

Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Mestrado em Matemática

# Uma Introdução à Homologia de Interseção Simplicial

Thiago de Paiva Souza

JOÃO PESSOA – PB  
AGOSTO DE 2019

Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Mestrado em Matemática

# Uma Introdução à Homologia de Interseção Simplicial

por

Thiago de Paiva Souza

sob a orientação do

Prof. Dr. Roberto Callejas Bedregal

João Pessoa – PB  
Agosto de 2019

**Catálogo na publicação**  
**Seção de Catalogação e Classificação**

S729i Souza, Thiago de Paiva.  
Uma Introdução à Homologia de Interseção Simplicial /  
Thiago de Paiva Souza. - João Pessoa, 2019.  
58 f. : il.

Orientação: Roberto Callejas Bedregal.  
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN-DM.

1. Matemática. 2. Topologia Algébrica. 3. Homologia de  
Interseção. 4. Dualidade de Poincaré Generalizada. 5.  
Pseudovarietades. I. Bedregal, Roberto Callejas. II.  
Título.

UFPB/BC

# Uma Introdução à Homologia de Interseção Simplicial

por

Thiago de Paiva Souza <sup>1</sup>

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Topologia

Aprovada em 30 de agosto de 2019.

Banca Examinadora:



---

Prof. Dr. Roberto Callejas Bedregal – UFPB  
(Orientador)



---

Prof. Dr. Rodrigo Mendes Pereira – UNILAB  
(Examinador Externo)



---

Prof. Dr. Aurélio Menegon Neto – UFPB  
(Examinador Interno)

---

<sup>1</sup>O autor foi bolsista da CAPES durante a elaboração desta dissertação.

*Sempre a Deus*

# Agradecimentos

A Deus por tudo.

A minha família.

Aos grandes professores Roberto e Napoleon por orientarem este trabalho, sendo o professor Napoleon o coorientador deste trabalho. Os seminários do professor Napoleon e as dicas do professor Roberto foram fundamentais para a realização e entendimento deste trabalho. Foi muito importante também as boas referências que o Professor Napoleon conseguiu achar.

Aos professores Pedro Hinojosa, Lizandro e Pedro Venegas pelas dicas e por estarem sempre presente nos nossos seminários que gerou este trabalho.

Aos professores com os quais eu tive aula durante o curso, em especial ao professor Ricardo.

Aos colegas do curso de matemática da pós-graduação e graduação.

Aos professores Rodrigo Mendes e Aurélio Menegon por terem aceitado participar da banca e pelas suas contribuições a este trabalho.

# Resumo

Nesta dissertação, estudamos a homologia de interseção simplicial, como introduzida por M. Goresky e R. MacPherson em 1978 no artigo [3]. O principal resultado desta dissertação é a demonstração do teorema da dualidade de Poincaré generalizada da homologia de interseção para pseudovarietades.

**Palavras-chave:** Homologia de Interseção, Dualidade de Poincaré Generalizada, Pseudovarietades.

# Abstract

In this dissertation we study the simplicial intersection homology as introduced by M. Goresky e R. MacPherson in 1978 in the article [3]. The main result of this dissertation is the demonstration of the generalized Poincaré duality theorem of the intersection homology theory for pseudomanifolds.

**Keywords:** Intersection Homology, Generalized Poincaré Duality, Pseudomanifolds.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>1 Teorema da Dualidade de Poincaré</b>	<b>3</b>
1.1 Teorema da Dualidade de Poincaré: Primeira Versão . . . . .	3
1.2 Teorema da Dualidade de Poincaré: Segunda Versão . . . . .	12
1.3 Produto Interseção . . . . .	17
<b>2 Homologia de Interseção</b>	<b>28</b>
2.1 Pseudovarietades . . . . .	28
2.2 Definição . . . . .	32
2.3 Produto Interseção para Pseudovarietades . . . . .	41
2.4 Relação entre $Q_i^p$ e $IH_i^p(X)$ e Consequências Importantes . . . . .	46
2.5 Teorema da Dualidade de Poincaré Generalizada . . . . .	53
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>58</b>

# Introdução

O teorema da dualidade de Poincaré diz que se  $X$  é uma  $n$ -variedade topológica compacta e orientável então

$$H^p(X; G) \simeq H_{n-p}(X; G)$$

para todo grupo abeliano  $G$  e todo  $p$ .

Usando fortemente esse resultado, muitas teorias foram criadas e muitos teoremas foram descobertos para variedades. Porém, era sabido que esse teorema falha para espaços singulares, até mesmo para espaço singular não muito complicado, como espaço com uma única singularidade isolada. Daí, isso motivou os matemáticos M. Goresky e R. MacPherson a criar uma teoria de homologia para uma classe de espaços singulares, chamadas pseudovariedades, que generalizasse a clássica e de tal forma que valesse alguma versão do teorema da dualidade de Poincaré, que eles chamaram mais precisamente de teorema da dualidade de Poincaré generalizada.

Esta dissertação tem como principal objetivo provar o famoso e importante teorema da dualidade de Poincaré generalizada na teoria de homologia de interseção simplicial para pseudovariedades, assim como feito por M. Goresky e R. MacPherson no artigo [3].

Esta dissertação consiste de dois capítulos. No primeiro capítulo, provaremos a dualidade de Poincaré para variedades e veremos os motivos pelos quais esse resultado não vale sobre os espaços singulares. No segundo capítulo, definiremos e estudaremos as pseudovariedades, sobre as quais iremos, posteriormente, definir a homologia de interseção. E assim, na última seção, iremos demonstrar a dualidade de Poincaré generalizada sobre as pseudovariedades para a homologia de interseção.

# Capítulo 1

## Teorema da Dualidade de Poincaré

Este capítulo tem como principal objetivo demonstrar o teorema da dualidade de Poincaré para variedades topológicas. Neste percurso iremos ver os motivos pelos quais esse maravilhoso teorema falha em espaços singulares.

Na primeira seção, iremos definir alguns elementos básicos e anunciar alguns resultados preliminares, muitos dos quais não iremos provar (porém suas provas se encontram na referência citada abaixo), para assim demonstrar a primeira versão do teorema da dualidade de Poincaré.

Na segunda seção, iremos provar novamente a dualidade de Poincaré, porém usando alguns novos elementos que nos permitirão entender melhor esse isomorfismo.

Na última seção falaremos sobre o produto interseção, que é um produto em homologia e resulta em outra forma de demonstrar a dualidade de Poincaré.

### 1.1 Teorema da Dualidade de Poincaré: Primeira Versão

Nesta seção, vamos demonstrar o teorema da dualidade de Poincaré de uma forma mais intuitiva. Essa primeira demonstração é fundamental para que entendarmos melhor a segunda demonstração que daremos na próxima seção; essa segunda demonstração é mais importante, pois vai nos dar mais informações importantes sobre esse resultado, porém ela é um pouco mais trabalhosa.

Esta, a segunda e parte da terceira seção são baseadas no último capítulo da referência [1]. Logo, um bom entendimento dos outros capítulos da mesma referência seria bom para o entendimento deste trabalho como um todo.

Para videos online sobre Topologia Algébrica, acessar <https://www.youtube.com/playlist?list=PLo4jXE-LdDTTDwvxhYHZm-yU5XHLR5o9D> e [https://www.youtube.com/playlist?list=PLo4jXE-LdDTQC\\_6Y1LNETcCHLjNwwN8UM](https://www.youtube.com/playlist?list=PLo4jXE-LdDTQC_6Y1LNETcCHLjNwwN8UM)

Neste trabalho, vamos sempre considerar que todos os espaços topológicos são  $PL$ -espaços.

**Definição 1.1.** Um espaço topológico  $Y$  é equipado com uma  $PL$ -estrutura se existe uma classe  $\wp$  de triangulações localmente finitas de  $Y$  tal que

- cada subdivisão baricêntrica ou linear de uma triangulação de  $\wp$  ainda está em  $\wp$ , e
- duas triangulações de  $\wp$  tem uma subdivisão comum em  $\wp$ .

Sejam  $(X, \wp_X)$  e  $(Y, \wp_Y)$   $PL$ -espaços. Uma  $PL$ -aplicação entre eles,  $f : (X, \wp_X) \rightarrow (Y, \wp_Y)$ , é uma aplicação para a qual existem triangulações  $T_X \in \wp_X$  e  $T_Y \in \wp_Y$  tais que a imagem de qualquer simplexo de  $T_X$  está contido em um simplexo de  $T_Y$ .

Se  $Y$  tem uma  $PL$ -estrutura, em particular,  $Y$  é triangularizável. Porém, na literatura matemática já existem exemplos de espaços triangularizáveis de dimensão maior do que 4 que não admitem uma  $PL$ -estrutura.

Para esses espaços que admitem uma  $PL$ -estrutura, sabemos que podemos usar tanto a teoria de homologia e cohomologia simplicial quanto a singular visto que teremos resultados isomorfos. Sendo assim, neste capítulo iremos usar ambas, mas na maioria das vezes estaremos usando a simplicial, porém o contexto deixará claro qual estamos usando. No próximo capítulo iremos usar só a teoria simplicial.

Para provar o teorema da dualidade de Poincaré vamos construir um novo complexo de cadeias que tem homologia e cohomologia isomorfo com a homologia e cohomologia simplicial ou singular de  $X$ , onde  $X$  é uma variedade topológica, e perceberemos sua naturalidade na prova do teorema.

Seja  $K$  um complexo simplicial. Podemos definir uma ordem parcial nos vértices da primeira subdivisão baricêntrica  $sd(K)$  de  $K$  da seguinte forma: consideremos  $v_1, v_2 \in sd(K)$  que são baricentros de  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , respectivamente, e  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  são faces de um único simplexo de  $K$ . Então,

$$v_1 \leq v_2 \Leftrightarrow v_1 = v_2 \text{ ou } \dim(\sigma_1) < \dim(\sigma_2).$$

Chamamos essa ordem de ordem padrão. Percebemos que essa ordem é total quando restrita aos vértices de um simplexo de  $sd(K)$ .

**Definição 1.2.** Seja  $K$  um complexo simplicial localmente finito e  $sd(K)$  sua primeira subdivisão baricêntrica. Para cada simplexo  $\sigma$  de  $K$  definimos o bloco dual  $D(\sigma)$  de  $\sigma$  como sendo a união de todos os simplexos abertos de  $sd(K)$  tais que  $\hat{\sigma}$  é o menor vértice na ordem padrão, onde  $\hat{\sigma}$  é o baricentro de  $\sigma$ . Seu fecho  $\overline{D}(\sigma)$  chamamos de bloco dual fechado de  $\sigma$ . O bordo de  $D(\sigma)$  denotamos por  $\dot{D}(\sigma)$ , ou seja  $\dot{D}(\sigma) = \overline{D}(\sigma) \setminus D(\sigma)$ .

**Lema 1.1.** Seja  $K$  um complexo simplicial localmente finito e  $sd(K)$  sua primeira subdivisão baricêntrica. Para cada simplexo  $\sigma$  de  $K$  temos que

$$D(\sigma) = \{\text{int}(\tau) \subset sd(K) \mid \tau \text{ simplexo de } sd(K) \text{ e } \tau \cap \sigma = \{\hat{\sigma}\}\},$$

onde  $\hat{\sigma}$  é o baricentro de  $\sigma$ .

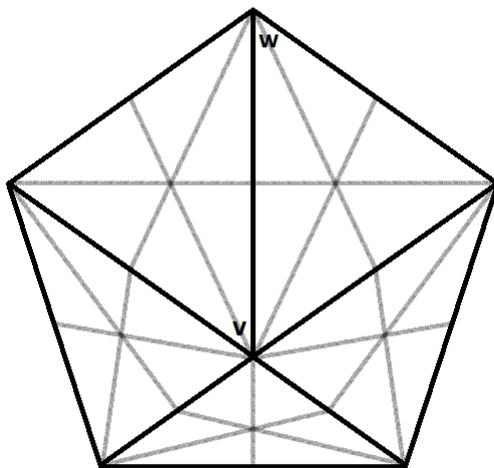


Figura 1.1: Complexo Simplicial  $K$ .

**Exemplo 1.1.** Seja  $K$  o complexo simplicial ilustrado na figura 1.1. O bloco dual do segmento  $wv$  é o segmento aberto ilustrado em azul na figura 1.2. Já o bloco dual do vértice  $v$  é o interior da região ilustrada em azul na figura 1.3. O bloco dual de qualquer 2-simplexo é seu baricentro.

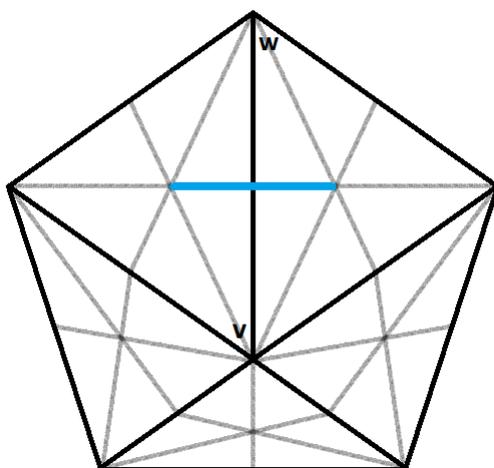


Figura 1.2:  $D(wv)$ .

**Proposição 1.2.** Seja  $K$  um complexo simplicial localmente finito que consiste inteiramente de  $n$ -simplexos e suas faces. Considere  $\sigma$  um  $k$ -simplexo de  $K$ .

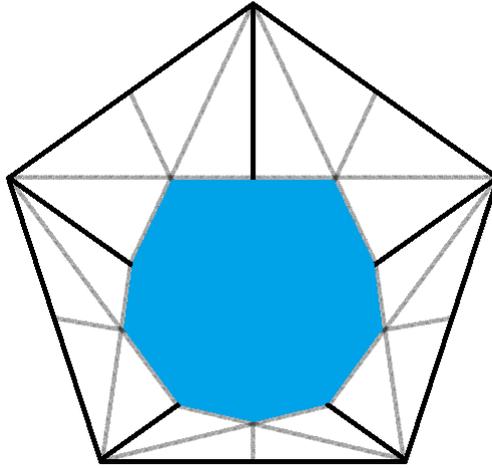


Figura 1.3:  $D(v)$ .

- Os blocos duais são disjuntos e a união de todos eles é o conjunto  $|K|$ .
- $\overline{D}(\sigma)$  é o polítopo de um subcomplexo de  $\text{sd}(X)$  de dimensão  $n - k$ .
- $\dot{D}(\sigma)$  é a união de todos os blocos duais  $D(\tau)$  tais que  $\sigma$  é uma face própria de  $\tau$ . Esses blocos duais têm dimensão menor do que  $n - k$ .
- $\overline{D}(\sigma)$  é igual ao cone  $|\dot{D}(\sigma) * \hat{\sigma}|$ . Portanto,  $\overline{D}(\sigma)$  é acíclico.
- Se  $H_n(X, X - \hat{\sigma}) = \mathbb{Z}$  e  $H_i(X, X - \hat{\sigma}) = 0$  para  $i \neq n$ , então  $\dot{D}(\sigma)$  é uma  $(n - k - 1)$ -esfera homológica, ou seja,  $\dot{D}(\sigma)$  tem a mesma homologia de uma esfera de dimensão  $n - k - 1$ , mais precisamente  $H_{n-k-1}(\dot{D}(\sigma)) = \mathbb{Z}$  e  $H_i(\dot{D}(\sigma)) = 0$  se  $i \neq n - k - 1$ ; e  $(\overline{D}(\sigma), \dot{D}(\sigma))$  tem a homologia da bola  $\overline{B_{n-k}(0)}$  módulo seu bordo, ou seja,  $H_{n-k}(\overline{D}(\sigma), \dot{D}(\sigma)) = \mathbb{Z}$  e  $H_i(\overline{D}(\sigma), \dot{D}(\sigma)) = 0$  para  $i \neq n - k$ .

**Exemplo 1.2.** A técnica que vamos usar para demonstrar o teorema da dualidade de Poincaré usa fortemente essa proposição. Porém, desde cedo, já conseguimos enxergar o motivo pelo qual não conseguimos usar essa mesma técnica para demonstrar a dualidade de Poincaré para espaços singulares. Por exemplo, seja o toro pinçado da figura 1.4. O bloco dual do vértice  $v$  é um cone aberto. Logo,  $\dot{D}(v)$  é uma união disjunta de dois círculos  $\mathbb{S}^1$  que obviamente não tem a homologia de um único círculo  $\mathbb{S}^1$ .

**Definição 1.3.** Sejam  $Y$  um espaço topológico e  $y \in Y$ . Os grupos

$$H_p(Y, Y - y)$$

são chamados de grupos de homologia local de  $Y$  no ponto  $y$ .

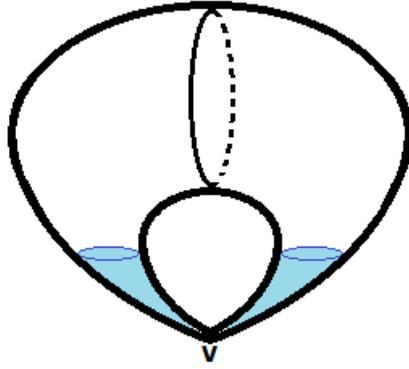


Figura 1.4: Toro Pinçado.

Seja  $A$  um subconjunto de  $Y$  que contém uma vizinhança de  $y$ . Como  $Y - \text{int}(A)$  é fechado e  $Y - A \subset Y - \text{int}(A)$ , temos que

$$\overline{Y - A} \subset Y - \text{int}(A) \subset Y - \{y\} = \text{int}(Y - y).$$

Logo, pelo teorema da excisão,

$$H_p(Y, Y - y) \simeq H_p(Y - (Y - A), Y - y - (Y - A)) = H_p(A, A - y).$$

Portanto, os grupos de homologia local dão informações locais de  $Y$ .

Perceberemos que o teorema da dualidade de Poincaré vai valer para objetos mais gerais do que variedades topológicas: objetos que não são necessariamente variedades, mas têm os mesmos grupos de homologia local de variedades topológicas.

**Definição 1.4.** Um espaço topológico  $X$  é uma  $n$ -variedade homológica se para cada  $x \in X$ ,  $H_n(X, X - x) = \mathbb{Z}$  e  $H_i(X, X - x) = 0$  para  $i \neq n$ .

Toda variedade topológica é uma variedade homológica, pois se  $X$  é uma  $n$ -variedade topológica e dado  $x \in X$ , existe um aberto  $U$  de  $X$  homeomorfo ao  $\mathbb{R}^n$  tal que  $x \in U$ . Logo,

$$H_i(X, X - \{x\}) \simeq H_i(U, U - \{x\}) \simeq H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \simeq \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{R}^n - \{0\}) \simeq \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1}).$$

O segundo isomorfismo segue da existência de um homeomorfismo entre  $U$  e  $\mathbb{R}^n$  que manda  $x$  para 0; o terceiro isomorfismo acontece por causa que  $\mathbb{R}^n$  é contrátil; por fim, o último isomorfismo é porque  $\mathbb{S}^{n-1}$  é um retrato de deformação de  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ . Se  $n > 1$ , temos que  $\tilde{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) = \mathbb{Z}$  e  $\tilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1}) = 0$  para  $i \neq n$ ; já se  $n = 1$ , então  $\tilde{H}_0(\mathbb{S}^0) = \mathbb{Z}$ . Portanto,  $X$  é uma  $n$ -variedade homológica

Na página 376 da referência [1], o autor esboça uma  $n$ -variedade homológica que não é uma variedade topológica.

Se  $X$  é uma  $n$ -variedade homológica, então a hipótese do último item da proposição 1.2 acontece para cada simplexo de  $X$ .

**Definição 1.5.** Seja  $X$  um complexo simplicial localmente finito que é uma  $n$ -variedade homológica. A coleção dos blocos duais  $D(\sigma)$  de  $X$  é chamada de uma decomposição por blocos duais de  $X$ . Denotamos por  $X_p$  a coleção de todos os blocos duais de  $X$  de dimensão menor ou igual a  $p$  e o chamamos de  $p$ -esqueleto dual de  $X$ . Os grupos

$$D_p(X) = H_p(X_p, X_{p-1})$$

juntos com os operadores bordos definidos pela composição

$$D_p(X) = H_p(X_p, X_{p-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(X_{p-1}) \xrightarrow{j_*} D_{p-1}(X) = H_{p-1}(X_{p-1}, X_{p-2}),$$

onde  $\partial_*$  é o homomorfismo induzido pelo operador bordo  $\partial$  e  $j_*$  é induzido pela inclusão  $j$ , formam um complexo de cadeia  $D(X)$  chamado de complexo de cadeia dual de  $X$ .

**Proposição 1.3.** Seja  $X$  um complexo simplicial localmente finito que é uma  $n$ -variedade homológica. Então,

- O grupo  $H_i(X_p, X_{p-1})$  se anula se  $i \neq p$  e é abeliano livre se  $i = p$ . Uma base para  $D_p(X)$  é obtida escolhendo um gerador para cada grupo  $H_p(\overline{D}(\sigma), \dot{D}(\sigma))$ , com  $D(\sigma)$  variando sobre todos os  $p$ -blocos duais de  $X$ , e pegando suas imagens sobre o homomorfismo induzido pela inclusão em  $H_p(X_p, X_{p-1})$ .
- O complexo de cadeia dual  $D(X)$  computa a homologia e cohomologia de  $X$ . Mais precisamente, o grupo  $D_p(X)$  é igual ao subgrupo de  $C_p(\text{sd}(X))$  consistindo de todas as cadeias  $c_p$  de  $C_p(\text{sd}(X))$  carregadas por  $X_p$  cujos bordos são carregados por  $X_{p-1}$ , ou seja,  $c_p$  se anula em todos os  $p$ -simplexos de  $C_p(\text{sd}(X))$  que não estão em  $X_p$  e  $\partial c_p$  se anula em todos os  $(p-1)$ -simplexos de  $C_{p-1}(\text{sd}(X))$  que não estão em  $X_{p-1}$ . E a inclusão  $D_p(X) \rightarrow C_p(\text{sd}(X))$  induz um isomorfismo em cohomologia e homologia com coeficientes em grupos abelianos arbitrários.

**Definição 1.6.** Seja  $X$  uma  $n$ -variedade homológica compacta e conexa. Dizemos que  $X$  é orientável se é possível orientar todos os  $n$ -simplexos  $\sigma_i$  de  $X$  tal que a soma de todos  $\gamma = \sum \sigma_i$  é um ciclo. Neste caso, vamos chamar  $\gamma$  de um ciclo de orientação de  $X$ . Se  $X$  não é conexa, dizemos que  $X$  é orientável se cada componente conexa é orientável, e definimos um ciclo de orientação de  $X$  como sendo a soma dos ciclos de orientações de cada componente conexa de  $X$ .

**Teorema 1.4.** *Seja  $X$  uma  $n$ -variedade homológica compacta. Se  $X$  é orientável, então existe um isomorfismo*

$$H^p(X; G) \simeq H_{n-p}(X; G)$$

para todo grupo abeliano  $G$  e todo  $p$ . Se  $X$  não é necessariamente orientável, então existe um isomorfismo

$$H^p(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq H_{n-p}(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

para todo  $p$ .

