



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Física

Estudo do efeito Casimir com violação de Lorentz do tipo éter

Messias de Brito Cruz

João Pessoa - PB

Julho de 2019

Messias de Brito Cruz

Estudo do efeito Casimir com violação de Lorentz do tipo éter

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da UFPB (área de concentração: Física das Partículas Elementares e Campos), como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de Doutor em Física.

Universidade Federal da Paraíba – UFPB
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Física

Orientador: Dr. Eugênio Ramos Bezerra de Mello
Coorientador: Dr. Albert Yu. Petrov

João Pessoa - PB
Julho de 2019

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

C957e Cruz, Messias de Brito.

Estudo do efeito Casimir com violação de Lorentz do
tipo éter / Messias de Brito Cruz. - João Pessoa, 2019.
124 f. : il.

Orientação: Eugênio Ramos Bezerra de Mello.

Coorientação: Albert Yu Petrov.

Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Física. 2. Violação de Lorentz. 3. Efeito Casimir.
4. Campos Quânticos. 5. Condições de Contorno. 6.
Temperatura Finita. I. Ramos Bezerra de Mello, Eugênio.
II. Yu Petrov, Albert. III. Título.

UFPB/BC

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de
Doutorado do aluno **Messias de Brito Cruz**,
candidato ao Título de Doutor em Física na Área
de Concentração Física das Partículas
Elementares e Campos.

Aos trinta e um dias do mês de julho do ano de dois mil e dezenove, às 14:00, no Auditório da Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para examinar o candidato ao grau de Doutor em Física na área de Física das Partículas Elementares e Campos, **Messias de Brito Cruz**. A comissão examinadora foi composta pelos professores doutores: *Eugênio Ramos Bezerra de Mello* (UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, *Herondy Francisco Santana Mota* (UFPB), *Valdir Barbosa Bezerra* (UFPB), *Azadeh Mohammadi* (UFPE) e *Dmitry Melnikov* (IIP-RN). Dando início aos trabalhos, o Prof. Eugênio Ramos Bezerra de Mello comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para que o candidato fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de tese intitulado “*Estudo do efeito Casimir com violação de Lorentz do tipo éter*”. Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o seguinte parecer: “**aprovado**”. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutor em Física na forma da lei. E para constar, eu, Danilo Wilson Lemos Menezes, redigi esta ata que vai assinada por mim e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **31 de julho de 2019**.

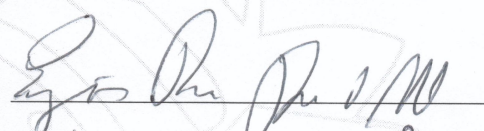
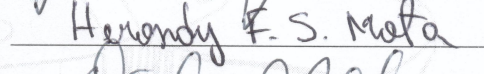
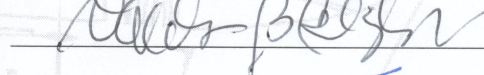
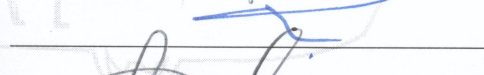
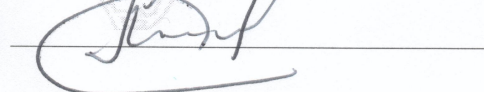
Prof. Dr. Eugênio Ramos Bezerra de Mello
Orientador – PPGF/UFPB

Prof. Dr. Herondy Francisco Santana Mota
PPGF/UFPB

Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra
PPGF/UFPB

Prof. Dra. Azadeh Mohammadi
UFPE

Prof. Dr. Dmitry Melnikov
IIP-RN

Dedico esse trabalho ao meu pai Clementino Carlos da Cruz (in memorian), com todo o meu amor e gratidão.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus por sua misericórdia infinita em me conceder a capacidade de realizar este trabalho, pela força e determinação dada a mim durante esta caminhada de quatro anos, pelos obstáculos vencidos e vitórias alcançadas.

Agradeço aos meus pais, Maria das Graças de Brito Cruz e Clementino Carlos da Cruz, pela confiança depositada em mim. Pelas orações e preces para que Deus me protegesse e me sustentasse durante os percalços deste caminho, “árduo”, diga-se de passagem. Aos meus irmãos Breno de Brito Cruz e Maria Eduarda de Brito Cruz, obrigado pelo carinho de sempre. Ninguém nos entende como nós mesmos, em que apenas um olhar decifra tudo sem necessidade de palavras ou perguntas. Família, vocês são o que tenho de mais precioso! Amo Vocês!

A minha noiva, Joyce Aristércia Siqueira Soares, pelo carinho e compreensão e pela ajuda nos momentos que mais precisei. Obrigado pela paciência, amor. Você é meu presente de Deus!

Ao meu orientador Eugênio Ramos Bezerra de Mello, por sua orientação, pela sua paciência e acima de tudo por acreditar em mim. Tenho certeza, sem o senhor eu não teria conseguido realizar este trabalho. Muito obrigado!

Ao meu coorientador Albert Yu. Petrov, por ter contribuído para a minha formação através de discussões frutuosas.

Aos amigos da pós-graduação, pelos momentos de discussão e descontração.

A todos que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

À CAPES, pelo suporte financeiro.

“O tempo não é aquilo que nos disseram.”
(Carlo Rovelli)

RESUMO

As teorias propostas de Gravidade Quântica, como a Teoria de Cordas e a Gravidade Quântica em Laço, prevêm a possibilidade de uma violação espontânea da simetria de Lorentz. Devido a esse fato, o interesse no estudo da violação da simetria de Lorentz tem crescido rapidamente nas últimas décadas, porque poderia constituir uma forma de testar os modelos teóricos candidatos a uma teoria de Gravitacão Quântica. Motivados por modelos de Teoria Quântica de Campos com violação de Lorentz do tipo éter, analisamos a influência da postulada violação de Lorentz sobre o efeito Casimir admitimos que os campos quânticos estão confinados entre duas placas paralelas. Inicialmente, analisamos o efeito Casimir a temperatura nula, através de um modelo para campos escalares massivos com violação de Lorentz do tipo éter. Considerando diferentes condições de contorno para o campo escalar nas placas, obtivemos a energia e a pressão de Casimir para diferentes escolhas do quadrivetor constante que implementa uma anisotropia no espaço-tempo. Em seguida, como uma extensão natural, consideramos os efeitos de temperatura finita. Para cada escolha do quadrivetor, obtivemos a correção térmica da energia de Casimir por unidade de área. Observamos que a violação da simetria de Lorentz tem uma forte influência sobre o efeito Casimir, especialmente, quando o quadrivetor constante é ortogonal às placas. Posteriormente, analisamos o efeito Casimir a temperatura nula, através de um modelo para campos fermiônicos massivos com violação de Lorentz do tipo éter. Nesse estudo impomos ao campo fermiônico a condição de contorno de sacola do MIT nas placas, considerando diferentes escolhas para o quadrivetor constante, que implementa a anisotropia no espaço-tempo. Para o quadrivetor tipo-tempo observamos que a violação de Lorentz não modifica a energia de Casimir. No entanto, para a situação que o quadrivetor é tipo-espaço, a violação de Lorentz tem influência significativa no efeito Casimir. Obtivemos explicitamente a energia de Casimir por unidade de área para o caso do quadrivetor ortogonal às placas e, conseqüentemente, a pressão de Casimir. Assim sendo, o efeito Casimir seria um ótimo fenômeno para se investigar uma suposta violação da simetria de Lorentz.

Palavras-chaves: Violação de Lorentz, efeito Casimir, campos quânticos, condições de contorno, temperatura finita.

ABSTRACT

The Quantum Gravity theories, such as String Theory and Loop Quantum Gravity, predict the possibility of a spontaneous violation of the Lorentz symmetry. Because of this fact, the interest by the violation of Lorentz symmetry has grown rapidly in recent decades because it could be a way of testing the candidate theories for Quantum Gravitation. Motivated by models of Quantum Field Theory with Lorentz violations etherlike, we have analyzed the influence of a Lorentz violation on the Casimir effect, assuming that the quantum fields are confined between two parallel plates. Initially, we analyzed the Casimir effect at zero temperature, using a model for massive scalar fields with Lorentz violation of the etherlike. Considering different boundary conditions for the scalar field in the plates, we obtained the Casimir energy and pressure for different choices of the constant 4-vector that implements a anisotropy at space-time. Then, as a natural extension, we consider the effects of finite temperature. For each choice of the 4-vector, we obtained the thermal correction of the Casimir energy per unit area. We note that the violation of the Lorentz symmetry has a strong influence on the scalar Casimir effect, especially when the constant 4-vector is orthogonal to the plates. Subsequently, we analyzed the Casimir effect at zero temperature, through a model for massive fermionic fields with Lorentz violation of the etherlike. In this study, we imposed to the fermionic field the MIT bag boundary condition on the plates, considering different choices for the constant 4-vector, which implements an anisotropy at space-time. For the timelike 4-vector we observe that the Lorentz violation does not modify the Casimir energy. However, for the situation that the 4-vector is spacelike, the Lorentz violation has a significant influence on the fermionic Casimir effect. We obtained explicitly the Casimir energy per unit area for the case of the 4-vector is orthogonal to the plates and, consequently, the Casimir pressure. Thus, the Casimir effect would be a good candidate to investigate a supposed violation of Lorentz symmetry.

Keywords: Lorentz violation, Casimir effect, quantum fields, boundary conditions, finite temperature.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Interações básicas entre partículas virtuais, onde os segmentos retilíneos representam elétrons ou pósitrons virtuais e as linhas ondulatórias representam os fótons virtuais.	20
Figura 2 – Placas paralelas e perfeitamente condutoras.	21
Figura 3 – Modelo para o universo, constituído de duas placas paralelas e infinitas, separadas por uma distância a , e uma terceira placa a uma distância $\ell \gg a$	25
Figura 4 – Como obtermos a matriz de rotação passiva (BELICH et al., 2007).	33
Figura 5 – Como obtermos a matriz de rotação ativa (BELICH et al., 2007).	34
Figura 6 – Rotação passiva de um ângulo ϕ na presença de um campo de fundo (BELICH et al., 2007).	35
Figura 7 – Rotação ativa de um ângulo $-\phi$ na presença de um campo de fundo (BELICH et al., 2007).	35
Figura 8 – Dois sistemas de referência: S (em repouso em relação ao capacitor) e S' (com velocidade $\vec{v}$ em relação ao capacitor) (BELICH et al., 2007).	36
Figura 9 – Trajetórias do elétron: (1) com velocidade inicial $\vec{u}$; (2) com velocidade inicial $\vec{u} - \vec{v}$ (BELICH et al., 2007).	37
Figura 10 – Energia de Casimir para o caso $u^{(t)} = (1, 0, 0, 0)$ multiplicada por $6\pi^2/L^2m^3$, como função de am para os seguintes valores de $\lambda = 0.0, 0.1$ e 0.2	45
Figura 11 – Energia de Casimir para o caso $u^{(x)} = (0, 1, 0, 0)$ multiplicada por $6\pi^2/L^2m^3$, como função de am para os seguintes valores de $\lambda = 0.0, 0.1$ e 0.2	47
Figura 12 – Energia de Casimir para o caso $u^{(z)} = (0, 0, 0, 1)$ multiplicada por $6\pi^2/L^2m^3$, como função de am para os seguintes valores de $\lambda = 0.0, 0.1$ e 0.2	49
Figura 13 – Energia de Casimir para o caso $u^{(t)} = (1, 0, 0, 0)$ multiplicada por $6\pi^2/L^2m^3$, como função de am para os seguintes valores de $\lambda = 0.0, 0.1$ e 0.2	56
Figura 14 – Energia de Casimir para o caso $u^{(x)} = (0, 1, 0, 0)$ multiplicada por $6\pi^2/L^2m^3$, como função de am para os seguintes valores de $\lambda = 0.0, 0.1$ e 0.2	58
Figura 15 – Energia de Casimir para o caso $u^{(z)} = (0, 0, 0, 1)$ multiplicada por $6\pi^2/L^2m^3$, como função de am para os seguintes valores de $\lambda = 0.0, 0.1$ e 0.2	59
Figura 16 – Energia de Casimir para o caso $u^{(z)} = (0, 0, 0, 1)$ multiplicada por $1/L^2m^3$, como função de am para os seguintes valores de $\lambda = 0.0, 0.01$ e 0.1	91
Figura 17 – No gráfico do lado esquerdo, mostramos o comportamento da soma envolvendo a função de Bessel modificada $K_1(jM\sigma)/j$ na linha azul, e o comportamento da função $\pi^2/(6M\sigma)$ na linha tracejada vermelha em função de $M\sigma$. No gráfico do lado direito, o mesmo para a função de Bessel $K_2(jM\sigma)/j^2$ na linha azul e $\frac{4\pi^4 - 15\pi^2 M^2 \sigma^2}{180M^2 \sigma^2}$ na linha tracejada como função de $M\sigma$	107

SUMÁRIO

	Introdução	1
I	A TEORIA DE CAMPOS	4
1	TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS	5
1.1	Formalismo Lagrangiano	5
1.1.1	Equações de movimento	6
1.1.2	Teorema de Noether	6
1.2	A Equação de Klein-Gordon	8
1.2.1	Quantização do campo escalar	10
1.3	A Equação de Dirac	11
1.3.1	Quantização do campo fermiônico	13
1.3.2	Regularização e Renormalização	15
1.4	Mecânica Estatística Quântica	15
II	O EFEITO CASIMIR E A VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ	18
2	O EFEITO CASIMIR	19
2.1	Uma visão geral do fenômeno	19
2.2	Cálculo da Força de Casimir	23
2.2.1	A energia do vácuo	23
2.2.2	Renormalização e a energia de Casimir	25
2.3	Derivação da Força de Casimir	27
3	VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ E MODELOS COM VIOLAÇÃO DO TIPO ÉTER	30
3.1	As Transformações de Lorentz	31
3.1.1	Transformações de Lorentz passivas e ativas	31
3.1.2	Transformações de Lorentz de observador e de partícula	32
3.2	Violação da Simetria de Lorentz	32
3.2.1	O elétron em um campo elétrico de fundo constante	33
3.2.1.1	Análise de uma rotação	33
3.2.1.2	Análise de um impulso	35
3.3	Modelos com violação do tipo éter	37

3.3.1	Campos escalares	38
3.3.2	Campos fermiônicos	39
III	NOSSOS RESULTADOS	41
4	EFEITO CASIMIR ESCALAR COM VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ DO TIPO ÉTER	42
4.1	Condição de contorno de Dirichlet	42
4.1.1	Quadrivetor tipo-tempo	43
4.1.2	Quadrivetor tipo-espaço	46
4.2	Condição de contorno de Neumann	49
4.2.1	Quadrivetor tipo-tempo	50
4.2.2	Quadrivetor tipo-espaço	51
4.3	Condição de contorno mista	54
4.3.1	Quadrivetor tipo-tempo	54
4.3.2	Quadrivetor tipo-espaço	57
5	CORREÇÕES TÉRMICAS PARA O EFEITO CASIMIR ESCALAR COM VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ DO TIPO ÉTER . .	61
5.1	Condição de contorno de Dirichlet	61
5.1.1	Quadrivetor tipo-tempo	62
5.1.2	Quadrivetor tipo-espaço	66
5.2	Condição de contorno de Neumann	73
5.3	Condição de contorno mista	73
5.3.1	Quadrivetor tipo-tempo	74
5.3.2	Quadrivetor tipo-espaço	77
6	EFEITO CASIMIR FERMIÔNICO COM VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ DO TIPO ÉTER	84
6.1	Condição de contorno de sacola do MIT	84
6.1.1	Quadrivetor tipo-tempo	85
6.1.2	Quadrivetor tipo-espaço	86
	Conclusão e Trabalhos Futuros	94
	REFERÊNCIAS	97

	APÊNDICES	101
	APÊNDICE A – CÁLCULO DAS INTEGRAIS NO CÁLCULO DAS	
	CORREÇÕES TÉRMICAS	102
A.1	Integral I	102
A.2	Integral II	106
	APÊNDICE B – CONDIÇÃO DE SACOLA DO MIT	110
B.1	Densidade Lagrangiana modificada para o modelo de sacola do	
	MIT	110

INTRODUÇÃO

A Teoria da Relatividade Geral e a Teoria Quântica conduziram com sucesso a Física durante a maior parte do século XX. A Relatividade Geral é uma teoria da gravitação que foi desenvolvida por Albert Einstein entre 1907 e 1915. De acordo com a Relatividade Geral, o efeito gravitacional observado entre as massas resulta da deformação do espaço-tempo. Experimentos e observações mostram que a descrição da gravitação de Einstein explica vários efeitos que não são explicados pela física Newtoniana, como anomalias nas órbitas de Mercúrio e outros planetas. Bem como prevê novos efeitos da gravidade, como ondas gravitacionais e lentes gravitacionais. Muitas dessas previsões foram confirmadas por experimento ou observação, mais recentemente ondas gravitacionais ([ABBOTT et al., 2016](#)). Embora a Relatividade Geral não seja a única teoria relativista da gravidade, é a teoria mais simples e consistente com os dados experimentais. No entanto, uma série de questões abertas permanece, a mais fundamental delas é como a Relatividade Geral pode ser reconciliada com as leis da Física Quântica para produzir uma teoria completa e autoconsistente da gravidade quântica.

O sucesso desse sistema dicotômico depende das vastas diferenças de escala entre as duas teorias. Nenhum experimento ou observação jamais investigou uma teoria de Gravidade Quântica, onde ambos os formalismos são simultaneamente significativos. Por muitas décadas, a busca experimental por uma assinatura de Gravidade Quântica foi descartada pelo simples argumento que os efeitos quânticos apareceriam apenas na escala de Planck, experimentalmente inatingível ($\sim 10^{19}$ GeV). No entanto, nos últimos anos, os esforços para determinar as consequências mensuráveis da Gravidade Quântica se intensificaram consideravelmente. Em meados da década de 1980, duas teorias razoavelmente bem sucedidas da Gravidade Quântica foram propostas: Teoria das Cordas ([GREEN; SCHWARZ, 1987](#)) e Gravidade Quântica em Laço ([ROVELLI, 2008](#)). Pouco tempo depois, ([KOSTELECKÝ; SAMUEL, 1989](#)) mostraram que a Teoria das Cordas pode levar a uma violação espontânea das simetrias de Lorentz e CPT no Modelo Padrão. A simetria CPT, que está intimamente relacionada à simetria de Lorentz, é uma simetria discreta de sistemas físicos em que um sistema é invariante sobre conjugação de carga (C), inversão da paridade (P) e inversão temporal (T). A violação da simetria de Lorentz não é totalmente inesperada, uma vez que a violação de quase todas as outras simetrias da Natureza, incluindo carga, paridade, reversão temporal, simetria CP, simetria quiral, supersimetria, etc., foram observadas.

Atualmente, a maioria das teorias de Gravidade Quântica têm mostrado violar a simetria de Lorentz de alguma forma. Tanto a Gravidade Quântica em Laço ([GAMBINI; PULLIN, 1999](#)), como a Teoria das Cordas ([ELLIS; MAVROMATOS; NANOPOULOS, 2002](#)) mostraram produzir uma relação de dispersão modificada para a propagação de partículas que necessariamente

leva à violação da simetria de Lorentz. As modificações derivam de uma descrição discreta do espaço-tempo e normalmente fazem com que os fótons com diferentes energias viajem com velocidades diferentes, $v(E) \neq c$, introduzindo pequenos atrasos que se tornariam detectáveis em escalas cosmológicas (SUDARSKY; URRUTIA; VUCETICH, 2002).

Observações cosmológicas também estimularam o interesse na possível violação da simetria de Lorentz: do satélite WMAP¹ e outras observações cosmológicas confirmaram, recentemente, que a maior parte da energia no Universo consiste de energia escura. A energia escura pode ser associada a uma constante cosmológica ou a um quinto grau de liberdade que dá origem a um campo escalar em um referencial preferencial, às vezes conhecido como quintessência (BOLOKHOV; NIBBELINK; POSPELOV, 2005). Este fundo de campo escalar com energia muito baixa afeta não somente a expansão do Universo, mas também pode interagir com partículas de tal maneira que os efeitos da violação de Lorentz apareceriam.

Continua a ser uma questão aberta e convincente se um sinal inequívoco da violação de Lorentz pode ser medido usando técnicas experimentais atuais. Assim, é interessante estudar tanto a teoria quanto a fenomenologia da violação da simetria de Lorentz, que pode fornecer um vislumbre da Gravidade Quântica. Embora, do ponto de vista teórico, a exploração dessa possibilidade tenha estado ativa há muitos anos (DIRAC, 1951), uma fenomenologia da violação de Lorentz se desenvolveu apenas nos últimos anos. Antes de meados da década de 1990, poucos trabalhos investigaram as consequências experimentais da violação de Lorentz, porque os novos efeitos eram esperados apenas nas interações de partículas com energias de ordem da massa de Planck, M_{Pl} . Mais tarde, os cientistas perceberam que existem situações especiais em que os novos efeitos podem se manifestar em escalas de energias mais baixas. Essas situações são chamadas de "janelas" da Gravidade Quântica, onde supomos que o efeito Casimir pode ser um desses casos especiais.

O efeito Casimir, previsto por H. B. G. Casimir (CASIMIR, 1948), é uma das manifestações mais diretas da existência de flutuações quânticas do vácuo. Esse efeito consiste na atração de duas placas metálicas neutras quando colocadas no vácuo quântico; as placas são consideradas planas, paralelas e separadas por uma distância pequena comparada com suas dimensões. Esse efeito, no entanto, só foi experimentalmente observado dez anos depois por Sparnaay (SPARNAAY, 1958). Mesmo com a baixa precisão do experimento, seus resultados estavam em acordo com a previsão de Casimir. A confirmação foi feita em um experimento de alta precisão realizado por Lamoreaux (LAMOREAUX, 1997). Devido o efeito Casimir ser uma das manifestações mais diretas da existência de flutuações quânticas do vácuo, o interesse por ele aumentou fortemente na década de 1970, dentro do contexto da Teoria Quântica de Campos.

O presente trabalho tem por objetivo estudar a violação da simetria de Lorentz através do efeito Casimir no espaço-tempo de Minkowski. Em particular, usamos modelos de Teoria

¹ O *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe* é um satélite cuja missão é estudar o espaço e medir as diferenças de temperatura que se observam na radiação cósmica de fundo em micro-ondas, um remanescente do *Big Bang*.

Quântica de Campos com violação de Lorentz do tipo éter (CARROLL; TAM, 2008), para campos escalares e fermiônicos. Alguns trabalhos nesse contexto têm sido feitos usando Teoria Quântica de Campos com violação de Lorentz do tipo Hořava–Lifshitz (ULION; MELLO; PETROV, 2015; SILVA; CRUZ; MELLO, 2019).

Esta tese está organizada da seguinte maneira: no capítulo 1 foi desenvolvida uma revisão a respeito da Teoria Quântica de Campos, ou seja, todo instrumental matemático necessário para o desenvolvimento desse estudo. Nos capítulos 2 e 3, apresentamos uma breve revisão sobre o efeito Casimir e violação da simetria de Lorentz, respectivamente. Ainda no capítulo 3, apresentamos os modelos teóricos com violação de Lorentz do tipo éter (GOMES et al., 2010), os quais consideraremos nos capítulos seguintes. Nos capítulos 4, 5 e 6 apresentamos as nossas contribuições (CRUZ; MELLO; PETROV, 2017), (CRUZ; MELLO; PETROV, 2018) e (CRUZ; MELLO; PETROV, 2019), respectivamente. Por último, apresentamos as nossas conclusões finais deste trabalho e as perspectivas de trabalhos futuros. Introduzimos também alguns apêndices: A.1, A.2 e B.1, contendo detalhes matemáticos relevantes ao texto. Ao longo da tese, adotamos o sistema de unidades naturais $\hbar = c = k_B = 1$ e a assinatura métrica $(+, -, -, -)$.

Parte I

A Teoria de Campos

1 TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS

O conceito de fóton como sendo o quanta do campo eletromagnético foi introduzido no início do século XX, com a finalidade de explicar o espectro da radiação térmica de corpo negro (PLANCK, 1900). Em 1900 Planck postulou que o processo de emissão e absorção de radiação por átomos ocorreria de forma descontínua em quantas. Einstein, em 1905, chegou a uma interpretação mais drástica. A partir de uma análise estatística da lei da radiação de Planck e do Efeito fotoelétrico (EINSTEIN, 1905), ele concluiu que não era apenas a emissão e a absorção da radiação que era quantizada, mas que a própria radiação eletromagnética consistia de fótons. O Efeito Compton reconfirmou essa interpretação (COMPTON, 1923).

Os fundamentos de uma Teoria Quântica de Campos sistemática foram estabelecidos por Dirac (DIRAC, 1927a). A partir da quantização do campo escalar, conduz-se naturalmente à quantização de qualquer outro campo clássico, sendo o quanta do campo as respectivas partículas com suas propriedades bem definidas.

Neste capítulo, apresentamos os principais elementos da Teoria Quântica de Campos que foram essenciais para o desenvolvimento desse estudo. Um desenvolvimento completo da Teoria Quântica de Campos está claramente além do escopo desse capítulo. Encaminhamos o leitor para um dos muitos livros excelentes sobre o assunto (MANDL; SHAW, 2010).

1.1 FORMALISMO LAGRANGIANO

Para formular uma Teoria Clássica de Campos consideramos um sistema composto por um conjunto de campos, $\phi_i(x)$, $i = 1, \dots, n$. O índice i pode indicar as componentes de um mesmo campo, ou ainda, pode indicar diferentes campos independentes. Um campo é essencialmente um conjunto de números associados a cada ponto no espaço-tempo. Vamos considerar teorias que podem ser derivadas do princípio variacional a partir de uma ação envolvendo uma densidade Lagrangiana:

$$\mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i), \quad (1.1)$$

com a seguinte notação $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$, com $\mu = t, x, y$ e z . A densidade Lagrangiana da Eq. (1.1), depende apenas dos campos e das primeiras derivadas dos campos. Claramente esse caso não é o mais geral.

Definimos a ação, S , para uma região arbitrária $\mathcal{R}$ do espaço-tempo quadrimensional contínuo por:

$$S = \int_{\mathcal{R}} d^4x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i), \quad (1.2)$$

onde o elemento de volume infinitesimal é $d^4x = dx^t d^3\vec{x}$, e a região de integração $\mathcal{R}$ é a região do espaço-tempo que estamos interessados.

1.1.1 Equações de movimento

As equações de movimento são obtidas a partir do princípio variacional. Para uma região arbitrária $\mathcal{R}$, consideramos as variações dos campos dadas por:

$$\begin{aligned}\phi_i(x) &\mapsto \phi_i(x) + \delta\phi_i(x) \\ \partial_\mu\phi_i(x) &\mapsto \partial_\mu\phi_i(x) + \partial_\mu\delta\phi_i(x)\end{aligned}\tag{1.3}$$

que se anula na superfície $\partial\mathcal{R}$ que delimita a região $\mathcal{R}$, ou seja, $\delta\phi_i(x) = 0$ em $\partial\mathcal{R}$. Agora, exigimos que para uma região arbitrária $\mathcal{R}$ e as variações da Eq. (1.3), a ação da Eq. (1.2) tenha um valor estacionário, ou seja,

$$\delta\mathcal{S} = 0.\tag{1.4}$$

Calculando $\delta\mathcal{S}$ a partir da Eq. (1.2), obtemos:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S} &= \int_{\mathcal{R}} d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i} \delta\phi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \partial_\mu\delta\phi_i \right] \\ &= \int_{\mathcal{R}} d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \right) \right] \delta\phi_i + \int_{\mathcal{R}} d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \delta\phi_i \right].\end{aligned}\tag{1.5}$$

O último termo da Eq. (1.5) pode ser convertido em uma integral sobre a superfície $\partial\mathcal{R}$ usando o teorema de Gauss em quatro dimensões:

$$\int_{\mathcal{R}} d^4x \partial_\mu F^\mu = \int_{\partial\mathcal{R}} dG_\mu F^\mu\tag{1.6}$$

$$\implies \int_{\mathcal{R}} d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \delta\phi_i \right] = \int_{\partial\mathcal{R}} dG_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \right] \delta\phi_i \mapsto 0.\tag{1.7}$$

Uma vez que a Eq. (1.4) é satisfeita, a Eq. (1.5) nos fornece as equações de Euler-Lagrange (ou equações de movimento dos campos):

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i} - \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \right] = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.\tag{1.8}$$

1.1.2 Teorema de Noether

Para uma teoria de campo derivada a partir de uma densidade Lagrangiana $\mathcal{L}$, podemos associar uma quantidade conservada para cada simetria do sistema. O resultado que relaciona as simetrias às quantidades conservadas é conhecido como o teorema de Noether, enquanto as quantidades conservadas são chamadas de cargas e correntes de Noether. Por exemplo, a conservação de energia, momento linear e momento angular seguem a partir da invariância de $\mathcal{L}$ sob translações e rotações. Desde que estas transformações formem um grupo contínuo, podemos considerar apenas as transformações infinitesimais.

Vamos considerar as transformações infinitesimais do sistema de coordenadas quadri-dimensionais dadas da forma:

$$x^\mu \mapsto x'^\mu \equiv x^\mu + \delta x^\mu, \quad (1.9)$$

consequentemente, os campos se transformam por:

$$\phi_i(x) \mapsto \phi'_i(x') \equiv \phi_i(x) + \delta\phi_i(x). \quad (1.10)$$

A variação na ação da Eq. (1.2) resultante dessas transformações é dada por:

$$\delta\mathcal{S} = \int_{\mathcal{R}'} d^4x' \mathcal{L} [\phi'_i(x'), \partial'_\mu \phi'_i(x')] - \int_{\mathcal{R}} d^4x \mathcal{L} [\phi_i(x), \partial_\mu \phi_i(x)], \quad (1.11)$$

onde $\mathcal{R}'$ corresponde a região $\mathcal{R}$ no novo sistema de coordenadas. Sem perda de generalidade, podemos fazer a transformação, $x' \mapsto x$, na primeira integral da Eq. (1.11):

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S} &= \int_{\mathcal{R}'} d^4x \mathcal{L} [\phi'_i(x), \partial'_\mu \phi'_i(x)] - \int_{\mathcal{R}} d^4x \mathcal{L} [\phi_i(x), \partial_\mu \phi_i(x)] \\ &= \int_{\mathcal{R}} d^4x \left\{ \mathcal{L} [\phi'_i(x), \partial'_\mu \phi'_i(x)] - \mathcal{L} [\phi_i(x), \partial_\mu \phi_i(x)] \right\} \\ &\quad + \int_{\mathcal{R}' - \mathcal{R}} d^4x \mathcal{L} [\phi'_i(x), \partial'_\mu \phi'_i(x)]. \end{aligned} \quad (1.12)$$

O último termo da Eq. (1.12) é uma integral sobre o volume infinitesimal $\mathcal{R}' - \mathcal{R}$ (LAHIRI; PAL, 2005). Assim, podemos reescrevê-la como uma integral sobre a superfície $\partial\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{R}' - \mathcal{R}} d^4x \mathcal{L} [\phi'_i(x), \partial'_\mu \phi'_i(x)] &= \int_{\partial\mathcal{R}} dG_\nu \delta x^\nu \mathcal{L} [\phi_i(x), \partial_\mu \phi_i(x)] \\ &= \int_{\mathcal{R}} d^4x \partial_\nu \{ \delta x^\nu \mathcal{L} [\phi_i(x), \partial_\mu \phi_i(x)] \}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Na primeira passagem da Eq. (1.13) passamos de ϕ'_i para ϕ_i desconsiderando os termos de ordens superiores de δx^ν e, em seguida, usamos o teorema de Gauss da Eq. (1.6).

Para simplificar a integral da Eq. (1.12), é conveniente definir a variação para x fixo, o que fornece uma mudança apenas na forma funcional. Para uma dada função $f(x)$ cuja forma funcional muda para $f'(x)$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}f(x) &\equiv f'(x) - f(x) = [f'(x') - f(x)] - [f'(x') - f'(x)] \\ &= \delta f(x) - \partial_\mu f(x) \delta x^\mu, \end{aligned} \quad (1.14)$$

onde mais uma vez, são ignorados os termos de ordens superiores de δx^μ . Note que a variação $\bar{\delta}$ comuta com as derivadas parciais ∂_μ devido a variação ser feita no mesmo ponto do espaço-tempo. Então, usando essa propriedade podemos simplificar o termo da segunda linha da Eq. (1.12) por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [\phi'_i(x), \partial'_\mu \phi'_i(x)] - \mathcal{L} [\phi_i(x), \partial_\mu \phi_i(x)] &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \bar{\delta} \phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \bar{\delta} (\partial_\mu \phi_i) \\ &= \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \bar{\delta} \phi_i \right]. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Aqui, também usamos a Eq. (1.8) para obtermos a última igualdade da Eq. (1.15). Substituindo as Eqs. (1.13) e (1.15) na Eq. (1.12), obtemos a seguinte expressão:

$$\delta\mathcal{S} = \int_{\mathcal{R}} d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \bar{\delta}\phi_i + \mathcal{L}\delta x^\mu \right] = \int_{\mathcal{R}} d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \delta\phi_i - T^{\mu\nu}\delta x_\nu \right], \quad (1.16)$$

onde foi feito o uso da Eq. (1.14) para voltar para $\delta\phi_i$, e definimos:

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \partial^\nu\phi_i - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}, \quad (1.17)$$

que é chamado de tensor energia-momento. Podemos, ainda, definir a quadricorrente $\mathcal{J}^\mu$ como sendo:

$$\mathcal{J}^\mu \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \delta\phi_i - T^{\mu\nu}\delta x_\nu, \quad (1.18)$$

que por sua vez, a Eq. (1.16) reduz-se a:

$$\delta\mathcal{S} = \int_{\mathcal{R}} d^4x \partial_\mu \mathcal{J}^\mu. \quad (1.19)$$

A Eq. (1.19) é válida para variações arbitrárias das coordenadas e dos campos, desde que as equações de movimento sejam satisfeitas. Mesmo contendo uma divergência total, a expressão da Eq. (1.19) não necessariamente é nula, já que a corrente $\mathcal{J}^\mu$ na fronteira não necessariamente é nula.

No entanto, se $\mathcal{S}$ é invariante sob as transformações das Eqs. (1.3) e (1.9), obtemos a seguinte lei de conservação:

$$\partial_\mu \mathcal{J}^\mu = 0, \quad (1.20)$$

onde $\mathcal{J}^\mu$ é chamada de corrente de Noether. Consequentemente, a Eq. (1.20) implica em uma carga de Noether definida por:

$$\mathcal{Q} \equiv \int d^3\vec{x} \mathcal{J}^t, \quad (1.21)$$

que expandindo a Eq. (1.20), obtemos:

$$\frac{d\mathcal{Q}}{dt} = \int d^3\vec{x} \partial_t \mathcal{J}^t = - \int d^3\vec{x} \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{J}}. \quad (1.22)$$

Considerando que no infinito espacial a corrente se anula, a carga de Noether é conservada pela dinâmica do sistema, ou seja,

$$\frac{d\mathcal{Q}}{dt} = 0. \quad (1.23)$$

1.2 A EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON

Tendo visto os conceitos básicos da Teoria Clássica de Campos na seção 1.1, vamos agora apresentar os modelos teóricos clássicos e a quantização dos campos. Nesta seção, consideramos os campos escalares (campos associados com partículas relativísticas de *spin* 0), e a sua respectiva

quantização. Esse campo é descrito classicamente por uma quantidade invariante de Lorentz em cada ponto do espaço-tempo, ou seja,

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \implies \phi(x) \mapsto \phi'(x') = \phi(x). \quad (1.24)$$

A dinâmica do campo escalar real, $\phi(x)$, é especificada pela ação $\mathcal{S}$, dada por:

$$\mathcal{S} = \int_{\mathcal{R}} d^4x \mathcal{L}[\phi(x), \partial_\mu \phi(x)], \quad (1.25)$$

onde $\mathcal{L}$ é a densidade Lagrangiana de Klein-Gordon livre

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [\eta^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi) (\partial_\nu \phi) - m^2 \phi^2], \quad (1.26)$$

onde m é a massa do campo escalar e $\eta^{\mu\nu}$ é o tensor métrico de Minkowski. O campo conjugado, $\pi(x)$, é dado por:

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi)} = \dot{\phi}, \quad \dot{\phi} \equiv \partial_t \phi. \quad (1.27)$$

Através da equação de Euler-Lagrange, Eq. (1.8), obtemos a seguinte equação de movimento:

$$[\square + m^2] \phi(x) = 0, \quad (1.28)$$

onde $\square \equiv \partial^\mu \partial_\mu = \partial_t^2 - \vec{\nabla}^2$ é o operador D'Alembertiano. A Eq. (1.28) é conhecida como a equação de Klein-Gordon. Desenvolvendo a Eq. (1.28), obtemos:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = (\vec{\nabla}^2 - m^2) \phi. \quad (1.29)$$

Multiplicando a Eq. (1.29) por $\phi^\dagger$ e subtraindo o conjugado hermitiano do resultado, ficamos com:

$$\phi^\dagger \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \phi \frac{\partial^2 \phi^\dagger}{\partial t^2} = \phi^\dagger \vec{\nabla}^2 \phi - \phi \vec{\nabla}^2 \phi^\dagger. \quad (1.30)$$

Fazendo algumas manipulações algébricas e multiplicando ambos os lados por i , obtemos a equação de continuidade dada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0, \quad (1.31)$$

onde as densidades de carga (ou probabilidade) e corrente, respectivamente, são definidas por:

$$\rho \equiv i \left(\phi^\dagger \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^\dagger}{\partial t} \right), \quad \vec{j} \equiv -i \left(\phi^\dagger \vec{\nabla} \phi - \phi \vec{\nabla} \phi^\dagger \right). \quad (1.32)$$

Um fato curioso sobre a equação de Klein-Gordon é que sua densidade de probabilidade ρ da Eq. (1.32) não necessariamente positiva, dependendo dos valores do campo ϕ e de sua derivada temporal. Devido esse fato, uma interpretação física não foi trivial, contudo, a sua interpretação só foi possível com a teoria das antipartículas proposta por Feynman e Stueckelberg (FEYNMAN, 1986).

A solução da Eq. (1.28) pode ser obtida fazendo uma expansão em modos. Considerando soluções de ondas estacionárias com energias positivas $\mathcal{E} = \omega_{\vec{k}}$ e negativas $\mathcal{E} = -\omega_{\vec{k}}$, obtemos:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \phi^+(t, \vec{x}) + \phi^-(t, \vec{x}) \\ &= \sum_{\vec{k}} \left[a_{\vec{k}} \varphi_{\vec{k}}^+ (\vec{x}) e^{-i\omega_{\vec{k}} t} + a_{\vec{k}}^* \varphi_{\vec{k}}^- (\vec{x}) e^{i\omega_{\vec{k}} t} \right],\end{aligned}\quad (1.33)$$

onde $\vec{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z}$ é o vetor de onda. Para o caso de onda, obtemos:

$$\phi(x) = \sum_{\vec{k}} C_{\vec{k}} \left[a_{\vec{k}} e^{-ikx} + a_{\vec{k}}^* e^{ikx} \right], \quad (1.34)$$

com $kx = \omega_{\vec{k}} t - k_x x - k_y y - k_z z$, e a relação de dispersão, $\omega_{\vec{k}}$, é dada por:

$$\omega_{\vec{k}} = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}. \quad (1.35)$$

A solução da equação de Klein-Gordon, $\phi(x)$, é devidamente normalizada, ou seja, a constante $C_{\vec{k}}$ na Eq. (1.34) é obtida através da seguinte relação:

$$i \int d^3 \vec{x} \left[\phi_{\vec{k}'}^{\pm*} \left(\partial_t \phi_{\vec{k}}^{\pm} \right) - \left(\partial_t \phi_{\vec{k}'}^{\pm*} \right) \phi_{\vec{k}}^{\pm} \right] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}. \quad (1.36)$$

1.2.1 Quantização do campo escalar

Na quantização, o campo escalar real $\phi(x)$ se torna um operador Hermitiano, $\hat{\phi}^\dagger(x) = \hat{\phi}(x)$, satisfazendo às relações de comutação para tempos iguais (MANDL; SHAW, 2010):

$$\left[\hat{\phi}(t, \vec{x}), \partial_t \hat{\phi}(t, \vec{x}') \right] = i\delta(\vec{x} - \vec{x}'), \quad \left[\hat{\phi}(t, \vec{x}), \hat{\phi}(t, \vec{x}') \right] = \left[\partial_t \hat{\phi}(t, \vec{x}), \partial_t \hat{\phi}(t, \vec{x}') \right] = 0. \quad (1.37)$$

Isso é feito promovendo os coeficientes da expansão da Eq. (1.33), $a_{\vec{k}}$ e $a_{\vec{k}}^*$ aos operadores $\hat{a}_{\vec{k}}$ e $\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger$, respetivamente. Esses operadores são chamados de operadores de aniquilação, $\hat{a}_{\vec{k}}$, e de criação, $\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger$, que satisfazem as relações de comutação:

$$\left[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}'}^\dagger \right] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}, \quad \left[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}'} \right] = \left[\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger, \hat{a}_{\vec{k}'}^\dagger \right] = 0. \quad (1.38)$$

Dessa forma, ficamos com o seguinte campo escalar quântico:

$$\hat{\phi}(x) = \sum_{\vec{k}} \left[\hat{a}_{\vec{k}} \varphi_{\vec{k}}^+ (\vec{x}) e^{-i\omega_{\vec{k}} t} + \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \varphi_{\vec{k}}^- (\vec{x}) e^{i\omega_{\vec{k}} t} \right]. \quad (1.39)$$

Em particular, podemos definir o operador número de partículas (bósons), $\hat{\mathcal{N}}_{\vec{k}}$, em termos dos operadores de aniquilação e criação de partículas por:

$$\hat{\mathcal{N}}_{\vec{k}} = \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}}, \quad (1.40)$$

que tem como autovalores os números de ocupações:

$$n_{\vec{k}} = 0, 1, 2, \dots \quad (1.41)$$

Os operadores Hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}$, e momento $\hat{\vec{P}}$, do campo de Klein-Gordon, são obtidos usando as Eqs. (1.1) e (1.17):

$$\hat{\mathcal{H}} = \int d^3\vec{x} \hat{\mathcal{T}}^{tt} = \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \left[(\partial_t \hat{\phi})^2 + (\vec{\nabla} \hat{\phi})^2 + m^2 \hat{\phi}^2 \right] \quad (1.42)$$

e

$$\hat{\vec{P}} = \int d^3\vec{x} \hat{\mathcal{T}}^{ti} = - \int d^3\vec{x} (\partial_t \hat{\phi}) \vec{\nabla} \hat{\phi}. \quad (1.43)$$

Substituindo o operador de campo da Eq. (1.39) nas Eqs. (1.42) e (1.43), obtemos:

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} \left(\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right), \quad (1.44)$$

$$\hat{\vec{P}} = \sum_{\vec{k}} \vec{k} \left(\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right). \quad (1.45)$$

A partir da Eq. (1.44) vemos que o estado de menor energia, estado fundamental, do campo de Klein-Gordon é o estado de vácuo $|0\rangle$, em que não tem partículas presentes (todos $n_{\vec{k}} = 0$). Podemos também caracterizar este estado por:

$$\hat{a}_{\vec{k}} |0\rangle = 0, \quad \text{para todos os } \vec{k}'\text{s} \quad (1.46)$$

fornecendo uma energia de vácuo infinita, dada por:

$$\mathcal{E}_0 = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}}. \quad (1.47)$$

1.3 A EQUAÇÃO DE DIRAC

Além dos campos bosônicos, também podemos considerar outros tipos de campos, como os campos: fermiônico e de calibre. Nessa seção, vamos considerar um sistema de partículas que satisfazem ao princípio de exclusão de Pauli, conhecidas como férmions que têm *spin* semi-inteiro.

