

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Uma Introdução à Geometria Riemanniana e a Equação de Yamabe

por

Carlos Augusto Romero Neto

Maio/2019
João Pessoa - PB

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Curso de Bacharelado em Matemática

Uma Introdução à Geometria Riemanniana e a Equação de Yamabe

por

Carlos Augusto Romero Neto

sob orientação do

Prof. Manassés Xavier de Souza

Monografia apresentada ao Corpo Docente do Programa de Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Maio/2019
João Pessoa - PB

Catálogo na publicação
Seção de Catálogo e Classificação

R763i Romero Neto, Carlos Augusto.

Uma Introdução à Geometria Riemanniana e a Equação de Yamabe / Carlos Augusto Romero Neto. - João Pessoa, 2019.

61 f. : il.

Orientação: Manassés Xavier de Souza.
Monografia (Graduação) - UFPB/CCEN.

1. Variedades Riemannianas. 2. Geometria Riemanniana.
3. Equação de Yamabe. 4. Análise Geométrica. I. de Souza, Manassés Xavier. II. Título.

UFPB/BC

Uma Introdução à Geometria Riemanniana e a Equação de Yamabe

por

Carlos Augusto Romero Neto

Monografia apresentada ao Corpo Docente do Programa de Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática.

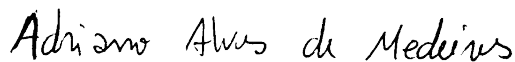
COMISSÃO EXAMINADORA



Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza - UFPB (Orientador)



Prof. Dr. Eraldo Almeida Lima Júnior - UFPB



Prof. Dr. Adriano Alves de Medeiros - UFPB

Maio/2019

Agradecimentos

- Ao Professor Manassés, por ter me orientado ao longo desses anos.
- Aos meus familiares, que sempre me apoiaram ao longo da minha trajetória acadêmica. Em especial, a meu pai Carlos, a minha mãe Ana e a minha irmã Raíssa, que fizeram meus dias muito melhores.
- A Professora Flávia, que foi uma verdadeira mãe acadêmica, que me consolou nos momentos difíceis da graduação e sempre me encorajou a continuar.
- Aos professores do Departamento de Matemática - UFPB;
- Aos meus amigos de graduação;
- Finalmente, gostaria de agradecer aos professores Adriano Alves de Medeiros e Eraldo Almeida Lima Júnior que aceitaram participar da banca, e assim, colaborar com este trabalho.

Resumo

Nosso objetivo neste trabalho é apresentar uma breve introdução às variedades riemannianas. Assim, desenvolvemos os conceitos mais básicos da geometria riemanniana, dando alguns exemplos simples para ilustrar os conceitos geométricos apresentados. Como aplicação final, mostraremos como obter a equação de Yamabe, a qual tem grande interesse na pesquisa atual da análise geométrica.

Palavras-Chave: Variedades Riemannianas, Geometria Riemanniana, Equação de Yamabe, Análise Geométrica.

Abstract

Our aim in this work is to give a short introduction to Riemannian manifolds. We develop the most basic concepts of Riemannian geometry, such as connections, geodesics and curvature, often giving some examples to illustrate the geometric concepts. As a final application of our study, we derive the Yamabe's equation which is of great interest in current research on geometric analysis.

Keywords: Riemannian manifolds, Riemannian geometry, Yamabe's equation, Geometric Analysis.

Conteúdo

1	Geometria Riemanniana - Parte 1	1
1.1	Variedades Diferenciáveis e Espaço Tangente	1
1.1.1	Exemplos adicionais	8
1.2	Métricas Riemannianas	12
1.3	Conexões afins	14
1.4	Conexões riemannianas	18
1.5	Geodésicas	21
1.5.1	O fluxo geodésico	21
1.5.2	Exemplos de Geodésicas	27
2	Geometria Riemanniana - Parte 2	28
2.1	Curvatura	28
2.1.1	Cálculo do tensor de curvatura na esfera S^2	33
2.1.2	Cálculo da Curvatura Escalar de S^2	34
2.2	Gradiente, Divergente e Laplaciano	35
2.2.1	Gradiente	35
2.2.2	Divergente	37
2.3	Laplaciano	40
2.3.1	Exemplos	41
3	O problema de Yamabe	43
3.1	O problema geométrico	43
3.2	Resultados auxiliares importantes	44

Introdução

Na Grécia Antiga, Euclides desenvolveu a Geometria Euclidiana, que foi essencial no nascimento da nossa intuição geométrica. Intuição esta que vem de nossa experiência sensorial com o mundo físico real. Observamos há muito tempo que temos três dimensões espaciais: altura, largura e comprimento. Surge daí a ideia abstrata do espaço euclidiano, ou seja, um espaço no qual identificamos seus objetos pelas coordenadas euclidianas reais. De simples observações sobre o mundo, foram descobertos outros fatos geométricos. Um deles é a maneira como medimos distâncias entre pontos, o que deu origem ao que chamamos de métrica euclidiana. Isso decorre da observação experimental de que o menor caminho entre dois pontos é dado por uma reta. Ocorre, no entanto, um fenômeno muito curioso quando lidamos com distâncias astronômicas ou quando estamos na presença de campos gravitacionais. As menores trajetórias não são mais retas, e sim, curvas. Tal descoberta foi feita pelo ilustre físico alemão Albert Einstein, com o auxílio de outros matemáticos na época. Florescia, então, a Geometria Riemanniana. Esta tratava de conceitos novos; entre eles, a curvatura. No espaço euclidiano, a curvatura é nula. No espaço-tempo, concebido por Einstein, não. Desta pequena diferença, surgem conceitos bastante sofisticados, levando, assim, a uma teoria muito fértil. Na extensão da geometria euclidiana, lidamos naturalmente, motivados pelo espaço-tempo, com outras dimensões maiores que três.

Tais espaços são as chamadas Variedades Riemannianas, que são intuitivamente espaços que generalizam o conceito de superfície. Para localizar pontos, precisamos de mapas, como os que utilizamos para descrever regiões na superfície da Terra.

Por causa da particularidade desses pontos no que se refere ao mapeamento nas vizinhanças desses pontos, surgem aproximações lineares dessas vizinhanças, as quais chamamos espaços tangentes. Esta discussão no caso euclidiano não é tão importante, uma

vez que a variedade se confunde com o próprio espaço euclidiano. Como num caso mais geral, isto não ocorre, precisamos de uma ferramenta que conecte estes espaços, as chamadas conexões lineares. Com o auxílio da conexão linear, podemos falar de aceleração de uma curva, por exemplo. Quando estamos no espaço euclidiano, a tarefa de calcular a aceleração é simples: basta calcularmos o quociente de Newton, que é a derivada da velocidade. Numa variedade abstrata, tal procedimento mostra-se inviável, uma vez que numa pequena variação numa vizinhança de um ponto não poderíamos somar vetores de espaços tangentes distintos. Para isso serve a conexão linear. A conexão pode ser vista como uma derivação de campos tangentes, isto é, funções que associam à cada ponto um vetor do espaço tangente desse ponto.

Antes disso, contudo, precisamos de uma noção de distância entre pontos. Com este, poderemos fazer cálculo em variedades abstratas, como calcular áreas e volumes, assim como calcular comprimento de curvas. Quanto ao conceito de conexão linear, mostraremos que uma conexão é mais natural que as outras. Com o teorema de Levi-Civita, mostraremos a existência da conexão riemanniana, a qual poderemos calcular explicitamente a partir da métrica.

O objetivo do trabalho, como sugerem os parágrafos anteriores, é fazer uma rápida revisão de Geometria Riemanniana e, também, mostrar ao leitor a importância desta área clássica na pesquisa moderna em matemática. Além disso, é interessante salientar que no terceiro capítulo nós usamos ferramentas de Análise para resolver um problema de Geometria - o problema de Yamabe -, o que mostra a conexão que existe entre as diferentes áreas da matemática. Tal técnica é bastante utilizada na área de Análise Geométrica.

O trabalho será organizado em três capítulos. Os dois primeiros poderiam facilmente ser condensados num capítulo único levando em consideração o tema de estudo - A Geometria Riemanniana. A separação do tema ocorre, no entanto, por uma mudança de objetivo na apresentação do conteúdo. O primeiro tem a intenção de introduzir o leitor aos conceitos básicos da geometria riemanniana mencionadas anteriormente. A partir de certo ponto, os cálculos começam a ficar mais extensos e surge a necessidade de reservar um capítulo mais técnico dedicado ao cálculo de funções importantes na apresentação do terceiro. Mais explicitamente, abordaremos neste segundo capítulo as definições de curvatura, gradiente, divergente e laplaciano em variedades riemannianas. Finalmente, no terceiro e último capítulo, apresentaremos o Problema de Yamabe e mostraremos que

é possível associar uma equação diferencial parcial ao problema geométrico.

Quanto as referências, será usada no primeiro e no início do segundo capítulo, a referência [1]. Para o restante do segundo capítulo usaremos [2]. E finalmente, para o terceiro a referência [3].

Capítulo 1

Geometria Riemanniana - Parte 1

1.1 Variedades Diferenciáveis e Espaço Tangente

Definição 1.1.1. Uma Variedade Diferenciável de dimensão n é um conjunto M munido de uma família de funções injetivas $x_\alpha : U_\alpha \rightarrow M$, onde U_α são abertos do $\mathbb{R}^n$, tal que:

- (i) $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$
- (ii) Para qualquer par α, β tal que $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e a aplicação $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ é diferenciável.

O par (U_α, x_α) com $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ é chamado uma parametrização (ou sistema de coordenadas) e $x_\alpha(U_\alpha)$ é a vizinhança coordenada de p .

Note que tal estrutura induz uma topologia natural em M . Para isso, definimos que $A \subseteq M$ é um aberto se, e somente se, $x_\alpha^{-1}(A \cap x_\alpha(U_\alpha)) \subseteq \mathbb{R}^n$ o é.

Agora apresentaremos alguns exemplos de Variedades Diferenciáveis.

Exemplo 1 - Abertos não-vazios do $\mathbb{R}^n$

Um aberto $M \neq \emptyset$ do $\mathbb{R}^n$ é uma variedade diferenciável de dimensão n . De fato, tome a parametrização identidade $i : U = M \rightarrow M \subseteq \mathbb{R}^n$. Em particular, podemos tomar $M = \mathbb{R}^n$

Exemplo 2 - Superfícies Diferenciáveis

O caso clássico que inspirou o desenvolvimento da Teoria das Variedades Diferenciáveis vem da Geometria Diferencial. Trata-se das Superfícies Regulares, que são Variedades

Diferenciáveis de dimensão n .

Definição 1.1.2. Um conjunto S do espaço euclidiano em $\mathbb{R}^n$ é dito uma Superfície Diferenciável de dimensão k se para todo ponto $p \in S$, existem uma vizinhança de p , V_p , e uma aplicação $X : U \rightarrow V_p$, onde U é um aberto do $\mathbb{R}^k$, que satisfaz:

1. X é homeomorfismo;
2. X é diferenciável;
3. $(dX)_q$ é injetiva para todo $q \in U$.

Ora, pela definição, vemos que vale (i). A condição (ii) virá como consequência do seguinte teorema:

Teorema 1.1.1. *Seja S uma superfície parametrizada numa vizinhança de $p \in S$ por $X : U \rightarrow X(U) \subset M$ e $Y : V \rightarrow Y(V) \subset S$, com $X(U) \cap Y(V) \neq \emptyset$. Então, $Y^{-1} \circ X$ é um difeomorfismo.*

Assim, concluímos que uma superfície é uma variedade diferenciável de dimensão k .

Exemplo 3 - O espaço $M_n(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ das matrizes invertíveis $n \times n$ com entradas reais

Para mostrar que as matrizes invertíveis formam uma Variedade Diferenciável de dimensão n^2 , basta notar que $M_n(\mathbb{R})$ é o conjunto das matrizes com determinante não nulo. Consideremos, então, a função determinante $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$. Nesse caso, $M_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}((-\infty, 0) \cup (0, \infty))$. Sabemos, da Topologia, que imagem inversa de aberto por uma função contínua é também aberto. Como $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ é aberto e o determinante é uma função contínua, segue do Exemplo 1 que $M_n(\mathbb{R})$ é uma Variedade Diferenciável de dimensão n^2 .

Exemplo 4 - O Espaço Projetivo

Falemos agora de uma variedade menos intuitiva. Trata-se do espaço projetivo real $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, o conjunto de todas as retas em $\mathbb{R}^{n+1}$ que passam pela origem $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$; isto é, $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ é o conjunto de direções de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Introduziremos uma estrutura diferenciável em $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Para isso, seja $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ e note que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ é o espaço quociente de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ pela relação de equivalência:

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \sim (\lambda x_1, \dots, \lambda x_{n+1}),$$

$\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$. Os pontos de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ serão denotados por $[x_1, \dots, x_{n+1}]$. Observe que, se $x_i \neq 0$,

$$[x_1, \dots, x_{n+1}] = \left[\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right].$$

Defina os subconjuntos $V_1, \dots, V_{n+1}$, de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, para $i = 1, \dots, n$, por:

$$V_i = \{[x_1, \dots, x_{n+1}]; x_i \neq 0\}.$$

Geometricamente, V_i é o conjunto das retas de $\mathbb{R}^{n+1}$ que passam pela origem e não pertencem ao hiperplano $x_i = 0$. Iremos mostrar agora que podemos tomar os V_i como vizinhanças coordenadas onde as coordenadas em V_i são

$$y_1 = \frac{x_1}{x_i}, \dots, y_{i-1} = \frac{x_{i-1}}{x_i}, y_i = \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, y_n = \frac{x_{n+1}}{x_i}.$$

Para isso, definiremos as aplicações $x_i : \mathbb{R}^n \rightarrow V_i$ por

$$x_i(y_1, \dots, y_n) = [y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_n],$$

$(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e mostremos que a família $\{(\mathbb{R}^n, x_i)\}$ é uma estrutura diferenciável em $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

De fato, qualquer x_i é claramente bijetivo já que $\bigcup x_i(\mathbb{R}^n) = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Nos resta mostrar que $x_i^{-1}(V_i \cap V_j)$ é um aberto em $\mathbb{R}^n$ e que $x_j^{-1} \circ x_i, j = 1, \dots, n+1$, é diferenciável. Se $i > j$, os pontos em $x_i^{-1}(V_i \cap V_j)$ são da forma:

$$\{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n; y_j \neq 0\}$$

Portanto, $x_i^{-1}(V_i \cap V_j)$ é um aberto no $\mathbb{R}^n$, e supondo que $i > j$ (o caso $i < j$ é análogo),

$$\begin{aligned} x_j^{-1} \circ x_i(y_1, \dots, y_n) &= x_j^{-1}[y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_n] \\ &= x_j^{-1}\left[\frac{y_1}{y_j}, \dots, \frac{y_{j-1}}{y_j}, 1, \frac{y_{j+1}}{y_j}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_j}, \frac{1}{y_j}, \frac{y_i}{y_j}, \dots, \frac{y_n}{y_j}\right] \\ &= \left(\frac{y_1}{y_j}, \dots, \frac{y_{j-1}}{y_j}, \frac{y_{j+1}}{y_j}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_j}, \frac{1}{y_j}, \frac{y_i}{y_j}, \dots, \frac{y_n}{y_j}\right) \end{aligned}$$

que é claramente diferenciável.

