Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Um Estudo dos Espaços de Sobolev Fracionários e Aplicação a uma Classe de Equações Elípticas

Ozana da Silva Alencar

João Pessoa – PB
Setembro de 2019

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Um Estudo dos Espaços de Sobolev Fracionários e Aplicação a uma Classe de Equações Elípticas

por

Ozana da Silva Alencar

sob a orientação de
Prof^{a}. Dr^{a}. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes

e coorientação de
Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro

João Pessoa – PB
Setembro de 2019

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

A368e Alencar, Ozana da Silva.
Um Estudo dos Espaços de Sobolev Fracionários e Aplicação a uma Classe de Equações Elípticas / Ozana da Silva Alencar. - João Pessoa, 2019.
110 f.

Orientação: Elisandra de Fátima Gloss de Moraes.
Coorientação: Bruno Henrique Carvalho Ribeiro.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Espaços de Sobolev fracionários. 2. Laplaciano fracionário. 3. Minimizaçãao. I. Moraes, Elisandra de Fátima Gloss de. II. Ribeiro, Bruno Henrique Carvalho. III. Título.

UFPB/BC

Um Estudo dos Espaços de Sobolev Fracionários e Aplicação a uma Classe de Equações Elípticas

por

Ozana da Silva Alencar [1]

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada em 26 de setembro de 2019.

Banca Examinadora:

Elisandra F. Gloss de Moraes

Prof^a. Dr^a. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes – UFPB
(Orientadora)

Yane Lísley Ramos Araújo

Prof^a. Dr^a. Yane Lísley Ramos Araújo – UFRPE
(Examinador Externo)

Manassés Xavier de Souza

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza – UFPB
(Examinador Interno)

[1] O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração desta dissertação.

A minha família

Agradecimentos

A Deus por ter me dado forças quando mais precisei.

A minha mãe Maria do Carmo, meus irmãos Orlando, Leandro, Eduardo, César e Mirian, e ao meu pai José, que Deus levou enquanto eu fazia este trabalho, agradeço por tudo que sempre fizeram por mim.

Ao meu companheiro Danilo, por estar comigo nessa jornada me incentivando e me ajudando em cada etapa. E também às minhas cunhadas Lanjinha, Kaylla, Rosiane e Stephany.

A todos os meus professores e demais amigos dos colégios e universidades onde estudei.

A minha orientadora Elisandra de Fátima Gloss de Moraes por sua dedicação e compreensão.

Ao meu coorientador Bruno Henrique Carvalho Ribeiro pelo apoio.

À professora Yane Lísley Ramos Araújo e ao professor Manassés Xavier de Souza pela participação na banca examinadora.

À UFPB pela estrutura e organização que me possibilitaram avançar nos estudos.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, estudamos o espaço de Sobolev fracionário $W^{s,p}(\Omega)$ o qual é definido através da seminorma de Gagliardo quando $s \in (0,1)$. No caso particular em que $p = 2$ fazemos uma abordagem via transformada de Fourier. A partir daí é possível relacionar o espaço $H^s(\mathbb{R}^n) = W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$ com o operador Laplaciano fracionário. Por fim, buscamos solução para uma equação diferencial parcial elíptica envolvendo o operador Laplaciano fracionário.

Palavras-chave: Espaços de Sobolev fracionários; Laplaciano fracionário; Minimização.

Abstract

In this work, we study the fractional Sobolev spaces $W^{s,p}(\Omega)$ which are defined through Gagliardo's seminorm when $s \in (0,1)$. In the particular case where $p = 2$ we take a Fourier transform approach. Then we can relate the space $H^s(\mathbb{R}^n) = W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$ with the fractional Laplacian operator. Finally, we seek a solution to an elliptic partial differential equation involving the fractional Laplacian operator.

Keywords: Fractional Sobolev spaces; Fractional Laplacian; Minimization.

Sumário

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- Ω subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$.
- $|\Omega|$ medida de Lebesgue de um conjunto Ω.
- $\rightharpoonup, \rightarrow$ convergência fraca e forte, respectivamente.
- $\hookrightarrow$ imersão.
- $q.t.p.$ para quase todo ponto.
- $supp(f)$ suporte da função f.
- $\cdot$ ou $\langle , \rangle$ produto interno.
- $C^{0,\alpha}(\Omega)$ espaço das funções Hölder contínuas de expoente α.
- $C^k(\Omega)$ funções k vezes continuamente diferenciáveis sobre Ω, $k \in \mathbb{N}$.
- $C_0(\Omega)$ funções contínuas com suporte compacto em Ω.
- $C_0^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_0(\Omega)$; $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geqslant 0} C^k(\Omega)$; $C_0^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega)$.
- $L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \quad \text{mensurável}; \int_\Omega |u|^p dx < \infty \right\}$, $1 \leq p < \infty$.
- $\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p \right)^{1/p}$ norma do espaço de Lebesgue $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.
- $L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável}; \ |u(x)| \leq C \text{ q.t.p. sobre } \Omega \text{ para algum } C > 0\}$.
- $\| u\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|$ norma do espaço $L^\infty(\Omega)$.

- $[u]_{W^{s,p}(\Omega)}$ seminorma de Gagliardo de u em $W^{s,p}(\Omega)$.
- $W^{1,p}(\Omega)$ espaços de Sobolev tradicionais.
- $W^{m,p}(\Omega)$ espaços de Sobolev inteiros.
- $W^{s,p}(\Omega)$ espaços de Sobolev fracionários.
- $\mathscr{S}$ espaço de Schwarz.
- $\mathscr{F}$ transformada de Fourier.
- $p_s^* := \dfrac{np}{n-sp}$ para $1 \leq p < n/s$ e $s \in (0,1)$ expoente crítico de Sobolev fracionário.

Introdução

Nesta dissertação, baseados no artigo de Di Nezza, Palatucci e Valdinoci [8], estudaremos os espaços de Sobolev fracionários $W^{s,p}(\Omega)$, onde Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, $s \in (0,1)$ e $p \in [1,\infty)$. Este tema tem atraído muita atenção não apenas por ser um tópico clássico em análise funcional e harmônica, mas também por sua vasta gama de aplicações como por exemplo no mercado financeiro, em difusões anômalas, otimização, leis de conservação, mecânica quântica, fluxos quase-geostróficos, superfícies mínimas, problemas não elípticos, ciência de materiais, equações de ondas, dentre outras. Para mais informações a esse respeito veja [8] e suas referências.

Em geral, trabalharemos com o espaço de Sobolev fracionário definido por meio da seminorma de Gagliardo e em particular, quando $p = 2$ faremos uma abordagem via a transformada de Fourier. A partir disso, estabeleceremos uma relação entre o espaço $H^s = W^{s,2}$ e o operador Laplaciano fracionário. E assim, de posse desses resultados e baseados no artigo de Dipierro, Palatucci e Valdinoci [7], estudaremos a existência de soluções para o problema

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u + u = |u|^{p-1}u \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^n \\ u \in H^s(\mathbb{R}^n); \;\; u \not\equiv 0 \end{cases}, \tag{1}$$

onde $p \in (1, (n+2s)/(n-2s))$, $s \in (0,1)$ é tal que $n > 2s$ e

$$(-\Delta)^s u(x) \quad = C(n,s) \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{B_\epsilon^c(x)} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

é o operador Laplaciano fracionário, e por fim, $H^s(\mathbb{R}^n) = W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$ é um caso particular de espaço de Sobolev fracionário. A Equação (1) aparece no estudo da Equação de Schrödinger

$$\begin{cases} i\partial_t \Psi + (-\Delta)^s \Psi = F(x,\Psi) & \text{em } \mathbb{R}^n, \\ \quad \lim_{|x|\to\infty} |\Psi(x,t)| = 0 & \text{para todo} \;\; t > 0, \end{cases}$$

ao procurar por ondas estacionárias, ou seja, soluções da forma $\Psi(x,t) = e^{-ict}u(x)$, onde c é uma constante. Esta equação é de particular interesse em mecânica quântica fracionária para o estudo de partículas em campos estocásticos modelados pelo processo de Lévy (veja [11] e suas referências).

A seguir detalharemos como esta dissertação está dividida.

No capítulo 1, baseados em [1] e [4] faremos uma breve introdução dos espaços de Sobolev tradicionais. Em seguida baseados em [8], definiremos os espaços de Sobolev fracionários por meio da seminorma de Gagliardo e em particular, quando $p = 2$ definiremos também através da transformada de Fourier e mostraremos que quando $s \in (0,1)$ tais definições coincidem. Veremos que sob certas condições $W^{s,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach e reflexivo e estudaremos também as relações existentes entre $W^{s,p}(\Omega)$ e $W^{s',p}(\Omega)$ para diferentes condições de s e s'. Ainda no capítulo 1, focaremos no espaço H^s e no operador Laplaciano fracionário estabelecendo relações entre eles e na última seção deste capítulo, veremos condições para que funções de $W^{s,p}(\Omega)$ possam ser estendidas a funções de $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$.

O capítulo 2 está dividido em três seções. Na primeira provaremos alguns teoremas de imersão contínua, que em suma garantem para diferentes condições de s, p, q, n e Ω uma imersão contínua do espaço $W^{s,p}(\Omega)$ em $L^q(\Omega)$. Na segunda seção, veremos sob quais condições de s, p, n e Ω o espaço $W^{s,p}(\Omega)$ está compactamente imerso em $L^q(\Omega)$ considerando $q \in [1, p]$ e depois, $q \in [1, p_s^*)$. E na terceira e última seção, falaremos sobre regularidade de Hölder para funções nos espaços $W^{s,p}(\Omega)$. Para desenvolver esse estudo introduziremos algumas novas definições como por exemplo, a definição de picos externos e truncamento de uma função, e provaremos alguns lemas auxiliares.

No capítulo 3, seguindo o artigo [7], buscaremos uma solução positiva e esfericamente simétrica para o problema (1). Usaremos o método variacional, que consiste essencialmente em encontrar pontos críticos do funcional energia associado ao problema em estudo e usaremos também o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange. Na primeira seção relembraremos notações e proposições demonstradas ao longo desta dissertação, enunciaremos o importante lema da compacidade de Strauss, provaremos alguns lemas auxiliares e definiremos o que seria uma solução para o problema (1). Na segunda e última seção, temos por objetivo provar que de fato tal solução existe e o faremos em cinco etapas, para melhor compreensão.

Por fim, faremos dois apêndices. No primeiro demonstraremos alguns resultados usados nesta dissertação e no segundo enunciaremos teoremas clássicos com suas respectivas referências para eventuais consultas.

Capítulo 1

Os espaços de Sobolev fracionários e o operador Laplaciano

Este capítulo tem por objetivo apresentar os espaços de Sobolev fracionários e alguns resultados importantes e está dividido em quatro seções. A primeira consiste em uma breve introdução dos espaços de Sobolev tradicionais. A segunda é dedicada à apresentação dos espaços de Sobolev fracionários e às demonstrações de resultados sobre eles. A terceira por sua vez, aborda o espaço H^s e o operador Laplaciano fracionário, trazendo também uma abordagem via a transformada de Fourier. E por fim, a quarta seção traz resultados de extensão de funções de $W^{s,p}(\Omega)$ a funções de $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$.

1.1 Os espaços de Sobolev tradicionais

Nesta seção faremos uma breve abordagem dos espaços de Sobolev tradicionais. Como o objetivo deste trabalho consiste no estudo dos espaços de Sobolev fracionários, nos limitaremos aqui a apenas enunciar os resultados. Para eventuais consultas veja [1] e [4].

Definição 1.1. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e p um número real satisfazendo $1 \leqslant p \leqslant \infty$. O espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ é definido por

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega); \begin{array}{c} \text{existem } g_1, ..., g_n \in L^p(\Omega) \text{ tais que} \\ \displaystyle\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \forall i = 1, ..., n \end{array} \right\}.$$

Para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$ denotamos $\frac{\partial u}{\partial x_i} := g_i$ e dizemos que esta é a i-ésima derivada fraca de u.

O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é munido com a norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_p + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p .$$

Se $1 \leqslant p < \infty$, também pode ser usada a norma equivalente $\left(\|u\|_p^p + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

Teorema 1.1. *[4, Proposição 9.1] Para cada $1 \leqslant p \leqslant \infty$ tem-se que $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach, é reflexivo quando $1 < p < \infty$, e é separável para $1 \leqslant p < \infty$. Além disso, $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert separável.*

Mais geralmente, para cada número natural $m \geq 2$ podemos definir os espaços $W^{m,p}(\Omega)$, veja a seguir.

Definição 1.2. Sejam $m \geqslant 2$ e $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Definimos por indução

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega); \begin{array}{c} \forall \alpha \text{ com } |\alpha| \leqslant m, \exists\ g_\alpha \in L^p(\Omega) \text{ tal que} \\ \displaystyle\int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \end{array} \right\},$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ com $\alpha_i \geqslant 0$ um inteiro, e

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \quad \text{e} \quad D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Denotamos $D^\alpha u := g_\alpha$.

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é munido com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u\|_p.$$

O resultado a seguir pode ser encontrado em [1, Teoremas 3.3 e 3.6].

Teorema 1.2. *O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach para todo $1 \leqslant p \leqslant \infty$, é separável se $1 \leqslant p < \infty$, e é uniformemente convexo e reflexivo se $1 < p < \infty$. Em particular, $W^{m,2}(\Omega)$ é Hilbert separável.*

1.2 Os espaços de Sobolev fracionários

Nesta seção estudaremos os espaços de Sobolev fracionários $W^{s,p}(\Omega)$, também conhecidos por espaços de Aronszajn, de Gagliardo ou de Slobodeckij.

Definição 1.3. Fixe o expoente fracionário $s \in (0,1)$. Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Para todo $p \in [1,+\infty)$ definimos os espaços de Sobolev fracionários por

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega); \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\frac{n}{p}+s}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \right\}.$$

Lema 1.1. A função $[\cdot]_{W^{s,p}(\Omega)} : W^{s,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$[u]_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy \right)^{\frac{1}{p}}$$

é uma seminorma, chamada seminorma de Gagliardo.

Demonstração. Dadas as funções $u, v \in W^{s,p}(\Omega)$ e $t \in \mathbb{R}$, devemos provar que

i) $[u]_{W^{s,p}(\Omega)} \geqslant 0$ ($[u]_{W^{s,p}(\Omega)}$ é não negativa);

ii) $[tu]_{W^{s,p}(\Omega)} = |t|[u]_{W^{s,p}(\Omega)}$ (homogeneidade);

iii) $[u+v]_{W^{s,p}(\Omega)} \leqslant [u]_{W^{s,p}(\Omega)} + [v]_{W^{s,p}(\Omega)}$ (desigualdade triangular).

Provemos então cada item acima.
i) Observe que para todo $x, y \in \Omega$ vale $\dfrac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} \geqslant 0$. Logo,

$$[u]_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy \right)^{\frac{1}{p}} \geqslant 0.$$

ii) Pela definição da função $[u]_{W^{s,p}(\Omega)}$ temos

$$\begin{aligned}[tu]_{W^{s,p}(\Omega)} &= \left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|tu(x)-tu(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy \right)^{\frac{1}{p}} = |t| \left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= |t|[u]_{W^{s,p}(\Omega)}.\end{aligned}$$

iii) E por fim, dadas as funções $u, v \in W^{s,p}(\Omega)$ pela definição de $[u]_{W^{s,p}(\Omega)}$, segue que

$$\begin{aligned}[u+v]_{W^{s,p}(\Omega)} &= \left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)+v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_\Omega \int_\Omega \left| \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{\frac{n}{p}+s}} + \frac{v(x)-v(y)}{|x-y|^{\frac{n}{p}+s}} \right|^p dxdy \right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned} \tag{1.1}$$

Agora note que para $f \in L^p(\Omega \times \Omega)$ a aplicação $\|f\| = \left(\int_\Omega \int_\Omega |f|^p dxdy \right)^{\frac{1}{p}}$ constitui uma norma no espaço de Banach $L^p(\Omega \times \Omega)$. Assim, tomando

$$U(x,y) = \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{\frac{n}{p}+s}} \quad \text{e} \quad V(x,y) = \frac{v(x) - v(y)}{|x-y|^{\frac{n}{p}+s}}$$

com $(x, y) \in \Omega \times \Omega$, segue de (1.1) que

$$\begin{aligned}
[u+v]_{W^{s,p}(\Omega)} &= \left(\int_\Omega \int_\Omega |U(x,y) + V(x,y)|^p dxdy \right)^{\frac{1}{p}} = \|U + V\|_{L^p(\Omega\times\Omega)} \\
&\leqslant \|U\|_{L^p(\Omega\times\Omega)} + \|V\|_{L^p(\Omega\times\Omega)} \\
&= \left(\int_\Omega \int_\Omega |U(x,y)|^p dxdy \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega \int_\Omega |V(x,y)|^p dxdy \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= [u]_{W^{s,p}(\Omega)} + [v]_{W^{s,p}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

De $i)$, $ii)$ e $iii)$ temos que a função $[u]_{W^{s,p}(\Omega)}$ é de fato uma seminorma. □

Teorema 1.3. *Sejam $s \in (0, 1)$, $p \in [1, +\infty)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Então $W^{s,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma*

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + [u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração. Usando o fato de que $\|u\|_{L^p(\Omega)}$ é uma norma em $L^p(\Omega)$ e $[u]_{W^{s,p}(\Omega)}$ é uma seminorma em $W^{s,p}(\Omega)$, mostraremos inicialmente que $\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}$ é uma norma em $W^{s,p}(\Omega)$. Para isso devemos provar os itens $i)$ $ii)$, e $iii)$ como no lema acima, e provar também que $\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = 0$ se, e somente se, $u = 0$.

i) Como $\|u\|_{L^p(\Omega)}$ e $[u]_{W^{s,p}(\Omega)}$ são ambos não negativos segue que

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \geqslant 0.$$

Agora provaremos que $\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = 0$ se, e somente se, $u = 0$. Primeiro suponha $\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = 0$ daí, $\|u\|_{L^p(\Omega)} = -[u]_{W^{s,p}(\Omega)}$ e portanto, $\|u\|_{L^p(\Omega)} = [u]_{W^{s,p}(\Omega)} = 0$ pois, são termos não negativos. Desse modo por ser $\|u\|_{L^p(\Omega)}$ uma norma igual a zero segue que $u = 0$. Reciprocamente, se $u = 0$ então $|u(x) - u(y)| = 0$ e consequentemente $[u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} = 0$ e além disso, $\|u\|^p_{L^p} = 0$. Portanto $\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = 0$, como queríamos provar.

ii) Usando a homogeneidade da norma e da seminorma garantimos que

$$\begin{aligned}\|tu\|_{W^{s,p}(\Omega)} &= \left(\|tu\|^p_{L^p(\Omega)} + [tu]^p_{W^{s,p}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} = |t|\left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + [u]^p_{W^{s,p}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= |t|\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}.\end{aligned}$$

iii) Pela desigualdade triangular da norma e da seminorma obtemos

$$\begin{aligned}\|u+v\|_{W^{s,p}(\Omega)} &= \left([u+v]^p_{W^{s,p}(\Omega)} + \|u+v\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p} \\ &\leqslant \left[\left([u]_{W^{s,p}(\Omega)} + [v]_{W^{s,p}(\Omega)}\right)^p + \left(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}\right)^p\right]^{1/p}.\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Minkowski (ver Apêndice A, Teorema A.3) temos

$$\begin{aligned}&\left[\left([u]_{W^{s,p}(\Omega)} + [v]_{W^{s,p}(\Omega)}\right)^p + \left(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}\right)^p\right]^{1/p} \\ &\leqslant \left([u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} + \|u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p} + \left([v]^p_{W^{s,p}(\Omega)} + \|v\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p} \\ &= \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{s,p}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Substituindo isso na expressão acima, concluímos que

$$\|u+v\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leqslant \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{s,p}(\Omega)}.$$

Segue de $i)$, $ii)$ e $iii)$ que $\left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + [u]^p_{W^{s,p}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}$ é uma norma para $W^{s,p}(\Omega)$. Agora provaremos que $W^{s,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach com essa norma. Tome uma sequência de Cauchy $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em $W^{s,p}(\Omega)$. Pela definição do espaço $W^{s,p}(\Omega)$ temos que $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(\Omega)$. Analogamente, a sequência $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ definida por $v_k(x,y) := \dfrac{|u_k(x)-u_k(y)|}{|x-y|^{\frac{n}{p}+s}}$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(\Omega\times\Omega)$. Como L^p é um espaço de Banach quando $1 \leqslant p \leqslant \infty$, temos que existem $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^p(\Omega\times\Omega)$ tais que

$$\begin{cases} u_k \to u \text{ em } L^p(\Omega) \\ v_k \to v \text{ em } L^p(\Omega\times\Omega) \end{cases}.$$

Assim, pelo Teorema B.7 do Apêndice B, a menos de subsequência

$$\lim_{k\to+\infty} u_k(x) = u(x) \text{ q.t.p. em } \Omega, \quad \text{e} \quad \lim_{k\to+\infty} v_k(x,y) = v(x,y) \text{ q.t.p. em } \Omega\times\Omega.$$

Portanto,

$$v(x,y) = \lim_{k\to+\infty} v_k(x,y) = \lim_{k\to+\infty} \frac{|u_k(x)-u_k(y)|}{|x-y|^{\frac{n}{p}+s}} = \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\frac{n}{p}+s}},$$

para quase todo ponto $(x,y) \in \Omega \times \Omega$. Assim,

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{\frac{n}{p}+s}} \in L^p(\Omega \times \Omega).$$

Daí, pela definição do espaço $W^{s,p}(\Omega)$, temos que $u \in W^{s,p}(\Omega)$. Isso prova que toda sequência de Cauchy em $W^{s,p}(\Omega)$ converge para uma função que também pertence a $W^{s,p}(\Omega)$, isto é, $W^{s,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach. □

Teorema 1.4. *Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $s \in (0,1)$. Então o espaço $W^{s,p}(\Omega)$ é reflexivo para todo $1 < p < +\infty$.*

Demonstração. Primeiro lembremos que subespaços fechados munidos com a norma induzida de espaços reflexivos, são também reflexivos, e que L^p é um espaço reflexivo quando $1 < p < +\infty$. Para simplificar a notação denote $L^p(\Omega) \times L^p(\Omega \times \Omega) := E$. Agora considere a aplicação

$$T : W^{s,p}(\Omega) \to E$$

dada por $T(u) = (u, v)$ com $v(x,y) = \dfrac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{\frac{n}{p}+s}}$. Para provar que $T(W^{s,p}(\Omega))$ é fechado em E devemos provar que se $T(u_k)$ é uma sequência que converge para (f,g) em E, então $(f,g) \in T(W^{s,p}(\Omega))$, isto é, $(f,g) = T(u) = (u,v)$ para algum $u \in W^{s,p}(\Omega)$. Seja $\lim_{k\to+\infty} T(u_k) = \lim_{k\to+\infty}(u_k, v_k) = (f,g)$ em E, isso implica que $\lim_{k\to+\infty}(u_k) = f$ em $L^p(\Omega)$ e $\lim_{k\to+\infty}(v_k) = g$ em $L^p(\Omega\times\Omega)$. Portanto, pelo Teorema B.7 a menos de subsequência

$$\begin{cases} \lim_{k\to+\infty} u_k(x) = f(x) \text{ q.t.p. em } \Omega \\ \lim_{k\to+\infty} v_k(x,y) = g(x,y) \text{ q.t.p. em } \Omega \times \Omega \end{cases}.$$

Isso implica que

$$g(x,y) = \lim_{k\to+\infty} v_k(x,y) = \lim_{k\to+\infty} \frac{|u_k(x) - u_k(y)|}{|x-y|^{\frac{n}{p}+s}} = \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^{\frac{n}{p}+s}} \text{ q.t.p. em } \Omega \times \Omega,$$

isto é, $(f,g) \in T(W^{s,p}(\Omega))$ e portanto, $T(W^{s,p}(\Omega))$ é fechado em E. Como E é reflexivo (pois L^p o é) segue que $T(W^{s,p}(\Omega))$ é reflexivo. Unindo isso ao fato de que $T : W^{s,p}(\Omega) \to T(W^{s,p}(\Omega))$ é uma isometria (a qual preserva a propriedade de reflexividade) temos que $W^{s,p}(\Omega)$ é um espaço reflexivo quando $1 < p < +\infty$.

A próxima proposição estabelece uma relação de imersão contínua entre os espaços de Sobolev fracionários $W^{s,p}$ e $W^{s',p}$ quando $s, s' \in (0,1)$ e $s \leqslant s'$.

Proposição 1.1. Sejam $p \in [1, +\infty)$, $0 < s < s' < 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Então,

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leqslant C\|u\|_{W^{s',p}(\Omega)},$$

para alguma constante positiva $C = C(n, s, p) \geqslant 1$. Em particular,

$$W^{s',p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega).$$

Demonstração. Seja $u \in W^{s',p}(\Omega)$. Queremos estimar a seminorma

$$[u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} = \int_\Omega \int_{\Omega \cap \{|x-y| \geqslant 1\}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dxdy + \int_\Omega \int_{\Omega \cap \{|x-y|<1\}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dxdy. \tag{1.2}$$

Vamos então majorar as duas integrais duplas em (1.2). Na primeira, fazendo a mudança de variável $z = x - y$, é possível obter uma constante $C_0 \geqslant 0$ satisfazendo

$$\begin{aligned} \int_\Omega \int_{\Omega \cap \{|x-y| \geqslant 1\}} \frac{|u(x)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dxdy &\leqslant \int_\Omega \left(\int_{|z| \geqslant 1} \frac{1}{|z|^{n+sp}} dz \right) |u(x)|^p dx \\ &\leqslant C_0 \|u\|^p_{L^p(\Omega)}, \end{aligned}$$

pois, pelo Teorema A.6 do Apêndice A, a integral $\displaystyle\int_{|z| \geqslant 1} \frac{1}{|z|^{n+sp}} dz$ é finita. Além disso, o Teorema A.4 assegura que $|u(x) - u(y)|^p \leqslant 2^{p-1} \left(|u(x)|^p + |u(y)|^p\right)$, assim

$$\begin{aligned} \int_\Omega \int_{\Omega \cap \{|x-y| \geqslant 1\}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dxdy &\leqslant 2^{p-1} \int_\Omega \int_{\Omega \cap \{|x-y| \geqslant 1\}} \frac{|u(x)|^p + |u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dxdy \\ &\leqslant \int_\Omega \int_{\Omega \cap \{|x-y| \geqslant 1\}} \frac{|u(x)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dxdy \\ &\leqslant C_0 \|u\|^p_{L^p(\Omega)}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Para a segunda, note que $s \leqslant s'$ e $|x - y| < 1$ implicam $\dfrac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} \leqslant \dfrac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+s'p}}$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \int_{\Omega \cap \{|x-y|<1\}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dxdy &\leqslant \int_\Omega \int_{\Omega \cap \{|x-y|<1\}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+s'p}} dxdy \\ &\leqslant \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+s'p}} dxdy \\ &= [u]^p_{W^{s',p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Usando isto e (1.3) em (1.2), obtemos $[u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} \leqslant C_0\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + [u]^p_{W^{s',p}(\Omega)}$. Assim,

$$\begin{aligned}\|u\|^p_{W^{s,p}(\Omega)} &\leqslant \|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \left(C_0\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + [u]^p_{W^{s',p}(\Omega)}\right) = (C_0+1)\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + [u]^p_{W^{s',p}(\Omega)} \\ &= C\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + [u]^p_{W^{s',p}(\Omega)} \leqslant C\left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + [u]^p_{W^{s',p}(\Omega)}\right) = C\|u\|^p_{W^{s',p}(\Omega)}\end{aligned}$$

onde $C = C_0 + 1 \geqslant 1$. Em particular, se $\|u\|_{W^{s',p}(\Omega)} < \infty$, então $\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} < \infty$, ou seja, $W^{s',p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega)$ como queríamos. □

Podemos mostrar que a proposição anterior também é válida para $s' = 1$ desde que Ω seja de classe $C^{0,1}$ no seguinte sentido:

Definição 1.4. Dizemos que o conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é de classe $C^{0,1}$ (ou regular) se existe $M > 0$ tal que para cada $x_0 \in \partial\Omega$ existem uma bola $B = B_r(x_0)$ com $r > 0$ e um isomorfismo $T : Q \to B$ tais que

i) $T \in C^{0,1}(\overline{Q})$ e $T^{-1} \in C^{0,1}(\overline{B})$,

ii) $T(Q_+) = B \cap \Omega$ e $T(Q_0) = B \cap \partial\Omega$,

iii) $\|T\|_{C^{0,1}(\overline{Q})} + \|T^{-1}\|_{C^{0,1}(\overline{B})} \leqslant M$,

onde
$Q := \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R};\ |x'| < 1 \text{ e } |x_n| < 1\}$,
$Q_+ := \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R};\ |x'| < 1 \text{ e } 0 < x_n < 1\}$,
$Q_0 := \{x \in Q;\ x_n = 0\}$.

