Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Alguns resultados da teoria de operadores multilineares absolutamente somantes

Renato Bezerra Silvestre

João Pessoa – PB
Abril de 2016

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Alguns resultados da teoria de operadores multilineares absolutamente somantes

por

Renato Bezerra Silvestre

sob a orientação do

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino

João Pessoa – PB
Abril de 2016

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S587a Silvestre, Renato Bezerra.
Alguns resultados da teoria de operadores multilineares absolutamente somantes / Renato Bezerra Silvestre. - João Pessoa, 2019.
78 f. : il.

Orientação: Daniel Marinho Pellegrino.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Operadores multilineares absolutamente somantes. 2. desigualdades. 3. operadores quase somantes. 4. espaços com tipo 2. I. Pellegrino, Daniel Marinho. II. Título.

UFPB/BC

Alguns resultados da teoria de operadores multilineares absolutamente somantes

por

Renato Bezerra Silvestre

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada em 04 de abril de 2016.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino – UFPB
(Orientador)

Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo – UFCG
(Examinador Externo)

Prof. Dr. Joedson Silva dos Santos – UFPB
(Examinador Interno)

Dedicatória

Aos meus familiares.

Agradecimentos

A minha mãe Maria Aparecida da Silva Bezerra, aos meus irmãos Maria Aparecida da Silva Silvestre, Maria José Bezerra Silvestre, João Bezerra da Silva, Rosângela Bezerra Silvestre, Simone Bezerra Silvestre, Elizângela Bezerra Silvestre, e aos demais familiares, por estarem ao meu lado incondicionalmente.

Aos Professores Ronaldo Freire de Lima, Odirlei Silva Jesus, Flank David Morais Bezerra, Uberlandio Batista Severo, Roberto Callejas Bedregal, Pedro Antonio Gómes Venegas, Aurélio Menegon Neto e Everaldo Souto de Medeiros, por todo o incentivo e apoio intelectual antes e durante essa caminhada.

Ao professor Daniel Marinho Pellegrino, pela excelente orientação. Agradeço também ao mesmo por ter acreditado em mim e por todo o incentivo a pesquisa, que contribuiu de forma significativa para este momento.

Agradeço aos meus amigos da graduação, em especial a Jacileide Adelino da Silva, Jéssica Patrícia Garcia de Araújo, Francisco Guedes de Moura, José Adilson Félix de Freitas, Ronaldo César Duarte, Geilson Ferreira Germano, Ruan Barbosa Fernandes e Antônio Djackson Alves da Silva, pelo apoio nos momentos bons e complicados.

A todos os amigos da Pós-graduação, em especial a Isabelly Camila Diniz de Oliveira, Sally Andria Vieira da Silva, Jonathas Phillipe de Jesus Almeida, Camila Sibelle Marques da Silva, Lisiane Rezende dos Santos, Ageu Barbosa Freire, Clemerson Oliveira da Silva Menezes e Djair Paulino dos Santos, pelos intensos momentos de estudos, conquistas, trabalhos em equipe durante o curso e pelo apoio em momentos difíceis.

Agradeço a CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

O objetivo do presente trabalho é apresentar alguns resultados relacionados a teoria multilinear de operadores absolutamente somantes. Mais precisamente, estudamos generalizações das desigualdades de Khinchin e Kahane e uma caracterização de espaços de Banach com tipo 2, devida a D. Popa, por intermédio de operadores multilineares absolutamente e quase somantes.
Palavras-chave: Operadores multilineares absolutamente somantes, desigualdades, operadores quase somantes, espaços com tipo 2.

Abstract

The purpose of the present work is to present some results related to multilinear theory of absolutely summing operators. More precisely, we study generalizations of inequalities of Khinchin and Kahane and a characterization of Banach spaces of type 2, due to D. Popa, through absolutely and almost summing multilinear operators.

Keywords: Absolutely summing multilinear operators, inequalities, almost summing operators, Banach spaces of type 2.

Sumário

Introdução

A Teoria dos Espaços de Banach vem crescendo consideravelmente desde as primeiras décadas do século XX, período no qual a Análise Funcional estava começando a ser desenvolvida. Estes avanços compreendem desde uma melhor compreensão da estrutura de tais espaços, até possíveis interligações com outras áreas.

Uma das áreas estudadas na Teoria dos Espaços de Banach são os Operadores Absolutamente Somantes, que pode ser encontrada no livro clássico de J. Diestel, H. Jarchow e A. Tonge [9]. Os operadores absolutamente somantes foram apresentados, em essência, pela primeira vez em um trabalho de Alexander Grothendieck, publicado em 1953, que tinha como título *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*. Em seguida, na década de 60, estes operadores foram redescobertos e estudados em trabalhos dos matemáticos A. Pietsch [17], J. Lindenstrauss [13] e A. Pelczyński [14], dando uma roupagem mais compreensível ao tema. Entretanto, foi apenas nos anos 80 que Pietsch sugeriu em seu artigo [18] a generalização dessa teoria para o ambiente multilinear. Posteriormente, no ano de 1989, a partir de um trabalho de R. Alencar e M. Matos [3], vários autores mostraram-se interessados no tema, dando continuidade ao projeto iniciado por Pietsch.

Neste trabalho apresentaremos como preliminares vários conceitos da teoria linear dos operadores absolutamente somantes e alguns resultados clássicos dentre o quais estão os teoremas de Grothendieck, da dominação de Pietsch e as desigualdades de Khinchin e Kahane. Posteriormente, estudaremos a extensão de alguns resultados da teoria linear para o ambiente multilinear e exibiremos um breve estudo de operadores quase somantes para, em seguida, estudarmos um resultado de D. Popa que caracteriza espaços de tipo 2 por intermédio de operadores multilineares quase somantes e absolutamente 2-somantes.

Estrutura dos tópicos apresentados

O presente trabalho será dividido em cinco capítulos, os quais serão organizados da seguinte forma:

O Capítulo 1 será dedicado a uma apresentação dos primeiros conceitos e propriedades dos operadores lineares absolutamente somantes. Demonstraremos neste capítulo a Desigualdade de Grothendieck e o Teorema de Grothendieck, que afirma que todo operador linear contínuo de ℓ_1 em ℓ_2 é absolutamente somante.

No Capítulo 2 apresentaremos os primeiros conceitos, no contexto multilinear, dos operadores absolutamente somantes. Além disso, veremos dois resultados úteis, que são os teoremas de Defant-Voigt e da Inclusão. Também mostraremos uma aplicação desses teoremas para transformações n-lineares sobre espaços ℓ_p.

O Capítulo 3 apresenta, de forma generalizada, as desigualdades de Khinchin e Kahane. Além disso, neste capítulo apresentamos o conceito de cotipo.

No Capítulo 4 mostraremos o resultado principal desse trabalho, que é um teorema devido a D. Popa [19]. Durante este capítulo, serão acrescentados o conceito de tipo e de operadores quase somantes.

O ultimo capítulo é um apêndice destinado a apresentações e demonstrações de alguns resultados que foram utilizados no desenvolvimento deste trabalho.

Capítulo 1

Operadores lineares absolutamente somantes: resultados básicos

Neste capítulo apresentamos resultados relacionados a teoria de operadores absolutamente somantes; alguns destes resultados serão utilizados nos capítulos posteriores.

1.1 Sequências absolutamente e fracamente somáveis

Definição 1.1.1. *Sejam E um espaço de Banach* e $1 \leq p \leq \infty$. *Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E é dita absolutamente p-somável se a sequência de escalares correspondente $(\|x_n\|)_{n=1}^{\infty}$ estiver em ℓ_p.*

Denotaremos por $\ell_p(E)$ o espaço vetorial de todas as sequências absolutamente p-somáveis em E, isto é,

$$\ell_p(E) := \left\{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in E^{\mathbb{N}} : (x_i)_{i=1}^{\infty} \text{ é absolutamente } p\text{-somável}\right\}.$$

Em $\ell_p(E)$ definimos as normas para $1 \leq p < \infty$ e $p = \infty$, respectivamente, por

$$\|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_p := \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|_E^p\right)^{\frac{1}{p}} \text{ e } \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{\infty} := \sup_{i \in \mathbb{N}} \|x_i\|.$$

Definição 1.1.2. *Sejam E um espaço de Banach e $1 \leq p \leq \infty$. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E é dita fracamente p-somável se a sequência de escalares $(\varphi(x_n))_{n=1}^{\infty}$ estiver em ℓ_p, qualquer que seja $\varphi \in E'$.*

Denotaremos o espaço das sequências fracamente p-somáveis por $\ell_p^{\omega}(E)$, isto é,

$$\ell_p^{\omega}(E) := \left\{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in E^{\mathbb{N}} : (x_i)_{i=1}^{\infty} \text{ é fracamente } p\text{-somável}\right\}.$$

As funções

$$\| (x_i)_{i=1}^{\infty} \|_{\omega,p} := \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi (x_i) |^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ e } \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{\omega,\infty} := \sup_{\varphi \in B_{E'}} \|(\varphi (x_i))_{i=1}^{\infty}\|_{\infty}$$

definem nomas em $\ell_p^{\omega}(E)$ e $\ell_{\infty}^{\omega}(E)$ respectivamente.

Proposição 1.1. *Sejam E um espaço de Banach* e $1 \leq p \leq \infty$. *Então* $(\ell_p(E); \| \cdot \|_p)$ *e* $\left(\ell_p^{\omega}(E); \| \cdot \|_{\omega,p}\right)$ *são espaços de Banach.*

Demonstração. Mostraremos inicialmente que $(\ell_p(E); \| \cdot \|_p)$ é um espaço de Banach para $1 \leq p < \infty$. O caso $p = \infty$ é semelhante. Seja $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de cauchy formada por elementos de $\ell_p(E)$, onde $x_k = (x_k^n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$. Sendo assim, dado $\epsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k, k' \geq N_0 \Longrightarrow \|x_k - x_{k'}\|_p < \epsilon.$$

Daí, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$k, k' \geq N_0 \Longrightarrow \|x_k^n - x_{k'}^n\| < \epsilon$$

e portanto, $(x_k^n)_{k=1}^{\infty}$ são sequências de Cauchy em E, e consequentemente convergentes. Assumindo que $(x_k^n)_{k=1}^{\infty}$ converge para x^n e fazendo $x = (x^n)_{n=1}^{\infty}$, vamos mostrar que $x \in \ell_p(E)$. De fato, para cada $m \in \mathbb{N}$, temos

$$k, k' \geq N_0 \Longrightarrow \left(\sum_{n=1}^{m} \|x_k^n - x_{k'}^n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

Fazendo $k' \longrightarrow \infty$, obtemos

$$k \geq N_0 \Longrightarrow \left(\sum_{n=1}^{m} \|x_k^n - x^n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

Agora, fazendo $m \longrightarrow \infty$, temos

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_k^n - x^n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x_k - x\|_p < \epsilon,$$

para todo $k \geq N_0$. Assim, concluímos que $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = x$. Além disso,

$$x_{N_0} - x = \left(x_{N_0}^n - x^n\right)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(E).$$

Como $x_{N_0} \in \ell_p(E)$, segue, do fato de $\ell_p(E)$ ser um espaço vetorial, que

$$x = x_{N_0} - (x_{N_0} - x) \in \ell_p(E).$$

Portanto, $\ell_p(E)$ é um espaço de Banach.

Agora, resta provar que o espaço $\left(\ell_p^{\omega}(E); \|\cdot\|_{\omega,p}\right)$ é Banach. Primeiro mostraremos que a norma $\|\cdot\|_{\omega,p}$ está bem definida. Para esta tarefa usaremos o teorema do gráfico fechado.

Seja $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p^{\omega}(E)$ e considere a aplicação $u_x : E' \to \ell_p$ definida por $u_x(\varphi) = (\varphi(x_n))_{n=1}^{\infty}$. É claro que u_x está bem definida e é linear. Suponha que a sequência $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty}$ em E' é tal que

$$\begin{gathered}\varphi_k \to \varphi \in E' \\ u_x(\varphi_k) \to z_0 \in \ell_p.\end{gathered}$$

Vamos provar que $z_0 = u_x(\varphi)$. De fato, sendo $u_x(\varphi_k) \to z_0$, temos

$$\lim_{k\to\infty} u_x(\varphi_k) = \lim_{k\to\infty} (\varphi_k(x_n))_{n=1}^{\infty} = z_0 = (z_j)_{j=1}^{\infty}$$

e, portanto,

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x_n) = z_n,$$

para todo n natural. Como $\varphi_k \to \varphi$, temos

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x_n) = \varphi(x_n)$$

e, consequentemente $z_n = \varphi(x_n)$, para todo n natural. Logo, $z_0 = u_x(\varphi)$ e, pelo teorema do gráfico fechado, u_x é contínua. A limitação de u_x nos garante que

$$\sup_{\varphi\in B_{E'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

e, portanto, a norma $\|\cdot\|_{\omega,p}$ está bem definida. As propriedades de norma são claramente satisfeitas.

Finalmente, provaremos a completude do espaço $\ell_p^{\omega}(E)$. Seja $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\ell_p^{\omega}(E)$, onde $x_k = (x_k^n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p^{\omega}(E)$. Como $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ é de Cauchy, dado $\epsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k, k' \geq N_0 \Longrightarrow \|x_k - x_{k'}\|_{\omega,p} < \epsilon.$$

Sendo assim, dado $\varphi \in B_{E'}$, temos

$$k, k' \geq N_0 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_k^n - x_{k'}^n)|^p < \epsilon^p \Longrightarrow |\varphi(x_k^n - x_{k'}^n)|^p < \epsilon^p, \text{ para cada } n \geq 1.$$

Logo

$$k, k' \geq N_0 \Longrightarrow \|x_k^n - x_{k'}^n\| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x_k^n - x_{k'}^n)| \leq \epsilon, \text{ para todo } n \text{ natural.}$$

Portanto, para cada n, a sequência $(x_k^n)_{k=1}^{\infty}$ é de Cauchy em E, e consequentemente convergente. Denotando por x^n o limite de $(x_k^n)_{k=1}^{\infty}$ e fazendo $x = (x^n)_{n=1}^{\infty}$, vamos mostrar que $x \in \ell_p^{\omega}(E)$. De fato, usando o mesmo procedimento da primeira parte da nossa demonstração e fazendo $k' \longrightarrow \infty$, obtemos

$$k \geq N_0 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_k^n - x^n)|^p \leq \epsilon^p, \text{ para todo } \varphi \in B_{E'}.$$

Isto nos diz que $x - x_{N_0} \in \ell_p^{\omega}(E)$. Logo

$$x = (x - x_{N_0}) + x_{N_0} \in \ell_p^{\omega}(E).$$

Além disso,

$$k \geq N_0 \Longrightarrow \|x_k - x\|_{\omega,p} \leq \epsilon,$$

isto é, $\lim_{k \to \infty} x_k = x$. Portanto, $\ell_p^{\omega}(E)$ é um espaço de Banach. □

Proposição 1.2. *Se E é um espaço de Banach* e $1 \leq p < \infty$, *então* $\ell_p(E) \subset \ell_p^{\omega}(E)$.

Demonstração. Se $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$ e $\varphi \in E'$, então

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|\varphi\|^p \cdot \|x_j\|^p = \|\varphi\|^p \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p.$$

Como $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p < \infty$, segue que $\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p < \infty$ e, portanto, $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^{\omega}(E)$. □

Proposição 1.3. *Seja $u : E \to F$ uma aplicação linear e contínua. Então*:

i) Se $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^{\omega}(E)$, então $(u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^{\omega}(F)$;

ii) Se $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$, então $(u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(F)$.

Demonstração. (i) Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^{\omega}(E)$. Dado $\varphi \in F'$, temos

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(u(x_j))|^p = \sum_{j=1}^{\infty} |(\varphi \circ u)(x_j)|^p.$$

Como $\varphi \circ u \in E'$, segue que $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |\varphi(u(x_j))|^p < \infty$ e portanto, $(u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^{\omega}(F)$.

Agora, provemos (ii). Dado $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$, temos

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|u(x_j)\|^p \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|u\|^p \cdot \|x_j\|^p = \|u\|^p \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p.$$

Como $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p < \infty$, segue que $(u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(F)$. □

Em alguns resultados deste trabalho será necessário trabalharmos com o espaço

$$\ell_p^u(E) := \left\{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^{\omega}(E) : \lim_{n\to\infty} \left\|(x_j)_{j=n}^{\infty}\right\|_{\omega,p} = 0\right\},$$

com $1 \leq p < \infty$. A próxima proposição garante que $\ell_p^u(E)$ é um espaço de Banach se $1 \leq p < \infty$.

Proposição 1.4. *$\ell_p^u(E)$ é um subespaço fechado do espaço $\ell_p^{\omega}(E)$.*

Demonstração. Sejam $(x_j)_{j=1}^{\infty}, (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^u(E)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então

$$\lim_{n\to\infty} \left\|(x_j)_{j=n}^{\infty} + \lambda (y_j)_{j=n}^{\infty}\right\|_{\omega,p} = 0. \tag{1.1}$$

De fato, sabendo que

$$0 \leq \left\|(x_j)_{j=n}^{\infty} + \lambda (y_j)_{j=n}^{\infty}\right\|_{\omega,p} \leq \left\|(x_j)_{j=n}^{\infty}\right\|_{\omega,p} + |\lambda| \left\|(y_j)_{j=n}^{\infty}\right\|_{\omega,p}$$

e fazendo $n \longrightarrow \infty$, obtemos (1.1). Logo, $(x_j)_{j=1}^{\infty} + \lambda (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^u(E)$ e, portanto, $\ell_p^u(E)$ é um subespaço de $\ell_p^{\omega}(E)$.

Agora, seja $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência formada por elementos de $\ell_p^u(E)$, onde cada $x_k = \left(x_k^j\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^u(E)$. Então, para cada k, temos $\lim\limits_{n\to\infty} \left\|\left(x_k^j\right)_{j=n}^{\infty}\right\|_{\omega,p} = 0$, ou seja, dado $\epsilon > 0$, existe $n_{0,k} \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_{0,k} \Longrightarrow \left\|\left(x_k^j\right)_{j=n}^{\infty}\right\|_{\omega,p} < \frac{\epsilon}{2} \tag{1.2}$$

Suponhamos que x_k converge para $x = (x^j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^{\omega}(E)$, isto é, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq k_0 \Longrightarrow \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\varphi\left(x_k^j - x^j\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left\|\left(x_k^j\right)_{j=1}^{\infty} - \left(x^j\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\omega,p} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Além disso, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$k \geq k_0 \Longrightarrow \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=n}^{\infty} \left| \varphi \left(x_k^j - x^j \right) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left\| \left(x_k^j \right)_{j=n}^{\infty} - \left(x^j \right)_{j=n}^{\infty} \right\|_{\omega,p} < \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.3}$$

Sabendo que

$$\begin{aligned} \left\| \left(x^j \right)_{j=n}^{\infty} \right\|_{\omega,p} &= \left\| \left(x^j \right)_{j=n}^{\infty} - \left(x_{k_0}^j \right)_{j=n}^{\infty} + \left(x_{k_0}^j \right)_{j=n}^{\infty} \right\|_{\omega,p} \\ &\leq \left\| \left(x^j \right)_{j=n}^{\infty} - \left(x_{k_0}^j \right)_{j=n}^{\infty} \right\|_{\omega,p} + \left\| \left(x_{k_0}^j \right)_{j=n}^{\infty} \right\|_{\omega,p} \end{aligned}$$

e usando (1.2) e (1.3), temos

$$n \geq n_{0,k_0} \Longrightarrow \left\| \left(x^j \right)_{j=n}^{\infty} \right\|_{\omega,p} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

ou seja, $x \in \ell_p^u(E)$. Portanto, $\ell_p^u(E)$ é fechado. □

1.2 Algumas desigualdades clássicas

Os resultados desta seção serão independentes das anteriores. Um deles será muito importante para a demonstração do teorema de Grothendieck, que veremos em outro momento, e os outros serão retomados em capítulos posteriores de forma mais geral. Para uma boa compreensão da parte principal, apresentaremos inicialmente algumas definições e resultados auxiliares. Um desses conceitos é o de funções de Rademacher, que será apresentado a seguir.

Chamamos de funções de Rademacher as aplicações $r_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$r_n(t) = sgn\left(\sin 2^{n-1}\pi t\right), \ n \in \mathbb{N} \text{ e } t \in [0,1].$$

Para fins posteriores, apresentaremos uma propriedade de ortogonalidade que estas aplicações possuem, que é a seguinte: Se $0 < n_1 < \cdots < n_k$ e $p_1, \ldots, p_k \geq 0$ são inteiros, então

$$\int_0^1 r_{n_1}^{p_1}(t) \cdot \ldots \cdot r_{n_k}^{p_k}(t)\, dt = \begin{cases} 1, & \text{se cada } p_j \text{ é par} \\ 0, & \text{caso contrário .} \end{cases}$$

Como consequência imediata, as r_n formam uma sequência ortonormal em $L_2[0,1]$, e assim

$$\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t) \right|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \tag{1.4}$$

para todo $a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$.

O próximo resultado será uma ferramenta fundamental para a demonstração de uma das desigualdades dessa seção, que é conhecida como Desiguldade de Grothendieck.

Lema 1.5. *Dada uma função* $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, *defina* $f' : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *por*

$$f'(t) = \begin{cases} \min\{f(t), 1\}, & se\ f(t) \geq 0 \\ \max\{f(t), -1\}, & se\ f(t) < 0. \end{cases}$$

Então $|f'(t)| \leq 1$ e $|f(t) - f'(t)| \leq \frac{f(t)^2}{4}$, *para todo* $t \in [0,1]$.

