

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Classes de Stiefel-Whitney

José Leôncio Castelo Branco Júnior

JOÃO PESSOA – PB
FEVEREIRO DE 2019

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Classes de Stiefel-Whitney

por

José Leôncio Castelo Branco Júnior

sob a orientação do

Prof. Dr. Aurélio Menegon Neto

João Pessoa – PB
Fevereiro de 2019

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

C349c Castelo Branco Júnior, José Leôncio.
Classes de Stiefel-Whitney / José Leôncio Castelo
Branco Júnior. - João Pessoa, 2019.
126 f. : il.

Orientação: Aurélio Menegon Neto.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Classes de Stiefel-Whitney. 3.
Topologia diferencial. 4. Topologia algébrica. I.
Menegon Neto, Aurélio. II. Título.

UFPB/BC

Classes de Stiefel-Whitney

por

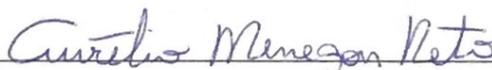
José Leôncio Castelo Branco Júnior ¹

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria/Topologia

Aprovada em 21 de fevereiro de 2019.

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Aurélio Menegon Neto – UFPB
(Orientador)



Prof. Dr. Nivaldo de Góes Grulha Júnior – ICMC - USP
(Examinador Externo)



Prof. Dra. Miriam da Silva Pereira – UFPB
(Examinador Interno)

¹O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração desta dissertação.

E assim, depois de muito esperar, num dia como outro qualquer, decidi triunfar...

Decidi não esperar as oportunidades e sim, eu mesmo buscá-las.

Decidi ver cada problema como uma oportunidade de encontrar uma solução.

Decidi ver cada deserto como uma possibilidade de encontrar um oásis.

Decidi ver cada noite como um mistério a resolver.

Decidi ver cada dia como uma nova oportunidade de ser feliz.

Naquele dia descobri que meu único rival não era mais que minhas próprias limitações e que enfrentá-las era a única e melhor forma de as superar.

Naquele dia, descobri que eu não era o melhor e que talvez eu nunca tivesse sido.

Deixei de me importar com quem ganha ou perde.

Agora me importa simplesmente saber melhor o que fazer.

Aprendi que o difícil não é chegar lá em cima, e sim deixar de subir.

Aprendi que o melhor triunfo é poder chamar alguém de “amigo”.

Descobri que o amor é mais que um simples estado de enamoramento, “o amor é uma filosofia de vida”.

Naquele dia, deixei de ser um reflexo dos meus escassos triunfos passados e passei a ser uma tênue luz no presente.

Aprendi que de nada serve ser luz se não iluminar o caminho dos demais.

Naquele dia, decidi trocar tantas coisas...

Naquele dia, aprendi que os sonhos existem para tornarem-se realidade.

E desde aquele dia já não durmo para descansar... simplesmente durmo para sonhar.

Walt Disney

Agradecimentos

Agradeço a Deus por toda honra e glória. Obrigado por todas bênçãos.

Aos meus pais por todo apoio direto, ou indireto e por terem permitido que eu tivesse a educação que tive, com princípios e valores e terem me criado com tanto zelo. Em especial, minha mãe que nunca mediu esforços para me ajudar no que eu precisar. Amo você!

Ao professor Aurélio Menegon, que me orientou não apenas na matemática e sim para a vida. Obrigado por todos os ensinamentos. Sou bastante grato pelo seu tempo, dedicação, paciência e cuidado. Com certeza um dos melhores professores com quem tive contato. Obrigado por ter aceitado me orientar, por ter suportado meus dramas (principalmente sobre o doutorado), incentivando-me ainda mais a permanecer na matemática mostrando-me toda a beleza da topologia e singularidades.

Aos meus amigos da graduação que foram em João Pessoa companheiros de estudos e convivência: Douglas Queiroz, Lorena Augusto e Sylvia Ferreira. Pessoas com quem passei maior parte do tempo em que estive em João Pessoa e que além de companheiros, além de amigos, me proporcionaram ótimos momentos e foram pais e mães para mim. Cuidaram de mim quando tive insolação e me puseram de castigo... Muitas vezes! Vocês já fazem parte da minha família! E falando em família... deixo meus agradecimentos à Ângela e Waldomes Queiroz, que foram os pais que a vida me deu e com certeza os terei sempre.

Agradeço à todos os professores do DM-UFPB por terem contribuído significativamente na minha formação. Em especial, à professora Miriam Pereira, que pacientemente, disponibilizou de seu tempo para ouvir-me e ajudar-me sempre que precisei, com seus comentários e observações pertinentes.

Agradeço à todos os meus amigos, que são pessoas que valorizo e estimo bastante. São elas: Bianca Nascimento, Isabelle Ediene e Rebeca Souza. Vocês são especiais para mim. Obrigado por durante anos terem me ajudado a passar por cada fase que passei e estarem comigo me dando forças.

Aos professores do DM-UFRPE. Vocês são maravilhosos!

Aos amigos do PPGMAT-UFPB: Camila Marques, Djair Paulino, Hector Alan e Mariana Lima e os demais.

Ao meu irmão Igo Rafael Castelo Branco e minha cunhada Fabíola por serem tão legais e compreensíveis comigo e estarem sempre comigo. Amo vocês!

Resumo

Neste trabalho, estudamos as classes de Stiefel-Whitney de uma variedade real suave. Estas classes permitem-nos identificar fibrados triviais. Apresentamos a motivação e definição geométrica deste objeto por meio de cocadeias de obstrução, e em seguida, apresentaremos a definição axiomática para estas classes. Assumindo a existência e unicidade de tais classes satisfazendo estes axiomas, estudamos alguns resultados tais como o *Teorema da Dualidade de Whitney* o qual relaciona as classes do fibrado tangente com as classes do fibrado normal e o *Teorema de Stiefel* que nos permite concluir quando um espaço projetivo real é paralelizável. Por fim, estudamos a aplicação desta ferramenta em variedades cobordantes.

Palavras-chave: Classes características, Cohomologia, Topologia, Obstrução, Fibrados triviais.

Abstract

In this work we study the Stiefel-Whitney classes of a real smooth varieties. These classes allow us to identify trivial bundles. The motivation and geometric definition of this object are given by means of the cochain obstruction, later they are presented in the axiomatic way. Assuming the existence and uniqueness of such classes satisfying these axioms, we will see some results as *Whitney's Duality Theorem* which relates the classes of the tangent bundle with the normal bundle, and *Stiefel's Theorem* that allows us to conclude when a real projective space is parallelizable. Finally, we will see the application of this tool in the study of cobordant manifolds.

Keywords: Characteristic classes, Cohomology, Topology, obstruction, trivial bundles.

Sumário

Introdução	1
1 Noções de Topologia Diferencial	4
1.1 Variedades Suaves	5
1.1.1 Espaço tangente e aplicações entre variedades	6
1.1.2 Orientação	8
1.2 Campo Vetorial	9
1.3 Variedade de Grassmann	10
1.3.1 Variedade de Grassmann infinita	14
1.4 Teoria da Interseção	14
1.5 O Teorema de Poincaré-Hopf	17
2 Topologia Algébrica	20
2.1 Homotopia	20
2.2 Homologia	23
2.2.1 Homologia Simplicial	24
2.2.2 Homologia Singular	30
2.3 Cohomologia	36
2.3.1 Cohomologia singular de espaços topológicos	37
2.3.2 Axiomas para cohomologia singular	39
2.3.3 Produto Cup	40
3 Fibrados Vetoriais	42
3.1 Introdução	42
3.2 Fibrados vetoriais Euclidianos	48
3.3 Operações entre fibrados vetoriais	50
3.3.1 Fibrado restrição	50
3.3.2 Fibrado pull-back	51
3.3.3 Produto cartesiano de fibrados	54
3.3.4 Soma de Whitney	55

3.3.5	Fibrado complemento ortogonal	57
3.3.6	Fibrado Hom	60
3.4	Fibrado Universal	64
4	Teoria da Obstrução	67
4.1	Motivação	67
4.2	Cocadeia de obstrução	69
4.3	Índice de uma singularidade em um r -campo	82
5	Classes de Stiefel-Whitney	85
5.1	Axiomas para as classes de Stiefel-Whitney	87
5.2	Resultados de Imersões	99
5.3	Números de Stiefel-Whitney	102
5.4	Unicidade das classes de Stiefel-Whitney	107
6	Considerações finais	110
	Referências Bibliográficas	112

Lista de Figuras

1.1	Variedade tangente sobre S^1	7
1.2	Varição nos vetores v_1 e v_2	10
1.3	Projeção do espaço Y sobre X_0	12
1.4	Projeção da base de Y na base de X_0	13
1.5	Interseção entre as variedades X e Y	15
1.6	Campo de vetores	18
1.7	Índices de campos vetoriais	19
2.1	Homotopia entre f e g	21
2.2	Cilindro como um espaço quociente	22
2.3	Mapping cylinder de f sobre X	23
2.4	n -simplexos nos casos $n = 0, 1, 2$	24
2.5	Estrutura simplicial da esfera S^2	26
2.6	Outra estrutura simplicial da S^2	28
4.1	Triangulação em um espaço topológico X	68
4.2	Simplexos σ_1^0 , σ_2^0 e σ_1^1 de X	68
4.3	Espaço Y	69
4.4	Representação geométrica dos espaços X , Y e A	70
4.5	Triangulação de S^2	71
4.6	Orientação nas células da triangulação de S^2	72
5.1	Vizinhança U da fronteira N em M	105
5.2	Variedades M_1 e M_2 que pertencem a mesma classe de cobordismo. . .	106

Lista de Tabelas

5.1	Coeficientes das classes de Stiefel-Whitney para $\mathbb{R}P^n$, com $0 \leq n \leq 14$.	96
-----	---	----

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- O conjunto D^n denota o espaço $D^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \|x\| = 1\}$;
- Ao mencionarmos o espaço topológico X , estaremos nos referindo a dupla (X, τ_X) onde τ_X é a topologia adotada em X ;
- \mathbb{R} , \mathbb{Z} , \mathbb{Z}_2 , \mathbb{N} denotam, respectivamente, os conjuntos dos números reais, inteiros, inteiros módulo dois e naturais;
- \square denota o final de uma demonstração;
- $\|\cdot\|$ denota a norma euclidiana do \mathbb{R}^N ;
- \approx denota o isomorfismo entre grupos e/ou anéis;
- $\text{int}(X)$ denota o interior topológico do conjunto X ;
- \overline{X} denota o fecho topológico do conjunto X ;
- $a \perp b$ significa que os vetores a e b são perpendiculares;
- \mathbb{B}^n denota o conjunto $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq 1\}$;
- $\text{Span}[A]$ denota o espaço gerado pelo conjunto A .

Introdução

Em meados de 1935, começaram a aparecer os estudos referentes a teoria das classes características, Hassler Whitney, matemático americano, junto com Eduard Stiefel, matemático suíço, foram os precursores dessa nova subárea de estudo na matemática.

Stiefel, em sua tese, introduziu certas classes “características” em homologia para os fibrados tangentes de determinadas variedades suaves. Simultaneamente, Whitney tratou o caso para os fibrados esfera, ou seja, os fibrados Euclidianos cujo vetores do espaço total possuem norma igual a um.

Posteriormente, Whitney contribuiu no desenvolvimento da linguagem na Teoria de Cohomologia, consequentemente facilitando o estudo das classes características através de classes de cohomologia. Dessa maneira, Whitney incrementou esta teoria ao trazer um resultado referente às classes de cohomologia, chamado de Teorema do Produto de Whitney 5.3.

Este trabalho disserta sobre uma das classes características em específico, as classes de Stiefel-Whitney. Estas que foram as primeiras classes características para variedades suaves a serem apresentadas à comunidade matemática, e são as classes com maior interpretação geométrica.

Um dos problemas na matemática consiste em determinar quando é possível construir k campos vetoriais contínuos independentes (k -referencial) sobre uma variedade. Por outro lado, este problema está relacionado à classificação de fibrados triviais. O Teorema 3.4 mostra a relação existente entre esse dois problemas:

Um n -fibrado é trivial se, e somente se, for possível definir n seções independentes sobre a base deste fibrado.

Em paralelo, a Teoria da Obstrução auxilia no problema de determinar a existência ou não de k -referenciais sobre um espaço topológico. Através de elementos de grupos de homotopia, na Teoria de Obstrução é possível dizer quando determinadas aplicações contínuas definidas em um subconjunto são extensíveis para todo o conjunto em questão. Essa situação pode ser transcrita para o ambiente topológico, no qual estamos interessados, considerando estas aplicações como sendo as seções.

Através da Variedade de Stiefel, é possível solucionar o problema em discussão de uma forma melhor. Para cada espaço topológico, temos associado a variedade de Stiefel correspondente, então a partir disto, é possível olhar k -referenciais do espaço topológico em um determinado ponto, como uma seção da variedade de Stiefel associada ao espaço.

Então, primordialmente, as classes de Stiefel-Whitney foram pensadas como classes de obstrução à criação de um k -referencial, obtendo assim uma forte interpretação geométrica. Estas classes de obstrução são classes de cohomologia com coeficientes em \mathbb{Z}_2 . As classes de Stiefel-Whitney satisfazem algumas propriedades as quais são tomadas como axiomas e são estudadas neste trabalho e encontram-se em [16].

Este trabalho foi escrito através do seguinte roteiro:

No *Capítulo 1* é feito um breve resumo da Topologia Diferencial, contemplando variedades suaves e seus espaços tangentes, bem como as variedades tangentes, as quais serão frequentemente usadas no decorrer do trabalho. São apresentadas algumas variedades suaves com grande relevância nesta dissertação como a esfera n dimensional, variedade de Stiefel e a variedade de Grassmann. No fim deste capítulo encontra-se uma apresentação do Teorema de Poincaré-Hopf. Este teorema é o grande elo existente entre geometria e topologia.

O *Capítulo 2* aborda em nível introdutório a construção de três temas centrais que sustentam a topologia algébrica: a teoria de homotopia, os grupos de homologia e os grupos de cohomologia. Ainda neste capítulo, serão apresentados exemplos com os cálculos para determinar os grupos de homologia simplicial da esfera S^2 com coeficientes em \mathbb{Z} . Também serão calculados os grupos de cohomologia singular para a esfera S^2 com os coeficientes no anel dos inteiros.

No *Capítulo 3*, encontra-se o primeiro ramo da matemática em que o objetivo principal deste trabalho está baseado: Teoria de Fibrados. Então, neste capítulo serão apresentados definições e resultados básicos, além de alguns exemplos que serão frequentemente usados como no caso do fibrado tangente τ_M de uma variedade suave M , o fibrado linha canônico γ_n^1 sobre o espaço projetivo real $\mathbb{R}P^n$ e o fibrado canônico ζ^n sobre a variedade de Grassmann G_n dos quais as classes estudadas neste trabalho necessitam bastante.

O *Capítulo 4* disserta sobre a Teoria da Obstrução. Este capítulo contém os elementos necessários para poder definir as classes de Stiefel-Whitney através de cocadeias de obstrução. Sobre cocadeias de obstrução, veremos alguns principais resultados como:

- (i) *Lema 4.4: Toda cocadeia de obstrução é um cociclo; e*
- (ii) *Teorema 4.7: Quaisquer duas extensões para uma determinada aplicação pertencem à mesma classe em cohomologia.*

Todos os resultados apresentados aqui serão aplicados em um exemplo que norteará todo o capítulo. No final do capítulo, são exibidos os grupos de homotopia dos espaços \mathbb{R}^n e \mathbb{C}^n nas equações 4.4 e 4.5, respectivamente.

No Capítulo 5, apresentamos a definição construída através de obstrução primária para as classes de Stiefel-Whitney. Em seguida, serão definidos os quatro axiomas que regem estas classes, e assumidos a validade destes axiomas, apresentaremos algumas implicações diretas dessa teoria. O espaço projetivo real $\mathbb{R}P^n$ será o de maior importância nesse contexto, sendo usado para várias ilustrações ao longo do texto. Veremos também como usar estas classes características para analisar problemas de imersões de variedades. Por fim, estudamos os números de Stiefel-Whitney, que são usados no estudo de classes de cobordismo. Para encerrar o capítulo, apresentaremos uma demonstração, seguindo [16], de que as classes de cohomologia singular com coeficientes em \mathbb{Z}_2 que satisfazem os axiomas descritos em 5.1, são unicamente determinadas.

O *Capítulo 6* traz um breve resumo do que foi exposto no trabalho bem como um rápido complemento da teoria das classes características, mostrando outros pontos interessantes como, por exemplo, um breve comentário a respeito das classes de Chern.

Capítulo 1

Noções de Topologia Diferencial

Neste capítulo, apresentamos definições e resultados básicos da Topologia Diferencial, os quais se fazem necessários para o desenvolvimento do trabalho nos próximos capítulos. Sendo assim, são abordados conceitos referentes às variedades suaves e seus espaços tangentes, teoria da interseção, teoria do grau, e o Teorema de Poincaré-Hopf. As referências principais utilizadas neste capítulo são [8], [13] e [7].

O objetivo final deste capítulo é apresentar o clássico Teorema de Poincaré-Hopf. Este teorema é um importante resultado que relaciona ferramentas algébricas com ferramentas geométricas. Na Topologia Algébrica, temos a característica de Euler que representa um invariante topológico. Em paralelo, em [7] é apresentada uma definição de característica de Euler no contexto da Topologia Diferencial, que é equivalente à definição no contexto da Topologia Algébrica (a prova desta equivalência encontra-se em [3]).

Então este capítulo aborda algumas definições e resultados que são utilizados de alicerce para todas as construções realizadas nos próximos capítulos. Alguns exemplos clássicos e importantes de variedades na Topologia Diferencial também serão contemplados, como por exemplo, a variedade de Stiefel, a variedade de Grassmann e a esfera S^n .

Por outro lado, definimos uma singularidade isolada de um campo vetorial contínuo sobre uma variedade suave e a relacionaremos com um determinado número, que chamamos de índice da singularidade. O resultado principal deste capítulo afirma que se em uma variedade suave temos um campo vetorial contínuo com uma quantidade finita de singularidades isoladas, então a soma dos índices de suas singularidades é igual a característica de Euler dessa variedade.

1.1 Variedades Suaves

Para definirmos variedades suaves reais consideraremos o conjunto \mathbb{R}^A onde A é um conjunto de índices qualquer, podendo até ser um conjunto infinito. Tal conjunto é um espaço coordenado constituído de pontos $x \in \mathbb{R}^A$, em que para cada $\alpha \in A$, a α -ésima coordenada de x é representada por x_α . No caso em que $A = \{1, \dots, n\}$, temos que $\mathbb{R}^A = \mathbb{R}^n$.

Sejam X um espaço topológico, $f : X \rightarrow \mathbb{R}^A$ uma aplicação e $x \in X$. A α -ésima coordenada de $f(x)$ é representada por $f_\alpha(x)$. No espaço \mathbb{R}^A , adotamos a topologia produto como sendo o produto de cópias do espaço \mathbb{R} .

Seja $M \subset \mathbb{R}^A$ um subconjunto munido com a topologia de subespaço, então a aplicação $f : X \rightarrow M$ é contínua se, e somente se, $f_\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua para todo $\alpha \in A$ (para detalhes desta afirmação consultar [11], página 73).

O conceito de variedade suave de dimensão n em \mathbb{R}^m já é bem conhecido na literatura como sendo um espaço Hausdorff, localmente euclidiano e que possui um atlas máximo. Generalizando tal conceito, definimos a seguir o conceito de variedade suave no espaço \mathbb{R}^A .

Definição 1.1. Seja M subconjunto de \mathbb{R}^A . Dizemos que M é uma **n -variedade suave**, ou simplesmente uma **variedade suave**, se para cada $p \in M$ existem $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, uma vizinhança aberta V de p em M e uma aplicação $h : U \rightarrow V$ tais que:

1. h é um homeomorfismo, e
2. A matriz $\left[\frac{\partial h_\alpha}{\partial u_j}(u) \right]$ tem posto n para todo $u \in U$.

Da Definição 1.1 temos que, localmente, M é homeomorfo a um aberto U de \mathbb{R}^n e o espaço gerado pelos vetores $\left[\frac{\partial h_\alpha}{\partial u_j}(u) \right]$ tem dimensão n , pois os n vetores $\frac{\partial h_\alpha}{\partial u_1}(u), \dots, \frac{\partial h_\alpha}{\partial u_n}(u)$ são linearmente independentes. A imagem V de U pela aplicação h será chamada **vizinhança coordenada de M** . A coleção dos homomorfismos h tais que seus respectivos domínios cobrem o espaço M é chamado **atlas**. Uma **parametrização local** de M consiste numa terna (U, V, h) .

Exemplo 1.1. O espaço Euclidiano \mathbb{R}^n e a esfera n -dimensional

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \|x\| = 1\}$$

são exemplos de n -variedades suaves.

Exemplo 1.2. Consideremos o **espaço projetivo real** $\mathbb{R}P^n$ de dimensão n como sendo espaço quociente da esfera S^n munido com a seguinte relação de equivalência:

$$p \sim q \Leftrightarrow p = \pm q$$

Assim, $\mathbb{R}P^n = \frac{S^n}{\sim}$ com a topologia quociente e $[p] \in \mathbb{R}P^n$ se, e somente se, $[p] = \{\pm p\}$.

Uma forma intuitiva para conceber o espaço $\mathbb{R}P^n$ seria identificá-lo com o conjunto das retas em \mathbb{R}^{n+1} que passam pela origem. Essas definições mostradas acima são equivalentes pois cada reta α_n que passa pela origem de \mathbb{R}^{n+1} intercepta S^n exatamente dois pontos antípodas.

Observação 1.1. Se U é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n , então U é uma n -variedade suave com a parametrização local sendo a terna (U, Id_U, U) , onde $id_U : U \rightarrow U$ denota a aplicação identidade.

1.1.1 Espaço tangente e aplicações entre variedades

Sejam M uma variedade suave e $p \in M$.

Definição 1.2. Um **caminho** γ em M que passa por p é uma aplicação

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^A$$

onde $\gamma(0) = p$.

Para definir o espaço tangente em um ponto $p \in M$ de uma variedade $M \in \mathbb{R}^A$, consideremos um caminho γ em M que passa por p . Convencionaremos o **vetor velocidade** de tal caminho pela derivada

$$\left. \frac{d\gamma}{dt} \right|_{t=0} \in \mathbb{R}^A.$$

Definição 1.3. Sejam $M \subset \mathbb{R}^A$ uma variedade suave e $p \in M$. Um vetor $v \in \mathbb{R}^A$ é **tangente** à M em p se v é o vetor velocidade de algum caminho suave que passa por p em M . O conjunto de tais vetores tangentes, denotado por T_pM , será chamado de **espaço tangente** a M em p .

Definição 1.4. Sejam M uma n -variedade suave com um atlas \mathcal{A} e $S \subset M$ um subconjunto. Dizemos que S é uma **s -subvariedade** se S possui uma estrutura de s -variedade suave com o atlas para S sendo formado pelos homeomorfismos do atlas \mathcal{A} cujo domínios destes homeomorfismos estão restritos a S .

Exemplo 1.3. Seja M uma n -variedade suave. Se U é um subconjunto aberto de M de dimensão k , então U é uma k -subvariedade suave de M .

Outra definição importante e bastante utilizada no estudo de variedades é a variedade tangente de uma variedade:

Definição 1.5. Seja $M \subset \mathbb{R}^A$ uma variedade suave. A **variedade tangente** de M é o subespaço de $\mathbb{R}^A \times \mathbb{R}^A$ dado por:

$$TM = \{(p, v) \in \mathbb{R}^A \times \mathbb{R}^A; p \in M \text{ e } v \in T_pM\}.$$

Observação 1.2. Um atlas em M induz um atlas em TM . Assim, TM é uma $2n$ -variedade suave.

Exemplo 1.4. Na esfera S^1 , para cada $p \in S^1$, o espaço T_pS^1 é formado pela reta tangente à S^1 em p . Assim, o espaço TS^1 é formado por todas as retas tangentes a S^1 .

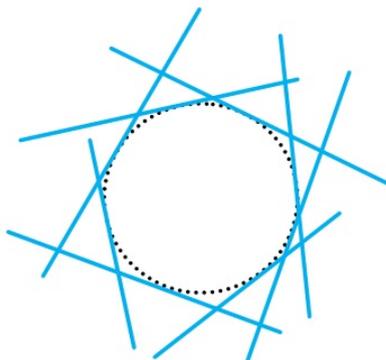


Figura 1.1: Variedade tangente sobre S^1

Na figura acima temos a ilustração da variedade tangente TS^1 . Cada reta em azul tangente à esfera pontilhada S^1 , representa um elemento de TS^1 .

A seguir definimos uma aplicação suave entre variedades suaves e veremos algumas propriedades destas aplicações e suas derivadas.

Sejam $M \subset \mathbb{R}^A$ e $N \subset \mathbb{R}^B$ variedades suaves, $f : M \rightarrow N$ uma aplicação contínua, $p \in M$ e (U, V, h) uma parametrização local com $p \in U$.

Definição 1.6. Dizemos que f é **suave em** p se $f \circ h : U \rightarrow N$ é suave na vizinhança U de p . Então, f é **suave** se for suave em todos os pontos $p \in M$.

Definição 1.7. Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é um **difeomorfismo** se f é bijetiva com f e f^{-1} suaves.

Definição 1.8. Um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma **n -variedade suave com bordo**, se para cada $x \in M$, existe uma vizinhança de x em M difeomorfa a um subconjunto aberto do espaço $H^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n \geq 0\}$.

Observação 1.3. Os difeomorfismos mencionados na Definição 1.8 são chamados **parametrizações locais** de M . A **fronteira** de M denotada por ∂M consiste dos pontos cuja imagem pela parametrização local pertence à $\partial H^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. O complementar da fronteira é dito **interior** de M e denotado por $\text{int}(M)$.

1.1.2 Orientação

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $\beta = \{v_1, \dots, v_k\}$ uma base do espaço V . Se $\beta' = \{v'_1, \dots, v'_k\}$ é uma outra base ordenada, sabemos que existe um único isomorfismo linear $A : V \rightarrow V$ de modo que:

$$\beta' = A(\beta)$$

onde $A(\beta)$ denota a base $\{A(v_1), \dots, A(v_k)\}$.

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita, β e β' bases ordenadas de V e $A : V \rightarrow V$ um isomorfismo linear de modo que $\beta' = A(\beta)$. Se $\det(A) > 0$, então dizemos que β e β' **determinam a mesma orientação** para o espaço V . Neste caso, β e β' estão relacionados e esta é uma relação de equivalência.

Assim, obtemos duas classes de equivalência: a das bases que determinam a mesma orientação ($\det(A) > 0$) e a das bases que não determinam a mesma orientação ($\det(A) < 0$). Uma **orientação** para o espaço vetorial V é uma escolha arbitrária de alguma destas classes de equivalência. Para espaços de dimensão zero, uma orientação será apenas uma escolha de sinais $+1$ ou -1 .

Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita e $A : V \rightarrow W$ um isomorfismo. Se β e β' têm a mesma orientação em V , então $A(\beta)$ e $A(\beta')$ têm a mesma orientação em W .

Definição 1.9. Fixando uma orientação para V e W , diremos que A **preserva orientação** se $A(\beta)$ tem o mesmo sinal em W que β em V . Caso contrário, diremos que A reverte orientação.

Definição 1.10. Uma **orientação** para uma variedade suave M é uma escolha suave de orientação para seus espaços tangentes.

A condição da suavidade mencionada na definição acima, pode ser interpretada da seguinte maneira: Em cada ponto $x \in M$ deverá existir uma parametrização local $h : U \rightarrow M$ tal que o isomorfismo

$$dh_u : \mathbb{R}^k \rightarrow T_{h(u)}M$$

preserva orientação para todo $u \in U$.

Definição 1.11. Seja M uma variedade suave. Diremos que M é **orientável** se possuir uma orientação.

Exemplo 1.5. O espaço Euclidiano \mathbb{R}^n e a esfera S^n são orientáveis.

1.2 Campo Vetorial

Definição 1.12. Seja M uma n -variedade suave. Um **campo vetorial tangente** v sobre M é uma aplicação contínua $v : M \rightarrow TM$.

Definição 1.13. Seja M uma n -variedade suave. Um ponto $p \in M$ chama-se uma **singularidade** de um campo vetorial v sobre M quando $v(p) = 0$.

Exemplo 1.6. A esfera S^1 admite um campo vetorial contínuo sem singularidades.

Se considerarmos um ponto $x \in S^1$ então existe $\theta \in [0, 2\pi]$ tal que $x = (\cos(\theta), \sin(\theta))$. Então o campo $v(\theta) = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$ é um campo vetorial tangente sem singularidades sobre S^1 .

Definição 1.14. Sejam M uma variedade suave e $A \subset M$ um subconjunto. Um **r -campo tangente** em A é um conjunto

$$v^{(r)} = \{v_1, \dots, v_r\}$$

de r campos vetoriais tangentes v_i de M definidos em A .

Um ponto singular do r -campo $v^{(r)}$ é um ponto $p \in A$ onde os vetores $v_1(p), \dots, v_r(p)$ não são linearmente independentes. Sejam M uma variedade suave e $v^{(r)}$ um r -campo de M . Se $v^{(r)}$ não possuir pontos singulares então $v^{(r)}$ é dito um r -referencial, ou seja:

Definição 1.15. Um **r -referencial** em \mathbb{R}^n é um conjunto de vetores linearmente independentes em \mathbb{R}^n .

A coleção de todos os r -referenciais em \mathbb{R}^n forma um subconjunto aberto de $(\mathbb{R}^n)^r$. Podemos pensar nesta afirmação da seguinte maneira: se considerarmos, por exemplo,

o caso em que $r = 2$, então temos dois vetores em \mathbb{R}^n linearmente independentes. Note que qualquer pequena variação destes dois vetores continua gerando dois vetores que ainda são linearmente independentes.

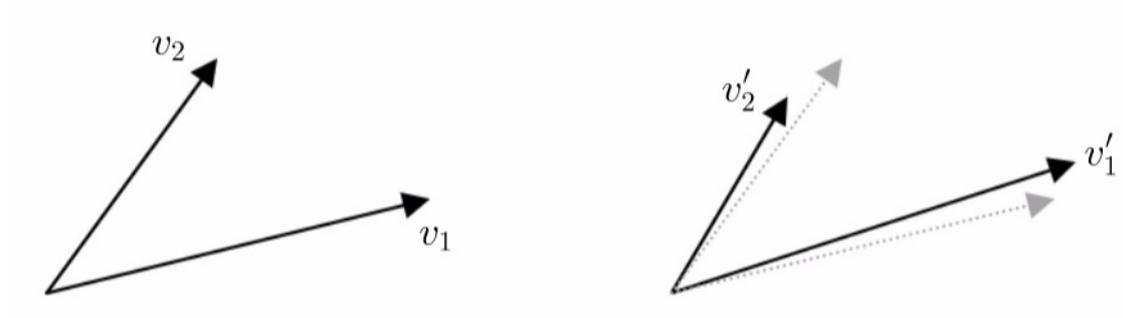


Figura 1.2: Variação nos vetores v_1 e v_2 .

Na figura acima vemos que ao mudar a direção ou norma dos vetores v_1 e v_2 , forma-se os vetores v'_1 e v'_2 que também são linearmente independentes. Chamamos esta coleção de **Variedade de Stiefel** e a denotaremos por $V_r(\mathbb{R}^n)$.

Lema 1.1. A variedade de Stiefel $V_r(\mathbb{R}^n)$ é uma nr -variedade suave.

Demonstração. Como $V_r(\mathbb{R}^n)$ é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^{nr} , segue da Observação 1.1 que $V_r(\mathbb{R}^{nr})$ é uma nr -variedade suave.

□

1.3 Variedade de Grassmann

A variedade de Grassmann é um exemplo não trivial de variedade suave bastante utilizado na matemática.

Definição 1.16. A **variedade de Grassmann** $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ é o conjunto de todos os n -subespaços vetoriais de \mathbb{R}^{n+k} .

Em particular, quando $n = 1$, o conjunto $G_1(\mathbb{R}^{1+k})$ pode ser identificado com o espaço $\mathbb{R}P^k$.

A variedade de Grassmann é uma variedade topológica. De fato,

► $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ é um espaço topológico. Dotaremos o conjunto $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ com a seguinte topologia quociente:

Consideramos a variedade de Stiefel $V_n(\mathbb{R}^{n+k})$. Assim, podemos definir uma aplicação contínua

$$q : V_n(\mathbb{R}^{n+k}) \rightarrow G_n(\mathbb{R}^{n+k})$$

que aplica cada n -referencial no espaço vetorial gerado por ele. Desta maneira, a aplicação q é sobrejetora e diremos que $U \subset G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ é aberto se, e somente se, o conjunto $q^{-1}(U)$ for aberto em $V_n(\mathbb{R}^{n+k})$.

Por outro lado, se $V_n^0(\mathbb{R}^{n+k})$ denota o subconjunto de $V_n(\mathbb{R}^{n+k})$ formado por todos os n -referenciais ortonormais em \mathbb{R}^{n+k} , então $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ pode ser identificado como $V_n^0(\mathbb{R}^{n+k})$ e os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{array}{ccccc} V_n^0(\mathbb{R}^{n+k}) & \xrightarrow{i} & V_n(\mathbb{R}^{n+k}) & \xrightarrow{g} & V_n^0(\mathbb{R}^{n+k}) \\ & \searrow q_0 & \downarrow q & \swarrow q_0 & \\ & & G_n(\mathbb{R}^{n+k}) & & \end{array}$$

em que $q_0 = q|_{V_n^0(\mathbb{R}^{n+k})}$, i é a aplicação inclusão e g é a aplicação formada pelo processo de Gram-Schmidt.

► $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ é um espaço Hausdorff. Para isto, será necessário considerar uma função real contínua que fornecerá vizinhanças disjuntas para os pontos de $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$. Fixemos $w \in \mathbb{R}^{n+k}$ e consideraremos a aplicação $\rho_w : G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \rightarrow \mathbb{R}$ que para cada $X \in G_n(\mathbb{R}^{n+k})$, determina o quadrado da distância entre w e X . Se (x_1, \dots, x_n) é um n -referencial ortonormal, então $\{x_1, \dots, x_n\}$ é uma base ortonormal para o conjunto $X = \text{span}\{x_1, \dots, x_n\} \in G_n(\mathbb{R}^{n+k})$.

Daí, a aplicação

$$\rho_w|_{V_n^0(\mathbb{R}^{n+k})} : V_n^0(\mathbb{R}^{n+k}) \rightarrow \mathbb{R}$$

pode ser escrita por

$$\rho_w|_{V_n^0(\mathbb{R}^{n+k})}(X) = w \cdot w - (w \cdot x_1)^2 - \dots - (w \cdot x_n)^2.$$

Assim, a composição

$$V_n^0(\mathbb{R}^{n+k}) \xrightarrow{q_0} G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \xrightarrow{\rho_w} \mathbb{R}$$

é contínua. Como $\rho_w|_{V_n^0(\mathbb{R}^{n+k})} = \rho_w \circ q_0$ e as aplicações q_0 e $\rho_w|_{V_n^0(\mathbb{R}^{n+k})}$ são contínuas, então ρ_w é contínua.

Se X e Y são dois n -subespaços vetoriais distintos em \mathbb{R}^{n+k} tais que $w \in X$ mas $w \notin Y$, então $\rho_w(X) \neq \rho_w(Y)$. Como \mathbb{R} é Hausdorff, existem U e V abertos em \mathbb{R} que contém $\rho_w(X)$ e $\rho_w(Y)$, respectivamente, tais que $U \cap V = \emptyset$. Assim, $\rho_w^{-1}(U)$ e $\rho_w^{-1}(V)$

são abertos de $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ que contém X e Y , respectivamente, com $\rho_w^{-1}(U) \cap \rho_w^{-1}(V) = \emptyset$. Portanto, $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ é um espaço Hausdorff.

► $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ é localmente homeomorfo a \mathbb{R}^{nk} . Seja $X_0 \in G_n(\mathbb{R}^{n+k})$. Assim, podemos ver o espaço \mathbb{R}^{n+k} pela decomposição:

$$\mathbb{R}^{n+k} = X_0 \oplus X_0^\perp.$$

Consideremos o subconjunto aberto

$$U \subset G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \tag{1.1}$$

tal que a projeção ortogonal $p : X_0 \oplus X_0^\perp \rightarrow X_0$ aplica todos os n -subespaços $Y \in U$ em X_0 . Pela Figura 1.3, a aplicação p projeta o espaço representado pela cor verde no espaço X_0 representado pela cor vermelha.

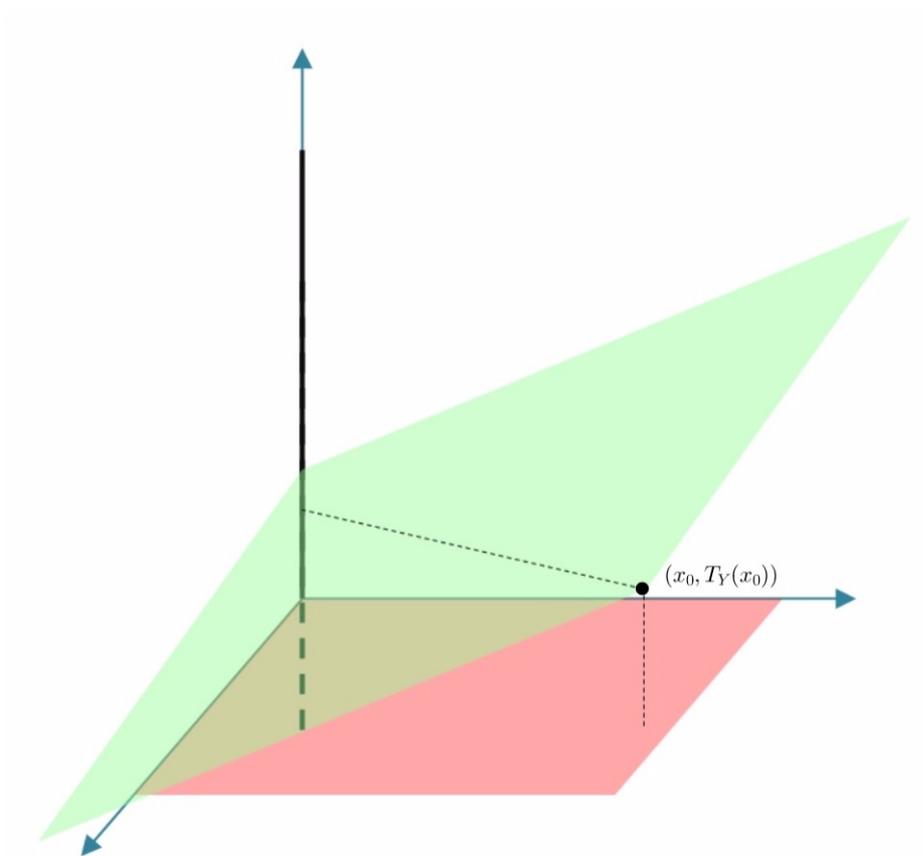


Figura 1.3: Projeção do espaço Y sobre X_0 .