Em resumo, o espaço das direções de $\mathbb{R}^n$ (o espaço projetivo real $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$) pode ser coberto por $n + 1$ vizinhanças coordenadas V_i , onde V_i são compostos dessas direções de $\mathbb{R}^{n+1}$ que não estejam no hiperplano $x_i = 0$; além disso, em cada V_i , temos as coordenadas

$$\left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right),$$

onde $(x_1, \dots, x_{n+1})$ são as coordenadas do $\mathbb{R}^{n+1}$. É comum chamarmos as coordenadas de V_i “coordenadas não-homogêneas” correspondentes às “coordenadas homogêneas” $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Antes de apresentar mais exemplos de variedades diferenciáveis, vejamos mais algumas consequências da Definição 1.1.1.

Primeiramente, extendamos a ideia de diferenciabilidade de aplicações entre variedades.

Definição 1.1.3. Seja M_1 e M_2 variedades diferenciáveis de dimensões n e m , respectivamente. Uma aplicação $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ é dita diferenciável em $p \in M_1$ se dada uma parametrização $y : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M_2$ em $\varphi(p)$, existe uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M_1$ em p tal que $\varphi(x(U)) \subset y(V)$ e a aplicação $y^{-1} \circ \varphi \circ x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $x^{-1}(p)$.

Dizemos que φ é diferenciável num aberto de M_1 se φ é diferenciável em todos os pontos desse aberto.

Usando a condição (ii), podemos provar que tal definição independe das parametrizações escolhidas. A função $y^{-1} \circ \varphi \circ x$ é chamada a expressão local de φ nas parametrizações x e y .

É natural estender o conceito de vetor tangente para variedades. Surge, no entanto, um empecilho nessa tarefa: nossa variedade abstrata pode não estar imersa em nenhum

espaço a priori, diferentemente do que ocorre com as superfícies em $\mathbb{R}^n$. Mostremos agora duas maneiras de contornar esse problema. Ambas se mostrarão equivalentes mais adiante.

Definição 1.1.4. Sejam M uma variedade diferenciável e $p \in M$. Denote por C_p o conjunto das curvas diferenciáveis $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ com $\lambda(0) = p$. Dadas duas curvas $\lambda, \mu \in C_p$ dizemos que λ e μ se relacionam (notação $\lambda \sim \mu$) se existe um sistema de coordenadas x tal que λ e μ possuem o mesmo vetor velocidade em $t = 0$, isto é, $(\lambda \circ x^{-1})'(0) = (\mu \circ x^{-1})'(0)$, onde x^{-1} é a inversa da parametrização x , isto é, $x^{-1} : x(U) \rightarrow U$ e U aberto do $\mathbb{R}^n$. Agora, definimos o espaço tangente em $p \in M$ como sendo o conjunto das classes de equivalência. Matematicamente, denotamos:

$$T_p M := C_p / \sim$$

Usando o segundo axioma de variedade diferenciável, a igualdade $(\lambda \circ x^{-1})'(0) = (\mu \circ x^{-1})'(0)$ será válida para qualquer sistema de coordenadas x , e isto prova que a relação $\sim$ independe do sistema de coordenadas.

Esta definição, embora abstrata, nos fornece uma ideia clara do que é o espaço tangente. No entanto, não é imediato o fato de que $T_p M$ é um espaço vetorial. Para isso, enunciaremos alguns resultados.

Teorema 1.1.2. *Dado um sistema de coordenadas x de M , a função $\bar{x} : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por*

$$\bar{x}(\dot{\lambda}) = (x^{-1} \circ \lambda)'(0)$$

é uma bijeção.

Demonstração. É fácil ver que $\bar{x}$ está bem definida e é injetora. Mostremos que $\bar{x}$ é sobrejetiva. Dado $v \in \mathbb{R}^n$, considere a curva $\lambda(t) = x[x^{-1}(p) + tv]$ e teremos $\bar{x}(\dot{\lambda}) = v$. □

Tal bijeção induz uma estrutura de espaço vetorial em $T_p M$, definindo-se as operações:

$$\dot{\lambda} + \dot{\mu} = \bar{x}^{-1}(\bar{x}(\dot{\lambda}) + \bar{x}(\dot{\mu}))$$

$$c.\dot{\lambda} = \bar{x}^{-1}(c.\bar{x}(\dot{\lambda}))$$

Em se tratando de um espaço vetorial, é interessante determinar uma base. Essa base vem de maneira natural pelo isomorfismo $\bar{x}$, pondo

$$\frac{\partial}{\partial x_i} := \bar{x}^{-1}(e_i)$$

Isto é,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \{\lambda \in C_p \mid (x^{-1} \circ \lambda)'(0) = e_i\}$$

Às vezes, é mais conveniente denotar os elementos da base por X_i .

Temos, então:

$$T_p M = [X_1, \dots, X_n]$$

Definição 1.1.5. Sejam M uma variedade diferenciável, uma curva $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ com $\lambda(0) = p$ e D o conjunto das funções $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ que são diferenciáveis em p . O vetor tangente à curva λ em $t = 0$ é o operador $\lambda'(0) : D \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\lambda'(0) \cdot f = (f \circ \lambda)'(0)$$

Denotaremos o conjunto desses operadores por V . Nesse caso, definimos $T_p M := V$.

O próximo resultado mostrará a equivalência das definições anteriores de espaço tangente.

Teorema 1.1.3. *As Definições 1.1.4 e 1.1.5 são equivalentes, isto é, existe uma correspondência biunívoca entre os conjuntos $C_p/\sim$ e V .*

Demonstração. Com efeito, considere a função

$$\begin{aligned} \Psi : C_p/\sim &\rightarrow V, \text{ definida por} \\ \Psi(\dot{\lambda}) &= \lambda'(0) \end{aligned}$$

(i) Ψ está bem definida. Suponha que $\dot{\lambda} = \dot{\mu}$, ou, equivalentemente,

$$(x^{-1} \circ \lambda)'(0) = (x^{-1} \circ \mu)'(0).$$

Dado $f \in D$, calculemos $\lambda'(0) \cdot f$,

$$\lambda'(0) \cdot f = (f \circ \lambda)'(0) = (f \circ x \circ x^{-1} \circ \lambda)'(0) = ((f \circ x) \circ (x^{-1} \circ \lambda))'(0)$$

Pela regra da cadeia, temos

$$((f \circ x) \circ (x^{-1} \circ \lambda))'(0) = (f \circ x)'(x^{-1}(p)) \cdot (x^{-1} \circ \lambda)'(0).$$

Por hipótese,

$$(f \circ x)'(x^{-1}(p)) \cdot (x^{-1} \circ \lambda)'(0) = (f \circ x)'(x^{-1}(p)) \cdot (x^{-1} \circ \mu)'(0) = \mu'(0) \cdot f.$$

Pela arbitrariedade de f , vale $\Psi(\dot{\lambda}) = \Psi(\dot{\mu})$.

- (ii) Ψ é injetiva. Se $\Psi(\dot{\lambda}) = \Psi(\dot{\mu})$, então para qualquer $f \in D$, $(f \circ x)'(x^{-1}(p)) \cdot (x^{-1} \circ \lambda)'(0) = (f \circ x)'(x^{-1}(p)) \cdot (x^{-1} \circ \mu)'(0)$. Pondo $v = (f \circ x)'(x^{-1}(p))$, e enxergando os produtos na igualdade acima como produtos internos, temos:

$$\langle v, (x^{-1} \circ \lambda)'(0) \rangle = \langle v, (x^{-1} \circ \mu)'(0) \rangle \Rightarrow \langle v, (x^{-1} \circ \lambda)'(0) - (x^{-1} \circ \mu)'(0) \rangle = 0$$

Pela arbitrariedade de f e, consequentemente, de v , temos, obrigatoriamente, que

$$(x^{-1} \circ \lambda)'(0) - (x^{-1} \circ \mu)'(0) = 0$$

Portanto $(x^{-1} \circ \lambda)'(0) = (x^{-1} \circ \mu)'(0) \Rightarrow \dot{\lambda} = \dot{\mu}$.

- (iii) Ψ é sobrejetora. A imagem de Ψ é

$$\Psi\left(C_{p/\sim}\right) = \{ \lambda'(0) : D \rightarrow \mathbb{R} \mid \dot{\lambda} \in C_{p/\sim} \} = \{ \lambda'(0) : D \rightarrow \mathbb{R} \mid \lambda \in C_p \} = V$$

Isso conclui a demonstração do teorema. □

A equivalência provada acima nos dá uma versatilidade quanto à interpretação dos vetores tangentes, já que às vezes os enxergaremos como operadores e outras, como vetores de um espaço isomorfo ao $\mathbb{R}^n$.

Seja $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ com $\alpha(0) = p \in M$. Sabemos, da primeira definição, que $\dot{\alpha} \in C_{p/\sim}$ é o vetor tangente a α em $t = 0$.

Escrevendo a curva α em $U \subseteq \mathbb{R}^n$ como $(x^{-1} \circ \alpha)(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$, temos $(x^{-1} \circ \alpha)'(0) = (\alpha'_1(0), \dots, \alpha'_n(0))$. Colocando o vetor-velocidade em termos da base canônica do $\mathbb{R}^n$, temos:

$$(x^{-1} \circ \alpha)'(0) = \sum_{i=1}^n \alpha'_i(0) \cdot e_i.$$

Aplicando o isomorfismo $\bar{x}^{-1}$, obtemos finalmente:

$$\dot{\alpha} = \bar{x}^{-1}[(x^{-1} \circ \alpha)'(0)] = \bar{x}^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \alpha'_i(0) \cdot e_i \right) = \sum_{i=1}^n \alpha'_i(0) \cdot \bar{x}^{-1}(e_i) = \sum_{i=1}^n \alpha'_i(0) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Noutras palavras, conseguimos expressar o vetor tangente a α em termos da base canônica do $T_p M$, com ajuda da parametrização x , que, a menos da base diferente, se escreve da mesma maneira no $\mathbb{R}^n$.

Usando a outra definição, por um raciocínio análogo, chegamos em

$$\alpha'(0) \cdot f = \sum_{i=1}^n \alpha'_i(0) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} = \left(\sum_{i=1}^n \alpha'_i(0) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \right) f.$$

É como se pudéssemos retirar o f para obter:

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^n \alpha'_i(0) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i},$$

como queríamos.

1.1.1 Exemplos adicionais

Exemplo 5 - O fibrado tangente

Seja M uma variedade diferenciável e seja $TM = \{ (p, v) : p \in M; v \in T_p M \}$. Podemos dar uma estrutura diferenciável para o conjunto TM de dimensão $2n$. Munido dessa estrutura, chamaremos TM de fibrado tangente em M .

De fato, seja (U_α, x_α) o sistema de coordenadas de M . Denote por $(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha)$ as coordenadas de U_α e por $\{\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha}\}$ as bases associadas do ponto $p \in x_\alpha(U_\alpha)$. Para

cada α , defina

$$y_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM,$$

por

$$y_\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha, u_1, \dots, u_n) = (x_\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha), \sum_{i=1}^n u_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha})$$

Geometricamente, isso significa que estamos tomando como coordenadas de um ponto $(p, v) \in TM$ as coordenadas $(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha)$ junto com as coordenadas de v na base coordenada do $T_p M$.

Mostraremos que $(U_\alpha \times \mathbb{R}^n, y_\alpha)$ é uma estrutura diferenciável em TM . Já que $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$ e $(dx_\alpha)_q(\mathbb{R}^n) = T_{x_\alpha(q)}M$, $q \in U_\alpha$, temos que

$$\bigcup_\alpha y_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) = TM,$$

que satisfaz a primeira condição de variedade.

Agora seja $(p, v) \in y_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) \cap y_\beta(U_\beta \times \mathbb{R}^n)$. Logo,

$$(p, v) = (x_\alpha(q_\alpha), dx_\alpha(v_\alpha)) = (x_\beta(q_\beta), dx_\beta(v_\beta)),$$

onde $q_\alpha \in U_\alpha$, $q_\beta \in U_\beta$, $v_\alpha, v_\beta \in \mathbb{R}^n$. Portanto,

$$y_\beta^{-1} \circ y_\alpha(q_\alpha, v_\alpha) = y_\beta^{-1}(x_\alpha(q_\alpha), dx_\alpha(v_\alpha)) = ((x_\beta^{-1} \circ x_\alpha)(q_\alpha), d(x_\beta^{-1} \circ x_\alpha)(v_\alpha))$$

Como $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ é diferenciável, $dx_\beta^{-1} \circ dx_\alpha$ também o é. Segue então que $y_\beta^{-1} \circ y_\alpha$ é diferenciável, que encerra a demonstração.

Definição 1.1.6. Seja M uma variedade diferenciável. Dizemos que M é orientável se M admite uma estrutura diferenciável (U_α, x_α) tal que para todo par α, β , com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, o determinante do diferencial da mudança de coordenadas $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ tem determinante positivo.

Exemplo 6

Se M pode ser coberta por duas vizinhanças coordenadas V_1 e V_2 de tal maneira que a interseção $V_1 \cap V_2$ é conexa, então M é orientável. Este critério pode ser usado para

mostrar que a esfera

$$S^n = \left\{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

é orientável. De fato, seja $N = (0, \dots, 0, 1)$ o polo norte e $S = (0, \dots, 0, -1)$ o polo sul de S^n . Defina a aplicação estereográfica do ponto polo norte $\pi_1 : S^n - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ que leva um ponto $p = (x_1, \dots, x_n) \in S^n - \{N\}$ à interseção do hiperplano $x_{n+1} = 0$ com a reta que passa por p e N . Com um simples cálculo, verificamos que

$$\pi_1(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right).$$

A aplicação π_1 é diferenciável, injetiva e mapeia $S^n - \{N\}$ no hiperplano $x_{n+1} = 0$. De maneira análoga, definimos a projeção estereográfica do ponto polo sul $\pi_2 : S^n - \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^n$, que satisfaz as mesmas propriedades.