Demonstração. Seja $t \in [0,1]$. É claro que $|f(t)| \leq 1$. Se $f(t) = f'(t)$, então a segunda desigualdade é imediata. Suponhamos que $f(t) \neq f'(t)$. Afirmamos que

$$|f(t) - f'(t)| = |f(t)| - 1.$$

De fato, se $f(t) \geq 0$, então $1 = f'(t) < f(t)$. Logo,

$$|f(t) - f'(t)| = |f(t) - 1| = |f(t)| - 1.$$

Por outro lado, se $f(t) < 0$, então $-1 = f'(t) > f(t)$. Daí temos

$$|f(t) - f'(t)| = |f(t) + 1| = -f(t) - 1 = |f(t)| - 1.$$

Agora, sabendo que $\left(\frac{a}{2} - 1\right)^2 \geq 0$ se, e somente se, $a - 1 \leq \frac{a^2}{4}$, tomando $a = |f(t)|$, temos

$$|f(t) - f'(t)| = |f(t)| - 1 \leq \frac{|f(t)|^2}{4},$$

para todo $t \in [0,1]$, donde segue o resultado. □

Teorema 1.6 (Desigualdade de Grothendieck)**.** *Existe uma constante positiva* K_G *tal que, para todo espaço de Hilbert* H, *todo natural* $m \in \mathbb{N}$, *toda matriz quadrada de escalares* $(a_{ij})_{mxm}$ *e quaisquer vetores* $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots y_m \in B_H$, *é verdade que*

$$\left| \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} \langle x_i, y_j \rangle \right| \leq K_G \cdot \sup \left\{ \left| \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} s_i t_j \right| ; |s_i| \leq 1, |t_j| \leq 1 \right\}$$

Demonstração. A demonstração será feita para o caso real. Para cada m fixado, o conjunto de vetores $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m$ está contido em um subespaço de dimensão $2m$ de H. Como todos os espaços de Hilbert de mesma dimensão finita são isomorfos isometricamente por meio de isomorfismos que preservam produto interno, temos a liberdade de trabalhar com um espaço de Hilbert de dimensão finita específico, a saber, um espaço de dimensão $n = 2m$. Seja $H_n := [r_1, \ldots, r_n]$ e sejam

$$\alpha = \sup \left\{ \left| \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} s_i t_j \right| : |s_i| \leq 1, |t_j| \leq 1 \right\}$$

e

$$\alpha' = \sup \left\{ \left| \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} \langle z_i, w_j \rangle \right| : z_i, w_j \in B_{H_n} \right\}.$$

Sejam $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m \in B_{H_n}$. Pelo Lema 1.5 temos $|x_i'(t)| \leq 1$, $\left|y_j'(t)\right| \leq 1$, para todos $i, j = 1, 2, \ldots, m$ e $t \in [0,1]$. Logo

$$\left| \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} \langle x_i', y_j' \rangle \right| = \left| \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} \int_0^1 x_i'(t)\, y_j'(t)\, dt \right| \leq \int_0^1 \left| \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} x_i'(t)\, y_j'(t) \right| dt \leq \alpha$$

e, portanto,

$$\left| \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} \langle x_i', y_j' \rangle \right| \leq \alpha \tag{1.5}$$

Por simplicidade, denotaremos a norma de H_n por $\|\cdot\|$. Seja agora $x = \sum_{j=1}^{n} b_j r_j \in H_n \subseteq L_2[0,1]$, com $\|x\| \leq 1$. Então,

$$\begin{aligned}
\|x - x'\|^2 &= \int_0^1 |x(t) - x'(t)|^2\, dt \leq \int_0^1 \left(\frac{x(t)^2}{4} \right)^2 dt \\
&= \frac{1}{16} \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{m} b_i r_i(t) \right) \left(\sum_{j=1}^{m} b_j r_j(t) \right) \left(\sum_{k=1}^{m} b_k r_k(t) \right) \left(\sum_{l=1}^{m} b_l r_l(t) \right) dt \\
&= \frac{1}{16} \int_0^1 \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} b_i b_j b_k b_l r_i(t)\, r_j(t)\, r_k(t)\, r_l(t)\, dt \\
&= \frac{1}{16} \sum_{i,j,k,l=1}^{n} b_i b_j b_k b_l \int_0^1 r_i(t)\, r_j(t)\, r_k(t)\, r_l(t)\, dt \\
&= \frac{1}{16} \left(\sum_{i=j=1}^{n} \sum_{k=l=1}^{n} b_i^2 b_k^2 + \sum_{i=l=1}^{n} \sum_{k=j=1}^{n} b_i^2 b_k^2 + \sum_{i=k=1}^{n} \sum_{j=l=1}^{n} b_i^2 b_j^2 - 2 \sum_{i=j=k=l=1}^{n} b_i^2 \right) \\
&= \frac{1}{16} \left(3 \left(\sum_{i=j=1}^{n} \sum_{k=l=1}^{n} b_i^2 b_k^2 \right) - 2 \sum_{i=j=k=l=1}^{n} b_i^2 \right) \leq \frac{3}{16} \left(\sum_{i=j=1}^{n} \sum_{k=l=1}^{n} b_i^2 b_k^2 \right) \\
&= \frac{3}{16} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right)^2 = \frac{3}{16} \|x\|^4 \leq \frac{3}{16},
\end{aligned}$$

e, consequentemente, $\|x - x'\| \leq \frac{\sqrt{3}}{4}$. Assim, temos $\left\|\frac{x_i - x_i'}{\sqrt{3}/4}\right\| \leq 1$ e $\left\|\frac{y_i - y_i'}{\sqrt{3}/4}\right\| \leq 1$. Deste resultado, de (1.5) e de $\|x_i'\| \leq 1$, $\left\|y_j'\right\| \leq 1$, concluímos que

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\langle x_i, y_j\rangle\right| &= \left|\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\langle (x_i - x_i') + x_i', \left(y_j - y_j'\right) + y_j'\rangle\right| \\
&= \left|\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\left(\langle x_i', y_j'\rangle + \langle x_i - x_i', y_j'\rangle + \langle x_i, y_j - y_j'\rangle\right)\right| \\
&\leq \left|\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\langle x_i', y_j'\rangle\right| + \left|\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\langle x_i - x_i', y_j'\rangle\right| + \left|\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\langle x_i, y_j - y_j'\rangle\right| \\
&\leq \alpha + \frac{\sqrt{3}}{4}\left|\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\langle \frac{x_i - x_i'}{\sqrt{3}/4}, y_j'\rangle\right| + \frac{\sqrt{3}}{4}\left|\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\langle x_i, \frac{y_j - y_j'}{\sqrt{3}/4}\rangle\right| \\
&\leq \alpha + \frac{\sqrt{3}}{4}\alpha' + \frac{\sqrt{3}}{4}\alpha' = \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha'.
\end{aligned}$$

Tomando o supremo sobre $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m \in B_{H_n}$, obtemos $\alpha' \leq \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha'$, isto é, $\alpha' \leq \left(\frac{2}{2-\sqrt{3}}\right)\alpha$. Tomando $K_G = \frac{2}{2-\sqrt{3}}$ obtemos a desigualdade desejada.

Uma maneira relativamente simples de obter o caso complexo usando o caso real é fazer a decomposição dos elementos das matrizes em parte real e parte imaginária. Em seguida, basta aplicar o caso real para as matrizes reais resultantes. Partindo desta ideia a constante obtida para o caso complexo será maior do que a constante obtida no caso real, mas curiosamente a constante ótima do caso complexo e menor que a constante ótima do caso real, embora tais constantes não sejam conhecidas (veja, por exemplo, [5, página 336]). □

A menor das constantes K_G que satisfazem a desigualdade de Grothendieck é chamada de constante de Grothendieck. Este é um exemplo de uma constante que chamamos de ótima.

A seguir destacamos duas desigualdades que desempenham um papel central na Teoria dos Espaços de Banach, que serão estudadas em formatos mais gerais no Capítulo 3.

Teorema 1.7 (Desigualdade de Kahane)**.** *Seja E um espaço de Banach qualquer, $(x_j)_{j=1}^n$ uma sequência finita em E e $0 < p, q < \infty$. Então, existe uma constante $K_{p,q} > 0$, tal que*

$$\left(\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{n} r_k\left(t\right) x_k\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \leq K_{p,q}\left(\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{n} r_k\left(t\right) x_k\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Teorema 1.8 (Desigualdade de Khinchin)**.** *Para todo* $0 < p < \infty$, *existem constantes positivas* A_p *e* B_p *tais que*

$$A_p \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{N} a_n r_n(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq B_p \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.6}$$

para qualquer inteiro positivo N *e quaisquer escalares* $a_1, \ldots, a_n$.

As constantes ótimas da desigualdade de Khinchin são as mesmas tanto para o caso real quanto para o caso complexo (devidas a [12]) e são dadas por

$$A_p = \begin{cases} 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}, & \text{se } p \in (0, p_0] \\ 2^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se } p \in (p_0, 2) \\ 1, & \text{se } p \in [2, \infty) \end{cases}$$

e

$$B_p = \begin{cases} 1, & \text{se } p \in (0, 2] \\ 2^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se } p \in [2, \infty) \end{cases}$$

para $p \leq p_0 \approx 1.85$, onde Γ representa a função gama. Em termos mais precisos, $p_0 \in (1, 2)$ é a solução da igualdade

$$\Gamma\left(\frac{p_0 + 1}{2} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

1.3 Operadores lineares absolutamente somantes

Nas seções anteriores, estudamos alguns resultados sobre os espaços $\ell_p(E)$ e $\ell_p^\omega(E)$; por exemplo, vimos que toda aplicação $u \in \mathcal{L}(E; F)$ transforma elementos de $\ell_p^\omega(E)$ em elementos de $\ell_p^\omega(F)$, e também, transforma elementos de $\ell_p(E)$ em elementos de $\ell_p(F)$. Um questionamento natural e interessante, é se todo operador linear contínuo transforma elementos de $\ell_p^\omega(E)$ em elementos de $\ell_p(F)$. Em geral, isto não acontece.

Exemplo 1.1. Considere o operador identidade $I_{\ell_2} : \ell_2 \to \ell_2$. A sequência de vetores canônicos $(e_j)_{j=1}^\infty \in \ell_2^\omega(\ell_2)$ mas $(I_{\ell_2}(e_j))_{j=1}^\infty \notin \ell_2(\ell_2)$.

Quando u transforma elementos de $\ell_p^\omega(E)$ em elementos de $\ell_p(F)$, dizemos que u melhora a convergência de séries. A ocorrência deste fato será essencial para os próximos resultados.

Definição 1.3.1. *Seja $p \geq 1$. Um operador linear e contínuo $u : E \to F$ é dito absolutamente p-somante se*

$$(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^{\omega}(E) \Longrightarrow (u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(F).$$

Mais geralmente, se $1 \leq q \leq p < \infty$, $u \in \mathcal{L}(E;F)$ é absolutamente $(p;q)$-somante, ou simplesmente $(p;q)$-somante, se

$$(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^{\omega}(E) \Longrightarrow (u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(F).$$

Denotaremos por $\Pi_{p,q}(E;F)$ o espaço vetorial formado por todos os operadores $(p;q)$-somantes de E em F. No caso $p = q$, representaremos por $\Pi_p(E;F)$ em vez de $\Pi_{p,q}(E;F)$.

Observação 1.1. Em geral pede-se que $1 \leq q \leq p < \infty$, pois no caso $p < q$ o único operador absolutamente $(p;q)$-somante é o operador nulo. De fato, se $p < q$, tome $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q \setminus \ell_p$. Para cada j, seja $x_j = \lambda_j x$, com $x \neq 0$ e $x \in E$. Então,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^q &= \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(\lambda_j x)|^q = \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x)|^q \cdot |\lambda_j|^q \\ &= |\varphi(x)|^q \cdot \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^q < \infty, \text{ para qualquer } \varphi \in E'.\end{aligned}$$

Logo $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^{\omega}(E)$. Por outro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$ e sendo $u \in \mathcal{L}(E;F)$ temos

$$\sum_{j=1}^{n} |u(x_j)|^p = \sum_{j=1}^{n} |u(\lambda_j x)|^p \leq |u(x)|^p \cdot \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^p.$$

Como $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \notin \ell_p$, concluímos que a sequência

$$\left(|u(x)|^p \cdot \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^p \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

converge se, e somente se, $u(x) = 0$. Sendo x arbitrário, segue que $u \equiv 0$.

Do conceito de operadores $(p;q)$-somantes, podemos definir a aplicação $\hat{u} : \ell_q^{\omega}(E) \to \ell_p(F)$ por

$$\hat{u}\left((x_j)_{j=1}^{\infty} \right) = (u(x_j))_{j=1}^{\infty}.$$

O resultado a seguir fornece caracterizações para operadores absolutamente $(p;q)$-somantes por meio de desigualdades.

Proposição 1.9. *Seja $u \in \mathcal{L}(E;F)$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes :*

(i) u é $(p;q)$-somante;

(ii) Existe $C > 0$ tal que,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \cdot \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{1.7}$$

para quaisquer $x_1, \ldots, x_n$ em E e $n \in \mathbb{N}$;

(iii) Existe $C > 0$ tal que,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \cdot \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{1.8}$$

sempre que $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_q^{\omega}(E)$;

(iv) Existe $C > 0$ tal que,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \cdot \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{1.9}$$

sempre que $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_q^{u}(E)$;

(v) $(u(x_k))_{k=1}^{\infty} \in \ell_p(F)$ sempre que $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_q^{u}(E)$.

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$. Suponha que u seja absolutamente $(p;q)$-somante. Então existe um operador induzido $\hat{u} : \ell_q^{\omega}(E) \to \ell_p(F)$ definido por $\hat{u}((x_k)_{k=1}^{\infty}) = (u(x_k))_{k=1}^{\infty}$. Note que $\hat{u}$ é claramente linear. Afirmamos que o gráfico de $\hat{u}$ é fechado. De fato, suponha que $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ converge para $x = (x^n)_{n=1}^{\infty}$ em $\ell_q^{\omega}(E)$ e $(\hat{u}(x_k))_{k=1}^{\infty}$ converge para $y = (y^n)_{n=1}^{\infty}$ em $\ell_p(F)$. Como $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ converge para $x = (x^n)_{n=1}^{\infty}$, para todo $\epsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq N_0 \Longrightarrow \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_k^n - x^n)|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \|x_k - x\|_{\omega,q} < \epsilon.$$

Consequentemente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_k^n - x^n)|^q < \epsilon^q, \text{ para todo } \varphi \in B_{E'}. \tag{1.10}$$

Como cada termo da série (1.10) é dominado por ϵ^q, segue que

$$k \geq N_0 \Longrightarrow \|x_k^n - x^n\| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x_k^n - x^n)| < \epsilon, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Logo, para cada n, a sequência $(x_k^n)_{k=1}^{\infty}$ converge para x^n em E. Pela continuidade de u, temos

$$\lim_{k\to\infty} ux_k^n = ux^n \text{ , para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{1.11}$$

Por outro lado, como $(\hat{u}(x_k))_{k=1}^{\infty}$ converge para $y = (y^n)_{n=1}^{\infty}$ em $\ell_p(F)$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq N_1 \Longrightarrow \|\hat{u}x_k - y\|_p < \epsilon,$$

e, portanto,

$$k \geq N_1 \Longrightarrow \|(ux_k^n)_{n=1}^{\infty} - (y^n)_{n=1}^{\infty}\|_p < \epsilon,$$

ou seja,

$$k \geq N_1 \Longrightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|ux_k^n - y^n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

Com isso, obtemos

$$k \geq N_1 \Longrightarrow \|ux_k^n - y^n\| < \epsilon, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

e, portanto,

$$\lim_{k\to\infty} ux_k^n = y^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{1.12}$$

Logo, de (1.11) e (1.12) temos $ux^n = y^n$ para todo n natural. Como consequência, temos

$$\hat{u}x = (ux^n)_{n=1}^{\infty} = (y^n)_{n=1}^{\infty} = y.$$

Sendo $\hat{u}$ linear, pelo TGF, segue que $\hat{u}$ é contínuo. Logo, para toda sequência finita $(x_k)_{k=1}^{n}$ em E, temos

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \|(u(x_k))_{k=1}^{n}\|_p = \|\hat{u}((x_k)_{k=1}^{n})\|_p \\ &\leq \|\hat{u}\| \, \|(x_k)_{k=1}^{n}\|_{\omega,q} = \|\hat{u}\| \sup_{\varphi\in B_{E'}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}},\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|\hat{u}\| \sup_{\varphi\in B_{E'}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.13}$$

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)*. Suponha que, para quaisquer $x_1, \ldots, x_n$ em E e n natural, temos

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \cdot \sup_{\varphi\in B_{E'}} \left(\sum_{k=1}^{n} \|\varphi(x_k)\|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Se $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_q^{\omega}(E)$, então

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \sup_n \left(\sum_{k=1}^{n}\|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sup_n \left[C \cdot \sup_{\varphi\in B_{E'}}\left(\sum_{k=1}^{n}\|\varphi(x_k)\|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\ &= C \cdot \sup_{\varphi\in B_{E'}}\left[\sup_n \left(\sum_{k=1}^{n}\|\varphi(x_k)\|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\ &= C \cdot \sup_{\varphi\in B_{E'}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|\varphi(x_k)\|^q\right)^{\frac{1}{q}},\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \cdot \sup_{\varphi\in B_{E'}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|\varphi(x_k)\|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.14}$$

$(iii) \Rightarrow (i)$. Segue claramente de (iii).

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Sabendo, pela proposição 1.4, que $\ell_q^u(E) \subset \ell_q^{\omega}(E)$, segue o resultado.

$(iv) \Rightarrow (v)$. Óbvio

$(v) \Rightarrow (ii)$. Suponha que (v) é verdade. Então, o operador $\overline{u} : \ell_q^u(E) \longrightarrow \ell_p(F)$ dado por

$$\overline{u}\left((x_k)_{k=1}^{\infty}\right) = (u(x_k))_{k=1}^{\infty}$$

está bem definido. Usando a mesma ideia da demonstração de $(i) \Rightarrow (ii)$ concluímos que $\overline{u}$ é contínuo.

Agora, se $(x_k)_{k=1}^{n}$ é uma sequência finita em E, então

$$(x_1, \ldots, x_n, 0, 0, 0, \ldots) \in \ell_q^u(E).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n}\|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \|(u(x_k))_{k=1}^{n}\|_p = \|\overline{u}((x_k)_{k=1}^{n})\|_p \\ &\leq \|\overline{u}\| \, \|(x_k)_{k=1}^{n}\|_{\omega,q} = \|\overline{u}\| \sup_{\varphi\in B_{E'}}\left(\sum_{k=1}^{n}|\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}},\end{aligned}$$

que é o resultado esperado. □

Denotaremos por $\pi_{p,q}(u)$ o ínfimo dos C tais que a desigualdade (1.7) continua sendo válida. No caso em que $p = q$ denotaremos simplesmente por $\pi_p(u)$. Pela desigualdade (1.13), temos $\pi_{p,q}(u) \leq \|\hat{u}\|$. Além disso, temos

$$\begin{aligned}
\|\hat{u}\| &= \sup_{\left\|(x_k)_{k=1}^{\infty}\right\|_{\omega,q}\leq 1} \|\hat{u}\left((x_k)_{k=1}^{\infty}\right)\|_{l_p} \\
&= \sup_{\left\|(x_k)_{k=1}^{\infty}\right\|_{\omega,q}\leq 1} \|(u(x_k))_{k=1}^{\infty}\|_{l_p} \\
&= \sup_{\left\|(x_k)_{k=1}^{\infty}\right\|_{\omega,q}\leq 1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{\left\|(x_k)_{k=1}^{\infty}\right\|_{\omega,q}\leq 1} C\,\|(x_k)_{k=1}^{\infty}\|_{\omega,q} = C,
\end{aligned}$$

e daí, $\|\hat{u}\| \leq \pi_{p,q}(u)$. Portanto, concluímos que $\pi_{p,q}(u) = \|\hat{u}\|$.

Da igualdade $\pi_{p,q}(u) = \|\hat{u}\|$ concluímos que $\pi_{p,q}(u)$ define uma norma para o espaço $\Pi_{p,q}(E;F)$.

Exemplo 1.2. Seja $p \geq 1$. Todo operador linear contínuo $u : E \to \mathbb{K}$ é absolutamente p-somante e

$$\pi_p(u) = \|u\|.$$

Com efeito, basta mostrarmos que $\ell_p^{\omega}(\mathbb{K}) = \ell_p(\mathbb{K})$. A inclusão $\ell_p(\mathbb{K}) \subset \ell_p^{\omega}(\mathbb{K})$ é claramente verdadeira. Resta mostrar que $\ell_p^{\omega}(\mathbb{K}) \subset \ell_p(\mathbb{K})$. De fato, seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^{\omega}(\mathbb{K})$. Então,

$$\begin{aligned}
\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\omega,p} &= \sup_{\varphi\in B_{\mathbb{K}}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_p \qquad (1.15)
\end{aligned}$$

e daí, $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(\mathbb{K})$. Portanto, $\ell_p^{\omega}(\mathbb{K}) = \ell_p(\mathbb{K})$.

Agora, pela definição da norma em operadores absolutamente somantes, temos

$$\|u\| \leq \pi_p(u).$$

Sendo assim, resta mostrar que $\pi_p(u) \leq \|u\|$. Com efeito, dado $u \neq 0$ e usando a igualdade (1.15), temos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|u\left(x_j\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \sup_{\varphi\in B_{\mathbb{K}}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\varphi\left(u\left(x_j\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{\varphi\in B_{\mathbb{K}}}\|u\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\varphi\left(\frac{u}{\|u\|}\left(x_j\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|u\|\sup_{\varphi\in B_{\mathbb{K}}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\varphi\left(\frac{u}{\|u\|}\left(x_j\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|u\|\sup_{\phi\in B_{E'}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\phi\left(x_j\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|u\|\left\|\left(x_j\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\omega,p}.
\end{aligned}$$

Logo, $\pi_p(u) \leq \|u\|$. Portanto, $\pi_p(u) = \|u\|$. Usando um argumento semelhante mostramos que qualquer operador $u \in \mathcal{L}(E;F)$ de posto 1 é absolutamente p-somante.

Exemplo 1.3. Qualquer operador $u \in \mathcal{L}(E;F)$ de posto finito é absolutamente p-somante. De fato, como todo operador de posto finito é uma combinação linear de operadores de posto 1, que são p-somantes pelo Exemplo 1.2, e $\Pi_p(E;F)$ é um espaço vetorial, segue que qualquer operador de posto finito também é p-somante.