Proposição 1.2. Sejam $p \in [1, +\infty)$, $s \in (0,1)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto de classe $C^{0,1}$ com fronteira limitada e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Então

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

para alguma constante positiva $C = C(n,s,p) \geqslant 1$. Em particular,

$$W^{1,p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega).$$

Demonstração. Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Assim como na demonstração da proposição anterior, queremos obter uma estimativa para a seminorma

$$[u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} = \int_\Omega \int_{\Omega\cap\{|x-y|\geqslant 1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy + \int_\Omega \int_{\Omega\cap\{|x-y|<1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy. \tag{1.4}$$

De modo inteiramente análogo ao que foi feito lá é possível obter

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega\cap\{|x-y|\geqslant 1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy \leqslant C\|u\|^p_{L^p(\Omega)}. \tag{1.5}$$

Para estimar a segunda integral dupla façamos a mudança de variável $z = y - x$. Assim,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\int_{\Omega\cap\{|x-y|<1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy &= \int_{\Omega}\int_{\Omega\cap\{|z|<1\}} \frac{|u(x)-u(z+x)|^p}{|z|^{n+sp}}dzdx \\ &= \int_{\Omega}\int_{\Omega\cap\{|z|<1\}} \frac{|u(x)-u(z+x)|^p}{|z|^{p}}\frac{1}{|z|^{n+(s-1)p}}dzdx.\end{aligned} \tag{1.6}$$

Observe que tomando $F(t) = u(x+tz)$ com $0 \leqslant t \leqslant 1$ temos que $F'(t) = \nabla u(x+tz)z$. O Teorema Fundamental do Cálculo assegura que

$$\int_0^1 \nabla u(x+tz)zdt = \int_0^1 F'(t)dt = F(1) - F(0) = u(x+z) - u(x),$$

donde

$$|u(x+z)-u(x)|^p = \left|\int_0^1 \nabla u(x+tz)zdt\right|^p \leqslant \left(\int_0^1 |\nabla u(x+tz)z|\,dt\right)^p.$$

Substituindo em (1.6) e usando a Desigualdade de Jensen (ver Apêndice B, Teorema B.2) obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\int_{\Omega\cap\{|x-y|<1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy &\leqslant \int_{\Omega}\int_{\Omega\cap\{|z|<1\}} \left(\int_0^1 \frac{|\nabla u(x+tz)z|}{|z|}dt\right)^p \frac{1}{|z|^{n+(s-1)p}}dzdx \\ &\leqslant \int_{\Omega}\int_{\Omega\cap\{|z|<1\}} \int_0^1 \frac{|\nabla u(x+tz)z|^p}{|z|^p}dt\frac{1}{|z|^{n+(s-1)p}}dzdx.\end{aligned} \tag{1.7}$$

Agora observe que sendo Ω um domínio de classe $C^{0,1}$ com fronteira limitada podemos usar o Teorema de Extensão (ver Apêndice B, Teorema B.1) para garantir a existência de uma função $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ que satisfaz $\tilde{u}|_{\Omega} = u$ e $\|\tilde{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ para uma constante apropriada C que depende apenas de Ω. Assim,

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega\cap\{|z|<1\}}\int_0^1 \frac{|\nabla u(x+tz)z|^p}{|z|^p}dt\frac{1}{|z|^{n+(s-1)p}}dzdx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\Omega\cap\{|z|<1\}}\int_0^1 \frac{|\nabla\tilde{u}(x+tz)|^p}{|z|^{n+(s-1)p}}dtdzdx. \tag{1.8}$$

Por fim, pelo Teorema de Fubini (ver Apêndice B, Teorema B.4) obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\Omega\cap\{|z|<1\}}\int_0^1 \frac{|\nabla\tilde{u}(x+tz)|^p}{|z|^{n+(s-1)p}}dtdzdx &= \int_{\Omega\cap\{|z|<1\}}\int_0^1\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\nabla\tilde{u}(x+tz)|^p}{|z|^{n+(s-1)p}}dxdtdz\\ &= \int_{\Omega\cap\{|z|<1\}}\int_0^1 \frac{\|\nabla\tilde{u}\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}}{|z|^{n+(s-1)p}}dtdz\\ &\leqslant C\|\nabla\tilde{u}\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Assim, por (1.7), (1.8) e (1.9) segue que

$$\int_\Omega\int_{\Omega\cap\{|x-y|<1\}}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy \leqslant C\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Substituindo essa informação juntamente com (1.5) em (1.4), temos

$$[u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} \leqslant C\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + C\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \leqslant C\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Assim,

$$\|u\|^p_{W^{s,p}(\Omega)} \leqslant \|u\|^p_{L^p(\Omega)} + C\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \leqslant \|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} + C\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \leqslant C\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)},$$

isto é,

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

onde a constante $C = C(n,s,p)$ é possivelmente diferente em cada passo acima e a prova de que pelo menos a última é maior do que, ou igual a um, é semelhante à que fizemos na proposição anterior. Em particular, se $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \infty$ então $\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} < \infty$, ou seja, $W^{1,p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega)$ como queríamos. $\square$

A diferença entre as demonstrações destas duas proposições consiste de fato em estimar a segunda integral dupla em (1.4) pois, na Proposição 1.1 ela foi majorada pela seminorma de Gagliardo em $W^{s',p}$ porém, na Proposição 1.2 temos $s' = 1$ e a seminorma não está definida para $W^{1,p}$.

Observação 1.1. Voltemos à definição do espaço $W^{s,p}(\Omega)$. A Definição 1.3 não pode ser simplesmente estendida para o caso $s \geqslant 1$ pois, se supormos por exemplo Ω conexo e limitado o espaço $W^{s,p}(\Omega)$ se reduziria a um espaço de funções constantes. Para verificar este fato usaremos o lema a seguir, o qual pode ser encontrado em [5].

Lema 1.2. [5, Proposição 2] Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto conexo de $\mathbb{R}^n$ e

$1 \leqslant p < \infty$. Então qualquer função mensurável $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+p}} dxdy < \infty \tag{1.10}$$

é constante.

Agora voltando para o problema acima, seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ conexo e limitado. Suponha que a Definição 1.3 possa ser simplesmente estendida para o caso em que $s = 1$. Assim, dada uma função $u \in W^{1,p}(\Omega)$ teríamos

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\frac{n}{p}+1}} \in L^p(\Omega \times \Omega)$$

e portanto, pelo Lema 1.2, $W^{1,p}(\Omega)$ seria um espaço de funções constantes. Agora suponha que tal definição faça sentido para o caso em que $s > 1$. Dada $u \in W^{s,p}(\Omega)$ teríamos

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\frac{n}{p}+s}} \in L^p(\Omega \times \Omega),$$

isto equivale a dizer que,

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dxdy < \infty.$$

Usando este fato vamos provar (1.10). Sabemos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+p}} dxdy &= \int_\Omega \int_{\Omega \cap \{|x-y| \geqslant 1\}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+p}} dxdy \\ &+ \int_\Omega \int_{\Omega \cap \{|x-y| < 1\}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+p}} dxdy. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Agora vamos provar que as integrais duplas à direita da igualdade em (1.11) são finitas. Primeiramente observe que como $s > 1$ temos $n+sp > n+p$. Assim, quando $|x-y| < 1$ temos $|x - y|^{n+sp} < |x - y|^{n+p}$ e portanto,

$$\int_\Omega \int_{\Omega \cap \{|x-y| < 1\}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+p}} dxdy < \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dxdy < \infty. \tag{1.12}$$

Por outro lado, quando $|x - y| \geqslant 1$ temos

$$\int_\Omega \int_{\Omega \cap \{|x-y| \geqslant 1\}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+p}} dxdy \leqslant \int_\Omega \int_{\Omega \cap \{|x-y| \geqslant 1\}} |u(x) - u(y)|^p dxdy. \tag{1.13}$$

Usando o Teorema A.4 e o fato de que Ω é limitado temos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\int_{\Omega\cap\{|x-y|\geqslant 1\}}|u(x)-u(y)|^p dxdy &\leqslant 2^{p-1}\int_{\Omega}\int_{\Omega\cap\{|x-y|\geqslant 1\}}\left(|u(x)|^p+|u(y)|^p\right)dxdy\\ &\leqslant 2^{p-1}\int_{\Omega}\int_{\Omega}|u(x)|^p dxdy+2^{p-1}\int_{\Omega}\int_{\Omega}|u(y)|^p dxdy\\ &= 2^{p-1}\|u\|^p_{Lp(\Omega)}|\Omega|+2^{p-1}\|u\|^p_{Lp(\Omega)}|\Omega|\\ &= 2^p\|u\|^p_{Lp(\Omega)}|\Omega|<\infty.\end{aligned}$$

Substituindo em (1.13) concluímos que

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega\cap\{|x-y|\geqslant 1\}}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+p}}dxdy<\infty.$$

Assim, substituindo essa informação juntamente com (1.12) em (1.11), obtemos (1.10). Daí, pelo Lema 1.2 o espaço $W^{s,p}(\Omega)$ teria apenas funções contantes, como afirmamos na Observação 1.1.

Como queremos definir $W^{s,p}(\Omega)$ para um subconjunto aberto qualquer $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ conforme vimos não faz sentido simplesmente estender a Definição 1.3. Agora vamos definir o espaço $W^{s,p}(\Omega)$ para $s>1$ não inteiro.

Definição 1.5. Sejam $p\in[1,+\infty)$ e $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Seja $s>1$ um número não inteiro tal que $s=m+\sigma$ com $m\in\mathbb{N}$ e $\sigma\in(0,1)$. Definimos o espaço de Sobolev fracionário por

$$W^{s,p}(\Omega)=\left\{u\in W^{m,p}(\Omega); D^\alpha u\in W^{\sigma,p}(\Omega)\text{ com }|\alpha|=m\right\}.$$

E este é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}=\left(\|u\|^p_{W^{m,p}(\Omega)}+\sum_{|\alpha|=m}\|D^\alpha u\|^p_{W^{\sigma,p}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.14}$$

O próximo resultado estabelece uma relação de inclusão entre os espaços de Sobolev fracionários $W^{s,p}$ e $W^{s',p}$ quando $s,s'>1$ são não inteiros.

Corolário 1.1. Sejam $p\in[1,+\infty)$, $s,s'>1$ com $s'\geqslant s$ e Ω um domínio de classe $C^{0,1}$ com fronteira limitada. Então

$$W^{s',p}(\Omega)\subseteq W^{s,p}(\Omega).$$

Demonstração. Sejam $s=m+\sigma$ e $s'=m'+\sigma'$ com $m,m'\in\mathbb{N}$ e $\sigma,\sigma'\in(0,1)$. Tome

$u \in W^{s',p}(\Omega)$. Pela Definição 1.5 temos

$$u \in W^{m',p}(\Omega) \text{ e } D^\alpha u \in W^{\sigma',p}(\Omega) \text{ onde } |\alpha| = m'.$$

Como $s' \geqslant s$, temos duas possibilidades:
1) $m' = m$. Como $s' = m' + \sigma' \geqslant s = m + \sigma$ devemos ter $\sigma' \geqslant \sigma$. Assim,

$$u \in W^{m,p}(\Omega) \text{ e } D^\alpha u \in W^{\sigma,p}(\Omega) \text{ onde } |\alpha| = m$$

pois, $W^{m',p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$ e pela Proposição 1.1 tem-se $W^{\sigma',p}(\Omega) \subset W^{\sigma,p}(\Omega)$. Portanto, $W^{s',p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega)$.
2) $m' \geqslant m + 1$. Neste caso decorre direto das Definições 1.2 e 1.5 que

$$W^{s',p}(\Omega) \subseteq W^{m',p}(\Omega) \subseteq W^{m+1,p}(\Omega).$$

Portanto, basta provar que

$$W^{m+1,p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega). \tag{1.15}$$

Para isso, observe que pela Definição 1.2 temos $W^{m+1,p}(\Omega) \subseteq W^{m,p}(\Omega)$. Assim resta verificar que $D^\alpha u \in W^{\sigma,p}(\Omega)$ com $|\alpha| = m$. Com efeito, se $u \in W^{m+1,p}(\Omega)$ então $u \in L^p(\Omega)$ e $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ para $|\alpha| \leqslant m + 1$. Isso garante em particular, que $D^\alpha u \in W^{1,p}(\Omega)$ sempre que $|\alpha| \leqslant m$. Como $\sigma \in (0,1)$ e Ω é de classe $C^{0,1}$ pela Proposição 1.2 temos $W^{1,p}(\Omega) \subseteq W^{\sigma,p}(\Omega)$ portanto, $D^\alpha u \in W^{\sigma,p}(\Omega)$ quando $|\alpha| = m$. Assim $u \in W^{s,p}(\Omega)$. Isso prova (1.15) e conclui a demonstração. □

A seguir enunciaremos sem prova um teorema que será muito útil no decorrer deste trabalho. Sua demonstração pode ser encontrada no artigo [10] cujo objetivo é justamente provar tal resultado.

Teorema 1.5. *[10, Teorema 2] Para todo $s > 0$, o espaço $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ das funções suaves com suporte compacto é denso em $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$.*

Seja $W_0^{s,p}(\Omega)$ o fecho do conjunto $C_0^\infty(\Omega)$ na norma $\|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega)}$ definida em (1.14). Decorre do Teorema 1.5 que

$$W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n) = W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$$

mas, em geral dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ temos $W^{s,p}(\Omega) \neq W_0^{s,p}(\Omega)$. Em outras palavras, $C_0^\infty(\Omega)$ não é denso em $W^{s,p}(\Omega)$. Além disso, as mesmas inclusões provadas nas Proposições 1.1 e 1.2 e no Corolário 1.1 são válidas para os espaços $W_0^{s,p}(\Omega)$.

1.3 O espaço H^s e o operador Laplaciano fracionário

Nesta seção focaremos no caso em que $p = 2$. Este é um caso importante uma vez que $W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$ e $W_0^{s,2}(\mathbb{R}^n)$ são espaços de Hilbert. Tais espaços são usualmente denotados por $H^s(\mathbb{R}^n)$ e $H_0^s(\mathbb{R}^n)$ respectivamente. Iniciaremos definindo o espaço de Schwartz $\mathscr{S}$ e o operador Laplaciano fracionário $(-\Delta)^s(u)$ com $s \in (0,1)$ e $u \in \mathscr{S}$.

Dados $\alpha \in \{0\} \cup \mathbb{N}^n$ e $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ denotamos

$$|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n, \;\; x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}, \text{ e } \partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \circ \partial_2^{\alpha_2} \circ \cdots \circ \partial_n^{\alpha_n}.$$

Definição 1.6. O espaço de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ou das funções rapidamente decrescentes é a coleção das funções $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ tais que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty,$$

para quaisquer multi-índices α, β.

Isto é, as funções de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ tendem mais rápido a zero do que o inverso de qualquer polinômio, quando $|x| \to \infty$. A topologia desse espaço é gerada pelas seminormas,

$$p_N(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^N \sum_{|\alpha| \leqslant N} |D^\alpha \varphi(x)|, \;\; N = 0, 1, 2, ...,$$

onde $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.7. Definimos o operador Laplaciano fracionário $(-\Delta)^s : \mathscr{S} \to L^2(\mathbb{R}^n)$ por

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s u(x) &= C(n,s) P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy \\ &:= C(n,s) \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{B_\epsilon^c(x)} \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy, \; \forall x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{1.16}$$

onde $B_\epsilon^c(x) = \mathbb{R}^n \backslash B_\epsilon(x)$, e a constante C é dada por

$$C(n,s) := \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - cos(\zeta_1)}{|\zeta|^{n+2s}} d\zeta \right)^{-1}, \tag{1.17}$$

sendo $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n)$ e $P.V.$ é uma abreviação para "valor principal".

Vejamos que o limite dado em (1.16) existe para todo $s \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. De fato, seja $u \in \mathscr{S}$. Sabemos que

$$|u(x) - u(y)| \leqslant |u(x)| + |u(y)| \leqslant \|u\|_\infty + \|u\|_\infty = 2\|u\|_\infty \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Além disso, como $|\nabla u|$ é uma função limitada temos que u é lipschitziana, donde $|u(x)-u(y)| \leqslant C|x-y|$. Então

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{n+2s}}dy &\leqslant C\int_{B_1(x)} \frac{|x-y|}{|x-y|^{n+2s}}dy + 2\|u\|_\infty \int_{B_1^c(x)} \frac{1}{|x-y|^{n+2s}}dy \\ &= C_1\left(\int_{B_1(x)} \frac{1}{|x-y|^{n+2s-1}}dy + \int_{B_1^c(x)} \frac{1}{|x-y|^{n+2s}}dy\right).\end{aligned}$$

Como $s>0$ pelo Teorema A.6 a integral

$$\int_{B_1^c(x)} \frac{1}{|x-y|^{n+2s}}dy$$

é sempre finita. Porém, pelo mesmo teorema a integral

$$\int_{B_1(x)} \frac{1}{|x-y|^{n+2s-1}}dy$$

é finita se, e somente se, $s \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Ou seja, a função $(u(x)-u(y))/|x-y|^{(n+2s-1)}$ pertence a $L^1(\mathbb{R}^n)$ quando $s \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Porém, não podemos afirmar o mesmo quando $s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \subset (0,1)$ pois, $|x-y|^{-(n+2s-1)}$ não é integrável na vizinhança da origem.

Agora vamos reescrever o operador Laplaciano fracionário de forma que esteja bem definido para todo $s \in (0,1)$.

Lema 1.3. Sejam $s \in (0,1)$ e $(-\Delta)^s$ o operador Laplaciano fracionário visto na Definição 1.7. Então para toda função $u \in \mathscr{S}$

$$(-\Delta)^s u(x) = -\frac{1}{2}C(n,s)\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{n+2s}}dy, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. Usando a Definição 1.7 e fazendo a mudança de variável $z = y - x$, temos

$$\begin{aligned}(-\Delta)^s u(x) &= -C(n,s)\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{B_\epsilon^c(x)} \frac{u(y)-u(x)}{|x-y|^{n+2s}}dy \\ &= -C(n,s)\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{B_\epsilon^c(0)} \frac{u(z+x)-u(x)}{|z|^{n+2s}}dz.\end{aligned} \tag{1.18}$$

Além disso, fazendo $\tilde{z} = -z$ no último termo da igualdade temos

$$\int_{B_\epsilon^c(0)} \frac{u(x+z)-u(x)}{|z|^{n+2s}}dz = \int_{B_\epsilon^c(0)} \frac{u(x-\tilde{z})-u(x)}{|\tilde{z}|^{n+2s}}d\tilde{z}.$$

Agora para simplificar tomemos $\tilde{z} = z$. Assim,

$$\begin{aligned} 2\int_{B_\epsilon^c(0)} \frac{u(x+z)-u(x)}{|z|^{n+2s}}dz &= \int_{B_\epsilon^c(0)} \frac{u(x+z)-u(x)}{|z|^{n+2s}}dz \\ &+ \int_{B_\epsilon^c(0)} \frac{u(x-z)-u(x)}{|z|^{n+2s}}dz \\ &= \int_{B_\epsilon^c(0)} \frac{u(x+z)+u(x-z)-2u(x)}{|z|^{n+2s}}dz. \end{aligned}$$

Substituindo essa informação em (1.18) e fazendo $y = z$, temos

$$(-\Delta)^s u(x) = -\frac{1}{2}C(n,s)P.V.\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{n+2s}}dy.$$

Resta verificar que é desnecessário escrever "$P.V.$", isto é, que a integral acima é finita. De fato, pela Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange tomando y próximo da origem temos

$$u(x+y) = u(x) + \nabla u(x)y + r(x)(y)$$

e

$$u(x-y) = u(x) - \nabla u(x)y + r(x)(-y),$$

onde

$$r(x)(y) = \frac{1}{2}D^2u(x+\theta y)\cdot y^2 = \frac{1}{2}\langle y, H(x+\theta y)y\rangle,$$

$\theta \in (0,1)$ e $H(x)$ é a matriz hessiana de u em x. Assim,

$$\begin{aligned} |u(x+y)+u(x-y)-2u(x)| &= |r(x)(y)+r(x)(-y)| \\ &= \left|\frac{1}{2}D^2u(x+\theta y)y^2 + \frac{1}{2}D^2u(x-\theta y)y^2\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left[\left|D^2u(x+\theta y)\right||y|^2 + \left|D^2u(x-\theta y)\right||y|^2\right] \\ &\leqslant \left\|D^2u\right\|_\infty |y|^2. \end{aligned}$$

Donde

$$\frac{|u(x+y)+u(x-y)-2u(x)|}{|y|^{n+2s}} \leqslant \frac{\|D^2u\|_\infty}{|y|^{n+2s-2}}.$$

Daí, tomando $\delta > 0$ suficientemente pequeno temos

$$\begin{aligned} \int_{B_\delta(0)} \frac{|u(x+y)+u(x-y)-2u(x)|}{|y|^{n+2s}}dy &\leqslant \int_{B_\delta(0)} \frac{\|D^2u\|_\infty}{|y|^{n+2s-2}}dy \\ &\leqslant \left\|D^2u\right\|_\infty \int_{B_\delta(0)} \frac{1}{|y|^{n+2s-2}}dy < \infty. \end{aligned}$$

E desde que $u \in \mathscr{S}$ temos que $u \in L^\infty$. Logo,

$$\int_{B_\delta^c(0)} \frac{|u(x+y)+u(x-y)-2u(x)|}{|y|^{n+2s}} dy < \infty.$$

Portanto, dessas duas últimas estimativas obtidas acima, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x+y)+u(x-y)-2u(x)|}{|y|^{n+2s}} dy < \infty.$$

Assim, de fato podemos escrever simplesmente

$$(-\Delta)^s u(x) = -\frac{1}{2} C(n,s) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{n+2s}} dy,$$

como queríamos. $\square$

Uma abordagem via transformada de Fourier

Nesta subseção definiremos o espaço H^s por meio da transformada de Fourier e provaremos que quando $s \in (0,1)$ esta definição coincide com aquela que foi dada por meio da seminorma de Gagliardo. Veremos também a relação do operador Laplaciano fracionário com a transformada de Fourier e faremos um resultado sobre o traço das funções do espaço de Sobolev fracionário.

Definição 1.8. Para cada $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ definimos a transformada de Fourier de φ $\mathscr{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ por

$$\mathscr{F}\varphi(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} \varphi(x) dx,$$

onde $x = (x_1, ..., x_n), \xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ e $x \cdot \xi = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j$ é o produto interno usual do $\mathbb{R}^n$.

De acordo com [6, Teorema 2.5] a aplicação $\mathscr{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ é um isomorfismo com inversa

$$\mathscr{F}^{-1}\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi \cdot x} \varphi(\xi) d\xi \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

E vale ainda a inversão

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi \cdot x} \mathscr{F}\varphi(\xi) d\xi \ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

conforme [6, Teorema 2.4].

Agora vamos definir de forma alternativa o espaço $H^s(\mathbb{R}^n) = W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$ via transformada de Fourier da seguinte forma,

$$\hat{H}^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n); \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |\xi|^{2s}\right) |\mathscr{F}u(\xi)|^2 d\xi < \infty \right\}. \tag{1.19}$$

Observe que diferentemente da definição via seminorma de Gagliardo, essa definição faz sentido para $s \geqslant 1$.

O próximo resultado estabelece uma relação entre o operador Laplaciano fracionário e a transformada de Fourier.

Proposição 1.3. Sejam $s \in (0,1)$, $u \in \mathscr{S}$ e $(-\Delta)^s : \mathscr{S} \to L^2(\mathbb{R}^n)$ o operador Laplaciano fracionário visto na Definição 1.7. Então

$$(-\Delta)^s u = \mathscr{F}^{-1}\left(|\xi|^{2s}(\mathscr{F}u)\right) \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.20}$$

Demonstração. Iniciemos definindo

$$\mathscr{L}u(x) := -\frac{1}{2}C(n,s)\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{n+2s}}dy,$$

com $C(n,s)$ como em (1.17). Observe que $\mathscr{L}$ é um operador linear. De fato, dados $u, v \in \mathscr{S}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(u+\lambda v)(x) &= -\frac{1}{2}C(n,s)\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u+\lambda v)(x+y)+(u+\lambda v)(x-y)-2(u+\lambda v)(x)}{|y|^{n+2s}}dy \\
&= -\frac{1}{2}C(n,s)\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{n+2s}}dy \\
&\quad -\frac{\lambda}{2}C(n,s)\int_{\mathbb{R}^n} \frac{v(x+y)+v(x-y)-2v(x)}{|y|^{n+2s}}dy \\
&= \mathscr{L}u(x) + \lambda\mathscr{L}v(x).
\end{aligned}$$

Estamos procurando uma função $\mathcal{S} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que satisfaça $\mathscr{L}u = \mathscr{F}^{-1}(\mathcal{S}(\mathscr{F}u))$, isto é, $\mathcal{S}(\mathscr{F}u) = \mathscr{F}(\mathscr{L}u)$ e na verdade queremos provar que

$$\mathcal{S}(\xi) = |\xi|^{2s}. \tag{1.21}$$

Afirmação 1.1. Para cada $u \in \mathscr{S}$ temos

$$\frac{|u(x+y)+u(x-y)-2u(x)|}{|y|^{n+2s}} \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n).$$

Com efeito,

$$
\begin{aligned}
&\frac{|u(x+y)+u(x-y)-2u(x)|}{|y|^{n+2s}} \\
&= \chi_{B_1(0)}(y)|y|^{2-n-2s}\sup_{B_1(x)}|D^2u| + \chi_{B_1^c(0)}(y)|u(x+y)+u(x-y)-2u(x)||y|^{-n-2s} \\
&\leqslant C\big(\chi_{B_1(0)}(y)|y|^{2-n-2s}(1+|x|^{n+1})^{-1} + \chi_{B_1^c(0)}(y)|u(x+y)+u(x-y)-2u(x)||y|^{-n-2s}\big).
\end{aligned}
$$

Isto implica que

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(x+y)+u(x-y)-2u(x)|}{|y|^{n+2s}}dxdy \\
&= \int_{B_\epsilon(0)}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(x+y)+u(x-y)-2u(x)|}{|y|^{n+2s}}dxdy + \int_{B_\epsilon^c(0)}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(x+y)+u(x-y)-2u(x)|}{|y|^{n+2s}}dxdy \\
&\leqslant \int_{B_\epsilon(0)}\int_{\mathbb{R}^n}|y|^{2-n-2s}(1+|x|^{n+1})^{-1}dxdy + \int_{B_\epsilon^c(0)}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(x+y)+u(x-y)-2u(x)|}{|y|^{n+2s}}dxdy \\
&= \int_{B_\epsilon(0)}\frac{1}{|y|^{n+2s-2}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{1+|x|^{n+1}}dxdy + \int_{B_\epsilon^c(0)}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(x+y)+u(x-y)-2u(x)|}{|y|^{n+2s}}dxdy.
\end{aligned}
$$

Agora resta estimar essas duas integrais duplas. Para isso observe que

$$
\begin{aligned}
&\int_{B_\epsilon(0)}\frac{1}{|y|^{n+2s-2}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{1+|x|^{n+1}}dxdy \\
&\qquad\leqslant \int_{B_\epsilon(0)}\frac{1}{|y|^{n+2s-2}}\int_{B_1(0)}1dxdy + \int_{B_\epsilon(0)}\frac{1}{|y|^{n+2s-2}}\int_{B_1^c(0)}\frac{1}{|x|^{n+1}}dxdy < \infty,
\end{aligned}
$$

em virtude do Teorema A.6. Para majorar a outra integral dupla, note que

$$
\frac{|u(x+y)+u(x-y)-2u(x)|}{|y|^{n+2s}} \leqslant \frac{|u(x+y)|+|u(x-y)|+2|u(x)|}{|y|^{n+2s}}.
$$

Unindo essa desigualdade ao Teorema A.6 e lembrando que $u \in \mathscr{S}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_{B_\epsilon^c(0)}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(x+y)+u(x-y)-2u(x)|}{|y|^{n+2s}}dxdy \\
&\qquad\leqslant \int_{B_\epsilon^c(0)}\frac{1}{|y|^{n+2s}}\int_{\mathbb{R}^n}|u(x+y)|dxdy + \int_{B_\epsilon^c(0)}\frac{1}{|y|^{n+2s}}\int_{\mathbb{R}^n}|u(x-y)|dxdy \\
&\qquad+ 2\int_{B_\epsilon^c(0)}\frac{1}{|y|^{n+2s}}\int_{\mathbb{R}^n}|u(x)|dxdy < \infty.
\end{aligned}
$$

Isso prova a Afirmação 1.1. Desse modo podemos usar o Teorema de Fubini (ver

Teorema B.4) e obter

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(\xi)(\mathscr{F}u(\xi)) = \mathscr{F}(\mathscr{L}u(\xi)) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot x}\mathscr{L}u(x)dx \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\frac{1}{2}C(n,s)\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot x}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{n+2s}}dydx \\
&= -\frac{1}{2}C(n,s)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{|y|^{n+2s}(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot x}(u(x+y)+u(x-y)-2u(x))dxdy \\
&= -\frac{1}{2}C(n,s)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\mathscr{F}(u(x+y)+u(x-y)-2u(x))}{|y|^{n+2s}}dy. \qquad (1.22)
\end{aligned}$$

Afirmação 1.2.

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\mathscr{F}(u(x+y)+u(x-y)-2u(x))}{|y|^{n+2s}}dy = \int_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{i\xi\cdot y}+e^{-i\xi\cdot y}-2}{|y|^{n+2s}}dy(\mathscr{F}u)(\xi).$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{i\xi\cdot y}+e^{-i\xi\cdot y}-2}{|y|^{n+2s}}dy(\mathscr{F}u)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{i\xi\cdot y}+e^{-i\xi\cdot y}-2}{|y|^{n+2s}}dy\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot x}u(x)dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{i\xi\cdot y}+e^{-i\xi\cdot y}-2}{|y|^{n+2s}}e^{-i\xi\cdot x}u(x)dxdy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{|y|^{n+2s}}\int_{\mathbb{R}^n}\left(e^{i\xi\cdot(y-x)}u(x)+e^{-i\xi\cdot(y+x)}u(x)-2e^{-i\xi\cdot(x)}u(x)\right)dxdy.
\end{aligned}$$

Fazendo $z = x - y$ e $\tilde{z} = x + y$ obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{i\xi\cdot y}+e^{-i\xi\cdot y}-2}{|y|^{n+2s}}dy(\mathscr{F}u)(\xi) \\
&\quad= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{|y|^{n+2s}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot z}u(y+z)dz+\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot\tilde{z}}u(\tilde{z}-y)d\tilde{z}\right)dy \\
&\quad+ \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{|y|^{n+2s}}\int_{\mathbb{R}^n}-2e^{-i\xi\cdot x}u(x)dxdy.
\end{aligned}$$

Agora voltando para a variável x vemos que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{i\xi\cdot y}+e^{-i\xi\cdot y}-2}{|y|^{n+2s}}dy(\mathscr{F}u)(\xi) \\
&\qquad= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{|y|^{n+2s}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot x}(u(x+y)+u(x-y)-2u(x))dxdy \\
&\qquad= \int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{|y|^{n+2s}(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot x}(u(x+y)+u(x-y)-2u(x))\,dxdy \\
&\qquad= \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\mathscr{F}(u(x+y)+u(x-y)-2u(x))}{|y|^{n+2s}}dy.
\end{aligned}$$

Isso prova a Afirmação 1.2. Substituindo este resultado em (1.22) e usando o fato de que $e^{i\xi\cdot y}+e^{-i\xi\cdot y}=2cos(\xi\cdot y)$, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\xi)(\mathscr{F}u(\xi)) &= -\frac{1}{2}C(n,s)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{i\xi\cdot y}+e^{-i\xi\cdot y}-2}{|y|^{n+2s}}dy(\mathscr{F}u)(\xi)\\ &= -\frac{1}{2}C(n,s)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{2cos(\xi\cdot y)-2}{|y|^{n+2s}}dy(\mathscr{F}u)(\xi)\\ &= C(n,s)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1-cos(\xi\cdot y)}{|y|^{n+2s}}dy(\mathscr{F}u)(\xi). \qquad (1.23)\end{aligned}$$

Assim, é suficiente provar que

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1-cos(\xi\cdot y)}{|y|^{n+2s}}dy=\frac{|\xi|^{2s}}{C(n,s)}. \qquad (1.24)$$

Para isso veja que se $\zeta=(\zeta_1,...,\zeta_n)\in\mathbb{R}^n$ está próximo da origem, então

$$\frac{1-cos(\zeta 1)}{|\zeta|^{n+2s}}\leqslant\frac{|\zeta_1|^2}{|\zeta|^{n+2s}}\leqslant\frac{1}{|\zeta|^{n+2s-2}}.$$

Portanto, pelo Teorema A.6 garantimos que

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1-cos(\zeta 1)}{|\zeta|^{n+2s}}d\zeta \text{ é finita e positiva.}$$

Agora considere a função $I:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ definida por

$$I(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1-cos(\xi\cdot y)}{|y|^{n+2s}}dy.$$

Afirmação 1.3. I é invariante por rotação, isto é, $I(\xi)=I(|\xi|e_1)$ onde $e_1=(1,...,0)$ é o primeiro vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Com efeito, para $n=1$ temos que $e_1=1$. Assim dado $\xi\in\mathbb{R}$ temos as duas possibilidades a seguir:

1) Se $|\xi|=\xi$ então a igualdade $I(|\xi|e_1)=I(\xi)$ é imediata.

