



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

**UM ESTUDO SOBRE A INFLUÊNCIA DA INTERAÇÃO
GRAVITACIONAL NOS ESTADOS DE RYDBERG
NO CENÁRIO DE DIMENSÕES EXTRAS**

Eugênio Bastos Maciel

JOÃO PESSOA

Julho de 2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

TESE DE DOUTORADO

**UM ESTUDO SOBRE A INFLUÊNCIA DA INTERAÇÃO
GRAVITACIONAL NOS ESTADOS DE RYDBERG
NO CENÁRIO DE DIMENSÕES EXTRAS**

Eugênio Bastos Maciel

Tese realizada sob a orientação do Prof.
Dr. Fábio Leal de Melo Dahia, apresen-
tada ao Programa de pós graduação em
Física como complementação aos requisi-
tos para obtenção do título de Doutor em
Física.

JOÃO PESSOA

Julho de 2018

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

M152e Maciel, Eugenio Bastos.

Um Estudo Sobre a Influência da Interação Gravitacional
nos Estados de Rydberg no Cenário de Dimensões Extras.

/ Eugenio Bastos Maciel. - João Pessoa, 2018.

117 f. : il.

Orientação: Fábio Leal de Melo Dahia.

Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. branas, estados de Rydberg, dimensões extras. I.
Dahia, Fábio Leal de Melo. II. Título.

UFPB/

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de
Doutorado do aluno **Eugênio Bastos Maciel**,
candidato ao Título de Doutor em Física na
Área de Concentração Gravitação e
Cosmologia.

1 Aos vinte dias do mês de julho do ano de dois mil e dezoito, às 10:00, no Auditório da
2 Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade
3 Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para
4 examinar o candidato ao grau de Doutor em Física na área de Gravitação e Cosmologia,
5 **Eugênio Bastos Maciel**. A comissão examinadora foi composta pelos professores
6 doutores: *Fábio Leal de Melo Dahia* (UFPB), orientador e presidente da banca
7 examinadora, *Jansen Brasileiro Formiga* (UFPB), *Carlos Augusto Romero Filho*
8 (UFPB), *Geusa de Araújo Marques* (UFCG) e *Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos*
9 (UFCG). Dando início aos trabalhos, o Prof. Fábio Leal de Melo Dahia comunicou aos
10 presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra ao candidato para que o
11 mesmo fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de tese intitulado “*Um estudo sobre*
12 *a influência da interação gravitacional nos estados de Rydberg no cenário de*
13 *dimensões extras*”. Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca
14 Examinadora, que emitiu o seguinte parecer: “**aprovado**”. Assim sendo, deve a
15 Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutor em Física na
16 forma da lei. E para constar, eu, Danilo Wilson Lemos Menezes, redigi esta ata que vai
17 assinada por mim e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **20 de**
18 **julho de 2018**.

19
Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia
Orientador – PPGF/UFPB

Prof. Dr. Jansen Brasileiro Formiga
PPGF/UFPB

Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho
PPGF/UFPB

Profª. Dra. Geusa de Araújo Marques
UFCG

Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos
UFCG

Fábio Leal de Melo Dahia

Jansen Brasileiro Formiga

Carlos Augusto Romero Filho

Geusa de Araújo Marques

Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos

*Dedico esse trabalho aos meu pais, irmãos
e minha amada esposa Dayanna.*

AGRADECIMENTOS

À Deus pelo milagre da vida.

À meus pais e irmãos, que sempre me apoiaram em todos os momentos de minha vida. À minha amada esposa e companheira Dayanna, que com sua paciência me fez enxergar o caminho a ser seguido. A estes minha eterna gratidão.

Ao professor Fábio Dahia que com muita paciência e empenho orientou este trabalho. Ao professor Carlos Romero que durante dois anos foi meu orientador acadêmico e em nenhum momento se recusou a me ajudar.

Aos casais, Terezinha Ernesto e José Filho, e Maria José e José Ramos, que durante muitos momentos de minha vida cuidaram de mim como se fossem meus pais e que sempre me incentivaram a lutar pelos meus sonhos.

Aos amigos e colegas de curso.

A CAPES pelo suporte financeiro.

Jornada.

"Fui átomo, vibrando entre as forças do espaço devorando amplidões em longa e ansiosa espera. Partícula, pousei. Encarcerado eu era, infusório no mar em montões de sargaço. Por séculos fui planta em movimento escasso, sofri no inverno rude e amei na primavera. Depois fui animal, e no instinto da fera achei a inteligência e avancei passo a passo. Guardei por muito tempo a expressão dos gorilas, pondo mais fé nas mãos e mais luz nas pupilas a lutar e a chorar para então compreende-las. Agora, homem que sou pelo foro divino, vivo de corpo em corpo a forjar o destino, que me leve a transpor o clarão das estrelas."

Adelino Fontoura Chaves

RESUMO

Tem-se argumentado que medições precisas de frequências de transição óptica entre estados de Rydberg para íons semelhantes ao hidrogênio, poderiam ser usados para obter um valor melhorado da constante de Rydberg e até mesmo para testar a eletrodinâmica quântica (QED) com mais precisão, evitando a incerteza sobre o raio do próton. Motivados por essa perspectiva, investigamos a influência da interação gravitacional sobre os níveis de energia de íons semelhantes ao hidrogênio em estados de Rydberg no contexto de branas. Como sabemos, neste cenário, a interação gravitacional é ampliada em pequenas distâncias. Mostramos que, para os estados de Rydberg, o principal contributo para a energia potencial gravitacional não vem da energia de repouso concentrada no núcleo, mas da energia do campo eletromagnético criado pela sua carga elétrica, que está espalhada no espaço. Isto está ligado ao fato de que, quando o íon está em um estado de Rydberg com alto momento angular, a energia potencial gravitacional não é computável no limite de brana fina, devido a influência gravitacional do eletro-vácuo em que o lépton está se movendo. Considerando um cenário de branas com espessura, calculamos a energia potencial gravitacional associada a carga do núcleo em termos do parâmetro de confinamento do campo elétrico na brana. Mostramos que os efeitos gravitacionais nos níveis de energia de um estado de Rydberg podem ser amplificados pelas dimensões extras mesmo quando a escala de compactação das dimensões extras é menor que o raio de Bohr.

Palavra-chave: branas, estados de Rydberg, dimensões extras.

ABSTRACT

It has been argued that precise measurements of optical transition frequencies between Rydberg states of hydrogen-like ions could be used to obtain an improved value of the Rydberg constant and even to test Quantum Electrodynamics (QED) theory more accurately, by avoiding the uncertainties about the proton radius. Motivated by this perspective, we investigate the influence of the gravitational interaction on the energy levels of Hydrogen-like ions in Rydberg states within the context of the braneworld models. As it is known, in this scenario, the gravitational interaction is amplified in short distances. We show that, for Rydberg states, the main contribution for the gravitational potential energy does not come from the rest energy concentrated on the nucleus but from the energy of the electromagnetic field created by its electrical charge, which is spread in space. The reason is connected to the fact that, when the ion is in a Rydberg state with high angular momentum, the gravitational potential energy is not computable in zero-width brane approximation due to the gravitational of the electrovacuum in which the lepton is moving. Considering a thick brane scenario, we calculate the gravitational potential energy associated to the nucleus charge in terms of the confinement parameter of the electric field in the brane. We show that the gravitational effects on the energy levels of a Rydberg state can be amplified by the extra dimensions even when the compactification scale of the hidden dimensions is shorter than the Bohr radius.

Keywords: braneworld, Rydberg states, extra dimensions .

Sumário

Lista de Figuras	1
1 Introdução.	2
2 Teorias de Dimensões Extras.	7
2.1 A Teoria de Kaluza-Klein.	8
2.1.1 Condição Cilíndrica.	9
2.1.2 A compactação de Klein.	11
2.2 O Modelo ADD.	14
2.2.1 O Confinamento da Matéria.	15
2.2.2 A Localização dos Férmions.	18
2.2.3 O Potencial Gravitacional para um sistema de n dimensões.	21
2.2.4 Potencial Gravitacional numa Dimensão Extra Compacta.	22
2.2.5 Escala de Comprimento e o Problema Hierarquia.	24
2.3 Os Modelos de Randall-Sundrum.	26
2.3.1 O Modelo RSI.	27
2.3.2 O Modelo RSII.	32
3 Teoria Quântica Relativística.	37
3.1 A Equação de Klein-Gordon.	38
3.1.1 A Densidade de Probabilidade.	40
3.2 A Equação de Dirac.	41
3.2.1 A Densidade de Probabilidade.	44
3.2.2 A Covariância da Equação de Dirac.	45
3.3 Soluções para a Equação de Dirac.	48
3.3.1 A partícula livre.	48
3.3.2 Potenciais Centrais. O Átomo de Hidrogênio.	51
3.3.3 O Limite não-relativístico.	60
3.4 A Transformação de Foldy-Wouthuysen.	62
4 A Teoria de Dirac no Espaço Curvo.	67
4.0.1 Espinores de Dirac em um Espaço-tempo Lorentziano.	67
4.0.2 Partícula de Dirac em um Campo Gravitacional Esfericamente Simétrico.	70

5	Estados de Rydberg no Cenário de Branas.	73
5.1	O Campo Gravitacional produzido pelo núcleo.	73
5.2	O Potencial Eletrostático na Brana.	82
5.3	A Equação de Dirac no Cenário de Branas.	84
5.4	Resultados e Discussões.	87
6	Conclusão	91
A	As Matrizes de Dirac.	93
A.1	Determinação da Matriz $S(\Lambda)$	93
A.2	Algumas Propriedades das Matrizes de Dirac.	96
A.3	Prova do Resultado: $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\Sigma} \times \vec{\nabla}(v^2)) = 2i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}(v^2)$	98
B	A transformação de Foldy-Wouthuysen.	101
B.1	A expansão Perturbativa.	101
	Referências Bibliográficas	103

Lista de Figuras

2.1	A teoria de Kaluza-Klein.	12
2.2	Gráfico do potencial $V(\phi)$ em função do campo ϕ	15
2.3	Solução do tipo “kink”, parede de domínio.	16
2.4	A Densidade de Energia da Brana em $z = 0$	17
2.5	Espectro de massa para os Férmions presos na Brana.	21
2.6	Corpo de massa m vista pelo observador O	23
2.7	Comportamento de $a(z)$	28
3.1	A interpretação para as soluções de energia negativa.	51
5.1	Transições ópticas entre os estados de Rydberg para íon do tipo Hidrogênio muonico. Abaixo das linhas tracejadas, a influência das dimensões extras através da gravidade clássica pode ser maior do que a incerteza experimental previstas nas medidas de frequência de transições em torno da banda óptica ($100THz - 1000THz$), aqui vemos que G_D possui o valor apropriado para resolver o <i>enigma do raio do próton</i> . . .	90

Capítulo 1

Introdução.

A busca por uma teoria capaz de unificar as interações fundamentais e de condensar a descrição dos fenômenos da natureza por meio de um esquema único é um dos principais interesses da atual Física Moderna. Um fato importante é que essas teorias exigem a presença de dimensões espaciais extras quando a gravitação é incluída. A primeira teoria moderna de dimensões extras foi proposta em 1921 por Theodor Kaluza [1] e ajustada em 1926 por Oskar Klein [2], que forneceu uma justificativa para a não observância dessa dimensão na natureza. Neste modelo, a dimensão extra está enrolada formando um círculo de raio l da ordem do comprimento de Planck, o que a torna indetectável até para os mais avançados aceleradores de partículas. Essa teoria se alinha a tão sonhada Teoria do Campo Unificado procurada por Einstein ¹ ao formular a unificação do eletromagnetismo de Maxwell com a sua Teoria da Relatividade Geral, considerando nosso Universo com cinco dimensões; as quatro dimensões do espaço-tempo ordinário e uma dimensão espacial extra.

Com o passar do tempo, o interesse pelas dimensões extras foi de certo modo arrefecido, dada a impossibilidade de verificação empírica. No entanto, em 1998 a ideia ressurge com um modelo de branas que se propõe a resolver o problema da

¹Na época de Einstein, os dois campos conhecidos eram o campo eletromagnético e o campo gravitacional.

hierarquia, que corresponde a grande diferença de energia entre a escala de Planck 10^{18}Gev e a escala eletro-fraca 10^3Gev . Esse modelo foi proposto por Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos e Georgi Dvali, e é conhecido como modelo ADD [3]. Esse modelo deu impulso as chamadas teorias de branas (em alusão a uma membrana) no quadro de dimensões extras, onde nosso Universo é tratado como uma hipersuperfície (3-brana), imersa em um espaço ambiente dimensionalmente maior, conhecido como “bulk”. Neste cenário, a matéria e os campos se encontram presos na brana em um estado de confinamento, enquanto que a gravidade pode se propagar ao longo da dimensão extra. Em consequência disso o estudo do campo gravitacional se torna um bom instrumento para investigar a existência de dimensões extras

Desde então, outros modelos de branas surgiram, dentre estes podemos citar os propostos por Lisa Randall e Ramam Sundrum [4, 5], mais comumente conhecidos por modelo Randall-Sundrum, são os modelos: RSI e RSII. De maneira geral, a principal diferença entre os modelos de branas é de como a dimensão extra está escondida dos dados observacionais. Em Teoria de Campos, uma brana pode ser interpretada como uma solução do tipo “kink” (parede de domínio) que por meio de interações é capaz de aprisionar a matéria e outros campos em seu interior.

A grosso modo, os modelos de branas propõem que a razão da gravidade ser tão fraca comparada as demais forças está no fato de que o campo gravitacional é o único campo que pode se espalhar em todas as direções, portanto, para longas distâncias, parece ser mais fraco do que as demais interações, onde o tratamento quadridimensional usual é recuperado. Contudo, para distâncias menores do que o comprimento das dimensões extras, esses modelos predizem que a força gravitacional é ampliada em comparação com a força newtoniana tridimensional por um fator que é proporcional ao número de dimensões extras. Este fato motivou muitos pesquisadores a estudarem os efeitos da gravitação em nível atômico e molecular como uma maneira de obter

limites experimentais para os parâmetros das teorias de dimensões extras [6, 7].

Neste trabalho, estudamos a influência da dimensão extra sobre os estados de Rydberg para átomos tipo hidrogênio. Estamos motivados por recentes desenvolvimentos na área de espectroscopia, que propõem que as frequências de transições ópticas entre os estados de Rydberg seriam métodos eficientes para testar a QED, (do inglês, *Quantum Electrodynamics*), e também para determinar a constante de Rydberg mais precisamente[8]. A atual incerteza relativa para a constante de Rydberg é da ordem de 10^{-12} [9], este valor é determinado a partir das comparações de previsões teóricas e das medições entre frequências de transições do estado S para o Hidrogênio e o Deutério [8, 9]. Entretanto, em relação ao estado S , as previsões teóricas são limitadas pela incerteza sobre o raio do próton [8], conhecido como *o enigma do raio do próton* [10, 11], que se configura como uma diferença entre as medidas para o comprimento do raio do próton baseada na espectroscopia do hidrogênio muônico e o valor recomendado pelo CODATA [9], que por sua vez está baseado na interação elétron-próton.

No entanto, para altos valores de momento angular a influência da estrutura interna sobre os estados de Rydberg pode ser negligenciada, assim, as previsões são praticamente independentes do raio do próton, de sorte que estejamos livres dessas incertezas. Com os avanços teóricos e experimentais [10], há uma grande expectativa de que medições mais precisas de certas transições entre estados de Rydberg, pode nos levar a uma constante de Rydberg cada vez mais precisa. Diante destas possibilidades nos parece relevante investigar como as dimensões extras podem interferir nos estados de Rydberg no cenário de branas. Um ponto importante é o fato de que quando o espaço possui mais de duas dimensões extras a energia potencial gravitacional média para átomos tipo hidrogênio no estado S , $\langle U_S \rangle$, diverge se a estrutura da brana não é levada em conta.

Este comportamento deve-se ao fato de que o potencial gravitacional φ produzido

pelo próton não é calculado no interior do núcleo, na aproximação em que a espessura da brana tende a zero [13, 12, 14]. No entanto, caso o átomo esteja em um estado de Rydberg, essa situação pode ser diferente. Nesses estados com momento angular alto, o termo dominante $\langle U_{Ry} \rangle$ é finito no limite da brana fina, de modo que a brana sem espessura é uma idealização válida. Contudo, sob tais circunstâncias, a ampliação da energia potencial gravitacional pela dimensão extra é significativa somente se o raio de compactificação R for maior em comparação ao raio de Bohr. Se considerarmos as atuais restrições para (R) poderíamos ser levados a concluir que os efeitos da dimensão extra nos estados de Rydberg são desprezíveis.

No entanto, uma característica importante deve ser destacada nesse contexto. A geometria em torno do núcleo deve ser similar a geometria de Reissner-Nordstrom. Portanto, além do potencial gravitacional φ produzido pela massa de repouso existe também uma influência gravitacional associada a energia do campo eletromagnético criado pela carga do núcleo, que no limite de campo fraco será descrito por um certo potencial χ . Embora no espaço tridimensional, χ seja pequeno quando comparado a φ , no cenário de branas essa relação pode ser diferente para uma certa região fora do núcleo como veremos. De fato, como o campo elétrico está espalhado no espaço tridimensional, o potencial χ diverge em todo ponto do espaço no limite em que a espessura da brana tende a zero, neste caso a distribuição de energia elétrica dentro da brana deve ser considerada para obtermos um resultado computável.

Considerando nosso problema no cenário de brana com espessura, estudamos a função de Green associada ao potencial gravitacional em escalas de comprimentos menores que R , onde os efeitos das dimensões extras são mais fortes. Com esta função de Green, calcularemos o potencial χ_s de curtas distâncias e concluímos que este pode ser mais forte do que o potencial φ_s , fora do núcleo. Isso pode nos trazer resultados interessantes. De fato, considerando um íon tipo Hidrogênio em um estado

de Rydberg, veremos que os efeitos da dimensão extra podem amplificar a energia potencial gravitacional do íon, mesmo quando a escala de compactificação R é menor do que raio de Bohr, devido ao comportamento de χ_s .

Motivados por este resultado, estimamos os efeitos da gravidade em dimensões mais altas sobre as transições ópticas para íons tipo Hidrogênio e discutimos a possibilidade de usar a espectroscopia dos estados de Rydberg na busca por traços de dimensões extras.

Capítulo 2

Teorias de Dimensões Extras.

Em 1916, Albert Einstein apresentou ao mundo a sua Teoria da Relatividade Geral. Uma nova teoria para a gravitação, que mudaria para sempre a nossa compreensão do Universo. Completa e auto-consistente, a Relatividade Geral surpreendeu a comunidade científica com sua elegante descrição matemática, e ainda mais com suas confirmações experimentais: a deflexão da luz, o avanço do periélio de Mercúrio e a recente detecção das ondas gravitacionais.

Após essa descoberta, Einstein buscou uma teoria de campo unificado, um modelo completo e coerente, pelo qual as forças da natureza fossem descritas por meio de um esquema único. Em sua época, as duas forças conhecidas eram a força eletromagnética e força da gravidade, então, ele imaginou que assim como a gravidade era descrita pelas propriedades geométricas do espaço-tempo, a força eletromagnética seria também advinda de propriedades semelhantes. Einstein não obteve êxito em sua busca.

Foi então, que em 1921, o matemático Theodor Kaluza, publicou um breve artigo no qual descrevia a unificação da gravidade com o eletromagnetismo, considerando um espaço-tempo de cinco dimensões. Passados cinco anos, em 1926, o físico sueco Oscar Klein, introduziu algumas modificações na teoria de Kaluza, desde então, a teoria ficou conhecida como teoria de Kaluza-Klein. Era o surgimento dos modelos de dimensões

extras no contexto da Relatividade Geral.

Nos dias de hoje, os modelos de dimensões extras se fazem presentes em boa parte do ramo da física teórica. Neste capítulo, faremos uma revisão sobre algumas teorias de dimensões extras. Começamos com a teoria de Kaluza-klein, e depois partiremos para os chamados modelos de dimensões extras de grande escala.

2.1 A Teoria de Kaluza-Klein.

A unificação entre o Eletromagnetismo de Maxwell e a Relatividade Geral de Einstein é possível quando consideramos o espaço-tempo contendo 5 dimensões. Uma dimensão temporal e quatro espaciais. A quinta dimensão z , juntamente com as quatro dimensões do espaço-tempo ordinário formam um conjunto de coordenadas $(4 + 1)$ -dimensional descrito como: (x^μ, z) , onde $\mu = 0, 1, 2, 3$.

A métrica, elemento fundamental para as chamadas Teorias Métricas de Gravitação (Relatividade Geral, por exemplo), quando observada de um espaço-tempo físico na teoria de Kaluza-Klein, contém três partes distintas:

- A métrica do espaço-tempo ordinário $g_{\mu\nu}$, com $\mu = 0, 1, 2, 3$.
- Um campo 4-vetorial $g_{\mu z} = g_{z\mu}$.
- Um campo escalar g_{zz} .

A parte $g_{\mu z}$ pode ser identificada com A_μ , o potencial vetor eletromagnético. Já a parte g_{zz} com o campo escalar ϕ . De modo que tenhamos uma métrica g_{AB} , parametrizada da seguinte maneira:

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \kappa\phi A_\mu A_\nu & \kappa\phi A_\mu \\ \kappa\phi A_\nu & \phi \end{pmatrix} \quad (2.1.1)$$

consideramos a métrica 4-dimensional com assinatura do tipo: $(+, -, -, -)$. os índices de g_{AB} , variam com $(A, B = 0, 1, 2, 3, 4)$.

Como ponto de partida, Kaluza propôs que o Universo em cinco dimensões está livre de matéria. Na tal condição, as equações da Relatividade Geral (equações de Einstein), são descritas como:

$$G_{AB} = 0, \quad (2.1.2)$$

isto equivale a:

$$R_{AB} = 0, \quad (2.1.3)$$

aqui, temos que: $G_{AB} = R_{AB} - \frac{1}{2}Rg_{AB}$ é o tensor de Einstein 5-dimensional. A quantidade R_{AB} definida como:

$$R_{AB} = \partial_C \Gamma_{AB}^C - \partial_B \Gamma_{AC}^C + \Gamma_{CD}^C \Gamma_{AB}^D - \Gamma_{BD}^C \Gamma_{AC}^D, \quad (2.1.4)$$

é o tensor de Ricci, e ainda $R = g_{AB}R^{AB}$ é o escalar de curvatura.

O tensor de Ricci 5-dimensional possui a mesma forma do caso ordinário, assim como os símbolos de Christoffel, que são definidos em termos da métrica g_{AB} são dados por:

$$\Gamma_{AB}^C = \frac{1}{2}g^{CD} (\partial_A g_{DB} + \partial_B g_{DA} + \partial_D g_{AB}). \quad (2.1.5)$$

2.1.1 Condição Cilíndrica.

Fenomenologicamente, a dimensão extra não é observada. Para incorporar isso em sua teoria, Kaluza impôs uma condição ao seu modelo, essa condição conhecida como condição cilíndrica, exige que a derivada de todas as componentes da métrica com relação a coordenada extra sejam nulas [1], ou seja,

$$\frac{\partial g_{AB}}{\partial z} = 0, \quad (2.1.6)$$

Baseados nesta condição, podemos determinar as equações de campo no contexto de dimensões extras. Utilizando as equações (2.1.4) e (2.1.6) e ainda a métrica g_{AB} , teremos

$$G_{\mu\nu} = \frac{\kappa^2 \phi^2}{2} T_{\mu\nu}^{EM} - \frac{1}{\phi} [\nabla_\mu (\partial_\nu \phi) - g_{\mu\nu} \square \phi], \quad (2.1.7)$$

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} = -3 \frac{\partial^\nu \phi}{\phi}, \quad (2.1.8)$$

$$\square \phi = \frac{\kappa^2 \phi^3}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.1.9)$$

aqui, temos que $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - Rg_{\mu\nu}/2$ é o tensor de Einstein ordinário em 4 dimensões. O tensor $T_{\mu\nu}^{EM} = \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - F_\sigma^\alpha F_{\sigma\alpha}$ representa o tensor energia-momento eletromagnético e $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ corresponde ao tensor eletromagnético.

Se considerarmos que o campo escalar ϕ é constante no espaço-tempo, então obtemos das equações (2.1.7) e (2.1.8), as correspondentes equações de Einstein e as equações de Maxwell sem fonte:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G \phi^2 T_{\mu\nu}^{EM}, \quad (2.1.10)$$

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} = 0 \quad (2.1.11)$$

observa-se de (2.1.9), que a condição adicional $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 0$, é satisfeita por campo de radiação.

O Método Variacional.

Como sabemos, boa parte dos sistemas físicos possuem a dinâmica de suas equações obtidas do conhecido princípio de Hamilton, o “princípio da ação mínima”. Neste princípio, a “ação”, que é uma função das variáveis dinâmicas, é estacionária com respeito a uma pequena variação destas variáveis.

A grande vantagem de usar este método, é que ele nos permite estabelecer uma conexão entre simetria e leis de conservação. Na Teoria da Relatividade Geral, as equações de Einstein são obtidas a partir da “ação” de Einstein-Hilbert;

$$S_{EH} = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (2.1.12)$$

neste caso, $g = \det(g_{\mu\nu})$ é o determinante em 4 - D e R é o escalar de Ricci. As equações de Maxwell na ausência de fontes são obtidas por;

$$S_{EM} = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.1.13)$$

sendo $F_{\mu\nu}$ o tensor eletromagnético.

Em 5 dimensões, a ação que de Einstein-Hilbert seria

$$S = \int d^5x \sqrt{\hat{g}} \hat{\mathfrak{R}} \quad (2.1.14)$$

onde $\hat{g}$ e $\hat{\mathfrak{R}}$ são o determinante da métrica $(-, +, \dots, +)$ e o escalar de Ricci no espaço ambiente. Usando a decomposição da métrica e a condição cilíndrica podemos mostrar que

$$S = - \int d^4x \sqrt{-g} \phi \left(\frac{R}{16\pi G} + \frac{1}{4} \phi^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{2}{3\kappa^2} \frac{\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi}{\phi^2} \right), \quad (2.1.15)$$

desta maneira, observamos que a Teoria da Relatividade Geral, quando interpretada como uma teoria 5-dimensional no vácuo, contém a Relatividade Geral no espaço de 4-dimensional na presença de uma campo eletromagnético.

2.1.2 A compactação de Klein.

Em 1926, o matemático Oscar Klein procurou justificar em bases físicas a condição cilíndrica de Kaluza. Ele considerou que a coordenada extra deveria ter a topologia de um círculo e uma escala de comprimento muito pequena. Isto justifica a Natureza aparentemente quadridimensional do Universo. Este aperfeiçoamento à teoria de Kaluza ficou conhecido como o mecanismo de compactação de Klein, e desde então a teoria ficou conhecida como teoria de Kaluza-Klein.

A figura 2.1 ilustra de maneira simples essa idéia. As quatro dimensões espaciais formam um “cilindro” onde as três dimensões usuais (x^1, x^2, x^3) são infinitas com a topologia do $\mathbb{R}^3$. A dimensão extra z é um círculo de raio l , topologia S^1 .

Essas modificações trouxeram algumas implicações interessantes. Vamos considerar uma campo escalar $\phi(x^\mu, z)$, em um espaço de cinco dimensões. Devido a topologia compacta, os campos devem ser periódicos com respeito a dimensão extra

$$\phi(x^\mu, z) = \phi(x^\mu, z + 2\pi l) \quad (2.1.16)$$

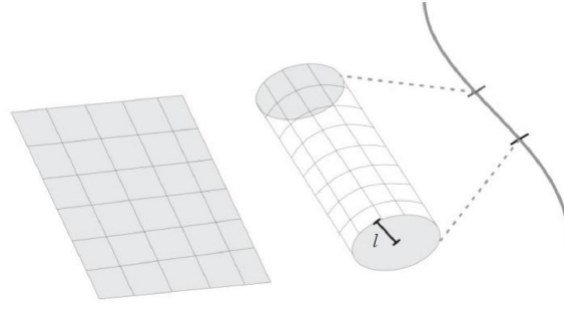


Figura 2.1: A teoria de Kaluza-Klein.

onde l é o raio da quinta dimensão.

