UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

SAMUEL VALENTIM AFONSO

ANÁLISE DO ESPALHAMENTO DE UM BÓSON POR UM TUBO MAGNÉTICO NO ESPAÇO-TEMPO DE UMA CORDA CÓSMICA

João Pessoa
2017

SAMUEL VALENTIM AFONSO

ANÁLISE DO ESPALHAMENTO DE UM BÓSON POR UM TUBO MAGNÉTICO NO ESPAÇO-TEMPO DE UMA CORDA CÓSMICA

Dissertação apresentada ao Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba, para a obtenção de Título de Mestre em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Eugênio Ramos Bezerra de Mello

João Pessoa

2017

A257a Afonso, Samuel Valentim.
Análise do espalhamento de um bóson por um tubo magnético no espaço-tempo de uma corrida cósmica / Samuel Valentim Afonso. - João Pessoa, 2017.
83 f. : il. -

Orientador: Eugênio Ramos Bezerra de Mello.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN

1. Física. 2. Espalhamento. 3. Corda cósmica. 4. Whittaker. I. Título.

UFPB/BC CDU: 53(043)

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física

DECLARAÇÃO DE TITULAÇÃO
Mestrado

A Comissão Examinadora que abaixo assina este documento, reunida no dia 16 de fevereiro de 2017, na Sala de Reuniões do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, APROVA **Samuel Valentim Afonso** na defesa de sua dissertação intitulada "*Análise do espalhamento por um tubo magnético no espaço-tempo de uma corda cósmica*".

João Pessoa, 16 de fevereiro de 2017.

Orientador:

Prof. Dr. Eugênio Ramos Bezerra de Mello
(UFPB)

1º Examinador:

Prof. Dr. Sérgio André Pontes Azevedo
(UFPB)

2º Examinador:

Profa. Dra. Geusa de Araújo Marques
(UFCG)

AGRADECIMENTOS

Seria injusto elaborar estes agradecimentos e não citar nominalmente a todos os que contribuíram para que meu processo de aprendizado em Física se concretizasse com esta dissertação. No entanto, também é humanamente impossível listar a todos. Impossível por dois motivos: primeiro pela quantidade de pessoas que passaram por minha vida e de alguma forma me incentivaram a avançar. Segundo, porque mesmo que me lembre de muitos, não seria fácil trazer todos à memória. No entanto, mais injusto seria não deixar o registro de agradecimento àqueles que diretamente estiveram presentes em todo o amadurecimento do meu conhecimento científico.

Agradeço aos órgãos financiadores de minha pesquisa acadêmica, CNPq e CAPES.

Agradeço ao meu orientador por ter me encaminhado para a compreensão desta ciência, por me guiar nos caminhos da pesquisa científica, e, principalmente, pelo exemplo de zelo por esta ciência tão encantadora que é a Física.

Aos professores que foram fundamentais por mostrarem novos horizontes da ciência e suas teorias.

Aos meus colegas de curso, pelas conversas e discussões que levaram a reflexões importantes no âmbito da Física e que certamente também contribuíram para minha formação.

Aos meus pais por apoiarem minhas escolhas e terem dado, sempre que possível, o suporte necessário para que eu pudesse encarar todas as dificuldades e desafios da vida, dentre estes, o de aprofundar no conhecimento na ciência, em particular da Física.

À Isabella, minha companheira de caminhada, que durante muitos anos esteve ao meu lado, mesmo quando minha mente divagou por longos dias a fim de obter compreensão das equações e de meus estudos.

Por fim, embora haja quem diga que Ciência e Religião não se misturam, não poderia deixar de registrar que ciência é produzida por cientistas que tem suas crenças íntimas, e, particularmente, o processo de obtenção de conhecimento científico em nenhum momento afastou-me de minhas crenças, pelo contrário, enriqueceu ainda mais a minha admiração pela vida e pelos fenômenos que a natureza nos permite deslumbrar. Deste modo, não poderia deixar de agradecer a Deus por essa oportunidade de conhecer as maravilhas do universo.

Resumo

O estudo do fenômeno de espalhamento é extremamente importante para entender as propriedades da matéria. Aharonov e Bohm (1959) contribuíram muito para esta questão, ao mostrar a importância dos potenciais eletromagnéticos no fenômeno de espalhamento quântico. Neste sentido, é imprescindível conhecer o fenômeno em todo seu alcance. Esta dissertação pretende contribuir para o aprofundamento no entendimento do espalhamento quântico relativístico. Nesta perspectiva, esta pesquisa apresenta uma análise do espalhamento de uma partícula quântica relativística carregada e de spin zero, por um tubo magnético, considerando três modelos distintos de campo, no espaço-tempo de uma corda cósmica. Nosso principal objetivo foi o de determinar o ângulo de mudança de fase (*phase shift*)analisando o comportamento assintótico das funções de onda considerando os três modelos. Para este fim, utilizamos dois métodos que se complementam: o método algébrico de resoluções de equações diferenciais, e o método de cálculo numérico, por via de programa computacional. Por um lado, obtivemos como resultados algébricos soluções para as equações encontradas, cuja forma nos remeteu às funções especiais de Bessel, Neumann e Whittaker. E, por outro lado, o cálculo numérico nos possibilitou entender a contribuição da corda cósmica e do tubo do campo magnético no desvio de fase do espalhamento.

Palavras-chave: Espalhamento, Corda cósmica, Whittaker

Abstract

The study of the scattering phenomenon is extremely important to understand the properties of matter. Aharonov and Bohm (1959) contributed significantly to this issue by showing the importance of the electromagnetic potentials in the quantum scattering phenomenon. In this regard, it is indispensable to know this phenomenon in all its reach. This study aims to contribute whith the increasing understanding of relativistic quantum scattering. In this perspective, this research presents an analysis of the scattering of a relativistic quantum particle charged with zero spin into a magnetic tube, considering three distinct models of field in the space-time of a cosmic string. Our main objective was to determine the phase shift angle by analyzing the asymptotic behavior of the wave functions considering the three models. To this end, we have used two complementary methods : the algebraic method of differential equations resolutions and the numerical calculation method by using a computational program. Firstly, we obtained as algebric results some solutions for the equations found, whose form referred us to the special functions of Bessel, Neuman and Whittaker. Secondly, the numerical calculation enableds us to understand the contribution of the cosmic string and the magnetic field's tube in the phase's deviation of the scattering.

Keywords: Scattering, Cosmic string, Whittaker

Sumário

1 Introdução **10**

2 Equação de Campo de Einstein **13**

2.1 Obtendo a Métrica de uma Corda Cósmica 15

2.2 Equação de Schrödinger 18

2.3 Equação de Klein-Gordon 20

3 Efeito Aharonov-Bohm **22**

3.1 Método desenvolvido por Aharanov-Bhom 22

3.2 Método desenvolvido por Hagen 28

3.3 Ondas Parciais 29

4 Análise do Espalhamento em um Cone **33**

5 Análise do espalhamento por um tubo magnético no espaço-tempo de uma corda cósmica **37**

5.1 Campo magnético uniforme dentro do tubo. 40

5.2 Campo magnético proporcional à $\frac{1}{r}$ dentro do tubo 43

5.3 Campo magnético sobre a casca cilíndrica na superfície do tubo 44

5.4 Condições de continuidade: 46

6 Análise numérica do ângulo de mudança de fase **48**

6.1 Análise numérica do primeiro modelo 52

6.2 Análise numérica do segundo modelo 59

6.3 Análise numérica do terceiro modelo 67

7 Conclusão **74**

Apêndice A – A equação e as funções de Whittaker **78**

Lista de Figuras

3.1 Movimento de uma partícula na região fora do solenoide. 23

5.1 Campo magnético uniforme dentro do tubo 40
5.2 Campo magnético proporcional à $\frac{1}{r}$ dentro do tubo 43
5.3 Campo magnético sobre a casca cilíndrica na superfície do tubo 44

6.1 Neste gráfico adotamos $m = 0$, $\beta = 2.3$ e $\alpha = 1$ 52
6.2 Neste gráfico adotamos $m = 0$, $\beta = 2.3$ e $\alpha = 0.8$ 53
6.3 Neste gráfico adotamos $m = 0$, $\beta = 2.3$ e $\alpha = 0.6$ 53
6.4 Comparando os gráficos do **modelo 1** com $m = 0$ e a linha tracejada correspondendo a $\alpha = 0.6$, a linha pontilhada correspondendo a $\alpha = 0.8$ e a linha contínua correspondendo a $\alpha = 1$. Verifica-se que à medida que diminuímos o valor de α o gráfico desloca-se para a direita. 54
6.5 Fixando os valores $m = 1$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 1.0$ 55
6.6 Fixando os valores $m = 1$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 0.8$ 55
6.7 Fixando os valores $m = 1$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 0.6$ 56
6.8 Comparando os três gráficos gerados para o **modelo 1**, desta vez com $m = 1$ e $\beta = 2.3$ e valores distintos de α, verificamos o padrão conforme exibidos na Figura 6.8. A linha tracejada corresponde a $\alpha = 0.6$, a linha pontilhada corresponde a $\alpha = 0.8$ e a linha contínua corresponde a $\alpha = 1$. 56
6.9 Fixando os valores $m = 1$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 1$ 57
6.10 Fixando os valores $m = -1$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 0.8$ 58
6.11 Fixando os valores $m = -1$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 0.6$ 58

6.12 Comparação do **modelo 1** em que $m = -1$. A linha tracejada corresponde a $\alpha = 0.6$, a linha pontilhada corresponde a $\alpha = 0.8$ e a linha contínua corresponde a $\alpha = 1$. 59
6.13 Modelo 2, fixando os valores $m = 0$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 1$ 60
6.14 Modelo 2, fixando os valores $m = 0$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 0.8$ 60
6.15 Modelo 2, fixando os valores $m = 0$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 0.6$ 61
6.16 Comparando os gráficos do **modelo 2** com $m = 0$, temos que a linha tracejada corresponde a $\alpha = 0.6$, a linha pontilhada corresponde a $\alpha = 0.8$ e a linha contínua corresponde a $\alpha = 1$. 61
6.17 Modelo 2, fixando os valores $m = 1$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 1$ 62
6.18 Modelo 2, fixando os valores $m = 1$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 0.8$ 63
6.19 Modelo 2, fixando os valores $m = 1$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 0.6$ 63
6.20 Comparando os gráficos do **modelo 2** com $m = 1$ e $\alpha = 1$, $\alpha = 0.8$ e $\alpha = 0.6$ 64
6.21 Modelo 2, fixando os valores $m = -1$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 1$ 64
6.22 Modelo 2, fixando os valores $m = -1$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 0.8$ 65
6.23 Modelo 2, fixando os valores $m = -1$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 0.6$ 65
6.24 Comparando os gráficos do **modelo 2** com $m = -1$ e $\alpha = 1$, $\alpha = 0.8$ e $\alpha = 0.6$. A linha tracejada corresponde a $\alpha = 0.6$, a linha pontilhada corresponde a $\alpha = 0.8$ e a linha contínua corresponde a $\alpha = 1$. 66
6.25 Modelo 3, fixando os valores $m = 0$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 1$ 67
6.26 Modelo 3, fixando os valores $m = 0$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 0.8$ 68
6.27 Modelo 3, fixando os valores $m = 0$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 0.6$ 68
6.28 Comparando os gráficos do **modelo 3** com $m = 0$ e $\alpha = 1$, $\alpha = 0.8$ e $\alpha = 0.6$. A linha tracejada corresponde a $\alpha = 0.6$, a linha pontilhada corresponde a $\alpha = 0.8$ e a linha contínua corresponde a $\alpha = 1$. 69
6.29 Modelo 3, fixando os valores $m = 1$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 1$ 70
6.30 Modelo 3, fixando os valores $m = 1$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 0.8$ 70
6.31 Modelo 3, fixando os valores $m = 1$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 0.6$ 71

6.32 Comparando os gráficos do **modelo 3** com $m = 1$ e $\alpha = 1$, $\alpha = 0.8$ e $\alpha = 0.6$. A linha tracejada corresponde a $\alpha = 0.6$, a linha pontilhada corresponde a $\alpha = 0.8$ e a linha contínua corresponde a $\alpha = 1$. 71
6.33 Modelo 3, fixando os valores $m = -1$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 1$ 72
6.34 Modelo 3, fixando os valores $m = -1$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 0.8$ 72
6.35 Modelo 3, fixando os valores $m = -1$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 0.6$ 73
6.36 Modelo 3, fixando os valores $m = -1$ e de $\beta = 2.3$. A linha tracejada corresponde a $\alpha = 0.6$, a linha pontilhada corresponde a $\alpha = 0.8$ e a linha contínua corresponde a $\alpha = 1$. 73

Capítulo 1

Introdução

O estudo do fenômeno de espalhamento[1] é de grande importância na Física. É através do espalhamento que muitas propriedades das partículas são descobertas. Trata-se de um processo onde uma partícula carregada incide em um alvo[2], chamado alvo de espalhamento, e após a partícula passar nas proximidades do potencial, ocorre um desvio na sua trajetória, em seguida é observado a mudança de fase do ângulo gerado pelo potencial, chamado de ângulo de espalhamento. Embora estejamos falando em partículas, o fenômeno pode ser estudado com a teoria ondulatória[3]. O estudo do espalhamento pode ser aplicado tanto pela mecânica quântica não-relativística, via a equação de Schrödinger[4], quanto pela mecânica quântica relativística, via a equação de Klein-Gordon[5]. Nessa dissertação abordaremos o problema do espalhamento relativístico de uma partícula bosônica carregada por um tubo magnético de raio fixo no espaço tempo de uma corda cósmica. De modo a tratar este assunto, o qual corresponde a nossa principal contribuição, fizemos uma breve revisão sobre o efeito Aharonov-Bohm[6], que corresponde ao espalhamento de uma partícula carregada por um fluxo magnético linear. Duas abordagens distintas são apresentadas: A primeira devida a Aharonov-Bohm, que corresponde ao estudo de função de onda completa, e a segunda abordagem é a de C. R. Hagen[7], onde se utiliza o tratamento matemático por ondas parciais. É mostrado que o ângulo de espalhamento depende apenas da parte fracionária da razão do fluxo magnético pelo fluxo quântico. Também abordamos o problema do espalhamento topológico de uma partícula por uma corda cósmica. Neste caso seguimos o trabalho de R. Jackiw e S. Deser[8], e fizemos uma

análise mostrando que o ângulo de mudança de fase (*phase shift*), depende apenas do parâmetro associado ao déficit de ângulo planar gerado pela corda cósmica. A análise que desenvolvemos corresponde uma generalização dos procedimentos acima mencionados, considerando também uma extensão finita para o campo magnético no espaço-tempo de uma corda cósmica. Com este propósito utilizamos três modelos distintos para o potencial vetor, os quais foram inicialmente propostos por M. Bordag e S. Soropaev[9, 10]. Os modelos correspondem a: **modelo 1)**: campo magnético homogêneo dentro do tubo, **modelo 2)**: campo magnético proporcional à $\frac{1}{r}$ dentro do tubo, **modelo 3)**: campo magnético na casca cilíndrica. A análise algébrica de cada um dos modelos estudados levou a equações diferenciais distintas para a função radial que tiveram como soluções as funções especiais de Bessel, Neumann e Whittaker[11, 12, 16], todas equações e funções conhecidas na literatura da física-matemática. Nosso interesse principal com esta dissertação foi saber a contribuição no ângulo de mudança de fase dada por cada um dos modelos . Os resultados encontrados para o ângulo de mudança de fase foram bastante complexos para se fazer uma abordagem puramente algébrica, portanto o trabalho nos exigiu também um tratamento numérico para que pudéssemos avaliar melhor o comportamento através de análise gráfica. Para tanto utilizamos o programa computacional Wolfram Mathematica que nos possibilitou avaliar o comportamento da contribuição dada ao desvio de fase devido a cada um dos modelos estudados.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: No capítulo 2, iniciamos com a Equação de Einstein[15, 14], que é uma equação que descreve como a geometria do espaço-tempo é afetada pela quantidade de matéria em uma determinada região. Esta equação foi usada para que pudéssemos encontrar a métrica da corda cósmica (seção 2.1). Em seguida, na seção 2.2, revisamos a equação de Schrödinger[17], essencial para descrever fenômenos quântico associados a uma partícula na vizinhança de um fluxo magnético que será adotada no capítulo 3, onde discutimos sobre o efeito Aharonov-Bohm. Dois procedimentos são mostrados: O método desenvolvido por Aharonov e Bohm (seção 3.1), e o método desenvolvido por Hagen (seção 3.2). Mostramos ainda como Hagen chegou a um resultado diferente do resultado obtido por Aharonov-Bohn, embora tenha utilizado o mesmo método. Devido esta diferença, Hagen mostrou que o resultado inicialmente

proposto por Aharonov e Bohm deveria ser corrigido. Na seção 3.3, utilizamos outra abordagem sugerida por Hagen, a do método de ondas parciais, para analisar o efeito de espalhamento. Analisamos, no capítulo 4 o espalhamento quântico não relativístico por um cone, devido ao déficit planar gerado pela corda cósmica. No capítulo 5, que foi nossa maior contribuição, analisamos o espalhamento por um tubo magnético de raio a no espaço-tempo de uma corda cósmica. A primeira abordagem foi toda feita algebricamente, adotando três modelos já conhecidos na literatura[9, 18, 19]. Estes modelos foram abordados separadamente. Na seção 5.1 abordamos o problema do espalhamento via modelo 1, que representa o campo magnético uniforme dentro do tubo, na seção 5.2 estudamos o problema do espalhamento por via do modelo 2, que representa o campo magnético proporcional à $\frac{1}{r}$ dentro do tubo, e, por fim, na seção 5.3, estudamos o problema do espalhamento por via do modelo 3, que representa o campo magnético sobre uma casca cilíndrica na superfície do tubo. Finalmente, ainda no mesmo capítulo, vimos as condições de continuidade, na seção 5.4, fundamental para a execução da tarefa do capítulo seguinte. Analisamos o comportamento assintótico das funções de onda, e obtivemos expressões analíticas regulares para o *phase shift*. No capítulo 6 o trabalho foi exclusivamente utilizando o método computacional com a finalidade de fazermos análises através de dados numéricos para cada um dos modelos. Deste modo, na seção 6.1 fizemos análise numérica do *phase shift* para o modelo 1, na seção 6.2, fizemos para o modelo 2 e finalmente na seção 6.3 analisamos numericamente o modelo 3. Estas análises nos permitiram ver o comportamento do desvio de fase e, consequentemente a contribuição dada devido às funções que encontramos por via de cálculos algébricos. Não fosse pelo programa computacional Mathematica esta tarefa se tornaria por demais extensa. No apêndice A apresentamos algums das propriedades da função de Whittaker.

Adotaremos aqui as seguintes convenções: A assinatura para o tensor métrico é $(+1, -1, -1, -1,)$ e consideraremos a convenção das unidades naturais $\hbar = c = 1$.

Capítulo 2

Equação de Campo de Einstein

A equação de campo de Einstein é uma das equações mais importantes da física. É uma equação que descreve como a geometria do espaço-tempo é afetada pela quantidade de matéria de uma determinada região[13, 14]. Em um limite não-relativístico esta equação reduz-se à teoria da gravitação da mecânica de Newton[15], mostrando compatibilidade física.

As soluções da equação de campo de Einstein são obtidas através de métricas e a primeira solução exata destas equações foi dada por Karl Schwarzschild[14]. Esta métrica tem seu nome e descreve a geometria do espaço-tempo de um buraco negro.

Outra métrica importante e que será utilizada para os estudos desta dissertação é a métrica da corda cósmica. É possível chegar à métrica da corda cósmica através do estudo das equações de campo de Einstein[15], conforme abaixo:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu} \quad . \tag{2.1}$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico, R é o escalar de curvatura e $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento da fonte. A constante $\kappa = 8\pi G$ sendo G a constante gravitacional de Newton. Multiplicando a Eq.(2.1) por $g^{\mu\alpha}$ de ambos os lados, ficamos com:

$$\begin{aligned} g^{\mu\alpha} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} g_{\mu\nu} R &= \kappa g^{\mu\alpha} T_{\mu\nu} \quad , \\ R^{\alpha}_{\nu} - \frac{1}{2} \delta^{\alpha}_{\mu} R &= \kappa T^{\alpha}_{\nu} \quad . \end{aligned} \tag{2.2}$$

Fazendo a contração em α, tomando $\nu = \alpha$, vamos encontrar:

$$\begin{aligned} R^{\alpha}_{\alpha} - \frac{1}{2}\delta^{\alpha}_{\alpha}R &= \kappa T^{\alpha}_{\alpha} \ , \\ R - 2R &= \kappa T^{\alpha}_{\alpha} \ , \\ R &= -\kappa T^{\alpha}_{\alpha} \ , \end{aligned} \tag{2.3}$$

onde T^{α}_{α} é o traço do tensor energia-momento. Quando substituímos o resultado da Eq.(2.3) na Eq. (2.2) com $\alpha = \mu$, ficamos com:

$$R^{\mu}_{\nu} = \kappa \left(T^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\nu}T^{\alpha}_{\alpha} \right) \ . \tag{2.4}$$

Vamos agora aplicar o formalismo acima, para o caso de uma corda cósmica. Admitindo que esse objeto linear encontra-se ao longo do eixo z, e considerando o sistema de coordenadas cilíndricas,

$$x^{\mu} = (t, \rho, \phi, z) \tag{2.5}$$

o tensor energia-momento associado a uma corda cósmica, T^{μ}_{ν}, foi proposto por Vilenkin em [21] , o qual é dado abaixo:

$$T^{\nu}_{\mu} = \sigma(\rho) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \tag{2.6}$$

sendo $\sigma(\rho)$ a densidade linear de massa, a qual só depende da distância polar, ρ.