2) Se $|\xi|=-\xi$, lembrando que a função cosseno é par, segue que

$$I(|\xi|e_1)=I(|\xi|)=\int_{\mathbb{R}}\frac{1-cos(|\xi|y)}{|y|^{n+2s}}dy=\int_{\mathbb{R}}\frac{1-cos(-\xi y)}{|y|^{n+2s}}dy=\int_{\mathbb{R}}\frac{1-cos(\xi y)}{|y|^{n+2s}}dy=I(\xi).$$

Agora para o caso em que $n\geqslant 2$, considere a rotação R para a qual $R(|\xi|e_1)=\xi$ e denote por R^T sua transposição. Tomando $\tilde{y} = R^T y$ temos

$$\begin{aligned} I(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - cos(\xi \cdot y)}{|y|^{n+2s}} dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - cos(R(|\xi| e_1) \cdot y)}{|y|^{n+2s}} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - cos((|\xi| e_1) \cdot (R^T y))}{|y|^{n+2s}} dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - cos((|\xi| e_1) \cdot \tilde{y})}{|\tilde{y}|^{n+2s}} d\tilde{y} = I(|\xi| e_1). \end{aligned}$$

Isso prova a Afirmação 1.3. Assim, fazendo $\zeta = |\xi| y$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - cos(\xi \cdot y)}{|y|^{n+2s}} dy = I(\xi) = I(|\xi| e_1) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - cos((|\xi| e_1) \cdot y)}{|y|^{n+2s}} dy \\ = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - cos(|\xi| y_1)}{|y|^{n+2s}} dy &= \frac{|\xi|^{n+2s}}{|\xi|^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - cos(\zeta_1)}{|\zeta|^{n+2s}} d\zeta = \frac{|\xi|^{2s}}{C(n,s)}, \end{aligned}$$

onde $C(n,s)$ é a constante definida em (1.17). Isso prova (1.24). Substituindo essa informação em (1.23) temos a igualdade em (1.21) como queríamos. □

A seguir provaremos que quando $s \in (0,1)$, definir o espaço H^s através da seminorma de Gagliardo é o mesmo que defini-lo via a transformada de Fourier.

Proposição 1.4. Seja $s \in (0,1)$. Então o espaço de Sobolev fracionário $H^s(\mathbb{R}^n)$ definido por meio da seminorma de Gagliardo coincide com $\hat{H}^s(\mathbb{R}^n)$ definido através da transformada de Fourier. Em particular, para toda função $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ temos

$$[u]^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} = 2C(n,s)^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\mathscr{F} u(\xi)|^2 d\xi, \tag{1.25}$$

onde $C(n,s)$ é a constante definida em (1.17).

Demonstração. Considerando $z = x - y$ e usando a Fórmula de Plancherel (ver Apêndice B, Teorema B.10) temos

$$\begin{aligned} [u]^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(z+y) - u(y)|^2}{|z|^{n+2s}} dzdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{u(z+y) - u(y)}{|z|^{\frac{n}{2}+s}} \right|^2 dydz = \int_{\mathbb{R}^n} \left\| \frac{u(z+\cdot) - u(\cdot)}{|z|^{\frac{n}{2}+s}} \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left\| \mathscr{F} \left(\frac{u(z+\cdot) - u(\cdot)}{|z|^{\frac{n}{2}+s}} \right) \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} dz. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Observe que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\left| e^{i\xi \cdot z} - 1 \right|^2}{|z|^{n+2s}} |\mathscr{F} u(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{|z|^{n+2s}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\left(e^{i\xi \cdot z} - 1 \right) \mathscr{F} u(\xi) \right)^2 d\xi.$$

Assim, seguindo de modo análogo ao que fizemos na Afirmação 1.2 na demonstração da proposição anterior, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \left\| \mathscr{F}\left(\frac{u(z+\cdot)-u(\cdot)}{|z|^{\frac{n}{2}+s}} \right) \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} dz &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\left|e^{i\xi\cdot z}-1\right|^2}{|z|^{n+2s}} |\mathscr{F}u(\xi)|^2 d\xi dz \\
&= 2\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1-cos(\xi\cdot z))}{|z|^{n+2s}} |\mathscr{F}u(\xi)|^2 dz d\xi \\
&= 2\int_{\mathbb{R}^n} |\mathscr{F}u(\xi)|^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1-cos(\xi\cdot z))}{|z|^{n+2s}} dz d\xi.
\end{aligned}$$

Usando (1.24) na expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \left\| \mathscr{F}\left(\frac{u(z+\cdot)-u(\cdot)}{|z|^{\frac{n}{2}+s}} \right) \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} dz &= 2\int_{\mathbb{R}^n} C(n,s)^{-1}|\xi|^{2s}|\mathscr{F}u(\xi)|^2 d\xi \\
&= 2C(n,s)^{-1}\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s}|\mathscr{F}u(\xi)|^2 d\xi.
\end{aligned}$$

Substituindo essa informação em (1.26) temos a igualdade em (1.25). Agora para provar a equivalência entre as definições relembre que

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n); [u]^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\},$$

e

$$\hat{H}^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n); \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^{2s})|\mathscr{F}u(\xi)|^2 d\xi < \infty \right\}.$$

Sabemos ainda que dada uma função $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ pela Fórmula de Plancherel $\|\mathscr{F}u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty$. Daí usando (1.25), temos

$$[u]^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} < \infty \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s}|\mathscr{F}u(\xi)|^2 d\xi < \infty \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^{2s})|\mathscr{F}u(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

Isso prova que definições de $H^s(\mathbb{R}^n)$ e $\hat{H}^s(\mathbb{R}^n)$ de fato coincidem. □

A equivalência dos espaços $H^s(\mathbb{R}^n)$ e $\hat{H}^s(\mathbb{R}^n)$ depende da Fórmula de Plancherel que por sua vez só é válida para funções em L^2 pois, exceto quando $p = q = 2$ não é possível ir e vir de L^p a L^q via a transformada de Fourier. Para mais informações sobre isso veja [8] e suas referências.

Proposição 1.5. Sejam $s \in (0,1)$ e $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Então

$$[u]^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} = 2C(n,s)^{-1}\left\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

onde $C(n,s)$ é a constante definida em (1.17).

Demonstração. Pela Fórmula de Plancherel e as Proposições 1.3 e 1.4 respectivamente, temos

$$\begin{aligned}\left\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \left\|\mathscr{F}(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \||\xi|^s(\mathscr{F}u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} ||\xi|^s(\mathscr{F}u)|^2\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s}\,|\mathscr{F}u|^2\,d\xi\\ &= \frac{1}{2}C(n,s)[u]^2_{H^s(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

Daí

$$[u]^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} = 2C(n,s)^{-1}\left\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

como queríamos. □

A partir da definição de $H^s(\mathbb{R}^n)$ via transformada de Fourier vamos analisar os traços das funções do espaço de Sobolev fracionário.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira $\partial\Omega$ contínua. Denote por T o operador traço, ou seja, o operador linear definido pela extensão uniformemente contínua do operador de restrição a $\partial\Omega$ para funções em $D(\overline{\Omega})$, isto é, o espaço das funções $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ restritas a $\overline{\Omega}$.

Sejam $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Denotamos por $v \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{n-1})$ a restrição de u ao hiperplano $x_n = 0$, isto é,

$$v(x') = u(x', 0)\ \forall x' \in \mathbb{R}^{n-1}. \tag{1.27}$$

A seguir provaremos que

$$\mathscr{F}v(\xi') = \int_{\mathbb{R}} \mathscr{F}u(\xi', \xi_n)d\xi_n,\ \forall \xi' \in \mathbb{R}^{n-1}, \tag{1.28}$$

onde para simplificar, usamos o mesmo símbolo $\mathscr{F}$ para ambas as transformadas de Fourier em $n-1$ e n variáveis. Primeiro observe que

$$\mathscr{F}v(\xi') = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-i\xi'\cdot x'}v(x')dx' = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-i\xi'\cdot x'}u(x',0)dx'.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \mathscr{F}u(\xi', \xi_n)d\xi_n &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\xi',\xi_n)\cdot(x',x_n)}u(x',x_n)dx'dx_nd\xi_n\\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-i\xi'\cdot x'}\left[\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi_n\cdot x_n}u(x',x_n)dx_nd\xi_n\right]dx'\\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-i\xi'\cdot x'}u(x',0)dx',\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos a transformada de Fourier de u e a transformada inversa na última variável. Unindo essas duas informações temos (1.28).

Proposição 1.6. Seja $\frac{1}{2} < s < 1$. Então toda função $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ tem um traço v no hiperplano $\{x_n = 0\}$ tal que, $v \in H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$. Além disso, o operador traço $T : H^s(\mathbb{R}^n) \to H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ é sobrejetivo.

Demonstração. Como $\mathscr{S}$ é denso em $H^s(\mathbb{R}^n)$, para provar a primeira parte basta mostrar que existe uma constante universal C tal que para toda função $u \in \mathscr{S}$ e para toda v definida como em (1.27) vale

$$\|v\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leqslant C\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Usando desigualdade de Cauchy-Schwarz para integrais em (1.28), garantimos que

$$\begin{aligned} |\mathscr{F}v(\xi')|^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} \mathscr{F}u(\xi', \xi_n) d\xi_n\right)^2 \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}} \left|\mathscr{F}u(\xi', \xi_n)\right| d\xi_n\right)^2 \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}} \left(1+|\xi|^2\right)^s \left|\mathscr{F}u(\xi', \xi_n)\right|^2 d\xi_n \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^s} d\xi_n. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Fazendo uma mudança de variável $\xi_n = t\sqrt{1+|\xi'|^2}$, onde t é um número real vemos que $d\xi_n = \sqrt{1+|\xi'|^2}dt$ e

$$\begin{aligned} (1+|\xi|^2)^s = (1+|\xi'|^2+\xi_n^2)^s &= (1+|\xi'|^2+t^2(1+|\xi'|^2))^s \\ &= (1+|\xi'|^2)^s(1+t^2)^s. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^s} d\xi_n &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\sqrt{1+|\xi'|^2}}{(1+|\xi'|^2)^s (1+t^2)^s} dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{(1+|\xi'|^2)^{\frac{1}{2}-s}}{(1+t^2)^s} dt \\ &= \left(1+|\xi'|^2\right)^{\frac{1}{2}-s} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+t^2)^s} dt = C(s)\left(1+|\xi'|^2\right)^{\frac{1}{2}-s}, \end{aligned} \tag{1.31}$$

com

$$C(s) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+t^2)^s} dt < \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+t^{2s})} dt < \int_{B_1(0)} 1dt + \int_{B_1^c(0)} \frac{1}{t^{2s}} dt < \infty,$$

onde a finitude segue do Teorema A.6 uma vez que $s > \frac{1}{2}$ e que nesse contexto estamos considerando B_1 a bola de dimensão um. Substituindo (1.31) em (1.29) temos

$$\frac{|\mathscr{F}v(\xi')|^2}{(1+|\xi'|^2)^{\frac{1}{2}-s}} \leqslant C(s)\int_{\mathbb{R}} \left(1+|\xi|^2\right)^s |\mathscr{F}u(\xi',\xi_n)|^2 d\xi_n.$$

Integrando com relação a $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, e usando a desigualdade vista logo após o Teorema A.4 no Apêndice A, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+|\xi'|^2)^{s-\frac{1}{2}}|\mathscr{F}v(\xi')|^2 d\xi' &\leqslant C(s)\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|^2)^s|\mathscr{F}u(\xi',\xi_n)|^2 d\xi_n d\xi' \\
&\leqslant C(s)\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|^{2s})|\mathscr{F}u(\xi',\xi_n)|^2 d\xi_n d\xi' \\
&= C(s)\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\mathscr{F}u(\xi)|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{2s}|\mathscr{F}u(\xi)|^2 d\xi\right).
\end{aligned}$$

Pela Proposição 1.4 e pela Fórmula de Plancherel temos que

$$\begin{aligned}
C(s)\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\mathscr{F}u(\xi)|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{2s}|\mathscr{F}u(\xi)|^2 d\xi\right) &= C(s)\left(\|\mathscr{F}u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + [u]^2_{H^s(\mathbb{R}^n)}\right) \\
&= C(s)\|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+|\xi'|^2)^{s-\frac{1}{2}}|\mathscr{F}v(\xi')|^2 d\xi' \leqslant C(s)\|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Por outro lado, usando novamente a Proposição 1.4 e a Fórmula de Plancherel, segue que

$$\begin{aligned}
\|v\|^2_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} &= [v]^2_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \\
&= C\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\xi'|^{2(s-\frac{1}{2})}\left|\mathscr{F}v(\xi')\right|^2 d\xi' + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |v(\xi')|^2 d\xi' \\
&= C\int_{\mathbb{R}^{n-1}} (|\xi'|^2)^{s-\frac{1}{2}}\left|\mathscr{F}v(\xi')\right|^2 d\xi' + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left|\mathscr{F}v(\xi')\right|^2 d\xi' \\
&\leqslant 2C\int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+|\xi'|^2)^{s-\frac{1}{2}}\left|\mathscr{F}v(\xi')\right|^2 d\xi'.
\end{aligned}$$

Unindo isso à desigualdade obtida acima, temos

$$\|v\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leqslant C\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)},$$

onde a constante $C = C(n,s,p)$ é possivelmente diferente em cada passo acima. Agora mostraremos que o operador T é sobrejetivo. Para isso provaremos que para toda

$v \in H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ a função u definida por

$$\mathscr{F}u(\xi', \xi_n) = \mathscr{F}v(\xi')\varphi\left(\frac{\xi_n}{\sqrt{1+|\xi'|^2}}\right)\frac{1}{\sqrt{1+|\xi'|^2}}, \tag{1.32}$$

com $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ e $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)dt = 1$, é tal que $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ e $Tu = v$. De fato, integrando a expressão em (1.32) com respeito a $\xi_n \in \mathbb{R}$ e novamente fazendo a mudança de variável $\xi_n = t\sqrt{1+|\xi'|^2}$ com $t \in \mathbb{R}$, temos

$$\int_{\mathbb{R}} \mathscr{F}u(\xi', \xi_n)d\xi_n = \int_{\mathbb{R}} \mathscr{F}v(\xi')\varphi\left(\frac{\xi_n}{\sqrt{1+|\xi'|^2}}\right)\frac{1}{\sqrt{1+|\xi'|^2}}d\xi_n = \int_{\mathbb{R}} \mathscr{F}v(\xi')\varphi(t)dt = \mathscr{F}v(\xi').$$

Isso nos dá exatamente a igualdade em (1.28) e portanto, $Tu = v$. Assim, resta provar que $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Observe que para todo $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$ a igualdade em (1.32) garante que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \left(1+|\xi|^2\right)^s \quad & |\mathscr{F}u(\xi', \xi_n)|^2 \, d\xi_n \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(1+|\xi|^2\right)^s |\mathscr{F}v(\xi')|^2 \left|\varphi\left(\frac{\xi_n}{\sqrt{1+|\xi'|^2}}\right)\right|^2 \frac{1}{1+|\xi'|^2}d\xi_n.\end{aligned} \tag{1.33}$$

Considerando novamente a mudança de variável $\xi_n = t\sqrt{1+|\xi'|^2}$, feita em (1.30) temos $\left(1+|\xi|^2\right)^s = (1+|\xi'|^2)^s(1+t^2)^s$. Assim, para o lado direito de (1.33) segue que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \left(1+|\xi|^2\right)^s & |\mathscr{F}v(\xi')|^2 \left|\varphi\left(\frac{\xi_n}{\sqrt{1+|\xi'|^2}}\right)\right|^2 \frac{1}{1+|\xi'|^2}d\xi_n \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(1+|\xi'|^2\right)^s (1+t^2)^s |\mathscr{F}v(\xi')|^2 |\varphi(t)|^2 \frac{1}{1+|\xi'|^2}\sqrt{1+|\xi'|^2}dt \\ &= \left(1+|\xi'|^2\right)^{s-1/2} |\mathscr{F}v(\xi')|^2 \int_{\mathbb{R}} \left(1+t^2\right)^s |\varphi(t)|^2 dt \\ &= C\left(1+|\xi'|^2\right)^{s-1/2} |\mathscr{F}v(\xi')|^2,\end{aligned}$$

onde $C = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(1+t^2\right)^s |\varphi(t)|^2 dt$. Substituindo em (1.33), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} \left(1+|\xi|^2\right)^s |\mathscr{F}u(\xi', \xi_n)|^2 \, d\xi_n = C\left(1+|\xi'|^2\right)^{s-1/2} |\mathscr{F}v(\xi')|^2.$$

Agora integrando essa expressão com respeito a ξ' vemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^s |\mathscr{F}u(\xi)|^2 \, d\xi = C\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(1+|\xi'|^2\right)^{s-1/2} |\mathscr{F}v(\xi')|^2 \, d\xi'.$$

Além disso, a observação feita logo após o Teorema A.4 no Apêndice A, assegura que

$(1+|\xi'|^2)^{s-1/2} \leqslant \left(1+|\xi'|^{2(s-1/2)}\right)$ e lembrando também que $(1+|\xi|^{2s}) \leqslant (1+|\xi|^2)^s$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^{2s}\right) |\mathscr{F}u(\xi)|^2 \, d\xi \leqslant C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(1+|\xi'|^{2(s-1/2)}\right) |\mathscr{F}v(\xi')|^2 \, d\xi' < \infty$$

onde a finitude decorre diretamente do fato de $v \in H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$. Com isso concluímos que $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, como queríamos provar. □

1.4 Extensão de funções de $W^{s,p}(\Omega)$ a funções de $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$

Sejam $s \in (0,1)$ e $p \in [1,\infty)$. Dizemos que um subconjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio de extensão para $W^{s,p}$ se existe uma constante positiva $C = C(n,p,s,\Omega)$ tal que, para cada função $u \in W^{s,p}(\Omega)$ existe $\tilde{u} \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ com $\tilde{u}(x) = u(x)$ para todo $x \in \Omega$ e $\|\tilde{u}\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}$. Em geral, um aberto arbitrário não é um domínio de extensão para $W^{s,p}$. Em [14] esse problema é abordado porém, considerando-se s um número inteiro, e [16] trabalha com o caso em que $s = 1$, $p = 2$ e $n = 2$. Agora baseados em [8] o nosso objetivo é provar que todo aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de classe $C^{0,1}$ com fronteira limitada é um domínio de extensão para $W^{s,p}$, antes disso provaremos alguns resultados auxiliares.

A grosso modo, o lema a seguir garante que se uma função $u \in W^{s,p}(\Omega)$ se anula numa vizinhança da fronteira $\partial\Omega$, então é possível estendê-la a uma função de $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$.

Lema 1.4. Sejam Ω um aberto em $\mathbb{R}^n$ e u uma função em $W^{s,p}(\Omega)$ com $s \in (0,1)$ e $p \in [1,+\infty)$. Se existe um subconjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que $u \equiv 0$ em $\Omega \setminus K$, então a extensão $\tilde{u}$ definida por

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases},$$

pertence a $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|\tilde{u}\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)},$$

onde $C = C(n,p,s,\Omega)$ é uma constante positiva.

Demonstração. Seja $u \in W^{s,p}(\Omega)$. Pela definição da função $\tilde{u}$ temos que $\tilde{u} \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

e

$$\begin{aligned}
[\tilde{u}]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\Omega}\frac{|u(x)-\tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy + \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n\backslash\Omega}\frac{|\tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy \\
&= \int_{\Omega}\int_{\Omega}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy + \int_{\mathbb{R}^n\backslash\Omega}\int_{\Omega}\frac{|u(x)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy \\
&+ \int_{\Omega}\int_{\mathbb{R}^n\backslash\Omega}\frac{|u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy. \qquad (1.34)
\end{aligned}$$

Agora provaremos que cada uma das três integrais duplas à direita de (1.34) é finita. Para a primeira integral não há o que fazer pois, desde que $u \in W^{s,p}(\Omega)$

$$[u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} = \int_{\Omega}\int_{\Omega}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy < \infty.$$

Para a segunda, note que a hipótese $u = 0$ em $\Omega\backslash K$ garante que

$$\int_{\mathbb{R}^n\backslash\Omega}\int_{\Omega}\frac{|u(x)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy = \int_{\mathbb{R}^n\backslash\Omega}\int_{K}\frac{|u(x)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy.$$

Agora fazendo $z = min\{|x-y|; x \in K \text{ e } y \in \mathbb{R}^n\backslash\Omega\}$, em virtude da compacidade de K temos que existe $\epsilon > 0$ tal que $|z| > \epsilon$. Como $n + sp > n$ e $u \in L^p(\Omega)$ (em particular $u \in L^p(K)$), segue que

$$\int_{K}\int_{\mathbb{R}^n\backslash\Omega}\frac{|u(x)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dydx \leqslant \int_{K}|u(x)|^p\int_{B^c_\epsilon}\frac{1}{|z|^{n+sp}}dydx < \infty,$$

sendo assim, pelo Teorema de Tonelli (ver Apêndice B, Teorema B.5)

$$\int_{\mathbb{R}^n\backslash\Omega}\int_{\Omega}\frac{|u(x)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy < \infty$$

assim podemos usar o Teorema de Fubini (ver Apêndice B, Teorema B.4) para assegurar que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n\backslash\Omega}\int_{\Omega}\frac{|u(x)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy &= \int_{\Omega}\int_{\mathbb{R}^n\backslash\Omega}\frac{|u(x)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dydx \leqslant \int_{\Omega}|u(x)|^p\int_{B^c_\epsilon}\frac{1}{|z|^{n+sp}}dzdx \\
&= C\|u\|^p_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Analogamente, a terceira integral é finita e satisfaz

$$\int_{\Omega}\int_{\mathbb{R}^n\backslash\Omega}\frac{|u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy \leqslant C\|u\|^p_{L^p(\Omega)}.$$

Portanto, a seminorma em (1.34) é tal que

$$[\tilde{u}]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant [u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} + 2C\|u\|^p_{L^p(\Omega)} < C[u]^p_{W^{s,p}(\Omega)}.$$

Finalmente, pela construção da função $\tilde{u}$ temos $\|\tilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L^p(\Omega)}$. Assim,

$$\|\tilde{u}\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)},$$

onde a constante positiva $C = C(n, s, p, \Omega)$ é possivelmente diferente em cada passo acima. E com isso temos também que $\tilde{u} \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, como queríamos provar. □

O lema a seguir trata de mais um caso de extensão de funções.

Lema 1.5. Seja Ω um aberto em $\mathbb{R}^n$, simétrico com relação à coordenada x_n. Considere os conjuntos $\Omega_+ = \{x \in \Omega; x_n > 0\}$ e $\Omega_- = \{x \in \Omega; x_n \leqslant 0\}$. Seja $u \in W^{s,p}(\Omega_+)$, com $s \in (0,1)$ e $p \in [1, +\infty)$. Defina

$$\overline{u}(x) = \begin{cases} u(x', x_n) & \text{se } x_n \geqslant 0 \\ u(x', -x_n) & \text{se } x_n < 0 \end{cases}.$$

Então $\overline{u} \in W^{s,p}(\Omega)$ e

$$\|\overline{u}\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leqslant 4\|u\|_{W^{s,p}(\Omega_+)}.$$

Demonstração. Seja $u \in W^{s,p}(\Omega_+)$. Pela simetria de Ω em relação à coordenada x_n temos

$$\begin{aligned} \|\overline{u}\|^p_{L^p(\Omega)} &= \int_{\Omega_+} |u(x', x_n)|^p dx + \int_{\Omega_-} |u(x', -x_n)|^p dx \\ &= 2\int_{\Omega_+} |u(x', x_n)|^p dx = 2\|u\|^p_{L^p(\Omega_+)} < \infty, \end{aligned} \tag{1.35}$$

isso prova que $\overline{u} \in L^p(\Omega)$. Além disso,

$$\begin{aligned} [\overline{u}]^p_{W^{s,p}(\Omega)} &= \int_\Omega \int_\Omega \frac{|\overline{u}(x) - \overline{u}(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy \\ &= \int_\Omega \int_{\Omega_+} \frac{|\overline{u}(x) - \overline{u}(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy + \int_\Omega \int_{\Omega_-} \frac{|\overline{u}(x) - \overline{u}(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dydx. \end{aligned}$$

Observe que

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega}\int_{\Omega_+} &\frac{|\overline{u}(x)-\overline{u}(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy \\
&= \int_{\Omega_+}\int_{\Omega_+} \frac{|\overline{u}(x)-\overline{u}(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy + \int_{\Omega_-}\int_{\Omega_+} \frac{|\overline{u}(x)-\overline{u}(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy \\
&= [u]^p_{W^{s,p}(\Omega_+)} + \int_{\Omega_-}\int_{\Omega_+} \frac{|u(x)-u(y',-y_n)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy \\
&= 2[u]^p_{W^{s,p}(\Omega_+)}.
\end{aligned}
$$

Analogamente,

$$
\int_{\Omega}\int_{\Omega_-} \frac{|\overline{u}(x)-\overline{u}(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dydx = 2[u]^p_{W^{s,p}(\Omega_+)}.
$$

Assim, $[\overline{u}]^p_{W^{s,p}(\Omega)} = 4[u]^p_{W^{s,p}(\Omega_+)}$. Unindo essa informação a (1.35) temos

$$
\begin{aligned}
\|\overline{u}\|^p_{W^{s,p}(\Omega)} &= \|\overline{u}\|^p_{L^p(\Omega)} + [\overline{u}]^p_{W^{s,p}(\Omega)} = 2\|u\|^p_{L^p(\Omega_+)} + 4[u]^p_{W^{s,p}(\Omega_+)} \\
&\leqslant 4^p(\|u\|^p_{L^p(\Omega_+)} + [u]^p_{W^{s,p}(\Omega_+)}) = 4^p\|u\|^p_{W^{s,p}(\Omega_+)}.
\end{aligned}
$$

De onde,

$$
\|\overline{u}\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leqslant 4\|u\|_{W^{s,p}(\Omega_+)} < \infty.
$$

Além disso, como $\overline{u} \in L^p(\Omega)$, concluímos que $\overline{u} \in W^{s,p}(\Omega)$, como queríamos demonstrar. $\square$

Em suma, o lema a seguir garante que se $u \in W^{s,p}(\Omega)$ então o produto de u por uma função lipischitziana limitada entre zero e um, também pertence a $W^{s,p}(\Omega)$.

Lema 1.6. Sejam Ω um aberto em $\mathbb{R}^n$, $s \in (0,1)$ e $p \in [1,+\infty)$. Sejam $u \in W^{s,p}(\Omega)$ e $\psi \in C^{0,1}(\Omega)$ com $0 \leqslant \psi \leqslant 1$. Então $\psi u \in W^{s,p}(\Omega)$ e

$$
\|\psi u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leqslant C\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)},
$$

onde $C = C(n,p,s,\Omega)$.

Demonstração. Primeiro observe que como $|\psi| \leqslant 1$, vale

$$
\|\psi u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \|u\|_{L^p(\Omega)}.
$$

Por outro lado, somando e subtraindo o fator $\psi(x)u(y)$ e usando o Teorema A.4, obtemos

$$
\begin{aligned}
[\psi u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} &= \int_\Omega\int_\Omega \frac{|\psi(x)u(x)-\psi(y)u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy\\
&= \int_\Omega\int_\Omega \frac{|\psi(x)u(x)-\psi(y)u(y)+\psi(x)u(y)-\psi(x)u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy\\
&\leqslant 2^{p-1}\left(\int_\Omega\int_\Omega \frac{|\psi(x)u(x)-\psi(x)u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy+\int_\Omega\int_\Omega \frac{|\psi(x)u(y)-\psi(y)u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy\right).
\end{aligned}
\tag{1.36}
$$

Como por hipótese $|\psi| \leqslant 1$, temos

$$
\begin{aligned}
&2^{p-1}\left(\int_\Omega\int_\Omega \frac{|\psi(x)u(x)-\psi(x)u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy+\int_\Omega\int_\Omega \frac{|\psi(x)u(y)-\psi(y)u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy\right)\\
&\leqslant 2^{p-1}\left(\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy+\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(y)|^p|\psi(x)-\psi(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy\right).
\end{aligned}
$$

Substituindo em (1.36), obtemos

$$
[\psi u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} \leqslant 2^{p-1}\left(\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy+\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(y)|^p|\psi(x)-\psi(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy\right).
\tag{1.37}
$$

Agora trabalharemos com as duas integrais em (1.37). Para a primeira temos que

$$
\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy = [u]^p_{W^{s,p}(\Omega)}.
\tag{1.38}
$$

Para a segunda, observe primeiramente que

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(y)|^p|\psi(x)-\psi(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy\\
&=\int_\Omega\int_{\Omega\cap\{|x-y|<1\}} \frac{|u(y)|^p|\psi(x)-\psi(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy+\int_\Omega\int_{\Omega\cap\{|x-y|\geqslant 1\}} \frac{|u(y)|^p|\psi(x)-\psi(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy.
\end{aligned}
$$

Agora note que como $\psi \in C^{0,1}(\Omega)$, vale $|\psi(x)-\psi(y)|^p \leqslant \lambda^p|x-y|^p$ e desde que

$0 \leqslant \psi \leqslant 1$ temos $|\psi(x) - \psi(y)| \leqslant 1$. Assim,

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \int_{\Omega\cap\{|x-y|<1\}} \frac{|u(y)|^p|\psi(x)-\psi(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy + \int_\Omega \int_{\Omega\cap\{|x-y|\geqslant 1\}} \frac{|u(y)|^p|\psi(x)-\psi(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy \\
&\leqslant \lambda^p \int_\Omega \int_{\Omega\cap\{|x-y|<1\}} \frac{|u(y)|^p|x-y|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy + \int_\Omega \int_{\Omega\cap\{|x-y|\geqslant 1\}} \frac{|u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy \\
&= \lambda^p \int_\Omega \int_{\Omega\cap\{|x-y|<1\}} \frac{|u(y)|^p}{|x-y|^{n+p(s-1)}} dxdy + \int_\Omega |u(y)|^p \int_{\Omega\cap\{|x-y|\geqslant 1\}} \frac{1}{|x-y|^{n+sp}} dxdy \\
&= C\|u\|^p_{L^p(\Omega)},
\end{aligned}
$$

pois, $n + p(s-1) < n$ e $n + sp > n$. Isso implica que,

$$
\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(y)|^p|\psi(x) - \psi(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy \leqslant C\|u\|^p_{L^p(\Omega)}.
$$

Usando essa informação juntamente com (1.38) em (1.37), concluímos que

$$
[\psi u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} \leqslant 2^{p-1}\left([u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} + C\|u\|^p_{L^p(\Omega)}\right),
$$

e como $\|\psi u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \|u\|_{L^p(\Omega)}$, segue que

$$
\|\psi u\|^p_{W^{s,p}(\Omega)} \leqslant 2^{p-1}\left([u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} + C\|u\|^p_{L^p(\Omega)}\right) + \|u\|^p_{L^p(\Omega)} \leqslant C\|u\|^p_{W^{s,p}(\Omega)}.
$$

Portanto,

$$
\|\psi u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leqslant C\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)},
$$

onde a constante $C = C(n, s, p, \Omega)$ é possivelmente diferente em cada passo acima. $\square$

Agora de posse destes lemas, podemos provar o principal resultado desta seção, o qual garante que todo subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto de classe $C^{0,1}$ com fronteira limitada, é um domínio de extensão para $W^{s,p}$.