Então, cada $Y \in U$ pode ser visto como o gráfico de uma transformação linear $T_Y : X_0 \rightarrow X_0^\perp$, já que cada ponto do espaço Y tem coordenadas em X_0 e X_0^\perp . Assim,

temos uma correspondência bijetiva

$$T : U \rightarrow \text{Hom}(X_0, X_0^\perp) \cong \mathbb{R}^{nk}.$$

Seja $\{x_1, \dots, x_n\}$ uma base ortonormal para X_0 . Assim, cada $Y \in U$ possui uma única base $\{y_1, \dots, y_n\}$ tal que:

$$p(y_1) = x_1,$$

$$\vdots$$

$$p(y_n) = x_n.$$

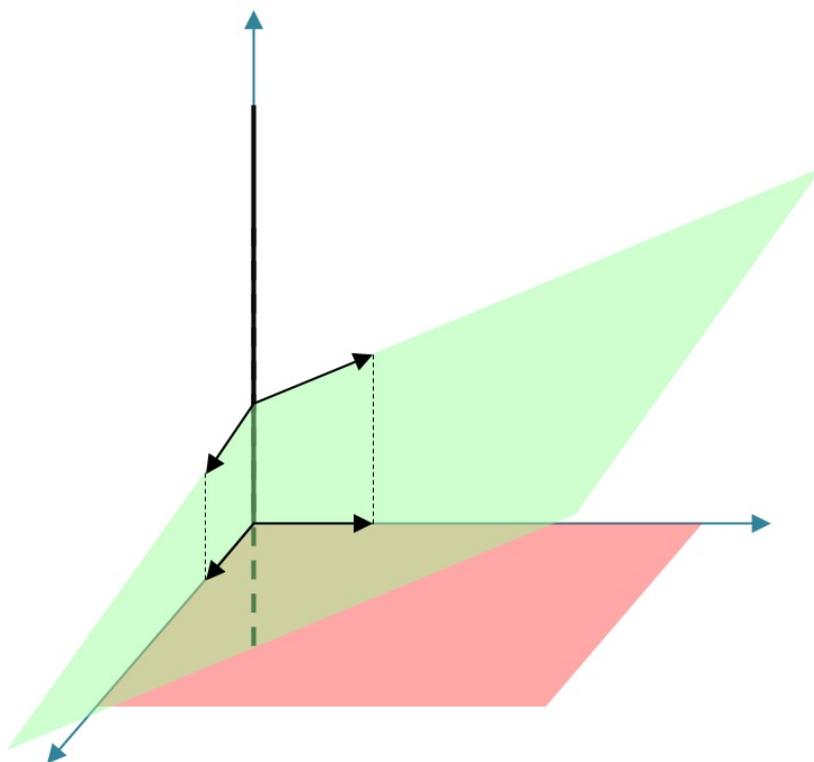


Figura 1.4: Projeção da base de Y na base de X_0 .

Ou seja, a aplicação p projeta os vetores da base de Y nos vetores da base de X_0 .

Logo, como cada y_i pode ser escrito por $y_i = x_i + T_Y(x_i)$. Como y_i e x_i dependem continuamente em Y , então $T_Y(x_i)$ depende continuamente em Y . Portanto, T_Y e T_Y^{-1} são contínuas. Assim, $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ é homeomorfo a \mathbb{R}^{n+k} .

1.3.1 Variedade de Grassmann infinita

Seja \mathbb{R}^∞ o espaço vetorial que consiste das sequências infinitas

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots),$$

onde $x_i \in \mathbb{R}$ e apenas um número finito dos x_i são diferentes de zero. Se n for um número fixo, então os elementos $x = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots)$ formam o espaço \mathbb{R}^n . Assim,

$$\mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \dots \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \subset \dots$$

e,

$$\mathbb{R}^\infty = \bigcup_{k \geq 1} \mathbb{R}^k.$$

Definição 1.17. O conjunto

$$G_n = G_n(\mathbb{R}^\infty) = \bigcup_{k \geq 0} G_n(\mathbb{R}^{n+k})$$

formado por todos n -subespaços vetoriais de \mathbb{R}^∞ é uma variedade suave chamada **Variedade de Grassmann infinita**.

Em particular, quando $n = 1$, temos o espaço projetivo infinito $G_1 = \mathbb{R}P^\infty$.

Assim, vale que $G_n(\mathbb{R}^n) \subset G_n(\mathbb{R}^{n+1}) \subset \dots$ e então a topologia usada em G_n é dada por: $U \subset G_n$ é aberto em G_n se, e somente se, $U \cap G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ é aberto em $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ para todo k .

1.4 Teoria da Interseção

A definição mais usada para a característica de Euler encontrada na literatura é através da soma alternada das quantidades de geradores dos grupos de homologia relacionados ao espaço topológico (para mais detalhes, consultar [8], página 146). Uma maneira de definir característica de Euler como um invariante e entender a geometria existente na situação em que este objeto foi criado é através da Teoria da Interseção, a qual é dissertada a seguir.

Definição 1.18. Sejam Y uma variedade suave e X e Z subvariedades de Y . Dizemos que X e Z têm **dimensões complementares** se:

$$\dim(X) + \dim(Z) = \dim(Y).$$

Definição 1.19. Sejam X e Y variedades suaves, Z subvariedade de Y e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação suave. Dizemos que f é **transversal** à Z se

$$df_x(T_x X) + T_{f(x)} Z = T_{f(x)} Y,$$

para todo $x \in f^{-1}(Z)$. Neste caso, usamos a notação $f \bar{\cap} Z$. Quando $X \subset Y$ e f é a aplicação inclusão, dizemos que Y e Z são transversais e escrevemos $X \bar{\cap} Z$.

Observação 1.4. Sejam X uma variedade compacta e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação suave transversal à subvariedade Z de Y onde $\dim(X) + \dim(Z) = \dim(Y)$. Então, é possível mostrar que $f^{-1}(Z)$ é uma 0-variedade de X e consequentemente é um conjunto finito. De fato, como $(X \cap f^{-1}(Z)) \subset X$ e $X \cap f^{-1}(Z)$ é um conjunto discreto, podemos formar uma cobertura aberta para X em que cada ponto de $X \cap f^{-1}(Z)$ esteja em apenas um destes abertos da cobertura. Então, como X é compacto, esta cobertura admite uma subcobertura finita e então $X \cap f^{-1}(Z)$ é um conjunto finito de pontos.

Observação 1.5. Nesse contexto, se X for transversal à Z , então a condição da dimensão implica que $X \cap f^{-1}(Z)$ é uma 0-variedade. No caso em que X e Z são variedades fechadas e X compacta, então $X \cap f^{-1}(Z)$ é um conjunto finito de pontos.

A quantidade de pontos em $X \cap f^{-1}(Z)$ é o que entendemos por **número de interseção** de X e Z e usaremos a notação $\#(X \cap Z)$.

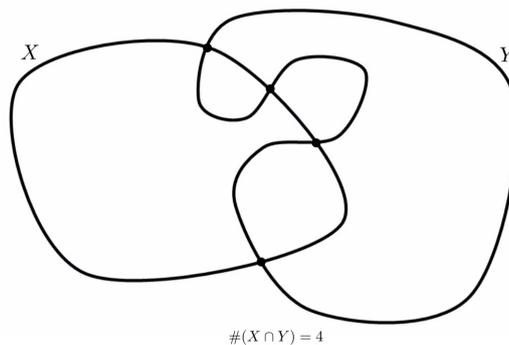


Figura 1.5: Interseção entre as variedades X e Y .

Definição 1.20. Sejam X uma variedade suave compacta e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação suave transversal a subvariedade Z de Y com $\dim(X) + \dim(Z) = \dim(Y)$. Então, o **número de interseção mod 2** da aplicação f com Z é a cardinalidade do conjunto $f^{-1}(Z)$ módulo 2. A notação usada é a seguinte: $I_2(f, Z)$.

Teorema 1.2. Se $f, g : X \rightarrow Y$ são aplicações homotópicas e ambas transversais a Z , então $I_2(f, Z) = I_2(g, Z)$.

Para consultar detalhes e a demonstração do teorema acima, consultar [7], página 78.

Assim, vemos que o número de interseção *mod* 2 não varia através de aplicações homotópicas, tornando-se um invariante homotópico.

Teorema 1.3. *Sejam X uma variedade compacta, Y uma variedade conexa tais que $\dim(X) = \dim(Y)$ e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação suave. Então, $I_2(f, \{y\})$ é o mesmo valor para todo valor regular $y \in Y$.*

Para consultar detalhes e a demonstração do teorema cima, consultar [7], página 81.

Definição 1.21. Sejam X uma variedade compacta, Y uma variedade conexa com $\dim(X) = \dim(Y)$ e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação suave. Dado $y \in Y$, o valor $I_2(f, \{y\})$ é dito **grau mod 2** de f e denotaremos por

$$\deg_2(f) = I_2(f, \{y\}) = \#f^{-1}(\{y\}) \text{ mod } 2.$$

Observação 1.6. O grau *mod* 2 é um invariante homotópico bem definido pelo Teorema 1.3.

Sejam X, Y e Z variedades suaves orientadas sem fronteira com X compacto, Z subvariedade fechada de Y e $\dim(X) + \dim(Z) = \dim(Y)$. Se $f : X \rightarrow Y$ é transversal à Z , então $f^{-1}(Z)$ é um conjunto finito de pontos onde cada ponto possui um número de orientação ± 1 .

Definição 1.22. O **número de interseção** $I(f, Z)$ é a soma desses números de orientações.

O número de interseção é um invariante homotópico. (para demonstração deste fato, consultar [7], página 108).

Definição 1.23. Se Y é conexo e $\dim(X) = \dim(Y)$, então o **grau** de uma aplicação suave $f : X \rightarrow Y$, denotado por $\deg(f)$, é definido por:

$$\deg(f) = I(f, \{y\})$$

em qualquer valor regular $y \in Y$.

Dessa forma, por definição, o grau de uma aplicação também é um invariante homotópico.

Definição 1.24. Se X também é uma subvariedade de Y então o número de interseção entre X e Z é definido por:

$$I(X, Z) := I(i, Z)$$

em que $i : X \rightarrow Y$ é a aplicação inclusão.

Observação 1.7. O valor $I(X, Z)$ permanece o mesmo não importa como X é deformado, tornando-se um invariante sobre pequenas perturbações.

Definição 1.25. Se Y é uma variedade compacta e orientada, então a **característica de Euler**, denotada por $\chi(Y)$, é o número de auto interseções da diagonal Δ em $Y \times Y$, sendo definida por:

$$\chi(Y) := I(i', \Delta)$$

onde $i' : \Delta \rightarrow Y \times Y$ é uma aplicação homotópica à aplicação inclusão.

Observação 1.8. A rigor, geometricamente, entende-se por número de auto interseções da diagonal Δ em $Y \times Y$ como o número $I(i, \Delta)$ onde i é a aplicação inclusão de Δ em $Y \times Y$. Porém, esta definição não é boa já que $i^{-1}(\Delta) = \Delta$ não é necessariamente um conjunto finito de pontos. Contudo, pela Observação 1.7, como o número de interseção não varia através de aplicações homotópicas, devemos considerar uma aplicação

$$i' : \Delta \rightarrow Y \times Y$$

homotópica a i de forma que $i' \bar{\cap} \Delta$. Assim, considerando a orientação, temos que:

$$\chi(Y) = I(i, \Delta) = I(i', \Delta) = \#(i')^{-1}(\Delta).$$

1.5 O Teorema de Poincaré-Hopf

A importância de estudar os pontos singulares de um campo vetorial pode ser interpretada pelo fato que próximo destes pontos o campo vetorial pode apresentar um comportamento bem interessante, como por exemplo, os vetores do campo podem sofrer alterações na norma e direção.

Na figura abaixo vemos geometricamente o comportamento de um campo vetorial v próximo do ponto p , onde p é um ponto regular na imagem da esquerda e um ponto singular na imagem da direita.

Definição 1.26. Sejam M uma variedade suave, $v : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ um campo vetorial e $p \in M$ uma singularidade do campo v . Se existir uma vizinhança de p em M tal que v não possui outras singularidades nesta vizinhança, dizemos que p é uma **singularidade isolada**.

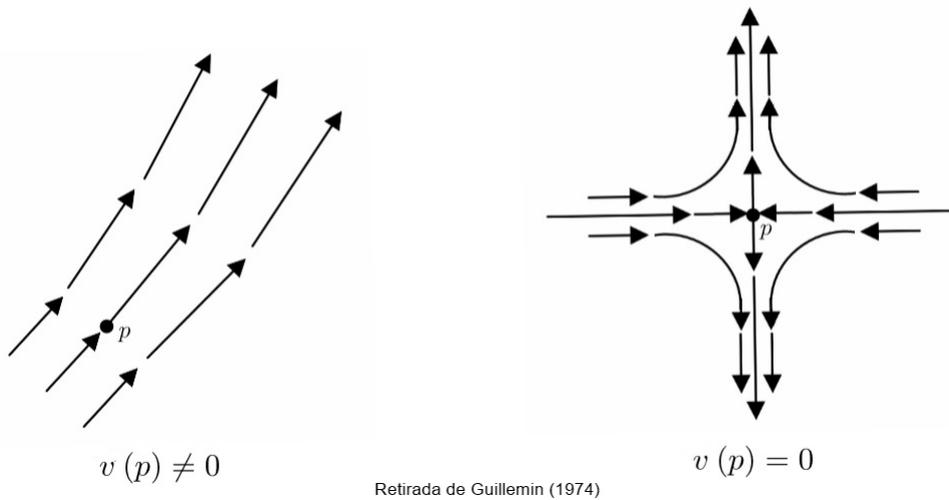


Figura 1.6: Campo de vetores

Para estudarmos o campo v com uma singularidade isolada na origem de \mathbb{R}^N , vamos considerar as direções de v através de M . Como M é uma n -variedade suave, para cada $p \in M$, uma vizinhança de p pode ser vista como uma esfera S_ε de raio $\varepsilon > 0$ no espaço Euclidiano \mathbb{R}^N . Assim, a variação direcional de v ao redor da origem é medida pela aplicação que leva qualquer vizinhança S_ε em S^n através de

$$x \mapsto \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$$

Definição 1.27. Sejam M uma n -variedade orientável e $v : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ um campo vetorial contínuo com uma singularidade isolada na origem. Se $\varepsilon > 0$ for tal que v não possui singularidades em S_ε exceto na origem, então o **índice** de v em 0, denotado por $ind_0(v)$ é o grau da aplicação:

$$\begin{aligned} \varphi : S_\varepsilon &\longrightarrow S^n \\ x &\longmapsto \frac{v(x)}{\|v(x)\|} \end{aligned}$$

O índice é um objeto matemático que associa cada singularidade isolada na origem de um campo v com o número $ind_0(v)$. No caso bidimensional, temos que $S_\varepsilon \cong S^1$ e assim o índice $ind_0(v)$ retrata quantas vezes o campo v percorre a S^1 , considerando as devidas orientações, ao caminhar por S_ε . Abaixo segue três exemplos de campos vetoriais com índices iguais a $-1, 0$ e 1 .

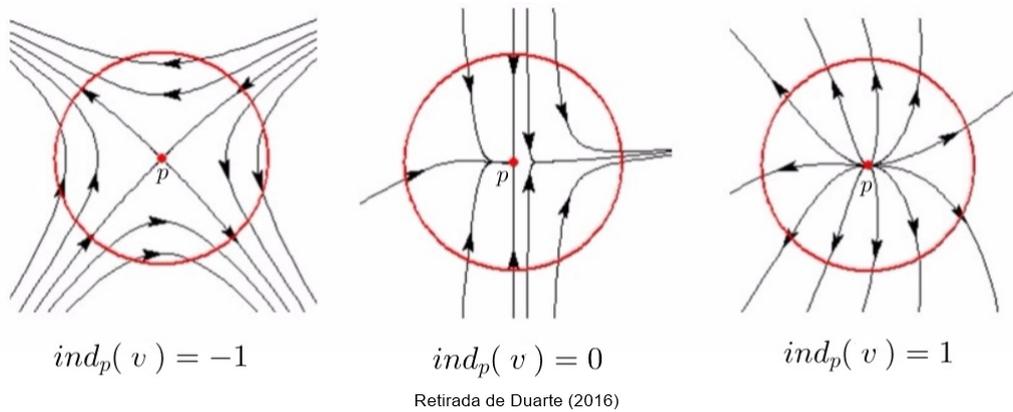


Figura 1.7: Índices de campos vetoriais

Teorema 1.4 (Teorema de Poincaré-Hopf). *Se v é um campo vetorial na variedade orientada fechada M com uma quantidade finita de singularidades isoladas. Então, a soma de todos os índices das singularidades de v coincide com a característica de Euler de M . Em outras palavras*

$$\sum_{i=1}^n ind_{p_i}(v) = \chi(M)$$

onde p_1, \dots, p_n são singularidades isoladas do campo v .

Para detalhes e a demonstração do Teorema acima, consultar [13], página 148.

Corolário 1.5. Seja M uma variedade suave com $\chi(M) \neq 0$, então qualquer campo vetorial sobre M deverá se anular em algum ponto.

Demonstração. Como $\chi(M) \neq 0$, pelo Teorema de Poincaré-Hopf 1.4, o campo considerado sobre M admite alguma singularidade isolada. Logo se anula em algum ponto. \square

Portanto, dada uma variedade suave compacta e orientada M , a característica de Euler mede a “obstrução” para construirmos um campo vetorial contínuo sobre M sem singularidades.

Capítulo 2

Topologia Algébrica

A Topologia Algébrica é um ramo da matemática que basicamente recorre a recursos algébricos para estudar espaços topológicos. Uma aplicação, por exemplo, é que a Topologia Algébrica fornece ferramentas para determinar quando dois espaços topológicos são homeomorfos.

Baseado em [8], neste capítulo apresentamos três pontos centrais da topologia Algébrica: homotopia, homologia e cohomologia singular. Em homotopia, apresentamos basicamente o que são aplicações homotópicas e espaços com o mesmo tipo de homotopia. Para entender a homologia, definimos simplexos e estruturas de Δ -complexo para construir a homologia simplicial. Também definiremos simplexos singulares e grupos de cadeias singulares para a construção de grupos de homologia singular. Sobre cohomologia, definimos os grupos de cocadeias singulares, os quais são obtidos a partir da dualização dos grupos das cadeias singulares em homologia. Na Seção 2.3.2, apresentamos os setes axiomas que sustentam a teoria de cohomologia. Por fim, este capítulo aborda algumas operações entre elementos de cohomologia, como o produto cup e o produto cap.

2.1 Homotopia

Alguns resultados em teoria de homologia e cohomologia são apresentados em termos de aplicações homotópicas. Nesta seção, definimos homotopia entre espaços topológicos e aplicações homotópicas, que são conceitos que formalizam a ideia intuitiva de deformação entre espaços topológicos e aplicações contínuas, respectivamente. Ao mencionar o intervalo I estamos considerando o intervalo $I = [0, 1]$.

Definição 2.1. Sejam X e Y espaços topológicos e o intervalo I . Uma **homotopia** é uma família de aplicações, $f_t : X \rightarrow Y$, $t \in I$, onde a aplicação $F : X \times I \rightarrow Y$ dada por $F(x, t) = f_t(x)$ é contínua.

Definição 2.2. Sejam X e Y espaços topológicos e $f, g : X \rightarrow Y$ duas aplicações contínuas. Dizemos que as aplicações f e g são **homotópicas** se existir uma aplicação $F : X \times I \rightarrow Y$ contínua tal que $F(x, 0) = f(x)$ e $F(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$.

Observação 2.1. Neste contexto, F é dita uma homotopia entre f e g e usaremos a notação $f \simeq g$ quando estas aplicações forem homotópicas. A relação \simeq define uma relação de equivalência entre aplicações contínuas do espaço topológico X no espaço Y . Quando g é uma aplicação constante dizemos que f é **homotopicamente nula**.

Definição 2.3. Um espaço topológico é **homotopicamente nulo** quando é homotópico à um ponto.

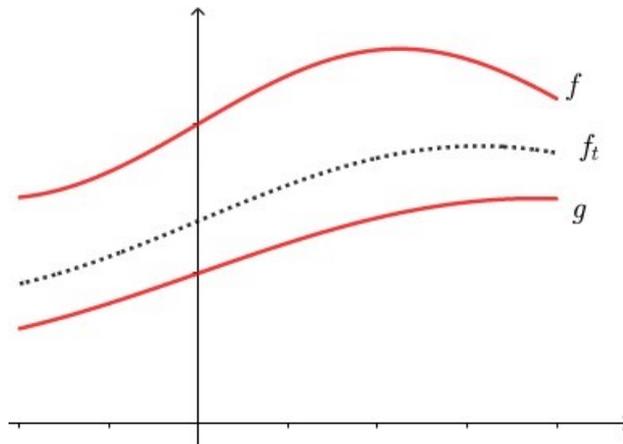


Figura 2.1: Homotopia entre f e g

Através da definição apresentada acima, podemos compreender a homotopia como a deformação contínua de uma aplicação contínua f para g através das funções f_t , onde para $t = 0$, temos a aplicação f e para $t = 1$, temos a aplicação g .

Exemplo 2.1. Sejam $E \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e X um espaço topológico qualquer. Se $f, g : X \rightarrow E$ são aplicações contínuas, então $f \simeq g$.

De fato, pois a aplicação $F : X \times I \rightarrow E$ dada pela homotopia:

$$F(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x) \tag{2.1}$$

está bem definida e define uma homotopia entre f e g .

Observação 2.2. A homotopia usada em (2.1) é chamada de homotopia linear.

Definição 2.4. Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua entre espaços topológicos. Dizemos que f é uma **equivalência homotópica** quando existir uma aplicação contínua $g : Y \rightarrow X$ tal que $f \circ g \simeq id_Y$ e $g \circ f \simeq id_X$, onde $id_X : X \rightarrow X$ e $id_Y : Y \rightarrow Y$ denotam as respectivas aplicações identidades. Neste caso, g é a inversa homotópica de f e os espaços X e Y são **homotopicamente equivalentes**.

Quando os espaços X e Y são homotopicamente equivalentes usaremos a notação $X \equiv Y$.

Definição 2.5. Sejam X um espaço topológico qualquer e Y um espaço topológico constituído de apenas um ponto. Se existir uma equivalência homotópica $f : X \rightarrow Y$, então X é dito espaço **contrátil**.

A seguir definiremos o retrato por deformação, que exemplifica a homotopia entre espaço topológico e um subespaço.

Definição 2.6. Sejam X um espaço topológico e $A \subset X$ um subespaço. Um **retrato por deformação** de A em X é uma família de aplicações contínuas $f_t : X \rightarrow X$, com $t \in I$ tal que:

- (i) $f_0 = id_X$;
- (ii) $f_1(X) = A$, e
- (iii) $f_t|_A = id_A$.

em que $id_X : X \rightarrow X$ e $id_A : A \rightarrow A$ denotam as respectivas aplicações identidade nos espaços X e A .

Satisfazendo as condições da definição acima, o subespaço $A \subset X$ é dito um retrato por deformação do espaço X . Em outras palavras, o espaço topológico X é reduzido continuamente ao subespaço A . Um retrato por deformação pode ser visto como um conjunto de aplicações em que, ao fixarmos o intervalo I como parâmetro de tempo, será feita uma retração de X em A ao longo do tempo $t \in I$.

Exemplo 2.2. Considere X como sendo um cilindro e A a circunferência inferior deste cilindro, ambos objetos contidos no \mathbb{R}^3 . Podemos identificar o cilindro através do quociente de um retângulo, identificando um par de lados conforme a figura abaixo:

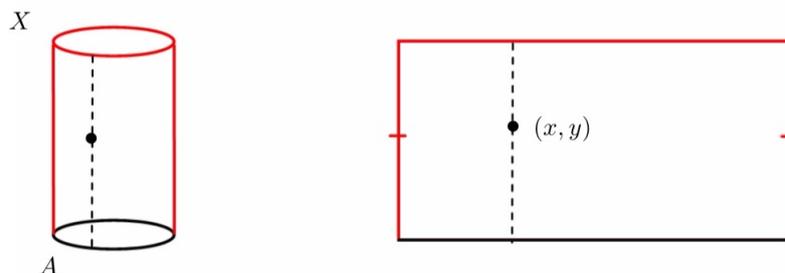


Figura 2.2: Cilindro como um espaço quociente

Assim, a família de aplicações $F_t(x, y) = f_t(y)$ onde f_t é a homotopia linear

$$f_t = (1 - t)id_X + t\pi,$$

entre a aplicação identidade no cilindro $id_X : X \rightarrow X$ e a projeção $\pi : X \rightarrow A$ do cilindro na base A .

Logo, A é um retrato por deformação de X .

Há uma maneira de induzir retratos por deformação de espaços topológicos, generalizando o mecanismo utilizado no exemplo acima, como apresentado na definição abaixo.

Definição 2.7. Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. A *mapping cylinder* induzida por f , será denotada por M_f e consiste do espaço quociente da união disjunta $(X \times I) \cup Y$ quocientado por $f(X)$, através da identificação de cada ponto $(x, 1)$ com $f(x) \in Y$.

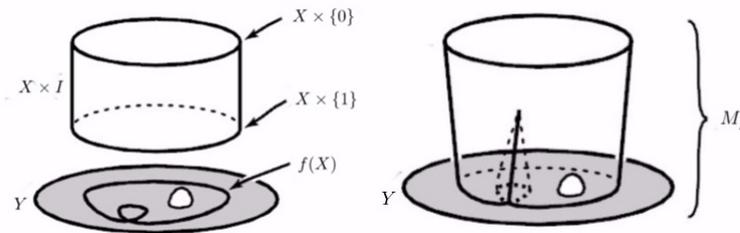


Figura 2.3: Mapping cylinder de f sobre X .

2.2 Homologia

Um dos pontos centrais da teoria de Homologia é auxiliar na classificação de espaços topológicos, fornecendo meios de identificar espaços homeomorfos. Para isto, definimos os componentes necessários para construção da teoria, tais como simplexo padrão, complexo de cadeias e as aplicações fronteira.

Definição 2.8. Dados os $n + 1$ pontos v_0, \dots, v_n geometricamente independentes, o n -simplexo gerado por eles é o menor conjunto convexo no espaço euclidiano \mathbb{R}^m contendo estes pontos. Denotaremos este n -simplexo por $[v_0, \dots, v_n]$.

Observação 2.3. Um exemplo de n -simplexo é o n -simplexo padrão. Um n -simplexo padrão, denotado por Δ^n , é formado pelos vetores $\{v_0, \dots, v_n\}$, onde:

$$v_0 = (1, 0, \dots, 0)$$

$$\begin{aligned} v_1 &= (0, 1, \dots, 0) \\ &\vdots \\ v_n &= (0, \dots, 0, 1) \end{aligned}$$

Pelo Teorema das coordenadas Baricênticas, este conjunto pode ser escrito por

$$\Delta^n = \left\{ (t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{i=0}^n t_i = 1, t_i \geq 0, \text{ para todo } i = 0, 1, \dots, n \right\},$$

e os vértices do n -simplexo padrão são vetores unitários ao longo dos eixos ordenados. Os vértices de um n -simplexo padrão são ordenados.

Ao retirar um vértice v_i de $[v_0, \dots, v_n]$, os vértices restantes formam um $(n - 1)$ -simplexo, o qual será chamado de **face** de $[v_0, \dots, v_n]$ e representado por $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$.

A fronteira de Δ^n é composta pela união de suas faces e tem a notação $\partial\Delta^n$, o interior de Δ^n será o **simplexo aberto** $e_i^n = \Delta^n - \partial\Delta^n$.

Observação 2.4. Note que pela definição do n -simplexo, geometricamente temos que um 0-simplexo é um ponto, um 1-simplexo é um segmento de reta e um 2-simplexo é triângulo totalmente preenchido (interior e fronteira), como ilustra a figura 2.4:

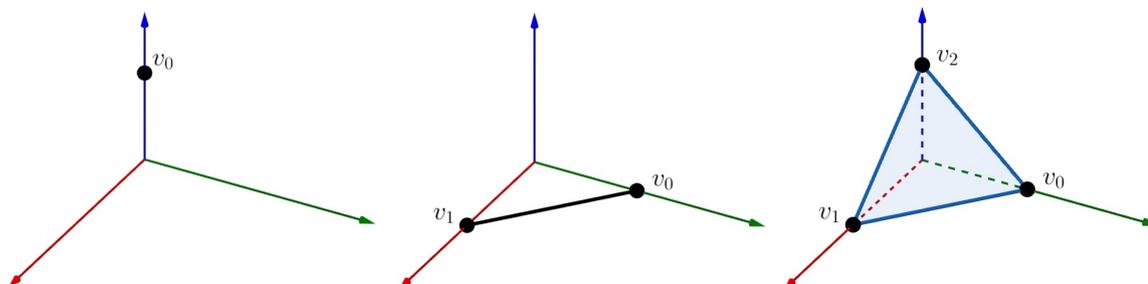


Figura 2.4: n -simplexos nos casos $n = 0, 1, 2$.

Definição 2.9 (Complexo Simplicial). Um complexo simplicial K é um conjunto de simplexos em \mathbb{R}^N tal que:

- Se $\sigma \in K$ e κ é face de σ , então $\kappa \in K$;
- Se $\sigma, \kappa \in K$, então $\sigma \cap \kappa = \emptyset$ ou $\sigma \cap \kappa$ é face de σ e κ ;
- Todo $\sigma \in K$ é face de um número finito de simplexos de K .

2.2.1 Homologia Simplicial

Definiremos os grupos de homologia para um espaço com estrutura de Δ -complexo.

Seja G um grupo abeliano. Para definir a homologia simplicial, consideremos $\Delta_n(X)$ o grupo abeliano livre gerado pelos n -simplexos abertos e_i^n de X . Os elementos σ de $\Delta_n(X)$ são chamados n -cadeias e são descritos através da soma finita $\sigma = \sum_{i=0}^n m_i e_i^n$ com $m_i \in G$.

Definição 2.10. Seja X um espaço topológico e $\Delta_n(X)$ o grupo das n -cadeias relacionadas ao espaço X como definido acima. A **aplicação bordo**

$$\partial_n : \Delta_n(X) \rightarrow \Delta_{n-1}(X)$$

é o homomorfismo dado por

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}.$$

Proposição 2.1. Para cada $n \geq 0$, temos que $(\partial_n \circ \partial_{n+1})(\sigma) = 0$ para todo $\sigma \in \Delta_n(X)$.

A ideia da demonstração da proposição acima é que como $\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}$, consequentemente

$$\partial_{n-1}(\partial_n(\sigma)) = \sum_{j < i}^n (-1)^i (-1)^j \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]} + \sum_{j > i}^n (-1)^i (-1)^{j-1} \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}$$

E, as somas se cancelam pois comuta i e j na segunda soma, tornando-se o negativo da primeira.

Na álgebra homológica, uma sequência de grupos abelianos $C_n(X; G) = \Delta_n(X)$ conectados por homomorfismos ∂_n como na Definição 2.10, com $(\partial_n \circ \partial_{n+1})(\alpha) = 0$ para todo $\alpha \in C_{n+1}(X; G)$ e cada $n \geq 0$, é chamada **complexo de cadeia**. Ou seja, um complexo de cadeias é uma sequência do tipo:

$$\dots \rightarrow C_{n+1}(X; G) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X; G) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X; G) \rightarrow \dots \rightarrow C_0(X; G) \xrightarrow{\partial_0} \{0\}$$

onde elementos de $\text{Ker}(\partial_n)$ são chamados n -ciclos e os elementos de $\text{Im}(\partial_{n+1})$ são ditos n -bordos. Pela Proposição 2.1, temos $\text{Im}(\partial_{n+1}) \subset \text{Ker}(\partial_n)$, e então podemos definir o grupo quociente

$$H_n(X; G) = \frac{\text{Ker}(\partial_n)}{\text{Im}(\partial_{n+1})}$$

que será chamado de n -ésimo grupo de homologia simplicial de X com coeficientes em G .

Exemplo 2.3. Para o cálculo da homologia simplicial de S^2 com coeficientes em \mathbb{Z} consideraremos uma estrutura de Δ -complexo em S^2 . Para isso, veremos S^2 como o

disco identificando todos os pontos da fronteira deste disco como um único elemento. Assim, conseguimos ver o espaço S^2 da seguinte forma:

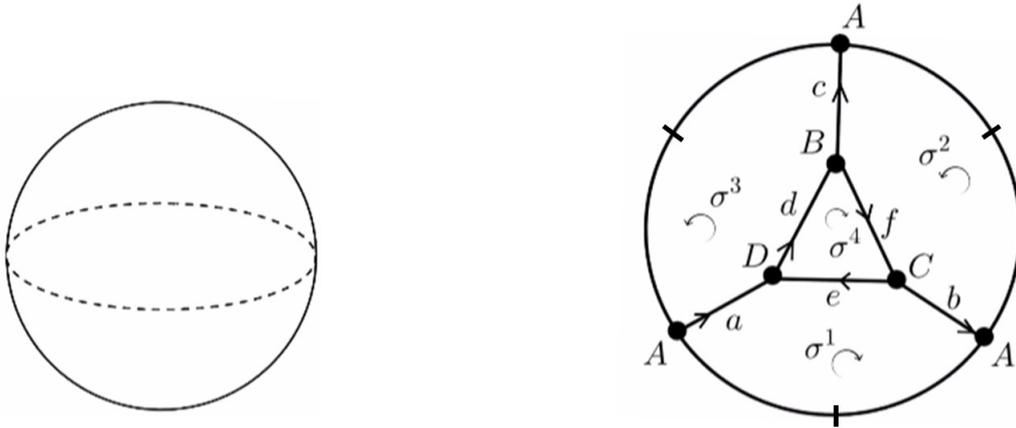


Figura 2.5: Estrutura simplicial da esfera S^2

Assim, obtemos uma estrutura de Δ -complexo em S^2 com 4 vértices (0-simplexos): A, B, C e D ; 6 arestas (1-simplexos): a, b, c, d, e e f e 4 triângulos (2-simplexos): $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$ e σ^4 .

Daí, podemos contruir os grupos das n -cadeias simpliciais. Sejam elas:

- C_0 é o grupo livre gerado pelos 0-simplexos. Então, dado uma 0-cadeia η_0 , temos que:

$$\eta_0 = a_1A + a_2B + a_3C + a_4D,$$

em que $a_i \in \mathbb{Z}$ para $i = 1, \dots, 4$. Então $C_0 = \langle A, B, C, D \rangle \approx \mathbb{Z}^4$.

- C_1 é o grupo livre gerado pelos 1-simplexos. Então, dado uma 1-cadeia η_1 , temos que:

$$\eta_1 = b_1a + b_2b + b_3c + b_4d + b_5e + b_6f,$$

em que $b_i \in \mathbb{Z}$ para $i = 1, \dots, 6$. Então $C_1 = \langle a, b, c, d, e, f \rangle \approx \mathbb{Z}^6$.

- C_2 é o grupo livre gerado pelos 2-simplexos. Então, dado uma 2-cadeia η_2 , temos que:

$$\eta_2 = c_1\sigma^1 + c_2\sigma^2 + c_3\sigma^3 + c_4\sigma^4,$$

em que $c_i \in \mathbb{Z}$ para $i = 1, \dots, 4$. Então $C_2 = \langle \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4 \rangle \approx \mathbb{Z}^4$.

Então obtemos o complexo de cadeia:

$$C_3 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} \{0\}$$

em que as aplicações bordos são definidas da seguinte forma:

O homomorfismo $\partial_0 : C_0 \rightarrow \{0\}$ é a aplicação bordo para as 0-cadeias. Assim,

$$\partial_0(A) = \partial_0(B) = \partial_0(C) = \partial_0(D) = 0$$

Além disso, dado $\eta_0 \in C_0$, temos que:

$$\begin{aligned} \partial_0(\eta_0) &= \partial_0(a_1A + a_2B + a_3C + a_4D) = a_1\partial_0(A) + a_2\partial_0(B) + a_3\partial_0(C) + a_4\partial_0(D) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Logo, $Im(\partial_0) = \{0\}$ e $Ker(\partial_0) = C_0$.

O homomorfismo $\partial_1 : C_1 \rightarrow C_0$ é a aplicação bordo para as 1-cadeias. Assim,

$$\partial_1(a) = D - A; \partial_1(b) = A - C; \partial_1(c) = A - B; \partial_1(d) = B - D; \partial_1(e) = D - C \text{ e } \partial_1(f) = C - B$$

Além disso, dado $\eta_1 \in C_1$, temos que:

$$\begin{aligned} \partial_1(\eta_1) &= \partial_1(b_1a + b_2b + b_3c + b_4d + b_5e + b_6f) \\ &= b_1\partial_1(a) + b_2\partial_1(b) + b_3\partial_1(c) + b_4\partial_1(d) + b_5\partial_1(e) + b_6\partial_1(f) \\ &= b_1(D - A) + b_2(A - C) + b_3(A - B) + b_4(B - D) + b_5(D - C) + b_6(C - B) \\ &= A(-b_1 + b_2 + b_3) + B(-b_3 + b_4 - b_6) + C(-b_2 - b_5 + b_6) + D(b_1 - b_4 + b_5) \end{aligned}$$

Logo, $Im(\partial_1) = \langle B, C, D \rangle \approx \mathbb{Z}^3$ e $Ker(\partial_1) \approx \mathbb{Z}^3$.

O homomorfismo $\partial_2 : C_2 \rightarrow C_1$ é a aplicação bordo para as 2-cadeias. Assim,

$$\partial_2(\sigma^1) = a - e + b; \partial_2(\sigma^2) = b - c + f; \partial_2(\sigma^3) = a + d + c \text{ e } \partial_2(\sigma^4) = d + f + e$$

Além disso, dado $\eta_2 \in C_2$, temos que:

$$\begin{aligned} \partial_2(\eta_2) &= \partial_2(c_1\sigma^1 + c_2\sigma^2 + c_3\sigma^3 + c_4\sigma^4) = c_1\partial_2(\sigma^1) + c_2\partial_2(\sigma^2) + c_3\partial_2(\sigma^3) + c_4\partial_2(\sigma^4) \\ &= c_1(a - e + b) + c_2(b - c + f) + c_3(a + d + c) + c_4(d + f + e) \\ &= a(c_1 + c_3) + b(c_1 + c_2) + c(-c_2 + c_3) + d(c_3 + c_4) + e(-c_1 + c_4) + f(c_2 + c_4) \\ &= a(c_1 + c_3) + c(-c_2 + c_3) + f(c_2 + c_4) \end{aligned}$$

Logo, $Im(\partial_2) \approx \mathbb{Z}^3$ e $Ker(\partial_2) = \mathbb{Z}$.

