UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA A DISTÂNCIA

Jonas Leonel de Souza

Arranjos bidimensionais de segunda ordem: autovalores e autovetores

João Pessoa - Paraíba

2020

Jonas Leonel de Souza

Arranjos bidimensionais de segunda ordem: autovalores e autovetores

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância da Universidade Federal da Paraíba como requisito para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientação Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra

João Pessoa - Paraíba

2020

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S729a Souza, Jonas Leonel de.
Arranjos bidimensionais de segunda ordem : autovalores e autovetores / Jonas Leonel de Souza. - João Pessoa, 2020.
64 f. : il.

Orientação: Flank David Morais Bezerra Bezerra.
TCC (Graduação) - UFPB/CCEN.

1. Autovalores e autovetores. 2. Diagonalização. 3. Exponenciação de matrizes quadradas de ordem 2. 4. Álgebra linear e multilinear. I. Bezerra, Flank David Morais Bezerra. II. Título.

UFPB/CCEN CDU 512.64(043.2)

Elaborado por JOSELIA MARIA OLIVEIRA DA SILVA - CRB-15/113

Arranjos bidimensionais de segunda ordem: autovalores e autovetores

Jonas Leonel de Souza

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância da Universidade Federal da Paraíba como requisito para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra

Aprovador em: 01 / 12 / 2020

Comissão Examinadora

Cládio Odair Pereira da Silva
....

Prof. Dr. Cládio Odair Pereira da Silva (UEPB)

Miriam Silva Pereira
....

Profa. Dra. Miriam da Silva Pereira (UFPB)

Flank DM Bezerra
....

Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra (UFPB, Orientador)

Dedico este trabalho aos meus pais Júlio e Severina, à minha esposa Claudiane e filho Davi, a meus irmãos Daniel, Dênis e Danton pela paciência, dedicação, amor e confiança que sempre me dispuseram ao longo da minha vida e principalmente durante a elaboração deste trabalho.

Agradecimentos

A Deus, pelo dom da vida e da salvação em Cristo, pois por Ele, por meio Dele e para Ele são todas as coisas.

Ao Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra, por todo apoio, dedicação para realização deste trabalho, sendo um exemplo de orientador presente e ativo dando todo o suporte necessário para realização do mesmo.

A minha esposa Claudiane e meu filho Davi pelo carinho, compreensão e amor que sempre me dedicaram em minha caminhada.

A minha família, em especial ao meu a pai e minha mãe que sempre me ensinaram a lutar pelos meus sonhos e anseios e que sempre me apoiaram em todas as minhas decisões.

Aos colegas de curso Lucas, Hellen,Rodolfo e Manoel, pelo companheirismo que me dedicaram durante toda a caminhada do curso.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para que esse trabalho fosse realizado.

" A matemática é o alfabeto que Deus usou para escrever o Universo." (Galileu Galilei)

Resumo

Neste trabalho estudaremos autovalores, autovetores, diagonalização e a exponenciação de matrizes quadradas de ordem 2 cujas entradas são números reais e complexos. Revisamos resultados clássicos da Álgebra Linear.

Palavras-chave: autovalores; autovetores; diagonalização; exponenciação de matrizes quadradas de ordem 2.

Abstract

In this work we will study eigenvalues, eigenvectors, diagonalization and the notion of exponentiation of square matrices of order 2 whose entries are complex numbers. We review classic results form Linear Algebra.

Keywords: eigenvalues; eigenvectors; diagonalization; exponentiation of square matrices of order 2.

Sumário

1 Introdução

Inicialmente, declaramos que neste trabalho de conclusão de curso $\mathbb{K}$ denota um corpo algébrico de característica zero (ou seja, qualquer soma do elemento neutro multiplicativo com si mesmo, $1 + 1 + ... + 1$, não pode ter como resultado o elemento neutro aditivo 0); mais precisamente, $\mathbb{K}$ pode ser o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ ou corpo dos números complexos $\mathbb{C}$.

Neste trabalho estudamos matrizes de segunda ordem(arranjos bidimensionais de segunda ordem) cujas entradas são elementos do corpo $\mathbb{K}$. O nosso principal objetivo aqui é estudar autovalores, autovetores, diagonalização e a noção da exponenciação de matrizes. Para isso nos concentraremos nas matrizes quadradas de segunda ordem.

Quantos aos objetivos deste trabalho, podemos destacar objetivos de duas grandezas, os objetivos gerais e objetivos específicos.

Quanto aos objetivos gerais, estudaremos conceitos, definições e resultados centrais em Álgebra Linear ilustrando uma aplicação da teoria de autovalores e autovetores de matrizes de segunda ordem.

Quanto aos objetivos específicos estudaremos conceitos, definições e resultados centrais em Álgebra Linear relacionados a matrizes quadradas de segunda ordem com entradas num corpo numérico (real ou complexo) ilustrando uma aplicação da teoria de autovalores e autovetores de matrizes de segunda ordem usando a noção da diagonalização e exponenciação de matrizes.

O presente trabalho está dividido em 2 capítulos.

O Capítulo 2 intitulado 'Funadamentação teórica é dedicado a revisar resultados clássicos da Álgebra Linear.

O Capítulo 3 intitulado 'Autovalor, autovetor e diagonalização' é dedicado a revisar resulatados clássicos da Álgebra Linear sobre a teoria espectral de matrizes e a noção de potenciação e diagonalização de matrizes.

2 Fundamentação teórica

Neste capítulo introduziremos os conceitos de espaço vetorial e subespaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, onde esse corpo $\mathbb{K}$ pode ser o corpo dos números reais ou o corpo dos números complexos, bem como introduziremos os conceitos de dependência linear, base e dimensão de um espaço e subespaço vetorial, transformação linear, operador linear. A elaboração desse capítulo segue fortemente a exposição desse conteúdo apresentado nas seguintes referências: (CALLIOLI; DOMINGUES; COSTA, 2007), (LIMA, 2014), (KOLMAN; HILL, 2013), (ARAUJO, 2014), (HEFEZ; FERNANDEZ, 2012),(UNICAMP,).

Ressalto que em todo esse capítulo não temos nenhuma pretensão com a originalidade dos argumentos aqui apresentados nas demonstrações e nas soluções dos exemplos. As soluções dos exemplos são apresentadas sob o nosso ponto de vista respeitando o que entendemos como comportamento didático ideal para a apresentação dos conteúdos supracitados.

2.1 Espaço vetorial

Definição 2.1.1 *Dizemos que um conjunto $V \neq \emptyset$ é um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) quando, e somente quando:*

I - Existe uma adição $(u, v) \longmapsto u + v$ em V, com as seguintes propriedades:

a) $u + v = v + u$, $\forall u, v \in V$ (comutativa);

b) $u + (v + w) = (u + v) + w$, $\forall u, v, w \in V$ (associativa);

c) Existe em V um elemento neutro para adição o qual será simbolizado genericamente por o. Ou seja,

$$\exists\ o \in V /\ u + o = u,\ \forall u \in V.$$

d) Para todo elemento u de V existe o oposto; indicaremos por $(-u)$ esse oposto. Assim,

$$\forall u \in V,\ \exists(-u) \in V \ /\ u + (-u) = o.$$

II - Está definida uma multiplicação por escalar de $\mathbb{K} \times V$ em V, o que significa que cada par (α, u) de $\mathbb{K} \times V$ está associado um único elemento de V que se indica por αu, e para essa multiplicação tem-se o seguinte:

$$(\alpha, u) \longmapsto \alpha u$$

com as seguintes propriedades:

a) $\alpha(\beta u) = (\alpha\ \beta)u$;

b) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$;

c) $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$;

d) $1u = u$;

para quaisquer u, v *de* V *e* α, β *de* $\mathbb{K}$.

Exemplo 2.1.2 *O espaço vetorial* $\mathbb{R}$ *sobre* $\mathbb{R}$.

Um dos espaços mais fáceis de identificar como espaço vetorial é o conjunto dos reais, $\mathbb{R}$*, que com as operações usuais de adição e multiplicação de números reais temos a obediência das propriedades em relação a adição (I-a,I-b,I-c, I-d) e a multiplicação por escalar(II-a,II-b,II-c e II-d) apresentadas na* ***Definição 3.1.1****. Logo o conjunto dos reais munido de sua operações usuais + e . é um espaço vetorial em* $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.1.3 *O espaço vetorial* $\mathbb{C}$ *sobre* $\mathbb{R}$.

Dado $u_1 = a + bi$ *e* $u_2 = c + di$ *com* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *temos:*

$$u_1 + u_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ *e um* $u = a + bi$*, temos:*

$$\alpha u = \alpha(a + bi) = \alpha a + \alpha bi.$$

Podemos observar mais uma vez que as operações usuais da adição e a multiplicação por um escalar obedecem as propriedades apresentadas na ***Definição 3.1.1****. Logo,* $\mathbb{C}$ *é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.1.4 *O espaço vetorial* $\mathbb{C}$ *sobre* $\mathbb{C}$.

Exemplo 2.1.5 *Para todo* $n \in \mathbb{N}$*, o conjunto* $\mathbb{K}^n$ *representa o conjunto de* $n-$ *uplas (listas ordenadas) tal que* $u = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$*,* $v = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$*, com* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *como coordenadas do vetor* u.

O conjunto $\mathbb{K}^n$ *é considerado um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$*, pois é observado que as operações usuais de adição e multiplicação estão bem definidas por:*

$$u + v = (\alpha_1 + \beta_1,...,\alpha_n + \beta_n),$$

e para um α escalar:

$$\alpha.u = (\alpha\alpha_1,...,\alpha\alpha_n).$$

Lembrando também que o inverso aditivo de $u = (\alpha_1,...,\alpha_n)$ é $-u = (-\alpha_1,...,-\alpha_n)$ e que o vetor nulo $o = (0,...,0)$. Logo com as definições apresentadas, concluímos que $\mathbb{K}^n$ é um espaço vetorial.

Exemplo 2.1.6 *O conjunto das matrizes cuja entradas são elementos do corpo $\mathbb{K}$ de ordem 2, denotado por $\mathbb{M}_2(\mathbb{K})$, munido das operações usuais da adição e multiplicação por escalar é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$. Considerando como exemplo $A, B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{K})$*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}.$$

Adição de matrizes

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}.$$

Logo, a soma das matrizes 2×2 tem como resultado uma matriz 2×2. É possível observar que as propriedades I-a(comutativa) e I-b(associativa) comentadas na ***Definição 3.1.1*** *são satisfeitas, pois temos a soma de números reais.*

Encontrando o elemento neutro da matriz 2×2, ou seja, uma matriz D 2×2 que somada a matriz A 2×2 me traz como resultado a própria matriz A. Vejamos:

$$A+D = \begin{bmatrix} a_{11} + d_{11} & a_{12} + d_{12} \\ a_{21} + d_{21} & a_{22} + d_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Note que,

$$a_{11} + d_{11} = a_{11} \Longrightarrow d_{11} = 0$$

$$a_{12} + d_{12} = a_{12} \Longrightarrow d_{12} = 0$$

$$a_{21} + d_{21} = a_{21} \Longrightarrow d_{21} = 0$$

$$a_{22} + d_{22} = a_{22} \Longrightarrow d_{22} = 0$$

Logo D é a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Tomemos um α escalar e a matriz A, pela definição de multiplicação de matriz por escalar temos o seguinte:

$$\alpha A = \alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{bmatrix}.$$

Podemos observar, sem muita dificuldade, que as propriedades relacionadas a multiplicação usual são atendidas para matrizes $\mathbb{M}_2(\mathbb{K})$*. Com isso , concluímos que a coleção de matrizes no corpo* $\mathbb{K}$ *atendem todas as propriedades de espaço vetorial. Um observação que deve ser feita é que neste trabalho daremos atenção exclusivamente as matrizes de ordem dois cuja entradas são elementos do corpo* $\mathbb{K}$*.*

2.2 Subespaço vetorial

Definição 2.2.1 *Seja* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$*. Um subespaço vetorial de* V *é um subconjunto* $W \subset V$*, tal que,*

(a) $o \in W$*;*

(b) $\forall u, v \in W$*,* $u + v \in W$*; e*

(c) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *e* $\forall u \in W$*,* $\alpha u \in W$*.*

Exemplo 2.2.2 $W = \{(x,y) \in \mathbb{K}^2;\ x+y=0\}$ *é subespaço vetorial de* $\mathbb{K}^2$ *sobre* $\mathbb{K}$*.*

Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ *e* $u = (x_1, y_1)$*,* $v = (x_2, y_2) \in W$*.*

(a) Note $(0,0) \in W$*, pois* $0+0 = 0$*.*

(b) Temos que $x_1 + x_2 = 0$ *e* $x_2 + y_2 = 0$*, pois* u *e* $v \in W$*. Então*

$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ *e* $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = 0$*.*

Logo $u + v \in W$*.*

(c) Note que $x_1 + y_1 = 0$*, já que* $u \in W$*. Então*

$$\alpha u = (\alpha x_1, \alpha y_1),$$

logo

$$\alpha x_1 + \alpha y_1 = \alpha(x_1 + y_1) = \alpha.0 = 0.$$

Portanto $\alpha u \in W$*.*

Exemplo 2.2.3 *Dado um conjunto* X *de matrizes simétricas, temos* X *é sub-espaço vetorial de* $\mathbb{M}_2(\mathbb{K})$

Lembrete: propriedades das matrizes transpostas:

(1) . $(A^t)^t = A$*;*

(2) . $(A + B)^t = A^t + B^t$*;*

(3) . $(\alpha A)^t = \alpha A^t$.