Teorema 1.6. *Sejam $p \in [1, +\infty)$, $s \in (0,1)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto de classe $C^{0,1}$ com fronteira limitada. Então $W^{s,p}(\Omega)$ está continuamente imerso em $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, isto é, para cada $u \in W^{s,p}(\Omega)$ existe $\tilde{u} \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\tilde{u}|_\Omega = u$ e*

$$
\|\tilde{u}\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)},
$$

onde $C = C(n, p, s, \Omega)$.

Demonstração. Desde que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é de classe $C^{0,1}$, temos pela Definição 1.4 que para cada ponto $x_0 \in \partial\Omega$ existe uma bola $B = B_r(x_0)$ com $r > 0$ e um isomorfismo

$T : Q \to B$ satisfazendo $i), ii)$ e $iii)$ da referida definição. Como por hipótese o conjunto $\partial\Omega$ é limitado (e é fechado) é também compacto logo, é possível encontrar um número finito de bolas B_j de modo que $\partial\Omega \subset \bigcup_{j=1}^{k} B_j$ e assim podemos escrever $\mathbb{R}^n = \bigcup_{j=1}^{k} B_j \cup (\mathbb{R}^n \backslash \partial\Omega)$. Associada a esta cobertura existe uma partição da unidade, isto é, existem $k+1$ funções suaves $\psi_0, ..., \psi_k$ de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ tais que $supp(\psi_0) \subset \mathbb{R}^n \backslash \partial\Omega$ e $supp(\psi_j) \subset B_j$ para todo $j \in \{1, ..., k\}$, com $0 \leq \psi_j \leq 1$ para todo $j \in \{0, ..., k\}$ e $\displaystyle\sum_{j=0}^{k} \psi_j = 1$. Claro que para toda função $u \in W^{s,p}(\Omega)$ vale

$$u = u \sum_{j=1}^{k} \psi_j = u\,(\psi_0 + \cdots + \psi_k) = u\psi_0 + \cdots + u\psi_k = \sum_{j=0}^{k} u\psi_j.$$

Em virtude do Lema 1.6 temos que $\psi_0 u \in W^{s,p}(\Omega)$. Como $supp(\psi_0) \subset \mathbb{R}^n \backslash \partial\Omega$, segue que $\psi_0 u \equiv 0$ numa vizinhança de $\partial\Omega$ e assim pelo Lema 1.4 podemos estender $\psi_0 u$ para todo $\mathbb{R}^n$ da seguinte forma

$$\widetilde{\psi_0 u}(x) = \begin{cases} \psi_0 u(x) & se\ x \in \Omega \\ 0 & se\ x \in \mathbb{R}^n \backslash \partial\Omega \end{cases},$$

com $\widetilde{\psi_0 u} \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$. Em virtude dos Lemas 1.4 e 1.6 temos respectivamente

$$\|\widetilde{\psi_0 u}\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\psi_0 u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}, \tag{1.39}$$

onde a constante $C = C(n, s, p, \Omega)$ é possivelmente diferente em cada passo acima. Agora faremos para cada $\psi_j u$ com $j \in \{1, ..., k\}$ algo análogo ao que acabamos de fazer para $\psi_0 u$. Para cada $j \in \{1, ..., k\}$ considere a restrição $u|_{B_j \cap \Omega}$ e a função

$$v_j(y) := u(T_j(y)) \text{ para todo } y \in Q_+,$$

onde $T_j : Q \to B_j$ é um isomorfismo como na Definição 1.4, cuja existência é garantida porque Ω é de classe $C^{0,1}$. A seguir provaremos que $v_j \in W^{s,p}(Q_+)$. De fato, decorre da definição de v_j que $v_j \in L^p(Q_+)$. Resta provar que a seminorma $[v_j]_{W^{s,p}(Q_+)}$ é finita. Fazendo a mudança de variável $x = T_j(\tilde{x})$ segue que

$$\begin{aligned} [v_j]^p_{W^{s,p}(Q_+)} &= \int_{Q_+}\int_{Q_+} \frac{|v_j(\tilde{x}) - v(\tilde{y})|^p}{|\tilde{x} - \tilde{y}|^{n+sp}} d\tilde{x}d\tilde{y} = \int_{Q_+}\int_{Q_+} \frac{|u(T_j(\tilde{x})) - u(T_j(\tilde{y}))|^p}{|\tilde{x} - \tilde{y}|^{n+sp}} d\tilde{x}d\tilde{y} \\ &= \int_{B_j\cap\Omega}\int_{B_j\cap\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|T^{-1}(x) - T^{-1}(y)|^{n+sp}} det(T_j^{-1}) dxdy. \end{aligned}$$

Pelo item $i)$ da Definição 1.4 a função T é bi-lipschitziana, isto é, lipschitziana com inversa T^{-1} lipschitziana. Assim,

$$|T(T^{-1}(x)) - T(T^{-1}(y))| \leqslant C|T^{-1}(x) - T^{-1}(y)|,$$

donde

$$C^{-1}|x-y| \leqslant |T^{-1}(x) - T^{-1}(y)|,$$

em que C é a constante de lipschitz. Substituindo na expressão acima obtemos

$$[v_j]^p_{W^{s,p}(Q_+)} \leqslant C \int_{B_j\cap\Omega}\int_{B_j\cap\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy = C[u]^p_{W^{s,p}(B_j\cap\Omega)} < \infty, \tag{1.40}$$

onde a finitude deve-se ao fato de que $u \in W^{s,p}(\Omega)$. Assim, $v_j \in W^{s,p}(Q_+)$. Daí pelo Lema 1.5 podemos estender a função v_j para todo Q de modo que a sua extensão $\overline{v_j}$ pertença a $W^{s,p}(Q)$ e

$$\|\overline{v_j}\|_{W^{s,p}(Q)} \leqslant C\|v_j\|_{W^{s,p}(Q_+)}.$$

Definimos então a função

$$w_j(x) := \overline{v_j}(T_j^{-1}(x)) \ \ \forall\ x \in B_j.$$

Como T é Lipschitziana, repetindo o argumento acima, segue que cada $w_j \in W^{s,p}(B_j)$. Note que $w_j \equiv u$ (e consequentemente $\psi_j w_j = \psi_j u$) em $B_j \cap \Omega$. De fato

$$w_j(x) = \overline{v_j}(T_j^{-1}(x)) = \overline{v_j}(\tilde{x}) = v_j(\tilde{x}) = u(T_j(\tilde{x})) = u(x) \ \ \forall\ x \in B_j\cap\Omega.$$

Por definição cada ψ_j tem suporte compacto em B_j e portanto, como foi feito para $\psi_0 u$ podemos considerar $\widetilde{\psi_j w_j}$ a extensão da função $\psi_j w_j$ para todo o $\mathbb{R}^n$, de modo que $\widetilde{\psi_j w_j} \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ para cada $j \in \{1,...,k\}$. Além disso, pelos Lemas 1.4, 1.5 e 1.6 e a desigualdade em (1.40), temos para todo $j \in \{1,...,k\}$

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\psi_j w_j}\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} &\leqslant C\|\psi_j w_j\|_{W^{s,p}(B_j)} \leqslant C\|w_j\|_{W^{s,p}(B_j)} \leqslant C\|\overline{v_j}\|_{W^{s,p}(Q)} \leqslant C\|\overline{v_j}\|_{W^{s,p}(Q_+)} \\ &\leqslant C\|v_j\|_{W^{s,p}(B_j)} \leqslant \|u\|_{W^{s,p}(\Omega\cap B_j)} \leqslant \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)},\end{aligned} \tag{1.41}$$

onde $C = C(n,s,p,\Omega)$ é uma constante positiva possivelmente diferente em cada passo acima. Finalmente seja

$$\widetilde{u} := \widetilde{\psi_0 u} + \sum_{j=1}^{k} \widetilde{\psi_j w_j},$$

uma extensão de u para todo o $\mathbb{R}^n$. Por construção, $\widetilde{u} \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Observe que $\widetilde{u}|_\Omega = u$.

De fato, se $x \in \Omega \cap B_j$, então

$$u(x) = \psi_0 u(x) + \sum_{j=1}^{k} \psi_j u(x) = \psi_0 u(x) + \sum_{j=1}^{k} \psi_j w_j(x) = \widetilde{\psi_0 u}(x) + \sum_{j=1}^{k} \widetilde{\psi_j w_j}(x) = \widetilde{u}(x),$$

e se $x \in \Omega \backslash B_j$, então $\psi_j(x) = 0 \ \ \forall\ j = 1, ..., k$ pois $supp(\psi_j) \subset B_j$. Assim,

$$\widetilde{u}(x) = \widetilde{\psi_0 u}(x) + \sum_{j=1}^{k} \widetilde{\psi_j w_j}(x) = \psi_0(x)u(x) + \sum_{j=1}^{k} \psi_j(x) w_j(x) = \psi_0(x)u(x) = u(x),$$

pois, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ deve ocorrer $1 = \sum_{j=0}^{k} \psi_j(x) = \psi_0(x)$. Para finalizar observe que combinando (1.39) com (1.41) obtemos

$$\begin{aligned} \|\widetilde{u}\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} &= \|\widetilde{\psi_0 u} + \sum_{j=1}^{k} \widetilde{\psi_j w_j}\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|\widetilde{\psi_0 u}\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} + \sum_{j=1}^{k} \|\widetilde{\psi_j w_j}\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leqslant C\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} + Ck\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leqslant C\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}, \end{aligned}$$

onde a constante $C = C(n, s, p, \Omega)$ é possivelmente diferente em cada passo acima. Isso prova também que $\widetilde{u} \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ como queríamos. □

Corolário 1.2. Sejam $p \in [1, +\infty)$, $s \in (0, 1)$ e Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ de classe $C^{0,1}$ com fronteira limitada. Então para cada $u \in W^{s,p}(\Omega)$, existe uma sequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_k|_\Omega \to u$ quando $k \to +\infty$ em $W^{s,p}(\Omega)$, isto é,

$$\lim_{k\to+\infty} \|u_k - u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = 0.$$

Demonstração. Dada uma função $u \in W^{s,p}(\Omega)$ pelo teorema anterior existe uma extensão $\widetilde{u}$ de u tal que $\widetilde{u} \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, $\widetilde{u}|_\Omega = u$ e $\|\widetilde{u}\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}$ com $C = C(n, s, p, \Omega)$ uma constante positiva. De acordo com o Teorema 1.5 o espaço $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ logo, existe uma sequência $(\widetilde{u}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\widetilde{u}_k \to \widetilde{u}$ quando $k \to \infty$ em $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$. Assim, $u_k = \widetilde{u}_k|_\Omega \in W^{s,p}(\Omega)$ e

$$\|u_k - u\|^p_{W^{s,p}(\Omega)} = \|\widetilde{u}_k - \widetilde{u}\|^p_{W^{s,p}(\Omega)} \leqslant \|\widetilde{u}_k - \widetilde{u}\|^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \to 0.$$

Portanto, $u_k|_\Omega \to u$ em $W^{s,p}(\Omega)$ quando $k \to +\infty$. □

Capítulo 2

Resultados de imersão e regularidade em $W^{s,p}(\Omega)$

Este capítulo está dividido em três seções. Na primeira tratamos de resultados de imersões contínuas, na segunda de imersões compactas e na terceira discutimos sobre regularidade de Hölder para funções nos espaços de Sobolev fracionários $W^{s,p}(\Omega)$.

2.1 Imersões contínuas

Essa seção é composta por quatro lemas técnicos e quatro teoremas que garantem resultados de imersões contínuas dos espaços $W^{s,p}(\Omega)$ em $L^q(\Omega)$ sob certas condições para Ω e q. O primeiro lema é útil na demonstração do terceiro, e os demais são usados na prova do teorema principal desta seção, que por sua vez será útil na demonstração dos demais.

Lema 2.1. Fixe $x \in \mathbb{R}^n$. Sejam $p \in [1, +\infty)$, $s \in (0,1)$ e $E \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável de medida finita. Então existe $C = C(n,s,p) > 0$ tal que

$$\int_{E^c} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} \geqslant C|E|^{\frac{-sp}{n}}.$$

Demonstração. Seja

$$\rho := \left(\frac{|E|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}}$$

onde ω_{n-1} é a medida de Lebesgue da esfera unitária em $\mathbb{R}^n$. Sabemos que se

$x, y \in B_\rho(x)$ então $|x-y| \leqslant \rho$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{E^c} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} &= \int_{E^c \cap B_\rho(x)} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} + \int_{E^c \cap B^c_\rho(x)} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} \\
&\geqslant \int_{E^c \cap B_\rho(x)} \frac{dy}{\rho^{n+sp}} + \int_{E^c \cap B^c_\rho(x)} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} \\
&= \frac{1}{\rho^{n+sp}} \int_{E^c \cap B_\rho(x)} dy + \int_{E^c \cap B^c_\rho(x)} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} \\
&= \frac{|E^c \cap B_\rho(x)|}{\rho^{n+sp}} + \int_{E^c \cap B^c_\rho(x)} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}}.
\end{aligned}$$

Como $\rho = (|E|/\omega_{n-1})^{\frac{1}{n}}$ temos, $|B_\rho(x)| = \omega_{n-1}\rho^n = \omega_{n-1}(|E|/\omega_{n-1}) = |E|$. Daí,

$$\begin{aligned}
|E^c \cap B_\rho(x)| &= |B_\rho(x) \backslash (E \cap B_\rho(x))| = |B_\rho(x)| - |(E \cap B_\rho(x))| \\
&= |E| - |(E \cap B_\rho(x))| = |(E \backslash (E \cap B_\rho(x))| = |B_\rho(x)^c \cap E|.
\end{aligned}$$

Substituindo na expressão acima, temos

$$\begin{aligned}
\int_{E^c} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} &\geqslant \frac{|B_\rho(x)^c \cap E|}{\rho^{n+sp}} + \int_{E^c \cap B^c_\rho(x)} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} \\
&= \int_{B^c_\rho(x) \cap E} \frac{dy}{\rho^{n+sp}} + \int_{E^c \cap B^c_\rho(x)} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}}.
\end{aligned}$$

Agora observe que se $x, y \in B^c_\rho(x)$, então $\rho \leqslant |x-y|$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{B^c_\rho(x) \cap E} \frac{dy}{\rho^{n+sp}} + \int_{E^c \cap B^c_\rho(x)} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} &\geqslant \int_{B^c_\rho(x) \cap E} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} + \int_{E^c \cap B^c_\rho(x)} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} \\
&= \int_{B^c_\rho(x)} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}}.
\end{aligned}$$

Usando isso na desigualdade acima, concluímos que

$$\int_{E^c} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} \geqslant \int_{B^c_\rho(x)} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}}. \tag{2.1}$$

Fazendo uma mudança de variável $z = x - y$ e usando o Teorema A.5, garantimos que

$$\begin{aligned}
\int_{B^c_\rho(x)} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} &= \int_{B^c_\rho(0)} \frac{dz}{|z|^{n+sp}} = \int_\rho^\infty \int_{\partial B_r(0)} \frac{dS}{r^{n+sp}} dr = \omega_{n-1} \int_\rho^\infty r^{n-1} \frac{1}{r^{n+sp}} dr \\
&= \omega_{n-1} \int_\rho^\infty \frac{1}{r^{1+sp}} dr = \omega_{n-1} \lim_{k \to \infty} \frac{-1}{sp} r^{-sp} \Big|_p^k = \frac{\omega_{n-1}}{sp} \rho^{-sp},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{B^c_\rho(x)} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} = \frac{\omega_{n-1}}{sp} \frac{|E|^{\frac{-sp}{n}}}{\omega_{n-1}^{\frac{sp}{n}}} = C|E|^{\frac{-sp}{n}}.$$

Unindo essa informação a (2.1) temos

$$\int_{E^c} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} \geqslant C|E|^{\frac{-sp}{n}},$$

como queríamos provar. □

Lema 2.2. Sejam $s \in (0,1)$ e $p \in [1,+\infty)$ tais que $sp < n$. Fixe $T > 1$. Considere $k \in \mathbb{Z}$, (a_k) uma sequência decrescente, $N \in \mathbb{Z}$ e C' uma constante positiva satisfazendo

$$0 \leqslant a_k \leqslant C' \quad \text{e} \quad a_k = 0 \text{ para todo } k \geqslant N. \tag{2.2}$$

Então,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k^{(n-sp)/n} T^k \leqslant C \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z},\\ a_k\neq 0}} a_{k+1} a_k^{-sp/n} T^k,$$

para uma constante apropriada $C = C(n,p,s,T,M) > 0$ que independe de N.

Demonstração. Primeiro observe que as duas séries

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k^{(n-sp)/n} T^k \text{ e } \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ a_k\neq 0}} a_{k+1} a_k^{-sp/n} T^k$$

são convergentes. De fato, usando as hipóteses em (2.2) para a primeira série, obtemos

$$\sum_{k=-\infty}^{-\infty} a_k^{(n-sp)/n} T^k = \sum_{k=-\infty}^{N} a_k^{(n-sp)/n} T^k.$$

Desse modo, se $N \geqslant 0$ então

$$\sum_{k=-\infty}^{-\infty} a_k^{(n-sp)/n} T^k = \sum_{k=-\infty}^{0} a_k^{(n-sp)/n} T^k + \sum_{k=1}^{N} a_k^{(n-sp)/n} T^k. \tag{2.3}$$

Como $0 \leqslant a_0 < a_{-1} < \cdots < a_{-m} < \cdots < C'$, segue que

$$\sum_{k=-\infty}^{0} a_k^{(n-sp)/n} T^k \leqslant C' \sum_{k=-\infty}^{0} T^k = C' \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{1}{T^{k'}} < \infty,$$

e temos também que

$$\sum_{k=1}^{N} a_k^{(n-sp)/n} T^k < \infty,$$

pois trata-se de uma soma finita. Assim, substituindo essas duas últimas informações em (2.3) temos

$$\sum_{k=-\infty}^{-\infty} a_k^{(n-sp)/n} T^k < \infty.$$

Agora se $N < 0$ então

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^{(n-sp)/n} T^k \leqslant C' \sum_{k'=-N}^{\infty} \frac{1}{T^{k'}} < \infty.$$

Isso prova que a primeira série é finita. Para a segunda observe que $0 \leqslant a_{k+1} < a_k$, com $a_k \neq 0$. Assim existe uma constante C'' satisfazendo,

$$0 \leqslant a_{k+1} a_k^{-sp/n} \leqslant a_k a_k^{-sp/n} = a_k^{1-sp/n} = a_k^{(n-sp)/n} \leqslant C''.$$

Seguindo de forma análoga ao que fizemos para a primeira série teremos que

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ a_k\neq 0}} a_{k+1} a_k^{-sp/n} T^k < \infty.$$

E portanto, tais séries são de fato convergentes. Além disso, como a_k é uma sequência decrescente não negativa, temos que se $a_k = 0$ então $a_{k+1} = 0$. Daí,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{k+1}^{(n-sp)/n} T^k = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ a_k\neq 0}} a_{k+1}^{(n-sp)/n} T^k.$$

Denotando $\alpha := n/sp$ e $\beta := n/(n-sp)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k^{(n-sp)/n} T^k &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{k+1}^{(n-sp)/n} T^k = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ a_k\neq 0}} a_{k+1}^{(n-sp)/n} T^k \\ &= \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ a_k\neq 0}} \left(a_k^{sp/n\beta} T^{k/\alpha}\right)\left(a_{k+1}^{1/\beta} a_k^{-sp/n\beta} T^{k/\beta}\right). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Desde que $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = \dfrac{sp}{n} + \dfrac{n-sp}{n} = 1$, podemos aplicar em (2.4) a desigualdade numérica de Hölder (ver Apêndice A, Teorema A.2) de modo a obter,

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ a_k\neq 0}}\left(a_k^{sp/n\beta}T^{k/\alpha}\right)\left(a_{k+1}^{1/\beta}a_k^{-sp/n\beta}T^{k/\beta}\right)\leqslant\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(a_k^{sp/n\beta}T^{k/\alpha}\right)^{\alpha}\right)^{1/\alpha}\left(\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ a_k\neq 0}}\left(a_{k+1}^{1/\beta}a_k^{-sp/n\beta}T^{k/\beta}\right)^{\beta}\right)^{1/\beta}$$
$$\leqslant\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_k^{(n-sp)/n}T^k\right)^{sp/n}\left(\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ a_k\neq 0}}a_{k+1}a_k^{-sp/n}T^k\right)^{(n-sp)/n}.$$

Unindo isso a (2.4) obtemos

$$\frac{1}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_k^{(n-sp)/n}T^k\leqslant\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_k^{(n-sp)/n}T^k\right)^{sp/n}\left(\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ a_k\neq 0}}a_{k+1}a_k^{-sp/n}T^k\right)^{(n-sp)/n}.$$

Daí, como as séries $\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_k^{(n-sp)/n}T^k$ e $\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ a_k\neq 0}}a_{k+1}a_k^{-sp/n}T^k$ são convergentes, temos

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_k^{(n-sp)/n}T^k\leqslant C\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ a_k\neq 0}}a_{k+1}a_k^{-sp/n}T^k,$$

onde $C=C(n,p,s,T)>0$ como queríamos. □

Lema 2.3. Sejam $s\in(0,1)$ e $p\in[1,+\infty)$ tais que $sp<n$. Seja

$$f\in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)\text{ com suporte compacto.}\tag{2.5}$$

Para todo $k\in\mathbb{Z}$ seja

$$a_k:=|\{x\in\mathbb{R}^n;|f(x)|>2^k\}|.\tag{2.6}$$

Então,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy\geqslant C\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ a_k\neq 0}}a_{k+1}a_k^{-sp/n}2^{pk},$$

onde $C=C(n,p,s)>0$.

Demonstração. Defina

$$A_k:=\{x\in\mathbb{R}^n;|f(x)|>2^k\}.\tag{2.7}$$

E observe que se $|f(x)|>2^{k+1}$, então $|f(x)|>2^k$. Isso implica que $A_{k+1}\subseteq A_k$ e consequentemente $a_{k+1} = |A_{k+1}| \leqslant |A_k| = a_k$. Agora defina

$$D_k := A_k \backslash A_{k+1} = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, 2^k < |f(x)| \leqslant 2^{k+1}\} \text{ e } d_k := |D_k|.$$

Note que por (2.5) as sequências (d_k) e (a_k) são limitadas e tendem a zero quando k é suficientemente grande. Observe também que os $D_k{}'s$ são disjuntos, isto é, se $j \neq k$ então $D_j \cap D_k = \varnothing$. Com efeito, podemos supor sem perda de generalidade $j > k$, isto é, $j \geqslant k+1$. Assim, se $x \in D_k$ então $x \in A_k \backslash A_{k+1}$ logo, $x \notin A_{k+1}$ e desde que $j \geqslant k+1$, temos que $A_j \subset A_{k+1}$, donde $x \notin A_j$ e portanto $x \notin D_j$. Assim provamos que nenhum elemento de D_k pertence a D_j portanto, $D_j \cap D_k = \varnothing$. Temos também que

$$\bigcup_{\substack{l \in \mathbb{Z} \\ l \leqslant k}} D_l = A_{k+1}^c \tag{2.8}$$

e que

$$\bigcup_{\substack{l \in \mathbb{Z} \\ l \geqslant k}} D_l = A_k. \tag{2.9}$$

Como consequência de (2.9) e dos $D_k{}'s$ serem disjuntos temos

$$a_k = |A_k| = \left| \bigcup_{\substack{l \in \mathbb{Z} \\ l \geqslant k}} D_l \right| = \sum_{\substack{l \in \mathbb{Z} \\ l \geqslant k}} |D_l| = \sum_{\substack{l \in \mathbb{Z} \\ l \geqslant k}} d_l, \tag{2.10}$$

e então usando (2.10) para o termo a_{k+1} temos

$$d_k = |D_k| = |A_k \backslash A_{k+1}| = |A_k| - |A_{k+1}| = a_k - a_{k+1} = a_k - \sum_{\substack{l \in \mathbb{Z} \\ l \geqslant k+1}} d_l. \tag{2.11}$$

Como (a_k) e (d_k) são convergentes, as séries à direita de (2.10) e (2.11) também convergem. Analogamente, pelo Lema 2.2 podemos definir a série convergente

$$S := \sum_{\substack{l \in \mathbb{Z} \\ a_{l-1} \neq 0}} 2^{pl} a_{l-1}^{-sp/n} d_l. \tag{2.12}$$

Como já vimos $D_k \subseteq A_k \subseteq A_{k-1}$ logo, $a_{i-1}^{-sp/n} d_l \leqslant a_{i-1}^{-sp/n} a_{l-1}$. Portanto,

$$\left\{(i,l) \in \mathbb{Z} \text{ tais que } a_{i-1} \neq 0 \text{ e } a_{i-1}^{-sp/n} d_l \neq 0\right\} \subseteq \{(i,l) \in \mathbb{Z} \text{ tais que } a_{l-1} \neq 0\}. \tag{2.13}$$

É claro que

$$\sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ a_{i-1}\neq 0}}\sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ l\geqslant i+1}} 2^{pi}a_{i-1}^{-sp/n}d_l = \sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ a_{i-1}\neq 0}}\sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ l\geqslant i+1\\ a_{i-1}^{sp/n}d_l\neq 0}} 2^{pi}a_{i-1}^{-sp/n}d_l = \sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ l\geqslant i+1\\ a_{i-1}^{sp/n}d_l\neq 0\\ a_{i-1}\neq 0}} 2^{pi}a_{i-1}^{-sp/n}d_l. \tag{2.14}$$

Usando (2.13) no último somatório de (2.14) e reorganizando os índices temos que

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ a_{i-1}\neq 0}}\sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ l\geqslant i+1}} 2^{pi}a_{i-1}^{-sp/n}d_l &= \sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ l\geqslant i+1\\ a_{i-1}^{sp/n}d_l\neq 0\\ a_{i-1}\neq 0}} 2^{pi}a_{i-1}^{-sp/n}d_l\\ &\leqslant \sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ l\geqslant i+1\\ a_{l-1}\neq 0}} 2^{pi}a_{i-1}^{-sp/n}d_l = \sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ a_{l-1}\neq 0}}\sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ i\leqslant l-1}} 2^{pi}a_{i-1}^{-sp/n}d_l.\end{aligned} \tag{2.15}$$

Agora usando em (2.15) o fato de que $a_{i-1}^{-sp/n}d_l \leqslant a_{i-1}^{-sp/n}a_{l-1}$, obtemos

$$\sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ a_{l-1}\neq 0}}\sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ i\geqslant l-1}} 2^{pi}a_{i-1}^{-sp/n}d_l \leqslant \sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ a_{l-1}\neq 0}}\sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ i\leqslant l-1}} 2^{pi}a_{l-1}^{-sp/n}d_l.$$

Mas,

$$\sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ a_{l-1}\neq 0}}\sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ i\leqslant l-1}} 2^{pi}a_{l-1}^{-sp/n}d_l = \sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ a_{l-1}\neq 0}}\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{p(l-1)}2^{-pk}a_{l-1}^{-sp/n}d_l.$$

Juntando as duas identidades acima, obtemos

$$\sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ a_{l-1}\neq 0}}\sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ i\geqslant l-1}} 2^{pi}a_{i-1}^{-sp/n}d_l \leqslant \sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ a_{l-1}\neq 0}}\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{p(l-1)}2^{-pk}a_{l-1}^{-sp/n}d_l.$$

Substituindo essa informação em (2.15), obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ a_{i-1}\neq 0}}\sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ l\geqslant i+1}} 2^{pi}a_{i-1}^{-sp/n}d_l &\leqslant \sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ a_{l-1}\neq 0}}\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{p(l-1)}2^{-pk}a_{l-1}^{-sp/n}d_l\\ &\leqslant \sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ a_{l-1}\neq 0}} 2^{pl}a_{l-1}^{-sp/n}d_l = S.\end{aligned} \tag{2.16}$$

Agora fixando $i \in \mathbb{Z}$ e $x \in D_i$ temos para todo $j \in \mathbb{Z}$ com $j \leqslant i-2$ e $y \in D_j$, que

$|f(x)| > 2^i$ e $-|f(y)| \geqslant -2^{j+1} \geqslant -2^{i-1}$. Logo,

$$|f(x) - f(y)| \geqslant |f(x)| - |f(y)| \geqslant 2^i - 2^{i-1} = 2^{i-1}(2-1) = 2^{i-1}.$$

Usando isso e a igualdade $\bigcup_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\leqslant i-2}} D_j = A_{i-1}^c$ obtida a partir de (2.8), segue que

$$\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\leqslant i-2}} \int_{D_j} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dy \geqslant 2^{p(i-1)} \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\leqslant i-2}} \int_{D_j} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} = 2^{p(i-1)} \int_{A_{i-1}^c} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}}.$$

Assim, o Lema 2.1 garante que para todo $i \in \mathbb{Z}$ e para todo $x \in D_i$ vale

$$\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\leqslant i-2}} \int_{D_j} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dy \geqslant 2^{p(i-1)} \int_{A_{i-1}^c} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} \geqslant c_0 2^{pi} |A_{i-1}|^{-sp/n} = c_0 2^{pi} a_{i-1}^{-sp/n},$$

para uma constante apropriada $c_0 > 0$. Como consequência, para todo $i \in \mathbb{Z}$ vale

$$\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\leqslant i-2}} \int_{D_i\times D_j} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy \geqslant c_0 2^{pi} a_{i-1}^{-sp/n} d_i. \tag{2.17}$$

Portanto, por (2.11) concluímos que para todo $i \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\leqslant i-2}} \int_{D_i\times D_j} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy \geqslant c_0 \left[2^{pi} a_{i-1}^{-sp/n} a_i - \sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ l\geqslant i+1}} 2^{pi} a_{i-1}^{-sp/n} d_l \right]. \tag{2.18}$$

E por (2.12) e (2.17) temos

$$\sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ a_{i-1}\neq 0}} \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\leqslant i-2}} \int_{D_i\times D_j} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy \geqslant c_0 S. \tag{2.19}$$

De (2.18) segue que

$$\sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ a_{i-1}\neq 0}} \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\leqslant i-2}} \int_{D_i\times D_j} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy$$
$$\geqslant c_0 \left[\sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ a_{i-1}\neq 0}} 2^{pi} a_{i-1}^{-sp/n} a_i - \sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ a_{i-1}\neq 0}} \sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ l\geqslant i+1}} 2^{pi} a_{i-1}^{-sp/n} d_l \right]. \tag{2.20}$$

Usando (2.16) em (2.20) obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ a_{i-1}\neq 0}}\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\leqslant i-2}}\int_{D_i\times D_j}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy &\geqslant c_0\left[\sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ a_{i-1}\neq 0}} 2^{pi}a_{i-1}^{-sp/n}a_i - S\right]\\
&= c_0\sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ a_{i-1}\neq 0}} 2^{pi}a_{i-1}^{-sp/n}a_i - c_0 S.
\end{aligned}\tag{2.21}$$

E por fim, substituindo (2.19) em (2.21) garantimos que

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ a_{i-1}\neq 0}}\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\leqslant i-2}}\int_{D_i\times D_j}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy &\geqslant c_0\sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ a_{i-1}\neq 0}} 2^{pi}a_{i-1}^{-sp/n}a_i - c_0 S\\
&\geqslant c_0\sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ a_{i-1}\neq 0}} 2^{pi}a_{i-1}^{-sp/n}a_i\\
&\quad - \sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ a_{i-1}\neq 0}}\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\leqslant i-2}}\int_{D_i\times D_j}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy.
\end{aligned}$$

Assim, passando o último termo para o lado esquerdo, segue que

$$2\sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ a_{i-1}\neq 0}}\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\leqslant i-2}}\int_{D_i\times D_j}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy \geqslant c_0\sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ a_{i-1}\neq 0}} 2^{pi}a_{i-1}^{-sp/n}a_i.$$

Por outro lado, por simetria concluímos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy &= \sum_{i,j\in\mathbb{Z}}\int_{D_i\times D_j}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy\\
&\geqslant 2\sum_{\substack{i,j\in\mathbb{Z}\\ j<i}}\int_{D_i\times D_j}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy\\
&\geqslant 2\sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ a_{i-1}\neq 0}}\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\leqslant i-2}}\int_{D_i\times D_j}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy.
\end{aligned}$$

Finalmente, unindo essas duas últimas informações temos

$$\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy \geqslant c_0\sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\ a_{i-1}\neq 0}} 2^{pi}a_{i-1}^{-sp/n}a_i,$$

que equivale à desigualdade

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy \geqslant C \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ a_k\neq 0}} a_{k+1} a_k^{-sp/n} 2^{pk},$$

sendo $C = C(n,p,s) > 0$, como queríamos provar. □

Lema 2.4. Seja $q \in [1,\infty)$. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Para todo $N \in \mathbb{N}$, considere o truncamento de f no nível N ou $-N$ definido por

$$f_N(x) := max\{min\{f(x), N\}, -N\}\, \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

isto é,

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x) & se\ |f(x)| \leqslant N \\ N & se\ f(x) > N \\ -N & se\ f(x) < -N \end{cases}.$$

Então,

$$\lim_{N\to+\infty} \|f_N\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

Demonstração. Seja $|f|_N$ o truncamento de $|f|$ no nível N (ou $-N$). Temos que $|f|_N = |f_N|$ e então, pelo Lema de Fatou (ver Apêndice B, Teorema B.8) temos

$$\liminf_{N\to+\infty} \|f_N\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \liminf_{N\to+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|_N^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

Por outro lado, usando a definição de $f_N(x)$ temos que $|f_N(x)| = |f|_N(x) \leqslant |f(x)|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Assim,

$$\limsup_{N\to+\infty} \|f_N\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$$

e portanto,

$$\lim_{N\to+\infty} \|f_N\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)},$$

como queríamos. □

Agora, com o auxílio dos lemas acima, podemos provar o teorema principal dessa seção, o qual será utilizado na demonstração dos demais.

