

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

A transformada de Fourier no espaço de Schwarz e algumas aplicações

Fernando Cabral Alves

João Pessoa
Março de 2020

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

A transformada de Fourier no espaço de Schwarz e algumas aplicações

por

Fernando Cabral Alves

sob a orientação do

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino

João Pessoa
Março de 2020

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

A474t Alves, Fernando Cabral.

A transformada de Fourier no espaço de Schwarz e algumas aplicações / Fernando Cabral Alves. - João Pessoa, 2020.

43 f. : il.

Orientação: Daniel Marinho Pellegrino.

TCC (Graduação/Licenciatura Plena em Matemática) - UFPB/CCEN.

1. Transformada de Fourier. 2. Espaço de Schwarz. 3. Princípio da incerteza de Heisenberg. 4. Transformada de Radon. I. Pellegrino, Daniel Marinho. II. Título.

UFPB/CCEN

CDU 517.443(043.2)

A transformada de Fourier no espaço de Schwarz e algumas aplicações

por

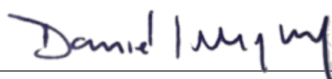
Fernando Cabral Alves

Monografia apresentada ao corpo docente do Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de graduado em Matemática (licenciatura plena).

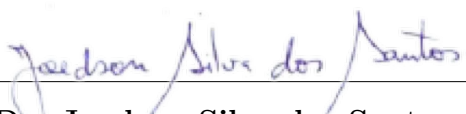
Área de Concentração: Análise

Aprovada em 23 de Março de 2020.

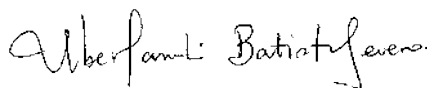
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino – UFPB
(Orientador)



Prof. Dr. Joedson Silva dos Santos – UFPB



Prof. Dr. Uberlândio Batista Severo – UFPB

A Yuna

Agradecimentos

A minha esposa, Raisia Claro, e aos meus pais, Fernanda Cabral e Severino Alves. Vocês formam a base de toda ação positiva que realizo.

A Daniel Pellegrino, pela orientação acadêmica ao longo dos últimos três anos, por ser uma das minhas maiores referências, e pelo tratamento verdadeiramente humano.

A Jamilson Campos e Uberlândio Severo, pela confiança, paciência e tempo empreendidos nas orientações de Iniciação Científica. Vocês contribuíram enormemente para minha formação e são exemplos de pesquisadores.

A todos os autores consultados na elaboração deste trabalho e nos estudos ao longo da graduação, incluindo aqueles de fóruns especializados, como o Mathematics Stack Exchange. Destaco a importância dos materiais didáticos de Daniel Solow, Elias Stein, Elon Lima, Herbert Enderton, Ian Chiswell, James Munkres, Michael Spivak, Rami Shakarchi, e Terence Tao.

Aos membros da banca, Joedson Santos e Uberlândio Severo, que se disponibilizaram a colaborar com este trabalho mesmo durante o início caótico de uma pandemia.

A todos os professores que contribuíram para minha formação nas disciplinas, em especial a Antonio Sales, Damião Araújo, Daniel Pellegrino, Erick Silva, Everaldo Medeiros, Marivaldo Matos, Miriam Pereira, e Ricardo Burity.

Por último, mas não menos importante, a Raphael Rolim, pelo tratamento humano e pelas conversas sobre física, matemática, filosofia, linguagem, jogos e vida ao longo de toda a graduação. Sua amizade e espírito científico foram componentes essenciais desses anos. Em particular, agradeço também pela sugestão da mudança de variável na demonstração da identidade do Capítulo 2 envolvendo as funções Gamma, Theta e Zeta.

Resumo

Nesta breve monografia apresentamos a teoria da transformada de Fourier no espaço de Schwarz das funções de decrescimento rápido e algumas de suas aplicações em física, medicina, e em outras áreas da matemática. Os principais resultados teóricos são a formulação das funções Gaussianas como núcleos de convolução, a inversão de Fourier, e a fórmula de Plancherel. Nas aplicações, incluímos a fórmula da soma de Poisson; propriedades elementares das funções Gama, Teta e Zeta; o Princípio da Incerteza de Heisenberg originado na mecânica quântica; e o problema de reconstrução em três dimensões para a transformada de Radon.

Palavras-chave: Transformada de Fourier, espaço de Schwarz, Princípio da Incerteza de Heisenberg, Transformada de Radon.

Abstract

In this short monograph we present the theory of the Fourier transform in the Schwarz space of rapidly decreasing functions and some of its applications to physics, medicine and other areas of mathematics. The main theoretical results are the formulation of Gaussians as good kernels, the Fourier inversion, and the Plancherel formula. For the applications, we included the Poisson summation formula; elementary properties of the Gamma, Theta and Zeta functions; the Heisenberg Uncertainty Principle from quantum mechanics; and the reconstruction problem for the Radon transform in three dimensions.

Keywords: Fourier transform, Schwarz space, Heisenberg Uncertainty Principle, Radon transform.

Sumário

Introdução	2
1 A Transformada de Fourier no Espaço de Schwarz	4
1.1 Teoria Elementar da Transformada de Fourier	4
1.1.1 Definição da Transformada e primeiras propriedades	5
1.1.2 O espaço de Schwarz	7
1.1.3 A Inversão de Fourier	14
1.1.4 A Fórmula de Plancherel	18
1.2 Extensão para o $\mathbb{R}^n$	20
2 Aplicações	24
2.1 A Fórmula da soma de Poisson	24
2.2 Funções Gama, Teta, e Zeta	25
2.3 O Princípio da Incerteza de Heisenberg	27
2.4 A transformada de Radon e as tomografias computadorizadas	30
Referências Bibliográficas	37

Introdução

Da perspectiva da análise harmônica moderna, o espaço de Lebesgue $L^1(\mathbb{R}^n)$ é o ambiente natural para introduzir os elementos da transformada de Fourier e sua teoria (ver, por exemplo, [1], [9]). Dados $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a *transformada de Fourier* de f , denotada por $\mathcal{F}f$ ou $\hat{f}$, é a função de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{C}$ definida por

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\omega x \cdot \xi} dx$$

Resultados fundamentais podem ser obtidos nesse domínio, a saber, o Teorema da Inversão de Fourier e o Teorema de Plancherel (que, em sua forma geral, envolve também o espaço $L^2(\mathbb{R}^n)$). Entretanto, parte importante da teoria e suas aplicações advém do estudo de um espaço vetorial mais restrito, o chamado *espaço de Schwarz*, cujas funções são suaves e possuem decaimento rápido (em sentido que tornaremos preciso). As propriedades desse espaço formam a base da relevante teoria das distribuições.

Nesse contexto, e visando uma primeira exposição, a presente monografia propõe introduzir o tema no ambiente do espaço de Schwarz, seguindo assim a linha de nossas principais referências ([2], [7]), as quais sacrificam generalidade em troca de um texto mais autocontido cujas principais ideias e técnicas se tornam mais transparentes. Não será exigido do leitor conhecimento em teoria da medida, pois desenvolveremos o estudo utilizando a integral (imprópria) de Riemann. O leitor que possui experiência com medidas pode optar por estudar a parte das transformadas diretamente em [1] ou [9], e utilizar o presente texto como bibliografia auxiliar da teoria ou para estudo das aplicações.

Nosso texto consiste em uma apresentação detalhada da teoria e de exercícios e aplicações selecionadas dos capítulos 5 e 6 do primeiro volume das Palestras de Princeton em Análise (*Princeton Lectures in Analysis*) ([7]). Dentre as aplicações, evitamos incluir aquelas que conhecemos possuir uma exposição clara na literatura matemática escrita em português brasileiro, a exemplo das soluções de equações diferenciais parciais clássicas, como em [2]. Optamos, portanto, por uma seleção de outras das nossas aplicações favoritas em [7].

Isso posto, o trabalho foi organizado em dois capítulos. No primeiro, trataremos da teoria da transformada de Fourier no espaço de Schwarz, na qual destacamos as propri-

edades da Gaussianiana e os já mencionados Teorema da Inversão de Fourier e a Fórmula de Plancherel. Ao segundo capítulo reservamos quatro aplicações da teoria desenvolvida antes, sendo elas: a Fórmula da soma de Poisson; relação e propriedades elementares das funções Gama, Teta, e Zeta; a formulação matemática do Princípio da Incerteza de Heisenberg, descoberto no contexto da física quântica; e, por fim, o problema de reconstrução da transformada de Radon e sua relação com tomografias computadorizadas cujas contribuições rendeu ao físico sul-africano A. Cormack o nobel de medicina e fisiologia em 1979.

Capítulo 1

A Transformada de Fourier no Espaço de Schwarz

1.1 Teoria Elementar da Transformada de Fourier

Dada uma função f definida no disco unitário (ou, equivalentemente, periódica em $\mathbb{R}$), podemos definir sua série de Fourier como abaixo:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n x}, \quad (1.1)$$

onde

$$a_n = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx.$$

Essas séries surgiram historicamente no estudo de soluções para algumas equações diferenciais parciais (e.g. equação da onda e equação do calor). Em análise de Fourier são estudados diferentes modos de convergência e condições sob as quais vale igualdade em (1.1), entre a função e sua série. Se substituirmos os objetos discretos (somatório e números inteiros) por suas contrapartes contínuas (integral e números reais) na série, obtemos a seguinte expressão:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi \quad (1.2)$$

A equação (1.2), em ambiente apropriado, é válida e conhecida como Teorema da Inversão de Fourier. Muito de nosso trabalho aqui objetiva demonstrar esse fato para funções do espaço de Schwarz a ser definido (vale ainda, de maneira mais geral, no espaço de Lebesgue L^1 , como afirmamos na introdução). O objeto $\hat{f}$, que se apresenta como

versão contínua dos coeficientes de Fourier na equação acima é o tema de nossos estudos aqui e o definimos formalmente por hora como

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx. \quad (1.3)$$

Nessa espécie de generalização, contudo, fazemos a importante observação que $\hat{f}$ não será mais definida para funções periódicas como no caso dos coeficientes, e sim, para classes de funções definidas em $\mathbb{R}$ que apresentem alguma propriedade de decaimento no infinito a fim de fazer convergir a integral acima. A periodização dessas funções, contudo, tem como coeficientes de Fourier precisamente a transformada de Fourier avaliada nos inteiros. Essa relação entre os coeficientes de Fourier da periodização de um função com decaimento e a sua transformada é conhecida como Fórmula da Soma de Poisson, e será apresentada no capítulo 2 (Teorema 2.1). Dito isso, iniciaremos a construção da teoria definindo o conjunto de funções apropriado.