Desenvolvendo a Eq. (2.4) onde o tensor de energia-momento utilizado é o da Eq. (2.6), ficamos com:

$$\begin{aligned} R^{0}_{0} &= 8\pi G \left[T^{0}_{0} - \frac{1}{2}\left(T^{0}_{0} + T^{1}_{1} + T^{2}_{2} + T^{3}_{3} \right) \right] \ , \\ R^{0}_{0} &= 0 \ . \end{aligned} \tag{2.7}$$

Repetindo o mesmo procedimento para $\mu = 1, 2$ e 3 encontramos:

$$R_1^1 = -8\pi G\sigma(\rho) \ , \tag{2.8}$$

$$R_2^2 = -8\pi G\sigma(\rho) \ , \tag{2.9}$$

$$R_3^3 = 0 \ . \tag{2.10}$$

2.1 Obtendo a Métrica de uma Corda Cósmica

Nessa seção derivaremos a métrica gerada por uma corda cósmica, admitindo que a mesma encontra-se ao longo do eixo z. Como o sistema apresenta uma simetria cilíndrica, ou seja, invariante por rotações em torno de z, e também invariante por "boosts" de Lorentz ao longo do eixo z, podemos inferir que a métrica de uma corda cósmica pode ser representada por:

$$ds^2 = A^2(\rho)dt^2 - d\rho^2 - B^2(\rho)d\phi^2 - A^2(\rho)dz^2 \ , \tag{2.11}$$

onde $A(\rho)$ e $B(\rho)$ são funções radiais a serem encontrados. Por esta métrica, sabemos que os tensores métricos co- e contravariantes, $g_{\mu\nu}$ e $g^{\mu\nu}$, respectivamente, são representados por:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A^2(\rho) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B^2(\rho) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A^2(\rho) \end{pmatrix} . \tag{2.12}$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{A^2(\rho)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{-B^2(\rho)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{-A^2(\rho)} \end{pmatrix} . \tag{2.13}$$

Para encontrar $A(\rho)$ e $B(\rho)$ precisamos calcular o tensor de Ricci e os símbolos de Christoffel, dados pela seguintes equações:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\sigma \Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\sigma} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\alpha\sigma} - \Gamma^\alpha_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\alpha\nu} \ , \tag{2.14}$$

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left(\partial_\mu g_{\beta\mu} + \partial_\mu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu} \right) \ . \tag{2.15}$$

Desenvolvendo o tensor de Ricci dado na Eq. (2.14), utilizando os tensores nas Eqs. (2.12) e (2.13) chegamos aos resultados:

$$R_{00} = -\left[A(\rho)\frac{d^2A(\rho)}{d\rho^2} + \frac{A(\rho)}{B(\rho)}\frac{dA(\rho)}{d\rho}\frac{dB(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{dA(\rho)}{d\rho}\right)^2\right] \quad , \tag{2.16}$$

$$R_{11} = \frac{2}{A(\rho)}\frac{d^2A(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{B(\rho)}\frac{d^2B(\rho)}{d\rho^2} \quad , \tag{2.17}$$

$$R_{22} = \frac{B(\rho)}{A(\rho)}\left[2\left(\frac{dA(\rho)}{d\rho}\right)\left(\frac{dB(\rho)}{d\rho}\right) + \frac{d^2B(\rho)}{d\rho^2}\right] \quad , \tag{2.18}$$

$$R_{33} = A(\rho)\frac{d^2A(\rho)}{d\rho^2} + \frac{A(\rho)}{B(\rho)}\frac{dA(\rho)}{d\rho}\frac{dB(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{dA(\rho)}{d\rho}\right)^2 \quad . \tag{2.19}$$

Quando aplicamos o tensor métrico contravariante $g^{\mu\nu}$ em cada umas das expressões, ficamos com:

$$g^{00}R_{00} = R_0^0 = -\left[\frac{1}{A(\rho)}\frac{d^2A(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{A(\rho)B(\rho)}\frac{dA(\rho)}{d\rho}\frac{dB(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{1}{A(\rho)}\frac{dA(\rho)}{d\rho}\right)^2\right] \tag{2.20}$$

$$g^{11}R_{11} = R_1^1 = -\left(\frac{2}{A(\rho)}\frac{d^2A(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{B(\rho)}\frac{d^2B(\rho)}{d\rho^2}\right) \quad , \tag{2.21}$$

$$g^{22}R_{22} = R_2^2 = -\frac{1}{B(\rho)A(\rho)}\left[2\left(\frac{dA(\rho)}{d\rho}\right)\left(\frac{dB(\rho)}{d\rho}\right) + \frac{1}{B(\rho)}\frac{d^2B(\rho)}{d\rho^2}\right] \quad , \tag{2.22}$$

$$g^{33}R_{33} = R_3^3 = -\left(\frac{1}{A(\rho)}\frac{d^2A(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{A(\rho)B(\rho)}\frac{dA(\rho)}{d\rho}\frac{dB(\rho)}{d\rho} + \left[\frac{1}{A(\rho)}\frac{dA(\rho)}{d\rho}\right)^2\right] \tag{2.23}$$

Mas, comparando as expressões das Eqs. (2.7), (2.8), (2.9), (2.10), com as Eqs. (2.20), (2.21), (2.22), (2.23), temos que:

$$-\left[\frac{1}{A(\rho)}\frac{d^2A(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{A(\rho)B(\rho)}\frac{dA(\rho)}{d\rho}\frac{dB(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{1}{A(\rho)}\frac{dA(\rho)}{d\rho}\right)^2\right] = 0 \quad , \tag{2.24}$$

$$-\left(\frac{2}{A(\rho)}\frac{d^2A(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{B(\rho)}\frac{d^2B(\rho)}{d\rho^2}\right) = -8\pi G\sigma(\rho) \tag{2.25}$$

$$-\frac{1}{B(\rho)A(\rho)}\left[2\left(\frac{dA(\rho)}{d\rho}\right)\left(\frac{dB(\rho)}{d\rho}\right) + \frac{1}{B(\rho)}\frac{d^2B(\rho)}{d\rho^2}\right] = -8\pi G\sigma(\rho) \tag{2.26}$$

Isto implica que:

$$\frac{dA(\rho)}{d\rho} = 0 \longrightarrow A(\rho) = \text{const} \quad , \tag{2.27}$$

onde podemos escolher, por conveniência, que $A(\rho) = 1$. Outra implicação é a seguinte:

$$\frac{1}{B(\rho)}\frac{d^2B(\rho)}{d\rho^2} = -8\pi G\sigma(\rho) \quad . \tag{2.28}$$

Assim, ficamos com a métrica:

$$ds^2 = dt^2 - d\rho^2 - B^2(\rho)d\phi^2 - dz^2. \tag{2.29}$$

Se $B(0) = 0$ e $\frac{B(\rho)}{d\rho}|_{\rho=0} = 1$, a Eq. (2.29) não possuirá singularidade cônica. A densidade linear de massa da corda é definida como:

$$\mu_0 = \int_0^\infty d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \sqrt{g^{(2)}}\, T_0^0 = \int_0^\infty d\rho \int_0^{2\pi} d\phi\ B(\rho) T_0^0 \quad . \tag{2.30}$$

Desenvolvendo esta equação integral, usando a Eq. (2.28) e que $T_0^0 = \sigma(\rho)$, temos:

$$\begin{aligned}
\mu_0 &= -\int_0^\infty d\rho \int_0^{2\pi} d\phi 8\pi G \sigma(\rho)\sigma(\rho) \frac{d^2 B(\rho)}{d\rho^2} \quad , \\
&= -\int_0^\infty 8\pi G 2\pi \frac{d^2 B(\rho)}{d\rho^2} d\rho \quad , \\
&= -4G \int_0^\infty \frac{d^2 B(\rho)}{d\rho^2} d\rho \quad , \\
\mu_0 &= 4G \left(1 - \frac{dB(\rho)}{d\rho}|_{\rho\to\infty}\right) \quad .
\end{aligned}$$

Devemos considerar que se $\rho \longrightarrow \infty$, i.e., se a distância em relação à corda for maior que a espessura da mesma, podemos fazer a aproximação para $\sigma \longrightarrow 0$, e então $\frac{dB(\rho)}{d\rho} \longrightarrow \frac{B(\rho)}{d\rho}|_{\rho\to\infty}$. Isto nos leva a seguinte expressão:

$$\frac{dB(\rho)}{d\rho} = (1 - \mu_0 4G) \Rightarrow B(\rho) = (1 - 4G\mu_0)\, \rho \quad . \tag{2.31}$$

Assim, a métrica (2.29) fica:

$$ds^2 = dt^2 - d\rho^2 - (1 - 4G\mu_0)^2\, \rho^2 d\phi^2 - dz^2 \quad , \tag{2.32}$$

definindo $\alpha \equiv (1 - 4G\mu_0) < 1$, ficamos com:

$$ds^2 = dt^2 - d\rho^2 - \alpha^2 \rho^2 d\phi^2 - dz^2 \quad . \tag{2.33}$$

Embora o resultado acima tenha sido encontrado para distâncias muito maiores do que a espessura da corda, adotaremos o mesmo para todo o espaço. Isso significa que estaremos considerando a métrica de uma corda cósmica ideal, i.e., uma corda infinita, de espessura nula e retilínea. Aqui verificamos que a mudança de coordenadas $\phi' \to \alpha\phi$ leva à métrica de *Minkowski*:

$$ds^2 = dt^2 - d\rho^2 - \rho^2 d\phi'^2 - dz^2 \quad . \tag{2.34}$$

Além disto, $0 < \phi' < 2\pi\alpha$, ou seja, temos um déficit de ângulo planar igual a:

$$\delta\phi = 2\pi - 2\pi\alpha = 8\pi G\mu_0 \quad . \tag{2.35}$$

É como se do espaço-tempo de *Minkowski* tivesse se retirado uma secção de ângulo.

Finalizamos apresentando os tensores co- e contravariantes métricos associados a uma corda cósmica ideal, ou seja uma corda retilínea, infinita e de dimensões transversais nula:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha^2\rho^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha^2\rho^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

2.2 Equação de Schrödinger

A equação de Schrödinger é uma equação de onda que descreve a evolução temporal do estado quântico de um sistema físico, é o análogo quântico da equação clássica de Newton $\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$.

No caso da *Mecânica Quântica* o estado de um sistema é descrito por uma função de onda, a qual é definida em termos das coordenadas espacial e temporal [25, 22], $\Psi = \Psi(\vec{r}, t)$. Essa função é que vai possibilitar a descrição dos estados da partícula. Essas funções existem no espaço de *Hilbert* [24], ou seja, são funções de quadrado integrável:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 d^n r < \infty \quad , \quad (2.37)$$

sendo $n = 1,\ 2,\ 3$ a dimensão efetiva do espaço que estamos considerando. Assim, essas funções podem ser normalizadas:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 d^n r = 1 \quad . \quad (2.38)$$

A equação que descreve o sistema físico na Mecânica Quântica é conhecida como **Equação de Schrödinger**, representada [1, 22] por:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\Psi + V\Psi \quad . \quad (2.39)$$

[1] Onde i é o número imaginário, $\hbar = \frac{h}{2\pi} \approx 1,054572 \times 10^{-34} J.s$ em que h é a constante de Planck, μ é a massa da partícula, e $V = V(\vec{r}, t)$ é o potencial ao qual eventualmente

[1] Mantivemos a constante $\hbar$ nesta equação pelo fato desta ser mais conhecida na literatura com a constante de Planck. Mas manteremos a notação $\hbar = c = 1$ em todas as outras expressões.

a partícula possa estar submetida. Com esta equação podemos estudar o fenômeno de espalhamento quântico[27, 29].

Se o potencial não depender do tempo, ou seja, $V = V(\vec{r})$, podemos utilizar o método de separação de variáveis, fatorando $\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r})\Theta(t)$. A parte temporal da função solução da Eq. de Schrödinger fica:

$$\Theta(t) = e^{-iEt} \quad . \tag{2.40}$$

E nesse caso ficamos com a equação de Schrödinger independente do tempo:

$$-\frac{1}{2\mu}\nabla^2\Psi + V\Psi = E\Psi \quad , \tag{2.41}$$

conhecida também como *equação de autovalores*:

$$H\Psi = E\Psi, \tag{2.42}$$

onde $H \equiv -\frac{1}{2\mu}\nabla^2 + V \quad .$

O comportamento de uma partícula quântica no espaço-tempo de uma corda cósmica pode ser descrito pela equação de Schrödinger. Como visto na seção (2.1), uma corda cósmica possui simetria cilíndrica, por este fato vamos utilizar as coordenadas cilíndricas para descrevermos o movimento no espaço-tempo da corda cósmica. Portanto, adotaremos a seguinte notação para o Laplaciano [16, 23]:

$$\nabla^2 = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i\left(\sqrt{g}g^{ij}\partial_i\right) \quad . \tag{2.43}$$

Aqui vamos utilizar apenas as coordenadas espaciais das Eqs. (2.36), omitindo a parte temporal da métrica obtida. Assim, ficaremos com a seguinte métrica:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \qquad\qquad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha^2\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad . \tag{2.44}$$

Para o caso estudado, as coordenadas são $x^i = (\rho, \phi, z)$ e $\sqrt{g} = \alpha\rho$. Assim, desenvolvendo ∇^2 nestas condições, ficamos com:

$$\nabla^2 = \partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho}\partial_\rho + \frac{1}{\alpha^2\rho^2}\partial_\phi^2 + \partial_z^2 \quad . \tag{2.45}$$

Como este novo laplaciano, temos que a equação de autovalores fica:

$$H\Psi = E\Psi, \tag{2.46}$$

onde

$$H \equiv -\frac{1}{2\mu}\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i\left(\sqrt{g}g^{ij}\partial_i\right) + V \tag{2.47}$$

Essa equação corresponde a equação de Schrödinger para descrever uma partícula no espaço gerado por corda cósmica

2.3 Equação de Klein-Gordon

Nesta seção falaremos brevemente da equação de Klein-Gordon, que é a equação que descreve o movimento quântico de partículas com spin zero[26]. A equação de Klein-Gordon é o análogo relativístico da equação de Schrörendiger. Vamos ver sua forma covariante dada como:

$$\left(\Box + \mu^2\right)\Psi = 0\ , \tag{2.48}$$

onde

$$\Box = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\gamma\left(\sqrt{-g}g^{\gamma\nu}\partial_\nu\right) \quad , \tag{2.49}$$

$$\mu^2 = m_0^2 \quad . \tag{2.50}$$

Os índices γ, ν variam de $0, 1, 2, 3$. Também temos que m_0 representa a massa de repouso da partícula.[2]

A fim de descrevermos o movimento da partícula no espaço-tempo de uma corda cósmica, utilizaremos a métrica obtida em capítulo precedente. Deste modo, a métrica é dada por:

$$dl^2 = dt^2 - dr^2 - \alpha^2 r^2 d\phi^2 - dz^2\ . \tag{2.51}$$

[2]Como estamos adotando a convenção que $\hbar = c = 1$, ficamos que $\mu = m_0$.

Ainda, temos que:

$$\begin{aligned} g_{\gamma\nu} &= diag[1,-1,-\alpha^2 r^2,-1] \ , \\ g^{\gamma\nu} &= diag[1,-1,-\alpha^{-2} r^{-2}] \ , \\ g &\equiv detg_{\mu\nu} = \alpha^2 r^2 \ , \\ \sqrt{-g} &= \alpha r \ , \end{aligned} \tag{2.52}$$

onde $g_{\gamma\nu}$ e $g^{\gamma\nu}$ os tensores métricos co- e contravariante.

Com estas considerações podemos desenvolver o D'alembertiano visto na Eq. (2.49). Desde modo obtemos:

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \partial_\rho^2 - \frac{1}{\rho}\partial_\rho - \frac{1}{\alpha^2\rho^2}\partial_\phi^2 - \partial_z^2 \ . \tag{2.53}$$

Estes resultados obtidos acima serão úteis para os capítulos posteriores.

Capítulo 3

Efeito Aharonov-Bohm

Os potenciais escalar, ϕ, e vetor $\vec{A}$, na eletrodinâmica clássica, são ferramentas matemáticas utilizadas para auxiliar no estudo dos campos elétrico $\vec{E}$ e magnético $\vec{B}$. Por terem sido considerados durante muito tempo meramente ferramentas matemáticas, considerava-se que não eram mensuráveis e as equações de movimento podem ser expressas unicamente em termos dos campos(elétrico e magnético) dispensando a necessidade potenciais para a descrição matemática dos fenômenos[2].

Por outro lado, na mecânica quântica, os potenciais são mais representativos, uma vez que escrevemos o hamiltoniano em termos dos mesmos [6]. Em ambas as teorias, na eletrodinâmica clássica e na mecânica quântica, há invariância sobre as transformações de calibre [20].

Em 1959 dois físicos, o israelita Yakir Aharonov e o estaduniense David Joseph Bohm, escreveram um artigo [6] e mostraram que um potencial vetor pode influenciar o movimento de uma partícula carregada mesmo que ela passe por regiões onde o campo magnético seja nulo[2]. Embora seu artigo seja corrigido posteriormente, em outro paper, por C.R.Hagen [7], este fato não diminui a importância do primeiro trabalho e o fenômeno ficou conhecido como efeito Aharonov-Bohm.

3.1 Método desenvolvido por Aharanov-Bhom

A seguir daremos uma breve explanação sobre o efeito. Vamos supor que uma partícula carregada esteja movendo-se próxima a uma região de um solenoide (Aharanov supos um

feixe de elétrons), onde o campo magnético $\vec{B}$ é nulo, ou seja $\vec{B} = \nabla \times A = 0$, no entanto o potencial vetor, $\vec{A}$, seja diferente de zero, $\vec{A} \neq 0$. (ver Fig.3.1)

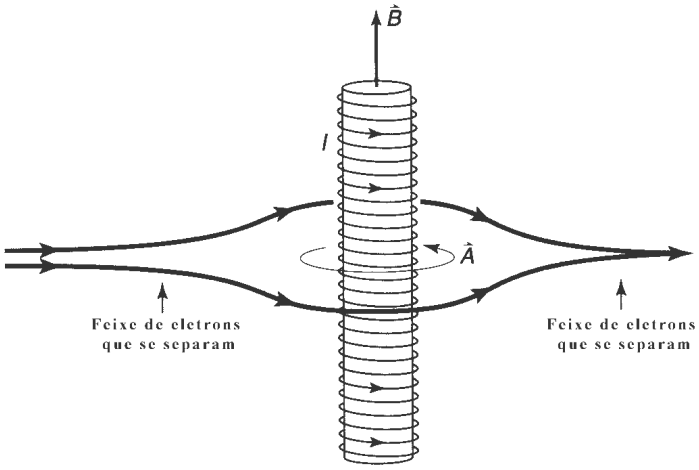

Figura 3.1: Movimento de uma partícula na região fora do solenoide.

Seja o operador hamiltoniano dado por:

$$\widehat{H} = \frac{[\vec{p} - e\vec{A}]^2}{2\mu} \ , \tag{3.1}$$

onde

$$\vec{p} = -i\vec{\nabla} \quad . \tag{3.2}$$

Este é o hamiltoniano que apresenta o acoplamento mínimo[30], i.é., $\vec{p} \to \vec{p} - e\vec{A}$. Desenvolvendo o lado direito da expressão e fazendo a aplicação $\widehat{H}\Psi$ chegamos à:

$$\widehat{H}\Psi = \frac{1}{2\mu}\left[-\vec{\nabla}^2\Psi - 2\frac{e}{i}\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\Psi - \frac{e}{i}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)\Psi + e^2A^2\Psi\right] \ . \tag{3.3}$$

Vamos considerar que o potencial satisfaz o Gauge de Coulomb[28], $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, que a simetria do sistema seja cilíndrica e que o movimento ocorre no plano (r, ϕ). Assim temos:

$$\widehat{H}\Psi = \frac{1}{2\mu}\left[-\vec{\nabla}^2\Psi - 2\frac{e}{i}\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\Psi + e^2A^2\Psi\right] \ . \tag{3.4}$$

onde:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}\hat{\phi} \ , \tag{3.5}$$

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \ . \tag{3.6}$$

O potencial vetor é dado por:

$$\vec{A} = \vec{A_\phi} = \frac{\Phi}{2\pi r}\hat{\phi} \ , \tag{3.7}$$

onde Φ é o fluxo magnético que passa pela superfície ortogonal ao campo $\vec{B}$[1]. Substituindo as Eqs. (3.5), (3.6) e (3.7) na Eq.(3.4), e aplicando a equação de autovalores, $\vec{H}\Psi = E\Psi$ chegamos à seguinte equação diferencial:

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - 2i\beta\frac{\partial}{\partial \phi} - \beta^2\right) + \kappa^2\right\}\Psi \ = \ 0 \ , \tag{3.8}$$

onde definimos

$$\beta \equiv \frac{e\Phi}{h} \quad , \tag{3.9}$$

$$\kappa^2 \equiv 2\mu E \quad . \tag{3.10}$$

Mas, por outro lado,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - 2i\beta\frac{\partial}{\partial \phi} - \beta^2\right) \ = \ \left(\frac{\partial}{\partial \phi} - i\beta\right)^2 \ ,$$

então, a equação resultante é:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial \phi} - i\beta\right)^2 + \kappa^2\right]\Psi \ = \ 0 \ . \tag{3.11}$$

Em ambos os artigos, o de Aharanov e Bohm e o de Hagen, iniciam a abordagem pela Eq. (3.11), no entanto, o resultado destes diverge. Para prosseguir o estudo, vamos adotar o *Ansatz* $\Psi_m(\vec{r}) = R_m(r)e^{im\phi}$, onde $0, \pm 1, \pm 2, ...$ Com estes dados e pela Eq.(3.11) obtemos:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\left(m - \beta\right)^2 + \kappa^2\right)R_m(r) \ = \ 0 \ . \tag{3.12}$$

Fazendo $r \to \frac{r'}{\kappa}$, então $\frac{\partial}{\partial r} = \kappa\frac{\partial}{\partial r'}$ e $\frac{\partial^2}{\partial r^2} = \kappa^2\frac{\partial^2}{\partial r'^2}$, logo obtemos:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r'}\frac{\partial}{\partial r'} + \left(1 - \frac{1}{r'^2}\left(-\beta + m\right)^2\right)\right]R_m(r') \ = \ 0 \ . \tag{3.13}$$

Esta equação tem a forma da equação de Bessel[12] cuja solução é:

$$R_m(\kappa r) = a_m J_{|m-\beta|}(\kappa r) + b_m J_{-|m-\beta|}(\kappa r) \ . \tag{3.14}$$

[1]Esta configuração representa o potencial do campo magnético ao longo do eixo z.

Admitiremos apenas solução regular na origem, $r \to 0$, assim, ficamos:

$$\Psi(r,\phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m J_{|m-\beta|}(\kappa r) e^{im\phi} \ , \tag{3.15}$$

em que a_m escolhido é $(-i)^{|m-\beta|}$.

É conveniente separarmos a solução (3.15) em três contribuições, Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3, onde $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3$ em que para $m > 1$ temos Ψ_1, para $m < -1$ temos Ψ_2 e para $m = 0$ temos Ψ_3, logo a solução fica do seguinte modo:

$$\Psi_1 = \sum_{m=1}^{\infty} (-i)^{m-\beta} J_{m-\beta}(\kappa r) e^{im\phi} \ , \tag{3.16}$$

$$\Psi_2 = \sum_{m=-\infty}^{-1} (-i)^{m-\beta} J_{m-\beta}(\kappa r) e^{im\phi} = \sum_{m=1}^{\infty} (-i)^{m-\beta} J_{m-\beta}(\kappa r) e^{im\phi} \ , \tag{3.17}$$

$$\Psi_3 = (-i)^{|\beta|} J_{|\beta|} \ . \tag{3.18}$$

Definimos $r' \equiv \kappa r$ e derivando Ψ_1 com respeito a r':

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial r'} = \sum_{m=1}^{\infty} (-i)^{m-\beta} J'_{m-\beta}(r') e^{im\phi} \ , \tag{3.19}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (-i)^{m-\beta} \left(J_{m-\beta-1}(r') e^{im\phi} - J_{m-\beta+1}(r') e^{im\phi} \right) \ . \tag{3.20}$$

Após algumas manipulações algébricas, chegamos ao seguinte resultado:

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial r'} + i\cos\phi \Psi_1 = e^{-ir'\cos\phi} \frac{\partial}{\partial r'} \left(e^{ir'\cos\phi} \Psi_1 \right) = (-i)^{-\beta} \left[J_{-\beta+1} - i J_{-\beta} e^{i\phi} \right] \ . \tag{3.21}$$

Multiplicando ambos os lados da equação por $e^{ir'\cos\phi}$, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial r'} \left(e^{ir'\cos\phi} \Psi_1 \right) = e^{ir'\cos\phi} \frac{1}{2} (-i)^{-\beta} \left[J_{-\beta+1} - i J_{-\beta} e^{i\phi} \right] \ . \tag{3.22}$$

Integrando em r:

$$\int_0^{r'} \frac{\partial}{\partial r} \left(e^{ir\cos\phi} \Psi_1 \right) dr = \frac{1}{2} \int_0^{r'} e^{ir'\cos\phi} (-i)^{-\beta} \left[J_{-\beta+1} - i J_{-\beta} e^{i\phi} \right] dr \ , \tag{3.23}$$

$$e^{ir'\cos\phi} \Psi_1 = \frac{1}{2} (-i)^{-\beta} \int_0^{r'} e^{ir'\cos\phi} \left[J_{-\beta+1} - i J_{-\beta} e^{i\phi} \right] dr \ , \tag{3.24}$$

$$\Psi_1 = \overbrace{\frac{1}{2} (-i)^{-\beta} e^{-ir'\cos\phi}}^{A} \int_0^{r'} e^{ir'\cos\phi} \left[J_{-\beta+1} - i J_{-\beta} e^{i\phi} \right] dr \ , \tag{3.25}$$

$$\Psi_1 = A \int_0^{r'} e^{ir'\cos\phi} \left[J_{-\beta+1} - i J_{-\beta} e^{i\phi} \right] dr \ . \tag{3.26}$$

Escrevendo esta última equação como $\Psi_1 = A\,[I_1 - I_2]$, onde:

$$I_1 = \int_0^\infty e^{ir'\cos\phi}\left[J_{-\beta+1} - iJ_{-\beta}e^{i\phi}\right]dr' \ , \tag{3.27}$$

$$I_2 = \int_r^\infty e^{ir'\cos\phi}\left[J_{-\beta+1} - iJ_{-\beta}e^{i\phi}\right]dr' \ . \tag{3.28}$$

Esta integral pode ser encontrada na literatura como segue[6]:

$$\int_0^\infty e^{i\beta'}J_{-\beta}(\kappa r) = \frac{e^{i\left(-\beta arc\sin\frac{\beta'}{\kappa}\right)}}{(\kappa^2-\beta'^2)^{\frac{1}{2}}} \ , \tag{3.29}$$

onde $0 < \beta' < \kappa$ e $-2 < -\beta$.

