

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Potenciais Estáticos em Variedades Assintoticamente Planas

Douglas Magno Gomes de Lima

JOÃO PESSOA – PB
JULHO DE 2019

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Potenciais Estáticos em Variedades Assintoticamente Planas

por

Douglas Magno gomes de Lima

sob a orientação do

Prof. Dr. Allan George de Carvalho Freitas

e sob a co-orientação do

Prof. Dr. Márcio Silva Santos

João Pessoa – PB
Julho de 2019

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

L732p Lima, Douglas Magno Gomes de.
Potenciais Estáticos em Variedades Assintoticamente
Planas / Douglas Magno Gomes de Lima. - João Pessoa,
2019.
81 f. : il.

Orientação: Allan George de Carvalho Freitas.
Coorientação: Márcio Silva Santos.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Potenciais Estáticos. 2. Variedades Assintoticamente
Planas. 3. Hipersuperfície Area Minimizing. I. Freitas,
Allan George de Carvalho. II. Santos, Márcio Silva.
III. Título.

UFPB/BC

Título da Dissertação

por

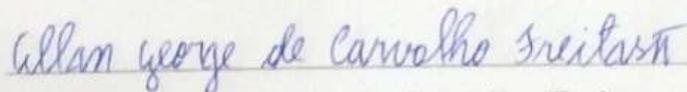
Douglas Magno Gomes de Lima ¹

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria

Aprovada em 26 de Julho de 2019.

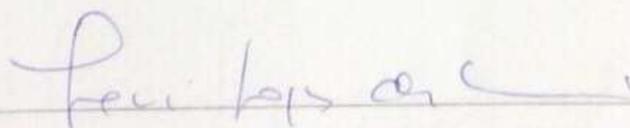
Banca Examinadora:



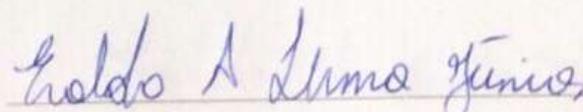
Prof. Dr. Allan George de Carvalho Freitas – UFPB
(Orientador)



Prof. Dr. Márcio Silva Santos – UFPB
(Co-orientador)



Prof. Dr. Levi Lopes de Lima – UFC
(Examinador Externo)



Prof. Dr. Eraldo Almeida Lima Júnior – UFPB
(Examinador Interno)

¹O autor foi bolsista da CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - durante a elaboração desta dissertação.

*À minha mãe, pelas lutas
que travou me permitindo
vencer esta batalha.*

Agradecimentos

Agradeço ao soberano Deus criador de todas as coisas pela sua infinita graça e misericórdia sobre minha vida, sem a qual eu não teria condições de realizar este trabalho, “porque nele vivemos, nos movemos, e existimos”

Agradeço à CAPES, pelo suporte financeiro que me proporcionou concentrar meus esforços neste mestrado.

Agradeço a meus familiares e amigos que sempre estiveram ao meu lado me dando forças e motivação para ir cada vez mais longe. Dentre eles gostaria de citar John, Renato, Geovane, Lênin e Raoni, os quais sempre discutiram os assuntos deste trabalho na medida do possível.

Agradeço à banca examinadora por dispor de seu tempo para avaliar meu trabalho (em especial ao professor Levi por se deslocar de tão longe).

Agradeço a meus orientador e co-orientador por todo ensinamento, instrução e auxílio disponibilizados ao longo de um ano em que estivemos juntos.

Agradeço à minha querida namorada pelo seu carinho, paciência e auxílio que estiveram sempre presentes comigo.

Agradeço a meus irmãos do movimento CRU Campus que sempre estiveram ao meu lado em orações e estudos bíblicos. Com certeza foram momentos muitos proveitosos e divertidos.

Agradeço a meus professores de disciplinas de mestrado por ministrarem excelentes cursos e incentivarem a aprender mais matemática.

Gostaria de então encerrar fazendo minhas as palavras de meu caro orientador em sua tese de doutorado: “Hoje percebo que uma grande realização na vida parametra novos e maiores sonhos. Com este dever cumprido, permito almejar, com a força que vem de Deus, novas vitórias que se tornarão sentidos de vida e luz para a minha história, vitórias sentidas e compartilhadas com a presença destas pessoas especiais.”

Resumo

Neste trabalho, estudamos como a existência de potenciais estáticos em variedades assintoticamente planas pode influenciar na geometria desta variedade. Num primeiro plano, estudamos um artigo de Pengzi Miao e Luen-Fai Tam, “Static Potential and Asymptotically Flat Manifolds” [14], onde são discutidas questões de rigidez para 3-variedades assintoticamente planas que admitem um potencial estático. É analisada a dimensão do espaço de potenciais estáticos e o comportamento assintótico do conjunto de zeros de um potencial estático, sendo dadas condições para que uma 3-variedade assintoticamente plana tenha tal conjunto se estendendo até o infinito. Além disso, neste escopo, são demonstrados resultados de rigidez para 3-variedades sem fronteira. Num segundo momento, estudamos os artigos de Lan-Hsuan Huang, Daniel Martin e Pengzi Miao, “Static Potentials and Area Minimizing Hypersurfaces” [11] e Gregory J. Galloway e Pengzi Miao, “Variational and Rigidity Properties of Static Potentials” [9], onde foi provado que se uma variedade assintoticamente plana com horizon boundary admite potencial estático global, então este potencial estático deve ser nulo na fronteira. Além disso, é mostrado que se uma variedade assintoticamente plana com horizon boundary possui um potencial estático ilimitado num de seus fins, então esta variedade deve conter uma hipersuperfície não-compacta completa e área minimizing.

Palavras-chave: Potenciais Estáticos, Variedades Assintoticamente Planas, Hipersuperfície Area Minimizing.

Abstract

In this work, we study how the existence of static potentials in asymptotically flat manifolds can influence the geometry of this manifold. Firstly, we study a paper of Pengzi Miao and Luen-Fai Tam, “Static Potential and Asymptotically Flat Manifolds” [14], where is discussed questions about rigidity for asymptotically flat 3-manifolds that admit a static potential. It is analyzed the dimension of the static potential space and the asymptotic behavior of the nonempty zero set, it is given conditions to a asymptotically flat 3-manifold have such set extending to infinity. Moreover, in this scope, are demonstrated results of rigidity for 3-manifolds without boundary. In a second moment, we study the papers of Lan-Hsuan Huang, Daniel Martin and Pengzi Miao, “Static Potentials and Area Minimizing Hypersurfaces” [11] and Gregory J. Galloway and Pengzi Miao, “Variational and Rigidity Properties of Static Potentials” [9], where has been proven that if a asymptotically flat manifold with horizon boundary has a global static potential, then this static potential must be zero on the boundary. Moreover, it is shown that if a asymptotically flat manifold with horizon boundary has a unbounded static potential in a end, then the manifold must contain a complete non-compact area minimizing hypersurface.

Keywords: Static Potentials, Assimptotically Flat Manifolds, Area Minimizing Hypersurface.

Sumário

| | |
|---|-----------|
| Introdução | 2 |
| 1 Preliminares | 5 |
| 1.1 Aspectos de Geometria Riemanniana | 5 |
| 1.2 Alguns Resultados de Análise | 12 |
| 1.3 Potenciais Estáticos | 14 |
| 1.4 Variedades Assintoticamente Planas | 17 |
| 2 Potenciais Estáticos em Variedades Assintoticamente Planas | 20 |
| 2.1 Propriedades Locais de Métricas Estáticas | 20 |
| 2.2 Potenciais Estáticos sobre um Fim Assintoticamente Plano | 30 |
| 2.3 Rigidez de uma Variedade Estática Assintoticamente Plana | 44 |
| 3 Potenciais Estáticos e Hipersuperfícies Area Minimizing | 56 |
| 3.1 Hipersuperfícies Area Minimizing | 56 |
| 3.2 Existência de Hipersuperfície Não-Compacta Completa Area Minimizing | 64 |

Introdução

Ao longo dos séculos, a matemática tem sido a linguagem para descrever o comportamento de certas leis do universo, fenômenos naturais e também a forma do universo. Um exemplo desta afirmação é a teoria da relatividade geral, formulada por Albert Einstein em 1915, onde as equações de campo descrevem como a massa e energia estão relacionadas com a curvatura do espaço tempo. Nesta teoria, o espaço-tempo pode ser representado por uma variedade Riemanniana Lorentz (\bar{M}^4, \bar{g}) satisfazendo a famosa equação de Einstein que é dada por:

$$Ric_{\bar{g}} - \frac{1}{2}R_{\bar{g}}\bar{g} = 8\pi T, \quad (1)$$

com $Ric_{\bar{g}}$ e $R_{\bar{g}}$ denotando as curvaturas de Ricci e escalar na métrica \bar{g} , respectivamente e T é o tensor energia de tensão da matéria.

Quando consideramos uma solução particular no vácuo (onde $T = 0$) para a equação de Einstein de tal forma que

$$\bar{M} = \mathbb{R} \times M \quad \text{e} \quad \bar{g} = -f^2 dt^2 + g,$$

onde (M, g) é uma 3-variedade Riemanniana e f é uma função real suave sobre M , é possível verificar que [\(1\)](#) implica que f satisfaz

$$-(\Delta_g f)g + \nabla_g^2 f - f Ric_g = 0.$$

Neste caso, a função f é chamada de potencial estático no vácuo. Por outro lado, tais funções também correspondem a um elemento não trivial do núcleo da adjunta da aplicação curvatura escalar linearizada e tem aplicações nos chamados problemas de curvatura escalar prescrita (ver mais em [\[6\]](#)). Como veremos ao longo deste trabalho, a existência de um potencial estático sobre uma variedade Riemanniana impõe muitas restrições sobre a geometria da mesma.

Por outro lado, temos entre as variedades não-compactas uma classe de grande interesse na geometria que são as variedades assintoticamente planas (ver Definição

[1.3]), as quais tem grande destaque, entre outras direções, na formulação do Teorema da Massa Positiva ([16]). Este trabalho é baseado nos artigos de Pengzi Miao e Luen-Fai Tam [14], Lan-Hsuan Huang, Daniel Martin e Pengzi Miao [11] e Gregory J. Galloway e Pengzi Miao [9], e focará em variedades Riemannianas assintoticamente planas de dimensão três que admitem potenciais estáticos. Nosso trabalho, está dividido em três partes:

No *Capítulo 1*, estudamos os pré-requisitos necessários para seguir no estudo dos demais resultados trabalho. Então, abordamos alguns aspectos de geometria Riemanniana e fixamos notações, apresentamos a definição da *notação grande O* , que permitirá descrevermos a definição de uma variedade assintoticamente plana e estudar problemas de assintocidade. Também lembramos ao leitor de resultados clássicos de Análise, algumas identidades geométricas, bem como as definições e exemplos dos principais objetos de estudo do trabalho, isto é, potenciais estáticos e variedades assintoticamente planas.

O *Capítulo 2* é dividido em três seções. Na primeira seção, trataremos de propriedades locais de variedades Riemannianas que admitem um potencial estático harmônico. Assim, relacionaremos a dimensão do conjunto de potenciais estáticos harmônicos \mathcal{F} com a geometria da variedade, como no resultado a seguir

Teorema 0.1. *Suponha que $\dim(\mathcal{F}) \geq 2$. Sejam f_1 e f_2 dois potenciais estáticos linearmente independentes. Se $f_1^{-1}(0) \cap f_2^{-1}(0) \neq \emptyset$, então (M, g) é plana.*

Na segunda seção do *Capítulo 2*, nos restringiremos ao estudo de variedades assintoticamente planas, analisando o comportamento dos potenciais estáticos sobre seus fins. Também veremos uma caracterização para um potencial estático sobre uma variedade assintoticamente plana. Verificaremos nas proposições [2.11] e [2.12], que a limitação (limitação) de um potencial estático nos fins de uma variedade assintoticamente plana nos dará propriedades interessantes sobre seu comportamento assintótico. Assim, concluiremos que numa 3-variedade assintoticamente Schwarzschild com massa positiva o conjunto de zeros, caso seja não vazio, não se estende ao infinito, como no resultado a seguir

Teorema 0.2. *Seja g uma métrica suave sobre $M = \mathbb{R}^3 \setminus B(\rho)$, tal que*

$$g_{ij} = \left(1 + \frac{m}{2|x|}\right)^4 \delta_{ij} + p_{ij}$$

onde $p_{ij}(x) = O_2(|x|^{-2})$ e $m \neq 0$ é uma constante. Se f é um potencial estático de (M, g) , então f não se anula fora de um compacto.

E por fim, provaremos um teorema análogo ao Teorema [0.1], diferindo pelo fato de que no teorema abaixo não será necessário a hipótese de que a interseção do conjunto

de zeros de dois potenciais estáticos linearmente independente seja não vazia, o que será substituído pela hipótese de que M seja assintoticamente plana.

Teorema 0.3. *Seja (M, g) uma 3-variedade conexa, assintoticamente plana, com ou sem fronteira. Se $\dim(\mathcal{F}) \geq 2$, então (M, g) é plana.*

Na terceira seção, demonstramos resultados de rigidez para 3-variedades conexas completas assintoticamente planas e sem fronteira que admitem potencial estático e notamos como condições sobre estes potenciais influenciam na geometria da variedade, como nos resultados a seguir

Teorema 0.4. *Seja (M, g) uma 3-variedade conexa, completa, assintoticamente plana, sem fronteira e com possivelmente mais de um fim. Se existe um potencial estático limitado sobre (M, g) , então (M, g) é isométrica ao (\mathbb{R}^3, g_0) ou a uma variedade espacial Schwarzschild $\left(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \left(1 + \frac{m}{2|x|}\right)^4 g_0\right)$ com $m > 0$.*

Teorema 0.5. *Seja (M, g) uma 3-variedade conexa, completa, assintoticamente plana sem fronteira, com uma quantidade finita de fins. Se existe um potencial estático f sobre (M, g) que não tem pontos críticos, então (M, g) é isométrica à (\mathbb{R}^3, g_0) ou a uma variedade espacial Schwarzschild $\left(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \left(1 + \frac{m}{2|x|}\right)^4 g_0\right)$ com $m > 0$.*

No *Capítulo 3*, baseado nos artigos de Lan-Hsuan Huang, Daniel Martin e Pengzi Miao [11] e Gregory J. Galloway e Pengzi Miao [9], estudamos uma relação entre potenciais estáticos e hipersuperfícies area minimizing numa variedade assintoticamente plana. Este capítulo se divide em duas sessões principais. Na primeira seção, provamos que todo potencial estático de uma variedade assintoticamente plana com horizon boundary de dimensão $n \geq 3$ se anula sobre a fronteira. De fato, temos o seguinte resultado

Teorema 0.6. *Dado $n \geq 3$. Seja (M, g) uma variedade de dimensão n assintoticamente plana com horizon boundary. Suponha que (M, g) admite um potencial estático f . Então, f se anula sobre ∂M . Mais ainda, se f é limitada, então f é positiva ou negativa em todo o interior de M .*

Finalmente, na segunda sessão do *Capítulo 3* temos como resultado principal que uma n -variedade assintoticamente plana com dimensão $3 \leq n \leq 7$, cuja fronteira é união de hipersuperfícies mínimas e que possui potencial estático em um de seus fins, admite hipersuperfície não-compacta completa area minimizing.

Teorema 0.7. *Dado $3 \leq n \leq 7$. Seja (M, g) uma variedade de dimensão n assintoticamente plana. Suponha que a fronteira de M é vazia ou uma união disjunta de hipersuperfícies mínimas suaves. Se um de seus fins admite um potencial estático, então existe uma hipersuperfície não-compacta, completa e area minimizing em M .*

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Aspectos de Geometria Riemanniana

Nesta seção estamos interessados em apresentar resultados básicos de geometria Riemanniana para que possamos fixar notação e relembrar ao leitor de eventuais resultados que foram vistos num primeiro curso de geometria Riemanniana. Ao longo deste trabalho trataremos com variedades Riemannianas com curvatura escalar nula (salvo em menção contrária).

Denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto de campos de vetores tangentes suaves definidos em M e $\mathcal{D}(M)$ o conjunto das funções suaves definidas em M . Vale salientar os conceitos e definições a seguir se encontram também em livros clássicos como Petersen [15] e do Carmo [7].

Sejam $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ campos de vetores tangentes suaves, definamos então o *Endomorfismo Curvatura*, denotado por $Rm : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ e dado pela seguinte expressão

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

onde ∇ é a conexão de Levi-Civita.

E também denotaremos o *Tensor Curvatura de Riemann* por

$$R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)W, Z).$$

Dados $p \in M$ e $\sigma \subset T_p M$ subespaço vetorial de dimensão dois. Definiremos a *Curvatura Seccional* de σ no ponto p por

$$K(\sigma) = \frac{R(X, Y, X, Y)}{|X|^2 |Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2},$$

sendo $\{X, Y\}$ uma base de σ em p . Não é difícil verificar que $K(\sigma)$ está bem definida, isto é, a curvatura seccional não depende da base $\{X, Y\}$ escolhida.

Fixado $p \in M$, considere $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de $T_p M$. Definimos o *Tensor Curvatura de Ricci* pela seguinte expressão

$$Ric(X, Y) = \sum_{k=1}^n R(X, e_k, e_k, Y)$$

e a *Curvatura Escalar* é uma função suave em M definida por

$$R = \sum_{k=1}^n Ric(e_k, e_k)$$

No que segue denotaremos por $f_{;i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ e $T_{ij} = T(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$, onde f é uma função definida em M , T é um tensor de ordem dois e $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ é uma base coordenada do espaço tangente de M no ponto p . O lema seguinte nos dará uma relação entre os tensores curvatura de Ricci e o tensor curvatura escalar para uma variedade Riemanniana de dimensão três.

Lema 1.1. Seja uma variedade Riemanniana de dimensão três. Então,

$$R_{ijkl} = Ric_{ik}g_{jl} - Ric_{il}g_{jk} + Ric_{jl}g_{ik} - Ric_{jk}g_{il} - \frac{1}{2}R(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) \quad (1.1)$$

Demonstração. Defina o tensor

$$\bar{R}_{ijkl} = R_{ijkl} - (Ric_{ik}g_{jl} - Ric_{il}g_{jk} + Ric_{jl}g_{ik} - Ric_{jk}g_{il}) + \frac{1}{2}R(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$$

Através de alguns cálculos elementares podemos provar que \bar{R} é um tensor tal que $\bar{R}_{ijkl} = -\bar{R}_{jikl} = -\bar{R}_{klij}$ e também satisfaz a primeira identidade de Bianchi. Além disso,

$$\begin{aligned} Ric(\bar{R})_{ij} &= g^{ik}R_{ijkl} \\ &= Ric_{jl} - (Rg_{jl} - \delta_j^i Ric_{il} - \delta_l^k Ric_{jk} + \delta_i^l Ric_{jl}) + \frac{1}{2}R(\delta_i^i g_{jl} - \delta_j^j g_{il}) \\ &= Ric_{jl} - Rg_{jl} + Ric_{jl} + Ric_{jl} - 3Ric_{jl} + \frac{1}{2}R(3g_{jl} - g_{jl}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Considere um base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ no espaço tangente a M no ponto p e os planos $\pi_1 = [e_2, e_3]$, $\pi_2 = [e_1, e_3]$ e $\pi_3 = [e_1, e_2]$. Note que

$$K_{\bar{R}(\pi_1)} + K_{\bar{R}(\pi_2)} = \bar{R}(e_2, e_3, e_2, e_3) + \bar{R}(e_1, e_3, e_1, e_3) = Ric(\bar{R})(e_2, e_3) = 0$$

De maneira análoga, podemos ver que $K_{\bar{R}(\pi_1)} + K_{\bar{R}(\pi_3)} = 0$ e $K_{\bar{R}(\pi_2)} + K_{\bar{R}(\pi_3)} = 0$. Daí, temos que $K_{\bar{R}(\pi_1)} = K_{\bar{R}(\pi_2)} = K_{\bar{R}(\pi_3)} = 0$, de onde concluímos que todas as curvaturas seccionais de \bar{R} são nulas. Portanto, $\bar{R} = 0$. □

Sejam M uma variedade e Σ uma subvariedade de M . Diremos que Σ é *two-sided* quando possui fibrado normal trivial. Esta definição é equivalente à existência de um campo suave normal e unitário. Como consequência desta definição temos que Σ é orientável. Seja $\Sigma \subset M$ uma hipersuperfície, imersa e two-sided em (M, g) . Para cada $p \in M$ considere $T_p\Sigma \subset T_pM$ o espaço tangente a p em Σ e $\nu \in \mathfrak{X}(\Sigma)^\perp \subset \mathfrak{X}(M)$ um campo normal unitário sobre Σ . O *operador forma* de Σ é definido por

$$S(X) := \nabla_X \nu,$$

onde $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. A *Segunda Forma Fundamental* de Σ é uma forma bilinear simétrica em $\mathfrak{X}(\Sigma)$, definida como

$$\mathbb{III}(X, Y) := g(\nabla_X \nu, Y).$$

A *Curvatura Média* de Σ num ponto $p \in \Sigma$ é denotada por H e definida como o traço do operador forma, isto é,

$$\begin{aligned} H &:= \text{traço} \{Y \rightarrow \nabla_Y \nu\} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{III}(e_k, e_k) \end{aligned}$$

onde $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ é uma base ortonormal de $T_p\Sigma$.

Considere campos $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$. Existe uma importante relação entre a curvatura ambiente e a curvatura intrínseca da hipersuperfície Σ dada pela Equação de Gauss

$$R(X, Y, Z, W) = R^\Sigma(X, Y, Z, W) - \mathbb{III}(X, W)\mathbb{III}(Y, Z) + \mathbb{III}(X, Z)\mathbb{III}(Y, W),$$

onde R e R^Σ denotam as curvaturas escalares de M e Σ , respectivamente. Tomando duas vezes o traço da equação acima temos

$$R - 2Ric(\nu, \nu) = R^\Sigma - H^2 + |\mathbb{III}|^2, \tag{1.2}$$

onde $Ric(\nu, \nu)$ é o tensor curvatura de Ricci de M avaliado na direção ν normal à Σ e $|\text{III}|$ denota a segunda forma fundamental de Σ .

Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana e $f \in \mathcal{D}(M)$. Definiremos o *gradiente* de f e denotaremos por ∇f o campo que satisfaz a seguinte equação

$$g(\nabla f, X) = df(X),$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Definamos a *Hessiana* de f , segundo a métrica g , como

$$\nabla^2 f(X, Y) := \nabla_X \nabla_Y f - \nabla_{\nabla_X Y} f,$$

com $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Assim, também temos que o *Laplaciano* de f é definido por

$$\Delta f = \sum_{k=1}^n \nabla^2 f(e_k, e_k),$$

onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base ortonormal de $T_p M$.

O seguinte lema nos dará a relação entre o laplaciano de uma variedade e uma subvariedade imersa.

Lema 1.2. Seja $\varphi : M^n \rightarrow \tilde{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica. Se $f : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave, então

$$\Delta_{\tilde{M}} f = \Delta_M f - n\vec{H}(f) + (\nabla_{\tilde{M}}^2 f)(N, N),$$

em cada $p \in M$, onde \vec{H} é o vetor curvatura média da imersão φ e N é um campo normal unitário a M em vizinhança de p .

Demonstração. Denote por ∇ e $\tilde{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita de M e \tilde{M} , respectivamente e III é a segunda forma fundamental de φ . Se $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1} = N\}$ é uma base ortonormal numa vizinhança de $p \in M$ em \tilde{M} , então em p temos que

$$\begin{aligned} \Delta_{\tilde{M}} f &= \sum_{i=1}^{n+1} \left(e_i(e_i(f)) - (\tilde{\nabla}_{e_i} e_i)(f) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i)(f) - \text{III}(e_i, e_i)(f) \right) + N(N(f)) - (\tilde{\nabla}_N N)(f) \\ &= \Delta_M f - n\vec{H}(f) + (\nabla_{\tilde{M}}^2 f)(N, N). \end{aligned}$$

□

A seguir listamos um conjunto de identidades importantes que usaremos ao longo deste trabalho. Algumas das identidades não daremos a demonstração, mas indicaremos onde encontrar a prova.

Proposição 1.3. (Identidades de Bianchi) O tensor curvatura Riemanniana satisfaz as seguintes propriedades de permutação abaixo:

(i) A *Primeira Identidade de Bianchi*:

$$R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0,$$

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$;

(ii) A *Segunda Identidade de Bianchi*:

$$(\nabla_X R)(Y, Z)W + (\nabla_Z R)(X, Y)W + (\nabla_Y R)(Z, X)W = 0,$$

onde $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$.