1.1.1 Definição da Transformada e primeiras propriedades

Definição 1.1. Uma função contínua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ possui decrescimento moderado se existe uma constante $A > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ vale

$$|f(x)| \leq \frac{A}{1 + x^2}.$$

Para os efeitos deste capítulo, se $\varepsilon > 0$ o leitor pode substituir 2 por $1 + \varepsilon$ no expoente que aparece no denominador. Tal como em nossa referência, mantemos o 2 por conveniência. Se definirmos $I_N := \int_{-N}^N f(x) dx$, vale então a seguinte estimativa para $M > N$:

$$|I_M - I_N| \leq \int_{N \leq |x| \leq M} |f(x)| dx \leq A \int_{N \leq |x| \leq M} x^{-2} dx \leq 2A/N.$$

Isso nos diz que I_N é uma sequência de Cauchy de números reais. Pela completude de $\mathbb{R}$ faz então sentido definir, para toda função de decrescimento moderado, o limite

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N f(x) dx.$$

O conjunto de todas as funções reais contínuas de decrescimento moderado será denotado por $\mathcal{M}(\mathbb{R})$, o qual é também um espaço vetorial. Vejamos suas primeiras propriedades.

Proposição 1.2. Funções de decrescimento moderado satisfazem as seguintes propriedades:

(i) *Linearidade*: se $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ e $a, b \in \mathbb{C}$, então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} af(x) + bg(x)dx = a \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx + b \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx.$$

(ii) *Invariancia sob translação*: para todo $h \in \mathbb{R}$, vale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-h)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

(iii) *Escalonamento sob dilatação*: se $\delta > 0$, então

$$\delta \int_{-\infty}^{+\infty} f(\delta x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

(iv) *Continuidade*: se $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-h) - f(x)|dx \rightarrow 0 \quad \text{quando } h \rightarrow 0.$$

Demonstração: .

(i) Segue da linearidade da integral. A hipótese garante a convergência.

(ii) Para $\varepsilon > 0$ e N grande, tem-se a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} \left| \int_{-N}^N f(x)dx - \int_{-N}^N f(x-h)dx \right| &= \left| \int_{-N}^N f(x)dx - \int_{-N-h}^{N-h} f(x)dx \right| \\ &\leq \left| \int_{-N-h}^{-N} f(x)dx \right| + \left| \int_{N-h}^N f(x)dx \right| \\ &\leq \frac{Ah}{1 + (-N-h)^2} + \frac{A'h}{1 + (N-h)^2} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

(iii) A prova de três é semelhante a de (ii):

$$\left| \int_{-N}^N f(x)dx - \sigma \int_{-N}^N f(\sigma x)dx \right| = \left| \int_{-N}^N f(x)dx - \int_{-\sigma N}^{\sigma N} f(x)dx \right| \leq \frac{C}{1+N}$$

(iv) Primeiro escolha N suficientemente grande tal que

$$\int_{|x| \geq N} |f(x)|dx \leq \varepsilon, \text{ e } \int_{|x| \geq N} |f(x-h)|dx \leq \varepsilon$$

Como estamos interessados em $|h|$ pequeno, podemos supor $|h| \leq 1$. Da continuidade uniforme de f no intervalo fechado $[-N-1, N+1]$ segue então que $\sup_{|x| \leq N} |f(x-h) - f(x)| \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$. Escolhendo $|h|$ tão pequeno que $|f(x-h) - f(x)| \leq \varepsilon/2N$ com $x \in [-N, N]$, tem-se então

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-h) - f(x)| dx &\leq \int_{-N}^N |f(x-h) - f(x)| dx + \int_{|x| \geq N} |f(x-h)| dx + \int_{|x| \geq N} |f(x)| dx \\ &\leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

□

Definição 1.3. Se $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, definimos sua transformada de Fourier $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

Utilizaremos também a notação $\mathcal{F}(f)$ ao invés de $\hat{f}$, especialmente quando quisermos enfatizar a transformada enquanto operador entre espaços de funções ou for conveniente tipograficamente.

É claro que $\hat{f}$ está bem definida uma vez que $e^{-2\pi i x \xi}$ (com $\xi \in \mathbb{R}$) é elemento do círculo unitário. Contudo, nada garante que $\hat{f} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Essa situação não permite um aprofundamento da teoria ao menos que assumamos *a priori* estar lidando com elementos f de $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ tais que $\hat{f}$ também possui decrescimento moderado. Em 1950, L. Schwarz propôs uma classe mais refinada de funções que apresentam tal propriedade (como veremos mais adiante). O princípio fundamental que motiva a definição do espaço de Schwarz, assim nomeado por Grothendieck em sua homenagem, é o de que quanto mais rápido for o decaimento da transformada, mais suave é a função, e vice-versa. Esse fenômeno também ocorre com os coeficientes de Fourier (ver capítulo 3 de [7]). Definimos esse espaço logo abaixo.

1.1.2 O espaço de Schwarz

Definição 1.4. (Espaço de Schwarz) Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ possui decrescimento rápido quando é de classe $\mathcal{C}^\infty$ e para todos naturais k, l maiores ou iguais a zero, tem-se

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f^{(l)}(x)| < \infty,$$

onde $f^{(l)}$ denota a derivada de ordem l , com a convenção $f^{(0)} = f$. O espaço de Schwarz, denotado por $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, é o conjunto de todas as funções de decrescimento rápido.

Além da estrutura de espaço vetorial, é imediato ver que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ é fechado com relação à multiplicação por x e à derivação, de modo que

$$xf(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \text{ e } f^{(l)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \forall l \in \mathbb{N}$$

De $xf(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ podemos prontamente concluir que $P(x)f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, para todo polinômio real $P(x)$.

Nossa primeira proposição acerca de funções em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ reúne cinco propriedades elementares que utilizaremos frequentemente. O leitor deve notar, contudo, que com exceção do item (v), a demonstração valeria para funções de decrescimento moderado. A notação $f(x+h) \rightarrow \hat{f}(\xi)e^{2\pi i h \xi}$ significa que se definirmos $g(x) := f(x+h)$, então $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{2\pi i h \xi}$. O significado é análogo para os demais itens.

Proposição 1.5. Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então

- (i) $f(x+h) \rightarrow \hat{f}(\xi)e^{2\pi i h \xi}$, para todo $h \in \mathbb{R}$.
- (ii) $f(x)e^{-2\pi i x h} \rightarrow \hat{f}(\xi+h)$, para todo $h \in \mathbb{R}$.
- (iii) $f(\delta x) \rightarrow \delta^{-1}\hat{f}(\delta^{-1}\xi)$, para todo $\delta > 0$.
- (iv) $f'(x) \rightarrow 2\pi i \xi \hat{f}(\xi)$.
- (v) $-2\pi i x f(x) \rightarrow \frac{d}{d\xi} \hat{f}(\xi)$.

Demonstração:

(i)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+h)e^{-2\pi i \xi x} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+h)e^{-2\pi i \xi(x+h)} e^{2\pi i h \xi} dx \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+h)e^{-2\pi i \xi(x+h)} dx \right) e^{-2\pi i h \xi} \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi i \xi(x)} dx \right) e^{-2\pi i h \xi} \\ &= \hat{f}(\xi)e^{-2\pi i h \xi}. \end{aligned}$$

(ii) Segue imediatamente das definições.

(iii)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\delta x)e^{-2\pi i \xi x} dx = \delta \delta^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\delta x)e^{-2\pi i \xi x \delta \delta^{-1}} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \delta^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x \delta^{-1}} dx \\
 &= \delta^{-1} \hat{f}(\xi \delta^{-1}).
 \end{aligned}$$

Para obter a penúltima igualdade aplicamos (iii) da Proposição 1.1 sobre $g(x) := f(x) e^{-2\pi i \xi x \delta^{-1}}$.

(iv) Integrando por partes, temos

$$\int_{-N}^N f'(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = [f(x) e^{-2\pi i x \xi}]_{-N}^N + 2\pi i \xi \int_{-N}^N f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx$$

Tomando o limite quando $N \rightarrow \infty$ obtemos o resultado uma vez que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(v) Primeiro note que

$$\begin{aligned}
 \frac{\hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi)}{h} - (-2\pi i x f(\xi)) &:= \frac{1}{h} \left(\int f(x) e^{-2\pi i x (\xi + h)} dx - \int f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \right) \\
 &\quad - \int -2\pi i x f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \\
 &= \int f(x) e^{-2\pi i x \xi} \left(\frac{e^{-2\pi i x h} - 1}{h} + 2\pi i x \right) dx.
 \end{aligned}$$

Como f e xf possuem decrescimento rápido, para todo ε existe N grande tal que

$$\int_{|x| \geq N} f(x) dx \leq \varepsilon, \quad \int_{|x| \geq N} x f(x) dx \leq \varepsilon$$

Observe ainda que para $|x| \leq N$ existe h_0 tal que $|h| < h_0$ implica

$$\left| \frac{e^{-2\pi i x h} - 1}{h} + 2\pi i x \right| \leq \frac{\varepsilon}{N}$$

Isso segue de $\lim_{h \rightarrow 0} (e^{-2\pi i x h} - 1)/h = -2\pi i x$. De fato, pela identidade de Euler e os limites fundamentais, temos

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-2\pi i x h} - 1}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(-2\pi i x h) - 1}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{i \sin(-2\pi i x h)}{h} \\
 &= 0 + i(-2\pi x).
 \end{aligned}$$

Logo, para $|h| < h_0$ valem as estimativas

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi)}{h} - (-2\pi i x \widehat{f(\xi)}) \right| &\leq \int_{|x| \leq N} \left| f(x) e^{-2\pi i x \xi} \left(\frac{e^{-2\pi i x h} - 1}{h} + 2\pi i x \right) \right| dx \\
 &\quad + \int_{|x| \geq N} \left| f(x) e^{-2\pi i x \xi} \left(\frac{e^{-2\pi i x h} - 1}{h} + 2\pi i x \right) \right| dx \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{N} \int_{|x| \leq N} |f(x)| dx + \int_{|x| \geq N} |f(x)| \left| \frac{e^{-2\pi i x h} - 1}{h} \right| dx + \int_{|x| \geq N} |f(x) x| |2\pi i| dx \\
 &\leq 2A\varepsilon + B\varepsilon + 2\pi\varepsilon.
 \end{aligned}$$

A demonstração fica assim concluída.