Em razão disso, os campos que compõem a métrica (2.1.1) podem ser expandidos em séries de Fourier:

$$g_{\mu\nu}(x^\mu, z) = \sum_n g_{\mu\nu}^{(n)}(x^\mu) e^{inz/l}, \quad (2.1.17)$$

$$\phi(x^\mu, z) = \sum_n \phi^{(n)}(x^\mu) e^{inz/l}, \quad (2.1.18)$$

$$A_\mu(x^\mu, z) = \sum_n A_\mu^{(n)}(x^\mu) e^{inz/l}, \quad (2.1.19)$$

onde o n -ésimo modo de Fourier é rotulado pelo índice n . Observe que os campos são independentes da coordenada extra apenas para $n = 0$, ou seja, no modo zero.

Agora, vamos estudar o comportamento de um campo escalar em um espaço-tempo plano. A equação de Klein-Gordon para um campo escalar sem massa em cinco dimensões é:

$$\square_{(5)}\phi = 0, \quad (2.1.20)$$

onde $\square_{(5)} = \square + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador d'Alembertiano em 5 dimensões. Podemos resolver a equação diferencial acima pelo método da separação de variáveis. Para isso, consideramos uma solução do tipo:

$$\phi(x^\mu, z) = \chi(x^\mu) \varphi(z), \quad (2.1.21)$$

onde $\chi(x^\mu)$ é uma função apenas de x^μ , enquanto que $\varphi(z)$ é função apenas da coor-

denada extra z . Então, substituindo (2.1.21) em (2.1.20), encontramos:

$$\frac{1}{\chi(x^\mu)} \square \chi(x^\mu) + \frac{1}{\varphi(z)} \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} = 0. \quad (2.1.22)$$

A única condição que satisfaz a equação acima é

$$\frac{1}{\chi(x^\mu)} \square \chi(x^\mu) = C, \quad (2.1.23)$$

$$\frac{1}{\varphi(z)} \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} = -C. \quad (2.1.24)$$

Para alguma constante C , a equação (2.1.23) pode ainda ser escrita como:

$$\square \chi(x^\mu) = C \chi(x^\mu), \quad (2.1.25)$$

que nada mais é do que a equação de Klein-Gordom no espaço-tempo de 4-dimensões, onde a constante C representa a massa do campo.

Por sua vez, a equação (2.1.24), quando resolvida apresenta a seguinte solução:

$$\varphi(z) = A \sin(\sqrt{C}z) + B \cos(\sqrt{C}z). \quad (2.1.26)$$

Então, com as condições de contorno de (2.1.16), devemos ter

$$\phi(0) = \phi(2\pi l). \quad (2.1.27)$$

Com isso, observamos que C não pode ser arbitrário, os possíveis valores permitidos para C são expressos por

$$C = \frac{n^2}{l^2}. \quad (2.1.28)$$

Veremos adiante, que este resultado leva a um importante fato.

Observamos que C é positiva, então podemos escreve-la como $C = m^2$. Para cada valor permitido de m devemos ter:

$$\square \chi^{(n)}(x^\mu) = m_{(n)}^2 \chi^{(n)}(x^\mu), \quad (2.1.29)$$

onde

$$m_n^2 = \frac{n^2}{l^2}. \quad (2.1.30)$$

Com isso, podemos ver que do ponto de vista quadridimensional, $\chi(x, z)$ pode ser decomposto em um modo zero $n = 0$ sem massa ($\phi^{(0)}$), e um conjunto de outros modos que denominaremos modos de Kaluza-Klein, ou simplesmente modos KK. Neste caso, cada modo KK, pode ser interpretado como uma partícula com massa $|n|/l$.

Sendo assim, se l for suficientemente pequeno, por exemplo da ordem do comprimento de Planck $l \sim 10^{-35}m$, como Klein sugeriu, a quantidade de energia suficiente para excitar os modos não nulos $n \neq 0$, estariam fora do alcance dos experimentos atualmente. Assim, para que a dimensão extra seja observada, as energias dos aceleradores devem ser da ordem de $E \sim \frac{1}{l}$. Isto explicaria o fato de não haver ainda a detecção da dimensão extra.

2.2 O Modelo ADD.

Vimos que na teoria de Kaluza-Klein, a dimensão extra é compacta, se seu comprimento é proporcional ao comprimento de Planck, então ela seria indetectável, como vimos na seção anterior. Passados quase 70 anos, os físicos Nima Arkani-Hamed, Savvas Dimopoulos e Georgi Dvali, propuseram um modelo para dimensões extras que divergia em um aspecto muito crucial da teoria de Kaluza-Klein. Neste modelo, conhecido como o modelo ADD [3], a dimensão extra ainda é compacta, no entanto, o seu comprimento pode atingir a escala submilimétrica, sem trazer qualquer conflito com a experiência. Uma das motivações desse modelo, é a tentativa de resolver o conhecido problema da hierarquia. Este problema, de maneira resumida, consiste na grande diferença de energia da escala eletro-fracá comparada a escala de Planck.

O modelo ADD, se baseia na hipótese de que a matéria e os campos estão confinados em um espaço com três dimensões espaciais (a 3-brana) enquanto que a gravidade pode se propagar ao longo da dimensão extra. Nesta seção, vamos estudar a localização dos férmions na brana [16], e discutiremos também os efeitos da dimensão extra sobre a

gravitação nesse modelo.

2.2.1 O Confinamento da Matéria.

Podemos imaginar nosso Universo em $(3 + 1)$ dimensões, como sendo uma hipersuperfície imersa em um espaço de dimensões extras. De acordo com o modelo de branas, nossa hipersuperfície ordinária se encontra confinada e evolui. A parte espacial é chamada 3-brana e o número 3 se refere ao número de dimensões espaciais da hipersuperfície. Concluimos desta maneira, que uma brana é uma subvariedade de um espaço ambiente maior.

Uma maneira simples de ilustrar o mecanismo de confinamento da matéria, é considerar uma teoria de localização de férmions por uma parede de domínio em um modelo que admita a existencia da dimensão extra z [17]. Neste caso, a parede será descrita por um campo escalar $\phi = \phi(x^\mu, z)$. A ação referente ao campo escalar é dada por:

$$S = \int d^4x dz \left[\frac{1}{2} (\partial_A \phi)^2 - V(\phi) \right], \quad (2.2.31)$$

onde $A = 0, 1, 2, 3, 4$ e $V(\phi)$ é o potencial escalar. Consideremos o potencial $V(\phi)$, como sendo:

$$V(\phi) = \frac{\lambda^2}{8} (\phi^2 - \nu^2)^2. \quad (2.2.32)$$

É fácil observar que $V(\phi)$, possui dois mínimos de energia estáveis, para $\phi = -\nu$ e

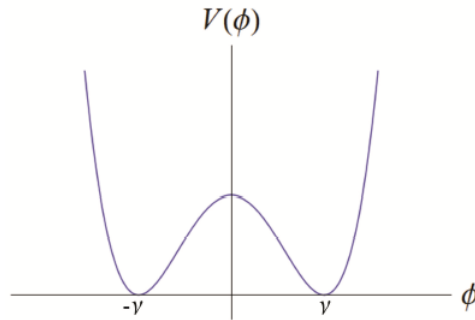


Figura 2.2: Gráfico do potencial $V(\phi)$ em função do campo ϕ .

$\phi = \nu$ e um máximo instável em $\phi = 0$. Observamos esse comportamento na figura 2.2.

Nosso objetivo é o de encontrar uma solução do tipo parede de domínio. Para isso, vamos procurar uma solução estática que seja uma função apenas da dimensão extra z . Devemos levar em consideração a dinâmica do campo, isto é obtido quando aplicamos a equação de Euler-Lagrange $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_A \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_A \phi)} \right] = 0$ na Lagrangiana vista em (2.2.31), onde encontramos como resultado

$$\square_A \phi + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (2.2.33)$$

Aqui, $\square_A^{(5)} = \partial_A^2 = \eta^{AB} \partial_A \partial_B$, neste caso;

$$-\frac{d^2 \phi_0(z)}{dz^2} + \frac{\lambda^2}{2} \phi_0 (\phi_0^2 - \nu^2) = 0, \quad (2.2.34)$$

que possui solução do tipo parede de domínio, conhecida como “kink” na seguinte forma [16]:

$$\phi_0(z) = \nu \tanh \left(\frac{\lambda \nu z}{2} \right). \quad (2.2.35)$$

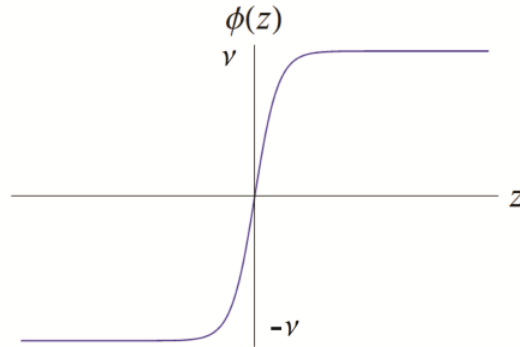


Figura 2.3: Solução do tipo “kink”, parede de domínio.

Notemos que, quando $\phi_0(z \rightarrow -\infty) = -\nu$ e $\phi_0(z \rightarrow +\infty) = \nu$. Portanto, a solução (2.2.35) separa os dois estados de menor energia. É por esta razão que esta configuração é chamada de parede de domínio.

A parede de domínio possui uma certa densidade de energia. Consideremos $\mathcal{H}_0$, a densidade de Hamiltoniana associada ao campo escalar ϕ , onde $\mathcal{H}_0 = \Pi\dot{\phi} - \mathcal{L}$, $\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$ é o momento conjugado à $\dot{\phi}$. Então, temos que:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (\partial_A \phi)^2 + \frac{\lambda^2}{8} (\phi^2 - \nu^2)^2. \quad (2.2.36)$$

Note ainda, que se $\phi = -\nu$ e $\phi = \nu$ temos $\mathcal{H}_0 = 0$, no entanto, considerando a solução do tipo (2.2.35), o resultado será:

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{4} \frac{\lambda^2 \nu^2}{\cosh^4 \left(\frac{\lambda \nu z}{2} \right)}. \quad (2.2.37)$$

Podemos visualizar a distribuição de energia, como mostrado na figura, abaixo:

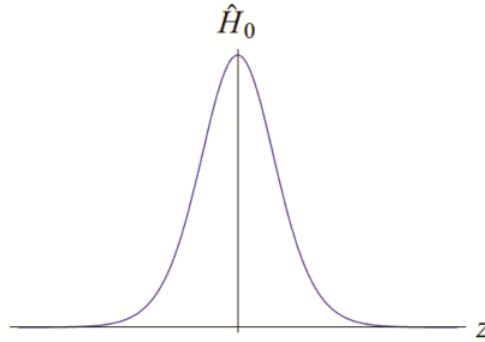


Figura 2.4: A Densidade de Energia da Brana em $z = 0$.

Observa-se que a energia se concentra em torno de $z = 0$, em uma faixa proporcional a λ . Sendo assim, concluímos que λ introduz uma escala que pode ser vista como o inverso da espessura da brana.

Uma vez conhecida $\mathcal{H}_0$ em (2.2.37), podemos calcular a densidade de energia. Integrando na dimensão extra temos:

$$\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} \frac{\lambda^2 \nu^2}{\cosh^4 \left(\frac{\lambda \nu z}{2} \right)} dz = \frac{2\lambda \nu^3}{3} \quad (2.2.38)$$

note que se $\lambda \rightarrow \infty$, a espessura da parede vai a zero. Se σ é mantido constante, neste limite a parede de domínio dará origem uma 3-brana.

2.2.2 A Localização dos Férmons.

Férmons são partículas de spin semi-inteiro como o elétron e o próton, por exemplo. O movimento dessas partículas é descrito pela equação de Dirac [12]. Nesta seção, vamos descrever a teoria de Dirac no espaço-tempo de 5 dimensões. Uma discussão mais profunda será feita no capítulo seguinte desta Tese, que será dedicado apenas para a Mecânica Quântica Relativística.

Na teoria de Dirac, férmons são descritos por espinores ψ , sobre eles atuam as matrizes de Dirac [16]. Em 5 dimensões, as matrizes de Dirac Γ^μ podem ser definidas a partir das matrizes de Dirac quadridimensionais γ^μ de acordo com a seguinte forma:

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu$$

$$\Gamma^z = i\gamma^5$$

onde, $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, e $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ são as matrizes de Dirac:

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1_{2 \times 2} \\ 1_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2.39)$$

Podemos verificar que as matrizes Γ^5 , satisfazem a álgebra usual das matrizes de Dirac:

$$\Gamma^A \Gamma^B + \Gamma^B \Gamma^A = 2g^{AB}. \quad (2.2.40)$$

A ação do campo de Dirac pode ser representada como segue:

$$S_{1/2} = \int d^4x dz \left(i\bar{\Psi} \Gamma^A \partial_A \psi - m \bar{\Psi} \psi \right), \quad (2.2.41)$$

onde a lagrangiana para o campo de Dirac em cinco dimensões tem a forma:

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi} \Gamma^A \Psi - m \bar{\Psi} \Psi. \quad (2.2.42)$$

Usando a equação de Euler-Lagrange, a equação de Dirac no contexto de dimensões extras é da forma:

$$(i\Gamma^A \partial_A - m) \Psi = 0. \quad (2.2.43)$$

Essa equação descreve o campo de Dirac livre. Vamos agora considerar a interação desse campo com uma parede de domínio. Como vimos na seção anterior, a parede é descrita por um campo escalar numa configuração particular. Vamos considerar uma interação tipo Yukawa [17] entre ψ e ϕ . A ação de interação seria:

$$S_{INT} = -h \int d^4x dz \phi \bar{\Psi} \Psi, \quad (2.2.44)$$

onde h é uma constante de acoplamento. Considerando isto, a ação total do nosso sistema será composto da soma da ação puramente fermiônica com a ação de interação $S = S_{1/2} + S_{INT}$, com ϕ no estado de parede de domínio ϕ_0 , assim temos:

$$S = \int d^4x dz (i\bar{\Psi} \Gamma^A \partial_A \Psi - m\bar{\Psi} \Psi - h\phi_0 \bar{\Psi} \Psi). \quad (2.2.45)$$

Considerando um férmion sem massa, $m = 0$, a ação se reduz à:

$$S = \int d^4x dz (i\bar{\Psi} \Gamma^A \partial_A \psi - h\phi_0 \bar{\Psi} \Psi), \quad (2.2.46)$$

o que nos fornece a seguinte equação de movimento

$$i\Gamma^z \partial_z \Psi + i\Gamma^\mu \partial_\mu \Psi - h\phi_0 \Psi = 0. \quad (2.2.47)$$

Agora, nosso próximo passo será resolver a equação acima. Para isso, faremos uso do método de separação de variáveis. Vamos considerar que $\Psi_{(5)} = \psi(x) f(z)$, onde $\psi(x)$ é um espinor de Dirac 4-D [18, 21], $f(z)$ é uma função apenas da coordenada extra. Assim, ficamos com:

$$i\Gamma^z \psi(x) \frac{\partial_z f(z)}{f(z)} + i\Gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) - h\phi_0 \psi(x) = 0. \quad (2.2.48)$$

Vamos impor que $\gamma^{(5)} \psi = \psi$, isto não implica em nenhuma restrição física, uma vez que afirma que partículas de massa nula possuem quiralidade bem definida. Assim devemos ter:

$$\left[\frac{1}{f(z)} \partial_z f(z) + h\phi_0 \right] \psi(x) - i\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) = 0, \quad (2.2.49)$$

então, para satisfazer à condição acima devemos ter

$$i\gamma^\mu \partial^\mu \psi(x) = m\psi(x) \quad (2.2.50)$$

e simultaneamente:

$$\frac{df(z)}{dz} = (m - h\phi_0) f(z). \quad (2.2.51)$$

Por causa de (2.2.50), m é interpretada como a massa do espinor em quatro dimensões. No caso em que $m = 0$ temos a seguinte configuração,

$$\frac{df(z)}{dz} = -h\phi_0 f(z) \quad (2.2.52)$$

admitindo que $f(z)$ tende a zero no infinito, a solução de (2.2.52) é:

$$f(z) = \exp\left(-h \int_0^z \phi_0 dz\right) \quad (2.2.53)$$

Do comportamento de ϕ_0 , ver figura (2.3), observamos que para z grande $f(z)$ cai de forma exponencial. Isto significa que o modo zero dos férmions está confinado na brana. De fato, a função de onda para os férmions de modo zero é dada por:

$$\psi_0 = \exp\left(-\int_0^z h\phi_0(z) dz\right) \psi_L, \quad (2.2.54)$$

Com essa expressão, chegamos a conclusão que o modo zero está localizado próximo a $z = 0$, ou seja, na parede de domínio. Uma vez que a função de onda para $|z|$ muito grande vai a zero ao longo da dimensão extra.

Com a equação (2.2.51), é possível determinar os valores admissíveis para m . Como já mencionamos m pode ser interpretado como os modos KK . Segundo Rubakov [16], o espectro de massa dos férmions presos na brana tem o comportamento semelhante ao da figura 2.5. Esse espectro se caracteriza por um salto entre o modo zero e os demais modos, que são proporcionais a $m_{(5)} = h\nu$. Sendo assim, considerando ν muito grande, os modos com massa estariam inacessíveis a experimentação.

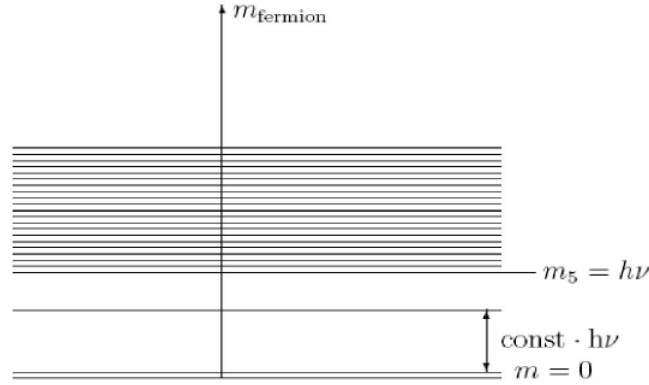


Figura 2.5: Espectro de massa para os Férmions presos na Brana.

2.2.3 O Potencial Gravitacional para um sistema de n dimensões.

Como já mencionamos, no modelo ADD os campos e a matéria estão localizados na brana. No entanto, o campo gravitacional pode se propagar ao longo da dimensão extra. Para estudar as implicações disto, vamos obter o potencial gravitacional Newtoniano em um espaço com D dimensões espaciais gerado por um corpo de massa m .

Para tal objetivo, devemos fazer duas considerações importantes. A primeira é considerar que o campo gravitacional $\vec{g}$ seja conservativo para um espaço de D dimensões, e a segunda, que as equações de campo tenham a mesma forma da equação quadridimensional [22]. Assim, a equação será:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G^D \rho, \quad (2.2.55)$$

onde ρ é a densidade de matéria e G^D é a constante gravitacional em D dimensões.

Se o corpo tem simetria esférica, $\vec{g}(r)$ é radial e depende apenas de r . Nesta situação é útil aplicar o teorema da divergência para encontrar o campo produzido pelo corpo. Para isso, considere um corpo de massa m e uma esfera $S^{D-1}(r)$ de raio r , de modo que a esfera esteja centrada no corpo de massa m . Esta esfera, é por sua vez, o contorno de uma bola $B^D(r)$ [22]. Com isso podemos integrar ambos os lados

de (2.2.55) sobre a bola $B^r(r)$, assim teremos:

$$\int_{B^{(D)}} (\vec{\nabla} \cdot \vec{g}) dv = -4\pi G^{(D)} \int_{B^{(D)}} \rho dv. \quad (2.2.56)$$

Sabemos que $\int_{B^{(D)}} (\vec{\nabla} \cdot \vec{g}) dv \equiv \Phi_m$, ou seja, a integral equivale ao fluxo de $\vec{g}$ através de $S^{D-1}(r)$. Precisamos do volume da esfera em um espaço de dimensões extras, que é dado por:

$$\text{Vol}(S^{D-1}(r)) = r^{D-1} \frac{2\pi^{\delta/2}}{\Gamma(D/2)}. \quad (2.2.57)$$

Logo considerando que $\vec{g}(r)$ é conservativo então, $\vec{g}(r) = -\vec{\nabla}\phi$, onde ϕ é o potencial gravitacional, usando a simetria esférica do corpo, concluímos que

$$\phi(r) = \frac{2\Gamma(D/2)}{\pi^{D/2-1}(2-2D)} \frac{Gm}{r^2} \quad (2.2.58)$$

Note que se temos $D = 3$, o potencial Newtoniano é recuperado, se $D = 4$ o potencial ϕ é função de $1/r^2$. Este comportamento não é compatível com as observações de fenômenos gravitacionais de uma escala de longa distâncias e por isso é necessário compactificar a dimensão extra, para tornar o modelo fenomenologicamente viável.

2.2.4 Potencial Gravitacional numa Dimensão Extra Compacta.

Considere que o espaço possui uma dimensão extra espacial e tem a topologia de $\mathbb{R} \times S^1$ hipercilindrico. Para determinarmos de forma explícita o potencial gravitacional newtoniano produzido pela massa m nesse espaço, vamos fazer uso da seguinte ilustração abaixo.

Na figura, o observador no ponto O vê o corpo de massa m em um ponto do Universo tem a “forma” de um cilindro. Na figura seguinte, o cilindro é representado por um espaço aberto com “massas” topológicas. Na última figura, temos uma situação onde o observador está muito distante da massa e observa uma distribuição praticamente contínua.

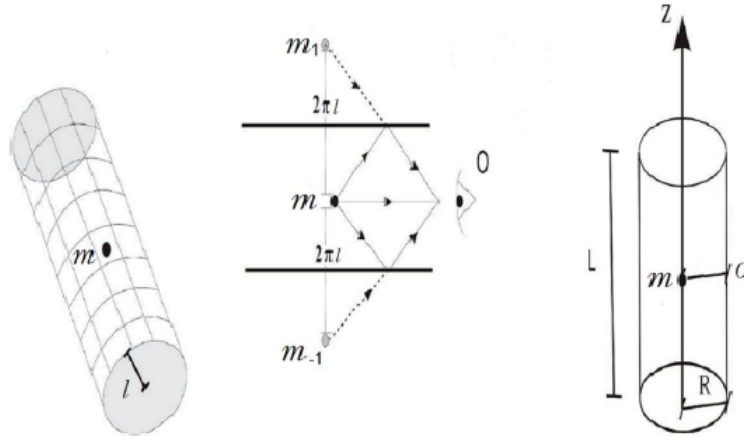


Figura 2.6: Corpo de massa m vista pelo observador O .

Como a dimensão extra é compacta e tem a topologia de um círculo, as linhas de força provenientes do corpo de massa m dão voltas em torno do espaço, até que atingem o observador em O .

Imaginemos agora que pudéssemos desenrolar o cilindro. O que o observador veria, seria um plano onde a nossa massa m estaria no centro. Nessa configuração, ele também estaria sofrendo a ação de outras “massas” ($m_1, m_2, \dots$), que estão distribuídas ao longo da linha que passa pelo centro da massa m . Essas “massas”, sentidas por O são chamadas de imagens topológicas. A distância mínima entre elas é exatamente $2\pi l$, ou seja, o comprimento da dimensão extra.

Caso o observador esteja a uma distância R suficientemente maior que l , as “massas” estarão distribuídas de maneira praticamente contínua ao longo da dimensão extra. Podemos então, calcular o potencial gravitacional produzido por essa “massa”. Utilizamos a lei de Gauss, escolhemos uma superfície gaussiana que envolva a linha de massa como mostra a figura, lembrando que como o espaço possui 4 dimensões, a base do cilindro será uma esfera em vez de um círculo, sendo assim, a “área” dessa “superfície” gaussiana será $4\pi R^2 L$, onde L é o comprimento do “cilindro” na dimensão extra.

Segue pela lei de Gauss que:

$$\int \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi G_5 M_{\text{int}} \quad (2.2.59)$$

aqui, M_{int} é a quantidade de massa topológica contida na linha contínua dentro da superfície gaussiana cilíndrica. As “massas” estão separadas por uma distância de $2\pi l$, sendo assim, o número de imagens contidas em uma linha de comprimento L equivale à $L/2\pi l$, de modo que tenhamos:

$$M_{\text{int}} = \frac{L}{2\pi l} m. \quad (2.2.60)$$

Considerando a simetria cilíndrica da distribuição de matéria, concluimos que $\vec{g}$, possui simetria cilíndrica. Neste caso, $\vec{g}$ dependerá apenas da coordenada radial R , sendo assim:

$$\vec{g}(R) = -\frac{G_5 m}{2\pi R^2 l} \hat{e}_R, \quad (2.2.61)$$

o que nos leva a um potencial do tipo:

$$\phi(R) = -\left(\frac{G_5 m}{2\pi l}\right) \frac{1}{R}. \quad (2.2.62)$$

Se considerarmos $G_4 = \frac{G_5}{2\pi l}$, recuperamos o potencial gravitacional no espaço usual $(3+1)$ -dimensões no domínio $R \geq l$.

2.2.5 Escala de Comprimento e o Problema Hierarquia.

As constantes c e $\hbar$ foram reveladas pela teoria moderna da física. No estudo de gravitação, também se faz presente a constante gravitacional G . Com essas três constantes, podemos construir o sistema de unidades de Planck, cujas unidades básicas são: **comprimento de Planck** l_P , **tempo de Planck** t_P e **massa de Planck** m_P . Definimos essas três unidades usando essas constantes da seguinte maneira

$$l_P = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = 1,61 \times 10^{-33} \text{cm}, \quad (2.2.63)$$

$$t_P = \frac{l_P}{c} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}} = 5,4 \times 10^{-44} \text{s}, \quad (2.2.64)$$

$$m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2,17 \times 10^{-5} \text{gm}. \quad (2.2.65)$$

Considerando que essas quantidades envolvem G associado a gravitação $\hbar$ a mecânica quântica e c a relatividade, é natural pensarmos que essas quantidades definem uma escala na qual os efeitos da gravidade quântica podem ser importantes.

Desejamos agora, mostrar uma relação entre essas quantidades que se apliquem a um espaço de D dimensões. Em D dimensões, a constante gravitacional G^D tem dimensão de G multiplicado por isto se dá através de:

$$(l_D)^{D-2} = \frac{G^{(D)}\hbar}{c^3}. \quad (2.2.66)$$

Observando essa equação, podemos notar que o valor de l_P seria um valor efetivo, advindo da constante fundamental l_D definida no espaço ambiente[3, 22, 24]. Em um espaço que contém uma dimensão extra compacta, e que possuía a topologia de um círculo de raio l cujo comprimento da dimensão $2\pi l$, as constantes gravitacionais se relacionam da seguinte maneira:

$$\frac{G^{(5)}}{G^{(4)}} = 2\pi l = l_c, \quad (2.2.67)$$

onde l_c é o comprimento da dimensão extra. Como vimos em (2.2.62), as constantes gravitacionais do espaço-tempo ordinário 4-D e a do espaço de 5 dimensões (uma dimensão compacta), diferem por um fator que é proporcional ao comprimento da dimensão extra.

Podemos generalizar a expressão acima para um espaço de n dimensões, através da relação:

$$\frac{G^{(D)}}{G^{(4)}} = (2\pi l)^D = (l_c)^{D-2}, \quad (2.2.68)$$

isto considerando que o comprimento da dimensão extra é o mesmo. Combinando (2.2.66) com a equação acima, podemos escrever l_c em termos de l_P num espaço 4-D

e o comprimento de Planck em D dimensões (l_D):

$$l_c = l_D \left(\frac{l_D}{l_c} \right)^{\frac{2}{D-4}}. \quad (2.2.69)$$

O problema da Hierarquia estaria resolvido se admitíssemos que o comprimento de Planck l_P em um espaço com D dimensões extras fosse da mesma ordem da escala eletrofraca $l_D \approx 10^{-18}\text{cm}$. Com esta condição obtemos uma relação para o tamanho da dimensão extra e l_c e o número de dimensões do espaço

$$l_c = 10^{-18} (10^{15})^{\frac{2}{D-4}} \quad (2.2.70)$$

Da relação acima, observamos que no caso em que $D = 5$, ou seja, uma dimensão extra $l_c \sim 10^{12}\text{cm}$. Assim, um Universo com apenas uma dimensão extra não seria compatível com esse modelo, uma vez que com esse comprimento, essa dimensão já teria sido observada na natureza. Por outro lado, considerando um Universo de 6 dimensões, duas dimensões extras, teríamos $l_c \sim 0,01\text{mm}$. Esta é uma distância na qual as leis newtonianas da gravitação estão sendo recentemente testadas.