(a) A matriz nula:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é simétrica, logo o elemento neutro $\in X$.

(b) Considerando A e B matrizes simétricas $\in X$*, temos:*

$A + B = A^t + B^t = (A + B)^t$ *(propriedade (1)).*

Logo, $A + B \in X$.

(c) Considerando $A \in X$ *e* $\alpha \in \mathbb{K}$*, temos:*

$\alpha A = \alpha A^t = (\alpha A)^t$ *(propriedade (3)), assim* $\alpha A \in X$.

Logo, temos o X é subespaço vetorial $\mathbb{M}_2(\mathbb{K})$.

Exemplo 2.2.4 *Qualquer reta que não passa pela origem não é subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^2$*, pois o elemento neutro (0,0) do* $\mathbb{R}^2$ *não pertence a reta.*

2.3 Dependência linear, base e dimensão

Com a análise dos conceitos de espaço e subespaço vetorial observaremos que fixando uma base num espaço vetorial V de dimensão n, temos um espaço que é gerado por um conjunto finito de vetores que pertencem a V por meio da combinação linear, ou seja, podemos escrever qualquer vetor em V como uma combinação linear dos vetores do conjunto considerado. Será mostrado nessa seção os conceitos de espaço finitamente gerados, dependência linear, base e dimensão.

Definição 2.3.1 *Os vetores* $v_1, v_2, ..., v_k$ *em um espaço vetorial* V *geram* V *se todo vetor de* V *for uma combinação linear de* $v_1, v_2, ..., v_k$*. Além disso, se* $S = [v_1, v_2, ..., v_k]$ *então dizemos também que o conjunto* S *gera* V*, ou que* $(v_1, v_2, ..., v_k)$ *gera* V*, ou que* V *é gerado por* S*.*

Exemplo 2.3.2 *Considerando o* $\mathbb{R}^2$ *e o conjunto* $S = \{(1,0),(0,1)\} \in \mathbb{R}^2$*. Dado um* $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ *temos:*

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1).$$

Podemos observar que a igualdade é válida, logo o conjunto S *gera* $\mathbb{R}^2$

Exemplo 2.3.3 *Podemos observar que o conjunto* W *das matrizes apresentadas abaixo geram o espaço vetorial* $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$*.*

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

De fato, temos que:

$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. *Escrevendo em um sistema:*

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 & = & a \\ \alpha_2 + \alpha_4 & = & b \\ \alpha_3 + \alpha_4 & = & c \\ \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 & = & d. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima obtemos :

$$\alpha_1 = \frac{a-b-c+d}{2}\ ;\ \alpha_2 = \frac{a+b+c-d}{2}\ ;\ \alpha_3 = \frac{-a+b-c+d}{2}\ ;\ \alpha_4 = \frac{a-b+3c-d}{2}.$$

Logo, o conjunto W das matrizes gera o espaço vetorial $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

2.3.1 Dependência linear

Definição 2.3.4 *Dizemos que um conjunto $A = \{u_1, u_2, ..., u_n\} \subset V$ é linearmente independente (L.I.) se, e somente se, uma igualdade do tipo*

$$\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n = 0,$$

com os α_i em $\mathbb{R}$, só for possível para $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$. Caso contrário, o conjunto A é linearmente dependente (L.D.), ou seja, podemos encontrar pelo menos um $\alpha_i \neq 0$.

Exemplo 2.3.5 *: O subconjunto $\{(1,1,1),(1,0,1),(1,0,-2)\}$ do $\mathbb{R}^3$ é linearmente independente. Para verificar se o conjunto é linearmente independente temos*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0.$$

Substituindo os vetores temos

$$\alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,0,1) + \alpha_3(1,0,-2) = 0.$$

Escrevendo em um sistema temos

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 &= 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontramos

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Logo, o subconjunto $\{(1,1,1),(1,0,1),(1,0,-2)\}$ *do* $\mathbb{R}^3$ *é linearmente independente.*

Exemplo 2.3.6 *O subconjunto* $\{x(x-1), x^3, 2x^3 - x^2, x\}$ *de* $P_4(\mathbb{R})$ *é linearmente dependente. De fato, temos,*

$$\alpha_1(x^2 - x) + \alpha_2(x^3) + \alpha_3(2x^3 - x^2) + \alpha_4(x) = 0$$

daí

$$(\alpha_4 - \alpha_1)(x) + (\alpha_1 - \alpha_3)(x^2) + (\alpha_2 + 2\alpha_3)(x^3) = 0.$$

Escrevendo o sistema que representa essa situação

$$\begin{cases} \alpha_4 - \alpha_1 &= 0 \\ \alpha_1 - \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0. \end{cases}$$

O sistema é linear e homogêneo com três equações e quatro incógnitas, ou seja, admite mais de uma solução além da trivial, logo podemos afirmar que o subconjunto $\{x(x-1), x^3, 2x^3 - x^2, x\}$ *é linearmente dependente (L.D.).*

Exemplo 2.3.7 *O conjunto formado pelas matrizes* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *e* $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *é L.I. De fato, temos*

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Escrevendo o sistema temos:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 &= 0. \end{cases}$$

Resolvendo encontramos que:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Logo, as matrizes A, B e C são linearmente independentes (L.I.).

2.3.2 Base de um espaço finitamente gerado

Definição 2.3.8 *Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. Uma base de V é um subconjunto finito $B \subset V$ para qual as seguintes condições se verificam:*

(a) $[B] = V$;

(b) B é linearmente independente (L.I.).

Exemplo 2.3.9 *O subconjunto {1,i} é uma base de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$.*

Os vetores 1 e i constituem um sistema de geradores de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$, pois todo elemento de $\mathbb{C}$ é da forma $a + bi$, com a e b em $\mathbb{R}$. Podemos observar que se

$$a + bi = 0 = 0 + 0i \,(com\, x, y \in \mathbb{R}),$$

então $x = y = 0$.

Exemplo 2.3.10 *Os conjuntos $\{(1,0),(0,1)\}$ e $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ são chamados bases canônicas do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ respectivamente.*

Exemplo 2.3.11 *O conjunto $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ é uma base para o espaço $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. De fato, primeiro verificamos que S é L.I. . Temos,*

$$a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

daí

$$\begin{cases} a + 2b & = & 0 \\ a + b + c & = & 0 \\ c & = & 0 \\ 2d & = & 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos $a = b = c = d = 0$.

Agora seja $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, logo podemos escrever o sistema

$$\begin{cases} a+2b & = & x \\ a+b+c & = & y \\ c & = & z \\ 2d & = & w. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos

$$a = -x+2y-2z,\ b = x-y+z,\ c = z,\ d = \frac{1}{2}w.$$

Portanto podemos escrever a seguinte combinação linear

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = (-x+2y-2z)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (x-y+z)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}w\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e assim S gera $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

2.3.3 Dimensão

A dimensão está relacionada ao números de vetores que fazem parte da base do espaço vetorial considerado. A dimensão de $\mathbb{R}^2$ é 2, a de $\mathbb{R}^3$ é 3 e, em geral, a dimensão de $\mathbb{R}^n$ é n e a de $\mathbb{C}^n = n$.

Definição 2.3.12 *Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. Denomina-se dimensão de V (notação: $dimV$) o número de vetores de qualquer de suas bases. Diz-se também, neste caso, que V é um espaço de dimensão finita.*

Exemplo 2.3.13 *O espaço $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ tem dimensão 4 e uma de suas bases é*

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\},$$

a qual é chamada de base canônica.

Exemplo 2.3.14 *O conjunto $\{1, x, x^2, x^3\}$ é uma base do espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a 3, portanto este espaço tem dimensão 4.*

Definição 2.3.15 *Sejam V um espaço vetorial, $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ uma base para V e $v \in V$ que pode ser escrito, de modo único, como $a_1v_1 + ... + a_nv_n$. As Coordenadas de v com relação a base β são os números $a_1, ..., a_n$ e denotamos por*

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.3.16 *: Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ e as bases $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ e $\gamma = \{(1,1),(0,1)\}$ para $\mathbb{R}^2$. As Coordenadas do elemento $v = (2,-3) \in \mathbb{R}^2$ com relação as bases β e γ, respectivamente, são*

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

e

$$[v]_\gamma = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

De fato, escrevendo o elemento v como combinação linear dos elementos da base β, obtemos

$$(2,-3) = a_1(1,0) + a_2(0,1) \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = -3 \end{cases}$$

Portanto

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Agora, escrevendo v como combinação linear dos elementos da base γ, obtemos

$$(2,-3) = b_1(1,1) + b_2(0,1) \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 2 \\ b_1 + b_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 2 \\ b_2 = -5 \end{cases}$$

Portanto

$$[v]_\gamma = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

2.4 Transformações lineares

Antes de entrarmos nos conceitos propriamente dito de transformação linear vamos analisar algumas definições importantes para um melhor entendimento do que seja uma transformação linear.

Definição 2.4.1 *: Dados dois conjuntos, não vazios, U e V uma aplicação de U em V é uma lei que associa a cada elemento de U um único elemento de V. Se denotamos por F*

esta aplicação, então, o elemento associado a $u \in U$ é denotado por $F(u)$, que está em V, denominado a imagem de u pela aplicação F.

O conjunto U é o domínio e V o contra-domínio da aplicação F. Denotamos a aplicação por $F : U \to V$. Ou ainda, indicando por u um elemento qualquer de U, denotamos: $u \mapsto F(u)$.

Denomina-se Imagem da aplicação $F : U \to V$ o subconjunto de V dado por:

$$Im(F) = \{F(u) \mid u \in U\},$$

ou seja, são todos os elementos em V que são associados a algum elemento de U pela aplicação F.

Duas aplicações F e G são iguais se, e somente se, possuem o mesmo domínio e $F(u) = G(u)$ para todo u neste domínio.

***Aplicação Injetora**: Uma aplicação $F : U \to V$ é Injetora se, e somente se:*

$$F(u_1) = F(u_2) \Rightarrow u_1 = u_2, \quad \forall u_1, u_2 \in U$$

ou, se e somente se:

$$u_1 \neq u_2 \Rightarrow F(u_1) \neq F(u_2), \quad \forall u_1, u_2 \in U.$$

***Aplicação Sobrejetora**: Uma aplicação $F : U \to V$ é Sobrejetora se, se somente se, $Im(F) = V$, ou seja, para todo $v \in V$ existe $u \in U$ tal que $F(u) = v$.*

***Aplicação Bijetora**: Uma aplicação $F : U \to V$ é Bijetora se, e somente se, é Injetora e é Sobrejetora.*

Definição 2.4.2 *Sejam U e V espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$. Uma aplicação $T : U \to V$ é denominada Transformação Linear de U em V se, e somente se, satisfaz:*

$$(a)\, T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2), \quad \forall u_1, u_2 \in U,$$
$$(b)\, T(\alpha u) = \alpha T(u), \quad \forall u \in U.$$

As propriedades (a) e (b) são equivalentes a

$$T(v_1 + \alpha v_2) = T(v_1) + \alpha T(v_2).$$

Definição 2.4.3 *Um Operador Linear é uma transformação linear $T : U \to V$ em que $U = V$.*

Exemplo 2.4.4 *Dado o espaço vetorial* $\mathbb{C}$ *sobre* $\mathbb{R}$ *e seja* $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *tal que* $F(z) = \bar{z}$, $z \in \mathbb{C}$. F *é um operador linear.*

Dados $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$, *temos*

$$\begin{aligned} F(z_1 + z_2) &= F(a + bi + c + di) \\ &= \overline{(a + c) + (b + d)i} \\ &= a + c - (b + d)i \\ &= a - bi + c - di = \overline{z_1} + \overline{z_2} \\ &= F(z_1) + F(z_2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(\lambda z_1) &= F(\lambda a + \lambda bi) \\ &= \overline{(\lambda a + \lambda bi)} \\ &= \lambda a - \lambda bi \\ &= \lambda(a - bi) \\ &= \lambda \overline{z_1} \\ &= \lambda F(z_1). \end{aligned}$$

Logo, F *é um operador linear.*

Exemplo 2.4.5 *A seguinte aplicação de* $\mathbb{R}^2$ *em* $\mathbb{R}^2$ *é uma transformação linear*

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \longmapsto & T((x, y)) = (x, -y). \end{array}$$

Na aplicação acima temos uma ***reflexão*** *em torno do eixo* x.