Considerando que $\beta' = \cos\phi$ e $\kappa = 1$, então:

$$I_1 = \int_0^\infty e^{ir'\cos\phi}J_{-\beta+1}dr' - \int_0^\infty ie^{i\phi}e^{ir'\cos\phi}J_{-\beta}e^{i\phi}dr' \ , \tag{3.30}$$

$$= \frac{e^{i(-\beta+1)arc\sin(\cos\phi)}}{(1^2-\cos^2\phi)^{\frac{1}{2}}} - ie^{i\phi}\frac{e^{-i\beta arc\sin(\cos\phi)}}{(1^2-\cos^2\phi)^{\frac{1}{2}}} \tag{3.31}$$

Mas, pelas relações trigonométricas: $\sin^{-1}\cos\phi = \frac{\pi}{2} - |\phi|$, portanto:

$$I_1 = \frac{e^{i(-\beta+1)\left(\frac{\pi}{2}-|\phi|\right)}}{|\sin\phi|} - ie^{i\phi}\frac{e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-|\phi|\right)}}{|\sin\phi|} \ , \tag{3.32}$$

$$= e^{-i\beta\left(\frac{\pi}{2}-|\phi|\right)}\left(\frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2}-|\phi|\right)} - ie^{i\phi}}{|\sin\phi|}\right) \ , \tag{3.33}$$

$$= e^{-i\beta\left(\frac{\pi}{2}-|\phi|\right)}\left(\frac{ie^{-i|\phi|} - ie^{i\phi}}{|\sin\phi|}\right) \ . \tag{3.34}$$

Assim:

$$I_1 = 0 \qquad \text{se } \phi < 0, \qquad \text{ou,} \tag{3.35}$$

$$I_1 = e^{-i\beta\phi}2i^{-\beta} \qquad \text{se } \phi > 0 \ . \tag{3.36}$$

Por outro lado:

$$I_2 = \frac{(-i)^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\left\{(-i)^{-\beta}\,\frac{\left(1+e^{i\phi}\right)}{(1+\cos\phi)}\frac{e^{ir'}}{r'^{\frac{1}{2}}} + (i)^{-\beta}\,i\frac{\left(1-e^{i\phi}\right)}{(1-\cos\phi)}\frac{e^{-ir'}}{r'^{\frac{1}{2}}}\right\} \tag{3.37}$$

Assim, chegamos à:

$$\Psi_1 = e^{-i(r'\cos\phi-\beta\phi)} - \frac{(-i)^{\frac{1}{2}}}{2\,(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\left\{(-1)^{-\beta}\,\frac{\left(1+e^{i\phi}\right)}{(1+\cos\phi)}\frac{e^{ir'}}{r'^{\frac{1}{2}}} + i\frac{\left(1-e^{i\phi}\right)}{1-\cos\phi}\frac{e^{-ir'}}{r'^{\frac{1}{2}}}\right\} \ . \tag{3.38}$$

Mas, $\Psi_2 = \Psi_2(r', \phi, -\beta) = \Psi_1(r', -\phi, \beta)$, logo,

$$\Psi_2 = -\frac{(-i)^{\frac{1}{2}}}{2\,(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\left\{(-1)^{\beta}\,\frac{\left(1+e^{-i\phi}\right)}{(1+\cos\phi)}\frac{e^{ir'}}{r'^{\frac{1}{2}}} + i\frac{\left(1-e^{-i\phi}\right)}{1-\cos\phi}\frac{e^{-ir'}}{r'^{\frac{1}{2}}}\right\} \ . \tag{3.39}$$

Somando Ψ_1 e Ψ_2:

$$\Psi_1+\Psi_2 \;=\; e^{-i(r'\cos\phi-\beta\phi)}-\frac{(-i)^{\frac{1}{2}}}{2\,(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\left\{\frac{2\cos\left(-\beta\pi-\frac{\phi}{2}\right)\cos\frac{\phi}{2}}{\cos\frac{\phi}{2}}\frac{e^{ir'}}{r'^{\frac{1}{2}}}+2i\frac{e^{-ir'}}{r'^{\frac{1}{2}}}\right\}\;. \quad (3.40)$$

Por outro lado, $\Psi_3=(-i)^{|-\beta|}J_{|-\beta|}$. Utilizando a forma assintótica das funções de Bessel[12] para $r'>>1$, podemos escrever::

$$\Psi_3 \;\approx\; (-i)^{|-\beta|}\left(\frac{2}{\pi r'}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\left(r'-\frac{\pi}{4}-\frac{|-\beta|\pi}{2}\right)\,, \quad (3.41)$$

$$\approx\; (-i)^{|-\beta|}\left(\frac{2}{\pi r'}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\left(e^{ir'}e^{-\frac{i\pi}{4}}e^{-\frac{i|-\beta|\pi}{2}}+e^{-ir'}e^{\frac{i\pi}{4}}e^{\frac{i|-\beta|\pi}{2}}\right)}{2}\right]\;. \quad (3.42)$$

Desenvolvendo um pouco mais esta equação, chegamos finalmente em:

$$\Psi_3 \;=\; (-1)^{|-\beta|}\frac{(-i)^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\frac{e^{ir'}}{r'^{\frac{1}{2}}}+\frac{(-i)^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}i\frac{e^{-ir'}}{r'^{\frac{1}{2}}}\;. \quad (3.43)$$

Somando a Eq.(3.40) com a Eq. (3.43),

$$\Psi_1+\Psi_2+\Psi_3 \;=\; e^{-i(r'\cos\phi-\beta\phi)}+\frac{(-i)^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\left[e^{i\beta\pi}-\frac{\cos\left(-\beta\pi-\frac{\phi}{2}\right)\cos\frac{\phi}{2}}{\cos\frac{\phi}{2}}\right]\frac{e^{ir'}}{r'^{\frac{1}{2}}}\;. \quad (3.44)$$

Mas,

$$\begin{aligned} e^{i\beta\pi}-\frac{\cos\left(-\beta\pi-\frac{\phi}{2}\right)\cos\frac{\phi}{2}}{\cos\frac{\phi}{2}} &= \cos\beta\pi+i\sin\beta\pi-\cos\beta\pi+\frac{\sin\beta\pi\sin\frac{\phi}{2}}{\cos\frac{\phi}{2}} \\ &= i\frac{\sin\beta\pi}{\cos\frac{\phi}{2}}e^{-\frac{i\phi}{2}}\;. \end{aligned}$$

Substituindo o resultado acima na Eq.(3.44) encontramos:

$$\Psi_1+\Psi_2+\Psi_3 \;=\; e^{-i(r'\cos\phi-\beta\phi)}+i\frac{e^{ir'}}{(2i\pi r')^{\frac{1}{2}}}\frac{\sin\beta\pi}{\cos\frac{\phi}{2}}e^{-i\frac{\phi}{2}}\;. \quad (3.45)$$

Por outro lado, $r'=\kappa r$, então teremos:

$$\Psi \;=\; \Psi_1+\Psi_2+\Psi_3\;, \quad (3.46)$$

$$\Psi \;=\; e^{-i(r\cos\phi-\beta\phi)}+i\frac{1}{(2\pi i\kappa)^{\frac{1}{2}}}\frac{\sin\beta\pi}{\cos\frac{\phi}{2}}e^{-i\frac{\phi}{2}}\frac{e^{ikr}}{r^{\frac{1}{2}}}\;, \quad (3.47)$$

$$\Psi \;=\; \Psi_{inc}+\Psi_{esp} \quad (3.48)$$

onde:

$$\Psi_{inc} \;\equiv\; e^{-i(r\cos\phi-\beta\phi)}\;, \quad (3.49)$$

$$\Psi_{esp} \;\equiv\; i\frac{1}{(2\pi i\kappa)^{\frac{1}{2}}}\frac{\sin\beta\pi}{\cos\frac{\phi}{2}}e^{-i\frac{\phi}{2}}\frac{e^{ikr}}{r^{\frac{1}{2}}}\;. \quad (3.50)$$

Podemos definir também,

$$\Psi_{esp} \equiv i\frac{1}{(2\pi i\kappa)^{\frac{1}{2}}}\frac{\sin\beta\pi}{\cos\frac{\phi}{2}}e^{-i\frac{\phi}{2}}\frac{e^{ikr}}{r^{\frac{1}{2}}} , \tag{3.51}$$

$$= \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}}f(\phi) . \tag{3.52}$$

em que,

$$f(\phi) \equiv i\frac{1}{\sqrt{(2\pi i\kappa)}}\frac{\sin\beta\pi}{\cos\frac{\phi}{2}}e^{-i\frac{\phi}{2}} . \tag{3.53}$$

Este é o resultado que obtivemos adotando o procedimento sugerido por Aharanov e Bohm. O mesmo difere do obtido no artigo original, o qual é:

$$\Psi_1+\Psi_2+\Psi_3 = e^{-i(r'\cos\phi-\beta\phi)} - \frac{e^{ir'}}{\sqrt{(2i\pi r')}}\frac{\sin\beta\pi}{\cos\frac{\phi}{2}}e^{-i\frac{\phi}{2}} . \tag{3.54}$$

Esta diferença é devido ao fator i. Entretanto isso não produz diferença no cálculo da seção de choque diferencial.

3.2 Método desenvolvido por Hagen

Nesta seção apresentaremos o cálculo da seção diferencial de choque desenvolvido por Hagen [7]. Nesta análise, o autor tem o cuidado em lembrar que o valor de β pode conter um número inteiro, N e um número fracionário, q, tal que $0 \leq q < 1$. Neste caso, teremos:

$$-\beta = q + N . \tag{3.55}$$

Assim, verificamos que $\Psi = \Psi_1+\Psi_2+\Psi_3$ visto nas Eqs. (3.16), (3.17), (3.18), podem ser reescritas:

$$\Psi_1 = \sum_{-N+1}^{\infty}(-i)^{m-\beta}J_{m-\beta}(\kappa r)e^{im\phi} , \tag{3.56}$$

$$\Psi_2 = \sum_{m=-\infty}^{-N-1}(-i)^{m-\beta}J_{m-\beta}(\kappa r)e^{im\phi} = \sum_{m=1}^{\infty}(-i)^{m+\beta}J_{m+\beta}(\kappa r)e^{im\phi} , \tag{3.57}$$

$$\Psi_3 = (-i)^{|q|}J_{|q|}e^{-iN\phi} . \tag{3.58}$$

Os índices no somatório foram manipulados tal que satisfaçam a condição $|m-\beta| = |m+N+q|$, mas, para $m-\beta > 1$ temos $m+N+q = 1$ então $m \approx -N+1$, para

$m - \beta < 1$ temos $-m - N - q = 1$ então $m \approx -1 - N$. Os termos (3.56) e 3.57 ainda podem ser reescritos do seguinte modo:

$$\Psi_1 = e^{-iN\phi} \sum_1^\infty (-i)^{m+q} J_{m+q}(\kappa r) e^{im\phi} \ , \tag{3.59}$$

$$\Psi_2 = e^{-iN\phi} \sum_1^\infty (-i)^{m-q} J_{m-q}(\kappa r) e^{im\phi} \ . \tag{3.60}$$

Seguindo o mesmo procedimento adotado por Aharanov e Bohm, Hagen chega à seguinte expressão:

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 = e^{-i(r'\cos\phi - \beta\phi)} - i \frac{e^{ir'}}{\sqrt{(2i\pi r')}} e^{-iN(\phi-\pi)} \frac{\sin q\pi}{\cos\frac{\phi}{2}} e^{-i\frac{\phi}{2}} \ . \tag{3.61}$$

Comparando a equação (3.54) com (3.61), verificamos que o termo $-ie^{-iN(\phi-\pi)}$ está ausente no resultado de Aharonov e Bohm. Nota-se entretanto que embora os resultados sejam divergentes, ambos tem a mesma expressão para a seção de choque:

$$\sigma(\phi) = \frac{\sin^2\beta\pi}{2\pi} \frac{1}{\cos^2\frac{\phi}{2}} \tag{3.62}$$

onde $\frac{d\sigma}{d\omega} = |f(\phi)|^2$

3.3 Ondas Parciais

Em seu estudo *Aharonov-Bohm scattering amplitude*, C. R. Hagen [7] ainda adota um outro procedimento, que é a análise de ondas parciais. Esta foi uma preocupação que não verifica-se no estudo de Aharanov e Bohm. O procedidmento é o seguinte: vamos decompor a função de onda em duas componentes, uma correspondendo à onda incidente, Ψ_{inc} e a outra, a onda espalhada, Ψ_{esp}, portanto:

$$\Psi = \Psi_{inc} + \Psi_{esp} \quad , \tag{3.63}$$

$$\Psi = e^{-ikr\cos\phi} + \Psi_{esp} \ . \tag{3.64}$$

A onda espalhada, por sua vez, pode ser do seguinte modo, no limite assintótico:

$$\Psi_{esp} \approx \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} f(\phi) \ . \tag{3.65}$$

Por outro lado, a estrutura da equação (3.63) é do tipo:

$$\Psi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m J_{|m-\beta|}(\kappa r) e^{im\phi} \tag{3.66}$$

Como é o caso de uma função de Bessel, seu limite assintótico, i.é.,$kr >> 1$, então:

$$\Psi \approx \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{im\phi} \left[\frac{2}{\pi\kappa r}\right]^{\frac{1}{2}} \cos\left(\kappa r - \frac{|m-\beta|}{2}\pi - \frac{\pi}{4}\right) \quad . \tag{3.67}$$

Para o caso da Eq.(3.63), utilizando a identidade de Jacob-Anger [12]:

$$\Psi \approx \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^m e^{im\phi} \left[\frac{2}{\pi\kappa r}\right]^{\frac{1}{2}} \cos\left(\kappa r - \frac{m}{2}\pi - \frac{\pi}{4}\right) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{im\phi} \frac{e^{i\kappa r}}{\sqrt{r}} \ , \tag{3.68}$$

onde,

$$f(\phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{im\phi} \quad . \tag{3.69}$$

Desenvolvendo a Eq. (3.68), temos:

$$\begin{aligned}
\Psi &\approx \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi\kappa r}\right)^{\frac{1}{2}} (-i)^m \left(\frac{e^{i\kappa r}e^{-i|m|\frac{\pi}{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\kappa r}e^{i|m|\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2}\right) e^{im\phi} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{im\phi}\frac{e^{i\kappa r}}{\sqrt{r}} \quad , \\
&\approx \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2i\pi\kappa r}\right)^{\frac{1}{2}} e^{im(\phi-\pi)} + A_m \frac{e^{im\phi}}{r^{\frac{1}{2}}}\right] e^{i\kappa r} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2i\pi\kappa r}\right)^{\frac{1}{2}} e^{im\phi}e^{-i\kappa r}
\end{aligned} \tag{3.70}$$

Por outro lado, pela eq. (3.67):

$$\Psi \approx \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{im\phi} \left[\frac{2}{\pi\kappa r}\right]^{\frac{1}{2}} \cos\left(\kappa r - |m-\beta|\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad . \tag{3.71}$$

Assim, ficamos com:

$$\begin{aligned}
\Psi &\approx \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi\kappa r}\right)^{\frac{1}{2}} a_m \left(\frac{e^{i\kappa r}e^{-i|m-\beta|\frac{\pi}{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\kappa r}e^{i|m-\beta|\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2}\right) e^{im\phi} \quad , \\
&\approx \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2i\pi\kappa r}\right)^{\frac{1}{2}} a_m e^{-i|m-\beta|\frac{\pi}{2}} e^{im\phi}e^{i\kappa r} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2i\pi\kappa r}\right)^{\frac{1}{2}} a_m e^{i|m-\beta|\frac{\pi}{2}} e^{im\phi}e^{-i\kappa r}
\end{aligned}$$

. (3.72)

Comparando as duas equações, Eqs. (3.70) e (3.72), somente a parte que contem $e^{-i\kappa r}$, verificamos que:

$$a_m = e^{-i|m-\beta|\frac{\pi}{2}} \quad . \tag{3.73}$$

Comparando agora a parte em $e^{i\kappa r}$:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2i\pi\kappa r}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-i|m-\beta|\pi} e^{im\phi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2i\pi\kappa r}\right)^{\frac{1}{2}} e^{im(\phi-\pi)} + A_m \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{r}}\right] \tag{3.74}$$

Manipulando a expressão de modo a obtermos:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{im\phi} = \left(\frac{1}{2i\pi\kappa}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[e^{im(\phi-\pi)}\left(e^{im\pi}e^{-i|m-\beta|\pi} - 1\right)\right] \quad . \tag{3.75}$$

Definindo:

$$\delta_m = |m|\frac{\pi}{2} - |m-\beta|\frac{\pi}{2} \quad , \tag{3.76}$$

teremos:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{im\phi} = \left(\frac{1}{2i\pi\kappa}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[e^{im(\phi-\pi)}\left(e^{2\delta_m} - 1\right)\right] \quad . \tag{3.77}$$

Logo, pela Eq. (3.69), temos:

$$f(\phi) = \left(\frac{1}{2i\pi\kappa}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[e^{im(\phi-\pi)}\left(e^{2\delta_m} - 1\right)\right] \quad . \tag{3.78}$$

Reescrevendo $\delta_m = \frac{\pi}{2}\beta$ para o caso de $m \geq N$ ou $\delta_m = -\frac{\pi}{2}\beta$ para o caso de $m < -N$, vamos ter que a equação acima pode ser reescrita como:

$$f(\phi) = A\left[\sum_{m=-N}^{\infty}\left[e^{im(\phi-\pi)}\left(e^{i\pi\beta} - 1\right)\right] + \sum_{m=-\infty}^{-N-1}\left[e^{im(\phi-\pi)}\left(e^{-i\pi\beta} - 1\right)\right]\right] \quad . \tag{3.79}$$

Onde definimos $A \equiv \left(\frac{1}{2i\pi\kappa}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Esta função não é convergente para todo N, logo para desenvolvermos melhor esta função, precisamos analisar o valor de $\phi - \pi \equiv \Delta\phi$ para os casos em que $\Delta\phi = 2\pi n$ e $\Delta\phi \neq 2\pi n$, com n inteiro. Além disto, tomamos $\phi \longrightarrow \phi + i\epsilon$ para o termo em n do primeiro somatório e $\phi \longrightarrow \phi - i\epsilon$ para o termo em n do segundo somatório.

Podemos considerar:

$$I = \sum_{m=-N}^{\infty} e^{im(\phi-\pi)} \tag{3.80}$$

e

$$II = \sum_{-\infty}^{-N-1} e^{im(\phi-\pi)} \tag{3.81}$$

Para ambas as expressões, I e II, vamos considerar que $I = I_a + I_b$ e $II = II_a + II_b$ onde os índices a e b representam os casos para $\Delta\phi$. Assim, teremos para I:

$$I_a = \sum_{m=-N}^{\infty} e^{im(\phi-\pi)} = \frac{e^{-iN(\phi-\pi)}}{1 - e^{i(\phi-\pi)}} \qquad \text{se } \Delta\phi \neq 2\pi n, \qquad \text{com } n \text{ inteiro.} \tag{3.82}$$

$$I_b = \sum_{m=-N}^{\infty} e^{im(\Delta\phi+i\epsilon)} = \frac{1}{-i\Delta\phi + i\epsilon} \qquad \text{se } \Delta\phi = 0. \tag{3.83}$$

O mesmo fazemos para II, então:

$$II_a = \sum_{m=-N}^{\infty} e^{im(\phi-\pi)} = -\frac{e^{-iN(\phi-\pi)}}{1-e^{i(\phi-\pi)}} \qquad \text{se } \Delta\phi \neq 2\pi n, \qquad \text{com } n \text{ inteiro,} \tag{3.84}$$

$$II_b = \sum_{m=-N}^{\infty} e^{im(\Delta\phi+i\epsilon)} = -\frac{1}{-i\Delta\phi+i\epsilon} \qquad \text{se } \Delta\phi = 0. \tag{3.85}$$

Nesse momento usaremos a propriedade:

$$2\pi\delta(\phi) = \frac{1}{-i\left(\phi+i\epsilon\right)} + \frac{1}{i\left(\phi-i\epsilon\right)} \ . \tag{3.86}$$

Dessa forma, após algumas passagens intermediárias, reescrevemos a Eq. (3.79) na seguinte forma:

$$f\left(\phi\right) = \left(\frac{1}{2i\pi\kappa}\right)^{\frac{1}{2}} \left[-2\pi\delta(\phi-\pi)\left(1-\cos\beta\pi\right) + ie^{-iN(\phi-\pi)}\sin\beta\pi\frac{e^{-i\frac{\phi}{2}}}{\cos\frac{\phi}{2}}\right] \ . \tag{3.87}$$

Podemos ver que surge um novo termo em $f\left(\phi\right)$ que se anula para $\phi \neq \pi$.

Capítulo 4

Análise do Espalhamento em um Cone

Neste capítulo, analisaremos o espalhamento de uma partícula não-relativística em um espaço cônico, i.e., uma superfície bidimensional que apresenta uma déficit de ângulo. Adotaremos aqui o procedimento desenvolvido por Deser e Jackiw [8].

O elemento de linha associado a uma superfície cônica pode ser expresso por:

$$dl^2 = g_{ij}dx^i dx^j = \frac{1}{\alpha^2}dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad , \tag{4.1}$$

onde $x^i = (r,\ \phi)$, com $r \geq \infty$ e $\phi \in [0,\ 2\pi]$. O parâmetro $\alpha = (1 - 4G\mu_0) < 1$ foi obtido no capítulo 2 e está associado à corda cósmica.

Abaixo escreveremos o operador Hamiltoniano, $\widehat{H}$, o qual é dado por:

$$\widehat{H} = -\frac{1}{2\mu}\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i\left(\sqrt{g}g^{ij}\partial_j\right) \quad , \tag{4.2}$$

onde $g \equiv det(g_{ij}) = \frac{r^2}{\alpha^2}$, $\sqrt{g} = \frac{r}{\alpha}$. Redefinindo a variável radial por, $r \to \alpha r$. Nesse sistema o elemento de linha fica escrito por:

$$dl^2 = g_{ij}dx^i dx^j = dr^2 + \alpha^2 r^2 d\phi^2 \quad , \tag{4.3}$$

Assim, adotando o *ansatz* $\Psi_n(r,\phi) = u_n(r)e^{in\phi}$ e utilizando a equação de autovalores $\widehat{H}\Psi = E\Psi$, ficamos com:

$$\left[r\partial_r r\partial_r - \frac{n^2}{\alpha^2} + \kappa^2 r^2\right] u(r) = 0 \ . \tag{4.4}$$

Aqui também temos $\kappa^2 \equiv 2\mu E$.

A solução regular na origem pode ser expressa por:

$$u_n(r) = (-1)^{\frac{n-|n|}{2}}\, J_{\frac{|n|}{\alpha}}(\kappa r) \ . \tag{4.5}$$

Observe que novamente temos a função de Bessel como solução. Deste modo, vamos analisar o limite assintótico, ou seja, para valores em $\kappa r >> 1$:

$$J_{\frac{|n|}{\alpha}}(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\kappa r}}\cos\left(\kappa r - \frac{|n|}{\alpha}\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) . \tag{4.6}$$

Assim, $u_n(r)$ será:

$$u_n(r) \approx e^{\frac{(n-|n|)\pi}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi\kappa r}}\cos\left(\kappa r - \frac{|n|}{\alpha}\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) . \tag{4.7}$$

Em seu trabalho, Jackiw e Deser decompõe a onda total como uma soma de uma onda incidente mais uma espalhada. Esta é a forma padrão de abordar um problema de espalhamento quando tratamos de ondas parciais. Portanto, temos:

$$\Psi = \Psi_{inc}(r,\phi) + \Psi_{esp}(r,\phi) , \tag{4.8}$$

onde:

$$\Psi_{inc}\,(r,\phi) = e^{i\kappa r\cos\phi} , \tag{4.9}$$

$$\Psi_{esp}\,(r,\phi) = \sqrt{\frac{i}{r}}f(\phi)e^{i\kappa r} . \tag{4.10}$$

Para a Eq. (4.9), adotaremos a mesma identidade utilizada em seção anterior, representada na Eq. (3.68) e, portanto, considerando que no limite assintótico, ou seja, $r >> 1$, as funções de Bessel comportam-se em termos de funções trigonométricas[12], teremos:

$$\Psi \approx \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-i)^m\, e^{im\phi}\left[\frac{2}{\pi\kappa r}\right]^{\frac{1}{2}}\cos\left(\kappa r - \frac{|m|}{2}\pi - \frac{\pi}{4}\right) + \sum_{m=-\infty}^{\infty}A_m e^{im\phi}\frac{e^{i\kappa r}}{\sqrt{r}} , \tag{4.11}$$

que, desenvolvendo e organizando os termos resultantes, ficamos com:

$$\Psi \approx \sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2i\pi\kappa r}\right]^{\frac{1}{2}}\left(e^{-i|m|\pi}e^{im\phi} + A_m e^{im\phi}\right)e^{i\kappa r} + \sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[\frac{i}{2\pi\kappa r}\right]^{\frac{1}{2}}e^{m\phi}e^{-i\kappa r} \tag{4.12}$$

Mas, a estrutura da onda total, numa corda cósmica, tem que ser do tipo:

$$\Psi = \sum_{m=-\infty}^{\infty}a_m J_{\frac{|m|}{\alpha}}\,(\kappa r)\,e^{im\phi} , \tag{4.13}$$

que, após alguns desenvolvimentos algébricos, nos leva à:

$$\Psi \approx \sum_{m=-\infty}^{\infty}a_m\left[\frac{1}{2i\pi\kappa r}\right]^{\frac{1}{2}}e^{-i\frac{|m|}{\alpha}\frac{\pi}{2}}e^{im\phi}e^{i\kappa r} + \sum_{m=-\infty}^{\infty}a_m\left[\frac{i}{2\pi\kappa r}\right]^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{|m|}{\alpha}\frac{\pi}{2}}e^{im\phi}e^{-i\kappa r} \tag{4.14}$$

comparando os termos em $e^{\kappa r}$ e em $e^{-\kappa r}$ nas Eqs. (4.12) e (4.14) encontramos:

$$a_m = e^{-i\frac{|m|}{\alpha}\frac{\pi}{2}} \tag{4.15}$$

e, também:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{im\phi} = \left(\frac{1}{2i\pi\kappa r}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(e^{-i\frac{|m|}{\alpha}\pi} - e^{-|m|\pi}\right) e^{im\phi} \tag{4.16}$$

$$= \left(\frac{1}{2i\pi\kappa r}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(e^{-i(\frac{|m|}{\alpha}-|m|\pi)} - 1\right) e^{im\phi}$$

$$= \left(\frac{1}{2i\pi\kappa r}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(e^{-i|m|(\frac{1}{\alpha}-1)\pi} - 1\right) e^{im\phi} \tag{4.17}$$

Deste modo, podemos definir:

$$\delta_m = -\frac{|m|\pi}{2}\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) = -\frac{1}{2}|m|\omega \quad . \tag{4.18}$$

Está expressão é o ângulo de desvio de fase. Identificamos a função angular em ϕ, indicada na Eq. (4.10) como:

$$f(\phi) = \left(\frac{1}{i2\pi\kappa}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{m} \left(e^{-i|m|\omega} - 1\right) e^{im\phi} \tag{4.19}$$

onde $\omega = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\pi$

Seguindo a abordagem do autor, vamos definir duas funções, S_1 e S_2, para o desenvolvimento do cálculo:

$$S_1(\phi) = \sum_{m} e^{i(m\phi - |m|\omega)} \quad ,$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left(e^{im(\phi_- + i\epsilon)} + e^{-im(\phi_+ - i\epsilon)}\right) - 1 \tag{4.20}$$

onde $\phi_\pm \equiv \phi \pm \omega = \phi \pm \pi\,(\alpha^{-1} - 1)$.