Teorema 2.1. *Sejam $s \in (0,1)$ e $p \in [1,+\infty)$ tais que $sp < n$. Então existe uma constante positiva $C = C(n,p,s)$ tal que, para toda função mensurável com suporte* *compacto* $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, *temos*

$$\|f\|^p_{L^{p^*_s}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy, \tag{2.22}$$

onde $p^*_s=p^*_s(n,s)$ *é chamado "expoente crítico fracionário" e é igual a* $np/(n-sp)$. *Consequentemente, o espaço* $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ *está continuamente imerso em* $L^q(\mathbb{R}^n)$ *para todo* $q\in[p,p^*_s]$.

Demonstração. Primeiro note que se o lado direito de (2.22) for ilimitado não há o que fazer. Suponha que f é tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy<\infty. \tag{2.23}$$

Provaremos a princípio, o caso em que

$$f\in L^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{2.24}$$

Para isso, tome a_k e A_k definidas por (2.6) e (2.7), respectivamente. Temos que

$$\begin{aligned}\|f\|^{p^*_s}_{L^{p^*_s}(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^{p^*_s}dx=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{A_k\backslash A_{k+1}}|f(x)|^{p^*_s}dx\leqslant\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{A_k\backslash A_{k+1}}(2^{k+1})^{p^*_s}dx\\ &=\sum_{k\in\mathbb{Z}}(2^{k+1})^{p^*_s}|A_k\backslash A_{k+1}|=\sum_{k\in\mathbb{Z}}(2^{k+1})^{p^*_s}(a_k-a_{k+1})\leqslant\sum_{k\in\mathbb{Z}}(2^{k+1})^{p^*_s}a_k\\ &=\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{(k+1)p^*_s}a_k,\end{aligned}$$

isto é,

$$\|f\|^{p^*_s}_{L^{p^*_s}(\mathbb{R}^n)}\leqslant\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{(k+1)p^*_s}a_k=2^{p^*_s}\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{kp^*_s}a_k.$$

Elevando ambos os membros a p/p^*_s, obtemos

$$\|f\|^p_{L^{p^*_s}(\mathbb{R}^n)}\leqslant 2^p\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{kp^*_s}a_k\right)^{p/p^*_s}.$$

Portanto, desde que $p/p^*_s=p[(n-sp)/np]=(n-sp)/n=1-sp/n<1$, vale

$$\|f\|^p_{L^{p^*_s}(\mathbb{R}^n)}\leqslant 2^p\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{kp}a_k^{(n-sp)/n}.$$

Fazendo $T=2^p$ temos

$$\|f\|^p_{L^{p^*_s}(\mathbb{R}^n)}\leqslant 2^p\sum_{k\in\mathbb{Z}}T^k a_k^{(n-sp)/n}.$$

Segue do Lema 2.2 que

$$\|f\|^p_{L^{p_s^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ a_k\neq 0}} 2^{kp} a_{k+1} a_k^{-sp/n},$$

para alguma constante apropriada C que depende de n, s e p. Mas, em virtude do Lema 2.3 temos

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy \geqslant C \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ a_k\neq 0}} 2^{kp} a_{k+1} a_k^{-sp/n}.$$

Logo, dessas duas últimas desigualdades decorre

$$\|f\|^p_{L^{p_s^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy.$$

Isso prova a primeira parte do teorema para funções limitadas. Em particular, para a função f_N vale

$$\|f_N\|^p_{L^{p_s^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f_N(x)-f_N(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy, \tag{2.25}$$

usando isto provaremos o caso geral. Primeiro note que

$$|f_N(x)-f_N(y)| \leqslant |f(x)-f(y)| \ \forall x,y\in\mathbb{R}^n,\ \forall N\in\mathbb{N}. \tag{2.26}$$

Com efeito, conforme a definição de f_N temos que:
i) Se $|f(x)|\leqslant N$ e $|f(y)|\leqslant N$, então ocorre a igualdade $|f_N(x)-f_N(y)|=|f(x)-f(y)|$.
ii) Se $|f(x)|\leqslant N$ e $f(y)>N$, então

$$|f_N(x)-f_N(y)| = |f(x)-N| = N-f(x) < f(y)-f(x) = |f(y)-f(x)|.$$

iii) Se $|f(x)|\leqslant N$ e $f(y)<-N$, então

$$\begin{aligned}|f_N(x)-f_N(y)| &= |f(x)-(-N)| = |N+f(x)| = N+f(x) < f(x)-f(y)\\ &= |f(x)-f(y)|,\end{aligned}$$

isso prova (2.26). Assim, para todo $N\in\mathbb{N}$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f_N(x)-f_N(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy.$$

Pelo Lema de Fatou (ver Apêndice B, Teorema B.8) segue que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy &\leqslant \liminf_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f_N(x)-f_N(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy \\ &\leqslant \limsup_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f_N(x)-f_N(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy,\end{aligned}$$

isto é,

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f_N(x)-f_N(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy. \tag{2.27}$$

Além disso, pelo Lema 2.4 temos que $\lim_{N\to+\infty}\|f_N\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$. Finalmente, unindo esse resultado a (2.25) e (2.27) temos

$$\|f\|^p_{L^{p_s^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy,$$

o que prova (2.22) e prova a imersão contínua $W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ quando $q = p_s^*$. Para finalizar a demonstração, resta mostrar que o espaço $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ está continuamente imerso em $L^q(\mathbb{R}^n)$ para todo $q \in [p, p_s^*)$. Para isso, tome $f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$. Como $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ existe uma sequência de funções $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $f = \lim \varphi_k$ em $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ isto é, $\varphi_k \to f$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$ e $[\varphi_k - f]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \to 0$. Assim, pela primeira parte do teorema temos

$$\|\varphi_k\|^p_{L^{p_s^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C[\varphi_k]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Segue do Lema de Fatou que

$$\begin{aligned}\|f\|^{p_s^*}_{L^{p_s^*}(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p_s^*}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{k\to\infty} |\varphi_k(x)|^{p_s^*}dx \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_k(x)|^{p_s^*}dx \\ &= \liminf_{k\to\infty} \|\varphi_k\|^{p_s^*}_{L^{p_s^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \liminf_{k\to\infty} C^{p_s^*/p}[\varphi_k]^{p_s^*}_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} = C^{p_s^*/p}[f]^{p_s^*}_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|f\|_{L^{p_s^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C[f]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

Assim, $f \in L^{p_s^*}(\mathbb{R}^n)$ e como $f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, em particular, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Portanto, $f \in L^{p_s^*}(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ e pela Desigualdade de Interpolação (ver Apêndice B, Teorema B.9) temos que $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ para todo $q \in [p, p_s^*]$ e,

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|f\|^\alpha_{L^p(\mathbb{R}^n)}\|f\|^{1-\alpha}_{L^{p_s^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|f\|^\alpha_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}\|f\|^{1-\alpha}_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} = C\|f\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)},$$

onde $\dfrac{1}{q} = \dfrac{\alpha}{p} + \dfrac{(1-\alpha)}{p_s^*}$ e $C = C(n,p,s)$ é uma constante positiva possivelmente diferente em cada passo acima. Isso prova a imersão mencionada. $\square$

Em geral, a imersão acima não é válida para o espaço $W^{s,p}(\Omega)$ pois nem sempre é possível estender funções de $W^{s,p}(\Omega)$ a funções de $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, como vimos, para isso é necessário que Ω seja regular.

O próximo teorema estabelece condições para que $W^{s,p}(\Omega)$ esteja continuamente imerso em $L^q(\Omega)$ quando $q \in [p, p_s^*]$ e quando $q \in [1, p_s^*]$.

Teorema 2.2. *Sejam $s \in (0,1)$ e $p \in [1, +\infty)$ tais que $sp < n$. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um domínio de extensão para $W^{s,p}$. Então existe uma constante positiva $C = C(n,p,s,\Omega)$ tal que para toda função $f \in W^{s,p}(\Omega)$, temos*

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{W^{s,p}(\Omega)},$$

para todo $q \in [p, p_s^*]$, isto é, o espaço $W^{s,p}(\Omega)$ está continuamente imerso em $L^q(\Omega)$ para todo $q \in [p, p_s^*]$. Se além disso, Ω é limitado então o espaço $W^{s,p}(\Omega)$ está continuamente imerso em $L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1, p_s^*]$.

Demonstração. Sejam $f \in W^{s,p}(\Omega)$ e $C = C(n,p,s,\Omega)$ uma constante positiva possivelmente diferente em cada passo a seguir. Desde que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é um domínio de extensão para $W^{s,p}$ temos

$$\|\tilde{f}\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|f\|_{W^{s,p}(\Omega)},$$

onde $\tilde{f} \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ e $\tilde{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in \Omega$. Por outro lado, o Teorema 2.1 garante que o espaço $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ está continuamente imerso em $L^q(\mathbb{R}^n)$ para todo $q \in [p, p_s^*]$, em outras palavras

$$\|\tilde{f}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|\tilde{f}\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Combinando essas duas informações temos

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^q(\Omega)} = \|\tilde{f}\|_{L^q(\Omega)} \leqslant \|\tilde{f}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} &\leqslant C\|\tilde{f}\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leqslant C\|f\|_{W^{s,p}(\Omega)}, \end{aligned}$$

isto é, temos a imersão contínua $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ quando $q \in [p, p_s^*]$. Agora suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto limitado. Tome $r = p/q > 1$, $r' = p/(p-q)$ o expoente conjugado de r e $q \in [1,p)$. Pela desigualdade de Hölder temos

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{L^q(\Omega)}^q = \int_\Omega |f(x)|^q dx = \int_\Omega |f(x)|^q 1 dx &\leqslant \left(\int_\Omega (|f(x)|^q)^r dx\right)^{1/r} \left(\int_\Omega 1^{r'} dx\right)^{1/r'} \\
&= \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{q/p} |\Omega|^{1/r'} \leqslant C\|f\|_{L^p(\Omega)}^q.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\|f\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{W^{s,p}(\Omega)},
$$

para todo $q \in [1,p)$. Juntando com a primeira parte provada acima, temos a imersão contínua $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1, p_s^*]$ quando Ω é limitado. $\square$

Para o caso em que $sp = n$ observe que quando $sp \to n$ temos $p_s^* \to \infty$ pois, $p_s^* = np/(n - sp)$. Assim, é de se esperar que $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ esteja continuamente imerso em $L^q(\mathbb{R}^n)$ para todo $q \in [p, +\infty)$. Veremos no teorema a seguir que isso de fato acontece.

Teorema 2.3. *Sejam $s \in (0,1)$ e $p \in [1,+\infty)$ tais que $sp = n$. Então existe uma constante positiva $C = C(n,p,s)$ tal que, para toda função mensurável $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ com suporte compacto, temos*

$$
\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|f\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}, \tag{2.28}
$$

para todo $q \in [p,+\infty)$, isto é, o espaço $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ está continuamente imerso em $L^q(\mathbb{R}^n)$ para todo $q \in [p,+\infty)$.

Demonstração. Dado $q \in [p,+\infty)$ escolha $\tilde{s} \in (0,s)$ tal que $p_{\tilde{s}}^* = np/(n - \tilde{s}p) > q$. Deste modo, $\tilde{s}p < sp = n$. Daí, pela primeira imersão obtida no Teorema 2.1 temos $\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|f\|_{W^{\tilde{s},p}(\mathbb{R}^n)}$ para todo $q \in [p, p_{\tilde{s}}^*]$ além disso, a Proposição 1.1 garante que $\|f\|_{W^{\tilde{s},p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|f\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$ para todo $p \in [1,+\infty)$. Unindo essas das informações obtemos (2.28) para todo $q \in [p, p_{\tilde{s}}^*]$. Como $p_{\tilde{s}}^* \to +\infty$ quando $\tilde{s} \to s$, temos que (2.28) vale também para todo $q \in [p,+\infty)$. $\square$

Ainda tratando do caso em que $sp = n$ é de se esperar também que $W^{s,p}(\Omega)$ esteja continuamente imerso em $L^q(\Omega)$ para todo $q \in [p,+\infty)$ e que quando Ω for limitado consigamos este resultado para todo $q \in [1,\infty)$. De fato isso é garantido pelo teorema a seguir.

Teorema 2.4. *Sejam $s \in (0,1)$ e $p \in [1,+\infty)$ tais que $sp = n$. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um domínio de extensão para $W^{s,p}$. Então existe uma constante positiva $C = C(n,p,s,\Omega)$*

tal que, para toda função $f \in W^{s,p}(\Omega)$ temos

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{W^{s,p}(\Omega)}, \tag{2.29}$$

para todo $q \in [p, +\infty)$, isto é, o espaço $W^{s,p}(\Omega)$ está continuamente imerso em $L^q(\Omega)$ para todo $q \in [p, +\infty)$. Além disso, se Ω for limitado, então $W^{s,p}(\Omega)$ está continuamente imerso em $L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1, +\infty)$.

Demonstração. Dado $q \in [p, +\infty)$ escolha $\tilde{s} \in (0, s)$ tal que $p^*_{\tilde{s}} = np/(n - \tilde{s}p) > q$. Desse modo, $\tilde{s}p < sp = n$. Pela primeira imersão obtida no Teorema 2.2 temos $\|f\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{W^{\tilde{s},p}(\Omega)}$ para todo $q \in [p, p^*_{\tilde{s}}]$ além disso, a Proposição 1.1 garante que $\|f\|_{W^{\tilde{s},p}(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{W^{s,p}(\Omega)}$ para todo $p \in [1, +\infty)$. Unindo essas duas informações obtemos (2.29) para todo $q \in [p, p^*_{\tilde{s}}]$. Como $p^*_{\tilde{s}} \to +\infty$ quando $\tilde{s} \to s$, temos (2.29) para todo $q \in [p, +\infty)$. Agora supondo Ω limitado, pela segunda imersão obtida no Teorema 2.2, segue que $\|f\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{W^{\tilde{s},p}(\Omega)}$ para todo $q \in [1, p)$. Além disso, usando novamente a Proposição 1.1 temos que $\|f\|_{W^{\tilde{s},p}(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{W^{s,p}(\Omega)}$. Logo, (2.29) vale para todo $q \in [1, p)$, unindo à primeira parte demonstrada acima obtemos (2.29) para todo $q \in [1, +\infty)$ quando Ω é limitado. □

2.2 Imersões compactas

Nesta seção veremos sob quais condições de s, p, q e Ω o espaço $W^{s,p}(\Omega)$ está compactamente imerso em $L^q(\Omega)$.

Teorema 2.5. *Sejam $s \in (0, 1)$, $p \in [1, +\infty)$ e $q \in [1, p]$. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio de extensão limitado para $W^{s,p}$ e $\mathscr{T}$ um subconjunto limitado de $L^p(\Omega)$. Suponha que*

$$\sup_{f \in \mathscr{T}} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dxdy < +\infty. \tag{2.30}$$

Então, $\mathscr{T}$ é pré-compacto em $L^q(\Omega)$, isto é, $W^{s,p}(\Omega)$ está compactamente imerso no espaço $L^q(\Omega)$ para $q \in [1, p]$.

Demonstração. Pela definição do espaço $W^{s,p}(\Omega)$ temos que $W^{s,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$. Por outro lado, dada uma função $f \in W^{s,p}(\Omega)$ desde que Ω é limitado podemos repetir o argumento usado na demonstração do Teorema 2.2 e obter $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ e

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{W^{s,p}(\Omega)}$$

para alguma constante $C > 0$, isso garante uma imersão contínua $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1, p]$. Unindo (2.30) com o fato de $\mathscr{T}$ ser um subconjunto limitado de

$L^p(\Omega)$ temos que $\mathscr{T}$ é um subconjunto limitado de $W^{s,p}(\Omega)$. Assim, para mostrar que essa imersão é compacta, basta provar que para todo $q \in [1,p]$ o conjunto $\mathscr{T}$ é pré-compacto (isto é, que o seu fecho é um compacto) em $L^q(\Omega)$ mas, desde que L^q é um espaço de Banach separável, isso é equivalente a provar que $\mathscr{T}$ é totalmente limitado em $L^q(\Omega)$, ou seja, basta provar que para todo $\epsilon \in (0,1)$ existem funções $\beta_1, ..., \beta_M$ em $L^q(\Omega)$ tais que para toda $f \in \mathscr{T}$ existe $j \in \{1, ..., M\}$ tal que

$$\|f - \beta_j\|_{L^q(\Omega)} \leqslant \epsilon. \tag{2.31}$$

Para isso observe que como Ω é um domínio de extensão, existem uma constante $C > 0$ e uma função $\tilde{f} \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ tais que $\|\tilde{f}\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|f\|_{W^{s,p}(\Omega)}$ e $\tilde{f}(x) = f(x)$ *q.t.p.* em Ω. Portanto, para todo cubo Q contendo Ω, temos

$$\|\tilde{f}\|_{W^{s,p}(Q)} \leqslant \|\tilde{f}\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|f\|_{W^{s,p}(\Omega)} < \infty.$$

Observe que diante das hipóteses para p, q e Ω usando a desigualdade de Hölder obtemos que $\tilde{f} \in L^q(\Omega)$ assim, sendo Q um aberto limitado $\tilde{f}$ também pertence a $L^q(Q)$ para todo $q \in [1,p]$. Assim, para todo $\epsilon \in (0,1)$ podemos definir

$$C_0 := 1 + \sup_{f \in \mathscr{T}} \|\tilde{f}\|_{L^q(Q)} + \sup_{f \in \mathscr{T}} \int_Q \int_Q \frac{|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy,$$

$$\rho = \rho_\epsilon := \left(\frac{\epsilon}{2C_0^{\frac{1}{q}} n^{\frac{n+sp}{2p}}} \right)^{\frac{1}{s}} \text{ e } \eta = \eta_\epsilon := \frac{\epsilon \rho^{\frac{n}{q}}}{2}.$$

Como Ω é limitado podemos tomar uma coleção de cubos disjuntos $Q_1, ..., Q_N \subset \mathbb{R}^n$ de lado ρ tal que

$$\Omega \subseteq Q = \bigcup_{j=1}^{N} Q_j.$$

Para todo $x \in \Omega$ definimos

$$j(x) \text{ o único inteiro em } \{1, ..., N\} \text{ tal que } x \in Q_j(x). \tag{2.32}$$

Além disso, para toda $f \in \mathscr{T}$ definimos

$$P(f)(x) := \frac{1}{|Q_{j(x)}|} \int_{Q_{j(x)}} \tilde{f}(y)dy. \tag{2.33}$$

Note que $P(f+g) = P(f) + P(g)$ para quaisquer $f, g \in \mathscr{T}$ e que $P(f)$ é constante, digamos que seja igual a $q_j(f)$, em cada Q_j para $j \in \{1, ..., N\}$. Portanto, podemos definir $R(f) := \rho^{\frac{n}{q}}(q_1(f), ..., q_N(f)) \in \mathbb{R}^N$ e podemos considerar a q-norma

$$\|v\|_q := \left(\sum_{j=1}^{N} |v_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \text{ para todo } v \in \mathbb{R}^N.$$

Observe que pela linearidade de P obtemos $R(f+g) = R(f) + R(g)$. Além disso,

$$\|P(f)\|_{L^q(\Omega)}^q = \int_\Omega |P(f)(x)|^q dx = \sum_{j=1}^{N} \int_{Q_j \cap \Omega} |P(f)(x)|^q dx.$$

Por outro lado, lembre que $P(f)$ é constante igual a $q_j(f)$ em cada Q_j e que pela definição dada acima $\rho \leqslant 1$. Como $|Q_j \cap \Omega| \leqslant |Q_j| = \rho^n$, temos

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N} \int_{Q_j \cap \Omega} |P(f)(x)|^q dx &= \sum_{j=1}^{N} |Q_j \cap \Omega| |q_j(f)|^q \\ &\leqslant \rho^n \sum_{j=1}^{N} |q_j(f)|^q = \|R(f)\|_q^q \leqslant \frac{\|R(f)\|_q^q}{\rho^n}.\end{aligned}$$

Substituindo essa informação na expressão acima temos

$$\|P(f)\|_{L^q(\Omega)}^q \leqslant \frac{\|R(f)\|_q^q}{\rho^n}. \tag{2.34}$$

Observe que

$$\|R(f)\|_q^q = \sum_{j=1}^{N} \rho^n |q_j(f)|^q = \frac{1}{\rho^{n(q-1)}} \sum_{j=1}^{N} \left|\int_{Q_j} \tilde{f}(y) dy\right|^q \leqslant \frac{1}{\rho^{n(q-1)}} \sum_{j=1}^{N} \left(\int_{Q_j} |\tilde{f}(y)| dy\right)^q.$$

Além disso, pela desigualdade de Hölder para os expoentes conjugados q e $q' = q/(q-1)$ temos

$$\begin{aligned}\left(\int_{Q_j} |\tilde{f}(y)| dy\right)^q &= \left(\int_{Q_j} |\tilde{f}(y)|^q 1 dy\right)^q \leqslant \left[\left(\int_{Q_j} |\tilde{f}(y)|^q dy\right)^{1/q} \left(\int_{Q_j} 1 dy\right)^{1/q'}\right]^q \\ &= |Q_j|^{q/q'} \int_{Q_j} |\tilde{f}(y)|^q dy = \rho^{n(q-1)} \int_{Q_j} |\tilde{f}(y)|^q dy.\end{aligned}$$

Substituindo na expressão acima, segue que

$$\|R(f)\|_q^q \leqslant \frac{1}{\rho^{n(q-1)}} \sum_{j=1}^{N} \rho^{n(q-1)} \int_{Q_j} |\tilde{f}(y)|^q dy = \int_Q |\tilde{f}(y)|^q dy.$$

Assim $\|R(f)\|_q^q \leqslant \|\tilde{f}\|_{L^q(Q)}^q$. Em particular, $\sup_{f \in \mathscr{T}} \|R(f)\|_q^q \leqslant C_0$, isto é, o conjunto

$R(\mathscr{T})$ é limitado em $\mathbb{R}^N$ (com respeito à q-norma de $\mathbb{R}^N$ e a toda norma equivalente de $\mathbb{R}^N$) e assim como estamos tratando de dimensão finita $R(\mathscr{T})$ é totalmente limitado. Portanto, existem $b_1, ..., b_M \in \mathbb{R}^N$ tais que

$$R(\mathscr{T}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{M} B_\eta(b_i), \tag{2.35}$$

onde as bolas B_η são tomadas na q-norma de $\mathbb{R}^N$. Para todo $i \in \{1, ..., M\}$ escrevemos as coordenadas de b_i como $b_i = (b_{i,1}, ..., b_{i,N}) \in \mathbb{R}^N$. Para todo $x \in \Omega$ denotamos $\beta_i(x) := \rho^{-n/q} b_{i,j(x)}$ onde $j(x)$ é como em (2.32). Note que β_i é constante em Q_j, isto é, se $x \in Q_j$ então

$$P(\beta_i)(x) = \rho^{-n/q} b_{i,j} = \beta_i(x) \tag{2.36}$$

e então, $q_j \beta_i = \rho^{-n/q} b_{i,j}$. Portanto,

$$R(\beta_i) = b_i. \tag{2.37}$$

Além disso, para toda $f \in \mathscr{T}$ temos

$$\|f - P(f)\|^q_{L^q(\Omega)} = \int_\Omega |f(x) - P(f)(x)|^q dx = \sum_{j=1}^{N} \int_{Q_j \cap \Omega} |f(x) - P(f)(x)|^q dx.$$

Assim, por (2.33) obtemos

$$\begin{aligned}
\|f - P(f)\|^q_{L^q(\Omega)} &= \sum_{j=1}^{N} \int_{Q_j \cap \Omega} |f(x) - P(f)(x)|^q dx \\
&= \sum_{j=1}^{N} \int_{Q_j \cap \Omega} \left| f(x) - \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} \tilde{f}(y) dy \right|^q dx \\
&= \sum_{j=1}^{N} \int_{Q_j \cap \Omega} \frac{1}{|Q_j|^q} \left| \int_{Q_j} \left[f(x) - \tilde{f}(y) \right] dy \right|^q dx.
\end{aligned}$$

Como os cubos Q_j têm lado ρ, pela igualdade acima segue que

$$\|f - P(f)\|^q_{L^q(\Omega)} \leqslant \frac{1}{\rho^{nq}} \sum_{j=1}^{N} \int_{Q_j \cap \Omega} \left[\int_{Q_j} |f(x) - \tilde{f}(y)| dy \right]^q dx. \tag{2.38}$$

Agora vamos trabalhar com a integral à direita de (2.38). De modo inteiramente análogo ao que fizemos acima, aplicando a desigualdade de Hölder para os expoentes conjugados p e $p' = p/(p-1)$ obtemos

$$\left[\int_{Q_j} |f(x) - \tilde{f}(y)| dy\right]^q \leqslant |Q_j|^{\frac{q(p-1)}{p}} \left[\int_{Q_j} |f(x) - \tilde{f}(y)|^p dy\right]^{\frac{q}{p}}.$$

Unindo isso ao fato de que os cubos Q_j têm lado ρ, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho^{nq}} \left[\int_{Q_j} |f(x) - \tilde{f}(y)| dy\right]^q &\leqslant \frac{1}{\rho^{nq}} \rho^{\frac{nq(p-1)}{p}} \left[\int_{Q_j} |f(x) - \tilde{f}(y)|^p dy\right]^{\frac{q}{p}} \\ &= \frac{1}{\rho^{nq/p}} \left[\int_{Q_j} |f(x) - \tilde{f}(y)|^p dy\right]^{\frac{q}{p}}. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Agora observe que

$$\frac{1}{\rho^{nq/p}} \left[\int_{Q_j} |f(x) - \tilde{f}(y)|^p dy\right]^{\frac{q}{p}} = \frac{1}{\rho^{nq/p}} \left[\int_{Q_j} \frac{|f(x) - \tilde{f}(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} |x-y|^{n+sp} dy\right]^{\frac{q}{p}}.$$

Sabemos que a diagonal do cubo Q_j é $\rho\sqrt{n}$ e portanto, $|x-y|^{n+sp} \leqslant (\rho\sqrt{n})^{n+sp}$. Substituindo essa informação na igualdade acima segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho^{nq/p}} \left[\int_{Q_j} |f(x) - \tilde{f}(y)|^p dy\right]^{\frac{q}{p}} &\leqslant \frac{1}{\rho^{nq/p}} \left[\int_{Q_j} \frac{|f(x) - \tilde{f}(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} (\rho\sqrt{n})^{n+sp} dy\right]^{\frac{q}{p}} \\ &= \frac{1}{\rho^{nq/p}} (\rho\sqrt{n})^{\frac{q}{p}(n+sp)} \left[\int_{Q_j} \frac{|f(x) - \tilde{f}(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dy\right]^{\frac{q}{p}} \\ &= \frac{1}{\rho^{nq/p}} n^{\frac{q}{p}(\frac{n+sp}{2})} \rho^{\frac{q}{p}(n+sp)} \left[\int_{Q_j} \frac{|f(x) - \tilde{f}(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dy\right]^{\frac{q}{p}}. \end{aligned}$$

Substituindo isso em (2.39) obtemos que

$$\frac{1}{\rho^{nq}} \left[\int_{Q_j} |f(x) - \tilde{f}(y)| dy\right]^q \leqslant \frac{1}{\rho^{nq/p}} n^{\frac{q}{p}(\frac{n+sp}{2})} \rho^{\frac{q}{p}(n+sp)} \left[\int_{Q_j} \frac{|f(x) - \tilde{f}(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dy\right]^{\frac{q}{p}}.$$

Note que

$$\frac{1}{\rho^{nq/p}} n^{\frac{q}{p}(\frac{n+sp}{2})} \rho^{\frac{q}{p}(n+sp)} = n^{\frac{q}{p}(\frac{n+sp}{2})} \rho^{\frac{q}{p}(n+sp) - \frac{nq}{p}} = n^{\frac{q}{p}(\frac{n+sp}{2})} \rho^{sq}.$$

Substituindo na expressão acima vemos que

$$\frac{1}{\rho^{nq}}\left[\int_{Q_j}|f(x)-\tilde{f}(y)|dy\right]^q \leqslant n^{\frac{q}{p}(\frac{n+sp}{2})}\rho^{sq}\left[\int_Q \frac{|f(x)-\tilde{f}(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dy\right]^{\frac{q}{p}}.$$

