



Universidade Federal da Paraíba

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Programa de Pós-Graduação em Física

Dissertação de Mestrado

**Defeitos Topológicos,
Energia Escura e Mundo Brana**

João Victor Queiroga Nunes

João Pessoa
2019



Universidade Federal da Paraíba

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Programa de Pós-Graduação em Física

Dissertação de Mestrado

**Defeitos Topológicos,
Energia Escura e Mundo Brana**

João Victor Queiroga Nunes

Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Dr. Dionísio Bazeia Filho e apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da UFPB para obtenção do título de Mestre em Física na área de concentração de Física de Partículas e Campos.

João Pessoa
2019

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

N972d Nunes, João Victor Queiroga.
Defeitos Topológicos, Energia Escura e Mundo Brana /
João Victor Queiroga Nunes. - João Pessoa, 2019.
86f. : il.

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Campos Escalares Reais. 2. Cosmologia. 3. Defeitos
Topológicos. 4. Mundo Brana. I. Título

UFPB/BC

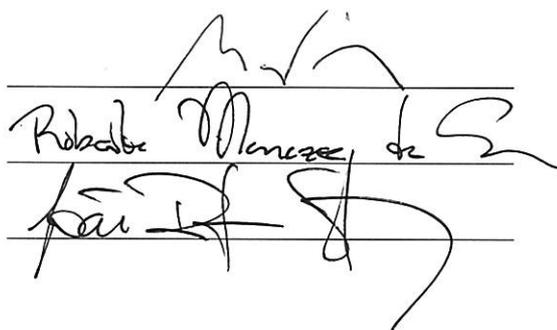
Ata da Sessão Pública da Defesa de Dissertação de **Mestrado** do aluno **João Victor Queiroga Nunes**, candidato ao Título de Mestre em Física na Área de Concentração Física das Partículas Elementares e Campos.

1 Aos vinte e três dias do mês de agosto do ano de dois mil e dezenove, às 14:00, na sala de
2 reuniões do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da
3 Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída
4 para examinar o candidato ao grau de Mestre em Física na área de Física das Partículas
5 Elementares e Campos, **João Victor Queiroga Nunes**. A comissão examinadora composta
6 pelos professores doutores: Dionísio Bazeia Filho (DF/UFPB), orientador e presidente da banca
7 examinadora, Roberto Menezes da Silva (DF/UFPB) e João Rafael Lúcio dos Santos (UFCG).
8 Dando início aos trabalhos, o Prof. Dionísio Bazeia Filho comunicou aos presentes a finalidade
9 da reunião. A seguir, passou a palavra o candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a
10 exposição do trabalho de dissertação intitulado “*Defeitos topológicos, energia escura e mundos*
11 *brana*”. Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora que emitiu o
12 seguinte parecer: “**aprovado**”. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir
13 o respectivo diploma de Mestre em Física na forma da lei. E para constar, eu, Danilo Wilson
14 Lemos Menezes, lavrei esta ata que vai assinada por mim e pelos membros da Banca
15 Examinadora. João Pessoa, **23 de agosto de 2019**.

16 Prof. Dr. Dionísio Bazeia Filho
Orientador - UFPB

Prof. Dr. Roberto Menezes da Silva
UFPB

Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos
UFCG



17

Agradecimentos

Primeiramente, quero agradecer à minha família, em especial minha mãe Sandra, minha irmã Sandrielly e aos meus dois pais Jânio e Antônio, que me deram todo apoio para seguir meu próprio caminho e cuja educação e exemplos moldaram minha formação pessoal. Quero agradecer a todos os bons professores que tive o prazer de conhecer e que me ajudaram a alcançar mais esta etapa na minha vida acadêmica, em especial aos meus dois orientadores Dionísio Bazeia e João Rafael. Agradeço também aos meus bons amigos e amigas que sempre estiveram ao meu lado nos bons e maus momentos dessa longa jornada. Por fim, agradeço a CAPES e FAPESQ pelo suporte financeiro.

"Uma longa viagem começa com um único passo "
Lao-Tsé

Resumo

Nesta dissertação abordamos alguns modelos em teoria de campos escalares reais, relatividade geral, modelos de energia escura e de branas por defeitos topológicos com campos escalares reais. Para tal objetivo, fazemos primeiro uma revisão de campos escalares reais e defeitos, topológicos e não topológicos, em $(1,1)$ dimensões com dinâmica padrão e generalizada. Em seguida é feita uma introdução a cosmologia passando por tópicos de relatividade geral, perturbações da métrica, energia escura no modelo padrão, de um e dois campos, e no modelo taquiônico. Por fim, utilizamos os métodos desenvolvidos até aqui para estudar mundo brana, suas aplicações em fenômenos e resultados teóricos sob a roupagem de campos escalares reais.

Palavras-chave: Campos Escalares Reais, Cosmologia, Defeitos Topológicos, Mundo Brana.

Abstract

This dissertation deals with models in real scalar fields theory, general relativity, dark energy and branes modeled by topological defects with real scalar fields. For this purpose, we firstly work on a review about real scalar field theory, topological and nontopological defects in (1,1) dimensions with standard and generalized dynamics. Then, an introduction of cosmology is done passing by topics like general relativity, metric perturbations and dark energy in the standard model, for one and two scalar fields, and the tachyonic model. Lastly, we use the methods developed so far to study braneworld scenarios, their applications in physical phenomena and theoretical results under the real scalar fields perspective.

Keywords: Braneworld, Cosmology, Real Scalar Fields, Topological Defects.

Convenções

Nesta dissertação iremos adotar as seguintes convenções em todos os capítulos

- Os índices $i, j, k, l, m = 1, 2, 3, \dots, n$.
- Os índices $a, b, c, d, e = 0, 1, 2, 3, 4$.
- Os índices $\alpha, \beta, \lambda, \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$.
- Sistema de unidades naturais: $c = \hbar = 4\pi G = 1$.
- $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

Lista de Figuras

1.1	(a) e (b) Magnitude efetiva de supernovas IA vs redshift dos dados do Supernova Cosmology Project e High-Z Supernova Search Team, respectivamente. Em ambos os casos a curva que melhor fita os dados corresponde a composição de 0.69 energia escura e 0.31 matéria. .	3
1.2	Exemplo de parede de domínio encontrada na natureza.	4
2.1	Modelo ϕ^6 : (a) Potencial associado ao modelo. (b) Densidade de energia da solução estática.	14
2.2	Modelo ϕ^6 : (a) Solução estática do modelo no setor topológico $\phi \in [0, 1]$ do tipo <i>kink</i> em preto e do tipo <i>antikink</i> em vermelho. (b) Modo zero da solução estática.	15
2.3	Modelo Cosseno-Gordon: (a) Potencial associado ao modelo. (b) Densidade de energia da solução estática.	16
2.4	Modelo Cosseno-Gordon: (a) Solução estática do modelo no setor topológico $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$ do tipo <i>kink</i> em preto e do tipo <i>antikink</i> em vermelho. (b) Modo zero da solução estática.	17
2.5	Modelo ϕ^3 : (a) Potencial associado ao modelo. (b) Densidade de energia da solução estática.	18
2.6	Modelo ϕ^3 : (a) Solução estática do modelo no setor topológico $\phi \in [0, 1]$ do tipo <i>lump</i> . (b) Modo zero da solução estática.	18
2.7	Modelo ϕ^4 invertido: (a) Potencial associado ao modelo. (b) Densidade de energia da solução estática. .	19
2.8	Modelo ϕ^4 invertido: (a) Solução estática do modelo no setor topológico no intervalo $\phi \in [0, 1]$. (b) Modo zero da solução estática.	20
3.1	(a) Potencial com múltiplos mínimos. (b) Órbita conectando dois mínimos do potencial.	28

3.2	Modelo BNRT: (a) Solução para o campo $\phi(x)$ para diferentes valores de r . (b) Solução do campo $\chi(x)$. Nos gráficos temos $r = 0.05$, $r = 0.1$ e $r = 0.3$	31
3.3	Modelo BNRT: Densidade de energia. No gráfico temos $r = 0.05$, $r = 0.1$, $r = 0.3$ e $r=0.23$	32
4.1	Toy Model: (a) e (b) Potencial eq. (4.56) e parâmetro de Hubble (4.58), respectivamente, para $n = 2$, $n = 3$ e $n = 4$. (c) e (d) potencial e parâmetro de Hubble para $k = 0$, $k=+1$ e $k = -1$	47
5.1	Brana de Bloch: (a) Solução para o campo $\phi(y)$ para diferentes valores de r . (b) Solução do campo $\chi(y)$. (c) Solução do fator de dobra. Nos gráficos temos $r = 0.05$, $r = 0.1$, $r = 0.3$ e $r=0.23$	62

Sumário

1	Introdução	1
2	Alguns Modelos de Campos Escalares Reais	7
2.1	Modelo de Um Campo Escalar	7
2.1.1	Teorema de Noether	9
2.1.2	Estabilidade Linear	11
2.1.3	Método BPS	12
2.1.4	Kinks	13
	2.1.4.1 Modelo ϕ^6	14
	2.1.3.2 Modelo Cosseno-Gordon	16
2.1.5	Lumps	17
	2.1.5.1 Modelo ϕ^3	17
	2.1.5.2 Modelo ϕ^4 invertido	19
2.2	Dinâmica Generalizada de N-Campos Escalares	20
2.2.1	Estados BPS para N-Campos	21
2.2.2	Estabilidade Linear de N-Campos	22
	2.2.2.1 Dinâmica Padrão de 2 Campos	23
3	Outros Modelos	25
3.1	Método da Deformação	25
3.2	Método Órbitas Tentativas	27
3.3	Modelos Gêmeos em Teoria de Campos Escalares Reais	32
4	Modelos de Energia Escura	35
4.1	Equação de Campo de Einstein	36
	4.1.1 Equação Linearizada de Einstein	39
4.2	Energia Escura	40
4.3	Métrica Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	41
4.4	Formalismo de Primeira Ordem para Energia Escura	45
	4.4.1 Modelo Padrão de Um Campo	45
	4.4.2 Modelo Taquiônico	48
	4.4.3 Modelo de Dois Campos	50

4.5	Modelos Gêmeos em Cosmologia	51
5	Modelos em Mundo Brana	54
5.1	Modelo de Randall-Sundrum	55
5.1.1	Estabilidade Linear em Mundo Brana	57
5.2	Brana de Bloch	60
5.3	Modelo de Campos Escalares com Dinâmica Generalizada em Mundo Brana	63
6	Conclusões e Perspectivas	66

Capítulo 1

Introdução

O grau mais elevado na física seria alcançado com uma teoria de unificação entre todas as forças fundamentais da natureza. O reducionismo na física tem por objetivo explicar o máximo de fenômenos com o mínimo de princípios, por isto uma teoria capaz de recuperar todas as forças fundamentais como casos particulares tem sido o objeto de estudo de muitos físicos do século passado até os dias atuais.

Uma proeminente tentativa de unificação surgiu em 1921, no trabalho de Theodor Kaluza [1], nele os campos eletromagnético e gravitacional, únicas forças fundamentais conhecidas aquela época, são tratados como componentes de um único campo de (4,1) dimensões. Sua hipótese original consiste em descrever a Relatividade Geral em 5D com uma métrica composta pela métrica $g_{\mu\nu}$ do espaço-tempo 4D, o potencial vetor A_μ do eletromagnetismo e um campo escalar ϕ , atualmente chamado de dilaton.

A fim de que sua teoria fosse compatível com o que já era observado de gravitação e eletromagnetismo, Kaluza impõe a condição de que a derivada das componentes dessa métrica em relação a dimensão extra sejam nulas ou que sejam pelo menos muito pequenas quando de ordens superiores, chamada condição de cilindro. Desta forma, ele unifica as duas forças em um único campo universal de natureza puramente geométrica, onde a gravidade se propaga numa geodésica 4D e a carga elétrica é identificada com movimento na dimensão espacial extra.

Na tentativa de quantizar esta teoria e de ao mesmo tempo, explicar a condição de cilindro, Oskar Klein, em 1926, obtém que a dimensão extra é fechada e periódica na escala de Planck, de raio $R \sim 10^{-30}$

em [2]. Obviamente uma dimensão extra tão pequena quanto prevista por Klein gera uma dificuldade experimental enorme.

Uma solução para a dificuldade experimental de detectar a dimensão espacial extra foi proposta por Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali [3], em 1998, nele o raio da dimensão extra é

$$R = 10^{\frac{30}{n}-17} \text{cm} \times \left(\frac{\text{TeV}}{m_{EW}} \right)^{1+\frac{n}{2}},$$

onde n é número de dimensões extras. O caso $n = 2$ é particularmente interessante pois $R \sim 1\text{mm}$, algo que pode ser testado em escalas de energia de 1 TeV. Este modelo, pode explicar o problema da hierarquia entre a força gravitacional, na escala de Planck $M_{Pl} \sim 10^{18}$ GeV, e as outras 3 forças, na escala de interação fraca $m_{EW} \sim 10^3$ GeV. No modelo de Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali (ADD) a "franqueza" da gravidade está no fato de que ela se dilui no grande volume das dimensões extras, enquanto as partículas do modelo padrão estão confinadas na hipersuperfície 4D. Desta forma, o enorme deserto entre estas duas escalas fundamentais $m_{EW}/M_{Pl} = 10^{-15}$ seria apenas aparente.

Embora ainda não haja nenhuma evidência experimental de dimensões espaciais extras podemos também nos perguntar por que o número de dimensões espaço-temporais deveria ser exatamente 4. É certo que o caráter $1/r^2$ da gravidade e da eletrostática parece apontar para um espaço-tempo de 4 dimensões. Entretanto, é igualmente possível descrever tais teorias em contextos de dimensões superiores, como mostra o modelo ADD para gravidade. Além disso, sobre a perspectiva de dimensões extras podemos formar um grande arcabouço teórico para descrever o mundo 4D. Estes cenários de mundo brana não pertencem mais ao campo especulativo da ciência, mas sim em uma aproximação teórica bem estabelecida em física de partículas além do modelo padrão.

No mesmo ano da publicação do modelo ADD dois grupos de pesquisa astronômica independentes, o High-Z Supernovae Search Team e o Supernova Cosmology Project, constataram que o Universo está atualmente em expansão acelerada [4, 5]. Os dados experimentais nos informam que ainda que caso o Universo tivesse passado por um período de inflação inicial, a expansão remanescente deveria ser desacelerada, devido a força atrativa da gravidade. Um tipo de energia desconhecida seria a razão de tal expansão acelerada, a energia

escura. Cerca de 69 por cento da densidade de energia do Universo é composta dessa energia. Isso também foi confirmado por outras observações como a radiação cósmica de fundo [6, 7, 8, 9] e as oscilações acústicas de bárions¹ [10, 11]. Esta energia é caracterizada por uma equação de estado $\omega = P/\rho$, onde P é a pressão e ρ é a densidade de energia. Observações recentes restringem a equação de estado com $\omega < -1/3$ [12, 13].

Um dos candidatos mais simples para este fenômeno é a constante cosmológica Λ com $\omega = -1$. A constante cosmológica surge de uma energia de vácuo em física de partículas, mas sua escala de energia é muito maior do que a escala de energia observada para energia escura [14], da ordem 10^{120} vezes. Muitos modelos alternativos para explicar este fenômeno surgiram nos últimos anos, entre eles os que mais se destacam na literatura são os de quintessência [15, 16, 17, 18, 19], gás de Chaplygin [20], k-essência [21] e gravitação modificada [22].

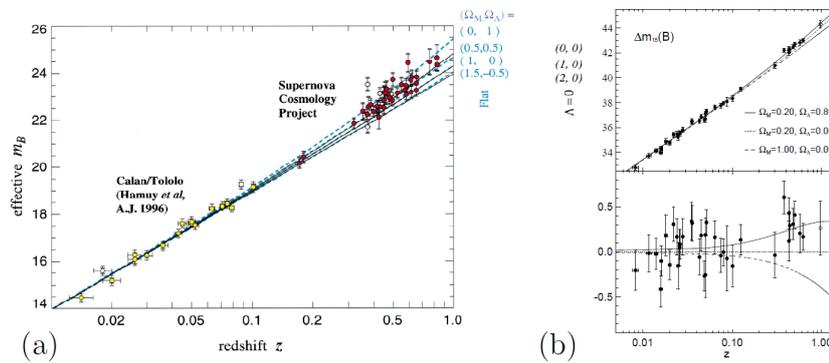


FIGURA 1.1: (a) e (b) Magnitude efetiva de supernovas IA vs redshift dos dados do Supernova Cosmology Project e High-Z Supernova Search Team, respectivamente. Em ambos os casos a curva que melhor fita os dados corresponde a composição de 0.69 energia escura e 0.31 matéria.

O modelo de quintessência é o modelo teórico de campo escalar mais simples que não apresenta instabilidades laplacianas. Além disso, há uma vasta literatura modelando energia escura com um ou mais campos escalares além de métodos para encontrar soluções

¹Oscilações acústicas de bárions são flutuações na densidade de matéria bariônica no plasma do Universo primordial.

analíticas para esses campos e métodos aproximativos de rolagem lenta que fitam parâmetros cosmológicos de observações recentes.

Os cenários de mundo brana, o problema da hierarquia mencionada no modelo ADD e a energia escura talvez sejam os maiores propulsores da física além do modelo padrão dos últimos 20 anos e uma grande variedade de modelos não para de surgir. Neste sentido, esta dissertação está direcionada a estudar e entender esses problemas sob a roupagem de teoria de campos escalares reais. A escolha de campos escalares reais se dá por sua simplicidade em relação a outros modelos de campos não escalares, no entanto, apesar de sua simplicidade, podem ser utilizados para descrever uma gama de fenômenos físicos [23, 24]. Nesta dissertação, estudaremos defeitos topológicos do tipo paredes de domínios, em (1,1) dimensões, com dinâmica padrão e não-padrão.

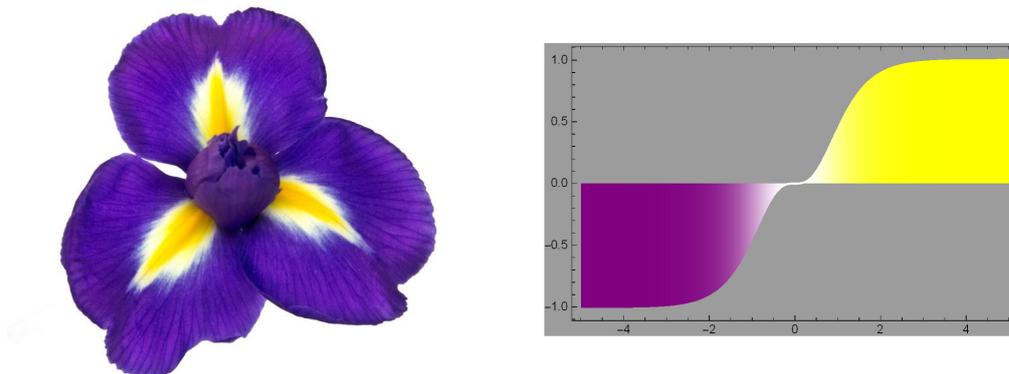


FIGURA 1.2: Exemplo de parede de domínio encontrada na natureza.

Os defeitos são soluções estáticas das equações de movimento do campo e podem ser classificados como topológicos ou não-topológicos, apresentando diferentes formas como *kinks* e *lumps*, *vórtices* ou *monopólos*, caso o sistema esteja em uma, duas ou três dimensões espaciais, respectivamente.

Os defeitos topológicos mais simples são os *kinks* descritos em (1,1) dimensões. Os *kinks* são soluções estáticas que conectam dois

mínimos consecutivos do potencial associado ao modelo descrito por uma densidade de lagrangiana do tipo $\mathcal{L} = T(\partial_\mu\phi) - V(\phi)$. Estes são amplamente estudados em [25, 26, 27, 28]. Este tipo de defeito é comum de encontrar na natureza, como podemos ver na figura 1.2, por exemplo. As cores violeta, branca e amarela podem ser representadas por números diferentes. Na transição entre um número e outro há um interface, associada aqui a um defeito topológico. Em geral, essa transição de fase, ou como na figura, transição entre dois estados diferentes é suave, o que minimiza o gasto de energia da transição. Além disso, os defeitos de tipo *kinks*, bem como os *lumps* aparecem naturalmente em física de altas energias [29, 30], cosmologia [16, 17, 21, 31, 32, 33, 34], cenários de mundo brana [35, 36, 37, 38, 39, 40, 41], transições de fase em sistema ferromagnéticos [42], etc.

Por isso, uma gama de potenciais não-lineares são estudados no próximo capítulo a fim de abrir espaço para o estudo de 1 e N campos escalares reais com dinâmica padrão e não-padrão, respectivamente, embutidos na teoria da relatividade geral [43, 44], modelos cosmológicos de expansão acelerada e cenários de mundo-brana.