□

Vistas essas propriedades, já estamos aptos a mostrar que a transformada de uma função em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ também possui decrescimento rápido. Na demonstração abaixo, por abuso de notação, se $g(x) := (\frac{d}{dx})^k (-2\pi i x)^l f(x)$, convencionamos escrever $\mathcal{F}(g)$ como $\mathcal{F}((\frac{d}{dx})^k (-2\pi i x)^l f(x))$, apesar do argumento entre parênteses nesse último caso, a rigor, ser um número complexo e não uma função. A notação é semelhante para as demais funções que aparecem na demonstração e nos será útil.

Teorema 1.6. *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Demonstração: Primeiro note que se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então $\hat{f}$ é limitada (por $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$). Para provar que para todos k e l inteiros não negativos a expressão $\xi^k (\frac{d}{d\xi})^l \hat{f}(\xi)$ é limitada, é suficiente então demonstrar a seguinte afirmação:

$$\frac{1}{(2\pi i)^k} \left(\frac{d}{dx} \right)^k (-2\pi i x)^l f(x) \longrightarrow \xi^k \left(\frac{d}{d\xi} \right)^l \hat{f}(\xi).$$

De fato, utilizando o item (iv) da Proposição anterior

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\left(\left(\frac{d}{dx}\right)^k (-2\pi i x)^l f(x)\right)(\xi) &:= \mathcal{F}\left(\frac{d}{dx}\left(\left(\frac{d}{dx}\right)^{k-1} (-2\pi i x)^l f(x)\right)\right)(\xi) \\
 &= 2\pi i \xi \mathcal{F}\left(\left(\frac{d}{dx}\right)^{k-1} (-2\pi i x)^l f(x)\right)(\xi).
 \end{aligned}$$

Iterando esse argumento outras $k-1$ vezes sobre a transformada que aparece na última igualdade acima, obtemos então

$$\mathcal{F}\left(\left(\frac{d}{dx}\right)^k (-2\pi i x)^l f(x)\right)(\xi) = (2\pi i \xi)^k \mathcal{F}\left((-2\pi i x)^l f(x)\right)(\xi). \quad (1.4)$$

Similarmente, pelo item (v) da Proposição anterior observe que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}((-2\pi ix)^l f(x))(\xi) &= \mathcal{F}((-2\pi ix)(-2\pi ix)^{l-1} f(x))(\xi) \\ &= \frac{d}{d\xi} \mathcal{F}((-2\pi ix)^{l-1} f(x))(\xi)\end{aligned}$$

Iterando $l - 1$ vezes o argumento para a transformada de $(-2\pi ix)^{l-1} f(x)$:

$$\mathcal{F}((-2\pi ix)^l f(x))(\xi) = \left(\frac{d}{d\xi}\right)^l \mathcal{F}(f(x))(\xi) \quad (1.5)$$

Substituindo (1.5) em (1.4), temos:

$$\mathcal{F}\left(\left(\frac{d}{dx}\right)^k (-2\pi ix)^l f(x)\right)(\xi) = (2\pi i\xi)^k \left(\frac{d}{d\xi}\right)^l \mathcal{F}(f(x))(\xi).$$

Como queríamos demonstrar. □

Um conjunto importante de funções do espaço de Schwarz são as Gaussianas definidas por $f(x) = e^{-\beta x^2}$, com $\beta > 0$. Essas funções são preciosas à teoria da probabilidade e suas aplicações mas não somente. Provaremos agora algumas de suas propriedades fundamentais que serão essenciais para o desenvolvimento da teoria da transformada.

Proposição 1.7. Para todo $\beta > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta x^2} dx = \left(\frac{\pi}{\beta}\right)^{1/2}.$$

Demonstração. A estratégia do cálculo é considerar o quadrado da integral de interesse para poder utilizar coordenadas polares:

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta x^2} dx\right)^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta x^2} dx\right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta y^2} dy\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\beta r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{\infty} 2\pi r e^{-\beta r^2} dr \\ &= \frac{2\pi}{2\beta} \int_0^{\infty} e^{-u} du\end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{\beta}$$

□

Teorema 1.8. Se $f(x) = e^{-\pi x^2}$, então $\hat{f}(\xi) = f(\xi)$. Em outras palavras, $e^{-\pi x^2}$ é sua própria transformada.

Demonstração: Por conveniência, estabelecemos a seguinte notação:

$$F(\xi) := \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

Pela Proposição anterior, $F(0) = 1$. Agora observe que pelos itens (iv) e (v) da Proposição 1.5, podemos concluir que

$$\begin{aligned} F'(\xi) &\stackrel{(v)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} (-2\pi i x) f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \\ &= i \int_{-\infty}^{\infty} (-2\pi x e^{-\pi x^2}) e^{-2\pi i x \xi} dx \\ &= i \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \\ &:= i \hat{f}'(\xi) \\ &\stackrel{(iv)}{=} i(2\pi i \xi) \hat{f}(\xi) \\ &= -2\pi \xi F(\xi). \end{aligned}$$

Assim, se $G(\xi) := F(\xi) e^{\pi \xi^2}$, então $G'(\xi) = -2\pi \xi F(\xi) e^{\pi \xi^2} + 2\pi \xi F(\xi) e^{\pi \xi^2} = 0$. Destarte, G é constante com $G(0) = F(0) e^{\pi \cdot 0} = 1$. Portanto, $F(\xi) e^{\pi \xi^2} = G(\xi) = 1$, como queríamos.

□

Outra demonstração elementar do Teorema 1.8 pode ser obtida utilizando o Teorema de Cauchy em análise complexa (ver exemplo 1, p.42, em [8]).

Corolário 1.9. Se $\delta > 0$ e $K_\delta(x) = \delta^{-1/2} e^{-\pi x^2/\delta}$, então $\hat{K}_\delta(\xi) = e^{-\pi \delta \xi^2}$.

Demonstração: Defina $f(x) := \delta^{-1/2} e^{-\pi x^2}$. Daí, $\hat{f}(x) = \delta^{-1/2} e^{-\pi x^2}$. Note que $K_\delta(x) = f(\delta^{-1/2} x)$. Dessa forma, pelo item (iii) da Proposição 1.5, temos

$$\begin{aligned} \hat{K}_\delta(\xi) &= (\delta^{-1/2})^{-1} \hat{f}((\delta^{-1/2})^{-1} \xi) \\ &= \delta^{1/2} \delta^{-1/2} e^{-\pi (\delta^{1/2} \xi)^2} \\ &= e^{-\pi \delta \xi^2}. \end{aligned}$$

□

Teorema 1.10. A coleção $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ é uma família de núcleos de convolução quando $\delta \rightarrow 0$.

Demonstração: As três propriedades que definem os núcleos de convolução em nosso contexto são

- (i) $\int_{-\infty}^{\infty} K_\delta(x) dx = 1$.
- (ii) $\int_{-\infty}^{\infty} |K_\delta(x)| dx \leq M$.
- (iii) $\forall \eta > 0, \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{|x|>\eta} |K_\delta(x)| dx = 0$.

Como K_δ é positiva para todo $\delta > 0$, (i) implica (ii). Note que $\hat{K}_\delta(0) := \int_{-\infty}^{\infty} K_\delta(x) dx$. Portanto, pelo corolário, $\int_{-\infty}^{\infty} K_\delta(x) dx = 1$. Para provar (iii), realizamos a mudança de variáveis $y = x/\delta^{1/2}$:

$$\int_{|x|>\eta} |K_\delta(x)| dx = \int_{|x|>\eta} \delta^{-1/2} e^{-\pi x^2/\delta} dx = \int_{|y|>\eta/\delta^{1/2}} e^{-\pi y^2} dy.$$

Tomando o limite quando δ tende a zero nos dá o resultado.

□

A definição e o corolário a seguir esclarecem o termo "núcleo de convolução".

Definição 1.11. Se $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, a convolução $f * g$ é a função definida por

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy.$$

Corolário 1.12. Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então $(f * K_\delta)(x) \rightarrow f(x)$ uniformemente quando $\delta \rightarrow 0$.

Demonstração: Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, para todo $\varepsilon > 0$ existe $R > 0$ grande o suficiente tal que se $|x| \geq R$, então $|f(x)| \leq \varepsilon$. Além disso, f é uniformemente contínua no compacto $[-R, R]$, ou seja, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\eta > 0$ tal que para todo $x, y \in [-R, R]$ se $|x - y| \leq \eta$, então $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Para o caso em que $x \in [-R, R]$ e $|y| > R$, vale $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(R)| + |f(R) - f(y)| \leq \varepsilon + |f(R)| + |f(y)| \leq 3\varepsilon$.

Agora observe que

$$\begin{aligned} (f * K_\delta)(x) - f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_\delta(t)f(x-t)dt - f(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} K_\delta(t)f(x-t)dt - \int_{-\infty}^{\infty} K_\delta(t)f(x)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} K_\delta(t)[f(x-t) - f(x)]dt \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
 |(f * K_\delta)(x) - f(x)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} K_\delta(t) |f(x-t) - f(x)| dt \\
 &= \int_{|t|>\eta} K_\delta(t) |f(x-t) - f(x)| dt + \int_{|t|\leq\eta} K_\delta(t) |f(x-t) - f(x)| dt \\
 &\leq B \int_{|t|>\eta} K_\delta(t) dt + \int_{|t|\leq\eta} K_\delta(t) |f(x-t) - f(x)| dt \\
 &\leq B \int_{|t|>\eta} K_\delta(t) dt + 3\varepsilon \int_{|t|\leq\eta} K_\delta(t) dt \\
 &\leq B \int_{|t|>\eta} K_\delta(t) dt + 3\varepsilon
 \end{aligned}$$

Pela terceira propriedade dos bons núcleos, obtemos então o resultado fazendo $\delta \rightarrow 0$. $\square$

Com pequenos ajustes na definição do núcleo de convolução para se adequar ao ambiente, resultados de convergência análogos a esse ocorrem em análise da série de Fourier (ver Teorema 4.1 em [7], e os exemplos do núcleo de Fejér e núcleo de Poisson). A demonstração usual do Teorema da aproximação de Weierstrass também faz uso dessas propriedades.