Portanto, as parametrizações $(\mathbb{R}^n, \pi_1^{-1}), (\mathbb{R}^n, \pi_2^{-1})$ cobrem S^n . Além disso, a mudança coordenadas:

$$y_j = \frac{x_j}{1 - x_{n+1}} \leftrightarrow y'_j = \frac{x_j}{1 + x_{n+1}},$$

$$(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, j = 1, \dots, n,$$

é dado por

$$y'_j = \frac{y_j}{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

(aqui, usamos o fato de que $\sum_{k=1}^{n+1} x_k^2 = 1$). Logo, a família $(\mathbb{R}^n, \pi_1^{-1}), (\mathbb{R}^n, \pi_2^{-1})$ define uma estrutura diferenciável no S^n . Observe que a interseção $\pi_1^{-1}(\mathbb{R}^n) \cap \pi_2^{-1}(\mathbb{R}^n) = S^n - \{N, S\}$ é conexo, portanto S^n é orientável e a família dada dá uma orientação para S^n .

Definição 1.1.7. Um campo vetorial X numa variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um vetor $X(p) \in T_p M$. Em termos de aplicações, X é uma aplicação de M no fibrado tangente TM . O campo é dito diferenciável se a aplicação $X : M \rightarrow TM$ é diferenciável. O conjunto desses campos diferenciáveis em M é denotado por $\mathfrak{X}(M)$.

Considerando a parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$, podemos escrever

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde cada $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função definida em U . Note que X é diferenciável se, e somente se, todas as funções a_i são diferenciáveis. Com efeito, a função $\bar{X}(p) = (p, a_1(p), \dots, a_n(p))$ é diferenciável se, e somente se, todos os a_i também o são. Note que se X é diferenciável no sistema de coordenadas x , X também o é em qualquer outro sistema y . De fato, basta notar que se $y : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é uma parametrização na qual

$$X(p) = \sum_{i=1}^n b_i(p) \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

Então os b_i 's são diferenciáveis, pois, como já vimos, a aplicação mudança de coordenada $b_i a_i^{-1}$ é um difeomorfismo.

Às vezes, é mais conveniente enxergar o campo vetorial X como a aplicação $X : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{F}$, do conjunto $\mathcal{D}$ das funções diferenciáveis em M no conjunto $\mathcal{F}$ de funções em M , assim definidas:

$$(Xf)(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p),$$

onde f denota, por abuso de notação, a expressão de f pela parametrização x .

Lema 1.1.1. *Sejam X e Y campos diferenciáveis numa variedade diferenciável M . Então, existe um único campo Z tal que, para toda $f \in \mathcal{D}$, $Zf = (XY - YX)f$.*

Demonstração. Primeiramente, provaremos que se Z existe, então Z é único. Assumamos, portanto, a existência de tal campo Z . Sejam $p \in M$ e $x : U \rightarrow M$ uma parametrização em p , e sejam

$$X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad Y = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

as expressões para X e Y nessa parametrização. Para efeitos de cálculo, consideremos f uma função C^2 . Depois, veremos que com o comutador definido, basta que a função seja diferenciável.

$$XYf = X(Yf) = X\left(\sum_j b_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \sum_i a_i \partial \left(\sum_j b_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \sum_{i,j} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

e

$$YXf = Y(Xf) = Y\left(\sum_i a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum_j b_j \left(\sum_i a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum_{i,j} b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Como f é C^2 , vale o Teorema de Schwarz, isto é,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Portanto, Z é dado, na parametrização x , por

$$Zf = XYf - YXf = \sum_{i,j} \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial f}{\partial x_j},$$

que prova a unicidade de Z .

Para mostrar a existência, defina Z_α em cada vizinhança coordenada $x_\alpha(U_\alpha)$ da estrutura diferenciável (U_α, x_α) em M pela expressão anterior. Por unicidade, $Z_\alpha = Z_\beta$ em $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$, que nos permite definir Z em toda a variedade M . $\square$

1.2 Métricas Riemannianas

No capítulo anterior, vimos propriedades mais relacionadas à topologia da variedade, que muito se assemelham àsquelas do $\mathbb{R}^n$. No entanto, para fazer geometria na variedade, precisamos de um novo conceito: a métrica. Com tal ferramenta, podemos fazer cálculo e estender conceitos da geometria diferencial clássica.

Definição 1.2.1. Uma métrica riemanniana g é uma função que associa todo ponto $p \in M$ a um produto interno $g_p = \langle \cdot, \cdot \rangle : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$. Nesse caso, a variedade munida de tal métrica (M, g) é dita uma Variedade Riemanniana.

É natural calcularmos os termos da forma $g_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$. De fato, os denotaremos por g_{ij} , que formam a matriz da métrica g . Esse abuso de notação não

nos trará grandes problemas desde que esteja implícito a que ponto $p \in M$ estamos nos referindo.

Exemplo 1 - O exemplo canônico

Considere $M = \mathbb{R}^n$, com o produto interno euclidiano. Assim, $T_p M = M = \mathbb{R}^n$ e, consequentemente, $\frac{\partial}{\partial x_i} = e_i$, o que nos dá $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.

Exemplo 2 - A métrica produto

Dadas duas variedades riemannianas M_1 e M_2 . Ora, o produto cartesiano de duas variedades $M_1 \times M_2$ também é uma variedade. Podemos, de maneira natural, induzir uma métrica em $M_1 \times M_2$ como segue abaixo. Sejam $\pi_1 : M_1 \times M_2 \rightarrow M_1$ e $\pi_2 : M_1 \times M_2 \rightarrow M_2$ as projeções canônicas de M_1 e M_2 , respectivamente. Então, defina a métrica produto em $(p, q) \in M_1 \times M_2$ por:

$$\langle u, v \rangle_{(p,q)} = \langle d\pi_1 \cdot u, d\pi_1 \cdot v \rangle_p + \langle d\pi_2 \cdot u, d\pi_2 \cdot v \rangle_q$$

para todo $(p, q) \in M_1 \times M_2$ e $u, v \in T_{(p,q)}(M_1 \times M_2)$.

É de fácil comprovação que esta é, de fato, uma métrica para o produto $M_1 \times M_2$.

Exemplo 3 - Cálculo da métrica da pseudo-esfera

A pseudo-esfera é uma superfície obtida pela revolução de uma curva denominada tratrix. Suas equações paramétricas são dadas por

$$x = \operatorname{sech} u \cos v;$$

$$y = \operatorname{sech} u \sin v;$$

$$z = u - \tanh u.$$

Calculando os vetores $X_u = (x_u, y_u, z_u)$ e $X_v = (x_v, y_v, z_v)$, temos, respectivamente:

$$g_{11} = \langle X_u, X_u \rangle = \tanh^2 u$$

$$g_{12} = g_{21} = \langle X_u, X_v \rangle = 0$$

$$g_{22} = \langle X_v, X_v \rangle = \text{sech}^2 u$$

Exemplo 4 - Variedades imersas

Seja $f : M^n \rightarrow N^{n+k}$ uma imersão, isto é, f é diferenciável e $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ é injetiva para todo $p \in M$. Se N tem uma estrutura riemanniana, f induz uma estrutura riemanniana em M se definirmos $\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}$, onde $u, v \in T_p M$. Uma vez que df_p é injetiva, $\langle, \rangle_p$ é positivo definido. As outras propriedades de métricas são facilmente verificadas. Esta métrica em M é chamada de métrica induzida por f , e f é dita uma imersão isométrica.

Estamos, agora, em condições de enunciar um teorema importantíssimo para a teoria de variedades, que nos dá um resultado muito desejável para a geometria.

Teorema 1.2.1. (*Teorema forte de Whitney*): *Se M é uma variedade de Hausdorff n -dimensional com base enumerável, então M pode ser imersa em $\mathbb{R}^{2n}$.*

Segue, então, do teorema acima, que toda variedade de Hausdorff com base enumerável é uma Variedade Riemanniana, com a métrica induzida do $\mathbb{R}^{2n}$.

Definição 1.2.2. Uma aplicação $c : I \rightarrow M$, onde I é um intervalo aberto e M uma variedade, é chamado uma curva parametrizada.

Definição 1.2.3. Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \rightarrow M$ é uma aplicação diferenciável que associa a cada $t \in I$ um vetor tangente $V(t) \in T_{c(t)} M$. Dizer que V é diferenciável significa que para toda função diferenciável f em M , a função $t \mapsto V(t)f$ é uma função diferenciável em I .

A restrição da curva c ao intervalo fechado $[a, b] \in I$ é dito um segmento. Se M é uma Variedade Riemanniana, nós definimos o comprimento de um segmento por

$$L_a^b(c) = \int_a^b \left\langle \frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt} \right\rangle^{\frac{1}{2}} dt$$

1.3 Conexões afins

Já resolvemos o problema de definir vetor-velocidade numa curva numa variedade abstrata M graças ao conceito de espaço tangente. Seria natural no momento indagarmos

sobre a noção de aceleração. Afinal, esta nos permite uma discussão sobre uma série de objetos interessantes para teoria, como curvas geodésicas e transporte paralelo. O problema reside ainda na falta de um espaço maior que contenha a variedade. Em vez de buscarmos novos espaços que possam agrupar esses “vetores-aceleração”, aproveitaremos a já feita construção do espaço tangente para definirmos a derivada covariante, que pode ser interpretada como a aceleração vista da variedade. Para isso, precisamos de uma ferramenta chamada conexão afim.

Para definir conexão afim, comecemos indicando por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto de todos os campos vetoriais de classe C^∞ em M e por $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M .

Definição 1.3.1. Uma conexão afim ∇ numa variedade diferenciável M é uma aplicação

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

que é denotada por $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ que satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$
- (ii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
- (iii) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$, onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$

Tal definição não nos deixa claro se uma função com tamanha generalidade existe. Mostraremos mais adiante que, de fato, existe uma conexão afim em M . Mais ainda, veremos que esta é muito melhor que as outras. Trata-se da conexão de Levi-Civita. Mas antes disso, definamos através do próximo teorema a estrutura da qual falamos no começo do capítulo.

Teorema 1.3.1. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Existe uma única correspondência que associa a cada campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \rightarrow M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c , chamado a derivada covariante de V ao longo de c , tal que*

$$(a) \quad \frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$$

$$(b) \quad \frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}, \text{ onde } W \text{ é um campo ao longo de } c \text{ e } f \text{ é uma função diferenciável em } I.$$

(c) Se V é induzido por um campo vetorial $Y \in \mathfrak{X}(M)$, isto é, $V(t) = Y(c(t))$, então

$$\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y$$

Observação. A última linha de (c) faz sentido, já que $\nabla_X Y(p)$ depende do valor de $X(p)$ e o do valor de Y ao longo da curva, tangente a M no ponto p . Escolhendo um sistema de coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$ e escrevendo

$$X = \sum_i x_i X_i$$

$$Y = \sum_j y_j X_j$$

onde $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, temos

$$\nabla_X Y = \sum_i x_i \nabla_{X_i} \left(\sum_j y_j X_j \right) = \sum_{i,j} x_i y_j \nabla_{X_i} X_j + \sum_{i,j} x_i X_i(y_j) X_j.$$

Pondo $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$, concluímos que Γ_{ij}^k são funções diferenciáveis e que

$$\nabla_X Y = \sum \left(\sum_{ij} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k) \right) X_k, \quad (1.1)$$

o que prova que $\nabla_X Y(p)$ depende de $x_i(p), y_j(p)$ e das derivadas $X(y_k)(p)$ de y_k por X .

O teorema acima mostra que a escolha de uma conexão afim em M nos fornece uma maneira de derivar vetores ao longo de curvas.

Geometricamente, podemos interpretar a conexão afim num ponto $p \in M$ como sendo a taxa de variação de um campo Y num ponto p ao longo de uma curva $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ com $c(0) = p$ e $\frac{dc}{dt}(0) = X(p)$. Em particular, se tomarmos no item c, $Y(c(t)) = \frac{dc}{dt}(t)$, faz sentido falar em aceleração ao longo de uma curva em M .

Demonstração. Suponhamos inicialmente que exista uma correspondência satisfazendo os itens (a), (b) e (c). Seja $x : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow M$ um sistema de coordenadas com $c(I) \cap x(U) \neq \emptyset$ e seja $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ a expressão local de $c(t), t \in I$. Seja $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Então podemos expressar o campo V localmente por $V = \sum_j v^j X_j$, $j = 1, \dots, n$, onde $v^j = v^j(t)$ e $X_j = X_j(c(t))$. Pelos itens (a) e (b), temos

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt} X^j + \sum_j v^j \frac{DX_j}{dt}.$$

Pelos itens (c) e (i) da Definição 1.3.1,

$$\frac{DX_j}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} X_j = \nabla_{\sum \frac{dx_i}{dt} X_i} X_j = \sum_i \frac{dx_i}{dt} \nabla_{X_i} X_j.$$

Portanto,

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt} X_j + \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt} v^j \nabla_{X_i} X_j. \quad (1.2)$$

A expressão acima nos mostra que se existe uma correspondência satisfazendo as condições do Teorema 3.1.1, então tal correspondência é única.

Para provar a existência, defina $\frac{DV}{dt}$ em $x(U)$ pela Expressão 3.1.1. É de verificação imediata que tal expressão possui as propriedades desejadas. Se $y(W)$ é outra vizinhança coordenada, com $y(W) \cap x(U) \neq \emptyset$, pela unicidade de $\frac{DV}{dt}$ em $x(U)$. Segue que a definição pode ser estendida para toda a variedade M , e isto conclui a prova. $\square$

Definição 1.3.2. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão ∇ . Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \rightarrow M$ é dito um transporte paralelo quando $\frac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.

Proposição 1.3.1. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Sejam também $c : I \rightarrow M$ uma curva diferenciável em M e V_0 um vetor tangente a M em $c(t_0)$, $t \in I$, isto é, $V_0 \in T_{c(t_0)}M$. Então, existe um único campo vetorial paralelo V ao longo de c , tal que $V(t_0) = V_0$. ($V(t)$ é chamado de transporte paralelo de $V(t_0)$ ao longo de c).

Demonstração. Suponha que o teorema tenha sido provado para o caso onde $c(I)$ estivesse contido numa vizinhança coordenada. Por compacidade, dado $t_1 \in I$, o segmento $c([t_0, t_1]) \subset M$ pode ser coberto por um número finito de vizinhanças coordenadas, nas quais V está definido, por hipótese. Por unicidade, as definições coincidem com as interseções não-vazias, permitindo a definição de V ao longo de todo $[t_0, t_1]$.

Temos apenas, portanto, que provar o teorema quando $c(I)$ estiver contido numa vizinhança coordenada $x(U)$ de um sistema de coordenadas $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$. Seja $x^{-1}(c(t)) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ a expressão local de $c(t)$ e $V_0 = \sum_j v_0^j X_j$, onde $X_j = \frac{\partial}{\partial x_j}(c(t_0))$.