Concluimos então, que eventuais desvios da lei do inverso do quadrado da gravitação, poderia ser interpretada como indícios de dimensões extras. Note que, quanto maior o número das dimensões extras, menor será o comprimento da dimensão extra. Para o caso de $D = 10$, ou seja, 6 dimensões extras, o que sugere a teoria das supercordas [25], o tamanho seria de $l_c \approx 10^{-13}\text{cm}$, o que seria ainda um comprimento bem maior que o comprimento de Planck. Por isso, esses modelos também são conhecidos como modelos de dimensões extras de longa escala.

2.3 Os Modelos de Randall-Sundrum.

Os modelos de Randall-Sundrum RS [4, 5], também são modelos de brana. Em relação ao modelo ADD, os modelos RS se destacam por mostrar que o espaço ambiente de cinco dimensões não é incompatível com a experiência. Isto é possível, em virtude do

espaço ambiente possuir uma constante cosmológica negativa cujo valor está ajustado à tensão da brana.

São dois modelos, conhecidos por RSI e RSII. No modelo RSI, há duas branas separadas na dimensão extra que é compacta e finita. Já no modelo RSII há apenas uma única brana permitindo que a dimensão extra possua comprimento infinito.

2.3.1 O Modelo RSI.

No espaço ambiente do modelo RSI [4], existem duas branas, fazendo com que a dimensão extra seja compacta. As branas estão localizadas em dois pontos fixos do espaço ambiente. A primeira possui tensão positiva σ_+ em $z = 0$ e a segunda, de tensão negativa σ_- , em $z = z_c$, onde z_c é o comprimento da dimensão extra.

Admite-se que a dimensão extra possui a topologia do espaço S^1/Z_2 , cuja descrição é feita da seguinte forma. Seja $\theta \in [-\pi, \pi]$, a coordenada que rotula os pontos do círculo S^1 , a topologia S^1/Z_2 é obtida caracterizando os pontos $-\theta$ e θ . Note que há dois pontos fixos com respeito a esta identificação, os pontos $\theta = 0$ e $\theta = \pi$. As branas estão localizadas nesses pontos.

A métrica de fundo do modelo RSI é dada por [26]:

$$ds^2 = a^2(z)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dz^2 \quad (2.3.71)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski no espaço-tempo $(1+3)$, $a(z)$ é o chamado fator de deformação dado por:

$$a(z) = e^{-\kappa|z|} \quad (2.3.72)$$

onde a constante κ será obtida via solução das equações de Einstein.

Na figura abaixo, podemos ver o comportamento de $a(z)$ em S^1/Z_2 .

Agora vamos tratar das equações de campo para o espaço ambiente, a fim de que tenhamos conhecimento do fator κ . As equações de Einstein, no espaço ambiente, são:

$$R_{AB} - \frac{1}{2}g_{AB}R = T_{AB}, \quad (2.3.73)$$

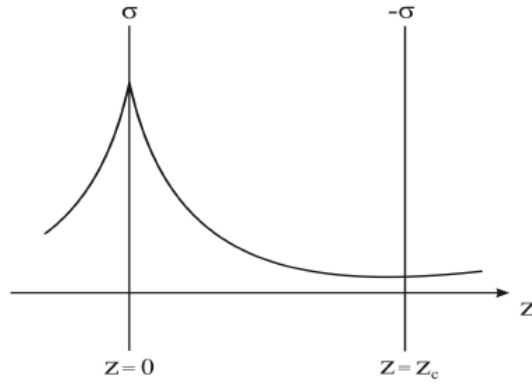


Figura 2.7: Comportamento de $a(z)$.

onde T_{AB} é o tensor de energia momento da fonte. Ele contém um termo relativo a constante cosmológica Λ , assim como a tensão da brana [24, 4]

$$T_{AB} = \Lambda g_{AB} + 8\pi G_{(5)} \tau_{AB}, \quad (2.3.74)$$

onde aqui τ_{AB} nos traz o conteúdo de energia da brana, e é dado por:

$$\tau_{AB} = \begin{cases} T_{\mu\nu} = \sigma g_{\mu\nu}^{(5)} \delta(z) - \sigma g_{\mu\nu}^{(5)} \delta(z - z_c), \\ T_{Az} = 0. \end{cases} \quad (2.3.75)$$

A expressão (2.3.75) implica que o fluxo de energia entre o espaço ambiente e a brana é nulo. Com a métrica (2.3.71) e com o tensor energia momento em (2.3.74), obtemos as equações de Einstein:

$$\left[-3 \left(\frac{a'}{a} \right)^2 - 3 \left(\frac{a''}{a} \right) \right] = 8\pi G_{(5)} [\sigma \delta(z) - \sigma \delta(z - z_c)] + \Lambda, \quad (2.3.76)$$

$$G_{\mu z} = 0, \quad (2.3.77)$$

$$\left[-6 \left(\frac{a'}{a} \right) \right] = \Lambda, \quad (2.3.78)$$

onde a equação (2.3.77) é automaticamente satisfeita. Já a equação (2.3.78) é satisfeita se

$$\kappa^2 = -\frac{1}{6}\Lambda, \quad (2.3.79)$$

o que exige que a constante cosmológica seja negativa, para que a métrica (2.3.71) seja solução das equações de Einstein.

Olhando agora para (2.3.76) e integrando nas proximidades de $z = 0$ no intervalo $-\epsilon < z < \epsilon$, e tomando o limite de $\epsilon \rightarrow 0$, observamos que a tensão da brana está dada como

$$\sigma^2 = -\frac{3}{32\pi^2 G_{(5)}^2} \Lambda. \quad (2.3.80)$$

Observe que tomamos a brana de tensão positiva. Se tomarmos a solução no ponto $z = z_c$ o nosso resultado será o mesmo. Portanto, o valor da tensão está ajustado a constante cosmológica.

A Linearização da Gravidade no Cenário de Branas.

Considerando um corpo confinado em uma das branas, pretendemos agora estudar o campo gravitacional produzido neste cenário. Por simplicidade, vamos considerar o regime de campo fraco. Neste regime, a métrica do espaço-tempo pode ser escrita como uma perturbação da métrica de fundo da seguinte forma:

$$ds^2 = [a^2(z)\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}] dx^\mu dx^\nu - dz^2, \quad (2.3.81)$$

onde o tensor $h_{\mu\nu}$ é a perturbação. Este termo satisfaz a condição $|h_{\mu\nu}| \ll 1$.

E por uma escolha de coordenadas temos $h_{\mu z} = 0$. Agora, considerando a presença de matéria confinada na brana, as equações de Einstein assumem a seguinte forma

$$G_{AB} = 8\pi G_{(5)} T_{AB}^{mat} + 8\pi G_{(5)} \tau_{AB}^{brana} + \Lambda g_{AB}, \quad (2.3.82)$$

onde os tensores T_{AB}^{mat} e τ_{AB}^{brana} são os tensores energia momento da matéria e da brana respectivamente.

Assim, aplicando as equações de Einstein para (2.3.81) teremos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a^{-2}[h_{\nu,\sigma\mu}^\mu + h_{\sigma,\rho\mu}^\rho - \eta^{\mu\rho}h_{\sigma\nu,\rho,\mu} - h_{\mu,\sigma,\nu}^\mu] + \frac{1}{2}h_{\sigma\nu}'' + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{a'}{a}\right)h_{\mu}^{'\mu} - \left(\frac{a'}{a}\right)^2 h_{\mu}^\mu \right] \eta_{\sigma\nu} \\ + 2\kappa[\delta(z) - \delta(z - z_c)]h_{\sigma\nu} - 2\kappa^2 h_{\sigma\nu} = 8\pi G_{(5)}\delta(z) \left(T_{\sigma\nu}^{mat} - \frac{a^{-2}}{3} T_{\alpha}^{\alpha(m)} g_{\sigma\nu} \right) \end{aligned} \quad (2.3.83)$$

$$-\frac{1}{2}a^{-2}\left(h'_{\nu,\mu}-h'_{\mu,\rho}\right)+\left(\frac{a'}{a^3}\right)\left(h_{\nu,\mu}^{\nu}-h_{\mu,\nu}^{\nu}\right)=0, \quad (2.3.84)$$

$$-\frac{1}{2}h_{\mu}^{\prime\prime\mu}+\frac{a'}{a^3}h_{\mu}^{\prime\mu}+\left[\frac{a''}{a^3}-\left(\frac{a'^2}{a^4}\right)\right]h_{\mu}^{\mu}=\frac{16\pi G_{(5)}a^2}{3}\delta(z)T^{mat} \quad (2.3.85)$$

É possível escolhermos um sistema de coordenadas no qual $h_{\mu\nu}$ é transverso e assim com traço nulo. Neste caso ele satisfaz a condição

$$\partial_{\mu}h_{\nu}^{\mu}=h_{\mu}^{\mu}=0. \quad (2.3.86)$$

Isto simplifica as equações (2.3.83)-(2.3.85). Observa-se que, (2.3.84) e (2.3.85) são satisfeitas na região externa automaticamente, enquanto que (2.3.83) se reduz a equação:

$$h_{\sigma\nu}^{\prime\prime}-2\left[2\kappa^2-2\kappa\delta(z)+2\kappa\delta(z-z_c)\right]h_{\sigma\nu}-a^{-2}\partial^{\mu}\partial_{\mu}h_{\sigma\nu}=0. \quad (2.3.87)$$

No intervalo $0 < z < z_c$ os termos que são proporcionais a delta são nulos, logo a equação se reduz a:

$$h_{\sigma\rho}^{\prime\prime}-4\kappa^2h_{\sigma\nu}-a^{-2}\partial^{\mu}\partial_{\mu}h_{\sigma\nu}=0, \quad (2.3.88)$$

que pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis como veremos a seguir. Voltando a equação (2.3.87) e integrando em torno de $z=0$ e $z=z_c$ encontramos as equações

$$(h'_{\sigma\nu}+4\kappa h_{\sigma\nu})|_{z=0}=0, \quad (2.3.89)$$

$$(h'_{\sigma\nu}+4\kappa h_{\sigma\nu})|_{z=z_c}=0. \quad (2.3.90)$$

Observe que estas equações equivalem a condições de contorno para as soluções de (2.3.88). Estas equações nos levam a um resultado muito importante. A quantização do espectro de massa para grávitons, como veremos a seguir.

O Espectro de Massa para os Grávitons.

Voltemos a equação (2.3.88). Para resolvê-la, vamos usar novamente o método da separação de variáveis, para isso, devemos considerar uma solução do tipo $h_{\sigma\nu} =$

$\Psi(z)\Phi_{\sigma\nu}(x)$. Substituindo esta expressão em (2.3.88) obtemos

$$\Phi_{\sigma\nu}(x)\partial_z^2\Psi(z) - \Psi(z)a^{-2}\square\Phi_{\sigma\nu}(x) - 4\kappa^2[\Psi(z)\Phi_{\sigma\nu}(x)] = 0, \quad (2.3.91)$$

o que nos leva à

$$\Psi''(z) - 4\kappa^2\Psi(z) + C\Psi(z) = 0, \quad (2.3.92)$$

$$\square\Phi_{\sigma\nu} = -C\Phi_{\sigma\nu}. \quad (2.3.93)$$

Veremos que é possível mostrar que a constante C pode assumir valores positivos.

Sendo assim, $C = m^2$, o que nos permite reescrever (2.3.93) como:

$$\square\Phi_{\sigma\nu}(x) + m^2\Phi_{\sigma\nu}(x) = 0. \quad (2.3.94)$$

Observamos que esta equação tem a forma da equação de Klein-Gordon para o campo $\Phi_{\sigma\nu}(x)$ de massa m .

Como o campo $\Phi_{\sigma\nu}(x)$ é uma função das coordenadas da brana, podemos interpretá-las como um gráviton de massa m , ou seja, uma perturbação linear da métrica, para os observadores que estão confinados na brana. Sendo assim, para cada m permitido, temos um campo $\Phi_{\sigma\nu}(x)$, chamado de modo de Kaluza-Klein ou simplesmente modo KK.

Por sua vez a equação (2.3.92) fica da forma:

$$\Psi''(z) - 4\kappa^2\Psi(z) + \frac{m^2}{a^2}\Psi(z) = 0. \quad (2.3.95)$$

Tomando $m = 0$, temos uma solução particular da forma

$$\Psi(z) = C_0 e^{-2\kappa z} \quad (2.3.96)$$

esta solução é conhecida como modo zero, $m = 0$.

Adiante, veremos que ela é de fundamental importância para recuperarmos o comportamento quadridimensional do campo gravitacional. Se $m \neq 0$, podemos fazer uma mudança de coordenadas $x = \frac{m}{\kappa}e^{\kappa z}$, neste caso, a equação (2.3.95) fica escrita como

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\Psi(x)}{dx} + \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)\Psi(x) = 0. \quad (2.3.97)$$

Esta equação é uma equação de Bessel para $n = 2$ cuja solução geral tem a forma:

$$\Psi(z) = AJ_2\left(\frac{m}{\kappa}e^{\kappa z}\right) + BN_2\left(\frac{m}{\kappa}\right), \quad (2.3.98)$$

onde $J_2(z)$ e $N_2(z)$ são as funções de Bessel de ordem 2 de primeira e segunda espécies. Impondo as condições de contorno vistas em (2.3.89) e (2.3.90), ficamos, para $z = 0$ com a seguinte equação

$$\Psi(x) = C_m \left[J_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) N_2\left(\frac{m}{\kappa}e^{\kappa z}\right) - N_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) J_2\left(\frac{m}{\kappa}e^{\kappa z}\right) \right], \quad (2.3.99)$$

onde C_m é uma constante de normalização. Para $z = z_c$, ficamos com

$$\frac{J_1\left(\frac{m}{\kappa}e^{\kappa z_c}\right)}{N_1\left(\frac{m}{\kappa}e^{\kappa z_c}\right)} = \frac{J_1\left(\frac{m}{\kappa}\right)}{N_1\left(\frac{m}{\kappa}\right)}. \quad (2.3.100)$$

Os possíveis valores de m são as raízes desta equação, ou seja, o espectro dos grávitons é fornecido pelo conjunto de soluções desta equação[41].

Para as primeiras soluções de (2.3.100), temos

$$m \simeq \kappa e^{-\kappa z_c}. \quad (2.3.101)$$

Notemos que a massa dos grávitons depende do tamanho da dimensão extra. Neste caso, se escolhermos um κ grande e um z_c pequeno tal que $z_c\kappa > 1$ então, observamos que a massa do primeiro modo de Kaluza-Klein, KK, é muito grande $m \sim \kappa$. Sendo assim, para excitar o primeiro modo massivo seria necessário uma quantidade gigantesca de energia, o que está fora do alcance dos experimentos.

Esta é a explicação para o fato que os grávitons massivos não terem sido detectados. Então, um espaço-tempo com apenas uma dimensão extra seria compatível com os dados observacionais, na escala de energia dos atuais aceleradores de partículas.

2.3.2 O Modelo RSII.

Sabemos que no modelo RSI existem duas branas, uma de tensão positiva e outra de tensão negativa. Agora, para o modelo RSII [5], suponha que retiremos a brana de

tensão negativa e levemos à uma distancia infinita, isso faz com que a dimensão extra deixe de ser compacta e passe agora a ter um comprimento infinito. Uma consequência direta disto, é o fato de não termos mais um espectro discreto para as massas dos gráviton, agora, o espectro de massa se torna contínuo.

Nestas circunstâncias, seria de se esperar que os grávitons de massa pequena estivessem acessíveis para baixos valores de energia, o que colocaria a teoria em conflito com a experiência. Entretanto, veremos adiante que a existencia de um modo zero e normalizável, nos permite recuperar o comportamento quadridimensional para longas distancias.

O Modo Zero Normalizável e os modos de Kaluza-Klein Contínuos.

Voltemos agora para a equação (2.3.92), como vimos, os modos KK satisfazem essa equação. Para estudarmos a normalização de $\Psi(z)$, faremos uso da teoria de Sturm-Liouville. Nesta teoria, as autofunções associadas a autovalores discretos são normalizáveis. Por sua vez, as autofunções relativas aos autovalores contínuos são normalizáveis no sentido distribucional, isto é segundo o delta de Dirac.

Considerando que as autofunções sejam finitas para $z \rightarrow \infty$ é possível mostrar que todos os autovalores são não negativos [27]. Outro fato importante, é a existência de um modo zero normalizável. De fato, se consideramos $m = 0$ na equação (2.3.95), temos

$$\Psi_0(x) = C_0 e^{-2\kappa|z|}. \quad (2.3.102)$$

É um ponto fundamental desse modelo o fato de que ψ_0 é normalizável mesmo para uma dimensão não-compacta, isso é $-\infty < z < \infty$. De fato, podemos impor que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi_0(z)|^2 dz = 1, \quad (2.3.103)$$

o que nos dá $C_0 = \sqrt{2\kappa}$. Em relação aos modos KK, as funções normalizadas são:

$$\Psi_m(z) = \sqrt{\frac{m}{\kappa}} \frac{[J_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) N_2\left(\frac{m}{\kappa} e^{\kappa z}\right) - N_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) J_2\left(\frac{m}{\kappa} e^{\kappa z}\right)]}{\sqrt{J_1\left(\frac{\kappa}{m}\right)^2 + N_1\left(\frac{\kappa}{m}\right)^2}}. \quad (2.3.104)$$

A Função de Green.

Para estudarmos o comportamento do campo gravitacional, faz-se necessário o uso da função de Green. Se temos um evento específico acontecendo num ponto $\vec{x}'$ do espaço em um tempo t' (no nosso caso na brana), é ela que nos fornece a influência daquele evento num ponto $\vec{x}$ em um tempo t .

Consideramos o comportamento do campo gravitacional linearizado, devemos estudar a solução não-homogenea,

$$[\partial_z^2 - 2(2\kappa^2 - 2\kappa\delta(z)) + a^{-2}\square^{(4)}] h_{\mu\nu} = \Sigma_{\mu\nu}. \quad (2.3.105)$$

O novo termo $\Sigma_{\mu\nu}$, faz o papel de uma fonte para $h_{\mu\nu}$. Assim, de acordo com o formalismo de Green, a solução de (2.3.105) pode ser expressa como

$$h_{\mu\nu} = \int dz' d^4x' G(x, z; x', z'), \quad (2.3.106)$$

onde $G(x, z; x', z')$ é a função de Green, que satisfaz a equação

$$[\partial_z^2 - 2(2\kappa^2 - 2\kappa\delta(z)) + a^{-2}\square^{(4)}] G(x, z; x', z') = \delta^4(x - x') \delta(z - z'). \quad (2.3.107)$$

A partir desta equação podemos construir a função de Green usando o método da separação de variáveis, o que nos leva a:

$$\square\Phi_{\sigma\nu} - m^2\Phi_{\sigma\nu} = 0, \quad (2.3.108)$$

$$\Psi''(z) - 2(2\kappa^2 - 2\kappa\delta(z))\Psi(z) + \frac{m^2}{a^2}\Psi(z) = 0. \quad (2.3.109)$$

A teoria de Sturm-Liouville nos traz um resultado muito importante. Para as funções, o conjunto completo de autofunções formam uma base completa que satisfaz as mesmas condições de contorno das autofunções [37, 38].

Para a equação (2.3.108), as autofunções são ondas planas do tipo, $1/(2\pi)^4 e^{-k_\mu x^\mu}$, com $k_\mu k^\mu = m^2$. Já para a equação (2.3.109), as autofunções são

$$u_0(z) = \sqrt{2\kappa} e^{-\kappa|z|}, \quad (2.3.110)$$

$$u_m(z) = \sqrt{\frac{m}{\kappa}} \frac{\left[J_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) N_2\left(\frac{m}{\kappa} e^{\kappa z}\right) - N_1\left(\frac{m}{\kappa}\right) J_2\left(\frac{m}{\kappa} e^{\kappa z}\right) \right]}{\sqrt{J_1\left(\frac{\kappa}{m}\right)^2 + N_1\left(\frac{\kappa}{m}\right)^2}}. \quad (2.3.111)$$

Vê-se então, que as funções $1/(2\pi)^4 e^{-k_\mu x^\mu} u_m(z)$ configuram em uma base para as funções definidas em 5 dimensões. Nesta base, temos que a função de Green se apresenta como [37, 38]

$$G(x, z; x', z') = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} b_{0k} u_0(z) e^{ikx} + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} dm b_{mk} u_m(z) e^{ik_\mu x^\mu}. \quad (2.3.112)$$

Os coeficientes b_{mk} e u_m , podem ser detreminados via equação (2.3.107), onde a partir desse resultado, é possível mostrar que a função de Green independente do tempo [5, 24] é dada por

$$G(x, z; x', z') = \left(-\frac{1}{4\pi} \frac{1}{R} \right) \kappa e^{-2\kappa(z+z')} + \int_0^\infty dm u_m(z') \left(-\frac{1}{4\pi} \frac{e^{-mR}}{R} \right), \quad (2.3.113)$$

onde $R = |\vec{x} - \vec{x}'|$. Observe que, pelo fato do modo zero $m = 0$ ser normalizável, recuperamos o caso newtoniano onde o potencial cai com o inverso da distância. No caso dos modos massivos, a função de Green cai exponencialmente com a distância.

Suponha agora, que temos uma partícula localizada na brana, em $z = 0$ [4]. A função de Green avaliada em outro ponto da brana ($z' = 0$) é:

$$G(x, x') = -\frac{\kappa}{4\pi R} - \frac{1}{4\pi R} \int_0^\infty dm [u_m(0)]^2 e^{-mR} \quad (2.3.114)$$

$u_m(0)$ são os auto estados avaliados em ($z' = 0$). Então, se desejamos calcular o potencial gravitacional para uma ponto distante da brana, admitimos que $R \gg \kappa^{-1}$. Pelo fato de que em (2.3.114) a exponencial é decrescente, a integral é significativa apenas para $m < m^*$, onde m^* é proporcional a $\frac{1}{R}$.

$$mR < m^* R \sim 1. \quad (2.3.115)$$

Segue destas condições que na integral em (2.3.114), podemos considerar que $m \ll \kappa$. Isso nos permite expandir as funções de Bessel em pequenos argumentos. É possível mostrar que em primeira aproximação, para m/κ temos

$$[u_m(0)]^2 = \frac{m}{\pi^2 \kappa}, \quad (2.3.116)$$

substituindo (2.3.116) em (2.3.114) encontramos a função de Green da seguinte forma;

$$G(x, z; x', z') = -\frac{\kappa}{4\pi R} \left[1 - \frac{1}{\pi^2 \kappa^2 R^2} \right]. \quad (2.3.117)$$

Esta função de Green representa o potencial gravitacional de um objeto massivo que está localizado na brana. Observamos que a função de Green devido ao modo zero nos fornece o potencial gravitacional quadridimensional a longas distâncias [5]. Os modos KK fornecem uma correção ao potencial.

Capítulo 3

Teoria Quântica Relativística.

Em 1900, Max Planck em sua pesquisa sobre a radiação térmica emitida por um corpo negro, propôs a revolucionária hipótese dos *quanta* de energia. Esta hipótese marca o surgimento da Mecânica Quântica MQ, cujas base foram estabelecidas na década de 1920 com os trabalhos de Erwin Schrodinger[40], Werner Heisenberg e Niels Bohr. Cinco anos após a hipótese de Planck, Einstein formula a Teoria da Relatividade Restrita (RR), afirmando que as leis da física são as mesmas para todos os referencias inerciais assim como a velocidade da luz. A Mecânica Quântica e a Teoria da Relatividade (Restrita e Geral) são os pilares onde repousam a física moderna.

Desde então, a idéia subsequente para os físicos da época era a de formular uma teoria quântica que fosse compatível com a RR, ou seja, uma Mecânica Quântica Relativística. Para tanto, seria preciso que ela seguisse alguns passos importantes [21]. A primeira proposta foi baseada nos trabalhos de Oskar Klein e Walter Gordon [19, 20], conhecida como teoria de Klein-Gordon, no entanto, esse modelo trouxe alguns resultados incompatíveis com um princípio básico da Mecânica Quântica, como por exemplo, não apresentar uma densidade de probabilidade positiva definida. Este problema foi resolvido com a proposta de Paul A. M. Dirac [43]. Em sua teoria, os postulados básicos da MQ coexistem em perfeita harmonia com os da RR. Além disso no limite

não-relativístico, recuperamos a já estabelecida teoria de Schrodinger.

Neste capítulo, faremos uma revisão das teorias de Klein-Gordon e de Dirac. Nossa maior ênfase, será tratar a Teoria de Dirac, estudando-a em dois contextos. Iremos primeiro, considera-la no espaço-tempo plano, em seguida, veremos a sua formulação para o caso do espaço-tempo curvo.

3.1 A Equação de Klein-Gordon.

A descrição de uma partícula quântica, no regime relativístico, deve satisfazer alguns critérios, de modo que suas propriedades sejam consistentes com ambas as teorias. Por exemplo, no que diz respeito a teoria quântica, a probabilidade da partícula ser encontrada em algum ponto deve ser conservada, além de ser positiva definida. Por sua vez, a Relatividade Restrita exige que a equação que governa a dinâmica da partícula deverá ser invariante frente transformações de Lorentz. Portanto, válida para todos os referenciais inerciais.

Em Mecânica Quântica, o estado de uma partícula é descrito por uma função de onda¹ ψ , que contém toda a informação do sistema. A dinâmica não relativística deste objeto é dada através da equação de Schrodinger, obtida a partir da equação fundamental para autovalores:

$$H\psi = E\psi, \quad (3.1.1)$$

onde H é o hamiltoniano, não-relativístico para uma partícula e E o respectivo autovalor de energia. O momento, a energia e as grandezas físicas, em geral, neste cenário, são levados ao *status* de operadores, os auto-valores dos operadores² são os possíveis resultados em uma medição. Estes operadores são definidos de acordo com o processo

¹Para não sobrecarregar a notação vamos escrever apenas ψ , lembrando que $\psi \equiv \psi(\vec{x}, t)$.

²Na Física, os valores obtidos em uma medição devem ser reais para que se tenha sentido físico. Em Mecânica Quântica, os operadores que fornecem valores reais são chamados de operadores Hermitianos, $A^\dagger = A$ tal que $A\psi = a\psi$, a é um valor real.

conhecido como “primeira quantização”:

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla} \quad \text{e} \quad E \rightarrow E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad (3.1.2)$$

onde $\vec{p}$ é o momento linear da partícula.

Sendo o hamiltoniano $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$, podemos usar esses operadores e mostrar que a equação de autovalores pode ser reescrita como:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x)\right)\psi, \quad (3.1.3)$$

esta é a conhecida equação de Schrodinger.

A equação de Schrodinger é a equação fundamental para a descrever o estado de um sistema físico ψ , além de sua evolução temporal no regime não-relativístico. Note que ela é de primeira ordem na derivada temporal e quadrática na derivada espacial. Por essa razão a equação não é invariante frente as transformações de Lorentz, desse modo, não é relativisticamente correta.

Na dinâmca relativística, a energia de uma partícula está associada com o momento linear relativístico $p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$ por meio da relação

$$p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = mc^2. \quad (3.1.4)$$

O que nos leva diretamente com a energia relativística:

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2. \quad (3.1.5)$$

A partir de (3.1.5), podemos escrever

$$E = +c\sqrt{m^2 c^2 + p^2} \quad \text{ou} \quad E = -c\sqrt{m^2 c^2 + p^2}. \quad (3.1.6)$$

Como veremos na interpretação das energias negativas está associada com as anti-partículas, que foi comprovada experimentalmente por Anderson em 1932.

Aplicando a regra de primeira quantização (3.1.2) na expressão relativística da energia, (3.1.5), encontramos:

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t}\psi = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4)\psi, \quad (3.1.7)$$

ou ainda, reorganizando

$$\left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi = 0, \quad (3.1.8)$$

onde $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ é o operador d'Alembertiano. Esta é a equação de Klein-Gordon [19, 20]. Note que é de segunda ordem tanto nas derivadas espaciais quanto nas temporais, tornando-a invariante frente as transformações de Lorentz.

