UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA A DISTÂNCIA

O NÚMERO DE EULER: UMA BREVE ABORDAGEM HISTÓRICA, CONSTRUÇÕES E APLICAÇÕES

IANNE RAQUEL DA SILVA ARAÚJO
Orientador: Prof. Dr. Nacib Gurgel Albuquerque

JOÃO PESSOA - PB
2020

IANNE RAQUEL DA SILVA ARAÚJO

O NÚMERO DE EULER: UMA BREVE ABORDAGEM HISTÓRICA, CONSTRUÇÕES E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância da Universidade Federal da Paraíba (UFPB) como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Nacib Gurgel Albuquerque

JOÃO PESSOA - PB

2020

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

A663n Araujo, Ianne Raquel da Silva.
O número de Euler: uma breve abordagem histórica, construções e aplicações / Ianne Raquel da Silva Araujo. - João Pessoa, 2020.
50 f. : il.

Orientação: Nacib Gurgel Albuquerque.
Monografia (Graduação) - UFPB/CCEN.

1. Número de Euler. 2. História da matemática - Número de Euler. 3. Construções do número de Euler. 4. Número de Euler e suas aplicações. 5. Teoria dos números. I. Albuquerque, Nacib Gurgel. II. Título.

UFPB/CCEN CDU 511

Elaborado por JOSELIA MARIA OLIVEIRA DA SILVA - CRB-15/113

O Número de Euler: uma breve abordagem histórica, construções e aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Nacib Gurgel Albuquerque

Aprovado em: 30/11/2020

COMISSÃO EXAMINADORA

NGAlbuquerque

Prof. Dr Nacib Gurgel Albuquerque

Joedson Silva dos Santos

Prof. Dr. Joedson Silva dos Santos

Lindinês Coleta da Silva

Profa. Ma. Lindinês Coleta da Silva

Dedicatória...

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, por sua misericórdia e bondade constante em minha vida que me permitiram alcançar meta.
Ao meu amado esposo e companheiro de todas as horas, Fábio Júnior, por seu amor, paciência e apoio.
Aos meus filhos Theo Arthur e Eloah Sophie, as luzes da minha vida.
E também à toda minha família.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus pela dádiva da vida, pelas oportunidades, coragem e força a mim concedidas para a superação dos obstáculos desta caminhada.

Ao meu esposo Fábio Jrúnior, pelo amor, apoio, atenção e pelas suas valiosas sugestões nos momentos decisivos e importantes de minha vida, bem como o constante estímulo, dedicação e atenção, necessários para a realização deste trabalho.

Ao meu amado filho Theo Arthur, que mesmo tão pequeno contribuiu com sua pureza, amor e sua alegria constante, trazendo forças para os momentos difíceis.

A minha mãe Iracema, minhas irmãs Samara e Rafaela e minha avó Francisca, pelo carinho, amor, atenção e incentivo constante.

Aos meus sogros Irene e Sebastião, a minha cunhada Juliana e esposo Rogério, por todo apoio e incentivo.

Ao meu orientador Prof. Dr. Nacib Gurgel Albuquerque, pelo seu apoio, orientação e dedicação na construção desta monografia. Agradeço seu empenho.

A todos os professores, pois cada uma foi peça fundamental, contribuindo para meu crescimento cientifico e intelectual.

A todos meus meus familiares, amigos e amigas, especialmente Walkyria, Alani e Rivânia que sempre me incentivaram durante a realização deste projeto.

Enfim, a todos os que me ajudaram a percorrer a trajetória de construção deste trabalho.

"A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo". (Pitágoras)

RESUMO

Considerada uma das constantes mais importantes da Matemática, o número de Euler, denotado por número e, é um número irracional e transcendente. É um número bastante versátil e possui vasta aplicabilidade em modelos matemáticos, principalmente, nos relacionados a representação de fenômenos naturais e evolutivos, como o estudo de características de crescimento ou decrescimento de uma população e de doenças. Sua aplicabilidade não se limita apenas a Matemática mas, também, a diversas outras áreas do conhecimento como a Economia, Engenharia, Biologia entre outras. Deste modo, o presente trabalho parte de um estudo bibliográfico, com o objetivo de apresentar os fatos históricos que envolvem o surgimento do número de Euler, demonstrar sua construção a partir de sequências e séries de números reais, bem como apresentar exemplos de aplicações em modelos matemáticos relacionados ao estudo de processos epidêmicos. Os resultados mostram a importância desta constante matemática na modelagem de processos epidêmicos. No contexto atual da pandemia da Covid-19, sua utilização ajudou na compreensão do comportamento inicial da doença, na formulação de previsões sobre sua evolução e disseminação. Portanto, destaca-se que o conhecimento sobre o número e nos diversos níveis de educação poderá contribuir significativamente com o ensino e aprendizagem da Matemática.

Palavras-chave: Número de Euler. História. Construções. Aplicações.

ABSTRACT

One of the most important mathematical constants, Euler's number, denoted by the letter e, is a transcendental and irrational number. It is a very versatile number and has wide applicability in mathematical models, especially those related to the representation of natural and evolutionary phenomena, such as the study of characteristics of population growth or decrease and of diseases. Considering this, the present work is based on a bibliographic study, with the objective of presenting the historical facts that involve the emergence of the Euler's number, demonstrating it's construction from sequences and series of real numbers, as well as presenting examples of applications in models mathematicians related to the study of epidemic processes. The results show the importance of this mathematical constant in the modeling of epidemic processes. In the current context of the COVID-19 pandemic, it's use has helped in understanding the initial behavior of the disease, in formulating predictions about it's evolution and dissemination. Therefore, it is emphasized that knowledge about the e number at different levels of education can contribute significantly to the teaching and learning of Mathematics.

Keywords: Euler's number. History. Constructions. Applications.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 MEMORIAL ACADÊMICO

Sou Ianne Raquel da Silva Araújo, nasci em 15 de janeiro de 1988, na cidade Nova Olinda - PB. Sou filha de Iracema Francisca da Silva, comerciante e costureira, ensino médio completo, e de Antônio Barbosa de Araújo, trabalhador da construção civil, ensino fundamental. Neste capítulo, apresento, brevemente, meu histórico de formação escolar, universitária e experiência profissional.

1.1 Formação Escolar

Iniciei minha vida escolar aos 4 anos, em 1992, na Pré-escola Risque e Rabisque, escola particular de educação primária localizada em Nova Olinda - PB. Segundo minha mãe era a única deste nível que existia na cidade. Por ser uma cidade pequena e pouco desenvolvida, localizada no alto sertão da Paraíba, as escolas públicas só ofertavam o ensino básico a partir da 1.ª série do Ensino Fundamental. Frequentei a pré-escola por apenas um ano, pois, por questões de trabalho minha mãe teve que se mudar para o estado de São Paulo.

Devido à mudança para uma cidade grande, apenas em 1995 com 7 anos fui matriculada na 1.ª série do Ensino Fundamental na Escola Estadual Álvares de Azevedo na zona leste da capital de São Paulo. Nesta escola, estudei da 1.ª até a metade da 3.ª série.

Em 1997, quando estava na metade da 3.ª série minha família teve que voltar para nossa cidade natal. No mesmo ano me matricularam na Escola Municipal Genésio Pinto Ramalho, onde estudei o restante da 3.ª e toda 4.ª série. Em 1999, mudei novamente de escola, desta vez para a Escola Estadual João Leite Neto do mesmo município, por ser reconhecida como a melhor da cidade. Nela, cursei 5.ª, 6.ª, 7.ª e metade da 8.ª série, pois, a escola entrou em reforma e a maioria dos estudantes preferiu se matricular na Escola Municipal Genésio Pinto Ramalho para concluir o ensino fundamental e não atrasar os estudos.

Conclui o Ensino Fundamental em 2002, sem nenhuma reprovação. A primeira fase desta modalidade de ensino (1.ª a 4.ª séries) cursei no período vespertino e a segunda fase (5.ª a 8.ª séries) no período noturno, pois, naquela época grande parte dos estudantes estava fora da faixa etária, residiam na Zona Rural, e tinham que trabalhar para ajudar nas despesas da família, era um cenário educacional muito diferente do atual. Trago muitas lembranças boas do meu Ensino Fundamental, pois, foi onde fiz grandes amizades que tenho até hoje tanto com os colegas de classe quanto com professores.

Cursei o Ensino Médio entre os anos de 2003 e 2005, na Escola Estadual João Leite Neto a única que ofertava esta modalidade de ensino na cidade. Por não possuir tanto acesso à informação como atualmente, não recebíamos muito estímulo para ingressar no ensino superior. Contudo, no ano em que conclui o Ensino Médio realizei a primeira prova de vestibular pelo PSS (Processo Seletivo Simplificado) e também realizei o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), porém, não obtive aprovação.

Apesar das dificuldades e limitações que o ensino básico brasileiro oferece, sempre procurei me dedicar aos estudos com o pouco que me era oferecido. Sempre procurava tirar boas notas e nunca fiquei em prova final durante todo o ensino fundamental e ensino médio.

1.2 Formação Universitária

No ano de 2006, participei do processo seletivo das Faculdades Integradas de Patos (FIP) para o curso de Bacharelado em Ciências Econômicas, e fui aprovada, dando início ao curso no segundo semestre daquele ano.

A graduação em Ciências Econômicas possibilitou grandes oportunidades para minha vida pessoal e profissional. Adquiri um vasto leque de conhecimentos que me fizeram ver a importância dos fatores econômicos e sociais para o desenvolvimento da sociedade. Durante o período da graduação, a maior dificuldade foi em relação ao deslocamento para estudar. Como morava em Nova Olinda-PB e estudava em Patos-PB, viajava diariamente cerca de 240 km, gastando em torno de quatro a cinco horas (ida e volta). Sendo bastante cansativo, pois, das 8 às 14h trabalhava, e as 15h30min saímos em um transporte fornecido pela prefeitura para estar às 18h na faculdade, fato que acabou comprometendo o rendimento e participação em pesquisas e eventos acadêmicos.

Após concluir a graduação no segundo semestre de 2011, percebi que mesmo a área da economia sendo muito importante para minha carreira profissional, surgiu em mim um novo interesse pela área da educação. Assim, ainda no ano de 2011, realizei o ENEM e consegui ser aprovada para o curso de Licenciatura em Ciências da Computação da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB). Porém, cursei apenas dois semestres e tive que trancar a matrícula, pois, acabei sendo aprovada no concurso de estado da Paraíba para o cargo de Técnica Administrativa que ficava na cidade de Itaporanga-PB, ficando muito difícil conciliar os estudos presenciais que ocorriam na cidade de Patos-PB com o trabalho.

No ano de 2013, me matriculei na Especialização em Fundamentos da Educação, ofertada pelo Governo do Estado da Paraíba para os servidores efetivos. O que acabou despertando ainda mais meu interesse pela educação, visto que, agora estava trabalhando em uma escola estadual e tendo maior contato com a realidade da educação pública.

Em 2017 decidi tentar ingressar no atual curso de Licenciatura em Matemática da UFPB por meio das notas do ENEM, e fui aprovada. A escolha se deu por ser uma área afim para a formação que eu já possuo, por ser um curso na modalidade EaD e, principalmente, por ser uma licenciatura. Além de tudo, foi para mim a realização de um grande sonho de cursar o Ensino Superior em uma Universidade Pública.