O homomorfismo $\partial_3 : C_3 \rightarrow C_2$ é a aplicação nula pois $C_3 = \{0\}$. Daí, $Im(\partial_3) =$

$\{0\}$.

Assim, calculamos os i -ésimos grupos de homologia simplicial do espaço S^2 por:

$$H_0(S^2; \mathbb{Z}) = \frac{Ker(\partial_0)}{Im(\partial_1)} \approx \frac{\mathbb{Z}^4}{\mathbb{Z}^3} \approx \mathbb{Z}$$

$$H_1(S^2; \mathbb{Z}) = \frac{Ker(\partial_1)}{Im(\partial_2)} \approx \frac{\mathbb{Z}^3}{\mathbb{Z}^3} \approx \{0\}$$

$$H_2(S^2; \mathbb{Z}) = \frac{Ker(\partial_2)}{Im(\partial_3)} \approx \frac{\mathbb{Z}}{\{0\}} \approx \mathbb{Z}$$

Os grupos de homologia simplicial não variam ao mudar a estrutura de Δ -complexo em X . Para ilustrar este fato, no próximo exemplo, consideremos uma outra estrutura de Δ -complexo em S^2 e calcularemos os grupos de homologia simplicial de S^2 com coeficientes em \mathbb{Z} .

Exemplo 2.4. Considere a estrutura de Δ -complexo para X formada pelos 0-simplexos: A, B e C , os 1-simplexos: a, b e c e os 2-simplexos L e M , onde L e M representam o hemisfério norte e o hemisfério sul da esfera, respectivamente.

Assim, munimos o espaço S^2 com a estrutura de Δ -complexo conforme a figura abaixo

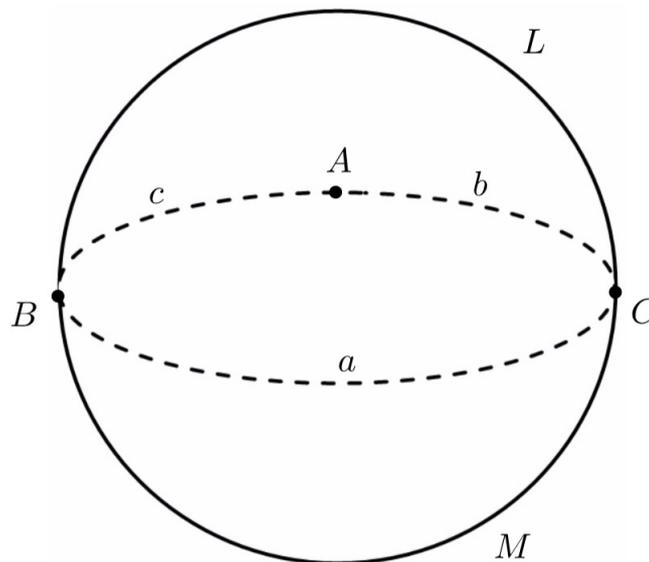


Figura 2.6: Outra estrutura simplicial da S^2 .

Assim, temos os seguintes grupos das n -cadeias simpliciais

- $C_0(S^2; \mathbb{Z})$ é o grupo livre gerado pelos 0-simplexos. Ou seja,

$$C_0(S^2; \mathbb{Z}) = \langle A, B, C \rangle .$$

Logo, uma 0-cadeia η_0 é dada por:

$$\eta_0 = a_1A + a_2B + a_3C,$$

em que $a_i \in \mathbb{Z}$ para todo $i = 1, 2, 3$. Daí, $C_0(S^2; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}^3$.

- $C_1(S^2; \mathbb{Z})$ é o grupo livre gerado pelos 1-simplexos. Ou seja,

$$C_1(S^2; \mathbb{Z}) = \langle a, b, c \rangle.$$

Logo, uma 1-cadeia η_1 é dada por:

$$\eta_1 = b_1a + b_2b + b_3c,$$

em que $b_i \in \mathbb{Z}$ para todo $i = 1, 2, 3$. Daí, $C_1(S^2; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}^3$.

- $C_2(S^2; \mathbb{Z})$ é o grupo livre gerado pelos 2-simplexos. Ou seja,

$$C_2(S^2; \mathbb{Z}) = \langle L, M \rangle$$

Logo, uma 2-cadeia η_2 é dada por:

$$\eta_2 = c_1L + c_2M,$$

em que $c_i \in \mathbb{Z}$ para todo $i = 1, 2$. Daí, $C_2(S^2; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}^2$.

- $C_i(S^2; \mathbb{Z})$ é o grupo $C_i(S^2; \mathbb{Z}) = \{0\}$ para todo $i > 2$.

Estudaremos agora as aplicações bordo associadas:

Seja $\partial_0 : C_0(S^2; \mathbb{Z}) \rightarrow \{0\}$ a 0-aplicação bordo. Temos que ∂_0 é a aplicação identicamente nula. Portanto, $\text{Ker}(\partial_0) = C_0(S^2; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}^3$ e $\text{Im}(\partial_0) = \{0\}$.

Seja $\partial_1 : C_1(S^2; \mathbb{Z}) \rightarrow C_0(S^2; \mathbb{Z})$ a 1-aplicação bordo e η_1 uma 1-cadeia qualquer. Assim, existem $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$ tais que $\eta_1 = n_1a + n_2b + n_3c$. Daí,

$$\begin{aligned} \partial_1(\eta_1) &= \partial_1(n_1a + n_2b + n_3c) \\ &= n_1\partial_1(a) + n_2\partial_1(b) + n_3\partial_1(c) \\ &= n_1(C - B) + n_2(A - C) + n_3(B - A) \\ &= A(n_2 - n_3) + B(n_3 - n_1) + C(n_1 - n_2) \end{aligned}$$

Assim, podemos identificar a aplicação ∂_1 como sendo a aplicação:

$$\begin{aligned}\partial_1 : \mathbb{Z}^3 &\longrightarrow \mathbb{Z}^3 \\ (n_1, n_2, n_3) &\longmapsto (n_2 - n_3, n_3 - n_1, n_1 - n_2)\end{aligned}$$

Logo, $\text{Ker}(\partial_1) \approx \mathbb{Z}$ e pelo Teorema dos Isomorfismos, temos $\text{Im}(\partial_1) = \frac{\mathbb{Z}^3}{\text{Ker}(\partial_1)} \approx \mathbb{Z}^2$.

Seja $\partial_2 : C_2(S^2; \mathbb{Z}) \rightarrow C_1(S^2; \mathbb{Z})$ a 2-aplicação bordo e η_2 uma 2-cadeia qualquer. Assim, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ tais que $\eta_2 = n_1L + n_2M$. Daí,

$$\begin{aligned}\partial_2(\eta_2) &= \partial_2(n_1L + n_2M) \\ &= n_1\partial_2(L) + n_2\partial_2(M) \\ &= n_1(a - b + c) + n_2(a - b + c) \\ &= a(n_1 + n_2) + b(-n_1 - n_2) + c(n_1 + n_2)\end{aligned}$$

Assim, podemos identificar a aplicação ∂_2 como sendo a aplicação:

$$\begin{aligned}\partial_2 : \mathbb{Z}^2 &\longrightarrow \mathbb{Z}^3 \\ (n_1, n_2) &\longmapsto (n_1 + n_2, -n_1 - n_2, n_1 + n_2)\end{aligned}$$

Logo, $\text{Ker}(\partial_2) \approx \mathbb{Z}$ e pelo teorema dos Isomorfismos, temos $\text{Im}(\partial_2) \approx \frac{\mathbb{Z}^3}{\text{Ker}(\partial_2)} \approx \mathbb{Z}$.

Como $\partial_3 : C_3(S^2; \mathbb{Z}) = \{0\} \rightarrow C_2(S^2; \mathbb{Z})$ é a aplicação identicamente nula, temos então os seguintes grupos de homologia simplicial:

$$\begin{aligned}H_0(S^2; \mathbb{Z}) &= \frac{\text{Ker}(\partial_0)}{\text{Im}(\partial_1)} \approx \frac{\mathbb{Z}^3}{\mathbb{Z}^2} \approx \mathbb{Z} \\ H_1(S^2; \mathbb{Z}) &= \frac{\text{Ker}(\partial_1)}{\text{Im}(\partial_2)} \approx \frac{\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}} \approx \{0\} \\ H_2(S^2; \mathbb{Z}) &= \frac{\text{Ker}(\partial_2)}{\text{Im}(\partial_3)} \approx \frac{\mathbb{Z}}{\{0\}} \approx \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Assim, vemos que os grupos de homologia simplicial de S^2 com a estrutura de Δ -complexo definida no Exemplo 2.3 coincide com a homologia simplicial de S^2 com a outra estrutura de Δ -complexo adotada no Exemplo 2.4.

2.2.2 Homologia Singular

Nesta seção definiremos os grupos de homologia para um espaço topológico através dos n -simplexos singulares. Para obtermos um n -simplexo singular, necessita-se apenas de uma aplicação contínua $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$. Assim, a imagem da aplicação σ não precisa ser

“bem comportada” como ocorria para as aplicações da estrutura de Δ -complexo. Por exemplo, as imagens das aplicações σ podem geometricamente admitir auto-interseções.

Definição 2.11. Sejam X um espaço topológico e Δ^n um n -simplexo padrão. Um **n -simplexo singular** em X consiste de uma aplicação contínua $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$.

Definição 2.12. Seja X um espaço topológico e G um grupo abeliano. O grupo livre $C_n(X; G)$ gerado pelos n -simplexos singulares $\sigma_i : \Delta^n \rightarrow X$ será chamado de grupo das **n -cadeias singulares**. Assim, um elemento de $C_n(X; G)$ é expresso por $\sum_i m_i \sigma_i$, onde $m_i \in G$ e $\sigma_i : \Delta^n \rightarrow X$ são os n -simplexos singulares.

Definição 2.13. Seja X um espaço topológico. A **aplicação bordo**

$$\partial_n : C_n(X; G) \rightarrow C_{n-1}(X; G)$$

é definida por

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}.$$

Esta aplicação satisfaz a Proposição 2.1, ou seja ∂_n é tal que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$. Então podemos definir o **n -ésimo grupo de homologia singular** de X com coeficientes em G por:

$$H_n(X; G) = \frac{Ker(\partial_n)}{Im(\partial_{n+1})}.$$

para cada $n \geq 0$.

Definição 2.14. Seja X um espaço topológico e ∂_n a n -ésima aplicação fronteira. A sequência

$$\dots \rightarrow C_{n+1}(X; G) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X; G) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X; G) \rightarrow \dots \rightarrow C_0(X; G) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

é chamada **complexo de cadeia singular** associado ao espaço X .

Em linhas gerais, o n -ésimo grupo de homologia singular relacionado a um espaço X mede os n -ciclos que não são n -bordos. Dessa maneira, os grupos de homologia fornecem ferramentas necessárias para inferir propriedades topológicas sobre o espaço.

Observação 2.5. Os grupos de homologia simplicial definidos na Seção 2.2.1 são isomorfos aos grupos de homologia singular (Este resultado encontra-se em [8], página 128).

Exemplo 2.5. Pela Observação 2.5 e pelo Exemplo 2.4, temos que os grupos de homologia singular da esfera S^2 com coeficientes em \mathbb{Z} são dados por:

$$H_n(S^2; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } n = 0 \\ \{0\}, & \text{se } n = 1 \\ \mathbb{Z}, & \text{se } n = 2 \end{cases}$$

Calcular grupos de homologia singular por definição é geralmente muito difícil. Porém, um caso simples, determinaremos tais grupos:

Proposição 2.2. Sejam X é um espaço topológico constituído apenas de um ponto e G um grupo abeliano. Então:

$$H_n(X; G) = \begin{cases} G, & \text{se } n = 0 \\ \{0\}, & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

Demonstração. Como X é um espaço formado apenas por um ponto, consideraremos $X = \{p\}$. Logo,

- $C_0(X; G) = \{a\sigma_0; a \in G \text{ e } \sigma_0 : \Delta^0 \rightarrow \{p\} \text{ é o único 0-simplexo singular de } X\}$.
Então, $C_0(X; G) \approx G$.
- $C_1(X; G) = \{b\sigma_1; b \in G \text{ e } \sigma_1 : \Delta^1 \rightarrow \{p\} \text{ é o único 1-simplexo singular de } X\}$.
Então, $C_1(X; G) \approx G$.
- $C_2(X; G) = \{c\sigma_2; c \in G \text{ e } \sigma_2 : \Delta^2 \rightarrow \{p\} \text{ é o único 2-simplexo singular de } X\}$.
Então, $C_2(X; G) \approx G$.
- $C_3(X; G) = \{d\sigma_3; d \in G \text{ e } \sigma_3 : \Delta^3 \rightarrow \{p\} \text{ é o único 3-simplexo singular de } X\}$.
Então, $C_3(X; G) \approx G$.
- $C_4(X; G) = \{e\sigma_4; e \in G \text{ e } \sigma_4 : \Delta^4 \rightarrow \{p\} \text{ é o único 4-simplexo singular de } X\}$.
Então, $C_4(X; G) \approx G$.

E assim por diante, de modo que para cada $n \geq 0$, existe um único n -simplexo singular $\sigma_n : \Delta^n \rightarrow \{p\}$. Logo, $C_n(X; G) \approx G$.

Analisaremos agora as aplicações fronteira:

- A aplicação $\partial_0 : C_0(X; G) \rightarrow \{0\}$ é a aplicação identicamente nula. Assim, $Im(\partial_0) = \{0\}$ e $Ker(\partial_0) = C_0(X; G) \approx G$.
- A aplicação $\partial_1 : C_1(X; G) \rightarrow C_0(X; G)$ é tal que

$$\partial_1(\sigma_1) = \partial_1(\sigma_1) = \sigma_1|_{[v_1]} - \sigma_1|_{[v_0]} = \sigma_0 - \sigma_0 = 0$$

Logo $Im(\partial_1) = \{0\}$ e $Ker(\partial_1) = C_1(X; G) \approx G$.

- A aplicação $\partial_2 : C_2(X; G) \rightarrow C_1(X; G)$ é tal que

$$\begin{aligned}\partial_2(\sigma_2) &= \partial_2(\sigma_2) = \sigma_2|_{[v_1, v_2]} - \sigma_2|_{[v_0, v_2]} + \sigma_2|_{[v_0, v_1]} \\ &= \sigma_1 - \sigma_1 + \sigma_1 = \sigma_1\end{aligned}$$

Logo $Im(\partial_2) \approx G$ e $Ker(\partial_2) = \{0\}$.

- A aplicação $\partial_3 : C_3(X; G) \rightarrow C_2(X; G)$ é tal que

$$\begin{aligned}\partial_3(\sigma_3) &= \partial_3(\sigma_3) = \sigma_3|_{[v_1, v_2, v_3]} - \sigma_3|_{[v_0, v_2, v_3]} + \sigma_3|_{[v_0, v_1, v_3]} - \sigma_3|_{[v_0, v_1, v_2]} \\ &= \sigma_2 - \sigma_2 + \sigma_2 - \sigma_2 = 0\end{aligned}$$

Logo $Im(\partial_3) = \{0\}$ e $Ker(\partial_3) \approx G$.

- A aplicação $\partial_4 : C_4(X; G) \rightarrow C_3(X; G)$ é tal que

$$\begin{aligned}\partial_4(\sigma_4) &= \partial_4(\sigma_4) = \sigma_4|_{[v_1, v_2, v_3, v_4]} - \sigma_4|_{[v_0, v_2, v_3, v_4]} + \sigma_4|_{[v_0, v_1, v_3, v_4]} \\ &\quad - \sigma_4|_{[v_0, v_1, v_2, v_4]} + \sigma_4|_{[v_0, v_1, v_2, v_3]} \\ &= \sigma_3 - \sigma_3 + \sigma_3 - \sigma_3 + \sigma_3 = \sigma_3\end{aligned}$$

Logo $Im(\partial_4) \approx G$ e $Ker(\partial_4) = \{0\}$.

Portanto, para cada $n \geq 0$, temos que:

$$\partial_n(\eta_n) = 0,$$

para n ímpar e η_n uma n -cadeia singular.

E,

$$\partial_n(\eta_n) = \alpha_n \sigma_{n-1},$$

para n par e $\eta_n = \alpha_n \sigma_n$ uma n -cadeia singular. Então, temos o seguinte complexo de cadeias:

$$\dots \rightarrow C_4(X; G) \xrightarrow{\partial_4} C_3(X; G) \xrightarrow{\partial_3} C_2(X; G) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X; G) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X; G) \xrightarrow{\partial_0} \{0\}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}H_0(X; G) &= \frac{Ker(\partial_0)}{Im(\partial_1)} \approx \frac{G}{\{0\}} \approx G \\ H_1(X; G) &= \frac{Ker(\partial_1)}{Im(\partial_2)} \approx \frac{G}{G} \approx \{0\}\end{aligned}$$

$$H_2(X; G) = \frac{Ker(\partial_2)}{Im(\partial_3)} \approx \frac{\{0\}}{\{0\}} \approx \{0\}$$

$$H_3(X; G) = \frac{Ker(\delta_3)}{Im(\partial_4)} \approx \frac{G}{G} \approx \{0\}$$

No caso geral, se n for ímpar, então

$$H_n(X; G) \approx \frac{G}{G} \approx \{0\},$$

e para n par, temos:

$$H_n(X; G) \approx \frac{\{0\}}{\{0\}} \approx \{0\}.$$

□

Sejam X e Y espaços topológicos e uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$. É possível construir um homomorfismo $f_{\#} : C_n(X; G) \rightarrow C_n(Y; G)$ da seguinte forma: Inicialmente, definimos $f_{\#}$ nos elementos da base de $C_n(X; G)$: Dado $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ um n -simplexo singular, fazemos $f_{\#}(\sigma) = f \circ \sigma : \Delta^n \rightarrow Y$. Podemos estender linearmente esta aplicação da seguinte forma:

$$f_{\#} \left(\sum_{i=0}^n n_i \sigma_i \right) = \sum_{i=0}^n n_i f_{\#}(\sigma_i) = \sum_{i=0}^n n_i f(\sigma_i).$$

Além disso, note que:

$$\begin{aligned} (f_{\#} \circ \partial_n)(\sigma) &= f_{\#}(\partial_n(\sigma)) = f_{\#} \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]} \right) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i f(\sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}) = \partial_n(f_{\#}(\sigma)) \\ &= (\partial_n \circ f_{\#})(\sigma). \end{aligned}$$

Em outras palavras, cada quadrado no seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & C_{n+1}(X; G) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n(X; G) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(X; G) & \longrightarrow & \dots \\ & & f_{\#} \downarrow & & f_{\#} \downarrow & & f_{\#} \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & C_{n+1}(Y; G) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n(Y; G) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(Y; G) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

comuta em cada quadrado para todo $n \geq 0$.

Observação 2.6. O fato de $f_{\#} \circ \partial_n = \partial_n \circ f_{\#}$ implica que $f_{\#}$ é uma **aplicação entre cadeias** de um complexo de cadeia singular de X em um complexo de cadeia singular de Y . Como consequência, $f_{\#}$ leva ciclos de $C_n(X; G)$ em ciclos de $C_n(Y; G)$, pois para

$\alpha \in C_n(X; G)$ com $\partial_n(\alpha) = 0$, então $\partial_n(f_{\#}(\alpha)) = f_{\#}(\partial_n(\alpha)) = 0$. A aplicação entre cadeias também leva fronteira em fronteira uma vez que dado $\beta \in C_n(X; G)$, temos que $f_{\#}(\partial_n(\beta)) = \partial_n(f_{\#}(\beta))$. Assim, $f_{\#}$ induz um homomorfismo $f_* : H_n(X; G) \rightarrow H_n(Y; G)$.

Proposição 2.3. Sejam X e Y espaços topológicos e $f, g : X \rightarrow Y$ duas aplicações contínuas tais que $f \simeq g$. Então as aplicações induzidas por elas nos grupos de homologia $f_*, g_* : H_n(X; G) \rightarrow H_n(Y; G)$ para cada $n \geq 0$ são tais que $f_* = g_*$.

Para mais detalhes e demonstração da proposição acima consultar [8], página 112.

Em determinados casos é conveniente ignorar alguns dados para obter precisamente algumas informações como ocorre, por exemplo, na aritmética ao estudar restos de divisões em que se introduz a teoria de congruência e então nos cálculos com $\text{mod}(n)$ são ignorados os múltiplos de n . Com uma essência próxima, na homologia há um ramo em que os estudos tomam estes mesmos caminhos. Dado um espaço topológico X e um subespaço $A \subset X$, considere o grupo relativo $C_n(X, A; G)$ como o quociente $\frac{C_n(X; G)}{C_n(A; G)}$. Então, algebricamente as cadeias de $C_n(X; G)$ que estão em $C_n(A; G)$ são nulas. A aplicação fronteira induzida $\partial_n : C_n(X, A; G) \rightarrow C_{n-1}(X, A; G)$ nos permite considerar o complexo:

$$\dots \rightarrow C_n(X, A; G) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X, A; G) \rightarrow \dots$$

onde $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ ainda é válido para todo $n \geq 0$. Então definimos o **n -ésimo grupo de homologia singular relativa** com coeficientes em G por

$$H_n(X, A; G) = \frac{\text{Ker}(\partial_n)}{\text{Im}(\partial_{n+1})}.$$

O teorema a seguir tem sua importância por reunir condições que garantem quando os grupos de homologia relativos $H_n(X, A; G)$ não são afetados ao retirar um subconjunto $Z \subset A$, isto é, os grupos $H_n(X - Z, A - Z; G)$ e $H_n(X, A; G)$ são isomorfos para todo $n \geq 0$.

Teorema 2.4 (Teorema da Excisão). *Sejam X um espaço topológico, $Z \subset X$ e $A \subset X$ subespaços com $Z \subset A$ tal que $\bar{Z} \subset \text{int}(A)$ e G um grupo abeliano. Assim, a inclusão $i : (X - Z, A - Z) \rightarrow (X, A)$ induz o isomorfismo*

$$H_n(X - Z, A - Z; G) \longrightarrow H_n(X, A; G), \text{ para todo } n \geq 0.$$

Em outras palavras, se os subespaços $A, B \subset X$ são tais que $X = \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$,

então a inclusão $(B, A \cap B) \xrightarrow{i} (X, A)$ induz o isomorfismo

$$H_n(B, A \cap B; G) \longrightarrow H_n(X, A; G), \text{ para todo } n \geq 0.$$

Para mais detalhes e demonstração do Teorema acima, consultar [8], página 124.

De fato, a equivalência apresentada na segunda parte do teorema acima vale pois dados os subespaços $Z, A \subset X$ com $Z \subset A \subset X$ e $\bar{Z} \subset \text{int}(A)$, basta considerar $B = X - Z$ ($Z = X - B$) para que $A \cap B = A \cap (X - Z) = A - Z$ e além disso, $\bar{Z} \subset \text{int}(A)$ se, e somente se, $X = \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$ desde que $\bar{Z} = X - B$.

Exemplo 2.6. Se os conjuntos $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ são abertos, não vazios e homeomorfos, então $m = n$. De fato, usando o Teorema 2.4 e a sequência de Mayer-Vietoris com $X = \mathbb{R}^n$, $A = \mathbb{R}^n - \{x\}$, com $x \in X$ e $U = \mathbb{R}^n - V$. Para mais detalhes, consultar [8], página 126, teorema 2.26.

Definição 2.15. Seja X um espaço topológico. Os grupos de **homologia local** no ponto $x \in X$ são definidos pelos grupos de homologia relativa $H_n(X, X - \{x\}; G)$.

Em particular, para $G = \mathbb{Z}_2$, o estudo se torna mais simples pois as cadeias se tornarão a soma de simplexes com coeficientes 0 ou 1, desconsiderando as parcelas de zeros na soma, a aplicação fronteira será uma soma finita de simplexes e tal soma não é uma soma alternada como acontecia antes. Os sinais das parcelas dessa soma representam algebricamente a orientação considerada, ou seja, a homologia com coeficientes em \mathbb{Z}_2 é uma maneira natural para cálculo quando não há uma orientação induzida.

2.3 Cohomologia

Sejam G um grupo abeliano e R um anel com unidade. Consideremos o seguinte complexo de cadeia C de grupos abelianos C_n :

$$C : \dots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \rightarrow \dots$$

onde $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$. Definimos o complexo de **cocadeias** C^* associado ao complexo C por

$$C^* : \dots \leftarrow C_{n+1}^* \xleftarrow{\delta_n} C_n^* \xleftarrow{\delta_{n-1}} C_{n-1}^* \leftarrow \dots$$

em que $C_n^* = \text{Hom}(C_n, G)$ e, para cada $n \geq 0$, a **aplicação cobordo** é dada por $\delta_n = \partial_{n+1}^* : C_n^* \rightarrow C_{n+1}^*$, em que $\partial_{n+1}^*(\varphi) = \varphi \circ \partial_{n+1}$, onde a aplicação cobordo leva $C_n \xrightarrow{\varphi} G$ na composição $C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\varphi} G$.

Pela dualidade realizada nos complexos de cadeias para os complexos de cocadeias, segue que

$$(\delta_n \circ \delta_{n-1})(\varphi) = \delta_n(\delta_{n-1}(\varphi)) = \delta_n(\varphi \circ \partial_n) = \varphi(\partial_n \circ \partial_{n+1}) = \varphi(0) = 0,$$

para todo $\varphi \in C_{n-1}^*$.

Assim, o **n-ésimo grupo de cohomologia** é dado por:

$$H^n(C, G) = \frac{Ker(\delta_{n+1})}{Im(\delta_n)}.$$

Elementos de $ker(\delta_n)$ são os **n-cociclos** e os elementos de $Im(\delta_{n-1})$ são chamados **n-cofronteiras**.

2.3.1 Cohomologia singular de espaços topológicos

Considere os subconjuntos $A \subset X$, $B \subset Y$ e $C \subset Z$ subespaços topológicos com as respectivas topologias de subespaço.

O grupo $C^n(X; G)$ das **n-cocadeias singulares** com coeficientes em G é dado pelo grupo $Hom(C_n(X), G)$ onde $C_n(X)$ é de acordo como definido na seção anterior. Assim, uma **n-cocadeia singular** $\varphi \in C^n(X; G)$ é um homomorfismo $\varphi : C_n(X) \rightarrow G$ que associa cada **n-simplexo singular** $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ à um valor $\varphi(\sigma) \in G$. A **aplicação cobordo** $\delta_n : C^n(X; R) \rightarrow C^{n+1}(X; R)$ relaciona cada cocadeia $\varphi \in C^n(X; G)$ em uma cobordo $\delta_n(\varphi)$ em $C^{n+1}(X; R)$ pela composição

$$\begin{array}{ccc} C_{n+1}(X; R) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n(X; R) \xrightarrow{\varphi} G \\ & \searrow \delta_n & \nearrow \end{array}$$

Assim, para cada $(n + 1)$ -simplexo singular $\sigma : \Delta^{n+1} \rightarrow X$, temos:

$$\delta_n(\varphi(\sigma)) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \varphi(\sigma[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]),$$

onde se verifica que $\delta_n \circ \delta_{n-1} = 0$.

Definição 2.16. O **n-ésimo grupo de cohomologia singular** do espaço X com coeficientes em G é o quociente

$$H^n(X; G) = \frac{Ker(\delta_{n+1})}{Im(\delta_n)}.$$

Exemplo 2.7. Os grupos de cohomologia singular da esfera S^2 com coeficientes em \mathbb{Z}

são dados por:

$$H^n(S^2; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } n = 0 \\ \{0\}, & \text{se } n = 1 \\ \mathbb{Z}, & \text{se } n = 2 \end{cases}$$

Usando os grupos das cadeias singulares calculados no Exemplo 2.5, temos os grupos de cocadeias singulares:

$$C^0(S^2; \mathbb{Z}) = \text{Hom}(C_0(S^2; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \approx \text{Hom}(\mathbb{Z}^3, \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}^3$$

$$C^1(S^2; \mathbb{Z}) = \text{Hom}(C_1(S^2; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \approx \text{Hom}(\mathbb{Z}^3, \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}^3$$

$$C^2(S^2; \mathbb{Z}) = \text{Hom}(C_2(S^2; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \approx \text{Hom}(\mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}^2$$

Agora, estudaremos as aplicações cofronteiras:

Sejam $\delta_0 : C^0(S^2; \mathbb{Z}) \rightarrow C^1(S^2; \mathbb{Z})$ a aplicação cobordo e η_1 uma 1-cadeia singular. Assim, para $\varphi \in C^0(S^2; \mathbb{Z})$, temos que:

$$\begin{aligned} \delta_0(\varphi)(\eta_1) &= \varphi(\delta_1(\eta_1)) = \varphi((n_2 - n_3)\sigma_1^0 + (n_3 - n_1)\sigma_2^0 + (n_1 - n_2)\sigma_3^0) \\ &= (n_2 - n_3)\varphi(\sigma_1^0) + (n_3 - n_1)\varphi(\sigma_2^0) + (n_1 - n_2)\varphi(\sigma_3^0) \end{aligned}$$

Logo, podemos identificar a aplicação δ_0 com a aplicação:

$$\begin{aligned} \partial_0 : \mathbb{Z}^3 &\longrightarrow \mathbb{Z}^3 \\ (n_1, n_2, n_3) &\longmapsto (n_2 - n_3, n_3 - n_1, n_1 - n_2) \end{aligned}$$

Portanto, $\text{Ker}(\delta_0) \approx \mathbb{Z}$ e $\text{Im}(\delta_0) \approx \mathbb{Z}^2$.

Sejam $\delta_1 : C^1(S^2; \mathbb{Z}) \rightarrow C^2(S^2; \mathbb{Z})$ a aplicação cobordo, η_2 uma 2-cadeia singular e $\varphi \in C^1(S^2; \mathbb{Z})$ uma 1-cocadeia singular. Como $\delta_1(\varphi) = \varphi \circ \delta_2$, então podemos descrever a aplicação δ_1 através da base σ_1^2 e σ_2^2 . Note que:

$$\delta_1(\varphi)(\sigma_1^2) = \varphi(\delta_2(\sigma_1^2)) = \varphi(\sigma_1^1 - \sigma_2^1 + \sigma_3^1) = \varphi(\sigma_1^1) - \varphi(\sigma_2^1) + \varphi(\sigma_3^1)$$

e,

$$\delta_1(\varphi)(\sigma_2^2) = \varphi(\delta_2(\sigma_2^2)) = \varphi(\sigma_1^1 - \sigma_2^1 + \sigma_3^1) = \varphi(\sigma_1^1) - \varphi(\sigma_2^1) + \varphi(\sigma_3^1)$$

Assim, podemos identificar a aplicação δ_1 com a aplicação:

$$\begin{aligned} \partial_1 : \mathbb{Z}^3 &\longrightarrow \mathbb{Z}^3 \\ (n_1, n_2, n_3) &\longmapsto (n_1 - n_2 + n_3, n_1 - n_2 + n_3) \end{aligned}$$

Logo, $\text{Ker}(\delta_1) \approx \mathbb{Z}^2$ e $\text{Im}(\delta_1) \approx \mathbb{Z}$.

Por último, a aplicação $\delta_2 : C^2(S^2; \mathbb{Z}) \rightarrow C^3(S^2; \mathbb{Z})$ é identicamente nula pois $C^3(S^2; \mathbb{Z}) = \{0\}$. Assim, $\text{Ker}(\delta_2) = C^2(S^2; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}^2$.

Então, temos os seguintes grupos de cohomologia singular:

$$\begin{aligned} H^0(S^2; \mathbb{Z}) &= \frac{\text{Ker}(\delta_0)}{\{0\}} \approx \frac{\mathbb{Z}}{\{0\}} \approx \mathbb{Z} \\ H^1(S^2; \mathbb{Z}) &= \frac{\text{Ker}(\delta_1)}{\text{Im}(\delta_0)} \approx \frac{\mathbb{Z}^2}{\mathbb{Z}^2} \approx \{0\} \\ H^2(S^2; \mathbb{Z}) &= \frac{\text{Ker}(\delta_2)}{\text{Im}(\delta_1)} \approx \frac{\mathbb{Z}^2}{\mathbb{Z}} \approx \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Seja $A \subset X$, Na seção 2.2.2 conhecemos os grupos $C_n(X, A)$ e definimos os grupos de homologia singular relativa $H_n(X, A)$. O dual destes grupos são os grupos das cocadeias relativas $C^n(X, A; G)$ e assim, definimos os grupos de cohomologia singular relativa $H^n(X, A; G)$ para todo $n \geq 0$.

Para definir uma aplicação induzida nos grupos de cohomologia a partir de uma aplicação contínua $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$, é realizado um proceso análogo à homologia. A aplicação dual da aplicação cadeia será denotada por f^n e satisfaz a condição $f^n \circ \delta_n = \delta_{n+1} \circ f^n$. Assim, é possível construir a aplicação $f_n^* : H^n(Y, B; G) \rightarrow H^n(X, A; G)$ para todo $n \geq 0$.

A seguir serão apresentados definições e características da homologia singular que se estendem analogamente para a teoria da cohomologia.

2.3.2 Axiomas para cohomologia singular

A teoria de grupos de cohomologia de um espaço topológico satisfazem os seguintes axiomas:

Axioma 2.1. A aplicação identidade $i : X \rightarrow X$ induz, para cada $n \geq 0$, a aplicação identidade $i_n^* : H^n(X; G) \rightarrow H^n(X; G)$ nos grupos de cohomologia.

Axioma 2.2. Se as aplicações $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ e $g : (Y, B) \rightarrow (Z, C)$ são contínuas, então $(g \circ f)_n^* = f_n^* \circ g_n^* : H^n(Z, C; G) \rightarrow H^n(X, A; G)$, para todo $n \geq 0$.

Axioma 2.3. Sejam $i : A \rightarrow X$ a aplicação inclusão e $j : (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$ a projeção no quociente entre cocadeias, então a sequência

$$\dots \rightarrow H^{n-1}(A; G) \rightarrow H^n(X, A; G) \xrightarrow{j^*} H^n(X; G) \xrightarrow{i^*} H^n(A; G) \rightarrow \dots$$

é exata.

Axioma 2.4. As aplicações induzidas por $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ contínua são tais que o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H^{n-1}(B; G) & \xrightarrow{\delta_{n-1}} & H^n(Y, B; G) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow f^* & & \downarrow f^* & & \\ \dots & \longrightarrow & H^{n-1}(A; G) & \xrightarrow{\delta_{n-1}} & H^n(X, A; G) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

é comutativo para todo $n \in \mathbb{N}$.

Axioma 2.5. Sejam $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ duas aplicações homotópicas. Então, as aplicações induzidas nos grupos de cohomologia $f_n^* : H^n(Y, B; G) \rightarrow H^n(X, A; G)$ e $g_n^* : H^n(Y, B; G) \rightarrow H^n(X, A; G)$ são iguais para todo $n \geq 0$.

Axioma 2.6 (Teorema da excisão). Sejam $U \subset X$ subconjunto aberto tal que $\bar{U} \subset \text{int}(A)$. Então a inclusão $i : (X - U, A - U) \rightarrow (X, A)$ induz um isomorfismo

$$i^* : H^n(X, A; G) \rightarrow H^n(X - U, A - U; G)$$

para todo $n \geq 0$.

Axioma 2.7. Se X é um espaço topológico consistindo de apenas um ponto, então

$$H^n(X; G) = \begin{cases} G, & \text{se } n = 0 \\ \{0\}, & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

2.3.3 Produto Cup

Considere $C^n(X; R) = \text{Hom}(C_n(X), R)$.

Para cada cocadeias $\varphi \in C^k(X; R)$ e $\psi \in C^l(X; R)$, o **produto cup**:

$$\varphi \smile \psi \in C^{k+l}(X; R)$$

é a cocadeia cujo valor em um simplexo singular $\sigma : \Delta^{k+l} \rightarrow X$ é dado por

$$(\varphi \smile \psi)(\sigma) = \varphi(\sigma|[v_0, \dots, v_k])\psi(\sigma|[v_k, \dots, v_{k+l}]).$$

O lema a seguir relaciona o produto cup de cocadeias apresentado acima com a aplicação cofronteira.

Lema 2.5. Sejam $\varphi \in C^k(X; R)$ e $\psi \in C^l(X; R)$, então

$$\delta_{k+l}(\varphi \smile \psi) = (\delta_k(\varphi) \smile \psi) + ((-1)^k \varphi \smile \delta_l(\psi)).$$

Demonstração. Seja $\sigma : \Delta^{k+l+1} \rightarrow X$ simplexo singular. Note que:

$$(\delta_k(\varphi) \smile \psi)(\sigma) = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \varphi(\sigma|[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+1}]) \psi(\sigma|[v_{k+1}, \dots, v_{k+l+1}])$$

e,

$$((-1)^k \varphi \smile \delta_l(\psi))(\sigma) = \sum_{i=k}^{k+l+1} (-1)^i \varphi(\sigma|[v_0, \dots, v_k]) \psi(\sigma|[v_k, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+l+1}]).$$

ao somar as duas expressões, o último termo da primeira soma cancela com o primeiro termo da segunda soma, o restante das parcelas formam exatamente $\delta_{k+l}(\varphi \smile \psi)(\sigma) = (\varphi \smile \psi)(\partial_{k+l+1}(\sigma))$ pois $\partial_{k+l+1}(\sigma) = \sum_{i=0}^{k+l+1} (-1)^i \sigma|[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+l+1}]$.

□

Capítulo 3

Fibrados Vetoriais

3.1 Introdução

Estudar e conhecer propriedades gerais de um espaço topológico qualquer não é fácil. Em particular, no caso de variedades suaves, muito se conhece através do estudo da variedade tangente, o qual, intuitivamente, é a união de todos os espaços tangentes da variedade. *A priori* sabemos que os espaços tangentes são capazes de fornecer muita informação sobre nosso espaço inicial, então por isso a variedade tangente tem sua significancia no âmbito matemático. Uma maneira de estudar a variedade tangente relacionada a uma variedade suave é através de um objeto matemático chamado fibrado tangente.

Aqui o fibrado tangente será abordado como um fibrado vetorial, que são mais gerais. Os fibrados vetoriais ajudam nesse contexto já que permitem estudar todo o espaço através de fragmentos fornecendo fortes propriedades, como por exemplo serem localmente isomorfos a um produto cartesiano de dois espaços topológicos.