Quando se resolve a equação de Klein-Gordon para um sistema atômico, como uma partícula em um potencial do tipo Coulomb, os resultados são compatíveis com a experiência, desde que a partícula não possua *Spin*. Esta é uma das características principais desta equação. Ela é satisfatória para a descrição de mésons, partículas escalares de Spin 0, mas falha na descrição de elétrons, que são partículas de Spin semi-inteiro 1/2.

3.1.1 A Densidade de Probabilidade.

A equação de Schrodinger possui uma propriedade muito importante, ela fornece a conservação da probabilidade, descrita por uma densidade³ ρ positiva-definida. Isto significa que, o fluxo de probabilidade obedece a uma equação de continuidade. Com isso, podemos pensar em um quadri-vetor corrente j^μ conservado que satisfaz a relação:

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0, \quad (3.1.9)$$

onde $\rho \equiv j^0$. Vamos verificar essa propriedade na teoria relativística de Klein-Gordon.

Começamos escrevendo a equação conjugada complexa

$$\left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi^* = 0, \quad (3.1.10)$$

agora, vamos multiplica-la pela esquerda por ψ , e (3.1.8) por ψ^* , também pela esquerda. Subtraindo os resultados, teremos

$$\psi^* \left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi - \psi \left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi^* = 0, \quad (3.1.11)$$

³Novamente, por questão de conveniência de notação vamos escrever apenas ρ lembrando que $\rho \equiv \rho(\vec{x}, t)$

ou ainda,

$$\psi^* \square \psi - \psi \square \psi^* = 0. \quad (3.1.12)$$

o que sugere que escrevamos essa equação como uma quadri-divergência de uma quadri-corrente

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (3.1.13)$$

onde $j_\mu = \psi^* \partial_\mu \psi - \psi \partial_\mu \psi^*$ é a quadri-corrente. Assim, podemos ver facilmente que a densidade de probabilidade se mostra como

$$\rho = \frac{1}{c^2} \left(\psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial t} \psi^* \right). \quad (3.1.14)$$

Desta equação podemos ver que ρ pode ser positiva e negativa, embora seja conservada. Essa densidade não é compatível com uma interpretação probabilística para a função de onda, embora tenha surgido tentativas de tratá-la como uma distribuição de carga. Esta foi uma das principais razões do abandono da equação de Klein-Gordon na descrição do elétron no regime relativístico.

3.2 A Equação de Dirac.

O fato da equação de Klein-Gordon possuir uma derivada segunda no tempo colocou em evidência uma grande dificuldade. Ela não possui uma densidade de probabilidade positiva-definida. Este fato motivou Dirac a propor uma equação diferencial que fosse também de primeira ordem no espaço. Dirac, então, propôs o seguinte modelo:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-i\hbar c \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta mc^2 \right) \psi \equiv H\psi, \quad (3.2.15)$$

onde os coeficientes $\vec{\alpha}$ e β não são números (se assim fossem, a relação para energia relativística não poderia ser verificada). Em consequência ψ , não pode ser interpretado como uma função escalar, uma vez que $\vec{\alpha}$ e β atuam sobre ele.

Dirac impôs que $\vec{\alpha}$ e β fossem matrizes hermitianas $N \times N$, conseqüentemente, ψ é interpretada como uma matriz coluna com N elementos:

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{bmatrix}. \quad (3.2.16)$$

Assim (3.2.15) é uma equação matricial. Para que esta equação tenha sentido físico, ela deve satisfazer três importantes exigências:

1. Ser invariante sobre as transformações de Lorentz.
2. Fornecer a relação entre energia e momento.
3. Ter uma probabilidade positiva definida.

O segundo item exige que a equação de Dirac satisfaça uma relação do tipo (3.1.7). Assim, considerando a hamiltoniana de Dirac na forma $H = c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2$ e desenvolvendo o seu quadrado, temos como resultado

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \left[-\hbar^2 c^2 \frac{\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i}{2} \nabla_i \nabla_j - i\hbar mc^2 (\alpha^i \beta + \beta \alpha^i) \nabla_i + \beta^2 m^2 c^4 \right] \psi. \quad (3.2.17)$$

Comparando essa equação com (3.1.7), chegamos a algumas identidades envolvendo as matrizes α^i e β

$$\begin{cases} \alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i = 2\delta_{ij}, \\ \alpha^i \beta + \beta \alpha^i = 0, \\ (\alpha^i)^2 = \beta^2 = 1, \end{cases} \quad (3.2.18)$$

onde 1 representa a matriz identidade. Essas propriedades definem uma álgebra para as matrizes $\vec{\alpha}$ e β , a álgebra de Clifford. Para estabelecer a hermiticidade da hamiltoniana, essas matrizes devem ser hermitianas

$$\begin{cases} (\alpha^i)^\dagger = \alpha^i \\ \beta^\dagger = \beta \end{cases}. \quad (3.2.19)$$

Embora já estabelecida algumas propriedades das chamadas matrizes de Dirac, ainda não sabemos a sua forma. Devemos ter 4 matrizes que sejam hermitianas,

anticomutem e cujo quadrado seja a unidade. Fica claro que essas matrizes não podem ser 2×2 , uma vez que só existem 3 matrizes com esses requisitos, que são as matrizes de Pauli [45].

Para uma dimensão mínima, que seja possível construir esse conjunto de matrizes sendo elas hermitianas, os seus autovalores devem ser reais ± 1 . Das relações de anticomutação podemos concluir que elas possuem traço nulo, de fato,

$$\alpha^i = -\beta \alpha^i \beta \quad (3.2.20)$$

ou seja,

$$\text{Tr}(\alpha^i) = \text{Tr}(-\beta \alpha^i \beta) = -\text{Tr}(\alpha^i) = 0 \quad (3.2.21)$$

uma consequência direta dessa propriedade, é que N deve ser par, para que os números de valores próprios sejam⁴ $+1$ e -1 .

Como $N = 2$ está excluído, o próximo menor número par é $N = 4$. Assim nossas matrizes são 4×4 , que podem ser escritas numa forma compacta como segue:

$$\alpha^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (3.2.22)$$

onde σ^i são as matrizes de Pauli:

$$\sigma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.2.23)$$

Desta maneira, consideramos ψ como sendo uma matriz coluna (*espinor*) com 4 elementos (*componentes*)

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix}. \quad (3.2.24)$$

Em MQ não-relativística é comum usarmos o formalismo de Pauli de duas componentes [44]. Podemos também usá-lo aqui, no regime relativístico. Neste caso,

⁴Outra exigência para que essas matrizes sejam pares, é o fato de preservar a simetria entre partícula e antipartícula

decompomos o espinor de quatro componentes visto acima em um espinor de duas componentes, de maneira que seja satisfeita a seguinte igualdade,

$$\psi = \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix}, \quad (3.2.25)$$

onde

$$\varphi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \chi = \begin{bmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix}. \quad (3.2.26)$$

Este formalismo tem uma grande importância, uma vez que nos ajuda a interpretar as soluções de energia negativa, além de ser usado para a obtenção do limite não-relativístico.

3.2.1 A Densidade de Probabilidade.

O primeiro passo para verificar a densidade de probabilidade é que tenhamos a equação hermitiana conjugada de Dirac. Usando o fato de suas matrizes $\vec{\alpha}$ e $\vec{\beta}$ serem hermitianas, obtemos uma equação na forma⁵

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} = \psi^\dagger \left(i\hbar \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta mc^2 \right), \quad (3.2.27)$$

agora, vamos seguir alguns passos. Vamos multiplicar a equação (3.2.15) pela esquerda por $\psi^\dagger$ e a equação hermitiana conjugada acima por ψ pela direita, de modo que tenhamos como resultado o seguinte sistema,

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi) = \psi^\dagger \left(-i\hbar \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta mc^2 \right) \psi & (i) \\ -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi) = \psi^\dagger \left(i\hbar \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta mc^2 \right) \psi & (ii) \end{cases}$$

tomando (i) – (ii), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi) + \vec{\nabla} \cdot (\psi^\dagger c \vec{\alpha} \psi) = 0. \quad (3.2.28)$$

⁵Lembrando que o operador $\vec{\nabla}$ atua no Spinor $\psi^\dagger$ para a equação de Dirac hermitiana conjugada.

Esta equação tem a forma de uma equação de continuidade se especificamos a quadricorrente $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$, onde a densidade de probabilidade e a corrente de probabilidade são definidas como

$$\rho = \psi^\dagger \psi \quad , \quad \vec{j} = \psi^\dagger c \vec{\alpha} \psi. \quad (3.2.29)$$

Observe que $\rho = \psi^\dagger \psi$ é positiva-definida, isso permite a sua interpretação como uma densidade de probabilidade. Além disso, vemos que $\vec{j}$ é um 3-vetor invariante sob rotações espaciais tridimensionais.

Podemos ver que a equação de Dirac resolve de imediato o problema da densidade de probabilidade, este foi o principal motivo de adota-la como uma direção correta para a Mecânica Quântica Relativística.

3.2.2 A Covariância da Equação de Dirac.

Considere dois referenciais inerciais $\mathbf{O}$ e $\mathbf{O}'$, as equações da física devem possuir a mesma forma em $\mathbf{O}$ e $\mathbf{O}'$, embora estejam expressas em diferentes coordenadas espaço-temporais. Essa propriedade é conhecida como *covariância* e decorre do Postulado I da Relatividade Restria [18]. Aqui, vamos considerar que as coordenadas para o sistema $\mathbf{O}$ sejam descritas por x^μ e para $\mathbf{O}'$ por x'^μ , a conexão entre elas é feita por meio da seguinte expressão

$$(x')^\nu = \Lambda_\mu^\nu x^\mu, \quad (3.2.30)$$

onde Λ_μ^ν é a chamada *matriz de transformação de Lorentz* [18], e fornece a relação entre os diferentes sistemas de coordenadas. Esta matriz possui elementos que são funções apenas das velocidades relativas e das orientações espaciais dos observadores dos dois referenciais.

O primeiro passo para mostrar a covariância da equação de Dirac, será escrever a equação (3.2.15) na notação quadri-dimensional, para isso vamos multiplicá-la por $\frac{\beta}{c}$,

o que resulta em:

$$\left[i\hbar \left(\beta \frac{\partial}{\partial x^0} + \beta \alpha_i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) - mc \right] \psi(x) = 0,$$

ou

$$i\hbar \left(\gamma^0 \frac{\partial}{\partial x^0} + \gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \psi(x) - mc\psi(x) = 0,$$

onde $\gamma^0 = \beta$ e $\gamma^i = \beta \alpha_i$ são as matrizes de Dirac quadri-dimensionais, neste caso, podemos reescrevê-la como:

$$(i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - mc) \psi(x) = 0, \quad (3.2.31)$$

onde

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix}.$$

As matrizes⁶ γ^i são unitárias $[(\gamma^i)^{-1} = \gamma^{i\dagger}]$ e anti-hermitianas $\gamma^{i\dagger} = -\gamma^i$, enquanto que γ^0 é unitária $(\gamma^0)^{-1} = 1$ e hermitina $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$. Além disso, essas matrizes possuem um importante regra de anti-comutação:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \quad (3.2.32)$$

A notação na equação (3.2.31) não implica a prova da sua covariância automaticamente. Vamos considerá-la como sendo a equação correspondente ao referencial **O**. Agora, é natural que tenhamos a equação equivalente para o referencial **O'**

$$(i\hbar \gamma'^\mu \partial'_\mu - mc) \psi'(x') = 0. \quad (3.2.33)$$

Neste referencial, as matrizes γ'^μ satisfazem as mesmas relações de anti-comutação de γ^μ , além de preservarem as propriedades $\gamma'^{0\dagger} = \gamma'^0$ e $\gamma'^{i\dagger} = -\gamma'^i$. Assim, concluímos que elas estão relacionadas por uma transformação de equivalência,

$$\gamma'^\mu = U^{-1} \gamma^\mu U \quad (3.2.34)$$

⁶Uma revisão mais detalhada sobre as matrizes de Dirac será feita no apêndice B.

onde U é uma matriz unitária.

A covariância da equação de Dirac depende diretamente da transformação da função de onda $\psi(x)$ no referencial $\mathbf{O}$ para $\psi'(x')$ no referencial $\mathbf{O}'$. Esta transformação deve ser linear, uma vez que tanto a equação de Dirac quanto as transformações de Lorentz são lineares nas coordenadas do espaço-tempo. Assim ela possui a seguinte forma:

$$\psi'(x') = \psi'(\Lambda x) = S(\Lambda) \psi(x) = S(\Lambda) \psi(\Lambda^{-1}x'), \quad (3.2.35)$$

lembrando que $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$. O objeto $S(\Lambda)$ é uma matriz 4×4 que depende apenas das velocidades e orientações espaciais referentes aos observadores em $\mathbf{O}$ e $\mathbf{O}'$, e atua sobre a quadri-componente do vetor coluna $\psi(x)$.

Segundo o princípio da covariância, admitimos que matriz $S(\Lambda)$ possui inversa $S^{-1}(\Lambda)$. Esta propriedade é de fundamental importância, pois permite ao observador em $\mathbf{O}$ comparar a função de onda $\psi(x)$ do seu referencial com a função de onda $\psi'(x')$ do referencial $\mathbf{O}'$. A relação fundamental é a seguinte;

$$\psi(x) = S^{-1}(\Lambda) \psi'(x') = S^{-1}(\Lambda) \psi'(\Lambda x), \quad (3.2.36)$$

usando a equação (3.2.35), teremos que

$$\psi(x) = S(\Lambda^{-1}) \psi'(x') = S(\Lambda^{-1}) \psi'(\Lambda x), \quad (3.2.37)$$

comparando essa equação com (3.2.35) encontramos que

$$S^{-1}(\Lambda) = S(\Lambda^{-1}). \quad (3.2.38)$$

Além desta propriedade, este operador possui outras importantes relações com as matrizes de Dirac⁷,

$$S(\Lambda) \gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) \Lambda^\nu_\mu = \gamma^\nu, \quad (3.2.39)$$

⁷Ver apêndice A.

e

$$S^{-1}(\Lambda) = \gamma^0 S(\Lambda)^\dagger \gamma^0. \quad (3.2.40)$$

É válido lembrar que, embora as matrizes γ^μ e $S(\Lambda)$ sejam matrizes 4×4 , elas atuam em espaços diferentes, x e $\psi(x)$ respectivamente.

Agora, com essas definições, podemos mostrar a covariância da equação de Dirac, de maneira que tenhamos

$$\left[i\hbar \left(S(\Lambda) \gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) \Lambda_\mu^\nu \right) \frac{\partial}{\partial x'^\nu} - mc \right] \psi'(x') = 0. \quad (3.2.41)$$

Com esta expressão, fica fácil perceber que a equação de Dirac satisfaz o princípio da covariância. Note que o primeiro termo dentro do colchetes traz por definição γ^ν em (3.2.39), assim, concluímos que ela possui a mesma forma em ambos os referenciais $\mathbf{O}$ e $\mathbf{O}'$.

3.3 Soluções para a Equação de Dirac.

Nesta seção, vamos discutir as soluções da equação de Dirac para alguns sistemas físicos. Começamos pela situação da partícula livre e depois tomaremos o caso em que a partícula esteja sob a influência de um potencial. Aqui, nosso foco será tratar de um potencial em especial, o chamado potencial central, que é situação mais comum para as soluções da equação de Dirac. Um exemplo de um sistema descrito com essa configuração é um átomo com um elétron ou o átomo de Hidrogênio.

3.3.1 A partícula livre.

A situação em que a partícula se encontra livre de um potencial externo é a forma mais simples de interpretarmos as soluções para a equação de Dirac. Neste quadro, podemos ver de forma clara os estados de energia positiva e negativa, e é claro, as possíveis orientações do *spin*. Supomos que a forma geral para solução da partícula

livre seja tipo onda plana, começamos com um *ansatz* do tipo:

$$\psi(\vec{x}, t)^{(\pm)} = N e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{x} \mp Et)} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (3.3.42)$$

Aqui, os subscritos $(\pm)$ denotam os estados positivos/negativos da energia. N é uma constante a ser determinada pela condição de normalização e E definida em (3.1.2), é a energia da partícula. A componente φ descreve o estado de energia positiva e χ o de energia negativa. Substituindo a função de onda acima em (3.2.15), temos a equação matricial

$$i\hbar \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \\ \frac{\partial \chi}{\partial t} \end{pmatrix} = \left[c \begin{pmatrix} 0 & (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \varphi \\ (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \chi & 0 \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix},$$

que pode ser separada em duas equações:

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = c(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})\chi + mc^2\varphi \\ i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} = c(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})\varphi - mc^2\chi \end{cases}. \quad (3.3.43)$$

É fácil ver que podemos expressar χ em termos de φ

$$\chi = \frac{c(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})}{E + mc^2} \varphi, \quad (3.3.44)$$

assim, o estado de energia positiva pode ser expresso por:

$$\psi(\vec{x}, t)^{(+)} = N e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{c(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})}{E + mc^2} \end{pmatrix} \varphi. \quad (3.3.45)$$

A constante N é obtida pela condição de normalização $\langle \psi^\dagger | \psi \rangle = 1$. Assumindo que $\varphi^\dagger \varphi = 1$, teremos que:

$$N^2 \left(1 + \frac{c^2 (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2}{(E + mc^2)^2} \right) = 1$$

usando a identidade $(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})^2 = \vec{a}^2$, concluímos que

$$N = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2E}}. \quad (3.3.46)$$

É comum definir o chamado *espinor de energia positiva* de Dirac como

$$u(\vec{p}, s) \equiv \sqrt{\frac{E + mc^2}{2E}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{c(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})}{E + mc^2} \end{pmatrix} \varphi. \quad (3.3.47)$$

o espinor de duas componentes φ descreve as duas possíveis orientações do spin da partícula ‘spin pra cima’ e ‘spin pra baixo’ respectivamente

$$\varphi^{(\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \varphi^{(-\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.3.48)$$

por fim, temos a forma explícita da solução de energia positiva normalizada

$$\psi(\vec{x}, t)^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2E}} u(\vec{p}, s) e^{\frac{i}{\hbar} t \vec{p} \cdot \vec{x}}. \quad (3.3.49)$$

O procedimento para se obter as soluções de energia negativa é o mesmo utilizado acima, de maneira que vamos apenas apresenar sua forma e descrever a motivação de Dirac para sua interpretação. A solução encontrada por Dirac é do tipo:

$$\psi(\vec{x}, t)^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2E}} v(\vec{p}, s) e^{\frac{i}{\hbar} t \vec{p} \cdot \vec{x}} \quad (3.3.50)$$

onde $v(\vec{p}, s)$ é o *espinor de energia negativa* de Dirac, dado explicitamente como:

$$v(\vec{p}, s) \equiv \sqrt{\frac{E + mc^2}{2E}} \begin{pmatrix} \frac{c(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})}{E + mc^2} \\ 1 \end{pmatrix} \chi, \quad (3.3.51)$$

onde o espinor de duas componentes χ representa os estados de energia negativa, com duas possíveis orientações do spin:

$$\chi^{(\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \chi^{(-\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (3.3.52)$$

Para interpretar as soluções de energia negativa, Dirac se baseou no princípio da exclusão de Pauli. Ele conjecturou a existência de um “mar” de energia negativa repleto de elétrons. Seria impossível que os elétrons de energia positiva caíssem para os estados de energia negativa, no entanto, é possível que um fóton altamente energético remova elétrons desse estado de energia negativa, para os estados de energia positiva, onde

assim poderiam ser observados. Podemos ver isso mais claramente de acordo da figura (3.1).

No entanto, o “buraco” deixado pelo elétron seria passível de ser observado na forma de uma partícula que tenha todas as propriedades de um elétron, mas com carga positiva chamado de pósitron. Essa conjectura foi observada experimentalmente por Carl Anderson 1932. Depois dessa confirmação empírica, a equação de Dirac se consolidou como o alicerce da Mecânica Quântica Relativística para partícula de spin $1/2$.

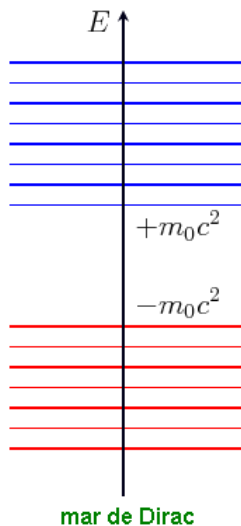


Figura 3.1: A interpretação para as soluções de energia negativa.

3.3.2 Potenciais Centrais. O Átomo de Hidrogênio.

Vamos agora considerar que a partícula está submetida a um potencial central $V(|\vec{x}|)$ como um potencial coulombiano. Neste caso a equação de Dirac assume a seguinte forma

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2 + V(r)) \psi. \quad (3.3.53)$$

Para o estudo de sistemas com essa configuração, é de fundamental importância considerar algumas propriedades de simetria para equação de Dirac.

Começamos lembrando da invariância rotacional que um sistema com simetria esférica possui e como ela é descrita na Mecânica Quântica não-relativística. Neste quadro, o momento angular $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ comuta com o hamiltoniano de potenciais centrais, isto decorre do fato que $\vec{L}$ comuta com $\vec{p}^2$ e também com $\vec{x}$. Entretanto, este fato não ocorre para o caso relativístico. Olhando para (3.3.53), nota-se $[\beta, \vec{L}] = 0$, no entanto, $[\vec{\alpha} \cdot \vec{p}, \vec{L}] \neq 0$ sendo assim, o $\vec{L}$ não comuta com o hamiltoniano H . Concluimos que o momento angular não é uma grandeza conservada para partículas de *spin* 1/2.

O mesmo acontece para o caso do operador de *spin* $\vec{S} = \hbar/2\vec{\sigma}$, note que ele também não comuta com H . Contudo, o momento angular total $\vec{J}$ comuta com o hamiltoniano, ou seja, o hamiltoniano conserva o momento angular total mas não conserva o momento angular orbital nem o de *spin* separadamente.

Outra propriedade importante é que as soluções sejam simétricas por paridade⁸, uma vez que $V(\vec{x}) = V(|\vec{x}|)$. Isto significa que devemos ter $\psi(-\vec{x}) = \pm\psi(\vec{x})$, porém, este fato nos conduz a uma sutileza na equação de Dirac. O operador de paridade π diz respeito apenas a reflexão das coordenadas, de fato

$$\pi^\dagger \vec{x} \pi = -\vec{x} \quad \text{e} \quad \pi^\dagger \vec{p} \pi = -\vec{p}. \quad (3.3.54)$$

No entanto, esta propriedade não nos fala muito quando a paridade é sobre espiniores. Nesta situação, o operador paridade deve ser dotado de um operador unitário U_p (matriz 4×4), no espaço dos espiniores que torne o hamiltoniano invariante sob transformação de paridade, podemos ver esse operador como:

$$\mathcal{P} \equiv \pi U_p. \quad (3.3.55)$$

Nota-se que a matriz U_p possui as seguintes propriedades:

$$U_p^\dagger \vec{\alpha} U_p = -\vec{\alpha} \quad , \quad U_p^\dagger \beta U_p = \beta \quad , \quad U_p^2 = 1. \quad (3.3.56)$$

⁸Aqui não estamos tratando apenas de casos com simetria esférica e sim para o caso geral.

Perceba que a matriz de Dirac β é consistente com essas condições, ou seja, podemos considerá-la como nosso operador U_p , note que $U_p = \beta^\dagger = \beta$. Portanto, os autoestados do hamiltoniano H devem ser os mesmos autoestados de paridade de $\vec{J}^2$ e J_z . Para nosso conforto, as autofunções que satisfazem essas condições são as bem conhecidas *funções angulares de spin* [44] de duas componentes $\mathcal{Y}_l^{j,m}(\theta, \phi)$ com $j = l \pm 1/2$.

A Estrutura da Solução.

De maneira geral, nosso problema ainda consiste em resolver a equação de autovalores descrito por (3.1.1), onde a hamiltonina é agora dada por $H = c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2 + V(r)$. Sabemos que a função de onda de quatro componentes é decomposta em duas funções de onda de duas componentes

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}. \quad (3.3.57)$$

Com as propriedades de simetria discutida anteriormente, concluimos que ψ seja autofunção de $\vec{J}^2$ e J_z , além disso, a conservação da paridade nos leva a condição $\beta\psi(-\vec{x}) = \pm\psi(\vec{x})$, de modo que possamos ter:

$$\begin{bmatrix} \psi_1(-\vec{x}) \\ -\psi_2(-\vec{x}) \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} \psi_1(\vec{x}) \\ \psi_2(\vec{x}) \end{bmatrix}. \quad (3.3.58)$$

Considerando um j dado, temos dois possíveis valores de l , um sendo par e outro ímpar, de modo que a paridade de $\mathcal{Y}_l^{j,m}(\theta, \phi)$ é simplesmente definida por $(-1)^l$.

Devido a simetria esférica do potencial, a função de onda descrita pelo espinor deve conter duas partes, uma radial e a outra angular. Neste caso, podemos escrevê-lo como:

$$\psi_A(\vec{x}) = \begin{bmatrix} f_A(r)\mathcal{Y}_{j-1/2}^{j,m}(\theta, \phi) \\ -ig_A(r)\mathcal{Y}_{j+1/2}^{j,m}(\theta, \phi) \end{bmatrix}. \quad (3.3.59)$$

Esta é uma possível solução par (ímpar) se consideramos $l = j - 1/2$ sendo par (ímpar), outra possível solução é

$$\psi_B(\vec{x}) = \begin{bmatrix} f_B(r)\mathcal{Y}_{j+1/2}^{j,m}(\theta, \phi) \\ -ig_B(r)\mathcal{Y}_{j-1/2}^{j,m}(\theta, \phi) \end{bmatrix}, \quad (3.3.60)$$

que é a solução ímpar (par) caso $j = l + 1/2$ seja par (ímpar). As funções $f(r)$ e $g(r)$ são as soluções da parte radial, o fator $-i$ foi colocado por conveniência. Notemos uma propriedade importante do espinor. Embora ele tenha paridade e os números quânticos j e m sejam bem definidos, eles misturam os valores de l , assim, concluímos que o momento angular orbital não é mais um bom número quântico, quando consideramos a equação de Dirac para potenciais centrais.

Nosso objetivo agora, é escrever (3.3.53) como uma equação diferencial para as funções $f(r)$ e $g(r)$. Considerando os espinores temos:

$$[E - mc^2 - V(r)]\psi_1(\vec{x}) - c(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})\psi_2(\vec{x}) = 0, \quad (3.3.61)$$

e

$$[E - mc^2 - V(r)]\psi_2(\vec{x}) - c(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})\psi_1(\vec{x}) = 0. \quad (3.3.62)$$

Isto sugere que consideramos separadamente as duas possíveis escolhas para $\psi_1(\vec{x})$ e $\psi_2(\vec{x})$, isto é

$$\psi_1(\vec{x}) = f_A(r)\mathcal{Y}_{j-1/2}^{j,m}(\theta, \phi) \quad \text{e} \quad \psi_2(\vec{x}) = -ig_A(r)\mathcal{Y}_{j+1/2}^{j,m}(\theta, \phi), \quad (3.3.63)$$

ou

$$\psi_1(\vec{x}) = f_B(r)\mathcal{Y}_{j+1/2}^{j,m}(\theta, \phi) \quad \text{e} \quad \psi_2(\vec{x}) = -ig_B(r)\mathcal{Y}_{j-1/2}^{j,m}(\theta, \phi). \quad (3.3.64)$$

Nossa atenção agora é voltada para a atuação de $\vec{\sigma} \cdot \vec{p}$ nos espinores. Podemos reescrevê-lo de modo que nos forneça apenas uma dependência em r , neste caso teremos uma expressão do tipo:

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} &= \frac{1}{r^2} (\vec{\sigma} \cdot \vec{x}) (\vec{\sigma} \cdot \vec{x}) (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \\ &= \frac{1}{r^2} (\vec{\sigma} \cdot \vec{x}) [\vec{x} \cdot \vec{p} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{x} \times \vec{p})] \\ &= (\vec{\sigma} \cdot \hat{r}) \left[\hat{r} \cdot \vec{p} + i\vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{L}}{r} \right], \end{aligned} \quad (3.3.65)$$

onde $\hat{r} \cdot \vec{p} \rightarrow \hat{r} \cdot (-i\hbar \vec{\nabla}) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial r}$. Agora, o resultado de $\vec{\sigma} \cdot \hat{r}$ assim como $\vec{\sigma} \cdot \vec{L}$ aplicado nas funções angulares podem ser calculadas diretamente. A seguir apresentamos consisamente esses resultados:

$$1. (\vec{\sigma} \cdot \hat{r}) \mathcal{Y}_l^{j,m}(\theta, \phi) = -\mathcal{Y}_l^{j,m}(\theta, \phi)$$

- Este fato decorre da natureza pseudoescalar de $\vec{\sigma} \cdot \hat{r}$, que muda l para seu outro valor permitido de paridade oposta.
- Concluimos que $\mathcal{Y}_l^{j,m}(\theta, \phi)$ é autoestado de $\vec{\sigma} \cdot \hat{r}$ com autovalor -1 .