A dissertação está esquematizada da seguinte forma: no capítulo 2 fazemos uma revisão pedagógica sobre teoria de campos escalares reais para densidades de lagrangianas compostas de um e N campos escalares com dinâmica padrão e generalizada, respectivamente. Vamos focar em soluções estáticas das equações de movimento (EoM, "equation of motion"), introduzir o formalismo de primeira ordem e analisar a estabilidade linear dessas soluções para modelos conhecidos como ϕ^6 , cosseno-gordon, ϕ^3 e ϕ^4 invertido.

No capítulo 3, vamos estudar métodos mais sofisticados para encontrar soluções analíticas para modelos de dois campos, como o método da deformação e sua aplicação para a determinação de novas famílias de potenciais polinomiais, o método órbitas tentativas na investigação de estados BPS e modelos gêmeos.

No capítulo 4, entramos na parte de cosmologia onde uma breve revisão sobre relatividade geral, equação de campo de Einstein e perturbações da métrica é feita. Além disso, o contexto de energia escura é abordado com a métrica FLRW e o formalismo de primeira ordem para o modelo padrão, de um e dois campos, e o modelo taquiônico, que nos ajuda a encontrar soluções para a evolução do

fator de escala para várias famílias de modelos.

No capítulo 5, encontra-se o modelo de mundo brana de Randall-Sundrum. Embora esse modelo não trate especificamente de teoria de campos escalares podemos modelar a dimensão extra com defeitos topológicos e para isso vamos utilizar todo o arcabouço teórico definido nos capítulos anteriores para estudar brana de bloch e modelo de N-campos escalares com dinâmica generalizada em mundo brana.

Terminamos a dissertação com as conclusões e perspectivas futuras de trabalhos a serem explorados. Além disso, destacamos todas as referências na literatura que foram fundamentais para a construção deste trabalho.

Capítulo 2

Alguns Modelos de Campos Escalares Reais

Teoria de Campos é de extrema importância na física. Com os formalismos lagrangiano e hamiltoniano em teoria de campos podemos descrever uma infinidade de fenômenos físicos, desde a interação microscópica entre partículas à atração gravitacional em larga escala.

O estudo em teoria clássica de campos se concentra principalmente na procura por soluções das equações de movimento que advêm da minimização do funcional ação. Em geral, tais soluções são não-triviais, pois as equações de movimento são de segunda ordem e não lineares. Neste capítulo, vamos estudar modelos com 1 e N campos escalares com dinâmica canônica e não-canônica, respectivamente, e mostrar que as equações de movimento de segunda ordem podem ser satisfeitas por equações de primeira ordem, num método conhecido como BPS (Bogomol'nyi, Prasad, Sommerfield) [45, 46]. Além disso, vamos estudar a estabilidade linear de alguns defeitos topológicos, os *kinks*, e não-topológicos, os *lumps*, no espaço-tempo plano.

2.1 Modelo de Um Campo Escalar

A equação de movimento de uma teoria de campos clássica advém do funcional, conhecido neste contexto como ação, em $(D,1)$ dimensões

$$S[\phi] = \int_{-\infty}^{+\infty} d^{D+1}x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi), \quad (2.1)$$

onde \mathcal{L} é a densidade de lagrangiana, aqui na forma padrão

$$\mathcal{L} = g_{\mu\nu} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - V(\phi). \quad (2.2)$$

O tensor métrico utilizado neste capítulo é do tipo Minkowski $g_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, \dots, -)$. A minimização da ação em relação ao campo nos leva em

$$\delta S = \int d^{D+1}x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right\} = 0. \quad (2.3)$$

Uma vez que, a variação está sendo tomada no campo e não nas coordenadas temos $\delta (\partial_\mu \phi) = \partial_\mu (\delta \phi)$. Usando integração por partes e desprezando o termo de superfície, já que a variação do campo é nula nos extremos de configurações, obtemos

$$\delta S = \int d^{D+1}x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right\} \delta \phi = 0. \quad (2.4)$$

Por definição, as variações tomadas aqui são infinitesimais e independentes entre si, então obtemos a equação da dinâmica do campo ou equação de Euler-Lagrange da forma,

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (2.5)$$

O caso de (1,1) dimensões terá um foco maior neste capítulo ao falarmos de defeitos topológicos e não-topológicos e alguns modelos associados. Neste caso, permita-nos escrever a EoM na forma

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (2.6)$$

A maioria das equações de movimento em teoria de campos apresentam não-linearidades que são implementadas através da forma do potencial $V(\phi)$. A não-linearidade naturalmente leva a uma dificuldade técnica na busca por soluções analíticas, por isso, a fim de simplificações iniciais no tratamento da equação acima, vamos considerar o caso estático, $\phi(x, t = 0)$,

$$\phi'' = \frac{dV}{d\phi}, \quad (2.7)$$

onde $\phi' = \frac{d\phi}{dx}$.

Neste caso estático, a densidade de energia que advém da componente temporal do tensor energia-momento (2.19) pode ser escrita como,

$$\rho(x) = -\mathcal{L} = \frac{\phi'^2}{2} + V(\phi). \quad (2.8)$$

Logo, a energia total é dada por

$$E = \int dx \left(\frac{\phi'^2}{2} + V(\phi) \right), \quad (2.9)$$

Completando quadrados na equação anterior temos

$$E = \int dx \left[\frac{1}{2} \left(\phi' \pm \sqrt{2V} \right)^2 \mp \phi' \sqrt{2V} \right]. \quad (2.10)$$

Podemos perceber aqui que o potencial é necessariamente não negativo e por isso o termo quadrático contribui mais para a energia que o termo linear. Portanto, a condição de minimização da energia total nos diz que

$$\phi' = \mp \sqrt{2V}, \quad (2.11)$$

perceba que a equação anterior satisfaz (2.7). Reduzimos a ordem da equação de movimento pela minimização da energia o que simplifica em muito, a busca por soluções analíticas para o campo $\phi(x)$ seja qual for o modelo $V(\phi)$. Um processo semelhante a esse será abordado ao falarmos do método BPS. Assim sendo, reescrevemos a energia total como

$$E = \int dx \phi' \sqrt{2V}. \quad (2.12)$$

2.1.1 Teorema de Noether

O teorema de Noether fornece um método poderoso para examinar simetrias dentro da ação e da densidade de lagrangiana e relacionar diretamente essas simetrias a quantidades conservadas.

Considerando uma transformação infinitesimal geral de coordenadas do tipo $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$ temos que a ação transformada é $S' = S + \delta S$, ou ainda

$$\delta S = \int d^{D+1}x' \mathcal{L}(\phi', \partial_\mu \phi', x'^\mu) - \int d^{D+1}x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x^\mu), \quad (2.13)$$

onde $d^{D+1}x' = J(x', x)d^{D+1}x$. O jacobiano desta transformação infinitesimal é $J(x', x) = \det\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\right) \cong 1 + \partial_\mu \delta x^\mu$. Desprezando termos de segunda ordem podemos escrever que

$$\delta S = \int d^{D+1}x (\delta \mathcal{L} + \mathcal{L} \partial_\mu \delta x^\mu),^1 \quad (2.14)$$

aqui podemos utilizar a regra do produto e a equação de Euler-Lagrange para simplificar a equação acima

$$\delta S = \int d^{D+1}x \partial_\mu \left[\mathcal{L} \delta x^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right] = 0, \quad (2.15)$$

que nos leva a uma integral no contorno Σ ,

$$\delta S = \int_\Sigma d\Sigma_\mu \left[\mathcal{L} \delta x^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right]. \quad (2.16)$$

Somando e subtraindo o termo $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial^\nu \phi) \delta x_\nu$ na equação anterior, ficamos com

$$\delta S = \int_\Sigma d\Sigma_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Delta \phi - T^{\mu\nu} \delta x_\nu \right] = 0, \quad (2.17)$$

onde

$$\Delta \phi \equiv \delta \phi + (\partial^\nu \phi) \delta x_\nu, \quad (2.18)$$

é a variação total de ϕ e

$$T^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (2.19)$$

é o tensor energia-momento. Considerando agora transformações genéricas e contínuas nas coordenadas e nos campos da forma $\delta x_\mu = X_{\mu\alpha} \delta \omega^\alpha$ e $\Delta \phi = \Phi_\alpha \delta \omega^\alpha$ a integral sobre o contorno Σ fica

$$\int d\Sigma_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Phi_\alpha - T^{\mu\nu} X_{\mu\alpha} \right] \delta \omega^\alpha = 0. \quad (2.20)$$

Uma vez que os $\delta \omega^\alpha$ são infinitesimais e linearmente independentes temos uma quantidade conservada advinda das transformações contínuas de coordenadas e dos campos,

¹Onde usamos $\mathcal{L} \partial_\mu \delta x^\mu = \partial_\mu (\mathcal{L} \delta x^\mu) - (\partial_\mu \mathcal{L}) \delta x^\mu = \partial_\mu (\mathcal{L} \delta x^\mu) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right)$

$$\int d^{D+1} \partial_\mu J_\alpha^\mu = 0, \quad (2.21)$$

onde $J_\alpha^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Phi_\alpha - T^{\mu\nu} X_{\mu\alpha}$ é a corrente de Noether.

2.1.2 Estabilidade Linear

Um estudo interessante consiste em aplicar perturbações na solução do campo e verificar se o modelo apresenta estabilidade linear ou não. Isto serve como guia para determinar se um modelo tem consistência física. Uma perturbação na solução estática do campo pode ser escrita como segue,

$$\phi(x, t) = \phi_s(x) + \eta(x, t), \quad (2.22)$$

aqui ϕ_s é a solução estática e $\eta(x, t)$ é a perturbação que depende tanto do espaço como do tempo. Estamos aqui considerando que tal perturbação é suficientemente pequena de modo que podemos desprezar termos de segunda ordem. Com isto, substituindo a eq. (2.22) na (2.6) ficamos com,

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial x^2} + \left. \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right|_{\phi_s} = 0. \quad (2.23)$$

Tomando aqui pequenas flutuações no potencial em torno da solução estática obtemos

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \eta \left. \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right|_{\phi_s} - \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial x^2} + \left. \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right|_{\phi_s} = 0. \quad (2.24)$$

Da equação de Euler-Lagrange sabemos que os dois últimos termos da relação acima se cancelam,

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \eta \left. \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right|_{\phi_s} = 0. \quad (2.25)$$

Usando o método de separação de variáveis para resolver esta EDP podemos através do *ansatz* na forma

$$\bar{\eta}(x, t) = \sum_n \eta_n(x) \cos(\omega_n t), \quad (2.26)$$

reescrever a eq. (2.25) como uma equação tipo Schrodinger

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + \mathbf{U}(x) \right] \eta_n = \omega^2 \eta_n, \quad (2.27)$$

ou ainda,

$$\mathbf{H} \eta_n(x) = \omega^2 \eta_n(x), \quad (2.28)$$

onde $\mathbf{U}(x) = \left. \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right|_{\phi_s}$ é o potencial de estabilidade e \mathbf{H} o hamiltoniano associado. Caso a equação tipo Schrodinger apresente autovalores negativos, $\omega_n^2 < 0$, o argumento imaginário no cosseno levaria a um cosseno hiperbólico, algo que violaria a suposição inicial de que a perturbação era suficientemente pequena na análise realizada acima. Portanto, para que a solução clássica seja linearmente estável o modo zero, $\omega_0^2 = 0$, deve ser o menor autovalor de energia acessível ao sistema. Além disso, derivando a EoM estática (2.7)

$$\frac{d}{dx} \phi'' = \frac{d^2}{dx^2} \phi' = \frac{d}{dx} V_\phi = V_{\phi\phi} \phi, \quad (2.29)$$

que leva em

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right] \phi' = 0, \quad (2.30)$$

onde obtemos que a autofunção correspondente ao modo zero é $\eta_0 = \phi'$ no caso unidimensional.

2.1.3 Método BPS

O método BPS desenvolvido inicialmente por Bogomol'nyi, Prasad e Sommerfield [45, 46] na década de 70 nos permite encontrar soluções analíticas para uma classe especial de modelos limitados inferiormente na forma

$$V(\phi) = \frac{W_\phi^2}{2}, \quad (2.31)$$

onde lê-se $W_\phi = \frac{dW(\phi)}{d\phi}$, $W(\phi)$ é chamado de super potencial por analogia ao que surge em teorias supersimétricas. Com o potencial escrito nesta forma, a equação de movimento estática pode ser reescrita como

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = W_\phi W_{\phi\phi}. \quad (2.32)$$

Neste caso, é possível reduzir a ordem da equação de movimento,

$$\phi' = \pm W_\phi. \quad (2.33)$$

Assim sendo, a energia total (2.12) se escreve

$$E = \int dx \phi' W_\phi = |W(\phi(\infty)) - W(\phi(-\infty))|. \quad (2.34)$$

Com isso o hamiltoniano na equação tipo Schrodinger (2.28) é dado por

$$\mathbf{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + W_{\phi\phi}^2 + W_\phi W_{\phi\phi\phi}, \quad (2.35)$$

que pode ser fatorado na forma

$$\mathbf{H}_\pm = \mathbf{S}_\pm^\dagger \mathbf{S}_\pm, \quad (2.36)$$

através dos operadores

$$\mathbf{S}_\pm = -\frac{d}{dx} \pm W_{\phi\phi}. \quad (2.37)$$

Com isso, podemos mostrar que a classe de modelos BPS não possui instabilidades aplicando o η_n^\dagger na equação (2.28) e integrando

$$\int |\mathbf{S}_\pm^\dagger \eta_n|^2 dx = \int \omega^2 |\eta_n|^2 dx. \quad (2.38)$$

Logo, vemos que os autovalores não podem ser negativos,

$$\omega^2 = \frac{\int |\mathbf{S}_\pm^\dagger \eta_n|^2 dx}{\int |\eta_n|^2 dx} \geq 0. \quad (2.39)$$

Podemos aqui perceber a grande aplicação que este método pode ter. Ele nos fornece equações de primeira ordem que satisfazem as equações de movimento, um operador hamiltoniano fatorizável e ainda garante que o modelo é sempre estável. Por esses motivos, o método BPS será amplamente utilizado nas seções e capítulos subsequentes.

2.1.4 Kinks

Os *kinks* são defeitos topológicos que aparecem como soluções das equações de movimento estáticas em (1,1) dimensões que conectam dois mínimos consecutivos do potencial. Este tipo de defeito aparece frequentemente em cenários de mundo brana, sistemas ferromagnéticos, etc. Vamos aqui abordar os modelos ϕ^6 e cosseno-gordon que serão úteis, entre outras coisas, no método da deformação abordado no capítulo 3.

2.1.4.1 Modelo ϕ^6

O modelo ϕ^6 é descrito pelo potencial

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2(1 - \phi^2)^2, \quad (2.40)$$

onde sem perda de generalidade todas as constantes foram tomadas iguais a 1 e o campo é adimensional. Podemos visualizar este potencial na figura 2.1.

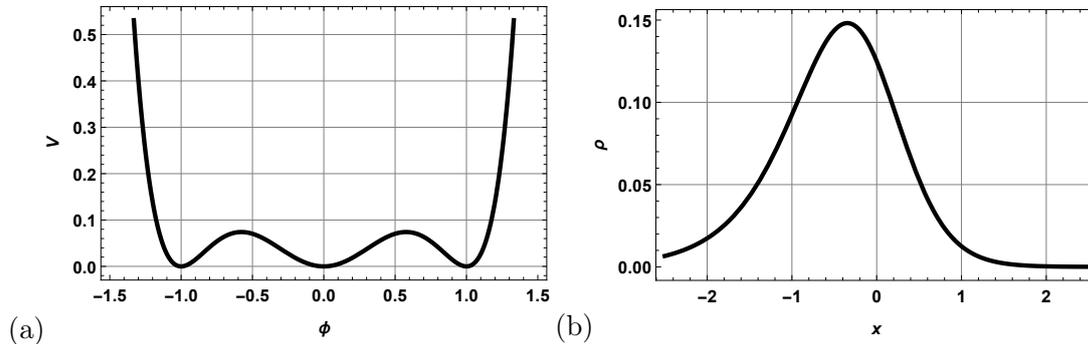


FIGURA 2.1: Modelo ϕ^6 : (a) Potencial associado ao modelo. (b) Densidade de energia da solução estática.

Como podemos perceber o potencial é limitado inferiormente pelo zero. Então, podemos assim escrevê-lo como

$$V(\phi) = \frac{1}{2}W_\phi^2, \quad (2.41)$$

onde,

$$W_\phi = \phi(1 - \phi^2). \quad (2.42)$$

Uma vez que, $W = W(\phi)$ então $W_\phi = \frac{dW}{d\phi}$. Portanto, uma integração simples nos leva em

$$W(\phi) = \frac{\phi^2}{2} - \frac{\phi^4}{4} + C, \quad (2.43)$$

aqui C deve ser nulo para que a energia seja finita. A solução do campo que satisfaz (2.5), conectando os mínimos do potencial é

$$\phi(x) = \pm \sqrt{\frac{1 \pm \tanh(x)}{2}}, \quad (2.44)$$

onde a combinação de sinais $(++; --)$ vale para a solução do tipo kink e $(+-; -+)$ para o anti-kink, ver figura 2.2. A densidade de energia do modelo ϕ^6 é

$$\rho(x) = \frac{1}{8} \frac{\text{sech}^4(x)}{(1 \pm \tanh(x))}. \quad (2.45)$$

Pelo método BPS a energia total é simplesmente

$$E = |W[\phi(x = \infty)] - W[\phi(x = -\infty)]| = \frac{1}{4}. \quad (2.46)$$

O estudo da estabilidade linear para este caso nos leva a uma equação do tipo Schrodinger

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + U(x) \right] \eta_n(x) = \omega_n^2 \eta_n(x). \quad (2.47)$$

Dessa forma, o modo zero associado é

$$\eta_0(x) = \frac{1}{4} \frac{\text{sech}^2(x)}{\sqrt{\frac{1 \pm \tanh(x)}{2}}}. \quad (2.48)$$

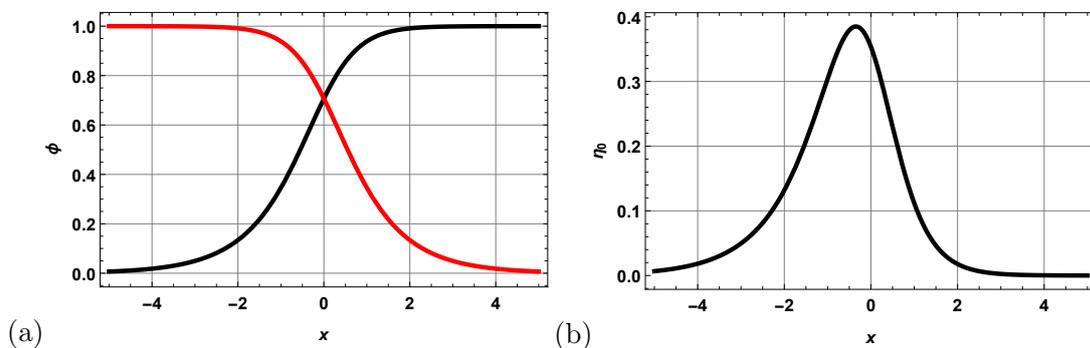


FIGURA 2.2: Modelo ϕ^6 : (a) Solução estática do modelo no setor topológico $\phi \in [0, 1]$ do tipo *kink* em preto e do tipo *antikink* em vermelho. (b) Modo zero da solução estática.

Uma vez que, este modo zero não apresenta nó, ou seja, não cruza o zero como podemos ver na figura 2.2, garantimos neste caso

unidimensional que o modo zero é o menor valor de energia acessível ao sistema, o que caracteriza sua estabilidade.

2.1.3.2 Modelo Cosseno-Gordon

O modelo Cosseno-Gordon apresenta um potencial escrito como

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \cos^2(\phi), \quad (2.49)$$

perceba que neste potencial temos infinitos setores topológicos como podemos ver em gráfico na figura 2.3.

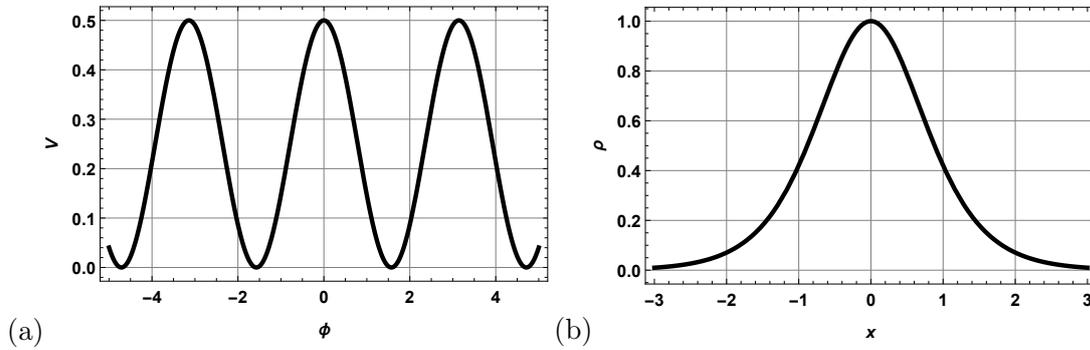


FIGURA 2.3: Modelo Cosseno-Gordon: (a) Potencial associado ao modelo. (b) Densidade de energia da solução estática.

