



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Estudos sobre buracos negros em cenários com nuvem de cordas e quintessência, na relatividade geral e na gravitação de Lovelock

Jefferson de Moraes Toledo

João Pessoa - PB

Fevereiro de 2019

Jefferson de Moraes Toledo

**Estudos sobre buracos negros em cenários com nuvem de
cordas e quintessência, na relatividade geral e na
gravitação de Lovelock**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa
de Pós-Graduação em Física do Departa-
mento de Física da Universidade Federal da
Paraíba como requisito parcial para a obten-
ção do grau de Doutor em Física.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Orientador: Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra

João Pessoa - PB

Fevereiro de 2019

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

T649e Toledo, Jefferson de Moraes.

Estudos sobre buracos negros em cenários com nuvem de cordas e quintessência, na relatividade geral e na gravitação de Lovelock / Jefferson de Moraes Toledo. - João Pessoa, 2019.
231 f.

Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Relatividade geral. 2. Gravitação de Lovelock. 3. Buracos negros. 4. Quintessência. 5. Nuvem de cordas.
I. Título

UFPB/CCEN

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de
Doutorado do aluno **Jefferson de Moraes Toledo**, candidato ao Título de Doutor em Física na Área de Concentração Gravitação e Cosmologia.

Aos vinte e sete dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e dezenove, às 10:00, no Auditório da Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para examinar o candidato ao grau de Doutor em Física na área de Gravitação e Cosmologia, **Jefferson de Moraes Toledo**. A comissão examinadora foi composta pelos professores doutores: *Valdir Barbosa Bezerra* (UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, *Fábio Leal de Melo Dahia* (UFPB), *Carlos Augusto Romero Filho* (UFPB), *Raimundo Silva Júnior* (UFRN) e *Marcos Antônio Anacleto* (UFCG). Dando início aos trabalhos, o Prof. Valdir Barbosa Bezerra comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para que o candidato fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de tese intitulado “*Estudos sobre buracos negros em cenários com nuvem de cordas e quintessência, na relatividade geral e na gravitação de Lovelock*”. Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o seguinte parecer: “**aprovado**”. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutor em Física na forma da lei. E para constar, eu, Danilo Wilson Lemos Menezes, redigi esta ata que vai assinada por mim e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **27 de fevereiro de 2019**.

Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra
Orientador – PPGF/UFPB

Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia
PPGF/UFPB

Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho
PPGF/UFPB

Prof. Dr. Raimundo Silva Júnior
UFRN

Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto
UFCG

Valdir B Bezerra
Fábio Leal de Melo Dahia
Carlos Augusto Romero Filho
Raimundo Silva Júnior
Marcos Antônio Anacleto

Agradecimentos

À minha esposa, Lly, por todo amor e cuidado.

A meus pais, Antônio Magno e Lucia, pelo dom da vida e pelo incentivo em meus projetos.

A meus irmãos, Lucas e Rita, pelas discussões sobre ciências, filosofia, música e literatura.

A minhas avós, Josefa e Ivonilde, pelas lições de história e de sabedoria.

Ao professor Valdir Barbosa Bezerra, exemplo de educador e cientista, pela orientação, pelos conhecimentos, pelas agradáveis conversas e por toda sua dedicação à física.

Publicações realizadas

Artigos publicados em periódicos:

- TOLEDO, J. d. M.; BEZERRA, V. Black holes with cloud of strings and quintessence in lovelock gravity. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 78, n. 7, p. 534, 2018.
- TOLEDO, J. M.; BEZERRA, V. B. Casimir effect in a 4-dimensional schwarzschild spacetime in third order lovelock gravity. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 400, p. 208–220, 2019.
- TOLEDO, J. M.; BEZERRA, V. B. The reissner–nordström black hole surrounded by quintessence and a cloud of strings: Thermodynamics and quasinormal modes. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific, v. 28, p. 1950023, 2018.
- COSTA, M. M. Dias e; TOLEDO, J. M.; BEZERRA, V. B. On the letelier spacetime with quintessence: solution, thermodynamics and hawking radiation. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific, v. 28, p. 1950074, 2019.
- TOLEDO, J. M.; BEZERRA, V. B. Some remarks on the thermodynamics of charged AdS black holes with cloud of strings and quintessence. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 79, p. 110, 2019.
- TOLEDO, J. d. M.; BEZERRA, V. Black holes with a cloud of strings in pure Lovelock gravity. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 79, p. 117, 2019.
- TOLEDO, J. M.; BEZERRA, V. B. Thermal Casimir effect in the Kerr spacetime with quintessence. *Modern Physics Letters A*, World Scientific, v. 34, n. 16, p. 1950125, 2019.
- TOLEDO, J. M.; BEZERRA, V. B. Black holes with quintessence in pure Lovelock gravity. *The General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 51, n. 3, p. 41, 2019.

Artigos a serem submetidos a periódicos:

- BEZERRA, V.; TOLEDO, J. d. M. Some remarks on two stationary spacetimes obtained from a static black hole surrounded by quintessence. Artigo a ser submetido ao periódico *The European Physical Journal C*.
- TOLEDO, J. M.; BEZERRA, V. B. Kerr-Newman-AdS black hole with quintessence and cloud of strings. Artigo a ser submetido ao periódico *The General Relativity and Gravitation*.

Artigos a serem submetidos e que não compõem esta tese:

- BEZERRA, V; TOLEDO, J. d. M. Casimir effect in Kerr spacetime with quintessence and massive gravitons.
- TOLEDO, J. M.; BEZERRA, V. B. Anisotropic cosmological models with a cloud of strings and quintessence.
- BEZERRA, V; TOLEDO, J. d. M. Exact solution for the Weyl equation near a Kerr-Newman black hole.

*I learned a lot of things [...] and I gained a lot of experience.[...].
But I love physics, and I love to go back to it.*

RICHARD P. FEYNMAN

*Na parte mais antiga da minha mente, que foge a meu controle,
uma ideia surgiu e vem me atormentando há algum tempo:
os cães, perplexos, uivam para a lua cheia, que eles não compreendem.
Pois bem: as singularidades do homem são os uivos da humanidade para o universo.
Não posso conter o meu uivo.*

MARCOS SUASSUNA

Resumo

Nesta tese, estudamos algumas configurações de buracos negros com quintessência e/ou nuvem de cordas na relatividade geral e na gravitação de Lovelock. Iniciamos fazendo uma breve revisão sobre o arcabouço teórico que embasa os resultados subsequentes, a saber, buracos negros na relatividade geral, inclusive com nuvem de cordas, alguns aspectos de sua termodinâmica e gravitação de Lovelock. Na sequência, apresentamos o método de Newman-Janis e alguns aspectos relacionados ao efeito Casimir gravitacional, bem como consideramos modelos de energia escura, em especial a constante cosmológica e a quintessência. No contexto da relatividade geral, tratamos da termodinâmica do buraco negro com nuvem de cordas (espaço-tempo de Letelier) com quintessência, obtemos a solução de Reissner-Nordström com quintessência e nuvem de cordas, estudamos alguns aspectos de sua termodinâmica e calculamos seus modos quasinormais. Adicionando, a esta métrica, a contribuição da constante cosmológica, abordamos a termodinâmica e a criticalidade do sistema e, considerando-o análogo a uma máquina térmica, calculamos sua eficiência. Estudamos também as soluções de Kerr com quintessência e de Kerr-Newman-AdS com quintessência e nuvem de cordas. No contexto da gravitação de Lovelock, investigamos o efeito Casimir gravitacional nas proximidades de um buraco negro estático. Estudamos, nessa teoria modificada de gravitação, buracos negros com quintessência e nuvem de cordas. Por fim, os buracos negros imersos em quintessência ou em nuvem de cordas são analisados na gravitação pura de Lovelock. Verificamos que os conteúdos extras de matéria-energia produzem importantes efeitos na geometria do espaço-tempo dos buracos negros e que os resultados obtidos na gravitação de Lovelock são reduzidos aos da relatividade geral no limite de campo fraco.

Palavras-chave: Relatividade geral. Gravitação de Lovelock. Buracos negros. Quintessência. Nuvem de cordas.

Abstract

In this thesis, we study some configurations of black holes with quintessence and/or cloud of strings in general relativity and in Lovelock gravity. We begin with a short review of the theory which bases the subsequent results, namely, black holes in general relativity, some aspects of its thermodynamics and Lovelock gravity. In the sequence, we discuss the Newman-Janis method and some aspects related to the gravitational Casimir effect, as well as we consider dark energy models, in particular the cosmological constant and the quintessence. In the context of general relativity, we study the black hole thermodynamics in the Letelier spacetime with quintessence, we obtain the solution corresponding to the Reissner-Nordström black hole with quintessence and cloud of strings, we study some aspects of its thermodynamics and calculate its quasinormal modes. Adding the contribution of the cosmological constant to this configuration, we analyze the thermodynamics, criticality and, assuming that the system is analogous to a heat engine, we calculate its efficiency. We study also the solutions corresponding to a Kerr black hole with quintessence and a Kerr-Newman-AdS black hole with quintessence and a cloud of strings. In the context of the Lovelock gravity, we investigate the Casimir effect nearby a static black hole. In this modified theory of gravity, we study the black holes surrounded by quintessence and a cloud of strings. Finally, the black holes with quintessence or a cloud of strings are analyzed in the pure Lovelock gravity. We verify that the external matter-energy contents give rises to important geometrical effects in the black holes spacetimes and that the results obtained in the Lovelock gravity are reduced to the ones in general relativity in the weak field limit.

Keywords: General relativity. Lovelock gravity. Black holes. Quintessence. Cloud of strings.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Geodésicas nulas e cones de luz em coordenadas de Schwarzschild. Duas dimensões foram suprimidas.	38
Figura 2 – Objeto em queda no buraco negro.	40
Figura 3 – Solução de Schwarzschild nas coordenadas de Eddington-Finkelstein. . .	41
Figura 4 – Horizonte de eventos (linha tracejada) e superfície estática (linha contínua). Tomamos $M = 1$ e $a^2 = 0.5$	49
Figura 5 – Função $g(r)$ para diferentes valores dos parâmetros a , α e ω_q	89
Figura 6 – Função $g(r)$ para diferentes valores de a e para $\alpha = 0$ (ausência de quintessência ou espaço-tempo de Letelier).	89
Figura 7 – Parâmetro de massa em função da entropia para diferentes valores de a , de α e de ω_q	91
Figura 8 – Parâmetro de massa em função da entropia para diferentes valores de a e $\alpha = 0$ (ausência de quintessência ou espaço-tempo de Letelier).	91
Figura 9 – Temperatura Hawking para diferentes valores de a , de α e de ω_q	92
Figura 10 – Temperatura Hawking para diferentes valores de a e $\alpha = 0$ (ausência de quintessência ou espaço-tempo de Letelier).	92
Figura 11 – Capacidade térmica como função da entropia para diferentes valores de a , de α e de ω_q	93
Figura 12 – Capacidade térmica como função da entropia para diferentes valores de a , $\alpha = 0$	93
Figura 13 – Fator de Boltzmann, β_+ , como função de ω_q para diferentes valores de a e de α	96
Figura 14 – Fator de Boltzmann, β_+ , como função de M para diferentes valores de a e de α	96
Figura 15 – Fator de Boltzmann, β_- , como função de ω_q para diferentes valores de a e de α	97
Figura 16 – Fator de Boltzmann, β_- , como função de M para diferentes valores de a e de α	97
Figura 17 – A função $g(r)$ para diferentes valores de a , de ω_q e de α . No caso em que $\alpha = 0.016$ e $\omega_q = -1/2$, a região próxima a $r = 0$ está em destaque. . .	101
Figura 18 – Gráfico de Q versus α . A curva sólida representa os extremos de tipo I ($r_+ = r_-$), enquanto a curva tracejada representa o extremo tipo II ($r_+ = r_q$). Na região entre as curvas e os eixos, o buraco negro tem três horizontes. Na região exterior, o buraco negro possui apenas um horizonte e, no ponto de interseção entre as curvas, $Q = \sqrt{4/3(1-a)}$. . .	103
Figura 19 – Gráfico de M em função da entropia S	104

Figura 20 – Temperatura Hawking, T , em função da entropia do buraco negro, S .	105
Figura 21 – Capacidade térmica do buraco negro em função de sua entropia.	105
Figura 22 – Potencial efetivo, $V(r)$, como função de r para $a = 0$. Destacamos a região $0 < r < 1.5$.	107
Figura 23 – Potencial efetivo, $V(r)$, como função de r para $a = 0.1$. Destacamos a região $0 < r < 1.5$.	108
Figura 24 – Potencial efetivo, $V(r)$, como função de r para $a = 0.2$. Destacamos a região $0 < r < 1.5$.	109
Figura 25 – Nesta figura, representamos r_{max} como função de a .	110
Figura 26 – Os valores das partes real e imaginária do modo quasinormal ω em função de a , para $n = 0$ e $l = 2$, são representados nesta figura.	110
Figura 27 – Função $f(r)$ para diferentes valores de a e de α . Escolhemos $M = 1$ e $Q^2 = 0.5$.	112
Figura 28 – Parâmetro de massa como função da entropia, S , para diferentes valores de a e de α .	113
Figura 29 – Temperatura Hawking, T , como função da entropia.	114
Figura 30 – Capacidade térmica a pressão constante, C_p , como função da entropia, S .	115
Figura 31 – Gráfico $p \times V$ para diferentes valores de T . Assumimos que $Q = M = 1$ e $a = 0.1$.	115
Figura 32 – Gráfico $p \times V$ para $T = 0.1$, $\alpha = 0.01$ e diferentes valores de a .	116
Figura 33 – Gráfico $p \times V$ para $T = 0.1$, $a = 0.1$ e diferentes valores de α .	116
Figura 34 – Energia livre de Gibbs em função da temperatura Hawking T , para $Q = 1$.	119
Figura 35 – Diagrama pxV da máquina térmica operando por dois processos isobáricos e dois isocóricos.	122
Figura 36 – Diagrama pxV da máquina térmica que produz máxima eficiência.	122
Figura 37 – Eficiência η em função da entropia, S , para diferentes valores de a .	123
Figura 38 – Razão η/η_c em função da entropia, S , para diferentes valores de a .	124
Figura 39 – Comportamento de Δ para $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$.	131
Figura 40 – Ergorregiões para do buraco negro nas métricas obtidas por Ghosh (esquerda) e por Toshmatov et al. (direita) para diferentes valores do parâmetro do momento angular, a , e para $\alpha = 0.01$.	132
Figura 41 – Ergorregiões para do buraco negro nas métricas obtidas por Ghosh (esquerda) e por Toshmatov et al. (direita) para diferentes valores do parâmetro do momento angular, a , e para $\alpha = 0.05$.	133
Figura 42 – Parâmetro de massa na métrica obtida por Toshmatov et al. para diferentes valores de α .	136
Figura 43 – Temperatura Hawking na métrica obtida por Toshmatov et al. para diferentes valores de α .	136

Figura 44 – Temperatura mínima local do buraco negro na métrica obtida por Toshmatov et al. para diferentes valores de α .	137
Figura 45 – Energia livre, F , em função de r_h , para $T = 0.02$ e diferentes valores de α .	137
Figura 46 – Capacidade calorífica na métrica de Toshmatov et al. para diferentes valores de a .	138
Figura 47 – Comportamento do parâmetro de massa, M , como função de r_h no espaço-tempo obtido por Ghosh para diferentes valores de α .	138
Figura 48 – Temperatura Hawking em função da entropia S na métrica obtida por Ghosh.	139
Figura 49 – Energia livre em função de r_h na métrica obtida por Ghosh para diferentes valores de α .	140
Figura 50 – Densidade de energia u_0 em função de ω_q e de T , para $\theta = \pi/2$, $a^2/M^2 = 0.5$, e $\alpha/M = 0.1$.	143
Figura 51 – Densidade de energia u_0 em função de ω_q e de T , para $\theta = \pi/2$, $a^2/M^2 = 0.5$, e $\alpha/M = 0.01$.	144
Figura 52 – Razão u_{0T}/u_{0G} em função de ω_q e T , para $\theta = \pi/3$, $a^2/M^2 = 0.5$, e $\alpha/M = 0.01$.	144
Figura 53 – Razão u_{0T}/u_{0G} em função de θ e de T , for $\omega_q = -2/3$, $a^2/M^2 = 0.5$, e $\alpha/M = 0.01$.	145
Figura 54 – Razão u_{0T}/u_{0G} em função de r/M e de θ , para $\omega_q = -2/3$, $a^2/M^2 = 0.5$, e $\alpha/M = 0.01$. A razão é maior nos horizontes interno e externo localizados, respectivamente, em $r_-/M \approx 0.13$ e $r_+/M \approx 1.90$.	145
Figura 55 – Δ_r para diferentes valores do parâmetro b e para valores fixos de α e de ω_q .	151
Figura 56 – Ergorregiões do buraco negro para diferentes valores do parâmetro de nuvem de cordas, b . As linhas tracejadas correspondem aos horizontes do buraco, enquanto as linhas sólidas representam as superfícies estáticas.	152
Figura 57 – Ergorregiões do buraco negro para diferentes valores do parâmetro de nuvem de cordas, b . As linhas tracejadas correspondem aos horizontes do buraco, enquanto as linhas sólidas representam as superfícies estáticas.	153
Figura 58 – Energia, E , como função da entropia, S , para diferentes valores de b e de α .	154
Figura 59 – Temperatura Hawking, T , em função da entropia, S , para diferentes valores de b e de α .	155
Figura 60 – Capacidade térmica em função da entropia.	156
Figura 61 – Taxa de emissão de partículas, Γ , em função da entropia, para diferentes valores de b .	159
Figura 62 – Gráfico da função $\Delta_r(r)$. Fixamos $Q^2 = a^2 = 0.5$, $\alpha = 0.1$, $M = 1$ e $\Lambda = 10^{-50}$.	162

Figura 63 – Energia, E , em função da entropia, S , para diferentes valores de α e de ω_q	163
Figura 64 – Temperatura Hawking, T , em função da entropia, S , para diferentes valores de α e de ω_q	163
Figura 65 – Capacidade térmica em função da entropia, S	164
Figura 66 – Taxa de emissão de partículas, Γ_+ , em função da entropia, S , para diferentes valores de α e de ω_q	164
Figura 67 – Gráficos de $f(r)$ para a gravitação de Lovelock (linha sólida) e na relatividade geral (linha tracejada).	168
Figura 68 – Placas paralelas nas proximidades do buraco negro (fora de escala). . .	169
Figura 69 – Função σ como função de R , para $M = 1$	172
Figura 70 – Gráfico de $\langle \epsilon_{vac} \rangle^{(ren)}$ como função de R (Eq. 12.25), para $M = 1$	172
Figura 71 – Gráfico de $u_0^{(ren)}$, no regime de baixas temperaturas, como função de R e de T , para $M = k_B = L_p = 1$	174
Figura 72 – Gráfico de $u_0^{(ren)}$, no regime de altas temperaturas, como função de R e de T , para $M = k_B = L_p = 1$	175
Figura 73 – Gráfico de σ_T , no regime de baixas temperaturas, como função de R e de T , para $M = k_B = L_p = 1$	176
Figura 74 – Gráfico de σ_T , no regime de altas temperaturas, como função de R e de T , para $M = k_B = L_p = 1$	176
Figura 75 – A função $f(r)$ na relatividade geral em D-dimensões para $\omega_q = -2/3$, $q = 0.1$, $M = 1$ e para diferentes valores de a e de D	180
Figura 76 – A função $f(r)$ na relatividade geral em D-dimensões para $\omega_q = -2/3$, $a = 0.8$, $M = 1$ e para diferentes valores de q e de D	181
Figura 77 – A função $f(r)$ na gravitação de Gauss-Bonnet para $\omega_q = -2/3$, $M = 1$ e $\alpha_2 = 1$	182
Figura 78 – A função $f(r)$ na gravitação de Gauss-Bonnet para $\omega_q = -2/3$, $M = 1$ e $\alpha_2 = 1$	183
Figura 79 – Massa do buraco negro em D-dimensões na relatividade geral como função de r_h para diferentes valores de a	185
Figura 80 – Massa do buraco negro em D-dimensões na relatividade geral como função de r_h para diferentes valores de q	186
Figura 81 – Temperatura Hawking do buraco negro em D-dimensões na relatividade geral como função de r_h para diferentes valores de a	187
Figura 82 – Temperatura Hawking do buraco negro em D-dimensões na relatividade geral como função de r_h para diferentes valores de q	188
Figura 83 – Capacidade térmica do buraco negro em D-dimensões na relatividade geral como função de r_h para diferentes valores de q	188

Figura 84 – Capacidade térmica do buraco negro em D-dimensões na relatividade geral como função de r_h para diferentes valores de a	189
Figura 85 – Massa do buraco negro na gravitação de Gauss-Bonnet em função de r_h , para $a = 0.8$ e $q = 0.1$	189
Figura 86 – Temperatura Hawking do buraco negro na gravitação de Gauss-Bonnet em função de r_h , para $a = 0.8$ e $q = 0.1$	189
Figura 87 – Capacidade térmica na gravitação de Gauss-Bonnet em função de r_h , para $a = 0.8$ e $q = 0.1$	190
Figura 88 – Massa na gravitação de Lovelock de terceira ordem em função de r_h , for $a = 0.8$ e $q = 0.1$	191
Figura 89 – Temperatura Hawking na gravitação de Lovelock de terceira ordem em função de r_h , para $a = 0.8$ e $q = 0.1$	191
Figura 90 – Capacidade térmica na gravitação de Lovelock de terceira ordem em função de r_h , para $a = 0.8$ e $q = 0.1$	192
Figura 91 – $f_o(r)$ para $M = 1$ e $\alpha = 2$	197
Figura 92 – $f_e(r)$ para $M = 1$ e $\alpha = 3$	197
Figura 93 – Parâmetro de massa em dimensões críticas ímpares, M_o , para $\alpha = 0.5$	200
Figura 94 – Parâmetro de massa em dimensões críticas pares, M_e , para $\alpha = 0.5$	200
Figura 95 – Temperatura Hawking nas dimensões críticas ímpar e par para $\alpha = 0.5$	201
Figura 96 – Capacidade térmica nas dimensões críticas ímpar e par para $\alpha = 0.5$	202
Figura 97 – Função $f_o(r)$ para $M = 1$	207
Figura 98 – Função $f_e(r)$ para $M = 1$	207
Figura 99 – Capacidade térmica C_e em função de r_h para $M = 1$	210

Lista de tabelas

Tabela 1	– Modos quasinormais para $a = 0$.	109
Tabela 2	– Modos quasinormais para $a = 0.1$.	109
Tabela 3	– Comportamento dos parâmetros críticos v_c , T_c , p_c e $\frac{p_c v_c}{T_c}$ para diferentes valores de a e para $Q = 1$, $\alpha = 0.01$ e $\omega_q = -2/3$.	118
Tabela 4	– Comportamento dos parâmetros críticos v_c , T_c , p_c e $\frac{p_c v_c}{T_c}$ para diferentes valores de α e para $Q = 1$, $a = 0.1$ e $\omega_q = -2/3$.	118
Tabela 5	– Comportamento dos parâmetros críticos v_c , T_c , p_c e $\frac{p_c v_c}{T_c}$ para diferentes valores de α e para $Q = 1$, $a = 0.25$ e $\omega_q = -2/3$.	119

Lista de símbolos

Constante universal da gravitação $G = 6,67 \times 10^{-11} Nm^2/kg^2$

Velocidade da luz no vácuo $c = 3,00 \times 10^8 m/s$

Constante de Planck $h = 6,63 \times 10^{-34} m^2 kg/s$

Constante de Planck reduzida $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \times 10^{-34} m^2 kg/s$

Constante de Boltzmann $k_B = 1,38 \times 10^{-23} J/K$

Sumário

1	INTRODUÇÃO	29
I	SOBRE ALGUNS ASPECTOS DA RELATIVIDADE GERAL E DA GRAVITAÇÃO DE LOVELOCK	33
2	BURACOS NEGROS NA RELATIVIDADE GERAL	35
2.1	Métrica de Schwarzschild: singularidades e pseudosingularidades	36
2.1.1	Geodésicas nulas e diagramas do espaço-tempo	37
2.1.2	Objeto em queda em um buraco negro	39
2.1.3	Coordenadas de Eddington-Finkelstein	40
2.2	Buraco negro com nuvem de cordas	41
2.2.1	Nuvem de cordas	42
2.2.2	Espaço-tempo de Letelier	44
2.3	Buraco negro estático e carregado	45
2.3.1	Singularidades	46
2.4	Buraco negro em rotação: solução de Kerr	46
2.4.1	Singularidades e horizontes	47
2.4.2	Superfícies estáticas e ergorregiões	48
2.5	Termodinâmica de buracos negros e radiação Hawking	49
2.5.1	Termodinâmica de buracos negros	50
2.5.2	Radiação Hawking	51
2.6	Colisão de buracos negros: experimentos LIGO e VIRGO	54
3	GRAVITAÇÃO DE LOVELOCK E BURACOS NEGROS	55
3.1	A gravitação de Lovelock	56
3.2	A gravitação pura de Lovelock	58
3.3	Buracos negros na gravitação de Lovelock	58
3.3.1	Termodinâmica	60
II	GENERALIDADES: MÉTODO DE NEWMAN-JANIS, ENERGIA ESCURA E EFEITO CASIMIR GRAVITACIONAL	63
4	O MÉTODO DE NEWMAN-JANIS	65
4.1	O algoritmo e um exemplo de sua aplicação	65

4.2	Os problemas da complexificação	67
4.3	Método de Newman-Janis sem complexificação	68
5	ENERGIA ESCURA	71
5.1	Universo homogêneo e isotrópico	71
5.2	Constante cosmológica	73
5.3	Quintessência	75
5.3.1	Buracos negros e quintessência	76
6	EFEITO CASIMIR E GRAVITAÇÃO	79
6.1	Efeito Casimir para um campo escalar definido em um intervalo finito num espaço-tempo bidimensional	80
III	BURACOS NEGROS NA RELATIVIDADE GERAL COM QUINTESSÊNCIA E NUVEM DE CORDAS	85
7	TERMODINÂMICA DO BURACO NEGRO DE SCHWARZSCHILD COM CORDAS E QUINTESSÊNCIA	87
7.1	Espaço-tempo de Letelier com quintessência	87
7.2	Singularidades e horizontes	88
7.3	Termodinâmica do buraco negro	90
7.4	Radiação Hawking	94
8	BURACO NEGRO DE REISSNER-NORDSTRÖM COM QUINTESSÊNCIA E NUVEM DE CORDAS	99
8.1	A métrica	99
8.2	Termodinâmica do buraco negro	103
8.3	Modos quasinormais	106
9	BURACO NEGRO DE REISSNER-NORDSTRÖM-ADS COM QUINTESSÊNCIA E NUVEM DE CORDAS	111
9.1	A métrica e os horizontes do buraco negro	112
9.2	Termodinâmica do buraco negro	112
9.3	Grandezas termodinâmicas críticas	117
9.4	Buraco negro como uma máquina térmica	121
10	SOBRE AS SOLUÇÕES DE BURACOS NEGROS EM ROTAÇÃO COM QUINTESSÊNCIA	125
10.1	O algoritmo de Newman-Janis e o buraco negro estacionário com quintessência	125
10.2	Comparando as soluções	128

10.2.1	Equações de Einstein e o tensor energia-momento	129
10.2.2	O escalar de Kretschmann e as singularidades físicas	130
10.2.3	Horizontes	130
10.2.4	Ergorregiões	131
10.2.5	A aproximação de rotação lenta	133
10.2.6	Equação da geodésica e a separabilidade de variáveis	134
10.3	Termodinâmica	135
10.4	Correções térmicas ao efeito Casimir num espaço-tempo de Kerr com quintessência	139
10.4.1	Correções térmicas à energia de Casimir	140
10.4.1.1	Energia de vácuo	140
10.4.2	Energia de Casimir: correções térmicas	141
10.5	Quadro comparativo	144
11	BURACO NEGRO DE KERR-NEWMAN-ADS COM QUINTES- SÊNCIA E NUVEM DE CORDAS	147
11.1	A solução	147
11.1.1	Horizontes do buraco negro	151
11.1.2	Ergorregiões	152
11.2	Termodinâmica do buraco negro	153
11.3	Radiação Hawking	156
11.3.1	Equação de Klein-Gordon	156
11.3.2	Radiação do buraco negro e continuação analítica	158
11.3.3	Espectro de emissão do buraco negro e fluxo de Hawking	159
11.4	Termodinâmica do buraco negro de Kerr-Newman-AdS com quin- tessência	161
11.4.1	Termodinâmica do buraco negro	162
11.4.2	Radiação Hawking	164
IV	BURACOS NEGROS NA GRAVITAÇÃO DE LOVELOCK COM QUINTESSÊNCIA E NUVEM DE CORDAS	165
12	EFEITO CASIMIR NAS PROXIMIDADES DE UM BURACO NE- GRO EM TERCEIRA ORDEM DA GRAVITAÇÃO DE LOVELOCK	167
12.1	Buraco negro em terceira ordem da gravitação de Lovelock	167
12.2	Efeito Casimir para um campo escalar sem massa	168
12.2.1	Energia de Casimir	171
12.3	Correções térmicas da energia de Casimir	172

13	BURACOS NEGROS COM QUINTESSÊNCIA E NUVEM DE CORDAS NA GRAVITAÇÃO DE LOVELOCK	177
13.1	Nuvem de cordas e quintessência em espaços-tempo D-dimensionais	177
13.1.1	Quintessência	177
13.1.2	Nuvem de cordas	178
13.2	Buracos negros com quintessência e nuvem de cordas na gravitação de Lovelock em D-dimensões	179
13.3	Termodinâmica do buraco negro	181
13.3.1	Buraco negro em D-dimensões na relatividade geral	184
13.3.2	Buraco negro na gravitação de Gauss-Bonnet	187
13.3.3	Buracos negros em terceira ordem da gravitação de Lovelock	190
13.4	Radiação Hawking	192
14	BURACOS NEGROS COM QUINTESSÊNCIA NA GRAVITAÇÃO PURA DE LOVELOCK	195
14.1	A solução	195
14.1.1	Outra forma de obter a solução para o buraco negro com quintessência e nuvem de cordas	198
14.2	Termodinâmica do buraco negro	199
14.3	Buracos negros com quintessência e constante cosmológica na gravitação pura de Lovelock	202
15	BURACOS NEGROS COM NUVEM DE CORDAS NA GRAVITAÇÃO PURA DE LOVELOCK	205
15.1	A solução	205
15.1.1	Outra forma de obter a métrica do buraco negro com nuvem de cordas na gravitação pura de Lovelock	208
15.2	Termodinâmica do buraco negro	208
15.3	Radiação Hawking	210
15.4	Buracos negros com nuvem de cordas e constante cosmológica na gravitação pura de Lovelock	211
16	CONSIDERAÇÕES FINAIS	213
	REFERÊNCIAS	217

1 Introdução

Buracos negros são objetos fascinantes que surgem na teoria da relatividade geral e nas teorias modificadas de gravitação. A importância desses objetos está relacionada ao fato de que, dada a conexão entre gravitação, termodinâmica e teoria quântica, eles podem dar uma contribuição importante para elaboração de um arcabouço teórico que permita construir a quantização da interação gravitacional. Do ponto de vista observacional, eles são extremamente importantes, já que recentemente foram observadas ondas gravitacionais vindas da colisão de buracos negros ([ABBOTT et al., 2016](#)). Dessa forma, é fundamental que se estudem esses objetos, tanto na relatividade geral como em teorias modificadas de gravitação.

Observações recentes têm confirmado a existência de uma interação gravitacional repulsiva em escala cosmológica, responsável pela expansão acelerada do universo ([ADE et al., 2014](#)). A fonte capaz de produzir tal efeito foi chamada, genericamente, de energia escura. Um dentre os possíveis candidatos a energia escura é a constante cosmológica, introduzida inicialmente pelo próprio Einstein (com objetivo oposto, ou seja, de permitir a existência de um universo estático) e que pode ter como origem as flutuações quânticas de vácuo ([COPELAND; SAMI; TSUJIKAWA, 2006](#)). No entanto, essas flutuações levariam a um valor da constante bem superior às observações, fato que é conhecido como "problema da constante cosmológica".

Outro modelo para energia escura, conhecido como quintessência, é representado por um campo escalar minimamente acoplado ao campo gravitacional. Esse modelo é bem sucedido pela ausência de "fantasmas" (*ghosts*) e sua influência em buracos negros, tanto na relatividade geral como em teorias modificadas de gravitação, tem sido largamente estudada na literatura ([KISELEV, 2003](#); [THOMAS; SALEH; KOFANE, 2012](#); [GHADERI; MALAKOLKALAMI, 2016](#); [OTEEV et al., 2016](#); [GHOSH, 2016](#); [MA; ZHAO; MA, 2017](#); [GHOSH; AMIR; MAHARAJ, 2017](#); [TOSHMATOV; STUHLÍK; AHMEDOV, 2017b](#); [RODRIGUE et al., 2018](#); [GHOSH et al., 2018](#); [XU; WU, 2018](#); [TOLEDO; BEZERRA, 2018](#)).

É indubitável que a relatividade geral representa um dos pilares da física moderna. Mesmo assim, as teorias modificadas de gravitação têm sido amplamente discutidas ([CLIFTON et al., 2012](#)), principalmente na tentativa de se explicar fatores como matéria e a energia escuras sem a necessidade de se acrescentar fontes extras de energia-matéria. Nesse sentido, a gravitação de Lovelock ([LOVELOCK, 1971](#)) representa uma extensão da relatividade geral em dimensões superiores, através da generalização da ação de Einstein-Hilbert. Essa teoria pode ainda ser obtida como um limite da teoria de cordas e, como ela

não foi descartada com as observações de ondas gravitacionais, é plenamente justificável estudar suas propriedades, comparando-a sempre com a relatividade geral.

Também inspirado na teoria de cordas, para a qual os constituintes básicos do universo são objetos unidimensionais ao invés de partículas, Letelier ([LETELIER, 1979](#)) desenvolveu um modelo invariante de gauge com a introdução de uma nuvem de cordas e estudou sua influência no espaço-tempo gerado por buracos negros estáticos. Consideramos importante atualizar os trabalhos de Letelier, feitos nas décadas de 1970 1980, incluindo modelos de energia escura, especificamente a quintessência, e analisando as nuvens de cordas em teorias modificadas de gravitação.

Nesta tese, estudamos os espaços-tempo correspondentes a diversos buracos negros, em relatividade geral e na gravitação de Lovelock, com quintessência e nuvem de cordas, abordando suas propriedades e dando ênfase ao estudo de termodinâmica e da radiação Hawking, além de outros aspectos, tais como os modos quasinormais e o efeito Casimir gravitacional.

Esta tese está dividida em quatro partes. Na primeira, realizamos uma breve revisão sobre buracos negros em relatividade geral. Estudamos as nuvens de cordas na gravitação de Einstein, bem como obtemos a solução de buraco negro estático imerso numa configuração esfericamente simétrica dessa nuvem ([LETELIER, 1979](#)). Tratamos da gravitação de Lovelock, estudando alguns aspectos básicos da teoria e, mais uma vez, analisando as soluções de buracos negros e sua termodinâmica.

Abordaremos, na segunda parte, alguns tópicos de fundamental relevância no estudo contemporâneo da gravitação. Discutiremos o método de Newman-Janis, utilizado para a obtenção da métrica de buracos negros com rotação partindo-se de soluções estáticas equivalentes. Estudamos a quintessência e a constante cosmológica como modelos de energia escura. Além disso, introduzimos o efeito Casimir gravitacional, exemplificando seu desenvolvimento teórico num modelo simples.

Na terceira parte, abordamos alguns modelos de buracos negros com cordas e quintessência em relatividade geral. Iniciamos desenvolvendo um estudo da termodinâmica do buraco negro estático circundado por cordas e quintessência ([COSTA; TOLEDO; BEZERRA, 2019](#)). Tratamos o buraco negro de Reissner-Nordström com cordas e quintessência, com e sem a adição de constante cosmológica ([TOLEDO; BEZERRA, 2018](#); [TOLEDO; BEZERRA, 2019e](#)). Traçamos um paralelo entre as soluções do buraco negro de Kerr com quintessência ([TOLEDO; BEZERRA, ; BEZERRA; TOLEDO, 2019](#)) e trataremos de uma solução mais geral, correspondente a um buraco negro estacionário eletricamente carregado na presença de nuvem de cordas e quintessência, num universo com constante cosmológica ([TOLEDO; BEZERRA, 2019d](#)).

Por fim, na última parte desta tese, abordamos a gravitação de Lovelock. Iniciaremos

estudando o efeito Casimir à temperatura zero, bem como suas correções térmicas, nas proximidades de um buraco negro na gravitação de Lovelock, comparando os resultados obtidos com aqueles esperados da relatividade geral (TOLEDO; BEZERRA, 2019c). Estudamos as soluções de buracos negros com cordas e quintessência em algumas ordens na gravitação de Lovelock (TOLEDO; BEZERRA, 2018), assim como as soluções de buracos negros em gravitação pura de Lovelock com quintessência (TOLEDO; BEZERRA, 2019b) e, na sequência, com nuvem de cordas (TOLEDO; BEZERRA, 2019a).

Parte I

Sobre alguns aspectos da relatividade geral e
da gravitação de Lovelock

2 Buracos negros na relatividade geral

Chamamos de buraco negro um corpo muito denso capaz de produzir uma gravidade tão intensa que nem a luz é capaz de escapar de sua atração (OHANIAN; RUFFINI, 2013).

Se utilizarmos a gravitação Newtoniana, é possível determinar o maior raio r para o qual uma massa esférica M produz uma gravidade intensa a ponto de impedir partículas massivas de escaparem na velocidade da luz (essa estimativa foi feita por Laplace¹ em 1795 (SHAPIRO; TEUKOLSKY, 2008)). Para tanto, sabe-se que a velocidade de escape de um objeto na superfície desse corpo de massa M é $v = \sqrt{2GM/r}$. Se tomarmos como velocidade de escape a velocidade da luz, $v = c$, teremos o raio $r = 2GM/c^2$.

O valor calculado parte de uma suposição que se entende falsa do ponto de vista da relatividade restrita: a possibilidade de um corpo de massa de repouso não nula alcançar a velocidade da luz. Ainda assim, ele, por sorte, coincide com o que é obtido utilizando a relatividade geral.

Por curiosidade, para o sol, que possui aproximadamente $2,0 \times 10^{30} kg$ de massa, esse raio limite será $3km$. Em outras palavras, para que o sol se tornasse um buraco negro, toda a sua massa, atualmente distribuída numa esfera de raio $7,0 \times 10^5 km$, deveria se concentrar numa esfera de raio inferior a $3,0km$.

Essa idéia clássica de que buracos negros apenas absorvem sem emitir qualquer partícula ou radiação, entretanto, tem se mostrado incorreta desde a década de 1970. Stephen Hawking² (HAWKING, 1975) mostrou que, quando são levados em consideração efeitos quânticos, os buracos negros emitem partículas, produzindo um espectro térmico como um corpo negro. Nesse sentido, Bekenstein³, Hawking e colaboradores mostraram que os buracos negros têm propriedades análogas às da termodinâmica: podemos determinar entropia e outros potenciais termodinâmicos para os buracos negros, além de formular leis da termodinâmica para esses corpos (HAWKING, 1976; BARDEEN; CARTER; HAWKING, 1973; BEKENSTEIN, 1972; BEKENSTEIN, 1973).

Os buracos negros têm ganhado destaque na física contemporânea, portanto, dada a conexão entre gravitação, termodinâmica e teoria quântica que eles proporcionam, podendo ser uma chave para uma teoria quântica da gravitação.

Esses corpos ganharam ainda mais protagonismo quando, em 2015, foi anunciada a primeira observação experimental de ondas gravitacionais pelos experimentos

¹ Pirre-Simon, Marqês de Laplace (1749-1827). Matemático, astrônomo e físico francês.

² Stephen William Hawking (1942-2018). Físico britânico com importantes contribuições no estudo teórico da gravitação.

³ Jacob David Bekenstein (1947-2015). Físico nascido na Cidade do México e de ascendência judaica que contribuiu para a fundação da termodinâmica de buracos negros.

LIGO/VIRGO, o que rendeu a Rainer Weiss, Barry C. Barish e Kip S. Thorne o prêmio nobel de física de 2017 ([ABBOTT et al., 2016](#)).

Neste capítulo, iremos realizar um estudo aprofundado sobre buracos negros. Iremos revisar as propriedades geométricas das conhecidas soluções estáticas e estacionárias, revisaremos a termodinâmica de buracos negros e a radiação Hawking, concluindo com uma breve explanação sobre os experimentos LIGO/VIRGO.

2.1 Métrica de Schwarzschild: singularidades e pseudosingularidades

É sabido que a métrica gerada por um corpo esférico e estático de Massa M é dada por ([OHANIAN; RUFFINI, 2013](#); [D'INVERNO, 1989](#); [SCHUTZ, 2009](#); [WEINBERG, 1972](#); [WALD, 2010](#); [MISNER; THORNE; WHEELER, 2017](#)) (adotaremos no restante do trabalho as unidades naturais, ou seja, $G = c = \hbar = 1$):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (2.1)$$

onde $d\Omega$ é o elemento de ângulo sólido, tal que $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. Essa é a métrica de Schwarzschild⁴, primeira solução exata das equações de Einstein da relatividade geral, que relaciona a geometria do espaço-tempo descrita pelo tensor de Einstein, $G_{\mu\nu}$, e o tensor energia-momento, $T_{\mu\nu}$,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (2.2)$$

Nesta tese, utilizaremos a assinatura $(+, -, -, -)$ quando não se afirmar algo a respeito.

A solução em questão possui singularidades. A adoção de coordenadas esféricas faz com que os eixos $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ não sejam representados, já que, neles, a métrica se torna degenerada ([D'INVERNO, 1989](#); [SCHUTZ, 2009](#)). Essas regiões são singularidades de coordenada e podem ser removidas transformando-se a parte espacial da métrica em coordenadas cartesianas.

A métrica (2.1) também possui como singularidades $r = 0$ e $r = 2M$. A origem do sistema de coordenadas é uma singularidade não removível, também denominada de singularidade real, física, geométrica ou intrínseca. Isso porque, para esse ponto, o escalar invariante de Kretschmann, calculado através do tensor de Riemann por

⁴ Karl Schwarzschild (1873-1916): físico e astrônomo alemão nascido em Frankfurt.

$$K = R^{\mu\nu\alpha\beta}R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{48M^2}{r^6}, \quad (2.3)$$

diverge quando $r \rightarrow 0$.

Atentemo-nos agora para as propriedades da superfície definida por $r = r_S = 2M$, conhecida como horizonte de eventos. O raio dessa superfície é denominado raio de Schwarzschild.

Podemos inferir que o horizonte de eventos é uma singularidade removível, já que $K(r = r_S)$ não diverge. Verificaremos, mais adiante, que uma transformação de coordenadas é capaz de remover essa singularidade.

Verifiquemos, de início, que o horizonte de eventos é uma superfície na qual há um desvio para o vermelho (redshift) gravitacional infinito, em relação a pontos em $r \rightarrow \infty$. Isso porque, para um objeto em repouso nas proximidades do buraco negro, o tempo próprio é calculado a partir a expressão (OHANIAN; RUFFINI, 2013):

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} dt, \quad (2.4)$$

que se aproxima de zero nas proximidades do horizonte de eventos. Desse modo, há uma dilatação temporal infinita nessa superfície.

Na região $r > r_S$, a coordenada t é tipo-tempo e a coordenada r é tipo espaço, já que $g_{tt}(r > r_S) > 0$ e $g_{rr}(r > r_S) < 0$. Para $0 < r < r_S$, embora a solução de Schwarzschild seja livre de singularidades, a coordenada t será tipo-espaço ($g_{tt}(0 < r < r_S) < 0$) e a coordenada r será tipo-tempo ($g_{rr}(0 < r < r_S) > 0$).

Se o corpo de massa M possuir um raio $R > 2M$, os efeitos estranhos acima descritos não serão observados. Assim, será um buraco negro estático um corpo cujo raio seja inferior ao Raio de Schwarzschild, ou seja, $R < 2M$ (se não tomarmos o sistema natural de unidades, teremos $R < 2GM/c^2$, expressão já apresentada na introdução).

2.1.1 Geodésicas nulas e diagramas do espaço-tempo

Na métrica de Minkowski⁵, os feixes luminosos são representados através de cones (cones de luz) em diagramas do espaço-tempo. Esses cones limitam os eventos entre os quais pode haver interação e sofrem influência da geometria do espaço-tempo, como veremos a seguir.

Iremos verificar o comportamento das geodésicas radiais nulas no espaço-tempo de Schwarzschild(D'INVERNO, 1989). Em outras palavras, iremos estudar o comportamento de feixes luminosos radiais em relação ao buraco negro.

⁵ Hermann Minkowski (1864-1909). Matemático alemão de ascendência lituana.

Como as geodésicas são radiais, teremos $\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$, em que o ponto representa a derivada das coordenadas em relação ao parâmetro afim λ . Para feixes luminosos, usando a métrica de Schwarzschild, teremos então

$$(1 - 2M/r)t^2 - (1 - 2M/r)^{-1}\dot{r}^2 = 0, \quad (2.5)$$

a partir da qual, podemos escrever

$$\frac{dt}{dr} = \frac{r}{r - 2M}. \quad (2.6)$$

Integrando a Eq. (2.6), temos

$$t = r + 2M \ln|r - 2M| + \text{const.} \quad (2.7)$$

Da equação anterior, é fácil notar que, para $r > 2M$, $\frac{dr}{dt} > 0$. Ou seja, a Eq. (2.7) representa geodésicas nulas se distanciando do horizonte do buraco negro. Se fizermos $t \rightarrow -t$, teremos as geodésicas nulas se aproximando do horizonte de eventos.

Na Figura 1, representamos, para valores constantes de θ e ϕ , as geodésicas nulas radiais na métrica de Schwarzschild e o efeito da geometria do espaço-tempo nos cones de luz.

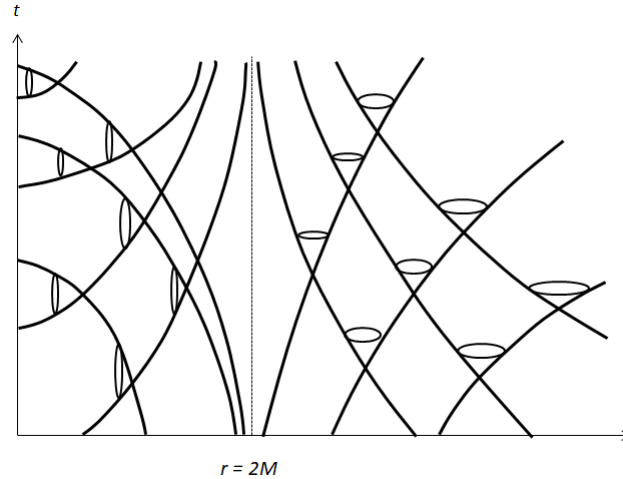


Figura 1 – Geodésicas nulas e cones de luz em coordenadas de Schwarzschild. Duas dimensões foram suprimidas.

Quando $r \rightarrow \infty$, as geodésicas fazem um ângulo de 45° com o eixo horizontal como no espaço-tempo de Minkowski, comportamento assintótico da solução.

Para $r < 2M$, os cones de luz mudam de direção, tornando-se horizontais, pois, como já verificamos, as coordenadas t e r são, respectivamente, tipo-espaço e tipo-tempo.

Nessa região, um objeto não poderá permanecer em repouso, tendendo sempre a se mover em direção à singularidade.

2.1.2 Objeto em queda em um buraco negro

Tomemos uma partícula em queda livre em direção a um buraco negro. A métrica de Schwarzschild é estática e possui simetria esférica, podendo ser escrita em um sistema de coordenadas em que ela independe do tempo t . Nessa métrica, podemos definir vetores de Killing, K^μ , que, associados às simetrias do espaço-tempo, levam a grandezas conservadas. O vetor de Killing tipo-tempo $K^\mu = (1, 0, 0, 0)$ leva à conservação da energia $E = g_{\mu\nu} K^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda}$, sendo λ um parâmetro, enquanto o vetor tipo-espaço $K^\mu = (0, 0, 0, 1)$ leva à conservação do módulo do momento angular L . Para uma partícula de massa m , temos que $E = p_0/m$ e $L = p_\phi/m$, sendo p_0 e p_ϕ componentes covariantes do 4-momento da partícula.

Ainda devido à simetria dessa métrica, sabemos que a trajetória da partícula será restrita a um plano, que consideraremos como o plano equatorial ($\theta = \pi/2$). Teremos, então, que $p_\theta = 0$.

Considerando, ainda, que podemos escrever $p^r = m \frac{dr}{d\tau}$, sendo τ o tempo próprio da partícula, para a componente radial do momento da partícula, a conhecida relação $p^\mu p_\mu = m^2$ leva a

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right). \quad (2.8)$$

Para uma partícula em movimento radial, $L = 0$. Se a partícula parte do repouso em $r \rightarrow \infty$, $E = 0$. Daí:

$$\left(\frac{d\tau}{dr}\right)^2 = \frac{r}{2M}. \quad (2.9)$$

Como estamos interessados numa partícula caindo no buraco negro, a derivada $dr/d\tau$ será obtida através do negativo da raiz quadrada membro direito da equação anterior. Integrando, teremos

$$\tau - \tau_0 = \frac{2}{3(2M)^{1/2}} \left(r_0^{3/2} - r^{3/2}\right). \quad (2.10)$$

A partir da equação anterior, verificamos que, no referencial da partícula em queda, o movimento continua até atingir a singularidade $r = 0$ num tempo finito.

Para verificarmos o comportamento da partícula na coordenada temporal de Schwarzschild, usamos a Eq. (2.4) e obtemos

$$\frac{dt}{dr} = - \left(\frac{r}{2M} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1}, \quad (2.11)$$

cuja integração leva a

$$\begin{aligned} t - t_0 = & -\frac{2}{3(2M)^{1/2}} \left(r^{3/2} - r_0^{3/2} + 6Mr^{1/2} - 6Mr_0^{1/2} \right) \\ & + 2M \ln \frac{[r^{1/2} + (2M)^{1/2}][r_0^{1/2} - (2M)^{1/2}]}{[r_0^{1/2} + (2M)^{1/2}][r^{1/2} - (2M)^{1/2}]}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

É possível verificar que, para $t \rightarrow \infty$, $r \rightarrow \infty$. No diagrama de espaço-tempo da Figura 2, representamos o movimento da partícula em queda (D'INVERNO, 1989), utilizando o tempo próprio τ e a coordenada temporal t .

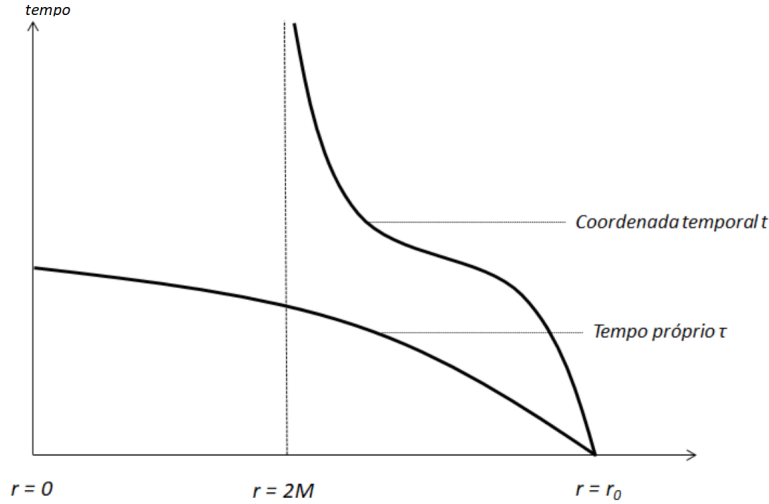


Figura 2 – Objeto em queda no buraco negro.

A coordenada temporal t pode ser entendida como aquela medida por um referencial muito distante do buraco negro. Para esse referencial, o objeto em queda leva um tempo infinito para atingir o horizonte de eventos. Para o corpo em queda, entretanto, num tempo finito ele cruza o horizonte do buraco e caminha em direção à singularidade $r = 0$.

Como já mencionamos, quando $r < 2M$, a coordenada r será tipo-tempo e t será uma coordenada tipo-espaço. Como a trajetória de um objeto tem que ser tipo tempo, sob o horizonte de eventos, ele não poderá permanecer em repouso. O objeto deverá permanecer em movimento em direção à singularidade.

2.1.3 Coordenadas de Eddington-Finkelstein

Como já comentamos, $r = r_S$ é uma singularidade removível da métrica de Schwarzschild. Façamos, então, a seguinte transformação na coordenada temporal:

$$t \rightarrow \bar{t} = t + 2M \ln|r - 2M|. \quad (2.13)$$

É fácil verificar que, nesse novo sistema de coordenadas, as geodésicas nulas que entram em direção ao buraco negro serão linhas retas que formam um ângulo de -45° em relação ao eixo r , já que teremos $\bar{t} = -r + \text{const.}$ (veja Figura 3).

Usando a transformação acima, chegamos na métrica do buraco negro estático em coordenadas de Eddington-Finkelstein

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\bar{t}^2 - \frac{4M}{r} d\bar{t}dr - \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (2.14)$$

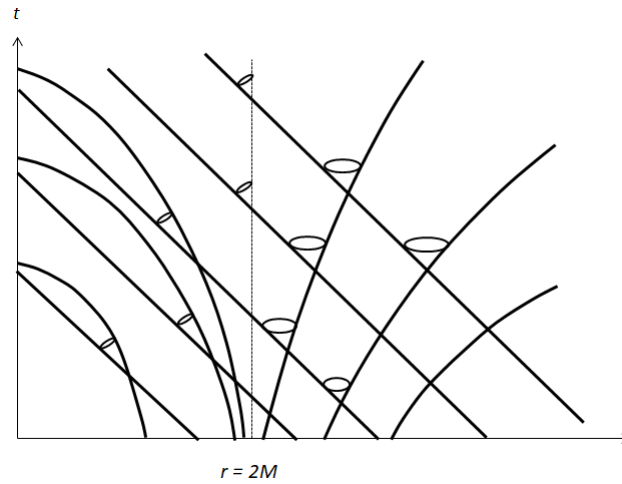


Figura 3 – Solução de Schwarzschild nas coordenadas de Eddington-Finkelstein.

Verificamos que a solução é agora regular em $r = r_g$ e analítica para qualquer valor de r compreendido no intervalo $0 < r < \infty$. Por esse motivo, dizemos que (2.14) é uma extensão analítica de (2.1).

2.2 Buraco negro com nuvem de cordas

A teoria de cordas parte do pressuposto de que os constituintes básicos da natureza são cordas (objeto unidimensionais), ao invés de partículas (objetos zero-dimensionais). Além disso, a existência de cordas no universo primordial é um fator que está de acordo com as observações em cosmologia. Dessa forma, é importante estudar a influência de nuvens de cordas como fonte de campo gravitacional em escalas astrofísica e cosmológica e, por conseguinte, analisar as soluções de buracos negros imersos nessas nuvens.

Seguindo esse raciocínio, na década de 1970, Letelier⁶ introduziu na literatura um modelo invariante de gauge de nuvem de cordas e obteve uma série de soluções das

⁶ Patricio Anibal Letelier Sotomayor (1943-2011), físico nascido em Santiago, Chile. Trabalhou na Universidade de Brasília e na Unicamp.

equações de Einstein correspondentes a espaços-tempo com simetria plana, cilíndrica e esférica (LETELIER, 1979). Neste último caso, ele obteve a solução correspondente a um buraco negro estático e esfericamente simétrico imerso numa nuvem de cordas (LETELIER, 1979), sendo, portanto, uma generalização do espaço-tempo de Schwarzschild, e que ficou conhecida na literatura como espaço-tempo de Letelier (BARBOSA; BEZERRA, 2016). Formalmente, a solução obtida por Letelier é análoga à solução de Schwarzschild com um déficit de ângulo sólido como defeito topológico (BARRIOLA; VILENKIN, 1989).

Mais tarde, Letelier estendeu o modelo por ele proposto para considerar um fluido de cordas (LETELIER, 1981) e construiu soluções cosmológicas anisotrópicas com cordas (LETELIER, 1983).

Ainda é importante asseverar que a presença de nuvens de cordas gera consequências observáveis em escala astrofísica (KAR, 1997; LARSEN, 1997; SOLENG, 1995) e que diversos estudos têm sido desenvolvidos no que tange às nuvens de cordas (SOLENG, 1995; STACHEL, 1980; LEE et al., 2015) e fluidos de cordas em relatividade geral (SMALLEY; KRISCH, 1997), bem como em teorias modificadas de gravitação (MAZHARIMOUSAVI; HALILSOY; GURTUG, 2010; HERSCOVICH; RICHARTE, 2010; GHOSH; PAPNOI; MAHARAJ, 2014; LEE; BABOOLAL; GHOSH, 2015).

Neste trabalho, iremos estudar diversos modelos de buracos negros com nuvens de cordas em relatividade geral e na gravitação de Lovelock e, portanto, na presente seção, iremos realizar uma breve revisão do modelo de Letelier para nuvem de cordas e da solução correspondente ao buraco negro de Schwarzschild imerso nessa nuvem.

2.2.1 Nuvem de cordas

Uma corda infinitesimalmente fina em movimento traça uma "superfície de mundo", Σ , que pode ser descrita pela equação

$$x^\mu = x^\mu(\xi^a), \quad a = 0, 1, \quad (2.15)$$

onde ξ^0 e ξ^1 são, respectivamente, parâmetros tipo-tempo e tipo-espaço. A métrica induzida nessa superfície, h_{ab} , é dada por

$$h_{ab} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^b}. \quad (2.16)$$

A superfície de mundo da corda pode ser descrita por um bivector, $\Sigma^{\mu\nu}$, tal que

$$\Sigma^{\mu\nu} = \epsilon^{ab} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^b}, \quad (2.17)$$

onde ϵ^{ab} é o símbolo de Levi-Civita ⁷ bidimensional, com $\epsilon^{01} = -\epsilon^{10} = 1$.

A ação correspondente à corda será

$$\mathcal{I} = \int \mathcal{L} d\xi^0 d\xi^1, \quad (2.18)$$

sendo a lagrangiana $\mathcal{L}$ dada por

$$\mathcal{L} = s\sqrt{-h} = s \left(-\frac{1}{2} \Sigma^{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu} \right)^{1/2}, \quad (2.19)$$

onde h é o determinante de h_{ab} e s é uma constante adimensional associada à corda. Com isso, o tensor energia-momento associado a uma corda será

$$t^{\mu\nu} = 2 \frac{\partial}{\partial g_{\mu\nu}} \mathcal{L} = s\sqrt{-h} = s \frac{\Sigma^{\mu\alpha} \Sigma_{\alpha}^{\nu}}{(-h)^{1/2}}. \quad (2.20)$$

Da Eq. (2.20), podemos verificar que o tensor energia-momento associado a uma corda é proporcional ao bivector $\Sigma^{\mu\nu}$. Assim, podemos entendê-lo como uma "área" gerada pela superfície de mundo da corda e que, ponderada por uma densidade s , relaciona-se ao conteúdo de matéria-energia da configuração.

Tomemos, então, o tensor energia-momento para uma nuvem de cordas. Agora, em vez de uma única corda caracterizada pelo parâmetro s , temos uma coleção de cordas caracterizada pela densidade própria, ρ , e cujo tensor energia-momento pode ser escrito na forma (LETELIER, 1979)

$$T^{\mu\nu} = \frac{\rho \Sigma^{\mu\beta} \Sigma_{\beta}^{\nu}}{\sqrt{-h}}. \quad (2.21)$$

Suponhamos agora que a nuvem de cordas é esfericamente simétrica. Logo, a densidade, ρ , e o bivector, $\Sigma^{\mu\nu}$, devem ser funções da coordenada radial. Nesse caso, as componentes não nulas do bivector são Σ^{01} e Σ^{10} , que se relacionam através de $\Sigma^{01} = -\Sigma^{10}$. Assim, $T_0^0 = T_1^1 = -\rho \Sigma^{01}$. Usando, por fim, a relação (LETELIER, 1979)

$$\frac{d}{dr} [(r^2 T_0^0)^{\frac{1}{2}}] = 0, \quad (2.22)$$

chegamos a

$$T_0^0 = T_1^1 = \frac{a}{r^2}, \quad (2.23a)$$

$$T_2^2 = T_3^3 = 0. \quad (2.23b)$$

⁷ Tullio Levi-Civita (1873-1941) foi um matemático italiano importante no desenvolvimento do cálculo tensorial.

onde a é uma constante de integração.

Portanto, usando o tensor energia-momento dado pela Eq. (2.23), podemos escrever as equações de Einstein na seguinte forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{\rho\Sigma_\mu^\alpha\Sigma_\nu^{\alpha\nu}}{\sqrt{-h}}. \quad (2.24)$$

2.2.2 Espaço-tempo de Letelier

Para uma nuvem de cordas distribuída numa esfera centrada num buraco negro, podemos adotar a métrica canônica para problemas com simetria esférica dada por

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (2.25)$$

sendo $\nu = \nu(r)$ e $\lambda = \lambda(r)$ funções da coordenada r . Com isso, podemos considerar que (LETELIER, 1979)

$$\Sigma^{01} = \frac{a}{\rho r^2} e^{-(\lambda+\nu)/2}. \quad (2.26)$$

A densidade invariante de gauge, $\rho(-h)^{1/2}$, é dada por $\rho(-h)^{1/2} = a/r^2$, na qual a deve ser uma constante positiva (LETELIER, 1979). Assim, as equações de Einstein podem ser escritas na forma

$$2\nu'' - \lambda'\nu' + 4\nu'/r + \nu'^2 = 0, \quad (2.27a)$$

$$2\lambda'' - \lambda'\lambda' + 4\nu'/r + \lambda'^2 = 0, \quad (2.27b)$$

$$e^{-\lambda} \left[1 + \frac{r}{2}(\nu' - \lambda') \right] - 1 = -a. \quad (2.27c)$$

Logo, concluímos que

$$\nu = -\lambda \quad (2.28)$$

e, por consequência,

$$(e^\lambda r)' = 1 - a. \quad (2.29)$$

Da Eq. (2.29), concluímos que

$$e^\nu = e^{-\lambda} = 1 - a - \frac{2M}{r}. \quad (2.30)$$

Assim, o elemento de linha que representa um buraco negro estático cercado por uma nuvem de cordas esfericamente simétrica (espaço-tempo de Letelier) é dado por

$$ds^2 = \left(1 - a - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - a - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (2.31)$$

onde M é a massa do buraco negro.

É imediato verificar que, quando $a = 0$, recobramos o espaço-tempo de Schwarzschild. Quando $a \neq 0$, a solução é matematicamente análoga à de um buraco negro com um déficit de ângulo sólido (BARRIOLA; VILENKIN, 1989).

Utilizando este resultado, podemos verificar que o raio do horizonte de eventos no espaço-tempo de Letelier será calculado por

$$r_h = \frac{2M}{1-a}, \quad a \neq 1. \quad (2.32)$$

Podemos verificar que a nuvem de cordas alarga o horizonte de eventos do buraco negro por um fator de $(1-a)^{-1}$, quando comparamos à solução de Schwarzschild.

2.3 Buraco negro estático e carregado

Suponhamos agora um buraco negro esférico de massa M e carga elétrica Q . A métrica obtida deve ser solução das equações de Einstein da relatividade geral, além de satisfazer as equações de Maxwell que, na região exterior ao buraco, podem ser escritas na forma (D'INVERNO, 1989)

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (2.33)$$

$$\partial_{[\mu} F_{\nu\sigma]}, \quad (2.34)$$

onde $F^{\mu\nu}$ é o tensor de Maxwell, ∇_μ denota a derivada covariante e os colchetes indicam a parte antissimétrica da comutação. A métrica que obedece aos critérios acima dispostos, conhecida solução de Reissner-Nordström, é dada por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (2.35)$$

É claro que, se $Q = 0$, retornamos à métrica de Schwarzschild.

2.3.1 Singularidades

Para a métrica de Reissner-Nordström, $r = 0$ é também uma singularidade não removível. Podemos inferir essa afirmação do fato de que o escalar $K = R^{\mu\nu\alpha\beta}R_{\mu\nu\alpha\beta}$ diverge nesse ponto.

Podemos, ainda, verificar que o termo g_{rr} em (2.35) irá divergir para

$$r^2 - 2Mr + Q^2 = 0, \quad (2.36)$$

cujas raízes são

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}. \quad (2.37)$$

Se $Q^2 > M^2$, a Eq. (2.36) não terá raízes reais e a métrica só terá como singularidade $r = 0$. Já se $M^2 = Q^2$, teremos $r_+ = r_- = M$ e a discussão será semelhante a que fizemos para métrica de Schwarzschild.

2.4 Buraco negro em rotação: solução de Kerr

A solução das equações de Einstein correspondente ao buraco negro girante de massa M e sem carga elétrica foi obtida em 1963 por Roy P. Kerr (KERR, 1963). Nas coordenadas de Boyer-Lindquist, a métrica de Kerr é escrita na forma

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 - \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2)d\phi - a dt]^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2, \quad (2.38)$$

onde

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (2.39)$$

e

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr. \quad (2.40)$$

É fácil verificar que, se $a \rightarrow 0$, retomamos a métrica de Schwarzschild, da mesma forma que as coordenadas de Boyer-Lindquist retomam as coordenadas de Schwarzschild.

Vale destacar que o método de Newman-Janis, utilizado para a obtenção de métricas estacionárias a partir de soluções estáticas, será discutido no capítulo 4.

No limite $r \rightarrow \infty$ (OHANIAN; RUFFINI, 2013), teremos

$$ds^2 \simeq \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr^2 + \frac{4Ma}{r} \sin^2 \theta d\phi dt - r^2 d\Omega^2 \quad (2.41)$$

As componentes $g_{t\phi}$ e $g_{\phi t}$ da métrica acima correspondem ao limite de campo fraco quando o momento angular do buraco negro (J) é

$$J = Ma. \quad (2.42)$$

Logo, a é o momento angular por unidade de massa. Pode-se verificar também que a reversão temporal $t \rightarrow -t$ corresponde à alteração no sentido de rotação do buraco negro $a \rightarrow -a$.

Constata-se, ainda, que a parte espacial das coordenadas de Boyer-Lindquist não são coordenadas esféricas. É possível demonstrar que as coordenadas cartesianas x , y e z são obtidas através de (OHANIAN; RUFFINI, 2013)

$$x = (r^2 + a^2)^{1/2} \sin \theta \cos[\phi - f(r)], \quad (2.43a)$$

$$y = (r^2 + a^2)^{1/2} \sin \theta \sin[\phi - f(r)], \quad (2.43b)$$

$$z = r \cos \theta, \quad (2.43c)$$

onde

$$f(r) = a \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2 - 2Mr + a^2} + \tan^{-1} \frac{a}{r}. \quad (2.44)$$

Dizemos, então, que as coordenadas de Boyer-Lindquist são quasi-esferoidais. Quando $M = 0$, a função $f(r)$ será nula e as coordenadas serão esferoidais.

2.4.1 Singularidades e horizontes

Como no buraco negro estático, a solução de Kerr possui uma singularidade não removível: $r = 0$. De forma diversa, entretanto, essa singularidade não representa a origem do sistema de coordenadas semi-esferoidal. A partir da Eq. (2.43), percebemos que a $r = 0$ será um círculo de raio a centrado na origem e perpendicular ao eixo de rotação do buraco negro.

A componente g_{rr} da métrica de Kerr irá divergir quando

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr = 0. \quad (2.45)$$

Assim, a métrica, de forma geral, tem como singularidades removíveis os pontos

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}. \quad (2.46)$$

Verificamos três situações possíveis a depender da relação entre os valores de a e M . Se $a^2 > M^2$, o buraco negro não terá horizontes. Se $a = M$, haverá um horizonte para $r = M$. Se $a^2 < M^2$, o buraco negro terá dois horizontes: o externo, r_+ , denominado horizontes de eventos por delimitar a região a partir da qual não haverá retorno, e o interno, r_- , conhecido como horizonte de Cauchy.

2.4.2 Superfícies estáticas e ergorregiões

Tomemos um fóton iniciando um movimento circular no plano equatorial ($\theta = \pi/2$) do buraco negro de Kerr. Para esse fóton, teremos (SCHUTZ, 2009)

$$g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{\phi\phi}d\phi^2 = 0, \quad (2.47)$$

de onde decorre que

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \pm \sqrt{\left(\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}\right)^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}} \quad (2.48)$$

Se g_{tt} for nulo, as duas possíveis soluções serão

$$\frac{d\phi}{dt} = 0 \quad e \quad \frac{d\phi}{dt} = -2\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}. \quad (2.49)$$

Verifica-se que a segunda solução possui o mesmo sinal de a . Ou seja, ela representa um fóton emitido no mesmo sentido de rotação do buraco negro. Já a segunda solução representa um fóton emitido contrariamente à rotação do buraco negro. Este segundo fóton, portanto, não mais consegue vencer o arrasto produzido pelo buraco negro.