Tomando duas vezes o traço da identidade acima obtemos a Segunda Identidade de Bianchi Contraída, dada por:

$$\operatorname{div} Ric = \frac{1}{2} \nabla R. \quad (1.3)$$

Demonstração. Ver Proposição 4, página 33, de [15]. □

Lema 1.4. (Identidade de Ricci) Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ um função suave. Então,

$$\operatorname{div}(\nabla^2 f) = d(\Delta f) + Ric \cdot \nabla f.$$

Demonstração. Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal tal que $\nabla_{e_i} e_j = 0$, que sempre é possível devido a existência de um referencial geodésico. Sabemos que dado $T : \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{D}$ um r -tensor, seu divergente é um $(r - 1)$ -tensor dado por

$$(\operatorname{div}(T))(X_1, \dots, X_{r-1}) = \sum_{i=1}^n [e_i(T(X_1, \dots, X_{r-1}, e_i))] - T(\nabla_{e_i} X_1, \dots, X_{r-1}, e_i) \quad (1.4)$$

$$\dots - T(X_1, \dots, \nabla_{e_i} X_{r-1}, e_i) - T(X_1, \dots, X_{r-1}, \nabla_{e_i} e_i). \quad (1.5)$$

Como $\nabla_{e_i} e_j = 0$, temos que

$$\begin{aligned} (\operatorname{div}(T))(X_1, \dots, X_{r-1}) &= \sum_{i=1}^n [e_i(T(X_1, \dots, X_{r-1}, e_i))] - T(\nabla_{e_i} X_1, \dots, X_{r-1}, e_i) \\ &\quad - \dots - T(X_1, \dots, \nabla_{e_i} X_{r-1}, e_i). \end{aligned}$$

Assim, calcularemos agora o que será o divergente do tensor do hessiano, que é dado por $\nabla^2 f(X, Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle$. Portanto, de (1.4), segue que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\nabla^2 f)(X) &= \sum_{i=1}^n [e_i(\nabla^2 f(X, e_i)) - \nabla^2 f(\nabla_{e_i} X, e_i)] \\ &= \sum_{i=1}^n [e_i \langle \nabla_X \nabla f, e_i \rangle - \langle \nabla_{\nabla_{e_i} X} \nabla f, e_i \rangle] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\langle \nabla_{e_i} \nabla_X \nabla f, e_i \rangle + \langle \nabla_X \nabla f, \cancel{\nabla_{e_i} e_i} \rangle - \langle \nabla_{\nabla_{e_i} X} \nabla f, e_i \rangle \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\langle \nabla_{e_i} \nabla_X \nabla f, e_i \rangle - \langle \nabla_{\nabla_{e_i} X} \nabla f, e_i \rangle \right]. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Por outro lado, temos que

$$Rm(e_i, X) \nabla f = \nabla_{e_i} \nabla_X \nabla f - \nabla_X \nabla_{e_i} \nabla f - \nabla_{[e_i, X]} \nabla f,$$

Conseqüentemente,

$$\langle \nabla_{e_i} \nabla_X \nabla f, e_i \rangle = \langle Rm(e_i, X) \nabla f + \nabla_X \nabla_{e_i} \nabla f + \nabla_{[e_i, X]} \nabla f, e_i \rangle \tag{1.7}$$

Tomando o traço de (1.7) e lembrando $Ric(X, \nabla f) = \sum_{i=1}^n \langle Rm(e_i, X) \nabla f, e_i \rangle$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} \nabla_X \nabla f, e_i \rangle &= Ric(X, \nabla f) + \sum_{i=1}^n \langle \nabla_X \nabla_{e_i} \nabla f + \nabla_{[e_i, X]} \nabla f, e_i \rangle \\ &= Ric(X, \nabla f) + \sum_{i=1}^n X \langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{[e_i, X]} \nabla f, e_i \rangle \\ &= Ric(X, \nabla f) + d(\Delta f) + \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{[e_i, X]} \nabla f, e_i \rangle \end{aligned} \tag{1.8}$$

Note que $[e_i, X] = 0$, e assim também, $\nabla_{e_i} X = 0$. Portanto, de (1.6) e (1.8), segue que

$$\operatorname{div}(\nabla^2 f) = d(\Delta f) + \operatorname{Ric} \cdot \nabla f.$$

□

Denotamos por $\mathring{\operatorname{Ric}} = \operatorname{Ric} - \frac{R}{n}g$ e chamamos de tensor de Ricci sem traço da métrica g e também $\mathcal{L}_X g$ é a derivada de Lie da métrica g na direção de X .

Proposição 1.5. (Identidade de Pohožev-Schöen) Considere (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n compacta (possivelmente com fronteira não-vazia) e X um campo vetorial definido em M . Então

$$\int_M X(R)dV = -\frac{n}{n-2} \int_M \langle \mathring{\operatorname{Ric}}, \mathcal{L}_X g \rangle dV + \frac{2n}{n-2} \int_{\partial M} \mathring{\operatorname{Ric}}(X, \nu) d\sigma$$

onde R é a curvatura escalar, $\mathring{\operatorname{Ric}}$ é o tensor de Ricci sem traço, $\mathcal{L}_X g$ é a derivada de Lie de g e ν é o vetor normal à M .

Demonstração. Da segunda identidade Bianchi contraída, temos $(\operatorname{Ric})_{ij;j} = \frac{1}{2}R_{;i}$. Assim,

$$\mathring{R}_{ij;j} = R_{ij;j} - \frac{1}{n}R_{;i} = \frac{1}{2}R_{;i} - \frac{1}{n}R_{;i} = \frac{n-2}{2n}R_{;i}. \quad (1.9)$$

Portanto, usando integração por partes e a igualdade (1.9)

$$\begin{aligned} \int_M X(R)dV &= \int_M X_i R_{;i} dV = \frac{2n}{n-2} \int_M X_i \mathring{R}_{ij;j} dV \\ &= \frac{2n}{n-2} \left(- \int_M X_{i;j} \mathring{R}_{ij} dV + \int_{\partial M} \mathring{R}_{ij} X_i \nu_j d\sigma \right). \end{aligned}$$

Como \mathring{R}_{ij} é um tensor simétrico teremos que

$$X_{i;j} \mathring{R}_{ij} = \frac{1}{2} \mathring{R}_{ij} (X_{i;j} + X_{j;i}) = \frac{1}{2} \mathring{R}_{ij} (\mathcal{L}_X g)_{ij}.$$

Daí,

$$\int_M X(R)dV = -\frac{n}{n-2} \int_M \mathring{R}_{ij} (\mathcal{L}_X g)_{ij} + \frac{2n}{n-2} \int_{\partial M} \mathring{R}_{ij} X_i \nu_j d\sigma \quad (1.10)$$

Logo, da igualdade (1.10) concluímos a demonstração.

□

Por fim, lembre que dizemos uma superfície é *mínima* se $H = 0$. Neste contexto, temos o seguinte resultado que será importante para nossos objetivos.

Proposição 1.6. (Teorema do Semi-Espaço) Uma superfície mínima Σ conexa, sem bordo, propriamente imersa não pode estar contida em um semi-espaço, a não ser que Σ seja um plano.

Demonstração. Ver Teorema 1, página 1, de [10]. □

1.2 Alguns Resultados de Análise

A definição a seguir nos dará a noção de crescimento ou decaimento de funções, ou seja, é como relacionar o comportamento assintótico de duas funções. Tal conceito nos será importante na definição de uma variedade Riemanniana assintoticamente plana, o qual é um dos principais objetos de estudo desta dissertação. Logo após descreveremos algumas propriedades que seguem desta definição.

Definição 1.1. Sejam M uma variedade Riemanniana e $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ funções. Diremos que

$$f(x) = O(g(x)), \quad [f(x) \in O(g(x))]$$

se existe um número real positivo M tal que

$$|f(x)| \leq M|g(x)|$$

quando $|x| \rightarrow \infty$ e chamaremos de **Notação grande O**.

Observação 1.1. Denotaremos $O_k(|x|^{-\tau}) = O(|x|^{-k-\tau})$.

Verifiquemos no exemplo a seguir uma aplicação da definição da notação grande O.

Exemplo 1.1. Sejam $f(x) = 6x^4 - 2x^3 + 5$ e $g(x) = x^4$. Temos que $f(x) \in O(g(x))$. De fato,

$$\begin{aligned} |6x^4 - 2x^3 + 5| &\leq |6x^4| + |2x^3| + 5 \\ &\leq 6x^4 + 2x^4 + 5x^4 \\ &= 13x^4 \end{aligned}$$

Assim, $M = 13$. Como queríamos demonstrar.

Na Proposição (1.7) abaixo listaremos algumas propriedades que seguem de forma imediata da definição.

Proposição 1.7. Sejam $f_1, f_2, g_1, g_2 : M \rightarrow \mathbb{R}$ funções. Então valem as seguintes propriedades:

- (i) $f_1(x) = O(g_1(x))$, então $kf_1(x) = O(g_1(x))$, com $k > 0$;
- (ii) $f_1(x)O(g_1(x)) = O(f_1(x)g_1(x))$;
- (iii) $O(kg_1(x)) = O(g_1(x))$, com $k \neq 0$;
- (iv) $f_1(x) = O(g_1(x))$ e $f_2(x) = O(g_2(x))$, então $f_1(x)f_2(x) = O(g_1(x)g_2(x))$;
- (v) $f_1(x) = O(g_1(x))$, então $\int_{x_0}^x |f_1(y)|dy = O\left(\int_{x_0}^x |g_1(y)|dy\right)$ para $x \geq x_0$.

Demonstração. Segue facilmente da definição. □

Passamos neste momento a lembrar ao leitor alguns resultados clássicos de análise envolvendo funções harmônicas reais, entre eles podemos encontrar o princípio do máximo, o lema de Hopf e o teorema da invariância do domínio.

Lema 1.8. Suponha que Ω seja um conexo, f seja uma função real analítica em Ω , e $f = 0$ num subconjunto aberto não vazio de Ω . Então, $f \equiv 0$ em Ω .

Demonstração. Ver Teorema 1.27 de [1]. □

Lema 1.9. Se f é harmônica sobre Ω , então f é analítica real sobre Ω .

Demonstração. Ver Teorema 1.28 de [1]. □

Corolário 1.10. Seja f é harmônica sobre um conjunto conexo Ω e $f = 0$ num subconjunto aberto não vazio de Ω . Então, $f \equiv 0$ em Ω .

Demonstração. Imediato a partir dos Lemas 1.8 e 1.9. □

Proposição 1.11. Sejam Ω um domínio limitado e f uma função real contínua e harmônica sobre Ω . Então f atinge seus valores de máximo e de mínimo sobre $\bar{\Omega}$ em $\partial\Omega$.

Demonstração. Ver Teorema 2, página 328, de [8]. □

Proposição 1.12. (Princípio do Máximo Forte) Seja f uma função harmônica definida sobre um aberto conexo U de \mathbb{R}^n . Se existe x_0 em U tal que $f(x_0) \geq f(x)$ para todo x numa vizinhança de x_0 . Então a função f é constante em sobre U .

Demonstração. Ver Teorema 3, página 332, de [8]. □

Lema 1.13. (Lema de Hopf) Sejam $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave e U aberto em M , com $\Delta f = 0$ em U . Suponha que existe $x_0 \in \partial U$ tal que

$$f(x_0) < f(x), \quad \forall x \in U.$$

E existe uma bola aberta $B \subset U$ com $x_0 \in \partial B$. Então,

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0) > 0,$$

onde ν é um vetor normal unitário a B em x_0 .

Demonstração. Ver Lema da página 330 de Evans [8]. □

O resultado abaixo tem um aspecto mais topológico que terá um papel importante da demonstração de dos resultados principais deste trabalho.

Proposição 1.14. (Teorema da Invariância do Domínio) Sejam M e N variedades n -dimensionais com fronteira e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação contínua e localmente injetiva. Então, f é uma aplicação aberta e um homeomorfismo local.

Demonstração. Ver Wladyslaw, [13]. □

1.3 Potenciais Estáticos

Nesta sessão introduziremos o principal objeto de estudo de nosso trabalho que é a noção de potencial estático. Veremos que sua existência impõe uma série de condições e restrições na geometria de uma variedade Riemanniana. Passemos à definição:

Definição 1.2. Uma métrica Riemanniana g é chamada *estática* sobre uma variedade M se existe uma função não trivial sobre M tal que

$$-(\Delta f)g + \nabla^2 f - f Ric = 0, \tag{1.11}$$

onde Δf , $\nabla^2 f$ e Ric denotam o Laplaciano, o Hessiano e o tensor curvatura de Ricci de g , respectivamente. Chamaremos a equação (1.11) de *Equação de Estaticidade*. Além disso, diremos que se f é uma solução não trivial de (1.11) ela é um **Potencial Estático**. O conjunto de todos os potenciais estáticos de uma variedade Riemanniana M será denotado por $\mathcal{SP}(M)$.

A seguir segue alguns exemplos de potenciais estáticos, isto é, aplicações não triviais satisfazendo (1.11).

Exemplo 1.2. O espaço euclidiano (\mathbb{R}^3, g_0) . Assim, $f = a_0 + \sum_{i=1}^3 a_i x_i$, onde $\{a_i\}$ são constantes. De fato, $\nabla^2 f \equiv 0$, assim $\Delta f = 0$, e sobre a métrica g_0 temos que $Ric \equiv 0$. Portanto, a equação de estaticidade é satisfeita.

Exemplo 1.3. Uma variedade espacial Schwarzschild com massa $m > 0$, isto é, $\left(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \left(1 + \frac{m}{2|x|}\right)^4 g_0\right)$. Neste caso, $f = \frac{1 - \frac{m}{2|x|}}{1 + \frac{m}{2|x|}}$.

Vejam os a seguir algumas propriedades que o conjunto de zeros de um potencial estático deve satisfazer.

Proposição 1.15. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n . Suponha que f é um potencial estático com conjunto de zeros não vazio. Seja $\Sigma = f^{-1}(0)$.

- (i) Σ é hipersuperfície totalmente geodésica e $|\nabla f|$ é uma constante positiva em cada componente conexa de Σ .
- (ii) Para todo $p \in \Sigma$, ∇f é um autovetor do tensor de Ricci
- (iii) A curvatura escalar de g é constante.

Demonstração. (i) Seja $p \in \Sigma$ arbitrário. Suponha que $\nabla f(p) = 0$, então considere uma geodésica $\gamma(t)$ partindo de p . Faça $f(t) := f(\gamma(t))$ donde

$$f'' = f \operatorname{Ric}(\gamma', \gamma') \quad \text{e} \quad f(0) = f'(0) = 0.$$

Isto implica que f se anula numa vizinhança de p e, conseqüentemente $f = 0$ em M pelo Corolário [1.10](#), o que é uma contradição. Portanto, $\nabla f(p) \neq 0$ e pelo Teorema da Função Inversa, Σ é uma superfície mergulhada em M . Mais ainda, da equação de estaticidade sobre Σ , temos que $\nabla^2 f(X, Y) = 0$ para todos X, Y campos de vetores tangentes a Σ , pois $f \equiv 0$ sobre Σ . De modo análogo temos que $\nabla^2 f(X, \nabla f) = 0$ sobre Σ , donde

$$\begin{aligned} \nabla_X |\nabla f|^2 &= \nabla_X \langle \nabla f, \nabla f \rangle \\ &= 2 \langle \nabla_X \nabla f, \nabla f \rangle \\ &= 2 \langle \nabla^2 f(X), \nabla f \rangle \\ &= 2 \nabla^2 f(X, \nabla f) \\ &= 0, \end{aligned}$$

o que implica que Σ é totalmente geodésica e $|\nabla f|$ é uma constante positiva ao longo de Σ .

- (ii) Sejam $p \in \Sigma$ e ν um vetor normal unitário a Σ em p . Como $\nabla f(p)$ também é normal a Σ em p , temos que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(p) = \alpha \nu$. Por outro lado, $\frac{\partial f}{\partial \nu} = \langle \nabla f, \nu \rangle$,

assim $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \nu} \nu$. Desta forma,

$$\begin{aligned} Ric(\nabla f, \nabla f) &= Ric\left(\frac{\partial f}{\partial \nu} \nu, \frac{\partial f}{\partial \nu} \nu\right) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial \nu}\right)^2 Ric(\nu, \nu) \\ &= \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial \nu}\right)^2 \langle \nu, \nu \rangle \\ &= \lambda \langle \nabla f, \nabla f \rangle, \end{aligned}$$

onde $\lambda = Ric(\nu, \nu)$, ou seja, ∇f é um autovetor do tensor curvatura de Ricci.

(iii) Tomando o traço da equação $-(\Delta f)g + \nabla^2 f - fRic = 0$

$$(n-1)\Delta f = -Rf, \tag{1.12}$$

consequentemente,

$$\nabla^2 f = \left(Ric - \frac{R}{n-1}g\right) f.$$

Juntamente com o lema (1.4), temos as identidades abaixo:

$$\begin{aligned} div((\Delta f)g) &= d(\Delta f), \\ div(\nabla^2 f) &= d(\Delta f) + Ric\nabla f, \\ div(fRic) &= fdiv(Ric) + Ric \cdot \nabla f. \end{aligned}$$

Daí, tomando divergência na equação de estaticidade e pela identidade de Bianchi contraída (1.3), segue que

$$\begin{aligned} 0 &= -d(\Delta f) + [d(\Delta f) + Ric\nabla f] - [fdiv(Ric) + Ric \cdot \nabla f] \\ &= -\frac{1}{2}fdR \end{aligned}$$

Suponhamos que exista x_0 tal que $f(x_0) \neq 0$, então $dR(x_0) = 0$.

Verifiquemos o que ocorre no conjunto de zeros de f . Assim, tomemos uma geodésica $\gamma(t)$ partindo de um ponto qualquer x_0 e definamos $h(t) = f(\gamma(t))$. Então,

$$\begin{aligned} h''(t) &= \nabla^2 f_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) \\ &= \left[\left(Ric - \frac{R}{n-1}g \right) (\gamma'(t), \gamma'(t)) \right] h(t). \end{aligned}$$

Se $f(x_0) = 0$ e $df(x_0) = 0$, então a EDO linear acima terá zero como valor inicial, assim $h \equiv 0$. Logo, $f \equiv 0$ em torno de uma vizinhança de x_0 . Consequentemente, de (1.12), $\Delta f \equiv 0$ em torno de uma vizinhança de x_0 . Então por (1.10), temos que $f \equiv 0$ em M , contradizendo o fato de que f é um potencial estático.

Assim, como f não é identicamente nula e $f(x_0) = 0$, então $df(x_0) \neq 0$. Como 0 é um valor regular de f , então $f^{-1}(0)$ é uma subvariedade de codimensão 1, isto é, uma hipersuperfície mergulhada em M . Então, claramente $dR \equiv 0$. Portanto, R é constante em M . □

A próxima proposição nos dá condições para que a métrica de uma variedade que admite potencial estático seja analítica em torno de uma vizinhança.

Proposição 1.16. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana que admite um potencial estático, então em cada ponto p tal que $f(p) \neq 0$ tem-se que existe uma vizinhança de p onde g é analítica.

Demonstração. Ver Proposição 2.8 de [5]. □

1.4 Variedades Assintoticamente Planas

Outro conceito de grande importância nesta dissertação é o de variedade assintoticamente plana como daremos sua definição precisa a seguir.

Definição 1.3. Diremos que uma n -variedade é dita **Assintoticamente Plana** se existe um compacto $K \subset M$ tal que $M \setminus K = \bigcup_{i=1}^k E_i$, onde cada E_i é difeomorfo a $\mathbb{R}^n \setminus B(\rho_i)$ com $\rho > 0$, isto é, existe $\varphi_i : \mathbb{R}^n \setminus B(\rho_i) \rightarrow E_i$ difeomorfismos tal que por estes difeomorfismos, a métrica g sobre E_i satisfaz

$$g_{ij} = \delta_{ij} + b_{ij} \quad \text{com} \quad b_{ij} = O_2(|x|^{-\tau})$$

para alguma constante $\frac{n-2}{2} < \tau \leq n-2$. Tal constante tem inspiração no Teorema da Massa Positiva (ver, [16]). Os conjuntos E_i são chamados *fnas* da variedade.

Exemplo 1.4. (\mathbb{R}^n, g_0) é uma variedade assintoticamente plana.

De fato, seja $K = B(\rho)$ um compacto. Então, tome $E = \mathbb{R}^n \setminus B(\rho)$ que é claramente difeomorfo a $\mathbb{R}^n \setminus B(\rho)$. Além disso, seja $b_{ij} \equiv 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus B(\rho)$ e o resultado segue.

Exemplo 1.5. Seja (M, g) uma n -variedade assintoticamente plana, então podemos construir uma nova classe de variedades assintoticamente planas usando uma mudança

para uma métrica conforme. Dizemos que \bar{g} é *conforme* a g se:

$$\bar{g} = u(x)^{\frac{4}{n-2}} g,$$

para alguma $u(x) \in C^\infty(M)$. Como o expoente é da forma $\frac{4}{n-2}$ podemos assumir sem perda de generalidade que $u(x) \geq 0$. Note que a escolha de expoente é conveniente de tal forma que simplifique o cálculo da curvatura escalar de \bar{R} em relação a R , onde \bar{R} e R denotam as curvaturas escalares de \bar{g} e g , respectivamente. Donde temos que

$$\bar{R} = u(x)^{-\frac{(n+2)}{(n-2)}} \left(-\frac{4(n-1)}{(n-2)} \Delta_g u + Ru \right). \quad (1.13)$$

Portanto, se (M, g) é uma n -variedade assintoticamente plana, então (M, \bar{g}) é também uma variedade assintoticamente plana dada pela $u(x)$ desde que ela satisfaça condições adequadas de decaimento. Em particular, (M, \bar{g}) é assintoticamente plana se

$$\begin{aligned} u &\rightarrow 1, \quad |x| \rightarrow \infty \\ u_i &= O(|x|^{-\tau-1}) \\ u_{jk} &= O(|x|^{-\tau-2}) \\ \Delta_g u &= O(|x|^{-q}), \end{aligned}$$

para constantes $\tau > \frac{1}{2}$ e $q > 3$.

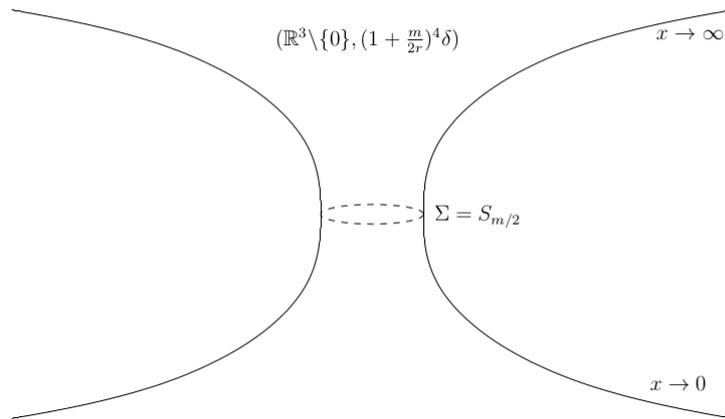


Figura 1.1: Visualização de uma Variedade Schwarzschild de dimensão três

Exemplo 1.6. Um caso especial do exemplo acima é quando

$$(M, g) = \left(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 \delta \right),$$

com $m > 0$, onde $r = |x|$ e δ é a métrica usual do espaço euclidiano. Temos que (M, g) é uma variedade completa e pelo que foi provado anteriormente também é uma variedade assintoticamente plana. Esta 3-variedade é chamada de *variedade espacial Schwarzschild*, como representada na Figura 1.1.

Como a curvatura escalar do espaço euclidiano é nula na métrica usual e $\Delta u = 0$ de (1.13) temos que uma variedade espacial Schwarzschild tem curvatura escalar nula. Além disso, a hipersuperfície $S_{m/2} = \{|x| = m/2\}$ é uma superfície mínima em (M, g) , pois se $g = u(x)^4 \delta$, então a curvatura média H da esfera com respeito a g satisfaz

$$H = \frac{1}{u^2} \left(\frac{2}{r} + \frac{4}{u} \frac{\partial u}{\partial r} \right),$$

e $H = 0$ se $r = m/2$.