O próximo teorema é um dos resultados centrais da teoria dos operadores lineares absolutamente somantes, cuja demonstração está em [6]. Ele é, também, um dos primeiros resultados ao qual classificamos como resultado de coincidência. Estes resultados ocorrem sempre que qualquer operador linear contínuo entre espaços de Banach E e F são absolutamente somantes. Veremos outros resultados de coincidência quando estivermos estudando aplicações multilineares.

Teorema 1.10 (Teorema de Grothendieck)**.** *Todo operador linear contínuo $u : \ell_1 \to \ell_2$ é absolutamente somante.*

Demonstração. Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1^{\omega}(\ell_1)$ tal que $\sup_{\varphi\in B_{(\ell_1)'}} \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)| \leq 1$. Devemos provar que $(u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_1(\ell_2)$. Para cada n natural, defina

$$u_n : \ell_1 \to \ell_1,\ u_n\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j e_j.$$

Note que cada u_n é claramente linear contínuo e $\|u_n\| \leq 1$. Então, para cada $\varphi \in B_{(\ell_1)'}$

tem-se $\varphi \circ u_n \in B_{(\ell_1)'}$ e, portanto,

$$\sup_{\varphi \in B_{(\ell_1)'}} \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(u_n(x_j))| \leq \sup_{\varphi \in B_{(\ell_1)'}} \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)| \leq 1,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Escrevendo $x_k = (a_{jk})_{j=1}^{\infty}$ para todo k, temos

$$x_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{jk} e_j \text{ e } u_n(x_k) = \sum_{j=1}^{n} a_{jk} e_j,$$

para todos n, k naturais. Para qualquer inteiro positivo N, considere escalares $s_1, \ldots, s_N$ e $t_1, \ldots, t_N$ em $B_{\mathbb{K}}$. Chamando $s = (s_1, \ldots, s_N)$ e considerando o funcional linear $\varphi_s \in B_{(\ell_1)'}$ definido por

$$\varphi_s(e_j) = \begin{cases} s_j, \text{ se } j \leq N \\ 0, \text{ se } j > N, \end{cases}$$

temos

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} a_{jk} s_j t_k \right| &= \left| \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} a_{jk} s_j t_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{N} t_k \sum_{j=1}^{N} a_{jk} s_j \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{N} \left(|t_k| \cdot \left| \sum_{j=1}^{N} a_{jk} s_j \right| \right) \leq \sum_{k=1}^{N} \left| \sum_{j=1}^{N} a_{jk} s_j \right| \\ &= \sum_{k=1}^{N} \left| \sum_{j=1}^{N} a_{jk} \varphi_s(e_j) \right| = \sum_{k=1}^{N} \left| \varphi_s \left(\sum_{j=1}^{N} a_{jk} e_j \right) \right| \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} |\varphi_s(u_N(x_k))| \leq \sup_{\varphi \in B_{(\ell_1)'}} \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(u_N(x_k))| \leq 1,$$

e, portanto,

$$\left| \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} a_{jk} s_j t_k \right| \leq 1. \tag{1.16}$$

Sejam m, $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq m$. Para cada $1 \leq k \leq m$, aplicando o primeiro Teorema de Hahn$-$Banach e em seguida o Teorema de Riesz$-$Fréchet, existe $y_{k,n} \in \ell_2$ tal que,

$$\|y_{k,n}\|_2 = 1 \text{ e } \|u(u_n(x_k))\|_2 = \langle u(u_n(x_k)), y_{k,n} \rangle.$$

Se $m < n$ tomamos $y_{(m+1),n} = \cdots = y_{n,n} = 0$. Dado $\epsilon > 0$, temos

$$\sum_{k=1}^{m} \|u(u_n(x_k))\|_2 = \left| \sum_{k=1}^{m} \langle u(u_n(x_k)), y_{k,n} \rangle \right| = \left| \sum_{k=1}^{m} \left\langle u \left(u_n \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{jk} e_j \right) \right), y_{k,n} \right\rangle \right|$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \sum_{k=1}^{m} \left\langle u \left(\sum_{j=1}^{n} a_{jk} e_j \right) , \, y_{k,n} \right\rangle \right| = \left| \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left\langle u \left(e_j \right) , \, y_{k,n} \right\rangle \right| \\
&\leq \max \left\{ \left\| u \left(e_j \right) \right\|_2 + \epsilon : j = 1, \ldots, n \right\} \cdot \left| \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left\langle \frac{u \left(e_j \right)}{\left\| u \left(e_j \right) \right\|_2 + \epsilon}, \, y_{k,n} \right\rangle \right| \\
&\leq \left(\|u\| + \epsilon \right) \left| \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left\langle \frac{u \left(e_j \right)}{\left\| u \left(e_j \right) \right\|_2 + \epsilon}, \, y_{k,n} \right\rangle \right| .
\end{aligned}
$$

Pela desigualdade de Grothendieck, temos

$$
\sum_{k=1}^{m} \left\| u \left(u_n \left(x_k \right) \right) \right\|_2 \leq \left(\|u\| + \epsilon \right) K_G \sup \left\{ \left| \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{jk} s_j t_k \right| : \left| s_j \right| , \; \left| t_k \right| \leq 1 \right\} ,
$$

e usando a desigualdade (1.16), concluímos que

$$
\sum_{k=1}^{m} \left\| u \left(u_n \left(x_k \right) \right) \right\|_2 \leq K_G \left(\|u\| + \epsilon \right) .
$$

Fazendo $\epsilon \to 0^+$ temos

$$
\sum_{k=1}^{m} \left\| u \left(u_n \left(x_k \right) \right) \right\|_2 \leq K_G \left\| u \right\| , \text{ para todos } n \geq m.
$$

Como $\lim\limits_{n \to \infty} u_n \left(x_k \right) = x_k$, fazendo primeiro $n \to \infty$ e em seguida $m \to \infty$ na desigualdade acima concluímos que $\left(u \left(x_k \right) \right)_{k=1}^{\infty} \in \ell_1 \left(\ell_2 \right)$.

Para uma sequência não-nula qualquer $\left(z_j \right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1^{\omega} \left(\ell_1 \right)$, basta aplicar o que já provamos para a sequência dada por

$$
x_j = \frac{z_j}{\sup\limits_{\varphi \in B_{(\ell_1)'}} \sum\limits_{j=1}^{\infty} \left| \varphi \left(z_j \right) \right|},
$$

onde $j \in \mathbb{N}$. □

O próximo teorema fornece uma caracterização dos operadores lineares p-somantes através de uma medida. Para uma abordagem detalhada, sugerimos [16].

Teorema 1.11 (Teorema da Domincão de Pietsch). *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $u : E \to F$ um operador linear e continuo entre espaços de Banach. Então u é absolutamente p-somante se, e somente se, existem uma constante $C > 0$ e uma medida de probabilidade*

μ nos Borelianos de $B_{E'}$, com a topologia fraca estrela, tais que

$$\|u\,(x)\| \leq C\left(\int_{B_{E'}} |\varphi\,(x)|^p \, d\mu\,(\varphi)\right)^{\frac{1}{p}}$$

para todo $x \in E$.

Capítulo 2

Operadores multilineares absolutamente somantes

No capítulo anterior estudamos o conceito de operadores absolutamente somantes, bem como vários resultados úteis envolvendo estas aplicações. Em todas as propriedades estudadas, os operadores eram lineares. Neste capítulo, apresentaremos definições e resultados semelhantes, porém de forma estendida, visto que o ambiente no qual será desenvolvido o capítulo é o multilinear.

2.1 Definições básicas

Definição 2.1.1. *Sejam $E_1, E_2, \ldots, E_n$ e F espaços de Banach. Uma transformação $A : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \to F$ é dita n-linear, ou simplesmente multilinear, quando*

$$\begin{aligned} &A\left(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + \lambda y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n\right) \\ &= A\left(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1} \ldots, x_n\right) + \lambda A\left(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n\right), \end{aligned}$$

para quaisquer $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$, $y_i \in E_i$, com $i = 1, 2, \ldots, n$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

O conjunto formado por todas as aplicações multilineares contínuas de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ em F será denotado por $\mathcal{L}\left(E_1, E_2, \ldots, E_n; F\right)$. Se $E_1 = E_2 = \cdots = E_n = E$, escreveremos $\mathcal{L}\left({}^n E; F\right)$. Caso $F = \mathbb{K}$ nos dois casos anteriores, denotaremos respectivamente por $\mathcal{L}\left(E_1, E_2, \cdots, E_n\right)$ e $\mathcal{L}\left({}^n E\right)$.

É fácil ver que o conjunto $\mathcal{L}\left(E_1, E_2, \ldots, E_n; F\right)$ é um espaço vetorial e que a expressão

$$\|A\| := \sup\left\{\left\|A\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)\right\| : \|x_j\| \leq 1,\ j = 1, \ldots, n\right\}$$

define uma norma completa em $\mathcal{L}\left(E_1, E_2, \ldots, E_n; F\right)$.

Assim como no ambiente linear, existe uma caracterização bem conhecida para as transformações multilineares contínuas.

Proposição 2.1. *Sejam* $E_1, E_2, \cdots, E_n, F$ *espaços de Banach e* $A : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ *um operador multilinear. São equivalentes :*

(i) A *é contínua;*

(ii) A *é contínua na origem;*

(iii) Existe uma constante $C > 0$ *tal que,*

$$\|A(x_1, x_2, \ldots, x_n)\| \leq C \|x_1\| \cdot \|x_2\| \cdot \cdots \cdot \|x_n\|,$$

para qualquer $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$.

Definição 2.1.2. *Dada uma transformação* $A \in \mathcal{L}(^nE; F)$, *o operador* $P : E \to F$ *definido por*

$$P(x) = A(x, x, \ldots, x), \text{ para todo } x \in E,$$

é chamado de polinômio n-homogêneo contínuo.

O espaço de todos os polinômios n-homogêneos contínuos de E em F será denotado por $\mathcal{P}(^nE; F)$. Este espaço é normado e a norma de um polinômio P é definida por

$$\|P\| := \sup\{\|P(x)\| : \|x\| \leq 1\}.$$

Além disso, $\mathcal{P}(^nE; F)$ torna-se um espaço de Banach com a métrica proveniente da norma definida acima.

2.2 Aplicações absolutamente somantes

Definição 2.2.1. *Sejam* $E_1, \ldots, E_n$ *e* F *espaços de Banach,* $p, q_1, \ldots, q_n \in (0, \infty)$ *e*

$$\frac{1}{p} \leq \frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_n}.$$

Uma aplicação $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ *é absolutamente* $(p; q_1, \ldots, q_n)$*-somante, ou simplesmente* $(p; q_1, \ldots, q_n)$*-somante, se*

$$\left(A\left(x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(F) \text{ para todo } \left(x_s^{(j)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{q_s}^{\omega}(E_s), \text{ onde } s = 1, \ldots, n.$$

O espaço formado por todas as aplicações n-lineares absolutamente $(p; q_1, \ldots, q_n)$-somantes de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F será denotado por $\Pi_{(p;q_1,\ldots,q_n)}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Para o caso em que $E_1 = \cdots = E_n = E$, escreveremos $\Pi_{(p;q_1,\ldots,q_n)}\left({}^nE;F\right)$. Se nos casos anteriores, $q_1 = \cdots = q_n = q$, denotaremos os espaços respectivamente por $\Pi_{(p;q)}\left(E_1,\ldots,E_n;F\right)$ e $\Pi_{(p;q)}\left({}^nE;F\right)$.

Observação 2.1. Para evitar possíveis trivialidades, pedimos que $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{q_1}+\cdots+\frac{1}{q_n}$. De fato, suponha que o operador n-linear $u : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ é $(p;q_1,\ldots,q_n)$-somante e $\frac{1}{p} > \frac{1}{q_1}+\cdots+\frac{1}{q_n}$. Seja $r > 0$ tal que $\frac{1}{r} = \frac{1}{q_1}+\cdots+\frac{1}{q_n}$. Note que $\frac{1}{r} < \frac{1}{p}$ e assim $p < r$. Seja $(\eta_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_r \smallsetminus \ell_p$, com $\eta_j > 0$ para todo j natural.

Sejam $\lambda_j^k = \eta_j^{\frac{r}{q_k}}$, para todo $k = 1,\ldots,n$. Então

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|\lambda_j^k\right|^{q_k} = \sum_{j=1}^{\infty}\left(|\eta_j|^{\frac{r}{q_k}}\right)^{q_k} = \sum_{j=1}^{\infty}|\eta_j|^{r} < \infty$$

e assim $\left(\lambda_j^k\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{q_k}$. Além disso, dados $k \in \mathbb{N}$, $x_k \in E_k$, $\varphi \in E_k'$ e definindo, para cada j, $y_j = \lambda_j^k x_k$, temos

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\varphi\left(y_j\right)\right|^{q_k} &= \sum_{j=1}^{\infty}\left|\varphi\left(\lambda_j^k x_k\right)\right|^{q_k}\\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\left|\lambda_j^k\varphi\left(x_k\right)\right|^{q_k}\\ &= \left\|\varphi\left(x_k\right)\right\|^{q_k}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\lambda_j^k\right|^{q_k} < \infty\end{aligned}$$

logo $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{q_k}^{\omega}\left(E_k\right)$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Como u é absolutamente $(p;q_1,\ldots,q_n)$-somante vale

$$\sum_{j=1}^{N}\left|u\left(\lambda_j^1x_1,\lambda_j^2x_2,\ldots,\lambda_j^nx_n\right)\right|^{p} < \infty, \text{ para cada } N \text{ natural dado.}$$

No entanto

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{N}\left|u\left(\lambda_j^1x_1,\lambda_j^2x_2,\ldots,\lambda_j^nx_n\right)\right|^{p}\\ &= \left\|u\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)\right\|^{p}\sum_{j=1}^{N}\left|\lambda_j^1\cdot\lambda_j^2\cdot\cdots\cdot\lambda_j^n\right|^{p}.\end{aligned}$$

Note que $\left(\lambda_j^1\cdot\lambda_j^2\cdot\cdots\cdot\lambda_j^n\right)_{j=1}^{\infty} \notin \ell_p$, pois

$$\lambda_j^1\cdot\lambda_j^2\cdot\cdots\cdot\lambda_j^n = \eta_j,$$

para cada j e como $(\eta_j)_{j=1}^{\infty} \notin \ell_p$, segue o resultado. Portanto, a sequência

$$\left(\sum_{j=1}^{N} \left| u \left(\lambda_j^1 x_1, \lambda_j^2 x_2, \ldots, \lambda_j^n x_n \right) \right|^p \right)_{N \in \mathbb{N}}$$

só será convergente quando $\|u(x_1, x_2, \ldots, x_n)\| = 0$. Como $x_1, \ldots, x_n$ são arbitrários, segue que $u \equiv 0$.

Definição 2.2.2. *Se* $1 \leq p, q < \infty$ *e* $P \in \mathcal{P}(^n E; F)$ *são tais que*

$$(P(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(F), \text{ para todo } (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^{\omega}(E),$$

então P *é dito ser absolutamente* $(p;q)$*-somante.*

Denotaremos por $\mathcal{P}_{(p;q)}(^n E; F)$ o espaço de todos os polinômios $(p;q)$-somantes de E em F. Além disso, para evitar trivialidades, pedimos que $np \geq q$.

O próximo teorema fornece uma caracterização por meio de desigualdades para as aplicações multilineares absolutamente somantes e também para os polinômios n-homogêneos absolutamente somantes.

Teorema 2.2. (i) *Seja* $P \in \mathcal{P}(^n E; F)$*.* P *é* $(p;q)$*-somante se, e somente se, existe* $C > 0$ *tal que,*

$$\left\| (P(x_j))_{j=1}^{k} \right\|_p \leq C \cdot \left(\left\| (x_j)_{j=1}^{k} \right\|_{\omega,q} \right)^n, \tag{2.1}$$

para qualquer $k \in \mathbb{N}$ *e* $x_1, \ldots, x_k \in E$*.*

(ii) *Seja* $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$*. Então* A *é* $(p; q_1, \ldots, q_n)$*-somante se, e somente se, existe* $C > 0$ *tal que, para todo* $k \in \mathbb{N}$ *e* $x_j^1 \in E_1, \ldots, x_j^n \in E_n, j = 1, \ldots, k$*,*

$$\left\| \left(A \left(x_j^1, \ldots, x_j^n \right) \right)_{j=1}^{k} \right\|_p \leq C \cdot \prod_{m=1}^{n} \left\| \left(x_j^m \right)_{j=1}^{k} \right\|_{\omega, q_m}. \tag{2.2}$$

Definiremos $\|P\|_{(p;q)}$ como sendo o ínfimo dos C tal que a desigualdade (2.1) continua sendo válida e $\pi_{(p;q_1,\ldots,q_n)}(A)$ o menor dos C tal que a desigualdade (2.2) permanece verdadeira. Por um argumento semelhante ao da página 17 concluímos que $\|\cdot\|_{(p;q)}$ e $\pi_{(p;q_1,\ldots,q_n)}(\cdot)$ são normas, respectivamente, em $\mathcal{P}_{(p;q)}(^n E; F)$ e $\Pi_{(p;q_1,\ldots,q_n)}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Além disso, $\left(\mathcal{P}_{(p;q)}(^n E; F), \|\cdot\|_{(p;q)} \right)$ e $\left(\Pi_{(p;q_1,\ldots,q_n)}(E_1, \ldots, E_n; F), \pi_{(p;q_1,\ldots,q_n)}(\cdot) \right)$ são espaços de Banach.

Teorema 2.3. *Seja* $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$*. Suponha que existe* $1 \leq r \leq n$ *e* $C > 0$ *tal que, para quaisquer* $x_1 \in E_1, \ldots, x_r \in E_r$*, a aplicação* s*-linear, onde* $s = n - r$*, definida por*

$$A_{x_1 \ldots x_r}(x_{r+1}, \ldots, x_n) = A(x_1, \ldots, x_n)$$

é absolutamente $(p; q_1, \ldots, q_s)$-somante e

$$\pi_{(p;q_1,\ldots,q_s)}\left(A_{x_1\ldots x_r}\right) \leq C \cdot \|A\| \cdot \|x_1\| \cdot \|x_2\| \cdot \cdots \cdot \|x_r\| .$$

Então, A é absolutamente $(p; 1, \ldots, 1, q_1, \ldots, q_s)$-somante.

Demonstração. Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $x_1^1, \ldots, x_m^1 \in E_1; \ldots; x_1^n, \ldots, x_m^n \in E_n$. Considere $\varphi_j \in B_{F'}$ tal que,

$$\left\|A\left(x_j^1, \ldots, x_j^n\right)\right\| = \varphi_j\left(A\left(x_j^1, \ldots, x_j^n\right)\right), \text{ para qualquer } j = 1, \ldots, m.$$

Fixe $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{K}$ tal que, $\sum\limits_{j=1}^{m} |b_j|^q = 1$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, e

$$\left\|\left(\left\|A\left(x_j^1, \ldots, x_j^n\right)\right\|\right)_{j=1}^m\right\|_{l_p} = \sum_{j=1}^{m} b_j \left\|A\left(x_j^1, \ldots, x_j^n\right)\right\|. \tag{2.3}$$

Sendo as r_j funções de Rademacher e λ a medida de Lebesgue sobre o conjunto $I = [0,1]^r$, temos

$$\begin{aligned}
&\int_I \sum_{j=1}^{m} \left(\prod_{l=1}^{r} r_j(t_l)\right) b_j \varphi_j A\left(\sum_{j_1=1}^{m} r_{j_1}(t_1)\, x_{j_1}^1, \ldots, \sum_{j_r=1}^{m} r_{j_r}(t_r)\, x_{j_r}^r, x_j^{r+1}, \ldots, x_j^n\right) d\lambda \\
&= \int_I \sum_{j=1}^{m} \left(\prod_{l=1}^{r} r_j(t_l)\right) b_j \varphi_j \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_r = 1}^{m} r_{j_1}(t_1)\, r_{j_2}(t_2) \cdots r_{j_r}(t_r)\, A\left(x_{j_1}^1, \ldots, x_{j_r}^r, x_j^{r+1}, \ldots, x_j^n\right) d\lambda \\
&= \int_I \sum_{j=1}^{m} \left(\prod_{l=1}^{r} r_j(t_l)\right) \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_r = 1}^{m} r_{j_1}(t_1)\, r_{j_2}(t_2) \cdots r_{j_r}(t_r)\, b_j \varphi_j A\left(x_{j_1}^1, \ldots, x_{j_r}^r, x_j^{r+1}, \ldots, x_j^n\right) d\lambda \\
&= \int_I \sum_{j=1}^{m} \left(\prod_{l=1}^{r} r_j(t_l)\right) \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_r = 1}^{m} \left(\prod_{i=1}^{r} r_{j_i}(t_i)\right) b_j \varphi_j A\left(x_{j_1}^1, \ldots, x_{j_r}^r, x_j^{r+1}, \ldots, x_j^n\right) d\lambda \\
&= \int_I \sum_{j, j_1, j_2, \ldots, j_r = 1}^{m} \left(\prod_{l=1}^{r} r_j(t_l)\right) \left(\prod_{i=1}^{r} r_{j_i}(t_i)\right) b_j \varphi_j A\left(x_{j_1}^1, \ldots, x_{j_r}^r, x_j^{r+1}, \ldots, x_j^n\right) d\lambda \\
&= \int_I \sum_{j, j_1, j_2, \ldots, j_r = 1}^{m} \left(\prod_{i=1}^{r} r_j(t_i)\, r_{j_i}(t_i)\right) b_j \varphi_j A\left(x_{j_1}^1, \ldots, x_{j_r}^r, x_j^{r+1}, \ldots, x_j^n\right) d\lambda \\
&= \sum_{j, j_1, j_2, \ldots, j_r = 1}^{m} b_j \varphi_j A\left(x_{j_1}^1, \ldots, x_{j_r}^r, x_j^{r+1}, \ldots, x_j^n\right) \int_0^1 r_j(t_1)\, r_{j_1}(t_1)\, dt_1 \cdots \int_0^1 r_j(t_r)\, r_{j_r}(t_r)\, dt_r \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{j_1=1}^{m} \cdots \sum_{j_r=1}^{m} b_j \varphi_j A\left(x_{j_1}^1, \ldots, x_{j_r}^r, x_j^{r+1}, \ldots, x_j^n\right) \delta_{jj_1} \cdots \delta_{jj_r} \\
&= \sum_{j=1}^{m} b_j \varphi_j A\left(x_{j_1}^1, \ldots, x_j^n\right) = \sum_{j=1}^{m} b_j \left\|A\left(x_j^1, \ldots, x_j^n\right)\right\|,
\end{aligned}$$

e, portanto, (2.3) e (2.4) são iguais.

