



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Física

Influência de Meios Axionicos Periódicos na Propagação da Luz Usando Métodos Numéricos

Anny Caroline de Araújo Faria

João Pessoa-PB,2019

Anny Caroline de Araújo Faria

Influência de Meios Axionicos Periódicos na Propagação da Luz Usando Métodos Numéricos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da UFPB, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de Mestre em Física.

Universidade Federal da Paraíba – UFPB
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-graduação em Física

Orientador: Cláudio Benedito Furtado

João Pessoa-PB

2019

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

F224i Faria, Anny Caroline de Araujo.
Influência de Meios Axionicos Periódicos na Propagação
da Luz Usando Métodos Numéricos / Anny Caroline de
Araujo Faria. - João Pessoa, 2019.
58 f. : il.

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. isolantes topológicos. 2. fótons. 3. estrutura de
banda. 4. cristais fotônicos. 5. métodos numéricos. 6.
axions. I. Título

UFPB/CCEN

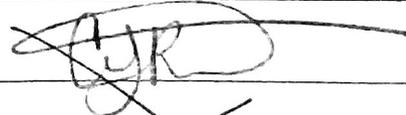
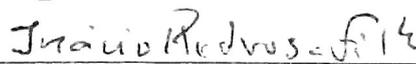
Ata da Sessão Pública da Defesa de
Dissertação de **Mestrado** da aluna **Anny
Caroline de Araújo Faria**, candidata ao
Título de Mestre em Física na Área de
Concentração Física da Matéria Condensada.

1 Aos quinze dias do mês de março do ano de dois mil e dezenove, às 14:30, na sala de
2 reuniões do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da
3 Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora
4 constituída para examinar a candidata ao grau de Mestre em Física na área de Física da
5 Matéria Condensada, **Anny Caroline de Araújo Faria**. A comissão examinadora
6 composta pelos professores doutores: Cláudio Benedito da Silva Furtado (DF/UFPB),
7 orientador e presidente da banca examinadora, Inácio de Almeida Pedrosa (DF/UFPB) e
8 Claudionor Gomes Bezerra (UFRN). Dando início aos trabalhos, o Prof. Cláudio
9 Benedito da Silva Furtado comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir,
10 passou a palavra a candidata para que a mesma fizesse, oralmente, a exposição do
11 trabalho de dissertação intitulado "*Cristais axiônicos periódicos unidimensionais*".
12 Concluída a exposição, a candidata foi arguida pela Banca Examinadora que emitiu o
13 seguinte parecer: "**aprovada**". Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba
14 expedir o respectivo diploma de Mestre em Física na forma da lei. E para constar, eu,
15 Danilo Wilson Lemos Menezes, lavrei esta ata que vai assinada por mim e pelos
16 membros da Banca Examinadora. João Pessoa, **15 de março de 2019**.

17 Prof. Dr. Cláudio Benedito da Silva Furtado
Orientador - UFPB

Prof. Dr. Inácio de Almeida Pedrosa
UFPB

Prof. Dr. Claudionor Gomes Bezerra
UFRN



Danilo Wilson Lemos Menezes
Técnico em Assuntos Educacionais
Mat. SIAPE 2647774

*Aos meus pais Maria Nilda Alves de Araújo Lopes e Luzimagno Leite Lopes,
por sempre estarem comigo em todos os momentos.*

Agradecimentos

Gostaria de agradecer e dedicar esta dissertação às seguintes pessoas:

Em primeiro lugar a Deus.

Aos meus pais Maria Nilda Alves de Araújo Lopes e Luzimagno Leite Lopes e a minha irmã Eneida Camila de Araújo Faria por me apoiarem nos estudos, além de todo amor e confiança que foram fundamentais para que eu perseverasse em cada adversidade.

Ao meu orientador Prof. Cláudio Furtado por ter me orientado durante o mestrado e pela paciência.

Ao Prof. Jilvan por estar sempre disposto a me ajudar, ensinar e pelas discussões científicas que contribuíram em grande parte para a realização deste trabalho.

Aos meus amigos Deigivan e Daniel pela amizade, parceria e pelas discussões científicas que me nortearam.

A todos os meus professores do Departamento de Física por tudo o que me ensinaram, em especial aos professores João Antônio Plascak, Jorge Gabriel Ramos, Eugênio Ramos Bezerra de Mello e Dionisio Bazeia Filho que lecionaram as disciplinas que cursei durante o mestrado.

Ao professor Sérgio Azevedo juntamente com seu grupo de pesquisa que abriram as portas para minha pré-apresentação de defesa.

A todos os meus amigos do Departamento de Física que de forma direta ou indireta agregaram algo de bom na minha caminhada em busca do saber. Vocês são pessoas incríveis e eu levarei cada detalhe de momentos vividos com vocês em meu coração.

A todos os funcionários do Instituto de Física, em especial ao secretário Danilo da coordenação de pós-graduação por ser gentil e educado no atendimento e pela dedicação que o mesmo apresenta ter em seu trabalho para nos ajudar.

Aos funcionários responsáveis pela limpeza em especial a Dona Josefa.

E por último, mas não menos importante ao CNPQ pelo suporte financeiro para o desenvolvimento deste trabalho.

*“Um ponto pode ser o Universo.”
(Jorge Gabriel Ramos)*

Resumo

Um novo estado da matéria de interesse atual é a dos chamados isolantes topológicos. Estes materiais tem despertado grande interesse por apresentarem um comportamento eletrônico muito peculiar que surge da topologia não-trivial da estrutura de bandas. Esse comportamento peculiar é caracterizado pela existência de um fluxo de elétrons (semelhante a um condutor) somente em suas superfícies enquanto que em seu interior são isolantes. A existência de uma superfície metálica nesses materiais nos permite ter controle da magnetização ao aplicar um campo elétrico, ou uma polarização elétrica ao aplicar um campo magnético sendo este efeito conhecido como magnetoelétrico e este mesmo efeito foi previsto no estudo dos Axions. Sendo assim, a importância em estudar esses tipos de materiais é devido ao seu potencial para aplicações em nano-dispositivos, spintrônica e computação quântica. Nesta dissertação, estamos interessados em um modelo solucionável numericamente para sistemas formado por um isolante topológico caracterizado por um termo axionico $\theta(x)$. Para tal, desejamos teoricamente analisar o comportamento da propagação da luz no interior desse material de modo que a topologia não-trivial da estrutura de bandas dependerá da variação de mais de um parâmetro do sistema. Com isso, as principais contribuições do nosso trabalho, foram a obtenção das estrutura de bandas, gráfico da massa efetiva e o gráfico da diferença entre os gap's para fótons dependentes de mais de um parâmetro do sistema.

Palavras-chaves: isolantes topológicos.fótons.estrutura de banda.cristais fotônicos.métodos numéricos.axions

Abstract

A new state of the matter of current interest is the so-called topological insulators. These materials have aroused great interest to present a very peculiar electronic behavior that arises from the non-trivial topology of the band structure. "Exotic" behavior is characterized by the existence of a flow of electrons (similar to a conductor) only on its surfaces while inside it are insulating. The existence of a metallic surface in these materials allows us to have damaging control when applying an electric field, or an electric polarization when applying a magnetic field and this effect is known as magnetoelectric and this same effect was predicted in the Axions study. The importance of studying these types of materials is the possibility of technological applications in quantum computing and spintronics. In this dissertation, we are theoretically interested in a numerical model solvable to systems formed by the junction of a topological insulation and a common insulation characterized by an axionic term. For this, we wish to analyze the behavior of light in this type of system so that the non-trivial topology of the structure of bands will depend on the variation of more than one parameter of the system. The main contributions of our work is to obtain of band structures for photons dependent on more than one parameter of the system.

Keywords: topological insulations. photons. band structure. photonic crystals. numerical methods.axions

Lista de ilustrações

Figura 1 – Estruturas em 1,2 e 3 dimensões de um PHC. As cores alternadas representam os diferentes índices de refração. Imagem adaptada de [18].	4
Figura 2 – Blue Morpho (a). Aspecto superficial da disposição das escamas (b); Estrutura corrugada de uma escama (c); Lateral da estrutura escalonada das calhas que compõem a escama (d). Imagem adaptada de [2]	4
Figura 3 – Diagrama de banda do semiconductor (Si).	5
Figura 4 – Diagrama de banda de um cristal fotônico.	6
Figura 5 – Cristal fotônico bidimensional com defeito. Imagem adaptada de [8]	7
Figura 6 – Estruturas em 1 dimensões de um PHC. As cores alternadas representam os diferentes índices de refração. Imagem adaptada de [32].	11
Figura 7 – Estrutura de banda num cristal fotônico unidimensional. Imagem adaptada de [32].	14
Figura 8 – Estados eletrônicos de um isolante comum e de isolantes topológicos. Imagem adaptada de [32].	16
Figura 9 – Perfil de $\theta(z)$. Imagem adaptada de [21]	21
Figura 10 – Tipo de potencial de Kronig-Penney $\partial_z\theta(z)$. Imagem adaptada de [21]	21
Figura 11 – Gráfico dos lados direitos das eqs. (2.33) e (2.34) em função do Ka . Imagem adaptada de [21]	24
Figura 12 – Estrutura de banda do fóton com $h = \pm 1$ linhas azul e vermelha. Imagem adaptada de [21]	25
Figura 13 – Isolante topológico periódico 1D caracterizados por $(\epsilon_1, \mu_1, \theta_1)$ e $(\epsilon_2, \mu_2, \theta_2)$ de espessuras a (placas de cor azul) e b (placas de cor rocha). Imagem adaptada de [31].	26
Figura 14 – Diagrama de $\frac{\omega(k)}{\omega_0}$ para diferentes valores de δ . Imagem adaptada de [31].	28
Figura 15 – Diagrama de $\frac{m^*}{m_0}$ versus δ . Imagem adaptada de [31].	30
Figura 16 – Gráfico de uma função qualquer $f(x)$. Imagem adaptada de [34].	31
Figura 17 – Diagrama para diferentes valores de X e $\delta = 0.0$.	33
Figura 18 – Diagrama para diferentes valores de X e $\delta = 0.5$.	33
Figura 19 – Diagrama para diferentes valores de X e $\delta = 1.0$.	34
Figura 20 – Diagrama para diferentes valores de δ e $X = 0.0$.	35
Figura 21 – Diagrama para diferentes valores de δ e $X = 0.5$.	35
Figura 22 – Diagrama para diferentes valores de δ e $X = 1.0$.	35
Figura 23 – Diagrama de $\frac{m}{m_0}$ para diferentes valores de δ .	36
Figura 24 – Diagrama de $\frac{m}{m_0}$ para diferentes valores de X	37
Figura 25 – Diagrama de $\frac{m}{m_0}$ para diferentes valores de δ	38
Figura 26 – Diagrama da diferença do gap's para X .	39

Figura 27 – Diagrama da diferença do gap's para δ	39
Figura 28 – Diagrama em $3D$	39
Figura 29 – Isolante topológico periódico. Imagem adaptada de [31].	50

Lista de abreviaturas e siglas

IT	Isolante Topológico
EHQ	Efeito Hall Quântico
QCD	Cromodinâmica Quântica
MKS	Unidade de Medida
CP	Carga-Paridade
PHC	Cristais Fotônicos
IHQs	Isolantes Hall Quântico de Spin

Sumário

	INTRODUÇÃO	1
1	CRISTAIS FOTÔNICOS	4
1.1	Propagação de Ondas Eletromagnéticas em Meios Periódicos	7
1.1.1	Equação de Onda para Meios não Homogêneos	7
1.1.2	Teorema de Bloch	10
1.1.3	Cristais Fotônicos Unidimensionais	11
2	CRISTAIS AXIONICOS	15
2.1	Isolantes Topológicos	15
2.2	Propagação de Ondas Eletromagnéticas em Meio Axionico	17
2.2.1	Eletrodinâmica do Axion	17
2.3	Estrutura de Banda em Cristais Axionicos	20
2.4	Cristais Fotônicos Formados por Isolantes Topológicos	26
3	MODELO NUMÉRICO DA PROPAGAÇÃO DA LUZ EM MEIOS AXIONICOS PERIÓDICOS	31
3.1	Método Numérico para Solução do Sistema	31
3.1.1	Algoritmo	32
3.1.2	Resultados Numéricos	32
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS E TRABALHOS FUTUROS	40
	REFERÊNCIAS	42
	APÊNDICES	45
	APÊNDICE A – SOLUÇÃO PARA EQUAÇÃO DA ONDA ELETROMAGNÉTICA	46
A.1	Equação de Onda (Transformada de Fourier)	48
	APÊNDICE B – CÁLCULO DA ESTRUTURA DE BANDAS PARA LUZ EM CRISTAIS FOTÔNICOS FORMADOS POR ISOLANTES TOPOLÓGICOS	50
B.1	Condições de Contorno	51
B.2	Cálculo da Frequência	55

B.3	Cálculo da Massa Efetiva	56
------------	---	-----------

INTRODUÇÃO

Desde a pré-história que começou há cerca de 2,5 milhões de anos atrás a humanidade vem desenvolvendo interesse pelo conhecimento, confecção e utilidade dos materiais. Assim, as pessoas pré-históricas utilizaram-se de materiais naturais para confecção de ferramentas baseadas em seus conhecimentos sobre as propriedades desses materiais como dureza, durabilidade, etc [33].

Com o passar dos anos, o formato de produção e utilização dos materiais foi evoluindo tornando crescente o interesse e a necessidade pelo conhecimento de novos materiais e novas ferramentas que possibilitem trabalhar com velocidades cada vez mais altas e a um custo cada vez mais reduzido.

Estudos na física de semicondutores nos permitiram manipular elétrons em cristais moleculares possibilitando controlar as propriedades condutoras de certos materiais, iniciando assim uma revolução tecnológica na eletrônica e proporcionando a fabricação de dispositivos compactos que favorecem os sistemas que gerenciam informações como por exemplo, o transistor que permitiu um progressivo avanço nas telecomunicações, no processamento de informações, etc.

Graças ao crescimento subsequente no conhecimento científico, tecnológico e a necessidade imperiosa da busca pela miniaturização de dispositivos e sistemas de informação de maior velocidade levaram os pesquisadores a brilhante idéia de usar fótons em vez de elétrons como portadores de informações. Com isso, muitos pesquisadores passaram a aprofundar-se no estudo de estrutura da matéria e passaram a usar a luz para executar funções que tradicionalmente eram executadas no campo de pesquisa da física dos semicondutores [35] gerando maior interesse na fabricação e uso de cristais fotônicos (PHC) para alcançar circuitos integrados totalmente ópticos.

Nos últimos anos, descobrir novos materiais e classifica-los em suas diversas fases é um tópico de grande interesse da Física da Matéria Condensada. Nesse contexto, uma nova classe de materiais que apresentam propriedades peculiares conhecidos como Isolantes Topológicos (IT's) tem sido muito estudada pela comunidade científica. Estes materiais dependem dos seus aspectos topológicos cuja origem se deu a partir dos estudos de fenômenos que remetem à ordem topológica como os observados no Efeito Hall Quântico (EHQ) no início da década de 80. Diferente da maior parte dos estados da matéria onde é recorrente a quebra de simetria como, por exemplo, a quebra da simetria translacional observado no processo da cristalização da água em gelo, o Efeito Hall Quântico apresenta estados eletrônicos que são invariantes por simetria, ou seja, esses estados não quebram nenhuma simetria mas definem uma fase que chamamos de fase topológica onde algumas

propriedades fundamentais, como por exemplo, o valor quantizado da condutância Hall permanecem inalterados sob variações suaves nos parâmetros do material. Além disso, este efeito é responsável pela separação das cargas de sinais opostos por meio de um campo magnético.

O Isolante Comum é um material que se caracteriza pela existência de um gap de energia entre os estados ocupados (banda de valência) e os estados desocupados (banda de condução). Os isolantes topológicos, são materiais que apresentam em seu interior (desprezando as superfícies) um gap de energia proibido que é caracterizado por ser uma região onde não há condutância semelhante aos isolantes comuns e superfícies metálicas onde há condutância assemelhando-se a um condutor. Esses materiais se encontram em um novo estado da matéria que estão protegido por simetria de reversão temporal [18]. Os isolantes topológicos apresentam uma forte interação entre o spin dos elétrons e a órbita eletrônica, conhecido como interação spin-órbita ou efeito Spin Hall Quântico. Assim como o efeito Hall Quântico, este efeito que é caracterizado por separar os spins de diferentes orientações também está associado a uma ordem topológica. A existência de uma superfície metálica em Isolantes Topológicos produz uma corrente superficial. Dessa forma, quando há um campo elétrico incidente sobre esta superfície temos um campo magnético. Por outro lado, se temos um campo magnético incidente sobre essa mesma superfície teremos uma polarização dielétrica. Tal efeito é conhecido como *magneto-elétrico* e este mesmo efeito foi previsto no estudo dos axions que é uma partícula hipotética proposto por Roberto Peccei e Helen Quinn em 1977 na tentativa de resolver um problema muito sutil no modelo padrão da física de partículas elementares que é o problema da carga-paridade (CP) na cromodinâmica quântica (QCD) para explicar a matéria escura [14, 36]. Sendo assim, na perspectiva da eletrodinâmica, podemos considerar um isolante topológico, como um meio axionico [23, 26, 13, 31]. Estudos em isolantes topológicos tem gerado motivações no campo de pesquisa da matéria condensada devido ao surgimento de materiais com comportamentos exóticos sendo estes fortes candidatos na perspectiva de aplicação tecnológica.

Neste contexto, o presente trabalho busca fazer uma análise da influência de meios axionicos periódicos na propagação da luz usando métodos numéricos. Com o intuito de obter resultados gráficos da dinâmica do fóton no meio axionico. Para isso, faz-se necessário analisar as soluções da equação não-trivial para diversos valores dos parâmetros da rede. Devido a equação característica ser um equação transcendental pode-se obter apenas soluções numéricas para uma grande parte dos valores dos parâmetros de rede.

No capítulo 1 desta dissertação, faremos um estudo das propriedades dos cristais fotônicos descrevendo a propagação de ondas eletromagnéticas em meios periódicos e o Teorema de Bloch.

No capítulo 2 será apresentado uma breve introdução sobre isolantes topológicos. Em

seguida, faremos uma revisão do artigo de Ozaki e Yamamoto (2017) [21] onde estudaremos a propagação de ondas eletromagnéticas em meios axiônicos e as estruturas da banda de fótons neste tipo de cristal. Veremos que os cristais axiônicos possuem algumas propriedades diferentes dos cristais fotônicos comuns. Neste mesmo capítulo faremos uma revisão do artigo de Sergeenkov, Furtado e Vieira (2017) [31] onde estudaremos a propagação de ondas eletromagnéticas num meio formado pela junção periódica de um isolante comum e um isolante topológico.

O capítulo 3 não se trata de uma revisão, mas de um estudo inédito da generalização do capítulo 2 onde utilizaremos os métodos numéricos para analisar a equação transcendental apresentada na revisão do artigo de Sergeenkov, Furtado e Vieira (2017) [31]. Nesse caso, mostraremos soluções numéricas do comportamento da luz em um cristal fotônico unidimensional formado por isolante topológico que dependerá da variação de mais de um parâmetro do sistema.

Por fim, nas conclusões capítulo 4, mostraremos um resumo dos principais resultados obtidos por Sergeenkov, Furtado e Vieira (2017) [31] e pelo novo modelo numérico apresentado nesta dissertação. Apresentaremos também propostas para trabalhos futuros relacionados diretamente com os resultados obtidos no capítulo 3.

1 CRISTAIS FOTÔNICOS

Cristais Fotônicos (PHC) são materiais constituídos por diferentes constantes dielétricas (materiais isolantes) organizados espacialmente de forma periódica. Essas estruturas podem ser produzidos artificialmente superpondo materiais com diferentes larguras e constantes dielétricas se repetindo de forma indefinida em uma, duas ou três dimensões conforme a periodicidade da constante dielétrica ao longo dos eixos de coordenadas dessas estruturas, ou seja, se a constante dielétrica for periódica em uma direção e uniforme nas demais temos cristais fotônicos unidimensionais, periódica em um plano e uniforme na terceira direção (cristais fotônicos bidimensionais), ou periódica em todas as três direções (cristais fotônicos tridimensionais).

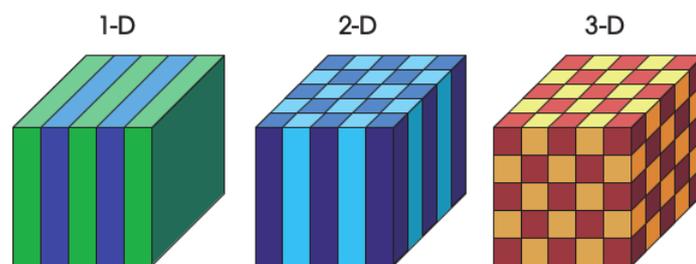


Figura 1 – Estruturas em 1,2 e 3 dimensões de um PHC. As cores alternadas representam os diferentes índices de refração. Imagem adaptada de [18].