A dinâmica do campo fermiônico, $\Psi(x)$, é governada por uma ação da forma:

$$\mathcal{S} = \int d^4x \mathcal{L} [\Psi(x), \bar{\Psi}(x), \partial_\mu \Psi(x)], \quad (1.48)$$

onde $\mathcal{L}$ é agora a densidade Lagrangiana de Dirac dada por:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(x) [i\gamma^\mu \partial_\mu - m] \Psi(x). \quad (1.49)$$

Aqui, m é a massa do campo de Dirac e $\bar{\Psi}(x) \equiv \Psi(x)\gamma^0$ é o campo adjunto. O campo de Dirac se transforma sob as transformações de Lorentz, $x^\mu \mapsto \Lambda^\mu_\nu x^\nu$, da seguinte forma:

$$\Psi(x) \mapsto \Psi'(x') = \exp \left(-\frac{1}{8} \omega_{\mu\nu} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \right) \Psi(\Lambda^{-1}x), \quad (1.50)$$

onde $\omega_{\mu\nu}$ é um termo anti-simétrico, e γ^μ são as matrizes de Dirac 4×4 que satisfazem a seguinte álgebra:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (1.51)$$

Para as matrizes γ^μ , adotaremos a representação do Dirac (BJORKEN; DRELL, 1965), dada por:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{com } i = 1, 2 \text{ e } 3, \quad (1.52)$$

onde $\mathbb{I}$ é a matriz identidade 2×2 , e σ^i são as matrizes de Pauli.

Considerando a densidade Lagrangiana de Dirac da Eq. (1.49) e a equação de Euler-Lagrange da Eq. (1.8), obtemos:

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu - m] \Psi(x) = 0 \quad (1.53)$$

que é a conhecida equação de Dirac. É importante notar, que na densidade Lagrangiana da Eq. (1.49), bem como na equação de movimento da Eq. (1.53), o campo fermiônico $\Psi(x)$, é uma função de onda espinorial de 4 componentes, que têm componentes $\Psi_i(x)$, onde $i = 1, 2, 3$ e 4 . Temos ainda, que os campos conjugados de Ψ_i e $\bar{\Psi}_i$ são:

$$\pi_i(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}_i} = i\Psi_i^\dagger, \quad \bar{\pi}_i(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\Psi}}_i} = 0. \quad (1.54)$$

A partir da Eq. (1.53), tomando o conjugado hermitiano e multiplicando por γ^0 , obtemos a equação de Dirac adjunta:

$$i\partial_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu + m\bar{\Psi} = 0. \quad (1.55)$$

Multiplicando a Eq. (1.55) por Ψ , obtemos a seguinte equação de continuidade:

$$\partial_\mu (\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi) = \bar{\Psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \Psi) + (\partial_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi = 0, \quad (1.56)$$

ou ainda, temos

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (1.57)$$

onde j^μ aqui é a quadricorrente fermiônica dada por:

$$j^\mu \equiv (\bar{\Psi} \gamma^0 \Psi, \bar{\Psi} \vec{\gamma} \Psi) = (\rho, \vec{j}), \quad (1.58)$$

onde ρ é a densidade de probabilidade:

$$\rho = j^t = \bar{\Psi} \gamma^0 \Psi = \Psi^\dagger \Psi. \quad (1.59)$$

Sendo assim, a densidade de probabilidade, ρ , é positiva definida para todos os quatro possíveis estados dos espinores.

As soluções da Eq. (1.53) são obtidas de forma análoga às de Klein-Gordon. Fazendo uma expansão de $\Psi(x)$ em soluções de ondas estacionárias com energias positivas e negativas, obtemos:

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= \Psi^+(\vec{x}, t) + \Psi^-(\vec{x}, t) \\ &= \sum_{\vec{s}\vec{k}} \left[c_{s\vec{k}} \psi_{s\vec{k}}^+(\vec{x}) e^{-i\omega_{\vec{k}}t} + d_{s\vec{k}}^* \psi_{s\vec{k}}^-(\vec{x}) e^{i\omega_{\vec{k}}t} \right],\end{aligned}\quad (1.60)$$

enquanto que o seu campo conjugado, $\bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \gamma^0$, é dado por:

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}(x) &= \bar{\Psi}^+(\vec{x}, t) + \bar{\Psi}^-(\vec{x}, t) \\ &= \sum_{\vec{s}\vec{k}} \left[d_{s\vec{k}} \bar{\psi}_{s\vec{k}}^-(\vec{x}) e^{-i\omega_{\vec{k}}t} + c_{s\vec{k}}^* \bar{\psi}_{s\vec{k}}^+(\vec{x}) e^{i\omega_{\vec{k}}t} \right].\end{aligned}\quad (1.61)$$

Aqui, como para o campo bosônico temos o vetor de onda $\vec{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z}$. Porém, para que as soluções fermiônicas fiquem completamente caracterizadas, necessitamos introduzir um novo parâmetro, s , que caracteriza o *spin*.

Supondo que as soluções fermiônicas sejam soluções de onda livre, obtemos:

$$\Psi(x) = \sum_{\vec{s}\vec{k}} C_{s\vec{k}} \left[c_{s\vec{k}} e^{-ikx} + d_{s\vec{k}}^* e^{ikx} \right], \quad (1.62)$$

onde $kx = \omega_{\vec{k}}t - k_x x - k_y y - k_z z$, $s = 1, 2$ e a relação de dispersão dada por:

$$\omega_{\vec{k}} = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}. \quad (1.63)$$

Essas funções espinoriais, $\Psi(x)$, devem ser devidamente normalizadas, ou seja, a constante $C_{s\vec{k}}$ da Eq. (1.62) é determinada através da seguinte relação:

$$\int d^3\vec{x} \psi_{s\vec{k}}^{\pm\dagger} \psi_{s'\vec{k}'}^\pm = \delta_{ss'} \delta_{\vec{k}\vec{k}'}. \quad (1.64)$$

1.3.1 Quantização do campo fermiônico

Com o propósito de quantizar o campo fermiônico, vamos promover os coeficientes das expansões das Eqs. (1.60) e (1.61) à operadores. Porém, diferentemente do campo escalar, cujo operadores de criação e aniquilação satisfazem as relações de comutação, os coeficientes da expansão feita para o campo fermiônico, após promovidos à operadores, obedecem às relações de anticomutação (ou segunda quantização), dadas por:

$$\{\hat{c}_{s\vec{k}}, \hat{c}_{s'\vec{k}'}^\dagger\} = \{\hat{d}_{s\vec{k}}, \hat{d}_{s'\vec{k}'}^\dagger\} = \delta_{ss'} \delta_{\vec{k}\vec{k}'}, \quad (1.65)$$

enquanto que todas as outras relações de anticomutação são nulas, ou seja,

$$\{\hat{c}_{s\vec{k}}, \hat{c}_{s'\vec{k}'}\} = \{\hat{d}_{s\vec{k}}, \hat{d}_{s'\vec{k}'}\} = \dots = 0. \quad (1.66)$$

Realizadas essas considerações, os campos das Eqs. (1.60) e (1.61) são promovidos à operadores de campos da seguinte forma:

$$\hat{\Psi}(x) = \sum_{\vec{s}\vec{k}} \left[\hat{c}_{\vec{s}\vec{k}} \psi_{\vec{s}\vec{k}}^+(\vec{x}) e^{-i\omega_{\vec{k}}t} + \hat{d}_{\vec{s}\vec{k}}^\dagger \psi_{\vec{s}\vec{k}}^-(\vec{x}) e^{i\omega_{\vec{k}}t} \right], \quad (1.67)$$

e, conseqüentemente, o operador de campo adjunto é dado por:

$$\hat{\bar{\Psi}}(x) = \sum_{\vec{s}\vec{k}} \left[\hat{d}_{\vec{s}\vec{k}} \bar{\psi}_{\vec{s}\vec{k}}^-(\vec{x}) e^{-i\omega_{\vec{k}}t} + \hat{c}_{\vec{s}\vec{k}}^\dagger \bar{\psi}_{\vec{s}\vec{k}}^+(\vec{x}) e^{i\omega_{\vec{k}}t} \right]. \quad (1.68)$$

Os operadores $\hat{c}_{\vec{s}\vec{k}}$, $\hat{c}_{\vec{s}\vec{k}}^\dagger$ e $\hat{d}_{\vec{s}\vec{k}}$, $\hat{d}_{\vec{s}\vec{k}}^\dagger$ são interpretados como sendo operadores de aniquilação e criação de dois tipos de partículas fermiônicas (partícula e antipartícula), respectivamente. Ainda, podemos definir os operadores número de ocupação por:

$$\hat{\mathcal{N}}_{\vec{s}\vec{k}} = \hat{c}_{\vec{s}\vec{k}}^\dagger \hat{c}_{\vec{s}\vec{k}}, \quad \hat{\mathcal{N}}_{\vec{s}\vec{k}} = \hat{d}_{\vec{s}\vec{k}}^\dagger \hat{d}_{\vec{s}\vec{k}}. \quad (1.69)$$

Sendo assim, usando a Eq. (1.17) e os campos quânticos de Dirac das Eqs. (1.67) e (1.68), obtemos o operador Hamiltoniano:

$$\hat{\mathcal{H}} = \int d^3\vec{x} \hat{\mathcal{T}}^{tt} = \int d^3\vec{x} \hat{\bar{\Psi}}(x) \left[-i\gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} + m \right] \hat{\Psi}(x), \quad (1.70)$$

e o seguinte operador momento

$$\hat{\vec{\mathcal{P}}} = \int d^3\vec{x} \hat{\mathcal{T}}^{ti} = -i \int d^3\vec{x} \hat{\bar{\Psi}}^\dagger(x) \vec{\nabla} \hat{\Psi}(x). \quad (1.71)$$

Usando os operadores de campos das Eqs. (1.68) e (1.67), os correspondentes operadores Hamiltoniano e momento são, respectivamente:

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{\vec{s}\vec{k}} \omega_{\vec{s}\vec{k}} \left[\hat{c}_{\vec{s}\vec{k}}^\dagger \hat{c}_{\vec{s}\vec{k}} + \hat{d}_{\vec{s}\vec{k}}^\dagger \hat{d}_{\vec{s}\vec{k}} - 1 \right], \quad (1.72)$$

$$\hat{\vec{\mathcal{P}}} = \sum_{\vec{s}\vec{k}} \vec{k} \left[\hat{c}_{\vec{s}\vec{k}}^\dagger \hat{c}_{\vec{s}\vec{k}} + \hat{d}_{\vec{s}\vec{k}}^\dagger \hat{d}_{\vec{s}\vec{k}} \right]. \quad (1.73)$$

Portanto, o estado de vácuo, $|0\rangle$, é definido por:

$$c_{\vec{s}\vec{k}} |0\rangle = d_{\vec{s}\vec{k}} |0\rangle = 0, \quad (1.74)$$

de forma que, quando tomamos o valor esperado da Eq. (1.72), obtemos a energia do vácuo dada por:

$$\mathcal{E}_0 = \langle 0 | \hat{\mathcal{H}} | 0 \rangle = - \sum_{\vec{s}\vec{k}} \omega_{\vec{k}} = -2 \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}}. \quad (1.75)$$

Assim, podemos ver que a energia do vácuo fermiônico, assim como a energia do vácuo bosônico dado pela Eq. (1.47), é uma quantidade divergente.

1.3.2 Regularização e Renormalização

Em geral, as Teorias Quânticas de Campos são inerentemente por divergências, como acabamos de ver através das energias de ponto zero (vácuo) dos campos quânticos escalar da Eq. (1.47) e fermiônico da Eq. (1.75). No entanto, essas divergências aparentes podem ser tratadas consistentemente usando os procedimentos de regularização e renormalização.

O procedimento da regularização significa que as quantidades divergentes na teoria original são modificadas por um procedimento adequado, de tal forma que a partir da teoria regularizada as divergências são removidas após a renormalização. Existem vários procedimentos de regularização, para um estudo detalhado ver (MANDL; SHAW, 2010). Vale citar como exemplos de métodos: regularização de corte (*Cut-Off*) (BROWN, 1993), regularização dimendional (HOOFT, 1972) e regularização via soma de Abel-Plana (SAHARIAN, 2007).

Uma vez que foi realizado o procedimento de regularização, a renormalização pode ser realizada. O procedimento de renormalização consiste basicamente em subtrair a quantidade da teoria regularizada e a quantidade da teoria original. Por exemplo, considere a energia renormalizada do vácuo de um dado estado físico, dada por:

$$\mathcal{E}_{\text{ren}} = \mathcal{E}_{\text{reg}} - \mathcal{E}_0. \quad (1.76)$$

Na teoria original, na qual as quantidades são infinitas, após o procedimento de renormalização, elas se tornam quantidades finitas. Essas quantidades físicas (renormalizadas) são o que realmente medimos nos experimentos. O procedimento de regularização e renormalização ficará bem entendido no próximo capítulo, quando apresentaremos uma revisão do efeito Casimir.

1.4 MECÂNICA ESTATÍSTICA QUÂNTICA

Nesta seção, iremos fazer uma pequena revisão do *ensemble* grande canônico da Mecânica Estatística. Basicamente, vamos derivar as funções de distribuição quântica para um sistema de partículas não-interagentes, em equilíbrio térmico.

Um sistema aberto pode trocar calor e matéria com o meio em que está inserido, e, portanto, a energia e o número de partículas irão flutuar. Para um sistema aberto em equilíbrio térmico a uma temperatura T , fixamos a energia média $\mathcal{E}$, e o número médio de partículas n . Para obter a densidade de probabilidade no equilíbrio desse sistema, iremos fazer uso do método dos multiplicadores de Lagrange para extremizar a entropia de Gibbs sujeita as condições que serão dadas a seguir (MERZBACHER, 1998).

Primeiramente, vamos exigir que a normalização seja dada por:

$$\text{Tr}(\hat{\rho}) = 1, \quad (1.77)$$

onde $\hat{\rho}$ é o operador densidade (ou estatístico). Para as outras condições, lembramos que a média do ensemble para qualquer quantidade física, representada por um operador $\hat{A}$, pode ser

calculada utilizando a seguinte equação:

$$\langle \hat{A} \rangle = \text{Tr}(\hat{A}\hat{\rho}). \quad (1.78)$$

Deste modo, as outras condições que o sistema deve obedecer, é que tenha o valor médio da energia um valor fixo, de modo que

$$\mathcal{E} = \langle \hat{\mathcal{H}} \rangle = \text{Tr}(\hat{\mathcal{H}}\hat{\rho}), \quad (1.79)$$

onde $\hat{\mathcal{H}}$ é o operador Hamiltoniano do sistema físico. Finalmente, a última condição é que o número médio de partículas também tenha um valor fixo, dado por:

$$n = \langle \hat{\mathcal{N}} \rangle = \text{Tr}(\hat{\mathcal{N}}\hat{\rho}), \quad (1.80)$$

onde $\hat{\mathcal{N}}$ é o operador número de partículas.

Agora, podemos determinar o operador densidade, $\hat{\rho}$, que extremiza a entropia de Gibbs, que para sistemas quânticos é dada por:

$$S = -k_B \text{Tr}[\hat{\rho} \ln(\hat{\rho})], \quad (1.81)$$

sujeitas as condições dadas pelas Eqs. (1.77), (1.79) e (1.80). Na Eq. (1.81), temos que k_B é a constante de Boltzmann. A condição de extremização é:

$$\delta \left\{ \text{Tr} \left[\alpha_0 \hat{\rho} + \alpha_{\mathcal{E}} \hat{\mathcal{H}} \hat{\rho} + \alpha_n \hat{\mathcal{N}} \hat{\rho} - k_B \hat{\rho} \ln(\hat{\rho}) \right] \right\} = \text{Tr} \left[\left\{ (\alpha_0 - k_B) \mathbb{I} + \alpha_{\mathcal{E}} \hat{\mathcal{H}} + \alpha_n \hat{\mathcal{N}} - k_B \ln(\hat{\rho}) \right\} \delta \hat{\rho} \right] = 0, \quad (1.82)$$

onde α_0 , $\alpha_{\mathcal{E}}$ e α_n são os multiplicadores de Legendre. Como $\delta \hat{\rho}$ é arbitrário, temos:

$$(\alpha_0 - k_B) \mathbb{I} + \alpha_{\mathcal{E}} \hat{\mathcal{H}} + \alpha_n \hat{\mathcal{N}} - k_B \ln(\hat{\rho}) = 0. \quad (1.83)$$

Podemos usar, agora, a Eq. (1.83) e as Eqs. (1.77), (1.79) e (1.80) para determinar os multiplicadores de Legendre. A Eq. (1.77) nos permite introduzir a grande função de partição

$$Z(\alpha_{\mathcal{E}}, \alpha_n) = \exp \left(1 - \frac{\alpha_0}{k_B} \right) = \text{Tr} \left[\exp \left(\frac{\alpha_{\mathcal{E}}}{k_B} \hat{\mathcal{H}} + \frac{\alpha_n}{k_B} \hat{\mathcal{N}} \right) \right], \quad (1.84)$$

que relaciona α_0 , com $\alpha_{\mathcal{E}}$ e α_n . Para determinar $\alpha_{\mathcal{E}}$ e α_n multiplicamos a Eq. (1.84) por $\hat{\rho}$ e tomamos o traço e, com isso, obtemos:

$$-k_B \ln[Z(\alpha_{\mathcal{E}}, \alpha_n)] + \alpha_{\mathcal{E}} \mathcal{E} + \alpha_n n + S = 0. \quad (1.85)$$

Comparando a Eq. (1.85) com a equação fundamental para o grande potencial $\Omega = U - TS - \mu n$, podemos identificar que $\alpha_{\mathcal{E}} = -1/T$ e $\alpha_n = \mu/T$, sendo μ o potencial químico e

$$\Omega(T, \mu) = -k_B T \ln[Z(T, \mu)], \quad (1.86)$$

que é a equação fundamental para o grande potencial, sendo escrita em termos da grande função de partição, que é definida como:

$$Z(T, \mu) = e^{-\beta\Omega(T, \mu)} = \text{Tr} \left[e^{-\beta(\hat{\mathcal{H}} - \mu\hat{\mathcal{N}})} \right], \quad (1.87)$$

com $\beta = 1/k_B T$, onde T é a temperatura absoluta. Assim, o operador densidade pode ser escrito:

$$\hat{\rho} = e^{-\beta(\hat{\mathcal{H}} - \mu\hat{\mathcal{N}} - \Omega)} = \frac{e^{-\beta(\hat{\mathcal{H}} - \mu\hat{\mathcal{N}})}}{\text{Tr} \left[e^{-\beta(\hat{\mathcal{H}} - \mu\hat{\mathcal{N}})} \right]}. \quad (1.88)$$

Se considerarmos um sistema com partículas idênticas não interagentes, conhecido em Termodinâmica como um gás ideal generalizado, temos que a energia de uma partícula é $\mathcal{E}_i$. Logo, o operador hamiltoniano será: (MERZBACHER, 1998)

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_i \mathcal{E}_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i = \sum_i \mathcal{E}_i \hat{\mathcal{N}}_i. \quad (1.89)$$

Usando a Eq. (1.78) podemos encontrar o valor médio para o número de ocupação $\hat{\mathcal{N}}_i$. Com isso, temos:

$$\langle \hat{\mathcal{N}}_i \rangle = \langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \rangle = \frac{\text{Tr} \left[e^{-\beta(\hat{\mathcal{H}} - \mu\hat{\mathcal{N}})} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \right]}{Z(T, \mu)}. \quad (1.90)$$

Usando a seguinte relação

$$e^{\hat{\mathcal{A}}} \hat{\mathcal{B}} e^{-\hat{\mathcal{A}}} = e^{\gamma} \hat{\mathcal{B}}, \quad (1.91)$$

onde γ é uma constante definida por $[\hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathcal{B}}] = \gamma \hat{\mathcal{B}}$, encontramos:

$$\text{Tr} \left[e^{-\beta(\hat{\mathcal{H}} - \mu\hat{\mathcal{N}})} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \right] = e^{-\beta(\mathcal{E}_i - \mu)} \text{Tr} \left[e^{-\beta(\hat{\mathcal{H}} - \mu\hat{\mathcal{N}})} \hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger \right]. \quad (1.92)$$

Se usarmos as relações de comutação para bósons ou anti-comutação para férmions, obtemos

$$\text{Tr} \left[e^{-\beta(\hat{\mathcal{H}} - \mu\hat{\mathcal{N}})} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \right] = e^{-\beta(\mathcal{E}_i - \mu)} \text{Tr} \left[e^{-\beta(\hat{\mathcal{H}} - \mu\hat{\mathcal{N}})} \left(1 \mp \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \right) \right], \quad (1.93)$$

onde o sinal superior, $(-)$, é usado para bósons e o inferior, $(+)$, usado para férmions. Combinando a Eq. (1.93) com a Eq. (1.88), encontramos:

$$\langle \hat{\mathcal{N}}_i \rangle = \langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\mathcal{E}_i - \mu)} \mp 1}. \quad (1.94)$$

Como $\beta > 0$, segue que para sistemas bosônicos devemos ter sempre $\mu < \mathcal{E}_i$ para todos os níveis, e conseqüentemente,

$$\mu \leq \mathcal{E}_0, \quad (1.95)$$

sendo $\mathcal{E}_0$ a energia do estado fundamental. Entretanto, para os sistemas fermiônicos não existe restrição para o potencial químico.

Neste capítulo, apresentamos uma breve revisão da Teoria Quântica de Campos e da Mecânica Estatística Quântica. Esses conhecimentos foram de fundamental importância para que pudéssemos desenvolver o nosso trabalho.

Parte II

O efeito Casimir e a violação da simetria de Lorentz

2 O EFEITO CASIMIR

Nos Laboratórios Philips, localizados na Holanda, nos anos de 1940 foram realizados alguns experimentos com suspensões¹ de pó de quartzo utilizado na produção industrial. Os resultados dos experimentos sugeriam que a teoria usada na época para a estabilidade dessas suspensões parecia não estar completamente correta e que a interação entre as partículas nas suspensões poderia diminuir de intensidade para grandes distâncias mais rapidamente que se pensava. Essa incompatibilidade dos resultados experimentais com a teoria foi atribuído ao efeito da velocidade finita de propagação da interação eletromagnética entre os átomos.

Com essa suspeita em mente, H. Casimir e D. Polder reconsideraram a interação de van der Waals de dispersão, mostrando que a energia de interação interatômica diminuía com o inverso da sexta potência da distância entre os átomos, quando estes estavam bem próximos e com o inverso da sétima potência quando à grande distâncias (CASIMIR; POLDER, 1948). Foi então que repensando o problema, Casimir encontrou uma maneira diferente e notável de tratá-lo. Ele mostrou que o resultado obtido juntamente com Polder poderia ser recalculado usando as oscilações quânticas do vácuo eletromagnético. O nosso interesse nesse capítulo será entender um pouco melhor a idéia de Casimir, bem como os precedimentos necessários para obter a força de Casimir.

2.1 UMA VISÃO GERAL DO FENÔMENO

Em sua forma mais intuitiva, o conceito de vácuo se refere apenas a um espaço completamente vazio. Mesmo em teorias como a Mecânica Clássica e o Eletromagnetismo Clássico (Maxwell), esse conceito de vácuo permanece válido, já que o vácuo é descrito como o espaço ausente de matéria e radiação. Existe apenas uma extensão desse conceito no sentido de que, assim como um meio material é o substrato para a propagação de ondas mecânicas, o vácuo agora é um meio no qual as ondas eletromagnéticas se propagam. Ainda assim, o vácuo é um meio inerte e incapaz de responder a qualquer estímulo externo.

Já na Eletrodinâmica Quântica, que descreve a interação de fótons, elétrons e pósitrons, o vácuo é definido como um estado quântico de mais baixa energia, estado este que flutua continuamente por meio da criação e aniquilação de partículas virtuais. Essas partículas virtuais vivem em uma escala de espaço e tempo muito pequena que está de acordo com o princípio de incerteza de Heisenberg e, durante suas curtas existências, podem interagir entre si. Por exemplo, elétrons e pósitrons virtuais podem absorver e emitir fótons virtuais, fótons virtuais podem se aniquilar em pares elétron-pósitron virtuais e pares elétron-pósitron virtuais podem

¹ Suspensões são sistemas formados por grandes agregados de átomos, íons ou moléculas que formam "partículas" de tamanhos superiores a 100 nanômetros dispersas em uma outra substância, por exemplo, em água.

se aniquilar em fótons virtuais, como mostra a Fig. 1. Essas flutuações quânticas enriquecem o vácuo tornando-o um meio ativo e complexo, bem distinto do vazio completo descrito pela teoria clássica.

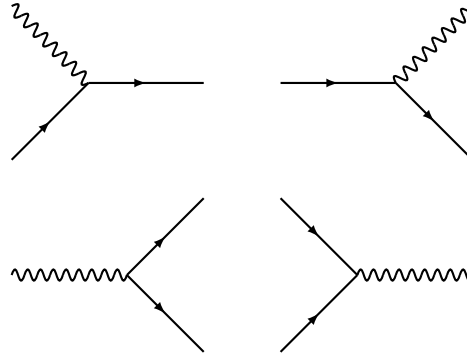


Figura 1 – Interações básicas entre partículas virtuais, onde os segmentos retilíneos representam elétrons ou pósitrons virtuais e as linhas ondulatórias representam os fótons virtuais.

As partículas virtuais além de interagir entre si, também podem interagir com agentes externos. Os campos eletromagnéticos e corpos macroscópicos são exemplos desses agentes externos. Estaremos interessados em situações em que a presença de corpos macroscópicos é descrita por condições de contorno, de modo que, o vácuo quântico sentirá e responderá às condições de contorno. Assim, o vácuo descrito pela Eletrodinâmica Quântica se comporta como um meio material capaz de se polarizar e magnetizar e até mesmo de se desestabilizar, decaindo em pares de partículas reais carregadas. Dessa forma, podemos atribuir ao vácuo quântico a existência de vários fenômenos físicos importantes como a emissão espontânea dos átomos (DIRAC, 1927b; MILONNI, 1984), o momento magnético anômalo do elétron, o deslocamento Lamb (JR; RETHERFORD, 1947; JR; RETHERFORD, 1952; BETHE, 1947; WEINBERG, 1995; ITZYKSON; ZUBER, 2012), as forças de van der Waals dispersivas (LONDON, 1930) e, em especial, o objeto de nosso maior interesse, o efeito Casimir (CASIMIR, 1948).

Para entendermos o efeito Casimir, vamos considerar o sistema formado por duas placas neutras e perfeitamente condutoras, que estão localizadas no vácuo. Vamos considerar, ainda, que as placas estejam paralelas e separadas por uma distância a , em que essa distância é muito menor que as dimensões das placas ($a \ll L$), conforme mostra a Fig. 2. Não se espera medir forças sobre as placas já que não há interação eletrostática entre elas e, além disso, o vácuo clássico é um meio incapaz de exercer forças de pressão. Contudo, ao considerarmos a natureza quântica do vácuo, esse fato pode mudar. De fato, a simples presença das placas pode afetar as flutuações do vácuo do campo eletromagnético e, dessa forma, podemos esperar uma interação desse vácuo e as placas. Baseado nisso, em 1948 Casimir previu que, ao contrário do esperado classicamente, as placas sofreriam uma força de atração (CASIMIR, 1948). Esse é então um fenômeno intrinsecamente quântico e, é chamado de efeito Casimir em homenagem ao seu descobridor Hendrik Brugt Gerhard Casimir.

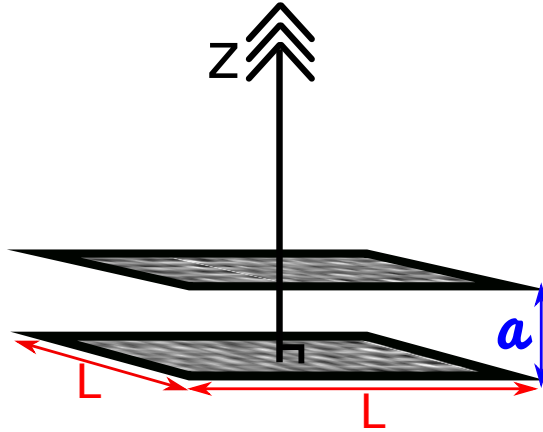


Figura 2 – Placas paralelas e perfeitamente condutoras.

A força de Casimir pode ser calculada utilizando o conceito de energia de vácuo do campo eletromagnético, a qual inclui apenas as flutuações provenientes dos fótons virtuais. Essa energia é uma quantidade infinita e, na ausência de campos externos e condições de contorno, constitui-se apenas de um termo espúrio, o qual pode ser eliminado redefinindo-se a escala de energia. No entanto, isso não acontece na presença das placas condutoras. De fato, as condições de contorno, impostas pelas placas, afetam a energia do vácuo do campo eletromagnético fazendo com que ela adquira uma dependência com a distância que separa as placas, a . Assim as energias de duas configurações distintas, $a = a_1$ e $a = a_2$, serão diferentes, de forma que a energia de ponto zero não pode ser simplesmente descartada por uma redefinição da escala de energia.

Usando-se o conceito de renormalização, pode-se mostrar que, apesar das energias das duas configurações serem infinitas, a diferença entre elas é uma quantidade finita. Essa variação de energia está obviamente associada ao trabalho de uma força ao deslocarmos as placas entre as duas configurações. Essa força é, por definição, a força de Casimir e é dada por:

$$\mathcal{F}_C(a) = -\frac{\pi^2 A}{240a^4}, \quad (2.1)$$

onde $A = L^2$ é a área das placas e o sinal negativo expressa o fato da força entre as placas ser atrativa. A força de Casimir é um efeito quântico e relativístico, além disso, não depende de outras constantes da Eletrodinâmica Quântica como a carga e a massa do elétron. Isso ocorre pois, o cálculo da força desconsidera a existência do campo fermiônico, considerando apenas a influência de condições de contorno sobre o campo eletromagnético livre. No entanto, as condições de contorno utilizadas nesse cálculo são as de um condutor ideal, o que é uma simplificação muito forte para simular a interação entre o campo eletromagnético e placas condutoras reais. Dessa forma, se utilizássemos um modelo mais realista para descrever as placas, como um modelo de plasma de elétrons, por exemplo, obteríamos uma dependência da força de Casimir com as constantes constitutivas do material das placas e com a massa e carga do

elétron (a expressão da Eq. (2.1) reproduziria apenas um caso limite da expressão real quando, por exemplo, tomássemos a condutividade das placas como infinita).

A novidade introduzida pelo efeito Casimir não era o fato de dois corpos neutros sofrerem atração. De fato, em 1930, London ([LONDON, 1930](#)) explicou por meio da Mecânica Quântica as forças de van der Waals dispersivas (não-retardadas), isto é, a força de atração entre duas moléculas neutras, porém polarizáveis. O trabalho de Casimir foi inovador porque explicou a força entre corpos neutros a partir das flutuações quânticas do vácuo do campo eletromagnético no qual estão imersos, e não a partir das flutuações quânticas dipolares das cargas dos próprios corpos neutros.

Para se ter uma ideia quantitativa da força de Casimir, se A for dada em cm^2 e a em μm , a força em dina ($= 10^{-5}N$) será dada por:

$$|\mathcal{F}_C(a)| / dyn = 0.013 \frac{A/cm^2}{(a/\mu m)^4}, \quad (2.2)$$

isto é, para placas de $1cm^2$ de área e distantes $1\mu m$, a força de atração entre as placas é de $0.013dyn$. Por exigir distâncias tão pequenas, sua verificação experimental não é trivial. O primeiro experimento realizado com o intuito de medir a força de Casimir foi feito por M. J. Sparnaay em 1958 ([SPARNAAY, 1958](#)). Contudo, devido a pouca precisão experimental, esse experimento não foi capaz de comprovar o efeito Casimir. O experimento apenas comprovou a existência de uma força e que os resultados não eram incompatíveis com o resultado teórico de Casimir, Eq. (2.1). Muitos outros experimentos foram realizados posteriormente, contudo exigiram fórmulas teóricas que considerassem efeitos de curvatura e rugosidade das placas, condutividade finita dos metais e efeitos de temperatura. Os resultados mais precisos, com acordo de cerca de 1%, exigiram técnicas modernas como microscopia de força atômica ([DERIAGIN; ABRIKOSOVA, 1957](#); [KITCHENER; PROSSER; SURNAME, 1957](#)).

Em teoria, o efeito Casimir não está restrito somente ao campo eletromagnético. Esse efeito pode ocorrer para qualquer campo quântico relativístico, como o campo escalar e o fermiônico, sob diferentes condições de contorno. Por exemplo, o modelo de sacola MIT ([JOHNSON, 1975](#)), desenvolvido nos anos 70, simulava o confinamento de quarks em hádrons por meio de um campo fermiônico sujeito a condições de contorno confinantes em uma esfera com o tamanho do hádron. Esse modelo previa que a energia de Casimir, isto é, a energia associada ao confinamento, correspondia a aproximadamente 9% da massa do hádron. Apesar da generalização do efeito Casimir para outros campos, apenas o caso eletromagnético possui verificação experimental direta. Uma revisão abrangente sobre o efeito Casimir pode ser encontrada em ([MOSTEPANENKO; TRUNOV, 1997](#)).

De forma geral, qualquer sistema físico encontra-se circundado por superfícies metálicas, dielétricas, permeáveis ou outras. Dessa forma, é de se esperar que o efeito Casimir tenha relevância em vários sistemas. De fato, apesar de ter se originado em Eletrodinâmica Quântica, o efeito Casimir tem aplicação em diversas outras áreas. Em Matéria Condensada, na interação

entre fronteiras muito próximas, propriedades de filmes finos, cálculos de tensão superficial e calor latente. Em Cosmologia (KHODABAKHSHI; SHOJAI, 2017), desempenha um papel fundamental em modelos inflacionários do Universo. Em Física Matemática, proporcionou o desenvolvimento de técnicas de regularização e renormalização, por exemplos, os métodos da função zeta de Riemann, corte e fórmula de soma de Abel-Plana. Em Teoria Quântica de Campos, o efeito Casimir é usado na explicação da compactificação espontânea de dimensões espaciais extras em modelos de Kaluza-Klein (TEO, 2009). Em Nanotecnologia, já se menciona a necessidade de levá-lo em conta nos projetos de nanodispositivos eletrônicos. A referência (BORDAG; MOHIDEEN; MOSTEPANENKO, 2001) contém maiores detalhes sobre essas aplicações.

2.2 CÁLCULO DA FORÇA DE CASIMIR

2.2.1 A energia do vácuo

Para calcular a força de Casimir devemos primeiramente considerar alguns conceitos, como o estado de vácuo quântico e a energia de ponto zero para o campo eletromagnético. Assim, consideremos as equações de Maxwell na ausência de matéria dadas por:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}, t) &= 0, & \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}, t) &= \frac{\partial \vec{E}(\vec{x}, t)}{\partial t}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}, t) &= 0, & \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}, t) &= -\frac{\partial \vec{B}(\vec{x}, t)}{\partial t}.\end{aligned}\tag{2.3}$$

No entanto, os campos elétrico $\vec{E}(\vec{x}, t)$ e magnético $\vec{B}(\vec{x}, t)$ podem ser derivados a partir de um único campo, o potencial vetor $\vec{A}(\vec{x}, t)$ por:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = -\frac{\partial \vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial t} \quad \text{e} \quad \vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}, t),\tag{2.4}$$

que satisfaz à equação de onda no calibre de Coulomb,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right) \vec{A}(\vec{x}, t) = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) = 0.\tag{2.5}$$

A quantização do campo eletromagnético (MANDL; SHAW, 2010) é feita considerando que o potencial vetor é um operador Hermitiano, $\hat{A}(\vec{x}, t) = \hat{A}^\dagger(\vec{x}, t)$, satisfazendo as relações de comutação canônicas a tempos iguais

$$\left[\hat{A}_i(\vec{x}, t), \partial_t \hat{A}_j(\vec{x}', t) \right] = i\delta_{ij}(\vec{x} - \vec{x}'), \quad \left[\hat{A}_i(\vec{x}, t), \hat{A}_j(\vec{x}', t) \right] = 0.\tag{2.6}$$

Com isso, a solução geral das Eqs. (2.5) pode ser dada como uma expansão em soluções estacionárias,

$$\hat{A}(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{k}} \left[\hat{a}_{\vec{k}} \vec{\chi}_{\vec{k}}(\vec{x}) e^{-i\omega_{\vec{k}} t} + \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \vec{\chi}_{\vec{k}}^\dagger(\vec{x}) e^{i\omega_{\vec{k}} t} \right],\tag{2.7}$$

onde os modos normais $\vec{\chi}_{\vec{k}}(\vec{x})$ devem satisfazer as equações

$$\left(\vec{\nabla}^2 + \omega_{\vec{k}}^2\right) \vec{\chi}_{\vec{k}}(\vec{x}) = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{\chi}_{\vec{k}}(\vec{x}) = 0, \quad (2.8)$$

e devem ser normalizados através da seguinte relação:

$$\int d^3\vec{x} \vec{\chi}_{\vec{k}}^\dagger(\vec{x}) \cdot \vec{\chi}_{\vec{k}'}(\vec{x}) = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}. \quad (2.9)$$

Consequentemente, os operadores $\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger$ são operadores de aniquilação e criação de partículas, respectivamente, satisfazendo as relações de comutação

$$\left[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}'}^\dagger\right] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}, \quad \left[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}'}\right] = 0. \quad (2.10)$$

Aqui, o parâmetro $\vec{k}$ representa o conjunto de números quânticos discretos ou contínuos caracterizando cada modo normal do campo quântico eletromagnético.

O operador Hamiltoniano do campo eletromagnético é dado a partir dos campos quânticos elétrico e magnético como:

$$\hat{\mathcal{H}} = \int d^3\vec{x} \frac{\hat{\vec{E}}(\vec{x}, t)^2 + \hat{\vec{B}}(\vec{x}, t)^2}{2}. \quad (2.11)$$

Usando a solução Eq. (2.7) nas Eqs. (2.4) e em seguida substituindo na Eq. (2.11), podemos reescrever $\hat{\mathcal{H}}$ em função de operadores da forma:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} \left(\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}} + \hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \right). \quad (2.12)$$

Ou ainda, com o auxílio das relações de comutação da Eq. (2.10), obtemos:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} \left[2\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}} + \mathbb{I} \right]. \quad (2.13)$$

O vácuo do campo eletromagnético quantizado é definido como o estado quântico de mais baixa energia, isto é, o autoestado do operador Hamiltoniano da Eq. (2.13) de menor autovalor, $|0\rangle$. O estado de vácuo $|0\rangle$, é definido de forma que $\hat{a}_{\vec{k}}|0\rangle = 0$, e é devidamente normalizado, ou seja, $\langle 0|0\rangle = 1$. Portanto, tomando o valor esperado no vácuo da Eq. (2.13), a energia do vácuo do campo eletromagnético é dada por:

$$\mathcal{E}_0 = \langle 0|\hat{\mathcal{H}}|0\rangle = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}}. \quad (2.14)$$

Assim, podemos ver claramente que a energia de ponto zero do campo eletromagnético $\mathcal{E}_0$, é dada por uma soma em todos os modos $\vec{k}$ das relações de dispersões $\omega_{\vec{k}}$, sendo assim, uma quantidade infinita.

2.2.2 Renormalização e a energia de Casimir

Queremos analisar a energia do vácuo quântico eletromagnético confinada entre duas placas paralelas separadas por uma distância a e, determinar a diferença de energia para duas configurações distintas, $a = a_1$ e $a = a_2$. No entanto, a energia de ponto zero do campo quântico eletromagnético dada na Eq. (2.14), é uma quantidade divergente. Isso acontece porque soma-se sobre um número infinito de modos $\vec{k}$.