**Prova.** Seja  $\sigma$  um  $p$ -simplexo orientado de  $X$ . Denotamos por  $\sigma^*$  a  $p$ -cocadeia tal que  $\sigma^*$  é 1 em  $\sigma$  e zero nos outros  $p$ -simplexos diferente de  $\sigma$ . As cocadeias dessa forma formam uma base do grupo abeliano livre  $C^p(X)$  de rank finito. A aplicação  $\Phi : C^p(X) \rightarrow D_{n-p}(X) = H_p(X_p, X_{p-1})$  que leva  $\sigma^*$  para um gerador de  $H_{n-p}(\overline{D}(\sigma), \dot{D}(\sigma))$  é bijetiva pelo primeiro item da proposição 1.3. Logo, essa aplicação se estende por linearidade para um isomorfismo. Mas isso ainda não garante que essa aplicação induz um isomorfismo em homologia. Porém,  $X$  sendo orientável, podemos escolher o sinal de  $\Phi(\sigma^*)$  de tal modo que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} C^{p-1}(X) & \xrightarrow{\Phi} & D_{n-p+1}(X) \\ \downarrow \delta & & \downarrow \partial \\ C^p(X) & \xrightarrow{\Phi} & D_{n-p}(X) \end{array}$$

comute, como veremos. E daí, teremos um isomorfismo entre  $H^p(X)$  e  $H_{n-p}(D_{n-p}(X))$ , porém, pela proposição 1.3,  $H_{n-p}(D_{n-p}(X)) \simeq H_{n-p}(X)$ , e assim provaremos o caso quando  $G = \mathbb{Z}$ .

Primeiramente, vamos orientar todos os  $n$ -simplexos  $\sigma$  de  $X$  de tal modo que a soma de todos eles,  $\gamma = \Sigma\sigma$ , seja um ciclo e os outros simplexos de dimensões menores do que  $n$  orientamos arbitrariamente.

Vamos definir  $\Phi$  por indução. Vamos começar com o caso  $n$ . Seja, então,  $\sigma$  um  $n$ -simplexo orientado. O bloco dual de  $\sigma$  é simplesmente seu baricentro  $\hat{\sigma}$ . Logo,  $H_{n-p}(\overline{D}(\sigma), \dot{D}(\sigma)) = H_0(\hat{\sigma})$ . Daí, definamos  $\Phi(\sigma^*) = \hat{\sigma}$ . E assim temos um isomorfismo

$$\Phi : C^n(X) \rightarrow D_0(X).$$

Vamos, agora, definir  $\Phi$  em dimensão  $n - 1$ . Seja  $s$  um  $(n - 1)$ -simplexo orientado. Sabemos que  $s$  é face de exatamente dois  $n$ -simplexos,  $\sigma_0$  e  $\sigma_1$ . Como  $\partial\gamma = 0$ , então

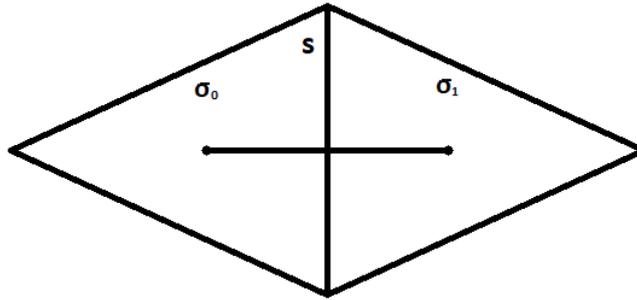


Figura 1.5: O simplexo  $s$  é face unicamente de os simplexos  $\sigma_0$  e  $\sigma_1$ .

$\partial\sigma_0(s) + \partial\sigma_1(s) = 0$ . Daí, podemos supor que  $\partial\sigma_0(s) = -1$  e  $\partial\sigma_1(s) = 1$ . Logo,

$$\delta s^* = -\sigma_0^* + \sigma_1^*,$$

e com isso

$$\Phi(\delta s^*) = -\widehat{\sigma}_0 + \widehat{\sigma}_1,$$

como definimos anteriormente. Sabemos que o bloco dual  $\overline{D}(s)$  é a união de o segmento de  $\widehat{s}$  para  $\widehat{\sigma}_0$  com o segmento de  $\widehat{s}$  para  $\widehat{\sigma}_1$ . Daí, definamos

$$\Phi(s^*) = [\widehat{\sigma}_0, \widehat{s}] + [\widehat{s}, \widehat{\sigma}_1].$$

Claro que  $\Phi(s^*)$  é um ciclo fundamental para  $H_1(\overline{D}(s), \dot{D}(s))$ , e

$$\partial\Phi(s^*) = -\widehat{\sigma}_0 + \widehat{\sigma}_1 = \Phi(\delta s^*).$$

Suponhamos que temos definido  $\Phi$  em dimensões maiores do que  $p + 1 < n$ . Queremos definir  $\Phi$  em dimensão  $p$  de modo que o diagrama acima comute. Para isso, seja  $s$  um  $p$ -simplexo orientado. Temos que

$$\delta s^* = \sum \epsilon_i \sigma_i^*,$$

onde essa soma leva em conta todos os  $(p + 1)$ -simplexo  $\sigma_i$  tal que  $s$  é uma face, e  $\epsilon_i = \partial\sigma_i(s) = \pm 1$ . Daí,

$$\Phi(\delta s^*) = \sum \epsilon_i \Phi(\sigma_i^*).$$

Por hipótese de indução, cada cadeia  $\Phi(\sigma_i^*)$  é um ciclo fundamental para  $(\overline{D}(\sigma_i), \dot{D}(\sigma_i))$ . Logo,  $\Phi(\sigma_i^*)$  é carregado por  $\overline{D}(\sigma_i)$ . Como  $\sigma_i$  tem  $s$  como face,  $\overline{D}(\sigma_i) \subset \dot{D}(s)$ , pelo terceiro item da proposição 1.2. Com isso, para cada  $i$ ,  $\Phi(\sigma_i^*)$  é carregado por  $\dot{D}(s)$ , e assim  $\Phi(\delta s^*)$  também é carregado por  $\dot{D}(s)$ . Por hipótese de indução,  $\partial\Phi(\delta s^*) = \Phi(\delta\delta s^*) = 0$ , logo  $\Phi(\delta s^*)$  é um ciclo. Pelo o último item da proposição 1.2,  $\dot{D}(s)$  tem

a homologia de uma  $(n - p - 1)$ -esfera, e, pela desigualdade acima,  $n - p - 1 > 0$ . Daí,  $H_{n-p-1}(\dot{D}(s)) = \mathbb{Z}$ . Como a restrição de  $\Phi(\delta s^*)$  a  $\overline{D}(\sigma_i)$  é o ciclo fundamental  $\Phi(\sigma_i^*)$  para  $(\overline{D}(\sigma_i), \dot{D}(\sigma_i))$ , temos que  $\Phi(\delta s^*)$  é um ciclo não-trivial que não é múltiplo de outro ciclo em  $H_{n-p-1}(\dot{D}(s))$ , e assim um ciclo fundamental de  $H_{n-p-1}(\dot{D}(s))$ .

Sabemos que  $\overline{D}(s)$  é acíclico, pelo item quarto da proposição 1.2. Como  $n - p > 1$ , a sequência do par  $(\overline{D}(s), \dot{D}(s))$  induz o isomorfismo

$$0 \longrightarrow H_{n-p}(\overline{D}(s), \dot{D}(s)) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-p-1}(\dot{D}(s)) \longrightarrow 0.$$

Como  $\overline{D}(s)$  e  $\dot{D}(s)$  tem dimensão  $n - p$  e  $n - p - 1$ , respectivamente, temos que

$$H_{n-p}(\overline{D}(s), \dot{D}(s)) = Z_{n-p}(\overline{D}(s), \dot{D}(s))$$

e

$$H_{n-p-1}(\dot{D}(s)) = Z_{n-p-1}(\dot{D}(s)).$$

Por  $\partial_*$  ser um isomorfismo,  $\partial_*$  manda gerador em gerador. Logo, por definição de  $\partial_*$  e pelas propriedades que acabamos de ver, podemos definir  $\Phi(s^*)$  por ser o ciclo fundamental de  $(\overline{D}(s), \dot{D}(s))$  cujo bordo é  $\Phi(\delta s^*)$ . Assim definimos  $\Phi$  em dimensão  $p$  como queríamos.

Para o caso com coeficientes arbitrários  $G$ , no passo 2 da demonstração do teorema 56.1 da referência [1], demonstra-se que se  $A$  é um grupo livre de rank finito, então existe um natural isomorfismo

$$\varphi : \text{Hom}(A, \mathbb{Z}) \otimes G \rightarrow \text{Hom}(A, G)$$

dado por  $[\varphi(\phi \otimes g)](a) = \phi(a) \cdot g$ . Por  $X$  ser compacto,  $C_p(X)$  é livre de rank finito. Com isso, temos um isomorfismo como acima para  $A = C_p(X)$  que induz um isomorfismo

$$C^p(X; G) = \text{Hom}(C_p(X), G) \simeq \text{Hom}(C_p(X), \mathbb{Z}) \otimes G \xrightarrow{\Phi \otimes i_G} D_{n-p}(X) \otimes G$$

que comuta com  $\delta$  e  $\partial$ , onde  $\Phi$  é a aplicação que acabamos de provar para os coeficientes em  $\mathbb{Z}$ . Logo,  $H^p(X; G) \simeq H_{n-p}(D_{n-p}(X); G) \simeq H_{n-p}(X; G)$ , onde o último isomorfismo é por causa da proposição 1.3.

Se  $X$  não é orientável, a prova que demos antes para o caso orientável funciona quase que diretamente para  $X$ . Porém, agora  $H_{n-p}(\overline{D}(\sigma), \dot{D}(\sigma)) \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  só tem um elemento não trivial, e não precisamos se preocupar com sinais, pois o grupo

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  não tem sinal. Definimos, por indução, um isomorfismo

$$\Phi : \text{Hom}(C_p(X), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow D_{n-p}(X) \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

da seguinte forma: se  $\sigma$  é um  $n$ -simplexo, denotamos por  $\sigma^*$  a cocadeia tal que  $\sigma^*(\sigma) = [1] \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  e  $[0] \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  nos outros  $n$ -simplexos diferentes de  $\sigma$ . Definimos  $\Phi$  em dimensão  $n$  por  $\Phi(\sigma^*) = \hat{\sigma} \otimes [1]$ . Para definimos  $\Phi$  em dimensão  $n - 1$ , seja  $s$  um  $n - 1$ -simplexo que é face de exatamente dois  $n$ -simplexos,  $\sigma_0$  e  $\sigma_1$ . Definimos, então,  $\Phi(s^*) = ([\hat{\sigma}_0, \hat{s}] + [\hat{s}, \hat{\sigma}_1]) \otimes [1]$ . Como  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  não tem sinal, poderíamos definir  $\Phi(s^*)$  da seguinte forma  $\Phi(s^*) = ([\hat{\sigma}_0, \hat{s}] + [\hat{\sigma}_1, \hat{s}]) \otimes [1]$  que daria a mesma coisa. O resto continua da mesma forma que o caso orientável só mudando que, como comentamos acima, agora não temos ciclos fundamentais, temos únicos ciclos não triviais. ■

**Corolário 1.5.** Seja  $X$  uma  $n$ -variedade homológica compacta. Então,  $X$  é orientável se, e somente se,  $H_n(X_i) \simeq \mathbb{Z}$  para cada componente conexa  $X_i$  de  $X$ .

Como os grupos de homologia de  $X$  não depende da triangulação, segue que a orientação de  $X$  não depende da triangulação.

**Corolário 1.6.** Seja  $X$  uma  $n$ -variedade homológica compacta e conexa. Temos:

- Se  $X$  é orientável, então  $H_n(X; G) \simeq G$ ;
- Se  $X$  não é orientável, então  $H_n(X; G)$  é isomorfo ao núcleo da aplicação multiplicação por 2 de  $G$  em  $G$ .

## 1.2 Teorema da Dualidade de Poincaré: Segunda Versão

Nesta seção, vamos provar a segunda versão do teorema da dualidade de Poincaré. Desta vez vamos usar um importante produto, chamado produto cap, entre homologia e cohomologia, e veremos como a aplicação da dualidade de Poincaré da versão anterior se relaciona com esse produto.

Para uma explicação sobre o produto tensorial sobre grupos, consultar a seção 50 da referência [1].

Consideremos  $R$  um anel comutativo com unidade.

**Definição 1.7.** Seja  $K$  um complexo simplicial com uma ordem parcial no seu conjunto de vértices que é total quando restrita a cada simplexo de  $K$ . O produto cap simplicial

é a aplicação

$$\begin{aligned} \cap : C^p(K; R) \otimes C_{p+q}(K; R) &\longrightarrow C_q(K; R) \\ c^p \otimes ([v_0, \dots, v_{p+q}] \otimes \alpha) &\longmapsto [v_0, \dots, v_q] \otimes \alpha \cdot \langle c^p, [v_q, \dots, v_{p+q}] \rangle. \end{aligned}$$

O produto  $\text{cap } c^p \cap ([v_0, \dots, v_{p+q}] \otimes \alpha)$  é basicamente a  $q$ -face  $[v_0, \dots, v_q]$  de  $[v_0, \dots, v_{p+q}]$  tensorada pelo produto de  $\alpha$  e  $c^p([v_q, \dots, v_{p+q}])$ .

**Proposição 1.7.** O produto  $\text{cap}$  simplicial é bilinear, satisfaz a fórmula

$$\partial(d^p \cap c_{p+q}) = (-1)^q (\delta d^p \cap c_{p+q}) + d^p \cap \partial c_{p+q}$$

e induz um homomorfismo

$$H^p(K; R) \otimes H_{p+q}(K; R) \rightarrow H_q(K; R).$$

**Definição 1.8.** Seja  $X$  uma  $n$ -variedade homológica compacta. Se  $X$  é orientável, pelo corolário 1.6, para cada componente conexa  $X_i$  de  $X$  temos que  $H_n(X_i) = \mathbb{Z}$ . Seja  $\Gamma^i$  um gerador de  $H_n(X_i)$ . A imagem de  $\Sigma \Gamma^i$  pelo o isomorfismo induzido pela inclusão

$$\oplus H_n(X_i) \simeq H_n(X)$$

é chamada uma classe de orientação de  $X$  e denotado por  $\Gamma$ . Se, agora,  $X$  não necessariamente orientável. Daí, pelo corolário 1.6,  $H_n(X_i; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  para cada componente conexa  $X_i$  de  $X$ . Seja  $\Gamma_2^i$  o único não-trivial elemento de  $H_n(X_i)$ . A imagem de  $\Sigma \Gamma_2^i$  pelo o isomorfismo induzido pela inclusão

$$\oplus H_n(X_i; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq H_n(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

é chamada uma classe de orientação para  $X$  sobre  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  e denotado por  $\Gamma_2$ .

Percebemos que na definição anterior nenhuma triangulação de  $X$  foi especificada. Porém, se é dado uma triangulação de  $X$ ,  $\Gamma^i$  é representado pela soma de todos os  $n$ -simplexos de  $X_i$ , orientados de tal forma que sejam um ciclo, e  $\Gamma$  é representado pela soma de todos os  $n$ -simplexos de  $X$ , orientados de tal forma que sejam um ciclo. Já  $\Gamma_2^i$  é representado pela soma de todos os  $n$ -simplexos de  $X_i$  com coeficientes  $[1] \in \mathbb{Z}/2$  e  $\Gamma_2$  pela soma de todos os  $n$ -simplexos de  $X$  com coeficientes  $[1] \in \mathbb{Z}/2$ .

**Teorema 1.8.** *Seja  $X$  uma  $n$ -variedade homológica compacta. Se  $X$  é orientável e  $\Gamma$  é uma classe de orientação para  $X$ , então a aplicação*

$$H^p(X; G) \xrightarrow{\cap \Gamma} H_{n-p}(X; G)$$

é um isomorfismo para qualquer grupo abeliano  $G$  e todo  $p$ . Se  $X$  não é necessariamente orientável, então

$$H^p(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cap \Gamma_2} H_{n-p}(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

é um isomorfismo para todo  $p$ .

**Prova.** Vamos provar dois resultados básicos que serão importantes a posteriori.

**Afirmção 1.1.** Sejam  $K$  um complexo simplicial e  $g : \text{sd}(K) \rightarrow k$  a aproximação simplicial da identidade. Dado um simplexo  $\sigma$  de  $K$ , existe exatamente um simplexo  $t$  de  $\text{sd}(\sigma)$  que é mapeado em  $\sigma$  e os outros simplexos de  $\text{sd}(\sigma)$  são mapeados em faces próprias de  $\sigma$ .

Pelo lema 17.1 da referência [1], sabemos que se  $t$  é um simplexo de  $\text{sd}(K)$  e  $\sigma$  um simplexo de  $K$  tal que  $t \subset \sigma$ , então  $g(t) \subset \sigma$ . Daí,  $g(\widehat{\sigma}) \in \sigma$ , mas como  $g$  é uma aplicação simplicial,  $g(\widehat{\sigma})$  deve ser um vértice de  $\sigma$ .

Vamos provar essa afirmação por indução: se  $\sigma$  é um vértice  $v$ , pela observação acima,  $g(v) = v$ . Se  $\sigma$  é um 1-simplexo  $v_0v_1$ , pelo caso anterior,  $g(v_0) = v_0$  e  $g(v_1) = v_1$ . Pela observação anterior,  $g(\widehat{\sigma})$  é  $v_0$  ou  $v_1$ . Por exemplo, se  $g(\widehat{\sigma}) = v_0$ , então  $g([\widehat{\sigma}, v_1]) = [v_0, v_1]$  e  $g([v_0, \widehat{\sigma}]) = v_0$ . O outro caso resulta em algo análogo. Suponhamos, agora, que o resultado vale para simplexos de dimensão  $p - 1$ . Seja  $\sigma = v_0 \cdots v_p$  um simplexo de  $K$  de dimensão  $p$ . Para cada  $s_i = v_0 \cdots \widehat{v}_i \cdots v_p$  face de dimensão  $p - 1$  de  $\sigma$ , existe exatamente um  $(p - 1)$ -simplexo  $t_i$  de  $\text{sd}(s_i)$  que é mapeado por  $g$  em  $s_i$ . Logo, os  $p$ -simplexos de  $\text{sd}(\sigma)$  que podem ser mapeado em  $\sigma$  são da forma  $\widehat{\sigma} * t_i$ . Sabemos que  $g(\widehat{\sigma})$  é um vértice de  $\sigma$ . Seja  $v_j$  tal que  $g(\widehat{\sigma}) = v_j$ . Daí,  $\widehat{\sigma} * t_j$  é mapeado em  $\sigma$  e  $\widehat{\sigma} * t_i$ , com  $i \neq j$ , é mapeado em  $s_i$ .

**Afirmção 1.2.** Sejam  $K$  um complexo simplicial e  $\text{sd} : C_p(K) \rightarrow C_p(\text{sd}(K))$  o operador subdivisão baricêntrica que é definido indutivamente da seguinte forma:

$$\text{sd}(v) = v,$$

$$\text{sd}(\sigma) = [\widehat{\sigma}, \text{sd}(\partial(\sigma))].$$

Se  $\sigma$  é um  $p$ -simplexo orientado de  $K$ , então  $\text{sd}(\sigma)$  é a soma de todos os  $p$ -simplexos de  $\text{sd}(K)$  contido em  $\sigma$ , adequadamente orientados.

Vamos provar esse resultado por indução: como  $\text{sd}(v) = v$ , o resultado vale em dimensão zero. Vamos supor que o resultado vale em dimensão  $p - 1$ . Seja  $\sigma$  um  $p$ -simplexo orientado de  $K$ . Sabemos que  $\partial(\sigma)$  é a soma de todas as  $(p - 1)$ -faces de  $\sigma$ , adequadamente orientadas. Daí, por hipótese de indução,  $\text{sd}(\partial(\sigma))$  é a soma de

todos os  $(p - 1)$ -simplexos de  $\text{sd}(K)$  contido em  $\text{Bd}(\sigma)$ , adequadamente orientados. Como  $\text{sd}(\sigma) = [\widehat{\sigma}, \text{sd}(\partial(\sigma))]$ , segue que  $\text{sd}(\sigma)$  é a soma de todos os  $p$ -simplexos de  $\text{sd}(K)$  contidos em  $\sigma$ , adequadamente orientados, como queríamos.

Vamos demonstrar, primeiramente, o caso onde  $X$  é orientável e  $G = \mathbb{Z}$ . Para isso, escolhamos uma triangulação qualquer de  $X$ , e seja  $\gamma$  o ciclo representando  $\Gamma$  nesta triangulação. Vamos ordenar os vértices de  $\text{sd}(X)$  com a ordem padrão e orientar os simplexos de  $\text{sd}(X)$  usando essa ordem. Vamos orientar os simplexos de  $X$  arbitrariamente. Pela segunda afirmação,  $\text{sd}(\gamma)$  é a soma de todos os  $n$ -simplexos de  $\text{sd}(X)$  com sinais  $\pm 1$ . Como  $\gamma$  é um ciclo,  $\text{sd}(\gamma)$  é ciclo de  $\text{sd}(X)$ . Logo,  $\text{sd}(\gamma)$  é outro ciclo representando  $\Gamma$ .

Considere o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} C^p(X) & \xrightarrow{\Phi} & D_{n-p}(X) \\ \downarrow g^\# & & \downarrow j \\ C^p(\text{sd}(X)) & \xrightarrow{\cap \text{sd}\gamma} & C_{n-p}(\text{sd}(X)), \end{array}$$

onde  $g : \text{sd}(X) \rightarrow X$  é a aproximação simplicial da identidade e  $j$  é a inclusão. Veremos que  $g^\#$  composto com  $\cap \text{sd}\gamma$  é um isomorfismo de  $C^p(X)$  para o subgrupo  $D_{n-p}(X)$  de  $C_{n-p}(\text{sd}(X))$ . E assim, podemos concluir que existe um único isomorfismo, definido por  $g^\#$  composto com  $\cap \text{sd}\gamma$ , que faz esse diagrama comutar.