As propriedades ópticas dessas estruturas podem ser observadas na natureza em diferentes formas como por exemplo na asa da borboleta de espécie *Amorpha Menelaus* cujas asas são formadas por uma rede periódica porosa que concede a elas um tom azulado. [18, 2]:

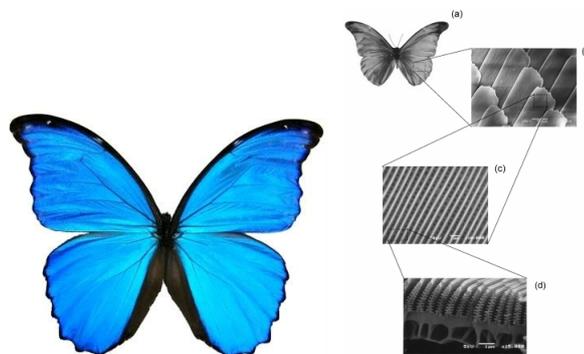


Figura 2 – Blue Morpho (a). Aspecto superficial da disposição das escamas (b); Estrutura corrugada de uma escama (c); Lateral da estrutura escalonada das calhas que compõem a escama (d). Imagem adaptada de [2]

O interessante em cristais fotônicos artificiais é que como são materiais construídos por seres humanos, podem ter sua simetria e geometria previamente definidas, diferentemente dos cristais naturais que por serem formados por arranjos de átomos possuem suas geometrias determinadas pela natureza dos elementos que os compõe [29]. Nestas estruturas fotônicas não é permitido a passagem de corrente elétrica através dos dielétricos de modo que é permitido apenas a passagem da luz e das demais formas de radiação eletromagnética através desses materiais. Todavia, a fabricação dessas estruturas não é uma tarefa muito simples.

O fato dos cristais fotônicos apresentarem uma periodicidade na permissividade elétrica, é possível observar que o comportamento dos fótons nos cristais fotônicos é semelhante ao comportamento dos elétrons nos semicondutores pois a periodicidade da rede de ambos provoca o aparecimento de um gap na estrutura de bandas 3, 4. Sendo assim, para a estrutura cristalina eletrônica, o band gap representa o intervalo de energia inacessível à partícula dentro da estrutura; já para os cristais fotônicos o band gap representa o intervalo no qual uma determinada faixa de modos eletromagnéticos é proibido, ou seja, quando a luz atravessa um cristal fotônico as constante da rede determinam quais são os modos eletromagnéticos que irão se propagar e quais serão impedidos de atravessar o material. Neste contexto, as regiões que não permitem a passagem da luz através do material são chamadas pela literatura de gap fotônico desde 1887 com o trabalho de Lord Rayleigh [25]. Desta maneira, temos a formação de uma estrutura de banda fotônica 4 (independente da dimensão do cristal) similar as estruturas de banda nos semicondutores onde na figura 4 o eixo horizontal corresponde ao vetor de onda da radiação e o eixo vertical representa as frequências de ressonância do meio.

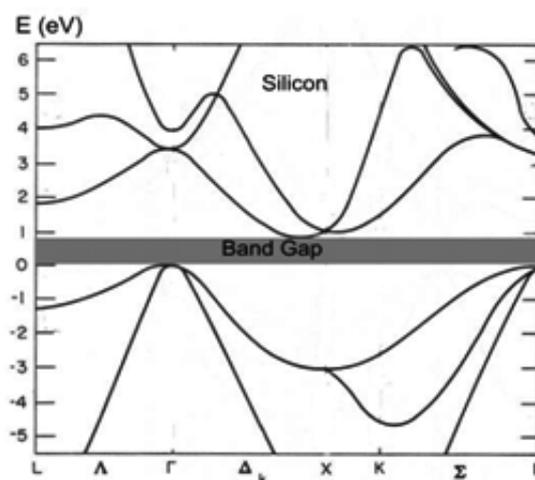


Figura 3 – Diagrama de banda do semicondutor (Si).

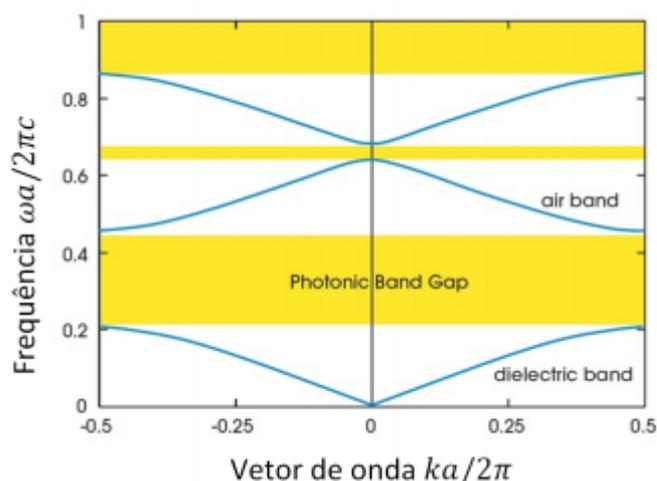


Figura 4 – Diagrama de banda de um cristal fotônico.

No geral, a estrutura de bandas fornece o maior número de informações sobre as propriedades do cristal. No caso fotônico, as estruturas de bandas nos dá a relação das propriedades da radiação eletromagnética com as propriedades do meio óptico onde é possível alterar o tamanho do gap fotônico variando apenas os parâmetros estruturais da rede. Existem outras maneiras de alterar o tamanho do gap, por exemplo, adicionando defeitos nessas estruturas da mesma forma que o doping altera o gap da banda eletrônica. Este feito nos possibilita manipular a luz assim como os semicondutores controlam o fluxo de correntes elétricas nos materiais. Apesar dos cristais eletrônicos e fotônicos apresentarem muitas similaridades, existem algumas diferenças fundamentais, por exemplo, os elétrons (partículas) obedecem à equação de Schrödinger, enquanto que no contexto de ondas eletromagnéticas os fótons obedecem às equações vetoriais de Maxwell. Além disso, elétrons são afetados pelo campo intra-cristalino, que necessariamente deve ser levado em conta nos cálculos [15] já os fótons não são afetados pelo campo intra-cristalino. Por esse motivo, o cálculo da estrutura de bandas fotônica é consideravelmente mais "simples".

Embora, os cristais fotônicos seja um sistema com propriedades básicas muito bem estabelecidas, a criação de defeitos nessas estruturas que podem ser pontuais ou lineares têm permitido grandes aplicações na tecnologia. O processo de criação de defeitos nessas estruturas é caracterizado pela quebra de simetria da rede na qual permite que a luz com comprimentos de onda proibido se propague no interior dessas irregularidades [8]. Dessa forma, se o defeito for pontual teremos uma cavidade onde teremos luz confinada sendo este processo útil na construção de dispositivos para confinamento de luz como solução para melhorar sensores que detectam força e movimento [27], e se o defeito for linear, teremos um guia de onda, como por exemplo, as fibras microestruturadas de núcleo sólido ou fibras vazadas constituídas por capilares de sílica onde o defeito nestas estruturas se dá através da retirada de sete capilares centrais formando um núcleo de ar, violando assim a

periodicidade da estrutura. Com isso, é possível guiar a luz numa região composta apenas por ar. Neste caso, tal objetivo foi alcançado em 1999 pelo grupo de J. C. Knight [5]. Sendo assim, estas fibras podem guiar a luz de maneira suave com poucas perdas de energia [17] evitando o efeito dispersivo e a absorção óptica presentes na sílica sendo estes de grande aplicação nas áreas como telecomunicações, medicina, meteorologia e desenvolvimento de sensores [4], etc.

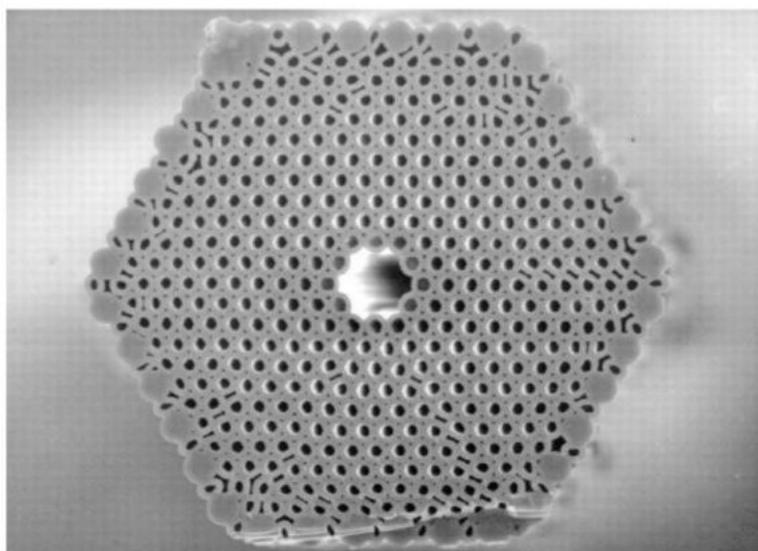


Figura 5 – Cristal fotônico bidimensional com defeito. Imagem adaptada de [8]

Graças a possibilidade de inserção de defeitos nessas estruturas, somos capazes de construir dispositivos fotônicos de grande potencial tecnológico.

O propósito deste capítulo será apresentar uma descrição da interação da luz em estruturas periódicas apontando conceitos e definições básicas da física dos cristais fotônicos e da eletrodinâmica envolvida. Para isso, começaremos por descrever de forma geral a equação de onda num meio em que suas constantes dielétricas e as permissividades magnéticas variam com a posição. Em seguida, faremos uma análise do problema do cristal fotônico unidimensional onde as constantes dielétricas e as permissividades magnéticas da equação de onda são constantes. Analisaremos também as estruturas de bandas deste sistema.

1.1 Propagação de Ondas Eletromagnéticas em Meios Periódicos

1.1.1 Equação de Onda para Meios não Homogêneos

Desde 1864 fenômenos eletromagnéticos macroscópicos como a luz são descritos pelas quatro equações de Maxwell. Nesta seção, estamos interessados do ponto de vista teórico em estudar a propagação da luz (ondas eletromagnéticas) em meios periódicos,

onde não haja cargas e correntes livres $\rho = 0$ e $J = 0$. Assumindo essas considerações temos que, as quatro equações macroscópicas de Maxwell podem ser escritas como [10]:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) = 0, \quad (1.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0, \quad (1.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\partial_t \vec{B}(\vec{r}, t), \quad (1.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \partial_t \vec{D}(\vec{r}, t). \quad (1.4)$$

Devido a linearidade dos meios que estamos considerando temos que as relações constitutivas para tais meios são dadas da seguinte forma:

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \epsilon(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}, t), \quad (1.5)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \mu(\vec{r}) \vec{H}(\vec{r}, t). \quad (1.6)$$

onde $\vec{D}(\vec{r}, t)$ é o deslocamento do campo elétrico, $\vec{E}(\vec{r}, t)$ é o campo elétrico, $\vec{B}(\vec{r}, t)$ é o campo magnético, $\vec{H}(\vec{r}, t)$ é a intensidade do campo magnético, $\epsilon_0 = 8,85418782 \times 10^{-12} F.m^{-1}$ é a permissividade elétrica, $\mu_0 = 1,2566 \times 10^{-6} H.m^{-1}$ é a permeabilidade magnética do vácuo, $\epsilon(\vec{r})$ é a permissividade elétrica relativa do meio e $\mu(\vec{r})$ é a permeabilidade magnética relativa do meio que depende do espaço. A constante dielétrica e magnética do sistema físico que estamos considerando é real e positiva. Como as equações de Maxwell são equações ordinárias de segunda ordem, a solução das ondas planas para essas equações são definidas por uma parte espacial vezes um exponencial complexo do tipo [10]:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) e^{(-i\omega t)}, \quad (1.7)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}(\vec{r}) e^{(-i\omega t)}. \quad (1.8)$$

onde ω é a frequência. Substituindo estas soluções nas equações (1.3) e (1.4) e usando as relações constitutivas (1.5) e (1.6), temos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\mu_0 \mu(\vec{r}) \partial_t \vec{H}(\vec{r}, t) \quad (1.9)$$

$$e^{(-i\omega t)} [\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r})] = [i\omega \mu_0 \mu(\vec{r}) \vec{H}(\vec{r})] e^{(-i\omega t)} \quad (1.10)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = i\omega \mu_0 \mu(\vec{r}) \vec{H}(\vec{r}) \quad (1.11)$$

e

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \epsilon(\vec{r}) \partial_t \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (1.12)$$

$$e^{(-i\omega t)} [\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r})] = [-i\omega \epsilon_0 \epsilon(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r})] e^{(-i\omega t)} \quad (1.13)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) = -i\omega \epsilon_0 \epsilon(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) \quad (1.14)$$

Assim, encontramos duas equações as quais estão relacionadas ao rotacional de $\vec{E}(\vec{r})$ e $\vec{H}(\vec{r})$ o que está de acordo com o critério de transversalidade [10], ou seja, no formato vetorial da luz a oscilação do campo elétrico e magnético são perpendiculares entre si e entre à direção de propagação da onda representada por \vec{k} .

Isolando então $\vec{E}(\vec{r})$ na equação (1.14), teremos assim:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{i}{\omega \epsilon_0 \epsilon(\vec{r})} \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}). \quad (1.15)$$

Substituindo a equação (1.15) em (1.11):

$$\frac{i}{\omega \epsilon_0} \vec{\nabla} \times \left[\frac{1}{\epsilon(\vec{r})} \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) \right] = i\omega \mu_0 \mu(\vec{r}) \vec{H}(\vec{r}) \quad (1.16)$$

$$\vec{\nabla} \times \left[\frac{1}{\epsilon(\vec{r})} \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) \right] = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \mu(\vec{r}) \vec{H}(\vec{r}) \quad (1.17)$$

$$\vec{\nabla} \times \left[\frac{1}{\epsilon(\vec{r})} \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) \right] = \frac{\omega^2}{c^2} \mu(\vec{r}) \vec{H}(\vec{r}) \quad (1.18)$$

De modo análogo, isolando $\vec{H}(\vec{r})$ na equação (1.11), temos:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{-i}{\omega \mu_0 \mu(\vec{r})} \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) \quad (1.19)$$

Substituindo a equação (1.19) em (1.14) temos a equação geral da onda para $\vec{E}(\vec{r})$:

$$\vec{\nabla} \times \left[\frac{1}{\epsilon(\vec{r})} \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) \right] = \frac{\omega^2}{c^2} \mu(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) \quad (1.20)$$

Sendo assim, obtemos de forma geral a equação de onda para meios dependentes da posição. Note que as constantes ϵ_0 e μ_0 foram ajustadas para produzir a velocidade do vácuo da luz, $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$.

Agora, temos que adaptar as equações (1.18) e (1.20) a um cristal fotônico unidimensional e resolve-las com suas devidas condições de contorno para podermos compreender como a onda eletromagnética se propaga nestas estruturas. Mas antes disso, iremos estudar o teorema de Bloch o qual é fundamental para análise de regiões periódicas.

1.1.2 Teorema de Bloch

Nesta seção, estamos interessados numa abordagem qualitativa sobre o Teorema de Bloch e portanto, muitas demonstrações não serão feitas. Considere um sistema não magnético, constituídos por uma constante dielétrica $\epsilon(\vec{r})$ e comprimento a periódico:

$$\epsilon(\vec{r}) = \epsilon(\vec{r} + \vec{R}_i), i = 1, 2, 3 \quad (1.21)$$

Dessa forma, a solução da equação (1.18) para as regiões periódicas é a solução de Bloch descrita na sua forma geral:

$$\vec{H}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\vec{r}} \vec{u}_{n,\vec{k}}(\vec{r}) \quad (1.22)$$

Assim a equação de onda, torna-se:

$$\vec{\nabla} \times \left[\frac{1}{\epsilon(\vec{r})} \vec{\nabla} \times e^{i\vec{k}\vec{r}} \vec{u}_{n,\vec{k}}(\vec{r}) \right] = \frac{\omega_n^2(\vec{k})}{c^2} e^{i\vec{k}\vec{r}} \vec{u}_{n,\vec{k}}(\vec{r}) \quad (1.23)$$

Onde $\omega_n(\vec{k})$ são os autovalores e $\vec{u}_{n,\vec{k}}$ é uma função periódica. A célula primitiva é considerada finita se \vec{k} for periódico em todas as direções, isso significa que temos um sistema confinado levando a autovalores discretizados por $n = 1, 2, 3, \dots$. Esses autovalores $\omega_n(\vec{k})$ são funções contínuas de \vec{k} e formam estrutura de bandas relacionada as frequências dos modos eletromagnéticos quando plotadas graficamente em relação ao número de ondas. Assim, em uma estrutura de banda tanto ω quanto \vec{k} são quantidades que se conservam, isso significa que uma estrutura de banda mapeia todas as possíveis interações no sistema. Além disso, a solução em \vec{k} é a mesma que uma solução em $\vec{k} + \vec{G}_j$ onde \vec{G}_j é um vetor primitivo da rede recíproca definido por $\vec{R}_i \cdot \vec{G}_j = 2\pi\delta_{i,j}$. Graças ao Teorema de Bloch podemos restringir a análise do sistema apenas a uma região denominada de primeira zona de Brillouin. Para o caso de um sistema unidimensional teremos que $\vec{R}_1 = a$ e $\vec{G}_1 = \frac{2\pi}{a}$ e

a primeira zona de Brillouin é a região em que $k = \frac{-\pi}{a} \dots \frac{\pi}{a}$. Todos os outros vetores de ondas são equivalentes a algum ponto desta zona sob translação por um múltiplo de G_1 . As estruturas de bandas para guias de onda uniformes surgem como um caso especial do formalismo de Bloch: a simetria translacional corresponde a um período em que $a \rightarrow 0$. Neste caso, a zona de Brillouin do vetor de onda k é ilimitada, e a função $\vec{u}_{n,\vec{k}}$ é uma função apenas das coordenadas transversais [11].

1.1.3 Cristais Fotônicos Unidimensionais

Nesta seção, apresentaremos um estudo baseado no trabalho de dissertação de Vieira (2010) [32] sobre cristais fotônicos unidimensionais onde será feito um tratamento analítico da incidência dos modos eletromagnéticos num meio periódico simples constituído por placas alternadas com constantes dielétricas ϵ_1 e ϵ_2 periódicas em 1D ao longo do eixo z . Sendo assim, considere um sistema em que a onda eletromagnética incidente no meio periódico seja com direção de propagação perpendicular ao plano das placas do cristal (incidência normal) $\vec{k} = k\hat{z}$ e $\vec{r} = z\hat{z}$:

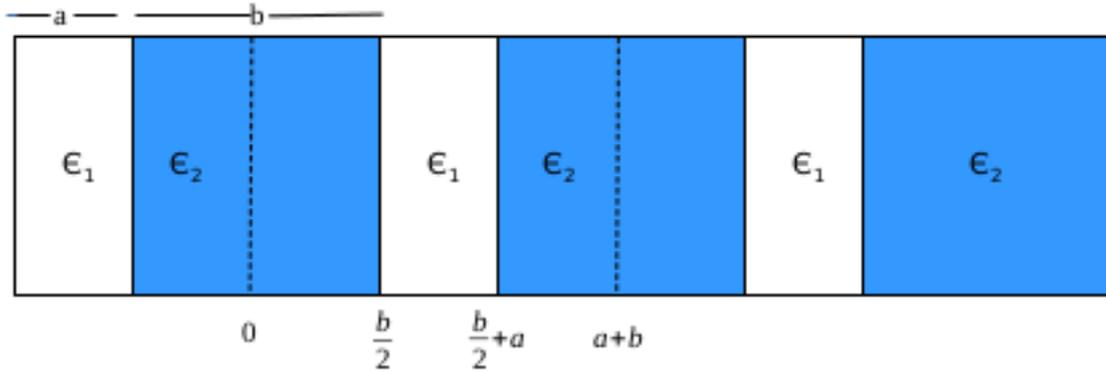


Figura 6 – Estruturas em 1 dimensões de um PHC. As cores alternadas representam os diferentes índices de refração. Imagem adaptada de [32].

Devido a periodicidade, podemos caracterizar o sistema tomando apenas os valores de z restritos a célula unitária, ou seja, valores que pertencem unicamente a região compreendida entre $0 \leq z \leq (a+b)$. Por causa disso, os modos eletromagnéticos satisfazem o Teorema de Bloch [15, 11]:

$$\vec{H}(z) = e^{ikz} \vec{u}_k(z) \quad (1.24)$$

$$\vec{E}(z) = e^{ikz} \vec{u}_k(z) \quad (1.25)$$

onde k está associado ao momento cristalino da onda, $\vec{u}_k(z)$ é a função periódica que possui a mesma periodicidade que o cristal e a exponencial e^{ikz} pode ser vista como uma representação da onda plana.

