UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA A DISTÂNCIA

Jorismildo da Silva Dantas

O Estudo da Fórmula de Brahmagupta para Área de Quadriláteros Cíclicos

João Pessoa - PB

2020.2

Jorismildo da Silva Dantas

O Estudo da Fórmula de Brahmagupta para Área de Quadriláteros Cíclicos.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância da Universidade Federal da Paraíba como requisito para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Silva Santos

João Pessoa - PB

2020.2

Catalogação de Publicação na Fonte. UFPB - Biblioteca Setorial do CCEN

D192e Dantas, Jorismildo da Silva.
O estudo da fórmula de Brahmagupta para a área de quadriláteros cíclicos / Jorismildo da Silva Dantas. - João Pessoa, 2020.
33 f. : il.

Orientação: Márcio Silva Santos.
TCC (Graduação) - UFPB/CCEN.

1. Geometria plana. 2. Fórmula de Brahmagupta. 3. Quadriláteros inscritíveis. I. Santos, Márcio Silva. II. Título.

UFPB/CCEN CDU 514(043.2)

O Estudo da Fórmula de Brahmagupta para a Área de Quadriláteros Cíclicos.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Silva Santos

Aprovado em: 30/11/2020

COMISSÃO EXAMINADORA

Orientador Prof. Dr.Márcio Silva Santos

Prof.Dr. Iury Rafael Domingos de Oliveira

Prof.Dr. Allan George de Carvalho Freitas

AGRADECIMENTOS

À Deus, por todas as vitórias na minha vida! Aos meus pais, que sempre estão ao meu lado, por favorecerem em especial, este momento;

Em particular a minha amada Esposa Luanna Maria Beserra Filgueiras, e a minha filha Júlia, por serem base e me apoiarem diante de todas as dificuldades ao longo da vida e por caminharmos como família na luta diária.

Ao meu orientador, prof. Márcio por sua valiosa contribuição e empatia em meu processo de construção profissional nessa trajetória, assim bem como os professores Iury Rafael e Allan George, por possuir o sentimento das dificuldades que todos nós enfrentamos quando queremos vencer na vida profissional, e por toda empatia nesse dado momento que vivemos; Aos colegas, pelas trocas de experiências, pelo convívio, pelas alegrias e incertezas, por todos esses momentos vividos juntos e partilhados.

Por fim agradeço a Universidade Federal da Paraíba - UFPB, que foi chave de minha formação, abrindo portas para meu crescimento.

Muito Obrigado!

“Inteligência é a capacidade de se adaptar à mudança.”

Stephen Hawking

RESUMO

Considerando a notoriedade e contribuições significativas da Geometria Plana para o campo das ciências, esta pesquisa enfatiza o trabalho de Brahmagupta, matemático e astrônomo hindu conhecido por seu trabalho no campo geométrico, a partir da construção de um teorema utilizado para calcular a área de quadriláteros cíclicos. Dessa maneira, objetiva-se evidenciar e dar notoriedade às propostas de estudo e ensino a partir do trabalho desse matemático. Para isso, procede-se a esse contexto, fundamentações a partir de estudos teóricos e práticos por meio de demonstrações, seguido da aplicação do teorema, para isso fez-se uso de conceitos matemáticos já conhecidos e uma linguagem didática objetiva, em conformidade com estudos teóricos de notórias pesquisas, entre elas Oliveira (2016). Desse modo, observa-se a relevância do trabalho de Brahmagupta, o que nos permite compreender melhor essa linha de estudo tão significativa e suas contribuições para o ensino e a geometria plana.

Palavras-chave: Geometria Plana, Fórmula de Brahmagupta, Quadriláteros Cíclicos.

ABSTRACT

Considering Geometry's notoriety and significant contributions to the field of science, this research emphasizes the work of Brahmagupta, a Hindu mathematician and astronomer known for his work in the geometric field, from the construction of a theorem used to calculate the area of cyclic quadrilaterals. Thus, the objective is to highlight and give prominence to the proposals for study and teaching from the work of this mathematician. To this end, we proceed to this context, foundations from theoretical and practical studies through demonstrations, followed by the application of the theorem, for that it was made use of mathematical concepts already known and an objective didactic language, in accordance with studies theorists of notorious research, among them Oliveira (2016). In this way, the relevance of Brahmagupta's work is observed, which allows us to better understand this very significant line of study and its contributions to teaching and plane geometry.

Keywords: Geometry, Brahmagupta Theorem, Teaching.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 - Introdução

O conhecimento matemático é uma tendência que ao longo da história da humanidade tem despertado o interesse e a curiosidade do homem. Dentro desse contexto, podemos citar a geometria como uma das partes mais intrigantes. Tendo como uma de suas possibilidades, por exemplo, o cálculo da área, uma aplicação recorrente em diversos segmentos, seja no campo de estudo como também no campo de trabalho.

A Geometria tem sua origem diversificada, provinda de diferentes localidades, sobretudo no século VII a.C. Seu estudo e suas aplicações foram centrais e contribuíram de forma significativa na resolução de problemas nas mais diversas áreas do conhecimento. De maneira particular, podemos citar a Astronomia, com aplicações que possibilitaram o estudo e a compreensão da localização de astros a partir de sua posição na terra.

Além disso, é importante salientar ainda, que a Geometria está presente de maneira constante, existem inúmeras formas planas, que são construídas a partir de elementos básicos. Ou seja, podemos referenciar e encontrar aspectos geométricos por toda parte, seja por meio de formas, ou aplicações mais elaboradas, como no cálculo de áreas geométricas dessas figuras por exemplo.

