \in \Omega; w^+(x) > 0\}.$$

Por (1.34) e (1.35) temos

$$w_n^+(x) = \frac{2\sqrt{c}\, u_n^+(x)}{\|u_n(x)\|} \to w^+(x) > 0 \quad q.t.p. \text{ em } \Omega_2,$$

mas, como por hipótese $\|u_n\| \to +\infty$, então devemos ter $u_n^+(x) \to +\infty$ $q.t.p.$ em Ω_2.

Multiplicando (1.27) por $(2\sqrt{c})/\|u_n\|$ temos

$$\int_\Omega \nabla w_n \cdot \nabla \varphi \, dx - \frac{2\sqrt{c}}{\|u_n\|^{1-q}} \int_\Omega h(x)(w_n^+)^q \, \varphi \, dx - \int_\Omega p(x, \, u_n^+) \, w_n \, \varphi \, dx = o(1)$$

para toda $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Em particular, tomando $\varphi = w^+$ obtemos

$$\int_\Omega \nabla w_n \cdot \nabla w^+ \, dx - \frac{2\sqrt{c}}{\|u_n\|^{1-q}} \int_\Omega h(x)(w_n^+)^q \, w^+ \, dx - \int_\Omega p(x, \, u_n^+) \, w_n \, w^+ \, dx = o(1)$$

onde

$$p(x,s) = \begin{cases} \dfrac{f(x,s)}{s} & \text{se} \quad s > 0, \\ 0 & \text{se} \quad s \leq 0, \end{cases}$$

e $p(x,s) = p(x,s^+) \geq 0$. Daí, segue do Lema de Fatou, Teorema A.12, que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla w^+|^2 \, dx &= \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega p(x,u_n) w_n^+ w^+ \, dx \geq \liminf_{n\to+\infty} \int_{\Omega_2} \frac{f(x,u_n^+)}{u_n^+} w_n^+ w^+ \, dx \\ &\geq \int_{\Omega_2} \liminf_{n\to+\infty} \left[\frac{f(x,u_n^+)}{u_n^+} w_n^+ \right] w^+ \, dx. \end{aligned}$$

Porém

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x,u_n^+)}{u_n^+} w_n^+ w^+ = +\infty \quad q.t.p. \text{ em } \Omega_2,$$

já que f é superlinear. Assim, devemos ter $|\Omega_2| = 0$, o que implica que $w^+ \equiv 0$ q.t.p. em Ω, o que é uma contradição, pois provamos que $w^+ \not\equiv 0$. Portanto, $\{u_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$.

Sendo $\{u_n\}$ uma sequência limitada, sabemos que ela converge fracamente em $H_0^1(\Omega)$, a menos de subsequência. Tomando u_2 este limite fraco, graças à compacidade da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ temos $u_n \to u_2$ em $L^r(\Omega)$ para todo $r \in [1, 2^*)$, se $N \geq 3$ ou $r \in [1, +\infty)$, se $N = 1, 2$, e $u_n(x) \to u_2(x)$ q.t.p. em Ω. Daí, como na Afirmação 1.4, vemos que u_2 é uma solução fraca do Problema (1.1). Com argumentos análogos aos usados na Afirmação 1.5, vemos que $u_n \to u_2$ em $H_0^1(\Omega)$ e assim $I(u_2) = c > 0$, onde c é o nível do passo da montanha. $\square$

Capítulo 2

Existência e multiplicidade de soluções para problemas assintoticamente lineares

2.1 Apresentação do problema

Neste capítulo, mostraremos a existência de soluções não negativas em $H_0^1(\Omega)$ para o seguinte problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta u = h(x)u^q + f(x,\, u),\; x \in\, \Omega, \\ 0 \leq u \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, $N \geq 1$, $0 < q < 1$. Suponhamos que a função função $h : \Omega \to \mathbb{R}$ satisfaz
$(h1) : h(x) \in L^\infty(\Omega)\,\text{e}\,h(x) \not\equiv 0;$
e a não linearidade $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes condições:
$(f1) : f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R});\; f(x,0) \equiv 0;\; f(x,s) \geq (\not\equiv) 0$ para quaisquer $s \geq 0$, $x \in \Omega$;
$(\overline{f2}) : \displaystyle\lim_{s\to 0^+} \frac{f(x,s)}{s} = \mu \in [0, \lambda_1)$ e $\displaystyle\lim_{s\to +\infty} \frac{f(x,s)}{s} = l \in\, (\lambda_1, +\infty)$
uniformemente em $x \in \Omega$, onde $\lambda_1 > 0$ é o primeiro autovalor de $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$.

A condição $(\overline{f2})$ nos diz que f é assintoticamente linear no infinito. Uma vez que procuramos soluções não negativas, o funcional definido em $H_0^1(\Omega)$ associado ao problema (1.1) é dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega h(x)(u^+)^{q+1}\, dx - \int_\Omega F(x, u^+)\, dx,$$

onde $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)\, ds$.

Uma vez que a condição $(\overline{f2})$ implica em $(f3)$, graças ao Teorema B.1 no Apêndice B, tem-se que $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ com

$$I'(u)\varphi = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx - \int_\Omega h(x)(u^+)^q \varphi \, dx - \int_\Omega f(x, u^+)\varphi \, dx \quad \forall u, \, \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

2.2 Geometria do passo da montanha

Nesta seção, mostraremos que o funcional I tem a geometria do passo da montanha.

Lema 2.1. Suponha que a função $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaça as condições $(f1) - (\overline{f2})$ e que a função $h : \Omega \to \mathbb{R}$ satisfaça a condição $(h1)$. Então existe uma constante $m = m(\mu, q, f, N, \Omega) > 0$ tal que qualquer que seja $h \in L^\infty(\Omega)$ com $\|h\|_\infty < m$ temos:

(i) Existem constantes $\rho, \eta > 0$ tais que $I(u) \geq \eta > 0$ $\forall u \in H_0^1(\Omega)$ com $\|u\| = \rho$.

(ii) Existe e em $H_0^1(\Omega)$ com $\|e\| > \rho$ tal que $I(e) < 0$.

Demonstração. (i) Fixemos um valor $k \in (1, 2^* - 1)$, se $N \geq 3$, ou $k > 1$ se $N = 1, 2$. Graças à condição $(\overline{f2})$ temos

$$\lim_{s \to \infty} \frac{f(x,s)}{s^k} = \lim_{s \to \infty} \frac{f(x,s)}{s} \cdot \frac{1}{s^{1-k}} = l \cdot 0 = 0,$$

uniformemente em $x \in \Omega$, ou seja, f satisfaz $(f3)$. Daí, fixado $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\mu + \varepsilon_0 < \lambda_1$, existe uma constante positiva C_0 tal que

$$F(x, u^+) \leq \frac{\mu + \epsilon_0}{2}(u^+)^2 + C_0(u^+)^{k+1},$$

como mostrado na Observação B.1. Com esta desigualdade, a prova deste item segue exatamente como a prova do item (i) em Lema 1.1, uma vez que este resultado não usa o fato de que f é superlinear no infinito.

Provaremos o item (ii). Como $\lambda_1 < l < +\infty$, por $(\overline{f2})$ segue da regra de L'Hospital que

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{F(x,s)}{s^2} = \lim_{s \to +\infty} \frac{f(x,s)}{2s} = \frac{l}{2} > \frac{\lambda_1}{2} \quad \text{uniformemente em } x \in \Omega.$$

Então, para $s_0 > 0$ suficientemente grande podemos encontrar $\tau > 0$ tal que

$$\frac{F(x,s)}{s^2} \geq \frac{l - \tau}{2} > \frac{\lambda_1}{2} \quad \text{uniformemente em } x \in \Omega, \quad \text{para todo } s \geq s_0.$$

Denotemos $a = l - \tau - \lambda_1 > 0$. Seja $\varphi_1 > 0$ uma autofunção associada a λ_1. Tomando $\Omega_0 = \{x \in \Omega : dist(x, \partial\Omega) < \delta\}$ e usando o fato de que φ_1 é contínua em $\overline{\Omega}$, $\varphi_1 > 0$

em Ω e que sua integral é absolutamente contínua (veja Teorema A.9), vemos que para $\delta > 0$ suficientemente pequeno tem-se

$$\int_{\Omega_0} \varphi_1^2 dx \leq \frac{a}{2\lambda_1} \int_{\Omega \setminus \Omega_0} \varphi_1^2 dx.$$