2. Considerando $\vec{\sigma} \cdot \vec{L} = \vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2$ temos

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma} \cdot \vec{L}) \mathcal{Y}_l^{j,m}(\theta, \phi) &= \left(j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right) \hbar^2 \mathcal{Y}_l^{j,m}(\theta, \phi), \quad (3.3.66) \\ &= \kappa(j, l) \mathcal{Y}_l^{j,m}(\theta, \phi). \end{aligned}$$

- Os possíveis valores de κ são:

$$\kappa = -j - \frac{3}{2} = -(\lambda + 1) \quad \text{para} \quad l = j + \frac{1}{2}, \quad (3.3.67)$$

e

$$\kappa = j - \frac{1}{2} = (\lambda - 1) \quad \text{para} \quad l = j - \frac{1}{2}. \quad (3.3.68)$$

- Perceba que o efeito do fator $\vec{\sigma} \cdot \hat{r}$ é trocar $l = j \pm 1/2$ por $l = j \mp 1/2$ na parte angular do espinor.

Assim, levando em conta essas considerações, a equação de Dirac para cada escolha A e B resulta em:

$$\begin{cases} [E - mc^2 - V(r)] f_A(r) - \hbar c \left(\frac{d}{dr} + \frac{\lambda+1}{r} \right) g_A(r) = 0, \\ [E + mc^2 - V(r)] g_A(r) - \hbar c \left(\frac{d}{dr} - \frac{\lambda-1}{r} \right) f_A(r) = 0, \end{cases} \quad (3.3.69)$$

e

$$\begin{cases} [E - mc^2 - V(r)] f_B(r) - \hbar c \left(\frac{d}{dr} - \frac{\lambda-1}{r} \right) g_B(r) = 0, \\ [E + mc^2 - V(r)] g_B(r) - \hbar c \left(\frac{d}{dr} + \frac{\lambda+1}{r} \right) f_B(r) = 0. \end{cases} \quad (3.3.70)$$

Note que as equações em (3.3.69) se transformam nas equações (3.3.70), apenas trocando $\lambda \leftrightarrow -\lambda$. Sendo assim, podemos abandonar o índice A .

Estas são equações diferenciais ordinárias de primeira ordem acopladas, cujas soluções $f(r)$ e $g(r)$ estão sujeitas a condições de contorno que nos fornecerão autovalores de energia E .

O Átomo de Hidrogênio.

O exemplo mais simples de aplicação da equação de Dirac para um potencial com simetria esférica é o átomo de Hidrogênio. Um elétron e um próton interagindo por meio de um potencial coulumbiano:

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r}, \quad (3.3.71)$$

onde Z é o número atômico e e é a carga do elétron. Nosso objetivo será determinar o espectro de energia para o átomo de Hidrogênio na teoria relativística de Dirac ⁹. Substituindo o potencial tipo Coulomb nas equações (3.3.69) obtemos

$$\begin{cases} \left[E - m + \frac{Ze^2}{r} \right] f_A(r) - \left(\frac{d}{dr} + \frac{\lambda+1}{r} \right) g_A(r) = 0 \\ \left[E + m + \frac{Ze^2}{r} \right] g_A(r) - \left(\frac{d}{dr} - \frac{\lambda-1}{r} \right) f_A(r) = 0. \end{cases} \quad (3.3.72)$$

Primeiro faremos uma substituição de variáveis. Vamos considerar as quantidades

$$\varsigma \equiv \frac{E}{m} \quad \text{e} \quad x \equiv mr. \quad (3.3.73)$$

É claro que neste caso $dx = mdr$. Sendo assim teremos as seguintes equações

$$\begin{cases} \left[\varsigma - 1 + \frac{Z\alpha}{x} \right] f(x) - \left[\frac{d}{dx} + \frac{\lambda+1}{x} \right] g(x) = 0 \text{ (I)} \\ \left[\varsigma + 1 + \frac{Z\alpha}{x} \right] g(x) + \left[\frac{d}{dx} - \frac{\lambda+1}{x} \right] f(x) = 0 \text{ (II)} \end{cases}$$

⁹Apenas nesse processo iremos admitir por hora as unidades naturais $\hbar = c = 1$, por questão apenas de conveniência de cálculo.

onde $\alpha = e^2/\hbar c$ é a constante de estrutura fina. Vamos considerar o comportamento das soluções para $x \rightarrow \infty$. Neste limite I torna-se

$$(\varsigma - 1) f - \frac{dg}{dx} = 0. \quad (3.3.74)$$

Substituindo em II obtemos a equação diferencial para $g(x)$

$$\frac{dg^2}{dx^2} = (1 - \varsigma^2), \quad (3.3.75)$$

claramente existe uma equação desta mesma forma para $f(x)$. Sabemos que classicamente exige-se que a energia seja positiva, neste sentido $(1 - \varsigma^2)$ é garantidamente positivo, deste modo quando exigimos que $g(x)$ seja normalizável quando $x \rightarrow \infty$ devemos ter duas possíveis soluções para $f(x)$ e $g(x)$

$$f(x) = e^{-(1-\varsigma^2)^{1/2}x} \quad \text{para } x \rightarrow \infty \quad (3.3.76)$$

e

$$g(x) = e^{-(1+\varsigma^2)^{1/2}x} \quad \text{para } x \rightarrow \infty. \quad (3.3.77)$$

Agora, vamos escrever $f(x)$ e $g(x)$ como série de potências, onde cada uma função possui seu próprio coeficiente de expansão. Assim escrevemos:

$$f(x) = e^{-(1-\varsigma^2)^{1/2}x} x^\vartheta \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \quad \text{e} \quad g(x) = e^{-(1+\varsigma^2)^{1/2}x} x^\vartheta \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \quad (3.3.78)$$

aqui usamos alguma potência geral ϑ tanto para $f(x)$ quanto para $g(x)$. Substituindo essas expressões em I e II e primeiramente considerando os termos proporcionais a $x^{\vartheta-1}$ encontramos de maneira direta, o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} (Z\alpha) a_0 - (\vartheta + \lambda + 1) b_0 = 0, \\ (\vartheta - \gamma + 1) a_0 = 0. \end{cases} \quad (3.3.79)$$

Os coeficientes a_0 e b_0 podem ser diferentes de zeros e o determinante do sistema é nulo

$$(Z\alpha)^2 + (\vartheta + 1 + \lambda)(\vartheta + 1 - \lambda) = 0. \quad (3.3.80)$$

De maneira que o valor de ϑ seja expresso em termos de λ , assim teremos que

$$\vartheta = -1 \pm [\lambda^2 - (Z\alpha)^2]^{1/2}. \quad (3.3.81)$$

Note que esse procedimento só funciona se $\lambda \equiv j + 1/2$ e igual ou maior do que $(Z\alpha)^2$. Assim, no caso em que λ é da ordem da unidade, o método falha para $Z\alpha \sim 1$, isto é, para campo coulumbianos fortes com $Z \approx 137$. Contudo, na maioria dos casos $Z\alpha \ll 1$. Agora, se considerarmos a solução (3.3.81) com sinal negativo, o termo entre colchetes também seria da ordem da unidade. Deste modo escolhemos a solução com o sinal positivo e com isso teremos que:

$$\vartheta = -1 + \left[\left(j + \frac{1}{2} \right)^2 - (Z\alpha)^2 \right]^{1/2}. \quad (3.3.82)$$

Note que quando $j = 1/2$ ainda teremos uma singularidade na origem, uma vez que $\vartheta < 0$, contudo essa singularidade é fraca e integrável em todo espaço, então devemos começar a estudá-la por um valor de a_0 , determinado pelas condições de normalização e $b_0 = \frac{a_0(Z\alpha)}{(\vartheta + \lambda + 1)}$.

Voltemos as equações (3.3.78), vamos substituí-las novamente em $(\star)$ e $(\star\star)$, agora, vamos considerar as potências mais altas e da ordem de x^ϑ . Encontramos as seguintes equações

$$(1 - \varsigma) a_{i-1} - Z\alpha a_i - (1 - \varsigma^2)^{1/2} b_{i-1} + (\lambda + 1 + \vartheta + i) b_i = 0, \quad (3.3.83)$$

e

$$(1 + \varsigma) b_{i-1} - Z\alpha b_i - (1 - \varsigma^2)^{1/2} a_{i-1} + (\lambda - 1 - \vartheta - i) a_i = 0. \quad (3.3.84)$$

Multiplicando (3.3.83) por $(1 + \vartheta)^{1/2}$ e (3.3.84) por $(1 - \vartheta)^{1/2}$ de maneira que tenhamos uma razão entre os coeficientes b_i e a_i

$$\frac{b_i}{a_i} = \frac{Z\alpha (1 + \varsigma)^{1/2} + (\lambda - 1 - \vartheta - 1) (1 - \varsigma)^{1/2}}{Z\alpha (1 - \varsigma)^{1/2} + (\lambda + 1 + \vartheta + 1) (1 + \varsigma)^{1/2}}. \quad (3.3.85)$$

Esta relação nos diz que, se temos grandes valores de x o que resulta em i também sendo grande, os termos a_i e b_i são proporcionais um ao outro, neste sentido as séries

descritas por (3.3.78) crescerão exponencialmente e não serão normalizáveis. Para evitar isso, é necessário que as séries sejam finitas.

Suponhamos que $a_i = b_i = 0$ para um valor de $i = n' + 1$. Desta forma (3.3.83) e (3.3.84) nos dão

$$(1 - \varsigma) a_{n'} - (1 - \varsigma^2)^{1/2} b_{n'} = 0 \quad (3.3.86)$$

e

$$(1 + \varsigma) b_{n'} - (1 - \varsigma^2)^{1/2} a_{n'} = 0. \quad (3.3.87)$$

Considerando a mesma razão entre os coeficientes que determinam o fim da série, teremos

$$\frac{b_{n'}}{a_{n'}} = \left[\frac{1 - \varsigma}{1 + \varsigma} \right]^{1/2}. \quad (3.3.88)$$

Combinando (3.3.85) com (3.3.86) e (3.3.87) teremos que

$$(1 + \gamma + n') (1 - \varsigma^2)^{1/2} = Z\alpha\varsigma \quad (3.3.89)$$

resolvendo para ς , podemos obter os auto-valores (espectro) de energia

$$E = mc^2 \left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{\left[\sqrt{(j + 1/2)^2 - (Z\alpha)^2} + n' \right]^2} \right]^{-1/2}. \quad (3.3.90)$$

Aqui, percebe-se que para qualquer número quântico n' dado, os auto-valores de energia dependem do momento angular total j , assim, a energia do estado de $j = 1/2$ será a mesma independente deste valor está acoplado de $l = 0$ ou $l = 1$ para o spin $1/2$.

Tomando a ordem mais baixa em $(Z\alpha)$ teremos o espectro de energia na forma

$$E \approx mc^2 - \frac{1}{2} \frac{mc^2 (Z\alpha)^2}{n^2}, \quad (3.3.91)$$

onde $n = j + 1/2 + n'$. Percebe-se que esta expressão é simplesmente a série de Balmer com a adição da energia de repouso com n sendo o número quântico principal. Se consideramos as ordens mais elevadas de $(Z\alpha)$ teremos as correções relativísticas para a energia cinética e à interação spin-órbita.

3.3.3 O Limite não-relativístico.

Por questões de consistências a equação de Dirac, no limite não relativístico, ela deve satisfazer a bem conhecida equação de Pauli, muitas vezes chamada de Pauli-Schrodinger. Neste quadro, a função de onda de quatro componentes é decomposta em duas funções de onda, de duas componentes, conhecidas como *upper* (grandes componentes) e *lower* (pequenas componente).

A hamiltoniana contém a matriz α , que será mais tarde conhecida como operador *ímpar*. Essa matriz¹⁰ tem a propriedade de "misturar" os estado de energia positiva e negativa, assim, cada função de onda representa os dois estados respectivamente com as possíveis orientações do Spin.

Aqui, vamos introduzir uma interação com o campo eletromagnético externo descrito pelo quadri-potencial $A_\mu = (\Phi, \vec{A})$. O acoplamento é introduzido pela substituição

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - \frac{e}{c} A^\mu, \quad (3.3.92)$$

conhecido como acoplamento mínimo, que é invariante de gauge, de maneira que a equação de Dirac se torne:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[c\vec{\alpha} \cdot \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) + \beta mc^2 + e\Phi \right] \psi. \quad (3.3.93)$$

No limite não-relativístico, consideramos que a energia de repouso $E = mc^2$ é muito maior que os demais termos de energia da hamiltoniana, de maneira que a função de onda pode ser expressa da seguinte forma

$$\psi = e^{-\frac{i}{\hbar} mc^2 t} \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix}. \quad (3.3.94)$$

Assim, substituindo esta função de onda na equação de Dirac (3.3.93), temos como

¹⁰Um operador *ímpar* é uma matriz de Dirac que possui somente elementos que conectando as componentes *upper* e *lower*.

resultado

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} = c\vec{\sigma} \cdot \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right) \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} + e\Phi \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} - 2mc^2 \begin{bmatrix} 0 \\ \chi \end{bmatrix} \quad (3.3.95)$$

o que nos fornece explicitamente duas equações envolvendo as funções de onda funções de onda φ e χ

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = c\vec{\sigma} \cdot \vec{p}\chi - e\vec{\sigma} \cdot \vec{A}\varphi + e\Phi\varphi & (i) \\ i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} = c\vec{\sigma} \cdot \vec{p}\varphi - e\vec{\sigma} \cdot \vec{A}\varphi + e\Phi\chi - 2mc^2\chi. & (ii) \end{cases}$$

Se consideramos então, que mc^2 é muito maior que a energia cinética e a energia dos campos de interação, nestas circunstâncias, de (ii) podemos expressar χ em termo de φ da seguinte maneira

$$\chi = \frac{1}{2mc} \vec{\sigma} \cdot \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right) \varphi. \quad (3.3.96)$$

Este termo nos mostra que é possível expressar a “pequena” componente em termos da “grande” componente. Substituindo esse termo em (i), teremos uma equação do tipo:

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left[\vec{\sigma} \cdot \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right) \right]^2 \varphi + e\Phi\varphi. \quad (3.3.97)$$

Usando a identidade para as matrizes de Pauli: $(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + i\vec{\sigma} \cdot \vec{a} \times \vec{b}$, teremos o seguinte resultado:

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right)^2 - \frac{e\hbar}{2mc} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} + e\Phi \right] \varphi, \quad (3.3.98)$$

onde $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ é o campo magnético externo. Associado a esse termo, notamos a presença da constante $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$, conhecida como magneton de Bohr [44] que representa o momento magnético para o elétron.

Esta é a conhecida equação de Pauli que descreve a dinâmica das partículas de spin 1/2 na teoria quântica não relativística.

O método para a obtenção do limite não relativístico discutido acima, traz em si algumas peculiaridades. Note que em (3.3.98), não temos correções relativísticas para a

hamiltoniana. No entanto, essas correções podem ser obtidas a partir da manipulação das equações (i) e (ii) [47, 48]. Entretanto, a hamiltoniana corrigida possui uma propriedade assustadora: ela não é hermitiana, traz um termo com “momento magnético imaginário” [47], levando a sérios problemas com a interpretação física.

Embora esse problema possa ser contornado, veremos na próxima seção que existe um método direto que nos fornece uma hamiltoniana corrigida, livre desses problemas.

3.4 A Transformação de Foldy-Wouthuysen.

Em 1950 Leslie L. Foldy e Siegfried A. Wouthuysen desenvolveram um método de expansão da hamiltoniana da equação de Dirac que de uma forma direta nos forneceu o limite não-relativístico com todas as possíveis correções relativísticas sem os problemas apontados na seção anterior [49]. Essa expansão está baseada em uma transformação canônica na função de onda, da seguinte maneira:

$$\psi' = e^{iS}\psi, \quad (3.4.99)$$

onde S é um operador que será expandido em potências de $1/m$. Até aqui ainda não conhecemos sua forma, entretanto, por construção, ele será proporcional a $1/m$. Da equação,

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi, \quad (3.4.100)$$

podemos encontrar uma nova hamiltoniana H' . Substituindo ψ' em (3.4.100), encontramos

$$i\hbar \frac{\partial \psi'}{\partial t} = \left[e^{iS} \left(H - i \frac{\partial}{\partial t} \right) e^{-iS} \right] \psi' \equiv H' \psi'. \quad (3.4.101)$$

Assim a nova hamiltoniana H' deve ser obtida pela transformação:

$$H' = e^{iS} \left(H - i \frac{\partial}{\partial t} \right) e^{-iS}. \quad (3.4.102)$$

A transformação (3.4.99) foi motivada pela presença do operador *ímpar* $\vec{\alpha}$ na hamiltoniana de Dirac. Como sabemos, esse operador traz apenas termos fora da diagonal

o que dificulta a interpretação da função de onda neste caso geral. A transformação de (FW) tem como objetivo remover os operadores ímpares da hamiltoniana. Como veremos a seguir isto será alcançado perturbativamente

Vamos novamente considerar um campo eletromagnético externo. Nesta situação a equação de Dirac é dada por (3.3.93). Podemos identificar na hamiltoniana os operadores pares $\mathcal{E}$ e ímpares $\mathcal{O}$ e escrevê-la na seguinte forma:

$$H = \beta mc^2 + \mathcal{O} + \mathcal{E}, \quad (3.4.103)$$

onde:

$$\mathcal{O} = c\vec{\alpha} \cdot \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right) \quad \text{e} \quad \mathcal{E} = e\Phi. \quad (3.4.104)$$

Esses operadores satisfazem as seguintes relações de comutação/anticomutação:

$$\{\mathcal{O}, \beta\} = 0 \quad \text{e} \quad [\beta, \mathcal{E}] = 0 \quad (3.4.105)$$

Na presença de campo externo, não é possível realizar uma única transformação pela qual a hamiltoniana esteja livre dos operadores *ímpares*. É feita então, mais duas transformações até que a hamiltoniana não os contenha. Considerando uma transformação¹¹ S independente do tempo, a hamiltoniana transformada pode ser expandida da seguinte forma

$$\begin{aligned} H' = H &+ i[S, H] - \frac{1}{2}[S, [S, H]] - \frac{i}{6}[S, [S, [S, H]]] + \dots \\ &- \hbar\dot{S} - \frac{1}{2}\hbar[S, \dot{S}] + \frac{1}{6}\hbar[S, [S, \dot{S}]] + \dots \end{aligned} \quad (3.4.106)$$

Queremos que o operador *ímpa* desapareça na expressão acima. Vamos tomar, apenas os termos proporcionais a m , de maneira que nos permita supor nosso operador S , assim temos que:

$$H' = \beta mc^2 + \mathcal{O} + \mathcal{E} + i[S, \beta]mc^2, \quad (3.4.107)$$

¹¹Nesta seção, vamos apenas apresentar os resultados do método FW, as demonstrações serão todas mostradas no Apêndice B.

o que nos sugere que S tem a forma:

$$S = -i \frac{\beta \mathcal{O}}{2mc^2}. \quad (3.4.108)$$

De fato, substituindo esse operador em (3.4.107), $\mathcal{O}$ desaparece.

Agora, podemos calcular os diversos comutadores em (3.4.106) com a forma explícita de S , para termos até ordem de $1/mc^2$, o que os fornece:

$$\begin{aligned} H' = & \beta \left(mc^2 + \frac{1}{2mc^2} \mathcal{O}^2 - \frac{1}{8m^3c^6} \mathcal{O}^4 \right) + \mathcal{E} - \frac{1}{8m^2c^4} [\mathcal{O}, [\mathcal{O}, \mathcal{E}]] \quad (3.4.109) \\ & + \frac{1}{2mc^2} \beta [\mathcal{O}, \mathcal{E}] - \frac{1}{3m^2c^4} \mathcal{O}^3 - \frac{i}{8mc^2} [\mathcal{O}, \dot{\mathcal{O}}] + i \frac{\beta \dot{\mathcal{O}}}{2mc^2}, \end{aligned}$$

note que na expressão acima, ainda não conseguimos eliminar todos os termos *odd*, necessitamos então de uma segunda transformação FW. De maneira análoga a primeira transformação, a equação acima sugere que

$$H' = \beta mc^2 + \mathcal{E}' + \mathcal{O}', \quad (3.4.110)$$

onde

$$\mathcal{E}' = \beta \left(\frac{1}{2mc^2} \mathcal{O}^2 - \frac{1}{8m^3c^6} \mathcal{O}^4 \right) + \mathcal{E} - \frac{1}{8m^2c^4} [\mathcal{O}, [\mathcal{O}, \mathcal{E}]] - \frac{i}{8mc^2} [\mathcal{O}, \dot{\mathcal{O}}], \quad (3.4.111)$$

e

$$\mathcal{O}' = \frac{\beta}{2mc^2} [\mathcal{O}, \mathcal{E}] - \frac{1}{8m^2c^4} \mathcal{O}^3 + i \frac{\beta}{2mc^2} \dot{\mathcal{O}}. \quad (3.4.112)$$

Assim, de (3.4.101), temos uma segunda hamiltoniana H'' ,

$$H'' = e^{iS'} \left(H' - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) e^{-iS'} \quad (3.4.113)$$

onde agora o operador S' tem a forma $S' = -i\beta \mathcal{O}'/2m$. A hamiltoniana acima pode ser reescrita na forma

$$H'' = \beta mc^2 + \mathcal{E}' + \frac{1}{2mc^2} \beta [\mathcal{O}', \mathcal{E}'] - \frac{1}{3m^2c^2} \mathcal{O}'^3 + i \frac{\beta \dot{\mathcal{O}}'}{2mc^2}. \quad (3.4.114)$$

O termo proporcional a $\mathcal{O}'^3$ já se encontra na ordem de $1/mc^2$, de modo que pode ser desprezado.

Note que (3.4.114) ainda possui operadores *ímpares*, assim é mais conveniente escreve-la em termos de um novo operador $\mathcal{O}'$ a ser eliminado a posteriori, perceba que esse operador é da ordem de $1/m^2c^4$. Temos, então, uma hamiltoniana do tipo:

$$H'' = \beta mc^2 + \mathcal{E}' + \mathcal{O}'' \quad (3.4.115)$$

podemos tomar S na forma $S'' = -i\beta\mathcal{O}''/2mc^2$. Esse operador será usado na terceira transformação FW, de modo que obtemos:

$$H''' = e^{iS''} \left(H' - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) e^{-iS''}. \quad (3.4.116)$$

Uma vez que temos $\mathcal{O}'' \sim 1/c^4$, percebemos então que $S'' \sim 1/c^6$ assim podemos desprezã-lo, de maneira que tenhamos como resultado a hamiltoniana:

$$H''' = \beta mc^2 + \dot{\mathcal{E}}', \quad (3.4.117)$$

ou ainda de forma explícita:

$$H''' = \beta \left(mc^2 + \frac{1}{2mc^2} \mathcal{O}^2 - \frac{1}{8m^3c^6} \mathcal{O}^4 \right) + \mathcal{E} - \frac{1}{8m^2c^4} [\mathcal{O}, [\mathcal{O}, \mathcal{E}]] - \frac{i}{8m^2c^4} [\mathcal{O}, \dot{\mathcal{O}}]. \quad (3.4.118)$$

Esta expressão fornece o limite não-relativístico da equação de Dirac. Observe que os termos que carregam os operadores *ímpares* são potências pares. Estes termos nos fornecerão uma hamiltoniana explicitamente livre das matrizes de Dirac $\vec{\alpha}$. É importante lembrar que, aqui, estamos interessados em correções relativísticas apenas para a ordem $1/c^2$. No entanto, esse método nos fornece todas as possíveis ordens de correções relativísticas, basta apenas usar (3.4.106).

Utilizando as definições de $\mathcal{O}$ e $\mathcal{E}$, vistas em (3.4.104) e substituindo na hamiltoniana acima, chegamos à:

$$\begin{aligned} H = & \beta mc^2 + \beta \left[\frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - \frac{1}{8m^3c^2} \vec{p}^4 - \frac{e\hbar}{2mc} \sigma \cdot \vec{B} \right] + e\Phi \quad (3.4.119) \\ & - \frac{ie\hbar^2}{8m^2c^2} \sigma \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \frac{e\hbar}{4m^2c^2} \vec{\sigma} \cdot (\vec{E} \times \vec{p}) - \frac{e\hbar^2}{8m^2c^2} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \end{aligned}$$

onde $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ e $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ são os campos magnético e elétrico respectivamente. Os estados de energia positiva são dados tomando $\beta = 1$, e os estados de energia negativa são obtidos quando fazemos $\beta = -1$. Tomando $\beta = 1$, temos como resultado a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
 H = & \quad mc^2 + \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - \frac{e\hbar}{2mc} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} + e\Phi - \frac{1}{8m^3c^2} \vec{p}^4 \\
 & - \frac{ie\hbar^2}{8m^2c^2} \vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \frac{e\hbar}{4m^2c^2} \vec{\sigma} \cdot (\vec{E} \times \vec{p}) - \frac{e\hbar^2}{8m^2c^2} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \dots
 \end{aligned} \tag{3.4.120}$$

Além dos termos já conhecidos em (3.3.98), esta equação nos fornece ainda a energia de repouso e as correções da ordem de $1/c^2$. O último termo da primeira linha, é a correção relativística para termo cinético. Na segunda linha, temos os termos referentes ao acoplamento *spin-órbita*, o último termo da segunda linha é o termo de Darwin, ele é não-nulo apenas para o estado S, onde $n = 1$ e $l = 0$. Fisicamenete é interpretado como flutuações quânticas em torno da posição clássica conhecido como *Zitterbewegung*.

Capítulo 4

A Teoria de Dirac no Espaço Curvo.

A formulação da teoria de Dirac para um espaço com curvatura exige a presença de algumas propriedades, que são características do próprio espaço-curvo. No espaço plano, a derivada ordinária ∂_μ atua em $\psi(x)$, que como sabemos, se trata de um objeto conhecido como Espinor.

Este objeto obedece a álgebra local do grupo de Lorentz, de maneira que para um espaço com curvatura, sua variação ponto a ponto não pode ser totalmente estabelecida com a derivada ordinária ∂_μ , mas por meio de uma derivada covariante.

4.0.1 Espinores de Dirac em um Espaço-tempo Lorentziano.

Representamos o espaço-tempo da Relatividade Geral por uma variedade Lorentziana M , dotada de uma métrica $g_{\mu\nu}$. Como a variedade é Lorentziana, então, na vizinhança de cada ponto P de M , existe um sistema de coordenadas onde a métrica é aproximadamente igual a métrica de Minkowski. Isto implica que numa região suficientemente pequena do espaço-tempo as leis da relatividade restrita são válidas.

Vamos considerar que cada ponto P da variedade M seja dotado de uma estrutura espinorial local. No espaço tangente associado a cada ponto P , podemos encontrar 4

vetores linearmente independentes $e_a^\mu(x)$ (*vierbiens* ou *tétradas*). Eles são responsáveis por relacionar um sistema de coordenadas qualquer, rotulados pelos índices gregos μ com um sistema de coordenadas Minkowskiano local, rotulados pelos índices latinos¹ $\hat{a}$.