A superfície $g_{tt} = 0$ é chamada de superfície estática e obtida através de

$$r_{s\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (2.50)$$

A região existente entre a superfície estática exterior, r_{s+} e o horizonte de eventos do buraco r_+ é chama de ergorregião ou ergosfera. Abaixo da superfície estática, a luz (e, portanto, qualquer objeto) não consegue resistir ao arrasto gravitacional do buraco negro, permanecendo, necessariamente, em movimento circular ao redor da singularidade e com mesma direção de rotação que o buraco negro.

É fácil verificar que nos polos, $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, a superfície estática coincide com o horizonte de eventos. Na Figura 4, representamos os horizontes e as superfícies estáticas de um buraco negro com $M = 1$ e $a^2 = 0.5$.

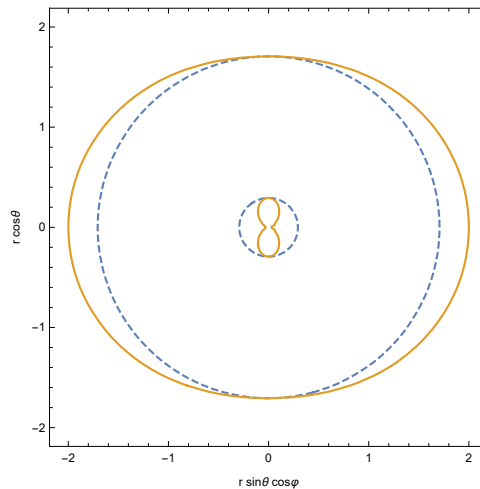


Figura 4 – Horizonte de eventos (linha tracejada) e superfície estática (linha contínua). Tomamos $M = 1$ e $a^2 = 0.5$.

2.5 Termodinâmica de buracos negros e radiação Hawking

No início da década de 1970, Bekenstein ([BEKENSTEIN, 1972](#); [BEKENSTEIN, 1973](#); [BEKENSTEIN, 1974](#)) e Hawking ([HAWKING, 1974](#); [HAWKING, 1976](#); [HAWKING; PAGE, 1983](#)) mostraram que buracos negros se comportam como corpos negros, seguindo leis semelhantes às da termodinâmica ([BARDEEN; CARTER; HAWKING, 1973](#)). A radiação emitida pelos buracos negros é conhecida como radiação Hawking ([HAWKING, 1975](#); [GIBBONS; HAWKING, 1977](#)) e sua descoberta representa uma quebra com a clássica visão de que os buracos negros atraem todos os objetos que deles se aproximam sem permitir a emissão sequer de fótons.

Além dessa ruptura com as ideias clássicas, a termodinâmica de buracos negros e a radiação Hawking mostraram-se como o início de um elo entre a teoria da gravitação e teoria quântica de campos.

Vale salientar que diversos trabalhos que tratam da termodinâmica de buracos negros imersos em quintessência e/ou nuvem de cordas, objetos desta tese, têm sido publicados nos últimos anos ([TOLEDO; BEZERRA, 2018](#); [GHOSH et al., 2018](#); [HERSCOVICH; RICHARTE, 2010](#); [LEE; BABOOLAL; GHOSH, 2015](#); [XU; WU, 2018](#); [MA; ZHAO; MA, 2017](#); [GHADERI; MALAKOLKALAMI, 2016](#); [THOMAS; SALEH; KOFANE, 2012](#)).

Nesta seção, iremos realizar uma breve revisão sobre esses importantes tópicos no estudo de buracos negros e que irá embasar os desenvolvimentos subsequentes.

2.5.1 Termodinâmica de buracos negros

Do ponto de vista clássico, buracos negros podem ser descritos por um pequeno número de parâmetros macroscópicos (como massa, momento angular e carga) que obedecem leis muito similares às da termodinâmica (WALD, 2001; PAGE, 2005).

Dessa forma, podemos escrever as leis da termodinâmica de buracos negros conforme segue (CARLIP, 2014; PAGE, 2005).

Lei zero. A gravidade superficial, κ , é constante no horizonte de eventos do buraco negro. Essa afirmação é semelhante à lei zero da termodinâmica, que afirma que a temperatura de um objeto em equilíbrio térmico é constante.

Primeira lei. Para um buraco negro estacionário e carregado de massa M , podemos escrever a relação

$$\delta M = \kappa \frac{\delta A_{hor}}{8\pi G} + \Omega \delta J + \Phi \delta Q, \quad (2.51)$$

onde A_{hor} é a área do horizonte de eventos, Ω é sua velocidade angular e Φ é seu potencial elétrico. Assim, essa afirmação, semelhantemente à primeira lei da termodinâmica, expressa uma conservação de energia, estabelecendo uma relação entre a variação da massa do buraco negro, M , e a variação na área de seu horizonte, A_{hor} , em seu momento angular, J , e em sua carga, Q .

Segunda lei. A área do horizonte de eventos do buraco negro nunca decresce, isto é,

$$\delta A_{hor} \geq 0. \quad (2.52)$$

Essa afirmação é análoga à segunda lei da termodinâmica, que estabelece que a entropia de um sistema isolado não diminui.

Terceira lei. É impossível reduzir a gravidade superficial, κ , a zero por um processo constituído de um conjunto finito de passos. Essa proposição é semelhante à terceira lei da termodinâmica, na formulação de Nernst (formulação fraca), que afirma que é impossível reduzir a temperatura de um sistema ao zero absoluto através de um processo formado por um conjunto finito de passos.

Das proposições acima, verificamos que as leis da termodinâmica de buracos negros são análogas às leis da termodinâmica clássica quando consideramos que a temperatura do buraco, T , é proporcional à gravidade superficial em seu horizonte, κ , por meio da relação

$$T = \frac{\hbar \kappa}{2\pi k_B}, \quad (2.53)$$

e sua entropia, S , é proporcional à área do horizonte, A_{hor} , através da lei da área de Bekenstein-Hawking (BH)

$$S = \frac{A_{hor}}{4\hbar G}. \quad (2.54)$$

Diz-se, portanto, que a entropia do buraco negro é "holográfica", já que ela é proporcional à área do horizonte (CARLIP, 2014). Essa propriedade difere da entropia clássica, que é uma grandeza termodinâmica extensiva, relacionável com o volume do sistema. Desse modo, surgem questionamentos quanto à quantidade de graus de liberdade de um buraco negro.

As leis acima descritas foram construídas para buracos negros carregados em 4 dimensões na relatividade geral, mas podem ser extendidas para buracos negros em dimensões superiores e em teorias modificadas de gravitação (CARLIP, 2014; PAGE, 2005).

O estudo da termodinâmica é um poderoso instrumento que permite aos pesquisadores conhecerem diversos aspectos da física de buracos negros, muito porque suas propriedades termodinâmicas estejam diretamente relacionadas à mecânica estatística (BARDEEN; CARTER; HAWKING, 1973; BEKENSTEIN, 1973; HAWKING, 1975). A termodinâmica de buracos negros, embora teoricamente bem estabelecida, ainda possui alguns importantes problemas em aberto, como o "paradoxo da perda de informação" (*"information loss paradox"*) (WALD, 2001).

2.5.2 Radiação Hawking

Ainda na década de 1970, Hawking previu que os buracos negros emitem radiação continuamente (HAWKING, 1975). Essa radiação, que ficou conhecida como radiação Hawking, possui um espectro semelhante àquela emitida por um corpo negro (GIBBONS; HAWKING, 1977).

Neste trabalho, iremos estudar a radiação emitida por buracos negros na relatividade geral e na gravitação de Lovelock.

Como cálculos desenvolvidos por Hawking (HAWKING, 1975) utilizam técnicas da teoria quântica de campos em espaços-tempo curvos, iremos, a título de introdução, obter os resultados concernentes à emissão de partículas por buracos negros de uma forma mais simples, como feito por Schutz (SCHUTZ, 2009).

De acordo com a teoria quântica de campos, flutuações quânticas de vácuo ocorrem, de forma que, no espaço vazio, um par partícula e anti-partícula pode surgir e, em seguida, esse par se recombina. A princípio, esse fato viola o princípio da conservação da energia. O princípio da incerteza de Heisenberg, entretanto, informa-nos que a incerteza mínima

na medida da energia de um sistema em certo estado, ΔE , relaciona-se com o tempo em que o sistema permanece nesse estado, Δt , pela relação $\Delta E \Delta t = \hbar$. Com isso, se o par partícula-antipartícula surgido no vácuo durar menos que $\Delta t = \hbar/\Delta E$, não há violação à conservação da energia.

Consideremos que um par de fótons – um com energia E e outro com energia $-E$ – é produzido na região exterior ao horizonte de eventos de um buraco negro de Schwarzschild e nas proximidades desse horizonte. É possível, assim, que o fóton de energia $-E$ cruze o horizonte de eventos, aproximando-se da singularidade, antes que haja a recombinação com seu par. Uma vez no interior do horizonte, esse fóton pode mover-se livremente, como veremos.

Para entendermos o comportamento de uma partícula no interior do horizonte de eventos, é necessário adotarmos um observador local. Importa destacar que qualquer objeto viajando para o futuro nessa região, move-se no sentido contrário a r . Assim, consideremos um observador que, por simplicidade, movimenta-se com a 4-velocidade $u = (0, u^r, 0, 0)$. Se adotarmos a condição de normalização $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 1$, teremos

$$u^r = -\left(\frac{2M}{r} - 1\right)^{1/2}, \quad r < 2M, \quad (2.55)$$

onde o sinal negativo indica que o movimento ocorre no sentido $-r$.

Consideremos, agora, um fóton que se movimenta na direção radial. Como não há momento angular em relação à singularidade, $L = 0$, e, a partir da Eq. (2.8), fica claro que $E = \pm p^r$. Com isso, a energia do fóton no interior do horizonte de eventos em relação ao observador será

$$g_{\mu\nu}p^\mu u^\nu = g_{rr}p^r u^r = -\left(\frac{2M}{r} - 1\right)^{1/2} p^r, \quad (2.56)$$

que é positiva apenas se o fóton caminha em direção à singularidade ($p^r < 0$). O sinal da energia do fóton pode ser positiva ou negativa. Isso porque, no interior do horizonte de eventos, t passa a ser coordenada espacial e E é a componente espacial do 4-momento.

Dessa forma, se o fóton de energia negativa pode adentrar o horizonte de eventos e deslocar-se em direção à singularidade, o seu par de energia positiva pode escapar para o infinito. Vamos tentar determinar a energia deste fóton livre.

Consideremos, para tanto, o movimento desse fóton num referencial em queda livre no exterior do buraco negro. Nesse referencial, localmente plano, as flutuações comportam-se como se não houvesse a curvatura do espaço-tempo. Consideremos que nosso referencial atinge o horizonte, $r = 2M$, partindo do repouso do ponto $r = 2M + \epsilon$. A trajetória desse referencial pode ser descrita pela Eq. (2.8), com momento angular $L = 0$ e energia $\tilde{E}$ dada por

$$\tilde{E} = \left(1 - \frac{2M}{2M + \epsilon}\right)^{1/2} \approx \left(\frac{\epsilon}{2M}\right)^{1/2}. \quad (2.57)$$

Verifique que estamos adotando a notação $\tilde{E}$ para a energia do referencial para não a confundirmos com a energia do fóton.

O tempo necessário para o referencial atingir o horizonte, calculado a partir da Eq. (2.8), é

$$\Delta\tau = - \int_{2M+\epsilon}^{2M} \frac{dr}{\left(\frac{2M}{r} - \frac{2M}{2M+\epsilon}\right)^{1/2}}, \quad (2.58)$$

que, em primeira ordem em ϵ , será

$$\Delta\tau = 2(2M\epsilon)^{1/2}. \quad (2.59)$$

Considerando esse tempo como o tempo de duração da flutuação quântica, podemos calcular a energia do fóton $\mathcal{E}$ por

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\hbar(2M\epsilon)^{-1/2}. \quad (2.60)$$

Essa é a energia do fóton que escapa para o infinito no referencial localmente inercial em queda. Para calcular a energia do fóton quando ele escapa para o infinito, usamos o fato de que sua energia no referencial local é calculada por

$$\mathcal{E} = g^{\mu\nu}p_\mu u_\nu = g^{00}Eu_0, \quad (2.61)$$

onde $u_0 = \tilde{E} \approx (\epsilon/2M)^{1/2}$ e E é a energia conservada do fóton, que ele irá possuir quando alcançar o infinito. Calculando g^{00} em $2M + \epsilon$, teremos

$$E = \mathcal{E} \left(\frac{\epsilon}{2M}\right)^{1/2} = \frac{\hbar}{4M} = \frac{h}{8\pi M}. \quad (2.62)$$

Dessa forma, mostramos que o buraco negro pode emitir fótons com energia $h/8\pi M$, demonstrando, de maneira simplificada, o cálculo da energia de Hawking.

Em realidade, os cálculos desenvolvidos por Hawking utilizando a teoria quântica de campos mostram que os fótons são emitidos pelo buraco negro que possui um espectro semelhante a um corpo negro de temperatura

$$T = \frac{\hbar}{8\pi k_B M}. \quad (2.63)$$

Com isso, a energia dos fótons será

$$E = k_B T = \frac{\hbar}{8\pi M}. \quad (2.64)$$

2.6 Colisão de buracos negros: experimentos LIGO e VIRGO

As ondas gravitacionais são fenômenos previstos pelo próprio Albert Einstein logo após o desenvolvimento da relatividade geral (EINSTEIN, 1916; EINSTEIN, 1918). Desde a década de 1960, alguns experimentos foram montados, com o objetivo de detectar essas ondas, o que levou à construção dos interferômetros a laser LIGO - Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory, localizado nos Estados Unidos, e Virgo, localizado na Itália.

Em 14 de setembro de 2015, os experimentos LIGO e virgo detectaram pela primeira vez as ondas gravitacionais (ABBOTT et al., 2016). Vale destacar que a origem das ondas detectadas foi a colisão de dois buracos negros, formando outro buraco mais massivo e com maior momento angular (ABBOTT et al., 2016). Posteriormente, ondas gravitacionais advindas de outros eventos catastróficos como a explosão de supernova foram detectadas.

Dessa forma, a detecção das ondas gravitacionais representa marco não só na gravitação experimental, mas também na física de buracos negros.

Além disso, as observações de ondas estão sendo utilizadas para restringir ou descartar alguns modelos de gravitação modificada (CREMINELLI; VERNIZZI, 2017; LANGLOIS et al., 2018; SAKSTEIN; JAIN, 2017; BAKER et al., 2017; EZQUIAGA; ZUMALACÁRREGUI, 2017). Dada a atualidade do tema, podemos concluir que é de fundamental importância perserverarmos no estudo de buracos negros com diferentes configurações na relatividade geral e em teorias modificadas de gravitação, como faremos no presente trabalho.

3 Gravitação de Lovelock e buracos negros

Desde o início do século XX, a teoria da relatividade geral vem sendo utilizada de forma bastante precisa para descrever fenômenos gravitacionais em larga escala. Ocorre que, como discutiremos no capítulo 5, modernas observações realizadas nos campos da cosmologia e da astrofísica têm colocado em evidência alguns problemas teóricos, apontando para a existência de energia e matéria escuras. Uma forma de se explicar tais fenômenos sem a necessidade de se considerar fontes extras de energia é através de alterações da relatividade geral (CLIFTON et al., 2012). As teorias assim desenvolvidas são conhecidas como teorias modificadas de gravitação e têm sido largamente estudadas nas últimas décadas (CLIFTON et al., 2012). Algumas dessas teorias alteram a ação de Einstein-Hilbert através da introdução de termos com potências superiores nos tensores de curvatura (NOJIRI; ODINTSOV; OIKONOMOU, 2017).

A gravitação de Lovelock ¹ é uma extensão natural da teoria da relatividade geral para dimensões $D \geq 5$ e que foi derivada na década de 1970 (LOVELOCK, 1971). Ela possui o tensor mais geral que satisfaz as propriedades do tensor de Einstein em espaços-tempo de dimensões superiores (LOVELOCK, 1971; NOJIRI; ODINTSOV; OIKONOMOU, 2017). Além disso, a gravitação de Lovelock pode ser obtida como um limite de baixa energia da teoria de cordas (ZWIEBACH, 1985; GROSS; WITTEN, 1986).

Essa teoria modificada de gravitação possui algumas características desejáveis como, por exemplo, ela satisfaz o critério geral de covariância e suas equações de campo são de segunda ordem de derivada da métrica. Além disso, a gravitação de Lovelock é livre de "fantasmas" (*ghosts*), o que significa que ela não gera naturalmente estados de energia negativa.

Vale lembrar que as ondas gravitacionais foram recentemente observadas e, desde então, vários estudos têm sido realizados no sentido de identificar as características de teorias modificadas de gravitação no que se refere a essas ondas. Esses estudos têm indicado que algumas dessas teorias devem ser descartadas ou devem sofrer restrições. Dentre elas, podemos citar a teoria MOND (Modified Newtonian Dynamics) (RODRIGUES et al., 2018), teorias escalar-tensoriais, galileons, Einstein-Aether, gravitação de Horava, Generalized Proca e teorias tensor-vector-scalar gravity (TEVES) (CREMINELLI; VERNIZZI, 2017; LANGLOIS et al., 2018; SAKSTEIN; JAIN, 2017; BAKER et al., 2017; EZQUIAGA; ZUMALACÁRREGUI, 2017). A gravitação de Lovelock, porém, não figura nessa lista e muitos artigos têm recentemente tratado de aspectos dessa teoria (CRISOSTOMI et al., 2018; FAIROOS; GHOSH; SARKAR, 2018; QAEMMAQAMI, 2018; PAVLUCHENKO,

¹ David Lovelock (1938-). Físico teórico britânico conhecido pela gravitação de Lovelock e pelo teorema de Lovelock.

2018; CHAKRABORTY; DADHICH, 2018), como a existência de similaridade entre ondas gravitacionais geradas na gravitação de Lovelock e na relatividade geral (CHAKRABORTY; DADHICH, 2018).

Como a gravitação de Lovelock não foi descartada, é importante que se estudem seus mais diversos aspectos. Nesse sentido, encontramos na literatura diversos trabalhos devotados à termodinâmica (XU; XU; ZHAO, 2014; DEHGHANI; SHAMIRZAIE, 2005; DEHGHANI; POURHASAN, 2009), expansão de Joule-Thompson (MO; LI, 2018), holografia (FAIROOS; GHOSH; SARKAR, 2018; BOER; KULAXIZI; PARNACHEV, 2010; BOER; KULAXIZI; PARNACHEV, 2011; CAMANHO; EDELSTEIN; SANTOS, 2014) e crescimento complexo de buracos negros em gravitação de Lovelock (CANO; HENNIGAR; MARROCHIO, 2018).

Neste capítulo, iremos estudar algumas aspectos importantes da gravitação de Lovelock. Iniciaremos revisando a matemática por trás da teoria. Abordaremos a chamada gravitação pura de Lovelock e, por fim, trataremos de buracos negros e sua termodinâmica nessa teoria.

3.1 A gravitação de Lovelock

Como já foi afirmado, a gravitação de Lovelock é a mais completa extensão da relatividade geral para dimensões superiores. Em D-dimensões na gravitação de Lovelock, a ação de Einstein-Hilbert é generalizada para (GHOSH et al., 2018; GHOSH; MAHARAJ, 2014)

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_L + \mathcal{I}_M = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} dx^D \sqrt{-g} \mathcal{L} + \mathcal{I}_M \quad (3.1)$$

onde $\mathcal{I}_M$ é a ação relacionada ao conteúdo de matéria-energia e

$$\mathcal{L} = \sum_{p=0}^n \alpha_p \mathcal{L}_p, \quad (3.2)$$

onde α_p são constantes de acoplamento e

$$\mathcal{L}_p = \frac{1}{2^p} \delta_{\alpha_1 \dots \alpha_p \beta_1 \dots \beta_p}^{\mu_1 \dots \mu_p \nu_1 \dots \nu_p} R^{\alpha_1 \beta_1}_{\mu_1 \nu_1} \dots R^{\alpha_p \beta_p}_{\mu_p \nu_p}. \quad (3.3)$$

O delta de Kronecker² generalizado, $\delta_{\alpha_1 \dots \alpha_p \beta_1 \dots \beta_p}^{\mu_1 \dots \mu_p \nu_1 \dots \nu_p}$, é totalmente antissimétrico por troca de índices e pode ser obtido por

² Leopold Kronecker (1823-1891) foi um matemático alemão com importantes contribuições nos campos da álgebra e da teoria dos números.

$$\delta_{\alpha_1 \dots \alpha_p \beta_1 \dots \beta_p}^{\mu_1 \dots \mu_p \nu_1 \dots \nu_p} = \frac{1}{p!} \delta_{[\alpha_1}^{\mu_1} \delta_{\beta_1}^{\nu_1} \dots \delta_{\alpha_p}^{\mu_p} \delta_{\beta_p}^{\nu_p]}. \quad (3.4)$$

Para $\mathcal{L}_1 = R$ e $\alpha_p = 0$, para $p \neq 1$, obtemos a ação de Einstein-Hilbert. Se escolhermos $\alpha_p = 0$, para $p > 3$, obtemos a Lagrangiana da gravitação de Gauss-Bonnet ³. Podemos escolher o valor do parâmetro α_0 de tal modo que $|\alpha_0| = 2\Lambda$, onde Λ é a constante cosmológica. Fixando $n = 3$ na Eq. (3.2), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \alpha_0 + \alpha_1 R + \alpha_2 \left(R^2 + R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu} - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \right) \\ & \alpha_3 \left(R^3 + 3RR_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu} - 12RR_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + 24R^{\alpha\beta\mu\nu} R_{\alpha\mu} R_{\beta\nu} + 16R^{\mu\nu} R_{\nu\alpha} R_{\mu}^{\alpha} \right. \\ & \left. + 24R_{\alpha\beta\rho\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu} R_{\mu}^{\rho} + 8R^{\mu\nu}_{\alpha\rho} R^{\alpha\beta}_{\nu\sigma} R^{\rho\sigma}_{\mu\beta} + 2R_{\alpha\beta\sigma\rho} R^{\alpha\beta\mu\nu} R^{\rho\sigma}_{\mu\nu} \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Sendo o tensor energia-momento obtido por

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{I}_M}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (3.6)$$

chegamos à equação de Einstein generalizada ([DADHICH; HANSRAJ; CHILAMBWE, 2017](#))

$$-\frac{\alpha_0}{2} g_{\mu\nu} + \sum_{p=0}^n \alpha_p G_{\mu\nu}^{(p)} = -\frac{\alpha_0}{2} g_{\mu\nu} + \sum_{p=0}^n \alpha_p \left[p \left(R_{\mu\nu}^{(p)} - \frac{1}{2} R^{(p)} g_{\mu\nu} \right) \right] = T_{\mu\nu}, \quad (3.7)$$

onde $R_{\mu\nu}^{(p)} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu\sigma\rho}^{(p)}$, $R^{(p)} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(p)}$ e ([DADHICH, 2010a](#); [DADHICH; GHOSH; JHINGAN, 2012](#))

$$R_{\mu\nu\sigma\rho}^{(p)} = F_{\mu\nu\sigma\rho}^{(p)} - \frac{p-1}{p(d-1)(d-2)} F^{(n)} (g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma}), \quad (3.8a)$$

$$F_{\mu\nu\sigma\rho}^{(p)} = Q_{\mu\nu}^{\alpha\beta} R_{\sigma\rho\alpha\beta}, \quad (3.8b)$$

$$Q^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta\alpha_1\beta_1\dots\alpha_n\beta_n}^{\mu\nu\mu_1\nu_1\dots\mu_n\nu_n} R_{\alpha_1\beta_1}^{\mu_1\nu_1} \dots R_{\alpha_n\beta_n}^{\mu_n\nu_n}, \quad (3.8c)$$

$$Q_{;\rho}^{\mu\nu\sigma\rho} = 0. \quad (3.8d)$$

Notemos que os coeficientes da Eq. (3.3) são escolhidos de tal forma que a equação generalizada de Einstein da gravitação de Lovelock possui termos que dependem da derivada segunda em relação à métrica, assim como a relatividade geral.

³ Nome dado em homenagem ao físico e matemático alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e ao matemático francês Pierre Ossian Bonnet (1819-1892)

3.2 A gravitação pura de Lovelock

A gravitação de Lovelock é dita pura quando fixamos o valor de p nas equações acima, o que significa que a ação conterá apenas um termo de ordem p no tensor de curvatura. Assim, se considerarmos $p = n$, a equação de campo da gravitação de Lovelock será

$$-\frac{\alpha_0}{2}g_{\mu\nu} + \alpha_n G_{\mu\nu}^{(n)} = -\frac{\alpha_0}{2}g_{\mu\nu} + \alpha_n \left[n \left(R_{\mu\nu}^{(n)} - \frac{1}{2}R^{(n)}g_{\mu\nu} \right) \right] = T_{\mu\nu}. \quad (3.9)$$

A gravitação pura de Lovelock tem algumas propriedades importantes que justificam seu estudo. Em 3 dimensões (2 dimensões espaciais e 1 temporal), a relatividade geral obedece à propriedade cinemática. Ou seja, em $D = 3$, o vácuo é trivial (DADHICH, 2016; DADHICH; GHOSH; JHINGAN, 2012) porque a solução de vácuo é plana. Essa propriedade só é preservada para dimensões críticas ímpares $D = 2n + 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$ na gravitação pura de Lovelock (DADHICH, 2016; DADHICH; GHOSH; JHINGAN, 2012).

Além disso, a gravitação pura de Lovelock preserva a existência de órbitas estáveis ao redor de buracos negros estáticos, conforme previsto na relatividade geral (DADHICH; PONS, 2013; DADHICH; PONS; PRABHU, 2012), e preserva as propriedades das ondas gravitacionais (CHAKRABORTY; DADHICH, 2018).

3.3 Buracos negros na gravitação de Lovelock

Buracos negros surgem em todas as teorias de gravitação e, portanto, são obtidos também na gravitação de Lovelock. Dada a atualidade e a importância do tema, muitas soluções exatas de buracos negros têm sido obtidas nessa teoria modificada de gravitação e suas propriedades têm sido estudadas (BOULWARE; DESER, 1985; WHEELER, 1986; WILTSHIRE, 1986; WHITT, 1988; MYERS; SIMON, 1988; CAI, 2004; GRAIN; BARRAU; KANTI, 2005; CAI; OHTA, 2006; MAEDA, 2006b; NOZAWA; MAEDA, 2006; MAEDA, 2006a; DEHGHANI; FARHANGKHAH, 2008; MAZHARIMOUSAVI; HALILSOY, 2009; HERSCOVICH; RICHARTE, 2010; MAEDA; WILLISON; RAY, 2011; GHOSH, 2011; CAMANHO; EDELSTEIN, 2013; DADHICH; PONS; PRABHU, 2013; GHOSH; PAPNOI; MAHARAJ, 2014; GHOSH; MAHARAJ, 2014; LEE; BABOOLAL; GHOSH, 2015; HENNIGAR; TJOA; MANN, 2017; HENNIGAR; MANN; TJOA, 2017; GHOSH; AMIR; MAHARAJ, 2017; GHOSH et al., 2018; CVETKOVIĆ; SIMIĆ, 2018; GARRAFFO; GIRIBET, 2008). Em especial, algumas soluções que descrevem buracos negros na gravitação de Lovelock foram obtidas quando se considerou um universo preenchido com com nuvem de cordas (HERSCOVICH; RICHARTE, 2010; GHOSH; PAPNOI; MAHARAJ, 2014; LEE; BABOOLAL; GHOSH, 2015) ou quintessência (GHOSH et al., 2018; GHOSH; AMIR; MAHARAJ, 2017).

Nesta seção iremos realizar uma breve revisão das soluções de buraco negro estático na gravitação de Lovelock. Nas partes seguintes do presente trabalho, iremos utilizar o procedimento a seguir descrito para obtermos soluções relativas a buracos negros imersos em quintessência e/ou nuvem de cordas em gravitação de Lovelock.

Iniciemos considerando que o espaço-tempo correspondente a um buraco negro estático de massa M em D -dimensões tem seu elemento de linha escrito na forma

$$ds^2 = f(r)dt^2 - \frac{1}{f(r)}dr^2 - r^2 d\Omega_{D-2}^2. \quad (3.10)$$

Na gravitação de Lovelock, podemos assumir que (CAI, 2004; MYERS; SIMON, 1988; GHOSH et al., 2018)

$$f(r) = \kappa - r^2 F(r), \quad (3.11)$$

onde κ é uma constante e $F(r)$, para o caso em comento, é a solução da equação polinomial

$$P(F) = \sum_{p=0}^m \tilde{\alpha}_p F^p = \frac{16\pi M}{(D-2)\Sigma_{D-2}r^{D-1}}, \quad (3.12)$$

sendo

$$\tilde{\alpha}_0 = \frac{\alpha_0}{(D-1)(D-2)}, \quad (3.13a)$$

$$\tilde{\alpha}_1 = 1, \quad (3.13b)$$

$$\tilde{\alpha}_p = \prod_{i=3}^{2p} (D-i)\alpha_p, \quad p > 1 \quad (3.13c)$$

e Σ_{D-2} é o volume de uma esfera $(D-2)$ -dimensional com raio unitário tal que

$$\Sigma_{D-2} = \frac{2\pi^{(D-1)/2}}{\Gamma[(D-1)/2]}. \quad (3.14)$$

A métrica dada pela Eq. (3.10), considerada em conjunto com as Eqs. (3.11)-(3.14), corresponde à solução de buraco negro estático na gravitação de Lovelock. Em 4 dimensões, se escolhermos $\kappa = 1$, $\alpha_0 = 0$ e $\alpha_p = 0$ para $p \geq 2$, chegamos ao resultado

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r}, \quad (3.15)$$

o que corresponde à solução de Schwarzschild. Em outras palavras, a relatividade geral é obtida como caso especial da gravitação de Lovelock, como já esperávamos.

3.3.1 Termodinâmica

Iremos realizar uma breve revisão da termodinâmica de buracos negros na gravitação de Lovelock. Assim, partindo da métrica dada pela Eq. (3.10), os horizontes do buraco negro, cuja coordenada radial é r_h , serão obtidos através da equação $f(r_h) = 0$. A partir da Eq. (3.11), obtemos a relação

$$r_h^2 = \frac{\kappa}{F(r_h)}. \quad (3.16)$$

Note que, quando $\kappa = 0$, devemos ter $r_h = 0$ ou $F(r_h) = 0$. O primeiro caso corresponde à situação em que o horizonte do buraco negro coincide com sua singularidade física.

Em função do horizonte de eventos, a massa do buraco negro pode ser escrita na forma (CAI, 2004; MYERS; SIMON, 1988)

$$M = \frac{(D-2)\Sigma_{D-2}r_h^{D-1}}{16\pi} \sum_{p=0}^n \tilde{\alpha}_p F^p(r_h) = \frac{(D-2)\Sigma_{D-2}r_h^{D-1}}{16\pi} \sum_{p=0}^n \tilde{\alpha}_p (\kappa r_h^{-2})^p. \quad (3.17)$$

No caso em que $\kappa = 0$, teremos

$$M_{\kappa=0} = \frac{(D-2)\Sigma_{D-2}r_h^{D-1}}{16\pi} \tilde{\alpha}_0. \quad (3.18)$$

Por seu turno, a temperatura Hawking será calculada através da relação (CAI, 2004; MYERS; SIMON, 1988)

$$T = \frac{1}{4\pi} f'(r)|_{r=r_h} = \frac{\sum_{p=0}^n (D-2p-1) \tilde{\alpha}_p \kappa (\kappa r_h^{-2})^{p-1}}{4\pi r \sum_{p=0}^n p \tilde{\alpha}_p (\kappa r_h^{-2})^{p-1}}, \quad (3.19)$$

que, quando $\kappa = 0$, reduz-se a

$$T_{\kappa=0} = \frac{(D-1)\tilde{\alpha}_0}{4\pi} r_h. \quad (3.20)$$

Outra importante grandeza termodinâmica associada ao horizonte de eventos e que será analisada nos capítulos que seguem é a entropia. Como já vimos, os buracos negros comportam-se como sistemas que seguem a primeira lei da termodinâmica. A partir dela, podemos escrever

$$S = \int \frac{1}{T} dM = \int \frac{1}{T} \frac{\partial M}{\partial r_h} dr_h. \quad (3.21)$$

Utilizando as Eqs. (3.17) e (3.19), obtemos (CAI, 2004)

$$S = \frac{\Sigma_D r_h^{D-2}}{4} \sum_{p=1}^n \frac{p(D-2)}{D-2n} \tilde{\alpha}_p (\kappa r_h^{-2})^{p-1}. \quad (3.22)$$

Perceba-se que na gravitação de Lovelock em dimensões superiores a entropia nem sempre segue a lei das áreas. Se tomarmos, mais uma vez, o caso especial $\kappa = 0$, teremos

$$S_{\kappa=0} = \frac{\Sigma_D r_h^{D-2}}{4}. \quad (3.23)$$

Note-se que, nesse caso, a entropia obedecerá a lei das áreas independentemente do valor adotado para D .

As grandezas termodinâmicas obtidas nessa seção serão extensamente estudadas nos capítulos posteriores.

Parte II

Generalidades: Método de Newman-Janis,
energia escura e efeito Casimir gravitacional

4 O método de Newman-Janis

Em 1965, E. T. Newman ¹ e A. I. Janis ² obtiveram de forma alternativa a solução de Kerr para o buraco negro em rotação (NEWMAN; JANIS, 1965). Como afirmaram os autores, a métrica foi obtida através de um método curioso de transformação complexa de coordenadas da métrica de Scharzschild. O algoritmo criado pelos autores ficou conhecido como método de Newman-Janis. Ainda em 1965, foi obtida a métrica do buraco negro girante e carregado, conhecida como solução de Reissner-Nordström, através da aplicação do método (NEWMAN et al., 1965).

Ocorre que o método tem sido criticado (SZEKERES, 1998; FLAHERTY, 1976) já que, em uma de suas etapas (complexificação), há uma arbitrariedade intrínseca nas escolhas tomadas, de forma que há a possibilidade de geração de mais de uma métrica estacionária associada a uma única métrica estática.

A seguir, iremos revisar o algoritmo, aplicando-o para a obtenção da métrica de Kerr-Newman. Discutiremos as dificuldades a ele associadas e, por fim, trataremos do algoritmo modificado de forma a evitar a etapa de complexificação (AZREG-AÏNOU, 2014).

4.1 O algoritmo e um exemplo de sua aplicação

O método de Newman-Janis permite a obtenção de solução de buraco negro em rotação através da aplicação de cinco passos, como a seguir descrito. Para o caso em análise, consideremos a métrica de Reissner-Nordström dada pela Eq. (2.35).

1. Escreve-se a métrica em coordenadas de Eddington-Finkelstein (EF), (u, r, θ, ϕ) . Fazemos, portanto, a transformação de coordenadas

$$du = dt - \frac{dr}{\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)}. \quad (4.1)$$

Por conseguinte, obtemos

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) du^2 - 2dudr - r^2 d\Omega^2. \quad (4.2)$$

2. Determina-se base de tetradas nulas capazes de representar a métrica:

¹ Ezra Ted Newman (1929 -) é um físico estadunidense com importantes contribuições no campo da gravitação.

² Allen Janis é um físico estadunidense com importantes contribuições no campo da gravitação.

$$g^{\mu\nu} = l^\mu n^\nu + l^\nu n^\mu - m^\mu \bar{m}^\nu - m^\nu \bar{m}^\mu \quad (4.3)$$

onde l e n são reais e $\bar{m}$ é o complexo conjugado de m . Além disso, temos que $l_\mu l^\nu = m_\mu m^\mu = n_\nu n^\nu = 0$, $l_\mu m^\mu = n_\mu m^\mu = 0$ e $l_\mu n^\mu = -m_\mu \bar{m}^\mu = 0$.

Para o caso em estudo, podemos adotar

$$l^\mu = \delta_1^\mu \quad (4.4)$$

$$n^\mu = \delta_0^\mu - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) \delta_1^\mu \quad (4.5)$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r} \left(\delta_2^\mu + \frac{i}{\sin\theta} \delta_3^\mu \right) \quad (4.6)$$

3. O terceiro passo consiste em complexificar a coordenada r na base de tetradas, de modo a manter l e n reais. Além disso, é necessário que a transformação retome as tetradas originais quando fazemos $r = \bar{r}$.

Esta etapa do algoritmo possui certa discricionariade, já que há difentes formas de se realizar a complexificação de modo a satisfazer as condições anteriores. Não há, na literatura, forma matematicamente correta e universalmente aplicável para realização dessa complexificação nos termos dependentes de r .

Para os termos em r da métrica considerada, utilizaremos as complexificações canônicas, já utilizadas desde os trabalhos de Newman e Janis (NEWMAN; JANIS, 1965; NEWMAN et al., 1965)

$$\begin{aligned} \frac{2}{r} &\rightarrow \frac{1}{r} + \frac{1}{\bar{r}}, \\ r^2 &\rightarrow r\bar{r}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

4. Realiza-se a transformação de coordenadas

$$r \rightarrow r + i a \cos\theta, \quad u \rightarrow u - i a \cos\theta. \quad (4.8)$$

Com isso, teremos as tetradas

$$l^\mu = \delta_1^\mu, \quad (4.9)$$

$$n^\mu = \delta_0^\mu - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma} + \frac{Q^2}{\Sigma} \right) \delta_1^\mu, \quad (4.10)$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}(r + ia \cos \theta)} \left(ia(\delta_0^\mu - \delta_1^\mu) \sin \theta + \delta_2^\mu + \frac{i}{\sin \theta} \delta_3^\mu \right), \quad (4.11)$$

onde

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta. \quad (4.12)$$

5. Por fim, a partir da métrica obtida em coordenadas de Eddington-Finkelstein, é realizada nova transformação para obtermos a métrica do buraco negro estacionário com carga elétrica nas coordenadas de Boyer-Lindquist. Com isso, temos,

$$\begin{aligned} ds^2 = & -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 \\ & - 2a \sin^2 \theta \left(1 - \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) dt d\phi - \Sigma d\theta^2 \\ & + \sin^2 \theta \left[\Sigma + a^2 \sin^2 \theta \left(2 - \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \right] d\phi^2, \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde

$$\Delta = r^2 + a^2 + Q^2 - 2Mr. \quad (4.14)$$

A métrica (4.13) é conhecida como solução de Kerr-Newman e representa a geometria do espaço-tempo de um buraco negro carregado em rotação. Se fizermos $Q = 0$, recobramos a métrica de Kerr, representada na Eq. (2.38).

4.2 Os problemas da complexificação

O método de Newman-Janis, como vimos, permite que obtenhamos uma solução axissimétrica para um buraco negro, a partir de uma solução estática e esfericamente simétrica. O algoritmo, entretanto, não determina como realizar a etapa de complexificação (BAMBI; MODESTO, 2013; AZREG-AÏNOU, 2014). Logo, não há uma única forma de se realizar a complexificação e, por conseguinte, é possível que uma mesma métrica estática gere mais de uma métrica estacionária (BAMBI; MODESTO, 2013; AZREG-AÏNOU, 2014).

Podemos destacar ainda que o método de Newman-Janis não é uma forma de se obter uma solução para as equações de Einstein. Em outras palavras, não sabemos

o comportamento do conteúdo de matéria-energia para obtermos a métrica resultante. Pelo contrário, obtendo-se a métrica através do algoritmo é que se calcula o tensor energia-momento.

4.3 Método de Newman-Janis sem complexificação

Na tentativa de contornar os problemas que surgem com a complexificação, Azreg-Aïnou ([AZREG-AÏNOU, 2014](#)) propôs uma variação do método de Newman-Janis. O novo algoritmo é capaz de gerar soluções estacionárias regulares com base em argumentos físicos e de propriedades de simetria ([AZREG-AÏNOU, 2014](#)). Nesta seção, iremos apresentar uma rápida revisão do algoritmo, estabelecendo um paralelo com aquele desenvolvido por Newman e Janis ([NEWMAN; JANIS, 1965](#); [NEWMAN et al., 1965](#)).

Preliminarmente, consideremos a seguinte métrica estática

$$ds^2 = f(r)dt^2 - \frac{1}{g(r)}dr^2 - h^2d\Omega^2, \quad (4.15)$$

onde $f(r) = g(r) = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)$. Então realizamos a transformação

$$du = dt - \frac{dr}{\sqrt{fg}} \quad (4.16)$$

e escrevemos a Eq. (4.15) nas coordenadas de Eddington-Finkelstein (EF) ([AZREG-AÏNOU, 2014](#); [TOSHMATOV; STUCHLÍK; AHMEDOV, 2017b](#)):

$$ds^2 = fdu^2 - \sqrt{\frac{f}{g}}dudr - h^2d\Omega^2. \quad (4.17)$$

Adotamos as tetradas nulas dadas por

$$\begin{aligned} l^\mu &= \delta_1^\mu, & n^\mu &= \sqrt{\frac{g}{f}}\delta_0^\mu - \frac{f}{2}\delta_1^\mu, \\ m^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}h} \left(\delta_2^\mu + \frac{i}{\sin\theta}\delta_3^\mu \right), & \bar{m}^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}h} \left(\delta_2^\mu - \frac{i}{\sin\theta}\delta_3^\mu \right). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Nesse ponto, fazemos as transformações $u \rightarrow u - ia \cos \theta$ e $r \rightarrow r - ia \cos \theta$. Também adotamos as mudanças $f(r) \rightarrow F(r, a, \theta)$, $g(r) \rightarrow G(r, a, \theta)$ e $h \rightarrow \Sigma(r, a, \theta)$. Assim, as tetradas nulas assumem a forma ([AZREG-AÏNOU, 2014](#); [TOSHMATOV; STUCHLÍK; AHMEDOV, 2017b](#))

$$l^\mu = \delta_1^\mu, \quad m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}\Sigma} \left[\delta_2^\mu + ia \sin\theta (\delta_0^\mu - \delta_1^\mu) + \frac{i}{\sin\theta} \delta_3^\mu \right]$$

$$n^\mu = \sqrt{\frac{G}{f}}\delta_0^\mu - \frac{F}{2}\delta_1^\mu, \quad \bar{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2\Sigma}} \left[\delta_2^\mu - i a \sin\theta (\delta_0^\mu - \delta_1^\mu) - \frac{i}{\sin\theta} \delta_3^\mu \right]. \quad (4.19)$$

As componentes da nova métrica nas coordenadas de Eddington-Finkelstein serão

$$\begin{aligned} g_{00} &= -F, \\ g_{01} &= g_{10} = -\sqrt{\frac{G}{F}}, \\ g_{22} &= \Sigma^2, \\ g_{33} &= \sin^2\theta \left[\Sigma^2 + a^2 \left(2\sqrt{\frac{F}{G}} - F \right) \sin^2\theta \right], \\ g_{03} &= g_{30} = a \left(F - \sqrt{\frac{F}{G}} \right) \sin^2\theta, \\ g_{13} &= g_{31} = a \sin^2\theta \sqrt{\frac{F}{G}}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Por fim, escrevemos a métrica nas coordenadas de Boyer-Lindquist realizando a transformação

$$du \rightarrow dt + \lambda(r)dr, \quad d\phi \rightarrow d\phi + \chi(r)dr, \quad (4.21)$$

onde

$$\lambda = -\frac{k(r) + a^2}{g(r)h(r) + a^2}, \quad \chi(r) = -\frac{a}{g(r)h(r) + a^2}, \quad k(r) = \sqrt{\frac{g(r)}{f(r)}}h(r) \quad (4.22)$$

foram escolhidos de forma que as componentes não diagonais da métrica são nulas, com a exceção de g_{03} e g_{30} . Podemos ainda escrever

$$\begin{aligned} F(r, \theta) &= \frac{(gha^2 \cos^2 \theta)}{(k + a^2 \cos^2 \theta)^2}, \\ G(r, \theta) &= \frac{gh + a^2 \cos^2 \theta}{\Sigma}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

sendo Σ dado pela Eq. (4.12). No caso em consideração, $f(r) = g(r)$, $h(r) = r^2$ e $k(r) = h(r)$. Por fim, obtemos a métrica dada pela Eq. (4.13).

Note que o método de Newman-Janis com as modificações implementadas por Azreg-Aïnou leva à mesma métrica estacionária correspondente ao buraco negro de Kerr-Newman já conhecida na literatura (NEWMAN et al., 1965). Além disso, embora se afirme

que, no novo formato, o algoritmo dispense a etapa de complexificação, há liberdade nas escolhas feitas na Eq. (4.22). Ou seja, a ausência de complexificação não torna o método imune aos problemas elencados na seção anterior.

5 Energia escura

No final da década de 1990, a observação de Supernovas Tipo Ia (SN Ia) levou à conclusão de que o universo se encontra num atual estágio de expansão acelerada (PERLMUTTER et al., 1999; RIESS et al., 1998; RIESS et al., 1999). Esses resultados levaram a uma importante mudança nos estudos de cosmologia, já que o universo não apenas está em expansão (algo sabido desde as observações de Edwin Hubble¹ na década de 1920), mas se expande de maneira acelerada (CALDWELL, 2000).

Dessa forma, para que seja possível explicar esse fato, é necessário se introduzir um tipo de energia que provoca uma pressão negativa e que ficou conhecida na literatura como energia escura, sendo responsável por cerca de 70 % do conteúdo de matéria-energia do universo (CALDWELL, 2000; SELJAK et al., 2005). Diversos modelos teóricos foram criados para se explicar essa energia escura. Um deles é o modelo de constante cosmológica (CALDWELL, 2000; LIMA, 2004), que havia sido introduzida pelo próprio Albert Einstein na tentativa de criar teoricamente um universo estático. Na visão contemporânea, a constante cosmológica é homogênea, possuindo o mesmo valor em qualquer região do universo, produz o efeito de sua expansão e tem sua origem associada à energia de vácuo.

Outro modelo para energia escura que tem sido extensamente estudado é o de quintessência (DOLGOV, 1985; ÖZER; TAHA, 1986; WEISS, 1987; PEEBLES; RATRA, 1988; CALDWELL; DAVE; STEINHARDT, 1998; STEINHARDT; WANG; ZLATEV, 1999; WANG et al., 2000; TSUJIKAWA, 2013), que é descrito por um campo escalar livre de fantasmas (TSUJIKAWA, 2013).

Neste capítulo, iremos discorrer sobre a constante cosmológica e sobre a quintessência, dada a fundamental importância desses dois modelos na física contemporânea.

5.1 Universo homogêneo e isotrópico

A métrica de Friedman-Robertson-Walker (FRW)² é obtida assumindo-se que o universo é homogêneo e isotrópico e pode ser escrita na forma (WEINBERG, 1972; COPELAND; SAMI; TSUJIKAWA, 2006)

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (5.1)$$

¹ Edwin Powell Hubble (1889-1953). Astrônomo norte-americano.

² Modelo desenvolvido pelo físico russo Alexander Friedman (1888-1925), pelo físico americano Howard Percy Robertson (1903-1961) e pelo matemático inglês Arthur Geoffrey Walker (1909-2001).

onde $a(t)$ é um fator de escala e K descreve a geometria da parte espacial da métrica, assumindo os valores -1 , 0 e $+1$, respectivamente, para um universo aberto, plano e fechado.

Considerando que um fluido perfeito, cujo tensor energia-momento é dado por $T^\mu_\nu = \text{Diag}(\rho, -p, -p, -p)$, permeia o universo, as equações de Einstein nos levam às equações

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{K}{a^2}, \quad (5.2)$$

$$\dot{H} = -4\pi G(p + \rho) + \frac{K}{a^2}, \quad (5.3)$$

onde o ponto representa derivada em relação ao tempo cosmológico t e $H = \dot{a}/a$ é o parâmetro de Hubble. A partir das identidade de Bianchi, obtemos a equação de continuidade

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (5.4)$$

que também pode ser obtida das Eqs. (5.2) e (5.3). Eliminando o termo em K/a^2 nas Eqs. (5.2) e (5.3), teremos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (5.5)$$

Percebemos, então, que para que haja uma expansão acelerada do universo $\ddot{a}/a > 0$, é necessário que $\rho > 3p$, ou, em outras palavras, que $\omega < -1/3$ na equação de estado $p = \omega\rho$.

A Eq. (5.2) pode ser escrita na forma

$$\Omega - \frac{K}{a^2 H^2} = 1, \quad (5.6)$$

onde

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{8\pi G\rho}{3H^2} \quad (5.7)$$

e $\rho_c = 3H^2/8\pi G$ é uma densidade crítica. Verifica-se, assim, que a distribuição de matéria-energia no universo determina sua geometria de modo que (WEINBERG, 1972; COPELAND; SAMI; TSUJIKAWA, 2006)

$$\Omega < 1 \quad \text{ou} \quad \rho < \rho_c \rightarrow K = -1, \quad (5.8a)$$

$$\Omega = 1 \quad \text{ou} \quad \rho = \rho_c \rightarrow K = 0, \quad (5.8b)$$

$$\Omega > 1 \quad \text{ou} \quad \rho > \rho_c \rightarrow K = +1. \quad (5.8c)$$

$$(5.8d)$$

Observações recentes têm mostrado que o universo é plano, ou seja, $K = 0$ e $\Omega = 1$. Verifique-se ainda que a grandeza Ω é obtida da soma dos valores relativos aos tipos de matéria-energia que permeiam o universo, na medida de sua proporção.

Resolvendo as equações (5.2) e (5.3) para um fluido ideal com $K = 0$, teremos (COPELAND; SAMI; TSUJIKAWA, 2006)

$$H = \frac{2}{3(\omega + 1)(t - t_0)}, \quad (5.9)$$

$$a(t) \propto (t - t_0)^{\frac{2}{3(\omega+1)}} \quad (5.10)$$

$$\rho \propto a^{-3(\omega+1)}, \quad (5.11)$$

sendo t_0 uma constante. Assim, por exemplo, para matéria incoerente (poeira), temos que a equação de estado do fluido ideal é obedecida para $\omega = 0$ e, por consequência, $a(t) \propto (t - t_0)^{2/3}$. Já no caso de um universo dominado por radiação, $\omega = 1/3$ e, portanto, $a(t) \propto (t - t_0)^{1/2}$. Em ambos os casos, a expansão do universo é desacelerada.

5.2 Constante cosmológica

As equações de campo da relatividade geral, que estabelecem uma relação entre conteúdo de matéria e energia à geometria do espaço-tempo, foram modificadas pelo próprio Albert Einstein para conter uma constante cosmológica. Com o objetivo de permitir a existência de um universo estático, Einstein acrescentou a essa equação um termo proporcional à métrica, obtendo a equação de campo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (5.12)$$

onde Λ é uma constante de proporcionalidade conhecida como constante cosmológica. Como a derivada covariante da métrica é nula ($\nabla_\alpha g^{\mu\nu} = 0$), o acréscimo do termo contendo a constante cosmológica não altera a conservação de energia. Em outras palavras, $\nabla_\alpha T^{\mu\nu} = 0$.

Com a descoberta da expansão do universo por Hubble através da verificação do desvio para o vermelho de radiação emitida por estrelas distantes, a constante cosmológica foi abandonada e voltou a ser levada em conta com as observações de supernova no fins dos anos 1990.

Supondo-se um universo homogêneo e isotrópico plano ($K = 0$) com constante cosmológica e com a métrica de FRW, as equações de Einstein (5.12) levam a

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (5.13)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (5.14)$$

A Eq. (5.13) pode ser escrita na forma

$$\Omega = \Omega_m + \Omega_\Lambda = 1, \quad (5.15)$$

onde $\Omega_\Lambda = \Lambda/3H^2$. Se o universo tiver uma composição mais complexa, podemos acrescentar fatores na Eq. (5.15). Assim, havendo radiação, neutrinos, matéria incoerente e constante cosmológica, temos $\Omega = \Omega_r + \Omega_n + \Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$. Atualmente, observações têm mostrado que $\Omega_\Lambda \approx 0,7$ (SELJAK et al., 2005).

Se introduzirmos, nas Eqs. (5.13) e (5.14), a densidade de energia e a pressão modificadas dadas por (COPELAND; SAMI; TSUJIKAWA, 2006)

$$\tilde{\rho} = \rho + \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad \tilde{p} = p - \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad (5.16)$$

recuperamos as Eqs. (5.2) e (5.5). Dessa forma, podemos entender a constante cosmológica como um fluido de equação de estado

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda. \quad (5.17)$$

A forma mais natural de se explicar a origem da energia associada à constante cosmológica é considerar que a energia escura surge como uma densidade de energia de vácuo. Ocorre que, se a constante cosmológica tem essa origem, a ordem de grandeza da sua energia deveria ser bem maior do que tem sido observado (da ordem do parâmetro de Hubble atual), o que é conhecido como "problema da constante cosmológica" (WEINBERG, 1989).

De toda forma, é fundamental que exploremos as propriedades da constante cosmológica e sua influência em buracos negros, dada sua importância na física contemporânea e o fato de que ela possui consequências importantes também na escala astrofísica (STUHLÍK, 2005).

5.3 Quintessência

As teorias de campo escalar constituem outra forma de se obter teoricamente um modelo correspondente à energia escura. Dentre essas tentativas, podemos citar a quintessência, os phantoms, a K-essência, tachyons, condensados fantasmas e energia escura dilatônica (COPELAND; SAMI; TSUJIKAWA, 2006).

O modelo de quintessência (DOLGOV, 1985; ÖZER; TAHA, 1986; WEISS, 1987; PEEBLES; RATRA, 1988; CALDWELL; DAVE; STEINHARDT, 1998) é especialmente bem-sucedido, já que ele é livre de fantasmas e não leva a instabilidades no Laplaciano (TSUJIKAWA, 2013).

A quintessência consiste em um campo escalar canônico Φ minimamente acoplado com a gravidade tal que sua ação é dada por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - V(\Phi) \right], \quad (5.18)$$

onde $V(\Phi)$ é a densidade de energia potencial associada ao campo. A variação suave de $V(\Phi)$ leva a uma expansão acelerada do universo (TSUJIKAWA, 2013).

O tensor energia-momentum associado a esse campo escalar é

$$\rho_q = T^0_0 = \frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 + V(\Phi), \quad p_q = -T^i_i = \frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 - V(\Phi). \quad (5.19)$$

O efeito da constante cosmológica é obtido quando Φ varia muito lentamente com relação ao tempo, de tal modo que podemos considerar $\dot{\Phi} \approx 0$. Nesse caso, teremos, $P_q \approx -\rho_q$. Já o modelo inflacionário é retomado quando fazemos Φ variar rapidamente no universo original.

Com o tensor energia-momento dado pela Eq. (5.19) e utilizando as equações de campo da relatividade geral com a métrica de FRW, obtemos as equações

$$H^2 = \frac{8\pi G \rho_q}{3} = \frac{8\pi G}{3} \left[\frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 + V(\Phi) \right], \quad (5.20)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho_q + 3p_q) = -\frac{8\pi G}{3} [\dot{\Phi}^2 - V(\Phi)]. \quad (5.21)$$

Além disso, teremos ainda a equação da continuidade

$$\ddot{\Phi} + 3H\dot{\Phi} + \frac{dV}{d\Phi} = 0. \quad (5.22)$$

As grandezas p_q e ρ_q podem ser relacionados através da equação de estado

$$P_q = \omega_q \rho_q, \quad (5.23)$$

de modo que

$$\omega_q = \frac{\frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 - V(\Phi)}{\frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 + V(\Phi)}. \quad (5.24)$$

Para que seja possível a expansão acelerada do universo tal como observada, é necessário que o parâmetro ω_q tenha seus valores restritos ao intervalo $(-1, -1/3)$ (TSUJIKAWA, 2013).

5.3.1 Buracos negros e quintessência

A existência de energia escura permeando todo o universo provoca efeitos nos objetos de escala astronômica. Mesmo que essa energia seja constituída de partículas que não interagem, ou interagem fracamente, por meio de força eletromagnética, fraca ou forte, ela possui associada a si um conteúdo de energia que altera a geometria do espaço-tempo. Por exemplo, a energia escura pode defletir a luz proveniente de estrelas distantes (LIU; LU; GUI, 2009). Dessa forma, é fundamental entender a influência da energia escura nas propriedades de objetos como buracos negros.

Como focaremos, nesta tese, no modelo de quintessência, iremos discorrer sobre as soluções de buraco negro imersos nesse tipo de fluido.

Recentemente, foi obtida a solução de um buraco negro estático e esfericamente simétrico imerso em quintessência, cujo tensor energia-momento é dado por (KISELEV, 2003)

$$T_t^t = T_r^r = \rho_q, \quad (5.25)$$

$$T_\theta^\theta = T_\phi^\phi = -\frac{1}{2}\rho_q(3\omega_q + 1), \quad (5.26)$$

onde a pressão e a densidade de energia associados à quintessência são relacionados pela Eq. (5.23).

Tomando esse conteúdo de matéria-energia e a simetria do buraco negro em estudo, a métrica do espaço-tempo tem a forma da Eq. (2.25), sendo que $\nu = \nu(r)$ e $\lambda = \lambda(r)$ são funções da coordenada radial. Com isso, as equações de Einstein levam a (KISELEV, 2003)

$$-e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} = 2\rho_q, \quad (5.27)$$

$$-e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} = 2\rho_q, \quad (5.28)$$

$$\frac{1}{2}e^{-\lambda} \left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2} \right) = \rho_q(3\omega_q + 1). \quad (5.29)$$

Levando em consideração essas equações e a simetria do problema, podemos assumir que $\lambda = -\nu$ sem perda de generalidade (KISELEV, 2003). Então, fazendo a substituição $\lambda = -\ln(1 + f(r))$, as Eqs. (5.27)-(5.29) reduzem-se a

$$(3\omega_q + 1)f + 3(\omega_q + 1)rf' + r^2f'' = 0, \quad (5.30)$$

que é uma equação diferencial homogênea de Euler, cuja solução geral é dada por (KISELEV, 2003)

$$f(r) = -\frac{2M}{r} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}}, \quad (5.31)$$

onde α e M são constantes. Com esta solução, a métrica do espaço-tempo será

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}} \right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (5.32)$$

Essa métrica corresponde à de um buraco negro estático com massa M , imerso em quintessência, cuja densidade, ρ_q , é dada por

$$\rho_q = -\frac{\alpha}{2} \frac{3\omega_q}{r^{3(\omega_q+1)}}. \quad (5.33)$$

O parâmetro α assume valores positivos e, quando $\alpha = 0$, obtemos a solução de Schwarzschild (KISELEV, 2003).

Se acrescentarmos carga elétrica Q ao buraco negro, a métrica correspondente será

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}} \right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (5.34)$$

Vale citar que também foram obtidas métricas correspondentes a buracos negros em rotação com quintessência (GHOSH, 2016; TOSHMATOV; STUHLÍK; AHMEDOV, 2017b) e estas serão analisadas no capítulo 10.

A métrica derivada nesta seção tem sido muito estudada na literatura, embora não seja livre de problemas que merecem uma detida discussão. Podemos citar, por exemplo, a não homogeneidade da métrica se considerarmos o caso em que não há buraco negro, $M = 0$, ao contrário do que deveríamos esperar em modelos cosmológicos.

6 Efeito Casimir e gravitação

Na década de 1940, Hendrik Casimir¹ propôs a existência de uma força de atração entre duas placas metálicas paralelas no vácuo (CASIMIR, 1948). Já que, de acordo com a eletrodinâmica clássica, não há força entre essas placas, esse fenômeno tem origem quântica, e é resultante de oscilações da energia de vácuo (energia de ponto zero) do campo eletromagnético quando da existência dessas barreiras físicas (ELIZALDE, 1994).

O efeito Casimir pode ocorrer, a princípio, para todos os tipos de campos quânticos. Ele também pode ocorrer para diferentes tipos de fronteiras, como fronteiras esféricas (BORDAG et al., 1997; ELIZALDE; BORDAG; KIRSTEN, 1998), e em espaço vazio com topologia não Euclidiana (DEWITT, 1975; FORD, 1975; DOWKER; CRITCHLEY, 1976; FORD, 1976). Nesse sentido, muitos trabalhos se dedicaram a estudar o efeito Casimir, com $T = 0$ e $T \neq 0$, em modelos cosmológicos com esse tipo de topologia (ZHUK; KLEINERT, 1996).

Os primeiros experimentos que objetivaram medir a intensidade da força de Casimir foram realizados nas décadas de 1950 e 1970 (SPARNAAY, 1958; BLOKLAND; OVERBEEK, 1978) e apresentavam, entretanto, erros experimentais muito elevados. Em consequência, experimentos mais recentes foram realizados e forneceram evidência segura com alta precisão da existência do efeito (LAMOREAUX, 1997; MOHIDEEN; ROY, 1998).

Recentemente, muitos autores têm considerado os efeitos de campos gravitacionais na energia de Casimir de uma cavidade fechada (SETARE, 2001; CALLONI et al., 2002; SORGE, 2005; MUNIZ; BEZERRA; CUNHA, 2015; SORGE, 2014), bem como em flutuações quânticas de vácuo produzidas em topologia não Euclidiana (DOWKER, 1978; ALTAIE; DOWKER, 1978; BAYIN; ÖZCAN, 1993; KARIM; BOKHARI; AHMEDOV, 2000; SETARE; MANSOURI, 2001; ELIZALDE et al., 2003; SAHARIAN; SETARE, 2010; BEZERRA et al., 2011a; BEZERRA et al., 2011b; MILTON; SAHARIAN, 2012). Outro importante resultado que merece ser destacado é o fato de que a energia de Casimir gravita, como requerido pelo princípio da equivalência (FULLING et al., 2007; MILTON et al., 2014).

Cumpramos mencionar, ainda, que o efeito Casimir pode também ser produzido por um campo gravitacional no vácuo, num espaço-tempo de plano (QUACH, 2015). Em especial, a pressão de Casimir pode indicar a existência do graviton, abrindo uma linha de estudo e detecção desse tipo de partícula (QUACH, 2015).

Por todo o exposto, podemos concluir que o efeito Casimir é um fenômeno importante não só no estudo da teoria quântica de campos, como também pode trazer

¹ Hendrik Brugt Gerhard Casimir (1909-2000), físico Holandês nascido em Haia.

à tona aspectos fundamentais da gravitação. Por esse motivo, neste trabalho, iremos utilizar o efeito como forma de diferenciar duas métricas distintas obtidas pelo método de Newman-Janis e correspondentes à mesma configuração de matéria-energia. Ademais, aplicaremos o método para compararmos um buraco negro na gravitação de Lovelock e na relatividade geral.

A seguir, com o objetivo de apresentarmos os aspectos básicos do efeito Casimir, iremos reproduzir cálculos da energia e da força de Casimir para um campo escalar em um intervalo finito num espaço-tempo bidimensional (BORDAG et al., 2009).

6.1 Efeito Casimir para um campo escalar definido em um intervalo finito num espaço-tempo bidimensional

Consideremos, inicialmente, um campo escalar real $\phi(t, x)$ de massa μ definido no intervalo $0 < x < a$, e que obedece à condição

$$\phi(t, 0) = \phi(t, a) = 0. \quad (6.1)$$

Sabemos que o comportamento de um campo escalar é descrito pela equação de Klein-Gordon, que, no espaço-tempo bidimensional, é dada por

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\mu^2 c^2}{\hbar^2} \phi = 0, \quad (6.2)$$

e cujas soluções serão

$$\begin{aligned} \phi^{(\pm)}(t, x) &= \left(\frac{c}{a\omega_n} \right)^{1/2} e^{\pm i\omega_n t} \text{sen}(k_n x), \\ \omega_n &= \left(\frac{\mu^2 c^4}{\hbar^2} + c^2 k_n^2 \right)^{1/2}, \quad k_n = \frac{\pi n}{a}, n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6.3)$$

Note que as soluções dispostas na Eq. (6.3) apresentam frequências positivas e negativas.

Se considerarmos os operadores de criação e aniquilação, $a_n^\dagger$ e a_n , respectivamente, que obedecem às clássicas relações de comutação, a quantização do campo escalar será feita através da expansão

$$\phi(x, t) = \sum_n [\phi_n^{(-)}(x, t) a_n + \phi_n^{(+)}(x, t) a_n^\dagger]. \quad (6.4)$$

Podemos, então, definir o estado de vácuo, $|0\rangle$, por meio da equação

$$a_n|0\rangle = 0. \quad (6.5)$$

Nosso objetivo é calcular a energia desse estado e compará-la com a energia do estado de vácuo quando não há fronteiras, isto é, no intervalo $-\infty < x < \infty$. O operador densidade de energia para o campo escalar é calculado por

$$T_{00}(x) = \frac{\hbar c}{2} \left\{ \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial t} \right]^2 + \left[\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x} \right]^2 \right\}. \quad (6.6)$$

A densidade de energia do estado de vácuo será, portanto, calculada por

$$\langle 0|T_{00}(x)|0\rangle = \frac{\hbar}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n - \frac{m^2 c^4}{2a\hbar} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2k_n x)}{\omega_n}. \quad (6.7)$$

Integrando-se a Eq. (6.7) no intervalo $(0, a)$, obtemos a energia total do vácuo nesse intervalo, $E_0(a)$. Assim, teremos:

$$E_0(a) = \int_0^a \langle 0|T_{00}(x)|0\rangle dx = \frac{\hbar}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n. \quad (6.8)$$

É evidente que a quantidade $E_0(a)$ é infinita e, portanto, é necessário que realizemos um processo de regularização. Iremos utilizar o procedimento mais simples de regularização, introduzindo a função $\exp(-\delta\omega_n)$ na soma. A regularização é removida quando tomamos o limite $\delta \rightarrow 0$.

Se considerarmos, por simplicidade, um campo escalar sem massa, temos

$$E_0(a, \delta) = \frac{\hbar}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c\pi n}{a} \exp\left(-\frac{\delta c\pi n}{a}\right) = \frac{\pi\hbar c}{8a} \operatorname{senh}^{-2}\left(\frac{\delta c\pi}{2a}\right). \quad (6.9)$$

No limite quando δ é pequeno, obtemos

$$E_0(a, \delta) = \frac{\hbar a}{2\pi c\delta^2} + E(a) + O(\delta^2), \quad (6.10)$$

onde

$$E(a) = -\frac{\pi\hbar c}{24a}. \quad (6.11)$$

A energia de vácuo da Eq. (6.10) é constituída pela soma de um termo infinito (singular) e um termo finito (regular).

Vamos, agora, realizar o mesmo procedimento acima descrito para o caso em que não há fronteiras, ou seja, para o espaço-tempo de Minkowski em duas dimensões. A solução da equação de Klein-Gordon, nesse caso, será

$$\begin{aligned}\phi_k^{(\pm)}(t, x) &= \left(\frac{c}{4\pi\omega}\right)^{1/2} e^{\pm i(\omega t - kx)}, \\ \omega &= \left(\frac{m^2 c^4}{\hbar^2} + c^2 k^2\right)^{1/2}, \quad -\infty < k < \infty\end{aligned}\quad (6.12)$$

Agora, a soma na Eq. (6.4) é entendida como uma integral com medida $\frac{dk}{2\pi}$.

Definindo o estado de vácuo no espaço-tempo de Minkowski, $|0_M\rangle$, por

$$a_k|0_M\rangle = 0, \quad (6.13)$$

podemos refazer os cálculos anteriores, obtendo que a energia total é

$$E_{0M}(-\infty, +\infty) = \frac{\hbar}{2\pi} \int_0^\infty L \omega dk, \quad (6.14)$$

sendo $L \rightarrow \infty$ um comprimento chamado de parâmetro de normalização.

Vamos considerar a parte de E_{0M} no intervalo $(0, a)$. Assim, teremos

$$E_{0M}(a) = \frac{E_{0M}(-\infty, +\infty)}{L} a = \frac{\hbar a}{2\pi} \int_0^\infty \omega dk. \quad (6.15)$$

Novamente, iremos utilizar o procedimento de regularização acima descrito, isto é, vamos introduzir uma função exponencial no integrando. Sendo assim, obtemos

$$E_{0M}(a, \delta) = \frac{c\hbar a}{2\pi} \int_0^\infty k e^{-\delta ck} dk = \frac{\hbar a}{2\pi c \delta^2}. \quad (6.16)$$

Note que $E_{0M}(a)$ coincide com o primeiro termo da Eq. (6.10). Logo, o valor renormalizado da energia do vácuo, na presença de fronteiras é dado por

$$E_0^{ren}(a) = \lim_{\delta \rightarrow 0} [E_0(a, \delta) - E_{0M}(a, \delta)] = E(a) = -\frac{\pi \hbar c}{24a}. \quad (6.17)$$

Da Eq. (6.17), podemos verificar que, à medida que as fronteiras se aproximam, a energia renormalizada $E(a)$ cresce. Isso significa que há uma força entre as fronteiras dada por

$$F(a) = -\frac{\partial E(a)}{\partial a} = -\frac{\pi \hbar c}{24a^2}. \quad (6.18)$$

Esta força é chamada de força de Casimir.