Agora, definindo $z_l = \sum\limits_{j=1}^{m} r_j(t_l)\, x_j^l$, onde $l = 1, \ldots, r$, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{j=1}^{m}\left\|A\left(x_j^1, \ldots, x_j^n\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sum_{j=1}^{m} b_j \varphi_j A\left(x_{j_1}^1, \ldots, x_j^n\right) \\
&= \int_I \sum_{j=1}^{m}\left(\prod_{l=1}^{r} r_j(t_l)\right) b_j \varphi_j A\left(\sum_{j_1=1}^{m} r_{j_1}(t_1)\, x_{j_1}^1, \ldots, \sum_{j_r=1}^{m} r_{j_r}(t_r)\, x_{j_r}^r, x_j^{r+1}, \ldots, x_j^n\right) d\lambda \\
&\leq \int_I \left|\sum_{j=1}^{m}\left(\prod_{l=1}^{r} r_j(t_l)\right) b_j \varphi_j A\left(\sum_{j_1=1}^{m} r_{j_1}(t_1)\, x_{j_1}^1, \ldots, \sum_{j_r=1}^{m} r_{j_r}(t_r)\, x_{j_r}^r, x_j^{r+1}, \ldots, x_j^n\right)\right| d\lambda \\
&\leq \int_I \sum_{j=1}^{m} |b_j| \left\|A\left(\sum_{j_1=1}^{m} r_{j_1}(t_1)\, x_{j_1}^1, \ldots, \sum_{j_r=1}^{m} r_{j_r}(t_r)\, x_{j_r}^r, x_j^{r+1}, \ldots, x_j^n\right)\right\| d\lambda \\
&\leq \sup_{\substack{t_l \in [0,1] \\ l=1,\ldots,r}} \sum_{j=1}^{m} |b_j| \left\|A\left(\sum_{j_1=1}^{m} r_{j_1}(t_1)\, x_{j_1}^1, \ldots, \sum_{j_r=1}^{m} r_{j_r}(t_r)\, x_{j_r}^r, x_j^{r+1}, \ldots, x_j^n\right)\right\|
\end{aligned}
$$

Pela desigualdade de Hölder obtemos

$$
\begin{aligned}
&\leq \sup_{\substack{t_l \in [0,1] \\ l=1,\ldots,r}} \sum_{j=1}^{m} |b_j| \left\|A\left(\sum_{j_1=1}^{m} r_{j_1}(t_1)\, x_{j_1}^1, \ldots, \sum_{j_r=1}^{m} r_{j_r}(t_r)\, x_{j_r}^r, x_j^{r+1}, \ldots, x_j^n\right)\right\| \\
&\leq \sup_{\substack{t_l \in [0,1] \\ l=1,\ldots,r}} \left(\sum_{j=1}^{m} \left\|A\left(\sum_{j_1=1}^{m} r_{j_1}(t_1)\, x_{j_1}^1, \ldots, \sum_{j_r=1}^{m} r_{j_r}(t_r)\, x_{j_r}^r, x_j^{r+1}, \ldots, x_j^n\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{\substack{t_l \in [0,1] \\ l=1,\ldots,r}} \left(\sum_{j=1}^{m}\left\|A\left(z_1, \ldots, z_r, x_j^{r+1}, \ldots, x_j^n\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{\substack{t_l \in [0,1] \\ l=1,\ldots,r}} \left(\sum_{j=1}^{m}\left\|A_{z_1 \ldots z_r}\left(x_j^{r+1}, \ldots, x_j^n\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{\substack{t_l \in [0,1] \\ l=1,\ldots,r}} \left(\pi_{(p;q_1,\ldots,q_s)}\left(A_{z_1 \ldots z_r}\right) \cdot \left\|\left(x_j^{r+1}\right)_{j=1}^{m}\right\|_{\omega,q_1} \cdot \cdots \cdot \left\|\left(x_j^{n}\right)_{j=1}^{m}\right\|_{\omega,q_s}\right)
\end{aligned}
$$

Por hipótese temos

$$
\begin{aligned}
&\leq \sup_{\substack{t_l \in [0,1] \\ l=1,\ldots,r}} \left(\pi_{(p;q_1,\ldots,q_s)}\left(A_{z_1 \ldots z_r}\right) \cdot \left\|\left(x_j^{r+1}\right)_{j=1}^{m}\right\|_{\omega,q_1} \cdot \cdots \cdot \left\|\left(x_j^{n}\right)_{j=1}^{m}\right\|_{\omega,q_s}\right) \\
&\leq \sup_{\substack{t_l \in [0,1] \\ l=1,\ldots,r}} \left(C \cdot \|A\| \cdot \|z_1\| \cdot \ldots \cdot \|z_r\| \cdot \left\|\left(x_j^{r+1}\right)_{j=1}^{m}\right\|_{\omega,q_1} \cdot \cdots \cdot \left\|\left(x_j^{n}\right)_{j=1}^{m}\right\|_{\omega,q_s}\right)
\end{aligned}
$$

$$\leq C \cdot \|A\| \cdot \left(\prod_{l=1}^{r} \left\| \left(x_j^l\right)_{j=1}^m \right\|_{\omega,1} \right) \cdot \left(\prod_{l=r+1}^{n} \left\| \left(x_j^l\right)_{j=1}^m \right\|_{\omega,q_{l-r}} \right),$$

e, portanto, A é absolutamente $(p; 1, \ldots, 1, q_1, \ldots, q_s)$-somante. $\square$

Corolário 2.4. *Se* $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F) = \Pi_{(p;q_1,\ldots,q_m)}(E_1, \ldots, E_m; F)$ *então, para quaisquer espaços de Banach* $E_{m+1}, \ldots, E_n$, *temos*

$$\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F) = \Pi_{(p;q_1,\ldots,q_m,1,\ldots,1)}(E_1, \ldots, E_n; F).$$

Em particular, temos, para $p \geq 1$

$$\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m) = \Pi_{(p;q_1,\ldots,q_m,1,\ldots,1)}(E_1, \ldots, E_m).$$

Corolário 2.5. *Se, para alguns* E *e* F, $\mathcal{L}(E; F) = \Pi_{(p;q)}(E; F)$ *e* $\pi_{(p;q)}(U) \leq C\|U\|$, *para qualquer* $U \in \mathcal{L}(E; F)$, *então*

$$\mathcal{L}(E, E_2, \ldots, E_m; F) = \Pi_{(p;q,1,\ldots,1)}(E, E_2, \ldots, E_m; F)$$

e $\pi_{(p;q,1,\ldots,1)}(A) \leq C\|A\|$, *para todo* $A \in \mathcal{L}(E, E_2, \ldots, E_m; F)$ *e quaisquer* $E_2, \ldots, E_m$.

O próximo corolário é um teorema útil para a teoria multilinear, a saber, o Teorema de Defant-Voigt. Este resultado, devido a A. Defant e J. Voigt, está contido no Corolário 2.4. Mas, devido a sua importância, faremos menção separadamente.

Corolário 2.6 (Teorema de Defant-Voigt)**.** *Sejam* $E_1, \ldots, E_n$ *espaços de Banach. Então,*

$$\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n) = \Pi_{(1;1)}(E_1, \ldots, E_n) \text{ e } \pi_{(1;1)}(A) = \|A\|.$$

Demonstração. De fato, já sabemos, pelo Exemplo 1.2, que

$$\mathcal{L}(E; \mathbb{K}) = \Pi_1(E; \mathbb{K}) \text{ e } \pi_1(u) = \|u\|, \text{ onde } u \in \mathcal{L}(E; \mathbb{K}).$$

Pelo Corolário 2.5, segue que

$$\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n) = \Pi_{(1;1)}(E_1, \ldots, E_n) \text{ e } \pi_{(1;1)}(A) \leq \|A\|, \text{ para todo } A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n).$$

Agora, resta mostrar que $\|A\| \leq \pi_{(1;1)}(A)$. Considere, na segunda parte do Teorema 2.2, $k = 1$. Assim, temos

$$\begin{aligned} \left\|A\left(x_1^1, \ldots, x_1^n\right)\right\| &= \left\| \left(A\left(x_i^1, \ldots, x_i^n\right)\right)_{i=1}^1 \right\| \\ &\leq \pi_{(1;1)}(A) \left\| \left(x_i^1\right)_{i=1}^1 \right\|_{\omega,1} \cdot \cdots \cdot \left\| \left(x_i^n\right)_{i=1}^1 \right\|_{\omega,1}. \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach, temos

$$\left\|\left(x_i^j\right)_{i=1}^1\right\|_{\omega,1}=\left\|x_i^j\right\|, \text{ para qualquer } j=1,2,\ldots,n.$$

Logo, na desigualdade anterior, obtemos

$$\left\|A\left(x_1^1,\ldots,x_1^n\right)\right\|\leq\pi_{(1;1)}(A)\left\|x_i^1\right\|\cdot\cdots\cdot\left\|x_i^n\right\|$$

e, portanto, $\|A\|\leq\pi_{(1;1)}(A)$, que é o resultado esperado. □

O último teorema desta seção, é conhecido como Teorema da Inclusão. Este e o teorema de Defant-Voigt serão fundamentais para a demonstração de um dos resultados da próxima seção.

Teorema 2.7 (Teorema da Inclusão)**.** *Sejam* $1\leq p\leq\widetilde{p}<\infty$ *e* $1\leq q_j\leq\widetilde{q}_j<\infty$ *tal que*

$$\sum_{j=1}^n\frac{1}{q_j}-\frac{1}{p}\leq\sum_{j=1}^n\frac{1}{\widetilde{q}_j}-\frac{1}{\widetilde{p}}.$$

Então,

$$\Pi_{(p;q_1,\ldots,q_n)}(E_1,\ldots,E_n;F)\subset\Pi_{(\widetilde{p};\widetilde{q}_1,\ldots,\widetilde{q}_n)}(E_1,\ldots,E_n;F)$$

e

$$\pi_{(\widetilde{p};\widetilde{q}_1,\ldots,\widetilde{q}_n)}(A)\leq\pi_{(p;q_1,\ldots,q_n)}(A).$$

Demonstração. Seja $A\in\Pi_{(p;q_1,\ldots,q_n)}(E_1,\ldots,E_n;F)$. Devemos mostrar que

$$\left(\sum_{i=1}^m\left\|A\left(x_i^1,\ldots,x_i^n\right)\right\|_F^{\widetilde{p}}\right)^{\frac{1}{\widetilde{p}}}\leq\pi_{(p;q_1,\ldots,q_n)}(A)\prod_{j=1}^n\left\|\left(x_i^j\right)_{i=1}^m\right\|_{\omega,\widetilde{q}_j},$$

para todo $m\in\mathbb{N}$ e $x_i^j\in E_j$, $j=1,\ldots,n$ e $i=1,\ldots,m$. De fato, para cada $i=1,\ldots,m$ e cada $j=1,\ldots,n$ sejam

$$\begin{cases}\frac{1}{r_j}=\frac{1}{q_j}-\frac{1}{\widetilde{q}_j},\\ q\sum\limits_{j=1}^m\frac{1}{r_j}=\frac{1}{p}-\frac{1}{\widetilde{p}}\\ \lambda_i^j:=\left\|A\left(x_i^1,\ldots,x_i^m\right)\right\|^{\frac{q\widetilde{p}}{r_j}}.\end{cases}$$

Note que $q\geq 1$. De fato, sabendo que $\sum\limits_{j=1}^n\frac{1}{q_j}-\frac{1}{p}\leq\sum\limits_{j=1}^n\frac{1}{\widetilde{q}_j}-\frac{1}{\widetilde{p}}$, temos

$$\sum_{j=1}^n\frac{1}{q_j}-\frac{1}{\widetilde{q}_j}\leq\frac{1}{p}-\frac{1}{\widetilde{p}}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{r_j} \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{\widetilde{p}} \\
&\Rightarrow \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{\widetilde{p}}}{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{r_j}} \geq 1 \\
&\Rightarrow q \geq 1.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\left(\lambda_i^1 \cdot \ldots \cdot \lambda_i^n\right)^p &= \left(\left\| A\left(x_i^1, \ldots, x_i^n\right) \right\|^{\widetilde{p} q \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{1}{r_j}} \right)^p \\
&= \left(\left\| A\left(x_i^1, \ldots, x_i^n\right) \right\|^{\widetilde{p}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\widetilde{p}}\right)} \right)^p \\
&= \left\| A\left(x_i^1, \ldots, x_i^n\right) \right\|^{\widetilde{p} - p}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{m} \left\| A\left(x_i^1, \ldots, x_i^n\right) \right\|_F^{\widetilde{p}} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m} \left\| A\left(x_i^1, \ldots, x_i^n\right) \right\|_F^{\widetilde{p} - p} \left\| A\left(x_i^1, \ldots, x_i^n\right) \right\|_F^{p} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m} \left(\lambda_i^1 \cdot \ldots \cdot \lambda_i^n\right)^p \left\| A\left(x_i^1, \ldots, x_i^n\right) \right\|_F^{p} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m} \left\| A\left(\lambda_i^1 x_i^1, \ldots, \lambda_i^n x_i^n\right) \right\|_F^{p} \right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Como $A \in \Pi_{(p;q_1,\ldots,q_n)}\left(E_1, \ldots, E_n; F\right)$, temos de (2.4),

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{m} \left\| A\left(x_i^1, \ldots, x_i^n\right) \right\|_F^{\widetilde{p}} \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \pi_{(p;q_1,\ldots,q_n)}(A) \prod_{j=1}^{n} \left\| \left(\lambda_i^j x_i^j\right)_{i=1}^{m} \right\|_{\omega, q_j} \\
&= \pi_{(p;q_1,\ldots,q_n)}(A) \prod_{j=1}^{n} \sup_{\varphi_j \in B_{E_j'}} \left(\sum_{i=1}^{m} \left| \lambda_i^j \varphi_j\left(x_i^j\right) \right|^{q_j} \right)^{\frac{1}{q_j}} \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Sabendo que

$$\frac{1}{r_j} = \frac{1}{q_j} - \frac{1}{\widetilde{q}_j},$$

e usando a desigualdade de Hölder no segundo membro de (2.5), temos

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{m}\left\|A\left(x_i^1,\ldots,x_i^n\right)\right\|_F^{\widetilde{p}}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \pi_{(p;q_1,\ldots,q_n)}(A)\prod_{j=1}^{n}\left[\sup_{\varphi_j\in B_{E_j'}}\left(\sum_{i=1}^{m}\left|\lambda_i^j\right|^{r_j}\right)^{\frac{1}{r_j}}\left(\sum_{i=1}^{m}\left|\varphi_j\left(x_i^j\right)\right|^{\widetilde{q}_j}\right)^{\frac{1}{\widetilde{q}_j}}\right] \\
&= \pi_{(p;q_1,\ldots,q_n)}(A)\prod_{j=1}^{n}\left[\left(\sum_{i=1}^{m}\left|\lambda_i^j\right|^{r_j}\right)^{\frac{1}{r_j}}\sup_{\varphi_j\in B_{E_j'}}\left(\sum_{i=1}^{m}\left|\varphi_j\left(x_i^j\right)\right|^{\widetilde{q}_j}\right)^{\frac{1}{\widetilde{q}_j}}\right] \\
&= \pi_{(p;q_1,\ldots,q_n)}(A)\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\left|\lambda_i^j\right|^{r_j}\right)^{\frac{1}{r_j}}\prod_{j=1}^{n}\sup_{\varphi_j\in B_{E_j'}}\left(\sum_{i=1}^{m}\left|\varphi_j\left(x_i^j\right)\right|^{\widetilde{q}_j}\right)^{\frac{1}{\widetilde{q}_j}} \\
&= \pi_{(p;q_1,\ldots,q_n)}(A)\prod_{j=1}^{n}\left(\left\|\left(\lambda_i^j\right)_{i=1}^{m}\right\|_{r_j}\right)\prod_{j=1}^{n}\left(\left\|\left(x_i^j\right)_{i=1}^{m}\right\|_{\omega,\widetilde{q}_j}\right). \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{n}\left(\left\|\left(\lambda_i^j\right)_{i=1}^{m}\right\|_{r_j}\right) &= \prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\left\|A\left(x_i^1,\ldots,x_i^n\right)\right\|_F^{q\widetilde{p}}\right)^{\frac{1}{r_j}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m}\left\|A\left(x_i^1,\ldots,x_i^n\right)\right\|_F^{q\widetilde{p}}\right)^{\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{r_j}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m}\left\|A\left(x_i^1,\ldots,x_i^n\right)\right\|_F^{q\widetilde{p}}\right)^{\frac{1}{q}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\widetilde{p}}\right)} \\
&= \left\|\left(\left\|A\left(x_i^1,\ldots,x_i^n\right)\right\|_F^{\widetilde{p}}\right)_{i=1}^{m}\right\|_q^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\widetilde{p}}} \\
&\leq \left\|\left(\left\|A\left(x_i^1,\ldots,x_i^n\right)\right\|_F^{\widetilde{p}}\right)_{i=1}^{m}\right\|_1^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\widetilde{p}}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m}\left\|A\left(x_i^1,\ldots,x_i^n\right)\right\|_F^{\widetilde{p}}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\widetilde{p}}}. \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

Logo, de (2.6) e (2.7), temos

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{m}\left\|A\left(x_i^1,\ldots,x_i^n\right)\right\|_F^{\widetilde{p}}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \pi_{(p;q_1,\ldots,q_n)}(A)\left(\sum_{i=1}^{m}\left\|A\left(x_i^1,\ldots,x_i^n\right)\right\|_F^{\widetilde{p}}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\widetilde{p}}}\prod_{j=1}^{n}\left(\left\|\left(x_i^j\right)_{i=1}^{m}\right\|_{\omega,\widetilde{q}_j}\right)
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\left\|A\left(x_i^1,\ldots,x_i^n\right)\right\|_F^{\widetilde{p}}\right)^{\frac{1}{p}}\leq\pi_{(p;q_1,\ldots,q_n)}\left(A\right)\prod_{j=1}^{n}\left(\left\|\left(x_i^j\right)_{i=1}^m\right\|_{\omega,\widetilde{q}_j}\right),$$

como queríamos demonstrar. □

2.3 Estimativas para operadores multilineares com domínio sobre ℓ_p

Nas seções anteriores deste capítulo introduzimos os primeiros conceitos e resultados em multilinearidade. Também foram apresentados os Teoremas de Defant-Voigt e da Inclusão. Para esta seção, restringiremos nosso estudo aos operadores n-lineares definidos no produto cartesiano de espaços ℓ_p. O resultado a seguir é devido a I. Zalduendo [21] para escalares complexos. Apresentamos uma demonstração alternativa essencialmente encontrada em [7], que vale para escalares reais e complexos.

Teorema 2.8. *Sejam $N>p$ e $A:\ell_p\times\cdots\times\ell_p\to\mathbb{K}$ um funcional N-linear contínuo. Então $\left(A\left(e_i,\ldots,e_i\right)\right)_{i=1}^{\infty}\in\ell_{\frac{p}{p-N}}$ e*

$$\left\|\left(A\left(e_i,\ldots,e_i\right)\right)_{i=1}^{\infty}\right\|_{p/(p-N)}\leq\|A\|.$$

Demonstração. Seja $A\in\mathcal{L}\left({}^N\ell_p;\mathbb{K}\right)$. Pelo Teorema de Defant-Voigt, temos

$$\mathcal{L}\left({}^N\ell_p;\mathbb{K}\right)=\Pi_{(1;1)}\left({}^N\ell_p;\mathbb{K}\right)\ \text{ e } \pi_{(1;1)}\left(A\right)=\|A\|.$$

Afirmamos que $\Pi_{(1;1)}\left({}^N\ell_p;\mathbb{K}\right)\subset\Pi_{\left(\frac{p}{p-N};\frac{p}{p-1},\cdots,\frac{p}{p-1}\right)}\left({}^N\ell_p;\mathbb{K}\right)$. De fato, sabendo que $p>p-N$, temos

$$1<\frac{p}{p-N}$$

e de $p-1<p$, obtemos

$$1<\frac{p}{p-1}.$$

Agora, fazendo $P=1$, $\widetilde{P}=\frac{p}{p-N}$, $q_j=1$ e $\widetilde{q}_j=\frac{p}{p-1}$ para cada $j=1,\ldots,N$, temos

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{q_j}-\frac{1}{P}=N-1$$

e

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\widetilde{q}_j}-\frac{1}{\widetilde{P}} &= \left(\frac{p-1}{p}\right)N-\left(\frac{p-N}{p}\right)\\ &= \frac{pN-p}{p}=N-1.\end{aligned}$$

Assim, segue que $\sum\limits_{j=1}^{N}\frac{1}{q_j}-\frac{1}{P}\leq\sum\limits_{j=1}^{N}\frac{1}{\widetilde{q}_j}-\frac{1}{\widetilde{P}}$ e, portanto, pelo Teorema da Inclusão

$$\begin{aligned}\Pi_{(1;1)}\left({}^{N}\ell_p;\mathbb{K}\right) &\subset \Pi_{\left(\frac{p}{p-N};\frac{p}{p-1},\cdots,\frac{p}{p-1}\right)}\left({}^{N}\ell_p;\mathbb{K}\right)\\ &\Rightarrow \mathcal{L}\left({}^{N}\ell_p;\mathbb{K}\right)\subset\Pi_{\left(\frac{p}{p-N};\frac{p}{p-1},\cdots,\frac{p}{p-1}\right)}\left({}^{N}\ell_p;\mathbb{K}\right)\end{aligned}$$

e também,

$$\pi_{\left(\frac{p}{p-N};\frac{p}{p-1},\cdots,\frac{p}{p-1}\right)}(A)\leq\pi_{(1;1)}(A)=\|A\|.$$

Como a inclusão $\Pi_{\left(\frac{p}{p-N};\frac{p}{p-1},\cdots,\frac{p}{p-1}\right)}\left({}^{N}\ell_p;\mathbb{K}\right)\subset\mathcal{L}\left({}^{N}\ell_p;\mathbb{K}\right)$ é claramente verdadeira, concluímos que $\mathcal{L}\left({}^{N}\ell_p;\mathbb{K}\right)=\Pi_{\left(\frac{p}{p-N};\frac{p}{p-1},\cdots,\frac{p}{p-1}\right)}\left({}^{N}\ell_p;\mathbb{K}\right)$. Como consequência, temos $A\in\Pi_{\left(\frac{p}{p-N};\frac{p}{p-1},\cdots,\frac{p}{p-1}\right)}\left({}^{N}\ell_p;\mathbb{K}\right)$ e assim

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}|A(e_j,\ldots,e_j)|^{\frac{p}{p-N}}\right)^{\frac{p-N}{p}}\leq\pi_{\left(\frac{p}{p-N};\frac{p}{p-1},\cdots,\frac{p}{p-1}\right)}(A)\cdot\left(\left\|(e_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\omega,\frac{p}{p-1}}\right)^{N}.$$

Sendo $\left\|(e_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\omega,\frac{p}{p-1}}=1$, temos

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{m}|A(e_j,\ldots,e_j)|^{\frac{p}{p-N}}\right)^{\frac{p-N}{p}} &\leq\pi_{\left(\frac{p}{p-N};\frac{p}{p-1},\cdots,\frac{p}{p-1}\right)}(A)\\ &\leq\pi_{(1;1)}(A)=\|A\|.\end{aligned}$$

Como m é arbitrário, segue que $\|(A(e_i,\ldots,e_i))_{i=1}^{\infty}\|_{p/(p-N)}\leq\|A\|$. □

O próximo resultado mostrará o que chamamos de otimalidade do expoente $\frac{p}{p-N}$. Isto significa que, se tomarmos um expoente menor do que $\frac{p}{p-N}$, o resultado do teorema anterior não valerá, para alguma forma multilinear $A:\ell_p\times\cdots\times\ell_p\to\mathbb{K}$. Apresentaremos duas demonstrações: a primeira delas usa o argumento original do artigo [21] e a segunda utiliza uma ideia do artigo [10].