Além disto, também, temos:

$$S_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \left(e^{im(\phi + i\epsilon)} + e^{-im(\phi - i\epsilon)}\right) - 1 \quad ,$$

$$= \frac{1}{1 - e^{i(\phi + i\epsilon)}} + \frac{1}{1 - e^{-i(\phi - i\epsilon)}} - 1 \quad . \tag{4.21}$$

Notemos que:

$$\frac{1}{2}(S_1(\phi) + S_1^*(\phi)) = \frac{1}{2}(S_2(\phi_+) + S_2^*(\phi_-)) = \pi \sum_{m} (\delta(\phi_+ - 2\pi m) + \delta(\phi_- - 2\pi m) \tag{4.22}$$

e

$$\frac{1}{2i}\left(S_1(\phi) - S_1^*(\phi)\right) = -\frac{1}{2i}\left(\frac{e^{-i\frac{\phi_-}{2}} + e^{i\frac{\phi_-}{2}}}{e^{-i\frac{\phi_-}{2}} - e^{i\frac{\phi_-}{2}}}\right) + \frac{1}{2i}\left(\frac{e^{i\frac{\phi_-}{2}} + e^{-i\frac{\phi_-}{2}}}{e^{i\frac{\phi_-}{2}} - e^{-i\frac{\phi_-}{2}}}\right) \tag{4.23}$$

Utilizando estas relações e após algumas manipulações algébricas, chegamos finalmente à:

$$f(\phi) = (2\pi\kappa)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{\sin\omega}{\cos\omega - \cos\phi} - i\pi \sum_m \left[\delta' + \delta'' - 2\delta(\phi - 2\pi m)\right] \right\} \tag{4.24}$$

onde, as funções delta de Dirac são:

$$\delta' = \delta(\phi + \omega - 2\pi m) \quad \text{e,} \tag{4.25}$$

$$\delta'' = \delta(\phi - \omega - 2\pi m) \tag{4.26}$$

Ainda utilizando a decomposição da Eq.(4.8) vamos identificar arbitrariamente a onda espalhada com:

$$\Psi_{esp} = \sqrt{\frac{i}{2\pi\kappa}} \frac{\sin\omega}{\cos\omega - \cos\phi} \frac{e^{i\kappa r}}{\sqrt{r}} \tag{4.27}$$

Capítulo 5

Análise do espalhamento por um tubo magnético no espaço-tempo de uma corda cósmica

Neste capítulo, analisaremos o movimento quântico relativístico de uma partícula bosônica espalhada por um tubo magnético no espaço-tempo de uma corda cósmica. Admitiremos um tubo magnético de raio a e o eixo seja coaxial à corda. Para este estudo, vamos lançar mão das considerações precedentes, ou seja, utilizaremos a métrica da corda cósmica dada por:

$$dl^2 = dt^2 - dr^2 - \alpha^2 r^2 d\phi^2 - dz^2 \quad , \tag{5.1}$$

onde, $\alpha \equiv (1 - 4G\mu_0) < 1$ e μ_0 é a densidade linear de massa da corda cósmica.

Nosso interesse é saber que contribuição é dada ao *phase shift* quando se tem um tubo magnético em torno de uma corda cósmica e uma partícula incide a este.

Adotaremos o quadri-vetor potencial vetor cuja forma é a que segue:

$$A_\mu \;=\; (0, 0, A_\phi, 0) \quad . \tag{5.2}$$

Utilizamos a equação que governa o movimento quântico de partículas, a equação de *Klein-Gordon*, a fim de verificar o comportamento de bósons que passam pela região

onde há uma corda cósmica com tubo magnético. Assim como há espalhamento no efeito Aharanov-Bohn, esperamos que neste caso ocorra também este efeito de espalhamento.

Para deixar mais claro o acoplamento com o potencial vetor dado pela Eq. (5.2), na equação de Klein-Gordon dada pela Eq. (2.48), reescreveremos esta equação do seguinte modo:

$$\left(D^2 + \mu^2\right)\Psi = 0 \quad , \tag{5.3}$$

onde μ é a massa da partícula e também adotaremos a convenção $c = \hbar = 1$. Além disto, o termo D^2 da equação precedente é dado por:

$$D^2 = \frac{1}{\sqrt{-g}} D_\mu \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} D_\nu\right) \tag{5.4}$$

onde:

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \quad , \tag{5.5}$$

e, especificando mais D_μ, tem-se:

$$D_\mu = \begin{cases} D_0 = \partial_0 = \frac{\partial}{\partial t} \\ D_1 = \partial_1 = \frac{\partial}{\partial r} \\ D_2 = \partial_2 + ieA_\phi = \frac{\partial}{\partial \phi} + ieA_\phi \\ D_3 = \partial_z = \frac{\partial}{\partial z} \end{cases} . \tag{5.6}$$

Temos também que:

$$g \equiv \det(g_{\mu\nu}) = -\alpha^2 r^2 \quad . \tag{5.7}$$

Estudamos a ação de campos magnéticos ao longo do eixo z de um tudo coaxial a uma corda cósmica. Vamos considerar que o tubo tenha um raio finito igual a a. Assim, analisaremos três modelos propostos. Os três modelos distintos são:

(i) campo magnético homogênio dentro do tubo;

(ii) campo magnético proporcional à $\frac{1}{r}$ dentro do tubo;

(iii) campo magnético na casca cilíndrica.

Tais modelos foram utilizados pela primeira vez em 1993 por *M.Bordag* e *S. Soropaev* , [9]. No entanto, no artigo citado, os autores estudam o caso não-relativístico, ou seja, com a equação de *Schrödinger* e para partículas com *spin*-$\frac{1}{2}$. Nosso estudo tratará de bósons e a equação de Klein-Gordon.

Os três modelos são descritos, matematicamente, como a seguir:

$$\text{Modelo } \mathbf{1)} \qquad B(r) = \frac{\Phi}{\alpha\pi a^2}\Theta(a-r) \quad , \tag{5.8}$$

$$\text{Modelo } \mathbf{2)} \qquad B(r) = \frac{\Phi}{2\alpha\pi a r}\Theta(a-r) \quad , \tag{5.9}$$

$$\text{Modelo } \mathbf{3)} \qquad B(r) = \frac{\Phi}{2\alpha\pi a}\delta(a-r) \quad , \tag{5.10}$$

onde, a função degrau de Heaviside [12] é definida por:

$$\Theta(a-r) = \begin{cases} 1 = \text{se } r < a \\ 0 = \text{se } r > a \end{cases} \quad , \tag{5.11}$$

e também, $\delta(a-r)$ é a delta de Dirac [12].

Utilizamos o quadri-vetor potencial,

$$A_\mu = (0, 0, A_\phi, 0) \tag{5.12}$$

em que:

$$A_\phi = -\frac{\Phi}{2\pi}a(r) \quad , \tag{5.13}$$

onde, para os modelos **1)** e **2)**

$$a(r) = f(r)\Theta(a-r) + \Theta(r-a) \tag{5.14}$$

com

$$f(r) = \begin{cases} \frac{r^2}{a^2} = \text{para o modelo } \mathbf{1)} \\ \frac{r}{a} = \text{para o modelo } \mathbf{2)} \end{cases} \quad . \tag{5.15}$$

e, para o modelo **3)**

$$a(r) = \Theta(r-a) \quad . \tag{5.16}$$

As próximas seções irão tratar de cada modelo separadamente.

5.1 Campo magnético uniforme dentro do tubo.

Aqui vamos analisar o **modelo *1***. Neste modelo como nos próximos, iremos analisar o movimento em duas partes: dentro do tubo, ou seja, para $r < a$, e e o caso fora do tubo, ou seja, $r > a$, . Desta forma em $r < a$, teremos, pela Eq. (5.11) que $\Theta(a - r) = 1$.

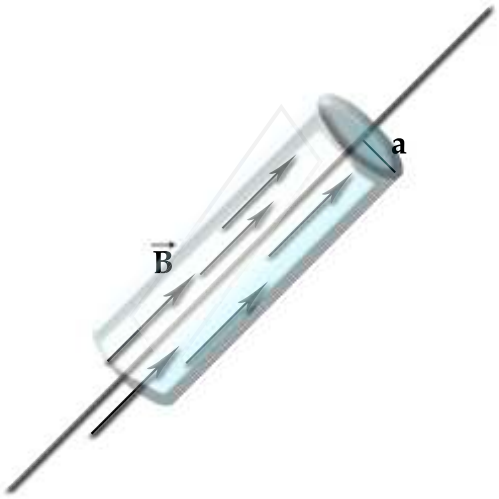

Figura 5.1: Campo magnético uniforme dentro do tubo

Desenvolvendo a equação de Klein-Gordon com o operador (5.6), ficamos com:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Psi - \frac{\partial^2}{\partial r^2}\Psi - \frac{1}{\alpha^2 r^2}\left(\frac{\partial}{\partial \phi} + ieA_\phi\right)^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Psi + \mu^2\Psi = 0 \quad . \tag{5.17}$$

Adotando o *ansatz*:

$$\Psi = \Psi^{(i)}(r, t, z, \phi) = R^{(i)}(r)e^{-iEt}e^{ikz}e^{im\phi} \quad . \tag{5.18}$$

Após alguns desenvolvimentos algébricos na aplicação da Eq. (5.18) em Eq. (5.17) chegamos à:

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{1}{\alpha^2 r^2}\left(m + eA_\phi\right)^2 R + \lambda^2 R = 0 \quad , \tag{5.19}$$

onde,

$$\lambda^2 = E^2 - k^2 - \mu^2 \quad . \tag{5.20}$$

A Eq. (5.19) é uma equação genérica em que a depender de cada um dos modelos, a função A_ϕ assumirá uma expressão correspondente.

Para este modelo e em $r < a$, temos que:

$$A_\phi = -\frac{\Phi}{2\pi a^2} r^2, \tag{5.21}$$

Portanto:

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{1}{\alpha^2 r^2}\left(m - e\frac{\Phi}{2\pi a^2} r^2\right)^2 R + \lambda^2 R = 0 \quad . \tag{5.22}$$

Desenvolvendo mais a Eq. (5.22), temos:

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left(\gamma - \frac{m^2}{\alpha^2 r^2} - \frac{\beta^2 r^2}{\alpha^2 a^2}\right) R = 0 \quad , \tag{5.23}$$

onde, definimos que:

$$\gamma = \lambda^2 + \frac{2m\beta}{\alpha^2 a^2} \quad , \tag{5.24}$$

$$\beta = \frac{e\Phi}{2\pi} \quad . \tag{5.25}$$

Fazendo a substituição $r = \sqrt{z}$ na Eq. (5.23), teremos:

$$\frac{d^2R}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dR}{dz} + \left(\frac{\gamma}{4z} - \frac{m^2}{4\alpha^2 z^2} - \frac{1}{4}\frac{\beta^2}{\alpha^2 a^4}\right) \quad . \tag{5.26}$$

A fim de eliminarmos o termo com a derivada primeira em z utilizaremos:

$$R(z) = \frac{u}{\sqrt{z}} \quad , \tag{5.27}$$

e suas respectivas derivadas em z. Deste modo ficamos com:

$$\frac{\alpha^2 a^4}{\beta^2} u'' + \left[\left(\frac{\frac{1}{4} - \frac{m^2}{4\alpha^2}}{z^2}\right)\frac{\alpha^2 a^4}{\beta^2} + \frac{\gamma}{4z}\frac{\alpha^2 a^4}{\beta^2} - \frac{1}{4}\right] u = 0 \quad , \tag{5.28}$$

onde $u'' = \frac{d^2u}{dz^2}$.

Adotando:

$$z = \frac{a^2\alpha}{\beta} y \quad , \tag{5.29}$$

e suas respectivas derivadas em z, após um desenvolvimento algébrico, ficamos com:

$$u'' + \left[\left(\frac{\frac{1}{4} - \frac{m^2}{4\alpha^2}}{z^2}\right) + \frac{\omega}{y} - \frac{1}{4}\right] u = 0 \quad , \tag{5.30}$$

em que,

$$\omega = \frac{\gamma\alpha a^2}{4\beta} \quad . \tag{5.31}$$

A Eq. (5.30) é uma equação auto-adjunta cuja solução regular na origem éa função de Whittaker:

$$M_{\omega,\frac{m}{2\alpha}}(y) = M_{\omega,\frac{m}{2\alpha}}(\frac{\beta}{a^2\alpha}r^2) \quad . \tag{5.32}$$

Portando, retornando com as substituições que foram feitas, temos que:

$$R^{(1)}(r) = \frac{M_{\omega,\frac{m}{2\alpha}}(\frac{\beta}{a^2\alpha}r^2)}{r} \quad . \tag{5.33}$$

Assim, ficamos com a solução interna:

$$\Psi^{(1)}_{int}(r,t,\phi,z) = C^{(1)}\frac{M_{\omega,\frac{m}{2\alpha}}(\frac{\beta}{a^2\alpha}r^2)}{r}e^{-iEt}e^{ikz}e^{im\phi} \quad , \tag{5.34}$$

onde $C(i)$ é a constante de normalização, no caso do modelo desta seção, $i = 1$. Por outro lado, estudando o caso externo ao tubo, ou seja, em $r > a$, teremos, pela Eq. (5.11) que $\Theta(a - r) = 0$, portanto:

$$B = 0 \quad . \tag{5.35}$$

Por outro lado, para o caso em que $r > a$, ou seja, fora do tubo, temos que $A_\phi = -\frac{\Phi}{2\pi}$ logo, a Eq. (5.19) fica:

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{1}{\alpha^2r^2}(m-\beta)^2 R + \lambda^2 R = 0 \quad , \tag{5.36}$$

ou, desenvolvendo um pouco mais a expressão:

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} + \left(\lambda^2r^2 - \nu^2\right)R = 0 \quad , \tag{5.37}$$

onde,

$$\nu = \frac{1}{\alpha}|m-\beta| \quad . \tag{5.38}$$

A Eq. (5.37) tem a forma da equação de Bessel cuja solução têm a seguinte forma:

$$R^{(1)}(r) = A^{(1)}J_\nu(\lambda r) + B^{(1)}N_\nu(\lambda r) \quad , \tag{5.39}$$

onde, $J_\nu(\lambda r)$ e $N_\nu(\lambda r)$ são as funções de Bessel e de Neumann, respectivamente.

Neste caso, a solução geral para o caso externo ao tubo, $r > a$, é dada por:

$$\Psi^{(1)}_{ext}(r,t,\phi,z) = e^{-iEt}e^{ikz}e^{im\phi}\left(A^{(1)}J_\nu(\lambda r) + B^{(1)}N_\nu(\lambda r)\right) \quad . \tag{5.40}$$

Para a próxima seção, seguiremos a análise para o modelo **2)**.

5.2 Campo magnético proporcional à $\frac{1}{r}$ dentro do tubo

Aqui, analisaremos o **modelo *2***. Embora os modelos sejam distintos, o procedimento para a obtenção da equação e posteriormente da solução da mesma é similar ao caso anterior.

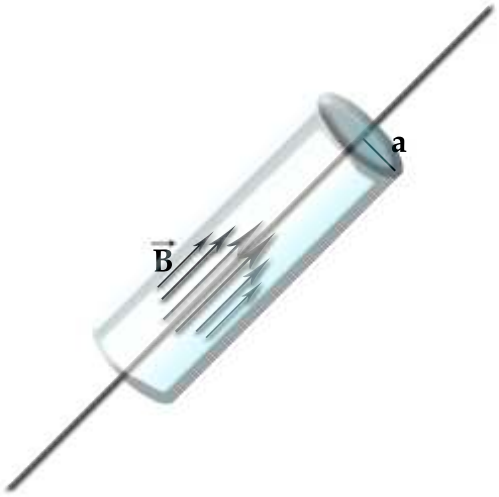

Figura 5.2: Campo magnético proporcional à $\frac{1}{r}$ dentro do tubo

Nesta seção, iremos logo aos resultados, pois o procedimento foi mais detalhado na seção anterior. Temos que, internamente ao tubo, ou seja para $r < a$, ficaremos com $\Theta(a-r) = 1$, portanto, o potencial é:

$$A_\phi = \frac{\Phi}{2\pi a} r \tag{5.41}$$

Assim, a Eq. (5.19) ficará do seguinte modo:

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{1}{\alpha^2 r^2}\left(m - \beta\frac{r}{a}\right)^2 R + \lambda^2 R = 0 \tag{5.42}$$

onde, definimos $\beta = \frac{e\Phi}{2\pi}$.

Fazendo substituições, $R = \frac{u}{\sqrt{r}}$, que nos levará à equação auto-adjunta cuja solução tem a forma de *Whittaker*, regular na origem, que tem a seguinte forma:

$$R^{(2)}(r) = \frac{M_{\xi,\frac{|m|}{\alpha}}(\zeta\frac{r}{a})}{\sqrt{r}} \quad . \tag{5.43}$$

onde,

$$\xi = \frac{m\beta}{\sqrt{\beta^2 - (\lambda\alpha a)^2}} \quad , \tag{5.44}$$

e,

$$\zeta = 2\frac{\sqrt{\beta^2 - (\lambda\alpha a)^2}}{\alpha} \quad . \tag{5.45}$$

Neste caso, temos como solução geral interna:

$$\Psi^{(2)}_{int}(r,t,\phi,z) = C^{(2)}e^{-iEt}e^{ikz}e^{im\phi}\frac{M_{\xi,\frac{|m|}{\alpha}}(\zeta\frac{r}{a})}{\sqrt{r}} \quad . \tag{5.46}$$

Por outro lado, para o caso externo, ou seja, para $r > a$, temos que a Eq. (5.19),fica:

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} + (r^2\lambda^2 - \nu^2)R = 0 \quad . \tag{5.47}$$

onde

$$\nu = \frac{1}{\alpha}\left|m - \beta\right| \quad , \tag{5.48}$$

Assim, equação geral externa, fica:

$$\Psi^{(2)}_{ext}(r,t,\phi,z) = e^{-iEt}e^{ikz}e^{im\phi}\left(A^{(2)}J_\nu(\lambda r) + B^{(2)}N_\nu(\lambda r)\right) \tag{5.49}$$

5.3 Campo magnético sobre a casca cilíndrica na superfície do tubo

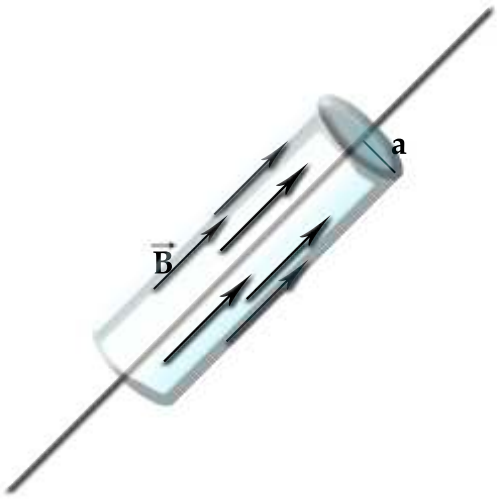

Figura 5.3: Campo magnético sobre a casca cilíndrica na superfície do tubo

Aqui analisaremos o **modelo *3***. Neste modelo, novamente teremos as duas situações a verificar, a parte externa e a interna:

Para a parte interna, ou seja, $r < a$ teremos:

$$A_\phi = 0 \tag{5.50}$$

Logo, usando nossa equação de referência, 5.19, temos:

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} - \frac{1}{\alpha^2}m^2 + \lambda^2 r^2 R = 0 \quad , \tag{5.51}$$

que nos gera a solução:

$$R^{(3)}(r) = C^{(3)}J_{\frac{|m|}{\alpha}}(\lambda r) \quad . \tag{5.52}$$

Assim, a solução geral interna, fica:

$$\Psi^{(3)}_{int}(r,t,\phi,z) = C^{(3)}e^{-iEt}e^{ikz}e^{im\phi}J_{\frac{|m|}{\alpha}}(\lambda r) \tag{5.53}$$

Seguindo a mesma linha de raciocínio, vamos analisar o caso para $r > a$ temos que para este modelo,

$$A_\phi = \frac{e\Phi}{2\pi} \quad , \tag{5.54}$$

Logo, a Eq. (5.19), ficará:

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{1}{\alpha^2 r^2}\left(m^2 - \beta\right)^2 R + \lambda^2 R = 0 \quad , \tag{5.55}$$

onde β já foi definido anteriormente. Esta equação tem a forma que nos permite inferir a solução de Bessel:

$$R^{(3)}(r) = A^{(3)}J_\nu(\lambda r) + B^{(3)}N_\nu(\lambda r) \quad . \tag{5.56}$$

Assim, a solução geral, para o caso exterior, ficará:

$$\Psi^{(3)}_{ext}(r,t,\phi,z) = e^{-iEt}e^{ikz}e^{im\phi}\left(A^{(3)}J_\nu(\lambda r) + B^{(3)}N_\nu(\lambda r)\right) \tag{5.57}$$

Verifica-se que para os três modelos, no caso externo, ou seja, para $r > a$, a solução é a mesma.

Com os três modelos analisados, é possível verificar que há contribuições para o espalhamento, que serão analisadas após ser feito o estudo das condições de contorno.

5.4 Condições de continuidade:

Analisaremos as condições de contorno que é fundamental na interpretação dos fenômenos quânticos. As condições de contorno que vamos utilizar são as usuais, i.é., as soluções interna e externas são contínuas em $r = a$ assim como suas respectivas derivadas.

Nesta etapa, já observamos que em todos os três modelos, para o caso em que $r > a$, ou seja, na região exterior, a solução sempre será dada em relação as soluções de Bessel, caso contrário, ou seja, $r < a$, teremos soluções distintas, que denominamos $R_i(a)$, com $i = 1, 2$ ou 3 representando os modelos **1**, **2**, ou **3**.

Assim, desenvolvendo a equação de continuidade para o caso geral, temos:

$$R^{(i)}(a) = A_\nu^{(i)}(\lambda a)J_\nu(\lambda a) + B_\nu^{(i)}(\lambda a)N_\nu(\lambda a) \quad , \tag{5.58}$$

$$R'^{(i)}(a) = A_\nu^{(i)}(\lambda a)\lambda J'_\nu(\lambda a) + B_\nu^{(i)}(\lambda a)\lambda N'_\nu(\lambda a) \quad , \tag{5.59}$$

onde R^i para $i = 1, 2$ e 3 representa a função radial associada aos modelos 1, 2 e 3, anteriormente especificados.