A condição de ortonormalidade das tétradas pode ser expressa como

$$e(x)_a^\mu e(x)_b^\nu g_{\mu\nu} = \eta_{\hat{a}\hat{b}} \quad (4.0.1)$$

a partir dessa relação, podemos escrever

$$e_{\hat{\mu}}^{\hat{a}}(x) e_{\hat{a}}^{\nu}(x) = \delta_{\hat{\mu}}^{\nu} \quad , \quad e_{\hat{\mu}}^{\hat{a}}(x) e_{\hat{b}}^{\mu}(x) = \delta_{\hat{b}}^{\hat{a}} \quad , \quad e_{\hat{\mu}}^{\hat{a}}(x) e_{\hat{\nu}}^{\hat{b}}(x) \eta_{\hat{a}\hat{b}} = g_{\mu\nu}, \quad (4.0.2)$$

aqui $e_{\hat{a}}^{\mu}(x)$ é a inversa de $e_{\mu}^{\hat{a}}(x)$. Com as tétradas, podemos escrever as matrizes de Dirac em um sistema de coordenadas arbitrário da seguinte forma:

$$\gamma^{\mu}(x) = e_{\hat{a}}^{\mu}(x) \gamma^{\hat{a}} \quad (4.0.3)$$

onde $\gamma^{\hat{a}}$ é a matriz de Dirac para o espaço-tempo de Minkowski. Assim, podemos ver as relações de anti-comutação para essas matrizes

$$\begin{aligned} \{\gamma^{\mu}(x), \gamma^{\nu}(x)\} &= \gamma^{\mu}(x) \gamma^{\nu}(x) + \gamma^{\nu}(x) \gamma^{\mu}(x) \\ &= e_{\hat{a}}^{\mu}(x) \gamma^{\hat{a}} e_{\hat{b}}^{\nu}(x) \gamma^{\hat{b}} + e_{\hat{b}}^{\nu}(x) \gamma^{\hat{b}} e_{\hat{a}}^{\mu}(x) \gamma^{\hat{a}} \\ &= e_{\hat{a}}^{\mu}(x) e_{\hat{b}}^{\nu}(x) \left\{ \gamma^{\hat{a}}, \gamma^{\hat{b}} \right\} \\ &= 2g^{\mu\nu}(x), \end{aligned} \quad (4.0.4)$$

onde $g^{\mu\nu}(x) = \eta^{\hat{a}\hat{b}} e_{\hat{a}}^{\mu}(x) e_{\hat{b}}^{\nu}(x)$ é a inversa de $g_{\mu\nu}(x)$.

Vamos agora discutir a derivada covariante para o Espinor. Esta derivada, além de conter a derivada ordinária ∂_{μ} , possui um termo conhecido como *conexão spinorial*. A conexão é introduzida para garantir que o transporte do espinor de um ponto P para

¹É válido lembrar que esses índices latinos e gregos, são abaixados/levantados pelas métricas $\eta_{\hat{a}\hat{b}}$ e $g_{\mu\nu}$ respectivamente.

um outro ponto $P + dP$ do espaço (curvo) preserve as transformações locais do grupo de Lorentz. Isto é feito para que a derivada de um espinor seja também um espinor

$$\nabla_\mu \psi(x) = [\partial_\mu + \Gamma_\mu(x)]\psi(x), \quad (4.0.5)$$

onde $\Gamma_\mu(x)$ é a conexão espinorial. Sob transformações locais de Lorentz² $S(\Lambda)$, a conexão espinorial $\Gamma_\mu(x)$ se transforma como [50]:

$$\Gamma_\mu(x) \longrightarrow S(\Lambda)\Gamma_\mu(x)S^{-1}(\Lambda) - [\partial_\mu S(\Lambda)]S^{-1}(\Lambda), \quad (4.0.6)$$

de modo que tenhamos,

$$\Gamma_\mu(x) = -\frac{i}{4}\sigma^{\hat{a}\hat{b}}e_{\hat{a}}^\nu(x)\nabla_\mu e_{\hat{b}\nu}(x), \quad (4.0.7)$$

onde $\sigma^{\hat{a}\hat{b}} = \frac{i}{2}[\gamma^{\hat{a}}, \gamma^{\hat{b}}]$ é uma representação para a álgebra de Lie no espaço dos espinores.

A derivada covariante para o campo de tétradas é expressa em termos da conexão de Levi-Civita compatível com a métrica de acordo com

$$\nabla_\mu e_{\hat{b}\nu}(x) = \partial_\mu e_{\hat{b}\nu}(x) - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda e_{\hat{b}\lambda}(x), \quad (4.0.8)$$

onde

$$\Gamma_{\nu\mu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\theta}(x)(\partial_\mu g_{\nu\theta}(x) + \partial_\nu g_{\mu\theta}(x) - \partial_\theta g_{\nu\mu}(x)). \quad (4.0.9)$$

Agora estamos em condições de expressar a equação de Dirac (3.2.31), em um espaço curvo:

$$[i\gamma^\mu(x)\nabla_\mu(x) - \kappa]\psi(x) = 0, \quad (4.0.10)$$

onde $\kappa = mc/\hbar$. Ainda podemos escrevê-la como:

$$\{ie_{\hat{c}}^\mu(x)\gamma^{\hat{c}}[\partial_\mu + \Gamma_\mu(x)] - \kappa\}\psi(x) = 0 \quad (4.0.11)$$

ou de maneira mais detalhada como

$$\left\{ie_{\hat{c}}^\mu(x)\gamma^{\hat{c}}(x)\left[\partial_\mu - \frac{i}{4}\sigma^{\hat{a}\hat{b}}e_{\hat{a}}^\nu(x)e_{\hat{b}\nu;\mu}(x)\right] - \kappa\right\}\psi(x) = 0. \quad (4.0.12)$$

Note que a forma para a equação de Dirac depende do campo de tétradas. Por sua vez, essas quantidades são dadas em função da geometria do espaço-tempo.

²Ver Apêndice A.

4.0.2 Partícula de Dirac em um Campo Gravitacional Esfericamente Simétrico.

Uma aplicação simples da equação de Dirac no espaço curvo, consiste, em investigar o comportamento da partícula sob a influência de uma campo gravitacional esfericamente simétrico [51, 52, 53]. Um exemplo desta situação poderia ser a solução exterior descrita pela métrica Schwarzschild.

Em coordenadas isotrópicas, podemos escrever o elemento de linha de um espaço esfericamente simétrico da seguinte forma:

$$ds^2 = -w^2 dt^2 + v^2 \delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (4.0.13)$$

Aqui, w e v são funções escalares da coordenada radial r e estamos tomando a métrica com assinatura $(-, +, +, +)$. Estas funções são características de cada sistema. O próximo passo é obter o campo de tétradas, fazemos isso com a expressão (4.0.1), que admite inversa $g^{\mu\nu}$.

Desenvolvendo os termos e lembrando que os elementos não nulos do tensor $g_{\mu\nu}$ são todos localizados na diagonal obtemos:

$$e_{\hat{0}0}(x) = -w \quad , \quad e_{\hat{0}}^0(x) = \frac{1}{w} \quad , \quad e_{\hat{0}}^{\hat{0}}(x) = w \quad , \quad e^{\hat{0}0}(x) = -\frac{1}{w} \quad (4.0.14)$$

e ainda

$$e_{i\hat{j}}(x) = \delta_{i\hat{j}} v \quad , \quad e_{\hat{j}}^i(x) = \delta_{\hat{j}}^i \frac{1}{v} \quad , \quad e_{\hat{i}}^{\hat{j}}(x) = \delta_{\hat{i}}^{\hat{j}} v \quad , \quad e^{i\hat{j}}(x) = \delta^{i\hat{j}} \frac{1}{v} \quad (4.0.15)$$

Com essas definições, nosso próximo passo será encontrar as componentes da conexão espinorial definida em (4.0.7). Os coeficientes da conexão não-nulos são

$$\Gamma_{i0}^0 = \frac{1}{2w^2} \partial_i(w^2) \quad , \quad \Gamma_{00}^i = \frac{1}{2v^2} \partial_i(w^2) \quad , \quad \Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2v^2} (\partial_l \delta_{ik} + \partial_k \delta_{il} - \partial_i \delta_{kl}) (v^2). \quad (4.0.16)$$

Por substituição direta, temos como resultado as componentes temporal e espacial

da conexão espinorial respectivamente:

$$\Gamma_0 = -\frac{1}{4wv}\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}(w^2) \quad \text{e} \quad \Gamma_i = -\frac{i}{4v} \left(\vec{\Sigma} \times \vec{\nabla}(v^2) \right)_i, \quad (4.0.17)$$

onde o objeto $\vec{\Sigma}$, é dado por:

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (4.0.18)$$

Usando estes resultados, obtemos a equação de Dirac a partir de (4.0.12)

$$\begin{aligned} & \left[ie_0^0(x)\gamma^{\hat{0}}(\partial_0 + \Gamma_0) + ie_j^i(x)\gamma^{\hat{j}}(\partial_i + \Gamma_i) \right. \\ & \quad \left. + e_a^0(x)\gamma^{\hat{a}}qA_0 + e_a^i(x)\gamma^{\hat{a}}qA_i - \kappa \right] \psi = 0, \end{aligned} \quad (4.0.19)$$

e reorganizando os termos, encontramos

$$\begin{aligned} ie_0^0(x)\gamma^{\hat{0}}\frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} &= \left[-ie_0^0(x)\gamma^{\hat{0}}\Gamma_0 - ie_j^i(x)\gamma^{\hat{j}}\partial_i - e_j^i(x)\gamma^{\hat{j}}\Gamma_i \right. \\ & \quad \left. - e_0^0(x)\gamma^{\hat{0}}qA_0 - e_j^i(x)qA_i + \kappa \right] \psi. \end{aligned}$$

Aqui usamos $\partial_0 = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$. Vamos multiplicar toda essa expressão pela esquerda por $\hbar ce_0^0(x)\gamma^{\hat{0}}$ onde $e_0^0(x)$ é a inversa de $e_0^0(x)$. Considerando ainda $\gamma^{\hat{0}} = \beta$, $\gamma^{\hat{i}} = \beta\alpha^{\hat{i}}$ e usando as definições em (4.0.17), chegamos ao resultado

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} &= \left[i\hbar c\frac{1}{4wv}\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}(w^2) - i\hbar c\frac{w}{2v^3}\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}(v^2) \right. \\ & \quad \left. - i\hbar c\frac{w}{v}\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} - \hbar cqA_0 - \hbar\frac{w}{v}q\vec{\alpha} \cdot \vec{A} + G(r)\beta mc^2 + \beta mc^2 \right] \psi, \end{aligned} \quad (4.0.20)$$

onde $G(r) = w - 1$. Aqui usamos o resultado $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\Sigma} \times \vec{\nabla}(v^2)) = 2i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}(v^2)$ que pode ser verificado no apêndice A. Esta é a forma mais geral da equação de Dirac para um sistema esfericamente simétrico. Resta apenas especificarmos as funções w^2 e v^2 , baseados na geometria de cada sistema.

A hamiltoniana acima deve ser hermitinana. De fato, ela deve possuir valores reais para que se tenha interpretação física de seus resultados, assim, devemos ter satisfeita

a condição:

$$\langle H \rangle = \int d^3 \sqrt{g} \phi^\dagger(x) H \psi(x) = \langle H^\dagger \rangle, \quad (4.0.21)$$

onde g é o determinante da parte espacial da métrica g_{ij} e ψ e ϕ são os estados das partículas. É mais conveniente realizar a integral usando uma medida de um espaço plano. Neste sentido, precisamos suprimir o fator $\sqrt{g}$. Isso é feito quando realizamos uma transformação na função de onda $\bar{\psi}(x) = \Theta \psi(x)$ com Θ um operador unitário de tal modo que satisfaça $\Theta \Theta^{-1} = 1$. Sob tal transformação teremos uma nova hamiltoniana:

$$\bar{H} = \Theta H \Theta^{-1}. \quad (4.0.22)$$

Segue que

$$\langle H \rangle = \int d^3 \bar{\phi}^\dagger(x) \bar{H} \bar{\psi}(x) \quad , \quad \langle \bar{H} \rangle = \int d^3 x \Theta^2 \phi^\dagger(x) H \psi(x). \quad (4.0.23)$$

Usando o fato que $\langle H \rangle = \langle \bar{H} \rangle$ podemos fazer

$$\Theta^2 = \sqrt{g} \quad , \quad \Theta = v^{3/2}. \quad (4.0.24)$$

Nos resta, agora, determinar a forma explícita para a hamiltoniana (hermitiana) $\bar{H}$.

Usando a relação (4.0.22) temos:

$$\begin{aligned} \bar{H} = & v^{3/2} \left[i\hbar c \frac{1}{4wv} \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}(w^2) - i\hbar c \frac{w}{2v^3} \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}(v^2) \right. \\ & \left. - i\hbar c \frac{w}{v} \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} - \hbar c q A_0 - \hbar \frac{w}{v} q \vec{\alpha} \cdot \vec{A} + G(r) \beta m c^2 + \beta m c^2 \right] v^{-3/2}. \end{aligned}$$

Disto segue

$$\begin{aligned} \bar{H} = & i\hbar c \frac{1}{4wv} \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}(w^2) + i\hbar c \frac{w}{4v^3} \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}(v^2) \\ & - \hbar c \frac{w}{v} \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} - \hbar c q A_0 - \hbar \frac{w}{v} q \vec{\alpha} \cdot \vec{A} + G(r) \beta m c^2 + \beta m c^2. \end{aligned} \quad (4.0.25)$$

Por simplicidade na notação, escrevemos $\bar{H}$ como H sem barra. Esta é a hamiltoniana de Dirac para o caso geral de um sistema esfericamente simétrico. Basta apenas substituímos as funções escalares w e v que são características de cada sistema e determinar a sua forma explícita.

Capítulo 5

Estados de Rydberg no Cenário de Branas.

Neste capítulo veremos como o potencial gravitacional modificado pela dimensão extra pode influenciar os níveis de energia para um íon tipo hidrogênio. Considerando o modelo ADD[3], aplicaremos a equação de Dirac para encontrarmos a hamiltoniana (relativística) do átomo modificada pela gravitação. Usaremos o método de Foldy-Wouthuysen para a obtenção do limite não-relativístico, com isso determinamos os níveis de energia tendo por base o termo de maior contribuição energética.

5.1 O Campo Gravitacional produzido pelo núcleo.

Como vimos, no modelo ADD [3] o Universo é dotado de δ dimensões extras espaciais com a topologia de um toróide T^δ . No estado fundamental do modelo, a dimensão extra possui um certo raio R e admite-se que o espaço é plano, isto significa que a energia da brana não curva o espaço suplementar a longas distâncias em comparação com a escala de comprimento da brana.

Nesta situação, o campo gravitacional é produzido pela matéria que se encontra confinada na brana, e é governado pela ação de Einstein-Hilbert, agora estendida para

altas dimensões, ou seja:

$$S_D = \frac{c^3}{16\pi G_D} \int d^4x d^\delta z \sqrt{-g} \mathfrak{R}, \quad (5.1.1)$$

onde $\mathfrak{R}$ é o escalar de Ricci para o espaço ambiente (bulk), g é o determinante da métrica cuja assinatura assumimos sendo $(-, + \dots +)$ e G_D é a constante gravitacional para um espaço com δ dimensões, x e z são as coordenadas paralelas e transversais da brana, respectivamente.

A topologia do espaço complementar nos permite expandir a métrica em séries de Fourier com respeito a coordenada z , dando origem aos chamados modos KK. O modo zero reproduz o campo gravitacional 4-dimensional a grandes distâncias quando comparada a R . Isto implica uma relação entre a constante G_D , e a constante gravitacional newtoniana G do espaço-tempo ordinário, dada por:

$$G_D = G (2\pi R)^{(\delta+1)}. \quad (5.1.2)$$

Além disso, de maneira à obter o limite newtoniano, faz-se necessário implementar um mecanismo que garanta a estabilidade para o volume do espaço suplementar a longas distâncias [36].

A extremização da ação (5.1.1) nos conduz as equações de Einstein para dimensões espaciais superiores. No regime de campo fraco, que assumimos ser válido no domínio atômico, a métrica pode ser escrita como ¹ $g_{AB} = \eta_{AB} + h_{AB}$, onde η_{AB} é a métrica de Minkowski e h_{AB} é uma perturbação na métrica da ordem de $G_D M$. Em um sistema de coordenadas no qual o gauge

$$\partial_A \left(h^{AB} - \frac{1}{2} \eta^{AB} h^C_C \right) = 0, \quad (5.1.3)$$

é satisfeito, as equações de Einstein linearizadas se reduzem a forma

$$\square h_{AB} = -\frac{16\pi G_\delta}{c^4} \bar{T}_{AB}, \quad (5.1.4)$$

¹Aqui os índices latinos variam de 0 à $3 + \delta$

onde $\square$ é o operador d'Alembertiano, que está associado com a métrica η^{AB} e $\bar{T}_{AB} = (T_{AB} - (\delta + 2)^{-1} \eta^{AB} T_C^C)$ está definido em termos do tensor energia-momento T_{AB} da fonte.

Considerando a topologia $\mathbb{R}^3 \times T^\delta$ do espaço, segue que a solução para a equação (5.1.4) para fontes estáticas é da forma

$$h_{AB}(\vec{X}) = \frac{16\pi G_D \Gamma\left(\frac{3+\delta}{2}\right)}{(\delta+1) 2\pi^{(\delta+3)/2} c^4} \sum_i \left(\int \frac{\bar{T}_{AB}(\vec{X}')}{|\vec{X} - (\vec{X}' + \vec{K}_i)|^{\delta+1}} d^{3+\delta} X' \right) \quad (5.1.5)$$

onde $\vec{X} = (\vec{x}, z)$, $\vec{K}_i = 2\pi R(0, 0, 0, k_1, \dots, k_\delta)$ e cada k_i é um número inteiro. Se consideramos T^δ como uma variedade imersa por $\mathbb{R}^\delta$, os vetores $\vec{K}_i$ devem ser vistos como as localizações de imagens da fonte induzida pela topologia do espaço suplementar sobre $\mathbb{R}^\delta$. A presença dessas imagens nos fornecem soluções periódicas com respeito a coordenada z como demanda a topologia. Pode-se mostrar que a função de Green para dimensões superiores pode recuperar o seu comportamento 4-dimensional para longas distâncias $X \gg R$. Por outro lado, para curtas distâncias $(|\vec{X} - \vec{x}'|) < R$, a função de Green é dominada pelo primeiro termo da série (5.1.5).

Neste trabalho, estamos interessados em estudar os efeitos gravitacionais a pequenas distâncias, onde os efeitos das dimensões extras são mais significativas. Com isto em mente, podemos por simplicidade, considerar somente o primeiro termo ($\vec{K}_0 = 0$) da série (5.1.5). É claro que essa aproximação fornece uma estimativa para o campo gravitacional, uma vez que todos os termos que estamos negligenciando possuem assim o mesmo sinal.

No contexto de branas é crucial que para uma escala de comprimento maior do que a espessura da brana ε , o tensor energia-momento dos campos confinados na brana tenham a seguinte forma:

$$T_{AB}(x, z) = \eta_A^\mu \eta_B^\nu T_{\mu\nu}(x) f(z), \quad (5.1.6)$$

onde $T_{\mu\nu}(x)$ é o tensor energia-momento para espaço-tempo ordinário e $f(z)$ é uma

distribuição normalizada concentrada em torno da brana, que é aproximadamente uma distribuição do tipo delta no limite da brana fina ($\varepsilon \gg 0$). Esta função $f(z)$ descreve o confinamento de um campo na brana, e a princípio pode assumir características diferentes para cada tipo de campo.

Para o nosso sistema a fonte do campo gravitacional é o núcleo atômico. Devido a sua carga elétrica, o espaço-tempo em torno do núcleo deve possuir uma geometria similar a de Reissner-Nordström, ou mais precisamente uma versão desta geometria no cenário de branas. Este fato, nos conduz, por conveniência, a decompor o tensor de energia momento como a soma de dois termos;

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(0)} + T_{\mu\nu}^{(EM)}, \quad (5.1.7)$$

onde $T_{\mu\nu}^{(0)}$ descreve a energia de repouso do núcleo e $T_{\mu\nu}^{(EM)}$ é o tensor energia para o campo eletromagnético criado pela carga da fonte e que está espalhado no espaço. Aqui vamos considerar a influência de cada termo separadamente. O primeiro tensor pode ser escrito como $T_{AB} = c^2 \rho \eta_A^0 \eta_B^0$ onde ρ é massa da fonte, por outro lado $T_{\mu\nu}^{(EM)} = \epsilon_0 c^2 \left(F_{\mu\nu} F_\nu^\lambda - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right)$ onde $F_{\mu\nu}$ é o tensor eletromagnético e ϵ_0 é permissividade elétrica no vácuo. Numa primeira abordagem, vamos ignorar o campo magnético produzido pelo próton. Nesta aproximação, somente as componentes do campo elétrico $F_{0i} = E_i/c$ serão não-nulos, em ordem zero de G_D .

Levando em conta essas considerações, podemos mostrar que a forma explícita da métrica pode ser expressa por

$$\begin{aligned} ds^2 = & - \left(1 + \frac{2}{c^2} \varphi_s + \frac{2(2+\delta)}{c^2(1+\delta)} \chi_s \right) (dx^0)^2 + \\ & + \left(1 - \frac{2}{c^2(1+\delta)} \varphi_s \right) \left[\left(1 + \frac{2(2+\delta)}{c^2(1+\delta)} \lambda_{1,s} \right) dr^2 + \right. \\ & + \left. \left(1 + \frac{2(2+\delta)}{c^2(1+\delta)} \lambda_{2,s} \right) r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] + \\ & + \left(1 - \frac{2}{c^2(1+\delta)} \varphi \right) d\tilde{z}^2, \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

onde $x^0 = ct$, e as coordenadas (r, θ, ϕ) são as coordenadas esféricas usuais associadas coordenadas “cartesianas” definidas em (5.1.3). A função φ_s desempenha o papel de um potencial newtoniano produzido pela massa nuclear em $\mathbb{R}^\delta$. Em sua forma explícita temos:

$$\varphi_s(\vec{X}) = -\hat{G}_D \int \frac{\rho(\vec{x}') f_m(z)}{|\vec{X} - \vec{X}'|^{1+\delta}} d^{3+\delta} X' \quad (5.1.9)$$

onde $\hat{G}_D = 4G_D \Gamma(\frac{3+\delta}{2}) / [(2+\delta)\pi^{(1+\delta)/2}]$.

O subíndice s enfatiza que φ_s é o potencial associado a curtas distâncias, ou seja, calculado com o primeiro termo da série (5.1.5). De maneira análoga, a função χ_s é o potencial gravitacional produzido pela energia do campo eletromagnético $u = (\epsilon_0 E^2/2)$ criado pela carga elétrica, dado por:

$$\chi(\vec{X}) = -\frac{\hat{G}_D}{c^2} \int \frac{u(\vec{x}') f_e(z)}{|\vec{X} - \vec{X}'|^{1+\delta}} d^{3+\delta} \vec{X}'. \quad (5.1.10)$$

Podemos também obter a partir das componentes espaciais do tensor eletromagnético $T_{ij}^{(EM)}$ as funções $\lambda_{2,s}$ e $\lambda_{1,s}$ definidas respectivamente como:

$$\lambda_{2,s} = -\chi_s - \pi \frac{\hat{G}_D}{c^2} \int \frac{\epsilon_0 E^2 r'^2 (\sin^3 \theta) dr' d\theta}{|(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta) + |\vec{z}'|^2|^{\frac{1+\delta}{2}}} f_e(z) d^\delta z', \quad (5.1.11)$$

$$\lambda_{1,s} = -\chi_s - 2\pi \frac{\hat{G}_D}{c^2} \int \frac{\epsilon_0 E^2 r'^2 (\cos^2 \theta \sin \theta) dr' d\theta}{|(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta) + |\vec{z}'|^2|^{\frac{1+\delta}{2}}} f_e(z) d^\delta z'. \quad (5.1.12)$$

Na próxima seção, veremos que no setor gravitacional da hamiltoniana (H_G) o termo principal surge da componente g_{00} , que depende dos potenciais φ_s e χ_s . Para determinar explicitamente essas funções é importante olhar para estrutura interna da brana e ver como os campos estão localizados. Em teoria de campos, as branas são vistas como defeitos topológicos, uma vez que são estruturas capazes de localizar os férmions em seu interior [16]. Neste contexto, usualmente conhecido como brana com espessura, a localização do tipo delta é substituída por um confinamento não-singular onde os estados dos campos são descritos por funções de ondas regulares com uma pequena largura σ na direção transversal.

Seguindo estas idéias [33], calculamos o potencial gravitacional φ_s produzido pelo próton de massa M_p no cenário de brana com espessura [16]. Admitindo que a função de onda do próton na direção transversal possui um perfil gaussiano, estimamos [33] a influência da interação gravitacional sobre os estados S . A contribuição desse termo é proporcional à $\hat{G}_D m M_p / a_0^3 \sigma^{\delta-2}$, onde m é a massa do elétron e a_0 é o raio de Bohr. Desta expressão, fica claro que o cálculo diverge no limite da brana fina. Portanto, para os estados S a distribuição de massa do núcleo dentro da brana não pode ser negligenciada. É importante lembrar que esse termo corresponde ao valor médio da energia potencial gravitacional no interior do núcleo, que aqui vamos denotar por $\langle H_G \rangle_{in}$. Por sua vez, fora do núcleo a contribuição dominante é proporcional $\hat{G}_D m M / a_0^{1+\delta}$ se a escala de compactação for maior que o raio de Bohr. Assim, em um cenário realístico em que $\sigma \ll a_0$, a contribuição interior $\langle H_D \rangle_{in}$ é muito maior do que a contribuição exterior $\langle H_G \rangle_{out}$ para o estado S .

No entanto, nos estados de Rydberg com alto momento angular acontece o inverso, neste estados, a estrutura interna da brana torna-se menos relevante. De fato, em estados com momento angular l a contribuição interna é reduzido por um fator da ordem de $(r_N/a_0)^{2l}$, onde r_N é o raio do núcleo. Portanto, para um momento angular suficientemente alto, a contribuição exterior se torna maior que a interior se a seguinte condição é satisfeita:

$$2l > (\delta - 2) \frac{\ln(a_0/\sigma)}{\ln(a_0/r_N)}. \quad (5.1.13)$$

Sob estas condições, a contribuição exterior $\langle H_G \rangle_{out}$ se torna maior que a interior $\langle H_G \rangle_{in}$. Portanto, como o termo dominante não depende da espessura da brana, podemos dizer que uma brana fina é uma idealização válida para estados com altos números quânticos. Substituindo $f_m(z)$ na equação (5.1.9) por uma distribuição delta de Dirac, encontramos que na região exterior o potencial gravitacional produzido pela

massa do núcleo é

$$\varphi = -\hat{G}_D \frac{M}{r^{(1+\delta)}}, \quad (5.1.14)$$

Usando a equação (5.1.2) podemos concluir que a contribuição de (5.1.14) para a energia potencial gravitacional para o átomo no estado de Rydberg será da ordem de $(GMm/a_0)(R/a_0)^\delta$ e conseqüentemente a dimensão extra amplificará significativamente a energia gravitacional para o átomo no estado de Rydberg somente se $R \gg a_0$.

Entretanto, esta conclusão não é necessariamente válida quando consideramos o potencial χ_s produzido pela energia eletromagnética. Se aproximamos $f_e(z)$ a uma distribuição tipo delta, na equação (5.1.10) o potencial χ_s diverge em todo o espaço, não apenas no núcleo, como acontece com o potencial φ_s , devido ao fato da energia eletromagnética está espalhada no espaço. Portanto, devido ao comportamento do potencial χ_s , o limite em que a espessura da brana tende a zero, não fornece uma boa idealização mesmo quando estamos lidando com íons nos estados de Rydberg.