Proposição 2.9. *Existe uma aplicação N-linear e contínua* $A:\ell_p\times\cdots\times\ell_p\to\mathbb{K}$ *tal que* $(A(e_i,\ldots,e_i))_{i=1}^{\infty}\notin\ell_s$*, para qualquer* $s<\frac{p}{p-N}$ *e* $p>N$.

Demonstração. (1) Seja $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência crescente tal que $\beta_n \longrightarrow \frac{N-p}{p}$. Para cada $n \geq 1$ natural, defina

$$A_n\left(e_{i_1},\ldots,e_{i_N}\right) = \begin{cases} 0 \text{ se } i_1,\ldots,i_N \text{ não são todos iguais} \\ k^{\beta_n} \text{ se } i_1=\cdots=i_N=k. \end{cases}$$

Note que $\left(k^{\beta_n}\right)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_{\frac{p}{p-N}}$. Com efeito, sendo $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ crescente, temos, para cada n,

$$\beta_n < \frac{N-p}{p} \Rightarrow -\beta_n > \frac{p-N}{p} \Rightarrow \frac{-\beta_n}{\frac{p-N}{p}} > 1.$$

Logo

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^{\beta_n}\right)^{\frac{p}{p-N}} &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\right)^{-\beta_n\cdot\frac{p}{p-N}} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{-\beta_n}{\frac{p-N}{p}}} < \infty,\end{aligned}$$

pois $\frac{-\beta_n}{\frac{p-N}{p}} > 1$ e, portanto, $\left(k^{\beta_n}\right)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_{\frac{p}{p-N}}$. Além disso, se $x=(x_1,\ldots,x_N) \in \ell_p\times\cdots\times\ell_p$, então

$$\begin{aligned}&\left|A_n\left(x_1,\ldots,x_N\right)\right| \\ &= \left|A_n\left(\sum_{j_1=1}^{\infty} x_1^{j_1}e_{j_1},\ldots,\sum_{j_N=1}^{\infty} x_N^{j_N}e_{j_N}\right)\right| \\ &= \left|\sum_{j_1,\ldots,j_N=1}^{\infty} x_1^{j_1}\cdot\cdots\cdot x_N^{j_N}\cdot A_n\left(e_{j_1},\ldots,e_{j_N}\right)\right| \\ &\leq \sum_{j_1,\ldots,j_N=1}^{\infty}\left|x_1^{j_1}\cdot\cdots\cdot x_N^{j_N}\cdot A_n\left(e_{j_1},\ldots,e_{j_N}\right)\right| \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\left|x_1^{j}\cdot\cdots\cdot x_N^{j}\cdot j^{\beta_n}\right|. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Pela desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_1^{j}\cdot\cdots\cdot x_N^{j}\cdot j^{\beta_n}\right| \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_1^{j}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\cdots\cdot\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_N^{j}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|j^{\beta_n}\right|^{\frac{p}{p-N}}\right)^{\frac{p-N}{p}} \\ &= \|x_1\|_p\cdot\cdots\cdot\|x_N\|_p\cdot\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|j^{\beta_n}\right|^{\frac{p}{p-N}}\right)^{\frac{p-N}{p}} < \infty. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Assim, por (2.8) e (2.9), concluímos que $\sup |A_n(x_1, \ldots, x_N)| < \infty$ e, portanto, cada A_n é contínua sobre ℓ_p.

Finalmente defina a aplicação $A : \ell_p \times \cdots \times \ell_p \to \mathbb{K}$ por

$$A(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{n \geq 1} \frac{A_n(x_1, \ldots, x_N)}{\|A_n\| \, 2^n}.$$

Afirmamos que $(A(e_k, \ldots, e_k))_{k=1}^{\infty} \notin \ell_s$, para qualquer $s < \frac{p}{p-N}$. De fato, suponha por absurdo que existe $1 < s < \frac{p}{p-N}$ tal que $(A(e_k, \ldots, e_k))_{k=1}^{\infty} \in \ell_s$. Então,

$$\sum_{k \geq 1} |A(e_k, \ldots, e_k)|^s < \infty.$$

Entretanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{k \geq 1} |A(e_k, \ldots, e_k)|^s &= \sum_{k \geq 1} \left| \sum_{n \geq 1} \frac{A_n(e_k, \ldots, e_k)}{\|A_n\| \, 2^n} \right|^s \\
&= \sum_{k \geq 1} \left| \sum_{n \geq 1} \frac{k^{\beta_n}}{\|A_n\| \, 2^n} \right|^s \\
&> \sum_{k \geq 1} \sum_{n \geq 1} \frac{k^{\beta_n s}}{\|A_n\|^s \, 2^{ns}} \\
&= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\|A_n\|^s \, 2^{ns}} \cdot \sum_{k \geq 1} k^{\beta_n s},
\end{aligned}$$

e daí,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\|A_n\|^s \, 2^{ns}} \cdot \sum_{k \geq 1} k^{\beta_n s} < \sum_{k \geq 1} |A(e_k, \ldots, e_k)|^s < \infty.$$

Sabemos que $-\frac{1}{s} < \frac{N-p}{p}$. Porém, sendo $\beta_n < \frac{N-p}{p}$ para todo n natural, então existe n_0 tal que $-\frac{1}{s} < \beta_n < \frac{N-p}{p}$, ou seja, $-\beta_n s < 1$ para todo $n \geq n_0$. Portanto, para $n \geq n_0$ temos

$$\sum_{k \geq 1} k^{\beta_n s} = \sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{k} \right)^{-\beta_n s} = \infty,$$

que é um absurdo. Segue que $(A(e_k, \ldots, e_k))_{k=1}^{\infty} \notin \ell_s$, qualquer que seja $s < \frac{p}{p-N}$, como queríamos. $\square$

Demonstração. (2) Para cada $m \in \mathbb{N}$ defina a aplicação $\Phi_m : \ell_p \times \cdots \times \ell_p \to \mathbb{K}$ por

$$\Phi_m(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{i=1}^{m} x_1^i \cdot \cdots \cdot x_N^i.$$

Agora, seja $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que
$$\frac{N}{p} + \frac{1}{\lambda} = 1.$$
Então
$$\lambda = \frac{p}{p-N}.$$
Note que, para cada m, vale
$$\|\Phi_m(x_1, \ldots, x_N)\| = \left| \sum_{i=1}^{m} x_1^i \cdot \cdots \cdot x_N^i \right| \leq \sum_{i=1}^{m} \left|x_1^i\right| \cdot \cdots \cdot \left|x_N^i\right|$$
e, portanto,
$$\|\Phi_m\| \leq \sup_{\substack{\|x_k\|_p \leq 1 \\ k=1,\ldots,N}} \sum_{i=1}^{m} \left|x_1^i\right| \cdot \cdots \cdot \left|x_N^i\right| \cdot 1. \tag{2.10}$$
Usando a desigualdade de Hölder em (2.10), temos
$$\begin{aligned}\|\Phi_m\| &\leq \sup_{\substack{\|x_k\|_p \leq 1 \\ k=1,\ldots,N}} \left(\sum_{i=1}^{m} \left|x_1^i\right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \cdots \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} \left|x_N^i\right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} |1|^{\lambda} \right)^{\frac{1}{\lambda}} \\ &= 1 \cdot \cdots \cdot 1 \cdot m^{\frac{1}{\lambda}} = m^{\frac{1}{\lambda}}\end{aligned}$$

Suponha que o teorema 2.8 vale para
$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |A(e_i, \ldots, e_i)|^s \right)^{\frac{1}{s}} \leq \|A\|. \tag{2.11}$$
Fazendo $A = \Phi_m$ em (2.11), obtemos
$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\Phi_m(e_i, \ldots, e_i)|^s \right)^{\frac{1}{s}} &\leq \|\Phi_m\| \\ &\leq m^{\frac{1}{\lambda}}.\end{aligned}$$

Por outro lado,
$$\begin{aligned}&\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\Phi_m(e_i, \ldots, e_i)|^s \right)^{\frac{1}{s}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{m} |\Phi_m(e_i, \ldots, e_i)|^s + \sum_{i=m+1}^{\infty} |\Phi_m(e_i, \ldots, e_i)|^s \right)^{\frac{1}{s}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{m} 1^s \right)^{\frac{1}{s}}\end{aligned}$$

Logo

$$\left(\sum_{i=1}^{m} 1^{s}\right)^{\frac{1}{s}} \leq m^{\frac{1}{\lambda}} \Rightarrow m^{\frac{1}{s}} \leq m^{\frac{1}{\lambda}}.$$

Portanto,

$$m^{\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{s}} \geq 1, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Mas, a condição anterior ocorre somente se $\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{s} \geq 0$, ou seja, $s \geq \lambda$. $\square$

Capítulo 3

Generalizações das desigualdades de Khinchin e Kahane

A motivação do presente capítulo é apresentar versões multilineares de alguns resultados vistos anteriormente no contexto linear. No Capítulo 1, apresentamos as desigualdades de Khinchin e Kahane que, como veremos nesse capítulo, têm versões multilineares. Para tanto, apresentaremos o conceito de cotipo, que também será explorado no Capítulo 4.

Lema 3.1. *Sejam* $f \in L_p$, $1 < p, q < \infty$, *com* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Então,*

$$\|f\|_{L_p} = \sup\left\{\int |fg|\, d\mu : \|g\|_{L_q} \leq 1\right\} = \sup\left\{\left|\int fg d\mu\right| : \|g\|_{L_q} \leq 1\right\},$$

e o supremo é atingido.

Demonstração. O resultado é claramente verdadeiro quando $f = 0$. Suponha que $f \neq 0$. Certamente,

$$\left|\int fg d\mu\right| \leq \int |fg|\, d\mu. \tag{3.1}$$

Supondo que $\|g\|_q \leq 1$ e usando a desigualdade de Hölder no lado direito de (3.1), temos

$$\left|\int fg d\mu\right| \leq \int |fg|\, d\mu \leq \|f\|_{L_p}$$

e, portanto,

$$\sup\left\{\left|\int fg d\mu\right| : \|g\|_{L_q} \leq 1\right\} \leq \sup\left\{\int |fg|\, d\mu : \|g\|_{L_q} \leq 1\right\} \leq \|f\|_{L_p}.$$

Agora, considere $h = |f|^{p-1}\,\overline{sgn\ f}$, onde

$$sgn\ f = \begin{cases} \frac{f}{|f|}, \text{ se } f \neq 0 \\ 0, \text{ se } f = 0 \end{cases}.$$

Então

$$\begin{aligned} fh &= f \cdot |f|^{p-1} \cdot \overline{sgn\ f} \\ &= f \cdot |f|^{p-1} \cdot \overline{\left(\frac{f}{|f|}\right)} \\ &= |f|^{p-1} \cdot \frac{|f|^2}{|f|} \\ &= |f|^p \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |h|^q &= |f|^{q(p-1)} \cdot \frac{|\overline{f}|^q}{|f|^q} \\ &= |f|^p . \end{aligned}$$

Logo $fh = |h|^q$ e $h \in L_q$. Além disso,

$$\begin{aligned} \|h\|_{L_q} &= \left(\int |h|^q\, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int fh d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int |f|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_{L_p}^{\frac{p}{q}} . \end{aligned}$$

Definindo $g = \frac{h}{\|h\|_{L_q}}$, temos claramente $\|g\|_{L_q} = 1$. Assim,

$$\begin{aligned} \int fg d\mu &= \int |fg|\, d\mu = \int \frac{|h|^q}{\|h\|_{L_q}} d\mu \\ &= \int \frac{|f|^p}{\|f\|_{L_p}^{\frac{p}{q}}} d\mu = \frac{\|f\|_{L_p}^p}{\|f\|_{L_p}^{\frac{p}{q}}} \\ &= \|f\|_{L_p}^{\frac{p(q-1)}{q}} = \|f\|_{L_p} . \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|f\|_{L_p} = \sup\left\{\int |fg|\, d\mu : \|g\|_{L_q} \leq 1\right\} = \sup\left\{\left|\int fg d\mu\right| : \|g\|_{L_q} \leq 1\right\},$$

e o supremo é atingido. $\square$

Lema 3.2 (Lema de Minkowski). *Sejam* $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ *e* $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ *espaços de medida sigma finita. Se* f *é uma função mensurável não-negativa sobre* $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1) \times (X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ *e* $1 < p \leq q < \infty$, *então*

$$\left(\int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x,y)^p \, d\mu_2(y)\right)^{\frac{q}{p}} d\mu_1(x)\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq \left(\int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x,y)^q \, d\mu_1(x)\right)^{\frac{p}{q}} d\mu_2(y)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração. Seja $r = \frac{q}{p}$ e r' o expoente conjugado de r. Então,

$$\left(\int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x,y)^p \, d\mu_2(y)\right)^{\frac{q}{p}} d\mu_1(x)\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$= \left(\int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x,y)^p \, d\mu_2(y)\right)^{r} d\mu_1(x)\right)^{\frac{1}{rp}}$$
$$= \left[\left(\int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x,y)^p \, d\mu_2(y)\right)^{r} d\mu_1(x)\right)^{\frac{1}{r}}\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Considere $F(x) = \int_{X_2} f(x,y)^p \, d\mu_2(y)$. É fácil ver que $F \in L_r(X_1)$. Pelo Lema 3.1, temos

$$\begin{aligned}\left(\int_{X_1} F(x)^r \, d\mu_1(x)\right)^{\frac{1}{r}} &= \|F\|_r \\ &= \int_{X_1} F(x) \cdot g(x) \, d\mu_1(x) \\ &= \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x,y)^p \, d\mu_2(y)\right) \cdot g(x) \, d\mu_1(x),\end{aligned} \tag{3.2}$$

para alguma g tal que, $\|g\|_{r'} = 1$. Substituindo o resultado obtido de (3.3) em (3.2) e usando o teorema de Fubini (motivo pelo qual os espaços devem ser de medida sigma finita), obtemos

$$\left(\int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x,y)^p \, d\mu_2(y)\right)^{\frac{q}{p}} d\mu_1(x)\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$= \left(\int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x,y)^p \, d\mu_2(y)\right) \cdot g(x) \, d\mu_1(x)\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \left(\int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x,y)^p \cdot g(x) \, d\mu_1(x)\right) d\mu_2(y)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Usando novamente o Lema 3.1, resulta que

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{X_1}\left(\int_{X_2} f(x,y)^p\, d\mu_2(y)\right)^{\frac{q}{p}} d\mu_1(x)\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\int_{X_2}\left(\int_{X_1} f(x,y)^{rp}\, d\mu_1(x)\right)^{\frac{1}{r}} d\mu_2(y)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_{X_2}\left(\int_{X_1} f(x,y)^{q}\, d\mu_1(x)\right)^{\frac{p}{q}} d\mu_2(y)\right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

finalizando assim a demonstração. □

3.1 A desigualdade generalizada de Khinchin

Nesta seção, apresentaremos uma generalização da desigualdade de Khinchin. Os lemas apresentados anteriormente serão fundamentais durante as demonstrações desta seção.

Teorema 3.3 (Desigualdade Generalizada de Khinchin). *Sejam* $(a_{i_1\cdots i_m})_{i_1,\cdots,i_m=1}^{N}$ *uma matriz formada por elementos de* $\mathbb{K}$ *e* $0<p<\infty$*. Então,*

$$\begin{aligned}
(A_p)^m\left(\sum_{i_1,\cdots,i_m=1}^{N}|a_{i_1\cdots i_m}|^2\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\int_{[0,1]^m}\left|\sum_{i_1,\cdots,i_m=1}^{N} r_{i_1}(t_1)\cdots r_{i_m}(t_m)\, a_{i_1\cdots i_m}\right|^p dt_1\dots dt_m\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq (B_p)^m\left(\sum_{i_1,\cdots,i_m=1}^{N}|a_{i_1\cdots i_m}|^2\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Demonstração. Vamos fazer a demonstração por indução sobre m.Comecemos pela primeira desigualdade na expressão acima. Para $m=1$, recaímos na desigualdade de Khinchin. Suponha que a desigualdade é verdadeira para $m-1$. Então,

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i_1,\cdots,i_m=1}^{N}|a_{i_1\cdots i_m}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{i_1=1}^{N}\left(\sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{N}|a_{i_1\cdots i_m}|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{i_1=1}^{N}\left(\left(\sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{N}|a_{i_1\cdots i_m}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{2}\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\leq \left(\sum_{i_1=1}^{N} \left((A_p)^{-(m-1)} \left(\int_{[0,1]^{m-1}} \left| \sum_{i_2,\ldots i_m=1}^{N} r_{i_2}(t_2) \cdots r_{i_m}(t_m) \right. \right. \right. \right.$$
$$\left. \left. \left. \left. \cdot a_{i_1 \cdots i_m} \right|^p dt_2 \cdots dt_m \right)^{\frac{1}{p}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(\sum_{i_1=1}^{N} (A_p)^{-2(m-1)} \left(\left(\int_{[0,1]^{m-1}} \left| \sum_{i_2,\ldots i_m=1}^{N} r_{i_2}(t_2) \cdots r_{i_m}(t_m) \right. \right. \right. \right.$$
$$\left. \left. \left. \left. \cdot a_{i_1 \cdots i_m} \right|^p dt_2 \cdots dt_m \right)^{\frac{1}{p}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= (A_p)^{-(m-1)} \left(\sum_{i_1=1}^{N} \left(\left(\int_{[0,1]^{m-1}} \left| \sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{N} r_{i_2}(t_2) \cdots r_{i_m}(t_m) \right. \right. \right. \right.$$
$$\left. \left. \left. \left. \cdot a_{i_1 \cdots i_m} \right|^p dt_2 \cdots dt_m \right)^{\frac{1}{p}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= (A_p)^{-(m-1)} \left(\sum_{i_1=1}^{N} \left(\int_{[0,1]^{m-1}} \left| \sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{N} r_{i_2}(t_2) \cdot \cdots \cdot r_{i_m}(t_m)\, a_{i_1 \cdots i_m} \right|^p dt_2 \ldots dt_m \right)^{\frac{2}{p}} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.3}$$

Se $0 < p \leq 2$, temos $\frac{2}{p} \geq 1$. Pelo Lema de Minkowski, obtemos

$$\left(\sum_{i_1=1}^{N} \left(\int_{[0,1]^{m-1}} \left| \sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{N} r_{i_2}(t_2) \cdot \cdots \cdot r_{i_m}(t_m)\, a_{i_1 \cdots i_m} \right|^p dt_2 \ldots dt_m \right)^{\frac{2}{p}} \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \left(\int_{[0,1]^{m-1}} \left(\sum_{i_1=1}^{N} \left| \sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{N} r_{i_2}(t_2) \cdot \cdots \cdot r_{i_m}(t_m)\, a_{i_1 \cdots i_m} \right|^2 \right)^{\frac{p}{2}} dt_2 \ldots dt_m \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{3.4}$$

e assim, comparando (3.3) com (3.4), temos

$$\left(\sum_{i_1,\cdots,i_m=1}^{N} |a_{i_1 \cdots i_m}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq (A_p)^{-(m-1)} \left(\sum_{i_1=1}^{N} \left(\int_{[0,1]^{m-1}} \left| \sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{N} r_{i_2}(t_2) \cdots r_{i_m}(t_m) \right. \right. \right.$$
$$\left. \left. \left. \cdot a_{i_1 \cdots i_m} \right|^p dt_2 \cdots dt_m \right)^{\frac{2}{p}} \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq (A_p)^{-(m-1)} \left(\int_{[0,1]^{m-1}} \left(\sum_{i_1=1}^{N} \left| \sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{N} r_{i_2}(t_2) \cdots r_{i_m}(t_m) \right. \right. \right.$$
$$\left. \left. \left. \cdot a_{i_1 \cdots i_m} \right|^2 dt_2 \cdots dt_m \right)^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= (A_p)^{-(m-1)} \left(\int_{[0,1]^{m-1}} \left(\left(\sum_{i_1=1}^{N} \left| \sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{N} r_{i_2}(t_2) \cdots r_{i_m}(t_m) \right. \right. \right. \right.$$
$$\left. \left. \left. \left. \cdot a_{i_1\cdots i_m} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^p dt_2 \cdots dt_m \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Agora, usando a desigualdade de Khinchin, vale

$$\left(\sum_{i_1=1}^{N} \left| \sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{N} r_{i_2}(t_2) \cdot \cdots \cdot r_{i_m}(t_m) a_{i_1\cdots i_m} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq (A_p)^{-1} \left(\int_{[0,1]} \left| \sum_{i_1=1}^{N} r_{i_1}(t_1) \sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{N} r_{i_2}(t_2) \cdot \cdots \cdot r_{i_m}(t_m) a_{i_1\cdots i_m} \right|^p dt_1 \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pelo teorema de Fubini

$$\left(\sum_{i_1,\cdots,i_m=1}^{N} |a_{i_1\cdots i_m}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq (A_p)^{-(m-1)} \left(\int_{[0,1]^{m-1}} \left(\left(\sum_{i_1=1}^{N} \left| \sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{N} r_{i_2}(t_2) \cdots r_{i_m}(t_m) \right. \right. \right. \right.$$
$$\left. \left. \left. \left. \cdot a_{i_1\cdots i_m} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^p dt_2 \cdots dt_m \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq (A_p)^{-m} \left(\int_{[0,1]^{m-1}} \left(\int_{[0,1]} \left| \sum_{i_1=1}^{N} r_{i_1}(t_1) \sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{N} r_{i_2}(t_2) \cdots r_{i_m}(t_m) \right. \right. \right.$$
$$\left. \left. \left. \cdot a_{i_1\cdots i_m} \right|^p dt_1 \right) dt_2 \cdots dt_m \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= (A_p)^{-m} \left(\int_{[0,1]^m} \left| \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_m}(t_m) \right. \right.$$
$$\left. \left. \cdot a_{i_1\cdots i_m} \right|^p dt_1 \cdots dt_m \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Se $p > 2$, segue da monotonicidade de $L_p([0,1]^m)$ que $\|\cdot\|_{L_2} \leq \|\cdot\|_{L_p}$ e assim, $A_p = 1$, para qualquer $p \geq 2$.