Dividindo a Eq.(5.58) pela Eq.(5.59), ficamos com:

$$\frac{R^{(i)}(a)}{R'^{(i)}(a)} = \frac{A_\nu^{(i)}J_\nu(\lambda a) + B_\nu^{(i)}(\lambda a)N_\nu(\lambda a)}{A_\nu^{(i)}(\lambda a)\lambda J'_\nu(\lambda a) + A_\nu^{(i)}(\lambda a)\lambda N'_\nu(\lambda a)} \quad . \tag{5.60}$$

Assim:

$$A_\nu^{(i)}(\lambda a) = B_\nu^{(i)}(\lambda a)\left(\frac{R'^{(i)}(a)N_\nu(\lambda a) - \lambda R^{(i)}(a)N'_\nu(\lambda a)}{\lambda R^{(i)}(a)J'_\nu(\lambda a) - R'^{(i)}(a)J_\nu(\lambda a)}\right) \quad . \tag{5.61}$$

Substituindo a Eq. (5.61) na Eq. (5.58) e fazendo algumas manipulações, ficamos com:

$$B_\nu^{(i)}(\lambda a) = \frac{\lambda R^{(i)}(a)J'_\nu(\lambda a) - R'^{(i)}(a)J_\nu(\lambda a)}{\lambda J'_\nu(\lambda a)N_\nu - N'_\nu(\lambda a)J_\nu(\lambda a)} \tag{5.62}$$

Neste ponto, vamos utilizar a seguinte identidade[12]:

$$\lambda J'_\nu(\lambda a)N_\nu(\lambda a) - N'_\nu(\lambda a)J_\nu(\lambda a) = -\frac{2}{\pi\lambda a} \tag{5.63}$$

Assim, a Eq. (5.62), fica:

$$B_\nu^{(i)}(\lambda a) = -\frac{\pi a}{2}\left(\lambda R^{(i)}(a)J'_\nu(\lambda a) - R'^{(i)}(a)J_\nu(\lambda a)\right) \tag{5.64}$$

Substituindo a Eq.(5.64) na Eq. (5.61), após alguma manipulação algébrica, ficamos com:

$$A_{\nu}^{(i)}(\lambda a) = -\frac{\pi a}{2}\left(R^{(i)}(a)N_{\nu}(\lambda a) - \lambda R^{(i)}(a)N'_{\nu}(\lambda a)\right) \tag{5.65}$$

Utilizando as Eqs. (5.64) e (5.65) nas funções de onda para região externa, dadas pelas Eqs. (5.40), (5.49), (5.57) ficamos com:

$$\Psi_{\nu,ext}^{(i)}(r,t,\phi,z) = e^{-iEt}e^{ikz}e^{im\phi}A_{\nu}^{(i)}(a,\lambda)\left(J_{\nu}(\lambda r) - v_{\nu}^{(i)}(a)N_{\nu}(\lambda r)\right) \tag{5.66}$$

em que:

$$A_{\nu}^{(i)}(\lambda a) = \frac{\pi a}{2}\left(\lambda R^{(i)}(a)N'_{\nu}(\lambda a) - R'^{(i)}(a)J_{\nu}(\lambda a)\right) \quad \text{e} \tag{5.67}$$

$$v_{\nu}^{(i)}(\lambda a) = \frac{R^{(i)}(a)J'_{\nu}(\lambda a) - R'^{(i)}(a)J_{\nu}(\lambda a)}{R^{(i)}(a)N'_{\nu}(\lambda a) - R'^{(i)}(a)N_{\nu}(\lambda a)} \quad . \tag{5.68}$$

A partir deste ponto, vamos utilizar o programa computacional de cálculo numérico Wolfram Mathematica para obter informações concretas sobre o *phase shift* de cada um dos casos analisados por nós ao longo do desenvolvimento deste trabalho. Este assunto será desenvolvido no próximo capítulo.

Capítulo 6

Análise numérica do ângulo de mudança de fase

Neste capítulo iremos analisar numericamente os resultados precedentes afim de estudar o ângulo de mudança de fase que é obtido devido às contribuições de cada modelo proposto. Para isto, utilizaremos o método de análise de ondas parciais [24] e vamos delimitar as equações que serão analisadas através de cálculo numérico.

Sabemos que uma função de onda para o fenômeno de espalhamento possui duas contribuições, uma delas é a onda incidente e a outra a onda espalhada. Esta função pode ser escrita do seguinte modo:

$$\Psi(r,\phi) = e^{-i\lambda r\cos\phi} + \frac{e^{i\lambda r}}{\sqrt{r}} f(\phi) \quad , \tag{6.1}$$

onde o primeiro termo à direta da igualdade representa a onda incidente e o segundo termo representa a onda espalhada.

Mas, já vimos que podemos expandir o primeiro termo através da identidade de Jacob-Anger [12]:

$$e^{-i\lambda r\cos\phi} = \sum_m (-i)^m e^{im\phi} J_m(\lambda r) \tag{6.2}$$

$$, \tag{6.3}$$

onde $J_m(\lambda r)$ representa a função de *Bessel*.

Assim, podemos reescrever a Eq. (6.1) do seguinte modo:

$$\Psi(r,\phi) = \sum_m (-i)^m e^{im\phi} J_m(\lambda r) + \frac{e^{i\lambda r}}{\sqrt{r}} f(\phi) \quad . \tag{6.4}$$

Por outro lado, conforme vimos no capítulo anterior, a solução exterior, é dada por:

$$\Psi^{(i)}_{\nu,ext}(r,\phi) = A^{(i)}_{\nu}(a,\lambda)\left(J_{\nu}(\lambda r) - v^{(i)}_{\nu}(a)N_{\nu}(\lambda r)\right)e^{im\phi} \quad , \tag{6.5}$$

onde, $i = 1, 2, 3$, representa os modelos que analisaremos e $\nu = \frac{|m-\beta|}{\alpha}$. Para nosso estudo, utilizamos apenas a parte dependente de r e ϕ, i,e., omitiremos a dependência da função de onda com respeito à variável z.

Vamos fazer uma análise para valores em que $\lambda r >> 1$. Para tanto, utilizaremos a expressões assintóticas para as funções de Bessel e Neumann[12].

Além disto, por conveniência, vamos definir:

$$v^{(i)}_{\nu}(\lambda a) \equiv \tan\epsilon^{(i)}_{\nu}(\lambda a) = \frac{\sin\epsilon^{(i)}_{\nu}(\lambda a)}{\cos\epsilon^{(i)}_{\nu}(\lambda a)} \quad . \tag{6.6}$$

Para simplificar a notação, adotaremos, por enquanto, que,

$$\epsilon^{(i)}_{\nu}(\lambda a) = \epsilon^{(i)}_{\nu} \quad , \tag{6.7}$$

Assim, tomando as expansões assintóticas para as funções de *Bessel* e de *Neumann*, chegamos à:

$$\Psi_{\nu,ext}(r,\phi) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda r}}\sum_{m} A^{(i)}_{\nu}\left(\cos\sigma - \left(\frac{\sin\epsilon^{(i)}_{\nu}}{\cos\epsilon^{(i)}_{\nu}}\right)\sin\sigma\right)e^{im\phi} \quad , \tag{6.8}$$

em que,

$$\sigma = \lambda r - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \tag{6.9}$$

Desenvolvendo um pouco mais a expressão, teremos:

$$\Psi_{\nu,ext}(r,\phi) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda r}}\sum_{m} a^{(i)}_{\nu}\left(\cos\epsilon^{(i)}_{\nu}\cos\sigma - \sin\epsilon^{(i)}_{\nu}\sin\sigma\right) \quad , \tag{6.10}$$

onde,

$$a^{(i)}_{\nu} = \frac{A^{(i)}_{\nu}}{\cos\epsilon^{(i)}_{\nu}} \quad . \tag{6.11}$$

Para a Eq. (6.10) utilizaremos a relação trigonométrica:

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad , \tag{6.12}$$

deste modo, ficamos com:

$$\Psi_{\nu,ext}(r,\phi) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda r}} \sum_{\nu} a_{\nu}^{(i)} \left(\cos\left(\lambda r - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \epsilon_{\nu}^{(i)}\right)\right) e^{im\phi} \quad . \tag{6.13}$$

Por outro lado, vamos desenvolver assintoticamente a Eq.(6.4), que é a equação que contém os termos da onda incidente e da onda espalhada. Deste modo, ficamos com:

$$\Psi_{\nu,ext}(r,\phi) \approx \sum_{m} (-i)^m e^{im\phi} \sqrt{\frac{2}{\lambda\pi r}} \cos\left(\lambda r - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{e^{i\lambda r}}{\sqrt{r}} f(\phi) \tag{6.14}$$

Agora vamos comparar os termos da Eq. (6.13) com (6.14)

$$\sum_{m} (-i)^m e^{im\phi} \sqrt{\frac{2}{\lambda\pi r}} \cos\left(\lambda r - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{e^{i\lambda r}}{\sqrt{r}} f(\phi) =$$
$$\sqrt{\frac{2}{\pi\lambda r}} \sum_{\nu} a_{\nu}^{(i)} \left(\cos\left(\lambda r - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \epsilon_{\nu}^{(i)}\right)\right) e^{im\phi} \tag{6.15}$$

Para facilitar a visualização da comparação, optamos por utilizar as relações:

$$\cos(a) = \frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2} \quad , \quad \sin(a) = \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i} \quad . \tag{6.16}$$

Deste modo, a Eq. (6.15), fica:

$$\sum_{m} e^{-im\frac{\pi}{2}} e^{im\phi} \sqrt{\frac{2}{\lambda\pi r}} \left(e^{i(\lambda r - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} + e^{-i(\lambda r - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4})}\right) + \frac{e^{i\lambda r}}{\sqrt{r}} f(\phi) =$$
$$\sqrt{\frac{2}{\pi\lambda r}} \sum_{\nu} a_{\nu}^{(i)} \left(e^{i(\lambda r - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \epsilon_{\nu}^{(i)})} + e^{-i(\lambda r - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \epsilon_{\nu}^{(i)})}\right) e^{im\phi} \ . \tag{6.17}$$

Agrupamos convenientemente de tal modo a obtermos as seguintes expressões:

$$a^{(i)}_{\frac{|m-\beta|}{\alpha}} = e^{-i\frac{|m-\beta|}{\alpha}} e^{i\epsilon_{\nu}^{(i)}} \tag{6.18}$$

e

$$f(\phi) = \sqrt{\frac{1}{2i\lambda\pi}} \sum_{m} e^{2i\delta_m} e^{im(\phi-\pi)} \quad , \tag{6.19}$$

onde:

$$\delta_m = \delta_m^{\beta,\alpha} + \epsilon_{\nu}^{(i)}(\lambda a) \tag{6.20}$$
$$\delta_m^{\beta,\alpha} = -\frac{\pi}{2}\left(\frac{|m-\beta|}{\alpha} - |m|\right) \quad . \tag{6.21}$$

O segundo termo da expressão (6.20) terá uma atenção à parte e será visto em breve. Na Eq. (6.21), a presença do fator $\delta_m^{\beta,\alpha}$ corresponde à contribuição na mudança de fase devido presença da corda cósmica e do campo magnético linear ao longo da mesma. Esta

contribuição corresponde a combinação do efeito Aharonov-Bohn e do defeito topológico da corda cósmica.

Já o fator $\epsilon_{\nu}^{(i)}(\lambda a)$ representa a contribuição ao tubo magnético de raio a. Este fator é encontrado mais explicitamente quando substituímos a Eq. (5.68) e a Eq.(6.6), deste modo, obtemos a seguinte relação:

$$\epsilon_{m}^{(i)}(\lambda a) = \tan^{-1}\left(v_{\frac{|m-\beta|}{\alpha}}^{(i)}(\lambda a)\right) \quad , \tag{6.22}$$

onde,

$$v_{\frac{|m-\beta|}{\alpha}}^{(i)}(\lambda a) = \frac{R^{(i)}(a)J'_{\frac{|m-\beta|}{\alpha}}(\lambda a) - R'^{(i)}(a)J_{\frac{|m-\beta|}{\alpha}}(\lambda a)}{R^{(i)}(a)N'_{\frac{|m-\beta|}{\alpha}}(\lambda a) - R'^{(i)}(a)N_{\frac{|m-\beta|}{\alpha}}(\lambda a)} \quad . \tag{6.23}$$

A partir de agora, iremos analisar esta relação importante, pois representa a contribuição mudança de fase para cada modelo $i = 1, 2, 3$. Iremos analisá-la para valores específicos de m, que representa o número quântico angular, de β, que representa o fluxo do campo magnético e de α, que representa deficit de ângulo planar associado à corda cósmica.

6.1 Análise numérica do primeiro modelo

Nesta seção vamos analisar numericamente a dependência de ϵ_ν^1 com λa, sendo a o raio do tubo magnético e $\lambda = \sqrt{E^2 - \mu^2 - k^2}$. Adotaremos o índice superior indicando o modelo que está sendo analisado.

O **modelo 1**, conforme já foi visto, representa um campo magnético homogêneo dentro do tubo. A análise será feita fixando os valores de m e de β considerando diversos valores de α, especificamente para $\alpha = 1$, $\alpha = 0.8$ e $\alpha = 0.6$.

Inicialmente iremos exibir ϵ_ν^1 na Fig.6.1 para os valores de $m = 0$, $\beta = 1$ e $\alpha = 1$. Desta forma obtivemos o seguinte resultado gráfico:

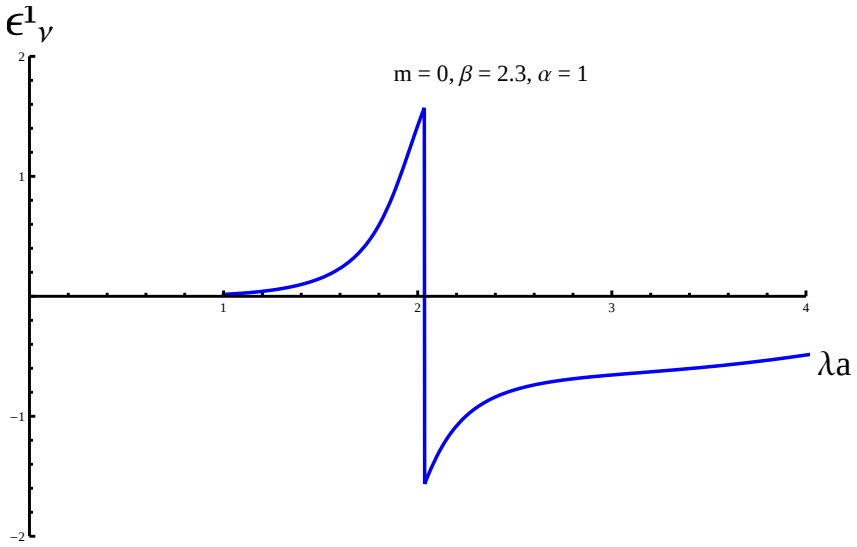

Figura 6.1: Neste gráfico adotamos $m = 0$, $\beta = 2.3$ e $\alpha = 1$

Podemos ver pela Fig.6.1 que ϵ_ν^1 assume dois picos para valores específicos de λa. Isto ocorre quanto o termo no denominador da Eq. (6.23) se anula. Este fenômeno é conhecido na literatura como fenômeno de espalhamento ressonante e ele ocorre para valores específicos de energia [1]. Para essas energias, o ângulo de mudança de fase passa de $\pi/2$, ou múltiplos.

Na nossa próxima analise manteremos os mesmos valores anteriores para m e β porém vamos considerar $\alpha = 0.8$. Neste sentido encontramos o seguinte gráfico:

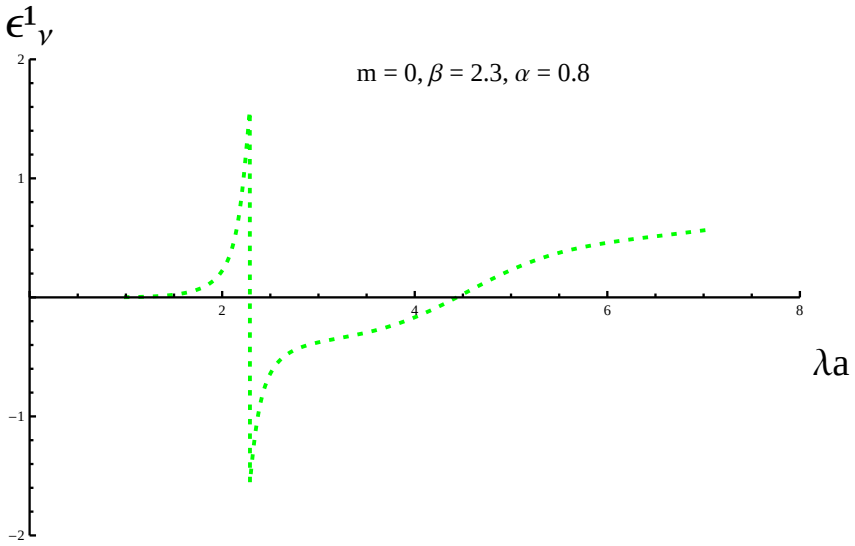

Figura 6.2: Neste gráfico adotamos $m = 0$, $\beta = 2.3$ e $\alpha = 0.8$

Pela Fig.6.2 observa-se que também ocorre o fenômeno de espalhamento ressonante.

Vamos continuar com os valores fixados para m e β e, desta vez, com $\alpha = 0.6$. Deste modo obtemos o gráfico:

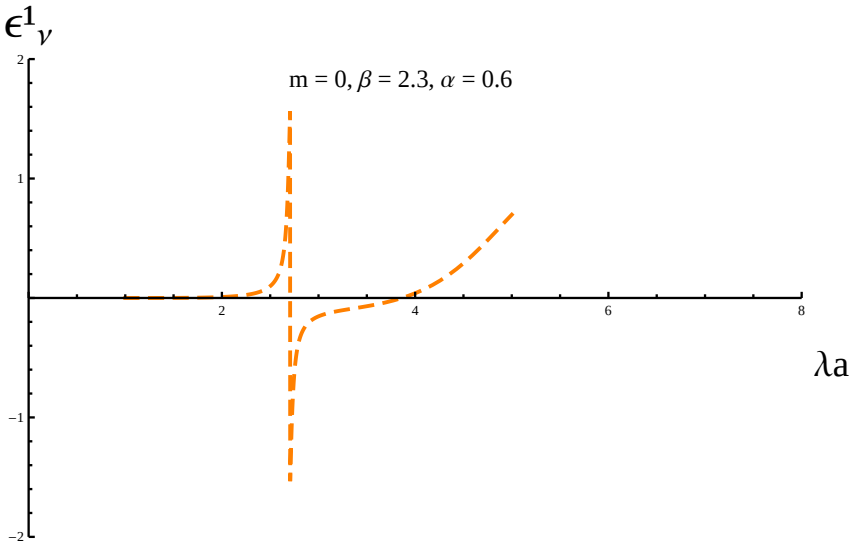

Figura 6.3: Neste gráfico adotamos $m = 0$, $\beta = 2.3$ e $\alpha = 0.6$

Também é possível ver o fenômeno de espalhamento ressonante.

A comparação dos três gráficos gerados com $m = 0$ e $\beta = 2.3$ e valores distintos de α, são exibidos na Figura 6.4. A linha tracejada corresponde a $\alpha = 0.6$, a linha pontilhada corresponde a $\alpha = 0.8$ e a linha contínua corresponde a $\alpha = 1$.

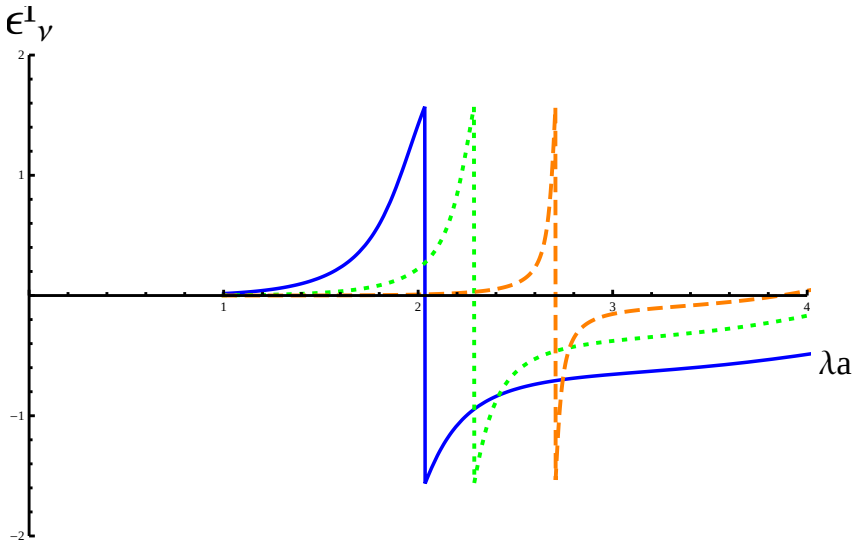

Figura 6.4: Comparando os gráficos do **modelo 1** com $m = 0$ e a linha tracejada correspondendo a $\alpha = 0.6$, a linha pontilhada correspondendo a $\alpha = 0.8$ e a linha contínua correspondendo a $\alpha = 1$. Verifica-se que à medida que diminuímos o valor de α o gráfico desloca-se para a direita.

Pelo gráfico 6.4 podemos inferir que há um deslocamento para a direita do ponto de ressonância à medida que diminuímos o valor de α.

Desejamos agora estudar o comportamento de ϵ^1_ν, quando modificamos o valor de m. Assim, na nossa próxima análise do **modelo 1** tomaremos $m = 1$. Continuaremos com o valor de $\beta = 2.3$. Os valores de α serão 1.0, 0.8 e 0.6.

Deste modo, o primeiro gráfico com $\alpha = 1$ ficará:

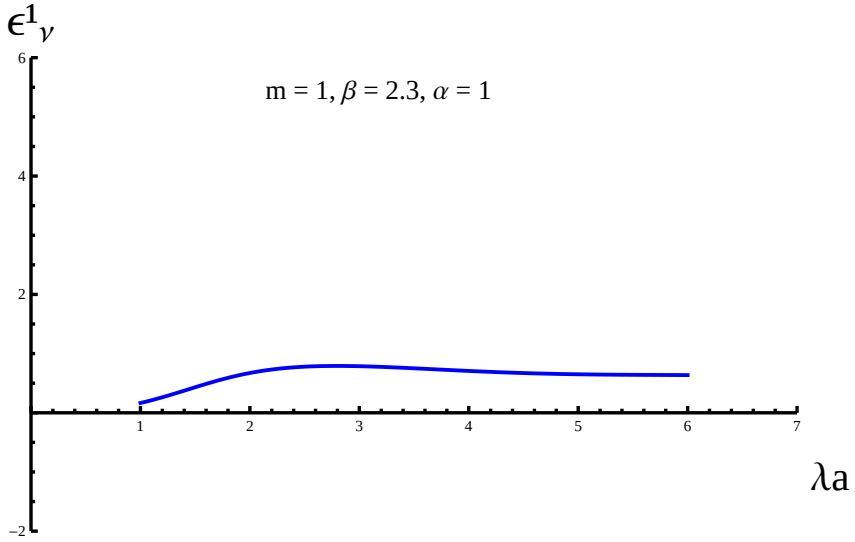

Figura 6.5: Fixando os valores $m = 1$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 1.0$

Note que para este caso para $m = 1$ não ocorre o espalhamento ressonante, conforme é possível ver na Fig.6.5.

Tomando agora o valor de $\alpha = 0.8$, ainda com $m = 1$ e $\beta = 2.3$ ficaremos com a seguinte curva no gráfico:

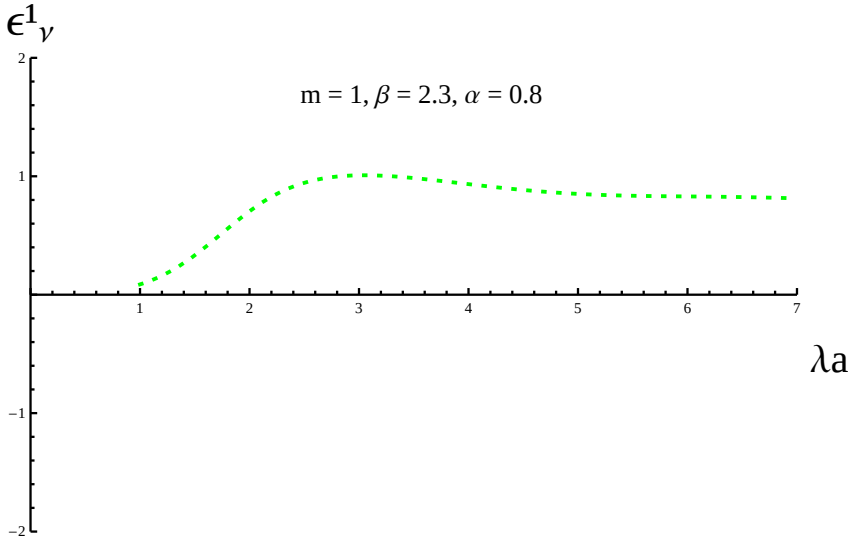

Figura 6.6: Fixando os valores $m = 1$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 0.8$

Pela Fig. 6.6 é possível notar que também para este caso em que $m = 1$ e $\alpha = 0.8$ o espalhamento ressonante não ocorre.