Considerando agora as possíveis projeção do vetor \vec{E} e \vec{H} sobre o plano xy e desenvolvendo matematicamente a equação de onda (1.18) para meios homogêneos que são as regiões sem interfaces compreendidas entre $\frac{b}{2} \leq z \leq \frac{b}{2} + a$, temos:

$$\vec{E}(z) = E(z)\hat{x}, \quad (1.26)$$

$$\vec{H}(z) = H(z)\hat{y}. \quad (1.27)$$

$$\vec{\nabla} \times \left[\frac{1}{\epsilon} \vec{\nabla} \times \vec{H}(z) \right] = \frac{\omega^2}{c^2} \mu \vec{H}(z), \quad (1.28)$$

Usando a propriedade do rotacional:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \left[\frac{1}{\epsilon} \vec{\nabla} \times \vec{H}(z) \right] &= \vec{\nabla} [\vec{\nabla} \cdot \vec{H}(z)] - \vec{\nabla}^2 \vec{H}(z), \\ \vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{H}(z)] &= -\epsilon \vec{\nabla}^2 \vec{H}(z), \end{aligned} \quad (1.29)$$

Temos:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 \vec{H}(\vec{r}) &= -\frac{\omega^2}{c^2} \mu \epsilon \vec{H}(z) \\ \vec{\nabla}^2 \vec{H}(z) + \frac{\omega^2}{c^2} \mu \epsilon \vec{H}(z) &= 0. \end{aligned} \quad (1.30)$$

onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o vetor Laplaciano operando no campo vetorial $\vec{H}(z)$. Assim:

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{\partial^2 H(z)}{\partial x^2}}_0 + \underbrace{\frac{\partial^2 H(z)}{\partial y^2}}_0 + \frac{\partial^2 H(z)}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \mu \epsilon H(z) &= 0 \\ \frac{d^2 H(z)}{dz^2} + \frac{\epsilon \mu}{c^2} \omega^2 H(z) &= 0 \end{aligned} \quad (1.31)$$

De modo análogo, obtemos a equação de onda para $\vec{E}(\vec{r})$:

$$\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r})] = -\epsilon \vec{\nabla}^2 \vec{E}(\vec{r}), \quad (1.32)$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E}(\vec{r}) + \frac{\omega^2}{c^2} \mu \epsilon \vec{E}(\vec{r}) = 0. \quad (1.33)$$

Temos:

$$\frac{d^2 E(z)}{dz^2} + \frac{\epsilon\mu}{c^2} \omega^2 E(z) = 0 \quad (1.34)$$

Vamos agora impor as condições de contorno nas equações (1.24), (1.25) (1.31) e (1.34). Temos dois tipos de condições de contorno:

- Condições de Bloch:

$$\vec{H}(a+b) = e^{ik(a+b)} \vec{E}(0), \quad (1.35)$$

$$\vec{E}(a+b) = e^{ik(a+b)} \vec{E}(0). \quad (1.36)$$

- Condição de interface:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \vec{E}(a/2 + \delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \vec{E}(a/2 - \delta) \quad (1.37)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \vec{H}(a/2 + \delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \vec{H}(a/2 - \delta) \quad (1.38)$$

Obtemos uma equação característica que depende dos parâmetros do sistema. O desenvolvimento matemático desta equação pode ser visto em [32]:

$$\cos(k(a+b)) = \cos(q_1 a) \cos(q_2 b) + \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{I_2}{I_1}} + \sqrt{\frac{I_1}{I_2}} \right] \sin(q_1 a) \sin(q_2 b) \quad (1.39)$$

onde $q_1 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}$, $q_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}$, $I_1 = \frac{\mu_1}{\epsilon_1}$, $I_2 = \frac{\mu_2}{\epsilon_2}$ sendo que I_1 e I_2 representa a impedância do sistema, a e b são os parâmetros estruturais do cristal, ou seja, é o tamanho das placas.

Observe₁: A equação transcendental nos dá a relação de dispersão entre a frequência e o vetor de onda.

Observe₂: A solução para o nosso sistema depende das condições de contorno e estas são dadas no ponto. Sendo assim, no ponto $z = 0$ e $z = (a+b)$ nós temos ϵ_2 e nos pontos $z = \frac{b}{2}$ e $z = \frac{b}{2} + a$ nós temos ϵ_1 , por causa disso, as equações de ondas (1.31) e (1.34) são para meios homogêneos.

O membro esquerdo desta relação é limitado entre -1 e 1 . Por causa disso, a frequência $\omega(k)$ não pode assumir qualquer valor sendo restrito a valores permitidos e proibidos pela relação de dispersão (1.39). Dessa forma, surgem as bandas de frequência permitidas e proibidas.

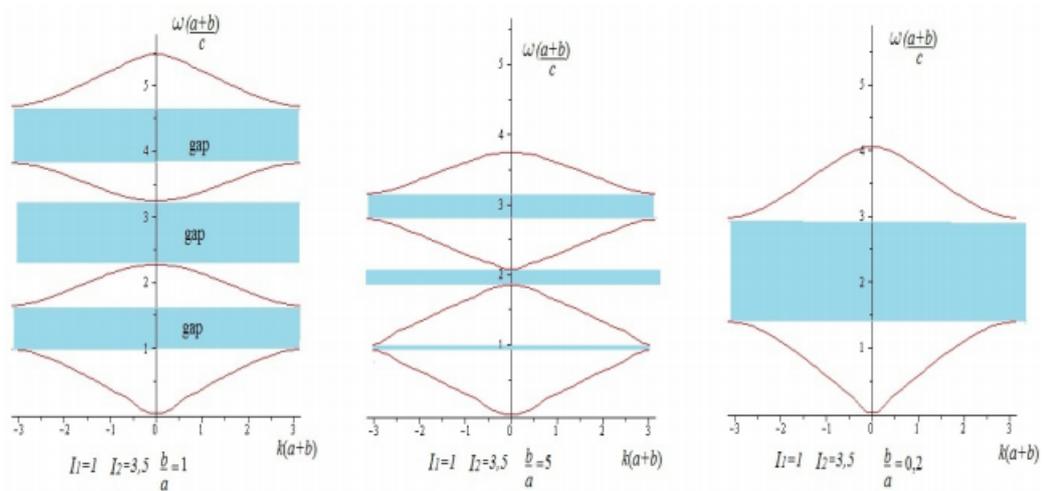


Figura 7 – Estrutura de banda num cristal fotônico unidimensional. Imagem adaptada de [32].

Na figura 7 é possível observar que a largura do gap obtida por Vieira (2010) [32] depende da variação dos parâmetros estruturais do cristal fotônico representado pelas letras a e b . Se a relação $\frac{b}{a}$ aumenta implica que $b > a$, ou seja, aumentamos a largura da placa da cor azul e conseqüentemente temos uma redução na largura dos gaps. Na ilustração, esse efeito pode ser observado para $\frac{b}{a} = 5$. Já no caso em que $\frac{b}{a}$ diminui implica que $b < a$, assim aumentamos a largura da placa da cor branca aumentando assim a resistência do cristal a propagação de luz e conseqüentemente temos que a largura dos gaps aumentam como é mostrado na ilustração do gráfico para $\frac{b}{a} = 0,2$.

2 CRISTAIS AXIONICOS

Neste capítulo, o nosso principal objetivo é fazer uma breve revisão sobre isolantes topológicos, apontando a diferença que existe na estrutura eletrônica de um isolante comum e um isolante topológico, bem como discutir seu grande potencial na aplicação tecnológica. Depois de uma explicação sobre o que torna alguns isolantes "topológicos", nosso interesse será fazer uma revisão dos artigos de Ozaki e Yamamoto (2017) [21] e Sergeenkov, Furtado e Vieira (2017) [31] onde apresentaremos um estudo da propagação da luz em um tipo de cristal formado por isolantes topológicos cujo parâmetro topológico é caracterizado por um termo axionico ou $\theta(\vec{r})$.

2.1 Isolantes Topológicos

Nos últimos anos, uma nova classe da matéria de interesse atual e que tem sido estudada por diversas linhas de pesquisa é a dos estados topológicos da matéria. Sabe-se que a maior parte dos estados da matéria são caracterizados pela quebra de simetria translacional, rotacional e simetria de gauge. Um exemplo simples desse fenômeno é a cristalização da água em gelo onde a quebra de simetria é translacional. No entanto, uma grande descoberta nos anos 80 um século após a descoberta do Efeito Hall, Klaus von Klitzing, G.Dorda e M.Pepper mostrou experimentalmente que uma quantidade de elétrons em duas dimensões num semiconductor á baixa temperatura e sujeitos a um forte campo magnético, semelhante ao que acontece no Efeito Hall apresenta um tipo de estado da matéria completamente diferente dos estados conhecidos até então. Estes estados estão associado ao Efeito Hall Quântico (EHQ) [19, 16] que é um efeito que ocorre devido ao forte campo magnético onde os elétrons são separados espacialmente e migram para as bordas superior e inferior da amostra formando um canal de tráfego em diferentes direções, assim surge uma corrente elétrica que passa a ser transportada ao longo das bordas desta amostra com fluxo em apenas uma direção (unidirecional) e não apresenta dissipação, enquanto que o interior da mesma se comporta como um isolante. Porém, diferente do que acontecia no Efeito Hall, a condutividade transversal da amostra não apresentava um comportamento linear com a variação do campo magnético, a mesma passava a ser quantizada em níveis de $\frac{e^2}{h}$. Por causa disso, este novo efeito foi denominado de Efeito Hall Quântico, para o qual a condutividade transversal σ_{xy} passa a ser discretizado $\sigma_{xy} = n \frac{e^2}{h}, n = 1, 2, 3...$ Os estados associado ao Efeito Hall Quântico também chamados de estados de borda não apresentam quebra de simetria (simetria translacional, rotacional e simetria de gauge), mas apresentam quebra de simetria de reversão temporal (TR) de forma explicita onde os elétrons nas bordas não podem mudar o seu estado de movimento. Recentemente, foi descoberto uma

nova classe de estados da matéria chamado de Isolantes Hall Quântico de Spin (IQHS) ou Isolante Topológico Bidimensionais (IT) [20]. Embora essa nova classe de estado seja muito semelhante ao estado Hall Quântico, eles se diferem em alguns aspectos. Em particular, para se observar o estados Hall Quântico é necessário aplicar na amostra um forte campo magnético externo ao qual produz uma quebra de simetria de reversão temporal (TR), do contrário, os estado IQHS são invariantes por simetria de reversão temporal (TR) e não necessita de um campo magnético externo para ser observado, mas é possível obtê-lo em certos modelos teóricos por meio de uma junção da simetria de reversão temporal e uma forte interação (acoplamento) spin-órbita. Essa interação spin-órbita forma quatro canais de spins de diferentes orientações nas bordas da amostra consistindo de um número ímpar de movimentos para frente (para cada estado de spin) e um número ímpar de movimentos para trás (para cada estado de spin) [24]. Esses estados são classificados pelo número Z_2 [12]. O número Z_2 implica que sistemas invariantes por reversão temporal tem duas fases uma é o isolante comum, enquanto que a outra é o isolante topológico [9], ou seja, são materiais que são isolantes em seu interior (semelhante a um isolante comum), mas podem suportar um fluxo de elétrons em sua superfície devido à ordem topológica (semelhante a um condutor). Este efeito foi observado pela primeira vez em filmes de HgTe [26, 13].

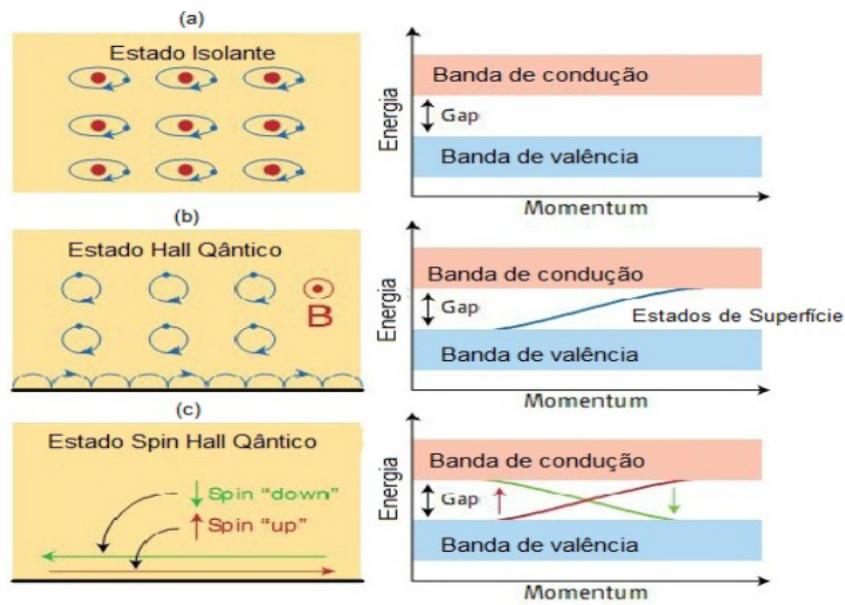


Figura 8 – Estados eletrônicos de um isolante comum e de isolantes topológicos. Imagem adaptada de [32].

A figura 8 ilustra a estrutura eletrônica de um isolante comum na qual é caracterizado por um gap entre as banda de valência e a banda de condução, na sequência temos um sistema que apresenta o efeito Hall quântico na qual se difere de um isolante comum pelo surgimento de estados de superfície condutores que possuem um único cruzamento entre a banda de condução e a banda de valência de modo que nas bordas do sistema os elétrons se

movimentam de um jeito diferente dos elétrons que se encontram no interior, essa diferença é devido as órbitas dos elétrons das bordas não se fecharem e portanto saltam de uma órbita para a outra. Por causa desses saltos, surgem os estados eletrônicos que se propagam pelas bordas do sistema em apenas uma direção. Sendo assim, o sistema que representa o isolante topológico também se caracteriza por apresentar estados de superfície condutores um número ímpar de cruzamentos entre a banda de condução e a banda de valência dando origem a cones de Dirac. A existência de uma superfície metálica nos isolantes topológicos nos permite ter o controle da magnetização ao aplicar um campo elétrico ou uma polarização ao aplicar um campo magnético, este mesmo efeito magnetoelétrico foi observado nos estudos dos Axions. Sendo assim, do ponto de vista eletrodinâmico o Axion pode ser considerado como um isolante topológico.

O termo axionico surgiu no contexto da física de altas energias na tentativa de resolver o problema carga-paridade (CP) da cromodinâmica quântica (QCD) sendo este conhecido pelos físicos de partículas como campo axionico. Assim, a ação do campo axionico uniforme pode ser vista como um termo topológico na QCD [30].

Muitos grupos de pesquisas tem se interessado no estudo de isolantes topológicos, com a grande perspectiva na aplicação tecnológica. Os efeitos topológicos encontrado em IT's contribuem para aplicação em dispositivos de alta velocidade, uma vez que devido as dispersões lineares dos estados de condução podem apresentar uma alta mobilidade, além de contribuírem para aplicação de novos dispositivos spintrônicos ou magnetoelétricos. Um deles trata-se da obtenção de dispositivos na escala nanométricas, onde se pode produzir nanofitas e nanofaixas [28].

2.2 Propagação de Ondas Eletromagnéticas em Meio Axionico

Nesta secção, faremos uma revisão do artigo de Ozaki e Yamamoto (2017) [21] onde apresentaremos um estudo da propagação de Ondas Eletromagnéticas em meio Axionico. Usaremos aqui as seguintes unidades $\hbar = c = e = 1$.

2.2.1 Eletrodinâmica do Axion

Estamos interessados aqui na descrição da equação de Maxwell apresentada no capítulo 1 modificada por um termo axionico $\theta(x)$ com o objetivo de estudar a propagação da luz nesse tipo de meio, onde não haja cargas e correntes livres $\rho = 0$ e $J = 0$. Para isto, vamos primeiro relembrar o eletromagnetismo clássico derivado da densidade lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{\epsilon}{2} \vec{E}^2(\vec{r}, t) - \frac{1}{2\mu} \vec{B}^2(\vec{r}, t) + J^\mu A_\mu \quad (2.1)$$

onde J^μ é a densidade de corrente elétrica e A_μ é o campo escalar.

Em 1987, Wilczek [36] estudou a eletrodinâmica dos axions adicionando uma lagrangiana que depende do parâmetro θ a lagrangiana de Maxwell de forma que teremos uma descrição da densidade lagrangiana efetiva para sistemas de baixas energias envolvendo IT's:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{0+\theta} &= \frac{\epsilon}{2}\vec{E}^2 - \frac{1}{2\mu}\vec{B}^2 + J^\mu A_\mu + \underbrace{\left(\frac{e^2}{2\pi\hbar c}\right)\theta\vec{B}(\vec{r},t) \cdot \vec{E}(\vec{r},t)}_{\text{Axion}} \\ \mathcal{L}_{0+\theta} &= \frac{\epsilon}{2}\vec{E}^2 - \frac{1}{2\mu}\vec{B}^2 + J^\mu A_\mu + \frac{\theta}{4\pi^2}\vec{B}(\vec{r},t) \cdot \vec{E}(\vec{r},t)\end{aligned}\quad (2.2)$$

onde θ é o parâmetro topológico e $\frac{e^2}{2\pi\hbar c} = \frac{1}{4\pi^2} = \alpha$ é a constante de estrutura fina, e é a carga do elétron, $\hbar = 2\pi\hbar$ a constante de Planck, c a velocidade da luz no vácuo.

Considere agora a quantização da integral do caminho [30] da teoria (2.2):

$$S_\theta = \int \mathcal{L}_\theta d^4x \quad (2.3)$$

$$S_\theta = \frac{1}{4\pi^2} \int d^4x \vec{E} \cdot \vec{B} \quad (2.4)$$

$$\frac{1}{4\pi^2} \int d^4x \vec{E} \cdot \vec{B} = n, \text{ ninteiro} \quad (2.5)$$

Esta quantidade é sempre um múltiplo inteiro n de θ quando integrada sobre todo espaço-tempo $\theta(t, \vec{x})$, $\frac{iS}{\hbar} = n\theta$. A quantização da integral do caminho mostra que todas as grandezas físicas deste modelo é invariante se fizermos uma mudança $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$ (transformação de Gauge) [30]. Devido a essa periodicidade, se fizermos $\theta = -\pi$ e $\theta = \pi$ veremos que são equivalentes. Sob reversão temporal, os campos eletromagnéticos são transformados da seguinte forma: $\vec{E} \xrightarrow{\mathcal{T}} \vec{E}$, $\vec{B} \xrightarrow{\mathcal{T}} -\vec{B}$ e o campo axionico transforma-se como $\theta \xrightarrow{\mathcal{T}} -\theta$. A simetria é quebrada para qualquer θ [21].

A seguir, iremos considerar os meios não dispersivos descritos pela eletrodinâmica do axion (2.2) com o termo θ que representa um campo axionico [21] dependente apenas do espaço, $\theta = \theta(x)$, e as quantidades ϵ e μ chamadas de permissividade e permeabilidade que não dependem do espaço. Posteriormente, iremos considerar um $\theta(x)$ específico.

Assim, as equações de Maxwell modificada é representada da seguinte forma [36]:

$$\epsilon \nabla \cdot \vec{E} = -\frac{1}{2\pi^2} \vec{\nabla} \theta \cdot \vec{B}, \quad (2.6)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.7)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \quad (2.8)$$

$$\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon \partial_t \vec{E} + \frac{1}{2\pi^2} \vec{\nabla} \theta \times \vec{E}, \quad (2.9)$$

Tomando a equação (2.8) e multiplicando por $\vec{\nabla}$ pelo lado direito e esquerdo, temos:

$$-\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.10)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad (2.11)$$

Usando a identidade vetorial do lado esquerdo da equação (2.11):

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times A) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot A) - \vec{\nabla}^2 A \quad (2.12)$$

Temos:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} \quad (2.13)$$

Assim, a equação (2.11) torna-se:

$$-\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) + \vec{\nabla}^2 \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \quad (2.14)$$

Tomando a equação (2.6) e (2.9), temos:

$$\begin{aligned} -\vec{\nabla} \left[\frac{1}{2\pi^2\epsilon} \vec{\nabla}\theta \cdot \vec{B} \right] + \vec{\nabla}^2 \vec{E} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} + \frac{\mu}{2\pi^2} \vec{\nabla}\theta \times \vec{E} \right] \\ \vec{\nabla}^2 \vec{E} &= \mu \left[\epsilon \partial_t^2 \vec{E} + \frac{1}{2\pi^2} \partial_t(\vec{\nabla}\theta \times \vec{E}) \right] \\ \frac{1}{\epsilon\mu} \vec{\nabla}^2 \vec{E} &= \left[\partial_t^2 \vec{E} + \frac{1}{2\pi^2\epsilon} \partial_t(\vec{\nabla}\theta \times \vec{E}) \right] \end{aligned} \quad (2.15)$$

As equações de Maxwell sugerem a propagação de onda eletromagnética no meio viajando a uma velocidade $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$. Assim a equação de movimento é:

$$\begin{aligned} v^2 \vec{\nabla}^2 \vec{E} &= \partial_t^2 \vec{E} + \frac{1}{2\pi^2} \vec{\nabla}\theta \times \partial_t \vec{E} \\ \partial_t^2 \vec{E} &= v^2 \vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{1}{4\pi^2} \vec{\nabla}\theta \times \partial_t \vec{E}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Considerando a propagação do fóton na direção z e assumindo que $\theta(z)$ tem dependência em z . Temos que as equações acopladas para E_x e E_y são:

$$\partial_t^2 E_x(t, z) - v^2 \partial_z^2 E_x(t, z) - \frac{\partial_z \theta(z)}{2\pi^2 \epsilon} \partial_t E_y(t, z) = 0, \quad (2.17)$$

$$\partial_t^2 E_y(t, z) - v^2 \partial_z^2 E_y(t, z) + \frac{\partial_z \theta(z)}{2\pi^2 \epsilon} \partial_t E_x(t, z) = 0. \quad (2.18)$$

Uma vez que $E_y = \pm i E_x$ esses vetores de polarização correspondem ao estado de polarização circular do fóton "a esquerda"(sinal+) e a "direita"(sinal-) o qual correspondem a estados de helicidade do fóton positivo $+1$ e negativo -1 ($h = \pm 1$) [6], as equações (2.17) e (2.18) tornam-se:

$$\partial_t^2 E_x(t, z) - v^2 \partial_z^2 E_x(t, z) \pm i \frac{\partial_z \theta(z)}{2\pi^2 \epsilon} \partial_t E_x(t, z) = 0, \quad (h = \pm 1). \quad (2.19)$$

A simetria de translação temporal nos permite tomar a transformada de Fourier no tempo. O calculo detalhado da equação (2.19) se encontra no Apêndice A.1:

$$\omega^2 E_x(z) + v^2 \partial_z^2 E_x(z) \pm \frac{\partial_z \theta(z)}{2\pi^2 \epsilon} \omega E_x(z) = 0 \quad (h = \pm 1) \quad (2.20)$$

onde ω é a frequência. Portanto, para uma dada configuração de $\partial_z \theta(z)$ obtemos a equação que determina o comportamento de $E_x(z)$ (e similarmente $E_y(z)$).