Finalmente, vamos mostrar que a segunda desigualdade do nosso teorema é verdadeira. Assim como na primeira parte de nossa demonstração, quando $m = 1$, obtemos o caso linear da desigualdade de Khinchin. Agora, suponha que a desigualdade vale para $m-1$. No caso em que $p \geq 2$, temos $\frac{p}{2} \geq 1$. Daí, aplicando o teorema de Fubini, usando a desigualdade de Khinchin e o lema de Minkowski, temos

$$\left(\int_{[0,1]^m} \left| \sum_{i_1,\cdots,i_m=1}^{N} r_{i_1}(t_1) \cdot \cdots \cdot r_{i_m}(t_m) a_{i_1\cdots i_m} \right|^p dt_1 \ldots dt_m \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]^{m-1}} \left| \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_m}(t_m) \right. \right. \right.$$

$$\left. \cdot a_{i_1 \cdots i_m} \right|^p dt_2 \cdots dt_m) \, dt_1)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]^{m-1}} \left| \sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{N} r_{i_2}(t_2) \cdots r_{i_m}(t_m) \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. \cdot \sum_{i_1=1}^{N} r_{i_1}(t_1)\, a_{i_1 \cdots i_m} \right|^p dt_2 \cdots dt_m \right) dt_1 \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_{[0,1]} \left(\left(\int_{[0,1]^{m-1}} \left| \sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{N} r_{i_2}(t_2) \cdots r_{i_m}(t_m) \right. \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. \left. \cdot \sum_{i_1=1}^{N} r_{i_1}(t_1)\, a_{i_1 \cdots i_m} \right|^p dt_2 \cdots dt_m \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p dt_1 \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\int_{[0,1]} \left((B_p)^{m-1} \left(\sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{N} \left| \sum_{i_1=1}^{N} r_{i_1}(t_1)\, a_{i_1 \cdots i_m} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^p dt_1 \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_{[0,1]} (B_p)^{(m-1)p} \left(\sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{N} \left| \sum_{i_1=1}^{N} r_{i_1}(t_1)\, a_{i_1 \cdots i_m} \right|^2 \right)^{\frac{p}{2}} dt_1 \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= (B_p)^{m-1} \left(\int_{[0,1]} \left(\sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{N} \left| \sum_{i_1=1}^{N} r_{i_1}(t_1)\, a_{i_1 \cdots i_m} \right|^2 \right)^{\frac{p}{2}} dt_1 \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq (B_p)^{m-1} \left(\sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{N} \left(\int_{[0,1]} \left| \sum_{i_1=1}^{N} r_{i_1}(t_1)\, a_{i_1 \cdots i_m} \right|^p dt_1 \right)^{\frac{2}{p}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (B_p)^{m-1} \left(\sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{N} \left(\left(\int_{[0,1]} \left| \sum_{i_1=1}^{N} r_{i_1}(t_1)\, a_{i_1 \cdots i_m} \right|^p dt_1 \right)^{\frac{1}{p}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq (B_p)^{m-1} \left(\sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{N} \left((B_p)^1 \left(\sum_{i_1=1}^{N} |a_{i_1 \cdots i_m}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (B_p)^{m-1} \left(\sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{N} (B_p)^2 \left(\sum_{i_1=1}^{N} |a_{i_1 \cdots i_m}|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (B_p)^m \left(\sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{N} \sum_{i_1=1}^{N} |a_{i_1 \cdots i_m}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = (B_p)^m \left(\sum_{i_1,\cdots,i_m=1}^{N} |a_{i_1 \cdots i_m}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Para o caso $p < 2$, segue claramente da monotonicidade de $L_p([0,1]^m)$ que $\|\cdot\|_{L_p} \leq \|\cdot\|_{L_2}$ e, portanto, $B_p = 1$, qualquer que seja $p \leq 2$. $\square$

3.2 A desigualdade generalizada de Kahane

Assim como na seção anterior, apresentaremos uma generalização de uma das desigualdades vistas no Capítulo 1. Aqui, será demonstrada a desigualdade generalizada de Kahane. Entretanto, precisaremos expor um conceito auxiliar, que é o de cotipo. Este conceito foi desenvolvido a partir dos trabalhos de J. Hoffmann-Jörgensen, Gilles Pisier, Stanislaw Kwapien e Bernard Maurey durante a década de 70. Em seguida será apresentada a desigualdade múltiplo cotipo, que também será útil na demonstração da desigualdade generalizada de Kahane.

Definição 3.2.1. *Seja E um espaço de Banach e $2 \leq q < \infty$. Dizemos que E tem cotipo q se existir uma constante $C > 0$, tal que*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^{n} r_k(t)\, x_k\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

para quaisquer $x_1, \ldots, x_n \in E$. A menor destas constantes C, será denotada por $C_q(E)$.

Teorema 3.4 (Desigualdade Múltiplo Cotipo). *Seja F um espaço de cotipo q e $I = [0,1]$. Se $1 \leq r \leq q$ e $(y_{i_1 \ldots i_m})_{i_1, \ldots, i_m = 1}^{N}$ é uma matriz em F, então*

$$\left(\sum_{i_1, \ldots, i_m = 1}^{N} \|y_{i_1 \ldots i_m}\|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq C_q(F)^m K_{r,2}^m \left(\int_{I^m} \left|\sum_{i_1, \ldots, i_m = 1}^{N} r_{i_1}(t_1) \cdot \cdots \cdot r_{i_m}(t_m)\, y_{i_1 \ldots i_m}\right|^r dt_1 \cdots dt_m\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Demonstração. A prova será feita por indução sobre m. De fato, para $m = 1$, usando o fato de que F tem cotipo 2, temos

$$\left(\sum_{i=1}^{N} \|y_i\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C_q(F) \left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^{N} r_i(t)\, y_i\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.5}$$

Pela desigualdade de Kahane,

$$\left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^{N} r_i(t)\, y_i\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq K_{r,2} \left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^{N} r_i(t)\, y_i\right|^r dt\right)^{\frac{1}{r}}. \tag{3.6}$$

Comparando (3.5) e (3.6), concluímos que

$$\left(\sum_{i=1}^{N}\|y_i\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C_q(F)\,K_{r,2}\left(\int_0^1\left|\sum_{i=1}^{N}r_i(t)\,y_i\right|^r dt\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Suponha que o caso $m-1$ seja verdadeiro. Então,

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N}\|y_{i_1\ldots i_m}\|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&=\left(\sum_{i_1=1}^{N}\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{N}\|y_{i_1\ldots i_m}\|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&=\left(\sum_{i_1=1}^{N}\left(\left(\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{N}\|y_{i_1\ldots i_m}\|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\leq\left(\sum_{i_1=1}^{N}C_q(F)^{q(m-1)}K_{r,2}^{q(m-1)}\left(\int_{I^{m-1}}\left|\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{N}r_{i_2}(t_2)\cdot\cdots\cdot r_{i_m}(t_m)\,y_{i_1\ldots i_m}\right|^r dt_2\cdots dt_m\right)^{\frac{q}{r}}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&=C_q(F)^{m-1}K_{r,2}^{m-1}\left(\sum_{i_1=1}^{N}\left(\int_{I^{m-1}}\left|\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{N}r_{i_2}(t_2)\cdot\cdots\cdot r_{i_m}(t_m)\,y_{i_1\ldots i_m}\right|^r dt_2\cdots dt_m\right)^{\frac{q}{r}}\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Como $r\leq q$, temos $\frac{q}{r}\geq 1$ e assim, pelo lema de Minkowski

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i_1=1}^{N}\left(\int_{I^{m-1}}\left|\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{N}r_{i_2}(t_2)\cdot\cdots\cdot r_{i_m}(t_m)\,y_{i_1\ldots i_m}\right|^r dt_2\cdots dt_m\right)^{\frac{q}{r}}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&=\left[\left(\sum_{i_1=1}^{N}\left(\int_{I^{m-1}}\left|\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{N}r_{i_2}(t_2)\cdot\cdots\cdot r_{i_m}(t_m)\,y_{i_1\ldots i_m}\right|^r dt_2\cdots dt_m\right)^{\frac{q}{r}}\right)^{\frac{1}{q}\cdot r}\right]^{\frac{1}{r}}\\
&\leq\left(\int_{I^{m-1}}\left(\sum_{i_1=1}^{N}\left|\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{N}r_{i_2}(t_2)\cdot\cdots\cdot r_{i_m}(t_m)\,y_{i_1\ldots i_m}\right|^q\right)^{\frac{r}{q}} dt_2\cdots dt_m\right)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned}$$

e daí

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N}\|y_{i_1\ldots i_m}\|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\leq C_q(F)^{m-1}K_{r,2}^{m-1}\left(\int_{I^{m-1}}\left(\sum_{i_1=1}^{N}\left|\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{N}r_{i_2}(t_2)\cdots r_{i_m}(t_m)\right.\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.\left.\cdot y_{i_1\cdots i_m}\right|^q\right)^{\frac{r}{q}} dt_2\cdots dt_m\right)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned}\tag{3.7}$$

Agora, como F tem cotipo 2, então

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i_1=1}^{N}\left|\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{N} r_{i_2}(t_2)\cdot\cdots\cdot r_{i_m}(t_m)\, y_{i_1\ldots i_m}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\leq C_q(F)\left(\int_0^1\left|\sum_{i_1=1}^{N} r_{i_1}(t_1)\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{N} r_{i_2}(t_2)\cdots r_{i_m}(t_m)\right.\right.\\
&\qquad\qquad\left.\left.\cdot y_{i_1\cdots i_m}\right|^2 dt_1\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}\tag{3.8}$$

Pela desigualdade de Kahane,

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^1\left|\sum_{i_1=1}^{N} r_{i_1}(t_1)\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{N} r_{i_2}(t_2)\cdot\cdots\cdot r_{i_m}(t_m)\, y_{i_1\ldots i_m}\right|^2 dt_1\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq K_{r,2}\left(\int_0^1\left|\sum_{i_1=1}^{N} r_{i_1}(t_1)\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{N} r_{i_2}(t_2)\cdot\cdots\cdot r_{i_m}(t_m)\, y_{i_1\ldots i_m}\right|^r dt_1\right)^{\frac{1}{r}}\\
&= K_{r,2}\left(\int_0^1\left|\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} r_{i_1}(t_1)\, r_{i_2}(t_2)\cdot\cdots\cdot r_{i_m}(t_m)\, y_{i_1\ldots i_m}\right|^r dt_1\right)^{\frac{1}{r}}.
\end{aligned}\tag{3.9}$$

Juntando (3.7), (3.8) e (3.9) e denotando $dT = dt_2\cdots dt_m$, temos

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N}\|y_{i_1\ldots i_m}\|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\leq C_q(F)^{m-1}K_{r,2}^{m-1}\left(\int_{I^{m-1}}\left(\sum_{i_1=1}^{N}\left|\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{N} r_{i_2}(t_2)\cdot\cdots\cdot r_{i_m}(t_m)\, y_{i_1\ldots i_m}\right|^q\right)^{\frac{r}{q}} dT\right)^{\frac{1}{r}}\\
&\leq C_q(F)^{m-1}K_{r,2}^{m-1}\left(\int_{I^{m-1}} C_q(F)^r K_{r,2}^r\left(\int_0^1\left|\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} r_{i_1}(t_1)\cdots r_{i_m}(t_m)\right.\right.\right.\\
&\qquad\qquad\left.\left.\left.\cdot y_{i_1\cdots i_m}\right|^r dt_1\right) dT\right)^{\frac{1}{r}}\\
&= C_q(F)^m K_{r,2}^m\left(\int_{I^{m-1}}\left(\int_0^1\left|\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} r_{i_1}(t_1)\, r_{i_2}(t_2)\cdot\cdots\cdot r_{i_m}(t_m)\, y_{i_1\ldots i_m}\right|^r dt_1\right) dT\right)^{\frac{1}{r}}.
\end{aligned}$$

Finalmente, usando o teorema de Fubini, obtemos

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N}\|y_{i_1\ldots i_m}\|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\leq C_q(F)^m K_{r,2}^m\left(\int_{I^m}\left|\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} r_{i_1}(t_1)\, r_{i_2}(t_2)\cdot\cdots\cdot r_{i_m}(t_m)\, y_{i_1\ldots i_m}\right|^r dt_1 dt_2\cdots dt_m\right)^{\frac{1}{r}},
\end{aligned}$$

como queríamos. $\square$

Teorema 3.5 (Desigualdade Generalizada de Kahane)**.** *Sejam E um espaço de Banach e $0 < p, q < \infty$. Então, para qualquer matriz $(y_{i_1 \dots i_m})_{i_1,\dots,i_m=1}^N$ em E, temos*

$$\left(\int_{I^m} \left| \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^N r_{i_1}(t_1) \cdot \dots \cdot r_{i_m}(t_m)\, y_{i_1 \dots i_m} \right|^q dt_1 \dots dt_m \right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq (K_{p,q})^m \left(\int_{I^m} \left| \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^N r_{i_1}(t_1) \cdot \dots \cdot r_{i_m}(t_m)\, y_{i_1 \dots i_m} \right|^p dt_1 \dots dt_m \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração. Usaremos o processo de indução sobre m. Para o caso $m = 1$, obtemos claramente a primeira versão da Desigualdade de Kahane. Agora, considerando $p \leq q$, suponha que o caso $m - 1$ é verdadeiro. Então, usando a notação $dT = dt_1 \dots dt_{m-1}$, temos

$$\left(\int_{I^m} \left| \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^N r_{i_1}(t_1) \cdot \dots \cdot r_{i_m}(t_m)\, y_{i_1 \dots i_m} \right|^q dt_1 \dots dt_m \right)^{\frac{1}{q}}$$
$$= \left(\int_0^1 \left(\int_{I^{m-1}} \left| \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^N r_{i_1}(t_1) \cdot \dots \cdot r_{i_m}(t_m)\, y_{i_1 \dots i_m} \right|^q dT \right) dt_m \right)^{\frac{1}{q}}$$
$$= \left(\int_0^1 \left(\int_{I^{m-1}} \left| \sum_{i_1,\dots,i_{m-1}=1}^N r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_{m-1}}(t_{m-1}) \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. \cdot y_{i_1 \cdots i_m} \right|^q dT \right) dt_m \right)^{\frac{1}{q}}$$
$$= \left(\int_0^1 \left(\int_{I^{m-1}} \left| \sum_{i_1,\dots,i_{m-1}=1}^N r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_{m-1}}(t_{m-1}) \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. \cdot y_{i_1 \cdots i_m} \right|^q dT \right)^{\frac{1}{q} \cdot q} dt_m \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Pela hipótese de indução, segue que

$$\left(\int_{I^{m-1}} \left| \sum_{i_1,\dots,i_{m-1}=1}^N r_{i_1}(t_1) \cdot \dots \cdot r_{i_{m-1}}(t_{m-1}) \sum_{i_m=1}^N r_{i_m}(t_m)\, y_{i_1 \dots i_m} \right|^q dT \right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq (K_{p,q})^{m-1} \left(\int_{I^{m-1}} \left| \sum_{i_1,\dots,i_{m-1}=1}^N r_{i_1}(t_1) \cdot \dots \cdot r_{i_{m-1}}(t_{m-1}) \sum_{i_m=1}^N r_{i_m}(t_m)\, y_{i_1 \dots i_m} \right|^p dT \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Assim,

$$\left(\int_{I^m} \left| \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^N r_{i_1}(t_1) \cdot \dots \cdot r_{i_m}(t_m)\, y_{i_1 \dots i_m} \right|^q dt_1 \dots dt_m \right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq (K_{p,q})^{m-1} \left(\int_0^1 \left(\int_{I^{m-1}} \left| \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} r_{i_1}(t_1) \cdot \cdots \cdot r_{i_m}(t_m) y_{i_1 \ldots i_m} \right|^p dT \right)^{\frac{q}{p}} dt_m \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Sabendo que $p \leq q$, vale que $\frac{q}{p} \geq 1$ e então, usando o Lema de Minkowski, obtemos

$$\left(\int_0^1 \left(\int_{I^{m-1}} \left| \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} r_{i_1}(t_1) \cdot \cdots \cdot r_{i_m}(t_m) y_{i_1 \ldots i_m} \right|^p dT \right)^{\frac{q}{p}} dt_m \right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq \left(\int_{I^{m-1}} \left(\int_0^1 \left| \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} r_{i_1}(t_1) \cdot \cdots \cdot r_{i_m}(t_m) y_{i_1 \ldots i_m} \right|^q dt_m \right)^{\frac{p}{q}} dT \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Logo

$$\left(\int_{I^m} \left| \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} r_{i_1}(t_1) \cdot \cdots \cdot r_{i_m}(t_m) y_{i_1 \ldots i_m} \right|^q dt_1 \ldots dt_m \right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq (K_{p,q})^{m-1} \left(\int_{I^{m-1}} \left(\int_0^1 \left| \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} r_{i_1}(t_1) \cdot \cdots \cdot r_{i_m}(t_m) y_{i_1 \ldots i_m} \right|^q dt_m \right)^{\frac{p}{q}} dT \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.10}$$

Além disso, sabemos que

$$\left(\int_0^1 \left| \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} r_{i_1}(t_1) \cdot \cdots \cdot r_{i_m}(t_m) y_{i_1 \ldots i_m} \right|^q dt_m \right)^{\frac{1}{q}}$$
$$= \left(\int_0^1 \left| \sum_{i_m=1}^{N} r_{i_m}(t_m) \sum_{i_1,\ldots,i_{m-1}=1}^{N} r_{i_1}(t_1) \cdot \cdots \cdot r_{i_{m-1}}(t_{m-1}) y_{i_1 \ldots i_m} \right|^q dt_m \right)^{\frac{1}{q}}$$

. Logo, usando a desigualdade de Kahane, temos

$$\left(\int_0^1 \left| \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} r_{i_1}(t_1) \cdot \cdots \cdot r_{i_m}(t_m) y_{i_1 \ldots i_m} \right|^q dt_m \right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq K_{p,q} \left(\int_0^1 \left| \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} r_{i_1}(t_1) \cdot \cdots \cdot r_{i_m}(t_m) y_{i_1 \ldots i_m} \right|^p dt_m \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.11}$$

De (3.10), (3.11) e do Teorema de Fubini, segue que

$$\left(\int_{I^m} \left| \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} r_{i_1}(t_1) \cdot \cdots \cdot r_{i_m}(t_m) y_{i_1 \ldots i_m} \right|^q dt_1 \ldots dt_m \right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq (K_{p,q})^{m-1} \left(\int_{I^{m-1}} (K_{p,q})^p \left(\int_0^1 \left| \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} r_{i_1}(t_1) \cdot \cdots \cdot r_{i_m}(t_m) y_{i_1 \ldots i_m} \right|^p dt_m \right) dT \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= (K_{p,q})^m \left(\int_{I^m} \left| \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} r_{i_1}(t_1) \cdot \cdots \cdot r_{i_m}(t_m)\, y_{i_1 \ldots i_m} \right|^p dt_1 \ldots dt_m \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Finalmente, quando $q < p$ o resultado segue diretamente da monotonicidade de $L_p(I^m)$ e $K_{p,q} = 1$, o que finaliza nossa demonstração. $\square$

Capítulo 4

Uma caracterização para espaços de tipo 2

Nos capítulos anteriores abordamos muitas propriedades e desigualdades envolvendo operadores multilineares absolutamente somantes. Neste capítulo, acrescentaremos alguns outros conceitos que também nos auxiliarão no desenvolvimento do resultado principal do mesmo, que é uma caracterização dos espaços de tipo 2, devida a D. Popa. Abordaremos inicialmente o conceito de operador quase somante, que também será útil na demonstração do resultado principal. Mais precisamente, mostraremos que se $n \geq 2$, um espaço de Banach F tem tipo 2 se, e somente se, todo operador $u \in \Pi_2(E_1, \ldots, E_n; F)$ é quase somante. Veremos que essa caracterização é exclusiva do ambiente multilinear, curiosamente não sendo válida para operadores lineares.