Por fim, analisando o caso em que $\alpha = 0.6$, $m = 1$ e $\beta = 2.3$, vamos ter o gráfico:

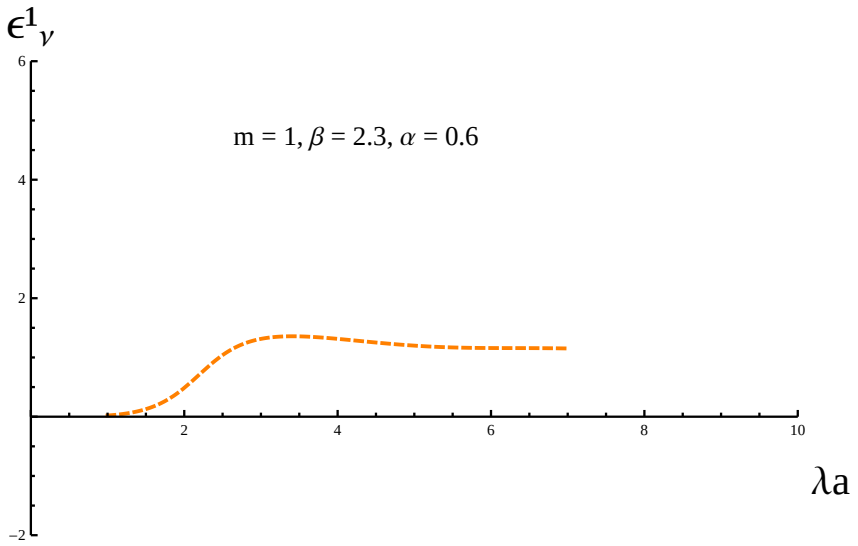

Figura 6.7: Fixando os valores $m = 1$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 0.6$

Comparando os três gráficos gerados para o **modelo 1**, desta vez com $m = 1$ e $\beta = 2.3$ e valores distintos de α, verificamos o padrão conforme exibidos na Figura 6.8. A linha tracejada corresponde a $\alpha = 0.6$, a linha pontilhada corresponde a $\alpha = 0.8$ e a linha contínua corresponde a $\alpha = 1$.

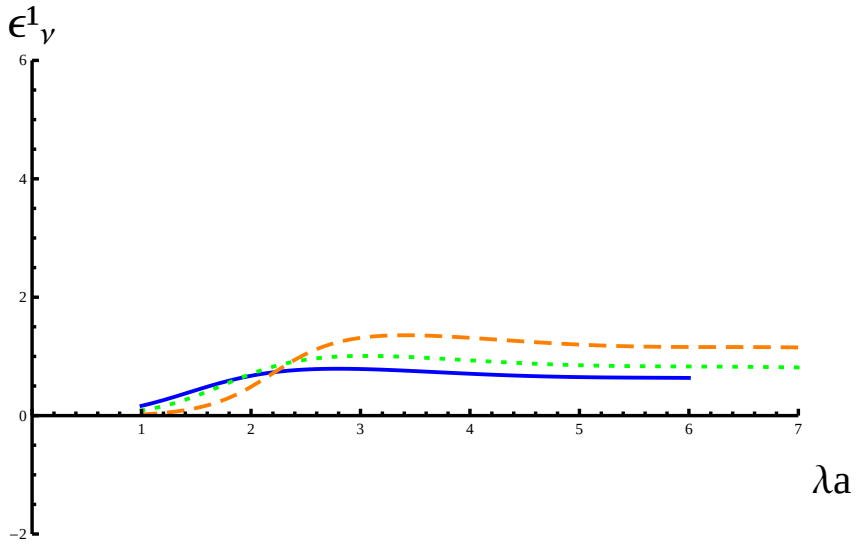

Figura 6.8: Comparando os três gráficos gerados para o **modelo 1**, desta vez com $m = 1$ e $\beta = 2.3$ e valores distintos de α, verificamos o padrão conforme exibidos na Figura 6.8. A linha tracejada corresponde a $\alpha = 0.6$, a linha pontilhada corresponde a $\alpha = 0.8$ e a linha contínua corresponde a $\alpha = 1$.

Agora vamos analisar o **modelo 1** para o caso em que $m = -1$ com o valor de $\beta = 2.3$ e tomando os valores de $\alpha = 1$, $\alpha = 0.8$ e $\alpha = 0.6$. Começamos com $\alpha = 1$. Desta forma, temos:

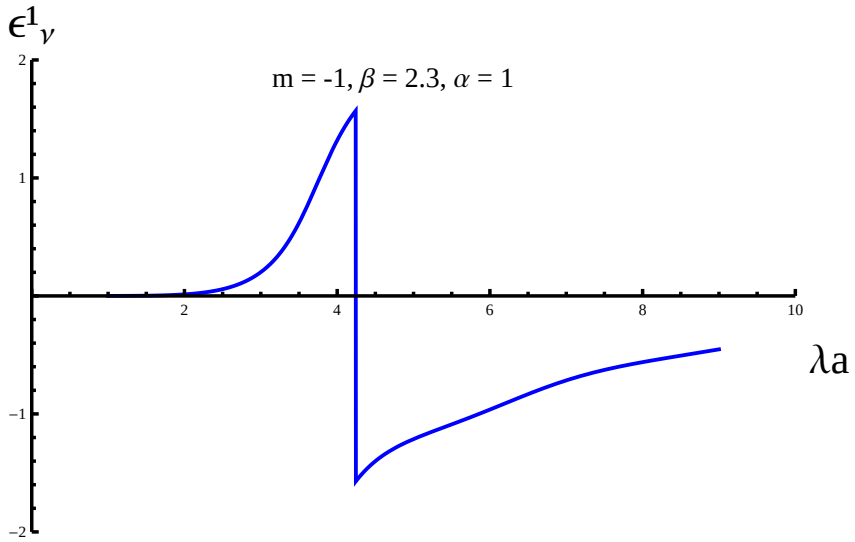

Figura 6.9: Fixando os valores $m = 1$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 1$

Duas observações devem ser feitas aqui. Primeiro, para $m = -1$ verifica-se que o espalhamento ressonante ocorre; segundo, embora não apresentamos o gráfico aqui, verificamos tomando $m = -1$e $\beta = -2.3$ reproduzimos o mesmo gráfico correspondente a Fig.6.5.

Continuando nossa análise para $m = -1$, $\beta = 2.3$ tomando $\alpha = 0.8$. Ficamos com o gráfico abaixo:

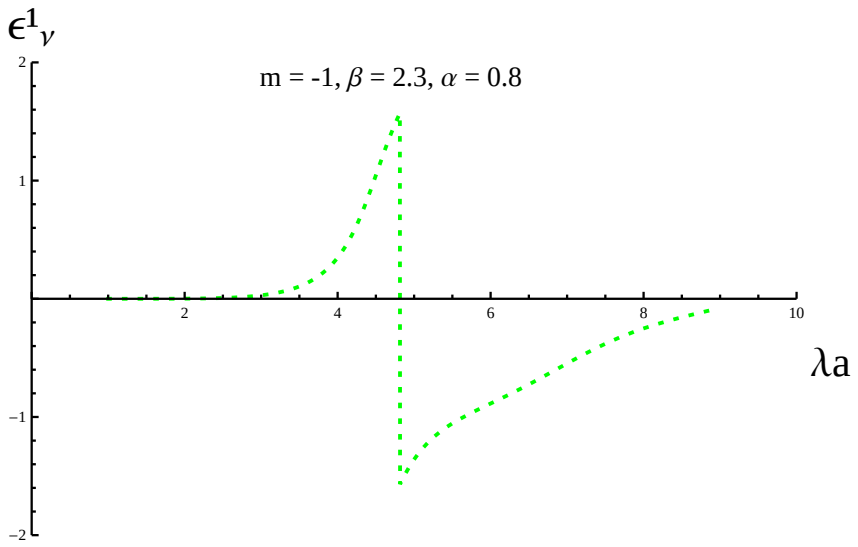

Figura 6.10: Fixando os valores $m = -1$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 0.8$

Pela Fig 6.10 verifica-se novamente o fenômeno de espalhamento ressonante para o **modelo 1** quando fixamos $m = -1$ com $\beta = 2.3$.

Finalmente, analisando o modelo um com $m = -1$ para $\alpha = 0.6$ temos o gráfico:

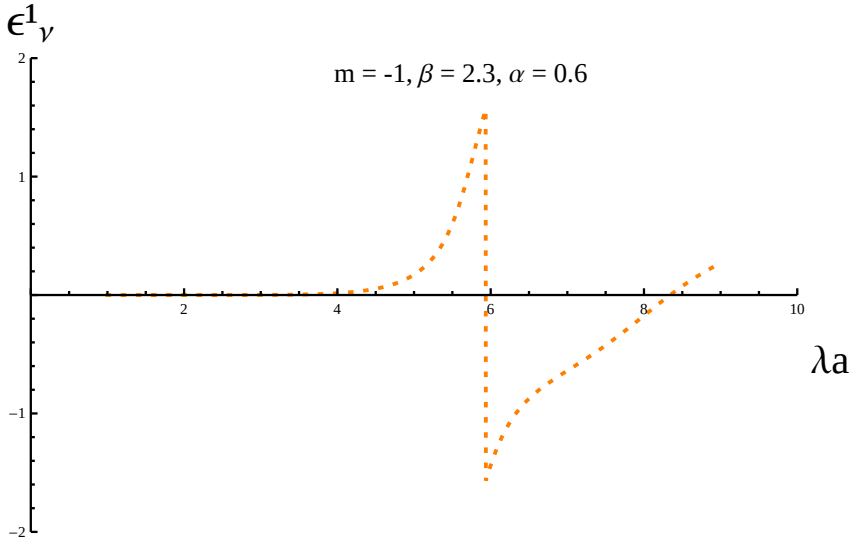

Figura 6.11: Fixando os valores $m = -1$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 0.6$

Mais uma vez, verifica-se o fenômeno de espalhamento ressonante.

A fim de obtermos uma ideia mais exata do comportamento destes três gráficos gerados, vamos analisá-los em conjunto num mesmo par de eixo coordenado. Assim, para o

modelo 1 em que $m = -1$ e os valores de αvariam em $\alpha = 1$, $\alpha = 0.8$ e $\alpha = 0.6$, vamos ter o seguinte gráfico:

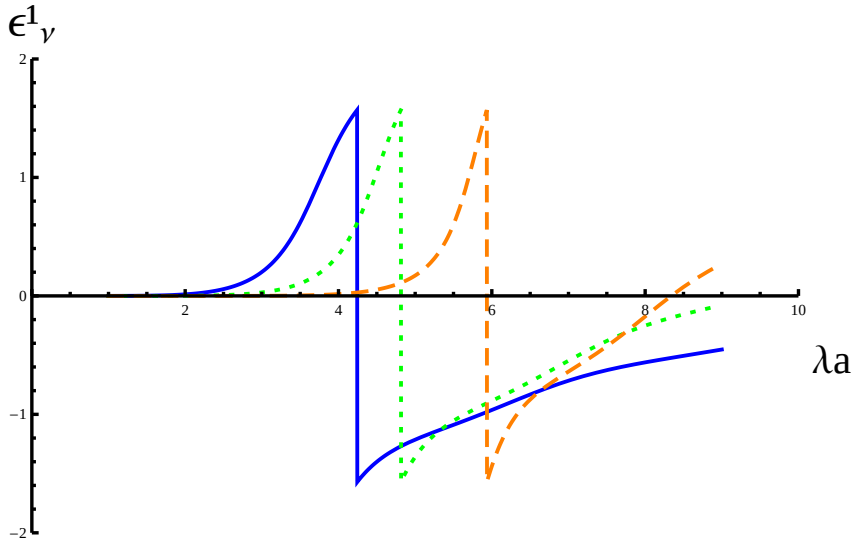

Figura 6.12: Comparação do **modelo 1** em que $m = -1$. A linha tracejada corresponde a $\alpha = 0.6$, a linha pontilhada corresponde a $\alpha = 0.8$ e a linha contínua corresponde a $\alpha = 1$.

Observa-se novamente que à medida que os valores de α diminuem há um deslocamento do pico do ponto de ressonância para direita do gráfico.

6.2 Análise numérica do segundo modelo

Analogamente ao que foi feito na seção precedente, iremos analisar o modelo 2, que representa caso do campo magnético proporcional à $\frac{1}{r}$ dentro do tubo. Iremos fixar o valor de $\beta = 2.3$ em todos os casos e avaliaremos o comportamento do gráfico ϵ^2_ν com λa tomando os valores de $\alpha = 1$, $\alpha = 0.8$ e $\alpha = 0.6$ e $m = -1, 0, 1$.

Desta forma, com $\alpha = 1$ e $m = 0$, teremos o seguinte gráfico:

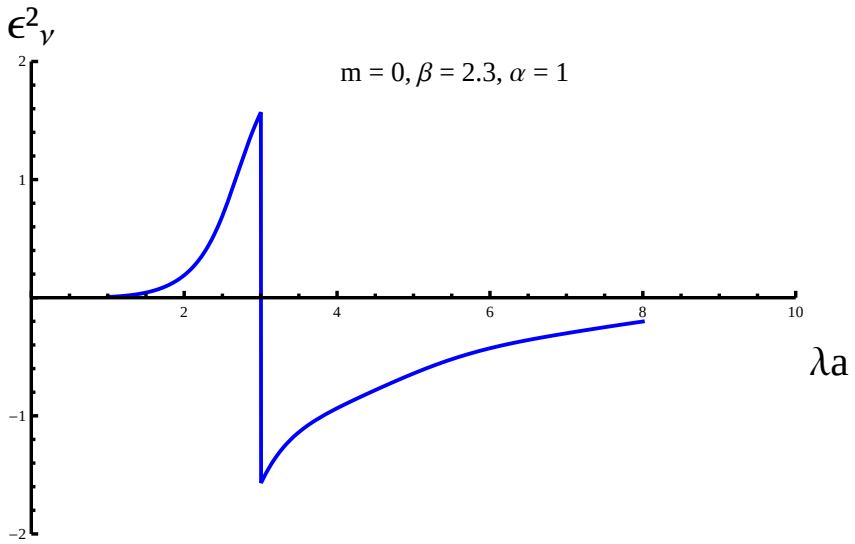

Figura 6.13: Modelo 2, fixando os valores $m = 0$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 1$

Aqui vemos claramente pela Fig. 6.13 o fenômeno de espalhamento ressonante aparecer.

Vamos continuar analisando com $m = 0$ e $\beta = 2.3$, mas iremos utilizar $\alpha = 0.8$. Assim, teremos:

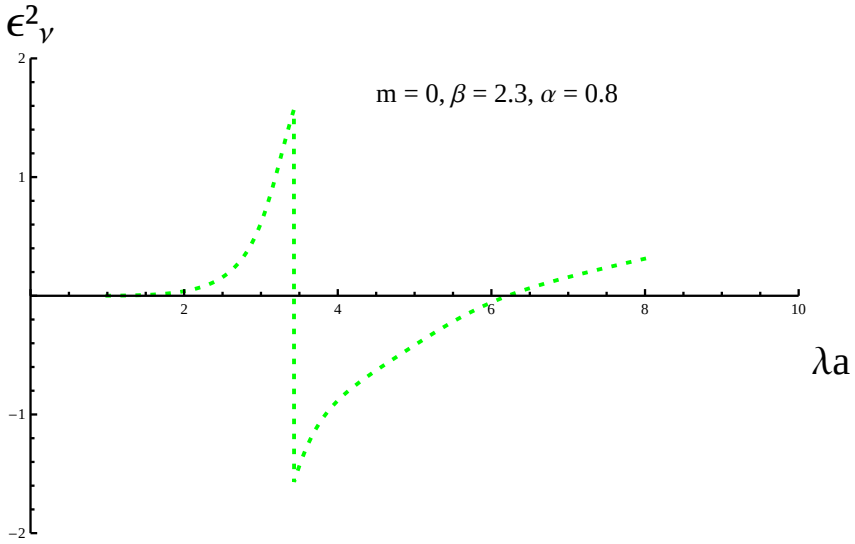

Figura 6.14: Modelo 2, fixando os valores $m = 0$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 0.8$

Finalmente, para $m = 0$, $\beta = 2.3$ vamos utilizar o valor de $\alpha = 0.6$. Desta forma obteremos:

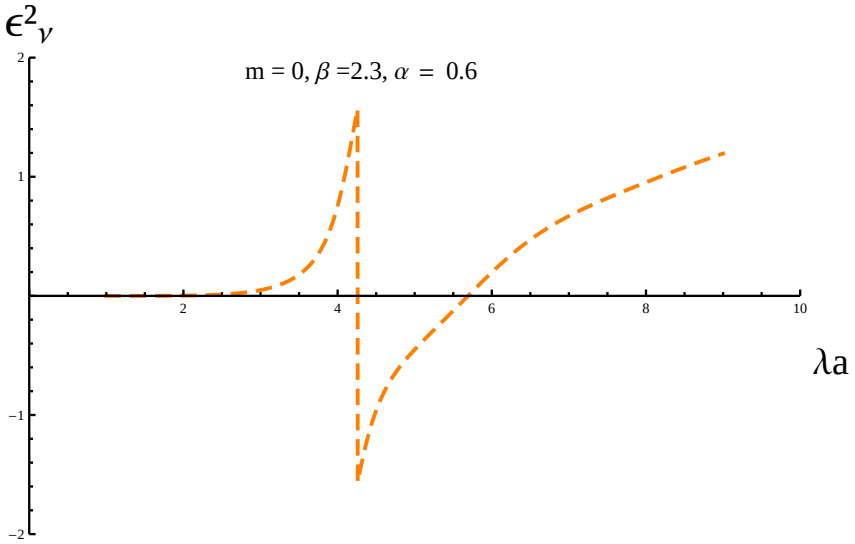

Figura 6.15: Modelo 2, fixando os valores $m = 0$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 0.6$

A fim de obtermos uma comparação mais clara dos três casos vistos acima, Fig.6.13, Fig.6.14 e Fig.6.15 vamos agrupar os gráficos para analisarmos o comportamento do modelo 2 em que $m = 0$, $\alpha = 1$, $\alpha = 0.8$ e $\alpha = 0.6$. Desta forma:

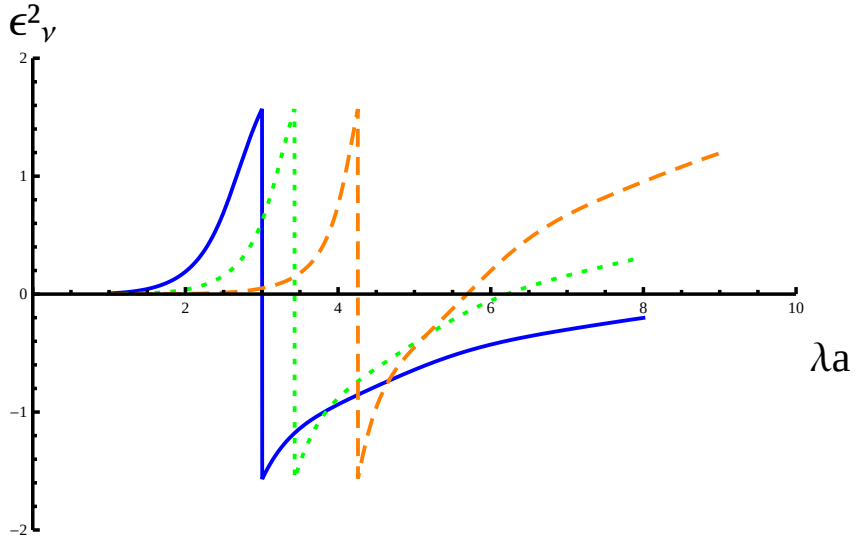

Figura 6.16: Comparando os gráficos do **modelo 2** com $m = 0$, temos que a linha tracejada corresponde a $\alpha = 0.6$, a linha pontilhada corresponde a $\alpha = 0.8$ e a linha contínua corresponde a $\alpha = 1$.

Claramente observa-se o mesmo que fenômeno de espalhamento ressonante nos três

casos e verificamos, pela Fig.6.16 que à medida que os valores de α diminuem o picos ressonante deslocam-se para a direita. Neste caso, temos que a linha tracejada corresponde a $\alpha = 0.6$, a linha pontilhada corresponde a $\alpha = 0.8$ e a linha contínua corresponde a $\alpha = 1$.

Passaremos a analisar agora o caso e que $m = 1$, $\beta = 2.3$. Iremos avaliar este modelo 2 com os valores de $\alpha = 1$, $\alpha = 0.8$ e $\alpha = 0.6$. Assim, temos o primeiro gráfico:

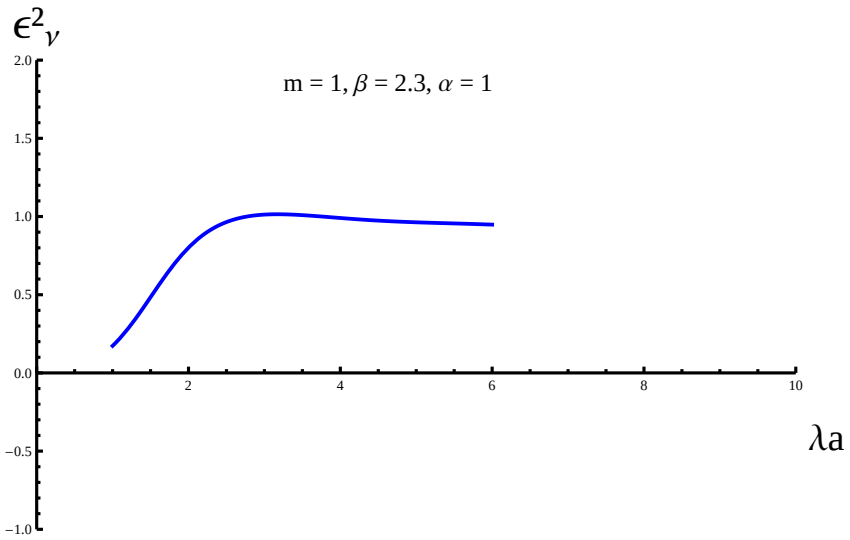

Figura 6.17: Modelo 2, fixando os valores $m = 1$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 1$

Neste caso, a Fig.6.17 mostra claramente que o fenômeno de espalhamento ressonante não ocorre para o caso em que $m = 1$.