Suponha que exista um campo vetorial V em $x(U)$ que seja transporte paralelo ao

longo de c com $V(t_0) = V_0$. Então $V = \sum v^j X_j$ satisfaz

$$0 = \frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt} X_j + \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt} v^j \nabla_{X_i} X_j.$$

Pondo $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$, e trocando j por k na primeira soma, obtemos

$$\frac{DV}{dt} = \sum_k \left(\frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} v^j \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^k \right) X_k = 0.$$

O sistema de n equações diferenciais em $v^k(t)$,

$$0 = \frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k v^j \frac{dx_i}{dt} \quad (1.3)$$

possui uma única solução que satisfaz as condições iniciais $v^k(t_0) = v_0^k$. Segue, então, que se V existe, é único. Mais ainda, já que o sistema é linear, qualquer solução está definida para todo $t \in I$, o que prova a existência (e unicidade) de V com as propriedades desejadas. $\square$

1.4 Conexões riemannianas

Definição 1.4.1. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e uma métrica riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Uma conexão é dita compatível com a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ quando para qualquer curva suave c e qualquer par de vetores paralelos P e P' ao longo de c , temos $\langle P, P' \rangle = \text{cte}$.

A definição acima será justificada pela seguinte proposição que mostra que se ∇ é compatível com $\langle \cdot, \cdot \rangle$, então é possível derivar o produto interno pela regra do produto usual.

Proposição 1.4.1. Seja M uma Variedade Riemanniana. A conexão ∇ em M é compatível com a métrica se, e somente se, para quaisquer campos vetoriais V e W ao longo de uma curva diferenciável $c : I \rightarrow M$, temos

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, \quad t \in I. \quad (1.4)$$

Demonstração. É óbvio que a equação acima implica que ∇ é compatível com $\langle, \rangle$. Mostremos, portanto, a ida. Tome uma base ortonormal $\{P_1(t_0), \dots, P_n(t_0)\}$ de $T_{c(t_0)}M$, $t_0 \in I$. Usando a Proposição 1.3.1, podemos estender os vetores $P_i(t_0)$, $i = 1, \dots, n$, ao longo de c por transporte paralelo. Como ∇ é compatível com a métrica, $\{P_1(t), \dots, P_n(t)\}$ é uma base ortonormal de $T_{c(t)}M$, para qualquer $t \in I$. Portanto, podemos escrever

$$V = \sum_i v^i P_i$$

e

$$W = \sum_i w^i P_i,$$

$i = 1, \dots, n$, onde v^i e w^i são funções diferenciáveis em I . Segue que

$$\frac{DV}{dt} = \sum_i \frac{dv^i}{dt} P_i,$$

$$\frac{DW}{dt} = \sum_i \frac{dw^i}{dt} P_i.$$

Portanto,

$$\left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle = \sum_i \left(\frac{dv^i}{dt} w^i + \frac{dw^i}{dt} v^i \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_i v^i w^i \right) = \frac{d}{dt} \langle V, W \rangle.$$

□

Corollary 1.4.0.1. *Uma conexão ∇ numa Variedade Riemanniana M é compatível com a métrica se, e somente se,*

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle. \quad (1.5)$$

Demonstração. Suponha que ∇ seja compatível com a métrica. Sejam $p \in M$ e $c : I \rightarrow M$ uma curva diferenciável com $c(t_0) = p$, $t_0 \in I$ e $\frac{dc}{dt}(t_0) = X(p)$. Então

$$X(p) \langle Y, Z \rangle = \frac{d}{dt} \langle Y, Z \rangle(t_0) = \langle \nabla_{X(p)} Y, Z \rangle(p) + \langle Y, \nabla_{X(p)} Z \rangle(p).$$

Como p é arbitrário, vale (1.5). A volta é evidente.

□

Definição 1.4.2. Uma conexão ∇ é dita simétrica quando

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad (1.6)$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

Observação. Num sistema de coordenadas (U, x) , o fato de que ∇ é simétrica implica que para todo $i, j = 1, \dots, n$,

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0$$

Ou seja, vale a simetria nos subíndices dos símbolos de Christofel

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k.$$

Agora enunciaremos o teorema fundamental do capítulo.

Teorema 1.4.1. *(Levi-Civita). Dada uma Variedade Riemanniana M , existe uma única conexão afim ∇ satisfazendo*

(i) ∇ é simétrica

(ii) ∇ é compatível com a métrica riemanniana.

Demonstração. Suponha inicialmente a existência de tal ∇ . Então:

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad (1.7)$$

$$Y\langle Z, X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle, \quad (1.8)$$

$$Z\langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle. \quad (1.9)$$

Somando (1.7) e (1.8) e subtraindo (1.9), temos, usando a simetria de ∇ , que

$$X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle = \langle [X, Z], Y \rangle + \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle + 2\langle Z, \nabla_Y X \rangle.$$

Portanto,

$$\langle Z, \nabla_Y X \rangle = \frac{1}{2} (X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle). \quad (1.10)$$

A expressão acima mostra que ∇ é unicamente determinada pela métrica $\langle, \rangle$. Logo, se existe, é única.

Para provar existência, defina ∇ por (1.10). É fácil verificar que ∇ está bem-definida e que satisfaz as condições desejadas. $\square$

Observação. A conexão dada pelo teorema será, de agora em diante, chamada a conexão de Levi-Civita em M .

Tomando $Z = X_k$ e $\nabla_Y X = \sum_l \Gamma_{ij}^l X_l$, temos por um lado:

$$\langle Z, \nabla_Y X \rangle = \langle X_k, \sum_l \Gamma_{ij}^l X_l \rangle = \sum_l \Gamma_{ij}^k \langle X_k, X_l \rangle = \sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk}.$$

Por outro:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle) \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right). \end{aligned}$$

Segue, então

$$\sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right).$$

Como a matriz (g_{km}) admite uma inversa, denotada por (g^{km}) , temos

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right) g^{km}. \quad (1.11)$$

1.5 Geodésicas

1.5.1 O fluxo geodésico

Definição 1.5.1. Uma curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow M$ é dita uma geodésica em t_0 se $\frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = 0$ no ponto t_0 ; se γ é uma geodésica em t , para todo $t \in I$, dizemos que γ é uma

geodésica. Se $[a, b] \subset I$ e $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica, então a restrição de γ a $[a, b]$ é chamado de segmento geodésico de $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$. Algumas vezes, por abuso de linguagem, nos referiremos à imagem $\gamma(I)$ da geodésica γ como a própria geodésica γ .

Uma propriedade muito interessante que segue da condição que define uma geodésica é a preservação do comprimento do vetor tangente. De fato, se $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica, então

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D}{dt} \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0,$$

isto é, o comprimento do vetor tangente $\frac{d\gamma}{dt}$ é constante. Assumiremos, de agora em diante, que $\left| \frac{d\gamma}{dt} \right| = c \neq 0$, excluindo assim as geodésicas que reduzem-se a pontos. O comprimento de arco s de γ , começando de um ponto $t = t_0$, é dado por

$$s(t) = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| dt = c(t - t_0)$$

Portanto, o parâmetro de uma geodésica é proporcional ao comprimento de arco. Quando um parâmetro é o próprio comprimento de arco, isto é, $c = 1$, dizemos que a geodésica está normalizada.

Agora determinemos as equações locais que devem ser satisfeitas por uma geodésica γ numa vizinhança (U, x) de $\gamma(t_0)$. Em U , a curva γ

$$\gamma(t) = (x_1, \dots, x_n(t))$$

será uma geodésica se, e somente se,

$$0 = \frac{D}{dt} \frac{d\gamma}{dt} = \sum_k \left(\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Pelo fato de $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ ser uma base, temos obrigatoriamente o sistema de n equações diferenciais de segunda ordem

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = 0, \quad (1.12)$$

cujas soluções nos dá as equações da geodésica no sistema de coordenadas x .

Para estudar o Sistema 1.12, é conveniente considerar o fibrado tangente TM , que

também será útil posteriormente.

TM é o conjunto dos pares (q, v) , $q \in M$, $v \in T_qM$. Se (U, x) é um sistema de coordenadas em M , então qualquer vetor em T_qM , $q \in x(U)$, pode ser escrito como $\sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Tomando $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ como coordenadas de (q, v) em TU , é fácil mostrar que obtemos uma estrutura de variedade diferenciável para TM .

Observe que $TU = U \times \mathbb{R}^n$, isto é, o fibrado tangente é localmente um produto cartesiano. Além disso, a projeção canônica $\pi : TM \rightarrow M$ dada por $\pi(q, v) = q$ é diferenciável.

Qualquer curva diferenciável $t \rightarrow \gamma(t)$ em M determina uma curva $t \rightarrow (\gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}(t))$ em TM . Se γ é uma geodésica, então, em TU , a curva

$$t \rightarrow (x_1(t), \dots, x_n(t), \frac{dx_1}{dt}(t), \dots, \frac{dx_n}{dt}(t))$$

satisfaz o sistema

$$\frac{dx_k}{dt} = y_k \tag{1.13}$$

$$\frac{dy_k}{dt} = - \sum_{i,j} \gamma_{ij}^k y_i y_j \tag{1.14}$$

em termos das coordenadas $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ em TU . Note que tal sistema nos diz que dado um ponto $p \in x(U)$ e um vetor tangente $v \in T_pM$, existe localmente uma única geodésica que passa por p com velocidade v . Portanto, o sistema acima em TU é equivalente ao sistema definido por (1.13) e (1.14) em U .

Recordemos agora o resultado de equações diferenciais a seguir.

Teorema 1.5.1. *Se X é um campo C^∞ num aberto V da variedade M e $p \in V$, então existe uma vizinhança aberta V_p de p , um número $\delta > 0$, e uma aplicação C^∞ $\varphi : (-\delta, \delta) \times V_p \rightarrow V$ tal que a curva $t \rightarrow \varphi(t, q)$, $t \in (-\delta, \delta)$, é a única trajetória de X que no instante $t = 0$ passa pelo ponto q , qualquer que seja $q \in V_p$*

A aplicação $\varphi_t : V_p \rightarrow V$ dada por $\varphi_t(q) = \varphi(t, q)$ é chamado um fluxo de X em V .

O conceito de fluxo de um campo pode ser ilustrado pelas linhas de um campo magnético como mostra a figura abaixo.

Nesse caso, considerando X como sendo o campo magnético, as curvas $t \rightarrow \varphi(t, q)$ são dadas pelas linhas de campo.

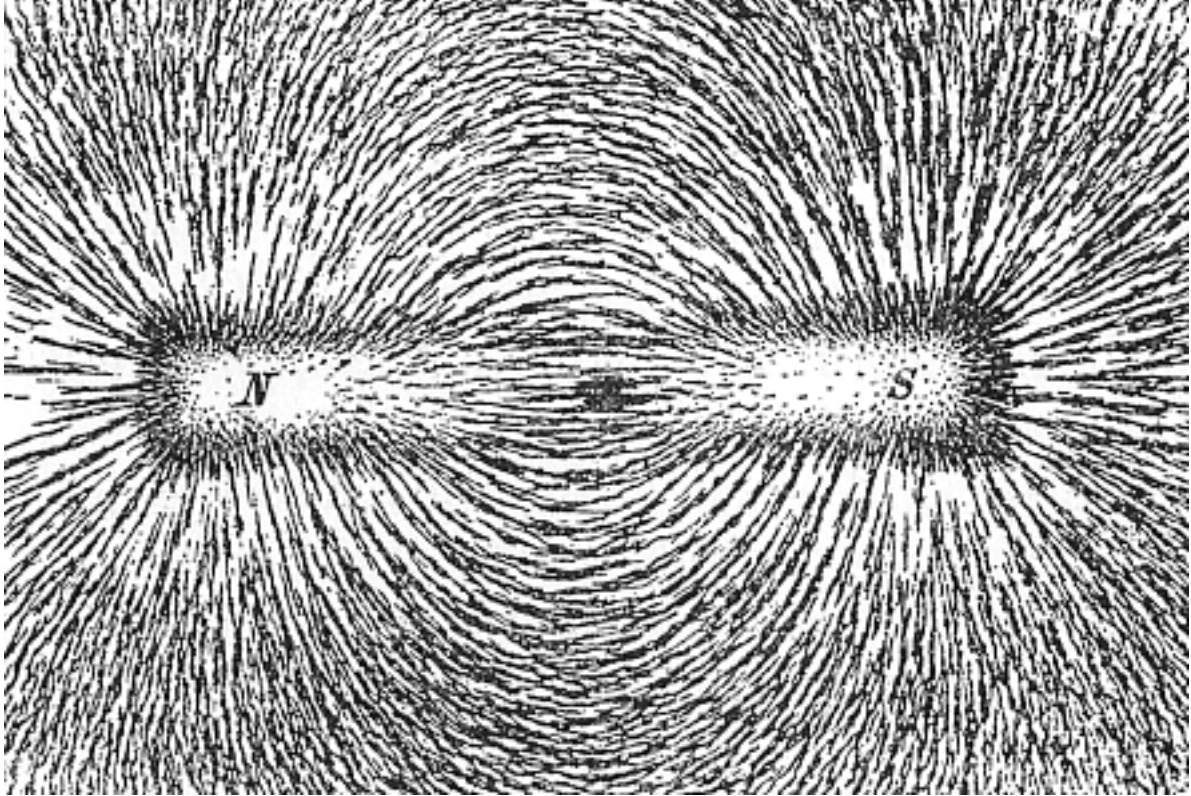


Figura 1.1: Campo magnético criado por um ímã

Lema 1.5.1. *Existe um único campo vetorial G em TM cujas trajetórias são da forma $t \rightarrow (\gamma(t), \gamma'(t))$, onde γ é uma geodésica em M .*

Demonstração. Provemos primeiro a unicidade de G , supondo sua existência. Considere um sistema de coordenadas (U, x) em M . Pela hipótese, as trajetórias de G em TU são dadas por $t \rightarrow (\gamma(t), \gamma'(t))$ onde γ é uma geodésica. Segue que $t \rightarrow (\gamma(t), \gamma'(t))$ é uma solução do sistema de equações definido por (1.13) e (1.14). Da unicidade das trajetórias de tal sistema, concluímos que se G existe, então é único.

Para provar a existência de G , defina-o localmente pelo sistema definido por (1.13) e (1.14). Pela unicidade, concluímos que G está bem-definido em TM . $\square$

Definição 1.5.2. O campo vetorial G definido acima é chamado de campo geodésico em TM e seu fluxo é chamado de fluxo geodésico em TM .