O modelo descrito neste capítulo, embora simples, permite-nos tratar o procedimento utilizado no cálculo da energia de Casimir, que consiste em determinar a energia de vácuo do campo quantizado numa região geométrica ou topologicamente limitada e realizar a renormalização do resultado obtido. Esta exposição nos será útil visto que, neste trabalho, iremos calcular a energia de Casimir para fronteiras reais nas proximidades de buracos negros na relatividade geral e gravitação de Lovelock.

Parte III

Buracos negros na relatividade geral com
quintessência e nuvem de cordas

7 Termodinâmica do buraco negro de Schwarzschild com cordas e quintessência

Como comentamos no capítulo 5, é possível que o universo seja constituído, além da matéria bariônica e de matéria escura, de uma energia responsável por sua expansão acelerada, conhecida na literatura como energia escura. Há diversos modelos teóricos propostos para representar essa energia escura, dentre os quais podemos citar um especialmente bem sucedido: o modelo de quintessência (CALDWELL, 2000).

Também já afirmamos que, inspirado pelo fato de que a teoria de cordas considera que os componentes básicos do universo são objetos unidimensionais ao invés de partículas, Letelier desenvolveu um modelo invariante de gauge para uma nuvem de cordas que circunda um buraco negro estático (LETELIER, 1979) que possui importantes consequências astrofísicas e cosmológicas.

Dessa forma, dado o interesse teórico nos modelos acima descritos, iremos, neste capítulo, estudar algumas propriedades do buraco negro estático imerso numa nuvem de cordas e em quintessência, cujo espaço-tempo associado denominamos de espaço-tempo de Letelier com quintessência (COSTA; TOLEDO; BEZERRA, 2019). Iremos, brevemente, discutir a estrutura de horizontes da métrica, abordaremos a termodinâmica do sistema seguindo alguns estudos publicados na literatura (THOMAS; SALEH; KOFANE, 2012; GHADERI; MALAKOLKALAMI, 2016) e discutiremos a emissão de partículas pelo buraco negro (HAWKING, 1975). Nos estudos, iremos enfatizar o papel desempenhado pela nuvem de cordas e pela quintessência.

7.1 Espaço-tempo de Letelier com quintessência

Suponhamos que a nuvem de cordas e a quintessência não interagem entre si. Com isso, podemos assumir que o tensor energia-momento para a configuração descrita é obtido pela sobreposição linear dos tensores correspondente aos conteúdos de nuvem de cordas e de quintessência separadamente, dados pelas Eqs. (2.23) e (5.19). Assim, teremos as componentes

$$T^t_t = T^r_r = \rho_q + \frac{a}{r^2}, \quad (7.1a)$$

$$T^\theta_\theta = T^\phi_\phi = -\frac{1}{2}\rho_q(3\omega_q + 1). \quad (7.1b)$$

Com essa configuração de matéria-energia, obtemos a métrica (COSTA; TOLEDO;

BEZERRA, 2019)

$$ds^2 = \left(1 - a - \frac{2M}{r} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}}\right) dt^2 - \left(1 - a - \frac{2M}{r} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (7.2)$$

que corresponde ao espaço-tempo de Letelier com quintessência. Verifique-se que, mesmo com a presença da quintessência, a nuvem de cordas acresce nas componentes g_{tt} e g_{rr} da métrica um termo constante a , o que é matematicamente semelhante a considerarmos o buraco negro de Schwarzschild com quintessência e um monopolo global (RODRIGUE et al., 2018).

7.2 Singularidades e horizontes

Nesta seção iremos tratar das singularidades e horizontes do buraco negro cujo elemento de linha é dado pela Eq. (7.2).

Precisamos lembrar que singularidades são regiões do espaço-tempo em que a métrica diverge. Para o caso considerado, as singularidades podem ser encontradas através da equação

$$g(r) = 1 - a - \frac{2M}{r} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}} = 0. \quad (7.3)$$

Primeiramente, verificamos que no ponto $r = 0$, a métrica diverge, semelhantemente ao que ocorre para o buraco negro de Schwarzschild. Tomando a Eq. (7.2), o escalar de Kretschmann é dado por

$$K = \frac{2a}{r^2} + \frac{3\alpha\omega_q(1 - 3\omega_q)}{r^{3(\omega_q+1)}}, \quad (7.4)$$

que também diverge em $r = 0$. Com isso, podemos inferir que o ponto $r = 0$ é uma singularidade física (não removível) do buraco negro.

As outras singularidades definidas pela Eq. (7.3) podem ser removíveis por transformação de coordenadas. Elas irão, por consequência, definir os horizontes do buraco.

A função $g(r)$ é representada nas Figuras 5 e 6, para diferentes valores de a , de α e de ω_q . Como vemos através da Eq. (7.3), os horizontes do buraco negro são obtidos pelas raízes da função $g(r)$.

Observamos, na Figura 5, que a quantidade de horizontes do buraco negro depende dos valores dos parâmetros que descrevem a nuvem de cordas e a quintessência e esse número varia de zero a dois. Quando o buraco negro tem dois horizontes, o mais interno é o horizonte de eventos, enquanto o mais externo é um horizonte cosmológico associado à quintessência.

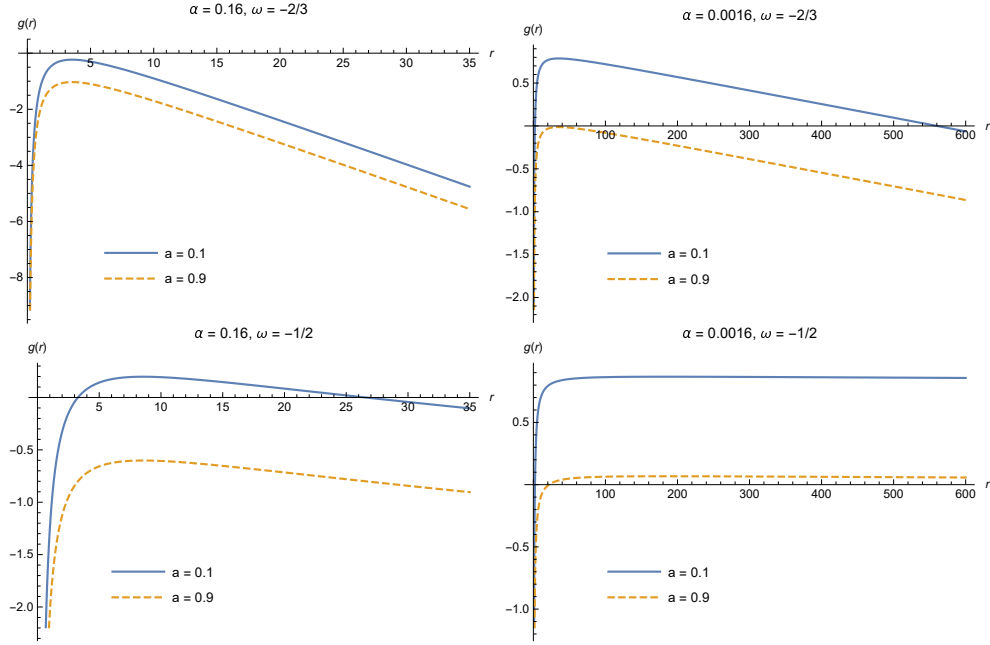


Figura 5 – Função $g(r)$ para diferentes valores dos parâmetros a , α e ω_q .

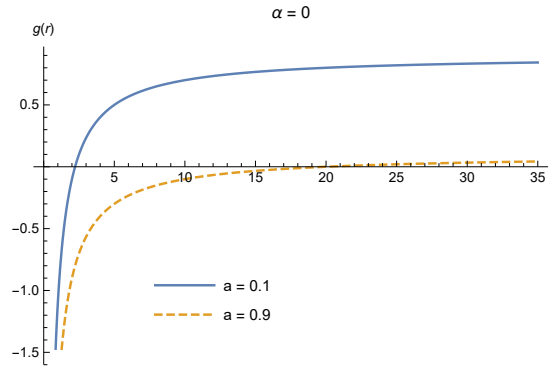


Figura 6 – Função $g(r)$ para diferentes valores de a e para $\alpha = 0$ (ausência de quintessência ou espaço-tempo de Letelier).

Já na Figura 6, temos a função $g(r)$ na ausência de quintessência. Verificamos que, nesse caso, o buraco negro terá apenas um horizonte e que este se afasta da singularidade à medida que aumentamos o valor de a .

Fixemos, agora, o valor de ω_q em $-2/3$. Com isso, a Eq. (7.3) fica reduzida a

$$\alpha r^2 - (1 - a)r + 2M = 0. \quad (7.5)$$

Com isso, os horizontes do buraco serão calculados por

$$r_- = \frac{1 - a - \sqrt{(1 - a)^2 - 8M\alpha}}{2\alpha}, \quad (7.6a)$$

$$r_+ = \frac{1 - a + \sqrt{(1 - a)^2 - 8M\alpha}}{2\alpha}. \quad (7.6b)$$

Note que, se $(1 - a)^2 < 8M\alpha$, o buraco negro não possui horizontes e é, então, denominado singularidade nua. Se $(1 - a)^2 = 8M\alpha$, o buraco negro possui apenas um horizonte. Por fim, se $(1 - a)^2 > 8M\alpha$, o buraco negro tem dois horizontes: o horizonte de eventos, r_- , e o horizonte cosmológico, r_+ . Assim, verificamos que a quantidade de horizontes do buraco negro depende da relação existente entre os valores dos parâmetros de cordas e quintessência.

7.3 Termodinâmica do buraco negro

Passemos a estudar as propriedades termodinâmicas do buraco negro.

Em qualquer horizonte de raio r_h , sabemos que $g(r_h) = 0$. Com isso, podemos escrever a massa do buraco negro em termos de r_h por

$$M = \frac{1 - a}{2}r_h - \frac{\alpha}{2r_h^{3\omega_q}}, \quad (7.7)$$

que expressamente depende dos valores dos parâmetros da nuvem de cordas e da quintessência. Quando $a = 0$ e $\alpha = 0$, recobramos a massa do buraco negro de Schwarzschild. Logo, podemos concluir que a Eq. (7.7) representa o parâmetro de massa do buraco negro, modificado pela nuvem de cordas e pela quintessência.

A entropia do buraco negro pode ser calculada através da lei da área, Eq. (2.54). Como a área do horizonte de eventos pode ser calculada por

$$A = \int \sqrt{-g} d\theta d\phi = 4\pi r_h^2, \quad (7.8)$$

temos

$$S = \frac{A}{4} = \pi r_h^2. \quad (7.9)$$

Assim, podemos escrever o parâmetro de massa em função da entropia do buraco na forma

$$M = \frac{1 - a}{2} \sqrt{\frac{S}{\pi}} - \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\pi}{S} \right)^{3\omega_q}. \quad (7.10)$$

O comportamento de M em função da entropia do buraco negro, S , é representada na Figura 7, para diferentes valores de a , de α e de ω_q .

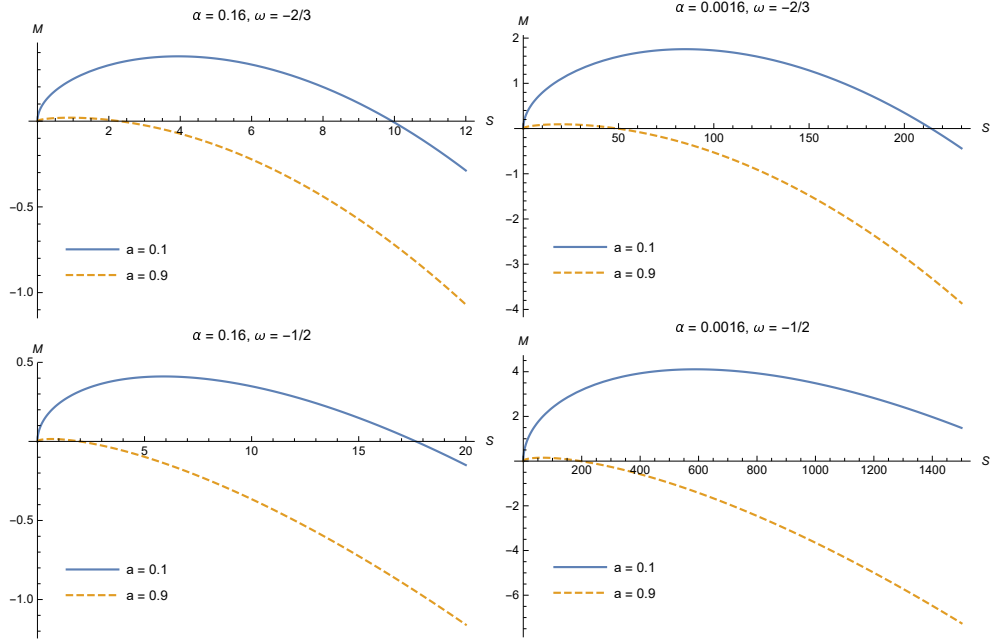


Figura 7 – Parâmetro de massa em função da entropia para diferentes valores de a , de α e de ω_q .

Na Figura 8, representamos o comportamento do parâmetro de massa, M , na ausência de quintessência ($\alpha = 0$) ou, em outras palavras, no espaço-tempo de Letelier. Nesse cenário, verificamos que M admite apenas valores positivos para $0 < a < 1$ e para valores positivos da entropia, S . Quando acrescentamos a quintessência à configuração o parâmetro de massa poderá adquirir valores positivos ou negativos.

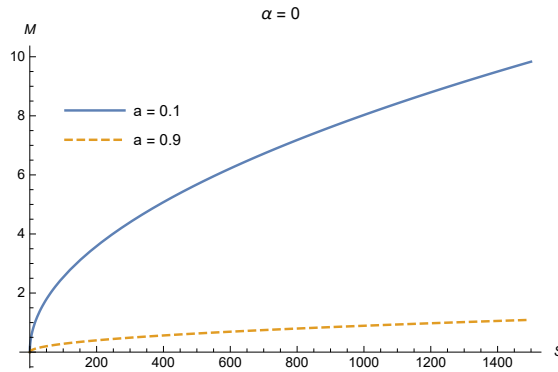


Figura 8 – Parâmetro de massa em função da entropia para diferentes valores de a e $\alpha = 0$ (ausência de quintessência ou espaço-tempo de Letelier).

A temperatura Hawking do buraco negro será dada por

$$T = \frac{\partial M}{\partial S} = \frac{1-a}{4\sqrt{\pi S}} + \frac{3\alpha\omega_q}{2S} \left(\frac{\pi}{S}\right)^{3\omega_q}, \quad (7.11)$$

e tem seu comportamento apresentado na Figura 9, para diferentes valores dos parâmetros de nuvens de cordas e de quintessência. Já na Figura 10, representamos a temperatura

como função da entropia no espaço-tempo de Letelier (ausência de quintessência). No último caso, para $0 < a < 1$ e $S > 0$, a temperatura apenas apresentará valores positivos.

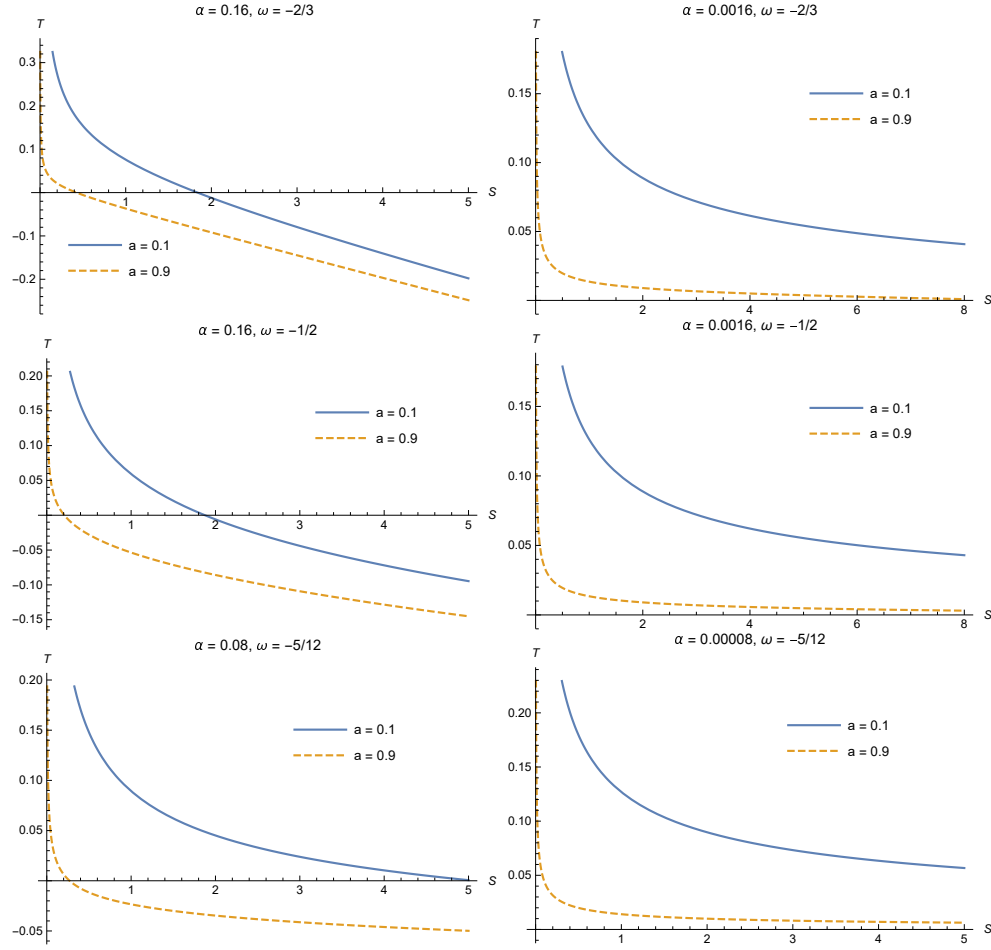


Figura 9 – Temperatura Hawking para diferentes valores de a , de α e de ω_q .

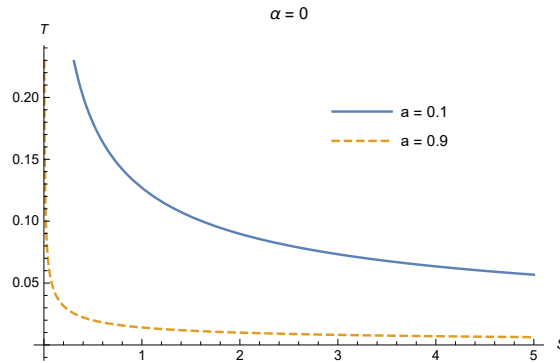


Figura 10 – Temperatura Hawking para diferentes valores de a e $\alpha = 0$ (ausência de quintessência ou espaço-tempo de Letelier).

Por seu turno, a capacidade térmica do sistema é calculada por

$$C = T \frac{\partial S}{\partial T} = - \frac{2(1-a)S^{3\omega_q+3/2} + 12\alpha\omega_q\pi^{3\omega_q+1/2}S}{(1-a)S^{3\omega_q+1/2} + 12\alpha\omega_q(3\omega_q+1)\pi^{3\omega_q+1/2}}, \quad (7.12)$$

cujo comportamento está representado na Figura 11, para diferentes valores dos parâmetros de nuvens de cordas e de quintessência.

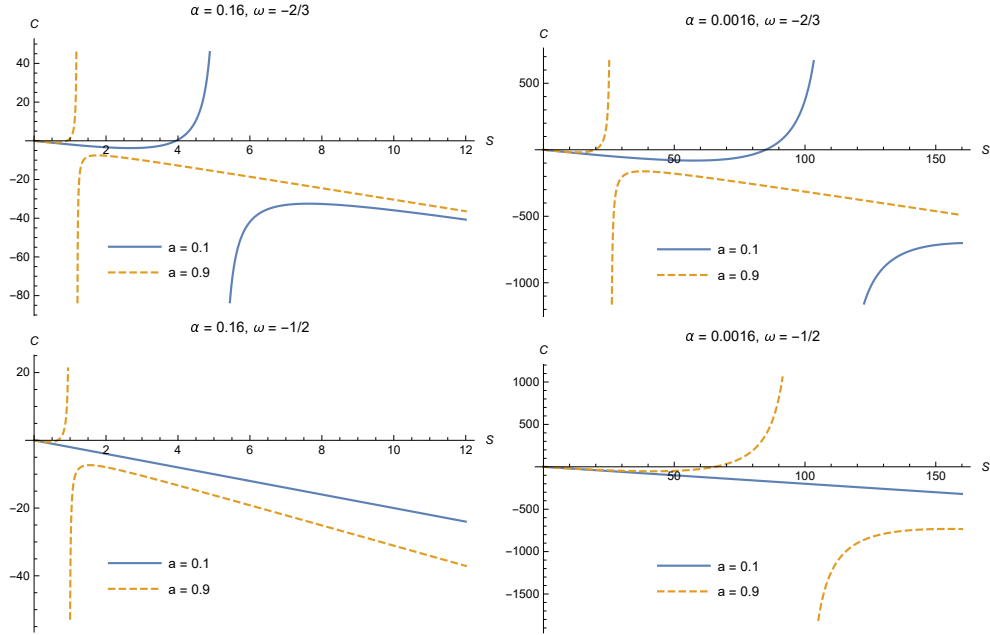


Figura 11 – Capacidade térmica como função da entropia para diferentes valores de a , de α e de ω_q .

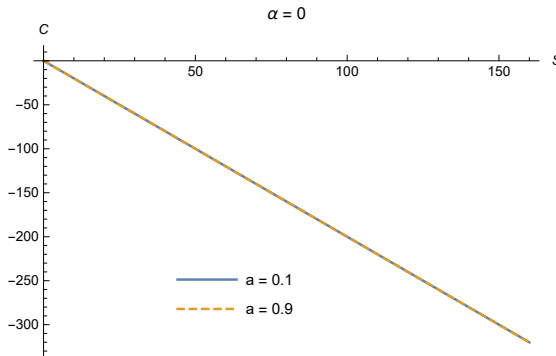


Figura 12 – Capacidade térmica como função da entropia para diferentes valores de a , $\alpha = 0$.

Na ausência de quintessência, a Eq. (7.12) reduz-se a $C = -2S$, que está representada na Figura 12.

Podemos verificar, então, que, quando levamos em conta o efeito conjunto da nuvem de cordas e da quintessência, há valores da entropia para os quais a capacidade térmica adquire valores positivos. Ou seja, o buraco negro poderá ser termodinamicamente estável ou instável, a depender do valor da entropia, como pode-se observar na Figura 11, havendo transição de fase. Importa destacar que a nuvem de cordas muda o ponto em que essa transição ocorre.

Em suma, é fácil constatar que a energia e a temperatura decrescem quando a e α aumentam. Diferentemente, do buraco negro de Schwarzschild, que é termodinamicamente instável, o buraco negro com nuvem de cordas e quintessência apresenta regiões de estabilidade, a depender dos parâmetros escolhidos.

7.4 Radiação Hawking

Iremos tratar, nesta seção, da emissão de partículas pelo buraco negro que estamos considerando, fenômeno conhecido como radiação Hawking ([HAWKING, 1975](#)), analisando o papel desempenhado pela nuvem de cordas e pela quintessência. Iremos utilizar as coordenadas de Eddington-Finkelstein definidas por

$$\frac{dr_*}{dr} = g(r)^{-1}, \quad (7.13)$$

$$t = T - r_*. \quad (7.14)$$

Com isso, a métrica da Eq. (7.2) será escrita na forma ([RODRIGUE et al., 2018](#)):

$$ds^2 = -g(r)dT^2 + 2dTdr + r^2(d\theta^2 + d\phi^2). \quad (7.15)$$

Podemos verificar que $r = r_+$ não é uma singularidade dessa nova métrica ([LI, 2017](#)). As geodésicas nulas são obtidas pela equação

$$\frac{dr}{dT} = \frac{g(r)}{2}. \quad (7.16)$$

Por conseguinte, a parte imaginária da ação correspondente a uma partícula que cruza o horizonte do buraco é

$$ImZ = Im \int_{T_i}^{T_f} LdT = Im \int_{r_i}^{r_f} p_r dr = Im \int_{r_i}^{r_f} \int_0^{p_r} dp_r dr, \quad (7.17)$$

onde p_r é o momento canônico associado à coordenada r . Assim, usando a relação $\dot{r} = \frac{dH}{dp_r}|_r$ e o fato de que $(dH_r) = dM$, temos o seguinte resultado:

$$ImZ = Im \int_{M_i}^{M_f} \int_{r_i}^{r_f} \frac{dr}{\dot{r}} dM = Im \int_{M_i}^{M_f} \int_{r_i}^{r_f} \frac{2}{g(r)} dr dM, \quad (7.18)$$

onde $M_i = M$ é a massa original do buraco negro e $M_f = M - \omega_0$ é a sua massa após a emissão de partícula com energia ω_0 . Note que o integrando possui um polo em $r = r_+$, e, portanto, podemos calcular a integral de contorno centrada no polo por ([LI, 2017](#))

$$ImZ = -2\pi \int_{M_i}^{M_f} \frac{1}{g'(r_+)} dM = -2\pi \int_{r_{+i}}^{r_{+f}} \frac{1}{g'(r_+)} \frac{dM}{dr_+} dr_+. \quad (7.19)$$

Das Eqs. (7.3) and (7.10), obtemos

$$ImZ = -\frac{\pi}{2}(r_{+f}^2 - r_{+i}^2) = -\frac{\Delta S}{2}. \quad (7.20)$$

Usando os resultados advindos do método WKB, que estabelecem que a probabilidade de que uma partícula emitida pelo buraco negro sofra um tunelamento é dada por (LI, 2017; SRINIVASAN; PADMANABHAN, 1999; PARIKH; WILCZEK, 2000)

$$\Gamma \sim \exp(-2ImZ), \quad (7.21)$$

obtemos

$$\ln \Gamma \sim -\Delta S \quad (7.22)$$

ou

$$\Gamma \sim e^{\Delta S}, \quad (7.23)$$

que informa que a probabilidade depende da variação da entropia do buraco negro e, portanto, depende do raio do horizonte do buraco que, por sua vez, é influenciado pelos parâmetros ligados à nuvem de cordas e à quintessência.

A partir da Eq. (7.19), é possível escrever a taxa de decaimento do buraco negro por (SRINIVASAN; PADMANABHAN, 1999; PARIKH; WILCZEK, 2000)

$$\Gamma \sim e^{-\beta\omega_0}, \quad (7.24)$$

onde

$$\beta = \frac{1}{T} \quad (7.25)$$

é o fator de Boltzmann¹. Podemos, agora, escrever o raio do horizonte cosmológico, r_+ , como (RODRIGUE et al., 2018)

$$r_+ = r_0 + \delta, \quad (7.26)$$

¹ Ludwig Eduard Boltzmann (1844-1906) foi um físico austríaco nascido em Viena conhecido por seu trabalho no campo da mecânica estatística.

onde

$$r_0 = \frac{2M}{1-a} \quad (7.27)$$

é o raio do horizonte do buraco na ausência de quintessência. Em primeira ordem de aproximação a correção do horizonte será

$$\delta = \frac{\alpha}{(1-a)r_0^{3\omega_q}}. \quad (7.28)$$

Com isso, o fator de Boltzmann é dado por (RODRIGUE et al., 2018)

$$\beta_+ = \frac{4\pi}{1-a} \left(\frac{2M}{1-a} + \frac{\alpha}{(1-a)r_0^{3\omega_q}} \right). \quad (7.29)$$

Nas Figuras 13 e 14, representamos o comportamento do fator de Boltzmann nas proximidades do horizonte cosmológico como função de ω_q e de M , respectivamente.

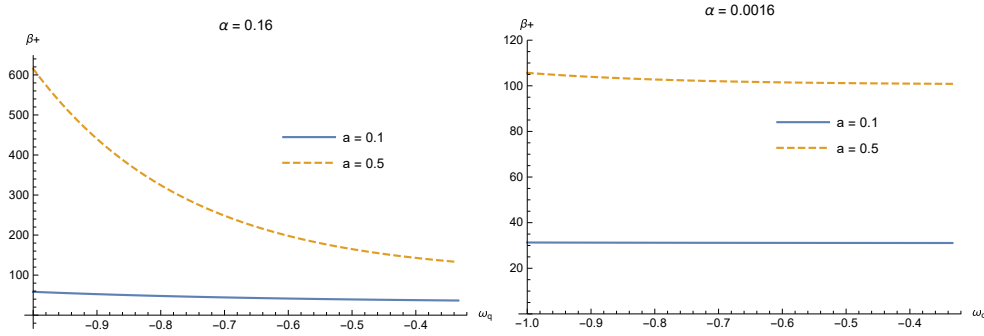


Figura 13 – Fator de Boltzmann, β_+ , como função de ω_q para diferentes valores de a e de α .

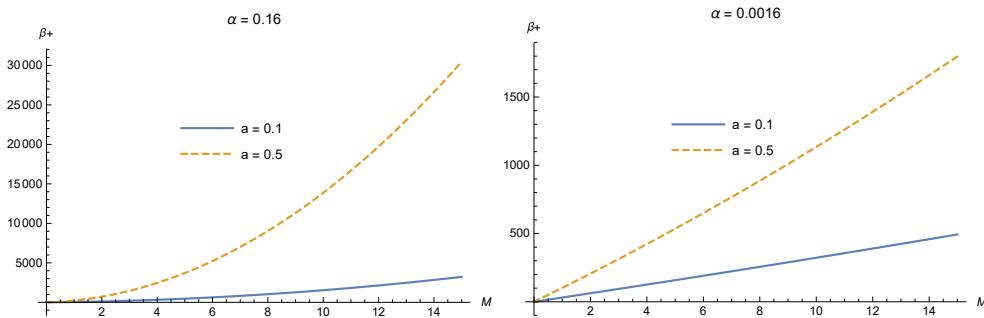


Figura 14 – Fator de Boltzmann, β_+ , como função de M para diferentes valores de a e de α .

Por outro lado, o horizonte de eventos r_- pode ser escrito como

$$r_- = r_0 - \delta, \quad (7.30)$$

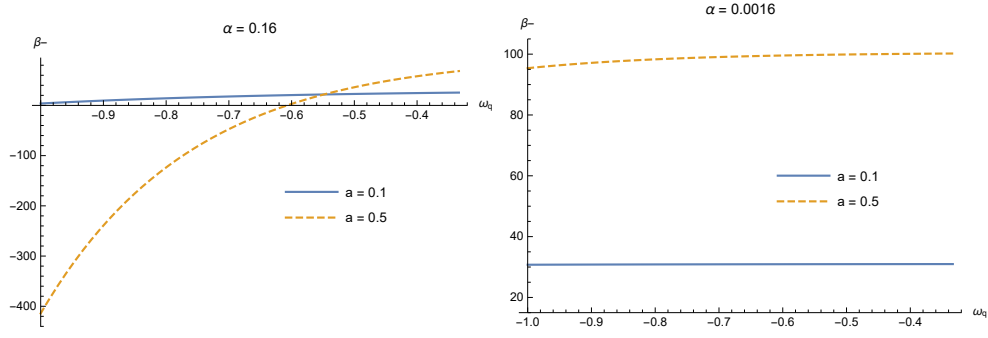


Figura 15 – Fator de Boltzmann, β_- , como função de ω_q para diferentes valores de a e de α .

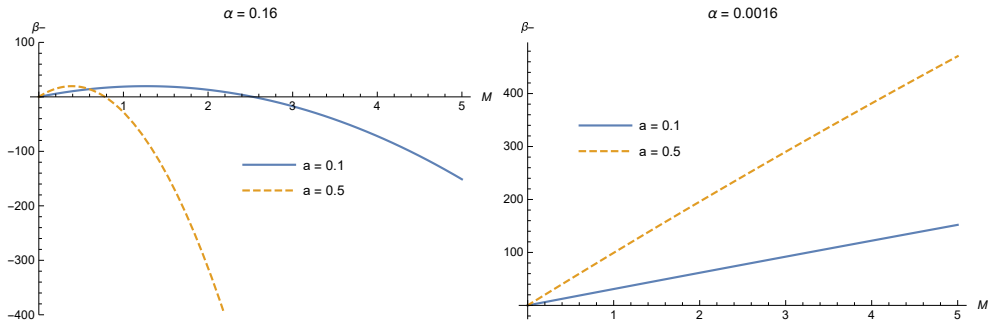


Figura 16 – Fator de Boltzmann, β_- , como função de M para diferentes valores de a e de α .

e, por conseguinte, o fator de Boltzmann é dado por

$$\beta_- = \frac{4\pi}{1-a} \left(\frac{2M}{1-a} - \frac{\alpha}{(1-a)r_0^{3\omega_q}} \right), \quad (7.31)$$

cujo comportamento está representado, respectivamente, como função de ω_q e de M nas Figs. 15 e 16.

Verifique-se que o fator de Boltzmann pode adquirir valores negativos a depender dos valores dos parâmetros que codificam a nuvem de cordas e a quintessência.

8 Buraco negro de Reissner-Nordström com quintessência e nuvem de cordas

Neste capítulo, iremos obter a métrica correspondente ao buraco negro de Reissner-Nordström com quintessência e nuvem de cordas, acrescentando carga elétrica à configuração estudada no capítulo 7.

Iremos analisar em detalhes a estrutura de horizontes do buraco negro, bem como sua termodinâmica, verificando o papel desempenhado pelas fontes de campo gravitacional externas à singularidade.

Vamos, ainda, estudar os modos quasinormais, oscilações características de buracos negros perturbados (VISHVESHVARA, 1970) e cujo exame tem tido destaque na física contemporânea já que as frequências quasinormais associadas a ondas gravitacionais podem revelar importantes aspectos dessas ondas ou dos buracos negros perturbados que as geraram (CARDOSO et al., 2018; BLÁZQUEZ-SALCEDO; KHOO; KUNZ, 2017; BRUSTEIN; MEDVED; YAGI, 2017; MASELLI; KOKKOTAS; LAGUNA, 2017; KHANNA; PRICE, 2017). Iremos verificar que a presença da nuvem de cordas reduz o módulo das partes real e imaginária dos modos, tornando as frequências mais próximas de valores de importância em escalas astrofísicas.

8.1 A métrica

Iniciemos considerando a métrica dada pela Eq. (7.2) referente ao espaço-tempo de Letelier com quintessência. Se acrescentarmos uma carga elétrica Q ao buraco negro, teremos, de forma semelhante ao que foi obtido por Kiselev (KISELEV, 2003), a métrica (TOLEDO; BEZERRA, 2018)

$$ds^2 = \left(1 - a - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}}\right) dt^2 - \left(1 - a - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (8.1)$$

Essa métrica é solução das equações de Einstein, conjuntamente com as equações de Maxwell que, na região exterior ao buraco negro, são dadas por

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = 0, \quad (8.2)$$

$$\partial_{[\sigma} F_{\mu\nu]} = 0. \quad (8.3)$$

As componentes não nulas do tensor de Maxwell são $F_{10} = -F_{01} = Q/r^2$.

Antes de prosseguirmos com a análise das propriedades da métrica da Eq. (8.1), realizemos a seguinte transformação.

$$\begin{aligned} t &= (1-a)^{-1/2}T, \\ r &= (1-a)^{1/2}R, \\ m &= (1-a)^{-1/2}M, \\ \alpha &= (1-a)^{3(\omega_q+1)/2}\bar{\alpha}. \end{aligned} \tag{8.4}$$

Com isso, a Eq. (8.1) pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{Q^2}{R^2} - \frac{\bar{\alpha}}{R^{3\omega_q+1}}\right) dT^2 \\ &\quad - \left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{Q^2}{R^2} - \frac{\bar{\alpha}}{R^{3\omega_q+1}}\right)^{-1} dR^2 \\ &\quad - (1-a)R^2 d\Omega^2. \end{aligned} \tag{8.5}$$

Podemos notar, portanto, que o efeito da nuvem de cordas é equivalente ao produzido por um déficit de ângulo sólido (BARRIOLA; VILENKIN, 1989). Em outras palavras, introduzir uma nuvem de cordas esfericamente simétrica circundando o buraco negro carregado como fonte adicional de gravitação é semelhante a considerar um defeito topológico no espaço-tempo.

Os horizontes do buraco negro descrito pela métrica (8.1) são obtidos resolvendo-se a equação

$$g(r) = 1 - a - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}} = 0. \tag{8.6}$$

Verifique-se que, se $r \rightarrow 0$, o termo da carga elétrica domina o comportamento da função $g(r)$, que adquire valores positivos. Se $r \rightarrow \infty$, a função $g(r)$ adquire valores negativos devido à dominância do fator da quintessência dominará. Assim, podemos concluir que a Eq. (8.6) possui ao menos uma raiz real positiva ou, em outras palavras, o buraco negro possui pelo menos um horizonte. Na Figura 17, representamos a função $g(r)$ para diferentes valores de a , de α e de ω_q .

Agora, consideremos o caso especial em que $\omega_q = -2/3$. Os horizontes do buraco negro são, então, determinados por

$$h(r) = \alpha r^3 - (1-a)r^2 + 2Mr - Q^2 = 0. \tag{8.7}$$

É possível reescrever a Eq. (8.7) na forma

$$\alpha(r - r_-)(r - r_+)(r - r_q) = 0, \quad (8.8)$$

sendo r_+ e r_- os horizontes do buraco negro e r_q o horizonte cosmológico associado à quintessência. Notemos que, diferentemente da nuvem de cordas, a quintessência leva ao surgimento de um novo horizonte, além daqueles associados ao buraco negro.

Da Eq. (8.7), verificamos que o número de horizontes do buraco pode variar de um a três, a depender dos valores de M , Q e α . Além disso, o horizonte associado à quintessência sempre existe. Por simplicidade, no restante desta seção iremos considerar $M = 1$.

Se $Q = 0$, o valor máximo do parâmetro que quintessência α é dado por

$$\alpha_m(Q = 0) = \frac{(1 - a)^2}{8}, \quad (8.9)$$

e a Eq. (8.7) pode ser escrita na forma

$$Q^2 = Q^2(r; \alpha) = \alpha r^3 - (1 - a)r^2 + 2r, \quad (8.10)$$

cujo máximo local é calculado para

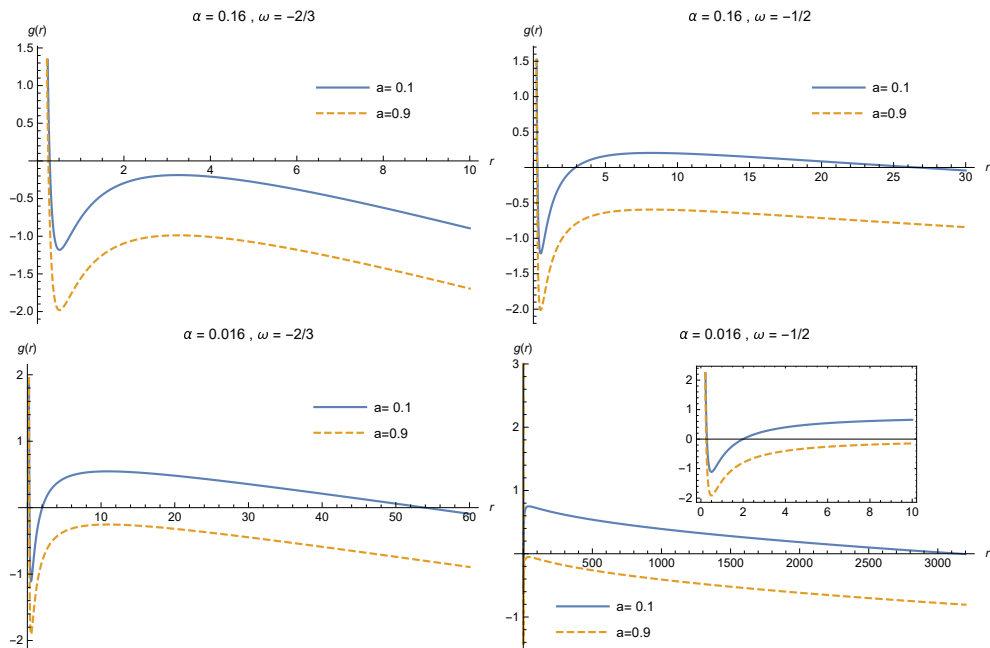


Figura 17 – A função $g(r)$ para diferentes valores de a , de ω_q e de α . No caso em que $\alpha = 0.016$ e $\omega_q = -1/2$, a região próxima a $r = 0$ está em destaque.

$$\alpha_c = \frac{2[r(1-a) - 1]}{3r^2}. \quad (8.11)$$

O extremo local para a carga e para o parâmetro de quintessência ocorre se $r = 2/(1-a)$ e obtemos

$$Q^2 \leq Q_c^2 = \frac{4}{3(1-a)}, \quad \alpha \leq \alpha_c = \frac{(1-a)^2}{6}. \quad (8.12)$$

Os extremos locais de $h(r)$ são calculados usando a equação $dh(r)/dr = 0$, que implica

$$r_{min} = \frac{1-a - \sqrt{(1-a)^2 - 6\alpha}}{3\alpha}, \quad r_{max} = \frac{1-a + \sqrt{(1-a)^2 - 6\alpha}}{3\alpha}. \quad (8.13)$$

Podemos classificar os extremos em três tipos. No primeiro, tipo I, os horizontes do buraco negro coincidem ($r_- = r_+$). Nesse caso, o mínimo de $h(r)$ corresponde ao horizonte do buraco negro. Logo, temos

$$Q^2 = Q_{c1}^2 = \frac{[-(1-a) + 9\alpha + \sqrt{(1-a)^2 - 6\alpha}]^3}{27\alpha^2}, \quad (8.14)$$

e o horizonte da quintessência é definido por

$$r_q = \frac{1-a + 2\sqrt{(1-a) - 6\alpha}}{3\alpha}. \quad (8.15)$$

O segundo tipo (tipo II) ocorre se o horizonte externo do buraco negro coincide com o horizonte da quintessência, isto é, $r_+ = r_q$. Nesse caso, o máximo de $h(r)$ ocorre para r_+ e r_q . Assim, temos

$$Q^2 = Q_{c2}^2 = \frac{[-(1-a) + 9\alpha - \sqrt{(1-a)^2 - 6\alpha}]^3}{27\alpha^2}, \quad (8.16)$$

e o raio do horizonte interior é calculado por

$$r_- = \frac{1-a - 2\sqrt{(1-a) - 6\alpha}}{3\alpha}. \quad (8.17)$$

Por fim, o terceiro tipo (tipo III) ocorre se o buraco negro tiver apenas um horizonte: o horizonte cosmológico associado à quintessência. Temos, então,

$$Q^2 \leq Q_c^2 = \frac{4}{3(1-a)}, \quad \alpha \leq \alpha_c = \frac{(1-a)^2}{6} \quad (8.18)$$

Na Figura 18, mostramos Q versus α , para diferentes valores de a , representando o comportamento do buraco negro em função dos extremos.

Dessa forma, podemos concluir que a estrutura e o número de horizontes dependem de forma crucial dos valores do parâmetro de quintessência, α , e do parâmetro da nuvem de cordas, a .

8.2 Termodinâmica do buraco negro

Para qualquer horizonte do buraco negro, cuja componente radial é r_h , sua massa pode ser escrita como

$$M = -\frac{\alpha}{2}r_h^{-3\omega_q} + \frac{1-a}{2}r_h + \frac{Q^2}{2r_h}. \quad (8.19)$$

Como a entropia de um buraco negro estático é dada pela Eq. (7.10), o parâmetro de massa pode ser escrito através da expressão

$$M = -\frac{\alpha}{2} \left(\frac{\pi}{S} \right)^{\frac{3\omega_q}{2}} + \frac{1-a}{2} \sqrt{\frac{S}{\pi}} + \frac{Q^2}{2} \sqrt{\frac{\pi}{S}}. \quad (8.20)$$

Na Figura 19, representamos o comportamento de M como função de S , para diferentes valores dos parâmetros da nuvem de cordas e da quintessência.

A primeira lei da termodinâmica, dada pela Eq. (2.51), pode ser escrita, para o buraco negro em questão, na forma (THOMAS; SALEH; KOFANE, 2012)

$$\delta M = T\delta S + \phi\delta Q, \quad (8.21)$$

da qual obtemos a temperatura Hawking do buraco negro usando a expressão

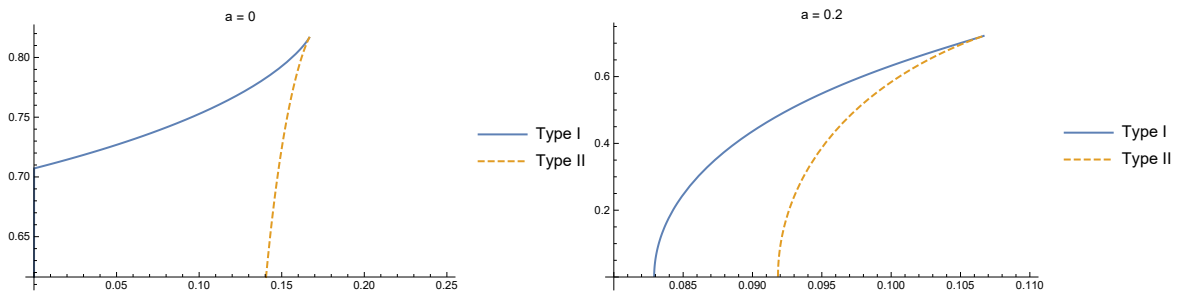


Figura 18 – Gráfico de Q versus α . A curva sólida representa os extremos de tipo I ($r_+ = r_-$), enquanto a curva tracejada representa o extremo tipo II ($r_+ = r_q$). Na região entre as curvas e os eixos, o buraco negro tem três horizontes. Na região exterior, o buraco negro possui apenas um horizonte e, no ponto de interseção entre as curvas, $Q = \sqrt{4/3(1-a)}$.

$$T = \left. \frac{\partial M}{\partial S} \right|_Q = \frac{\partial M}{\partial S} = \frac{1-a}{4\sqrt{\pi S}} + \frac{3\alpha\omega_q}{4S} \left(\frac{\pi}{S} \right)^{\frac{3\omega_q}{2}} - \frac{Q^2}{4} \sqrt{\frac{\pi}{S^3}}. \quad (8.22)$$

O gráfico da temperatura Hawking, T , em função da entropia do buraco negro, S , é representado na Figura 20.

Por sua vez, o potencial elétrico, como esperado da teoria eletromagnética, é dado por

$$\phi = \left. \frac{\partial M}{\partial Q} \right|_S = \frac{Q}{r_h}. \quad (8.23)$$

Finalmente, a capacidade térmica do buraco negro a carga constante é obtida por

$$C = T \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_Q = \frac{\frac{2(1-a)}{\sqrt{\pi S}} + \frac{6\alpha\omega_q}{S} \left(\frac{\pi}{S} \right)^{\frac{3\omega_q}{2}} - 2Q^2 \sqrt{\frac{\pi}{S^3}}}{-\frac{1-a}{\sqrt{\pi S^3}} - \frac{6\alpha\omega_q}{S^2} \left(\frac{3\omega_q}{2} + 1 \right) \left(\frac{\pi}{S} \right)^{\frac{3\omega_q}{2}} + 3Q^2 \sqrt{\frac{\pi}{S^5}}}, \quad (8.24)$$

cujo gráfico em termos de S está plotado na Figura 21.

Como já sabemos, o sinal da capacidade térmica está relacionado à estabilidade do sistema termodinâmico. Observando a Figura 21, podemos concluir que há valores de S para os quais a capacidade térmica é positiva, assim como há valores para os quais essa grandeza termodinâmica adquire valores negativos. Em outras palavras, o buraco negro pode ser termodinamicamente estável ou instável a depender dos valores dos parâmetros

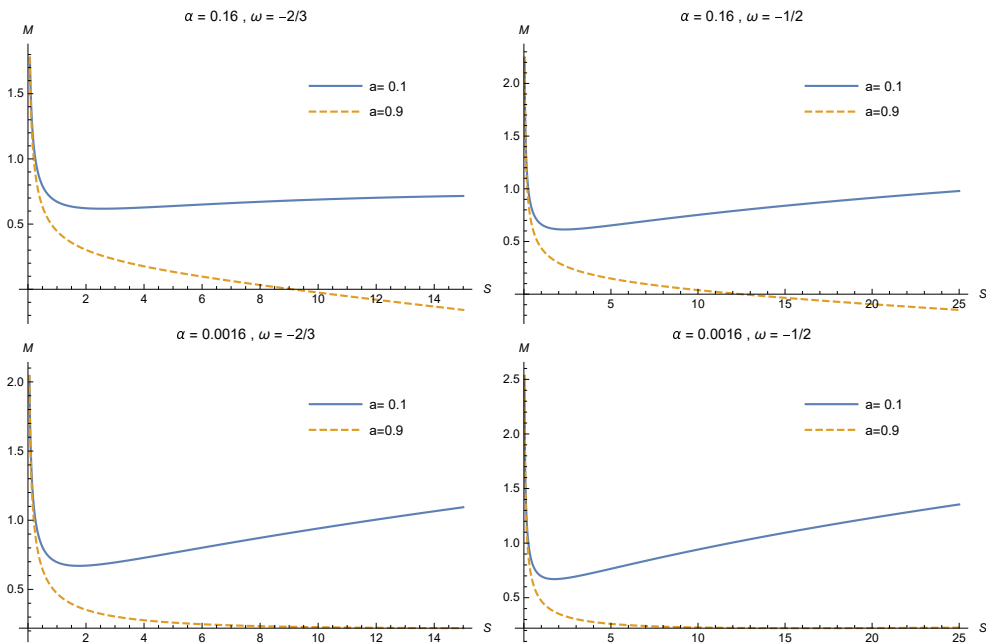


Figura 19 – Gráfico de M em função da entropia S .

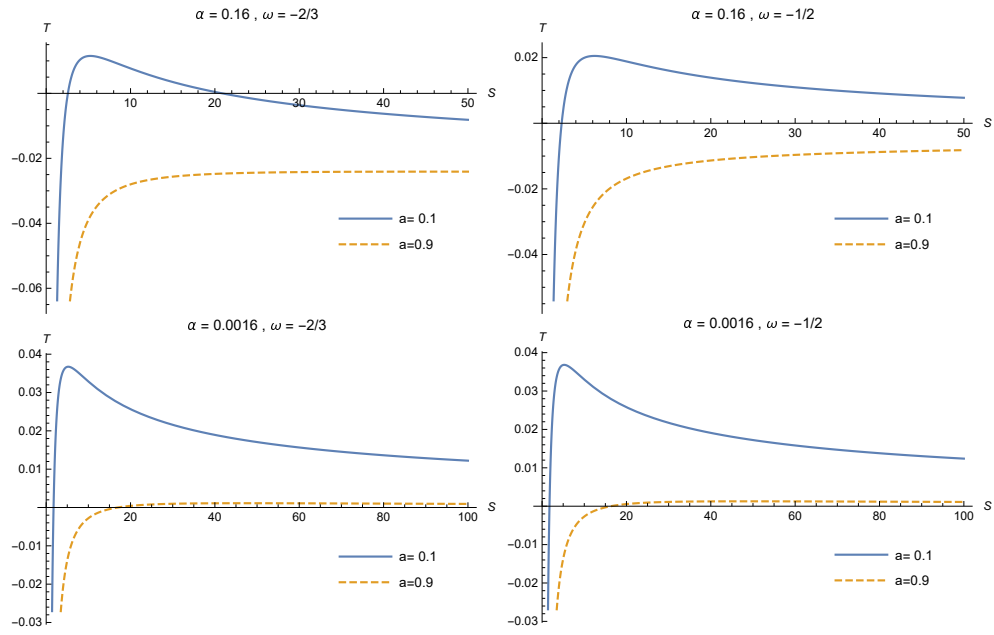


Figura 20 – Temperatura Hawking, T , em função da entropia do buraco negro, S .

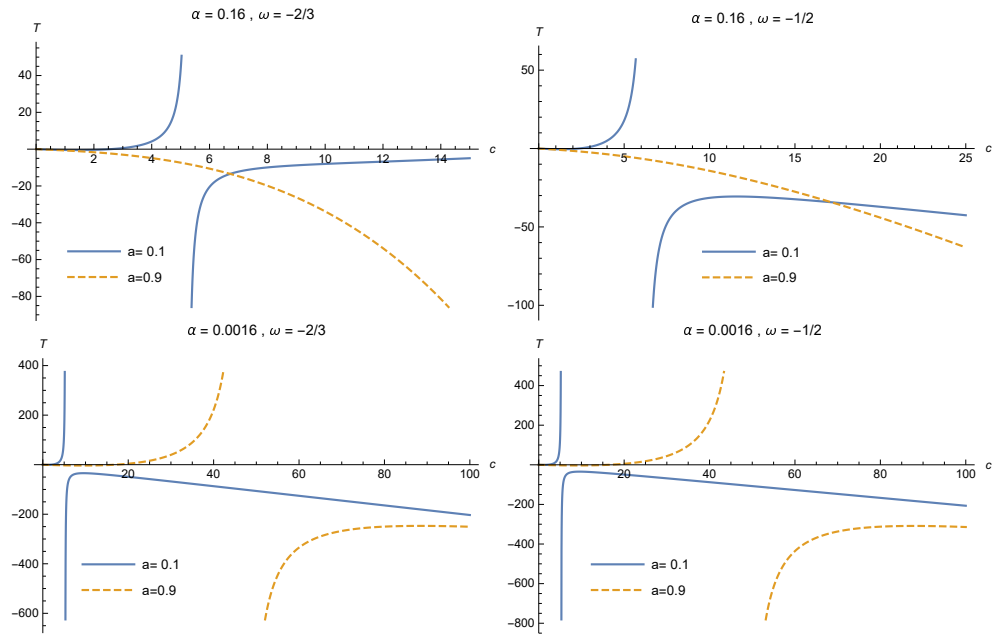


Figura 21 – Capacidade térmica do buraco negro em função de sua entropia.

relacionados à quintessência e à nuvem de cordas. Ademais, verificamos que o ponto de transição, no qual a capacidade térmica diverge, muda quando alteramos esses parâmetros.

Em suma, no que se refere à termodinâmica do buraco negro, pode-se verificar que enquanto o parâmetro de nuvem de cordas, a , aumenta, a energia e a temperatura de Hawking diminuem. Além disso, essa grandeza também influencia na estrutura de fases do sistema.

8.3 Modos quasinormais

Nesta seção, iremos calcular os modos quasinormais do buraco negro que estamos considerando, através da introdução de um campo escalar ao seu redor que, assumimos, não altera a geometria do espaço-tempo (GRAÇA; VIEIRA; BEZERRA, 2015). No que segue, iremos considerar $\omega_q = -2/3$.

O comportamento de um campo escalar massivo Φ , num espaço-tempo curvo quadrimensional, é descrito pela equação de Klein-Gordon covariante

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) + \mu_0^2 \right] \Phi = 0, \quad (8.25)$$

em que μ_0 é a massa do campo escalar. Usando a métrica dada pela Eq. (8.1), a Eq. (8.25) pode ser escrita na forma

$$\left[\Delta(r)^{-1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Delta(r) r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \mu_0^2 \right] \Phi = 0, \quad (8.26)$$

sendo

$$\Delta(r) = 1 - a - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \alpha r. \quad (8.27)$$

Devido à simetria do espaço-tempo descrito pela Eq. (8.1), a solução de Eq. (8.26) pode ser escrita na forma

$$\Phi(t, r, \theta, \phi) = R(r) Y_m^l(\theta, \phi) e^{-i\omega t}, \quad (8.28)$$

na qual $Y_m^l(\theta, \phi)$ são os harmônicos esféricos e ω é uma constante de separação, que é dada pela equação $\omega = E/\hbar$, sendo E a energia do campo escalar. A equação radial é dada por

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \Delta(r) \frac{dR}{dr} \right) + \left[\frac{r^2 \omega^2}{\Delta(r)} - l(l+1) - \mu_0^2 r^2 \right] R = 0. \quad (8.29)$$

Definindo

$$dr_* = \frac{dr}{\Delta}, \quad (8.30)$$

a Eq. (8.29) é escrita na forma

$$-\frac{d^2 R(r)}{dr_*^2} + V(r) R(r) = \omega^2 R(r), \quad (8.31)$$

em que $V(r)$ é o potencial efetivo, que, para campos escalares sem massa, é dado por

$$V(r) = \Delta \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{\Delta'}{r} \right] = \left(1 - a - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \alpha r \right) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} - \frac{2Q^2}{r^4} - \frac{\alpha}{r} \right]. \quad (8.32)$$

Nas Figuras 22, 23 e 24, os comportamentos do potencial efetivo para $a = 0, 0.1$ e 0.2 são apresentados. Para melhorar a visualização, destacamos a região correspondente a pequenos valores de r .

Para determinar as frequências quasinormais ω , utilizaremos o método WKB como apresentado por Schutz e Will (SCHUTZ; WILL, 1985) em terceira ordem de aproximação (IYER; WILL, 1987). Esse método, que tem sido amplamente utilizado em diferentes configurações, é acurado no cálculo das partes real e imaginária dos modos quasinormais para $n < l$ (GRAÇA; VIEIRA; BEZERRA, 2015). Então, os modos quasinormais serão calculados por

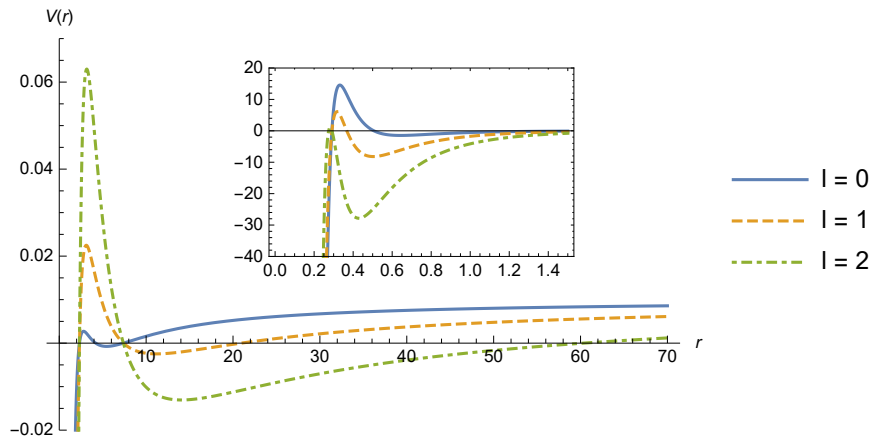


Figura 22 – Potencial efetivo, $V(r)$, como função de r para $a = 0$. Destacamos a região $0 < r < 1.5$.

$$\omega^2 = [V_0 + (-2V_0'')^{1/2}\Lambda] - i\left(n + \frac{1}{2}\right)(-2V_0'')^{1/2}(1 + \Omega), \quad (8.33)$$

sendo

$$\Lambda = \frac{1}{(-2V_0'')^{1/2}} \left[\frac{1}{8} \left(\frac{V_0^{(4)}}{V_0''} \right) \left(\frac{1}{4} + \beta^2 \right) - \frac{1}{288} \left(\frac{V_0^{(3)}}{V_0''} \right)^2 (7 + 60\beta^2) \right], \quad (8.34)$$

$$\begin{aligned} \Omega = & \frac{1}{(-2V_0'')^{1/2}} \left[\frac{5}{6912} \left(\frac{V_0^{(3)}}{V_0''} \right)^4 (77 + 188\beta^2) \right. \\ & - \frac{1}{384} \left(\frac{(V_0''')^2 V_0^{(4)}}{(V_0'')^2} \right) (51 + 100\beta^2) + \frac{1}{2304} \left(\frac{V_0^{(4)}}{V_0''} \right)^2 (67 + 68\beta^2) \\ & \left. + \frac{1}{288} \left(\frac{(V_0''') V_0^{(5)}}{(V_0'')^2} \right) (19 + 28\beta^2) - \frac{1}{288} \left(\frac{V_0^{(6)}}{V_0''} \right) (5 + 4\beta^2) \right], \end{aligned} \quad (8.35)$$

$$\beta = 1 + \frac{n}{2}, \quad (8.36)$$

$$V_0^{(n)} = \left. \frac{d^n V}{dr_*} \right|_{r_* = r_*(r_{max})}, \quad (8.37)$$

onde r_{max} é o valor de r para o qual V tem seu máximo. Usando essas equações, obtemos os valores das partes real e imaginária dos modos quasinormais, que estão dispostos nas tabelas 1 e 2, para diferentes valores de a . Na Figura 25, representamos r_{max} em função do parâmetro que codifica a presença da nuvem de cordas, a . Por fim, na Figura 26,

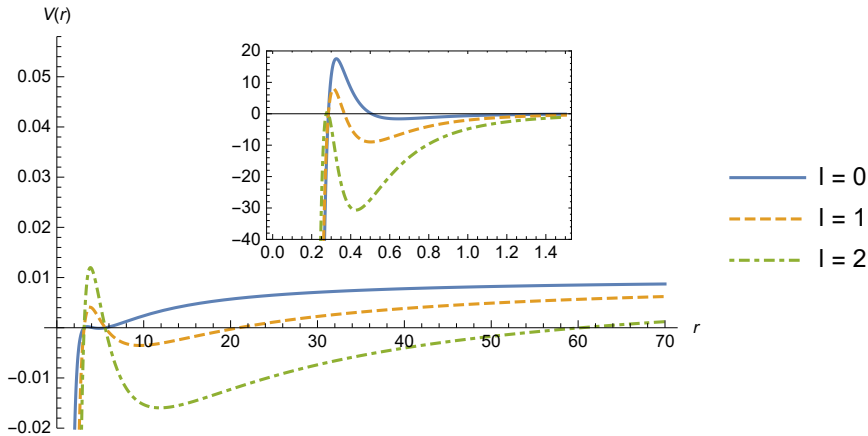


Figura 23 – Potencial efetivo, $V(r)$, como função de r para $a = 0.1$. Destacamos a região $0 < r < 1.5$.

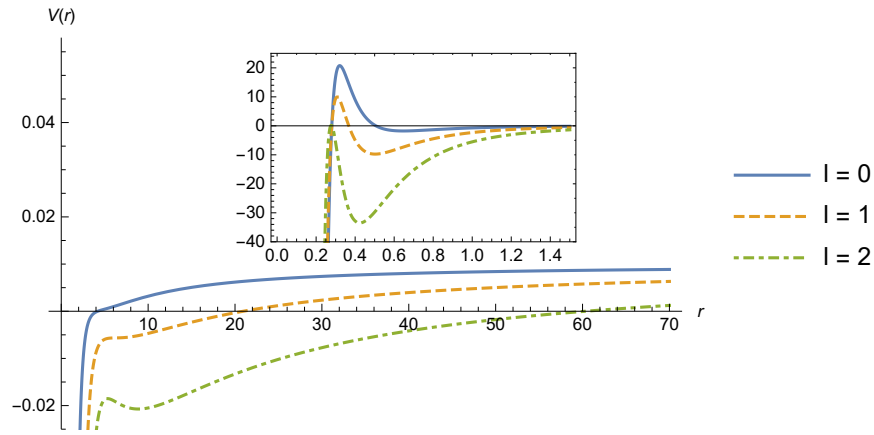


Figura 24 – Potencial efetivo, $V(r)$, como função de r para $a = 0.2$. Destacamos a região $0 < r < 1.5$.

Tabela 1 – Modos quasinormais para $a = 0$.

l	n	$Re(\omega)$	$-Im(\omega)$
1	0	0.193433	0.0304121
1	1	0.309282	0.0526751
1	2	0.456202	0.049606
1	3	0.613299	0.036175
2	0	0.277859	0.0346509
2	1	0.366359	0.0748964
2	2	0.490683	0.0833815
2	3	0.6302629	0.0748298

Tabela 2 – Modos quasinormais para $a = 0.1$.

l	n	$Re(\omega)$	$-Im(\omega)$
1	0	0.0784719	0.0122905
1	1	0.119643	0.0237244
1	2	0.17301	0.0262862
1	3	0.230542	0.0259501
2	0	0.118369	0.0137643
2	1	0.149279	0.0323677
2	2	0.194185	0.0405104
2	3	0.245328	0.0432944

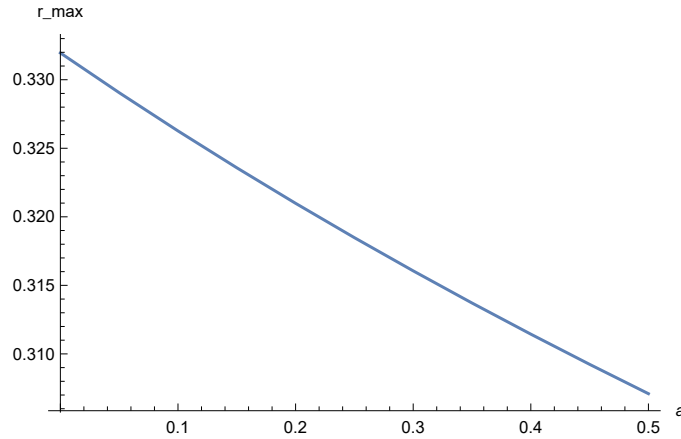


Figura 25 – Nesta figura, representamos r_{max} como função de a .

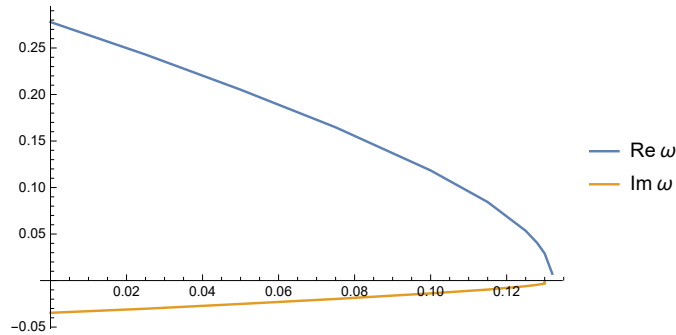


Figura 26 – Os valores das partes real e imaginária do modo quasinormal ω em função de a , para $n = 0$ e $l = 2$, são representados nesta figura.

representamos os valores das partes real e imaginária do modo quasinormal ω como função desse mesmo parâmetro.

Em suma, analisamos a influência do parâmetro da nuvem de cordas, a , nos valores das partes real e imaginária das frequências quasinormais do buraco negro de Reissner-Nordström imerso em quintessência e em nuvem de cordas, para valores fixos de α e para $\omega_q = -2/3$. Essa dependência é tal que, quando a aumenta, os módulos das partes real e imaginária dos modos quasinormais diminuem, aumentando o tempo de emissão de radiação, o que significa que a frequência de emissão é menor do que aquela que existe quando não há nuvem de cordas. Esse é um resultado muito interessante devido ao fato de que, em escala astrofísica, os fenômenos mais importantes ocorrem para as menores frequências quasinormais.

9 Buraco negro de Reissner-Nordström-AdS com quintessência e nuvem de cordas

Acrescentaremos constante cosmológica ao espaço-tempo tratado no capítulo anterior, obtendo a métrica correspondente ao buraco negro de Reissner-Nordström AdS com quintessência e nuvem de cordas (TOLEDO; BEZERRA, 2019e).

Iremos efetuar uma extensa análise da termodinâmica do sistema proposto, já que esse aspecto de buracos negros com constante cosmológica tem tido muita atenção na literatura (KASTOR; RAY; TRASCHEN, 2009; DOLAN, 2011b; KUBIZŇÁK; MANN, 2012; CAI et al., 2013; BANERJEE; ROYCHOWDHURY, 2012; LIU; MENG, 2016; ZOU; ZHANG; WANG, 2014; DOLAN, 2011a; CVETIČ et al., 2011; SPALLUCCI; SMAILAGIC, 2013; HENDI et al., 2017; LIU; MENG, 2017; MO; LIU, 2014; ZHAO et al., 2013), especialmente quando se consideram buracos negros carregados (KUBIZŇÁK; MANN, 2012), tendo estes mostrado similaridades com sistemas líquido-gás. Em particular, o buraco negro de Reissner-Nordström AdS apresenta transições de fase de primeira ordem similares a sistemas de matéria condensada (CHAMBLIN et al., 1999a; CHAMBLIN et al., 1999b). Investigações como essa passaram a ser realizadas desde quando se propôs que a constante cosmológica pode ser interpretada como uma pressão termodinâmica com um volume, parâmetro extensivo, associado (CALDARELLI; COGNOLA; KLEMM, 2000; SHUANG et al., 2006; SEKIWA, 2006; KASTOR; RAY; TRASCHEN, 2009; DOLAN, 2011b).