A experiência com a modalidade de ensino à distância não foi fácil. Tendo já a experiência do ensino presencial, o fato de não ter a presença constante dos professores tornou a adaptação um pouco complicada. Mesmo assim, me dediquei o quanto foi possível durante todo o curso para ter um bom aproveitamento e uma boa aprendizagem.

Portanto, apesar de, no ano de 2019, ter tido uma complicação de saúde durante o período da gravidez, consegui cumprir todas as atividades propostas. E neste ano de 2020, estou grávida novamente, sendo mais vez de alto risco, mas estou me esforçando o máximo para que a finalização desta graduação ocorra com sucesso para que futuramente possa colher os frutos do esforço realizado.

1.3 Experiência profissional

Meu primeiro contato com trabalho foi junto com minha mãe em sua loja de roupas, onde ela vendia e costurava. Assim, eu a ajudava no atendimento e algumas tarefas de organização e de costura.

Seguindo o exemplo de empreendedorismo familiar, no ano de 2006 eu abri uma pequena Lan House na minha cidade, na qual oferecia serviços de acesso à Internet, pesquisas, xerox e outros. Os lucros obtidos no negócio serviam para pagar minha mensalidade no curso de Economia que havia iniciado neste mesmo ano.

Em 2008, consegui meu primeiro trabalho formal. Trabalhei durante dois anos na Junta de Serviço Militar da minha cidade, realizando serviços voltados a parte administrativa e de digitação. Em 2010, passei no concurso do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) para agente censitário supervisor, onde trabalhei durante 9 meses. Em 2011, fui chamada para trabalhar na Secretaria Municipal de Saúde de Nova Olinda, onde atuei como Coordenadora do Programa Saúde na Escola (PSE).

No ano de 2013, passei no concurso do Estado da Paraíba para o cargo de Técnica Administrativa, no qual ainda permaneço. A partir deste trabalho, meu contato com a educação estimulou mais ainda a vontade de atuar na docência. Entre 2014 e 2017 fui tutora de um curso de Informática básica na iSmartech, uma empresa particular que montamos.

O primeiro contato com uma turma de estudantes de escola pública, ocorreu por meio da realização da disciplina de Estágio Supervisionado. Tal experiência me proporcionou bastante crescimento, por poder ver e ter contato com a realidade do dia a dia de um professor em sala.

2 INTRODUÇÃO

A matemática é considerada de fundamental importância para o desenvolvimento das demais ciências. Ela está presente em diversas situações do nosso cotidiano e a partir do seu estudo são desenvolvidas soluções para vários problemas com aplicações científicas e tecnológicas.

Os números e a matemática surgiram ao mesmo tempo, tanto em relação às atividades práticas do homem e da sociedade, quanto em relação a sua formalização. Logo, a noção do conceito de número está ligada diretamente à história da humanidade, embora o desenvolvimento teórico do conceito de número tenha sido lento e complexo, pois, perpassou por diversas civilizações durante alguns milênios.

A fundamentação matemática do conceito de número só ocorreu no final do século XIX, a partir de estudos de Richard Dedekind (1831-1916), Georg Cantor (1845-1918) e Giuseppe Peano (1858-1932). Os primeiros estudos que abordam os números irracionais ocorreram na Escola Pitagórica, quando surgiu o problema da incomensurabilidade. No entanto, os números irracionais só adquiriram o *status* de número no século XVII (FERREIRA, 2013).

Entre os números irracionais de maior relevância está o número e, também conhecido como número de Euler, constante de Euler, número de Napier, entre outros. Neste trabalho será utilizada a notação "número e" para representá-lo.

O número e é irracional e transcendente. Por ser irracional, ele não pode ser escrito como a razão entre dois números inteiros e não possui uma expansão decimal periódica. Por ser transcendente, não pode ser a raiz de nenhuma equação algébrica (MARTINS, 2014).

Igualando-se em importância matemática com o número π, o número e é definido como sendo o limite da sequência de termo geral dado por $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ quando n tende ao infinito. Seu valor é aproximadamente 2,71828182845...

O número e é considerado um dos números irracionais mais importantes da Matemática, correspondendo a base dos logaritmos naturais. Segundo Maor (2008), o primeiro reconhecimento explícito do papel do número e na Matemática foi feito em um apêndice da segunda edição da tradução de Edward Wright (Londres, 1618) para a Descriptio de Jonh Napier (1550-1617), obra que tratava de estudos sobre os logaritmos. Diversos matemáticos contribuíram para seu reconhecimento na matemática, porém, somente no século XVIII Leonhard Euler (1707 - 1783) utilizou o símbolo e para representá-lo.

Embora apareça com maior frequência no estudo do Cálculo Diferencial e Integral e na Teoria das Funções, o número e, está presente em vários outros conteúdos da Matemática, como nas sequências e séries, nas funções exponenciais e logaritmos.

O número e tornou-se de grande relevância devido à sua versatilidade e aplicabilidade em vários modelos matemáticos, principalmente nos relacionados a representação de fenômenos com características de crescimento ou decrescimento, aplicados em diversas áreas como biologia, física, medicina, economia, entre outras.

O contexto atual causado pela pandemia da COVID-19 que afetou a economia e sistemas de saúde do mundo inteiro, está demandando das autoridades governamentais não apenas recursos para o combate às frentes de saúde e economia, mas informações precisas a respeito da evolução da doença e medidas eficazes para controlar o contágio e evitar a infecção de mais pessoas.

Nesse contexto, ressalta-se a contribuição da matemática na realização de pesquisas científicas e desenvolvimento de modelos que prevejam os impactos, a evolução e disseminação da doença e ajudem no seu controle e enfrentamento. Os diversos modelos matemáticos usados para o estudo do processo epidêmico envolvem a aplicação do número e. Como a função exponencial e função logística, as quais possuem em sua fórmula geral o número e, há maior possibilidade de entender e fazer predições através de simulações acerca da doença.

Diante de tais pressupostos, surgem questionamentos sobre quais os fatores históricos, as possíveis definições e aplicações relacionadas ao número e. Para responder tais questionamentos, propõe-se abordar os principais aspectos relacionados ao número e, destacando sua importância e aplicações. Neste sentido, para atingir o objetivo geral deste trabalho foram delineados os seguintes objetivos especificos:

- Realizar uma revisão histórica da origem do número e;
- Apresentar as definições e propriedades de destaque relacionadas ao número e;
- Mostrar a aplicabilidade do número e em alguns problemas atuais.

Com base nas informações acerca do universo estudado, o trabalho está dividido em seis capítulos, nos quais se procurou atingir os principais objetivos que motivaram sua realização. O primeiro capítulo retrata o memorial acadêmico com informações sobre o processo de formação escolar, universitária e experiência como docente. O segundo capítulo é dedicado aos aspectos introdutórios. O terceiro capítulo apresenta o contexto histórico que envolve o surgimento do número e, bem como, quais foram as principais questões que motivaram seu surgimento e os principais matemáticos responsáveis por sua descoberta. O quarto capítulo destina-se ao estudo da definição formal a partir de sequências e séries de números reais. O quinto capítulo mostra a aplicabilidade do número e no desenvolvimento de modelos matemáticos relacionados ao estudo do processo epidêmico. Por fim, o sexto capítulo é destinado às considerações finais, no qual são apresentadas sugestões e trabalhos futuros.

3 CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA SOBRE O NÚMERO DE EULER

Para compreender a importância do número de Euler para a matemática, primeiramente é necessário conhecer sua origem. Portanto, nesta seção serão abordados os principais aspectos do processo histórico que envolvem seu surgimento e quais foram os principais matemáticos responsáveis por sua descoberta.

3.1 O surgimento do número e em questões financeiras

Não se sabe exatamente quando o número e surgiu, segundo Maor (2008a, p. 45) “Não sabemos quem primeiro notou o comportamento peculiar da expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ à medida que n tende ao infinito, por isso, a data exata do nascimento do número que mais tarde seria denotado por e permanece obscura“.

Supõe-se que inicialmente suas origens estejam relacionadas a questões financeiras. Desde épocas imemoriais, as questões financeiras encontram-se no centro das preocupações humanas, não é surpreendente que algum matemático anônimo, ou talvez mercador tenha percebido a relação entre a forma como o dinheiro se acumula e o comportamento de uma certa expressão matemática no infinito (MAOR, 2008a).

A maior parte da literatura matemática antiga lida com questões relativas aos juros, já que o conceito de juros, ou valor pago sobre um empréstimo, é central em qualquer consideração sobre o dinheiro e recua até o início da História da escrita.

Deste modo, o número e já era conhecido há alguns séculos, de modo implícito, pelos antigos povos através de questões práticas. Um registro acerca da presença desta situação foi feito em um tablete de argila da Mesopotâmia, hoje no Louvre, datado de 1700 a.C., no qual se encontra um problema que questiona quanto tempo levaria para uma quantia em dinheiro dobrar, investida a 20% de juros compostos ao ano.

Para responder tal questão os babilônios utilizaram algum tipo de tabela de logaritmos. De acordo com Maor (2008a) entre os tabletes de barro encontrados, um deles listava as primeiras dez potências expressas no sistema sexagesimal, já que eles não utilizavam nosso sistema decimal que foi adotado somente no início da Idade Média. Embora tal tabela liste as potências de um número em vez dos expoentes, parece que elas foram criadas para resolver questões específicas de juros compostos e não para o uso geral.

Para entender como funciona o cálculo de juros compostos, considere a fórmula de capitalização:

$$C_t = C_0(1+r)^t \tag{3.1}$$

em que C_t é valor da soma em dinheiro, C_0 é o capital inicial, r a taxa anual de juros e t é o tempo de investimento dado em anos.

Suponha um investimento de $C_0 =$ R\$ 100 (o principal) em uma conta que paga

5% de juros compostos anualmente. Ao final de um ano o saldo será 100 × 1,05 = R$ 105. O Banco então considerará esta nova soma como um novo principal que será reinvestido à mesma taxa. No final do segundo ano, o saldo será 105 × 1,05 = R$ 110,25 e no final do terceiro ano 110,25 × 1,05 = R$ 115,76.

Percebe-se que nesse processo de composição, o saldo cresce numa progressão geométrica com razão de 1,05. Mas, considerando uma conta que pague juros simples, sua taxa anual é aplicada sobre a soma original, e portanto, será a mesma a cada ano. Então, se um investimento de R$ 100 fosse aplicado a juros simples, de 5%, o saldo aumentaria a cada ano R$ 5, resultando numa progressão aritmética de razão 5 (PRECIOSO; PEDROSO, 2013).

No entanto, é possível trabalhar com taxas de juros aplicadas em diferentes períodos de conversão, não apenas anual.. Dessa maneira, considera-se n o número de composições feitas ao ano. Logo, a cada período de conversão o banco usa a taxa de juros anual dividida por n, que é $\frac{r}{n}$. E como em t anos existem nt períodos de conversão, um principal C_0, após t anos renderá

$$C_t = C_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}. \tag{3.2}$$

A Tabela 1 a seguir, mostra os resultados de um capital $C_0 = R\$ \ 100$ investido a uma taxa $r = 5\%$ em diversos períodos.

Tabela 1 – Capital de R$ 100 investido a uma taxa anual de r=5% em diferentes períodos.