Seguindo a nossa linha de raciocínio, tomando $\alpha = 0.8$ para o caso em que $m = 1$ e $\beta = 2.3$ ficamos com a seguinte representação gráfica:

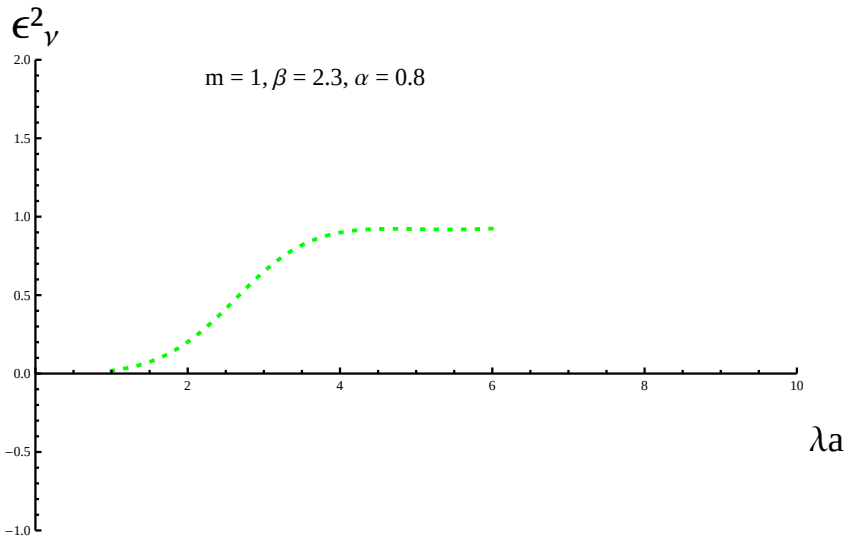

Figura 6.18: Modelo 2, fixando os valores $m = 1$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 0.8$

Finalmente, ainda para o modelo 2 em que $m = 1$ e $\beta = 2.3$,vamos tomar $\alpha = 0.6$. Desta forma, termos a seguinte representação:

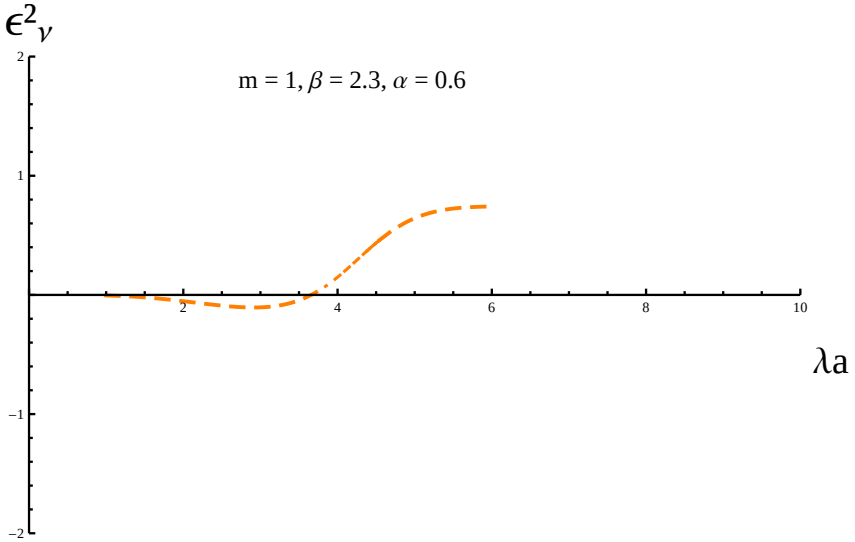

Figura 6.19: Modelo 2, fixando os valores $m = 1$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 0.6$

Em todos os três casos em que $m = 1$ e $\beta = 2.3$ não ocorre o fenômeno de espalhamento ressonante.

Agrupando os gráficos das Fig.6.17, Fig. 6.18 e Fig.6.19 em um único gráfico, teremos uma visão mais clara do comportamento para cada um dos valores de αo. Assim, ficamos com:

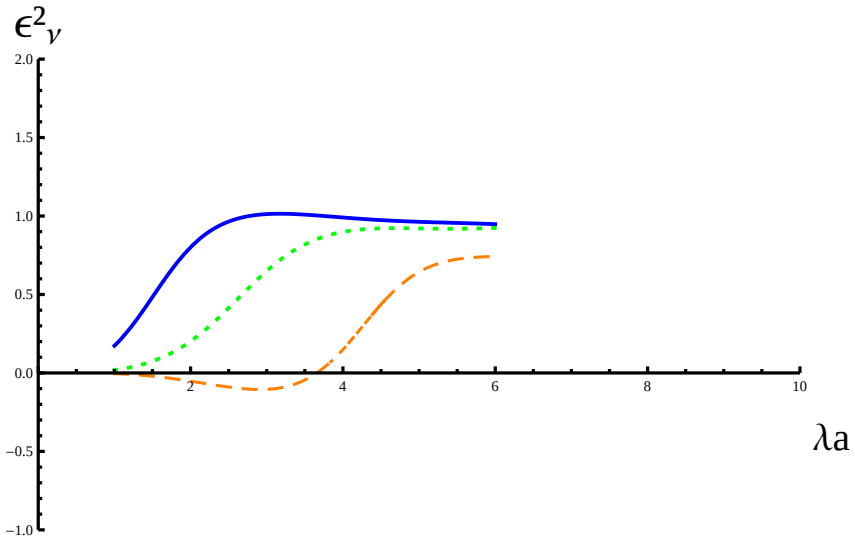

Figura 6.20: Comparando os gráficos do **modelo 2** com $m = 1$ e $\alpha = 1$, $\alpha = 0.8$ e $\alpha = 0.6$

Passaremos a analisar o modelo 2 agora com $m = -1$, novamente com utilizaremos o valor de $\beta = 2.3$. Tomaremos $\alpha = 1$, $\alpha = 0.8$ e $\alpha = 0.6$. Desde modo, temos,paa $\alpha = 1$, o seguinte gráfico:

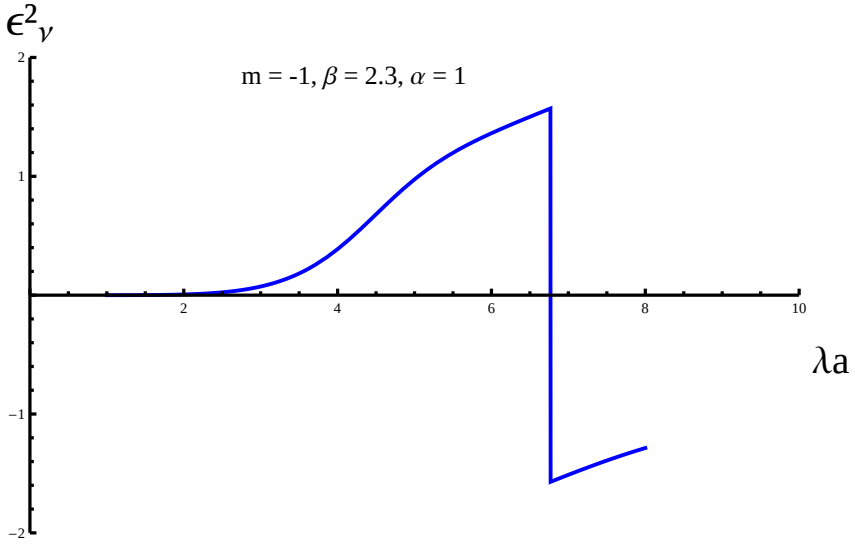

Figura 6.21: Modelo 2, fixando os valores $m = -1$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 1$

Por outro lado, temos também que para $m = -1$, $\beta = 2.3$, $\lambda = 1$ e $\alpha = 0.8$ o gráfico fica:

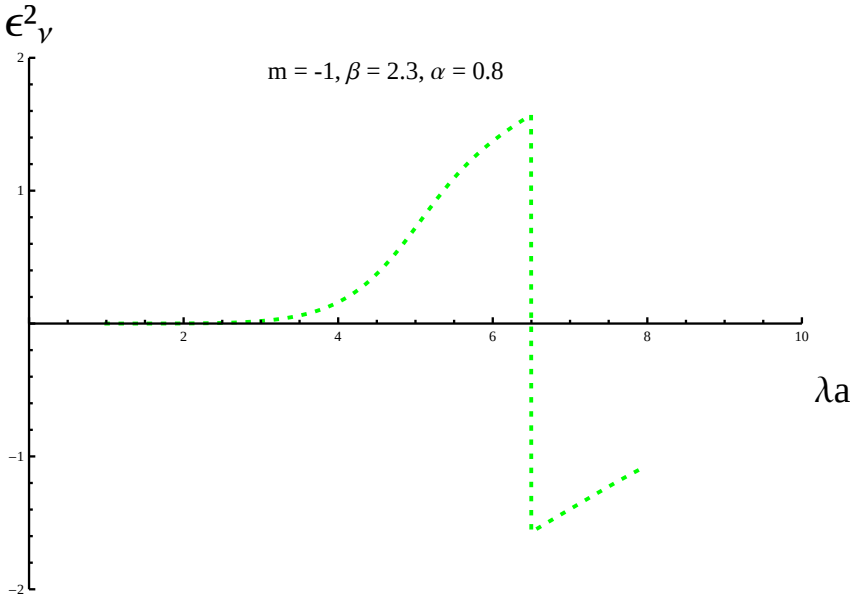

Figura 6.22: Modelo 2, fixando os valores $m = -1$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 0.8$

Novamente aqui se observa o fenômeno de espalhamento ressonante.

Finalmente, ainda com $m = -1$ e $\beta = 2.3$ vamos ver o gráfico do modelo 2 para $\lambda = 0.6$. O gráfico gerado fica:

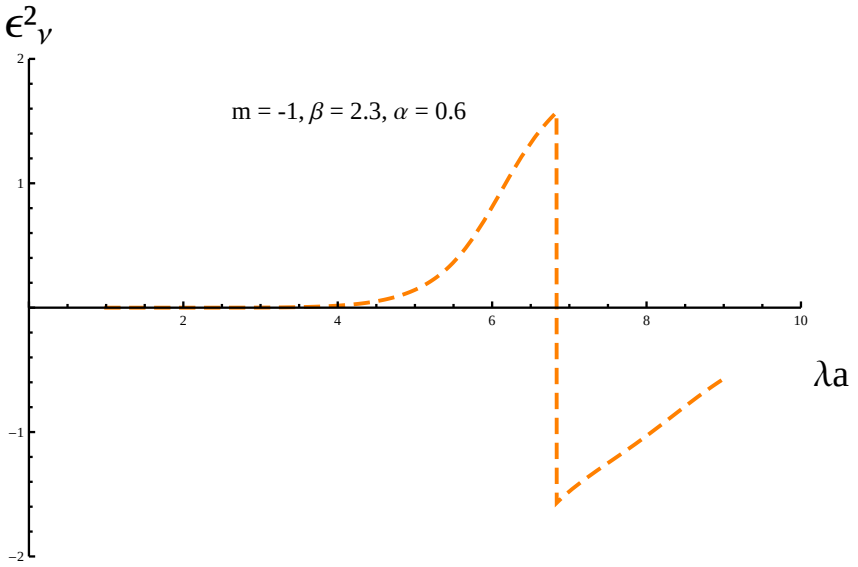

Figura 6.23: Modelo 2, fixando os valores $m = -1$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 0.6$

Agora, vamos comparar os três gráficos gerados para $m = -1$, $\beta = 2.3$ e $\alpha = 1$, $\alpha = 0.8$, e $\alpha = 0.6$. Esta comparação será mostrada na Fig.6.24Comparando os três casos de α onde $m = -1$ teremos:

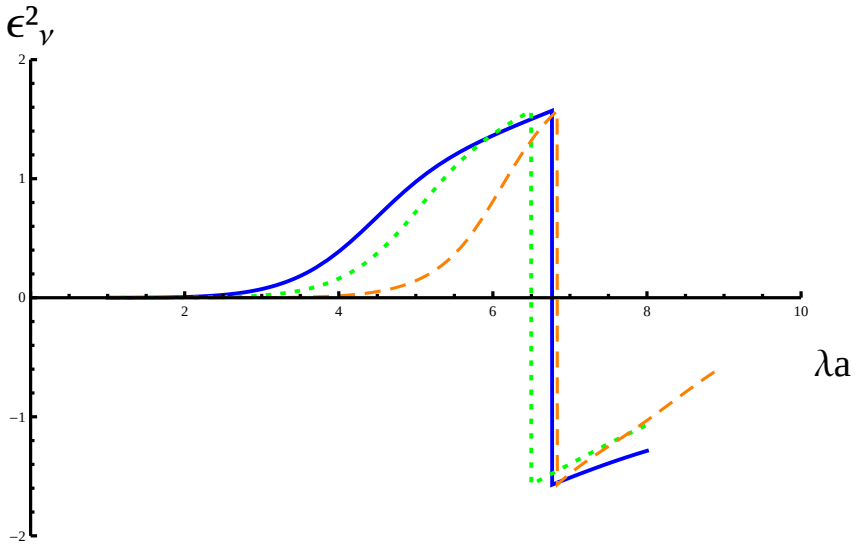

Figura 6.24: Comparando os gráficos do **modelo 2** com $m = -1$ e $\alpha = 1$, $\alpha = 0.8$ e $\alpha = 0.6$. A linha tracejada corresponde a $\alpha = 0.6$, a linha pontilhada corresponde a $\alpha = 0.8$ e a linha contínua corresponde a $\alpha = 1$.

O que observa-se aqui é que o deslocamento do pico de espelhamento ressonante também ocorre para a direita, porém a diferença entre dois picos é menos que no caso observado em que $m = 0$ ou $m = -1$ no modelo 1. A linha tracejada corresponde a $\alpha = 0.6$, a linha pontilhada corresponde a $\alpha = 0.8$ e a linha contínua corresponde a $\alpha = 1$.

6.3 Análise numérica do terceiro modelo

Vamos iniciar nesta seção a análise para o terceiro modelo, ou seja, tubo magnético na casca cilíndrica. Continuaremos com o valor de $\beta = 2.3$ e os valores de $m = -1, 0, 1$. Iremos analisar numericamente para cada valor de α, conforme fizemos anteriormente, O primeiro gráfico será com $m = 0$ e $\alpha = 1$, logo, temos:

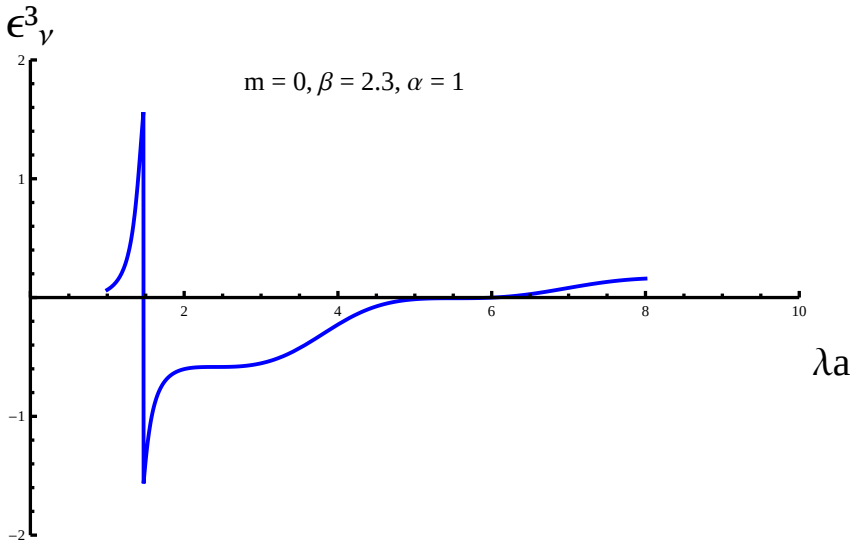

Figura 6.25: Modelo 3, fixando os valores $m = 0$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 1$

Note que, pela Fig.6.25 ocorre o fenômeno de espalhamento ressonante. Fenômeno observado em todos os modelos com o valor do número quântico fixado em $m = 0$.

Continuando a análise, vamos verificar o gráfico para $\alpha = 0.8$ conforme pode-se ver abaixo:

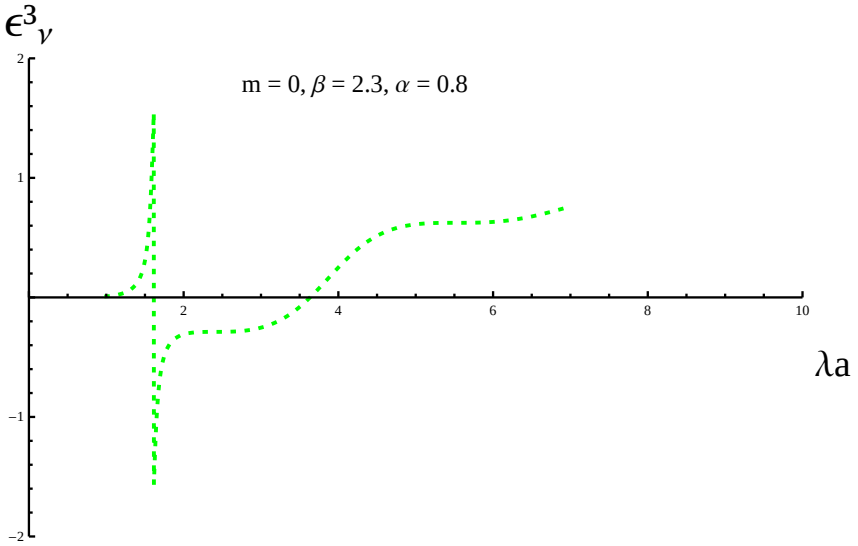

Figura 6.26: Modelo 3, fixando os valores $m = 0$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 0.8$

Neste caso também ocorre o fenômeno de espalhamento ressonante observado no caso anterior. E por fim, o terceiro caso, em que $\alpha = 0.6$, temos:

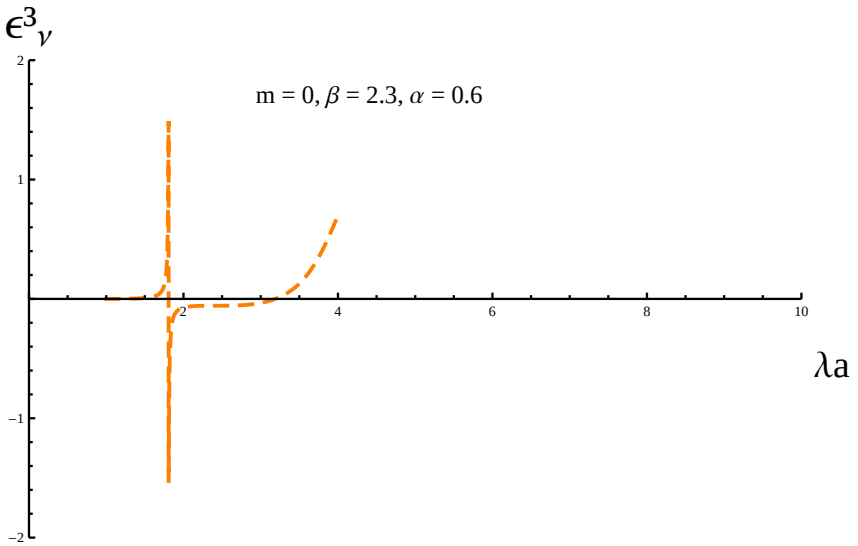

Figura 6.27: Modelo 3, fixando os valores $m = 0$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 0.6$

O terceiro caso também ocorre o fenômeno de espalhamento ressonante. A fim de fazer uma análise mais completa, vamos agrupar todos os gráficos e analisar como se comportam os três:

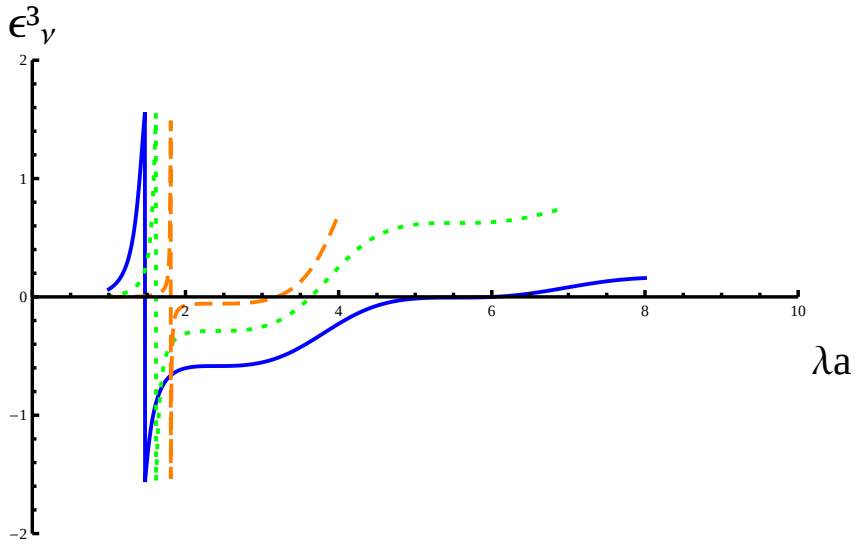

Figura 6.28: Comparando os gráficos do **modelo 3** com $m = 0$ e $\alpha = 1$, $\alpha = 0.8$ e $\alpha = 0.6$. A linha tracejada corresponde a $\alpha = 0.6$, a linha pontilhada corresponde a $\alpha = 0.8$ e a linha contínua corresponde a $\alpha = 1$.

Observando a Fig.6.28 vemos que os picos de ressonância deslocam-se para a direita. Entretanto, observa-se que para este modelo, o pico de $\alpha = 1$ está bem mais próximo do pico de $\alpha = 0.6$. Esta aproximação não se observa nos modelos 1 ou 2.

Nossa próxima análise será fixando o valor de $m = 1$, assim, vamos fazer $\alpha = 1$ e verificar o gráfico conforme abaixo:

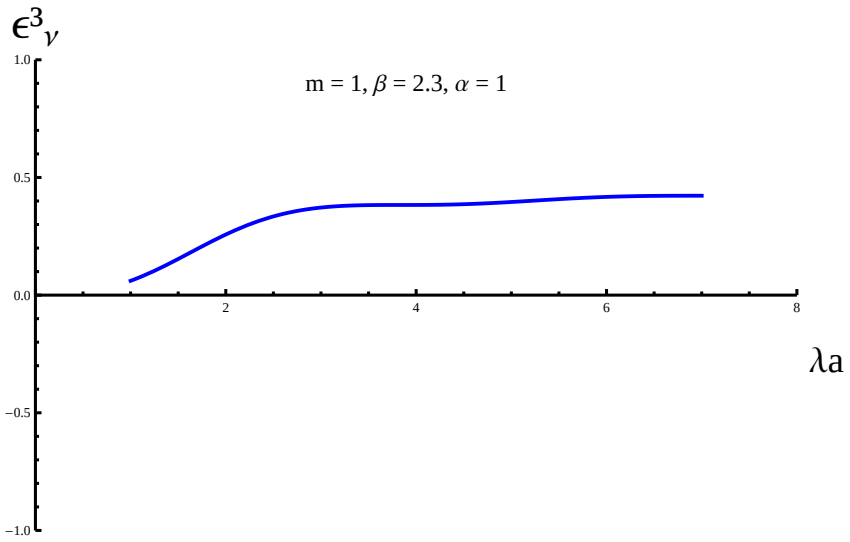

Figura 6.29: Modelo 3, fixando os valores $m = 1$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 1$

Verificamos o pico de espalhamento ressonante também para este modelo, conforme se vê na Fig.6.27. Para o próximo caso, vamos fazer $\alpha = 0.8$ mantendo $\beta = 2.3$ e $m = 1$.

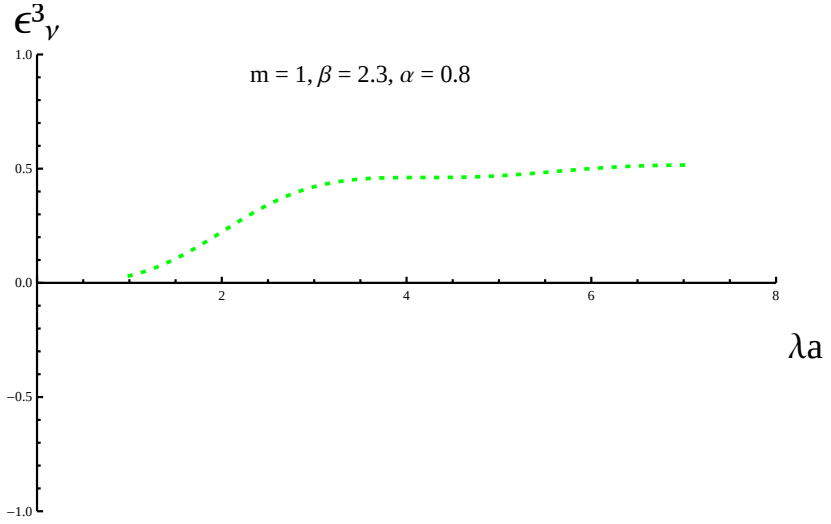

Figura 6.30: Modelo 3, fixando os valores $m = 1$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 0.8$

Finalmente, vamos fazer $\alpha = 0.6$ mantendo $m = 1$ e o que verificamos é:

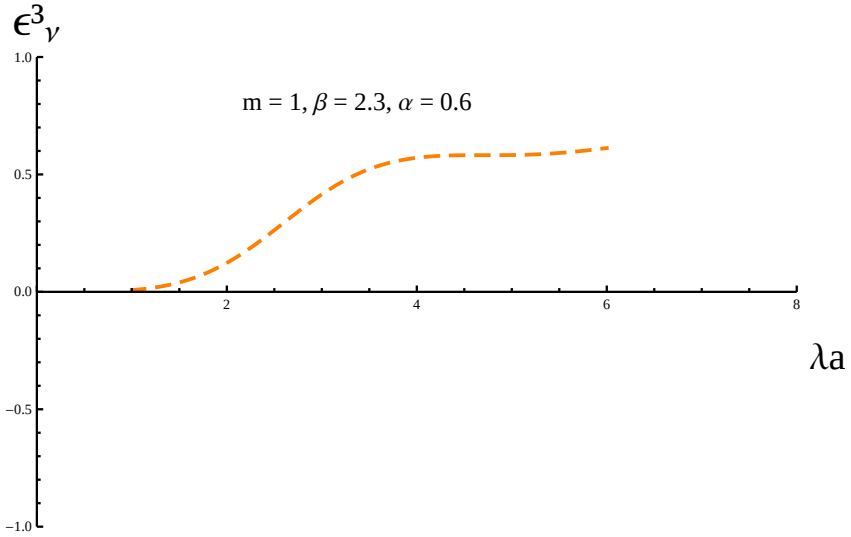

Figura 6.31: Modelo 3, fixando os valores $m = 1$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 0.6$

Comparando os três gráficos, verificamos que não há espalhamento ressonante e com valores maiores de λ a os ângulos para $\alpha = 0.6$ são maiores, conforme Fig.6.31. Este mesmo fato ocorre no **modelo 1**, para $m = 1$ (ver Fig.6.7), mas não ocorre **modelo 2**, para $m = 1$ (ver Fig.6.20), onde na verdade, o valor dos ângulos para $\alpha = 0.6$ ficam bem abaixo.