Para um bom entendimento das propriedades e resultados almejados, introduziremos algumas definições que servirão de base para as seções deste capítulo. A primeira delas é de operadores tipo q e espaços com tipo q.

Definição 4.0.1. *Sejam E, F espaços de Banach e $1 \leq q \leq 2$. Dizemos que um operador linear $u : E \to F$ é tipo q se existe $C > 0$ tal que,*

$$\left(\int_0^1 \left| \sum_{j=1}^{m} r_j(t)\, u(x_j) \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \left(\sum_{j=1}^{m} |x_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \tag{4.1}$$

para quaisquer $x_1, \ldots, x_m \in E$ e $m \in \mathbb{N}$.

A menor das constantes para as quais a desigualdade (4.1) continua verdadeira será denotada por $T_q(u)$. Além disso, dizemos que um espaço de Banach E tem tipo q quando o operador identidade $I_E : E \to E$ for tipo q e definimos $T_q(E) := T_q(I_E)$. Para o que veremos neste capítulo, focaremos no caso $q = 2$.

4.1 Operadores quase somantes

Definição 4.1.1. *Sejam E e F espaços de Banach. Um operador $u \in \mathcal{L}(E;F)$ é chamado de quase somante se, e somente se, existe uma constante $C > 0$ tal que,*

$$\left(\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^n r_k(t)\, u(x_k)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq C \cdot \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{k=1}^n |\varphi(x_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.2}$$

para qualquer $(x_k)_{k=1}^n$ sequência finita em E.

O espaço vetorial cujos elementos são os operadores quase somantes de E em F, será denotado por $\Pi_{as}(E;F)$. Além disso, definimos uma norma em $\Pi_{as}(E;F)$, denotada por $\pi_{as}(u)$, que é obtida pelo ínfimo dos C tais que a desigualdade (4.2) permanece válida.

A seguir, serão apresentados alguns resultados conhecidos sobre estes operadores.

Proposição 4.1. *Seja $1 \leq p < \infty$, e sejam E e F espaços de Banach. Qualquer operador p-somante $u : E \to F$ é quase somante e $\pi_{as}(u) \leq B_p \cdot \pi_p(u)$, onde B_p é a constante da desigualdade de Khinchin.*

Demonstração. De fato, se $p < 2$, temos pelo teorema da inclusão que $\Pi_p(E;F) \subset \Pi_2(E;F)$ e $\pi_2(u) \leq \pi_p(u)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^n r_k(t)\, u(x_k)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\sum_{k=1}^n |u(x_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \pi_2(u) \cdot \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{k=1}^n |\varphi(x_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \pi_p(u) \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{k=1}^n |\varphi(x_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

e daí segue que $u \in \Pi_{as}(E;F)$ e $\pi_{as}(u) \leq \pi_p(u) = B_p \cdot \pi_p(u)$, pois neste caso, $B_p = 1$.

Agora, vejamos o caso em que $p \geq 2$. De fato, se $u \in \Pi_p(E;F)$ então, pelo Teorema 1.11, existe uma medida de probabilidade μ, nos borelianos de $B_{E'}$, com a topologia fraca estrela, tal que

$$\|u(x)\| \leq \pi_p(u) \cdot \left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x)|^p \, d\mu(\varphi)\right)^{\frac{1}{p}},$$

para todo $x \in E$. Sejam $x_1, \ldots, x_m \in E$. Então, pela monotonicidade da norma em

$L_p[0,1]$, vale

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^m r_k(t)\, u(x_k)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^m r_k(t)\, u(x_k)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^m u(r_k(t)\, x_k)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_0^1 \left|u\left(\sum_{k=1}^m r_k(t)\, x_k\right)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Pelo Teorema 1.11 temos

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^1 \left|u\left(\sum_{k=1}^m r_k(t)\, x_k\right)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_0^1 \pi_p(u)^p \cdot \int_{B_{E'}} \left|\varphi\left(\sum_{k=1}^m r_k(t)\, x_k\right)\right|^p d\mu(\varphi)\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \pi_p(u) \cdot \left(\int_0^1 \int_{B_{E'}} \left|\varphi\left(\sum_{k=1}^m r_k(t)\, x_k\right)\right|^p d\mu(\varphi)\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \pi_p(u) \cdot \left(\int_0^1 \int_{B_{E'}} \left|\sum_{k=1}^m r_k(t)\, \varphi(x_k)\right|^p d\mu(\varphi)\, dt\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Usando o Teorema de Fubini, obtemos

$$\begin{aligned}
&\pi_p(u) \cdot \left(\int_0^1 \int_{B_{E'}} \left|\sum_{k=1}^m r_k(t)\, \varphi(x_k)\right|^p d\mu(\varphi)\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \pi_p(u) \cdot \left(\int_{B_{E'}} \int_0^1 \left|\sum_{k=1}^m r_k(t)\, \varphi(x_k)\right|^p dt\, d\mu(\varphi)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \pi_p(u) \cdot \left(\int_{B_{E'}} \left(\left(\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^m r_k(t)\, \varphi(x_k)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p d\mu(\varphi)\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Aplicando agora a desigualdade de Khinchin, temos

$$\pi_p(u) \cdot \left(\int_{B_{E'}} \left(\left(\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^m r_k(t)\, \varphi(x_k)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p d\mu(\varphi)\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \pi_p(u) \cdot \left(\int_{B_{E'}} \left(B_p \left(\sum_{k=1}^{m} |\varphi(x_k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^p d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \pi_p(u) \cdot B_p \left(\int_{B_{E'}} \left(\sum_{k=1}^{m} |\varphi(x_k)|^2 \right)^{\frac{p}{2}} d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \pi_p(u) \cdot B_p \left(\int_{B_{E'}} \left(\left(\sum_{k=1}^{m} |\varphi(x_k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^p d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \pi_p(u) \cdot B_p \left(\left(\sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{k=1}^{m} |\varphi(x_k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \pi_p(u) \cdot B_p \cdot \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{k=1}^{m} |\varphi(x_k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

finalizando a demonstração. □

Proposição 4.2. *Sejam E e F espaços de Banach, e suponha que F tem cotipo q, com $2 \leq q < \infty$. Então, qualquer operador quase somante $u : E \to F$ é $(q,2)$-somante e $\pi_{q,2}(u) \leq C_q(F) \cdot \pi_{as}(u)$.*

Demonstração. Considere $x_1, \ldots, x_n \in E$. Usando o fato de que F tem cotipo q e, depois, o fato que $u \in \Pi_{as}(E;F)$, temos

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{n} |u(x_k)|^q \right)^{\frac{1}{q}} &\leq C_q(F) \cdot \left(\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{n} r_k(t)\, u(x_k) \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_q(F) \cdot \pi_{as}(u) \cdot \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Portanto, $u \in \Pi_{q,2}(E;F)$. Como $\pi_{q,2}(u)$ é o ínfimo das constantes que tornam a desigualdade anterior verdadeira, segue que $\pi_{q,2}(u) \leq C_q(F) \cdot \pi_{as}(u)$. □

4.2 Caracterização de espaços com tipo 2

Na seção anterior, vimos que, para $p \geq 1$, todo operador linear p-somante é quase somante. Nesta seção, será apresentado o conceito de operador quase somante no ambiente multilinear. A ideia de estudar aplicações quase somantes para o caso não-linear aparece pela primeira vez em [**?**] e [4]. Além disso, mostraremos que o fato de um espaço ter tipo 2 é uma condição necessária e suficiente para que todo operador

n-linear $u \in \Pi_2(E_1, \ldots, E_n; F)$, onde n é um número natural maior do que ou igual a 2, seja quase somante. Esta situação diferencia bem o comportamento dos operadores quase somantes nos ambientes linear e multilinear.

Definição 4.2.1. *Um operador n-linear $u : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ é quase somante se existe $C > 0$ tal que*

$$\left(\int_0^1 \left|\sum_{j=1}^m r_j(t)\, u\left(x_j^1, \ldots, x_j^n\right)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq C \cdot \left\|\left(x_j^1\right)_{j=1}^m\right\|_{\omega,2} \cdot \cdots \cdot \left\|\left(x_j^n\right)_{j=1}^m\right\|_{\omega,2},$$

para qualquer $\left(x_j^i\right)_{j=1}^m$ sequência finita em E_i, onde $i = 1, \ldots, n$, e para todo m natural.

Proposição 4.3. (i) *Sejam $n \geq 2$ um número natural, F e G espaços de Banach, e $v : F \to G$ um operador linear limitado. Se $E_1, \ldots, E_n$ são espaços de Banach, $u : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ é 2-somante e v tem tipo 2, então a composição $v \circ u$ é quase somante e $\pi_{as}(v \circ u) \leq T_2(v)\, \pi_2(u)$.*

(ii) *Seja $n \geq 2$ um número natural. Se $E_1, \ldots, E_n$ são espaços de Banach e F tem tipo 2, então*

$$\Pi_2(E_1, \ldots, E_n; F) \subset \Pi_{as}(E_1, \ldots, E_n; F) \text{ e } \pi_{as}(\cdot) \leq T_2(F)\, \pi_2(\cdot).$$

Demonstração. (i) Sejam $(x_i^1)_{i=1}^m$, $(x_i^2)_{i=1}^m$, $\ldots$, $(x_i^n)_{i=1}^m$ sequências finitas, respectivamente, em E_1, E_2, $\ldots$, E_{n-1} e E_n. Usando o fato de que v tem tipo 2 e sabendo que u é 2-somante, temos

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^m r_i(t)\,(v \circ u)\left(x_i^1, \ldots, x_i^n\right)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^m r_i(t)\, v\left(u\left(x_i^1, \ldots, x_i^n\right)\right)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq T_2(v) \cdot \left(\sum_{i=1}^m \left|u\left(x_i^1, \ldots, x_i^n\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq T_2(v) \cdot \pi_2(u) \cdot \left\|\left(x_i^1\right)_{i=1}^m\right\|_{\omega,2} \cdot \cdots \cdot \|(x_i^n)_{i=1}^m\|_{\omega,2}. \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

Portanto, $v \circ u$ é quase somante. Como $\pi_{as}(v \circ u)$ é o ínfimo das constantes que tornam a desigualdade (4.3) verdadeira, segue claramente que $\pi_{as}(v \circ u) \leq T_2(v) \cdot \pi_2(u)$.

(ii) De fato, sabendo que F tem tipo 2, temos por definição que o operador identidade $I_F : F \to F$ é um operador tipo 2 e $T_2(F) := T_2(I_F)$. Daí, definindo $v := I_F$ em

(i), obtemos

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^m r_i\,(t)\,(v\circ u)\left(x_i^1,\ldots,x_i^n\right)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq T_2\,(v)\cdot\pi_2\,(u)\cdot\left\|\left(x_i^1\right)_{i=1}^m\right\|_{\omega,2}\cdot\cdots\cdot\left\|\left(x_i^n\right)_{i=1}^m\right\|_{\omega,2}\\
&= T_2\,(I_F)\cdot\pi_2\,(u)\cdot\left\|\left(x_i^1\right)_{i=1}^m\right\|_{\omega,2}\cdot\cdots\cdot\left\|\left(x_i^n\right)_{i=1}^m\right\|_{\omega,2}\\
&= T_2\,(F)\cdot\pi_2\,(u)\cdot\left\|\left(x_i^1\right)_{i=1}^m\right\|_{\omega,2}\cdot\cdots\cdot\left\|\left(x_i^n\right)_{i=1}^m\right\|_{\omega,2}
\end{aligned}$$

e, portanto, $\Pi_2\,(E_1,\ldots,E_n;F)\subset\Pi_{as}\,(E_1,\ldots,E_n;F)$. Pelo mesmo argumento de (i) segue que $\pi_{as}\,(\cdot)\leq T_2\,(F)\,\pi_2\,(\cdot)$. □

Proposição 4.4. *Seja $n\geq 2$ um número natural, F um espaço de Banach, $(y_j)_{j=1}^\infty$ uma sequência limitada formada por elementos de F e seja $s:\ell\times\cdots\times\ell_2\to F$ um operador definido por*

$$s\,(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{j=1}^\infty\langle x_1,e_j\rangle\cdot\ldots\cdot\langle x_n,e_j\rangle\cdot y_j.$$

Então s é 2-somante se, e somente se, $\sum\limits_{j=1}^\infty|y_j|^2<\infty$. Além disso, $\pi_2\,(s)=\left(\sum\limits_{j=1}^\infty|y_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Demonstração. Suponha que s é 2-somante. Note que $s\,(e_k,\ldots,e_k)=y_k$ e $\left\|(e_j)_{j=1}^\infty\right\|_{\omega,2}=1$. De fato,

$$s\,(e_k,\ldots,e_k)=\sum_{j=1}^\infty\langle e_k,e_j\rangle\cdot\ldots\cdot\langle e_k,e_j\rangle\cdot y_j,$$

Como $\langle e_k,e_j\rangle=\delta_{kj}$, segue que $s\,(e_k,\ldots,e_k)=y_k$. Agora, vamos mostrar que $\left\|(e_j)_{j=1}^\infty\right\|_{\omega,2}=1$. Com efeito,

$$\left\|(e_j)_{j=1}^\infty\right\|_{\omega,2}=\sup_{\varphi\in B_{(\ell_2)'}}\left(\sum_{j=1}^\infty|\varphi\,(e_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pela caracterização do dual de ℓ_2, sabemos que $(\ell_2)'$ é isometricamente isomorfo ao espaço ℓ_2. Além disso, cada $\varphi(e_j) = \varphi_j$, e a sequência $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{\ell_2}$. Logo

$$\begin{aligned}
\left\|(e_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\omega,2} &= \sup_{\varphi\in B_{(\ell_2)'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(e_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}\in B_{\ell_2}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}\in B_{\ell_2}} \left\|(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_2 \\
&= 1,
\end{aligned}$$

e, portanto, $\left\|(e_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\omega,2} = 1.$

Partindo do que já foi provado e usando a definição de operador 2-somante, temos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |s(e_k,\ldots,e_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \pi_2(s)\cdot\left(\|(e_k)_{k=1}^{\infty}\|_{\omega,2}\right)^n \\
&= \pi_2(s),
\end{aligned}$$

e, portanto, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 < \infty$.

Reciprocamente, supondo que $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |y_j|^2 < \infty$ e definindo $a = (|y_i|)_{i=1}^{\infty}$, temos $a \in \ell_2$. Defina $v : \ell_1 \to F$ por

$$v(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j\rangle\, sgn(y_j).$$

O operador v, claramente, está bem definido, é linear e contínuo. Além disso, $\|v\| \leq 1$.

Agora, seja $M_a^n : \ell_2 \times \cdots \times \ell_2 \to \ell_1$ um operador dado por

$$M_a^n(x_1,\ldots,x_n) = ax_1\cdots x_n, \text{ com } x_1\cdots x_n := \left(x_1^i\cdots x_n^i\right)_{i=1}^{\infty}.$$

Tomando x_1, x_2, …, $x_n \in \ell_2$, sabendo que $\underbrace{\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{n \text{ parcelas}} = \frac{n}{2} = \frac{1}{2/n}$ e usando a desigualdade de Hölder temos

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|x_1^j\cdots x_n^j\right|^{\frac{2}{n}}\right)^{\frac{1}{2/n}} \leq \left\|\left(x_1^j\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_2 \cdots \left\|\left(x_n^j\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_2. \tag{4.4}$$

Como $n \geq 2$ por hipótese, segue que $\ell_{\frac{2}{n}} \subset \ell_2$. Sabdendo que $a \in \ell_2$, concluímos que

$ax_1 \cdots x_n \in \ell_1$ e, portanto, o operador M_a^n está bem definido. A multilinearidade e a continuidade de M_a^n são claras.

Afirmamos que $s = v \circ M_a^n$.De fato, para $(x_1, \ldots, x_n) \in \ell_2 \times \cdots \times \ell_2$, temos

$$\begin{aligned} & v\left(M_a^n\left(x_1, \ldots, x_n\right)\right) \\ & = \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle M_a^n\left(x_1, \ldots, x_n\right), e_j\right\rangle sgn\left(y_j\right) \\ & = \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle a x_1 \cdots x_n, e_j\right\rangle sgn\left(y_j\right) \\ & = \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle \left(\left|y_i\right| x_1^i \cdots x_n^i\right)_{i=1}^{\infty}, e_j\right\rangle sgn\left(y_j\right) \\ & = \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} \left|y_i\right| x_1^i \cdots x_n^i e_i, e_j\right\rangle sgn\left(y_j\right) \\ & = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle x_1^i \cdots x_n^i e_i, e_j\right\rangle \left|y_i\right| sgn\left(y_j\right) \\ & = \sum_{j=1}^{\infty} x_1^j \cdots x_n^j \left|y_j\right| sgn\left(y_j\right). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Como, para cada $i \in \mathbb{N}$, $x_i^j = \langle x_i, e_j \rangle$, temos em (4.5)

$$\begin{aligned} v\left(M_a^n\left(x_1, \ldots, x_n\right)\right) & = \sum_{j=1}^{\infty} x_1^j \cdots x_n^j \left|y_j\right| sgn\left(y_j\right) \\ & = \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle x_1, e_j\right\rangle \cdots \left\langle x_n, e_j\right\rangle \left|y_j\right| \frac{y_j}{\left|y_j\right|} \\ & = \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle x_1, e_j\right\rangle \cdots \left\langle x_n, e_j\right\rangle y_j \\ & = s\left(x_1, \ldots, x_n\right). \end{aligned}$$

Agora, sabendo que $n \geq 2$ e $a \in l_2$, defina o operador $M_a^{n-1} : \ell_2 \times \cdots \times \ell_2 \to \ell_2$ por $M_a^{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = ax_1 \cdots x_{n-1}$. Pelo mesmo argumento de (4.4), o operador M_a^{n-1} está bem definido, é multilinear e contínuo. Afirmamos que M_a^{n-1} é 2-somante e $\pi_2(M_a^{n-1}) = \|a\|_2$. De fato, note que

$$\begin{aligned} M_a^{n-1}\left(x_1, \ldots, x_{n-1}\right) & = a x_1 \cdots x_{n-1} \\ & = \left(\left|y_k\right| x_1^k \cdots x_{n-1}^k\right)_{k=1}^{\infty} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|\, x_1^k \cdots x_{n-1}^k e_k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| \langle x_1, e_k \rangle \cdots \langle x_{n-1}, e_k \rangle e_k.
\end{aligned}
$$

Para cada $i = 1, \ldots, n-1$ e $m \in \mathbb{N}$, seja $\left(x_i^j\right)_{j=1}^m$ uma sequência formada por elementos de ℓ_2. Então

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m} M_a^{n-1}\left(x_1^j, \ldots, x_{n-1}^j\right) r_j(t) \\
&= \sum_{j=1}^{m} a x_1^j \cdots x_{n-1}^j r_j(t) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \left(|y_k|\, x_{1,k}^j \cdots x_{n-1,k}^j\right)_{k=1}^{\infty} r_j(t) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|\, x_{1,k}^j \cdots x_{n-1,k}^j e_k\right) r_j(t) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| \left(\sum_{j=1}^{m} x_{1,k}^j \cdots x_{n-1,k}^j r_j(t)\right) e_k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| \left(\sum_{j=1}^{m} \left\langle x_1^j, e_k \right\rangle \cdots \left\langle x_{n-1}^j, e_k \right\rangle r_j(t)\right) e_k,
\end{aligned}
$$

e, assim,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \left|\sum_{j=1}^{m} M_a^{n-1}\left(x_1^j, \ldots, x_{n-1}^j\right) r_j(t)\right|^2 dt \\
&= \int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{\infty} |y_k| \left(\sum_{j=1}^{m} \left\langle x_1^j, e_k \right\rangle \cdots \left\langle x_{n-1}^j, e_k \right\rangle r_j(t)\right) e_k\right|^2 dt \\
&= \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \left||y_k| \left(\sum_{j=1}^{m} \left\langle x_1^j, e_k \right\rangle \cdots \left\langle x_{n-1}^j, e_k \right\rangle r_j(t)\right)\right|^2 dt \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 \int_0^1 \left|\sum_{j=1}^{m} \left\langle x_1^j, e_k \right\rangle \cdots \left\langle x_{n-1}^j, e_k \right\rangle r_j(t)\right|^2 dt. \qquad (4.6)
\end{aligned}
$$

Usando a igualdade (1.4)

$$
\left(\int_0^1 \left|\sum_{j=1}^{m} \left\langle x_1^j, e_k \right\rangle \cdots \left\langle x_{n-1}^j, e_k \right\rangle r_j(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^{m} \left|\left\langle x_1^j, e_k \right\rangle \cdots \left\langle x_{n-1}^j, e_k \right\rangle\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (4.7)
$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j=1}^{m}\left|\left\langle x_1^j, e_k\right\rangle \cdots \left\langle x_{n-1}^j, e_k\right\rangle\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{m}\left|\left\langle x_1^j, e_k\right\rangle\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \cdots \cdot \left(\sum_{j=1}^{m}\left|\left\langle x_{n-1}^j, e_k\right\rangle\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left\|\left(x_1^j\right)_{j=1}^m\right\|_{\omega,2} \cdot \cdots \cdot \left\|\left(x_{n-1}^j\right)_{j=1}^m\right\|_{\omega,2}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Sendo assim, comparando (4.6), (4.7) e (4.8), temos

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^1 \left|\sum_{j=1}^{m} M_a^{n-1}\left(x_1^j, \ldots, x_{n-1}^j\right) r_j(t)\right|_{l_2}^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|a\|_{l_2} \cdot \left\|\left(x_1^j\right)_{j=1}^m\right\|_{\omega,2} \cdot \cdots \cdot \left\|\left(x_{n-1}^j\right)_{j=1}^m\right\|_{\omega,2},
\end{aligned}$$

e, portanto, M_a^{n-1} é 2-somante e $\pi_2\left(M_a^{n-1}\right) \leq \|a\|_2$. Vamos mostrar agora que $\|a\|_2 \leq \pi_2\left(M_a^{n-1}\right)$. Seja m um número natural. Note que $M_a^{n-1}(e_i, \ldots, e_i) = |y_i|\, e_i$ e também

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{m} M_a^{n-1}(e_i, \ldots, e_i)\, r_i(t)\right|_2 &= \left|\sum_{i=1}^{m} |y_i|\, r_i(t)\, e_i\right|_2 \\
&= \left|\left(|y_i|\, r_i(t)\right)_{i=1}^m\right|_2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m} |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Como M_a^{n-1} é 2-somante e $\|(e_i)_{i=1}^m\|_{\omega,2} = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{m} |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m} \left\||y_i|\, e_i\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^{m} r_i(t)\, |y_i|\, e_i\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^{m} r_i(t)\, M_a^{n-1}(e_i, \ldots, e_i)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \pi_{as}\left(M_a^{n-1}\right).
\end{aligned}$$

Sendo m arbitrário, segue que $\|a\|_2 \leq \pi_2\left(M_a^{n-1}\right)$.