De fato, para todo $v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$, *temos*

$$\begin{aligned} T(v_1 + \alpha v_2) &= T((x_1, y_1) + \alpha(x_2, y_2)) \\ &= T(x_1 + \alpha x_2, y_1 + \alpha y_2) \\ &= (x_1 + \alpha x_2, -y_1 - \alpha y_2) \\ &= (x_1, -y_1) + (\alpha x_2, -\alpha y_2) \\ &= (x_1, -y_1) + \alpha(x_2, -y_2) \\ &= T(x_1, y_1) + \alpha T(x_2, y_2) \\ &= T(v_1) + \alpha T(v_2). \end{aligned}$$

Exemplo 2.4.6 *Seja* V *um espaço vetorial e*

$$\begin{array}{rccl} T: & V & \longrightarrow & V \\ & v & \longmapsto & T(v) = v. \end{array}.$$

Temos que T é uma transformação linear, que é chamada de transformação ***identidade****.*

Com efeito, sejam $v_1, v_2 \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$T(v_1 + v_2) = v_1 + v_2 = T(v_1) + T(v_2)$$
$$T(\alpha v_1) = \alpha v_1 = \alpha T(v_1).$$

Exemplo 2.4.7 *Dada uma aplicação do $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ tal que*

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & T((x,y)) = (-x,-y), \end{array}$$

temos uma transformação linear que é uma reflexão em torno da origem. Para todo $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos:

$$\begin{aligned} T(v_1 + \alpha v_2) &= T((x_1, y_1) + \alpha(x_2, y_2)) = T(x_1 + \alpha x_2, y_1 + \alpha y_2) \\ &= (-x_1 - \alpha x_2, -y_1 - \alpha y_2) = (-x_1, -y_1) + (-\alpha x_2, -\alpha y_2) \\ &= (-x_1, -y_1) + \alpha(-x_2, -y_2) = T(x_1, y_1) + \alpha T(x_2, y_2) \\ &= T(v_1) + \alpha T(v_2). \end{aligned}$$

Concluindo assim, que de fato a aplicação T é uma transformação linear.

Definição 2.4.8 *Seja T uma transformação linear, $T : U \longrightarrow V$, com U e V espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. O Núcleo da transformação linear T, denotado por $\mathcal{N}(T)$ ou $Ker(T)$ é o seguinte subconjunto do domínio U:*

$$\mathcal{N}(T) = \{u \in U \mid T(u) = o_V\},$$

com o_V o elemento neutro do espaço vetorial V.

Teorema 2.4.9 *Seja $T : U \longrightarrow V$ uma transformação linear. O conjunto $\mathcal{N}(T)$ é um subespaço vetorial de U.*

Demonstração*: Como T é transformação linear, sabemos que $T(o_U) = o_V$, logo e_U, elemento neutro de U, está no núcleo.*

Considerando u_1, $u_2 \in \mathcal{N}(T)$, temos $T(u_1) = o_V$ e $T(u_2) = o_V$, pois ambos estão no núcleo da transformação linear T. Assim, usando que T é transformação linear:

$$T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2) = o_V + o_V = o_V.$$

Logo, $u_1 + u_2 \in \mathcal{N}(T)$.

Considerando $u \in \mathcal{N}(T)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, e que T é transformação linear, temos

$$T(\alpha u) = \alpha T(u) = \alpha o_V = o_V,$$

uma vez que $u \in \mathcal{N}(T)$. Logo, $\alpha u \in \mathcal{N}(T)$. Dessa forma, $\mathcal{N}(T)$ é um subespaço vetorial de U.

Definição 2.4.10 *Sejam U e V espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $T : U \longrightarrow V$ uma transformação linear. Definimos a* ***Imagem*** *da transformação linear T, denotado* ***Im(T)****, como sendo o conjunto:*

$$Im(T) = \{v \in V \mid v = T(u) \quad para\, algum \quad u \in U\}.$$

Teorema 2.4.11 *Seja $T : U \longrightarrow V$ uma transformação linear. O conjunto $Im(T)$ é um subespaço vetorial de V.*

Demonstração*:*

Como T é transformação linear, sabemos que $\mathcal{N}(T)$ tem pelo menos o elemento neutro de U, ou seja, $T(o_U) = o_V$, assim, existe pelo menos um elemento em U que é levado no elemento neutro de V pela transformação linear T, logo, $e_V \in Im(T)$;

Considerando v_1, $v_2 \in Im(T)$, temos existem u_1, $u_2 \in U$ tais que $T(u_1) = v_1$ e $T(u_2) = v_2$, pois v_1 e v_2 estão na imagem de T. Assim, como T é transformação linear, temos

$$T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2) = v_1 + v_2.$$

Assim, existe o elemento $u_1 + u_2 \in U$ tal que $T(u_1 + u_2) = v_1 + v_2$, logo, $v_1 + v_2 \in Im(T)$.

Considerando $v \in Im(T)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, temos existe um u U tal que $T(u) = v$. Como T é transformação linear, temos

$$T(\alpha u) = \alpha T(u) = \alpha v.$$

Assim, existe o elemento $\alpha u \in U$ tal que $T(\alpha u) = \alpha v$, logo $\alpha v \in Im(T)$. Dessa forma, $Im(T)$ é um subespaço vetorial de V .

Teorema 2.4.12 *Sejam U e V espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $T : U \longrightarrow V$ uma transformação linear. Então, T é injetora se, e somente se, $\mathcal{N}(T) = \{o_U\}$, ou seja, se o núcleo de T possui apenas o elemento neutro do domínio U.*

Demonstração: *Suponhamos que T é injetora. Isto é, $T(u_1) = T(u_2) \longrightarrow u_1 = u_2$, para todo $u_1, u_2 \in U$. Considere $u \in \mathcal{N}(T)$, assim, $T(u) = o_V$, mas, como T é transformação linear, sabemos que $T(o_U) = o_V$. Logo, $T(u) = T(o_U)$. Usando a hipótese de que T é injetora, temos $u = o_U$. Assim, o núcleo de T possui apenas o elemento neutro de U, ou seja, $\mathcal{N}(T) = o_U$.*

Teorema 2.4.13 ***(Núcleo e imagem)***: *Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$. Considerando a transformação linear $T : U \longrightarrow V$, então*

$$dim(U) = dim(N(T)) + dim(Im(T)).$$

Demosntração: *Seja $B_1 = \{u_1, u_2, u_3, ..., u_n\}$ uma base de $\mathcal{N}(T)$. Como $\mathcal{N}(T) \subset U$ é subespaço de U, essa base pode ser estendida a uma base $B_2 = \{u_1, u_2, u_3, ..., u_n, v_1, v_2, v_3, ..., v_m\}$ de U. Devemos mostrar que $B_3 = \{T(v_1), T(v_2), T(v_3), ..., T(v_m)\}$ é uma base para $Im(T)$.*

a) $[T(v_1), T(v_2), T(v_3), ..., T(v_m)] = Im(T)$;

b) $\{T(v_1), T(v_2), T(v_3), ..., T(v_m)\}$ é linearmente independente.

Demonstrando a) e b) *temos:*

a) Dado $v \in Im(T)$, existe $u \in U$ tal que $T(u) = v$. Se $u \in U$, então:

$$u = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + ... + a_nu_n + b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3 + ... + b_mv_m$$

assim,

$$v = T(u) = T(a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + ... + a_nu_n + b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3 + ... + b_mv_m)T(u) =$$

$$= a_1T(u_1)+a_2T(u_2)+a_3T(u_3)+...+a_nT(u_n)+b_1T(v_1)+b_2T(v_2)+b_3T(v_3)+\dots+b_mT(v_m).$$

Como $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ pertencem ao $N(T)$, $T(u_i) = 0$ para $i = 1, 2, 3, ..., n$. Assim, $v = b_1T(v_1) + b_2T(v_2) + b_3T(v_3) + ... + b_mT(v_m)$ e a imagem de T é gerada pelos vetores $T(v_1), T(v_2), T(v_3), ..., T(v_m)$.

b) Consideramos agora, a combinação linear $a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + a_3T(v_3) + \dots + a_mT(v_m) = 0$ e mostraremos que os a_i são nulos. Como T é Transformação Linear,

$$T(a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + ... + a_mv_m) = 0.$$

Logo,

$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + ... + a_mv_m \in \mathcal{N}(T).$$

Então, $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + ... + a_mv_m$ pode ser escrito como combinação linear da base B_1 de $\mathcal{N}(T)$, ou seja, existem $b_1, b_2, b_3, ..., b_n$ tais que:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + ... + a_mv_m = b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3 + ... + b_nu_n$$

ou ainda,

$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + ... + a_mv_m - b_1u_1 - b_2u_2 - b_3u_3 - ... - b_nu_n = 0$$

mas, B_2 é uma base de U, todos os coeficientes são nulos em particular

$$a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_m = 0.$$

Proposição 2.4.14 *Seja $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear entre espaços vetoriais de dimensão finita. Se $dim(V) = dim(W)$, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) T é injetiva;

(ii) T é sobrejetiva.

Demonstração: *Considerando o Teorema do Núcleo e da Imagem que diz*

$$dim\mathcal{N}(T) + dimIm(T) = dim(V).$$

Sendo $dim(V) = dim(W)$, podemos escrever a igualdade acima como

$$dim(N(T)) + dim(Im(T)) = dim(W).$$

*Suponhamos que T seja injetiva. Pelo **Teorema 3.4.12**, $\mathcal{N}(T) = 0$ e, consequentemente, $dim(N(T)) = 0$. Segue então que $dim(Im(T)) = dim(W)$, mostrando que T é sobrejetiva.Suponhamos agora que T seja sobrejetiva, ou seja, $Im(T) = W$. Esses dois espaços têm mesma dimensão, portanto, temos dim $\mathcal{N}(T) = 0$, o que garante que $\mathcal{N}(T) = \{0\}$. Pela **Teorema 3.4.12**, segue que T é injetiva.*

Exemplo 2.4.15 *Considere a transformação linear: $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (2x, x + y)$. A tarnsformação T é bijetora.*

Primeiramente para que a Transformação T seja bijetora é necessário que ela seja injetora e sobrejetora. Vamos verificar se T é injetora. Seja $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(x,y) = (2x, x+y) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0, \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

Assim, temos $\mathcal{N}(T) = \{(0,0)\}$ e portanto, T é injetora.

*Agora analisando se T é sobrejetora, temos $dim(\mathcal{N}(T)) = 0$ e $dim(\mathbb{R}^2) = 2$, pelo **teorema 3.4.13** sabemos que $dim(Im(T)) = 2$, e como $dim(Im(T)) = dim(\mathbb{R}^2)$ temos T é sobrejetora.*

Exemplo 2.4.16 *Dada uma transformação T: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por*

$$T(x, y) = (3x - y, -3x + y),$$

T não é bijetora.

Como sabemos para que uma transformação seja bijetora é necessário que ela seja injetora e sobrejetora. Basta verificar que T não é injetora.

Seja $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(x,y) = (3x - y, -3x + y) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} 3x - y = 0 \\ -3x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 3x.$$

Temos que o núcleo é dado por $\mathcal{N}(T) = \{(x, 3x); x \in \mathbb{R}\}$. Como o $\mathcal{N}(T) \neq \{(0,0)\}$, T não é injetora.

Logo, concluímos que se T não é injetora, então T não pode ser bijetora.