Aqui, claramente podemos utilizar o método BPS onde

$$W_\phi = \cos(\phi). \quad (2.50)$$

Como W é função apenas de ϕ , então é que

$$W(\phi) = \text{sen}(\phi). \quad (2.51)$$

Da equação de primeira ordem temos que

$$\phi' = W_\phi, \quad (2.52)$$

onde uma integração simples na equação anterior nos leva em

$$\frac{\cos(\frac{\phi}{2}) + \text{sen}(\frac{\phi}{2})}{\cos(\frac{\phi}{2}) - \text{sen}(\frac{\phi}{2})} = e^{\pm x}, \quad (2.53)$$

ou ainda

$$\phi(x) = \pm 2 \arctan(e^{\pm x}) \pm \frac{\pi}{2}. \quad (2.54)$$

As várias combinações de sinais $+$ e $-$ podem levar a solução estática de um setor topológico a outro e de um tipo kink em anti-kink. A densidade de energia deste modelo, dado pela eq. (2.8), é

$$\rho(x) = \frac{4e^{2x}}{e^{4x} + 2e^{2x} + 1}. \quad (2.55)$$

Neste caso a energia de Bogomol'nyi é dada por

$$E = |W[\phi(x = \infty)] - W[\phi(x = -\infty)]| = 2. \quad (2.56)$$

Além disso, a solução em qualquer dos setores topológicos é linearmente estável pois,

$$\eta_0(x) = \phi'(x) = \frac{2e^x}{1 + e^{2x}}, \quad (2.57)$$

não apresenta nenhum nó como podemos ver na figura 2.4.

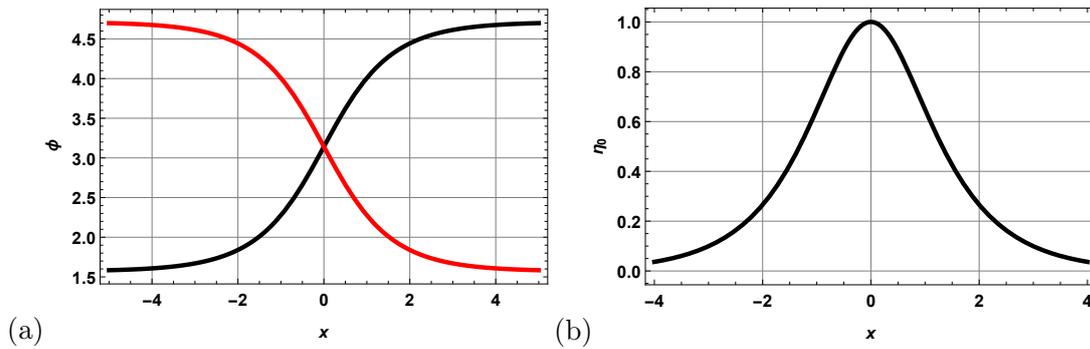


FIGURA 2.4: Modelo Coseno-Gordon: (a) Solução estática do modelo no setor topológico $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$ do tipo *kink* em preto e do tipo *antikink* em vermelho. (b) Modo zero da solução estática.

2.1.5 Lumps

Os *lumps* também são estruturas de defeitos não topológicos, pois sua carga topológica associada é nula, que aparecem nas equações de movimento estáticas em (1,1) dimensões. Nesta seção vamos estudar alguns modelos de *lumps* já conhecidos na literatura.

2.1.5.1 Modelo ϕ^3

O modelo ϕ^3 tem um potencial associado dado por

$$V(\phi) = 2\phi^2(1 - \phi). \quad (2.58)$$

Aqui não podemos aplicar o método BPS pois o modelo não é limitado inferiormente como nos outros dois casos analisados, ver figura 2.5.

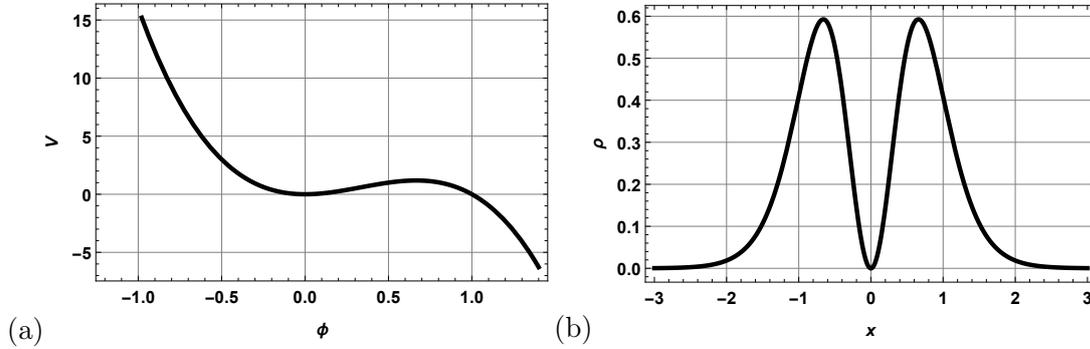


FIGURA 2.5: Modelo ϕ^3 : (a) Potencial associado ao modelo. (b) Densidade de energia da solução estática.

Utilizando então a eq. de primeira ordem (2.11) temos de forma simples a solução estática

$$\phi(x) = \operatorname{sech}^2(x). \quad (2.59)$$

Além disso, a densidade de energia (2.8) é da forma

$$\rho(x) = 4\operatorname{sech}^4(x) \tanh^2(x). \quad (2.60)$$

Logo, a energia total é $E = \frac{4}{3}$.

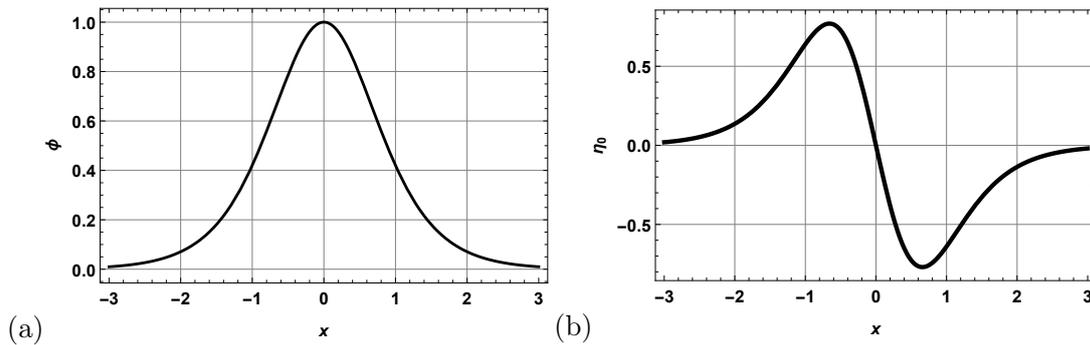


FIGURA 2.6: Modelo ϕ^3 : (a) Solução estática do modelo no setor topológico $\phi \in [0, 1]$ do tipo *lump*. (b) Modo zero da solução estática.

A estabilidade linear deste modelo recai também em uma equação tipo Schrodinger como em (2.27). Podemos perceber que o modo zero deste modelo apresenta um nó, como podemos ver na figura 2.6. Dessa forma, podemos assegurar no caso unidimensional que

o modo zero não é o menor estado de energia acessível ao sistema, mas sim o primeiro estado excitado. Portanto, este modelo possui autovalores $\omega^2 < 0$. Podemos então concluir que o modelo ϕ^3 é linearmente instável sobre pequenas perturbações.

2.1.5.2 Modelo ϕ^4 invertido

O potencial do modelo ϕ^4 invertido é

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2(1 - \phi^2). \quad (2.61)$$

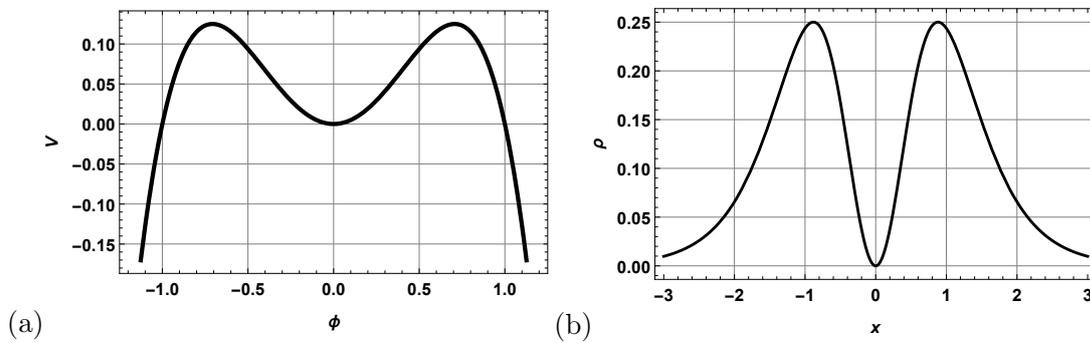


FIGURA 2.7: Modelo ϕ^4 invertido: (a) Potencial associado ao modelo.
(b) Densidade de energia da solução estática.

Da equação de primeira ordem temos que

$$\phi'(x) = \pm\phi\sqrt{1 - \phi^2}. \quad (2.62)$$

cuja solução é

$$\phi(x) = \text{sech}(x). \quad (2.63)$$

Dessa forma, a densidade de energia deste modelo é escrita como

$$\rho(x) = \text{sech}^2(x)\tanh^2(x). \quad (2.64)$$

Logo,

$$E = \frac{2}{3}. \quad (2.65)$$

Da mesma forma que o modelo ϕ^3 , no modelo ϕ^4 invertido o modo zero do apresenta um nó como podemos ver na figura 2.8. Portanto, pela mesma razão do modelo ϕ^3 , o modelo ϕ^4 invertido é linearmente instável sobre pequenas perturbações.

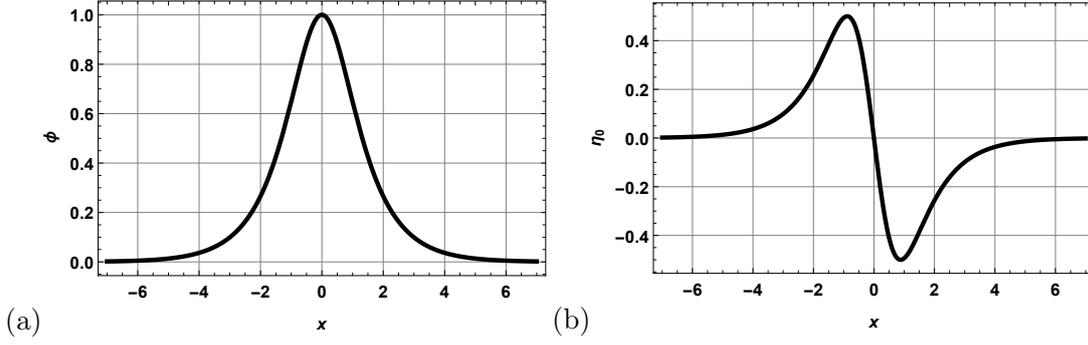


FIGURA 2.8: Modelo ϕ^4 invertido: (a) Solução estática do modelo no setor topológico no intervalo $\phi \in [0,1]$. (b) Modo zero da solução estática.

2.2 Dinâmica Generalizada de N-Campos Escalares

Outra situação de interesse em teoria de campos escalares reais que será utilizada em capítulos posteriores é a respeito da dinâmica de N-campos escalares com termo cinético generalizado, ou ainda, em outras palavras, a energia cinética dos campos agora não é mais proporcional ao quadrado das velocidades dos campos. Esses modelos são conhecidos na literatura como k-fields e podem ser encontrados em nível mais pedagógico em [38, 47]. A densidade lagrangiana desse sistema é escrita como uma função dos N-campos ϕ_i e uma quantidade invariante $X_{jk} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi_j\partial_\nu\phi_k$. Assim, a ação é escrita como

$$S = \int d^{D+1}x \mathcal{L}(\phi_i, X_{jk}). \quad (2.66)$$

Tomando $D = 3$ e minimizando esta ação através do princípio variacional temos as equações de movimento da forma

$$\partial_\mu(\mathcal{L}_{X_{ij}}\partial^\mu\phi_j) - \mathcal{L}_{\phi_i} = 0, \quad (2.67)$$

ou ainda,

$$\mathcal{L}_{X_{ij}}\partial_\mu\partial^\mu\phi_j + \partial_\mu\mathcal{L}_{X_{ij}}\partial^\mu\phi_j - \mathcal{L}_{\phi_i} = 0, \quad (2.68)$$

onde aqui temos $\mathcal{L}_{X_{ij}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X_{ij}}$ e $\mathcal{L}_{\phi_i} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}$. Uma vez que, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_i, X_{jk})$, então

$$\partial_\mu\mathcal{L}_{X_{ij}} = \mathcal{L}_{X_{ij}X_{kl}}\partial^\nu\phi_l\partial_\mu\partial_\nu\phi_k + \partial_\mu\phi_k\mathcal{L}_{X_{ij}\phi_k}, \quad (2.69)$$

com isto a eq. (2.67) pode ser reescrita como

$$G_{ik}^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi_k + 2X_{kj}\mathcal{L}_{X_{ij}\phi_k} - \mathcal{L}_{\phi_i} = 0, \quad (2.70)$$

onde $G_{ik}^{\mu\nu} = \mathcal{L}_{X_{ij}X_{kl}} \partial^\mu \phi_j \partial^\nu \phi_l + \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}_{X_{ik}}$.

De modo análogo ao caso de um campo com dinâmica padrão a eq. (2.67) apresenta não linearidade a depender do potencial associado ao modelo $V(\phi_i)$. Dessa forma, encontrar soluções analíticas para os campos ϕ_i é uma tarefa difícil, quando não impossível. Entretanto, através do formalismo de primeira ordem já apresentado, podemos encontrar uma solução que faz parte do conjunto de soluções contidas nas equações de movimento de segunda ordem. Podemos perceber de forma que a eq. de primeira ordem

$$\mathcal{L} - 2X_{ij}\mathcal{L}_{ij} = C, \quad (2.71)$$

satisfaz a equação de movimento de segunda ordem, onde C é a constante de integração, para isso basta derivar a equação acima e obtemos novamente a eq. (2.67).

O tensor energia momento desse modelo é da forma

$$T_{\mu\nu} = \mathcal{L}_{X_{ij}} \partial_\mu \phi_i \partial_\nu \phi_j - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (2.72)$$

No cenário de defeitos topológicos temos que os campos dependem apenas das coordenadas espaciais. Para fins de simplicidade, mas sem perda de generalidade, podemos considerar uma dependência apenas na coordenada espacial x . Dessa forma, as eq's (2.70) e (2.72) ficam, respectivamente, como

$$(\mathcal{L}_{X_{ij}X_{kl}} \phi'_j \phi'_l - \mathcal{L}_{X_{ik}}) \phi''_k - \phi'_k \phi'_j \mathcal{L}_{X_{ij}\phi_k} - \mathcal{L}_{\phi_i} = 0, \quad (2.73)$$

e

$$T_{00} = -\mathcal{L}; \quad (2.74a)$$

$$T_{10} = T_{01} = 0; \quad (2.74b)$$

$$T_{11} = \mathcal{L} + \phi'_i \phi'_j \mathcal{L}_{X_{ij}}. \quad (2.74c)$$

2.2.1 Estados BPS para N-Campos

Seja uma função dos N-campos da forma

$$W_{\phi_i} = \phi'_j \mathcal{L}_{X_{ij}}, \quad (2.75)$$

então a densidade de energia pode ser reescrita como,

$$\rho(x) = \phi'_i W_{\phi_i}. \quad (2.76)$$

Logo, a energia total depende apenas da variação dessa nova função $W(\phi_i)$ nas configurações extremas dos N-campos, ou seja,

$$E = |W[\phi_1(\infty), \dots, \phi_N(\infty)] - W[\phi_1(-\infty), \dots, \phi_N(-\infty)]|, \quad (2.77)$$

que nos permite encontrar a energia do modelo sem precisar necessariamente conhecer a solução do mesmo.

2.2.2 Estabilidade Linear de N-Campos

Tratamos de investigar a estabilidade de um modelo de um campo escalar através de uma perturbação linear na solução estática na subseção 2.1.2. Este estudo serve como guia para saber a consistência física da teoria. Neste sentido, também podemos investigar a estabilidade linear de teorias com N-campos escalares reais com dinâmica generalizada através de uma perturbação até primeira ordem na solução estática da forma

$$\phi_i(x, t) = \phi_{i_s}(x) + \eta_i(x, t), \quad (2.78)$$

Dessa forma, temos até primeira ordem que

$$X_{ij} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_j + \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \eta_j, \quad (2.79)$$

ou seja, perturbando a solução estática estamos perturbando também o invariante que por sua vez, modifica a equação de movimento que por sua vez, modifica a dinâmica dos campos. Substituindo as 2 últimas equações na equação (2.67) temos que

$$\begin{aligned} \partial_\mu (\mathcal{L}_{X_{ij}} \partial^\mu \eta_j + \mathcal{L}_{X_{ij} X_{kl}} \partial_\nu \phi_k \partial^\nu \eta_l \partial^\mu \phi_j + \mathcal{L}_{X_{ij} \phi_k} \eta_k \partial^\mu \phi_j) - \\ - \mathcal{L}_{\phi_i X_{kl}} \partial_\nu \phi_k \partial^\nu \eta_l - \mathcal{L}_{\phi_i \phi_j} \eta_j = 0. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Seja nossa perturbação separável nas variáveis x e t da forma

$$\eta_i(x, t) = \sum_i \eta_i(x) \cos(\omega_i t), \quad (2.81)$$

a equação de movimento expandida até primeira ordem pode ser simplificada como

$$\begin{aligned} - [(\mathcal{L}_{X_{ij}} + 2X_{kj} \mathcal{L}_{X_{ij} X_{kl}}) \eta_l']' - (\mathcal{L}_{X_{ij} \phi_k} - \mathcal{L}_{X_{kj} \phi_i}) \phi_j' \eta_k' = \\ = [\omega^2 \mathcal{L}_{X_{ij}} + (\mathcal{L}_{X_{ij} \phi_l}')' + \mathcal{L}_{\phi_i \phi_j}] \eta_j. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Introduzindo algumas definições, a fim de simplificar ainda mais a equação de movimento perturbada, do tipo

$$a_{ij} = \mathcal{L}_{X_{ij}} + 2X_{kl}\mathcal{L}_{X_{il}X_{kj}}, \quad (2.83a)$$

$$b_{ij} = (\mathcal{L}_{X_{il}\phi_j} - \mathcal{L}_{X_{jl}\phi_i})\phi_l', \quad (2.83b)$$

$$c_{ij} = (\mathcal{L}_{X_{il}\phi_j}\phi_l')' + \mathcal{L}_{\phi_i\phi_j}, \quad (2.83c)$$

a equação de movimento perturbada (2.82) pode ser reescrita como

$$-a_{ij}\eta_j'' - (a'_{ij} + b_{ij})\eta_j' - c_{ij}\eta_j = \omega^2 \mathcal{L}_{X_{ij}}\eta_j. \quad (2.84)$$

Tomando uma mudança de variável em $dx \rightarrow \frac{dz}{R}$ e $\eta_i(x) \rightarrow S_{ij}u_j(z)$ obtemos uma equação do tipo Schrodinger

$$\left[-\delta_{ij} \frac{d^2}{dz^2} + U_{ij}(z) \right] u_j = \omega^2 u_i(z). \quad (2.85)$$

Com os seguintes vínculos

$$2a_{ij}R \frac{dS_{jk}}{dz} + \frac{d(a_{ij}R)}{dz} S_{jk} + b_{ij}S_{jk} = 0, \quad (2.86a)$$

$$\mathcal{L}_{X_{ij}}S_{jk} - a_{il}S_{lk}R^2 = 0, \quad (2.86b)$$

onde o chamado potencial de estabilidade, $U_{ij}(z)$ é dado por

$$U_{ij}(z) = -R^{-2}S_{li}^{-1}a_{lm}^{-1} \left[R \frac{d}{dz} \left(a_{mk}R \frac{dS_{kj}}{dz} \right) + c_{mk}S_{kj} + b_{mk}R \frac{dS_{kj}}{dz} \right]. \quad (2.87)$$

A análise de estabilidade é feita de forma análoga ao caso de um campo escalar com dinâmica padrão. Caso algum autovalor ω^2 seja menor que zero o argumento do cosseno na eq. (2.81) se torna imaginário levando a um cosseno hiperbólico em t que explode em pouco tempo, contrariando assim, nossa definição inicial de se tratar de uma perturbação pequena o suficiente para desprezarmos termos de segunda ordem.