Finalmente, usando isso em (2.38) mostramos que

$$\begin{aligned}\|f-P(f)\|^q_{L^q(\Omega)} &\leqslant \frac{1}{\rho^{nq}}\sum_{j=1}^N \int_{Q_j\cap\Omega}\left[\int_{Q_j}|f(x)-\tilde{f}(y)|dy\right]^q dx\\ &\leqslant n^{\frac{q}{p}(\frac{n+sp}{2})}\rho^{sq}\sum_{j=1}^N\int_{Q_j\cap\Omega}\left[\int_Q \frac{|f(x)-\tilde{f}(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dy\right]^{\frac{q}{p}}dx\\ &\leqslant n^{\frac{q}{p}(\frac{n+sp}{2})}\rho^{sq}\int_Q\left[\int_Q \frac{|f(x)-\tilde{f}(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dy\right]^{\frac{q}{p}}dx. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Como a função $t\mapsto |t|^{q/p}$ é côncava para todo p fixo e q satisfazendo $q/p\leqslant 1$, pela Desigualdade de Jensen temos

$$\|f-P(f)\|^q_{L^q(\Omega)} \leqslant n^{\frac{q}{p}(\frac{n+sp}{2})}\rho^{sq}\left[\int_Q\int_Q \frac{|f(x)-\tilde{f}(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dydx\right]^{\frac{q}{p}}.$$

Pela definição de C_0 temos que

$$\left[\int_Q\int_Q \frac{|f(x)-\tilde{f}(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dydx\right]^{\frac{q}{p}} \leqslant C_0.$$

Substituindo acima temos

$$\|f-P(f)\|^q_{L^q(\Omega)} \leqslant C_0 n^{\frac{q}{p}(\frac{n+sp}{2})}\rho^{sq}.$$

Usando a definição de ρ obtemos

$$\begin{aligned}\|f-P(f)\|^q_{L^q(\Omega)} &\leqslant C_0 n^{\frac{q}{p}(\frac{n+sp}{2})}\left(\frac{\epsilon}{2C_0^{\frac{1}{q}}n^{\frac{n+sp}{2p}}}\right)^q\\ &= C_0 n^{\frac{q}{p}(\frac{n+sp}{2})}\left(\frac{\epsilon^q}{2^q C_0 n^{\frac{(n+sp)q}{2p}}}\right) = \frac{\epsilon^q}{2^q}.\end{aligned} \tag{2.41}$$

Agora observe que pela desigualdade triangular temos

$$\begin{aligned}\|f-\beta_j\|_{L^q(\Omega)} &= \|f-\beta_j+P(f)-P(f)+P(\beta_j)-P(\beta_j)\|_{L^q(\Omega)}\\ &\leqslant \|f-P(f)\|_{L^q(\Omega)}+\|P(\beta_j)-\beta_j\|_{L^q(\Omega)}+\|P(f)-P(\beta_j)\|_{L^q(\Omega)}, \quad (2.42)\end{aligned}$$

para cada $j \in \{1, ..., M\}$. Por (2.36) obtemos $\|P(\beta_j)-\beta_j\|_{L^q(\Omega)} = 0$ e usando novamente (2.36), a linearidade de P e (2.34) vemos que

$$\|P(f)-P(\beta_j)\|_{L^q(\Omega)} = \|P(f)-\beta_j\|_{L^q(\Omega)} = \|P(f-\beta_j)\|_{L^q(\Omega)} \leqslant \frac{\|R(f-\beta_j)\|_q}{\rho^{n/q}}.$$

Substituindo essas duas informações e (2.41) em (2.42) e usando a linearidade de R temos que

$$\|f-\beta_j\|_{L^q(\Omega)} \leqslant \frac{\epsilon}{2}+\frac{\|R(f)-R(\beta_j)\|_q}{\rho^{n/q}}.$$

Agora usando (2.37) obtemos

$$\|f-\beta_j\|_{L^q(\Omega)} \leqslant \frac{\epsilon}{2}+\frac{\|R(f)-b_j\|_q}{\rho^{n/q}}.$$

Lembrando de (2.35) e da definição de η, tome $j \in \{1, ...M\}$ tal que $R(f) \in B_\eta(b_j)$, isto é, $\|R(f)-b_j\|_q \leqslant \eta$. Substituindo na desigualdade acima temos

$$\|f-\beta_j\|_{L^q(\Omega)} \leqslant \frac{\epsilon}{2}+\frac{\eta}{\rho^{n/q}} = \epsilon. \quad (2.43)$$

Assim temos (2.31) como queríamos. □

Corolário 2.1. Sejam $s \in (0,1)$ e $p \in [1,+\infty)$ tal que $sp < n$. Sejam $q \in [1, p_s^*)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, um domínio de extensão limitado para $W^{s,p}$ e $\mathscr{T}$ um subconjunto limitado de $L^p(\Omega)$. Suponha que

$$\sup_{f\in\mathscr{T}} \int_\Omega\int_\Omega \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy < +\infty. \quad (2.44)$$

Então, $\mathscr{T}$ é pré-compacto em $L^q(\Omega)$, isto é, $W^{s,p}(\Omega)$ está compactamente imerso no espaço $L^q(\Omega)$ para $q \in [1, p_s^*)$.

Demonstração. Se $q \in [1, p]$ o resultado segue direto do teorema anterior. Resta provar para $q \in (p, p_s^*)$. Observe que o Teorema 2.2 garante para esse caso uma imersão contínua de $W^{s,p}(\Omega)$ em $L^q(\Omega)$. Para provar a compacidade considere $f \in \mathscr{T}$ (e portanto, $f \in W^{s,p}(\Omega)$) e β_j definido como no teorema anterior com $j \in \{1, ..., N\}$.

Tome $q \in (p, p_s^*)$ e $\theta = \theta(p, p_s^*, q) \in (0,1)$ tal que $\dfrac{1}{q} = \dfrac{\theta}{p} + \dfrac{1-\theta}{p_s^*}$. Observe que

$$
\begin{aligned}
\frac{\theta q}{p} + \frac{(1-\theta)q}{p_s^*} &= \frac{p_s^*\theta q + (1-\theta)qp}{pp_s^*} = q\left(\frac{p_s^*\theta + (1-\theta)p}{pp_s^*}\right) \\
&= \left(\frac{pp_s^*}{p_s^*\theta + (1-\theta)p}\right)\left(\frac{p_s^*\theta + (1-\theta)p}{pp_s^*}\right) = 1,
\end{aligned}
$$

Pela desigualdade de Hölder para os expoentes conjugados $p/\theta q$ e $p_s^*/(1-\theta)q$, temos

$$
\begin{aligned}
\|f - \beta_j\|_{L^q(\Omega)} &= \left(\int_\Omega |f-\beta_j|^{q\theta}|f-\beta_j|^{q(1-\theta)}dx\right)^{1/q} \\
&\leqslant \left(\int_\Omega |f-\beta_j|^{p}\right)^{\theta/p}\left(\int_\Omega |f-\beta_j|^{p_s^*}dx\right)^{(1-\theta)/p_s^*} \\
&= \|f-\beta_j\|^{1-\theta}_{L^{p_s^*}(\Omega)}\|f-\beta_j\|^{\theta}_{L^p(\Omega)},
\end{aligned}
$$

Pelo Teorema 2.2 temos que $\|f - \beta_j\|^{1-\theta}_{L^{p_s^*}(\Omega)} \leqslant C\|f-\beta_j\|^{1-\theta}_{W^{s,p}(\Omega)}$ e por (2.43), $\|f-\beta_j\|^{\theta}_{L^p(\Omega)} \leqslant \epsilon^\theta$. Assim,

$$
\|f-\beta_j\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C\|f-\beta_j\|^{1-\theta}_{W^{s,p}(\Omega)}\epsilon^\theta \leqslant \tilde{C}\epsilon^\theta.
$$

Isso prova que $\mathscr{T}$ pré-compacto em $L^q(\Omega)$ para todo $q \in [p, p_s^*)$, juntando com a primeira parte provada acima, garantimos esse resultado para todo $q \in [1, p_s^*)$. $\square$

2.3 Regularidade de Hölder

Iniciamos esta seção com a definição de picos externos para em seguida provar um lema técnico que será usado na demonstração do teorema de regularidade de Hölder, o qual é o principal resultado dessa seção.

Definição 2.1. Dizemos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ não tem picos externos, se existe uma constante $C > 0$ tal que para cada $x_0 \in \overline{\Omega}$ e cada $0 < \rho < diam(\Omega)$, temos que

$$
|Q(x_0,\rho)|C \leqslant |\Omega \cap Q(x_0,\rho)|,
$$

onde $Q(x_0,\rho)$ é o cubo de centro x_0 cujos lados medem 2ρ e são paralelos aos eixos coordenados.

Observe que a constante C da definição obrigatoriamente pertence ao intervalo $(0,1)$. Para simplificar, denotaremos $\Omega \cap Q(x_0,\rho)$ por $\Omega(x_0,\rho)$.

Lema 2.5. ([12, Lema 2.2]) Seja $p \in [1, +\infty)$ e $sp \in (n, n+p]$. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio sem picos externos e f uma função em $W^{s,p}(\Omega)$. Então, para todo $x_0 \in \Omega$ e R, ρ, com $0 < \rho < R < diam(\Omega)$, temos

$$|f_{x_0,R} - f_{x_0,\rho}| \leqslant c[f]_{p,sp}|\Omega(x_0, R)|^{(sp-n)/np},$$

onde $f_{x_0,r}$ é a média de f em $\Omega(x_0, r)$, isto é,

$$f_{x_0,r} := \frac{1}{|\Omega(x_0, r)|}\int_{\Omega(x_0,r)} f(x)dx,$$

e

$$[f]_{p,sp} := \left(\sup_{\substack{x_0\in\Omega \\ r>0}} \frac{1}{|\Omega(x_0, r)|^{sp/n}}\int_{\Omega(x_0,r)} |f(x) - f_{x_0,r}|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Além disso, a constante c depende de n, p, s e da constante C dada na Definição 2.1.

Demonstração. Considere r, t números reais tais que $\rho < r < t \leqslant R$. Assim, para cada $x_0 \in \overline{\Omega}$ e t fixos temos que $\Omega(x_0, r) \subset \Omega(x_0, t)$. Portanto,

$$|f_{x_0,r} - f_{x_0,t}| = \left|\frac{1}{|\Omega(x_0, r)|}\int_{\Omega(x_0,r)} [f(x) - f_{x_0,t}]\, dx\right| \leqslant \frac{1}{|\Omega(x_0, r)|}\int_{\Omega(x_0,r)} |f(x) - f_{x_0,t}|dx.$$

Usando a desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|\Omega(x_0, r)|}\int_{\Omega(x_0,r)} |f(x) - f_{x_0,t}|dx \\
&\qquad \leqslant \frac{1}{|\Omega(x_0, r)|^{1/p}}\left[\int_{\Omega(x_0,r)} |f(x) - f_{x_0,t}|^p dx\right]^{1/p} \\
&\qquad \leqslant \frac{1}{|\Omega(x_0, r)|^{1/p}}\left(\frac{|\Omega(x_0, t)|^{-s/n}}{|\Omega(x_0, t)|^{-s/n}}\right)\left[\int_{\Omega(x_0,t)} |f(x) - f_{x_0,t}|^p dx\right]^{1/p} \\
&\qquad \leqslant \left(\frac{|\Omega(x_0, t)|^{s/n}}{|\Omega(x_0, r)|^{1/p}}\right)\left[\sup_{\substack{x_0\in\Omega \\ t>0}} |\Omega(x_0, t)|^{-sp/n}\int_{\Omega(x_0,t)} |f(x) - f_{x_0,t}|^p dx\right]^{1/p}.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\frac{1}{|\Omega(x_0, r)|}\int_{\Omega(x_0,r)} |f(x) - f_{x_0,t}|dx \leqslant |\Omega(x_0, t)|^{s/n}|\Omega(x_0, r)|^{-1/p}[f]_{p,sp}.$$

Agora substituindo na expressão acima, temos

$$|f_{x_0,r} - f_{x_0,t}| \leqslant |\Omega(x_0, t)|^{s/n}|\Omega(x_0, r)|^{-1/p}[f]_{p,sp}. \tag{2.45}$$

Além disso, como Ω não tem picos externos, para cada $x_0 \in \overline{\Omega}$ e $0 < r, t < diam(\Omega)$, temos $|Q(x_0, r)|C \leqslant |\Omega(x_0, r)|$. E como $\Omega(x_0, t) \subset Q(x_0, t)$, obtemos

$$|\Omega(x_0, t)| \leqslant |Q(x_0, t)| = (2t)^n = (t/r)^n(2r)^n = (t/r)^n|Q(x_0, r)| \leqslant (t/r)^n C^{-1}|\Omega(x_0, r)|,$$

e o mesmo vale para r e t em posições trocadas. Daí segue que

$$(t/r)^n C|\Omega(x_0, r)| \leqslant |\Omega(x_0, t)| \leqslant (t/r)^n C^{-1}|\Omega(x_0, r)|. \tag{2.46}$$

Usando a segunda desigualdade de (2.46) em (2.45), obtemos

$$\begin{aligned} |f_{x_0,r} - f_{x_0,t}| &\leqslant \left[(t/r)^n C^{-1}|\Omega(x_0, r)|\right]^{s/n} |\Omega(x_0, r)|^{-1/p}[f]_{p,sp} \\ &= (t/r)^s C^{-s/n}|\Omega(x_0, r)|^{(sp-n)/np}[f]_{p,sp}. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Agora, considerando $r_j := R2^{-j}$ para $j \in \mathbb{N}$ e reescrevendo a expressão acima para $r := r_j$ e $t := r_{j-1}$ obtemos

$$\begin{aligned} |f_{x_0,r_j} - f_{x_0,r_{j-1}}| &\leqslant C^{-s/n}\left(\frac{r_{j-1}}{r_j}\right)^s |\Omega(x_0, r_j)|^{(sp-n)/np}[f]_{p,sp} \\ &= C^{-s/n}\left(\frac{R2^{-(j-1)}}{R2^{-j}}\right)^s |\Omega(x_0, r_j)|^{(sp-n)/np}[f]_{p,sp} \\ &= c[f]_{p,sp}|\Omega(x_0, r_j)|^{(sp-n)/np}, \end{aligned}$$

onde $c = 2^s C^{-s/n}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ vemos que

$$|f_{x_0,r_k} - f_{x_0,R}| \leqslant \sum_{j=1}^{k} |f_{x_0,r_j} - f_{x_0,r_{j-1}}| \leqslant c[f]_{p,sp}\sum_{j=1}^{k} |\Omega(x_0, r_j)|^{(sp-n)/np}. \tag{2.48}$$

Pela primeira desigualdade em (2.46), temos $(r_0/r_j)^n C|\Omega(x_0, r_j)| \leqslant |\Omega(x_0, r_0)|$, ou seja

$$|\Omega(x_0, r_j)| \leqslant \frac{1}{2^{jn}C}|\Omega(x_0, R)|,$$

para todo $j = 1, ..., k$. Usando isso em (2.48), temos

$$\begin{aligned} |f_{x_0,r_k} - f_{x_0,R}| &\leqslant c[f]_{p,sp}\sum_{j=1}^{k} |\Omega(x_0, r_j)|^{(sp-n)/np} \\ &\leqslant c[f]_{p,sp}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{2^{jn}C}|\Omega(x_0, R)|\right)^{(sp-n)/np} \\ &\leqslant \tilde{c}[f]_{p,sp}|\Omega(x_0, R)|^{(sp-n)/np}, \end{aligned}$$

onde $\tilde{c} = cC^{-(sp-n)/np}$. Na última desigualdade usamos o fato de que a série $\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j}$ é convergente. Considerando $k \in \mathbb{N}$ tal que $r_k \leq \rho < r_{k-1}$, segue de (2.47) que

$$|f_{x_0,r_k} - f_{x_0,\rho}| \leqslant (\rho/r_k)^s C^{-s/n}[f]_{p,sp}|\Omega(x_0,r_k)|^{(sp-n)/np} \leqslant c[f]_{p,sp}|\Omega(x_0,\rho)|^{(sp-n)/np},$$

onde usamos o fato de $r_k < \rho$ e $sp > n$. Usando isso juntamente com a desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned}
|f_{x_0,R} - f_{x_0,\rho}| &= |f_{x_0,R} - f_{x_0,\rho} + f_{x_0,r_k} - f_{x_0,r_k}| \\
&\leqslant |f_{x_0,R} - f_{x_0,r_k}| + |f_{x_0,r_k} - f_{x_0,\rho}| \\
&\leqslant \tilde{c}[f]_{p,sp}|\Omega(x_0,R)|^{(sp-n)/np} + c[f]_{p,sp}|\Omega(x_0,\rho)|^{(sp-n)/np} \\
&\leqslant \max\{\tilde{c},c\}[f]_{p,sp}|\Omega(x_0,R)|^{(sp-n)/np},
\end{aligned}$$

onde usamos o fato de $\rho < R$ e $sp > n$. □

Definição 2.2. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Dizemos que uma função limitada $F : \Omega \to \mathbb{R}$ é Hölder contínua com expoente $\alpha > 0$, se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|F(x) - F(y)| \leqslant C|x-y|^{\alpha},$$

para todo $x, y \in \Omega$. Definimos $C^{0,\alpha}(\Omega)$ como sendo o espaço de todas as funções que são Hölder contínuas com expoente α.

Teorema 2.6. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio de extensão para $W^{s,p}$ sem picos externos e $s \in (0,1)$, $p \in [1,+\infty)$ tal que $sp > n$. Então, existe uma constante $C > 0$ dependendo de n, s, p e Ω, tal que*

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{W^{s,p}(\Omega)}, \tag{2.49}$$

para toda $f \in L^p(\Omega)$, com $\alpha := (sp-n)/p$.

Demonstração. A seguir, denotaremos por C constantes positivas adequadas, possivelmente diferente em cada passo. Observe que se a expressão do lado direito de (2.49) não for finita, então não há o que fazer. Assim, vamos supor que

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy < \infty,$$

isto é $f \in W^{s,p}(\Omega)$. Como Ω é um domínio de extensão para $W^{s,p}$ pelo Teorema 1.6 podemos estender f para $\tilde{f}$ definida em $\mathbb{R}^n$ de modo que $\|\tilde{f}\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|f\|_{W^{s,p}(\Omega)}$, onde $C = C(n,p,s,\Omega)$. Agora, para todo conjunto mensurável limitado $U \subset \mathbb{R}^n$

denotamos $\tilde{f}_U$ a média de $\tilde{f}$ em U. Para $\xi \in \mathbb{R}$, usando a Desigualdade de Jensen, obtemos

$$\left|\xi - \tilde{f}_U\right|^p = \left|\xi - \frac{1}{|U|}\int_U \tilde{f}(y)dy\right|^p = \left|\frac{1}{|U|}\int_U \left(\xi - \tilde{f}(y)\right)dy\right|^p \leqslant \frac{1}{|U|}\int_U \left|\xi - \tilde{f}(y)\right|^p dy.$$

Desse modo, para $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, tomamos $U := Q(x_0, r)$ e $\xi := \tilde{f}(x)$ para $x \in U$. Integrando sobre $Q(x_0, r)$ temos

$$\int_{Q(x_0,r)} |\tilde{f}(x) - \tilde{f}_{Q(x_0,r)}|^p dx \leqslant \frac{1}{|Q(x_0,r)|}\int_{Q(x_0,r)}\int_{Q(x_0,r)} |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)|^p dxdy.$$

Sabemos que $|x - y| \leqslant r\sqrt{n}$ para todo $x, y \in Q(x_0, r)$. Usando essas informações na expressão acima obtemos

$$\begin{aligned}\int_{Q(x_0,r)} |\tilde{f}(x) - \tilde{f}_{Q(x_0,r)}|^p dx &\leqslant \frac{(r\sqrt{n})^{n+sp}}{|Q(x_0,r)|}\int_{Q(x_0,r)}\int_{Q(x_0,r)} \frac{|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy \\ &\leqslant \frac{(\sqrt{n})^{n+sp} r^n r^{sp}}{|Q(x_0,r)|}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy \\ &\leqslant \frac{(\sqrt{n})^{n+sp} r^n r^{sp}}{|Q(x_0,r)|}[\tilde{f}]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} = Cr^{sp}[\tilde{f}]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned} \tag{2.50}$$

Como $\tilde{f}$ é uma extensão de f temos

$$[\tilde{f}]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|\tilde{f}\|^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|f\|^p_{W^{s,p}(\Omega)}. \tag{2.51}$$

Assim, por (2.50) e (2.51) temos

$$[\tilde{f}]^p_{p,sp} = \sup_{x_0\in\mathbb{R}^n, r>0} \frac{1}{|Q(x_0,r)|^{sp/n}}\int_{Q(x_0,r)} |\tilde{f}(x) - \tilde{f}_{Q(x_0,r)}|^p dx \leqslant C\|f\|^p_{W^{s,p}(\Omega)}, \tag{2.52}$$

para alguma constante C, que depende de n, p e s. Tomando agora $x_0 \in \Omega$ e considerando $U = \Omega(x_0, r)$ ao invés de $Q(x_0, r)$, podemos repetir as estimativas de (2.50) e usar o fato de que $|Q(x_0, r)|C \leqslant |\Omega(x_0, r)|$, já que Ω não tem picos externos, para concluir que

$$[f]^p_{p,sp} \leqslant C\|f\|^p_{W^{s,p}(\Omega)}. \tag{2.53}$$

Por outro lado, pelo teorema da diferenciação de Lebesgue (ver Teorema B.11)

$$f_m(x) := \frac{1}{|\Omega(x, 1/m)|}\int_{\Omega(x,1/m)} f(y)dy \to f(x) \tag{2.54}$$

q.t.p. $x \in \Omega$ quando $m \to \infty$. Como $sp > n$, pelo Lema 2.5, temos

$$|f_{x_0,R} - f_{x_0,\rho}| \leqslant C[f]_{p,sp}\, |\Omega(x_0,R)|^{(sp-n)/np}\,, \tag{2.55}$$

e com isso e (2.53) vemos que a sequência (f_m), como definida acima, é uniformemente convergente para f. Uma vez que cada f_m é uma função contínua segue que f é contínua em Ω. Agora considere $x, y \in \Omega$ e $R = |x-y|$. Assim,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - \tilde{f}_{Q(x,2R)}| + |\tilde{f}_{Q(x,2R)} - \tilde{f}_{Q(y,2R)}| + |\tilde{f}_{Q(y,2R)} - f(y)|. \tag{2.56}$$

Desse forma, usando o Lema 2.5 para $\tilde{f}$, por (2.54) podemos estimar o primeiro e o terceiro termo do lado direito da expressão acima. Com efeito, para qualquer $x \in \Omega$, fazendo $\rho \to 0$, temos

$$\begin{aligned} |f(x) - \tilde{f}_{Q(x,2R)}| &= \lim_{\rho \to 0} |\tilde{f}_{Q(x,\rho)} - \tilde{f}_{Q(x,2R)}| \leqslant C[\tilde{f}]_{p,sp} |Q(x,2R)|^{(sp-n)/np} \\ &\leqslant C[\tilde{f}]_{p,sp}\, [(4R)^n]^{(sp-n)/np} \leqslant C||f||_{W^{s,p}(\Omega)} R^{(sp-n)/p}, \end{aligned} \tag{2.57}$$

onde usamos (2.52). Aqui C é uma constante que depende de s, p e n. Analogamente, para o terceiro termo obtemos,

$$|\tilde{f}_{Q(y,2R)} - f(y)| \leqslant C||f||_{W^{s,p}(\Omega)} R^{(sp-n)/p}. \tag{2.58}$$

Agora, para estimar o segundo termo, observe que pela desigualdade triangular, temos

$$|\tilde{f}_{Q(x,2R)} - \tilde{f}_{Q(y,2R)}| \leqslant |\tilde{f}(z) - \tilde{f}_{Q(x,2R)}| + |\tilde{f}(z) - \tilde{f}_{Q(y,2R)}|, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

Considerando $B := Q(x,2R) \cap Q(y,2R)$ e integrando essa expressão com relação a $z \in B$, temos

$$\begin{aligned} \int_B |\tilde{f}_{Q(x,2R)} - \tilde{f}_{Q(y,2R)}| dz &\leqslant \int_B |\tilde{f}(z) - \tilde{f}_{Q(x,2R)}| dz + \int_B |\tilde{f}(z) - \tilde{f}_{Q(y,2R)}| dz \\ &\leqslant \int_{Q(x,2R)} |\tilde{f}(z) - \tilde{f}_{Q(x,2R)}| dz + \int_{Q(y,2R)} |\tilde{f}(z) - \tilde{f}_{Q(y,2R)}| dz. \end{aligned}$$

Isso implica que,

$$|B||\tilde{f}_{Q(x,2R)} - \tilde{f}_{Q(y,2R)}| \leqslant \int_{Q(x,2R)} |\tilde{f}(z) - \tilde{f}_{Q(x,2R)}| dz + \int_{Q(y,2R)} |\tilde{f}(z) - \tilde{f}_{Q(y,2R)}| dz.$$

Observe que, como estamos considerando $x, y \in \Omega$ e $R = |x-y|$, temos que $Q(x,R) \cup Q(y,R) \subset Q(x,2R) \cap Q(y,2R)$ e portanto, $|Q(x,R)| \leqslant |B|$ e $|Q(y,R)| \leqslant |B|$.

Usando isso na expressão acima, temos

$$
\begin{aligned}
|\tilde{f}_{Q(x,2R)} - \tilde{f}_{Q(y,2R)}| \leqslant \frac{1}{|Q(x,R)|} \int_{Q(x,2R)} |\tilde{f}(z) - \tilde{f}_{Q(x,2R)}| dz \\
+ \frac{1}{|Q(y,R)|} \int_{Q(y,2R)} |\tilde{f}(z) - \tilde{f}_{Q(y,2R)}| dz. \qquad (2.59)
\end{aligned}
$$

Agora queremos obter uma estimativa para cada integral à direita da expressão acima. Para isso, usando a desigualdade de Hölder com os expoentes conjugados p e $p' = p/(p-1)$ na primeira integral, obtemos

$$
\int_{Q(x,2R)} |\tilde{f}(z) - \tilde{f}_{Q(x,2R)}| 1 dz \leqslant |Q(x,2R)|^{(p-1)/p} \left(\int_{Q(x,2R)} |\tilde{f}(z) - \tilde{f}_{Q(x,2R)}|^p dz \right)^{1/p}.
$$

Agora observe que usando a definição de $[\tilde{f}]_{p,sp}$ e (2.52), temos

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{Q(x,2R)} |\tilde{f}(z) - \tilde{f}_{Q(x,2R)}|^p dz \right)^{1/p} &= (2R)^s \left((2R)^{-sp} \int_{Q(x,2R)} |\tilde{f}(z) - \tilde{f}_{Q(x,2R)}|^p dz \right)^{1/p} \\
&\leqslant CR^s [\tilde{f}]_{p,sp} \leqslant CR^s ||f||_{W^{s,p}(\Omega)},
\end{aligned}
$$

onde $C = C(s,p,n)$. Substituindo na expressão acima, obtemos

$$
\frac{1}{|Q(x,R)|} \int_{Q(x,2R)} |\tilde{f}(z) - \tilde{f}_{Q(x,2R)}| dz \leqslant C ||f||_{W^{s,p}(\Omega)} R^{(sp-n)/p}.
$$

Analogamente, para a segunda integral é possível obter

$$
\frac{1}{|Q(y,R)|} \int_{Q(y,2R)} |\tilde{f}(z) - \tilde{f}_{Q(y,2R}| dz \leqslant C ||f||_{W^{s,p}(\Omega)} R^{(sp-n)/p}.
$$

Agora usando essas duas últimas em (2.59), temos

$$
|\tilde{f}_{Q(x,2R)} - \tilde{f}_{Q(y,2R)}| \leqslant C ||f||_{W^{s,p}(\Omega)} R^{(sp-n)/p}.
$$

Por fim, usando essa estimativa juntamente com (2.57) e (2.58) em (2.56) temos,

$$
|f(x) - f(y)| \leqslant C ||f||_{W^{s,p}(\Omega)} R^{(sp-n)/p} = C ||f||_{W^{s,p}(\Omega)} |x-y|^{(sp-n)/p}. \qquad (2.60)
$$

Isso prova que f é Hölder contínua com expoente $(sp-n)/p$. Resta provar a desigualdade do enunciado do teorema. Para isso observe que tomando $R_0 < diam(\Omega)$

e usando (2.57) para cada $x \in \Omega$, temos

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leqslant |f(x) - f_{x,R_0}| + |f_{x,R_0}| \leqslant C[f]_{p,sp}|Q(x,R_0)|^{(sp-n)/p} + |f_{x,R_0}| \\ &\leqslant C||f||_{W^{s,p}(\Omega)} R_0^{(sp-n)/p} + |f_{x,R_0}|. \end{aligned}$$

Além disso, pela desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned} |f_{x,R_0}| &\leqslant \frac{1}{|\Omega(x,R_0)|}\int_{\Omega(x,R_0)} |f(x)|dx \leqslant \frac{1}{|\Omega(x,R_0)|}\|f\|_{L^p(\Omega)}|Q(x,R_0)|^{(p-1)/p} \\ &\leqslant \frac{C}{|Q(x,R_0)|^{1/p}}\|f\|_{L^p(\Omega)} = \frac{C}{R_0^{n/p}}\|f\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Substituindo na expressão acima, temos

$$|f(x)| \leqslant C||f||_{W^{s,p}(\Omega)} R_0^{(sp-n)/p} + \frac{C}{R_0^{n/p}}\|f\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C||f||_{W^{s,p}(\Omega)}. \tag{2.61}$$

Lembrando que $\alpha := (sp-n)/p$, segue de (2.60) (2.61) que

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} = \|f\|_{L^\infty} + \sup_{x,y\in\Omega} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} \leqslant C\|f\|_{W^{s,p}(\Omega)},$$

como afirmamos. □

Capítulo 3

Existência de solução para um problema do tipo Schrödinger envolvendo o operador Laplaciano fracionário

Neste capítulo, estudaremos a existência de soluções para o problema

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u + u = |u|^{p-1}u \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^n \\ u \in H^s(\mathbb{R}^n); \; u \not\equiv 0 \end{cases}, \tag{3.1}$$

onde

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s u(x) &= C(n,s) P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy \\ &= C(n,s) \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{B_\epsilon^c(x)} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy \;\forall x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{3.2}$$

é o operador Laplaciano, como na Definição 1.7 e $H^s(\mathbb{R}^n) = W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$. Mais precisamente, estamos interessados na existência e nas propriedades de simetria de soluções fracas para o referido problema, como indicado no teorema a seguir.

Teorema 3.1. *Sejam $s \in (0,1)$ e $p \in (1, (n+2s)/(n-2s))$, com $2s < n$. Então existe uma solução $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ para o problema (3.1) a qual é positiva e esfericamente simétrica.*

Note que no teorema acima, $p < (n+2s)/(n-2s) = (2n)/(n-2s) - 1 = 2_s^* - 1$ e lembre que 2_s^* é o maior expoente para o qual é possível a imersão $H^s \hookrightarrow L^p$.

3.1 Resultados preliminares

Nesta seção relembraremos algumas notações que já estamos usando e alguns resultados já demonstrados ao longo deste trabalho. Introduziremos alguns lemas a serem usados na demonstração do teorema principal e definiremos o que de fato é uma solução para o problema com o qual estamos lidando.