Na contemporaneidade o uso do cálculo geométrico, ainda relaciona-se com o processo de apropriação e ampliação ocupacional. Entretanto, vale destacar que, diferente dos séculos anteriores ocorre uma organização e padronização das medidas em conformidade com o Sistema Internacional de Unidades (SI). Deste modo, compreende-se, que as descobertas e contribuições formuladas lá atrás, foram centrais e impactaram de forma considerável a maneira com que o homem e a sociedade desenvolveram-se.

No estudo da Geometria Plana, as figuras mais conhecidas são: triângulo, quadrado, retângulo, paralelogramo, losango, trapézio e círculo. Estas possuem fórmulas matemáticas para o cálculo da medida da área. Quando falamos de figuras mais complexas, encontramos fórmulas e cálculos matemáticos específicos.No entanto, por serem mais elementares, o cálculo de áreas de triângulos e quadriláteros, são mais explorados no que diz respeito ao entendimento da

Geometria e consequentemente permitem aos docentes e discentes uma fácil compreensão.

Nesse contexto, como possibilidade para o desenvolvimento do estudo geométrico, sobretudo quando falamos da área de figuras, não poderíamos deixar de lado e apresentar o trabalho e a descoberta da fórmula de Brahmagupta, matemático e astrônomo hindu, que elaborou uma brilhante fórmula para calcular a área de um quadrilátero, conhecendo apenas as medidas dos seus lados, desde que este quadrilátero seja cíclico, ou seja, o quadrilátero onde seus quatro vértices são pontos de uma mesma circunferência.

Existe ainda uma simplificação da fórmula de Brahmagupta realizada pelo Matemático Heron de Alexandria, que possibilita o cálculo da área de um triângulo apenas em função de seus lados, não exigindo conhecimento dos ângulos, nem da altura. Entretanto, enfatizar tal possibilidade não é nossa finalidade neste trabalho, mesmo compreendo a relação do radical de heron com a fórmula de Brahmagupta.

É nitidamente comum encontrarmos em alguns livros de Matemática a nível médio, mesmo que de maneira tímida e de forma resumida alguma citação a Heron de Alexandria no cálculo de Área de triângulos, o que não ocorre com Brahmagupta.

Nessa perspectiva, essa pesquisa, tem como centralidade enfatizar as contribuições do Matemático Brahmagupta por meio da demonstração de sua fórmula, através de conhecimentos já replicados no ensino regular a nível fundamental e médio, para o cálculo da área de quadriláteros inscritíveis ou cíclicos como queira denominar, dando notoriedade e possibilitando assim o acesso de maneira inclusiva a essa linha de estudo tão pertinente ao conhecimento Geométrico.

Dessa forma, é importante salientar ainda que, apesar do fato de que a Fórmula de Brahmagupta não tenha sido aplicada para o cálculo da área de outros quadriláteros convexos, sua contribuição foi pertinente ao desenvolvido de novos atributos, que tornaram possível o estudo e desenvolvimento do cálculo da área de quadriláteros convexos quaisquer, seja ele cíclico ou não, essa generalização do trabalho de Brahmagupta foi fruto de estudos do brilhante trabalho de outro Matemático, o alemão Carl Anton Bretschneider.

Com o objetivo de tornar mais entendível estruturamos nosso trabalho da seguinte maneira:

No Capítulo 2 deste trabalho, discorreremos sobre a centralidade de nosso estudo, tendo como linhas particulares:

Algumas breves considerações da história envolvendo Brahmagupta, e suas relações aparentes com Heron de Alexandria, nesse percurso trazemos alguns exemplos pertinentes desses trabalhos, e posterior a isso, enfatizamos e apresentamos a Demonstração da fórmula de Brahmagupta. Dessa maneira, de modo a incitar nossos leitores a compreensão do trabalho desse matemático, optamos pela demonstração fundamentada em princípios trigonométricos (por meio da trigonometria), tendo como premissa o fato de que os requisitos práticos para tal demonstração são notoriamente trabalhos do nível médio.

Ainda nesse capítulo, temos algumas considerações acerca da generalização da fórmula de Brahmagupta, adaptando-a, a um formato capaz de calcular a área de qualquer quadrilátero convexo como mencionamos anteriormente. Tendo como protagonismo, o brilhante trabalho do Matemático alemão Carl Anton Bretschneider, com isso abordamos a perspectiva do cálculo da Área para Quadriláteros Convexos Quaisquer, em seguida, apresentamos algumas aplicações e exemplos da fórmula de Brahmagupta.

Por fim, não menos importante, temos as considerações finais deste trabalho, que ateve-se de forma incisiva, a apresentar o trabalho desse brilhante matemático, além de buscar e apresentar uma possibilidade viável para o ensino da geometria, em particular no cálculo de área de quadriláteros inscritíveis ou cíclicos, o trabalho desse grande Matemático que é Brahmagupta e sua honrosa contribuição para o campo da Geometria.

2- Revisão de Literatura

2.1- Breves Considerações Sobre a História;

Brahmagupta, Figura 1, compõe a lista dos matemáticos hindus mais importantes, junto com Aryabhata e Bhaskara. Viveu no século V, sob a dinastia Gupta, nasceu em 598 d.C. e viveu até 665 d.C no mínimo (OLIVEIRA, 2016).

Figura 1 - Brahmagupta
Fonte:https://www.sapaviva.com/brahmagupta/

Sua principal obra é sobre Matemática e Astronomia, e é intitulada de “Brahma-Sphuta-Sidd’hanta” (O Sistema de Brahma Revisado), de 628 d.C., sobre astronomia, onde dois dentre seus 21 capítulos trabalham matemática. Dentre os assuntos estudados por Brahmagupta, destacam-se equações lineares indeterminadas e do segundo grau, método para formar ternas pitagóricas e aritmética com quantidades negativas, embora seu trabalho mais memorável, objeto central de nosso estudo seja a fórmula para área de quadriláteros cíclicos e de suas diagonais.