Além disso, sendo φ_1 contínua e positiva no compacto $\Omega \setminus \Omega_0$, tem-se

$$\alpha := \min_{x \in \Omega \setminus \Omega_0} \varphi_1(x) > 0.$$

Então, para $t \geq s_0/\alpha$, temos

$$F(x, t\varphi_1(x)) \geq \frac{(l-\tau)}{2}(t\varphi_1(x))^2 \quad \text{para todo } x \in \Omega \setminus \Omega_0.$$

Já que $F(x,s) \geq 0$ para $s \geq 0$, donde

$$\int_\Omega F(x, t\varphi_1)\, dx \geq \int_{\Omega \setminus \Omega_0} F(x, t\varphi_1) dx \geq \frac{t^2(l-\tau)}{2} \int_{\Omega \setminus \Omega_0} \varphi_1^2 dx.$$

Logo, para $t \geq s_0/\alpha$, temos

$$\begin{aligned} I(t\varphi_1) &= \frac{t^2}{2}\|\varphi_1\|^2 - \frac{t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega h(x)(\varphi_1)^{q+1}\, dx - \int_\Omega F(x, t\varphi_1)\, dx \\ &\leq \frac{t^2}{2}\|\varphi_1\|^2 - \frac{t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega h(x)(\varphi_1)^{q+1}\, dx - \frac{t^2(l-\tau)}{2}\int_{\Omega \setminus \Omega_0} \varphi_1^2 dx. \end{aligned}$$

Lembrando que

$$-\Delta \varphi_1 = \lambda_1 \varphi_1 \quad \text{em } \Omega,$$

segue que

$$\begin{aligned} I(t\varphi_1) &\leq \frac{t^2}{2}\lambda_1 \int_\Omega \varphi_1^2\, dx - \frac{t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega h(x)(\varphi_1)^{q+1}\, dx - \frac{t^2}{2}(l-\tau)\int_{\Omega \setminus \Omega_0} \varphi_1^2\, dx \\ &= \frac{t^2}{2}\lambda_1 \left(\int_{\Omega_0} \varphi_1^2 + \int_{\Omega \setminus \Omega_0} \varphi_1^2\, dx \right) - \frac{t^2}{2}(l-\tau)\int_{\Omega \setminus \Omega_0} \varphi_1^2\, dx \\ &\quad - \frac{t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega h(x)(\varphi_1)^{q+1}\, dx \\ &\leq \frac{t^2}{2}\left(\lambda_1 - (l-\tau) + \frac{a}{2} \right)\int_{\Omega \setminus \Omega_0} \varphi_1^2\, dx - \frac{t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega h(x)(\varphi_1)^{q+1}\, dx \\ &= -t^2 C_1 - t^{q+1} C_2 \to -\infty \end{aligned}$$

quando $t \to +\infty$. (Lembre que $\left((l-\tau) - \lambda_1 - \frac{a}{2}\right) > 0$). Logo, existe $t_0 > 0$ suficiente grande tal que $e := t_0\varphi_1$ satisfaz $\|e\| > \rho$ e $I(e) < 0$, ou seja, a segunda condição é satisfeita. □

Usando o item (i) do Lema 2.1 e o Princípio Variacional de Ekeland, repetindo a prova do Teorema 1.2 obtemos o seguinte resultado:

Teorema 2.2. *Suponha que a função* $f : \overline{\Omega}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *satisfaça as condições* $(f1)-(\overline{f2})$ *e que a função* $h : \Omega \to \mathbb{R}$ *satisfaça as condições* $(h1) - (h2)$*, a saber*
$(h2)$: *existe* $v \in C_0^\infty(\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega h(x)(v^+)^{q+1}\, dx > 0.$$

Então, existe uma constante $m = m(\mu, q, f, N, \Omega) > 0$ *tal que qualquer que seja* $h \in L^\infty(\Omega)$ *com* $\|h\|_\infty < m$*, o problema (2.1) tem uma solução não negativa* $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ *com* $I(u_1) < 0$*. Além disso, se* $h(x) \geq 0$*, então* $u_1 > 0$ *q.t.p. em* Ω*.*

2.3 Existência de solução do tipo passo da montanha

Já sabemos, pelo Lema 2.1, que o funcional I tem a geometria do passo da montanha. Vamos à prova de mais um resultado de existência.

Teorema 2.3. *Suponha que a função* $f : \overline{\Omega}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *satisfaça as condições* $(f1)-(\overline{f2})$ *e que a função* $h : \Omega \to \mathbb{R}$ *satisfaça a condição* $(h1)$*. Então existe uma constante* $m = m(\mu, q, f, N, \Omega)$ *tal que qualquer que seja* $h \in L^\infty(\Omega)$ *com* $\|h\|_\infty < m$*, o problema (2.1) tem uma solução não negativa* $u_2 \in H_0^1(\Omega)$*, com* $I(u_2) > 0$*, e* $u_2 > 0$ *se* $h(x) \geq 0$*.*

Demonstração. Como $(f1) - (\overline{f2})$ são satisfeitas, pelo Lema 2.1 sabemos que I tem a geometria do passo da montanha. Aplicando a Proposição 1.4 com $\nu = 0$, $E = H_0^1(\Omega)$, e para c definido na mesma proposição, temos que existe uma sequência $\{u_n\}$ em $H_0^1(\Omega)$ tal que

(i) $I(u_n) \to c$;

(ii) $(1 + \|u_n\|)\|I'(u_n)\| \to 0$.

Observe que (ii) garante que $\|I'(u_n)\| \to 0$ pois

$$0 \leq \|I'(u_n)\| \leq (1 + \|u_n\|)\|I'(u_n)\|.$$

Em particular, $I'(u_n)\varphi \to 0$ qualquer que seja $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Temos também que $|I'(u_n)u_n| \to 0$ pois

$$|I'(u_n)(u_n)| \leq \|I'(u_n)\|_{E^*}\|u_n\| \leq (1 + \|u_n\|)\|I'(u_n)\|_{E^*}.$$

Logo,

$$I(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{1}{q+1}\int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}\,dx - \int_\Omega F(x, u_n^+)\,dx = c + o(1),$$

$$I'(u_n)u_n = \int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dx - \int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}\,dx - \int_\Omega f(x,\, u_n^+)\,u_n\,dx = o(1), \tag{2.2}$$

e para toda $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ temos

$$I'(u_n)\varphi = \int_\Omega \nabla u_n \nabla\varphi\,dx - \int_\Omega h(x)(u_n^+)^q\,\varphi\,dx - \int_\Omega f(x,\, u_n^+)\,\varphi\,dx = o(1). \tag{2.3}$$

Se $\{u_n\}$ for uma sequência limitada, sabemos que ela converge fracamente em $H_0^1(\Omega)$, a menos de subsequência. Tomando u_2 este limite fraco, graças à compacidade da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ temos $u_n \to u_2$ em $L^r(\Omega)$ para todo $r \in [1, 2^*)$, se $N \geq 3$ ou $r \in [1, +\infty)$, se $N = 1, 2$, e $u_n(x) \to u_2(x)$ q.t.p. em Ω. Daí, como na Afirmação 1.4 vemos que, u_2 é uma solução fraca do Problema 2.1. Além disso, como na Afirmação 1.5, vemos que $\|u_n\| \to \|u_2\|$. Consequentemente, $u_n \to u_2$ em $H_0^1(\Omega)$. Isso implica que $I(u_n) \to I(u_2)$ e, pela unicidade do limite, $I(u_2) = c$, o nível do passo da montanha, que é positivo. Em particular, $u_2 \neq 0$. Observe que

$$I(u_1) = c_1 < 0 < c = I(u_2),$$

o que garante que $u_1 \neq u_2$. Para verificar que u_2 é uma solução não negativa, tomando $\varphi = u_2^-$ como função teste, temos

$$\int_\Omega \nabla u_2 \nabla u_2^-\,dx = \int_\Omega h(x)(u_2^+)^q u_2^-\,dx + \int_\Omega f(x, u_2^+)u_2^-\,dx.$$

Já que $f(x, s) = 0$ para $s < 0$, isso implica em

$$\int_\Omega |\nabla u_2^-|^2\,dx = 0 \Rightarrow \|u_2^-\| = 0 \Rightarrow u_2^- = 0 \Rightarrow u_2 \geq 0.$$

Além disso, se $h(x) \geq 0$ então, como u_2 é solução não trivial de (2.1), segue do Princípio do Máximo, Teorema A.14, que $u_2 > 0$.