Seja  $\sigma$  um  $p$ -simplexo orientado de  $X$ , então  $g^\#(\sigma^*) \cap \text{sd}\gamma$  é igual à soma de todos os  $(n - p)$ -simplexos de  $\text{sd}(X)$  contidos em  $\overline{D}(\sigma)$  com sinais  $\pm 1$ . De fato, pela primeira afirmação, existe um único  $p$ -simplexo  $t$  de  $\text{sd}(\sigma)$  que é levado em todo  $\sigma$  por  $g$ . Daí,

$$g^\#(\sigma^*) = \pm t^*,$$

o sinal depende da escolha da orientação. Sabemos, pelo lema 15.3 da referência [1], que

$$t = [\widehat{s}_p, \dots, \widehat{s}_0],$$

onde  $s_p = \sigma$ ,  $s_{i-1}$  é uma face própria de  $s_i$  e  $s_i$  tem dimensão  $i$  para cada  $i$ . Temos que  $\text{sd}\gamma$  é a soma de todos os  $n$ -simplexos de  $\text{sd}(X)$ , e, novamente pelo mesmo lema, cada um deles tem a forma

$$\tau = [\widehat{\sigma}_n, \dots, \widehat{\sigma}_0],$$

onde  $\sigma_{i-1}$  é uma face própria de  $\sigma_i$  e  $\widehat{\sigma}_i$  tem dimensão  $i$  para cada  $i$ . Pela definição de

produto cap,  $t^* \cap \tau$  só não se anula se

$$t = [\widehat{\sigma}_p, \dots, \widehat{\sigma}_0],$$

e neste caso,

$$t^* \cap \tau = [\widehat{\sigma}_n, \dots, \widehat{\sigma}_p].$$

Portanto,  $t^* \cap \text{sd}\gamma$  é a soma de todos os simplexos de  $\text{sd}(X)$  de a forma

$$[\widehat{\sigma}_n, \dots, \widehat{\sigma}]$$

com sinais  $\pm 1$ , e, por definição, esses simplexos são todos os  $(n-p)$ -simplexos de  $\overline{D}(\sigma)$ .

Agora, afirmamos que  $g^\#(\sigma^*) \cap \text{sd}\gamma$  é um ciclo fundamental para  $(\overline{D}(\sigma), \dot{D}(\sigma))$ . De fato, por  $g^\#(\sigma^*) \cap \text{sd}\gamma$  ser a soma de todos os  $(n-p)$ -simplexo de  $\overline{D}(\sigma)$  com sinais  $\pm 1$ , temos que  $g^\#(\sigma^*) \cap \text{sd}\gamma$  é uma cadeia não-trivial carregada por  $\overline{D}(\sigma)$ , e como todos os coeficientes de  $g^\#(\sigma^*) \cap \text{sd}\gamma$  são  $+1$  ou  $-1$ , ela não é múltipla de outra cadeia. Para concluirmos essa afirmação falta só mostrar que  $\partial(g^\#(\sigma^*) \cap \text{sd}\gamma)$  é carregado por  $\dot{D}(\sigma)$ . Então,

$$\partial(g^\#(\sigma^*) \cap \text{sd}\gamma) = (-1)^{n-p} \delta g^\#(\sigma^*) \cap \text{sd}\gamma + 0 = (-1)^{n-p} g^\#(\delta\sigma^*) \cap \text{sd}\gamma,$$

pela proposição 1.7 e porque  $\delta$  comuta com  $g^\#$ . Sabemos que  $\delta\sigma^*$  é a soma de todas as  $(p+1)$ -cocadeias de a forma  $\pm\sigma_{p+1}^*$ , onde  $\sigma_{p+1}$  tem  $\sigma$  como uma face. Pelo que acabamos de provar,  $g^\#(\sigma_{p+1}^*) \cap \text{sd}\gamma$  é carregado por  $\overline{D}(\sigma_{p+1})$ . Pelo terceiro item da proposição 1.2.  $\overline{D}(\sigma_{p+1}) \subset \dot{D}(\sigma)$ . Portanto,  $g^\#(\delta\sigma^*) \cap \text{sd}\gamma$  é carregado por  $\dot{D}(\sigma)$ .

Assim, a composta de  $g^\#$  com  $\cap \text{sd}\gamma$  carrega  $\sigma^*$  para um ciclo fundamental de  $(\overline{D}(\sigma), \dot{D}(\sigma))$ . Daí, essa composta restrita as bases de  $C^p(X)$  e de  $D_{n-p}(X)$  é bijetiva, logo estende-se para um isomorfismo  $\Phi$ . Percebemos que esse isomorfismo parece com o isomorfismo da primeira versão, de fato, eles diferem pelo sinal. Da equação acima, temos que

$$\partial\Phi(c^p) = (-1)^{n-p} \Phi(\delta c^p).$$

Logo,  $\Phi$  comuta com  $\delta$  e  $\partial$ , a menos de sinal. Como o sinal não altera os grupos de cociclos e cobordos,  $\Phi$  induz um isomorfismo de  $H^p(X)$  para  $H_{n-p}(D_{n-p}(X))$ . Pela proposição 1.3,  $j : D_{n-p}(X) \rightarrow C_{n-p}(\text{sd}(X))$  induz um isomorfismo de  $H_{n-p}(D_{n-p}(X))$  para  $H_{n-p}(\text{sd}(X))$ . Pelos teoremas 17.2 e 45.5 da referência [1],  $g^* : H^p(X) \rightarrow H^p(\text{sd}(X))$  é um isomorfismo. Daí,

$$\cap \text{sd}\gamma : H^p(\text{sd}(X)) \rightarrow H_{n-p}(\text{sd}(X))$$

é um isomorfismo. Desde,  $H^p(\text{sd}(X)) \simeq H^p(X)$  e  $H_{n-p}(\text{sd}(X)) \simeq H_{n-p}(X)$ , temos o isomorfismo

$$\cap \Gamma : H^p(X) \rightarrow H_{n-p}(X).$$

Agora, seja  $G$  um grupo abeliano arbitrário. Na demonstração da primeira versão comentamos a existência de um isomorfismo

$$\varphi : C^p(X) \otimes G \rightarrow C^p(X; G)$$

dado por  $[\varphi(c^p \otimes g)](\sigma) = c^p(\sigma) \cdot g$ . Daí, esse isomorfismo manda  $\sigma^* \otimes g$  em  $\sigma^* \cdot g$ . Daí, usando essa identificação e a definição de produto cap, podemos perceber que a composta

$$C^p(X; G) \xrightarrow{g^\#} C^p(\text{sd}(X); G) \xrightarrow{\cap \text{sd}\gamma} D_{n-p}(X) \otimes G$$

é igual ao isomorfismo

$$C^p(X) \otimes G \xrightarrow{g^\# \otimes i_G} C^p(\text{sd}(X)) \otimes G \xrightarrow{\cap \text{sd}\gamma \otimes i_G} D_{n-p}(X) \otimes G$$

que comuta com  $\delta$  e  $\partial$ . Logo, a primeira composta induz o isomorfismo que estamos procurando.

Quando  $X$  não é necessariamente orientável, a prova que acabamos de exibir para o caso orientável funciona basicamente igual em  $\mathbb{Z}/2$ . Como comentamos na primeira versão,  $H_{n-p}(\overline{D}(\sigma), \dot{D}(\sigma)) \otimes \mathbb{Z}/2 \simeq \mathbb{Z}/2$ . Logo, usando o mesmo argumento, podemos provar que  $g^\#(\sigma^*) \cap \text{sd}\gamma_2$  é o único ciclo não-trivial de  $H_{n-p}(\overline{D}(\sigma), \dot{D}(\sigma)) \otimes \mathbb{Z}/2$ , onde  $\text{sd}\gamma_2$  é a representação da classe de orientação  $\Gamma_2$  relativo a triangulação  $\text{sd}(X)$ . Como  $\mathbb{Z}/2$  não tem sinal, o isomorfismo  $\Phi$ , induzido como acima, vai ser igual ao isomorfismo da primeira versão. ■

### 1.3 Produto Interseção

Nesta seção, vamos estudar um produto em homologia, chamado produto interseção, e veremos como podemos usá-lo para mostrar o teorema da dualidade de Poincaré.

Ao longo desta seção, vamos supor que  $X$  é uma  $n$ -variedade topológica compacta. Se  $X$  é orientável, denotamos por  $\Gamma$  a classe de orientação de  $X$  e  $R$  será um anel comutativo com unidade qualquer. Se  $X$  não é orientável, denotamos por  $\Gamma$  a classe de orientação  $\Gamma_2$  de  $X$  e  $R$  será  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

Sabemos que a cohomologia tem, de forma natural, uma multiplicação que torna o anel de cohomologia de  $X$ , a soma direta externa

$$H^*(X; R) = \bigoplus H^j(X; R),$$

um anel com unidade. Esta multiplicação é dada pelo produto cup, como relembramos abaixo:

**Definição 1.9.** Dado  $K$  um complexo simplicial e uma ordem parcial no conjunto de vértices de  $K$  que é total quando restrita aos vértices de cada simplexo. Definimos o produto cup

$$\cup : C^p(K; R) \times C^q(K; R) \rightarrow C^{p+q}(K; R)$$

por

$$\langle c^p \cup c^q, [v_0, \dots, v_{p+q}] \rangle = \langle c^p, [v_0, \dots, v_p] \rangle \cdot \langle c^q, [v_p, \dots, v_{p+q}] \rangle$$

com  $v_0 < \dots < v_{p+q}$ .

**Proposição 1.9.** O produto cup está relacionado com o produto cap pela fórmula

$$c^p \cap (d^q \cap e_{p+q+r}) = (c^p \cup d^q) \cap e_{p+q+r},$$

e induz uma operação

$$\cup : H^p(K; R) \times H^q(K; R) \rightarrow H^{p+q}(K; R)$$

que é bilinear, associativa e independe da ordem dos vértices de  $K$ . A classe de cohomologia da 0-cocadeia  $z^0$  cujo valor é 1 em cada vértice de  $K$  age como uma unidade.

Pelo teorema da dualidade de Poincaré, podemos induzir também um produto na homologia de  $X$  da seguinte forma: sejam  $\alpha_p \in H_p(X; R)$  e  $\beta_q \in H_q(X; R)$ . Logo, existem  $\alpha^{n-p} \in H^{n-p}(X; R)$  e  $\beta^{n-q} \in H^{n-q}(X; R)$  tais que

$$\alpha^{n-p} \cap \Gamma = \alpha_p \text{ e } \beta^{n-q} \cap \Gamma = \beta_q.$$

Definimos o produto de  $\alpha_p$  e  $\beta_q$  como sendo o  $(p + q - n)$ -ciclo dado por

$$\alpha_p \cdot \beta_q = (\alpha^{n-p} \cup \beta^{n-q}) \cap \Gamma.$$

Com isso, temos uma aplicação bilinear em homologia bem-definida

$$H_i(X; R) \times H_j(X; R) \rightarrow H_{i+j-n}(X; R).$$

A classe de orientação  $\Gamma$  de  $X$  age com uma unidade nesse produto. Daí, isso induz uma multiplicação em homologia, chamada produto interseção, e uma estrutura de anel na soma direta externa

$$H_*(X; R) = \oplus H_j(X; R),$$

chamado de anel de interseção de homologia.

Vamos enunciar o lema 69.1 da referência [1] para compreendemos um pouco melhor como esse produto age.

**Proposição 1.10.** Consideremos  $X$  conexa. Sejam  $\alpha_p$  e  $\beta_q$  classes de homologia de  $X$  com  $p + q = n$ . Considere  $X$  com uma triangulação específica,  $\alpha_p$  representado por um ciclo  $c_p$  de  $\text{sd}(X)$  que é carregado por o  $p$ -esqueleto dual de  $X$  e  $\beta_q$  é representado por um ciclo  $d_q$  de  $X$ . Suponhamos que os carregadores de  $c_p$  e  $d_q$  se interceptam em um único ponto, o baricentro de um  $q$ -simplexo  $\sigma$  de  $X$ . Se  $d_q$  tem coeficiente  $\pm a$  em o simplexo  $\sigma$ , e  $c_p$  tem coeficiente  $\pm b$  em o bloco  $\overline{D(\sigma)}$ , então  $\alpha \cdot \beta$  é representado, a menos de sinal, pela 0-cadeia  $ab\hat{\sigma}$  de  $\text{sd}(X)$ .

**Definição 1.10.** Seja  $T : |K| \rightarrow X$  uma triangulação de  $X$ . O suporte  $|\xi|$  de uma  $i$ -cadeia simplicial  $\xi = \sum_{i=n} a_\sigma \sigma$  é o subconjunto de  $X$  dado por

$$|\xi| = \bigcup_{a_\sigma \neq 0} T(\sigma).$$

Vamos, agora, analisar as hipóteses da proposição 1.10 e ver suas naturalidades: suponhamos que  $p + q = n$ , com  $p \neq 0$  e  $p \neq n$ . Sejam  $X$  conexa com uma triangulação específica e  $\alpha_p$  e  $\beta_q$  classes de homologia de  $X$ . Pelo segundo item da proposição 1.3, podemos supor que  $\alpha_p$  é representado por um ciclo  $c_p$  de  $\text{sd}(X)$  que é carregado pelo  $p$ -esqueleto dual de  $X$ . Seja  $\beta_q$  representado por um ciclo  $d_q$  de  $X$ . Além do mais, suponhamos que o suporte das cadeias  $c_p$  e  $d_q$  se interceptam em um único vértice  $v$ . Percebemos que esse vértice não é um vértice de  $X$ , mas sim um vértice de  $\text{sd}(X)$  que não é de  $X$ , pois, caso fosse, seja  $\sigma$  um  $q$ -simplexo de  $X$  tal que seu  $p$ -bloco  $\overline{D(\sigma)}$  está em  $c_p$  e contém esse vértice. Sabemos que  $\overline{D(\sigma)}$  é a união de todos os simplexos de  $\text{sd}(X)$  tais que  $\hat{\sigma}$  é o menor vértice na ordem padrão. Daí,  $v$  pertence a um simplexo de  $\overline{D(\sigma)}$  com essa propriedade. Porém, como a ordem dos vértices de  $\text{sd}(X)$  é a padrão,  $v$  é menor do que  $\hat{\sigma}$ , contradição! Daí,  $v = \hat{\tau}$ , com  $\tau$  um simplexo de  $X$  que é face de um  $q$ -simplexo  $\sigma'$  que está em  $d_q$ . Como  $v \in \overline{D(\sigma)}$ ,  $D(\tau) \subset \overline{D(\sigma)}$ . Se  $\tau$  é uma face própria de  $\sigma'$ , então  $\dim(D(\tau)) \geq n - q + 1$ , contradição, pois  $\dim(\overline{D(\sigma)}) = n - q$ . Daí,  $\tau = \sigma'$ . Assim,  $\hat{\sigma}' \in \overline{D(\sigma)}$ . Logo,  $\sigma' = \sigma$ . Já se  $p = 0$  ou  $p = n$ , podemos ver, de forma direta, que se  $c_p$  e  $d_q$  interceptam em um único vértice  $v$ , esse vértice tem que o baricentro de

um  $q$ -simplexo. Assim, pela proposição acima, se  $d_q(\sigma) = \pm a$  e  $c_p(\overline{D}(\sigma)) = \pm b$ , então  $\alpha \cdot \beta$  é representado, a menos de sinal, pela 0-cadeia

$$ab |d_q| \cap |c_p|.$$

Mais abaixo, entenderemos o que acontece com o produto interseção quando os ciclos se interceptam em casos mais gerais do que um ponto.

**Proposição 1.11.** Suponhamos que  $X$  é orientável,  $\mathbb{F}$  é um corpo e  $p + q = n$ . A seguinte aplicação bilinear

$$H_p(X; \mathbb{F}) \times H_q(X; \mathbb{F}) \longrightarrow H_0(X; \mathbb{F}) \xrightarrow{\varepsilon_*} \mathbb{F}$$

que é a composta da aplicação augmentação  $\varepsilon_* : \Sigma n_i x_i \rightarrow \Sigma n_i$  seguida do produto interseção é não-degenerada.

**Prova.** Sejam  $\alpha_p \in H_p(X; \mathbb{F})$  e  $\beta_q \in H_q(X; \mathbb{F})$ . Existem  $\alpha^q \in H^q(X; \mathbb{F})$  e  $\beta^p \in H^p(X; \mathbb{F})$  tais que  $\alpha^q \cap \Gamma = \alpha_p$  e  $\beta^p \cap \Gamma = \beta_q$ . Assim,

$$\alpha_p \cdot \beta_q = (\alpha^q \cup \beta^p) \cap \Gamma = \alpha^q \cap (\beta^p \cap \Gamma) = \alpha^q \cap \beta_q.$$

Daí,

$$\varepsilon_*(\alpha_p \cdot \beta_q) = \varepsilon_*(\alpha^q \cap \beta_q) = \langle \alpha^q, \beta_q \rangle = \alpha^q(\beta_q)$$

é igual ao índice de Kronecker

$$\begin{array}{ccc} H^q(X; \mathbb{F}) \times H_q(X; \mathbb{F}) & \longrightarrow & \mathbb{F} \\ (c^q, c_q) & \longmapsto & c^q(c_q) \end{array}.$$

Como  $\mathbb{F}$  é um corpo, sabemos, pelo teorema 53.5 da referência [1], que  $H^q(X; \mathbb{F})$  é isomorfo a  $\text{Hom}(H_q(X; \mathbb{F}), \mathbb{F})$ . Como a aplicação bilinear

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(H_q(X; \mathbb{F}), \mathbb{F}) \times H_q(X; \mathbb{F}) & \longrightarrow & \mathbb{F} \\ (\phi, c_q) & \longmapsto & \phi(c_q) \end{array}$$

é não-degenerada, segue que o índice de Kronecker é não-degenerada também. ■

**Corolário 1.12.** Suponhamos que  $X$  é orientável,  $\mathbb{F}$  é um corpo e  $p + q = n$ . Então,  $\dim(H_p(X; \mathbb{F})) = \dim(H_q(X; \mathbb{F}))$ .

**Prova.** Sabemos que  $H_p(X; \mathbb{F})$  e  $H_q(X; \mathbb{F})$  são espaços vetoriais de dimensões finitas.

Pela proposição anterior, existe uma aplicação bilinear não-degenerada

$$\Psi : H_p(X; \mathbb{F}) \times H_q(X; \mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{F}.$$

Daí, a transformação linear que leva  $c_p \in H_p(X; \mathbb{F})$  em  $\Psi(c_p, \cdot) \in \text{Hom}(H_q(X; \mathbb{F}), \mathbb{F})$  é injetiva, logo  $\dim(H_p(X; \mathbb{F})) \leq \dim(\text{Hom}(H_q(X; \mathbb{F}), \mathbb{F})) = \dim(H_q(X; \mathbb{F}))$ . De forma análoga, podemos ver que  $\dim(H_p(X; \mathbb{F})) \geq \dim(H_q(X; \mathbb{F}))$ . Portanto,  $\dim(H_p(X; \mathbb{F})) = \dim(H_q(X; \mathbb{F}))$ . ■

**Definição 1.11.** Sejam  $K$  e  $L$  dois complexos simpliciais não-vazios em algum espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . Consideremos  $s = v_0 \cdots v_m$  e  $t = w_0 \cdots w_n$  simplexos gerais de  $K$  e  $L$ , respectivamente. Suponhamos que  $v_0, \dots, v_m, w_0, \dots, w_n$  são sempre independentes para todos simplexos  $s$  em  $K$  e  $t$  em  $L$ . Denotamos por  $s * t$  o simplexo gerado por  $v_0 \cdots v_m w_0 \cdots w_n$ . Se a coleção de todos os simplexos  $s * t$  e suas faces é um complexo simplicial então esse complexo é chamado de o join de  $L$  e  $K$  e denotado por  $K * L$ .

Se  $K$  é igual a um vértice  $v$ , o join de  $K$  e  $L$ ,  $v * L$ , é chamado o cone de  $L$  e denotado por  $c(L)$ . Já se  $K$  é igual a dois vértices, o join  $K$  e  $L$  é chamado de a suspensão de  $L$  e denotado por  $S(L)$ .

**Exemplo 1.3.** Seja  $T^2$  o toro e  $S(T^2)$  sua suspensão. Pelo teorema 25.4 da referência [1], sabemos que  $H_i(S(T^2)) \simeq H_{i-1}(T^2)$  se  $i \geq 2$  e  $H_1(S(T^2)) \oplus \mathbb{Z} \cong H_0(T^2)$ . Pelo teorema 6.2 da referência [1],  $H_2(T^2) \simeq \mathbb{Z}$  e  $H_1(T^2) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Daí,  $H_3(S(T^2)) \simeq \mathbb{Z}$  e  $H_2(S(T^2)) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Por  $T^2$  e  $S(T^2)$  serem conexos, temos que  $H_0(T^2) \simeq \mathbb{Z} \simeq H_0(S(T^2))$ , pelo teorema 7.1 da mesma referência. Com isso,  $H_1(S(T^2)) = 0$ .

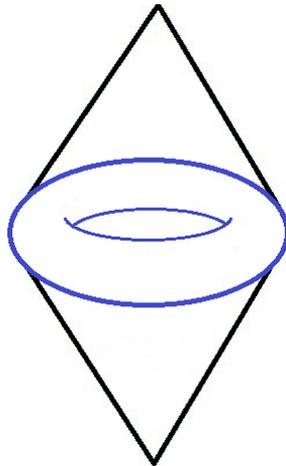


Figura 1.6: Suspensão do toro.

Seja, agora,  $\mathbb{F}$  qualquer corpo que contém  $\mathbb{Q}$  (por exemplo, o próprio  $\mathbb{Q}$ , os reais  $\mathbb{R}$  ou os complexos  $\mathbb{C}$ ). Pelo teorema 55.1 (teorema dos coeficientes universais para

homologia) da referência [1], sabemos que

$$H_p(X) \otimes \mathbb{F} \simeq H_p(X; \mathbb{F}).$$

Daí,

$$H_3(S(T^2); \mathbb{F}) \simeq \mathbb{Z} \otimes \mathbb{F} \simeq \mathbb{F};$$

$$H_2(S(T^2); \mathbb{F}) \simeq \mathbb{F} \oplus \mathbb{F};$$

$$H_1(S(T^2); \mathbb{F}) = 0;$$

$$H_0(S(T^2); \mathbb{F}) \simeq \mathbb{F}.$$

Como  $\dim(H_1(S(T^2); \mathbb{F})) \neq \dim(H_2(S(T^2); \mathbb{F}))$ , temos que  $S(T^2)$  não é uma variedade topológica e nem uma variedade homológica, pois o mesmo resultado acima vale para variedades homológicas. Sejam  $v$  e  $w$  os dois vértices da suspensão  $S(T^2)$ . Como  $S(T^2) - \{v, w\}$  é homeomorfo a variedade produto  $T^2 \times (-1, 1)$ ,  $S(T^2)$  não é uma variedade por causa dos pontos singulares  $v$  e  $w$ .

Se o teorema da dualidade de Poincaré fosse verdade para  $S(T^2)$ , o produto interseção estaria bem definido na homologia de  $S(T^2)$  e valeria o corolário acima. Logo, teríamos que  $\dim(H_1(S(T^2); \mathbb{F})) = \dim(H_2(S(T^2); \mathbb{F}))$ , contradição!

Concluimos que a dualidade de Poincaré não vale para espaços com singularidades. Porém, como veremos no próximo capítulo, existe uma homologia que generaliza essa e que restrita a uma classe de espaços singulares, chamadas de pseudovarieties, recupera a importante dualidade de Poincaré.