Seu teorema tem uma importância enorme no campo da Geometria, sendo usado no cálculo de áreas, inclusive de triângulos. Entretanto, quando mencionamos Brahmagupta e sua fórmula, é importante levarmos em consideração a sua aplicabilidade, que de maneira análoga é destinada a área de quadriláteros inscritíveis ou cíclicos.

A fórmula de Brahmagupta possui relações aparentes com outros teóricos como por exemplo, Heron de Alexandria Figura 2. Sobre esse teórico é importante acrescentar que, Heron foi um matemático e “construtor” grego, que viveu no século III a.C, contribuiu de forma sistemática para áreas como Geometria e engenharia, seu trabalho mais notório recebeu seu próprio nome, sendo esse o trabalho que o popularizou.

Figura 2 - Heron de Alexandria
Fonte: BRASIL (2020)

Ainda hoje se escuta, ou já se ouviu alguma menção ao famoso “radical de Herão”, utilizado para calcular a área de um triângulo em função das medidas dos seus três lados. Essa fórmula é bastante aplicável em casos que não sabemos a altura do triângulo, mas temos a medida dos lados. Como podemos observar abaixo:

Conhecendo as medidas a, b, c dos lados de um triângulo qualquer, podemos calcular sua área S de forma bastante didática.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Onde p é o semiperímetro.

Dessa maneira, observamos que a fórmula de Heron é um caso particular para a fórmula de Brahmagupta.

$$S(ABCD) = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

De fato, observe que se fizermos d = 0 temos, substituindo na fórmula de Brahmagupta:

$$S(ABCD) = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-0)}$$

Reescrevendo nossa expressão chegamos na fórmula proposta por Heron para o cálculo da Área de um triângulo.

$$S(ABCD) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Dessa forma, quando um dos lados do quadrilátero for nulo a fórmula de Brahmagupta será interpretada como um caso particular e se transforma na fórmula de Heron para o cálculo da área de um triângulo qualquer. Além da fórmula de Heron, existem também outros estudos que têm relações aparentes com o trabalho de Brahmagupta que lidaremos mais a frente.

2.2- A Fórmula de Brahmagupta;

Dado um quadrilátero cíclico qualquer, em que os lados sejam a, b, c, e d, pode-se calcular sua área S pela fórmula:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

Onde p é seu semiperímetro, dado pela expressão:

$$2p = a + b + c + d$$

E dessa maneira, é importante destacarmos algumas relações implícitas a partir da definição do semiperímetro. Uma vez que isso implica em algumas consequências importantes, que trabalharemos mais a frente na demonstração do teorema de Brahmagupta, estas são:

Consequências:

- $b + c + d - a = 2(p - a)$;
- $a + c + d - b = 2(p - b)$;
- $a + b + d - c = 2(p - c)$;
- $a + b + c - d = 2(p - d)$;

Em seguida, iremos apresentar uma das demonstrações da fórmula de Brahmagupta, aquela que acreditamos ser a mais pertinente, mediante a proposta desse estudo que parte desde a concepção da compreensão, importância, e aplicação da fórmula de forma significativa,

Como fundamentação para esta demonstração, tomamos como referência os estudos de autores como Oliveira (2015), Oliveira (2016), e Rocha (2016)

Discutiremos também nesse percurso de forma brevemente a história desse matemático, e veremos que quando um dos lados do quadrilátero for nulo, a fórmula de Brahmagupta será interpretada como um caso particular e transformada na fórmula de Heron para o cálculo da área de um triângulo qualquer.

2.2.1- Aplicabilidade da fórmula de Brahmagupta

Ao estudarmos a fórmula de Brahmagupta, nota-se uma imposição quanto a sua aplicabilidade, o que a torna aplicável a casos particulares em que se tenha quadriláteros inscritíveis/cíclicos. Dessa forma, é consideravelmente conveniente que levantemos uma questão pertinente, sobre o uso da fórmula de Brahmagupta, para determinadas situações recorrentes, esse questionamento inicial refere-se a classificação dos Quadriláteros em inscritíveis/cíclicos, se atendo ao fato de que um quadrilátero pode ser cíclico ou não cíclico.

Partindo dessa perspectiva, para classificarmos um quadrilátero em cíclico ou não cíclico, é importante levarmos em consideração duas condições como enfatiza Santos (2015), ao enunciar de maneira objetiva, quando acrescenta que: um quadrilátero convexo ABCD, de lados AB, BC, CD e DA, é inscritível se, e somente se, uma qualquer das condições a seguir for satisfeita:

$i)\ D\widehat{A}B + B\widehat{C}D = 180^{o}.$

$ii)\ B\widehat{A}C = B\widehat{D}C.$

Para tanto, observemos a figura 3 abaixo, a partir dessas relações podemos observar o seguinte:

$$\text{ABCD inscritível} \Rightarrow D\widehat{A}B = B\widehat{C}D = 180^{o} \text{ e } B\widehat{A}C = B\widehat{D}C$$

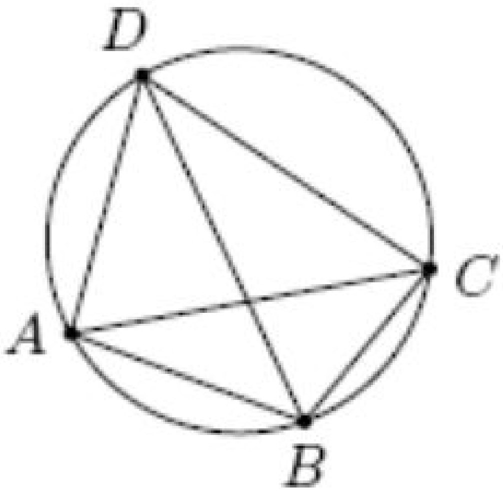


Figura 3 - Quadrilátero Inscritível
Fonte: Adaptado de Santos(2015)

Para realizar essa verificação, inicialmente suponhamos que ABCD seja inscritível figura 3. Então, pelo teorema do ângulo inscrito, temos B$\widehat{A}C = B\widehat{D}C$ e

$$D\widehat{A}B + B\widehat{C}D = \tfrac{1}{2}B\widehat{C}D + \tfrac{1}{2}B\widehat{A}D = 180^{\circ}.$$

Respectivamente figura 4, suponhamos primeiro que $B\widehat{A}C = B\widehat{D}C$.