Para que possamos manipular tal expressão e extrair alguma quantidade física, é necessário regularizar o somatório. O processo de regularização de uma expressão divergente, consiste em torná-la artificialmente finita e dependente de algum parâmetro regularizador ϵ que, em um certo limite, a expressão original é recuperada. Existem vários métodos de regularização²: corte, Pauli-Villars e Regularização Dimensional (MANDL; SHAW, 2010). Aqui, a regularização da Eq. (2.14) na região entre as placas será feita via o método de corte. Esse método consiste em inserir um fator de corte exponencial com um parâmetro regularizador ϵ , de tal forma que fiquemos com

$$\mathcal{E}_0(\epsilon, a) = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}}(a) e^{-\epsilon \omega_{\vec{k}}(a)}, \quad (2.15)$$

onde $\vec{k}$ representa apenas os modos internos às placas e $\omega_{\vec{k}}(a)$ as frequências desses modos.

Ocorre porém que, quando alteramos a posição das placas, alteramos não só a energia dos modos internos como também a dos modos externos. Para quantificarmos a contribuição dos modos externos, tornaremos o universo artificialmente finito introduzindo uma terceira placa paralela às demais, a uma distância $\ell \gg a$, conforme mostra a Fig. 3. Por simplicidade, supomos

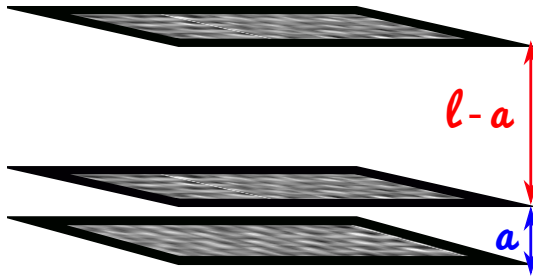


Figura 3 – Modelo para o universo, constituído de duas placas paralelas e infinitas, separadas por uma distância a , e uma terceira placa a uma distância $\ell \gg a$.

que apenas a placa do meio possa se mover. Então, a energia de ponto zero associada aos modos externos será dada simplesmente por $\mathcal{E}_0(\epsilon, \ell - a)$, de modo que a energia regularizada do sistema será:

$$\mathcal{E}_0^{\text{reg}}(\epsilon, \ell, a) = \mathcal{E}_0(\epsilon, a) + \mathcal{E}_0(\epsilon, \ell - a). \quad (2.16)$$

² O método de soma de Abel-Plana, ver (SAHARIAN, 2006).

Normalmente, sempre podemos desenvolver a Eq. (2.15) da forma (MOSTEPANENKO; TRUNOV, 1997):

$$\mathcal{E}_0(\epsilon, a) = aAF(\epsilon) + AG(\epsilon) + AH(\epsilon, a), \quad (2.17)$$

onde a função $H(\epsilon, a)$ anula-se, a medida que separamos as placas e, mantém-se finita quando o parâmetro regularizador vai a zero, ou seja,

$$H(\epsilon, a \mapsto \infty) \mapsto 0, \quad H(\epsilon \mapsto 0, a) \mapsto H(0, a). \quad (2.18)$$

Já as funções $F(\epsilon)$ e $G(\epsilon)$ divergem ao retirarmos o parâmetro regularizador, o que é consistente com o que ocorre com a energia do vácuo eletromagnético. A energia regularizada do sistema será então dada por:

$$\mathcal{E}_0^{\text{reg}}(\epsilon, \ell, a) = \ell AF(\epsilon) + 2AG(\epsilon) + AH(\epsilon, a) + AH(\epsilon, \ell - a). \quad (2.19)$$

Portanto, a diferença de energia do sistema na configuração $a = a_2$ e na configuração $a = a_1$, é dada tomando os seguintes limites:

$$\lim_{\substack{\epsilon \mapsto 0 \\ \ell \mapsto \infty}} [\mathcal{E}_0^{\text{reg}}(\epsilon, \ell, a_2) - \mathcal{E}_0^{\text{reg}}(\epsilon, \ell, a_1)] = AH(0, a_2) - AH(0, a_1). \quad (2.20)$$

Isso nos mostra que, apesar de ambas as configurações terem energias infinitas, a diferença entre elas é uma quantidade finita. É importante ressaltar que, a função $H(0, a)$ não depende do tipo de regularização adotado. A Eq. (2.20), introduz, então uma quantidade física que mede a energia de uma dada configuração das placas, a qual denominaremos energia de Casimir, dada por:

$$\mathcal{E}_C(a) \equiv AH(0, a). \quad (2.21)$$

Assim, para a obtenção da energia de Casimir confinada entre duas placas devemos, primeiramente, desenvolver a energia do vácuo, regularizando e decompondo na forma da Eq. (2.17). Em seguida, devemos eliminar os termos proporcionais a área das placas, $AG(\epsilon)$, e ao volume da região entre elas, $aAF(\epsilon)$. Por fim, devemos tomar o parâmetro da regularização igual a zero. Esse procedimento feito para obter a energia de Casimir, é o que conhecemos por renormalização.

Podemos nos perguntar, por que os termos de área e de volume não contribuem para a diferença de energia das configurações? Isso se dá, devido o termo de volume $aAF(\epsilon)$ possuir densidade de energia independente da distância entre as placas, $F(\epsilon)$, o que indica que esse termo não é afetado pelas condições de contorno. Portanto, ele representa a parcela de energia do vácuo desconfinado correspondente à região entre as placas e, portanto, não corresponde a qualquer contribuição da condição de contorno à energia de ponto zero. Já o termo de área, $AG(\epsilon)$, este independe da distância entre as placas, de forma que permanece inalterado, mesmo se afastarmos infinitamente as placas. Esse termo parece não estar armazenado nas placas, correspondendo a uma auto-energia delas, e será eliminado na diferença de quaisquer duas configurações. Obviamente a variação de energia das duas configurações está associada ao trabalho de uma força,

$$\mathcal{E}_C(a_2) - \mathcal{E}_C(a_1) = - \int_{a_1}^{a_2} \mathcal{F}_C(a) da, \quad (2.22)$$

a qual denominamos força de Casimir. Essa força será, então, dada por:

$$\mathcal{F}_C(a) = -\frac{d\mathcal{E}_C(a)}{da}, \quad (2.23)$$

e fisicamente corresponderá a uma força de interação efetiva entre as placas. Na verdade, ela corresponde a uma força de pressão exercida pelo vácuo quântico em resposta às condições de contorno impostas pelas placas.

2.3 DERIVAÇÃO DA FORÇA DE CASIMIR

Superfícies perfeitamente condutoras geram condições de contorno sobre o campo eletromagnético, de forma que, na superfície condutora S , o campo elétrico deve estar orientado na direção normal da superfície, $\vec{n}$, enquanto que o campo magnético deve estar orientado em uma direção paralela,

$$\vec{n} \times \hat{\vec{E}}(\vec{x}, t)|_S = 0, \quad \vec{n} \cdot \hat{\vec{B}}(\vec{x}, t)|_S = 0. \quad (2.24)$$

No caso em questão aqui, as fronteiras condutoras constituem-se de placas paralelas, cada uma de área A , e com distância a entre si, as quais localizaremos nos planos $z = 0$ e $z = a$. Por simplicidade supomos as placas quadradas e, como já mencionado, à pequenas separações ($a \ll L$), para evitar efeitos de borda. Assim, de acordo com as Eqs. (2.24), o campo eletromagnético deve satisfazer as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} \hat{z} \times \hat{\vec{E}}(\vec{x}, t)|_{z=0} &= 0, & \hat{z} \cdot \hat{\vec{B}}(\vec{x}, t)|_{z=0} &= 0, \\ \hat{z} \times \hat{\vec{E}}(\vec{x}, t)|_{z=a} &= 0, & \hat{z} \cdot \hat{\vec{B}}(\vec{x}, t)|_{z=a} &= 0. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Estas condições de contorno sobre o campo elétrico e magnético serão satisfeitas se o potencial vetor satisfizer as condições de contorno

$$\hat{z} \times \hat{\vec{A}}(\vec{x}, t)|_{z=0} = 0, \quad \hat{z} \times \hat{\vec{A}}(\vec{x}, t)|_{z=a} = 0, \quad (2.26)$$

consequentemente, se refletirão sobre os modos normais do campo eletromagnético,

$$\hat{z} \times \hat{\vec{\chi}}_{\vec{k}}(\vec{x})|_{z=0} = 0, \quad \hat{z} \times \hat{\vec{\chi}}_{\vec{k}}(\vec{x})|_{z=a} = 0. \quad (2.27)$$

Esse conjunto de modos normais, nesse caso, são as soluções das Eq. (2.8) que são devidamente normalizadas através da Eq. (2.9). Essas soluções se dividem em dois tipos, os modos transversos elétrico dado por:

$$\vec{\chi}_n^{\text{TE}}(\vec{k}, z, \vec{r}) = \frac{\hat{z} \times \vec{k}}{|\vec{k}|} \sqrt{\frac{2}{a}} \text{sen}(k_n z) \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{2\pi}, \quad (2.28)$$

e os modos transversos magnético, como sendo:

$$\vec{\chi}_n^{\text{TM}}(\vec{k}, z, \vec{r}) = \sqrt{\frac{2}{a}} \frac{1}{\omega_{\vec{k}, n}} \left[\hat{z} |\vec{k}| \cos(k_n z) - ik_n \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \text{sen}(k_n z) \right] \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{2\pi}, \quad (2.29)$$

onde $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ representa a componente paralela às placas do vetor posição. O número quântico $\vec{k} = k_x\hat{i} + k_y\hat{j}$ representa a componente paralela às placas do vetor de onda do campo eletromagnético e possui espectro contínuo. Quanto ao número quântico k_n , este representa a projeção perpendicular às placas do vetor de onda do campo eletromagnético. Esse número quântico é afetado pelas condições de contorno, de forma que seu espectro fica discretizado, $k_n = n\pi/a$, onde $n = 1, 2, 3, \dots$ para os modos TE e $n = 0, 1, 2, \dots$ para os modos TM. Os $\omega_{\vec{k},n}$ são as frequências de cada modo e são dadas por:

$$\omega_{\vec{k},n} = \sqrt{\vec{k}^2 + k_n^2}. \quad (2.30)$$

De posse dessas frequências e do conjunto completo de números quânticos que caracterizam cada modo do campo eletromagnético, podemos determinar a energia de ponto zero do sistema. Conforme a Eq. (2.14), devemos somar sobre todo o espectro discreto de números quânticos e integrar sobre todo o espectro contínuo das frequências de cada modo. Assim, devemos somar sobre $s = \text{TE, TM}$, sobre n e integrar em $\vec{k}$, resultando na seguinte energia do vácuo:

$$\mathcal{E}_0 = \frac{1}{2} \int d^2\vec{k} \sum_{s=\text{TE, TM}} \sum_{n=(0)}^{\infty} \omega_{\vec{k},n} \delta(\vec{0}). \quad (2.31)$$

A notação $n = (0)$ indica que o termo para $n = 0$ deve ser multiplicado por $1/2$ para corrigir a degenerescência devido ao somatório em s . Já a notação $\delta(\vec{0})$, representa a função delta de Dirac, $\delta(\vec{0}) = \delta(\vec{k})|_{\vec{k}=0}$. Fazendo uma expansão de Fourier da delta de Dirac, temos:

$$\delta(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\vec{r} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad \xrightarrow{\vec{k}=0} \quad \delta(\vec{0}) = \frac{A}{(2\pi)^2}. \quad (2.32)$$

Assim a energia do vácuo do campo eletromagnético pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\mathcal{E}_0^{\text{reg}}(\epsilon, a) = A \int \frac{d^2\vec{k}}{(2\pi)^2} \sum_{n=(0)}^{\infty} \sqrt{\vec{k}^2 + k_n^2} e^{-\epsilon\sqrt{\vec{k}^2 + k_n^2}}, \quad (2.33)$$

onde $k_n = n\pi/a$. Note que, conforme a Eq. (2.15), inserimos um fator de corte exponencial regularizador. Integrando a parte angular de $\vec{k}$ e fazendo a mudança de variável $u = \sqrt{\vec{k}^2 + k_n^2}$, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0^{\text{reg}}(\epsilon, a) &= \frac{A}{2\pi} \sum_{n=(0)}^{\infty} \int_{k_n}^{\infty} du u^2 e^{-\epsilon u} = \frac{A}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial \epsilon^2} \sum_{n=(0)}^{\infty} \int_{k_n}^{\infty} du e^{-\epsilon u} \\ &= \frac{A}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial \epsilon^2} \left(\frac{1}{\epsilon} \sum_{n=(0)}^{\infty} e^{-\epsilon k_n} \right). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Para desenvolver o somatório na Eq. (2.34), vamos fazer o uso da seguinte relação:

$$\sum_{n=(0)}^{\infty} e^{-\epsilon k_n} = \frac{1}{2} \coth\left(\frac{\epsilon\pi}{2a}\right). \quad (2.35)$$

Assim, a energia do vácuo regularizada da Eq. (2.34), toma a seguinte forma:

$$\mathcal{E}_0^{\text{reg}}(\epsilon, a) = \frac{A}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial \epsilon^2} \left[\frac{1}{\epsilon} \cotgh \left(\frac{\epsilon\pi}{2a} \right) \right]. \quad (2.36)$$

Usando a expansão,

$$\cotgh(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \mathcal{O}(x^5), \quad (2.37)$$

a Eq. (2.36) pode ser decomposta conforme a Eq. (2.17),

$$\mathcal{E}_0^{\text{reg}}(\epsilon, a) = \frac{3aA}{\pi^2} \frac{1}{\epsilon^4} - \frac{\pi^2}{720} \frac{A}{a^3} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (2.38)$$

Portanto, após a renormalização o termo de volume (o de área é nulo nesse caso) é subtraído. Assim, a energia de Casimir eletromagnética é dada por:

$$\mathcal{E}_C(a) = -\frac{A\pi^2}{720a^3}, \quad (2.39)$$

e consequentemente, a força de Casimir eletromagnética é:

$$\mathcal{F}_C(a) = -\frac{\partial \mathcal{E}_C(a)}{\partial a} = -\frac{\pi^2 A}{240a^4}. \quad (2.40)$$

Neste capítulo, apresentamos uma revisão do efeito Casimir eletromagnético. Observamos aqui, que o vácuo quântico é muito "rico" e complexo, e que o efeito Casimir é uma comprovação da sua realidade. Ainda, derivamos a força de Casimir eletromagnética aplicando o método de regularização do tipo corte exponencial. Com isso passamos a conhecer um dos principais objetos do nosso trabalho, que é o efeito Casimir.

3 VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ E MODELOS COM VIOLAÇÃO DO TIPO ÉTER

No início do século passado, exatamente no ano de 1905, Albert Einstein publicou vários trabalhos importantes que revolucionaram a forma como olhamos o Universo. Dentre estes trabalhos revolucionários, Einstein apresentou a Teoria da Relatividade Especial que, baseada em dois postulados básicos, previu que a Natureza pode se comportar de uma maneira bem diferente do que podemos imaginar ao observar o mundo cotidiano.

A partir dos postulados da nova teoria de Einstein, foi observado que as transformações que relacionava os diferentes referenciais inerciais, deveriam ser diferentes daquelas de Galileu, as quais eram aceitas na época. Pois, a partir daquele momento, notou-se que tais transformações, além de continuar respeitando o primeiro postulado da teoria:

- (i) as leis da física são idênticas em quaisquer referenciais inerciais;

também deveriam obedecer ao segundo dos postulados:

- (ii) a velocidade da luz no vácuo é a mesma em qualquer referencial inercial.

Desta forma, Einstein notou que as transformações que estavam amplamente de acordo com sua teoria eram as já conhecidas transformações de Lorentz.

Portanto, após o desenvolvimento da Teoria da Relatividade Especial, as novas teorias físicas foram aos poucos incorporando as transformações de Lorentz como simetrias a serem respeitadas e, assim, elas obtiveram grande êxito ao descrever os fenômenos físicos. Um exemplo é o Modelo Padrão das Partículas Elementares ([OERTER, 2006](#)).

No entanto, há indicações para acreditarmos que a simetria de Lorentz pode ser quebrada em algum momento na Natureza, principalmente em regimes de altíssimas energias, os quais ainda não podemos estudar afundo devido, principalmente, as impossibilidades tecnológicas. Consequentemente, devido a esta possibilidade da quebra da simetria de Lorentz, surgiram vários trabalhos explorando o tema e suas possíveis consequências, como em ([CARROLL; FIELD; JACKIW, 1990](#); [COLLADAY; KOSTELECKÝ, 1998](#); [MYERS; POSPELOV, 2003](#)) e muitos outros trabalhos.

3.1 AS TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ

No âmbito da Relatividade Especial, as transformações de Lorentz indicam as maneiras como as rotações ou as mudanças de velocidades (*boosts*), que ocorrem em um dado sistema físico, se relacionam a partir do ponto de vista de diferentes observadores inerciais, de forma que respeitem os dois postulados da teoria de Einstein. As rotações podem ser realizadas em relação a cada um dos eixos espaciais do sistema de referência adotado. No caso do espaço-tempo quadrimensional, temos rotações com relação aos três eixos espaciais. Da mesma forma, os impulsos podem ser divididos em três tipos, cada um sendo uma mudança de velocidade com relação a um dos eixos espaciais. Estas transformações são dadas por

$$\begin{aligned}x' &= \gamma (x - vt), \\y' &= y, \\z' &= z, \\t' &= \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \quad \text{com} \quad \gamma \equiv \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2},\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde γ é o fator de Lorentz e c é a velocidade da luz no vácuo.

No entanto, não existe apenas uma forma de realizarmos estas transformações. Na verdade, podemos classificar diferentes tipos de transformações de Lorentz. Para explicar os tipos de violação de Lorentz, vamos seguir as denominações usadas em (BELICH et al., 2007). Nesse caso, podemos dividir as transformações de Lorentz em transformações: passivas, ativas, de observador e de partícula.

3.1.1 Transformações de Lorentz passivas e ativas

As transformações de Lorentz passivas são aquelas que relacionam, através de rotações ou impulsos, dois referenciais inerciais, de forma que os pontos do espaço-tempo permanecem fixos. De uma forma geral, este tipo de transformação de Lorentz é o mais comum e é o primeiro a ser estudado em um curso de Relatividade Especial.

Já as transformações de Lorentz ativas, são basicamente as transformações inversas das passivas. Neste caso, ao invés de relacionarmos dois sistemas de referência inerciais e mantermos o sistema físico fixo, aplicamos a transformação diretamente na partícula ou campo de interesse (ou seja, nos pontos do espaço-tempo) e relacionamos as mudanças ocorridas sem alterar o referencial.

Portanto, estes dois tipos de transformações estão relacionados de maneira muito simples. Por exemplo, descrever uma rotação de um sistema, por um ângulo qualquer ϕ usando uma transformação passiva, é equivalente a descrever uma rotação de um ângulo $-\phi$ através de uma transformação ativa, como veremos mais adiante ainda neste capítulo. Assim, tanto faz visualizarmos uma rotação por meio de uma transformação de Lorentz passiva ou ativa, pois,

independentemente do tipo de transformação usada, vamos observar a mesma física acontecendo¹. Ao fazermos uma análise semelhante para os impulsos de Lorentz, chegamos a mesma conclusão, a física é a mesma se a escolhermos um ou outro tipo de transformação.

3.1.2 Transformações de Lorentz de observador e de partícula

Diferentemente das transformações de Lorentz passivas e ativas, as transformações de Lorentz de observador e de partícula são realizadas quando o sistema apresenta um campo de fundo, ou seja, quando o sistema se apresenta imerso em um campo qualquer onde não temos acesso às suas fontes.

De forma geral, podemos definir as transformações de Lorentz de observador como transformações de Lorentz passivas na presença de campo de fundo. No entanto, as transformações de partícula, além de serem uma generalização para as transformações ativas na presença de um campo de fundo, apresentam uma característica de fundamental importância: o fato de que tais transformações são realizadas diretamente nos campos ou partículas sem alterar os valores esperados dos campos de fundo presentes (COLLADAY; KOSTELECKÝ, 1998). Sendo assim, bastante diferente do que ocorre com as transformações de observador, onde os campos de fundo "sentem" as transformações de observador, como veremos nos exemplos mais adiante.

Com estas definições, é fácil observar que as transformações de Lorentz passivas e ativas, são casos especiais das transformações de observador e de partícula, respectivamente. Portanto, quando o campo de fundo é nulo, as transformações de observador e de partícula representam as mesmas coisas que as transformações passivas e ativas, respectivamente.

3.2 VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ

Compreendendo os tipos de transformações de Lorentz e suas diferenças, estamos prontos para visualizar o que se passa quando dizemos que houve uma violação da simetria de Lorentz e, então, analisar alguns exemplos básicos.

Se por um lado, em situações onde temos um campo de fundo, suponhamos um campo vetorial, ao realizarmos as transformações de Lorentz de observador, o campo de fundo se transforma perfeitamente como um campo vetorial. Por outro lado, quando realizamos transformações de Lorentz de partícula, o campo de fundo acaba se transformando como um campo escalar, pois, como já citamos, as transformações de Lorentz deixam inalterados os valores de campo de fundo. Assim, depois destas transformações, notamos duas situações físicas diferentes, logo, estas transformações não podem ser mais consideradas como invariantes. Então, devido à este efeito atípico relacionado com as transformações de partícula, concluímos que neste caso há

¹ É importante ressaltar que na presença de um campo de fundo estas descrições podem mudar.

uma violação da simetria de Lorentz sob a transformação de partícula. Para que possamos fixar o conceito da violação da simetria de Lorentz, vamos analisar alguns exemplos.

3.2.1 O elétron em um campo elétrico de fundo constante

Para assimilar a ideia da violação de Lorentz, vamos considerar um exemplo. Vamos supor que um elétron está imerso em um campo elétrico de fundo constante, gerado por um capacitor de placas paralelas, da mesma forma que em (BELICH et al., 2007).

3.2.1.1 Análise de uma rotação

Inicialmente, vamos assumir que o campo de fundo é nulo. Então, suponhamos que o elétron imerso neste sistema sofra uma rotação por um ângulo ϕ , à princípio, podemos descrever esta rotação através de uma transformação de Lorentz passiva ou ativa, pois, o campo de fundo é nulo.

No caso de uma rotação passiva, de acordo com a Fig. 4, rotacionamos o referencial S por um ângulo ϕ , de forma que, após a rotação teremos um novo referencial S' . Assim, podemos

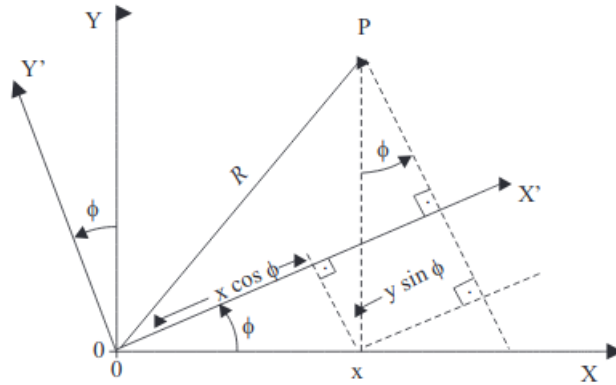


Figura 4 – Como obtermos a matriz de rotação passiva (BELICH et al., 2007).

relacionar matematicamente as coordenadas do ponto P nestes dois referenciais que descrevem uma rotação do ponto de vista passivo, da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

ou ainda, podemos escrever a expressão matricial da Eq. (3.2) na sua forma infinitesimal, levando em conta apenas a primeira ordem na expansão de ϕ , como:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \delta\phi \\ -\delta\phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Já no caso de uma rotação ativa, rotacionamos os pontos do espaço-tempo por um ângulo $-\phi$, como mostra a Fig. 5. Então, podemos representar esta transformação ativa usando a seguinte

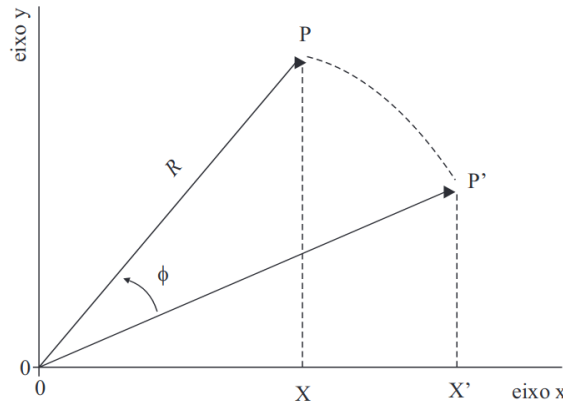


Figura 5 – Como obtemos a matriz de rotação ativa (BELICH et al., 2007).

expressão:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

ou ainda, usando a versão infinitesimal:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\delta\phi \\ \delta\phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Logo, independente de qual tipo de transformação queremos levar em conta, passiva ou ativa, notamos que uma rotação passiva por um ângulo ϕ tem o mesmo efeito de uma rotação ativa por um ângulo $-\phi$. Portanto, fica a nosso critério qual das transformações usar para descrever o sistema físico, sem nenhum tipo de ônus nos resultados físicos.

Por outro lado, as coisas começam a ficar mais interessantes quando temos a presença de um campo de fundo interagindo com o sistema, e é isso que vamos estudar agora. Suponha então, que o campo de fundo gerado por um capacitor de placas paralelas é "ligado", vamos realizar transformações semelhantes as que fizemos quando não havia campo de fundo e analisar se a escolha arbitrária do tipo de transformação influencia ou não nos resultados físicos.

Para isso, vamos observar uma rotação por um ângulo de $\pi/2$ radianos em meio a um campo elétrico de fundo constante na direção z , especificando a posição inicial do elétron pelo vetor posição $\vec{R} = (0, a, 0)$. A esquematização para a transformação de observador é mostrada na Fig. 6. Logo, usando transformações de observador para descrever a transformação, é fácil notar que após a rotação por um ângulo $\pi/2$ radianos, o vetor posição segue perpendicular ao campo elétrico de fundo, ou seja, após a rotação ($\vec{R} \perp \vec{E}$).

Já na rotação de partícula, somos induzidos a realizar uma rotação de $-\pi/2$ radianos, pois, como vimos no exemplo onde o campo de fundo é nulo, uma rotação passiva por um ângulo ϕ corresponde a uma rotação ativa por um ângulo $-\phi$. Generalizando isto para sistemas com campo de fundo, poderíamos esperar que uma rotação de observador por um dado ângulo fosse fisicamente equivalente a uma rotação de partículas pelo inverso deste ângulo. Essa nova rotação

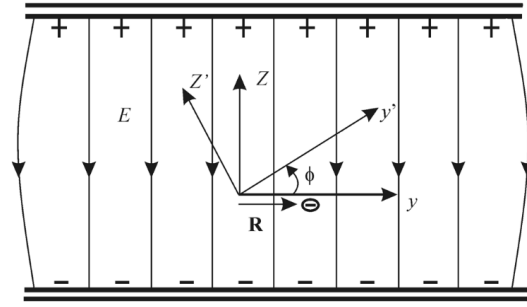


Figura 6 – Rotação passiva de um ângulo ϕ na presença de um campo de fundo (BELICH et al., 2007).

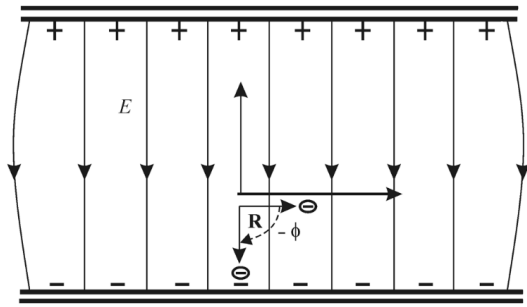


Figura 7 – Rotação ativa de um ângulo $-\phi$ na presença de um campo de fundo (BELICH et al., 2007).

é mostrada na Fig. 7. Diferente do que acontece no exemplo anterior, notamos que na presença de um campo de fundo ocorre uma violação da simetria de Lorentz, pois, como podemos observar, após uma rotação de partícula de $-\pi/2$ radianos, o vetor posição se torna paralelo ao campo de fundo ($\vec{R} // \vec{E}$). Portanto, descreve uma situação física diferente daquela observada ao efetuarmos uma rotação ativa por um ângulo de $\pi/2$ radianos onde o fim da rotação é ($\vec{R} \perp \vec{E}$).

3.2.1.2 Análise de um impulso

Além das rotações, outros tipos de transformações de Lorentz que devemos levar em conta são os impulsos. Vamos agora analisar a violação de Lorentz ao se descrever um impulso em um sistema dado por um elétron localizado em um campo elétrico de fundo constante, usando um capacitor de placas paralelas, da mesma forma como foi tratado o caso das rotações.

Para realizarmos esta análise, vamos considerar dois sistemas de referências, o referencial S onde o capacitor se encontra em repouso e o referencial S' no qual se move com velocidade $\vec{v}$ paralelamente ao capacitor, como podemos observar na Fig. 8. Efetuando uma transformação de observador para analisar um impulso, podemos relacionar os campos observados pelos dois referenciais da seguinte maneira:

$$\vec{E}' = \frac{\vec{E}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \vec{B}' = -\frac{\frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = -\frac{\vec{v} \times \vec{E}'}{c^2}. \quad (3.6)$$

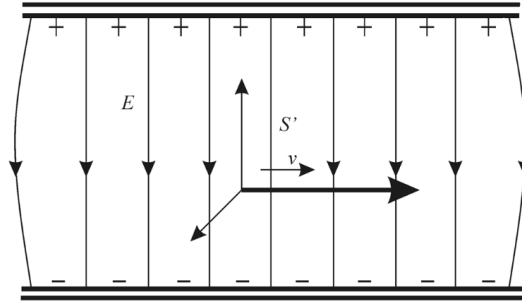


Figura 8 – Dois sistemas de referência: S (em repouso em relação ao capacitor) e S' (com velocidade $\vec{v}$ em relação ao capacitor) (BELICH et al., 2007).

Desta forma, notamos a presença de um "novo" campo elétrico $\vec{E}'$, devido a presença do fator $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ e, além disso, notamos a presença de um campo magnético $\vec{B}'$, que é perpendicular a velocidade e ao campo elétrico.

Por outro lado, se observarmos este sistema por uma transformação de partícula, vemos que o elétron recebe um empurrão (impulso), enquanto que, as placas do capacitor permanecem imóveis. Então, durante este processo o campo de fundo não está variando, isto é,

$$\vec{E}'(\vec{x}') = \vec{E}(\vec{x}). \quad (3.7)$$

Nesta situação, levando em conta a transformação de partícula, somente o elétron está se movendo com velocidade $-\vec{v}$, pois, as placas permanecem fixas fazendo com que o campo elétrico de fundo não se modifique. Assim, o campo elétrico se comporta como um escalar e, mais uma vez, notamos que a física descrita em um sistema, com violação das transformações de Lorentz de partícula, pode apresentar características diferentes daquelas esperadas.

Adicionalmente, é interessante analisarmos o movimento do elétron de acordo com estes dois tipos de transformações. Para isso, vamos supor um elétron, com carga elétrica e , movendo-se com velocidade $\vec{u}$ paralelamente às placas do capacitor. Neste caso, a força que o elétron "sente" é $\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$, no sistema de unidades CGS. Como a força é a variação do momento linear com relação ao tempo $\vec{F} = d\vec{p}/dt$, e como em $t = 0$, temos $p_y = 0$, podemos escrever:

$$p = \frac{mu_y}{\sqrt{1 - \left(\frac{u_y}{c}\right)^2}} = Ft. \quad (3.8)$$

Com isso, podemos isolar a função que descreve a velocidade na direção y , ou seja,

$$u_y = \frac{\left(\frac{F}{m}\right)t}{\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc}\right)^2}}. \quad (3.9)$$

Seguindo nossa análise, podemos, a partir da Eq. (3.9), realizarmos uma integração temporal e obter a função que descreve a posição vertical do elétron em função do tempo, isto é,

$$y(t) = \frac{mc^2}{F} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc}\right)^2} - 1 \right), \quad (3.10)$$

que apresenta uma forma hiperbólica. Diferente do caso não-relativístico, onde naturalmente encontraríamos um movimento descrevendo uma parábola. Por outro lado, o observador S' , em movimento, observará o elétron submetido a uma força,

$$\vec{F}' = \frac{e\vec{E}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.11)$$

Portanto, a partir desta expressão, podemos obter a trajetória do elétron relacionando as coordenadas $(x'(t), y'(t))$ no referencial S' , com $(x(t), y(t))$ no referencial S , através das seguintes equações:

$$y'(t) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} y(t), \quad x'(t) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} x(t). \quad (3.12)$$

Sob o ponto de vista da transformação de partícula, o campo de fundo fica inalterado e aplicamos um impulso na partícula de $-\vec{v}$. Desta forma, o observador S observará o elétron cair em queda livre apresentando um alcance $d = (u - v)t_q$, onde t_q é o tempo de queda. No caso anterior tínhamos o elétron se movendo com velocidade $\vec{u}$, portanto, o alcance no caso da transformação de observador é maior como podemos ver na Fig. 9. Portanto, através destes

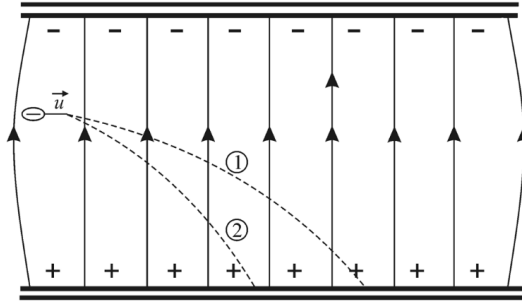


Figura 9 – Trajetórias do elétron: (1) com velocidade inicial $\vec{u}$; (2) com velocidade inicial $\vec{u} - \vec{v}$ (BELICH et al., 2007).

simples exemplos, podemos ter uma noção básica de como um campo de fundo pode gerar uma quebra na transformação de Lorentz de partícula, ou seja, contribuindo para o que chamamos de violação da invariância de Lorentz.

Contudo, esperamos que estes campos de fundo constantes surjam de uma quebra espontânea de simetria em teorias mais fundamentais e não de uma forma "manipulada" como vimos nesses exemplos. Logo, a violação da simetria de Lorentz seria algo próprio da Natureza.

3.3 MODELOS COM VIOLAÇÃO DO TIPO ÉTER

Nesta seção, apresentamos os modelos de Teoria Quântica de Campos com um termo de violação de Lorentz do tipo éter. Esses modelos foram propostos por Sean M. Carroll e Heywood Tam (CARROLL; TAM, 2008; CARROLL et al., 2009). Eles consideram uma nova maneira de

manter as dimensões extras ocultas. Para isso, Carroll e Tam adicionaram campos tensoriais que violam a simetria de Lorentz ("éter"), com valores esperados ao longo das direções extras. As interações com o éter modificam as relações de dispersão de outros campos, levando a energias maiores associadas com o momento da dimensão extra.

No entanto, A. Petrov e colaboradores em (GOMES et al., 2010) mostraram que os acoplamentos por transformação CPT (BJORKEN; DRELL, 1965) dos campos escalares, espinoriais e eletromagnéticos com o campo do tipo éter proposto em (CARROLL; TAM, 2008; CARROLL et al., 2009) podem surgir em espaços-tempo quadrimensional. Nas subseções a seguir, apresentamos brevemente os modelos contendo um termo do tipo éter, para campos escalares, bem como fermiônicos em um espaço-tempo quadrimensional.

3.3.1 Campos escalares

Nesta subseção, apresentamos primeiramente o modelo teórico que considera os efeitos das interações do campo tipo éter com o campo escalar real massivo $\phi(x)$. A dinâmica desse campo escalar é governada pela densidade Lagrangiana de Klein-Gordon modificada, dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^2 + \lambda(u \cdot \partial \phi)^2], \quad (3.13)$$

onde m é a massa do campo bosônico e, o parâmetro adimensional λ , supostamente ($\lambda \ll 1$), caracteriza a violação da simetria de Lorentz tipo éter. E u^μ é um quadrivetor constante, onde $u^\mu u_\mu = 1, 0, -1$, tipo-tempo, -luz e -espaço, respectivamente.

Usando as equações de Euler Lagrange da Eq. (1.8) e a Eq. (3.13), a equação de Klein-Gordon modificada é dada por:

$$[\square + m^2 + \lambda(u \cdot \partial)^2] \phi(x) = 0, \quad (3.14)$$

onde $\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu$ é o operador D'Alembertiano usual. As soluções da Eq. (3.14), claramente, vão depender da escolha do quadrivetor constante u^μ . Sendo assim, vamos considerar quatro possíveis vetores:

$$u^\mu = \begin{cases} (1, 0, 0, 0) \\ (0, 1, 0, 0) \\ (0, 0, 1, 0) \\ (0, 0, 0, 1) \end{cases}. \quad (3.15)$$

Substituindo a Eq. (3.13) na Eq. (1.17), obtemos a seguinte relação para o tensor energia-momento:

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = (\partial^\mu \phi)(\partial^\nu \phi) + \lambda u^\mu (\partial^\nu \phi)(u \cdot \partial \phi) - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (3.16)$$

onde $\eta^{\mu\nu}$ é o tensor de Minkowski usual. A partir da Eq. (3.16), podemos verificar ainda que:

$$\partial_\mu \mathcal{T}^{\mu\nu} = 0. \quad (3.17)$$

Porém, o tensor energia-momento da Eq. (3.16) não é simétrico. A parte anti-simétrica de $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ é dada por:

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} - \mathcal{T}^{\nu\mu} = \lambda [u^\mu (\partial^\nu \phi) - u^\nu (\partial^\mu \phi)] (u \cdot \partial \phi). \quad (3.18)$$

Essa assimetria, em princípio, é uma característica típica das teorias que violam a simetria de Lorentz.

3.3.2 Campos fermiônicos

Nesta subseção, vamos introduzir o modelo teórico para os campos fermiônicos. Aqui, o modelo é descrito por um campo fermiônico massivo $\Psi(x)$, em que a sua dinâmica é caracterizada pela densidade Lagrangiana abaixo:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m + i\lambda u^\mu u^\nu \gamma_\mu \partial_\nu) \Psi(x), \quad (3.19)$$

onde m é a massa do campo fermiônico. Como para o campo escalar, na Eq. (3.19) o parâmetro adimensional λ mede a intensidade da violação da simetria de Lorentz com $\lambda \ll 1$. E o quadrivetor constante u^μ faz um acoplamento com a derivada do campo fermiônico e é definido tal que $u^\mu u_\mu$ pode ser igual 1, 0 e -1 . Esse quadrivetor introduz uma direção privilegiada do espaço-tempo. Em um certo sentido, a teoria é caracterizada por cinco parâmetros constantes: λ caracterizando a intensidade da quebra da simetria de Lorentz e quatro componentes independentes de u^μ caracterizando sua direção.

Usando a Eq. (1.8) e a densidade Lagrangiana da Eq. (3.19), obtemos equação de Dirac modificada:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m + i\lambda u^\mu u^\nu \gamma_\mu \partial_\nu) \Psi(x) = 0. \quad (3.20)$$

Aqui, assumiremos que as matrizes de Dirac γ^μ são dadas na seguinte representação (BJORKEN; DRELL, 1965):

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

onde $\mathbb{I}$ representa a matriz identidade 2×2 , e σ^j as matrizes de Pauli.

Com o auxílio da Eq. (1.17) juntamente com a Eq. (3.19), obtemos que o tensor energia-momento é dado por:

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \bar{\Psi}(x) (i\gamma^\mu + i\lambda u^\mu u^\alpha \gamma_\alpha) \partial^\nu \Psi(x). \quad (3.22)$$

Podemos verificar que:

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} - \mathcal{T}^{\nu\mu} = i\lambda u^\alpha \bar{\Psi}(x) \gamma_\alpha (u^\mu \partial^\nu - u^\nu \partial^\mu) \Psi(x), \quad (3.23)$$

onde essa assimetria é uma característica típica para teorias com uma quebra da simetria de Lorentz. No entanto, podemos verificar que:

$$\partial_\mu \mathcal{T}^{\mu\nu} = 0. \quad (3.24)$$

Neste capítulo, fizemos uma breve revisão do conceito da simetria de Lorentz. Em seguida, apresentamos um contexto onde essa simetria pode ser violada. Para isso, consideramos um elétron em um campo elétrico de fundo constante. Porém, esperamos que essa violação da simetria de Lorentz ocorra de forma natural na Natureza em uma escala de energia muito alta. Com esse intuito, finalizamos o capítulo apresentando os modelos teóricos com violação de Lorentz do tipo éter. Esses modelos, juntamente com o efeito Casimir, serão os nossos principais objetos de estudo nos próximos capítulos.

Parte III

Nossos resultados

4 EFEITO CASIMIR ESCALAR COM VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ DO TIPO ÉTER

Neste capítulo, analisaremos como a anisotropia do espaço-tempo gerada pelo termo de violação de Lorentz modifica os resultados no efeito Casimir associado a um campo escalar massivo real $\phi(x)$ confinado entre duas placas paralelas.

Como já mencionamos, a dinâmica do campo $\phi(x)$ é governada pela equação de Klein-Gordon modificada da Eq. (3.14), dada por:

$$[\partial_\mu \partial^\mu + m^2 + \lambda u^\mu u^\nu \partial_\mu \partial_\nu] \phi(x) = 0, \quad (4.1)$$

onde a anisotropia do espaço-tempo é gerada pelo termo tipo éter $\lambda u^\mu u^\nu \partial_\mu \partial_\nu$. O quadrivetor constante u^μ , será nas próximas seções, considerado como sendo tipo-tempo e tipo-espaço de acordo com a Eq. (3.15). E o tensor energia-momento, para essa teoria, Eq. (3.16), é dado por:

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = (\partial^\mu \phi)(\partial^\nu \phi) + \lambda u^\mu (\partial^\nu \phi)(u \cdot \partial \phi) - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (4.2)$$

Assim, vamos considerar o campo $\phi(x)$ confinado entre duas placas com área L^2 e separadas por uma distância a , onde $a \ll L$. As placas estão posicionadas paralelamente uma a outra, como mostra a Fig. 2, no capítulo 2. O campo $\phi(x)$ deve satisfazer às diferentes condições de contorno impostas a ele sobre as placas. Nesse estudo, consideramos as condições de contorno: Dirichlet, Neumann e mista.