Da dualidade de Poincaré conseguimos provar para variedades topológicas compactas e orientáveis  $X$  a existência de uma aplicação bilinear não-degenerada entre  $H_p(X; \mathbb{F})$  e  $H_q(X; \mathbb{F})$ , onde  $p + q = n$  e  $\mathbb{F}$  um corpo. Agora, faremos o inverso: suponhamos que existe uma aplicação bilinear

$$H_p(X; \mathbb{F}) \times H_q(X; \mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{F}$$

não-degenerada. Como esses espaços vetoriais têm dimensões finitas, essa aplicação bilinear induz um isomorfismo entre  $H_p(X; \mathbb{F})$  e  $\text{Hom}(H_q(X; \mathbb{F}), \mathbb{F})$ . Como  $\mathbb{F}$  é um corpo, pelo teorema 53.5 da referência [1],  $\text{Hom}(H_q(X; \mathbb{F}), \mathbb{F})$  é isomorfo a  $H^q(X, \mathbb{F})$ . Portanto,  $H_p(X; \mathbb{F})$  é isomorfo a  $H^q(X, \mathbb{F})$ .

Isso tudo nos diz que, neste caso, existem duas formas de provar o teorema da dualidade de Poincaré com coeficientes em um corpo: a primeira forma foi a que acabamos de fazer, que é provar a existência de o isomorfismo entre cohomologia e homologia em dimensões complementares; a segunda é provar a existência de uma

aplicação bilinear não-degenerada entre homologias com dimensões complementares. Vamos, agora, dar um esboço, sem muitos detalhes, baseado no capítulo 3 da referência [2], de como podemos provar a dualidade de Poincaré seguindo o segundo caminho.

**Definição 1.12.** Sejam  $a$  e  $b$  cadeias em uma variedade  $Y$ . Dizemos que elas são transversais se seus suportes não se interceptam ou se

$$\text{codim}(|a| \cap |b|) = \text{codim}(|a|) + \text{codim}(|b|).$$

**Exemplo 1.4.** No  $\mathbb{R}^3$ , sabemos que o toro  $T^2$  e a esfera  $\mathbb{S}^2$  são ciclos. Eles só não são transversais se  $\dim(|T^2| \cap |\mathbb{S}^2|)$  é igual a 0 ou a 2, ou seja, quando são tangentes ou têm partes que coincidem. Percebemos que sempre que eles estão em posições transversais a interseção deles é sempre um ciclo.

Sejam  $K$  uma triangulação de a variedade topológica  $X$  de dimensão  $n$  e  $\text{sd}(K)$  sua primeira subdivisão baricêntrica. Um simplexo  $\sigma$  de  $K$  e um bloco dual fechado  $\overline{D}(\tau)$  de  $D(K)$  são sempre transversais. De fato, se  $\dim(\tau) = \dim(\sigma) = p$ , então, nessas condições, o único bloco dual fechado que intercepta  $\sigma$  é  $\overline{D}(\sigma)$ , e neste caso,  $\sigma \cap \overline{D}(\sigma) = \widehat{\sigma}$ . Se  $\dim(\overline{D}(\tau)) < n - p$ , então  $\dim(\tau) > p = \dim(\sigma)$ . Logo, pelo terceiro item da proposição 1.2,  $\overline{D}(\tau)$  está contido no bordo de algum bloco dual fechado de dimensão  $n - p$  de  $X$ . Daí,  $\sigma \cap \overline{D}(\tau) = \emptyset$ . Se  $\dim(\overline{D}(\tau)) = n - p + 1$ , então  $\dim(\tau) = p - 1$ . Os blocos  $\overline{D}(\tau)$  que interceptam  $\sigma$  são tais que  $\sigma$  tem  $\tau$  como uma face. Daí,  $\widehat{\sigma} \in \overline{D}(\sigma) \subset \overline{D}(\tau)$  e  $\widehat{\tau} \in \sigma$ . Daí, o 1-simplexo de  $\text{sd}(K)$  que tem como vértices  $\widehat{\tau}$  e  $\widehat{\sigma}$  está em  $\sigma \cap \overline{D}(\tau)$ . Se existe outro vértice  $v$  diferente de  $\widehat{\tau}$  e  $\widehat{\sigma}$  que está em  $\sigma \cap \overline{D}(\tau)$ , então  $v$  é o baricentro de um  $q$ -simplexo  $\tau'$  tal que  $q > \dim(\tau)$  e  $\tau'$  tem  $\tau$  com uma face própria. Se  $q = p$ , desde  $\widehat{\tau}' \in \sigma$ , temos que  $\tau' = \sigma$ , o que não pode acontecer porque  $\widehat{\tau}' \neq \widehat{\sigma}$ . Se  $q > p$ , então teríamos um  $q$ -simplexo tal que seu baricentro está contido em  $p$ -simplexo, o que também não pode ocorrer. Logo,  $\sigma \cap \overline{D}(\tau) = [\widehat{\tau}, \widehat{\sigma}]$ . Agora, se  $\dim(\overline{D}(\tau)) = n - p + 2$ , então  $\dim(\tau) = p - 2$ . Logo,  $\tau$  é face de exatamente dois  $(p - 1)$ -simplexos,  $\tau'$  e  $\tau''$ , de  $\sigma$ . Daí,  $\widehat{\tau}', \widehat{\tau}'' \in \sigma \cap \overline{D}(\tau)$ . Com um raciocínio análogo, podemos ver que os únicos vértices de  $\sigma \cap \overline{D}(\tau)$  são  $\widehat{\tau}, \widehat{\sigma}, \widehat{\tau}'$  e  $\widehat{\tau}''$ . Temos que  $\widehat{\tau}, \widehat{\sigma}$  e  $\widehat{\tau}'$  são os vértices de um 2-simplexo, assim também como  $\widehat{\tau}, \widehat{\sigma}$  e  $\widehat{\tau}''$ . Daí,  $\dim(\sigma \cap \overline{D}(\tau)) = 2$ . De forma análoga, segue os outros casos.

Seja  $K$  uma triangulação de a variedade topológica compacta e orientável  $X$  de dimensão  $n$ . Logo, se  $\sigma$  é um  $(n - p)$ -simplexo de  $K$  e  $\overline{D}(\tau)$  é um  $(n - q)$ -bloco dual de  $D(X)$ , então  $\sigma \cap \overline{D}(\tau)$  é vazio ou é uma  $(n - (p + q))$ -cadeia de  $\text{sd}(K)$ . Estendendo

por linearidade, temos o produto interseção bilinear em nível de cadeias de  $K$  e  $D(X)$

$$\begin{aligned} C_{n-p}(K) \times C_{n-q}(D(K)) &\longrightarrow C_{n-(p+q)}(\text{sd}(K)) \\ (a, b) &\longmapsto a \bullet b = |a| \cap |b| \end{aligned}$$

que satisfaz a seguinte relação fundamental do bordo

$$\partial(a \bullet b) = a \bullet \partial(b) + (-1)^{n-p} \partial(a) \bullet b.$$

Dessa fórmula, vemos que se  $a$  e  $b$  são ciclos, então  $a \bullet b$  é um ciclo. Agora, vejamos o motivo pelo qual essa aplicação induz uma aplicação a nível de homologia: sejam  $a$  e  $b$  ciclos, e suponhamos que  $a'$  e  $a$  são homólogos, ou seja, existe uma cadeia  $E \in C_{(n-p+1)}(K)$  tal que  $\partial(E) = a' - a$ . Daí,

$$a \bullet b = (-\partial(E) + a') \bullet b = -\partial(E) \bullet b + a' \bullet b.$$

Aplicando a fórmula acima para  $E \bullet b$ , temos que

$$\partial(E \bullet b) = E \bullet \partial(b) + (-1)^{n-p+1} \partial(E) \bullet b = (-1)^{n-p+1} \partial(E) \bullet b.$$

Logo,  $\partial(E) \bullet b$  é um bordo, e assim  $a \bullet b$  e  $a' \bullet b$  representam a mesma classe em homologia. De forma análoga, podemos ver que se  $\partial(E') = b' - b$ , então  $a \bullet b = a \bullet b'$  em homologia. Com isso,  $a' \bullet b = a' \bullet b'$  em homologia. Portanto,  $a \bullet b$  e  $a' \bullet b'$  representam a mesma classe em homologia. Assim, chegamos ao seguinte resultado.

**Proposição 1.13.** Seja  $X$  uma variedade topológica compacta e orientável de dimensão  $n$ . A aplicação bilinear acima induz uma aplicação bilinear (produto interseção)

$$H_{n-p}(X) \times H_{n-q}(X) \xrightarrow{\bullet} H_{n-(p+q)}(X).$$

Mais geralmente, podemos definir o produto interseção para ciclos gerais que são transversais como sendo a interseção deles. Percebemos que dados ciclos quaisquer de  $X$  sempre podemos escolher ciclos em suas classes de homologias de tal forma que são transversais: basta pegar um em  $C_{n-p}(K)$  e o outro em  $C_{n-q}(D(X))$ , como acima. Essa definição mais geral ainda satisfaz a fórmula fundamental do bordo, implicando que induz uma aplicação em homologia que é igual à da proposição anterior.

**Teorema 1.14.** (*Lefschetz*) Em uma variedade topológica, a interseção de dois ciclos transversais é sempre um ciclo.

**Exemplo 1.5.** Sejam  $S(T^2)$  a suspensão do toro e  $a$  e  $b$  os ciclos geradores de  $H_1(T^2)$ . As suspensões  $S(a)$  e  $S(b)$  são homeomorfas a esfera  $\mathbb{S}^2$  e são os 2-ciclos geradores de

$H_2(S(T^2))$ . A interseção deles é um segmento que liga os dois vértices da suspensão, logo são transversais. Porém, esse segmento não é um ciclo. Portanto, o produto interseção não fica bem definido em espaços singulares.

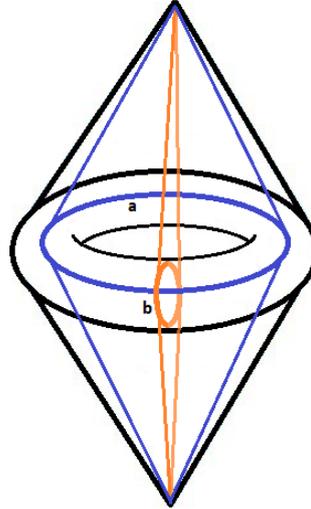


Figura 1.7: Suspensão do Toro.

**Definição 1.13.** Sejam  $a$  um  $p$ -ciclo e  $b$  um  $q$ -ciclo que são transversais na variedade topológica compacta e orientada  $X$ , com  $p + q = n$ . Sabemos que  $|a| \cap |b|$  é uma 0-cadeia, logo  $|a| \cap |b|$  é um número finito de vértices  $\{x_1, \dots, x_j\}$ . Em cada vértice  $x_i$  definimos o índice de interseção  $I(a, b; x_i)$  da seguinte forma: sejam  $\sigma$  um  $p$ -simplexo de  $a$  e  $\tau$  um  $q$ -simplexo de  $b$  tais que  $x_i \in \sigma \cap \tau$ . Definimos  $\varepsilon = 1$  se a orientação de  $\sigma$  seguida da orientação de  $\tau$  é a orientação de  $X$  e  $-1$ , caso contrário. Considere  $m_a^i$  e  $m_b^i$  a multiplicidade de  $x_i$  em  $a$  e  $b$ , respectivamente. Definimos o índice de interseção dos ciclos  $a$  e  $b$  no vértice  $x_i$  como

$$I(a, b; x_i) = \varepsilon \cdot m_a^i \cdot m_b^i.$$

A soma de todos  $I(a, b; x_i)$  é chamado de índice de interseção dos ciclos  $a$  e  $b$  e denotamos por  $I(a, b)$ , ou seja,

$$I(a, b) = \sum_{x_i \in |a| \cap |b|} I(a, b; x_i).$$

**Exemplo 1.6.** Na figura 1.8 temos ilustrado o toro. No vértice  $v$  os ciclos  $a$  e  $b$  tem índice de interseção  $I(a, b; v)$  igual a  $-1$ ; no vértice  $s$  os ciclos  $a$  e  $c$  tem índice de interseção igual a  $1$ ; já em os vértices  $w$  e  $u$  tem índice de interseção igual a  $-1$ . Percebemos que  $b$  e  $c$  são homólogos e  $I(a, b) = -1 = I(a, c)$ .

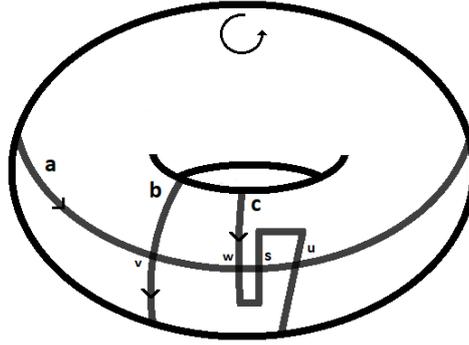


Figura 1.8: Toro.

**Proposição 1.15.** Seja  $Y$  uma variedade topológica orientável. O índice de interseção  $I(a, b)$  de dois ciclos transversais e com dimensões complementares não dependi dos representantes da classe de homologia de  $a$  e  $b$ .

Daí, o index de interseção induz uma aplicação bilinear em nível de homologia

$$\begin{aligned} H_p(Y) \times H_q(Y) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (a, b) &\longmapsto I(a, b). \end{aligned}$$

**Exemplo 1.7.** Seja o toro pinçado da figura 1.9. Temos que  $I(a, b) = \pm 1$ , dependendo da orientação do toro, e  $I(a, c) = 0$ . Porém,  $b$  pertence a mesma classe de homologia de  $c$  no toro. Daí, concluímos que a aplicação bilinear em homologia acima não está bem definida em variedades singulares.

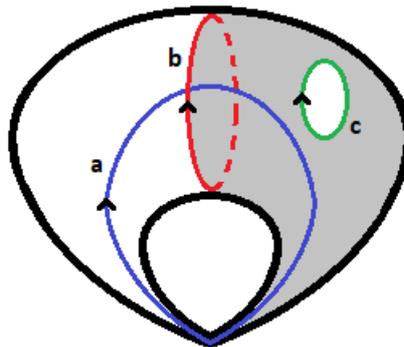


Figura 1.9: Toro Pinçado.

**Teorema 1.16.** (*Dualidade de Poincaré-Lefschetz*) Seja  $X$  uma variedade compacta e orientada. A aplicação bilinear acima quando tensorada com um corpo  $\mathbb{F}$  que contém  $\mathbb{Q}$  é não-degenerada e é igual a composta

$$H_p(X; \mathbb{F}) \times H_q(X; \mathbb{F}) \longrightarrow H_0(X; \mathbb{F}) \xrightarrow{\varepsilon^*} \mathbb{F}$$

## 1. Teorema da Dualidade de Poincaré

---

da aplicação augmentação  $\varepsilon_* : \Sigma n_i x_i \rightarrow \Sigma n_i$  seguida do produto interseção, onde  $p+q = n$ .

# Capítulo 2

## Homologia de Interseção

Neste capítulo, vamos construir uma nova teoria de homologia e cohomologia com a intenção de recuperar de alguma forma a dualidade de Poincaré e o produto interseção para uma classe maior de espaços. De grosso modo, como veremos, poderíamos dizer que essa nova teoria é na verdade um refinamento da teoria clássica simplicial.

Na primeira seção, vamos definir e estudar esses espaços, chamados pseudovarietades, que generalizam variedades topológicas e para os quais vamos provar o teorema da dualidade de Poincaré generalizada.

Na segunda seção, iremos definir a homologia e cohomologia de interseção e ver alguns resultados interessantes.

Na terceira seção, veremos que com a homologia de interseção o produto interseção fica bem definido em pseudovarietades.

Na quarta seção, demonstraremos como podemos calcular a homologia de interseção usando a homologia clássica, e daí concluiremos algumas consequências muito importantes.

Finalmente, na última seção, provaremos o teorema da dualidade de Poincaré generalizada para pseudovarietades para a homologia de interseção.

Usamos como referências para escrever esse capítulo os livros [2], [4], [5], [6] e o artigo [3], porém as seções 3, 4 e 5 se baseiam simplesmente no artigo [3].

### 2.1 Pseudovarietades

Nesta seção, vamos definir e estudar cuidadosamente os espaços que generalizam variedades topológicas e para os quais vamos definir essa nova teoria.

Seja  $L$  um espaço topológico Hausdorff e compacto. O cone aberto sobre  $L$  é

definido como o seguinte quociente

$$\dot{c}(L) = \frac{L \times [0, 1)}{L \times \{0\}}.$$



Figura 2.1: Cone aberto sobre um segmento e sobre um círculo.

Já o cone fechado sobre  $L$  é definido como

$$c(L) = \frac{L \times [0, 1]}{L \times \{0\}},$$

e é homeomorfo ao cone definido na definição 1.11.

O ponto  $L \times \{0\}$  nos cones acima é chamado de vértice do cone.

Vamos definir espaço topológicos estratificados por indução na dimensão.

**Definição 2.1.** Um espaço topológico estratificado  $X$  de dimensão 0 é um conjunto enumerável com a topologia discreta. Suponhamos que temos definido espaços topológicos estratificados de dimensões menores do que  $n$ , com  $n > 0$ . Então, um espaço topológico estratificado  $X$  de dimensão  $n$  é um espaço topológico Hausdorff e paracompacto com uma filtração

$$X = X_n \supset X_{n-1} \supset X_{n-2} \supset \cdots \supset X_1 \supset X_0 \supset X_{-1} = \emptyset,$$

onde cada  $X_i$  é fechado em  $X$ , tal que  $X_j - X_{j-1}$  é vazio ou para cada  $x \in X_j - X_{j-1}$ , existem uma vizinhança  $U_x$  de  $x$  em  $X$ , um espaço topológico estratificado compacto  $L$  de dimensão  $n - j - 1$  com filtração

$$L = L_{n-j-1} \supset \cdots \supset L_1 \supset L_0 \supset L_{-1} = \emptyset,$$

e um homeomorfismo

$$\phi : U_x \rightarrow \mathbb{R}^j \times \dot{c}(L)$$

tal que  $\phi$  leva  $U_x \cap X_{j+i+1}$  homeomorficamente em  $\mathbb{R}^j \times \dot{c}(L_i) \subseteq \mathbb{R}^j \times \dot{c}(L)$  para  $n - j - 1 \geq i \geq 0$ , e  $\phi$  leva  $U_x \cap X_j$  homeomorficamente em  $\mathbb{R}^j \times \{\text{vertice de } \dot{c}(L)\}$ .

Desde que  $L$  tem uma filtração como acima, seu cone aberto tem uma filtração

natural dada por  $(\dot{c}(L))_i = \dot{c}L_{i-1}$  para  $i \in \{0, \dots, n-j\}$ , onde, por convenção,  $\dot{c}(\emptyset)$  é igual ao vértice de  $\dot{c}(L)$ . Assim,  $\phi$  é um homeomorfismo que preserva filtração.

Da definição, como  $U_x \cap X_j$  é homeomorfo a  $\mathbb{R}^j \times \{\text{vertice de } \dot{c}(L)\} \cong \mathbb{R}^j$ , então  $X_j - X_{j-1}$  é vazio ou é uma variedade topológica de dimensão  $j$ . Uma componente conexa de  $X_j - X_{j-1}$  é chamado um  $j$ -estrato de  $X$ . Na definição acima, a menos de homeomorfismo, o espaço  $L$  depende simplesmente do estrato em que  $x$  se encontra e é chamado de o link do estrato.

A união de todos os estratos de  $X$  decompõe  $X$  em variedades disjuntas. O espaço  $X$  pode não ser uma variedade topológica, porém podemos quebra-lo em partes que são variedades topológicas, e essas partes estão ligadas umas às outras pelo homeomorfismo  $\phi$ .

**Definição 2.2.** Uma pseudovariiedade topológica de dimensão  $n$  é um espaço topológico estratificado  $X$  de dimensão  $n$  com a filtração satisfazendo  $X_{n-1} = X_{n-2}$  e  $X - X_{n-2}$  é denso em  $X$ .

A coleção dos estratos de a pseudovariiedade  $X$  é chamada de estratificação de  $X$ .

Na definição acima,  $X_{n-1}$  contém a parte singular de  $X$ , e denotaremos  $\Sigma = X_{n-1}$ .

De agora em diante, cada pseudovariiedade  $X$  é uma  $PL$ -pseudovariiedade, isto é,  $X$  é um  $PL$ -espaço com a estrutura de pseudovariiedade na  $PL$ -categoria, ou seja,  $X$  tem uma triangulação tal que cada conjunto da filtração  $X_j$  é uma união de simplexes e todos os homeomorfismos em a definição são  $PL$ -homeomorfismos. Chamaremos  $X$  simplesmente de pseudovariiedade.

**Observação 2.1.** Pode-se provar que a geométrica realização  $X$  de um complexo simplicial  $K$  é uma pseudovariiedade de dimensão  $n$  se, e somente se,

- $X$  é um união de simplexes de dimensão  $n$ , isto é, cada simplexo de  $X$  é face de um simplexo de dimensão  $n$ ;
- cada  $(n-1)$ -simplexo de  $X$  é face de exatamente dois simplexes de  $X$  de dimensão  $n$ .

Pode-se ainda provar que um espaço topológico  $X$  é uma pseudovariiedade de dimensão  $n$  se, e somente se, existe um conjunto fechado  $\Sigma$  em  $X$  tal que

- $X - \Sigma$  é uma variedade topológica de dimensão  $n$  que é densa em  $X$ ;
- $\dim(\Sigma) \leq n - 2$ .

Assim, a definição de pseudovariiedade que parecia bem artificial inicialmente resulta em uma definição topológica mais natural.

**Exemplo 2.1.** • Cada variedade topológica é uma pseudovarietade, pois basta considerar  $\Sigma = \emptyset$  na observação acima. De fato, as pseudovarietades foram os primeiros espaços que generalizavam variedades topológicas.

- Seja  $M$  uma variedade topológica compacta de dimensão  $n > 0$ . Seu cone aberto  $\dot{c}(M)$  é uma pseudovarietade de dimensão  $n + 1$  com um único ponto singular: o vértice do cone. Sua suspensão  $S(M)$  é também uma pseudovarietade de dimensão  $n + 1$  só que, diferentemente, tem duas singularidades: os dois vértices da suspensão.
- Duas esferas de mesma dimensão conectadas por um único ponto, como na figura 2.2, é uma pseudovarietade com único ponto singular.

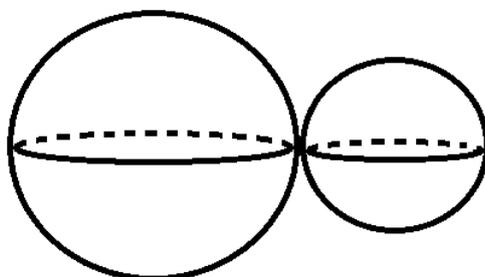


Figura 2.2: Duas esferas ligadas por um único ponto.

- O toro pinçado é outro exemplo de pseudovarietade com singularidade isolada.