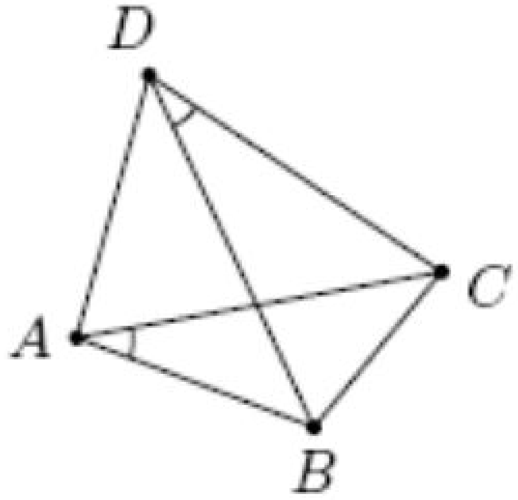


Figura 4 - $B\widehat{A}C = B\widehat{D}C \Rightarrow ABCD\ inscritível$ 1
Fonte: Adaptado de Santos (2015)

Como ABCD é convexo, ou seja, qualquer segmento com sua extremidade está contida dentro do quadrilátero. E os vértices de ABCD estão nomeados consecutivamente, observamos que A e D estão situados de um mesmo lado da reta $\overline{BC}$. Sendo que θ possui um valor comum dos ângulos $B\widehat{A}C = B\widehat{D}C$. Dessa maneira, temos que A e D estão ambos sobre o arco capaz de θ sobre BC. Logo, o círculo desse arco pode ser circunscrito a ABCD.

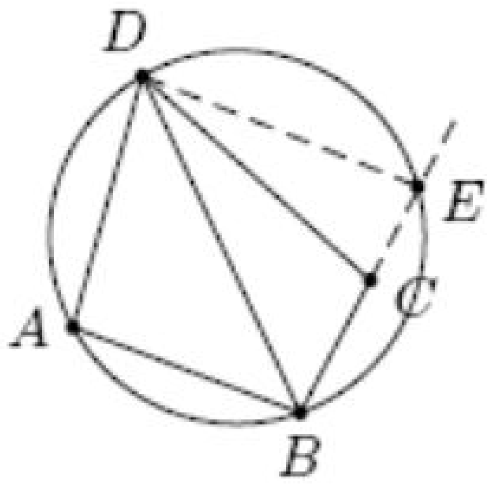


Figura 5 - $B\widehat{A}C = B\widehat{D}C \Rightarrow ABCD$ *inscritível* 2
Fonte: Adaptado de Santos (2015)

De tal modo, suponhamos agora, que $D\widehat{A}B = B\widehat{C}D = 180^o$. figura 5, e considere o círculo α, circunscrito a BAD. Se C estiver no interior do mesmo, seja $\overline{BC} \cap \alpha = \{E\}$. Pelo item (i), temos:

$$D\widehat{A}B + B\widehat{E}D = 180^o = D\widehat{A}B = B\widehat{C}D$$

Dessa forma, $B\widehat{E}D = B\widehat{C}D$, uma contradição ao teorema do ângulo externo. Se C for exterior ao círculo chegamos a uma contradição análoga.

2.2.2- Demonstrando a fórmula de Brahmagupta;

Existem algumas demonstrações da fórmula de Brahmagupta, entre elas podemos citar a demonstração que tem como requisito básico, o cálculo da área de um triângulo em função das medidas dos seus lados e do raio **R** da circunferência circunscrita, etc. Entretanto, neste estudo tomamos como base a demonstração que tem como base a trigonometria. Por ser um assunto recorrente no Ensino Médio, a trigonometria torna esta demonstração mais clara e intuitiva.

Sendo essa, uma demonstração mais adequada para o professor trabalhar em sala de aula, uma vez que ela é mais simples e por trazer consigo requisitos desenvolvidos de maneira recorrente no Ensino Médio.

Seja ABCD um quadrilátero inscritível de lados a, b, c, d,então a fórmula que fornece a sua área S é dada por:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

onde:

$$2p = a + b + c + d$$

Seja ABCD um quadrilátero inscritível tal que: AB = a, BC = b, CD = c e DA = d.