2.2.2.1 Dinâmica Padrão de 2 Campos

Aproveitando o formalismo apresentado na seção anterior é aqui conveniente explorar uma teoria de 2 campos escalares com dinâmica padrão, assunto que será abordado com mais ênfase no próximo capítulo, e que pode ser encontrado em nível mais pedagógico em [48].

Uma teoria descrita por 2 campos com acoplamento no potencial é dada por

$$\mathcal{L} = X_{ij} - V(\phi, \chi), \quad (2.88)$$

onde,

$$X_{11} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi, \quad (2.89a)$$

$$X_{22} = \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi, \quad (2.89b)$$

$$X_{12} = X_{21} = 0. \quad (2.89c)$$

Com o método BPS temos que o potencial com acoplamento entre os dois campos pode ser escrito como

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2} W_\phi^2 + \frac{1}{2} W_\chi^2, \quad (2.90)$$

onde $W = W(\phi, \chi)$. Do formalismo de primeira ordem temos as seguintes equações para o caso estático

$$\phi'(x) = W_\phi(\phi, \chi), \quad (2.91a)$$

$$\chi'(x) = W_\chi(\phi, \chi). \quad (2.91b)$$

Tomando perturbações nas soluções estáticas na forma

$$\phi(x, t) = \phi_s(x) + \eta(x, t), \quad (2.92a)$$

$$\chi(x, t) = \chi_s(x) + \xi(x, t). \quad (2.92b)$$

Com a expansão até primeira ordem em η e ξ ficamos com as equações de movimento

$$\ddot{\eta} - \eta'' + \eta \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \xi \frac{\partial^2 V}{\partial \phi \partial \chi} = 0, \quad (2.93a)$$

$$\ddot{\xi} - \xi'' + \xi \frac{\partial^2 V}{\partial \chi^2} + \eta \frac{\partial^2 V}{\partial \chi \partial \phi} = 0, \quad (2.93b)$$

De modo mais simplificado podemos escrever em forma matricial como segue

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial \phi \partial \chi} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \phi \partial \chi} & \frac{\partial^2 V}{\partial \chi^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} = 0. \quad (2.94)$$

No capítulo seguinte iremos estudar um caso específico dentro do formalismo de teoria de 2 campos escalares reais.

Capítulo 3

Outros Modelos

Como vimos no Cap. 2, as equações de movimento em teoria de campos apresentam não-linearidades de difícil tratamento analítico. O formalismo de primeira ordem nos ajuda nessa tarefa, contudo ele resolve todos os problemas. Neste capítulo, iremos estudar mais alguns métodos e modelagens com campos escalares a fim de refinar nosso ferramental matemático para tratar a não-linearidade intrínseca aos modelos.

3.1 Método da Deformação

Um procedimento generalizado introduzido em [28] permite criar defeitos deformados a partir de um outro defeito cuja solução é conhecida em uma dimensão espacial. Este procedimento permite encontrar as soluções para modelos de difícil tratamento analítico através de uma função bijetora do campo, $f = f(\phi)$, com derivadas não nulas que conecta duas teorias de um campo escalar. Dadas duas teorias de um campo escalar independentes entre si na forma padrão,

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - U(\chi), \quad (3.1a)$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (3.1b)$$

sabemos do capítulo anterior que a equação de movimento de segunda ordem pode ser reduzida a primeira ordem, dada por

$$\phi' = \sqrt{2V}, \quad (3.2)$$

bem com

$$\chi' = \sqrt{2V}. \quad (3.3)$$

Introduzindo uma função bijetora que conecta os dois campos da forma

$$\chi = f(\phi), \quad (3.4)$$

então,

$$\chi' = f_\phi \phi'. \quad (3.5)$$

onde $f_\phi = \frac{df}{d\phi}$. Com isso, temos uma nova teoria descrita por um potencial f-deformado dado por,

$$V(\phi) = \frac{U(\chi = f(\phi))}{f_\phi^2}. \quad (3.6)$$

Perceba aqui que tomando o caminho contrario, ou seja, f^{-1} temos a solução do defeito original. Além disso, aplicando a função deformadora repetidas vezes obtemos a solução de vários outros defeitos de modelos com soluções topológicas. A energia do defeito deformado depende da função deformadora como

$$E_{BPS} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{d}{d\chi} f^{-1}(\chi) \right)^2 \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2. \quad (3.7)$$

A fim de ilustrar este método, podemos utilizar o modelo χ^4 cuja análise e solução é amplamente conhecida [49]. Este modelo tem potencial na forma

$$U(\chi) = \frac{1}{2}(1 - \chi^2)^2. \quad (3.8)$$

Escolhendo uma função deformadora do tipo

$$f(\phi) = 2\phi^2 - 1, \quad \frac{df}{d\phi} = 4\phi, \quad (3.9)$$

que ao ser substituída em (3.6) resulta no potencial f-deformado descrito por

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \frac{(1 - (2\phi^2 - 1)^2)^2}{(4\phi^2)} = \frac{1}{2} \phi^2 (1 - \phi^2)^2, \quad (3.10)$$

tratando-se do potencial ϕ^6 , vide (2.40). A solução do modelo χ^4 é conhecida $\chi(x) = \pm \tanh(x)$. Portanto, a solução para o modelo ϕ^6 pode ser encontrada via

$$2\phi^2 - 1 = \pm \tanh(x), \quad (3.11)$$

ou ainda,

$$\phi(x) = \pm \sqrt{\frac{1 \pm \tanh(x)}{2}}. \quad (3.12)$$

Como podemos perceber neste ponto o método da deformação é simples e nos permite encontrar soluções analíticas para modelos com alta não-linearidade. A fim de ilustrar mais este método, tomemos como ponto de partida novamente o modelo χ^4 . Agora com a função deformadora dada por

$$f(\phi) = \sin(\phi), \quad \frac{df}{d\phi} = \cos(\phi), \quad (3.13)$$

temos um potencial deformado da forma

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \frac{(1 - \sin^2(x))^2}{\cos^2(x)} = \frac{1}{2} \cos^2(x), \quad (3.14)$$

que é idêntico ao modelo Cosseno-Gordon (2.49). A solução desse modelo obtida via o mapeamento

$$\sin(\phi) = \pm \tanh(x), \quad (3.15)$$

resultando em

$$\phi(x) = \arcsin(\pm \tanh(x)) \pm \frac{\pi}{2}. \quad (3.16)$$

3.2 Método Órbitas Tentativas

Como vimos na subseção 2.2.2.1 uma teoria de dois campos pode ser definida por uma densidade de lagrangiana como em (2.90), onde o superpotencial W é também função dos dois campos. Se o potencial tem muitos mínimos podemos ter setores com soluções do tipo defeitos topológicos ou não topológicos. Estes defeitos constituem uma órbita no plano (ϕ, χ) , ver figura 3.1, que pode ser representada por uma função tipo órbita dos dois campos $F(\phi, \chi) = 0$. Nas referências [50, 51] temos uma maneira de encontrar soluções analíticas para os dois campos através do chamado método de órbitas

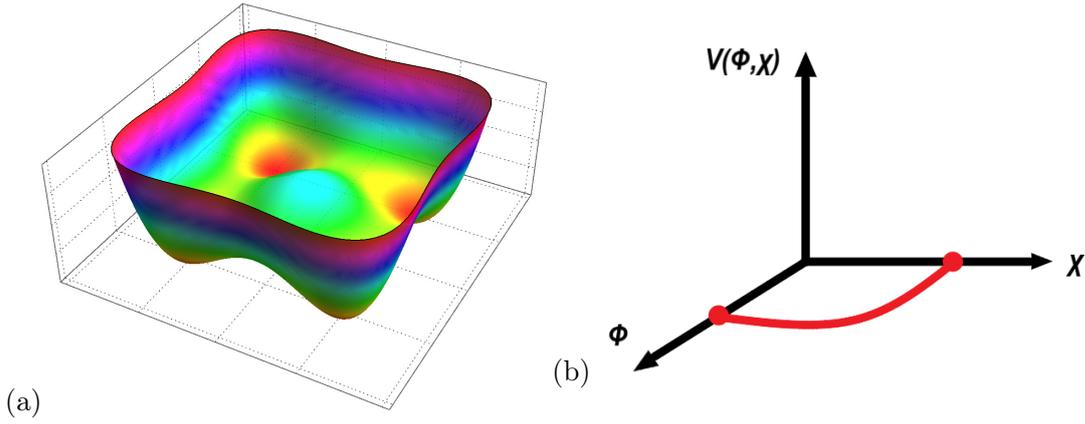


FIGURA 3.1: (a) Potencial com múltiplos mínimos. (b) Órbita conectando dois mínimos do potencial.

tentativas. No caso da densidade de lagrangiana descrita por (2.88), a densidade de energia para campos estáticos é

$$\epsilon = \frac{dW}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} - W_\phi \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{dx} - W_\chi \right)^2, \quad (3.17)$$

onde

$$\frac{dW}{dx} = \frac{\partial W}{\partial \phi} \frac{d\phi}{dx} + \frac{\partial W}{\partial \chi} \frac{d\chi}{dx}. \quad (3.18)$$

Também das equações de movimento temos que

$$\phi' = W_\phi, \quad (3.19)$$

$$\chi' = W_\chi. \quad (3.20)$$

Logo, a energia BPS é

$$E_{BPS} = \int \epsilon dx = |W[\phi, \chi(x = \infty)] - W[\phi, \chi(x = -\infty)]|. \quad (3.21)$$

Supondo agora que o superpotencial tem um número discreto de mínimos $(\phi_1, \chi_1), \dots, (\phi_n, \chi_n)$ que são obtidos a partir de $W_\phi = W_\chi = 0$. Cada par forma um setor topológico onde apenas alguns setores topológicos satisfazem as eq's (3.19) e (3.20) e nesse caso são chamados de setores BPS. Reescrevendo as eq's (3.19) e (3.20) temos

$$W_\chi d\phi - W_\phi d\chi = 0. \quad (3.22)$$

Essa equação é exatamente solúvel para $W(\phi, \chi)$ harmônico, ou seja,

$$W_{\phi\phi} + W_{\chi\chi} = 0. \quad (3.23)$$

Dessa forma, a órbita dada por $F(\phi, \chi) = 0$, é obtida através de

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} = -W_\chi(\phi, \chi); \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \chi} = -W_\phi(\phi, \chi). \quad (3.25)$$

Ainda que W não seja harmônico é possível encontrar um fator integrante $I(\phi, \chi)$ tal que a equação da órbita seja

$$\frac{\partial F}{\partial \chi} = -W(\phi)I(\phi, \chi), \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} = W(\chi)I(\phi, \chi). \quad (3.27)$$

Entretanto, achar este fator integrante é um desafio considerável, também por isso vale a pena estudar o método de órbitas tentativas.

O método de órbitas tentativas consiste basicamente de 3 passos simples

1º - Propomos um par (ϕ_i, χ_i) e (ϕ_j, χ_j) que minimiza o superpotencial, tal que $W(\phi_i, \chi_i)$ não seja igual a $W(\phi_j, \chi_j)$, de forma que estamos lidando com um setor BPS.

2º - Escolhemos uma órbita tal que $F_{ij}(\phi_i, \chi_i) = 0$, $F_{ij}(\phi_j, \chi_j) = 0$.

3º - Verificamos se a órbita escolhida e a eq. de primeira ordem são compatíveis, onde

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial \phi} \frac{d\phi}{dx} + \frac{\partial F_{ij}}{\partial \chi} \frac{d\chi}{dx} = 0, \quad (3.28)$$

ou ainda,

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial \phi} W_\phi + \frac{\partial F_{ij}}{\partial \chi} W_\chi = 0. \quad (3.29)$$

A fim de exemplificar o método apresentado até aqui, tomemos o superpotencial da forma

$$W_r(\phi, \chi) = \phi - \frac{\phi^3}{3} - r\phi\chi^2, \quad (3.30)$$

Então,

$$W_\phi = 1 - \phi^2 - r\chi^2, \quad (3.31)$$

e

$$W_\chi = -2r\phi\chi. \quad (3.32)$$

Se r for real, então o potencial tem mínimos $(\pm 1, 0)$, caracterizando um setor BPS. Uma solução aceitável para esses campos é

$$\phi(x) = \tanh(x), \quad (3.33a)$$

$$\chi = 0, \quad (3.33b)$$

caracterizando um par de soluções do tipo *kink* e constante. Se r for real e positivo ficamos com mínimos para o potencial da forma

$$V_{1,2} = (\pm 1, 0), \quad (3.34a)$$

$$V_{3,4} = (0, \pm \sqrt{1/2}). \quad (3.34b)$$

Seguindo os passos do método órbitas tentativas o 1º passo é tomar um setor BPS do modelo, neste caso o setor $V_{1,2} = (\pm 1, 0)$ com energia $4/3$. O 2º passo é escolher uma órbita. No caso do modelo (3.30) podemos tentar

$$F(\phi, \chi) = 1 + a\phi^2 + b\chi^2 = 0. \quad (3.35)$$

Os pontos de contorno $(\pm 1, 0)$ exigem que $a = -1$, enquanto b pode assumir qualquer valor.

$$F(\phi, \chi) = 1 - \phi^2 + b\chi^2. \quad (3.36)$$

Prosseguindo para o 3º passo precisamos agora verificar se a órbita escolhida é compatível com as equações de primeira ordem, ou seja,

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} \frac{d\phi}{dx} + \frac{\partial F}{\partial \chi} \frac{d\chi}{dx} = 0, \quad (3.37)$$

$$-\phi \frac{d\phi}{dx} + b\chi \frac{d\chi}{dx} = 0. \quad (3.38)$$

Usando aqui as equações de primeira ordem ficamos com

$$-\phi(1 - \phi^2 - r\chi^2) + b\chi(-2r\phi\chi) = 0, \quad (3.39)$$

dividindo a equação anterior por $-\phi$ temos,

$$1 - \phi^2 + r\chi^2(2b - 1) = 0. \quad (3.40)$$

Esta equação é compatível com a órbita quando

$$b = \frac{r}{2r - 1}, \quad (3.41)$$

que nos fornece finalmente uma boa órbita da forma

$$\phi^2 + \frac{r}{1-2r}\chi^2 = 1. \quad (3.42)$$

Esta equação do tipo elíptica conecta os dois mínimos consecutivos $(1, 0)$ e $(-1, 0)$ para $0 < r < 1/2$. Com a equação anterior podemos reescrever as eq's (3.31) e (3.32) na forma

$$W_\phi = \phi' = 1 - \phi^2 - r\chi^2 = 1 - \phi^2 - (1 - \phi^2)(1 - 2r), \quad (3.43)$$

ou ainda,

$$\phi' = (1 - \phi^2)2r. \quad (3.44)$$

A solução para esta equação de primeira ordem é simplesmente

$$\phi(x) = \tanh(2rx). \quad (3.45)$$

A solução para $\phi(x)$ nos fornece imediatamente a solução para $\chi(x)$,

$$\chi(x) = \pm \frac{\sqrt{(1-2r)/r}}{\cosh(2rx)}. \quad (3.46)$$

Aqui os sinais de \pm na solução para o campo χ vale para uma órbita indo dos pontos $(-1, 0)$ à $(1, 0)$ por cima ou por baixo. Perceba que para $r = 1/2$ temos $\chi = 0$ e ficamos com uma linha reta no eixo ϕ conectando os dois mínimos $(1,0)$ e $(-1,0)$.

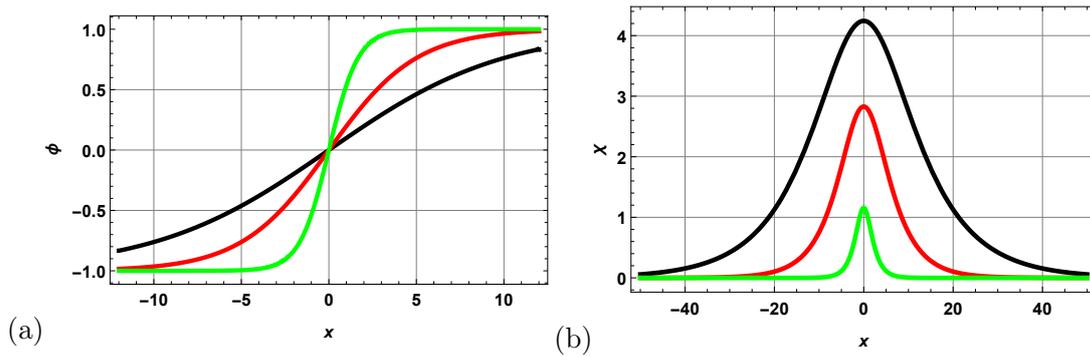


FIGURA 3.2: Modelo BNRT: (a) Solução para o campo $\phi(x)$ para diferentes valores de r . (b) Solução do campo $\chi(x)$. Nos gráficos temos $r = 0.05$, $r = 0.1$ e $r = 0.3$.

Além disso, a densidade de energia com o formalismo de primeira ordem introduzido no modelo fica na forma

$$\rho(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial \chi} \right)^2, \quad (3.47)$$

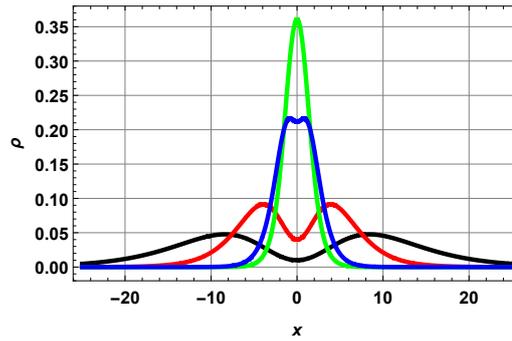


FIGURA 3.3: Modelo BNRT: Densidade de energia. No gráfico temos $r = 0.05$, $r = 0.1$, $r = 0.3$ e $r = 0.23$.

Do gráfico para densidade de energia da figura 3.2 podemos notar o aparecimento de uma estrutura interna para valores de $r \approx r_c = 0.17$ dividindo a densidade de energia em dois picos.

Perceba que para $0.5 > r > 0.25$ a densidade de energia tem um único pico como no modelo padrão ϕ^4 . Entretanto, para $r \leq 0.25$ notamos no gráfico o surgimento de um plateau caracterizado pelo máximo de χ' . Dessa forma, podemos identificar o surgimento de estrutura interna no modelo ϕ^4 pela presença do campo $\chi(x)$ no potencial deste modelo.

No outro setor topológico temos a órbita

$$F(\phi, \chi) = \pm\phi - r\chi^2 + 1 = 0, \quad (3.48)$$

onde $r = 1/4$. O par de soluções para $\phi - r\chi^2 + 1 = 0$ é

$$\phi(x) = -\frac{1}{2}[1 - \tanh(x/2)] \quad (3.49a)$$

$$\chi(x) = \pm\sqrt{2[1 + \tanh(x/2)]} \quad (3.49b)$$

Como podemos perceber neste ponto órbitas tentativas é um método simples para resolver sistemas complexos com 2 graus de liberdade em sistemas não lineares.

3.3 Modelos Gêmeos em Teoria de Campos Escalares Reais

Nesta seção vamos focar nas referências [52, 53] que se concentram na investigação de modelos gêmeos, ou seja, modelos distintos mas

que possuem o mesmo caráter topológico, mesma solução e densidade de energia. No modelo padrão a densidade de lagrangiana é

$$\mathcal{L} = X - U(\phi), \quad (3.50)$$

onde aqui $X = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$. Neste caso de dinâmica padrão com apenas um campo escalar o tensor energia-momento é da forma da eq. (2.19). Então em (1,1) dimensões a densidade de energia é $T_{00} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\phi'^2 + V(\phi)$ e de stress $T_{11} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\phi'^2 - V(\phi)$. Além disso, as equações de movimento são da forma (2.6).