Capítulo 2

Potenciais Estáticos em Variedades Assintoticamente Planas

Neste capítulo, iremos assumir que (M, g) será uma variedade Riemanniana (não necessariamente assintoticamente plana) de dimensão três, conexa, suave com curvatura escalar igual a zero. Também admitiremos que (M, g) possui um potencial estático f (pelo menos um). Além disso, nos concentraremos apenas no conjunto dos potenciais estáticos harmônicos de denotaremos por

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{SP}(M) \mid \nabla^2 f = f Ric, \Delta f = 0\}.$$

Podemos verificar que \mathcal{F} é um espaço vetorial, cuja dimensão estará diretamente relacionada com propriedades geométricas e topológicas da variedade em questão. Este capítulo se dividirá em três partes: Primeiro, trataremos de propriedades locais de métricas estáticas, ou seja, variedades Riemannianas que admitem potenciais estáticos; Segundo, nos restringiremos a variedades assintoticamente planas e veremos como caracterizar os potenciais estáticos e sua relação com propriedades de limitação (ou ilimitação) e por fim veremos que a dimensão de \mathcal{F} nos trará informações sobre a planicidade de M . Finalmente, na seção três abordaremos resultados de rigidez em uma variedade assintoticamente plana. As principais referências deste capítulo são os trabalhos de Miao, Pengzi and Tam, Luen-Fai [14] e Corvino, Justin [5].

2.1 Propriedades Locais de Métricas Estáticas

Nesta seção tratamos de propriedades envolvendo potenciais estáticos condições sobre o seu conjunto de zeros e também resultados relacionando localmente a curvatura da variedade e a dimensão do conjunto de potenciais harmônicos.

A proposição a seguir relacionará o tensor curvatura de Ricci com um potencial estático. Podemos encontrar uma demonstração alternativa para o resultado abaixo em [18], Proposição 2 e Corolário 3.

Proposição 2.1. Seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ uma base ortonormal que diagonaliza o tensor curvatura de Ricci em p .

(i) Suponha que f é um potencial estático. Então

$$\begin{aligned} f(R_{33;1} - R_{31;3}) &= (R_{22} - R_{33})f_{;1} \\ f(R_{11;2} - R_{12;1}) &= (R_{33} - R_{11})f_{;2} \\ f(R_{22;3} - R_{23;2}) &= (R_{11} - R_{22})f_{;3} \end{aligned}$$

(ii) Suponha que $\{R_{11}, R_{22}, R_{33}\}$ são números distintos e suponha que N e V são dois potenciais estáticos positivos. Então $V = cN$ para alguma constante c .

(iii) Suponhamos que $R_{11} = R_{22} \neq R_{33}$ e N é um potencial estático positivo. Se f é um potencial estático qualquer, então a função definida por $Z = N^{-1}f$ satisfaz $Z_{;1} = Z_{;2} = 0$

Demonstração. (i) Sejam $\{a, b, c, \dots\}$ um conjunto de índices variando em $\{1, 2, 3\}$. A partir da equação de estaticidade, obtém-se que $(f_{ab}) = f(R_{ab})$, donde, derivando com relação a c , e utilizando regra do produto, temos

$$f_{;abc} = f_{;c}R_{ab} + fR_{ab;c}. \quad (2.1)$$

Sejam R_{acb}^d as coordenadas do tensor curvatura de Riemann em cartas coordenadas locais. Então, da definição do tensor curvatura de Riemann e do teorema de Claustro-Schwarz (lembre que a variedade é suave), tem-se a igualdade

$$\nabla_{\partial_c} \nabla_{\partial_b} \partial_a - \nabla_{\partial_b} \nabla_{\partial_c} \partial_a = \sum_{d=1}^3 R_{acb}^d \partial_d. \quad (2.2)$$

Então, aplicando f na equação (2.2) e juntamente com (2.1), temos que

$$\begin{aligned} R_{acb}^d f_{;d} &= f_{;abc} - f_{;acb} \\ &= f_{;c}R_{ab} - f_{;b}R_{ac} + f(R_{ab;c} - R_{ac;b}). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Para uma variedade de dimensão 3, o tensor curvatura de Ricci satisfaz a igualdade abaixo [1.1] como vimos no Lema [1.1] (também encontrado em [3] Lema 6.1):

$$R_{acb}^d = \delta_b^d R_{ac} - \delta_c^d R_{ab} + g_{ac} R_b^d - g_{ab} R_c^d - \frac{1}{2} R (\delta_c^d g_{ab} - \delta_b^d g_{ac}) \quad (2.4)$$

Consequentemente de (2.3), (2.4) e $R = 0$, segue

$$\begin{aligned} \sum_{d=1}^3 (\delta_b^d R_{ac} - \delta_c^d R_{ab} + g_{ac} R_b^d - g_{ab} R_c^d) \partial_d f &= f_{;c} R_{ab} - f_{;b} R_{ac} + f(R_{ab;c} - R_{ac;b}) \\ \Rightarrow \sum_{d=1}^3 f_{;d} g_{ac} R_b^d - \sum_{d=1}^3 f_{;d} g_{ab} R_c^d &= f(R_{ab;c} - R_{ac;b}) - 2(f_{;b} R_{ac} - f_{;c} R_{ab}). \end{aligned}$$

Tomando $a = b \neq c$ e lembrando da hipótese que diz que $\{e_1, e_2, e_3\}$ diagonaliza o tensor de Ricci obtém-se

$$\begin{aligned} \sum_{d=1}^3 f_{;d} g_{ac} R_a^d - \sum_{d=1}^3 f_{;d} g_{aa} R_c^d &= f(R_{aa;c} - R_{ac;a}) - 2(f_{;a} R_{ac} - f_{;c} R_{aa}) \\ \Rightarrow f_{;c} (-2R_{aa} - R_{cc}) &= f(R_{aa;c} - R_{ac;a}) \end{aligned}$$

Façamos agora, por exemplo, $a = b = 1$ e $c = 2$, então

$$f_{;2}(-2R_{11} - R_{22}) = f(R_{11;2} - R_{12;1}) \Rightarrow f_{;2}(R_{33} - R_{11}) = f(R_{11;2} - R_{12;1})$$

pois $R = 0$, isto é, $R_{11} + R_{22} + R_{33} = 0$. Sendo assim, o resultado segue variando a, b e c em $\{1, 2, 3\}$ com $a = b \neq c$.

(ii) Como por hipótese a base $\{R_{11}, R_{22}, R_{33}\}$ possui autovalores distintos em p , por continuidade, teremos que existirá um vizinhança U de p onde também vale (i). Note que como $R_{11} \neq R_{22} \neq R_{33}$ tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{V_{;1}}{V} &= \frac{R_{33;1} - R_{31;3}}{R_{22} - R_{33}} = \frac{N_{;1}}{N} \\ \frac{V_{;2}}{V} &= \frac{R_{11;2} - R_{12;1}}{R_{33} - R_{11}} = \frac{N_{;2}}{N} \\ \frac{V_{;3}}{V} &= \frac{R_{22;3} - R_{23;2}}{R_{11} - R_{22}} = \frac{N_{;3}}{N} \end{aligned}$$

Assim, $\nabla \ln N = \nabla \ln V$ em U . Daí, $\nabla \ln(\frac{N}{V}) = 0$ em U . Portanto, $V = cN$ em U para alguma constante c . Como V e N são funções harmônicas, então $V - cN$ também é uma função harmônica e, além disso $V - cN = 0$ num conjunto U aberto de M . Então, pelo Corolário 1.10 temos que $V - cN = 0$ em M . Logo, $V = cN$.

(iii) Como $Z = N^{-1}f$, temos que $f = ZN$. Derivando com respeito a primeira variável, temos que

$$f_{;1} = (ZN)_{;1} = Z_{;1}N + ZN_{;1}.$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade por $R_{22} - R_{33}$ e utilizando (i),

$$\begin{aligned} f_{;1}(R_{22} - R_{33}) &= Z_{;1}N(R_{22} - R_{33}) + ZN_{;1}(R_{22} - R_{33}) \\ \Rightarrow \cancel{f(R_{33;1} - R_{31;3})} &= Z_{;1}N(R_{22} - R_{33}) + \cancel{ZN(R_{33;1} - R_{31;3})} \\ &\Rightarrow Z_{;1}N(R_{22} - R_{33}) = 0 \end{aligned}$$

De modo inteiramente análogo temos que $Z_{;2}N(R_{33} - R_{11}) = Z_{;3}N(R_{11} - R_{22}) = 0$. Tendo em vista o fato de que $N > 0$ e $R_{11} = R_{22} \neq R_{33}$ segue o resultado. \square

Do item (ii) vemos que existe uma relação entre os autovalores do tensor curvatura de Ricci com a existência de potenciais estáticos e da demonstração do item três podemos perceber que se substituirmos a hipótese $R_{11} = R_{22} \neq R_{33}$ pela condição $R_{11} \neq R_{22} \neq R_{33}$ obteremos que $\nabla Z = 0$ como veremos em [2.3](#).

Lema 2.2. Suponha que f é um potencial estático com conjunto de zeros não vazio. Seja $\Sigma = f^{-1}(0)$.

- (i) Para todo $p \in \Sigma$, seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ uma base ortonormal que diagonaliza o tensor de *Ric* tal que e_3 é normal em Σ . Então $R_{11} = R_{22}$.
- (ii) Seja K a curvatura gaussiana de Σ no ponto p . Usando as mesmas notações que em (i), temos que $K = 2R_{11} = 2R_{22} = -R_{33}$. Em particular, K é zero se, e somente se, (M, g) é plana em p .

Demonstração. (i) Sejam $p \in \Sigma$ e $\{e_1, e_2, e_3\}$ uma base ortonormal que diagonaliza o tensor curvatura de Ricci em p , onde e_3 é normal a Σ . Da Proposição [2.1](#) (i), temos

$$(R_{11} - R_{22})f_{;3} = (R_{33} - R_{11})f_{;2} = 0.$$

Visto que e_3 é normal a Σ em p , temos que $|f_{;3}| = |\nabla f| > 0$, donde concluímos que $R_{11} = R_{22}$.

- (ii) Como $R = H = \text{III} = 0$, e

$$R_{\Sigma} = 2K,$$

segue da equação de Gauss que $K = -\text{Ric}(\nu, \nu)$. Pela nossa convenção $K = -R_{33}$. Utilizando o item (iii) de [2.11](#) e o fato de que $R = 0$, segue que

$$K = -R_{33} = 2R_{11} = 2R_{22}.$$

Conseqüentemente, $K = 0 \Leftrightarrow \text{Ric} = 0$ em p . Pela identidade [1.1](#), a condição de ter tensor de Ricci nulo implica que (M, g) é plana.

□

Do item (ii) do lema vemos que podemos relacionar a curvatura gaussiana do conjunto de zeros de um potencial estático em um ponto fixado com a curvatura de M neste mesmo ponto.

Como comentamos anteriormente \mathcal{F} é um espaço vetorial. A proposição a seguir relacionará a dimensão deste espaço vetorial com os autovalores do tensor curvatura de Ricci.

Proposição 2.3. Se a curvatura de Ricci de g possui autovalores distintos em algum ponto, então $\dim(\mathcal{F}) \leq 1$.

Demonstração. Por hipótese, considere $p \in \Sigma$ tal que o tensor curvatura de Ricci tem autovalores distintos. Por continuidade, existe um aberto U de M tal que o tensor curvatura de Ricci tem autovalores distintos em U . Sem perda de generalidade, suponha que N é um outro potencial estático positivo e defina $Z = N^{-1}f$. Daí, pela Proposição 2.1 (iii), temos que $Z_{;1} = Z_{;2} = Z_{;3} = 0$, o que implica que $N^{-1}f = k$, com k constante. Portanto, f é um potencial estático positivo ou negativo em U . Podemos supor que f é um potencial estático positivo em U e que V é um outro potencial estático qualquer que também é positivo em U , pelo item (ii) da Proposição 2.1. Desta forma da Proposição 2.1 (ii), existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f = cV$ em U . Como f é uma função harmônica, então pelo Corolário 1.10 $f = cV$ em M . Logo, $\dim(\mathcal{F}) \leq 1$.

□

Dados dois potenciais estáticos, se um deles é positivo faz sentido analisarmos o quociente destas funções. O lema técnico abaixo nos permitirá entender o comportamento deste quociente.

Lema 2.4. Suponha que f e N são dois potenciais estáticos e que N seja uma função positiva. Seja $Z = f/N$. Então Z é constante ou ∇Z nunca se anula. No segundo caso, as afirmações são verificadas:

- (i) Cada conjunto de nível de Z é uma hipersuperfície totalmente geodésica.
- (ii) $N^2|\nabla Z|^2$ é igual a uma constante em cada componente conexa de cada conjunto de nível de Z .
- (iii) (M, g) é localmente isométrica a $((-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma, N^2 dt^2 + g_0)$, onde Σ é uma superfície regular de dimensão dois, Z é uma constante em cada $\Sigma_t = \{t\} \times \Sigma$ e g_0 é uma métrica fixada em Σ .

Demonstração. Seja $\{x_i\}$ um sistema de coordenadas sobre M . Como N e $f = NZ$

são ambas soluções da equação de estaticidade, temos

$$\begin{aligned}
 fR_{ij} &= f_{;ij} \\
 &= (NZ)_{;ij} \\
 &= (N_i Z + N Z_i)_j \\
 &= N_{ij} Z + N_i Z_j + N_j Z_i + N Z_{ij} \\
 &= NZR_{ij} + NZ_{ij} + N_i Z_j + N_j Z_i \\
 &= fR_{ij} + NZ_{ij} + \langle \nabla N, e_i \rangle \langle \nabla Z, e_j \rangle + \langle \nabla N, e_j \rangle \langle \nabla Z, e_i \rangle
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$N\nabla^2 Z(v, w) = -\langle \nabla N, v \rangle \langle \nabla Z, w \rangle - \langle \nabla N, w \rangle \langle \nabla Z, v \rangle, \quad (2.5)$$

para todos v, w vetores tangentes. Suponhamos primeiramente que $\nabla Z(p) = 0$ para algum ponto p . Consideremos $\gamma(t)$ uma geodésica arbitrária partindo de p . Fazendo $v = w = \gamma'$ na equação acima temos

$$\begin{aligned}
 N\nabla^2 Z(\gamma', \gamma') &= -\langle \nabla N, \gamma' \rangle \langle \nabla Z, \gamma' \rangle - \langle \nabla N, \gamma' \rangle \langle \nabla Z, \gamma' \rangle \\
 \Rightarrow N(Z(\gamma(t)))'' &= -2\langle \nabla N, \gamma' \rangle \langle \nabla Z, \gamma' \rangle \\
 &= -2(N(\gamma(t)))'(Z(\gamma(t)))'.
 \end{aligned}$$

Como $N > 0$ e $(Z(\gamma(t)))'|_{t=0} = 0$, conseqüentemente $(Z(\gamma(t)))' = 0$ para todo t onde γ está definida. Assim, Z é constante numa vizinhança de p e, por conexidade, Z é constante em M . Por outro lado, suponhamos que $\nabla Z \neq 0$ em M . Neste caso, pelo Teorema da Função Inversa, $Z^{-1}(t)$, se não vazio, é uma hipersuperfície mergulhada em M . Sejam v, w vetores tangentes a $Z^{-1}(t)$ em p , então de [2.5](#) temos que $N\nabla^2 Z(v, w) = 0$. Tendo em vista que $N > 0$, temos que $\nabla^2 Z(v, w) = 0$. Por outro lado,

$$\text{III}(v, w) = \frac{\langle \nabla_v(\nabla Z), w \rangle}{|\nabla Z|} = \frac{\nabla^2 Z(v, w)}{|\nabla Z|} = 0,$$

onde III é a segunda forma fundamental de $Z^{-1}(t)$ com respeito a $\nu = \frac{\nabla Z}{|\nabla Z|}$. Logo, $Z^{-1}(t)$ é totalmente geodésica.

(ii) Sejam $v = \nabla Z$ e w um vetor tangente a $Z^{-1}(t)$. Utilizando (2.5), temos

$$\begin{aligned}
 N\nabla^2 Z(\nabla Z, w) &= -\langle \nabla N, \nabla Z \rangle \langle \nabla Z, w \rangle - \langle \nabla N, w \rangle |\nabla Z|^2 \\
 &\Rightarrow \frac{N}{2} w(|\nabla Z|^2) = -w(N) |\nabla Z|^2 \\
 &\Rightarrow Nw(|\nabla Z|^2) + 2w(N) |\nabla Z|^2 = 0 \\
 &\Rightarrow N^2 w(|\nabla Z|^2) + 2Nw(N) |\nabla Z|^2 = 0 \\
 &\Rightarrow w(N^2 |\nabla Z|^2) = 0
 \end{aligned}$$

Portanto, $N^2 |\nabla Z|^2$ é constante em cada componente conexa de $Z^{-1}(t)$.

(iii) Seja $X = \frac{\nabla Z}{|\nabla Z|^2}$ o qual é um campo de vetores que nunca se anula. Dado $p \in M$, seja Σ uma hipersuperfície conexa passando por p sobre a qual Z é constante. Consideremos as curvas integrais de X partindo Σ e escolhendo Σ , se necessário, sabemos que existe um aberto U de p , difeomorfo a $(-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma$ para algum $\epsilon > 0$, sobre a métrica g que é dada por

$$g = \frac{1}{|\nabla Z|^2} dt^2 + g_t,$$

onde $\partial_t = X$, Z é uma constante sobre cada $\Sigma_t = \{t\} \times \Sigma$ e g_t é a métrica induzida sobre Σ_t . Considere a métrica

$$\bar{g} = dt^2 + g_t,$$

com $U = (-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma$. Sejam $\text{III}, \bar{\text{III}}$ as segundas formas fundamentais de Σ_t em (U, g) e (U, \bar{g}) , respectivamente, com respeito a ∂_t . Então, $\text{III} = |\nabla Z| \bar{\text{III}}$. Como $\text{III} = 0$, pelo item (i), temos que $\bar{\text{III}} = 0$. Assim, $\frac{d}{dt} g_t = 0$, pois $\bar{\text{III}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} g_t$. Isso mostra que, para cada t , $g_t = g_0$ que é a métrica fixada sobre Σ . Pelo item (ii), $N|\nabla Z|$ é uma constante sobre Σ_t . Seja $\varphi(t) = N|\nabla Z|$. Então

$$g = \frac{N^2}{\varphi(t)^2} dt^2 + g_0.$$

Substituindo t por $\int \frac{1}{\varphi(t)} dt$, temos que $g = N^2 dt^2 + g_0$. Provando assim o item (iii). □

No segue verificaremos uma íntima relação entre a geometria de uma variedade com a existência de potenciais estáticos, os quais são em certo sentido um equação diferencial parcial do tipo equação do calor. De sorte que a proposição relaciona hipóteses geométricas com a existência de soluções de uma equação diferencial parcial.

Proposição 2.5. Se (M, g) não é plana em algum ponto, então $\dim(\mathcal{F}) \leq 2$

Demonstração. Suponhamos por contradição que $\dim(\mathcal{F}) > 2$. Então, sejam $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{F}$ linearmente independentes. Seja U um aberto tal que g não é plana em todo ponto de U . Daí, pelo Lema 2.2, $U \setminus \cup_{i=1}^3 f^{-1}(0) \neq \emptyset$. Portanto, considere $V \subset U$ um aberto conexo tal que f_i nunca se anula em V . Sejam $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ autovalores do tensor curvatura de Ricci em V . Afirmamos que não podem ser dois a dois distintos. De fato, pela Proposição 2.1 (ii), existiria $c \in \mathbb{R}$ tal que $f_1 = cf_2$, contrariando a suposição de que tais funções são linearmente independentes. Por outro lado, $R = 0$, porém por hipótese g não é plana em nenhum ponto, o que é uma contradição. Portanto podemos assumir sem perda de generalidade, que $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ em V . Definindo $Z_1 = f_1/f_3$ e $Z_2 = f_2/f_3$ temos, pela Proposição 2.1 (iii), $(Z_1)_{;1} = (Z_1)_{;2} = 0$ e $(Z_2)_{;1} = (Z_2)_{;2} = 0$. Isto implica que ∇Z_1 e ∇Z_2 são paralelos ao autovetor do tensor curvatura de Ricci com autovalor λ_3 . Portanto, para algum $q \in V$, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla(Z_1 + \alpha Z_2) = \nabla Z_1 + \alpha \nabla Z_2 = 0$. Daí, pelo Lema 2.4 $Z_1 + \alpha Z_2$ é constante em V , e dessa forma existiria $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $f_1 + \alpha f_2 = \beta f_3$. Contradição, conseqüentemente $\dim(\mathcal{F}) \leq 2$. \square

Quando o conjunto de zeros de um potencial estático é não vazio, podemos considerar o comportamento de outro potencial estático ao longo de tal conjunto cuja relação será dada pelo seguinte lema:

Lema 2.6. Suponha que f e \tilde{f} são dois potenciais estáticos. Suponha também que \tilde{f} tem um conjunto de zeros não vazio. Seja $\Sigma = \tilde{f}^{-1}(0)$. Então

$$\nabla_{\Sigma}^2 f = \frac{1}{2} K f \gamma \quad (2.6)$$

ao longo de Σ . Na identidade acima, ∇_{Σ}^2 é a Hessiana sobre Σ , γ é a métrica induzida sobre Σ , e K é a curvatura Gaussiana de (Σ, γ) . Conseqüentemente, Kf^3 é igual a uma constante ao longo de cada componente conexa de Σ .

Demonstração. Seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ uma base ortonormal que diagonaliza o tensor curvatura de Ricci com e_3 normal a Σ . Pelo Lema 2.2 (iii), $Ric(e_1, e_1) = \lambda = Ric(e_2, e_2)$. Então dados X, Y vetores tangentes a Σ , com $X = a_1 e_1 + a_2 e_2$, $Y = b_1 e_1 + b_2 e_2$, temos

$$\begin{aligned}
 Ric(X, Y) &= Ric(a_1 e_1 + a_2 e_2, b_1 e_1 + b_2 e_2) \\
 &= a_1 b_1 Ric(e_1, e_1) + \overset{0}{\cancel{a_1 b_2 Ric(e_1, e_2)}} + \overset{0}{\cancel{a_2 b_1 Ric(e_2, e_1)}} + a_2 b_2 Ric(e_2, e_2) \\
 &= a_1 b_1 \lambda + a_2 b_2 \lambda \\
 &= \lambda(a_1 b_1 + a_2 b_2) \\
 &= \lambda \gamma(X, Y),
 \end{aligned}$$

mais ainda, $2\lambda + Ric(\nu, \nu) = 0$ onde ν é um vetor unitário normal a Σ . Portanto, $\nabla^2 f(X, Y) = \nabla_{\Sigma}^2 f(X, Y)$, pois Σ é totalmente geodésica. Assim,

$$\nabla_{\Sigma}^2 f = f \lambda \gamma = \frac{1}{2} f K \gamma,$$

onde $K = 2\lambda$ pelo Lema 2.2 (iv). Isto demonstra 2.6.

Seja $\{x_{\alpha}\}$ um sistema de coordenadas locais sobre Σ . Tomando o divergente e o traço da equação 2.6 temos

$$(\Delta_{\Sigma} f)_{;\alpha} + K f_{;\alpha} = \frac{1}{2} (K f)_{;\alpha} \quad \text{e} \quad \Delta_{\Sigma} f = K f$$

onde Δ_{Σ} é o laplaciano sobre (Σ, γ) . Das equações acima temos

$$\begin{aligned}
 (\Delta_{\Sigma} f)_{;\alpha} + K f_{;\alpha} &= \frac{1}{2} (K f)_{;\alpha} \\
 \Rightarrow (K f)_{;\alpha} + K f_{;\alpha} &= \frac{1}{2} (K f)_{;\alpha} \\
 \Rightarrow \frac{1}{2} K_{;\alpha} f + \frac{1}{2} K f_{;\alpha} + K f_{;\alpha} &= 0 \\
 \Rightarrow K_{;\alpha} f + 3 K f_{;\alpha} &= 0 \\
 \Rightarrow K_{;\alpha} f^3 + 3 K f^2 f_{;\alpha} &= 0 \\
 \Rightarrow (K f^3)_{;\alpha} &= 0
 \end{aligned}$$

Logo, $K f^3$ é constante sobre cada componente conexa. □

No lema a seguir temos que se M tem curvatura escalar nula e é uma folheação de superfícies regulares planas com a métrica inicial sendo a métrica usual do espaço euclidiano, então M é plana.

Lema 2.7. Suponha que (Σ_0, g_0) é uma superfície regular plana. Se $\dim(\mathcal{F}) \geq 2$ sobre

$$(M, g) = ((-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma_0, N^2 dt^2 + g_0),$$

onde N é uma função positiva sobre M e g tem curvatura escalar nula, então (M, g) é plana.