Na análise da termodinâmica desses buracos negros com constante cosmológica, podemos considerá-los máquinas termo-gravitacionais (JOHNSON, 2014). Nesse caso, a eficiência pode ser determinada de maneira análoga à tradicional (JOHNSON, 2014; MO; LIANG; LI, 2017; SETARE; ADAMI, 2015; JOHNSON, 2016a; SADEGHI; JAFARZADE, 2015), se partirmos da premissa de que é possível extrair trabalho através do termo em pdV . De maneira semelhante ao que acontece na termodinâmica clássica, a máquina é definida através de um ciclo fechado no plano pxV (JOHNSON, 2014). Na literatura, encontramos diversos trabalhos que calculam a eficiência de máquinas térmicas em diferentes espaços-tempo (JOHNSON, 2014; JOHNSON, 2016b; LIU; MENG, 2017).

Neste capítulo, iremos tratar o buraco negro de Reissner-Nördstrom AdS com quintessência e nuvem de cordas como máquina térmica, mostrando que as cordas reduzem a eficiência do sistema, quando comparamos ao cenário em que apenas se considera a quintessência (LI, 2014).

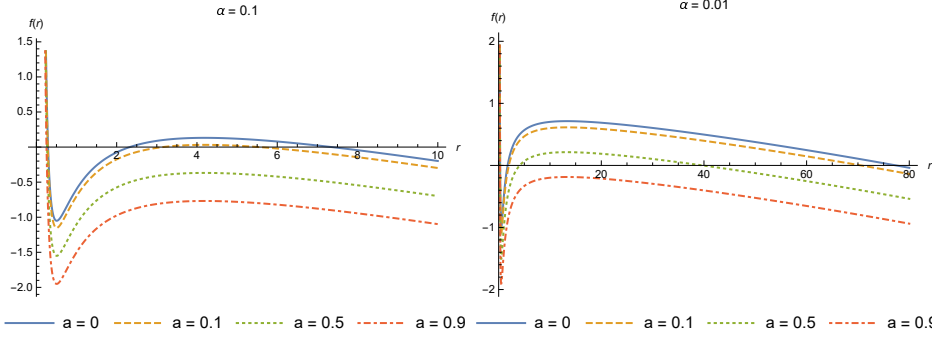


Figura 27 – Função $f(r)$ para diferentes valores de a e de α . Escolhemos $M = 1$ e $Q^2 = 0.5$.

9.1 A métrica e os horizontes do buraco negro

Para obtermos a métrica correspondente ao buraco negro de Reissner-Nordström-AdS com quintessência e nuvem de cordas, apenas acrescentaremos ao elemento de linha descrito na Eq. (8.1) um termo com constante cosmológica, de tal forma que a equação de Einstein escrita na forma da Eq. (5.12) seja obedecida. Esse intento é conseguido se adotarmos a métrica (TOLEDO; BEZERRA, 2019e)

$$ds^2 = \left(1 - a - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) dt^2 - \left(1 - a - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (9.1)$$

que, portanto, é a solução pretendida. No que segue, iremos fixar $\omega_q = -2/3$.

Os horizontes do buraco negro são obtidos através da equação

$$f(r) = 1 - a - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \alpha r - \frac{\Lambda r^2}{3} = 0. \quad (9.2)$$

Na Figura 27, apresentamos o gráfico da função $f(r)$ para diferentes valores dos parâmetros a e α .

Podemos verificar que o buraco negro possuirá até três horizontes positivos: o horizonte de eventos, r_+ , o horizonte interno (de Cauchy), r_- , e um horizonte cosmológico associado à quintessência, r_q . A raiz da Eq. (9.2) associada à constante cosmológica possuirá sempre valores negativos.

9.2 Termodinâmica do buraco negro

Iremos, agora, estudar a termodinâmica do buraco negro, analisando os potenciais termodinâmicos do sistema, seus parâmetros intensivos associados e a estrutura de fases.

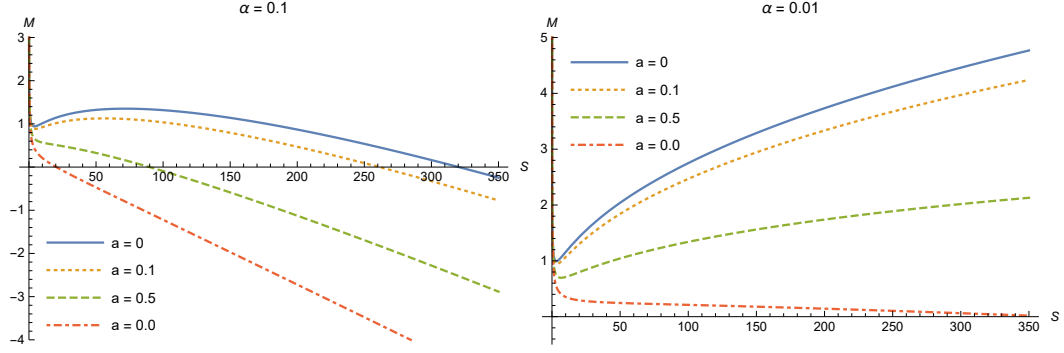


Figura 28 – Parâmetro de massa como função da entropia, S , para diferentes valores de a e de α .

Para qualquer horizonte de raio r_h , o parâmetro de massa do buraco negro poderá ser escrito na forma

$$M = \frac{1-a}{2}r_h + \frac{Q^2}{2r_h} - \frac{\alpha}{2}r_h^2 - \frac{\Lambda r_h^3}{6}. \quad (9.3)$$

Como já discutido, para um buraco negro estático, a entropia é calculada pela lei da área $S = A/4 = \pi r_h^2$. Com isso, o parâmetro de massa, que corresponde a sua energia termodinâmica, pode ser escrito como função da entropia através da expressão

$$M = M(S, Q, \Lambda) = \frac{1-a}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}} + \frac{Q^2}{2}\sqrt{\frac{\pi}{S}} - \frac{\alpha}{2}\frac{S}{\pi} - \frac{\Lambda}{6}\left(\frac{S}{\pi}\right)^{3/2}. \quad (9.4)$$

O comportamento de M em função de S está plotado na Figura 28 para diferentes valores do parâmetro da nuvem de cordas.

Podemos assumir que, no contexto da termodinâmica, a pressão se relaciona com a constante cosmológica por (DOLAN, 2011b)

$$p = -\frac{\Lambda}{8\pi}. \quad (9.5)$$

Com isso, o parâmetro de massa pode ser escrito como

$$M = M(S, Q, p) = \frac{1-a}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}} + \frac{Q^2}{2}\sqrt{\frac{\pi}{S}} - \frac{\alpha}{2}\frac{S}{\pi} + \frac{4\pi p}{3}\left(\frac{S}{\pi}\right)^{3/2}. \quad (9.6)$$

Devido à dependência funcional, o parâmetro de massa, $M = M(S, Q, p)$, pode ser identificado com a entalpia $H = H(S, Q, p)$. Logo, a primeira lei da termodinâmica pode ser escrita na forma

$$\delta M = T\delta S + \phi\delta Q + V\delta p, \quad (9.7)$$

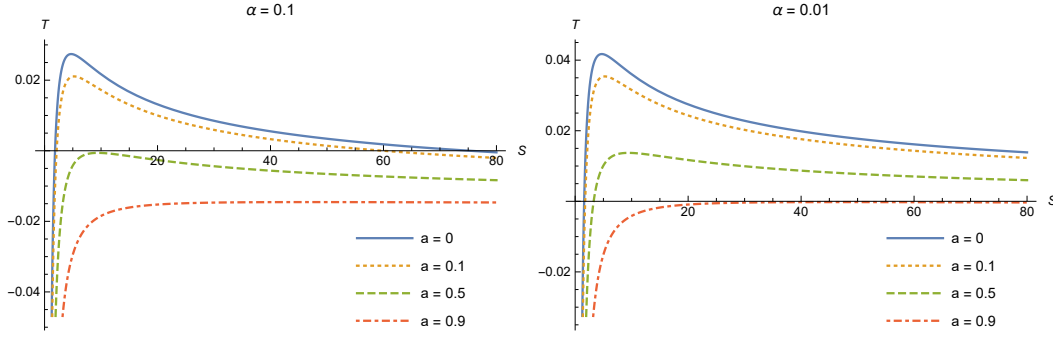


Figura 29 – Temperatura Hawking, T , como função da entropia.

em que T é a temperatura Hawking (HAWKING, 1975; HAWKING, 1976), que é dada por

$$T = \left(\frac{\partial M}{\partial S} \right)_{Q,p} = \frac{1-a}{4\sqrt{S}\pi} - \frac{Q^2}{4S} \sqrt{\frac{\pi}{S}} - \frac{\alpha}{2\pi} + 2p\sqrt{\frac{S}{\pi}} \quad (9.8)$$

e cujo comportamento em função da entropia é mostrado na Figura 29.

Já o potencial elétrico ϕ e o volume termodinâmico V são obtidos por

$$\phi = \left(\frac{\partial M}{\partial Q} \right)_{S,p} = Q\sqrt{\frac{\pi}{S}} = \frac{Q}{r_h}, \quad (9.9)$$

$$V = \left(\frac{\partial M}{\partial p} \right)_{S,Q} = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{S}{\pi} \right)^{3/2} = \frac{4\pi r_h^3}{3}. \quad (9.10)$$

Como deveríamos esperar, o volume termodinâmico é uma função monotônica do raio do horizonte, dada por $4\pi r_h^3/3$, e o potencial elétrico é aquele classicamente obtido no eletromagnetismo. Note que, a partir da Eq. (9.10), podemos concluir que a entropia e o volume termodinâmico não são grandezas dependentes.

A energia interna do buraco negro pode ser obtida a partir da Eq. (9.6) realizando-se uma transformação de Legendre. Temos, portanto,

$$E(S, Q, V) = M(S, Q, p) - Vp = \frac{1-a}{2} \sqrt{\frac{S}{\pi}} + \frac{Q^2}{2} \sqrt{\frac{\pi}{S}} - \frac{\alpha}{2} \frac{S}{\pi} \quad (9.11)$$

A capacidade térmica do buraco negro a pressão constante é calculada utilizando-se a relação entre a entropia e a temperatura descrita na Eq. (9.8). Temos, então,

$$C_p = T \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_{Q,p} = \frac{2(1-a)S^2 - 2Q^2S - 4\alpha S^2 \sqrt{\frac{S}{\pi}} + 16pS^3}{-(1-a)S + 3Q^2 + 8pS^2}. \quad (9.12)$$

Já a capacidade térmica a volume constante será

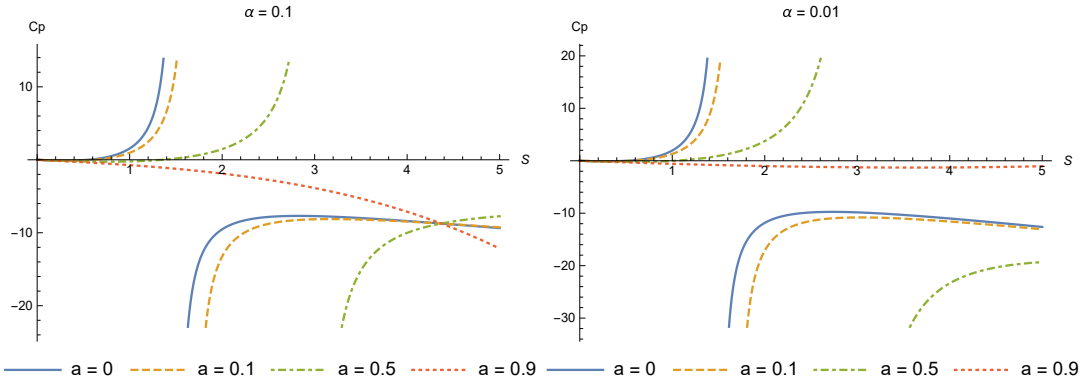


Figura 30 – Capacidade térmica a pressão constante, C_p , como função da entropia, S .

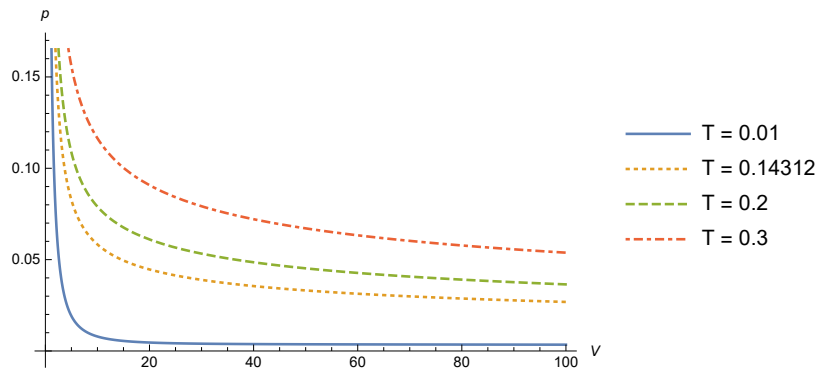


Figura 31 – Gráfico $p \times V$ para diferentes valores de T . Assumimos que $Q = M = 1$ e $a = 0.1$.

$$C_V = T \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_{Q,V} = 0. \quad (9.13)$$

Podemos concluir que C_V é nulo já que, da Eq. (9.10), podemos verificar que, se V é constante, S também o será, o que significa que, para o buraco negro em estudo, os processos isocóricos são também adiabáticos.

O comportamento de C_p como função da entropia é representado na Figura 30. Note que há transições de fase de segunda ordem para diferentes valores dos parâmetros α e a , com exceção do caso em que $a = 0.9$, no qual não há transição.

Se reescrevermos a Eq. (9.8) como função de p e de V , temos a equação de estado

$$T(p, V) = \frac{1-a}{(4\pi)^{2/3}(3V)^{1/3}} - \frac{Q^2}{3V} - \frac{\alpha}{2\pi} + 2p \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{1/3}. \quad (9.14)$$

cujos diagramas $p \times V$ estão representados nas Figs. 31, 32 e 33.

Por fim, consideremos que os parâmetros relacionados à quintessência e à nuvem de cordas, respectivamente, α e a , são parâmetros extensivos (LIU; MENG, 2017). Como consequência, a primeira lei da termodinâmica pode ser escrita na forma

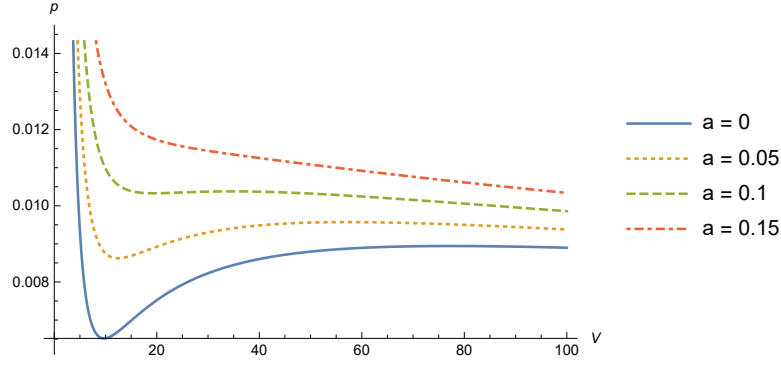


Figura 32 – Gráfico $p \times V$ para $T = 0.1$, $\alpha = 0.01$ e diferentes valores de a .

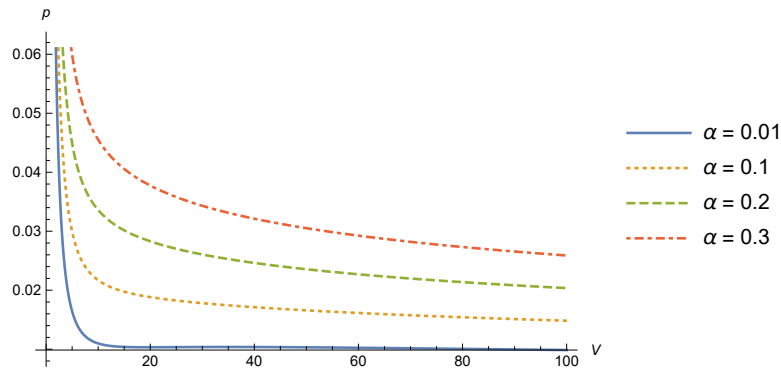


Figura 33 – Gráfico $p \times V$ para $T = 0.1$, $a = 0.1$ e diferentes valores de α .

$$\delta M = T\delta S + \phi\delta Q + V\delta p + \mathcal{A}\delta\alpha + \mathcal{B}\delta a. \quad (9.15)$$

com

$$\mathcal{A} = -\frac{r_h^2}{2} = -\frac{S}{2\pi} \quad (9.16)$$

e

$$\mathcal{B} = -\frac{r_h}{2} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}, \quad (9.17)$$

onde $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são grandezas conjugadas aos parâmetros α e a , respectivamente.

Assim, podemos concluir que as grandezas termodinâmicas como temperatura, entropia, energia interna e capacidade térmica possuem expressões semelhantes ao caso em que se considera apenas a presença da quintessência (LI, 2014). A nuvem de cordas, quando acrescida, provoca um decréscimo nessas grandezas. Esse efeito pode ser verificado, por exemplo, na Figura 28, para o parâmetro de massa, e na Figura 29.

9.3 Grandezas termodinâmicas críticas

Nesta seção, iremos investigar as grandezas termodinâmicas críticas e determinar os expoentes críticos para o sistema em análise.

A temperatura Hawking da Eq. (9.8) pode ser escrita como função de r_h como

$$T = \frac{1-a}{4\pi r_h} - \frac{Q^2}{4\pi r_h^3} - \frac{\alpha}{2\pi} + 2pr_h, \quad (9.18)$$

a partir da qual podemos obter a equação de estado

$$p = \frac{T}{2r_h} - \frac{1-a}{8\pi r_h^2} + \frac{Q^2}{8\pi r_h^4} + \frac{\alpha}{4\pi r_h}. \quad (9.19)$$

Definamos o volume termodinâmico específico $v = 2r_h$ (LI, 2014), que é o dobro do raio do horizonte do buraco negro e difere da definição usual. Assim, a Eq. (9.19) será reescrita na forma

$$p = \frac{T}{v} - \frac{1-a}{2\pi v^2} + \frac{2Q^2}{\pi v^4} + \frac{\alpha}{2\pi v}. \quad (9.20)$$

Para obtermos os pontos críticos do sistema, precisamos impor as seguintes condições

$$\left. \frac{\partial p}{\partial v} \right|_{T=T_c} = 0, \quad (9.21)$$

$$\left. \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right|_{T=T_c} = 0. \quad (9.22)$$

Utilizando a primeira condição, obtemos a seguinte relação entre a temperatura crítica, T_c , e o volume específico crítico, v_c ,

$$T_c = \frac{1-a}{\pi v_c} - \frac{8Q^2}{\pi v_c^3} - \frac{\alpha}{2\pi}. \quad (9.23)$$

De forma semelhante, podemos obter a pressão crítica, que é dada por

$$p_c = \frac{1-a}{2\pi v_c^2} - \frac{6Q^2}{\pi v_c^4}. \quad (9.24)$$

Da condição (9.22), obtemos os valores críticos das grandezas termodinâmicas, isto é,

$$\begin{aligned} v_c &= \frac{2\sqrt{6}Q}{1-a}, & T_c &= \frac{(1-a)^2}{2\sqrt{\pi}Q} \left(\frac{2-a}{3} \right) - \frac{\alpha}{2\pi}, \\ p_c &= \frac{(1-a)^3(1+a)}{96\pi Q^2}. \end{aligned} \quad (9.25)$$

O efeito combinado da quintessência e da nuvem de cordas é mostrado explicitamente em (9.25). Note que, se considerarmos $a = 0$, o que significa a ausência de nuvem de cordas, iremos retomar os resultados obtidos na literatura (LI, 2014), em que se considerou o buraco negro de Reissner-Nördstrom AdS imerso em quintessência. De forma semelhante, na ausência de quintessência e de nuvem de cordas, obtemos os valores críticos das grandezas termodinâmicas de um buraco negro carregado num universo com constante cosmológica (KUBIZŇÁK; MANN, 2012). Os valores críticos das grandezas termodinâmicas, quando variamos o parâmetro da nuvem de cordas, a , estão representados nas Tabelas 3, 4 e 5. O diagrama $p - V$ representado na Figura 32 mostra o comportamento crítico do sistema para diferentes valores do parâmetro a . Nesse caso, o valor da temperatura crítica, T_c , é 0.14472.

Tabela 3 – Comportamento dos parâmetros críticos v_c , T_c , p_c e $\frac{p_c v_c}{T_c}$ para diferentes valores de a e para $Q = 1$, $\alpha = 0.01$ e $\omega_q = -2/3$.

a	v_c	T_c	p_c	$\frac{p_c v_c}{T_c}$
0	4.89898	0.18647	0.00332	0.08711
0.05	5.15682	0.16389	0.00298	0.09392
0.1	5.44331	0.14312	0.00266	0.10112
0.15	5.76350	0.12409	0.00234	0.10876
0.2	6.12372	0.10673	0.00203	0.11688
0.25	6.53197	0.0097	0.00175	0.12555

Tabela 4 – Comportamento dos parâmetros críticos v_c , T_c , p_c e $\frac{p_c v_c}{T_c}$ para diferentes valores de α e para $Q = 1$, $a = 0.1$ e $\omega_q = -2/3$.

α	v_c	T_c	p_c	$\frac{p_c v_c}{T_c}$
0.01	5.44331	0.14312	0.00266	0.10112
0.05	5.44331	0.13676	0.00266	0.10583
0.1	5.44331	0.12880	0.00266	0.11237
0.2	5.44331	0.11288	0.00266	0.12821
0.3	5.44331	0.09697	0.00266	0.14926

Assim, verificamos que a temperatura crítica, o volume crítico e a pressão crítica dados pelas Eqs. (9.23), (9.24) e (9.25), respectivamente, diminuem quando aumentamos o valor do parâmetro da nuvem de cordas, a . Pode-se, ainda, observar que o volume específico crítico, v_c , aumenta quando a aumenta, como observamos na Tabela 3.

Quando consideramos o efeito do parâmetro de quintessência, α , como mostrado nas Tabelas 4 e 5, podemos verificar que o volume específico crítico e a pressão crítica mantêm-se constantes enquanto a temperatura crítica varia. Com isso, a expressão $p_c v_c / T_c$ não é constante, dependendo do valor adotado para α .

Tabela 5 – Comportamento dos parâmetros críticos v_c , T_c , p_c e $\frac{p_c v_c}{T_c}$ para diferentes valores de α e para $Q = 1$, $a = 0.25$ e $\omega_q = -2/3$.

α	v_c	T_c	p_c	$\frac{p_c v_c}{T_c}$
0.01	6.53197	0.09097	0.00154	0.11048
0.05	6.53197	0.08461	0.00154	0.11880
0.1	6.53197	0.07665	0.00154	0.13113
0.2	6.53197	0.06073	0.00154	0.16550
0.3	6.53197	0.04482	0.00154	0.22427

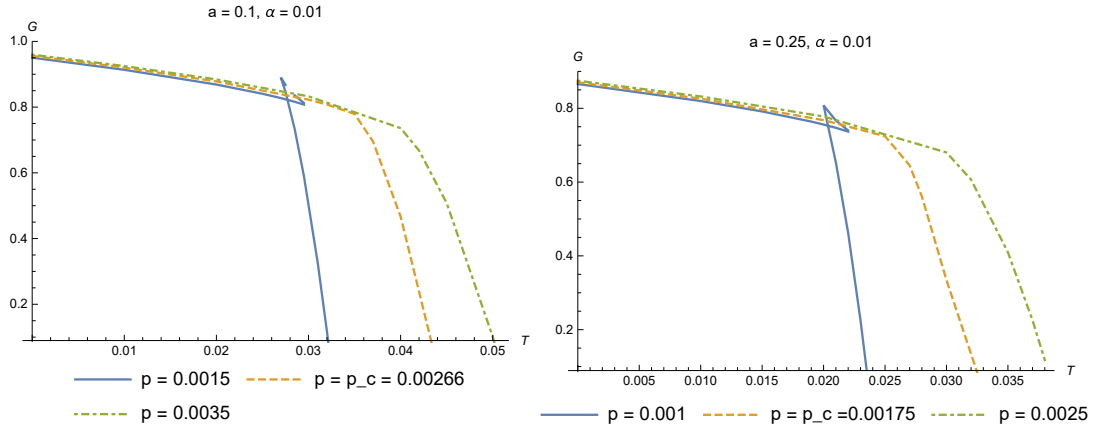


Figura 34 – Energia livre de Gibbs em função da temperatura Hawking T , para $Q = 1$.

Finalmente, a energia livre de Gibbs do buraco negro será definida por

$$G(T, Q, p) = M(S, Q, p) - TS = \frac{1-a}{4}r_h + \frac{3Q^2}{4r_h} - \frac{2\pi p r_h^3}{3}, \quad (9.26)$$

e seu comportamento é representado na Figura 34.

Os expoentes críticos ajudam-nos a descrever o comportamento do sistema nas proximidades de pontos críticos (LI, 2014). Para esse propósito, vamos definir, por conveniência, as seguintes grandezas

$$t = \frac{T}{T_c} - 1, \quad \epsilon = \frac{v}{v_c} - 1, \quad \tilde{p} = \frac{p}{p_c}. \quad (9.27)$$

Com isso, os expoentes críticos podem ser expressos em termos das potências (LI, 2014)

$$C_v \propto |t|^{-\xi} \quad (9.28)$$

$$\eta \propto |t|^\beta \quad (9.29)$$

$$\kappa_T \propto |t|^{-\gamma} \quad (9.30)$$

$$|p - p_c| \propto |v - v_c|^\delta, \quad (9.31)$$

onde ξ , β , γ e δ caracterizam o comportamento da capacidade térmica a volume constante, do parâmetro de ordem, da compressibilidade isotérmica, e da pressão, respectivamente.

De acordo com a Eq. (9.13), $C_V = 0$ e, portanto, $\xi = 0$. Agora, consideremos o comportamento da equação de estado nas proximidades do ponto crítico. Então, a Eq. (9.20) pode ser expandida como segue (LI, 2014):

$$\tilde{p} = 1 + b_{10}t + b_{01}\epsilon + b_{11}t\epsilon + b_{02}\epsilon^2 + b_{03}\epsilon^3 + \mathcal{O}(t\epsilon^2, \epsilon^4), \quad (9.32)$$

onde

$$b_{10} = b_{02} = 0, \quad (9.33)$$

$$b_{10} = \frac{T_c}{p_c v_c}, \quad (9.34)$$

$$b_{11} = -\frac{T_c}{p_c v_c}, \quad (9.35)$$

$$b_{03} = \frac{24T_c}{p_c v_c} - \frac{18(1-a)}{\pi p_c v_c^2} + \frac{12\alpha}{p_c v_c}. \quad (9.36)$$

$$(9.37)$$

Assumindo que o buraco negro passa por uma transição de um estado l para um menor, s , e que, durante a transição de fase, a pressão permanece constante, Li (LI, 2014) verificou que

$$\epsilon_l = -\epsilon_s = \sqrt{\frac{-b_{11}t}{b_{03}}}, \quad (9.38)$$

Portanto, o parâmetro de ordem tem o comportamento a seguir em termos da temperatura reduzida

$$\eta = v_l - v_s = v_c(\epsilon_l - \epsilon_s) = 2v_c \sqrt{\frac{-b_{11}t}{b_{03}}} \propto (-t)^{1/2}. \quad (9.39)$$

Então, teremos $\beta = 1/2$. Quanto à compressibilidade isotérmica, κ_T , temos que

$$\kappa_T = -\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial p} \Big|_{v_c} \propto -\frac{1}{\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \epsilon}} \Big|_{\epsilon=0} = -\frac{1}{b_{11}t}, \quad (9.40)$$

e, como consequência, obtemos que $\gamma = 1$. Por fim, se considerarmos a temperatura reduzida igual a zero, $t = 0$, temos

$$\tilde{p} - 1 = b_{03}\epsilon^3, \quad (9.41)$$

o que nos leva a $\delta = 3$.

A partir desses resultados, podemos concluir que os expoentes críticos são obtidos de maneira exata para o buraco negro de Reissner-Nordström-AdS com quintessência e nuvem de cordas, quando fixamos $\omega_q = -2/3$. A nuvem de cordas não modifica os valores desses expoentes expoentes.

9.4 Buraco negro como uma máquina térmica

Iremos tratar o buraco negro como uma máquina térmica termo-gravitacional (HENNIGAR et al., 2017; LIU; MENG, 2017). Como se sabe, máquinas térmicas são aparelhos que, recebendo calor de uma fonte quente (Q_H), são capazes de produzir trabalho útil (W), transferindo o calor residual (Q_C) para uma fonte fria. A eficiência da máquina térmica (η) é, então, definida pela razão entre o trabalho produzido e a energia recebida da fonte quente, que pode ser expressa por

$$\eta = \frac{W}{Q_H} = 1 - \frac{Q_C}{Q_H}. \quad (9.42)$$

em que usamos a lei de conservação da energia $Q_H = W + Q_C$, com o trabalho realizado num ciclo, W , sendo dada pela área desse ciclo no plano pxV . No que segue, iremos considerar que o buraco negro opera em dois ciclos.

Primeiramente, consideremos que o buraco negro opera em um ciclo formado por dois processos isobáricos e dois isocóricos, como apresentado na Figura 35. Esse ciclo de formato retangular pode ser utilizado para construir outros de formato arbitrário.

Iremos comparar a eficiência da máquina acima descrita com aquela da máquina que produz máximo trabalho útil. A máxima eficiência é produzida pela máquina de Carnot, que opera através de dois processos isotérmicos e dois adiabáticos. Sua eficiência é dada por

$$\eta_c = 1 - \frac{T_C}{T_H}, \quad (9.43)$$

com T_C e T_H sendo as temperaturas da fonte quente e do reservatório frio, respectivamente. Como o volume termodinâmico é uma função da entropia, para o buraco negro em estudo, os processos adiabáticos (S constante) são também isocóricos e o ciclo representado na Figura 36, na qual $1 \rightarrow 2$ e $3 \rightarrow 4$ são processos isotérmicos, irá gerar máxima eficiência.

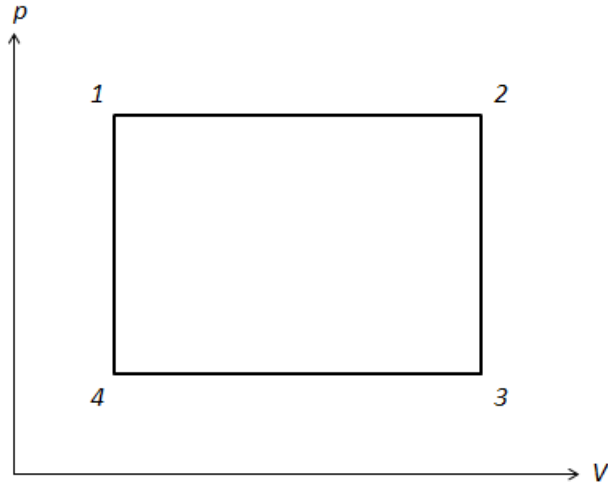


Figura 35 – Diagrama pxV da máquina térmica operando por dois processos isobáricos e dois isocóricos.

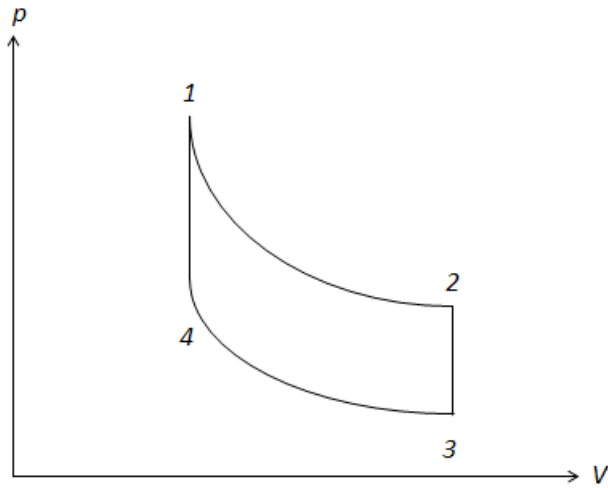


Figura 36 – Diagrama pxV da máquina térmica que produz máxima eficiência.

No ciclo representado na Figura 35, o trabalho, que é calculado pela área da figura, será dado por

$$W = (V_2 - V_1)(p_1 - p_4) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left(S_2^{3/2} - S_1^{3/2} \right) (p_1 - p_4). \quad (9.44)$$

Como discutimos, não há troca de calor nos processos isocóricos e, portanto, Q_H é o calor recebido no processo isobárico $1 \rightarrow 2$. Com isso, da Eq. (9.12), obtemos

$$\begin{aligned} Q_H &= \int_{T_1}^{T_2} C_p(p_1, T) dT = \int_{S_1}^{S_2} C_p(p_1, S) \left. \frac{\partial T}{\partial S} \right|_p dS = \\ &= \int_{S_1}^{S_2} T dS = \int_1^2 dM = M_2 - M_1 = \end{aligned}$$

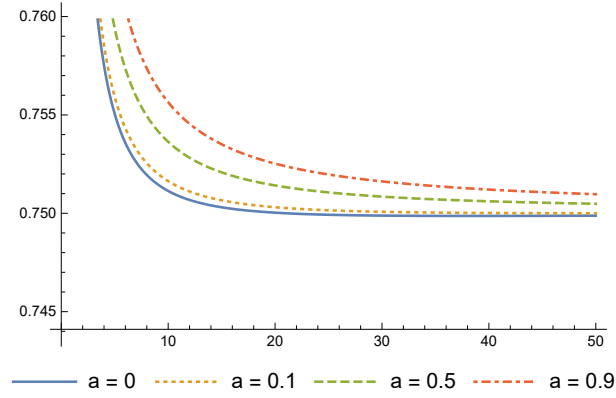


Figura 37 – Eficiência η em função da entropia, S , para diferentes valores de a .

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1-a}{2} \sqrt{\frac{S_2}{\pi}} + \frac{Q^2}{2} \sqrt{\frac{\pi}{S_2}} - \frac{\alpha}{2} \frac{S_2}{\pi} + \frac{4\pi p_2}{3} \left(\frac{S_2}{\pi}\right)^{3/2} \\
 &\quad - \left[\frac{1-a}{2} \sqrt{\frac{S_1}{\pi}} + \frac{Q^2}{2} \sqrt{\frac{\pi}{S_1}} - \frac{\alpha}{2} \frac{S_1}{\pi} + \frac{4\pi p_1}{3} \left(\frac{S_1}{\pi}\right)^{3/2} \right]. \quad (9.45)
 \end{aligned}$$

A eficiência da máquina termogravitacional será, então, dada por

$$\eta = \frac{\left(1 - \frac{p_4}{p_1}\right)}{\xi}, \quad (9.46)$$

em que

$$\begin{aligned}
 \xi &= 1 + \frac{3(1-a)(\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1})}{8(S_2^{3/2} - S_1^{3/2})} \\
 &\quad + \frac{3\pi Q^2}{8(S_2^{3/2} - S_1^{3/2})} \left(\frac{1}{\sqrt{S_2}} - \frac{1}{\sqrt{S_1}} \right) - \frac{3\alpha}{8\sqrt{\pi}} \frac{S_2 - S_1}{S_2^{3/2} - S_1^{3/2}}. \quad (9.47)
 \end{aligned}$$

Por sua vez, a eficiência da máquina de Carnot é calculada por (LIU; MENG, 2017)

$$\eta_c = 1 - \frac{T_4(p_4, S_1)}{T_2(p_1, S_2)}. \quad (9.48)$$

Nas Figuras 37 e 38, representamos os comportamentos da eficiência η e da razão η/η_c para diferentes valores do parâmetro a .

Note que, quando o parâmetro a aumenta, a eficiência diminui, como pode ser observado na Figura 37. Por outro lado, a Fig. 38 mostra que, quando a aumenta, a razão entre a eficiência da máquina e sua eficiência máxima diminui.

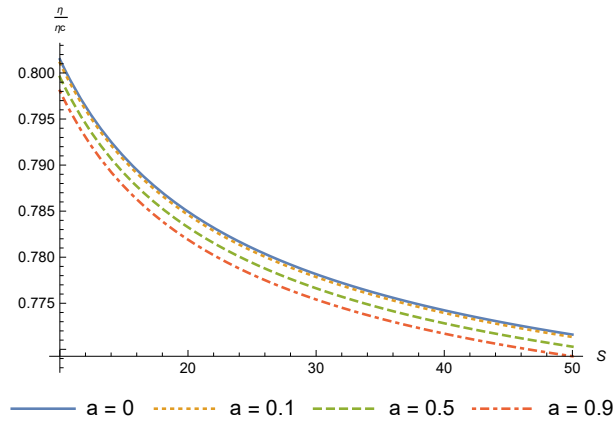


Figura 38 – Razão η/η_c em função da entropia, S , para diferentes valores de a .

10 Sobre as soluções de buracos negros em rotação com quintessência

A métrica do espaço-tempo correspondente a um buraco negro estático imerso em quintessência foi obtida por Kiselev ([KISELEV, 2003](#)). A partir dela, duas métricas distintas que representam um buraco negro em rotação com quintessência foram obtidas, através da aplicação do algoritmo de Newman-Janis ([NEWMAN; JANIS, 1965](#)). Uma foi obtida por Ghosh ([GHOSH, 2016](#)), como base no método em sua forma original, e a outra métrica foi derivada por Toshmatov et al. ([TOSHMATOV; STUHLÍK; AHMEDOV, 2017b](#)), aplicando-se o algoritmo de Newman-Janis com a modificação introduzida por Azreg-Aïnou ([AZREG-AÏNOU, 2014](#)).

O método de Newman-Janis permite esse tipo de ambiguidade já que, como discutimos no capítulo 4, há sempre uma etapa em que é feita uma escolha arbitrária, independentemente do formato em que o algoritmo é aplicado.

O objetivo deste capítulo é discutir as soluções do buraco negro de Kerr com quintessência. Iremos verificar que duas as métricas obtidas na literatura ([GHOSH, 2016](#); [TOSHMATOV; STUHLÍK; AHMEDOV, 2017b](#)) são soluções das equações de Einstein e tratar das estruturas de horizontes e ergorregiões de ambas. Iremos discorrer sobre a termodinâmica dos buracos negros e, por fim, das correções térmicas ao efeito Casimir em suas proximidades. Concluiremos traçando um quadro comparativo entre as métricas de forma que possamos contrapor as geometrias e as consequências físicas de cada uma delas.

Neste capítulo e no próximo, iremos utilizar a letra a para representar o momento angular por unidade de massa do buraco negro, notação amplamente adotada na literatura.

10.1 O algoritmo de Newman-Janis e o buraco negro estacionário com quintessência

Vamos utilizar o algoritmo de Newman-Janis para, partindo da solução de Kiselev ([KISELEV, 2003](#)), descrita na Eq. (5.32), obtermos as métricas do buraco negro de Kerr com quintessência ([GHOSH, 2016](#); [TOSHMATOV; STUHLÍK; AHMEDOV, 2017b](#)). Iremos utilizar o método em sua formulação original e mostrar que, embora Toshmatov e colaboradores tenham utilizado o algoritmo com uma pequena variação, há uma complexificação que nos permite obter a mesma métrica.

Utilizaremos os passos expostos no capítulo 4, partindo da métrica da Eq. (5.32), agora com assinatura $(-, +, +, +)$, que nos permitirá comparar os trabalhos originais que

tratam da solução (GHOSH, 2016; TOSHMATOV; STUHLÍK; AHMEDOV, 2017b).

1. Primeiramente, escrevemos a métrica em coordenadas de Eddington-Finkelstein (EF), (u, r, θ, ϕ) , aplicando a transformação

$$du = dt - \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}}\right)^{-1} dr. \quad (10.1)$$

Com isso, temos

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}}\right) du^2 - 2dudr + r^2 d\Omega^2. \quad (10.2)$$

2. A base de tetradas nulas, $(l^\mu, n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu)$, que descrevem a métrica como descrito na Eq. (4.3), terá as seguintes componentes (GHOSH, 2016; TOSHMATOV; STUHLÍK; AHMEDOV, 2017b)

$$l^\mu = \delta_1^\mu, \quad (10.3)$$

$$n^\mu = \delta_0^\mu - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}}\right) \delta_1^\mu, \quad (10.4)$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r} \left(\delta_2^\mu + \frac{i}{\sin\theta} \delta_3^\mu\right). \quad (10.5)$$

3. O terceiro passo é conhecido como complexificação e, possuindo certo grau de arbitrariedade (BAMBI; MODESTO, 2013), dá origem à grande parte das discussões realizadas na literatura (BAMBI; MODESTO, 2013; AZREG-AÏNOU, 2014).

De forma simples, como discutimos no capítulo 4, temos que tornar a coordenada r complexa de forma a manter as tetradas l e n reais. Precisamos, ainda, recobrar as tetradas originais quando $r = \bar{r}$. Além disso, realizamos a transformação

$$r \rightarrow r + ia \cos \theta, \quad u \rightarrow u - ia \cos \theta. \quad (10.6)$$

A complexificação do termo em $1/r$ é aquela usada por Newman e Janis (NEWMAN; JANIS, 1965) em seu trabalho original e descrita na Eq. (4.7). Quanto à complexificação do termo de quintessência, S. Ghosh utilizou (GHOSH, 2016)

$$\frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}} \rightarrow \frac{\alpha}{(r\bar{r})^{(3\omega_q+1)/2}}. \quad (10.7)$$

Por outro lado, como já foi afirmado, Toshmatov et al. usaram a modificação do método introduzida Azreg-Aïnou (AZREG-AÏNOU, 2014), que, por argumentos de simetria,

pula esta etapa. Mesmo assim, mostraremos que podemos realizar uma complexificação e chegar à mesma métrica obtida por Toshmatov et al. (TOSHMATOV; STUHLÍK; AHMEDOV, 2017b). Para tanto, usemos

$$\frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}} \rightarrow \frac{\alpha}{(r\bar{r})Re(r)^{3\omega_q-1}}, \quad (10.8)$$

sendo $Re(r)$ a parte real de r .

Utilizando a complexificação adotada por Ghosh, isto é, a Eq. (10.7), e a transformação de coordenadas da Eq. (10.6), temos as tetradas (GHOSH, 2016)

$$l^\mu = \delta_r^\mu, \quad (10.9a)$$

$$n^\mu = \delta_u^\mu - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma} - \frac{\alpha}{\Sigma^{\frac{3\omega_q+1}{2}}} \right) \delta_r^\mu, \quad (10.9b)$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r} \left(\delta_2^\mu + \frac{i}{\sin\theta} \delta_3^\mu \right). \quad (10.9c)$$

onde $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$. De outra forma, se partirmos da Eq. (10.8), a tetrada n^μ será

$$n^\mu = \delta_u^\mu - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma} - \frac{\alpha}{\Sigma r^{3\omega_q-1}} \right) \delta_r^\mu, \quad (10.10)$$

com l^μ e m^ν sendo os mesmos de (10.9). Desse modo, independentemente da complexificação escolhida, as componentes covariantes da métrica serão

$$\begin{aligned} g^{uu} &= -\frac{a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma}, & g^{u\phi} &= -\frac{a}{\Sigma}, \\ g^{\phi\phi} &= -\frac{1}{\Sigma \sin^2 \theta}, & g^{\theta\theta} &= -\frac{1}{\Sigma}, \\ g^{rr} &= -\frac{a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} - \zeta, & g^{r\phi} &= \frac{a}{\Sigma}, \\ g^{ur} &= \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} + 1, \end{aligned} \quad (10.11)$$

onde, para a complexificação adotada por Ghosh,

$$\zeta = \zeta_G(r, \theta) = 1 - \frac{2Mr}{\Sigma} - \frac{\alpha}{\Sigma^{\frac{3\omega_q+1}{2}}}. \quad (10.12)$$

Por outro lado, aplicando-se a complexificação da Eq. (10.8), temos

$$\zeta = \zeta_T(r, \theta) = 1 - \frac{2Mr}{\Sigma} - \frac{\alpha}{\Sigma r^{3\omega_q-1}}. \quad (10.13)$$

A partir das componentes da métrica covariante dispostas na Eq. (10.11) e retomando a coordenada t , temos o elemento de linha

$$ds^2 = \zeta(r, \theta)dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + 2(1 - \zeta)\sin^2\theta dt d\phi \quad (10.14)$$

$$- \Sigma d\theta^2 - \sin^2\theta[a^2(2 - \zeta)\sin^2\theta + \Sigma]d\phi^2, \quad (10.15)$$

onde, para a complexificação de Ghosh ,

$$\Delta = \Delta_G(r, \theta) = \zeta_G \Sigma + a^2 \sin^2\theta = r^2 + a^2 - 2Mr - \frac{\alpha}{\Sigma^{\frac{3\omega_q - 1}{2}}}, \quad (10.16)$$

enquanto, se usarmos a Eq. (10.8),

$$\Delta = \Delta_T(r) = \zeta_T \Sigma + a^2 \sin^2\theta = r^2 + a^2 - 2Mr - \alpha r^{-3\omega_q + 1}. \quad (10.17)$$

4. Enfim, colocamos a métrica nas coordenadas de Boyer-Lindquist realizando a transformação

$$dt \rightarrow dt - \left(\frac{r^2 + a^2}{\Delta} \right) dr, \quad d\phi \rightarrow d\phi - \frac{a}{\Delta} dr. \quad (10.18)$$

Para ambas complexificações, o elemento de linha concernente ao buraco negro de Kerr imerso em quintessência é dada por

$$\begin{aligned} ds^2 = & \frac{\Delta - a^2 \sin^2\theta}{\Sigma} dt^2 - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 \\ & + 2a \sin^2\theta \left(1 - \frac{\Delta - a^2 \sin^2\theta}{\Sigma} \right) dt d\phi - \Sigma d\theta^2 \\ & - \sin^2\theta \left[\Sigma + a^2 \sin^2\theta \left(2 - \frac{\Delta - a^2 \sin^2\theta}{\Sigma} \right) \right] d\phi^2, \end{aligned} \quad (10.19)$$

com uma única diferença que surge da função Δ . Observe que essa métrica é semelhante à obtida por Toshmatov et al. (TOSHMATOV; STUHLÍK; AHMEDOV, 2017b), quando usamos a complexificação da Eq. (10.8) e, conseqüentemente, a função $\Delta = \Delta_T$.

10.2 Comparando as soluções

Nesta seção, iremos comparar as métricas correspondentes ao buraco negro estacionário imerso em quintessência, analisando suas propriedades. No que segue, fixaremos $\omega_q = -2/3$.

10.2.1 Equações de Einstein e o tensor energia-momento

As equações de Einstein da relatividade geral são escritas na Eq. (2.2) e relacionam a geometria do espaço-tempo, descrita pelo tensor de Einstein, $G_{\mu\nu}$, ao conteúdo de matéria-energia codificado no tensor energia-momento, $T_{\mu\nu}$.

Entretanto, nem a métrica obtida por Ghosh (GHOSH, 2016) nem tampouco aquela desenvolvida por Toshmatov et al. (TOSHMATOV; STUHLÍK; AHMEDOV, 2017b) foram obtidas pela solução direta das equações de Einstein. Em outras palavras, não conhecemos o comportamento do conteúdo de matéria-energia relacionado ao buraco negro girante com quintessência antes de obtermos a métrica correspondente. Com isso, nos casos estudados, obtemos diferentes componentes do tensor de Einstein e, conseqüentemente, diferentes componentes do tensor energia-momento.

De forma semelhante ao que foi feito por Toshmatov et al., podemos utilizar o pacote RGTC do software Mathematica para calcularmos as componentes do tensor de Einstein, G_{tt} , $G_{t\phi}$, G_{rr} , $G_{r\theta}$, $G_{\theta\theta}$ e $G_{\phi\phi}$, e, em seguida, calcularmos as componentes do tensor energia-momento.

Vale ressaltar que, na métrica derivada por Toshmatov et al., a componente $G_{r\theta}$ é nula. Já no espaço-tempo obtido por Ghosh, por outro lado, quando consideramos $\omega_q = -2/3$, obtemos

$$G_{r\theta} = -\frac{3}{4\Sigma^{3/2}}\alpha a^2 r \sin(2\theta). \quad (10.20)$$

A partir da Eq. (10.20), podemos concluir que a métrica derivada por Ghosh não é diagonalizável. Esse fato, embora esteticamente desfavorável à métrica, pode estar relacionado ao fato de que há um arrasto da quintessência provocado pela rotação do buraco negro. Portanto, esse fator não é suficiente para abandonarmos a solução de Ghosh.

Ademais, cumpre destacar que, em seu trabalho, (KISELEV, 2003) assumiu que o tensor energia-momento para um buraco negro estático imerso em quintessência possui o formato geral

$$T_t^t = A(r), \quad T_t^j = 0, \quad T_i^j = C(r)r_i r^j + B(r)\delta_i^j. \quad (10.21)$$

Para o buraco negro com rotação, a componente $T^{r\theta}$ não necessariamente é nula.

Assim, partindo dos elementos de linha obtidos na literatura, podemos determinar os tensores de Einstein e os tensores energia-momento correspondentes.

Podemos concluir, portanto, que, do ponto de vista das equações de Einstein da relatividade geral, as métricas obtidas por Ghosh e por Toshmatov et al. são ambas possíveis e, assim, precisaremos analisar a diferença entre elas por meio de suas propriedades físicas.

10.2.2 O escalar de Kretschmann e as singularidades físicas

Como já sabemos, as singularidades físicas do buraco negro são as regiões em escalar Kretschmann, definido pela Eq. (2.3), diverge. Para a métrica determinada por Ghosh, temos

$$K = \frac{U(a, r, \theta)}{4\Delta^6(r, \theta)\Sigma^6}, \quad (10.22)$$

onde $U(a, r, \theta)$ é uma função polinomial de a , r , $\sin\theta$ e $\cos\theta$. Por outro lado, Toshmatov et al. obtiveram (TOSHMATOV; STUHLÍK; AHMEDOV, 2017b)

$$K = \frac{Z(a, r, \theta)}{\Sigma^6}, \quad (10.23)$$

sendo $Z(a, r, \theta)$ uma função polinomial como U .

Note que a dependência funcional do escalar de Kretschmann dá origem a uma importante diferença entre as métricas em estudo. Enquanto o escalar diverge quando $\Sigma = 0$ para a métrica derivada por Toshmatov et al., no espaço-tempo obtido por Ghosh as regiões definidas por $\Delta = 0$ são também singularidades físicas. Isso significa que, na última solução, os horizontes são singularidades física. Mesmo com esse fato, que aponta para a escolha da métrica de Toshmatov e colaboradores, não podemos abandonar completamente a métrica de Ghosh, já que é possível a existência de singularidade nua a depender do momento angular do buraco negro.

10.2.3 Horizontes

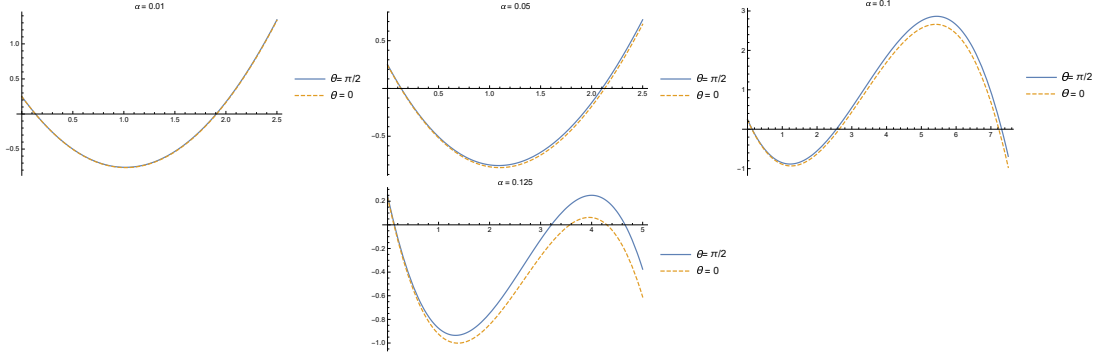
Os horizontes de um buraco negro em rotação são determinados pela equação $g^{rr} = 0$. Usando a métrica da Eq. (10.19) com a complexificação desenvolvida por Ghosh, os horizontes do buraco negro serão determinados pela equação

$$\Delta_G = r^2 + a^2 - 2Mr - \alpha (r^2 + a^2 \cos^2\theta)^{3/2} = 0, \quad (10.24)$$

a partir da qual verificamos que os horizontes não possuem formato de superfície esférica centrada na singularidade. Essa ausência de simetria pode resultar de arrasto da quintessência ocasionado pelo movimento do buraco negro. Na Figura 39, plotamos a função $\Delta = \Delta_G(r)$ para $\theta = 0$ (polos) e para $\theta = \pi/2$ (equador) e para diferentes valores de α .

Por seu turno, se usarmos a métrica derivada por Toshmatov et al., obtemos, para os horizontes do buraco negro, a equação

$$r^2 + a^2 - 2Mr - \alpha r^3 = 0, \quad (10.25)$$

Figura 39 – Comportamento de Δ para $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$

que pode ser escrita como (TOSHMATOV; STUCLÍK; AHMEDOV, 2017b)

$$\alpha(r - r_-)(r - r_+)(r - r_q) = 0. \quad (10.26)$$

Assim, para a métrica de Toshmatov et al., pode haver até três horizontes esféricos centrados na singularidade, cujas coordenadas radiais são r_- , para o horizonte interior ou de Cauchy, r_+ , para o horizonte de eventos, e r_q , para o horizonte cosmológico associado à quintessência (TOSHMATOV; STUCLÍK; AHMEDOV, 2017b).

Observe-se que, na região equatorial, ($\theta = \pi/2$), as Eqs. (10.24) e (10.25) são idênticas e, como consequência, os horizontes de ambas coincidem.

10.2.4 Ergorregiões

As superfícies estáticas do buraco negro são determinadas pela equação $g_{tt} = 0$. Da métrica (10.19), temos

$$\Delta = a^2 \sin^2 \theta. \quad (10.27)$$

No espaço-tempo obtido por Ghosh, as superfícies estáticas são determinadas pela equação

$$r^2 + a^2 \cos^2 \theta - 2Mr - \alpha(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^{3/2} = 0, \quad (10.28)$$

enquanto, usando o espaço-tempo de Toshmatov et al., temos

$$r^2 + a^2 \cos^2 \theta - 2Mr - \alpha r^3 = 0. \quad (10.29)$$

Nas Figuras 40 e 41, plotamos, lado a lado, as ergorregiões das métricas derivadas por Ghosh e por Toshmatov et. al., para diferentes valores do parâmetro de momento angular,

a , e da quintessência, α . As linhas tracejadas e sólidas representam, respectivamente, os horizontes e superfícies estáticas do buraco negro.

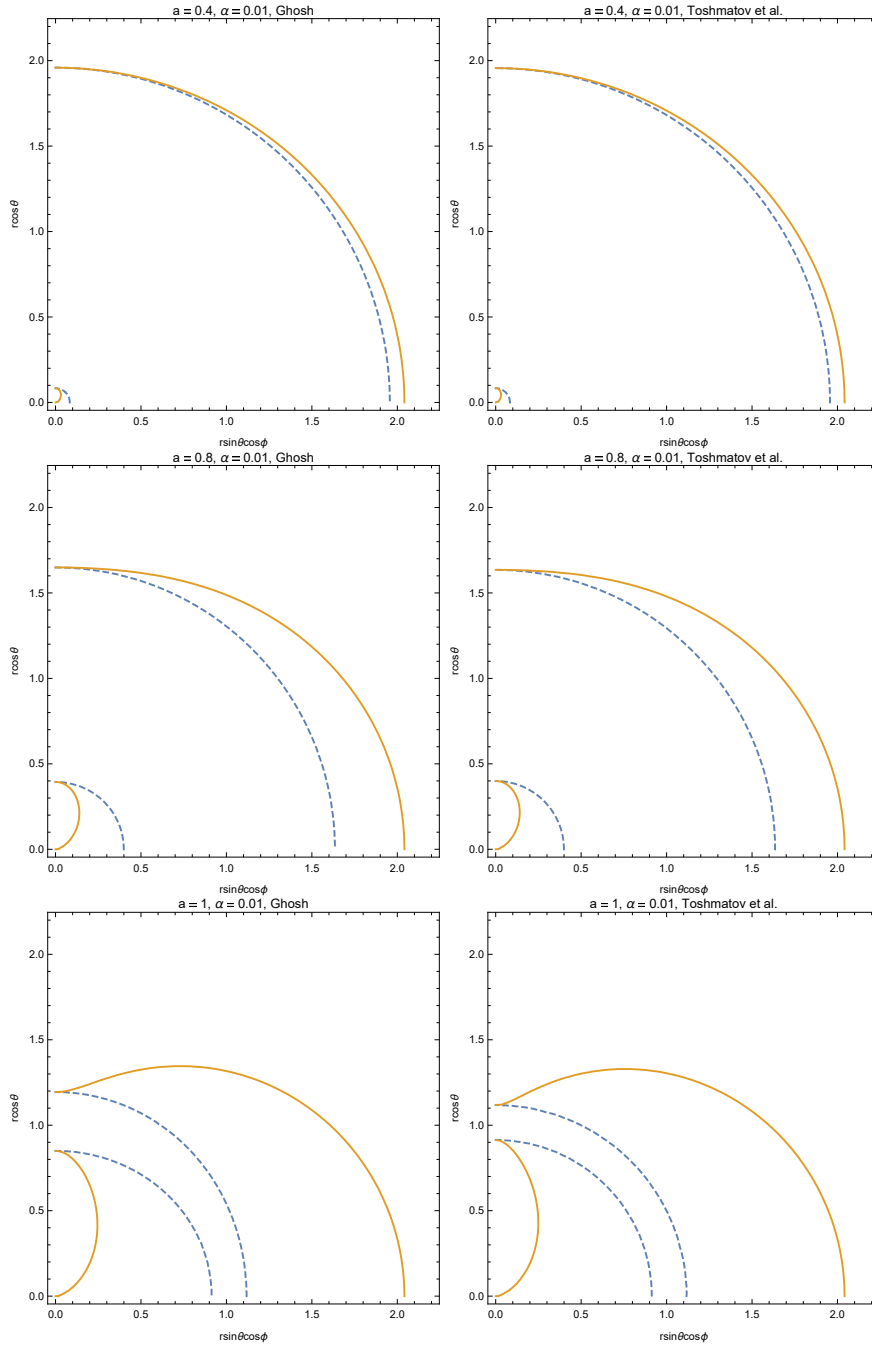


Figura 40 – Ergorregiões para do buraco negro nas métricas obtidas por Ghosh (esquerda) e por Toshmatov et al. (direita) para diferentes valores do parâmetro do momento angular, a , e para $\alpha = 0.01$.

Podemos observar que, como deveríamos esperar, para $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, os horizontes e superfícies estáticas coincidem. Por outro lado, no espaço-tempo obtido por Ghosh, os horizontes não são superfícies esféricas centradas na singularidade. Podemos ainda verificar que a diferença entre as soluções aumenta quando elevamos os valores dos parâmetros a e α .

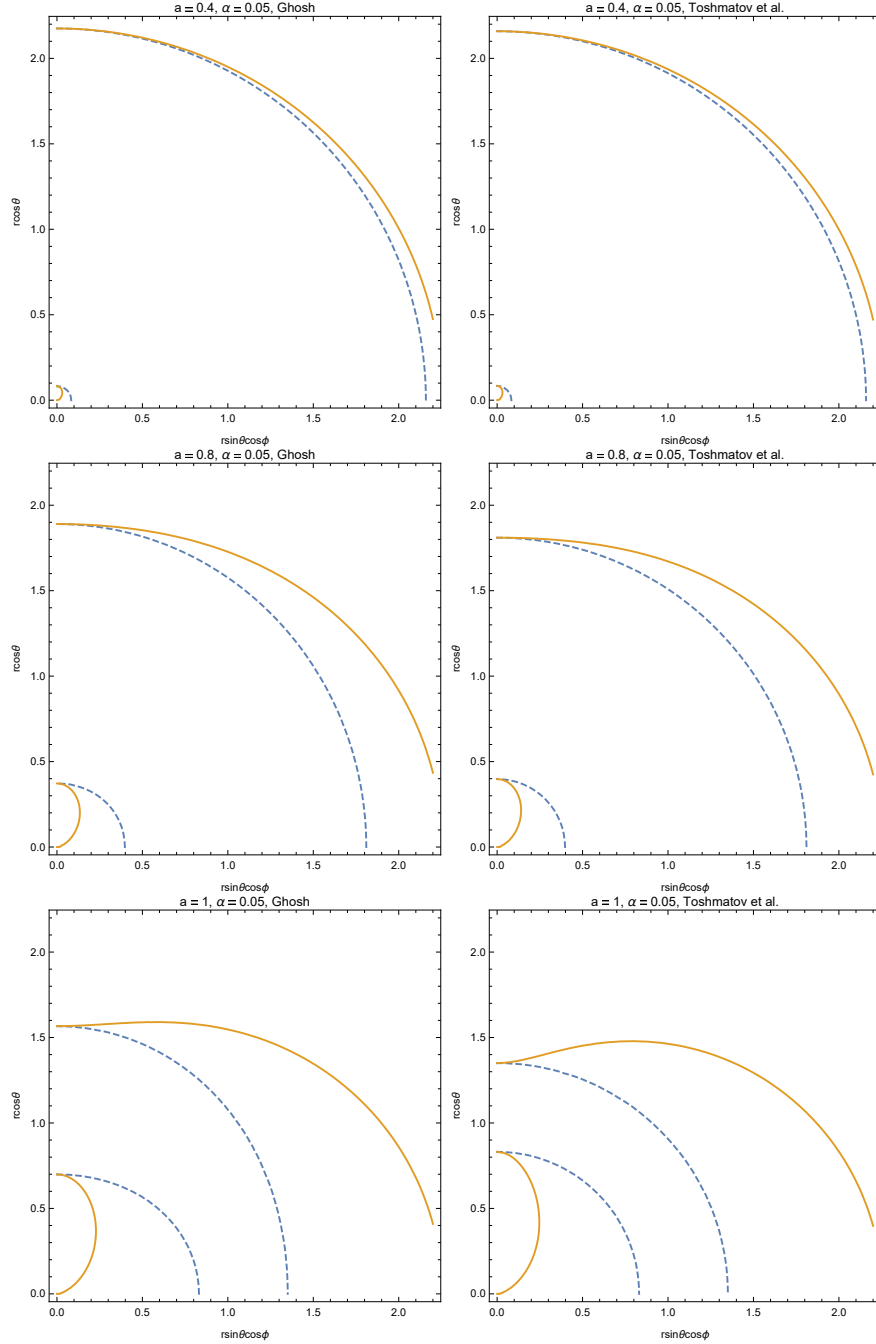


Figura 41 – Ergorregiões para do buraco negro nas métricas obtidas por Ghosh (esquerda) e por Toshmatov et al. (direita) para diferentes valores do parâmetro do momento angular, a , e para $\alpha = 0.05$

10.2.5 A aproximação de rotação lenta

Agora, consideremos o limite de rotações lentas, isto é, $a/M \ll 1$ (HANSEN; YUNES, 2013). Em outras palavras, não iremos considerar os termos de ordem a^2/M^2 e superiores. Nessa aproximação, as componentes de ambas as métricas consideradas são dadas por

$$g_{tt} = 1 - \frac{2M}{r} - \alpha r, \quad (10.30)$$

$$g_{rr} = \frac{1}{1 - \frac{2M}{r} - \alpha r}, \quad (10.31)$$

$$g_{t\phi} = -\frac{4aM \sin^2 \theta}{r} \quad (10.32)$$

$$g_{\theta\theta} = -r^2 \quad (10.33)$$

$$g_{\phi\phi} = -r^2 \sin^2 \theta. \quad (10.34)$$

Podemos, portanto, concluir que as métricas de Toshmatov et al. e de Ghosh coincidem no limite de baixas rotações.

10.2.6 Equação da geodésica e a separabilidade de variáveis

O movimento de uma partícula de massa m pode ser descrito através do Hamiltoniano

$$g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = -m^2, \quad (10.35)$$

onde p^μ são as componentes contravariantes do 4-momento. A partir da Eq. (10.29), podemos escrever as equações de geodésica (TOSHMATOV; STUHLÍK; AHMEDOV, 2017b; SCHEE; STUHLÍK, 2016). Devido à simetria do problema em estudo, podemos adotar as constantes de movimento energia, $E = -p_t$, e momento angular, $L = -p_\phi$ e, então, obtemos o conjunto de equações (TOSHMATOV; STUHLÍK; AHMEDOV, 2017b; SCHEE; STUHLÍK, 2016)

$$\Sigma \dot{t} = \frac{r^2 + a^2}{\Delta} [E(r^2 + a^2) - aL] - a(aE \sin^2 \theta - L), \quad (10.36)$$

$$\Sigma \dot{r} = \sqrt{R}, \quad (10.37)$$

$$\Sigma \dot{\theta} = \sqrt{\Theta}, \quad (10.38)$$

$$\Sigma \dot{\phi} = \frac{a}{\Delta} [E(r^2 + a^2) - aL] - \left(aE - \frac{L}{\sin^2 \theta} \right), \quad (10.39)$$

onde

$$R = [E(r^2 + a^2) - aL]^2 - \Delta[(aE - L)^2 + m^2 r^2 + Q], \quad (10.40)$$

$$\Theta = Q \left[\frac{L^2}{\sin^2 \theta} + a^2(m^2 - E^2) \right] \cos^2 \theta, \quad (10.41)$$

e $Q = K - (L - aE)$, sendo K uma constante de movimento adicional. Baseado nas Eqs. (10.36) e (10.40) e usando a métrica derivada por Toshmatov et al., foi possível discutir

as órbitas equatoriais circulares (TOSHMATOV; STUHLÍK; AHMEDOV, 2017b), as órbitas Keplerianas e a silhueta do buraco negro (SCHEE; STUHLÍK, 2016).

No entanto, se utilizarmos a métrica obtida por Ghosh, não é possível reproduzir tais cálculos, já que, nesse espaço-tempo, a função R depende de r e de θ e, portanto, a Eq. (10.40) não é separável.

10.3 Termodinâmica

A velocidade angular de qualquer horizonte do buraco negro com coordenada radial r_h é calculada por

$$\Omega_h = -\frac{g_{03}}{g_{33}}\Big|_{r=r_h} = \frac{a}{r_h^2 + a^2}, \quad (10.42)$$

em ambas as métricas em consideração. Ainda em ambos os casos, a área do horizonte é dada por

$$A_h = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sqrt{g_{22}g_{33}} = 4\pi(r_h^2 + a^2). \quad (10.43)$$

Então, a entropia do buraco negro, calculada pela lei da área, será

$$S = \frac{A_h}{4} = \pi(r_h^2 + a^2). \quad (10.44)$$

Usando a métrica de Toshmatov et al., a massa do buraco negro, em função de r_h , pode ser escrita na forma

$$M = \frac{1}{2} \left(r_h + \frac{a^2}{r_h} - \alpha r_h^2 \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{S}{\pi \sqrt{\frac{S}{\pi} - a^2}} - \alpha \left(\frac{S}{\pi} - a^2 \right) \right], \quad (10.45)$$

e seu comportamento está plotado na Figura 42 para diferentes valores de α .

A temperatura Hawking do buraco negro é calculada pela expressão

$$T = \frac{\partial M}{\partial S} = \frac{1}{2} \left[\frac{S - 2\pi a^2}{2\sqrt{\pi}(S - \pi a^2)^{3/2}} - \frac{\alpha}{\pi} \right], \quad (10.46)$$

e seu gráfico em função de r_h está plotado na Fig. 43.

A temperatura mínima local do buraco negro, T_m , definida pela relação entre a temperatura Hawking e $\sqrt{g_{tt}}$ é dada, na métrica de Toshmatov et al., por

$$T_m = \sqrt{1 - \frac{S}{\pi a^2 \sin^2 \theta}} \left[\frac{S - 2\pi a^2}{4\sqrt{\pi}(S - \pi a^2)^{3/2}} - \frac{\alpha}{2\pi} \right] \quad (10.47)$$

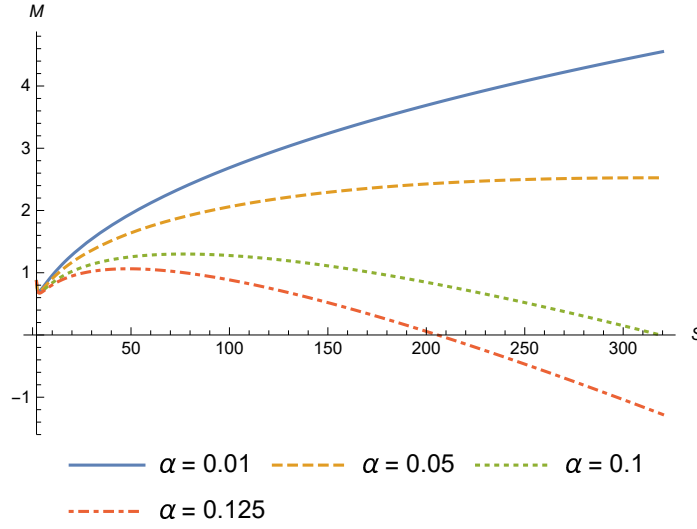


Figura 42 – Parâmetro de massa na métrica obtida por Toshmatov et al. para diferentes valores de α .