Aplicando o teorema acima para o campo G no ponto $(p, 0) \in TM$, obtemos a seguinte propriedade:

Para cada $p \in M$, existe um aberto $\mathcal{U}$ em TU , onde (U, x) é um sistema de coordenadas em p e $(p, 0) \in \mathcal{U}$, um número $\delta > 0$ e uma aplicação C^∞ , $\varphi : (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} \rightarrow TU$, tal que

$t \rightarrow \varphi(t, q, v)$ é a única trajetória de G que satisfaz a condição inicial $\varphi(0, q, v) = (q, v)$, para cada $(q, v) \in \mathcal{U}$.

Sem perda de generalidade, escrevamos $\mathcal{U}$ na forma

$$\mathcal{U} = \{(q, v) \in TU; q \in V \text{ e } v \in T_q M \text{ com } |v| < \epsilon\},$$

onde $V \subset U$ é uma vizinhança de $p \in M$. Pondo $\gamma = \pi \circ \varphi$, onde $\pi : TM \rightarrow M$ é a projeção canônica, podemos descrever o resultado da maneira a seguir.

Proposição 1.5.1. Dado $p \in M$, existe uma vizinhança $V_p \subset M$ de p e $\varepsilon_p > 0$ e uma aplicação C^∞

$$\gamma : (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} \rightarrow M,$$

onde $\mathcal{U} = \{(q, v) \in TU; q \in V \text{ e } v \in T_q M \text{ com } |v| < \varepsilon\}$ e tal que a curva $t \rightarrow \gamma(t, q, v)$, $t \in (-\delta, \delta)$, é a única geodésica em M que, no instante $t = 0$, passa por q com velocidade v , para cada $q \in V$ e para cada $v \in T_q M$ com comprimento menor que ε_p .

A proposição acima garante que se $|v| < \varepsilon_p$, então a geodésica $\gamma(t, q, v)$ existe num intervalo $(-\delta, \delta)$ e é única. Na verdade, é possível aumentar a velocidade da geodésica diminuindo o intervalo de definição ou o contrário. Isto segue do lema que será enunciado a seguir.

Lema 1.5.2. (*Homogeneidade de uma geodésica*). Se a geodésica $\gamma(t, q, v)$ estiver definida num intervalo $(-\delta, \delta)$, então a geodésica $\gamma(t, q, av)$, $a > 0$, está definida num intervalo $(-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a})$ e vale

$$\gamma(t, q, av) = \gamma(at, q, v).$$

Demonstração. Seja $h : (-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a}) \rightarrow M$ uma curva dada por $h(t) = \gamma(at, q, v)$. Então $h(0) = q$ e $\frac{dh}{dt}(0) = av$. Além disso, uma vez que $h'(t) = a\gamma'(at, q, v)$,

$$\frac{D}{dt} \left(\frac{dh}{dt} \right) = \nabla_{h'(t)} h'(t) = a^2 \nabla_{\gamma'(at, q, v)} \gamma'(at, q, v) = 0,$$

onde, para a primeira igualdade, estendemos $h'(t)$ a uma vizinhança de $h(t)$ em M . Logo, h é uma geodésica passando por q com velocidade av no instante $t = 0$. Por unicidade,

$$h(t) = \gamma(at, q, v) = \gamma(t, q, av).$$

□

A Proposição (1.5.1), junto ao Lema da homogeneidade, nos permite fazer o intervalo de definição uniformemente grande numa vizinhança de p . Mais precisamente, temos o seguinte fato.

Proposição 1.5.2. Dado $p \in M$, existe uma vizinhança V_p de p em M , $\varepsilon > 0$ e uma aplicação $C^\infty \gamma : (-2, 2) \times \mathcal{U} \rightarrow M$, $\mathcal{U} = \{(q, w) \in TM; q \in V, q \in V_p, w \in T_q M, |w| < \varepsilon\}$ tal que $t \rightarrow \gamma(t, q, w)$, $t \in (-2, 2)$, é a única geodésica de M que, no instante $t = 0$, passa por q com velocidade w , para cada $q \in V_p$ e para todo $w \in T_q M$, com $|w| < \varepsilon$

Demonstração. A geodésica $\gamma(t, q, v)$ da proposição (1.5.1) está definida para $|t| < \delta$ e para $|v| < \varepsilon_p$. Pelo lema da homogeneidade, $\gamma(t, q, \frac{\delta v}{2})$ está definida para $|t| < 2$. Tomando $\varepsilon < \frac{\delta \varepsilon_p}{2}$, obtemos que a geodésica $\gamma(t, q, w)$ está definida para $|t| < 2$ e $|w| < \varepsilon$. □

Observação. Usando um argumento análogo, podemos fazer a velocidade de uma geodésica uniformemente alta numa vizinhança de p .

A Proposição (1.5.2) nos permite introduzir o conceito de aplicação exponencial como segue. Seja $p \in M$ e seja $\mathcal{U} \subset TM$ o aberto da Proposição (1.5.2). Então, a função $\exp : \mathcal{U} \rightarrow M$ dada por

$$\exp(q, v) = \gamma(1, q, v) = \gamma(|v|, q, \frac{v}{|v|}),$$

onde $(q, v) \in \mathcal{U}$ chamada de aplicação exponencial em $\mathcal{U}$.

Na maioria das aplicações, deveremos utilizar a restrição de $\exp$ a um aberto subconjunto do espaço tangente $T_q M$, isto é, definimos

$$\exp_q : B_\epsilon(0) \subset T_q M \rightarrow M$$

por $\exp_q(v) = \exp(q, v)$. É fácil ver que $\exp_q$ é diferenciável e que $\exp_q(0) = q$.

Geometricamente, $\exp_q(v)$ é um ponto de M obtido andando um comprimento $|v|$, começando de q , ao longo de uma geodésica que passa por q com velocidade igual a $\frac{v}{|v|}$.

Proposição 1.5.3. Dado $q \in M$, existe um $\epsilon > 0$ tal que $\exp_q : B_\epsilon(0) \subset T_q M \rightarrow M$ é um difeomorfismo entre $B_\epsilon(0)$ e um subconjunto de M .

Demonstração. Calculemos $d(\exp)_0$

$$d(\exp)_0(v) = \frac{d}{dt}(\exp_q(tv)) = \frac{d}{dt}(\gamma(1, q, tv)) = \frac{d}{dt}(\gamma(t, q, v)) = v.$$

Logo, $d(\exp_q)_0$ é a identidade em T_qM , e pelo Teorema da Função Implícita, a função $\exp_q$ é um difeomorfismo local, como queríamos. $\square$

Podemos agora definir de coordenadas normais.

Definição 1.5.3. Sejam $p \in M$, $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de T_pM e $q = \exp_p(\sum_i u_i e_i)$. Então, $(u_1, \dots, u_n)$ são chamadas as coordenadas de q numa vizinhança de p .

1.5.2 Exemplos de Geodésicas

Geodésicas em $\mathbb{R}^n$

Tratando-se do $\mathbb{R}^n$ em coordenadas cartesianas temos o caso trivial em que os símbolos de Christofel são nulos. Em outras palavras, a conexão no $\mathbb{R}^n$ é dada por

$$\nabla_X Y = \sum_k X(y_k) X_k.$$

Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, dada por

$$\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)).$$

Pelo Sistema de Equações definido por (1.13) e (1.14), temos

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} = 0$$

Logo, $\frac{dx_k}{dt} = v_k \in \mathbb{R}$. Assim, temos $x_k(t) = p_k + tv_k$. Ou seja, as geodésicas no $\mathbb{R}^n$ são as curvas dadas por

$$\gamma(t) = (p_1 + tv_1, \dots, p_n + tv_n) = (p_1, \dots, p_n) + t(v_1, \dots, v_n).$$

Isto é, como já sabíamos, as geodésicas no $\mathbb{R}^n$ são as retas.

Capítulo 2

Geometria Riemanniana - Parte 2

2.1 Curvatura

A curvatura é a grandeza que mede o quão diferente a Variedade Riemanniana é do $\mathbb{R}^n$. Mostraremos que ela depende diretamente da Conexão Riemanniana e, conseqüentemente, da métrica. De fato, obteremos a expressão explícita da dos termos do tensor curvatura em termos da métrica e da conexão.

Definição 2.1.1. A curvatura R de uma Variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa todo par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ à aplicação $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z,$$

$Z \in \mathfrak{X}(M)$,

onde ∇ é a conexão riemanniana em M .

Observe que se $M = \mathbb{R}^n$, então $R(X, Y)Z = 0$ para todos $X, Y, Z \in \chi(\mathbb{R}^n)$. Na verdade, se o campo vetorial Z é dado por $Z = (z_1, \dots, z_n)$, com as componentes de Z vindo das coordenadas $\mathbb{R}^n$, obtemos

$$\nabla_X Z = (X z_1, \dots, X z_n).$$

Daí

$$\nabla_Y \nabla_X Z = (Y X z_1, \dots, Y X z_n),$$

que implica em

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z = 0$$

como tínhamos dito. É possível interpretar R como sendo uma medida do quanto M deixa de ser euclidiana.

Outra maneira de ver a definição acima é considerar um sistema de coordenadas x_i numa vizinhança de $p \in M$. Uma vez que $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$, obtemos

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_k} = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\right) \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Ou seja, a curvatura mede a não-comutatividade da derivada covariante.

Nesse capítulo, iremos apresentar algumas propriedades importantes.

Proposição 2.1.1. A curvatura R de uma Variedade Riemanniana M tem as seguintes propriedades:

(i) R é bilinear em $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$, isto é,

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1)$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2)$$

$$f, g \in \mathcal{D}(M), X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M).$$

(ii) Para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, o operador curvatura $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ é linear, ou seja,

$$R(X, Y)(Z + W) = R(X, Y)Z + R(X, Y)W,$$

$$R(X, Y)fZ = fR(X, Y)Z,$$

$$f \in \mathcal{D}(M), Z, W \in \mathfrak{X}(M).$$

Demonstração. (i) pode ser provado por verificação direta. Para mostrar a primeira parte de (ii), faça:

$$\begin{aligned} R(X, Y)(Z + W) &= \nabla_Y \nabla_X (Z + W) - \nabla_X \nabla_Y (Z + W) - \nabla_{[X, Y]} (Z + W) \\ &= \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[X, Y]} Z + \nabla_Y \nabla_X W - \nabla_X \nabla_Y W - \nabla_{[X, Y]} W \\ &= R(X, Y)Z + R(X, Y)W. \end{aligned}$$

Para a segunda, temos

$$\nabla_Y \nabla_X (fZ) = \nabla_Y (f \nabla_X Z + (Xf)Z) = f \nabla_Y \nabla_X Z + (Yf)(\nabla_X Z) + (Xf)(\nabla_Y Z) + (Y(Xf))Z.$$

Portanto,

$$\nabla_Y \nabla_X (fZ) - \nabla_X \nabla_Y (fZ) = f(\nabla_Y \nabla_X - \nabla_X \nabla_Y)Z + ((YX - XY)f)Z,$$

Daí

$$R(X, Y)fZ = f \nabla_Y \nabla_X Z - f \nabla_X \nabla_Y Z + ([Y, X]f)Z + f \nabla_{[X, Y]}Z + ([X, Y]f)Z = fR(X, Y)Z.$$

□

Proposição 2.1.2. (Identidade de Bianchi).

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0.$$

Demonstração. Pela simetria da conexão riemanniana, temos

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z + R(X, Z)X + R(Z, X)Y &= \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]}Z + \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_Y \nabla_Z X \\ &+ \nabla_{[Y, Z]}X + \nabla_X \nabla_Z Y + \nabla_Z \nabla_X Y + \nabla_{[Z, X]}Y \\ &= \nabla_Y [X, Z] + \nabla_Z [Y, X] + \nabla_X [Z, Y] - \nabla_{[X, Z]}Y - \nabla_{[Y, X]}Z - \nabla_{[Z, Y]}X \\ &= [Y, [X, Z]] + [Z, [Y, X]] + [X, [Z, Y]] = 0 \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue da identidade de Jacobi para campos vetoriais. □

De agora em diante, nós escreveremos $\langle R(X, Y)Z, T \rangle = (X, Y, Z, T)$.

Proposição 2.1.3. a) $(X, Y, Z, T) + (Y, Z, X, T) + (Z, X, Y, T) = 0$;

b) $(X, Y, Z, T) = -(Y, X, Z, T)$;

c) $(X, Y, Z, T) = -(X, Y, T, Z)$;

d) $(X, Y, Z, T) = (Z, T, X, Y)$.

Demonstração. (a) é a identidade de Bianchi novamente; (b) segue diretamente da definição 5.0.1.

Lema 2.1.1. *Sejam $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$. Então,*

$$(X, Y, Z, T) = -(X, Y, T, Z) \Leftrightarrow (X, Y, Z, Z) = 0.$$

Demonstração. De fato, considere a identidade

$$\langle R(X, Y)(Z+T), Z+T \rangle = \langle R(X, Y)Z, Z \rangle + \langle R(X, Y)T, T \rangle + \langle R(X, Y)Z, T \rangle + \langle R(X, Y)T, Z \rangle.$$

Suponha que $(X, Y, Z, Z) = 0$. Então, o lado esquerdo e os dois primeiros termos do lado direito da equação são nulos. Ficamos, portanto, com $(X, Y, Z, T) + (X, Y, T, Z) = 0$, donde obtemos $(X, Y, Z, T) = -(X, Y, T, Z)$.

Agora, caso valha $(X, Y, Z, T) = -(X, Y, T, Z)$, pondo $T = Z$, temos $(X, Y, Z, Z) = -(X, Y, Z, Z)$, teríamos $(X, Y, Z, Z) = 0$. $\square$

Temos ainda,

$$(X, Y, Z, Z) = \langle \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, Z \rangle.$$

Mas

$$\langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z \rangle = Y \langle \nabla_X Z, Z \rangle - \langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z \rangle,$$

e

$$\langle \nabla_{[X, Y]} Z, Z \rangle = \frac{1}{2} [X, Y] \langle Z, Z \rangle.$$

Daí

$$\begin{aligned} (X, Y, Z, Z) &= Y \langle \nabla_X Z, Z \rangle - X \langle \nabla_Y Z, Z \rangle + \frac{1}{2} [X, Y] \langle Z, Z \rangle \\ &= \frac{1}{2} Y (X \langle Z, Z \rangle) - \frac{1}{2} X (Y \langle Z, Z \rangle) + \frac{1}{2} [X, Y] \langle Z, Z \rangle \\ &= -\frac{1}{2} [X, Y] \langle Z, Z \rangle + \frac{1}{2} [X, Y] \langle Z, Z \rangle = 0, \end{aligned}$$

o que demonstra a letra (c).