2.4.1 Isomorfismo e Automorfismo

Definição 2.4.17 *Sejam U e V espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. Seja $T : U \longrightarrow V$ uma transformação linear de U em V. Dizemos que T é um isomorfismo de U em V se T é uma transformação linear bijetora.*

Quando existe um isomorfismo de U em V, dizemos que os dois espaços vetoriais são isomorfos, ou que U é isomorfo a V.

Um isomorfismo $T : V \longrightarrow V$ é denominado um Automorfismo de V.

Teorema 2.4.18 *Se T é um isomorfismo de U em V, então existe $T^{-1} : V \longrightarrow U$ e T^{-1} também é um isomorfismo (de V em U).*

***Demonstração**: Se T é isomorfismo, então é bijetora, e portanto é sobrejetora, logo, para todo elemento $v \in V$ existe um $u \in U$ tal que $v = T(u)$ e este elemento u é único, pois T é injetora. Assim, a aplicação T^{-1} está definida. Vamos verificar se ela é uma transformação linear e também um isomorfismo.*

Como T é sobrejetora, todo elemento $u \in U$ tem sua imagem $v = T(u) \in V$. Logo, $u = T^{-1}(v)$ e portanto, para todo elemento $u \in U$ está associado algum elemento $v \in V$, assim, T^{-1} é sobrejetora;

Considerando $v_1, v_2 \in V$ e $T^{-1}(v_1) = T^{-1}(v_2)$. Então, $T(u) = v_1$ e $T(u) = v_2$, o que implica que $v_1 = v_2$, pois T é injetora. Logo, $T^{-1}(v_1) = T^{-1}(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2$, portanto, T é injetora;

Sejam $v_1, v_2 \in V$ .Como T^{-1} é sobrejetora, existem $u_1, u_2 \in U$ tais que $v_1 = T(u_1)$ $\leftrightarrow T^{-1}(v_1) = u_1$ e $v_2 = T(u_2) \leftrightarrow T^{-1}(v_2) = u_2$.

Assim, temos

$$\begin{aligned} T^{-1}(v_1 + v_2) &= T^{-1}(T(u_1) + T(u_2)) \\ &= T^{-1}(T(u_1 + u_2)) \\ &= u_1 + u_2 \\ &= T^{-1}(v_1) + T^{-1}(v_2). \end{aligned}$$

Sejam $v \in V$ *e* $\alpha \in \mathbb{K}$*. Como* T^{-1} *é sobrejetora, existe um* $u \in U$ *tal que* $T(u) = v$ $\leftrightarrow$ $u = T^{-1}(v)$*. Assim, temos:*

$$\begin{aligned} T^{-1}(\alpha v) &= T^{-1}(\alpha T(u)) \\ &= T^{-1}(T(\alpha u)) \\ &= \alpha u \\ &= \alpha T^{-1}(v). \end{aligned}$$

Observação 2.4.19 *A representação* T^{-1} *é denominado o isomorfismo inverso de* T *e temos* $T^{-1}(T(u)) = u$ *e* $T(T^{-1}(v)) = v$*, para todo* $u \in U$ *e* $v \in V$*. Dois espaços vetoriais isomorfos* U *e* V *são considerados idênticos, de modo que para cada* $v \in V$ *podemos fazer a associação* $T(u) \longrightarrow v$ *para um único elemento* $u \in U$*.*

Lema 2.4.20 *Sejam* U *e* V *espaços vetoriais sobre um corpo* $\mathbb{K}$*. Se* $dim(U) = n$ *e* $B = \{u_1, ..., u_n\}$ *é uma base para* U*. Então, a aplicação* $T : U \longrightarrow V$ *definida por*

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i,$$

para $v_1, ..., v_n \in V$*, é uma transformação linear.*

Demosntração*: Sejam* $w_1, w_2 \in U$*. Podemos escrevê-los como combinação linear dos elementos da base* B*, isto é,* $w_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ *e* $w_2 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i$*. Temos*

$$\begin{aligned}
T(w_1 + w_2) &= T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i\right) \\
&= T\left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) u_i\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) v_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i \\
&= T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right) + T\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i\right) \\
&= T(w_1) + T(w_2).
\end{aligned}$$

Assim, mostramos que $T(w_1 + w_2) = T(w_1) + T(w_2)$.

Considere $w \in U$ *e* $\gamma \in \mathbb{K}$, *então* w *pode ser escrito como combinação linear dos elementos da base* B *da forma,* $w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$. *Assim, temos:*

$$T(\gamma w) = T\left(\gamma \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right) = T\left(\sum_{i=1}^{n} (\gamma \alpha_i) u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (\gamma \alpha_i) v_i = \gamma \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \gamma T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right).$$

Assim, mostramos que $T(\gamma w) = \gamma T(w)$.

Portanto, concluímos que T *é uma transformação linear.*

Teorema 2.4.21 *Dois espaços vetoriais* U *e* V *de dimensão finita são isomorfos se, e somente se,* $dim(U) = dim(V)$.

Demonstração: *Como* U *e* V *são isomorfos, existe o isomorfismo* $T : U \longrightarrow V$. *Por ser isomorfismo,* T *é injetora, e assim* $dim(N(T)) = 0$. *Além disso,* T *é sobrejetora, assim,* $dim(Im(T)) = dim(V)$. *Pelo teorema do núcleo e da imagem, temos*

$$dim(U) = dim(N(T)) + dim(Im(T) = dim(V).$$

Assumindo que $dim(U) = dim(V)$. *Sejam* $B_1 = \{u_1, ..., u_n\}$ *uma base para* U *e* $B_2 = \{v_1, ..., v_n\}$ *uma base para* V . *Seja a aplicação:* $T : U \longrightarrow V$ *definida por*

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i.$$

Pelo Lema anterior, T *é transformação linear. Vamos verificar se* T *é injetora.*

Considere $w \in \mathcal{N}(T)$, *isto é,* $T(w) = o_V$. *Temos*

$$o_V = T(w) = T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i.$$

*E, como os elementos v_i pertencem a base B_2 de V , eles formam um conjunto L.I., e portanto temos, α_i = 0, $i = 1, ..., n$. Logo, $w = e_U$ e assim, $\mathcal{N}(T) = \{o_U\}$ e T é injetora. Pela **Proposição 3.4.14** do teorema do núcleo e da imagem, temos T é sobrejetora. Concluímos então que T é bijetora e portanto, é um isomorfismo e assim, os espaços U e V são isomorfos.*

Exemplo 2.4.22 *A transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por,*

$$T(x, y) = (x - 2y, y)$$

é um isomorfismo (automorfismo do $\mathbb{R}^2$).

Para mostrar que T é injetora, basta determinar o núcleo de T. Um elemento do $\mathbb{R}^2$ pertence ao núcleo se

$$T(x, y) = (x - 2y, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0, \\ \qquad y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

Assim, $\mathcal{N}(T) = \{(0, 0)\}$ e portanto, T é injetora. Pelo teorema do núcleo e da imagem, temos

$$dim(\mathbb{R}^2) = dim(\mathcal{N}(T)) + dim(Im(T)) \Rightarrow dim(\mathbb{R}^2) = dim(Im(T)).$$

Logo, como a dimensão da imagem de T é igual a dimensão do espaço de chegada, então T é sobrejetora.

Exemplo 2.4.23 *A transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$T(x, y, z) = x + y + z$$

não é um isomorfismo.

De fato, T não é injetora, pois um elemento pertence ao núcleo de T se $T(x, y, z) = x + y + z = 0 \Rightarrow x = -y - z$ Assim, $\mathcal{N}(T) = \{(x, y, z); x = -y - z\}$, logo T não é injetora, pois $dim(\mathcal{N}(T)) \neq 0$. Dessa forma, T não é bijetora e portando não é um isomorfismo.

Exemplo 2.4.24 *O $\mathbb{R}^2$ é isormorfo a qualquer subespaço de dimensão 2 do $\mathbb{R}^3$.*

Considerando um subespaço genérico $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z = 0\}$ do $\mathbb{R}^3$. Aplicando a transformação linear temos:

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

onde

$$T(x, y) = (x, y, 0).$$

Note que $T(x, y) = (x, y, 0)$ *é linear e sua imagem é o subespaço* U*, pois nesse caso* $z = 0$ *na imagem por* T*. É fácil ver que* T *é injetora. Concluímos então que existe um isomorfismo* T *de* $\mathbb{R}^2$ *em* U *e então, esses espaços são isomorfos.*

2.4.2 Matriz de uma transformação linear

Vamos introduzir os conceitos a respeito da álgebra das transformações lineares, analisando a adição e multiplicação por escalar e depois veremos o conceito de transformação linear.

Definição 2.4.25 *Sejam* U *e* V *espaços vetoriais sobre um corpo* $\mathbb{K}$*. Denotamos* $L(U, V)$ *o conjunto de todas as transformações lineares de* U *em* V*. O conjuntos dos operadores lineares de* U *será denotado por* $L(U)$*.*

Definição 2.4.26 *Sejam* $F, G \in L(U, V)$*. A Adição de* F *com* G *é uma aplicação,* $F + G : U \longrightarrow V$*, dada por*

$$(F + G)(u) = F(u) + G(u), \qquad \forall u \in U.$$

Para toda $F, G, H \in L(U, V)$ *valem as seguintes propriedades:*

(a) Associativa: $F + (G + H) = (F + G) + H$*;*

(b) Comutativa: $F + G = G + F$*;*

(c) Existe um elemento neutro de $L(U, V)$*;*

(d) Para toda $F \in L(U, V)$ *existe a transformação oposta* $(-F) \in L(U, V)$ *tal que* $F + (-F) = E$*, onde* E *é a transformação nula.*

Definição 2.4.27 *Sejam* $F \in L(U, V)$ *e* $\alpha \in \mathbb{K}$*. A Multiplicação da transformação* F *por um escalar é uma aplicação* $\alpha F : U \longrightarrow V$*, dada por:*

$$(\alpha F)(u) = \alpha F(u), \qquad \forall u \in U.$$

Para toda $F, G \in L(U, V)$ *e* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *valem as seguintes propriedades:*

(e) Associativa: $(\alpha\beta)F = \alpha(\beta F)$*;*

(f) $(\alpha + \beta)F = \alpha F + \beta F$*;*

(g) $\alpha(F + G) = \alpha F + \alpha G$*;*

(h) $1F = F$*.*

Podemos concluir que $L(U,V)$, o conjunto de todas as transformações lineares de U em V, com as operações de Adição e Multiplicação por um escalar definidas, com suas respectivas propriedades, é um espaço vetorial.

Definição 2.4.28 *Sejam U, V e W espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. Sejam $F : U \longrightarrow V$ e $G : V \longrightarrow W$ transformações lineares. A Composição das transformações F e G é uma aplicação, denotada por $G \circ F : U \longrightarrow W$, dada por*

$$(G \circ F)(u) = G(F(u)), \quad \forall u \in U.$$

As operações de adição, multiplicação por escalar e composição de transformações lineares são transformações lineares.

Considerando $u_1, u_2 \in U$ temos

$$\begin{aligned}(G \circ F)(u_1 + u_2) &= G(F(u_1 + u_2)) \\ &= G(F(u_1) + F(u_2)) \\ &= G(F(u_1)) + G(F(u_2)) \\ &= (G \circ F)(u_1) + (G \circ F)(u_2).\end{aligned}$$

Considerando $u \in U$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ temos

$$\begin{aligned}(G \circ F)(\alpha u) &= G(F(\alpha u)) \\ &= G(\alpha F(u)) \\ &= \alpha G(F(u)) \\ &= \alpha (G \circ F)(u).\end{aligned}$$

Podemos observar acima que utilizamos nos dois casos a definição da composição e o fato de F e G serem transformações lineares. Assim, $G \circ F$ é uma transformação linear de U em W, portanto $G \circ F \in L(U,W)$.

Definição 2.4.29 *No espaço vetorial $L(U)$ podemos definir a operação de Potenciação para expoentes naturais da seguinte forma,*

$$F^0 = I, \quad F^1 = F, \quad F^2 = F \circ F \quad e \quad F^n = F \circ F^{n-1}, \quad para \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dizemos que F é um operador idempotente ou projeção se $F^2 = F$, F é um operador auto-reflexivo se $F^2 = I$ (transformação identidade) e F é um operador nilpotente se $F^n = 0$ (transformação nula), para algum $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.4.30 *O operador linear de projeção sobre o eixo x*

$$\begin{array}{rlcl} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & T(x,y) = (x,0), \end{array}$$

é um operador idempotente.