1.1.3 A Inversão de Fourier

Antes de prosseguirmos para o nosso primeiro grande Teorema, para conveniência do leitor, reunimos aqui os principais fatos sobre integrais de Riemann em $\mathbb{R}^n$ que utilizaremos durante o restante do texto. As ferramentas que precisamos são os análogos do Teorema da Convergência Dominada e do Teorema de Fubini em teoria da medida mas que sejam válidos para integrais de Riemann.

Teorema 1.13. *(Convergência Dominada de Arzelà) Seja (f_n) uma sequência de funções Riemann integráveis definidas em um intervalo $[a, b]$ e que converge, também em $[a, b]$, para uma função Riemann integrável f . Se existe uma constante $M > 0$ satisfazendo $|f_n(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$ e todo n natural, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx = 0$. Em particular,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Teorema 1.14. *Seja f uma função contínua definida em um retângulo fechado $R \subset \mathbb{R}^n$. Suponha $R = R_1 \times R_2$, com $R_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$, $R_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ e $n = n_1 + n_2$. Se $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$, então $F(x_1) : \int_{R_2} f$ é contínua em R_1 . Além disso,*

$$\int_R f(x)dx = \int_{R_1} \left(\int_{R_2} f(x_1, x_2)dx_2 \right) dx_1.$$

Nosso principal interesse, contudo, reside em integrais impróprias no $\mathbb{R}^n$. Sendo assim, precisamos nos restringir a uma classe de funções para a qual faça sentido definir o limite

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{Q_N} f(x)dx := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx,$$

onde Q_N é um cubo n -dimensional de lado N centrado na origem. Para tanto, generalizamos o conceito de decrescimento moderado do início do capítulo:

Definição 1.15. Uma função contínua f definida no $\mathbb{R}^n$ possui decrescimento moderado se existe constante $A > 0$ tal que para todo x em $\mathbb{R}^n$

$$|f(x)| \leq \frac{A}{1 + |x|^{d+1}}.$$

Utilizando o Teorema 1.14, podemos obter uma versão adaptada do Teorema de Fubini para integrais impróprias de Riemann:

Teorema 1.16. *Seja f uma função contínua definida em $\mathbb{R}^n$ com decrescimento moderado. Se n_1 e n_2 são naturais tais que $n_1 + n_2 = n$, então*

$$F(x_1) = \int_{\mathbb{R}^{n_2}} f(x_1, x_2)dx_2$$

possui decrescimento moderado, e

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^{n_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_2}} f(x_1, x_2)dx_2 \right) dx_1.$$

Um corolário imediato é que podemos calcular a integral imprópria no espaço de funções de decrescimento moderado iteradamente.

As primeiras demonstrações elementares do Teorema da Convergência Dominada de Arzelà foram obtidas em [4] e [3]. A verificação dos Teoremas do tipo Fubini pode ser encontrada no apêndice de [7]. Daqui em diante, sempre que derivarmos sob o sinal da integral, realizarmos uma mudança na ordem da integração ou escrevermos integrais de maneira iterada, estaremos empregando os resultados acima (mesmo quando não mencionados explicitamente).

Retornamos agora à teoria da transformada com uma consequência do Teorema 1.16. Na sequência provamos a célebre inversão de Fourier entre uma função e sua transformada.

Proposição 1.17. (Fórmula da multiplicação) Se $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)g(y)dy.$$

Demonstração: Defina $F(x, y) := f(x)g(y)e^{-2\pi ixy}$. Como $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, F é contínua e possui decaimento moderado em $\mathbb{R}^2$. Definindo então

$$F_1(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(y)e^{-2\pi ixy}dy = f(x)\hat{g}(x),$$

$$F_2(y) := \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, y)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(y)e^{-2\pi ixy}dx = \hat{f}(y)g(y),$$

pelo Teorema 1.16, tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^2} F(x, y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)g(y)dy$$

□

Teorema 1.18. (Inversão de Fourier) Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i x \xi}d\xi.$$

Demonstração: Primeiro mostraremos que

$$f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)d\xi.$$

Defina $g(x) := e^{-\pi x^2}$ e $G_\delta(x) := e^{-\pi \delta x^2} = g(\delta^{1/2}x)$. Assim, pelo item (iii) da Proposição (1.5), temos

$$\hat{G}_\delta(\xi) = (\delta^{1/2})^{-1}\hat{g}((\delta^{1/2})^{-1}\xi) = \delta^{-1/2}g(\delta^{-1/2}\xi) = \delta^{-1/2}e^{-\pi \delta^{-1}\xi^2} = K_\delta(\xi).$$

Destarte, pela fórmula da multiplicação

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)K_\delta(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)G_\delta(x)dx.$$

Visto isso, afirmamos agora que $\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)K_\delta(x)dx = f(0)$. De fato, para todo $\varepsilon > 0$, vale

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)K_\delta(x)dx - f(0) \right| &\leq \left| \int_{|x|>\eta} f(x)K_\delta(x)dx \right| + \left| \int_{|x|\leq\eta} f(x)K_\delta(x)dx - f(0) \right| \\ &= \left| \int_{|x|>\eta} f(x)K_\delta(x)dx \right| + \left| \int_{|x|\leq\eta} f(x)K_\delta(x)dx - \int_{-\infty}^{+\infty} K_\delta(x)f(0)dx \right| \\ &= \left| \int_{|x|>\eta} f(x)K_\delta(x)dx \right| \\ &\quad + \left| \int_{|x|\leq\eta} f(x)[f(x) - f(0)]dx - f(0) \int_{|x|>\eta} K_\delta(x)dx \right| \end{aligned}$$

$$\leq M\varepsilon + \varepsilon + f(0)\varepsilon,$$

onde M é uma cota superior para f . Para obter a última desigualdade é suficiente escolher $\eta > 0$ tal que se $|x| \leq \eta$, então $|f(x) - f(0)| \leq \varepsilon$ e tender δ a zero.

Provado o limite acima e utilizando o Teorema da Convergência Dominada de Arzela para integrais de Riemann, podemos concluir a primeira etapa da demonstração:

$$f(0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) G_{\delta}(\xi) d\xi = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) G_{\delta}(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Provado o resultado para $x = 0$, o caso geral segue do item (i) da Proposição (1.5). Defina $F(y) := f(y + x)$. Daí,

$$f(x) = F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{F}(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi.$$

□

Corolário 1.19. O operador Transformada $\mathcal{F}$ é uma bijeção sobre o espaço de Schwarz e sua inversa $\mathcal{F}^*$ é dada por $\mathcal{F}^*(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi$.

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Calculemos $\mathcal{F}(\mathcal{F}^*(f))$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathcal{F}^*(f))(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}^*(f)(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(-x) e^{-2\pi i x \xi} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(x) e^{2\pi i x \xi} dx \\ &= f(\xi). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\mathcal{F}^*(\mathcal{F}(f))(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi = f(x).$$

□

Acabamos de ver que o operador transformada é um automorfismo em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, mas, além disso, veremos que também preserva a norma dada por

$$\|f\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad (1.6)$$

a qual se trata da norma induzida pelo produto interno hermitiano usual

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx. \quad (1.7)$$

Esse resultado é conhecido como a fórmula de Plancherel e é análogo à identidade de Parseval para séries de Fourier.

1.1.4 A Fórmula de Plancherel

Iniciamos provando três propriedades fundamentais das convoluções.

Proposição 1.20. Se $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então:

- (i) $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
- (ii) $f * g = g * f$.
- (iii) $\widehat{(f * g)}(\xi) = \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi)$.

Demonstração: (i) Primeiro afirmamos que se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então

$$\sup_x |x|^l |f(x - y)| \leq A_l (1 + |y|)^l, \forall l \in \mathbb{N}, \quad (1.8)$$

onde A_l é uma constante que depende apenas de l . Para provar essa afirmação, consideramos separadamente os casos $|x| \leq 2|y|$ e $|x| \geq 2|y|$. Por um lado, temos:

$$\sup_{|x| \leq 2|y|} |x|^l |f(x - y)| \leq \sup_{|x| \leq 2|y|} (2|y|)^l |f(x - y)| = 2^l |y|^l \sup_{|x| \leq 2|y|} |f(x - y)|.$$

Por outro lado, como $|x| \geq 2|y|$ implica $|x| \leq 2|x - y|$, obtemos também que

$$\sup_{|x| \geq 2|y|} |x|^l |f(x - y)| \leq 2^l \sup_{|x| \geq 2|y|} |x - y|^l |f(x - y)|.$$

Os supremos existem porque g possui decrescimento rápido. Podemos agora concluir a afirmação. De fato,

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^l |f(x - y)| &\leq \max\{2^l |y|^l \sup_{|x| \leq 2|y|} |f(x - y)|, 2^l \sup_{|x| \geq 2|y|} |x - y|^l |f(x - y)|\} \\ &\leq \max\{2^l |y|^l, 2^l\} \max\{\sup_{|x| \leq 2|y|} |f(x - y)|, \sup_{|x| \geq 2|y|} |x - y|^l |f(x - y)|\} \\ &\leq (2^l |y|^l + 2^l) \max\{\sup_{|x| \leq 2|y|} |f(x - y)|, \sup_{|x| \geq 2|y|} |x - y|^l |f(x - y)|\} \\ &= 2^l \max\{\sup_{|x| \leq 2|y|} |f(x - y)|, \sup_{|x| \geq 2|y|} |x - y|^l |f(x - y)|\} (1 + |y|^l) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq 2^l \max\left\{ \sup_{|x| \leq 2|y|} |f(x-y)|, \sup_{|x| \geq 2|y|} |x-y|^l |f(x-y)| \right\} (1+|y|)^l \\ &= A_l (1+|y|)^l. \end{aligned}$$

A partir da afirmação, temos o seguinte:

$$\begin{aligned} \sup_x |x^l (f * g)(x)| &\leq \sup_x \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^l |f(x-y)| |g(y)| dy \\ &\leq A_l \int_{-\infty}^{+\infty} (1+|y|)^l |g(y)| dy < \infty. \end{aligned}$$

Uma vez que para todo k natural $(\frac{d}{dx})^k (f * g)(x) = ((\frac{d}{dx})^k f * g)(x)$ e $(\frac{d}{dx})^k f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, a demonstração de (i) está concluída. Para justificar a primeira asserção, derive sob o sinal da integral para $k = 1$ (isso pode ser feito pois $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$) e itere o mesmo argumento para k genérico.