O chamado modelo *ALTW*, em referência a Andrews, Lewandowski, Trodden e Wesley introduzido em [53] que aqui será estudado, é descrito por uma densidade de lagrangiana na forma

$$\mathcal{L}_m = M^2 - M^2 \left(1 + \frac{U(\phi)}{M^2} \right) \sqrt{1 - \frac{2X}{M^2}}, \quad (3.51)$$

onde M é um parâmetro da teoria. Expandindo a equação anterior até ordem de $1/M^2$ no limite em que $M^2 \gg 1$ temos que

$$\mathcal{L}_m \approx X - U(\phi) + \frac{1}{M^2} \left[\frac{X^2}{2} + U(\phi)X \right], \quad (3.52)$$

que recupera o modelo padrão de um campo para $M^2 \gg 1$. A equação de movimento que advém da densidade de lagrangiana no modelo *ALTW* é

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \quad (3.53)$$

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial^\mu \phi}{\sqrt{1 - \frac{2X}{M^2}}} \left(1 + \frac{U(\phi)}{M^2} \right) \right] = -U_\phi \sqrt{1 - \frac{2X}{M^2}}, \quad (3.54)$$

ou ainda, de forma simplificada temos

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi \left(1 + \frac{U(\phi)}{M^2} \right) \left[1 + \frac{2X}{M^2 - 2X} \right] + U_\phi = 0, \quad (3.55)$$

e o tensor energia-momento para a teoria é

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi}{\sqrt{1 - \frac{2X}{M^2}}} \left(1 + \frac{U(\phi)}{M^2} \right) - g_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (3.56)$$

Mais uma vez, vale ressaltar que para o caso $\frac{1}{M^2} \rightarrow 0$ voltamos ao caso padrão. Para o caso estático obtemos que

$$\phi'' = U_\phi \frac{M^2 + \phi'^2}{M^2 + U(\phi)}. \quad (3.57)$$

Além disso, a densidade de energia no caso estático é

$$\rho(x) = -M^2 + M^2 \left(1 + \frac{U}{M^2}\right) \sqrt{1 + \frac{\phi'^2}{M^2}}. \quad (3.58)$$

Podemos perceber que uma integração simples em x nos leva a equação de primeira ordem da forma

$$-1 + \frac{1 + U/M^2}{\sqrt{1 + \frac{\phi'^2}{M^2}}} = \frac{C}{M^2}. \quad (3.59)$$

Com isso a densidade de energia pode ser reescrita como

$$\rho(x) = -M^2 + M^2 \frac{(1 + U(\phi)/M^2)^2}{1 + \frac{C}{M^2}}, \quad (3.60)$$

ou ainda

$$\rho(x) = -M^2 + M^2 \left(1 + \frac{C}{M^2}\right) \left(1 + \frac{\phi'^2}{M^2}\right). \quad (3.61)$$

Da equação anterior podemos perceber que a energia total do sistema será finita apenas para $C = 0$. Portanto, ficamos com

$$\rho(x) = \phi'^2 = 2U(\phi) + \frac{U^2(\phi)}{M^2}. \quad (3.62)$$

Mais uma vez, vemos que para $M^{-2} \rightarrow 0$ recuperamos o caso padrão (2.11). Obtemos então, o modelo

$$V(\phi) = U(\phi) + \frac{1}{2} \frac{U^2(\phi)}{M^2}, \quad (3.63)$$

onde com a condição $T_{11} = C$ temos que o modelo *ALTW* é gêmeo a este para $C = 0$. Este formalismo tem diversas aplicações em teorias de campos. É possível, por exemplo, mapear as soluções de dois sistemas distintos, até fenomenologicamente, a partir de um modelo cuja solução é conhecida. Além disso, podemos também encontrar soluções estáveis a partir de um modelo gêmeo instável.

Capítulo 4

Modelos de Energia Escura

Desde os primórdios a humanidade especula sobre a origem, composição e evolução do Universo. Muitas ideias, conceitos e até religiões surgiram na história a fim de resolver estes mistérios, até hoje sem solução definitiva. Hipóteses e teorias científicas também tiveram seu lugar na história mais recente da humanidade contribuindo com as maiores peças desse grande quebra cabeça.

Dentre as teorias científicas que se destacam nesse sentido, está a teoria da relatividade de Einstein que teve início com a relatividade restrita [54] em 1905 e que dez anos mais tarde foi generalizada para referenciais não-inerciais [55]. Várias contribuições importantes para a teoria foram propostas em anos posteriores [56, 57]. Não é intenção dos autores discorrer a respeito do desenvolvimento da teoria da relatividade restrita até a geral nem o contexto histórico em que estas surgiam, embora tais fatos sejam interessantes. A esse respeito, o leitor pode encontrar em nível didático e com riqueza de detalhes em [43, 44].

Neste capítulo estudamos a equação de campo de Einstein que advém da ação de Einstein-Hilbert, perturbações na métrica e a equação linearizada de Einstein em (3,1) dimensões, a métrica FLRW e sua solução para a equação de Einstein, formalismo de primeira ordem para energia escura e modelos gêmeos em cosmologia.

4.1 Equação de Campo de Einstein

Como vimos da eq. (2.1) a dinâmica de um campo pode ser obtida através de um funcional chamado ação. Na teoria da relatividade geral o campo de matéria e a geometria do espaço-tempo estão entrelaçados (não confundir com acoplados), são independentes entre si mas, influenciam um ao outro. A presença do campo de matéria "diz" ao espaço-tempo como se curvar e a curvatura do espaço-tempo dita a trajetória seguida pelo campo de matéria. A ação de Einstein-Hilbert nos fornece as equações para a dinâmica do campo de matéria e a correlação entre a geometria do espaço quadridimensional e o campo de matéria. A ação é dada por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{R}{4} + \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \right], \quad (4.1)$$

onde g é o determinante do tensor métrico e R é o escalar de Ricci, que advém do traço do tensor de Ricci, dado por

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\alpha\mu}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\lambda\alpha}^\lambda - \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda. \quad (4.2)$$

O tensor de Ricci é uma contração do tensor de Riemann. Desenvolvida por Bernhard Riemann uma variedade riemanniana é uma formulação matemática para espaços não-euclidianos que associa um tensor para cada ponto da estrutura riemanniana, cuja *intensidade* mede o quanto o tensor métrico destoa do espaço euclidiano naquele ponto. Os símbolos de Christoffel são definidos por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\mu\beta,\nu} + g_{\nu\beta,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}), \quad (4.3)$$

onde $g_{\mu\beta,\nu} \equiv \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\nu}$. É possível perceber que o símbolo de Christoffel é simétrico em relação a troca de índices μ por ν , ou seja, $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\nu\mu}^\alpha$. Voltando a ação de Einstein-Hilbert, perceba que nela há dois graus de liberdade, um para o campo outro para a métrica associada. Dessa forma, podemos calcular os extremos deste funcional variando em relação ao campo e em relação a métrica. Minimizando em relação a métrica encontramos a equação de Einstein,

$$\delta S = \int d^4x \delta \left[\sqrt{-g} \left(-\frac{R}{4} + \mathcal{L} \right) \right] = 0, \quad (4.4)$$

uma vez que, aqui a variação é tomada com relação a métrica e esta é independente do campo de matéria temos que,

$$\delta S = \int d^4x (\delta\sqrt{-g}) \left(-\frac{R}{4} + \mathcal{L} \right) + \sqrt{-g} \left(-\frac{\delta R}{4} + \delta\mathcal{L} \right). \quad (4.5)$$

Analisando separadamente o primeiro integrando na última equação note que

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} \delta g = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (4.6)$$

Então,

$$\begin{aligned} \delta S = \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right) \left(-\frac{R}{4} + \mathcal{L} \right) + \\ + \sqrt{-g} \left(-\frac{\delta R}{4} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Além disso, a variação do escalar de Ricci, $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ é da forma

$$\delta R = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}. \quad (4.8)$$

Da identidade de Palatini temos

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\beta (\delta \Gamma_{\nu\mu}^\beta) - \nabla_\nu (\delta \Gamma_{\beta\mu}^\beta). \quad (4.9)$$

Então,

$$\begin{aligned} \delta R &= R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} (\nabla_\beta \delta \Gamma_{\nu\mu}^\beta - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\beta\mu}^\beta) \\ &= R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \nabla_\beta (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\nu\mu}^\beta - g^{\mu\beta} \delta \Gamma_{\alpha\mu}^\alpha), \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde $g_{\mu\nu;\beta} = 0$ para qualquer métrica, independente do sistema de referência. Dessa forma, ao recolocar a eq. (4.10) na ação temos que o segundo termo é nulo, uma vez que, a variação da métrica nos extremos é nula. Portanto, de forma a contribuir com a variação da ação a δR pode ser reduzida a simplesmente

$$\delta R = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (4.11)$$

Reescrevendo a variação da ação com a variação $\delta R/\delta g^{\mu\nu}$ definida, ficamos com

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R g_{\mu\nu}}{8} - \frac{\mathcal{L} g_{\mu\nu}}{2} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} - \frac{R_{\mu\nu}}{4} \right] \delta g^{\mu\nu}. \quad (4.12)$$

A integral acima só é identicamente nula se o integrando dentro do colcheto for nulo, uma vez que, estamos tomando uma variação infinitesimal e arbitrária da métrica $g_{\mu\nu}$. Então,

$$\frac{g_{\mu\nu} R}{8} - \frac{\mathcal{L} g_{\mu\nu}}{2} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} + \frac{R_{\mu\nu}}{4}, \quad (4.13)$$

ou ainda,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 4\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} - 2\mathcal{L}g_{\mu\nu}. \quad (4.14)$$

Definindo o tensor energia-momento de Hilbert como

$$T_{\mu\nu} = 2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} - g_{\mu\nu}\mathcal{L}, \quad (4.15)$$

a equação de campo de Einstein fica na forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 2T_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}, \quad (4.16)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein. O conteúdo de matéria está do lado direito e a geometria do espaço-tempo ao lado esquerdo. Como explicado anteriormente, uma dita o comportamento da outra, embora sejam independentes entre si. Feita a minimização da ação em relação a métrica podemos agora fazer a minimização em relação ao campo ϕ embutido na lagrangiana \mathcal{L} ,

$$\delta S = \int d^4x [\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}) + \delta(-\sqrt{-g}R/4)]. \quad (4.17)$$

Uma vez que, a métrica não depende do campo a minimização de S em relação ao campo é trivial,

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi) \right] = 0, \quad (4.18)$$

tomando uma integração por partes no segundo integrando acima obtemos

$$\delta S = \int d^4x \left[\sqrt{-g}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) \right] \delta\phi. \quad (4.19)$$

Para $\delta\phi$ infinitesimal e arbitrário temos imediatamente que

$$\sqrt{-g}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) = 0. \quad (4.20)$$

Pelo teorema das derivadas mistas e pela regra do produto ficamos com

$$\sqrt{-g} \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) \right] = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu(\sqrt{-g}). \quad (4.21)$$

Esta equação nos dá a dinâmica do campo ϕ .

4.1.1 Equação Linearizada de Einstein

Com as eq's (4.16) e (4.21) podemos analisar o caso em que um campo gravitacional fraco está embutido no espaço-tempo do tipo Minkowski. Introduzindo uma pequena perturbação na métrica da forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (4.22)$$

onde aqui o tensor métrico do tipo Minkowski será escrito como $\eta_{\mu\nu} = (+, -, -, -)$ e o tensor de perturbação $h_{\mu\nu} \ll 1$, de modo que podemos ignorar termos de segunda ordem em diante na perturbação. Com essa métrica o símbolo de Christoffel, até primeira ordem, é escrito como

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}(h_{\mu\beta,\nu} + h_{\nu\beta,\mu} - h_{\mu\nu,\beta}). \quad (4.23)$$

Dessa forma, o tensor de Ricci neste caso pode ser reescrito como

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha}, \quad (4.24)$$

que em termos do tensor de perturbação fica na forma

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[h_{\mu}^{\alpha}{}_{,\nu\alpha} + h_{\nu}^{\alpha}{}_{,\mu\alpha} - h_{\mu\nu}{}^{,\alpha}{}_{\alpha} - h_{\mu}^{\alpha}{}_{,\alpha\nu} - h_{\alpha}^{\alpha}{}_{,\mu\nu} + h_{\mu}^{\alpha}{}_{\alpha\nu}], \quad (4.25)$$

que pelo teorema das derivadas mistas resta apenas

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[h_{\nu}^{\alpha}{}_{,\mu\alpha} - h_{\mu\nu}{}^{,\alpha}{}_{\alpha} - h_{\alpha}^{\alpha}{}_{,\mu\nu} + h_{\mu}^{\alpha}{}_{,\alpha\nu}]. \quad (4.26)$$

Introduzindo neste ponto a definição $h^{\mu}{}_{\mu} \equiv h$ e o operador de d'Alembert $\square \equiv \partial_{\mu}\partial^{\mu}$ podemos reescrever de forma mais simplificada o tensor de Ricci e seu escalar,

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[h_{\nu}^{\alpha}{}_{,\mu\alpha} - \square h_{\mu\nu} - h_{,\mu\nu} + h_{\mu}^{\alpha}{}_{,\alpha\nu}], \quad (4.27)$$

e

$$R = h^{\mu\alpha}{}_{,\mu\alpha} - \square h. \quad (4.28)$$

Com essas duas equações a equação de campo de Einstein linearizada fica como

$$h_{\nu}^{\alpha}{}_{,\mu\alpha} - \square h_{\mu\nu} - h_{,\mu\nu} + h_{\mu}^{\alpha}{}_{,\alpha\nu} - \eta_{\mu\nu}(h^{\beta\alpha}{}_{,\beta\alpha} - \square h) = 4T_{\mu\nu}. \quad (4.29)$$

4.2 Energia Escura

Até a década de 1920 se pensava que o Universo fosse estático, eterno e imutável. A descoberta de Edwin Hubble em 1929 [58] promoveu uma grande ruptura no conceito de Universo que a maioria dos cientistas tinham aquela época, pois suas observações mostravam que o Universo estava se expandido em todas as direções.

Ele observou como a luz emitida por galáxias distantes sofrem uma mudança para cores mais vermelhas no espectro eletromagnético conforme estas viajam pelo espaço. Esta mudança para o vermelho no espectro eletromagnético, conhecida como *redshift*, observada no espectroscópio é devido ao movimento relativo da fonte emissora de luz e o observador. Se a fonte emissora se aproxima do receptor há uma mudança observada para o azul do espectro e se a fonte se afasta a mudança observada é para o vermelho devido a invariância da velocidade da luz no vácuo. Mais que isso, em sua observação ele constatou que quanto mais distante uma galáxia está da referência maior o seu *redshift*.

De imediato surgiram várias hipóteses para explicar o padrão de Hubble, entre elas: *redshift* gravitacional, afastamento físico das galáxias e expansão cósmica. O *redshift* gravitacional não é uma hipótese viável pois para fitar o padrão de Hubble galáxias muito distantes deveriam ser muito mais massivas que as próximas ao observador, o que claramente contraria o princípio cosmológico. O afastamento físico entre as galáxias também não é viável, pois galáxias muito distantes deveriam ter uma velocidades próximas ou em certos casos maiores que a da luz. Dessa forma, a explicação mais aceita dentre estas hipóteses é a da expansão cósmica, ou seja, conforme o tempo passa o espaço se expande isotropicamente esticando assim, as ondas de luz que se propagam por longas distâncias no cosmo.

Ainda que o espaço estivesse expandido isotropicamente esperava-se que tal expansão fosse desacelerada devido a força atrativa da gravidade. No intuito de observar tal parâmetro de desaceleração vários satélites apontaram para o céu em busca de galáxias ainda mais distantes (olhando ainda mais para o passado), para fazer uma estimativa da evolução dessa expansão. O que foi constatado de forma clara na década de 90 é que na verdade a expansão atual do

Universo é maior que a expansão em tempos mais remotos, ou seja, a expansão do Universo é acelerada!

O espaço não muda suas propriedades enquanto se expande, apenas existe mais e mais dele conforme o tempo passa. Galáxias são aglomerados de matéria que se mantêm coesas devido a força da gravidade de modo que não sentimos a expansão em nossa experiência diária, mas podemos observá-las em todas as direções do espaço e aglomerados distantes. Não importa onde há espaço vazio no Universo, mais dele está sendo criado constantemente de forma cada vez mais rápida. Este fenômeno é hoje conhecido como energia escura. Energia, pois ela faz frente a força da gravidade e escura pelo fato de que não podemos observá-la em nenhuma frequência do espectro eletromagnético, só podemos perceber seus efeitos de forma indireta.

Há muitas propostas na literatura do que pode ser energia escura. Uma das ideias é de que energia escura não é uma *coisa*, por assim dizer, mas sim uma propriedade intrínseca do espaço vazio. O espaço vazio não é exatamente vazio, ele tem energia e poderia gerar mais espaço vazio. Isto explicaria o fato de a expansão ser acelerada. Entretanto, ao calcular a quantidade de energia proveniente do vácuo temos um resultado 10^{120} maior do que o valor observado [14].

Outra possibilidade em destaque na literatura é a de que talvez a energia escura seja um tipo de fluido de energia ou campo desconhecido que permeia o Cosmos de forma isotrópica, mas que possui efeito oposto ao da matéria e energia que conhecemos hoje. Infelizmente nenhuma partícula associada a esse campo ou fluido foi detectada até hoje, mas ainda assim este modelo possui vantagens em relação ao modelo de energia do vácuo, por contornar a discrepância entre teoria e observação. Este modelo de energia escura descrita por campos escalares será mais a fundo abordado nas próximas seções.

4.3 Métrica Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

A métrica FLRW descreve um Universo homogêneo e isotrópico que evolui no tempo. Devido a evolução do fator de escala $a(t)$ o Universo passou por diferentes eras de expansão. Encontrar uma

solução para este fator de escala que fite com boa precisão os dados de cosmologia observacional é um desafio aberto até os dias atuais. As contribuições de Friedmann, Lemaître, Robertson e Walker foram de fundamental importância para hoje buscarmos respostas para a origem e destino final do Universo.

O princípio cosmológico nos diz que o Universo é homogêneo e isotrópico no espaço. Uma métrica que pode descrever um Universo esféricamente simétrico e que evolui no tempo é a métrica FLRW, dada por

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (4.30)$$

onde k é a constante de curvatura gaussiana que pode assumir apenas três valores $k = -1, 0, 1$. Para qualquer outro valor de $k \rightarrow \bar{k} = qk$ podemos reescalonar nossa métrica como $\bar{r} = \sqrt{q}r$ de modo a k novamente assumir apenas estes três valores. Portanto, a matriz do tensor métrico é da forma

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}, \quad (4.31)$$

e sua inversa é

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1-kr^2}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{a^2r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a^2r^2 \sin^2 \theta} \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

Como visto na seção anterior, para encontramos as componentes do tensor de Einstein precisamos primeiramente encontrar o tensor de Ricci e seu escalar. Para isso precisamos calcular os símbolos de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$. Como na métrica FLRW apenas o fator de escala depende do tempo então os símbolos não nulos de Christoffel são

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{11}^0 &= a\dot{a}/(1 - kr^2) & \Gamma_{02}^2 &= \dot{a}/a \\
 \Gamma_{22}^0 &= r^2 a\dot{a} & \Gamma_{12}^2 &= 1/r \\
 \Gamma_{33}^0 &= a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta & \Gamma_{33}^2 &= -\cos \theta \sin \theta \\
 \Gamma_{01}^1 &= \dot{a}/a & \Gamma_{03}^3 &= \dot{a}/a \\
 \Gamma_{11}^1 &= kr/(1 - kr^2) & \Gamma_{13}^3 &= 1/r \\
 \Gamma_{22}^1 &= -r(1 - kr^2) & \Gamma_{23}^3 &= \cot \theta. \\
 \Gamma_{33}^1 &= -r(1 - kr^2) \sin^2 \theta
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

Com os símbolos de Christoffel temos as componentes do tensor de Ricci dadas por

$$R_{00} = -3\ddot{a}/a, \tag{4.34a}$$

$$R_{11} = \frac{\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2}, \tag{4.34b}$$

$$R_{22} = r^2(\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + 2k), \tag{4.34c}$$

$$R_{33} = r^2 \sin^2 \theta (\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + 2k), \tag{4.34d}$$

ou ainda, de forma mais compacta

$$R_{00} = -3\ddot{a}/a, \tag{4.35a}$$

$$R_{ij} = \left(\frac{\ddot{a}a}{a^2} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2} \right) g_{ij}. \tag{4.35b}$$

Dessa forma, com as componentes do tensor de Ricci acima e a inversa do tensor métrico (4.32), o escalar de Ricci fica dado por

$$R = \frac{6(\ddot{a}a + \dot{a}^2 + k)}{a^2}. \tag{4.36}$$

Com essas quantidades podemos agora finalmente escrever as componentes do tensor de Einstein (4.16) como

$$G_{00} = \frac{3(\dot{a}^2 + k)}{a^2}, \tag{4.37a}$$

$$G_{11} = \frac{2\ddot{a}a + \dot{a}^2 + k}{1 - kr^2}, \tag{4.37b}$$

$$G_{22} = r^2(2\ddot{a}a + \dot{a}^2 + k), \tag{4.37c}$$

$$G_{33} = r^2 \sin^2 \theta (2\ddot{a}a + \dot{a}^2 + k). \tag{4.37d}$$

Neste ponto podemos considerar nosso Universo sendo composto por um fluido perfeito, uma vez que, a distância entre aglomerados é

muito grande, em comparação ao tamanho desses, e a temperatura em larga escala do Universo é muito baixa e se distribui de forma aproximadamente homogênea e isotrópica por todo espaço. Seja a velocidade desse fluido no espaço U_μ , sua densidade de energia ρ e sua densidade de pressão p temos da mecânica dos fluidos [59] que o tensor energia-momento associado é

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (4.38)$$

onde o quadri-vetor velocidade é $U_\mu = (1, 0, 0, 0)$. Portanto, o tensor energia-momento pode ser representado como

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g_{ij}p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g_{ij}p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g_{ij}p \end{bmatrix}. \quad (4.39)$$

Dessa forma, a eq. (4.16) nos fornece as equações de Friedmann dadas por

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{2}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (4.40)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{3}(\rho + 3p). \quad (4.41)$$

Por outro lado, temos que para a métrica FLRW (4.31) a eq. (4.21) com uma densidade de lagrangiana com dinâmica padrão fica como

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_\phi = 0. \quad (4.42)$$

Com isso, obtemos que as componentes do tensor energia-momento em termos do campo são

$$T_{00} = \rho = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \quad T_{ij} = p = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi). \quad (4.43)$$

Repare que na equação anterior, utilizamos o sinal positivo para p . Isto se deve pois de agora em diante vamos trabalhar com um modelo de Universo em expansão acelerada. Para tal, $p < 0$, por isso utilizamos o sinal positivo na frente da densidade de pressão, $-(-p) = p$. Além disso, note que a eq. (4.42) é parecida com a equação de um oscilador harmônico amortecido onde o termo $3H$ desempenha o papel do termo de fricção amortecendo a expansão

do Universo. Reescrevendo as equações de Friedmann em termos do campo obtemos que

$$H^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right) - \frac{k}{a^2}, \quad (4.44a)$$

$$\dot{H} = -\dot{\phi}^2 + \frac{k}{a^2}. \quad (4.44b)$$

É fácil perceber que as duas equações acima e a eq. (4.42) não são independentes entre si, sendo mais comum utilizar as duas últimas.