2.3 Estrutura de Banda em Cristais Axionicos

Na eletrodinâmica do axion o estudo da estrutura de banda dos fótons é análogo ao cálculo da estrutura de banda dos elétrons para um potencial periódico. Aqui mostraremos um tratamento analítico do estudo da estrutura de banda dos fótons para um "potencial do tipo Kronig-Penney unidimensional". Posteriormente, tomaremos o limite $b \rightarrow 0$ e $c \rightarrow \infty$ tal que $bc = \pi$. Neste caso, o "potencial" $\partial_z \theta(z)$ é expresso como:

$$\partial_z \theta(z) = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(z - na). \quad (2.21)$$

onde a é periódico e $n = 1, 2, 3, \dots$

A ilustração do comportamento de $\theta(z)$ e $\partial_z \theta(z)$ podem ser vistas nas figuras 9 e 10. A configuração do parâmetro periódico axionico $\theta(z)$ é do tipo escada onde para isolantes comuns $\theta(z)$ apresenta uma regularidade em $2n\pi$ com $n \in \mathbb{Z}$ e para isolantes topológicos $\theta(z) = (2n + 1)\pi$ para ϵ e μ iguais. Já na configuração do potencial $\partial_z \theta(z)$ temos um comportamento semelhante ao formulado em 1931 pelos físicos Ralph Kronig e William George Penney para descrever os estados de energia de um elétron num cristal sendo este conhecido por potencial de Kronig-Penney unidimensional.

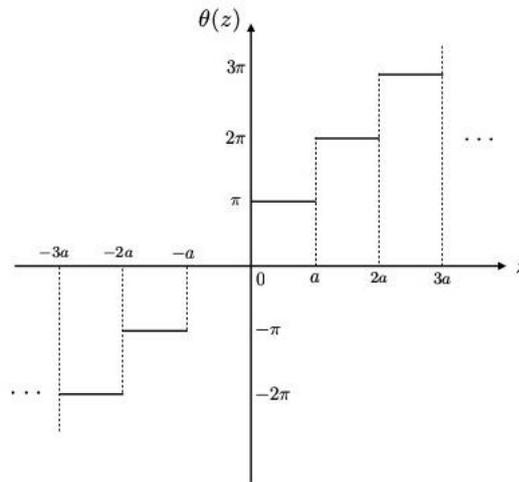


Figura 9 – Perfil de $\theta(z)$. Imagem adaptada de [21]

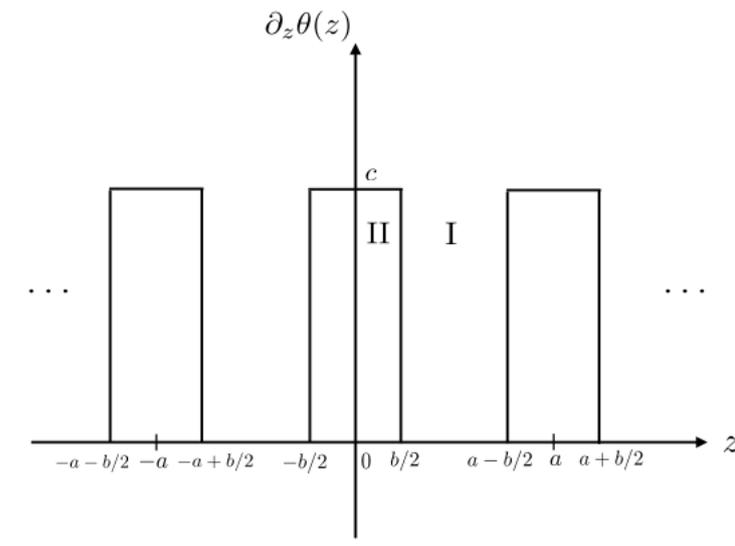


Figura 10 – Tipo de potencial de Kronig-Penney $\partial_z\theta(z)$. Imagem adaptada de [21]

Observe₁: A configuração de θ é o módulo periódico 2π .

Sendo assim, a partir de agora vamos analisar a propagação da onda nas regiões do gráfico acima para o caso do fóton com o estado de helicidade $h = +1$:

- Região I para $\frac{b}{2} < z < (a - \frac{b}{2})$ onde $\partial_z\theta(z) = 0$:

$$\omega^2 E_x(z) + v^2 \partial_z^2 E_x(z) = 0. \tag{2.22}$$

Solução:

$$E_x(z) = Ae^{\left(\frac{\omega}{v}\right)z} + Be^{\left(\frac{\omega}{v}\right)z}$$

$$E_x(z) = Ae^{iKz} + Be^{-iKz}, \quad K \equiv \frac{\omega}{v} \quad (2.23)$$

onde A e B são constantes.

- Região II para $\frac{-b}{2} < z < \frac{b}{2}$ onde $\partial_z \theta(z) = c$:

$$\omega^2 E_x(z) + v^2 \partial_z^2 E_x(z) + \underbrace{\frac{c}{4\pi^2 \epsilon}}_{\text{Potencial}} \omega E_x(z) = 0. \quad (2.24)$$

Solução:

$$E_x(z) = C e^{\frac{\omega}{v} \left(1 + \frac{c}{4\pi^2 \epsilon \omega}\right)^{\frac{1}{2}} z} + D e^{\frac{\omega}{v} \left(1 + \frac{c}{4\pi^2 \epsilon \omega}\right)^{\frac{1}{2}} z}$$

$$E_x(z) = C e^{iQz} + D e^{-iQz}, \quad Q \equiv \frac{\omega}{v} \left(1 + \frac{c}{4\pi^2 \epsilon \omega}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.25)$$

onde C e D são constantes.

Estabelecendo as condições de contorno em $z = \frac{b}{2}$, integrando a equação (2.19) sobre o intervalo $[\frac{b}{2} - \delta, \frac{b}{2} + \delta]$ e tomando o limite para $\delta \rightarrow 0$, temos que $\partial_z E_x(z)$ junto com $E_x(z)$ deve ser contínuo em $z = \frac{b}{2}$. Logo,

$$Ae^{(-iK\frac{b}{2})} + Be^{(iK\frac{b}{2})} = Ce^{(-iQ\frac{b}{2})} + De^{(iQ\frac{b}{2})}, \quad (2.26)$$

$$-iKAe^{(-\frac{iKb}{2})} + iKBe^{(\frac{iKb}{2})} = -iQCe^{(-\frac{iQb}{2})} + iQDe^{(\frac{iQb}{2})}. \quad (2.27)$$

Além disso, como $\partial_z \theta(z)$ na equação (2.19) é periódico com período a , o teorema de Bloch diz que:

$$E_x(z) = E_x(z + a) = e^{ika} E_x(z), \quad (2.28)$$

$$\partial_z E_x(z + a) = e^{ika} \partial_z E_x(z). \quad (2.29)$$

Estabelecendo as condições de contorno em $z = -\frac{b}{2}$, temos:

$$Ae^{-iK(a-\frac{b}{2})} + Be^{iK(a-\frac{b}{2})} = (Ce^{iQ\frac{b}{2}} + De^{-iQ\frac{b}{2}})e^{ika}, \quad (2.30)$$

$$-iKBe^{-iK(a-\frac{b}{2})} + iKAe^{iK(a-\frac{b}{2})} = (-iQDe^{-iQb/2} + iQCe^{iQb/2})e^{ika}. \quad (2.31)$$

As equações (2.26), (2.27) (2.30), (2.31) podem ser colocadas na forma matricial da seguinte forma:

$$\mathcal{M} \equiv \begin{vmatrix} e^{-iK\frac{b}{2}} & e^{iK\frac{b}{2}} & -e^{-iQ\frac{b}{2}} & -e^{iQ\frac{b}{2}} \\ -iKe^{-\frac{iKb}{2}} & iKe^{\frac{iKb}{2}} & iQe^{-\frac{iQb}{2}} & -iQe^{\frac{iQb}{2}} \\ e^{-iK(a-\frac{b}{2})} & e^{iK(a-\frac{b}{2})} & e^{-iQ(a-\frac{b}{2})} & e^{iQ(a-\frac{b}{2})} \\ -iK \exp -iK(a-\frac{b}{2}) & iKe^{iK(a-\frac{b}{2})} & iQe^{-iQ(a-\frac{b}{2})} & -iQe^{iQ(a-\frac{b}{2})} \end{vmatrix}, \quad x \equiv \begin{vmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{vmatrix}. \quad (2.32)$$

onde, $\mathcal{M}_{ij}x^j = 0$.

Uma vez que o $\det \mathcal{M} = 0$ é satisfeito esta condição pode ser simplificada tomando o limite quando $b \rightarrow 0$ e $c \rightarrow \infty$ preservando a constante $bc = \pi$, correspondente a $\theta(z)$ na figura 10. Após um cálculo direto, temos uma solução não trivial para cada estado de helicidade dos fótons:

$$\cos(ka) = \cos(Ka) - \frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sin(Ka). \quad (2.33)$$

Temos também um cálculo análogo da propagação de onda nas regiões I e II para os fótons com o estado de helicidade $h = -1$. A solução não trivial é:

$$\cos(ka) = \cos(Ka) + \frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sin(Ka). \quad (2.34)$$

onde os diferentes sinais do segundo termo no lado direito das equações (2.33) e (2.34) é devido aos estados de helicidade dos fótons [21].

Observe₂: se tirarmos o termo $\frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sin(Ka)$ as duas equações acima se tornam degeneradas $\cos(ka) = \cos(Ka)$ reduzindo a relação de dispersão do fóton.

$$\omega = vk \quad (2.35)$$

A presença do termo periódico dá origem a uma estrutura de banda 12 dividida entre os dois estados helicidade. Este fato é devido a paridade. Na figura 12 temos a representação dessa estrutura de bandas proveniente das relações de dispersão fornecidas pelas equações (2.33) e (2.34) para cada estado de helicidade $h = \pm 1$ ao qual, observa-se que para cada helicidade, existe uma faixa de frequência que é denominada de faixas fotônicas $\frac{ka}{\pi} = n (n = 0, 1, 2, \dots)$. Esse comportamento é semelhante ao dos cristais fotônicos comuns. Para entender melhor a origem dessa estrutura de bandas observe a figura 11:

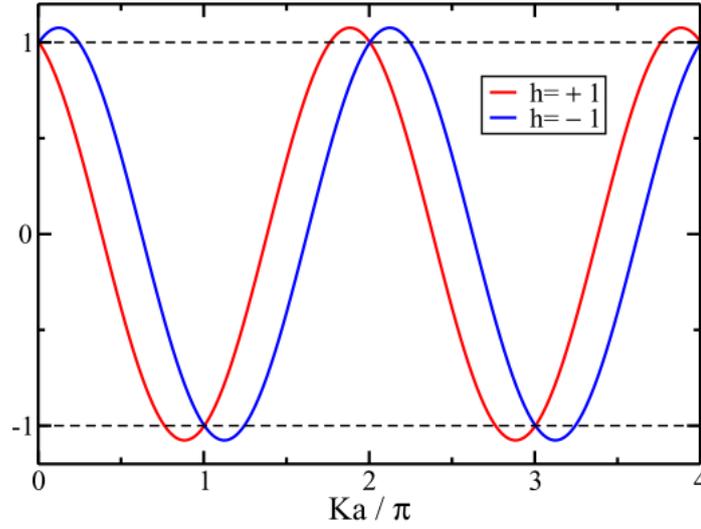


Figura 11 – Gráfico dos lados direitos das eqs. (2.33) e (2.34) em função do Ka . Imagem adaptada de [21]

Na figura 11 temos a representação gráfica dos lados direitos das equações (2.33) e (2.34) como uma função de Ka . Como os lados esquerdos de ambas as equações são limitados, ou seja, o $\cos(ka)$ está compreendido entre $-1 \leq \cos(ka) \leq +1$, não existem soluções fora desta região. Assim, usando as equações (2.33) e (2.34) pode-se mostrar que as magnitudes dos intervalos de banda para helicidade $h = \pm 1$ em $\frac{ka}{\pi} = n$ definidas como $\Delta_n^\pm > 0$, são todas equivalentes, exceto para $h = +1$ e $n = 0$ (Para o qual não existe intervalo de banda). De fato, n satisfaz a mesma equação,

$$\cos\left(\frac{\Delta_n^\pm a}{v}\right) + \frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sin\left(\frac{\Delta_n^\pm a}{v}\right) = 1 \quad (2.36)$$

O resultado da equação 2.36 independe de n e da helicidade $h = \pm 1$ (exceto para $h = +1$ e $n = 0$). Dessa forma, podemos definir $\Delta_n^\pm = \Delta$ tal que, a equação (2.36) pode ser resolvida da seguinte forma:

$$\Delta = \frac{v}{a} \arcsin\left(\frac{2p}{p^2 + 1}\right), p = \frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (2.37)$$

onde $0 \leq 2p/(p^2 + 1) \leq 1$ para $p > 0$.

Em resumo, Ozaki e Yamamoto (2017) [21] obtiveram os intervalos de frequência da banda fotônica para cada helicidade $h = \pm 1$ como segue:

$$\left(\frac{n\pi v}{a}\right) \leq \omega \leq \left(\frac{n\pi v}{a} + \Delta\right), \quad \text{para } h = -1 (n = 0, 1, \dots) \quad (2.38)$$

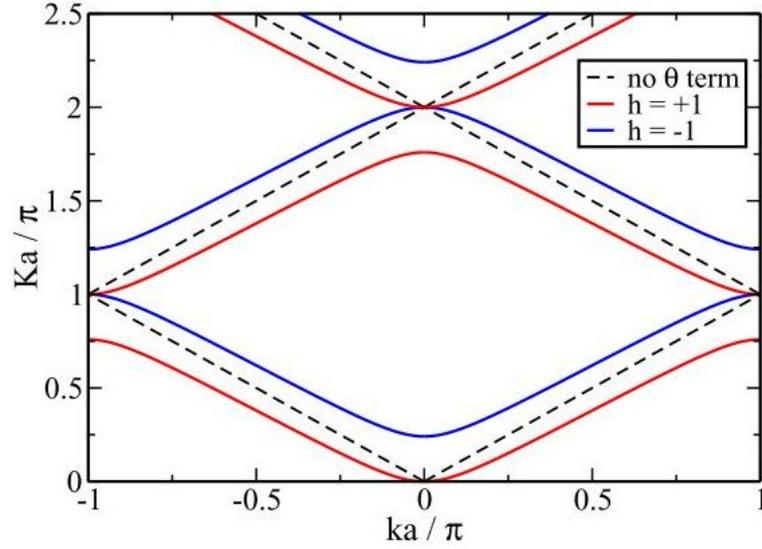


Figura 12 – Estrutura de banda do fóton com $h = \pm 1$ linhas azul e vermelha. Imagem adaptada de [21]

$$\left(\frac{n\pi v}{a} - \Delta\right) \leq \omega \leq \left(\frac{n\pi v}{a}\right), \quad \text{para } h = +1 (n = 1, 2, \dots) \quad (2.39)$$

Sendo assim, existe um valor onde os intervalos da banda estão sempre abertos para apenas um dos dois estados de helicidade dos fótons. Este valor é quando $p = 1$, ou quando $\frac{\mu}{\epsilon} = (8\pi)^2$. Nesse caso especial, a estrutura de banda corresponde as frequências:

$$\left(\frac{n\pi v}{a}\right) \leq \omega \leq (2n + 1)\frac{\pi v}{2a}, \quad \text{para } h = -1 (n = 0, 1, \dots) \quad (2.40)$$

$$(2n - 1)\frac{\pi v}{2a} \leq \omega \leq \left(\frac{n\pi v}{a}\right), \quad \text{para } h = +1 (n = 1, 2, \dots). \quad (2.41)$$

Para pequenos valores de k em cristais axionicos os fótons se comportam de maneira diferente, pois um dos estado de helicidade que sem gap (gapless) $h = +1$ não possui uma relação de dispersão relativística. Por outro lado, o estados de helicidade ($h = -1$) possui gap (gapped) em $k = 0$. Dessa forma, fazendo uma expansão em pequenos k e ω na equação (2.33), temos:

$$\omega = \frac{4\pi a}{\mu} k^2 + \mathcal{O}(k^3). \quad (2.42)$$

Assim como o fóton relativístico, a relação de dispersão $\omega = k$ pode ser considerado como partículas (tipo-I) de Nambu-Goldstone [7, 3] e o “fóton não-relativístico” pode ser entendido como o chamado tipo-II de Nambu-Goldstone [37]. A obtenção do fóton "gapped" e do fóton não-relativístico sem gap dependendo apenas dos estados de helicidade, são as novas características que não são encontradas nos cristais fotônicos comuns.

2.4 Cristais Fotônicos Formados por Isolantes Topológicos

Nesta seção, faremos uma revisão do artigo de Sergeenkov, Furtado e Vieira (2017) [31] onde iremos apresentar um modelo de cristal fotônico 1D associado ao modelo apresentado no capítulo 1. A diferença é que tal modelo se dá por considerar parâmetros topológicos θ_1 e θ_2 nas respectivas placas. O sistema encontra-se representado na figura 13. Para este estudo não adotaremos unidades naturais.

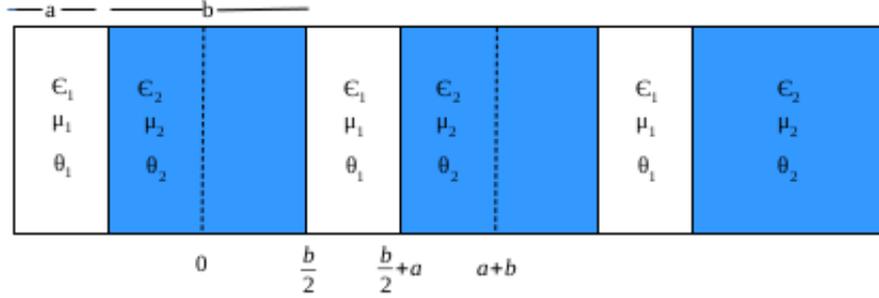


Figura 13 – Isolante topológico periódico 1D caracterizados por $(\epsilon_1, \mu_1, \theta_1)$ e $(\epsilon_2, \mu_2, \theta_2)$ de espessuras a (placas de cor azul) e b (placas de cor rocha). Imagem adaptada de [31].

onde $\epsilon_1, \mu_1, \theta_1$ e $\epsilon_2, \mu_2, \theta_2$ na figura 13 representa as propriedades elétricas, magnéticas e topológicas das respectivas placas.