Para concluirmos a prova do teorema, é suficiente mostrar que a sequência $\{u_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$.

Afirmação 2.1. $\{u_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$.

De fato, suponha por contradição, que $\{u_n\}$ é ilimitada. Sem perda de generalidade, suponhamos que $\|u_n\| \to +\infty$. Considere

$$w_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}. \tag{2.4}$$

Assim, temos $\{w_n\}$ limitada em $H_0^1(\Omega)$, pois $\|w_n\| = 1$ e a menos de subsequência existe $w \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} w_n \rightharpoonup w \quad \text{em}\, H_0^1(\Omega), \\ w_n(x) \to w(x) \quad q.t.p. \ \text{em} \ \Omega, \\ w_n \to w \quad \text{em} \ L^r(\Omega), \end{cases}$$

onde $1 \leq r < 2^*$, se $N \geq 3$ ou $r \in [1, +\infty)$ se $N = 1, 2$. Analogamente, considerando $w_n^+ = u_n^+/\|u_n\|$ tem-se

$$\begin{cases} w_n^+(x) \to w^+(x) \quad q.t.p. \quad \text{em} \ \Omega, \\ w_n^+ \to w^+ \quad \text{em} \ L^r(\Omega). \end{cases} \tag{2.5}$$

Observe que $w \not\equiv 0$. De fato, se $w \equiv 0$, então por $(f1) - (\overline{f2})$, (2.5) e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, Teorema A.1 temos

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega h(x)(w_n^+)^{q+1}\, dx = 0,$$

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega F(x, w_n^+(x))\, dx = \lim_{n \to +\infty} \int_\Omega f(x, w_n^+(x)) w_n(x)\, dx = 0.$$

Multiplicando (2.2) por $1/\|u_n\|^2$, e usando (2.4) obtemos

$$\|w_n\|^2 - \frac{1}{\|u_n\|^{1-q}} \int_\Omega h(x)(w_n^+)^{q+1}\, dx - \int_\Omega p(x,\, u_n)\, (w_n^+)^2\, dx = o(1), \tag{2.6}$$

onde

$$p(x, s) = \begin{cases} \dfrac{f(x, s)}{s} & \text{se} \quad s > 0, \\ 0 & \text{se} \quad s \leq 0, \end{cases}$$

e $p(x, s) = p(x, s^+) \geq 0$. Além disso, segue de $(f1)$ e $(\overline{f2})$ que existe uma constante

$M > 0$ tal que

$$\left|\frac{f(x,s)}{s}\right| \leq M, \quad \forall x \in \Omega \text{ e } s \in \mathbb{R}. \tag{2.7}$$

Como $\|u_n\| \to +\infty$, temos $1/\|u_n\|^{1-q} \to 0$, além disso, graças a (2.5) temos

$$\int_\Omega h(x)(w_n^+)^{q+1} \to 0.$$

Daí,

$$\frac{1}{\|u_n\|^{1-q}} \int_\Omega h(x)(w_n^+)^{q+1} \to 0$$

donde segue de (2.6) que

$$\|w_n\|^2 - \int_\Omega p(x,\, u_n)\,(w_n^+)^2\,dx = o(1). \tag{2.8}$$

Observe também que por (2.5) e (2.7) temos

$$\left|\int_\Omega p(x,\, u_n)\,(w_n^+)^2\,dx\right| \leq \int_\Omega |p(x,u_n)|\,\left|(w_n^+)^2\right| \leq M \int_\Omega (w_n^+)^2 \to 0.$$

Daí, (2.8) implica que $\|w_n\|^2 \to 0$, o que é uma contradição, pois $\|w_n\| = 1$. Logo $w \not\equiv 0$.

Note também que $w(x) > 0$ q.t.p. em Ω. De fato, multiplicando (2.3) por $1/\|u_n\|$ obtemos

$$\int_\Omega \nabla w_n \nabla \varphi\,dx - \frac{1}{\|u_n\|^{1-q}} \int_\Omega h(x)(w_n^+)^q\,\varphi\,dx - \int_\Omega p(x,\, u_n^+)\,w_n\,\varphi\,dx = o(1), \tag{2.9}$$

para toda $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Por (2.7) temos $\{p(\cdot, u_n)\}$ uma sequência limitada em $L^\infty(\Omega)$. Em particular, é limitada em $L^2(\Omega)$ e, portanto, existe $v \in L^2(\Omega)$ tal que

$$p(x,u_n) \rightharpoonup v \text{ em } L^2(\Omega).$$

Ademais, (2.5) garante que

$$w_n^+\varphi \to w^+\varphi \quad \text{em } L^2(\Omega), \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

donde

$$\int_\Omega p(x,u_n) w_n^+(x)\varphi\,dx \to \int_\Omega v(x) w^+\,\varphi\,dx.$$

Por outro lado, como

$$\left|\int_\Omega h(x)(w_n^+)^q \varphi \, dx\right| \leq c \quad \text{e} \quad \frac{1}{\|u_n\|^{1-q}} \to 0,$$

temos

$$\frac{1}{\|u_n\|^{1-q}} \int_\Omega h(x)(w_n^+)^q \varphi \, dx \to 0.$$

Daí, segue de (2.9) que

$$\int_\Omega \nabla w \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega v(x) w^+ \, \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{2.10}$$

Pela densidade de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H_0^1(\Omega)$ concluímos que esta última igualdade vale para toda $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Tomando $\varphi = w^-$ em (2.10), temos

$$\int_\Omega |\nabla w^-|^2 = \int_\Omega \nabla w \nabla w^- = \int_\Omega v(x) w^+(x) \, w^-(x) \, dx = 0,$$

isto é,

$$\|w^-\|^2 = 0 \Rightarrow w^- = 0 \ \ q.t.p. \text{ em } \Omega,$$

ou seja, $w \geq 0$. Por (2.10), sabemos que $w \geq 0$ é uma solução fraca para o seguinte problema:

$$-\Delta w = v(x) w^+ \geq 0.$$

Segue do Princípio do Máximo Forte, Teorema A.14, que $w(x) > 0$ q.t.p. em Ω, o que conclui nossa afirmação.

Finalmente, mostraremos que w satisfaz a seguinte identidade:

$$\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla \varphi \, dx = l \int_\Omega w \, \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{2.11}$$

Por (2.4) e (2.5) temos

$$w_n(x) = \frac{u_n(x)}{\|u_n\|} \to w(x) > 0 \quad q.t.p. \text{ em}\, \Omega,$$

mas, como por hipótese $\|u_n\| \to +\infty$, então devemos ter $u_n(x) \to +\infty$ q.t.p. em Ω, e segue de $(\overline{f2})$ que

$$p(x, u_n) = \frac{f(x, u_n)}{u_n} \to l.$$

Consequentemente $v(x) = \lim p(x, u_n) = l$. Então (2.11), segue de (2.10) e do fato que $w > 0$.

A equação (2.11) nos diz que l é um autovalor de $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$, com autofunção positiva w. Entretanto, isso contradiz o fato de que $l > \lambda_1$. Logo, nossa hipótese de que $\|u_n\| \to +\infty$ não pode ocorrer pra nenhuma subsequência de $\{u_n\}$. Portanto, a sequência $\{u_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Isso conclui a prova deste teorema. $\square$

Capítulo 3

Existência e não existência de soluções positivas para problemas parametrizados

3.1 Apresentação do Problema

Neste capítulo, investigaremos a existência e não existência de solução para o problema (1) no caso especial em que $f(x,u)$ é linear com respeito a u, mais especificamente, vamos analisar o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = h(x)u^q + \lambda u, \;\; x \in \Omega, \\ 0 \leq u \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, $N \geq 1$, $0 < q < 1$ e $\lambda > 0$.

O funcional definido em $H_0^1(\Omega)$ associado ao problema (3.1) é dado por

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega (u^+)^2 \, dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega h(x)(u^+)^{q+1} \, dx,$$

onde $u^+ = \max\{u, 0\}$. Sabemos que um ponto crítico não nulo de J é essencialmente uma solução fraca não negativa para o problema (3.1).