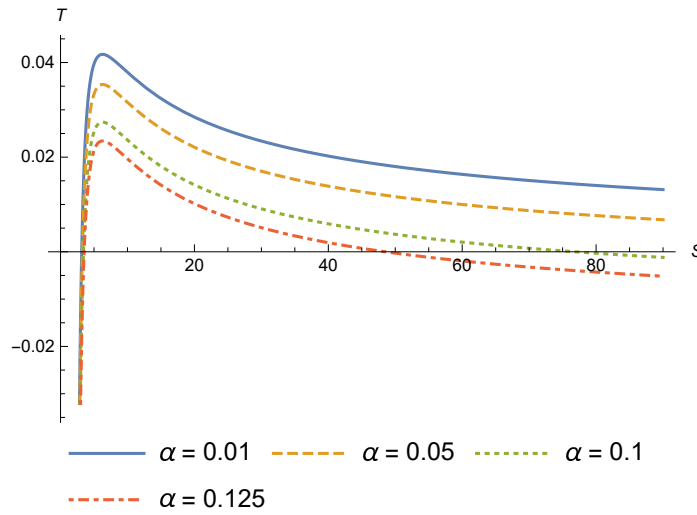


Figura 43 – Temperatura Hawking na métrica obtida por Toshmatov et al. para diferentes valores de α

Podemos verificar que T_m diverge nos polos ($\theta = 0$ and $\theta = \pi$). Na região equatorial do buraco negro, $\theta = \pi/2$, o comportamento de T_m está representado na Figura 44.

A energia livre de Helmholtz do buraco negro é calculada por

$$F = M - TS = \frac{1}{2} \left(r_h + \frac{a^2}{r_h} - \alpha r_h^2 \right) - \pi T (r_h^2 + a^2). \quad (10.48)$$

Na Fig. 45, plotamos a energia livre, F , em função de r_h , para valores fixos da temperatura Hawking.

Por sua vez, a capacidade térmica do buraco negro, C , é calculada por

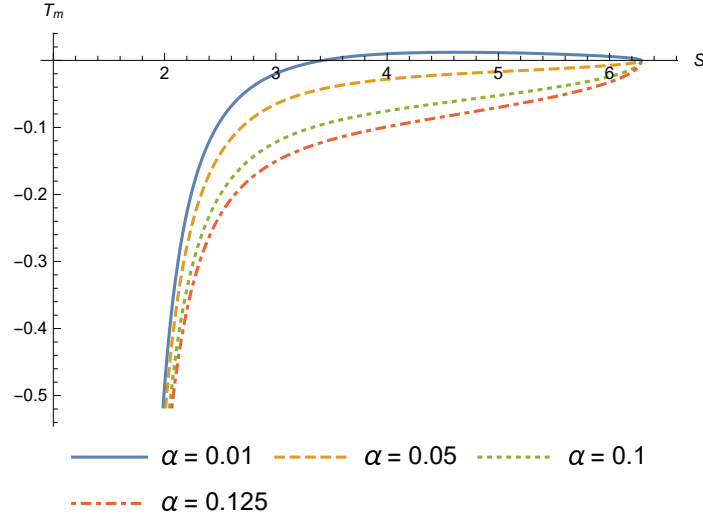


Figura 44 – Temperatura mínima local do buraco negro na métrica obtida por Toshmatov et al. para diferentes valores de α .

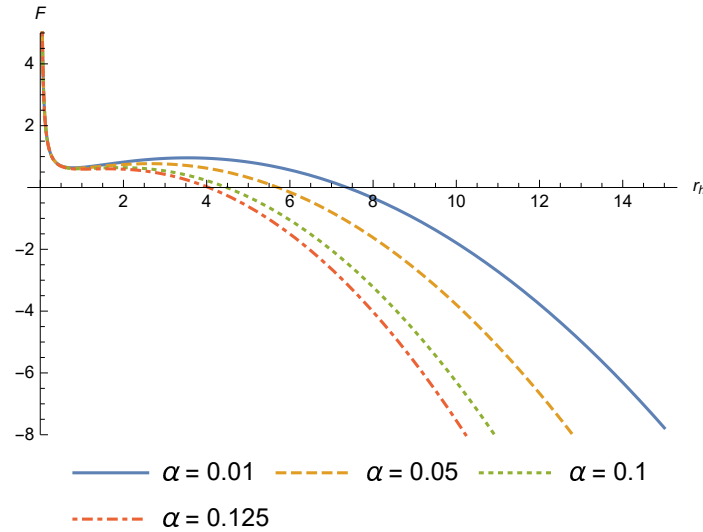


Figura 45 – Energia livre, F , em função de r_h , para $T = 0.02$ e diferentes valores de α .

$$C = T \frac{\partial S}{\partial T} = \frac{4\left(\frac{S}{\pi} - 2a^2\right)\left(\frac{S}{\pi} - a^2\right)^{5/2}}{\pi^2\left(\frac{S}{\pi} - 4a^2\right)\left(2a^2\pi\sqrt{\frac{S}{\pi} - a^2} - 2s\sqrt{\frac{S}{\pi} - a^2 + \alpha}\right)} \quad (10.49)$$

Na Figura 46, plotamos a capacidade térmica em função da entropia do buraco negro. Podemos observar que C assume valores positivos ou negativos a depender dos valores de S e a . Isso significa que o sistema poder ser termodinamicamente estável ($C > 0$) ou instável ($C < 0$). Podemos verificas, ainda, que o sistema sofre uma transição de fase, já que a capacidade térmica diverge.

Agora, analisemos a termodinâmica do buraco negro cuja métrica foi obtida por Ghosh. Nesse cenário, como já comentamos, a coordenada r_h do horizonte depende do ângulo polar θ e o parâmetro de massa M será dado por

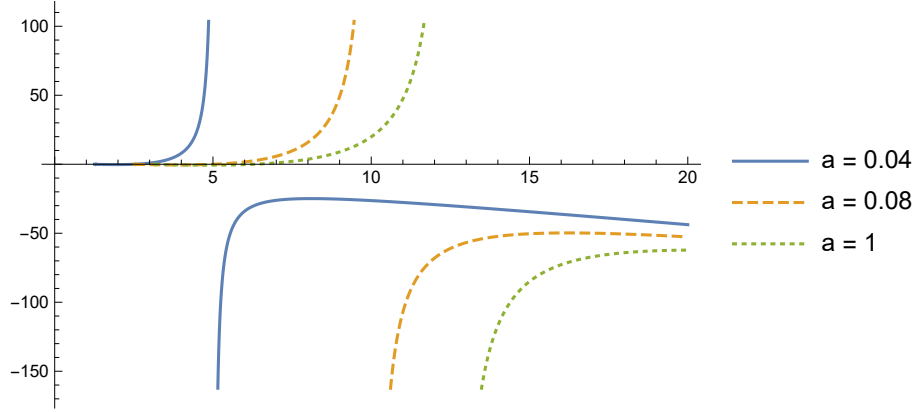


Figura 46 – Capacidade calorífica na métrica de Toshmatov et al. para diferentes valores de a .

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{1}{2} \left[r_h + \frac{a^2}{r_h} - \frac{\alpha}{r_h} (r_h^2 + a^2 \cos^2 \theta)^{3/2} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{S}{\pi \sqrt{\frac{S}{\pi} - a^2}} - \frac{\alpha}{\sqrt{\frac{S}{\pi} - a^2}} \left(\frac{S}{\pi} - a^2 \sin^2 \theta \right)^{3/2} \right], \quad (10.50)
 \end{aligned}$$

que é similar ao parâmetro de massa do buraco negro obtido por Toshmatov et al. se $\theta = \pi/2$, como deveríamos esperar. O comportamento de M na métrica de Ghosh para diferentes valores de α e para $\theta = 0$ ou $\pi/2$ está representado na Figura 47.

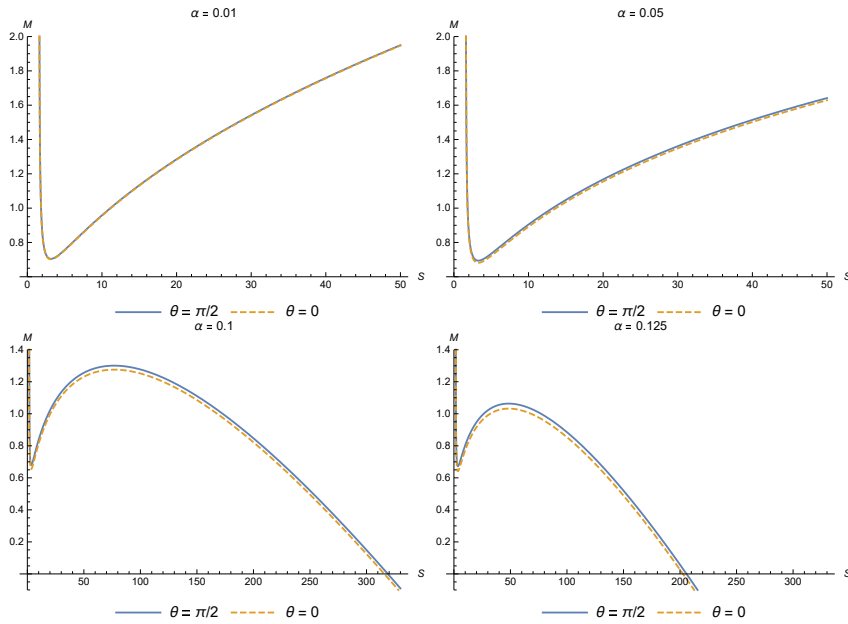


Figura 47 – Comportamento do parâmetro de massa, M , como função de r_h no espaço-tempo obtido por Ghosh para diferentes valores de α .

Ainda usando a métrica de Ghosh, a temperatura Hawking será

$$T = \frac{1}{2} \left[\frac{S - 2\pi a^2}{2\sqrt{\pi}(S - \pi a^2)^{3/2}} - \frac{\alpha}{2\pi} \sqrt{\frac{\frac{S}{\pi} - a^2 \sin^2 \theta}{\frac{S}{\pi} - a^2}} \left(3 - \frac{\frac{S}{\pi} - a^2 \sin^2 \theta}{\frac{S}{\pi} - a^2} \right) \right], \quad (10.51)$$

cujo comportamento, para $\theta = \pi/2$ e $\theta = 0$, está representado na Figura 48.

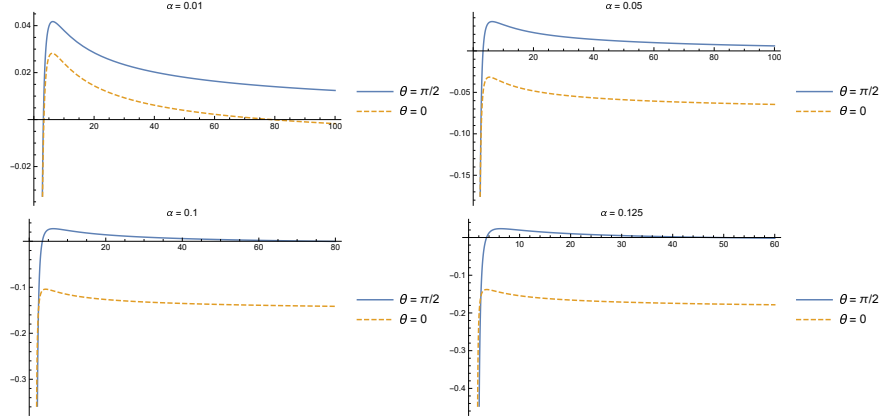


Figura 48 – Temperatura Hawking em função da entropia S na métrica obtida por Ghosh.

A temperatura mínima local será

$$T_m = \left(\frac{1}{2} - \frac{S}{2\pi a^2 \sin^2 \theta} \right) \left[\frac{S - 2\pi a^2}{2\sqrt{\pi}(S - \pi a^2)^{3/2}} - \frac{\alpha}{2\pi} \sqrt{\frac{\frac{S}{\pi} - a^2 \sin^2 \theta}{\frac{S}{\pi} - a^2}} \left(3 - \frac{\frac{S}{\pi} - a^2 \sin^2 \theta}{\frac{S}{\pi} - a^2} \right) \right]. \quad (10.52)$$

Por fim, a energia livre do buraco negro é calculada por

$$F = \frac{1}{2} \left[r_h + \frac{a^2}{r_h} - \frac{\alpha}{r_h} (r_h^2 + a^2 \cos^2 \theta)^{3/2} \right] - \pi T (r_h^2 + a^2), \quad (10.53)$$

e seu comportamento está plotado na Fig. 49.

Como pudemos observar, as grandezas termodinâmicas na métrica obtida por Ghosh dependem da coordenada polar θ e serão iguais àsquelas calculadas na métrica de Toshmatov et al. no plano equatorial do buraco negro, isto é, para $\theta = \pi/2$.

10.4 Correções térmicas ao efeito Casimir num espaço-tempo de Kerr com quintessência

Recentemente, Bezerra e colaboradores (BEZERRA et al., 2017a) calcularam a energia de Casimir para um campo escalar sem massa numa cavidade formada por duas

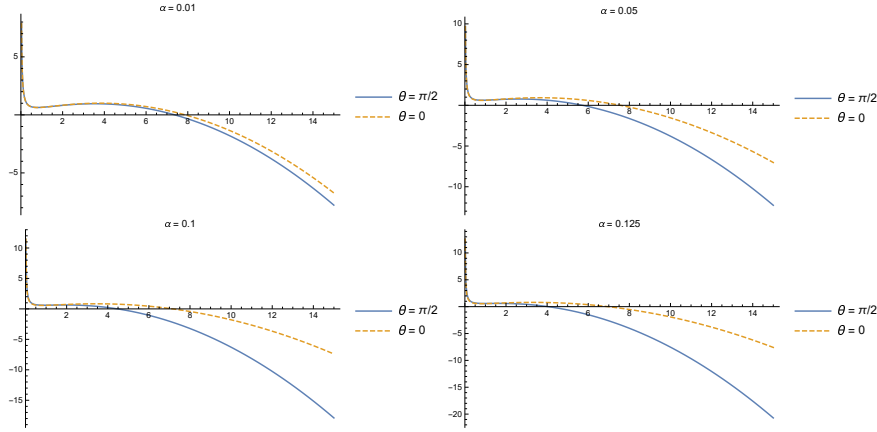


Figura 49 – Energia livre em função de r_h na métrica obtida por Ghosh para diferentes valores de α

placas paralelas muito próximas orbitando o buraco negro de Kerr com quintessência (GHOSH, 2016), a temperatura zero. Então, eles analisaram, na expressão da energia de vácuo do campo escalar, os efeitos associados ao campo gravitacional, ao arraste do espaço-tempo e à presença da quintessência, utilizando a métrica obtida por Ghosh (GHOSH, 2016).

Cálculos semelhantes foram realizados por Toshmatov et al. (TOSHMATOV; STUHLÍK; AHMEDOV, 2017a), mas agora usando a métrica obtida pelos próprios autores (TOSHMATOV; STUHLÍK; AHMEDOV, 2017b).

Iremos, a seguir, calcular o efeito Casimir para temperatura não nula em ambas as métricas do buraco negro de Kerr com quintessência (GHOSH, 2016; TOSHMATOV; STUHLÍK; AHMEDOV, 2017b), generalizando os estudos já presentes na literatura (ZHANG, 2015; BEZERRA et al., 2017a). No que segue, utilizaremos o subscrito T para indicar os resultados obtidos por Toshmatov et al. (TOSHMATOV; STUHLÍK; AHMEDOV, 2017b), enquanto a letra G refere-se à métrica derivada por Ghosh (GHOSH, 2016).

10.4.1 Correções térmicas à energia de Casimir

10.4.1.1 Energia de vácuo

Para calcular a energia de Casimir na métrica de Kerr com quintessência tal como derivada por Ghosh (GHOSH, 2016), Bezerra e colaboradores consideraram uma cavidade formada por duas placas paralelas dispostas num referencial comóvel que descreve uma trajetória circular ao redor do buraco negro com uma velocidade angular Ω (BEZERRA et al., 2017b). Supondo que um sistema de referência Cartesiano de coordenadas (x, y, z) está centrado em uma dessas placas de tal modo que o eixo z é tangencial à órbita circular, eles mostraram que as coordenadas esféricas centradas na fonte e as coordenadas do

referencial cartesiano relacionam-se pelas expressões $dy = dr$, $dz = rd\phi'$, e $dx = -rd\theta$, em que $\phi' = \phi - \Omega t$. Com isso, no referencial cartesiano, a métrica da Eq. (10.19) torna-se (BEZERRA et al., 2017b)

$$ds^2 = C^{-2}(\Omega)dt^2 - \frac{A}{r\Sigma}\sin^2\theta(\tilde{\omega}_d - \Omega)dtdz - \frac{\Sigma}{\Delta}dy^2 - \frac{\Sigma}{r^2}dx^2 - \frac{A}{r^2\Sigma}\sin^2\theta dz^2, \quad (10.54)$$

onde

$$\tilde{\omega}_d = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} = \frac{2Mar}{A} \quad (10.55)$$

é a velocidade de arrasto do espaço-tempo e

$$C^{-2}(\Omega) = \frac{\Sigma\Delta}{A} \left[1 - \frac{A^2}{\Delta\Sigma^2}\sin^2\theta(\Omega - \tilde{\omega}_d)^2 \right]. \quad (10.56)$$

A equação de Klein-Gordon que descreve o campo escalar sem massa é dada pela Eq. (8.25) com $\mu_0 = 0$. Usando essa equação e a métrica dada pela Eq. (10.54), Bezerra et al. (BEZERRA et al., 2017b) determinaram os modos quasinormais e a energia de vácuo entre as placas. Aplicando o método de subtração de Abel-Plana, eles obtiveram a energia de vácuo generalizada dada por (BEZERRA et al., 2017b)

$$\langle \epsilon_{vac} \rangle^{(ren)} = -\frac{\pi^2}{1440L_p^4} \sqrt{\frac{\Sigma}{\Delta}} \left[1 - \frac{A^2}{\Delta\Sigma^2}\sin^2\theta(\Omega - \tilde{\omega}_d)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (10.57)$$

na qual o comprimento próprio L_p é calculado pela expressão

$$L_p = C \frac{\sin\theta\sqrt{\Delta}}{r} L. \quad (10.58)$$

Podemos verificar que a energia de vácuo obtida na métrica do buraco negro de Kerr com quintessência derivada por Toshmatov et al. (TOSHMATOV; STUHLÍK; AHMEDOV, 2017b) e aquela derivada por Ghosh (GHOSH, 2016) diferem entre si apenas no termo Δ (veja as Eqs. (10.16) e (10.17)).

10.4.2 Energia de Casimir: correções térmicas

Agora, consideremos que o sistema está imerso em um banho térmico. A energia livre de Helmholtz calculada num volume finito V é dada por (BORDAG et al., 2009; ZHANG, 2015; BEZERRA et al., 2017a)

$$\tilde{F}_0 = E_0^{(ren)} + \Delta_T F_0 - \mathcal{O}(T^2) - \mathcal{O}(T^3) - V f_{bb} \quad (10.59)$$

onde $E_0^{(ren)} = V_p \langle \epsilon_{vac} \rangle^{(ren)}$ é a energia de vácuo e

$$\Delta_T F_0 = S_p k_B T \int \frac{d^2 \vec{k}}{(2\pi)^2} \sum_n \log \left(1 - e^{-\frac{\omega_n}{k_B T}} \right), \quad (10.60)$$

com S_p sendo a área das placas e k_B a constante de Boltzmann. O termo f_{bb} é calculado por

$$f_{bb} = k_B T \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \log \left(1 - e^{-\frac{\omega(k)}{k_B T}} \right), \quad (10.61)$$

onde k é o módulo do vetor de onda $\vec{k}$. Os termos $\mathcal{O}(T^2)$ e $\mathcal{O}(T^3)$ são obtidos nas expansões da energia livre com ordens superiores a T . V_p é o volume próprio da região entre as placas, medido no referencial comóvel, e é dado por (ZHANG, 2015)

$$V_p = \int dx dy dz \sqrt{\hat{g}_S} = S_p L C(\Omega), \quad (10.62)$$

sendo $\hat{g}_S = -\det(\hat{g}_{\mu\nu})/\hat{g}_{tt}$.

Definindo a densidade de energia de Helmholtz por $\tilde{f}_0 = \frac{\tilde{F}_0}{V_p}$ e calculando a densidade de energia com correções térmicas pela expressão

$$u_0^{(ren)} = \langle \epsilon_{vac} \rangle^{(ren)} - T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\tilde{f}_0}{T} \right), \quad (10.63)$$

obtemos

$$\begin{aligned} u_0^{(ren)} = & -\frac{\pi^2}{1440 L_p^4} \sqrt{\frac{\Sigma}{r^2}} \left[1 - \frac{A^2}{\tilde{\Delta} \Sigma^2} \sin^2 \theta (\Omega - \tilde{\omega}_d)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{C^3(\Omega, \theta) \pi^2 (k_B T)^4}{30} \\ & + \sum_{n,s=1}^{\infty} \left[\frac{n^2 \pi (k_B T)}{2s L_p^3} + \frac{n C(\Omega, \theta) (k_B T^2)}{s^2 L_p^2} \right. \\ & \left. + \frac{C(\Omega, \theta) (k_B T)^3}{s^3 \pi L_p} \right] e^{-\frac{n s \pi}{k_B T C(\Omega, \theta) L_p}}. \end{aligned} \quad (10.64)$$

No limite de altas temperaturas, a densidade de energia interna é dominada pelo termo em T^3/L_p e pelo termo de corpo negro (T^4). No caso em estudo, da mesma forma como mostrado por Bezerra et al. (BEZERRA et al., 2017a), nesse limite, o efeito Casimir é anulado, já que a quintessência amplifica a repulsão entre as placas.

No regime de baixas temperaturas, a densidade de energia normalizada $u_0^{(ren)}$ será dada por (BEZERRA et al., 2017a)

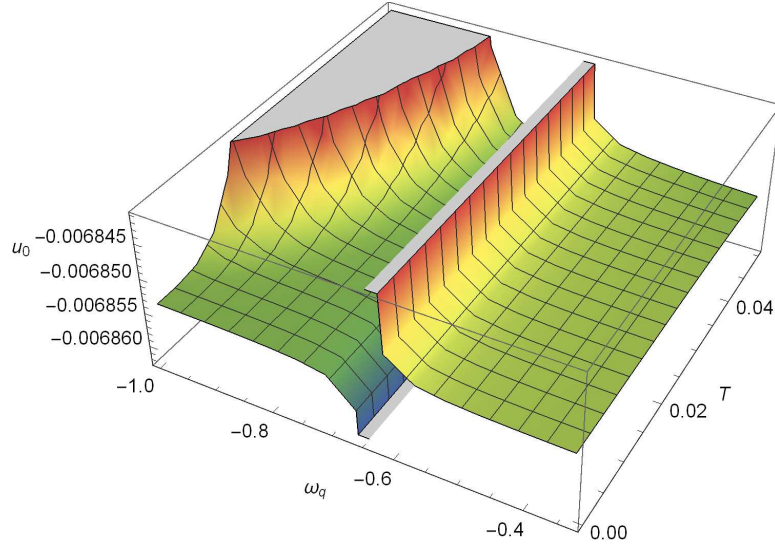


Figura 50 – Densidade de energia u_0 em função de ω_q e de T , para $\theta = \pi/2$, $a^2/M^2 = 0.5$, e $\alpha/M = 0.1$.

$$u_0^{(ren)} \approx -\frac{\pi^2}{1440L_p^4} \sqrt{\frac{\Sigma}{r^2}} \left[1 - \frac{A^2}{\tilde{\Delta}\Sigma^2} \sin^2\theta (\Omega - \tilde{\omega}_d)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{C^3(\Omega, \theta) \pi^2 (k_B T)^4}{30} + \left(\frac{\pi k_B T}{2L_p^3} \right) e^{-\frac{\pi}{k_B T C(\Omega, \theta) L_p}}. \quad (10.65)$$

A densidade de energia, no limite de baixas temperaturas, em função de ω_q e de T , está representada nas Figuras 50 e 51. Elas mostram o comportamento de u_0 em ambas as métricas, aquela obtida por Toshmatov et al. e a outra obtida por Ghosh, para $\theta = \pi/2$, quando as métricas coincidem.

Na Figura 52, representamos a razão entre as densidades de energia u_{0T} e u_{0G} calculadas, respectivamente, nas métricas obtidas por Toshmatov et al. e por Ghosh, em função de ω_q e de T , para $\theta = \pi/3$. A mesma razão está representada na Figura 53 em função de θ e de T .

Representamos, na Figura 54, a razão entre as densidades de energia u_{0T} e u_{0G} em função de r/M e de θ . Observamos que as energias são iguais na região equatorial ($\theta = \pi/2$).

Em suma, as correções térmicas à energia de Casimir são maiores quando consideramos a métrica obtida por Toshmatov et al. (TOSHMATOV; STUHLÍK; AHMEDOV, 2017b), em comparação àquelas derivadas utilizando-se a métrica obtida por Ghosh (GHOSH, 2016). Destacamos que as diferenças são maiores nas regiões próximas aos horizontes, com exceção do plano equatorial do buraco negro, $\theta = \pi/2$, onde as métricas coincidem.

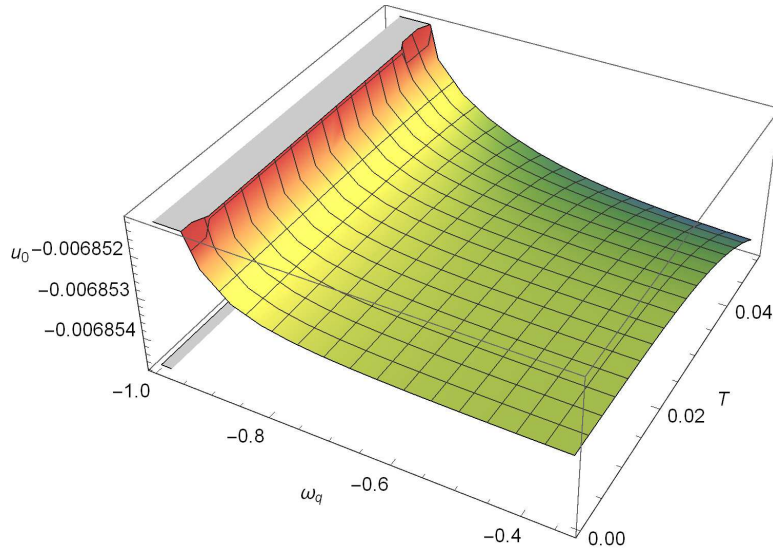


Figura 51 – Densidade de energia u_0 em função de ω_q e de T , para $\theta = \pi/2$, $a^2/M^2 = 0.5$, e $\alpha/M = 0.01$.

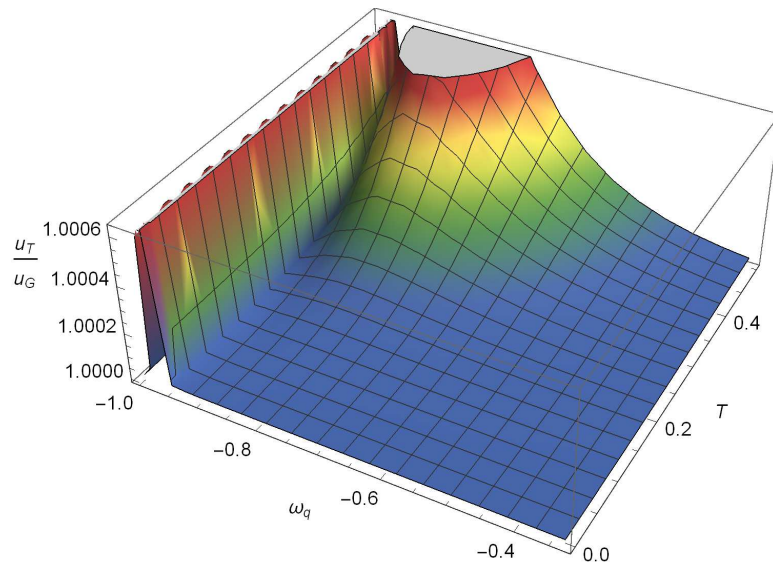


Figura 52 – Razão u_{0T}/u_{0G} em função de ω_q e T , para $\theta = \pi/3$, $a^2/M^2 = 0.5$, e $\alpha/M = 0.01$.

10.5 Quadro comparativo

Para concluir este capítulo, apresentamos um quadro que, brevemente, compara as soluções obtidas por Ghosh e por Toshmatov et al.

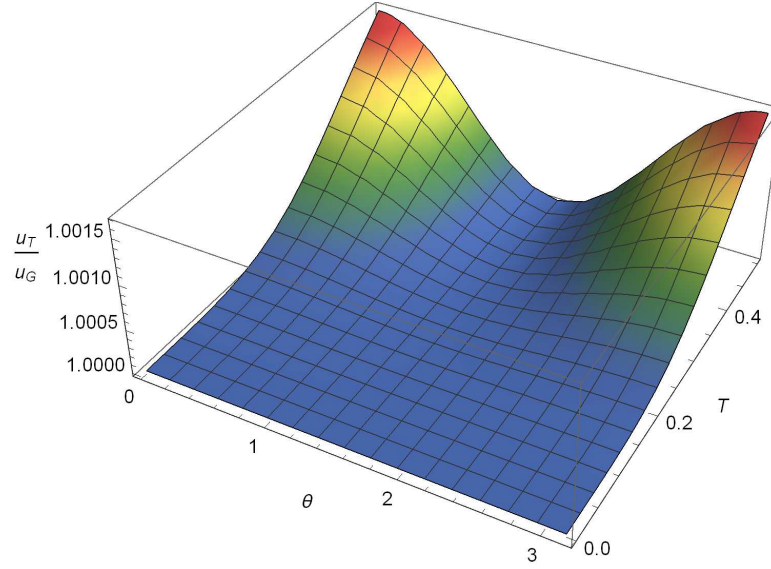


Figura 53 – Razão u_{0T}/u_{0G} em função de θ e de T , for $\omega_q = -2/3$, $a^2/M^2 = 0.5$, e $\alpha/M = 0.01$.

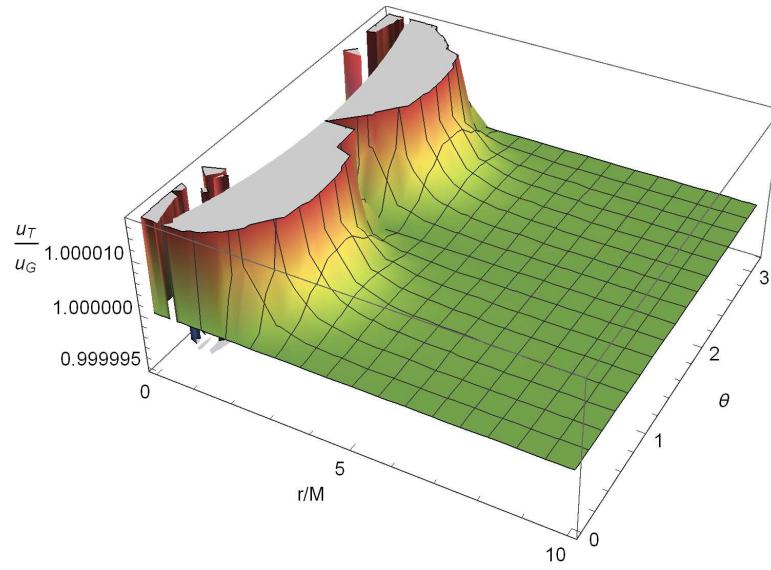


Figura 54 – Razão u_{0T}/u_{0G} em função de r/M e de θ , para $\omega_q = -2/3$, $a^2/M = 0.5$, e $\alpha/M = 0.01$. A razão é maior nos horizontes interno e externo localizados, respectivamente, em $r_-/M \approx 0.13$ e $r_+/M \approx 1.90$.

	Solução obtida por Toshmatov et al.	Solução obtida por Ghosh
Complexificação	$\frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}} \rightarrow \frac{\alpha}{(r\bar{r})Re(r)^{3\omega_q-1}}$	$\frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}} \rightarrow \frac{\alpha}{(r\bar{r})^{(3\omega_q+1)/2}}$
Δ	$r^2 + a^2 - 2Mr - \alpha r^{-3\omega_q+1}$	$r^2 + a^2 - 2Mr - \frac{\alpha}{\Sigma^{\frac{3\omega_q-1}{2}}}$
Escalar de Kretschmann	$K = \frac{Z(a,r,\theta)}{\Sigma^6}$	$K = \frac{U(a,r,\theta)}{4\Delta^6(r,\theta)\Sigma^6}$
Horizontes	A coordenada r não depende de θ	A coordenada r depende de θ
Temperatura Hawking	Não depende de θ	Depende de θ

11 Buraco negro de Kerr-Newman-AdS com quintessência e nuvem de cordas

Recentemente, foi obtida a solução correspondente ao buraco negro de Kerr-Newman-AdS com quintessência (XU; WANG, 2017), através da aplicação do algoritmo de Newman-Janis (NEWMAN; JANIS, 1965) com as alterações introduzidas por Azreg-Aïnou (AZREG-AÏNOU, 2014).

Iremos, no presente capítulo, realizar procedimento semelhante para construir a métrica do buraco negro girante com quintessência, nuvens de cordas e constante cosmológica, mostrando que o resultado obtido é solução das equações de Einstein da relatividade geral. Iremos, em sequência, estudar algumas características do buraco negro. Estaremos, portanto, generalizando os resultados do capítulo anterior.

Vale asseverar que todas as fontes extras consideradas, isto é, quintessência, nuvem de cordas e constante cosmológica, possuem importantes consequências cosmológicas e merecem ser estudadas em conjunto, no cenário em que circundam um buraco negro em rotação.

Na última seção deste capítulo, iremos discutir a estrutura de horizontes do buraco negro de Kerr-Newman-AdS com quintessência (XU; WANG, 2017) e estudar sua termodinâmica.

Neste capítulo, iremos utilizar a letra b para representar o parâmetro da nuvem de cordas, já que, desde o capítulo passado, temos usado a para denotar o momento angular do buraco negro por unidade de massa. Para que possamos comparar os resultados obtidos com aqueles já descritos na literatura (KISELEV, 2003), bem como discutir alguns aspectos destes, iremos adotar a assinatura $(-, +, +, +)$.

11.1 A solução

Iniciemos considerando a métrica do buraco negro estático e carregado imerso em quintessência e nuvem de cordas, dado pela Eq. (8.1). Com as convenções descritas no último parágrafo, ela ficará escrita na forma

$$ds^2 = - \left(1 - b - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}} \right) dt^2 + \left(1 - b - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (11.1)$$

Usando o método de Newman-Janis (NEWMAN; JANIS, 1965) com a modificação proposta por Azreg-Aïnou (AZREG-AÏNOU, 2014), podemos obter a métrica correspondente ao buraco negro girante carregado e imerso em quintessência e nuvem de cordas. Iremos considerar que a métrica da Eq. (11.1) pode ser reescrita na forma da Eq. (4.15), onde

$$f(r) = g(r) = \left(1 - b - \frac{2M}{r} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}}\right). \quad (11.2)$$

Com isso, podemos realizar o mesmo procedimento desenvolvido nas Eqs. de (4.16) a (4.23), obtendo

$$\begin{aligned} ds^2 = & \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} dt^2 - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 \\ & + 2a \sin^2 \theta \left(1 - \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) dt d\phi - \Sigma d\theta^2 \\ & - \sin^2 \theta \left[\Sigma + a^2 \sin^2 \theta \left(2 - \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma}\right)\right] d\phi^2, \end{aligned} \quad (11.3)$$

onde $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ e

$$\Delta = (1 - b)r^2 + a^2 + Q^2 - 2Mr - \alpha r^{-3\omega_q+1}. \quad (11.4)$$

O tensor de Einstein, $G_{\mu\nu}$, associado à solução dada pela Eq. (11.3) pode ser determinado utilizando-se o pacote RGTC do software Mathematica. Suas componentes são

$$\begin{aligned} G_{tt} = & \frac{2(r^4 - 2r^3\rho + a^2r^2 - a^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta) \rho'}{\Sigma^3} \\ & - \frac{a^2 r \sin^2 \theta}{\Sigma^2}, \end{aligned} \quad (11.5a)$$

$$\begin{aligned} G_{t\phi} = & \frac{2a \sin^2 \theta [(r^2 + a^2)(a^2 \cos^2 \theta - r^2) + 2r^2\rho] \rho'}{\Sigma^3} \\ & + \frac{a^2 r \sin^2 \theta (r^2 + a^2) \rho''}{\Sigma^2}, \end{aligned} \quad (11.5b)$$

$$G_{rr} = -\frac{2r^2 \rho'}{\Sigma \Delta}, \quad (11.5c)$$

$$G_{\theta\theta} = -\frac{2a^2 \cos^2 \theta \rho}{\Sigma} - r \rho'' \quad (11.5d)$$

$$\begin{aligned} G_{\phi\phi} = & -\frac{a \sin^2 \theta [(r^2 + a^2)(a^2 + (2r^2 + a^2) \cos 2\theta) + 2r^2\rho] \rho'}{\Sigma^3} \\ & - \frac{2a^2 r^3 \sin^4 \theta \rho \rho'}{\Sigma^3} - \frac{r \sin^2 \theta (r^2 + a^2)^2 \rho''}{\Sigma^2}, \end{aligned} \quad (11.5e)$$

sendo $2\rho = 2M + br + \alpha r^{-3\omega_q} - \frac{Q^2}{r}$. Partindo das equações de Einstein da relatividade geral e usando a base canônica de tetradas

$$\begin{aligned} e_t^\mu &= \frac{1}{\sqrt{\Sigma\Delta}}(r^2 + a^2, 0, 0, a), \\ e_r^\mu &= \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}}(0, 1, 0, 0), \\ e_\theta^\mu &= \frac{1}{\sqrt{\Sigma}}(0, 0, 1, 0), \\ e_\phi^\mu &= -\frac{1}{\sqrt{\Sigma\sin^2\theta}}(a^2\sin^2\theta, 0, 0, 1), \end{aligned} \quad (11.6)$$

podemos escrever o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ na forma $T_{\mu\nu} = (\epsilon, p_r, p_\theta, p_\phi)$ (TOSHMATOV; STUHLÍK; AHMEDOV, 2017b), onde

$$\begin{aligned} \epsilon &= -\frac{1}{8\pi}e_t^\mu e_t^\nu G_{\mu\nu} = \frac{2\rho' r^2}{8\pi\Sigma^2}, \\ p_r &= \frac{1}{8\pi}e_r^\mu e_r^\nu G_{\mu\nu} = -\frac{2\rho' r^2}{8\pi\Sigma^2}, \\ p_\theta &= \frac{1}{8\pi}e_\theta^\mu e_\theta^\nu G_{\mu\nu} = p_r - \frac{\rho'' r + 2\rho'}{8\pi\Sigma}, \\ p_\phi &= \frac{1}{8\pi}e_\phi^\mu e_\phi^\nu G_{\mu\nu} = p_r - \frac{\rho'' r + 2\rho'}{8\pi\Sigma}. \end{aligned} \quad (11.7)$$

Assim, podemos concluir que a solução proposta é fisicamente válida, já que obedece às equações de Einstein da relatividade geral com um tensor energia-momento descrevendo o buraco negro imerso em quintessência e nuvem de cordas dado pela Eq. (11.7), semelhante ao já obtido na literatura, para o caso em que não há nuvem de cordas (TOSHMATOV; STUHLÍK; AHMEDOV, 2017b).

O próximo passo é adicionar a constante cosmológica à métrica. Seguindo o procedimento realizado por Xu e Wang (XU; WANG, 2017), temos

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{\Sigma}{\Delta_r} dr^2 - \frac{\Sigma}{\Delta_\theta} d\theta^2 - \frac{\Delta_\theta \sin^2\theta}{\Sigma} \left[a \frac{dt}{\Xi} - (r^2 + a^2) \frac{d\phi}{\Xi} \right]^2 \\ &\quad + \frac{\Delta_r}{\Sigma} \left(\frac{dt}{\Xi} - a \sin^2\theta \frac{d\phi}{\Xi} \right)^2, \end{aligned} \quad (11.8)$$

sendo

$$\begin{aligned} \Delta_r &= (1 - b)r^2 + a^2 + Q^2 - 2Mr - \frac{\Lambda}{3}r^2 (r^2 + a^2) \\ &\quad - \alpha r^{1-3\omega_q}, \end{aligned} \quad (11.9)$$

$$\Delta_\theta = 1 + \frac{\Lambda}{3} a^2 \cos^2 \theta, \quad (11.10)$$

$$\Xi = 1 + \frac{\Lambda}{3} a^2, \quad (11.11)$$

e sendo o potencial eletromagnético gerado pela carga dado por

$$A_\mu = -\frac{Qr}{\Sigma} \left(\delta_\mu^t - \frac{a \sin^2 \theta}{\Xi} \delta_\mu^\phi \right). \quad (11.12)$$

Com a métrica dada pela Eq. (11.8), podemos calcular as componentes do tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ usando, mais uma vez, o pacote RGTC do Mathematica e obtemos

$$G_{tt} = \frac{2(r^4 - 2r^3\rho + a^2r^2 - a^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta) \rho'}{\Sigma^3} - \frac{a^2 r \sin^2 \theta}{\Sigma^2} + \Lambda \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma^2}, \quad (11.13a)$$

$$G_{t\phi} = \frac{2a \sin^2 \theta [(r^2 + a^2)(a^2 \cos^2 \theta - r^2) + 2r^2 \rho] \rho'}{\Sigma^3} + \frac{a^2 r \sin^2 \theta (r^2 + a^2) \rho''}{\Sigma^2} + \Lambda 2a \sin^2 \theta \frac{r^2 + a^2 - \Delta}{\Sigma}, \quad (11.13b)$$

$$G_{rr} = -\frac{2r^2 \rho'}{\Sigma \Delta} + \Lambda \frac{\Sigma^2}{\Delta_r}, \quad (11.13c)$$

$$G_{\theta\theta} = -\frac{2a^2 \cos^2 \theta \rho}{\Sigma} - r \rho''$$

$$G_{\phi\phi} = -\frac{a \sin^2 \theta [(r^2 + a^2)(a^2 + (2r^2 + a^2) \cos 2\theta)] \rho'}{\Sigma^3} - \frac{a \sin^2 \theta 2r^2 \rho \rho'}{\Sigma^3} - \frac{2a^2 r^3 \sin^4 \theta \rho \rho'}{\Sigma^3} - \frac{r \sin^2 \theta (r^2 + a^2)^2 \rho''}{\Sigma^2} + \Lambda \frac{\sin^2 \theta [(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta_r]}{\Sigma^2}. \quad (11.13d)$$

Esse resultado permite concluir que a métrica (11.3) é solução das equações de Einstein com constante cosmológica, descrita na Eq. (5.12).

Para que a coordenada t tenha unidade de tempo, podemos realizar a substituição $t \rightarrow t'/\Xi$. Com isso, obtemos a métrica na forma

$$ds^2 = \frac{\Sigma}{\Delta_r} dr^2 - \frac{\Sigma}{\Delta_\theta} d\theta^2 - \frac{\Delta_\theta \sin^2 \theta}{\Sigma} \left[a dt - (r^2 + a^2) \frac{d\phi}{\Xi} \right]^2 + \frac{\Delta_r}{\Sigma} \left(dt - a \sin^2 \theta \frac{d\phi}{\Xi} \right)^2, \quad (11.14)$$

que é mais apropriada na análise da termodinâmica do buraco negro.

No restante deste capítulo, fixaremos $\omega_q = -2/3$.

11.1.1 Horizontes do buraco negro

Os horizontes do buraco negro são determinados através da equação

$$\Delta_r = (1 - b)r^2 + a^2 + Q^2 - 2Mr - \frac{\Lambda}{3}r^2(r^2 + a^2) - \alpha r^{1-3\omega_q} = 0. \quad (11.15)$$

que, para o caso em estudo, pode ser fatorizado como

$$(r - r_+)(r - r_-)(r - r_q)(r - r_c) = 0, \quad (11.16)$$

onde r_q é o horizonte cosmológico associado à quintessência, r_c é o horizonte associado à constante cosmológica, r_+ é o horizonte exterior do buraco negro e r_- é o horizonte interno (de Cauchy).

Na figura 55, representamos a função $\Delta_r = \Delta_r(r)$ para diferentes valores do parâmetro da nuvem de cordas, b . Nos gráficos, fixamos os valores do parâmetro da quintessência, assim como o parâmetro de estado da quintessência. Esses gráficos mostram o papel desempenhado por essas quantidades, com ênfase no efeito associado à nuvem de cordas. Devido ao pequeno valor da constante cosmológica, o horizonte r_c será negativo e, portanto, só haverá três horizontes positivos, como pode ser visto na figura.

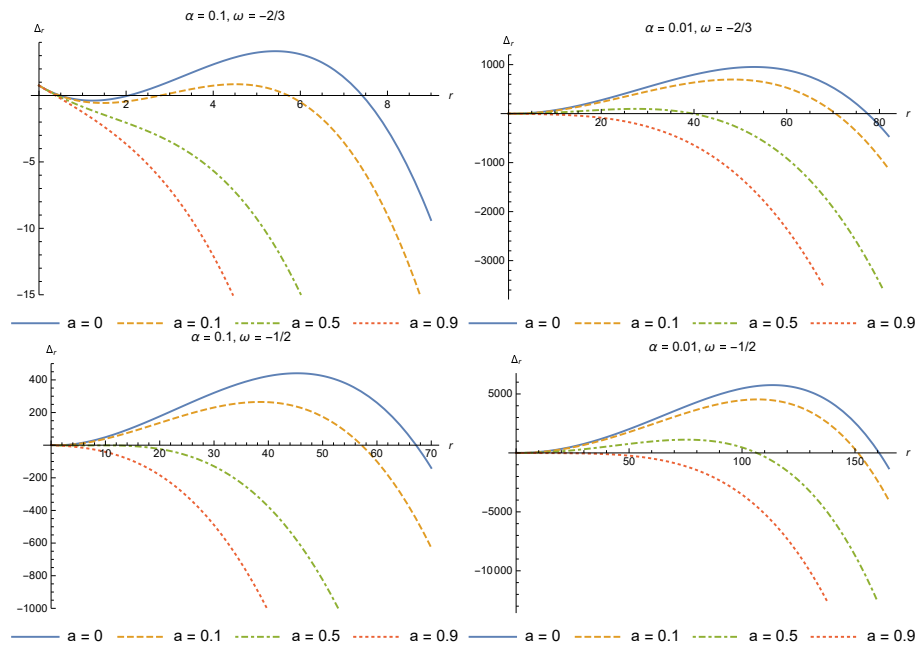


Figura 55 – Δ_r para diferentes valores do parâmetro b e para valores fixos de α e de ω_q .

11.1.2 Ergorregiões

As superfícies estáticas do buraco negro são determinadas pela equação $g_{tt} = 0$. Com isso, temos

$$\Delta_r = a^2 \sin^2 \theta \Delta_\theta. \quad (11.17)$$

As ergorregiões do buraco negro estão representadas nas figuras 56 e 57, para diferentes valores do parâmetro b . Note que, no caso em que $b = 0$, permite-nos comparar os resultados presentes na literatura (XU; WANG, 2017) ao caso $b \neq 0$.

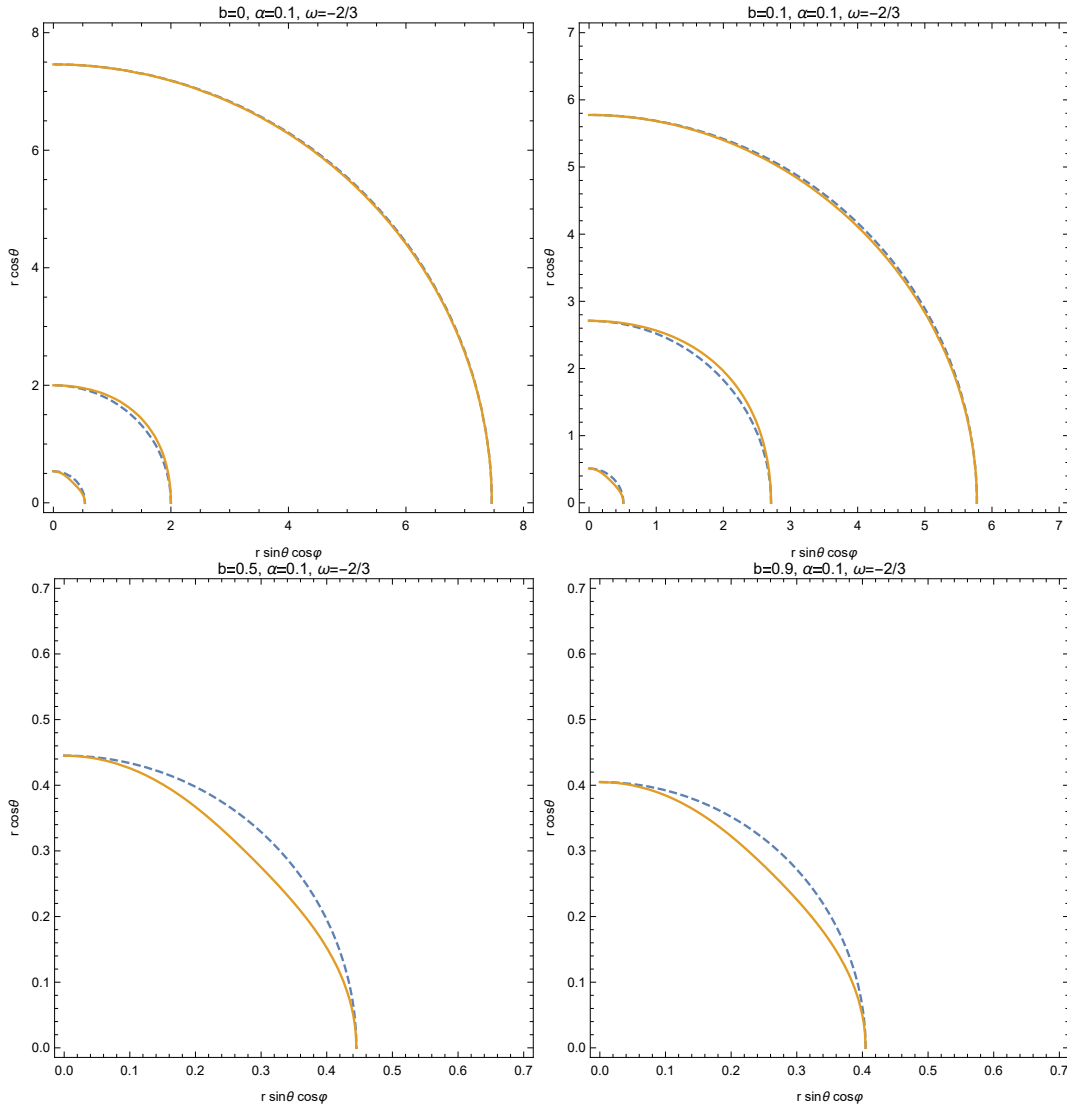


Figura 56 – Ergorregiões do buraco negro para diferentes valores do parâmetro de nuvem de cordas, b . As linhas tracejadas correspondem aos horizontes do buraco, enquanto as linhas sólidas representam as superfícies estáticas.

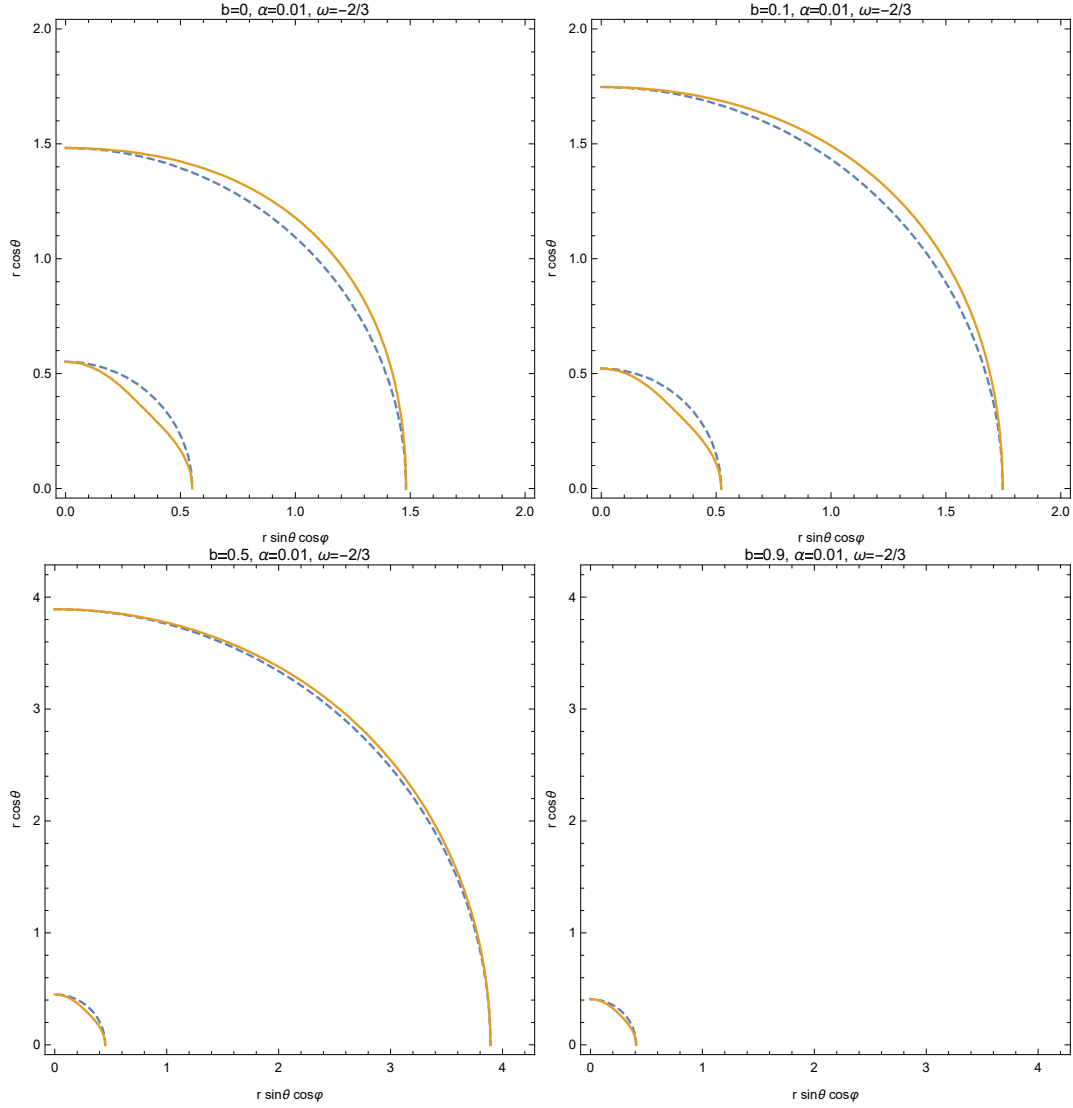


Figura 57 – Ergorregiões do buraco negro para diferentes valores do parâmetro de nuvem de cordas, b . As linhas tracejadas correspondem aos horizontes do buraco, enquanto as linhas sólidas representam as superfícies estáticas.

11.2 Termodinâmica do buraco negro

Como função da coordenada radial do horizonte do buraco negro, a energia do sistema pode ser definida como (HUAIFAN et al., 2009)

$$E = \frac{M}{\Xi} = \frac{(1-b)r_h^2 + a^2 + Q^2 - \frac{\Lambda}{3}r_h^2(r_h^2 + a^2) - \alpha r_h^{1-3\omega_q}}{2\Xi r_h} \quad (11.18)$$

Verificamos que a energia diminui à medida que os valores do parâmetro b aumentam.

A temperatura Hawking do buraco negro (HAWKING, 1974; HAWKING, 1975; HAWKING, 1976) é dada por

$$\begin{aligned}
T_h &= \frac{\kappa_h}{2\pi} = \frac{1}{4\pi} \frac{\Delta'_r(r_h)}{r_h^2 + a^2} \\
&= \frac{(1-b)r_h^2 - a^2 - Q^2 - \frac{\Lambda}{3}r_h^2(3r_h^2 + a^2) + 3\omega_q r_h^{1-3\omega_q}}{4\pi r_h(r_h^2 + a^2)},
\end{aligned} \tag{11.19}$$

com $\kappa_h = \frac{1}{2} \frac{1}{r_h^2 + a^2} \frac{d\Delta}{dr} \Big|_{r=r_h}$ sendo a aceleração gravitacional nas proximidades do horizonte do buraco negro. Por sua vez, a área do horizonte é dada pela expressão

$$A_h = \int \int \sqrt{-g} d\theta d\phi \Big|_{r=r_h} = \frac{4\pi}{\Xi} (r_h^2 + a^2), \tag{11.20}$$

e, pela lei da área, (BEKENSTEIN, 1972; BEKENSTEIN, 1973), a entropia do buraco negro é calculada por

$$S = \frac{A_H}{4} = \frac{\pi (r_h^2 + a^2)}{\Xi}. \tag{11.21}$$

Assim, em função da entropia, S , podemos escrever a energia, E , como

$$\begin{aligned}
E &= \frac{(1-b)(S\Xi/\pi - a^2) + a^2 + Q^2}{2\Xi\sqrt{S\Xi/\pi - a^2}} \\
&\quad - \frac{\frac{\Lambda}{3}(S\Xi/\pi - a^2)S\Xi/\pi + \alpha(S\Xi/\pi - a^2)^{(1-3\omega_q)/2}}{2\Xi\sqrt{S\Xi/\pi - a^2}}.
\end{aligned} \tag{11.22}$$

O comportamento de E está representado na figura 58 para $\omega_q = -2/3$ e diferentes valores de α e de b , com ênfase no papel desempenhado pela nuvem de cordas.

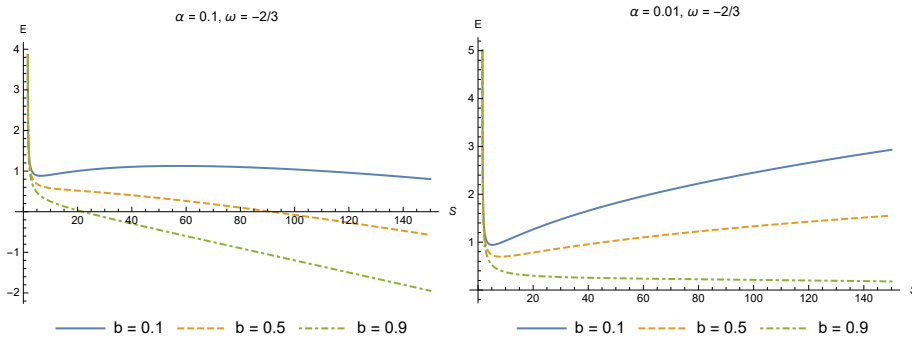


Figura 58 – Energia, E , como função da entropia, S , para diferentes valores de b e de α .

Semelhantemente, podemos escrever a temperatura Hawking como função da entropia na forma

$$T = \frac{(1-b)(S\Xi/\pi - a^2) - a^2 - Q^2}{4\sqrt{S\Xi/\pi - a^2}S\Xi} - \frac{\frac{\Lambda}{3}(S\Xi/\pi - a^2)(3S\Xi/\pi - 2a^2) - 3\omega_q\alpha(S\Xi/\pi - a^2)^{(1-3\omega_q)/2}}{4\sqrt{S\Xi/\pi - a^2}S\Xi}. \quad (11.23)$$

O gráfico de T em função de S está disposto na figura 59.

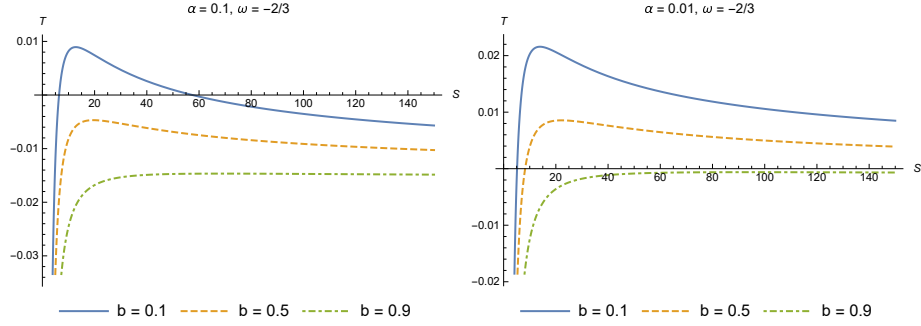


Figura 59 – Temperatura Hawking, T , em função da entropia, S , para diferentes valores de b e de α .

A velocidade angular do horizonte do buraco negro é dada por

$$\Omega_h = -\frac{g_{03}}{g_{33}} \Big|_{r=r_h} = \frac{a\Xi}{r_h^2 + a^2}. \quad (11.24)$$

Com isso, podemos escrever a primeira lei da termodinâmica de buracos negros na forma

$$dE = T_h dS_h + \Omega_h dJ + \phi_h dq, \quad (11.25)$$

na qual

$$J = \frac{Ma}{\Xi^2}, \quad (11.26a)$$

$$q = \frac{Q}{\Xi}, \quad (11.26b)$$

$$\phi_h = \frac{Qr_h}{r_h^2 + a^2}, \quad (11.26c)$$

sendo ϕ_h o potencial elétrico do buraco negro.

Finalmente, a capacidade térmica é calculada pela expressão

$$C_{J,q} = T \frac{\partial S}{\partial T} \Big|_{J,q} = \frac{\partial E}{\partial T} \Big|_{J,q}, \quad (11.27)$$

e está representada na figura 60. Pelos gráficos, percebemos que há regiões de estabilidade e de instabilidade termodinâmica, a depender dos valores dos parâmetros que descrevem o sistema.

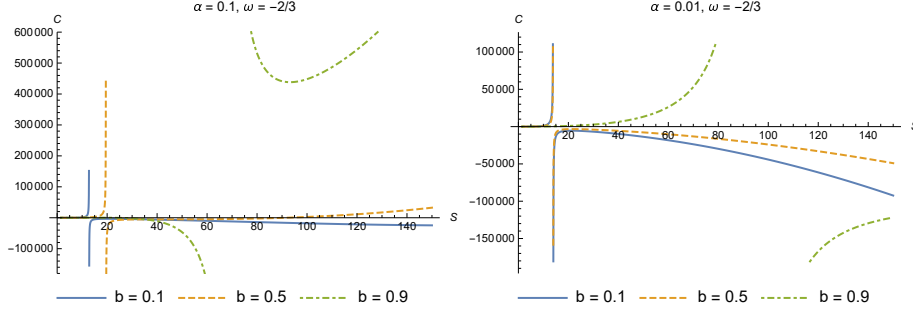


Figura 60 – Capacidade térmica em função da entropia.

11.3 Radiação Hawking

Nesta seção, iremos estudar a emissão de partículas escalares nas proximidades do horizonte do buraco negro, iniciando pela escrita da equação de Klein-Gordon na métrica do espaço-tempo em consideração.

11.3.1 Equação de Klein-Gordon

Para uma partícula escalar carregada, num espaço-tempo curvo, a equação de Klein-Gordon pode ser escrita na forma

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - ieA_\mu \right) \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} - ieA_\nu \right) \right] \Psi - \mu_0^2 \Psi = 0, \quad (11.28)$$

onde e é sua carga elétrica e μ_0 sua massa. Então, para a métrica correspondente ao buraco negro de Kerr-Newman-anti-de Sitter com quintessência e nuvem de cordas dada pela Eq. (11.14), a equação de Klein-Gordon ficará na forma

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta_r \Delta_\theta} \left[\Delta_\theta (r^2 + a^2)^2 - \Delta_r a^2 \sin^2 \theta \right] \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \\ & + 2i \frac{eQr}{\Delta_r} \left[a \Xi \frac{\partial}{\partial \phi} + (r^2 + a^2) \frac{\partial}{\partial t} \right] \Psi \\ & - \frac{\Xi^2}{\Delta_r \Delta_\theta \sin^2 \theta} (\Delta_r - \Delta_\theta a^2 \sin^2 \theta) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} \\ & + \frac{2\Xi a}{\Delta_r \Delta_\theta} \left[\Delta_\theta (r^2 + a^2)^2 - \Delta_r \right] \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} \Delta_r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \\ & - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \Delta_\theta) \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \left(-\mu_0^2 \Sigma + e^2 Q^2 r^2 \frac{1}{\Delta_r} \right) \Psi. \end{aligned} \quad (11.29)$$

Dada a simetria do problema, podemos considerar que $\Psi(t, r, \theta, \phi)$ pode ser escrito na forma

$$\Psi(t, r, \theta, \phi) = e^{-i\omega t} e^{im\phi} \psi(r, \theta), \quad (11.30)$$

e, por conseguinte, temos

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \frac{\Xi^2}{\Delta_r \Delta_\theta} \left[\Delta_\theta (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta \right] \psi \\ & + 2 \frac{eQr}{\Delta_r} \Xi \left[(r^2 + a^2) \omega - am \right] \psi \\ & + m^2 \frac{\Xi^2}{\Delta_r \Delta_\theta \sin^2 \theta} (\Delta_r - \Delta_\theta a^2 \sin^2 \theta) \psi \\ & + m\omega \frac{2\Xi^2 a}{\Delta_r \Delta_\theta} \left[\Delta_\theta (r^2 + a^2)^2 - \Delta_r \right] \psi - \frac{\partial}{\partial r} \Delta \frac{\partial \psi}{\partial r} \\ & - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \Delta_\theta) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \left(-\mu_0^2 \Sigma + e^2 Q^2 r^2 \frac{1}{\Delta_r} \right) \psi. \end{aligned} \quad (11.31)$$

Agora, suponhamos que $\psi(r, \theta) = R(r)\chi(\theta)$. Com isso, teremos as seguintes equações para as partes angular e radial da solução

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \Delta_\theta \frac{d\chi(\theta)}{d\theta} \right] = \left[\frac{1}{\Delta_\theta} \left(\omega a \sin \theta - \frac{m}{\sin \theta} \right)^2 + \mu_0^2 a^2 \cos^2 \theta - \lambda \right] \chi(\theta), \quad (11.32)$$

$$\frac{d}{dr} \Delta_r \frac{dR(r)}{dr} = \left\{ \lambda + \mu_0^2 r^2 - \frac{1}{\Delta_r} \left[\omega (r^2 + a^2) - am\Xi - eQr \right]^2 \right\} R(r), \quad (11.33)$$

sendo λ uma constante de separação e ω a energia da partícula. A Eq. (11.33) pode ser escrita com a coordenada r_* definida por

$$dr_* = \frac{1}{\Delta_r} (r^2 + a^2) dr, \quad (11.34a)$$

$$\frac{d}{dr} = \frac{(r^2 + a^2)}{\Delta_r} \frac{d}{dr_*}. \quad (11.34b)$$

Definindo $K = \omega (r^2 + a^2) - am\Xi - eQr$, temos

$$(r^2 + a^2)^2 \frac{d^2 R}{dr_*^2} + 2r \Delta_r \frac{dR}{dr_*} = \left[\Delta_r (\lambda + \mu_0^2 r^2) - K^2 \right] R. \quad (11.35)$$

Essa é uma equação mais apropriada para a função radial, $R(r)$, que utilizaremos para investigar a radiação de partículas escalares originada no buraco negro.