A partir de agora, iremos restringir o estudo a uma célula unitária dada pela região $0 \leq z \leq (a + b)$ e estudar a contribuição da periodicidade do parâmetro $\theta(\vec{r})$ para a propagação de ondas eletromagnéticas nessa região. Devido a estrutura cristalina ser em um dimensão, temos que os parâmetros que caracterizam o sistema são periódicos apenas na direção z com período $(a + b)$. Dessa forma, considere as seguintes relações constitutivas:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon(\vec{r}) \vec{E} - \frac{\alpha}{2\pi} \theta(\vec{r}) \vec{B} \quad (2.43)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu \mu_0} \vec{B} + \frac{\alpha}{2\pi} \theta(\vec{r}) \vec{E}. \quad (2.44)$$

onde o parâmetro $\alpha = \frac{e^2}{2\pi \hbar c}$ é a constante de estrutura fina. Como o sistema é sem fontes, as equações de Maxwell podem ser escritas como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0, \quad (2.45)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.46)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}, \quad (2.47)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \partial_t \vec{D}. \quad (2.48)$$

Para incidência normal de ondas planas no meio, o vetor de onda é $\vec{k} = k\hat{z}$, e os campos são:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = e^{-i\omega t}[E_x(z)\hat{x} + E_y(z)\hat{y}], \quad (2.49)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = e^{-i\omega t}[B_x(z)\hat{x} + B_y(z)\hat{y}]. \quad (2.50)$$

Inserindo a equação (2.50) em (2.47), teremos:

$$B_x = -\frac{i}{w} \frac{dE_y}{dz}, \quad (2.51)$$

$$B_y = \frac{i}{w} \frac{dE_x}{dz}. \quad (2.52)$$

Vamos agora impor as condições de contorno. Temos dois tipos de condições de contorno:

- Condições de Bloch

Nos pontos $z = 0$ e $z = (a+b)$ o sistema é periódico. Dessa forma, os parâmetros que caracterizam o meio nestes pontos também são periódicos. Sendo assim, a propagação de onda descrita pelos campos \vec{E} e \vec{B} nestes pontos satisfazem o teorema de Bloch:

$$\vec{E}(a+b) = e^{ik(a+b)}\vec{E}(0), \quad (2.53)$$

$$\vec{B}(a+b) = e^{ik(a+b)}\vec{B}(0). \quad (2.54)$$

- Condições de interface

Nos pontos de interface $z_i = \frac{a}{2}$ e $z_i = \left(\frac{a}{2} + b\right)$, temos:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \vec{E}(z_i + \Delta) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \vec{E}(z_i - \Delta) \quad (2.55)$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \vec{H}(z_i + \Delta) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \vec{H}(z_i - \Delta) \quad (2.56)$$

O cálculo da estrutura de bandas podem ser visto detalhadamente no Apêndice B. A partir destes cálculos encontra-se a seguinte relação entre ω e k :

$$\cos [k(a+b)] = \cos(q_1 a) \cos(q_2 b) - \frac{1}{2} \left[\frac{Z_1}{Z_2} + \frac{Z_2}{Z_1} + \delta Z_1 Z_2 \right] \sin(q_1 a) \sin(q_2 b), \quad (2.57)$$

$$\cos [k(a + b)] = \cos (q_1 a) \cos (q_2 b) - \Gamma(\delta) \sin (q_1 a) \sin (q_2 b). \quad (2.58)$$

onde $\Gamma(\delta) = \frac{1}{2} \left[\frac{Z_1}{Z_2} + \frac{Z_2}{Z_1} + \delta Z_1 Z_2 \right]$, $Z_i = \sqrt{\frac{\mu_i}{\epsilon_i}}$ é a impedância do meio, $\delta = \frac{\alpha \mu_1 \mu_0^2}{4\pi^2 \epsilon_1} (\Delta\theta)^2$ sendo $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ a variação da fase topológica, $q_i = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_i \mu_i}$ para $i = 1, 2$.

Observe₁: o lado direito da equação (2.58) possui uma dependência implícita da frequência devido a definição de q_i .

Para um caso particular onde os parâmetros $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \mu_1 = \mu_2 = 1$, $a = b$ e $q_1 a = q_2 b$ podemos obter $\omega(k)$ da equação (2.58):

$$\omega(k) = \omega_0 \arccos \left[\frac{\frac{\delta}{2} + 2 \cos \left(\pi \frac{k}{k_0} \right)}{\frac{\delta}{2} + 2} \right]. \quad (2.59)$$

onde $\omega_0 = \frac{c}{2a}$ e $k_0 = \frac{\pi}{2a}$.

Nesse contexto, pode-se observar na equação (2.59) que o *arccos* localizado no membro direito da equação possui uma dependência da função cosseno cujo argumento depende da razão entre $\frac{k}{k_0}$. Por definição, o *cos* é limitado por -1 e 1 . Assim, $\omega(k)$ só pode assumir valores determinados pela variação da fase topológica ($\theta_2 - \theta_1$) no espaço \vec{k} . Dessa forma, surge o diagrama das estruturas de bandas:

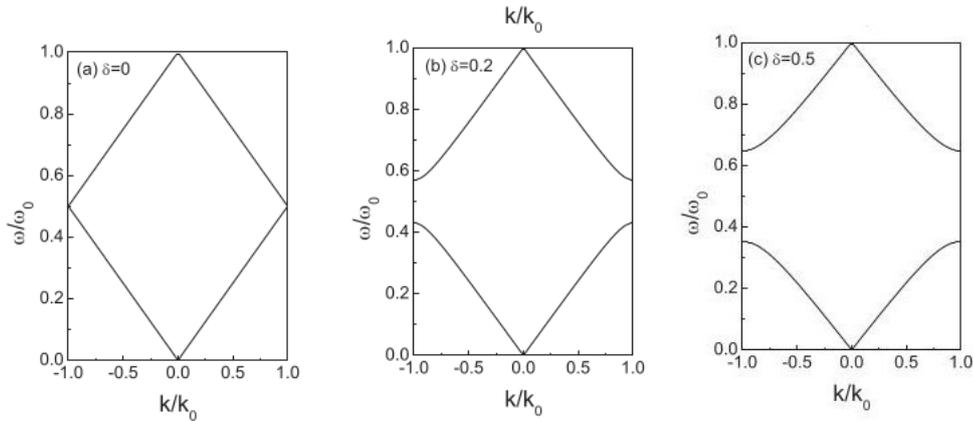


Figura 14 – Diagrama de $\frac{\omega(k)}{\omega_0}$ para diferentes valores de δ . Imagem adaptada de [31].

A figura 14 ilustra o comportamento da banda de frequência em relação a diferentes valores de δ . Com isso, pode-se observar claramente que o único parâmetro que varia é a diferença entre θ_1 e θ_2 no qual encontra-se explicitamente na definição de δ . A largura do gap aumenta conforme o valor de δ . Um fato curioso é que se tomarmos $\theta_1 = \theta_2$ a estrutura de bandas acima torna-se semelhante ao cristal fotônico formado por isolantes comuns. Isso porque a propagação de ondas em isolantes topológicos, é diferente da propagação de ondas em isolantes comuns, por um parâmetro θ variando no espaço ou no tempo [31].

Uma propriedade muito interessante que provém dos cristais fotônicos (sem o parâmetro topológico) é o aparecimento de uma massa para o fóton dentro desses cristais.

De acordo com a literatura, chamamos essa massa de massa efetiva (m^*) [15]. De forma geral, a explicação matemática encontrada no artigo [1] para o aparecimento da massa efetiva dos fótons se dá em virtude da equação de Planck, onde podemos definir a energia dos fótons que também é uma função de $\vec{P} = \hbar\vec{k}$ como:

$$E = \hbar\omega(\vec{k}) \quad (2.60)$$

$$E = E(\vec{P}) \quad (2.61)$$

Da equação (2.61) podemos introduzir o conceito de massa efetiva para o fóton de modo que se \vec{P}_0 é um ponto extremo de $E(\vec{P})$ podemos expandir a função em série de Taylor:

$$\vec{E} = E(\vec{P}_0) + \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{d^t E(\vec{P})}{d\vec{P}^t} \right)_{\vec{P}_0} \frac{(\vec{P} - \vec{P}_0)^t}{t!} \quad (2.62)$$

Sendo \vec{P}_0 um extremo, temos:

$$\vec{E} = E(\vec{P}_0) + \frac{d^2 E(\vec{P})}{d\vec{P}^2} \frac{(\vec{P} - \vec{P}_0)^2}{2!} + \dots \quad (2.63)$$

Assim, na equação (2.63) define-se o tensor de massa efetivo m^* como:

$$\frac{1}{m^*} = \left. \frac{d^2 E(\vec{P})}{d\vec{P}^2} \right|_{\vec{P}=\vec{P}_0} \quad (2.64)$$

$$m^* = \left(\frac{d^2 E(\vec{P})}{d\vec{P}^2} \right)^{-1} \quad (2.65)$$

Dessa forma, desprezando os termos mais altos da expansão, a equação de dispersão $E(\vec{P})$ vai assumindo uma forma parabólica:

$$\vec{E} = E(\vec{P}_0) + \frac{1}{m^*} \frac{(\vec{P} - \vec{P}_0)^2}{2} \quad (2.66)$$

O primeiro termo $E(\vec{P}_0)$ da equação (2.66) representa a energia de um fóton “livre” dado pela lei de Planck. Sendo assim, para o cristal fotônico em 1D, o vetor de Bloch e o \vec{P} são grandezas escalares, de modo que a massa efetiva dos fótons também é um escalar:

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{\hbar} \frac{d^2\omega(k)}{dk^2} \quad (2.67)$$

$$m^* = \frac{\hbar}{\frac{d^2\omega(k)}{dk^2}} \quad (2.68)$$

Em nosso caso, sob condições estabelecidas para o caso especial do sistema topológico, a relação usada para definir essa massa efetiva é tomando $k = k_0$ o resultado é obtido desenvolvendo o cálculo da massa efetiva que se encontra de forma detalhada no Apêndice B. Sendo assim, obtemos uma massa efetiva da seguinte forma:

$$m^* = \frac{-\hbar k_0^2}{\pi^2 \omega_0} \sqrt{\delta}, \quad \text{onde} \quad m_0 = \frac{-\hbar k_0^2}{\pi^2 \omega_0} \quad (2.69)$$

A partir dessa equação, temos o diagrama da massa efetiva $\frac{m^*}{m_0}$ versus δ [15]:

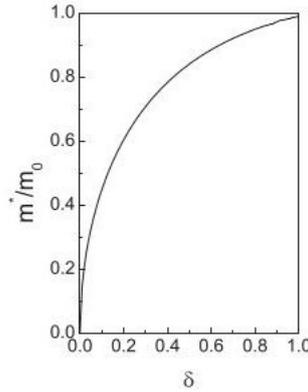


Figura 15 – Diagrama de $\frac{m^*}{m_0}$ versus δ . Imagem adaptada de [31].

A Figura 15 ilustra o comportamento da razão entre $\frac{m^*}{m_0}$ no espaço dos \vec{k} para cada valor do parâmetro de gap δ entre $0 \leq \delta \leq 1$ obtendo-se um valor para a massa efetiva formando uma curva para baixo. Uma propriedade notável desse comportamento é que a massa efetiva torna-se negativa equação (2.69). Sabemos que os fótons são partículas consideradas sem massa, no entanto, isso se refere ao fato dos fótons terem massa de repouso nula; a massa de repouso é um conceito totalmente distinto da massa efetiva. Assim, nas regiões proibidas (gap) os fótons se comporta como se tivesse massa m^* diferente de zero.

3 Modelo Numérico da Propagação da Luz em Meios Axionicos Periódicos

Neste capítulo, faremos um estudo inédito onde apresentaremos um modelo numérico associado ao modelo tratado no capítulo 2 referente ao artigo de Sergeenkov, Furtado e Vieira (2017) [31]. Tal generalização, tem por objetivo analisar a equação transcendental (3.2) do sistema bem como obter soluções numéricas para as estrutura de bandas que dependerá da variação de mais de um parâmetro do sistema. Para isto, propomos um tipo de modelo cujas soluções podem ser obtidas numericamente para cada configuração destes parâmetros.

3.1 Método Numérico para Solução do Sistema

Sabemos que, para algumas equações, como por exemplo às equações do segundo grau, existem fórmulas explícitas para obtenção das raízes em função dos coeficientes, um bom exemplo disso, é a regra de Báskara. No entanto, no caso de funções complicadas como, por exemplo, uma equação transcendental é praticamente impossível se achar zeros de forma exata [22, 34]. Por isso, temos que utilizar métodos que nos ajude a encontrar apenas aproximações para esses zeros que são as soluções numéricas. Por causa disso, nesta secção, estamos interessados em uma abordagem geral porém simples do método de bissecção utilizado para construção do modelo numérico bem como o seu algoritmo levando em consideração as mesmas condições iniciais do sistema estudado no artigo [31].

Considere o gráfico de uma função qualquer:

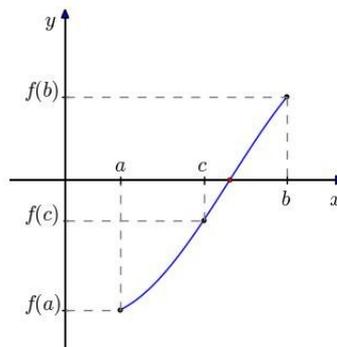


Figura 16 – Gráfico de uma função qualquer $f(x)$. Imagem adaptada de [34].

No método de bissecção, desejamos encontrar a raiz da função $f(x)$, ou seja, o local

onde $f(x)$ toca o eixo x . Para isso, precisamos dividir o intervalo $[a, b]$ ao meio:

$$c = \frac{a + b}{2} \quad (3.1)$$

Em seguida, precisamos verificar se as raízes estão no intervalo $[a, c]$ ou $[c, b]$. Dessa forma, utilizamos o teorema de Bolzano que nos garante a existência de uma raiz no intervalo $[a, b]$:

- Se $f(a)f(c) < 0$, existe pelo menos uma raiz no intervalo entre $[a, c]$
- Caso contrário, temos a existência de uma raiz no intervalo entre $[c, b]$.

Este procedimento é repetido varias vezes para o subintervalo correspondente à raiz até que c aproxime a raiz com uma precisão esperada [34].

3.1.1 Algoritmo

Este algoritmo é baseado em [22, 34], consiste de uma sequencia de instruções executadas passo a passo. Seja $f(x)$ contínua em $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$:

1. Dados iniciais: intervalo $[a, b]$, função $f(x)$, critério de parada, número máximo de interações.
2. $k = 1$ representa o número de interação
3. Defina $c = \frac{a + b}{2}$
4. Se $f(a)f(c) > 0$, faça $a = c$, se não, faça $b = c$.
5. Enquanto $(b - a) > \epsilon$ e $|f(a) - f(b)| > \delta$ volte para o passo 3.
6. $k = k + 1$. Volte para 3.

3.1.2 Resultados Numéricos

Seja $b = Xa$, $\epsilon_2 = Z_\epsilon \epsilon_1$, $\mu_2 = Z_\mu \mu_1$ com $0 \leq X \leq 1$. Levando em consideração esses parâmetros, podemos reescrever a equação (2.57) da seguinte forma:

$$\cos[(1 + X)ka] = \cos(q_1 a) \cos(X\sqrt{Z_\epsilon Z_\mu} q_1 a) - \Gamma(\delta) \sin(q_1 a) \sin(X\sqrt{Z_\epsilon Z_\mu} q_1 a). \quad (3.2)$$

onde $\Gamma(\delta) = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{Z_\epsilon}{Z_\mu}} + \sqrt{\frac{Z_\mu}{Z_\epsilon}} (1 + \delta) \right]$, $q_2 b = (X\sqrt{Z_\epsilon Z_\mu}) q_1 a = \left(\frac{1}{2}\right) q_1 a$, $Z_\epsilon = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$ e $Z_\mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}$ é a impedância.

Para um caso particular onde $Z_e = Z_m = 1$, $0 \leq X \leq 1$ e $0 \leq \delta \leq 2$ temos que a equação (3.2) pode ser reescrita como:

$$\cos(2ka) = \cos^2(q_1a) - \frac{1}{2}\Gamma(\delta)\sin^2(q_1a). \quad (3.3)$$

onde $q_1a = \frac{1}{2} \arccos \left[\frac{\Gamma(\delta)-1+2\cos(2ka)}{1+\Gamma(\delta)} \right]$, $\delta = \pi - \arccos \left(\frac{\delta-4}{\delta+4} \right)$ e $\Gamma(\delta) = \frac{1}{2}(2+\delta)$. Os cálculos detalhados para massa efetiva podem ser vistos no Apêndice B.

Dessa forma, variando o X e δ surge o diagrama das estruturas de bandas encontradas para o nosso sistema.

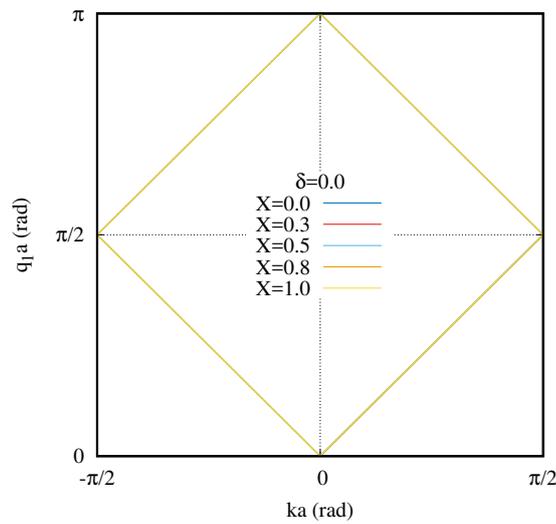


Figura 17 – Diagrama para diferentes valores de X e $\delta = 0.0$.

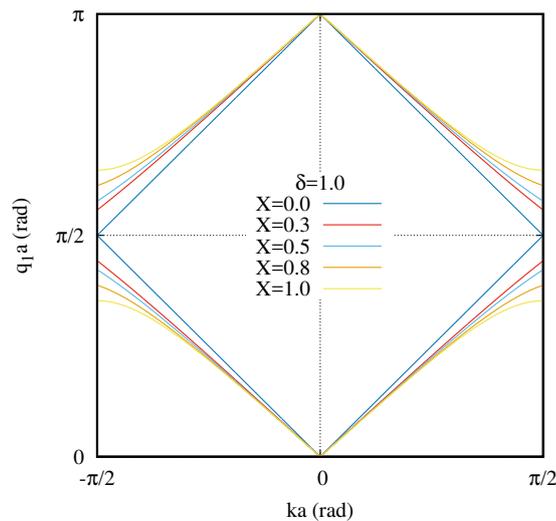


Figura 18 – Diagrama para diferentes valores de X e $\delta = 0.5$.

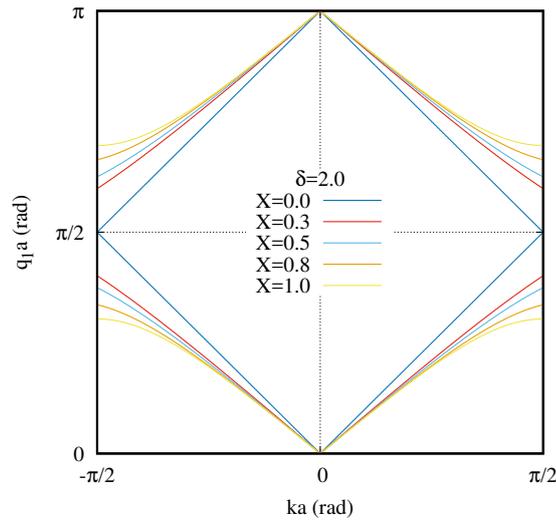


Figura 19 – Diagrama para diferentes valores de X e $\delta = 1.0$.

As figura 17,18 e 19 ilustra o comportamento da banda de frequência fixando valores para δ em relação aos diferentes valores de X . Nesse contexto, pode-se observar que:

1. Para $\delta = 0$ o sistema não apresenta gap, sendo assim, existem duas possibilidades para esta condição:
 - $\theta_1 = \theta_2 = 0$ nós também temos ausência de superfície condutora.
 - $\theta_1 = \theta_2 \neq 0$ onde temos ausência de superfície condutora.

Em ambos os casos, não há diferença devido à estrutura ser contínua, porque as duas partes são feitas do mesmo material.

2. Para $\delta \neq 0$ o sistema apresenta um gap cuja largura depende dos diferente valores atribuídos ao parâmetro X . Existem também duas possibilidades para esta condição:
 - $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 \neq 0$, assumindo essa condição temos a presença de apenas uma superfície condutora proveniente de $\theta_2 \neq 0$.
 - $\theta_1 \neq 0$ e $\theta_2 \neq 0$ temos duas superfícies condutoras que aumentam a espessura da interface.

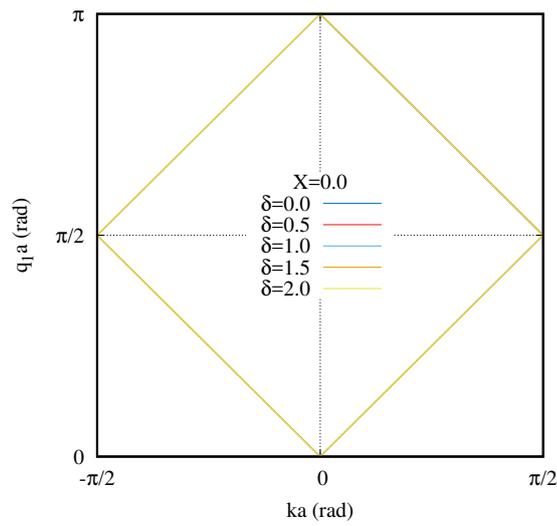


Figura 20 – Diagrama para diferentes valores de δ e $X = 0.0$.

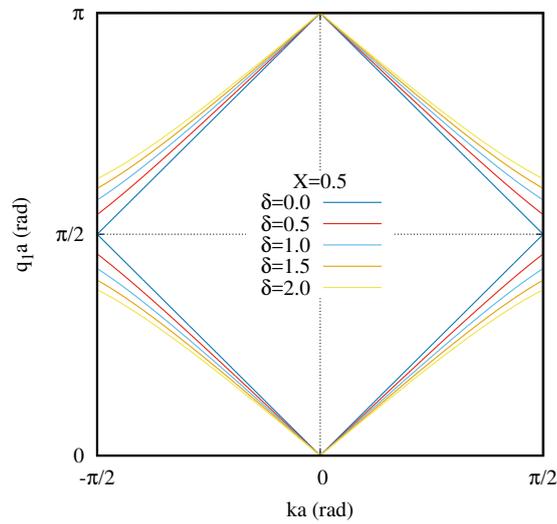


Figura 21 – Diagrama para diferentes valores de δ e $X = 0.5$.