Demonstração. Considere $(t, q) \in (-\epsilon, \epsilon) \times M$ um ponto qualquer. Defina $\Sigma_t = \{t\} \times \Sigma$. Observamos que Σ_t é uma superfície totalmente geodésica e tem curvatura Gaussiana zero, pelo Lema 2.4 (iii). Seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ uma base ortonormal que diagonaliza o tensor curvatura de Ric tal que e_3 é normal em Σ_t . Daí, pelo Lema 2.2 (iv) temos que $R_{11} = R_{22} = R_{33} = K = 0$. Portanto, $Ric \equiv 0$ em (t, q) e como (M, g) é assintoticamente plana pela equação 1.1 temos que g tem curvatura nula em (t, q) . Tendo em vista que (t, q) foi escolhido de forma arbitrária temos que (M, g) é plana. \square

Veremos nos resultados a seguir novamente uma relação entre a geometria de uma variedade com a existência de potenciais estáticos.

Proposição 2.8. Suponha que $\dim(\mathcal{F}) \geq 2$. Sejam f_1 e f_2 dois potenciais estáticos linearmente independentes. Sejam P_1 e P_2 componentes conexas de $f_1^{-1}(0)$ e $f_2^{-1}(0)$, respectivamente. Se $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$, então

- (i) (M, g) é plana ao longo de $P_1 \cup P_2$;
- (ii) (M, g) é plana em um aberto que contém $P_1 \setminus f_2^{-1}(0)$ e $P_2 \setminus f_1^{-1}(0)$.

Demonstração. (i) Observamos que $f_1^{-1}(0) \cap f_2^{-1}(0)$ é um curva mergulhada. Consequentemente, ∇f_1 e ∇f_2 são linearmente independentes em algum ponto de $f_1^{-1}(0) \cap f_2^{-1}(0)$. Sejam K_1, K_2 as curvaturas gaussianas de P_1 e P_2 , respectivamente. Pelo Lema 2.6, existem constantes C e D tais que $K_1 f_2^3 = C$ em P_1 e $K_2 f_1^3 = D$ em P_2 . Como $f_1 = f_2 = 0$ em $P_1 \cap P_2$, temos que $C = D = 0$ em $P_1 \cup P_2$. Em particular, $K_1 f_2^3 = 0$ em $P_1 \setminus f_2^{-1}(0)$ e $K_2 f_1^3 = 0$ em $P_2 \setminus f_1^{-1}(0)$. Logo, $K_1 = K_2 = 0$ em $P_1 \cup P_2$. Assim, pelo Lema 2.2 (iv), g é plana em $P_1 \cup P_2$.

(ii) Seja $p \in P_1 \setminus f_2^{-1}(0)$ um ponto arbitrário. Então, f_2 não se anula em aberto U contendo p . Defina $Z = f_1/f_2$ sobre U . Daí, $Z = 0$ em $P_1 \cap U$. Pelo Lema 2.4, item (iii), existe uma vizinhança aberta W de p , difeomorfa a $(-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma$, onde Σ é uma pequena parte de P_1 contendo p , e Z é constante sobre $\{t\} \times \Sigma$, tal que a métrica g sobre W é da forma $g = f_2^2 dt^2 + g_0$, onde g_0 é a métrica induzida sobre Σ . Pelo item (i), (Σ, g_0) tem curvatura gaussiana nula. Como $\dim(\mathcal{F}) \geq 2$ sobre (W, g) , pelo Lema 2.7 implica que g é plana sobre W . Analogamente, temos que g é plana em uma

vizinhança aberta V de algum ponto em $P_2 \setminus f_1^{-1}(0)$. Tendo em vista que $W \cap V$ é um aberto por ser a interseção de abertos, portanto está provado o item (ii). \square

O resultado a seguir é válido para uma variedade Riemanniana não necessariamente assintoticamente plana, em contrapartida é necessário acrescentamos a hipótese de que a interseção entre o conjunto de zeros de dois potenciais estáticos linearmente independentes seja não vazia.

Teorema 2.9. *Suponha que $\dim(\mathcal{F}) \geq 2$. Sejam f_1 e f_2 dois potenciais estáticos linearmente independentes. Se $f_1^{-1}(0) \cap f_2^{-1}(0) \neq \emptyset$, então (M, g) é plana.*

Demonstração. Seja $S = f_1^{-1}(0) \cap f_2^{-1}(0) \neq \emptyset$. Tome $p \in M \setminus S$. Onde temos que $f_1(p) \neq 0$ ou $f_2(p) \neq 0$. Então, pela Proposição, [1.16](#) na página [17](#) existe um aberto U contendo p onde g é analítica. Como f_1 e f_2 são linearmente independentes, S é uma curva mergulhada. Em particular, $M \setminus S$ é conexa por caminhos, ou seja, é um aberto que contém $P_1 \setminus f_2^{-1}(0)$ e $P_2 \setminus f_1^{-1}(0)$. Portanto, pela Proposição [2.8](#) (ii), concluímos que g é plana em $M \setminus S$. Logo, M é plana, pois S é um conjunto de medida nula. \square

2.2 Potenciais Estáticos sobre um Fim Assintoticamente Plano

Nesta seção, nós iremos assumir que M é difeomorfa a $\mathbb{R}^3 \setminus B(\rho)$, (salvo em menção contrária) onde $B(\rho)$ é uma bola aberta, com relação a métrica euclideana, centrada na origem e de raio $\rho > 0$, e g é uma métrica suave sobre M tal que com o sistema de coordenadas padrão $\{x_i\}$ sobre \mathbb{R}^3 , g satisfaz:

$$g_{ij} = \delta_{ij} + b_{ij} \text{ com } b_{ij} = O_2(|x|^{-\tau}), \quad (2.7)$$

para alguma constante $\tau \in (\frac{1}{2}, 1]$. Em outras palavras estamos interessados em estudar a geometria dos fins de uma variedade assintoticamente plana.

Como vimos na Proposição [1.15](#), a curvatura escalar de uma variedade N que admite potencial estático é constante. Já que numa variedade assintoticamente plana seus fins são difeomorfos a $\mathbb{R}^3 \setminus B(\rho)$, temos que M tem curvatura escalar zero. Consequentemente, da equação de estaticidade, $\Delta f = 0$ e por sua vez implica que $\nabla^2 f = f Ric$. Isto é, nesta seção $\mathcal{F} = \mathcal{SP}$, portanto todos os resultados da primeira sessão se aplicam também a esta.

Neste contexto, se uma variedade admite um potencial estático sobre seu fim, então teremos que o mesmo deve ter um crescimento no máximo linear, ou de forma mais

precisa temos:

Lema 2.10. Suponha que f seja um potencial estático sobre (M, g) . Então, f tem no máximo um crescimento linear, isto é, existe $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C|x|$.

Demonstração. Denote por Rm o tensor curvatura de Riemann de g . Da equação (2.7) temos que

$$|g_{ij} - \delta_{ij}| = |b_{ij}| = O_2(|x|^{-\tau}) \leq C|x|^{-2-\tau},$$

para alguma constante real C . Assim fazendo $r = |x|$, obtemos que

$$r^{2+\tau}|Rm| = O(1). \quad (2.8)$$

Portanto, dado $\epsilon > 0$, existe um $r_0 > \rho$ tal que

$$|Rm|(x) \leq \frac{1}{2}\epsilon|x|^{-2} \leq \epsilon(d(x) + r_0)^{-2},$$

se $|x| > r_0$. Sejam x um ponto qualquer fora de S_{r_0} e $\gamma(t)$, com $t \in [r_0, T]$, uma geodésica minimal parametrizada pelo comprimento de arco conectando x e S_{r_0} , com $\gamma(r_0) \in S_{r_0}$ e $\gamma(T) = x$. Definindo $f(t) = f(\gamma(t))$, temos que (pela equação de estaticidade juntamente com a regra da cadeia)

$$f''(t) = h(t)f(t),$$

onde $h(t) = Ric(\gamma'(t), \gamma'(t))$. O parâmetro da geodésica γ é exatamente $t = d(x) + r_0$, donde $|h(t)| \leq \epsilon t^{-2}$. Seja $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4\epsilon})$ e $a = \sup_{S_{r_0}}(|f| + |\nabla f|)$. Definamos $w(t) = At^\alpha$, onde $A > 0$ é escolhido de tal forma que $Ar_0^\alpha > a$ e $A\alpha r_0^{\alpha-1} > a$. Note que uma solução da equação $\alpha^2 - \alpha - \epsilon = 0$ é justamente $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4\epsilon})$, ou seja, $\alpha(\alpha - 1) = \epsilon$. Desta forma temos que

$$w''(t) = \epsilon t^{-2}w, \quad |f(r_0)| < w(r_0) \quad e \quad |f'(r_0)| < w'(r_0).$$

De fato, da escolha das constantes acima, temos

$$\begin{aligned} w''(t) &= \alpha(\alpha - 1)At^\alpha t^{-2} \\ &= \epsilon t^{-2}w(t). \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} |f(r_0)| &\leq \sup_{S_{r_0}}(|f| + |\nabla f|) = a \\ &< Ar_0^\alpha = w(r_0). \end{aligned}$$

Para concluir temos que

$$\begin{aligned}
 f(t) &= f(\gamma(t)) \\
 \Rightarrow |f'(t)| &= |f'_{\gamma(t)}(\gamma'(t))| \\
 &= |\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle| \\
 &\leq |\nabla f(\gamma(t))| |\cancel{\gamma'(t)}|^{\mathbf{1}} \\
 &= |\nabla f(\gamma(t))| \\
 \Rightarrow |f'(r_0)| &\leq |\nabla f(\gamma(r_0))| \\
 &\leq a \\
 &< w'(r_0).
 \end{aligned}$$

Suponhamos que $|f(t)| > w(t)$ para algum $t \in [r_0, T]$.

Seja $Z = \{[r_0, T] \mid |f(t)| > w(t)\}$, então como Z é não vazio e limitado inferiormente, segue que admite ínfimo. Defina

$$t_1 = \inf \{t \in [r_0, T] \mid |f(t)| > w(t)\}.$$

Como $|f(r_0)| < w(r_0)$, então $r_0 \notin Z$ e conseqüentemente $t_1 > r_0$. Por t_1 ser o ínfimo de Z , existem sequências $t_n \in Z$ e $\tilde{t}_n \in Z^c$, com $n \in \mathbb{N}$, tal que $t_n \rightarrow t_1$ e $\tilde{t}_n \rightarrow t_1$. Tendo em vista que, $|f(t_n)| > w(t_n)$ e $|f(\tilde{t}_n)| \leq w(\tilde{t}_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ então, por continuidade, segue que $|f(t_1)| \geq w(t_1)$ e $|f(t_1)| \leq w(t_1)$, ou seja, $|f(t_1)| = w(t_1)$.

Portanto, sobre $[r_0, t_1]$, temos que

$$|f''(t)| = |h(t)f(t)| \leq \epsilon t^{-2}w(t) = w''(t).$$

Logo, para todo $t \in [r_0, t_1]$,

$$\begin{aligned}
 & -w''(t) \leq f''(t) \leq w''(t) \\
 \Rightarrow & -\frac{w'(t) - w'(r_0)}{t - r_0} \leq \frac{f'(t) - f'(r_0)}{t - r_0} \leq \frac{w'(t) - w'(r_0)}{t - r_0} \\
 \Rightarrow & -w'(t) + w'(r_0) \leq f'(t) - f'(r_0) \leq w'(t) - w'(r_0) \\
 \Rightarrow & -w'(t) + w'(r_0) + f'(r_0) \leq f'(t) \leq w'(t) - w'(r_0) + f'(r_0).
 \end{aligned}$$

Desta forma, obtemos que

$$-w'(t) \leq f'(t) \leq w'(t),$$

pois $|f'(r_0)| < w'(r_0)$, isto é, $f'(r_0) + w'(r_0) > 0$ e $f'(r_0) - w'(r_0) < 0$.

De maneira análoga,

$$-w(t) \leq f(t) \leq w(t).$$

Em particular, $f(t_1) < w(t_1)$, o que é uma contradição. Portanto,

$$|f(t)| \leq At^\alpha, \forall t \in [r_0, T]. \quad (2.9)$$

Tomemos ϵ tal que $\alpha < 1 + \frac{\tau}{2}$. Segue de (2.8) e (2.9) que

$$|f''(t)| = |h(t)f(t)| \leq A|h(t)|t^{1+\frac{\tau}{2}},$$

onde $|h(t)| \leq C_1 t^{-2-\tau}$ para alguma constante C_1 que não depende de x e de t . Isso mostra que $|f'(t)| \leq C_2$ para alguma constante C_1 que não depende de x . Assim,

$$|f(t)| \leq a + C_2(|x| - r_0),$$

que prova que f tem no máximo um crescimento linear. □

Agora veremos na proposição que segue uma caracterização para potenciais estáticos limitados nos fins de uma variedade assintoticamente plana. No estudos da proposição a seguir notamos que o resultado não depende da dimensão da variedade em questão. Portanto, traremos a demonstração para o caso em que M é uma variedade Riemanniana de dimensão 3.

Proposição 2.11. Suponha que f seja um potencial estático sobre (M, g) de dimensão 3. Então as seguintes afirmações são verificadas:

(i) existe um vetor $a = (a_1, a_2, a_3)$ tal que

$$f = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + h$$

onde h satisfaz $\partial h = O(|x|^{-\tau})$ e

$$|h| = \begin{cases} O(|x|^{1-\tau}), & \text{se } \tau < 1 \\ O(\ln |x|), & \text{se } \tau = 1 \end{cases}$$

(ii) $(a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0)$ se, e somente se, f é limitada. Neste caso, $f > 0$ ou $f < 0$ próximo do infinito; mais ainda, podemos redimensionar f da seguinte forma:

$$f = 1 - \frac{m}{|x|} + O(|x|^{-1})$$

para alguma constante m (não necessariamente positiva).

Demonstração. (i) Pela equação (2.7) e pelo Lema anterior temos que $|Ric| = O(|x|^{-2-\tau})$ e $|f(x)| = O(|x|)$. Do Lema 2.10, e da equação de estaticidade, tem-se que $|\nabla^2 f| = |fRic| = O(r^{-1-\tau})$, onde $r = |x|$.

Definindo $\phi = |\nabla f|^2$, podemos observar que

$$\begin{aligned}\phi &= |\nabla f|^2 \\ &= \langle (f_{;1}, f_{;2}, f_{;3}), (f_{;1}, f_{;2}, f_{;3}) \rangle \\ &= (f_{;1})^2 + (f_{;2})^2 + (f_{;3})^2;\end{aligned}$$

Calculando o gradiente de ϕ , temos

$$\nabla\phi = 2(f_{;1}f_{;11}, f_{;2}f_{;22}, f_{;3}f_{;33});$$

Assim, o quadrado na norma de ϕ será dada por

$$\begin{aligned}|\nabla\phi|^2 &= 4[(f_{;1}f_{;11})^2 + (f_{;2}f_{;22})^2 + (f_{;3}f_{;33})^2] \\ &= 4\langle ((f_{;11})^2, (f_{;22})^2, (f_{;33})^2), ((f_{;1})^2, (f_{;2})^2, (f_{;3})^2) \rangle;\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}|\nabla\phi|^2 &\leq 4|\nabla^2 f|^2|\nabla f|^2 \\ &= 4|\nabla^2 f|^2\phi \\ &\leq C_1 r^{-2-2\tau}\phi,\end{aligned}$$

para alguma constante C_1 . Podemos considerar uma geodésica minimal partindo da fronteira, e seguir as mesmas ideias da prova do Lema 2.10, para provar que ϕ é limitada. Daí, da definição da Hessiana de f e do fato que as derivadas parciais também são limitadas:

$$|\partial_{x_i}\partial_{x_j}| = |f_{ij} + \Gamma_{ij}^k\partial_{x_k}f| = O(r^{-1-\tau}),$$

onde Γ_{ij}^k são os símbolos de Christoffel. Logo, para cada j , $\lim_{x \rightarrow \infty} \partial_{x_j}f$ existe e é finito.

De fato,

$$\begin{aligned}
 |\partial_{x_j} \partial_{x_i} f| &\leq Cr^{-1-\tau} \\
 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} |\partial_{x_j} \partial_{x_i} f| &\leq \lim_{x \rightarrow \infty} Cr^{-1-\tau} \\
 \Rightarrow |\partial_{x_j} \lim_{x \rightarrow \infty} \partial_{x_i} f| &\leq 0 \\
 \Rightarrow \partial_{x_j} \lim_{x \rightarrow \infty} \partial_{x_i} f &= 0 \\
 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \partial_{x_i} f &= a_i.
 \end{aligned}$$

Definamos assim $\lambda = \sum_{i=1}^3 a_i x_i$. Então

$$|\partial_{x_j} \partial_{x_i} (f - \lambda)| = |\partial_{x_j} \partial_{x_i} f| = O(r^{-1-\tau})$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \partial_{x_i} (f - \lambda) = \lim_{x \rightarrow \infty} \partial_{x_i} f - \lim_{x \rightarrow \infty} \partial_{x_i} \lambda = a_i - a_i = 0.$$

Isto implica que pela Proposição [1.7](#), temos

$$\begin{aligned}
 |\partial_{x_j} \partial_{x_i} (f - \lambda)| &\leq kr^{-1-\tau} \\
 \Rightarrow \int |\partial_{x_j} \partial_{x_i} (f - \lambda)| dx &\leq \int kr^{-1-\tau} dx \\
 \Rightarrow \left| \int \partial_{x_j} \partial_{x_i} (f - \lambda) dx \right| &\leq k \int r^{-1-\tau} dx \leq k|x|^{-\tau} \\
 \Rightarrow |\partial_{x_i} (f - \lambda)| &= O(r^{-\tau}).
 \end{aligned}$$

Assim, integrando novamente, concluimos que

$$f - \lambda = \begin{cases} O(r^{1-\tau}), & \text{se } \tau < 1 \\ O(\ln r), & \text{se } \tau = 1. \end{cases}$$

Tomando $h = f - \lambda$ obtemos a afirmação em (i).

(ii) Inicialmente, suponhamos que $a_1 = a_2 = a_n = 0$. Seja τ' uma constante fixada com $\tau > \tau' > \frac{1}{2}$, donde $O(r^{1-\tau}) \in O(r^{1-\tau'})$. Então, pelo item (i), temos que $|f| = |h| = O(r^{1-\tau'})$ e $|Ric| = O(r^{-2-\tau'})$. Assim, da equação de estaticidade e da Proposição [1.7](#), segue que $|\nabla^2 f| = O(r^{-1-2\tau'})$ e, assim, $|\partial_{x_j} \partial_{x_i} f| = O(r^{-1-2\tau'})$.

Por outro lado, $O(r^{-\tau}) = |\partial_{x_i} (f - \lambda)| = |\partial_{x_i} f - \partial_{x_i} \lambda| = |\partial_{x_i} f - a_i|$, o que implica que $|\partial_{x_i} f| = O(r^{-\tau})$. Portanto, $|\partial_{x_i} f| = O(r^{-2\tau'})$. Consequentemente, pela Proposição

(1.7) e pelo fato de que $2\tau' > 1$, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} |\partial_{x_i} f| &\leq \lim_{x \rightarrow \infty} Cr^{-2\tau'} = 0 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f &= K, \end{aligned}$$

onde C e K são constantes. Logo, f é limitada.

Reciprocamente, suponhamos que f é limitada. Pelo item (i) $f = a_1x_1 + a_2x_2 + a_nx_n + h$. Suponhamos que $a_i \neq 0$ para algum i , então $f \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow \infty$, pois h tem crescimento inferior a um crescimento linear. E isto contradiz a hipótese de f ser limitada. Portanto, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Conseqüentemente, $\lim_{x \rightarrow \infty} \phi = 0$. Seja $\Sigma = f^{-1}(0)$. Pelo Lema 2.2 (i) Σ é uma hipersuperfície totalmente geodésica e ϕ é uma constante positiva em cada componente conexa de Σ .

Afirmamos que Σ é limitada. De fato, seja P uma componente conexa de Σ . Supondo que P seja ilimitada, teríamos que $\lim_{x \rightarrow \infty, x \in P} \phi = 0$, contudo pelo Lema 2.2 ϕ é uma constante positiva, portanto temos uma contradição. Logo, todas as componentes conexas de Σ são limitadas e daí segue que Σ é limitada. Além disso, P é componente conexa, então é fechada, portanto é uma componente compacta e tendo em vista que P é totalmente geodésica, em particular é mínima.

Assim, note que existe $R_0 > 0$ tal que $\partial B(R), \forall R \geq R_0$, tem curvatura média positiva em (M, g) , onde $B(R) = \{x \in M \mid |x| = R\}$, por conexidade. Então, pelo Teorema 1.6, temos que $P \cap \{|x| > R_0\} = \emptyset$.

Como R_0 não depende de P , temos que $\Sigma \cap \{|x| > R_0\} = \emptyset$. Portanto, $f > 0$ ou $f < 0$ sobre $\{|x| > R_0\}$. Para completar a prova façamos $a = \lim_{x \rightarrow \infty} f$ (que já foi mostrado anteriormente que existe). Como $\Delta f = 0$, segue que $f = a + A|x|^{-1} + O(|x|^{-1})$, para alguma constante A (ver Bartnik [2]).

Suponhamos que $a = 0$. Pelo que foi provado acima podemos assumir que $f > 0$ próximo do infinito. Considere $R > 0$ tal que $f > 0$ sobre $S_R = \partial B(R)$ e ψ uma função harmônica fora de S_R tal que $\psi = \inf_{S_R} f > 0$ sobre S_R e $\lim_{x \rightarrow \infty} \psi = 0$. Então, $f \geq \psi$ pelo princípio do máximo. Como o decaimento de ψ é da ordem de $\frac{1}{|x|}$, então $A > 0$. Por outro lado, da hipótese de que $a = 0$, temos que $f = O(|x|^{-1})$, donde $|\nabla^2 f| = O(r^{-3-\tau})$. Além disso, como vimos acima $|\partial_{x_i} f| = O(r^{-2\tau'})$, o que implica que $|\partial_{x_j} \partial_{x_i} f| = O(r^{-3-\tau}) + O(r^{-2\tau'}) = O(r^{-3-\tau})$. Portanto, por integração, temos que $|\partial_{x_i} f| = O(r^{-2-\tau})$ que unido a hipótese de $a = 0$ mostraria que $|f| = O(r^{-1-\tau})$, contrariando o fato de que $A > 0$. Logo, $a \neq 0$. E reescalando f , concluimos que

$$f = 1 + \frac{m}{|x|} + O(r^{-1}),$$

com $m = \frac{A}{a}$. Isto completa a prova de (ii). □

Como vimos anteriormente uma caracterização para potenciais estáticos limitados, agora veremos que se o potencial estático for ilimitado seu conjunto de zeros é o gráfico de uma função suave a menos de um conjunto compacto.

Proposição 2.12. Suponha que f seja um potencial estático ilimitado sobre (M, g) . Então, existe um novo sistema de coordenadas $\{y_i\}$ sobre $\mathbb{R}^3 \setminus B(\rho)$ obtido pela rotação de $\{x_i\}$ tal que, fora de um compacto, $f^{-1}(0)$ é dado pelo gráfico de uma função suave $q = q(y_2, y_3)$ sobre

$$\Omega_C = \{(y_2, y_3) \mid y_2^2 + y_3^2 > C^2\},$$

para alguma constante $C > 0$, onde q satisfaz

$$\partial q = O(|\bar{y}|^{-\tau}) \text{ e } |q| = \begin{cases} O(|\bar{y}|^{1-\tau}), & \text{se } \tau < 1 \\ O(\ln |\bar{y}|), & \text{se } \tau = 1, \end{cases}$$

e $\bar{y} = (y_2, y_3)$. Em particular, se $\gamma_R \subset f^{-1}(0)$ é a curva dada por

$$\gamma_R = \{(q(y_2, y_3), y_2, y_3) \mid y_2^2 + y_3^2 = R^2\}$$

e κ é a curvatura geodésica de γ_R em $f^{-1}(0)$, então

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \kappa = 2\pi. \quad (2.10)$$

Demonstração. Sejam $\{a_1, a_2, a_3\}$ e h como na Proposição (2.11) tal que

$$f = \sum_{i=1}^3 a_i x_i + h.$$

Como f é ilimitado, então $(a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$. Dividindo f pela $|a|$ em ambos os lados da igualdade podemos redimensionar f afim de que $\sum_{i=1}^3 b_i^2 = 1$, com $b_i = \frac{a_i}{|a|}$. Portanto, existe um novo sistema de coordenadas $\{y_i\}$ obtido a partir de uma rotação de $\{x_i\}$ tal que

$$f = y_1 + h(y_1, y_2, y_3), \quad (2.11)$$

onde h satisfaz $\partial h = O(|y|^{-\tau})$ e

$$|h| = \begin{cases} O(|y|^{1-\tau}), & \text{se } \tau < 1 \\ O(\ln |y|), & \text{se } \tau = 1. \end{cases}$$

Então das identidades acima, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = 1 + \frac{\partial h}{\partial y_1} = 1 + O(|y|^{-\tau})$$

Portanto, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\frac{\partial f(y_2, y_3)}{\partial y_1} > \frac{1}{2}, \quad \forall (y_2, y_3) \in \Omega_C = \{(y_2, y_3) \mid |\bar{y}| > C\}. \quad (2.12)$$

Portanto, para qualquer $(y_2, y_3) \in \Omega_C$, a igualdade em [2.11](#) implica que

$$\lim_{y_1 \rightarrow -\infty} f = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{y_1 \rightarrow \infty} f = \infty.$$

Assim, o conjunto $f^{-1}(0) \cap \{(y_1, y_2, y_3) \mid (y_2, y_3) \in \Omega_C\} \neq \emptyset$. Como $\nabla f \neq 0$ em $f^{-1}(0)$, o conjunto é dado pelo gráfico de uma aplicação suave $q = q(y_2, y_3)$, pelo teorema da função implícita. Dado $C > 0$, integramos [\(2.12\)](#) para mostrar que existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$|f| \geq \frac{1}{2}|y_1| > 0, \quad \text{sempre que } |\bar{y}| \leq C \text{ e } |y_1| \leq C_1.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f^{-1}(0) \cap \{(y_1, y_2, y_3) \mid (y_2, y_3) \in \Omega_C\} &= f^{-1}(0) \setminus \{(y_1, y_2, y_3) \mid |y_1| \leq C_1, |\bar{y}| \leq C\} \\ &= f^{-1}(0) \setminus K, \end{aligned}$$

onde $K = \{(y_1, y_2, y_3) \mid |y_1| \leq C_1, |\bar{y}| \leq C\}$, o qual é um conjunto compacto por ser a interseção de conjuntos compactos. Portanto, $f^{-1}(0) \setminus K = \text{Graf}(q)$ com q definida sobre Ω_C .