Para provar os resultados de existência de soluções não negativas em $H_0^1(\Omega)$ para o problema (3.1) usaremos o Teorema do Passo da Montanha.

3.2 Resultados de existência e não existência

O resultado seguinte, nos garante a existência ou inexistência de solução não negativa para o problema (3.1) através de uma relação entre λ e λ_1.

Teorema 3.1. *(i) Se $h(x) \geq (\not\equiv) 0$, então o problema* (3.1) *não possui solução positiva pra $\lambda \geq \lambda_1$, mas para $\lambda < \lambda_1$ o problema* (3.1) *tem pelo menos uma solução positiva se $h(x) \in L^\infty(\Omega)$.*

(ii) Se $h(x) \leq (\not\equiv) 0$ e $h(x) \in L^\alpha(\Omega)$ para algum $\alpha \in [2^*/(2^* - 1 - q), +\infty]$ e existe $\delta > 0$ tal que $h(x) \leq -\delta$, então o problema (3.1) *tem sempre uma solução não negativa $u \in H_0^1(\Omega)$ com $J(u) > 0$ para todo $\lambda > \lambda_1$.*

(iii) Se Se $h(x) \leq (\not\equiv) 0$, então o problema (3.1) *não tem solução positiva para $\lambda \leq \lambda_1$.*

(iv) Se $h(x) \equiv 0$, então o problema (3.1) *tem solução positiva desde que $\lambda = \lambda_1$.*

Demonstração. (i) Suponha que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução positiva para o problema (3.1). Seja $\varphi_1 > 0$ uma autofunção associada a λ_1, ou seja, $-\Delta\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1$. Então, temos

$$\lambda_1 \int_\Omega u\varphi_1\, dx = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_1\, dx = \int_\Omega h(x) u^q \varphi_1\, dx + \lambda \int_\Omega u\varphi_1\, dx,$$

isto é,

$$(\lambda_1 - \lambda) \int_\Omega u\varphi_1\, dx = \int_\Omega h(x) u^q \varphi_1\, dx > 0.$$

Como $u, \varphi_1 > 0$ e $h(x) \geq 0$ é uma função não nula, segue que, $\lambda < \lambda_1$ e assim, o problema (3.1) não tem solução positiva se $\lambda \geq \lambda_1$. Por outro lado, se $\lambda < \lambda_1$ afirmamos que existem constantes $\rho, \eta > 0$ tais que

$$J(u) \geq \eta > 0 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega) \,\text{com}\, \|u\| = \rho. \tag{3.2}$$

De fato, pela caracterização de λ_1,

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_2^2},$$

vemos que

$$\int_\Omega (u^+)^2\, dx \leq \int_\Omega u^2\, dx \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx$$

para toda $u \in H_0^1(\Omega)$.

Daí obtemos

$$
\begin{aligned}
J(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega (u^+)^2\,dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega h(x)(u^+)^{q+1}\,dx \\
&\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{2\lambda_1}\|u\|^2 - \frac{\|h\|_\infty}{q+1}\int_\Omega (u^+)^{q+1}\,dx \\
&\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{2\lambda_1}\|u\|^2 - \frac{\|h\|_\infty C}{q+1}\|u\|^{q+1} \\
&= \|u\|^2\left(\frac{\lambda}{2\lambda_1}(\lambda_1-\lambda) - C_1\|u\|^{q-1}\right)
\end{aligned}
$$

então podemos encontrar algum $\rho > 0$ adequado grande tal que (3.2) seja válido. Daí, usando o Princípio Variacional de Ekeland, Teorema A.10 e repetindo a demonstração do Teorema 1.2, concluímos que (3.1) tem um solução positiva. Observe que, naquele teorema, a segunda parte da condição $(f2)$ e o controle na norma de h em L^∞ são necessários apenas para garantir que (3.2) ocorra.

(ii) Para provar essa parte, aplicamos a Proposição 1.4. Verifiquemos que vale a geometria do passo da montanha:

Afirmação 3.1. Existem $\rho, \eta > 0$ tais que $J(u) \geq \eta > 0, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$ com $\|u\| = \rho$.

De fato, observe que $q+1 < 2 < 2^*$. Utilizando a desigualdade de Hölder, Teorema A.6, com expoentes conjugados β e $\alpha = [2^* - (q+1)]/(2^* - 2)$ e a desigualdade de Young, Teorema A.5, obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega u^2\,dx &= \int_\Omega \left[|u|^{[2-(q+1)/\alpha]}|u|^{(q+1)/\alpha}\right]\,dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |u|^{q+1}\,dx\right)^{1/\alpha}\left(\int_\Omega |u|^{[2-(q+1)/\alpha]\beta}\,dx\right)^{1/\beta} \\
&\leq \left(\int_\Omega |u|^{q+1}\,dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\int_\Omega |u|^{2^*}\,dx\right)^{\frac{1}{\beta}} \\
&\leq \varepsilon\|u\|_{q+1}^{q+1} + \frac{\|u\|_{2^*}^{2^*}}{(\alpha\varepsilon)^{\frac{\beta}{\alpha}}\beta} \qquad \forall \varepsilon > 0.
\end{aligned}
$$

Consequentemente,

$$
\begin{aligned}
J(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega (u^+)^2\,dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega h(x)(u^+)^{q+1}\,dx \\
&\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda\varepsilon}{2}\|u^+\|_{q+1}^{q+1} - \frac{\lambda\|u^+\|_{2^*}^{2^*}}{2(\alpha\varepsilon)^{\frac{\beta}{\alpha}}\beta} + \frac{\delta}{q+1}\int_\Omega (u^+)^{q+1}\,dx.
\end{aligned}
$$

Em particular, tomando $\varepsilon = 2\delta/[\lambda(q+1)]$ e usando a desigualdade de Sobolev obtemos

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - C\left(\frac{2\alpha\delta}{q+1}\right)^{-\beta/\alpha}\lambda^\beta\beta^{-1}\|u\|^{2^*} \\ &\geq \|u\|^2\left(\frac{1}{2} - C\left(\frac{2\alpha\delta}{q+1}\right)^{-\beta/\alpha}\lambda^\beta\beta^{-1}\|u\|^{2^*-2}\right). \end{aligned}$$

Daí se deduz a existência de ρ e η como desejados.

Afirmação 3.2. Existe $e \notin \overline{B}_\rho$ tal que $J(e) < 0$.

De fato, como $h \in L^\alpha$ e $\varphi_1 \in L^\infty(\Omega)$, temos

$$\left|\int_\Omega h(x)\varphi_1(x)^{q+1}\,dx\right| < +\infty.$$

Sendo $q \in (0,1)$ temos

$$\frac{t^{q-1}}{q+1} = \frac{1}{(q+1)t^{1-q}} \to 0 \quad \text{quando } t \to +\infty,$$

daí, segue que

$$\frac{t^{q-1}}{q+1}\int_\Omega h(x)\varphi_1^{q+1}\,dx \to 0,$$

onde $\varphi_1 > 0$ é autofunção associada a λ_1. Então, para $t > 0$ tem-se

$$J(t\varphi_1) = \frac{t^2}{2}\|\varphi_1\|^2 - \frac{\lambda t^2}{2}\int_\Omega \varphi_1^2\,dx - \frac{t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega h(x)\varphi_1(x)^{q+1}\,dx,$$

o que implica em

$$\frac{J(t\varphi_1)}{t^2} = \frac{1}{2}\|\varphi_1\|^2 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega \varphi_1^2\,dx - \frac{t^{q-1}}{q+1}\int_\Omega h(x)\varphi_1(x)^{q+1}\,dx.$$

Passando ao limite com $t \to +\infty$, na igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{t\to+\infty}\frac{J(t\varphi_1)}{t^2} &= \frac{1}{2}\|\varphi_1\|^2 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega \varphi_1^2\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \lambda/\lambda_1\right)\|\varphi_1\|^2 < 0, \quad \text{pois } \lambda > \lambda_1. \end{aligned}$$