4.4 Formalismo de Primeira Ordem para Energia Escura

No modelo padrão de um campo escalar real obtemos as equações (4.44a) e (4.44b) para um Universo em expansão acelerada. Podemos perceber que estas equações não são de fácil solução por serem equações diferenciais de segunda ordem em $a(t)$ e devido a não linearidade controlada pela forma do potencial $V(\phi)$. Entretanto, podemos contornar este problema através do formalismo de primeira ordem introduzido no Cap. 2. Com este formalismo podemos determinar a solução para o fator de escala através do potencial $V(\phi)$. Esta contribuição apresentada na Ref. [16] promove uma importante simplificação no tratamento de modelos de campos escalares para energia escura.

4.4.1 Modelo Padrão de Um Campo

Tomemos como ponto de partida o caso do espaço-tempo sem curvatura, ou seja, $k = 0$, na métrica FLRW. Com isso, as equações de Friedmann ficam como

$$H^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right), \quad (4.45a)$$

$$\dot{H} = -\dot{\phi}^2. \quad (4.45b)$$

Com o objetivo de implementar o formalismo de primeira ordem, permita-nos definir que

$$H = W(\phi) = W(\phi(t)). \quad (4.46)$$

Dessa forma, temos

$$\dot{H} = W_\phi \dot{\phi}, \quad (4.47)$$

o que da eq. (4.45b) implica em

$$\dot{\phi} = -W_\phi, \quad (4.48)$$

onde $W_\phi = \frac{dW}{d\phi}$. Substituindo as eq's (4.48) e (4.46) na eq. (4.45a) obtemos o potencial em termos da nova função $W(\phi)$, dado por

$$V(\phi) = \frac{3}{2}W^2 - \frac{1}{2}W_\phi^2. \quad (4.49)$$

Além disso, o parâmetro de desaceleração definido segundo

$$q \equiv -\frac{\ddot{a}a}{a^2}, \quad (4.50)$$

pode ser reescrito como

$$q = -1 + \left(\frac{W_\phi}{W} \right)^2. \quad (4.51)$$

Nos casos em que $k \neq 0$ temos um tratamento consideravelmente mais complicado. Para contornar este problema podemos insistir na equação $H(t) = W(\phi(t))$ que nos leva a equação de primeira ordem com um novo superpotencial na forma

$$\dot{\phi} = (k\alpha Z - W_\phi), \quad (4.52)$$

onde $Z = Z(\phi)$ e α é um parâmetro real que controla o quanto o caso k geral se distancia do caso $k = 0$. Com isso, a equação para o potencial pode ser expressa através de

$$V(\phi) = \frac{3}{2}W^2 + (k\alpha Z - W_\phi)(k\alpha Z + W_\phi/2). \quad (4.53)$$

Temos agora uma nova variável no problema que pode ser uma função arbitrária dada por um *ansatz* ou que pode ser encontrada por uma equação de vínculo que advém da equação de movimento para o campo, onde

$$\ddot{\phi} = k^2\alpha^2 Z Z_\phi - k\alpha Z_\phi W_\phi - k\alpha Z W_{\phi\phi} + W_\phi W_{\phi\phi}, \quad (4.54a)$$

$$3H\dot{\phi} = 3Wk\alpha Z - 3WW_{\phi} \quad (4.54b)$$

$$V_{\phi} = 3WW_{\phi} + 2k^2\alpha^2 Z Z_{\phi} - \frac{1}{2}k\alpha Z_{\phi} W_{\phi} - \frac{1}{2}k\alpha Z W_{\phi\phi}. \quad (4.54c)$$

O que resulta na equação de vínculo dada por

$$W_{\phi\phi}Z + W_{\phi}Z_{\phi} - 2k\alpha Z Z_{\phi} - 2WZ = 0. \quad (4.55)$$

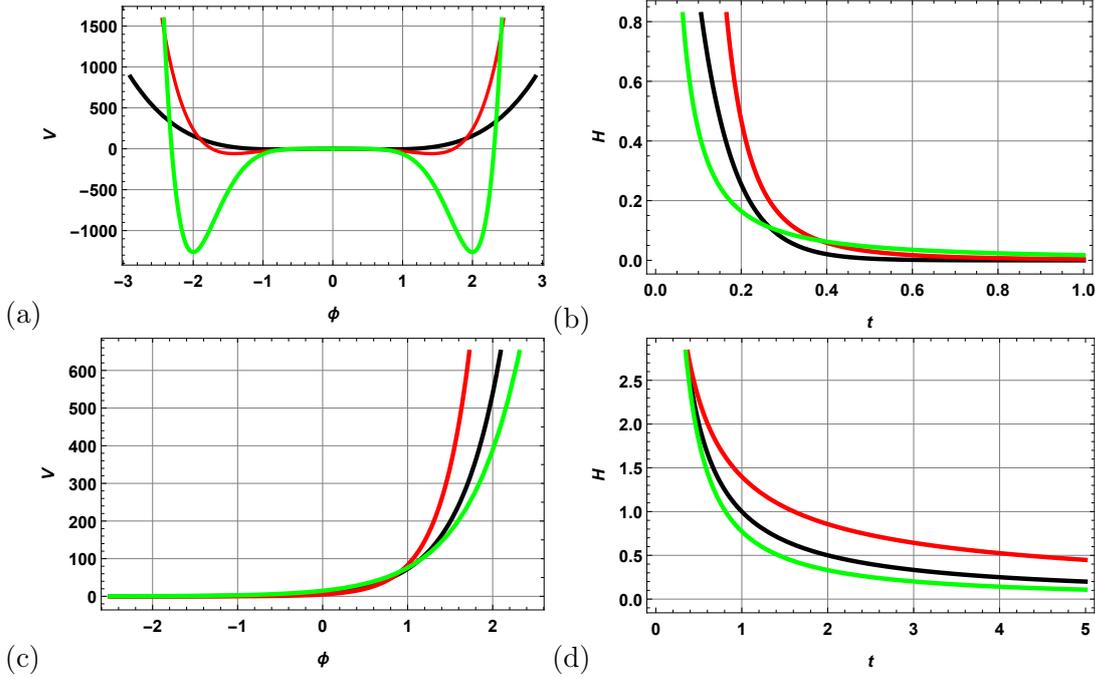


FIGURA 4.1: Toy Model: (a) e (b) Potencial eq. (4.56) e parâmetro de Hubble (4.58), respectivamente, para $n = 2$, $n = 3$ e $n = 4$. (c) e (d) potencial e parâmetro de Hubble para $k = 0$, $k = +1$ e $k = -1$.

A fim de melhor entendimento, podemos analisar alguns exemplos de potencial para ilustrar o procedimento desenvolvido. Tomemos como primeiro exemplo o caso em que $k = 0$ e o potencial da forma

$$V(\phi) = \frac{1}{2}A^2\phi^{2n} \left(3 - \frac{n^2}{\phi^2} \right), \quad (4.56)$$

como na Ref. [16], que advém do superpotencial $W(\phi) = A\phi^n$. Com a eq. (4.48) temos uma solução para o campo expressa por

$$\phi(t) = [At(n^2 - 2n)]^{\frac{1}{2-n}}. \quad (4.57)$$

Portanto, o parâmetro de Hubble em termos da solução do campo fica

$$H(t) = A^{\frac{2}{2-n}} [t(n^2 - 2n)]^{\frac{n}{2-n}}. \quad (4.58)$$

Repare que do caso $n = 2$ temos a solução $\phi(t) = e^{-2At}$ e $H(t) = Ae^{-4At}$. Podemos já aqui perceber que este formalismo simplifica em

muito o tratamento de energia escura com campos escalares reais. Além disso, repare no gráfico do parâmetro de Hubble na figura 4.1 (b) o Universo tende a um aceleração constante para $t > 1$. Além disso, quanto maior a potência de $\phi(t)$ mais tempo leva para que o parâmetro de Hubble tenha uma variação constante.

Para o caso em que $k \neq 0$ tomemos como exemplo o superpotencial dado por

$$W(\phi) = Ae^{B\phi}, \quad (4.59)$$

onde a fim de simplicidade vamos considerar a função $Z(\phi) = W_\phi$. Com isso, temos o vínculo (4.55) reescrito como

$$W_{\phi\phi}(1 - k\alpha) = W, \quad (4.60)$$

o que implica em

$$B = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - k\alpha}}. \quad (4.61)$$

Dessa forma, obtemos que o potencial (4.53) para esse caso é expresso como

$$V(\phi) = A^2(1 - k\alpha)e^{2B\phi}. \quad (4.62)$$

cuja solução da equação de primeira ordem é dada por

$$\phi(t) = -\frac{1}{B} \ln[AB^2t(1 - k\alpha)] \quad (4.63)$$

4.4.2 Modelo Taquiônico

O método pode ser também aplicado ao caso de campos escalares com dinâmica taquiônica, como pode ser encontrado na Ref. [16], descrito por uma densidade de lagrangiana na forma

$$\mathcal{L} = -V(\phi)\sqrt{1 - \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi}, \quad (4.55)$$

cuja equação de movimento (2.5) no espaço-tempo Minkowski é

$$(1 - \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi)^{-\frac{3}{2}}[V_\phi\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V_\phi(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi)^2 + V\partial_\mu\partial^\mu\phi] - [-V_\phi(1 - \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi)^{\frac{1}{2}}] = 0, \quad (4.56)$$

ou ainda, de forma mais compacta temos

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi = -\frac{V_\phi}{V}(1 - \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi). \quad (4.57)$$

Essa equação de segunda ordem para o modelo taquiônico tem um tensor energia-momento associado dado por

$$T_{\mu\nu} = \frac{V \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi}{\sqrt{1 - g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi}} + g^{\mu\nu} V \sqrt{1 - g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi}, \quad (4.58)$$

que para nosso caso de interesse, $\phi = \phi(t)$, temos

$$\rho = \frac{V}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}}, \quad (4.59)$$

e além disso temos também que

$$p = -V \sqrt{1 - \dot{\phi}^2}. \quad (4.60)$$

A equação para o campo taquiônico no contexto da relatividade geral, que pode ser obtida com a eq. (4.21), é

$$\sqrt{-g}[-V \partial_\mu \partial^\mu \phi - V_\phi(1 - \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi)] = \partial_\mu \sqrt{-g} V \partial^\mu \phi (1 - \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi), \quad (4.61)$$

que no caso da métrica FLRW para $k = 0$ e $\phi = \phi(t)$ resulta em

$$\ddot{\phi} + \left(\frac{V_\phi}{V} + 3H\dot{\phi} \right) (1 - \dot{\phi}^2) = 0. \quad (4.62)$$

Além disso, as equações de Friedmann, (4.44a) e (4.44b), para esse modelo são identificadas como

$$H^2 = \frac{2}{3} \frac{V}{(1 - \dot{\phi}^2)^{1/2}} = \frac{2}{3} \rho, \quad (4.63a)$$

$$\dot{H} = -\frac{V \dot{\phi}^2}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}}. \quad (4.63b)$$

Introduzindo o método apresentado na seção anterior $H = W(\phi(t))$, podemos combinar as duas últimas equações e obter a equação de primeira ordem para o campo em termos da nova função

$$\dot{\phi} = -\frac{2}{3} \frac{W_\phi}{W^2}. \quad (4.64)$$

Dessa forma, temos da eq. (4.63b) o potencial em termos da nova função

$$V = \frac{3}{2} \sqrt{W^4 - \frac{4}{9} W_\phi^2}. \quad (4.65)$$

Vale mais uma vez salientar o poder desse formalismo. Podemos obter a energia total do modelo em questão sem necessariamente conhecer sua solução. Além disso, reduzimos a ordem da equação diferencial do campo ϕ , o que facilita em muito encontrar a solução analítica para o fator de escala usando a eq. (4.63a). Para melhor entendimento do método no caso taquiônico tomemos como exemplo ilustrativo o modelo

$$W(\phi) = A\phi^n. \quad (4.66)$$

Então, o potencial (4.65) em termos do campo fica

$$V(\phi) = \frac{A}{2}\phi^{n-1}\sqrt{9A^2\phi^{2n+2} - 4n^2}, \quad (4.67)$$

que nos leva a solução para o campo dada por

$$\phi(t) = \left(\frac{2n}{3A}t\right)^{\frac{-1}{n}}. \quad (4.68)$$

Além disso, o fator de escala tem como solução

$$H(t) = -\frac{2}{3}\frac{n^3}{n+2}\left(\frac{2n}{3A}\right)^{\frac{2}{n}}t^{\frac{2+n}{n}}. \quad (4.69)$$

4.4.3 Modelo de Dois Campos

O formalismo pode também ser estendido para o teorias de mais campos escalares reais. Considerando uma teoria descrita pela densidade de lagrangiana (2.88) as equações para os campos são

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_\phi = 0, \quad (4.70a)$$

$$\ddot{\chi} + 3H\dot{\chi} + V_\chi = 0, \quad (4.70b)$$

e as correspondentes equações de Friedmann, para $k = 0$, são

$$H^2 = \frac{\dot{\phi}^2}{3} + \frac{\dot{\chi}^2}{3} + \frac{2}{3}V, \quad (4.71a)$$

$$\dot{H} = -\dot{\phi}^2 - \dot{\chi}^2. \quad (4.71b)$$

Com o formalismo de primeira ordem temos que

$$\dot{\phi} = -W_\phi, \quad \dot{\chi} = -W_\chi, \quad (4.72)$$

e o potencial em termos da nova função superpotencial fica

$$V(\phi, \chi) = \frac{3}{2}W^2 - \frac{1}{2}W_\phi^2 - \frac{1}{2}W_\chi^2. \quad (4.73)$$

Como exemplo, tomemos o superpotencial na forma

$$W(\phi, \chi) = A\phi + B\chi - C\phi\chi. \quad (4.74)$$

Dessa forma, temos o potencial associado dado pela expressão

$$\begin{aligned} V(\phi, \chi) = & -\frac{1}{2}(A^2 + B^2) + C(A\chi + B\phi) + \frac{1}{2}(3A^2 - C^2)\phi^2 \\ & + \frac{1}{2}(3B^2 - C^2)\chi^2 - 3C(A\phi + B\chi)\phi\chi + \frac{3}{2}C^2\phi^2\chi^2. \end{aligned} \quad (4.75)$$

As soluções correspondentes que advêm das equações de primeira ordem dadas por

$$\dot{\phi} = -A + C\chi, \quad \dot{\chi} = -B + C\phi, \quad (4.76)$$

requerem duas novas constantes D e E e o fator de escala é

$$H(t) = \frac{AB}{C} + CE^2e^{-2Ct} - CD^2e^{2Ct}. \quad (4.77)$$

4.5 Modelos Gêmeos em Cosmologia

Da ação de Einstein-Hilbert na forma usual

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{R}{4} + \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) \right], \quad (4.78)$$

onde a métrica aqui é

$$dS^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right]. \quad (4.79)$$

Através da variação da ação em relação a métrica obtemos

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = G_{\mu\nu}. \quad (4.80)$$

Por outro lado, considerando um modelo taquiônico como na Ref. [33],

$$\mathcal{L} = -U(\phi)\sqrt{1 - \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi} + f(\phi) \quad (4.81)$$

nos fornece a densidade de energia na forma

$$\rho = \frac{U(\phi)}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}} - f(\phi), \quad (4.82)$$

e a densidade de pressão

$$p = -U\sqrt{1 - \dot{\phi}^2} + f(\phi). \quad (4.83)$$

Além disso, da equação

$$\sqrt{-g} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\mu \sqrt{-g} \quad (4.84)$$

que advém da variação da ação em relação ao campo temos

$$\ddot{\phi} + (1 - \dot{\phi}^2) \left[3H\dot{\phi} + \frac{U_\phi}{U} \right] - \frac{f_\phi}{U} (1 - \dot{\phi}^2)^{3/2} = 0. \quad (4.85)$$

Com isso, podemos escrever a equação de Friedmann como

$$H^2 = \frac{2}{3} \left[\frac{U}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}} - f \right] - \frac{k}{a^2} \quad (4.86)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{2}{3} \left[\frac{U}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}} \left(\frac{3}{2}\dot{\phi}^2 - 1 \right) + f \right]. \quad (4.87)$$

Do formalismo de primeira ordem em [16] podemos escrever no caso plano, $k = 0$, que

$$H = W(\phi), \quad (4.88)$$

que nos leva à

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 = W_\phi \dot{\phi} + \frac{2}{3}\rho = -\frac{1}{3}(\rho + 3p), \quad (4.89)$$

ou ainda

$$W_\phi \dot{\phi} = -(\rho + p). \quad (4.90)$$

Portanto, podemos escrever

$$\dot{\phi} = -W_\phi. \quad (4.91)$$

Dessa forma, o potencial é escrito como

$$V = \frac{3}{2}H^2 - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 = \frac{3}{2}W^2 - \frac{1}{2}W_\phi^2. \quad (4.92)$$

Por outro lado, no caso taquiônico se insistirmos em $H = W(\phi)$ obtemos

$$\frac{3}{2}W^2 = \frac{U}{\sqrt{1-\dot{\phi}^2}} - f, \quad (4.93)$$

e a equação de Friedmann é

$$\frac{\ddot{a}}{a} = W_\phi \dot{\phi} + W^2 = -\frac{2}{3} \left[\frac{U}{\sqrt{1-\dot{\phi}^2}} \left(\frac{3}{2}\dot{\phi} - 1 \right) + f \right], \quad (4.94)$$

e a dinâmica do campo dada por

$$\dot{\phi} = -\frac{W_\phi}{\frac{3}{2}W^2 + f}. \quad (4.95)$$

A fim de que o modelo taquiônico seja gêmeo ao modelo padrão é necessário que a equação (4.91) e (4.95) seja idênticas. Para isso, temos que

$$f(\phi) = 1 - \frac{3}{2}W^2. \quad (4.96)$$

Com isso, o potencial pode ser reescrito como

$$U(\phi) = \sqrt{1-\dot{\phi}^2} \left(\frac{3}{2}W^2 + f \right). \quad (4.97)$$

Logo,

$$U(\phi) = \sqrt{1-W_\phi^2}. \quad (4.98)$$

Dessa forma, a densidade de lagrangiana no caso taquiônica gêmea ao modelo padrão é de forma explícita como

$$\mathcal{L} = -\sqrt{1-W_\phi^2} \sqrt{1-\partial_\mu \phi \partial^\mu} + 1 - \frac{3}{2}W^2. \quad (4.99)$$

Podemos nesse ponto perceber que os dois modelos possuem mesma densidade de energia $\rho = 3/2W^2$, e de pressão, $p = W_\phi^2 - \frac{3}{2}W^2$. Veja que, com os modelos gêmeos em cosmologia podemos obter soluções para novas teorias com uma fenomenologia diferente, até com diferente estabilidade, a partir de modelos já conhecidos.