(ii) A comutatividade é obtida a partir das mudanças de variáveis $y \rightarrow -y$ e $x+y \rightarrow u$:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y)g(-y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)du = (g * f)(x).$$

(iii) Considere $F(x, y) := f(y)g(x-y)e^{-2\pi i x \xi}$ e defina ainda

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)e^{-2\pi i x \xi} dy, \quad F_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

Observe agora que $F_1(x) = e^{-2\pi i x \xi} (f * g)(x)$ e, pelo item (i) da Proposição 1.5, $F_2(y) = f(y)e^{-2\pi i y \xi} \hat{g}(\xi)$. Pelo Teorema 1.16, obtemos então

$$\int_{\mathbb{R}^2} F(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} F_1(x) dx = \int_{\mathbb{R}} F_2(y) dy,$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}} (f * g)(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i y \xi} \hat{g}(\xi) dy,$$

como queríamos mostrar. □

Seja $\|\cdot\|$ a norma definida em (1.6). Assim, enunciamos

Teorema 1.21. (Plancherel) Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então $\|\hat{f}\| = \|f\|$.

Demonstração. Defina $f^b(x) := \overline{f(-x)}$ e observe que $\hat{f}^b(\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$. De fato,

$$\begin{aligned}\hat{f}^b(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(-x)} e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(y)} e^{2\pi i y \xi} dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(y) e^{-2\pi i y \xi}} dy = \overline{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-2\pi i y \xi} dy \right)} \\ &= \overline{\hat{f}(\xi)}.\end{aligned}$$

Daí,

$$\widehat{f * f^b}(\xi) = \hat{f}(\xi) \hat{f}^b(\xi) = \hat{f}(\xi) \overline{\hat{f}(\xi)} = |\hat{f}(\xi)|^2$$

Portanto, por um lado, temos

$$(f * f^b)(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-y) f^b(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(-y)|^2 dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|^2 dy.$$

Por outro, utilizando a inversão de Fourier e o valor de $\widehat{f * f^b}(\xi)$ calculado acima:

$$(f * f^b)(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f * f^b}(\xi) e^0 d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Isso conclui a demonstração. □

1.2 Extensão para funções no $\mathbb{R}^n$

Uma vez definida a generalização apropriada do espaço de Schwarz para funções no $\mathbb{R}^n$, veremos que a extensão dos resultados da seção anterior para esse ambiente não exige novas ideias. Quando os argumentos não são formas iteradas dos estudados anteriormente, envolvem no máximo pequenos ajustes na notação e domínio das funções. Reunimos os principais resultados na demonstração do Teorema 1.26.

Iniciamos então apresentando a notação necessária para definir o espaço de Schwarz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dado um multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ de inteiros não negativos e $x \in \mathbb{R}^n$, definimos o monômio $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$. Definimos também o operador diferencial $(\partial \backslash \partial x)^\alpha$ por

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

onde $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ é a ordem do multi-índice. Dito isso, o espaço de Schwarz

para funções do $\mathbb{R}^n$ é dado por

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} : f \in C^\infty, \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\beta f(x) \right| < \infty \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n \right\}$$

Agora podemos então definir a transformada de Fourier $\hat{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ de funções f em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx,$$

onde $\langle \cdot \rangle$ denota o produto interno canônico em $\mathbb{R}^n$.

Um grupo importante de simetrias que se torna mais "visível" em dimensões maiores que 1 são as rotações. Faremos uso frequente delas ao lidar com a transformada de Radon no capítulo 2 e incluímos novos resultados envolvendo-as. Realizando mudanças de variáveis, temos as seguintes relações para translações, dilatações e rotações:

- (a) $\int_{\mathbb{R}^n} f(x+h) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$, para todo $h \in \mathbb{R}^n$.
- (b) $\delta^n \int_{\mathbb{R}^n} f(\delta x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$, para todo $h \in \mathbb{R}^n$, para todo $\delta > 0$.
- (c) $\int_{\mathbb{R}^n} f(R(x)) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$, para todo $h \in \mathbb{R}^n$, para toda rotação R .

Utilizando essas simetrias, provamos:

Proposição 1.22. Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então

- (i) $f(x+h) \longrightarrow \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot h}$, para todo $h \in \mathbb{R}^n$.
- (ii) $f(x) e^{-2\pi i x h} \longrightarrow \hat{f}(\xi + h)$, para todo $h \in \mathbb{R}^n$.
- (iii) $f(\delta x) \longrightarrow \delta^{-n} \hat{f}(\delta^{-1} \xi)$, para todo $\delta > 0$.
- (iv) $\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha f(x) \longrightarrow (2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$, para todo multi-índice α .
- (v) $(-2\pi i x)^\alpha f(x) \longrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right)^\alpha \hat{f}(\xi)$, para todo multi-índice α .
- (vi) $f(Rx) \longrightarrow \hat{f}(R\xi)$, se R é rotação.

Demonstração. A demonstração das cinco primeiras afirmações é inteiramente análoga a da Proposição 1.5, com a única observação de que, a menos da mudança no domínio, os itens (iv) e (v) são formas iteradas das afirmações daquela Proposição. Provamos (vi). Seja R uma rotação em $\mathbb{R}^n$. Realizando a mudança de variável $y = Rx$ e lembrando que $|\det(R)| = 1$, calcula-se

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(Rx) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i R^{-1}y \cdot \xi} |det(R)| dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i y \cdot R\xi} dy = \hat{f}(R\xi).$$

□

Corolário 1.23. O operador transformada de Fourier leva funções de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. A observação chave (que já foi formalizada em detalhes na demonstração do Teorema 1.6) é a de que a transformada intercambia derivadas com multiplicações por monômios através do fator $2\pi i$ (itens (iii) e (iv) acima). Dessa maneira, para todos multi-índices α e β

$$(2\pi i)^{-\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha (-2\pi i x)^\beta f(x) \longrightarrow \xi^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\beta \hat{f}(\xi).$$

□

Exploramos um pouco mais a relação entre a transformada e as rotações no próximo corolário.

Definição 1.24. Uma função f definida no $\mathbb{R}^n$ é dita radial se existe uma função f_0 definida para reais $u \geq 0$ tal que $f(x) = f_0(|x|)$. Equivalentemente, uma função é radial se $f(Rx) = f(x)$ para toda rotação R .

Corolário 1.25. A transformada de Fourier de funções radiais são também radiais.

Demonstração. Se $f(Rx) = f(x)$ para toda rotação R , pelo item (vi), $\hat{f}(R\xi) = \hat{f}(\xi)$. □

Teorema 1.26. Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi.$$

Ademais,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx.$$

Demonstração. Passo 1. Mostramos que $e^{-\pi|x|^2}$ é sua própria transformada.

Provamos por indução em n . O caso $n = 1$ foi feito no capítulo anterior. No caso indutivo, vê-se que

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{-\pi|x|^2} e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{-\pi x_{n+1}^2} e^{-2\pi i x_{n+1} \cdot \xi_{n+1}} e^{-\pi|(x_n, \dots, x_1)|^2} e^{-2\pi i(x_n, \dots, x_1) \cdot (\xi_n, \dots, \xi_1)} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x_{n+1}^2} e^{-2\pi i x_{n+1} \cdot \xi_{n+1}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi |(x_n, \dots, x_1)|^2} e^{-2\pi i (x_n, \dots, x_1) \cdot (\xi_n, \dots, \xi_1)} d(x_n, \dots, x_1) \right) dx_{n+1} \\
 &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x_{n+1}^2} e^{-2\pi i x_{n+1} \cdot \xi_{n+1}} e^{-\pi |(\xi_n, \dots, \xi_1)|^2} dx_{n+1} \\
 &= e^{-\pi \xi_{n+1}^2} e^{-\pi |(\xi_n, \dots, \xi_1)|^2} \\
 &= e^{-\pi |\xi|^2}.
 \end{aligned}$$

Pelo item (iii) da Proposição (1.22), aplicado com a constante $\delta^{1/2}$ e $f(x) := e^{-\pi|x|^2}$, tem-se

$$\hat{f}(\delta x) = \widehat{e^{-\pi\delta|x|^2}} = \delta^{-n/2} \widehat{e^{-\pi|x|^2/\delta}} = \delta^{-n/2} e^{-\pi|x|^2/\delta}.$$

Passo 2: Com o mesmo argumento do capítulo anterior, mostra-se então que $K_\delta(x) := \delta^{-n/2} e^{-\pi|x|^2/\delta}$ é uma família de núcleos de convolução em $\mathbb{R}^n$ (cuja definição é inteiramente análoga a do caso real).

Passo 3: A fórmula da multiplicação para funções $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é demonstrada aplicando o Teorema 1.16 à função em $\mathbb{R}^{2n}$ definida por $F(x, y) = f(x)g(y)e^{-2\pi i x \cdot y}$, com $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Passo 4: Prova-se a inversão de Fourier usando os resultados dos passos anteriores. Na demonstração da subseção anterior, é suficiente trocar $\mathbb{R}$ por $\mathbb{R}^n$ no domínio de integração. Segue então que a transformada é uma bijeção em $\mathbb{R}^n$.