Consequentemente, $J(t\varphi_1) < 0$ para t grande. Logo, existe $t_0 > 0$ suficientemente grande tal que $e := t_0\varphi_1$ satisfaz $\|e\| > \rho$ e $J(e) < 0$. Daí, segue da Proposição 1.4 que existe uma sequência de Cerami $\{u_n\}$ em $H_0^1(\Omega)$ para J no nível minimax c. Para tal sequência, tem-se

$$J(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega (u_n^+)^2\,dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}\,dx = c + o(1),$$

$$J'(u_n)u_n = \|u_n\|^2 - \lambda\int_\Omega (u_n^+)^2\,dx - \int_\Omega h(x)(u_n^+)^{q+1}\,dx = o(1), \tag{3.3}$$

e para toda $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ temos

$$J'(u_n)\varphi = \int_\Omega \nabla u_n\cdot\nabla\varphi\,dx - \lambda\int_\Omega u_n^+\varphi\,dx + \int_\Omega h(x)(u_n^+)^q\,\varphi\,dx = o(1). \tag{3.4}$$

Vejamos que $\{u_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$. De fato, suponha por contradição, que $\{u_n\}$ é ilimitada. Sem perda de generalidade suponhamos que $\|u_n\| \to +\infty$. Considere

$$w_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}.$$

Assim, temos $\{w_n\}$ limitada em $H_0^1(\Omega)$, pois $\|w_n\| = 1$ e a menos de subsequência existe $w \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} w_n \rightharpoonup w \quad \text{em } H_0^1(\Omega), \\ w_n \to w \quad \text{em } L^p(\Omega), \\ w_n(x) \to w(x) \quad q.t.p. \text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{3.5}$$

onde $1 \le p < 2^*$, se $N \ge 3$ ou $p \in [1,+\infty)$ se $N = 1,2$. Analogamente, considerando $w_n^+ = u_n^+/\|u_n\|$ tem-se

$$\begin{cases} w_n^+(x) \to w^+(x) \quad q.t.p. \quad \text{em } \Omega, \\ w_n^+ \to w^+ \quad \text{em } L^p(\Omega). \end{cases} \tag{3.6}$$

Observe que $w \not\equiv 0$. Com efeito, se $w \equiv 0$, então por (3.6) e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, Teorema A.1 temos

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega h(x)(w_n^+)^{q+1}\,dx = 0.$$

Multiplicando (3.3) por $1/\|u_n\|^2$, obtemos

$$\|w_n\|^2 - \lambda\int_\Omega (w_n^+)^2\,dx - \frac{1}{\|u_n\|^{1-q}}\int_\Omega h(x)(w_n^+)^{q+1}\,dx = o(1). \tag{3.7}$$

Como $\|u_n\| \to +\infty$, temos $1/\|u_n\|^{1-q} \to 0$, além disso, graças a (3.5) temos

$$\int_\Omega h(x)(w_n^+)^{q+1} \to 0.$$

Daí,

$$\frac{1}{\|u_n\|^{1-q}} \int_\Omega h(x)(w_n^+)^{q+1} \to 0,$$

donde segue de (3.7) que $\|w_n\|^2 \to 0$ o que é uma contradição, pois $\|w_n\| = 1$. Logo $w \not\equiv 0$. Note também que $w(x) > 0$ q.t.p. em Ω. De fato, como

$$\left| \int_\Omega h(x)(w_n^+)^q \varphi \, dx \right| \le C \quad \text{e} \quad \frac{1}{\|u_n\|^{1-q}} \to 0,$$

temos

$$\frac{1}{\|u_n\|^{1-q}} \int_\Omega h(x)(w_n^+)^q \varphi \, dx \to 0.$$

Daí, segue de (3.4) que

$$\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla \varphi \, dx - \lambda \int_\Omega w^+ \varphi \, dx = 0, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.8}$$

Tomando $\varphi = w^-$ em (3.8), temos

$$\int_\Omega |\nabla w^-|^2 \, dx = \int_\Omega \nabla w \nabla w^- \, dx = \lambda \int_\Omega w^+(x) \, w^-(x) \, dx = 0$$

isto é,

$$\|w^-\|^2 = 0 \Rightarrow w^- = 0 \;\; q.t.p. \text{ em } \Omega,$$

ou seja, $w \ge 0$. Daí, segue do Princípio do Máximo Forte, Teorema A.14, que $w(x) > 0$ q.t.p. em Ω. Logo,

$$\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla \varphi \, dx = \lambda \int_\Omega w \, \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Isso não pode ocorrer, pois $\lambda > \lambda_1$ não admite autofunção positiva. Logo, nossa hipótese de que $\|u_n\| \to +\infty$ não pode ocorrer pra nenhuma subsequência de $\{u_n\}$. Portanto, a sequência $\{u_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Sendo $\{u_n\}$ uma sequência limitada, sabemos que ela converge fraco em $H_0^1(\Omega)$, a menos de subsequência. Tomando u' este limite fraco, graças à compacidade da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ temos $u_n \to u'$ em $L^r(\Omega)$ para todo $r \in [1, 2^*)$, se $N \ge 3$ ou $r \in [1, +\infty)$, se $N = 1, 2$, e $u_n(x) \to u'(x)$ q.t.p. em Ω. Daí, como na Afirmação 1.4, vemos que u' é solução fraca do Problema (3.1).

(iii) Suponha que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução positiva para o problema (3.1). Seja

$\varphi_1 > 0$ uma autofunção associada a λ_1. Então, temos

$$\lambda_1 \int_\Omega u\varphi_1 \, dx = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_1 \, dx = \lambda \int_\Omega u\varphi_1 \, dx + \int_\Omega h(x)u^q \varphi_1 \, dx,$$

consequentemente,

$$(\lambda_1 - \lambda) \int_\Omega u\varphi_1 \, dx = \int_\Omega h(x)u^q \varphi_1 \, dx < 0.$$

Como $u > 0$, $\varphi_1 > 0$ e $h(x) \leq (\not\equiv) 0$ é uma função não nula, segue que $\lambda > \lambda_1$.
(iv) Suponha que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução positiva para o problema (3.1). Seja $\varphi_1 > 0$ uma autofunção associada a λ_1. Então, temos

$$\lambda_1 \int_\Omega u\varphi_1 \, dx = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_1 \, dx = \lambda \int_\Omega u\varphi_1 \, dx + \int_\Omega h(x)u^q \varphi_1 \, dx,$$

o que implica

$$(\lambda_1 - \lambda) \int_\Omega u\varphi_1 \, dx = \int_\Omega h(x)u^q \varphi_1 \, dx = 0.$$

Como $u > 0$, $\varphi_1 > 0$ e $h(x) \equiv 0$, segue que $\lambda = \lambda_1$. □

Apêndice A

Resultados Auxiliares

Neste apêndice, apresentaremos alguns resultados que foram úteis para uma boa compreensão do trabalho.

Definição A.1. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto. Dado $p \in \mathbb{R}$, com $1 \leq p \leq \infty$, os espaços $L^p(\Omega)$ são definidos como

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R};\ f \quad \text{é mensurável} \quad e \quad \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty \right\},$$

com a norma

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

para $1 \leq p < \infty$ e

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R};\ f \quad \text{é mensurável} \quad \text{e} \, \exists\, C > 0 \text{ tal que} \quad |f(x)| \leq C \, q.t.p. \ \text{ em } \ \Omega \},$$

com a norma

$$\|f\|_\infty = \inf \{ C;\ |f(x)| \leq C \ q.t.p. \text{ em } \ \Omega \},$$

onde consideramos a classe das funções iguais quase sempre.

O próximo resultado, muito utilizado em nosso trabalho, é o famoso Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue.