De fato, temos

$$T^2(x,y) = (T \circ T)(x,y) = T(T(x,y)) = T(x,0) = (x,0) = T(x,y).$$

Exemplo 2.4.31 *O operador linear de reflexão em torno do eixo x*

$$\begin{array}{rlcl} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & T(x,y) = (x,-y), \end{array}$$

é um operador auto-reflexivo.

De fato, temos

$$T^2(x,y) = (T \circ T)(x,y) = T(T(x,y)) = T(x,-y) = (x,-(-y)) = (x,y).$$

Exemplo 2.4.32 $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *onde* $F(x,y) = (0,x)$ *é nilpotente.*

Temos

$$F^2(x,y) = F(F(x,y)) = F(0,x) = (0,0) = 0(x,y),$$

garantindo que $F^2 = 0$.

Definição 2.4.33 *: Sejam U e V espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $T : U \longrightarrow V$ uma transformação linear. Considere $B = \{u_1, ..., u_n\}$ uma base para U e $C = \{v_1, ..., v_m\}$ uma base para V.*

Como os elementos $T(u_1), T(u_2), ..., T(u_n)$ estão em V, assim, podemos escrevê-los como combinação linear dos elementos da base C,

$$\begin{aligned} T(u_1) &= \alpha_{11}v_1 + \alpha_{21}v_2 + ... + \alpha_{m1}v_m \\ T(u_2) &= \alpha_{12}v_1 + \alpha_{22}v_2 + ... + \alpha_{m2}v_m \\ &\vdots \\ T(u_n) &= \alpha_{1n}v_1 + \alpha_{2n}v_2 + ... + \alpha_{mn}v_m. \end{aligned}$$

A transformação linear T fica bem determinada por seu efeito sobre os elementos da base B de U, assim, dizemos que a matriz $m \times n$,

$$(T)_{B,C} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

é a matriz da transformação linear T em relação as bases B e C.

Teorema 2.4.34 *Sejam F e $G \in L(U,V)$ e, B e C bases de U e V, respectivamente, então:*

(a) $(F+G)_{B,C} = (F)_{B,C} + (G)_{B,C}$;

(b) $(\lambda F)_{B,C} = \lambda (F)_{B,C}, \quad \forall \lambda \in K.$

Demonstração: *Considere $B = \{u_1, ..., u_n\}$ a base para U e $C = \{v_1, ..., v_m\}$ a base para V. As imagens dos elementos da base B pelas transformações de F e G pertencem a V, logo, podem ser escritas como combinação linear dos elementos da base C, assim,*

$$F(u_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} v_i$$

e

$$G(u_j) = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} v_i.$$

com α_{ij}, $\beta ij \in \mathbb{K}$, para i = 1,...,m e j = 1,...,n. Desse modo, temos,

$$(F+G)(u_j) = F(u_j) + G(u_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} v_i + \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij} v_i = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) v_i.$$

Portanto, pela definição da matriz de uma transformação linear, temos,

$$(F+G)_{B,C} = (F)_{B,C} + (G)_{B,C}.$$

Além disso, temos,

$$(\lambda F)(u_j) = \lambda F(u_j) = \lambda \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} v_i = \sum_{i=1}^{m} (\lambda \alpha_{ij}) v_i.$$

Portanto, $(\lambda F)_{B,C} = \lambda (F)_{B,C}$.

Teorema 2.4.35 *Considere U, V e W espaços vetoriais, com as respectivas bases B, C e D. Sejam $F : U \longrightarrow V, G : V \longrightarrow W$ transformações lineares. Então, a matriz da transformação linear composta $G \circ F : U \longrightarrow W$ é o produto da matriz da transformação G pela matriz da transformação F, isto é:*

$$(G \circ F)_{B,D} = (G)_{C,D} (F)_{B,C}.$$

Demonstração: *Considere* $B = \{u_1, ..., u_n\}, C = \{v_1, ..., v_m\}$ *e* $D = \{w_1, ..., w_p\}$ *bases para* U, V *e* W*, respectivamente. Para cada elemento* u_j *da base* B *temos*

$$(G \circ F)(u) = G(F(u_j)) = G\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} v_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} G(v_i).$$

Mas, cada $G(v_i)$ *pertence a* W *e pode ser escrito como combinação linear dos elementos da base* D*. Então,*

$$(G \circ F)(u_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} G(v_i) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \sum_{i=1}^{p} \beta_{ki} w_k = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{m} \beta_{ki} \alpha_{ij}\right) w_k.$$

Assim, os coeficientes da matriz $(G \circ F)_{B,D}$ *são dados por* $\sum_{i=1}^{m} \beta_{ki} \alpha_{ij}$*, que são coeficientes da matriz obtida pelo produto* $(G)_{C,D}(F)_{B,C}$.

Teorema 2.4.36 *Considere* U *e* V *espaços vetoriais de mesma dimensão* n*,* B *e* C *bases para* U *e* V*, respectivamente. Seja* T *um isomorfismo de* U *em* V*. Então, a matriz* $(T)_{B,C}$ *é inversível e*

$$(T)^{-1}_{B,C} = (T^{-1})_{C,B}.$$

Isto é, a inversa da matriz que representa T *com relação as bases* B *e* C *é a matriz que representa* T^{-1} *com relação a estas mesmas bases.*

Demonstração: *Sabemos que* $T(u) = v \Leftrightarrow T^{-1}(v) = u$*, pois* T *é um isomorfismo. Então,*

$$(T \circ T^{-1})(v) = T(T^{-1}(v)) = T(u) = v = I_V(v).$$

Onde I_V *é o operador identidade de* V *em* V*. A matriz que representa o operador* I_V *com relação a base* C *é a matriz identidade de ordem* n*. Portanto,*

$$I_n = (I_V)_C = (T \circ T^{-1})_C = (T)_{B,C}(T^{-1})_{C,B}.$$

Analogamente, considerando a composta $T^{-1} \circ T : U \longrightarrow U$ *temos:*

$$I_n = (I_U)_B = (T^{-1} \circ T)_B = (T^{-1}_{C,B}(T)_{B,C}.$$

Da definição de matriz inversa, segue que $(T)^{-1}_{B,C} = (T^{-1})_{C,B}$.

Teorema 2.4.37 *Sejam* U *e* V *espaços vetoriais de dimensões finitas* n *e* m*, respectivamente. Fixadas as bases* $B = \{u_1, ..., u_n\}$ *de* U *e* $C = \{v_1, ..., v_m\}$ *de* V*, a aplicação* $T : L(U, V) \longrightarrow M_{m \times n}(\mathbb{R})$*, que associa a cada transformação linear de* $L(U, V)$ *uma matriz em relação as bases* B *e* C*, é bijetora.*

Demonstração: *Supondo* $F, G \in L(U,V)$. *Se* $(F)_{B,C} = (G)_{B,C}$, *então as respectivas colunas de* $(F)_{B,C}$ *e* $(G)_{B,C}$ *são iguais e temos* $F(u_j) = G(u_j)$, *para* $j = 1, ..., n$. *Dado* $u = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i \in U$, *temos,*

$$F(u) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F(u_i) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i G(u_i) = G(u).$$

Assim, $F = G$ *e portanto, a aplicação é injetora. Da própria definição de matriz de uma transformação linear, segue que aplicação é sobrejetora. Logo, a aplicação é bijetora.*

Exemplo 2.4.38 *Seja* $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, *definida por* $F(x,y,z) = (x+y, 2z)$. *Determinando a matriz da transformação linear* F, *isto é,* $(F)_{B,C}$ *com* B *e* C *as bases canônicas de* $\mathbb{R}^3$ *e* $\mathbb{R}^2$, *respectivamente, temos,*

Escrevendo as imagens dos elementos da base canônica $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ *do* $\mathbb{R}^3$, *pela transformação* F, *como combinações lineares dos elementos da base* $C = \{(1,0), (0,1)\}$ *do* $\mathbb{R}^2$, *temos*

$$F(1,0,0) = (1,0) = 1(1,0) + 0(0,1)$$

$$F(0,1,0) = (1,0) = 1(1,0) + 0(0,1)$$

$$F(0,0,1) = (0,2) = 0(1,0) + 2(0,1).$$

Assim, pela definição da matriz de uma transformação linear, obtemos,

$$(F)_{B,C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.4.39 *Seja* $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, *definida por* $F(x,y,z) = (x+y, 2z)$. *Determine* $(F)_{B,C}$ *com* $B = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,0,-1)\}$ *base de* $\mathbb{R}^3$ *e* $C = \{(1,0), (1,1)\}$ *base de* $\mathbb{R}^2$.

Escrevendo as imagens dos elementos da base B, *pela transformação linear* F, *como combinações lineares dos elementos da base* C, *temos,*

$$F(1,1,0) = (2,0) = \alpha_{11}(1,0) + \alpha_{21}(1,1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} \alpha_{11} + \alpha_{21} = 2 \\ \alpha_{21} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11} = 2 \\ \alpha_{21} = 0 \end{array} \right.$$

$$F(1,0,1) = (1,2) = \alpha_{12}(1,0) + \alpha_{22}(1,1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} \alpha_{12} + \alpha_{22} = 1 \\ \alpha_{22} = 2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{12} = -1 \\ \alpha_{22} = 2 \end{array} \right.$$

$$F(0,0,-1) = (0,-2) = \alpha_{13}(1,0) + \alpha_{23}(1,1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} \alpha_{13} + \alpha_{23} = 0 \\ \alpha_{23} = -2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{13} = 2 \\ \alpha_{23} = -2. \end{array} \right.$$

Assim, obtemos,

$$(F)_{B,C} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.4.40 *Considerando o operador linear* $F : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, *definido por:*

$$F\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2a+b & 2b \\ 2c & 3d \end{bmatrix}.$$

Considerando $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ *com a base canônica* B, *vamos determinar a matriz da transformação* F *com relação a base* B.

Vamos escrever as imagens dos elementos da base B, *pela transformação linear* F, *como combinações lineares dos elementos de* B, *isto é:*

$$F\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$F\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$F\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$F\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Desse modo, pela definição da matriz de uma transformação linear, obtemos,

$$(F)_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

3 Autovalor, Autovetor e Diagonalização

A elaboração desse capítulo segue fortemente a exposição desse conteúdo apresentado nas seguintes referências: (CALLIOLI; DOMINGUES; COSTA, 2007), (KOLMAN; HILL, 2013),(LIMA, 2014), (ARAUJO, 2014), (UNICAMP,).

Ressalto mais uma vez que em todo esse capítulo não temos nenhuma pretensão com a originalidade dos argumentos aqui apresentados nas demonstrações e nas soluções dos exemplos. As soluções dos exemplos são apresentadas sob o nosso ponto de vista respeitando o que entendemos como comportamento didático ideal para a apresentação dos conteúdos supracitados.

3.1 Autovalor e Autovetor

Definição 3.1.1 *Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear. Se existirem elementos $v \in V$, $v \neq e_V$, e $\lambda \in \mathbb{K}$, tais que $T(v) = \lambda v$, então dizemos que λ é um autovalor do operador linear T e v é um autovetor associado ao autovalor λ. Além disso, (v, λ) é dito um autopar do operador linear T.*

Exemplo 3.1.2 *Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por*

$$T(x, y) = (-x, y + 2x).$$

Queremos encontrar os elementos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, com $(x, y) \neq (0, 0)$ e escalares $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que

$$T(x, y) = \lambda(x, y) \Leftrightarrow (-x, y + 2x) = (\lambda x, \lambda y) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda x = -x \\ \lambda y = y + 2x. \end{cases}$$

A primeira equação é satisfeita para todo x, quando $\lambda = -1$, substituindo esse valor de λ na segunda equação, temos

$$-y = y + 2x \Leftrightarrow -2y = 2x \Leftrightarrow y = -x.$$

Dessa forma, todo elemento $v = (x, -x) \in \mathbb{R}^2$, $v \neq e_V$, é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda = -1$.

Definição 3.1.3 *Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$, T um operador linear sobre V e $\lambda \in \mathbb{K}$ um autovalor de T. O conjunto*

$$S_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}$$

é o conjunto de todos os autovetores de T, associados ao autovalor λ, unido à $\{e_V\}$, o elemento neutro de V. Lembrando que e_V não é um autovetor de T, pois os autovetores são não nulos.