Capítulo 5

Modelos em Mundo Brana

Teorias com dimensões extras estão presentes na física desde o início do século passado e contribuições recentes nos mostram maneiras de melhor entender as consequências cosmológicas e perspectivas futuras de tais teorias. Alinhado a isto, um grande desenvolvimento em coleta e tratamento de dados cosmológicos com alta precisão abre uma nova era para testes e restrições em teorias de dimensões extras.

A ideia central em teorias de mundo brana é que nosso Universo é uma parede de domínio de $(3,1)$ dimensões imerso em um bulk de mais dimensões espaciais. Os cenários de mundos brana fornecem novas e interessantes maneiras de solucionar o problema da hierarquia, da constante cosmológica, a energia escura e a quantização da gravidade [3, 35, 40, 60, 61, 62, 63].

Neste capítulo vamos focar em campos escalares com dinâmica canônica e não-canônica em cenários de mundo brana. No modelo de Randall-Sundrum [62] podemos adicionar campos escalares que interagem com a gravidade. Neste cenário, soluções suaves geram branas espessas com uma diversidade de estruturas internas, [36, 37, 38, 41]. Mesmo se considerarmos soluções estáticas o caráter não linear intrínseco na relatividade geral nos leva a um sistema de equações diferenciais acopladas de difícil resolução. Podemos então utilizar os métodos e modelos estudados até aqui para encontrar soluções analíticas para tais equações.

5.1 Modelo de Randall-Sundrum

Proposto em 1999 o modelo de Randall-Sundrum (RS) tem grande destaque no contexto de dimensões extras devido a sua simplicidade e aplicabilidade ao problema da hierarquia. A métrica do modelo RS é dado por

$$ds^2 = e^{2A(y)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dy^2, \quad (5.1)$$

onde o tensor $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski para o espaço-tempo em 4D e a função $A(y)$ é chamada de função de dobra ou deformação, ou no inglês *warp function*. Podemos então escrever nosso tensor métrico como

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} e^{2A(y)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{2A(y)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{2A(y)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{2A(y)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

Para determinar a função de dobra devemos calcular as componentes do tensor de Einstein. Com essa métrica as componentes do tensor de Einstein podem ser encontradas de forma análoga ao que foi feito para a métrica FLRW. A equação de campo de Einstein em 5D é aqui escrita como

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = G_{ab} \quad (5.3)$$

onde só lembrando que na seção de convenções no início da dissertação os índices latinos $a, b, c, d, e = 0, 1, \dots, 4$ e $\mu, \nu, \alpha, \beta = 0, \dots, 3$. Dessa forma, os símbolos de Christoffel não nulos para essa métrica são

$$\begin{aligned} \Gamma_{4\nu}^\mu &= A'(y)\delta^\mu_\nu, \\ \Gamma_{\mu\nu}^4 &= A'(y)e^{2A(y)}\eta_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

onde de agora em diante, linha representa a derivada em relação a dimensão extra. Com os símbolos de Christoffel temos as componentes do tensor de Ricci. O tensor de Ricci é diagonal para esta métrica, cujas componentes são

$$R_{\mu\nu} = e^{2A(y)}[4A'^2(y) + A''(y)], \quad (5.5a)$$

$$R_{44} = 4[A''(y) + A'^2(y)]. \quad (5.5b)$$

Dessa forma, o traço do tensor de Ricci nos fornece o escalar de Ricci na forma

$$R = 20A'^2 + 8A''. \quad (5.6)$$

Com isso, as componentes do tensor de Einstein são dada por

$$G_{00} = R_{00} - g_{00}R = -3e^{2A}[A'' + 2A'^2], \quad (5.7a)$$

$$G_{11} = G_{22} = G_{33} = 3e^{2A}[A'' + 2A'^2], \quad (5.7b)$$

$$G_{44} = 6A'^2. \quad (5.7c)$$

A equação que nos dá a dinâmica para um campo imerso no espaço-tempo descrito pela métrica (5.1) é análoga a equação no caso da métrica (4.30), mudando apenas o fato de que agora estamos no contexto de espaço-tempo curvo com uma dimensão extra

$$\sqrt{|g|} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_a \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_a \phi)} \right) \right] = 0. \quad (5.8)$$

Seja a densidade de lagrangiana de um campo descrita da forma usual, ou seja, $\mathcal{L} = 1/2(\partial_a \phi \partial^a \phi) + V(\phi)$ temos que abrindo a equação de movimento para o campo obtemos, com as quantidades

$$g = e^{8A}, \quad \sqrt{|g|} = e^{4A} \quad \text{e} \quad \partial_a(\sqrt{|g|}) = 4A'e^{4A}, \quad (5.9)$$

que nos leva em

$$[-V_\phi - \partial_a \partial^a \phi] = 4A' \partial^a \phi. \quad (5.10)$$

Se o campo depende exclusivamente da brana y ficamos com a seguinte equação de movimento

$$\phi'' + 4A'\phi' - V_\phi = 0. \quad (5.11)$$

Além disso, no caso do campo depender apenas da dimensão extra o tensor energia-momento associado é definido como

$$T_{ab} = \partial_a \phi \partial_b \phi - g_{ab} \mathcal{L}, \quad (5.12)$$

cujas componentes são

$$T_{00} = e^{2A} \left[\frac{\phi'^2}{2} + V(\phi) \right], \quad (5.13a)$$

$$T_{11} = T_{22} = T_{33} = -e^{2A} \left[\frac{\phi'^2}{2} + V(\phi) \right], \quad (5.13b)$$

$$T_{44} = \frac{\phi'}{2} - V(\phi). \quad (5.13c)$$

Colocando cada componente do tensor energia-momento com a respectiva componente do tensor de Einstein obtemos que

$$3A'' + 6A'^2 = -\phi'^2 - 2V, \quad (5.14)$$

e também

$$6A'^2 = \phi'^2 - 2V, \quad (5.15)$$

ou ainda, de forma mais compacta podemos escrever que

$$A'^2 = \frac{\phi'^2}{6} - \frac{V}{3}, \quad (5.16a)$$

$$A'' = -\frac{2}{3}\phi'^2. \quad (5.16b)$$

Perceba que uma combinação dessas duas equações nos fornece a eq. (5.11). Note também que se trata de duas equações acopladas, não lineares e de segunda ordem. Felizmente já desenvolvemos ao longo dessa dissertação métodos e modelos que nos permitem encontrar soluções analíticas para tais equações de forma mais fácil.

Combinando as eq's (5.13a), (5.16a) e (5.16b) podemos escrever a densidade de energia como uma derivada total da forma

$$T_{00} = \rho(y) = -\frac{3}{2} \frac{d}{dy} (e^{2A} A'). \quad (5.17)$$

5.1.1 Estabilidade Linear em Mundo Brana

Tomando pequenas perturbações na métrica (5.1) a fim de analisarmos a estabilidade da brana ficamos com

$$\bar{g}_{ab} = g_{ab} + \pi_{ab}, \quad (5.18)$$

onde ao contrário do tensor métrico de Minkowski a perturbação depende das dimensões usuais e também da dimensão extra, ou seja, $h_{ab} = h_{ab}(x, y)$. Note que podemos levantar e descer os índices do tensor de perturbação usando o tensor métrico usual. Assumindo que a perturbação obedece a relação

$$\pi_{a4} = \pi_{4a} = 0, \quad \pi_{\mu\nu}(x, y) = e^{2A} h_{\mu\nu}, \quad (5.19)$$

e tomando $h_{\mu\nu}$ como um gauge transverso, ou seja,

$$\eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = \partial^\mu h_{\mu\nu} = 0. \quad (5.20)$$

Dessa forma, até primeira ordem, os símbolos de Christoffel são re-escritos como

$$\delta^{(0)}\Gamma_{ab}^c = \frac{1}{2}g^{cd}(g_{ad,b} + g_{bd,a} - g_{ab,d}) \quad (5.21a)$$

$$\delta^{(1)}\Gamma_{ab}^c = \frac{1}{2}g^{cd}(\pi_{db,a} + \pi_{da,b} - \pi_{ab,d}) + \frac{1}{2}\pi^{cd}(g_{db,a} + g_{da,b} - g_{ab,d}). \quad (5.21b)$$

A partir do tensor métrico visto em (5.2), as relações anteriores podem ser representadas como

$$\begin{aligned} \delta^{(0)}\Gamma_{ab}^c &= \frac{1}{2}[\delta_b^4 2A'\delta_a^c + \delta_a^4 2A'\delta_b^c - \delta_4^c \delta_a^4 \delta_b^4 2A' + \delta_4^c g_{ab} 2A'] \\ &= A'[\delta_b^4 \delta_a^c + \delta_a^4 \delta_b^c - \delta_4^c \delta_a^4 \delta_b^4 + g_{ab} \delta_4^c]. \end{aligned} \quad (5.22a)$$

$$\delta^{(1)}\Gamma_{ab}^c = e^{2A} A' \delta_4^c h_{ab} + \frac{1}{2} e_{2A} g_{cd} (h_{ad,b} + h_{bd,a} - h_{ab,d}), \quad (5.22b)$$

onde aqui usamos $-g^{cd}\partial_d g_{ab} = -\partial_d(g_{ab}g^{cd}) + g_{ab}\partial_d g^{cd}$. Com isso, o tensor de Ricci com perturbação até primeira ordem fica

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}R_{ab} &= \partial_c \delta^{(1)}\Gamma_{ab}^c - \partial_b \delta^{(1)}\Gamma_{ac}^c + \Gamma_{cd}^c \delta^{(1)}\Gamma_{ab}^d + \\ &\delta^{(1)}\Gamma_{cd}^c \Gamma_{ab}^d - \Gamma_{bd}^c \delta^{(1)}\Gamma_{ac}^d - \delta^{(1)}\Gamma_{bd}^c \Gamma_{ac}^d. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Com o símbolos de Christoffel perturbados até primeira ordem já calculados podemos escrever

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}R_{ab} &= A'e^{2A}h'_{ab} + \frac{1}{2}e^{2A}g^{cd}\partial_c(\partial_a h_{bd} + \partial_b h_{ad} - \partial_d h_{ab}) + \\ &(A'e^{2A}h_{ab})' - \frac{1}{2}\partial_b(g^{cd}e^{2A}\partial_a h_{cd}) + 2A'^2 e^{2A}h_{ab} + \\ &\frac{1}{2}A'e^{2A}g^{cd}(g_{ab} - \delta_a^4 \delta_b^4)h'_{cd}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

cujas componentes são

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}R_{\mu\nu} &= e^{2A} \left[\frac{1}{2}h''_{\mu\nu} + 2A'h'_{\mu\nu} + (A'' + 4A'^2)h_{\mu\nu} \right] + \\ &\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}A'e^{2A}h' + \frac{1}{2}(\partial_\mu \partial^\alpha h_{\alpha\nu} + \partial_\nu \partial^\alpha h_{\alpha\mu} - \partial_\mu \partial_\nu h) \\ &\quad - \frac{1}{2}\square h_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (5.25a)$$

$$\delta^{(1)} R_{44} = -\frac{1}{2}(h'' + 2A'h'), \quad (5.25b)$$

$$\delta^{(1)} R_{\mu 4} = \frac{1}{2}(\partial^\alpha h'_{\alpha\mu} - \partial_\mu h'). \quad (5.25c)$$

Portanto, o escalar de Ricci fica dado por

$$\delta^{(1)} R = g^{ab} R_{ab} = h'' + 5A'h' + e^{-2A}(\partial^\mu \partial_\nu h_{\mu\nu} - \square h). \quad (5.26)$$

Tomando também uma pequena perturbação no campo escalar da forma

$$\bar{\phi}(x, y) = \phi(x) + \xi(x, y), \quad (5.27)$$

ficamos com uma lagrangiana padrão de um campo perturbada até primeira ordem dada por

$$\delta^{(1)} \mathcal{L} = \mathcal{L}_\phi \xi + \partial^a \phi \partial_a \xi, \quad (5.28)$$

que nos leva ao tensor energia-momento perturbado até primeira ordem na forma

$$\delta^{(1)} T_{ab} = \partial_a \phi \partial_b \xi - g_{ab} \mathcal{L}_\phi \xi - e^{2A} h_{ab} \mathcal{L}. \quad (5.29)$$

Portanto, obtemos com a equação de Einstein perturbada até primeira ordem, na componente (μ, ν) , que

$$\begin{aligned} & e^{2A} \left[\frac{1}{2} h''_{\mu\nu} + 2A' h'_{\mu\nu} + (A'' + 4A'^2) h_{\mu\nu} \right] + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} A' e^{2A} h' + \\ & \quad \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial^\alpha h_{\alpha\nu} + \partial_\nu \partial^\alpha h_{\alpha\mu} - \partial_\mu \partial_\nu h) - \frac{1}{2} \square h_{\mu\nu} \\ & \quad - \frac{1}{2} e^{2A} \eta_{\mu\nu} (h'' + 5A'h' + e^{-2A} (\partial^\mu \partial_\nu h_{\mu\nu} - \square h)) \\ & - \frac{1}{2} e^{2A} h_{\mu\nu} (8A'' + 20A'^2) = 2(\partial_\mu \phi \partial_\nu \xi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}_\phi \xi - e^{2A} h_{\mu\nu} \mathcal{L}). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Multiplicando a equação anterior por $2e^{-2A}$ e levando em consideração que $4A'^2 - A'' = -\frac{4}{3}V$ temos que

$$\begin{aligned} & h''_{\mu\nu} + 4A' h'_{\mu\nu} - e^{-2A} \square h_{\mu\nu} - e^{-2A} \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta h_{\alpha\beta} + \\ & \quad e^{-2A} (\partial_\mu \partial^\alpha h_{\alpha\mu} + \partial_\nu \partial^\alpha h_{\alpha\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h) - \\ & \quad \eta_{\mu\nu} (h'' + 4A'h' - e^{-2A} \square h + 2A''h + 8A'^2 h) = \\ & \quad = 4\eta_{\mu\nu} (V_\phi \xi + \phi' \xi'). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Impondo as condições de gauge, $h = \partial^\alpha h_{\alpha\beta} = 0$ ficamos com

$$(\partial_y^2 + 4A' \partial_y - e^{-2A} \square) h_{\mu\nu} = 0. \quad (5.32)$$

Fazendo uma mudança de variáveis $y \rightarrow z$ onde $dz = e^{-A(y)} dy$ ficamos com uma métrica conformalmente plana como

$$ds^2 = e^{2A}(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dz^2), \quad (5.33)$$

que nos leva a equação linearizada de Einstein em 5D na forma

$$(\partial_z^2 + 3A_z \partial_z - e^{-2A} \square) h_{\mu\nu} = 0. \quad (5.34)$$

Definindo uma solução do tipo onda plana para a perturbação, uma vez que, para a equação acima deve haver um modo zero para a equação do tipo Klein-Gordon

$$h_{\mu\nu} = e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} e^{3A(z)/2} H_{\mu\nu}(z), \quad (5.35)$$

que nos leva a uma equação do tipo Schrodinger

$$(-d_z^2 + U(z)) H_{\mu\nu} = p^2 H_{\mu\nu}, \quad (5.36)$$

onde

$$U(z) = \frac{9}{4} A_z^2 + \frac{3}{2} A_{zz}. \quad (5.37)$$

De modo análogo ao realizado para o estudo da estabilidade de um campo escalar no Cap. 2, podemos garantir que a brana em questão é estável se os autovalores da equação (5.36) forem todos não negativos. Podemos fatorizar a equação tipo Schrodinger na forma

$$S^\dagger S H_{\mu\nu} = p^2 H_{\mu\nu}, \quad (5.38)$$

onde os operadores são definidos como

$$S = \frac{d}{dz} + \frac{3}{2} A_z, \quad (5.39a)$$

$$S^\dagger = -\frac{d}{dz} + \frac{3}{2} A_z. \quad (5.39b)$$

5.2 Brana de Bloch

Seguindo a linha desta dissertação, podemos agora analisar a dinâmica de dois campos escalares no contexto de mundo brana com a métrica (5.2). Este modelo foi estudado pelo grupo de Partículas e Campos da UFPB e pode ser encontrado em nível mais aprofundado em [37]. Seja a densidade de lagrangiana da forma da eq. (2.88)

com dois campos acoplados pelo potencial do modelo. Minimizando a ação

$$S = \int d^4x dy \sqrt{|g|} \left[-\frac{R}{4} + \mathcal{L}(\phi, \chi, \partial_a \phi, \partial_a \chi) \right], \quad (5.40)$$

em relação a cada um dos campos temos as equações de movimento associadas da forma

$$\phi'' + 4A\phi' - V_\phi = 0, \quad (5.41a)$$

$$\chi'' + 4A\chi' - V_\chi = 0, \quad (5.41b)$$

onde $V_\phi = \frac{\partial V(\phi, \chi)}{\partial \phi}$. Obviamente, minimizando em relação a métrica teremos uma equação idêntica a eq. (5.3). Com isso, somos levados as equações

$$A'^2 = \frac{1}{6}(\phi'^2 + \chi'^2) - \frac{1}{3}V(\phi, \chi), \quad (5.42a)$$

$$A'' = -\frac{2}{3}(\phi'^2 + \chi'^2). \quad (5.42b)$$

Como mostrado nas Refs [37, 64] que tratam de modelos de dois campos acoplados podemos obter o limite de Bogomol'nyi com um potencial na forma (2.90). Aqui vamos considerar o modelo dado por

$$V_c(\phi, \chi) = \frac{1}{8} \left[\left(\frac{\partial W_c(\phi, \chi)}{\partial \phi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W_c(\phi, \chi)}{\partial \chi} \right)^2 \right] - \frac{1}{3}W_c^2, \quad (5.43)$$

onde $W_c = 2W$ da eq. (3.30). Como vimos para este modelo o formalismo de primeira ordem nos leva as equações

$$\phi' = \frac{1}{2} \frac{\partial W_c}{\partial \phi}, \quad (5.44)$$

$$\chi' = \frac{1}{2} \frac{\partial W_c}{\partial \chi}, \quad (5.45)$$

$$A' = -\frac{1}{3}W_c. \quad (5.46)$$

Como esperado, as soluções para os campos ϕ e χ são idênticas as encontradas para o modelo BNRT no Cap. 3, eq's (3.45) e (3.46). Além disso, a função de dobra é dado por uma integração simples

$$A(y) = \frac{1}{9r} [(1 - 3r) \tanh^2(2ry) - 2 \ln \cosh(2ry)]. \quad (5.47)$$

Analisando a estabilidade desse modelo introduzindo uma pequena perturbação na métrica (5.2) como realizado na subseção 5.1.1 chegamos a equação do tipo Schrodinger (5.36) com o potencial de estabilidade dado por (5.37). É possível perceber que para a função de dobra (5.47) todos os autovalores da equação tipo Schrodinger são positivos, o que caracteriza a estabilidade do modelo.

Além disso, a densidade de energia com o formalismo de primeira ordem introduzido no modelo fica na forma

$$\rho(y) = e^{2A} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dy} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{dy} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial \chi} \right)^2 - \frac{4}{3} W^2 \right]. \quad (5.48)$$

Do gráfico para densidade de energia da figura 5.1 (d) podemos notar o aparecimento de uma estrutura interna para valores de $r \approx r_c = 0.17$ dividindo a densidade de energia em dois picos. De forma análoga para o caso no espaço-tempo plano estudado no modelo BNRT, no Cap.3 desta dissertação, temos que para $0.5 > r > 0.25$ a densidade de energia tem um único pico como no modelo padrão ϕ^4 . Entretanto, para $r \leq 0.25$ notamos no gráfico o surgimento de um plateau caracterizado pelo máximo de χ' .