Assim, para determinar χ_s , teremos que considerar a distribuição da energia elétrica dentro da espessura da brana. Com o objetivo de obter algumas estimativas, vamos começar admitindo que a energia elétrica está uniformemente distribuída dentro de uma região compacta da brana com um comprimento ε , que deve ter a mesma ordem da espessura da brana. Assim, se $V_\delta(\varepsilon)$ descreve o volume de uma bola de raio ε no espaço suplementar, f_z pode ser definida como uma função do tipo

$$f_e(z) = \begin{cases} 1/V_\delta(\varepsilon), & z^2 \leq \varepsilon, \\ 0, & z^2 > \varepsilon \end{cases}$$

Tomando esta expressão na equação (5.1.10) e integrando com respeito as coordenadas angulares, o potencial χ_s avaliado na brana $\vec{z} = 0$ pode ser escrito como sendo $\chi_s = \chi_+ + \chi_-$, onde

$$\chi_\pm(r) = \frac{\hat{G}_D S_\delta}{V_\delta(\varepsilon)} \frac{2\pi}{(\delta-1)} \frac{1}{r} \int \frac{u(r')}{[(r \pm r')^2 + z'^2]^{\frac{-1+\delta}{2}}} (z')^{\delta-1} r' dr' dz'. \quad (5.1.15)$$

Aqui, S_δ é uma hiper-área de uma hipersuperfície esférica de δ dimensões com raio unitário. Em (5.1.15), o intervalo de integração para a variável transversal é de $0 < z' < \varepsilon$. O termo divergente no cenário em que a espessura da brana vai a zero, surge da função χ_- , na medida em que a variável de integração r' passa por r , no contexto de brana com espessura, esse termo “problemático” pode ser isolado e calculado separadamente.

Como estamos interessados em estudar os estados de Rydberg com altos valores de momento angular, podemos restringir nossa análise a pontos distantes do núcleo $r \gg nr_N$. Para o cálculo de χ_s , é conveniente separar o domínio de integração em duas partes: a região dentro do intervalo $|r' - r| \leq R$, onde a função de Green é dominante, e região externa a esse domínio, que denotaremos por Ω . Note que, o limite de brana fina é válido em Ω , e assim podemos escrever

$$\begin{aligned} \chi_s \approx & \frac{2\pi\hat{G}_D}{(\delta-1)} \frac{1}{r} \int_{\Omega} \left[\frac{1}{|r+r'|^{-1+\delta}} - \frac{1}{|r-r'|^{-1+\delta}} \right] u(r') r' dr' - \\ & - \frac{\hat{G}_D S_\delta}{V_\delta(\varepsilon)} \frac{2\pi}{(\delta-1)} \frac{1}{r} \int_{|r'-r| \leq R} \frac{u(r')}{[(r \pm r')^2 + z'^2]^{\frac{-1+\delta}{2}}} (z')^{\delta-1} r' dr' dz'. \end{aligned} \quad (5.1.16)$$

Para dar prosseguimento, faz-se necessário especificar a distribuição da energia eletromagnética no espaço tridimensional por meio da função u . Para ser consistente, o modelo deve reproduzir o comportamento usual do campo eletromagnético ordinário em uma escala de comprimento maior do que a espessura da brana ($r \gg \varepsilon$). É importante observar nesse ponto, que a escala de compactificação R é por hipótese maior que ε em nossa abordagem, de maneira que o campo gravitacional é o único afetado pelas dimensões extra no domínio em que ($r \gg \varepsilon$).

Baseado nessas considerações, assumiremos que no espaço tridimensional a densidade de energia para o campo elétrico é dado por:

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0} \times \begin{cases} r'^2/r_N^6, & r' \leq r_N, \\ 1/r'^4, & r' \geq r_N, \end{cases}$$

que é a energia do campo eletromagnético produzido por uma carga Q distribuída uniformemente dentro de uma bola de raio r_N no espaço tridimensional.

Levando em conta essa distribuição segue então que:

$$\chi_s = -\frac{\beta_\delta}{16\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\hat{G}_D Q^2}{\varepsilon^{\delta-2} r^4} + O_1 + O_2, \quad (5.1.17)$$

onde a quantidade β_δ pode ser escrita em termos da função Gamma da seguinte forma

$$\beta_\delta = \frac{\delta}{(\delta-1)} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\delta-2}{2}\right)}{2 \Gamma\left(\frac{\delta-1}{2}\right)}, \quad (5.1.18)$$

e os termos de correções tem a seguinte ordem de magnitude:

$$O_1 \sim O\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^{\delta-2} \times \begin{cases} 1 + O(R/r)^2, & \text{se } \delta \text{ é ímpar} \\ O(R/r), & \text{se } \delta \text{ é par} \end{cases} \quad (5.1.19)$$

$$O_2 \sim O\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^{\delta-2} \times O(r_N/r)^{\delta-1}. \quad (5.1.20)$$

quando comparamos a intensidade dos potenciais, podemos ver que χ_s é maior φ_s se

$$r > \left[\frac{4}{\beta_\delta} \frac{M c^2}{Q^2 / 4\pi\epsilon_0 a_0} \left(\frac{\varepsilon}{a_0} \right) \right]^{\frac{1}{\delta-3}}. \quad (5.1.21)$$

Quando consideramos valores realísticos de ε , a condição acima é satisfeita fora do núcleo. Neste caso, o potencial gravitacional produzido pelo campo eletromagnético é maior que o potencial gravitacional produzido pelo núcleo φ_s na região exterior. No espaço tridimensional isto não acontece. De fato, considerando a mesma distribuição na equação (5.1.17), encontramos que na região exterior

$$\chi_{(3)} = -\frac{GE}{c^2 r} + \frac{GQ^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^2}, \quad (5.1.22)$$

onde E é proporcional a energia do campo eletromagnético. O termo atrativo de $\chi_{(3)}$ depende do inverso da distância r , portanto, pode ser incorporado ao potencial gravitacional tridimensional $\varphi_{(3)}$ absorvendo a energia eletromagnética como parte da energia de repouso do sistema. Disto segue que, o potencial $\varphi_s = -GM/r$ com $M = (M_0 + E/c^2)$ é maior que a parte repulsiva $\chi_{(3)}$ fora do núcleo.

Nestas circunstâncias, é válido lembrar que a distribuição de massa do núcleo pode ser descrita por uma densidade contínua ρ_m em vez de uma distribuição compacta sem alterar nossa conclusão. Nesta nova configuração, o potencial φ_s deve divergir em todo espaço no limite em que a espessura da brana vai a zero. Entretanto, o tempo “problemático” será proporcional a $\hat{G}_D \rho_m / \sigma^{\delta-2}$ e ainda menor que χ_s para $r \gg r_N$ desde que ρ_m seja uma função que diminua rapidamente como uma exponencial.

Nesta seção, calculamos o campo gravitacional produzido pelo núcleo. Para que obtivéssemos resultados finitos, foi necessário levar em consideração a distribuição da massa do núcleo e o campo eletromagnético dentro da brana. Nas próximas seções, vamos discutir aspectos complementares deste quadro, mais precisamente, a influência da gravidade na dinâmica dos campos eletromagnéticos e de Dirac neste cenário.

5.2 O Potencial Eletrostático na Brana.

Em uma escala de comprimento superior ao da espessura da brana, os campos podem ser tratados como campos quadrimensionais confinados na brana. Nessa escala, assumimos que os campos não se acoplam diretamente com a geometria do “bulk”, mas a sua dinâmica no espaço-tempo é influenciada pela gravidade através da geometria induzida na brana.

Admitindo que a brana está localizada em $z = 0$, no sistema de coordenadas dado, a métrica induzida pode ser diretamente obtida do elemento de linha escrito em coordenadas isotrópicas da seguinte forma:

$$ds^2 = -w^2(dx^0)^2 + v^2(d\vec{x} \cdot d\vec{x}), \quad (5.2.23)$$

onde

$$w^2 = 1 + \frac{2}{c^2} \varphi_s + \frac{2(2 + \delta)}{c^2(1 + \delta)} \chi_s \quad (5.2.24)$$

e

$$v^2 = 1 - \frac{2}{c^2(1+\delta)}\varphi_s + \frac{2(2+\delta)}{c^2(1+\delta)} \left[\lambda_{2,s} + \int \frac{\lambda_{2,s} - \lambda_{1,s}}{r} dr \right]. \quad (5.2.25)$$

Calculada a métrica, podemos agora determinar as modificações sobre a interação eletrostática entre o elétron e o núcleo causado pela geometria da brana.

As equações de Maxwell para o espaço-tempo curvo pode ser escrita como

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) = \mu_0 J^\nu, \quad (5.2.26)$$

onde $g = -w^2 v^6$ é o determinante do tensor métrico dado por (5.2.23), J^ν é a quadricorrente e μ_0 é a permeabilidade magnética no vácuo. Se $U^\mu = dx^\mu/d\tau$ é o campo de quadriovelocidades da fonte, então $J^\mu = -\rho_e U^\mu$, onde ρ_e é a densidade de carga e τ é o tempo próprio. Por simplicidade, vamos admitir que o núcleo esteja em repouso no referencial dado, de maneira que sua quadriovelocidade só possua a componente temporal ou seja $U^\mu = (-cw^{-1}, 0)$ nesse referencial.

No regime estático, o quadripotencial é $A_\mu = (-\phi/c, 0)$. Sabendo que o tensor eletromagnético é dado por $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, então segue de (5.2.26) que

$$\partial_\mu [wv^3 g^{\mu\theta} g^{\nu\gamma} (\partial_\theta A_\gamma - \partial_\gamma A_\theta)] = wv^3 \mu_0 J^\nu.$$

Como estamos no regime estático, teremos apenas $J^0 = \rho_e/w$. Os campos não possuem dependência explícita no tempo, sendo assim, devemos ter apenas a componente espacial da derivada

$$\partial_i [wv^3 g^{ij} g^{00} \partial_j A_0] = v^3 \mu_0 c^2 \rho_e,$$

o que nos leva a seguinte equação:

$$\partial_i \left(\frac{v}{w} \partial_i \phi \right) = -\frac{\rho_{e,0}}{\epsilon_0}, \quad (5.2.27)$$

onde ϵ_0 é a permissividade no vácuo e $\rho_{e,0} = v^3 \rho_e$ é a densidade de carga com a medida plana d^3x . Isto significa que em uma hipersuperfície ortogonal a U^μ , a condição $\rho_{e,0}(d^3x) = \rho_e(v^3 d^3x)$ é satisfeita.

Como o campo gravitacional é fraco, esperamos que o potencial elétrico modificado pela gravitação possa ser escrito como $\phi = \phi_0 + \phi_G$, onde ϕ_0 é a solução no espaço plano devido a $\rho_{e,0}$ e ϕ_G é uma pequena correção da ordem de G_D devido a curvatura do espaço-tempo. Considerando as correções de até primeira ordem e desenvolvendo (5.2.27), encontramos

$${}^0\nabla^2\phi_G = -\frac{\rho_P}{\epsilon_0}, \quad (5.2.28)$$

com ${}^0\nabla^2$ sendo o laplaciano no espaço plano tridimensional e

$$\rho_P = \nabla \cdot \left[(1 - v/w) \epsilon_0 \vec{E} \right] \quad (5.2.29)$$

desempenha o papel de uma densidade de carga de polarização que age como sendo uma fonte para a correção gravitacional do potencial eletrostático. A solução de (5.2.28) tem a forma:

$$\phi_G = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_P(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x', \quad (5.2.30)$$

que é uma quantidade proporcional a $\frac{\hat{G}_D M Q^2}{c^4}$ na ordem mais baixa.

5.3 A Equação de Dirac no Cenário de Branas.

Nesta seção, vamos estudar a equação de Dirac no cenário de branas a fim de discutirmos como sua hamiltoniana é modificada quando levamos em conta a interação gravitacional do núcleo com a partícula de teste. Para tanto, vamos considerar novamente que os férmions confinados na brana não interagem com a geometria do bulk, mas sim, com a geometria $(3 + 1)$ induzida na brana. Neste caso vamos novamente considerar a métrica descrita em (5.2.23).

Assumindo um acoplamento mínimo com o campo gravitacional, a equação de Dirac no espaço curvo que descreve o estado de um férmion com massa m e carga elétrica q sujeita a um campo de gauge A_μ é descrita por:

$$[i\gamma^\mu(x)D_\mu - mc/\hbar] \psi(x) = 0, \quad (5.3.31)$$

onde o operador D_μ é definido como

$$D_\mu = \nabla_\mu - iqA_\mu, \quad (5.3.32)$$

a conexão espinorial ∇_μ é definida em termos da derivada covariante como vista em (4.0.7). O campo de tétradas e os coeficientes da conexão são determinados seguindo os passos (4.0.14) à (4.0.25) discutidos no capítulo anterior.

Para a definição do campo de tétradas e em todos os cálculos, estamos considerando apenas os termo de primeira ordem em G_D . Desconsiderando por simplicidade os efeitos do potencial vetor $\vec{A}$ a hamiltoniana de Dirac do átomo tem a seguinte forma

$$\begin{aligned} H = & \beta mc^2 + \beta m\varphi_s + \frac{2+\delta}{c^2(1+\delta)}\beta m\chi_s - \hbar c A_0 - i\hbar c \left(1 + \frac{\Xi}{c^2}\varphi_s\right) \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} - \\ & - i\hbar \frac{\Xi}{2c} \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \varphi_s - i\hbar \frac{3(2+\delta)}{2c(1+\delta)} \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} F(r, z) + i\hbar \frac{2+\delta}{2c(1+\delta)} \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \chi_s - \\ & - i\hbar \frac{2+\delta}{c(1+\delta)} (\chi_s - F(r, z)) \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}. \end{aligned} \quad (5.3.33)$$

Aqui definimos a quantidade $\Xi = 1 + 1/(1 + \delta)$, e a função $F(r, z) = \left[\lambda_{2,s} + \int \frac{\lambda_{2,s} - \lambda_{1,s}}{r} dr \right]$ é definida em (5.2.23) para simplificar o desenvolvimento dos cálculos. Perceba que, se estivermos no espaço-tempo ordinário $(3 + 1)$, teremos $\Xi = 2$. O potencial gravitacional φ_s modificado pela dimensão extra se torna o potencial newtoniano φ , este resultado está consistente com resultados já discutidos na literatura [53, 51, 52].

Usando a hamiltoniana acima, vamos aplicar o método de Foldy-Wouthuysem para determinarmos o limite não-relativístico da hamiltoniana. Vamos admitir que a contribuição energética de cada termo da hamiltoniana é muito menor do que a energia de repouso mc^2 para os estados de Rydberg. Vamos reescrever a equação de Dirac como vimos em (3.4.103) e os operadores $\mathcal{O}$ e $\mathcal{E}$ em (5.3.33) respectivamente como

$$\begin{aligned} \mathcal{O} = & c\vec{\alpha} \cdot \left[\left(1 + \frac{\Xi}{c^2}\varphi_s \right) \vec{p} - i\hbar \frac{\Xi}{c^2} \vec{\nabla} \varphi_s + i\hbar \frac{2+\delta}{2c^2(1+\delta)} \vec{\nabla} \chi_s - \right. \\ & \left. - i\hbar \frac{3(2+\delta)}{2c^2(1+\delta)} \vec{\nabla} F(r, z) + i \frac{2+\delta}{c^2(1+\delta)} (\chi_s - F(r, z)) \vec{p} \right], \end{aligned} \quad (5.3.34)$$

e

$$\mathcal{E} = \beta m \varphi_s + \frac{2 + \delta}{c^2(1 + \delta)} \beta m \chi_s - \hbar q \phi. \quad (5.3.35)$$

Usando a expressão (3.4.118) temos a hamiltoniana não-relativística dada por

$$\begin{aligned} H_{NR} = & \beta \left(mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{\vec{p}^4}{8m^3 c^2} \right) + q_1 q_2 \left(\frac{1}{r} - \phi_G \right) - q_1 q_2 \frac{\hbar^2}{2mc^2} \pi \delta(r) - \\ & - q_1 q_2 \frac{\hbar}{4mc^2} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{L}}{r^3} + \beta \left(m \varphi_s + \frac{2(2 + \delta)}{c^2(1 + \delta)} m \chi_s + \frac{\Xi}{mc^2} \varphi_s \vec{p}^2 - \frac{1}{2mc^2} \vec{p}^2 - \right. \\ & - \frac{i\hbar}{mc^2} \Xi \vec{\nabla} \varphi_s \cdot \vec{p} + \frac{i\hbar}{2mc^2} \vec{\nabla} \varphi_s \cdot \vec{p} + \frac{\hbar}{2mc^2} \Xi \vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \varphi_s \times \vec{p}) - \\ & \left. - \frac{\hbar}{4mc^2} \vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \varphi_s \times \vec{p}) - \frac{\hbar^2}{4mc^2} \Xi \nabla^2 \varphi_s + \frac{\hbar^2}{8mc^2} \nabla^2 \varphi_s \right), \end{aligned} \quad (5.3.36)$$

perceba que este resultado contém todos os bem conhecidos termos para limite não relativístico da equação de Dirac; a energia de repouso, o termo cinético e sua correção, a interação coulumbiana entre o núcleo q_1 e a partícula de teste q_2 , os termos proporcionais ao termo de Darwin e os termos do acoplamento spin-orbita e as contribuições relativas à interação gravitacional.

Aqui usamos a componente temporal do quadrivetor A_μ sendo $A_0 = \phi/c$ como definido na seção anterior. Dividimos esse termo em duas quantidades ϕ_0 que é o potencial escalar elétrico usual e ϕ_G que é o potencial elétrico modificado pela gravitação. Por simplicidade, podemos decompor essa hamiltoniana em três setores distintos: o termo livre, o de interação coulumbiana e o setor gravitacional respectivamente, de modo que temos $H = H_L + H_C + H_G$ onde

$$H_L = \beta \left(mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{\vec{p}^4}{8m^3 c^2} \right), \quad (5.3.37)$$

$$H_C = q_1 q_2 \left(\frac{1}{r} - \phi_G \right) - q_1 q_2 \frac{\hbar^2}{2mc^2} \pi \delta(r) - q_1 q_2 \frac{\hbar}{4mc^2} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{L}}{r^3}, \quad (5.3.38)$$

e

$$\begin{aligned}
H_G = & \beta \left(m\varphi_s + \frac{2(2+\delta)}{c^2(1+\delta)} m\chi_s + \frac{\Xi}{mc^2} \varphi_s \vec{p}^2 - \frac{1}{2mc^2} \vec{p}^2 - \right. \\
& - \frac{i\hbar}{mc^2} \Xi \vec{\nabla} \varphi_s \cdot \vec{p} + \frac{i\hbar}{2mc^2} \vec{\nabla} \varphi_s \cdot \vec{p} + \frac{\hbar}{2mc^2} \Xi \vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \varphi_s \times \vec{p}) - \\
& \left. - \frac{\hbar}{4mc^2} \vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \varphi_s \times \vec{p}) - \frac{\hbar^2}{4mc^2} \Xi \nabla^2 \varphi_s + \frac{\hbar^2}{8mc^2} \nabla^2 \varphi_s \right). \quad (5.3.39)
\end{aligned}$$

5.4 Resultados e Discussões.

Nosso foco será, é claro, o setor gravitacional. Aqui vamos considerar o termo $\beta = 1$, ou seja, os estados de energia positiva. Perceba que dois termos são proporcionais a massa da partícula de teste, e portanto são os termos dominantes. Além disso, como vimos, o termo χ_s é muito maior que φ_s na região exterior, neste caso podemos considerar a aproximação

$$H_G \approx \frac{2(2+\delta)}{c^2(1+\delta)} m\chi_s, \quad (5.4.40)$$

com essa aproximação iremos encontrar as correções nos níveis de energia nos estados de Rydberg. Não é demais centralizar que essas correções são provenientes do comportamento a curtas distâncias do campo gravitacional com dimensões extras, produzido pela energia do eletro-vácuo que circunda a partícula de teste em um íon semelhante a um íon tipo hidrogênio.

Vamos agora, tratar H_G como um termo muito pequeno da hamiltoniana total, de maneira que possamos usar o método de perturbação para estimar a energia potencial gravitacional para um íon tipo Hidrogênio no estados de Rydberg. Para um íon com um número atômico Z encontrado em um estado cujo número principal é n e momento angular orbital l , a energia potencial gravitacional média é aproximadamente dada por

$$\langle n, l | H_G | n, l \rangle = \frac{2(2+\delta)}{c^2(1+\delta)} m \langle n, l | \chi_s | n, l \rangle \quad (5.4.41)$$

o que nos fornece como resultado

$$\langle n, l | H_G | n, l \rangle = -\hat{\beta}_\delta \gamma_{n,l} \frac{G_D Z^4 e^2 m}{c^2 \varepsilon^{\delta-2} a_0^4 \epsilon_0}, \quad (5.4.42)$$

onde e é a carga elétrica fundamental e

$$\hat{\beta}_\delta = \frac{\delta \Gamma\left(\frac{\delta-2}{2}\right)}{4\pi^{(2+\delta)/2}} \quad , \quad \gamma_{n,l} = \frac{(3n^2 - l(l+1))}{n^5 l(l+1)(2l+3)(2l+1)(2l-1)} \quad (5.4.43)$$

é importante destacar que a energia em (5.4.42) é devido ao comportamento a curtas distâncias da função de Green para o potencial gravitacional.

Sem dimensões extras, a energia potencial gravitacional para o íon em algum estado $|n, l\rangle$ é dada por:

$$\langle n, l | H_G | n, l \rangle = \frac{AZ}{n^2} \frac{GmM_p}{a_0} \quad (5.4.44)$$

onde A é o número da massa. Aqui, por questões de simplicidade, admitimos que a massa do núcleo é aproximadamente igual a AM_p . Comparando (5.4.42) com (5.4.44), podemos encontrar condições sobre as quais a quantidade de energia potencial gravitacional proveniente do comportamento a curtas distâncias do potencial de dimensão maior supera o valor tridimensional. Neste domínio as dimensões extras podem amplificar significativamente os efeitos gravitacionais sobre o íon.

A condição $\langle H_G \rangle > \langle H_G^{(3)} \rangle$ pode ser expressa em termos do comprimento da dimensão extra R na seguinte forma

$$(2\pi R)^\delta > \frac{1}{\hat{\beta}_\delta \gamma_{n,l}} \frac{A}{Z^3 n^2} \frac{\epsilon_0 M_p c^2 a_0^3 \varepsilon^{\delta-2}}{e^2}, \quad (5.4.45)$$

observe que, para a energia potencial ser amplificada pela dimensão extra, R deve ser de algumas ordens de magnitude maior que a espessura da brana, mas curiosamente pode ser menor do que o raio de Bohr. Como exemplo, poderíamos considerar o íon de Neônio $^{20}\text{Ne}^{+9}$ em um espaço com 6 dimensões. No estado em que $n = 15$ e $l = 14$, as dimensões extras proporcionam uma amplificação se $R > 10^{-14}\text{m}$, quando $\varepsilon = 10^{-20}\text{m}$ por exemplo.

Agora vamos considerar as transições entre os estados vizinhos, ou seja, $(n, l = n - 1)$ e $(n - 1, l = n - 2)$. A principal contribuição para a diferença de energia entre esses níveis é:

$$\Delta E_P = \frac{Z^2 e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n-1)^2} \right), \quad (5.4.46)$$

usando (5.4.42), podemos determinar a diferença da energia potencial gravitacional ΔE entre aqueles níveis comparando com (ΔE_P) ,

$$\frac{\Delta E_G}{\Delta E_P} = -\hat{\beta}_\delta \frac{1}{8\pi} \frac{(\gamma_{n,n-1} - \gamma_{n-1,n-2})}{n^{-2} - (n-1)^{-2}} \frac{Z^2 G_D m}{c^2 \varepsilon^{\delta-2} a_0^3}. \quad (5.4.47)$$

Se considerarmos íon tipo hidrogênio muonico, o raio de Bohr para o estado fundamental do Hidrogênio a_0 é substituído pelo raio de Bohr do Hidrogênio muonico $a_{0,\mu}$ e a massa da partícula de teste m corresponde a massa do múon m_μ . Devido a isto, a equação acima pode ser multiplicada pelo fator

$$\left(\frac{a_0}{a_{0,\mu}} \right) \left(\frac{m_\mu}{m} \right) \sim 10^9. \quad (5.4.48)$$

De acordo com [8], se as frequências de transições estiverem na banda óptica, a precisão experimental relativa pode atingir o fantástico valor de 10^{-19} [31]. Isto nos leva a pensar na possibilidade de usar os estados de Rydberg como objeto de busca de dimensões extras. Em [32] foi sugerido que o *enigma do raio do próton* poderia ser explicado no cenário de branas, uma vez que a interação gravitacional múon-próton, modificada pela dimensão extra, pode explicar o inesperado excesso de energia medido no *Lamb Shift* do Hidrogênio múonico.

Para resolver o *enigma do raio do próton* a massa de Planck M_P fundamental ou equivalentemente a constante gravitacional fundamental, deve possuir certos valores dados em função de um parâmetro σ , que aqui pode ser interpretado como um parâmetro de confinamento do núcleo na brana. Vamos considerar o valor de G_D como referência na equação (5.4.47), e admitir que matéria e os campos possuem algum parâmetro de confinamento ($\varepsilon \simeq \sigma$).

Na figura abaixo, mostramos as transições ópticas entre os estados de Rydberg sobre os quais, os efeitos da dimensão extra excede a precisão experimental prevista pela metrologia óptica[31],

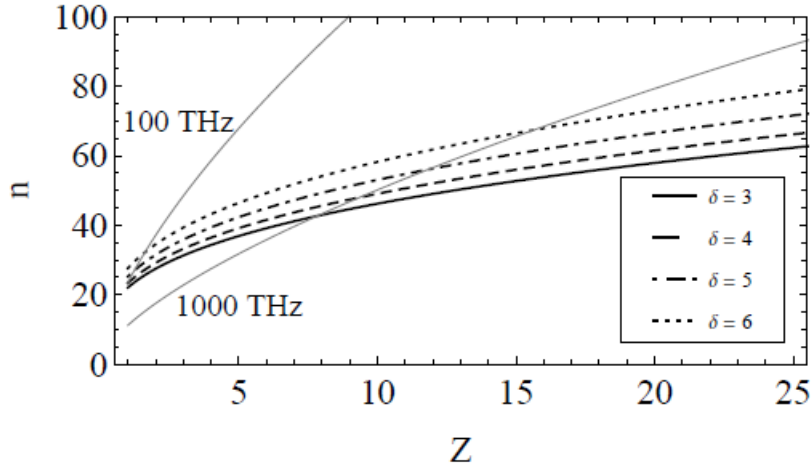


Figura 5.1: Transições ópticas entre os estados de Rydberg para íon do tipo Hidrogênio muônico. Abaixo das linhas tracejadas, a influência das dimensões extras através da gravidade clássica pode ser maior do que a incerteza experimental previstas nas medidas de frequência de transições em torno da banda óptica ($100THz - 1000THz$), aqui vemos que G_D possui o valor apropriado para resolver o *enigma do raio do próton*.

A partir destes resultados, podemos ver que para íons do tipo Hidrogênio muônico, a espectroscopia dos estados de Rydberg em frequências ópticas podem, a princípio, serem empregadas para a busca de dimensões extras, e em particular, para testar a hipótese de que o *enigma do raio do próton* pode ser explicado pela existência de dimensões extras[32]. No entanto, é importante observar que essas previsões estão baseadas no comportamento clássico do capo gravitacional.

Por outro lado, como indicado em [13], o efeitos da gravidade quântica se tornariam relevantes em uma escala de comprimento em torno do comprimento de Planck fundamental l_D , aqui definido em altas dimensões mesmo para curtas distâncias. Se este for o caso, os efeitos da gravidade quântica podem modificar os resultados clássicos imprevisivelmente. No entanto, como uma teoria de gravidade quântica ainda não é conhecida, somente os experimentos podem resolver esta questão.

Capítulo 6

Conclusão

Neste trabalho, investigamos os efeitos da dimensão extra no domínio atômico estudando a influência do campo gravitacional sobre os níveis de energia do átomo no cenário de branas. Fomos motivados pela incerteza relativa de 10^{-19} impressionantemente pequena nas transições ópticas entre os estados de Rydberg. Para tanto, foram realizadas duas revisões, uma sobre a teoria de dimensões extras onde utilizamos o modelo ADD como cenário e a segunda, abordando a mecânica quântica relativística onde destacamos a teoria de Dirac.

No cenário de branas, a gravidade é a primeira interação a ser afetada pelo espaço suplementar. Nesses modelos, a interação gravitacional pode ser ampliada em comparação com a gravidade Newtoniana tridimensional. Devido a carga do núcleo, o espaço-tempo em torno do núcleo é uma versão da geometria de Reissner-Nordström no cenário de branas. Nesta configuração, a métrica no regime de campo fraco depende do potencial gravitacional concentrado no núcleo φ e também do potencial gravitacional gerado pela energia do campo elétrico criado pela carga do núcleo χ .