Teorema A.1 ([1], Teorema 5.6)**.** *Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ tal que:*

(i) $f_n(x) \to f(x)$ *q.t.p. em* Ω;

(ii) existe g em $L^1(\Omega)$ tal que, para todo $n \geq 1$, temos

$$|f_n(x)| \leq g(x) \ q.t.p. \ em \ \Omega.$$

Então $f \in L^1(\Omega)$ *e além disso,*

$$\int_\Omega f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n(x)\,dx.$$

Teorema A.2 ([2], Teorema 4.9)**.** *Sejam* (f_n) *uma sequência em* $L^p(\Omega)$ *e* $f \in L^p(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$ *tais que*

$$\|f_n - f\|_p \to 0.$$

Então podemos extrair uma subsequência (f_{n_k}) *tal que*

(i) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ *q.t.p. em* Ω;

(ii) existe h *em* $L^p(\Omega)$ *tal que, para todo* $k \in \mathbb{N}$ *temos*

$$|f_{n_k}(x)| \le h(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Teorema A.3 ([5], Teorema 2.3)**.** *Seja* $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função de Carathéodory. Suponha que existam uma função* $b \in L^q(\Omega)$, $1 \le q \le \infty$ *e constantes* $c, r > 0$ *tais que*

$$|f(x,s)| \le c|s|^r + b(x) \quad \forall x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R}.$$

Então o operador de Nemytskii $N_f : L^{qr} \to L^q$ *definido por* $N_f(u) = f(x,u)$ *está bem definido e é contínuo.*

Proposição A.4 ([3], Apendice B)**.** (**Desigualdade de Young**) Sejam $1 < p, q < +\infty$, tais que $(1/p) + (1/q) = 1$. Então

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \ \ (a,b > 0).$$

Proposição A.5 ([3], Apendice B)**.** (**Desigualdade de Young com** ε) Sejam $1 < p, q < +\infty$, tais que $(1/p) + (1/q) = 1$. Então

$$ab \le \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q \ \ (a,b > 0; \varepsilon > 0),$$

para $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-q/p} q^{-1}$.

O próximo resultado, também bastante utilizado em nosso trabalho, é a Desigualdade de Hölder.

Teorema A.6 ([2],Teorema 5.6)**.** *Sejam* $u \in L^p(\Omega)$ *e* $v \in L^q(\Omega)$ *com* $1 \le q \le \infty$ *e* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Então,* $uv \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\|uv\|_{L^1} \le \|u\|_p \|v\|_q.$$

Teorema A.7 ([2], Proposição 3.30). *Seja X um espaço de Banach uniformemente convexo. Seja (x_n) uma seqüência em X tal que e $x_n \rightharpoonup x$ e*

$$\limsup \|x_n\| \leq \|x\|.$$

Então $x_n \to x$ em X. Em outras palavras, se $x_n \rightharpoonup x$ e $\|x_n\| \to \|x\|$ então $x_n \to x$ em X.

Teorema A.8 ([2], Teorema 3.27). *Se X é um espaço de Banach reflexivo e (x_n) uma seqüência limitada em X, então existe uma subseqüência (x_{n_k}) que converge na topologia fraca de X.*

Teorema A.9 ([4], Corolário 4.12). *Se f é uma função não negativa, mensurável e $\int_\Omega f d\mu < \infty$ então $\int_\Omega f d\mu$ é absolutamente contínua em relação a μ, ou seja, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $\mu(\Omega) < \delta$ implica $\int_\Omega f d\mu < \varepsilon$.*

Proposição A.10 ([5], Teorema 4.1). (**Princípio Variacional de Ekeland**) Seja V um espaço métrico completo e $F : V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função semicontínua inferiormente e limitada inferiormente. Então para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um elemento $v \in V$ tal que

$$F(v) \leq \inf_v F + \varepsilon \quad \text{e} \quad F(w) \geq F(v) - \varepsilon d(v, w) \quad \forall\, w \in V.$$

Proposição A.11 ([2], Corolário 9.19). (**Desigualdade de Poincaré**) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado. Então existe $C > 0$ tal que

$$\int_\Omega u^2\, dx \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx, \quad \forall\ u \in H_0^1(\Omega).$$

Teorema A.12 ([1], Lema 4.8). *(**Lema de Fatou**) Seja $f_n : E \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções mensuráveis não negativas, então*

$$\int (\liminf_{n\to+\infty} f_n)\, dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int f_n\, dx.$$

No que segue, vamos considerar o operador L da seguinte forma:

$$Lu = -\Delta u + c(x)u$$

onde $c \in L^\infty(\Omega)$, com Ω sendo um domínio em $\mathbb{R}^N$. Diremos que, no sentido fraco ou generalizado, $u \in H_0^1(\Omega)$ satisfaz $Lu = 0\,(\geq 0, \leq 0)$ em Ω se

$$\pounds(u, v) = \int_\Omega [\nabla u \nabla v - c(x)uv]\; dx = 0\,(\geq 0, \leq 0)$$

para toda função $v \in C_0^1(\Omega)$ com $v \geq 0$.

Os teoremas a seguir são versões simplificadas dos resultados encontrados em [6, Teoremas 8.1 e 8.19].

Teorema A.13. ***(Princípio do máximo fraco)*** *Suponhamos que $c(x) \in L^\infty(\Omega)$ é uma função não negativa e $u \in H_0^1(\Omega)$ satisfaz $Lu \geq 0\,(\leq 0)$ em Ω. Então*

$$\inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u^- \;\; (\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+).$$

Teorema A.14. ***(Princípio do máximo forte)*** *Suponhamos que $c(x) \in L^\infty(\Omega)$ é uma função não negativa. Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ satisfazendo $Lu \geq 0$ em Ω. Se para alguma bola $B \subset\subset \Omega$*

$$\inf_{B} u = \inf_{\Omega} u \geq 0,$$

então a função u deve ser constante em Ω.

Apêndice B

Resultados complementares

Neste apêndice apresentamos alguns resultados utilizados no decorrer deste trabalho.

No que segue, consideramos uma função $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaz as condições $(f1)$ e $(f3)$, descritas na introdução, e a primeira parte da condição $(f2)$ (ou $(\overline{f2})$), a saber

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x,t)}{t} = \mu \in [0, \lambda_1). \tag{B.1}$$

Note que se f satisfaz $(\overline{f2})$, para todo $k > 1$ tem-se

$$\lim_{s\to\infty} \frac{f(x,s)}{s^k} = \lim_{s\to\infty} \frac{f(x,s)}{s} \cdot \frac{1}{s^{1-k}} = l \cdot 0 = 0,$$

uniformemente em $x \in \Omega$, ou seja, f satisfaz $(f3)$. Em outras palavras, se f é uma função assintoticamente linear então é subcrítica.

Sejam μ dado em (B.1) e $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\mu+\varepsilon_0 < \lambda_1$. Temos as seguintes observações:

Observação B.1. Considere uma função $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaz as condições $(f1)$, (B.1) e $(f3)$. Então existe $C_0 = C_0(\varepsilon_0, \mu, k, f, \Omega) > 0$ tal que

$$F(x,t) \leq \frac{\mu + \varepsilon_0}{2} t^2 + C_0 t^{k+1} \quad \forall t \geq 0, \ x \in \Omega.$$

De fato, por (B.1) temos que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ tal que

$$0 < t < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{f(x,t)}{t} - \mu \right| \leq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad f(x,t) \leq (\mu + \varepsilon)t, \quad \forall x \in \Omega.$$

Em particular, para ε_0 como acima obtemos

$$f(x,t) \leq (\mu + \varepsilon_0)t, \quad \forall \ t \in [0, \delta), \ x \in \Omega. \tag{B.2}$$

Se $t \in [0, \delta)$ então por (B.2) temos

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds < (\mu + \varepsilon_0) \int_0^t s\, ds = \frac{\mu + \varepsilon_0}{2}\, t^2.$$

Por outro lado, por $(f3)$ temos $f(x,t) \leq t^k$ para todo $x \in \Omega$ e $t \geq t_0$ se $t_0 > 1$ é suficientemente grande. Então, se $t > t_0$ tem-se

$$\begin{aligned} F(x,t) &= \int_0^t f(x,s)\, ds = \int_0^{t_0} f(x,s)\, ds + \int_{t_0}^t f(x,s) ds \\ &< C_1 t_0 + \int_{t_0}^t s^k\, ds \;\leq\; C_1 t^{k+1} + \frac{1}{k+1}(t^{k+1} - t_0^{k+1}) \\ &< C_2 t^{k+1}, \end{aligned}$$

onde $C_1 = \max\{f(x,t); (x,t) \in (\overline{\Omega} \times [0, t_0])\}$ e $C_2 = C_1 + 1$. Aqui usamos o fato que $t > 1$. Já no intervalo $[\delta, t_0]$, como temos $\frac{F(x,t)}{t^{k+1}}$ uma função contínua e limitada em $\overline{\Omega} \times [\delta, t_0]$, existe $C_3 > 0$ tal que

$$F(x,t) \leq C_3 t^{k+1}, \quad \forall\, (x,t) \in \overline{\Omega} \times [\delta, t_0].$$

Logo

$$F(x,t) \leq \frac{\mu + \varepsilon_0}{2} t^2 + C_2 t^{k+1} + C_3 t^{k+1} \leq \frac{\mu + \varepsilon_0}{2} t^2 + C_0 t^{k+1}, \quad \forall\; t \geq 0,\; x \in \overline{\Omega}.$$

Observação B.2. Sob as mesmas condições da observação anterior, pelos cálculos realizados acima, vemos que existem a, $b > 0$ tais que

$$f(x,t) \leq a + bt^k \quad \forall t \geq 0,\; x \in \overline{\Omega}.$$

No que segue, X denota um espaço de Banach, $E \subset X$ um aberto e $I : E \to \mathbb{R}$ um funcional.