Teorema 3.1.4 *O conjunto S_λ é um subespaço vetorial do espaço vetorial V, denominado autoespaço associado ao autovalor λ.*

***Demonstração**:*

O elemento neutro de V está em S_λ, pela forma como foi definido S_λ.

Considere v_1, $v_2 \in S_\lambda$, isto é, $T(v_1) = \lambda v_1$ e $T(v_2) = \lambda v_2$. Como T é uma transformação linear, temos:

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1 + v_2).$$

Assim, $v_1 + v_2 \in S_\lambda$.

Considere $v \in S_\lambda$, isto é, $T(v) = \lambda v$ e um escalar $\alpha \in \mathbb{K}$. Como T é transformação linear, temos

$$T(\alpha v) = \alpha T(v) = \alpha(\lambda v) = \lambda(\alpha v).$$

Assim, $\alpha v \in S_\lambda$, para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ e $v \in V$. Dessa forma, mostramos que S_λ é um subespaço vetorial de V .

Exemplo 3.1.5 *Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (3x, 3y)$. Queremos encontrar elementos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, com $(x, y) \neq (0, 0)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que:*

$$T(x, y) = \lambda(x, y) \Leftrightarrow (3x, 3y) = (\lambda x, \lambda y) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda x = 3x \\ \lambda y = 3y. \end{cases}$$

O sistema é satisfeito para todo (x, y), quando $\lambda = 3$. Assim, todo elemento $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ satisfaz $T(x, y) = 3(x, y)$. Portanto, qualquer $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $v \neq e_V$, é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda = 3$.

Exemplo 3.1.6 *Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (-y, x)$, que representa uma rotação de ângulo $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ no sentido anti-horário. Fazendo*

$$T(x, y) = \lambda(x, y) \Leftrightarrow (-y, x) = (\lambda x, \lambda y) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda x = -y \\ \lambda y = x. \end{cases}$$

Substituindo a segunda equação na primeira teremos $\lambda(\lambda y) = -y \Leftrightarrow (\lambda^2 + 1)y = 0$ $\Leftrightarrow y = 0$ ou $\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = -1$. Assim, não existem valores $\lambda \in \mathbb{R}$ que satisfaçam $T(x, y) = \lambda(x, y)$, ou seja, nenhum vetor $v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq e_V$, é levado por T em um múltiplo de si mesmo. Portanto, o operador linear T não possui autovalores e nem autovetores.

Definição 3.1.7 *Seja A uma matriz quadrada $n \times n$ com entradas pertencentes a um corpo $\mathbb{K}$. Se existirem matrizes $X \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$, diferentes da matriz nula, e $\lambda \in \mathbb{K}$ tais que $AX = \lambda X$, dizemos que λ é um autovalor da matriz A e X é um autovetor da matriz A associado ao autovalor λ.*

Definição 3.1.8 *Dada uma matriz quadrada A de ordem n, o polinômio de grau n dado por $p(\lambda) = det(\lambda I - A)$ é denominado polinômio característico da matriz A.*

Exemplo 3.1.9 *Seja A uma matriz de ordem 2×2 dada por*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Então, seu polinômio característico é

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= det(\lambda - A) \\ &= det\left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) \\ &= det\left(\begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{bmatrix}\right) \\ &= [(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})] - [a_{12}a_{21}] \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\ &= \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A) \end{aligned}$$

em que $tr(A)$ é o traço da matriz A.

Teorema 3.1.10 *Matrizes semelhantes possuem o mesmo polinômio característico.*

Demonstração: *Se B e A são semelhantes, existe uma matriz inversível M tal que $B = M^{-1}AM$. Daí*

$$\begin{aligned} p_B(t) &= det(B - tI_n) \\ &= det(M^{-1}AM - tI_n) \\ &= det(M^{-1}AM - tM^{-1}I_nM) \\ &= det(M^{-1}(A - tI_n)M) \\ &= det(M^{-1})det(A - tI_n)detM \\ &= det(A - tI_n) = p_A(t). \end{aligned}$$

Teorema 3.1.11 *Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear. Considere B e C bases ordenadas para V. Então,*

$$(T)_C = [M]_C^B \; (T)_B \; [M]_B^C,$$

onde $[M]_B^C$ *e* $[M]_C^B$ *são as matrizes de mudança da base* B *para a base* C *e de mudança da base* C *para a base* B*, respectivamente. Ou seja, as matrizes* $(T)_B$ *e* $(T)_C$*, que representam o operador linear* T *com relação as bases* B *e* C*, respectivamente, são semelhantes.*

Demonstração*: Seja* $v \in V$ *. As coordenadas de* v *com relação as bases* B *e* C *são* $[v]_B$ *e* $[v]_C$*, respectivamente. Sabemos que* $[v]_B = [M]_B^C \, [v]_C$*, logo temos*

$$[T(v)]_B = (T)_B[v]_B = (T)_B[M]_B^C[v]_C$$

para todo $v \in V$ *. Assim, como* $(T)_C = [M]_C^B \, (T)_B$*, temos,*

$$[T(v)]_C = (T)_C[v]_C = [M]_C^B[T(v)]_B = ([M]_C^B(T)_B[M]_B^C)[v]_C \Rightarrow (T)_C = [M]_B^C(T)_B[M]_C^B.$$

Logo, duas matrizes que representam um mesmo operador linear, com relação a duas bases distintas, são semelhantes.

Definição 3.1.12 *Sejam* V *um espaço vetorial,* $T : V \longrightarrow V$ *um operador linear. Como as matrizes que representam um mesmo operador linear, com relação a duas bases distintas, são semelhantes, e matrizes semelhantes possuem o mesmo polinômio característico, podemos definir o polinômio característico de um operador linear como sendo o polinômio característico da matriz* $(T)_B$ *que representa* T *com relação a qualquer base* B *de* V*.*

Teorema 3.1.13 *Sejam* V *um espaço vetorial de ordem* n *e* T *um operador linear. Então, os autovalores* λ *de* T *são as raízes do polinômio característico* $p(\lambda)$ *do operador linear* T*.*

Demonstração*: Os autovalores de* T *são os* λ *tais que* $T(v) = \lambda v$*, para algum* $v \in V$ *,* $v \neq o_V$ *. Como* $v = I_V(v)$*, com* I_V *a transformação identidade em* V *, temos:*

$$T(v) = \lambda v \Leftrightarrow T(v) = \lambda I_V(v) \Leftrightarrow T(v) - \lambda I_V(v) = o_V \Leftrightarrow (T - \lambda I_v)(v) = o_V.$$

Essa última equação só possui solução não nula se $\mathcal{N}(T - \lambda I_V) \neq o_V$ *, ou seja, se o núcleo do operador linear* $T - \lambda I_V$ *não tiver somente o elemento neutro de* V *. Seja* $(T)_B$ *a matriz que representa o operador* T*, com relação a uma base qualquer* B *de* V *, então, a matriz* $(T)_B - \lambda I_n$ *representa o operador linear* $T - \lambda I_V$ *. Desse modo, como* $\mathcal{N}(T - \lambda I_V)$ $\neq o_V$ *, o operador* $T - \lambda I_V$ *não é invertível e portanto a matriz que o representa em qualquer base também não será, isto é,* $det((T)_B - \lambda I_n) = 0$*. Mas esse determinante é o polinômio característico da matriz* $(T)_B$*, que é o polinômio característico de* T*. Assim,* λ *é um autovalor de* T *se* $p(\lambda) = 0$*, ou seja, os autovalores de* T *são as raízes do polinômio característico de* T*.*

Exemplo 3.1.14 *Considere a matriz* $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

O polinômio característico de A é dado por

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda) - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2.$$

Os autovalores de uma matriz são as raízes do polinômio característico,

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \;\; ou \;\; \lambda = -1.$$

Portanto, $\lambda_1 = 2$ *e* $\lambda_2 = -1$ *são os autovalores da matriz* A*. Para* $\lambda_1 = 2$ *os autovetores associados são as soluções* X*, não nulas, para*

$$AX = \lambda_1 X \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2 = 2x_1 \\ x_1 + x_2 = 2x_2. \end{cases}$$

O que implica em $x_1 = x_2$*. Assim, os autovetores da matriz* A *associados ao autovalor* $\lambda_1 = 2$ *são da forma,*

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Para $\lambda_2 = -1$ *os autovetores associados são as soluções* X*, não nulas, tais que*

$$AX = \lambda_2 X \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2 = -x_1 \\ x_1 + x_2 = -x_2 \end{cases}$$

O que implica em $x_2 = -\dfrac{x_1}{2}$*. Assim, os autovetores da matriz* A *associados ao autovalor* $\lambda_2 = -1$ *são da forma,*

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ -\dfrac{x_1}{2} \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 3.1.15 *Considere o operador linear* $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *dado por* $T(x, y) = (x+y, y)$*. Considerando* $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ *a base canônica do* $\mathbb{R}^2$*. Escrevendo as imagens dos elementos da base* B*, pela transformação* T*, como combinações lineares dos elementos de* B*, temos,*

$$T(1, 0) = (1, 0) = 1(1, 0) + 0(0, 1)$$

$$T(0, 1) = (1, 1) = 1(1, 0) + 1(0, 1).$$

Assim, $(T)_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *é a matriz que representa o operador* T *com relação a base* B*. O polinômio característico de* T *é o polinômio característico de* $(T)_B$ *dado por,*

$$p(\lambda) = det((T)_B - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1.$$

Os autovalores de T são os λ que são raízes do polinômio característico, ou seja,

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

Portanto, $\lambda = 1$ é o autovalor de T. Para encontrar os autovetores associados, devemos encontrar soluções $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, não nulas, tal que

$$T(x, y) = 1(x, y) \Leftrightarrow (x + y, y) = (x, y) \Leftrightarrow x + y = x \Leftrightarrow y = 0.$$

Assim, os autovetores de T associados ao autovalor $\lambda = 1$ são da forma $v = (x, 0) = x(1, 0)$.

3.2 Diagonalização

Antes de iniciarmos os conceitos de diagonalização, vamos iniciar com os conceitos de multiplicidade algébrica e geométrica para um melhor entendido de diagonalização.

Definição 3.2.1 *Definimos a multiplicidade algébrica do autovalor λ como sendo o número de vezes que λ aparece como raiz do polinômio característico $p(\lambda)$. E a multiplicidade geométrica de λ como sendo a dimensão do subespaço vetorial S_λ.*

Exemplo 3.2.2 *Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dado por $T(x, y) = (x, 2x+y)$. Vamos encontrar os autovalores e autovetores de T. A matriz que representa T com relação a base canônica B do $\mathbb{R}^2$ é*

$$(T)_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico de T é o polinômio característico de $(T)_B$ dado por

$$p(\lambda) = det((T)_B - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2.$$

Os autovalores de T são as raízes do polinômio característico

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(1-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

Observe que $\lambda = 1$ aparece duas vezes como raiz do polinômio característico de T, logo a multiplicidade algébrica de $\lambda = 1$ é igual a 2. Para este autovalor, temos

$$T(x, y) = \lambda(x, y) \Leftrightarrow (x, 2x + y) = 1(x, y) \Leftrightarrow 2x + y = y \Leftrightarrow x = 0.$$

Assim, os autovetores associados a $\lambda = 1$ são da forma $v = (0, y) = y(0, 1)$. Uma base para o subespaço S_λ é $\{(0, 1)\}$, portanto $dim(S_\lambda) = 1$, logo a multiplicidade geométrica de $\lambda = 1$ é igual a 1. Observe que as multiplicidades algébrica e geométrica de um mesmo autovalor nem sempre são iguais.

Definição 3.2.3 *Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear. Dizemos que T é um operador diagonalizável se existe uma base B de V tal que $(T)_B$, a matriz que representa T com relação a base B, é uma matriz diagonal.*

Teorema 3.2.4 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{K}$ e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear. T é diagonalizável se, e somente se, existe uma base B de V formada por autovetores de T.*

***Demonstração**: Suponha que T é diagonalizável, ou seja, existe uma base $B = \{v_1, ..., v_n\}$ de V tal que $(T)_B$ é diagonal:*

$$(T)_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Tomando um elemento v_j da base B, observe que, da maneira como é construída a matriz que representa T com relação a base B, a coluna j da matriz $(T)_B$ é formada pelos coeficientes de $T(v_j)$ escrito como combinação linear dos elementos da base B, ou seja,

$$T(v_j) = 0v_1 + ... + \lambda_j v_j + ... + 0v_n = \lambda_j v_j.$$

Assim, $T(v_j) = \lambda_j v_j$, para $j = 1, ..., n$. Logo, v_j é um autovetor de T associado ao autovalor λ_j e portanto, a base B é formada por autovetores de T.