Por (a), podemos escrever:

$$(X, Y, Z, T) + (Y, Z, X, T) + (Z, X, Y, T) = 0,$$

$$(Y, Z, T, X) + (Z, T, Y, X) + (T, Y, Z, X) = 0,$$

$$(Z, T, X, Y) + (T, X, Z, Y) + (X, Z, T, Y) = 0,$$

$$(T, X, Y, Z) + (X, Y, T, Z) + (Y, T, X, Z) = 0.$$

Somando as equações acima, obtemos

$$2(Z, X, Y, T) + 2(T, Y, Z, X) = 0.$$

e, portanto,

$$(Z, X, Y, T) = (Y, T, Z, X).$$

□

É conveniente escrever os termos

$$R(X_i, X_j)X_k$$

no sistema de coordenadas (U, x) em torno do ponto $p \in M$. Pondo, $\frac{\partial}{\partial x_i} = X_i$, definimos

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_l R_{ijk}^l X_l,$$

onde chamamos R_{ijk}^l de componentes da curvatura R em (U, x) . Se

$$X = \sum_i u^i X_i;$$

$$Y = \sum_j v^j X_j;$$

$$Z = \sum_k w^k X_k;$$

obtemos, pela linearidade de R ,

$$R(X, Y)Z = \sum_{i,j,k,l} R_{ijk}^l u^i v^j w^k X_l. \quad (2.1)$$

Para expressar R_{ijk}^l em termos dos coeficientes Γ_{ij}^k da conexão riemanniana, escrevemos

$$\begin{aligned} R(X_i, X_j)X_k &= \nabla_{X_j} \nabla_{X_i} X_k - \nabla_{X_i} \nabla_{X_j} X_k \\ &= \nabla_{X_j} \left(\sum_l \Gamma_{ik}^l X_l \right) - \nabla_{X_i} \left(\sum_l \Gamma_{jk}^l X_l \right), \end{aligned}$$

que por cálculos diretos nos dá

$$R_{ijk}^s = \sum_l \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^s - \sum_l \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^s + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^s - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{jk}^s. \quad (2.2)$$

Pondo

$$\langle R(X_i, X_j)X_k, X_s \rangle = \sum_l R_{ijk}^l g_{ls} = R_{ijks},$$

podemos escrever as identidades acima como:

$$R_{ijks} + R_{jkis} + R_{kij s} = 0$$

$$R_{ijks} = -R_{jik s}$$

$$R_{ijks} = -R_{ijsk}$$

$$R_{ijks} = R_{ksij}$$

2.1.1 Cálculo do tensor de curvatura na estera S^2

Em coordenadas polares (θ, φ) , as componentes da métrica da esfera S^2 são dadas por $g_{11} = 1, g_{12} = g_{21} = 0, g_{22} = \sin^2 \theta$. Calculando as componentes da conexão (os símbolos de Christoffel), pela expressão ... encontramos que as únicas componentes não-nulas são $\Gamma_{22}^1 = -\sin \theta \cos \theta$ e $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \cot \theta$, ondes estamos denotando $x_1 = \theta$ e $x_2 = \varphi$. Pelas propriedades algébricas das componentes do tensor de curvatura, temos, no caso de uma

variedade bidimensional, o seguinte:

$$R_{1212} = -R_{2112} = -R_{1221} = R_{2121}$$

e

$$R_{1111} = R_{1122} = R_{2211} = R_{2222} = 0.$$

Não é difícil ver que as fórmulas acima podem ser escritas de uma maneira elegante como sendo

$$R_{ijkl} = (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) \frac{R_{1212}}{G},$$

onde $G = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$ é o determinante da métrica. Assim, vemos que é necessário apenas calcular o componente R_{1212} . Pela definição, temos:

$$\begin{aligned} R_{212}^1 &= \sum_l \Gamma_{22}^l \Gamma_{1l}^1 - \sum_l \Gamma_{12}^l \Gamma_{2l}^1 + \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x_1} - \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial x_2} \\ &= -\Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1 + \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x_1} - \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial x_2} \\ &= -\Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1 + \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x_1} - \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial x_2} \\ &= \cot \theta \sin \theta \cos \theta - \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cos \theta) \\ &= \cos^2 \theta - \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que $R_{1212} = \sum_i g_{i1} R_{212}^i = g_{11} R_{212}^1 = R_{212}^1 = \sin^2 \theta$. Vemos, assim, que o tensor de curvatura para a esfera S^2 em coordenadas polares tem apenas uma componente independente dada por $R_{212}^1 = \sin^2 \theta$.

2.1.2 Cálculo da Curvatura Escalar de S^2

A Curvatura Escalar é dada por $R = \sum_{i,j} g^{ij} R_{ij}$, onde g^{ij} e R_{ij} representam, respectivamente, as componentes da inversa da métrica g_{ij} , e do tensor de Ricci. Este último, por sua vez, é definido pela contração $R_{ij} = \sum_k R_{ikj}^k = \sum_{kl} g^{kl} R_{likj}$. No caso de S^2 , como vimos, a única componente independente do tensor de curvatura é $R_{1212} = \sin^2 \theta$. Assim, teremos:

$$R_{11} = \sum_{12l} g^{12l} R_{l1k1} = g^{22} R_{2121} = g^{22} R_{1212} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \cdot \sin^2 \theta = 1;$$

$$R_{12} = \sum_{kl} g^{kl} R_{l1k2} = 0;$$

$$R_{22} = \sum_{kl} g^{kl} R_{l2k2} = g^{11} R_{1212} = \sin^2 \theta.$$

Lembrando que podemos representar $g^{11} = 1, g^{12} = g^{21} = 0$ e $g^{22} = \frac{1}{\sin^2 \theta}$. Assim, a curvatura escalar será dada por

$$R = \sum_{ij} g^{ij} R_{ij} = g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} = 1 + 1 = 2.$$

Destaquemos aqui que para variedades bidimensionais, temos a seguinte relação entre a curvatura escalar R e a curvatura gaussiana K :

$$K = \frac{R}{2}.$$

Portanto, para a esfera S^2 , temos $K = 1$.

2.2 Gradiente, Divergente e Laplaciano

2.2.1 Gradiente

Definição 2.2.1. Seja $f \in C^\infty(M)$, onde M é uma Variedade Riemanniana. O gradiente de f é o campo em M , denotado por ∇f , definido pela equação

$$\langle \nabla f(p), v \rangle = df_p(v),$$

$$p \in M, v \in T_p M$$

Observação. É bom lembrar o leitor de que por trás dessa definição existe uma razão pela qual definimos gradiente como foi feito acima.

Com efeito, o diferencial $df_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear e, pelo Teorema da representação de Riesz, garante-se a existência de um vetor $w \in T_p M$ tal que

$$df_p(v) = \langle w, v \rangle$$

Por uma questão didática, denotamos $w := \nabla f(p)$.

Proposição 2.2.1. Se $f, g \in C^\infty(M)$, então:

$$(i) \quad \nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$$

$$(ii) \quad \nabla(f \cdot g) = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f$$

Demonstração. Para o primeiro item, façamos

$$\langle \nabla(f + g)(p), v \rangle = d(f + g)_p = df_p + dg_p = \langle \nabla f(p), v \rangle + \langle \nabla g(p), v \rangle = \langle \nabla f(p) + \nabla g(p), v \rangle.$$

Ou seja,

$$\langle \nabla(f + g)(p) - \nabla f(p) - \nabla g(p), v \rangle = 0.$$

Pela arbitrariedade do vetor $v \in T_p M$,

$$\nabla(f + g)(p) - \nabla f(p) - \nabla g(p) = 0 \Rightarrow \nabla(f + g)(p) = \nabla f(p) + \nabla g(p).$$

Usemos um raciocínio análogo para provar (ii):

$$\langle \nabla(f \cdot g)(p), v \rangle = d(f \cdot g)_p.$$

O diferencial $d(f \cdot g)_p$ escrito num sistema de coordenadas $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é a matriz-linha:

$$d(f \cdot g)_p = \left(\frac{\partial(f \cdot g)(p)}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial(f \cdot g)(p)}{\partial x_n} \right).$$

Mas

$$\left(\frac{\partial(f \cdot g)(p)}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial(f \cdot g)(p)}{\partial x_n} \right) = \left(\frac{\partial f(p)}{\partial x_1} \cdot g(p) + f(p) \cdot \frac{\partial g(p)}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial f(p)}{\partial x_n} \cdot g(p) + f(p) \cdot \frac{\partial g(p)}{\partial x_n} \right)$$

Isto é,

$$\begin{aligned} d(f \cdot g)_p &= f(p)dg_p + g(p)df_p = f(p)\langle \nabla g(p), v \rangle + g(p)\langle \nabla f(p), v \rangle \\ &= \langle f(p)\nabla g(p), v \rangle + \langle g(p)\nabla f(p), v \rangle = \langle f(p)\nabla g(p) + g(p)\nabla f(p), v \rangle. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle \nabla(f \cdot g)(p), v \rangle = \langle f(p)\nabla g(p) + g(p)\nabla f(p), v \rangle \Rightarrow \langle \nabla(f \cdot g)(p) - f(p)\nabla g(p) - g(p)\nabla f(p), v \rangle = 0.$$

Novamente, pela arbitrariedade de $v \in T_p M$, temos

$$\nabla(f \cdot g)(p) - f(p)\nabla g(p) - g(p)\nabla f(p) = 0 \Rightarrow \nabla(f \cdot g)(p) = f(p)\nabla g(p) + g(p)\nabla f(p)$$

□

Proposição 2.2.2. Sejam $x : U \rightarrow M$ uma parametrização de M e $f \in C^\infty(M)$. Então, na vizinhança $x(U)$, temos

$$\nabla f = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Consequentemente, $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. Digamos que, nesta parametrização, tenhamos

$$\nabla f = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Logo, em $x(U)$.

$$\left\langle \nabla f, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \sum_i a_i \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \sum_i a_i g_{ij}. \quad (2.3)$$

Nesse caso, pondo $F = \left(\left\langle \nabla f, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle \right)_{n \times 1}$, $A = (a_i)_{n \times 1}$ e $B = (g_{ij})_{n \times n}$, decorre de (2.3) que $F = BA$. Como B é invertível, temos $A = B^{-1}F$. Assim,

$$a_i = \sum_j g^{ij} \left\langle \nabla f, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \sum_j g^{ij} df \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_j g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

como tínhamos afirmado. □

2.2.2 Divergente

Definição 2.2.2. Sejam $X \in \mathfrak{X}(M)$ e considere para todo ponto $p \in M$ a função $\nabla X : T_p M \rightarrow T_p M$ definida por $v \mapsto \nabla X(v) = (\nabla_v X)(p)$.

O divergente de X é a função $\operatorname{div} X : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$p \mapsto \operatorname{div} X(p) = \operatorname{Tr} \nabla X,$$

onde Tr denota o traço da aplicação em questão e ∇ a conexão riemanniana de M .

Proposição 2.2.3. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in C^\infty(M)$. Então:

$$(i) \operatorname{div} (X + Y) = \operatorname{div} X + \operatorname{div} Y;$$

$$(ii) \operatorname{div} (fX) = f \cdot \operatorname{div} X + \langle \nabla f, X \rangle.$$

Demonstração. Para provar (i), note que $\operatorname{Tr} \nabla(X+Y) = \operatorname{Tr} \nabla X + \operatorname{Tr} \nabla Y$. Demonstremos o segundo item. Para cada $p \in M$, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (fX) &= \operatorname{Tr} (\nabla fX)(p) \\ &= \operatorname{Tr} (f(p)\nabla X(p) + df_p X(p)) \\ &= f(p)\operatorname{div} X(p) + \langle \nabla f(p), X(p) \rangle, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. $\square$

Proposição 2.2.4. Sejam $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $x : U \rightarrow M$ uma parametrização de modo que, em $x(U)$, tenhamos $X = \sum_j a_j \frac{\partial}{\partial x_j}$. Então, nesta parametrização,

$$\operatorname{div} X = \sum_i \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} + \sum_j a_j \Gamma_{ij}^i \right). \quad (2.4)$$

Consequentemente, $\operatorname{div} X \in C^\infty(M)$.

Demonstração. Por definição, para cada $p \in M$,

$$\operatorname{div} X(p) = \operatorname{Tr} \nabla X(p).$$

Note que

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X(p) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left(\sum_j a_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} a_j \frac{\partial}{\partial x_j} \\ &= \sum_j \left(a_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_j \left(\sum_k a_j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_k \left(\frac{\partial a_k}{\partial x_i} + \sum_j a_j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

Desta última expressão, podemos concluir que

$$\text{Tr } \nabla X(p) = \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \sum_j a_j \Gamma_{1j}^1 \right) + \cdots + \left(\frac{\partial a_n}{\partial x_n} + \sum_j a_j \Gamma_{nj}^n \right).$$

Daí, verifica-se a equação (2.4). □

Proposição 2.2.5. Sob as mesmas hipóteses da Proposição (2.2.4), obtemos

$$\text{div } X = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i \sqrt{G})$$

onde $G = \det(g_{kj})$.

Demonstração. Utilizaremos o seguinte resultado: Se A é uma matriz $n \times n$ com entradas de classe C^∞ , então $(\det A)' = \det A \cdot \text{Tr } (A' A^{-1})$. Nesse caso,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (a_i \sqrt{G}) = \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \sqrt{G} + \frac{a_i}{2\sqrt{G}} \frac{\partial G}{\partial x_i}.$$

Pelo resultado enunciado anteriormente, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x_i} &= G \cdot \text{Tr} \left(\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i} \right)_{n \times n} (g^{kj})_{n \times n} \right) \\ &= G \left(\sum_k \frac{\partial g_{1k}}{\partial x_i} g^{k1} + \cdots + \sum_k \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} g^{kn} \right) \\ &= G \left(\sum_{kj} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} g^{kj} \right). \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (a_i \sqrt{G}) = \sqrt{G} \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \frac{a_i}{2} \sum_{jk} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} g^{kj} \right). \quad (2.5)$$

Por outro lado, usando (2.4),

$$\text{div } X = \sum_i \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \sum_{jk} \frac{a_j}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right) g^{ki} \right).$$

Logo,

$$\text{div } X = \sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \sum_{ijk} \frac{a_j}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} g^{ki} + \sum_{ijk} \frac{a_j}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} g^{ki} - \sum_{ijk} \frac{a_j}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} g^{ki}.$$

Notando que a segunda e a quarta parcela se anulam, temos que

$$\operatorname{div} X = \sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \sum_{ijk} \frac{a_j}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} g^{ki},$$

o que implica

$$\operatorname{div} X = \sum_i \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \frac{a_i}{2} \sum_{jk} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} g^{kj} \right)$$

Pela igualdade acima e por (2.5), obtemos o resultado desejado. $\square$

2.3 Laplaciano

Definição 2.3.1. Seja $f \in C^\infty(M)$. O laplaciano de f é a aplicação $\Delta f : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\Delta f(p) = \operatorname{div} (\nabla f)(p). \quad (2.6)$$

Verifica-se facilmente que $\Delta f \in C^\infty(M)$.