Finalmente, seja $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \ell_2 \times \cdots \times \ell_2$ e defina o operador $\widehat{M_a^n} : \ell_2 \times \cdots \times \ell_2 \to \mathcal{L}(\ell_2; \ell_1)$ por $\widehat{M_a^n}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = M_{ax_1 \ldots x_{n-1}}$, onde

$$M_{ax_1 \ldots x_{n-1}}(x_n) = ax_1 \cdots x_n.$$

Então, chamando $\overline{a} = ax_1 \cdots x_{n-1}$, segue que $\overline{a} \in \ell_2$ e assim $M_{ax_1 \ldots x_{n-1}}(x_n) = M_{\overline{a}}(x_n) = \overline{a}x_n = (\overline{a}_i x_n^i)_{i=1}^{\infty}$, temos

$$\begin{aligned}
&\left\|\widehat{M_a^n}(x_1, \ldots, x_{n-1})\right\|_{\mathcal{L}(\ell_2;\ell_1)} \\
&= \sup_{\|x_n\|_2 \leq 1} \left\|\widehat{M_a^n}(x_1, \ldots, x_{n-1})(x_n)\right\|_1 \\
&= \sup_{\|x_n\|_2 \leq 1} \left\|M_{ax_1 \ldots x_{n-1}}(x_n)\right\|_1 \\
&= \sup_{\|x_n\|_2 \leq 1} \|\overline{a}x_n\|_1 \\
&= \sup_{\|x_n\|_2 \leq 1} \left\|\left(\overline{a}_i x_n^i\right)_{i=1}^{\infty}\right\|_1 \\
&= \sup_{\|x_n\|_2 \leq 1} \sup_{\left\|(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\right\| \leq 1} \sum_{i=1}^{\infty} \left|\varphi_i \overline{a}_i x_n^i\right| \ \text{(com } (\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell_1' = \ell_\infty\text{)} \\
&= \sup_{\left\|(z_i)_{i=1}^{\infty}\right\| \leq 1} \sum_{i=1}^{\infty} |\overline{a}_i z_i| \ \text{(com } z_i = \varphi_i x_n^i \text{ e } (z_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_2' = \ell_2\text{)} \\
&= \|(\overline{a}_i)_{i=1}^{\infty}\|_2 = \|\overline{a}\|_2 = \|ax_1 \cdots x_{n-1}\|_2 \\
&= \left\|M_a^{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})\right\|_2.
\end{aligned}$$

Portanto, $\widehat{M_a^n}$ é 2-somante e $\pi_2\left(\widehat{M_a^n}\right) = \pi_2\left(M_a^{n-1}\right) = \|a\|_2$. Agora, se para cada $i = 1, \ldots, n$, a sequência $\left(x_i^j\right)_{j=1}^{\infty}$ é formada por elementos de ℓ_2, temos

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\|M_a^n\left(x_1^j, \ldots, x_n^j\right)\right\|_1^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\|\widehat{M_a^n}\left(x_1^j, \ldots, x_{n-1}^j\right)\left(x_n^j\right)\right\|_1^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\|\widehat{M_a^n}\left(x_1^j, \ldots, x_{n-1}^j\right)\left(x_n^j\right)\right\|_1^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\|\widehat{M_a^n}\left(x_1^j, \ldots, x_{n-1}^j\right)\right\|^2 \left\|x_n^j\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left\| \left(x_n^j\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\| \widehat{M_a^n}\left(x_1^j, \ldots, x_{n-1}^j\right) \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left\| \left(x_n^j\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\omega,2} \pi_2\left(\widehat{M_a^n}\right) \left\| \left(x_1^j\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\omega,2} \cdots \left\| \left(x_{n-1}^j\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\omega,2} \\
&= \pi_2\left(\widehat{M_a^n}\right) \left\| \left(x_1^j\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\omega,2} \cdots \left\| \left(x_{n-1}^j\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\omega,2} \left\| \left(x_n^j\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\omega,2}.
\end{aligned}
$$

Isto nos diz que $M_a^n : \ell_2 \times \cdots \times \ell_2 \to \ell_1$ é 2-somante e também $\pi_2\left(M_a^n\right) \leq \|a\|_2$. Por outro lado, sabemos que $\|v\| \leq 1$ e $s = v \circ M_a^n$, logo

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} \left\| s\left(x_1^j, \ldots, x_n^j\right) \right\|^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} \left\| v \circ M_a^n\left(x_1^j, \ldots, x_n^j\right) \right\|^2 \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \|v\|^2 \left\| M_a^n\left(x_1^j, \ldots, x_n^j\right) \right\|^2 \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left\| M_a^n\left(x_1^j, \ldots, x_n^j\right) \right\|^2 \\
&\leq \pi_2\left(M_a^n\right)^2 \left\| \left(x_1^j\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\omega,2}^2 \cdots \left\| \left(x_n^j\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\omega,2}^2
\end{aligned}
$$

e assim, s é 2-somante e $\pi_2(s) \leq \pi_2\left(M_a^n\right) \leq \|a\|_2$. Portanto, $\pi_2(s) = \|a\|_2$, como queríamos. $\square$

Teorema 4.5. *Seja $n \geq 2$ um número natural, F, G espaços de Banach, e $v : F \to G$ um operador linear limitado. Então, as seguintes afirmações são equivalentes :*

(i) Para quaisquer espaços de Banach $E_1, \ldots, E_n$ e todo operador 2-somante $u : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$, a composição $v \circ u$ é quase somante.

(ii) Para todo operador 2-somante $u : \ell_2 \times \cdots \times \ell_2 \to F$, a composição $v \circ u$ é quase somante.

(iii) v tem tipo 2.

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$ Considerando $E_1 = E_2 = \ldots = E_n = \ell_2$ em (i), o resultado é claramente satisfeito. Além disso, a implicação $(iii) \Rightarrow (i)$ segue diretamente da Proposição 4.4. Assim, resta apenas mostrar que $(ii) \Rightarrow (iii)$. De fato, suponha que (ii) é verdade e defina o operador $\Psi_v : \Pi_2\left(\ell_2, \ldots, \ell_2; F\right) \to \Pi_{as}\left(\ell_2, \ldots, \ell_2; G\right)$ por

$$\Psi_v(u) = v \circ u$$

para todo $u \in \Pi_2\left(\ell_2, \ldots, \ell_2; F\right)$. É claro que Ψ_v está bem definido. Note que Ψ_v é uma aplicação linear. Com efeito, sejam u', $u'' \in \Pi_2\left(\ell_2, \ldots, \ell_2; F\right)$ quaisquer, e λ um escalar. Se $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \ell_2 \times \cdots \times \ell_2$, então

$$\begin{aligned} \Psi_v (u' + \lambda u'')(x) &= v((u' + \lambda u'')(x)) \\ &= v(u'(x) + \lambda u''(x)) \end{aligned}$$

e como v é linear, obtemos

$$\begin{aligned} \Psi_v (u' + \lambda u'')(x) &= v(u'(x)) + \lambda v(u''(x)) \\ &= (v \circ u')(x) + \lambda (v \circ u'')(x) \\ &= \Psi_v(u')(x) + \lambda \Psi_v(u'')(x). \end{aligned}$$

Logo $\Psi_v (u' + \lambda u'') = \Psi_v(u') + \lambda \Psi_v(u'')$ e, portanto, linear.

Afirmamos, ainda, que Ψ_v é limitada. Para verificar essa veracidade, tome uma sequência $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ formada por elementos de $\Pi_2(\ell_2, \ldots, \ell_2; F)$ de modo que $u_j \longrightarrow u \in \Pi_2(\ell_2, \ldots, \ell_2; F)$ implique em $\Psi_v(u_j) \longrightarrow w \in \Pi_{as}(\ell_2, \ldots, \ell_2; G)$. Então, para qualquer $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \ell_2 \times \cdots \times \ell_2$, temos $u_j(x) \longrightarrow u(x) \in F$. Sendo v uma aplicação contínua, vale $v(u_j(x)) \longrightarrow v(u(x)) \in G$. Além disso, para cada $u \in \Pi_2(\ell_2, \ldots, \ell_2; F)$ a composição $v \circ u$ é contínua, logo

$$\begin{aligned} \|(v \circ u_j) - (v \circ u)\| &= \|v \circ (u_j - u)\| \\ &= \sup\left\{|v \circ (u_j - u)(x)|_G : \|x_i\|_2 \leq 1,\, i = 1, \ldots n\right\} \\ &= \sup\left\{|v((u_j - u)(x))|_G : \|x_i\|_2 \leq 1,\, i = 1, \ldots n\right\} \\ &\leq \sup\left\{\|v\| \|(u_j - u)(x)\|_F : \|x_i\|_2 \leq 1,\, i = 1, \ldots n\right\} \\ &= \|v\| \sup\left\{\|(u_j - u)(x)\|_F : \|x_i\|_2 \leq 1,\, i = 1, \ldots n\right\} \\ &= \|v\| \|u_j - u\|. \end{aligned}$$

Portanto, fazendo $j \longrightarrow \infty$, concluímos que $v \circ u_j \longrightarrow v \circ u$, ou seja, $\Psi_v(u_j) \longrightarrow \Psi_v(u)$ e, pela unicidade do limite de uma sequência, segue que $w = \Psi_v(u)$. Assim, pelo TGF, Ψ_v é limitado e então

$$\pi_{as}(v \circ s) = \pi_{as}(\Psi_v(s)) \leq \|\Psi_v\| \pi_2(s), \text{ para todo } s \in \Pi_2(l_2, \ldots, l_2; F). \tag{4.9}$$

Seja $(y_i)_{i=1}^{m}$, com $y_k = 0$ para todo $k > m$, uma sequência em F e considere o operador $s : l_2 \times \cdots \times l_2 \to F$ definido por

$$s(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{m} \langle x_1, e_i \rangle \cdot \ldots \cdot \langle x_n, e_i \rangle y_i.$$

Pela Proposição 4.4
$$\pi_2(s) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.10}$$
Como $s(e_i, \ldots, e_i) = y_i$ para $i = 1, \ldots, m$ e $\|(e_i)_{i=1}^m\|_{\omega,2} = 1$ pela definição de operadores quase somantes, segue que

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^{m} r_i(t)\, v(y_i)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^{m} r_i(t)\,(v \circ s)(e_i, \ldots, e_i)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \pi_{as}(v \circ s)\left(\|(e_i)_{i=1}^m\|_{\omega,2}\right)^n \\
&= \pi_{as}(v \circ s).
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Então, juntando (4.9) e (4.11) deduzimos que

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^{m} r_i(t)\, v(y_i)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \|\Psi_v\|\, \pi_2(s) \\
&= \|\Psi_v\| \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

ou seja, v tem tipo 2. □

Corolário 4.6. *Seja $n \geq 2$ um número natural e F um espaço de Banach. Então, são equivalentes as seguintes $afirmações$:*

(a) A inclusão $\Pi_2(E_1, \ldots, E_n; F) \subseteq \Pi_{as}(E_1, \ldots, E_n; F)$ mantem-se, para quaisquer $E_1, \ldots, E_n$ espaços de Banach.

(b) A inclusão $\Pi_2(\ell_2, \ldots, \ell_2; F) \subseteq \Pi_{as}(\ell_2, \ldots, \ell_2; F)$ é válida.

(c) F tem tipo 2.

Demonstração. Primeiramente, considere o operador limitado $v = I_F : F \to F$. Dado $u \in \Pi_2(E_1, \ldots, E_n; F)$, temos que $u = I_F \circ u = v \circ u$. Portanto, pelo Teorema 4.5, segue claramente que $(a) \Rightarrow (b)$, $(b) \Rightarrow (c)$ e $(c) \Rightarrow (a)$. □

Apêndice

Para deixar nosso trabalho o mais didático possível e, consequentemente, evitar dúvidas desnecessárias, dedicamos esse apêndice para demonstrar alguns resultados que assumimos verdadeiros durante o desenvolvimento dos conteúdos apresentados.

Lema 4.7. *Seja $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de funções de Rademacher e $a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$. Então,*

$$\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t) \right|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 .$$

Demonstração. Seja $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência, tal que $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k r_k$. Então, para $n > m$, temos

$$\begin{aligned}
\|S_n - S_m\|_{L_2[0,1]}^2 &= \left\| \sum_{k=m+1}^{n} a_k r_k \right\|_{L_2[0,1]}^2 = \int_0^1 \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k r_k(t) \right|^2 dt \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{i=m+1}^{n} a_i r_i(t) \right) \overline{\left(\sum_{j=m+1}^{n} a_j r_j(t) \right)} dt \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{i=m+1}^{n} a_i r_i(t) \right) \left(\sum_{j=m+1}^{n} \overline{a}_j r_j(t) \right) dt \\
&= \int_0^1 \sum_{i,j=m+1}^{n} a_i \overline{a}_j r_i(t) r_j(t)\, dt \\
&= \sum_{i,j=m+1}^{n} a_i \overline{a}_j \int_0^1 r_i(t) r_j(t)\, dt \\
&= \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|^2 \int_0^1 r_k^2(t)\, dt \\
&= \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|^2 .
\end{aligned}$$

Como $a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$, obtemos

$$\sum_{k=m+1}^{n} |a_k|^2 \longrightarrow 0 \Rightarrow \|S_n - S_m\|_{L_2[0,1]}^2 \longrightarrow 0$$

e assim, $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $L_2[0,1]$. Sendo $L_2[0,1]$ um espaço de Banach, segue que $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ é convergente. Portanto,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \\ &= \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k r_k \right\|_{L_2[0,1]}^2 \\ &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_{L_2[0,1]}^2 \\ &= \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_k r_k(t) \right|^2 dt,\end{aligned}$$

o que finaliza nossa demonstração. □

Teorema 4.8 (Versão geral da desigualdade de Hölder). *Sejam* (E, Σ, μ) *um espaço de medida,* $r \in [1, \infty)$ *e* $p_1, \ldots, p_N \in [1, \infty]$ *tais que*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_N}.$$

Se $f_i \in L_{p_i}(E)$, $i = 1, \ldots, N$, *então* $f_1 \cdots f_N \in L_r(E)$ *e*

$$\|f_1 \cdots f_N\|_{L_r} \leq \|f_1\|_{L_{p_1}} \cdot \ldots \cdot \|f_N\|_{L_{p_N}}.$$

Demonstração. Faremos a prova por indução sobre N. De fato, vejamos primeiramente o caso $N = 2$. Desde que $1 = r/p_1 + r/p_2$, temos

$$\begin{aligned}\int_E |f_1 f_2|^r \, d\mu =: \| |f_1 f_2|^r \|_{L_1} &\leq \|f_1^r\|_{L_{\frac{p_1}{r}}} \|f_2^r\|_{L_{\frac{p_2}{r}}} \\ &= \|f_1\|_{L_{p_1}}^r \|f_2\|_{L_{p_2}}^r\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\|f_1 f_2\|_{L_r} \leq \|f_1\|_{L_{p_1}} \|f_2\|_{L_{p_2}}.$$

Suponha agora que o resultado vale para $N - 1$. Se $p_N = \infty$, então resulta de $|f_N| \leq \|f_N\|_{L_\infty}$ e da hipótese de indução que

$$\begin{aligned}\|f_1 \cdots f_N\|_{L_r} &\leq \|f_1 \cdots f_{N-1}\|_{L_r} \|f_N\|_{L_\infty} \\ &\leq \|f_1\|_{L_{p_1}} \cdot \ldots \cdot \|f_{N-1}\|_{L_{p_{N-1}}} \cdot \|f_N\|_{L_{p_N}}.\end{aligned}$$

Se $p_N < \infty$, então note que

$$p := \frac{p_N}{p_N - r} \text{ e } q := \frac{p_N}{r}$$

são expoentes conjugados em $(1, \infty)$ e $rq = p_N$. Aplicando a desigualdade de Hölder com os expoentes $1/r = 1/rp + 1/rq$ e usando a hipótese de indução, com $\frac{1}{rp} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_{N-1}}$, obtemos

$$\begin{aligned} \|(f_1 \cdots f_{N-1}) \cdot f_N\|_{L_r} &\leq \|f_1 \cdots f_{N-1}\|_{L_{rp}} \|f_N\|_{L_{rq}} \\ &\leq \|f_1\|_{L_{p_1}} \cdot \cdots \cdot \|f_{N-1}\|_{L_{p_{N-1}}} \cdot \|f_N\|_{L_{p_N}} . \end{aligned}$$

□

Proposição 4.9. *Sejam* $1 < p, q < \infty$ *tais que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Se* $(e_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$ *, então* $\left\|(e_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\omega,q} = 1$.

Demonstração. De fato,

$$\left\|(e_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\omega,q} = \sup_{\varphi \in B_{(\ell_p)'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(e_j)|^q\right)^{\frac{1}{q}} .$$

Usando a caracterização do espaço dual de ℓ_p, temos

$$\begin{aligned} \left\|(e_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\omega,q} &= \sup_{(\varphi_j) \in B_{\ell_q}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_j|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \sup_{(\varphi_j) \in B_{\ell_q}} \left\|(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_q = 1, \end{aligned}$$

finalizando a prova. □

Lema 4.10. *Seja* E *espaço de Banach. Então* $\ell_\infty(E) = \ell_\infty^\omega(E)$.

Demonstração. De fato, se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência em E, então

$$\begin{aligned} \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{l_\infty} &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| \\ &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x_n)| \text{ (por Hahn-Banach)} \\ &= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sup_{n \in \mathbb{N}} |\varphi(x_n)| \\ &= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \|(\varphi(x_n))_{n=1}^{\infty}\|_{\ell_\infty} . \end{aligned}$$

Portanto, $\ell_\infty(E) = \ell_\infty^\omega(E)$. □

Referências Bibliográficas

[1] ALBUQUERQUE, N. G., *Desigualdade de Bohnenblust-Hille: estimativas e comportamento assintótico*, Dissertação de Mestrado, CCEN, UFPB, 2012.

[2] ALBUQUERQUE, N. G, *Hardy-Littlewood/Bohnenblust-Hille type inequalities and Peano curves on topological vector spaces*, Tese de Doutorado, CCEN, UFPB, 2014.

[3] ALENCAR, R., MATOS, M., *Some classes of multilinear mappings between Banach spaces*, Publ. Dep. Analisis Mat. Universidad Complutense de Madrid 12 (1989), 1–34.

[4] BOTELHO, G., BRAUNSS, H. -A., JUNEK, H. , *Almost p-summing polynomials and multilinear mappings*, Arch. Math. 76(2001), 109–118.

[5] BOTELHO, G., PELLEGRINO, D., *Coincidence Situations for Absolutely Summing Non-linear Mappings* , Portugaliae Mathematica, 64 (2007), 176–183.

[6] BOTELHO, G., PELLEGRINO, D., TEIXEIRA, E., *Fundamentos de Análise Funcional*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

[7] BOTELHO, G., PELLEGRINO, D., RUEDA, P., *Summability and estimates for polynomials and multilinear mappings*, Indag. Math. (N.S.) 19 (2008), no. 1, 23–31.

[8] BREZIS, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010.

[9] DIESTEL, J., JARCHOW, H., TONGE, A., *Absolutely Summing Operators*, Cambridge University Press, 1995.

[10] DIMANT, V., SEVILLA-PERIS, P., *Summation of coefficients of polynomials on l_p spaces*, Publ. Math. 60 (2016) 289–310.

[11] GARLING, D. J., *Inequalities: A Journey Into Linear Analysis*, Cambridge University Press, 2007.

[12] Haagerup, U., *The best constants in the Khinchine inequality*, Studia Math. 70 (1982) 231–283.

[13] Lindenstrauss, J., Pelczyński, A., *Absolutely summing operators in L_p spaces and their applications*, Studia Math. 29(1968), 276–326.

[14] Mitjagin, B., Pelczyński, A., *Nuclear operators and approximative dimension*, Proc. of ICM, Moscow, (1966), 366–372.

[15] Monteiro, M. A., *Estimativas para aplicações multilineares entre espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, CCEN, UFPB, 2009.

[16] Moreira, T. G., *O teorema da dominação de Pietsch unificado*, Dissertação de Mestrado, CCEN, UFPB, 2010.

[17] Pietsch, A., *Absolut p-summierende Abbildungen in normieten Raumen*, Studia Math. 27(1967), 333–353.

[18] Pietsch, A., *Ideals of multilinear functionals*, Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals and their Applications in theoretical Physics, 185–199, Teubner-Texte, Leipzig, 1983.

[19] Popa, D., *A Characterization of Type 2 Spaces*, Arch. Math. (Basel) 105 (2015), no. 2, 173–178.

[20] Santos, J., *Resultados de coincidência para aplicações absolutamente somantes*, Dissertação de Mestrado, CCEN, UFPB, 2008.

[21] Zalduendo, I., *An estimate for multilinear forms on l_p spaces*, Proc. R. Acad. Vol. 93A, No. 1, 137–142(1993).