Período de conversão	***n***	***r/n***	C_t
Anual	1	0,005	R$ 105,00
Semestral	2	0,025	R$ 105,06
Trimestral	4	0,0125	R$ 105,09
Mensal	12	0,004166	R$ 105,12
Semanal	52	0,0009615	R$ 105,12
Diário	365	0,0001370	R$ 105,13

Fonte: Maor (2008, p. 44)

Para explorar mais ainda essa questão, considera-se um caso especial da equação (3.2) no qual $r = 1$, $C_0 = R\$ \ 1$ e $t = 1$ ano. Assim a equação se torna:

$$C_1 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}. \tag{3.3}$$

Agora, o objetivo é investigar qual o comportamento da equação (3.3) para valores crescentes de n. Os resultados são dados na Tabela 2.

Tabela 2 – Comportamento da equação $C_1 = (1+1/n)^n$ para valores crescentes de n.

n	(1+1/n)^n
1	2
10	2,59374
100	2,70481
1.000	2,71692
10.000	2,71815
100.000	2,71827
1.000.000	2,71828
10.000.000	2,71828

Fonte: Maor (2008, p. 45)

Verifica-se que a sequência $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ converge de modo "lento" para o valor aproximado 2,71828. Reforçando a ideia de (MAOR, 2008a) quando afirma

> [...] se um capital P é composto n vezes por ano, durante t anos, a uma taxa anual de juros r e se permitirmos que n aumente sem limites, a soma de dinheiro S, obtida a partir da fórmula $S = P(1+r/n)^{nt}$, parece aproximar-se de um certo limite. O limite, para $P = 1$, $r = 1$ e t $= 1$, é aproximadamente 2,718 (MAOR, 2008a, p. 13).

Surgiu então o questionamento sobre se de fato ocorre a convergência para um número e. Tal questionamento foi provado por uma cuidadosa análise matemática, através de expansão binomial, frações contínuas e séries de potências.

Diante de tais pressupostos, é possível que o reconhecimento do número e tenha se dado pela primeira vez num contexto histórico marcado pela expansão do comércio internacional e das transações financeiras, no qual se deu bastante atenção a uma fórmula para o cálculo de juros compostos (MAOR, 2008a). O referido autor também afirma, que a descoberta do número e deve ter assustado os matemáticos do início do século XVII, pois, eles ainda não conheciam o conceito de limite.

Sua origem precede a invenção do cálculo, no entanto, Maor (2008a) aponta que somente no início do século XVII o número e surge, de forma indireta, em um apêndice da publicação da segunda edição da tradução de Edward Wright do *Descriptio* (1618), estudo desenvolvido por Jonh Napier em (1614) relacionado a descoberta dos logaritmos. Sendo este o primeiro reconhecimento explícito do seu papel na matemática.

Portanto, além das questões já citadas, Maor (2008a) destaca que outras questões como a área sob a hipérbole $y = \frac{1}{x}$ conduziram, independentemente, ao mesmo número, deixando a origem exata do número e cercada de mistério.

3.2 O número e nos estudos de Jonh Napier

Nascido em 1550 na Escócia, estudou religião e chegou a publicar um livro, porém, seus interesses não estavam relacionadas apenas a questões religiosas. Segundo Maor (2008a) como dono de terras, tinha interesse na melhoria das colheitas e da produção de gado e também se preocupava com questões militares. Assim, ele desenvolveu e construiu engenhosidades com o objetivo de defender suas predileções.

Jonh Napier (ou Neper), não era um matemático profissional, porém, ele escrevia sobre vários assuntos, mas, só demonstrava interesse por certos aspectos da matemática relacionados a computação e trigonometria (BOYER, 1974a).

Especula-se que Napier deve ter sido estimulado a desenvolver sua grande invenção, "os logaritmos", devido a grande expansão do conhecimento científico em todos as áreas, ocorrida entre o final do século XVI e início do século XVII. A exemplo da aceitação do sistema heliocêntrico de Copérnico, as fundações da mecânica estabelecida por Galileu Galilei (1564-1642), a formulação das três leis do movimento planetário por Johannes Kepler(1571-1630), entre outras invenções que necessitavam da simplificação dos métodos de resoluções de cálculos de grandes dados numéricos (MAOR, 2008a).

Não se tem registro de como Napier chegou a sua ideia sobre os logaritmos. Para Maor (2008b), uma primeira ideia está relacionada a sua versatilidade em trigonometria sobre as *regras prostaferéticas*, que ofereciam um sistema primitivo de redução de uma operação para outra, sendo então mais fácil somar e subtrair do que multiplicar e dividir. A segunda ideia diz respeito aos termos de uma progressão geométrica, uma sequência de potências sucessivas de um dado número, como na obra *Arithmatica integra* (1544) de Michael Stifel (1487–1567), publicada cinquenta anos antes e como nas obras de Arquimedes (287 a.C.-212 a.C.).

Napier observou na obra de Stfiel a seguinte ideia: supondo uma progressão geométrica cujo primeiro termo é o elemento 1 e sua razão é q, podem ser consideradas as seguintes regras: $q^m \cdot q^n = q^{m+n}$ e $q^m \div q^n = q^{m-n}$, com m e n pertencentes ao conjunto dos números naturais. A partir de tais regras, é possível estender uma progressão geométrica infinita em ambas as direções: $\cdots$, q^{-2}, q^{-1}, $q^0 = 1$, q^1, q^2, $\cdots$. Nota-se que cada termo é uma potência de razão q e que seus expoentes formam uma progressão aritmética de razão 1.

O trabalho de Stifel usava uma tabela de duas colunas (ou duas linhas), colocando em correspondência os termos de uma progressão geométrica (na verdade potências de um certo número) com os de uma progressão aritmética (PRECIOSO; PEDROSO, 2013).

Segundo Pommer (2017, p. 18) "Napier queria escrever qualquer número como uma potência de algum número fixo, que posteriormente foi denominado de base. Desse modo, multiplicar/dividir dois números de grande ordem seria equivalente a somar/subtrair os expoentes das potências correspondentes".

Demonstrando de maneira simplificada como esta ideia funciona, basta considerar números de pequena ordem para as potências de 2 a partir da Tabela 3. Suponha que se queira multiplicar 8 por 128. Procura-se na tabela os expoentes correspondentes a esses números que são respectivamente 3 e 7. Somando-se esses expoentes, obtêm-se 10, então procuramos na tabela o número que tem expoente 10. Assim, pela propriedade de soma dos expoentes de uma potência qualquer obtém-se o resultado $1.024 = 2^3 \cdot 2^7 = 2^{3+7} = 2^{10}$.

Já para divisão de 1.024 por 128, por exemplo, subtrai-se o valor dos expoentes correspondentes que são 10 e 7, obtendo 3. Este, por sua vez, tem como correspondente na Tabela 3 o número 8. Logo, pela propriedade de subtração dos expoentes de uma potência qualquer, temos $8 = 2^{10} \div 2^7 = 2^{10-7} = 2^3$.

Tabela 3 – Potências sucessivas de 2

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1.024

Fonte: Adaptado de (MAOR, 2008).

No entanto, este método só teria utilidade prática se pudesse ser usado com quaisquer números inteiros ou frações. Para resolver este problema, Napier produziu uma tabela que completava os espaços entre as potências de expoente inteiro, para ampliar o alcance e velocidade dos cálculos.

Como Napier se preocupava em minimizar o uso de frações decimais, pois, eram pouco conhecidas e haviam sido introduzidas há pouco tempo na Europa, então escolheu como base $1 - 10^{-7} = 0{,}9999999$, um número muito próximo de 1 (MAOR, 2008a).

A escolha por uma base próxima de 1, foi feita para conservar próximos os termos em uma progressão geométrica de potências crescentes, permitindo chegar a um equilíbrio e evitar decimais. Então, Napier construiu 3 tabelas para representar os cálculos.

A sua primeira tabela possuía 101 elementos, e como primeiro termo da progressão geométrica ele utilizou o elemento 10^7, como pode-se verificar na Tabela 4.

Tabela 4 – Progressão geométrica de razão 1 - 10^7 e primeiro termo 10^7.

N	***L***
10^7=10.000.000	0
$10^7(1\text{-}10^{-7})$=9.999.999	1
$10^7(1\text{-}10^{-7})^2$=9.999.998	2
$10^7(1\text{-}10^{-7})^3$=9.999.997	3
...	...
$10^7(1\text{-}10^{-7})^{98}$=9.999.902	98
$10^7(1\text{-}10^{-7})^{99}$=9.999.901	99
$10^7(1\text{-}10^{-7})^{100}$=9.999.900	100

Fonte: Adaptado de (VILANI, 2017).

Sua segunda tabela continha 51 elementos, com o primeiro termo sendo mais uma vez 10^7, e a razão sendo o último termo da sua primeira tabela dividido pelo primeiro, ou seja, 1 - 10^{-5} = 0,99999. Pode-se verificar conforme Tabela 5.

Tabela 5 – Progressão geométrica de razão 1 - 10^5 e primeiro termo 10^7.

N	***L***
10^7=10.000.000	0
$10^7(1\text{-}10^{-5})$=9.999.900	1
$10^7(1\text{-}10^{-5})^2$=9.999.800	2
$10^7(1\text{-}10^{-5})^3$=9.999.700	3
...	...
$10^7(1\text{-}10^{-5})^{48}$=9.995.201	48
$10^7(1\text{-}10^{-5})^{49}$=9.995.101	49
$10^7(1\text{-}10^{-5})^{50}$=9.995.001	50

Fonte: Adaptado de (VILANI, 2017).

A terceira tabela possuía 21 elementos, a qual ele utilizou a proporção 9.995.001 $\div$ 10.000.000; sendo o último elemento desta tabela $10^7 \cdot 0{,}9995^{20}$, aproximadamente 9-900.473, conforme Tabela 6.

Tabela 6 – Progressão geométrica de razão 0,9995001 e primeiro termo 10^7 .

N	***L***
10^7=10.000.000	0
10^7(0,9995001)=9.995.001	1
$10^7(0{,}9995001)^2$=9.990.004	2
$10^7(0{,}9995001)^3$=9.985.010	3
...	...
$10^7(0{,}9995001)^{18}$=9.910.399	18
$10^7(0{,}9995001)^{19}$=9.905.445	19
$10^7(0{,}9995001)^{20}$=9.900.473	20

Fonte: Adaptado de (VILANI, 2017).

Compilar tais tabelas exigiu muito tempo e dedicação, levando 20 anos da vida de Napier para ser desenvolvida e publicada em 1614, em sua obra *Mirifici lagarithmorum canois descriptio* (Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos). Posteriormente, em 1619 seu filho Robert publicou *Mirifici lagarithmorum canois constructio* (Construção do maravilhoso cânone dos logaritmos). Seu trabalho, ajudou os cálculos computacionais dos astrônomos, os usuários da ciência daquele momento histórico, em que ainda não existiam as calculadoras.

Napier chamou sua criação a princípio de "número artificial", posteriormente decidiu usar o termo "logaritmo", que significa "número proporcional" e provém da composição de duas palavras gregas, *logos* (razão) e *arithmos* (número) (BOYER, 1974a).

Como Napier não tinha o conceito de base de um sistema de logaritmos, sua definição era diferente da definição moderna. Isto significa que se $N = 10^7(1 - 10^{-7})^L$, então o expoente L é o logaritmo (neperiano) de N. A definição moderna introduzida em (1728) por Leonhard Euler diz que se $N = b^L$, onde b é um número positivo fixo, diferente de 1, então L é o logaritmo (de base b) de N. No sistema de Napier $L = 0$ é correspondente a $N = 10^7$, ou seja, *log Nap* $10^7 = 0$. Já no sistema moderno $L = 0$ corresponde a $N = 1$, isto é, $\log_b 1 = 0$.