Definição B.1. Diremos que I é diferenciável à Fréchet em $u \in E$ se existe $A \in X^*$ tal que, para $v \in X$, temos

$$\lim_{\|v\| \to 0} \frac{I(u+v) - I(u) - Av}{\|v\|} = 0.$$

Definição B.2. Diremos que I é diferenciável à Gateaux em $u \in E$ se existe $A \in X^*$ tal que, para toddo $v \in X$, temos

$$\lim_{t \to 0} \frac{I(u+tv) - I(u)}{t} = Av.$$

A derivada de Gateaux de I em u é denotada por $I'(u)$.

Observação B.3. Se I tem derivada à Gateaux contínua em X, então $I \in C^1(X, \Omega)$.

Considere o funcional $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega h(x)(u^+)^{q+1}\, dx - \int_\Omega F(x, u^+)\, dx.$$

Teorema B.1. *Suponha que f satisfaça as condições $(f1)$, (B.1) e $(f3)$ e que h satisfaça $(h1)$. Então o funcional $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.*

Demonstração. Consideremos os funcionais J_1, J_2, J_3 definidos por

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2, \quad J_2(u) = \frac{1}{q+1}\int_\Omega h(x)(u^+)^{q+1}\, dx \quad \text{e} \quad J_3(u) = \int_\Omega F(x, u^+)\, dx.$$

Afirmação B.1. O funcional $J_1 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

De fato, para cada u, $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, tem-se

$$\begin{aligned}
J_1'(u)\varphi &= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\left[\frac{\|u + t\varphi\|^2 - \|u\|^2}{t}\right] \\
&= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\left[\frac{\|u\|^2 + 2t\langle u, \varphi\rangle + t^2\|\varphi\|^2 - \|u\|^2}{t}\right] \\
&= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0} 2\langle u, \varphi\rangle + t\|\varphi\|^2 \\
&= \langle u, \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Dessa forma, J_1 é diferenciável à Gateaux e além disso, $J_1'(u)\varphi = \langle u, \varphi\rangle$. Verificaremos agora a continuidade da derivada de Gateaux de J_1'. Ou seja, verificaremos que $J_1'(u_n) \to J_1'(u)$ em $H^{-1}(\Omega)$, sempre que $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$, ou equivalentemente,

$$\|J_1'(u_n) - J_1'(u)\|_{H^{-1}(\Omega)} \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to +\infty.$$

Considere uma sequência $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$ com $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$ e $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\|\varphi\| \leq 1$, para n suficientemente grande, tem-se

$$|(J_1'(u_n) - J_1'(u))\varphi| = |\langle u_n - u, \varphi\rangle| \leq \|u_n - u\|\|\varphi\| < \varepsilon,$$

o que implica

$$\|J_1'(u_n) - J_1'(u)\| = \sup_{\varphi\in H_0^1(\Omega); \|\varphi\|\leq 1} |(J_1'(u_n) - J_1'(u))\varphi| < \varepsilon.$$

Isto é,

$$\|J_1'(u_n) - J_1'(u)\|_{H^{-1}(\Omega)} \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to +\infty,$$

donde segue que J_1' é contínua. Portanto $J_1 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Afirmação B.2. O funcional $J_2 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

De fato, considere a seguinte função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = h\,[(u+t\varphi)^+]^p$, onde $u, \varphi \in H_0^1(\Omega)$. Dessa forma temos:

(i) $f(1) = h\,[(u+\varphi)^+]^p$;

(ii) $f(0) = h(u^+)^p$;

(iii) $f'(t) = p\,h\,[(u+t\varphi)^+]^{p-1}\,\varphi$.

Como f é diferenciável em $(0,1)$, então pelo Teorema do Valor Médio, existe $t_0 \in (0,t)$ tal que $f(t) - f(0) = f'(t_0)\,t$. Podemos escrever $t_0 = \xi t$ para algum $\xi \in (0,1)$ donde

$$\frac{h\,[(u+t\varphi)^+]^p - h(u^+)^p}{t} = p\,h\left[(u+\xi t\varphi)^+\right]^{p-1}\varphi$$

o que implica

$$\begin{aligned}
\frac{|h\,([(u+t\varphi)^+]^p - (u^+)^p)|}{|t|} &= |p\,h\left[(u+\xi t\varphi)^+\right]^{p-1}\varphi| \\
&\leq p\|h\|_\infty |(u+\xi t\varphi)|^{p-1}|\varphi| \\
&\leq K\,(|u|+|\varphi|)^{p-1}|\varphi|.
\end{aligned}$$

Como $u, \varphi \in H_0^1(\Omega)$, tem-se $u, \varphi \in L^p(\Omega)$. Consequentemente $|u| + |\varphi| \in L^p$. Desse modo temos $(|u|+|\varphi|)^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$. Aplicando a desigualdade de Hölder, Teorema A.6 com expoentes conjugados $p' = \frac{p}{p-1}$ e p, temos

$$\int_\Omega (|u|+|\varphi|)^{p-1}|\varphi| \leq \left(\int_\Omega |(|u|+|\varphi|)^{p-1}|^{\frac{p}{p-1}}\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |\varphi|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Logo, $K\,(|u|+|\varphi|)^{p-1}|\varphi| \in L^1$. Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,Teorema A.1 temos

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{J_2(u+t\varphi) - J_2(u))}{t} &= \lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{h\,[(u+t\varphi)^+]^p - h(u^+)^p}{t}\,dx \\
&= \lim_{t\to 0}\int_\Omega p\,h\left[(u+\xi t\varphi)^+\right]^{p-1}\varphi\,dx \\
&= p\int_\Omega (u^+)^{p-1}\,h\,\varphi\,dx.
\end{aligned}$$

Assim, tomando $p = q + 1$, temos

$$J_2'(u)\varphi = \int_\Omega h(x)(u^+)^q \,\varphi \, dx.$$

Portanto, existe a derivada de Gateaux em u, e além disso,

$$J_2'(u)\varphi = \int_\Omega h(x)(u^+)^q \,\varphi \, dx.$$

Verificaremos agora a continuidade da derivada de Gateaux de J_2'. Ou seja, verificaremos que $J_1'(u_n) \to J_1'(u)$ em $H^{-1}(\Omega)$, sempre que $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$. Seja $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$ com $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$. Das Imersões de Sobolev, temos que $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$. Definindo $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x,s) = p(s^+)^{p-1}$ temos f uma função de Carathéodory e

$$|f(x,s)| = p|s^+|^{p-1} \leq p|s|^{p-1}.$$

Assim pelo Teorema A.3, o operador de Nemytskii $N_f : L^p \to L^{P'}$ está bem definido e é contínuo. Assim, temos $f(\cdot, u_n) \to f(\cdot, u)$ em $L^{p'}$. Daí, pela desigualdade de Hölder, Teorema A.6 obtemos

$$\begin{aligned}
|(J_2'(u_n) - J_2'(u))\varphi| &= \left| p \int_\Omega h((u_n^+)^{p-1} - (u^+)^{p-1})\varphi \, dx \right| \\
&\leq \int_\Omega |h||f(x,u_n) - f(x,u)||\varphi| \, dx \\
&\leq K \int_\Omega |f(x,u_n) - f(x,u)||\varphi| \, dx \\
&\leq \overline{K} \, \|f(\cdot,u_n) - f(\cdot,u)\|_{p'} \, \|\varphi\|_p
\end{aligned}$$