Além disso, de [\(2.11\)](#), temos que

$$q + h(q, y_2, y_3) = 0.$$

Daí, se tomarmos $|\bar{y}|$ suficientemente grande e pela desigualdade triangular, temos que

$$|q| = |h(q, y_2, y_3)| \leq \begin{cases} C_2(|q| + |\bar{y}|)^{1-\tau}, & \text{se } \tau < 1 \\ C_2 \ln(|q| + |\bar{y}|), & \text{se } \tau = 1. \end{cases}$$

Efetuando alguns cálculos elementares podemos concluir que

$$|q| = \begin{cases} O(\bar{y}^{1-\tau}), & \text{se } \tau < 1 \\ O(\ln |\bar{y}|), & \text{se } \tau = 1. \end{cases}$$

Tomando $\alpha, \beta \in \{2, 3\}$, segue do Teorema da Função Implícita, que

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial y_\alpha} &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial y_\alpha}}{\frac{\partial f}{\partial y_1}} \\ &= -\frac{\frac{\partial h}{\partial y_\alpha}}{1 + \frac{\partial h}{\partial y_1}} \\ &= -\frac{O(|y|^{-\tau})}{1 + O(|y|^{-\tau})} \\ &= -\frac{O(|\bar{y}|^{-\tau})}{1 + \cancel{O(|y|^{-\tau})} \rightarrow 0} \\ &= O(|\bar{y}|^{-\tau}), \end{aligned}$$

além disso, $\frac{\partial^2 q}{\partial y_\beta \partial y_\alpha} = O(|\bar{y}|^{-1-\tau})$.

Defina a métrica pullback $\sigma = F^*(g_0)$ em Ω_C , onde $F : \Omega_C \rightarrow \mathbb{R}^3$ e dado por $F(y_2, y_3) = (q(y_2, y_3), y_2, y_3)$. Daí, segue que

$$\sigma_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad (2.13)$$

onde $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma(\partial_{y_\alpha}, \partial_{y_\beta})$ e $h_{\alpha\beta}$ satisfaz

$$|h_{\alpha\beta}| + |\bar{y}| |\partial h_{\alpha\beta}| = O(|\bar{y}|^{-\tau}). \quad (2.14)$$

Através de um cálculo direto usando (2.11) e (2.12), podemos mostrar que

$$\kappa = R^{-1} + O(R^{-1-\tau}), \quad (2.15)$$

enquanto que o comprimento de γ_R é $2\pi R + O(R^{1-\tau})$. De fato, fazendo $y_2 = R \cos t$ e

$y_3 = R \sin t$, podemos efetuar a integral de linha abaixo, para concluir que

$$\begin{aligned} l(\gamma_R) &= \int_{\gamma_R} |\alpha'(t)| dt \\ &= \int_0^{2\pi} [(q(R \cos t, R \sin t))^2 + R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t]^{\frac{1}{2}} dt \\ &\leq \int_0^{2\pi} |q(R \cos t, R \sin t)| dt + \int_0^{2\pi} R dt = \int_0^{2\pi} O(R^{1-\tau}) dt + 2\pi R \\ &\leq O(R^{1-\tau}). \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$l(\gamma_R) = O(R^{1-\tau}). \quad (2.16)$$

Logo, de (2.15) e (2.16), temos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_R} \kappa &= (R^{-1} + O(R^{-1-\tau}))(2\pi R + O(R^{1-\tau})) \\ \Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \kappa &= \lim_{R \rightarrow \infty} [2\pi + 2\pi O(R^{-1-\tau}) + R^{-1} O(R^{1-\tau}) + O(R^{-1-\tau}) O(R^{1-\tau})]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \kappa = 2\pi.$$

□

Uma aplicação da Proposição 2.12 é justamente a de que sobre uma variedade espacial assintoticamente Schwarzschild seus potenciais estáticos, caso existam, não se anulam a menos de um conjunto compacto como veremos a seguir:

Teorema 2.13. *Seja g uma métrica suave sobre $M = \mathbb{R}^3 \setminus B(\rho)$, tal que*

$$g_{ij} = \left(1 + \frac{m}{2|x|}\right)^4 \delta_{ij} + p_{ij}$$

onde $p_{ij}(x) = O_2(|x|^{-2})$ e $m \neq 0$ é uma constante. Se f é um potencial estático de (M, g) , então f não se anula fora de um compacto.

Demonstração. Se f é um potencial estático limitado, então $f > 0$ ou $f < 0$ para valores de x suficientemente grandes. Ou seja, existe K compacto, tal que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in M \setminus K$. Portanto, se f for limitado segue o resultado. Suponhamos então que f seja um potencial estático ilimitado. Pela Proposição 2.12, existe um

novo sistema de coordenadas $\{y_i\}$ obtido a partir de uma rotação de $\{x_i\}$ tal que $\Sigma = f^{-1}(0)$ é o gráfico de $q = q(y_2, y_3)$ fora de um compacto, com $q : \Omega_C \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega_C = \{(y_2, y_3) \mid y_2^2 + y_3^2 > C^2\}$. Note que q satisfaz as condições da Proposição [2.12](#) com $\tau = 1$. Tendo em vista que $\{y_i\}$ difere de $\{x_i\}$ por uma rotação, que é uma transformação ortogonal, então as condições são preservadas nas coordenadas de $\{y_i\}$, ou seja,

$$g_{ij}(y) = \left(1 + \frac{m}{2|y|}\right)^4 \delta_{ij} + p_{ij}, \quad (2.17)$$

onde $p_{ij}(y) = O_2(|x|^{-2})$. Para calcular a curvatura de Ricci em termos de y e pelo Lema 1.1 de [12](#), temos

$$Ric(\partial_{y_i}, \partial_{y_j}) = \frac{m}{|y|^3} \phi^{-2}(y) \left(\delta_{ij} - 3 \frac{y_i y_j}{|y|^2} \right) + O(|y|^{-4}), \quad (2.18)$$

onde $\phi(y) = 1 + \frac{m}{2|y|}$.

Dado $\bar{y} = (y_2, y_3) \in \Omega_C$, seja $y = (q(\bar{y}), y_2, y_3)$ e $T_y \Sigma$ o espaço tangente de Σ em y . Dados $v, w \in T_y \Sigma$ temos que

$$v = (\partial_{y_2} q) \partial_{y_1} + \partial_{y_2}, \quad w = (\partial_{y_3} q) \partial_{y_1} + \partial_{y_3}.$$

Sejam $|v|_g$ e $|w|_g$ os comprimentos de v, w com respeito a métrica g , respectivamente. Defina $\tilde{v} = |v|_g^{-1} v$, $\tilde{w} = |w|_g^{-1} w$. Queremos então comparar o $Ric(\tilde{v}, \tilde{v})$ e $Ric(\tilde{w}, \tilde{w})$ quando $|\bar{y}|$ é grande. Observemos que $|q| = O(\ln |y|)$, donde $\partial_{y_i} q = O(|y|^{-1})$, $(\partial_{y_i} q)^2 / |y|^3 = O(|y|^{-5})$, $(\partial_{y_i} q) q = O(|y|^{-3}) O(\ln |y|)$. Note também que $\phi(y) \rightarrow 1$, quando $|y| \rightarrow \infty$. Portanto,

$$\begin{aligned} Ric(v, v) &= \frac{m}{|y|^3} \phi^{-2}(y) \left[1 + (\partial_{y_2} q)^2 - \frac{3}{|y|^2} [(\partial_{y_2} q) q + y_2]^2 \right] \\ &= \frac{m}{|y|^3} \phi^{-2}(y) \left(1 - \frac{3y_2^2}{|y|^2} \right) + O(|y|^{-4}). \end{aligned}$$

De maneira análoga,

$$Ric(w, w) = \frac{m}{|y|^3} \phi^{-2}(y) \left(1 - \frac{3y_3^2}{|y|^2} \right) + O(|y|^{-4})$$

Além disso,

$$|v|_g^2 = \phi^4(y) + O(|\bar{y}|^{-2}), \quad |w|_g^2 = \phi^4(y) + O(|\bar{y}|^{-2}).$$

De fato,

$$\begin{aligned}
 |v|_g^2 &= \langle v, v \rangle_g \\
 &= \phi^4 \langle (\partial_{y_2} q) \partial_{y_1} + \partial_{y_2}, (\partial_{y_2} q) \partial_{y_1} + \partial_{y_2} \rangle \\
 &= \phi^4 (1 + (\partial_{y_2} q)^2) \\
 &= \phi^4 + \phi^4 O(|\bar{y}|^{-1})^2 \\
 &= \phi^4 + O(|\bar{y}|^{-2}).
 \end{aligned}$$

Como $Ric(\tilde{v}, \tilde{v}) = Ric(\frac{v}{|v|_g}, \frac{v}{|v|_g}) = \frac{1}{|v|_g^2} Ric(v, v)$, temos

$$\begin{aligned}
 Ric(\tilde{v}, \tilde{v}) - Ric(\tilde{w}, \tilde{w}) &= \frac{1}{|v|_g^2} Ric(v, v) - \frac{1}{|w|_g^2} Ric(w, w) \\
 &= \frac{1}{\phi^4 + O(|\bar{y}|^{-2})} [Ric(v, v) - Ric(w, w)] \\
 &= \frac{1}{\phi^4 + O(|\bar{y}|^{-2})} \left[\frac{m\phi^{-2}(y)}{|y|^3} \left(1 - \frac{3y_2^2}{|y|^2} - 1 + \frac{3y_3^2}{|y|^2} \right) + O(|\bar{y}|^{-4}) \right] \\
 &= \frac{3m}{\phi^6(y)} \frac{y_3^2 - y_2^2}{|y|^5} + O(|\bar{y}|^{-4})
 \end{aligned}$$

Agora considere y_3 suficientemente grande e positivo de tal forma $|y_3|^3 > 0$ e também que $y_2 = 0$. Assim $|y_3|^3 (Ric(\tilde{v}, \tilde{v}) - Ric(\tilde{w}, \tilde{w})) \rightarrow 3m \neq 0$. Se $Ric(\tilde{v}, \tilde{v}) = Ric(\tilde{w}, \tilde{w})$ o limite acima seria nulo contrariando o fato de que $m \neq 0$. Portanto, $Ric(\tilde{v}, \tilde{v}) \neq Ric(\tilde{w}, \tilde{w})$. Isto é uma contradição tendo em vista de que pelo Lema [2.2](#) (iii) $Ric(\tilde{v}, \tilde{v}) = Ric(\tilde{w}, \tilde{w})$. Portanto, f é limitada. □

Passaremos agora a apresentar o principal resultado da sessão. Note que diferentemente do Teorema [2.9](#) não precisamos pedir a existência de dois potenciais estáticos linearmente independentes cujos conjuntos de zeros se intersectem.

Teorema 2.14. *Seja (M, g) uma 3-variedade conexa, assintoticamente plana, com ou sem fronteira. Se $\dim(\mathcal{F}) \geq 2$, então (M, g) é plana.*

Demonstração. Este resultado é suficiente mostrar para um fim de (M, g) , pois da Proposição [1.15](#) item (iii) temos que quando (M, g) é uma 3-variedade assintoticamente plana a curvatura escalar é constante e igual a zero. Suponhamos sem perda de generalidade que M é difeomorfa \mathbb{R}^3 menos uma bola aberta. Como $\dim(\mathcal{F}) \geq 2$, suponhamos que f e \tilde{f} são dois potenciais estáticos linearmente independentes. Consideremos então os seguintes casos:

Caso 1. Suponhamos que f e \tilde{f} são potenciais estáticos limitados. Então, pela Pro-

posição (2.11), depois de reescalonar f e \tilde{f} , temos que

$$f = 1 - \frac{m}{|x|} + O(|x|^{-1}), \quad \tilde{f} = 1 - \frac{\tilde{m}}{|x|} + O(|x|^{-1}) \quad (2.19)$$

para algumas constantes m, \tilde{m} . Como \mathcal{F} é um espaço vetorial, $f - \tilde{f}$ é potencial estático, contudo $f - \tilde{f} = -\frac{m-\tilde{m}}{|x|} + O(|x|^{-1})$. Porém, isto contradiz a Proposição 2.11, portanto este caso não ocorre. Ou seja, numa 3-variedade conexa, assintoticamente plana, com ou sem fronteira só pode existir no máximo um potencial estático limitado.

Caso 2. Suponhamos que f seja limitado e \tilde{f} seja ilimitado. Pelo fato de \tilde{f} ser ilimitado podemos supor sem perda de generalidade que ele é da forma $\tilde{f} = x_1 + h$, com h satisfazendo as propriedades da Proposição 2.11 e $f = 1 - \frac{m}{|x|} + O(|x|^{-1})$ para alguma constante m . Seja $r_0 > \rho$ uma constante fixada tal que $f > \frac{1}{2}$ sobre $\{|x| \geq r_0\}$ (que é sempre possível a partir da expressão de f para x suficientemente grande), e $S_r = \partial B(r)$ que tem curvatura média positiva $\forall r \geq r_0$. Seja $\lambda_0 > 0$ outra constante tal que se $\lambda > \lambda_0$, $\bar{f}_\lambda := \tilde{f} - \lambda f$ é negativa sobre S_{r_0} . Para cada $\lambda > \lambda_0$, considere

$$\Sigma_\lambda := \{x \mid \bar{f}_\lambda = 0, |x| \geq r_0\}.$$

Como \mathcal{F} é um espaço vetorial, então \bar{f}_λ é um potencial estático ilimitado, logo pela Proposição 2.12, $\Sigma_\lambda \neq \emptyset$. Como $\tilde{f} < 0$ em S_{r_0} temos que $\Sigma_\lambda \cap S_{r_0} = \emptyset$. Portanto, Σ_λ é uma superfície sem fronteira. Seja P uma componente conexa de Σ_λ . Como (M, g) é folheada por superfícies S_r de curvatura média positiva fora de S_{r_0} e P é superfície mínima mergulhada com fronteira que não pode ser compacta, pois caso contrário P teria algum ponto elíptico, contrariando o fato de ser mínima. Portanto, pela Proposição 2.12, $P = \Sigma_\lambda$. Seja K_λ a curvatura Gaussiana de Σ_λ . Pelo Lema 2.6, $K_\lambda f^3 = C$ para alguma constante C ao longo de Σ_λ . Como g é assintoticamente plana e Σ_λ totalmente geodésica, da equação de Gauss temos que $\lim_{x \rightarrow \infty} K_\lambda = 0$. De fato, no infinito Σ_λ é plana, ou seja, $K_\lambda = 0$ para x suficientemente grande e como f é limitada, $C = 0$. Assim, $K_\lambda f^3 = 0$ em Σ_λ . Lembre que $f > \frac{1}{2}$ fora de S_{r_0} . Logo, $f > 0$ fora de S_{r_0} . Então, $K_\lambda = 0$ e pelo Lema 2.2 (iv), (M, g) é plana em Σ_λ . Portanto, provamos que (M, g) é plana em todo ponto do conjunto

$$U = \bigcup_{\lambda > \lambda_0} \left\{ x \mid \tilde{f}(x) - \lambda f(x) = 0, |x| > r_0 \right\}.$$

Pelas condições de crescimento de h , temos que existe $a > 0$ (com a suficientemente

grande) tal que para todo $x_1 > a$ e todos $(x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2$ com $x_2^2 + x_3^2 < 1$,

$$\tilde{f}(x_1, x_2, x_3) > \lambda_0 f(x_1, x_2, x_3) > 0.$$

Então, claramente $(x_1, x_2, x_3) \in U$, ou seja, $U \neq \emptyset$. Seja $\hat{M} = M \setminus f_1^{-1}(0) \cap f_2^{-1}(0)$. Então, $\hat{M} = M$ ou M menos uma curva mergulhada. Como g é analítica sobre \hat{M} e $\hat{M} \cap U \neq \emptyset$ (de fato, $(x_1, x_2, x_3) \in \hat{M}$ e com \hat{M} é conexo por caminhos, então g é plana em \hat{M} por continuidade), segue que M é plana.

Caso 3. Suponhamos que f e \tilde{f} sejam ilimitados. Podemos redimensionar essas funções de tais que

$$f = x_1 + h \quad \text{e} \quad \tilde{f} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \tilde{h},$$

onde $h = O(|x|^\theta)$ e $\tilde{h} = O(|x|^\theta)$ com $0 < \theta < 1$ e $a_i, i = 1, 2, 3$ são constantes. Mais ainda, podemos assumir que $f^{-1}(0) \setminus K = \text{Graf}(q)$, com $q = q(x_2, x_3)$, onde K é um compacto e q um aplicação suave, como na Proposição [2.12](#), e de tal forma que $q = O(|x_2|^\theta + |x_3|^\theta)$. Seja $\bar{f} = \tilde{f} - a_1 f$. Neste caso, se $a_2 = a_3 = 0$, então pela Proposição [2.11](#) (ii) \bar{f} é limitada e voltamos ao *Caso 2*. Suponhamos então $(a_2, a_3) \neq (0, 0)$. Sem perda de generalidade assumamos $a_2 = 1$, então $\tilde{f} = x_2 + a_3 x_3 + \tilde{h}$. Dado a um número positivo grande considere: $x_+ = (q(a, 0), a, 0) \in \text{Graf}(q) \subset f^{-1}(0)$. Temos que

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x_+) &= a + \tilde{h}(q(a, 0), a, 0) \\ &= a + O(|a|^{\theta^2} + |a|^\theta) > 0 \end{aligned}$$

Assim, $\tilde{f}(x_+) > 0$ com a suficientemente grande. De modo análogo podemos definir $x_- = (q(-a, 0), -a, 0)$ e teremos que $\tilde{f}(x_-) < 0$. Então, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $p \in \gamma$ tal que $\tilde{f}(p) = 0$, onde $\gamma \subset f^{-1}(0)$ é uma curva ligando x_+ e x_- e contida no $\text{Graf}(q)$. O que implica que $f^{-1}(0) \cap \tilde{f}^{-1}(0) \neq \emptyset$. Logo, pelo Teorema [2.9](#), (M, g) é plana. □

2.3 Rigidez de uma Variedade Estática Assintoticamente Plana

Nesta seção será considerada que a variedade é assintoticamente plana, completa, com fronteira, com uma quantidade finita de fins e que o conjunto de potenciais estáticos é não vazio (a menos de menção contrária a tais hipóteses). Além disso,

relacionaremos potenciais estáticos com resultados de rigidez, ou seja, se uma variedade assintoticamente plana admite um potencial estático com certas propriedades obteremos condições geométricas sobre a mesma.

A seguir passaremos a uma proposição mais técnica que será de grande auxílio na demonstração dos resultados a seguir

Proposição 2.15. Seja (M, g) uma 3-variedade conexa, completa, assintoticamente plana, sem fronteira e com uma quantidade finita de fins E_1, \dots, E_k . Suponha que existe um potencial estático f em (M, g) . Então

$$(i) \int_M f|Ric|^2 = 0$$

$$(ii) \int_M |f||Ric|^2 = 4\pi \left[\sum_{\alpha} c_{\alpha}(\chi(\Sigma_{\alpha}) - k_{\alpha}) + \sum_{\beta} \tilde{c}_{\beta}\chi(\tilde{\Sigma}_{\beta}) \right]$$

onde $\{\Sigma_{\alpha} \mid 0 \leq \alpha \leq m\}$ e $\{\tilde{\Sigma}_{\beta} \mid 0 \leq \beta \leq n\}$ são os conjuntos de componentes ilimitadas e limitadas de $f^{-1}(0)$, respectivamente. As constantes $c_{\alpha} > 0$ e $\tilde{c}_{\beta} > 0$ são iguais a $|\nabla f|$ sobre Σ_{α} e $\tilde{\Sigma}_{\beta}$, respectivamente. Para cada α , $k_{\alpha} \geq 1$ é o número de fins E_i onde $E_i \cap \Sigma_{\alpha} \neq \emptyset$. E também temos que $\chi(\Sigma_{\alpha})$ e $\chi(\tilde{\Sigma}_{\beta})$ denotam a característica de Euler de Σ_{α} e $\tilde{\Sigma}_{\beta}$, respectivamente.

Demonstração. (i) Sem perda de generalidade, suponhamos que f seja um potencial estático ilimitado. Então para cada fim E_i , $1 \leq i \leq k$, seja $\{y_1, y_2, y_3\}$ um sistema de coordenadas sobre o qual g satisfaz [2.8](#). Como f é um potencial estático ilimitado em E_i , então pela Proposição [\(2.12\)](#) existe $\{y_1, y_2, y_3\}$. Seja $r > 0$ suficientemente grande e tomado de forma arbitrária. Sobre este novo sistema de coordenadas definamos $S_r^i = \{y \in M \mid |y| = r\}$ em E_i . Assim, seja U_r a região limitadas pelas esferas S_r^1, \dots, S_r^k em M . Pelo Lema [2.10](#) e de [\(2.8\)](#), $|f| = O(r)$ e $|Ric| = O(r^{-2-\tau})$ em cada fim E_i . Assim, integrais em (i) e (ii) existem e são finitas. Pela equação de estaticidade $f|Ric|^2 = f \langle Ric, Ric \rangle = \langle f Ric, Ric \rangle = \langle \nabla^2 f, Ric \rangle$. Portanto, pela Identidade de Pohožàev-Schöen [1.5](#) página [11](#), se tivermos que $R = 0$ e $X = \nabla f$, temos que

$$\int_M \langle Ric, \nabla^2 f \rangle = \int_{\partial M} Ric(\nabla f, \nu)$$

Logo,

$$\int_{U_r} f|Ric|^2 = \int_{U_r} \langle \nabla^2 f, Ric \rangle = \int_{\partial U_r} Ric(\nabla f, \nu) = \sum_{i=1}^k \int_{S_r^i} Ric(\nabla f, \nu), \quad (2.20)$$

onde ν é o normal unitário exterior a S_r^i e usamos o fato de que a curvatura escalar de g é zero. Como $|\nabla f|$ é limitada pela Proposição [2.11](#), $|Ric| = O(r^{-2-\tau})$ e a área de S_r^i

é da ordem de r^2 , então de [2.20](#)

$$\begin{aligned}
 \int_{U_r} f|Ric|^2 &= \sum_{i=1}^k \int_{S_r^i} Ric(\nabla f, \nu) \\
 &\leq \sum_{i=1}^k \int_{S_r^i} Cr^{-2-\tau} \\
 &= Cr^{-2-\tau} \sum_{i=1}^k A(S_r^i) \\
 &= Cr^{-2-\tau} \sum_{i=1}^k 4\pi r^2 \\
 &= 4k\pi Cr^{-\tau}
 \end{aligned}$$

Portanto, podemos concluir (i) quando $r \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 \int_M f|Ric|^2 &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{U_r} f|Ric|^2 \\
 &\leq \lim_{r \rightarrow \infty} 4k\pi Cr^{-\tau} \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

onde C é uma constante positiva. Como queríamos demonstrar.