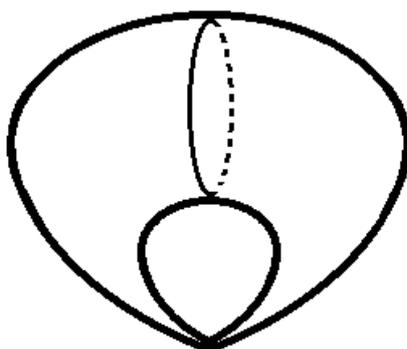


Figura 2.3: Toro pinçado.

- A classe de pseudovarietades compõe uma grande quantidade de espaços singulares, porém claro que nem todos os espaços singulares se enquadram na definição de pseudovarietade. Por exemplo, na figura 2.4 está ilustrado um espaço que tem bordo, logo os 2-simplexos do bordo não são faces de exatamente dois 3-simplexos. Já na figura 2.5, temos um espaço singular triangularizável de dimensão 2 com um conjunto singular de dimensão 1. Daí, seu conjunto singular é muito grande

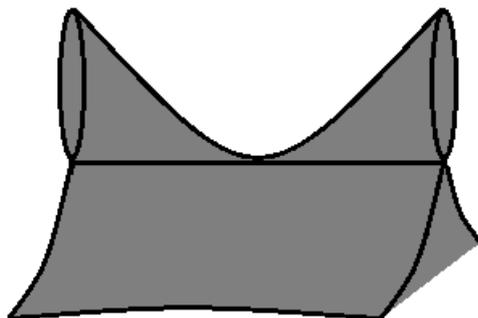


Figura 2.4: Espaço com bordo.

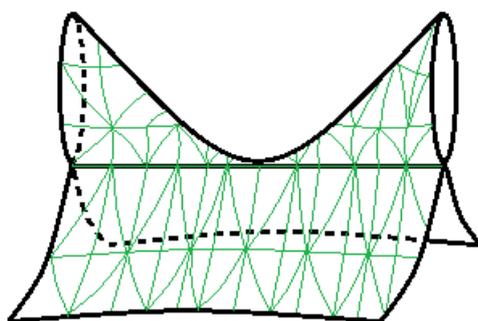


Figura 2.5: Espaço triangularizável que não é uma pseudovarietade.

para ser uma pseudovarietade. Por fim, na figura 2.6, temos uma curva ligada a uma esfera  $\mathbb{S}^2$ . Este é outro exemplo de espaço que não é uma pseudovarietade, visto que ele não é uma união de 2-simplexos.

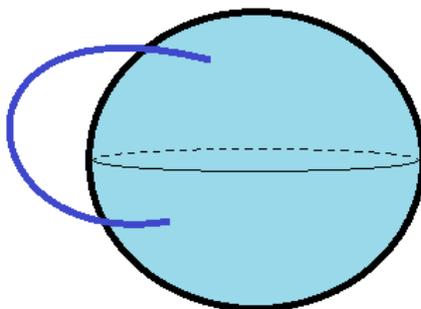


Figura 2.6: Esfera com alça.

## 2.2 Definição

Nesta seção, vamos finalmente definir a homologia de interseção e, antes disso, veremos o resultado inicial que motivou o desenvolvimento desta teoria.

Sejam  $X$  uma pseudovarietade e  $T : |K| \rightarrow X$  uma triangulação de  $X$  que é compatível com a filtração, ou seja, cada conjunto  $X_j$  da filtração de  $X$  é uma união

de simplexos. Vamos denotar por  $I^0C_i(X)$  o conjunto das  $i$ -cadeias  $\xi$  de  $X$  tais que

$$\dim(|\xi| \cap X_{n-k}) \leq i - k \text{ e } \dim(|\partial\xi| \cap X_{n-k}) \leq i - k - 1$$

para todo  $k \geq 2$ . Estas cadeias são ditas transversais a estratificação. Por convenção, o conjunto vazio tem dimensão  $-\infty$ . Temos que  $I^0C(X)$  forma um subcomplexo do complexo simplicial clássico  $C(X)$  de  $X$ .

**Observação 2.2.** Como a triangulação de  $X$  é compatível com a filtração,  $|\xi| \cap X_{n-k}$  é uma união de simplexos, logo  $\dim(|\xi| \cap X_{n-k})$  está bem definido como sendo a dimensão do maior simplexo.

De forma totalmente análoga a definição 1.6, podemos definir quando uma pseudo-variedade compacta é orientável. Denotamos a classe de homologia de uma tal escolha de orientação por  $[X] \in H_n(X; \mathbb{Z})$  e chamamos de a classe fundamental de  $X$ .

Desde  $I^0C(X)$  é um subcomplexo de  $C(X)$ , temos uma inclusão natural

$$i_* : H_i(I^0C_i(X)) \rightarrow H_i(C_i(X)) = H_i(X)$$

para todo  $i$ .

**Lema 2.1.** Seja  $X$  uma  $n$ -pseudovariabilidade compacta e orientada com classe fundamental  $[X]$ . Então, o produto cap

$$\cap[X] : H^{n-k}(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H_k(X; \mathbb{Z})$$

se fatora como

$$\begin{array}{ccc} H^{n-k}(X; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cap[X]} & H_k(X; \mathbb{Z}) \\ \cap[X] \downarrow & \nearrow i_* & \\ H_k(I^0C_k(X)) & & \end{array}$$

**Prova.** Na prova do teorema da dualidade de Poincaré percebemos como geometricamente o produto cap age:  $\cap[X] : C^{n-k}(K) \rightarrow C_k(\text{sd}(K))$  leva a cocadeia  $\sigma^*$  no seu bloco dual fechado  $\overline{D}(\sigma)$ , onde  $\sigma$  é um  $(n-k)$ -simplexo orientado de  $K$ . Desde a filtração de  $X$  é compatível com a triangulação  $K$ , temos que  $X_{n-i} \subset K_{n-i}$  para  $i \geq 2$ , onde  $K_{n-i}$  é o  $(n-i)$ -esqueleto da triangulação  $K$ , ou seja,  $K_{n-i}$  é a união de todos os  $(n-i)$ -simplexos de  $K$ . Com o mesmo argumento que demos para variedades no capítulo anterior, podemos provar que se  $\tau$  é um  $j$ -simplexo de  $K$ , então  $\dim(\tau \cap \overline{D}(\sigma)) \leq k + j - n$ . Assim, se  $\tau$  é um  $(n-i)$ -simplexo de  $K_{n-i}$ , então

$\dim(\tau \cap \overline{D}(\sigma)) \leq k - i$ . De forma análoga,  $\dim(\tau \cap \dot{D}(\sigma)) \leq k - i - 1$ . Daí

$$\text{Im}(\cap[X] : C^{n-k}(K) \rightarrow C_k(\text{sd}(K))) \subset I^0 C_k(X).$$

■

O resultado inicial que motivou o desenvolvimento da teoria de homologia de interseção foi o fato, provado por McCrory, que existe uma classe de pseudovarietades, chamadas normais, tais que  $\cap[X] : H^{n-k}(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H_k(I^0 C_k(X))$  é um isomorfismo.

Assim, temos que se  $\cap[X] : H^{n-k}(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H_k(X; \mathbb{Z})$  falha em ser um isomorfismo para pseudovarietades normais é por causa da inclusão  $i_* : H_k(I^0 C_k(X)) \rightarrow H_k(X; \mathbb{Z})$ . Caso  $X$  fosse uma variedade topológica, então, pelo teorema da dualidade de Poincaré, essa inclusão seria um isomorfismo, implicando que para cada classe de homologia em  $X$  sempre podemos escolher um representante dessa classe que é transversal a estratificação. Daí,  $X$  sendo uma pseudovarietade, a parte singular de  $X$  nos impede de fazer tal movimento. Percebemos, por exemplo, que no toro da figura 2.7 é impossível mover o ciclo  $a$  na sua classe de homologia de tal forma que evite a singularidade  $v$ .

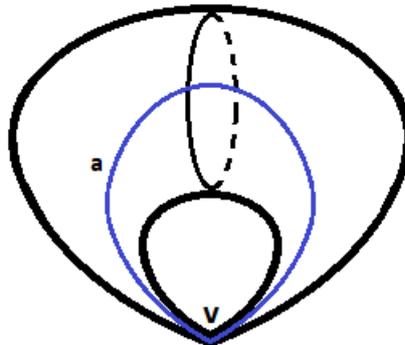


Figura 2.7: Toro pinçado.

Isto motivou Goresky e MacPherson a estudar os grupos de homologia das cadeias que são transversais a estratificação com uma certa folga, chamada perversidade:

**Definição 2.3.** Uma perversidade é uma função

$$\bar{p} : \{0, 1, \dots, \dim X\} \rightarrow \mathbb{N}$$

tal que  $\bar{p}(0) = \bar{p}(1) = \bar{p}(2) = 0$  e  $\bar{p}(i+1) = \bar{p}(i)$  ou  $\bar{p}(i+1) = \bar{p}(i) + 1$ .

Essas propriedades que as perversidades satisfazem são importantes para que os grupos de homologia de interseção não dependam da estratificação.

**Exemplo 2.2.** As principais perversidades são:

- a perversidade nula é dada por  $\bar{n}(t) = 0$  para todo  $t \in \{0, 1, \dots, \dim(X)\}$ , já a perversidade máxima é dada por  $\bar{t}(t) = t - 2$  para todo  $t \in \{2, 3, \dots, \dim(X)\}$  e  $\bar{t}(0) = \bar{t}(1) = 0$ ;
- A média baixa perversidade é a perversidade dada por  $\bar{m}(t) = \lfloor \frac{t}{2} \rfloor - 1$  para  $t \geq 2$  e  $\bar{m}(t)(0) = \bar{m}(t)(1) = 0$ , onde  $\lfloor \frac{t}{2} \rfloor$  é o maior natural menor ou igual a  $\frac{t}{2}$ , já a média alta perversidade é a perversidade dada por  $\bar{n}(t) = \lceil \frac{t}{2} \rceil - 1$  para  $t \geq 2$  e  $\bar{n}(t)(0) = \bar{n}(t)(1) = 0$ , onde  $\lceil \frac{t}{2} \rceil$  é o menor natural maior ou igual a  $\frac{t}{2}$ .

**Definição 2.4.** Duas perversidades  $\bar{p}$  e  $\bar{q}$  são complementares se

$$\bar{p} + \bar{q} = \bar{t}.$$

**Exemplo 2.3.** As perversidades  $\bar{n}$  e  $\bar{t}$  são complementares, assim também como  $\bar{m}$  e  $\bar{n}$ .

**Definição 2.5.** Fixado uma perversidade  $\bar{p}$ . Um subespaço  $Y$  de  $X$  é dito  $(\bar{p}, i)$ -admissível se  $\dim(Y) \leq i$  e

$$\dim(Y \cap X_{n-k}) \leq i - k + \bar{p}(k)$$

para todo  $k \geq 2$ . De forma análoga, uma  $i$ -cadeia  $\xi \in C_i^T(X)$  é dita  $\bar{p}$ -admissível se

$$\dim(|\xi| \cap X_{n-k}) \leq i - k + \bar{p}(k)$$

para todo  $k \geq 2$

Pode acontecer de uma cadeia  $\xi$  ser  $(\bar{p}, i)$ -admissível, porém seu bordo  $\partial\xi$  não ser  $(\bar{p}, i - 1)$ -admissível.

**Definição 2.6.** Dada uma perversidade  $\bar{p}$ . O subespaço  $I^p C_i^T(X)$  de  $C_i^T(X)$  consiste de todas as  $i$ -cadeias  $\xi \in C_i^T(X)$  tais que  $\xi$  é  $\bar{p}$ -admissível e  $\partial\xi$  é uma  $(i - 1)$ -cadeia que também é  $\bar{p}$ -admissível, isto é,  $I^p C_i^T(X) = \{\xi \in C_i^T(X) \mid \dim(|\xi| \cap X_{n-k}) \leq i - k + \bar{p}(k), \dim(|\partial\xi| \cap X_{n-k}) \leq (i - 1) - k + \bar{p}(k) \forall k \geq 2\}$ .

O operador bordo  $\partial : C_i^T(X) \rightarrow C_{i-1}^T(X)$  induz um homomorfismo de  $I^p C_i^T(X)$  para  $I^p C_{i-1}^T(X)$ , pois se  $\xi \in I^p C_i^T(X)$ , então  $\dim(|\partial\xi| \cap X_{n-k}) \leq (i - 1) - k + \bar{p}(k)$  e  $\partial\partial\xi = 0$ , logo  $\partial\xi \in I^p C_{i-1}^T(X)$ .

**Definição 2.7.** Chamamos os grupos

$$I^p H_i^T(X) = \frac{\text{Ker } \partial : I^p C_i^T(X) \rightarrow I^p C_{i-1}^T(X)}{\text{Im } \partial : I^p C_{i+1}^T(X) \rightarrow I^p C_i^T(X)}$$

de grupos de homologia de interseção de  $X$  com perversidade  $\bar{p}$  e triangulação  $T$ .

**Definição 2.8.** Uma triangulação  $T : |K| \rightarrow X$  é um refinamento de uma triangulação  $\bar{T} : |\bar{K}| \rightarrow X$  se para cada simplexo  $\sigma \in K$ , existe algum simplexo  $\bar{\sigma} \in \bar{K}$  tal que  $T(\sigma) \subset \bar{T}(\bar{\sigma})$ .

Se  $T$  é um refinamento de  $\bar{T}$ , então existe uma aplicação natural compatível com o operador bordo

$$C_i^{\bar{T}}(X) \rightarrow C_i^T(X)$$

definida na base por se  $\bar{\sigma} \in C_i^{\bar{T}}(X)$  então

$$\bar{\sigma} \mapsto \sum_{\sigma \in C_i^T(X), T(\sigma) \subset \bar{T}(\bar{\sigma})} \pm \sigma,$$

onde o sinal é 1 se as orientações de  $\bar{\sigma}$  e  $\sigma$  são compatíveis e -1, caso contrário. Essa aplicação preserva o suporte de cadeias. Assim, temos uma aplicação induzida bem definida

$$I^p C_i^{\bar{T}}(X) \rightarrow I^p C_i^T(X).$$

Definimos o grupo  $I^p C_i(X)$  como sendo o limite direto de os grupos  $I^p C_i^T(X)$  sobre todas as triangulações  $T$  de  $X$  compatíveis com a filtração, ou seja, um elemento de  $I^p C_i(X)$  é representado por um elemento de  $I^p C_i^T(X)$  para alguma triangulação  $T$  compatível com a filtração de  $X$ , e os elementos  $\xi \in I^p C_i^T(X)$  e  $\bar{\xi} \in I^p C_i^{\bar{T}}(X)$  representam o mesmo elemento em  $I^p C_i(X)$  se, e somente se, existe um comum refinamento  $T'$  de  $T$  e  $\bar{T}$  compatível com a filtração de  $X$  tal que  $\xi$  e  $\bar{\xi}$  induzem o mesmo elemento em  $I^p C_i^{T'}(X)$ . Daí,  $|\xi| = |\bar{\xi}|$ .

Como o operador bordo  $\partial : I^p C_i^T(X) \rightarrow I^p C_{i-1}^T(X)$  comuta com a aplicação induzida por qualquer refinamento, temos que  $\partial$  induz um operador bordo de  $I^p C_i(X)$  para  $I^p C_{i-1}(X)$ .

**Definição 2.9.** Os grupos

$$I^p H_i(X) = \frac{\text{Ker } \partial : I^p C_i(X) \rightarrow I^p C_{i-1}(X)}{\text{Im } \partial : I^p C_{i+1}(X) \rightarrow I^p C_i(X)}$$

são chamados de grupos de homologia de interseção de  $X$  com perversidade  $\bar{p}$ .

De forma análoga, podemos definir os grupos de homologia de interseção de  $X$  com coeficientes em um grupo  $G$  abeliano arbitrário, ou seja,

$$I^p H_i^T(X; G) = \frac{\text{Ker } \partial : I^p C_i^T(X; G) \rightarrow I^p C_{i-1}^T(X; G)}{\text{Im } \partial : I^p C_{i+1}^T(X; G) \rightarrow I^p C_i^T(X; G)}$$

e

$$I^p H_i(X; G) = \frac{\text{Ker } \partial : I^p C_i(X; G) \rightarrow I^p C_{i-1}(X; G)}{\text{Im } \partial : I^p C_{i+1}(X; G) \rightarrow I^p C_i(X; G)}.$$

E usando os grupos

$$I^p C^i(X; G) = \text{Hom}(I^p C_i(X), G) \text{ e } I^p C_T^i(X; G) = \text{Hom}(I^p C_i^T(X), G),$$

podemos definir os grupos de cohomologia de interseção de  $X$ , mais precisamente,

$$I^p H_T^i(X; G) = \frac{\text{Ker } \delta : I^p C_T^i(X; G) \rightarrow I^p C_T^{i+1}(X; G)}{\text{Im } \delta : I^p C_T^{i-1}(X; G) \rightarrow I^p C_T^i(X; G)}$$

$$I^p H^i(X; G) = \frac{\text{Ker } \delta : I^p C^i(X; G) \rightarrow I^p C^{i+1}(X; G)}{\text{Im } \delta : I^p C^{i-1}(X; G) \rightarrow I^p C^i(X; G)}.$$

**Observação 2.3.** • Se  $\bar{p}$  e  $\bar{q}$  são perversidades tais que  $\bar{p} \leq \bar{q}$ , então  $I^p C(X) \subset I^q C(X)$ . Logo, temos a aplicação induzida

$$i_* : I^p H_i(X) \rightarrow I^q H_i(X)$$

pela inclusão para todo  $i$ .

- Da definição, se  $X$  é uma pseudovarietade de dimensão  $n$ , temos que  $I^p C_0(X) = C_0(X - \Sigma)$ ,  $I^p C_1(X) = C_1(X - \Sigma)$  e  $I^p C_n(X) = C_n(X)$  para qualquer perversidade  $\bar{p}$ . Daí,

$$I^p H_0(X) = H_0(X - \Sigma) \text{ e } I^p H_n(X) = H_n(X).$$

- Veremos que os grupos de homologia de interseção não dependem da estratificação e  $PL$ -estrutura de  $X$ . Assim, concluiremos que os grupos de homologia de interseção são invariantes topológicos sobre as pseudovarietades.
- Nós sabemos que para qualquer triangulação  $T$  do espaço  $X$ , temos que

$$H_i^T(X) = H_i(X).$$

O fato inesperado é que isso não acontece para os grupos  $I^p H_i(X)$ . De fato, existe um tipo particular de triangulação  $T$ , chamada “flag-like” em inglês, tal que

$$I^p H_i^T(X) \simeq I^p H_i(X)$$

vale para qualquer perversidade  $\bar{p}$ . Uma triangulação “flag-like” é uma triangulação tal que para cada simplexo  $\sigma$  e cada  $X_i$  da filtração,  $\overline{X_i} \cap \sigma$  é uma única face de  $\sigma$ .

**Exemplo 2.4.** Seja  $Y$  uma variedade topológica de dimensão  $n$ . Sabendo que os grupos de homologia de interseção não dependem da estratificação, podemos perceber que  $I^p H_i(Y) = H_i(Y)$  para qualquer perversidade  $\bar{p}$ , visto que  $Y$  tem a seguinte estratificação natural:

$$X_n = X \supset X_{n-1} = \emptyset \supset \cdots \supset X_{-1} = \emptyset.$$

**Exemplo 2.5.** Seja  $X = S(T^2)$  a suspensão do toro. Sabemos que  $S(T^2)$  é uma pseudovariabilidade de dimensão 3 com os vértices da suspensão,  $v$  e  $w$ , sendo seu conjunto singular, e a filtração

$$X_3 = X \supset X_2 = \{v, w\} \supset X_1 = \{v, w\} \supset X_0 = \{v, w\} \supset X_{-1} = \emptyset$$

resulta em uma estratificação de  $X$ . Percebemos que as únicas perversidades com domínio  $\{0, 1, 2, 3\}$  são as perversidades nula  $\bar{n} = (0, 0, 0, 0)$  e a máxima  $\bar{t} = (0, 0, 0, 1)$ . Vamos tentar esboçar a ideia de como calcular os grupos  $I^n H_i(X; \mathbb{Q})$  e  $I^t H_i(X; \mathbb{Q})$ , onde  $\mathbb{Q}$  é o corpo dos racionais.

Da segunda observação acima, segue que

$$I^n H_0(X; \mathbb{Q}) = I^t H_0(X; \mathbb{Q}) = H_0(X - \Sigma; \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}$$

e é gerado por qualquer vértice de  $X - \Sigma$ , desde  $X - \Sigma$  é conexo.

Na figura 1.7, os ciclos  $a$  e  $b$  são os ciclos candidatos para gerar  $I^t H_1(X; \mathbb{Q})$  e  $I^n H_1(X; \mathbb{Q})$ . Porém, uma 2-cadeia que tem  $v$  ou  $w$  como vértices é admissível em relação a  $\bar{t}$ , porém não em relação a  $\bar{n}$ . Daí, os cones  $c(a)$  e  $c(b)$  com vértice  $v$  ou  $w$  são admissíveis em relação a  $\bar{t}$  e não em relação a  $\bar{n}$ . Como  $\partial(c(a)) = a$  e  $\partial(c(b)) = b$ , temos que

$$I^n H_1(X; \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}_a \oplus \mathbb{Q}_b \text{ e } I^t H_1(X; \mathbb{Q}) = 0.$$

A menos de representantes, os 2-ciclos da suspensão  $S(T^2)$  são o próprio toro  $T^2$  e as suspensões  $S(a)$  e  $S(b)$  de os ciclos  $a$  e  $b$  do parágrafo anterior. O toro  $T^2$  é admissível em relação a qualquer perversidade  $\bar{n}$  e  $\bar{t}$ , mas é o bordo do seu cone com vértice  $v$  ou  $w$ , e qualquer 3-cadeia em  $S(T^2)$  é admissível em relação a ambas perversidades. Os ciclos  $S(a)$  e  $S(b)$  não são admissíveis em relação a perversidade  $\bar{n}$ . Em relação a perversidade  $\bar{t}$ , eles são admissíveis, e podemos ver que não existe uma 3-cadeia em  $S(T^2)$  tal que seu bordo sejam  $S(a)$  ou  $S(b)$ . Assim,

$$I^n H_2(X; \mathbb{Q}) = 0 \text{ e } I^t H_2(X; \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}_{S(a)} \oplus \mathbb{Q}_{S(b)}.$$

Como  $S(T^2)$  é orientável e conexa, podemos ver que

$$I^n H_3(X; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q} \cong I^t H_3(X; \mathbb{Q})$$

e são gerados pela classe fundamental  $[S(T^2)]$ .

Temos que  $\bar{n}$  e  $\bar{t}$  são perversidades complementares, e percebemos que  $\dim(I^t H_1(X; \mathbb{Q})) = \dim(I^n H_2(X; \mathbb{Q}))$  e  $\dim(I^t H_2(X; \mathbb{Q})) = \dim(I^n H_1(X; \mathbb{Q}))$ . Daí, a homologia de interseção já parece mais propícia para recuperar a dualidade de Poincaré de alguma forma para pseudovariiedades.