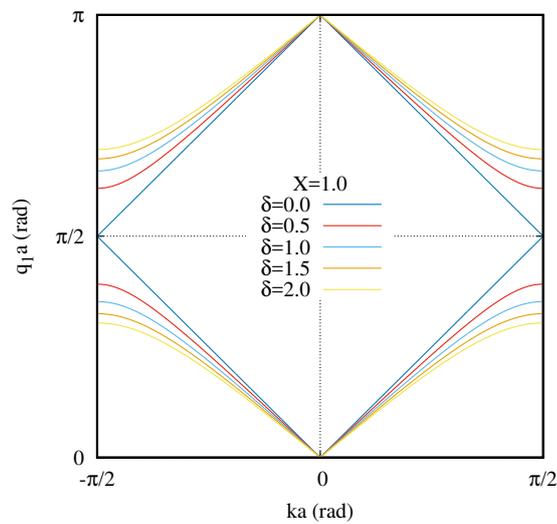


Figura 22 – Diagrama para diferentes valores de δ e $X = 1.0$.

As figuras 20, 21, 22 ilustra o comportamento da banda de frequência fixando valores para X em relação a diferentes valores de δ . Nesse contexto, pode-se observar que:

1. Para $X = 0$ o sistema não apresenta gap a explicação para isso é que para esta condição o sistema é contínuo, pois o parâmetro X esta relacionado a diferença entre os tamanhos das placas.
2. Para $X \neq 0$ temos a presença de gap e este amplia de acordo com o aumento do parâmetro X como pode ser visto para os valores de $X = 0.5$ e $X = 1.0$ e para explicar este fato usamos o mesmo argumento para $\delta \neq 0$.

Em resposta a existência do gap, o fóton ao interagir com o cristal fotônico formado por isolantes topológicos se comporta como se tivesse uma massa efetiva. Sendo assim, o cálculo da massa efetiva para os fótons pode ser realizado por meio de uma expansão em serie de Fourier. Os cálculos detalhados para massa efetiva podem ser vistos no Apêndice B. Tomando $k = \frac{\pi}{2a}$, temos:

$$m = \hbar \left[\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right) \right]^{-1} \Big|_{k=\pi/2a} = \hbar \left(\frac{\partial q_1}{\partial \omega} \right) \left[\left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial k^2} \right) \right]^{-1} \Big|_{k=\pi/2a} \quad (3.4)$$

A partir dessa equação obtemos o diagrama da massa efetiva normalizada para valores de $0.6 \leq X \leq 1.0$:

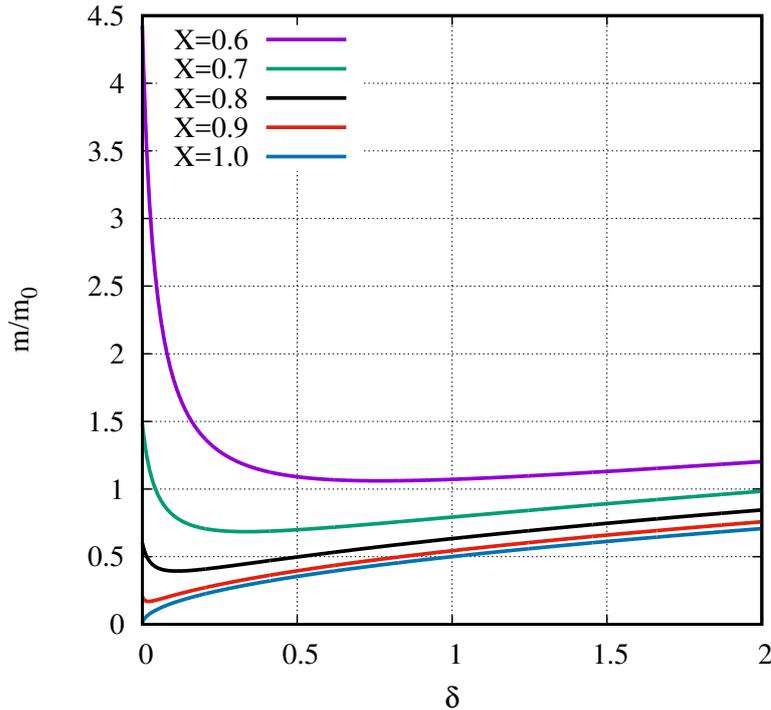


Figura 23 – Diagrama de $\frac{m}{m_0}$ para diferentes valores de δ .

A figura 23 ilustra o comportamento da razão entre $\frac{m}{m_0}$ em relação a δ . Nesse contexto, pode-se observar que:

- A medida que o X evolui de $0.6 \leq X \leq 1.0$ o fóton se comporta como se tivesse uma massa efetiva.
- O cálculo da massa efetiva é feita nos pontos onde tem o gap.
- O que causa a curvatura da massa efetiva é o parâmetro topológico.
- Para $X = 1.0$ temos o mesmo resultado obtido por Vieira referente ao artigo [31].

Claramente, a figura 23 representa uma transição do comportamento relativístico para o não relativístico percebidas através das estruturas de bandas figuras 17,18 e 19 analisadas no ponto do gap e nos "cantos" que são os pontos de segunda derivada. Diante disso, os fótons em certos regimes dentro de um cristal fotônico formado por um isolante topológico possui uma massa efetiva de modo similar a elétrons em um cristal. Mostramos na figura 23 o comportamento do sistema apenas para valores de $0.6 \leq X \leq 1.0$. Mas o que acontece com o sistema quando X assume valores pequenos compreendidos entre $0.1 \leq X \leq 0.5$? A resposta para esta pergunta se encontra na figura 24:

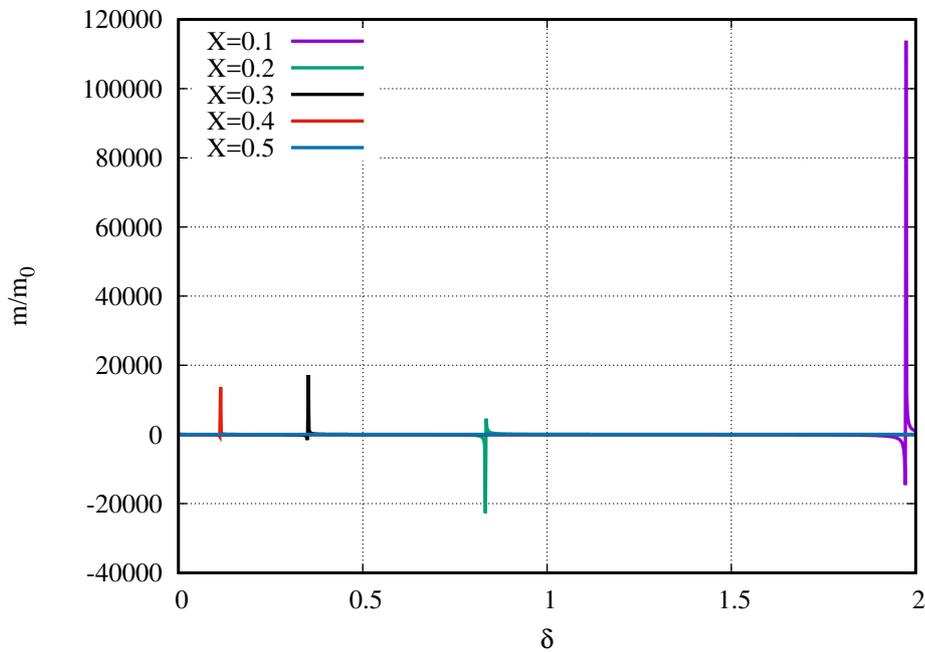


Figura 24 – Diagrama de $\frac{m}{m_0}$ para diferentes valores de X

A figura 24 ilustra o comportamento do sistema para valores de $0.1 \leq X \leq 0.5$. Neste contexto, temos picos na massa efetiva que surgem devido a transição de um comportamento relativístico (linear) para um não relativístico (curvatura no gap), ou seja, quando a gente começa a colocar no sistema algumas propriedades a onda eletromagnética

em determinados regimes se comporta como se não fosse mais relativística. Através das estrutura de bandas podemos interpretar que o comportamento das ondas eletromagnéticas não tem dispersão linear para determinados valores de X e δ . Sendo assim, estes picos se apresentam como valores altos porque é um resultado numérico.

De forma análoga, obtemos:

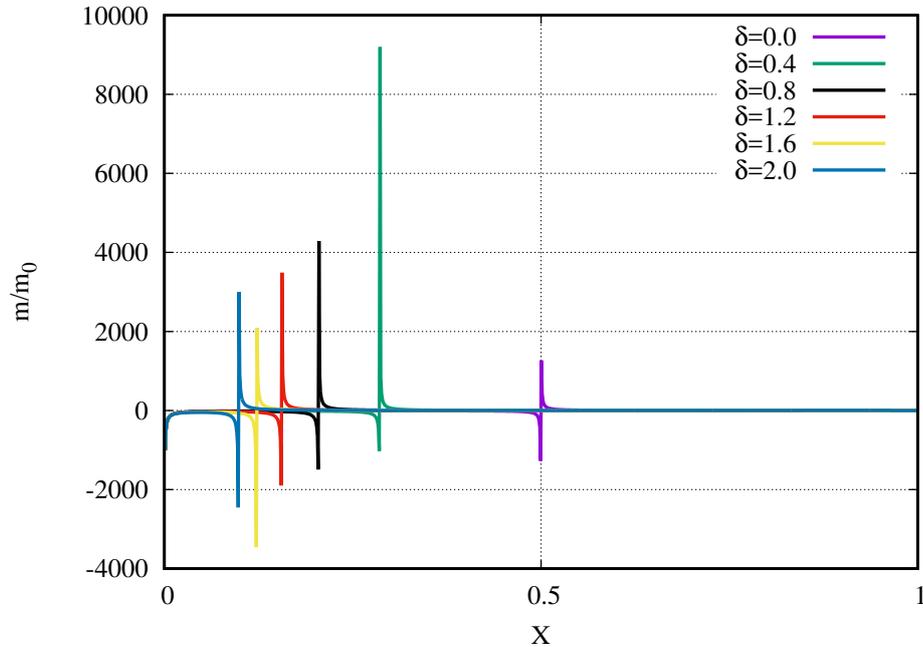


Figura 25 – Diagrama de $\frac{m}{m_0}$ para diferentes valores de δ

A figura 25 ilustra o comportamento do sistema para valores de $0.0 \leq \delta \leq 2.0$. Neste contexto, temos a formação de picos na figura 25 de forma análoga a figura 24, isso se dá devido a uma transição do comportamento relativístico para o não relativístico percebidas através das estruturas de bandas nas figuras 17,18 e 19 analisadas no ponto do gap e nos "cantos" que são os pontos de segunda derivada.

Para finalizar, um outro resultado importante é o diagrama dos comportamentos dos gap's que podem ser vistos nas figuras 26 e 27. Observe que, os dados apresentados nestas figuras mostram como o gap varia para quaisquer valores de δ figura 27 ou para quaisquer valores de X figura 26 isso denúncia a forma do aumento ou da diminuição dos gap's.

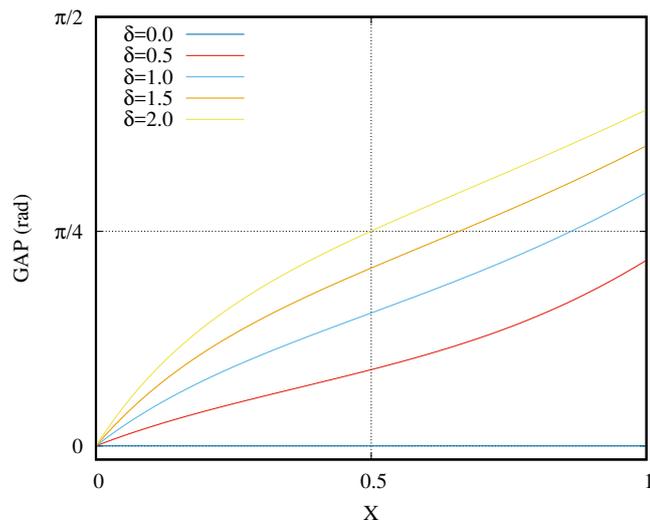


Figura 26 – Diagrama da diferença do gap's para X.

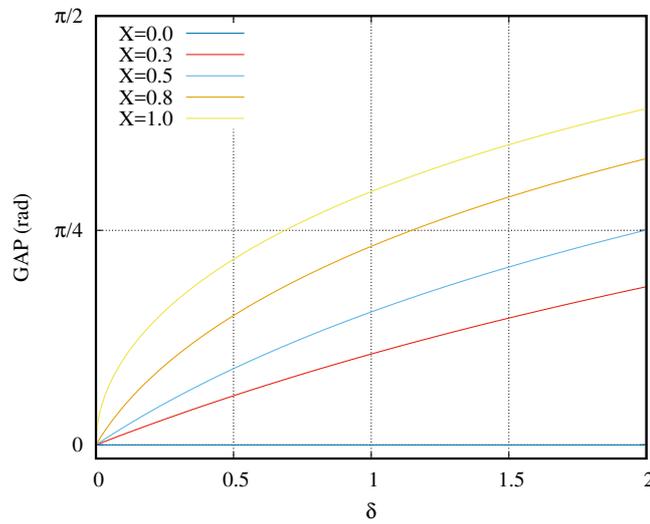


Figura 27 – Diagrama da diferença do gap's para δ .

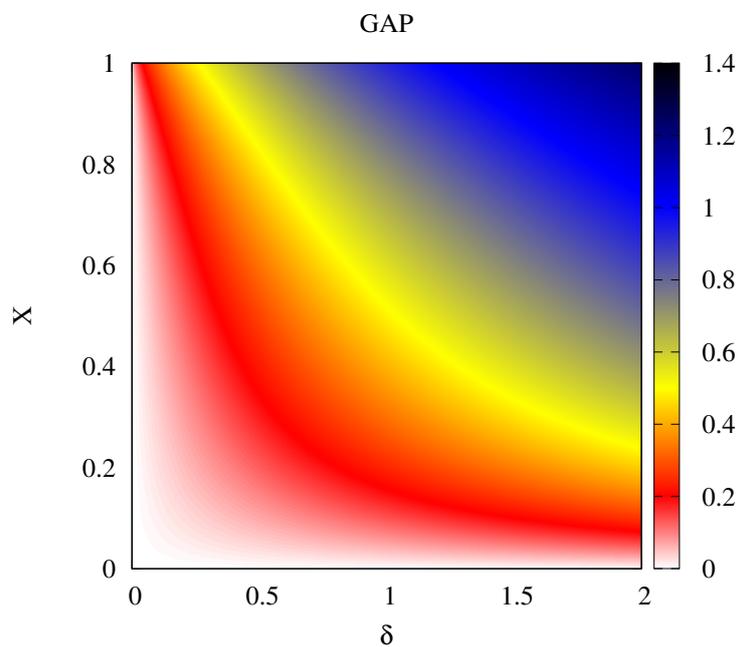


Figura 28 – Diagrama em 3D.

4 Considerações Finais e Trabalhos Futuros

Nesta dissertação estudamos a influência de meios axionicos periódicos na propagação da luz usando métodos numéricos para tal, generalizamos o modelo proposto por Vieira [31] para descrever a propagação de ondas eletromagnéticas em isolantes topológicos. A proposta do modelo de Vieira tem como principal objetivo a obtenção de dados a partir da variação de um parâmetro do sistema que é a fase topológica $\theta_2 - \theta_1$. Dessa forma, através da equação característica do sistema foram obtidas as estruturas de bandas, porém, esta equação não é tão simples de resolver, então para encontrar a relação de $\omega(k)$, foi necessário fazer algumas imposições tais como supor que a célula do cristal são iguais ($a = b$) e que todas as características elétricas e magnéticas dos materiais são iguais $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \mu_1 = \mu_2$ sendo θ_1 e θ_2 os únicos parâmetros variáveis do sistema caracterizado pelo parâmetro δ . A partir dessas suposições estabeleceu-se as estruturas de bandas dependentes apenas da variação de $0.0 \leq \delta \leq 1.0$. Em resposta a existência do gap, Vieira obteve um comportamento para o fóton como se tivesse uma massa efetiva.

No entanto, com o interesse de analisar com maior precisão a propagação da luz em meio axionico foi proposto uma extensão do modelo numérico associado ao modelo de Vieira discutido no capítulo 3 e pra isso foi necessário fazermos uma generalização nos parâmetro do sistema ao qual nos levou por meio de equações matemáticas a uma equação transcendental. Como resultado de tal generalização, obtemos valores numéricos e precisos para a construção do diagrama da estrutura de bandas para o sistema e esses dados não existem na literatura onde concluímos que para o comportamento da banda de frequência fixando valores para δ em relação aos diferentes valores de X , obtemos:

1. Para $\delta = 0$ o sistema não apresenta gap, sendo assim, existem duas possibilidades para esta condição:
 - $\theta_1 = \theta_2 = 0$ nós também temos ausência de superfície condutora.
 - $\theta_1 = \theta_2 \neq 0$ onde temos ausência de superfície condutora.
2. Para $\delta \neq 0$ o sistema apresenta um gap cuja largura depende dos diferente valores atribuídos ao parâmetro X . Existem também duas possibilidades para esta condição:
 - $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 \neq 0$, assumindo essa condição temos a presença de apenas uma superfície condutora proveniente de $\theta_2 \neq 0$.
 - $\theta_1 \neq 0$ e $\theta_2 \neq 0$ temos duas superfícies condutoras que aumentam a espessura da interface.

De forma análoga, fixando valores para X em relação a diferentes valores de δ , obtemos que para $X = 0$ o sistema não apresenta gap e a explicação para isso é que para esta condição o sistema é contínuo, pois o parâmetro X está relacionado a diferença entre os tamanhos das placas. Já para $X \neq 0$ temos a presença de gap e este amplia de acordo com o aumento do parâmetro X como pode ser visto para os valores de $X = 0.5$ e $X = 1.0$ e para explicar este fato usamos o mesmo argumento para $\delta \neq 0$.

Além disso, obtemos em resposta a existência do gap um comportamento para o fóton em determinados regimes como se tivesse uma massa efetiva de forma análoga ao resultado obtido por Vieira. Neste contexto, mostramos as formações de picos para determinados valores na variação de X e δ ao qual é proveniente da transição de um comportamento relativístico para um comportamento não relativístico do fóton.

E por fim, obtemos a diferença entre os gap's percebido nas estrutura de bandas apresentando gráficos em 2D e 3D para ilustrar as diferentes formas de variação dos gap's.

Como perspectiva futura, utilizando o mesmo método apresentado nessa dissertação espera-se trabalhar com uma estrutura cristalina axionica mais complexa obtendo um sistema de equações mais abrangente proveniente das condições de interface e periodicidade em duas dimensões. Quanto ao método numérico espera-se obter valores aproximados e precisos da dinâmica da luz para a construção do diagrama da estrutura de banda no plano de periodicidade (plano $x - y$) variando mais de um parâmetro da rede. Para a estrutura de banda, espera-se obter também diagramas diferentes para os modos elétricos e magnéticos.

Referências

- [1] J.-M. André and P. Jonnard. Effective mass of photons in a one-dimensional photonic crystal. *Physica Scripta*, 84(3):035708, 2011.
- [2] O. B. Assis. A asa da borboleta e a nanotecnologia: cor estrutural. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 35(2):2301, 2013.
- [3] R. A. Brandt and N. Wing-Chiu. Gauge invariance and mass. *Physical Review D*, 10(12):4198, 1974.
- [4] S. A. Cerqueira Jr. Recent progress and novel applications of photonic crystal fibers. *Reports on progress in physics*, 73(2):024401, 2010.
- [5] R. Cregan, B. Mangan, J. Knight, T. Birks, P. S. J. Russell, P. Roberts, and D. Allan. Single-mode photonic band gap guidance of light in air. *science*, 285(5433):1537–1539, 1999.
- [6] A. F. R. de Toledo Piza. *Mecânica quântica*. Edusp São Paulo, 2003.
- [7] R. Ferrari and L. Picasso. Spontaneous breakdown in quantum electrodynamics. *Nuclear Physics B*, 31(2):316–330, 1971.
- [8] C. A. d. Francisco. *Fibras ópticas microestruturadas: modelagem e aplicações*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, 2004.
- [9] T. Fukui, T. Fujiwara, and Y. Hatsugai. Topological meaning of z_2 numbers in time reversal invariant systems. *Journal of the Physical Society of Japan*, 77(12):123705, 2008.
- [10] D. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. Pearson international edition. Prentice Hall, 1999. ISBN 9780139199608. LCCN 98050525. URL <https://books.google.com.br/books?id=x0akQgAACAAJ>.
- [11] S. G. Johnson and J. D. Joannopoulos. Introduction to photonic crystals: Bloch’s theorem, band diagrams, and gaps (but no defects). *Photonic Crystal Tutorial*, pages 1–16, 2003.
- [12] C. Kane. Cl kane and ej me, phys. rev. lett. 95, 226801 (2005). *Phys. Rev. Lett.*, 95:226801, 2005.
- [13] A. Karch. Electric-magnetic duality and topological insulators. *Physical review letters*, 103(17):171601, 2009.