Contudo, as regras básicas das operações com logaritmos não eram mantidas para as definições de Napier, por exemplo, o seu logaritmo de um produto não era igual à soma ou diferença dos logaritmos. E, como 1-10^7 é menor que 1, os logaritmos de Napier diminuem com o aumento dos números, enquanto nossos logaritmos comuns (de base 10) aumentam. Porém, essas diferenças não são muito significativas e derivam da insistência de Napier em que a unidade deveria ser igual à 10^7 subunidades. Se sua preocupação não fosse com as frações decimais, sua definição poderia ter sido mais simples e mais próxima da moderna (MAOR, 2008a).

Portanto, compreender a preocupação da escolha de Napier por um número próximo de 1, permite entender a essência do número de Euler. Segundo Boyer (1974a, p. 228):

> Isto é, se $N = 10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^L$, então L é o logaritmo de Naiper ou número N. Assim, seu logaritmo 10^7 é 0, seu logaritmo de $10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right) = 0,9999999$ é 1, e assim por diante. Dividindo seus números e logaritmos por 10^7 teríamos virtualmente um sistema de logaritmos de base $\frac{1}{e}$, pois $\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$ fica próximo de $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$.

Deste modo, Napier chegou muito perto de descobrir o número que, um século depois, seria reconhecido como a base universal dos logaritmos e que desempenharia, na matemática, um papel secundário apenas em relação ao número π. Este número é o e , o limite de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ quando n tende ao infinito.

3.3 O número e na obra de Leonhard Euler

Leonhard Euler (1707 - 1783) nasceu na Basiléia, Suiça. Seu pai era um ministro religioso, e desejava que seu filho seguisse a mesma carreira teológica. Como o pai de Euler era também versado em matemática, conhecimento que adquiriu estudando com Jakob Bernoulli (1654-1705), mudou de ideia ao perceber os talentos matemáticos possuídos por seu filho. Johann irmão de Jakob, ensinou matemática particularmente a Euler e também foi responsável por convencer seu pai a deixá-lo seguir sua vocação pela matemática (MAOR, 2008a).

Além dos conhecimentos sobre matemática, Euler recebeu instrução ampla sobre teologia, medicina, astronomia, física e línguas orientais. Essa amplitude foi muito útil, pois, seu talento o fez conquistar reputação internacional, levando-o ao exterior por longos períodos.

No ano de 1727, Euler foi convidado para ingressar na Academia de Ciências de São Petersburgo por recomendação dos Bernoullis, que já faziam parte da Academia há alguns anos. No entanto, no dia em que chegou à Rússia para assumir seu posto como professor, a imperatriz Catarina I faleceu, fazendo a Rússia mergulhar num período de incertezas e repressão.

Assim, a Academia foi considerada pelo Estado uma despesa desnecessária, tendo seu financiamento reduzido. Então, Euler começou a trabalhar lá como assistente na área de fisiologia e somente em 1733 obteve o título de professor de matemática, sucedendo a Daniel Bernoulli, que retornara à Basiléia. No mesmo ano, ele se casou com Catherine Gsell, e tiveram treze filhos, mas apenas cinco sobreviveram à infância.

Permaneceu na Rússia por quatorze anos, e em 1741 aceitou o convite de Frederico, o Grande, para colaborar com a Academia de Ciências de Berlim e acabou ficando lá por vinte e cinco anos. Em 1766 Euler, aceitou o convite da nova governante Russa, Catarina II, e voltou a São Petersburgo.

Durante os primeiros anos que viveu na Rússia, perdeu a visão do olho direito, suspeita-se que por excesso de trabalho ou, porque observara o sol sem proteger os olhos. Em 1771, quando retornou, ele perdeu a visão do olho esquerdo. Mesmo cego, Euler continuou a trabalhar e produzir ditando seus numerosos resultados para seus filhos e alunos. Em 1783, enquanto brincava com seus netos, teve um derrame cerebral e morreu instantaneamente.

"A produção científica de Euler é extensa e variada, superando a de qualquer outro matemático e distribuindo-se por diversas áreas, tais como, matemática, física, astronomia, engenharia e construção naval" (PRECIOSO; PEDROSO, 2013). Geralmente escrevia em latim, algumas vezes em francês, apesar de sua língua nativa ser o alemão, isto demonstrava sua facilidade para línguas.

> O mais influente entre os numerosos trabalhos de Euler foi sua *Introcutio in analysin infinitorum*, obra em dois volumes publicada em 1748 e considerada o alicerce da moderna análise matemática. Neste trabalho Euler resumiu suas numerosas descobertas sobre séries infinitas, produtos infinitos e frações contínuas. [...] O *Introcutio* pela primeira vez, chamava a atenção para o papel central do número e e da função e^x na análise (MAOR, 2008a, p. 202).

Antes de aparecer na *Introcutio*, a letra e já tinha sido usada para representar o número 2,71828... em um dos primeiros trabalhos de Euler, um manuscrito intitulado "Meditação sobre Experimentos feitos recentemente sobre o disparo do Canhão", escrito em 1727, e publicado em 1862. Em 1731, o número e aparece em uma carta escrita a Goldbach, novamente ligado a uma certa equação diferencial; sendo definido por Euler como "o número cujo logaritmo hiperbólico é = 1". E em 1736, o número e aparece impresso pela primeira vez na *Mechanica* de Euler (1736), publicação na qual ele estabeleceu as fundações da mecânica analítica.

Apesar de o conceito por trás desse número ser conhecido mais de um século antes, desde a invenção dos logaritmos por Napier, como já descrito anteriormente neste trabalho, sua padronização que tornou seu uso universal só foi possível graças a Euler.

Conforme Boyer (1974b), Euler também foi responsável por outras notações muito utilizadas em vários ramos da Matemática, como do π para a razão da circunferência e para o diâmetro de um circulo; $f(x)$ para funções; a, b, c para os lados de um triângulo e A, B, C para os ângulos opostos, r, R, e S para o raio dos círculos inscrito e circunscrito e o semiperímetro do trinângulo; $\sum$ para somatório e i para a unidade imaginária, $\sqrt{-1}$.

Supõe-se que a escolha pela letra e, foi feita por ser a primeira letra da palavra exponencial, ou, porque as letras a, b, c e d já eram bastante usadas em outras partes da matemática. De qualquer forma, a escolha do símbolo e por Euler, como vários de seus símbolos, teve aceitação universal (MAOR, 2008a).

Em seu trabalho *Introductio*, Euler também trata de frações contínuas provando que todo número racional pode ser escrito como fração contínua finita, enquanto um número irracional pode ser representado como fração contínua infinita, onde a corrente de frações nunca termina. Mostrou também como escrever uma série infinita como uma fração contínua infinita e vice-versa.

Dessa forma, Euler partindo da sua definição de função exponencial

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \tag{3.4}$$

a utilizou para desenvolvê-la como uma série infinita de potências.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+... \tag{3.5}$$

E ao usar a equação (3.5) como ponto de partida, ele derivou muitas frações contínuas envolvendo o número e, uma delas é

$$e = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{4+\cfrac{4}{5+...}}}}}$$

A partir desta expansão do número e como fração contínua, Euler pode ter sido o primeiro a inferir que e é irracional. Depois que Joseph Lioville (1809 - 1882) provou a existência de números transcendentes e Charles Hermite (1822 - 1901) provou que e é um número transcendente (PRECIOSO; PEDROSO, 2013).

Outros grandes matemáticos também contribuíram para a construção do número e: Jacob Bernoulli (1654-1705) em seu estudo sobre o problema da capitalização contínua, em 1683, mostrou que o limite de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ quando n tende ao infinito encontra-se entre os números 2 e 3; e Leibniz (1646-1716) foi o responsável pela primeira aparição propriamente dita do número e, em 1690 (FIGUEIRA, 2017).

4 CONSTRUÇÃO DO NÚMERO DE EULER

Neste capítulo será feita a construção do número de Euler a partir de Sequências e Séries de Números Reais. Porém, para demonstrar as definições e teoremas que serão utilizadas neste estudo, é necessário primeiramente abordar alguns conceitos básicos, que são baseados em Lima (2014), Lima (2009), Ávila (2001), Figueira (2017), Simão (2018), Raposo Júnior (2011) e Corrêa (2008).

4.1 Sequências de números reais

Esta seção vai abordar algumas noções básicas sobre sequências, particularmente, definições, teoremas e certos resultados que serão necessários no presente estudo.

Definição 4.1.1 Uma *sequência* ou sucessão de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que para cada número natural n associa um número real $x(n)$ designado por x_n.

O termo x_n será chamado de termo de ordem n ou n-ésimo termo da sequência e a sequência $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ será denotada por $(x_1, x_2, ..., x_n ...)$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ou, simplesmente, (x_n) .

Observação 4.1.1 Não se pode confundir a sequência (x_n) com o conjunto formado por seus termos $\{x_1, x_2, x_3, ...\}$.

Definição 4.1.2 Uma sequência (x_n) é dita *limitada inferiormente*, se existir $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Caso contrário, diz-se que (x_n) é ilimitada inferiormente.

Definição 4.1.3 Uma sequência (x_n) é dita *limitada superiormente*, se existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq b$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Caso contrário, diz-se que (x_n) é ilimitada superiormente.

Definição 4.1.4 Uma sequência (x_n) é dita *limitada* se, e somente se, ela for limitada superior e inferiormente ao mesmo tempo, ou seja, quando existirem números reais a, b tais que $a \leq x_n \leq b$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Quando uma sequência (x_n) não é limitada, diz-se que ela é *ilimitada.*

Definição 4.1.5 Uma sequência (x_n) é dita *monótona* quando satisfaz uma das seguintes condições:

(i) **monótona crescente** se $x_n < x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
(ii) **monótona não-decrescente** se $x_n \leq x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(iii) **monótona decrescente** se $x_n > x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
(iv) **monótona não-crescente** se $x_n \geq x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observação 4.1.2 Observe que toda sequência monótona crescente é também monótona não-decrescente e toda sequência monótona decrescente é também não-crescente, mas a recíproca não é verdadeira. Observa-se também que se uma sequência é ao mesmo tempo, monótona não-decrescente e não-crescente, então ela é constante.

4.1.1 Sequências convergentes

Definição 4.1.6 Uma sequência (x_n) converge para $x \in \mathbb{R}$, quando dado um número real $\varepsilon > 0$ arbitrário, existir $n_o \in \mathbb{N}$, tal que $|x_n - x| < \varepsilon$, sempre que $n > n_0$.

Neste caso, em termos simbólicos escreve-se

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}; n > n_0 \Longrightarrow |x_n - x| < \varepsilon.$$

Podem ser usadas também as seguintes notações para indicar que uma sequência (x_n) converge para x:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \qquad \lim x_n = x, \qquad \lim_{n\in\mathbb{N}} x_n = x, \qquad x_n \longrightarrow x.$$

Diz que uma sequência (x_n) *converge* para x quando possui limite, caso contrário diz-se que ela *diverge*.

Teorema 4.1.1 *(Unicidade do limite).* Seja (x_n) uma sequência tal que $x_n \to a$ e $x_n \to b$. Então $a = b$. Logo, uma sequência não pode possuir dois limites distintos.

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que
$n \geq n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, pois $x_n \to a$;
n $\geq n_2 \Rightarrow |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$, pois $x_n \to b$.