É importante ressaltar que, os resultados obtidos neste capítulo estão publicado em (CRUZ; MELLO; PETROV, 2017).

4.1 CONDIÇÃO DE CONTORNO DE DIRICHLET

Nesta seção, resolveremos a equação de Klein-Gordon modificada da Eq. (4.1), impondo a condição de contorno de Dirichlet ao campo $\phi(x)$ sobre as placas, ou seja,

$$\phi(x)|_{z=0} = \phi(x)|_{z=a} = 0. \quad (4.3)$$

Para encontrar $\phi(x)$, a partir da Eq. (4.1), adotamos o procedimento padrão feito em (MANDL; SHAW, 2010). Em seguida, promovendo o campo escalar a operador, obtemos o seguinte operador de campo:

$$\hat{\phi}(x) = \int d^2 \vec{k} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^2 \omega_{\vec{k},n} a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a} z\right) \left[\hat{a}_n(\vec{k}) e^{-ikx} + \hat{a}_n^\dagger(\vec{k}) e^{ikx} \right], \quad (4.4)$$

onde,

$$kx = \omega_{\vec{k},n}t - k_x x - k_y y. \quad (4.5)$$

Os operadores, $\hat{a}_n(\vec{k})$ e $\hat{a}_n^\dagger(\vec{k})$, são os operadores de aniquilação e criação de partículas, respectivamente, satisfazendo as mesmas relações de comutação da Eq. (1.38):

$$\begin{cases} [\hat{a}_n(\vec{k}), \hat{a}_{n'}^\dagger(\vec{k}')] = \delta_{n,n'} \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \\ [\hat{a}_n(\vec{k}), \hat{a}_{n'}(\vec{k}')] = [\hat{a}_n^\dagger(\vec{k}), \hat{a}_{n'}^\dagger(\vec{k}')] = 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

No entanto, a relação de dispersão, $\omega_{\vec{k},n}$, para cada escolha do quadrivetor constante u^μ é modificada. Portanto, vamos tratar as diferentes possibilidades, tipo-tempo e tipo-espaço, separadamente.

4.1.1 Quadrivetor tipo-tempo

Admitindo que o quadrivetor constante u^μ , é tipo-tempo:

$$u^{(t)} = (1, 0, 0, 0). \quad (4.7)$$

Neste caso, a relação de dispersão $\omega_{\vec{k},n}$ associada ao operador de campo da Eq. (4.4), é dada por:

$$\omega_{\vec{k},n} = \sqrt{\frac{1}{(1+\lambda)} \left[k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + m^2 \right]}. \quad (4.8)$$

Usando as Eqs. (4.2) e (3.13), o operador Hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}$, para esse caso é:

$$\hat{\mathcal{H}} = \int \mathcal{T}^{tt} d^3\vec{x} = \int \left[(1+\lambda)(\partial_t \hat{\phi})^2 + (\vec{\nabla} \hat{\phi})^2 \right] d^3\vec{x}. \quad (4.9)$$

Que substituindo o operador de campo da Eq. (4.4), obtemos o seguinte operador Hamiltoniano:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{(1+\lambda)}{2} \int d^2\vec{k} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\vec{k},n} \left[2\hat{a}_n^\dagger(\vec{k})\hat{a}_n(\vec{k}) + \frac{L^2}{(2\pi)^2} \right], \quad (4.10)$$

e conseqüentemente, a energia do vácuo $\mathcal{E}_0$, é obtida tomando o valor esperado do estado de vácuo $|0\rangle$, do operador $\hat{\mathcal{H}}$:

$$\mathcal{E}_0 = \langle 0 | \hat{\mathcal{H}} | 0 \rangle = \frac{(1+\lambda)L^2}{8\pi^2} \int d^2\vec{k} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\vec{k},n}. \quad (4.11)$$

O resultado da Eq. (4.11), como podemos ver, é uma quantidade divergente. Para obter a energia de Casimir, adotaremos o mesmo procedimento feito no capítulo 2. No entanto, para realizarmos a regularização da energia do vácuo bosônico, usamos a fórmula de soma de Abel-Plana (BORDAG et al., 2009; SAHARIAN, 2007) dada por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(n) = \frac{1}{2}F(0) + \int_0^{\infty} F(t)dt + i \int_0^{\infty} \frac{[F(it) - F(-it)]}{e^{2\pi t} - 1} dt. \quad (4.12)$$

Assim, substituindo a Eq. (4.12) na Eq. (4.11), e em seguida realizando uma mudança de coordenadas no plano (k_x, k_y) , para as coordenadas polares (k, θ) , obtemos

$$\mathcal{E}_0^{\text{reg}} = \frac{(1+\lambda)L^2}{4\pi} \int_0^\infty k dk \left[-\frac{1}{2}F(0) + \int_0^\infty F(t)dt + i \int_0^\infty \frac{[F(it) - F(-it)]}{e^{2\pi t} - 1} dt \right] \quad (4.13)$$

com a função $F(n)$ dada por:

$$F(n) = \sqrt{\frac{1}{(1+\lambda)} \left[k^2 + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + m^2 \right]}. \quad (4.14)$$

Aqui, notamos que o primeiro termo da Eq. (4.13), se refere a energia do vácuo na presença de uma única placa. Enquanto que o segundo termo está relacionado com a energia do vácuo na ausência das placas. Ou seja, o primeiro termo está relacionado com o termo de área, enquanto que o segundo com o termo de volume, e não devem contribuir para a energia de Casimir. Portanto, após realizarmos a renormalização, ambos os termos (divergentes) são subtraídos. Como resultado, obtemos a energia de Casimir por unidade de área:

$$\frac{\mathcal{E}_C}{L^2} = \frac{\sqrt{(1+\lambda)}}{4\pi} i \int_0^\infty k dk \int_0^\infty \frac{\sqrt{k^2 + \left(\frac{it\pi}{a} \right)^2 + m^2} - \sqrt{k^2 + \left(-\frac{it\pi}{a} \right)^2 + m^2}}{e^{2\pi t} - 1} dt, \quad (4.15)$$

ou ainda, realizando a seguinte mudança de variável, $u = t\pi/a$, obtemos

$$\frac{\mathcal{E}_C}{L^2} = \frac{\sqrt{(1+\lambda)}a}{4\pi^2} i \int_0^\infty k dk \int_0^\infty \frac{\sqrt{k^2 + (iu)^2 + m^2} - \sqrt{k^2 + (-iu)^2 + m^2}}{e^{2au} - 1} du. \quad (4.16)$$

De modo a realizarmos a integral na variável u , adotamos o seguinte procedimento: dividimos a integral na variável u em dois intervalos, sendo o primeiro dado por $[0, \sqrt{k^2 + m^2}]$, enquanto que o segundo é $[\sqrt{k^2 + m^2}, \infty)$. Quando isso é feito, podemos observar duas situações:

(i) Para $\sqrt{k^2 + m^2} > u$, obtemos:

$$\sqrt{k^2 + (\pm iu)^2 + m^2} = \sqrt{k^2 - u^2 + m^2}, \quad (4.17)$$

(ii) Para $\sqrt{k^2 + m^2} < u$, obtemos:

$$\sqrt{k^2 + (\pm iu)^2 + m^2} = \pm i\sqrt{u^2 - k^2 - m^2}. \quad (4.18)$$

Assim, a integração na variável u no intervalo de integração $[0, \sqrt{k^2 + m^2}]$ se anula. Após esse procedimento, obtemos o seguinte resultado:

$$\frac{\mathcal{E}_C}{L^2} = -\frac{\sqrt{(1+\lambda)}a}{2\pi^2} \int_0^\infty k dk \int_{\sqrt{k^2 + m^2}}^\infty \frac{\sqrt{u^2 - k^2 - m^2}}{e^{2au} - 1} du. \quad (4.19)$$

Novamente, vamos realizar uma mudança de variável da seguinte forma $\rho^2 = u^2 - k^2 - m^2$, que resulta em:

$$\frac{\mathcal{E}_C}{L^2} = -\frac{\sqrt{(1+\lambda)}a}{2\pi^2} \int_0^\infty k dk \int_0^\infty \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{\rho^2 + k^2 + m^2} (e^{2a\sqrt{\rho^2 + k^2 + m^2}} - 1)}. \quad (4.20)$$

Com a finalidade de reduzir a integração dupla para uma integral simples, vamos realizar uma mudança de variável no plano (ρ, k) para coordenadas polares (σ, θ) . Com essa mudança, obtemos o seguinte resultado:

$$\frac{\mathcal{E}_C}{L^2} = -\frac{\sqrt{(1+\lambda)}a}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{\sigma^4 d\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + m^2} (e^{2a\sqrt{\sigma^2 + m^2}} - 1)}. \quad (4.21)$$

Infelizmente, a integral na Eq. (4.21) não pode ser calculada analiticamente. No intuito de obter expressões analíticas, consideramos os limites assintóticos: $am \gg 1$ e $am \ll 1$. Para isso, faremos as seguintes mudanças de variáveis $\xi^2 = \sigma^2 + m^2$, e em seguida $\xi = mv$, resultando ainda, na seguinte expressão exata:

$$\frac{\mathcal{E}_C}{L^2} = -\frac{\sqrt{(1+\lambda)}am^4}{6\pi^2} \int_1^\infty \frac{(v^2 - 1)^{3/2}}{e^{2amv} - 1} dv. \quad (4.22)$$

Com a Eq. (4.22) podemos seguir com os cálculos de forma aproximada, bem como apresentar os resultados numéricos para a energia de Casimir, como mostra a Fig. 10.

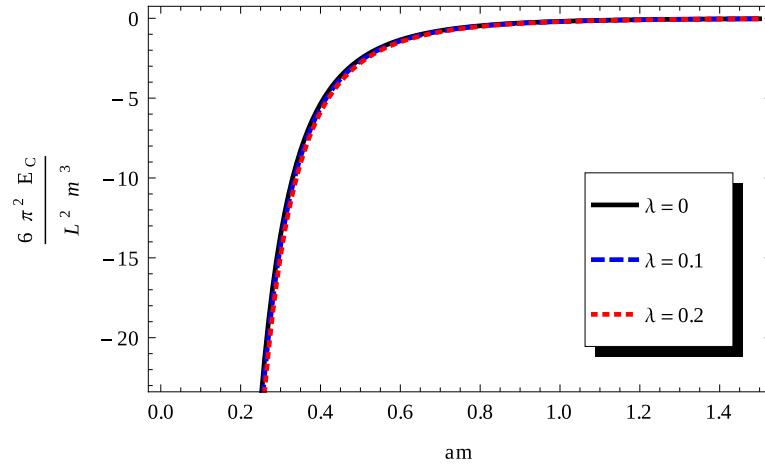


Figura 10 – Energia de Casimir para o caso $u^{(t)} = (1, 0, 0, 0)$ multiplicada por $6\pi^2/L^2 m^3$, como função de am para os seguintes valores de $\lambda = 0.0, 0.1$ e 0.2 .

(i) No limite $am \gg 1$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_C}{L^2} &\approx -\frac{\sqrt{(1+\lambda)}am^4}{6\pi^2} \int_1^\infty \frac{(v^2 - 1)^{3/2}}{e^{2amv}} dv \\ &\approx -\frac{\sqrt{(1+\lambda)}}{16} \left(\frac{m}{\pi a}\right)^{3/2} e^{-2ma}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Observe que neste caso, a energia de Casimir por unidade de área decai exponencialmente com am . Como $am \gg 1$, essa energia tende a zero muito rapidamente e consequentemente a pressão de Casimir também.

(ii) No limite $am \ll 1$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_C}{L^2} &\approx -\frac{\sqrt{(1+\lambda)}am^4}{6\pi^2} \int_1^\infty \frac{v^3}{e^{amv}-1} dv \\ &\approx -\frac{\sqrt{(1+\lambda)}}{1440\pi^2 a^3} [\pi^4 - 40a^3 m^3 + 30a^4 m^4 - 8a^5 m^5]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

O primeiro termo da Eq. (4.24), se refere ao caso não massivo sendo o mais relevante para energia de Casimir. Consequentemente, a partir da Eq. (4.24) a pressão de Casimir entre as placas paralelas é dada por:

$$\mathcal{P}_C = -\frac{\partial \mathcal{E}_C / L^2}{\partial a} = -\frac{\sqrt{(1+\lambda)}}{1440\pi^2 a^4} [3\pi^4 - 30a^4 m^4 + 16a^5 m^5]. \quad (4.25)$$

Como podemos ver, o parâmetro que caracteriza a violação da simetria de Lorentz, λ , modifica a energia de Casimir, bem como a pressão de Casimir. Essa modificação é dada por um fator multiplicativo, de forma que para $\lambda > 0$, essas quantidades são amplificadas. No entanto, para $\lambda = 0$, obtemos o resultado dado em (MOSTEPANENKO; TRUNOV, 1997).

4.1.2 Quadrivetor tipo-espaço

Quando estamos considerando o quadrivetor constante u^μ como sendo tipo-espaço, temos três situações possíveis: $u^{(x)} = (0, 1, 0, 0)$, $u^{(y)} = (0, 0, 1, 0)$ que são paralelos as placas, bem como $u^{(z)} = (0, 0, 0, 1)$ que é ortogonal às placas. No entanto, os dois vetores paralelos nos fornecem os mesmos resultados. Sendo assim, vamos considerar o caso que:

$$u^{(x)} = (0, 1, 0, 0). \quad (4.26)$$

Com essa consideração, temos a relação de dispersão $\omega_{\vec{k},n}$ na Eq. (4.4), dada por:

$$\omega_{\vec{k},n} = \sqrt{(1+\lambda)k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + m^2}. \quad (4.27)$$

Nesse caso, o operador Hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}$, agora é:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \left[(\partial_t \hat{\phi})^2 + (\vec{\nabla} \hat{\phi})^2 - \lambda (\partial_x \hat{\phi})^2 \right], \quad (4.28)$$

que substituindo a Eq. (4.4) na expressão acima, obtemos:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \int d^2\vec{k} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\vec{k},n} \left[2\hat{a}_n^\dagger(\vec{k})\hat{a}_n(\vec{k}) + \frac{L^2}{(2\pi)^2} \right]. \quad (4.29)$$

Consequentemente, a energia do vácuo é dada por:

$$\mathcal{E}_0 = \langle 0 | \hat{\mathcal{H}} | 0 \rangle = \frac{L^2}{8\pi^2} \int d^2\vec{k} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\vec{k},n}. \quad (4.30)$$

Aqui, vamos proceder da mesma forma como foi feito para o caso tipo-tempo. Ou seja, usando a fórmula de soma de Abel-Plana da Eq. (4.12), com o intuito de regularizar a energia do vácuo. Em seguida, procedendo com a renormalização e todos os procedimentos de mudanças de variáveis, a energia de Casimir por unidade de área é dada por:

$$\frac{\mathcal{E}_C}{L^2} = -\frac{(1-\lambda)^{-1/2}am^4}{6\pi^2} \int_1^\infty \frac{(v^2-1)^{3/2}}{e^{2amv}-1} dv. \quad (4.31)$$

Novamente, não é possível calcular analiticamente a integral da Eq. (4.31). Devemos considerar os limites assintóticos, $am \gg 1$ e $am \ll 1$. No entanto, a energia de Casimir de forma exata é mostrada na Fig. 11.

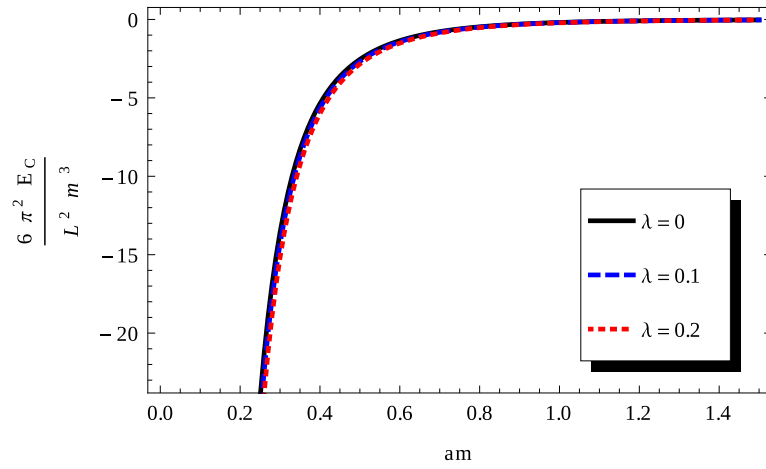


Figura 11 – Energia de Casimir para o caso $u^{(x)} = (0, 1, 0, 0)$ multiplicada por $6\pi^2/L^2 m^3$, como função de am para os seguintes valores de $\lambda = 0.0, 0.1$ e 0.2 .

(i) No limite $am \gg 1$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_C}{L^2} &\approx -\frac{(1-\lambda)^{-1/2}am^4}{6\pi^2} \int_1^\infty \frac{(v^2-1)^{3/2}}{e^{2amv}-1} dv \\ &\approx -\frac{(1-\lambda)^{-1/2}}{16} \left(\frac{m}{\pi a}\right)^{3/2} e^{-2am}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

(ii) No limite $am \ll 1$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_C}{L^2} &\approx -\frac{(1-\lambda)^{-1/2}am^4}{6\pi^2} \int_1^\infty \frac{v^3}{e^{2amv}-1} dv \\ &\approx -\frac{(1-\lambda)^{-1/2}}{1440\pi^2 a^3} [\pi^4 - 40a^3 m^3 + 30a^4 m^4 - 8a^5 m^5]. \end{aligned} \quad (4.33)$$

O primeiro termo da Eq. (4.33) se refere ao caso de campos não massivos, e é a contribuição maior para energia de Casimir. A partir do resultado da Eq. (4.33), obtemos a seguinte pressão de Casimir:

$$\mathcal{P}_C = -\frac{(1-\lambda)^{-1/2}}{1440\pi^2 a^4} [3\pi^4 - 30a^4 m^4 + 16a^5 m^5]. \quad (4.34)$$

Podemos observar aqui, que fazendo uma expansão no parâmetro, λ , nas Eqs. (4.25) e (4.34) considerando apenas termos de primeira ordem, os resultados obtidos para o caso tipo-tempo e tipo-espaço coincidem.

Finalmente, vamos considerar o caso que o quadri vetor u^μ é ortogonal às placas, ou seja,

$$u^{(z)} = (0, 0, 0, 1). \quad (4.35)$$

Neste caso, a relação de dispersão $\omega_{\vec{k},n}$ correspondente ao operador de campo da Eq. (4.4), é modificada para:

$$\omega_{\vec{k},n} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + (1 - \lambda) \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + m^2}. \quad (4.36)$$

Agora, o operador Hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}$, é dado por:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \left[(\partial_t \hat{\phi})^2 + (\vec{\nabla} \hat{\phi})^2 - \lambda (\partial_z \hat{\phi})^2 \right], \quad (4.37)$$

que substituindo a Eq. (4.4) na Eq. (4.37), obtemos:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int d^2\vec{k} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\vec{k},n} \left[2\hat{a}_n^\dagger(\vec{k})\hat{a}_n(\vec{k}) + \frac{L^2}{(2\pi)^2} \right]. \quad (4.38)$$

Tomando o valor esperado do operador Hamiltoniano da Eq. (4.38), no estado de vácuo $|0\rangle$, obtemos a energia do vácuo como sendo:

$$\mathcal{E}_0 = \langle 0 | \hat{\mathcal{H}} | 0 \rangle = \frac{L^2}{8\pi^2} \int d^2\vec{k} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\vec{k},n}. \quad (4.39)$$

Mais uma vez, vamos proceder como nos dois casos anteriores. Fazendo a regularização da energia do vácuo da Eq. (4.39) usando a fórmula de soma de Abel-Plana da Eq. (4.12), com:

$$F(n) = \sqrt{k^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + m^2}, \quad b \equiv \frac{a}{\sqrt{1 - \lambda}}. \quad (4.40)$$

Na Eq. (4.40), percebe-se que fizemos uma mudança de coordenadas no plano (k_x, k_y) , para coordenadas polares (k, θ) . Após realizarmos o procedimento de renormalização da energia do vácuo, juntamente com todos os mesmos procedimentos algébricos de antes, a energia de Casimir por unidade de área é dada por:

$$\frac{\mathcal{E}_C}{L^2} = -\frac{bm^4}{6\pi^2} \int_1^\infty \frac{(v^2 - 1)^{3/2}}{e^{2bmv} - 1} dv. \quad (4.41)$$

Nesse caso, vemos que o parâmetro λ , associado a violação da simetria de Lorentz, aparece não apenas como um fator multiplicativo, mas também aparece no integrando. Devido a impossibilidade de calcular a integral da Eq. (4.41) de forma exata, vamos tratar os limites assintóticos $am \gg 1$ e $am \ll 1$. No entanto, o resultado de forma exata é dado numericamente na Fig. 12.

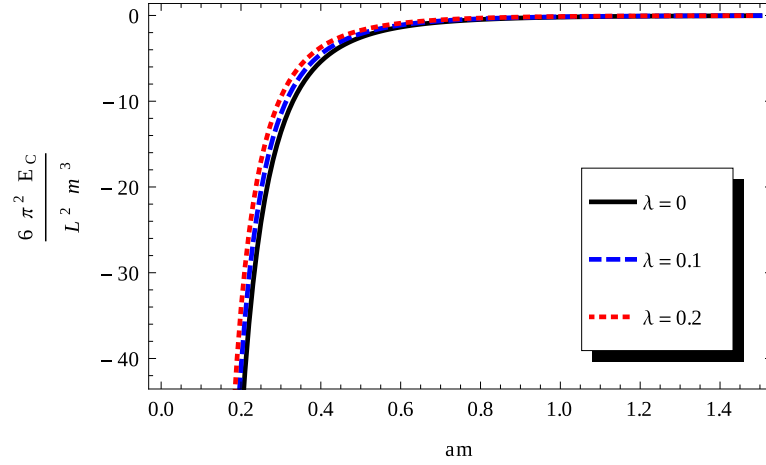


Figura 12 – Energia de Casimir para o caso $u^{(z)} = (0, 0, 0, 1)$ multiplicada por $6\pi^2/L^2m^3$, como função de am para os seguintes valores de $\lambda = 0.0, 0.1$ e 0.2 .

(i) No limite $am \gg 1$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_C}{L^2} &\approx -\frac{bm^4}{6\pi^2} \int_1^\infty \frac{(v^2 - 1)^{3/2}}{e^{2bmv}} dv \\ &\approx -\frac{(1 - \lambda)^{3/4}}{16} \left(\frac{m}{\pi a}\right)^{3/2} e^{-2(1-\lambda)^{-1/2}am}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Aqui, novamente temos um decaimento exponencial com am .

(ii) No limite $am \ll 1$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_C}{L^2} &\approx -\frac{bm^4}{6\pi^2} \int_1^\infty \frac{v^3}{e^{2bmv} - 1} dv \\ &\approx -\frac{(1 - \lambda)^{-1}}{1440\pi^2 a^3} \left[\pi^4(1 - \lambda)^{5/2} - 40a^3m^3(1 - \lambda) + 30a^4m^4(1 - \lambda)^{1/2} - 8a^5m^5 \right]. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Mais uma vez, o primeiro termo da Eq. (4.43) se refere ao caso não massivo. Usando a expressão obtida na Eq. (4.43), a pressão de Casimir entre as duas placas é dada por:

$$\mathcal{P}_C = -\frac{\partial \mathcal{E}_C / L^2}{\partial a} = -\frac{(1 - \lambda)^{-1}}{1440\pi^2 a^4} \left[3\pi^4(1 - \lambda)^{5/2} - 30a^4m^4(1 - \lambda)^{1/2} + 16a^5m^5 \right]. \quad (4.44)$$

Aqui, é importante observar que a energia e pressão de Casimir são bem mais "sensíveis" ao parâmetro que caracteriza a violação da simetria de Lorentz, λ . Então, quando considerarmos o quadrivetor u^μ ortogonal às placas, os efeitos são bem mais interessantes.

4.2 CONDIÇÃO DE CONTORNO DE NEUMANN

Nesta seção, estamos interessados nas soluções da equação de Klein-Gordon modificada da Eq. (4.1), satisfazendo a condição de contorno de Neumann. Ou seja, nas placas o campo

$\phi(x)$ deve satisfazer:

$$\left. \frac{\partial \phi(x)}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial \phi(x)}{\partial z} \right|_{z=a} = 0. \quad (4.45)$$

Impondo as condições da Eq. (4.45) à Eq. (4.1), após alguns cálculos intermediários (MANDL; SHAW, 2010), obtemos o seguinte operador de campo:

$$\hat{\phi}(x) = \int d^2 \vec{k} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n\pi}{a} z\right) \left[\hat{a}_n(\vec{k}) e^{-ikx} + \hat{a}_n^\dagger(\vec{k}) e^{ikx} \right], \quad (4.46)$$

onde $kx = \omega_{\vec{k},n} t - k_x x - k_y y$, e os operadores de aniquilação e criação, satisfazem as mesmas relações de comutação da Eq. (1.38). Usando a relação de normalização da Eq. (1.36), a constante C_n é dada por:

$$C_n = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2(2\pi)^{1/2} \omega_{\vec{k},n} a}} & \text{para } n = 0, \\ \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^{1/2} \omega_{\vec{k},n} a}} & \text{para } n \geq 1. \end{cases} \quad (4.47)$$

Podemos observar que o operador de campo da Eq. (4.46), difere do operador de campo da Eq. (4.4). Assim como foi feito para o caso da condição de contorno de Dirichlet, nas subseções a seguir, devemos considerar os casos em que o quadrivetor u^μ é tipo-tempo e tipo-espaço, respectivamente.

4.2.1 Quadrivetor tipo-tempo

No caso em que u^μ é tipo-tempo, temos:

$$u^{(t)} = (1, 0, 0, 0). \quad (4.48)$$

Nesse caso, a relação de dispersão $\omega_{\vec{k},n}$, é dada por:

$$\omega_{\vec{k},n} = \sqrt{\frac{1}{(1+\lambda)} \left[k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + m^2 \right]}. \quad (4.49)$$

Usando a relação do tensor energia-momento da Eq. (4.2), juntamente com o operador de campo da Eq. (4.46), obtemos o operador Hamiltoniano, $\hat{\mathcal{H}}$, dado por:

$$\hat{\mathcal{H}} = \int d^3 \vec{x} \hat{T}^{tt} = \frac{(1+\lambda)}{2} \int d^2 \vec{k} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\vec{k},n} \left[2\hat{a}_n^\dagger(\vec{k}) \hat{a}_n(\vec{k}) + \frac{L^2}{(2\pi)^2} \right]. \quad (4.50)$$

Tomando o valor esperado de $\hat{\mathcal{H}}$ no estado de vácuo $|0\rangle$, a energia do vácuo é dada por:

$$\mathcal{E}_0 = \langle 0 | \hat{\mathcal{H}} | 0 \rangle = \frac{(1+\lambda)L^2}{8\pi^2} \int d^2 \vec{k} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\vec{k},n}. \quad (4.51)$$

Claramente, a expressão da Eq. (4.51) é uma quantidade divergente. Procedendo da mesma forma como para o caso da condição de contorno de Dirichlet, ou seja, regularizando usando a

fórmula de soma de Abel-Plana da Eq. (4.12) e em seguida renormalizando, a energia de Casimir por unidade de área é dada por:

$$\frac{\mathcal{E}_C}{L^2} = -\frac{\sqrt{(1+\lambda)}am^4}{6\pi^2} \int_1^\infty \frac{(v^2-1)^{3/2}}{e^{2amv}-1} dv. \quad (4.52)$$

Infelizmente, mais uma vez não podemos tratar a integral da Eq. (4.52) de forma analítica de maneira exata. No entanto, vamos considerar os limites assintóticos, $am \gg 1$ e $am \ll 1$, como foi feito anteriormete. Para um resultado exato da energia de Casimir, ver o gráfico mostrado na Fig. 10.

(i) No limite $am \gg 1$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_C}{L^2} &\approx -\frac{\sqrt{(1+\lambda)}am^4}{6\pi^2} \int_1^\infty \frac{(v^2-1)^{3/2}}{e^{2amv}-1} dv \\ &\approx -\frac{\sqrt{(1+\lambda)}}{16} \left(\frac{m}{\pi a}\right)^{3/2} e^{-2am}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Aqui, também ocorre um decaimento exponencial com am para a energia de Casimir por unidade de área. Portanto, a pressão de Casimir também tende a zero nesse limite.

(ii) No limite $am \ll 1$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_C}{L^2} &\approx -\frac{\sqrt{(1+\lambda)}am^4}{6\pi^2} \int_1^\infty \frac{v^3}{e^{2amv}-1} dv \\ &\approx -\frac{\sqrt{(1+\lambda)}}{1440\pi^2 a^3} [\pi^4 - 40a^3 m^3 + 30a^4 m^4 - 8a^5 m^5]. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Portanto, a partir da Eq. (4.54) obtemos a seguinte pressão de Casimir:

$$\mathcal{P}_C = -\frac{\partial \mathcal{E}_C / L^2}{\partial a} = -\frac{\sqrt{(1+\lambda)}}{1440\pi^2 a^4} [3\pi^4 - 30a^4 m^4 + 16a^5 m^5]. \quad (4.55)$$

4.2.2 Quadrivetor tipo-espaço

Novamente, nesta subseção consideraremos os seguintes casos: $u^{(x)} = (0, 1, 0, 0)$, $u^{(y)} = (0, 0, 1, 0)$ e $u^{(z)} = (0, 0, 0, 1)$. No entanto, os resultados para o caso $u^{(y)}$ não diferem do caso $u^{(x)}$. Assim, consideremos:

$$u^{(x)} = (0, 1, 0, 0). \quad (4.56)$$

Dessa forma, a relação de dispersão $\omega_{\vec{k},n}$ associada com o operador de campo da Eq. (4.46), é dada por:

$$\omega_{\vec{k},n} = \sqrt{(1-\lambda)k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + m^2}. \quad (4.57)$$

Que consequentemente, o operador Hamiltoniano é dado por:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \int d^2 \vec{k} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\vec{k},n} \left[2\hat{a}_n^\dagger(\vec{k})\hat{a}_n(\vec{k}) + \frac{L^2}{(2\pi)^2} \right], \quad (4.58)$$

o que fornece a seguinte energia do vácuo:

$$\mathcal{E}_0 = \langle 0 | \mathcal{H} | 0 \rangle = \frac{L^2}{8\pi^2} \int d^2\vec{k} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\vec{k},n}. \quad (4.59)$$

Após a regularização da energia do vácuo da Eq. (4.59), e a subtração dos termos divergentes, ficamos com a energia de Casimir por unidade de área dada por:

$$\frac{\mathcal{E}_C}{L^2} = -\frac{(1-\lambda)^{-1/2}am^4}{6\pi^2} \int_1^{\infty} \frac{(v^2-1)^{3/2}}{e^{2amv}-1} dv. \quad (4.60)$$

A solução numérica para energia de Casimir é dada na Fig. 11. No entanto, para resultados analíticos, só é possível tomando os limites, $am \gg 1$ e $am \ll 1$.

(i) No limite $am \gg 1$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_C}{L^2} &\approx -\frac{(1-\lambda)^{-1/2}am^4}{6\pi^2} \int_1^{\infty} \frac{(v^2-1)^{3/2}}{e^{2amv}-1} dv \\ &\approx -\frac{(1-\lambda)^{-1/2}}{16} \left(\frac{m}{\pi a}\right)^{3/2} e^{-2am}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

(ii) No limite $am \ll 1$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_C}{L^2} &\approx -\frac{(1-\lambda)^{-1/2}am^4}{6\pi^2} \int_1^{\infty} \frac{v^3}{e^{2amv}-1} dv \\ &\approx -\frac{(1-\lambda)^{-1/2}}{1440\pi^2 a^3} [\pi^4 - 40a^3 m^3 + 30a^4 m^4 - 8a^5 m^5]. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Assim, usando o resultado obtido na Eq. (4.62), obtemos a pressão de Casimir como sendo:

$$\mathcal{P}_C = -\frac{(1-\lambda)^{-1/2}}{1440\pi^2 a^4} [3\pi^4 - 30a^4 m^4 + 16a^5 m^5]. \quad (4.63)$$

Finalmente, considerando o caso que o quadrivetor u^μ é ortogonal às placas, ou seja, no caso em que,

$$u^{(z)} = (0, 0, 0, 1). \quad (4.64)$$

A relação de dispersão $\omega_{\vec{k},n}$, que está associada ao operador de campo da Eq. (4.46) é modificada para:

$$\omega_{\vec{k},n} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + m^2}, \quad b \equiv \frac{a}{\sqrt{(1-\lambda)}}. \quad (4.65)$$

Usando a expressão do tensor energia-momento da Eq. (4.2), e substituindo a operador de campo da Eq. (4.46), o operador Hamiltoniano, $\hat{\mathcal{H}}$, é dado por:

$$\hat{\mathcal{H}} = \int d^3\vec{x} \hat{\mathcal{T}}^{tt} = \frac{1}{2} \int d^2\vec{k} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\vec{k},n} \left[2\hat{a}_n^\dagger(\vec{k})\hat{a}_n(\vec{k}) + \frac{L^2}{(2\pi)^2} \right]. \quad (4.66)$$

Consequentemente, a energia do vácuo é dada por:

$$\mathcal{E}_0 = \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \frac{L^2}{8\pi^2} \int d^2\vec{k} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\vec{k},n}. \quad (4.67)$$

Assim, usando a fórmula de soma de Abel-Plana da Eq. (4.12) a fim de regularizar a energia do vácuo, em seguida fazendo a renormalização e alguns passos algébricos, obtemos a energia de Casimir por unidade de área:

$$\frac{\mathcal{E}_C}{L^2} = -\frac{bm^4}{6\pi^2} \int_1^{\infty} \frac{(v^2 - 1)^{3/2}}{e^{2bmv} - 1} dv. \quad (4.68)$$

É importante lembrar que, o parâmetro que caracteriza a violação de Lorentz, λ , está implícito no parâmetro b . Aqui, novamente consideramos os limites assintóticos, $am \gg 1$ e $am \ll 1$, com o intuito de obter resultados analíticos. Porém, no gráfico da Fig. 12 é apresentado o resultado numérico para a energia de Casimir.

(i) No limite $am \gg 1$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_C}{L^2} &\approx -\frac{bm^4}{6\pi^2} \int_1^{\infty} \frac{(v^2 - 1)^{3/2}}{e^{2bmv} - 1} dv \\ &\approx -\frac{(1 - \lambda)^{3/4}}{16} \left(\frac{m}{\pi a}\right)^{3/2} e^{-2(1-\lambda)^{-1/2}am}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Ocorrendo, mais uma vez, o decaimento exponencial com am para $\mathcal{E}_C/L^2$ e $\mathcal{P}_C$.

(ii) No limite $am \ll 1$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_C}{L^2} &\approx -\frac{bm^4}{6\pi^2} \int_1^{\infty} \frac{v^3}{e^{2bmv} - 1} dv \\ &\approx -\frac{(1 - \lambda)^{-1}}{1440\pi^2 a^3} \left[\pi^4 (1 - \lambda)^{5/2} - 40a^3 m^3 (1 - \lambda) \right. \\ &\quad \left. + 30a^4 m^4 (1 - \lambda)^{1/2} - 8a^5 m^5 \right]. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Consequentemente, a pressão de Casimir entre as duas placas é dada por:

$$\mathcal{P}_C = -\frac{(1 - \lambda)^{-1}}{1440\pi^2 a^4} \left[3\pi^4 (1 - \lambda)^{5/2} - 30a^4 m^4 (1 - \lambda)^{1/2} + 16a^5 m^5 \right]. \quad (4.71)$$

Como podemos observar, para os diferentes casos considerados para o quadrivetor u^μ , os resultados obtidos quando é considerado a condição de contorno de Neumann coincidem com os resultados obtidos no caso da condição de contorno de Dirichlet. Isso se dá, porque mesmo o operador de campo $\hat{\phi}(x)$ sendo distintos nos dois casos, os operadores Hamiltonianos $\hat{\mathcal{H}}$ e, as relações de dispersão $\omega_{\vec{k},n}$, coincidem para os respectivos casos considerados.

4.3 CONDIÇÃO DE CONTORNO MISTA

Por último, vamos considerar o caso em que o campo escalar $\phi(x)$ obedece a uma condição de contorno de Dirichlet em uma das placas e a uma condição de contorno de Neumann na outra placa. Dessa forma, podemos ter duas configurações distintas:

(i) Primeira configuração:

$$\phi(x)|_{z=0} = \frac{\partial \phi(x)}{\partial z} \Big|_{z=a} = 0. \quad (4.72)$$

(ii) Segunda configuração:

$$\frac{\partial \phi(x)}{\partial z} \Big|_{z=0} = \phi(x)|_{z=a} = 0. \quad (4.73)$$

Procedendo como nos dois casos anteriores, vamos encontrar as soluções da equação de Klein-Gordon modificada da Eq. (4.1) e, em seguida o promovemos a operador. Quando isso é feito considerando a primeira configuração da Eq. (4.72), obtemos o seguinte operador de campo:

$$\hat{\phi}_1(x) = \int d^2\vec{k} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^2 \omega_{\vec{k},n} a}} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{a} z \right] \left[\hat{a}_n(\vec{k}) e^{-ikx} + \hat{a}_n^\dagger e^{ikx} \right], \quad (4.74)$$

enquanto que, quando consideramos a segunda configuração, Eq. (4.73), obtemos o operador de campo dado por:

$$\hat{\phi}_2(x) = \int d^2\vec{k} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^2 \omega_{\vec{k},n} a}} \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{a} z \right] \left[\hat{a}_n(\vec{k}) e^{-ikx} + \hat{a}_n^\dagger e^{ikx} \right]. \quad (4.75)$$

Aqui, temos $kx = \omega_{\vec{k},n} t - k_x x - k_y y$, onde a relação de dispersão $\omega_{\vec{k},n}$ muda de acordo com a escolha do quadrivetor u^μ . Os operadores de aniquilação e criação de partículas $\hat{a}_n(\vec{k})$ e $\hat{a}_n^\dagger(\vec{k})$, respectivamente, satisfazem a relação de comutação da Eq. (1.38).

Embora os operadores de campo acima sejam diferentes, eles fornecem os mesmos tensores energia-momento. Assim, ambas configurações terão os mesmo operadores Hamiltonianos associados com sua respectiva relação de dispersão, para cada caso a ser considerado para o quadrivetor constante u^μ , o qual caracteriza a violação da simetria de Lorentz.