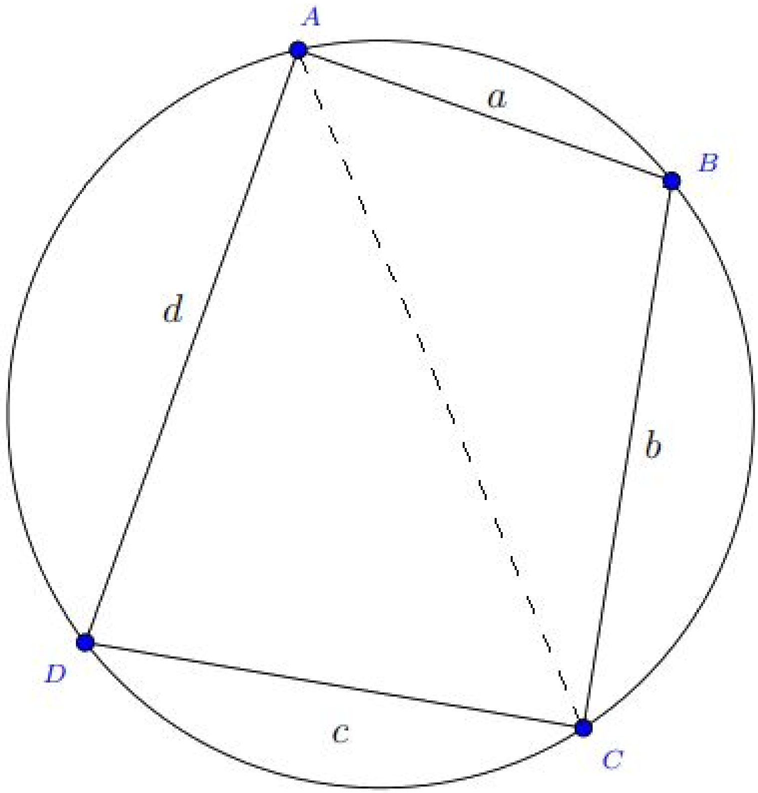


Figura 6 - Quadrilátero inscrito dividido em dois triângulos
Fonte: Adaptado de Oliveira 2016

Note que os triângulos ABC e ACD particionam o quadrilátero ABCD. Daí $SABCD = SABC + SACD$. Portanto, aplicando a fórmula do seno para a área dos triângulos ABC e ACD e sabendo que $sen(180^{\circ} - \alpha) = sen\,\alpha$, obtemos:

$$SABCD = SABC + SACD$$

$$SABCD = \frac{ab\,sen\alpha}{2} + \frac{cd\,sen(180^{\circ}-\alpha)}{2}$$

$$SABCD = \frac{ab+cd}{2}.\,\text{sen}\,\alpha$$

Pondo $\alpha = \angle ABC$, temos $180^{\circ} - \alpha = \angle ACD$. Aplicando a Lei dos cossenos ao triângulo ABC, obtemos:

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,cos\alpha$$

Por outro lado, usando o fato de que cos(180º − α) = − cos α e aplicando a lei dos cossenos ao triângulo ACD, obtemos:

$$AC^2 = c^2 + d^2 - 2cd\,cos(180^{\circ} - \alpha) \Leftrightarrow AC^2 = c^2 + d + 2cd\,cos\,\alpha$$

Assim:

$$a^2 + b^2 - 2ab\,cos\,\alpha = c^2 + d^2 + 2cd\,cos\,\alpha \Leftrightarrow cos\,\alpha = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$$

Pela relação fundamental da trigonometria, temos $sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1.$, Assim:

$$sen\,\alpha = \sqrt{1 - [\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}]^2}$$

$$= \frac{\sqrt{[(a+b)^2-(c-d)^2].[(c+d)^2-(a-b)^2]}}{2(ab+cd)}$$

$$= \frac{\sqrt{(2p-2d)\,.\,(2p-2c)\,.\,(2p-2b)\,.\,(2p-2a)}}{2(ab+cd)}$$

$$= \frac{2}{ab+cd}\,.\,\sqrt{(p-a)\,.\,(p-b)\,.\,(p-c)\,.\,(p-d)}\,.$$

Recuperando a expressão anterior, e substituindo o valor encontrado para sen α, chegamos na fórmula de Brahmagupta:

$$SABCD = \frac{ab+cd}{2}\,.\,\text{sen}\,\alpha$$

$$= \frac{ab+cd}{2}\,.\,\frac{2}{ab+cd}\,.\,\sqrt{(p-a)\,.\,(p-b)\,.\,(p-c)\,.\,(p-d)}$$

$$SABCD = \sqrt{(p-a)\,.\,(p-b)\,.\,(p-c)\,.\,(p-d)}\,.$$

2.3- Área de Quadriláteros Convexos Quaisquer;

No estudo das relações geométricas sobretudo com relação da fórmula de Brahmagupta, é nitidamente comum encontrarmos uma generalização para quadriláteros convexos quaisquer, generalização essa citada com ênfase nas pesquisas de Oliveira (2017) e Oliveira (2015), mediante concepções de estudos de Boyer e Merzbach (2012), Eves (2004) e Johnson (2007).

Dentro dessa perspectiva, Oliveira (2016), acrescenta que, devido ao equívoco de Brahmagupta em não mencionar a restrição de que sua fórmula era restrita para quadriláteros cíclicos, sua fórmula aplica-se apenas para este caso específico.

Nesse sentido, é um importante que compreendamos o caso em questão, quando lidamos com esse tipo de situação, de maneira que, um quadrilátero pode ser convexo, ou não. Recapitulando, é conveniente recordarmos que um quadrilátero é convexo quando qualquer segmento com extremidades no quadrilátero está contido nele, como podemos observar na Figura 7.