Passo 5: Prova-se que a convolução $(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy$ de funções $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ também pertence a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, comutam, e sua transformada é o produto das transformadas de f e g . Para ver isso, note que as estimativas que realizamos na demonstração da proposição 1.20 continuam.

Passo 6: Plancherel é obtido utilizando a inversão de Fourier e as propriedades da convolução (passos 4 e 5) sem qualquer modificação no argumento da subseção anterior (considerando, claro, que o domínio das funções lá definidas agora é tido como $\mathbb{R}^n$ e o produto interno é utilizado no expoente do número de Euler).

□

Capítulo 2

Aplicações

Neste capítulo abordaremos quatro aplicações da teoria construída até então. Primeiro, provaremos a fórmula da soma de Poisson, a qual estabelece uma relação entre os coeficientes e a transformada de Fourier por meio da periodização de funções do espaço de Schwarz. Essa fórmula poderia naturalmente ter sido incluída no capítulo 1, mas dada a importância das periodizações em outras aplicações e devido ao fato de não termos lidado com as séries de Fourier no presente texto, optamos por incluí-las aqui. Na sequência, definimos as funções Theta, Gama, e Zeta, e, após estabelecer uma identidade que as relaciona, aplicamos a fórmula de Poisson e a Gaussiana para mostrar duas de suas propriedades fundamentais.

Nossa terceira aplicação é o Princípio da Incerteza de Heisenberg, um dos resultados fundamentais da física moderna, que foi originalmente descoberto na mecânica quântica, mas que pode ser visto também como a manifestação de uma relação geral de não localidade entre uma função e sua transformada. Apresentamos aqui o enunciado matemático desse resultado e discutimos brevemente sua relação com a física. Por último, tratamos da formulação do problema de reconstrução e unicidade para a chamada transformada de Radon (relacionado com a reconstrução de imagem) e o resolvemos para o caso de dimensão três. A solução desse tipo de problema levou ao melhoramento das tomografias computadorizadas (CAT scans).

2.1 A Fórmula da soma de Poisson

Teorema 2.1. (*Fórmula da soma de Poisson*) Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}.$$

Em particular,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n).$$

Demonstração. Como as funções em ambos os lados da equação são contínuas (pois são limites uniformes de funções contínuas) e periódicas (com período 1), é suficiente mostrar que seus coeficientes de Fourier coincidem e então evocar a unicidade dos mesmos. A função do lado direito já foi definida no formato da série de Fourier, e, de fato, temos:

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{-2\pi i n x} \right) e^{-2\pi i m x} dx = \int_0^1 \hat{f}(m) e^{-4\pi i m y} dy = \hat{f}(m).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) \right) e^{-2\pi i m x} dx &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(x+n) e^{-2\pi i m x} dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} f(y) e^{-2\pi i m y} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{2\pi i m y} dy \\ &= \hat{f}(m). \end{aligned}$$

□

A periodização de funções é uma técnica importante na área de processamento de sinais. Nesse contexto, a fórmula de Poisson configura uma ferramenta útil para lidar com uma classe considerável de funções. Veremos, já em seguida, uma de suas aplicações em análise.

2.2 Funções Gama, Teta, e Zeta

Desconsiderando questões de convergência, podemos definir formalmente as funções Gama, Teta e Zeta por:

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx, \quad \vartheta(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 s}, \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}.$$

Para todo $s > 1$ real, as três funções estão relacionadas pela seguinte identidade:

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \frac{1}{2} \int_0^\infty t^{s/2-1}(\vartheta(t) - 1)dt. \quad (2.1)$$

Vejamos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^\infty t^{s/2-1}(\vartheta(t) - 1)dt &= \int_0^\infty t^{s/2-1} \left(\sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t} \right) dt \\ &= \sum_{n=1}^\infty \left(\int_0^\infty t^{s/2-1} e^{-\pi n^2 t} dt \right) \\ &= \sum_{n=1}^\infty \left(\int_0^\infty (\pi n^2)^{-1} \left(\frac{x}{\pi n^2} \right)^{s/2-1} e^{-x} dx \right) \\ &= \sum_{n=1}^\infty \left(\int_0^\infty (\pi n^2)^{-s/2} x^{s/2-1} e^{-x} dx \right) \\ &= \pi^{-s/2} \sum_{n=1}^\infty (n^{-s} \Gamma(s/2)) \\ &= \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s). \end{aligned}$$

A importância dessas funções em matemática e suas aplicações é inestimável. Utilizando a fórmula de Poisson e a Gaussiana, podemos estabelecer algumas propriedades elementares das funções Gama e Teta.

Teorema 2.2. $s^{-1/2}\vartheta(1/s) = \vartheta(s)$, para todo $s > 0$.

Demonstração: Se $f(x) := s^{-1/2}e^{-\pi x^2/s}$, pelo Corolário 1.9, já sabemos que $\hat{f}(\xi) = e^{-\pi s \xi^2}$. O resultado segue diretamente da fórmula da soma de Poisson. $\square$

Teorema 2.3. Se $s > 0$, então

(i) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ e $\Gamma(n+1) = n!$ para todo $n \geq 1$ natural.

(ii) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, e $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$.

Demonstração. (i) Para obter $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ é suficiente integrar por partes uma única vez. Em particular, $\Gamma(1+1) = 1\Gamma(1) = 1 \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$, $\Gamma(2+1) = 2\Gamma(2) = 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = 2!$. Indutivamente, $\Gamma((n+1)+1) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!$.

(ii) Realizando a mudança de variável $y = (x/\pi)^{1/2}$, obtêm-se:

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty e^{-x} x^{-1/2} dx = 2\sqrt{\pi} \int_0^\infty e^{-\pi y^2} dy = \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-\pi y^2} dy = \sqrt{\pi}.$$

Pelo item (i), segue então que $\Gamma(3/2) = \Gamma(1/2 + 1) = 1/2\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}/2$.

$\square$

2.3 O Princípio da Incerteza de Heisenberg

A formulação matemática do princípio é dada pela seguinte inequação envolvendo uma função e sua transformada de Fourier:

Teorema 2.4. *Se ψ é uma função em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ satisfazendo a condição normalizadora $\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(x)|^2 dx = 1$, então para todo $x_0, \xi_0 \in \mathbb{R}$ vale*

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} (x - x_0)^2 |\psi(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - \xi_0)^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq \frac{1}{16\pi^2}, \quad (2.2)$$

com igualdade se e somente se $\psi(x) = Ae^{-Bx^2}$, onde $B > 0$ e $|A|^2 = \sqrt{\frac{2B}{\pi}}$.

Demonstração. Primeiro afirmamos que se a inequação for válida para o caso $x_0 = \xi_0 = 0$, podemos deduzir sua forma geral do enunciado. De fato, assuma que a seguinte inequação seja satisfeita:

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq \frac{1}{16\pi^2} \quad (2.3)$$

Defina $f(x) := e^{-2\pi i x \xi_0} \psi(x + x_0)$, com $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Pelo item (ii) da Proposição 1.5, $\hat{f}(\xi) = \psi(\xi + \xi_0)$. Daí, aplicando a inequação 2.3 à função f e realizando as mudanças de variáveis $x \rightarrow x - x_0$ e $\xi \rightarrow \xi - \xi_0$ nas respectivas integrais, obtemos a inequação do enunciado. Demonstramos agora que (2.3) é satisfeita.

Integrando por partes e utilizando que para todo complexo z , vale $|z|^2 = z\bar{z}$, temos:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = - \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{d}{dx} |\psi(x)|^2 dx = - \int_{-\infty}^{\infty} (x\psi'(x)\overline{\psi(x)} + \overline{x\psi'(x)}\psi(x)) dx.$$

Assim, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtém-se

$$\begin{aligned} 1 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} (|x\psi'(x)\overline{\psi(x)}| + |x\overline{\psi'(x)}\psi(x)|) dx \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} |x||\psi'(x)||\psi(x)| dx \\ &\leq 2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\psi'(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Para concluir a demonstração da desigualdade, afirmamos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi'(x)|^2 dx = 4\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi.$$

De fato, pelo item (iv) da Proposição 1.5 e pela Fórmula de Plancherel, obtém-se

$$\begin{aligned} 4\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} |2\pi\xi \hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}'(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\psi'(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

No caso de igualdade, a equação deve valer também para Cauchy-Schwarz, que sabemos ocorrer se e somente se ψ' e $x\psi$ forem linearmente dependentes, ou seja, satisfizerem a equação diferencial $\psi'(x) = \beta x\psi(x)$ para alguma constante β . As únicas soluções dessa equação são da forma $\psi(x) = Ae^{\beta x^2/2}$. Certamente, se ψ é solução dessa EDO, temos $\frac{d}{dx} \frac{e^{\beta x^2/2}}{\psi(x)} = 0$; logo, a função é igual a uma constante e $\psi(x) = Ae^{\beta x^2/2}$. Como queremos que $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, é necessário que $\beta = -2B < 0$. Além disso, a hipótese de normalização exige que

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} |Ae^{-2Bx^2/2}|^2 dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2Bx^2} dx = |A|^2 \left(\frac{\pi}{2B} \right)^{1/2},$$

ou seja, $|A|^2 = \left(\frac{2B}{\pi} \right)^{1/2}$, como queríamos mostrar.

□

O resultado foi originalmente descoberto por W. Heisenberg nos estudos de mecânica quântica. Discutiremos concisamente abaixo sua motivação e o que representa em um modelo físico. Considere uma partícula (em escala atômica ou subatômica), digamos um elétron, se movendo em uma reta. A física quântica assume que existe uma função de estado quântico ψ que podemos assumir pertencer a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ e que, além de ser normalizada (i.e. $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$), satisfaz as duas seguintes leis (que estão simplificadas pela ausência de uma constante que comentaremos depois) (apud Stein e Shakarchi, pp.160-161):

- (I) A probabilidade de que a partícula esteja localizada no intervalo (a, b) é dada por $\int_a^b |\psi(x)|^2 dx$.
- (II) A probabilidade do momento linear da partícula pertencer ao intervalo (a, b) é $\int_a^b |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi$.

Assumindo essas propriedades e lembrando alguns conceitos fundamentais de probabilidade, poderemos entender o que a inequação nos diz em termos do modelo físico considerado (i.e. da posição de uma partícula em espaço unidimensional).