Quando a espessura da brana vai a zero, o potencial χ_s diverge em todo espaço na brana. Devido a isso, a energia potencial gravitacional não é calculável no limite da brana fina, mesmo em estados de Rydberg com altos valores de momento angular.

Por isso, consideramos a brana com certa espessura a fim de estimar a influência do potencial χ_s nos níveis de energia.

Considerando a energia eletromagnética distribuída uniformemente em uma faixa da brana, calculamos a energia potencial gravitacional em termos de um parâmetro de confinamento ε do campo elétrico. Encontramos que as dimensões extras são capazes de amplificar a energia potencial gravitacional para o íon no estado de Rydberg, mesmo quando o raio de compactificação R é menor que o raio de Bohr. Isto é uma consequência do comportamento do potencial χ .

Um fato importante é que o comprimento a curtas distâncias da função de Green associada ao potencial gravitacional desenvolve um papel muito importante nessa situação. A primeira vista, poderíamos ser levados a pensar que o comportamento a curtas distâncias é irrelevante quando o íon está no estado de Rydberg, uma vez que a probabilidade de encontrar a partícula de teste próxima ao núcleo é muito pequena nesse estado. Na verdade, esta é a razão de φ_s ser fraco ali, no entanto, a fonte do potencial χ está espalhada no espaço.

Portanto, em torno de qualquer ponto $\vec{x}$ do espaço, existe uma região de tamanho menor que R no eletrovácuo onde a função de Green de curta distância é dominante. É através deste termo que a influência gravitacional do eletrovácuo que circunda a partícula de teste pode aumentar significativamente a energia potencial gravitacional do íon até o ponto de nos possibilitar o uso da espectroscopia dos estados de Rydberg para a busca de dimensões extras.

Apêndice A

As Matrizes de Dirac.

A.1 Determinação da Matriz $S(\Lambda)$.

A matriz $S(\Lambda)$ é de fundamental importância para se compreender a covariância da equação de Dirac, pois nos fornece as relações entre os referenciais $\mathbf{O}$ e $\mathbf{O}'$. Começamos com uma transformação infinitesimal de coordenadas espaço-temporais, uma vez que, qualquer transformação contínua pode ser obtida por sucessivas aplicações de transformações infinitesimais, neste sentido, teremos

$$\Lambda^\nu_\mu = \delta^\nu_\mu + \Omega^\nu_\mu \quad (\text{A.1})$$

com $\Omega^{\nu\mu} = -\Omega^{\mu\nu}$ sendo um tensor antissimétrico. Aqui estamos desconsiderando termos da ordem de $(\Omega_{\mu\nu})^2$.

Vamos considerar $S(\Lambda)$ sendo expresso por uma transformação infinitesimal

$$S(\Lambda) = 1 - \frac{i}{2} C_{\mu\nu} \Omega^{\mu\nu} \quad \text{ou ainda} \quad S(\Lambda) = 1 - \frac{i}{2} C^{\mu\nu} \Omega_{\mu\nu} \quad (\text{A.2})$$

é claro que essa expressão deve satisfazer a condição de que $S(\Lambda)S^{-1}(\Lambda) = 1$, então, usando (3.2.39) devemos ter satisfeita a seguinte condição;

$$S(\Lambda)\gamma^\alpha S^{-1}(\Lambda) = \Lambda^\alpha_\beta \gamma^\beta \quad (\text{A.3})$$

substituindo (A.2) teremos

$$\left(1 - \frac{i}{2} C_{\mu\nu} \Omega^{\mu\nu}\right) \gamma^\alpha \left(1 + \frac{i}{2} C_{\mu\nu} \Omega^{\mu\nu}\right) = (\delta_\beta^\alpha + \Omega_\beta^\alpha) \gamma^\beta \quad (\text{A.4})$$

distribuindo os termos encontramos

$$\gamma^\alpha - \frac{i}{2} (C_{\mu\nu} \gamma^\alpha - \gamma^\alpha C_{\mu\nu}) \Omega^{\mu\nu} \cong \gamma^\alpha + \Omega_\beta^\alpha \gamma^\beta \quad (\text{A.5})$$

ou ainda

$$\begin{aligned} -\frac{i}{2} (C_{\mu\nu} \gamma^\alpha - \gamma^\alpha C_{\mu\nu}) \Omega^{\mu\nu} &= \Omega_\beta^\alpha \gamma^\beta \\ &= g_{\lambda\beta} \Omega^{\alpha\lambda} \gamma^\beta \\ &= \Omega^{\alpha\lambda} \gamma_\lambda \\ &= -\Omega^{\lambda\alpha} \gamma_\lambda \\ \frac{i}{2} (C_{\mu\nu} \gamma^\alpha - \gamma^\alpha C_{\mu\nu}) \Omega^{\mu\nu} &= \Omega^{\lambda\alpha} \gamma_\lambda \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Vamos agora manipular essa expressão com algumas identidades, primeiramente vamos multiplica-la pela esquerda por $g_{\theta\alpha}$ e ainda considerar que o tensor métrico comuta com $C_{\mu\nu}$, assim obtemos

$$\frac{i}{2} (C_{\mu\nu} \gamma_\theta - \gamma_\theta C_{\mu\nu}) \Omega^{\mu\nu} = g_{\theta\alpha} \Omega^{\alpha\lambda} \gamma_\lambda \quad (\text{A.7})$$

considerando as propriedades de simetria e antissimetria dos tensores $g_{\theta\alpha}$ e $\Omega^{\mu\nu}$ respectivamente, podemos escrever o lado direito da equação acima como;

$$\begin{aligned} g_{\theta\alpha} \Omega^{\alpha\lambda} \gamma_\lambda &= \frac{1}{2} (g_{\theta\alpha} \Omega^{\alpha\lambda} \gamma_\lambda + g_{\theta\lambda} \Omega^{\lambda\alpha} \gamma_\alpha) \\ &= \frac{1}{2} (g_{\theta\alpha} \Omega^{\alpha\lambda} \gamma_\lambda - g_{\theta\lambda} \Omega^{\alpha\lambda} \gamma_\alpha) \\ &= \frac{1}{2} (g_{\theta\alpha} \gamma_\lambda - g_{\theta\lambda} \gamma_\alpha) \Omega^{\alpha\lambda}, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

demodo que a igualdade em A.7 se tranforme em

$$\frac{i}{2} (C_{\mu\nu} \gamma_\theta - \gamma_\theta C_{\mu\nu}) \Omega^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (g_{\theta\alpha} \gamma_\lambda - g_{\theta\lambda} \gamma_\alpha) \Omega^{\alpha\lambda}, \quad (\text{A.9})$$

fazendo uma substituição nos índices $\alpha \longrightarrow \mu$ e $\lambda \longrightarrow \nu$ chegamos a seguinte igualdade,

$$\frac{i}{2} (C_{\mu\nu} \gamma_\theta - \gamma_\theta C_{\mu\nu}) \Omega^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (g_{\theta\mu} \gamma_\nu - g_{\theta\nu} \gamma_\mu) \Omega^{\mu\nu}, \quad (\text{A.10})$$

ou ainda

$$i[C_{\mu\nu}, \gamma^\theta] = (g_{\theta\mu} \gamma_\nu - g_{\theta\nu} \gamma_\mu). \quad (\text{A.11})$$

Vamos usar uma importante propriedade envolvendo as matrizes γ e suas relações de comutação/anticomutação. Primeiramente podemos escrever o comutador abaixo como:

$$[\gamma^\mu \gamma^\nu, \gamma^\theta] = \gamma^\mu \{\gamma^\nu, \gamma^\theta\} - \{\gamma^\mu \gamma^\theta\} \gamma^\nu \quad (\text{A.12})$$

então, usando (3.2.32) temos

$$\begin{aligned} [\gamma^\mu \gamma^\nu, \gamma^\theta] &= 2 (g^{\theta\nu} \gamma^\mu - g^{\mu\theta} \gamma^\nu) \\ &= -2 (g^{\mu\theta} \gamma^\nu - g^{\theta\nu} \gamma^\mu) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

olhando para (A.11) podemos chegar a seguinte igualdade;

$$\begin{aligned} i[C^{\mu\nu}, \gamma^\theta] &= -2 (g^{\mu\theta} \gamma^\nu - g^{\theta\nu} \gamma^\mu) \\ &= -2 [\gamma^\mu \gamma^\nu, \gamma^\theta] \\ -[C^{\mu\nu}, \gamma^\theta] &= -2i [\gamma^\mu \gamma^\nu, \gamma^\theta] \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

de onde podemos retirar uma importante identidade

$$C^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu. \quad (\text{A.15})$$

Retornemos a definição em (3.2.39) e manipulando-a teremos

$$\begin{aligned} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2g^{\mu\nu} \\ \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu &= 2g^{\mu\nu} \\ \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu + \gamma^\nu \gamma^\mu - \gamma^\nu \gamma^\mu &= 2g^{\mu\nu} \\ [\gamma^\mu, \gamma^\nu] + 2\gamma^\nu \gamma^\mu &= 2g^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

note quando $\mu \neq \nu$, $g^{\mu\nu} = 0$, conseqüentemente $\gamma^\nu \gamma^\mu = -\gamma^\mu \gamma^\nu$ de maneira que a equação acima possa nos fornecer

$$\begin{aligned} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] - 2\gamma^\mu \gamma^\nu &= 0 \\ [\gamma^\mu, \gamma^\nu] &= 2\gamma^\mu \gamma^\nu, \end{aligned} \tag{A.17}$$

substituindo essa expressão em (A.15) encontramos

$$C^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu], \tag{A.18}$$

usando este resultado na definição do operador $S(\Lambda)$ vista em (A.2), podemos concluir que

$$\begin{aligned} S(\Lambda) &= 1 - \frac{i}{2} C^{\mu\nu} \Omega_{\mu\nu} \\ &= 1 - \frac{i}{2} \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \Omega_{\mu\nu} \\ &= 1 + \frac{1}{8} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \Omega_{\mu\nu} \\ S(\Lambda) &= 1 - \frac{i}{4} \sigma^{\mu\nu} \Omega_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{A.19}$$

onde

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \frac{i}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) \tag{A.20}$$

essa é uma das identidade mais utilizadas na teoria de Dirac, tanto para o caso do espaço-tempo plano como na situação do espaço com curvatura, onde é utilizada na definição da conhecida conexão spinorial.

A.2 Algumas Propriedades das Matrizes de Dirac.

No decorrer deste trabalho, usamos algumas propriedades das matrizes de Dirac γ , bem como das matrizes de Pauli. Neste apêndice, vamos mostrar de maneira geral, algumas propriedades decorrentes da álgebra dessas matrizes.

Primeiramente comecemos com a importante definição vista em (A.20), podemos determinar sua forma explícita em termos das matrizes α quando variamos os índices,

lembrando que os índices variam conforme $\mu = \nu = 0, i$ com $i = 1, 2, 3$ devemos lembrar que por construção, as matrizes de Dirac são definidas como $\gamma^0 = \beta$ e $\gamma^i = \beta\alpha^i$ definidas em (3.2.22), assim teremos que

$$\begin{aligned}
 \sigma^{0i} &= \frac{i}{2} (\gamma^0 \gamma^i - \gamma^i \gamma^0) \\
 &= \frac{i}{2} (\beta^2 \alpha^i - \beta \alpha^i \beta) \\
 &= \frac{i}{2} (\alpha^i + \beta^2 \alpha^i) \\
 &= \frac{i}{2} 2\alpha^i \\
 \sigma^{0i} &= i\alpha^i
 \end{aligned} \tag{A.21}$$

onde usamos as duas últimas identidades de (3.2.18), da mesma maneira teremos

$$\begin{aligned}
 \sigma^{i0} &= \frac{i}{2} (\gamma^i \gamma^0 - \gamma^0 \gamma^i) \\
 &= \frac{i}{2} (\beta \alpha^i \beta - \beta^2 \alpha^i) \\
 &= \frac{i}{2} (-\beta^2 \alpha^i - \alpha^i) \\
 &= \frac{i}{2} (-2\alpha^i) \\
 \sigma^{i0} &= -i\alpha^i
 \end{aligned} \tag{A.22}$$

é claro que $\sigma^{00} = 0$, por fim temos a situação

$$\begin{aligned}
\sigma^{ij} &= \frac{i}{2} (\gamma^i \gamma^j - \gamma^j \gamma^i) \\
&= \frac{i}{2} (\beta \alpha^i \beta \alpha^j - \beta \alpha^j \beta \alpha^i) \\
&= \frac{i}{2} (-\beta^2 \alpha^i \alpha^j + \beta^2 \alpha^j \alpha^i) \\
&= \frac{i}{2} (\alpha^j \alpha^i - \alpha^i \alpha^j) \\
&= \frac{i}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} - \right. \\
&\quad \left. - \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= \frac{i}{2} \left[\begin{pmatrix} \sigma^j \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^j \sigma^i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma^i \sigma^j & 0 \\ 0 & \sigma^i \sigma^j \end{pmatrix} \right] \\
&= \frac{i}{2} (\sigma^j \sigma^i - \sigma^i \sigma^j) 1
\end{aligned} \tag{A.23}$$

onde 1 é a matriz identidade, das matrizes de Pauli temos a seguinte igualdade:

$$[\sigma^i \sigma^j - \sigma^j \sigma^i] = 2i \varepsilon_{ijk} \sigma^k \tag{A.24}$$

neste caso, de (A.23) teremos que

$$\sigma^{ij} = 2\varepsilon_{ijk} \sigma^k \tag{A.25}$$

A.3 Prova do Resultado: $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\Sigma} \times \vec{\nabla}(v^2)) = 2i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}(v^2)$.

Por definição, as matrizes de Dirac $\vec{\alpha}$ e a matriz $\vec{\Sigma}$ são expressas em termos das matrizes de Pauli, da seguinte forma:

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}. \tag{A.26}$$

podemos escrever essas matrizes em termos dos vetores unitários, bem como o operador $\vec{\nabla}$, lembrando que o termo (v^2) é uma função escalar,

$$\vec{\alpha} = \alpha_x \hat{i} + \alpha_y \hat{j} + \alpha_z \hat{k}, \quad \vec{\Sigma} = \Sigma_x \hat{i} + \Sigma_y \hat{j} + \Sigma_z \hat{k}, \quad \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \tag{A.27}$$

Vamos determinar primeiramente, o produto vetorial $\vec{\Sigma} \times \vec{\nabla}(v^2)$, que por definição resulta em um novo vetor que denominaremos de $\vec{B}$. Teremos então por definição:

$$\vec{\Sigma} \times \vec{\nabla}(v^2) = \vec{B} = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \Sigma_x & \Sigma_y & \Sigma_z \\ \frac{\partial}{\partial x}(v^2) & \frac{\partial}{\partial y}(v^2) & \frac{\partial}{\partial z}(v^2) \end{pmatrix} \quad (\text{A.28})$$

considerando $\vec{\alpha}$ e $\vec{\Sigma}$ vetores constantes, teremos a seguinte relação:

$$\vec{B} = \left(\Sigma_y \frac{\partial}{\partial z} - \Sigma_z \frac{\partial}{\partial y} \right) (v^2) \hat{i} - \left(\Sigma_x \frac{\partial}{\partial z} - \Sigma_z \frac{\partial}{\partial x} \right) (v^2) \hat{j} + \left(\Sigma_x \frac{\partial}{\partial y} - \Sigma_y \frac{\partial}{\partial x} \right) (v^2) \hat{k} \quad (\text{A.29})$$

por outro lado, o produto vetorial nos garante que

$$\vec{\alpha} \cdot (\vec{\Sigma} \times \vec{\nabla}(v^2)) = \vec{\alpha} \cdot \vec{B} = \alpha_x B_x + \alpha_y B_y + \alpha_z B_z. \quad (\text{A.30})$$

Usando as componentes de $\vec{B}$ definidos em (A.29) teremos

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} \cdot \vec{B} &= \alpha_x \left(\Sigma_y \frac{\partial}{\partial z} - \Sigma_z \frac{\partial}{\partial y} \right) (v^2) - \alpha_y \left(\Sigma_x \frac{\partial}{\partial z} - \Sigma_z \frac{\partial}{\partial x} \right) (v^2) \\ &+ \alpha_z \left(\Sigma_x \frac{\partial}{\partial y} - \Sigma_y \frac{\partial}{\partial x} \right) (v^2), \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

distribuindo e depois reorganizando os termos, chegamos a expressão

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} \cdot \vec{B} &= (\alpha_y \Sigma_z - \alpha_z \Sigma_y) \frac{\partial}{\partial x} (v^2) - (\alpha_x \Sigma_z - \alpha_z \Sigma_x) \frac{\partial}{\partial y} (v^2) \\ &+ (\alpha_x \Sigma_y - \alpha_y \Sigma_x) \frac{\partial}{\partial z} (v^2). \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Agora, vamos determinar as relações entre as matrizes α e Σ em cada termo do lado direito de (A.32) separadamente, usando as definições de (A.26)

$$\begin{aligned} \alpha_y \Sigma_z - \alpha_z \Sigma_y &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \sigma_z \\ \sigma_y \sigma_z & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma_z \sigma_y \\ \sigma_z \sigma_y & 0 \end{pmatrix} \\ \alpha_y \Sigma_z - \alpha_z \Sigma_y &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_y \\ \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_y & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

usando as relações de comutação das matrizes de Pauli temos o seguinte resultado

$$\alpha_y \Sigma_z - \alpha_z \Sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 2i\sigma_x \\ 2i\sigma_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.34})$$

Esta igualdade pode se generalizada aos demais termos de (A.32), de maneira que podemos concluir que

$$\alpha_x \Sigma_z - \alpha_z \Sigma_x = - \begin{pmatrix} 0 & 2i\sigma_y \\ 2i\sigma_y & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.35})$$

$$\alpha_x \Sigma_y - \alpha_y \Sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 2i\sigma_z \\ 2i\sigma_z & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.36})$$

com estas expressões chegamos ao resultado:

$$\vec{\alpha} \cdot \left(\vec{\Sigma} \times \vec{\nabla}(v^2) \right) = 2i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}(v^2) \quad (\text{A.37})$$

Apêndice B

A transformação de Foldy-Wouthuysen.

B.1 A expansão Perturbativa.

A expansão dos comutadores está parte da equação (3.4.101). Dela, observamos uma nova hamiltoniana da forma

$$H' = e^{+iS} H e^{-iS}, \quad (\text{B.1})$$

demodo que podemos defini-lo de acordo com a expansão

$$F(\lambda) \equiv e^{+i\lambda S} H e^{-i\lambda S} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \left(\frac{\partial^n F}{\partial \lambda^n} \right) \quad (\text{B.2})$$

onde λ é um parâmetro real.

Assim, desenvolvendo seus termos ficamos com:

$$\begin{aligned} F(\lambda) = & \frac{\lambda^0}{0!} \frac{\partial^0}{\partial \lambda^0} e^{+i\lambda S} H' e^{-i\lambda S} + \frac{\lambda^1}{1!} \frac{\partial^1}{\partial \lambda^1} e^{+i\lambda S} H' e^{-i\lambda S} + \frac{\lambda^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} e^{+i\lambda S} H' e^{-i\lambda S} \\ & + \frac{\lambda^3}{3!} \frac{\partial^3}{\partial \lambda^3} e^{+i\lambda S} H' e^{-i\lambda S} + \dots, \end{aligned}$$

vamos determinar as derivadas nos termos acima, começando pela ordem zero;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^0}{\partial \lambda^0} e^{+i\lambda S} H' e^{-i\lambda S} &= e^{+i\lambda S} \left(H - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) e^{-i\lambda S} \\
&= e^{+i\lambda S} H e^{-i\lambda S} - i\hbar e^{+i\lambda S} (i\lambda \dot{S}) e^{-i\lambda S} \\
&= e^{+i\lambda S} H e^{-i\lambda S} - \hbar \dot{S}
\end{aligned} \tag{B.3}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \lambda} e^{+i\lambda S} H' e^{-i\lambda S} &= i\lambda S e^{+i\lambda S} H e^{-i\lambda S} - i\lambda e^{+i\lambda S} H S e^{-i\lambda S} \\
&= i\lambda e^{+i\lambda S} (SH - HS) e^{-i\lambda S} - \lambda^2 \hbar \frac{\partial}{\partial \lambda} e^{+i\lambda S} \dot{S} e^{-i\lambda S} \\
&= i\lambda e^{+i\lambda S} [S, H] e^{-i\lambda S} - i\lambda^2 \hbar [S, \dot{S}],
\end{aligned} \tag{B.4}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} e^{+i\lambda S} H' e^{-i\lambda S} &= \frac{\partial}{\partial \lambda} (i\lambda e^{+i\lambda S} [S, H] i\lambda e^{-i\lambda S}) \\
&= e^{+i\lambda S} [S, [S, H]] e^{+i\lambda S} + \hbar \lambda e^{+i\lambda S} [S, [S, \dot{S}]] e^{-i\lambda S},
\end{aligned} \tag{B.5}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3}{\partial \lambda^3} e^{+i\lambda S} H' e^{-i\lambda S} &= \frac{\partial}{\partial \lambda} (e^{+i\lambda S} [S, [S, H]] e^{+i\lambda S}) \\
&= i e^{+i\lambda S} [S, [S, [S, H]]] e^{+i\lambda S} + \dots,
\end{aligned} \tag{B.6}$$

de modo que tenhamos

$$\begin{aligned}
H' &= e^{+i\lambda S} \left(H + i\lambda [S, H] - \frac{\lambda^2}{2} [S, [S, H]] - i\frac{\lambda^3}{6} [S, [S, [S, H]]] - \hbar \dot{S} \right. \\
&\quad \left. - \frac{i}{2} \lambda^2 \hbar [S, \dot{S}] + \frac{1}{6} \lambda^3 \hbar [S, [S, \dot{S}]] + \dots \right) e^{-i\lambda S}
\end{aligned} \tag{B.7}$$

fazendo o parâmetro $\lambda = 1$ resultamos em:

$$\begin{aligned}
H' &= H + i[S, H] - \frac{1}{2} [S, [S, H]] - i\frac{1}{6} [S, [S, [S, H]]] - \hbar \dot{S} \\
&\quad - \frac{i}{2} \hbar [S, \dot{S}] + \frac{1}{6} \hbar [S, [S, \dot{S}]] + \dots
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Referências Bibliográficas

- [1] KALUZA, T. Akad. Wiss. Phys. Math. Kl. 966 (1921).
- [2] KLEIN, O. Z Phys. 41, 407 (1927).
- [3] N. ARKANI-HAMED, S. DIMOPOULOS, G. Dvali, Phys.Lett. B429 263-272, (1998).
- [4] L. RANDALL and R. SUNDRUM, Phys. Rev. Lett.83,3370 (1999).
- [5] L. RANDALL and R. SUNDRUM, Phys. Rev. Lett.83,4690 (1999).
- [6] Z. LI and X.CHEN, arXiv:1303.5146.
- [7] F. DAHIA and A. LEMOS, Phys. Rev. D 94 n° 8, 084033 (2016).
- [8] ULRICH D. JENTSCHURA, PETER J. MOHR, JOSEPH N. TAN and BENE-DIKT J. Wundt, Phys. Rev. Lett. 100. 160404 (2008).
- [9] P. J, MOHR, B.N TAYLOR, D.b NEWELL, Rev. Modern Phys. **84**, 1527 (2012).
- [10] R. PHOL et al., Nature **466**, 213 (2010).
- [11] J.J KRAUTH et al, arXiv:1706.00696.
- [12] F. DAHIA, C. ROMERO, Phys.Lett.B651:232-238,2007.
- [13] GIAN E GIUDICE, RICCARDO RATTAZZI and JAMES D. WELLS, Nuclear Phys. B, **544**, (1999)3-38.

- [14] FRANCISCO del AGUILA, MANUEL PEREZ-VICTORIA, JOSE SANTIAGO, JHEP 0610:056 (2006).
- [15] R. WHIKER, *Braneworld Black Holes* arXiv:0810.1534[gr-qp].
- [16] V. A. RUBAKOV and M.E SHAPSHNIKOV, Phys.Lett B125, 139 (1983).
- [17] V. A. RUBAKOV Phys.Usp.44:871-893,2001.
- [18] GREINER W. *Relativistic Quantum Mechanics: Wave equations*, Springer.
- [19] KLEIN, O. Z Phys. 41, 407 (1927).
- [20] GORDON, W. Z Phys. 40, 117 (1926).
- [21] BJORKEN, JD and DRELL S.D. *Relativistic Quantum Mechanics* McGraw-Hill Book Company.
- [22] ZWIEBACH, B. *A First Course in String Theory*, Cambridge Universty Press.2004.
- [23] LEMOS, A.S and DAHIA F. *Um estudo sobre o mecanismo de ocultação da dimensão extra*. PIBIC.CNPQ.UFCG.2009.
- [24] SILVA, ALEX ALBUQUERQUE. *Um estudo sobre dimensões extras*. Dissertação de Mestrado, Campina Grande, 2009.
- [25] M. SHIFFMAN. *Large Extra Dimensions: Becoming acquainted with an alternative paradigm*. Jul 2009. 33pp e-print: arXiv:0907.3074.
- [26] KAKU, MICHIO. *Quantum Field theory A modern Introdruction* . 1993. 3 Edição: Springer.
- [27] S. B. GIDDINGS, E. KATZ and L. RANDALL *Linearized gravity in brane back-grounds*, JHEP.0003,023 (2000), [hep-th/0002091].

- [28] L. B. WANG and W. T. NI, Mod. Phys. Lett. A **28**, 1350094 (2013).
- [29] ZHOU WAN-PING, Zhou Peng, Qiao Hao-Xue, Open Phys. **13**, 96 (2015).
- [30] E. J SALUMBIES et al, New J. Phys, **17** 033015 (2015).
- [31] L.-S. MA et al., Science 303, 1843 (2004).
- [32] F. DAHIA and A. LEMOS, Eur. Phys. J.C, 76, 8, 435 (2016).
- [33] F. DAHIA and A. LEMOS, Phys. Rev. D 94, 084033 (2016).
- [34] A. ANTOGININI et al, Science **339**, 417 (2013).
- [35] CARL E. CARLSON, Progress in Particle and Nuclear Physics **82**, 59, (2015).
- [36] I. ANTONIADS, K. BENAKLI, A. LAUGIER, T. MAILLARD, Nucl.Phys. B 662, 40 (2003).
- [37] MORSE, P.M. and FESHBACH, H. *Method of Theoretical Physics Volume 1*.
- [38] MORSE, P.M. and FESHBACH, H. *Method of Theoretical Physics Volume 2*.
- [39] LIBOFF, R.L. *Introductory Quantum Mechanics*, 1^ª edição. Cornell University.
- [40] E, SCHRODINGER. Ann. Physick. 81, 109. (1926).
- [41] ARFKEN, G.B.; WEBER, H.J. Mathematical Methods for Phycists 6a edição.
- [42] DIRAC, P.A.M. Proc.Roy.Soc.Lond. **A**,117, 610. (1928).
- [43] DIRAC, P.A.M. Proc.Roy.Soc.Lond. **A**,118, 351. (1928).
- [44] SAKURAI, J.J. and Napolitano, J. *Mecânica Quântica Moderna*. Segunda edição. Bookman.(20013)
- [45] SAKURAI, J.J. *Advanced Quantum Mechanics*. Primeira Edição.

- [46] DARWIN, C.G. Proc. R. Soc. Lond. A 1928 118, 654-680.
- [47] STRANGE, P. *Relativistic Quantum Mechanics*. First Edition. Cambridge University Press.
- [48] GROSS, F. *Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory*. Wiley-VCH Verlag GmbH and Co. KGaA.
- [49] FOLDY, L.A and WOUTHUYSEN, S.A. Phys. Rev. D.78,1 (1950).
- [50] WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. John Wiley and Sons, New York, 1972.
- [51] Hehl, F.W. and Ni, W. Phys. Rev. D. 42,6. (1990).
- [52] FISCHBACH, E. and FREMAN, S.B. Phys. Rev. D.23,10 (1981).
- [53] JENTSCHURA, U.D and NOBLE, J.H. arXiv:1603.09668v1 [gr-qc] 31 Mar 2016.