Deste modo, fazendo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, tem-se, para $n \geq n_0$, que

$$\begin{aligned} |a-b| &= |a - x_n + x_n - b| \leq |a - x_n| + |x_n - b| \\ &= |\mathrm{x}_n - a| + |x_n - b| \\ &< \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Portanto, $a = b$.

De fato, supondo-se que $a \neq b$, então $|a-b| > 0$. Assim, tomando $\varepsilon = \dfrac{|a-b|}{2}$ obtém-se que $|a - b| > \varepsilon > 0$, o que é uma contradição, pois $|a - b| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$.

Teorema 4.1.2 *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência convergente com $\lim x_n = a$. Tomando $\varepsilon = 1$, vê-se que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < 1$ para todo $n \geq n_0$.

Logo, se $n \geq n_0$, então

$$\begin{aligned} |x_n| &= |x_n - a + a| \\ &\leq |x_n - a| + |a| \\ &\leq 1 + |a|. \end{aligned}$$

Desta forma, tomando $k = max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_{n_0-1}|, 1 + |a|\}$, tem-se que $|x_n| \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, (x_n) é limitada.

Teorema 4.1.3 *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência monótona e limitada. Tomando $x = \sup\{x_n; n = 1, 2, ...\}$, pode-se afirmar que (x_n) converge para x.

Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, como $x - \varepsilon < x$, o número $x - \varepsilon$ não é cota superior do conjunto dos x_n. Logo, existe algum $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x - \varepsilon < x_{n_0}$. Portanto, para todo $n \geq n_0$, tem-se que

$$x - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq x < x + \varepsilon,$$

ou seja, $|x_n - x| < \varepsilon$ sempre que $n \geq n_0$. Assim, de fato, temos que $x_n \to x$.

Teorema 4.1.4 *(Teorema de Bolzano-Weierstrass).* Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.

Demosntração: Seja (x_n) uma sequência limitada de números reais e seja $D = \{n \in \mathbb{N};\ x_n \text{ é destacado}\}$. Se o conjunto D é infinito, então a subsequência $(x_n)_{n \in D}$ é monótona limitada, por conseguinte, convergente. Se o conjunto D é finito, seja p o maior elemento de D. Se $n_1 \in \mathbb{N}$ é um número natural maior do que p, então $n_1 \notin D$ e, consequentemente, x_{n_1} não é destacado.

Portanto, existe $n_2 \in \mathbb{N}, n_2 \geq n_1$, tal que $x_{n_1} < x_{n_2}$. Como $n_2 > n_1 > p$, temos que $n_2 \notin D$ e, consequentemente, x_{n_2} não pode ser também um termo destacado e, neste caso, existe $n_3 \in \mathbb{N},\ n_3 > n_2$, tal que $x_{n_2} < x_{n_3}$. Por conseguinte obtém-se uma sequência (x_{n_k}) de (x_n) que é monótona limitada, portanto, convergente.

4.2 O número e como limite de uma sequência numérica

Nesta subseção, será mostrado que a sequência de termo geral $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ possui limite quando n tende ao infinito, e esse limite é definido pelo número e. Será utilizado um resultado importante da Análise Matemática, o Teorema 4.1.3 que garante que toda sequência monótona e limitada é convergente.

Será provado a partir de duas etapas que a sequência (x_n) converge para o número e. Primeiro será provado que a sequência (x_n) é crescente, depois será provado que ela é limitada e seu limite está compreendido entre $2 \leq x_n \leq 3$.

Proposição 4.2.1 A sequência de termo geral $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ é crescente.

Demonstração: Para provar que a sequência (x_n) é crescente, utilizou-se a aplicação da fórmula do Binômio de Newton, que é dada por

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} a^{n-i} b^i \\ &= a^n + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} a^{n-1} b + \cdots + \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} a b^{n-1} + b^n,\end{aligned}$$

com $\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{i!(n-i)!}$, para $i = 0, 1, 2, ..., n$.

Desenvolvendo $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ por aplicação do Binômio de Newton, com $a = 1$ e $b = \dfrac{1}{n}$, obtém-se:

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} 1^n \left(\frac{1}{n}\right)^0 + \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} 1^{n-1} \left(\frac{1}{n}\right)^1 + \begin{pmatrix} n \\ n-2 \end{pmatrix} 1^{n-2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \\ &\cdots + \begin{pmatrix} n \\ n-i \end{pmatrix} 1^{n-i} \left(\frac{1}{n}\right)^i + \cdots + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} 1^1 \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1} + \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} 1^0 \left(\frac{1}{n}\right)^n \end{aligned}$$

Resolvendo os cálculos, obtém-se:

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \frac{n!}{n!(n-n)!} + \frac{n!}{(n-1)!(n-n+1)!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n!}{(n-2)!(n-n+2)!} \cdot \frac{1}{n^2} + \\ &\cdots + \frac{n!}{(n-i)!(n-n+i)!} \cdot \frac{1}{n^i} + \cdots + \frac{n!}{1!(n-1)!} \cdot \frac{1}{n^{n-1}} + \frac{n!}{0!(n-0)!} \cdot \frac{1}{n^n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1{+}1{+}\ \frac{n(n-1)}{(2)!}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!}\cdot\frac{1}{n^i}+\cdots\\
&+\ \frac{n(n-1)...3.2}{(n-1)!}\cdot\frac{1}{n^{n-1}}+\frac{n(n-1)....2.1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}.
\end{aligned}$$

Deste modo, dando desenvolvimento inicial a forma, tem-se

$$\begin{aligned}
x_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\
&= 2{+}\ \frac{1}{2!}\cdot\frac{n-1}{n}+\cdots+\frac{1}{i!}\cdot\frac{(n-1)...(n-i+1)}{n^{i-1}}+\cdots\\
&+\ \frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{(n-1)(n-2)...3.2}{n^{n-2}}+\frac{1}{n!}\cdot\frac{(n-1)...2.1}{n^{n-1}}\\
&= 2{+}\ \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{i!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n}\right)+\cdots\\
&+\ \frac{1}{(n-1)!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-2}{n}\right)+\cdots\\
&\qquad +\frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

Logo, x_n é uma soma de parcelas positivas. Assim, o número dessas parcelas, bem como cada uma delas, cresce com n. Observe, por exemplo, que

$$\frac{1}{i!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n}\right)<\frac{1}{i!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n+1}\right)$$

Portanto, colocando $n+1$ em lugar de n nos termos entre parenteses à esquerda da desigualdade, observa-se que cada um dos termos que estão à direita da desigualdade é inferior a cada um dos correspondentes com $n+1$ em lugar de n. Isso prova que $x_n < x_{n+1}$, ou seja, que a sequência (x_n) é crescente.

Proposição 4.2.2 A sequência de termo geral $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ é limitada.

Demonstração: Para provar que a sequência (x_n) é limitada, basta observar que qualquer um dos termos entre parênteses em (4.1) são menores que ou iguais a 1.

Logo, substituindo todos os termos entre parênteses por 1 com base na igualdade deduzida em (4.1), é possível escrever

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} \qquad (4.2)$$

.

Considerando que

$$\frac{1}{i!} < \frac{1}{2^{i-1}} (\forall i \geq 3).$$

Então, tem-se que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{i-1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

E, finalmente

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2}\frac{1-(\frac{1}{2})^{n-1}}{1-\frac{1}{2}} = 2 + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n-1}}\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}}.$$

Deste modo, nota-se que $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \cdots, \frac{1}{2^{n-1}}\right)$, podem representar os termos de uma progressão geométrica com 1º termo igual $\frac{1}{2}$ e razão $\frac{1}{2}$.

Mas, como

$$\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n-1}}\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n-1}}\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

Portanto,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Ou seja,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 3, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, conclui-se que $x_n \geq 2$, uma vez que, se $x_1 = 2$ e atendendo ao fato que (x_n) é crescente.

Portanto, conclui-se que a sequência (x_n) é limitada para todo $n \in \mathbb{N}$, e que seu limite está compreendido no intervalo

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 3.$$

Consequentemente, de acordo com o Teorema 4.1.3, (x_n) é uma sequência convergente, ou seja, deve existir um $x \in \mathbb{R}$, com $2 \leq x \leq 3$, tal que (x_n) se aproxima de x a medida n que aumenta.

E pode ser definida por

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

4.3 Séries de números reais

Nesta seção serão abordadas algumas definições e teoremas sobre séries de números reais, especificamente os que constituem pré-requisitos para melhor entendimento do conteúdo.

Definição 4.3.1 Seja (a_n) uma sequência de números reais. Define-se uma *série numérica*, ou simplesmente *série* $\sum a_n$, a *soma infinita* dos termos de (a_n), ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \cdots$$

A parcela a_n é chamada de *n-ésimo termo* ou *termo geral* da série $\sum a_n$.

Designa-se por s_n, a soma dos primeiros n elementos da sequência (a_n), denominada de *sequência das somas parciais* ou r*eduzidas de ordem n,* definida por

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ \mathrm{s}_2 &= a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ \mathrm{s}_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \end{aligned}$$

Desse modo, a nova sequência infinita (s_n) formada é definida como a *série de termos a_n.*

Definição 4.3.2 Dada uma série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, se a sequência das somas parciais (s_n) convergir para s, diz-se que a série é *convergente* e pode-se escrever

$$s = \lim s_n = \lim \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

Caso a sequência das somas parciais não seja convergente, diz-se que a série $\sum a_n$ é *divergente.*

Observação 4.3.1 Às vezes é conveniente considerar séries do tipo $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, que começam com primeiro termo a_0 no lugar de a_1.

Definição 4.3.3 (*Série absolutamente convergente*). Diz-se que a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ é *absolutamente convergente* se a série dos valores absolutos (módulos) dos seus termos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |an| + \cdots$$

é convergente. Uma série convergente que não seja absolutamente convergente diz-se *simplesmente convergente.*

Definição 4.3.4 (*Série Geométrica*). Chama-se série geométrica de razão r a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n + \cdots$$

A soma parcial (a_n) é a soma dos termos de uma progressão geométrica.

$$s_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n = \frac{1}{1-r} - \frac{r^{n+1}}{1-r}$$

Quando $|r| < 1$ então o $\lim s_n = \dfrac{1}{1-r}$, logo, a série geométrica é convergente. Porém, quando $|r| \geq 1$ então o $\lim s_n = +\infty$, e a série geométrica é divergente.

4.3.1 Operações com séries

Teorema 4.3.1 Das propriedades operatórias relativas ao limite de sequências, temos que, se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são séries convergentes e $c \in \mathbb{R}$, então

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Teorema 4.3.2 Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série convergente então $\lim a_n = 0$.

Demonstração: Seja (s_n) a sequência das somas parciais de (x_n). Então existe $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Evidentemente, tem-se também $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_{n-1}$. Portanto,

$$\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = s - s = 0.$$

Observação 4.3.2 A recíproca do Teorema 4.3.2 não é verdadeira. Um contraexemplo é dado pela *série harmônica* $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$. Mesmo com seu termo geral $a_n = \dfrac{1}{n}$ tendendo para zero, a série é divergente. Assim, tem-se

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^n}\right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} \\ &= 1 + n \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

e, portanto, $\lim s_{2^n} = +\infty$. Consequentemente, $\lim s_n = +\infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Teorema 4.3.3 Seja $\sum a_n$ *uma série* em que $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e que exista um número positivo K tal que

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \leq K$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, a série $\sum a_n$ é convergente.