A *posição esperada* (ou valor esperado no contexto mais geral da probabilidade e estatística) de uma partícula é definida pela média ponderada de todas as possíveis posições:

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x)|^2 dx$$

A *incerteza* associada à posição esperada, ou *variância*, por sua vez, é definida por

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 |\psi(x)|^2 dx$$

Note que se $\frac{dI}{d\bar{x}} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x}) |\psi(x)|^2 dx = 0$, então recuperamos a definição de $\bar{x}$, significando que a posição esperada é o valor que minimiza a incerteza.

Considerando o que assumimos acima, o Princípio da Incerteza descrito na equação (2.2) poderia ser lido então como "o produto da incerteza da posição pela incerteza do momento linear (i.e. $\sigma_p^2 \sigma_m^2$) é maior ou igual a $1/16\pi^2$." Entretanto, a posição e o momento linear na formulação da mecânica quântica estão relacionados por um fator envolvendo a chamada constante de Planck h , que também é comumente escrita em sua forma reduzida $\hbar := h/2\pi$. Quando esse fator é levado em consideração na demonstração, aparece a pequena compensação h^2 abaixo:

$$\sigma_p^2 \sigma_m^2 \geq \frac{h^2}{16\pi^2}$$

Tomando a raiz em ambos os lados e reescrevendo a constante de Planck em sua forma reduzida, temos a forma clássica em termos do desvio padrão:

$$\sigma_p \sigma_m \geq \frac{\hbar}{2} \tag{2.4}$$

O Princípio da Incerteza de Heisenberg é muitas vezes evocado para endossar a interpretação de Copenhage, a qual se trata da perspectiva filosófica de mecânica quântica que gozou de um status quase ortodoxo no século passado. Entretanto, a teoria da onda piloto de DeBrogly-Bohm, utilizando-se de variáveis ocultas, está vinculada a uma interpretação determinística dos fenômenos quânticos. Apesar das duras críticas e resultados técnicos (e.g. desigualdades de Bell) que vão de encontro ao formalismo das variáveis ocultas, a questão filosófica mais geral que parece estar no cerne do debate entre essas interpretações é: se um fenômeno é inerentemente indeterminável, no sentido de que a única maneira de construir um modelo determinístico para ele seja assumindo informações cuja verificação é impossível, então podemos concluir que a natureza em si (do fenômeno) é não determinística? De todo modo, os resultados matemáticos, apesar de motivá-las, não são equivalentes às interpretações, que, por sua vez, estão essencialmente além do escopo da ciência.

2.4 A transformada de Radon e as tomografias computadorizadas

Em sua palestra do Nobel em Medicina e Fisiologia de 1979, A. Cormack conta (apud Stein e Shakarchi, p.175)¹:

Ocorreu-me que para melhorar o planejamento do tratamento, fazia-se necessário conhecer o coeficiente de atenuação de tecidos no corpo. Essa informação seria útil para propósitos de diagnóstico e constituiria um tomograma ou série de tomogramas. Tornou-se imediatamente evidente que o problema era matemático. Se um feixe fino de raios gama de intensidade I_0 incide sobre o corpo e a densidade resultante é I , então a quantidade mensurável g igual a $\log(I_0/I) = \int_L f ds$, onde f é o coeficiente de absorção variável ao longo da reta L . Dessa forma, se f é uma função de duas dimensões, e g é conhecida para todas as retas intersectando o corpo, a questão é, f pode ser determinada se g é conhecida? 14 anos se sucederam antes que eu soubesse que Radon havia resolvido o problema em 1917.

Nesta subseção, discorreremos acerca do problema descrito no excerto acima e o resolvemos para o caso mais simples de dimensão três. Iniciamos considerando um feixe bem fino de fótons de raio-X que incide sobre uma parte do corpo. Podemos modelar o feixe como uma reta e considerar uma secção planar contendo a região pela qual o feixe passou. Denote por I_0 a intensidade do feixe ao ser emitido e por I sua intensidade ao passar pela região do órgão. Assim, a seguinte relação física é conhecida:

$$I = I_0 e^{-\int_L \rho},$$

onde L denota o caminho percorrido pelo feixe (a reta), e ρ é chamado de coeficiente de atenuação (ou de absorção).

O coeficiente ρ deve ser compreendido como o grau de absorção dos fótons em função da região do objeto. Se um dado órgão ou objeto for bastante homogêneo (o que se traduz em ρ constante), imediatamente obteríamos uma ótima aproximação na expressão $I = I_0 e^{-d\rho}$, onde d é a distância percorrida pelo feixe no interior do objeto. Na prática, esse dificilmente é o caso, e o coeficiente de absorção está intimamente relacionado com propriedades físicas dos objetos (a exemplo da densidade) que, por sua vez, são indicadores de possíveis anormalidades como tumores.

¹Tradução nossa.

Uma vez que I e I_0 podem ser medidos, a informação nova obtida ao enviar um feixe por uma região é $\int_L \rho$. Como podemos enviar o feixe em diferentes direções, é possível obter amostras para outras retas L . Nesse contexto, definimos a transformada do raio-X de ρ , ou transformada de Radon em $\mathbb{R}^2$, por:

$$X(\rho)(L) = \int_L \rho.$$

A transformada de Radon associa então funções ρ , que assumiremos ser elementos do espaço de Schwarz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, a uma função $X(\rho)$ cujo domínio é o conjunto de todas as retas em $\mathbb{R}^2$. Vista a discussão anterior, nosso interesse é a determinação (ou reconstrução) de ρ a partir da coleta de dados (que nos fornece $\int_L \rho$). Matematicamente, podemos formular o problema de maneira precisa em duas partes:

Problema de unicidade: se $X(\rho) = X(\rho')$, então $\rho = \rho'$? Em outras palavras, a transformada é injetiva?

Problema de reconstrução: é possível obter uma fórmula para ρ em termos de $X(\rho)$?

A resposta para ambas as questões é positiva. A fórmula de reconstrução obtida na teoria geral é então combinada com técnicas de amostragem (selecionando apropriadamente um número finito de retas L para o momento do exame) e algoritmos que empregam o método da transformada rápida de Fourier (Fast Fourier Transform, ou FFT, em inglês) (ver capítulo 7 de [7]) para obter aproximações satisfatórias de ρ . Infelizmente, a solução desse importante caso de dimensão 2 constitui por si própria outro trabalho monográfico como este e, portanto, está fora de nosso escopo. Todavia, a solução do problema inteiramente análogo em dimensão três acaba sendo mais simples e o apresentaremos abaixo.

Definição 2.5. Dada uma função f em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, definimos sua transformada de Radon por:

$$\mathcal{R}(f)(P) = \int_P f,$$

onde P é um plano no espaço.

Fixados um número real t e um vetor γ na esfera unitária S^2 , definiremos o plano $\mathcal{P}_{t,\gamma}$ por:

$$\mathcal{P}_{t,\gamma} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x \cdot \gamma = t\}.$$

Dessa forma o plano fica parametrizado por um vetor γ normal a ele e por uma "distância" $|t|$ da origem no sentido de que $t\gamma \in \mathcal{P}_{t,\gamma}$. De fato, se $\gamma = (x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma)$ e definirmos um novo sistema de coordenadas (q, r, s) cuja origem é o ponto $t\gamma$, tem-se $qx_\gamma + ry_\gamma + sz_\gamma = 0 \Leftrightarrow (x - tx_\gamma)x_\gamma + (y - ty_\gamma)y_\gamma + (z - tz_\gamma)z_\gamma = 0 \Leftrightarrow (x, y, z) \cdot (x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma) = t$.

Fixado $\gamma \in \mathcal{S}^2$, seja $\{b_1, b_2, \gamma\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Assim, escreveremos unicamente pontos no espaço como $x = t\gamma + u$, com $u = u_1b_1 + u_2b_2$ e u_1, u_2 escalares. A definição que utilizaremos para integral utilizada na transformada de Radon é dada então por

$$\mathcal{R}(f)(t, \gamma) = \int_{\mathcal{P}_{t,\gamma}} f := \int_{\mathbb{R}^2} f(t\gamma + u_1b_1 + u_2b_2) du_1 du_2. \quad (2.5)$$

Nossa primeira proposição se encarregará de mostrar que a integral acima está bem definida.

Proposição 2.6. Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, então para cada γ fixado, o valor de $\int_{\mathcal{P}_{t,\gamma}} f$ independe da escolha dos vetores que formam uma base ortonormal com γ . Ademais,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\mathcal{P}_{t,\gamma}} f \right) dt = \int_{\mathbb{R}^3} f(x) dx.$$

Demonstração. Sejam $\{\gamma, b_1, b_2\}$ e $\{\gamma, b'_1, b'_2\}$ bases de $\mathbb{R}^3$ ortonormais e distintas, e denote por R a rotação no $\mathbb{R}^2$ tal que $R(e_1) = b'_1$ e $R(b_2) = b'_2$. Assim, realizando a mudança de variável $u' = R(u)$, obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{P}_{t,\gamma}} f &= \int_{\mathbb{R}^2} f(t\gamma + u_1b_1 + u_2b_2) du_1 du_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(R(t\gamma + u_1b_1 + u_2b_2)) du_1 du_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(t\gamma + u_1b'_1 + u_2b'_2) du_1 du_2. \end{aligned}$$

Agora tome R como sendo a rotação que associa a base canônica do $\mathbb{R}^3$ à $\{\gamma, e_1, e_2\}$. Dessa forma, calcula-se

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} f(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^3} f(R(x)) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} f(x_1\gamma + x_2b_1 + x_3b_2) dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\mathcal{P}_{t,\gamma}} f \right) dt. \end{aligned}$$

□

Fazemos agora uma última observação antes de iniciarmos a solução dos problemas de

unicidade e reconstrução. Como parametrizamos os planos do espaço utilizando elementos de $\mathbb{R} \times \mathcal{S}^2$, será relevante definir o espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^2)$ de funções f com a seguinte propriedade de Schwarz:

$$\sup_{t \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathcal{S}^2} |t|^k \left| \frac{\partial^l F}{\partial t^l}(t, \gamma) \right| < \infty, \text{ para todos inteiros } k, l \geq 0.$$

O Lema abaixo estabelece uma elegante relação entre a transformada de Radon e a transformada de Fourier e é a chave para a solução que buscamos.