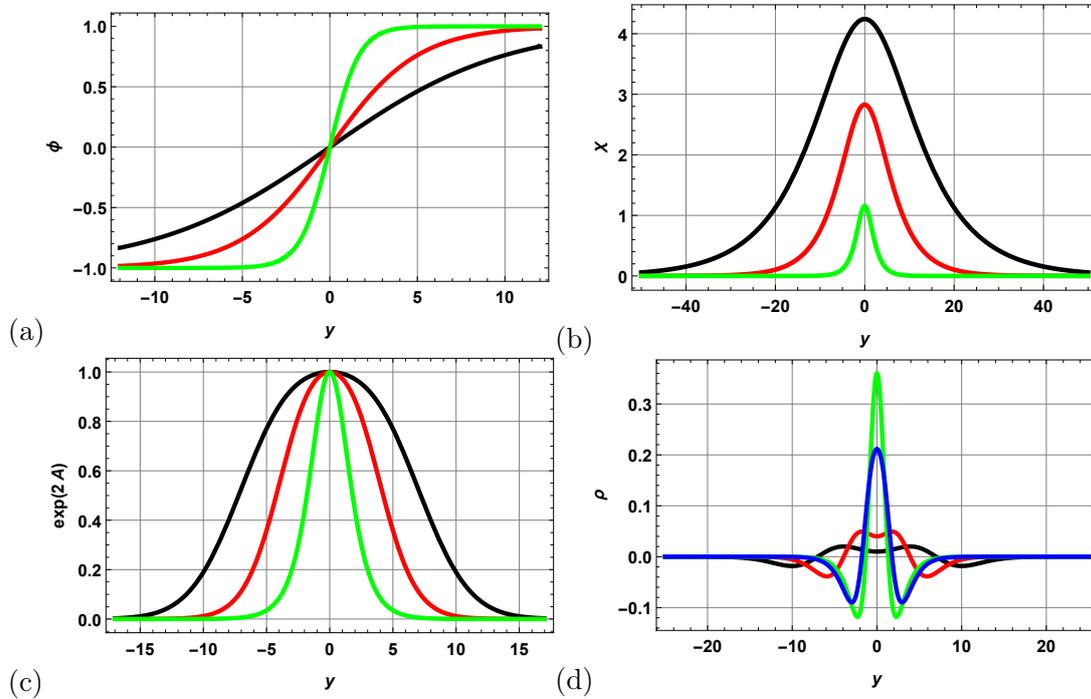


FIGURA 5.1: Brana de Bloch: (a) Solução para o campo $\phi(y)$ para diferentes valores de r . (b) Solução do campo $\chi(y)$. (c) Solução do fator de dobra. Nos gráficos temos $r = 0.05$, $r = 0.1$, $r = 0.3$ e $r=0.23$

Analisando os gráficos (c) e (d) podemos perceber que a influência do campo $\chi(y)$ na teoria dispersa a matéria para a dimensão extra. Quanto menor o parâmetro r mais espessa é a brana, ou seja, mais matéria pode ser observada na coordenada y . É possível perceber isto também pelo gráfico da densidade de energia, onde a influência do campo $\chi(y)$ divide a densidade de energia em dois picos, espalhando a matéria para fora da nossa brana de (3,1) dimensões, localizada em $y = 0$.

5.3 Modelo de Campos Escalares com Dinâmica Generalizada em Mundo Brana

Considerando agora um modelo de N-campos escalares com dinâmica generalizada em mundo brana com a métrica (5.2). A ação, como na Ref. [38, 39], é então dada por

$$S = \int d^4x dy \sqrt{|g|} \left[-\frac{R}{4} + \mathcal{L}(\phi_i, X_{ij}) \right], \quad (5.49)$$

onde $X_{ij} = \frac{1}{2} \nabla \phi_i \nabla \phi_j$. Na seção 2.2 desta dissertação fizemos a minimização dessa ação no espaço-tempo plano, (2.67), (5.51). Aqui precisamos levar em consideração a curvatura do espaço que nos leva as equações para a dinâmica dos campos na forma

$$\nabla_a (\mathcal{L}_{X_{ij}} \nabla^a \phi_j) - \mathcal{L}_{\phi_i} = 0, \quad (5.50)$$

que pode ser reescrita como

$$G_{ij}^{ab} \nabla_a \nabla_b \phi_j + 2X_{jl} \mathcal{L}_{X_{ij} \phi_l} - \mathcal{L}_{\phi_i} = 0, \quad (5.51)$$

onde $G_{ij}^{ab} = \mathcal{L}_{X_{il} X_{jm}} \nabla^a \phi_l \nabla^b \phi_m + g^{ab} \mathcal{L}_{X_{ij}}$. Considerando que os campos dependem apenas da dimensão extra obtemos que as equações para os N-campos ficam

$$(\mathcal{L}_{X_{ij}} + 2\mathcal{L}_{X_{il} X_{jm}} X_{lm}) \phi_j'' - 2X_{jl} \mathcal{L}_{X_{ij} \phi_l} + \mathcal{L}_{\phi_i} = -4A' \phi_j' \mathcal{L}_{X_{ij}}. \quad (5.52)$$

Portanto, as equações de Einstein são dadas por

$$A'^2 = \frac{1}{3} (\mathcal{L} - 2X_{ij} \mathcal{L}_{X_{ij}}), \quad (5.53a)$$

$$A'' = \frac{4}{3} X_{ij} \mathcal{L}_{X_{ij}}. \quad (5.53b)$$

Note que as eq's (5.52), (5.53a) e (5.53b) não são independentes entre si. De fato, com uma derivação simples na eq. (5.53a) e utilizando a eq. (5.53b) podemos reescrever a eq. (5.52) como

$$(\mathcal{L} - 2X_{ij}\mathcal{L}_{X_{ij}})' = 8A'X_{ij}\mathcal{L}_{X_{ij}}. \quad (5.54)$$

É razoável considerar que a função de dobra pode ser escrita em função dos N-campos como

$$A' = -\frac{1}{3}W(\phi_i), \quad (5.55)$$

que substituindo nas equações de Einstein obtemos

$$\mathcal{L} - \phi'_i\phi'_j\mathcal{L}_{X_{ij}} = \frac{1}{3}W^2, \quad (5.56a)$$

$$W_{\phi_i} = 2\phi'_j\mathcal{L}_{X_{ij}}. \quad (5.56b)$$

Escrevendo $X = h_{ij}(\phi_l)X_{ij}$ onde $h_{ij}(\phi_l)$ é uma matriz simétrica que representa a métrica do espaço dos campos. Dessa forma, podemos reescrever as equações anteriores da forma

$$\phi'_i\mathcal{L}_X = \frac{1}{2}h_{ij}^{-1}(\phi_l)W_{\phi_j}, \quad (5.57a)$$

$$\mathcal{L} - 2X\mathcal{L}_X = \frac{1}{3}W^2. \quad (5.57b)$$

Combinando as duas últimas equações temos

$$X\mathcal{L}_X^2 = -\frac{1}{8}h_{ij}^{-1}(\phi_l)W_{\phi_i}W_{\phi_j}. \quad (5.58)$$

Além disso, a densidade de energia, eq. (5.17), com a expressão para a função de dobra fica

$$\rho(y) = e^{2A} \left(\frac{1}{2} \frac{dW}{dy} + \frac{1}{3}W^2 \right). \quad (5.59)$$

A fim de ilustração podemos considerar o modelo descrito pela densidade de lagrangiana na forma

$$\mathcal{L} = X|X| - V(\phi, \chi), \quad (5.60)$$

onde $X = -\frac{1}{2}\phi'^2 - \frac{1}{2}\chi'^2$. Da eq. (5.57a) temos

$$\phi'^2 + \chi'^2 = \left(\frac{1}{4}W_\phi^2 + \frac{1}{4}W_\chi^2 \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (5.61)$$

e da eq. (5.57b) ficamos com

$$V(\phi, \chi) = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4} W_\phi^2 + \frac{1}{4} W_\chi^2 \right)^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{3} W^2, \quad (5.62)$$

que nos levam as equações de primeira ordem dadas por

$$\phi' = \frac{1}{2^{1/3}} \frac{W_\phi}{(W_\phi^2 + W_\chi^2)^{1/3}}, \quad (5.63a)$$

$$\chi' = \frac{1}{2^{1/3}} \frac{W_\chi}{(W_\phi^2 + W_\chi^2)^{1/3}}. \quad (5.63b)$$

Além disso, a função de dobra fica expressa em termos dos campos como

$$W_\phi A_\phi + W_\chi A_\chi = -\frac{2^{1/3}}{3} W (W_\phi^2 + W_\chi^2)^{1/3}. \quad (5.64)$$

Podemos então perceber a simplificação que o formalismo de primeira ordem fornece ao tratamento de modelos de dinâmica generalizada com N-campos escalares reais.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Nesta dissertação, estudamos alguns modelos de defeitos topológicos em $(1,1)$ dimensões no espaço-tempo plano com dinâmica padrão e generalizada. Além disso, no capítulo 3 também nos concentramos em investigar mais alguns modelos com dois campos escalares reais e modelos gêmeos. Esta revisão em modelos de defeitos nos serviu como base para entrar em mais detalhes na revisão feita em cosmologia, mais especificamente no contexto da equação de campo de Einstein e energia escura.

No cenário de energia escura, os modelos de um campo escalar nos fornecem um bom parâmetro de $H(t)$, compatível com o que se pode inferir de dados observacionais até o presente momento. A aplicação de múltiplos campos escalares reais com dinâmica generalizada em cenários de energia escura é agora um objetivo a ser explorado. Além disso, podemos aprimorar os modelos, calculando outros parâmetros cosmológicos para estas teorias, como índice de refração espectral, razão escalar-tensor, espectro de potências e número de e-folds, visando sempre fitar os dados destes parâmetros já coletados pelo Planck, Hubble, WMAP, COBE, entre outros satélites e que estão em constante aprimoramento.

Finalmente, pudemos utilizar o arcabouço teórico investigado nos capítulos precedentes para estudar alguns modelos de mundo brana com a métrica de Randall-Sundrum que, adicionada a campos escalares, suporta soluções suaves que geram branas espessas com uma diversidade de estruturas internas. Estas que podem ser utilizadas para estudar sob uma perspectiva diferente os problemas da hierarquia, energia escura, inflação, etc.

Neste sentido, a presente dissertação teve por objetivo fornecer ao

discente um arcabouço teórico para investigar alguns dos problemas mais quentes em cosmologia, como energia escura e mundo brana, que têm ganhado destaque devido ao grande avanço em técnicas de coleta e tratamento de dados cosmológicos de alta precisão.

Referências Bibliográficas

- [1] KALUZA, T. *On the Unification Problem in Physics*. **Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)**, v. 27(14), p. 966-972, (1921).
- [2] KLEIN, O. *The Atomicity of Electricity as a Quantum Theory Law*. **Nature**, v. 118, p. 516, (1926).
- [3] ARKANI-HAMED, N.; DIMOPOULOS, S.; DVALI, G. *The Hierarchy Problem and New Dimensions at a Millimeter*. **Physics Letters B**, v. 429, p. 263-272, (1998).
- [4] RIESS, A.G.; FILIPPENKO, A.V. et al. *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*. **The Astronomical Journal**, v. 116(3), p. 1009-1038, (1998)
- [5] PERLMUTTER, S. et al. *Measurements of Omega and Lambda from 42 high redshift supernovae*. **The Astronomical Journal**, v.517(2), p. 565-586, (1999).
- [6] SPERGEL, D.N. *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) three year results: implications for cosmology*. **The Astrophysical Journal**, v. 170(2), p. 377-408, (2007).
- [7] GAWISER, E.; SILK, J. *The Cosmic Microwave Background Radiation*. **Physics Reports**, v.333, p. 245-267, (2000).
- [8] FIXSEN, D.J. *The Temperature of the Cosmic Microwave Background*. **The Astrophysical Journal**, v. 707(2), p.916-920, (2009).
- [9] PENZIAS, A.A.; WILSON, R.W. *A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s*. **The Astrophysical Journal**, v. 142, p. 419-421, (1965).
- [10] EISENSTEIN, D. J.; ZEHAVID, I. *Detection of the Baryon Acoustic Peak in the Large-Scale Correlation Function of SDSS*

- Luminous Red Galaxies*. **The Astrophysical Journal**, v. 633(2), p. 560-574, (2005).
- [11] EISENSTEIN, D. J. *Dark energy and cosmic sound*. **New Astronomy Reviews**, v. 49, p. 360-365, (2005).
- [12] PLANCK COLLABORATION. *Planck 2015 results XIII. Cosmological parameters*. **Astronomy and Astrophysics**, v. 594, p.1-63, (2015).
- [13] PLANCK COLLABORATION. *Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters*. **Astronomy and Astrophysics**, p.1-71, (2018).
- [14] WEINBERG, S. *The Cosmological Problem*. **Reviews of Modern Physics**, v. 61, p. 1-23, (1989).
- [15] TSUJIKAWA, S. *Quintessence: a review*. **Classical and Quantum Gravity**, v. 30(21), (2013).
- [16] BAZEIA, D.; GOMES, C. B.; LOSANO, L.; MENEZES, R. *First Order Formalism and Dark Energy*. **Physics Letters B**, v. 633, p. 415-419, (2005).
- [17] BAZEIA, D.; LOSANO, L.; RODRIGUES, J.J.; ROSENFELD, R. *First Order Formalism for Dark Energy and Dust*. **The European Physical Journal C**, v. 55(1), p. 113-117, (2008).
- [18] CARROLL, S.M. *Quintessence and the Rest of World: Suppressing Long-range Interactions*. **Physical Review Letters**, v. 81(15), p. 3067-3070, (1998).
- [19] CARROLL, S.M.; HOFFMAN, M.; TRODDEN, M. *Can the Dark Energy Equation-of-State Parameter be Less Than 1?* **Physical Review D**, v. 68, p. 023509, (2003).
- [20] KAMENSHCHIK, A.; MOSCHELLA, U. PASQUIER, V. *An alternative to quintessence*. **Physics Letters B**, v. 511(2-4), p. 265-268 (2001).
- [21] BOSE, N.; MAJUNDAR, A.S. *A k-essence Model Of Inflation, Dark Matter and Dark Energy*. **Physical Review D**, v. 79(10), p. 103517, (2009).

- [22] CLIFTON, T.; FERREIRA, P.G.; PADILLA, A.; SKORDIS, C. *Modified Gravity and Cosmology*. **Physics Reports**, v. 513(1), p. 1-189, (2012).
- [23] RAJARAMAN, R. **Solitons and Instantons: An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory**. North Holland, (1989).
- [24] VACHASPATI, T. **Kinks and Domain Walls: An Introduction to Classical and Quantum Solitons**. Cambridge Press, (2006).
- [25] BAZEIA, D.; LOSANO, L.; MARQUES, M.A.; MENEZES, R. *From Kinks to Compactons*. **Physics Letters B**, v. 736, p.515-521, (2014).
- [26] BAZEIA, D.; INACIO, A. S.; LOSANO, L. *Kinks and Domain Wall in Models for Real Scalar Fields*. **International Journal of Modern Physics A**, v. 19(04), p.575-592, (2004).
- [27] AVELAR, A.T.; BAZEIA, D.; LOSANO, L.; MENEZES, R. *New lump-like structures in scalar-field models*. **The European Physical Journal**, v. 55(1), p. 133-143, (2008).
- [28] BAZEIA, D.; LOSANO, L.; MALBOUISSON, J.M.C. *Deformed Defects*. **Physical Review D, RAPID COMMUNICATIONS**, v. 66, p. 101701, (2002).
- [29] BASAR, G.; DUNNE, G.V.; *Self-Consistent Crystalline Condensate in Chiral Gross-Neveu and Bogoliubov de Gennes Systems*. **Physical Review Letters**. v. 100(20), p. 200404, (2008).
- [30] MANTON, N.; SUTCLIFFE, P. **Topological Solitons**. Cambridge Press, (2004).
- [31] SCHERRER, R.J.; *Purely Kinetic k Essence as Unified Dark Matter*. **Physical Review Letters**, v. 93, p. 011301, (2004).
- [32] VIKMAN, A.; *Can Dark Energy Evolve to the Phantom?*. **Physical Review D**, v. 71, p. 023515, (2005).
- [33] BAZEIA, D.; DANTAS, J.D. *Presence of Twinlike Models in Cosmology*. **Physical Review D**, v. 85(6), p.067303, (2012).

- [34] DIMAKIS, N.; PALIATHANASIS, A.; TERZIS, P.A.; CHRISTODOULAKIS, T. *Cosmological Solutions in Multiscalar Field Theory*. **The European Physical Journal C**, v. 79(7), p. 618, (2019).
- [35] BRAX, P.; van de BRUCK, C. *Cosmology and brane worlds: a review*. **Classical and Quantum Gravity**, v. 20(9), p. 201-232, (2003).
- [36] BAZEIA, D.; FURTADO, C.; GOMES, A.R. *Brane structure from a scalar field in warped spacetime*. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, v. 2004(02), (2004).
- [37] BAZEIA, D.; GOMES, A.R. *Bloch Brane*. **Journal of High Energy Physics**, v. 2005(05), (2004).
- [38] BAZEIA, D.; GOMES, A.R.; LOSANO, L.; MENEZES, R. *Braneworld Models of Scalar Fields with Generalized Dynamics*. **Physics Letters B**, v. 671(3), p. 402-410, (2009).
- [39] BAZEIA, D.; LOBÃO, A. S.; LOSANO, L.; MENEZES, R. *First-Order Formalism for Flat Branes in Generalized N-Field Models*. **Physical Review D**, v. 88(4), p. 045001, (2013).
- [40] DeWOLFE, O.; FREEDMAN, D.Z.; GUBSER, S.S.; KARCH, A. *Modeling the Fifth Dimension with Scalars and Gravity*. **Physical Review D**, v. 62(4), p. 046008, (2000).
- [41] BAZEIA, D. MOREIRA, D.C. *How to Build a Compact Brane*. **Physics Letters B**, v. 748, p. 79-85, (2015).
- [42] FRADKIN, E. **Field Theories of Condensed Matter Physics**. 2nd Ed. Cambridge Press, (2013).
- [43] SCHUTZ, B. **A First Course in General Relativity**. 2nd Ed. Cambridge Press, (2009).
- [44] CARROLL, S. **An Introduction to General Relativity Spacetime and Geometry**. Addison Wesley, (2004).
- [45] BOGOMOL'NYI, E.B. *The stability of classical solutions*. **Soviet Journal of Nuclear Physics**, v. 24(4), (1976).
- [46] PRASAD, M.K.; SOMMERFIELD, C.M. *Exact Classical Solution for the 't Hooft Monopole and the Julia-Zee Dyon*. **Physical Review Letters**, v. 35, p. 760, (1975).

- [47] BAZEIA, D.; LOBÃO, A.S.; LOSANO, L.; MENEZES, R. *First Order Formalism for Twinlike Models with Several Real Scalar Fields*, v. 74(2), p. 2755, (2014).
- [48] BAZEIA, D. et al. *New Models for Two Real Scalar Fields and Their kink-like Solutions*. **Advance High Energy Physics**, p. 183295, (2013).
- [49] BAZEIA, D.; LEON, M.A.G.; LOSANO, L.; GUILARTE, J.M. *Deformed Defects for Scalar Fields with Polynomial Interactions*. **Physical Review D**, v. 73(10), p. 105008, (2006).
- [50] CARROLL, S.; HELLERMAN, S.; TRODDEN, M. *Domain Wall Junctions are 1/4 BPS States*. **Physical Review D**, v.61, p. 065001, (2000).
- [51] BAZEIA, D.; GOMES, A.R. *Extended Solutions via the Trial Orbit Method for Two-Field Models*. **Physica Scripta**, v. 79, n.5, p. 055005, (2009).
- [52] BAZEIA, D.; DANTAS, J.D.; GOMES, A.R.; LOSANO, L.; MENEZES, R. *Twinlike Models in Scalar Field Theories*. **Physical Review D**, v. 84(14), (2011).
- [53] ANDREWS, M.; LEWANDOWSKI, M.; TRODDEN, M.; WWSLEY, D. *Distinguishing K-Defects from their Canonical Twins*. **Physical Review D**, v. 82(10), p. 105006, (2010).
- [54] EINSTEIN, A. *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*. **Annalen der Physik**, v. 17, p. 891-921, (1905).
- [55] EINSTEIN, A. *Grundgedanken der allgemeinen Relativitätstheorie und Anwendung dieser Theorie in der Astronomie*. **Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte**, p. 315, (1915).
- [56] SCHWARZSCHILD, K. *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*. **Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften**, v. 7, p. 189-196, (2016).
- [57] FRIEDMANN, A. *Über die Krümmung des Raumes*. **Zeitschrift für Physik**, v. 10, p. 377, (1922).

- [58] HUBBLE, E. *A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae*. **Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America**, v. 15(3), p. 168-173, (1929).
- [59] FOX, R.; McDONALD, A.T.; LEYLEGIAN, J.C.; PRITCHARD, P.J. **Fluid Mechanics**. John Wiley and Sons Inc., (2012).
- [60] BRAX, P.; van de BRUCK, C.; DVALI, A.C. *Brane World Cosmology*. **Reports on Progress in Physics**, v. 67(12), p. 2183-2231, (2004).
- [61] RANDALL, L.; SUNDRUM, R. *Large Mass Hierarchy from Small Extra Dimension*. **Physical Review Letters**, v. 83(17), p. 3370-3373, (1999).
- [62] RANDALL, L.; SUNDRUM, R. *An Alternative to Compactification*. **Physical Review Letters**, v. 83(23), p. 4690-4693, (1999).
- [63] MAARTENS, R.; KOYAMA, K. *Brane-World Gravity*. **Living Reviews in Relativity**, v.13(1), (2010).
- [64] BAZEIA, D.; dos SANTOS, M.J.; RIBEIRO, R.F. *Solitons in Systems of Coupled Scalar Fields*. **Physics Letters A**, v. 208, p. 84-88, (1995).