Demonstração: Primeiro deve-se relembrar que a convergência da série $\sum a_n$ é equivalente à da sequência das somas parciais (s_n). Como os termos da série são positivos, tem-se

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \leq s_{n+1} = s_n + a_{n+1},$$

ou seja, (s_n) é crescente, e, por hipótese, a sequência (s_n) é limitada, logo, ela é convergente.

4.4 O número e como limite de uma série numérica

Nesta seção, vamos demonstrar que o número e pode ser caracterizado por meio da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Proposição 4.4.1 O número e é o limite da sequência (s_n) cujo termo geral é dado por

$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!},$$

ou seja,

$$e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Demonstração: Para provar que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ converge para o número e, inicialmente, determina-se um limite superior. Logo, seja

$$s = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

Para determinar se existe um limite superior para s_n, tem-se que:

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{1.2.3.4...n} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n} < 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Deste modo, obtém-se acima uma Geométrica com primeiro termo $\frac{1}{2}$ e razão $r = \frac{1}{2}$. Assim, como a soma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

Tem-se que,

$$s_k < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 1 + 1 = 3$$

O que implica em $s_k < 3$.

Considerando o fato que $s > 2$, pois $s = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots > 2$, então temos que s_n é finito e fica limitado pela desigualdade $2 < s < 3$.

Deste modo, com relação à expressão (4.2) da seção 4.1.2, que mostra

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!},$$

pode-se afirmar que $2 < e \leq s < 3$.

Assim, sejam

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{e} \qquad s_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

Para $2 \leq p \leq n$, tem-se

$$\begin{aligned} u_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \ \frac{1}{p!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{p-1}{n}\right)+\cdots \\
&+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \\
&\geq 1+1+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots \\
&+ \ \frac{1}{p!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

Tornando p fixo e tomando limite em n obtêm-se

$$\lim u_n \geq 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{p!}$$

$$e \geq \sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}.$$

Assim, considerando o limite quando $p \to \infty$, obtêm-se $e \geq s$. Portanto, pode-se definir

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} = s.$$

Conclui-se, desta forma, que a expressão acima permite obter aproximações para o número e a partir de infinitas parcelas compostas de números racionais.

Exemplo: Para n = 10, temos que

$$\sum_{n=0}^{10}\frac{1}{n!} \cong 2,718281801,$$

sendo então uma aproximação para o valor de e com precisão de nove casas decimais.

4.5 Outras representações para o número e: logaritmos naturais e função exponencial

Nesta seção, será demonstrado o número e como base dos logaritmos naturais e das funções exponenciais, pois, estes possuem uma variedade de aplicações.

Segundo Lima (1996), a função logarítmica e sua inversa, a função exponencial, constituem a única maneira de se descrever matematicamente a evolução de uma grandeza, cuja taxa de crescimento (ou descrescimento) é proporcional à quantidade daquela grandeza existente num dado momento.

4.5.1 O número e como base dos logaritmos naturais

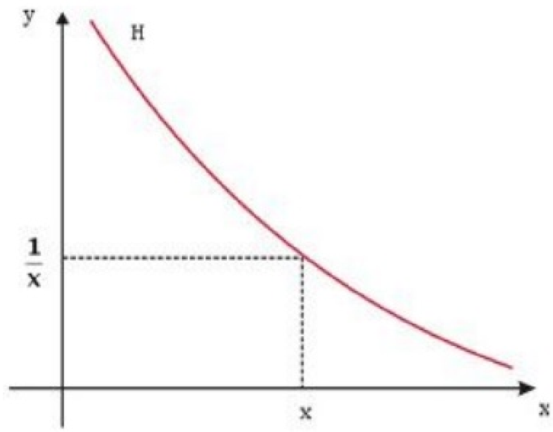
Os logaritmos mais utilizados com aplicações em modelos matemáticos nas ciências físicas e biológicas são os logaritmos naturais, os quais têm uma base natural denotada pelo número e. Será presentada a definição geométrica de logaritmo natural, baseada em Lima (1996) .

Seja H o ramo positivo do gráfico da função $y = \frac{1}{x}$, que é a função que associa a cada número real positivo x o número $y = \frac{1}{x}$. H é o subconjunto do plano constituído pelos pontos de forma $(x, \frac{1}{x})$, onde $x > 0$. Em símbolos, pode-se escrever:

$$H = \big\{(x, y); x > 0, y = \frac{1}{x}\big\}.$$

Geometricamente H é o ramo da hipérbole $xy = 1$, contido no primeiro quadrante. Logo, diz-se que um ponto $(x,\ y)$ pertence ao conjunto H se, e somente se, $x > 0$ e $xy = 1$.

Figura 1 – H representa o conjunto de pontos $y = \frac{1}{x}$



Fonte: (GRANERO, 2016)

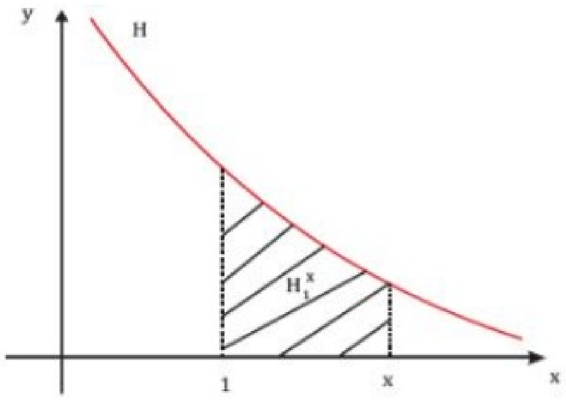
Uma faixa da hipérbole é obtida quando são fixados dois números reais positivos a, b, com $a < b$, e toma-se a região do plano limitada pelas duas retas verticais $x = a$, $x = b$, pelo eixo das abscissas, e pela hipérbole H, essa região pode ser indicada pelo símbolo H_a^b.

Assim, define-se o logaritmo natural de um número real positivo x, como sendo a área da faixa H_1^x, $ln\ x$ não podendo ser definido quando $x < 0$. Matematicamente pode ser escrito como:

$$ln\ x = \text{Área}(H_1^x)$$

Para $x > 1$, tem-se a Área$(H_1^x) = \int\limits_1^x \frac{1}{x}dx$, ou seja, $ln\ x = log_e x = \int\limits_1^x \frac{1}{x}$, conforme Figura 2.

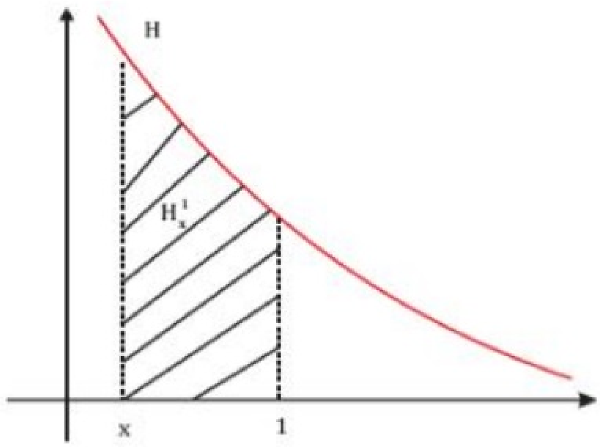
Figura 2 – (ln ⋮ x = Área (H_1^x)



Fonte: (GRANERO, 2016)

Para $0 < x < 1$ tem-se a Área$(H_1^x) = \int_1^x \frac{1}{x}dx = -log_e(x) = -ln\ x$, conforme Figura 3.

Figura 3 – Área $(H_1^x) = \int_1^x \frac{1}{x}dx = -log_e(x) = -ln\ x$



Fonte: (GRANERO, 2016)

Quando $x = 1$, H_1^1 se reduz a um segmento de reta, com área igual a zero. Podendo ser escrito como:

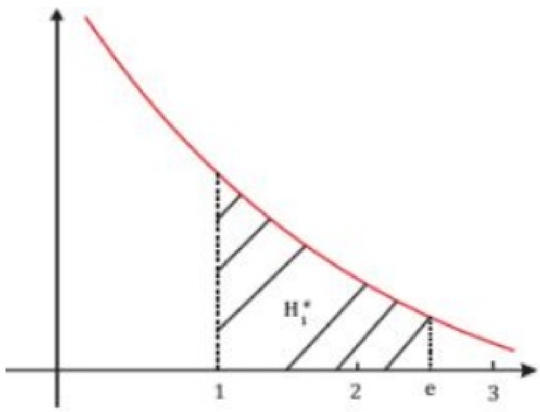
$$ln\ 1 = 0;$$
$$ln\ x > 0 \text{ se } x > 1;$$
$$ln\ x < 0 \text{ se } \ 0 < x < 1.$$

O número e que é a base dos logaritmos naturais é caracterizado pelo seu logaritmo natural ser igual a 1, então, a área $H_1^e = 1$ escreve-se:

$$\text{Área}(H_1^e) = \int_1^e \frac{1}{x}dx = -ln\ (e) - ln\ (1) = 1$$

A área do logaritmo natural está representada na Figura 4.

Figura 4 – Área do logaritmo natural de base *e*



Fonte: (GRANERO, 2016)

Portanto, o número e pode ser definido como único número real positivo, cujo logaritmo natural é igual a 1, sendo assim, ele é a base do sistema de logaritmos naturais. Pode-se escrever:

$$ln\ x = 1 \Leftrightarrow x = e$$

Imediatamente nota-se que $e > 1$, visto que temos logaritmos negativos para os números reais positivos menores que 1.

Ressalta-se que alguns autores, chamam esse logaritmo de logaritmo neperiano, porém, é preferível chamá-lo de logaritmo natural, pois, o logaritmo definido por Napier possuía valores diferentes deste (LIMA, 1996).

4.5.2 Função exponencial de base e

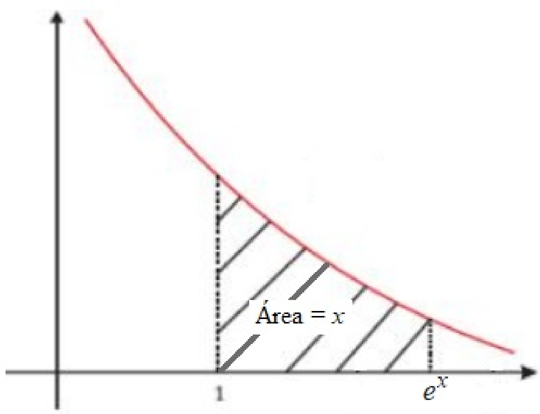
A função exponencial natural $f(x) = e^x$ é uma das funções mais importantes, aparecendo na descrição de vários fenômenos naturais e evolutivos.

Bellos (2015) aponta que os matemáticos preferem converter a equação $y = a^x$ em uma equação $y = e^{kx}$, para algum k positivo porque o número e representa crescimento em sua forma mais pura. Além de simplificar a equação, a constante exponencial facilita os cálculos, é mais elegante e é o elemento essencial da matemática do crescimento.

De acordo com Lima (1996), seja $r = \frac{p}{q}$ um número racional. Tem-se que $y = e^r$ se, e somente se, $ln\ y = r$. Para demonstrar, considere $y = e^r$, então $ln\ y = r \cdot ln\ e = r$, pois $ln\ e = 1$. De maneira recíproca, seja $y > 0$ um número real tal que $ln\ y = r$. Como ln é uma função biunívoca, conclui-se que $y = e^r$.

Dado um número real x, e^x é o único número positivo cujo logaritmo natural é x. Geometricamente, $y = e^x$ é a abscissa que deve ser tomada para que a faixa da hipérbole H_1^y tenha área x, conforme Figura 5.