Definição 2.3.2. O operador $f \mapsto \Delta f$ de $C^\infty(M)$ em $C^\infty(M)$ é chamado operador de Laplace-Beltrami.

Proposição 2.3.1. Sejam $f, g \in C^\infty(M)$. Então:

- (i) $\Delta(f + g) = \Delta f + \Delta g$;
- (ii) $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle$.

Demonstração. (i) segue diretamente do primeiro item da Proposição (2.2.3).

Para o item (ii), usemos a definição

$$\Delta f = \operatorname{div} (\nabla f g)$$

Pela Proposição (2.2.1),

$$\operatorname{div} (\nabla f g) = \operatorname{div} (f \nabla g + g \nabla f)$$

Pela Proposição (2.2.3),

$$\operatorname{div} (f \nabla g + g \nabla f) = \operatorname{div} (f \nabla g) + \operatorname{div} (g \nabla f) = f \operatorname{div} \nabla g + g \operatorname{div} \nabla f + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle.$$

□

Proposição 2.3.2. Sejam $f \in C^\infty(M)$ e $x : U \rightarrow M$ uma parametrização. Então, em $x(U)$,

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{G} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right),$$

onde $G = \det(g_{ij})$.

Demonstração. Basta substituir $X = \nabla f$ e, conseqüentemente, $a_i = \sum_j g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}$ e obtemos a expressão desejada. □

2.3.1 Exemplos

Uma aplicação prática - Laplaciano em coordenadas polares

O leitor deve lembrar da árdua atividade de calcular o laplaciano usando cálculo diferencial. Veremos agora que, usando a fórmula geral do laplaciano, rapidamente chegamos na fórmula clássica $\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$. Considere $M = \mathbb{R}^2$ em coordenadas polares com a métrica euclidiana. Dado um ponto $p = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, a base coordenada em p é formada por $e_\theta = (-r \sin \theta, r \cos \theta)$ e $e_r = (\cos \theta, \sin \theta)$. Fazendo cálculos diretos, obtemos $g_{11} = \langle e_\theta, e_\theta \rangle = r^2$, $g_{12} = g_{21} = 0$ e $g_{22} = 1$, o que nos dá $g^{11} = \frac{1}{r^2}$, $g^{12} = g^{21} = 0$ e $g^{22} = 1$. Assim, $G = r^2 \Rightarrow \sqrt{G} = r$. Substituindo em, temos

$$\Delta f = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(r \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) \right) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial r} + r \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right) \right)$$

Finalmente obtemos

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}.$$

Laplaciano na esfera

Seja $M = S^2$ a esfera no $\mathbb{R}^3$. Dado um ponto $p = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \in S^2$, onde θ é o ângulo polar e φ , o polar. Assim, por cálculo direto, encontramos $\frac{\partial}{\partial \theta} = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta)$ e $\frac{\partial}{\partial \varphi} = (-\sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, 0)$. Nesse caso, os termos da métrica são $g_{11} = \langle \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta} \rangle = 1$, $g_{12} = g_{21} = \langle \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \rangle = 0$ e $g_{22} = \langle \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \rangle = \sin^2 \theta$. Isso nos dá $g^{11} = 1$, $g^{12} = g^{21} = 0$, $g^{22} = \frac{1}{\sin^2 \theta}$ e $G = \sin^2 \theta \Rightarrow \sqrt{G} = \sin \theta$. Substituindo na

fórmula do laplaciano, obtemos

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\sin \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right) \\ &= \cot \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \operatorname{cosec}^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}.\end{aligned}$$

Capítulo 3

O problema de Yamabe

Nesse capítulo, apresentaremos o Problema de Yamabe. Primeiramente, enunciaremos o problema geométrico e, posteriormente, mostraremos sua formulação analítica. Isto é, nosso objetivo é, partindo do problema geométrico chegar na Equação de Yamabe, dada por:

$$\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta \varphi + R \varphi = R' \varphi^{\frac{n+2}{n-2}}$$

Antes de darmos início à discussão do problema de fato, fixemos algumas notações. Além da notação de Einstein, que omite o símbolo de somatório, denotaremos:

$$\nabla^\nu f \nabla_\nu f = g^{ml} \partial_m f \partial_l f$$

Observação. Daqui em diante, por conveniência, iremos adotar a definição do laplaciano com sinal negativo. Isto é,

$$\Delta f = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{G} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$$

3.1 O problema geométrico

Yamabe queria provar que numa Variedade Riemanniana compacta (M^n, g) de dimensão $n \geq 3$, sempre existiria uma transformação conforme da métrica g numa nova métrica g' , tal que a nova curvatura R' seria constante. Tal conjectura foi provada por Trudinger, Aubin e Schoen em 1984.

3.2 Resultados auxiliares importantes

Consideremos uma transformação conforme do tipo $g' = e^f g$, onde f é uma função C^∞ .

Pelo teorema de Levi-Civita, para a métrica g , temos

$$\Gamma_{ik}^l = \frac{1}{2} g^{ml} \{ \partial_i g_{km} + \partial_k g_{mi} - \partial_m g_{ik} \}$$

Nesse caso, os novos símbolos de Christoffel são:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ik}^{'l} &= \frac{1}{2} \{ \partial_i g'_{km} + \partial_k g'_{mi} - \partial_m g'_{ik} \} g'^{ml} \\ &= \frac{1}{2} \{ \partial_i (e^f g_{km}) + \partial_k (e^f g_{mi}) - \partial_m (e^f g_{ik}) \} e^{-f} g^{ml} \\ &= \frac{1}{2} \{ [(\partial_i e^f) g_{km} + e^f \partial_i g_{km}] + [(\partial_k e^f) g_{mi} + e^f \partial_k g_{mi}] - [(\partial_m e^f) g_{ik} + e^f \partial_m g_{ik}] \} e^{-f} g^{ml} \\ &= \frac{1}{2} \{ [e^f (\partial_i f) g_{km} + e^f \partial_i g_{km}] + [e^f (\partial_k f) g_{mi} + e^f \partial_k g_{mi}] - [e^f (\partial_m f) g_{ik} + e^f \partial_m g_{ik}] \} e^{-f} g^{ml} \\ &= \frac{1}{2} e^f \{ [(\partial_i f) g_{km} + \partial_i g_{km}] + [(\partial_k f) g_{mi} + \partial_k g_{mi}] - [(\partial_m f) g_{ik} + \partial_m g_{ik}] \} e^{-f} g^{ml} \\ &= \frac{1}{2} \{ [(\partial_i f) g_{km} + \partial_i g_{km}] + [(\partial_k f) g_{mi} + \partial_k g_{mi}] - [(\partial_m f) g_{ik} + \partial_m g_{ik}] \} g^{ml} \\ &= \frac{1}{2} \{ (\partial_i f) g_{km} + (\partial_k f) g_{mi} - (\partial_m f) g_{ik} \} g^{ml} + \frac{1}{2} \{ \partial_i g_{km} + \partial_k g_{mi} - \partial_m g_{ik} \} g^{ml} \\ &= \frac{1}{2} \{ (\partial_i f) g_{km} + (\partial_k f) g_{mi} - (\partial_m f) g_{ik} \} g^{ml} + \Gamma_{ik}^l \end{aligned}$$

Finalmente, pela simetria das matrizes $[g^{ij}]$ e $[g_{ij}]$ e mudando alguns termos de lugar, temos:

$$\Gamma_{ik}^{'l} - \Gamma_{ik}^l = \frac{1}{2} g^{lm} (g_{mk} \partial_i f + g_{mi} \partial_k f - g_{ik} \partial_m f)$$

Sabemos, pela fórmula das componentes do tensor curvatura, que:

$$R_{kij}^l = \Gamma_{im}^l \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^l \Gamma_{ik}^m + \partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l$$

Analogamente, calculemos a diferença das componentes do tensor curvatura $R_{kij}^{'l} - R_{kij}^l$:

$$R_{kij}^{'l} - R_{kij}^l = [\Gamma_{im}^{'l} \Gamma_{jk}^{'m} - \Gamma_{jm}^{'l} \Gamma_{ik}^{'m} + \partial_i \Gamma_{jk}^{'l} - \partial_j \Gamma_{ik}^{'l}] - [\Gamma_{im}^l \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^l \Gamma_{ik}^m + \partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l]$$

Para simplificar os cálculos, admitiremos que as coordenadas relativas à métrica g são normais no ponto P , isto é, $g_{ij}(P) = \delta_j^i$ e $\Gamma_{ij}^k(P) = 0$. Assim, temos:

$$R_{kij}^{\prime l} - R_{kij}^l = \partial_i(\Gamma_{jk}^{\prime l} - \Gamma_{jk}^l) - \partial_j(\Gamma_{ik}^{\prime l} - \Gamma_{ik}^l) + \Gamma_{im}^{\prime l}\Gamma_{jk}^{\prime m} - \Gamma_{jm}^{\prime l}\Gamma_{ik}^{\prime m}$$

Em termos do tensor de Ricci, a equação acima implica

$$R_{kj}^{\prime l} - R_{kj}^l = \partial_i(\Gamma_{jk}^{\prime i} - \Gamma_{jk}^i) - \partial_j(\Gamma_{ik}^{\prime i} - \Gamma_{ik}^i) + \Gamma_{im}^{\prime i}\Gamma_{jk}^{\prime m} - \Gamma_{jm}^{\prime i}\Gamma_{ik}^{\prime m}$$

onde os $R_{kj} = R_{kij}^i$ são as componentes do tensor de Ricci para métrica g e $R_{kj}^{\prime l} = R_{kij}^{\prime i}$ para a métrica g' . Calculemos cada termo explicitamente:

(i)

$$\partial_i(\Gamma_{jk}^{\prime i} - \Gamma_{jk}^i) = \partial_i \left(\frac{1}{2} g^{im} (g_{mk} \partial_j f + g_{mj} \partial_k f - g_{jk} \partial_m f) \right)$$

Notando que $g^{im} g_{ml} = \delta_l^i$ para todo $l = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \partial_i \left(\frac{1}{2} g^{im} (g_{mk} \partial_j f + g_{mj} \partial_k f - g_{jk} \partial_m f) \right) &= \partial_i \left(\frac{1}{2} (\delta_k^i \partial_j f + \delta_j^i \partial_k f - g^{im} g_{jk} \partial_m f) \right) \\ &= \frac{1}{2} (\delta_k^i \partial_{ij} f + \delta_j^i \partial_{ik} f - [\partial_i (g^{im} g_{jk}) \partial_m f + g^{im} g_{jk} \partial_{im} f]) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_{kj} f + \partial_{jk} f - \partial_i (g^{im} g_{jk}) \partial_m f - g^{im} \partial_{im} f g_{jk}) \end{aligned}$$

Como a função f é C^∞ , vale o Teorema de Schwartz, isto é, $\partial_{kj} f = \partial_{jk} f$. Temos, então, que $\partial_{kj} f + \partial_{jk} f = 2\partial_{kj} f$. Além disso, note que, em coordenadas normais, vale $-g^{im} \partial_{im} = \Delta f$. Logo,

$$\partial_i(\Gamma_{jk}^{\prime i} - \Gamma_{jk}^i) = \frac{1}{2} (2\partial_{kj} f + \Delta f g_{jk} - \partial_i (g^{im} g_{jk}) \partial_m f)$$

Sabemos, devido à condição de compatibilidade da conexão e da métrica (Ver Manfredo do Carmo, exemplo 5.8), que $\nabla_i g_{jk} = 0$. Por outro lado, num sistema de coordenadas, temos $\nabla_i g_{jk} = \partial_i g_{jk} - \Gamma_{ik}^l g_{jl} - \Gamma_{ij}^l g_{lk}$. Como estamos em coordenadas normais, $\Gamma_{ik}^l = \Gamma_{ij}^l = 0$. Daí, segue imediatamente que $\partial_i g_{jk} = 0$. Para ver que $\nabla_i g^{jk} = 0$, basta lembrar de que $g^{il} g_{lj} = \delta_j^i$. Assim, temos $(\nabla_k g^{il}) g_{lj} = -g^{il} \nabla_k g_{lj} = 0$, já que $\nabla_k \delta_k^i = 0$. Logo, $(\nabla_k g^{il}) g_{lj} = 0$. Multiplicando por g^{jm} , temos $\nabla_k g^{im} = 0$.

Portanto, da arbitrariedade dos índices acima, temos $\partial_l(g^{im}g_{jk}) = \partial_l(g^{im})g_{jk} + g^{im}\partial_l g_{jk}$.