(ii) Seja r suficientemente grande de tal forma que $\tilde{\Sigma}_\beta \subset U_r, \forall \beta$. Se f é ilimitada, sejam $E_1, \dots, E_l, 1 \leq l \leq k$ componentes ilimitadas e são limitadas nos outros fins. Podemos escolher r suficientemente grande tal que fora de cada S_r^i em $E_i, 1 \leq l \leq k, f^{-1}(0)$ é o gráfico de alguma função $q = q(\bar{y})$ dada pela Proposição [2.12](#). Além disso, da Proposição [2.12](#) podemos assumir que o gráfico de $q(\bar{y})$ sempre intersecta S_r^i transversalmente. Assim, o conjunto $U_r^+ = U_r \cap \{f > 0\}$ tem fronteira Lipschitz. Daí,

$$\int_{U_r^+} f|Ric|^2 = \int_{U_r \cap (\cup_{\alpha=0}^m \Sigma_\alpha)} Ric(\nabla f, \nu) + \int_{\cup_{\beta=0}^n \tilde{\Sigma}_\beta} Ric(\nabla f, \nu) + \int_{\partial U_r \cap \{f > 0\}} Ric(\nabla f, \nu). \tag{2.21}$$

Na igualdade acima ν denota o vetor unitário normal à ∂U_r^+ . Pelo item (i), obtemos

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\partial U_r \cap \{f > 0\}} Ric(\nabla f, \nu) = 0. \tag{2.22}$$

Sobre cada $\tilde{\Sigma}_\beta$ e Σ_α , temos que $\nu = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$, consequentemente pelo Lema [2.2](#) item (iv),

temos

$$Ric(\nabla f, \nu) = -|\nabla f| Ric(\nu, \nu) = |\nabla f| K,$$

onde K é a curvatura gaussiana de $\tilde{\Sigma}_\beta$ e Σ_α . Daí, pelo Teorema de Gauss-Bonnet

$$\int_{\cup_{\beta=0}^n \tilde{\Sigma}_\beta} Ric(\nabla f, \nu) = \int_{\cup_{\beta=0}^n \tilde{\Sigma}_\beta} |\nabla f| K = \sum_{\beta=0}^n |\nabla f| \int_{\tilde{\Sigma}_\beta} K = 2\pi \sum_{\beta=0}^n \tilde{c}_\beta \chi(\tilde{\Sigma}_\beta). \quad (2.23)$$

Por outro lado, não podemos usar o Teorema de Gauss-Bonnet do caso compacto, pois as superfícies em questão não são compactas, mas podemos estimar da seguinte maneira para as componentes ilimitadas

$$\int_{U_r \cap (\cup_{\alpha=0}^m \Sigma_\alpha)} Ric(\nabla f, \nu) = \int_{\cup_{\alpha=0}^m (U_r \cap \Sigma_\alpha)} |\nabla f| K = \sum_{\alpha=0}^m c_\alpha \int_{U_r \cap \Sigma_\alpha} K. \quad (2.24)$$

Como Σ_α é totalmente geodésica, de (2.8) e da equação de Gauss temos que $|K|$ tem decaimento sobre Σ_α no ordem de $O(r^{-2-\tau})$ em cada fim tal que $\Sigma_\alpha \cap E_i \neq \emptyset$, onde $|\cdot|$ é a distância intrínseca de um ponto fixado em Σ_α . Portanto,

$$\int_{\Sigma_\alpha} |K| < \infty. \quad (2.25)$$

Seja γ_R^i uma curva em $\Sigma_\alpha \cap E_i$ tal que o gráfico de q está definido em $\{|\bar{y}| = R\}$ como na Proposição 2.12. Seja κ a curvatura geodésica de γ_R^i em Σ_α . Então, pelo Teorema de Gauss-Bonnet e pela Proposição 2.12, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_\alpha} K &= 2\pi \chi(\Sigma_\alpha) - \int_{\partial \Sigma_\alpha} \kappa \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(2\pi \chi(\Sigma_\alpha) - \int_{\partial \Sigma_\alpha} \kappa \right) \\ &= 2\pi \chi(\Sigma_\alpha) - \sum_{i \in \Lambda_\alpha} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R^i} \kappa \\ &= 2\pi \chi(\Sigma_\alpha) - 2\pi k_\alpha, \end{aligned} \quad (2.26)$$

onde $\Lambda_\alpha = \{i \mid \Sigma_\alpha \cap E_i \neq \emptyset\}$. Portanto, das equações (2.24)-(2.26) segue que

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{U_r \cap (\cup_{\alpha=0}^m \Sigma_\alpha)} Ric(\nabla f, \nu) &= \sum_{\alpha=0}^m c_\alpha \lim_{R \rightarrow \infty} (2\pi \chi(\Sigma_\alpha) - 2\pi k_\alpha) \\ &= 2\pi \sum_{\alpha=0}^m c_\alpha (\chi(\Sigma_\alpha) - k_\alpha). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Além disso, das equações (2.23)-(2.25) e (2.27), podemos concluir que

$$\int_{\{f>0\}} f|Ric|^2 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{U_r^+} f|Ric|^2 = 2\pi \sum_{\alpha=0}^m c_\alpha(\chi(\Sigma_\alpha) - k_\alpha) + 2\pi \sum_{\beta=0}^n \tilde{c}_\beta \chi(\tilde{\Sigma}_\beta). \quad (2.28)$$

Definamos as seguintes funções $f^+ = \sup_M \{0, f\} = f$ em $\{f > 0\}$ e $f^- = \sup_M \{0, -f\} = f$ em $\{f < 0\}$. É de fácil verificação que $f = f^+ - f^-$ e $|f| = f^+ + f^-$. Portanto,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M f|Ric|^2 = \int_M f^+|Ric|^2 - \int_M f^-|Ric|^2 = \int_{\{f>0\}} f|Ric|^2 - \int_{\{f<0\}} f|Ric|^2 \\ &\Rightarrow \int_{\{f<0\}} f|Ric|^2 = \int_{\{f>0\}} f|Ric|^2 \end{aligned}$$

Por sua vez obtemos que

$$\int_M |f||Ric|^2 = 2 \int_{\{f>0\}} f|Ric|^2 \quad (2.29)$$

Logo, de (2.28) e (2.29) temos que

$$\int_M |f||Ric|^2 = 4\pi \left[\sum_{\alpha=0}^m c_\alpha(\chi(\Sigma_\alpha) - k_\alpha) + \sum_{\beta=0}^n \tilde{c}_\beta \chi(\tilde{\Sigma}_\beta) \right].$$

□

Na proposição a seguir veremos que, a menos do caso em que M é plana, o conjunto de zeros de um potencial estático de uma variedade sem fronteira é não vazio.

Teorema 2.16. *Seja (M, g) uma 3-variedade conexa, completa, assintoticamente plana, sem fronteira. Se (M, g) possui um potencial estático f , então $f^{-1}(0) \neq \emptyset$ ou (M, g) é isométrica a (\mathbb{R}^3, g_0) .*

Demonstração. Suponha que $f^{-1}(0) = \emptyset$. Pela conexidade de M , temos que $f > 0$ ou $f < 0$. Como nesta seção toda variedade tem uma quantidade finita de fins, vale a Proposição 2.15, ou seja,

$$\int_M f|Ric|^2 = 0. \quad (2.30)$$

Sem perda de generalidade suponhamos que $f > 0$, então $f|Ric|^2 \geq 0$. Portanto, da desigualdade anterior juntamente com (2.30), temos que $f|Ric|^2 \equiv 0$, consequentemente $Ric \equiv 0$. Portanto, de (1.1) temos que (M, g) é plana e, assim, isométrica à (\mathbb{R}^3, g_0) .

□

Em [4], Bunting e Masood-ul-Alam provaram que se (M, g) é uma 3-variedade assintoticamente plana com fronteira, com um fim, sobre a qual existe um potencial estático que tende a um no infinito e se aproxima de zero na fronteira, então (M, g) é isométrica a uma variedade espacial Schwarzschild com massa positiva fora do horizonte. O resultado abaixo é uma generalização para um número qualquer de fins. Essencialmente a demonstração consiste em provar neste caso não é possível que haja mais de um fim distinto voltando assim ao caso do Teorema 1 de [4]. Deixaremos indicado abaixo onde o leitor poderá encontrar a demonstração deste resultado.

Teorema 2.17. *Seja (M, g) uma 3-variedade conexa, completa, assintoticamente plana, com fronteira não vazia e com possivelmente mais de um fim. Suponha que f é um potencial estático tal que $f > 0$ no interior e $f = 0$ na fronteira. Então, (M, g) é isométrica a uma variedade espacial Schwarzschild com massa positiva fora do horizonte.*

Demonstração. Ver Teorema 1 de [Bunting e Masood-ul-Alam [4]] e [Miao e Tam [14]]. □

Veremos no Teorema abaixo que a existência de um potencial estático limitado impõe um grande restrição na geometria de uma variedade, de modo que (M, g) é plana ou isométrica a uma variedade Schwarzschild.

Teorema 2.18. *Seja (M, g) uma 3-variedade conexa, completa, assintoticamente plana, sem fronteira e com possivelmente mais de um fim. Se existe um potencial estático limitado sobre (M, g) , então (M, g) é isométrica ao (\mathbb{R}^3, g_0) ou a uma variedade espacial Schwarzschild $\left(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \left(1 + \frac{m}{2|x|}\right)^4 g_0\right)$ com $m > 0$.*

Demonstração. Seja f um potencial estático limitado. Se (M, g) tem apenas um fim então f deve ser constante, pela Proposição 2.11 item (ii) e pelo fato de $\Delta f = 0$. Assim, (M, g) é plana e assim isométrica à (\mathbb{R}^3, g_0) .

Agora suponhamos que (M, g) tem mais de um fim, em particular (M, g) não é isométrica à (\mathbb{R}^3, g_0) . Então, pelo Teorema 2.16 $f^{-1}(0) \neq \emptyset$. Daí, pelo Lema 2.2 item (i) e pela Proposição 2.11 item (ii), $f^{-1}(0)$ é uma hipersuperfície totalmente geodésica fechada (possivelmente desconexa). Além disso, f muda de sinal próximo de $f^{-1}(0)$. Portanto, seja N_1 uma componente conexa de $\{f > 0\}$, então N_1 é ilimitada e $f = 0$ sobre ∂N_1 . Como $f > 0$ ou $f < 0$ próximo do infinito em cada fim de (M, g) . Logo, N_1 deve ser assintoticamente plana, com possivelmente mais de um fim, com fronteira Σ não vazia sobre a qual $f = 0$. Pela Proposição 2.17, (N_1, g) é isométrica a

$$\left(\{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| > m_1\}, \left(1 + \frac{m_1}{2|x|}\right)^4 \delta_{ij} \right),$$

com $m_1 > 0$. Similarmente, seja N_2 uma componente conexa de $\{f < 0\}$ cuja fronteira é Σ . Pelo mesmo argumento acima temos que (N_2, g) é isométrica a

$$\left(\left\{ y \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < |y| < m_2 \right\}, \left(1 + \frac{m_2}{2|y|} \right)^4 \delta_{ij} \right),$$

com $m_2 > 0$. Como M é conexa, concluímos que $M = N_1 \cup N_2 \cup \Sigma$. Consequentemente teremos que

$$\{|x| = m_1\} = \Sigma = \{|y| = m_2\}.$$

Tomando então a área de Σ vemos que ela é dada por $4\pi m_1^2$ e $4\pi m_2^2$, respectivamente. Logo, $m_1 = m_2$, pois tais constantes são positivas. Isto prova que (M, g) é isométrica a uma variedade espacial Schwarzschild com massa positiva. □

No resultado a seguir enfraqueceremos a hipótese da limitação do potencial estático, mas pediremos uma condição topológica em contrapartida, como veremos precisamente a seguir:

Teorema 2.19. *Seja (M, g) uma 3-variedade conexa, completa, assintoticamente plana, sem fronteira e com uma quantidade finita de fins. Seja f um potencial estático. Se M é orientável e cada 2-esfera em M é a fronteira de um domínio limitado, então (M, g) é isométrica a (\mathbb{R}^3, g_0) . Em particular, se M é homeomorfa ao \mathbb{R}^3 , então (M, g) é isométrica a (\mathbb{R}^3, g_0) .*

Demonstração. Seja $\tilde{\Sigma}_\beta \subset f^{-1}(0)$ uma componente compacta de $f^{-1}(0)$. Como M é orientável, então $\tilde{\Sigma}_\beta$ também é orientável. Se $\chi(\tilde{\Sigma}_\beta) > 0$, então $\tilde{\Sigma}_\beta$ é homeomorfa a uma 2-esfera. Portanto por hipótese, $\tilde{\Sigma}_\beta = \partial\Omega$ para algum domínio Ω em M . Como f é harmônica, pelo Princípio do Máximo existe $x_0 \in \Omega$ tal que $f(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} f$. Por outro lado, $\max_{\bar{\Omega}} f = \max_{\partial\Omega} f = 0$, então para toda $x \in \bar{\Omega}$, $f(x) \leq f(x_0) = 0$. Analogamente temos o resultado para o mínimo novamente pelo Princípio do Máximo. Logo $f \equiv 0$ em Ω . Então $f \equiv 0$ em M , pelo Corolário 1.10. Mas este caso não pode ocorrer, pois f é um potencial estático. Então, $\chi(\tilde{\Sigma}_\beta) \leq 0$, $\forall \tilde{\Sigma}_\beta$ em $f^{-1}(0)$, caso tais componentes existam. Por outro lado, se Σ_α é uma componente não compacta de $f^{-1}(0)$, então $\chi(\Sigma_\alpha) \leq 1$, pois se $\chi(\Sigma_\alpha) = 2$, então Σ_α seria homeomorfa a S^2 e por hipótese Σ_α seria fronteira de algum domínio limitado, em particular, seria um conjunto limitado, o que é uma contradição. Logo, da equação dada na Proposição 2.15 (ii), temos que

$$0 \leq \int_M |f| |Ric|^2 \leq 0$$

Consequentemente, $Ric \equiv 0$ e da equação (1.1) o tensor curvatura de Riemann é nulo. Portanto, (M, g) é isométrica a (\mathbb{R}^3, g_0) . □

Seja (M, g) uma 3-variedade conexa, completa, assintoticamente plana, com fronteira não vazia e com uma quantidade finita de fins E_1, \dots, E_k . Suponha que f é um potencial estático tal que $f > 0$ no interior e $f = 0$ em ∂M . Dado um ponto $p \in \text{Int}(M)$, o interior de M seja $\gamma_p(t)$ a curva integral de ∇f com $\gamma_p(0) = p$. Seja (α, β) o intervalo maximal da existência de γ_p sobre $\text{Int}(M)$. Sobre estas condições temos as seguintes proposições:

Proposição 2.20. Se $\beta < \infty$, então $\lim_{t \rightarrow \beta} \gamma_p(t) = x$ para algum $x \in \partial M$; se $\alpha > -\infty$, então $\lim_{t \rightarrow \alpha} \gamma_p(t) = y$ para algum $y \in \partial M$. Consequentemente, $\alpha = -\infty$ ou $\beta = \infty$.

Demonstração. (a) Se p é um ponto crítico de f , então $\gamma_p(t) = p, \forall t \in (-\infty, \infty)$. Além disso, pelo Lema 2.1 (i), $f(p) \neq 0$. Então a proposição é verdadeira neste caso. Suponhamos então que $\nabla f(p) \neq 0$, daí $\nabla f(\gamma_p(t)) \neq 0$ para todo t e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\gamma_p(t)) &= f'(\gamma_p(t)) \cdot \gamma_p'(t) = f'(\gamma_p(t)) \nabla f(\gamma_p(t)) \\ &= \langle \nabla f(\gamma_p(t)), \nabla f(\gamma_p(t)) \rangle = |\nabla f|^2(\gamma_p(t)) > 0. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Pela Proposição 2.11, $\lim_{x \rightarrow \infty} |\nabla f|$ existe e é finito em cada fim E_i . Portanto,

$$|\nabla f|(x) < B, \forall x \in M \quad (2.32)$$

para alguma constante $B > 0$. Suponha que $\beta < \infty$, então para $t_2 > t_1 > 0$,

$$d(\gamma_p(t_1), \gamma_p(t_2)) \leq \int_{t_1}^{t_2} |\gamma_p'(s)| ds \leq (t_2 - t_1)B,$$

onde $d(\cdot, \cdot)$ denota a distância sobre (M, g) . Assim, $\lim_{t \rightarrow \beta} \gamma_p(t) = x$ para algum $x \in M$. Como (α, β) é um intervalo maximal da existência de $\gamma_p(t)$ em $\text{Int}(M)$, concluímos que $x \in \partial M$. Similarmente, se $\alpha > -\infty$, então $\lim_{t \rightarrow \alpha} \gamma_p(t) = y$, para algum $y \in \partial M$. Se $\alpha > -\infty$ e $\beta < \infty$, então $f(x) = 0 = f(y)$, o que contradiz (2.31). □

Proposição 2.21. Se $\beta = \infty$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} f(\gamma_p(t)) = b > -\infty$. Além disso,

(i) Se $b = \infty$, então, como $t \rightarrow \infty$, $\gamma_p(t)$ tende ao infinito em algum fim E_i sobre o qual f é ilimitado;

(ii) Se $b < \infty$, então $b \neq 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} |\nabla f|(\gamma_p(t)) = 0$;

(iii) Se $b < 0$, então $\bigcap_{t > 0} \overline{\{\gamma_p(s) \mid s > t\}} \neq \emptyset$ que é exatamente o conjunto de todos os pontos críticos de f .

Demonstração. Note que (2.31) implica que $f(\gamma_p(t))$ é crescente. Isto implica que $\lim_{t \rightarrow \infty} f(\gamma_p(t)) = b$ existe e $b > -\infty$.

(i) Se $b = \infty$, então existe $t_n \rightarrow \infty$ tal que $\gamma_p(t_n) \rightarrow \infty$ em cada fim E_i sobre o qual f é limitada. Seja $\{t'_n\}$ uma outra sequência qualquer com $t'_n \rightarrow \infty$. Afirmamos que $\gamma_p(t'_n) \rightarrow \infty$ em E_i bem definido. Por outro lado, passando para uma subsequência, podemos assumir que $\gamma_p(t'_n) \rightarrow \infty$ em outro fim $E_j \neq E_i$, mas isto implica que para n suficientemente grande existe t''_n entre t_n e t'_n tal que $\gamma_p(t''_n) \in K \subset M$ compacto (K como na Definição 1.3) que contradiz o fato de que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\gamma_p(t''_n)) = b = \infty$. Portanto, $\gamma_p(t) \rightarrow \infty$ em E_i quando $t \rightarrow \infty$. O que prova o item (i) de (b).

(ii) Se $b < \infty$. Seja $\{t_n\}$ tal que $t_n \rightarrow \infty$. Dado $0 < \delta < \frac{1}{B}$ qualquer fixado, temos que

$$\int_{t_n - \delta}^{t_n + \delta} |\nabla f|^2(\gamma_p(t)) dt = \int_{t_n - \delta}^{t_n + \delta} \frac{d}{dt} f(\gamma_p(t)) dt = f(\gamma_p(t_n + \delta)) - f(\gamma_p(t_n - \delta)) \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Portanto, existe $t'_n \in [t_n - \delta, t_n + \delta]$ tal que $|\nabla f|(\gamma_p(t'_n)) \rightarrow 0$.

Defina $B_{\gamma_p(t_n)}(1) := \{q \in M \mid d(q, \gamma_p(t_n)) < 1\}$. Para n suficientemente grande por (2.32) temos que $|f| < 2|b| + 2B$ em $B_{\gamma_p(t_n)}(1)$. Isso juntamente com o fato de que $\nabla^2 f = f Ric$ e (M, g) ser assintoticamente plana implica que

$$\nabla^2 f \leq C_1 \tag{2.33}$$

em $B_{\gamma_p(t_n)}(1)$ para alguma constante C_1 independente de n e δ . Seja $\phi = |\nabla f|^2$, assim $|\nabla \phi|^2 \leq 4|\nabla^2 f|^2 \phi$, então existe C_2 independente de n e δ tal que

$$|\nabla \phi| \leq C_2 \tag{2.34}$$

em $B_{\gamma_p(t_n)}(1)$. Note que, $d(\gamma_p(t_n), \gamma_p(t'_n)) \leq \delta B < 1$. Logo,

$$\phi(\gamma_p(t_n)) \leq \phi(\gamma_p(t'_n)) + 2\delta B C_2$$

Como $\phi(\gamma_p(t'_n)) \rightarrow 0$ e δ pode ser escolhido arbitrariamente, então $\phi(\gamma_p(t_n)) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Mais ainda $|\nabla f|(\gamma_p(t_n)) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Também podemos mostrar que $b \neq 0$. Seja $\{t_n\}$ como acima. Suponha que $\{\gamma_p(t_n)\}$ é ilimitada, então passando para uma subsequência, se necessário, podemos assumir que $\gamma_p(t_n) \rightarrow \infty$ em algum fim E_j . Se f é ilimitada em E_j , temos que $|\nabla f|(\gamma_p(t_n)) \geq C_3$ para alguma constante $C_3 > 0$ independente de n , pela Proposição 2.11 (i), contradizendo o fato de que $|\nabla f|(\gamma_p(t_n)) \rightarrow 0$. Assim, f é limitada em E_j . Pela Proposição 2.11 (ii), temos que $\lim_{x \rightarrow \infty, x \in E_j} f \neq 0$. Suponhamos então que $\{\gamma_p(t_n)\}$ é limitada. Passando para uma subsequência, podemos

assumir que $\gamma_p(t_n) = q \in M$. Então q é um ponto crítico de f como $|\nabla f|(\gamma_p(t_n)) \rightarrow 0$. Portanto, $b = f(q) \neq 0$, pelo Lema 2.1(ii) Isso completa a prova o item (ii) de (b).

(iii) Para provar (iii), é suficiente provar que se $b < 0$ e se $\{t_n\}$ é uma sequência tendendo ao infinito, então $\{\gamma_p(t_n)\}$ deve ser limitada, assim contendo uma subsequência convergindo para um ponto crítico em M . Suponha que $\{\gamma_p(t_n)\}$ é ilimitada, então passando a uma subsequência, caso necessário, podemos assumir que $\gamma_p(t_n) \rightarrow \infty$ em um fim E_j , onde f é limitada, pela prova do item (ii) acima. Sobre E_j , a Proposição 2.11 (ii) implica que

$$f = b - \frac{A}{|x|} + O(|x|^{-1}), \quad |x| \rightarrow \infty \quad (2.35)$$

onde A é uma constante tal que

$$\frac{A}{b} = m,$$

onde m é a massa de (M, g) sobre cada fim E_j . Pelo Teorema da Massa Positiva, temos que $m > 0$. Portanto, $A < 0$, pois $b < 0$. Como resultado, temos que $f(\gamma_p(t_n)) > b$ para algum n suficientemente grande por (2.35), mas isto nos gera uma contradição pelo fato que $b = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\gamma_p(t_n))$ e $f(\gamma_p(t))$ é estritamente crescente em t . Portanto, $\{\gamma_p(t_n)\}$ deve ser limitada. O que prova o item (iii). \square

Corolário 2.22. Se $\alpha = -\infty$, então $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(\gamma_p(t)) = a < \infty$. Além disso,

- (i) Se $a = -\infty$, então, como $t \rightarrow -\infty$, $\gamma_p(t)$ tende ao infinito em algum fim E_i sobre o qual f é ilimitado;
- (ii) Se $a > -\infty$, então $a \neq 0$ e $\lim_{t \rightarrow -\infty} |\nabla f|(\gamma_p(t)) = 0$;
- (iii) Se $a > 0$, então $\bigcap_{t < 0} \overline{\{\gamma_p(s) \mid s < t\}} \neq \emptyset$ que é exatamente o conjunto de todos os pontos críticos de f .

Demonstração. Basta substituir f por $-f$ na proposição acima. \square

Usando as Proposições 2.20, 2.21 e do Corolário 2.22, podemos obter uma Proposição análoga a Proposição 2.17 substituindo a afirmação $f > 0$ por f não ter pontos críticos. Novamente vemos que condições sobre o potencial estático tem uma forte relação com a geometria da variedade.

Teorema 2.23. *Seja (M, g) uma 3-variedade conexa, completa, assintoticamente plana, com fronteira ∂M não vazia, e uma quantidade finita de fins. Suponha que existe um potencial estático f que não tem pontos críticos e tal que $f = 0$ em ∂M . Então (M, g)*

é isométrica a uma variedade espacial Schwarzschild com massa positiva fora do horizonte.