Logo, $|(J_2'(u_n) - J_2'(u))\varphi| \to 0$. Como

$$\|J_2'(u_n) - J_2'(u)\| = \sup_{\varphi \in H_0^1(\Omega);\|\varphi\| \leq 1} |(J_2'(u_n) - J_2'(u))\varphi|,$$

tem-se

$$\|J_2'(u_n) - J_2'(u)\|_{H^{-1}(\Omega)} \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to +\infty,$$

donde segue que J_2' é contínua. Portanto $J_2 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Afirmação B.3. O funcional $J_3 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$, com derivada de Gateaux dada por

$$J_3'(u)\varphi = \int_\Omega f(x, u^+(x))\varphi(x) \, dx.$$

De fato, fixados u, φ em $H_0^1(\Omega)$ arbitrários, observe que

$$J_3(u+t\varphi) - J_3(u) = \int_\Omega \left[F\left(x,(u(x)+t\varphi(x))^+\right) - F\left(x,u^+(x)\right)\right]\,dx$$

donde

$$\frac{J_3(u+t\varphi) - J_3(u)}{t} = \int_\Omega \frac{F\left(x,(u(x)+t\varphi(x))^+\right) - F\left(x,u^+(x)\right)}{t}\,dx.$$

Devemos provar que para $x \in \Omega$, tem-se

$$\lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{F\left(x,(u(x)+t\varphi(x))^+\right) - F\left(x,u^+(x)\right)}{t}\,dx = \int_\Omega f(x,u^+(x))\varphi(x)\,dx.$$

Com efeito, para cada $x \in \Omega$, pelo Teorema do valor médio, temos

$$F\left(x,(u(x)+t\varphi(x))^+\right) - F\left(x,u^+(x)\right) = f(x,\theta_x(t))(t\varphi(x))$$

onde $\theta_x(t)$ é um número entre $u^+(x)$ e $(u(x)+t\varphi(x))^+$. Dessa forma, temos

$$\frac{F\left(x,(u(x)+t\varphi(x))^+\right) - F\left(x,u^+(x)\right)}{t} = f(x,\theta_x(t))\varphi(x),$$

o que implica em

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{F\left(x,(u(x)+t\varphi(x))^+\right) - F\left(x,u^+(x)\right)}{t} &= \lim_{t\to 0} f(x,\theta_x(t))\varphi(x)\\ &= f(x,u^+(x))\varphi(x). \qquad \text{(B.3)}\end{aligned}$$

Por outro lado, por $(f1)-(f3)$ temos que existem constantes positivas a e c tais que

$$|f(x,s)| \leq a + c|s|^k \quad \forall x \in \overline{\Omega},\ \forall s > 0.$$

Assim, para $|t| \leq 1$, obtemos

$$\begin{aligned}|f(x,\theta_x(t))\varphi(x)| &\leq \left(a + c|\theta_x(t)|^k\right)|\varphi(x)|\\ &= a|\varphi(x)| + c|\theta_x(t)|^k|\varphi(x)|\\ &\leq a|\varphi(x)| + c\left[|u(x)| + |t||\varphi(x)|\right]^k|\varphi(x)|\\ &\leq a|\varphi(x)| + 2^k c|u(x)|^k|\varphi(x)| + 2^k c|\varphi(x)|^{k+1}\\ &\leq K\left(|\varphi(x)| + |u(x)|^k|\varphi(x)| + |\varphi(x)|^{k+1}\right).\end{aligned}$$

Pela Imersão contínua de Sobolev, temos $|\varphi| \in L^1(\Omega)$. Como $|u|^k \in L^{\frac{k+1}{k}}(\Omega)$ e $|\varphi| \in L^{k+1}(\Omega)$, segue da desigualdade de Hölder, Teorema A.6 que $|u|^k|\varphi| \in L^1(\Omega)$

e $|\varphi|^{k+1} \in L^{k+1}(\Omega)$ donde

$$K\left(|\varphi(x)| + |u(x)|^k|\varphi(x)| + |\varphi(x)|^{k+1}\right) \in L^1(\Omega),$$

ou seja, existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\left|\frac{F\left(x,(u(x)+t\varphi(x))^+\right) - F\left(x,u^+(x)\right)}{t}\right| \leq g(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

Assim, pelo do Teorema da Convergência dominada de Lebesgue, Teorema A.1, tem-se

$$\lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{F\left(x,(u(x)+t\varphi(x))^+\right) - F\left(x,u^+(x)\right)}{t}\,dx = \int_\Omega f(x,u^+(x))\varphi(x)\,dx.$$

Portanto, J_3 é diferenciável a Gateaux e além disso,

$$J_3'(u)\varphi = \int_\Omega f(x,u^+(x))\varphi(x)\,dx.$$

Verificaremos agora a continuidade da derivada de Gateaux de J_3. Ou seja, verificaremos que $J_3'(u_n) \to J_3'(u)$ em $H^{-1}(\Omega)$, sempre que $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$. Seja $\{u_n\}$ em $H_0^1(\Omega)$ com $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$. Pela imersão de Sobolev temos que $u_n \to u$ em $L^{k+1}(\Omega)$ e, consequentemente, $u_n^+ \to u^+$ em $L^{k+1}(\Omega)$. Assim, pelo Teorema A.2 segue que, a menos de subsequência, $u_n^+(x) \to u^+(x)$ em quase todo ponto $x \in \Omega$ e existe $w \in L^{k+1}(\Omega)$ tal que

$$|u_n^+(x)| = u_n^+(x) \leq w(x) \quad q.t.p. \text{ em } \Omega.$$

Note que

$$|(J_3'(u_n) - J_3'(u))\,\varphi| = \int_\Omega |f(x,u_n^+) - f(x,u^+)||\varphi|\,dx.$$

Como $\varphi \in L^{k+1}(\Omega)$ e $f(\cdot,u_n^+) - f(\cdot,u^+) \in L^{\frac{k+1}{k}}(\Omega)$ segue da desigualdade de Hölder, Teorema A.6 e a Imersão contínua de Sobolev que

$$\begin{aligned}|(J_3'(u_n) - J_3'(u))\,\varphi| &\leq \|f(\cdot,u_n^+) - f(\cdot,u^+)\|_{\frac{k+1}{k}}\|\varphi\|_{k+1}\\ &\leq K_k\|f(\cdot,u_n^+) - f(\cdot,u^+)\|_{\frac{k+1}{k}}\|\varphi\|.\end{aligned}$$

Particularmente, desde que $\|\varphi\| = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}|(J_3'(u_n) - J_3'(u))\,\varphi| &\leq \|f(\cdot,u_n^+) - f(\cdot,u^+)\|_{\frac{k+1}{k}}\|\varphi\|_{k+1}\\ &\leq K_k\|f(\cdot,u_n^+) - f(\cdot,u^+)\|_{\frac{k+1}{k}},\end{aligned}$$

donde

$$\|J_3'(u_n) - J_3'(u)\|_{H^{-1}} \quad \leq \quad K_k\|f(\cdot, u_n^+) - f(\cdot, u^+)\|_{\frac{k+1}{k}}.$$

Observe também que, pela continuidade de $f(x, \cdot)$ temos

$$f(x, u_n^+(x)) \to f(x, u^+(x)) \quad q.t.p. \quad \text{em } \Omega.$$

Além disso, temos também

$$|f(x, u_n^+)| \leq a + b|u_n^+|^k \leq cw^k \in L^1(\Omega).$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, Teorema A.1 obtemos

$$\|f(\cdot, u_n^+) - f(\cdot, u^+)\|_{\frac{k+1}{k}} \to 0.$$

Consequentemente,

$$J_3'(u_n) \to J_3'(u) \quad \text{em } H^{-1}(\Omega),$$

ou seja, J_3' é contínua.

Finalmente, sendo J_i de classe C^1 para $i = 1, 2, 3$, concluímos que $I = J_1 + J_2 + J_3$ pertence a $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. □

Referências Bibliográficas

[1] Bartle, R. G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley, New York, 1995.

[2] Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010.

[3] Evans, L. C., *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in mathematics, American Mathematical Society, Volume **19**, 1998.

[4] Fernandez, P.J., *Medida e Integração*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2002.

[5] Figueiredo, D. G., *Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours*, 81. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; by Springer-Verlag, 4° Ed., 1989.

[6] Gilbarg, D. & Trudinger, N. S., *Elliptic Partial Diferential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[7] Li, S. & Wu, S. & Zhou, S., *Solutions to Semilinear Elliptic Problems With Combined Nonlinearities, Journal of Diferential Equations,* **185** (2002), 200-224.

[8] Struwe, M., *Variational Methods*, Springer - Verlag, 4° Ed., 2007.

[9] Willem, M., *Minimax Theorems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 24, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996.