- [14] J. E. Kim and G. Carosi. Axions and the strong c p problem. *Reviews of Modern Physics*, 82(1):557, 2010.
- [15] C. Kittel et al. *Introduction to solid state physics*, volume 8. Wiley New York, 1976.
- [16] K. v. Klitzing, G. Dorda, and M. Pepper. New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized hall resistance. *Physical Review Letters*, 45(6):494, 1980.
- [17] S.-Y. Lin, E. Chow, V. Hietala, P. R. Villeneuve, and J. Joannopoulos. Experimental demonstration of guiding and bending of electromagnetic waves in a photonic crystal. *Science*, 282(5387):274–276, 1998.
- [18] J. D. J. S. G. J. J. N. W. R. D. Meade. *Photonic Crystals: Molding the Flow of Light*. Princeton: Princeton University Press, New Jersey, 2d edition, 2008.
- [19] J. E. Moore. The birth of topological insulators. *Nature*, 464(7286):194, 2010.
- [20] S. Murakami, N. Nagaosa, and S.-C. Zhang. Spin-hall insulator. *Physical review letters*, 93(15):156804, 2004.
- [21] S. Ozaki and N. Yamamoto. Axion crystals. *Journal of High Energy Physics*, 2017(8):98, 2017.
- [22] S. Pilling. Cálculo numérico. *Faculdade de Engenharia, arquitetura e urbanismo da UniVap (Universidade do Vale do Paraíba), são Jose dos Campos, SP*, 2007.
- [23] X.-L. Qi, R. Li, J. Zang, and S.-C. Zhang. Inducing a magnetic monopole with topological surface states. *Science*, 323(5918):1184–1187, 2009.
- [24] X.-L. Qi and S.-C. Zhang. The quantum spin hall effect and topological insulators. *arXiv preprint arXiv:1001.1602*, 2010.
- [25] J. W. S. B. Rayleigh. *Scientific Papers: 1887-1892*, volume 3. University Press, 1902.
- [26] G. Rosenberg and M. Franz. Witten effect in a crystalline topological insulator. *Physical Review B*, 82(3):035105, 2010.
- [27] F. G. Santos, Y. A. Espinel, G. O. Luiz, R. S. Benevides, G. S. Wiederhecker, and T. P. M. Alegre. Hybrid confinement of optical and mechanical modes in a bullseye optomechanical resonator. *Optics express*, 25(2):508–529, 2017.
- [28] J. Sipe. Photon wave functions. *Physical Review A*, 52(3):1875, 1995.
- [29] J. Unicamp. Pesquisadores usam a holografia na produção de cristais fotônicos, 2003. URL http://www.unicamp.br/unicamp/unicamp_hoje/ju/julho2003/ju218pg05.html. Online; accessed: 05-January-2019.

-
- [30] M. Vazifeh and M. Franz. Quantization and 2π periodicity of the axion action in topological insulators. *Physical Review B*, 82(23):233103, 2010.
- [31] M. Vieira, S. Sergeenkov, and C. Furtado. Gap-dependent mass of a photon in a photonic topological insulator. *Physical Review A*, 96(1):013852, 2017.
- [32] M. d. S. Vieira et al. Dinâmica de partículas em estruturas periódicas. 2010.
- [33] Wikipedia contributors. Paleolithic, 2007. URL <https://en.wikipedia.org/wiki/Paleolithic>. Online; accessed: 05-November-2018.
- [34] Wikipedia contributors. Bisection method, 2018. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Bisection_method. Online; accessed: 21-February-2019.
- [35] Wikipedia contributors. Photonics, 2018. URL <https://en.wikipedia.org/wiki/Photonics>. Online; accessed: 06-November-2018.
- [36] F. Wilczek. Two applications of axion electrodynamics. *Physical review letters*, 58(18):1799, 1987.
- [37] N. Yamamoto. Axion electrodynamics and nonrelativistic photons in nuclear and quark matter. *Physical Review D*, 93(8):085036, 2016.

Apêndices

APÊNDICE A – Solução para Equação da Onda Eletromagnética

Esse caso é geral e restrito para a obtenção da solução da função de onda nas regiões I e II. Sendo assim, seja a equação de onda dada por:

- Região I para $\frac{b}{2} < z < (a - \frac{b}{2})$ onde $\partial_z \theta(z) = 0$

$$\omega^2 E_x(z) + v^2 \partial_z^2 E_x(z) = 0. \quad (\text{A.1})$$

- Região II para $\frac{-b}{2} < z < \frac{b}{2}$ onde $\partial_z \theta(z) = c$

$$\begin{aligned} \omega^2 E_x(z) + v^2 \partial_z^2 E_x(z) + \underbrace{\frac{c}{4\pi^2 \epsilon} \omega E_x(z)}_{\text{Potencial}} &= 0. \\ \left(\frac{c}{4\pi^2 \epsilon} \omega + \omega^2 \right) E_x(z) + v^2 \partial_z^2 E_x(z) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Sabemos que uma equação é uma EDO de segunda ordem, linear e homogênea quando a equação é escrita da seguinte forma:

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (\text{A.3})$$

Em nosso caso (Região I e II) $y = E_x(z)$, $y'' = \partial_z^2 E_x(z)$ e $by' = 0$, temos:

$$a \partial_z^2 E_x(z) + c E_x(z) = 0 \quad (\text{A.4})$$

onde existem dois fatos básicos (Teorema 1 e 2) que nos permite resolver essa equação linear homogênea.

Teorema 1: Se y_1 e y_2 são duas soluções conhecidas da equação linear homogêneas, então a combinação linear $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ também é uma solução onde c_1 e c_2 são constantes.

Teorema 2: Se y_1 e y_2 são duas soluções linearmente independentes. Então a solução geral é uma combinação linear de y_1 e y_2 .

A função exponencial $E_x(z) = e^{(rz)}$ tem a propriedade de que sua derivada é um múltiplo por constante dela mesma. Assim a equação (A.4), torna-se:

$$ar^2e^{(rz)} + ce^{(rz)} = 0, \quad (\text{A.5})$$

$$(ar^2 + c)e^{(rz)} = 0. \quad (\text{A.6})$$

Dessa forma, obtemos a equação característica da equação diferencial (A.4) que é:

$$ar^2 + c = 0 \quad (\text{A.7})$$

onde, $E_x(z) = e^{(rz)}$ é uma solução da EDO linear e homogênea se r é uma raiz da equação.

Sabe-se que as raízes r_1 e r_2 da equação característica podem ser determinadas por fatoração. Em outros casos, elas são encontradas usando-se a fórmula quadrática:

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}, \quad (\text{A.8})$$

$$r_2 = \frac{-b - \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}. \quad (\text{A.9})$$

O tratamento para obtenção da solução da equação linear e homogênea em relação as raízes depende se o discriminante é $(b^2 - 4ac) > 0$, $(b^2 - 4ac) < 0$ e $(b^2 - 4ac) = 0$. Restringiremos apenas ao nosso caso. Temos que:

- $b^2 - 4ac = -4ac < 0$, ($b = 0$). Nesse caso, as raízes r_1 e r_2 da equação auxiliar são números complexos:

$$r_1 = \alpha + i\beta \quad (\text{A.10})$$

$$r_2 = \alpha - i\beta \quad (\text{A.11})$$

onde $\alpha = \frac{-b}{2a}$ e $\beta = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$.

Claramente $b = 0$ então podemos escrever a solução da equação linear e homogênea da seguinte forma:

$$E_x(z) = c_1e^{r_1z} + c_2e^{r_2z} \quad (\text{A.12})$$

$$E_x(z) = c_1e^{i\beta z} + c_2e^{-i\beta z} \quad (\text{A.13})$$

onde chamamos $c_1 = A$ e $c_2 = B$ na solução da região I e $c_1 = C$ e $c_2 = D$ na solução da região II.

A.1 Equação de Onda (Transformada de Fourier)

A equação da onda eletromagnética que depende do espaço e do tempo é dada por:

$$\partial_t^2 E_x(t, z) - v^2 \partial_z^2 E_x(t, z) \mp i \frac{\partial_z \theta(z)}{2\pi^2 \epsilon} \partial_t E_x(t, z) = 0, \quad (h = \pm 1). \quad (\text{A.14})$$

Aqui, queremos obter uma equação da onda que dependa apenas do espaço. Para isso temos que usar a transformada de Fourier pois esta ferramenta matemática nos possibilita ir de um espaço a outro, sendo assim, suponha que $E_x(t, z)$ seja uma função das variáveis $x \in \mathbb{R}$ e $t > 0$. Se fixarmos a variável espacial x o campo elétrico $E_x(t, z)$ torna-se uma função apenas da variável temporal t , definida na reta toda. Dessa forma, podemos tomar a sua transformada de Fourier com relação à variável t onde denotaremos esta transformada por $E_x(\omega, z)$. Em outras palavras:

$$\mathcal{F}[E_x(t, z)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E_x(t, z) e^{-i\omega t} d\omega \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{aligned} & \partial_t^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega, z) e^{i\omega t} d\omega \right) - \\ & v^2 \partial_z^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega, z) e^{i\omega t} d\omega \right) \mp \\ & i \frac{\partial_z \theta(z)}{2\pi^2 \epsilon} \partial_t \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega, z) e^{i\omega t} d\omega \right) = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega, z) \partial_t^2 e^{i\omega t} d\omega - \\ & v^2 \partial_z^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega, z) e^{i\omega t} d\omega \right) \mp \\ & i \frac{\partial_z \theta(z)}{2\pi^2 \epsilon} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega, z) \partial_t e^{i\omega t} d\omega \right) = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega, z) \omega^2 e^{i(\omega - \omega')t} d\omega dt - \\ & v^2 \partial_z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega, z) e^{i(\omega - \omega')t} d\omega dt \mp \\ & i \frac{\partial_z \theta(z)}{2\pi^2 \epsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega, z) \omega e^{i(\omega - \omega')t} d\omega dt = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Usando a propriedade de $\delta(\omega - \omega') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - \omega')t} dt$, temos:

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega, z) \omega^2 \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega-\omega')t} dt}_{\delta(\omega-\omega')} d\omega - \\
 & v^2 \partial_z^2 \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega, z) \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega-\omega')t} dt}_{\delta(\omega-\omega')} d\omega \mp \\
 & i \frac{\partial_z \theta(z)}{2\pi^2 \epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega, z) \omega \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega-\omega')t} dt}_{\delta(\omega-\omega')} d\omega = 0,
 \end{aligned} \tag{A.19}$$

Finalmente, temos a seguinte equação:

$$\omega^2 E_x(z) + v^2 \partial_z^2 E_x(z) \pm \frac{\partial_z \theta(z)}{2\pi^2 \epsilon} \omega E_x(z) = 0 \quad (h = \pm 1). \tag{A.20}$$

APÊNDICE B – Cálculo da Estrutura de Bandas para Luz em Cristais Fotônicos formados por Isolantes Topológicos

Apresentaremos aqui o cálculo usando o método de matrizes da estrutura de banda para as frequências de ondas planas normal que incidem sobre um isolante topológico periódico:

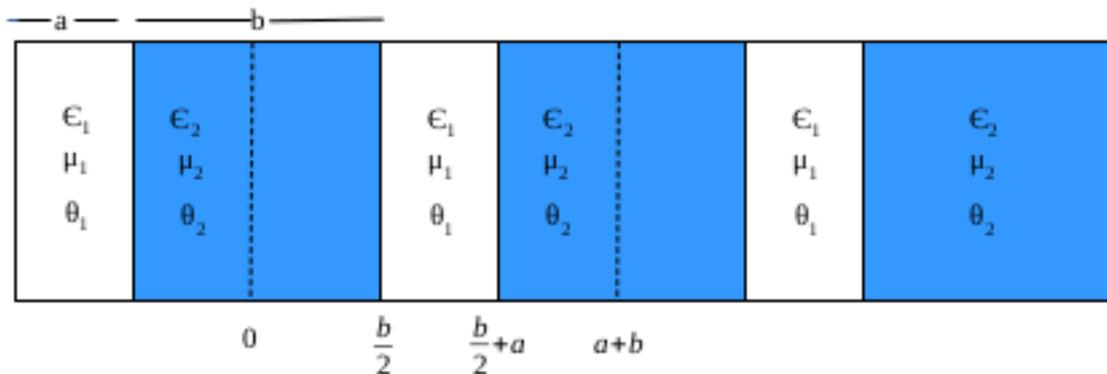


Figura 29 – Isolante topológico periódico. Imagem adaptada de [31].

Considerando as regiões sem interfaces, a equação de onda para as partes espaciais dos campos é:

$$\frac{d^2 \vec{E}(z)}{dz^2} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \vec{E}(z) = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{d^2 \vec{B}(z)}{dz^2} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \vec{B}(z) = 0 \quad (\text{B.2})$$

Em coordenadas cartesianas a forma das equações são iguais para cada componente do vetor $\vec{E}(z)$ e $\vec{B}(z)$:

$$\frac{d^2 \vec{E}_x(z)}{dz^2} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \vec{E}_x(z) = 0, \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{d^2 \vec{E}_y(z)}{dz^2} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \vec{E}_y(z) = 0, \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{d^2 \vec{B}_x(z)}{dz^2} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \vec{B}_x(z) = 0, \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{d^2 \vec{B}_y(z)}{dz^2} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \vec{B}_y(z) = 0. \quad (\text{B.6})$$

Dessa forma, as soluções gerais para os campos $\vec{E}(z)$ e $\vec{B}(z)$ são:

$$E_x(z) = \begin{cases} a_x \cos q_1 z + b_x \sin q_1 z & , \quad 0 \leq z < \frac{a}{2} \\ c_x \cos q_2 z + d_x \sin q_2 z & , \quad \frac{a}{2} \leq z < \frac{a}{2} + b \\ e_x \cos q_1 z + f_x \sin q_1 z & , \quad \frac{a}{2} + b \leq z < a + b \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

$$E_y(z) = \begin{cases} a_y \cos q_1 z + b_y \sin q_1 z & , \quad 0 \leq z < \frac{a}{2} \\ c_y \cos q_2 z + d_y \sin q_2 z & , \quad \frac{a}{2} \leq z < \frac{a}{2} + b \\ e_y \cos q_1 z + f_y \sin q_1 z & , \quad \frac{a}{2} + b \leq z < a + b \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

$$B_x(z) = \begin{cases} \frac{i}{w} q_1 a_y \sin q_1 z - \frac{i}{w} q_1 b_y \cos q_1 z & , \quad 0 \leq z < \frac{a}{2} \\ \frac{i}{w} q_2 c_y \sin q_2 z - \frac{i}{w} q_2 d_y \cos q_2 z & , \quad \frac{a}{2} \leq z < \frac{a}{2} + b \\ \frac{i}{w} q_1 e_y \sin q_1 z - \frac{i}{w} q_1 f_y \cos q_1 z & , \quad \frac{a}{2} + b \leq z < a + b \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

$$B_y(z) = \begin{cases} -\frac{i}{w} q_1 a_x \sin q_1 z + \frac{i}{w} q_1 b_x \cos q_1 z & , \quad 0 \leq z < \frac{a}{2} \\ -\frac{i}{w} q_2 c_x \sin q_2 z + \frac{i}{w} q_2 d_x \cos q_2 z & , \quad \frac{a}{2} \leq z < \frac{a}{2} + b \\ -\frac{i}{w} q_1 e_x \sin q_1 z + \frac{i}{w} q_1 f_x \cos q_1 z & , \quad \frac{a}{2} + b \leq z < a + b \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

$$B_y(z) = \begin{cases} -\frac{i}{w} q_1 a_x \sin q_1 z + \frac{i}{w} q_1 b_x \cos q_1 z, & 0 \leq z < \frac{a}{2} \\ -\frac{i}{w} q_2 c_x \sin q_2 z + \frac{i}{w} q_2 d_x \cos q_2 z, & \frac{a}{2} \leq z < \frac{a}{2} + b \\ -\frac{i}{w} q_1 e_x \sin q_1 z + \frac{i}{w} q_1 f_x \cos q_1 z, & \frac{a}{2} + b \leq z < a + b \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

onde $q_1 = \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}$, $q_2 = \omega \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}$ e $k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$

B.1 Condições de Contorno

Precisamos aplicar agora as condições de contorno:

1. Da Condição de Block

$$\vec{E}(a+b) = e^{ik(a+b)} \vec{E}(0) \quad (\text{B.12})$$

$$\vec{B}(a+b) = e^{ik(a+b)} \vec{B}(0) \quad (\text{B.13})$$

$$M_{ef} \begin{vmatrix} e_x \\ e_y \\ f_x \\ f_y \end{vmatrix} = N_{ab} \begin{vmatrix} a_x \\ a_y \\ b_x \\ b_y \end{vmatrix} \quad (\text{B.14})$$

$$M_{ef} = \begin{vmatrix} \cos((a+b)q_1) & 0 & \sin((a+b)q_1) & 0 \\ 0 & \cos((a+b)q_1) & 0 & \sin((a+b)q_1) \\ \frac{iq_1}{\omega} \sin((a+b)q_1) & 0 & -\frac{iq_1}{\omega} \cos((a+b)q_1) & 0 \\ 0 & -\frac{iq_1}{\omega} \sin((a+b)q_1) & 0 & \frac{iq_1}{\omega} \cos((a+b)q_1) \end{vmatrix} \quad (\text{B.15})$$

$$N_{ab} = \begin{vmatrix} -e^{i(a+b)k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{i(a+b)k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{iq_1}{\omega} e^{i(a+b)k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{iq_1}{\omega} e^{i(a+b)k} \end{vmatrix} \quad (\text{B.16})$$

2. Das condições de interface para $\vec{D}(z)$ e $\vec{B}(z)$, no ponto $z = a/2$, temos:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \vec{D}(a/2 - \delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \vec{D}(a/2 + \delta) \quad (\text{B.17})$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \vec{H}(a/2 - \delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \vec{H}(a/2 + \delta) \quad (\text{B.18})$$

$$M_{ab} \begin{vmatrix} a_x \\ a_y \\ b_x \\ b_y \end{vmatrix} = N_{cd} \begin{vmatrix} c_x \\ c_y \\ d_x \\ d_y \end{vmatrix} \quad (\text{B.19})$$

$$M_{ab} = \begin{vmatrix} \epsilon_0 \epsilon_1 \cos\left(\frac{aq_1}{2}\right) & \frac{iq_1 \alpha \theta_1}{2\pi\omega} \sin\left(\frac{aq_1}{2}\right) & \epsilon_0 \epsilon_1 \sin\left(\frac{aq_1}{2}\right) & -\frac{iq_1 \alpha \theta_1}{2\pi\omega} \cos\left(\frac{aq_1}{2}\right) \\ -\frac{iq_1 \alpha \theta_1}{2\pi\omega} \sin\left(\frac{aq_1}{2}\right) & \epsilon_0 \epsilon_1 \cos\left(\frac{aq_1}{2}\right) & \frac{iq_1 \alpha \theta_1}{2\pi\omega} \cos\left(\frac{aq_1}{2}\right) & \epsilon_0 \epsilon_1 \sin\left(\frac{aq_1}{2}\right) \\ \frac{iq_1}{\mu_0 \mu_1 \omega} \sin\left(\frac{aq_1}{2}\right) & \frac{\alpha \theta_1}{2\pi} \cos\left(\frac{aq_1}{2}\right) & -\frac{iq_1}{\mu_0 \mu_1 \omega} \cos\left(\frac{aq_1}{2}\right) & \frac{\alpha \theta_1}{2\pi} \sin\left(\frac{aq_1}{2}\right) \\ \frac{\alpha \theta_1}{2\pi} \cos\left(\frac{aq_1}{2}\right) & -\frac{iq_1}{\mu_0 \mu_1 \omega} \sin\left(\frac{aq_1}{2}\right) & \frac{\alpha \theta_1}{2\pi} \sin\left(\frac{aq_1}{2}\right) & \frac{iq_1}{\mu_0 \mu_1 \omega} \cos\left(\frac{aq_1}{2}\right) \end{vmatrix} \quad (\text{B.20})$$

$$N_{cd} = \begin{vmatrix} -\epsilon_0 \epsilon_2 \cos\left(\frac{aq_2}{2}\right) & -\frac{iq_2 \alpha \theta_2}{2\pi \omega} \sin\left(\frac{aq_2}{2}\right) & -\epsilon_0 \epsilon_2 \sin\left(\frac{aq_2}{2}\right) & \frac{iq_2 \alpha \theta_2}{2\pi \omega} \cos\left(\frac{aq_2}{2}\right) \\ \frac{iq_2 \alpha \theta_2}{2\pi \omega} \sin\left(\frac{aq_2}{2}\right) & -\epsilon_0 \epsilon_2 \cos\left(\frac{aq_2}{2}\right) & -\frac{iq_2 \alpha \theta_2}{2\pi \omega} \cos\left(\frac{aq_2}{2}\right) & -\epsilon_0 \epsilon_2 \sin\left(\frac{aq_2}{2}\right) \\ -\frac{iq_2}{\mu_0 \mu_2 \omega} \sin\left(\frac{aq_2}{2}\right) & -\frac{\alpha \theta_2}{2\pi} \cos\left(\frac{aq_2}{2}\right) & \frac{iq_2}{\mu_0 \mu_2 \omega} \cos\left(\frac{aq_2}{2}\right) & -\frac{\alpha \theta_2}{2\pi} \sin\left(\frac{aq_2}{2}\right) \\ -\frac{\alpha \theta_2}{2\pi} \cos\left(\frac{aq_2}{2}\right) & \frac{iq_2}{\mu_0 \mu_2 \omega} \sin\left(\frac{aq_2}{2}\right) & -\frac{\alpha \theta_2}{2\pi} \sin\left(\frac{aq_2}{2}\right) & -\frac{iq_2}{\mu_0 \mu_2 \omega} \cos\left(\frac{aq_2}{2}\right) \end{vmatrix} \quad (\text{B.21})$$