3.1.1 Notação

Inicialmente relembraremos algumas notações usadas ao longo deste trabalho. Denotamos por $\mathscr{S}$ o espaço de Schwartz das funções $C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ que são rapidamente decrescentes. A topologia desse espaço é gerada pelas seminormas,

$$p_N(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|)^N \sum_{|\alpha|\leqslant N} |D^{\alpha}\varphi(x)|,\ N = 0, 1, 2, ...,$$

onde $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Definimos a transformada de Fourier $\mathscr{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ por

$$\mathscr{F}\varphi(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x}\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Para cada $s \in (0, 1)$, o espaço de Sobolev fracionário $H^s(\mathbb{R}^n) = W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$ é definido por

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n); \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\frac{n}{2}+s}} \in L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \right\}, \tag{3.3}$$

o qual é equipado com a norma

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + [u]^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

onde

$$[u]^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy \right)^{1/2}$$

é a seminorma de Gagliardo. Pela Proposição 1.5 temos

$$[u]_{H^s(\mathbb{R}^n)} = 2C(n,s)^{-1} \left\| (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

onde

$$C(n,s) := \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-cos(\zeta_1)}{|\zeta|^{n+2s}} d\zeta \right)^{-1}.$$

3.1.2 Resultados auxiliares

A Proposição 1.3 estabelece a seguinte relação entre o Laplaciano fracionário e a transformada de Fourier

$$(-\Delta)^s u = \mathscr{F}^{-1}\left(|\xi|^{2s}(\mathscr{F}u)\right) \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

para $s \in (0,1)$ e $u \in \mathscr{S}$.

Quando $s \in (0,1)$ a Proposição 1.4 relaciona o Laplaciano fracionário com a transformada de Fourier da seguinte forma

$$[u]^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} = 2C(n,s)^{-1}\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s}|\mathscr{F}u(\xi)|^2 d\xi,$$

e garante também que $H^s(\mathbb{R}^n)$ definido por meio da seminorma de Gagliardo em (3.3) coincide com a definição

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n); \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^{2s})|\mathscr{F}u(\xi)|^2 d\xi < \infty \right\},$$

dada por meio da transformada de Fourier.

Finalmente, lembramos a definição de soluções fracas $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ para o Problema 3.1. Para todo $s \in (0,1)$, a função mensurável $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dita uma solução fraca para o Problema 3.1 se

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x)-u(y))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{n+2s}} dxdy + \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\varphi(x)dx \\ = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{p-1}u(x)\varphi(x)dx, \end{aligned} \tag{3.4}$$

para toda função $\varphi \in C^1_0(\mathbb{R}^n)$.

Um método natural para resolver o Problema 3.1 consiste em encontrar os pontos críticos do funcional $I : H^s(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{p+1}dx. \tag{3.5}$$

Usando o fato que a primeira parte deste funcional é um produto interno (ver Apêndice A, Teorema A.7) e os resultados de imersão de $H^s(\mathbb{R}^n)$ em $L^q(\mathbb{R}^n)$, para $q \in [2, 2^*_s]$, vemos que I é de classe C^1, com derivada dada por

$$I'(u)\varphi = \langle u, \varphi\rangle_{H^s(\mathbb{R}^n)} - \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{p-1}u\varphi dx.$$

Veja Proposição A.2 para os detalhes. Assim, um ponto crítico deste funcional satisfaz

(3.4) e portanto, é uma solução de (3.1). Observe que

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{p+1}dx \\ &= \frac{1}{2}\left([u]^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} + \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right) - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{p+1}dx \\ &= \frac{1}{2}[u]^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} + \int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{2}|u(x)|^2 - \frac{1}{p+1}|u(x)|^{p+1}\right)dx. \end{aligned}$$

Considerando $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = |t|^{p-1}t - t$ e

$$G(t) = \int_0^t g(\tau)d\tau = \frac{1}{p+1}|t|^{p+1} - \frac{1}{2}t^2,$$

podemos reescrever o funcional $I(u)$ da forma

$$I(u) = \frac{1}{2}[u]^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} - \int_{\mathbb{R}^n} G(u)dx.$$

Portanto, focaremos no problema de minimização com vínculo

$$\min\left\{[u]^2_{H^s(\mathbb{R}^n)};\ u \in H^s(\mathbb{R}^n), \int_{\mathbb{R}^n} G(u)dx = 1\right\}, \tag{3.6}$$

e ao provar que tal mínimo é atingido, usaremos o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange para provar a existência da solução do problema mencionado. Antes de passarmos à demonstração do teorema principal, vejamos mais alguns resultados auxiliares.

Definição 3.1. Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Então f^*, o rearranjamento simétrico de f, é uma função radialmente decrescente (em $r = |x|$), mensurável tal que para todo $\alpha > 0$ $|\{f^* \geqslant \alpha\}| = |\{f \geqslant \alpha\}|$.

Observação 3.1. Decorre da definição acima que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} F(f)dx = \int_{\mathbb{R}^n} F(f^*)dx$, para toda função contínua F tal que $F(f)$ é integrável.

Lema 3.1. Seja $s \in (0,1)$. Então para cada $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u^*(x) - u^*(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy \leqslant \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy,$$

onde u^* é o rearranjamento simétrico radialmente decrescente de u.

Demonstração. Em [17, Teorema 1.1] provou-se que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(-\Delta)^{s/2}f^*(x)|^2dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |(-\Delta)^{s/2}f(x)|^2dx,$$

isto é,

$$\left\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f^*\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leqslant \left\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

Além disso, pela Proposição 1.5 temos

$$[u]_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2 = 2C(n,s)^{-1}\left\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u^*(x)-u^*(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy \leqslant \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy,$$

como afirmamos. □

Lema 3.2. Seja $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ uma função radialmente decrescente. Então

$$|u(x)| \leqslant \left(\frac{n}{\omega_{n-1}}\right)^{1/2} |x|^{-n/2}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \ \forall x \neq 0,$$

onde ω_{n-1} é a medida de Lebesgue da esfera unitária em $\mathbb{R}^n$.

Demonstração. Primeiro observe que como u é uma função radialmente decrescente podemos supor $r = |x|$ daí, pelo Teorema A.5 temos

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 dx = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B_r} |u(r)|^2 dS\right) dr = \int_0^\infty |u(r)|^2 \omega_{n-1} r^{n-1} dr \\ &= \omega_{n-1}\int_0^\infty |u(r)|^2 r^{n-1} dr \geqslant \omega_{n-1}\int_0^R |u(r)|^2 r^{n-1} dr,\end{aligned}$$

para todo $R > 0$. Como u é decrescente temos $u(r) \geqslant u(R)$ para todo $R \geqslant r \geqslant 0$. Daí,

$$\omega_{n-1}\int_0^R |u(r)|^2 r^{n-1} dr \geqslant \omega_{n-1}|u(R)|^2 \int_0^R r^{n-1} dr = \omega_{n-1}|u(R)|^2 \frac{R^n}{n}.$$

Substituindo na expressão acima obtemos

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \geqslant \omega_{n-1}|u(R)|^2\frac{R^n}{n}, \quad \forall R > 0.$$

Logo, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, tomando $R = |x|$, concluímos que

$$|u(x)|^2 \leqslant |x|^{-n}\frac{n}{\omega_{n-1}}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$$

isto é,

$$|u(x)| \leqslant |x|^{-n/2}\left(\frac{n}{\omega_{n-1}}\right)^{1/2}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

como desejado. □

A seguir enunciaremos um importante resultado conhecido como lema da compacidade de Strauss, cuja demonstração pode ser encontrada em [3].

Lema 3.3. [3, Teorema A.I.] Sejam $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas satisfazendo

$$\frac{P(t)}{Q(t)} \to 0, \text{ quando } |t| \to +\infty.$$

Seja $u_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções mensuráveis tal que

$$\sup_k \int_{\mathbb{R}^n} |Q(u_k(x))|dx < +\infty,$$

e

$$P(u_k(x)) \to v(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^n \text{ quando } k \to +\infty.$$

Então para todo conjunto limitado B temos

$$\int_B |P(u_k(x)) - v(x)|dx \to 0 \text{ quando } k \to +\infty.$$

Além disso, se

$$\frac{P(t)}{Q(t)} \to 0, \text{ quando } t \to 0,$$

e

$$u_k(x) \to 0 \text{ quando } |x| \to +\infty, \text{ uniformemente com respeito a } k,$$

então $P(u_k)$ converge para v em $L^1(\mathbb{R}^n)$ quando $k \to +\infty$.

O próximo resultado será útil para a primeira parte da demonstração do Teorema 3.1 que consiste em provar que o conjunto definido em (3.6) é não vazio.

Lema 3.4. Sejam $\zeta, R > 0$. Para todo $t \geqslant 0$ seja

$$v_R(t) := \begin{cases} \zeta & se\ t \in [0, R] \\ \zeta(R+1-t) & se\ t \in (R, R+1) \\ 0 & se\ t \in [R+1, +\infty) \end{cases}.$$

Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, seja $w_R(x) = v_R(|x|)$. Então $w_R \in H^s(\mathbb{R}^n)$ para todo $s \in (0,1)$ e existe uma constante $C(n, s, R)$ tal que $\|w_R\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leqslant C(n, s, R)\zeta$.

Demonstração. Considere $\zeta = 1$ (O caso geral segue ao multiplicar v_R por ζ). Primeiro note que por construção a função w_R se anula fora da bola B_{R+1}. Além disso, w_R é Lipschitziana, isto é, existe uma constante $C > 0$ tal que $|w_R(x) - w_R(y)| \leqslant C|x-y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. Com efeito:

i) Se $x, y \in B_R$, então $w_R(x) = w_R(y) = 1$. Logo,

$$|w_R(x) - w_R(y)| = 0 \leqslant |x-y|.$$

ii) Se $x, y \in B^c_{R+1}$, então $w_R(x) = w_R(y) = 0$. Assim,

$$|w_R(x) - w_R(y)| = 0 \leqslant |x-y|.$$

iii) Se $x \in B_R$ e $y \in B_{R+1} \setminus B_R$, temos

$$|w_R(x) - w_R(y)| = |1 - (R + 1 - |y|)| = |y| - R \leqslant |y| - |x| \leqslant ||y| - |x|| \leqslant |x-y|.$$

iv) Se $x \in B_R$ e $y \in B^c_{R+1}$, segue que

$$|w_R(x) - w_R(y)| = |1 - 0| \leqslant |x-y|.$$

v) Se $x \in B_{R+1} \setminus B_R$ e $y \in B^c_{R+1}$, então

$$|w_R(x) - w_R(y)| = |R + 1 - |x| - 0| = R + 1 - |x| \leqslant ||y| - |x|| \leqslant |x-y|.$$

Portanto, w_R é de fato Lipschitziana, com constante de Lipschitz $C = 1$. Assim, pelo Teorema B.12, temos que $w_R \in W^{1,\infty}(B_{R+1})$ e portanto, $w_R \in H^1(B_{R+1})$. Logo, pela Proposição 1.2 segue que $w_R \in H^s(B_{R+1})$ para $s \in (0,1)$. Agora estimaremos a seminorma $[w_R]_{H^s(\mathbb{R}^n)}$. De forma análoga ao que fizemos para obter (1.34) na demonstração do Lema 1.4 é possível obter

$$\begin{aligned}
[w_R]^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|w_R(x) - w_R(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy \\
&= \int_{B_{R+1}} \int_{B_{R+1}} \frac{|w_R(x) - w_R(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy + 2 \int_{B_{R+1}} \int_{B^c_{R+1}} \frac{|w_R(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy \\
&= [w_R]^2_{H^s(B_{R+1})} + 2 \int_{B_{R+1}} \int_{B^c_{R+1}} \frac{|w_R(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy.
\end{aligned}$$

Unindo isso ao fato de que $\|w_R\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|w_R\|^2_{L^2(B_{R+1})}$, temos

$$\begin{aligned}
\|w_R\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} &= [w_R]^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} + \|w_R\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&= [w_R]^2_{H^s(B_{R+1})} + 2\int_{B_{R+1}}\int_{B^c_{R+1}} \frac{|w_R(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy + \|w_R\|^2_{L^2(B_{R+1})} \\
&= \|w_R\|^2_{H^s(B_{R+1})} + 2\int_{B_{R+1}}\int_{B^c_{R+1}} \frac{|w_R(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy. \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

Sabemos que $\|w_R\|^2_{H^s(B_{R+1})} < \infty$ pois, $w_R \in H^s(B_{R+1})$. Assim resta estimar

$$\int_{B_{R+1}}\int_{B^c_{R+1}} \frac{|w_R(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy.$$

Para tal, observe que $B^c_{R+1} = \big(B^c_{R+1} \cap B_1(y)\big) \cup \big(B^c_{R+1} \cap B^c_1(y)\big)$ e como a função w_R é Lipschitziana e limitada por um, obtemos

$$\int_{B^c_{R+1}} \frac{|w_R(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dx \leqslant \int_{B^c_{R+1}\cap B_1(y)} \frac{|x-y|^2}{|x-y|^{n+2s}}dx + \int_{B^c_{R+1}\cap B^c_1(y)} \frac{1}{|x-y|^{n+2s}}dx.$$

Fazendo uma mudança de variável $z = |x-y|$ e usando o Teorema A.6, temos

$$\int_{B^c_{R+1}\cap B_1(y)} \frac{|x-y|^2}{|x-y|^{n+2s}}dx \leqslant \int_{B_1(y)} \frac{1}{|z|^{n+2s-2}}dz < \infty,$$

e

$$\int_{B^c_{R+1}\cap B^c_1(y)} \frac{1}{|x-y|^{n+2s}}dx \leqslant \int_{B^c_1(y)} \frac{1}{|x-y|^{n+2s}}dx = \int_{B^c_1(y)} \frac{1}{|z|^{n+2s}}dz < \infty.$$

Assim,

$$\int_{B_{R+1}}\int_{B^c_{R+1}} \frac{|w_R(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy < \infty.$$

Usando isso em (3.7) garantimos que $w_R \in H^s(\mathbb{R}^n)$ e que existe uma constante $C(n,s,R)$ satisfazendo $\|w_R\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leqslant C(n,s,R)$. □

3.2 Demonstração do resultado principal

Esta seção é dedicada à demonstração do Teorema 3.1, a qual será dividida em 5 partes como se segue.

Demonstração. **i)** *O conjunto dado em (3.6) é não vazio.* De fato, considerando $R > 1$

e $w_R \in H^s(\mathbb{R}^n)$ definida como no Lema 3.4. Temos que $0 \leqslant w_R(x) = v_R(|x|) \leqslant \zeta$, isso implica que $-G(w_R(x)) \leqslant |G(w_R(x))| \leqslant \max_{t\in[0,\zeta]} |G(t)|$ para todo $x \in B_{R+1} \setminus B_R$. Logo,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} G(w_R(x))dx = \int_{B_{R+1}} G(w_R(x))dx &= \int_{B_R} G(w_R(x))dx + \int_{B_{R+1}\setminus B_R} G(w_R(x))dx \\ &\geqslant G(\zeta)|B_R| - |B_{R+1} \setminus B_R| \left(\max_{t\in[0,\zeta]} |G(t)|\right) \\ &= G(\zeta)w_{n-1}R^n - \max_{t\in[0,\zeta]} |G(t)| w_{n-1}((R+1)^n - R^n).\end{aligned}$$

Observe que

$$(R+1)^n - R^n = \left[\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} R^k\right] - R^n = \left[R^n + nR^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} R^k\right] - R^n \geqslant nR^{n-1}.$$

Usando essa informação na expressão acima, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(w_R(x))dx \geqslant C_1R^n - C_2R^{n-1},$$

onde $C_1 = G(\zeta)w_{n-1}$ e $C_2 = \max_{t\in[0,\zeta]} |G(t)|w_{n-1}n$. Assim, podemos escolher $R > 0$ suficientemente grande tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(w_R(x))dx \geqslant 0.$$

Fazendo a mudança de variável $w_{R,\sigma}(x) = w_R(x/\sigma)$ e denotando $y := x/\sigma$ temos que $dx = \sigma^n dy$ e

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(w_{R,\sigma}(x))dx = \int_{\mathbb{R}^n} G\left(w_R\left(x/\sigma\right)\right) dx = \sigma^n \int_{\mathbb{R}^n} G(w_R(y))dy.$$

Assim, voltando para variável x podemos escolher $\sigma > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(w_{R,\sigma}(x))dx = \sigma^n \int_{\mathbb{R}^n} G(w_R(x))dx = 1.$$

Isso prova que o conjunto dado em (3.6) é não vazio.

ii) *Escolha de uma sequência minimizante adequada.* Considere uma sequência u_k em $H^s(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} G(u_k)dx = 1$ e

$$\lim_{k\to+\infty} [u_k]^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \inf\left\{[u]^2_{H^s(\mathbb{R}^n)}; u \in H^s(\mathbb{R}^n), \int_{\mathbb{R}^n} G(u)dx = 1\right\} \geqslant 0. \tag{3.8}$$

Pela desigualdade triangular sabemos que $||u_k(x)| - |u_k(y)|| \leqslant |u_k(x) - u_k(y)|$ logo, usando a definição da seminorma de Gagliardo temos que $[|u_k|]_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leqslant [u_k]_{H^s(\mathbb{R}^n)}$ e portanto, $|u_k|$ também satisfaz (3.8). Além disso, como $G(u_k) = G(|u_k|)$ temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(|u_k|)dx = 1.$$

Isso implica que $|u_k|$ é também uma sequência minimizante. Assim podemos supor sem perda de generalidade que u_k é não negativa. Considere u_k^* o rearranjamento simétrico radialmente decrescente de u. Pela Observação 3.1 a sequência u_k^* satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(u_k^*)dx = \int_{\mathbb{R}^n} G(u_k)dx = 1.$$

Além disso, em virtude do Lema 3.1 temos que $[u_k^*]_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leqslant [u_k]_{H^s(\mathbb{R}^n)}$ e portanto, u_k^* também satisfaz (3.8) logo, é uma sequência minimizante. Estas observações implicam que podemos selecionar uma sequência minimizante u_k tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, u_k é não negativa, esfericamente simétrica e radialmente decrescente em $r = |x|$.

iii) *Uma estimativa para* u_k. Queremos obter uma limitação uniforme em k para $\|u_k\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$ e $\|u_k\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$ para todo $2 \leqslant q \leqslant 2_s^*$. Comecemos com o caso $\|u_k\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$. Desde que o conjunto em (3.6) é não vazio, por (3.8) concluímos que $[u_k]_{H^s(\mathbb{R}^n)} < C$ para alguma constante positiva C. Portanto, resta verificar que $\|u_k\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ é limitada. Para isso considere

$$g_1(t) := |t|^{p-1}t, \quad g_2(t) := t, \quad G_1(t) := \frac{1}{p+1}|t|^{p+1} \quad \text{e} \quad G_2(t) := \frac{1}{2}|t|^2,$$

e lembre que

$$g(t) = |t|^{p-1}t - t \quad \text{e} \quad G(t) = \int_0^t g(\tau)d\tau = \frac{1}{p+1}|t|^{p+1} - \frac{1}{2}t^2.$$

Assim, $g(t) = g_1(t) - g_2(t)$ e para todo $z > 0$, vale

$$G(z) = \int_0^z g(t)dt = \int_0^z g_1(t)dt - \int_0^z g_2(t)dt = G_1(z) - G_2(z).$$

Como $p \in (1, (n+2s)/(n-2s))$ para todo $\epsilon > 0$ e todo $t \geqslant 0$ existe uma constante positiva C_ϵ satisfazendo

$$g_1(t) \leqslant C_\epsilon |t|^{2_s^*-1} + \epsilon g_2(t). \tag{3.9}$$

Para verificar isso observe que se $t = 0$ não há o que fazer. Por outro lado, se $t \neq 0$

temos

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{g_1(t)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{|t|^{p-1}t}{t}=\lim_{t\to 0^+}|t|^{p-1}=0,$$

isto é, para todo $\epsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que $|g_1(t)/t|<\epsilon$ quando $0<t<\delta$, ou seja, $g_1(t)<\epsilon t=\epsilon g_2(t)$. E portanto, a desigualdade em (3.9) é satisfeita. Finalmente se $t\geqslant\delta$, temos

$$g_1(t)=|t|^{p-1}t=|t|^p=|t|^p\frac{\delta^{(2_s^*-1)-p}}{\delta^{(2_s^*-1)-p}}\leqslant t^p\frac{t^{(2_s^*-1)-p}}{\delta^{(2_s^*-1)-p}}=C_\epsilon|t|^{2_s^*-1}.$$

Isso prova que (3.9) é satisfeita para todo $t\geqslant 0$. E portanto, para todo $z\geqslant 0$, vale

$$G_1(z)=\int_0^z g_1(t)dt\leqslant C_\epsilon\int_0^z|t|^{2_s^*-1}dt+\epsilon\int_0^z g_2(t)dt=C_\epsilon|z|^{2_s^*}+\epsilon G_2(z).$$

Escolhendo $\epsilon=1/2$ temos

$$G_1(z)\leqslant C|z|^{2_s^*}+\frac{1}{2}G_2(z). \tag{3.10}$$

Além disso, como

$$1=\int_{\mathbb{R}^n}G(u_k)dx=\int_{\mathbb{R}^n}G_1(u_k)dx-\int_{\mathbb{R}^n}G_2(u_k)dx,$$

temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n}G_2(u_k)dx+1=\int_{\mathbb{R}^n}G_1(u_k)dx. \tag{3.11}$$

Mas por (3.10) temos

$$\int_{\mathbb{R}^n}G_1(u_k)dx\leqslant C\int_{\mathbb{R}^n}|u_k|^{2_s^*}dx+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}G_2(u_k)dx.$$

Substituindo em (3.11), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n}G_2(u_k)dx+1\leqslant C\int_{\mathbb{R}^n}|u_k|^{2_s^*}dx+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}G_2(u_k)dx,$$

isto é,

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}G_2(u_k)dx+1\leqslant C\int_{\mathbb{R}^n}|u_k|^{2_s^*}dx. \tag{3.12}$$

Agora usando o Teorema 2.1 temos que $\|u_k\|_{L^{2_s^*}(\mathbb{R}^n)}\leqslant C[u_k]_{H^s(\mathbb{R}^n)}$, onde a constante C

não depende de k. E como u_k é uma sequência minimizante, o fato de $[u_k]^2_{H^s(\mathbb{R}^n)}$ ser limitada garante que $\|u_k\|_{L^{2^*_s}(\mathbb{R}^n)}$ também é limitada. Unindo isso a (3.12) e usando a definição de G_2, temos

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} u_k^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} G_2(u_k)dx < \infty.$$

Isso prova que tanto $\|u_k\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ quanto $\|u_k\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$ são uniformemente limitadas em k, e como $\|u_k\|_{L^{2^*_s}(\mathbb{R}^n)}$ também é limitada, a Desigualdade de Interpolação de Hölder garante que $\|u_k\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant C$ para todo $2 \leqslant q \leqslant 2^*_s$.
iv) *Passagem do limite.* Como $u_k \in L^2(\mathbb{R}^n)$ é uma sequência de funções não negativas, radialmente decrescentes, podemos aplicar o Lema 3.2 para obter

$$|u_k(x)| \leqslant \left(\frac{n}{w_{n-1}}\right)^{1/2} |x|^{-n/2}\|u_k\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Mas, pelo que provamos acima u_k é uma sequência uniformemente limitada em $L^2(\mathbb{R}^n)$ assim, $|u_k(x)| \leqslant C|x|^{-n/2}$ logo, u_k converge uniformemente para 0 quando $|x| \to +\infty$. Por outro lado, como u_k é limitada no espaço de Banach reflexivo $H^s(\mathbb{R}^n)$, pelo Teorema B.3 existe uma subsequência de u_k (a qual continuaremos a denotar por u_k) que converge fraco em $H^s(\mathbb{R}^n)$ para uma função $\overline{u}$. Pela imersão compacta de H^s em L^p em domínios limitados (ver Teorema 2.5) e pelo Teorema B.7, vemos que $u_k(x) \to \overline{u}(x)$ *q.t.p.* em $\mathbb{R}^n$. Além disso, por construção $\overline{u} \in H^s(\mathbb{R}^n)$ é não negativa, esfericamente simétrica e decrescente em $r = |x|$. Agora aplicaremos o Lema 3.3 (para $P := G_1$). Considere a função polinomial Q definida por $Q(t) = t^2 + |t|^{2^*_s}$. Como a sequência u_k é uniformemente limitada em $L^2(\mathbb{R}^n)$ e em $L^{2^*_s}(\mathbb{R}^n)$ temos que para todo $k \in \mathbb{N}$, Q satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Q(u_k(x))|dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(u_k^2(x) + |u_k(x)|^{2^*_s}\right) dx \leqslant C.$$

Além disso, como $p \in (1, 2^*_s - 1)$ temos

$$\frac{G_1(t)}{Q(t)} \to 0 \text{ quando } t \to +\infty \text{ e } t \to 0.$$

De fato, observe que $Q(t) \geqslant t^2$ e $Q(t) \geqslant |t|^{2^*_s}$. Assim, quando $t \to 0$ vale

$$\frac{G_1(t)}{Q(t)} \leqslant \frac{|t|^{p+1}}{(p+1)t^2} = \frac{|t|^{p+1-2}}{(p+1)} \to 0,$$

e por outro lado, quando $t \to +\infty$ vale

$$\frac{G_1(t)}{Q(t)} \leqslant \frac{|t|^{p+1}}{(p+1)|t|^{2_s^*}} = \frac{1}{(p+1)|t|^{2_s^*-(p+1)}} \to 0.$$

Agora como $u_k(x) \to \overline{u}(x)$ $q.t.p.$ em $\mathbb{R}^n$, temos que $G_1(u_k(x)) \to G_1(\overline{u}(x))$ $q.t.p.$ em $\mathbb{R}^n$. E finalmente, $u_k(x) \to 0$ uniformemente em k quando $|x| \to +\infty$. Portanto, podemos aplicar o Lema 3.3 e obter

$$\int_{\mathbb{R}^n} G_1(u_k(x))dx \to \int_{\mathbb{R}^n} G_1(\overline{u}(x))dx \text{ quando } k \to +\infty.$$

Aplicando o Lema de Fatou em (3.11), obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} G_2(\overline{u}(x))dx + 1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \liminf G_2(u_k(x))dx + 1 \leqslant \liminf \int_{\mathbb{R}^n} G_2(u_k(x))dx + 1\\ &= \liminf \int_{\mathbb{R}^n} G_1(u_k(x))dx = \int_{\mathbb{R}^n} G_1(\overline{u}(x))dx,\end{aligned}$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(\overline{u}(x))dx \geqslant 1. \tag{3.13}$$

Por outro lado, usando novamente o Lema de Fatou concluímos que

$$[\overline{u}]^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leqslant \lim_{k\to+\infty} [u_k]^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \inf\left\{[u]^2_{H^s(\mathbb{R}^n)}; u \in H^s(\mathbb{R}^n), \int_{\mathbb{R}^n} G(u)dx = 1\right\}. \tag{3.14}$$

Suponha por absurdo que

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(\overline{u}(x))dx > 1.$$

Então fazendo a mudança $\overline{u}_\sigma(x) = \overline{u}(x/\sigma)$ de modo análogo ao que fizemos acima, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(\overline{u}_\sigma(x))dx = \sigma^n \int_{\mathbb{R}^n} G(\overline{u}(x))dx = 1, \tag{3.15}$$

para algum $\sigma \in (0,1)$. Considerando $h : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ como sendo a mudança de variável dada por $h(x,y) = (x/\sigma, y/\sigma)$ temos que $|\det h'(x,y)| = 1/\sigma^{2n}$. Assim,

$$\begin{aligned}
[\overline{u}_\sigma]^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u_\sigma(x) - u_\sigma(y)|^2}{|x-y|^{n+sp}} dxdy = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\overline{u}(x/\sigma) - \overline{u}(y/\sigma)|^2}{|x-y|^{n+sp}} dxdy \\
&= \sigma^{2n} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\overline{u}(\tilde{x}) - \overline{u}(\tilde{y})|^2}{|\sigma\tilde{x} - \sigma\tilde{y}|^{n+2s}} d\tilde{x}d\tilde{y} = \sigma^{2n-n-2s} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\overline{u}(\tilde{x}) - \overline{u}(\tilde{y})|^2}{|\tilde{x} - \tilde{y}|^{n+2s}} d\tilde{x}d\tilde{y} \\
&= \sigma^{n-2s}[\overline{u}]^2_{H^s(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Daí por (3.14) temos que

$$[\overline{u}_\sigma]^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leqslant \sigma^{n-2s} \inf\left\{ [u]^2_{H^s(\mathbb{R}^n)}; u \in H^s(\mathbb{R}^n), \int_{\mathbb{R}^n} G(u)dx = 1 \right\}, \tag{3.16}$$

unindo essa informação a (3.15), obtemos $[\overline{u}_\sigma]^2_{H^s(\mathbb{R}^n)}$ pertence ao conjunto em (3.6). Assim,

$$\inf\left\{ [u]^2_{H^s(\mathbb{R}^n)}; u \in H^s(\mathbb{R}^n), \int_{\mathbb{R}^n} G(u)dx = 1 \right\} \leqslant [\overline{u}_\sigma]^2_{H^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Usando essa informação juntamente com (3.16) e lembrando que $\sigma \in (0,1)$ concluímos que

$$\inf\left\{ [u]^2_{H^s(\mathbb{R}^n)}; u \in H^s(\mathbb{R}^n), \int_{\mathbb{R}^n} G(u)dx = 1 \right\} = 0.$$

Daí por (3.14) temos que $[\overline{u}]^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} = 0$. Agora combinando com o Teorema 2.1 temos que $\|\overline{u}\|_{L^{2^*_s}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C[\overline{u}]_{H^s(\mathbb{R}^n)} = 0$, donde $\overline{u} \equiv 0$ porém, contradiz (3.13). Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(\overline{u}(x))dx = 1.$$

Unindo isso ao fato de que $\overline{u} \in H^s(\mathbb{R}^n)$ e a (3.14), obtemos

$$[\overline{u}]_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \inf\left\{ [u]^2_{H^s(\mathbb{R}^n)}; u \in H^s(\mathbb{R}^n), \int_{\mathbb{R}^n} G(u)dx = 1 \right\},$$

isto é, $\overline{u}$ é uma solução do problema de minimização com vínculo em (3.6).

v) *Conclusão.* Usando a definição da função $g(t)$ e (3.4) vemos que uma função mensurável $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma solução do Problema (3.1) se para toda $\varphi \in C^1_0(\mathbb{R}^n)$

vale

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(u(x)-u(y))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{n+2s}}dxdy &= \int_{\mathbb{R}^n}|u(x)|^{p-1}u(x)\varphi(x)dx-\int_{\mathbb{R}^n}u(x)\varphi(x)dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(|u(x)|^{p-1}u(x)-u(x)\right)\varphi(x)dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}g(u(x))\varphi(x)dx. \end{aligned}\tag{3.17}$$