Tendo como referências [16] e [9], apresentamos um pouco da teoria de fibrados vetoriais como pré-requisito para o estudo de classes características associados a um fibrado. O foco nesta parte do trabalho é apresentar pontos principais no estudo de fibrados vetoriais reais tais como propriedades e operações entre estes fibrados.

Definição 3.1. Um **fibrado vetorial real** ou simplesmente **fibrado** ξ sobre B é uma terna (E, π, B) , em que:

1. O espaço topológico $E = E(\xi)$ é dito **espaço total**;
2. O espaço topológico $B = B(\xi)$ é dito **espaço base**;
3. A aplicação $\pi : E \rightarrow B$ é contínua e sobrejetora, chamada de **projecção** de E no espaço B ;

4. Para cada $b \in B$, o conjunto $\pi^{-1}(b)$ possui estrutura de espaço vetorial sobre \mathbb{R}^n . O conjunto $F_b = F_b(\xi) = \pi^{-1}(b)$ será chamado **fibra** de ξ sobre $b \in B$, e
5. (*Condição da trivialidade local*) Dado $b \in B$, existem uma vizinhança $U \subset B$ de b , um inteiro $n \geq 0$ e um homeomorfismo

$$h : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$$

tal que para cada $b \in U$, a aplicação $h|_{\{b\} \times \mathbb{R}^n} : \{b\} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(b)$ define um isomorfismo de espaços vetoriais.

Observação 3.1. Seja $\xi = (E, \pi, B)$ um fibrado vetorial.

- O par (U, h) é chamado de **sistema de coordenadas locais** para ξ sobre B .
- A condição da trivialidade local tem uma devida importância na literatura referente aos fibrados vetoriais por relacionar a estrutura de espaço vetorial em $\pi^{-1}(b)$ com a estrutura em \mathbb{R}^n . Assim, para descrever a estrutura de espaço vetorial em $\pi^{-1}(b)$, consideraremos $e_1, e_2, e_3 \in \pi^{-1}(b)$, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^n$ e $c \in \mathbb{R}$ com $h(b, x_1) = e_1$, $h(b, x_2) = e_2$ e $h(b, x_3) = e_3$, e então definimos as operações:

$$+ : \pi^{-1}(b) \times \pi^{-1}(b) \rightarrow \pi^{-1}(b)$$

onde a soma $e_1 + e_2 = h(b, x_1 + x_2)$ e,

$$\cdot : \mathbb{R} \times \pi^{-1}(b) \rightarrow \pi^{-1}(b)$$

o produto por um escalar é dado por $c \cdot e_3 = h(b, cx_3)$.

- A dimensão n_b da fibra F_b é dada em função do ponto b . No caso em que tal função é constante e igual a n , chamaremos o fibrado por **n -fibrado**.
- Qualquer 1-fibrado será chamado por **fibrado linha**.
- Por π ser sobrejetora, a fibra F_b é sempre não vazia.

Definição 3.2. Seja $\xi = (E, \pi, B)$ um fibrado vetorial. Se for possível escolher $U = B$ na condição de trivialidade local, então dizemos que o fibrado ξ é um **fibrado trivial**.

Exemplo 3.1. Seja B um espaço topológico. Considere ε_B^n o fibrado vetorial em que o espaço base é B , o espaço total $E = B \times \mathbb{R}^n$ e a aplicação projeção é $\pi : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow B$ onde para todos $b \in B$ e $x \in \mathbb{R}^n$, $\pi(b, x) = b$. Assim, para cada $b \in B$ podemos escolher o próprio B como vizinhança de b em B e $h = id_{B \times \mathbb{R}^n} : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(B) = B \times \mathbb{R}^n$ com $h(b, x) = (b, x)$ que é um isomorfismo. Daí, ε_B^n é um fibrado trivial.

A seguir veremos a primeira relação que surge naturalmente entre dois fibrados. Para isto, considere $\xi = (E, p, B)$ e $\eta = (E', p', B)$ dois fibrados vetoriais sobre a mesma base B .

Definição 3.3. Diremos que o fibrado ξ é **isomorfo** à η , e denotaremos por $\xi \cong \eta$, se existir um homeomorfismo $f : E \rightarrow E'$ que f leva cada fibra $F_b(\xi)$ na fibra $F_b(\eta)$ isomorficamente para todo $b \in B$.

Em outras palavras, o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ p \downarrow & \swarrow p' & \\ B & & \end{array}$$

é comutativo. De fato, dado $b \in B$, temos que $(f \circ p^{-1})(b) = f(p^{-1}(b)) = (p')^{-1}(b)$.

Proposição 3.1. Um n -fibrado ξ é trivial sobre B se, e somente se, for isomorfo ao fibrado ε_B^n como definido no Exemplo 3.1 para algum inteiro $n \geq 0$.

Demonstração. Se ξ é um n -fibrado trivial sobre B , então pela condição da trivialidade local, podemos considerar $U = B$ e o homeomorfismo $h : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(B)$ que leva $E(\varepsilon_B^n)$ em $E(\xi)$. Logo, $\xi \cong \varepsilon_B^n$. Reciprocamente, se $\xi \cong \varepsilon_B^n$, então existe um homeomorfismo $f : E(\varepsilon_B^n) \rightarrow E(\xi)$, ou seja, $f : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(B)$. Pela condição da trivialidade local, tomando $h = f$, temos que $U = B$. Portanto ξ é um n -fibrado trivial. □

Exemplo 3.2. Seja M uma variedade suave. O **fibrado tangente** τ_M de M é um fibrado vetorial com espaço total $E(\tau_M) = TM$ e o espaço base $B(\tau_M) = M$ com a projeção $\pi : TM \rightarrow M$ dada por $\pi(p, v) = p$ para todos $p \in M$ e $v \in T_pM$.

Como o espaço TM é a união de todos os espaços tangentes da variedade M , então daremos importancia ao estudo do fibrado τ_M . Unindo os conceitos de fibrados triviais com o fibrado tangente de uma variedade suave, temos a seguinte definição:

Definição 3.4. Uma n -variedade suave $M \subset \mathbb{R}^A$ é dita **paralelizável** se o fibrado τ_M é trivial.

Assim, se M é paralelizável, então o espaço total TM do fibrado τ_M pode ser visto como o produto cartesiano entre M e \mathbb{R}^n .

Exemplo 3.3. Seja M uma n -variedade suave. O **fibrado normal** $\nu = (E, \pi, B)$ é constituído por $E = \{(p, v) \in M \times \mathbb{R}^n; v \perp w, \text{ para todo } w \in T_pM\}$, o espaço base B

é a variedade M e a aplicação projeção $\pi : E \rightarrow B$ é dada por $\pi(p, v) = p$ que fornece à $\pi^{-1}(p)$ uma estrutura de espaço vetorial real. A condição da trivialidade local será verificada mais adiante de acordo com a Definição 3.17.

Definição 3.5. O **fibrado canônico linha** é o fibrado γ_n^1 formado pelo espaço total $E(\gamma_n^1) = \{(\{\pm x\}, v) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1}; v = \lambda x, \text{ com } \lambda \in \mathbb{R}\}$ e o espaço base é o espaço projetivo real $B(\gamma_n^1) = \mathbb{R}P^n$ com a aplicação canônica $\pi : E(\gamma_n^1) \rightarrow \mathbb{R}P^n$ definida por $\pi(\{\pm x\}, v) = \{\pm x\}$.

Assim, o espaço vetorial em $\pi^{-1}(\{\pm x\})$ é a reta α_x que intercepta S^n nos pontos x e $-x$.

Para mostrarmos que o fibrado γ_n^1 é localmente trivial, consideraremos um conjunto aberto $U \subset S^n$ suficientemente pequeno de forma que U não contenha pontos antípodas. Como existe a aplicação quociente canônica $g : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$, consideremos o conjunto U_1 como a imagem $U_1 = g(U) \subset \mathbb{R}P^n$.

Assim, definimos o homeomorfismo

$$\begin{aligned} h : U_1 \times \mathbb{R} &\rightarrow \pi^{-1}(U_1) \\ (\{\pm x\}, t) &\mapsto (\{\pm x\}, tx) \end{aligned}$$

e assim o par (U_1, h) é um sistema de coordenadas locais para γ_n^1 . Portanto o fibrado linha canônico γ_n^1 é localmente trivial.

Um fato interessante sobre γ_n^1 é que tal fibrado não é trivial para $n \geq 1$. Para demonstrar esta afirmação precisamos da seguinte definição:

Definição 3.6. Seja $\xi = (E, \pi, B)$ um fibrado vetorial real. Uma **seção** s de ξ é uma aplicação contínua $s : B \rightarrow E$ que associa a cada $b \in B$ um vetor na sua fibra correspondente $F_b(\xi)$, ou seja, $\pi \circ s = id_B$. Dizemos que s é uma **seção nunca nula** se $s(b) \neq 0$ em $F_b(\xi)$ para todo $b \in B$.

Observação 3.2. Seja M uma variedade suave. Uma seção para o fibrado tangente τ_M é um **campo vetorial** na variedade M .

Observação 3.3. Seja η um fibrado linha trivial. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} s : B &\rightarrow E \\ b &\mapsto h(b, 1), \end{aligned}$$

onde $h : B \times \mathbb{R} \rightarrow E = \pi^{-1}(B)$ é a trivialização local de η . Daí, s é contínua e sendo $\pi : E \rightarrow B$ a aplicação projeção, temos que $\pi(s(b)) = b$ para todo $b \in B$. Portanto η admite uma seção s nunca nula.

Agora mostraremos que

Teorema 3.2. *O fibrado γ_n^1 sobre $\mathbb{R}P^n$ de acordo com a Definição 3.5 não é trivial para $n \geq 1$.*

Demonstração. Pela Observação 3.3, basta mostrar que o fibrado γ_n^1 não admite uma seção não nula.

Sejam $q : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ a aplicação quociente em que $q(x) = \{\pm x\}$ e $s : \mathbb{R}P^n \rightarrow E(\gamma_n^1)$ uma seção sobre $\mathbb{R}P^n$. Considere a composição $g = s \circ q$:

$$\begin{array}{ccccc} S^n & \xrightarrow{q} & \mathbb{R}P^n & \xrightarrow{s} & E(\gamma_n^1) \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & & & g \end{array}$$

que associa cada $x \in S^n$ ao par $(\{\pm x\}, t(x)x) \in E(\gamma_n^1)$. Como g é a composição de funções contínuas, temos que $t : S^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e como x e $-x$ representam o mesmo elemento em $\mathbb{R}P^n$ através da aplicação q , então

$$\begin{aligned} q(x) = q(-x) &\Leftrightarrow s(q(x)) = s(q(-x)) \Leftrightarrow g(x) = g(-x) \\ &\Leftrightarrow (\{\pm x\}, t(x)x) = (\{\pm x\}, -t(-x)x) \\ &\Leftrightarrow t(-x) = -t(x). \end{aligned}$$

Ou seja, t é uma função ímpar definida no conjunto conexo S^n . Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $x_0 \in S^n$ tal que $t(x_0) = 0$. Daí,

$$s(\{\pm x\}) = (\{\pm x\}, 0).$$

Assim, dada uma seção qualquer s no fibrado linha canônico, temos que s se anula em algum ponto. □

Dado um fibrado vetorial ξ , consideraremos uma coleção finita $\{s_1, \dots, s_n\}$ de seções sobre ξ .

Definição 3.7. Seja $\xi = (E, \pi, B)$ um fibrado vetorial. Dizemos que as seções s_1, \dots, s_n do fibrado ξ são **independentes** se, os vetores $s_1(b), \dots, s_n(b)$ são linearmente independentes na fibra F_b para todo $b \in B$.

O lema a seguir ilustra uma situação onde podemos ter um isomorfismo entre dois n -fibrados ξ e η .

Lema 3.3. Sejam ξ e η dois n -fibrados vetoriais sobre o mesmo espaço base B com $f : E(\xi) \rightarrow E(\eta)$ sendo uma aplicação contínua em que $f|_{F_b(\xi)} : F_b(\xi) \rightarrow F_b(\eta)$ é um

isomorfismo linear para todo $b \in B$. Assim, f é um homeomorfismo e conseqüentemente $\xi \cong \eta$.

Demonstração. Dado $b_0 \in B$, escolha os sistemas de coordenadas locais (U, g) e (V, h) em torno de b_0 para ξ e η , respectivamente. Considere

$$h^{-1} \circ f \circ g : (U \cap V) \times \mathbb{R}^n \rightarrow (U \cap V) \times \mathbb{R}^n$$

definida por

$$(h^{-1} \circ f \circ g)(b, x) = (b, y)$$

em que $y = (y_1, \dots, y_n)$ e $y_i = \sum_{j=1}^n f_{ij}(b)x_j$, onde $[f_{ij}(b)]$ denota uma matriz não nula de números reais. Como localmente numa vizinhança de b temos, por hipótese, que f é um isomorfismo linear, então existe a matriz inversa $[F_{ji}(b)]$. Além disso, as entradas $f_{ij}(b)$ dependem continuamente de b . Assim:

$$(g^{-1} \circ f^{-1} \circ h)(b, y) = (b, x)$$

para todo $(b, y) \in (U \cap V) \times \mathbb{R}^n$, e $x_j = \sum_{i=1}^n F_{ji}(b)y_i$. Como os números $F_{ji}(b)$ dependem continuamente da matriz $[f_{ij}(b)]$, então eles dependem continuamente de b . Logo, a aplicação $g^{-1} \circ f^{-1} \circ h$ é contínua. Assim, f^{-1} é contínua e por sua vez, f é um homeomorfismo. Portanto, pela Definição 3.3 temos que $\xi \cong \eta$. □

O teorema a seguir é um dos mais importantes do capítulo pois caracteriza fibrados triviais através do número de seções independentes que existem sobre tal fibrado.

Teorema 3.4. *Seja $\xi = (E, \pi, B)$ um n -fibrado vetorial. O fibrado ξ é trivial se, e somente se, admite n seções s_1, \dots, s_n independentes.*

Demonstração. Seja ξ trivial, então usando o sistema de coordenadas locais (B, h) definimos

$$s_i(b) = h(b, (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)) \in F_b(\xi),$$

com o número 1 na i -ésima coordenada. Assim, as seções s_1, \dots, s_n são independentes. Reciprocamente, sejam s_1, \dots, s_n seções de ξ independentes. Defina

$$f : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow E$$

por $f(b, x) = x_1 s_1(b) + \dots + x_n s_n(b)$, onde $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Assim, f é contínua e $f|_{\{b\} \times \mathbb{R}^n} : \{b\} \times \mathbb{R}^n \rightarrow F_b(\xi)$ é isomorfismo linear pois para quaisquer pontos (x_1, \dots, x_n)

e (y_1, \dots, y_n) em \mathbb{R}^n e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned} f(\alpha(b, (x_1, \dots, x_n)) + (b, y_1, \dots, y_n)) &= f(b, (\alpha x_1 + y_1, \dots, \alpha x_n + y_n)) \\ &= (\alpha x_1 + y_1)s_1(b) + \dots + (\alpha x_n + y_n)s_n(b) \\ &= \alpha x_1 s_1(b) + y_1 s_1(b) + \dots + \alpha x_n s_n(b) + y_n s_n(b) \\ &= \alpha f(b, (x_1, \dots, x_n)) + f(b, (y_1, \dots, y_n)). \end{aligned}$$

Assim, $f|_{\{b\} \times \mathbb{R}^n}$ é linear.

Agora, mostraremos que $f|_{\{b\} \times \mathbb{R}^n}$ é injetiva. Para isso, considere que $f(b, (x_1, \dots, x_n)) = f(b, (y_1, \dots, y_n))$. Ou seja,

$$x_1 s_1(b) + \dots + x_n s_n(b) = y_1 s_1(b) + \dots + y_n s_n(b),$$

e assim,

$$(x_1 - y_1)s_1(b) + \dots + (x_n - y_n)s_n(b) = 0.$$

Como $\{s_1(b), \dots, s_n(b)\}$ é um conjunto linearmente independente, então $x_i = y_i$ para todo $i = 1, \dots, n$. Logo, $f|_{\{b\} \times \mathbb{R}^n}$ é injetiva. Agora seja $e \in F_b(\xi)$, como $A = \{s_1(b), \dots, s_n(b)\}$ é um conjunto linearmente independente e $\dim(F_b(\xi)) = n$, então A forma uma base para o espaço vetorial $F_b(\xi)$, o que implica em existir únicos $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ tais que $e = x_1 s_1(b) + \dots + x_n s_n(b)$, ou seja, para $x = (x_1, \dots, x_n)$, temos que $e = f(b, x)$. Daí f é sobrejetora. Logo, pelo Lema 3.3 temos que $\xi \cong \varepsilon_B^n$. \square

Exemplo 3.4. Considere o círculo $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ como uma variedade suave de dimensão 1. Como $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, então $S^1 \subset \mathbb{C}$ onde $S^1 = \{x = x_0 + x_1 i \in \mathbb{C} \text{ e } \|x\| = 1\}$. Defina

$$s : S^1 \rightarrow TS^1$$

por $s(x) = (x, x') = ((x_0, x_1), (-x_1, x_0))$ para todo $x = (x_0, x_1) \in S^1$. Como $\langle x, x' \rangle = 0$, então s é uma aplicação contínua, está bem definida e $s(x) \neq 0 \in F_x(\tau_{S^1})$. Também temos que $\pi_{\tau_{S^1}} \circ s = id_{S^1}$. Logo, s é uma seção não nula de τ_{S^1} . Assim, S^1 é paralelizável.

3.2 Fibrados vetoriais Euclidianos

Definição 3.8. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Uma aplicação

$$\mu : V \rightarrow \mathbb{R}$$

é chamada **forma quadrada positiva definida** se

$$\mu(v) = \sum_{i=1}^n l_i(v)l'_i(v),$$

para todo $v \in V$ onde $l_i, l'_i : V \rightarrow \mathbb{R}$ são transformações lineares para todo $i = 1, 2, \dots, n$ e $\mu(v) > 0$ com $v \in V$ não nulo.

Assim, a partir de tal aplicação é possível obter uma aplicação bilinear e simétrica $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{2}[\mu(v+w) - \mu(v) - \mu(w)],$$

para todo $(v, w) \in V \times V$.

Esta aplicação tem a propriedade de que dado $v \in V$,

$$\begin{aligned} \langle v, v \rangle &= \frac{1}{2}[\mu(2v) - 2\mu(v)] = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{i=1}^n l_i(2v)l'_i(2v) \right) - 2\mu(v) \right] = \frac{1}{2}[4\mu(v) - 2\mu(v)] \\ &= \mu(v). \end{aligned}$$

Definição 3.9. Um espaço vetorial V de dimensão finita é chamado **espaço vetorial Euclidiano** se for possível definir uma forma quadrática definida positiva $\mu : V \rightarrow \mathbb{R}$. O número $\langle v, w \rangle$ será dito **produto interno** dos elementos $v \in V$ com $w \in V$.

Definição 3.10. Seja $\xi = (E, \pi, B)$ um fibrado vetorial. Se existir uma função contínua $\mu : E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $b \in B$, a aplicação $\mu|_{F_b(\xi)} : F_b(\xi) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma quadrática definida positiva, então diremos que ξ é um **fibrado vetorial Euclidiano**. Nestas condições, a aplicação μ é chamada **métrica Euclidiana do fibrado** ξ .

Observação 3.4. Seja M uma variedade suave. Uma métrica Euclidiana $\mu : TM \rightarrow \mathbb{R}$ para τ_M é chamada de **métrica Riemanniana** e o par (M, μ) é dita uma **variedade Riemanniana**.

A seguir veremos três exemplos de fibrados vetoriais já conhecidos que são Euclidianos.

Exemplo 3.5. Para quaisquer espaço topológico B e $n \in \mathbb{N}$, temos que ε_B^n é um fibrado Euclidiano. De fato, definindo $\mu : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ por $\mu(b, (x_1, \dots, x_n)) = \sum_{i=1}^n x_i^2$ para todo $(b, (x_1, \dots, x_n)) \in B \times \mathbb{R}^n$, temos que μ é contínua e para todo $b \in B$, temos que $\mu|_{F_b(\varepsilon)} : F_b(\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma quadrática positiva.

Exemplo 3.6. Para qualquer variedade suave $M \subset \mathbb{R}^n$ temos que τ_M é um fibrado vetorial Euclidiano, pois $TM \subset T\mathbb{R}^n$. Assim, $\mu : M \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\mu(p, (x_1, \dots, x_n)) = \sum_{i=1}^n x_i^2$ é uma métrica para TM .

Exemplo 3.7. O fibrado linha canônico γ_n^1 é Euclidiano.

Para verificarmos esta afirmação notemos que se $(\bar{x}, v) \in E(\gamma_n^1)$ então $v = \lambda x$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Assim, $\lambda = \langle x, v \rangle$ pois $x \in S^n$. Então, basta definir $\mu : E(\gamma_n^1) \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$\mu(\bar{x}, v) = \begin{cases} \langle x, v \rangle, & \text{se } v = \lambda x, \lambda \geq 0 \\ -\langle x, v \rangle, & \text{se } v = \lambda x, \lambda < 0 \end{cases}.$$

Portanto μ é contínua e define uma métrica em $E(\gamma_n^1)$.

Lema 3.5. Sejam $\xi = (E, \pi, B)$ um n -fibrado Euclidiano trivial. Então, existem n seções $s_1, \dots, s_n : B \rightarrow E$ de ξ ortonormais, isto é, para cada $b \in B$:

$$\langle s_i(b), s_j(b) \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}.$$

Demonstração. Como ξ é um n -fibrado trivial, segue do Teorema 3.4 que existem n seções $s'_i : B \rightarrow E$, $i = 1, 2, \dots, n$, independentes de ξ . Aplicando o processo de Gram-Schmidt nos vetores $\{s'_1(b), \dots, s'_n(b)\}$, obtemos uma base ortonormal $\{s_1(b), \dots, s_n(b)\}$ de $F_b(\xi)$ para todo $b \in B$. Como as funções $s_i : B \rightarrow E$ são contínuas para todo $i = 1, \dots, n$, então s_1, \dots, s_n são seções ortonormais de ξ . □

3.3 Operações entre fibrados vetoriais

Nesta seção estudaremos formas de obter novos fibrados vetoriais a partir de fibrados vetoriais já conhecidos. Definimos algumas construções básicas que permitem a geração de novos fibrados tais como as operações de restrição, pull-back, produto cartesiano e soma de Whitney.

3.3.1 Fibrado restrição

Definição 3.11. Sejam $\xi = (E, \pi, B)$ um n -fibrado vetorial e \bar{B} um subespaço topológico de B . O **fibrado restrição** de ξ a \bar{B} é dado por

$$\xi|_{\bar{B}} = (\bar{E}, \bar{\pi}, \bar{B}),$$

onde $\bar{E} = \pi^{-1}(\bar{B})$ e $\bar{\pi} = \pi|_{\pi^{-1}(\bar{B})}$.

Desse modo $\bar{\pi}$ é uma aplicação contínua e sobrejetiva e para cada $b \in \bar{B}$,

$$F_b(\xi|_{\bar{B}}) = \bar{\pi}^{-1}(b) = \pi^{-1}(b) \cap \pi^{-1}(\bar{B}) = \pi^{-1}(b) = F_b(\xi).$$

Então, cada fibra $F_b(\xi|_{\bar{B}})$ equivale a fibra $F_b(\xi)$ e também possui a mesma estrutura de espaço vetorial. Para verificarmos a condição da trivialidade local considere $b \in \bar{B}$, como ξ é um n -fibrado, existem uma vizinhança $U \subset B$ de b e um homeomorfismo $h : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$ tais que $h|_{\{b\} \times \mathbb{R}^n} : \{b\} \times \mathbb{R}^n \rightarrow F_b(\xi)$ é um isomorfismo linear. Considerando o conjunto $\bar{U} = U \cap \bar{B}$, temos que $\bar{U} \subset \bar{B}$ é uma vizinhança de b em \bar{B} . Então defina

$$\bar{h} = h|_{\bar{U} \times \mathbb{R}^n} : \bar{U} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(\bar{U}) = \bar{\pi}^{-1}(\bar{U}).$$

Daí segue que \bar{h} é um homeomorfismo e $\bar{h}|_{\{b\} \times \mathbb{R}^n} : \{b\} \times \mathbb{R}^n \rightarrow F_b(\xi|_{\bar{B}})$ é um isomorfismo linear.

Exemplo 3.8. Sejam M uma variedade suave e U um subconjunto aberto de M . Como U também é uma variedade suave, temos as seguintes relações entre os fibrados tangentes:

$$\tau_M|_U = \tau_U.$$

3.3.2 Fibrado pull-back

Definição 3.12. Sejam $\xi = (E, \pi, B)$ um fibrado vetorial e B_1 um espaço topológico qualquer. Dada uma aplicação contínua $f : B_1 \rightarrow B$ construímos o **fibrado pull-back** sobre B_1 de ξ com relação a f , também encontrado na literatura como fibrado induzido e denotado por $f^*\xi$ como:

$$f^*\xi = (E_1, \pi_1, B_1),$$

onde $E_1 = \{(b, e) \in B_1 \times E; f(b) = \pi(e)\}$ e a aplicação projeção $\pi_1 : E_1 \rightarrow B_1$ dada por $\pi_1(b, e) = b$ que é contínua e sobrejetora.

Com essa construção, temos que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\hat{f}} & E \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

é comutativo para $\hat{f} : E_1 \rightarrow E$ definida por $\hat{f}(x, y) = y$.

Além disso, temos que \hat{f} leva isomorficamente $F_b(f^*\xi)$ em $F_{f(b)}(\xi)$. De fato, para

cada $b \in \overline{B}$, temos:

$$\begin{aligned}
 F_b(f^*\xi) &= \pi_1^{-1}(b) = \{(x, y) \in E_1; \pi_1(x, y) = b\} \\
 &= \{(x, y) \in E_1; x = b\} \\
 &= \{(b, y) \in E_1\} \\
 &= \{(b, y) \in B_1 \times E; f(b) = \pi(y)\} \\
 &= \{b\} \times F_{f(b)}(\xi) \\
 &\cong F_{f(b)}(\xi).
 \end{aligned}$$

Para constatarmos a condição da trivialidade local, tomamos $b \in B_1$, como $f(b) \in B$ e ξ é um n -fibrado, consideremos uma trivialização local (U, h) de $f(b)$ e a vizinhança $U_1 = f^{-1}(U)$ de b em B_1 , então definimos a aplicação

$$h_1 : U_1 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi_1^{-1}(U_1) \subset E_1$$

por $h_1(x, y) = (x, h(f(x), y))$. Mostraremos que h_1 é injetiva. Se os pontos $(b_1, y_1), (b_2, y_2) \in U_1 \times \mathbb{R}^n$ são tais que $h_1(b_1, y_1) = h_1(b_2, y_2)$, temos

$$(b_1, h(f(b_1), y_1)) = (b_2, h(f(b_2), y_2)).$$

Daí, $b_1 = b_2$ e $h(f(b_1), y_1) = h(f(b_2), y_2)$. Assim, $y_1 = y_2$ e então h_1 é injetiva. Agora, dado $(b, e) \in \pi_1^{-1}(U_1)$ temos que $f(b) = \pi(e)$ e então $e \in F_{f(b)}(\xi)$. Como a aplicação $h : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$ é um homeomorfismo com $h|_{\{f(b)\} \times \mathbb{R}^n} : \{f(b)\} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(f(b))$ sendo um isomorfismo entre $F_{f(b)}(\xi)$ e \mathbb{R}^n , então existe $x \in \mathbb{R}^n$ de forma que $(f(b), x) \in U \times \mathbb{R}^n$ seja tal que:

$$h(f(b), x) = e.$$

Daí, $h_1(b, x) = (b, h(f(b), x)) = (b, e)$, ou seja, h_1 é sobrejetiva. Além disso, h_1 é dada através da composições de aplicações contínuas tornando-a uma aplicação contínua, e, $h_1^{-1}(b, e) = (b, h^{-1}(e))$ também é contínua. Conseqüentemente h_1 é um homeomorfismo.

Proposição 3.6. Se $\xi = (E, \pi, B)$ é um n -fibrado vetorial trivial, então o fibrado pull-back $f^*\xi$ é um n -fibrado trivial.

Demonstração. Como ξ é um n -fibrado trivial, pelo Teorema 3.4 existem n seções independentes $s_i : B \rightarrow E$ onde $i = 1, \dots, n$. Considere $s'_i : B_1 \rightarrow E(f^*\xi)$ dada por $s'_i(x) = (x, s_i(f(x)))$ para todos $x \in B_1$ e $i = 1, \dots, n$. Assim, todas as aplicações s'_i são

contínuas pois as aplicações s_i são contínuas, e, dados $b \in B_1$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i s'_i(b) = 0 \in F_b(f^*\xi),$$

então temos que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha_i s'_i(b) = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i (b, s_i(f(b))) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (b, \alpha_i s_i(f(b))) = 0 \\ &\Leftrightarrow (b, \sum_{i=1}^n \alpha_i s_i(f(b))) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i s_i(f(b)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha_i = 0, \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Ou seja, $\{s'_1(b), \dots, s'_n(b)\}$ é um conjunto linearmente independente e além disso,

$$(\pi \circ s'_i)(x) = \pi(x, s_i(f(x))) = x, \text{ para todo } x \in B_1.$$

Logo s'_1, \dots, s'_n são n seções independentes de $f^*\xi$. Logo, pelo Teorema 3.4 o fibrado pull-back $f^*\xi$ é trivial. □

Definição 3.13. Sejam $\xi = (E, \pi, B)$ e $\eta = (F, \sigma, C)$ dois n -fibrados vetoriais. Uma aplicação contínua $g : E \rightarrow F$ é uma **aplicação fibrada** se para cada $b \in B$ existe $b' \in C$ tal que g leva cada espaço vetorial $F_b(\xi)$ isomorficamente no espaço vetorial $F_{b'}(\eta)$.

Observação 3.5. Para cada aplicação fibrada g entre os fibrados ξ e η , é possível mostrar que a aplicação induzida nos espaços bases $\hat{g} : B \rightarrow C$ por $\hat{g}(b) = b'$ é contínua. Para detalhes desta demonstração, consultar [2], página 36.

Lema 3.7. Sejam $\xi = (E, \pi, B)$ e $\eta = (F, \sigma, C)$ n -fibrados vetoriais. Se $g : E \rightarrow F$ é uma aplicação fibrada e $\hat{g} : B \rightarrow C$ é a aplicação correspondente nos espaços bases, então $\xi \cong \hat{g}^*\eta$.

Demonstração. Considere a aplicação

$$h : E \rightarrow E(\hat{g}^*\eta)$$

definida por $h(x) = (\pi(x), g(x))$ para todo $x \in E$. Como as aplicações π e g são contínuas, então h é contínua. Dados $x, y \in F_b(\xi)$ e $a \in \mathbb{R}$, temos

$$h(x) = (\pi(x), g(x)) = (b, g(x)) \in F_b(\hat{g}^*\eta)$$

e,

$$\begin{aligned} h(ax + y) &= (\pi(ax + y), g(ax + y)) = (b, ag(x) + g(y)) = a(b, g(x)) + (b, g(y)) \\ &= ah(x) + h(y). \end{aligned}$$

ou seja, h é linear e aplica cada fibra $F_b(\xi)$ em uma fibra $F_{b'}(\hat{g}^*\eta)$. Também temos que se $h(x) = h(y)$ então

$$(b, g(x)) = (b, g(y)) \Rightarrow g(x) = g(y) \Rightarrow x = y,$$

daí h aplicada nas fibras é injetiva já que g é isomorfismo. Ainda mais, o fato de h restrita a fibra ser uma aplicação linear e injetiva entre espaços vetoriais de mesma dimensão, concluímos que h é sobrejetora, tornando assim h um isomorfismo entre as fibras $F_b(\xi)$ e $F_{b'}(\hat{g}^*\eta)$.

□

3.3.3 Produto cartesiano de fibrados

Definição 3.14. Sejam $\xi_1 = (E_1, \pi_1, B_1)$ e $\xi_2 = (E_2, \pi_2, B_2)$ fibrados vetoriais. O **fibrado produto cartesiano** $\xi_1 \times \xi_2$ definido como $\xi_1 \times \xi_2 = (E_1 \times E_2, \pi_1 \times \pi_2, B_1 \times B_2)$ em que $\pi_1 \times \pi_2 : E_1 \times E_2 \rightarrow B_1 \times B_2$ é a aplicação projeção a qual claramente é contínua e sobrejetiva.

Cada fibra de $\xi_1 \times \xi_2$ é da forma $(\pi_1 \times \pi_2)^{-1}(b_1, b_2) = F_{b_1}(\xi_1) \times F_{b_2}(\xi_2)$ e tem a seguinte estrutura de espaço vetorial: Para todos $(x, y), (x_1, y_1) \in F_{b_1}(\xi_1) \times F_{b_2}(\xi_2)$ e $a \in \mathbb{R}$,

$$(x, y) + a(x_1, y_1) := (x, y) + (ax_1, ay_1) = (x + ax_1, y + ay_1) \in F_{b_1}(\xi_1) \times F_{b_2}(\xi_2).$$

Para a condição da trivialidade local, forma-se um sistema de coordenadas locais de $\xi_1 \times \xi_2$ a partir dos sistemas de coordenadas locais (U, h_1) e (V, h_2) de ξ_1 e ξ_2 , respectivamente, fazendo:

$$h = h_1 \times h_2 : (U \times V) \times \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow (\pi_1 \times \pi_2)^{-1}(U \times V)$$

dada por $h((b_1, b_2), x) = (h_1(b_1, (x_1, \dots, x_n)), h_2(b_2, (x_{n+1}, \dots, x_{n+m})))$.

Exemplo 3.9. Sejam M e N variedades suaves de dimensões m e n , respectivamente. Se $P = M \times N$, então

$$\tau_P \cong \tau_M \times \tau_N.$$

De fato, considere

$$f : TP \rightarrow TM \times TN$$

definida por $f((m, n), (x_1, x_2)) = ((m, x_1), (n, x_2))$ onde

$$TP = \{((m, n), (x_1, x_2)) \in P \times \mathbb{R}^{n+m}; (x_1, x_2) \in T_{(m,n)}P\},$$

$TM = \{(m, x_1) \in M \times \mathbb{R}^m; x_1 \in T_m M\}$ e $TN = \{(n, x_2) \in N \times \mathbb{R}^n; x_2 \in T_n N\}$. Assim, f é contínua com $f|_{F_{(m,n)}(\tau_P)} : F_{(m,n)}(\tau_P) \rightarrow F_m(\tau_M) \times F_n(\tau_N)$ isomorfismo linear. Então pelo Lema 3.3, f é um homeomorfismo e conseqüentemente,

$$\tau_P \cong \tau_M \times \tau_N.$$

3.3.4 Soma de Whitney

Nesta seção consideramos $\xi = (E, \pi, B)$ e $\xi' = (E', \pi', B)$ dois fibrados vetoriais sobre o mesmo espaço topológico B .

Definição 3.15. Considere os fibrados ξ e ξ' como acima e a aplicação $d : B \rightarrow B \times B$ definida por $d(b) = (b, b)$ para todo $b \in B$. O **fibrado soma de Whitney de ξ e ξ'** , denotado por $\xi \oplus \xi'$, é o fibrado

$$\xi \oplus \xi' := d^*(\xi \times \xi').$$

Por ser um fibrado pull-back, de acordo com a Definição 3.12, temos que o fibrado soma de Whitney é, de fato, localmente trivial. Além disso, as fibras deste fibrado são isomorfas à soma direta das fibras de ξ com as de ξ' . De fato, dado $b \in B$, constatamos que:

$$\begin{aligned} F_b(\xi \oplus \xi') &= F_{d(b)}(d^*(\xi \times \xi')) \\ &= F_{d(b)}(\xi \times \xi') \\ &= F_{(b,b)}(\xi \times \xi') \\ &= F_b(\xi) \times F_b(\xi') \\ &\cong F_b(\xi) \oplus F_b(\xi') \end{aligned}$$

Definição 3.16. Considere os fibrados ξ e ξ' com $E \subset E'$. Diremos que ξ é **subfibrado** de ξ' , quando para todo $b \in B$, tivermos que $F_b(\xi)$ é um subespaço vetorial de $F_b(\xi')$. Neste caso, usamos a notação $\xi \subset \xi'$.

Lema 3.8. Sejam ξ_1 , ξ_2 e η três fibrados vetoriais sobre o mesmo espaço base B . Se ξ_1 e ξ_2 são subfibrados de η tais que para cada $b \in B$, o espaço $F_b(\eta)$ se decompõe na soma direta dos subespaços $F_b(\xi_1)$ e $F_b(\xi_2)$, então

$$\eta \cong \xi_1 \oplus \xi_2.$$

Demonstração. Para cada $b \in B$, por hipótese a fibra de η é tal que

$$F_b(\eta) = F_b(\xi_1) \oplus F_b(\xi_2).$$

Assim, defina $f : E(\xi_1 \oplus \xi_2) \rightarrow E(\eta)$ dada por $F(b, (x, y)) = x + y$, para todo ponto $(b, (x, y)) \in E(\xi_1 \oplus \xi_2)$. Assim, pelo Lema 3.3, f é um homeomorfismo pois é contínua e aplica cada fibra de $\xi_1 \oplus \xi_2$ isomorficamente na fibra correspondente em η . De fato,

- Por construção, f é contínua;
- $f|_{F_b(\xi_1 \oplus \xi_2)}$ é linear, pois dados $(b, x_1, y_1), (b, x_2, y_2) \in F_b(\xi_1 \oplus \xi_2)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned} f|_{F_b(\xi_1 \oplus \xi_2)}((b, x_1, y_1) + \alpha(b, x_2, y_2)) &= f|_{F_b(\xi_1 \oplus \xi_2)}(b, x_1 + \alpha x_2, y_1 + \alpha y_2) \\ &= x_1 + y_1 + \alpha(x_2 + y_2) \\ &= f|_{F_b(\xi_1 \oplus \xi_2)}(b, x_1, y_1) + \alpha f|_{F_b(\xi_1 \oplus \xi_2)}(b, x_2, y_2). \end{aligned}$$

- $f|_{F_b(\xi_1 \oplus \xi_2)}$ é bijetiva já que $F_b(\eta) = F_b(\xi_1) \oplus F_b(\xi_2)$, e para qualquer $w \in F_b(\eta)$ existem únicos $x \in F_b(\xi_1)$ e $y \in F_b(\xi_2)$ tais que $w = x + y$. Então,

$$f|_{F_b(\xi_1 \oplus \xi_2)}(b, x, y) = x + y = w.$$

Portanto $f|_{F_b(\xi_1 \oplus \xi_2)}$ é sobrejetiva e conseqüentemente, pelo Teorema do Núcleo e Imagem, temos que $f|_{F_b(\xi_1 \oplus \xi_2)}$ é bijetiva.