3. Das condições de interface $\vec{D}(z)$ e $\vec{B}(z)$, no ponto $z = a/2 + b$, temos:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \vec{D}(a/2 + b - \delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \vec{D}(a/2 + b + \delta) \quad (\text{B.22})$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \vec{H}(a/2 + b - \delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \vec{H}(a/2 + b + \delta) \quad (\text{B.23})$$

$$M_{cd} \begin{vmatrix} c_x \\ c_y \\ d_x \\ d_y \end{vmatrix} = N_{ef} \begin{vmatrix} e_x \\ e_y \\ f_x \\ f_y \end{vmatrix} \quad (\text{B.24})$$

$$M_{cd} = \begin{vmatrix} \epsilon_0 \epsilon_2 \cos\left(\left(\frac{a}{2} + b\right)q_2\right) & \frac{iq_2 \alpha \theta_2}{2\pi \omega} \sin\left(\left(\frac{a}{2} + b\right)q_2\right) & \epsilon_0 \epsilon_2 \sin\left(\left(\frac{a}{2} + b\right)q_2\right) & -\frac{iq_2 \alpha \theta_2}{2\pi \omega} \cos\left(\left(\frac{a}{2} + b\right)q_2\right) \\ -\frac{iq_2 \alpha \theta_2}{2\pi \omega} \sin\left(\left(\frac{a}{2} + b\right)q_2\right) & \epsilon_0 \epsilon_2 \cos\left(\left(\frac{a}{2} + b\right)q_2\right) & \frac{iq_2 \alpha \theta_2}{2\pi \omega} \cos\left(\left(\frac{a}{2} + b\right)q_2\right) & \epsilon_0 \epsilon_2 \sin\left(\left(\frac{a}{2} + b\right)q_2\right) \\ \frac{iq_2}{\mu_0 \mu_2 \omega} \sin\left(\left(\frac{a}{2} + b\right)q_2\right) & \frac{\alpha \theta_2}{2\pi} \cos\left(\left(\frac{a}{2} + b\right)q_2\right) & -\frac{iq_2}{\mu_0 \mu_2 \omega} \cos\left(\left(\frac{a}{2} + b\right)q_2\right) & \frac{\alpha \theta_2}{2\pi} \sin\left(\left(\frac{a}{2} + b\right)q_2\right) \\ \frac{\alpha \theta_2}{2\pi} \cos\left(\left(\frac{a}{2} + b\right)q_2\right) & -\frac{iq_2}{\mu_0 \mu_2 \omega} \sin\left(\left(\frac{a}{2} + b\right)q_2\right) & \frac{\alpha \theta_2}{2\pi} \sin\left(\left(\frac{a}{2} + b\right)q_2\right) & \frac{iq_2}{\mu_0 \mu_2 \omega} \cos\left(\left(\frac{a}{2} + b\right)q_2\right) \end{vmatrix} \quad (\text{B.25})$$

$$N_{ef} = \begin{vmatrix} -\epsilon_0 \epsilon_1 \cos\left(\left(\frac{a}{2} + b\right)q_1\right) & -\frac{iq_1 \alpha \theta_1}{2\pi \omega} \sin\left(\left(\frac{a}{2} + b\right)q_1\right) & -\epsilon_0 \epsilon_1 \sin\left(\left(\frac{a}{2} + b\right)q_1\right) & \frac{iq_1 \alpha \theta_1}{2\pi \omega} \cos\left(\left(\frac{a}{2} + b\right)q_1\right) \\ \frac{iq_1 \alpha \theta_1}{2\pi \omega} \sin\left(\left(\frac{a}{2} + b\right)q_1\right) & -\epsilon_0 \epsilon_1 \cos\left(\left(\frac{a}{2} + b\right)q_1\right) & -\frac{iq_1 \alpha \theta_1}{2\pi \omega} \cos\left(\left(\frac{a}{2} + b\right)q_1\right) & -\epsilon_0 \epsilon_1 \sin\left(\left(\frac{a}{2} + b\right)q_1\right) \\ -\frac{iq_1}{\mu_0 \mu_1 \omega} \sin\left(\left(\frac{a}{2} + b\right)q_1\right) & -\frac{\alpha \theta_1}{2\pi} \cos\left(\left(\frac{a}{2} + b\right)q_1\right) & \frac{iq_1}{\mu_0 \mu_1 \omega} \cos\left(\left(\frac{a}{2} + b\right)q_1\right) & -\frac{\alpha \theta_1}{2\pi} \sin\left(\left(\frac{a}{2} + b\right)q_1\right) \\ -\frac{\alpha \theta_1}{2\pi} \cos\left(\left(\frac{a}{2} + b\right)q_1\right) & \frac{iq_1}{\mu_0 \mu_1 \omega} \sin\left(\left(\frac{a}{2} + b\right)q_1\right) & -\frac{\alpha \theta_1}{2\pi} \sin\left(\left(\frac{a}{2} + b\right)q_1\right) & -\frac{iq_1}{\mu_0 \mu_1 \omega} \cos\left(\left(\frac{a}{2} + b\right)q_1\right) \end{vmatrix} \quad (\text{B.26})$$

$$M_{ef} E = N_{ab} A \quad (\text{B.27})$$

$$M_{ab} A = N_{cd} C \Rightarrow A = M_{ab}^{-1} N_{cd} C \quad (\text{B.28})$$

$$M_{cd} A = N_{ef} E \Rightarrow C = M_{cd}^{-1} N_{ef} E \quad (\text{B.29})$$

Assim,

$$M_{ef} E = N_{ab} M_{ab}^{-1} N_{cd} M_{cd}^{-1} N_{ef} E \quad (\text{B.30})$$

$$(M_{ef} - N_{ab}M_{ab}^{-1}N_{cd}M_{cd}^{-1}N_{ef})E = 0 \quad (\text{B.31})$$

Para a existência de soluções não triviais, devemos impor que:

$$\det [M_{ef} - N_{ab}M_{ab}^{-1}N_{cd}M_{cd}^{-1}N_{ef}] = 0 \quad (\text{B.32})$$

$$\begin{aligned} & \frac{q_2}{\omega^2} [\sin^2(q_1(a+b)) + \frac{1}{(\alpha^2\theta_1^2\mu_0\mu_1+4\pi^2\epsilon_0\epsilon_1)^2(\alpha^2\theta_2^2\mu_0\mu_2+4\pi^2\epsilon_0\epsilon_2)^2} (\cos(q_1(a+b))(\alpha^2\theta_1^2\mu_0\mu_1+4\pi^2\epsilon_0\epsilon_1)(\alpha^2\theta_2^2\mu_0\mu_2+4\pi^2\epsilon_0\epsilon_2) \\ & + 16\pi^4\epsilon_2^2\epsilon_1\epsilon_2 e^{ik(a+b)} \cos(\frac{aq_1}{2}) \cos(\frac{aq_2}{2}) \cos(q_1(\frac{a}{2}+b)) \cos(q_2(\frac{a}{2}+b)))]^2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

$$\begin{aligned} & \sin^2(q_1(a+b)) + \frac{1}{(\alpha^2\theta_1^2\mu_0\mu_1+4\pi^2\epsilon_0\epsilon_1)^2(\alpha^2\theta_2^2\mu_0\mu_2+4\pi^2\epsilon_0\epsilon_2)^2} [(\cos(q_1(a+b))(\alpha^2\theta_1^2\mu_0\mu_1+4\pi^2\epsilon_0\epsilon_1)(\alpha^2\theta_2^2\mu_0\mu_2+4\pi^2\epsilon_0\epsilon_2) \\ & + 16\pi^4\epsilon_2^2\epsilon_1\epsilon_2 e^{ik(a+b)} \cos(\frac{aq_1}{2}) \cos(\frac{aq_2}{2}) \cos(q_1(\frac{a}{2}+b)) \cos(q_2(\frac{a}{2}+b))] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

$$\begin{aligned} & \sin^2(q_1(a+b)) + \frac{1}{(\alpha^2\theta_1^2\mu_0\mu_1+4\pi^2\epsilon_0\epsilon_1)(\alpha^2\theta_2^2\mu_0\mu_2+4\pi^2\epsilon_0\epsilon_2)} \cos(q_1(a+b)) + \\ & \frac{1}{(\alpha^2\theta_1^2\mu_0\mu_1+4\pi^2\epsilon_0\epsilon_1)^2(\alpha^2\theta_2^2\mu_0\mu_2+4\pi^2\epsilon_0\epsilon_2)^2} [16\pi^4\epsilon_2^2\epsilon_1\epsilon_2 e^{ik(a+b)} \cos(\frac{aq_1}{2}) \cos(\frac{aq_2}{2}) \cos(\frac{1}{2}q_1(a+2b)) \cos(\frac{1}{2}q_2(a+2b))] \\ & - \frac{1}{2m_1^2m_2^2q_1^2q_2^2} e^{2ik(a+b)} - 2m_1m_2q_1q_2(\cos(k(a+b)) - \cos(aq_1)\cos(bq_2)) - \\ & \sin(aq_1)\sin(bq_2)(m_2^2(q_1 - m_0m_1w\delta)(m_0m_1w\delta + q_1) + m_1^2q_2^2)] [\sin(bq_2) \times \\ & (\sin(aq_1)(m_2^2(m_0^2m_1^2w^2\delta^2 - 2q_1^2) - 2m_1^2q_2^2) + 2m_0^2m_1^2m_2^2w^2\delta^2 \sin(\frac{aq_1}{2}) \cos(\frac{aq_1}{2})) - \\ & 4m_1m_2q_1q_2(\cos(k(a+b)) - \cos(aq_1)\cos(bq_2))] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

$$\begin{aligned} & [-2m_1m_2q_1q_2(\cos(k(a+b)) - \cos(aq_1)\cos(bq_2)) - \sin(aq_1)\sin(bq_2)(m_2^2(q_1 - m_0m_1w\delta)(m_0m_1w\delta + q_1) + m_1^2q_2^2)] \\ & [\sin(bq_2) \times (\sin(aq_1)(m_2^2(m_0^2m_1^2w^2\delta^2 - 2q_1^2) - 2m_1^2q_2^2) + 2m_0^2m_1^2m_2^2w^2\delta^2 \sin(\frac{aq_1}{2}) \cos(\frac{aq_1}{2})) \\ & - 4m_1m_2q_1q_2(\cos(k(a+b)) - \cos(aq_1)\cos(bq_2))] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

$$-2m_1m_2q_1q_2(\cos(k(a+b)) - \cos(aq_1)\cos(bq_2)) - \sin(aq_1)\sin(bq_2)(m_2^2(q_1 - m_0m_1w\delta)(m_0m_1w\delta + q_1) + m_1^2q_2^2) = 0 \quad (\text{B.37})$$

$$\cos(k(a+b)) = \cos(aq_1)\cos(bq_2) - \frac{1}{2} \left(\frac{m_2^2q_1^2 + m_1^2q_2^2 - m_0^2m_1^2m_2^2w^2\delta^2}{m_1m_2q_1q_2} \right) \sin(aq_1)\sin(bq_2) \quad (\text{B.38})$$

Note que:

$$\frac{m_2^2q_1^2 + m_1^2q_2^2 - m_0^2m_1^2m_2^2w^2\delta^2}{m_1m_2q_1q_2} = \frac{m_2q_1}{m_1q_2} + \frac{m_1q_2}{m_2q_1} - \frac{m_0^2m_1m_2w^2\delta^2}{q_1q_2} \quad (\text{B.39})$$

Definindo:

$$Z_i = \sqrt{\frac{m_i}{\epsilon_i}} e q_i = w \sqrt{m_i \epsilon_i} \quad (\text{B.41})$$

Temos:

$$\cos(k(a+b)) = \cos(aq_1) \cos(bq_2) - \frac{1}{2} \left(\frac{m_2 q_1}{m_1 q_2} + \frac{m_1 q_2}{m_2 q_1} - \frac{m_0^2 m_1 m_2 w^2 \delta^2}{q_1 q_2} \right) \sin(aq_1) \sin(bq_2) \quad (\text{B.42})$$

$$\cos(k(a+b)) = \cos(aq_1) \cos(bq_2) - \frac{1}{2} \left(\frac{m_2 w \sqrt{m_1 \epsilon_1}}{m_1 w \sqrt{m_2 \epsilon_2}} + \frac{m_1 w \sqrt{m_2 \epsilon_2}}{m_2 w \sqrt{m_1 \epsilon_1}} - \frac{m_0^2 m_1 m_2 w^2 \delta^2}{w \sqrt{m_1 \epsilon_1} w \sqrt{m_2 \epsilon_2}} \right) \sin(aq_1) \sin(bq_2) \quad (\text{B.43})$$

$$\cos(k(a+b)) = \cos(aq_1) \cos(bq_2) - \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{m_2^2 m_1 \epsilon_1}}{\sqrt{m_1^2 m_2 \epsilon_2}} + \frac{\sqrt{m_1^2 m_2 \epsilon_2}}{\sqrt{m_2^2 m_1 \epsilon_1}} - \frac{m_0^2 m_1 m_2 \delta^2}{\sqrt{m_1 \epsilon_1} \sqrt{m_2 \epsilon_2}} \right) \sin(aq_1) \sin(bq_2) \quad (\text{B.44})$$

$$\cos(k(a+b)) = \cos(aq_1) \cos(bq_2) - \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{m_2^2 m_1 \epsilon_1}{m_1^2 m_2 \epsilon_2}} + \sqrt{\frac{m_1^2 m_2 \epsilon_2}{m_2^2 m_1 \epsilon_1}} - m_0^2 \delta^2 \sqrt{\frac{m_1^2 m_2^2}{m_1 \epsilon_1 m_2 \epsilon_2}} \right) \sin(aq_1) \sin(bq_2) \quad (\text{B.45})$$

Portanto a solução característica do nosso sistema é:

$$\cos(k(a+b)) = \cos(aq_1) \cos(bq_2) - \frac{1}{2} \left(\frac{Z_1}{Z_2} + \frac{Z_2}{Z_1} + \delta Z_2 Z_1 \right) \sin(aq_1) \sin(bq_2) \quad (\text{B.46})$$

B.2 Cálculo da Frequência

Considerando a solução característica (B.46), temos que, para o caso particular onde $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \mu_1 = \mu_2 = 1$, $a = bq_1$ $a = q_2 b$, obtemos:

$$\cos[k(a+b)] = \cos^2(q_1 a) - \frac{1}{2} [2 + \delta] \sin^2(q_1 a) \quad (\text{B.47})$$

Considerando agora as fórmulas do ângulo duplo:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \quad (\text{B.48})$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \quad (\text{B.49})$$

e substituindo (B.48) e (B.49) em (B.47), temos:

$$\cos(2k) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2q_1 a) - \frac{1}{2} (2 + \delta) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2q_1 a) \right) \quad (\text{B.50})$$

$$2 \cos(2k) = 1 + \cos(2q_1 a) - \left(1 - \cos(2q_1 a) + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta \cos(2q_1 a)}{2} \right), \quad (\text{B.51})$$

$$2 \cos(2k) = \cos(2q_1 a) \left(2 - \frac{\delta}{2} \right) - \frac{\delta}{2}, \quad (\text{B.52})$$

$$\cos(2q_1 a) = \frac{\left(2 \cos(2k) + \frac{\delta}{2} \right)}{\left(2 + \frac{\delta}{2} \right)} \quad (\text{B.53})$$

$$2 \left(\frac{\omega(k)}{c} \right) a = \arccos \left[\frac{\left(2 \cos(2k) + \frac{\delta}{2} \right)}{\left(2 + \frac{\delta}{2} \right)} \right] \quad (\text{B.54})$$

$$\omega(k) = \underbrace{\frac{c}{2a}}_{\lambda} \arccos \left[\frac{\left(2 \cos(2k) + \frac{\delta}{2} \right)}{\left(2 + \frac{\delta}{2} \right)} \right], \quad (\text{B.55})$$

Observe: no caso de ondas eletromagnéticas que se deslocam através do vácuo, temos, $v = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$, em que c é a velocidade da luz no vácuo. Dessa forma:

$$f = \frac{c}{\lambda} \quad (\text{B.56})$$

onde λ é o comprimento da onda. Assim:

$$\omega(k) = \omega_0 \arccos \left[\frac{\left(2 \cos(2k) + \frac{\delta}{2} \right)}{\left(2 + \frac{\delta}{2} \right)} \right], \quad (\text{B.57})$$

Agora, se tomarmos $k_0 = \frac{\pi}{2a}$ podemos rearranjar o argumento do cosseno em termos da razão entre $\frac{k}{k_0}$. Finalmente, obtemos:

$$\omega(k) = \omega_0 \arccos \left[\frac{\frac{\delta}{2} + 2 \cos\left(\pi \frac{k}{k_0}\right)}{\frac{\delta}{2} + 2} \right]. \quad (\text{B.58})$$

B.3 Cálculo da Massa Efetiva

Seja $\omega(k) = \omega_0 \arccos \left[\frac{\frac{\delta}{2} + 2 \cos\left(\pi \frac{k}{k_0}\right)}{\frac{\delta}{2} + 2} \right]$. Por definição a massa efetiva é dada pela seguinte equação:

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{d^2\omega(k)}{dk^2} \quad (\text{B.59})$$

Assim:

$$\frac{d\omega(k)}{dk} = \omega_0 \frac{(-1)}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{du}{dk} \quad (\text{B.60})$$

$$\frac{d\omega(k)}{dk} = \frac{\pi \left(\frac{2}{(\frac{\delta}{2}+2)} \omega_0 \right)}{k_0} \frac{\sin \left(\frac{\pi k}{k_0} \right)}{\left[1 - \left(\frac{\frac{\delta}{2}+2 \cos \left(\frac{\pi k}{k_0} \right)}{\frac{\delta}{2}+2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{B.61})$$

Chamando $f(k) = \sin \left(\frac{\pi k}{k_0} \right)$ e $g(k) = \frac{\sin \left(\frac{\pi k}{k_0} \right)}{\left[1 - \left(\frac{\frac{\delta}{2}+2 \cos \left(\frac{\pi k}{k_0} \right)}{\frac{\delta}{2}+2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}$, temos:

$$\frac{d^2\omega(k)}{dk^2} = A[f'(k)g(k) + g'(k)f(k)] \quad (\text{B.62})$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\omega(k)}{dk^2} = A & \left[\frac{\pi}{k_0} \cos \left(\frac{\pi k}{k_0} \right) \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\frac{\delta}{2}+2 \cos \left(\frac{\pi k}{k_0} \right)}{\frac{\delta}{2}+2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} + \sin \left(\frac{\pi k}{k_0} \right) \right. \\ & \left. \left[-\frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{\frac{\delta}{2}+2}{\cos \left(\frac{\pi k}{k_0} \right) \frac{\delta}{2}+2} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right]^{(-2)} \right. \\ & \left. \left(\frac{\frac{\delta}{2}+2 \cos \left(\frac{\pi k}{k_0} \right)}{\frac{\delta}{2}+2} \right) \left(\frac{2}{\frac{\delta}{2}+2} \right) \frac{\pi}{k_0} (-\sin \left(\frac{\pi k}{k_0} \right)) \right] \quad (\text{B.63}) \end{aligned}$$

- Para $k = k_0$

$$\frac{d^2\omega(k)}{dk^2} = -\frac{A\pi}{k_0} \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\frac{\delta}{2}-2}{\frac{\delta}{2}+2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{B.64})$$

$$\frac{d^2\omega(k)}{dk^2} = -\frac{\pi^2 \left(\frac{2}{\frac{\delta}{2}+2} \right) \omega_0}{k_0^2} \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\frac{\delta}{2}-2}{\frac{\delta}{2}+2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{B.65})$$

$$\frac{d^2\omega(k)}{d^2} = -\frac{\pi^2\omega_0}{k_0^2} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{\left(\frac{\delta}{2} + 2\right) \left[1 - \left(\frac{\frac{\delta}{2} - 2}{\frac{\delta}{2} + 2}\right)^2\right]}}_{4\delta}} \quad (\text{B.66})$$

$$\frac{d^2\omega(k)}{d^2} = -\frac{2\pi^2\omega_0}{k_0^2} \frac{1}{\sqrt{4\delta}} \quad (\text{B.67})$$

Finalmente obtemos a equação da massa efetiva:

$$m^* = \frac{-\hbar k_0^2}{\pi^2\omega_0} \sqrt{\delta} \quad (\text{B.68})$$