Reciprocamente, suponha que $B = \{v_1, ..., v_n\}$ é uma base para V formada por autovetores de T, isto é, $T(v_j) = \lambda_j v_j$, para $j = 1, ..., n$, onde $\lambda_1, ..., \lambda_n$ são os respectivos autovalores do operador T. Como as imagens dos elementos v_j da base B pela transformação linear T, escritos como combinações lineares dos elementos de B, são da forma, $T(v_j) = \lambda_i v_i$, obtemos

$$(T)_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

é a matriz que representa T com relação a base B, que é uma matriz diagonal. Logo, T é um operador diagonalizável.

Teorema 3.2.5 *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear, com $\lambda_1, ..., \lambda_k$ autovalores distintos de T e $v_1, ..., v_k$ os autovetores associados, respectivamente. Então, $v_1, ..., v_k$ são linearmente independentes.*

***Demonstração**: A demonstração é feita por indução matemática. Para $k = 1$ é claro que v_1 é linearmente independente, uma vez que $v_1 \neq e_V$, pois v_1 é um autovetor de T. Agora, supondo que seja válido para k, ou seja, para k autovalores distintos de T os autovetores associados $v_1, ..., v_k$ são L.I. Mostraremos que é válido para $k + 1$, isto é, se T possui $k + 1$ autovalores distintos, então os $k + 1$ autovetores associados são L.I. Considere a combinação linear nula,*

$$\alpha v_1 + ... + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} = o_V.$$

Aplicando o operador linear T nesta equação e lembrando que $T(v_i) = \lambda_i v_i$, pois λ_i são autovalores de T associados aos autovetores v_i para $i = 1, ..., k + 1$, obtemos:

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + ... + \alpha_k \lambda_k v_k + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1} = e_V.$$

Multiplicando a primeira equação por λ_{k+1} e subtraindo da segunda equação, temos:

$$\alpha(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) v_1 + ... + \alpha_k (\lambda_k - \lambda_{k+1}) v_k = e_V.$$

Pela hipótese de indução, temos $v_1, ..., v_k$ são linearmente independentes, assim temos $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_{k+1}) = 0$ para $i = 1, ..., k$. Mas $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_{k+1}) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = 0$ ou $\lambda_i - \lambda_{k+1} = 0$. Como os autovalores de T são distintos, isto é, $\lambda_i \neq \lambda_{k+1}$ para $i \neq k + 1$, obtemos $\alpha_i = 0$, para $i = 1, ..., k$. Substituindo na combinação linear nula,

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} = e_V \Rightarrow \alpha_{k+1} v_{k+1} = e_V \Rightarrow \alpha_{k+1} = 0$$

uma vez que $v_{k+1} \neq e_V$, pois é um autovetor de T. Dessa forma, mostramos que α_i = 0 para $i = 1, ..., k + 1$, ou seja, $v_1, ..., v_k, v_{k+1}$ são linearmente independentes.

Teorema 3.2.6 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$ e T um operador linear sobre V. Então, T é diagonalizável se, e somente se:*

(i) o polinômio característico de T possui todas as suas raízes em $\mathbb{K}$;

(ii) a multiplicidade algébrica de cada autovalor de T é igual a sua multiplicidade geométrica.

***Demonstração**: Se T é um operador diagonalizável, pelo **Teorema 4.2.4** temos V possui uma base formada por autovetores de T. seja $B = \{v_{11}, ..., v_{1r_1}, ..., v_{k1}, ..., v_{kr_k}\}$*

essa base, de modo que em cada $\{v_{i1}, ..., v_{ir_i}\}$ estão todos os autovetores associados ao autovalor λ_i para $i = 1, ..., k$. A matriz que representa T em relação a base B é,

$$(T)_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & O \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_2 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_k & & \\ & & & & & \ddots & \\ O & & & & & & \lambda_k \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico de T é portanto,

$$p(\lambda) = det((T)_B - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1}...(\lambda_k - \lambda)^{r_k}$$

cujas raízes estão todas em $\mathbb{K}$.

Para cada índice $i, i = 1, ..., k$, seja U_i o subespaço gerado por $\{v_{i1}, ..., v_{ir_i}\}$. Um elemento $u \in U_i$ é combinação linear de $v_{i1}, ..., v_{ir_i}$ e portanto, é um autovetor associado ao autovalor λ_i, ou seja, $u \in S_{\lambda_i}$. Logo, temos $U_i \subset S_{\lambda_i}$. Agora, tomando $u \in S_{\lambda_i}$ como combinação dos elementos de B:

$$u = \alpha_{11}v_{11} + ... + \alpha_{kr_k}v_{kr_k}.$$

Multiplicando por λ_i e utilizando que $T(u) = \lambda_i u$, uma vez que $u \in S_{\lambda_i}$, temos:

$$\lambda_1\alpha_{11} + ... + \lambda_i\alpha_{1r_1}v_{1r_1} + ... + \lambda_i\alpha_{k1}v_{k1} + ... + \lambda_i\alpha_{kr_k}v_{kr_k} =$$

$$= \lambda_i u = T(u) = \alpha_{11}T(u_{11}) + ... + \alpha_{kr_k}T(u_{kr_k}) =$$

$$\lambda_1\alpha_{11}v_{11} + ... + \lambda_1\alpha_{1r_1}v_{1r_1} + ... + \lambda_k\alpha_{k1}v_{k1} + ... + \lambda_k\alpha_{kr_k}v_{kr_k}.$$

Comparando a primeira e última combinação lineares acima, obtemos:

$$\lambda_i\alpha_{11} = \lambda_1\alpha_{11}, ..., \lambda_i\alpha_{1r_1} = \lambda_1\alpha_{1r_1}$$

$$\vdots$$

$$\lambda_i\alpha_{k1} = \lambda_k\alpha_{k1}, ..., \lambda_i\alpha_{kr_k} = \lambda_k\alpha_{kr_k}.$$

E assim

$$\alpha_{11} = ... = \alpha_{1r_1} = ... = \alpha_{(i-1)1} = ... = \alpha_{(i-1)r_{(i-1)}} =$$

$$= \alpha_{(i+1)1} = ... = \alpha_{(i+1)r_{(i+1)}} = ... = \alpha_{k1} = ... = \alpha_{kr_k} = 0.$$

Portanto, $u = \alpha_{i1}v_{i1} + ... + \alpha_{ir_i}v_{ir_i}$ *e assim* $u \in U_i$*. Logo, temos* $S_{\lambda_i} \subset U_i$*. dessa forma, mostramos que* $U_i = S_{\lambda_i}$ *para* $i = 1, ..., k$*, o que implica que* $dim(S_{\lambda_i}) = dim(U_i) = r_i$ *que é a multiplicidade algébrica de* λ_i*. Protanto, os autovalores de* T *têm mesma multiplicidade algébrica e geométrica.*

Reciprocamente, sabemos que os autovalores de T *são raízes do polinômio característico de* T*. Como* V *tem dimensão* n*, o polinômio característico de* T *terá grau* n *se ele possui todas as suas raízes em* $\mathbb{K}$*, então, pelo teorema fundamental da algébra, isso implica que* T *possui* n *autovalores* $\lambda_1, ..., \lambda_n$ *não necessariamente distintos. Como a multiplicidade algébrica de cada autovalor de* T *é igual a sua multiplicidade geométrica, é ppossível associar a um mesmo autovalor um conjunto linearmente independente formado por autovetores, que será uma base para o subespaço* S_λ*. Além disso, os autovetores associados à autovalores distintos também serão linearmente independentes, pelo* ***Teorema 4.2.5****. Dessa forma,* T *possui* n *autovetores linearmente independentes e como* $dim(V) = n$*, temos* $\{v_1, ..., v_n\}$ *é uma base para* V*. Pelo* ***Teorema 4.2.4****, segue que* T *é um operador diagonalizável.*

Definição 3.2.7 *Uma matriz quadrada* A *é diagonalizável se* A *for semelhante a uma matriz diagonal* D*, ou seja, se existir uma matriz invertível* U *tal que* $A = UDU^{-1}$*. Nesse caso, dizemos que* U *é a matriz diagonalizante de* A*.*

Teorema 3.2.8 *Uma matriz quadrada* A *de ordem* n *é diagonalizável se, e somente se,* A *possui* n *autovetores linearmente independentes.*

Demonstração*: Supondo que* A *seja uma amtriz diagonalizável, então existe uma matriz invertível* $U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix}$*, onde* u_i *são vetores coluna* $n \times 1$*, tal que* $A = UDU^{-1}$*, com* D *uma matriz diagonal*

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Como $A = UDU^{-1} \Rightarrow U^{-1}AU = D \Rightarrow AU = UD$*, temos*

$$AU = UD \Leftrightarrow A\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} Au_1 & Au_2 & \dots & Au_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 u_1 & \lambda_2 u_2 & \dots & \lambda_n u_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} Au_1 = \lambda_1 u_1 \\ \qquad \vdots \\ Au_n = \lambda_n u_n \end{cases}$$

Como U é invertível, não pode ter colunas nulas, isto é, $u_i \neq e_V$. Portanto, $\lambda_1, ..., \lambda_n$ são autovalores de A com $u_1, ..., u_n$ os autovetores associados, respectivamente. E sendo U invertível, suas colunas são linearmente independentes, e assim, A possui n autovetores linearmente independentes.

Reciprocamente, suponha que A tem n autovetores linearmente independentes $u_1, ..., u_n$, associados aos autovalores $\lambda_1, ..., \lambda_n$, não necessariamente distintos. Seja U a matriz cujas colunas são autovetores de A, ou seja, $U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix}$. Como U é uma matriz quadrada $n \times n$ e suas colunas são L.I., temos que U é invertível. Assim, temos

$$\begin{cases} Au_1 = \lambda_1 u_1 \\ \quad\vdots \\ Au_n = \lambda_n u_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} Au_1 & Au_2 & \dots & Au_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 u_1 & \lambda_2 u_2 & \dots & \lambda_n u_n \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow AU = UD$$

$$\Leftrightarrow A = UDU^{-1}.$$

Logo, A é semelhante a D, uma matriz diagonal, o que mostra que A é diagonalizável.

Exemplo 3.2.9 *Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (y, x)$. Os autovalores de T são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$. Para $\lambda_1 = 1$, temos*

$$T(x, y) = \lambda_1(x, y) \Leftrightarrow (y, x) = 1(x, y) \Leftrightarrow x = y.$$

Os autovetores de T associados a λ_1 são da forma $v_1 = (x, x) = x(1, 1)$. Para $\lambda_2 = -1$, temos:

$$T(x, y) = \lambda_2(x, y) \Leftrightarrow (y, x) = -1(x, y) \Leftrightarrow y = -x.$$

Assim, os autovetores de T associados a λ_2 são da forma $v_2 = (x, -x) = x(1, -1)$.

Considere dois autovetores de T, por exemplo, $(1, 1)$ e $(1, -1)$. Esses vetores são linearmente independentes e como $dim(\mathbb{R}^2) = 2$, temos $B = \{(1, 1), (1, -1)\}$ é uma base para o $\mathbb{R}^2$ formada por autovetores do operador T. Escrevendo as imagens dos elementos da base B, pela transformação T, como combinações lineares dos elementos de B, temos,

$$T(1, 1) = (1, 1) = 1(1, 1) + 0(1, -1)$$

$$T(1, -1) = (-1, 1) = 0(1, 1) - 1(1, -1).$$

Portanto, a matriz que representa T com relação a base B é,

$$(T)_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

que é uma matriz diagonal, logo T é um operador diagonalizável. Observe que os elementos da diagonal de $(T)_B$ são os autovalores de T.