11.3.2 Radiação do buraco negro e continuação analítica

No horizonte do buraco negro, $\Delta_r(r_+) = 0$. Nessa região, a Eq. (11.35) será

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + (\omega - \omega_0)^2 R = 0, \quad (11.36)$$

onde

$$\omega_0 = m\Omega_+ + e\phi_+. \quad (11.37)$$

Assim, a solução radial da equação de Klein-Gordon nas proximidades do horizonte do buraco pode ser escrita na forma

$$R \sim e^{\pm i(\omega - \omega_0)r_*}, \quad (11.38)$$

e, com isso, temos

$$\Psi \sim e^{-i\omega t \pm i(\omega - \omega_0)r_*}. \quad (11.39)$$

Na região exterior do horizonte de eventos, as soluções entrando (*ingoing*) e saindo (*outgoing*) serão dadas por (HUAIFAN et al., 2009)

$$\Psi_{in} = e^{-i\omega t - i(\omega - \omega_0)t} = e^{-i\omega(t + \hat{r})} = e^{-i\omega\nu}, \quad (11.40)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{out}(r > r_+) &= e^{-i\omega t + i(\omega - \omega_0)t} = e^{-i\omega\nu} e^{2i\omega\hat{r}} \\ &= e^{-i\omega\nu} (r - r_+) e^{\frac{i}{\kappa_+}(\omega - \omega_0)}, \end{aligned} \quad (11.41)$$

onde

$$\hat{r} = \frac{\omega - \omega_0}{\omega} r_*, \quad \nu = t + \hat{r} \quad (11.42)$$

são as coordenadas de Eddington-Finkelstein. Podemos verificar que, na região dos horizontes do buraco negro, é possível escrever (HUAIFAN et al., 2009)

$$\ln(r - r_+) = \frac{1}{r_+^2 + a^2} \frac{d\Delta}{dr} \Big|_{r=r_+} \quad r_* = 2\kappa_+ r_*. \quad (11.43)$$

Por continuação analítica, podemos determinar a parte real de amortecimento da solução Ψ_{out} , que não é analítica no horizonte, isto é, $r = r_+$. Usando o método de Damour-Ruffini (DAMOUR; RUFFINI, 1976), e efetuando uma rotação de $-\pi$, temos

$$(r - r_+) \rightarrow |r - r_+|e^{-i\pi} = (r_+ - r)e^{-i\pi}. \quad (11.44)$$

Com isso, obtemos a função de onda no interior do horizonte, que é dado por

$$\Psi_{out}(r < r_+) = e^{-i\omega\nu}(r_+ - r)^{\frac{i}{\kappa_+}(\omega - \omega_0)} e^{\frac{\pi}{\kappa_+}(\omega - \omega_0)}. \quad (11.45)$$

A taxa de emissão de partículas pelo horizonte do buraco negro será, então,

$$\Gamma_+ = \left| \frac{\Psi_{out}(r > r_+)}{\Psi_{out}(r < r_+)} \right|^2 = e^{-\frac{2\pi}{\kappa_+}(\omega - \omega_0)}, \quad (11.46)$$

que representa a probabilidade de criação de partículas/antipartículas. Na figura 61, representamos o gráfico de Γ_+ em função da entropia do buraco negro, S .

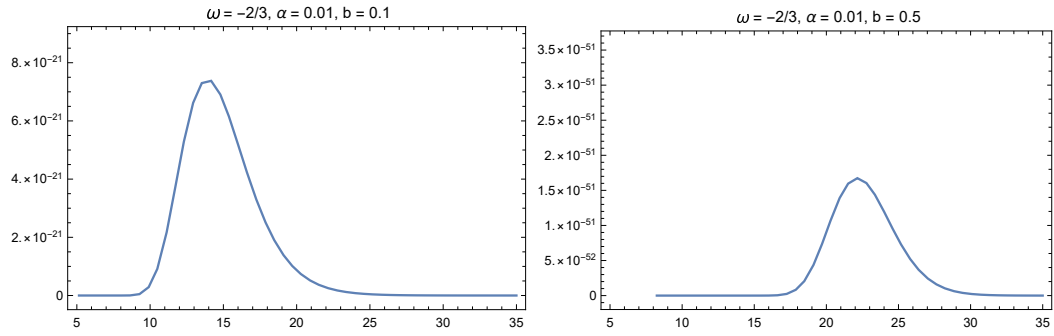


Figura 61 – Taxa de emissão de partículas, Γ , em função da entropia, para diferentes valores de b .

Note-se que a taxa de emissão de partículas aumenta quando o parâmetro de nuvem de cordas, b , diminui, para valores fixos de α e de ω_q .

11.3.3 Espectro de emissão do buraco negro e fluxo de Hawking

Supondo que o buraco negro irradia partículas com energia ω , carga elétrica e e momento angular m , haverá uma redução dos seus parâmetros termodinâmicos, de tal forma que $M/\Xi \rightarrow M/\Xi - \omega$, $Q \rightarrow Q - e$ e $J \rightarrow J - m$, o que irá produzir reflexos a métrica do espaço-tempo. Assumindo que a energia, a carga elétrica e o momento angular do universo são conservados, devemos impor que

$$-\omega = \Delta E, \quad (11.47a)$$

$$-e = \Delta Q, \quad (11.47b)$$

$$-m = \Delta J, \quad (11.47c)$$

sendo ΔE , ΔQ e ΔJ , respectivamente, variação na energia, na carga e no momento angular do buraco negro, devido à emissão de radiação. Substituindo essas quantidades na Eq. (11.46), e usando a primeira lei da termodinâmica de buracos negros, temos

$$\Gamma_+ = e^{-\frac{2\pi}{\kappa_+}(-\Delta E - m\Omega_+ - e\phi_+)} = e^{-\frac{2\pi}{\kappa_+}(-T_+\Delta S_+)} = e^{\Delta S_+}, \quad (11.48)$$

onde ΔS_+ representa a variação na entropia nas proximidades do horizonte do buraco negro devido à emissão de partículas. De forma semelhante, nas proximidades do horizonte cosmológico, podemos escrever

$$\Gamma_c = e^{\Delta S_c}. \quad (11.49)$$

O número médio de partículas emitidas num dado modo, $\bar{N}_\omega$, relaciona-se com a probabilidade de emissão, Γ_+ , por meio da equação (HUAIFAN et al., 2009; SANNAN, 1988)

$$\bar{N}_\omega = \frac{\Gamma_+}{1 - \Gamma_+} = \frac{1}{e^{\frac{h(\omega - \omega_0)}{k_B T_+}} - 1} \quad (11.50)$$

Podemos verificar que, na Eq. (11.50), introduzimos novamente as constantes de Planck e de Boltzmann. Realizando a integração de $\bar{N}_\omega$ sobre todo o espectro de emissão, temos o fluxo de Hawking, Φ , correspondente à emissão de partículas, que é dado por

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \bar{N}_\omega \omega d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\omega}{e^{\frac{2\pi}{\kappa_+}(\omega - \omega_0)} - 1} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\kappa_+}{2\pi} \right)^2 \left\{ \frac{\pi^2}{6} + \log(e^{\frac{2\pi}{\kappa_+}\omega_0}) - \log(e^{\frac{2\pi}{\kappa_+}\omega_0}) \log[-\log(e^{\frac{2\pi}{\kappa_+}\omega_0})] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=2}^\infty \frac{\log^j(e^{\frac{2\pi i}{\kappa_+}\omega_0}) \zeta(j-2)}{j!} \right\}, \end{aligned} \quad (11.51)$$

onde ζ é a função zeta de Riemann. Note que há dependência em relação à quintessência e à nuvem de cordas. Se considerarmos o buraco negro de Schwarzschild, $\omega_0 = 0$, obtemos o conhecido resultado $\Phi = \frac{\kappa_+}{48\pi}$.

11.4 Termodinâmica do buraco negro de Kerr-Newman-AdS com quintessência

Consideremos, agora, a métrica dada pela Eq. (11.8) e assumamos que não há nuvem de cordas. Nesse caso, nossos resultados reduzem-se àqueles obtidos por Xu e Wang (XU; WANG, 2017), que correspondem ao buraco negro de Kerr-Newman-AdS imerso em quintessência. O elemento de linha é, então, dado por (XU; WANG, 2017)

$$ds^2 = \frac{\Sigma}{\Delta_r} dr^2 - \frac{\Sigma}{\Delta_\theta} d\theta^2 - \frac{\Delta_\theta \sin^2 \theta}{\Sigma} \left[a \frac{dt}{\Xi} - (r^2 + a^2) \frac{d\phi}{\Xi} \right]^2 + \frac{\Delta_r}{\Sigma} \left(\frac{dt}{\Xi} - a \sin^2 \theta \frac{d\phi}{\Xi} \right)^2, \quad (11.52)$$

onde

$$\Delta_r = r^2 - 2Mr + a^2 + q^2 - \frac{\Lambda}{3} r^2 (r^2 + a_r^2) - \alpha r^{1-3\omega_q}, \quad (11.53)$$

$$\Delta_\theta = 1 + \frac{\Lambda}{3} a^2 \cos^2 \theta, \quad (11.54)$$

$$\Xi = 1 + \frac{\Lambda}{3} a_r^2. \quad (11.55)$$

Utilizando a métrica dada pela Eq. (11.52), iremos complementar os cálculos e discussões feitas por Xu e Wang (XU; WANG, 2017), incluindo breves análises da termodinâmica e da radiação Hawking do buraco negro.

Mais uma vez, iremos realizar a transformação $t \rightarrow t'/\Xi$. Com isso, a métrica da Eq. (11.52) pode ser escrita na forma

$$ds^2 = \frac{\Sigma}{\Delta_r} dr^2 - \frac{\Sigma}{\Delta_\theta} d\theta^2 - \frac{\Delta_\theta \sin^2 \theta}{\Sigma} \left[a dt - (r^2 + a^2) \frac{d\phi}{\Xi} \right]^2 + \frac{\Delta_r}{\Sigma} \left(dt - a \sin^2 \theta \frac{d\phi}{\Xi} \right)^2. \quad (11.56)$$

Como vimos, os horizontes do buraco negro são calculados por $g^{rr} = 0$, que, na métrica em consideração, levará a (XU; WANG, 2017)

$$\Delta_r = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2 - \frac{\Lambda}{3} r^2 (r^2 + a^2) - \alpha r^{-3\omega+1} = 0. \quad (11.57)$$

Se fixarmos $\omega_q = -2/3$, os horizontes do buraco negro são determinados pela solução da equação polinomial

$$r^4 + \frac{3\alpha}{\Lambda}r^3 + \left(a^2 - \frac{3}{\Lambda}\right)r^2 + \frac{6M}{\Lambda}r - \frac{3}{\Lambda}(a^2 + Q^2) = 0, \quad (11.58)$$

que, de forma geral, pode ser fatorada como a Eq. (11.16) (XU; WANG, 2017).

Em seu artigo, Xu e Wang (XU; WANG, 2017) afirmaram que "Far away from black hole such as cosmological scale, another cosmological horizon r_c exists". Na legenda da Figura 1 do trabalho, eles afirmaram que "Due to the small value of the cosmological constant, there always exists the cosmological horizon r_c ".

Ocorre que os pequenos valores da constante cosmológica não implicam a existência de um horizonte cosmológico. Pelo contrário, a coordenada radial do horizonte associado à constante cosmológica será sempre negativa. É fácil verificar essa afirmação. Se $r = 0$, $\Delta_r = a^2 + Q^2 > 0$. Quando consideramos o comportamento assintótico de Δ_r , se $r \rightarrow -\infty$, o termo dominante é aquele dominado por r^4 , que é negativo. Assim, a Eq. (11.58) possui uma raiz negativa com alto valor absoluto.

Na figura 62, representamos a função $\Delta_r(r)$. No lado esquerdo da figura, representamos o gráfico para valores negativos da coordenada r , $r < 0$, enquanto, no lado direito, representamos $\Delta_r(r)$ para valores positivos de r . Podemos observar que Δ_r possui três raízes positivas e uma negativa, esta relacionada à constante cosmológica.

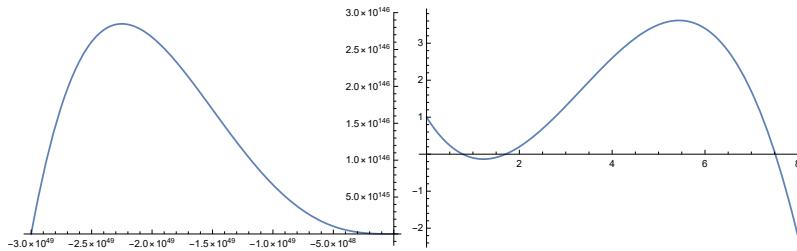


Figura 62 – Gráfico da função $\Delta_r(r)$. Fixamos $Q^2 = a^2 = 0.5$, $\alpha = 0.1$, $M = 1$ e $\Lambda = 10^{-50}$.

Em suma, o buraco negro possui apenas três horizontes cujas coordenadas radiais são positivas: r_- , r_+ e r_q . Assim, o número de horizontes é diferente daquele informado por Xu and Wang (XU; WANG, 2017). Haverá, também, apenas três casos extremos, isto é, $r_+ = r_q$, $r_- = r_+$ ou $r_- = r_+ = r_q$.

11.4.1 Termodinâmica do buraco negro

De forma análoga ao que desenvolvemos na seção 11.2, iremos estudar as grandezas termodinâmicas partindo da métrica derivada por Xu e Wang (XU; WANG, 2017).

Com a entropia descrita na relação (11.21), a energia do sistema é dada por

$$E = \frac{S\Xi/\pi + Q^2 - \frac{\Lambda}{3}(S\Xi/\pi - a^2)S\Xi/\pi}{2\Xi\sqrt{S\Xi/\pi - a^2}} - \frac{\alpha(S\Xi/\pi - a^2)^{(1-3\omega_q)/2}}{2\Xi\sqrt{S\Xi/\pi - a^2}}, \quad (11.59)$$

e tem seu comportamento representado na figura 63.

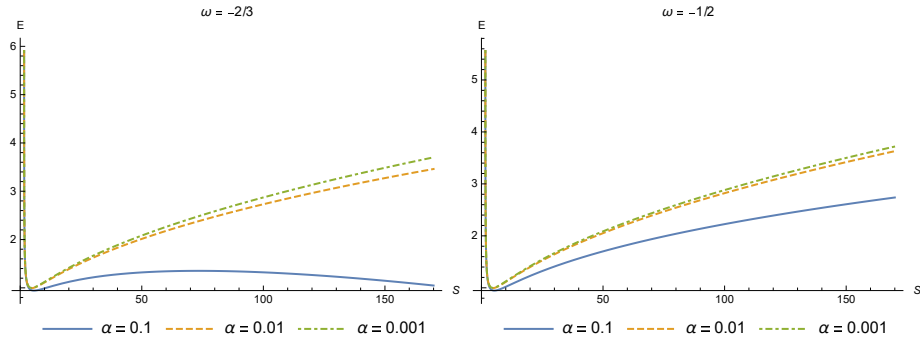


Figura 63 – Energia, E , em função da entropia, S , para diferentes valores de α e de ω_q .

A temperatura Hawking do buraco negro é calculada por

$$T = \frac{S\Xi/\pi - 2a^2 - Q^2 - \frac{\Lambda}{3}(S\Xi/\pi - a^2)(3S\Xi/\pi - 2a^2)}{4\sqrt{S\Xi/\pi - a^2}S\Xi} + \frac{3\omega_q\alpha(S\Xi/\pi - a^2)^{(1-3\omega_q)/2}}{4\sqrt{S\Xi/\pi - a^2}S\Xi}. \quad (11.60)$$

e está plotada na figura 64.

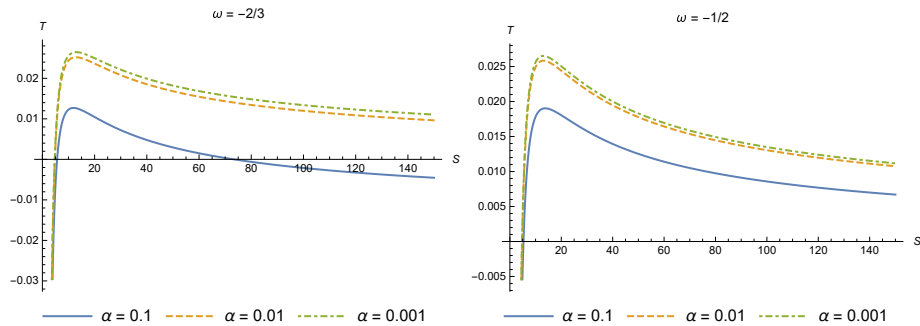


Figura 64 – Temperatura Hawking, T , em função da entropia, S , para diferentes valores de α e de ω_q .

Com as quantidades definida na Eq. (11.26), a primeira lei da termodinâmica, a Eq. (11.25), é verificada.

A capacidade térmica para J e q constantes é dada pela Eq. (11.27) e está plotada, como função de S na figura 65, que mostra a influência da quintessência na estabilidade do sistema.

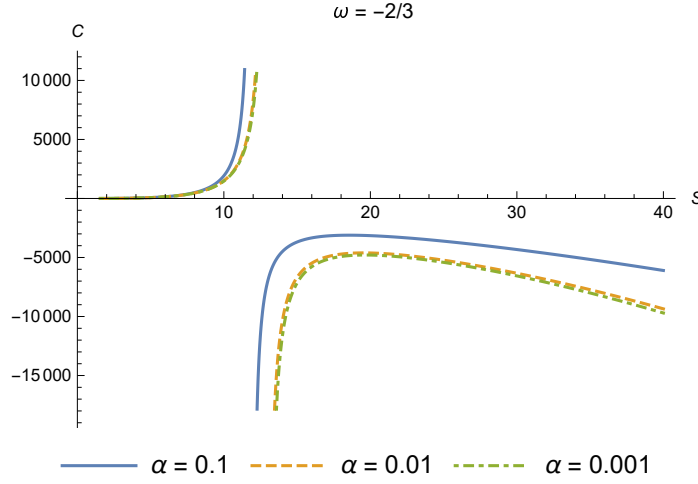


Figura 65 – Capacidade térmica em função da entropia, S .

Em suma, podemos afirmar que energia e a temperatura Hawking diminuem quando o parâmetro α aumenta (ver figuras 63 e 64) e que a quintessência apresenta-se fundamental na definição de estabilidade do sistema.

11.4.2 Radiação Hawking

Quanto à radiação Hawking, os cálculos necessários são semelhantes aos desenvolvidos na seção 11.3, se tomarmos $b = 0$.

Nesse caso, a taxa de emissão de partículas pelo horizonte de eventos, Γ_+ , está representado na figura 59, como função da entropia.

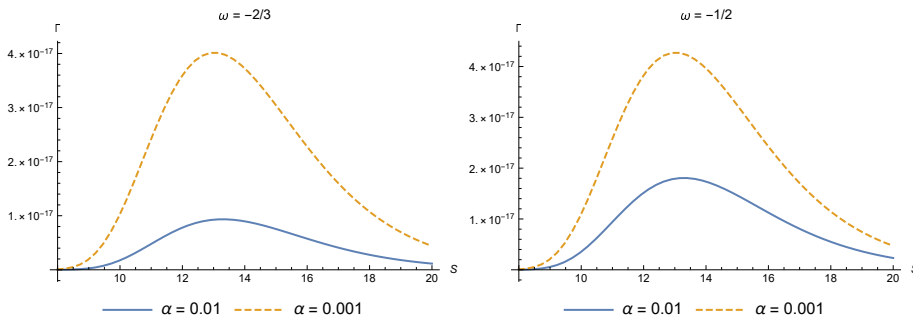


Figura 66 – Taxa de emissão de partículas, Γ_+ , em função da entropia, S , para diferentes valores de α e de ω_q .

Podemos observar que, quando o parâmetro de quintessência α diminui, a taxa de emissão de partículas aumenta.

Parte IV

Buracos negros na gravitação de Lovelock
com quintessência e nuvem de cordas

12 Efeito Casimir nas proximidades de um buraco negro em terceira ordem da gravitação de Lovelock

Como já discutimos, a gravitação de Lovelock representa uma generalização da relatividade geral que apresenta correções de ordens superiores da curvatura em sua ação e pode ser construída a partir de limites de baixas energias da teoria de cordas. Já comentamos também sobre a importância que o efeito Casimir tem desempenhado no estudo teórico da gravitação. É o objetivo deste capítulo, portanto, estudar a influência da gravitação de Lovelock na energia de Casimir em temperatura zero, bem como considerando as correções térmicas.

Assim, no que segue, iremos calcular a energia de Casimir para um campo escalar sem massa confinado numa região compreendida entre duas placas planas e paralelas separadas por uma distância L nas proximidades de um buraco negro de raio R , tal que $L \ll R$, em terceira ordem da gravitação de Lovelock. Os resultados obtidos serão comparados com aqueles derivados utilizando-se a relatividade geral ([SORGE, 2005](#)).

12.1 Buraco negro em terceira ordem da gravitação de Lovelock

Inicialmente, iremos obter a métrica correspondente ao buraco negro estático e esfericamente simétrico de massa M em quatro dimensões na terceira ordem da gravitação de Lovelock. Para tanto, partamos do espaço-tempo de Schwarzschild na relatividade geral em 4-dimensões, descrito pela Eq. (2.1). Em D -dimensões na gravitação de Lovelock, já verificamos que o elemento de linha associado ao buraco negro tem a forma da Eq. (3.10) e a solução do buraco negro estático é obtida por meio das Eqs. (3.11) - (3.14).

Retornemos à situação em que $D = 4$ e, fixando em terceira ordem de gravitação de Lovelock, tal que $\tilde{\alpha}_0 = 0$, $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = \tilde{\alpha}_3 = 1$ e $\kappa = 1$, nas Eqs. (3.11) e (3.13). Com isso, a métrica do buraco negro de Schwarzschild nessa teoria modificada de gravitação será dada pela Eq. (3.10), com

$$f(r) = 1 + \frac{r^2}{3} + \frac{2 \cdot 2^{1/3} r^2}{3g(r)} - \frac{r^2 g(r)}{3 \cdot 2^{1/3}}, \quad (12.1)$$

onde

$$g(r) = \left[7 + \sqrt{32 + \left(7 + \frac{54M}{r^3} \right)^2} + \frac{54M}{r^3} \right]^{1/3}. \quad (12.2)$$

Na Figura 67, representamos o comportamento de $f(r)$ na gravitação de Lovelock e na relatividade geral em quatro dimensões. Em ambos os casos, consideramos $M = 1.5$.

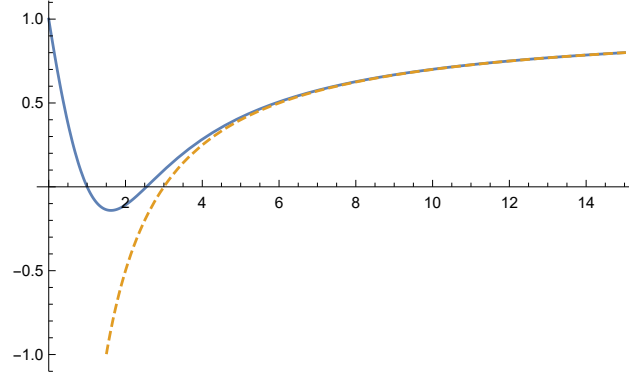


Figura 67 – Gráficos de $f(r)$ para a gravitação de Lovelock (linha sólida) e na relatividade geral (linha tracejada).

Se considerarmos o limite $r \gg M$, verificamos que $f(r)$ pode ser aproximada por

$$f(r) \approx 1 - \frac{2M}{r} + \frac{4M^2}{r^4}. \quad (12.3)$$

Verificamos pela Figura 67 e pela Eq. (12.3) que as soluções para o buraco negro na gravitação de Lovelock e na relatividade geral se aproximam no limite de baixas energias, ou seja, muito distante do buraco negro ($r \rightarrow \infty$).

No que segue, iremos realizar todos os cálculos considerando a expressão da Eq. (12.2) para $f(r)$. Notemos que, nessa equação, M e r parecem ter a mesma dimensão. Isso ocorre porque consideramos os coeficientes $\tilde{\alpha}_i$ iguais à unidade.

12.2 Efeito Casimir para um campo escalar sem massa

Consideremos, por simplicidade a mudança de variável $r \rightarrow \rho$, de tal modo que a métrica dada pela Eq. (3.10), com f expressa pela Eq. (12.3), pode ser escrita na forma

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{\rho} + \frac{4M^2}{\rho^4} \right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{\rho} + \frac{4M^2}{\rho^4} \right)^{-1} d\rho^2 - \rho^2 d\Omega^2. \quad (12.4)$$

Agora, consideremos duas placas paralelas separadas pela distância L nas proximidades do buraco negro, como mostrado na Figura 68. O referencial de coordenadas (x, y, z) tem origem na placa mais próxima do buraco negro (MUNIZ; BEZERRA; CUNHA, 2015).

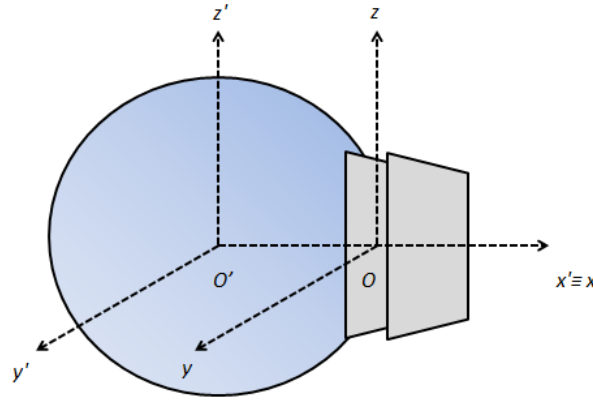


Figura 68 – Placas paralelas nas proximidades do buraco negro (fora de escala).

Com a configuração adotada, as coordenadas cartesianas (x, y, z) relacionam-se com as coordenadas (x', y', z') através do seguinte sistema:

$$x = x' - R, \quad (12.5)$$

$$y' = y, \quad (12.6)$$

$$z' = z. \quad (12.7)$$

Podemos escrever a métrica dada pela Eq. (12.4) em sua forma isotrópica como

$$ds^2 = h_I(r)dt^2 - h_{II}(r)(dr^2 + r^2 d\Omega^2), \quad (12.8)$$

onde $h_I(r) = f(\rho(r))$ e

$$h_{II}(r) = \frac{1}{f(\rho)} \left(\frac{d\rho}{dr} \right)^2 = \frac{\rho^2}{r^2}. \quad (12.9)$$

Com isso, podemos obter r como função de ρ , usando a relação

$$\log(r) = \int \frac{d\rho}{\rho \sqrt{1 - \frac{2M}{\rho} + \frac{4M^2}{\rho^4}}}. \quad (12.10)$$

Essa é uma integral elíptica, que não pode ser resolvida analiticamente, mas podemos expandir o integrando até à ordem M^4/ρ^4 . Logo, teremos

$$r \approx \rho e^{-M/\rho + M^2/(2\rho^4)} \approx \rho \left(1 - \frac{M}{\rho} + \frac{3M^2}{2\rho^4} \right). \quad (12.11)$$

Em primeira aproximação, podemos considerar $\rho = R$. Por conseguinte, a métrica dada pela Eq. (12.4) é escrita como

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{R} + \frac{4M^2}{R^4}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{2M}{R} - \frac{M^2}{R^4}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (12.12)$$

Consideremos agora um campo escalar, Φ , descrito pela equação de Klein-Gordon, que é escrita, em espaços-tempo curvos, na forma

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu) \Phi(t, x, y, z) = 0. \quad (12.13)$$

Com a métrica da Eq. (12.12), teremos a equação de Klein-Gordon nesse background dada por

$$\left(1 + \frac{4M}{R} - \frac{5M^2}{R^4}\right) \partial_t^2 \Phi - \nabla^2 \Phi = 0. \quad (12.14)$$

Supondo que Φ obedece às condições de contorno de Dirichlet nas placas, podemos escrever

$$\Phi_n(t, x, y, z) = N_n e^{i(k_y y + k_z z - \omega_n t)} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (12.15)$$

com $n = 1, 2, \dots$ e sendo

$$\omega_n = \left(1 - \frac{2M}{R} + \frac{5M^2}{2R^4}\right) \left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + k_y^2 + k_z^2\right]^{1/2} \quad (12.16)$$

as frequências dos modos permitidos. Já N_n são constantes de normalização obtidas pela condição (MUNIZ; BEZERRA; CUNHA, 2015)

$$||\Phi_n||^2 = -i \int_S \sqrt{-\hat{g}_S} [(\partial_t \Phi_n) \Phi_n^* - \Phi_n (\partial_t \Phi_n^*)] n^t dS = 1, \quad (12.17)$$

em que S é uma hipersuperfície tipo-espaço, g_S é o determinante da métrica induzida em S , $dS = dx dy dz$ e n^t é um vetor tipo-tempo voltado ao futuro, que pode ser escrito na forma

$$n_t = (-g)^{1/4} (1, 0, 0, 0) = \left(1 + \frac{M}{R} + \frac{M^2}{4R^4}, 0, 0, 0\right). \quad (12.18)$$

Assim, as constantes de normalização serão calculadas por

$$N_n = \frac{1}{2\pi \sqrt{\left(1 + \frac{4M}{R} - \frac{5M^2}{4R^4}\right)} L \omega_n}. \quad (12.19)$$

12.2.1 Energia de Casimir

Iremos calcular a energia de vácuo do campo escalar entre as placas no espaço-tempo do buraco negro na gravitação de Lovelock, verificando as correções surgidas em relação à relatividade geral. Para tanto, utilizemos o operador de energia dado por (MUNIZ; BEZERRA; CUNHA, 2015; MUNIZ; BEZERRA; CUNHA, 2013)

$$T_{tt} = \frac{1}{2}(\partial_t \Phi_n \partial_t \Phi_n^* - g_{tt} g^{ik} \partial_i \Phi_n \partial_k \Phi_n^*), \quad (12.20)$$

cujo valor esperado é

$$\epsilon_{vac} = \langle 0 | n^t n^t T_{tt} | 0 \rangle = \sum_n \int n^t n^t T_{tt} d^2 k_{||}, \quad (12.21)$$

em que $d^2 k_{||} = dk_y dk_z$. A densidade de energia de Casimir é obtida por

$$\langle \epsilon_{vac} \rangle = \frac{1}{V_p} \int_S \sqrt{-g_s} \epsilon_{vac} dS, \quad (12.22)$$

sendo $V_p = \int_S \sqrt{-g_s} dS$ o volume próprio da cavidade. Por conseguinte, obtém-se

$$\langle \epsilon_{vac} \rangle = \left(1 - \frac{4M}{R} + \frac{17M^2}{4R^4} \right) \int \frac{d^2 k_{||}}{2(2\pi)^2 L} \sum_n \left[k_{||}^2 + \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right]. \quad (12.23)$$

A integral da Eq. (12.23) nos dá a densidade de energia de vácuo para um campo escalar sem massa num espaço-tempo de Minkowski, que diverge. Usando um método correto de regularização (ELIZALDE, 1994; ELIZALDE, 2008), como a fórmula de soma de Abel-Plana, obtemos a energia de Casimir, que é dada por

$$\langle \epsilon_{vac} \rangle^{(ren)} = - \left(1 - \frac{4M}{R} + \frac{17M^2}{4R^4} \right) \frac{\pi^2}{1440 L^4}. \quad (12.24)$$

Sendo o comprimento próprio L_p dado por $L_p = \sqrt{g_{xx}} L \approx \left(1 + \frac{M}{R} - \frac{M^2}{2R^4} \right) L$, escrevemos a Eq. (12.24) na forma

$$\langle \epsilon_{vac} \rangle^{(ren)} = - \left(1 + \frac{9M^2}{4R^4} \right) \frac{\pi^2}{1440 L_p^4}. \quad (12.25)$$

Seja σ a razão entre a energia de Casimir dada pela Eq. (12.25) e a energia correspondente calculada para um buraco negro estático na relatividade geral (SORGE, 2005). O comportamento de σ , como função de R , é mostrado na Figura 69, para um valor fixo de M . Já na Figura 70 representamos $\langle \epsilon_{vac} \rangle^{(ren)}$ em função de R .

Como podemos verificar na Eq. (12.24), na gravitação de Lovelock, há uma modificação na energia de vácuo regularizada em segunda ordem de aproximação no termo

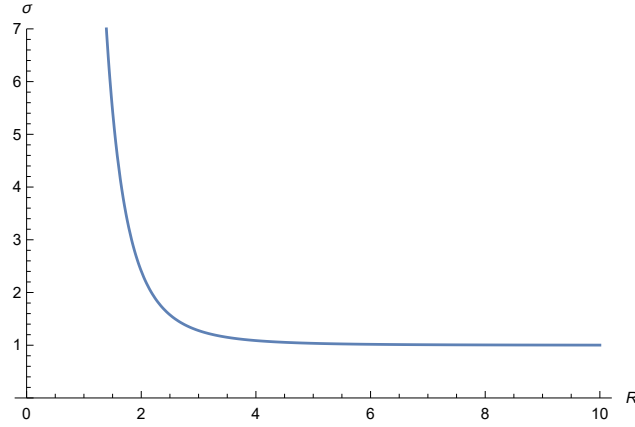


Figura 69 – Função σ como função de R , para $M = 1$.

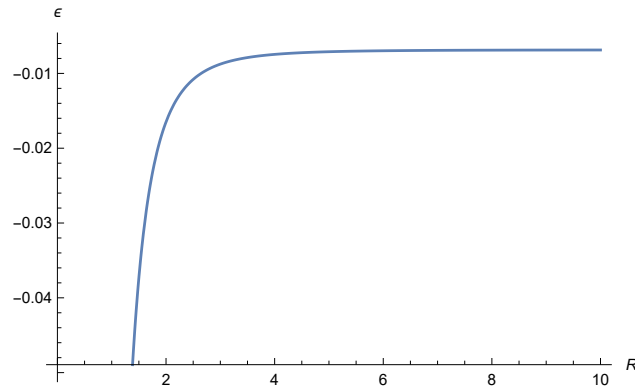


Figura 70 – Gráfico de $\langle \epsilon_{vac} \rangle^{(ren)}$ como função de R (Eq. 12.25), para $M = 1$.

M/R , quando comparamos com o resultado derivado da relatividade geral (SORGE, 2005). Das Figuras 69 e 70, percebemos que os resultados obtidos na gravitação de Lovelock coincidem com aqueles advindos da relatividade geral no regime de baixas energias, ou seja, muito distante do buraco negro.

12.3 Correções térmicas da energia de Casimir

Passaremos a analisar as correções térmicas à energia de Casimir nesta seção. Para tanto, considere a energia livre de Helmholtz renormalizada, que se relaciona com a energia de vácuo, $E_0^{(ren)} = V_p \langle \epsilon_{vac} \rangle^{(ren)}$ através da Eq. (10.59), com $\Delta_T F_0$ e f_{bb} sendo dados, respectivamente, pelas Eqs. (10.60) e (10.61).

É possível verificar que f_{bb} é a clássica energia de corpo negro e, no espaço-tempo em consideração, é calculado por

$$f_{bb} = - \left(1 + \frac{6M}{R} - \frac{15M^2}{2R^4} \right) \frac{\pi^2 (k_B T)^4}{90}. \quad (12.26)$$

Expandindo o segundo termo da Eq. (10.59), teremos (MUNIZ; BEZERRA; CU-

NHA, 2013)

$$\Delta_T F_0 = \frac{Ak_B T}{\pi} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \int_0^{\infty} dk_{||} k_{||} e^{-\tilde{\beta} m \left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + k_{||}^2 \right)^{1/2}}, \quad (12.27)$$

onde $\tilde{\beta} = \frac{1}{k_B T} \left(1 - \frac{2M}{R} + \frac{5M^2}{2R^4} \right)$. Fazendo apropriadas mudanças de variáveis, podemos escrever esse resultado em termos das funções de Bessel de segunda ordem (MUNIZ; BEZERRA; CUNHA, 2013; GRADSHTEYN; RYZHIK, 2014), obtendo

$$\Delta_T F_0 = -\frac{Ak_B T}{L^2} \sqrt{\frac{L}{\tilde{\beta}}} \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\frac{n}{m} \right)^{3/2} K_{3/2} \left(\frac{\tilde{\beta} m n \pi}{L} \right). \quad (12.28)$$

Substituindo a Eq. (12.27) na Eq. (10.59), escrevemos a energia livre de Helmholtz na forma

$$\begin{aligned} \tilde{F}_0 = & -F_1 \frac{A\pi^2}{1440L_p^3} \\ & -F_2 A(k_B T)^{3/2} L_p^{-3/2} \sum_{m,n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{m} \right)^{3/2} K_{3/2} \left(\frac{\tilde{\beta} m n \pi}{L} \right) \\ & +F_3 \frac{AL_p \pi^2 (k_B T)^4}{90}, \end{aligned} \quad (12.29)$$

onde

$$F_1 = 1 + \frac{9M^2}{4R^4}, \quad (12.30)$$

$$F_2 = 1 - \frac{M}{2R} - \frac{M^2}{2R^4}, \quad (12.31)$$

$$F_3 = 1 + \frac{6M}{R} - \frac{15M^2}{2R^4}. \quad (12.32)$$

No que segue, iremos considerar as correções térmicas da densidade de energia de Casimir. Primeiramente, definimos a densidade de energia interna renormalizada por

$$u_0^{(ren)} = -T^2 \frac{\partial(\tilde{f}_0/T)}{\partial T}, \quad (12.33)$$

onde $\tilde{f}_0$ é a densidade de energia de Helmholtz definida por $\tilde{f}_0 = \tilde{F}_0/V_p$.

Podemos, agora, analisar os regimes de baixas e de altas temperaturas. Para baixas temperaturas, temos (MUNIZ; BEZERRA; CUNHA, 2013)

$$u_0^{(ren)} \approx -F_1 \frac{\pi^2}{1440L_p^4} + \frac{[F_4\pi L_p^{-1}(k_B T) + F_5(k_B T)^2]}{\sqrt{2}L_p^2} e^{\tilde{\beta}\pi L} - F_3 \frac{\pi^2(k_B T)^4}{30}, \quad (12.34)$$

onde

$$F_4 = 1 + \frac{M}{R} + \frac{M^2}{R^4}, \quad (12.35)$$

$$F_5 = 1 + \frac{2M}{R} - \frac{M^2}{R^4}. \quad (12.36)$$

Chamamos atenção para o fato de que a energia de vácuo para temperatura zero dada pela Eq. (12.25) poder ser obtida da Eq. (12.34) tomando-se $T = 0$ nesta última equação, como deveríamos esperar. O comportamento de $u_0^{(ren)}$, no regime de baixas temperaturas, como função de R e de T pode ser observado na Figura 71.

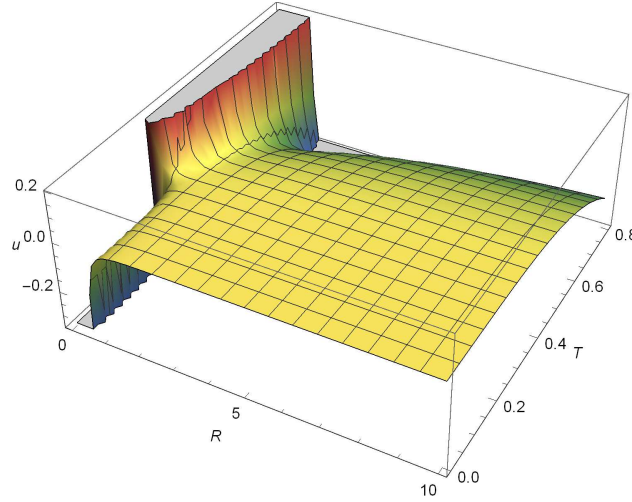


Figura 71 – Gráfico de $u_0^{(ren)}$, no regime de baixas temperaturas, como função de R e de T , para $M = k_B = L_p = 1$.

No regime de altas temperaturas, temos

$$u_0^{(ren)} \approx -F_1 \frac{\pi^2}{1440L_p^4} - F_6 \frac{\zeta(3)(k_B T)^4}{\pi} - F_3 \frac{\pi^2(k_B T)^4}{30}, \quad (12.37)$$

onde

$$F_6 = 1 + \frac{3M}{2R} - \frac{15M^2}{16R^4}. \quad (12.38)$$

A Figura 72 representa o gráfico de $u_0^{(ren)}$ no regime de altas temperaturas.

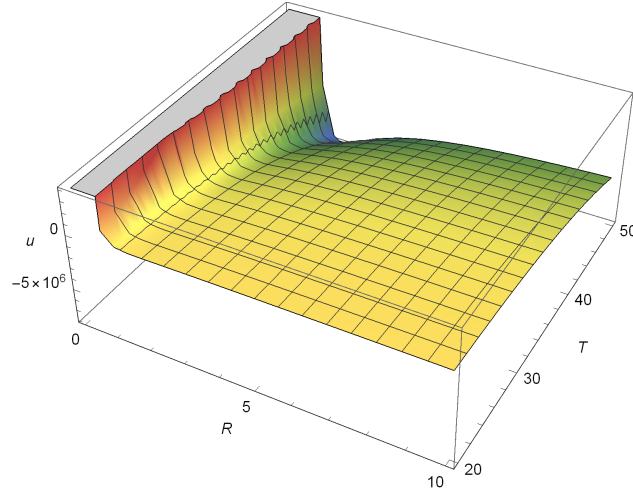


Figura 72 – Gráfico de $u_0^{(ren)}$, no regime de altas temperaturas, como função de R e de T , para $M = k_B = L_p = 1$.

Para compararmos os resultados obtidos com aqueles previstos na relatividade geral, vamos considerar a métrica utilizada por Sorge ([SORGE, 2005](#)) e dada por

$$ds^2 = (1 + 2\phi_0)dt^2 - (1 - 2\phi_0)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (12.39)$$

onde $\phi_0 = -M/R$. Se repetirmos o procedimento descrito nesta seção as correções térmicas à energia de Casimir serão dadas pelas Eqs. (12.34) e (12.37), respectivamente, com

$$F_1 = 1, \quad (12.40)$$

$$F_2 = 1 - \frac{M}{2R}, \quad (12.41)$$

$$F_4 = 1 + \frac{M}{R}, \quad (12.42)$$

$$F_5 = 1 + \frac{2M}{R}, \quad (12.43)$$

$$F_6 = 1 + \frac{3M}{2R}. \quad (12.44)$$

Podemos chamar de σ_T a razão entre a densidade energia interna de Casimir, em temperaturas não nulas, na gravitação de Lovelock e na relatividade geral. As Figuras 73 e 74 apresentam o comportamento de σ_T como função de R e de T , indicando que, no regime de baixas energias (ou de campo fraco), σ_T tende à unidade, como deveríamos esperar.

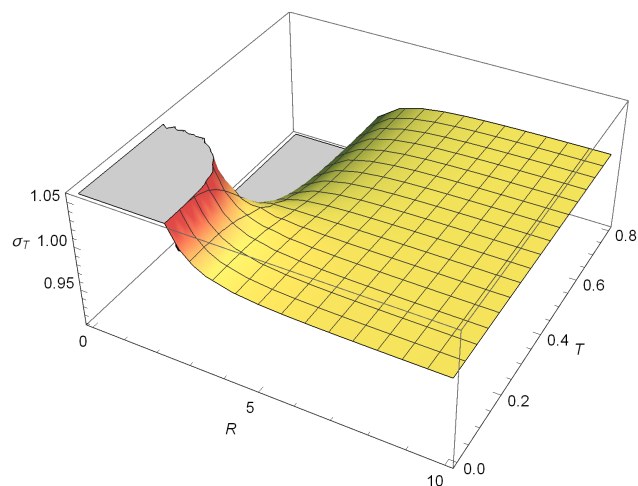


Figura 73 – Gráfico de σ_T , no regime de baixas temperaturas, como função de R e de T , para $M = k_B = L_p = 1$.

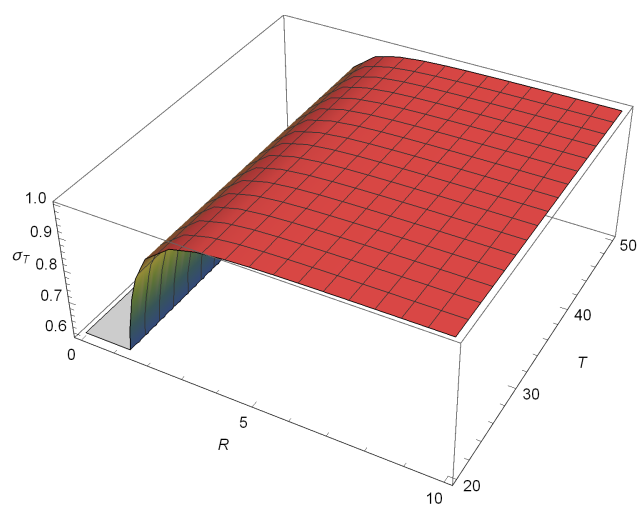


Figura 74 – Gráfico de σ_T , no regime de altas temperaturas, como função de R e de T , para $M = k_B = L_p = 1$.

13 Buracos negros com quintessência e nuvem de cordas na gravitação de Lovelock

Levando-se em consideração o fato de que a gravitação de Lovelock é uma importante generalização da relatividade geral para dimensões superiores e que o estudo de buracos negros têm desempenhado papel fundamental na gravitação teórica, é importante estudarmos diferentes configurações de buracos negros nessa teoria modificada de gravitação.

Nesse sentido, iremos obter a solução exata correspondente a um buraco negro estático e esfericamente simétrico imerso em quintessência e circundado por nuvem de cordas na gravitação de Lovelock em D -dimensões. Essa solução corresponde a uma analogia ao espaço-tempo de Letelier com quintessência na gravitação de Lovelock. Iremos estudar, ainda, a termodinâmica dos buracos negros nos casos especiais dessa teoria: relatividade geral, gravitação de Gauss-Bonnet e gravitação de Lovelock em terceira ordem. Os resultados e gráficos foram apresentados a seguir de forma a permitir um paralelismo com a relatividade geral em 4-dimensões.

A presença da quintessência e da nuvem de cordas, como iremos verificar, afeta a estrutura de horizontes do buraco negro e suas grandezas termodinâmicas. Iremos efetuar os cálculos considerando, ainda, para a dimensão do espaço-tempo, os valores $D = 5, 6$ e 7 , escolhidos de tal forma que possamos compará-los ao caso $D = 4$.

Neste capítulo e nos dois próximos, iremos utilizar a letra q para representarmos o parâmetro de quintessência, para que não o confundamos com os parâmetros da gravitação de Lovelock, que, como já bem estabelecido na literatura, serão representados por α .

13.1 Nuvem de cordas e quintessência em espaços-tempo D -dimensionais

Nos capítulos 5 e 2, obtivemos as soluções correspondentes a buracos negros estáticos imersos, respectivamente, em quintessência e em nuvem de cordas. Nesta seção, iremos, brevemente, discutir como essas soluções se comportam em espaços-tempo D -dimensionais em relatividade geral. As generalizações aqui obtidas serão utilizadas nos dois próximos capítulos deste trabalho.

13.1.1 Quintessência

Como já discutimos, a métrica de um buraco negro estático de massa M imerso em quintessência é dada pelo elemento de linha da Eq. (5.32). Ademais, o tensor energia-

momento associado a esse buraco negro é aquele escrito na Eq. (5.25). Consideraremos a métrica esfericamente em D-dimensões simétrica escrita na forma da Eq. (3.10). Nesse caso, podemos generalizar o tensor energia-momento para

$$T_t^t = T_r^r = \rho_q = -\frac{\omega_q q (D-1)(D-2)}{2r^{(D-1)(\omega_q+1)}} \quad (13.1a)$$

$$T_{\theta_1}^{\theta_1} = \dots = T_{\theta_{D-2}}^{\theta_{D-2}} = -\frac{1}{D-2}\rho_q[(D-1)\omega_q+1], \quad (13.1b)$$

onde $\theta_i (i = 1, 2, \dots, D-2)$ são as $D-2$ variáveis que descrevem a seção do espaço-tempo com curvatura constante.

Com isso, em D-dimensões, a solução correspondente a um buraco negro estático imerso em quintessência será dada pela Eq. (3.10), com (GHOSH et al., 2018)

$$f(r) = 1 - \frac{\mu}{r^{D-3}} - \frac{q}{r^{(D-1)\omega_q+D-3}}. \quad (13.2)$$

sendo μ uma constante para a qual podemos adotar a expressão (GHOSH et al., 2018)

$$\mu = \frac{2M}{(D-2)\Sigma_{D-2}}, \quad (13.3)$$

sendo Σ_{D-2} é o volume da esfera (D-2)-dimensional de raio unitário calculado pela expressão (3.14). Neste capítulo, por questões de simplicidade, adotaremos $M = 8\pi M_o$, em que M_o é a massa do buraco negro na solução de Schwarzschild.

13.1.2 Nuvem de cordas

Por seu turno, um buraco negro imerso em nuvem de cordas é descrito pelo tensor energia-momento da Eq. (2.23), que nos leva à solução quadridimensional da Eq. (2.31). Em D-dimensões, podemos generalizar o tensor energia-momento para (GHOSH; PAPNOI; MAHARAJ, 2014; LEE; BABOOLAL; GHOSH, 2015)

$$T^\mu_\nu = \frac{a}{r^{D-2}}[1, 1, 0, \dots, 0], \quad (13.4)$$

onde a é, mais uma vez, um parâmetro associado à nuvem de cordas. Nesse caso, a solução para o buraco negro em consideração será dada novamente pela Eq. (3.10), com $f(r)$ sendo

$$f(r) = 1 - \frac{\mu}{r^{D-3}} - \frac{2a}{(D-2)r^{D-4}}. \quad (13.5)$$

13.2 Buracos negros com quintessência e nuvem de cordas na gravitação de Lovelock em D-dimensões

Iremos considerar um buraco negro imerso em quintessência e nuvem de cordas na gravitação de Lovelock. Para tanto, suponhamos que a quintessência e a nuvem de cordas não interajam, de forma que o conteúdo de matéria-energia associado à configuração pode ser descrito pela sobreposição linear dos tensores energia-momento das Eqs. (13.1) e (13.4).

Sendo assim, podemos assumir que a métrica associada ao buraco negro em D-dimensões será dada pela Eq. (3.10), sendo $f(r)$ calculado pela Eq. (3.11), na qual $F(r)$ é uma solução da equação polinomial

$$P(F) = \sum_{p=0}^m \tilde{\alpha}_p F^p = \frac{2M}{(D-2)\Sigma_{D-2}r^{D-1}} + \frac{q}{r^{(D-1)(\omega_q+1)}} - \frac{2a}{(D-2)r^{D-2}}. \quad (13.6)$$

Os coeficientes $\tilde{\alpha}_p$ são calculados pela Eq. (3.13).

Para o espaço-tempo quadrimensional, teremos que $f(r)$ é escrita na forma

$$f(r) = 1 - a - \frac{2M}{r} - \frac{q}{r^{3\omega_q+1}}, \quad (13.7)$$

se adotarmos $\kappa = 1$ e $\alpha_p = 0$ para $p \geq 2$. Esse resultado corresponde ao espaço-tempo de Letelier com quintessência, que discutimos no capítulo 7. Com isso, verificamos que, para o buraco negro em estudo, obtemos os resultados da relatividade geral para a correta escolha dos coeficientes da gravitação de Lovelock, como deveríamos esperar.

Em geral, para $D > 4$, $\kappa = 1$ e $\alpha_p = 0$ para $p \geq 2$, teremos

$$f(r) = 1 - \frac{\mu}{r^{D-3}} - \frac{q}{r^{(D-1)\omega_q+D-3}} - \frac{2a}{(D-2)r^{D-4}}. \quad (13.8)$$

O comportamento dessa função, para diferentes valores de q e de a é representado nas Figuras 75 e 76 no caso da relatividade geral em D-dimensões.

A solução para a gravitação de Gauss-Bonnet é obtida se adotarmos $\alpha_2 \neq 0$ e $\alpha_p = 0$, para $p \geq 3$. Sendo assim, obtemos duas classes de buracos negros descritos pelas funções $f_+(r)$ ou $f_-(r)$, que são dadas por

$$f_{\pm} = 1 + \frac{r^2}{2\tilde{\alpha}_2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{8\tilde{\alpha}_2 M}{(D-2)\Sigma_{D-2}r^{D-1}} + \frac{4q\tilde{\alpha}_2}{r^{(D-1)(\omega_q+1)}} - \frac{8a\tilde{\alpha}_2}{(D-2)r^{D-2}}} \right), \quad (13.9)$$

onde

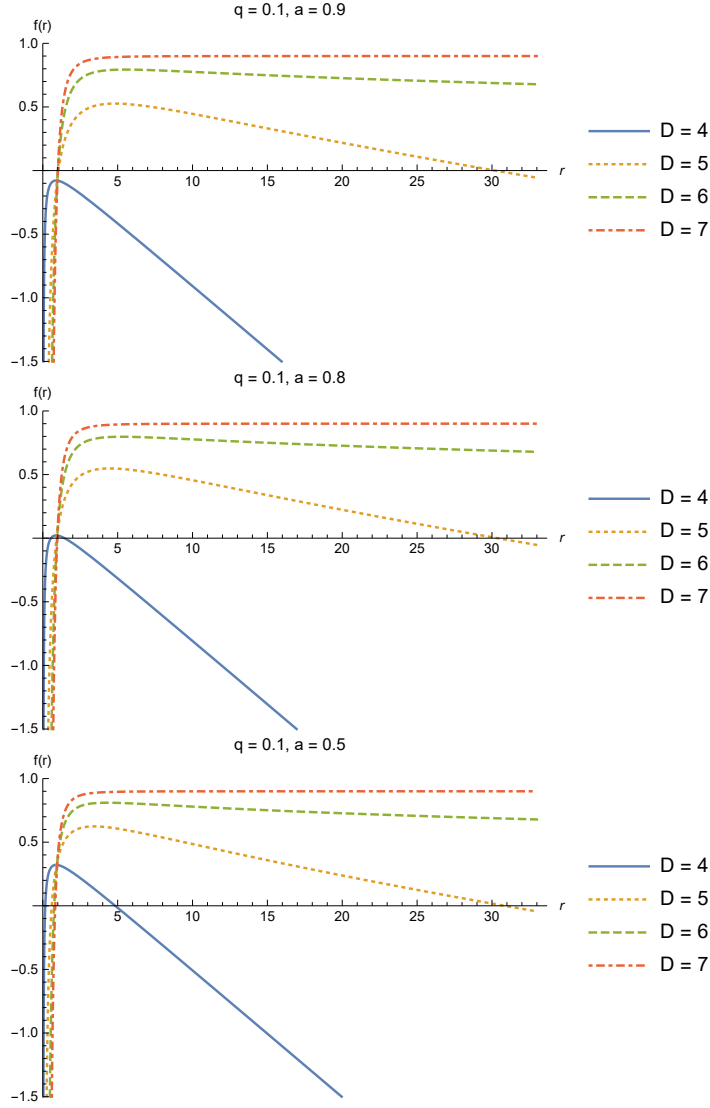


Figura 75 – A função $f(r)$ na relatividade geral em D -dimensões para $\omega_q = -2/3$, $q = 0.1$, $M = 1$ e para diferentes valores de a e de D .

$$\tilde{\alpha}_2 = (D - 3)(D - 4)\alpha_2. \quad (13.10)$$

Note que, se $r \rightarrow \infty$ e se tomarmos $q = 0$, o que significa que não há quintessência, obtemos (GHOSH; PAPNOI; MAHARAJ, 2014)

$$f_+ \rightarrow 1 + \frac{r^2}{\tilde{\alpha}_2}, \quad f_- \rightarrow 1. \quad (13.11)$$

Portanto, podemos verificar que f_- leva ao espaço-tempo plano quando consideramos regiões muito distantes do buraco negro. Por outro lado, f_+ , no mesmo limite, retoma a métrica de anti-de Sitter. Se considerarmos a presença da quintessência ($q \neq 0$), verificamos que esse conteúdo energético influencia os comportamentos de $f_{\pm}$, como observamos na

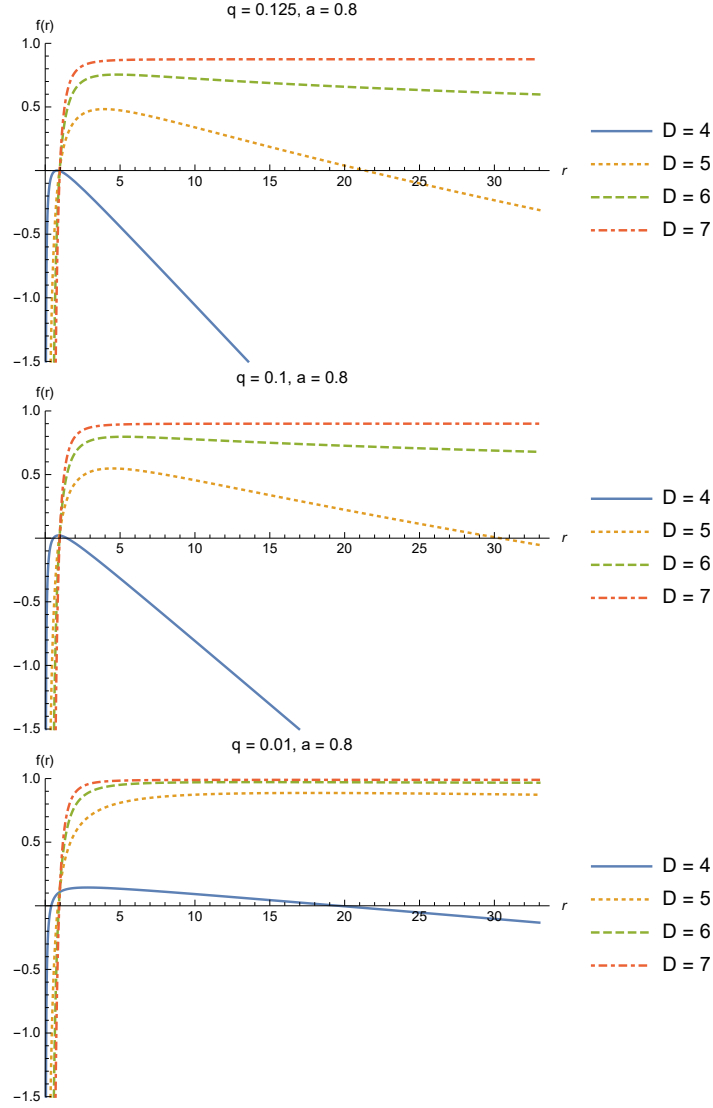


Figura 76 – A função $f(r)$ na relatividade geral em D -dimensões para $\omega_q = -2/3$, $a = 0.8$, $M = 1$ e para diferentes valores de q e de D .

Eq. (13.9). Para valores diferentes de q e de a , a função $f_+(r)$ é representada nas Figuras 77 e 78 no caso da gravitação de Gauss-Bonnet.

13.3 Termodinâmica do buraco negro

Nesta seção, iremos estudar a termodinâmica do buraco negro com quintessência e nuvem de cordas, seguindo os resultados obtidos na literatura (CAI, 2004; MYERS; SIMON, 1988; GHOSH et al., 2018), como fizemos no capítulo 3.

Os horizontes do buraco negro são calculados a partir da Eq. (3.16). Com isso, e usando a Eq. (13.6), podemos escrever a massa do buraco negro na forma

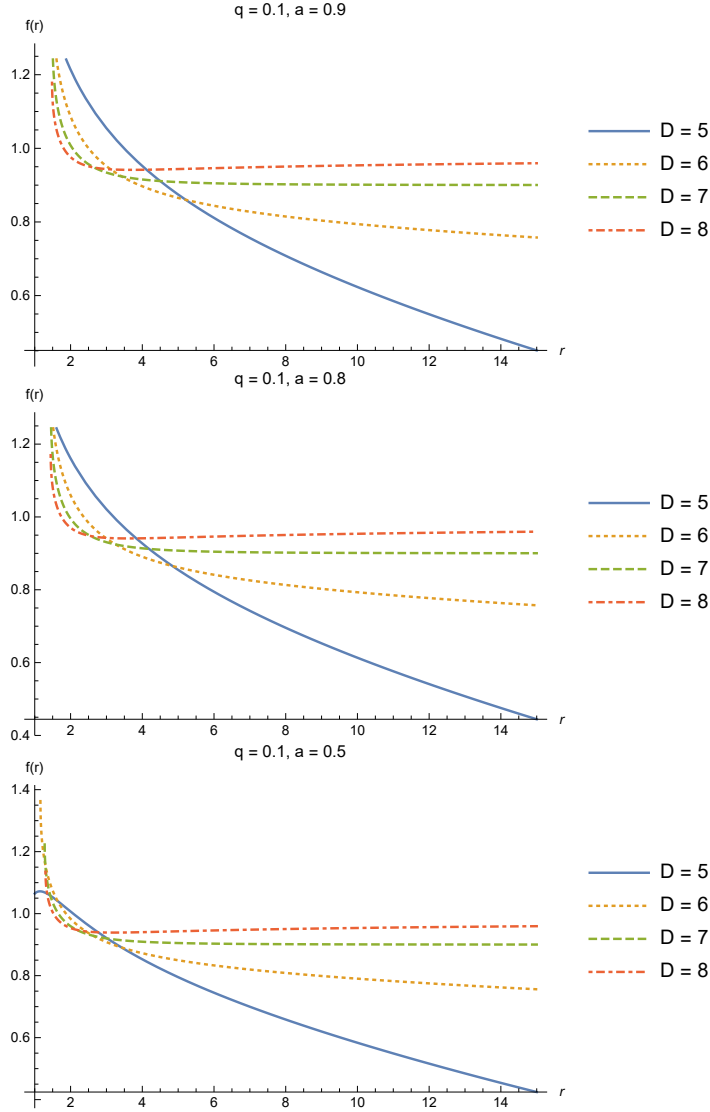


Figura 77 – A função $f(r)$ na gravitação de Gauss-Bonnet para $\omega_q = -2/3$, $M = 1$ e $\alpha_2 = 1$.

$$M = \frac{(D-2)\Sigma_{D-2}}{2} \left[\sum_{p=0}^m \frac{\tilde{\alpha}_p \kappa^p}{r_h^{-(D-2p-1)}} - \frac{q}{r_h^{(D-1)\omega_q}} - \frac{2ar_h}{D-2} \right]. \quad (13.12)$$

A temperatura Hawking é calculada pela expressão

$$T = \frac{f'(r)}{4\pi} = \frac{1}{4\pi N(r_h)} \left[\sum_{p=0}^m \frac{\tilde{\alpha}_p \kappa^p (D-2p-1)}{r_h^{2p+2}} + \frac{q\omega_q(D-1)}{r_h^{(D-1)\omega_q+D+1}} - \frac{2a}{(D-2)r_h^D} \right], \quad (13.13)$$

onde

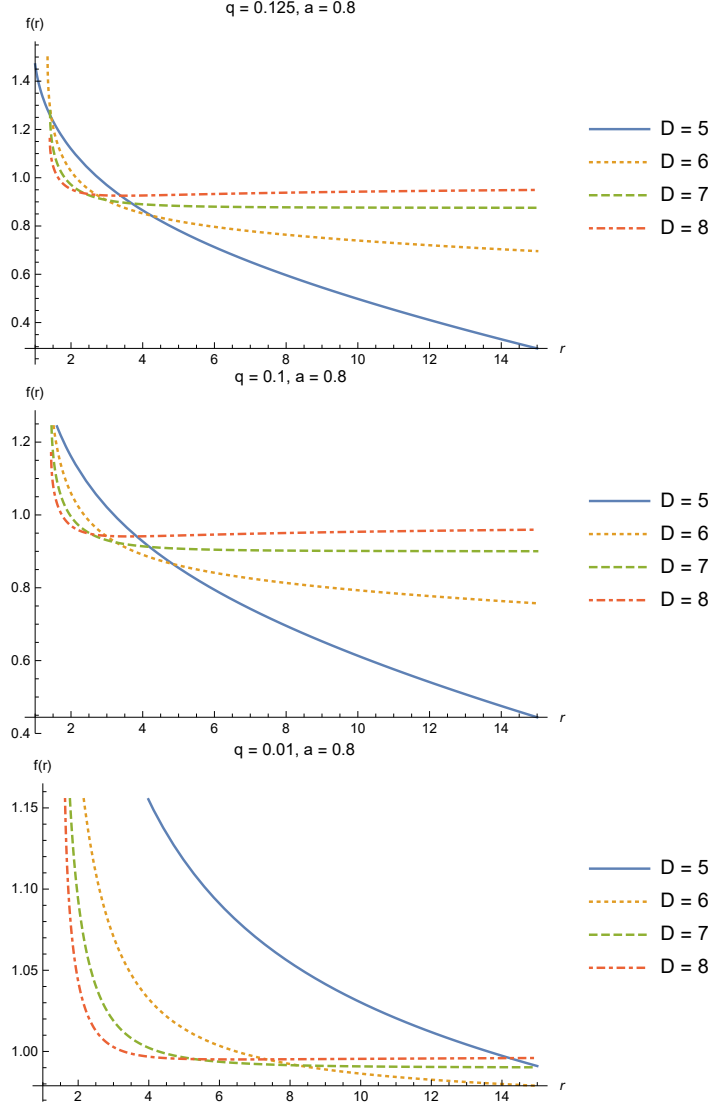


Figura 78 – A função $f(r)$ na gravitação de Gauss-Bonnet para $\omega_q = -2/3$, $M = 1$ e $\alpha_2 = 1$.

$$N(r_h) = \sum_{p=1}^m \frac{\tilde{\alpha}_p p \kappa^{p-1}}{r_h^{2p+1}}. \quad (13.14)$$

De acordo com a primeira lei da termodinâmica, podemos calcular a entropia do buraco negro por (GHOSH et al., 2018)

$$\begin{aligned} S &= \int \frac{dM}{T} = \int \frac{1}{T} \frac{dM}{dr_h} dr_h \\ &= 2\pi(D-2)\Sigma_{D-2} \sum_{p=1}^m \frac{\tilde{\alpha}_p \kappa^{p-1} p}{(D-2)r_h^{-(D-2p)}}. \end{aligned} \quad (13.15)$$

de onde é possível se concluir que a lei da área é obedecida quando $\kappa = 0$.

A capacidade térmica é, por sua vez, calculada por (GHOSH et al., 2018)

$$C = \frac{dM}{dT} = \frac{dM}{dr_h} \frac{dr_h}{dT} = 2\pi(D-2)\Sigma_{D-2} \frac{c_1 c_2^2}{c_3}, \quad (13.16)$$

onde

$$c_1 = \sum_{p=0}^m \frac{(D-2p-1)\tilde{\alpha}_p \kappa^p}{r_h^{-D+2p+2}} + \frac{(D-1)\omega_q q}{r^{(D-1)\omega_q+1}} - \frac{2a}{D-2}, \quad (13.17a)$$

$$c_2 = \sum_{p=1}^m \frac{\tilde{\alpha}_p p \kappa^{p-1}}{r_h^{-(D-2p-1)}}, \quad (13.17b)$$

$$c_3 = \sum_{p,s=0}^m (D-2s-1)(2p-2s-1) \frac{\tilde{\alpha}_p \tilde{\alpha}_s \kappa^{p+s-1} s}{r_h^{-2(D-s-p-2)}} - \sum_{p=1}^m [(D-1)\omega_q + 1 + (D-2p-1)] \frac{q\omega_q(D-1)}{r_h^{(D-1)\omega_q+1}} \frac{\tilde{\alpha}_p p \kappa^{p-1}}{r_h^{-(D-2p-2)}} + \frac{2a}{D-2} \frac{\tilde{\alpha}_p p \kappa^{p-1}}{r_h^{-(D-2p-2)}}. \quad (13.17c)$$

No que segue, iremos particularizar as grandezas termodinâmicas para os casos de um buraco negro em D-dimensões na relatividade geral, na gravitação de Gauss-Bonnet e em terceira ordem da gravitação de Lovelock.

13.3.1 Buraco negro em D-dimensões na relatividade geral

Para este caso particular, iremos tomar $\alpha_p = 0$, para $p \geq 2$, e $D > 4$. Com isso, a massa do buraco negro poderá ser escrita na forma

$$M = \frac{(D-2)\Sigma_{D-2}}{2} \left[r_h^{(D-3)} - \frac{q}{r_h^{(D-1)\omega_q}} - \frac{2ar_h}{D-2} \right], \quad (13.18)$$

cujos comportamento está plotado nas Figuras 79 e 80 para diferentes valores de a e de q .

A temperatura Hawking será dada por

$$T = \frac{r_h^3}{4\pi} \left[\frac{D-3}{r_h^4} + \frac{q\omega_q(D-1)}{r_h^{(D-1)\omega_q+D+1}} - \frac{2a}{(D-2)r_h^D} \right] \quad (13.19)$$

e seu comportamento está plotado nas Figuras 81 e 82.