Novamente, como $\partial_l g_{jk} = 0$, então $\partial_l g^{im} = 0$. Portanto, temos

$$\partial_i(\Gamma'_{jk}{}^i - \Gamma_{jk}^i) = \frac{1}{2}(2\partial_{kj}f + \Delta f g_{jk}).$$

(ii)

$$\partial_j(\Gamma'_{ik}{}^i - \Gamma_{ik}^i) = \partial_j \left(\frac{1}{2}g^{im}(g_{mk}\partial_i f + g_{mi}\partial_k f - g_{ik}\partial_m f) \right)$$

Lembrando que $g^{im}g_{ml}$ para qualquer $l = 1, \dots, n$.

$$\begin{aligned} \partial_j \left(\frac{1}{2}g^{im}(g_{mk}\partial_i f + g_{mi}\partial_k f - g_{ik}\partial_m f) \right) &= \partial_j \left(\frac{1}{2}(\delta_k^i \partial_i f + \delta_i^i \partial_k f - \delta_k^m \partial_m f) \right) \\ &= \partial_j \left(\frac{1}{2}(\partial_k f + n\partial_k f - \partial_k f) \right) \end{aligned}$$

Colocando $\partial_k f$ em evidência, isto é, $\frac{1}{2}(\partial_k f(1 + n - 1)) = \frac{1}{2}\partial_k f \cdot n = \frac{n}{2}\partial_k f$

$$\begin{aligned} \partial_j \left(\frac{1}{2}(\partial_k f + n\partial_k f - \partial_k f) \right) &= \partial_j \left(\frac{n}{2}\partial_k f \right) \\ &= \frac{n}{2}\partial_{kj}f \end{aligned}$$

(iii)

$$\Gamma'_{im}{}^i \Gamma'_{jk}{}^m = \left(\frac{1}{2}g^{il}(g_{lm}\partial_i f + g_{li}\partial_m f - g_{im}\partial_l f) \right) \left(\frac{1}{2}g^{ml}(g_{lk}\partial_j f + g_{lj}\partial_k f - g_{jk}\partial_l f) \right)$$

Em coordenadas normais, temos $g^{ml} = \delta_m^l = g_{ml}$. Logo,

$$\begin{aligned} \Gamma'_{im}{}^i \Gamma'_{jk}{}^m &= \frac{1}{4}\delta_l^i(\delta_m^l \partial_i f + \delta_i^l \partial_m f - \delta_m^i \partial_l f)g^{ml}(g_{lk}\partial_j f + g_{lj}\partial_k f - g_{jk}\partial_l f) \\ &= \frac{1}{4}(\delta_m^i \partial_i f + \delta_i^i \partial_m f - \delta_m^i \partial_l f)g^{ml}(g_{lk}\partial_j f + g_{lj}\partial_k f - g_{jk}\partial_l f) \\ &= \frac{1}{4}(\partial_m f + n\partial_m f - \partial_m f)g^{ml}(g_{lk}\partial_j f + g_{lj}\partial_k f - g_{jk}\partial_l f) \end{aligned}$$

Somando os termos $\frac{1}{4}(\partial_m f + n\partial_m f - \partial_m f) = \frac{n}{4}\partial_m f$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{im}^{'i} \Gamma_{jk}^{'m} &= \frac{n}{4} \partial_m f g^{ml} (g_{lk} \partial_j f + g_{lj} \partial_k f - g_{jk} \partial_l f) \\
&= \frac{n}{4} \partial_l f (g_{lk} \partial_j f + g_{lj} \partial_k f - g_{jk} \partial_l f) \\
&= \frac{n}{4} (\partial_k f \partial_j f + \partial_j f \partial_k f - \nabla^\nu f \nabla_\nu f g_{jk}) \\
&= \frac{1}{4} (2\partial_k f \partial_j f - \nabla^\nu f \nabla_\nu f g_{jk})
\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
\Gamma_{jm}^{'i} \Gamma_{ik}^{'m} &= \left(\frac{1}{2} g^{il} (g_{lm} \partial_j f + g_{lj} \partial_m f - g_{jm} \partial_l f) \right) \left(\frac{1}{2} g^{mq} (g_{qk} \partial_i f + g_{qi} \partial_k f - g_{ik} \partial_q f) \right) \\
&= \frac{1}{4} (g_{lm} \partial_j f + g_{lj} \partial_m f - g_{jm} \partial_l f) (g_{qk} \partial_i f + g_{qi} \partial_k f - g_{ik} \partial_q f) g^{il} g^{mq}
\end{aligned}$$

Fazendo a distributiva:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{jm}^{'i} \Gamma_{ik}^{'m} &= \frac{1}{4} (g_{lm} g_{qk} g^{il} g^{mq} \partial_i f \partial_j f + g_{lm} g_{qi} g^{il} g^{mq} \partial_j f \partial_k f - g_{lm} g_{ik} g^{il} g^{mq} \partial_j f \partial_q f + \\
&+ g_{lj} g_{qk} g^{il} g^{mq} \partial_m f \partial_i f + g_{lj} g_{qi} g^{il} g^{mq} \partial_m f \partial_k f - g_{lj} g_{ik} g^{il} g^{mq} \partial_m f \partial_q f - \\
&- g_{jm} g_{qk} g^{il} g^{mq} \partial_l f \partial_i f - g_{jm} g_{qi} g^{il} g^{mq} \partial_l f \partial_k f + g_{jm} g_{ik} g^{il} g^{mq} \partial_l f \partial_q f)
\end{aligned}$$

Em coordenadas normais, temos

$$\begin{aligned}
g_{lm} g_{qk} g^{il} g^{mq} \partial_i f \partial_j f &= \delta_l^m \delta_q^k \delta_i^l \delta_m^q = \partial_i f \partial_j f \delta_k^i \partial_i f \partial_j f \\
g_{lm} g_{qi} g^{il} g^{mq} \partial_j f \partial_k f &= \delta_l^m \delta_q^i \delta_i^l \delta_m^q \partial_j f \partial_k f = \delta_k^i \partial_k f \partial_j f \\
-g_{lm} g_{ik} g^{il} g^{mq} \partial_j f \partial_q f &= -\delta_l^m \delta_i^k \delta_i^l \delta_m^q \partial_j f \partial_q f = -\delta_k^q \partial_j f \partial_q f \\
g_{lj} g_{qk} g^{il} g^{mq} \partial_m f \partial_i f &= \delta_l^j \delta_q^k \delta_i^l \delta_m^q \partial_m f \partial_i f = \delta_j^i \partial_m f \partial_i f \\
g_{lj} g_{qi} g^{il} g^{mq} \partial_m f \partial_k f &= \delta_l^j \delta_q^i \delta_i^l \delta_m^q \partial_m f \partial_k f = \delta_m f \partial_k f \\
-g_{lj} g_{ik} g^{il} g^{mq} \partial_m f \partial_q f &= -\delta_l^j \delta_i^k \delta_i^l \delta_m^q \partial_m f \partial_q f = -\delta_q^k \partial_j f \partial_q f \\
-g_{jm} g_{qk} g^{il} g^{mq} \partial_l f \partial_i f &= -\delta_j^m \delta_q^k \delta_i^l \delta_m^q \partial_l f \partial_i f = -\delta_l^i \delta_j^k \partial_l f \partial_i f \\
-g_{jm} g_{qi} g^{il} g^{mq} \partial_l f \partial_k f &= -\delta_j^m \delta_q^i \delta_i^l \delta_m^q \partial_l f \partial_k f = -\delta_j^l \partial_l f \partial_k f
\end{aligned}$$

$$g_{jm}g_{ik}g^{il}g^{mq}\partial_l f\partial_q f = \delta_j^m\delta_i^k\delta_i^l\delta_m^q\partial_l f\partial_q f = \delta_k^l\delta_j^q\partial_l f\partial_q f$$

Somando todos os termos, temos:

$$\begin{aligned}\Gamma_{jm}^{'i}\Gamma_{ik}^{'m} &= \frac{1}{4}(\delta_k^i\partial_i f\partial_j f + \delta_i^i\partial_j f\partial_k f - \delta_k^q\partial_j f\partial_q f + \delta_j^i\partial_k^q\partial_m f\partial_i f + \delta_j^m\partial_m f\partial_k f - \\ &- \delta_q^m\delta_j^k\partial_m f\partial_q f - \delta_l^i\delta_j^k\partial_l f\partial_i f - \delta_j^l\partial_l f\partial_k f + \delta_k^l\delta_j^q\partial_l f\partial_q f)\end{aligned}$$

Pondo $\delta_m^l\partial_l f = \partial_m f$ para todos $m, l = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned}\Gamma_{jm}^{'i}\Gamma_{ik}^{'m} &= \frac{1}{4}(\partial_k f\partial_j f + n\partial_k f\partial_j f - \partial_k f\partial_j f + \partial_k f\partial_j f + \partial_k f\partial_j f - \delta_j^k\partial_m f\partial_m f - \\ &- \delta_j^k\partial_m f\partial_m f - \partial_k f\partial_j f + \partial_k f\partial_j f)\end{aligned}$$

Reagrupando os termos $\partial_k f\partial_j f$ e $\nabla^\nu f\nabla_\nu f = g^{ml}\partial_m f\partial_l f$, temos

$$\Gamma_{jm}^{'i}\Gamma_{ik}^{'m} = \frac{1}{4}((n+2)\partial_k f\partial_j f - 2\nabla^\nu f\nabla_\nu f g_{jk})$$

Por (i), (ii), (iii) e (iv), temos:

$$\begin{aligned}R'_{kj} - R_{kj} &= \partial_i(\Gamma_{jk}^{'i} - \partial_j(\Gamma_{ik}^{'i} - \Gamma_{ik}^i) + \Gamma_{im}^{'i}\Gamma_{jk}^{'m} - \Gamma_{jm}^{'i}\Gamma_{ik}^{'m}) = \\ &= \frac{1}{2}(2\partial_{kj} f + \Delta f g_{jk}) - \frac{1}{2}(n\partial_{kj} f) + \frac{1}{4}(2\partial_k f\partial_j f - \nabla^\nu f\nabla_\nu f g_{jk}) - \\ &- \frac{1}{4}((n+2)\partial_k f\partial_j f - 2\nabla^\nu f\nabla_\nu f g_{jk})\end{aligned}$$

Pondo $\nabla_k\nabla_j f = \partial_{kj} f$ e $\nabla_k f\nabla_j f = \partial_k f\partial_j f$, temos

$$R'_{kj} - R_{kj} = -\frac{n-2}{2}\nabla_k\nabla_j f + \frac{1}{2}\Delta f g_{jk} + \frac{n-2}{4}\nabla_k f\nabla_j f - \frac{n-2}{4}\nabla^\nu f\nabla_\nu f g_{jk}$$

Temos uma igualdade entre dois campos tensoriais, então a identidade é válida em qualquer sistema de coordenadas. Logo, contraindo a equação acima por g^{kj} , isto é, multiplicando ambos os lados por g^{kj} e lembrando que $g'^{kj} = e^{-f}g^{kj}$, temos

Para o lado esquerdo,

$$(R'_{kj} - R_{kj})g^{kj} = R'_{kj}g^{kj} - R_{kj}g^{kj} = R'_{kj}e^f g'^{kj} - R = R' e^f - R$$

Com o lado direito

$$\begin{aligned}
R'e^f - R &= \left(-\frac{n-2}{2}\nabla_k\nabla_j f + \frac{1}{2}\Delta f g_{jk} + \frac{n-2}{4}\nabla_k f \nabla_j f - \frac{n-2}{4}\nabla^\nu f \nabla_\nu f g_{jk} \right) g^{kj} \\
&= -\frac{n-2}{2}\nabla_k\nabla_j f g^{kj} + \frac{1}{2}\Delta f g_{jk} g^{kj} + \frac{n-2}{4}\nabla_k f \nabla_j f g^{kj} - \frac{n-2}{4}\nabla^\nu f \nabla_\nu f g_{jk} g^{kj} \\
&= -\frac{n-2}{2}\nabla_k\nabla_j f \delta_k^j + \frac{1}{2}\Delta f \delta_k^k + \frac{n-2}{4}\nabla_k f \nabla_j f \delta_k^j - \frac{n-2}{4}\nabla^\nu f \nabla_\nu f \delta_k^k \\
&= \frac{n-2}{2}\Delta f + \frac{n}{2}\Delta f + \frac{n-2}{4}\nabla^\nu f \nabla_\nu f - \frac{(n-2)n}{4}\nabla^\nu f \nabla_\nu f
\end{aligned}$$

Finalmente, após algumas simplificações,

$$R'e^f - R = (n-1)\Delta f - \frac{(n-2)(n-1)}{4}\nabla^\nu f \nabla_\nu f \quad (3.1)$$

Essa equação não é tão conhecida na literatura. Ela, no entanto, pode ser transformada numa equação mais conhecida. Para isso, Yamabe considerou a transformação conforme da forma $g' = \varphi^{\frac{4}{n-2}}g$. Isso obriga φ a ser estritamente positiva.

Fazendo $f = \frac{4}{n-2}\text{Log } \varphi$, isto é, $e^f = \varphi^{\frac{4}{n-2}}$, temos:

$$R'e^f = R'\varphi^{\frac{4}{n-2}} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{4}{n-2} \frac{\partial(\text{Log } \varphi)}{\partial x_i} = \frac{4}{n-2} \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad (3.3)$$

Observação. Para efeitos de cálculos, iremos usar coordenadas normais. Embora os termos Δf e $\nabla^\nu f \nabla_\nu f$ sejam expressados de maneiras diferentes, estes calculados num ponto $p \in M$ são iguais independente das coordenadas. Pela arbitrariedade de p , os resultados a seguir valem para toda a variedade M . Vale salientar que é possível fazer o cálculo para coordenadas quaisquer.

Em coordenadas normais, temos

$$\nabla^\nu f \nabla_\nu f = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2$$

Por (3.3), vale

$$\nabla^\nu f \nabla_\nu f = \frac{16}{(n-2)^2} \sum_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 \frac{1}{\varphi^2} \quad (3.4)$$

Calculemos os $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{4}{n-2} \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = \frac{4}{n-2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = \frac{4}{n-2} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\varphi} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{\varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} \right] \quad (3.5)$$

$$= \frac{4}{n-2} \left[-\frac{1}{\varphi^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{1}{\varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} \right] \quad (3.6)$$

O laplaciano em coordenadas normais é dado por

$$\Delta f = - \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

Usando (3.6), temos

$$\Delta f = -\frac{4}{n-2} \sum_i \left[-\frac{1}{\varphi^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{1}{\varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} \right] = \frac{4}{n-2} \left[\frac{1}{\varphi^2} \sum_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 - \varphi^{-1} \Delta \varphi \right] \quad (3.7)$$

Por (3.4) e (3.7), o lado direito da equação em termos de φ fica:

$$\frac{4(n-1)}{n-2} \left[\frac{1}{\varphi^2} \sum_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 - \varphi^{-1} \Delta \varphi \right] - \frac{4(n-1)}{n-2} \frac{1}{\varphi^2} \sum_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 = -\frac{4(n-1)}{n-2} \varphi^{-1} \Delta \varphi$$

Igualando ao lado esquerdo $R' \varphi^{\frac{4}{n-2}} - R$, temos

$$R' \varphi^{\frac{4}{n-2}} - R = \frac{4(n-1)}{n-2} \varphi^{-1} \Delta \varphi$$

Multiplicando ambos os lados por φ , temos

$$R' \varphi^{\frac{n+2}{n-2}} - R\varphi = \frac{4(n-1)}{n-2} \Delta \varphi$$

Colocando o $R\varphi$ para o outro lado da equação, obtemos finalmente

$$\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta \varphi + R\varphi = R' \varphi^{\frac{n+2}{n-2}} \quad (3.8)$$

que é uma equação diferencial parcial elíptica.

Bibliografia

- [1] do CARMO, M.P. *Riemannian Geometry*, 1 ed. Boston: Birkhauser, 1992.
- [2] AUBIN, T. *A Course in Differential Geometry*, 1 ed. Rhode Island: American Mathematical Society, 2001.
- [3] DAS CHAGAS, J.G. *Sobre a Existência de Infinitas Soluções com Energia Infinita de Uma Equação Elíptica em S^n* . 2005. 83 f. Dissertação de Mestrado - UFCG, Campina Grande, 2005.
- [4] DO CARMO, M.P. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, 3 ed. Dover, 2016