Logo,

$$\eta \cong \xi_1 \oplus \xi_2.$$

□

Exemplo 3.10. Dado um espaço topológico B e $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\varepsilon_B^n \cong \underbrace{\varepsilon_B^1 \oplus \varepsilon_B^1 \oplus \dots \oplus \varepsilon_B^1}_{n\text{-vezes}}.$$

Podemos verificar a autenticidade desta afirmação usando indução sobre $n \in \mathbb{N}$. Para o caso $n = 2$, defina a aplicação $f : B \times \mathbb{R}^2 \rightarrow E(\varepsilon_B^1 \oplus \varepsilon_B^1)$ dada por

$$f(b, (x, y)) = (b, (b, x), (b, y))$$

para todo $(b, (x, y)) \in B \times \mathbb{R}^2$. Assim,

- Por definição, f é contínua;
- $f|_{\{b\} \times \mathbb{R}^2}$ é um isomorfismo linear pois dados $(b, (x_1, y_1)), (b, (x_2, y_2)) \in \{b\} \times \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned} f|_{\{b\} \times \mathbb{R}^2}(b, (x_1, y_1)) + \alpha(b, (x_2, y_2)) &= f|_{\{b\} \times \mathbb{R}^2}(b, x_1 + \alpha x_2, y_1 + \alpha y_2) \\ &= (b, (b, x_1 + \alpha x_2), (b, y_1 + \alpha y_2)) \\ &= (b, (b, x_1), (b, y_1)) + \alpha(b, (b, x_2), (b, y_2)) \\ &= f|_{\{b\} \times \mathbb{R}^2}(b, (x_1, y_1)) + f|_{\{b\} \times \mathbb{R}^2}(b, (x_2, y_2)). \end{aligned}$$

Daí, pelo Lema 3.3,

$$\varepsilon_B^2 \cong \varepsilon_B^1 \oplus \varepsilon_B^1.$$

Agora, suponha que para algum $n \in \mathbb{N}$ tenhamos $\varepsilon_B^{n-1} \cong \underbrace{\varepsilon_B^1 \oplus \varepsilon_B^1 \oplus \dots \oplus \varepsilon_B^1}_{(n-1)\text{-vezes}}$, então,

por hipótese:

$$\varepsilon_B^n \cong \varepsilon_B^1 \oplus \varepsilon_B^{n-1} \cong \underbrace{\varepsilon_B^1 \oplus \varepsilon_B^1 \oplus \dots \oplus \varepsilon_B^1}_{n\text{-vezes}}.$$

3.3.5 Fibrado complemento ortogonal

Sejam $\eta = (E, \pi, B)$ um n -fibrado vetorial Euclidiano e $\xi \subset \eta$ subfibrado. Considere agora os subespaços vetoriais de $F_b(\xi)$:

$$F_b(\xi^\perp) = (F_b(\xi))^\perp = \{v \in F_b(\xi); \langle v, w \rangle = 0, \forall w \in F_b(\xi)\},$$

para cada $b \in B$.

Definição 3.17. Dados o fibrado η e o subfibrado $\xi \subset \eta$, então o **fibrado complemento ortogonal** de ξ , denotado por ξ^\perp , é o fibrado formado por:

$$\xi^\perp = (E^\perp, \pi^\perp, B),$$

em que

$$E^\perp = \bigcup_{b \in B} F_b(\xi^\perp)$$

3. Fibrados Vetoriais

e $\pi^\perp = \pi|_{E^\perp} : E^\perp \rightarrow B$. Assim, π^\perp é contínua e sobrejetiva e além disso, para qualquer $b \in B$, temos:

$$\begin{aligned} (\pi^\perp)^{-1}(b) &= (\pi|_{E^\perp})^{-1}(b) = \pi^{-1}(b) \cap E^\perp = F_b(\eta) \cap \left(\bigcup_{x \in B} F_x(\xi^\perp) \right) \\ &= \bigcup_{x \in B} (F_b(\eta) \cap F_x(\xi^\perp)) = F_b(\eta) \cap F_b(\xi^\perp) \\ &= F_b(\xi^\perp). \end{aligned}$$

Para verificar a condição da trivialidade local, consideremos $\eta = (E, \pi, B)$ um n -fibrado e $\xi = (E', \pi', B)$ um m -fibrado com $m \leq n$. Então para qualquer $b_0 \in B$ considere $U \subset B$ vizinhança de b_0 tal que ξ e η são localmente triviais. Assim, podemos supor que existem os homeomorfismos:

$$h_1 : U \times \mathbb{R}^m \rightarrow \pi'(U) \quad \text{e} \quad h_2 : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi(U)$$

tais que $h_1|_{\{b_0\} \times \mathbb{R}^m}$ e $h_2|_{\{b_0\} \times \mathbb{R}^n}$ são isomorfismos lineares.

Pelo Lema 3.5, existem $s_1, \dots, s_m : B \rightarrow E'$ seções ortonormais de $\xi|_U$ e

$$s'_1, \dots, s'_n : B \rightarrow E$$

seções ortonormais de $\eta|_U$. Daí, a matriz

$$A = (\langle s_i(b_0), s'_j(b_0) \rangle)_{m \times n}$$

tem posto m . De fato, pois as m linhas de A são linearmente independentes já que dados $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, com $\sum_{i=1}^m \alpha_i \langle s_i(b_0), s'_1(b_0) \rangle, \dots, \langle s_i(b_0), s'_n(b_0) \rangle = (0, \dots, 0)$, equivale a:

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \left(\left\langle \sum_{i=1}^m \alpha_i s_i(b_0), s'_1(b_0) \right\rangle, \dots, \left\langle \sum_{i=1}^m \alpha_i s_i(b_0), s'_n(b_0) \right\rangle \right) = (0, \dots, 0) \\ &\Leftrightarrow \left\langle \sum_{i=1}^m \alpha_i s_i(b_0), s'_j(b_0) \right\rangle = 0, \quad \forall j = 1, \dots, n \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^m \alpha_i s_i(b_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha_i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Assim, reordenando as seções s'_1, \dots, s'_n se necessário, as primeiras m colunas de A formam uma submatriz com determinante não nulo. Então, existe $V \subset U$ vizinhança

de b_0 tal que para todo $b \in B$, esta submatriz em questão tenha posto m .

Deste modo, para qualquer $b \in V$, o conjunto $\{s_1(b), \dots, s_m(b), s'_{m+1}(b), \dots, s'_n(b)\}$ é formado por vetores linearmente independentes em $F_b(\eta)$. Por Gram-schmidt, obtemos uma base ortonormal $\{s_1(b), \dots, s_m(b), s_{m+1}(b), \dots, s_n(b)\}$ de $F_b(\eta)$ para todo $b \in B$.

Logo, com a aplicação $h : V \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \pi^{-1}(V)$ definida por

$$h(b, (x_1, \dots, x_{n-m})) = \sum_{i=1}^{n-m} x_i s_{m+i}(b),$$

é um homeomorfismo e fornece o par (V, h) como um sistema de coordenadas para ξ^\perp , já que $h|_{\{b_0\}} \times \mathbb{R}^{n-m} : \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow F_{b_0}(\xi^\perp)$ é um isomorfismo linear.

Portanto, ξ^\perp é um fibrado localmente trivial.

Exemplo 3.11. Sejam $N \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade Riemanniana e $M \subset N$ uma subvariedade suave. Então,

$$\tau_M \subset \tau_N|_M.$$

De fato,

- $E(\tau_M) \subset E(\tau_N|_M)$, pois dado $(p, v) \in E(\tau_M) = TM$, então $p \in M$ e $v \in T_pM$. Como $M \subset N$ é uma subvariedade, então T_pM é um subespaço vetorial de T_pN . Consequentemente, $p \in N$ e $v \in T_pN$, isto é, $(p, v) \in TN = E(\tau_N)$. Como $p \in M$, então $(p, v) \in \pi_{\tau_N}^{-1}(M)$. Logo, $(p, v) \in E(\tau_N|_M)$. E,
- $F_b(\tau_M)$ é um subespaço vetorial de $F_b(\tau_N|_M)$ para todo $b \in M$ já que dado $b \in M$, o conjunto T_bM é um subespaço vetorial de T_bN , então $F_b(\tau_M) = \{b\} \times T_bM$ é subespaço vetorial de $\{b\} \times T_bN = F_b(\tau_N) = F_b(\tau_N|_M)$.

Portanto, segue o resultado.

Proposição 3.9. Sejam η um fibrado Euclidiano e $\xi \subset \eta$. Então, $\eta \cong \xi \oplus \xi^\perp$.

Demonstração. Como $F_b(\xi^\perp) = (F_b(\xi))^\perp$ para todo $b \in B$, então temos que a fibra $F_b(\eta)$ se decompõem por: $F_b(\eta) = F_b(\xi) \oplus F_b(\xi^\perp)$. Logo, pelo Lema 3.8, temos que $\eta \cong \xi \oplus \xi^\perp$.

□

Definição 3.18. Sejam N uma variedade Riemanniana e $M \subset N$ uma subvariedade suave. O **fibrado normal de M** é o fibrado τ_M^\perp . Neste caso, denotamos o fibrado normal por ν_M .

Observação 3.6. Nestas circunstâncias podemos reescrever o fibrado $\tau_N|_M$ como a soma de Whitney dos fibrados tangente e normal da variedade M através da Proposição 3.9 por:

$$\tau_N|_M \cong \tau_M \oplus \tau_M^\perp = \tau_M \oplus \nu_M.$$

Exemplo 3.12. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade suave. Por definição, temos $\tau_M \subset \varepsilon_{\mathbb{R}^n}^n$. Assim, $\varepsilon_{\mathbb{R}^n}^n \cong \tau_M \oplus \nu_M$.

3.3.6 Fibrado Hom

Sejam V_1 e V_2 espaços vetoriais de dimensões n e m , respectivamente, e usemos a seguinte notação:

$$\text{Hom}(V_1, V_2) = \{T : V_1 \rightarrow V_2; T \text{ é linear}\}.$$

Como o conjunto $\text{Hom}(V_1, V_2)$ é isomorfo ao conjunto das matrizes de ordem $n \times m$, então,

$$\text{Hom}(V_1, V_2) \approx M_{n \times m}(\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{nm}.$$

Definição 3.19. Sejam ξ um n -fibrado e η um m -fibrado ambos sobre o mesmo espaço base B . Então, definimos o fibrado $\text{Hom}(\xi, \eta)$ como sendo:

$$\text{Hom}(\xi, \eta) = (E, \pi, B),$$

em que

$$E = \bigcup_{b \in B} \text{Hom}(F_b(\xi), F_b(\eta))$$

e $\pi : E \rightarrow B$ é definida por $\pi(T) = b$ para cada $T \in \text{Hom}(F_b(\xi), F_b(\eta))$ e $b \in B$.

Em E é usada a menor topologia que torna π contínua. Ou seja, $U \subset E$ é aberto se, e somente se, $U = \pi^{-1}(A)$ para algum $A \subset B$. Daí, π é sobrejetora pois, para qualquer $b_0 \in B$, se $g : F_{b_0}(\xi) \rightarrow F_{b_0}(\eta)$ for a transformação linear identicamente nula, então $\pi(g) = b_0$. Além disso, as fibras de $\text{Hom}(\xi, \eta)$ são dadas por:

$$F_b(\text{Hom}(\xi, \eta)) = \text{Hom}(F_b(\xi), F_b(\eta)) \text{ para todo } b \in B.$$

Para verificarmos a condição da trivialidade local, dado $b_0 \in B$, considere $U \subset B$ vizinhança de b_0 que fornece uma trivialidade local para ξ e η em $b_0 \in B$. Como existe $T_b : \mathbb{R}^{nm} \rightarrow \text{Hom}(F_b(\xi), F_b(\eta))$ isomorfismo linear para cada $b \in B$, defina

$$h : U \times \mathbb{R}^{nm} \rightarrow \pi^{-1}(U) = \bigcup_{b \in U} \text{Hom}(F_b(\xi), F_b(\eta))$$

por $h(b, x) = T_b(x)$ para todo $(b, x) \in U \times \mathbb{R}^{nm}$. Como o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} U \times \mathbb{R}^{nm} & \xrightarrow{h} & \pi^{-1}(U) \\ p_1 \downarrow & \swarrow \pi & \\ U & & \end{array}$$

é comutativo, então h é contínua. De fato, se $O \subset \pi^{-1}(U)$ é um aberto, então

$$O = A \cap \pi^{-1}(U)$$

onde $A \subset E$ é um aberto. Assim, $\pi^{-1}(V)$ para algum aberto $V \subset B$. Daí, como p_1 é contínua, então $p_1^{-1}(V \cap U) \subset U \times \mathbb{R}^{nm}$ é aberto. Portanto:

$$\begin{aligned} h^{-1}(O) &= h^{-1}(A \cap \pi^{-1}(U)) \\ &= h^{-1}(\pi^{-1}(V) \cap \pi^{-1}(U)) \\ &= h^{-1}(\pi^{-1}(V \cap U)) \\ &= p_1^{-1}(V \cap U) \end{aligned}$$

é um aberto em $U \times \mathbb{R}^{nm}$. Defina $g : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^{nm}$ por $g(T) = (b, T_b^{-1}(T))$ onde $T \in Hom(F_b(\xi), F_b(\eta))$ para um único $b \in U$. Então $g = h^{-1}$ é contínua. Seja $O \subset U \times \mathbb{R}^{nm}$ um aberto sub-básico contendo $g(T)$. Assim, existem os abertos sub-básicos A e V de U e \mathbb{R}^{nm} , respectivamente, tais que $O = A \times V$. Assim, como $T \in Hom(F_b(\xi), F_b(\eta))$ para um único $b \in U$ e $g(T) \in O$, então $b \in A$ e $T_b^{-1}(T) \in V$.

Além disso, como $T_b^{-1} : Hom(F_b(\xi), F_b(\eta)) \rightarrow \mathbb{R}^{nm}$ é contínua, então T_b^{-1} é contínua em T . Então, existe $W \subset Hom(F_b(\xi), F_b(\eta))$ vizinhança de T tal que $T_b^{-1}(W) \subset V$. Logo,

$$g(W) \subset A \times T_b^{-1}(W) \subset A \times V = O.$$

Ou seja, g é contínua.

Como T_b é um isomorfismo linear para todo $b \in B$, em particular, para $b_0 \in B$, então $h|_{\{b_0\} \times \mathbb{R}^{nm}} : \{b_0\} \times \mathbb{R}^{nm} \rightarrow F_{b_0}(Hom(\xi, \eta))$ dada por $h|_{\{b_0\} \times \mathbb{R}^{nm}}(b_0, x) = T_{b_0}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^{nm}$ é um isomorfismo linear.

Assim, h é um homeomorfismo e como T_b é um isomorfismo linear para todo $b \in B$, então $h|_{\{b\} \times \mathbb{R}^{nm}} : \{b\} \times \mathbb{R}^{nm} \rightarrow F_b(Hom(\xi, \eta))$ dada por $h|_{\{b\} \times \mathbb{R}^{nm}}(b, x) = T_b(x)$ é um isomorfismo linear para todo $(b, x) \in \{b\} \times \mathbb{R}^{nm}$. Portanto, $Hom(\xi, \eta)$ é localmente trivial.

Proposição 3.10. Sejam ξ e η fibrados vetoriais sobre o mesmo espaço base B , X um espaço topológico e $g : X \rightarrow B$ uma aplicação contínua. Então toda aplicação

3. Fibrados Vetoriais

$f : X \rightarrow E(\text{Hom}(\xi, \eta))$ tal que $\pi \circ f = g$ é contínua, onde $\pi : E(\text{Hom}(\xi, \eta)) \rightarrow B$ é a projeção do fibrado $\text{Hom}(\xi, \eta)$. Em outras palavras, toda aplicação f que faz o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & E(\text{Hom}(\xi, \eta)) \\ g \downarrow & & \swarrow \pi \\ B & & \end{array}$$

ser comutativo é contínua.

Demonstração. Seja $O \subset E(\text{Hom}(\xi, \eta))$ aberto. Assim, $O = \pi^{-1}(A)$ para algum $A \subset B$ aberto. Como g é contínua, então $g^{-1}(A) \subset X$ é aberto. Logo,

$$f^{-1}(O) = f^{-1}(\pi^{-1}(A)) = g^{-1}(A) \subset X$$

é aberto. Portanto, f é contínua. □

Proposição 3.11. Considere ξ um n -fibrado, η_1 um m_1 -fibrado e η_2 um m_2 -fibrado, ambos sobre o mesmo espaço base B . Então,

$$\text{Hom}(\xi, \eta_1) \oplus \text{Hom}(\xi, \eta_2) \cong \text{Hom}(\xi, \eta_1 \oplus \eta_2).$$

Demonstração. Vamos definir a aplicação

$$f : E(\text{Hom}(\xi, \eta_1) \oplus \text{Hom}(\xi, \eta_2)) \rightarrow E(\text{Hom}(\xi, \eta_1 \oplus \eta_2)),$$

dada por $f(b, (T_1, T_2)) = T$ para todo $(b, (T_1, T_2)) \in E(\text{Hom}(\xi, \eta_1) \oplus \text{Hom}(\xi, \eta_2))$, em que $T : F_b(\xi) \rightarrow F_b(\eta_1 \oplus \eta_2) = \{b\} \times F_b(\eta_1) \times F_b(\eta_2)$ com $b \in B$ é definido por

$$T(x) = (x, T_1(x), T_2(x))$$

para todo $x \in F_b(\xi)$, já que dado $(b, (T_1, T_2)) \in E(\text{Hom}(\xi, \eta_1) \oplus \text{Hom}(\xi, \eta_2))$, então $T_1 : F_b(\xi) \rightarrow F_b(\eta_1)$ e $T_2 : F_b(\xi) \rightarrow F_b(\eta_2)$.

Desse modo, sendo π e π_1 as projeções do fibrado $\text{Hom}(\xi, \eta_1 \oplus \eta_2)$ e do fibrado $\text{Hom}(\xi, \eta_1) \oplus \text{Hom}(\xi, \eta_2)$, respectivamente, temos que:

$$\pi \circ f = \pi_1,$$

e pela Proposição 3.10, tem-se que f é contínua.

Por $F_b(\eta_1 \oplus \eta_2) = \{b\} \times F_b(\eta_1) \times F_b(\eta_2)$, então $h = f|_{\{b\} \times \text{Hom}(F_b(\xi), F_b(\eta_1)) \times \text{Hom}(F_b(\xi), F_b(\eta_2))}$

é um isomorfismo linear. De fato,

- h é linear já que T_1 e T_2 são lineares;
- h é injetiva pois se $h(b, T_1, T_2) = 0$ então $T = 0$. Ou seja, $T_1(x) = 0$ e $T_2(x) = 0$ para todo $x \in F_b(\xi)$, isto é, $Ker(h) = 0$;
- h é sobrejetiva, pois

$$\begin{aligned} \dim(\{b\} \times Hom(F_b(\xi), F_b(\eta_1)) \times Hom(F_b(\xi), F_b(\eta_2))) &= 0 + nm_1 + nm_2 = n(m_1 + m_2) \\ &= \dim(Hom(F_b(\xi), F_b(\eta_1) \oplus \eta_2)) \end{aligned}$$

e h é injetiva.

Portanto, pelo Lema 3.3,

$$Hom(\xi, \eta_1) \oplus Hom(\xi, \eta_2) \cong Hom(\xi, \eta_1 \oplus \eta_2).$$

□

Proposição 3.12. Sejam ξ um n -fibrado e η um m -fibrado, ambos sobre o mesmo espaço base B . Se $\eta \cong \varepsilon_B^m$, então $Hom(\xi, \eta) \cong Hom(\xi, \varepsilon_B^m)$.

Demonstração. Por $\eta \cong \varepsilon_B^m$, então temos um homeomorfismo $h : E(\eta) \rightarrow B \times \mathbb{R}^m$ tal que $h|_{F_b(\eta)} : F_b(\eta) \rightarrow \{b\} \times \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo linear. Assim, para cada elemento $T \in Hom(F_b(\xi), F_b(\eta))$, consideremos a aplicação

$$f : E(Hom(\xi, \eta)) \rightarrow E(Hom(\xi, \varepsilon_B^m)),$$

dada por $f(T) = T'$, em que $T' : F_b(\xi) \rightarrow \{b\} \times \mathbb{R}^m$ é dado por $T'(x) = (b, h|_{F_b(\xi)}(x))$ para todo $x \in F_b(\xi)$. Sendo π e π_1 as projeções dos fibrados $Hom(\xi, \varepsilon_B^m)$ e $Hom(\xi, \eta)$, respectivamente, temos que $\pi \circ f = \pi_1$ e novamente pela Proposição 3.10 temos que f é uma aplicação contínua. Além disso, por $h|_{F_b(\xi)}$ ser um isomorfismo linear, segue que $f|_{Hom(F_b(\xi), F_b(\eta))} : Hom(F_b(\xi), F_b(\eta)) \rightarrow Hom(F_b(\xi), B \times \mathbb{R}^m)$ é um isomorfismo linear.

Portanto pelo Lema 3.3, temos que:

$$Hom(\xi, \eta) \cong Hom(\xi, \varepsilon_B^m).$$

□

Proposição 3.13. Seja $\xi = (E, \pi, B)$ um fibrado Euclidiano. Então $\xi \cong Hom(\xi, \varepsilon_B^1)$.

Demonstração. Defina $f : E \rightarrow E(\text{Hom}(\xi, \varepsilon_B^1))$ por $f(x) = T$ para todo $x \in E$, onde $T : F_{\pi(x)}(\xi) \rightarrow \{\pi(x)\} \times \mathbb{R}$ é dado por $T(u) = (\pi(x), \langle u, x \rangle)$ para todo $u \in F_{\pi(x)}(\xi)$. Sendo π_1 a projeção do fibrado $\text{Hom}(\xi, \varepsilon_B^1)$, então $\pi_1 \circ f = \pi$, o que faz a Proposição 3.10 garantir a continuidade de f .

Além disso, $f|_{F_{\pi(x)}(\xi)} : F_{\pi(x)}(\xi) \rightarrow \text{Hom}(F_{\pi(x)}(\xi), \{\pi(x)\} \times \mathbb{R})$ é um isomorfismo linear, pois:

- $f|_{F_{\pi(x)}(\xi)}$ é linear já que o produto interno é bilinear;
- $f|_{F_{\pi(x)}(\xi)}$ é injetiva pois se $f|_{F_{\pi(x)}(\xi)}(x) = 0$ então $T(x) = 0$, ou seja,

$$(\pi(x), \langle u, x \rangle) = (\pi(x), 0)$$

para todo $u \in F_{\pi(x)}(\xi)$. isto é, $x = 0$ e assim, $\ker(f|_{F_{\pi(x)}(\xi)}) = 0$;

- $f|_{F_{\pi(x)}(\xi)}$ é sobrejetiva pelo teorema do Núcleo e Imagem já que $f|_{F_{\pi(x)}(\xi)}$ é injetiva e $\dim(F_{\pi(x)}(\xi)) = \dim(\text{Hom}(F_{\pi(x)}(\xi), \{\pi(x)\} \times \mathbb{R}))$.

Assim, pelo Lema 3.3 temos:

$$\xi \cong \text{Hom}(\xi, \varepsilon_B^1).$$

□

3.4 Fibrado Universal

A seguir, veremos a definição dos fibrados canônicos sobre as variedades Grassmann e a Grassmann infinita, bem como alguns resultados a respeito sobre estes fibrados.

Definição 3.20. O fibrado canônico sobre $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ é o fibrado

$$\zeta^n(\mathbb{R}^{n+k}) = (E, \pi, B)$$

em que $B = G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ e $E = \{(X, x) \in G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \times \mathbb{R}^{n+k}; x \in X\}$ com a aplicação projeção $\pi : E \rightarrow G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ definida por $\pi(X, x) = X$.

Em particular, quando $n = 1$, o fibrado $\zeta^n(\mathbb{R}^{n+k})$ coincide com o fibrado canônico linha apresentado na Definição 3.5.

A estrutura de espaço vetorial sobre cada fibra $F_X(\zeta^n(\mathbb{R}^{n+k}))$ é dada por

$$t_1(X, x_1) + (X, x_2) = (X, t_1x_1 + x_2).$$

Para verificarmos a condição da trivialidade local de $\zeta^n(\mathbb{R}^{n+k})$, consideremos um ponto $X_0 \in G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ e uma vizinhança U de X_0 de acordo como definido no Capítulo 1 em (1.1). Assim, definimos a aplicação $h : U \times X_0 \rightarrow \pi^{-1}(U)$ por $h(Y, x) = (Y, y)$ onde y é o único vetor em Y tal que $p(y) = x$. Daí, as identidades

$$h(Y, x) = (Y, x + T(x))$$

e,

$$h^{-1}(Y, y) = (Y, p(y))$$

mostram que h e h^{-1} são contínuas. Logo, h é um homeomorfismo.

Os resultados a seguir garantem quando um fibrado vetorial é isomorfo a um fibrado pull-back sobre o fibrado canônico apresentado na Definição 3.20.

Teorema 3.14. *Sejam $\xi = (E, \pi, B)$ um n -fibrado e B um espaço topológico compacto. Então, existe uma aplicação fibrada $f : E \rightarrow E(\zeta^n(\mathbb{R}^{n+k}))$ para k suficientemente grande.*

Para mais detalhes e demonstração do teorema acima, consultar [16], página 61.

Definição 3.21. Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é um espaço **paracompacto** se X é Hausdorff e se para toda cobertura aberta $\{u_\alpha\}$ de X , existe uma cobertura $\{V_\alpha\}$ tal que:

- (i) Cada V_α está contido em algum U_α , e
- (ii) Cada ponto X tem uma vizinhança que intercepta um número finito de V_α .

A condição de um espaço ser paracompacto é mais fraca, no sentido de exigir menos do espaço, em comparação com a condição de um espaço compacto. Nesse contexto, temos que se B for paracompacto e ter dimensão finita, ainda existe uma aplicação fibrada entre os fibrados ξ e $\zeta^n(\mathbb{R}^{n+k})$ para k suficientemente grande. Se B tem dimensão infinita, ainda é possível obter um resultado análogo. Para isto, consideraremos o fibrado canônico sobre a variedade Grassmann infinita.

Lema 3.15. Sejam A e B espaços topológicos com

$$A = \bigcup_{n \geq 1} A_n,$$

onde $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ e A é dotado com a topologia limite. Então, $f : A \rightarrow B$ é contínua se, e somente se, $f|_{A_n}$ é contínua para todo $n \geq 1$

Para detalhes e demonstração do lema acima, consultar [18], página 108.

Definição 3.22. O fibrado canônico sobre G_n dado por $\zeta^n = (E, \pi, B)$ é formado por $B = G_n$ e,

$$E = \{(X, x) \in G_n \times \mathbb{R}^\infty; x \in X\}$$

com a projeção $\pi : E \rightarrow G_n$ dada por $\pi(X, x) = X$.

Para verificarmos a condição da trivialidade local, consideremos $X_0 \in G_n$ e $U \subset G_n$ o subconjunto de todos os n -subespaços vetoriais Y de \mathbb{R}^∞ com projeção X_0 através da projeção ortogonal $p : \mathbb{R}^\infty \rightarrow X_0$. Assim, U é aberto, pois para cada $k \in \mathbb{N}$, a interseção

$$U_k = U \cap G_n(\mathbb{R}^{n+k})$$

é um conjunto aberto em $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$. Definamos a aplicação

$$h : U \times X_0 \rightarrow \pi^{-1}(U)$$

por $h(Y, x) = (Y, y)$. Assim, pelo Lema 3.15, como cada aplicação $h|_{U_k \times X_0}$ é contínua, então h é contínua. Além disso, $h^{-1}(Y, y) = (Y, p(y))$ também é contínua. Portanto, h é um homeomorfismo.

Definição 3.23. Seja $\xi = (E, \pi, B)$ um n -fibrado e ζ^n o fibrado canônico sobre G_n . Duas aplicações contínuas $f, g : E \rightarrow E(\zeta^n)$ são chamadas **homotópicamente fibradas** se existe uma família de aplicações fibradas

$$h_t : E \rightarrow E(\zeta^n), \quad 0 \leq t \leq 1$$

com $h_0 = f$ e $h_1 = g$ tais que h_t é contínua, ou seja, a aplicação

$$\begin{aligned} h : E \times [0, 1] &\longrightarrow E(\zeta^n) \\ (x, t) &\longmapsto h_t(x) \end{aligned}$$

é contínua.

Teorema 3.16. *Seja $\xi = (E, \pi, B)$ um n -fibrado vetorial sobre o espaço base B paracompacto. Então, existe uma aplicação fibrada $f : E \rightarrow E(\zeta^n)$.*

Para detalhes e demonstração do teorema acima, consultar [16], página 67.

Teorema 3.17. *Sejam $\xi = (E, \pi, B)$ um n -fibrado e $f, g : E \rightarrow E(\zeta^n)$ aplicações fibradas. Então, f e g são homotopicamente fibradas.*

Para deyalhes e demonstração do teorema acima, consultar [16], página 67.

Capítulo 4

Teoria da Obstrução

Com base em [15] e [4], o objetivo deste capítulo é apresentar noções básicas da teoria de obstrução que relacionam os grupos de homotopia com a questão de estender aplicações contínuas e aplicá-la em um exemplo, a saber, definiremos uma aplicação contínua sobre um subespaço da esfera S^2 e estudaremos a extensão desta aplicação para todo o espaço S^2 .

Ao final, aplicaremos tais conceitos e resultados ao contexto de estender seções do fibrado tangente de uma variedade suave.

4.1 Motivação

A teoria da obstrução tem o objetivo de estudar a possibilidade de construir extensões de aplicações contínuas definidas em um subespaço de um espaço topológico a todo o espaço. Mais especificamente, dados um espaço topológico X com estrutura de complexo simplicial, $A \subset X$ um subcomplexo e $f_A : A \rightarrow Y$ uma aplicação contínua, é importante entender quando e como é possível estender a aplicação f_A para uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ de modo que $f|_A = f_A$.

Suponhamos que seja possível fazer tal extensão, então, como poderíamos contruí-la? E também, uma outra questão interessante é: Como decidir se existem ou não tais extensões? Na literatura, existem resultados que estabelecem que se forem conhecidos os grupos de homotopia do espaço Y é possível responder esse questionamento.

Em um espaço topológico X com estrutura simplicial e $A \subset X$ um subcomplexo, ao termos uma aplicação $f_A : A \rightarrow Y$ contínua, onde Y é um espaço topológico qualquer, é sempre possível estender esta aplicação à uma aplicação $f_0 : X_0 \rightarrow Y$ onde X_0 é a união do conjunto A com os 0-simplexos do complexo X . Para isto, basta definir, naturalmente, valores que a aplicação deve assumir nestes vértices.

No caso em que X é um espaço triangulavel, temos a seguinte situação geométrica:

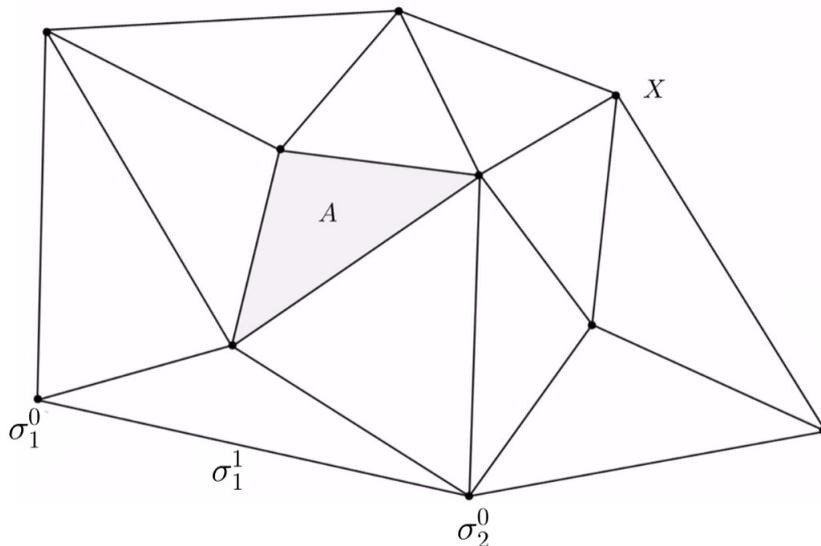


Figura 4.1: Triangulação em um espaço topológico X

Para o caso dos 1-simplexos, nem sempre é possível fazer tal extensão. Um exemplo claro ocorre ao considerarmos que Y seja um espaço topológico que não seja conexo por caminhos, como uma aplicação contínua restrita à uma aresta é um caminho em Y , então o problema se torna em encontrar caminhos contínuos no espaço Y .

Por exemplo, consideremos o subcomplexo formado apenas pelos dois 0-simplexos σ_1^0 e σ_2^0 com o 1-simplexo σ_1^1 .

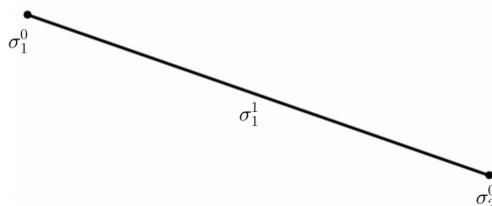
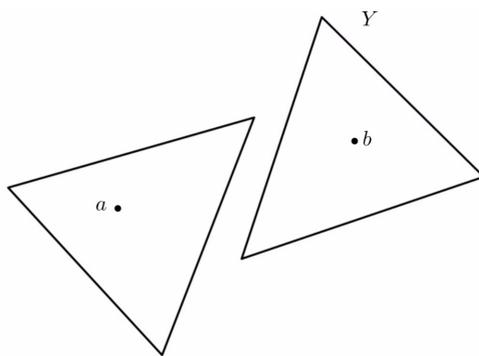


Figura 4.2: Simplexos σ_1^0 , σ_2^0 e σ_1^1 de X

E consideremos o espaço topológico Y como na Figura 4.3.

Se tivermos uma aplicação contínua $f_A : A \rightarrow Y$ e a estendemos para uma aplicação contínua $f_0 : X_0 \rightarrow Y$ tal que $f_0(\sigma_1^0) = a$ e $f_0(\sigma_2^0) = b$, onde $a, b \in Y$ de acordo com a Figura 4.3. Então não é possível definir um caminho contínuo entre a e b em Y e portanto, encontramos uma “obstrução” à construção de uma aplicação $f_1 : X_1 \rightarrow Y$ que é uma extensão contínua para $f_0 : X_0 \rightarrow Y$.

Sejam X um espaço topológico com estrutura de complexo celular, $A \subset X$ subcomplexo e Y um espaço topológico conexo por caminhos. Consideremos o conjunto X^i

Figura 4.3: Espaço Y

como sendo o conjunto de todos simplexos de dimensão menor ou igual à i e o conjunto X_i será o conjunto $X^i \cup A$. Denotaremos por f_A uma aplicação contínua definida de A em Y e, caso exista, cada aplicação f_j representará a extensão contínua de f_A a uma aplicação $f_j : X_j \rightarrow Y$. Por fim, usaremos a notação f para representar a extensão de f_A a uma aplicação $f : X \rightarrow Y$.

Para estendermos $f_A : A \rightarrow Y$ a uma aplicação $f : X \rightarrow Y$, devemos inicialmente criar uma extensão f_0 e após, se possível, criar gradativamente as extensões f_1, f_2, \dots até chegarmos em f . Nem sempre é fácil exibir tais extensões, porém, conhecendo os grupos de homotopia do espaço Y é possível afirmar quando existem tais extensões.

Suponhamos que seja possível construir a extensão $f_{p-1} : X_{p-1} \rightarrow Y$. Consideremos um p -simplexo orientado σ_i^p que não está contido em A . Sabemos que σ_i^p é homeomorfo à bola \mathbb{B}^p e assim, o $(p-1)$ -simplexo $\partial\sigma_i^p$ é homeomorfo à S^{p-1} . Além disso, f_{p-1} está definida em $\partial\sigma_i^p$, então o problema de estender a aplicação $f_{p-1} : X_{p-1} \rightarrow Y$ para $f_p : X_p \rightarrow Y$ pode ser visto como estender a aplicação $f_{p-1} : S^{p-1} \rightarrow Y$ para $f_p : \mathbb{B}^p \rightarrow Y$. este último problema é mais fácil de ser estudado se conhecermos o seguinte lema:

Lema 4.1 (Lema da Extensão). Seja X um espaço topológico. Uma aplicação contínua $f : S^n \rightarrow X$ se estende a uma aplicação contínua $g : \mathbb{B}^{n+1} \rightarrow X$ se, e somente se, f representa o elemento nulo no grupo $\pi_n(X)$.

Para mais detalhes sobre o lema acima, consultar [15], página 33.

4.2 Cocadeia de obstrução

Sejam X um espaço topológico com estrutura de complexo simplicial, $A \subset X$ subcomplexo, Y um espaço topológico conexo por caminhos, $f_{p-1} : X_{p-1} \rightarrow Y$ uma extensão contínua de f_A e σ_i^p um p -simplexo orientado de X que não pertence a A ,

então temos que a aplicação

$$f_{p-1}|_{\partial\sigma_i^p} : \partial\sigma_i^p \cong S^{p-1} \rightarrow Y$$

define um elemento $[f_{p-1}|_{\partial\sigma_i^p}]$ no grupo de homotopia $\pi_{p-1}(Y)$. Então a aplicação:

$$\begin{aligned} c(f_{p-1}) : C_p(X, A; G) &\rightarrow \pi_{p-1}(Y) \\ \sigma_i^p &\mapsto [f_{p-1}|_{\partial\sigma_i^p}] \end{aligned}$$

é uma cocadeia relativa onde G é um grupo abeliano.

Definição 4.1. A cocadeia relativa $c(f_{p-1}) \in C^p(X, A; \pi_{p-1}(Y))$ definida por

$$c(f_{p-1})(\sigma_i^p) = [f_{p-1}|_{\partial\sigma_i^p}] \in \pi_{p-1}(Y).$$

é chamada **cocadeia de obstrução** (para extensão de f_{p-1} a X_p).

Com o que já foi apresentado, podemos citar o seguinte resultado:

Teorema 4.2. *Uma aplicação $f_{p-1} : X_{p-1} \rightarrow Y$ se estende a $f_p : X_p \rightarrow Y$ se, e somente se, tivermos que $c(f_{p-1}) = 0$.*

Demonstração. De fato, pelo Lema da Extensão 4.1, a aplicação $f_{p-1}|_{\partial\sigma_i^p}$ se estende a $f_p|_{\sigma_i^p}$ se e somente se, $[f_{p-1}|_{\partial\sigma_i^p}] = 0 \in \pi_{p-1}(Y)$, ou seja, $c(f_{p-1}) = [f_{p-1}|_{\partial\sigma_i^p}] = 0$. □

Em particular, se $\pi_i(Y) = \{0\}$ para todo $i = 1, \dots, p-1$, então a aplicação f_A se estende a f_p .