Vale chamar atenção para o fato de que, neste caso, a entropia é proporcional à área do horizonte de eventos, ou seja,

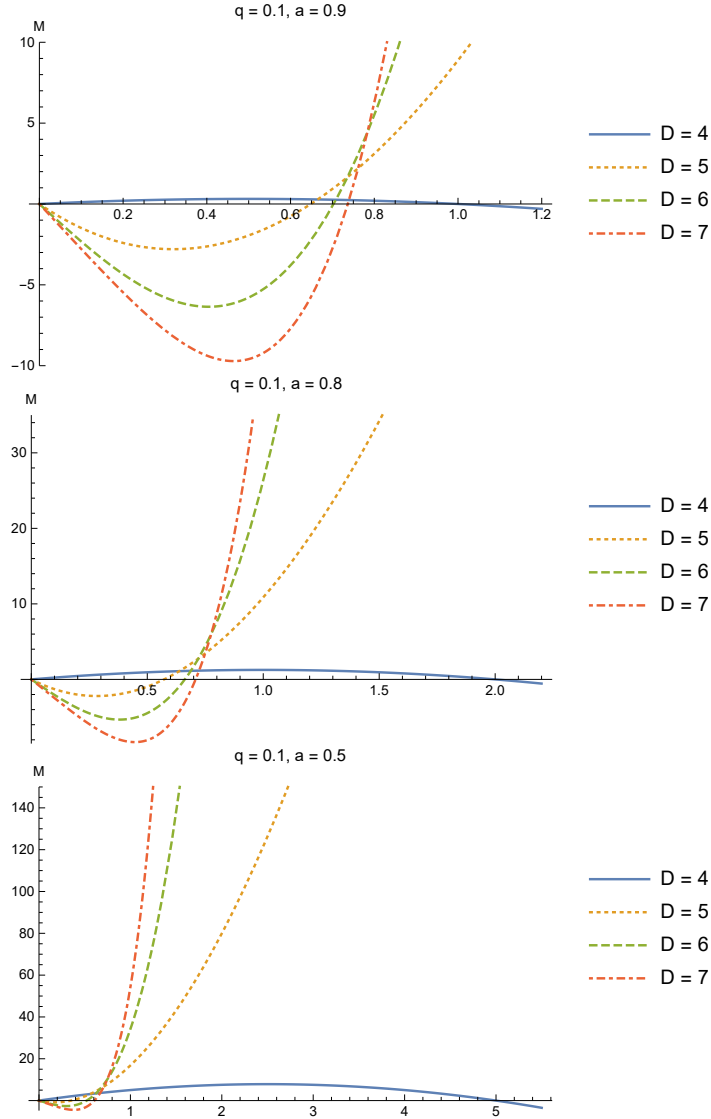


Figura 79 – Massa do buraco negro em D-dimensões na relatividade geral como função de r_h para diferentes valores de a .

$$S = 2\pi \Sigma_{D-2} r_h^{D-2}, \quad (13.20)$$

como no caso da relatividade geral em 4 dimensões.

A capacidade térmica do buraco negro será calculada usando a Eq. (13.16), com os coeficientes sendo dados por

$$c_1 = \frac{D-3}{r_h^{-D+4}} + \frac{(D-1)\omega_q q}{r^{(D-1)\omega_q+1}} - \frac{2a}{D-2}, \quad (13.21a)$$

$$c_2 = \frac{1}{r_h^{-D+3}}, \quad (13.21b)$$

$$c_3 = \frac{3-D}{r_h^{-2(D-4)}} - [(D-1)\omega_q + 1]$$

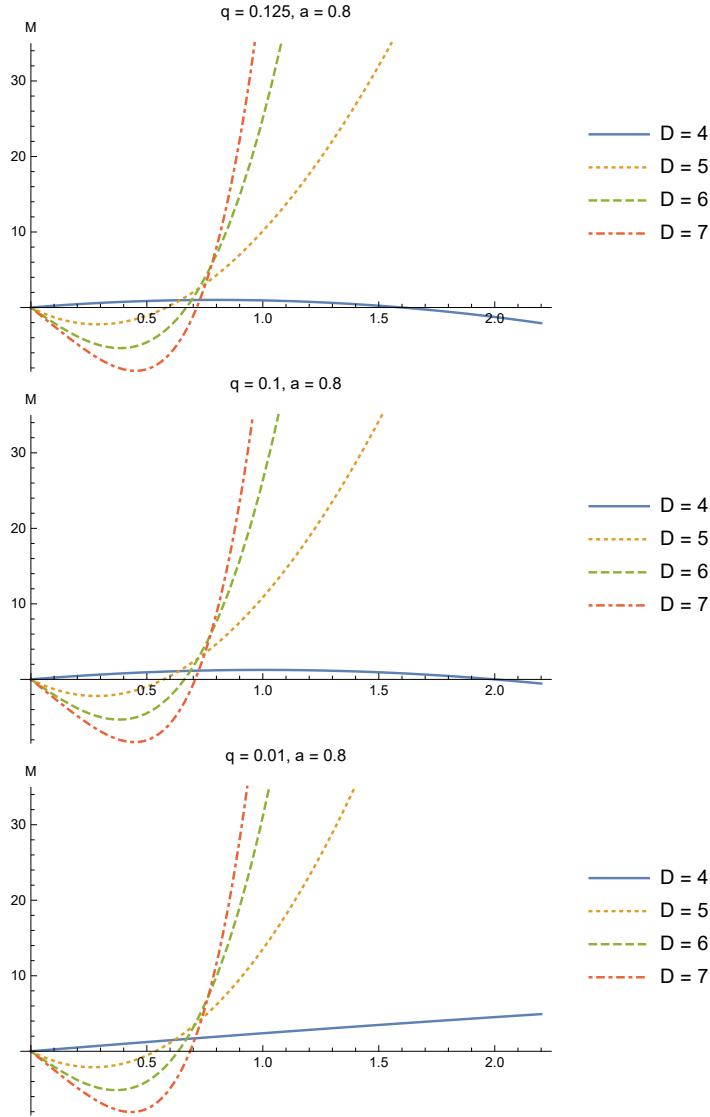


Figura 80 – Massa do buraco negro em D -dimensões na relatividade geral como função de r_h para diferentes valores de q .

$$\begin{aligned}
 & + (D - 3) \left[\frac{(D - 1)q\omega_q}{r_h^{(D-1)\omega_q+1}} \frac{1}{r_h^{-(D-4)}} \right. \\
 & \left. \frac{2a}{D - 2} \frac{1}{r_h^{-(D-4)}} \right]. \quad (13.21c)
 \end{aligned}$$

Nas Figuras 83 e 84, representamos a capacidade térmica do buraco negro para diferentes valores do parâmetro de quintessência, bem como para diferentes valores do parâmetro da nuvem de cordas.

Analisando as Figuras 83 e 84, podemos concluir que há regiões de estabilidade a depender dos valores de q , bem como da dimensão do espaço-tempo. Além disso, pode-se observar que há transições de fase a depender do valor da coordenada radial no horizonte, r_h . Na Fig 83, mostramos separadamente o caso particular $D = 4$, no qual fica evidente a existência de regiões de estabilidade e de instabilidade. De forma semelhante, mostramos

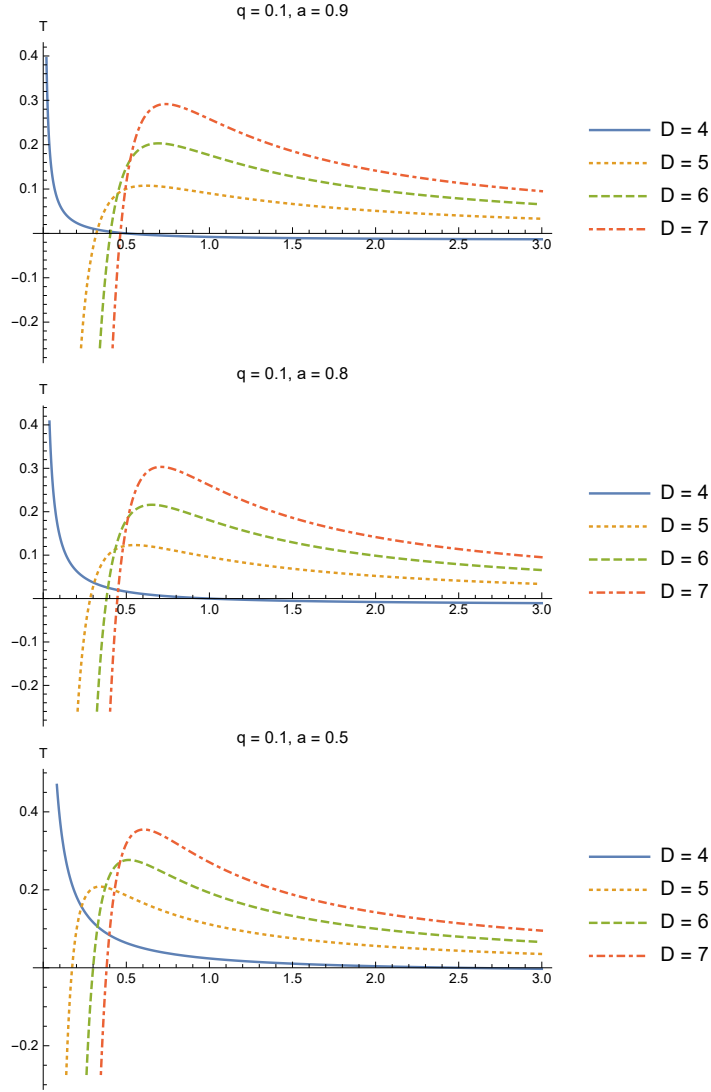


Figura 81 – Temperatura Hawking do buraco negro em D-dimensões na relatividade geral como função de r_h para diferentes valores de a .

na Fig. 84 o caso particular $D = 4$ separadamente, de forma a evidenciar o fato de que, para os valores escolhidos para q , o buraco negro é termodinamicamente instável.

13.3.2 Buraco negro na gravitação de Gauss-Bonnet

Para obtermos o caso particular da gravitação de Gauss-Bonnet, iremos considerar que $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = 1$ e $\tilde{\alpha}_p = 0$, for $p > 2$. Nesse caso, a massa do buraco negro pode ser obtida pela expressão

$$M = \frac{(D-2)\Sigma_{D-2}}{2} \left[r_h^{D-3} + r_h^{D-5} - \frac{q}{r_h^{(D-1)\omega_q}} - \frac{2ar_h}{D-2} \right], \quad (13.22)$$

e tem seu comportamento representado na Figura 85.

Por seu turno, a temperatura Hawking é dada por

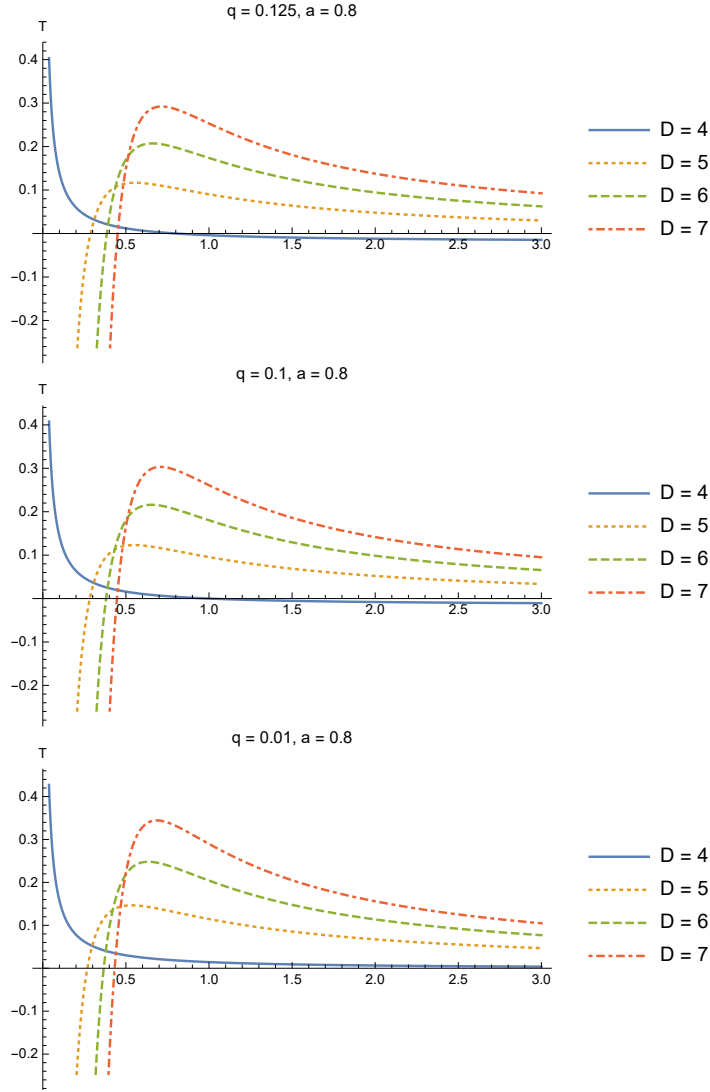


Figura 82 – Temperatura Hawking do buraco negro em D -dimensões na relatividade geral como função de r_h para diferentes valores de q .

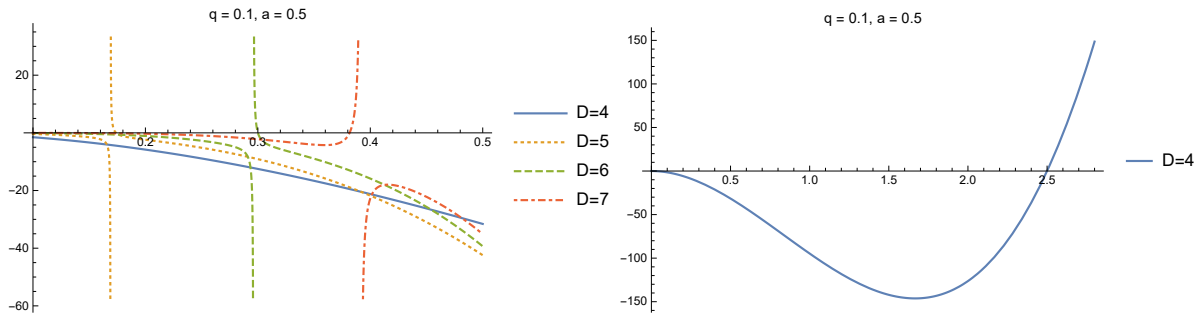


Figura 83 – Capacidade térmica do buraco negro em D -dimensões na relatividade geral como função de r_h para diferentes valores de q .

$$T = \frac{r_h^5}{4\pi(2 + r_h^2)} \left[\frac{D-3}{r_h^4} + \frac{D-5}{r_h^6} + \frac{q\omega_q(D-1)}{r_h^{(D-1)\omega_q+D+1}} - \frac{2a}{(D-2)r_h^D} \right]. \quad (13.23)$$

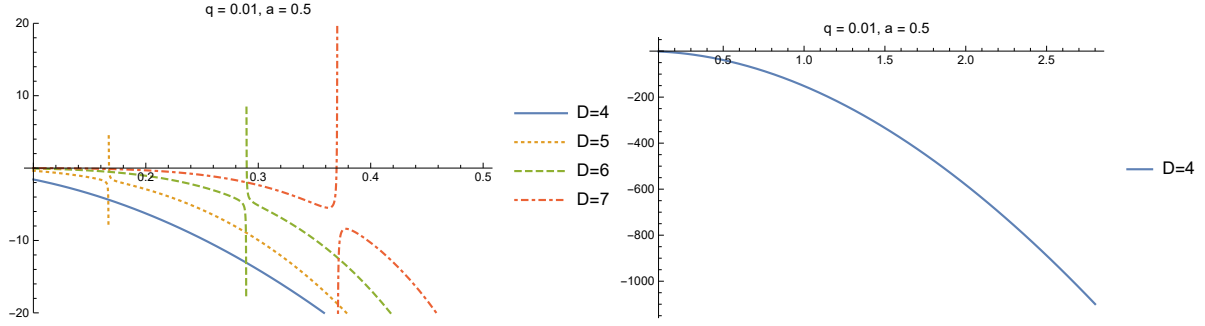


Figura 84 – Capacidade térmica do buraco negro em D-dimensões na relatividade geral como função de r_h para diferentes valores de a .

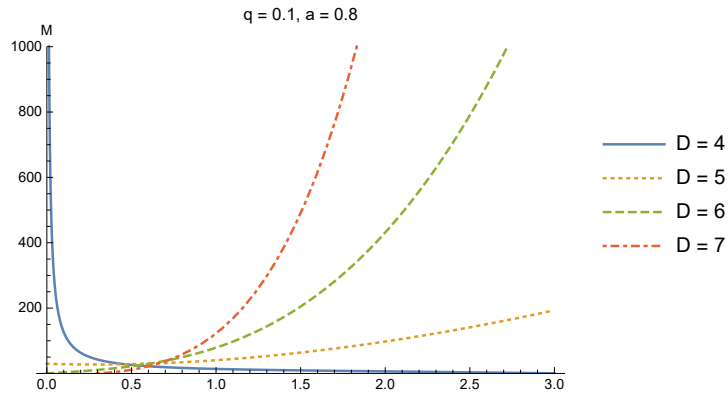


Figura 85 – Massa do buraco negro na gravitação de Gauss-Bonnet em função de r_h , para $a = 0.8$ e $q = 0.1$.

e está representada na Figura 86

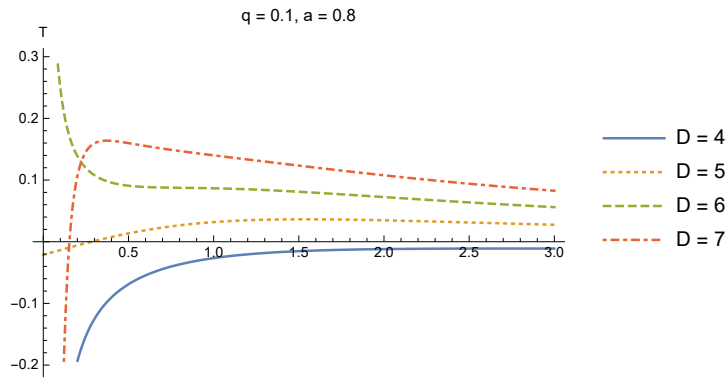


Figura 86 – Temperatura Hawking do buraco negro na gravitação de Gauss-Bonnet em função de r_h , para $a = 0.8$ e $q = 0.1$.

A capacidade térmica será dada pela Eq. (13.16), com os parâmetros c_1 , c_2 e c_3 sendo calculados por

$$c_1 = \frac{D-3}{r_h^{-D+4}} + \frac{D-5}{r_h^{-D+6}} + \frac{(D-1)\omega_q q}{r^{(D-1)\omega_q+1}} - \frac{2a}{D-2} \quad (13.24a)$$

$$c_2 = \frac{1}{r_h^{-D+3}} + \frac{2}{r_h^{-D+5}} \quad (13.24b)$$

$$\begin{aligned} c_3 = & \frac{3-D}{r_h^{-2(D-4)}} + \frac{-6(D-5)+D-3}{r_h^{-2(D-5)}} + \frac{2(5-D)}{r_h^{-2(D-6)}} \\ & - [(D-1)\omega_q + 1 + (D-3)] \frac{(D-1)q\omega_q}{r_h^{(D-1)\omega_q+1}} \frac{1}{r_h^{-(D-4)}} \\ & - [(D-1)\omega_q + 1 + (D-5)] \frac{(D-1)q\omega_q}{r_h^{(D-1)\omega_q+1}} \frac{1}{r_h^{-(D-6)}} \\ & + \frac{2a}{D-2} \frac{1}{r_h^{-(D-4)}} + \frac{2a}{D-2} \frac{1}{r_h^{-(D-6)}}. \end{aligned} \quad (13.24c)$$

Na Figura 87, pode-se perceber que há regiões termodinamicamente estáveis e instáveis a depender do número de dimensões do espaço-tempo.

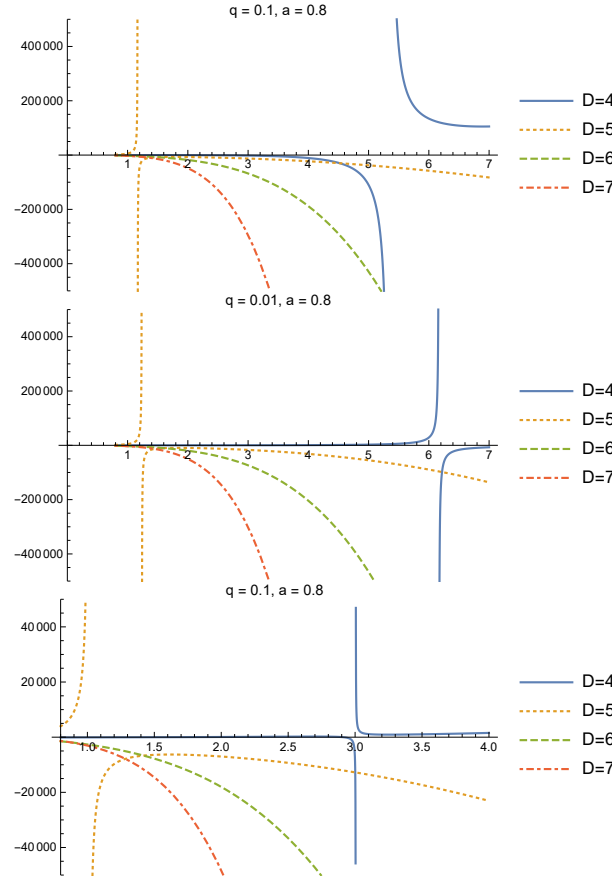


Figura 87 – Capacidade térmica na gravitação de Gauss-Bonnet em função de r_h , para $a = 0.8$ e $q = 0.1$.

13.3.3 Buracos negros em terceira ordem da gravitação de Lovelock

Nesta seção, analisaremos o comportamento da massa do buraco negro, de sua temperatura Hawking e da capacidade térmica em terceira ordem da gravitação de Lovelock, considerando $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = \tilde{\alpha}_3 = 1$ e $\tilde{\alpha}_p = 0$ para $p > 3$.

Nesse caso, o parâmetro de massa será calculado por

$$M = \frac{(D-2)\Sigma_{D-2}}{2} \left[r_h^{D-3} + r_h^{D-5} + r_h^{D-7} - \frac{q}{r_h^{(D-1)\omega_q}} - \frac{2ar_h}{D-2} \right], \quad (13.25)$$

cujo comportamento está representado na Fig. 88.

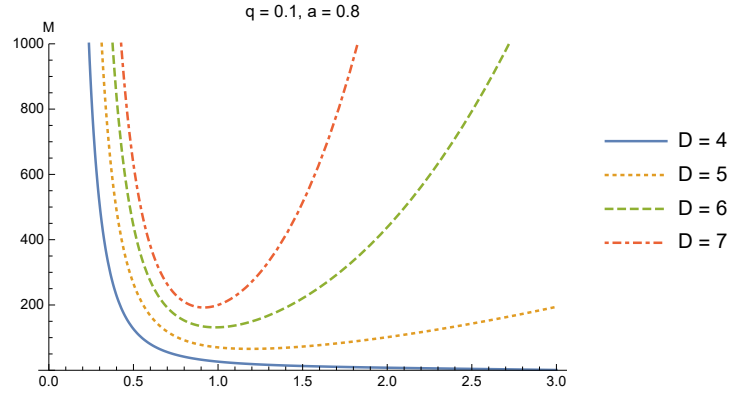


Figura 88 – Massa na gravitação de Lovelock de terceira ordem em função de r_h , for $a = 0.8$ e $q = 0.1$.

A temperatura Hawking será calculada pela expressão

$$T = \frac{r_h^7}{4\pi(3 + 2r_h^2 + r_h^4)} \left[\frac{D-3}{r_h^4} + \frac{D-5}{r_h^6} + \frac{D-7}{r_h^8} + \frac{q\omega_q(D-1)}{r_h^{(D-1)\omega_q+D+1}} - \frac{2a}{(D-2)r_h^D} \right]. \quad (13.26)$$

O comportamento de T está representado na Fig. (89).

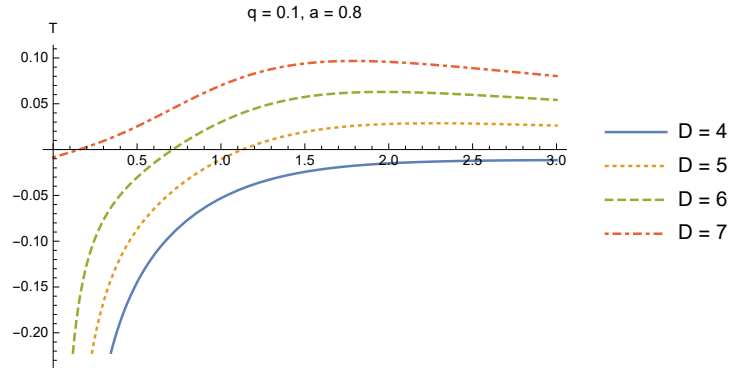


Figura 89 – Temperatura Hawking na gravitação de Lovelock de terceira ordem em função de r_h , para $a = 0.8$ e $q = 0.1$.

Por fim, a capacidade térmica é obtida utilizando-se a Eq. (13.16), na qual os coeficientes c_1 , c_2 e c_3 são

$$c_1 = \frac{D-3}{r_h^{-D+4}} + \frac{D-5}{r_h^{-D+6}} + \frac{D-7}{r_h^{-D+8}} + \frac{(D-1)\omega_q q}{r_h^{(D-1)\omega_q+1}} - \frac{2a}{D-2}, \quad (13.27a)$$

$$c_2 = \frac{1}{r_h^{-D+3}} + \frac{2}{r_h^{-D+5}} + \frac{3}{r_h^{-D+7}}, \quad (13.27b)$$

$$c_3 = \frac{3-D}{r_h^{-2(D-4)}} + \frac{-6(D-5)+D-3}{r_h^{-2(D-5)}} + \frac{-12(D-7)-2(D-5)+3(D-3)}{r_h^{-2(D-6)}} + \frac{-9(D-7)+3(D-5)}{r_h^{-2(D-7)}} + \frac{-3(D-7)}{r_h^{-2(D-8)}} - [(D-1)\omega_q + 1 + (D-3)] \frac{(D-1)q\omega_q}{r_h^{(D-1)\omega_q+1}} \frac{1}{r_h^{-(D-4)}} - [(D-1)\omega_q + 1 + (D-5)] \frac{(D-1)q\omega_q}{r_h^{(D-1)\omega_q+1}} \frac{1}{r_h^{-(D-6)}} - [(D-1)\omega_q + 1 + (D-7)] \frac{(D-1)q\omega_q}{r_h^{(D-1)\omega_q+1}} \frac{1}{r_h^{-(D-8)}} + \frac{2a}{D-2} \frac{1}{r_h^{-(D-4)}} + \frac{2a}{D-2} \frac{1}{r_h^{-(D-6)}} + \frac{2a}{D-2} \frac{1}{r_h^{-(D-8)}}. \quad (13.27c)$$

A existência de transições de fases para diferentes valores da dimensão do espaço-tempo é verificada na Fig. (90), que apresenta o gráfico da capacidade térmica em função do raio do horizonte de eventos.

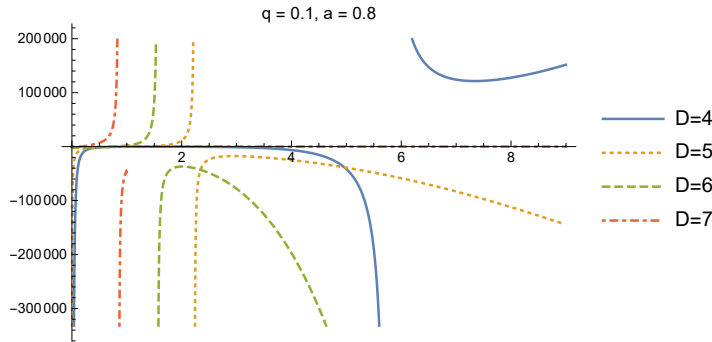


Figura 90 – Capacidade térmica na gravitação de Lovelock de terceira ordem em função de r_h , para $a = 0.8$ e $q = 0.1$.

13.4 Radiação Hawking

Nesta seção iremos analisar a emissão de partículas pelo buraco negro (HAWKING, 1975). Sendo r_+ a coordenada radial do horizonte de eventos podemos efetuar a transformação definida por (LI, 2017):

$$dT = dt + \frac{1}{f(r)} \sqrt{\frac{r_+}{r}} dr. \quad (13.28)$$

Assim, a métrica do espaço-tempo pode ser escrita na forma

$$ds^2 = -f(r)dT^2 + 2\sqrt{\frac{r_+}{r}}dTdr + \frac{r-r_+}{r} \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2d\Omega_{D-2}. \quad (13.29)$$

Podemos verificar que $r = r_+$ não é uma singularidade da métrica da Eq. (13.29), para a qual a geodésica nula é obtida por

$$\frac{dr}{dT} = f(r) \left(1 + \sqrt{\frac{r_+}{r}}\right)^{-1}. \quad (13.30)$$

Para calcularmos a parte imaginária da ação correspondente a uma partícula que cruza o horizonte de eventos, podemos utilizar procedimento semelhante ao desenvolvido nas Eqs. de (7.17) a (7.20) do capítulo 7. Para o buraco negro em estudo na gravitação de Lovelock, temos

$$ImZ = -\pi(D-2)\Sigma_{D-2} \sum_{p=1}^m \frac{\tilde{\alpha}_p \kappa^{p-1} p}{(D-2)r_+^{-(D-2p)}} \Big|_{r_{+i}}^{r_{+f}} = -\frac{\Delta S}{2}. \quad (13.31)$$

Utilizando mais uma vez o método WKB, a probabilidade de uma partícula emitida pelo buraco negro escapar do horizonte de eventos é dada por

$$\Gamma \sim \exp(-2ImZ), \quad (13.32)$$

a partir de que obtemos

$$\log \Gamma \sim -\pi(D-2)\Sigma_{D-2} \left[\sum_{p=1}^m \frac{\tilde{\alpha}_p \kappa^{p-1} p}{(D-2)r_{+f}^{-(D-2p)}} - \sum_{p=1}^m \frac{\tilde{\alpha}_p \kappa^{p-1} p}{(D-2)r_{+i}^{-(D-2p)}} \right] \quad (13.33)$$

ou ainda

$$\Gamma \sim e^{\Delta S}. \quad (13.34)$$

Podemos, então, concluir que a probabilidade de emissão de partículas está relacionada à variação de entropia do buraco negro e, por conseguinte, é influenciada pelos parâmetros associados à quintessência e à nuvem de cordas.

14 Buracos negros com quintessência na gravitação pura de Lovelock

Há um caso particular para gravitação de Lovelock, como discutimos no capítulo 3, no qual a ação definida na Eq. (3.1) possui apenas um termo em dimensão superior do tensor de curvatura. Nesse caso particular, que denominamos gravitação pura de Lovelock, a equação de campo é definida pela Eq. (3.9) e é possível verificar que a propriedade cinemática da relatividade geral é em 3 dimensões é preservada para quaisquer dimensões críticas ímpares (DADHICH, 2016; DADHICH; GHOSH; JHINGAN, 2012).

Nesse contexto, iremos obter a solução correspondente a um buraco negro estático imerso em quintessência na gravitação pura de Lovelock. Analisaremos a estrutura de horizontes do buraco negro, focando no papel desempenhado pela quintessência. Iremos, ainda, estudar a termodinâmica do buraco negro, verificando o comportamento das grandezas nas dimensões críticas pares e ímpares e examinando a semelhança havida com a relatividade geral.

14.1 A solução

Iniciemos considerando que, em D-dimensões, o tensor energia-momento correspondente a um buraco negro imerso em quintessência é dado pela Eq. (13.1). Esse buraco negro possui simetria esférica e, mais uma vez, sua métrica pode, de forma geral, ser escrita na forma da Eq. (3.10), com $f(r)$ sendo calculado pela Eq. (3.11). Por sua vez, $F(r)$ é solução da equação polinomial

$$P(F) = \sum_{p=0}^m \tilde{\alpha}_p F^p = \frac{16\pi M}{(D-2)\Sigma_{D-2}r^{D-1}} + \frac{q}{r^{(D-1)(\omega_q+1)}}, \quad (14.1)$$

sendo os coeficientes $\tilde{\alpha}_p$ obtidos através da Eq. (3.13).

Na gravitação pura de Lovelock, fixamos a ordem p da equação polinomial (14.1). Adotando $p = n$, a Eq. (14.1) será escrita na forma

$$\tilde{\alpha}_n F^n = \frac{16\pi M}{(D-2)\Sigma_{D-2}r^{D-1}} + \frac{q}{r^{(D-1)(\omega_q+1)}} \quad (14.2)$$

Tomando, por simplicidade (CAI; OHTA, 2006), $\tilde{\alpha}_n = \alpha^{2n-2}$, onde α é um comprimento de escala, teremos

$$F(r) = \begin{cases} \pm \frac{1}{\alpha^{2-2/n}} \left[\frac{16\pi M}{(D-2)\Sigma_{D-2}r^{D-1}} + \frac{q}{r^{(D-1)(\omega_q+1)}} \right], & n \text{ par} \\ \frac{\text{sign}(x)}{\alpha^{2-2/n}} \left[\frac{16\pi M}{(D-2)\Sigma_{D-2}r^{D-1}} + \frac{q}{r^{(D-1)(\omega_q+1)}} \right], & n \text{ ímpar.} \end{cases} \quad (14.3)$$

sendo $x = \frac{2M}{(D-2)\Sigma_{D-2}r^{D-1}} + \frac{q}{r^{(D-1)(\omega_q+1)}}$. Com o resultado anterior, podemos concluir que $f(r)$ será

$$f(r) = \begin{cases} \kappa \mp \frac{1}{\alpha^{2-2/n}} \left[\frac{16\pi M}{(D-2)\Sigma_{D-2}r^{D-2n-1}} + \frac{q}{r^{(D-1)(\omega_q+1)-2n}} \right]^{\frac{1}{n}}, & n \text{ par} \\ \kappa - \frac{\text{sign}(x)}{\alpha^{2-2/n}} \left[\frac{16\pi M}{(D-2)\Sigma_{D-2}r^{D-2n-1}} + \frac{q}{r^{(D-1)(\omega_q+1)-2n}} \right]^{\frac{1}{n}}, & n \text{ ímpar.} \end{cases} \quad (14.4)$$

A métrica anterior possui uma propriedade interessante (CAI; OHTA, 2006). Para r_x tal que $x = 0$, o escalar de Kretschmann, definido por

$$K = R_{\mu\nu\sigma\rho}R^{\mu\nu\sigma\rho} = f''^2(r) + 2(D-2)\frac{f'(r)}{r^2} + 2(D-2)(D-3)\frac{f(r)^2}{r^4}, \quad (14.5)$$

diverge. Desse modo, consideraremos apenas valores de r tais que $r > r_x$. O escalar também diverge em $r = 0$ e este ponto é, portanto, uma singularidade física. Se tomarmos $\kappa = 1$ e $x > 0$, teremos

$$f(r) = 1 - \frac{1}{\alpha^{2-2/n}} \left[\frac{16\pi M}{(D-2)\Sigma_{D-2}r^{D-2n-1}} + \frac{q}{r^{(D-1)(\omega_q+1)-2n}} \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (14.6)$$

É fácil verificar que, para $n = 1$, recobramos a métrica do buraco negro em D dimensões na relatividade geral, para o qual $f(r)$ é calculado pela Eq. (13.2). Em 4 dimensões, teremos a métrica escrita na Eq. (5.32).

Verifiquemos agora as propriedades da solução para as dimensões críticas ímpar, $D = 2n + 1$, e par, $D = 2n + 2$. Para a dimensão crítica ímpar, teremos

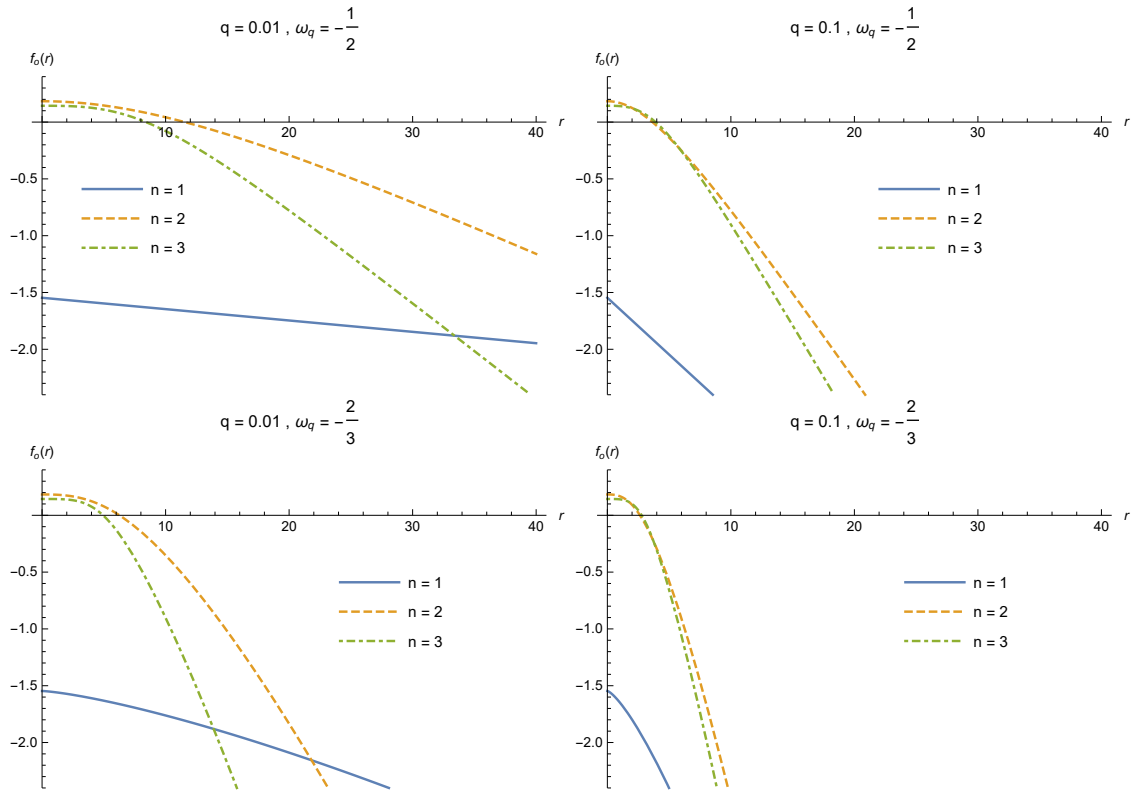
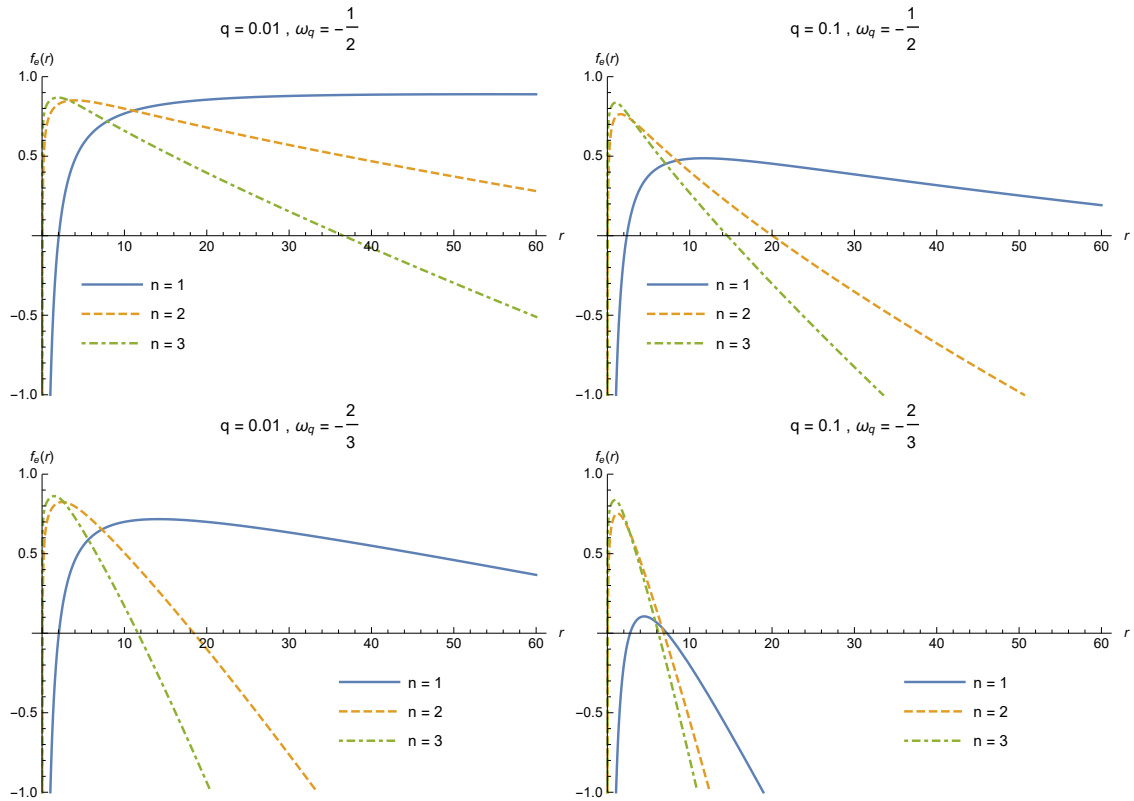
$$f_o(r) = 1 - \frac{1}{\alpha^{2-2/n}} \left[\frac{8M\Gamma(n)}{(2n-1)\pi^{n-1}} + \frac{q}{r^{2n\omega_q}} \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (14.7)$$

Já para a dimensão crítica par,

$$f_e(r) = 1 - \frac{1}{\alpha^{2-2/n}} \left[\frac{4M\Gamma(n+1/2)}{n\pi^{n-1/2}r} + \frac{q}{r^{(2n+1)\omega_q+1}} \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (14.8)$$

Nas Figuras 91 e 92, representamos o comportamento das funções $f_o(r)$ e $f_e(r)$.

Os horizontes do buraco são definidos pela coordenada r_h , tal que

Figura 91 – $f_o(r)$ para $M = 1$ e $\alpha = 2$.Figura 92 – $f_e(r)$ para $M = 1$ e $\alpha = 3$.

$$f(r_h) = 0. \quad (14.9)$$

Para as dimensões críticas ímpares, teremos que os horizontes de eventos serão descritos por

$$r_h^{(o)} = \left[\frac{1}{q} \left(\alpha^{2n-2} - \frac{8M\Gamma(n)}{(2n-1)\pi^{n-1}} \right) \right]^{-\frac{1}{2n\omega_q}}, \quad (14.10)$$

onde $\alpha^{2n-2} > \frac{8M\Gamma(n)}{(2n-1)\pi^{n-1}}$.

Verifique-se que, se elevarmos o valor do parâmetro q , os horizontes dos buracos negros afastam-se da singularidade. Em relação a ω_q , o efeito é inverso, ou seja, quando aumentamos ω_q , os horizontes afastam-se da singularidade.

14.1.1 Outra forma de obter a solução para o buraco negro com quintessência e nuvem de cordas

Iremos, agora, obter a solução do buraco negro em estudo pela integração direta da equação de Einstein generalizada para a gravitação pura de Lovelock. Este simples resultado confirma a solução por nós obtida e o método presente em (CAI, 2004; CAI; OHTA, 2006). Partindo do fato de que a métrica do buraco negro é descrita pela Eq. (3.10) e que $\kappa = 1$ na Eq. (3.11) (DADHICH, 2010b), a solução da equação de Einstein generalizada na gravitação pura de Lovelock será (DADHICH, 2010b)

$$G^\mu{}_\nu = -\frac{D-2}{r^{D-2}}(r^{D-2n-1}F^n)' = T^r_r = T^t_t. \quad (14.11)$$

onde $'$ denota derivada em relação a r . Para o exterior de um buraco negro cercado de quintessência,

$$(r^{D-2n-1}F^n)' = \frac{q(D-1)}{2r^{(D-1)\omega_q+1}}. \quad (14.12)$$

Integrando ambos os lados da equação, teremos

$$F^n = \frac{\mu}{r^{D-2n-1}} - \frac{q(D-1)[(D-1)\omega_q+1]}{2r^{(D-1)(\omega_q+1)-2n}}. \quad (14.13)$$

É fácil verificar que esta equação é semelhante a (14.2), se $\mu \rightarrow \frac{2M}{\bar{\alpha}_n(D-2)\Sigma_{D-2}}, q \rightarrow -\frac{q}{\bar{\alpha}_n(D-1)[(D-1)\omega_q+1]}$ e $a \rightarrow \frac{a}{\bar{\alpha}_n}$. Se considerarmos essas definições e acrescentarmos a constante cosmológica, teremos (DADHICH, 2010b)

$$F^n = \Lambda_1 r^{2n} + \frac{\mu}{r^{D-2n-1}} - \frac{q(D-1)[(D-1)\omega_q+1]}{2r^{(D-1)(\omega_q+1)-2n}}, \quad (14.14)$$

onde $\Lambda_1 = \frac{2\Lambda}{(d-1)(d-2)}$.

14.2 Termodinâmica do buraco negro

Nesta seção iremos estudar a termodinâmica do buraco negro, verificando as propriedades das soluções obtidas em gravitação pura de Lovelock nas dimensões críticas. Para o caso do buraco negro com constante cosmológica, a análise da termodinâmica está detalhada na seção 14.3.

Como $f(r_h) = 0$, a massa do buraco negro poderá ser escrita na forma

$$M = \frac{(D-2)\Sigma_{D-2}}{16\pi} \left[\alpha^{2n-2} r_h^{D-2n-1} - \frac{q}{r_h^{(D-1)\omega_q}} \right]. \quad (14.15)$$

Verifique-se que o termo de quintessência não depende da ordem da gravitação pura de Lovelock, n , que se considera e o primeiro termo da equação anterior depende de r_h da mesma forma que se espera da literatura (CAI; OHTA, 2006). Nas dimensões críticas ímpar e par, teremos respectivamente

$$M_o = \frac{(2n-1)\pi^{n-1}}{8\Gamma(n)} \left[\alpha^{2n-2} - \frac{q}{r_h^{2n\omega_q}} \right], \quad (14.16a)$$

$$M_e = \frac{n\pi^{n-1/2}}{4\Gamma(n+1/2)} \left[\alpha^{2n-2} r_h - \frac{q}{r_h^{(2n+1)\omega_q}} \right]. \quad (14.16b)$$

Nas Figuras 93 e 94, representamos o comportamento do parâmetro de massa nas dimensões críticas ímpar e par.

A temperatura Hawking é calculada por

$$T = \frac{1}{4\pi} \frac{df(r)}{dr} \Big|_{r=r_h}. \quad (14.17)$$

Dessa forma, teremos

$$T = \frac{1}{4\pi n} \left[\frac{(D-2n-1)}{r_h} + \frac{q\alpha^{2-2n}\omega_q(D-1)}{r_h^{(D-1)\omega_q+D-2n}} \right], \quad (14.18)$$

que, nas dimensões críticas ímpar e par, será

$$T_o = \frac{\alpha^{2-2n}}{2\pi} \frac{q\omega_q}{r_h^{2n\omega_q+1}}, \quad (14.19a)$$

$$T_e = \frac{1}{4\pi n} \left[\frac{1}{r_h} + \frac{q\alpha^{2-2n}\omega_q(2n+1)}{r_h^{(2n+1)\omega_q+2}} \right]. \quad (14.19b)$$

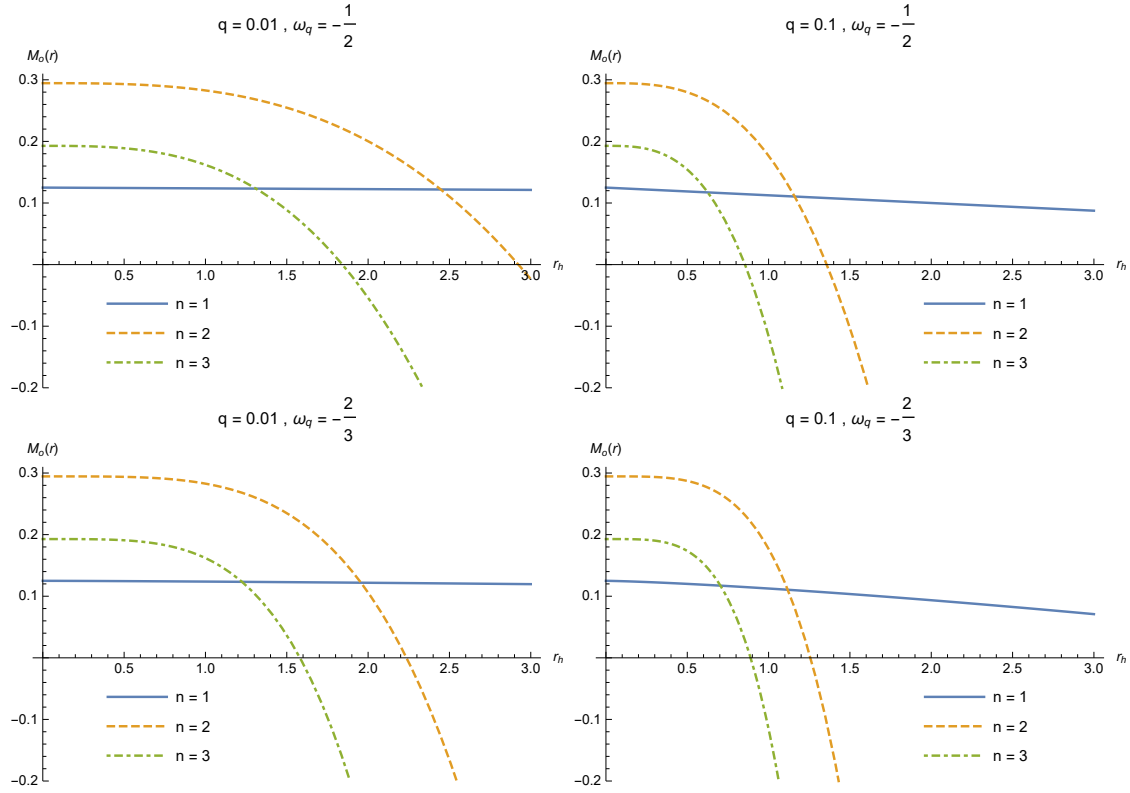


Figura 93 – Parâmetro de massa em dimensões críticas ímpares, M_o , para $\alpha = 0.5$.

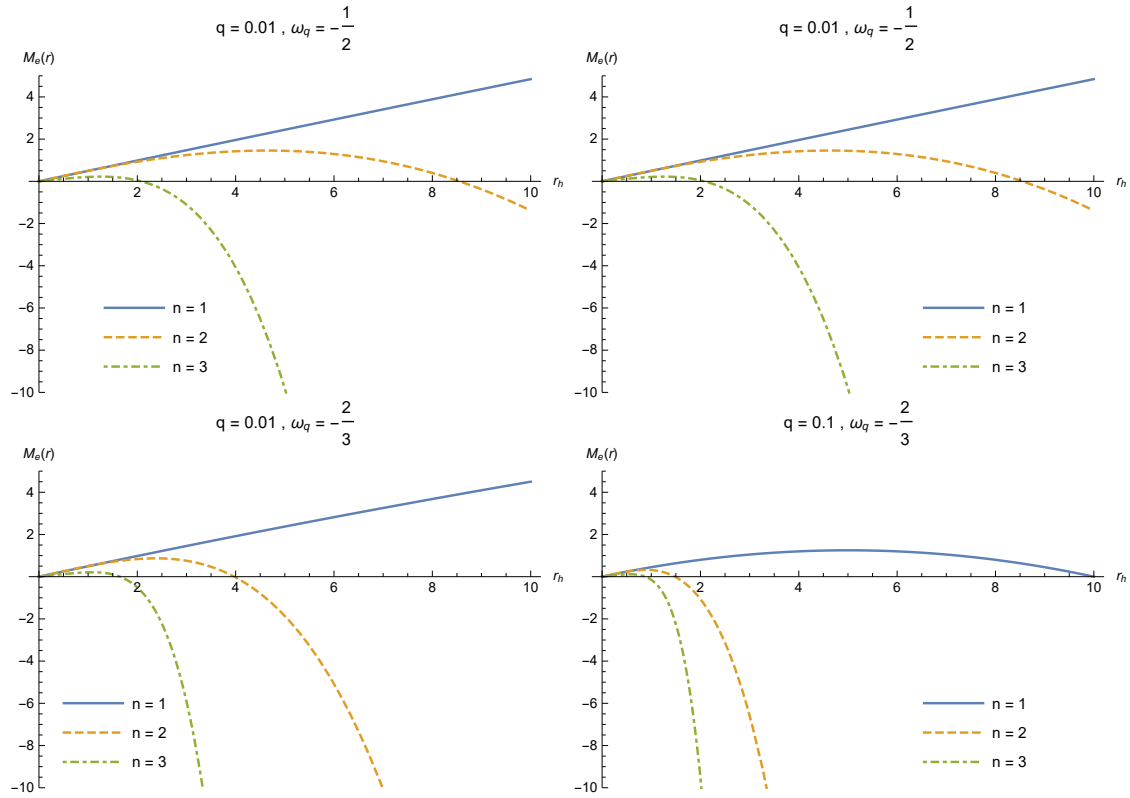


Figura 94 – Parâmetro de massa em dimensões críticas pares, M_e , para $\alpha = 0.5$.

Para as dimensões críticas ímpares, como $-1 < \omega_q < -1/3$, a temperatura será sempre negativa. O comportamento da temperatura Hawking é representado na Fig. 95.

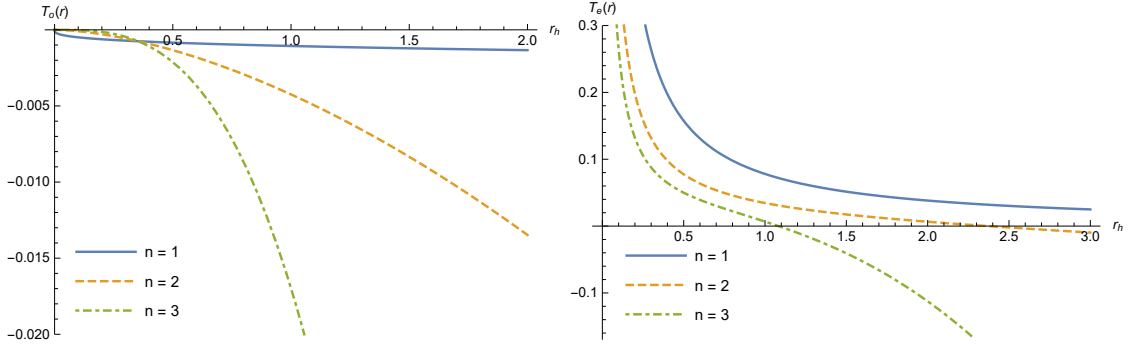


Figura 95 – Temperatura Hawking nas dimensões críticas ímpar e par para $\alpha = 0.5$.

O buraco negro obedece a Primeira Lei da Termodinâmica, $dM = TdS$. Dessa forma, a entropia pode ser calculada por (LEE; BABOOLAL; GHOSH, 2015)

$$S = \int \frac{dM}{T} = \int T^{-1} \frac{\partial M}{\partial r_h} dr_h = \frac{n(D-2)\Sigma_{D-2}}{4(D-2n)\alpha^{2-2n}} r_h^{D-2n}, \quad (14.20)$$

Vale ressaltar que a integração da equação anterior foi realizada de 0 a r_h , de modo que a entropia se anula se $r_h = 0$. Verifique-se ainda que S depende dos parâmetros de cordas e de quintessência apenas indiretamente através da coordenada r_h do horizonte. Além disso, para $D > 2n$, a entropia assumirá sempre valores positivos. Nas dimensões críticas, a entropia terá valores:

$$S_o = \frac{n(2n+1)\pi^n}{2\alpha^{2-2n}\Gamma(n)} r_h, \quad (14.21)$$

$$S_e = \frac{n^2\pi^{n+1/2}}{2\alpha^{2-2n}\Gamma(n+1/2)} r_h^2. \quad (14.22)$$

Sendo a área da superfície esférica em n dimensões dada por $A_d = 2\pi^{(d+1)/2}r^n/\Gamma[(d+1)/2]$, verifica-se que, em dimensões críticas ímpares, a entropia se assemelha àquela calculada na relatividade geral, obedecendo à lei da área, o que não ocorre nas dimensões críticas pares.

Por fim, a capacidade térmica do buraco negro é calculada por

$$C = \frac{\partial M}{\partial T} = \frac{\partial M}{\partial r_h} \frac{\partial r_h}{\partial T} = \frac{n(D-2)\Sigma_{D-2}}{4\alpha^{2-2n}} \frac{C_1(r_h)}{C_2(r_h)}, \quad (14.23)$$

onde

$$C_1 = \alpha^{2n-2}(D-2n-2)r_h^{D-2n-2} - \frac{(D-1)q\omega_q}{r_h^{(D-1)\omega_q+1}} \quad (14.24a)$$

$$C_2 = -\frac{\alpha^{2n-2}(D-2n-1)}{r_h^2} - \frac{(D-1)q\omega_q[(D-1)\omega_q + D-2n]}{r_h^{(D-1)\omega_q+D-2n+1}} \quad (14.24b)$$

Nas dimensões críticas, temos

$$C_o = \frac{n(2n-1)\pi^n}{2\alpha^{2-2n}\Gamma(n)} \left[\frac{\alpha^{2n-2}}{r_h} + \frac{2nq\omega_q}{r_h^{2n\omega_q+1}} \right] \left[\frac{2nq\omega_q[2n\omega_q+1]}{r_h^{2n\omega_q+2}} \right], \quad (14.25a)$$

$$C_e = \frac{n^2\pi^{n+1/2}}{\alpha^{2-2n}\Gamma(n+1/2)} \left[\frac{(2n+1)q\omega_q}{r_h^{(2n+1)\omega_q+1}} \left[\frac{\alpha^{2n-2}}{r_h^2} + \frac{(2n+1)q\omega_q[(2n+1)\omega_q+2]}{r_h^{(2n+1)\omega_q+3}} \right] \right]. \quad (14.25b)$$

O comportamento das funções C_o e C_e para $q = 0.1$ e $a = 0.5$ está representado na Figura 96.

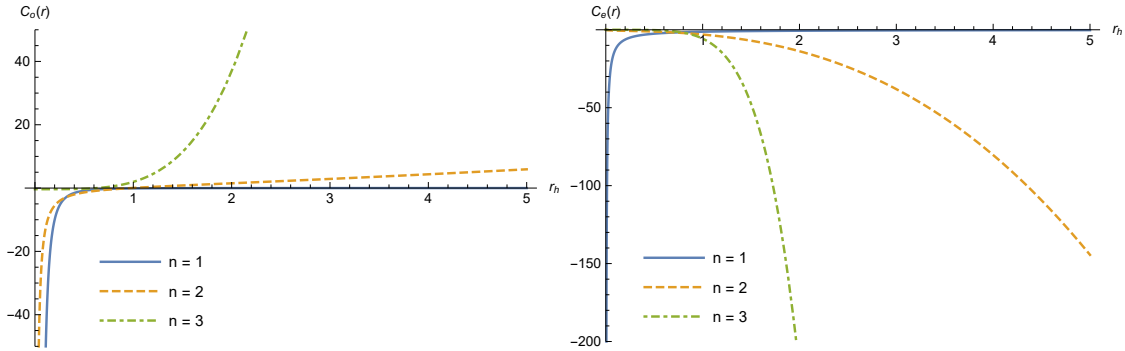


Figura 96 – Capacidade térmica nas dimensões críticas ímpar e par para $\alpha = 0.5$.

Podemos verificar que o sinal da capacidade térmica varia para diferentes valores da ordem da gravitação pura de Lovelock e para diferentes valores dos parâmetros considerados. Em outras palavras, o buraco negro pode ser termodinamicamente estável ou instável. Ademais, a Figura 96 mostra-nos uma forte conexão entre a capacidade térmica e a paridade da dimensão do espaço-tempo.

14.3 Buracos negros com quintessência e constante cosmológica na gravitação pura de Lovelock

Incluimos agora, em nosso modelo, a constante cosmológica Λ . Com ela, a equação de campo da gravitação pura de Lovelock será obtida substituindo-se em 3.9 $\alpha_0 = 2\Lambda$.

$$-\Lambda g_{\mu\nu} + \alpha_n G_{\mu\nu}^{(n)} = -\Lambda g_{\mu\nu} + \alpha_n \left[n \left(R_{\mu\nu}^{(n)} - \frac{1}{2} R^{(n)} g_{\mu\nu} \right) \right] = T_{\mu\nu}. \quad (14.26)$$

A partir da Eq. (14.14), obtemos

$$f(r) = 1 - \frac{1}{\alpha^{2-2/n}} \left[\Lambda_1 r^{2n} + \frac{16\pi M}{(D-2)\Sigma_{D-2} r^{D-2n-1}} + \frac{q}{r^{(D-1)(\omega_q+1)-2n}} \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (14.27)$$

No limite $r \rightarrow \infty$,

$$f(r) = 1 - \frac{1}{\alpha^{2-2/n}} \left[\Lambda_1^{1/n} r^2 + \frac{16\pi M}{(D-2)\Sigma_{D-2} r^{D-3}} + \frac{q}{r^{(D-1)\omega_q+D-3}} \right]. \quad (14.28)$$

Verifica-se que o comportamento assintótico do buraco negro corresponde à solução da relatividade geral. Assim, no limite de baixas energias, a gravitação pura de Lovelock recupera a gravitação de Einstein, como deveria se esperar.

Quando consideramos a constante cosmológica, teremos que o parâmetro de massa será

$$M = \frac{(D-2)\Sigma_{D-2}}{16\pi} \left[\alpha^{2n-2} r_h^{D-2n-1} - \frac{q}{r_h^{(D-1)\omega_q}} - \Lambda r_h^{D-1} \right]. \quad (14.29)$$

Já a temperatura Hawking será

$$T = \frac{\alpha^{2-2n}}{4\pi n} \left[\frac{\alpha^{2n-2}(D-2n-1)}{r_h} + \frac{q\alpha^{2-2n}\omega_q(D-1)}{r_h^{(D-1)\omega_q+D-2n}} - (D-1)\Lambda r_h^{2n-1} \right]. \quad (14.30)$$

A entropia pode ser calculada por

$$S = \int \frac{dM}{T} = \int T^{-1} \frac{\partial M}{\partial r_h} dr_h = \frac{n(D-2)\Sigma_{D-2}}{4(D-2n)\alpha^{2-2n}} r_h^{D-2n}. \quad (14.31)$$

Além disso, podemos identificar a constante cosmológica com uma pressão termodinâmica (DOLAN, 2011b)

$$p = -\frac{\Lambda}{8\pi}, \quad (14.32)$$

de forma que podemos escrever a equação diferencial

$$dM = TdS + Vdp, \quad (14.33)$$

sendo

$$V = \frac{\partial M}{\partial p} = \frac{(D-2)\Sigma_{D-2}}{2} r_h^{D-1}. \quad (14.34)$$

15 Buracos negros com nuvem de cordas na gravitação pura de Lovelock

Iremos obter a solução correspondente a um buraco negro estático imerso em nuvem de cordas na gravitação pura de Lovelock. Nesse contexto, estudaremos a estrutura de horizontes, a termodinâmica do buraco negro e a radiação Hawking, sempre dando ênfase no papel desempenhado pela nuvem de cordas.

Verificaremos que há uma semelhança entre os resultados obtidos nas dimensões críticas ímpares e pares com o espaço-tempo de Letelier ([LETELIER, 1979](#)) e que a nuvem de cordas influencia na estabilidade termodinâmica do buraco negro.

15.1 A solução

Mais uma vez, consideremos que a métrica do espaço-tempo D-dimensional relativo ao buraco negro com nuvem de cordas tem o formato geral estabelecido na Eq. (3.10), com $f(r)$ sendo calculado pela Eq. (3.11). Se o conteúdo de energia-matéria considerado é aquele dado pela Eq. (13.4), a função $F(r)$ é uma solução da equação polinomial

$$P(F) = \sum_{p=0}^m \tilde{\alpha}_p F^p = \frac{16\pi M}{(D-2)\Sigma_{D-2}r^{D-1}} - \frac{2a}{(D-2)r^{D-2}}, \quad (15.1)$$

com os coeficientes $\tilde{\alpha}_p$ dispostos na Eq. (3.13).

Na gravitação pura de Lovelock e tomando $p = n$, a Eq. (15.1) pode ser escrita na forma

$$\tilde{\alpha}_n F^n = \frac{16\pi M}{(D-2)\Sigma_{D-2}r^{D-1}} - \frac{2a}{(D-2)r^{D-2}} \quad (15.2)$$

Tomando $\tilde{\alpha}_n = \alpha^{2n-2}$ ([CAI; OHTA, 2006](#)), temos

$$F(r) = \begin{cases} \pm \frac{1}{\alpha^{2-2/n}} \left[\frac{16\pi M}{(D-2)\Sigma_{D-2}r^{D-2n+1}} - \frac{2a}{(D-2)r^{D-2n}} \right]^{\frac{1}{n}}, & n \text{ par} \\ \frac{\text{sign}(x)}{\alpha^{2-2/n}} \left[\frac{16\pi M}{(D-2)\Sigma_{D-2}r^{D-2n+1}} - \frac{2a}{(D-2)r^{D-2n}} \right]^{\frac{1}{n}}, & n \text{ ímpar} \end{cases} \quad (15.3)$$

onde $x = \frac{2M}{(D-2)\Sigma_{D-2}r^{D-2n+1}} - \frac{2a}{(D-2)r^{D-2n}}$. Com isso, teremos que $f(r)$ será

$$f(r) = \begin{cases} \kappa \mp \frac{1}{\alpha^{2-2/n}} \left[\frac{16\pi M}{(D-2)\Sigma_{D-2}r^{D-2n-1}} - \frac{2a}{(D-2)r^{D-2n-2}} \right]^{\frac{1}{n}}, & n \text{ par} \\ \kappa - \frac{\text{sign}(x)}{\alpha^{2-2/n}} \left[\frac{16\pi M}{(D-2)\Sigma_{D-2}r^{D-2n-1}} - \frac{2a}{(D-2)r^{D-2n-2}} \right]^{\frac{1}{n}}, & n \text{ ímpar.} \end{cases} \quad (15.4)$$

Novamente, o escalar de Kretschmann diverge para r_x tal que $x = 0$. Com isso, consideraremos apenas valores de r para os quais $r > r_x$. O escalar de Kretschmann também diverge na singularidade física $r = 0$.

Se adotarmos $\kappa = 1$ e $x > 0$, temos

$$f(r) = 1 - \frac{1}{\alpha^{2-2/n}} \left[\frac{16\pi M}{(D-2)\Sigma_{D-2}r^{D-2n-1}} - \frac{2a}{(D-2)r^{D-2n-2}} \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (15.5)$$

Com isso, se $n = 1$, obtemos a solução do buraco negro com nuvem de cordas na relatividade geral em D-dimensões, cuja função $f(r)$ é dada pela expressão da Eq. (13.5).

Agora, analisemos as propriedades da solução derivada nas dimensões críticas ímpares e pares. Nas dimensões críticas ímpares, a Eq. (15.5) será escrita na forma

$$f_o(r) = 1 - \frac{1}{\alpha^{2-2/n}} \left[\frac{8M\Gamma(n)}{(2n-1)\pi^{n-1}} - \frac{2a}{(2n-1)r} \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (15.6)$$

Já nas dimensões críticas pares temos

$$f_e(r) = 1 - \frac{1}{\alpha^{2-2/n}} \left[\frac{4M\Gamma(n+1/2)}{n\pi^{n-1/2}r} - \frac{a}{n} \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (15.7)$$

Observe que, nas dimensões críticas, o formato das Eqs. (15.6) e (15.7) mantém um paralelismo com a relatividade geral. Nas dimensões críticas pares, a nuvem de cordas acrescenta um termo que não depende da coordenada radial r .

A coordenada radial dos horizontes do buraco negro, r_h , é obtida através da relação

$$f(r_h) = 0. \quad (15.8)$$

Nas dimensões críticas ímpares

$$r_h^{(o)} = \left[\frac{4M\Gamma(n)}{a\pi^{n-1}} - \frac{\alpha^{2n-2}(2n-1)}{2a} \right]^{-1}. \quad (15.9)$$

Com isso, nas dimensões críticas ímpares, o buraco negro possuirá horizontes se $\alpha^{2n-2} < \frac{8M\Gamma(n)}{\pi^{n-1}(2n-1)}$. Já nas dimensões críticas pares, os horizontes do buraco negro serão determinados por

$$r_h^{(e)} = \frac{4M\Gamma(n+1/2)}{\pi^{n-1/2}(n\alpha^{2n-2} + a)}. \quad (15.10)$$

Se $a > -n\alpha^{2n-2}$, em dimensões críticas pares, o buraco negro sempre possuirá horizontes.

Nas Figuras 97 e 98, representamos o comportamento das funções $f_o(r)$ e $f_e(r)$ na relatividade geral ($n = 1$), na gravitação de Gauss-Bonnet ($n = 2$) e na gravitação pura de Lovelock com $n = 3$.