Demonstração. Por definição temos que ∂M é compacta. Seja Σ uma componente conexa de ∂M . Do Lema 2.1 (i) temos que $\nabla f \neq 0$ em Σ . Sem perda de generalidade podemos assumir que ∇f é um vetor apontando na direção interior a Σ . Defina $F : \Sigma \times (0, \infty) \rightarrow \text{Int}(M)$ por $F(x, t) = \gamma_x(t)$ onde $\gamma_x(t)$ é a curva integral de ∇f tal que $\gamma_x(0) = x \in \Sigma$. Pela Proposição 2.20, F está definida em $[0, \infty)$. Como $f = 0$ e $\nabla f \neq 0$ em Σ , então F é injetiva e pelo Teorema da Invariância do Domínio [Y], F é um homeomorfismo. Tendo em vista que Σ é aberto por ser uma componente conexa, segue que $\Sigma \times (0, \infty)$ é um aberto. Então, $N = F(\Sigma \times (0, \infty))$ é um conjunto aberto.

Afirmção 2.1. N é fechado em $\text{Int}(M)$.

De fato, dado $y \in \overline{N}$, então existe $\tilde{x}_n = \gamma_{x_n}(t_n)$ com $t_n > 0$ e $x_n \in \Sigma$ tal que $\lim \tilde{x}_n = y$. Passando para uma subsequência caso seja necessário, temos que $x_n \rightarrow x \in \Sigma$ e $t_n \rightarrow a$ com $0 \leq a \leq \infty$. Suponhamos que $a = \infty$, então considere uma curva integral $\gamma_{\tilde{x}_n}(t) = \gamma_{x_n}(t + t_n)$ definida em $(-t_n, 0]$. Seja $\gamma_y(t)$ a curva integral de ∇f com $\gamma_y(0) = y$. Desde que $t_n \rightarrow \infty$, $\{\gamma_{\tilde{x}_n}(t)\}$ converge uniformemente para $\gamma_y(t)$ em $[-n, 0]$ para todo $n > 0$. Em particular, $\gamma_y(t)$ está definida $(-\infty, 0]$. Por outro lado, $f(\gamma_{x_n}(t))$ é crescente em t para todo n . Daí, $f(\gamma_{\tilde{x}_n}(t)) > 0$ sobre $(-t_n, 0]$. Então, $f(\gamma_y(t)) \geq 0$ sobre $(-\infty, 0]$. Assim, $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(\gamma_y(t)) = a > 0$. Pela Proposição 2.22, $\{x \in M \mid \nabla f(x) = 0\} \neq \emptyset$, ou seja, existe pelo menos um ponto crítico. Contradizendo a hipótese, então $a < \infty$. Portanto,

$$\begin{aligned} y &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}_n(t) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{x_n}(t_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, t_n) \\ &= F\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} t_n\right) \\ &= F(x, a) \\ &= \gamma_x(a) \in N \end{aligned}$$

Assim, $\overline{N} = N$, isto é, N é fechado em $\text{Int}(M)$.

Sendo N é um conjunto aberto e fechado não vazio contido em $\text{Int}(M)$. Portanto, $N = \text{Int}(M)$. Como $f > 0$ ao longo de $\gamma_x(t)$ sobre $(0, \infty)$, então $f > 0$ em $N = \text{Int}(M)$. Logo, pela Proposição 2.17, (M, g) é isométrica a uma variedade espacial Schwarzschild com massa positiva fora do horizonte.

□

O teorema a seguir é também o teorema principal da seção que relaciona o conjunto de pontos críticos (ser vazio) de um potencial estático com a geometria da variedade.

Teorema 2.24. *Seja (M, g) uma 3-variedade conexa, completa, assintoticamente plana sem fronteira, com uma quantidade finita de fins. Se existe um potencial estático f sobre (M, g) que não tem pontos críticos, então (M, g) é isométrica à (\mathbb{R}^3, g_0) ou a uma variedade espacial Schwarzschild $\left(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \left(1 + \frac{m}{2|x|}\right)^4 g_0\right)$ com $m > 0$.*

Demonstração. Se $f^{-1}(0)$ não tem componente compacta, então (M, g) é isométrica à (\mathbb{R}^3, g_0) (pela demonstração do Teorema 2.19). Suponha então que Σ seja uma componente compacta de $f^{-1}(0)$. Separando M ao longo de Σ . Seja (\tilde{M}, \tilde{g}) a completção da métrica de $(M \setminus \Sigma, g)$. Então \tilde{M} tem duas componentes conexas cujas fronteiras são isométricas a Σ , ou \tilde{M} é conexa com duas componentes da fronteira que são isométricas. Pelo Corolário 2.23 cada componente de (\tilde{M}, \tilde{g}) mostra que (\tilde{M}, \tilde{g}) não pode ser conexa e portanto tem duas componentes que são isométricas a uma variedade espacial Schwarzschild com $m > 0$ fora do horizonte. Como suas fronteiras são isométricas, podemos concluir que (M, g) é isométrica à $\left(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \left(1 + \frac{m}{2|x|}\right)^4 g_0\right)$ com $m > 0$. □

Capítulo 3

Potenciais Estáticos e Hipersuperfícies Area Minimizing

O estudo de variedades não-compactas é um tema de interesse da geometria. Neste capítulo, temos como propósito estudar uma relação entre potenciais estáticos e hipersuperfícies mínimas de uma variedade (não necessariamente de dimensão três) assintoticamente plana. Mostraremos então que se uma variedade assintoticamente plana com horizon boundary admite um potencial estático global, então o potencial estático deve ser zero na fronteira. Também mostraremos que se uma variedade assintoticamente plana com horizon boundary admite um potencial estático ilimitado sobre um de seus fins, então a variedade contém uma hipersuperfície não-compacta, completa e area minimizing. Para este capítulo utilizamos duas referências principais: Huang, Martin e Miao [11] e Galloway e Pengzi [9].

3.1 Hipersuperfícies Area Minimizing

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n . Como já vimos anteriormente no Lema 2.2 item (i) na página 23, o conjunto $\Sigma = f^{-1}(0)$ é uma hipersuperfície totalmente geodésica. Uma hipersuperfície não-compacta completa Σ em M é dita *area minimizing* se $\Sigma \cap B_r$ é a solução de um problema de Plateau com fronteira gerada por $\Sigma \cap B_r$ para r suficientemente grande. Diremos que M possui *horizon boundary* se ∂M é vazio ou a união disjunta de hipersuperfícies mínimas fechadas, M não contém outras hipersuperfícies mínimas fechadas e ∂M é localmente area minimizing para $n \geq 8$.

No lema a seguir traremos uma generalização da Proposição 2.12, pois todo potencial estático ilimitado pode ser reescalado de forma que possamos escrever ele através da seguinte expressão $f(x) = x_n + O(|x|)$, onde x_i é a i -ésima coordenada do vetor x . Além disso, cada componente conexa do conjunto de zeros intersecta transversalmente

uma esfera métrica de dimensão $n - 2$ para $|x|$ suficientemente grande.

Proposição 3.1. Seja (M, g) uma variedade de dimensão n assintoticamente plana. Seja E um de seus fins que admite potencial estático com assintocidade $f(x) = x_n + O(|x|)$ com $|x| \rightarrow \infty$. Então, existe $r_0 > 0$ suficientemente grande tal que cada componente Σ de $f^{-1}(0)$ em $E \setminus B_{r_0}$ é dada pelo gráfico $x_n = g(x_1, \dots, x_{n-1})$ e Σ intersecta S_r transversalmente próximo ao equador de uma $(n - 2)$ -esfera para $r > r_0$.

Demonstração. Pela proposição anterior, temos que $\nabla_{\partial_{x_n}} f = 1 + O(|x|^{\gamma-1}) > 0$ para $|x|$ suficientemente grande, onde $\max\{1 - q, 0\} < \gamma < 1$. Seja $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$. Então, pelo Teorema da Função Implícita, cada componente do conjunto de zeros é dado pelo gráfico $x_n = g(x')$ e $f(x', g(x')) = 0$ com

$$|\nabla g| \leq C|x'|^{\gamma-1}, \quad (3.1)$$

para alguma constante C . Integrando a desigualdade (3.1), temos que

$$|g(x')| \leq C|x'|^\gamma.$$

A constante C acima pode ser uniformemente escolhida para todas as componentes. Se r_0 é suficientemente grande, cada componente de $f^{-1}(0)$ intersecta S_r transversalmente perto do equador para todo $r > r_0$. □

Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana que admite potencial estático e Σ um hipersuperfície de M two-sided suave. Assim, podemos supor $f > 0$ em M . Seja $\Phi : \Sigma \times [0, \epsilon) \rightarrow M$ dado pela aplicação exponencial normal com respeito a uma métrica conformemente modificada $\bar{g} = f^{-2}g$. Em particular, $\Phi(x, 0) = x$ e

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x, t) \right|_{t=0} = f(x)\nu(x),$$

onde ν é o vetor normal unitário na métrica g . Seja $\Sigma_t := \Phi(\Sigma \times \{t\})$. E sejam $H_t(x)$ e $\mathbb{I}\mathbb{I}_t(x)$ a curvatura média e a segunda forma fundamental de $x \in \Sigma_t$ com respeito a ν na métrica g . Assim, temos o seguinte lema:

Lema 3.2. (Fórmula de Monotonicidade) A curvatura média e a segunda forma fundamental de Σ_t satisfaz a seguinte equação diferencial

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{H_t}{f} \right) = |\mathbb{I}\mathbb{I}_t|^2.$$

3. Potenciais Estáticos e Hipersuperfícies Area Minimizing

Demonstração. Temos, de [17], a seguinte evolução para a Segunda Formas fundamental:

$$\frac{\partial \mathbb{I}I_{t_{ij}}}{\partial t} = (\nabla^2 f)_{ij} + f \mathbb{I}I_i^m \mathbb{I}I_{mj} + f^{-1} R_{ijn},$$

onde $1 \leq i, j \leq n - 1$ e $\mathbb{I}I_i$, $(\nabla^2 f)_{ij}$ são as componentes dos respectivos tensores. Tomando o traço da equação acima, temos a seguinte equação de evolução para a curvatura média

$$\frac{\partial H_t}{\partial t} = f Ric(\nu_t, \nu_t) + f |\mathbb{I}I_t|^2 + \Delta_{\Sigma_t} f$$

A relação entre o Laplaciano intrínseco e extrínseco de Σ_t é dado pela fórmula

$$\Delta f = \Delta_{\Sigma_t} f + \nabla^2 f(\nu_t, \nu_t) - \frac{H_t}{f} \frac{\partial f}{\partial t}$$

Logo, juntamente com equação de estaticidade temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_t}{\partial t} &= f Ric(\nu_t, \nu_t) + f |\mathbb{I}I_t|^2 + \Delta f - \nabla^2 f(\nu_t, \nu_t) + \frac{H_t}{f} \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= f Ric(\nu_t, \nu_t) + f |\mathbb{I}I_t|^2 - f Ric(\nu_t, \nu_t) + \frac{H_t}{f} \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= f |\mathbb{I}I_t|^2 + \frac{H_t}{f} \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned}$$

Reescrevendo a equação acima temos

$$\frac{1}{f} \frac{\partial H_t}{\partial t} - \frac{H_t}{f^2} \frac{\partial f}{\partial t} = |\mathbb{I}I_t|^2$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{H_t}{f} \right) = |\mathbb{I}I_t|^2.$$

□

Veremos a seguir que um potencial estático f sobre uma hipersuperfície mínima fechada e estável Σ não muda de sinal. Além disso, Σ será totalmente geodésica. Em particular, temos que o conjunto de zeros de um potencial estático $\Sigma = f^{-1}(0)$ é uma hipersuperfície totalmente geodésica, como no Proposição [1.15].

Proposição 3.3. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n . Suponha que M admite um potencial estático de f . Seja Σ uma hipersuperfície mínima, estável, conexa e fechada em M . Então vale as seguintes afirmações:

- (i) $f > 0$ ou $f < 0$ sobre Σ , a menos que f seja identicamente nula sobre Σ .
- (ii) Σ é totalmente geodésica.

Demonstração. Pela desigualdade de estabilidade, para cada $\phi \in C^1(\Sigma)$,

$$\int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma}\phi|^2 d\sigma \geq \int_{\Sigma} (Ric(\nu, \nu) + |\mathbb{I}\mathbb{I}|^2)\phi^2 d\sigma \geq \int_{\Sigma} Ric(\nu, \nu)\phi^2 d\sigma. \quad (3.2)$$

Lembrando das Identidades de Green e como Σ é fechada, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial M} \phi \frac{\partial \phi}{\partial \nu} dS = \int_M \langle \nabla_{\Sigma}\phi, \nabla_{\Sigma}\phi \rangle d\sigma + \int_M \phi \Delta_{\Sigma}\phi d\sigma \\ &\Rightarrow \int_M |\nabla_{\Sigma}\phi|^2 d\sigma = - \int_M \phi \Delta_{\Sigma}\phi d\sigma. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Portanto, das equações [3.2](#) e [3.3](#), temos

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_M \phi \Delta_{\Sigma}\phi d\sigma + \int_{\Sigma} Ric(\nu, \nu)\phi^2 d\sigma \\ &= \int_M (\phi \Delta_{\Sigma}\phi d\sigma + Ric(\nu, \nu)\phi^2) d\sigma \\ &= \int_M \lambda_1 \phi^2 d\sigma \\ &= \lambda_1 \int_M \phi^2 d\sigma, \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde λ_1 é um autovalor do operador $\Delta_{\Sigma} + Ric(\nu, \nu)$, isto é, $\Delta_{\Sigma}\phi + Ric(\nu, \nu)\phi = \lambda_1\phi$.

Donde, $\phi \Delta_{\Sigma}\phi + Ric(\nu, \nu)\phi^2 = \lambda_1\phi^2$. Logo, λ_1 é um autovalor não positivo de [3.4](#).

Por outro lado, como Σ é mínima, do Lema [1.2](#), temos que $\Delta f = \Delta_{\Sigma}f + \nabla^2 f(\nu, \nu)$.

Da equação de estaticidade segue que

$$0 = \Delta_{\Sigma}f + \nabla^2 f(\nu, \nu) - \Delta f = \Delta_{\Sigma}f + f Ric(\nu, \nu), \quad (3.5)$$

sobre Σ . Assim, $f \equiv 0$ sobre Σ ou f é uma autofunção com autovalor zero. Se $f \equiv 0$ sobre Σ , então $\Sigma \subset f^{-1}(0)$ que é um conjunto totalmente geodésico. Se f é uma autofunção, então f não se anula sobre Σ , provando assim o item (i). Para concluir,

substituamos f em (3.2) e juntamente com (3.5), temos

$$\begin{aligned}
 0 &\geq \int_{\Sigma} (Ric(\nu, \nu) + |\mathbb{I}\mathbb{I}|^2) f^2 d\sigma - \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} f|^2 d\sigma \\
 &= \int_{\Sigma} (|\mathbb{I}\mathbb{I}|^2 f^2 + Ric(\nu, \nu) f^2 - |\nabla_{\Sigma} f|^2) d\sigma \\
 &= \int_{\Sigma} (|\mathbb{I}\mathbb{I}|^2 f^2 + f^2 Ric(\nu, \nu) + f \Delta_{\Sigma} f) d\sigma \\
 &= \int_{\Sigma} |\mathbb{I}\mathbb{I}|^2 f^2 d\sigma.
 \end{aligned}$$

Como f é um potencial estático, então é uma função não identicamente nula, temos que $\mathbb{I}\mathbb{I} \equiv 0$. Logo, Σ é totalmente geodésica. O que mostra o item (ii). □

Proposição 3.4. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n com curvatura escalar $R = 0$. Suponha que M admite potencial estático f . Seja Σ uma hipersuperfície conexa, localmente area minimizing, fechada em M . Suponha que f não é identicamente nulo em Σ . Então, existe um subconjunto U de M e um difeomorfismo $\phi : \Sigma \times [0, \epsilon) \rightarrow U$ tal que vale as seguintes afirmações:

- (i) O volume $(n - 1)$ -dimensional da hipersuperfície $\Sigma_t := \phi(\Sigma \times \{t\})$ é uma constante para cada t .
- (ii) A curvatura escalar R de Σ_t é zero e f é constante sobre Σ_t para cada t .
- (iii) A curvatura de Ricci de g é zero sobre U .

Demonstração. Sem perda de generalidade pelo Lema 3.3, assumamos que $f > 0$ sobre Σ . Considere a deformação

$$\Phi : \Sigma \times [0, \epsilon) \rightarrow \Omega$$

dada pela aplicação exponencial normal com a métrica modificada $f^{-2}g$ numa vizinhança de Σ onde $f > 0$.

Seja $\Sigma_t = \Phi(\Sigma \times \{t\})$ e note que $\Sigma_0 = \Sigma$. Sejam também $H_t, \mathbb{I}\mathbb{I}_t$ a curvatura média e a segunda forma fundamental de Σ_t sobre a métrica g , respectivamente. O Lema 3.2 implica que $H_t \geq 0$ para $t \in (0, \epsilon)$, pois

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{H_t}{f} \right) = |\mathbb{I}\mathbb{I}_t|^2 \geq 0.$$

Assim, $H_t \geq 0$. Da primeira fórmula de variação de área, temos

$$|\Sigma_t| - |\Sigma_0| = \int_0^t \left(- \int_{\Sigma_s} H_s d\sigma \right) ds. \tag{3.6}$$

3. Potenciais Estáticos e Hipersuperfícies Area Minimizing

Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, Σ é localmente area minimizing. Portanto, se $H_t > 0$, $t < \varepsilon$, então

$$0 \geq - \int_{\Sigma_s} f H_s d\sigma.$$

Daí, pelo teorema fundamental do cálculo temos que

$$0 \geq \int_0^t \left(- \int_{\Sigma_s} f H_s d\sigma \right) ds = |\Sigma_t| - |\Sigma_0|.$$

Consequentemente, temos $|\Sigma_0| \geq |\Sigma_t|$ para $t < \varepsilon$. Logo, $H_t \equiv 0$ e o $(n-1)$ -volume é constante por (3.6). Pelo Lema 3.2, $\mathbb{I}_t \equiv 0$, então Σ_t é totalmente geodésica para $t \in [0, \varepsilon)$ com respeito a métrica g . Além disso, usando a primeira variação da segunda forma fundamental temos que

$$\nabla_{\Sigma}^2 f(X, Y) + f Rm(\nu, X, Y, \nu) = 0 \quad (3.7)$$

para todos $X, Y \in T_p \Sigma_t$. Como Σ_t é totalmente geodésica, segue que

$$\nabla_{\Sigma}^2 f(X, Y) = \nabla^2 f(X, Y) \quad (3.8)$$

para quaisquer X, Y tangentes. Como $R_g = 0$ e da equação de estaticidade

$$\nabla^2 f(X, Y) = f Ric(X, Y). \quad (3.9)$$

De (3.7)-(3.9), temos que

$$Ric(X, Y) = -Rm(\nu, X, Y, \nu).$$

Por outro lado, dada uma base ortonormal $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ sobre Σ_t , então

$$Ric(X, Y) = Rm(\nu, X, Y, \nu) + \sum_{i=1}^{n-1} Rm(e_i, X, Y, e_i) \quad (3.10)$$

$$= -Ric(X, Y) + Ric_{\Sigma}(X, Y). \quad (3.11)$$

Assim, para todos X, Y vetores tangentes a Σ_t , temos

$$Ric(X, Y) = \frac{1}{2} Ric_{\Sigma}(X, Y).$$

Como consequência de (3.8), (3.9) e (3.10) obtemos as igualdades

$$\nabla_{\Sigma}^2 f = \frac{1}{2} f Ric \quad e \quad \Delta_{\Sigma} f = \frac{1}{2} f R_{\Sigma}. \quad (3.12)$$

Tomando divergência, temos, sobre Σ_t , que

$$div_{\Sigma}(\nabla_{\Sigma}^2 f) = d(\Delta_{\Sigma} f) + Ric_{\Sigma} \nabla_{\Sigma} f.$$

Assim, sobre cada Σ_t , temos

$$\begin{aligned} 0 &= d(\Delta_{\Sigma} f) + Ric_{\Sigma} \nabla_{\Sigma} f - [d(\Delta_{\Sigma} f) + Ric_{\Sigma} \cdot \nabla_{\Sigma} f] \\ &= d(\Delta_{\Sigma} f) + Ric_{\Sigma} \nabla_{\Sigma} f - \left[\frac{1}{2} (df R_{\Sigma} + f dR_{\Sigma}) + Ric_{\Sigma} \cdot \nabla_{\Sigma} f \right] \\ &= \frac{1}{2} d(R_{\Sigma} f) + \frac{1}{2} Ric_{\Sigma} \cdot \nabla_{\Sigma} f - \frac{1}{4} f dR_{\Sigma} \\ &= \frac{1}{2} f dR_{\Sigma} - \frac{1}{4} f dR_{\Sigma} + \frac{1}{2} R_{\Sigma} df + f^{-1} \nabla_{\Sigma}^2 f \cdot \nabla_{\Sigma} f \\ &= \frac{1}{4} f dR_{\Sigma} + \frac{1}{2} R_{\Sigma} df + f^{-1} \nabla_{\Sigma}^2 f \cdot \nabla_{\Sigma} f \\ &= \frac{1}{4} f^{-1} [f^2 d\Sigma + 2f df R_{\Sigma} + \nabla_{\Sigma}^2 f \cdot \nabla_{\Sigma} f] \\ &= \frac{1}{4} f^{-1} d(R_{\Sigma} f^2 + 2|\nabla_{\Sigma} f|^2). \end{aligned}$$

Logo, $R_{\Sigma} f^2 + 2|\nabla_{\Sigma} f|^2$ é constante em Σ_t . Sabendo que $\Delta_{\Sigma} f = \frac{1}{2} f R_{\Sigma}$ e multiplicando ambos os membros por f , obtemos a igualdade $f \Delta_{\Sigma} f = \frac{1}{2} f^2 R_{\Sigma}$. Pelas Identidades de Green e pela última igualdade temos

$$-|\nabla_{\Sigma} f|^2 = \frac{1}{2} f^2 R_{\Sigma},$$

Consequentemente,

$$R_{\Sigma} = -2f^{-2} |\nabla_{\Sigma} f|^2 \leq 0.$$

Isto implica que $R_{\Sigma} \leq 0$. De (3.12) vale $\Delta_{\Sigma} f = \frac{1}{2} f R_{\Sigma}$. Daí, pelas Identidades de

Green, temos que

$$\begin{aligned}
 \int_{\Sigma_t} R_{\Sigma} d\sigma &= \int_{\Sigma_t} 2f^{-1} \Delta_{\Sigma} f d\sigma \\
 &= - \int_{\Sigma_t} 2 \langle \nabla f^{-1}, \nabla f \rangle d\sigma \\
 &= - \int_{\Sigma_t} 2 \langle -f^{-2} \nabla f, \nabla f \rangle d\sigma \\
 &= \int_{\Sigma_t} 2f^{-2} |\nabla_{\Sigma} f|^2 d\sigma \geq 0.
 \end{aligned}$$

Donde $R_{\Sigma} = 0$ e daí $\nabla_{\Sigma} f = 0$ sobre Σ_t ; Além disso, $\nabla_{\Sigma}^2 f = 0$ sobre Σ_t , com $t \in [0, \varepsilon)$. Como $f > 0$ e $\nabla_{\Sigma}^2 f = 0$, segue que $Ric_{\Sigma} = 0$. Desta última igualdade obtemos que $Ric(X, Y) = 0$ para X, Y vetores tangentes. Pela Equação de Codazzi, $Ric(X, \nu) = 0$. Além disso, pela Equação de Gauss, $Ric(\nu, \nu) = 0$, esgotando assim todas as possibilidades. Portanto, o tensor de Ricci é zero em U . \square

No teorema a seguir veremos que se uma variedade possui horizon boundary, então temos que seus potenciais estáticos (caso existam) se anulam na fronteira.

Teorema 3.5. *Dado $n \geq 3$. Seja (M, g) uma variedade de dimensão n assintoticamente plana com horizon boundary. Suponha que (M, g) admite um potencial estático f . Então, f se anula sobre ∂M . Mais ainda, se f é limitada, então f é positiva ou negativa em todo o interior de M .*

Demonstração. Como vimos na Proposição [1.15](#), a curvatura escalar de g é constante sobre M e é zero numa variedade assintoticamente plana. Se f não se anula sobre ∂M , pela Proposição [3.4](#), numa vizinhança de ∂M em M como uma folheação de hipersuperfícies mínimas. Isto contradiz o fato de que M não possui hipersuperfície mínima fechada diferente de ∂M . notamos que como f não é identicamente nula, cada componente do conjunto de zeros de f é um hipersuperfície regular, e assim ∂M é em si mesma um componente conexa do conjunto de zeros.