Exemplo 4.1. Vamos considerar os espaços topológicos $X = S^2$ e $Y = S^1$ com o subespaço $A \subset X$, munidos com a topologia de subespaço de acordo como na figura abaixo.

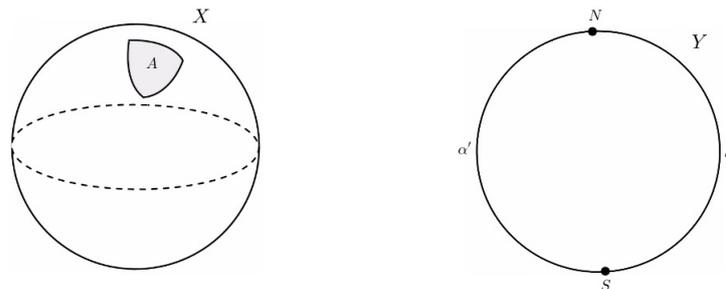


Figura 4.4: Representação geométrica dos espaços X , Y e A .

Em que N e S são pontos de Y e α e α' são os arcos direito e esquerdo, respectivamente, de Y formados pelos pontos N e S . Nestas circunstâncias, consideremos a aplicação

$$f_A : A \rightarrow Y$$

dada por $f_A(x) = N$ para todo $x \in A$. Inicialmente, note que f_A é contínua, já que toda aplicação constante é contínua.

A partir de agora, analisaremos as extensões para f_A . Primeiro, vamos considerar uma estrutura de complexo simplicial para X . Usando a triangulação para a esfera S^2 exibida na Figura 4.5 (onde interpretamos o espaço S^2 como um disco cuja fronteira está identificada como um único ponto). Como por construção o subespaço A é um dos triângulo desta triangulação, obtemos: Uma 0-célula: σ_1^0 ; três 1-células: σ_1^1 , σ_2^1 e σ_3^1 e três 2-células: σ_1^2 , σ_2^2 e σ_3^2 . Resultando na seguinte triangulação:

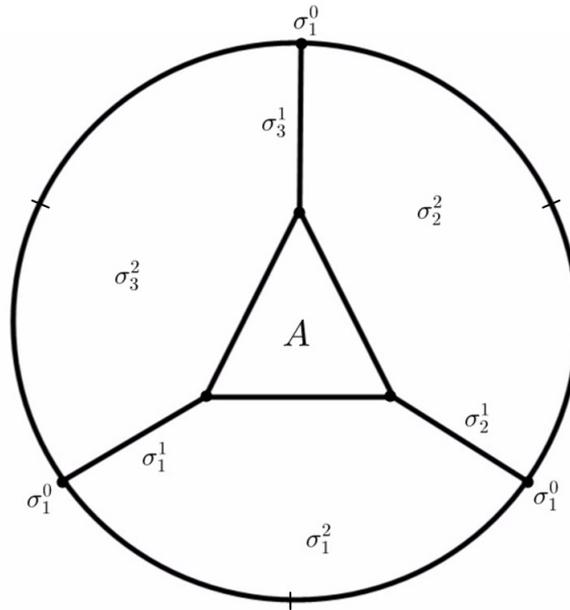


Figura 4.5: Triangulação de S^2

Então, podemos estender f_A para uma aplicação $f_0 : X_0 \rightarrow Y$ definida, por exemplo, por:

$$f_0(x) = \begin{cases} N, & \text{se } x \in A \\ S, & \text{se } x \notin A \end{cases} .$$

Note que f_0 é contínua, pois considerando a topologia de subespaço em X_0 , dado $W \subset Y$ aberto:

- Se $N \notin W$ e $S \notin W$, então $f_0^{-1}(W) = \emptyset$ que é aberto em X_0 ;
- Se $N \notin W$ e $S \in W$, então $f_0^{-1}(W) = X^0 \setminus (X^0 \cap A)$ que é aberto em X_0 ;

4. Teoria da Obstrução

- Se $N \in W$ e $S \notin W$, então $f_0^{-1}(W) = A$ é aberto em X_0 ;
- Se $N, S \in W$, então $f_0^{-1}(W) = X_0$ é aberto em X_0 .

Assim, conseguimos estender f_A para uma aplicação contínua f_0 . Agora, definimos uma aplicação:

$$f_1 : X_1 \rightarrow Y$$

de modo que:

$$f_1|_{\sigma_1^1} : \sigma_1^1 \cong [0, \pi] \rightarrow Y \text{ é definida por } f_1|_{\sigma_1^1}(t) = e^{(\frac{\pi}{2}-t)i}$$

$$f_1|_{\sigma_2^1} : \sigma_2^1 \cong [\pi, 2\pi] \rightarrow Y \text{ é definida por } f_1|_{\sigma_2^1}(t) = e^{(\frac{\pi}{2}-t)i}$$

$$f_1|_{\sigma_3^1} : \sigma_3^1 \cong [2\pi, 3\pi] \rightarrow Y \text{ é definida por } f_1|_{\sigma_3^1}(t) = e^{(\frac{\pi}{2}-t)i}$$

e cada uma destas restrições são aplicações contínuas. Consequentemente, temos uma extensão contínua f_1 para f_0 . Assim, note $f_1|_{\sigma_1^1}$ e $f_1|_{\sigma_3^1}$ percorrem o arco α e $f_1|_{\sigma_2^1}$ percorre o arco α' injetivamente.

A próxima etapa para estender f_A para $f : X \rightarrow Y$ é definir uma aplicação contínua $f_2 : X_2 \rightarrow Y$. Porém, não é tão intuitiva a construção desta aplicação como foi no caso para construir as aplicações f_0 e f_1 . Sendo assim, recorreremos ao Teorema 4.2 para verificarmos se é possível construir tal extensão. Inicialmente, daremos uma orientação aos 2-simplexos da triangulação de X , orientando-os no sentido anti-horário conforme a figura:

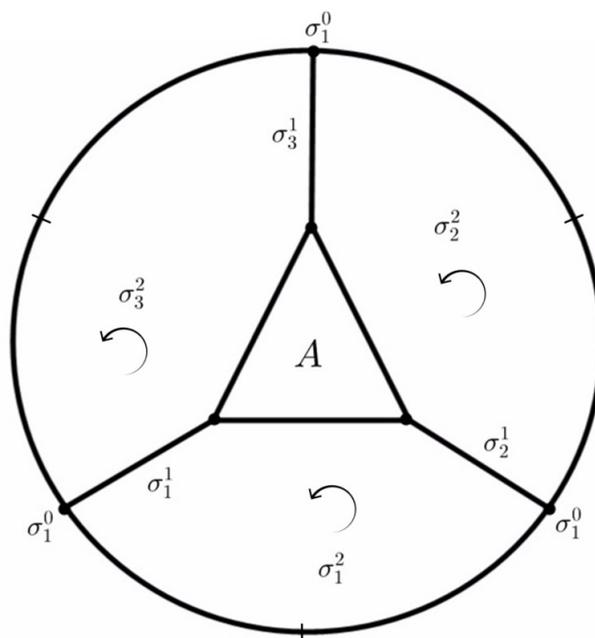
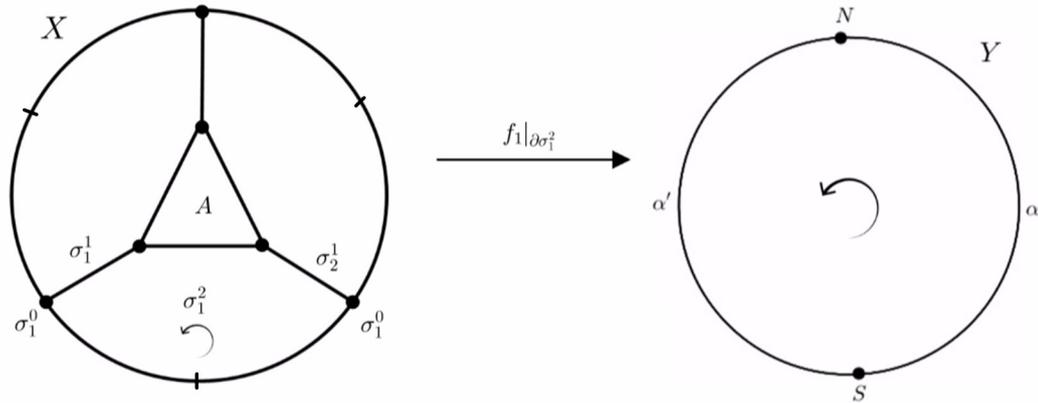


Figura 4.6: Orientação nas células da triangulação de S^2 .

Considere a 2-célula orientada σ_1^2 . Vamos estudar a aplicação

$$f_1|_{\partial\sigma_1^2} : \partial\sigma_1^2 \rightarrow Y$$

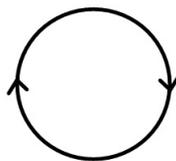


Como $\partial\sigma_1^2 \cong S^1$, então podemos ver a aplicação $f_1|_{\partial\sigma_1^2}$ por $f_1|_{\partial\sigma_1^2} : S^1 \rightarrow S^1$. Além disso, sabemos que:

$$\pi_1(Y) = \pi_1(S^1) \approx \mathbb{Z}.$$

Assim, determinar a classe do laço $[f_1|_{\partial\sigma_1^2}] \in \pi_1(Y)$ significa determinar a quantidade de vezes que a imagem da aplicação f_1 cobre Y ao percorrer $\partial\sigma_1^2$, considerando as orientações de σ_1^2 e Y . Neste exemplo, a orientação do espaço Y sempre será considerada como a orientação anti-horária.

Assim, a imagem $f_1(\partial\sigma_1^2)$ pode ser representada pelo laço:



Daí, como este laço corresponde ao número inteiro -1 já que $f_1|_{\partial\sigma_1^2}$ percorre uma vez o espaço Y no sentido inverso da orientação fixada em Y . Então:

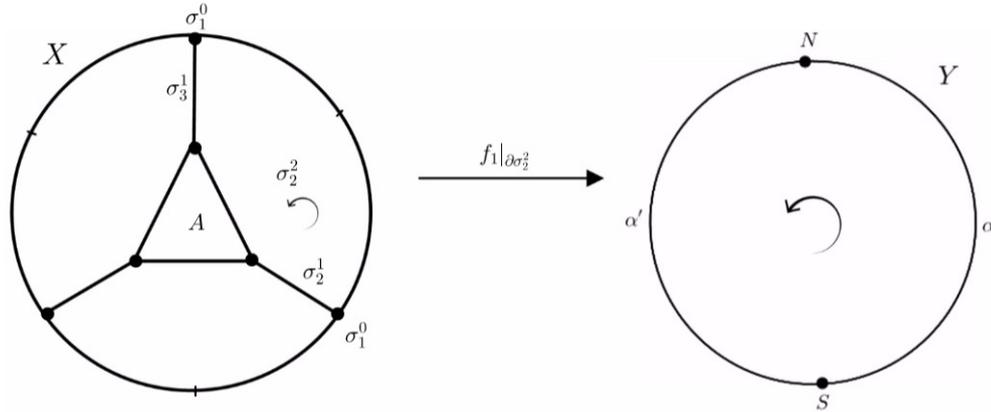
$$[f_1|_{\partial\sigma_1^2}] = -1 \neq 0 \in \mathbb{Z}.$$

Assim, pelo Teorema 4.2, concluímos que não é possível estender $f_1|_{\partial\sigma_1^2}$ para uma aplicação contínua $f_2|_{\sigma_1^2} : \sigma_1^2 \rightarrow Y$. Em outras palavras, existe uma obstrução na célula σ_1^2 à construção de f_2 a qual é medida pelo número inteiro -1 .

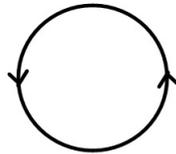
Analisaremos agora se é possível estender f_1 na célula σ_2^2 . Para isto, através da

identificação $\partial\sigma_2^2 \cong S^1$, estudaremos a aplicação:

$$f_1|_{\partial\sigma_2^2} : S^1 \rightarrow S^1$$



Assim, a imagem de $\partial\sigma_2^2$ pela aplicação f_1 pode ser representada pelo laço:



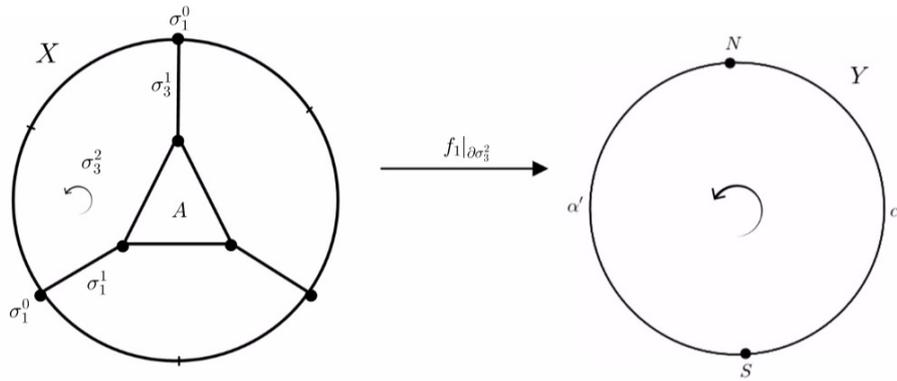
Como $f_1|_{\partial\sigma_2^2}$ percorre uma vez o espaço Y no mesmo sentido da orientação fixada em Y , então este laço corresponde ao número inteiro $+1$ e conseqüentemente não é homotopicamente equivalente ao laço trivial. Daí,

$$[f_1|_{\partial\sigma_2^2}] = 1 \neq 0 \in \mathbb{Z},$$

ou seja, pelo Teorema 4.2, não é possível estender a aplicação $f_1|_{\partial\sigma_2^2} : \partial\sigma_2^2 \rightarrow Y$ para uma aplicação contínua $f_2|_{\sigma_2^2} : \sigma_2^2 \rightarrow Y$, portanto, existe uma obstrução na célula σ_2^2 que está relacionada ao inteiro $+1$.

Por fim, analisaremos se há obstruções na célula σ_3^2 . Então, consideremos a aplicação:

$$f_1|_{\partial\sigma_3^2} : \partial\sigma_3^2 \cong S^1 \rightarrow S^1$$



Assim, a imagem $f_1(\partial\sigma_3^2)$ corresponde ao laço:



Logo o laço $[f_1|_{\partial\sigma_3^2}]$ é homotopicamente equivalente ao laço trivial. Portanto,

$$[f_1|_{\partial\sigma_3^2}] = 0 \in \mathbb{Z}.$$

isto significa que não há obstruções na célula σ_3^2 pois é possível estender $f_1|_{\partial\sigma_3^2}$ para uma aplicação contínua $f_2|_{\sigma_3^2} : \sigma_3^2 \rightarrow Y$.

Em resumo, obtemos as seguintes cocadeias de obstrução:

$$\begin{array}{lll} c(f_0)(\sigma_1^1) = 0 & c(f_0)(\sigma_2^1) = 0 & c(f_0)(\sigma_3^1) = 0 \\ c(f_1)(\sigma_1^2) = -1 & c(f_1)(\sigma_2^2) = 1 & c(f_1)(\sigma_3^2) = 0 \end{array}$$

No próximo exemplo consideraremos uma outra extensão para a aplicação f_0 homotópica à f_1 com o objetivo de indentificar alguma relação entre aplicações homotópicas e suas cocadeias de obstrução.

Exemplo 4.2. Sejam os espaços topológicos X , A e Y e as aplicações f_A e f_0 de acordo como foram definidos no Exemplo 4.1. Consideremos uma aplicação

$$g_1 : X_1 \rightarrow Y$$

de modo que:

$$g_1|_{\sigma_1^1} : \sigma_1^1 \cong [0, 3\pi] \rightarrow Y \text{ é definida por } g_1|_{\sigma_1^1}(t) = \begin{cases} e^{(\frac{\pi}{2}-t)i}, & \text{se } t \in [0, 2\pi] \\ e^{(t+\frac{\pi}{2})i}, & \text{se } t \in (2\pi, 3\pi] \end{cases}$$

$$g_1|_{\sigma_2^1} : \sigma_2^1 \cong [0, 3\pi] \rightarrow Y \text{ é definida por } g_1|_{\sigma_2^1}(t) = \begin{cases} e^{(t+\frac{\pi}{2})i}, & \text{se } t \in [0, 2\pi] \\ e^{(\frac{\pi}{2}-t)i}, & \text{se } t \in (2\pi, 3\pi] \end{cases}$$

$$g_1|_{\sigma_3^1} : \sigma_3^1 \cong [0, 3\pi] \rightarrow Y \text{ é definida por } g_1|_{\sigma_3^1}(t) = \begin{cases} e^{(\frac{\pi}{2}-t)i}, & \text{se } t \in [0, 2\pi] \\ e^{(t+\frac{\pi}{2})i}, & \text{se } t \in (2\pi, 3\pi] \end{cases}$$

onde cada uma destas restrições são contínuas. Assim, g_1 é uma extensão de f_0 que é homotópica à f_1 . Então, analisaremos agora se é possível estender g_1 para uma aplicação contínua $g_2 : X_2 \rightarrow Y$. Para isto, vamos considerar a aplicação:

$$g_1|_{\partial\sigma_1^2} : \partial\sigma_1^2 \cong S^1 \rightarrow Y.$$

Esta aplicação define um laço que corresponde ao inteiro -1 . Assim,

$$[g_1|_{\partial\sigma_1^2}] = -1 \neq 0 \in \pi_1(Y) \approx \mathbb{Z},$$

logo existe uma obstrução na célula σ_1^2 para a construção de uma aplicação contínua $g_2|_{\sigma_1^2} : \sigma_1^2 \rightarrow Y$.

Consideremos agora a aplicação $g_1|_{\partial\sigma_2^2} : \partial\sigma_2^2 \cong S^1 \rightarrow Y$. Esta aplicação define um laço que corresponde ao inteiro 1. Assim,

$$[g_1|_{\partial\sigma_2^2}] = 1 \neq 0 \in \mathbb{Z},$$

ou seja, não é possível definir uma extensão contínua $g_2|_{\sigma_2^2} : \sigma_2^2 \rightarrow Y$.

Por fim, considere a aplicação $g_1|_{\partial\sigma_3^2} : \partial\sigma_3^2 \cong S^1 \rightarrow Y$. Esta aplicação define um laço que é homotopicamente equivalente ao laço trivial. Assim,

$$[g_1|_{\partial\sigma_3^2}] = 0 \in \mathbb{Z},$$

portanto, é possível construir uma aplicação contínua $g_2|_{\sigma_3^2} : \sigma_3^2 \rightarrow Y$ que estende $g_1|_{\partial\sigma_3^2}$.

Com isso, temos que:

$$c(g_1)(\sigma_1^2) = c(f_1)(\sigma_1^2) = -1$$

$$c(g_1)(\sigma_2^2) = c(f_1)(\sigma_2^2) = 1$$

$$c(g_1)(\sigma_3^2) = c(f_1)(\sigma_3^2) = 0$$

Generalizando tal fato, temos o seguinte resultado:

Lema 4.3. Se f_{p-1} e g_{p-1} são extensões de $f_{p-2} : X_{p-2} \rightarrow Y$ tais que $f_{p-1} \simeq g_{p-1}$, então

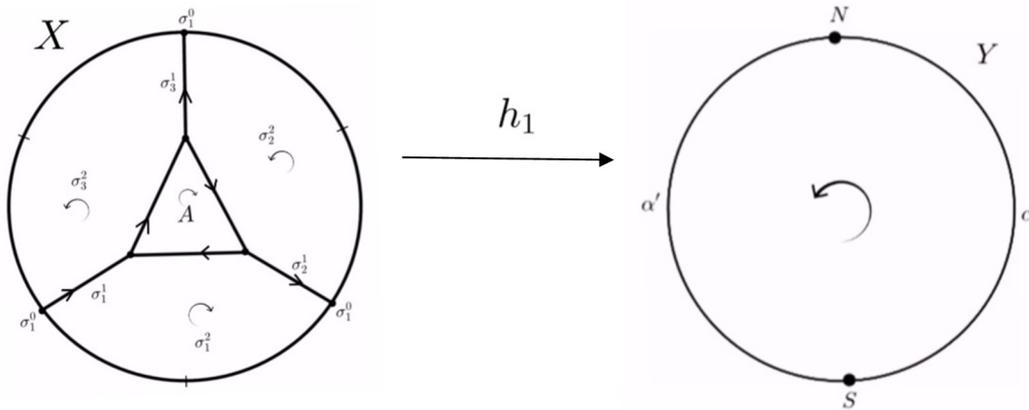
$$c(f_{p-1}) = c(g_{p-1}).$$

Demonstração. Se f_{p-1} e g_{p-1} são aplicações homotópicas, então $f_{p-1}|_{\partial\sigma_i^p} \simeq g_{p-1}|_{\partial\sigma_i^p}$. Logo, os elementos $[f_{p-1}|_{\partial\sigma_i^p}]$ e $[g_{p-1}|_{\partial\sigma_i^p}]$ pertencem a mesma classe no grupo $\pi_n(Y)$. \square

No próximo exemplo ilustraremos a seguinte situação: Seja f_{p-1} uma extensão de f_{p-2} . Se h_{p-1} for uma outra extensão de f_{p-2} que não é homotópica a f_{p-1} , veremos qual a relação entre estas duas extensões.

Exemplo 4.3. Com base no Exemplo 4.1, vamos considerar uma extensão

$$h_1 : X_1 \rightarrow Y$$



de f_0 de forma que:

$$h_1|_{\sigma_1^1} : \sigma_1^1 \cong [0, 3\pi] \rightarrow Y \text{ é definida por } h_1|_{\sigma_1^1} = e^{(\frac{\pi}{2}-t)i}$$

$$h_1|_{\sigma_2^1} : \sigma_2^1 \cong [\pi, 2\pi] \rightarrow Y \text{ é definida por } h_1|_{\sigma_2^1} = e^{(\frac{\pi}{2}-t)i}$$

$$h_1|_{\sigma_3^1} : \sigma_3^1 \cong [0, \pi] \rightarrow Y \text{ é definida por } h_1|_{\sigma_3^1} = e^{(\frac{\pi}{2}-t)i}$$

com cada aplicação $h_1|_{\sigma_j^1}$ contínua para $j = 1, 2$ e 3 .

Assim obtemos que o laço $[h_1|_{\partial\sigma_1^2}]$ corresponde ao inteiro -2 , o laço $[h_1|_{\partial\sigma_2^2}]$ corresponde ao inteiro 1 e o laço $[h_1|_{\partial\sigma_3^2}]$ corresponde ao inteiro 1 . Então, pelo Teorema 4.2, não é possível estender h_1 para uma aplicação contínua $h_2 : X_2 \rightarrow Y$.

De início parece que não há relação entre as cocadeias de obstrução de f_1 e h_1 , porém, os próximos resultados e exemplos permitirão a compreensão da relação existente. Um fato interessante sobre as cocadeias de obstrução é que:

Lema 4.4. Toda cocadeia $c(f_{p-1}) \in C^p(X, A; \pi_{p-1}(Y))$ é um cociclo. Ou seja,

$$\delta_p(c(f_{p-1})) = 0,$$

onde $\delta_p : C^p(X, A; \pi_{p-1}(Y)) \rightarrow C^{p+1}(X, A; \pi_{p-1}(Y))$ é a p -ésima aplicação cofronteira.

Para ver a demonstração do lema acima, consulte [15], item (1.6), página 94.

Exemplo 4.4. Considere as cocadeias de obstrução $c(f_0)$ e $c(f_1)$ estudadas no Exemplo 4.1. Assim, sendo uma 2-cadeia η_2 definida por $\eta_2 = a_1\sigma_1^2 + a_2\sigma_2^2 + a_3\sigma_3^2$ com $a_i \in \mathbb{Z}$ para $i = 1, 2$ e 3 . Assim:

$$\begin{aligned} \delta_1(c(f_0))(\eta_2) &= c(f_0)(\partial_2(\eta_2)) = c(f_0)(\partial_2(a_1\sigma_1^2 + a_2\sigma_2^2 + a_3\sigma_3^2)) \\ &= c(f_0)(a_1\partial_2(\sigma_1^2) + a_2\partial_2(\sigma_2^2) + a_3\partial_2(\sigma_3^2)) \\ &= c(f_0)(a_1(\sigma_2^1 - \sigma_1^1) + a_2(\sigma_3^1 - \sigma_2^1) + a_3(\sigma_1^1 - \sigma_3^1)) \\ &= c(f_0)(\sigma_1^1(-a_1 + a_3) + \sigma_2^1(a_1 - a_2) + \sigma_3^1(a_2 - a_3)) \\ &= (-a_1 + a_3)c(f_0)(\sigma_1^1) + (a_1 - a_2)c(f_0)(\sigma_2^1) + (a_2 - a_3)c(f_0)(\sigma_3^1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto $c(f_0)$ é um cociclo. Consideremos agora $c(f_1) \in C^2(S^2, A; \pi_1(Y))$, precisamos avaliar o valor da cofronteira $\delta_2(c(f_1))$. Seja a aplicação

$$\delta_2 : C^2(S^2, A; \pi_1(Y)) \rightarrow C^3(S^2, A; \pi_1(Y))$$

e $C^3(S^2, A; \pi_1(Y)) = \text{Hom}(C_3(S^2; \mathbb{Z}), \pi_1(Y)) = \text{Hom}(\{0\}, \pi_1(Y)) = \{0\}$, então δ_2 é o homomorfismo nulo. Logo, $\delta_2(c(f_1)) = 0$. Daí, $c(f_1)$ é um cociclo. De forma análoga, verificamos que $c(g_1)$ e $c(h_1)$ são cociclos.

Todas as ferramentas apresentadas até o momento para estudar extensões de aplicações contínuas podem ser vistas através de elementos em grupos de cohomologia. Já sabemos que cocadeias de obstrução são, na verdade, cociclos. Agora, para poder identificar estes elementos em grupos de cohomologia precisamos entender a diferença entre as cocadeias.

Sejam f_{p-1} e g_{p-1} duas extensões para $f_{p-2} : X_{p-2} \rightarrow Y$ e σ_i^{p-1} uma $(p-1)$ -célula orientada, então temos definidas as aplicações $f_{p-1}|_{\sigma_i^{p-1}}$ e $g_{p-1}|_{\sigma_i^{p-1}}$. A partir destas aplicações, em [15] é feita cautelosamente a construção de uma aplicação $\gamma_i : S^{p-1} \rightarrow Y$ e com isso definimos:

Definição 4.2. Sejam f_{p-1} e g_{p-1} duas extensões para f_{p-2} e σ_i^{p-1} uma $(p-1)$ -célula orientada. A **cocadeia diferença** $d(f_{p-1}, g_{p-1})$ é definida por:

$$d(f_{p-1}, g_{p-1})(\sigma_i^{p-1}) = (-1)^p [\gamma_i] \in \pi_{p-1}(Y).$$

O lema a seguir é uma forma de compreender o quanto duas extensões são homotópicas.

Lema 4.5. Sejam f_{p-1} e g_{p-1} duas extensões para f_{p-2} . A cocadeia $d(f_{p-1}, g_{p-1})$ é nula se, e somente se, f_{p-1} é homotópica a g_{p-1} .

Para ver a demonstração do lema acima, consulte [15], item (2.6), página 97.

Lema 4.6. Sejam f_{p-1} e g_{p-1} duas extensões para f_{p-2} , então a cocadeia diferença $d(f_{p-1}, g_{p-1})$ é tal que

$$\delta_p(d(f_{p-1}, g_{p-1})) = c(f_{p-1}) - c(g_{p-1})$$

Para ver a demonstração do lema acima, consulte [15], item (2.10), página 98.

Ou seja, $d(f_{p-1}, g_{p-1})$ é uma p -cofronteira.

Com base no exemplo central deste capítulo (estudar a extensão da aplicação f_A definida no Exemplo 4.1 para S^2), vamos considerar as extensões f_1 e g_1 definidas nos Exemplos 4.1 e 4.2, respectivamente. Como já visto, $c(f_1) = c(g_1)$ e, conseqüentemente, determinam a mesma classe em $H^2(S^2, A; \pi_{p-1}(Y))$.

Exemplo 4.5. Sejam as aplicações f_1 e h_1 como definidas nos Exemplos 4.1 e 4.3, respectivamente, para que $c(f_1)$ e $c(h_1)$ sejam cohomólogos, precisamos verificar se

$$c(f_1) - c(h_1) \in \text{Im}(\delta_1)$$

ou seja, devemos encontrar uma 1-cocadeia $\varphi \in C^1(S^2, A; \pi_0(Y))$ tal que

$$\delta_1(\varphi) = c(f_1) - c(h_1) \tag{4.1}$$

Note que como $c(f_1), c(h_1) \in C^2(S^2, A; \pi_1(Y))$, então $c(f_1), c(h_1)$ são aplicações de $C_2(S^2, A; \mathbb{Z})$ em $\pi_1(Y)$. Assim, sendo $\eta_2 \in C_2(S^2, A; \mathbb{Z})$ dada por $\eta_2 = n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2 +$

$n_3\sigma_3^2$, com $n_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2, 3$, temos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(f_1)(\eta_2) &= \mathbf{c}(f_1)(n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2 + n_3\sigma_3^2) \\ &= n_1\mathbf{c}(f_1)(\sigma_1^2) + n_2\mathbf{c}(f_1)(\sigma_2^2) + n_3\mathbf{c}(f_1)(\sigma_3^2) \\ &= -n_1 + n_2 \end{aligned}$$

Assim, podemos identificar a cocadeia $\mathbf{c}(f_1)$ como o homomorfismo:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(f_1) : \mathbb{Z}^3 &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (n_1, n_2, n_3) &\mapsto -n_1 + n_2 \end{aligned}$$

E, além disso,

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(h_1)(\eta_2) &= \mathbf{c}(h_1)(n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2 + n_3\sigma_3^2) \\ &= n_1\mathbf{c}(h_1)(\sigma_1^2) + n_2\mathbf{c}(h_1)(\sigma_2^2) + n_3\mathbf{c}(h_1)(\sigma_3^2) \\ &= -2n_1 + n_2 + n_3 \end{aligned}$$

Assim, podemos identificar a cocadeia $\mathbf{c}(h_1)$ com o homomorfismo:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(h_1) : \mathbb{Z}^3 &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (n_1, n_2, n_3) &\mapsto -2n_1 + n_2 + n_3 \end{aligned}$$

Logo, a aplicação $\mathbf{c}(f_1) - \mathbf{c}(h_1)$ pode ser vista como o homomorfismo:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(f_1) - \mathbf{c}(h_1) : \mathbb{Z}^3 &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (n_1, n_2, n_3) &\mapsto n_1 - n_3 \end{aligned}$$

E assim, a identidade (4.1) se torna:

$$\delta_1(\varphi) = n_1 - n_3 \tag{4.2}$$

Retornando ao nosso objetivo, precisamos descobrir se existe uma 1-cocadeia

$$\varphi \in C^1(S^2, A; \pi_1(Y))$$

tal que a identidade (4.1) seja satisfeita. Porém,

$$\begin{aligned}
 \delta_1(\varphi)(\eta_2) &= \varphi(\delta_2(n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2 + n_3\sigma_3^2)) \\
 &= n_1\varphi(\delta_2(\sigma_1^2)) + n_2\varphi(\delta_2(\sigma_2^2)) + n_3\varphi(\delta_2(\sigma_3^2)) \\
 &= n_1\varphi(\sigma_2^1 - \sigma_1^1) + n_2\varphi(\sigma_3^1 - \sigma_2^1) + n_3\varphi(\sigma_1^1 - \sigma_3^1) \\
 &= n_1(\varphi(\sigma_2^1) - \varphi(\sigma_1^1)) + n_2(\varphi(\sigma_3^1) - \varphi(\sigma_2^1)) + n_3(\varphi(\sigma_1^1) - \varphi(\sigma_3^1))
 \end{aligned}$$

Daí, como a cocadeia φ é dada em termos de $\varphi(\sigma_1^1)$, $\varphi(\sigma_2^1)$ e $\varphi(\sigma_3^1)$, precisamos determinar estes valores. Usando a igualdade acima em (4.2), obtemos que:

$$\begin{cases} \varphi(\sigma_2^1) - \varphi(\sigma_1^1) = 1 \\ \varphi(\sigma_3^1) - \varphi(\sigma_2^1) = 0 \\ \varphi(\sigma_1^1) - \varphi(\sigma_3^1) = -1 \end{cases}$$

Daí, uma solução para este sistema é deixarmos $\varphi(\sigma_1^1)$ como uma variável livre e então $\varphi(\sigma_3^1) = \varphi(\sigma_2^1) = 1 + \varphi(\sigma_1^1)$. Assim, se considerarmos a 1-cocadeia φ dada, por exemplo, em termos de $\varphi(\sigma_1^1) = 0$, $\varphi(\sigma_3^1) = \varphi(\sigma_2^1) = 1$, temos então que:

$$\delta_1(\varphi) = n_1(1 - 0) + n_2(1 - 1) + n_3(0 - 1) = n_1 + n_3 = c(f_1) - c(h_1)$$

Portanto, $c(f_1) - c(h_1) \in \text{Im}(\delta_1)$. Como pelo Exemplo 4.4, $c(f_1)$ e $c(h_1)$ são cocíclcos, então, $c(f_1)$ e $c(h_1)$ são cohomólogos, ou seja,

$$\bar{c}(f_1) = \bar{c}(h_1) \in H^2(S^2, A; \pi_1(Y))$$

Teorema 4.7. *Se f_{p-1} e g_{p-1} são extensões contínuas de f_{p-2} , então as cocadeias $c(f_{p-1})$ e $c(g_{p-1})$ pertencem a mesma classe de cohomologia*

$$\bar{c}(f_{p-1}) = \bar{c}(g_{p-1}) \in H^p(X, A; \pi_{p-1}(Y))$$

Para ver a demonstração do teorema acima, consulte [15], item (3.1), página 100.

Considere q o menor inteiro para que $\pi_q(Y) \neq 0$. Assim, podemos estender f_A para $f_q : X_q \rightarrow Y$ pois não há obstruções até a dimensão q .

Definição 4.3. A classe de cohomologia $c(f_A) \in H^{q+1}(X, A; \pi_q(Y))$ formada pelos cocíclcos de obstrução de todas as extensões de f_A a X_q é chamada a **obstrução primária** à extensão de f_A .

4.3 Índice de uma singularidade em um r -campo

Seja M uma variedade suave sobre o corpo \mathbb{K} (\mathbb{R} ou \mathbb{C}) munido com uma métrica (Euclidiana ou Hermitiana) e τ_M seu fibrado tangente.

O objetivo desta seção é conhecer o “valor” da obstrução para a construção para a construção de r seções independentes para o τ_M em cada ponto de M .

Definição 4.4. O fibrado $V_r(\tau_M)$ é o fibrado de r -referenciais tangentes à M em que as fibras são a Variedade de Stiefel $V_r(\mathbb{K}^n)$, ou seja, o espaço base é a variedade M , o espaço total é o conjunto de todos os pares $(p, (v_1, \dots, v_r))$ com $p \in M$ e (v_1, \dots, v_r) é um r -campo da fibra $F_p(\tau_M) = T_pM$ sobre p .

Construir r seções independentes em τ_M sobre um subconjunto $A \subset M$ é equivalente a construir uma seção de $V_r(\tau_M)$ sobre A .

Consideremos uma seção $v^{(r)}$ de $V_r(\tau_M)$ na fronteira $\partial\sigma_i^p$ de uma i -ésima p -célula σ_i^p . Estudaremos quando é possível estender essa seção para o interior de σ_i^p e quando não for possível construir tal extensão avaliaremos a obstrução existente.

Nos casos em que houverem obstruções relacionaremos cada singularidade à um valor chamado índice. Então, para isso, inicialmente definiremos o índice de uma singularidade do campo de um r -campo.

Considere um r -referencial $v^{(r)}$ definido na fronteira $\partial\sigma_i^p$ de uma i -ésima p -célula σ_i^p de M . Ou seja $v^{(r)}$ é uma seção de $V_r(\tau_M)$ definida em $\partial\sigma_i^p$. Assim, obtemos uma aplicação:

$$\partial\sigma_i^p \xrightarrow{v^{(r)}} V_r(\tau_M)|_U \cong U \times V_r(\mathbb{K}^n) \xrightarrow{p_2} V_r(\mathbb{K}^n)$$

onde p_2 é a projeção no segundo fator. Portanto a aplicação $p_2 \circ v^{(r)}$ define uma classe no grupo $\pi_{p-1}(V_r(\mathbb{K}^n))$ pois

$$p_2 \circ v^{(r)} : S^{p-1} \rightarrow V_r(\mathbb{K}^n). \quad (4.3)$$

Denotaremos tal classe por $[\xi(v^{(r)}, \sigma_i^p)]$. Caso $[\xi(v^{(r)}, \sigma_i^p)] = 0$, então pela teoria clássica de homotopia, a aplicação $p_2 \circ v^{(r)} : S^{p-1} \rightarrow V_r(\mathbb{K}^n)$ pode ser estendida para uma aplicação definida dentro da célula σ_i^p , ou seja, pode ser estendida para uma aplicação $\sigma_i^p \cong \mathbb{B}^p \rightarrow V_r(\mathbb{K}^n)$. Consequentemente, não há obstrução para extensão de $v^{(r)}$ definido em $\partial\sigma_i^p$ para σ_i^p . Por exemplo, quando $\pi_{p-1}(V_r(\mathbb{K}^n)) = 0$, então $v^{(r)}$ definido em $\partial\sigma_i^p$ é sempre estendível para toda a célula σ_i^p .

Assim, é importante conhecer os grupos $\pi_j(V_r(\mathbb{K}^n))$ que a priori, foram calculados por Stiefel e Whitney nos casos em que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, obtendo os seguintes resultados:

$$\pi_j(V_r(\mathbb{R}^n)) = \begin{cases} \{0\}, & \text{se } j < n - r \\ \mathbb{Z}, & \text{se } j = n - r \text{ par ou } j = n - 1 \text{ se } r = 1 \\ \mathbb{Z}_2, & \text{se } j = n - r \text{ ímpar e } r > 1 \end{cases} \quad (4.4)$$

e,

$$\pi_j(V_r(\mathbb{C}^n)) = \begin{cases} \{0\}, & \text{se } j < 2(n - r) + 1 \\ \mathbb{Z}, & \text{se } j = 2(n - r) + 1 \end{cases} \quad (4.5)$$

Então, podemos formalizar a definição de índice de uma singularidade em um r -campo da seguinte maneira:

(*Caso real*) Vamos considerar um r -referencial $v^{(r)}$ definido na fronteira $\partial\sigma_i^p$ de uma i -ésima p -célula σ_i^p .