**Corolário 2.2.** Seja  $X$  uma  $n$ -pseudovariiedade compacta e orientada com classe fundamental  $[X]$ . Então, o produto  $\cap$

$$\cap[X] : H^{n-k}(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H_k(X; \mathbb{Z})$$

se fatora como

$$\begin{array}{ccc} H^{n-k}(X; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cap[X]} & H_k(X; \mathbb{Z}) \\ \downarrow \cap[X] & & \uparrow i_* \\ I^n H_k(X; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{i_*} I^p H_k(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{i_*} & I^t H_k(X; \mathbb{Z}) \end{array}$$

para qualquer perversidade  $\bar{p}$ .

**Proposição 2.3.** Seja  $X$  uma pseudovariiedade de dimensão par  $2j$  com exatamente uma singularidade isolada  $x$ . Se  $\bar{m}$  é a perversidade média baixa, então

$$I^{\bar{m}} H_i(X) = \begin{cases} H_i(X), & i > j, \\ \text{Im}(H_i(X - x) \rightarrow H_i(X)), & i = j, \\ H_i(X - x), & i < j. \end{cases}$$

**Prova.** Seja  $X$  com a seguinte filtração natural

$$X = X_{2j} \supset X_{2j-1} = \{x\} \supset \cdots \supset X_0 = \{x\} \supset X_{-1} = \emptyset$$

que defini uma estratificação. Para uma triangulação de  $X$  ser compatível com essa filtração basta que  $x$  seja um vertice dessa triangulação.

A condição mais forte para uma cadeia está em  $I^m C_i(X)$  é quando  $k = 2j$ , ou seja,

$$I^m C_i(X) = \{\xi \in C_i(X) \mid \dim(|\xi| \cap \{x\}) \leq i - j - 1, \dim(|\partial\xi| \cap \{x\}) \leq i - j - 2\}.$$

Assim:

- Se  $i \leq j$ , então  $i - j - 1 < 0$  e  $i - j - 2 < 0$ . Logo,  $\xi \in I^m C_i(X)$  se, e somente se,  $|\xi| \cap \{x\} = \emptyset = |\partial\xi| \cap \{x\}$ , ou seja,

$$I^m C_i(X) = C_i(X - x).$$

- Se  $i \geq j + 2$ , então  $i - j - 2 \geq 0$  e  $i - j - 1 > 0$ . Logo,  $\xi \in I^m C_i(X)$  se, e somente se,  $\xi \in C_i(X)$ , ou seja,  $I^m C_i(X) = C_i(X)$ .

Daí,  $I^m H_i(X) = H_i(X - x)$  se  $i \leq j - 1$  e  $I^m H_i(X) = H_i(X)$  se  $i \geq j + 2$ . Como

$$\text{Ker}(\partial : I^m C_{j+1}(X) \rightarrow I^m C_j(X)) = \text{Ker}(\partial : C_{j+1}(X) \rightarrow C_j(X)),$$

temos que  $I^m H_{j+1}(X) \simeq H_{j+1}(X)$ . Agora, como

$$\partial(I^m C_{j+1}(X)) = (\partial(C_{j+1}(X)) \cap I^m C_j(X))$$

e  $I^m C_j(X) = C_j(X - x)$ , então

$$I^m H_j(X) \simeq \text{Im}(H_j(X - x) \rightarrow H_j(X)).$$

■

**Definição 2.10.** Um subconjunto construtivo de um complexo simplicial  $K$  é um conjunto que é uma união de interiores de simplexes de  $K$ . Um subconjunto construtivo de um  $PL$ -espaço  $X$  é um que é construtivo em relação a alguma triangulação de  $X$ .

Vamos usar o seguinte lema nas próximas seções, e sua prova pode ser encontrado na referencia [3].

**Lema 2.4.** Sejam  $X$  uma pseudovarietade compacta e orientável de dimensão  $n$  e  $A \subset B$  subconjuntos construtivos de  $X$ . Se  $(B - A) \subset (X - \Sigma)$ , então o produto cap com a classe fundamental  $[X]$  de  $X$  é um isomorfismo:

$$\cap[X] : H^i(B, A) \rightarrow H_{n-i}(X - A, X - B).$$

## 2.3 Produto Interseção para Pseudovarietades

Nesta seção, veremos que podemos definir o produto interseção para pseudovarietades com a homologia de interseção.

Ao longo desta seção,  $X$  sempre será uma pseudovarietade compacta e orientável.

**Definição 2.11.** Suponhamos  $\bar{p}$  e  $\bar{q}$  duas perversidades tais que a soma delas é uma perversidade  $\bar{r}$ . Uma cadeia  $\xi \in I^p C_i(X)$  é dita dimensionalmente transversal a uma cadeia  $\xi' \in I^q C_j(X)$  se  $|\xi| \cap |\xi'|$  é um conjunto  $(\bar{r}, l)$ -admissível, onde  $l = i + j - n$ . Neste caso, denotamos por  $\xi \frown \xi'$  quando  $\xi$  e  $\xi'$  são dimensionalmente transversais.

As vezes quando  $\xi$  e  $\xi'$  forem dimensionalmente transversais, vamos simplesmente dizer que elas são transversais.

Queremos associar cadeias  $\xi \in I^p C_i(X)$  e  $\xi' \in I^q C_j(X)$  dimensionalmente transversais a cadeias de  $I^r C_{i+j-n}(X)$ , logo o caso que realmente importa é quando  $\dim(|\xi| \cap |\xi'|) = i + j - n$ . Neste caso,  $\xi$  e  $\xi'$  satisfaz a condição como antes e, além disso,  $\dim((|\xi| \cap |\xi'|) \cap X_{n-c}) \leq i + j - n - c + r(c)$  para todo  $c \geq 2$ . Assim, os simplexos de  $|\xi| \cap |\xi'|$  que estão na parte singular  $X_{n-2} = \Sigma$  de  $X$  deve ter dimensão menor ou igual a  $i + j - n - 2$ .

**Exemplo 2.6.** Na figura 2.8 temos um pedaço de uma pseudovarietade  $X$  de dimensão 3. Como a interseção das 2-cadeias  $C$  e  $D$  tocam a parte singular  $X_1 = \Sigma$  de  $X = X_3$ , elas não podem ser transversais.

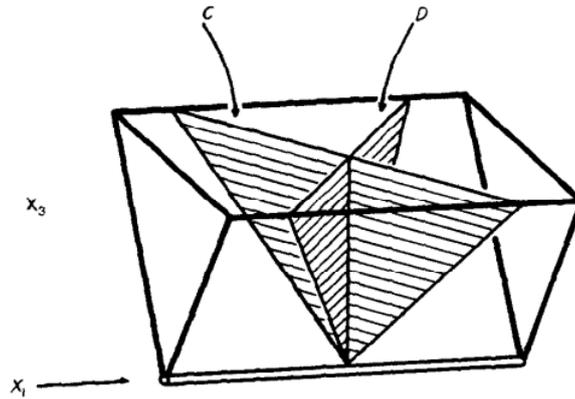


Figura 2.8: Cadeias não transversais

Já na figura 2.9,  $C'$  e  $D'$  são transversais, pois a interseção deles tem dimensão 1 e não toca a parte singular de  $X$ .

**Definição 2.12.** Considere  $\bar{p}$ ,  $\bar{q}$  e  $\bar{r}$  perversidades tais que  $\bar{p} + \bar{q} = \bar{r}$ . Sejam  $C \in I^p C_i(X)$  e  $D \in I^q C_j(X)$  cadeias tais que  $C \frown D$ ,  $\partial C \frown D$  e  $C \frown \partial D$ . Denotamos por  $\bar{C}$  e  $\bar{D}$  as classes de  $C$  e  $D$  em  $H_i(|C|, |\partial C|)$  e  $H_j(|D|, |\partial D|)$ , respectivamente, e

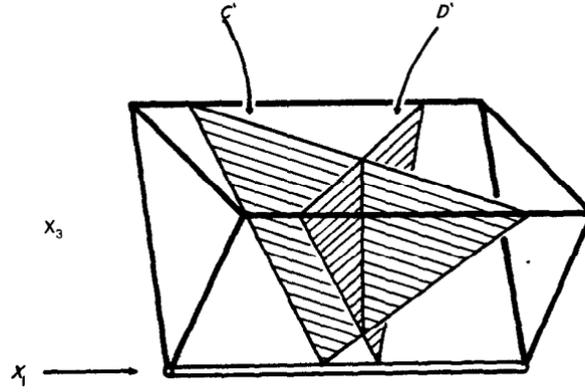


Figura 2.9: Cadeias transversais

$J = |\partial C| \cup |\partial D| \cup \Sigma$ . Definimos o produto interseção de  $C$  e  $D$ , denotado por  $C \cap D$ , como sendo a imagem de  $(\overline{C}, \overline{D})$  sobre a sequência de homomorfismo abaixo:

$$\begin{array}{c}
 H_i(|C|, |\partial C|) \times H_j(|D|, |\partial D|) \\
 \downarrow 1(\text{inclusão}) \\
 H_i(|C|, |C| \cap J) \times H_j(|D|, |D| \cap J) \\
 \simeq \downarrow 2(\text{excisão}) \\
 H_i(|C| \cup J, J) \times H_j(|D| \cup J, J) \\
 \simeq \uparrow 3(\cap[X] \times \cap[X] (\text{lema 2.4})) \\
 H^{n-i}(X - J, X - (|C| \cup J)) \times H^{n-j}(X - J, X - (|D| \cup J)) \\
 \downarrow 4(\text{produto cup}) \\
 H^{2n-i-j}(X - J, X - (|C| \cap |D|) \cup J) \\
 \simeq \downarrow 5(\cap[X] (\text{lema 2.4})) \\
 H_{i+j-n}((|C| \cap |D|) \cup J, J) \\
 \simeq \uparrow 6(\text{excisão}) \\
 H_{i+j-n}(|C| \cap |D|, |C| \cap |D| \cap J) \\
 \simeq \downarrow 7 \\
 H_{i+j-n}(|C| \cap |D|, (|\partial C| \cap |D|) \cup (|C| \cap |\partial D|))
 \end{array}$$

**Observação 2.4.** A aplicação 7 acima é um isomorfismo, pois, desde

$$|C| \cap |D| \cap J = (|\partial C| \cap |D|) \cup (|C| \cap |\partial D|) \cup (|C| \cap |D| \cap \Sigma).$$

Por excisão, temos que

$$H_p(|C| \cap |D| \cap J, (|\partial C| \cap |D|) \cup (|C| \cap |\partial D|))$$

$$\cong$$

$$H_p(|C| \cap |D| \cap \Sigma, [(|\partial C| \cap |D|) \cup (|C| \cap |\partial D|)] \cap \Sigma)$$

para todo  $p$ . Como  $\dim(|C| \cap |D| \cap \Sigma) \leq i + j - n - 2$ , temos que

$$H_{i+j-n-1}(|C| \cap |D| \cap \Sigma, [(|\partial C| \cap |D|) \cup (|C| \cap |\partial D|)] \cap \Sigma)$$

$$= 0 =$$

$$H_{i+j-n}(|C| \cap |D| \cap \Sigma, [(|\partial C| \cap |D|) \cup (|C| \cap |\partial D|)] \cap \Sigma).$$

Portanto, pela sequência exata do par  $(|C| \cap |D| \cap J, (|\partial C| \cap |D|) \cup (|C| \cap |\partial D|))$ ,

$$i_* : H_{i+j-n-1}((|\partial C| \cap |D|) \cup (|C| \cap |\partial D|)) \rightarrow H_{i+j-n-1}(|C| \cap |D| \cap J)$$

é um isomorfismo. Portanto, pelo lema 24.4 da referência [1], a aplicação 7 da definição acima é, de fato, um isomorfismo.

Percebemos que essa definição de produto interseção para pseudovarietades tem basicamente a mesma ideia que a primeira definição de produto interseção para variedades topológicas.

As demonstrações dos dois seguintes lemas podem ser encontrado na referência [1].

**Lema 2.5.** Consideremos  $\bar{p}$ ,  $\bar{q}$  e  $\bar{r}$  perversidades tais que  $\bar{p} + \bar{q} = \bar{r}$ . Sejam  $C \in I^p C_i(X)$  e  $D \in I^q C_j(X)$  cadeias tais que  $C \pitchfork D$ ,  $\partial C \pitchfork D$  e  $C \pitchfork \partial D$ . Então,

$$\partial(C \cap D) = (\partial C) \cap D + (-1)^{n-i} C \cap (\partial D).$$

**Lema 2.6.** Consideremos  $\bar{p}$ ,  $\bar{q}$  e  $\bar{r}$  perversidades tais que  $\bar{p} + \bar{q} = \bar{r}$ . Sejam  $C \in I^p C_i(X)$  e  $D$  um  $(\bar{q}, j)$ -subconjunto admissível de  $X$ . Se  $|\partial C| \pitchfork D$ , então existem cadeias  $C' \in I^p C_i(X)$  e  $E \in I^p C_{i+1}(X)$  tais que  $\partial E = C' - C$ ,  $|C'| \pitchfork D$  e  $\partial C' = \partial C$ .

Em particular, se temos dois ciclos quaisquer, esse lema diz que mesmo que eles não sejam transversais, ainda podemos escolher representantes em suas classes de homologia de tal forma que sejam transversais.

**Teorema 2.7.** Consideremos  $\bar{p}$ ,  $\bar{q}$  e  $\bar{r}$  perversidades tais que  $\bar{p} + \bar{q} \leq \bar{r}$ . Então, existe

um único produto interseção

$$\cap : I^p H_i(X) \times I^q H_j(X) \rightarrow I^r H_{i+j-n}(X)$$

tal que para cada par de ciclos transversais  $C \in I^p C_i(X)$  e  $D \in I^q C_j(X)$ ,  $[C \cap D] = [C] \cap [D]$ , ou seja,  $\cap$  não depende da escolha dos representantes das classes.

**Prova.** Primeiramente, vamos provar o caso quando as perversidades satisfazem a igualdade, ou seja, quando  $\bar{p} + \bar{q} = \bar{r}$ . Daí, sejam  $\alpha \in I^p H_i(X)$  e  $\beta \in I^q H_j(X)$ . Escolhamos  $C \in I^p C_i(X)$  como um ciclo representante de  $\alpha$  e  $D \in I^q C_j(X)$  como um ciclo representante de  $\beta$ . Pelo lema 2.6, existem cadeias  $C_1 \in I^p C_i(X)$  e  $E \in I^p C_{i+1}(X)$  tais que  $C_1 \pitchfork D$ ,  $\partial E = C - C_1$  e  $\partial C_1 = \partial C = 0$ . Pelo lema 2.5,  $\partial(C_1 \cap D) = (\partial C_1) \cap D + (-1)^{n-i} C_1 \cap (\partial D) = 0$ , logo  $C_1 \cap D$  é um ciclo de  $I^r C_{i+j-n}(X)$ . Definamos

$$\alpha \cap \beta = [C_1 \cap D].$$

Seja  $C_2 \in I^p C_i(X)$  outro ciclo transversal a  $D$  que representa  $\alpha$ . Daí, existe uma cadeia  $E' \in I^p C_{i+1}(X)$  tal que  $C_2 - C_1 = \partial E'$ . Como  $\partial E' \pitchfork D$ , pelo lema acima, existem cadeias  $F \in I^p C_{i+1}(X)$  e  $E \in I^p C_{i+2}(X)$  tais que  $\partial E = F - E'$ ,  $F \pitchfork D$  e  $\partial F = \partial E' = C_2 - C_1$ . Daí,  $\partial(F \cap D) = (\partial F) \cap D + (-1)^{n-i-1} F \cap (\partial D) = C_2 \cap D - C_1 \cap D$ . Com isso,  $[C_1 \cap D] = [C_2 \cap D]$  em  $I^r H_{i+j-n}(X)$ . Logo,  $\alpha \cap \beta$  não depende do representante transversal a  $D$  na classe de homologia de  $\alpha$ . De forma análoga, podemos provar que  $\alpha \cap \beta$  não depende do representante transversal a  $C$  na classe de homologia de  $\beta$ . Agora, sejam  $C' \in I^p C_i(X)$  e  $D' \in I^q C_j(X)$  ciclos transversais quaisquer que representam  $\alpha$  e  $\beta$ , respectivamente. Pelo lema acima, existe um ciclo  $D'' \in I^q C_j(X)$  na mesma classe de homologia de  $D'$  que é transversal a  $|C'| \cup |C_1|$ . Logo,

$$\alpha \cap \beta = [C_1 \cap D] = [C_1 \cap D''] = [C' \cap D''] = [C' \cap D'].$$

Assim,  $\alpha \cap \beta$  está bem definido.

Se as perversidades  $\bar{p}$ ,  $\bar{q}$  e  $\bar{r}$  são tais que  $\bar{p} + \bar{q} \leq \bar{r}$ , então existem perversidades  $\bar{p}'$ ,  $\bar{q}'$  e  $\bar{r}'$  tais que  $\bar{p} \leq \bar{p}'$ ,  $\bar{q} \leq \bar{q}'$ ,  $\bar{r}' \leq \bar{r}$  e  $\bar{p}' + \bar{q}' = \bar{r}'$ . Pelo o que acabamos de provar, existe um produto interseção bem definido  $I^{p'} H_i(X) \times I^{q'} H_j(X) \rightarrow I^{r'} H_{i+j-n}(X)$ . Assim, como  $I^p H_i(X) \subset I^{p'} H_i(X)$ ,  $I^q H_j(X) \subset I^{q'} H_j(X)$  e  $I^r H_{i+j-n}(X) \subset I^{r'} H_{i+j-n}(X)$ , podemos definir o produto interseção  $I^p H_i(X) \times I^q H_j(X) \rightarrow I^r H_{i+j-n}(X)$  como sendo

a composta abaixo

$$\begin{array}{ccc}
 I^p H_i(X) \times I^q H_j(X) & & \\
 \downarrow & & \\
 I^{p'} H_i(X) \times I^{q'} H_j(X) & \longrightarrow & I^{r'} H_{i+j-n}(X) \\
 & & \downarrow \\
 & & I^r H_{i+j-n}(X).
 \end{array}$$

E o resultado independe das escolhas de  $\bar{p}'$ ,  $\bar{q}'$  e  $\bar{r}'$ . ■

**Exemplo 2.7.** Seja  $X = S(T^2)$  a suspensão do toro. Vamos calcular a matriz da seguinte aplicação

$$I^n H_1(X; \mathbb{Q}) \times I^t H_2(X; \mathbb{Q}) \longrightarrow I^t H_0(X; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\varepsilon_*} \mathbb{Q}$$

que é a aplicação augmentação  $\varepsilon_* : \Sigma n_i x_i \rightarrow \Sigma n_i$  seguida do produto interseção, onde  $\mathbb{Q}$  é o corpo dos racionais. Sabemos do exemplo 2.5 que  $I^n H_1(X; \mathbb{Q})$  é gerado por os ciclos  $a$  e  $b$  e  $I^t H_2(X; \mathbb{Q})$  é gerado por os ciclos  $S(a)$  e  $S(b)$ . A interseção de  $a$  e  $S(b)$  é simplesmente o ponto  $a \cap b$ . Daí, o índice de interseção  $I(a, S(b))$  é  $\pm 1$ , dependendo da orientação de  $S(T^2)$ . De forma análoga,  $I(b, S(a)) = \pm 1$ . Como  $a \cap S(a) = a$ , temos que  $a$  e  $S(a)$  não são transversais, porém, podemos pegar um ciclo  $a'$  na mesma classe de homologia de interseção de  $a$  tal que  $a' \cap S(a) = \emptyset$ . Logo,  $I(a, S(a)) = I(a', S(a)) = 0$ . Da mesma forma, temos que  $I(b, S(b)) = 0$ . Portanto, a matriz que procuramos é a seguinte

$$\begin{bmatrix} I(a, S(a)) & I(a, S(b)) \\ I(b, S(a)) & I(b, S(b)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por essa matriz percebemos que a composta acima não é degenerada.

Portanto, com a homologia de interseção podemos recuperar o produto interseção que tínhamos para variedades topológicas e que não estava bem definido para pseudo-variedades com a homologia clássica.

## 2.4 Relação entre $Q_i^p$ e $IH_i^p(X)$ e Consequências Importantes

Nesta seção, vamos definir certos subcomplexos especiais de  $\text{sd}(T)$ , onde  $T$  é uma triangulação da pseudovarietade  $X$ , e veremos como usando eles podemos calcular os grupos de homologia de interseção de  $X$  com a homologia clássica. Para a partir daí, concluir que os grupos de homologia de interseção de  $X$  são independentes da estratificação e triangulação, e  $X$  sendo compacta, então eles são finitamente gerados.

**Definição 2.13.** Sejam  $T$  uma triangulação da pseudovarietade  $X$  de dimensão  $n$ ,  $\text{sd}(T)$  a subdivisão baricêntrica de  $T$  e  $\bar{p}$  uma perversidade. Dado um inteiro  $i \geq 0$ , definimos a aplicação  $L_i^{\bar{p}} : \{0, 1, \dots, n+1\} \rightarrow \{-1, 0, \dots, i-1, i\}$  da seguinte forma:

$$L_i^{\bar{p}}(0) = i, \quad L_i^{\bar{p}}(1) = i-1, \quad L_i^{\bar{p}}(n+1) = -1$$

e se  $2 \leq c \leq n$  então

$$L_i^{\bar{p}}(c) = \begin{cases} -1, & \text{se } i - c + p(c) \leq -1, \\ n - c, & \text{se } i - c + p(c) \geq n - c, \\ i - c + p(c), & \text{de outra forma.} \end{cases}$$

O número  $L_i^{\bar{p}}(c)$  é a maior dimensão possível da interseção de qualquer conjunto  $A$   $(\bar{p}, i)$ -admissível com  $X_{n-c}$  se  $c \geq 2$ . Pois, temos que  $\dim(A) \leq i$  e

$$\dim(A \cap X_{n-c}) \leq i - c + p(c).$$

Se  $i - c + p(c) \leq -1$ , então  $A$  e  $X_{n-c}$  não podem se interceptar, logo podemos dizer que a maior dimensão possível da interseção de  $A$  com  $X_{n-c}$  é  $-1 = L_i^{\bar{p}}(c)$ . Como  $\dim(X_{n-c}) = n - c$ , se  $i - c + p(c) \geq n - c$ , então  $\dim(A \cap X_{n-c}) \leq n - c = L_i^{\bar{p}}(c)$ ; já se  $0 \leq i - c + p(c) \leq n - c - 1$ , então  $\dim(A \cap X_{n-c}) \leq i - c + p(c) = L_i^{\bar{p}}(c)$ . Se  $c = 1$ , então  $\dim(A \cap X_{n-1}) = \dim(A \cap X_{n-2}) \leq i - 2 < i - 1 = L_i^{\bar{p}}(1)$ . Os casos quando  $c = 0$  ou  $n + 1$  é mais direto ainda.