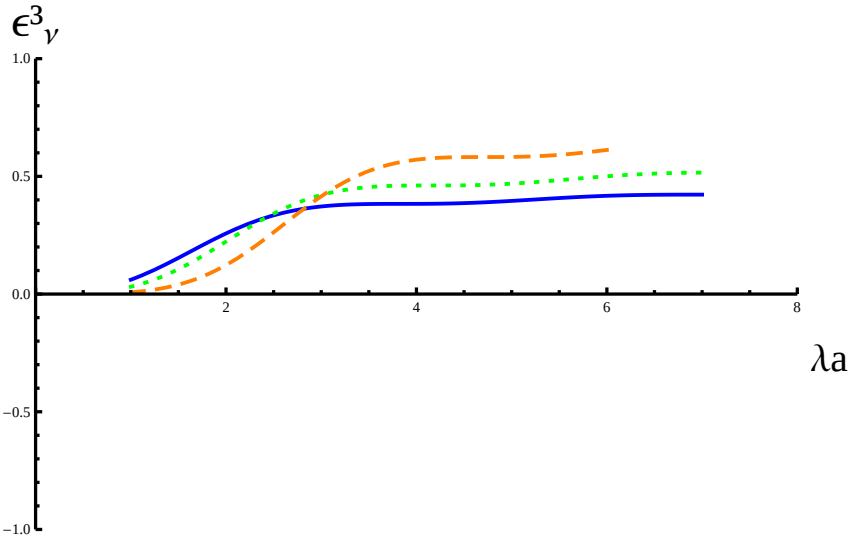

Figura 6.32: Comparando os gráficos do **modelo 3** com $m = 1$ e $\alpha = 1$, $\alpha = 0.8$ e $\alpha = 0.6$. A linha tracejada corresponde a $\alpha = 0.6$, a linha pontilhada corresponde a $\alpha = 0.8$ e a linha contínua corresponde a $\alpha = 1$.

Agora iremos para nossa última análise do **modelo 3**. Fixaremos o valor de $m = -1$ e de $\beta = 2.3$. Começaremos com $\alpha = 1$. Então, o temos o seguinte gráfico:

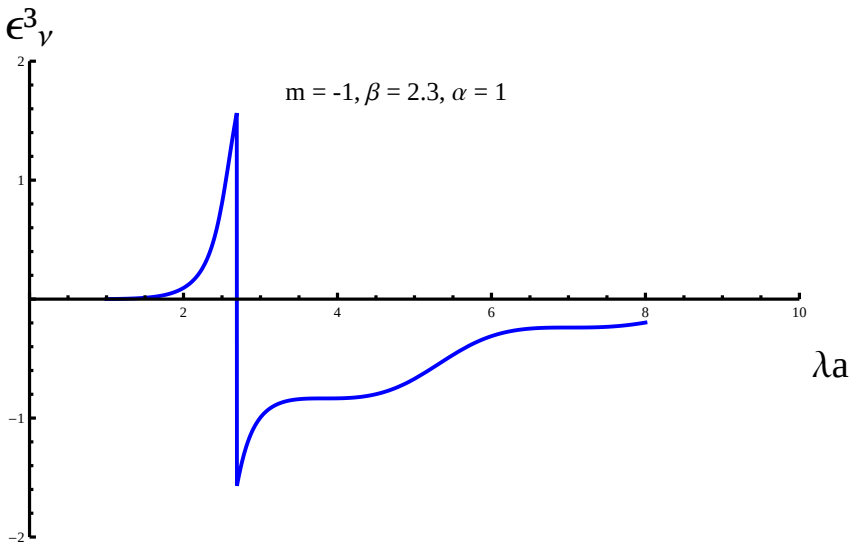

Figura 6.33: Modelo 3, fixando os valores $m = -1$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 1$

Observa-se o fenômeno de espalhamento ressonante, em $\alpha = 1$. Dando continuidade à análise numérica, temos o seguinte gráfico:

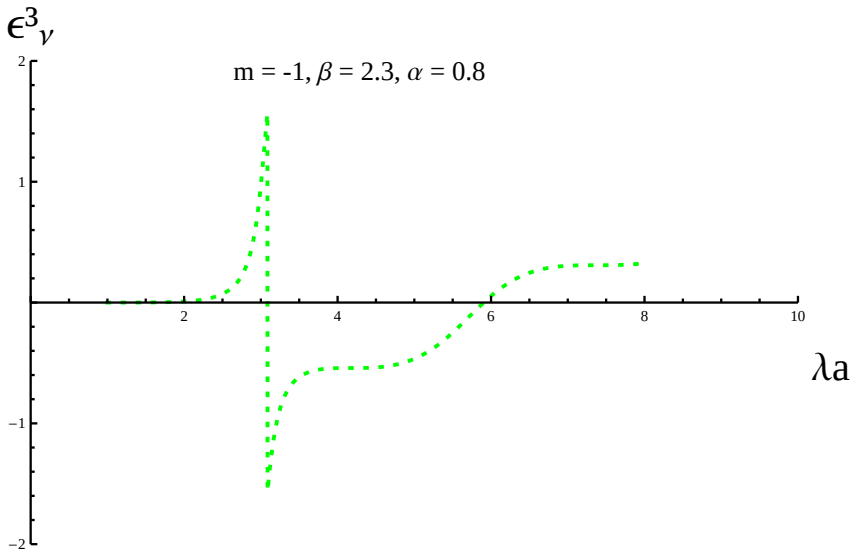

Figura 6.34: Modelo 3, fixando os valores $m = -1$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 0.8$

Neste caso, igualmente o fenômeno de espalhamento ressonante aparece. E por fim, vamos para analisar numericamente para o caso $\alpha = 0.6$. Logo, temos o gráfico:

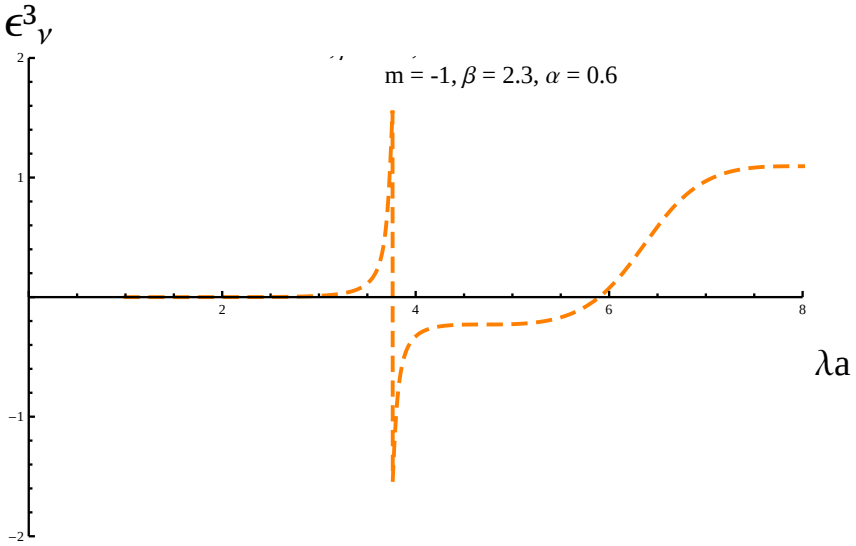

Figura 6.35: Modelo 3, fixando os valores $m = -1$, $\beta = 2.3$, $\alpha = 0.6$

A fim de obtermos uma análise mais detalhada, vamos comparar os três gráficos obtidos anteriormente:

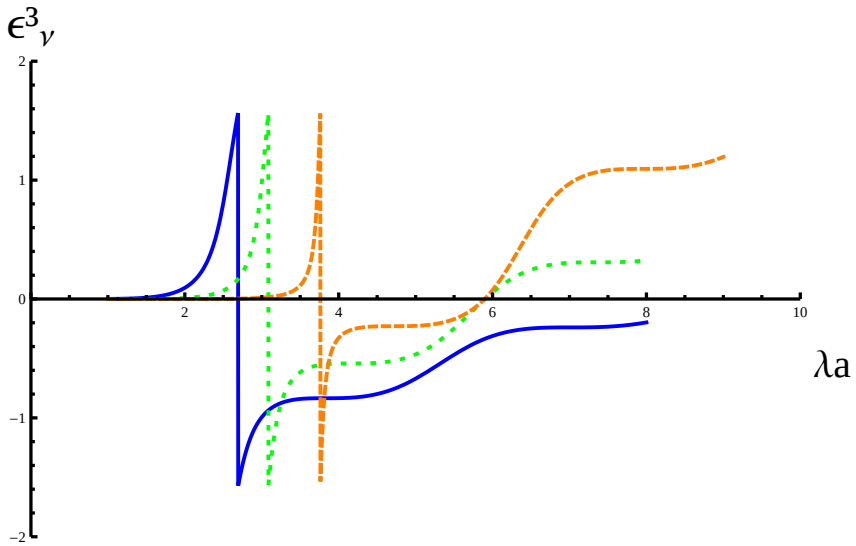

Figura 6.36: Modelo 3, fixando os valores $m = -1$ e de $\beta = 2.3$. A linha tracejada corresponde a $\alpha = 0.6$, a linha pontilhada corresponde a $\alpha = 0.8$ e a linha contínua corresponde a $\alpha = 1$.

Pela Fig.6.36 observa-se o deslocamento para a direita sendo o mais acentuado o correspondente ao caso em que $\alpha = 0.6$.

Capítulo 7

Conclusão

Nosso trabalho teve como objetivo estudar a contribuição dada ao desvio de fase quando unimos os dois casos de espalhamento: o espalhamento por via do defeito topológico e por um tubo magnético, utilizando três modelos distintos de campos magnéticos propostos por Bordag e Voropaev, os quais são:

$$\begin{aligned}
\text{Modelo } \mathbf{1)} \quad B(r) &= \frac{\Phi}{\alpha\pi a^2}\Theta(a-r) \ \text{ Campo magnético dentro do tubo,} \\
\text{Modelo } \mathbf{2)} \quad B(r) &= \frac{\Phi}{2\alpha\pi a r}\Theta(a-r) \ \text{ Campo magnético proporcional a } \frac{1}{r} \text{ no tubo,} \\
\text{Modelo } \mathbf{3)} \quad B(r) &= \frac{\Phi}{2\alpha\pi a}\delta(a-r) \ \text{ Campo magnético na casca do tubo .}
\end{aligned} \tag{7.1}$$

Neste sentido, encontramos que as equações que descrevem a função de onda radial, tiveram como soluções as funções especiais de Bessel, Neumann e Whittaker. Para a região interna ao tubo as soluções dependem do parâmetro α e de outras varáveis associadas ao sistema em consideração. Nossos resultados para as ondas radiais regulares na origem, são:

$$\begin{aligned}
R^{(1)}_{int}(r) &= \frac{M_{\omega,\frac{m}{2\alpha}}(\frac{\beta}{a^2\alpha}r^2)}{r} \quad , \\
R^{(2)}_{int}(r) &= \frac{M_{\xi,\frac{|m|}{\alpha}}(\zeta\frac{r}{a})}{\sqrt{r}} \quad , \\
R^{(3)}_{int}(r) &= J_{\frac{|m|}{\alpha}}(\lambda r) \quad .
\end{aligned} \tag{7.2}$$

onde,

$$\xi = \frac{m\beta}{\sqrt{\beta^2-(\lambda\alpha a)^2}} \quad , \quad \zeta = 2\frac{\sqrt{\beta^2-(\lambda\alpha a)^2}}{\alpha} \tag{7.3}$$

$$\omega = \frac{\gamma\alpha a^2}{4\beta} \quad , \quad \gamma = \lambda^2 + \frac{2m\beta}{\alpha^2 a^2} \quad , \tag{7.4}$$

$$\beta = \frac{e\Phi}{2\pi} \quad , \quad \lambda^2 = E^2 - k^2 - \mu^2 \quad . \tag{7.5}$$

Com relação as soluções da equação de onda na região externa ao tubo, i.e., para $r > a$, os três modelos apresentam expressões que são as combinações das funções de Bessel e de Newmann. Observamos que a ordem dessas funções depende não apenas do termo que representa o déficit de ângulo planar, α, como também do termo que representa a razão entre fluxo magnético e o fluxo quântico, β. Nossas soluções são dadas abaixo:

$$\begin{aligned} R^{(1)}_{ext}(r) &= A^{(1)}J_\nu(\lambda r) + B^{(1)}N_\nu(\lambda r) \quad , \\ R^{(2)}_{ext}(r) &= A^{(2)}J_\nu(\lambda r) + B^{(2)}N_\nu(\lambda r) \quad , \\ R^{(3)}_{ext}(r) &= A^{(3)}J_\nu(\lambda r) + B^{(3)}N_\nu(\lambda r) \quad , \end{aligned} \tag{7.6}$$

em que, $\nu = \frac{|m-\beta|}{\alpha}$.

Nas funções representadas em (7.6), vemos a similaridade em cada um dos casos com respeito aos argumentos, λr, assim como da ordem, ν.

Concluímos então que embora o campo magnético exterior ao tubo seja nulo, o termo que contém o a razão fluxo magnético e do fluxo quântico, β, aparece na ordem das funções de Bessel e de Neumann. Isto se dá devido a presença do potencial vetor. Significa que, assim como Aharonov e Bohm mostraram em seu trabalho, nesta nossa pesquisa o potencial vetor também tem papel fundamental no fenômeno de espalhamento quântico relativístico, pois sua influência é notada em todos os casos avaliados para $r > a$.

Como um dos principais resultados encontrados mostramos através do comportamento assintótico das funções radiais, que o ângulo de mudança de fase apresenta duas contribuições, como mostrado a seguir:

$$\delta_m = \delta_m^{\beta,\alpha} + \epsilon_\nu^{(i)}(\lambda a) \ , \tag{7.7}$$

onde

$$\delta_m^{\beta,\alpha} = -\frac{\pi}{2}\left(\frac{|m-\beta|}{\alpha} - |m|\right) \tag{7.8}$$

e

$$\epsilon_{\nu}^{(i)}(\lambda a) = \arctan\left(v_{\frac{|m-\beta|}{\alpha}}^{(i)}(\lambda a)\right) \ , \tag{7.9}$$

sendo

$$v_{\frac{|m-\beta|}{\alpha}}^{(i)}(\lambda a) = \frac{R^{(i)}(a)J'_{\frac{|m-\beta|}{\alpha}}(\lambda a) - R'^{(i)}(a)J_{\frac{|m-\beta|}{\alpha}}(\lambda a)}{R^{(i)}(a)N'_{\frac{|m-\beta|}{\alpha}}(\lambda a) - R'^{(i)}(a)N_{\frac{|m-\beta|}{\alpha}}(\lambda a)} \quad .$$

A primeira contribuição, $\delta_m^{\beta,\alpha}$, é devida apenas a presença de um fluxo magnético linear, corrigido pela presença de uma corda cósmica pelo parâmetro α.

Essa contribuição é uma generalização dos resultados encontrados por Aharonov e Bohm e por Jackiw e Deser.

A segunda contribuição, $\epsilon_{\nu}^{(i)}(\lambda a)$, corresponde ao fato de termos considerado um tubo de raio finito, a. Essa corresponde a nossa contribuição pessoal. Vemos que a mesma depende, não apenas dos parâmetros α e β, mas também de a e depende da energia da partícula através de λ.

Nesta dissertação, em particular o última capítulo, analisamos apenas a segunda contribuição, $\epsilon_{\nu}^{(i)}(\lambda a)$ para os três modelos de configurações. Fizemos vários gráficos com valores pré-determinados para m, α e β, a fim de verificarmos o comportamento do fenômeno quântico de espalhamento de um bóson quando submetido às condições já citadas. Como a a contribuição do *phase shift*, $\epsilon_{\nu}^{(i)}(\lambda a)$, envolve funções especiais complicadas da física-matemática, para termos uma compreensão mais clara do seu comportamento desenvolvemos cálculos numéricos e apresentamos seus resultados nos nos gráficos mostrados no Cap.6. Verificamos que para o caso em que os números quânticos $m = 0$ e $m = -1$ ocorre o espalhamento ressonante em todos os modelos estudados. O espalhamento ressonante ocorre quando o denominador da função $v_{\frac{|m-\beta|}{\alpha}}^{(i)}(\lambda a)$ se anula. Neste caso o desvio de fase passa para $\frac{\pi}{2}$ ou seus múltiplos. Deste modo, o termo que mais contribui para o desvio de fase é o que corresponde ao espalhamento ressonante.

Uma outra conclusão que podemos fazer, diz respeito aos deslocamentos dos pico onde ocorre a ressonância com α e λ. O deslocamento tem relação direta com a variação de α. Isto implica que à medida que os valores de α diminuem, consequentemente o cone fica mais acentuado, ou seja, o déficit de ângulo planar aumenta, observa-se que o deslocamento vai no sentido do crescimento de λa, onde a é o raio do tubo que é constante.

Logo, podemos inferir que há um aumento no valor de λ. Mas λ esta associado com a energia da partícula bosônica, pois $\lambda = \sqrt{E^2 - \mu^2 - k^2}$. Assim, à medida que α diminui são necessários valores de energia mais altos para a que haja espalhamento ressonante.

No caso em que $m = 1$, observa-se que para o modelo 2, ou seja, o campo magnético interno ao tubo e proporcional à $\frac{1}{r}$, há um decréscimo no ângulo do desvio de fase à medida que α diminui, ao contrário do que ocorre nos modelos 1 e 3 que, à medida que α diminui, o ângulo aumenta.

Apêndice A – A equação e as funções de Whittaker

O estudo de equações diferenciais que têm como solução as funções especiais é de grande importância para a física. Em geral, tal assunto é estudado com bastante ênfase na graduação na disciplina de Métodos Matemáticos. Uma das equações importantes que deparamos em nossa dissertação foi a equação diferencial de Whittaker[11], que é uma equação auto-adjunta [12] do tipo:

$$\frac{d^2W_{\kappa,\mu}}{dz^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\kappa}{z} + \frac{(\frac{1}{4}-\mu^2)}{z^2}\right) W_{\kappa,\mu} = 0 \quad . \tag{7.10}$$

Na realidade, a equação acima é a forma adjunta da equação hipergeométrica confluente. As soluções da Eq. (7.10) são:

$$M_{\kappa,\mu}(z) = e^{-\frac{1}{2}z} z^{\frac{1}{2}+\mu} M(\frac{1}{2}+\mu-\kappa, 1+2\mu, z) \quad , \tag{7.11}$$

$$W_{\kappa,\mu}(z) = e^{-\frac{1}{2}z} z^{\frac{1}{2}+\mu} U(\frac{1}{2}+\mu-\kappa, 1+2\mu, z) \ , \tag{7.12}$$

onde $M(a,b,z)$ e $U(a,b,z)$ correspondem as funções de Kummer, com $\kappa = \frac{1}{2}b - a$ e $\mu = \frac{b-1}{2}$. A primeira das soluções em (7.11) é regular na origem e foi a solução que utilizamos em nossa análise nesta dissertação. A segunda solução é singular.

A função $M(a,b,z)$ pode ser representada através da série:

$$M(a,b,z) = 1 + \frac{az}{b} + \frac{(a)_2 z^2}{(b)_2 2!} + ... + \frac{(a)_n z^n}{(b)_n n!} + ... \tag{7.13}$$

onde,

$$(a)_n = a(a+1)(a+2)...(a+n-1), \quad (a)_0 = 1 \tag{7.14}$$

$$. \tag{7.15}$$

E a função $U(a,b,z)$ pode ser representada por:

$$U(a,b,z) = \frac{\pi}{\sin \pi b}\left(\frac{M(a,b,z)}{\Gamma(1+a-b)\Gamma(b)} - z^{1-b}\frac{M(1+a-b,2-b,z)}{\Gamma(a)\Gamma(2-b)}\right) \tag{7.16}$$

Para valores de $z \to \infty$, então:

$$M(a,b,z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^z z^{a-b}[1 + O(|z|^{-1})] \quad . \tag{7.17}$$

Referências Bibliográficas

[1] S.Gasiorowicz, Quantum physics. 3rd ed. Wiley International Edition.

[2] J. D. Griffiths, Introduction to Quantum Mechanics. 2nd ed. Pearson Education International. (1995).

[3] J.J.Sakurai, Modern Quantum Mechanics, 2nd ed. Addison-Wesley, (1985).

[4] R. Shankar, Principles of quantum mechanics, 2nd ed. New York, Plenum Press. (1994).

[5] R. Greiner, Relativistic Quantum Mechanics. Wave Equations 3rd ed. Springer. (2000).

[6] Y. Aharonov e D. Bohm, Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory.

[7] C. R. Hagen, Aharonov-Bohm scattering amplitude Phys. Rev. Publicado em 15 de março 1990.

[8] S. Deser e R. Jackiw, Classical and Quantum Scattering on a Cone: Commun. Math. Phys. 118, 495-509 (1988).

[9] M. Bordag e S. Voropaev, J. Phys. A **26**, 7637. (1993).

[10] M. Bordag e S. Voropaev, J. Phys. Lett. B **333**, 238 (1994).

[11] M. Abramowitz e I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, 10th ed, National Bureau of Standards - U.S. Government Printing Office. (1972). Year 1972

[12] G.B. Arfken e H.J. Weber, Mathematical methods for physicists 6th ed. Elsevier Academic Press, (2005)

[13] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, The Classical Theory of Field, 3th Ed. Trad. J.B. Sykes and J.S.Bell. Oxford, England. Butterworth-Heinenann, (1993).

[14] R. D'Inverno, Introduction Einstein Relativity.(Oxford Univ. Press, 1988).

[15] M. Carmeli, Classical Field: General Relativy and Gauge Theory. John Wiley and sons, N.York, 1982).

[16] E. Butkov, Mathematical physics. Addison-wesley publishing company, (1973).

[17] E. Merzbacher, Quantum mechanics. 3rd ed. John Wiley & Sons, inc. (1998).

[18] J. Spinelly e E. R. Bezerra de Mello, Classical Quantum Gravity **20**, 873 (2003).

[19] J. Spinelly e E. R. Bezerra de Mello, Int. J. Mod. Phys. D **13**, 607 (2004); Nucl. Phys. B, Proc.Suppl. 127, 77 (2014).

[20] Griffths D. J., Introduction to Electrodynamics, 3rd edition. Person Education. New Jersey: (1999).

[21] A. Vilenkin e E. P. S. Shellard, Cosmic Strings and Other Topological Defects (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1994).

[22] C. Cohen-Tannoudji, Quantum mechanics. John Wiley, 1977).

[23] I. S. Sokolnikoff, Tensor Analysis: Theory and Application. New York: John Wiley and sons, (1951).

[24] L.I . Schiff, Quantum Mechanics 1th Ed. The McGraw-Hill Book Company, inc.

[25] L.D. Landau e E.M. Lifshitz, Quantum mechanics: non-relativistic Theory. Trad. J.B. Sykes and J.S.Bell. 30th ed. Oxford: England. Butterworth-Heinenann, (1993).

[26] F. Mandl e G. Shaw, Quantum Field Theory (John Wiley and Sons, N.Y., 1993).

[27] J. R. Taylor, Scattering theory: the quantum theory on nonrelativistic collisions. John Wiley & Sons, (1972).

[28] J.D. Jakson, Classical eletrodynamics. 2ª Ed. John Wiley and sons: N.York (1962).

[29] P. Atkins, Molecular Quantum mechanics. 4th ed. University of Oxford. Ronald Friedman. Indiana Purdue Fort Wayne.

[30] J. D. Bjorken e S. D. Drell, Relativistic Quantum Fields. 2nd ed. Mcgraw-Hill College: (1965).