Para concluir, assumimos que f é limitada. Pela Proposição [2.11](#), f tem o crescimento em cada fim E_k , com as seguintes constantes não nulas A_k ,

$$f(x) = A_k + O(|x|^{2-n}).$$

Podemos assumir $A_1 > 0$ (caso contrário, considere $-f$). Isto implica que $A_k > 0$ para todo k . Por outro lado, o conjunto de zeros de f é não vazio no interior de M , o que implica que M admite uma hipersuperfície mínima fechada diferente de ∂M . Portanto, pelo princípio do máximo forte para funções harmônicas, $f > 0$ em M . \square

3.2 Existência de Hipersuperfície Não-Compacta Completa Area Minimizing

Nesta seção, temos como objetivo mostrar que se M é horizon boundary e admite potencial estático, então ela possui uma hipersuperfície não-compacta, completa e area minimizing. Passaremos a partir de agora a demonstrar alguns lemas técnicos que servirão de pré-requisito na demonstração do resultado principal desta seção. De agora em diante façamos $\Lambda = \sup_M |\nabla f|_g$.

Lema 3.6. Seja U uma componente conexa de $\{f \neq 0\}$. Sejam $p, q \in U$ dois pontos distintos. Seja $dist_g(p, q)$ a distância entre p e q em (M, g) . Dada uma curva β em U que conecta p e q , seja $l(\beta, \tilde{g})$ o \tilde{g} -comprimento de β . Então,

$$l(\beta, \tilde{g}) \geq \frac{1}{\Lambda} \ln \left(1 + \frac{\Lambda dist_g(p, q)}{\min \{|f(p)|, |f(q)|\}} \right). \quad (3.13)$$

Demonstração. Sem perda de generalidade suponhamos que $f > 0$ em U . Seja l o g -comprimento de β . Podemos reparametrizar β de tal forma que

$$\beta(0) = p, \quad \beta(l) = q, \quad |\beta'(t)|_g = 1, \forall t \in [0, l]. \quad (3.14)$$

O \tilde{g} -comprimento de β é dado por

$$\begin{aligned} l(\beta, \tilde{g}) &= \int_0^l \frac{1}{f(\beta(t))} dt \\ &\geq \int_0^d \frac{1}{f(\beta(t))}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde $d = dist_g(p, q) > 0$. Por (3.14), segue que

$$\left| \frac{d}{dt} f(\beta(t)) \right| \leq |\langle \nabla f, \beta'(t) \rangle_g| \leq \Lambda. \quad (3.16)$$

Para todo $\forall t \in [0, l]$,

$$f(\beta(t)) - f(\beta(0)) \leq \Lambda t \quad (3.17)$$

Assim, juntamente com o fato de que $f(\beta(0)) > 0$, segue que

$$\frac{1}{f(\beta(t))} \geq \frac{1}{f(\beta(0)) + \Lambda t}. \quad (3.18)$$

Consequentemente, por (3.15),

$$\begin{aligned}
 l(\beta, \tilde{g}) &\geq \int_0^d \frac{1}{f(\beta(0)) + \Lambda t} dt \\
 &= \frac{1}{\Lambda} [\ln(f(p) + \Lambda d) - \ln(f(p))] \\
 &= \frac{1}{\Lambda} \ln \left(1 + \frac{\Lambda d}{f(p)} \right), \tag{3.19}
 \end{aligned}$$

Revertendo a direção de β , temos que

$$l(\beta, \tilde{g}) = \frac{1}{\Lambda} \ln \left(1 + \frac{\Lambda d}{f(q)} \right). \tag{3.20}$$

Portanto, (3.13) segue de (3.19) e (3.20). □

Lema 3.7. Seja U uma componente conexa de $\{f \neq 0\}$. Então, a métrica \tilde{g} é uma métrica completa sobre U .

Demonstração. Seja $\beta : [0, T) \rightarrow (U, \tilde{g})$ geodésica inextendível em (U, \tilde{g}) .

Afirmção 3.1. $T = \infty$

De fato, suponha que $T < \infty$. Sem perda de generalidade suponhamos que $|\beta'(t)|_{\tilde{g}} = 1, \forall t \in [0, l]$. Podemos mudar f por $-f$, caso seja necessário, de tal forma que possamos assumir que $f > 0$ sobre U . Então $|\beta'(t)|_g = f(\beta(t))$ e

$$\left| \frac{d}{dt} f(\beta(t)) \right| \leq |\langle \nabla f, \beta'(t) \rangle_g| \leq \Lambda f(\beta(t)). \tag{3.21}$$

Logo, obtemos que

$$\left| \frac{d}{dt} \ln f(\beta(t)) \right| \leq \Lambda, \tag{3.22}$$

o que implica que

$$f(\beta(t)) \leq f(\beta(0))e^{\Lambda t}, \forall t \in [0, T).$$

Portanto, o comprimento l de β em (M, g) satisfaz

$$l = \int_0^T f(\beta(t)) dt < \infty. \tag{3.23}$$

Como (M, g) é completa, (3.23) implica que

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \beta(t) = q,$$

para algum ponto $q \in \bar{U} \subset M$.

Se $q \in U$, a geodésica $\beta : [0, T) \rightarrow (U, \tilde{g})$ pode ser estendida até T , contradizendo inextendibilidade de β .

Se $q \in \partial U$, então $f(q) = 0$. O Lema 3.6, implica que o comprimento de β em (U, \tilde{g}) é infinito. Isto contradiz a suposição de que $T < \infty$.

Portanto, temos que $T = \infty$, o que mostra que \tilde{g} é uma métrica completa em U . □

Teorema 3.8. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana que admite potencial estático. Seja U uma componente conexa ilimitada de $\{f \neq 0\}$. Então não existe subconjunto $S \subset M$ compacto tal que $S \setminus \partial U$ é uma superfície mínima mergulhada em U .*

Demonstração. Sem perda de generalidade, assumimos que $f > 0$ em U . Sejam E_1, \dots, E_k todos os fins de (M, g) . Para todo r suficientemente grande, sejam S_r^i esferas coordenadas $\{|x| = r\}$ sobre cada fim E_i . Defina $S_r = \cup_{i=1}^k S_r^i$ e $S_{r,U} = S_r \cap U$. Como U é ilimitado, $S_{r,U} \neq \emptyset$.

Dado um subconjunto compacto S de M tal que $S \setminus \partial U$ é uma superfície mergulhada em U , defina $S_U = S \setminus \partial U$. Como S é compacto, $S \subset \Omega_r$ para r suficientemente grande onde Ω_r é um aberto limitado incluso por S_r em (M, g) . Assim, considere duas superfícies disjuntas S_U e $S_{r,U}$ em (U, \tilde{g}) . Seja $dist_g(\cdot, \cdot)$ a distância entre conjuntos sobre (U, \tilde{g}) .

Afirmção 3.2. $dist_g(S_U, S_{r,U}) > 0$ e existe $p \in S_U$ e $q \in S_{r,U}$ tal que

$$dist_g(p, q) = dist_g(S_U, S_{r,U}).$$

De fato, pelo Lema 3.6, temos que

$$dist_{\tilde{g}}(p_k, q_k) \geq \frac{1}{\Lambda} \ln \left(1 + \frac{\Lambda dist_g(S, S_r)}{\min \{|f(p_k)|, |f(q_k)|\}} \right), \quad (3.24)$$

onde $dist_g(S, S_r) > 0$ é a distância entre S e S_r em (M, g) . Como S e S_r são conjuntos compactos, existe $p \in S$ e $q \in S_r$ tal que, passando uma subsequência caso necessário, $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = p$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} q_k = q$. Se $f(p) = 0$ ou $f(q) = 0$, então (3.24) implica que $\lim_{k \rightarrow \infty} dist_{\tilde{g}}(p_k, q_k) = \infty$, contradizendo (3.2) e o fato de que $dist_{\tilde{g}}(S_U, S_{r,U}) < \infty$.

Portanto, temos que $p \in S_U$ e $q \in S_{r,U}$. Assim,

$$\text{dist}_{\tilde{g}}(p, q) = \text{dist}_{\tilde{g}}(S_U, S_{r,U}).$$

Como $S_U \cap S_{r,U} = \emptyset$, assim temos que $\text{dist}_{\tilde{g}}(S_U, S_{r,U}) > 0$. Para prosseguir, aplicamos o Lema [3.7](#) para concluir que existe uma \tilde{g} -geodésica $\beta : [0, L] \rightarrow (U, \tilde{g})$ com $|\beta'(t)|_{\tilde{g}} = 1$ tal que

$$\beta(0) = p, \quad \beta(L) = q \quad \text{e} \quad L = \text{dist}_{\tilde{g}}(S_U, S_{r,U}). \quad (3.25)$$

Como β minimiza \tilde{g} -distância entre pontos sobre S_U e $S_{r,U}$ assim não existem pontos \tilde{g} -cut em S_U ao longo de β , exceto possivelmente no ponto final $q = \beta(L)$. Além disso, pelo fato de $S_U \subset \Omega_r$, temos que $\beta([0, L)) \subset \Omega_r$. Assim, $\tilde{\mu} := \beta'(L)$ é \tilde{g} -normal a S_r apontando na direção para fora (com respeito a Ω_r). Como resultado, $\mu := \frac{1}{f(p)}\tilde{\mu}$ é um vetor normal unitário em S_r no ponto q em (M, g) . Portanto, como (M, g) é assintoticamente plana, temos que

$$H(S_r, q) > 0, \quad (3.26)$$

para algum r suficientemente grande, onde $H(S_r, q)$ é a curvatura média de S_r com respeito a μ em (M, g) . Nossa convenção de sinais na curvatura média é que uma bola euclidiana tem curvatura média positiva em relação ao seu normal que aponta para fora.

Suponhamos que $S \setminus \partial U$ é uma superfície mínima em (M, g) . Nós derivaremos uma contradição de [3.26](#), juntamente com equação de estaticidade e o princípio do máximo. Para ilustrar a ideia principal, considere que $q = \beta(L)$ não tem ponto \tilde{g} -cut em S_U ao longo de β . Neste caso, sobre a superfície S_U , existe uma vizinhança aberta W de p tal que a aplicação

$$\Phi(t, x) := \widetilde{\text{exp}}_x(t\tilde{\nu}),$$

onde $\widetilde{\text{exp}}_{(\cdot)}(\cdot)$ é a aplicação \tilde{g} -exponencial, $t \in [0, L]$, $x \in W$ e $\tilde{\nu}$ é um campo de vetores normais unitário na métrica \tilde{g} sobre W com $\tilde{\nu}(p) = \beta'(0)$, é um difeomorfismo de $[0, L] \times W$ em sua imagem sobre U . Para cada $t \in [0, L]$, seja $W_t = \Phi(t, W)$ e seja $H = H_t$ a curvatura média de W_t com respeito a $\nu(t) = f^{-1}\Phi_*(\frac{\partial}{\partial t})$ em (M, g) .

Como vimos na Fórmula de Monotonicidade em [3.2](#), temos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{H_t}{f} \right) = |\mathbb{III}|^2 = 0,$$

pois W é totalmente geodésica, pela Proposição [3.3](#). Se $W = W_0$ tem curvatura média

$H(0) = 0$ com respeito a ν , então W_L tem curvatura média $H_L = 0$. Por outro lado, pela propriedade minimizante de β , isto é, $W_L \subset \bar{\Omega}_r$ e W_L intersecta S_r em q . Portanto, $H_L = 0$ contradiz [3.26](#) e pelo princípio do máximo. Assim, S_U não pode ser uma superfície mínima em (M, g) .

Para completar a prova, precisamos considerar o caso em que $q = \beta(L)$ é um ponto \tilde{g} -cut em S_U ao longo de β . Vamos reduzir este caso para o caso que acabamos de considerar acima pelo procedimento a seguir. Seja $\tilde{\nu}$ um vetor unitário normal apontando para dentro em $S_{r,U}$ em (U, g) . Em particular, $\tilde{\nu}(q) = -\tilde{\beta}'(L)$. Seja $D \subset S_{r,U}$ uma vizinhança aberta de q . Existe $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que a aplicação

$$\Psi(t, y) := \widetilde{\exp}_y(t\tilde{\nu}),$$

onde $t \in [0, \epsilon]$ e $y \in D$, é um difeomorfismo de $[0, \epsilon] \times D$ em sua imagem sobre U . Defina $D_\epsilon := \Psi(\epsilon, D)$. Claramente, $\hat{q} = \beta(L - \epsilon) \in D_\epsilon$. Além disso, quando restrita a $[0, L - \epsilon]$, β minimiza distância entre D_ϵ e S_U em (U, g) . Usando [3.26](#), e escolhendo ϵ suficientemente pequeno, temos que

$$H(D_\epsilon, \hat{q}) > 0, \tag{3.27}$$

onde $H(D_\epsilon, \hat{q})$ é a curvatura média de D_ϵ em \hat{q} com respeito a direção normal que aponta para fora em (M, g) . Como $\hat{q} = \beta(L - \epsilon)$ não é um ponto \tilde{g} -cut em S_U ao longo de β , portanto repetindo o argumento anterior com q substituído por \hat{q} e $S_{r,U}$ por D_ϵ e novamente obteremos uma contradição com a afirmação de que S_U é mínima em (M, g) . Isto completa a prova. □

Lema 3.9. Dado $n \geq 3$. Sejam (M, g) uma variedade de dimensão n assintoticamente plana e E um de seus fins. Suponha que $E \setminus B_{r_0}$ admite um potencial estático f para algum $r_0 > 0$. Seja E^+ uma componente ilimitada do complemento de $f^{-1}(0)$ em $E \setminus B_{r_0}$. Seja Σ uma hipersuperfície mínima two-sided compacta em E^+ com fronteira $f^{-1}(0)$ ou vazia. Então Σ não se separa de B_{r_0} no infinito em E^+ ; isto é, toda componente ilimitada do complemento de Σ em $E^+ \cup B_{r_0}$ contendo B_{r_0} .

Demonstração. Suponha por contradição que existe uma componente ilimitada Ω do complementar de Σ em $E^+ \cup B_{r_0}$ tal que Ω não contém B_{r_0} . Note que f está globalmente definida e não se anula sobre Ω , e $\partial\Omega$ consiste de Σ e um subconjunto de $f^{-1}(0)$. Podemos assumir que $f > 0$ em Ω (caso contrário consideremos $-f$). Iremos considerar geodésicas modificadas pela métrica $\bar{g} = f^{-2}g$ partindo de Σ em Ω . O Lema

[3.6](#) nos mostra que tais geodésicas não podem alcançar o conjunto de zeros de f em um comprimento \bar{g} finito, e quaisquer dois pontos disjuntos de no conjunto de zeros tem distância \bar{g} infinita. Consideremos esferas S_r com coordenadas suficientemente grandes que intersecta Ω e é disjunto de $\Sigma \cap \Omega$. Então, existe uma geodésica minimizante na métrica modificada \bar{g} partindo do interior de Σ em Ω tal que alcança $\Sigma \cap \Omega$. Numa vizinhança tubular da geodésica, consideremos o conjunto de nível da função distância com respeito a métrica \bar{g} sobre Σ . Pela Fórmula de Monotonicidade [3.2](#), cujas hipersuperfícies tem curvatura média não-positiva na métrica g (com respeito ao vetor $-\nu$). O que nos dá uma contradição por conexidade das esferas S_r com coordenadas suficientemente grandes e pelo princípio do máximo. □

Teorema 3.10. *Dado $3 \leq n \leq 7$. Seja (M, g) uma variedade de dimensão n assintoticamente plana. Suponha que a fronteira de M é vazia ou uma união disjunta de hipersuperfícies mínimas suaves. Se um de seus fins admite um potencial estático ilimitado, então existe uma hipersuperfície não-compacta, completa e area minimizing em M .*

Demonstração. Seja f um potencial estático ilimitado sobre um de seu fins. Digamos E . Pela Proposição [2.11](#), f é uma assintoticamente a combinação linear de funções coordenadas sobre o fim E . Por uma rotação no sistema de cartas coordenadas assintoticamente planas de E e reescalando f , se necessário, assumimos que $f(x) \rightarrow x_n$. Pela Proposição [3.1](#), $r_0 > 0$ suficientemente grande tal que cada componente de $f^{-1}(0)$ é um gráfico $x_n = g(x_1, \dots, x_{n-1})$ que intersecta S_r próximo ao equador de uma esfera de dimensão $n - 2$ para $r > r_0$. Podemos assumir r_0 suficientemente grande tal que S_{r_0} não intersecta qualquer hipersuperfície mínima fechada.

Para $r > r_0$ consideremos uma solução de Plateau Σ_r orientável cuja fronteira abrange a interseção de S_r e uma componente de $f^{-1}(0)$. Afirmamos que Σ_r intersecta B_{r_0} para todo $r > r_0$. Caso contrário, suponha que existe $r > r_0$ tal que Σ_r não intersecta B_{r_0} . Como Σ_r separa B_r , existe uma componente de B_r^+ do complementar de Σ_r em B_r que não contém B_{r_0} . Podemos afirmar, sem perda de generalidade, que B_r^+ contém a porção de cima de S_r (caso contrário, consideremos $-f$). Então consideramos N^+ a componente de cima do complementar de $f^{-1}(0)$ em $N \setminus B_{r_0}$, isto é, a componente contendo todos os pontos com x_n -coordenadas de valores suficientemente grandes. Note que $\Sigma_r \cap N^+$ separa B_{r_0} do infinito em N^+ , como o complemento de Σ_r em $N^+ \cup B_{r_0}$ tem apenas uma componente Ω , e Ω não pode intersectar as componentes de $B_r \setminus \Sigma_r$, pela conexidade de Ω . Isto contradiz o Lema [3.9](#).

Como Σ_r intersecta B_{r_0} para todo $r > r_0$ e $\{\Sigma_r\}$ tem área local uniformemente limitada. Por um argumento clássico de teoria geométrica da medida, uma subsequência

de $\{\Sigma_r\}$ converge para uma hipersuperfície Σ não vazia, completa, area minimizing intersectando S_{r_0} com $r \rightarrow \infty$. Como S_{r_0} não intersecta qualquer hipersuperfície mínima fechada, Σ é ilimitada. Portanto, Σ é uma hipersuperfície area minimizing, completa e não compacta em M .

□

Para finalizar nosso trabalho traremos uma aplicação do que estudamos relacionando potenciais estáticos com a não existência de superfícies area minimizing.

Definição 3.1. Dada uma métrica Riemanniana γ e uma função H sobre uma 2-esfera, dizemos uma variedade assintoticamente plana (M, g) de dimensão três com fronteira $\Sigma = \partial M$ é uma *extensão estática sujeita a fronteira* (γ, H) se

- (i) Σ é difeomorfa a uma 2-esfera, e a métrica induzida por g sobre Σ é isométrica a γ .
- (ii) A curvatura média de Σ é dada por H .

Teorema 3.11. *Suponha que o par (γ, H) satisfaça*

$$H > 0 \quad e \quad K_\gamma \geq \frac{1}{4}H^2,$$

onde K_γ denota a curvatura de Gauss de γ . Então qualquer extensão estática de (M, g) sujeita a fronteira a fronteira (γ, H) não possui uma superfície localmente area minimizing fechada.

Demonstração. Seja f um potencial estático limitado sobre (M, g) . Por [2.11](#) e redimensionando, se necessário, podemos assumir que $f \rightarrow 1$ no infinito. Iremos mostrar que $f > 0$ em M . De fato, pela equação de estaticidade, juntamente com o fato de que $R = 0$, temos sobre Σ que

$$\begin{aligned} 0 = \Delta f &= \Delta_\Sigma f + H \frac{\partial f}{\partial \nu} + \nabla^2 f(\nu, \nu) \\ &= \Delta_\Sigma f + H \frac{\partial f}{\partial \nu} + f Ric(\nu, \nu). \end{aligned}$$

Pela Equação de Gauss,

$$2K_\gamma + 2Ric(\nu, \nu) = H^2 - |\mathbb{III}|^2.$$

Assim,

$$\Delta_\Sigma f + H \frac{\partial f}{\partial \nu} + \frac{1}{2}(H^2 - |\mathbb{III}|^2 - 2K_\gamma)f = 0. \quad (3.28)$$

Como f é harmônica em M , pelo princípio do máximo e $f \rightarrow 1$, quando $|x| \rightarrow \infty$. Podemos assumir que $\inf_M f$ ocorre sobre Σ e f não é constante. Por outro lado a

afirmação de $f > 0$ segue facilmente. Seja $f(y) = \inf_M f$ para algum y em Σ . Usando o Lema de Hopf [1.13](#) e que valem as desigualdades em y ,

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(y) > 0 \text{ e } \Delta_\Sigma f(y) \geq 0.$$

Por outro, as afirmações sobre H e K_γ , implicam que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(H^2 - |\mathbb{I}\mathbb{I}|^2 - 2K_\gamma) &\leq \frac{1}{2}(H^2 - |\mathbb{I}\mathbb{I}|^2) - K_\gamma \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}H^2\right) - K_\gamma \\ &= \frac{1}{4}H^2 - K_\gamma \leq 0 \end{aligned}$$

Combinando as desigualdades acima juntamente com [\(3.28\)](#), podemos concluir que $0 < f(y) = \inf_M f$. Então, $f > 0$ em M . Suponha, por contradição, que existe uma superfície localmente area minimizing fechada. Pela Proposição [3.4](#), g deve ser Ricci flat em uma vizinhança aberta da superfície mínima. Como $f > 0$ e g é estática, g é analítica de [\(Corvino, 5\)](#). Assim, (M, g) tem curvatura de Ricci nula. Em três dimensões isto implica que (M, g) é isométrica ao exterior de um espaço Euclidiano que é livre de superfícies mínimas fechadas. O que nos dá uma contradição. \square

Referências Bibliográficas

- [1] S. Axler, P. Bourdon, and W. Ramey. *Harmonic Function Theory*. Springer-Verlag, 2001.
- [2] R. Bartnik. The mass of an asymptotically flat manifold. *Comm. Pure Appl. Math.*, 39(5):661–693, 1986.
- [3] S. Brendle. *Ricci flow and the sphere theorem*. American Mathematical Society, 2010.
- [4] G. L. Bunting and A. K. M. Masood-ul Alam. Nonexistence of multiple black holes in asymptotically Euclidean static vacuum space-time. *Gen. Relativity Gravitation*, 19(2):147–154, 1987.
- [5] J. Corvino. Scalar curvature deformation and a gluing construction for the Einstein constraint equations. *Comm. Math. Phys.*, 214(1):137–189, 2000.
- [6] J. Corvino, M. Eichmair, and P. Miao. Deformation of scalar curvature and volume. *Math. Ann.*, 357(2):551–584, 2013.
- [7] M. P. Do Carmo. *Riemannian geometry*. Birkhauser, 2015.
- [8] L. C. Evans. *Partial differential equations*. Univ. of California, 1994.
- [9] G. J. Galloway and P. Miao. Variational and rigidity properties of static potentials. *Comm. Anal. Geom.*, 25(1):163–183, 2017.
- [10] D. Hoffman and W. H. Meeks, III. The strong halfspace theorem for minimal surfaces. *Invent. Math.*, 101(2):373–377, 1990.
- [11] L.-H. Huang, D. Martin, and P. Miao. Static potentials and area minimizing hypersurfaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 146(6):2647–2661, 2018.
- [12] G. Huisken and S.-T. Yau. Definition of center of mass for isolated physical systems and unique foliations by stable spheres with constant mean curvature. *Inventiones Mathematicae*, 124:281–311, Jan. 1996.

- [13] W. Kulpa. Poincaré and domain invariance theorem. *Acta Univ. Carolin. Math. Phys.*, 39(1-2):127–136, 1998.
- [14] P. Miao and L.-F. Tam. Static potentials on asymptotically flat manifolds. *Ann. Henri Poincaré*, 16(10):2239–2264, 2015.
- [15] P. Petersen. *Riemannian geometry*. Springer, 1998.
- [16] R. Schoen and S. T. Yau. On the proof of the positive mass conjecture in general relativity. *Comm. Math. Phys.*, 65(1):45–76, 1979.
- [17] H. Seshadri. On Einstein four-manifolds with S^1 -actions. *Math. Z.*, 247(3):487–503, 2004.
- [18] K. P. Tod. Spatial metrics which are static in many ways. *Gen. Relativity Gravitation*, 32(10):2079–2090, 2000.