Lema 2.7. Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, então $\mathcal{R}(f)(t, \gamma) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ para cada γ fixado. Além disso, se $\hat{f}$ denota a transformada tridimensional de f e $\hat{\mathcal{R}}(f)(s, \gamma)$ denota a transformada unidimensional de $\mathcal{R}(f)(t, \gamma)$, com t variando e γ fixado, a seguinte equação é estabelecida:

$$\hat{\mathcal{R}}(f)(s, \gamma) = \hat{f}(s\gamma).$$

Demonstração. Primeiro afirmamos que para todo inteiro positivo N , existe uma constante $A_N > 0$ (que depende de N) satisfazendo

$$(1 + |t|)^N (1 + |u|)^N |f(t\gamma + u)| \leq A_N \quad (2.6)$$

Como $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, para todo M natural existe $A_M > 0$ tal que

$$[1 + |t\gamma + u|^M] |f(t\gamma + u)| = [1 + (|t|^2 + |u|^2)^{M/2}] |f(t\gamma + u)| \leq A_M,$$

onde a primeira igualdade advém da ortogonalidade entre γ e u , e de $|\gamma| = 1$. Assim, se $|t| \geq 1$ e $|u| \geq 1$, tem-se

$$(1 + |t|)^N (1 + |u|)^N \leq (|t|^2 + |u|^2)^N (|t|^2 + |u|^2)^N$$

Logo, tomando $M = 4N$ na penúltima inequação, conclui-se que

$$(1 + |t|)^N (1 + |u|)^N |f(t\gamma + u)| \leq A_M.$$

O caso em que $|t| < 1$ ou $|u| < 1$ é imediato. Da afirmação, segue então que

$$(1 + |t|)^N |\mathcal{R}(f)(t, \gamma)| \leq (1 + |t|)^N \int_{\mathbb{R}^2} |f| du \leq \int_{\mathbb{R}^2} \frac{du}{(1 + |u|)^N}.$$

A integral da direita é finita a partir de $N = 3$. Como $\frac{d^k}{dt} \mathcal{R}(f)(t, \gamma) = \mathcal{R}(\frac{d^k}{dt} f)(t, \gamma)$, o mesmo argumento que empregamos para $\mathcal{R}(f)$ pode ser usado para provar que $(1 + |t|)^N |\frac{d^k}{dt} \mathcal{R}(f)(t, \gamma)| < \infty$, para todo k e N inteiros não negativos.

Mostramos agora a igualdade do enunciado. Denotando por $\{e_1, e_2, e_3\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^3$, temos:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{R}}(f)(s, \gamma) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\mathcal{P}_{t, \gamma}} f \right) e^{-2\pi i s t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^2} f(t\gamma + u_1 b_1 + u_2 b_2) du_1 du_2 \right) e^{-2\pi i s t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} f(t\gamma + u_1 b_1 + u_2 b_2) e^{-2\pi i s \gamma \cdot (t\gamma + u_1 b_1 + u_2 b_2)} du_1 du_2 dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} f(te_1 + u_1 e_2 + u_2 e_3) e^{-2\pi i s \gamma \cdot (te_1 + u_1 e_2 + u_2 e_3)} du_1 du_2 dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} f(x) e^{-2\pi i s \gamma \cdot x} dx.
\end{aligned}$$

Na terceira igualdade utilizamos que $\gamma \cdot (t\gamma + u) = t|\gamma|^2 = t$, enquanto que na penúltima desigualdade realizamos uma rotação que associa a base $\{\gamma, b_1, b_2\}$ à base canônica do $\mathbb{R}^3$. $\square$

A solução da unicidade segue como corolário:

Corolário 2.8. Se $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ e $\mathcal{R}(f) = \mathcal{R}(g)$, então $f = g$.

Demonstração. Aplicando o Lema anterior à diferença $f - g$, temos

$$0 = \hat{\mathcal{R}}(f) - \hat{\mathcal{R}}(g) = \hat{\mathcal{R}}(f - g)(s, \gamma) = \widehat{f - g}(s\gamma).$$

O resultado segue então da inversão de Fourier. $\square$

O próximo Teorema resolve o problema de reconstrução, mas antes precisamos introduzir um novo objeto que figura na fórmula final que permite reescrever uma dada f em termos de sua transformada de Radon. Para estabelecer as noções e notação apropriada, necessitamos ainda antes fazer uma breve revisão das coordenadas esféricas e polares em $\mathbb{R}^3$.

Realizando uma mudança de variáveis para coordenadas esféricas, lembramos que uma integral no $\mathbb{R}^3$ pode ser reescrita como

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x) dx = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty f(r \sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r \cos\theta) r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi.$$

Sejam $\gamma \in \mathcal{S}^2$ e g uma função definida nessa esfera. Escrevendo $\gamma = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$, fazemos sentido do elemento de superfície $d\sigma(\gamma)$ definindo

$$\int_{\mathcal{S}^2} g(\gamma) d\sigma(\gamma) := \int_0^{2\pi} \int_0^\pi g(\gamma) \sin\theta d\theta d\phi.$$

Dessa notação, combinando as duas equações, conclui-se então a seguinte forma em coordenadas polares:

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x) dx = \int_{S^2} \int_0^\infty f(r\gamma) r^2 dr d\sigma(\gamma). \quad (2.7)$$

Definição 2.9. Dada uma função $F \in \mathbb{R} \times \mathcal{S}^2$, definimos a *transformada dual de Radon* por

$$\mathcal{R}^*(F)(x) = \int_{S^2} F(x \cdot \gamma, \gamma) d\sigma(\gamma).$$

Observação Comentamos brevemente para o leitor com experiência em álgebra linear, mas apenas a título de curiosidade (pois não utilizaremos esta observação), o uso do termo 'dual' na definição acima. Denotando $V_1 = \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ e $V_2 = \mathbb{R} \times \mathcal{S}^2$, note que $\mathcal{R}$ é um operador de V_1 em V_2 e $\mathcal{R}^*$ vai de V_2 a V_1 . Definindo então os produtos internos Hermitianos de maneira usual, em V_1 e V_2 respectivamente, por

$$\langle F, G \rangle_1 := \int_{\mathbb{R}^3} f(x) \overline{g(x)} dx, \text{ e}$$

$$\langle F, G \rangle_2 := \int_{\mathbb{R}} \int_{S^2} F(t, \gamma) \overline{G(t, \gamma)} d\sigma(\gamma) dt,$$

é possível provar que $\langle \mathcal{R}f, F \rangle_1 = \langle f, \mathcal{R}^*F \rangle_2$. Isso nos diz que $\mathcal{R}^*$ é o operador adjunto desses espaços de Hilbert, o qual está relacionado com o operador dual (de V_2^* em V_1^*) pelos isomorfismos de Riesz.

Passamos agora a enunciar o principal resultado desta subseção. O símbolo Δ denota o operador Laplaciano.

Teorema 2.10. *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, então*

$$\Delta(\mathcal{R}^*\mathcal{R}(f)) = -8\pi^2 f.$$

Demonstração. Pelo Lema 2.7

$$\mathcal{R}(f)(t, \gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s\gamma) e^{2\pi i t s} ds.$$

Da definição do dual, segue então que

$$\mathcal{R}^*\mathcal{R}(f)(x) = \int_{S^2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s\gamma) e^{2\pi i x \cdot \gamma s} ds d\sigma(\gamma).$$

Antes de calcular o laplaciano do dual que acabamos de obter, fazemos duas observações. Primeiro, uma rápida computação direta fornece $\Delta(e^{2\pi i x \cdot \gamma s}) = (-4\pi^2 s^2) e^{2\pi i x \cdot \gamma s} |\gamma|^2 = (-4\pi^2 s^2) e^{2\pi i x \cdot \gamma s}$. Segundo, da simetria da esfera, é claro que

$$\int_{S^2} \int_{-\infty}^0 \hat{f}(s\gamma) e^{2\pi i x \cdot \gamma s} s^2 ds d\sigma(\gamma) = \int_{S^2} \int_0^{\infty} \hat{f}(s\gamma) e^{2\pi i x \cdot \gamma s} s^2 ds d\sigma(\gamma).$$

Destarte, diferenciando sob o sinal da integral, tem-se

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{R}^* \mathcal{R}(f)(x) &= \int_{S^2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s\gamma) (-4\pi^2 s^2) e^{2\pi i x \cdot \gamma s} ds d\sigma(\gamma) \\ &= -8\pi^2 \int_{S^2} \int_0^{\infty} \hat{f}(s\gamma) e^{2\pi i x \cdot \gamma s} s^2 ds d\sigma(\gamma) \\ &= -8\pi^2 \int_{\mathbb{R}^3} \hat{f}(y) e^{2\pi i x \cdot y} s^2 dy \\ &= -8\pi^2 f(x). \end{aligned}$$

Na penúltima igualdade utilizamos a fórmula das coordenadas polares em $\mathbb{R}^3$ e, na última, a inversão de Fourier.

□

Referências Bibliográficas

- [1] C.CHAO. *Introduction to Harmonic Analysis*, Chinese Academy of Sciences, 2016.
- [2] D.FIGUEIREDO. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1977.
- [3] J. LEWIN. *A Truly Elementary Approach to the Bounded Convergence Theorem*, The American Mathematical Monthly, **93** (1986),395-397.
- [4] W. LUXEMBURG. *Arzela's Dominated Convergence Theorem for the Riemann Integral*, The American Mathematical Monthly, **78** (1971),970-979.
- [5] L. SCHWARTZ. *Théorie des distributions*, Volume I. Hermann, Paris, 1950.
- [6] E. STEIN. *Singular integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, 1970.
- [7] E. STEIN E R. SHAKARCHI. *Fourier analysis: an introduction*, Princeton University Press, 2003.
- [8] E. STEIN E R. SHAKARCHI. *Complex analysis*, Princeton University Press, 2003.
- [9] E. STEIN E R. SHAKARCHI. *Real analysis: measure theory, integration, and Hilbert spaces*, Princeton University Press, 2005.