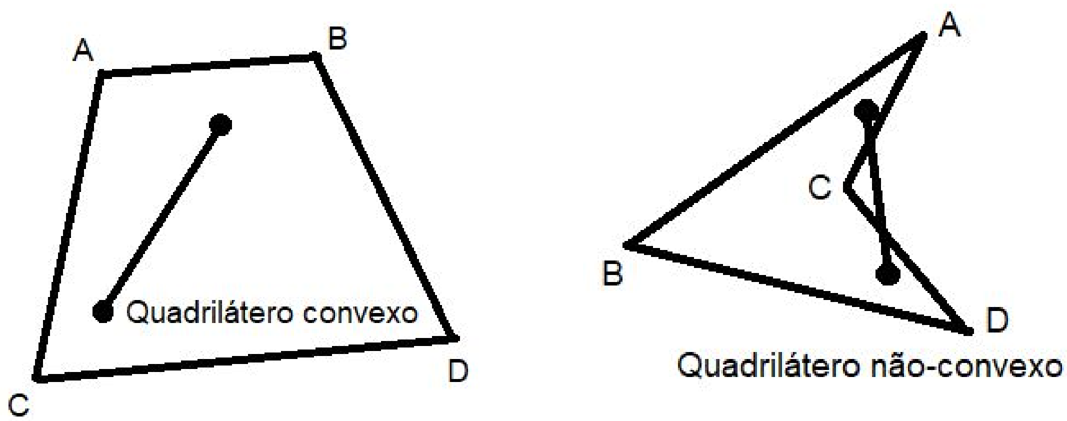


Figura 7 - Quadriláteros convexo e não convexo
Fonte: Da pesquisa

A fórmula para área de quadriláteros convexos quaisquer, teve como centralidade a generalização do trabalho de Brahmagupta, ocasionando assim em um caso geral para as relações geométricas do cálculo da área de polígonos convexos. Dessa forma, compreende-se as relações existentes entre essa aplicação e o trabalho Brahmagupta e suas contribuições para o campo da geometria.

De modo, em um quadrilátero de lados a, b, c e d e com dois ângulos internos opostos entre si de medidas α e β, sua área S pode ser calculada por:

$$SABCD = \sqrt{(p-a)\,.\,(p-b)\,.\,(p-c)\,.\,(p-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

Como Oliveira (2017) e Oliveira (2015), relatam é incomum encontrarmos essa demonstração, sendo essa pertinente ao estudo geométrico e a compreensão de sua aplicação, nesse sentido é importante destacar que, essa generalização é fruto de estudos feitos pelo matemático alemão Carl Anton Bretschneider, figura 8, sendo essa usada para qualquer quadrilátero, seja cíclico ou não.

Bretschneider foi um matemático de Gotha, Alemanha, que contribuiu para o campo da geometria, ele foi um dos primeiros matemáticos a usar o símbolo γ para a constante de Euler quando publicou seu artigo de 1837. Seu trabalho mais conhecido é a generalização da fórmula de Brahmagupta, que recebe seu próprio nome.

Figura 8 - Carl Anton Bretschneider
Fonte: wikisource

A demonstração da fórmula de Bretschneider tem como fundamentação alguns conceitos matemáticos também bastante conhecidos, assim como a demonstração de Brahmagupta. Entretanto, é um pouco mais extensa, levando em consideração sua generalização. Para tanto, iremos fazer a demonstração de Bretschneider a seguir.

Seja ABCD um quadrilátero convexo tal que AB = a, BC = b, CD = c, AD = d, ∠ABC = α, ∠CDA = β e sua diagonal AC = x, conforme a figura.

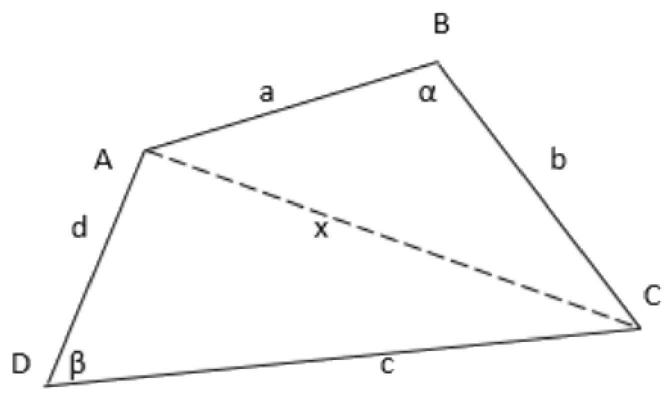


Figura 9 -Quadrilátero qualquer e sua diagonal AC
Fonte: Adaptado de Oliveira(2016)

Para o cálculo da área, focaremos nos triângulos formados pela diagonal AC:

$$SABCD \;=\; SABC \;+\; SADC$$

$$SABCD \;= \tfrac{1}{2}absen\alpha + \tfrac{1}{2}cdsen\beta$$

Elevando ao quadrado os dois lados dessa igualdade, podemos escrever:

$$4\;(SABCD)^{\,2} = (absen\alpha)^{\,2} + (cdsen\beta)^{\,2} + 2\;abcd\;sen\alpha\;sen\beta$$

Aplicamos a lei dos cossenos nos triângulos citados, obtemos:

$$x^{\,2} = \;a^{\,2} + b^{\,2} - 2ab\;cos\alpha$$

$$x^{\,2} = \;c^{\,2} + d^{\,2} - 2cd\;cos\beta$$

Igualando-as, encontramos:

$$a^{\,2} + b^{\,2} - 2ab\;cos\alpha \;= c^{\,2} + \;d^{\,2} - 2cd\;cos\;\beta$$

isso implica em:

$$a^{\,2} + b^{\,2} - c^{\,2} - d^{\,2} = 2ab\;cos\;\alpha - 2cd\;cos\;\beta$$

Elevamos ao quadrado os dois lados desta igualdade, para que pudéssemos posteriormente comparar com a expressão da área que obtivemos anteriormente:

$$\frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4} = (ab\,cos\alpha)^2 - 2abcd\,cos\alpha\,cos\beta + (cd\,cos\beta)^2$$

Somamos, já fatorando o que é possível, esta última igualdade com a expressão encontrada até então envolvendo a área do quadrilátero ABCD. Ao fatorar, encontramos $(sen\,\alpha)^2 + (cos\,\alpha)^2\ e\ (sen\,\beta)^2 + (cos\beta)^2$, o que pela relação fundamental da trigonometria podemos substituir por 1. Assim, temos:

$$4\,(SABCD)^2 + \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4} = (ab)^2 + (cd)^2 - 2\,abcd(cos\,\alpha\,cos\,\beta - sen\,\alpha\,sen\,\beta)$$

Neste passo utilizamos a fórmula para o cosseno da soma:

$$4\,(SABCD)^2 + \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4} = (ab)^2 + (cd)^2 - 2\,abcd\,cos\,(\alpha + \beta)$$

Para fatorarmos a soma $(ab)^2 + (cd)^2$ adicionamos 2 abcd a fim de completarmos um trinômio quadrado perfeito e simultaneamente subtraímos a mesma expressão. Assim,obtemos então a seguinte expressão:

$$4\,(SABCD)^2 + \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4} = (ab + cd)^2 - 2\,abcd\,[1 + cos(\alpha + \beta)]$$

Da forma do cosseno do arco duplo, temos que: $cos(2\theta) = cos^2\theta - sen^2\theta$, e utilizando a relação fundamental da trigonometria é equivalente a $cos(2\theta) + 1 = 2\,cos^2\theta$.