Figura 5 – Área y = e^x



Fonte: Adaptado de Lima (1996)

Observa-se que $e^x > 0$ para todo x, que $e^x > 1$ quando $x > 0$ e que $e^x < 1$ quando $x < 0$.

Logo, define-se a função exponencial natural $x \mapsto e^x$, de base e, como a função inversa da função $ln = log_e$:

$$y = e^x \Leftrightarrow x = ln\ y.$$

Assim, se a função exponencial transforma o número real x no número real positivo e^x, a função logaritmo natural transforma e^x de volta em x. Reciprocamente, a função exponencial leva $ln\ y$ em y.

5 APLICAÇÃO: MODELAGEM DE UMA EPIDEMIA

A versatilidade e aplicabilidade do número e na matemática e em diversas áreas como biologia, física, medicina, economia, entre outras, o fez tornar-se um número de grande relevância.

Sua aplicabilidade está presente em vários modelos matemáticos, principalmente nos relacionados a representação de fenômenos naturais e evolutivos, como o estudo de características de crescimento ou decrescimento de uma população. Neste trabalho, será abordada sua aplicação, especificamente, em modelos matemáticos utilizados na análise da propagação da doença viral causada pela COVID-19.

O novo contexto social ocasionado pela pandemia da COVID-19, doença causada pelo coronavírus denominado SARS-CoV-2, afetou a economia e sistemas de saúde do mundo inteiro. Este novo cenário, segundo Marcondes (2020) está demandando não apenas recursos para o combate às frentes de saúde e economia, mas também informações de dados precisos a respeito da evolução da doença e medidas eficazes para vencê-la.

O supracitado autor afirma que os "métodos matemáticos exercem um papel-chave para a solução da crise causada pelo novo coronavírus". Apenas por meio da modelagem matemática da evolução da COVID-19 conseguiremos prever as próximas cidades que podem sofrer seus impactos, quando provavelmente será o seu pico, estimar a quantidade de infectados, mortes e ocupação de leitos e fazer previsões sobre a evolução da doença e intensidade do isolamento social. E baseando-se em tais dados, determinar o momento e maneira correta de afrouxar as medidas de isolamento social e de reabrir gradualmente os setores que movimentam a economia.

Diversos modelos matemáticos usados para o estudo do processo epidêmico envolvem a aplicação do número e. Como, por exemplo, a função exponencial e a função logística, as quais possuem em sua fórmula geral o número e. Por meio da utilização destas funções há maior possibilidade de entender e fazer predições através de simulações acerca da doença.

Portanto, neste capítulo será apresentada a relação do número e com a formulação de modelos matemáticos que descrevam o desenvolvimento de uma epidemia, tomando como base os estudos do Laboratório de Sistemas Complexos (Complex-Lab) da Universidade Estadual de Maringá (UEM) (UEM, 2020) e do Portal Coronaviz (VELHO; GIANNELLA, 2020).

5.1 A função exponencial e sua relação com os processos epidêmicos

Como um processo epidêmico ocorre no mundo real, consequentemente, é necessário o desenvolvimento de modelos matemáticos abstratos capazes de refletir com fidedignidade os aspectos relevantes do fenômeno em questão.

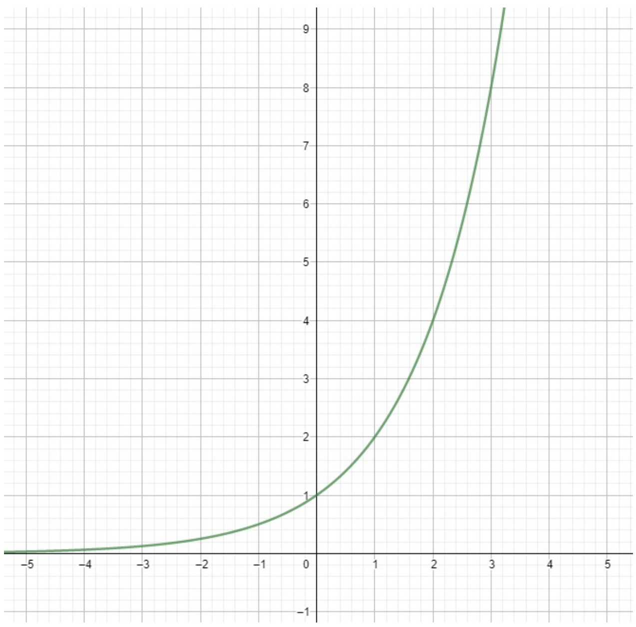
De acordo com Velho e Giannella (2020) "uma epidemia pode ser definida como a rápida disseminação de uma doença contagiosa para um grande número de pessoas de uma dada população num curto espaço de tempo". A partir de tal definição, destaca-se *"rápida disseminação ... em um curto espaço de tempo"*, logo, os autores apontam que os conceitos matemáticos necessários para compreender o processo epidêmico são: crescimento exponencial, que está relacionado ao aumento rápido de uma quantidade; e sistema dinâmico, que diz respeito à evolução temporal.

Segundo estudos epidemiológicos, o primeiro período de um surto epidêmico segue um crescimento exponencial. Para estudar a fase inicial de crescimento de uma epidemia utiliza-se a aplicação da função exponencial que contém em sua formulação o número e. A exponencial é uma função da forma

$$f(t) = a * b^t$$

Onde ($a = 1$ e $b = e = 2{,}71828\ldots$). Pode-se visualizar o gráfico desta função na Figura 6.

Figura 6 – Função Exponencial



Fonte: Autoria própria

Na função exponencial, tem-se o crescimento exponencial, onde o valor inicial de um evento vai sendo multiplicado por um mesmo número a cada período. Logo, é a forma como uma quantidade aumenta com o tempo segundo a função $f(t)$, ou seja, o parâmetro t da função é o tempo e o seu valor a quantidade de interesse. Na equação $a * b^t$, a constante a é o valor inicial no tempo $t = 0$, e a constante b é o "fator de crescimento" (VELHO; GIANNELLA, 2020).

Outra característica da exponencial é que sua derivada (taxa de crescimento) é diretamente proporcional ao valor da função. Isto pode ser visto, no caso de uma discretização de t em intervalos de tempo unitários (i.e. $t = 1, 2, \ldots$). Tem-se então:

$$f(t+1) = a * b^{t+1} = a * b^t * b = f(t) * b$$

Como exemplo de cenário de uma epidemia, considera-se um caso hipotético no qual, inicialmente tem-se um único indivíduo infectado, ou seja, $a = 1$. Cada indivíduo infectado transmite o vírus para outros dois, isto é, $b = 2$. Tal fato resulta na fórmula para essa epidemia

$$f(t) = 1 * 2^t$$

A partir dessa fórmula, é possível calcular o valor de $f(t)$ para $(t = 1, \ldots , 14)$, obtendo dessa maneira a quantidade de indivíduos infectados em cada intervalo.

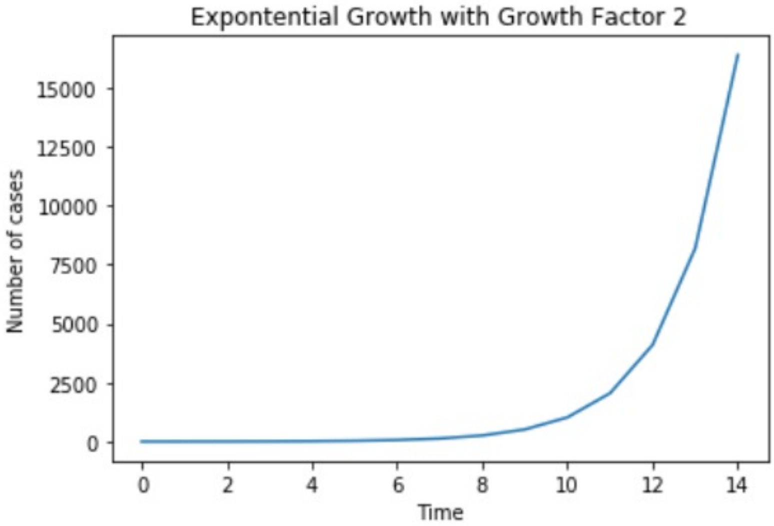
Considerando um fator de crescimento 2, têm-se após 14 dias mais de 16.000 casos. Tais dados podem ser verificados na Tabela 7 e no gráfico da Figura 7, baseados no estudo de Korstanje (2020 *apud* VELHO; GIANNELLA, 2020).

Tabela 7 – Evolução da Epidemia

Tempo	***Infectados***
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
...	...
10	1024
11	2048
12	4096
13	8192
14	16384

Fonte: Adaptado de (KORSTANJE apud VELHO; GIANNELLA, 2020)

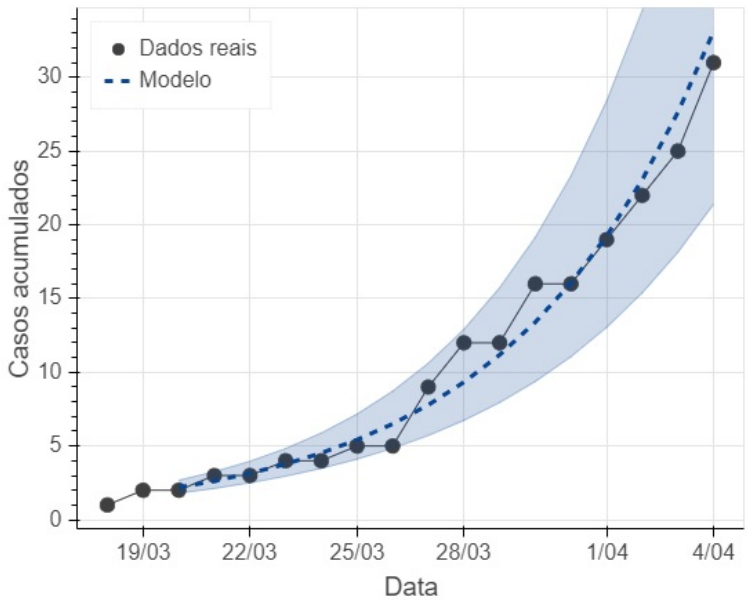
Figura 7 – Gráfico do crescimento exponencial com os dados da Tabela 7



Fonte: (KORSTANJE apud VELHO; GIANNELLA, 2020)

Um estudo realizado pelo Laboratório de Sistemas Complexos (ComplexLab) da Universidade Estadual de Maringá (UEM, 2020) também baseado no modelo exponencial, mostra o número acumulado de pessoas infectadas para os 20 primeiros dias após o primeiro caso no município de Maringá-PR. Nesse gráfico representado na Figura 8, a linha tracejada mostra o modelo exponencial ajustado aos dados.

Figura 8 – Modelo exponencial para o número de casos de COVID-19



Fonte: (UEM, 2020)

Perccebe-se que a descrição exponencial ajusta-se bem ao início da curva do número de casos. A área sombreada em azul mostra a região de incerteza do modelo. No entanto, o modelo passou a superestimar o número de infectados após esse período inicial, o que pode ser um indicativo de desaceleração da epidemia, ou um artefato causado pela escassez de testes da doença.

Contudo, após a fase inicial a evolução da propagação da epidemia deixa de seguir o modelo exponencial, pois, a população tem um tamanho finito e todos seus indivíduos são infectados de modo que o crescimento termina. Além disso, deve-se considerar que os indivíduos após contrair a doença eventualmente serão curados e deixarão de ser transmissores dela. Deste modo, Velho e Giannella (2020) expõem que somente a função exponencial não permite analisar o processo epidêmico em sua totalidade, para isso, é utilizada a função logística.