4.3.1 Quadrivetor tipo-tempo

Para o caso em que o quadrivetor constante u^μ é tipo-tempo, temos:

$$u^{(t)} = (1, 0, 0, 0). \quad (4.76)$$

Assim, a expressão para operador Hamiltoniano é obtido como sendo:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{(1 + \lambda)}{2} \int d^2\vec{k} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{\vec{k},n} \left[2\hat{a}_n^\dagger(\vec{k})\hat{a}_n(\vec{k}) + \frac{L^2}{(2\pi)^2} \right], \quad (4.77)$$

onde a relação de dispersão $\omega_{\vec{k},n}$ na Eq. (4.77), tem a seguinte forma:

$$\omega_{\vec{k},n} = \sqrt{\frac{1}{(1+\lambda)} \left\{ k_x^2 + k_y^2 + \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{a} \right]^2 + m^2 \right\}}. \quad (4.78)$$

Tomando o valor esperado no estado de vácuo $|0\rangle$, do operador Hamiltoniano da Eq. (4.77), a energia do vácuo é dada por:

$$\mathcal{E}_0 = \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \frac{(1+\lambda)L^2}{8\pi^2} \int d^2\vec{k} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{\vec{k},n}, \quad (4.79)$$

a qual é uma quantidade divergente. Nesse caso, o procedimento de regularização, é feito considerando a fórmula de soma de Abel-Plana para números semi-inteiros (BORDAG et al., 2009; SAHARIAN, 2007), dada por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} F\left(n + \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} F(t)dt - i \int_0^{\infty} \frac{F(it) - F(-it)}{e^{2\pi t} + 1} dt. \quad (4.80)$$

Usando a Eq. (4.80) na Eq. (4.79), obtemos a energia do vácuo regularizada

$$\mathcal{E}_0^{\text{reg}} = \frac{\sqrt{(1+\lambda)}L^2}{4\pi} \int_0^{\infty} kdk \left[\int_0^{\infty} F(t)dt - i \int_0^{\infty} \frac{F(it) - F(-it)}{e^{2\pi t} + 1} dt \right], \quad (4.81)$$

onde a função $F(n + 1/2)$ é dada por:

$$F\left(n + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{k^2 + \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{a} \right]^2 + m^2}. \quad (4.82)$$

Mais uma vez, a energia de Casimir é dada após a renormalização, isso significa que o termo divergente da Eq. (4.81) é subtraído, nos restando apenas o segundo termo. O primeiro termo refere-se à energia livre do vácuo. Feito isso, temos que a energia de Casimir por unidade de área é:

$$\frac{\mathcal{E}_C}{L^2} = -\frac{\sqrt{(1+\lambda)}}{4\pi} i \int_0^{\infty} kdk \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{k^2 + \left(\frac{i\pi t}{a}\right)^2 + m^2} - \sqrt{k^2 + \left(\frac{-i\pi t}{a}\right)^2 + m^2}}{e^{2\pi t} + 1} dt, \quad (4.83)$$

que quando realizado a seguinte mudança de variável, $u = \pi t/a$, ficamos com:

$$\frac{\mathcal{E}_C}{L^2} = -\frac{\sqrt{(1+\lambda)}a}{4\pi^2} i \int_0^{\infty} kdk \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{k^2 + m^2 + (iu)^2} - \sqrt{k^2 + m^2 + (-iu)^2}}{e^{2au} + 1} du. \quad (4.84)$$

Aqui, devemos dividir a integral na variável u em duas partes. A primeira parte será integrada no intervalo $[0, \sqrt{k^2 + m^2}]$, enquanto a segunda parte no intervalo $[\sqrt{k^2 + m^2}, \infty)$. Fazendo uso das Eqs. (4.17) e (4.18), obtemos:

$$\frac{\mathcal{E}_C}{L^2} = \frac{\sqrt{(1+\lambda)}a}{2\pi^2} \int_0^{\infty} kdk \int_{\sqrt{k^2 + m^2}}^{\infty} \frac{\sqrt{u^2 - k^2 - m^2}}{e^{2au} + 1} du, \quad (4.85)$$

ou ainda, fazendo uma mudança conveniente de variável podemos reescrever a Eq. (4.85) como sendo:

$$\frac{\mathcal{E}_C}{L^2} = \frac{\sqrt{(1+\lambda)}am^4}{6\pi^2} \int_1^\infty \frac{(v^2 - 1)^{3/2}}{e^{2amv} + 1} dv. \quad (4.86)$$

Nesse caso, também não existe uma expressão analítica para a integral da Eq. (4.86), assim, como foi feito nos outros casos, vamos tomar os limites assintóticos, $am \gg a$ e $am \ll 1$. No entanto, a energia de Casimir é dada de forma exata como solução numérica na Fig. 13. Para os casos assintóticos, obtemos:

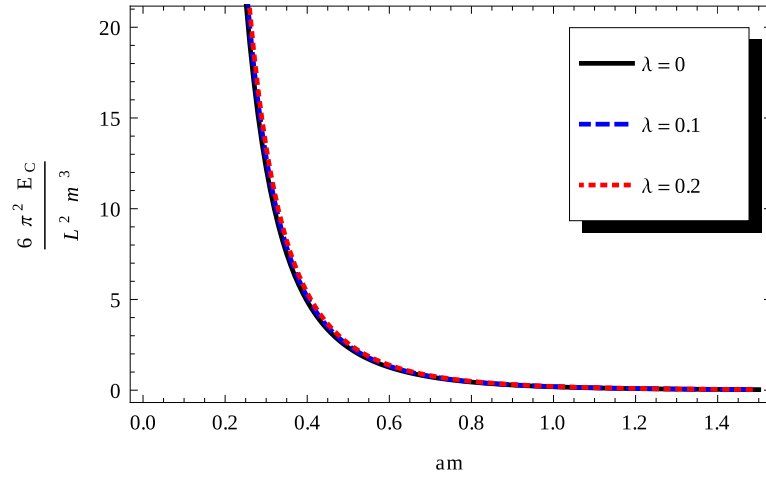


Figura 13 – Energia de Casimir para o caso $u^{(t)} = (1, 0, 0, 0)$ multiplicada por $6\pi^2/L^2m^3$, como função de am para os seguintes valores de $\lambda = 0.0, 0.1$ e 0.2 .

(i) No limite $am \gg 1$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_C}{L^2} &\approx \frac{\sqrt{(1+\lambda)}am^4}{6\pi^2} \int_1^\infty \frac{(v^2 - 1)^{3/2}}{e^{2amv}} dv \\ &\approx \frac{\sqrt{(1+\lambda)}}{16} \left(\frac{m}{\pi a}\right)^{3/2} e^{-2am}. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Claramente, a expressão para energia de Casimir da Eq. (4.87) apresenta um decaimento exponencial com am .

(ii) No limite $am \ll 1$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_C}{L^2} &\approx \frac{\sqrt{(1+\lambda)}am^4}{6\pi^2} \int_1^\infty \frac{v^3}{e^{2amv} + 1} dv \\ &\approx \frac{\sqrt{(1+\lambda)}}{11520\pi^2 a^3} [7\pi^4 + 48a^4 m^4 (4am - 5)]. \end{aligned} \quad (4.88)$$

Onde o primeiro termo da Eq. (4.88) se refere ao caso de campos não massivos, sendo assim, a contribuição mais relevante para energia de Casimir. Assim, a partir da Eq. (4.88), a pressão de Casimir entre as duas placas tem a forma:

$$\mathcal{P}_C = -\frac{\partial \mathcal{E}_C / L^2}{\partial a} = \frac{\sqrt{(1+\lambda)}}{3840\pi^2 a^4} [7\pi^4 + 80a^4 m^4 - 128a^5 m^5]. \quad (4.89)$$

Nesse caso, a influência do parâmetro que caracteriza a violação de Lorentz, λ , é um termo multiplicativo como foi verificado nos casos das condições de contorno de Dirichlet e Neumann. No entanto, é possível notar que o valor da pressão de Casimir mudou. Ainda, temos que diferentemente dos outros casos, agora as placas estão se afastando.

4.3.2 Quadrivector tipo-espaço

Como foi considerado para as condições de contorno de Dirichlet e Neumann, também admitiremos as três direções possível para o quadrivector u^μ . Ou seja, $u^{(x)} = (0, 1, 0, 0)$, $u^{(y)} = (0, 0, 1, 0)$ e $u^{(z)} = (0, 0, 0, 1)$. No entanto, como $u^{(y)}$ leva aos mesmos resultados que $u^{(x)}$, vamos considerar apenas $u^{(x)}$ e $u^{(z)}$. Sendo assim, primeiramente nos concentremos em:

$$u^{(x)} = (0, 1, 0, 0). \quad (4.90)$$

Para essa situação, a relação de dispersão $\omega_{\vec{k},n}$ referente aos operadores de campo das Eqs. (4.74) e (4.75), é dada por:

$$\omega_{\vec{k},n} = \sqrt{(1 - \lambda)k_x^2 + k_y^2 + \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{a} \right]^2 + m^2}. \quad (4.91)$$

O operador hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}$, é agora dado por:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \int d^2\vec{k} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{\vec{k},n} \left[2\hat{a}_n^\dagger(\vec{k})\hat{a}_n(\vec{k}) + \frac{L^2}{(2\pi)^2} \right], \quad (4.92)$$

que tomado o seu valor esperado no estado de vácuo $|0\rangle$, obtemos a seguinte energia do vácuo:

$$\mathcal{E}_0 = \langle 0 | \hat{\mathcal{H}} | 0 \rangle = \frac{L^2}{8\pi^2} \int d^2\vec{k} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\vec{k},n}. \quad (4.93)$$

Usando a fórmula de soma de Abel-Plana da Eq. (4.80), obtemos a energia do vácuo regularizada dada por:

$$\mathcal{E}_0^{\text{reg}} = \frac{(1 - \lambda)^{-1/2} L^2}{4\pi} \int_0^\infty k dk \left[\int_0^\infty F(t) dt - i \int_0^\infty \frac{[F(it) - F(-it)]}{e^{2\pi t} + 1} dt \right], \quad (4.94)$$

onde,

$$F\left(n + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{k^2 + m^2 + \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{a} \right]^2}. \quad (4.95)$$

Realizando o procedimento de renormalização, no qual a primeira integral da Eq. (4.94) é subtraída, esse termo se refere a contribuição da energia do vácuo na ausência de placas. Assim, a energia de Casimir por unidade de área é dada por:

$$\frac{\mathcal{E}_C}{L^2} = \frac{(1 - \lambda)^{-1/2} a m^4}{6\pi^2} \int_1^\infty \frac{(v^2 - 1)^{3/2}}{e^{2amv} + 1} dv. \quad (4.96)$$

A energia de Casimir de forma exata, só é possível numericamente, como mostra a Fig. 14. No entanto, considerando os limites, $am \gg 1$ e $am \ll 1$, podemos obter os seguintes resultados analíticos:

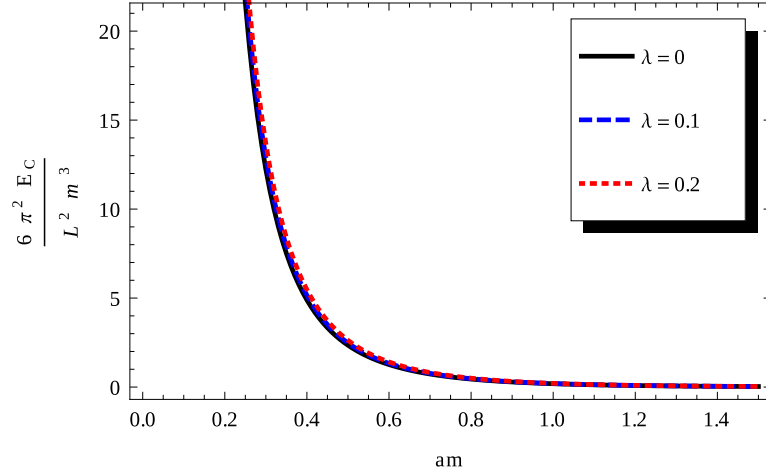


Figura 14 – Energia de Casimir para o caso $u^{(x)} = (0, 1, 0, 0)$ multiplicada por $6\pi^2/L^2m^3$, como função de am para os seguintes valores de $\lambda = 0.0, 0.1$ e 0.2 .

(i) No limite $am \gg 1$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_C}{L^2} &\approx \frac{(1-\lambda)^{-1/2}am^4}{6\pi^2} \int_1^\infty \frac{(v^2-1)^{3/2}}{e^{2amv}} dv \\ &\approx \frac{(1-\lambda)^{-1/2}}{16} \left(\frac{m}{\pi a}\right)^{3/2} e^{-2am}. \end{aligned} \quad (4.97)$$

(ii) No limite $am \ll 1$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_C}{L^2} &\approx \frac{(1-\lambda)^{-1/2}am^4}{6\pi^2} \int_1^\infty \frac{v^3}{e^{2amv} + 1} dv \\ &\approx \frac{(1-\lambda)^{-1/2}}{11520\pi^2 a^3} [7\pi^4 + 48a^4m^4(4am - 5)]. \end{aligned} \quad (4.98)$$

Portanto, a pressão de Casimir entre as duas placas é dada por:

$$\mathcal{P}_C = \frac{(1-\lambda)^{-1/2}}{3840\pi^2 a^4} [7\pi^4 + 80a^4m^4 - 128a^5m^5]. \quad (4.99)$$

Finalmente, podemos considerar o caso em que o quadrivetor u^μ é ortogonal às placas, ou seja, o quadrivetor é:

$$u^{(z)} = (0, 0, 0, 1). \quad (4.100)$$

Para esse caso, os operadores de campo das Eqs. (4.74) e (4.75) têm a relação de dispersão $\omega_{\vec{k},n}$, modificada para:

$$\omega_{\vec{k},n} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + (1-\lambda) \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{a} \right]^2 + m^2}. \quad (4.101)$$

E o operador Hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}$, é dado por:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \int d^2\vec{k} \sum_{n=1}^\infty \omega_{\vec{k},n} \left[2\hat{a}_n^\dagger(\vec{k})\hat{a}_n(\vec{k}) + \frac{L^2}{(2\pi)^2} \right], \quad (4.102)$$

que tomando seu valor esperado no estado de vácuo $|0\rangle$, fornece a seguinte energia do vácuo:

$$\mathcal{E}_0 = \langle 0 | \hat{\mathcal{H}} | 0 \rangle = \frac{L^2}{8\pi^2} \int d^2\vec{k} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\vec{k},n}. \quad (4.103)$$

Como a energia do vácuo da Eq. (4.103) é uma quantidade divergente, usamos a fórmula de soma de Abel-Plana da Eq. (4.80) para realizarmos o procedimento de regularização, com a seguinte identificação:

$$F\left(n + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{k^2 + \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{b}\right]^2 + m^2}, \quad b \equiv \frac{a}{\sqrt{1-\lambda}}. \quad (4.104)$$

Em seguida, devemos realizarmos a renormalização para subtrair os termos divergentes, como foi feito para os casos anteriores. Feito isso, após algumas mudanças de variáveis e procedimentos algébricos, obtemos a energia de Casimir por unidade de área:

$$\frac{\mathcal{E}_C}{L^2} = \frac{bm^4}{6\pi^2} \int_1^{\infty} \frac{(v^2 - 1)^{3/2}}{e^{2bmv} + 1} dv. \quad (4.105)$$

Como foi feito para todos os casos anteriores, vamos considerar os limites, $am \gg 1$ e $am \ll 1$, devido a impossibilidade do tratamento da Eq. (4.105) analiticamente. No entanto, o resultado exato para a energia de Casimir é mostrado no gráfico da Fig. 15.

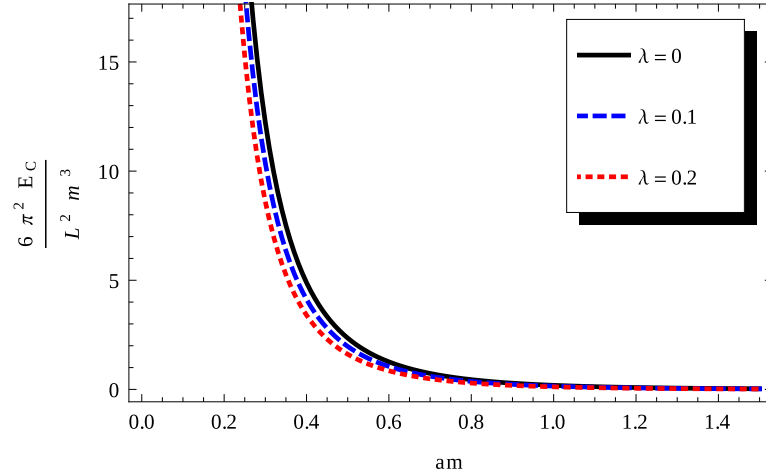


Figura 15 – Energia de Casimir para o caso $u^{(z)} = (0, 0, 0, 1)$ multiplicada por $6\pi^2/L^2m^3$, como função de am para os seguintes valores de $\lambda = 0.0, 0.1$ e 0.2 .

(i) No limite $am \gg 1$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_C}{L^2} &\approx \frac{bm^4}{6\pi^2} \int_1^{\infty} \frac{(v^2 - 1)^{3/2}}{e^{2bmv} + 1} dv \\ &\approx \frac{(1-\lambda)^{3/4}}{16} \left(\frac{m}{\pi a}\right)^{3/2} e^{-2(1-\lambda)^{-1/2}am}. \end{aligned} \quad (4.106)$$

Que claramente, a energia de Casimir nesse limite tende a zero muito rapidamente com am .

(ii) No limite $am \ll 1$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_C}{L^2} &\approx \frac{bm^4}{6\pi^2} \int_1^\infty \frac{v^3}{e^{2bmv} + 1} dv \\ &\approx \frac{(1-\lambda)^{-1}}{11520\pi^2 a^3} \left[7\pi^4(1-\lambda)^{5/2} - 240a^4 m^4 \sqrt{1-\lambda} + 192a^5 m^5 \right]. \end{aligned} \quad (4.107)$$

Aqui, o primeiro termo da Eq. (4.107) se refere ao caso não massivo. Sendo assim, a partir da Eq. (4.107), temos a pressão de Casimir entre as duas placas dada por:

$$\mathcal{P}_C = -\frac{\partial \mathcal{E}_C / L^2}{\partial a} = \frac{(1-\lambda)^{-1}}{3840\pi^2 a^4} \left[7\pi^4(1-\lambda)^{5/2} + 80a^4 m^4 \sqrt{1-\lambda} - 128a^5 m^5 \right]. \quad (4.108)$$

Portanto, assim como nos casos das condições de contorno de Dirichlet e Neumann, a modificação na energia de Casimir e, conseqüentemente na pressão de Casimir, decorrente do parâmetro da violação de Lorentz, λ , acaba sendo mais profunda quando consideramos o vetor ortogonal às placas.

Neste capítulo, analisamos o efeito Casimir associado a um campo escalar massivo real em um modelo teórico, considerando uma violação da simetria de Lorentz do tipo-éter, consistindo de um acoplamento entre a derivada do campo e um quadrivetor constante arbitrário. Consideramos a situação em que o campo está confinado entre duas placas paralelas, e foi assumido que o campo obedece às condições de contorno de Dirichlet, Neumann ou mistas nas placas. Para cada direção arbitrária do quadrivetor constante, u^μ , a energia de Casimir por unidade de área foi obtida. Como no caso usual, onde a simetria de Lorentz é preservada, as energias de Casimir para as condições de Dirichlet e Neumann são iguais e diferem da energia de Casimir com condições mistas, por um fator numérico e também por uma mudança do sinal. Em todos os casos, foi observado que a energia de Casimir depende fortemente do parâmetro λ e, para $\lambda = 0$, os resultados são recuperados onde a simetria de Lorentz é preservada. Portanto, a energia de Casimir depende tanto das condições de contorno impostas aos campos quanto do parâmetro de violação de Lorentz.

5 CORREÇÕES TÉRMICAS PARA O EFEITO CASIMIR ESCALAR COM VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ DO TIPO ÉTER

Neste capítulo, desejamos analisar as correções térmicas para a energia de Casimir, admitindo que o sistema encontra-se em equilíbrio térmico com uma temperatura T . Admitiremos também que o campo escalar real $\phi(x)$, obedece as condições de contorno de Dirichlet, Neumann e mista nas placas de área L^2 colocadas paralelas uma a outra e separadas por uma distância a , com $a \ll L$. Ainda, assumiremos que as placas são perpendiculares ao eixo z , como mostrado na Fig. 2 do capítulo 2.

Procedendo da mesma forma como no capítulo 4, devemos obter a solução $\phi(x)$ da equação de Klein-Gordon modificada, Eq. (3.14), dada por:

$$[\partial_\mu \partial^\mu + m^2 + \lambda u^\mu u^\nu \partial_\mu \partial_\nu] \phi(x) = 0, \quad (5.1)$$

para as diferentes condições de contorno impostas ao campo. Em seguida, devemos obter o operador de campo bosônico promovendo a solução $\phi(x)$ ao operador $\hat{\phi}(x)$.

Usando a expressão do tensor energia-momento, Eq. (3.16), podemos obter o operador Hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}$:

$$\hat{\mathcal{H}} = \int d^3\vec{x} \hat{\mathcal{T}}^{tt}, \quad (5.2)$$

onde

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = (\partial^\mu \phi)(\partial^\nu \phi) + \lambda u^\mu (\partial^\nu \phi)(u \cdot \partial \phi) - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (5.3)$$

É importante dizer que os resultados apresentados neste capítulo estão publicados em (CRUZ; MELLO; PETROV, 2018).

5.1 CONDIÇÃO DE CONTORNO DE DIRICHLET

Nesta seção, analisaremos a equação de Klein-Gordon modificada da Eq. (5.1), impondo a condição de contorno de Dirichlet às placas, ou seja,

$$\phi(x)|_{z=0} = \phi(x)|_{z=a} = 0. \quad (5.4)$$

Adotando o procedimento padrão (MANDL; SHAW, 2010), assim como foi feito no capítulo 4, encontramos o operador de campo da forma:

$$\hat{\phi}(x) = \int d^2\vec{k} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^2 \omega_{\vec{k},n} a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a} a\right) \left[\hat{a}_n(\vec{k}) e^{-ikx} + \hat{a}_n^\dagger(\vec{k}) e^{ikx} \right], \quad (5.5)$$

onde,

$$kx = \omega_{\vec{k},n} t - k_x x - k_y y. \quad (5.6)$$

Na Eq. (5.5), $\hat{a}_n(\vec{k})$ e $\hat{a}_n^\dagger(\vec{k})$ representam os operadores de aniquilação e criação, respectivamente, caracterizado pelo conjunto de números quânticos (k_x, k_y, n) , onde k_x, k_y são números contínuos e, n é um número discreto.

A seguir, vamos assumir diferentes direções para o quadrivetor constante u^μ , o qual implementa a anisotropia do espaço-tempo.

5.1.1 Quadrivetor tipo-tempo

Como nossa primeira configuração, escolhemos o quadrivetor unitário, u^μ , como sendo tipo-tempo:

$$u^{(t)} = (1, 0, 0, 0). \quad (5.7)$$

Neste caso, o operador Hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}$, pode ser escrito como:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{(1+\lambda)}{2} \int d^2\vec{k} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\vec{k},n} \left[2\hat{a}_n^\dagger(\vec{k})\hat{a}_n(\vec{k}) + \frac{L^2}{(2\pi)^2} \right], \quad (5.8)$$

com a relação de dispersão, $\omega_{\vec{k},n}$, sendo dada por:

$$\omega_{\vec{k},n} = \sqrt{\frac{1}{(1+\lambda)} \left[k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + m^2 \right]}. \quad (5.9)$$

Consequentemente, a energia é obtida tomando a média térmica de $\hat{\mathcal{H}}$ da Eq. (5.8):

$$\mathcal{E} = \langle \hat{\mathcal{H}} \rangle = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_T, \quad (5.10)$$

aqui, o primeiro termo $\mathcal{E}_0$ é a energia do vácuo e o segundo $\mathcal{E}_T$, a correção térmica. No capítulo 4 analisamos, $\mathcal{E}_0$, portanto, nosso interesse aqui será a análise de $\mathcal{E}_T$.

Portanto, a correção térmica, $\mathcal{E}_T$, da energia é dada por:

$$\mathcal{E}_T = (1+\lambda) \int d^2\vec{k} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\vec{k},n} \langle \hat{a}_n^\dagger(\vec{k}) \hat{a}_n(\vec{k}) \rangle, \quad (5.11)$$

que usando a relação do número de ocupação bosônico da Eq. (1.94), dado por:

$$\langle \hat{\mathcal{N}}_{\vec{k},n} \rangle = \langle \hat{a}_n^\dagger(\vec{k}) \hat{a}_n(\vec{k}) \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\omega_{\vec{k},n} - \mu)} - 1}, \quad (5.12)$$

onde $\beta = 1/T$ e o potencial químico, μ , tem a restrição $\mu \leq \omega_{\vec{k},n}$. Substituindo a Eq. (5.12) na Eq. (5.11), obtemos:

$$\mathcal{E}_T = \frac{(1+\lambda)L^2}{(2\pi)^2} \int d^2\vec{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_{\vec{k},n}}{e^{\beta(\omega_{\vec{k},n}-\mu)} - 1}. \quad (5.13)$$

Usando a seguinte identidade:

$$\frac{1}{e^z - 1} = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-jz}, \quad (5.14)$$

a Eq. (5.13) se torna:

$$\mathcal{E}_T = \frac{(1+\lambda)L^2}{(2\pi)^2} \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \int d^2\vec{k} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\vec{k},n} e^{-j\beta\omega_{\vec{k},n}}. \quad (5.15)$$

Para desenvolver a soma no número quântico inteiro, n , usaremos a fórmula de soma de Abel-Plana da Eq. (4.12). Executando na Eq. (5.15) uma mudança de coordenadas no plano cartesiano (k_x, k_y) para coordenadas polares (k, θ) , e integrando sobre a variável angular, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_T = \frac{(1+\lambda)L^2}{2\pi} \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \int_0^{\infty} k dk \left\{ -\frac{1}{2}F(0) + \int_0^{\infty} F(t)dt \right. \\ \left. + i \int_0^{\infty} \frac{[F(it) - F(-it)]}{e^{2\pi t} - 1} \right\}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

onde a função $F(n)$ é definida por:

$$F(n) = \omega_{\vec{k},n} e^{-j\beta\omega_{\vec{k},n}}, \quad \omega_{\vec{k},n} = \sqrt{\frac{1}{(1+\lambda)} \left[k^2 + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + m^2 \right]}. \quad (5.17)$$

Neste ponto, gostaríamos de chamar atenção para o fato de que o primeiro termo do lado direito da Eq. (5.16) representa a energia térmica na presença de uma única placa, e o segundo está conectado com energia térmica na ausência de placas. Embora ambas as energias sejam finitas, aqui as descartamos porque nosso objetivo principal é o cálculo da energia de Casimir, ou seja, na presença de duas placas. Como resultado, a correção de temperatura finita para energia de Casimir, $\mathcal{E}_{C_T}$, é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{C_T} = \frac{\sqrt{(1+\lambda)}L^2}{2\pi} i \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \int_0^{\infty} k dk \int_0^{\infty} \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} \left\{ \sqrt{k^2 + \left(\frac{i\pi t}{a} \right)^2 + m^2} \right. \\ \left. \times e^{-\frac{j\beta}{\sqrt{1+\lambda}} \sqrt{k^2 + \left(\frac{i\pi t}{a} \right)^2 + m^2}} - \sqrt{k^2 + \left(-\frac{i\pi t}{a} \right)^2 + m^2} e^{-\frac{j\beta}{\sqrt{1+\lambda}} \sqrt{k^2 + \left(-\frac{i\pi t}{a} \right)^2 + m^2}} \right\}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Realizando as mudanças de variáveis: $u = \pi t/a$ e $x^2 = k^2 + m^2$, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{C_T} = \frac{\sqrt{1+\lambda}L^2a}{2\pi^2} i \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \int_m^{\infty} x dx \int_0^{\infty} du \\ \times \frac{\sqrt{x^2 + (iu)^2} e^{-\frac{j\beta}{\sqrt{1+\lambda}} \sqrt{x^2 + (iu)^2}} - \sqrt{x^2 + (-iu)^2} e^{-\frac{j\beta}{\sqrt{1+\lambda}} \sqrt{x^2 + (-iu)^2}}}{e^{2au} - 1}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Aqui, vamos dividir a integral em u em dois intervalos: o primeiro intervalo é $[0, x]$ e, o segundo é dado por $[x, \infty)$. Com o auxílio das relações dadas por:

$$\sqrt{x^2 + (\pm iu)^2} = \begin{cases} \sqrt{x^2 - u^2} & \text{para } x > u \\ \pm i\sqrt{u^2 - x^2} & \text{para } x < u \end{cases}, \quad (5.20)$$

obtemos que a integração no intervalo $[0, x]$ se anula. Assim, obtemos como resultado a expressão dada por:

$$\mathcal{E}_{CT} = -\frac{\sqrt{1+\lambda}L^2a}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \int_m^{\infty} x dx \int_x^{\infty} du \frac{\sqrt{u^2 - x^2}}{e^{2au} - 1} \cos\left(\frac{j\beta}{\sqrt{1+\lambda}} \sqrt{u^2 - x^2}\right). \quad (5.21)$$

Fazendo as mudanças de variáveis, $u = xy$ e $z = ax$, obtemos:

$$\mathcal{E}_{CT} = -\frac{\sqrt{1+\lambda}L^2}{\pi^2 a^3} \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \int_{am}^{\infty} z^3 dz \int_1^{\infty} dy \frac{\sqrt{y^2 - 1}}{e^{2zy} - 1} \cos\left(\frac{j\beta z}{a\sqrt{1+\lambda}} \sqrt{y^2 - 1}\right). \quad (5.22)$$

Usando o desenvolvimento do apêndice A.1, podemos expressar a integral da Eq. (5.22) em termos da função de Bessel modificada do segundo tipo $K_\nu(z)$ (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1965):

$$\mathcal{E}_{CT} = -\frac{\sqrt{1+\lambda}L^2m^2}{\pi^2 a} \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left[\alpha_j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2\left(am\sqrt{\alpha_j^2 + 4n^2}\right)}{\alpha_j^2 + 4n^2} \right], \quad (5.23)$$

onde o parâmetro α_j na Eq. (5.23), é dado por:

$$\alpha_j = \frac{j\beta}{a\sqrt{1+\lambda}}. \quad (5.24)$$

Infelizmente, não é possível apresentar uma expressão analítica de forma exata para a Eq. (5.23), devido os somatórios em n e j . Assim, para que possamos obter alguma informação sobre o comportamento de $\mathcal{E}_{CT}$, vamos considerar os casos: $am \gg 1$, $am = 0$ e $am \ll 1$, juntamente devemos considerar o limite de baixas temperaturas, ou seja, $\beta/a \gg 1$. Os detalhes desse procedimento está no apêndice A.1.

- (i) No limite $am \gg 1$, temos que o termo mais relevante da Eq. (5.23) é dado por $n = 1$. Então, usando a expressão assintótica para a função de Bessel modificada $K_\nu(z)$ para argumentos grandes (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1965) e, após a derivação em relação a α_j , obtemos:

$$\frac{\mathcal{E}_{CT}}{L^2} \approx -\frac{\sqrt{1+\lambda}\sqrt{m^3}}{2\sqrt{2\pi^3}\sqrt{a^3}} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{8 - \alpha_j^2 \left(3 + 2am\sqrt{\alpha_j^2 + 4}\right)}{(\alpha_j^2 + 4)^{9/4}} \right] e^{-am\sqrt{\alpha_j^2 + 4} + j\beta\mu}. \quad (5.25)$$

No entanto, ainda não é possível obter um resultado fechado para a soma sobre j . Por esse motivo, vamos tomar o limite $\beta/a \gg 1$. Isso significa que, para uma distância fixa entre as

placas, estamos considerando um regime de baixas temperaturas. Na verdade, esse limite é o mais relevante. Feito isso, a soma em j pode ser feita, resultando:

$$\frac{\mathcal{E}_{C_T}}{L^2} \approx am \sqrt{\frac{1+\lambda}{2}} \left(\frac{\sqrt{1+\lambda}m}{\pi\beta} \right)^{3/2} e^{-\beta(\frac{m}{\sqrt{1+\lambda}} - \mu)}. \quad (5.26)$$

Assim, podemos observar que neste caso a correção térmica da energia de Casimir por unidade de área decai exponencialmente.

- (ii) Para o caso $am = 0$, ou seja, para o campo escalar sem massa $m = 0$, devemos tomar o potencial químico nulo, $\mu = 0$. Usando a expressão assintótica para a função de Bessel modificada $K_\nu(z)$, para argumentos pequenos (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1965) e, após realizarmos a derivada com respeito a α_j , obtemos a expressão fechada:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_{C_T}}{L^2} = -\frac{\sqrt{1+\lambda}}{8\pi^2 a^3} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_j^4} \left[24 - 4\pi\alpha_j \coth\left(\frac{\pi\alpha_j}{2}\right) - 2\pi^2\alpha_j^2 \operatorname{csch}^2\left(\frac{\pi\alpha_j}{2}\right) \right. \\ \left. - \pi^3\alpha_j^3 \coth\left(\frac{\pi\alpha_j}{2}\right) \operatorname{csch}^2\left(\frac{\pi\alpha_j}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Como não é possível realizar a soma em j , novamente consideramos o limite de baixa temperatura, ou seja, $\beta/a \gg 1$. Nessa aproximação, obtemos:

$$\frac{\mathcal{E}_{C_T}}{L^2} \approx -\frac{(1+\lambda)^2}{30\pi\beta^4} \left[\pi^3 a \sqrt{1+\lambda} - 15\beta\zeta(3) \right], \quad (5.28)$$

com $\zeta(3) \approx 1.202$. Onde a função $\zeta(z)$ representa a função zeta de Riemann (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1965).

- (iii) No limite $am \ll 1$, a Eq. (5.23) torna-se inconveniente para a análise. Para encontrar uma expressão conveniente para tratar esse limite, usamos a identidade (MELLO; SAHARIAN, 2013):

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\alpha) f_\nu(c\sqrt{b^2 + a^2 n^2}) \\ = -\frac{1}{2} f_\nu(cb) + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2\pi}}{ac^{2\nu}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_n^{2\nu-1} f_{\nu-1/2}(bw_n), \end{aligned} \quad (5.29)$$

onde $a, b, c > 0$ e $w_n = \sqrt{(2\pi n + \alpha)^2/a^2 + c^2}$, sendo a função $f_\nu(z)$ definida por

$$f_\nu(z) = \frac{K_\nu(z)}{z^\nu}. \quad (5.30)$$

Tomando o parâmetro $\alpha = 0$ e, adotando os outros parâmetros de acordo com o nosso problema específico, é possível desenvolver uma expansão em potência de am para energia térmica de Casimir. Aqui, identificamos o parâmetro α_j como:

$$\alpha_j = j\sigma, \quad \sigma = \frac{\beta}{a\sqrt{1+\lambda}}, \quad (5.31)$$

em seguida considerando o limite de baixas temperaturas, encontramos:

$$\frac{\mathcal{E}_{C_T}}{L^2} \approx -\frac{\sqrt{1+\lambda}}{\pi^2 a^3} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{a^3 m^3}{2\sigma} \frac{K_1(jam\sigma)}{j} + \frac{3a^2 m^2}{2\sigma^2} \frac{K_2(jam\sigma)}{j^2} - \frac{\pi [2 + jam\sigma(2 + jam\sigma)] e^{-jam\sigma}}{4j^3 \sigma^3} \right] e^{j\beta\mu}. \quad (5.32)$$

Ainda assim, não é possível realizarmos a soma exata em j . Para que isso se torne possível, vamos considerar os seguintes casos: $m\beta > 1$ e $m\beta < 1$.

- a) Para o caso $m\beta > 1$, a contribuição dominante vem do termo com $j = 1$, e neste caso, podemos usar a expressão assintótica para a função de Bessel modificada de segundo tipo para argumentos grandes. Fazendo isso, obtemos:

$$\frac{\mathcal{E}_{C_T}}{L^2} \approx \frac{(1+\lambda)}{4\pi^{3/2}} \left[\frac{\sqrt{\pi} m^2}{\beta} - \frac{\sqrt{2}(1+\lambda)^{1/4} a m^{5/2}}{\beta^{3/2}} \right] e^{-\beta \left(\frac{m}{\sqrt{1+\lambda}} - \mu \right)}. \quad (5.33)$$

- b) Para o caso $m\beta < 1$, devemos tomar $\mu = 0$. Nesse caso, a situação é mais delicada. A soma em j envolvendo a função de Bessel modificada, $K_\nu(z)$, só é possível de forma aproximada. Considerando a expansão de $K_\nu(z)$ para pequenos valores de z , e após alguns cálculos intermediários (ver apêndice A.1), obtemos:

$$\frac{\mathcal{E}_{C_T}}{L^2} \approx -\frac{(1+\lambda)}{120\pi\beta^4} \left[4\pi^3 a(1+\lambda)^{3/2} - 60\beta(1+\lambda)\zeta(3) - 5\beta^2 m^2 (\pi a \sqrt{1+\lambda} - 3\beta) \right]. \quad (5.34)$$

Podemos observar que o resultado obtido para o caso $am = 0$, Eq. (5.28), é obtido trivialmente a partir da Eq. (5.34). Além disso, na Eq. (5.34) aparece um termo extra proporcional a $(\beta m)^2$. Nesse limite, podemos ainda fornecer os termos mais relevantes para a energia de Casimir total. Considerando o resultado da energia de Casimir a temperatura zero obtido na Eq. (4.24) juntamente como o resultado de temperatura finita, Eq. (5.28), obtemos:

$$\frac{\mathcal{E}_C}{L^2} \approx -\frac{\sqrt{1+\lambda}\pi^2}{2a^3} \left(\frac{1}{720} - \frac{(1+\lambda)^{3/2}\zeta(3)a^3}{\pi^3\beta^3} \right). \quad (5.35)$$

Pela expressão da Eq. (5.35), podemos verificar que o parâmetro de violação de Lorentz, λ , aparece modificando ambas as contribuições da energia de Casimir, onde a correção com a temperatura é da ordem $(Ta)^3$.

5.1.2 Quadrivetor tipo-espaço

Quando consideramos o quadrivetor, u^μ , como sendo tipo-espaço, temos três possíveis casos distintos a serem considerados. Temos dois casos em que são paralelos as placas dados por

$u^{(x)} = (0, 1, 0, 0)$, $u^{(y)} = (0, 0, 1, 0)$ e um que é ortogonal as placas dado por $u^{(z)} = (0, 0, 0, 1)$. Quando consideramos os dois casos paralelos, eles conduzem aos mesmos resultados. Sendo assim, vamos considerar o quadrivetor paralelo as placas dado por:

$$u^{(x)} = (0, 1, 0, 0). \quad (5.36)$$

Nesse caso, o operador Hamiltoniano correspondente, $\hat{\mathcal{H}}$, é dado por:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \int d^2\vec{k} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\vec{k},n} \left[2\hat{a}_n^\dagger(\vec{k})\hat{a}_n(\vec{k}) + \frac{L^2}{(2\pi)^2} \right], \quad (5.37)$$

onde a relação de dispersão $\omega_{\vec{k},n}$, tem a seguinte forma:

$$\omega_{\vec{k},n} = \sqrt{(1-\lambda)k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + m^2}. \quad (5.38)$$

Consequentemente, a correção da energia gerada pela temperatura, T , é dada por:

$$\mathcal{E}_T = \int d^2\vec{k} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\vec{k},n} \langle \hat{a}_n^\dagger(\vec{k})\hat{a}_n(\vec{k}) \rangle, \quad (5.39)$$

que usando a relação para o número de ocupação bosônico, Eq. (5.12), juntamente com a identidade da Eq. (5.14), obtemos:

$$\mathcal{E}_T = \frac{L^2}{(2\pi)^2} \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \int d^2\vec{k} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\vec{k},n} e^{-j\beta\omega_{\vec{k},n}}. \quad (5.40)$$

Para realizarmos a soma em n , na Eq. (5.40), usamos a fórmula de soma de Abel-Plana da Eq. (4.12) e, em seguida fazendo uma mudança no plano (k_x, k_y) , para coordenadas polares (k, θ) , obtemos a seguinte correção térmica para energia:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_T = \frac{L^2}{2\pi\sqrt{1-\lambda}} \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \int_0^\infty k dk \left\{ -\frac{1}{2}F(0) + \int F(t)dt \right. \\ \left. + i \int_0^\infty \frac{dt}{e^{1\pi t} - 1} [F(it) - F(-it)] \right\}, \end{aligned} \quad (5.41)$$

onde,

$$F(n) = \omega_{\vec{k},n} e^{-j\beta\omega_{\vec{k},n}} \quad \omega_{\vec{k},n} = \sqrt{k^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + m^2}. \quad (5.42)$$

Como explicamos anteriormente, a correção térmica da energia de Casimir é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{C_T} = \frac{L^2}{2\pi\sqrt{1-\lambda}} i \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \int_0^\infty k dk \int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} \left\{ \sqrt{k^2 + \left(\frac{it\pi}{a}\right)^2 + m^2} \right. \\ \left. \times e^{-j\beta\sqrt{k^2 + \left(\frac{it\pi}{a}\right)^2 + m^2}} - \sqrt{k^2 + \left(-\frac{it\pi}{a}\right)^2 + m^2} e^{-j\beta\sqrt{k^2 + \left(-\frac{it\pi}{a}\right)^2 + m^2}} \right\}. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Realizando as seguintes mudanças de variáveis, $u = \pi t/a$ e $x^2 = k^2 + m^2$, obtemos:

$$\mathcal{E}_{C_T} = \frac{L^2 a}{2\pi^2 \sqrt{1-\lambda}} i \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \int_m^{\infty} x dx \int_0^{\infty} du \times \frac{\sqrt{x^2 + (iu)^2} e^{-j\beta\sqrt{x^2 + (iu)^2}} - \sqrt{x^2 + (-iu)^2} e^{-j\beta\sqrt{x^2 + (-iu)^2}}}{e^{2au} - 1}. \quad (5.44)$$

Procedendo como no caso anterior, dividimos a integral em u em dois intervalos: $[0, x]$ e $[x, \infty)$. Com o auxílio da Eq. (5.20), obtemos:

$$\mathcal{E}_{C_T} = -\frac{L^2 a}{\pi^2 \sqrt{1-\lambda}} \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \int_m^{\infty} x dx \int_x^{\infty} du \frac{\sqrt{u^2 - x^2}}{e^{2au} - 1} \cos(j\beta\sqrt{u^2 - x^2}). \quad (5.45)$$

Realizando as mudanças variáveis, $u = xy$ e depois $z = ax$, temos a correção térmica para energia de Casimir dada por:

$$\mathcal{E}_{C_T} = -\frac{L^2}{\pi^2 \sqrt{1-\lambda} a^3} \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \int_{am}^{\infty} z^3 dz \int_1^{\infty} dy \frac{\sqrt{y^2 - 1}}{e^{2zy} - 1} \cos\left(\frac{j\beta}{a} z \sqrt{y^2 - 1}\right). \quad (5.46)$$

Novamente, a integral na Eq. (5.46) pode ser expressa em termos da função de Bessel modificada, $K_\nu(z)$, como é mostrado no apêndice A.1:

$$\mathcal{E}_{C_T} = -\frac{L^2 m^2}{\pi^2 \sqrt{1-\lambda} a} \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left[\alpha_j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2\left(am\sqrt{\alpha_j^2 + 4n^2}\right)}{\alpha_j^2 + 4n^2} \right], \quad (5.47)$$

com o parâmetro α_j definido por:

$$\alpha_j = \frac{j\beta}{a}. \quad (5.48)$$

Como não é possível desenvolver a Eq. (5.47) de forma exata, devemos considerar os seguintes casos: $am \gg 1$, $am = 0$ e $am \ll 1$. Ainda, devemos considerar o limite de temperaturas baixas, ou seja, $\beta/a \gg 1$, que de fato é o limite mais interessante.