Dessa forma, seja:

$$2\theta = \alpha + \beta \Leftrightarrow \theta = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

Substituindo na fórmula mencionada, temos $cos(\alpha + \beta) + 1 = 2\,cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

Assim, nossa expressão para a área do quadrilátero é:

$$4\,(SABCD)^2 + \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4} = (ab+cd)^2 - 4\,abcd\,cos^2(\frac{\alpha+\beta}{2})$$

Ou ainda na seguinte forma:

$$16\,(SABCD)^2 + (a^2+b^2-c^2-d^2)^2 = 4\,(ab+cd)^2 - 16\,abcd\,cos^2\,(\frac{\alpha+\beta}{2})$$

Desenvolvemos esta expressão a fim de encontrar a fórmula:

$$16\,(SABCD)^2 = (2ab + 2cd)^2 - a^2 + b^2 - c^2 - d^2\,)^2 - 16\,abcd\,cos^2$$

Que pode ser escrita como:

$$16\,(SABCD)^2 = [(a+b)^2 - (c-d)^2]\,.\,[(c+d)^2 - (a-b)^2] - 16\,abcd\,cos^2\,(\frac{\alpha+\beta}{2})\,.$$

Fatorando mais uma vez, encontramos

$$16\,(SABCD)^2 = (a+b+c-d)\,.\,(a+b-c+d)\,.\,(a+c+d-b)\,.\,(b+c+d-a) - 16\,abcd\,cos^2\,(\frac{\alpha+\beta}{2})\,.$$

Definamos p como sendo o semi perímetro do quadrilátero, onde p= $\frac{a+b+c+d}{2}$

Substituindo na expressão anterior, obtemos:

$$16\,(SABCD)^2 = (2p-2d)\,.\,(2p-2c)\,.\,(2p-2b)\,.\,(2p - 2a) - 16\,abcd\,cos^2\,(\frac{\alpha+\beta}{2})$$

Que pode ser escrita na forma:

$$(SABCD)^2 = (p-a)\,.\,(p-b)\,.\,(p-c)\,.\,(p-d) - abcd\,cos^2\,(\frac{\alpha+\beta}{2})$$

Como o valor da área é positivo, concluímos que:

$$(SABCD) = \sqrt{(p-a) \,.\, (p-b) \,.\, (p-c) \,.\, (p-d) - abcd\, cos^2(\tfrac{\alpha+\beta}{2})}$$

que é a expressão desejada

Enfim, no caso em que $\alpha + \beta = 180^{\circ}$ (quadrilátero inscritível), recuperamos a fórmula de Brahmagupta, pois $cos\ 90^{\circ} = 0$.

2.4- Aplicação da fórmula de Brahmagupta;

1- Mostrar que a área de um quadrilátero inscritível e circunscritível, simultaneamente, é igual à raiz quadrada do produto de seus lados.

Solução:

Seja um quadrilátero com lados de medidas a, b, c, d, nesta ordem. Como o quadrilátero é inscritível, podemos usar a fórmula de Brahmagupta para calcular sua área, ou seja,

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

Em que p é seu semiperímetro.

No entanto, o quadrilátero também é circunscritível, e a condição necessária e suficiente é que a soma da medida de dois lados opostos seja igual à soma dos outros dois lados, ou seja, $a + c = b + d$.

Seu semiperímetro pode ser calculado por:

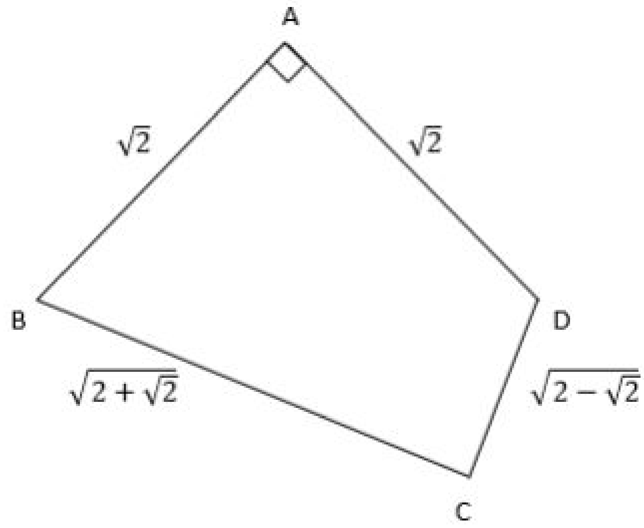
$$p = \frac{a+b+c+d}{2} = a + c = b + d$$

Substituindo na fórmula de Brahmagupta p por a + c ou por b + d, conforme conveniência, temos:

$$S = \sqrt{(a+c-a)\,.\,(b+d-b)\,.\,(a+c-c)b+d-d}$$
$$S = \sqrt{abcd}$$

que é a raiz quadrada do produto de seus lados, como queríamos mostrar.

2- A respeito do quadrilátero ABCD, a seguir, onde se conhecem as medidas dos lados e ∠BAD = 90º, Determine se esse quadrilátero é cíclico/inscritível:



Para que o quadrilátero ABCD seja inscritível, é necessário e suficiente que seus ângulos opostos sejam suplementares. Para isso, basta provarmos que ∠BCD = 90º. Inicialmente, calculemos a diagonal BD.