- Se $p < n - r + 1$, então $[\xi(v^{(r)}, \sigma_i^p)] = 0$ pois $\pi_k(V_r(\mathbb{R})) = 0$. Assim, podemos estender o r -referencial $v^{(r)}$ para o interior da célula σ_i^p sem singularidades.
- Se $r = 1$ e $p = n$, então o campo vetorial $v^{(r)} = v$ que pode ser estendido com uma singularidade isolada x dentro de σ_i^p , pela aplicação (4.3) possui o mesmo índice de Poncaré-Hopf $[\xi(v^{(r)}, \sigma_i^p)] = I(v, x)$, definido no Capítulo 1, Definição 1.27.
- Se $r > 1$ e $p = n - r + 1$, então o campo vetorial $v^{(r)}$ que pode ser estendido com uma singularidade isolada em x no interior de σ_i^p é tal que $[\xi(v^{(r)}, \sigma_i^p)]$ é um número inteiro se p é ímpar e será um inteiro módulo 2 quando p for par. Reduzindo estes valores em módulo 2, obtemos um índice $I(v^{(r)}, x)$ que mede o valor da obstrução para a extensão de $v^{(r)}$ ao interior de σ_i^p .

O número $n - r + 1$ é chamado **dimensão de obstrução** para a construção de um r -referencial tangente à M .

(*Caso complexo*) Vamos considerar um r -referencial $v^{(r)}$ definido na fronteira $\partial\sigma_i^p$ de uma i -ésima p -célula σ_i^p .

- Se $p < 2(n - r + 1)$, então $[\xi(v^{(r)}, \sigma_i^p)] = 0$ e poderemos estender o r -referencial $v^{(r)}$ para o interior de σ_i^p sem singularidades.
- Se $p = 2(n - r + 1)$, então o campo vetorial que pode ser estendido ao interior de σ_i^p com uma singularidade isolada no ponto x dentro de σ_i^p possui o índice

$$I(v^{(r)}, x) = [\xi(v^{(r)}, \sigma_i^p)] \in \mathbb{Z}$$

o qual mede a obstrução da extensão de $v^{(r)}$ para σ_i^p .

O número $2p = 2(n - r + 1)$ é chamado **dimensão de obstrução** para a construção de um r -referencial complexo tangente à M .

Capítulo 5

Classes de Stiefel-Whitney

Baseado em [16] e em [15], neste capítulo discutiremos sobre uma das classes características existentes na literatura para variedades suaves. Esta é a chamada classe de Stiefel-Whitney, e está relacionada a um fibrado vetorial real sobre a variedade suave M .

Os estudos sobre as classes de Stiefel-Whitney iniciaram em meados da década de 1930, tendo como fundadores desta teoria os matemáticos Eduard Stiefel e Hassler Whitney.

As classes de Stiefel-Whitney foram definidas inicialmente em um contexto relacionado com a teoria de obstrução. Com o avanço da matemática, as classes de Stiefel-Whitney puderam ser definidas como classes de cohomologia singular relacionadas ao espaço topológico com coeficientes em \mathbb{Z}_2 satisfazendo quatro axiomas.

Neste capítulo, apresentaremos a p -ésima classe de Stiefel-Whitney de acordo com sua motivação geométrica, ou seja, definiremos através da teoria de obstrução. Em seguida, as classes de Stiefel-Whitney serão abordadas no contexto axiomático, e assumindo válido estes axiomas, veremos algumas implicações. Após o teorema de Stiefel, o qual indica quando um espaço projetivo real $\mathbb{R}P^n$ é paralelizável, veremos alguns resultados sobre imersões de variedades.

Por fim, estudaremos os números de Stiefel-Whitney, que formam uma ferramenta útil para estudar variedades cobordantes e encerraremos o capítulo mostrando a unicidade das classes de cohomologia que satisfazem os axiomas apresentados na Seção 5.1.

Stiefel e Whitney foram os percussores do estudo das classes características de variedades suaves, definindo-as inicialmente como obstrução à existência de seções independentes no fibrado tangente da variedade em questão.

Dado um n -fibrado vetorial $\xi = (E, \pi, B)$ queremos estudar se ξ é ou não trivial. Para isso, estudaremos em que circunstâncias, podemos construir r seções independen-

tes, onde $1 \leq r \leq n$. Lembramos que um n -fibrado é trivial se, e somente se, ele possui n seções independentes.

Para estudar esse problema, em cada fibra F_b de ξ , consideremos a variedade de Stiefel $V_r(F_b)$ apresentada no Lema 1.1. Primeiro construímos as r seções para os 0-simplexos, depois para os 1-simplexos e assim por diante até chegar na dimensão desejada.

Suponhamos a existência de uma seção $v^{(r)}$ definida na fronteira de uma p -célula $\partial\sigma_i^p$ no fibrado $V_r(\xi)$. Como o fibrado $V_r(\xi)$ é localmente trivial, então existe um aberto U tal que $V_r(\xi)|_U \cong U \times V_r(F_b)$. Assim, através da composição

$$\partial\sigma_i^p \xrightarrow{v^{(r)}} V_r(\xi)|_U \cong U \times V_r(F_b) \xrightarrow{p_2} V_r(F_b)$$

onde p_2 é a projeção no segundo fator, temos uma aplicação associada $S^{p-1} \rightarrow V_r(F_b)$ e, conseqüentemente uma classe $[\gamma(v^{(r)}, \sigma_i^p)] \in \pi_{p-1}(V_r(F_b))$. Recordando que para uma n -variedade real $M \subset \mathbb{R}^n$ e $b \in M$, o plano tangente a M em p , representa a fibra F_b do fibrado τ_M que é isomorfa a \mathbb{R}^n . Desta maneira, $\pi_{p-1}(V_r(F_b)) = \pi_{p-1}(V_r(\mathbb{R}^n))$ e estes últimos grupos foram exibidos na Equação 4.4 do Capítulo 4.

A p -ésima classe de Stiefel-Whitney de M , denotada por $w_p(M)$ é definida como a obstrução primária para a construção de um r -referencial sobre M . Este r -referencial pode ser visto como uma seção de $V_r(\tau_M)$ ou um conjunto de r -campos vetoriais independentes tangentes à M , com $p = n - r + 1$. Mais precisamente, através dos grupos $\pi_j(V_r(\mathbb{R}^n))$ podemos saber quando é possível construir um r -referencial. Então, escolhendo qualquer r -campo $v^{(r)}$ em X^0 , podemos estendê-lo sem singularidades até a dimensão de obstrução $p = n - r + 1$. Isto é, o r -campo não possui singularidades até X^{p-1} e possui uma singularidade isolada em X^p .

Dado um r -referencial $v^{(r)}$ definido na fronteira $\partial\sigma_i^p$ de cada p -célula σ_i^p , pode-se estender $v^{(r)}$ em σ_i^p com uma singularidade no ponto x no interior de σ_i^p , com índice:

$$I(v^{(r)}, x) = [v_{p-1}^{(r)}|_{\partial\sigma_i^p}] \in \pi_{p-1}(V_r(\mathbb{R}^n)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } p = n - r + 1 \text{ ímpar ou } p = n \text{ se } r = 1 \\ \mathbb{Z}_2, & \text{se } p = n - r + 1 \text{ par e } r > 1 \end{cases}$$

reduzindo estes valores à módulo dois, obtemos $I(v^{(r)}, x) \in \mathbb{Z}_2$.

Definindo a p -cocadeia $\sum I(v^{(r)}, x)(\sigma_i^p)^*$ em $C^p(M; \mathbb{Z}_2)$, onde $(\sigma_i^p)^*$ é o homomorfismo que atribui o valor 1 em σ_i^p e 0 caso contrário. Como já visto, esta cocadeia de obstrução, na verdade, é um cociclo e assim define um elemento $w_p(M)$ no grupo $H^p(M; \mathbb{Z}_2)$.

Definição 5.1. Seja M uma n -variedade suave. Definimos a p -ésima classe de

Stiefel-Whitney de M , denotada por $w_p(M) \in H^p(M; \mathbb{Z}_2)$, como sendo a classe de obstrução primária correspondente à criação de um r -referencial tangente à M , com $p = n - r + 1$.

Como já visto, pela teoria da obstrução, a escolha da classe obtida não depende da escolha do r -referencial construído. Essa definição fornece uma intuição geométrica excelente para a compreensão das classes de Stiefel-Whitney. Porém, devido a complexidade do cálculo de algumas ferramentas usadas nesta teoria, como por exemplo, o cálculo dos grupos de homotopia, de acordo com [16] será apresentada uma descrição axiomática para estas classes.

5.1 Axiomas para as classes de Stiefel-Whitney

As classes de Stiefel-Whitney possuem algumas propriedades que serão adotadas como axiomas e assim podem ser estudadas como classes de cohomologia singular de um fibrado vetorial com coeficientes em \mathbb{Z}_2 . Esta definição axiomática é apresentada a seguir.

Seja $\xi = (E, \pi, B)$ um fibrado vetorial real. Então, existe uma sequência de classes de cohomologia singular associada a ξ :

$$w_i(\xi) \in H^i(B; \mathbb{Z}_2), \text{ para } i = 0, 1, \dots$$

chamadas **classes de Stiefel-Whitney**.

Axioma 5.1 (Dimensão). Estas classes são tais que:

- (i) $w_0(\xi) = 1 \in H^0(B; \mathbb{Z}_2)$.
- (ii) Se ξ for um n -fibrado, então $w_i(\xi) = 0$ para todo $i > n$.

Axioma 5.2 (Naturalidade). Sejam $\xi = (E, \pi, B)$ e $\eta = (E', \pi', B')$ dois fibrados vetoriais. Se existir uma aplicação fibrada $f : E \rightarrow E'$ com $\bar{f} : B \rightarrow B'$ sendo a aplicação nas bases induzida por f , ou seja, $\xi \cong \bar{f}^* \eta$, então:

$$w_i(\xi) = \bar{f}_i^*(w_i(\eta)),$$

onde $\bar{f}_i^* : H^i(B'; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^i(B; \mathbb{Z}_2)$ é a aplicação correspondente nos grupos de cohomologia para todo $i \geq 0$.

Axioma 5.3 (Teorema do Produto de Whitney). Sejam ξ e η dois fibrados vetoriais sobre a mesma base B . Então, para todo $k \geq 0$, vale a igualdade:

$$w_k(\xi \oplus \eta) = \sum_{i=0}^k w_i(\xi) \smile w_{k-i}(\eta).$$

Axioma 5.4 (Normalização). Para o fibrado canônico linha γ_1^1 sobre $\mathbb{R}P^1$, tem-se $w_1(\gamma_1^1) = b \neq 0$, onde $\langle b \rangle = H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}_2)$.

Como consequência, através dessa descrição axiomática para as classes de Stiefel-Whitney, obtemos as seguintes propriedades:

Proposição 5.1. Sejam $\xi = (E, \pi, B)$ e $\eta = (E', \pi', B)$ dois fibrados vetoriais tais que $\xi \cong \eta$. Então, para todo $i \geq 0$, temos $w_i(\xi) = w_i(\eta)$.

Demonstração. Como $\xi \cong \eta$, então existe um homeomorfismo $f : E \rightarrow E'$ com $f(F_b(\xi)) \subset F_b(\eta)$ e $f|_{F_b(\xi)}$ é um isomorfismo linear para todo $b \in B$. Assim, f é uma aplicação fibrada e além disso, temos $\xi \cong \bar{f}^* \eta$ onde \bar{f} é a aplicação correspondente na base. Daí, $\bar{f} : B \rightarrow B$ é a aplicação identidade e induz a aplicação identidade nos grupos de cohomologia $(id_B)_i^* : H^i(B; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^i(B; \mathbb{Z}_2)$. Portanto, pelo Axioma da Naturalidade, para todo $i \geq 0$, temos que:

$$w_i(\xi) = (id_B)_i^*(w_i(\eta)) = w_i(\eta).$$

□

Proposição 5.2. Se $\xi = (E, \pi, B)$ é um fibrado vetorial trivial, então $w_i(\xi) = 0$ para qualquer $i > 0$.

Demonstração. Como ξ é trivial, pela Proposição 3.1 temos que $\xi \cong \varepsilon_B^n$ para algum $n \geq 0$. Dado $b \in B$, defina $f : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow \{b\} \times \mathbb{R}^n$ por $f(x, y) = (b, y)$ para todo $(x, y) \in B \times \mathbb{R}^n$. Então, f é contínua e $f|_{\{x\} \times \mathbb{R}^n} : \{x\} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \{b\} \times \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo linear para todo $x \in B$.

Desse modo, f é uma aplicação fibrada de ε_B^n em $\varepsilon_{\{b\}}^n$ e denotamos por $c : B \rightarrow \{b\}$ definida por $c(\alpha) = b$ para todo $\alpha \in B$ a aplicação constante induzida nas bases. Assim, $\varepsilon_B^n \cong c^* \varepsilon_{\{b\}}^n$ e pelo Axioma da Naturalidade, temos

$$w_i(\varepsilon_B^n) = c_i^*(w_i(\varepsilon_{\{b\}}^n))$$

onde $c_i^* : H^i(\{b\}; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^i(B; \mathbb{Z}_2)$ é a aplicação induzida nos grupos de cohomologia. Pela Proposição 2.2, temos que $H^i(\{b\}; \mathbb{Z}_2) = \{0\}$ para todo $i > 0$, então c_i^* é a

aplicação identicamente nula para todo $i > 0$. Logo, pela Proposição 5.1:

$$w_i(\xi) = w_i(\varepsilon_B^n) = c_i^*(w_i(\varepsilon_{\{b\}}^n)) = 0,$$

para todo $i > 0$. □

Proposição 5.3. Sejam ξ e η dois fibrados vetoriais sobre o mesmo espaço base B com ξ trivial. Então, para todo $k \geq 0$, temos:

$$w_k(\xi \oplus \eta) = w_k(\eta).$$

Demonstração. Pelo Axioma 5.3 (Teorema do Produto de Whitney),

$$w_0(\xi \oplus \eta) = w_0(\xi) \smile w_0(\eta) = 1 \smile w_0(\eta) = w_0(\eta).$$

Para $k > 0$, usando novamente a fórmula do Axioma 5.3, temos:

$$w_k(\xi \oplus \eta) = w_0(\xi) \smile w_k(\eta) + w_1(\xi) \smile w_{k-1}(\eta) + \dots + w_k(\xi) \smile w_0(\eta),$$

e como ξ é trivial, pela Proposição 5.2:

$$\begin{aligned} w_k(\xi \oplus \eta) &= 1 \smile w_k(\eta) + 0 + \dots + 0 \\ &= w_k(\eta). \end{aligned}$$
□

Proposição 5.4. Seja ξ um n -fibrado Euclidiano. Se ξ possui k seções independentes, com $1 \leq k \leq n$, então:

$$w_{n-k+1}(\xi) = w_{n-k+2}(\xi) = \dots = w_k(\xi) = 0.$$

Demonstração. Se ξ possui k seções independentes, então pelo Teorema 3.4 existe um k -subfibrado trivial de ξ que chamaremos de η . Como ξ é um fibrado Euclidiano, pela Proposição 3.9, temos que $\xi \cong \eta \oplus \eta^\perp$, em que η^\perp é um $(n - k)$ -fibrado. Assim, para qualquer $i \geq 0$, pela Proposição anterior:

$$w_i(\xi) = w_i(\eta \oplus \eta^\perp) = w_i(\eta^\perp).$$

Daí, pelo Axioma da Dimensão, temos que $w_i(\xi) = 0$ para todo $i > n - k$. □

Com estas propriedades, conseguimos obter caracterizações para os fibrados vetoriais através das classes de Stiefel-Whitney. Essas caracterizações podem ser interpretadas da seguinte maneira:

- (i) Para a Teoria de Fibrados, dois fibrados são equivalentes quando são isomorfos. A Proposição 5.1 transcreve essa equivalência para as classes características, afirmando que dois fibrados isomorfos possuem todas as classes de Stiefel-Whitney iguais.
- (ii) A Proposição 5.2 revela uma propriedade de um fibrado trivial do ponto de vista das classes características. Um fibrado trivial possui todas as suas classes de Stiefel-Whitney nulas, com exceção da classe w_0 que tem seu valor determinado pelo Axioma da Dimensão.
- (iii) Um fibrado trivial tem um comportamento interessante com respeito ao Axioma do Teorema do Produto de Whitney. Pela Proposição 5.3, a i -ésima classe de Stiefel-Whitney de um fibrado soma de Whitney entre um fibrado trivial e um fibrado qualquer ξ , resulta na i -ésima classe de Stiefel-Whitney do fibrado ξ .
- (iv) Por último, a Proposição 5.4 ajuda na identificação do quanto um fibrado vetorial está próximo de ser um fibrado trivial, relacionando o número de seções independentes com as classes de Stiefel-Whitney.

Definição 5.2. Seja $\xi = (E, \pi, B)$ um fibrado vetorial. O conjunto $H^{\text{II}}(B; \mathbb{Z}_2)$ representa o anel das somas formais:

$$a = a_0 + a_1 + \dots$$

onde $a_i \in H^i(B; \mathbb{Z}_2)$ para cada $i = 0, 1, \dots$

Dados $a = a_0 + a_1 + \dots$ e $b = b_0 + b_1 + \dots$ elementos de $H^{\text{II}}(B; \mathbb{Z}_2)$, as operações definidas neste anel são:

$$a + b = c_0 + c_1 + \dots, \text{ onde } c_k = a_k + b_k \text{ para cada } k = 0, 1, \dots \text{ e,}$$

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (a_0 \smile b_0) + (a_0 \smile b_1 + a_1 \smile b_0) + (a_0 \smile b_2 + a_1 \smile b_1 + a_2 \smile b_0) + \dots \\ &= d_0 + d_1 + \dots \end{aligned}$$

em que $d_k = \sum_{i=0}^k a_i \smile b_{k-i}$ para cada $k = 0, 1, \dots$

Note que como os coeficientes estão em \mathbb{Z}_2 , o produto definido acima é associativo e comutativo.

Definição 5.3. Seja $\xi = (E, \pi, B)$ um n -fibrado vetorial. Chamamos de **classe total de Stiefel-Whitney** do fibrado ξ , o elemento:

$$W(\xi) = 1 + w_1(\xi) + \dots + w_n(\xi) \in H^{\mathbb{I}}(B; \mathbb{Z}_2).$$

Observação 5.1. Dados dois fibrados ξ e η sobre B , pelo Axioma do Teorema do Produto de Whitney, obtemos a seguinte relação:

$$W(\xi \oplus \eta) = W(\xi) \cdot W(\eta).$$

Lema 5.5. Dado um fibrado vetorial $\xi = (E, \pi, B)$, o conjunto

$$\{w_0(\xi) + w_1(\xi) + w_2(\xi) + \dots \in H^{\mathbb{I}}(B; \mathbb{Z}_2); w_0(\xi) = 1\}$$

é um grupo abeliano com o produto já definido acima com unidade.

Demonstração. Este conjunto herda naturalmente as propriedades de ser comutativo, associativo e de possuir elemento neutro $\mathbb{I} = 1 + 0 + 0 + \dots \in H^{\mathbb{I}}(B; \mathbb{Z}_2)$.

Verificaremos agora que qualquer elemento $W(\xi)$ possui um inverso no conjunto. Considere o elemento $W^{-1}(\xi) = w_0^{-1}(\xi) + w_1^{-1}(\xi) + \dots$, em que $w_0^{-1}(\xi) = 1 \in H^1(B; \mathbb{Z}_2)$ e

$$w_k^{-1}(\xi) = \sum_{i=1}^k w_i(\xi) \smile w_{k-i}^{-1}(\xi)$$

para todo $k \geq 1$. De fato $W^{-1}(\xi)$ é o inverso de $W(\xi)$, pois:

$$W(\xi) \cdot W^{-1}(\xi) = d_0 + d_1 + \dots$$

onde $d_j = \sum_{i=0}^j w_i(\xi) \smile w_{j-i}^{-1}(\xi)$ para todo $j \geq 1$. Logo, $d_0 = 1 \smile 1 = 1$ e:

$$\begin{aligned} d_j &= w_0(\xi) \smile w_j^{-1}(\xi) + \sum_{i=1}^j w_i(\xi) \smile w_{j-i}^{-1}(\xi) \\ &= w_j^{-1}(\xi) + \sum_{i=1}^j w_j(\xi) \smile w_{j-i}^{-1}(\xi) \\ &= 2 \left(\sum_{i=1}^j w_i(\xi) \smile w_{j-i}^{-1}(\xi) \right) \\ &= 0, \text{ para todo } j \geq 1. \end{aligned}$$

Portanto, $W(\xi) \cdot W^{-1}(\xi) = \mathbb{I} \in H^{\mathbb{I}}(B; \mathbb{Z}_2)$.

□

Corolário 5.6. Sejam ξ e η dois fibrados vetoriais sobre o mesmo espaço base tais que $\xi \oplus \eta$ seja trivial. Então,

$$W(\eta) = W^{-1}(\xi).$$

Demonstração. Como $\xi \oplus \eta$ é trivial, então $W(\xi \oplus \eta) = \mathbb{I}$. Além disso, pela Observação 5.1, vale que $W(\xi \oplus \eta) = W(\xi) \cdot W(\eta)$. Já que o Lema 5.5 garante a existência do elemento $W^{-1}(\xi)$, então:

$$W^{-1}(\xi) \cdot W(\xi) \cdot W(\eta) = W^{-1}(\xi) \cdot \mathbb{I} = W^{-1}(\xi).$$

ou seja, $W(\eta) = W^{-1}(\xi)$. □

Teorema 5.7 (Teorema da Dualidade de Whitney). *Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade suave. Então,*

$$w_i(\nu_M) = w_i^{-1}(\tau_M)$$

para todo $i \geq 0$, onde ν_M denota o fibrado normal de M .

Demonstração. Pelo Exemplo 3.12, o fibrado $\tau_M \oplus \nu_M$ é trivial e então pelo Corolário 5.6 temos que $W(\nu_M) = W^{-1}(\tau_M)$. Logo,

$$w_i(\nu_M) = w_i^{-1}(M)$$

para todo $i \geq 0$. □

Agora iremos calcular as classes de Stiefel-Whitney para alguns exemplos. Por conveniência usaremos a notação $W(M)$ para a classe total de Stiefel-Whitney e $w_i(M)$ para a i -ésima classe de Stiefel-Whitney do fibrado τ_M .

Exemplo 5.1. Para a esfera n -dimensional S^n , temos que $W(S^n) = 1$.

Para verificarmos esta afirmação, primeiro notemos que por $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ser uma n -variedade suave, então pelo Teorema da Dualidade de Whitney,

$$w_i(\tau_M) = w_i^{-1}(\nu_M) \tag{5.1}$$

para todo $i \geq 0$. Agora note, para todo $p \in S^n$, que $\dim(T_p S^n)^\perp = 1$ é um vetor normal a $T_p S^n$ isto é, $p \in (T_p S^n)^\perp$.

Sendo assim, considere a aplicação $s : S^n \rightarrow E(\nu_{S^n})$ definida por $s(x) = (x, x)$ para todo $x \in S^n$. Daí s é uma seção nunca nula de ν_{S^n} e, pelo Teorema 3.4, segue que ν_{S^n} é um fibrado trivial.

Logo, $w_0(\nu_{S^n}) = 1$ e $w_i(\nu_{S^n}) = 0$ para todo $i \geq 1$. Daí, $w_0^{-1}(\nu_{S^n}) = 1$ e

$$w_i^{-1}(\nu_{S^n}) = \sum_{j=1}^i w_j(\nu_{S^n}) \smile w_{i-j}^{-1}(\nu_{S^n}) = 0,$$

para todo $i \geq 1$. Então, usando a igualdade (5.1) temos que $w_0(S^n) = 1$ e $w_i(S^n) = 0$ para todo $i \geq 1$. Portanto, $W(S^n) = 1$.

Isto nos leva a concluir que as classes de Stiefel-Whitney não distinguem o fibrado tangente do fibrado trivial na esfera S^n .

Exemplo 5.2. Para cada $n \geq 1$, o fibrado canônico linha γ_n^1 sobre $\mathbb{R}P^n$ tem classe total de Stiefel-Whitney igual a $1 + a$, onde $H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) = \langle a \rangle$.

De fato, consideremos a aplicação inclusão $i : E(\gamma_1^1) \rightarrow E(\gamma_n^1)$ que forma uma aplicação fibrada entre os fibrados γ_1^1 e γ_n^1 com a aplicação inclusão $j : \mathbb{R}P^1 \rightarrow \mathbb{R}P^n$ sendo a aplicação correspondente nos espaços bases.

Assim, pelo Lema 3.7 temos $\gamma_1^1 \cong j^* \gamma_n^1$ e pelo Axioma da Naturalidade:

$$w_k(\gamma_1^1) = j_k^*(w_k(\gamma_n^1)), \quad (5.2)$$

para todo $k \geq 0$, onde $j_k^* : H^k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^k(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}_2)$ é a aplicação induzida por j nos grupos de cohomologia singular. Por γ_n^1 ser um fibrado linha, então $w_k(\gamma_n^1) = 0$ para todo $k > 1$. Além disso, pelo Axioma na Normalidade, temos que $w_1(\gamma_1^1) = b \neq 0$, onde $\langle b \rangle = H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}_2)$. Como $w_1(\gamma_n^1) \in H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) = \langle a \rangle$, usando a igualdade (5.2), concluímos que $j^*(w_1(\gamma_n^1)) = b$ e assim $w_1(\gamma_n^1) = a$ já que j_k^* é um homomorfismo, para todo $k \geq 0$ e conseqüentemente, leva gerador em gerador. Portanto:

$$\begin{aligned} W(\gamma_n^1) &= w_0(\gamma_n^1) + w_1(\gamma_n^1) + w_2(\gamma_n^1) + \dots \\ &= 1 + a. \end{aligned}$$

Por contrução, temos que $\gamma_n^1 \subset \varepsilon_{\mathbb{R}P^n}^{n+1}$. Usando isto, o próximo exemplo mostrará que todas as n classes de Stiefel-Whitney de um n -fibrado podem ser não nulas.

Exemplo 5.3. Seja γ^\perp o fibrado complemento ortogonal de γ_n^1 em $\varepsilon_{\mathbb{R}P^n}^{n+1}$ de acordo com a Definição 3.17. Então,

$$W(\gamma^\perp) = 1 + a + a^2 + \dots + a^n.$$

De fato, como $\gamma_n^1 \oplus \gamma^\perp \cong \varepsilon_{\mathbb{R}P^n}^{n+1}$, então $\gamma_n^1 \oplus \gamma^\perp$ é um fibrado trivial. Então, pelo Corolário 5.6: $W(\gamma^\perp) = W^{-1}(\gamma_n^1)$. Já que γ^\perp é um n -fibrado, pelo Axioma da Dimensão basta calcular $w_i(\gamma^\perp)$ para $i = 1, \dots, n$.

Lembremos que para $k > 0$,

$$w_k^{-1}(\gamma_n^1) = \sum_{i=1}^k w_i(\gamma_n^1) \smile w_{k-i}^{-1}(\gamma_n^1) = w_1(\gamma_n^1) \smile w_{k-1}^{-1}(\gamma_n^1)$$

pois $w_k(\gamma_n^1) = 0$ para todo $k > 1$ pois γ_n^1 é um fibrado linha.

Sendo a o gerador do grupo $H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$, vamos verificar por indução sobre $k > 0$ que $w_k^{-1}(\gamma_n^1) = a^k$.

No caso em que $k = 1$, temos:

$$w_1^{-1}(\gamma_n^1) = w_1(\gamma_n^1) \smile w_0^{-1}(\gamma_n^1) = w_1(\gamma_n^1),$$

e pelo Axioma da Normalidade, $w_1^{-1}(\gamma_n^1) = a$.

Agora suponhamos que para algum $k > 0$, tenhamos $w_k^{-1}(\gamma_n^1) = a^k$. Assim,

$$w_{k+1}^{-1}(\gamma_n^1) = w_1(\gamma_n^1) \smile w_k^{-1}(\gamma_n^1) = a \smile a^k = a^{k+1}.$$

Portanto, $W(\gamma^\perp) = 1 + a + a^2 + \dots + a^n$.

Lema 5.8. Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que:

$$\tau_{\mathbb{R}P^n} \cong \text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma^\perp).$$

Demonstração. Seja $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ a aplicação quociente canônica. Como f é tal que $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in S^n$ então os pontos $(x, v), (-x, -v) \in TS^n$ têm a mesma imagem pela aplicação $df : TS^n \rightarrow T\mathbb{R}P^n$. De fato,

$$\begin{aligned} d_{-x}f(-v) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(-x + t(-v)) - f(-x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(-(x + tv)) - f(-x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} = d_x f(v) \end{aligned}$$

Daí, $df(-x, -v) = (f(-x), d_{-x}f(-v)) = (f(x), d_x f(v)) = df(x, v)$. Assim, a aplicação df induz o homeomorfismo $\overline{df} : \frac{TS^n}{\sim} \rightarrow \mathbb{R}P^n$ dado por $\overline{df}(\overline{(x, v)}) = df(x, v)$ para todo $\overline{(x, v)} \in \frac{TS^n}{\sim}$, onde \sim é a relação de equivalência que identifica os pontos (x, v) com $(-x, -v)$. Logo,

$$T\mathbb{R}P^n = \{\overline{(x, v)}; (x, v) \in TS^n\} = \{\{(x, v), (-x, -v)\}; \langle x, x \rangle = 1 \text{ e } \langle x, v \rangle = 0\}.$$

Vamos denotar por L_x a reta que passa na origem de \mathbb{R}^{n+1} e tem $x \in S^n$ como vetor diretor. Como cada elemento $\{(x, v), (-x, -v)\} \in T\mathbb{R}P^n$ determina e é determinado pela transformação linear $l_{x,v} : L_x \rightarrow (L_x)^\perp$ definida por $l_{x,v}(y) = \langle y, x \rangle v$ para todo

$y \in L_x$. Como $L_x = F_{\bar{x}}(\gamma_n^1)$ e $(L_x)^\perp = F_{\bar{x}}(\gamma^\perp)$, então $l_{x,v} \in \text{Hom}(F_{\bar{x}}(\gamma_n^1), F_{\bar{x}}(\gamma^\perp))$. Assim, considere $g : T\mathbb{R}P^n \rightarrow E(\text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma^\perp))$ dada por $g(\overline{(x, v)}) = l_{x,v}$ para todo $\overline{(x, v)} \in T\mathbb{R}P^n$.

Note que o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} T\mathbb{R}P^n & \xrightarrow{g} & E(\text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma^\perp)) \\ \sigma \downarrow & & \swarrow \pi \\ \mathbb{R}P^n & & \end{array}$$

é comutativo onde σ é a projeção do fibrado $\tau_{\mathbb{R}P^n}$ e π é a projeção do fibrado $\text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma^\perp)$. Então, pela Proposição 3.10, temos que g é contínua.

Por fim, a aplicação $h = g|_{F_{\bar{x}}(\tau_{\mathbb{R}P^n})} : F_{\bar{x}}(\tau_{\mathbb{R}P^n}) \rightarrow \text{Hom}(F_{\bar{x}}(\gamma_n^1), F_{\bar{x}}(\gamma^\perp))$ dada por $h(\overline{(x, v)}) = l_{x,v}$ para todo $\overline{(x, v)} \in F_{\bar{x}}(\tau_{\mathbb{R}P^n}) = \{\bar{x}\} \times T_{\bar{x}}\mathbb{R}P^n$ é um isomorfismo linear. De fato:

- h é linear pois $l_{x,v}$ é linear
- h é bijeção pois

$$\begin{aligned} \text{Ker}(h) &= \{(\bar{x}, v) \in F_{\bar{x}}(\tau_{\mathbb{R}P^n}); l_{x,v} = 0\} \\ &= \{(\bar{x}, v) \in F_{\bar{x}}(\tau_{\mathbb{R}P^n}); \langle y, x \rangle v = 0, \text{ para todo } y \in L_x\}. \end{aligned}$$

Tomando $y = x$, então $\langle x, x \rangle v = 0$, então $v = 0$. Assim,

$$\text{Ker}(h) = \{(\bar{x}, 0) \in F_{\bar{x}}(\tau_{\mathbb{R}P^n})\} = \{0\}.$$

Logo, pelo Lema 3.3, temos que f é um homeomorfismo. Consequentemente,

$$\tau_{\mathbb{R}P^n} \cong \text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma^\perp).$$

□

Teorema 5.9. Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que:

$$\varepsilon_{\mathbb{R}P^n}^1 \oplus \tau_{\mathbb{R}P^n} \cong \underbrace{\gamma_n^1 \oplus \gamma_n^1 \oplus \dots \oplus \gamma_n^1}_{(n+1)\text{-vezes}}$$

Demonstração. Inicialmente, considere a aplicação $s : \mathbb{R}P^n \rightarrow E(\text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^1))$ definida por $s(\bar{x}) = \text{id}_{F_{\bar{x}}(\gamma_n^1)}$ para todo $\bar{x} \in \mathbb{R}P^n$. Assim, s é uma seção nunca nula do fibrado linha $\text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^1)$, ou seja, pelo Teorema 3.4 segue que $\text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^1) \cong \varepsilon_{\mathbb{R}P^n}^1$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\mathbb{R}P^n} \oplus \tau_{\mathbb{R}P^n} &\cong \text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^1) \oplus \text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^\perp) \\
 &\cong \text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^1 \oplus \gamma_n^\perp) \\
 &\cong \text{Hom}(\gamma_n^1, \varepsilon_{\mathbb{R}P^n}^{n+1}) \\
 &\cong \text{Hom}(\gamma_n^1, \underbrace{\gamma_n^1 \oplus \dots \oplus \gamma_n^1}_{(n+1)\text{-vezes}}) \\
 &\cong \underbrace{\text{Hom}(\gamma_n^1, \varepsilon_{\mathbb{R}P^n}^1) \oplus \dots \oplus \text{Hom}(\gamma_n^1, \varepsilon_{\mathbb{R}P^n}^1)}_{(n+1)\text{-vezes}} \\
 &\cong \underbrace{\gamma_n^1 \oplus \dots \oplus \gamma_n^1}_{(n+1)\text{-vezes}}
 \end{aligned}$$

□

Consequentemente, a classe total de Stiefel-Whitney do $\mathbb{R}P^n$ é dada por:

$$W(\mathbb{R}P^n) = W(\varepsilon_{\mathbb{R}P^n}^1 \oplus \tau_{\mathbb{R}P^n}) = (1+a)^{n+1} = 1 + \binom{n+1}{1}a + \binom{n+1}{2}a^2 + \dots + \binom{n+1}{n}a^n.$$

Para visualizar melhor os resultados das classes totais de Stiefel-Whitney, em [16] encontramos a tabela a seguir que apresenta os valores dos coeficientes binomiais $\binom{n+1}{i}$ para $0 \leq n \leq 14$ e $0 \leq i \leq n$.

	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}
$\mathbb{R}P^1$	1	0													
$\mathbb{R}P^2$	1	1	1												
$\mathbb{R}P^3$	1	0	0	0											
$\mathbb{R}P^4$	1	1	0	0	1										
$\mathbb{R}P^5$	1	0	1	0	1	0									
$\mathbb{R}P^6$	1	1	1	1	1	1	1								
$\mathbb{R}P^7$	1	0	0	0	0	0	0	0							
$\mathbb{R}P^8$	1	1	0	0	0	0	0	0	1						
$\mathbb{R}P^9$	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0					
$\mathbb{R}P^{10}$	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1				
$\mathbb{R}P^{11}$	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0			
$\mathbb{R}P^{12}$	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1		
$\mathbb{R}P^{13}$	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	
$\mathbb{R}P^{14}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabela 5.1: Coeficientes das classes de Stiefel-Whitney para $\mathbb{R}P^n$, com $0 \leq n \leq 14$.

Assim, por exemplo, temos que $W(\mathbb{R}P^1) = 1$, $W(\mathbb{R}P^2) = 1 + a + a^2$, $W(\mathbb{R}P^3) = 1$, e $W(\mathbb{R}P^4) = 1 + a + a^4$. O resultado a seguir é uma forma de caracterizar quando podemos definir campos de vetores independentes em $\mathbb{R}P^n$.

Corolário 5.10 (Corolário de Stiefel). Dado $n \in \mathbb{N}$, a classe $W(\mathbb{R}P^n)$ é igual a 1 se, e somente se, $n + 1$ é uma potência de 2

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $n + 1$ não seja uma potência de 2. Isto é, existe $m > 1$ inteiro ímpar tal que $n + 1 = 2^r m$. Como $m > 1$ então $2^r m > 2^r$. Daí,

$$\begin{aligned} W(\mathbb{R}P^n) &= (1 + a)^{n+1} = (1 + a)^{2^r m} = [(1 + a)^{2^r}]^m \\ &= \left[1 + \binom{2^r}{1} a + \binom{2^r}{2} a^2 + \dots + \binom{2^r}{2^r - 1} a^{2^r - 1} + a^{2^r} \right]^m \\ &= (1 + a^{2^r})^m = 1 + m a^{2^r} + \dots \neq 1 \end{aligned}$$

o que é um absurdo pois $W(\mathbb{R}P^n) = 1$. Reciprocamente, considere $n + 1 = 2^r$ para algum $r \geq 1$ inteiro. Assim,

$$W(\mathbb{R}P^n) = (1 + a)^{n+1} = 1 + a^{2^r} = 1 + a^{n+1} = 1$$

pois $a^{n+1} \in H^{n+1}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) = \{0\}$.

□

Definição 5.4 (Divisor de zero). Um elemento não nulo a em um anel comutativo A é chamado um **divisor de zero** se existe um elemento não nulo b em A tal que $ab = 0$.

Para mais detalhes sobre divisores de zero, consultar [6].

Teorema 5.11 (Teorema de Stiefel). *Suponha que exista uma operação de produto bilinear $p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sem divisores de zero. Então, o espaço projetivo $\mathbb{R}P^{n-1}$ é paralelizável e conseqüentemente n é uma potência de 2.*

Demonstração. Defina a aplicação $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $f(x) = p(x, e_n)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ em que $\{e_1, \dots, e_n\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^n . Por p ser bilinear, então f é linear e como p não tem divisores de zero, então $\text{Ker}(f) = \{0\}$. Assim, f é uma bijeção, e portanto, f é um isomorfismo linear.