- (i) No limite $am \gg 1$, o termo mais relevante é dado por $n = 1$. Após alguns passos intermediários feitos no caso anterior, obtemos:

$$\frac{\mathcal{E}_{C_T}}{L^2} \approx -\frac{m^{3/2}}{\sqrt{8\pi^3} \sqrt{1-\lambda} a^{3/2}} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{8 - \alpha_j^2 \left(3 + 2am\sqrt{\alpha_j^2 + 4}\right)}{(\alpha_j^2 + 4)^{9/4}} \right] e^{-am\sqrt{\alpha_j^2 + 4} + j\beta\mu}, \quad (5.49)$$

que considerando o limite de baixas temperaturas, ou seja, $\beta/a \gg 1$, obtemos:

$$\frac{\mathcal{E}_{C_T}}{L^2} \approx \frac{am^{5/2}}{\sqrt{2\pi^{3/2}} \sqrt{1-\lambda} \beta^{3/2}} e^{-\beta(m-\mu)}. \quad (5.50)$$

- (ii) Para o caso $am = 0$, devemos tomar $\mu = 0$. Nesse caso, obtemos uma expressão exata dada por:

$$\frac{\mathcal{E}_{C_T}}{L^2} = -\frac{1}{8\pi^2\sqrt{1-\lambda}a^3} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_j^4} \left[24 - 4\pi\alpha_j \coth\left(\frac{\pi\alpha_j}{2}\right) - 2\pi^2\alpha_j^2 \operatorname{csch}^2\left(\frac{\pi\alpha_j}{2}\right) - \pi^3\alpha_j^3 \coth\left(\frac{\pi\alpha_j}{2}\right) \operatorname{csch}^2\left(\frac{\pi\alpha_j}{2}\right) \right]. \quad (5.51)$$

No limite de baixas temperaturas, após a realização da soma em j , obtemos:

$$\frac{\mathcal{E}_{C_T}}{L^2} \approx -\frac{1}{30\pi\sqrt{1-\lambda}\beta^4} [\pi^3 a - 15\beta\zeta(3)]. \quad (5.52)$$

- (iii) No limite $am \ll 1$, devemos proceder usando a Eq. (5.29). Definindo o parâmetro α_j por:

$$\alpha_j = j\sigma, \quad \sigma = \frac{\beta}{a} \quad (5.53)$$

e assumindo o limite de baixas temperaturas, obtemos:

$$\frac{\mathcal{E}_{C_T}}{L^2} \approx -\frac{1}{\pi^2\sqrt{1-\lambda}a^3} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{a^3 m^3}{2\sigma} \frac{K_1(jam\sigma)}{j} + \frac{3a^2 m^2}{2\sigma^2} \frac{K_2(jam\sigma)}{j^2} - \frac{\pi[2 + jam\sigma(2 + jam\sigma)]e^{-jam\sigma}}{4j^3\sigma^3} \right] e^{j\beta\mu}. \quad (5.54)$$

Como não há possibilidade de expressar a soma em j de forma exata, devemos considerar os casos: $m\beta > 1$ e $m\beta < 1$.

- a) Para o caso que $m\beta > 1$, obtemos:

$$\frac{\mathcal{E}_{C_T}}{L^2} \approx \frac{1}{4\pi^2\sqrt{1-\lambda}} \left[\frac{\pi m^2}{\beta} - \frac{\sqrt{2\pi}am^{5/2}}{\beta^{3/2}} \right] e^{-\beta(m-\mu)}. \quad (5.55)$$

- b) Para o caso $m\beta < 1$, tomamo $\mu = 0$. Então, depois de alguns passos intermediários, obtemos:

$$\frac{\mathcal{E}_{C_T}}{L^2} \approx -\frac{1}{120\pi\sqrt{1-\lambda}\beta^4} [4\pi^3 a - 60\beta\zeta(3) - 5\beta^2 m^2(\pi a - 3\beta)]. \quad (5.56)$$

Aqui, também podemos ver pela Eq. (5.56), que no limite de massa zero, a Eq. (5.52) é obtida automaticamente.

Para esta situação específica do quadri vetor constante $u^{(x)}$, a principal contribuição para a energia de Casimir total é o limite de massa zero. Sendo assim, usando as Eqs. (4.33) e (5.52), a energia de Casimir total por unidade de área é dada por:

$$\frac{\mathcal{E}_C}{L^2} \approx -\frac{(1-\lambda)^{-1/2}\pi^2}{2a^3} \left(\frac{1}{720} - \frac{\zeta(3)a^3}{\pi^3\beta^3} \right). \quad (5.57)$$

Na Eq. (5.57), podemos ver que o parâmetro que caracteriza a violação de Lorentz, λ , modifica a energia de Casimir total por um fator multiplicativo.

Finalmente, vamos considerar o caso em que o quadrvetor constante u^μ é ortogonal às placas, ou seja,

$$u^{(z)} = (0, 0, 0, 1). \quad (5.58)$$

Neste caso, o operador Hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}$, é dado por:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \int d^2\vec{k} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\vec{k},n} \left[2\hat{a}_n^\dagger(\vec{k})\hat{a}_n(\vec{k}) + \frac{L^2}{(2\pi)^2} \right], \quad (5.59)$$

onde a relação de dispersão, $\omega_{\vec{k},n}$, é modificada para:

$$\omega_{\vec{k},n} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + (1 - \lambda) \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + m^2}. \quad (5.60)$$

Tomando a média térmica do operador Hamiltoniano, da Eq. (5.59), obtemos a correção térmica para energia $\mathcal{E}_T$:

$$\mathcal{E}_T = \int d^2\vec{k} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\vec{k},n} \langle \hat{a}_n^\dagger(\vec{k})\hat{a}_n(\vec{k}) \rangle, \quad (5.61)$$

usando a relação do número de ocupação de partículas bosônicas da Eq. (5.12), juntamente com a Eq. (5.14), ficamos com:

$$\mathcal{E}_T = \frac{L^2}{(2\pi)^2} \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \int d^2\vec{k} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\vec{k},n} e^{-j\beta\omega_{\vec{k},n}}. \quad (5.62)$$

Desenvolvendo o somatório em n , usando a Eq. (4.12), e ainda, realizando uma mudança de coordenadas cartesianas (k_x, k_y) , para as polares (k, θ) , obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_T = \frac{L^2}{2\pi} \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \int_0^\infty k dk \left\{ -\frac{1}{2}F(0) + \int_0^\infty F(t)dt \right. \\ \left. + i \int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} [F(it) - F(-it)] \right\}, \end{aligned} \quad (5.63)$$

onde,

$$F(n) = \omega_{\vec{k},n} e^{-j\beta\omega_{\vec{k},n}} \quad \omega_{\vec{k},n} = \sqrt{k^2 + m^2 + (1 - \lambda) \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2}. \quad (5.64)$$

Assim, a partir da Eq. (5.63), podemos identificar que a correção térmica para a energia de Casimir é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{TC} = \frac{L^2}{2\pi} i \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \int_0^\infty k dk \int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} \\ \times \left\{ \sqrt{k^2 + (1 - \lambda) \left(\frac{it\pi}{a} \right)^2 + m^2} e^{-j\beta\sqrt{k^2 + (1 - \lambda) \left(\frac{it\pi}{a} \right)^2 + m^2}} \right. \\ \left. - \sqrt{k^2 + (1 - \lambda) \left(\frac{-it\pi}{a} \right)^2 + m^2} e^{-j\beta\sqrt{k^2 + (1 - \lambda) \left(\frac{-it\pi}{a} \right)^2 + m^2}} \right\}, \end{aligned} \quad (5.65)$$

que realizando as mudanças de variáveis $u = \pi t/b$ com a identificação $1/b = \sqrt{(1-\lambda)}/a$, e $x^2 = k^2 + m^2$, obtemos:

$$\mathcal{E}_{C_T} = \frac{L^2 b}{2\pi^2} i \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \int_m^{\infty} x dx \int_0^{\infty} du \times \frac{\sqrt{x^2 + (iu)^2} e^{-j\beta\sqrt{x^2 + (iu)^2}} - \sqrt{x^2 + (-iu)^2} e^{-j\beta\sqrt{x^2 + (-iu)^2}}}{e^{2bu} - 1}. \quad (5.66)$$

Para prosseguirmos no cálculo da correção térmica da energia de Casimir, vamos proceder como fizemos nos casos anteriores. Dividindo a integral em u em outras duas, sendo a primeira integrada no intervalo $[0, x]$ e a segunda no intervalo $[x, \infty)$. Porém, fazendo uso da Eq. (5.20), temos que a primeira integral se anula e, portanto, obtemos como resultado:

$$\mathcal{E}_{C_T} = -\frac{L^2 b}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \int_m^{\infty} x dx \int_x^{\infty} du \frac{\sqrt{u^2 - x^2}}{e^{2bu} - 1} \cos\left(j\beta\sqrt{u^2 - x^2}\right), \quad (5.67)$$

que quando é realizado as mudanças de variáveis $u = xy$ e $z = bx$, encontramos:

$$\mathcal{E}_{C_T} = -\frac{L^2}{\pi^2 b^3} \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \int_{bm}^{\infty} z^3 dz \int_1^{\infty} dy \frac{\sqrt{y^2 - 1}}{e^{2zy} - 1} \cos\left(\frac{j\beta}{b} z \sqrt{y^2 - 1}\right). \quad (5.68)$$

Usando o desenvolvimento do apêndice A.1, podemos expressar a Eq. (5.68) em termo da função de Bessel modificada, $K_\nu(z)$, da forma:

$$\mathcal{E}_{C_T} = -\frac{L^2 m^2}{\pi^2 b} \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left[\alpha_j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2\left(bm\sqrt{\alpha_j^2 + 4n^2}\right)}{\alpha_j^2 + 4n^2} \right], \quad (5.69)$$

onde o parâmetro α_j , é dado por:

$$\alpha_j = \frac{j\beta}{b}. \quad (5.70)$$

Mais uma vez, não é possível fazer a análise da Eq. (5.69) de forma exata. Porém, podemos obter informações a respeito das correções térmicas da energia de Casimir considerando os casos: $am \gg 1$, $am = 0$ e $am \ll 1$.

- (i) No limite $am \gg 1$, temos que o termo relevante da soma em n , é dado por $n = 1$, que resulta:

$$\frac{\mathcal{E}_{C_T}}{L^2} \approx -\frac{m^{3/2}}{2\sqrt{2}\pi^{3/2}b^{3/2}} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{8 - \alpha_j^2 \left(3 + 2bm\sqrt{\alpha_j^2 + 4}\right)}{(\alpha_j^2 + 4)^{9/4}} \right] e^{-bm\sqrt{\alpha_j^2 + 4} + j\beta\mu}. \quad (5.71)$$

Aqui, também não é possível realizar a soma em j . Para que isso se torne possível, devemos tomar o limite de baixas temperaturas, $\beta/a \gg 1$, fornecendo o seguinte resultado:

$$\frac{\mathcal{E}_{C_T}}{L^2} \approx \frac{am^{5/2}}{\sqrt{2}\pi^{3/2}\sqrt{1-\lambda}\beta^{3/2}} e^{-\beta(m-\mu)}. \quad (5.72)$$

Claramente, para esse caso, a correção térmica da energia de Casimir por unidade de área decai exponencialmente com βm .

(ii) Para o caso que $am = 0$ (tomando $\mu = 0$), obtemos:

$$\frac{\mathcal{E}_{C_T}}{L^2} = -\frac{1}{8\pi^2 b^3} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_j^4} \left[24 - 4\pi\alpha_j \coth\left(\frac{\pi\alpha_j}{2}\right) - 2\pi^2\alpha_j^2 \operatorname{csch}^2\left(\frac{\pi\alpha_j}{2}\right) - \pi^3\alpha_j^3 \coth\left(\frac{\pi\alpha_j}{2}\right) \operatorname{csch}^2\left(\frac{\pi\alpha_j}{2}\right) \right], \quad (5.73)$$

que quando consideramos o limite de baixas temperaturas, ou seja, $\beta/a \gg 1$, obtemos:

$$\frac{\mathcal{E}_{C_T}}{L^2} \approx -\frac{1}{30\pi\beta^4} \left[\frac{\pi^3 a}{\sqrt{1-\lambda}} - 15\beta\zeta(3) \right]. \quad (5.74)$$

(iii) No limite $am \ll 1$, vamos fazer uso da Eq. (5.29) para expressar a Eq. (5.69) de forma mais conveniente. Em seguida considerando o limite de baixas temperaturas, juntamente com as seguintes identificações:

$$\alpha_j = j\sigma, \quad \sigma = \frac{\beta}{b} \quad \text{com} \quad b \equiv \frac{a}{\sqrt{1-\lambda}}, \quad (5.75)$$

obtemos a seguinte expressão:

$$\frac{\mathcal{E}_{C_T}}{L^2} \approx -\frac{1}{\pi^2 b^3} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{b^3 m^3}{2\sigma} \frac{K_1(jbm\sigma)}{j} + \frac{3b^2 m^2}{2\sigma^2} \frac{K_2(jbm\sigma)}{j^2} - \frac{\pi[2 + jbm\sigma(2 + jbm\sigma)]e^{-jbm\sigma}}{4j^3\sigma^3} \right] e^{j\beta\mu}. \quad (5.76)$$

Para que possamos apresentar resultados analíticos, devemos considerar outras duas situações: $m\beta > 1$ e $m\beta < 1$.

a) Para o caso $m\beta > 1$, obtemos:

$$\frac{\mathcal{E}_{C_T}}{L^2} \approx \frac{1}{4\pi^{3/2}} \left[\frac{\sqrt{\pi}m^2}{\beta} - am\sqrt{\frac{2}{1-\lambda}} \left(\frac{m}{\beta} \right)^{3/2} \right] e^{-\beta(m-\mu)}. \quad (5.77)$$

b) Para o caso $m\beta < 1$, e tomando $\mu = 0$, obtemos:

$$\frac{\mathcal{E}_{C_T}}{L^2} \approx -\frac{1}{120\pi\sqrt{1-\lambda}\beta^4} \left[4\pi^3 a - 60\beta\sqrt{1-\lambda}\zeta(3) - 5\beta^2 m^2 \left(\pi a - 3\beta\sqrt{1-\lambda} \right) \right]. \quad (5.78)$$

Assim, podemos expressar a energia de Casimir total por unidade de área. As contribuições mais relevantes são obtidas quando $am = 0$, assim, a partir das Eqs. (4.43) e (5.74), obtemos:

$$\frac{\mathcal{E}_C}{L^2} \approx -\frac{(1-\lambda)^{3/2}\pi^2}{2a^3} \left[\frac{1}{720} - \frac{(1-\lambda)^{-3/2}\zeta(3)a^3}{\pi^3\beta^3} \right]. \quad (5.79)$$

5.2 CONDIÇÃO DE CONTORNO DE NEUMANN

Nesta seção, nosso interesse é a análise das correções térmicas para a energia de Casimir, admitindo que o campo de Klein-Gordon obedece a condição de contorno de Neumann nas placas:

$$\left. \frac{\partial \phi(x)}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial \phi(x)}{\partial z} \right|_{z=a} = 0. \quad (5.80)$$

Resolvendo a equação de Klein-Gordon modificada da Eq. (5.1) impondo as condições de contorno da Eq. (5.80), após promovermos a solução $\phi(x)$ à operador, o operador de campo é dado por:

$$\hat{\phi}(x) = \int d^2 \vec{k} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n\pi}{a} z\right) [\hat{a}_n(\vec{k}) e^{-ikx} + \hat{a}_n^\dagger(\vec{k}) e^{ikx}], \quad (5.81)$$

onde a constante de normalização, C_n , é dada por:

$$C_n = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2(2\pi)^{1/2} \omega_{\vec{k},n} a}} & \text{para } n = 0, \\ \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^{1/2} \omega_{\vec{k},n} a}} & \text{para } n \geq 1. \end{cases} \quad (5.82)$$

Claramente, temos um operador de campo diferente do obtido quando foi considerado a condição de contorno de Dirichlet, Eq. (5.5). No entanto, ambos os operadores de campos nos fornecem os mesmos operadores Hamiltonianos e relações de dispersão, para cada caso considerado do quadrivetor constante u^μ que caracteriza a violação de Lorentz. Assim, não repetiremos os cálculos porque os resultados serão exatamente iguais aos obtidos na seção 5.1.

5.3 CONDIÇÃO DE CONTORNO MISTA

Agora, vamos considerar a situação em que o campo escalar obedece a condição de contorno de Dirichlet em uma das placas, enquanto que na outra placa o campo satisfaz a condição de contorno de Neumann. Essa configuração é o que chamamos de condição de contorno mista, e portanto, duas configurações distintas são possíveis:

a)

$$\phi(x)|_{z=0} = \left. \frac{\partial \phi(x)}{\partial z} \right|_{z=a} = 0,$$

b)

$$\left. \frac{\partial \phi(x)}{\partial z} \right|_{z=0} = \phi(x)|_{z=a} = 0. \quad (5.83)$$

Resolvendo a equação de Klein-Gordon modificada da Eq. (5.1) impondo as condições de contorno da Eq. (5.83), e em seguida procedendo com as quantizações das soluções, obtemos

os seguintes operadores de campo:

$$\hat{\phi}_a(x) = \int d^2\vec{k} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^2 \omega_{\vec{k},n} a}} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{a} z \right] \left[\hat{a}_n(\vec{k}) e^{-ikx} + \hat{a}_n^\dagger(\vec{k}) e^{ikx} \right] \quad (5.84)$$

e

$$\hat{\phi}_b(x) = \int d^2\vec{k} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^2 \omega_{\vec{k},n} a}} \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{a} z \right] \left[\hat{a}_n(\vec{k}) e^{-ikx} + \hat{a}_n^\dagger(\vec{k}) e^{ikx} \right]. \quad (5.85)$$

Em princípio, temos duas análises para fazer, sendo uma para cada operador de campo $\hat{\phi}_a(x)$ e $\hat{\phi}_b(x)$. No entanto, os operadores de campo Eq. (5.84) e Eq. (5.85) fornecem o mesmo operador Hamiltoniano, para cada escolha do quadrivetor u^μ , respectivamente.

5.3.1 Quadrivetor tipo-tempo

Da mesma forma que tratamos as outras condições de contorno, iniciaremos nossa análise adotando o quadrivetor constante como sendo tipo-tempo, ou seja, um vetor da seguinte forma

$$u^{(t)} = (1, 0, 0, 0). \quad (5.86)$$

Neste caso, o operador Hamiltoniano é dado por:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{(1 + \lambda)}{2} \int d^2\vec{k} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{\vec{k},n} \left[2\hat{a}_n^\dagger(\vec{k})\hat{a}_n(\vec{k}) + \frac{L^2}{(2\pi)^2} \right], \quad (5.87)$$

com a relação de dispersão, $\omega_{\vec{k},n}$, dada por:

$$\omega_{\vec{k},n} = \sqrt{\frac{1}{(1 + \lambda)} \left\{ k_x^2 + k_y^2 + \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{a} \right]^2 + m^2 \right\}}. \quad (5.88)$$

Assim, tomando a média térmica da Eq. (5.87), obtemos a seguinte energia:

$$\mathcal{E} = \langle \hat{\mathcal{H}} \rangle = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_T, \quad (5.89)$$

onde a energia $\mathcal{E}_0$ é referente ao vácuo, enquanto que $\mathcal{E}_T$, a correção térmica da energia. O nosso interesse é a análise das correções térmicas, dada por:

$$\mathcal{E}_T = (1 + \lambda) \int d^2\vec{k} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{\vec{k},n} \langle \hat{a}_n^\dagger(\vec{k})\hat{a}_n(\vec{k}) \rangle. \quad (5.90)$$

Fazendo uso da relação do número de ocupação bosônico da Eq. (5.12), a correção térmica da Eq. (5.90) é dada por:

$$\mathcal{E}_T = \frac{(1 + \lambda)L^2}{(2\pi)^2} \int d^2\vec{k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega_{\vec{k},n}}{e^{\beta(\omega_{\vec{k},n} - \mu)} - 1}, \quad (5.91)$$

que considerando a identidade, Eq. (5.14), obtemos:

$$\mathcal{E}_T = \frac{(1+\lambda)L^2}{(2\pi)^2} \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \int d^2\vec{k} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{\vec{k},n} e^{-j\beta\omega_{\vec{k},n}}. \quad (5.92)$$

Nesse ponto, realizamos uma mudança de coordenadas no plano (k_x, k_y) para coordenadas polares (k, θ) seguindo com uma integração em θ . Para tratar a soma em n , usamos a fórmula de soma de Abel-Plana da Eq. (4.80), resultando:

$$\mathcal{E}_T = \frac{(1+\lambda)L^2}{2\pi} \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \int_0^{\infty} k dk \left\{ \int_0^{\infty} F(t) dt - i \int_0^{\infty} \frac{dt}{e^{2\pi t} + 1} [F(it) - F(-it)] \right\}, \quad (5.93)$$

com a seguinte identificação

$$F\left(n + \frac{1}{2}\right) = \omega_{\vec{k},n} e^{-j\beta\omega_{\vec{k},n}}, \quad \omega_{k,n} = \sqrt{\frac{1}{(1+\lambda)} \left[k^2 + \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{a} \right]^2 + m^2 \right]}. \quad (5.94)$$

Consequentemente, a correção térmica para energia de Casimir é dada pelo segundo termo da Eq. (5.93):

$$\mathcal{E}_{C_T} = -\frac{(1+\lambda)L^2}{2\pi} i \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \int_0^{\infty} k dk \int_0^{\infty} \frac{dt}{e^{2\pi t} + 1} [F(it) - F(-it)]. \quad (5.95)$$

Considerando as expressões da Eq. (5.94) e realizando as mudanças de variáveis $x^2 = k^2 + m^2$ e $u = t\pi/a$, ficamos com:

$$\mathcal{E}_{C_T} = -\frac{\sqrt{1+\lambda}L^2a}{2\pi^2} i \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \int_m^{\infty} x dx \int_0^{\infty} du \times \frac{\sqrt{x^2 + (iu)^2} e^{-\frac{j\beta}{\sqrt{1+\lambda}} \sqrt{x^2 + (iu)^2}} - \sqrt{x^2 + (-iu)^2} e^{-\frac{j\beta}{\sqrt{1+\lambda}} \sqrt{x^2 + (-iu)^2}}}{e^{2au} + 1}. \quad (5.96)$$

Para desenvolver a integral em u , vamos dividir a integral em duas partes: uma integral no intervalo $[0, x]$ e outra em $[x, \infty)$. Usando a Eq. (5.20) a primeira integral é nula, enquanto a segunda integral, resulta em:

$$\mathcal{E}_{C_T} = \frac{\sqrt{1+\lambda}L^2a}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \int_m^{\infty} x dx \int_x^{\infty} du \frac{\sqrt{u^2 - x^2}}{e^{2au} + 1} \cos\left(\frac{j\beta}{\sqrt{1+\lambda}} \sqrt{u^2 - x^2}\right), \quad (5.97)$$

que realizando uma mudança de variável de forma conveniente, obtemos:

$$\mathcal{E}_{C_T} = \frac{\sqrt{1+\lambda}L^2}{\pi^2 a^3} \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \int_{am}^{\infty} z^3 dz \int_1^{\infty} dy \frac{\sqrt{y^2 - 1}}{e^{2zy} + 1} \cos\left(\frac{j\beta}{a\sqrt{1+\lambda}} z \sqrt{y^2 - 1}\right). \quad (5.98)$$

Nesse ponto, vamos reescrever a expressão acima em termos da função de Bessel modificada do segundo tipo, $K_\nu(z)$. Usando o desenvolvimento do apêndice A.2, obtemos:

$$\mathcal{E}_{C_T} = -\frac{\sqrt{1+\lambda}L^2m^2}{\pi^2a} \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \frac{\partial}{\partial\alpha_j} \left[\alpha_j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha_j^2 + 4n^2} K_2 \left(am\sqrt{\alpha_j^2 + 4n^2} \right) \right], \quad (5.99)$$

onde o parâmetro α_j é dado por:

$$\alpha_j = \frac{j\beta}{a\sqrt{1+\lambda}}. \quad (5.100)$$

Aqui, também não há expressão fechada para a soma de n e j . A única maneira de fornecer alguma informação sobre o comportamento de $\mathcal{E}_{C_T}$, é considerando os casos: $am \gg 1$, $am = 0$ e $am \ll 1$.

- (i) No limite $am \gg 1$, o termo dominante é dado por $n = 1$. Então, seguindo o procedimento padrão, obtemos:

$$\frac{\mathcal{E}_{C_T}}{L^2} \approx \frac{\sqrt{1+\lambda}m^{3/2}}{2\sqrt{2}\pi^{3/2}a^{3/2}} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{8 - \alpha_j^2 \left(3 + am\sqrt{\alpha_j^2 + 4} \right)}{(\alpha_j^2 + 4)^{9/4}} \right] e^{-am\sqrt{\alpha_j^2 + 4} + j\beta\mu}. \quad (5.101)$$

Devido a impossibilidade de fazer a soma em j , tomamos o limite de baixas temperaturas, ou seja, $\beta/a \gg 1$, que resulta:

$$\frac{\mathcal{E}_{C_T}}{L^2} \approx -\frac{(1+\lambda)^{5/4}am^{5/2}}{\sqrt{2}\pi^{3/2}\beta^{3/2}} e^{-\beta\left(\frac{m}{\sqrt{1+\lambda}} - \mu\right)}. \quad (5.102)$$

Assim, podemos notar que nesse caso, a correção térmica para energia de Casimir por unidade de área decai exponencialmente com βm .

- (ii) Para o caso $am = 0$, devemos tomar $\mu = 0$. Nesse caso, obtemos a expressão exata:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_{C_T}}{L^2} = & -\frac{\sqrt{1+\lambda}}{16\pi^2a^3} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_j^4} \left\{ 48 + \frac{1}{2}\pi\alpha_j \operatorname{csch}^3\left(\frac{\pi\alpha_j}{2}\right) \left[8 - 3\pi^2\alpha_j^2 - (8 + \pi^2\alpha_j^2) \right. \right. \\ & \left. \left. \times \cosh(\pi\alpha_j) - 4\pi\alpha_j \sinh(\pi\alpha_j) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.103)$$

que considerando o limite de baixas temperaturas, após realizarmos o somatório em j , obtemos:

$$\frac{\mathcal{E}_{C_T}}{L^2} \approx -\frac{\pi^2(1+\lambda)^{5/2}a}{30\beta^4}. \quad (5.104)$$

- (iii) No limite $am \ll 1$, a Eq. (5.99) não é conveniente para analisarmos esse limite. Para obter uma expressão que permita a análise, vamos usar a Eq. (5.29) considerando $\alpha = \pi$ e adaptando os outros parâmetros de forma conveniente. Definindo α_j como sendo:

$$\alpha_j = j\sigma \quad \sigma = \frac{\beta}{a\sqrt{1+\lambda}} \quad (5.105)$$

quando assumimos o limite de baixas temperaturas, obtemos:

$$\frac{\mathcal{E}_{C_T}}{L^2} \approx -\frac{(1+\lambda)m^2}{2\pi^2\beta} \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \left[am \frac{K_1(jam\sigma)}{j} + \frac{3}{\sigma} \frac{K_2(jam\sigma)}{j^2} \right]. \quad (5.106)$$

Como nos casos anteriores, para realizarmos a soma em j devemos considerar os casos: $m\beta > 1$ e $m\beta < 1$.

a) Para o caso $m\beta > 1$, obtemos:

$$\frac{\mathcal{E}_{C_T}}{L^2} \approx -\frac{(1+\lambda)^{5/4}a}{2\sqrt{2}\pi^{3/2}} \left[\frac{m^{5/2}}{\beta^{3/2}} + \frac{3\sqrt{1+\lambda}m^{3/2}}{\beta^{5/2}} \right] e^{-\beta\left(\frac{m}{\sqrt{1+\lambda}}-\mu\right)}. \quad (5.107)$$

b) Para o caso $m\beta < 1$ (com $\mu = 0$), obtemos:

$$\frac{\mathcal{E}_{C_T}}{L^2} \approx -\frac{(1+\lambda)^{5/2}a}{120\beta^4} \left[4\pi^2 + \frac{5m^2\beta^2}{(1+\lambda)} \right], \quad (5.108)$$

onde podemos ver uma correção da ordem $(m\beta)^2$ quando comparado com a Eq. (5.104).

Para esta situação específica, a principal contribuição para a energia de Casimir total, é a contribuição referente aos termo de massa zero. Usando o resultado da Eq. (4.88), juntamente com a Eq. (5.104), obtemos

$$\frac{\mathcal{E}_C}{L^2} \approx \frac{\sqrt{1+\lambda}\pi^2}{30a^3} \left[\frac{7}{384} - \frac{(1+\lambda)^2a^4}{\beta^4} \right]. \quad (5.109)$$

Como podemos ver, o parâmetro de violação de Lorentz modifica ambas as contribuições da energia de Casimir. Além disso, a correção térmica neste caso é da ordem $(Ta)^4$, ou seja, menor que as encontradas para as condições de contorno anteriores impostas ao campo escalar.

5.3.2 Quadri vetor tipo-espaço

Aqui, temos três direções diferentes para o quadri vetor u^μ . Como foi visto nos casos tratados anteriormente, os quadri vetores $u^{(x)} = (0, 1, 0, 0)$ e $u^{(y)} = (0, 0, 1, 0)$ levam aos mesmos resultados. Enquanto que $u^{(z)} = (0, 0, 0, 1)$, leva a um resultado mais interessante. Então, primeiramente vamos nos concentrar no quadri vetor dado por:

$$u^{(x)} = (0, 1, 0, 0). \quad (5.110)$$

Para esse caso, o operador Hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}$, é dado por:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \int d^2\vec{k} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{\vec{k},n} \left[2\hat{a}_n^\dagger(\vec{k})\hat{a}_n(\vec{k}) + \frac{L^2}{(2\pi)^2} \right] \quad (5.111)$$

onde, a relação de dispersão, $\omega_{\vec{k},n}$, é dada por:

$$\omega_{\vec{k},n} = \sqrt{(1-\lambda)k_x^2 + k_y^2 + \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{a}\right]^2 + m^2}. \quad (5.112)$$

Consequentemente, a correção térmica para a energia, $\mathcal{E}_T$, é dada tomando a média térmica da Eq. (5.111):

$$\mathcal{E}_T = \int d^2\vec{k} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{\vec{k},n} \langle \hat{a}_n^\dagger(\vec{k}) \hat{a}_n(\vec{k}) \rangle. \quad (5.113)$$

Logo, usando a relação do número de ocupação bosônico da Eq. (5.12), juntamente com a Eq. (5.14), obtemos:

$$\mathcal{E}_T = \frac{L^2}{(2\pi)^2} \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \int d^2\vec{k} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{\vec{k},n} e^{-j\beta\omega_{\vec{k},n}}. \quad (5.114)$$

Para desenvolver a soma em n na Eq. (5.114), vamos usar a fórmula de soma de Abel-Plana da Eq. (4.80), e em seguida realizando uma mudança das coordenadas no (k_x, k_y) para as coordenadas polares (k, θ) , obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_T = \frac{L^2}{2\pi\sqrt{1-\lambda}} \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \int_0^{\infty} k dk \left\{ \int_0^{\infty} F(t) dt \right. \\ \left. - i \int_0^{\infty} \frac{dt}{e^{2\pi t} + 1} [F(it) - F(-it)] \right\}, \end{aligned} \quad (5.115)$$

com a função $F(n + 1/2)$ definida por:

$$F\left(n + \frac{1}{2}\right) = \omega_{\vec{k},n} e^{-j\beta\omega_{\vec{k},n}}, \quad \omega_{\vec{k},n} = \sqrt{k^2 + \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{a}\right]^2 + m^2}. \quad (5.116)$$

Portanto, a correção térmica para a energia de Casimir é dada:

$$\mathcal{E}_{C_T} = -\frac{L^2}{2\pi\sqrt{1-\lambda}} i \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \int_0^{\infty} k dk \int_0^{\infty} \frac{dt}{e^{2\pi t} + 1} [F(it) - F(-it)], \quad (5.117)$$

que realizando as mudanças de variáveis, $x^2 = k^2 + m^2$ e $u = \pi t/a$, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{C_T} = -\frac{aL^2}{2\pi^2\sqrt{1-\lambda}} i \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \int_m^{\infty} x dx \int_0^{\infty} du \\ \frac{\sqrt{x^2 + (iu)^2} e^{-j\beta\sqrt{x^2 + (iu)^2}} - \sqrt{x^2 + (-iu)^2} e^{-j\beta\sqrt{x^2 + (-iu)^2}}}{e^{2au} + 1}. \end{aligned} \quad (5.118)$$

Mais uma vez, dividindo a integral em u em dois subintervalos: $[0, x]$ e $[x, \infty)$, a partir da Eq. (5.20), a integral em $[0, x]$ se anula. Portanto, a contribuição não nula é devido a integral no intervalo $[x, \infty)$. Realizando a mudança de variáveis, $u = xy$ e $z = ax$, obtemos:

$$\mathcal{E}_{C_T} = \frac{L^2}{\pi^2\sqrt{1-\lambda}a^3} \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \int_{am}^{\infty} z^3 dz \int_1^{\infty} dy \frac{\sqrt{y^2 - 1}}{e^{2zy} + 1} \cos\left(\frac{j\beta}{a} z \sqrt{y^2 - 1}\right). \quad (5.119)$$

Para que possamos fazer uma análise da Eq. (5.119), vamos expressá-la em termos da função $K_\nu(z)$. Usando o procedimento do apêndice A.2, obtemos:

$$\mathcal{E}_{CT} = -\frac{L^2 m^2}{\pi^2 \sqrt{1-\lambda} a} \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left[\alpha_j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha_j^2 + 4n^2} K_2 \left(am \sqrt{\alpha_j^2 + 4n^2} \right) \right], \quad (5.120)$$

onde o parâmetro α_j é dado por:

$$\alpha_j = \frac{j\beta}{a}. \quad (5.121)$$

No entanto, não é possível analisar a Eq. (5.120) de forma exata, devido os somatório em n e j . A única maneira de fornecer alguma informação sobre o comportamento da Eq. (5.120) é considerando os casos: $am \gg 1$, $am = 0$ e $am \ll 1$.

(i) No limite $am \gg 1$, o termo dominante é $n = 1$, que nos fornece:

$$\frac{\mathcal{E}_{CT}}{L^2} \approx \frac{m^{3/2}}{2\sqrt{2}\pi^{3/2}\sqrt{1-\lambda}a^{3/2}} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{8 - \alpha_j^2 \left(3 + 2am\sqrt{\alpha_j^2 + 4} \right)}{(\alpha_j^2 + 4)^{9/4}} \right] e^{-am\sqrt{\alpha_j^2 + 4} + j\beta\mu}, \quad (5.122)$$

quando se considera o limite de baixas temperaturas, $\beta/a \gg 1$, após realizarmos a soma em j obtemos:

$$\frac{\mathcal{E}_{CT}}{L^2} \approx -\frac{am^{5/2}}{\sqrt{2}\pi^{3/2}\sqrt{1-\lambda}\beta^{3/2}} e^{-\beta(m-\mu)}. \quad (5.123)$$

Note que neste caso, a correção térmica para energia de Casimir por unidade de área decai exponencialmente com βm .

(ii) Para o caso $am = 0$, (tomando $\mu = 0$), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_{CT}}{L^2} = & -\frac{1}{16\pi^2\sqrt{1-\lambda}a^3} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_j^4} \left[48 + \frac{1}{2}\pi\alpha_j \operatorname{csch}^3 \left(\frac{\pi\alpha_j}{2} \right) \left[8 - 3\pi^2\alpha_j^2 \right. \right. \\ & \left. \left. - (8 + \pi^2\alpha_j^2) \cosh(\pi\alpha_j) - 4\pi\alpha_j \sinh(\pi\alpha_j) \right] \right]. \end{aligned} \quad (5.124)$$

Portanto, no limite de baixas temperaturas, obtemos o seguinte resultado:

$$\frac{\mathcal{E}_{CT}}{L^2} \approx -\frac{\pi^2 a}{30\sqrt{1-\lambda}\beta^4}. \quad (5.125)$$

(iii) No limite $am \ll 1$, depois de alguns passos intermediários já mencionados, obtemos:

$$\frac{\mathcal{E}_{CT}}{L^2} \approx -\frac{m^2}{2\pi^2\sqrt{1-\lambda}\beta} \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \left[am \frac{K_1(jam\sigma)}{j} + \frac{3}{\sigma} \frac{K_2(jam\sigma)}{j^2} \right], \quad (5.126)$$

onde o parâmetro α_j é dado por:

$$\alpha_j = j\sigma \quad \sigma = \frac{\beta}{a}. \quad (5.127)$$

Aqui, como foi feito nos casos anteriores, devemos considerar as seguintes situações $m\beta > 1$ e $m\beta < 1$:

a) Para o caso $m\beta > 1$, obtemos:

$$\frac{\mathcal{E}_{C_T}}{L^2} \approx -\frac{a}{2\sqrt{2}\pi^{3/2}\sqrt{1-\lambda}} \left[\frac{3m^{3/2}}{\beta^{5/2}} + \frac{m^{5/2}}{\beta^{3/2}} \right] e^{-\beta(m-\mu)}. \quad (5.128)$$

b) Para o caso $m\beta < 1$, tomando $\mu = 0$, obtemos:

$$\frac{\mathcal{E}_{C_T}}{L^2} \approx -\frac{a}{120\sqrt{1-\lambda}\beta^4} [4\pi^2 - 5m^2\beta^2]. \quad (5.129)$$

Aqui, observamos uma correção proporcional a $(m\beta)^2$ quando comparada com o caso sem massa dada na Eq. (5.125).

Assim, podemos apresentar a principal contribuição para a energia de Casimir total por unidade de área, sendo dada por:

$$\frac{\mathcal{E}_C}{L^2} \approx \frac{(1-\lambda)^{-1/2}\pi^2}{30a^3} \left(\frac{7}{384} - \frac{a^4}{\beta^4} \right), \quad (5.130)$$

onde a correção térmica é da ordem $(Ta)^4$. Também notamos que o desvio com a quebra da simetria de Lorentz, se dá por um fator multiplicativo.

Finalmente, vamos considerar o último caso possível para o quadrivetor constante u^μ . Tomando o quadrivetor como sendo ortogonal as placas, ou seja,

$$u^{(z)} = (0, 0, 0, 1). \quad (5.131)$$

Para esse caso específico, o operador Hamiltoniano, $\hat{\mathcal{H}}$, é dado por:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \int d^2\vec{k} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\vec{k},n} \left[2\hat{a}_n^\dagger(\vec{k})\hat{a}_n(\vec{k}) + \frac{L^2}{(2\pi)^2} \right], \quad (5.132)$$

onde a relação de dispersão, $\omega_{\vec{k},n}$, é modificada para:

$$\omega_{\vec{k},n} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + (1-\lambda) \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{a} \right]^2 + m^2}. \quad (5.133)$$

Consequentemente, tomando a média térmica do operador Hamiltoniano, e em seguida usando as Eqs. (5.12) e (5.14), a correção térmica para a energia é dada por:

$$\mathcal{E}_T = \frac{L^2}{(2\pi)^2} \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \int d^2\vec{k} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{\vec{k},n} e^{-j\beta\omega_{\vec{k},n}}. \quad (5.134)$$

Realizando uma mudança das coordenadas cartesianas (k_x, k_y) para coordenadas polares (k, θ) , com $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ e, realizando a integral na variável angular, juntamente a isso, utilizamos a fórmula de soma de Abel-Plana da Eq. (4.80), obtemos:

$$\mathcal{E}_T = \frac{L^2}{2\pi} \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \int_0^\infty k dk \left\{ \int_0^\infty F(t) dt - i \int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t} + 1} [F(it) - F(-it)] \right\}, \quad (5.135)$$

onde,

$$F\left(n + \frac{1}{2}\right) = \omega_{\vec{k},n} e^{-j\beta\omega_{\vec{k},n}}, \quad \omega_{\vec{k},n} = \sqrt{k^2 + (1-\lambda) \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{a}\right]^2 + m^2}. \quad (5.136)$$

Portanto, a correção térmica referente a energia de Casimir é dada por:

$$\mathcal{E}_{C_T} = -\frac{L^2}{2\pi} i \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \int_0^{\infty} k dk \int_0^{\infty} \frac{dt}{e^{2\pi t} + 1} [F(it) - F(-it)], \quad (5.137)$$

procedendo com as mudanças de variáveis $x^2 = k^2 + m^2$ e $u = \pi t/b$, onde $1/b = \sqrt{1-\lambda}/a$, ficamos com:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{C_T} = & -\frac{L^2 b}{2\pi^2} i \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \int_m^{\infty} x dx \int_0^{\infty} du \\ & \frac{\sqrt{x^2 + (iu)^2} e^{-j\beta\sqrt{x^2 + (iu)^2}} - \sqrt{x^2 + (-iu)^2} e^{-j\beta\sqrt{x^2 + (-iu)^2}}}{e^{2bu} + 1}. \end{aligned} \quad (5.138)$$

Mais uma vez, dividindo a integral na variável u em dois subintervalos: $[0, x]$ e $[x, \infty]$. Segue da Eq. (5.20) que a integral no intervalo $[0, x]$ se anula, então permanece a integral no intervalo $[x, \infty]$. Realizando as mudanças das variáveis, $u = xy$ e $z = bx$, obtemos:

$$\mathcal{E}_{C_T} = \frac{L^2}{\pi^2 b^3} \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \int_{bm}^{\infty} z^3 dz \int_1^{\infty} dy \frac{\sqrt{y^2 - 1}}{e^{2zy} + 1} \cos\left(\frac{j\beta}{b} z \sqrt{y^2 - 1}\right). \quad (5.139)$$

No entanto, a Eq. (5.139) não é conveniente para o tratamento analítico, sendo assim, reescrevemos em termos da função de Bessel modificada do segundo tipo, $K_\nu(z)$, por:

$$\mathcal{E}_{C_T} = -\frac{L^2 m^2}{\pi^2 b} \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left[\alpha_j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha_j^2 + 4n^2} K_2\left(bm\sqrt{\alpha_j^2 + 4n^2}\right) \right], \quad (5.140)$$

com o parâmetro α_j sendo:

$$\alpha_j = \frac{j\beta}{b}. \quad (5.141)$$

Devido a impossibilidade do tratamento da Eq. (5.140), vamos adotar os seguintes casos $am \gg 1$, $am = 0$ e $am \ll 1$.