5.2 A função logística na modelagem dos processos epidêmicos

Outra possibilidade para descrever o processo epidêmico em suas várias etapas, é a utilização da função logística. Segundo UEM (2020), uma versão alterada do modelo baseado na função logística, conhecido como modelo generalizado de Richards, foi utilizada para modelar o número de casos de COVID-19 em províncias da China, em países como Japão, Coreia do Sul, Irã e na Europa como um todo.

A função logística considera que após o período inicial de crescimento, em uma segunda fase deve ocorrer um decrescimento até se chegar a um patamar máximo. Assim, sua modelagem é feita pelo crescimento logístico, e esta função também possui a presença do número e em sua fórmula.

A fórmula da função logística é dada pela seguinte expressão:

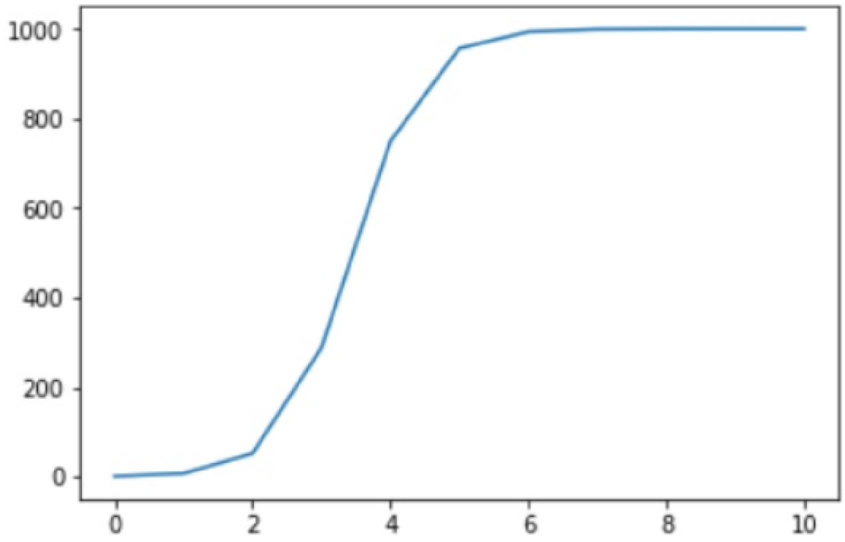
$$f(t) = \frac{c}{1 + a * e^{-bt}},$$

onde $f(t)$ é o número de casos no tempo t, a constante $b > 0$, a constante $a = c$ - 1 e a capacidade máxima de f é dada pelo valor limite c. Além do que, o valor inicial f, que representa o número de casos no começo do surto, é dado por $\dfrac{c}{(1+a)}$ e a taxa máxima de crescimento ocorre quando $t_{max} = \dfrac{ln(a)}{b}$ e $f(t_{max}) = \dfrac{c}{2}$.

Para exemplificar o uso da função logística como modelo da evolução de uma epidemia, suponha um caso hipotético onde a quantidade máxima da população de pessoas doentes é 1000, e o processo inicia com apenas uma pessoa doente que pode infectar outras duas pessoas.

Ao aplicar na fórmula os valores: $c = 1000$, $a = 999$ e $b = 2$, considerando um período de 10 dias $t = 0, \ldots, 10$, obtém-se o gráfico exposto na Figura 9.

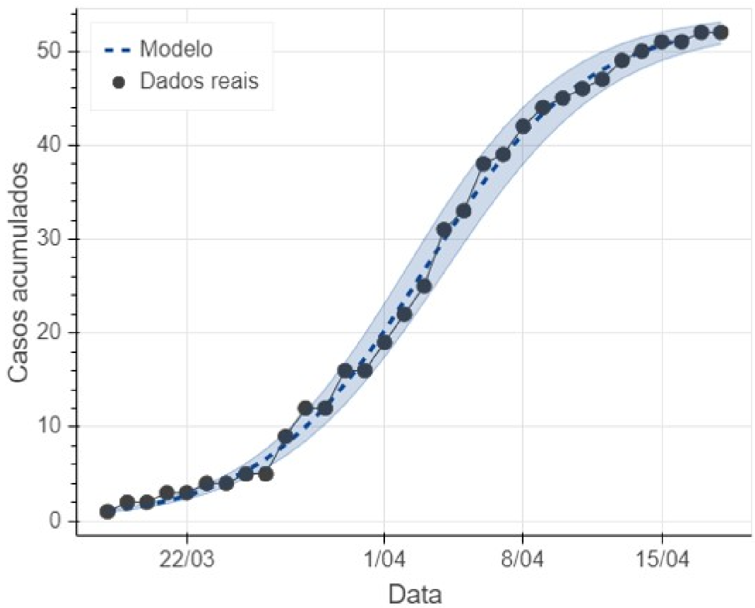
Figura 9 – Função logística



Fonte: (KORSTANJE apud VELHO; GIANNELLA, 2020)

É possível notar que a curva cresce de forma acelerada até perto de $t = 6$, onde começa a desacelerar para atingir o patamar de 1000. Outro exemplo da utilização do modelo logístico, foi o realizado pela UEM (2020) para o número de casos de COVID-19 em Maringá-PR considerando os primeiros 30 dias após o primeiro caso na cidade. Conforme o gráfico da Figura 10.

Figura 10 – Modelo logístico para o número de casos de COVID-19



Fonte: (UEM, 2020)

Verifica-se que os círculos em preto indicam os dados reais e a linha tracejada mostra o comportamento do modelo logístico. Além disso, a área sombreada em azul mostra a região de incerteza do modelo.

Percebe-se que o modelo logístico descreve o número de casos razoavelmente bem desde o início da epidemia até o dia 18/04/2020. Porém, depois dessa data passou a subestimar o número de casos. Por volta de 21/04/2020 o número de casos apresentou um segundo ponto de inflexão, o qual não pode ser descrito pelo modelo logístico. Esse segundo ponto de inflexão indica uma possível retomada no crescimento de casos de COVID-19 na cidade.

Portanto, segundo UEM (2020) o modelo logístico pode ser entendido como uma generalização do modelo exponencial, ou seja, uma descrição um pouco mais realista para a evolução da epidemia, já que o número de casos não pode aumentar para sempre numa população com um número finito de pessoas.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento deste trabalho, permitiu apresentar uma pequena parte do vasto universo da Matemática que envolve o número e, também conhecido como número de Euler, uma das constantes mais importantes da matemática.

Partindo de uma abordagem histórica, foi apresentado como seu surgimento está relacionado a questões financeiras que envolvem o cálculo de juros compostos e também como os matemáticos Jonh Napier e Leonhard Euler contribuíram com seus estudos para que este número fosse reconhecido matematicamente.

No capítulo quatro, construiu-se a definição do número e como limite da sequência $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ e da série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$. Também foi abordado de maneira breve como este número corresponde à base dos Logaritmos Naturais e das Funções Exponenciais.

Em especial atenção às aplicações práticas, apresentou-se no capítulo cinco estudos sobre sua relação com as funções exponenciais e logística que modelam os processos epidêmicos. A partir destas aplicabilidades em modelos epidêmicos, destaca-se sua importância na formulação de previsões acerca da disseminação e evolução da pandemia da COVID-19, doença que está impactando a saúde e a economia da sociedade brasileira e mundial. Assim, partir dos dados obtidos, que podem sofrer variações, é possível realizar o planejamento de ações de prevenção e contenção da doença.

É importante salientar, que embora o número e seja muito importante, ele ainda é pouco explorado no ensino básico, ao contrário do que ocorre no ensino superior. Sua importância se dá principalmente porque ele representa a linguagem natural do crescimento, ou seja, possui relação com o processo que estuda o crescimento e decrescimento de fenômenos naturais e evolutivos. Desta forma, acredita-se que o conhecimento sobre este número nos diversos níveis de educação pode contribuir significativamente com o ensino e aprendizagem da Matemática.

Portanto, é importante destacar que como em qualquer pesquisa científica, a abordagem sobre o número e não se esgota neste trabalho. Uma vez que, existem diversas maneiras de se chegar ao número e, além das aqui apresentadas e também por esse possuir muitas aplicabilidades. Sendo assim, espera-se que este trabalho sirva como motivador para o estudo e desenvolvimento de novas pesquisas em outras áreas, tanto da Matemática como em outras ciências.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. **Análise Matemática para Licenciatura**. 1ª. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2001.

BELLOS, A. **Alex através do espelho**: como a vida reflete os números e como os números refletem a vida. São Paulo: Companhia das Letras, 2015.

BOYER, C. B. **História da matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, 1974a.

BOYER, C. B. **História da matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, 1974b.

CORRÊA, F. J. S. de A. **Introdução à Análise Real**. Belém: UFPA, 2008.

FERREIRA, J. **A Construção dos Números**. 3ª. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 133 p.

FIGUEIRA, R. F. **O número de Euler**. 2017. 79 p. Dissertação (Mestrado Profssional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT) — Universidade Federal da Paraíba.

KORSTANJE, J. **Modeling Exponential Growth**. 2020. Disponível em: https://towardsdatascience.com/modeling-exponential-growth-49a2b6f22e1f. Acesso em: 20 out. 2020.

LIMA, E. L. **Logaritmos**. 2ª. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1996. (Coleção do Professor de Matemática).

LIMA, E. L. **Análise real volume 1**: Funções de uma variável. 10. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. 189 p. (Coleção Matemática Universitária).

LIMA, E. L. **Curso de análise**. 1ª. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. v. 1. 431 p. (Projeto Euclides, v. 1).

MAOR, E. **e**: a história de um número. 5ª. ed. Rio de Janeiro: Record, 2008a. 291 p.

MAOR, E. **e**: a história de um número. 5ª. ed. Rio de Janeiro: Record, 2008b. 291 p.

MARCONDES, D. A matemática no combate à Covid-19. **Noticiário Sociedade Brasileira de Matemática**, SBM, Rio de Janeiro, n. 19, p. 2 – 4, mai 2020.

MARTINS, M. do C. **A versatilidade do número de Neper!** 2014. Disponível em: https://repositorio.uac.pt/handle/10400.3/3529. Acesso em: Acesso em: 20 set. 2020.

POMMER, W. M. O número de Euler: Contribuições e possibilidades para a escolaridade básica. **Hipática**, IFSP, São Paulo, v. 2, n. 2, p. 13 – 28, dez 2017.

PRECIOSO, J. C.; PEDROSO, H. A. História do número e: gênese e aplicações. **Revista Eletrônica Matemática e Estatística em Foco**, v. 1, n. 1, p. 31 – 44, jun 2013.

RAPOSO JÚNIOR, A. B. **Introdução à análise real**. São Luís: UFMA, 2011.

SIMÃO, H. **Aproximação do número de Neper**. 2018. 88 p. Dissertação (Mestrado Matemática para professores) — Universidade da Beira Interior.

UEM. **Modelos epidêmicos**. 2020. Disponível em: http://complex.pfi.uem.br/covid/project/modelos/. Acesso em: 12 nov. 2020.

VELHO, L.; GIANNELLA, J. R. **A matemática da pandemia**. 2020. Disponível em: https://www.visgraf.impa.br/coronaviz/category/entendendo/matematica-da-pandemia/. Acesso em: Acesso em: 01 nov. 2020.