Para todo $i = 1, \dots, n$, considere a aplicação $v_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ como sendo

$$v_i(p(x, e_n)) = p(x, e_i)$$

para todo $p(x, e_n) \in \mathbb{R}^n$. Novamente pelo fato de p ser bilinear, temos que v_i é linear para todo $i = 1, \dots, n$.

Agora, note que para $x \neq 0$, o conjunto $\{v_1(x), \dots, v_n(x)\}$ é linearmente independente e $v_n(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. De fato:

$$v_n(x) = v_n(p(y, e_n)) = p(y, e_n) = x$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Como $\{e_1, \dots, e_n\}$ é um conjunto linearmente independente e p não possui divisores de zero, então $\{p(y, e_1), \dots, p(y, e_n)\}$ é um conjunto linearmente independente para todo $y \neq 0$. Daí, $\{v_1(x), \dots, v_n(x)\}$ é um conjunto linearmente independente para todo $x \neq 0$ em \mathbb{R}^n .

Deste modo, é possível construir $n - 1$ seções independentes para o $(n - 1)$ -fibrado $Hom(\gamma_{n-1}^1, \gamma^\perp)$. Para tal construção, dado $\bar{x} \in \mathbb{R}P^{n-1}$, considere L_x a representação da reta que passa por $0 \in \mathbb{R}^n$ e tem $x \in \mathbb{R}^n$ como vetor diretor. Assim, para cada $i = 1, \dots, n - 1$, defina:

$$\begin{aligned} s_i : \mathbb{R}P^{n-1} &\rightarrow E(Hom(\gamma_{n-1}^1, \gamma^\perp)) \\ \bar{x} &\mapsto \bar{v}_i \end{aligned}$$

onde $\bar{v}_i : L_x \rightarrow L_x^\perp$ associa cada $z \in L_x$ na projeção ortogonal $v_i(z)$ sobre L_x^\perp . Assim,

$$\pi \circ s_i = id_{\mathbb{R}P^{n-1}}$$

onde π é a projeção do fibrado $Hom(\gamma_{n-1}^1, \gamma^\perp)$. Daí, pela Proposição 3.10, temos que s_i é contínua para todo $i = 1, \dots, n - 1$. Portanto s_1, \dots, s_{n-1} são seções para o fibrado $Hom(\gamma_{n-1}^1, \gamma^\perp)$.

Além disso, como $\{v_1(x), \dots, v_{n-1}(x)\}$ é um conjunto linearmente independente para todo $x \neq 0$ em \mathbb{R}^n , então $\{\bar{v}_1(x), \dots, \bar{v}_{n-1}(x)\}$ é um conjunto linearmente independente para todo $x \neq 0$ em \mathbb{R}^n . De fato, se $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ é uma base ortonormal de L_n^\perp , então

$$\bar{v}_i(x) = \sum_{j=1}^{n-1} \langle v_i(x), a_j \rangle a_j$$

para todo $i = 1, \dots, n - 1$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Logo, se $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ são tais que

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \bar{v}_i(x) = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \sum_{j=1}^{n-1} \langle v_i(x), a_j \rangle a_j = 0 \\
 &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \langle \alpha_i v_i(x), a_j \rangle a_j = 0 \\
 &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n-1} \left\langle \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i(x), a_j \right\rangle a_j = 0 \\
 &\Leftrightarrow \left\langle \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i(x), a_j \right\rangle = 0, \text{ para todo } j = 1, \dots, n-1 \\
 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i(x) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \alpha_i = 0, \text{ para todo } i = 1, \dots, n-1
 \end{aligned}$$

Portanto s_1, \dots, s_{n-1} são $n-1$ seções independentes de $Hom(\gamma_{n-1}^1, \gamma^\perp)$. Consequentemente, pelo Teorema 3.4 segue que $Hom(\gamma_{n-1}^1, \gamma^\perp)$ é trivial. Assim, pelo Lema 5.8, $\tau_{\mathbb{R}P^{n-1}}$ é trivial.

Então, temos que $\mathbb{R}P^{n-1}$ é paralelizável e pelo Corolário de Stiefel n é uma potência de 2.

□

Exemplo 5.4. Nos casos em que $n = 2, 4$ e 8 adotamos em $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^4$ e \mathbb{R}^8 o produto dos números complexos, quaternions e dos números de Cayley, respectivamente, tornando os espaços $\mathbb{R}P^1, \mathbb{R}P^3$ e $\mathbb{R}P^7$ paralelizáveis.

5.2 Resultados de Imersões

Dadas duas variedades suaves M e N e uma aplicação $f : M \rightarrow N$ contínua, diremos que f é uma **imersão** se f é suave e $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ é injetora para todo $p \in M$. Neste contexto dizemos que M está imersa em N .

Assim, o Teorema da Dualidade de Whitney 5.7 pode ser reescrito da seguinte maneira:

Proposição 5.12. Se M é uma n -variedade suave imersa em \mathbb{R}^{n+m} , então $W(\nu_M) = W^{-1}(M)$. Daí,

$$w_i^{-1}(M) = 0$$

para todo $i > m$.

Demonstração. Considere $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ uma imersão. Assim, $f|_{T_m(f)}$ é um homeomorfismo e $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^{n+m}$ é injetiva, então, $\tau_M \cong \tau_{f(M)}$. Portanto, $\nu_{f(M)} \oplus \tau_M$ é trivial e conseqüentemente,

$$w_i^{-1}(M) = w_i(\nu_{f(M)}) = 0,$$

para $i > m$. □

Equivalentemente, para mostrar que M uma n -variedade que não pode ser imersa em \mathbb{R}^{n+m} , basta mostra que $w_i^{-1}(M) \neq 0$ para algum $i > m$.

Exemplo 5.5. Sobre $\mathbb{R}P^9$, temos que $\mathbb{R}P^9$ pode ser imersa em \mathbb{R}^{9+m} se $m \geq 6$.

De fato, como $W(\mathbb{R}P^9) = 1 + a^2 + a^8$ e $w_k^{-1}(\mathbb{R}P^9) = \sum_{i=1}^k w_i(\mathbb{R}P^9) \smile w_{k-i}(\mathbb{R}P^9)$, então

$$w_k^{-1}(\mathbb{R}P^9) = \begin{cases} w_1(\mathbb{R}P^9) \smile w_0^{-1}(\mathbb{R}P^9), & \text{se } k = 1 \\ w_2(\mathbb{R}P^9) \smile w_{k-2}^{-1}(\mathbb{R}P^9), & \text{se } 2 \leq k \leq 7 \\ w_2(\mathbb{R}P^9) \smile w_{k-2}^{-1}(\mathbb{R}P^9) + w_8(\mathbb{R}P^9) \smile w_{k-8}^{-1}(\mathbb{R}P^9), & \text{se } k \geq 8 \end{cases}$$

Daí,

$$w_1^{-1}(\mathbb{R}P^9) = 0 \smile 1 = 0$$

$$w_2^{-1}(\mathbb{R}P^9) = a^2 \smile 1 = a^2$$

$$w_3^{-1}(\mathbb{R}P^9) = a^2 \smile 0 = 0$$

$$w_4^{-1}(\mathbb{R}P^9) = a^2 \smile a^2 = a^4$$

$$w_5^{-1}(\mathbb{R}P^9) = a^2 \smile 0 = 0$$

$$w_6^{-1}(\mathbb{R}P^9) = a^2 \smile a^4 = a^6$$

$$w_7^{-1}(\mathbb{R}P^9) = a^2 \smile 0 = 0$$

$$w_8^{-1}(\mathbb{R}P^9) = a^2 \smile a^6 + a^8 \smile 1 = 2a^8 = 0$$

$$w_9^{-1}(\mathbb{R}P^9) = a^2 \smile 0 + a^8 \smile 0 = 0$$

Para $k > 9$, temos $w_k^{-1}(\mathbb{R}P^9) = 0$. Então, $W(\mathbb{R}P^9) = 1 + a^2 + a^4 + a^6$.

Proposição 5.13. Se M é uma n -variedade suave que pode ser imersa em \mathbb{R}^{n+1} , então $w_i(M) = w_1^i(M)$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Demonstração. Como ν_M é um fibrado linha, segue do Teorema da Dualidade de Whitney 5.7 que $w_i^{-1}(M) = 0$ para $i > 1$. Então, $W^{-1}(M) = 1 + w_1^{-1}(M) = 1 + w_1(M)$.

Portanto, mostraremos por indução sobre $i \in \mathbb{N}$ que $w_i(M) = w_1^i(M)$. Note que se $i = 2$, então $w_2^{-1}(M) = 0$. Daí,

$$w_1^{-1}(M) \smile w_1^{-1}(M) + w_2(M) \smile w_0^{-1}(M) = 0$$

se, e somente se, $w_1^2(M) = w_2(M)$.

Supondo que $w_k(M) = w_1^k(M)$ para algum $k > 1$, como $w_{k+1}^{-1}(M) = 0$, então

$$\begin{aligned} w_{k+1}^{-1}(M) &= \sum_{i=1}^{k+1} w_i(M) \smile w_{k+1-i}^{-1}(M) = w_k(M) \smile w_1^{-1}(M) + w_{k+1}(M) \smile w_0^{-1}(M) \\ &= w_1^{k+1}(M) + w_{k+1}(M) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, $w_{k+1}(M) = w_1^{k+1}(M)$. Além disso, por τ_M ser um n -fibrado, então $w_i(M) = 0$ para todo $i > n$. Logo, $w_i(M) = w_1^i(M)$ para todo $i = 1, \dots, n$. \square

Exemplo 5.6. Se o espaço $\mathbb{R}P^n$ pode ser imerso em \mathbb{R}^{n+1} , então $n = 2^r - 1$ ou $n = 2^r - 2$ para algum $r \geq 1$.

Pela proposição anterior, temos que $w_i(\mathbb{R}P^n) = w_1^i(\mathbb{R}P^n)$ para todo $i = 1, \dots, n$. Também, temos que:

$$w_i(\mathbb{R}P^n) = \binom{n+1}{i} a^i \quad \text{e} \quad w_1^i(\mathbb{R}P^n) = \underbrace{\binom{n+1}{1} a \smile \dots \smile \binom{n+1}{1} a}_{i\text{-vezes}} = (n+1)^i a^i$$

Agora, analisaremos os possíveis casos para $n+1$:

- Caso $n+1$ seja um número par, então existem o inteiro $r \geq 1$ e o ímpar $m \geq 1$ tais que $n+1 = 2^r m$. Note que:

$$w_{2^r}(\mathbb{R}P^n) = \binom{n+1}{2^r} a^{2^r} = \binom{2^r m}{2^r} a^{2^r} = m a^{2^r} \neq 0.$$

Por outro lado, $w_1^{2^r}(\mathbb{R}P^n) = (n+1)^{2^r} a^{2^r} = 0$ já que $n+1 = 0$ em \mathbb{Z}_2 . Logo, $w_{2^r}(\mathbb{R}P^n) \neq w_1^{2^r}(\mathbb{R}P^n)$ o que contradiz o exemplo anterior. Portanto $m = 1$.

- Caso $n+1$ seja um número ímpar, então $n+2 = 2^r m$. Daí,

$$w_{2^r}(\mathbb{R}P^{n+1}) = \binom{n+2}{2^r} a^{2^r} = \binom{2^r m}{2^r} a^{2^r} = m a^{2^r} \neq 0,$$

e $w_1^{2^r}(\mathbb{R}P^{n+1}) = (n+2)^{2^r} a^{2^r} = 0$ em \mathbb{Z}_2 pois $n+2$ é par. Logo,

$$w_1^{2^r}(\mathbb{R}P^{n+1}) \neq w_{2^r}(\mathbb{R}P^{n+1})$$

e novamente pelo Exemplo anterior, $m = 1$.

Assim, $n = 2^r - 1$ ou $n = 2^r - 2$ para algum inteiro $r \geq 1$.

Proposição 5.14. Seja $r \geq 1$ um número inteiro. Se $\mathbb{R}P^{2^r}$ for imerso em $\mathbb{R}P^{2^r+m}$, então $m \geq 2^r - 1$.

Demonstração. Inicialmente, note que:

$$W(\mathbb{R}P^{2^r}) = (1 + a)^{2^r+1} = (1 + a)^{2^r} (1 + a) = 1 + a + a^{2^r},$$

onde a é o gerador do grupo $H^1(\mathbb{R}P^{2^r}; \mathbb{Z}_2)$. Como

$$w_k^{-1}(\mathbb{R}P^{2^r}) = \sum_{i=1}^k w_i(\mathbb{R}P^{2^r}) \smile w_{k-1}^{-1}(\mathbb{R}P^{2^r}),$$

então:

$$w_k^{-1}(\mathbb{R}P^{2^r}) = \begin{cases} w_1(\mathbb{R}P^{2^r}) \smile w_{k-1}^{-1}(\mathbb{R}P^{2^r}), & \text{se } 1 \leq k \leq 2^r - 1 \\ w_1(\mathbb{R}P^{2^r}) \smile w_{k-1}^{-1}(\mathbb{R}P^{2^r}) + w_{2^r}(\mathbb{R}P^{2^r}) \smile w_{k-2^r}^{-1}(\mathbb{R}P^{2^r}), & \text{se } k \geq 2^r \end{cases}$$

Assim:

$$w_1^{-1}(\mathbb{R}P^{2^r}) = a \smile 1 = a$$

$$w_2^{-1}(\mathbb{R}P^{2^r}) = a \smile a = a^2$$

$$w_3^{-1}(\mathbb{R}P^{2^r}) = a \smile a^2 = a^3$$

...

$$w_{2^r-1}^{-1}(\mathbb{R}P^{2^r}) = a \smile a^{2^r-2} = a^{2^r-1}$$

$$w_{2^r}^{-1}(\mathbb{R}P^{2^r}) = a \smile a^{2^r-1} + a^{2^r} \smile 1 = 2a^{2^r} = 0$$

Para $k > 2^r$, temos $w_k^{-1}(\mathbb{R}P^{2^r}) = 0$.

Logo $W^{-1}(\mathbb{R}P^{2^r}) = 1 + a + a^2 + \dots + a^{2^r-1}$, isto é, caso $\mathbb{R}P^{2^r}$ seja imerso em $\mathbb{R}P^{2^r+m}$, devemos ter $m \geq 2^r - 1$. O que coincide com o teorema da imersão de Whitney. □

5.3 Números de Stiefel-Whitney

Nesta seção será apresentada uma ferramenta usada com o objetivo de comparar duas variedades quaisquer. Esta formada pelas classes de Stiefel-Whitney sobre o fibrado tangente e da classe fundamental de homologia singular da variedade em questão.

Definição 5.5. Seja M uma n -variedade suave fechada. Dizemos que o elemento $[M] \in H_n(M; \mathbb{Z}_2)$ é uma classe fundamental em homologia para M se $[M]$ é gerador do grupo $H_n(M, M - \{x\}; \mathbb{Z}_2)$ para todo $x \in M$.

Seja M uma n -variedade suave fechada, compacta e sem bordo. Relacionada a esta variedade suave, existe uma única classe fundamental de homologia denotada por $[M] \in H_n(M; \mathbb{Z}_2) \approx \mathbb{Z}_2$. Então, dada uma classe qualquer de cohomologia $v \in H^n(M; \mathbb{Z}_2)$, o valor $v([M]) \in \mathbb{Z}_2$ está bem definido pois

$$v \in H^n(M; \mathbb{Z}_2) \approx \text{Hom}(H_n(M; \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2).$$

Definição 5.6. Sejam M uma n -variedade suave fechada e r_1, \dots, r_n inteiros não negativos tais que $r_1 + 2r_2 + \dots + nr_n = n$, então o número módulo 2:

$$w_1^{r_1} \smile \dots \smile w_n^{r_n}[M] := (w_1^{r_1}(M) \smile \dots \smile w_n^{r_n}(M))([M])$$

é chamado **número de Stiefel-Whitney** de M associado ao monômio $w_1^{r_1} \smile \dots \smile w_n^{r_n}$.

Quando duas n -variedades suaves fechadas M e M' forem tais que

$$w_1^{r_1} \smile \dots \smile w_n^{r_n}[M] = w_1^{r_1} \smile \dots \smile w_n^{r_n}[M']$$

para todo monômio $w_1^{r_1} \smile \dots \smile w_n^{r_n}$ de dimensão n , então diremos que M e M' possuem os mesmos números de Stiefel-Whitney.

No exemplo a seguir, calcularemos os números de Stiefel-Whitney para o espaço projetivo real $\mathbb{R}P^n$.

Exemplo 5.7. Considere o espaço projetivo real $\mathbb{R}P^n$. Determinaremos os números de Stiefel-Whitney para este espaço.

- Caso n seja par:

Como $w_1(\mathbb{R}P^n) = \binom{n+1}{1}a = (n+1)a = a \neq 0$ e

$$w_n(\mathbb{R}P^n) = \binom{n+1}{n}a^n = (n+1)a^n = a^n \neq 0,$$

temos os seguintes números de Stiefel-Whitney:

- (i) $w_1^n \smile w_2^0 \smile \dots \smile w_n^0[\mathbb{R}P^n] = w_1^n[\mathbb{R}P^n] = a^n[\mathbb{R}P^n] \neq 0$
- (ii) $w_1^0 \smile \dots \smile w_{n-1}^0 \smile w_n^1[\mathbb{R}P^n] = w_n^1[\mathbb{R}P^n] = a^n[\mathbb{R}P^n] \neq 0.$

- Caso n seja uma potência de 2:

Como $W(\mathbb{R}P^n) = (1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) = (1+a^n)(1+a) = 1+a+a^n$, então o único número de Stiefel-Whitney não nulo está relacionado aos monômios $w_1^n \smile w_2^0 \smile \dots \smile w_n^0$ e $w_1^0 \smile \dots \smile w_{n-1}^0 \smile w_n^1$. De fato, pois caso exista

outros inteiros $r_1, \dots, r_n \geq 0$ tais que $r_1 + 2r_2 + \dots + nr_n = n$, então existirá algum $i_0 \in \{2, \dots, n-1\}$ tal que $r_{i_0} \neq 0$. Porém como $w_i(\mathbb{R}P^n) = 0$ para todo $i = 2, \dots, n-1$, então

$$w_1^{r_1} \smile \dots \smile w_n^{r_n}[\mathbb{R}P^n] = w_1^{r_1}(\mathbb{R}P^n) \smile \dots \smile w_{i_0}^{r_{i_0}}(\mathbb{R}P^n) \smile \dots \smile w_n^{r_n}(\mathbb{R}P^n)[\mathbb{R}P^n] = 0.$$

- Caso n seja ímpar:

Caso n seja da forma $2k-1$ com $k \geq 1$, então, note que $W(\mathbb{R}P^n) = (1+a)^{2k} = (1+a^2)^k$ e $w_j(\mathbb{R}P^n) = \binom{2k}{j}a^j = 0$ quando j é ímpar pois $\binom{2k}{j} \equiv 0 \pmod{2}$ para todo j ímpar.

Como todo monômio $w_1^{r_1} \smile \dots \smile w_n^{r_n}$ possui pelo menos um termo w_j onde j é ímpar, então:

$$w_1^{r_1} \smile \dots \smile w_n^{r_n}[\mathbb{R}P^n] = w_1^{r_1}(\mathbb{R}P^n) \smile \dots \smile w_j^{r_j}(\mathbb{R}P^n) \smile \dots \smile w_n^{r_n}(\mathbb{R}P^n)[\mathbb{R}P^n] = 0.$$

Ou seja, todos os números de Stiefel-Whitney de $\mathbb{R}P^n$ são nulos.

- Caso n não seja uma potência de 2:

Para os demais casos, ou seja, quando n é par mas não é uma potência de 2, os números de Stiefel-Whitney podem ser calculados como o produto de coeficientes binomiais.

Apresentaremos uma introdução ao estudo de variedades cobordantes e como uma aplicação dos números de Stiefel-Whitney determinaremos quando tais variedades são fronteira de uma outra variedade suave.

Teorema 5.15 (Pontrjagin). *Seja M uma $(n+1)$ -variedade suave e N uma n -variedade suave. Se $\partial M = N$, então todos os números de Stiefel-Whitney de N são nulos.*

Demonstração. Considere a classe fundamental de homologia relativa

$$[M, N] \in H_{n+1}(M, N; \mathbb{Z}_2)$$

e os homomorfismos

$$\partial_{n+1} : H_{n+1}(M, N; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_n(N; \mathbb{Z}_2)$$

e

$$\delta_n : H^n(M; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{n+1}(M, N; \mathbb{Z}_2)$$

tais que $\partial_{n+1}([M, N]) = [N]$ e para cada $\alpha \in H^n(M; \mathbb{Z}_2)$, a aplicação

$$\delta_n(\alpha) : H_{n+1}(M, N; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$$

é dada por $\delta_n(\alpha)([M, N]) = \alpha(\partial_{n+1}([M, N])) = \alpha([N])$.

Como τ_N é um fibrado Euclidiano, existe um único campo de vetores normais ao longo de N gerando o fibrado trivial ε_N^1 , já que como M é uma $(n+1)$ -variedade suave compacta com fronteira N , então existe $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ aberto contendo N tal que $U \cong N \times (0, 1) \cong N \times \mathbb{R}$.

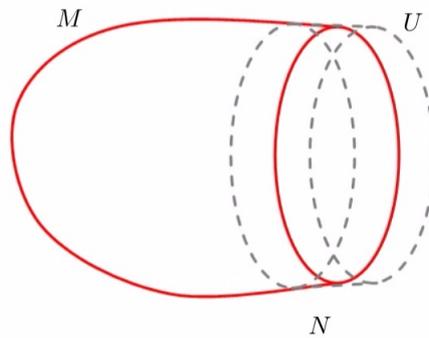


Figura 5.1: Vizinhança U da fronteira N em M

Sendo $i : N \rightarrow M$ a aplicação inclusão, então $i^*\tau_M \cong \varepsilon_N^1 \oplus \tau_N$. Daí, pelas Proposições 5.1 e 5.3, temos:

$$w_k(\tau_N) = w_k(\varepsilon_N^1 \oplus \tau_N) = w_k(i^*\tau_M),$$

para todo $k \geq 0$. Pelo Axioma da Naturalidade,

$$w_k(N) = w_k(i^*\tau_M) = i_k^*(w_k(M)),$$

para todo $k \geq 0$.

Agora, considere os inteiros r_1, \dots, r_n não negativos tais que $r_1 + 2r_2 + \dots + nr_n = n$. Assim,

$$\begin{aligned} w_1^{r_1}(N) \smile \dots \smile w_n^{r_n}(N)[N] &= i_1^*(w_1^{r_1}(M)) \smile \dots \smile i_n^*(w_n^{r_n}(M))[N] \\ &= i_n^*(w_1^{r_1}(M) \smile \dots \smile w_n^{r_n}(M))(\partial_{n+1}([M, N])) \\ &= \delta_n(i_n^*(w_1^{r_1}(M) \smile \dots \smile w_n^{r_n}(M)))[M, N] \\ &= 0 \end{aligned}$$

pois a sequência de cohomologia do par (M, N) :

$$\dots \rightarrow H^{n+1}(M, N; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\delta_n} H^n(M; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{i_n^*} H^n(N; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \dots$$

é exata, ou seja, $Im(\delta_n) \subset Ker(i_n^*)$. Logo, todos os números de Stiefel-Whitney de N são nulos.

□

O teorema a seguir será de extrema importância para os próximos resultados e definições. Devida sua complexidade, não faremos a sua demonstração.

Teorema 5.16 (Thom). *Seja M uma n -variedade suave. Se todos os números de Stiefel-Whitney de M são nulos, então M é fronteira de alguma $(n + 1)$ -variedade suave compacta.*

Demonstração. Ver [20], página 77.

□

Exemplo 5.8. Pelo Exemplo 5.7, segue que $\mathbb{R}P^{2n-1}$ é fronteira de alguma $2n$ -variedade suave compacta e que não existe alguma $(2n + 1)$ -variedade suave compacta com a fronteira sendo a variedade $\mathbb{R}P^{2n}$.

Definição 5.7. Sejam M_1 e M_2 duas n -variedades suaves fechadas. Dizemos que M_1 e M_2 pertencem a mesma **classe de cobordismo**, ou que são **cobordantes**, se a união disjunta $M_1 \cup M_2$ é fronteira de alguma $(n + 1)$ -variedade suave compacta.

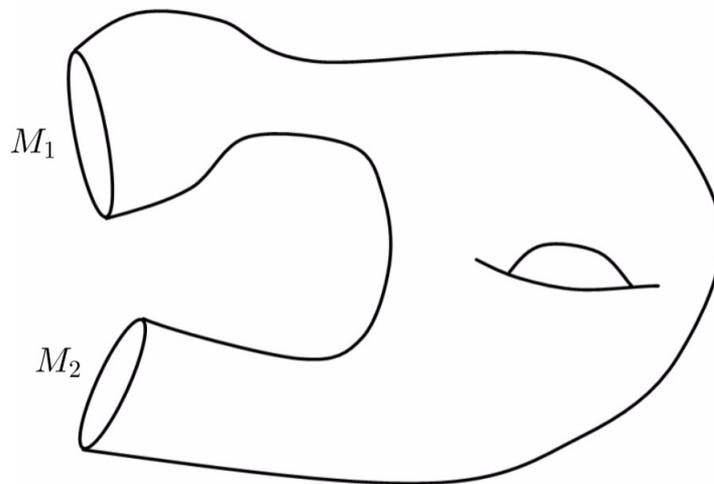


Figura 5.2: Variedades M_1 e M_2 que pertencem a mesma classe de cobordismo.

O próximo resultado segue como consequência do Teorema de Pontrjagin e do Teorema de Thom.

Corolário 5.17. Sejam M_1 e M_2 duas n -variedades suaves fechadas. Então, M_1 e M_2 pertencem a mesma classe de cobordismo se, e somente se, todos os seus respectivos números de Stiefel-Whitney são iguais.

Demonstração. Suponha que M_1 e M_2 pertençam a mesma classe de cobordismo. Assim, $M_1 \cup M_2$ é fronteira de alguma $(n + 1)$ -variedade suave compacta. Logo, pelo Teorema de Pontrjagin, temos que todos os números de Stiefel Whitney de $M_1 \cup M_2$ são nulos. Assim, para r_1, \dots, r_n inteiros não nulos tais que $r_1 + 2r_2 + \dots + nr_n = n$, temos que $w_1^{r_1}(M_1 \cup M_2) \smile \dots \smile w_n^{r_n}(M_1 \cup M_2)[M_1 \cup M_2] = 0$ equivale a

$$w_1^{r_1}(M_1) \smile \dots \smile w_n^{r_n}(M_1)[M_1] + w_1^{r_1}(M_2) \smile \dots \smile w_n^{r_n}(M_2)[M_2] = 0$$

que por sua vez, equivale a dizer que

$$w_1^{r_1}(M_1) \smile \dots \smile w_n^{r_n}(M_1)[M_1] = w_1^{r_1}(M_2) \smile \dots \smile w_n^{r_n}(M_2)[M_2].$$

Portanto, todos os respectivos números de Stiefel-Whitney de M_1 e M_2 coincidem.

Recíprocamente, suponha que todos os números de Stiefel-Whitney de M_1 e M_2 são iguais. Daí, pela equivalência vista acima,

$$w_1^{r_1}(M_1 \cup M_2) \smile \dots \smile w_n^{r_n}(M_1 \cup M_2)[M_1 \cup M_2] = 0,$$

para quaisquer inteiros não negativos r_1, \dots, r_n tais que $r_1 + 2r_2 + \dots + nr_n = n$. Então, todos os números de Stiefel-Whitney para $M_1 \cup M_2$ são nulos. Consequentemente, pelo Teorema de Thom, temos que $M_1 \cup M_2$ é fronteira de alguma $(n + 1)$ -variedade suave compacta. Logo, M_1 e M_2 pertencem a mesma classe de cobordismo. □

Exemplo 5.9. A esfera S^2 e o espaço projetivo real $\mathbb{R}P^2$ não pertencem a mesma classe de cobordismo.

5.4 Unicidade das classes de Stiefel-Whitney

Teorema 5.18. *Seja $\xi = (E, \pi, B)$ um fibrado vetorial com B um espaço topológico paracompacto. Então, existe, no máximo uma correspondência entre o fibrado ξ e a classe total de Stiefel-Whitney $W(\xi)$ tal que a sequência de classes de cohomologia $w_i(\xi) \in H^i(B; \mathbb{Z}_2)$ satisfaz os quatro axiomas descritos na Seção 5.1.*

Demonstração. Suponhamos que existam duas correspondências

$$\xi \rightarrow W(\xi) \quad \text{e} \quad \xi \rightarrow \widetilde{W}(\xi)$$

tais que as classes de cohomologia $w_i(\xi), \tilde{w}_i(\xi) \in H^i(B; \mathbb{Z}_2)$ satisfazem os quatro axiomas que caracterizam as classes de Stiefel-Whitney.

Pelo Axioma da Dimensão e o Axioma da Normalização, temos que:

$$W(\gamma_1^1) = \widetilde{W}(\gamma_1^1) = 1 + a,$$

onde a é o gerador do grupo $H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}_2)$.

Consideremos a inclusão $i : E(\gamma_1^1) \rightarrow E(\zeta^1)$. Como i é uma aplicação fibrada de γ_1^1 em ζ^1 , temos a inclusão $j : \mathbb{R}P^1 \rightarrow \mathbb{R}P^\infty$ como aplicação correspondente nos espaços bases. Daí, temos que $\gamma_1^1 \cong j^*\zeta^1$. portanto, pelo Axioma da Naturalidade, segue que:

$$w_k(\gamma_1^1) = j_k^*(w_k(\zeta^1)) \quad \text{e} \quad \tilde{w}_k(\gamma_1^1) = j_k^*(\tilde{w}_k(\zeta^1)),$$

para todo $k \geq 0$. Além disso, como ζ^1 é um fibrado linha, $w_k(\zeta^1) = \tilde{w}_k(\zeta^1) = 0$ para todo $k > 1$.

Por outro lado,

$$j_1^*(w_1(\zeta^1)) = w_1(\gamma_1^1) = a \neq 0 \quad \text{e} \quad j_1^*(\tilde{w}_1(\zeta^1)) = \tilde{w}_1(\gamma_1^1) = a \neq 0$$

Como $j_1^* : H^1(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}_2)$ é um homomorfismo, aplica gerador em gerador. Assim,

$$w_1(\zeta^1) = \tilde{w}_1(\zeta^1) = b$$

em que $\langle b \rangle = H^1(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2)$. Portanto,

$$W(\zeta^1) = \widetilde{W}(\zeta^1) = 1 + b.$$

Considere agora as projeções $p_i : \underbrace{\mathbb{R}P^\infty \times \dots \times \mathbb{R}P^\infty}_{n\text{-vezes}} \rightarrow \mathbb{R}P^\infty$ com $a_i = (p_i)^*(a)$

Seja $\eta = \underbrace{\zeta^1 \times \dots \times \zeta^1}_{n\text{-vezes}}$, então pelo Lema 3.7 $\eta \cong \underbrace{p_1^*\zeta^1 \oplus \dots \oplus p_n^*\zeta^1}_{n\text{-vezes}}$. Então, usando os

Axiomas da Naturalidade e o do Teorema do produto de Whitney, temos que:

$$W(\eta) = \widetilde{W}(\eta) = (1 + a_1) \smile \dots \smile (1 + a_n).$$

Como η é um n -fibrado sobre o espaço base $\underbrace{G_1 \times \dots \times G_1}_{n\text{-vezes}}$ que é paracompacto, então segue do Teorema 3.16 que existe uma aplicação fibrada de η em ζ^n ; a saber:

$g : E(\eta) \rightarrow E(\zeta^n)$. Assim, temos a aplicação correspondente nos espaços bases

$$\bar{g} : \underbrace{\mathbb{R}P^\infty \times \dots \times \mathbb{R}P^\infty}_{n\text{-vezes}} \rightarrow G_n,$$

obtendo a seguinte aplicação nos grupos de cohomologia:

$$\bar{g}_k^* : H^k(G_n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^k(\underbrace{\mathbb{R}P^\infty \times \dots \times \mathbb{R}P^\infty}_{n\text{-vezes}}; \mathbb{Z}_2),$$

que é um isomorfismo sobre a imagem, ou seja, \bar{g}_k^* aplica $H^k(G_n; \mathbb{Z}_2)$ injetivamente em $H^k(\underbrace{\mathbb{R}P^\infty \times \dots \times \mathbb{R}P^\infty}_{n\text{-vezes}}; \mathbb{Z}_2)$ para todo $k \geq 0$. Logo,

$$\bar{g}_k^*(w_k(\zeta^n)) = w_k(\eta) = \tilde{w}_k(\eta) = \bar{g}_k^*(\tilde{w}_k(\zeta^n))$$

Assim, $w_k(\zeta^n) = \tilde{w}_k(\zeta)$ para todo $k \geq 0$.

Por fim, seja $\xi = (E, \pi, B)$ um n -fibrado qualquer sobre um espaço base paracompacto. Pelo Teorema 3.16, existe uma aplicação fibrada $f : E \rightarrow E(\zeta^n)$ de ξ em ζ^n com a aplicação correspondente nos espaços base $\bar{f} : B \rightarrow G_n$ que induz a aplicação $\bar{f}_k^* : H^k(G_n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^k(B; \mathbb{Z}_2)$. Daí,

$$w_k(\xi) = \bar{f}_k^*(w_k(\zeta^n)) = \bar{f}_k^*(\tilde{w}_k(\zeta^n)) = \tilde{w}_k(\xi).$$

Portanto, $W(\xi) = \tilde{W}(\xi)$, isto é, as classes de Stiefel-Whitney são unicamente determinadas.

□

Capítulo 6

Considerações finais

Alguns problemas em Matemática podem ser abordados usando a noção de fibrados vetoriais. Em nosso contexto, o objetivo foi determinar a existência de um k -campo vetorial contínuo de vetores tangentes linearmente independentes sobre uma variedade. Em particular, o caso $k = 1$, foi solucionado através do clássico teorema de Poincaré-Hopf (Teorema 1.4). Para $k > 1$, o Capítulo 4 apresenta uma forma de solucionar o problema. Devido a dificuldade para a utilização de algumas ferramentas apresentadas para estudar o problema em discussão, matemáticos conseguiram encontrar uma equivalência destas ferramentas com outras mais fáceis de manusear que são as classes de cohomologia satisfazendo determinados axiomas.

As classes características são classes de cohomologia associadas a algum fibrado vetorial. De maneira geral, as classes características representam o quanto um fibrado vetorial é, ou deixa de ser trivial. Existem dois tipos principais de classes características para variedades suaves:

- (i) As *classes de Stiefel-Whitney* associadas a um fibrado vetorial real $\xi = (E, \pi, B)$ são classes de cohomologia singular $w_i(\xi) \in H^i(B; \mathbb{Z}_2)$;
- (ii) As classes de Chern associadas ao fibrado vetorial complexo ¹ $\xi = (E, \pi, B)$ são classes de cohomologia singular $w_i(\xi) \in H^{2i}(B; \mathbb{Z})$;

Além destes dois tipos citados acima, existem também as classes de Pontrjagin e a de Euler também associadas a fibrados vetoriais. Estas classes também possuem bastante significado na matemática.

Neste trabalho, apresentamos a definição geométrica e a abordagem axiomática e alguns resultados e consequências das classes de Stiefel-Whitney. A existência de tais

¹Um fibrado vetorial complexo possui os mesmos elementos e características já descritos, porém cada fibra é um espaço vetorial sobre \mathbb{C}^n

classes foi definida através da construção pela teoria de obstrução. Em [16] encontra-se dois grandes e relevantes resultados a respeito do tema abordado, a saber:

- (i) As classes definidas através de obstrução primária equivalem às classes que satisfazem os quatro axiomas descritos no capítulo anterior; e
- (ii) Existem classes de cohomologia que satisfazem os tais axiomas.

Sobre a existência, neste trabalho vimos que estas classes realmente existem. Em [16] é adotado um outro ponto de vista para essa teoria.

Devido ao déficit de materiais em português e detalhes a respeito dos temas abordados aqui, este trabalho destina-se também aos estudantes iniciantes na área como um material de pesquisa e estudo contendo alguns pontos centrais da teoria.

Referências Bibliográficas

- [1] ARTEAGA, J. A. S., *Classificação de espaços fibrados* (Dissertação de mestrado), UFPR, Curitiba-PR, 2003.
- [2] BARBOSA, A. MELGES, *Classes de Stiefel-Whitney e de Euler* (Dissertação de mestrado), UNESP - Campus São José do Rio Preto, 2017.
- [3] BOTT, R. & LORING W. TU, *Differential Forms In Algebraic Topology*, New York: Springer-Verlag New York, 1982.
- [4] BRASSELET, J. P., *Characteristic Classes and Singular Varieties*, Notas de aula: ICMC-USP, 2002.
- [5] DUARTE, P. , *Uma introdução à Topologia Diferencial*, Notas de aula: Universidade de Lisboa, 2016.
- [6] GARCIA, A. & LEQUIAN, Y., *Elementos de Álgebra*, IMPA, Rio de Janeiro, RJ, 2003.
- [7] GUILLEMIN, V. & POLLACK, A., *Differential topology*, Prentice Hall, 1974.
- [8] HATCHER, A., *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2001.
- [9] HATCHER, A., *Vector Bundles and K-theory*, Cambridge University Press, 2003.
- [10] LIMA, E. L., *Álgebra Linear*, IMPA: Coleção textos universitários, 2a Ed. Rio de Janeiro, 1996.
- [11] LIMA, E. L., *Elementos de Topologia Geral*, IMPA: Coleção textos universitários, Rio de Janeiro, RJ, 2014.
- [12] LIMA, E. L., *Homologia Básica*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, RJ, 2009.
- [13] LIMA, E. L., *Introdução à Topologia Diferencial*, IMPA, Rio de Janeiro, RJ, 1961.
- [14] LIMA, E. L., *Variedades diferenciáveis*, IMPA, Rio de Janeiro, RJ, 2007.

- [15] LOIBEL, G. F., *Introdução a Teoria da Obstrução*, Escola de Engenharia de São Carlos, N° 81, 1963.
- [16] MILNOR, J. W. & STASHEFF, J. D., *Characteristic classes*, Annals of Mathematics Studies, No 76, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1974.
- [17] MUNKRES, J. R., *Elements of algebraic topology*, Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 1984.
- [18] MUNKRES, J. R., *Topology*, Pearson 2a Ed., 2000.
- [19] MUNKRES, J. R., *Topology: from the differential viewpoint*, University Press of Virginia, Charlottesville, 1965.
- [20] THOM, R., *Quelques propriétés globales des variétés différentiables*, Comment. Math. Helv. 28, n. 1-3, (1954), 17-86.