(i) No limite $am \gg 1$, o termo dominante é dado para $n = 1$, fornecendo:

$$\frac{\mathcal{E}_{C_T}}{L^2} \approx \frac{m^{3/2}}{2\sqrt{2}\pi^{3/2}b^{3/2}} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{8 - \alpha_j^2 \left(3 + 2bm\sqrt{\alpha_j^2 + 4}\right)}{(\alpha_j^2 + 4)^{9/4}} \right] e^{-bm\sqrt{\alpha_j^2 + 4} + j\beta\mu}, \quad (5.142)$$

que no limite de baixas temperaturas, $\beta/a \gg 1$, a soma em j se torna possível, resultando:

$$\frac{\mathcal{E}_{C_T}}{L^2} \approx -\frac{am^{5/2}}{\sqrt{2}\pi^{3/2}\sqrt{1-\lambda}\beta^{3/2}} e^{-\beta(m-\mu)}. \quad (5.143)$$

Note que, neste caso, a energia de Casimir por unidade de área decai exponencialmente com βm .

(ii) Para o caso $am = 0$, devemos tomar $\mu = 0$, que nos fornece:

$$\frac{\mathcal{E}_{C_T}}{L^2} = -\frac{1}{16\pi^2 b^3} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_j^4} \left[48 + \frac{1}{2} \pi \alpha_j \operatorname{csch}^3 \left(\frac{\pi \alpha_j}{2} \right) \left[8 - 3\pi^2 \alpha_j^2 \right. \right. \\ \left. \left. - (8 + \pi^2 \alpha_j^2) \cosh(\pi \alpha_j) - 4\pi \alpha_j \sinh(\pi \alpha_j) \right] \right]. \quad (5.144)$$

Considerando o limite de baixas temperaturas, ou seja $\beta/a \gg 1$, obtemos:

$$\frac{\mathcal{E}_{C_T}}{L^2} \approx -\frac{\pi^2 a}{30\sqrt{1-\lambda}\beta^4}. \quad (5.145)$$

(iii) No limite $am \ll 1$, adotando o procedimento feito para os casos anteriores, ou seja, usando a Eq. (5.29) e considerando $\beta/a \gg 1$, obtemos:

$$\frac{\mathcal{E}_{C_T}}{L^2} \approx -\frac{m^2}{2\pi^2 \beta} \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta mu} \left[bm \frac{K_1(jbm\sigma)}{j} + \frac{3}{\sigma} \frac{K_2(jbm\sigma)}{j^2} \right], \quad (5.146)$$

onde assumimos o parâmetro α_j como sendo:

$$\alpha_j = j\sigma \quad \sigma = \frac{\beta}{b}. \quad (5.147)$$

Para desenvolver a Eq. (5.146), devemos considerar as duas seguintes situações: $m\beta > 1$ e $m\beta < 1$.

a) Para o caso $m\beta > 1$, obtemos:

$$\frac{\mathcal{E}_{C_T}}{L^2} \approx -\frac{a}{2\sqrt{2}\pi^{3/2}\sqrt{1-\lambda}} \left[\frac{3m^{3/2}}{\beta^{5/2}} + \frac{m^{5/2}}{\beta^{3/2}} \right] e^{-\beta(m-\mu)}. \quad (5.148)$$

b) Para o caso $m\beta < 1$, tomando $\mu = 0$, obtemos:

$$\frac{\mathcal{E}_{C_T}}{L^2} \approx -\frac{a}{120\sqrt{1-\lambda}\beta^4} \left[4\pi^4 - 5m^2\beta^2 \right]. \quad (5.149)$$

Da mesma forma como foi apresentado para todos os outros casos anteriores, vamos apresentar a energia de Casimir total por unidade de área. Para fazer isso, uma vez que os termos de massa zero são os mais relevantes, a partir das Eqs. (4.107) e (5.145), obtemos:

$$\frac{\mathcal{E}_C}{L^2} \approx \frac{(1-\lambda)^{3/2}\pi^2}{30a^3} \left[\frac{7}{384} - \frac{(1-\lambda)^2 a^4}{\beta^4} \right]. \quad (5.150)$$

Neste capítulo, analisamos o efeito Casimir escalar com violação de Lorentz do tipo éter a temperatura finita, T , considerando um potencial químico μ , não nulo. Esse estudo, é uma extensão natural do estudo feito no capítulo 4. Consideramos diferentes direções possíveis do quadrvetor constante de quebra de Lorentz, u^μ , para as condições de contorno de Dirichlet,

Neumann e mista impostas ao campo, $\phi(x)$, nas placas. Observamos que a correção térmica da energia de Casimir pode ser expressa em função da função de Bessel modificada, $K_\nu(z)$. Como não foi possível o tratamento de forma exata para energia de Casimir, consideramos os casos: $am \gg 1$, $am = 0$ e $am \ll 1$, juntamente com o limite de baixas temperaturas, $\beta/a \gg 1$. No limite $am \gg 1$, mostramos que a energia de Casimir por unidade de área decai exponencialmente com am , o que é bastante semelhante à situação de temperatura nula. Para o caso sem massa, e assumindo $\mu = 0$, aparecem correções de temperatura de terceira e quarta ordem para os casos de condição de contorno de Dirichlet e Neumann, e uma correção de temperatura de quarta ordem para caso de condição de contorno mista. No limite $m\beta \ll 1$, devemos tomar $\mu = 0$, então aparece uma correção de segunda ordem em $(m\beta)$. Podemos ver que a correção térmica para energia de Casimir depende fortemente do parâmetro de violação de Lorentz λ .

6 EFEITO CASIMIR FERMIÔNICO COM VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ DO TIPO ÉTER

Neste capítulo, estamos interessados na análise do efeito Casimir fermiônico em um modelo teórico com violação da simetria de Lorentz do tipo éter. Para isso, vamos considerar um campo fermiônico massivo, $\Psi(x)$, confinado na região entre duas placas paralelas de área, L^2 , separadas por uma distância a , com $a \ll L$. Essa configuração é mostrada na Fig. 2. Para implementar este confinamento, impomos ao campo fermiônico à condição de contorno de sacola do MIT (JOHNSON, 1975) nas placas.

Como já mostrado anteriormente, a dinâmica do campo, $\Psi(x)$, é governada pela equação de Dirac modificada da Eq. (3.20), dada por:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m + i\lambda u^\mu u^\nu \gamma_\nu \partial_\nu) \Psi(x) = 0, \quad (6.1)$$

onde a anisotropia do espaço-tempo é gerada pelo termo tipo-éter $i\lambda u^\mu u^\nu \gamma_\nu \partial_\nu$. O quadrivetor constante u^μ , será considerado como sendo tipo-tempo e tipo-espaço de acordo com a Eq. (3.15), assim como foi feito para o campo escalar nos capítulos 4 e 5. Ainda, referente a Eq. (6.1), γ^μ são as matrizes de Dirac da Eq. (3.21), dadas por:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

onde $\mathbb{I}$ e σ^j como $j = 1, 2, 3$ são as matrizes identidade e de Pauli 2×2 , respectivamente. O tensor energia-momento para esse modelo teórico, Eq. (3.22), é dado por:

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \bar{\Psi}(x) (i\gamma^\mu + i\lambda u^\mu u^\alpha \gamma_\alpha) \partial^\nu \Psi(x), \quad (6.3)$$

onde $\bar{\Psi}(x) = \Psi^\dagger(x)\gamma^0$, é o espinor adjunto.

Os resultados obtidos neste capítulo, mostraram-se importantes e estão publicados em (CRUZ; MELLO; PETROV, 2019).

6.1 CONDIÇÃO DE CONTORNO DE SACOLA DO MIT

Nesta seção, resolveremos a equação de Dirac modificada dada na Eq. (6.1) impondo a condição de contorno de sacola do MIT (JOHNSON, 1975) ao campo fermiônico, $\Psi(x)$, nas placas, ou seja,

$$(\mathbb{I} + i\gamma^\mu n_\mu) \Psi(x) \Big|_{z=0,a} = 0, \quad (6.4)$$

onde n_μ é um vetor ortonormal à superfície exterior das placas. Para a configuração das placas dada na Fig. 2, consideramos $n_\mu = -\delta_\mu^z$ para a placa localizada em $z = 0$ e $n_\mu = \delta_\mu^z$ na placa em $z = a$.

6.1.1 Quadri vetor tipo-tempo

Nesta subseção, consideramos o caso que o quadri vetor constante u^μ é tipo-tempo, ou seja,

$$u^{(t)} = (1, 0, 0, 0). \quad (6.5)$$

Assumindo a dependência temporal das função espinoriais na forma, $e^{\mp i\omega t}$, as soluções de energias positivas e negativas, respectivamente, da Eq. (6.1), são dadas por:

$$\Psi_\beta^{(+)}(x) = A_\beta e^{-i\omega_{\vec{k}} t} \begin{pmatrix} \varphi(\vec{x}) \\ \frac{-i\sigma^j \partial_j \varphi(\vec{x})}{(1+\lambda)\omega_{\vec{k}} + m} \end{pmatrix} \quad \Psi_\beta^{(-)}(x) = A_\beta e^{i\omega_{\vec{k}} t} \begin{pmatrix} \frac{i\sigma^j \partial_j \chi(\vec{x})}{(1+\lambda)\omega_{\vec{k}} + m} \\ \chi(\vec{x}) \end{pmatrix}, \quad (6.6)$$

onde a relação de dispersão, $\omega_{\vec{k}}$, é dada por:

$$\omega_{\vec{k}} = \frac{1}{(1+\lambda)} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + m^2}, \quad (6.7)$$

e os espinores de duas componentes, φ e χ , correspondendo a partículas e antipartículas, respectivamente, têm a forma:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}) &= e^{i(k_x x + k_y y)} \begin{pmatrix} \varphi_+ e^{ik_z z} + \varphi_- e^{-ik_z z} \end{pmatrix}, \\ \chi(\vec{x}) &= e^{-i(k_x x + k_y y)} \begin{pmatrix} \chi_+ e^{ik_z z} + \chi_- e^{-ik_z z} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Esses modos fermiônicos são caracterizados pelo conjunto de números quânticos, (k_x, k_y, k_z) , onde k_x, k_y são números quânticos contínuos, enquanto que k_z são números discretos, de forma que as condições de contorno possam ser satisfeitas. Para ser mais preciso, devemos introduzir um quarto número quântico, s , referente a projeção de *spin*, onde $s = 1, 2$. Na Eq. (6.8) os φ_+ , φ_- , χ_+ e χ_- , são espinores constantes de duas componentes.

A partir da condição de contorno da Eq. (6.4) na placa em $z = 0$, encontramos a seguinte relação entre os espinores da Eq. (6.8):

$$\begin{aligned} \varphi_+ &= -\frac{m[(1+\lambda)\omega + m] + k_z^2 - k_z \sigma^3 (\sigma^1 k_x + \sigma^2 k_y)}{(m - ik_z)[(1+\lambda)\omega + m]} \varphi_-, \\ \chi_- &= -\frac{m[(1+\lambda)\omega + m] + k_z^2 - k_z \sigma^3 (\sigma^1 k_x + \sigma^2 k_y)}{(m + ik_z)[(1+\lambda)\omega + m]} \chi_+. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Aqui, notamos que usando a Eq. (6.7), esses espinores não dependem do parâmetro de violação de Lorentz, λ . Vamos considerar que os espinores, φ_+ e χ_- , são normalizados de acordo com:

$$\varphi_-^\dagger \varphi_- = \chi_+^\dagger \chi_+ = 1. \quad (6.10)$$

Para o conjunto de espinores independentes de duas componentes, assumimos $\varphi_- = \Omega^{(s)}$ e $\chi_+ = \Omega^{(s)'}$, onde as matrizes possuem uma coluna e duas linhas com os elementos $\Omega_l^{(s)} = \delta_{ls}$ e $\Omega^{(s)'} = i\Omega^{(s)}$. Desta forma, o conjunto completo de números quânticos é $\beta = (k_x, k_y, k_z, s)$.

A partir da condição de contorno da Eq. (6.4) em $z = a$, segue que os autovalores de k_z devem satisfazer a equação transcendental:

$$\frac{am}{k_z a} \text{sen}(k_z a) + \cos(k_z a) = 0. \quad (6.11)$$

Então, vemos que a Eq. (6.11) discretiza o número quântico k_z . Podemos ver também que, para o caso de fermiões não massivos a Eq. (6.11) se reduz à $\cos(k_z a) = 0$ que implica $k_z = (n + 1/2)\pi/a$.

A constante de normalização, A_β , da Eq. (6.6) é determinada usando a Eq. (1.64):

$$\int d^3\vec{x} \Psi_{s\vec{k}}^{\pm\dagger} \Psi_{s'\vec{k}'}^\pm = \delta_{ss'} \delta_{\vec{k}\vec{k}'}, \quad (6.12)$$

resultando em:

$$|A_\beta|^2 = \frac{(1 + \lambda)\omega_{\vec{k}} + m}{16\pi^2(1 + \lambda)\omega_{\vec{k}}a} \left[1 - \frac{\text{sen}(2k_z a)}{2k_z a} \right]^{-1}. \quad (6.13)$$

O operador Hamiltoniano, $\hat{\mathcal{H}}$, é obtido da integral espacial da componente, tt , do tensor energia-momento da Eq. (6.3). Fazendo isso obtemos:

$$\hat{\mathcal{H}} = (1 + \lambda) \int d^2\vec{k} \sum_{n,s} \omega_{\vec{k}} \left[\hat{c}_\beta^\dagger \hat{c}_\beta + \hat{d}_\beta^\dagger \hat{d}_\beta - \frac{L^2}{(2\pi)^2} \right], \quad (6.14)$$

onde $\hat{c}_\beta$, $\hat{c}_\beta^\dagger$, $\hat{d}_\beta$ e $\hat{d}_\beta^\dagger$ são os operadores de aniquilação e criação de dois tipos de férmions, respectivamente, satisfazendo as relações de anticomutação das Eqs. (1.65) e (1.66). Consequentemente, a energia do vácuo fermiônico é obtida tomando o valor esperado da Eq. (6.14), dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 &= \langle 0 | \hat{\mathcal{H}} | 0 \rangle = -\frac{(1 + \lambda)L^2}{2\pi^2} \int d\vec{k} \sum_{n=1}^{\infty} \omega \\ &= -\frac{L^2}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{\alpha_n}{a}\right)^2 + m^2}, \end{aligned} \quad (6.15)$$

onde definimos $\alpha_n = k_n a$, com $k_n = k_z$ e n é a ordem da raiz da Eq. (6.11). Através da Eq. (6.15), percebemos que a energia do vácuo fermiônico não depende do parâmetro, λ , o qual caracteriza a violação da simetria de Lorentz. Para esse resultado encontramos a energia de Casimir fermiônico padrão (ELIZALDE; SANTOS; TORT, 2003). Portanto, paramos essa análise neste momento e vamos diretamente para os próximos casos.

6.1.2 Quadrivetor tipo-espaço

Nesta subseção, analisaremos os três diferentes casos possíveis para o quadrivetor u^μ . Como para o campo bosônico, temos os vetores paralelos às placas, isto é, $u^{(x)} = (0, 1, 0, 0)$ e

$u^{(y)} = (0, 0, 1, 0)$, e ainda, o vetor ortogonal às placas $u^{(z)} = (0, 0, 0, 1)$. Para os dois primeiros casos, obtemos os mesmos resultados para o efeito Casimir. Assim, vamos considerar o vetor paralelo as placas dado por:

$$u^{(x)} = (0, 1, 0, 0). \quad (6.16)$$

Nesse caso, as soluções da equação de Dirac modificada da Eq. (6.1), são dadas por:

$$\Psi_{\beta}^{(+)} = A_{\beta} e^{-i\omega_{\vec{k}} t} \begin{pmatrix} \varphi(\vec{x}) \\ \frac{-i\sigma^j \partial_j \varphi(\vec{x}) + i\lambda \sigma^1 \partial_x \varphi(\vec{x})}{\omega_{\vec{k}} + m} \end{pmatrix} \quad \Psi_{\beta}^{(-)} = A_{\beta} e^{i\omega_{\vec{k}} t} \begin{pmatrix} \frac{i\sigma^j \partial_j \chi(\vec{x}) - i\lambda \sigma^1 \partial_x \chi(\vec{x})}{\omega_{\vec{k}} + m} \\ \chi(\vec{x}) \end{pmatrix}, \quad (6.17)$$

onde $\Psi_{\beta}^{(+)}$ e $\Psi_{\beta}^{(-)}$ são funções espinoriais com energias positivas e negativas, respectivamente. Aqui, a relação de dispersão, $\omega_{\vec{k}}$, é modificada para:

$$\omega_{\vec{k}} = \sqrt{(1 - \lambda)^2 k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + m^2}. \quad (6.18)$$

Os espinores de duas componentes da Eq. (6.17), são expressos por:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= e^{i(k_x x + k_y y)} \left(\varphi_+ e^{ik_z z} + \varphi_- e^{-ik_z z} \right), \\ \chi(x) &= e^{-i(k_x x + k_y y)} \left(\chi_+ e^{ik_z z} + \chi_- e^{-ik_z z} \right), \end{aligned} \quad (6.19)$$

onde φ_+ , φ_- , χ_+ e χ_- são espinores constantes de duas componentes. Assim, impondo a condição de contorno da Eq. (6.4) à Eq. (6.19) na placa em $z = 0$, obtemos as relações:

$$\varphi_+ = -\frac{m(\omega_{\vec{k}} + m) + k_z^2 - k_z \sigma^3 [(1 - \lambda) \sigma^1 k_x + \sigma^2 k_y]}{(m - ik_z)(\omega_{\vec{k}} + m)} \varphi_-, \quad (6.20)$$

e

$$\chi_- = -\frac{m(\omega_{\vec{k}} + m) + k_z^2 - k_z \sigma^3 [(1 - \lambda) \sigma^1 k_x + \sigma^2 k_y]}{(m + ik_z)(\omega_{\vec{k}} + m)} \chi_+. \quad (6.21)$$

Na placa em $z = a$, a condição de contorno, Eq. (6.4), juntamente com as Eqs. (6.19), (6.20) e (6.21), fornece a mesma equação transcendental da Eq. (6.11):

$$\frac{am}{k_z a} \text{sen}(k_z a) + \cos(k_z a) = 0. \quad (6.22)$$

Usando a Eq. (6.12), a constante de normalização, A_{β} da Eq. (6.17), é dada por:

$$|A_{\beta}|^2 = \frac{\omega_{\vec{k}} + m}{16\pi^2 \omega_{\vec{k}} a} \left[1 - \frac{\text{sen}(2k_z a)}{2k_z a} \right]^{-1}. \quad (6.23)$$

Usando a Eq. (6.3), o operador Hamiltoniano é dado por:

$$\hat{\mathcal{H}} = \int d^3 \vec{x} \hat{\mathcal{T}}^{tt} = \int d^2 \vec{k} \sum_{n,s} \omega_{\vec{k}} \left[\hat{c}_{\beta}^{\dagger} \hat{c}_{\beta} + \hat{d}_{\beta}^{\dagger} \hat{d}_{\beta} - \frac{L^2}{(2\pi)^2} \right], \quad (6.24)$$

lembrando que β é com conjunto de números quânticos: (k_x, k_y, n, s) . Consequentemente, a energia do vácuo fermiônico é dada por:

$$\mathcal{E}_0 = \langle 0 | \hat{\mathcal{H}} | 0 \rangle = -\frac{L^2}{2\pi^2} \int d\vec{k} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{(1-\lambda)^2 k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{\alpha_n}{a}\right)^2 + m^2}, \quad (6.25)$$

que fazendo a mudança de variável $\tilde{k}_x = (1-\lambda)k_x$, obtemos:

$$\mathcal{E}_0 = -\frac{L^2(1-\lambda)^{-1}}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{k}_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\tilde{k}_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{\alpha_n}{a}\right)^2 + m^2}. \quad (6.26)$$

Assim, a energia do vácuo fermiônico, neste caso, é a mesma do caso tipo-tempo da Eq. (6.15) multiplicada por um fator $(1-\lambda)^{-1}$. Portanto, não prosseguiremos com os cálculos, porque os resultados dessa situação serão obtidos a partir do próximo caso.

Finalmente, vamos considerar o caso que o quadrvetor, u^μ , é ortogonal às placas, ou seja,

$$u^{(z)} = (0, 0, 0, 1). \quad (6.27)$$

Novamente, vamos resolver a equação de Dirac modificada, Eq. (6.1), assumindo a dependência temporal da forma $e^{\mp i\omega t}$. As soluções de energias positivas e negativas, respectivamente, são dadas por:

$$\Psi_{\beta}^{(+)} = A_{\beta} e^{-i\omega_{\vec{k}} t} \begin{pmatrix} \varphi(\vec{x}) \\ \frac{-i\sigma^j \partial_j \varphi(\vec{x}) + i\lambda \sigma^3 \partial_z \varphi(\vec{x})}{\omega_{\vec{k}} + m} \end{pmatrix} \quad \Psi_{\beta}^{(-)} = A_{\beta} e^{i\omega_{\vec{k}} t} \begin{pmatrix} \frac{i\sigma^j \partial_j \chi(\vec{x}) - i\lambda \sigma^3 \partial_z \chi(\vec{x})}{\omega_{\vec{k}} + m} \\ \chi(\vec{x}) \end{pmatrix}, \quad (6.28)$$

onde a relação de dispersão, $\omega_{\vec{k}}$, é agora modificada para:

$$\omega_{\vec{k}} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + (1-\lambda)^2 k_z^2 + m^2}, \quad (6.29)$$

e os espinores de duas componentes são expressos como:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= e^{i(k_x x + k_y y)} \left(\varphi_+ e^{ik_z z} + \varphi_- e^{-ik_z z} \right), \\ \chi(x) &= e^{-i(k_x x + k_y y)} \left(\chi_+ e^{ik_z z} + \chi_- e^{-ik_z z} \right). \end{aligned} \quad (6.30)$$

Para encontrar as relações entre os espinores constantes de duas componentes φ_+ , φ_- , χ_+ e χ_- , impomos a condição de contorno de sacola do MIT da Eq. (6.4) às soluções da Eq. (6.28). Assim, na placa em $z = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} \varphi_+ &= -\frac{m(\omega + m) + (1-\lambda)^2 k_z^2 - (1-\lambda)k_z \sigma^3 (\sigma^1 k_x + \sigma^2 k_y)}{[m - i(1-\lambda)k_z](\omega + m)} \varphi_-, \\ \chi_- &= -\frac{m(\omega + m) + (1-\lambda)^2 k_z^2 - (1-\lambda)k_z \sigma^3 (\sigma^1 k_x + \sigma^2 k_y)}{[m + i(1-\lambda)k_z](\omega + m)} \chi_+. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Enquanto que, na placa em $z = a$, obtemos uma equação transcendental modificada, dada por:

$$\frac{am}{(1-\lambda)k_z a} \text{sen}(k_z a) + \cos(k_z a) = 0. \quad (6.32)$$

E substituindo a Eq. (6.28) na Eq. (6.12), obtemos a constante de normalização, A_β , dada por:

$$|A_\beta|^2 = \frac{\omega_{\vec{k}} + m}{16\pi^2 \omega_{\vec{k}} a} \left[1 - \frac{\text{sen}(2k_z a)}{2k_z a} \right]^{-1}. \quad (6.33)$$

Neste caso, o operador Hamiltoniano, $\hat{\mathcal{H}}$, é dado por:

$$\hat{\mathcal{H}} = \int d^2 \vec{k} \sum_{n,s} \omega_{\vec{k}} \left[\hat{c}_\beta^\dagger \hat{c}_\beta + \hat{d}_\beta^\dagger \hat{d}_\beta - \frac{L^2}{(2\pi)^2} \right], \quad (6.34)$$

consequentemente, tomando o valor esperado de $\hat{\mathcal{H}}$, no estado de vácuo, $|0\rangle$, obtemos a seguinte energia do vácuo fermiônico:

$$\mathcal{E}_0 = -\frac{L^2}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + (1-\lambda)^2 k_z^2 + m^2}, \quad (6.35)$$

ou ainda, definindo $\alpha_n \equiv k_n a$, onde $k_n = k_z$ é a raiz n da Eq. (6.32), obtemos:

$$\mathcal{E}_0 = -\frac{L^2}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left[\frac{(1-\lambda)\alpha_n}{a} \right]^2 + m^2}. \quad (6.36)$$

Podemos observar que, neste caso, a energia do vácuo fermiônico tem uma dependência com o parâmetro que caracteriza a violação de Lorentz, λ , de uma maneira não trivial. Assim, vamos desenvolver essa análise com mais detalhes.

Como podemos ver, a energia do vácuo, Eq. (6.36), é divergente. Para obtermos um resultado finito, ou seja, a energia de Casimir, devemos renormalizar a energia do vácuo. Primeiramente, vamos regularizar a Eq. (6.36) usando a fórmula de soma de Abel-Plana (SAHARIAN, 2006):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi f(\alpha_n)}{1 - \frac{\text{sen}(2\alpha_n)}{2\alpha_n}} = -\frac{\pi a m f(0)}{2(am + 1)} + \int_0^{\infty} dz f(z) - i \int_0^{\infty} dt \frac{f(it) - f(-it)}{\frac{t+am}{t-am} e^{2t} + 1}. \quad (6.37)$$

Para que possamos desenvolver o somatório em n da Eq. (6.36), devemos reescrever o integrando de maneira apropriada. As etapas adotadas a partir de agora usam a abordagem desenvolvida em (BELLUCCI; SAHARIAN, 2009). Assim, começamos com o denominador do lado esquerdo no somatório da Eq. (6.37). Usando a Eq. (6.32), obtemos a identidade:

$$1 - \frac{\text{sen}(2\alpha_n)}{2\alpha_n} = 1 + \frac{bm}{(bm)^2 + \alpha_n^2}. \quad (6.38)$$

Assim, à energia do vácuo fermiônico regularizada é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0^{\text{reg}} = -\frac{L^2}{2\pi^3 b} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \left[-\frac{\pi b m f(0)}{2(bm + 1)} + \int_0^{\infty} dz f(z) \right. \\ \left. - i \int_0^{\infty} dt \frac{f(it) - f(-it)}{\frac{t+bm}{t-bm} e^{2t} + 1} \right], \end{aligned} \quad (6.39)$$

onde a função, $f(z)$, é definida da forma:

$$f(z) = \sqrt{z^2 + (k_x^2 + k_y^2)b^2 + m^2} \left[1 + \frac{bm}{(bm)^2 + z^2} \right]. \quad (6.40)$$

O parâmetro, b , que aparece nas Eqs. (6.38), (6.39) e (6.40), é dado por:

$$b \equiv \frac{a}{(1 - \lambda)}. \quad (6.41)$$

O primeiro termo do lado direito da Eq. (6.39) se refere à energia do vácuo na presença de apenas uma placa, enquanto que o segundo está relacionado com a energia do vácuo na ausência de placas. Esses termos são divergentes, portanto, após a renormalização, a energia de Casimir é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_C = \frac{iL^2b}{2\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_0^{\infty} du \frac{u - m}{(u + m)e^{2bu} + u - m} \left[1 + \frac{m}{bm^2 - bu^2} \right] \\ \times \left[\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + m^2 + (iu)^2} - \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + m^2 + (-iu)^2} \right], \end{aligned} \quad (6.42)$$

aqui, fizemos a mudança de variável $t = bu$. Neste ponto, vamos proceder de forma análoga aos outros casos tratados nos capítulos 4 e 5. Dividimos a integral sobre a variável, u , em dois intervalos: o primeiro de $[0, \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + m^2}]$ e o segundo de $[\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + m^2}, \infty)$. Adotando esse procedimento, a integral no primeiro intervalo de integração se anula, e portanto, obtemos a energia de Casimir dada por:

$$\mathcal{E}_C = -\frac{L^2}{\pi^3} \int d^2\vec{k} \int_{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + m^2}}^{\infty} du \sqrt{u^2 - k_x^2 - k_y^2 - m^2} \left[\frac{b(u - m) - m/(u + m)}{(u + m)e^{2bu} + u - m} \right]. \quad (6.43)$$

Fazendo uso da identidade (BELLUCCI; SAHARIAN, 2009):

$$\int d\vec{k}_p \int_{\sqrt{\vec{k}_p^2 + c^2}}^{\infty} dz (z^2 - \vec{k}_p^2 - c^2)^{\frac{s+1}{2}} f(z) = \frac{\pi^{\frac{p}{2}} \Gamma[\frac{s+3}{2}]}{\Gamma[\frac{p+s+3}{2}]} \int_c^{\infty} dx (x^2 - c^2)^{\frac{p+s+1}{2}} f(x), \quad (6.44)$$

juntamente com a identificação:

$$\left[\frac{b(x - m) - m/(x + m)}{(x + m)e^{2bx} + x - m} \right] = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \ln \left(1 + \frac{x - m}{x + m} e^{-2bx} \right), \quad (6.45)$$

obtemos a expressão para a energia de Casimir dada por:

$$\mathcal{E}_C = -\frac{L^2}{\pi^2 b^3} \int_0^{\infty} dy (y + bm) \sqrt{y(y + 2bm)} \ln \left(1 + \frac{y}{y + 2bm} e^{-2(y+bm)} \right), \quad (6.46)$$

onde fizemos uma integração por partes juntamente com a mudança de variável $bx = y + bm$. Assim, para esse caso, a energia de Casimir fermiônica, Eq. (6.46), depende do parâmetro λ , de maneira não-trivial, através do parâmetro b .

Infelizmente, para campos fermiônicos massivos não há expressão exata para a integral da Eq. (6.46). Na Fig. 16 mostramos resultados exatos (numericamente), exibindo o comportamento

da energia de Casimir fermiônica da Eq. (6.46), como uma função de am considerando diferentes valores do parâmetro que caracteriza a violação da simetria de Lorentz, λ . Podemos ver que a energia de Casimir fermiônica depende fortemente desse parâmetro, no sentido de que ela aumenta quando o valor de λ aumenta.

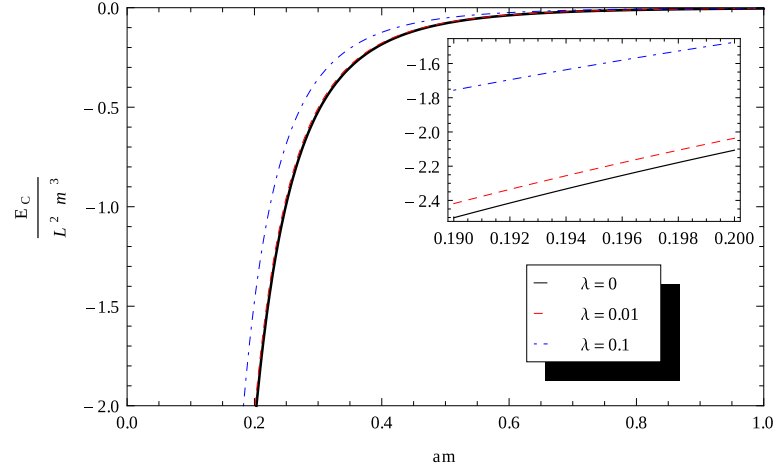


Figura 16 – Energia de Casimir para o caso $u^{(z)} = (0, 0, 0, 1)$ multiplicada por $1/L^2 m^3$, como função de am para os seguintes valores de $\lambda = 0.0, 0.01$ e 0.1 .

Entretanto, podemos obter resultados aproximados para os limites assintóticos: $am \gg 1$ e $am \ll 1$, correspondendo ao caso de curtas distâncias entre as placas e/ou massas pequenas, e de longas distâncias entre as placas e/ou massas grandes, respectivamente:

- (i) No limite $am \gg 1$, a contribuição mais relevante na expansão do integrando da Eq. (6.46), é dada por:

$$e^{-2(mb+x)} x^{3/2} \sqrt{\frac{bm}{2}}. \quad (6.47)$$

Nesta aproximação, a energia de Casimir fermiônica é:

$$\frac{\mathcal{E}_C}{L^2} = -\frac{3m^{1/2}(1-\lambda)^{5/2}}{32\pi^{3/2}a^{5/2}} e^{-\frac{2am}{1-\lambda}}. \quad (6.48)$$

Portanto, nesse limite, a energia de Casimir fermiônica por unidade de área decai exponencialmente com am , conseqüentemente, a pressão de Casimir fermiônica também.

- (ii) No limite $am \ll 1$, podemos expandir o integrando da Eq. (6.46) em potências de bm . Até a primeira ordem de bm , resultando:

$$x^2 \ln(1 + e^{-2x}) - \left(2 \frac{x e^{-2x} (x+1)}{1 + e^{-2x}} - 2x \ln(1 + e^{-2x}) \right) bm. \quad (6.49)$$

Substituindo a expressão da Eq. (6.49) na Eq. (6.46), a energia de Casimir fermiônica por unidade de área é dada por:

$$\frac{\mathcal{E}_C}{L^2} = -\frac{7\pi^2(1-\lambda)^3}{2880a^3} \left[1 - \frac{120am}{7\pi^2(1-\lambda)} \right]. \quad (6.50)$$

Consequentemente, a partir da Eq. (6.50), obtemos a pressão de Casimir fermiônica:

$$\mathcal{P}_C \equiv -\frac{\partial \mathcal{E}_C / L^2}{\partial a} = -\frac{(1-\lambda)^2 [7\pi^2(1-\lambda) - 80am]}{960a^4}. \quad (6.51)$$

Nesse momento gostaríamos de fazer um comentário acerca dos resultados encontrados em (ELIZALDE; SANTOS; TORT, 2003). Os autores obtiveram a energia de Casimir fermiônica, em termos de expansão em série, admitindo a condição de contorno de sacola do MIT para uma configuração de placas paralelas de área L^2 e, separadas por uma distância a . Seu resultado é reproduzido por:

$$\mathcal{E}_C = -\frac{L^2 m^{1/2}}{4\pi^2 a^{5/2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+2}}{k^{7/2}} \Gamma\left(3/2 + k\right) \frac{d}{d\beta} \left[\beta^{-3/2} W_{-k,1}(4amk\beta) \right] \Big|_{\beta=1}, \quad (6.52)$$

onde, $W_{\mu,\nu}(z)$, representa a função de Whittaker (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1965). Usando a expressão da Eq. (6.52), os autores encontraram resultados aproximados para a energia de Casimir nos limites $am \gg 1$ e $am \ll 1$. Seu resultado para o limite $am \ll 1$ é dado por:

$$\frac{\mathcal{E}_C}{L^2} = -\frac{7\pi^2}{2880a^3} (1 - Bm), \quad (6.53)$$

onde $B = 540\zeta(3)/7\pi^4$, que está em desacordo com o nosso resultado da Eq. (6.50).

Com base no resultado da Eq. (6.52), podemos adaptar esta fórmula para o nosso caso. A expressão correspondente é dada por:

$$\mathcal{E}_C = -\frac{L^2 m^{1/2}}{4\pi^2 b^{5/2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+2}}{k^{7/2}} \Gamma\left(3/2 + k\right) \frac{d}{d\beta} \left[\beta^{-3/2} W_{-k,1}(4bmk\beta) \right] \Big|_{\beta=1}. \quad (6.54)$$

Usando a expressão para a função $W_{\mu,\nu}(z)$, considerando argumentos pequenos, ou seja, $z \ll 1$ (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1965):

$$W_{\mu,\nu}(z) \approx \frac{\Gamma(2\nu)}{\Gamma(1/2 - \mu + \nu)} \left(z^{1/2-\nu} + \frac{\mu z^{3/2-\nu}}{2\nu - 1} \right), \quad (6.55)$$

obtemos o nosso resultado da Eq. (6.50).

Neste capítulo, analisamos o efeito Casimir fermiônico, através de um modelo teórico com violação de Lorentz do tipo éter, admitindo um acoplamento entre a derivada do campo fermiônico e um quadri vetor constante arbitrário u^μ . Assumimos que o campo está confinado entre duas placas paralelas, obedecendo à condição de contorno de sacola do MIT nas placas com área L^2 e separadas por uma distância a , onde $a \ll L$. Para cada direção de u^μ , a energia de Casimir foi analisada. Observou-se que as relações de dispersão são modificadas através do parâmetro λ , associado à violação da simetria de Lorentz. No entanto, não há modificação na energia de Casimir para o caso do quadri vetor tipo-tempo. Enquanto que, para u^μ paralelo às placas, a correção na energia de Casimir é dada por um fator multiplicativo. Para o caso que o quadri vetor constante é perpendicular às placas, a correção associada ao parâmetro da violação

de Lorentz surge de forma mais sutil através do parâmetro $b \equiv a/(1 - \lambda)$. Devido dificuldades para o tratamento de forma exata da energia de Casimir fermiônico, apresentamos a energia de Casimir por unidade de área analiticamente, considerando os limites: $bm \gg 1$ e $bm \ll 1$. Além disso, apresentamos na Fig. 16 a energia de Casimir numericamente, considerando diferentes valores de λ .

CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

CONCLUSÕES

Nesta tese estudamos as modificações causadas pela violação da simetria de Lorentz do tipo éter no efeito Casimir, associado à campos bosônicos e fermiônicos. O termo que introduz essa anisotropia no espaço-tempo consiste de um acoplamento, λ , entre a derivada do campo e um quadrivetor constante u^μ . Consideramos os campos quânticos massivos confinados na região entre duas placas paralelas de área, L^2 e, separadas por uma distância a , onde $a \ll L$, para evitar os efeitos de bordas. Para realizarmos esse estudo, consideramos diferentes direções do quadrivetor constante, que seleciona uma direção privilegiada do espaço-tempo, considerando diferentes condições de contorno aos campos nas placas em $z = 0$ e $z = a$, como é mostrado na Fig. 2.

Na análise do efeito Casimir escalar com violação de Lorentz do tipo éter, assumimos que o campo escalar real massivo, $\phi(x)$, obedecia as condições de contorno de Dirichlet, Neumann ou mista nas placas. Para cada direção arbitrária do quadrivetor constante, u^μ , a energia de Casimir por unidade de área foi obtida. Para os casos de Dirichlet e Neumann obtemos os mesmos resultados, dados por: Eqs. (4.22), (4.31), (4.41), (4.52), (4.60), e (4.68) para as diferentes escolhas do quadrivetor u^μ , tipo-tempo e tipo-espaço. No entanto, para o caso da condição de contorno mista, obtemos resultados com uma modificação na energia de Casimir por unidade de área. Essa modificação consiste de um fator numérico e um sinal contrário, dados por: Eqs. (4.86), (4.96) e (4.105) para as diferentes escolhas do quadrivetor u^μ , tipo-tempo e tipo-espaço. Essa diferença da energia de Casimir para a condição de contorno mista, também é obtida para o caso sem violação de Lorentz. Isso significa que, nos casos de Dirichlet e Neumann as placas estão sendo atraídas, enquanto que no caso misto elas estão se afastando. Esses resultados se mostraram impossíveis de tratamento analítico, sendo assim, apresentamos numericamente os resultados exatos nas Figs. 10, 11, 12 para Dirichlet e Neumann e, nas Figs. 13, 14 e 15 para mista, considerando diferentes valores do parâmetro de violação de Lorentz, λ . No entanto, para obtermos expressões analíticas dos nossos resultados, consideramos os casos limites: $am \gg 1$ e $am \ll 1$. Basicamente, esses limites se referem a distância entre as placas, ou seja, pequenas e grandes distâncias, respectivamente. No limite $am \ll 1$, obtivemos as energias de Casimir por unidade de área dadas por: Eqs. (4.24), (4.33), (4.43), (4.54), (4.62) e (4.70) para as condições de contorno de Dirichlet e Neumann, respectivamente. Enquanto que, para a condição de contorno mista obtivemos os resultados dados por: Eqs. (4.88), (4.98) e (4.107). Adicionalmente, a partir

desses resultados, obtivemos as pressões de Casimir dadas por: Eqs. (4.25), (4.34), (4.44), (4.55), (4.63), (4.71), (4.89), (4.99) e (4.108) para cada escolha do quadrivetor u^μ . No limite $am \gg 1$, todos os resultados apresentam um decaimento exponencial com am , ou seja, tende a zero muito rapidamente.

Ainda no estudo do efeito Casimir escalar, analisamos a influência da violação de Lorentz nas correções térmicas das energias de Casimir por unidade de área. Consideramos o sistema físico em equilíbrio térmico a uma temperatura, T , e com um potencial químico, μ , onde para o caso bosônico tem a restrição $\mu \leq \omega_{\vec{k},n}$. Obtivemos resultados para as condições de contorno de Dirichlet e Neumann dados por: Eqs. (5.22), (5.46) e (5.68), enquanto que, para a condição de contorno mista são dados por: Eqs. (5.98), (5.119) e (5.139) para as diferentes escolhas do quadrivetor u^μ , tipo-tempo e tipo-espaço. No entanto, não foi possível obter resultados exatos nessa análise. Assim, consideramos os casos limites: $am \gg 1$ e $am \ll 1$, bem como o caso $am = 0$. Juntamente, tivemos que considerar o limite de baixas temperatura, ou seja, $\beta/a \gg 1$, que julgamos ser o limite mais interessante. No limite $am \ll 1$, obtivemos os resultados dados por: Eqs. (5.34), (5.56) e (5.78) nos casos de Dirichlet e Neumann. Enquanto que, para o caso da condição mista temos os resultados dados por: Eqs. (5.108), (5.129) e (5.149), percebemos que as correções com a temperatura são dadas por um termo $(m\beta)^2$. No limite $am \gg 1$, todos os resultados obtidos para as correções térmicas da energia de Casimir, por unidade de área, decai exponencialmente com am .