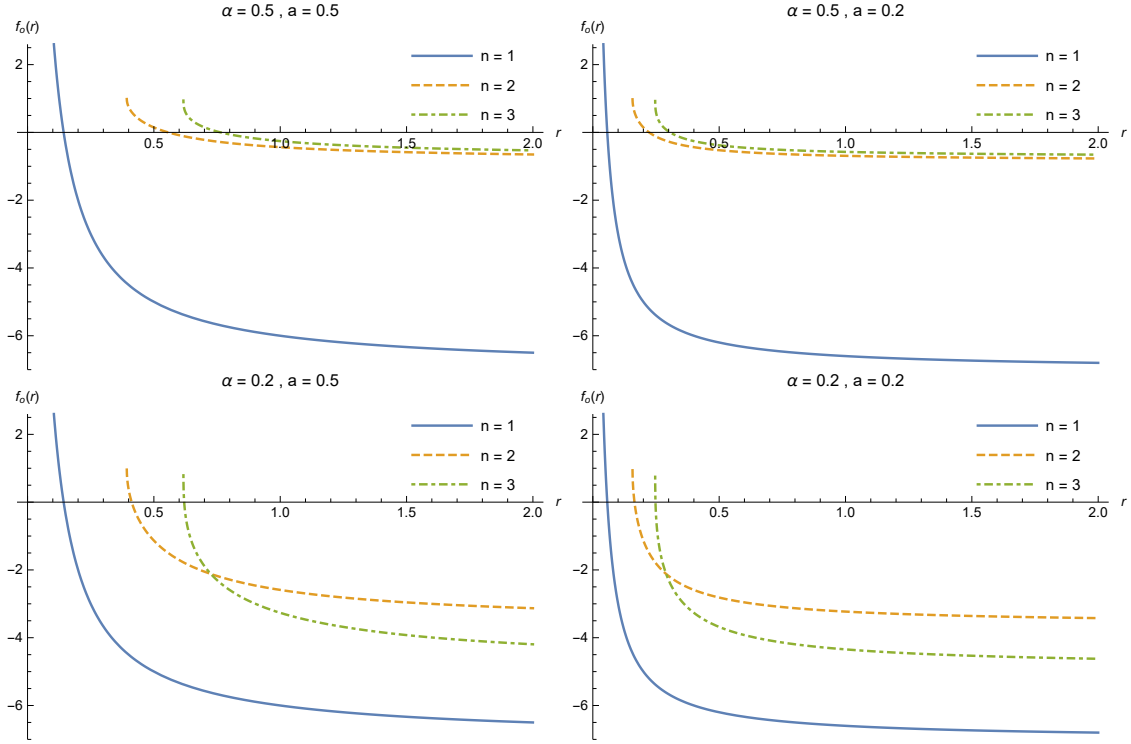


Figura 97 – Função $f_o(r)$ para $M = 1$.

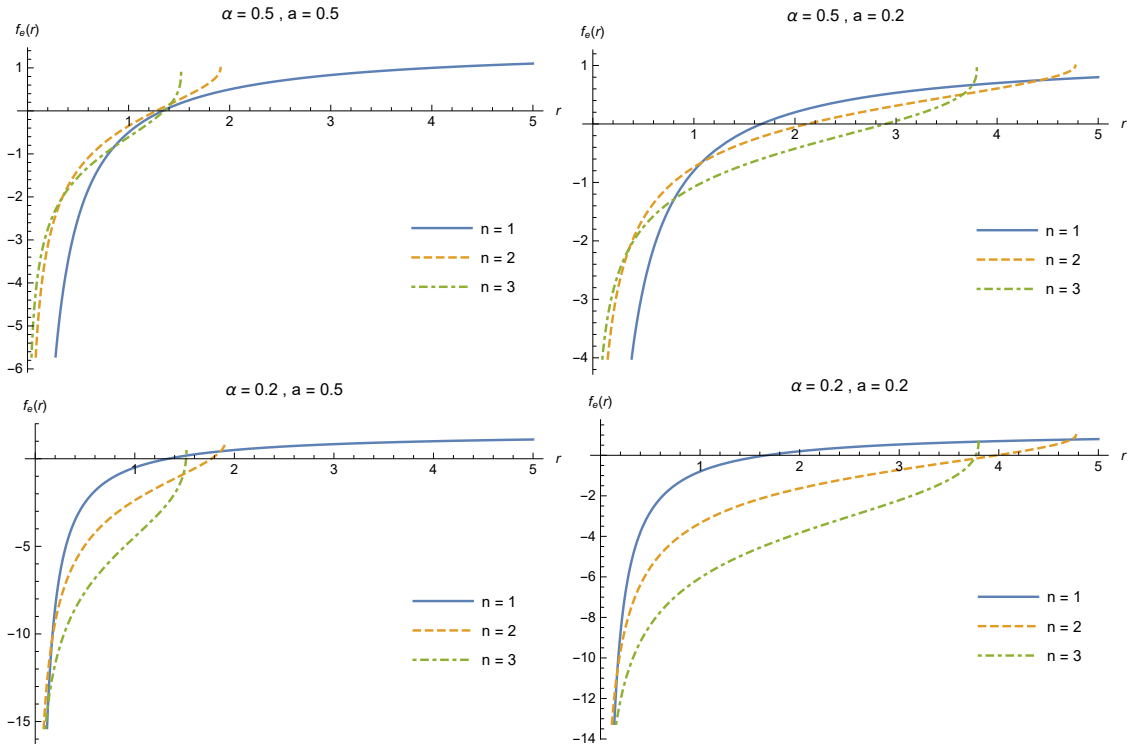


Figura 98 – Função $f_o(r)$ para $M = 1$.

15.1.1 Outra forma de obter a métrica do buraco negro com nuvem de cordas na gravitação pura de Lovelock

Como fizemos no capítulo passado, iremos obter, de outra maneira, a métrica em estudo. Partindo da Eq. (14.11), para a configuração em questão, temos

$$(r^{D-2n-1}F^n)' = -\frac{a}{D-2}. \quad (15.11)$$

Integrando a equação anterior, obtemos

$$F^n = \frac{\mu}{r^{D-2n-1}} - \frac{a}{(D-2)r^{D-2n-2}}. \quad (15.12)$$

Recuperamos a Eq. (15.3) se realizarmos as transformações $\mu \rightarrow \frac{2M}{\tilde{\alpha}_n(D-2)\Sigma_{D-2}}$ e $a \rightarrow \frac{a}{\tilde{\alpha}_n}$.

Adicionando constante cosmológica, temos (DADHICH, 2010b)

$$F^n = \Lambda_1 r^{2n} + \frac{\mu}{r^{D-2n-1}} - \frac{a}{(D-2)r^{D-2n-2}}, \quad (15.13)$$

onde, mais uma vez, $\Lambda_1 = \frac{2\Lambda}{(d-1)(d-2)}$.

15.2 Termodinâmica do buraco negro

Para estudarmos a termodinâmica do buraco negro, partamos do fato de que, em seus horizontes, $f(r_h) = 0$. Assim, a massa do buraco negro poderá ser escrita na forma

$$M = \frac{(D-2)\Sigma_{D-2}}{16\pi} \left[\alpha^{2n-2} r_h^{D-2n-1} + \frac{2a}{D-2} r_h \right]. \quad (15.14)$$

Note que o termo na nuvem de cordas não depende da ordem da gravitação pura de Lovelock n e que o primeiro termo da expressão depende de r_h da forma já conhecida na literatura (CAI; OHTA, 2006). Nas dimensões críticas, temos

$$M_o = \frac{(2n-1)\pi^{n-1}}{8\Gamma(n)} \left[\alpha^{2n-2} + \frac{2a}{2n-1} r_h \right], \quad (15.15a)$$

$$M_e = \frac{n\pi^{n-1/2}r_h}{4\Gamma(n+1/2)} \left[\alpha^{2n-2} + \frac{a}{n} \right]. \quad (15.15b)$$

Em ambas as dimensões críticas ímpares e pares, a massa do buraco negro possui uma dependência linear em r_h e, quando a ordem da gravitação pura de Lovelock aumenta, a inclinação do gráfico da massa diminui.

A temperatura Hawking é calculada por

$$T = \frac{\alpha^{2-2n}}{4\pi n} \left[\frac{\alpha^{2n-2}(D-2n-1)}{r_h} + \frac{2a}{(D-2)r_h^{D-2n-1}} \right], \quad (15.16)$$

que, nas dimensões críticas, fica escrita na forma

$$T_o = \frac{\alpha^{2-2n}a}{2\pi(2n-1)n}, \quad (15.17a)$$

$$T_e = \frac{1}{4\pi n r_h} \left[1 + \frac{a\alpha^{2-2n}}{n} \right]. \quad (15.17b)$$

Nas dimensões críticas ímpares a temperatura Hawking é constante e diminui quando n aumenta.

Usando a primeira lei da termodinâmica de buracos negros, $dM = TdS$, a entropia, S , do buraco negro poderá ser escrita na forma (LEE; BABOOLAL; GHOSH, 2015)

$$S = \int \frac{dM}{T} = \int T^{-1} \frac{\partial M}{\partial r_h} dr_h = \frac{n(D-2)\Sigma_{D-2}}{4(D-2n)\alpha^{2-2n}} r_h^{D-2n}, \quad (15.18)$$

Vale observar que a integral na equação anterior foi feita no intervalo de 0 a r_h , o que indica que a entropia é nula quando $r_h = 0$. Note que a entropia S depende do parâmetro da nuvem de cordas, a , apenas por meio da coordenada r_h do horizonte. Ademais, para $D > 2n$, a entropia sempre assume valores positivos. Nas dimensões críticas, teremos

$$S_o = \frac{n(2n+1)\pi^n}{2\alpha^{2-2n}\Gamma(n)} r_h, \quad (15.19)$$

$$S_e = \frac{n^2\pi^{n+1/2}}{2\alpha^{2-2n}\Gamma(n+1/2)} r_h^2. \quad (15.20)$$

Novamente verificamos que a lei da área só é obedecida em dimensões ímpares.

Por sua vez, a capacidade térmica do buraco negro é calculada por

$$C = \frac{\partial M}{\partial T} = \frac{\partial M}{\partial r_h} \frac{\partial r_h}{\partial T} = \frac{n(D-2)\Sigma_{D-2}}{4\alpha^{2-2n}} \frac{C_1(r_h)}{C_2(r_h)}, \quad (15.21)$$

onde

$$C_1 = \alpha^{2n-2}(D-2n-2)r_h^{D-2n-2} + \frac{2a}{D-2}, \quad (15.22a)$$

$$C_2 = -\frac{\alpha^{2n-2}(D-2n-1)}{r_h^2} + \frac{2a(D-2n-1)}{(D-2)r_h^{D-2n}}. \quad (15.22b)$$

Em dimensões críticas pares, a capacidade térmica, em função de r_h , pode ser escrita na forma

$$C_e = \frac{an^2\pi^{n+1/2}}{\Gamma(n+1/2)} \frac{r_h^2}{a\alpha^{2-2n} - n}, \quad (15.23)$$

enquanto diverge em dimensões críticas ímpares. Na Figura 99, representamos o comportamento de C_e para diferentes valores de a e de α . Podemos verificar que o sistema é termodinamicamente estável ou instável a depender dos parâmetros considerados.

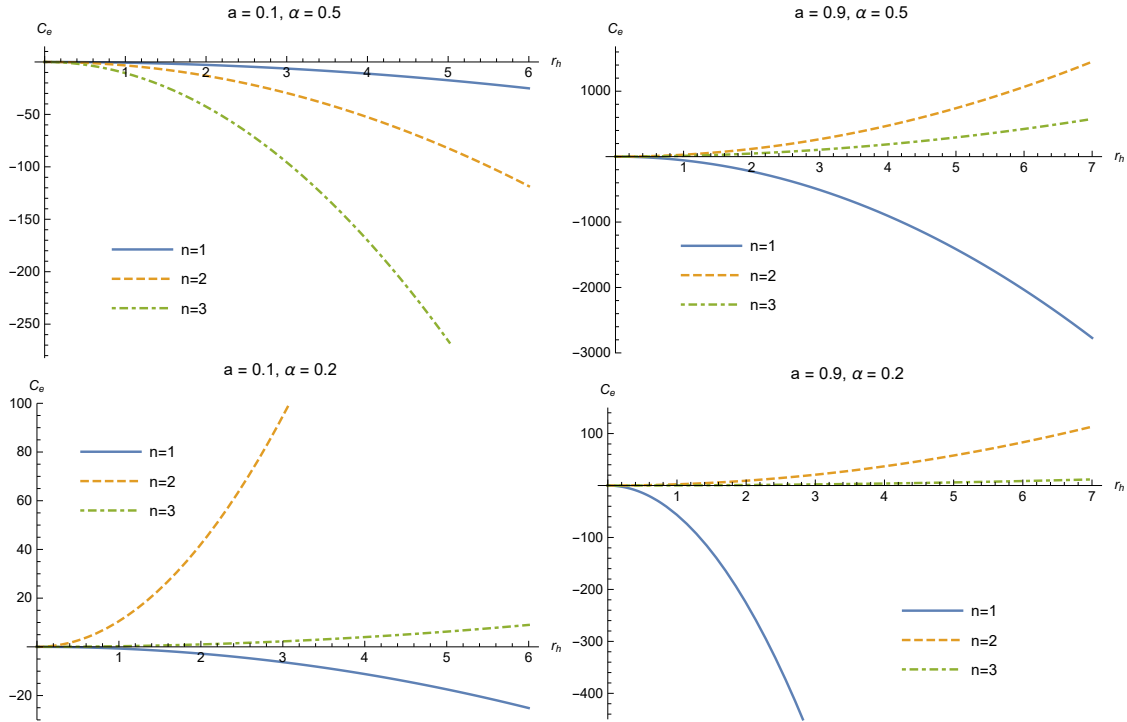


Figura 99 – Capacidade térmica C_e em função de r_h para $M = 1$.

15.3 Radiação Hawking

Por fim, iremos tratar da emissão de partículas pelo buraco negro, de forma semelhante ao que fizemos nos capítulos 7 e 12. Para tanto, podemos realizar a transformação de coordenadas da Eq. (13.30) e repetir o procedimento desenvolvido da Eq. (7.17) à Eq. (7.20) do capítulo 7. Com isso, a parte imaginária da ação correspondente a uma partícula que cruza o buraco negro é

$$ImZ = -\frac{n(D-2)\Sigma_{D-2}}{8(D-2n)\alpha^{2-2n}} r_+^{D-2n} \Big|_{r_+^i}^{r_+^f} = -\frac{\Delta S}{2}. \quad (15.24)$$

Se utilizarmos, novamente o método WKB, verificamos que a probabilidade de uma partícula cruzar o horizonte de eventos do buraco negro é

$$\Gamma \sim \exp \left[-\frac{n(D-2)\Sigma_{D-2}}{8(D-2n)\alpha^{2-2n}} \left(r_{+f}^{D-2n} - r_{+i}^{D-2n} \right) \right] = e^{\Delta S} \quad (15.25)$$

Isto é, essa probabilidade depende da variação da entropia que, por sua vez, depende do raio do horizonte do buraco negro. Em última análise, a probabilidade de emissão de partículas é função do parâmetro de nuvem de cordas, já que a coordenada radial do horizonte varia com esse parâmetro.

15.4 Buracos negros com nuvem de cordas e constante cosmológica na gravitação pura de Lovelock

Para concluir, acrescentemos constante cosmológica ao buraco negro em estudo. Considerando a equação de campo (14.26), obtemos a função $f(r)$:

$$f(r) = 1 - \frac{1}{\alpha^{2-2/n}} \left[\Lambda_1 r^{2n} + \frac{16\pi M}{(D-2)\Sigma_{D-2} r^{D-2n-1}} - \frac{2a}{(D-2)r^{D-2n-2}} \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (15.26)$$

No limite $r \rightarrow \infty$, temos

$$f(r) = 1 - \frac{1}{\alpha^{2-2/n}} \left[\Lambda_1^{1/n} r^2 + \frac{16\pi M}{(D-2)\Sigma_{D-2} r^{D-3}} - \frac{2a}{(D-2)r^{D-4}} \right], \quad (15.27)$$

Sendo assim, o comportamento assintótico da métrica é semelhante àquela prevista na relatividade geral (DADHICH, 2010b).

No que diz respeito à termodinâmica do buraco negro, o parâmetro de massa será calculado por

$$M = \frac{(D-2)\Sigma_{D-2}}{16\pi} \left[\alpha^{2n-2} r_h^{D-2n-1} + \frac{2a}{D-2} r_h - \Lambda r_h^{D-1} \right]. \quad (15.28)$$

Já a temperatura Hawking será

$$T = \frac{\alpha^{2-2n}}{4\pi n} \left[\frac{\alpha^{2n-2}(D-2n-1)}{r_h} + \frac{2a}{(D-2)r_h^{D-2n-1}} - (D-1)\Lambda r_h^{2n-1} \right]. \quad (15.29)$$

A entropia será aquela da Eq. (14.31) e, como fizemos no capítulo anterior, podemos considerar uma pressão termodinâmica associada à constante cosmológica, obtendo um volume associado, descrito pela Eq. (14.34).

16 Considerações finais

Estudamos algumas soluções de buracos negros na relatividade geral e na gravitação de Lovelock, considerando cenários com quintessência e/ou nuvem de cordas.

A partir da métrica correspondente ao espaço-tempo de Letelier com quintessência – buraco negro estático, descarregado e imerso em quintessência e nuvem de cordas – analisamos a termodinâmica e a radiação Hawking do buraco negro, verificando o efeito do fluido de quintessência em suas propriedades (COSTA; TOLEDO; BEZERRA, 2019).

A quintessência faz surgir um horizonte cosmológico no espaço-tempo e faz com que a temperatura Hawking possa adquirir valores negativos. É possível afirmar que a energia e a temperatura do buraco negro diminuem à medida que aumentamos os valores dos parâmetros associados à quintessência e à nuvem de cordas. Além disso, enquanto o buraco negro com nuvem de cordas é termodinamicamente instável, o acréscimo da quintessência produz sistemas que possuem regiões de estabilidade a depender dos valores dos parâmetros adotados.

Quanto à emissão de partículas através do horizonte cosmológico do buraco negro, surgido com a introdução da quintessência, o parâmetro da nuvem de cordas provoca um aumento no fator de Boltzmann, implicando redução na taxa de decaimento. Nas proximidades do horizonte de eventos, a nuvem de cordas pode provocar aumento ou redução no fator de Boltzmann.

O buraco negro eletricamente carregado com quintessência e nuvem de cordas (TOLEDO; BEZERRA, 2018) apresenta uma redução nos valores das grandezas termodinâmicas, quando comparamos com o cenário em que essa nuvem está ausente. A nuvem de cordas também influencia na estabilidade do buraco negro e diminui os módulos das partes real e imaginária das frequências quasinormais, aproximando o problema da observação astrofísica, que detecta fenômenos com períodos mais longos.

Quando acrescentamos a constante cosmológica ao cenário descrito imediatamente acima, obtemos a solução de Reissner-Nordström-AdS com quintessência e nuvem de cordas (TOLEDO; BEZERRA, 2019e). Verificamos que não há alteração no número de horizontes do buraco negro, quando comparamos à configuração sem a constante cosmológica. Isso porque essa constante tem a si associado um horizonte cuja coordenada radial é negativa.

A nuvem de cordas, embora provoque a diminuição das grandezas termodinâmicas do buraco negro, como a energia, a temperatura Hawking e a capacidade térmica à pressão constante, e influencie sua criticalidade e sua estrutura de fases, não altera os valores dos expoentes críticos.

Considerando uma pressão termodinâmica proporcional à constante cosmológica, podemos calcular um parâmetro extensivo associado – volume termodinâmico – e, em consequência, podemos considerar o buraco negro como uma máquina térmica termo-gravitacional. Concluimos que o aumento do parâmetro associado à nuvem de cordas aumenta a eficiência dessa máquina térmica e aproxima-a da máquina com rendimento máximo (TOLEDO; BEZERRA, 2019e).

Realizamos uma comparação detalhada entre as métricas do buraco negro com rotação imerso em quintessência – buraco negro de Kerr com quintessência (TOLEDO; BEZERRA,). Como comentamos, há uma métrica obtida por Ghosh utilizando o método de Newman-Janis em sua formulação original (GHOSH, 2016). Já Toshmatov e colaboradores (TOSHMATOV; STUHLÍK; AHMEDOV, 2017b), partindo do algoritmo com uma modificação introduzida por Azreg-Aïnou (AZREG-AÏNOU, 2014) que permite eliminar a etapa de complexificação da coordenada radial, derivaram uma métrica diferente da primeira.

Discutimos o fato de que ambas as métricas são soluções das equações de Einstein e coincidem no limite de rotação lenta, embora o elemento de linha obtido por Ghosh (GHOSH, 2016) possua os horizontes como singularidades físicas e que estes não são esfericamente simétricos.

As correções térmicas à energia de Casimir para um campo escalar sem massa, considerando ambas as métricas correspondentes ao buraco negro de Kerr com quintessência (BEZERRA; TOLEDO, 2019), são maiores na métrica de Toshmatov e colaboradores. Ademais, a diferença entre os resultados é maior nas proximidades dos horizontes do buraco negro e, no plano equatorial, as correções são iguais, como deveríamos esperar.

A métrica obtida por Toshmatov et al. (TOSHMATOV; STUHLÍK; AHMEDOV, 2017b) é matematicamente mais elegante. Por outro lado, a solução de Ghosh apresenta os efeitos de arraste do espaço-tempo que não se manifestam no caso daquela obtida por Toshmatov et al.

A métrica do buraco negro de Kerr-Newman-AdS com quintessência e nuvem de cordas (TOLEDO; BEZERRA, 2019d) obtida, acrescentando a constante cosmológica e a nuvem de cordas à solução do buraco negro de Kerr com quintessência e aplicando o algoritmo de Newman-Janis com a alteração de Azreg-Aïnou (AZREG-AÏNOU, 2014), apresenta propriedades muito interessantes relacionadas a sua termodinâmica e ao espectro de emissão de partículas. Neste caso, a presença da nuvem de cordas reduz a taxa da emissão de radiação.

O estudo da termodinâmica e da radiação Hawking do buraco negro de Kerr-Newman-AdS com quintessência, sem a nuvem de cordas, apresenta resultados interessantes e complementa o trabalho já publicado na literatura (XU; WANG, 2017). A discussão

sobre os horizontes do buraco negro realizado por Xu e Wang (XU; WANG, 2017) merece ser revisada, já que a constante cosmológica tem a si associado um horizonte de coordenada radial negativa. Mostramos que, para valores fixos do parâmetro de estado, ω_q , o parâmetro de quintessência reduz a taxa de emissão de partículas pelo horizonte de eventos do buraco.

A quarta parte desta tese foi dedicada ao estudo da gravitação de Lovelock que, como vimos, representa uma generalização da relatividade geral para dimensões superiores.

O efeito Casimir foi analisado através do cálculo da energia de vácuo na região compreendida entre duas placas metálicas paralelas dispostas nas proximidades de um buraco negro em terceira ordem da gravitação de Lovelock (TOLEDO; BEZERRA, 2019c). Na gravitação de Lovelock, a energia de vácuo regularizada possui correções de segunda ordem no termo R/M . Observamos que, em regiões muito afastadas do buraco negro, isto é, no limite de campo gravitacional fraco, a energia de Casimir se aproxima daquela esperada na relatividade geral. As correções térmicas à energia de Casimir obtidas mostram-nos, mais uma vez, uma correspondência com a relatividade geral, no limite de baixas energias (TOLEDO; BEZERRA, 2019c).

A métrica correspondente a um buraco negro com quintessência e nuvem de cordas na gravitação de Lovelock foi obtida (TOLEDO; BEZERRA, 2018). Esse resultado corresponde ao análogo da métrica de Letelier com quintessência na teoria de Lovelock. A termodinâmica e a radiação Hawking nos casos especiais obtidos através da teoria – relatividade geral, gravitação de Gauss-Bonnet e gravitação de Lovelock em terceira ordem – foi estudada, adotando, para a dimensão do espaço-tempo, os valores $D = 4, 5, 6, 7$ e mostra comportamentos interessantes, como, por exemplo, o fato de que as grandezas termodinâmicas e a estabilidade do buraco negro são influenciadas não só pelos conteúdos de matéria-energia adicionados, quais sejam, quintessência e nuvem de cordas, mas também pela dimensão do espaço-tempo.

O buraco negro com quintessência na gravitação pura de Lovelock (TOLEDO; BEZERRA, 2019b) foi também estudado. Esta é um caso especial da gravitação de Lovelock obtida quando fixamos um único valor para a ordem da ação de Einstein-Hilbert generalizada. Em especial, averiguamos as propriedades da solução nas dimensões críticas ímpares e pares, sendo estas dimensões definidas a partir da ordem da gravitação pura de Lovelock de forma a termos um único valor desta ordem para o número de dimensões do espaço-tempo.

No que diz respeito à estrutura de horizontes do buraco negro, nas dimensões críticas ímpares, sua coordenada radial se afasta da singularidade quando o parâmetro de quintessência aumenta. Verificamos que, em linhas gerais, nas dimensões críticas, as grandezas termodinâmicas são semelhantes àsquelas obtidas na relatividade geral. Ademais, a temperatura Hawking sempre será negativa nas dimensões críticas ímpares e a entropia segue a lei da área apenas nas dimensões críticas pares. Importante ressaltar, ainda, que o

sistema pode ser termodinamicamente estável ou instável, independentemente da paridade da dimensão do espaço-tempo.

Por fim, a métrica do buraco negro com nuvem de cordas na gravitação pura de Lovelock (TOLEDO; BEZERRA, 2019a) foi derivada e estudada no capítulo 15. Verificamos, mais uma vez, que as propriedades do buraco negro nas dimensões críticas mantêm um importante paralelismo com a relatividade geral, o que coloca essa teoria modificada de gravitação como uma boa candidata de generalização da relatividade geral para dimensões superiores.

Em suma, podemos afirmar que tanto a quintessência, modelo utilizado para descrever a energia escura, quanto as configurações com nuvens de cordas, que surgiram para adaptar o fluido que permeia o universo às ideias da teoria de cordas, possuem importantes influências nas métricas de buracos negros, alterando a estrutura de fases, a criticalidade e as frequências dos modos quasinormais. A gravitação de Lovelock demonstra-se uma boa generalização da relatividade geral, mesmo quando se acrescentam esses conteúdos de matéria-energia e os resultados obtidos em teorias de campos, como o efeito Casimir, recuperam aqueles previstos na gravitação de Einstein no limite de campo fraco.

Os possíveis desdobramentos dos resultados apresentados são vários, dentre os quais podemos mencionar sua simples generalização, considerando um fluido de cordas, ao invés de uma nuvem, o que equivale a introduzir os efeitos de pressão dessas cordas. Outros, que não corresponderiam a uma simples generalização dos resultados aqui apresentados, poderiam ser estudar holografia, termodinâmica com entropia não extensiva, descrever sistemas quânticos nesses espaços-tempo, dentre vários outros.

Referências

- ABBOTT, B. P. et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical Review Letters*, APS, v. 116, n. 6, p. 061102, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 29, 36 e 54.
- ADE, P. A. et al. Planck 2013 results. i. overview of products and scientific results. *Astronomy & Astrophysics*, EDP Sciences, v. 571, p. A1, 2014. Citado na página 29.
- ALTAIE, M. B.; DOWKER, J. Spinor fields in an einstein universe: Finite-temperature effects. *Physical Review D*, APS, v. 18, n. 10, p. 3557, 1978. Citado na página 79.
- AZREG-AÏNOU, M. Generating rotating regular black hole solutions without complexification. *Physical Review D*, APS, v. 90, n. 6, p. 064041, 2014. Citado 8 vezes nas páginas 65, 67, 68, 125, 126, 147, 148 e 214.
- BAKER, T. et al. Strong constraints on cosmological gravity from gw170817 and grb 170817a. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 119, p. 251301, Dec 2017. Citado 2 vezes nas páginas 54 e 55.
- BAMBI, C.; MODESTO, L. Rotating regular black holes. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 721, n. 4-5, p. 329–334, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 67 e 126.
- BANERJEE, R.; ROYCHOWDHURY, D. Critical behavior of born-infeld ads black holes in higher dimensions. *Physical Review D*, APS, v. 85, n. 10, p. 104043, 2012. Citado na página 111.
- BARBOSA, D.; BEZERRA, V. On the rotating letelier spacetime. *Geneneral Relativity and Gravitation*, Springer, v. 48, n. 11, p. 149, 2016. Citado na página 42.
- BARDEEN, J. M.; CARTER, B.; HAWKING, S. W. The four laws of black hole mechanics. *Communications in Mathematical Physics*, Springer, v. 31, n. 2, p. 161–170, 1973. Citado 3 vezes nas páginas 35, 49 e 51.
- BARRIOLA, M.; VILENKIN, A. Gravitational field of a global monopole. *Physical Review Letters*, APS, v. 63, n. 4, p. 341, 1989. Citado 3 vezes nas páginas 42, 45 e 100.
- BAYIN, S. Ş.; ÖZCAN, M. Casimir energy in a curved background with a spherical boundary: An exactly solvable case. *Physical Review D*, APS, v. 48, n. 6, p. 2806, 1993. Citado na página 79.
- BEKENSTEIN, J. D. Black holes and the second law. *Lettere Al Nuovo Cimento (1971–1985)*, Springer, v. 4, n. 15, p. 737–740, 1972. Citado 3 vezes nas páginas 35, 49 e 154.
- BEKENSTEIN, J. D. Black holes and entropy. *Physical Review D*, APS, v. 7, n. 8, p. 2333, 1973. Citado 4 vezes nas páginas 35, 49, 51 e 154.
- BEKENSTEIN, J. D. Generalized second law of thermodynamics in black-hole physics. *Physical Review D*, APS, v. 9, n. 12, p. 3292, 1974. Citado na página 49.

BEZERRA, V. B. et al. Thermal casimir effect in kerr spacetime with quintessence and massive gravitons. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 77, n. 11, p. 787, 2017. Citado 4 vezes nas páginas [139](#), [140](#), [141](#) e [142](#).

BEZERRA, V. B. et al. Casimir effect in the kerr spacetime with quintessence. *Modern Physics Letters A*, World Scientific, v. 32, n. 01, p. 1750005, 2017. Citado 2 vezes nas páginas [140](#) e [141](#).

BEZERRA, V. B. et al. Thermal casimir effect in closed friedmann universe revisited. *Physical Review D*, APS, v. 83, n. 10, p. 104042, 2011. Citado na página [79](#).

BEZERRA, V. B. et al. Thermal casimir effect for neutrino and electromagnetic fields in the closed friedmann cosmological model. *Physical Review D*, APS, v. 84, n. 10, p. 104025, 2011. Citado na página [79](#).

BEZERRA, V. B.; TOLEDO, J. M. Thermal casimir effect in the kerr spacetime with quintessence. *Modern Physics Letters A*, World Scientific, v. 34, n. 16, p. 1950125, 2019. Citado 2 vezes nas páginas [30](#) e [214](#).

BLÁZQUEZ-SALCEDO, J. L.; KHOO, F. S.; KUNZ, J. Quasinormal modes of einstein-gauss-bonnet-dilaton black holes. *Physical Review D*, APS, v. 96, n. 6, p. 064008, 2017. Citado na página [99](#).

BLOKLAND, P. H. van; OVERBEEK, J. T. G. van der waals forces between objects covered with a chromium layer. *Journal of the Chemical Society, Faraday Transactions 1: Physical Chemistry in Condensed Phases*, Royal Society of Chemistry, v. 74, p. 2637–2651, 1978. Citado na página [79](#).

BOER, J. de; KULAXIZI, M.; PARNACHEV, A. Holographic lovelock gravities and black holes. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2010, n. 6, p. 8, 2010. Citado na página [56](#).

BOER, J. de; KULAXIZI, M.; PARNACHEV, A. Holographic entanglement entropy in lovelock gravities. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2011, n. 7, p. 109, 2011. Citado na página [56](#).

BORDAG, M. et al. Casimir energies for massive scalar fields in a spherical geometry. *Physical Review D*, APS, v. 56, n. 8, p. 4896, 1997. Citado na página [79](#).

BORDAG, M. et al. *Advances in the Casimir effect*. [S.l.]: OUP Oxford, 2009. v. 145. Citado 2 vezes nas páginas [80](#) e [141](#).

BOULWARE, D. G.; DESER, S. String-generated gravity models. *Physical Review Letters*, APS, v. 55, n. 24, p. 2656, 1985. Citado na página [58](#).

BRUSTEIN, R.; MEDVED, A.; YAGI, K. When black holes collide: Probing the interior composition by the spectrum of ringdown modes and emitted gravitational waves. *Physical Review D*, APS, v. 96, n. 6, p. 064033, 2017. Citado na página [99](#).

CAI, R.-G. A note on thermodynamics of black holes in lovelock gravity. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 582, n. 3, p. 237–242, 2004. Citado 5 vezes nas páginas [58](#), [59](#), [60](#), [181](#) e [198](#).

- CAI, R.-G. et al. Pv criticality in the extended phase space of gauss-bonnet black holes in ads space. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2013, n. 9, p. 5, 2013. Citado na página [111](#).
- CAI, R.-G.; OHTA, N. Black holes in pure lovelock gravities. *Physical Review D*, APS, v. 74, n. 6, p. 064001, 2006. Citado 7 vezes nas páginas [58](#), [195](#), [196](#), [198](#), [199](#), [205](#) e [208](#).
- CALDARELLI, M. M.; COGNOLA, G.; KLEMM, D. Thermodynamics of kerr-newman-ads black holes and conformal field theories. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 17, n. 2, p. 399, 2000. Citado na página [111](#).
- CALDWELL, R. R. An introduction to quintessence. *Brazilian Journal of Physics*, SciELO Brasil, v. 30, n. 2, p. 215–229, 2000. Citado 2 vezes nas páginas [71](#) e [87](#).
- CALDWELL, R. R.; DAVE, R.; STEINHARDT, P. J. Cosmological imprint of an energy component with general equation of state. *Physical Review Letters*, APS, v. 80, n. 8, p. 1582, 1998. Citado 2 vezes nas páginas [71](#) e [75](#).
- CALLONI, E. et al. Gravitational effects on a rigid casimir cavity. *International Journal of Modern Physics A*, World Scientific, v. 17, n. 06n07, p. 804–807, 2002. Citado na página [79](#).
- CAMANHO, X. O.; EDELSTEIN, J. D. A lovelock black hole bestiary. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 30, n. 3, p. 035009, 2013. Citado na página [58](#).
- CAMANHO, X. O.; EDELSTEIN, J. D.; SANTOS, J. M. S. D. Lovelock theory and the ads/cft correspondence. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 46, n. 1, p. 1637, 2014. Citado na página [56](#).
- CANO, P. A.; HENNIGAR, R. A.; MARROCHIO, H. Complexity growth rate in lovelock gravity. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 121, p. 121602, Sep 2018. Citado na página [56](#).
- CARDOSO, V. et al. Quasinormal modes and strong cosmic censorship. *Physical review letters*, APS, v. 120, n. 3, p. 031103, 2018. Citado na página [99](#).
- CARLIP, S. Black hole thermodynamics. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific, v. 23, n. 11, p. 1430023, 2014. Citado 2 vezes nas páginas [50](#) e [51](#).
- CASIMIR, H. B. G. On the attraction between two perfectly conducting plates. In: *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*. [S.l.: s.n.], 1948. v. 51, p. 793. Citado na página [79](#).
- CHAKRABORTY, S.; DADHICH, N. $1/r$ potential in highe r dimensions. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 78, n. 1, p. 81, 2018. Citado 3 vezes nas páginas [55](#), [56](#) e [58](#).
- CHAMBLIN, A. et al. Charged ads black holes and catastrophic holography. *Physical Review D*, APS, v. 60, n. 6, p. 064018, 1999. Citado na página [111](#).
- CHAMBLIN, A. et al. Holography, thermodynamics, and fluctuations of charged ads black holes. *Physical Review D*, APS, v. 60, n. 10, p. 104026, 1999. Citado na página [111](#).

- CLIFTON, T. et al. Modified gravity and cosmology. *Physics reports*, Elsevier, v. 513, n. 1-3, p. 1–189, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 55.
- COPELAND, E. J.; SAMI, M.; TSUJIKAWA, S. Dynamics of dark energy. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific, v. 15, n. 11, p. 1753–1935, 2006. Citado 6 vezes nas páginas 29, 71, 72, 73, 74 e 75.
- COSTA, M. M. Dias e; TOLEDO, J. M.; BEZERRA, V. B. On the letelier spacetime with quintessence: solution, thermodynamics and hawking radiation. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific, v. 28, p. 1950074, 2019. Citado 4 vezes nas páginas 30, 87, 88 e 213.
- CREMINELLI, P.; VERNIZZI, F. Dark energy after gw170817 and grb170817a. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 119, p. 251302, Dec 2017. Citado 2 vezes nas páginas 54 e 55.
- CRISOSTOMI, M. et al. Beyond lovelock gravity: Higher derivative metric theories. *Physical Review D*, APS, v. 97, n. 4, p. 044034, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 55 e 56.
- CVETIČ, M. et al. Black hole enthalpy and an entropy inequality for the thermodynamic volume. *Physical Review D*, APS, v. 84, n. 2, p. 024037, 2011. Citado na página 111.
- CVETKOVIĆ, B.; SIMIĆ, D. A black hole with torsion in 5d lovelock gravity. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 35, n. 5, p. 055005, 2018. Citado na página 58.
- DADHICH, N. Characterization of the lovelock gravity by bianchi derivative. *Pramana*, Springer, v. 74, n. 6, p. 875–882, 2010. Citado na página 57.
- DADHICH, N. On lovelock vacuum solution. *arXiv preprint arXiv:1006.0337*, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 198, 208 e 211.
- DADHICH, N. A distinguishing gravitational property for gravitational equation in higher dimensions. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 76, n. 3, p. 104, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 58 e 195.
- DADHICH, N.; GHOSH, S. G.; JHINGAN, S. The lovelock gravity in the critical spacetime dimension. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 711, n. 2, p. 196–198, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 57, 58 e 195.
- DADHICH, N.; HANSRAJ, S.; CHILAMBWE, B. Compact objects in pure lovelock theory. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific, v. 26, n. 06, p. 1750056, 2017. Citado na página 57.
- DADHICH, N.; PONS, J. M. Probing pure lovelock gravity by nariai and bertotti-robinson solutions. *Journal of Mathematical Physics*, AIP, v. 54, n. 10, p. 102501, 2013. Citado na página 58.
- DADHICH, N.; PONS, J. M.; PRABHU, K. Thermodynamical universality of the lovelock black holes. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 44, n. 10, p. 2595–2601, 2012. Citado na página 58.
- DADHICH, N.; PONS, J. M.; PRABHU, K. On the static lovelock black holes. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 45, n. 6, p. 1131–1144, 2013. Citado na página 58.

- DAMOUR, T.; RUFFINI, R. Black-hole evaporation in the klein-sauter-heisenberg-euler formalism. *Physical Review D*, APS, v. 14, n. 2, p. 332, 1976. Citado na página 158.
- DEHGHANI, M.; FARHANGKHAH, N. Asymptotically flat radiating solutions in third order lovelock gravity. *Physical Review D*, APS, v. 78, n. 6, p. 064015, 2008. Citado na página 58.
- DEHGHANI, M.; POURHASAN, R. Thermodynamic instability of black holes of third order lovelock gravity. *Physical Review D*, APS, v. 79, n. 6, p. 064015, 2009. Citado na página 56.
- DEHGHANI, M. H.; SHAMIRZAIE, M. Thermodynamics of asymptotically flat charged black holes in third order lovelock gravity. *Physical Review D*, APS, v. 72, n. 12, p. 124015, 2005. Citado na página 56.
- DEWITT, B. S. Quantum field theory in curved spacetime. *Physics Reports*, Elsevier, v. 19, n. 6, p. 295–357, 1975. Citado na página 79.
- D’INVERNO, R. *Introducing Einstein’s Relativity*. [S.l.]: Oxford University Press, USA, 1989. Citado 4 vezes nas páginas 36, 37, 40 e 45.
- DOLAN, B. P. Compressibility of rotating black holes. *Physical Review D*, APS, v. 84, n. 12, p. 127503, 2011. Citado na página 111.
- DOLAN, B. P. The cosmological constant and black-hole thermodynamic potentials. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 28, n. 12, p. 125020, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 111, 113 e 203.
- DOLGOV, A. Field model with a dynamic cancellation of the cosmological constant. *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, v. 41, n. 6, p. 345–347, 1985. Citado 2 vezes nas páginas 71 e 75.
- DOWKER, J. Thermal properties of green’s functions in rindler, de sitter, and schwarzschild spaces. *Physical Review D*, APS, v. 18, n. 6, p. 1856, 1978. Citado na página 79.
- DOWKER, J.; CRITCHLEY, R. Covariant casimir calculations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 9, n. 4, p. 535, 1976. Citado na página 79.
- EINSTEIN, A. Approximative integration of the field equations of gravitation. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, v. 1916, p. 688–696, 1916. Citado na página 54.
- EINSTEIN, A. Über gravitationswellen. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, Seite 154-167., 1918. Citado na página 54.
- ELIZALDE, E. *Zeta regularization techniques with applications*. [S.l.]: World Scientific, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 79 e 171.
- ELIZALDE, E. *Ten physical applications of spectral zeta functions*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2008. v. 35. Citado na página 171.
- ELIZALDE, E.; BORDAG, M.; KIRSTEN, K. Casimir energy for a massive fermionic quantum field with a spherical boundary. *Journal of Physics A*, IOP Publishing, v. 31, n. 7, p. 1743, 1998. Citado na página 79.

ELIZALDE, E. et al. Casimir effect in de sitter and anti-de sitter braneworlds. *Physical Review D*, APS, v. 67, n. 6, p. 063515, 2003. Citado na página 79.

EZQUIAGA, J. M.; ZUMALACÁRREGUI, M. Dark energy after gw170817: Dead ends and the road ahead. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 119, p. 251304, Dec 2017. Citado 2 vezes nas páginas 54 e 55.

FAIROOS, C.; GHOSH, A.; SARKAR, S. Black hole entropy production and transport coefficients in lovelock gravity. *Physical Review D*, APS, v. 98, n. 2, p. 024036, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 55 e 56.

FLAHERTY, E. J. Hermitian and kählerian geometry in relativity. 1976. Citado na página 65.

FORD, L. Quantum vacuum energy in general relativity. *Physical Review D*, APS, v. 11, n. 12, p. 3370, 1975. Citado na página 79.

FORD, L. Quantum vacuum energy in a closed universe. *Physical Review D*, APS, v. 14, n. 12, p. 3304, 1976. Citado na página 79.

FULLING, S. A. et al. How does casimir energy fall? *Physical Review D*, APS, v. 76, n. 2, p. 025004, 2007. Citado na página 79.

GARRAFFO, C.; GIRIBET, G. The lovelock black holes. *Modern Physics Letters A*, World Scientific, v. 23, n. 22, p. 1801–1818, 2008. Citado na página 58.

GHADERI, K.; MALAKOLKALAMI, B. Thermodynamics of the schwarzschild and the reissner–nordström black holes with quintessence. *Nuclear physics B*, Elsevier, v. 903, p. 10–18, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 29, 49 e 87.

GHOSH, S. G. 5d radiating black holes in einstein–yang–mills–gauss–bonnet gravity. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 704, n. 1-2, p. 5–9, 2011. Citado na página 58.

GHOSH, S. G. Rotating black hole and quintessence. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 76, n. 4, p. 1–8, 2016. Citado 10 vezes nas páginas 29, 77, 125, 126, 127, 129, 140, 141, 143 e 214.

GHOSH, S. G.; AMIR, M.; MAHARAJ, S. D. Quintessence background for 5d einstein–gauss–bonnet black holes. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 77, n. 8, p. 530, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 58.

GHOSH, S. G.; MAHARAJ, S. D. Cloud of strings for radiating black holes in lovelock gravity. *Physical Review D*, APS, v. 89, n. 8, p. 084027, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 56 e 58.

GHOSH, S. G. et al. Lovelock black holes surrounded by quintessence. *The European Physical J C*, Springer, v. 78, n. 2, p. 90, 2018. Citado 8 vezes nas páginas 29, 49, 56, 58, 59, 178, 181 e 183.

GHOSH, S. G.; PAPNOI, U.; MAHARAJ, S. D. Cloud of strings in third order lovelock gravity. *Physical Review D*, APS, v. 90, n. 4, p. 044068, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 42, 58, 178 e 180.

- GIBBONS, G. W.; HAWKING, S. W. Cosmological event horizons, thermodynamics, and particle creation. *Physical Review D*, APS, v. 15, n. 10, p. 2738, 1977. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 51.
- GRAÇA, J.; VIEIRA, H.; BEZERRA, V. Scalar and spinor quasinormal modes of an $f(r)$ global monopole. *arXiv preprint arXiv:1510.07184*, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 106 e 107.
- GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. *Table of integrals, series, and products*. [S.l.]: Academic press, 2014. Citado na página 173.
- GRAIN, J.; BARRAU, A.; KANTI, P. Exact results for evaporating black holes in curvature-squared lovelock gravity: Gauss-bonnet greybody factors. *Physical Review D*, APS, v. 72, n. 10, p. 104016, 2005. Citado na página 58.
- GROSS, D. J.; WITTEN, E. Superstring modifications of einstein's equations. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 277, p. 1–10, 1986. Citado na página 55.
- HANSEN, D.; YUNES, N. Applicability of the newman-janis algorithm to black hole solutions of modified gravity theories. *Physical Review D*, APS, v. 88, n. 10, p. 104020, 2013. Citado na página 133.
- HAWKING, S. W. Black hole explosions? *Nature*, Nature Publishing Group, v. 248, n. 5443, p. 30, 1974. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 153.
- HAWKING, S. W. Particle creation by black holes. *Communications in mathematical physics*, Springer, v. 43, n. 3, p. 199–220, 1975. Citado 8 vezes nas páginas 35, 49, 51, 87, 94, 114, 153 e 192.
- HAWKING, S. W. Black holes and thermodynamics. *Physical Review D*, APS, v. 13, n. 2, p. 191, 1976. Citado 4 vezes nas páginas 35, 49, 114 e 153.
- HAWKING, S. W.; PAGE, D. N. Thermodynamics of black holes in anti-de sitter space. *Communications in Mathematical Physics*, Springer, v. 87, n. 4, p. 577–588, 1983. Citado na página 49.
- HENDI, S. et al. Van der waals like behavior of topological ads black holes in massive gravity. *Physical Review D*, APS, v. 95, n. 2, p. 021501, 2017. Citado na página 111.
- HENNIGAR, R. A.; MANN, R. B.; TJOA, E. Superfluid black holes. *Physical Review Letters*, APS, v. 118, n. 2, p. 021301, 2017. Citado na página 58.
- HENNIGAR, R. A. et al. Holographic heat engines: general considerations and rotating black holes. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 34, n. 17, p. 175005, 2017. Citado na página 121.
- HENNIGAR, R. A.; TJOA, E.; MANN, R. B. Thermodynamics of hairy black holes in lovelock gravity. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2017, n. 2, p. 70, 2017. Citado na página 58.
- HERSCOVICH, E.; RICHARTE, M. G. Black holes in einstein–gauss–bonnet gravity with a string cloud background. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 689, n. 4-5, p. 192–200, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 42, 49 e 58.

HUAIFAN, L. et al. Hawking radiation of kerr–newman–de sitter black hole. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 63, n. 1, p. 133–138, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 153, 158 e 160.

IYER, S.; WILL, C. M. Black-hole normal modes: A wkb approach. i. foundations and application of a higher-order wkb analysis of potential-barrier scattering. *Physical Review D*, APS, v. 35, n. 12, p. 3621, 1987. Citado na página 107.

JOHNSON, C. V. Holographic heat engines. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 31, n. 20, p. 205002, 2014. Citado na página 111.

JOHNSON, C. V. An exact efficiency formula for holographic heat engines. *Entropy*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 18, n. 4, p. 120, 2016. Citado na página 111.

JOHNSON, C. V. Gauss–bonnet black holes and holographic heat engines beyond large n . *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 33, n. 21, p. 215009, 2016. Citado na página 111.

KAR, S. Stringy black holes and energy conditions. *Physical Review D*, APS, v. 55, n. 8, p. 4872, 1997. Citado na página 42.

KARIM, M.; BOKHARI, A. H.; AHMEDOV, B. J. The casimir force in the schwarzschild metric. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 17, n. 12, p. 2459, 2000. Citado na página 79.

KASTOR, D.; RAY, S.; TRASCHEN, J. Enthalpy and the mechanics of ads black holes. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 26, n. 19, p. 195011, 2009. Citado na página 111.

KERR, R. P. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Physical Review Letters*, APS, v. 11, n. 5, p. 237, 1963. Citado na página 46.

KHANNA, G.; PRICE, R. H. Black hole ringing, quasinormal modes, and light rings. *Physical Review D*, APS, v. 95, n. 8, p. 081501, 2017. Citado na página 99.

KISELEV, V. Quintessence and black holes. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 20, n. 6, p. 1187, 2003. Citado 7 vezes nas páginas 29, 76, 77, 99, 125, 129 e 147.

KUBIZŃÁK, D.; MANN, R. B. P- v criticality of charged ads black holes. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2012, n. 7, p. 33, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 111 e 118.

LAMOREAUX, S. K. Demonstration of the casimir force in the 0.6 to 6 μ m range. *Physical Review Letters*, APS, v. 78, n. 1, p. 5, 1997. Citado na página 79.

LANGLOIS, D. et al. Scalar-tensor theories and modified gravity in the wake of gw170817. *Physical Review D*, American Physical Society, v. 97, p. 061501, Mar 2018. Citado 2 vezes nas páginas 54 e 55.

LARSEN, F. String model of black hole microstates. *Physical Review D*, APS, v. 56, n. 2, p. 1005, 1997. Citado na página 42.

- LEE, T.-H.; BABOOLAL, D.; GHOSH, S. G. Lovelock black holes in a string cloud background. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 75, n. 7, p. 297, 2015. Citado 6 vezes nas páginas [42](#), [49](#), [58](#), [178](#), [201](#) e [209](#).
- LEE, T.-H. et al. Lovelock black hole thermodynamics in a string cloud model. *arXiv preprint arXiv:1511.03976*, 2015. Citado na página [42](#).
- LETETIER, P. S. Clouds of strings in general relativity. *Physical Review D*, APS, v. 20, n. 6, p. 1294, 1979. Citado 6 vezes nas páginas [30](#), [42](#), [43](#), [44](#), [87](#) e [205](#).
- LETETIER, P. S. Fluids of strings in general relativity. *Il Nuovo Cimento (1971-1996)*, Springer, v. 63, n. 2, p. 519–528, 1981. Citado na página [42](#).
- LETETIER, P. S. String cosmologies. *Physical Review D*, APS, v. 28, n. 10, p. 2414, 1983. Citado na página [42](#).
- LI, G.-Q. Effects of dark energy on p–v criticality of charged ads black holes. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 735, p. 256–260, 2014. Citado 6 vezes nas páginas [111](#), [116](#), [117](#), [118](#), [119](#) e [120](#).
- LI, G.-Q. Hawking radiation and entropy of a black hole in lovelock-born-infeld gravity from the quantum tunneling approach. *Chinese Physics C*, IOP Publishing, v. 41, n. 4, p. 045103, 2017. Citado 3 vezes nas páginas [94](#), [95](#) e [192](#).
- LIMA, J. A. S. Alternative dark energy models: an overview. *Brazilian Journal of Phys.*, SciELO Brasil, v. 34, n. 1A, p. 194–200, 2004. Citado na página [71](#).
- LIU, H.; MENG, X.-H. P–v criticality in the extended phase–space of charged accelerating ads black holes. *Modern Physics Letters A*, World Scientific, v. 31, n. 37, p. 1650199, 2016. Citado na página [111](#).
- LIU, H.; MENG, X.-H. Effects of dark energy on the efficiency of charged ads black holes as heat engines. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 77, n. 8, p. 556, 2017. Citado 4 vezes nas páginas [111](#), [115](#), [121](#) e [123](#).
- LIU, M.; LU, J.; GUI, Y. The influence of free quintessence on gravitational frequency shift and deflection of light with 4d momentum. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 59, n. 1, p. 107–116, 2009. Citado na página [76](#).
- LOVELOCK, D. The einstein tensor and its generalizations. *Journal of Mathematical Physics*, AIP, v. 12, n. 3, p. 498–501, 1971. Citado 2 vezes nas páginas [29](#) e [55](#).
- MA, M.-S.; ZHAO, R.; MA, Y.-Q. Thermodynamic stability of black holes surrounded by quintessence. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 49, n. 6, p. 79, 2017. Citado 2 vezes nas páginas [29](#) e [49](#).
- MAEDA, H. Effects of gauss–bonnet term on the final fate of gravitational collapse. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 23, n. 6, p. 2155, 2006. Citado na página [58](#).
- MAEDA, H. Final fate of spherically symmetric gravitational collapse of a dust cloud in einstein-gauss-bonnet gravity. *Physical Review D*, APS, v. 73, n. 10, p. 104004, 2006. Citado na página [58](#).

MAEDA, H.; WILLISON, S.; RAY, S. Lovelock black holes with maximally symmetric horizons. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 28, n. 16, p. 165005, 2011. Citado na página 58.

MASELLI, A.; KOKKOTAS, K. D.; LAGUNA, P. Observing binary black hole ringdowns by advanced gravitational wave detectors. *Physical Review D*, APS, v. 95, n. 10, p. 104026, 2017. Citado na página 99.

MAZHARIMOUSAVI, S. H.; HALILSOY, M. Lovelock black holes with a power-yang–mills source. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 681, n. 2, p. 190–199, 2009. Citado na página 58.

MAZHARIMOUSAVI, S. H.; HALILSOY, M.; GURTUG, O. Theorem to generate einstein–nonlinear maxwell fields. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 27, n. 20, p. 205022, 2010. Citado na página 42.

MILTON, K. A.; SAHARIAN, A. A. Casimir densities for a spherical boundary in de sitter spacetime. *Physical Review D*, APS, v. 85, n. 6, p. 064005, 2012. Citado na página 79.

MILTON, K. A. et al. How does casimir energy fall? iv. gravitational interaction of regularized quantum vacuum energy. *Physical Review D*, APS, v. 89, n. 6, p. 064027, 2014. Citado na página 79.

MISNER, C. W.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. *Gravitation*. [S.l.]: Princeton University Press, 2017. Citado na página 36.

MO, J.-X.; LI, G.-Q. Effects of lovelock gravity on the joule-thomson expansion. *arXiv preprint arXiv:1805.04327*, 2018. Citado na página 56.

MO, J.-X.; LIANG, F.; LI, G.-Q. Heat engine in the three-dimensional spacetime. *Journal of High Energy Phys.*, Springer, v. 2017, n. 3, p. 10, 2017. Citado na página 111.

MO, J.-X.; LIU, W.-B. p - v criticality of topological black holes in lovelock–born–infeld gravity. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 74, n. 4, p. 2836, 2014. Citado na página 111.

MOHIDEEN, U.; ROY, A. Precision measurement of the casimir force from 0.1 to 0.9 μ m. *Physical Review Letters*, APS, v. 81, n. 21, p. 4549, 1998. Citado na página 79.

MUNIZ, C. R.; BEZERRA, V. B.; CUNHA, M. S. Hořava–lifshitz gravity effects on casimir energy in weak field approximation and infrared regime. *Physical Review D*, APS, v. 88, n. 10, p. 104035, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 171 e 173.

MUNIZ, C. R.; BEZERRA, V. B.; CUNHA, M. S. Casimir effect in the hořava–lifshitz gravity with a cosmological constant. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 359, p. 55–63, 2015. Citado 4 vezes nas páginas 79, 168, 170 e 171.

MYERS, R. C.; SIMON, J. Z. Black-hole thermodynamics in lovelock gravity. *Physical Review D*, APS, v. 38, n. 8, p. 2434, 1988. Citado 4 vezes nas páginas 58, 59, 60 e 181.

NEWMAN, E. T. et al. Metric of a rotating, charged mass. *Journal of mathematical physics*, AIP, v. 6, n. 6, p. 918–919, 1965. Citado 4 vezes nas páginas 65, 66, 68 e 69.

- NEWMAN, E. T.; JANIS, A. Note on the kerr spinning-particle metric. *Journal of Mathematical Physics*, AIP, v. 6, n. 6, p. 915–917, 1965. Citado 7 vezes nas páginas 65, 66, 68, 125, 126, 147 e 148.
- NOJIRI, S.; ODINTSOV, S.; OIKONOMOU, V. Modified gravity theories on a nutshell: Inflation, bounce and late-time evolution. *arXiv preprint arXiv:1705.11098*, 2017. Citado na página 55.
- NOZAWA, M.; MAEDA, H. Effects of lovelock terms on the final fate of gravitational collapse: analysis in dimensionally continued gravity. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 23, n. 5, p. 1779, 2006. Citado na página 58.
- OHANIAN, H. C.; RUFFINI, R. *Gravitation and spacetime*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013. Citado 5 vezes nas páginas 35, 36, 37, 46 e 47.
- OTEEV, T. et al. Energy extraction and particle acceleration around a rotating black hole in quintessence. *Astrophysics and Space Science*, Springer, v. 361, n. 8, p. 269, 2016. Citado na página 29.
- ÖZER, M.; TAHA, M. A possible solution to the main cosmological problems. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 171, n. 4, p. 363–365, 1986. Citado 2 vezes nas páginas 71 e 75.
- PAGE, D. N. Hawking radiation and black hole thermodynamics. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 7, n. 1, p. 203, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 51.
- PARIKH, M. K.; WILCZEK, F. Hawking radiation as tunneling. *Physical Review Letters*, APS, v. 85, n. 24, p. 5042, 2000. Citado na página 95.
- PAVLUCHENKO, S. A. Realistic compactification in spatially flat vacuum cosmological models in cubic lovelock gravity: high-dimensional case. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 78, n. 8, p. 611, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 55 e 56.
- PEEBLES, P.; RATRA, B. Cosmology with a time-variable cosmological 'constant'. *The Astrophysical Journal*, v. 325, p. L17–L20, 1988. Citado 2 vezes nas páginas 71 e 75.
- PERLMUTTER, S. et al. Measurements of ω and λ from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 517, n. 2, p. 565, 1999. Citado na página 71.
- QAEMMAQAMI, M. M. Criticality in third order lovelock gravity and butterfly effect. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 78, n. 1, p. 47, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 55 e 56.
- QUACH, J. Q. Gravitational casimir effect. *Physical Review Letters*, APS, v. 114, n. 8, p. 081104, 2015. Citado na página 79.
- RIESS, A. G. et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, IOP Publishing, v. 116, n. 3, p. 1009, 1998. Citado na página 71.
- RIESS, A. G. et al. Bvri light curves for 22 type ia supernovae. *The Astronomical Journal*, IOP Publishing, v. 117, n. 2, p. 707, 1999. Citado na página 71.

RODRIGUE, K. K. J. et al. Thermodynamics phase transition and hawking radiation of the schwarzschild black hole with quintessence-like matter and a deficit solid angle. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 50, n. 5, p. 52, 2018. Citado 5 vezes nas páginas 29, 88, 94, 95 e 96.

RODRIGUES, D. C. et al. Absence of a fundamental acceleration scale in galaxies. *Nature Astronomy*, Nature Publishing Group, p. 1, 2018. Citado na página 55.

SADEGHI, J.; JAFARZADE, K. Heat engine of black holes. *arXiv preprint arXiv:1504.07744*, 2015. Citado na página 111.

SAHARIAN, A. A.; SETARE, M. R. Casimir effect for curved boundaries in robertson–walker spacetime. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 27, n. 22, p. 225009, 2010. Citado na página 79.

SAKSTEIN, J.; JAIN, B. Implications of the neutron star merger gw170817 for cosmological scalar-tensor theories. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 119, p. 251303, Dec 2017. Citado 2 vezes nas páginas 54 e 55.

SANNAN, S. Heuristic derivation of the probability distributions of particles emitted by a black hole. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 20, n. 3, p. 239–246, 1988. Citado na página 160.

SCHEE, J.; STUHLÍK, Z. Silhouette and spectral line profiles in the special modification of the kerr black hole geometry generated by quintessential fields. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 76, n. 11, p. 643, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 134 e 135.

SCHUTZ, B. *A first course in general relativity*. [S.l.]: Cambridge university press, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 36, 48 e 51.

SCHUTZ, B. F.; WILL, C. M. Black hole normal modes: a semianalytic approach. *The Astrophysical Journal*, v. 291, p. L33–L36, 1985. Citado na página 107.

SEKIWA, Y. Thermodynamics of de sitter black holes: Thermal cosmological constant. *Physical Review D*, APS, v. 73, n. 8, p. 084009, 2006. Citado na página 111.

SELJAK, U. et al. Cosmological parameter analysis including sdss ly α forest and galaxy bias: constraints on the primordial spectrum of fluctuations, neutrino mass, and dark energy. *Physical Review D*, APS, v. 71, n. 10, p. 103515, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 71 e 74.

SETARE, M. R. The casimir effect, hawking radiation and the trace anomaly. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 18, n. 11, p. 2097, 2001. Citado na página 79.

SETARE, M. R.; ADAMI, H. Polytropic black hole as a heat engine. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 47, n. 11, p. 133, 2015. Citado na página 111.

SETARE, M. R.; MANSOURI, R. Casimir effect for a spherical shell in de sitter space. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 18, n. 12, p. 2331, 2001. Citado na página 79.

SHAPIRO, S. L.; TEUKOLSKY, S. A. *Black holes, white dwarfs and neutron stars: the physics of compact objects*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008. Citado na página 35.

- SHUANG, W. et al. The first law of thermodynamics of the $(2+1)$ -dimensional banados–teitelboim–zanelli black holes and kerr–de sitter spacetimes. *Chinese Physics Letters*, IOP Publishing, v. 23, n. 5, p. 1096, 2006. Citado na página 111.
- SMALLEY, L. L.; KRISCH, J. P. Spinning string fluid dynamics in general relativity. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 14, n. 12, p. 3501, 1997. Citado na página 42.
- SOLENG, H. H. Dark matter and non-newtonian gravity from general relativity coupled to a fluid of strings. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 27, n. 4, p. 367–378, 1995. Citado na página 42.
- SORGE, F. Casimir effect in a weak gravitational field. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 22, n. 23, p. 5109, 2005. Citado 5 vezes nas páginas 79, 167, 171, 172 e 175.
- SORGE, F. Casimir energy in kerr space-time. *Physical Review D*, APS, v. 90, n. 8, p. 084050, 2014. Citado na página 79.
- SPALLUCCI, E.; SMAILAGIC, A. Maxwell’s equal-area law for charged anti-de sitter black holes. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 723, n. 4-5, p. 436–441, 2013. Citado na página 111.
- SPARNAAY, M. J. Measurements of attractive forces between flat plates. *Physica*, Elsevier, v. 24, n. 6-10, p. 751–764, 1958. Citado na página 79.
- SRINIVASAN, K.; PADMANABHAN, T. Particle production and complex path analysis. *Physical Review D*, APS, v. 60, n. 2, p. 024007, 1999. Citado na página 95.
- STACHEL, J. Thickening the string. i. the string perfect dust. *Physical Review D*, APS, v. 21, n. 8, p. 2171, 1980. Citado na página 42.
- STEINHARDT, P. J.; WANG, L.; ZLATEV, I. Cosmological tracking solutions. *Physical Review D*, APS, v. 59, n. 12, p. 123504, 1999. Citado na página 71.
- STUCHLÍK, Z. Influence of the relict cosmological constant on accretion discs. *Modern Physics Letters A*, World Scientific, v. 20, n. 08, p. 561–575, 2005. Citado na página 74.
- SZEKERES, S. An explanation of the newman-janis algorithm. *arXiv preprint gr-qc/9807001*, 1998. Citado na página 65.
- THOMAS, B. B.; SALEH, M.; KOFANE, T. C. Thermodynamics and phase transition of the reissner–nordström black hole surrounded by quintessence. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 44, n. 9, p. 2181–2189, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 29, 49, 87 e 103.
- TOLEDO, J. d. M.; BEZERRA, V. Black holes with cloud of strings and quintessence in lovelock gravity. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 78, n. 7, p. 534, 2018. Citado 4 vezes nas páginas 29, 31, 49 e 215.
- TOLEDO, J. M.; BEZERRA, V. B. Analyzing the rotating black hole with quintessential energy solutions. *Artigo a ser subetido ao periódico The European Physical Journal C*. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 214.

- TOLEDO, J. M.; BEZERRA, V. B. The reissner–nordström black hole surrounded by quintessence and a cloud of strings: Thermodynamics and quasinormal modes. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific, v. 28, p. 1950023, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 30, 99 e 213.
- TOLEDO, J. M.; BEZERRA, V. B. Black holes with a cloud of strings in pure lovelock gravity. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 79, p. 117, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 216.
- TOLEDO, J. M.; BEZERRA, V. B. Black holes with quintessence in pure lovelock gravity. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 51, n. 3, p. 41, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 215.
- TOLEDO, J. M.; BEZERRA, V. B. Casimir effect in a 4-dimensional schwarzschild spacetime in third order lovelock gravity. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 400, p. 208–220, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 215.
- TOLEDO, J. M.; BEZERRA, V. B. Kerr-newman-ads black hole with quintessence and cloud of strings. *Artigo submetido ao periódico The European Physical Journal C*, Springer, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 214.
- TOLEDO, J. M.; BEZERRA, V. B. Some remarks on the thermodynamics of charged ads black holes with cloud of strings and quintessence. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 79, p. 110, 2019. Citado 5 vezes nas páginas 30, 111, 112, 213 e 214.
- TOSHMATOV, B.; STUHLÍK, Z.; AHMEDOV, B. Comments on “casimir effect in the kerr spacetime with quintessence”. *Modern Physics Letters A*, World Scientific, v. 32, n. 21, p. 1775001, 2017. Citado na página 140.
- TOSHMATOV, B.; STUHLÍK, Z.; AHMEDOV, B. Rotating black hole solutions with quintessential energy. *The European Physical Journal Plus*, Springer, v. 132, n. 2, p. 98, 2017. Citado 17 vezes nas páginas 29, 68, 77, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 134, 135, 140, 141, 143, 149 e 214.
- TSUJIKAWA, S. Quintessence: a review. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 30, n. 21, p. 214003, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 71, 75 e 76.
- VISHVESHWARA, C. Scattering of gravitational radiation by a schwarzschild black-hole. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 227, n. 5261, p. 936, 1970. Citado na página 99.
- WALD, R. M. The thermodynamics of black holes. *Living reviews in relativity*, Springer, v. 4, n. 1, p. 6, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 51.
- WALD, R. M. *General relativity*. [S.l.]: University of Chicago press, 2010. Citado na página 36.
- WANG, L. et al. Cosmic concordance and quintessence. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 530, n. 1, p. 17, 2000. Citado na página 71.
- WEINBERG, S. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. [S.l.]: Wiley New York, 1972. v. 1. Citado 3 vezes nas páginas 36, 71 e 72.

- WEINBERG, S. The cosmological constant problem. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 61, n. 1, p. 1, 1989. Citado na página 74.
- WEISS, N. Possible origins of a small, nonzero cosmological constant. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 197, n. 1-2, p. 42–44, 1987. Citado 2 vezes nas páginas 71 e 75.
- WHEELER, J. T. Symmetric solutions to the gauss-bonnet extended einstein equations. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 268, n. 3-4, p. 737–746, 1986. Citado na página 58.
- WHITT, B. Spherically symmetric solutions of general second-order gravity. *Physical Review D*, APS, v. 38, n. 10, p. 3000, 1988. Citado na página 58.
- WILTSHIRE, D. Spherically symmetric solutions of einstein-maxwell theory with a gauss-bonnet term. *Physics Letters B*, Elsevier Science, v. 169, n. 1, p. 36–40, 1986. Citado na página 58.
- XU, H.; XU, W.; ZHAO, L. Extended phase space thermodynamics for third-order lovelock black holes in diverse dimensions. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 74, n. 9, p. 3074, 2014. Citado na página 56.
- XU, W.; WU, Y. Exact phase structure of ads black holes surrounded by quintessence dark energy. *Europhysics Letters*, IOP Publishing, v. 121, n. 4, p. 40001, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 49.
- XU, Z.; WANG, J. Kerr-newman-ads black hole in quintessential dark energy. *Physical Review D*, APS, v. 95, n. 6, p. 064015, 2017. Citado 7 vezes nas páginas 147, 149, 152, 161, 162, 214 e 215.
- ZHANG, A. Thermal casimir effect in kerr space–time. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 898, p. 220–228, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 140, 141 e 142.
- ZHAO, R. et al. On the critical phenomena and thermodynamics of charged topological dilaton ads black holes. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 73, n. 12, p. 2645, 2013. Citado na página 111.
- ZHUK, A.; KLEINERT, H. Casimir effect at nonzero temperatures in a closed friedmann universe. *Theoretical and Mathematical Physics*, Springer, v. 109, n. 2, p. 1483–1493, 1996. Citado na página 79.
- ZOU, D.-C.; ZHANG, S.-J.; WANG, B. Critical behavior of born-infeld ads black holes in the extended phase space thermodynamics. *Physical Review D*, APS, v. 89, n. 4, p. 044002, 2014. Citado na página 111.
- ZWIEBACH, B. Curvature squared terms and string theories. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 156, n. 5-6, p. 315–317, 1985. Citado na página 55.