Temos que  $L_i^{\bar{p}}(c) - 1 \leq L_i^{\bar{p}}(c+1) \leq L_i^{\bar{p}}(c)$ , pois  $p(c) \leq p(c+1) \leq p(c) + 1$ . Logo, a aplicação  $\Delta L_i^{\bar{p}}(c) = L_i^{\bar{p}}(c) - L_i^{\bar{p}}(c+1)$  com domínio  $\{0, 1, \dots, n\}$  tem valores no conjunto  $\{1, 0\}$ .

**Definição 2.14.** Chamamos  $Q_i^{\bar{p}}$  de conjunto básico o subcomplexo de  $\text{sd}(T)$  gerado por os baricêntricos de os simplejos  $\sigma$  de  $T$  tais que  $\Delta L_i^{\bar{p}}(n - \dim(\sigma)) = 1$ .

Em nenhum momento da definição de  $Q_i^{\bar{p}}$  usamos a estratificação de  $X$ , assim os conjuntos básicos não dependem da estratificação de  $X$ .

A dimensão de  $Q_i^{\bar{p}}$  é  $i$ , pois em cada  $n$ -simplexo,  $L_i^{\bar{p}}$  varia  $i + 1$  vezes. Logo, a dimensão máxima dos simplexes de  $Q_i^{\bar{p}}$  é  $i$ .

Se  $\Delta L_i^{\bar{p}}(n - \dim(\sigma)) = 1$ , então  $\Delta L_{i+1}^{\bar{p}}(n - \dim(\sigma)) = 1$ . Logo,  $Q_i^{\bar{p}}$  é um subcomplexo de  $Q_{i+1}^{\bar{p}}$ .

**Exemplo 2.8.** Seja  $X$  um 3-simplexo  $\sigma$ . Vamos determinar  $Q_0^{\bar{p}}$ ,  $Q_1^{\bar{p}}$ ,  $Q_2^{\bar{p}}$ , e  $Q_3^{\bar{p}}$  para as perversidades nula  $\bar{n}$  e a máxima  $\bar{t}$ :

- $i = 0$ :  $L_0^{\bar{p}}(0) = 0$  e  $L_0^{\bar{p}}(1) = L_0^{\bar{p}}(2) = L_0^{\bar{p}}(3) = L_0^{\bar{p}}(4) = -1$ . Logo,  $\Delta L_0^{\bar{p}}(0) = 1$  e  $\Delta L_0^{\bar{p}}(1) = \Delta L_0^{\bar{p}}(2) = \Delta L_0^{\bar{p}}(3) = 0$ . Daí,  $Q_0^{\bar{p}}$  é o baricentro de  $\sigma$  para qualquer perversidade  $\bar{p}$ .

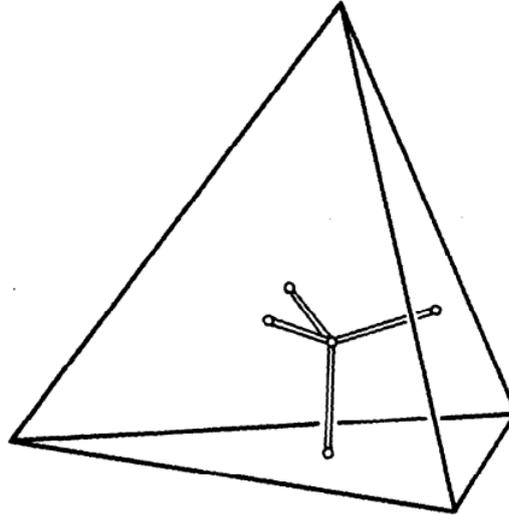


Figura 2.10:  $Q_1^{\bar{p}}$

- $i = 1$ :  $L_1^{\bar{p}}(0) = 1$ ,  $L_1^{\bar{p}}(1) = 0$  e  $L_1^{\bar{p}}(2) = L_1^{\bar{p}}(3) = L_1^{\bar{p}}(4) = -1$ . Logo,  $\Delta L_1^{\bar{p}}(0) = \Delta L_1^{\bar{p}}(1) = 1$  e  $\Delta L_1^{\bar{p}}(2) = \Delta L_1^{\bar{p}}(3) = 0$ . O que indica que  $Q_1^{\bar{p}}$  é gerado pelo baricentro de  $\sigma$  e os baricentros das faces de dimensão 2 para qualquer perversidade  $\bar{p}$ .
- $i = 2$ : para a perversidade  $\bar{n}$  temos que  $L_2^{\bar{n}}(0) = 2$ ,  $L_2^{\bar{n}}(1) = 1$ ,  $L_2^{\bar{n}}(2) = 0$  e  $L_2^{\bar{n}}(3) = L_2^{\bar{n}}(4) = -1$ . Com isso,  $\Delta L_2^{\bar{n}}(0) = \Delta L_2^{\bar{n}}(1) = \Delta L_2^{\bar{n}}(2) = 1$  e  $\Delta L_2^{\bar{n}}(3) = 0$ . Assim,  $Q_2^{\bar{n}}$  é gerado pelo baricentro de  $\sigma$  e os baricentros das faces de dimensões 2 e 1. Já para a perversidade  $\bar{t}$  vemos que  $L_2^{\bar{t}}(0) = 2$ ,  $L_2^{\bar{t}}(1) = 1$ ,  $L_2^{\bar{t}}(2) = L_2^{\bar{t}}(3) = 0$  e  $L_2^{\bar{t}}(4) = -1$ . Logo,  $\Delta L_2^{\bar{t}}(0) = \Delta L_2^{\bar{t}}(1) = 1$ ,  $\Delta L_2^{\bar{t}}(2) = 0$  e  $\Delta L_2^{\bar{t}}(3) = 1$ . Então,  $Q_2^{\bar{t}}$  é gerado pelo baricentro de  $\sigma$  e os baricentros das faces de dimensões 2 e 0.
- $i = 3$ :  $Q_3^{\bar{p}} = \sigma$  para qualquer perversidade  $\bar{p}$ .

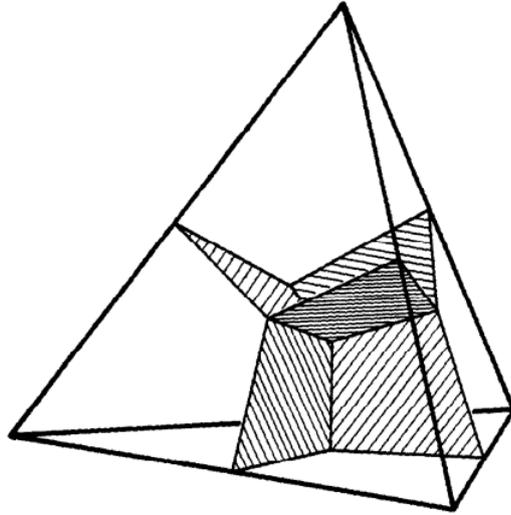


Figura 2.11:  $Q_2^{\bar{n}}$

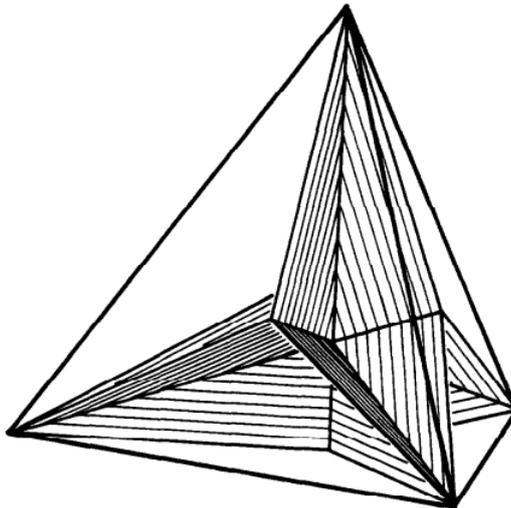


Figura 2.12:  $Q_2^{\bar{l}}$

**Proposição 2.8.** Sejam  $\bar{p}$  e  $\bar{q}$  perversidades tais que  $\bar{p} + \bar{q} = \bar{l}$  é a perversidade máxima. Se  $i \geq 1$  e  $T_{n-2}$  é o  $(n - 2)$ -esqueleto da triangulação  $T$  de  $X$ , então existem retratos de deformações canônicos preservando-simplexo

$$X - (Q_{n-i+1}^{\bar{q}} \cap |T_{n-2}|) \rightarrow Q_i^{\bar{p}}$$

$$X - Q_{n-i+1}^{\bar{q}} \rightarrow Q_i^{\bar{p}} \cap |T_{n-2}|$$

**Prova.** Como  $i \geq 1$ , temos que  $L_i^{\bar{p}}(2) \neq L_i^{\bar{p}}(1)$ , e como  $L_i^{\bar{p}}(0) \neq L_i^{\bar{p}}(1)$ , temos que os baricêntricos dos  $n$ -simplexos e  $(n - 1)$ -simplexos de  $T$  estão em  $Q_i^{\bar{p}}$ .

Por uma manipulação aritmética, vemos que se  $2 \leq c \leq n + 1$ , então

$$L_i^{\bar{p}}(c) + L_{n-i+1}^{\bar{q}}(c) = n - c - 1.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \Delta L_i^{\bar{p}}(c) + \Delta L_{n-i+1}^{\bar{q}}(c) &= L_i^{\bar{p}}(c) - L_i^{\bar{p}}(c+1) + L_{n-i+1}^{\bar{q}}(c) - L_{n-i+1}^{\bar{q}}(c+1) = \\ &= n - c - 1 - (n - c - 1 - 1) = 1. \end{aligned}$$

Com isso, para qualquer simplexo de  $T_{n-2}$  seu baricentro está em  $Q_i^{\bar{p}}$  ou em  $Q_{n-i+1}^{\bar{q}}$ , mas não nos dois simultaneamente. Logo, o conjunto dos vértices de  $\text{sd}(T)$  que geram  $Q_i^{\bar{p}}$  é o complementar do conjunto dos vértices que geram  $Q_{n-i+1}^{\bar{q}} \cap |T_{n-2}|$ . Assim, cada simplexo  $\sigma$  em  $\text{sd}(T)$  é o join de  $\sigma \cap Q_i^{\bar{p}}$  e  $\sigma \cap (Q_{n-i+1}^{\bar{q}} \cap |T_{n-2}|)$ . Com isso em mente, o retrato de deformação procurado

$$X - (Q_{n-i+1}^{\bar{q}} \cap |T_{n-2}|) \rightarrow Q_i^{\bar{p}}$$

é dada em cada simplexo de  $\text{sd}(T)$  retraindo ao longo dessas linhas de join. O outro retrato de deformação

$$X - Q_{n-i+1}^{\bar{q}} \rightarrow Q_i^{\bar{p}} \cap |T_{n-2}|$$

é definida com um argumento similar. ■

**Proposição 2.9.** Seja  $T$  uma triangulação de  $X$  compatível com sua estratificação. Consideremos  $Q_i^{\bar{p}}$  definido em relação a essa triangulação  $T$ . Então, para cada  $i \geq 0$ ,  $Q_i^{\bar{p}}$  é um conjunto  $(\bar{p}, i)$ -admissível.

**Prova.** Se  $\sigma$  é um  $k$ -simplexo de  $T$ , então  $\dim(\sigma \cap Q_i^{\bar{p}}) = L_i^{\bar{p}}(n-k)$ , pois  $\dim(\sigma \cap Q_i^{\bar{p}})$  é igual a quantidade de saltos menos 1 que ocorre quando  $\Delta L_i^{\bar{p}}$  varia de  $n - \dim(\sigma)$  a  $n$ , ou seja,

$$\dim(\sigma \cap Q_i^{\bar{p}}) = \sum_{c=n-\dim(\sigma)}^n \Delta L_i^{\bar{p}}(c) - 1 = L_i^{\bar{p}}(n-\dim(\sigma)) - L_i^{\bar{p}}(n+1) - 1 = L_i^{\bar{p}}(n-\dim(\sigma)).$$

Dado  $\sigma$  um  $p$ -simplexo de  $X_{n-c}$ . Daí,  $n - c \geq p$ , e seja  $m = n - p \geq c$ . Temos que  $\dim(\sigma \cap Q_i^{\bar{p}}) = \phi$  ou  $\dim(\sigma \cap Q_i^{\bar{p}}) = L_i^{\bar{p}}(m) \leq i - m + p(m)$ . Seja  $k$  tal que  $k + c = m$ . Como  $p(j+1) \leq p(j) + 1$  para todo  $j$ , temos que  $p(m) \leq p(c) + k$ . Logo,  $i - m + p(m) \leq i - k - c + p(c) + k = i - c + p(c)$ . Portanto, para qualquer simplexo  $\sigma$  de  $X_{n-c}$ ,  $\dim(\sigma \cap Q_i^{\bar{p}}) = \phi$  ou  $\dim(\sigma \cap Q_i^{\bar{p}}) \leq i - c + p(c)$ , e assim o resultado segue. ■

Logo, qualquer  $i$ -cadeia formada por simplexos de  $Q_i^{\bar{p}}$  é  $(\bar{p}, i)$ -admissível, mas isso não implica que ela está em  $I^p C_i(X)$ .

A próxima proposição nos conta a importância dos conjuntos básicos  $Q_i^{\bar{p}}$ .

**Teorema 2.10.** *Seja  $T$  uma triangulação de  $X$  compatível com sua estratificação. Consideremos os conjuntos básicos  $Q_i^{\bar{p}}$  definidos em relação a  $T$ . Então, o homomorfismo*

$$\Psi : \text{Im} (H_i(Q_i^{\bar{p}}) \rightarrow H_i(Q_{i+1}^{\bar{p}})) \rightarrow I^p H_i(X)$$

*induzido pelas as inclusões*

$$\partial^{-1}(C_i(Q_i^{\bar{p}})) \cap C_{i+1}(Q_{i+1}^{\bar{p}}) \subset I^p C_{i+1}(X)$$

$$(\text{Ker } \partial) \cap C_i(Q_i^{\bar{p}}) \subset I^p C_i(X)$$

*é um isomorfismo, onde  $\partial : C_i(X) \rightarrow C_{i-1}(X)$  é o operador bordo.*

**Prova.** Sejam  $\{C_j(Q_i^{\bar{p}}), \partial'_j\}$  o complexo simplicial de  $Q_i^{\bar{p}}$ ,  $\{C_j(Q_{i+1}^{\bar{p}}), \partial''_j\}$  o complexo simplicial de  $Q_{i+1}^{\bar{p}}$  e  $\{I^p C_j(X), \partial_j\}$  o complexo simplicial singular de  $X$ . Temos que

$$H_i(Q_i^{\bar{p}}) = \text{Ker } \partial'_i, \quad H_i(Q_{i+1}^{\bar{p}}) = \frac{\text{Ker } \partial''_i}{\text{Im } \partial''_{i+1}} \quad \text{e} \quad I^p H_i(X) = \frac{\text{Ker } \partial_i}{\text{Im } \partial_{i+1}},$$

pois  $\text{Im } \partial'_{i+1} = 0$ . O homomorfismo  $H_i(Q_i^{\bar{p}}) \rightarrow H_i(Q_{i+1}^{\bar{p}})$  é induzido pela inclusão. Como  $Q_i^{\bar{p}}$  é um subcomplexo de  $Q_{i+1}^{\bar{p}}$ , a inclusão é uma aplicação simplicial. Logo,

$$\begin{aligned} H_i(Q_i^{\bar{p}}) &\longrightarrow H_i(Q_{i+1}^{\bar{p}}) \\ \xi_i &\longmapsto \xi_i + \text{Im } \partial''_{i+1} \end{aligned}$$

Daí, o núcleo desta aplicação é  $\text{Ker } \partial'_i \cap \text{Im } \partial''_{i+1}$ . Pelo teorema do isomorfismo,

$$\text{Im} (H_i(Q_i^{\bar{p}}) \rightarrow H_i(Q_{i+1}^{\bar{p}})) = \frac{\text{Ker } \partial'_i}{\text{Ker } \partial'_i \cap \text{Im } \partial''_{i+1}}$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \Psi : \frac{\text{Ker } \partial'_i}{\text{Ker } \partial'_i \cap \text{Im } \partial''_{i+1}} &\longrightarrow I^p H_i(X) \\ \xi_i &\longmapsto \xi_i + \text{Im } \partial_{i+1} \end{aligned}$$

Pois, primeiramente, se  $\xi_i \in \text{Ker } \partial'_i$ , então  $\xi_i$  é  $(\bar{p}, i)$ -admissível e  $\partial'_i(\xi_i) = 0$ , logo  $\xi_i \in I^p C_i(X)$  e  $\xi_i \in \text{Ker } \partial_i$ . Segundo, se  $\xi_i + \text{Ker } \partial'_i \cap \text{Im } \partial''_{i+1} = \xi'_i + \text{Ker } \partial'_i \cap \text{Im } \partial''_{i+1}$ , então existe  $\xi''_i \in \text{Ker } \partial'_i \cap \text{Im } \partial''_{i+1}$  tal que  $\xi_i - \xi'_i = \xi''_i$ . Daí, existe  $\xi'''_{i+1} \in C_{i+1}(Q_{i+1}^{\bar{p}})$  tal que  $\partial''_{i+1}(\xi'''_{i+1}) = \xi''_i$ . Temos  $\xi'''_{i+1} \in I^p C_{i+1}(X)$ , pois  $\xi'''_{i+1}$  é  $(\bar{p}, i+1)$ -admissível, e como  $\partial''_{i+1}(\xi'''_{i+1}) = \xi''_i \in \text{Ker } \partial'_i$ , resulta que  $\partial''_{i+1}(\xi'''_{i+1}) \in C_i(Q_i^{\bar{p}})$ , e assim  $\partial''_{i+1}(\xi'''_{i+1})$  é  $(\bar{p}, i)$ -admissível.

Primeiramente, vamos considerar  $i > 0$ . Vamos mostrar que  $\Psi$  é sobrejetiva: seja  $z \in I^p H_i(X)$  representado pelo ciclo  $z_i$ . Seja  $\bar{t}$  a perversidade máxima. Então,  $\bar{t} - \bar{p} = \bar{q}$  é uma perversidade também. Sabemos que  $\dim (Q_{n-i+1}^{\bar{q}} \cap |T_{n-2}|) = L_{n-i+1}^{\bar{q}}(n - (n-2)) =$

$L_{n-i+1}^{\bar{q}}(2) = n - i + 1 - 2 = n - i - 1$ . Daí,  $Q_{n-i+1}^{\bar{q}} \cap |T_{n-2}|$  é  $(\bar{q}, n - i - 1)$ -admissível. Como  $\partial(z_i) = 0$ , pelo lema 2.6, existe um ciclo  $z'_i$  na mesma classe de  $z_i$  tal que  $z'_i \pitchfork Q_{n-i+1}^{\bar{q}} \cap |T_{n-2}|$ . Com isso,  $\dim(z'_i \cap Q_{n-i+1}^{\bar{q}} \cap |T_{n-2}|) \leq i + n - i - 1 - n = -1$ , implicando que  $z'_i \cap Q_{n-i+1}^{\bar{q}} \cap |T_{n-2}| = \emptyset$ . Logo,  $z'_i \subset X - (Q_{n-i+1}^{\bar{q}} \cap |T_{n-2}|)$ . Seja  $r$  a deformação retração de  $X - (Q_{n-i+1}^{\bar{q}} \cap |T_{n-2}|)$  para  $Q_i^{\bar{p}}$ . Como  $r$  não é uma aplicação simplicial,  $r(z'_i)$  não tem uma estrutura de  $i$ -ciclo como queremos. Porém, podemos induzir um ciclo  $r_*(z'_i) \in C_i(Q_i^{\bar{p}})$  tal que  $|r_*(z'_i)| = r(|z'_i|)$  como segue: triangularizemos  $|z'_i|$  tal que cada simplexo de  $|z'_i|$  está contido em um único simplexo de  $\text{sd}(T)$ . Agora, enviemos cada vértice  $v$  de  $|z'_i|$  para  $r(v) \in Q_i^{\bar{p}}$  e estendamos linearmente sobre todos os simplexos de  $|z'_i|$ . Isso vai resultar em uma cadeia de  $C_i(Q_i^{\bar{p}})$ , e vamos denota-la por  $r_*(z'_i)$ . Temos que  $|z'_i| \times [0, 1]$  tem uma estrutura de um complexo simplicial com exatamente dois vértices  $(v, 0)$  e  $(v, 1)$  para cada vértice  $v$  de  $|z'_i|$ . Definamos a aplicação  $H : |z'_i| \times [0, 1] \rightarrow X$  para cada vértice  $v$  de  $|z'_i|$  por  $H(v, 1) = r(v)$  e  $H(v, 0) = v$  e estendamos linearmente sobre todos os simplexos de  $|z'_i| \times [0, 1]$ . Temos que  $H(z'_i \times [0, 1]) \in C_{i+1}(X)$  e  $\partial_{i+1}H(z'_i \times [0, 1]) = r_*(z'_i) - z'_i$  por causa da triangulação de  $|z'_i| \times [0, 1]$ . Como a filtração de  $X$  é compatível com a triangulação  $T$ , desde que  $\dim(X_{n-c} \cap (r_*(z'_i) - z'_i)) \leq i - c + p(c)$ , temos que  $\dim(X_{n-c} \cap H(z'_i \times [0, 1])) \leq i + 1 - c + p(c)$ . Logo,  $H(z'_i \times [0, 1]) \in I^p C_{i+1}(X)$ , e, portanto,  $r_*(z'_i)$  e  $z'_i$  representam a mesma classe em  $I^p H_i(X)$ .

Agora, vamos mostrar que  $\Psi$  é injetiva: sejam  $z_i, z'_i \in \text{Ker } \partial'_i$  tais que  $z_i - z'_i = \partial_{i+1}(\xi)$  com  $\xi \in I^p C_{i+1}(X)$ . Sabemos que  $(Q_{n-i}^{\bar{q}} \cap |T_{n-2}|) \cap Q_{i+1}^{\bar{p}} = \emptyset$ . Como  $\partial_{i+1}(\xi) = z_i - z'_i \subset Q_i^{\bar{p}} \subset Q_{i+1}^{\bar{p}}$ , temos que  $\partial_{i+1}(\xi) \pitchfork (Q_{n-i}^{\bar{q}} \cap |T_{n-2}|)$ . Daí, novamente, pelo lema acima, existem cadeias  $\xi' \in I^p C_{i+1}(X)$  e  $E \in I^p C_{i+2}(X)$  tais que  $\partial_{i+2}(E) = \xi' - \xi$  e  $\xi' \pitchfork (Q_{n-i}^{\bar{q}} \cap |T_{n-2}|)$ . Como  $\dim(Q_{n-i}^{\bar{q}} \cap |T_{n-2}|) = n - i - 2$ , então  $\dim(\xi' \cap (Q_{n-i}^{\bar{q}} \cap |T_{n-2}|)) \leq n - i - 2 + i + 1 - n = -1$ . Logo,  $\xi' \subset X - (Q_{n-i}^{\bar{q}} \cap |T_{n-2}|)$ . Usando o mesmo argumento como acima, construímos uma cadeia  $r_*(\xi') \in C_{i+1}(Q_{i+1}^{\bar{p}})$  e encontramos uma cadeia  $\xi'' \in I^p C_{i+2}(X)$  tal que  $\partial_{i+2}(\xi'') = r_*(\xi') - \xi'$ . Daí,  $\partial_{i+1}(r_*(\xi')) = \partial_{i+1}(\xi') = \partial_{i+1}(\xi) = z_i - z'_i$ . Portanto,

$$z_i + \text{Ker } \partial'_i \cap \text{Im } \partial''_{i+1} = z'_i + \text{Ker } \partial'_i \cap \text{Im } \partial''_{i+1}$$

em  $\frac{\text{Ker } \partial'_i}{\text{Ker } \partial'_i \cap \text{Im } \partial''_{i+1}}$ .