Para a análise do efeito Casimir fermiônico com violação de Lorentz, assumimos que o campo fermiônico massivo, Ψ , obedece à condição de contorno de sacola do MIT nas placas. Neste caso, obtivemos a energia de Casimir por unidade de área dada por: Eq. (6.46), para o caso do quadrivetor constante, u^μ , ortogonal às placas. No entanto, nosso resultado se mostrou analiticamente de difícil tratamento, assim, obtivemos numericamente na Fig. 16. Para resultado analítico, consideramos os limites: $am \gg 1$ e $am \ll 1$. No limite $am \ll 1$, obtivemos a energia de Casimir por unidade de área dada na Eq. (6.50) e a pressão dada por Eq. (6.51). No limite $am \gg 1$, os resultados tendem a zero muito rapidamente com am . Para os casos do quadrivetor, u^μ , paralelo às placas, observamos que a energia de Casimir é modificada por um fator multiplicativo, que pode ser obtido a partir do caso ortogonal.

Em geral, notamos que os nossos resultados têm uma dependência com parâmetro, λ , que caracteriza a violação de Lorentz do tipo éter. Essa dependência ocorre através do fator $(1 \pm \lambda)^n$ com n assumindo diferentes sinais e valores, para as diferentes condições de contorno e escolhas do quadrivetor constante u^μ . Assim, podemos concluir que a violação da simetria de Lorentz influencia fortemente o efeito Casimir. Ainda, notamos quando tomamos $\lambda = 0$ que recuperamos os resultados da literatura.

TRABALHOS FUTUROS

Como trabalhos futuros, temos nos dedicado às correções térmicas da energia de Casimir fermiônica, no modelo de violação de Lorentz do tipo éter. Temos também, nos interessado na análise da violação de Lorentz no efeito Casimir com outras configurações para as placas.

Também se torna importante, fazer a análise da violação de Lorentz nas correções radiativas do efeito Casimir. Esse trabalho ainda está no âmbito das ideias. Outro ponto importante, é o estudo em espaço-tempo curvos, por exemplo, no espaço-tempo de buracos negros. No entanto, essa análise é bem mais complexa de fazer. Basicamente nosso desafio será a maneira de como implementar a violação de Lorentz em espaço-tempo curvos.

REFERÊNCIAS

- ABBOTT, B. P. et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical review letters*, APS, v. 116, n. 6, p. 061102, 2016. Citado na página 1.
- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*. [S.l.]: Courier Corporation, 1965. v. 55. Citado 8 vezes nas páginas 64, 65, 92, 102, 103, 105, 106 e 107.
- BELICH, H. et al. Lorentz symmetry violation. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 29, n. 1, p. 57–64, 2007. Citado 7 vezes nas páginas 9, 31, 33, 34, 35, 36 e 37.
- BELLUCCI, S.; SAHARIAN, A. Fermionic casimir effect for parallel plates in the presence of compact dimensions with applications to nanotubes. *Physical Review D*, APS, v. 80, n. 10, p. 105003, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 89 e 90.
- BETHE, H. A. The electromagnetic shift of energy levels. *Physical Review*, APS, v. 72, n. 4, p. 339, 1947. Citado na página 20.
- BJORKEN, J.; DRELL, S. Relativistic quantum field theory. *German Translation*, (BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich, 1993), 1965. Citado 3 vezes nas páginas 12, 38 e 39.
- BOLOKHOV, P. A.; NIBBELINK, S. G.; POSPELOV, M. Lorentz violating supersymmetric quantum electrodynamics. *Physical Review D*, APS, v. 72, n. 1, p. 015013, 2005. Citado na página 2.
- BORDAG, M. et al. Advances in the Casimir effect. *Int. Ser. Monogr. Phys.*, v. 145, p. 1–768, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 55.
- BORDAG, M.; MOHIDEEN, U.; MOSTEPANENKO, V. M. New developments in the Casimir effect. *Phys. Rept.*, v. 353, p. 1–205, 2001. Citado na página 23.
- BROWN, L. M. Introduction: Renormalization. 1930–1950. In: *Renormalization*. [S.l.]: Springer, 1993. p. 1–27. Citado na página 15.
- CARROLL, S. M. et al. Instabilities in the Aether. *Phys. Rev.*, D79, p. 065011, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 38.
- CARROLL, S. M.; FIELD, G. B.; JACKIW, R. Limits on a lorentz-and parity-violating modification of electrodynamics. *Physical Review D*, APS, v. 41, n. 4, p. 1231, 1990. Citado na página 30.
- CARROLL, S. M.; TAM, H. Aether Compactification. *Phys. Rev.*, D78, p. 044047, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 3, 37 e 38.
- CASIMIR, H.; POLDER, D. The influence of retardation on the london-van der waals forces. *Physical Review*, APS, v. 73, n. 4, p. 360, 1948. Citado na página 19.

CASIMIR, H. B. G. On the Attraction Between Two Perfectly Conducting Plates. *Indag. Math.*, v. 10, p. 261–263, 1948. [Kon. Ned. Akad. Wetensch. Proc.100N3-4,61(1997)]. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 20.

COLLADAY, D.; KOSTELECKÝ, V. A. Lorentz-violating extension of the standard model. *Physical Review D*, APS, v. 58, n. 11, p. 116002, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 32.

COMPTON, A. H. A Quantum Theory of the Scattering of X-rays by Light Elements. *Phys. Rev.*, v. 21, p. 483–502, 1923. Citado na página 5.

CRUZ, M.; MELLO, E. B. de; PETROV, A. Y. Casimir effects in lorentz-violating scalar field theory. *Physical Review D*, APS, v. 96, n. 4, p. 045019, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 42.

CRUZ, M.; MELLO, E. B. de; PETROV, A. Y. Fermionic casimir effect in a field theory model with lorentz symmetry violation. *Physical Review D*, APS, v. 99, n. 8, p. 085012, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 84.

CRUZ, M.; MELLO, E. Bezerra de; PETROV, A. Y. Thermal corrections to the casimir energy in a lorentz-breaking scalar field theory. *Modern Physics Letters A*, World Scientific, v. 33, n. 20, p. 1850115, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 61.

DERIAGIN, B. V.; ABRIKOSOVA, I. I. Direct measurement of the molecular attraction of solid bodies. 1. Statement of the problem and method of measuring forces by using negative feedback. *Sov. Phys. JETP*, v. 3, p. 819–829, 1957. [Zh. Eksp. Teor. Fiz.30,993(1956)]. Citado na página 22.

DIRAC, P. A. M. Quantum theory of emission and absorption of radiation. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A114, p. 243, 1927. Citado na página 5.

DIRAC, P. A. M. The quantum theory of the emission and absorption of radiation. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, The Royal Society London, v. 114, n. 767, p. 243–265, 1927. Citado na página 20.

DIRAC, P. A. M. Is there an aether? *Nature*, Nature Publishing Group, v. 168, n. 4282, p. 906, 1951. Citado na página 2.

EINSTEIN, A. Concerning an heuristic point of view toward the emission and transformation of light. *Annalen Phys.*, v. 17, p. 132–148, 1905. Citado na página 5.

ELIZALDE, E.; SANTOS, F.; TORT, A. The casimir energy of a massive fermionic field confined in a (d+ 1)-dimensional slab-bag. *International Journal of Modern Physics A*, World Scientific, v. 18, n. 10, p. 1761–1772, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 86 e 92.

ELLIS, J.; MAVROMATOS, N.; NANOPOULOS, D. Noncritical liouville string escapes constraints on generic models of quantum gravity. *Physical Review D*, APS, v. 65, n. 6, p. 064007, 2002. Citado na página 1.

FEYNMAN, R. P. The reason for antiparticles. *Elementary particles and the laws of physics*, p. 1–59, 1986. Citado na página 9.

GAMBINI, R.; PULLIN, J. Nonstandard optics from quantum space-time. *Physical Review D*, APS, v. 59, n. 12, p. 124021, 1999. Citado na página 1.

- GOMES, M. et al. Aetherlike lorentz-breaking actions. *Physical Review D*, APS, v. 81, n. 4, p. 045018, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 38.
- GREEN, M.; SCHWARZ, J. E. witten superstring theory. *Cambridge Monographs on Mathematical Physics*, Cambridge University Press, 1987. Citado na página 1.
- HOOFT, M. V. G. Regularization and renormalization of gauge fields. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 44, n. 1, p. 189–213, 1972. Citado na página 15.
- ITZYKSON, C.; ZUBER, J.-B. *Quantum field theory*. [S.l.]: Courier Corporation, 2012. Citado na página 20.
- JOHNSON, K. The mit bag model. *Acta Phys. Polon.*, v. 6, n. MIT-CTP-494, p. 865, 1975. Citado 4 vezes nas páginas 22, 84, 110 e 111.
- JR, W. E. L.; RETHERFORD, R. C. Fine structure of the hydrogen atom by a microwave method. *Physical Review*, APS, v. 72, n. 3, p. 241, 1947. Citado na página 20.
- JR, W. E. L.; RETHERFORD, R. C. Fine structure of the hydrogen atom. iv. *Physical Review*, APS, v. 86, n. 6, p. 1014, 1952. Citado na página 20.
- KHODABAKHSHI, S.; SHOJAI, A. Casimir force in the gödel space-time and its possible induced cosmological inhomogeneity. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 77, n. 7, p. 454, 2017. Citado na página 23.
- KITCHENER, J.; PROSSER, A.; SURNAME, g. Direct measurement of the long-range van der waals forces. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society London, v. 242, n. 1230, p. 403–409, 1957. Citado na página 22.
- KOSTELECKÝ, V. A.; SAMUEL, S. Spontaneous breaking of lorentz symmetry in string theory. *Physical Review D*, APS, v. 39, n. 2, p. 683, 1989. Citado na página 1.
- LAHIRI, A.; PAL, P. B. *A first book of quantum field theory*. [S.l.]: CRC Press, 2005. Citado na página 7.
- LAMOREAUX, S. K. Demonstration of the casimir force in the 0.6 to 6 μ m range. *Physical Review Letters*, APS, v. 78, n. 1, p. 5, 1997. Citado na página 2.
- LONDON, F. Zur theorie und systematik der molekularkräfte. *Zeitschrift für Physik*, Springer, v. 63, n. 3-4, p. 245–279, 1930. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 22.
- MANDL, F.; SHAW, G. *Quantum field theory*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2010. Citado 8 vezes nas páginas 5, 10, 15, 23, 25, 42, 50 e 62.
- MELLO, E. B. de; SAHARIAN, A. Finite temperature current densities and bose-einstein condensation in topologically nontrivial spaces. *Physical Review D*, APS, v. 87, n. 4, p. 045015, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 65 e 104.
- MERZBACHER, E. *Quantum mechanics* john wiley & sons. Inc., New York, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 17.
- MILONNI, P. Why spontaneous emission? *American Journal of Physics*, AAPT, v. 52, n. 4, p. 340–343, 1984. Citado na página 20.

- MOSTEPANENKO, V. M.; TRUNOV, N. N. *The Casimir effect and its applications*. [S.l.: s.n.], 1997. Citado 3 vezes nas páginas 22, 26 e 46.
- MYERS, R. C.; POSPELOV, M. Ultraviolet modifications of dispersion relations in effective field theory. *Physical Review Letters*, APS, v. 90, n. 21, p. 211601, 2003. Citado na página 30.
- OERTER, R. *The theory of almost everything: The standard model, the unsung triumph of modern physics*. [S.l.]: Penguin, 2006. Citado na página 30.
- PLANCK, M. Book. *The theory of heat radiation / Max Planck ; introduction by Allan A. Needell ; translation by Morton Masius*. [S.l.]: Tomash ; American Institute of Physics Los Angeles : New York, 1900. xlv, 470 p. : p. ISBN 0883185970. Citado na página 5.
- ROVELLI, C. Loop quantum gravity. *Living reviews in relativity*, Springer, v. 11, n. 1, p. 5, 2008. Citado na página 1.
- SAHARIAN, A. A. Generalized abel-plana formula as a renormalization tool in quantum field theory with boundaries. *arXiv preprint hep-th/0609093*, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 89.
- SAHARIAN, A. A. The Generalized Abel-Plana formula with applications to Bessel functions and Casimir effect. 2007. Citado 3 vezes nas páginas 15, 43 e 55.
- SILVA, D. R. da; CRUZ, M. B.; MELLO, E. R. Bezerra de. Fermionic casimir effect in horava–lifshitz theories. *International Journal of Modern Physics A*, v. 34, n. 20, p. 1950107, 2019. Citado na página 3.
- SPARNAAY, M. J. Measurements of attractive forces between flat plates. *Physica*, Elsevier, v. 24, n. 6-10, p. 751–764, 1958. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 22.
- SUDARSKY, D.; URRUTIA, L.; VUCETICH, H. Observational bounds on quantum gravity signals using existing data. *Physical review letters*, APS, v. 89, n. 23, p. 231301, 2002. Citado na página 2.
- TEO, L. Casimir effect in spacetime with extra dimensions—from kaluza–klein to randall–sundrum models. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 682, n. 2, p. 259–265, 2009. Citado na página 23.
- ULION, I. M.; MELLO, E. B. de; PETROV, A. Y. Casimir effect in horava–lifshitz-like theories. *International Journal of Modern Physics A*, World Scientific, v. 30, n. 36, p. 1550220, 2015. Citado na página 3.
- WEINBERG, S. *The quantum theory of fields*. [S.l.]: Cambridge university press, 1995. v. 2. Citado na página 20.

Apêndices

APÊNDICE A – CÁLCULO DAS INTEGRAIS NO CÁLCULO DAS CORREÇÕES TÉRMICAS

A.1 INTEGRAL I

Neste apêndice, apresentamos o procedimento adotado para expressar a integral das correções térmicas das energias Casimir, dadas nas Eqs. (5.22), (5.46) e (5.68):

$$\mathcal{I}_j = \int_M^\infty dz z^3 \int_1^\infty dy \frac{\sqrt{y^2 - 1}}{e^{2zy} - 1} \cos(\alpha_j z \sqrt{y^2 - 1}), \quad (\text{A.1})$$

em termos de uma soma da função de Bessel modificada do segundo tipo, $K_\nu(z)$. Na Eq. (A.1) assumimos que $M = ma$ e $\alpha_j = j\sigma = j\frac{\beta}{a}(1 - \lambda)^\kappa$ com $\kappa = -1/2, 0$ e $1/2$.

Podemos escrever a Eq. (A.1) na forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_j &= \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \int_M^\infty dz z^2 \int_1^\infty dy \frac{\sin(\alpha_j z \sqrt{y^2 - 1})}{e^{2zy} - 1} \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \sum_{n=1}^\infty \int_M^\infty dz z^2 \int_1^\infty dy e^{-2nzy} \sin(\alpha_j z \sqrt{y^2 - 1}). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Realizando a mudança de variável $x^2 = y^2 - 1$ e usando a representação integral para as funções de Bessel modificadas, $K_\nu(z)$, dado em (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1965), obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_j &= \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \sum_{n=1}^\infty \int_M^\infty dz z^2 \int_0^\infty dx \frac{x \sin(\alpha_j zx) e^{-2nz\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \sum_{n=1}^\infty \frac{\alpha_j}{\sqrt{\alpha_j^2 + 4n^2}} \int_M^\infty dz z^2 K_1\left(z\sqrt{\alpha_j^2 + 4n^2}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Além disso, fazendo a mudança da variável $x = z\sqrt{\alpha_j^2 + 4n^2}$, obtemos:

$$\mathcal{I}_j = \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \sum_{n=1}^\infty \frac{\alpha_j}{(\alpha_j^2 + 4n^2)^2} \int_{M\sqrt{\alpha_j^2 + 4n^2}}^\infty dx x^2 K_1(x). \quad (\text{A.4})$$

Finalmente, usando a relação:

$$\frac{\partial}{\partial x} [x^\nu K_\nu(x)] = -x^\nu K_{\nu-1}(x), \quad (\text{A.5})$$

obtemos:

$$\mathcal{I}_j = M^2 \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left[\alpha_j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2 \left(M \sqrt{\alpha_j^2 + 4n^2} \right)}{\alpha_j^2 + 4n^2} \right]. \quad (\text{A.6})$$

Como não há expressão exata para a soma da Eq. (A.6), consideramos os limites assintóticos para o parâmetro M : $M \gg 1$, $M = 0$ e $M \ll 1$.

(i) No limite $M \gg 1$, a contribuição dominante vem do termo $n = 1$:

$$\mathcal{I}_j \approx M^2 \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left[\alpha_j \frac{K_2 \left(M \sqrt{\alpha_j^2 + 4} \right)}{\alpha_j^2 + 4} \right]. \quad (\text{A.7})$$

Também usamos a expansão assintótica para grandes argumentos da função de Bessel modificada (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1965), $K_\nu(z)$,

$$K_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}, \quad (\text{A.8})$$

de forma que obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_j &\approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} M^{\frac{3}{2}} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left[\frac{\alpha_j}{(\alpha_j^2 + 4)^{\frac{5}{4}}} e^{-M \sqrt{\alpha_j^2 + 4}} \right] \\ &\approx \sqrt{\frac{\pi}{8}} M^{\frac{3}{2}} \frac{[8 - \alpha_j^2(3 + 2M \sqrt{\alpha_j^2 + 4})]}{(\alpha_j^2 + 4)^{\frac{9}{4}}} e^{-M \sqrt{\alpha_j^2 + 4}}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

No limite de temperaturas baixas, ou seja, $\alpha_j \gg 1$, obtemos:

$$\mathcal{I}_j \approx -\sqrt{\frac{\pi M^5}{2}} \frac{e^{-M \alpha_j}}{\alpha_j^{3/2}}. \quad (\text{A.10})$$

Assim, podemos desenvolver o somatório final em j no cálculo final da correção térmica da energia de Casimir, $\mathcal{E}_{CT}$, quando $M \gg 1$.

(ii) Para o caso $M = 0$, usamos a expansão assintótica para a função de Bessel modificada (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1965), $K_\nu(z)$, para argumentos pequenos:

$$K_\nu(z) \approx \frac{1}{2} \Gamma(\nu) \left(\frac{1}{2} z \right)^{-\nu}, \quad (\text{A.11})$$

assim, obtemos:

$$\mathcal{I}_j \approx \frac{1}{8} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left[\alpha_j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + \alpha_j^2/4)^2} \right] = -\frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_j^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \alpha_j^2/4}.$$

A soma em n nos fornece:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \alpha_j^2/4} = \frac{\pi \alpha_j \coth \left(\frac{\pi \alpha_j}{2} \right) - 2}{\alpha_j^2}. \quad (\text{A.12})$$

O próximo passo é derivar com relação a α_j , resultando:

$$\mathcal{I}_j = \frac{1}{8\alpha_j^4} \left[24 - 4\pi\alpha_j \coth\left(\frac{\pi\alpha_j}{2}\right) - \pi^2\alpha_j^2 \left[2 + \pi\alpha_j \coth\left(\frac{\pi\alpha_j}{2}\right) \right] \operatorname{csch}^2\left(\frac{\pi\alpha_j}{2}\right) \right]. \quad (\text{A.13})$$

Considerando o parâmetro α_j grande¹, obtemos:

$$\mathcal{I}_j \approx \frac{3}{\alpha_j^4} - \frac{\pi}{2\alpha_j^3}. \quad (\text{A.14})$$

(iii) No limite $M \ll 1$, a expressão da Eq. (A.6) não é conveniente para analisar este limite. Então, vamos adotar outra representação. Vamos definir uma nova função $f_\nu(z)$ por:

$$f_\nu(z) = \frac{K_\nu(z)}{z^\nu}. \quad (\text{A.15})$$

Em termos dessa função, a Eq. (A.6) é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_j &= M^4 \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left[\alpha_j \sum_{n=1}^{\infty} f_2\left(M\sqrt{\alpha_j^2 + 4n^2}\right) \right] \\ &= M^4 \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left[\frac{\alpha_j}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_2\left(M\sqrt{\alpha_j^2 + 4n^2}\right) - \frac{\alpha_j}{2} f_2(M\alpha_j) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Deste ponto em diante, procederemos com o somatório do lado direito da Eq. (A.16) usando a identidade (MELLO; SAHARIAN, 2013):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(n\alpha) f_\nu(c\sqrt{b^2 + a^2n^2}) = \frac{\sqrt{2\pi}}{ac^{2\nu}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_n^{2\nu-1} f_{\nu-1/2}(bw_n) \quad (\text{A.17})$$

com $a, b, c > 0$ e $w_n = \sqrt{(2\pi n + \alpha)^2/a^2 + c^2}$. Considerando, $\alpha = 0$, e adaptando as outras constantes de acordo com o nosso problema, obtemos:

$$\begin{aligned} \Sigma_j &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_2\left(M\sqrt{\alpha_j^2 + 4n^2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2M^4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\pi^2n^2 + M^2)^{3/2} f_{3/2}\left(\alpha_j\sqrt{\pi^2n^2 + M^2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{M^4\alpha_j^{3/2}} \sum_{n=1}^{\infty} (\pi^2n^2 + M^2)^{3/4} K_{3/2}\left(\alpha_j\sqrt{\pi^2n^2 + M^2}\right) + \frac{\sqrt{2\pi}}{2M^{5/2}\alpha_j^{3/2}} K_{3/2}(M\alpha_j). \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Substituindo a Eq. (A.18) na Eq. (A.16), obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_j &= \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left[\frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{\alpha_j}} \sum_{n=1}^{\infty} (\pi^2n^2 + M^2)^{3/4} K_{3/2}(\alpha_j\sqrt{\pi^2n^2 + M^2}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{2\pi}M^{3/2}}{4\sqrt{\alpha_j}} K_{3/2}(M\alpha_j) - \frac{M^2}{2\alpha_j} K_2(M\alpha_j) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

¹ Para α_j grande, temos a aproximação de $\coth\left(\frac{\pi\alpha_j}{2}\right)$ e $\operatorname{csch}\left(\frac{\pi\alpha_j}{2}\right)$ para 1 e 0, respectivamente.

Lembrando que a função de Bessel modificada (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1965), $K_{3/2}(z)$, é dada por:

$$K_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{z}\right) \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}}, \quad (\text{A.20})$$

como $M \ll 1$, podemos fazer uma expansão em potências de M e realizar a soma em n . O termo dominante é dado por:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} (\pi^2 n^2 + M^2)^{3/4} K_{3/2}(\alpha_j \sqrt{\pi^2 n^2 + M^2}) \\ & \approx -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \left[\frac{2 + M^2 \alpha_j^2 e^{\pi \alpha_j} - 2\pi \alpha_j e^{\pi \alpha_j} - 2e^{\pi \alpha_j} - M^2 \alpha_j^2}{(e^{\pi \alpha_j} - 1)^2 \alpha_j^{3/2}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Assim, a Eq. (A.19) torna-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_j \approx \frac{1}{16\alpha_j^3} & \left[8\pi - 4\pi \left[2 + M\alpha_j(2 + M\alpha_j) \right] e^{-M\alpha_j} + 8M^3 \alpha_j^2 K_1(M\alpha_j) + \right. \\ & + 24M^2 \alpha_j K_2(M\alpha_j) - 8\pi \coth\left(\frac{\pi \alpha_j}{2}\right) + \pi^2 \alpha_j \left[M^2 \alpha_j^2 - 4 - \right. \\ & \left. \left. - 2\pi \alpha_j^2 \coth\left(\frac{\pi \alpha_j}{2}\right) \right] \cosh^2\left(\frac{\pi \alpha_j}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Considerando o parâmetro $\alpha_j = j\sigma$ grande, obtemos:

$$\mathcal{I}_j \approx \frac{M^3}{2j\sigma} K_1(jM\sigma) + \frac{3M^2}{2j^2\sigma^2} K_2(jM\sigma) - \frac{\pi[2 + jM\sigma(2 + jM\sigma)]e^{-jM\sigma}}{4j^3\sigma^3}. \quad (\text{A.23})$$

Neste ponto, devemos considerar dois casos que podemos analisar: $M\sigma > 1$ e $M\sigma < 1$.

- a) Para o caso $M\sigma > 1$, podemos usar a expressão assintótica para a função Bessel modificada de segundo tipo para argumentos grandes da Eq. (A.8), de forma que, obtemos:

$$\mathcal{I}_j \approx \sqrt{\frac{\pi M^5}{8\sigma^3}} \frac{e^{-jM\sigma}}{j^{3/2}} + \sqrt{\frac{9\pi M^3}{8\sigma^5}} \frac{e^{-jM\sigma}}{j^{5/2}} - \frac{\pi[2 + jM\sigma(2 + jM\sigma)]e^{-jM\sigma}}{4j^3\sigma^3}. \quad (\text{A.24})$$

Portanto, a contribuição dominante na soma em j é dada pelo termo de $j = 1$.

- b) Para o caso $M\sigma < 1$, a soma da Eq. (A.23) é dada por:

$$\begin{aligned} S & \approx \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{I}_j \approx \frac{M^3}{2\sigma} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{K_1(jM\sigma)}{j} + \frac{3M^2}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{K_2(jM\sigma)}{j^2} \\ & - \frac{\pi}{4\sigma^3} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[2 + jM\sigma(2 + jM\sigma)]e^{-jM\sigma}}{j^3}. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Infelizmente não há expressão fechada para os somatórios da Eq. (A.25) envolvendo a função de Bessel, $K_\nu(z)$. Então, precisamos de uma expressão aproximada para

eles. Sabemos que a função de Bessel do segundo tipo é uma função decrescente. De fato, para grandes argumentos, essa função apresenta um decaimento exponencial. Como estamos usando $M\sigma \ll 1$, o argumento de ambas as funções de Bessel se torna da ordem da unidade para um valor muito grande de j ; no entanto, esse mesmo número aparece nos denominadores, o que indica que a razão, $\frac{K_n(jM\sigma)}{j^n}$, se torna muito pequena. Com essa restrição, podemos mostrar que as somas acima podem ser aproximadas considerando apenas os primeiros termos das expansões das funções correspondentes de Bessel para pequenos argumentos. Aceitando este fato, podemos escrever:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{K_1(jM\sigma)}{j} \approx \frac{\pi^2}{6M\sigma} \quad \text{and} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{K_2(jM\sigma)}{j^2} \approx \frac{4\pi^4 - 15\pi^2 M^2 \sigma^2}{180M^2 \sigma^2}. \quad (\text{A.26})$$

Assim, obtemos:

$$\begin{aligned} S \approx & \frac{\pi^2 M^2}{12\sigma^2} + \frac{12\pi^4 M^2 - 45\pi^2 M^4 \sigma^2}{360M^2 \sigma^4} + \frac{1}{4\sigma^3} \left[\pi M^2 \sigma^2 \ln(1 - e^{-M\sigma}) \right. \\ & \left. - 2\pi M\sigma \text{Li}_2(e^{-M\sigma}) - 2\pi \text{Li}_3(e^{-M\sigma}) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

onde $\text{Li}_n(z)$ representa a função polilogaritmo (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1965). Para justificar nossa aproximação, a Eq. (A.26), é mostrada numericamente, na Fig. 17, o comportamento dos somatórios das funções de Bessel de segundo tipo, comparando com suas expressões aproximadas correspondentes dadas na Eq. (A.26). Podemos ver em ambos os gráficos uma boa concordância entre as funções exatas, $\sum_j \frac{K_1(jM\sigma)}{j}$ e $\sum_j \frac{K_2(jM\sigma)}{j^2}$, com suas correspondentes aproximações.

Agora, tomando o limite $M\sigma \ll 1$, a Eq. (A.27), torna-se:

$$S \approx \frac{\pi (15M^2 \sigma^3 - 5\pi M^2 \sigma^2 - 60\sigma \zeta(3) + 4\pi^3)}{120\sigma^4}. \quad (\text{A.28})$$

A.2 INTEGRAL II

Agora consideramos a integral que aparece na Eq. (5.119):

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_j &= \int_M^\infty dz z^3 \int_1^\infty dy \frac{\sqrt{y^2 - 1}}{e^{2zy} + 1} \cos(\alpha_j z \sqrt{y^2 - 1}) \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \int_M^\infty dz z^2 \int_1^\infty dy \frac{1}{e^{2zy} + 1} \sin(\alpha_j z \sqrt{y^2 - 1}). \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Usando a identidade:

$$\frac{1}{e^z + 1} = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-nz}, \quad (\text{A.30})$$

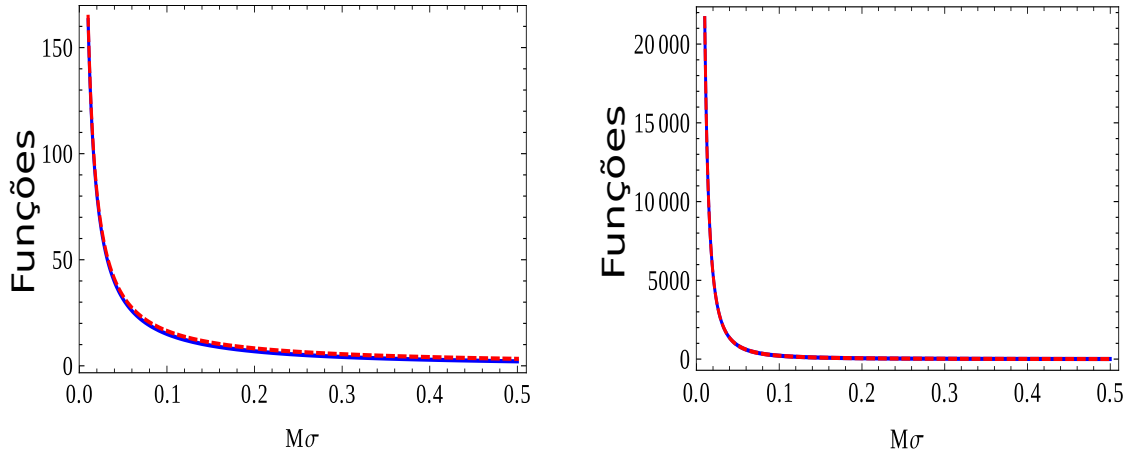


Figura 17 – No gráfico do lado esquerdo, mostramos o comportamento da soma envolvendo a função de Bessel modificada $K_1(jM\sigma)/j$ na linha azul, e o comportamento da função $\pi^2/(6M\sigma)$ na linha tracejada vermelha em função de $M\sigma$. No gráfico do lado direito, o mesmo para a função de Bessel $K_2(jM\sigma)/j^2$ na linha azul e $\frac{4\pi^4 - 15\pi^2 M^2 \sigma^2}{180M^2 \sigma^2}$ na linha tracejada como função de $M\sigma$.

a Eq. (A.29) pode ser reescrita por:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_j &= -\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_M^{\infty} dz z^2 \int_1^{\infty} dy e^{-2nzy} \sin\left(\alpha_j z \sqrt{y^2 - 1}\right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left[\alpha_j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{\alpha_j^2 + 4n^2}} \int_M^{\infty} dz z^2 K_1\left(z \sqrt{\alpha_j^2 + 4n^2}\right) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

onde usamos a representação integral para a função de Bessel, $K_\mu(z)$, dada em (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1965). Realizando a mudança de variável $x = z \sqrt{\alpha_j^2 + 4n^2}$, obtemos:

$$\mathcal{I}_j = -\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left[\alpha_j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\alpha_j^2 + 4n^2)^2} \int_{M\sqrt{\alpha_j^2 + 4n^2}}^{\infty} dx x^2 K_1(x) \right], \quad (\text{A.32})$$

portanto, usando Eq. (A.5) obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_j &= \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left[\alpha_j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\alpha_j^2 + 4n^2)^2} \int_{M\sqrt{\alpha_j^2 + 4n^2}}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^2 K_2(x) \right] dx \right] \\ &= -M^2 \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left[\alpha_j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha_j^2 + 4n^2} K_2\left(M \sqrt{\alpha_j^2 + 4n^2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Aqui também vamos considerar, como antes, os casos: $M \gg 1$, $M = 0$ e $M \ll 1$.

(i) No limite $M \gg 1$, a contribuição dominante é $n = 1$:

$$\mathcal{I}_j \approx M^2 \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left[\frac{\alpha_j}{\alpha_j^2 + 4} K_2\left(M \sqrt{\alpha_j^2 + 4}\right) \right]. \quad (\text{A.34})$$

Neste caso, podemos usar a expressão assintótica para a função de Bessel modificada do segundo tipo para argumentos grandes da Eq. (A.8). Assim, obtemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_j &\approx \sqrt{\frac{\pi M^3}{2}} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left[\frac{\alpha_j e^{-M\sqrt{\alpha_j^2+4}}}{(\alpha_j^2+4)^{5/4}} \right] \\ &\approx \sqrt{\frac{\pi M^3}{8}} \left[\frac{8 - \alpha_j^2 \left(3 + 2M\sqrt{\alpha_j^2+4} \right)}{(\alpha_j^2+4)^{9/4}} \right] e^{-M\sqrt{\alpha_j^2+4}}.\end{aligned}\quad (\text{A.35})$$

Considerando o limite, $\alpha_j \gg 1$, obtemos:

$$\mathcal{I}_j \approx -\sqrt{\frac{\pi M^5}{2}} \frac{e^{-M\alpha_j}}{\alpha_j^{3/2}}. \quad (\text{A.36})$$

(ii) Para o caso $M = 0$, podemos usar a expressão de Bessel assintótica para pequenos argumentos, Eq. (A.11). Assim, obtemos:

$$\mathcal{I}_j = -\frac{1}{8} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left[\alpha_j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2 + \alpha_j^2/4)^2} \right] = \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_j^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \alpha_j^2/4}. \quad (\text{A.37})$$

Para este caso,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \alpha_j^2/4} = \frac{\pi \alpha_j \text{csch}\left(\frac{\pi \alpha_j}{2}\right) - 2}{\alpha_j^2}. \quad (\text{A.38})$$

Substituindo a Eq. (A.38) na Eq. (A.37) e fazendo a derivada, obtemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_j &= \frac{1}{16\alpha_j^4} \left[-48 + \frac{1}{2} \pi \alpha_j \text{csch}^3\left(\frac{\pi \alpha_j}{2}\right) \left(-8 + 3\pi^2 \alpha_j^2 + (8 + \pi^2 \alpha_j^2) \cosh(\pi \alpha_j) \right) \right. \\ &\quad \left. + 4\pi \alpha_j \sinh(\pi \alpha_j) \right].\end{aligned}\quad (\text{A.39})$$

Considerando, $\alpha_j \gg 1$, obtemos:

$$\mathcal{I}_j \approx -\frac{3}{\alpha_j^4}. \quad (\text{A.40})$$

(iii) No limite $M \ll 1$, a Eq. (A.33) não é conveniente para analisar este limite. Então, adotamos aqui o mesmo procedimento apresentado no Apêndice A.1. Usando a definição da Eq. (A.15), a Eq. (A.33) pode ser reescrita da forma:

$$\mathcal{I}_j = -M^4 \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left[\frac{\alpha_j}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f_2\left(M\sqrt{\alpha_j^2 + 4n^2}\right) - \frac{\alpha_j}{2} f_2\left(M\alpha_j\right) \right]. \quad (\text{A.41})$$

Usando a relação de soma da Eq. (A.17), com $\alpha = \pi$, a soma da Eq. (A.41), é dada por:

$$\begin{aligned}\Sigma_j &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f_2\left(M\sqrt{\alpha_j^2 + 4n^2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2M^4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\pi^2 \left(n + 1/2\right)^2 + M^2 \right]^{3/2} f_{3/2}\left(\alpha_j \sqrt{\pi^2 \left(n + 1/2\right)^2 + M^2}\right).\end{aligned}\quad (\text{A.42})$$

Substituindo a Eq. (A.42) na Eq. (A.41), obtemos:

$$\mathcal{I}_j = -\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left[\frac{\sqrt{2\pi}}{4\alpha_j^{1/2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\pi^2 \left(n + 1/2 \right)^2 + M^2 \right]^{3/4} K_{3/2} \left(\alpha_j \sqrt{\pi^2 \left(n + 1/2 \right)^2 + M^2} \right) - \frac{M^2}{2\alpha_j} K_2 \left(M\alpha_j \right) \right]. \quad (\text{A.43})$$

Devido o fato, $M \ll 1$, podemos usar a aproximação:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\pi^2 \left(n + 1/2 \right)^2 + M^2 \right]^{3/4} K_{3/2} \left(\alpha_j \sqrt{\pi^2 \left(n + 1/2 \right)^2 + M^2} \right) \approx \\ & \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\pi\alpha_j/2}}{(e^{\pi\alpha_j} - 1)^2 \alpha_j^{3/2}} \left[-2 + 2e^{\pi\alpha_j} + \pi\alpha_j + \pi\alpha_j e^{\pi\alpha_j} + M^2 \alpha_j^2 - M^2 \alpha_j^2 e^{\pi\alpha_j} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

Assim, a Eq. (A.43) se torna:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_j \approx \frac{1}{4\alpha_j^3} & \left[-2M^3 \alpha_j^2 K_1(M\alpha_j) - 6M^2 \alpha_j K_2(M\alpha_j) + \frac{\pi e^{3\pi\alpha_j/2}}{(e^{\pi\alpha_j} - 1)^3} \left(-8 + 3\pi^2 \alpha_j^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + (8 + \pi^2 \alpha_j^2) \cosh(\pi\alpha_j) + \pi\alpha_j (4 - M^2 \alpha_j^2) \sinh(\pi\alpha_j) \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

Considerando o parâmetro, $\alpha_j = j\sigma$ grande, obtemos:

$$\mathcal{I}_j \approx -\frac{M^3}{2\sigma} \frac{K_1(jM\sigma)}{j} - \frac{3M^2}{2\sigma^2} \frac{K_2(jM\sigma)}{j^2}. \quad (\text{A.46})$$

Neste ponto, dois casos distintos podem ser analisados: $M\sigma > 1$ e $M\sigma < 1$.

- a) Para o caso $M\sigma > 1$, podemos usar a expressão assintótica para a função de Bessel modificada, $K_\nu(z)$, para argumentos grandes, Eq. (A.8). Portanto, obtemos:

$$\mathcal{I}_j \approx -\sqrt{\frac{\pi M^5}{8\sigma^3}} \frac{e^{-jM\sigma}}{j^{3/2}} - \sqrt{\frac{9\pi M^3}{8\sigma^5}} \frac{e^{-jM\sigma}}{j^{5/2}}. \quad (\text{A.47})$$

A contribuição dominante na soma em j é dada pelo termo com $j = 1$.

- b) Para o caso $M\sigma < 1$, a soma da Eq. (A.46), é dada por:

$$S \approx \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{I}_j \approx -\frac{M^3}{2\sigma} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{K_1(jM\sigma)}{j} - \frac{3M^2}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{K_2(jM\sigma)}{j^2}. \quad (\text{A.48})$$

Usando a aproximação da Eq. (A.26), obtemos:

$$S \approx \frac{5\pi^2 M^2 \sigma^2 - 4\pi^4}{120\sigma^4}. \quad (\text{A.49})$$

APÊNDICE B – CONDIÇÃO DE SACOLA DO MIT

B.1 DENSIDADE LAGRANGIANA MODIFICADA PARA O MODELO DE SACOLA DO MIT

Neste apêndice, propomos a densidade Lagrangiana modificada, isto é, na presença do termo que viola a simetria de Lorentz, para a condição de contorno do MIT (JOHNSON, 1975). Então, em primeiro lugar, vamos expressar a densidade Lagrangiana como sendo:

$$\mathcal{L} = \left\{ \frac{i}{2} \left[\bar{\Psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \Psi) - (\partial_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi \right] - m \bar{\Psi} \Psi + \frac{i \lambda u^\mu u^\nu}{2} \left[\bar{\Psi} \gamma_\mu (\partial_\nu \Psi) - (\partial_\nu \bar{\Psi}) \gamma_\mu \Psi \right] - B \right\} \theta_v - \frac{1}{2} \Delta_s \bar{\Psi} \Psi [1 + \lambda(u \cdot n)] , \quad (\text{B.1})$$

onde há interações explícitas entre o quadrivetor constante, u^μ , com o campo espinorial na região dentro da sacola e na própria sacola, como explicado a seguir¹: na Eq. (B.1), θ_v é a função Heaviside que é igual a unidade dentro da bolsa e zero fora dela, e Δ_s é a função delta de Dirac dada pela derivada espacial de θ_v :

$$\frac{\partial \theta_v}{\partial x^\mu} = n_\mu \Delta_s , \quad (\text{B.2})$$

onde n_μ é o vetor ortonormal à superfície da sacola.

A equação de movimento para este sistema é fornecida pelo formalismo usual de Euler-Lagrange, Eq. (1.8):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} \right] = 0 . \quad (\text{B.3})$$

Substituindo a Eq. (B.1) na Eq. (B.3), obtemos:

$$\left[i \gamma^\mu (\partial_\mu \Psi) - m \Psi + i \lambda u^\mu u^\nu \gamma_\mu (\partial_\nu \Psi) \right] \theta_v - \frac{i}{2} \left[\left(\gamma^\nu \Psi + \lambda u^\mu u^\nu \gamma_\mu \Psi \right) n_\nu - i \left(1 + \lambda(u \cdot n) \right) \Psi \right] \Delta_s = 0 . \quad (\text{B.4})$$

A partir da Eq. (B.4), duas equações diferentes são obtidas:

(i) Na região dentro da sacola, $\Delta_s = 0$ e $\theta_v = 1$, resultando:

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - m + i \lambda u^\mu u^\nu \gamma_\mu \partial_\nu) \Psi = 0 . \quad (\text{B.5})$$

¹ O fator B na Eq. (B.1) está relacionado com o tensor energia-momento na sacola.

(ii) Na superfície da sacola, $\Delta_s = \infty$ e $\theta_v = 0$, resultando:

$$[(1 + \lambda(u \cdot n)) + i(1 + \lambda(u \cdot n))(\gamma \cdot n)] \Psi = 0 , \quad (\text{B.6})$$

que coincide com a expressão usual para o modelo de sacola do MIT ([JOHNSON, 1975](#)).

Assim, concluímos que a densidade Lagrangiana modificada, Eq. (B.1), para o modelo de sacola do MIT, não tem influência da violação de Lorentz, λ .