Agora vamos verificar as condições necessárias para que possamos usar o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange (ver Apêndice B, Definição B.1 e Teorema B.13). Considere o conjunto de vínculo

$$S=\left\{u\in H^s(\mathbb{R}^n);\int_{\mathbb{R}^n}G(u)dx-1=0\right\}.$$

Conforme provado acima, $\overline{u}\in S$ e satisfaz em particular $T(\overline{u})=\inf_{u\in S}T(u)$ onde $T(u):=[u]^2_{H^s(\mathbb{R}^n)}$. Assim, definindo

$$F(u):=\int_{\mathbb{R}^n}G(u)dx-1,$$

resta mostrar que $F'(u)\neq 0$ para todo $u\in S$. Para isso observe que para todo $t>0$ e $1/(p+1)<\alpha<1/2$, temos

$$G(t)-g(t)(\alpha t)=(1/(p+1)-\alpha)|t|^{p+1}-(1/2-\alpha)t^2\leqslant 0.$$

Portanto,

$$F'(u)(\alpha u)=\int_{\mathbb{R}^n}g(u)(\alpha u)dx\geqslant\int_{\mathbb{R}^n}G(u)dx=1.$$

Logo, $F'(u)(\alpha u)\neq 0$. Pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(\overline{u}(x)-\overline{u}(y))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{n+2s}}dxdy=\theta\int_{\mathbb{R}^n}g(\overline{u}(x))\varphi(x)dx,\tag{3.18}$$

para algum $\theta\in\mathbb{R}$. Observe que $\theta>0$. De fato, se $\theta=0$ pela expressão acima teríamos $u\equiv 0$, o que já vimos ser uma contradição. Agora suponha $\theta<0$ e fixe w de modo que $\int_{\mathbb{R}^n}g(\overline{u})wdx>0$. Por F ser diferenciável em u podemos escrever para $\epsilon>0$ suficientemente pequeno

$$F(\overline{u}+\epsilon w)-F(\overline{u})=F'(\overline{u})(\epsilon w)+r(\epsilon w),$$

onde $\lim_{\epsilon\to 0}r(\epsilon w)/||\epsilon w||=0$ e F' é uma transformação linear e contínua. E como w

está fixo podemos escrever

$$F(\overline{u}+\epsilon w)-F(\overline{u})=\epsilon F'(\overline{u})(w)+r(\epsilon)=\epsilon\left[\int_{\mathbb{R}^n} g(\overline{u})w dx+\frac{r(\epsilon)}{\epsilon}\right]>0,$$

para $\epsilon>0$ pequeno, visto que $\lim_{\epsilon\to 0} r(\epsilon)/\epsilon=0$. Ou seja, $F(\overline{u}+\epsilon w)>F(\overline{u})$. Daí, usando a definição de F, temos

$$\int_R G(\overline{u}+\epsilon w)dx-1>\int_R G(\overline{u})dx-1=0.$$

Portanto,

$$\int_R G(\overline{u}+\epsilon w)dx>1. \tag{3.19}$$

Analogamente, para $\epsilon>0$ suficientemente pequeno e w fixo, temos

$$\begin{aligned}T(\overline{u}+\epsilon w)-T(\overline{u})&=\epsilon T'(\overline{u})(w)+r_1(\epsilon)\\&=\epsilon 2\theta F'(\overline{u})(w)+r_1(\epsilon)=\epsilon\left[2\theta\int_{\mathbb{R}^n} g(\overline{u})w dx+r_1(\epsilon)/\epsilon\right]<0,\end{aligned}$$

já que $\lim_{\epsilon\to 0} r_1(\epsilon)/\epsilon=0$, onde usamos $\theta<0$. Isto implica que, $[\overline{u}+\epsilon w]^2_{H^s(\mathbb{R}^n)}<[\overline{u}]^2_{H^s(\mathbb{R}^n)}$. Por outro lado, considerando $v=\overline{u}+\epsilon w$, fazendo a mudança de variável $v_\sigma(x)=v(x/\sigma)$ com $y=x/\sigma$ e usando (3.19), temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(v_\sigma)dx=\int_{\mathbb{R}^n} G(v(x/\sigma))dx=\sigma^n\int_{\mathbb{R}^n} G(v(y))dy>\sigma^n.$$

Assim é possível tomar $\sigma\in(0,1)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(v_\sigma)dx=1,$$

ou seja, $v_\sigma\in S$. Por fim, observe que para tal $\sigma\in(0,1)$ temos

$$\begin{aligned}[v_\sigma]^2_{H^s(\mathbb{R}^n)}&=\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|v(x/\sigma)-v(y/\sigma)|^2}{|x-y|^{n+sp}}dxdy=\frac{\sigma^{2n}}{\sigma^{n+2s}}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|v(\tilde{x})-v(\tilde{y})|^2}{|\tilde{x}-\tilde{y}|^{n+2s}}dxdy\\&=\sigma^{n-2s}[v]^2_{H^s(\mathbb{R}^n)}=\sigma^{n-2s}T(\overline{u})<T(\overline{u}),\end{aligned}$$

o que é um absurdo já que $v_\sigma\in S$ e $T(\overline{u})=\inf_{u\in S}T(u)$. Logo $\theta>0$. Agora considere $u_\sigma(x)=\overline{u}(x/\sigma)$. Seja $\varphi(x)=\psi(x\sigma)$ isto é, $\varphi(x/\sigma)=\psi(x)$ e denote $y=x/\sigma$, assim

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(u_\sigma(x))\psi(x)dx=\int_{\mathbb{R}^n} g(\overline{u}(x/\sigma))\varphi(x/\sigma)dx=\sigma^n\int_{\mathbb{R}^n} g(\overline{u}(y))\varphi(y)dy.$$

Unindo essa igualdade a (3.18), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} g(u_\sigma(x))\psi(x)dx &= \frac{\sigma^n}{\theta}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(\overline{u}(x)-\overline{u}(y))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{n+2s}}dxdy \\
&= \frac{\sigma^n}{\theta}\frac{1}{\sigma^{2n}}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(\overline{u}(x/\sigma)-\overline{u}(y/\sigma))(\varphi(x/\sigma)-\varphi(y/\sigma))}{|x/\sigma-y/\sigma|^{n+2s}}dxdy \\
&= \frac{\sigma^{n-2n+n+2s}}{\theta}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(u_\sigma(x)-u_\sigma(y))(\psi(x)-\psi(y))}{|x-y|^{n+2s}}dxdy \\
&= \frac{\sigma^{2s}}{\theta}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(u_\sigma(x)-u_\sigma(y))(\psi(x)-\psi(y))}{|x-y|^{n+2s}}dxdy.
\end{aligned}$$

Assim, como $\theta > 0$, para obter (3.17) basta tomar $\sigma^{2s}/\theta = 1$, isto é $\sigma = \theta^{1/2s}$.

Com isso provamos a existência de uma solução não negativa para o Problema 3.1, a qual é radialmente simétrica, não crescente em relação à norma de x e tende a zero quando $|x| \to \infty$. $\square$

Observação 3.2. Usando resultados mais recentes podemos justificar que tal solução é de fato positiva. Por [2, Teorema 1.1] temos que $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e daí, pelo Princípio do Máximo Forte (ver [13, Teorema 1.1]) temos que tal solução é de fato positiva.

Apêndice A

Resultados auxiliares

Neste apêndice, demonstraremos alguns resultados que foram usados ao longo desta dissertação.

A.1 Resultados elementares

Teorema A.1. ***(Desigualdade de Young).*** *Sejam a e b números reais não negativos e $p, q > 1$ satisfazendo $1/p + 1/q = 1$. Então*

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geqslant ab,$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, $a^p = b^q$.

Demonstração. Se $ab = 0$ não há o que fazer. Considere então $a, b > 0$. Se $a^p = b^q$, então usando o fato de $1/p + 1/q = 1$ temos

$$ab = a(b^q)^{1/q} = aa^{p/q} = a^{p/p}a^{p/q} = a^{p(1/p+1/q)} = a^p = a^p 1 = a^p(1/p+1/q) = a^p/p + b^q/q.$$

Agora para o caso em que $a^p \neq b^q$, note que a função exponencial $f(x) = \exp(x)$ é estritamente convexa, pois sua segunda derivada é estritamente positiva em todo ponto. Assim, para todo $t \in (0,1)$ temos que $f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$, onde $x, y \in \mathbb{R}^n$ são tais que $x \neq y$. Assim para $t = 1/p, 1 - t = 1/q, x = \log a^p$ e $y = \log b^q$, temos

$$ab = \exp\log(ab) = \exp\left(\frac{\log a^p}{p} + \frac{\log b^q}{q}\right) < \frac{\exp(\log a^p)}{p} + \frac{\exp(\log b^q)}{q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

isso encerra a demonstração.

$\square$

Teorema A.2. ***(Desigualdade numérica de Hölder).*** *Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$ e $y_1, y_2, ..., y_n$ números reais não negativos e $p, q > 1$, satisfazendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q},$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, $(x_1^p, x_2^p, ..., x_n^p)$ for múltiplo de $(y_1^p, y_2^p, ..., y_n^p)$.

Demonstração. Considere $u = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p}$ e $v = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q}$. Pela desigualdade de Young, temos

$$\frac{x_i}{u}\frac{y_i}{v} \leqslant \frac{1}{p}\left(\frac{x_i}{u}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{y_i}{v}\right)^q$$

para cada $i = 1, 2, ..., n$. Assim,

$$\frac{1}{uv} x_i y_i \leqslant \frac{x_i^p}{pu^p} + \frac{y_i^q}{qv^q} \text{ para cada } i = 1, 2, ..., n.$$

Daí como $x_1, x_2, ..., x_n$ e $y_1, y_2, ..., y_n$ são números reais não negativos, podemos dizer que

$$\frac{1}{uv}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \frac{1}{pu^p}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right) + \frac{1}{qv^q}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right),$$

isto é,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \frac{uv}{pu^p}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right) + \frac{uv}{qv^q}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right) = \frac{uv}{pu^p}u^p + \frac{uv}{qv^q}v^q = \frac{uv}{p} + \frac{uv}{q} = uv,$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q},$$

como queríamos provar. $\square$

Teorema A.3. ***(Desigualdade de Minkowski).*** *Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$, $y_1, y_2, ..., y_n$ números reais não negativos e $p > 1$. Então*

$$\left[\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right]^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p},$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, $(x_1, x_2, ..., x_n)$ for múltiplo de $(y_1, y_2, ..., y_n)$.

Demonstração. Primeiro note que

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p \leqslant \sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)(x_i+y_i)^{p-1} = \sum_{i=1}^{n}x_i(x_i+y_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n}y_i(x_i+y_i)^{p-1}. \tag{A.1}$$

Usando a desigualdade de Hölder para as duas somas à direita de (A.1) e considerando os expoentes conjugados p e $p/(p-1)$, temos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}x_i(x_i+y_i)^{p-1} &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{1/p} + \left[\sum_{i=1}^{n}[(x_i+y_i)^{p-1}]^{p/(p-1)}\right]^{1-\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{1-\frac{1}{p}},\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}y_i(x_i+y_i)^{p-1} &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{1/p} + \left[\sum_{i=1}^{n}[(x_i+y_i)^{p-1}]^{p/(p-1)}\right]^{1-\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{1-\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Substituindo essas duas informações em (A.1), temos

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{1-\frac{1}{p}} \left[\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{1/p}\right],$$

e portanto,

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right]^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{1/p},$$

como queríamos demonstrar. □

Teorema A.4. *Sejam $a, b \in [0,\infty)$ e $p \in [1,+\infty)$. Então*

$$(a+b)^p \leqslant 2^{p-1}(a^p+b^p).$$

Demonstração. Observe inicialmente que se $a = 0$ não há o que fazer. Considere então $a \neq 0$. Assim podemos escrever $(a+b)^p \leqslant 2^{p-1}(a^p+b^p)$ na forma $(1+x)^p \leqslant 2^{p-1}(1+x^p)$ onde $0 \leqslant x = b/a$. Considere a função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dada por $f(x) = (1+x)^p/(1+x^p)$.

Observe que

$$f(0) = 1 = \lim_{n\to+\infty} f(x),$$

e se $0 < x < \infty$ então $f(x) > 1$. Assim, f atinge um máximo em seu único ponto crítico $x = 1$. Assim, para todo x no domínio de f temos

$$f(x) \leqslant f(1) = (1+1)^p/(1+1^p) = 2^p/2 = 2^{p-1},$$

isto é, $(1+x)^p \leqslant 2^{p-1}(1+x^p)$, isso prova o resultado. □

De forma análoga ao que fizemos no teorema acima, é possível provar que nas mesmas condições para a e b e $p \in (0,1)$ vale $(a+b)^p \leqslant a^p + b^p$.

Teorema A.5. *[9, Teorema 4, pag. 628]. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dx = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B_r(x_0)} f dS \right) dr,$$

para cada ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Teorema A.6. *Sejam $x \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então a função $1/|x|^\alpha$ é integrável na bola n-dimensional de raio um se, e somente se, $\alpha < n$ e fora dela se, e somente se, $\alpha > n$.*

Demonstração. Primeiro provaremos o segundo caso. Pelo Teorema A.5 temos que

$$\begin{aligned}\int_{B_c^1} \frac{1}{|x|^\alpha} dx &= \int_1^\infty \left(\int_{\partial B_r} \frac{1}{|x|^\alpha} dS \right) dr = \int_1^\infty \left(\int_{\partial B_r} \frac{1}{r^\alpha} dS \right) dr = \int_1^\infty \frac{1}{r^\alpha} w_n r^{n-1} dr \\ &= w_n \int_1^\infty r^{n-1-\alpha} dr.\end{aligned}$$

Avaliemos todos os casos possíveis,

1) Se $n \neq \alpha$, então

$$\int_1^\infty r^{n-1-\alpha} dr = \left. \frac{r^{n-\alpha}}{n-\alpha} \right|_1^\infty = \lim_{r\to\infty} \left(\frac{r^{n-\alpha}}{n-\alpha} \right) - \frac{1}{n-\alpha}.$$

Daí temos duas possibilidades,

1.i) Se $\alpha < n$, então $r^{n-\alpha} \to \infty$ quando $r \to \infty$ e portanto, $1/|x|^\alpha$ não é integrável.

1.ii) Se $\alpha > n$, então $r^{n-\alpha} \to 0$ quando $r \to \infty$ e portanto, $1/|x|^\alpha$ é integrável.

2) Agora se $n = \alpha$, então

$$\int_1^\infty r^{n-1-\alpha} dr = \int_1^\infty \frac{1}{r} dr = \ln(r) \Big|_1^\infty = \infty,$$

e assim, $1/|x|^\alpha$ não é integrável. Isso prova que $1/|x|^\alpha$ é integrável em $B_1^c \subset \mathbb{R}^n$ se, e somente se, $\alpha > n$. De forma inteiramente análoga é possível verificar que esta função é integrável em $B_1 \subset \mathbb{R}^n$ se, e somente se, $\alpha < n$. $\square$

A.2 Propriedades elementares de H^s

Definição A.1. Seja E um espaço vetorial. Um produto interno em E é uma forma bilinear simétrica definida positiva, isto é, uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

i) $\langle x, x \rangle > 0$ para todo $x \neq 0$.

ii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ para todo $x, y \in E$.

iii) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ para todo $x, y, z \in E$ e para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Teorema A.7. *A função*

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))(\varphi(x) - \varphi(y))}{|x-y|^{n+2s}} dxdy + \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\varphi(x)dx,$$

apresentada em (3.4), define um produto interno em $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Sejam $u, \varphi, \psi \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $x, y \in \mathbb{R}^n$.
i)

$$\langle u, u \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy + \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 dx = \|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Por coincidir com uma norma, garantimos que $\langle u, u \rangle > 0$ sempre que $u \neq 0$.
ii)

$$\begin{aligned}\langle u, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y)(\varphi(x) - \varphi(y))}{|x-y|^{n+2s}} dxdy + \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\varphi(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(\varphi(x) - \varphi(y))(u(x) - u(y))}{|x-y|^{n+2s}} dxdy + \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)u(x)dx = \langle \varphi, u \rangle.\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}\langle \alpha u + \beta \varphi, \psi \rangle = &\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{[(\alpha u + \beta\varphi)(x) - (\alpha u + \beta\varphi)(y)](\psi(x) - \psi(y))}{|x-y|^{n+2s}} dxdy \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} (\alpha u + \beta\varphi)(x)\psi(x)dx,\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\langle \alpha u + \beta\varphi, \psi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(\alpha u(x) - \alpha u(y))(\psi(x) - \psi(y))}{|x-y|^{n+2s}} dxdy \\
&+ \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(\beta\varphi(x) - \beta\varphi(y))(\psi(x) - \psi(y))}{|x-y|^{n+2s}} dxdy \\
&+ \int_{\mathbb{R}^n} \alpha u(x)\psi(x)dx + \int_{\mathbb{R}^n} \beta\varphi(x)\psi(x)dx \\
&= \alpha\langle u, \psi\rangle + \beta\langle \varphi, \psi\rangle,
\end{aligned}$$

e isso conclui a demonstração. □

Definição A.2. Considere um funcional $I : U \to \mathbb{R}$, onde U é um subconjunto aberto de um espaço de Banach X. O funcional I tem uma derivada de Gateaux em $u \in U$, f no espaço dual X' de X, se, para cada $h \in X$,

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[I(u+th) - I(u) - f(th)] = 0.$$

A derivada de Gateaux de I em u é denotada por $I'(u)$. O funcional I tem uma derivada de Fréchet $f \in X'$ em $u \in U$ se

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|}[I(u+h) - I(u) - f(h)] = 0.$$

Dizemos que o funcional I é de classe C^1 se a derivada de Fréchet de I existe e é contínua sobre U.

Observação A.1. A derivada de Gateaux é dada por

$$I'(u) \cdot h = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[I(u+th) - I(u)],$$

e além disso, todo funcional Fréchet diferenciável é também Gateaux diferenciável.

Proposição A.1. [18, Proposição 1.3]. Se I tem derivada de Gateaux contínua sobre U, então I é de classe C^1.

A seguir provaremos que o funcional $I : H^s(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{p+1} dx \tag{A.2}$$

é de classe C^1.

Consideremos os funcionais J e G no espaço de Hilbert $H^s(\mathbb{R}^n)$ dados por

$$J(u) = \|u\|^2 \quad \text{e} \quad G(u) = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^q dx$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma proveniente do produto interno em $H^s(\mathbb{R}^n)$, dado no Teorema A.7, e $2 \leq q \leq 2_s^*$.

Proposição A.2. Os funcionais J e G são de classe C^1. Em particular, $I \in C^1$.

Demonstração. Pela Proposição A.1 basta provar que cada um destes funcionais tem derivada de Gateaux contínua sobre $H^s(\mathbb{R}^n)$. Considere uma função $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Para cada $h \in H^s(\mathbb{R}^n)$ vale

$$J'(u)h = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\|u+th\|^2 - \|u\|^2) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(2\langle u,h\rangle + t^2\|h\|^2) = 2\langle u,h\rangle.$$

Portanto, J é Gateaux diferenciável. Para provar a continuidade da derivada de Gateaux de J tome uma sequência u_k convergindo para $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Dada uma função $h \in H^s(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo $\|h\| \leqslant 1$ temos

$$|(J'(u_k) - J'(u))h| = |2\langle u_k - u, h\rangle| \leqslant 2\|u_k - u\|\|h\| \leqslant 2\|u_k - u\|.$$

Assim,

$$\|(J'(u_k) - J'(u))\|_{(H^s(\mathbb{R}^n))'} = \sup_{\substack{h\in H^s(\mathbb{R}^n)\\ \|h\|\leqslant 1}} |(J'(u_k) - J'(u))h| \leqslant 2\|u_k - u\|.$$

Daí, usando a convergência $u_k \to u$ em $H^s(\mathbb{R}^n)$ temos que $J'(u_k) \to J'(u)$ em $(H^s(\mathbb{R}^n))'$ e isso prova a continuidade de J'.

Agora provaremos a existência da derivada de Gateaux de G. Considere t um número real satisfazendo $0 < |t| < 1$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Sejam $u, h \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta \in (0,1)$ satisfazendo

$$\frac{||u(x)+th(x)|^q - |u(x)|^q|}{|t|} = p|u(x)+\theta t h(x)|^{q-1}|h(x)| \leqslant q(|u(x)|+|h(x)|)^{q-1}|h(x)|.$$

Como $u, h \in H^s(\mathbb{R}^n)$ temos que $u, h \in L^q(\mathbb{R}^n)$ e portanto, $(|u|+|h|)^{q-1} \in L^{q/(q-1)}(\mathbb{R}^n)$. Daí, pela desigualdade de Hölder temos $(|u|+|h|)^{q-1}|h| \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Agora considere a sequência

$$f_k = q|u+\theta_k t_k h|^{q-2}(u+\theta_k t_k h)h$$

em $L^1(\mathbb{R}^n)$ com $t_k \to 0$ quando $k \to +\infty$. Assim, $f_k(x) \to f(x) = q|u|^q uh(x)$ q.t.p. em

$\mathbb{R}^n$. Como para todo $k \in \mathbb{N}$

$$|f_k| \leqslant q(|u(x)| + |h(x)|)^{q-1}|h(x)|$$

temos pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema B.6) que

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k dx = q \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2} uhdx.$$

Além disso,

$$\frac{|u + t_k h|^q - |u|^q}{t_k} = q|u + \theta_k t_k h|^{q-2}(u + \theta_k t_k h)h,$$

ou seja,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{t_k} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u + t_k h|^q dx - \int_{\mathbb{R}^n} |u|^q dx \right) = q \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2} uhdx.$$

Assim,

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u + th|^q dx - \int_{\mathbb{R}^n} |u|^q dx \right) = q \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2} uhdx.$$

Isso prova que existe a derivada de Gateaux de G e que vale

$$G'(u)h = q \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2} uhdx.$$

Resta provar agora que tal derivada é contínua. Considere uma sequência u_k convergindo para $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Assim, $|u_k|^{q-2}u_k \to |u|^{q-2}u$ em $L^{q/(q-1)}(\mathbb{R}^n)$. Note que

$$\begin{aligned} |(G'(u_k) - G'(u))h| &= \left| q \int_{\mathbb{R}^n} |u_k|^{q-2} u_k hdx - q \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2} uhdx \right| \\ &= \left| q \int_{\mathbb{R}^n} (|u_k|^{q-2} u_k - |u|^{q-2} u) hdx \right|. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder temos

$$|(G'(u_k) - G'(u))h| \leqslant q \| |u_k|^{q-2} u_k - |u|^{q-2} u\|_{L^{q/(q-1)}(\mathbb{R}^n)} \|h\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

Como $H^s(\mathbb{R}^n)$ está continuamente imerso em $L^q(\mathbb{R}^n)$ para $2 \leq q \leq 2^*_s$ segue que

$$|(G'(u_k) - G'(u))h| \leqslant cq \| |u_k|^{q-2} u_k - |u|^{q-2} u\|_{L^{q/(q-1)}(\mathbb{R}^n)} \|h\|.$$

Assim,

$$\|G'(u_k) - G'(u)\|_{(H^s(\mathbb{R}^n))'} \leqslant cq \| |u_k|^{q-2}u_k - |u|^{q-2}u\|_{L^{q/(q-1)}(\mathbb{R}^n)}.$$

Portanto, $G'(u_k) \to G'(u)$ em $(H^s(\mathbb{R}^n))'$.

Unindo isso com a Proposição A.1 temos que os funcionais J e G são de classe C^1. Em particular, I é de classe C^1, como queríamos provar. $\square$

Apêndice B

Resultados complementares

Neste apêndice, enunciaremos teoremas clássicos com suas respectivas referências para eventuais consultas.

Teorema B.1. *[4, Teorema 9.7], **(Teorema de Extensão)**. Suponha que Ω é de classe $C^{0,1}$ com fronteira limitada e $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Então existe uma extensão linear $T : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, $\tilde{u} := T(u)$, tal que para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tem-se*

i) $\tilde{u}|_\Omega = u$,

ii) $\|\tilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|u\|_{L^p(\Omega)}$,

iii) $\|\tilde{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$,

onde C depende apenas de Ω.

Teorema B.2. *[9, Teorema 2, pag 621], **(Desigualdade de Jensen)**. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função convexa e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Então*

$$f\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u dx\right) \leqslant \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(u)dx.$$

Teorema B.3. *[4, Teorema 3.18]. Sejam E um espaço de Banach reflexivo e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em E. Então existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge na topologia fraca de E.*

Teorema B.4. *[4, Teorema 4.5], **(Teorema de Fubini)**. Sejam A e B espaços de medida completos e $f(x,y)$ uma função mensurável em $A \times B$ tal que*

$$\int_{A\times B} f(x,y)d(x,y) < \infty.$$

Então

$$\int_A \left(\int_B f(x,y)dy \right) dx = \int_B \left(\int_A f(x,y)dx \right) dy = \int_{A\times B} f(x,y)d(x,y).$$

Teorema B.5. *[4, Teorema 4.4],* ***(Teorema de Tonelli)****. Se $F(x,y)\colon \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável satisfazendo*

i) $\displaystyle\int_{\Omega_2} |F(x,y)|d\mu_2 < \infty$ *para quase todo ponto* $x \in \Omega_1$ *e*

ii) $\displaystyle\int_{\Omega_1} d\mu_1 \int_{\Omega_2} |F(x,y)|d\mu_2 < \infty$.

Então, $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Teorema B.6. *[4, Teorema 4.2],* ***(Teorema da Convergência Dominada)****. Seja (f_n) uma sequência de funções em L^1 satisfazendo*

i) $f_n(x)_{n\in\mathbb{N}} \to f(x)$ *para quase todo ponto de* Ω,

ii) existe uma função $g \in L^1$ tal que para todo n, $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ para quase todo ponto de Ω.

Então $f \in L^1$ *e* $\|f_n - f\| \to 0$.

Teorema B.7. *[4, Teorema 4.9]. Sejam $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em L^p e $f \in L^p$ tais que $\|f_n - f\|_p \to 0$. Então existem uma subsequência $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e uma função $h \in L^p$ tais que*

(a) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ *q.t.p. em* Ω,

(b) $|f_{n_k}(x)| \leqslant h(x)\, \forall k$, *q.t.p. em* Ω.

Teorema B.8. *[4, Lema 4.1],* ***(Lema de Fatou)****. Seja (f_n) uma sequência de funções em L^1 satisfazendo*

i) para todo n, $f_n \geqslant 0$ em quase todo ponto.

ii) $\displaystyle\sup_n \int f_n < \infty$.

Definindo $f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \leqslant +\infty$, *para quase todo ponto* $x \in \Omega$. *Temos*

$$\int f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

Teorema B.9. *[4, pag. 118],* ***(Desigualdade de Interpolação de Hölder)****. Se $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ com $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e $1 \leqslant q \leqslant \infty$, então $f \in L^r(\Omega)$ para todo $r \in [p,q]$. Em particular,*

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leqslant \|f\|^{\alpha}_{L^p(\Omega)} \|f\|^{1-\alpha}_{L^q(\Omega)} \ \ com\ \ \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} \ \ e\ \ \alpha \in [0,1].$$

Teorema B.10. *[6, Teorema 2.6], **(Fórmula de Plancherel em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$)**. Seja $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$\|\varphi\|_{L^2} = \|\mathscr{F}\varphi\|_{L^2},$$

onde $\mathscr{F}$ é a transformada de Fourier.

Teorema B.11. *[9, Teorema 6. pag. 649], **(Teorema da Diferenciação de Lebesgue)**. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função localmente integrável. Então*

$$\frac{1}{|B_r(x_0)|}\int_{B_r(x_0)} f(x)dx \to f(x_0)$$

q.t.p. $x_0 \in \mathbb{R}^n$ quando $r \to 0$.

Teorema B.12. *[9, Teorema 4. pag. 279], **(Caracterização de $W^{1,\infty}$)**. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1. Então $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é Lipschitz se, e somente se, $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$.*

Definição B.1. Sejam X um espaço de Banach, $F \in C^1(X, \mathbb{R})$ e um conjunto de vínculos

$$S := \{u \in X; F(u) = 0\}.$$

Suponhamos que para todo $u \in S$, temos que $F'(u) \neq 0$. Seja $T \in C^1(X, \mathbb{R})$. Dizemos que $c \in \mathbb{R}$ é valor cítico de T sobre S se existem $u \in S$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $T(u) = c$ e $T(u) = \lambda F'(u)$. O ponto u é um ponto crítico de T sobre S e o número real λ é chamado multiplicador de Lagrange para o valor crítico c.

Teorema B.13. *[15, pag. 55], **(Multiplicadores de Lagrange)**. Sob as hipóteses e notações da definição acima, suponhamos que $\overline{u} \in S$ é tal que*

$$T(\overline{u}) = \inf_{u \in S} T(u).$$

Então, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$T'(\overline{u}) = \lambda F'(\overline{u}).$$

Referências Bibliográficas

[1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] V. Ambrosio, *Boundedness and Decay of Solutions for Some Fractional Magnetic Schrödinger Equations in* $\mathbb{R}^n$, Milan J. Math., 86, 125-136, 2018.

[3] H. Berestycki; P.-L. Lions, *Nonlinear Scalar Field Equations, I. Existence of a Ground State*, Arch. Rational Mech. Anal 82, no. 4, 313-345, 1983.

[4] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010.

[5] H. Brezis, *How to Recognize Constant Functions. Connections With Sobolev Spaces*, Uspekhi Mat. Nauk, 57, 59-74, no. 4, 2002.

[6] D.C.S. Cardoso, *O Problema de Cauchy Para o Sistema de Gross Pitaevskii*, Dissertação, Universidade Federal de Alagoas, 2005.

[7] S. Dipierro; G. Palatucci; E. Valdinoci, *Existence and Symmetry Results for a Schrödinger Type Problem Involving the Fractional Laplacian*, Le Matematiche, 68, 201-216, 2013.

[8] E. Di Nezza; G. Palatucci; E. Valdinoci, *Hitchhiker's Guide to the Fractional Sobolev Spaces*, Bull. Sci. Math. 136, no. 5, 521-573, 2012.

[9] L. C. Evans, *Partial Diferential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, 19, 1998.

[10] A. Fiscella; R. Servadei; E. Valdinoci, *Density Properties for fractional Sobolev Spaces*. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 40, 2015.

[11] P. Felmer; A. Quaas; J. Tan, *Positive Solutions of the Nonlinear Schrödinger Equation with the Fractional Laplacian*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 142, 1237-1262, 2012.

[12] E. Giusti, *Metodi Diretti Nel Calcolo Delle Variazioni*, Unione Matematica Italiana, Bologna, 1994.

[13] S. Jarohs; T. Weth, *On the Strong Maximum Principle for Nonlocal Operators*, Math. Z., 81-111, 2019.

[14] P. W. Jones, *Quasiconformal Mappings and Extendability of Functions in Sobolev Spaces*, Acta Math., 147, 71-88, 1981.

[15] O. Kavian, *Introduction à la théorie des points critiques*, Springer-Verlag France, Paris, 1993.

[16] G. Leoni, *A First Course in Sobolev Spaces*, Graduate Studies in Mathematics, 105, American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.

[17] Y. J. Park, *Fractional Polya-Szegö Inequality*, J. Chungcheong Math. Soc. 24, 267-271, 2011.

[18] M. Willem, *Minimax Theorems*, Birkhäuser, 1996.