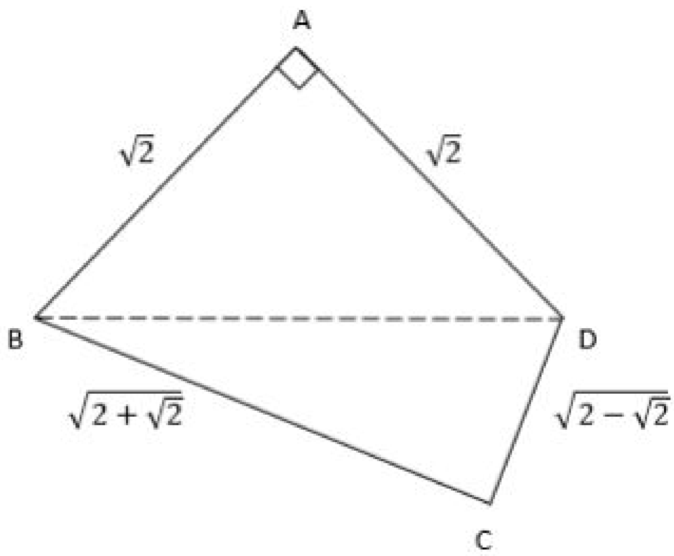
$$BD^2 = AB^2 + AD^2$$

$$BD^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2$$

$$BD^2 = 2 + 2$$

$$BD^2 = 4$$

$$BD = \sqrt{4 = 2}$$



Agora, suponhamos que o triângulo BCD também seja retângulo.

$$BD^2 = BC^2 + CD^2$$

$$BD^2 = (\sqrt{2 + \sqrt{2}})^2 + (\sqrt{2 - \sqrt{2}})^2$$

$$BD^2 = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2}$$

$$BD^2 = 2 + 2$$

$$BD^2 = 4$$

$$BD = \sqrt{4} = 2.$$

Portanto o quadrilátero é inscritível.

3- Considerações Finais;

Diante dos procedimentos e o exposto realizados nesta pesquisa, fruto de estudos sistematizados a partir da compreensão e demonstração do trabalho de Brahmagupta, no que se refere ao cálculo da área de quadriláteros cíclicos/inscritíveis, observa-se de forma perceptível a relevância do trabalho desse matemático, e sua contribuição para o desenvolvimento do estudo e o ensino da Geometria de maneira prática.

Nesse percurso, nos deparamos com relações aparentes entre Brahmagupta e outros teóricos Matemáticos, como por exemplo Heron de Alexandria. Assim, bem como a generalização do trabalho de Brahmagupta, que teve como centralidade o cálculo da área de quadriláteros convexos quaisquer, uma obra do também matemático, o alemão Carl Anton Bretschneider. O que nos possibilitou compreender melhor essa linha de estudo tão significativa e suas contribuições para a geometria.

De tal forma, buscamos elucidar tais questões por meio de demonstrações nitidamente didáticas com uma linguagem bastante inerente a compreensão dos assuntos norteados, especialmente a fórmula de Brahmagupta.

Tais perspectivas, nos provocam a continuar disseminando a Matemática de forma significativa, e enaltecendo todo o conhecimento dessas grandes figuras históricas que deixaram seu nome marcado na história e sua honrosa contribuição.

4- Referências Bibliográficas

BOYER, Carl B., MERZBACH, Uta C., História da Matemática,Blucher, São Paulo, 2012;

BRASIL, Ministério da Educação. Clube de Matemática OBMEP - Disseminando o estudo da Matemática. Heron de Alexandria. 2020. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/b_heron-de-alexandria/. Acesso em: 01 de Dezembro de 2020.

BRAHMAGUPTA, Biography. Disponivel em: https://www.sapaviva.com/brahmagupta/. Acesso em: 19 de Novembro de 2020.

Bretschneider, C. A. "Untersuchung der trigonometrischen Relationen des geradlinigen Viereckes." *Archiv der Math.* **2**, 225-261, 1842

EVES, Howard, Introdução à História da Matemática, Editora Unicamp, Campinas, 2004;

JOHNSON, Roger A., Advanced Euclidean Geometry, Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 2007;

OLIVEIRA, Gabriela Vicentini de. Brahmagupta e quadriláteros cíclicos no ensino médio. Dissertação de Mestrado. Campinas, SP, 2015.

OLIVEIRA, Antonio Uchoa de. Quadriláteros Cíclicos e a Fórmula de Brahmagupta. Dissertação de Mestrado. Teresina, PI, 2016.

OLIVEIRA, Antonio Uchoa de. Quadriláteros Cíclicos e a Fórmula de Brahmagupta. 2017.

RAMOS, João Pedro Gonçalves. Brahmagupta, Heron e Algumas Aplicações Interessantes. 2012. Disponivel em: http://amatematicapura.blogspot.com/2012/07/brahmagupta-heron-e-algumas-aplicacoes.html Acesso: em 10 de Novembro de 2020.

Ribeiro Jr., W.A. Heron de Alexandria. Portal Graecia Antiqua, São Carlos. URL: greciantiga.org/arquivo.asp?num=0871. Consulta: 01/12/2020.

SANTOS, Walcy. Quadriláteros inscritíveis. 2015. Disponível em: http://www.im.ufrj.br/walcy/MA13/Quadril%e1teros%20Inscrit%edveis.pdf. Acesso em: 13 de Novembro de 2020.

The Story of Mathematics, Indian Mathematics - Brahmagupta. Disponível em: .http://www.storyofmathematics.com/indian_brahmagupta.html. Acesso em: 19 de Outubro de 2020.