Vamos, agora, analisar o caso  $i = 0$ : temos que  $Q_0^{\bar{p}}$  é o conjunto dos baricentros de todos os  $n$ -simplexos de  $T$ . Com isso,  $H_0(Q_0^{\bar{p}}) = C_0(Q_0^{\bar{p}})$ . Sabemos que  $Q_1^{\bar{p}}$  tem o mesmo número de componentes conexas de  $X - \Sigma$ . Logo,  $H_0(Q_1^{\bar{p}}) = H_0(X - \Sigma)$  e é gerado por um conjunto escolhendo um vértice arbitrariamente de cada componente conexa de  $Q_1^{\bar{p}}$ . Podemos considerar que esse conjunto está contido em  $C_0(Q_0^{\bar{p}})$ . Daí,

$$\text{Im}(H_0(Q_0^{\bar{p}}) \rightarrow H_0(Q_1^{\bar{p}})) = H_0(Q_1^{\bar{p}}).$$

Então,

$$\begin{aligned} \Psi : \text{Im} (H_0(Q_0^{\bar{p}}) \rightarrow H_0(Q_1^{\bar{p}})) = H_0(X - \Sigma) &\longrightarrow I^p H_0(X) \\ \xi_i &\longmapsto \xi_i + \text{Im } \partial_1 \end{aligned}$$

é um isomorfismo pelo segundo item da observação 2.3. ■

**Corolário 2.11.** Os grupos  $I^p H_i(X)$  são finitamente gerados se  $X$  é compacto.

**Prova.** Se  $X$  é compacto, então  $\text{Im} (H_i(Q_i^{\bar{p}}) \rightarrow H_i(Q_{i+1}^{\bar{p}}))$  é finitamente gerado, pois é um subgrupo de  $H_i(Q_{i+1}^{\bar{p}})$  que é finitamente gerado. Portanto, pela proposição anterior,  $I^p H_i(X)$  é finitamente gerado. ■

Os dois corolários seguintes provam o terceiro item da observação 2.3.

**Corolário 2.12.** Os grupos  $I^p H_i(X)$  independem da estratificação.

**Prova.** Sejam  $S$  e  $S'$  duas estratificações de  $X$  e  $T$  e  $T'$  duas triangulações de  $X$  compatíveis com  $S$  e  $S'$ , respectivamente. Daí,  $X$  sendo um  $PL$ -espaço, existe uma subdivisão  $\bar{T}$  de  $X$  comum de  $T$  e  $T'$ . Logo,  $\bar{T}$  é compatível com  $S$  e  $S'$ . Definamos  $Q_i^{\bar{p}}$  e  $Q_{i+1}^{\bar{p}}$  com relação a  $\bar{T}$ . Sabemos que os conjuntos básicos,  $Q_i^{\bar{p}}$  e  $Q_{i+1}^{\bar{p}}$ , não dependem da estratificação, daí, pela proposição anterior,  $\text{Im} (H_i(Q_i^{\bar{p}}) \rightarrow H_i(Q_{i+1}^{\bar{p}}))$  é igual a  $I^p H_i(X)$ , onde  $I^p H_i(X)$  é definido em relação a qualquer uma das duas estratificações. ■

**Corolário 2.13.** Os grupos  $\text{Im} (H_i(Q_i^p) \rightarrow H_i(Q_{i+1}^p))$  independem da triangulação.

**Prova.** Sejam  $T$  e  $T'$  triangulações de  $X$ . As filtrações

$$X = |T_n| \supset \Sigma = |T_{n-2}| \supset |T_{n-3}| \supset \cdots \supset |T_0|$$

$$X = |T'_n| \supset \Sigma = |T'_{n-2}| \supset |T'_{n-3}| \supset \cdots \supset |T'_0|$$

resultam em estratificações de  $X$  e são compatíveis com  $T$  e  $T'$ , respectivamente. Daí, pelo corolário anterior,  $I^p H_i(X)$  não depende da estratificação de  $X$ , logo  $I^p H_i(X)$  é igual a  $\text{Im} (H_i(Q_i^{\bar{p}}) \rightarrow H_i(Q_{i+1}^{\bar{p}}))$ , onde os conjuntos básicos são definidos em relação a  $T$  ou a  $T'$ . ■

Sejam  $X$  e  $Y$  pseudovariiedades e  $h : X \rightarrow Y$  um homeomorfismo entre elas. Consideremos  $T : |K| \rightarrow X$  uma triangulação de  $X$ . Logo, o complexo simplicial  $K$  também resulta em uma triangulação de  $Y$ . Daí, desde que os grupos de homologia de interseção de  $X$  e  $Y$  independem da triangulação, resulta que eles são isomorfos. Concluimos que os grupos de homologia de interseção são invariantes topológicos sobre as pseudovariiedades.

## 2.5 Teorema da Dualidade de Poincaré Generalizada

Nesta seção, vamos finalmente provar o teorema da dualidade de Poincaré generalizada para pseudovariiedades, mas, antes disso, vamos demonstrar dois resultados que serão fundamentais para isso.

**Lema 2.14.** Seja  $X$  uma pseudovariiedade compacta e orientada de dimensão  $n$ . Se  $\bar{p}$  e  $\bar{q}$  são perversidades complementares e  $i + j = n$  com  $i > 0$ , então

$$I^q H_i(X) = \text{Im} (H^j(Q_{j+1}^{\bar{p}}) \rightarrow H^j(Q_j^{\bar{p}})).$$

**Prova.** Sejam  $T$  uma triangulação de  $X$  e  $S = |T_{n-2}|$  o  $(n - 2)$ -esqueleto de  $T$ . Daí,  $\dim(Q_i^{\bar{q}} \cap S) = L_i^{\bar{q}}(n - n + 2) = L_i^{\bar{q}}(2) = i - 2$ . De forma análoga,  $\dim(Q_{i+1}^{\bar{q}} \cap S) = i - 1$ .

Das sequências exatas dos pares  $(Q_i^{\bar{q}}, Q_i^{\bar{q}} \cap S)$  e  $(Q_{i+1}^{\bar{q}}, Q_{i+1}^{\bar{q}} \cap S)$  e das inclusões, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 = H_i(Q_i^{\bar{q}} \cap S) & \longrightarrow & H_i(Q_i^{\bar{q}}) & \xrightarrow{\pi_*} & H_i(Q_i^{\bar{q}}, Q_i^{\bar{q}} \cap S) & \longrightarrow & H_{i-1}(Q_i^{\bar{q}} \cap S) = 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 = H_i(Q_{i+1}^{\bar{q}} \cap S) & \longrightarrow & H_i(Q_{i+1}^{\bar{q}}) & \xrightarrow{\pi'_*} & H_i(Q_{i+1}^{\bar{q}}, Q_{i+1}^{\bar{q}} \cap S) & \longrightarrow & H_{i-1}(Q_{i+1}^{\bar{q}} \cap S). \end{array}$$

Como  $\pi_*$  é sobrejetiva,  $\pi'_*$  é injetiva e o diagrama comuta, resulta que

$$I^q H_i(X) = \text{Im}(H_i(Q_i^{\bar{q}}) \rightarrow H_i(Q_{i+1}^{\bar{q}})) \simeq \text{Im}(H_i(Q_i^{\bar{q}}, Q_i^{\bar{q}} \cap S) \rightarrow H_i(Q_{i+1}^{\bar{q}}, Q_{i+1}^{\bar{q}} \cap S)).$$

Pelos retratos de deformações da proposição 2.8, temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} H_i(Q_i^{\bar{q}}, Q_i^{\bar{q}} \cap S) & \simeq & H_i(X - Q_{j+1}^{\bar{p}} \cap S, X - Q_{j+1}^{\bar{p}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_i(Q_{i+1}^{\bar{q}}, Q_{i+1}^{\bar{q}} \cap S) & \simeq & H_i(X - Q_j^{\bar{p}} \cap S, X - Q_j^{\bar{p}}). \end{array}$$

Como os subconjuntos  $Q_j^{\bar{p}} \cap S \subset Q_j^{\bar{p}}$  e  $Q_{j+1}^{\bar{p}} \cap S \subset Q_{j+1}^{\bar{p}}$  são construtivos, pelo lema 2.4, temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} H_i(X - Q_{j+1}^{\bar{p}} \cap S, X - Q_{j+1}^{\bar{p}}) & \simeq & H^j(Q_{j+1}^{\bar{p}}, Q_{j+1}^{\bar{p}} \cap S) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_i(X - Q_j^{\bar{p}} \cap S, X - Q_j^{\bar{p}}) & \simeq & H^j(Q_j^{\bar{p}}, Q_j^{\bar{p}} \cap S) \end{array}$$

Juntando esses dois diagramas, concluímos que

$$I^q H_i(X) = \text{Im}(H_i(Q_i^{\bar{q}}, Q_i^{\bar{q}} \cap S) \rightarrow H_i(Q_{i+1}^{\bar{q}}, Q_{i+1}^{\bar{q}} \cap S)) \simeq \\ \text{Im}(H^j(Q_{j+1}^{\bar{p}}, Q_{j+1}^{\bar{p}} \cap S) \rightarrow H^j(Q_j^{\bar{p}}, Q_j^{\bar{p}} \cap S)).$$

Sabemos que  $\dim(Q_j^{\bar{p}} \cap S) = j - 2$  e  $\dim(Q_{j+1}^{\bar{p}} \cap S) = j - 1$ .

Pelas sequências exatas de cohomologia dos pares  $(Q_j^{\bar{p}}, Q_j^{\bar{p}} \cap S)$  e  $(Q_{j+1}^{\bar{p}}, Q_{j+1}^{\bar{p}} \cap S)$  e pelas inclusões, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 = H^j(Q_j^{\bar{p}} \cap S) & \longleftarrow & H^j(Q_j^{\bar{p}}) & \longleftarrow & H^j(Q_j^{\bar{p}}, Q_j^{\bar{p}} \cap S) & \longleftarrow & H^{j-1}(Q_j^{\bar{p}} \cap S) = 0 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 = H^j(Q_{j+1}^{\bar{p}} \cap S) & \longleftarrow & H^j(Q_{j+1}^{\bar{p}}) & \longleftarrow & H^j(Q_{j+1}^{\bar{p}}, Q_{j+1}^{\bar{p}} \cap S) & \longleftarrow & H^{j-1}(Q_{j+1}^{\bar{p}} \cap S). \end{array}$$

Daí, desse diagrama concluímos que

$$I^q H_i(X) = \text{Im}(H^j(Q_{j+1}^{\bar{p}}, Q_{j+1}^{\bar{p}} \cap S) \rightarrow H^j(Q_j^{\bar{p}}, Q_j^{\bar{p}} \cap S)) \simeq \text{Im}(H^j(Q_{j+1}^{\bar{p}}) \rightarrow H^j(Q_j^{\bar{p}})).$$

■

**Lema 2.15.** Sejam  $A \subset B$  subcomplexos. Os índices de Kronecker

$$\begin{array}{ccc} H^j(A) \times H_j(A) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ (c^j, c_j) & \longmapsto & c^j(c_j) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccc} H^j(B) \times H_j(B) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ (c^j, c_j) & \longmapsto & c^j(c_j) \end{array}$$

induzem uma aplicação bilinear entre

$$\text{Im}(H_j(A) \rightarrow H_j(B)) \text{ e } \text{Im}(H^j(B) \rightarrow H^j(A))$$

que é não-degenerada se os coeficientes estão em um corpo  $\mathbb{F}$ .

**Prova.** A aplicação  $i_* : H_j(A) \rightarrow H_j(B)$  é induzida da inclusão  $i_{\#} : C_j(A) \rightarrow C_j(B)$ , ou seja,  $i_*(c_j) = c_j$ . Já a aplicação  $i^* : H^j(B) \rightarrow H^j(A)$  é induzida da dual de  $i_{\#}$ , ou seja,  $i^*(c^j) = c^j \circ i_{\#}$ . Definamos

$$\begin{array}{ccc} \Phi : \text{Im}(H^j(B) \rightarrow H^j(A)) \times \text{Im}(H_j(A) \rightarrow H_j(B)) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ (i^*(c^j) = c^j \circ i_{\#}, i_*(c_j) = c_j) & \longmapsto & \langle c^j \circ i_{\#}, c_j \rangle \end{array}$$

Se  $i_*(z_j) = i_*(\bar{z}_j) = c_j$ , então existe  $d_{j+1} \in C_{j+1}(B)$  tal que  $z_j - \bar{z}_j = \partial d_{j+1}$ . Daí,  $\langle c^j \circ$

$i_{\#}, z_j - \partial d_{j+1}\rangle = \langle c^j \circ i_{\#}, z_j \rangle - \langle c^j \circ i_{\#}, \partial d_{j+1} \rangle = \langle c^j \circ i_{\#}, z_j \rangle - \langle \delta c^j \circ i_{\#}, d_{j+1} \rangle = \langle c^j \circ i_{\#}, z_j \rangle$ , pois  $c^j \circ i_{\#}$  é um cociclo. Se  $i^*(c^j) = c^j \circ i_{\#} = i^*(\bar{c}^j) = \bar{c}^j \circ i_{\#}$ , então existe  $d^{j-1} \in C^{j-1}(A)$  tal que  $c^j \circ i_{\#} - \bar{c}^j \circ i_{\#} = \delta d^{j-1}$ . Logo,  $\langle c^j \circ i_{\#} - \bar{c}^j \circ i_{\#}, c_j \rangle = \langle c^j \circ i_{\#}, c_j \rangle - \langle \delta d^{j-1}, c_j \rangle = \langle c^j \circ i_{\#}, c_j \rangle - \langle d^{j-1}, \partial c_j \rangle = \langle c^j \circ i_{\#}, c_j \rangle$ , pois  $c_j$  é um ciclo. Portanto,  $\Phi$  está bem definida. Agora, sejam  $i_*(c_j) = c_j$  e  $i_*(\bar{c}_j) = \bar{c}_j$ . Então,  $c_j + \bar{c}_j = i_*(c_j + \bar{c}_j)$ , logo  $\Phi(c^j, c_j + \bar{c}_j) = \langle c^j \circ i_{\#}, c_j + \bar{c}_j \rangle = \Phi(c^j, c_j) + \Phi(c^j, \bar{c}_j)$ . Já se  $i^*(c^j) = c^j \circ i_{\#}$  e  $i^*(\bar{c}^j) = \bar{c}^j \circ i_{\#}$ , então  $c^j \circ i_{\#} + \bar{c}^j \circ i_{\#} = i^*(c^j + \bar{c}^j)$ , e  $\Phi(\bar{c}^j + c^j, c_j) = \langle (\bar{c}^j + c^j) \circ i_{\#}, c_j \rangle = \Phi(\bar{c}^j, c_j) + \Phi(c^j, c_j)$ . Seja  $\lambda \in \mathbb{Z}$ . Temos que  $i_*(\lambda c_j) = \lambda c_j = \lambda i_*(c_j)$  e  $i^*(\lambda c^j) = \lambda c^j \circ i_{\#} = \lambda i^*(c^j)$  e  $\Phi(c^j, \lambda c_j) = \lambda \Phi(c^j, c_j)$  e  $\Phi(\lambda c^j, c_j) = \lambda \Phi(c^j, c_j)$ . Dessa forma, concluímos que  $\Phi$  é uma aplicação bilinear bem definida.

Sabemos do teorema 53.5 da referencia [1] que se  $\mathbb{F}$  é um corpo e  $C$  é um complexo de cadeia livre, então  $H^q(C; \mathbb{F})$  é isomorfo a  $\text{Hom}_F(H_q(C; \mathbb{F}), \mathbb{F})$  para todo  $q$ . Daí, o índice de Kronecker de  $A$  e  $B$  sobre  $\mathbb{F}$  é não-degenerada.

Com isso em mente, se  $\Phi(c^j, c_j) = 0 \forall c_j \in \text{Im}(H_j(A; \mathbb{F}) \rightarrow H_j(B; \mathbb{F}))$ , então  $\langle c^j \circ i_{\#}, c_j \rangle = 0 \forall c_j \in H_j(A; \mathbb{F})$ . Como  $c^j \circ i_{\#}$  é um cociclo de  $A$ , temos, pela observação acima, que  $c^j \circ i_{\#}$  é nulo em  $H^j(A; \mathbb{F})$ . Já se  $\Phi(c^j, c_j) = 0 \forall c^j \in \text{Im}(H^j(B; \mathbb{F}) \rightarrow H^j(A; \mathbb{F}))$ , então  $\langle c^j, c_j \rangle = 0 \forall c^j \in H^j(B; \mathbb{F})$ . Como  $i_{\#} : C_j(A; \mathbb{F}) \rightarrow C_j(B; \mathbb{F})$  manda ciclo em ciclo,  $i_{\#}(c_j) = c_j$  é também um ciclo de  $B$ . Daí,  $c_j$  é nulo em  $H_j(B; \mathbb{F})$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \Phi : \text{Im}(H^j(B; \mathbb{F}) \rightarrow H^j(A; \mathbb{F})) \times \text{Im}(H_j(A; \mathbb{F}) \rightarrow H_j(B; \mathbb{F})) &\longrightarrow \mathbb{F} \\ (i^*(c^j) = c^j \circ i_{\#}, i_*(c_j) = c_j) &\longmapsto \langle c^j \circ i_{\#}, c_j \rangle \end{aligned}$$

é não-degenerada. ■

**Teorema 2.16.** *(Teorema da Dualidade de Poincaré Generalizada) Seja  $X$  uma pseudovarietade compacta e orientada de dimensão  $n$ . Se as perversidades  $\bar{p}$  e  $\bar{q}$  são complementares e  $i + j = n$ , então a aplicação bilinear*

$$I^q H_i(X; \mathbb{F}) \times I^p H_j(X; \mathbb{F}) \longrightarrow I^t H_0(X; \mathbb{F}) \xrightarrow{\varepsilon_*} \mathbb{F}$$

que é a composta da aplicação augmentação  $\varepsilon_* : \Sigma n_i x_i \rightarrow \Sigma n_i$  seguida do produto interseção é não-degenerada, onde  $\mathbb{F}$  é um corpo.

**Prova.** Seja  $i > 0$ . Pelo lema 2.14, temos que

$$I^q H_i(X; \mathbb{F}) = \text{Im} (H^j(Q_{j+1}^{\bar{p}}; \mathbb{F}) \rightarrow H^j(Q_j^{\bar{p}}; \mathbb{F})).$$

Já pelo teorema 2.10, temos que

$$I^p H_j(X; \mathbb{F}) = \text{Im} (H_j(Q_j^{\bar{p}}; \mathbb{F}) \rightarrow H_j(Q_{j+1}^{\bar{p}}; \mathbb{F})).$$

Finalmente, pelo último lema, existe uma aplicação bilinear

$$I^q H_i(X; \mathbb{F}) \times I^p H_j(X; \mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{F}$$

que é não-degenerada.

Para o caso  $i = 0$ , sabemos, pelo segundo item da observação 2.3, que  $I^q H_0(X) = H_0(X - \Sigma)$  e  $I^p H_n(X) = H_n(X)$ . Pelo lema 2.4,  $H_0(X - \Sigma) \simeq H^n(X, \Sigma)$ . Desde  $\dim(\Sigma) \leq n - 2$ ,  $H^n(X, \Sigma) = H^n(X)$ . Logo,  $I^q H_0(X; \mathbb{F}) \simeq H^n(X; \mathbb{F})$  e  $I^p H_n(X; \mathbb{F}) = H_n(X; \mathbb{F})$ , e, portanto, o índice de Kronecker é a aplicação bilinear que estamos procurando.

Com um argumento similar ao da proposição 1.11, podemos ver que essa aplicação bilinear não-degenerada que acabamos de provar,

$$I^q H_i(X; \mathbb{F}) \times I^p H_j(X; \mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{F},$$

é igual, a menos de isomorfismo, a composta

$$I^q H_i(X; \mathbb{F}) \times I^p H_j(X; \mathbb{F}) \longrightarrow I^t H_0(X; \mathbb{F}) \xrightarrow{\varepsilon_*} \mathbb{F},$$

da aplicação augmentação  $\varepsilon_* : \Sigma n_i x_i \rightarrow \Sigma n_i$  seguida do produto interseção. ■

**Observação 2.5.** Pelo teorema dos coeficientes universais, temos que

$$H_i(X; \mathbb{F}) \simeq H_i(X) \otimes \mathbb{F} \text{ e } H^i(X; \mathbb{F}) \simeq H^i(X) \otimes \mathbb{F}$$

onde  $X$  é a pseudovarietade compacta do teorema 2.16 e  $\mathbb{F}$  é um corpo qualquer que contém os racionais  $\mathbb{Q}$ . Daí, se nós começássemos com todos os complexos de cadeias definidos em  $\mathbb{Z}$ , ao invés do corpo  $\mathbb{F}$ , poderíamos concluir, de forma quase análoga, que a aplicação bilinear acima

$$I^q H_i(X) \times I^p H_j(X) \rightarrow \mathbb{Z}$$

quando tensorada com  $\mathbb{F}$  é não-degenerada.

**Corolário 2.17.** Seja  $X$  uma pseudovarietade compacta e orientada de dimensão  $n$ .

## 2. Homologia de Interseção

---

Se as perversidades  $\bar{p}$  e  $\bar{q}$  são complementares e  $i + j = n$ , então existe um isomorfismo

$$I^p H_j(X; \mathbb{F}) \simeq \text{Hom}(I^q H_i(X; \mathbb{F}), \mathbb{F})$$

para todo corpo  $\mathbb{F}$ .

**Prova.** Análoga a demonstração do corolário 1.12. ■

# Referências Bibliográficas

- [1] J. R. MUNKRES, *Elements of Algebraic Topology*, Addison-Wesley Company, 1984.
- [2] JEAN-PAUL BRASSELET, *Introduction to Intersection Homology and Perverse Sheaves*, IMPA, 2009.
- [3] M. GORESKEY & R. MACPHERSON, *Intersection Homology Theory*, *Topology* 19(1980), 135-162.
- [4] F. KIRWAN & J. WOOLF, *An Introduction to Intersection Homology Theory*, 2nd ed., Boca Raton, FL, Chapman & Hall, 2006.
- [5] A. BOREL ET AL., *Intersection Cohomology*, volume 50 of *Progress in Mathematics*, Birkhäuser, 1984, Notas de um seminário realizado na Universidade de Berna, 1983.
- [6] LAURENTIU G. MAXIM, *Intersection Homology & Perverse Sheaves: with Applications to Singularities*, Springer, 2019.