Exemplo 3.2.10 *Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (x+y, y)$. Tomando a base canônica B do $\mathbb{R}^2$, a matriz que representa T com relação a base B é,*

$$(T)_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, o polinômio característico de T é dado por:

$$p(\lambda) = det((T)_B - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda).$$

Assim, a raiz do polinômio característico é $\lambda = 1$, com multiplicidade 2. Logo, o operador T possui um autovalor $\lambda = 1$ com multiplicidade algébrica igual a 2. Nesse caso, temos:

$$T(x, y) = \lambda(x, y) \Leftrightarrow (x + y, y) = (x, y) \Leftrightarrow y = 0.$$

Portanto, os autovetores de T associados ao autovalor $\lambda = 1$ são da forma $v = (x, 0) = x(1, 0)$. Uma base para S_λ é $\{(1, 0)\}$, e assim, o autovalor λ tem multiplicidade geométrica igual a 1. Como $dim(\mathbb{R}^2) = 2$, observe que para formarmos uma base para o $\mathbb{R}^2$ com autovetores de T precisamos de 2 autovetores linearmente independentes, mas os únicos autovetores de T são da forma $x(1, 0)$ e quaisquer dois que tomarmos serão linearmente dependentes, pois serão múltiplos um do outro. Logo, não podemos obter uma base para o $\mathbb{R}^2$ formada apenas por autovetores do operador linear T, assim T não é diagonalizável. Observe que as multiplicidades algébrica e geométrica do autovalor λ não são iguais.

Exemplo 3.2.11 *Considere a matriz A dada por,*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico de A é dado por,

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda).$$

As raízes do polinômio característico são $p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(-2-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ *ou* $\lambda = -2$. *Portanto, A possui dois autovalores* $\lambda_1 = 1$ *e* $\lambda_2 = -2$. *Para* λ_1, *temos:*

$$AX = \lambda_1 X \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_2 = 0.$$

Assim, os autovetores da matriz A associados ao autovalor $\lambda_1 = 1$ *são da forma,*

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para $\lambda_2 = -2$, *temos,*

$$AX = \lambda_2 X \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_2 = -\frac{3}{2}x_1.$$

Assim, os autovetores de A associados ao autovalor $\lambda_2 = -2$ *são da forma:*

$$X_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ -\dfrac{3x_1}{2} \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -\dfrac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Observe que $(1, 0)$ *e* $\left(1, -\frac{3}{2}\right)$ *são linearmente independentes, portanto A possui* 2 *autovetores linearmente independentes, o que implica que a matriz A é diagonalizável. De fato, basta tomar a matriz diagonalizante U e a matriz diagonal D dadas por,*

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\dfrac{3}{2} \end{bmatrix} \quad e \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Observe que as colunas de U são os autovetores de A e a matriz diagonal D foi construída com os autovalores de A, temos que A é semelhante a matriz D, ou seja, $A = UDU^{-1}$, *de fato,*

$$A = UDU^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\dfrac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{2}{3} \\ 0 & -\dfrac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Assim, A é uma matriz diagonalizável.

Agora explanaremos aplicações com a digonalização de potências de matrizes e séries de matrizes. A elaboração desses conceitos segue fortemente a exposição desse conteúdo apresentado nas seguintes referências: (CALLIOLI; DOMINGUES; COSTA, 2007), (SILVA, 2014), (PELLEGRINI, 2015), (KUERTEN, 2002).

3.3 Potências de uma matriz

Considerando uma matriz A de ordem n. Quando nos depararmos com A^m com $m \geq 2$, queremos saber o produto de $A \cdot A \cdots A$ m vezes, ou seja, $A^m = A^{m-1} \cdot A$. Usando a diagonalização das matrizes, o cálculo das potências de uma matriz pode ser realizado num processo relativamente simples. Sendo a matriz A diagonalizável, temos que existe uma matriz invetível M tal que

$$M^{-1}AM = D$$

com

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

sendo a matriz diagonal dos autovalores de A, então

$$D^m = \begin{bmatrix} \lambda_1^m & & & 0 \\ & \lambda_2^m & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^m \end{bmatrix}.$$

Com isso, se A é diagonalizável e D sua forma diagonal, pela **Definição 4.2.7** temos que $A = MDM^{-1}$. Calculando A^3 temos:

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = (MDM^{-1})(MDM^{-1})(MDM^{-1}) = MD^3M^{-1}.$$

Logo, de modo geral temos:

$$A^m = MD^mM^{-1}.$$

Exemplo 3.3.1 *Seja* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ *e vamos calcular* A^p*, onde* $p \in \mathbb{N}$*.*

Primeiramente calculamos os autovalores da matriz através do polinômio caracterísitico

$$det(A - \lambda I) = 0$$

$$det\begin{bmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & 4-\lambda\end{bmatrix}=0$$

$$(1-\lambda)(4-\lambda)-4=0$$

$$\lambda^2-5\lambda=0,$$

Logo a matriz A tem como autovalores $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 5$. Calculando agora os autovetores temos,

Para $\lambda_1 = 0$, temos,

$$Av=\lambda v \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=0\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x+2y\\ 2x+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\Leftrightarrow x=-2y.$$

Assim, os autovetores de A associados ao autovalor $\lambda_1 = 0$,

$$v_1=(-2y,y)=y(-2,1).$$

Para $\lambda_2 = 5$, temos:

$$Av=\lambda v \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=0\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x+2y\\ 2x+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5x\\ 5y\end{bmatrix}\Leftrightarrow x=\frac{y}{2}.$$

Assim, os autovetores de A associados ao autovalor $\lambda_2 = 5$,

$$v_1=(\frac{y}{2},y)=y(\frac{1}{2},1)$$

Com isso temos que λ_1 e λ_2 tem como respectivos autovetores $v_1 = (-2, 1)$ e $v_2=\left(\frac{1}{2},1\right)$. Logo:

$$D=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}, M=\begin{bmatrix}-2 & \frac{1}{2}\\ 1 & 1\end{bmatrix}, M^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}.$$

Calculando A^p temos,

$$\begin{aligned}A^p &= MD^pM^{-1}\\ &= \begin{bmatrix}-2 & \frac{1}{2}\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0^p & 0^p\\ 0^p & 5^p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{2}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}5^{p-1} & 2.5^{p-1}\\ 2.5^{p-1} & 4.5^{p-1}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

3.4 Séries de matrizes

Consideremos uma sequência $A_1, A_2, ..., A_k$, de matrizes reais de tipo $m \times n$. Suponhamos $A_k = (a_{ij}^{(k)})$, $k = 1, 2, ...$ Dizemos que a sequência dada converge para a matriz $B = (b_{ij})$, do mesmo tipo que as A_k, se as sequências de números reais

$$a_{ij}^{(1)}, a_{ij}^{(2)}, ..., a_{ij}^{(k)}, ...$$

convergem para b_{ij} para todo $i = 1, ..., m$ e todo $j = 1, ..., n$.

Por exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, ..., \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, ...$$

converge para a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ pois $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...$ converge para 0, o mesmo acontecendo com a sequência 0, 0, 0,...

Se a sequência $A_1, A_1 + A_2, A_1 + A_2 + A_3, ...$ convergir, para a matriz B, então diremos que a série infinita $A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_n + ...$ é convergente para B. A matriz B chama-se soma da série dada.

Pode-se provar que, sendo A de ordem n, a série exponencial

$$I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + ... + \frac{A^p}{p!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

é convergente.

Definição 3.4.1 *Definimos a matriz exponencial de uma matriz $A \in \mathbb{M}(n)$, onde $\mathbb{M}(n)$ é o conjunto das matrizes quadradas de ordem n por*

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + ... + \frac{A^p}{p!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \tag{3.1}$$

O conceito está bem definido,pois a série que define a exponencial é absolutamente convergente. No caso de $n = 1$ temos $e^a = (e^a)$ e a série de Taylor da exponencial escalar converge. No caso geral, tomando a norma $||.||$ de operador $\mathbb{M}(n)$, obtemos

$$\sum_{i=0}^{\infty} ||\frac{A^k}{k!}|| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{||A^k||}{k!} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{||A||^k}{k!} = e^{||A||}$$

onde usamos a propriedade (SILVA, 2014)

$$||AB|| \leq ||A||||B||.$$

Sejam A e B matrizes quadradas $n \times n$ e a, b, números reis ou complexos, arbitrários. Denotamos por I a matriz identidade $n \times n$ e por 0 a matriz quadrada nula de mesma ordem. A^* indica a matriz transposta conjugada de A e A^T, que denota a matriz transposta de A.

São válidas as seguintes propriedades da exponencial matricial, cujas demosntrações são encontradas em (SILVA, 2014).

1. A igualdade $e^0 = I$ é válida, onde 0 denota a matriz quadrada com todos os elementos iguais a zero.

***Demonstração**: Pela definição de multiplicação de matrizes, $0^n = 0$, para $n \geq 1$, logo*

$$e^0 = I + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = I + 0 = I.$$

2. A igualdade $e^{(a+b)A} = e^{aA} e^{bA}$ é válida.

***Demonstração**: Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Dado $j \in \mathbb{N}$, temos pela lei do binômio:*

$$\frac{1}{j!}(a+b)^j = \frac{1}{j!} \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} a^l b^{j-l} = \sum_{l=0}^{j} \frac{t^l}{l!} \frac{u^{j-l}}{(j-l)!} = \sum_{r+s=j} \frac{a^r}{r!} \frac{b^s}{s!} \tag{3.2}$$

portanto,

$$\frac{1}{j!}(aA+bA)^j = \frac{1}{j!}(a+b)^j A^j = \left[\frac{a^r}{r!} \frac{b^s}{s!} \right] A^j = \frac{a^r}{r!} A^j \frac{b^s}{s!} A^s.$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}(aA+bA)^j = \sum_{j=0}^{n} \sum_{r+s=j} \frac{1}{r!} a^r A^r \frac{1}{s!} b^s A^s = \left(\sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r!}(aA)^r \right) \left(\sum_{s=0}^{n} \frac{1}{s!}(bA)^s \right).$$

Passando o limite com $n \longrightarrow \infty$, resulta $e^{aA}.e^{bA}$.

3. Se $AB = BA$, então $e^A e^B = e^{A+B}$.

Como A e B comutam,

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + 2AB + b^2 = \sum_{n=0}^{2} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k. \tag{3.3}$$

De acordo com a equação (4.3), temos, para quaisquer de A e B:

$$\begin{aligned} e^A.e^B &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{A^{n-k}B^k}{(n-k)!k!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} \frac{A^{n-k}B^k}{(n-k)!k!}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{A^{n-k}B^k}{n!}(4.4) \end{aligned}$$

por outro lado,

$$e^{A+B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!},$$

por hipótese (4.3) é válida, ou seja, A e B comutam.

4. A igualdade $e^A e^{-A} = I$ é válida.

***Demonstração**: Como A e $-A$ comutam, pela propriedade anterior, temos $e^A.e^{-A} = e^{A+(-A)} = e^0 = I$.*

5. Se B é uma matriz invertível, então $e^{BAB^{-1}} = Be^AB^{-1}$.

***Demonstração**: Isso decorre do fato que $(BAB^{-1})^n = BA^nB^{-1}$, logo $e^{BAB^{-1}} = Be^AB^{-1}$.*

6. $Det(e^A) = e^{tr(A)}$, onde $det(e^A)$ é o determinante de e^A e $tr(A)$ é o traço da matriz A.

***Demonstração**: Se $e^A = diag(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, ..., e^{\lambda_n})$, então, $det(e^A) = e^{\lambda_1}.e^{\lambda_2}.e^{\lambda_3}...e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+...\lambda_n} = e^{tr(A)}$.*

7. A igualdade $e^{(A^T)} = (e^A)^T$ é válida. Disto segue que se A é uma matriz simétrica, e^A também é simétrica:

Demonstração: Seja $A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_n)$, por outro lado temos $A^T = A$, ou seja, A é simétrica, desta forma $e^{(A^T)} = e^A = (e^A)^T$.

Analisando a soma da série representada e^A, notamos que o cálculo que resolve a série é em geral díficil. Mas com o entendimento que se A for uma matriz quadrada diagonalizável então esse cálculo torna-se relativamente mais simples pois, sendo $A^p = MD^pM^{-1}$ com

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

então

$$
\begin{aligned}
e^A &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M.D^k.M^{-1}}{k!} \\
&= M \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!} \right) M^{-1} \\
&= M e^D M^{-1} \\
&= M \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & & \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix} M^{-1}.
\end{aligned}
$$

Exemplo 3.4.2 *Dado* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ *então* $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ *(D que foi calculado anteriormente). Daí*

$$
\begin{aligned}
e^A &= M \begin{bmatrix} e^0 & 0 \\ 0 & e^5 \end{bmatrix} M^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^0 & 0 \\ 0 & e^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 + e^5 & -2 + 2e^5 \\ -2 + 2e^5 & 1 + 4e^5 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

4 Conclusão

No presente trabalho revisamos resultados clássicos da Álgebra Linear focando em matrizes de segunda ordem e fazendo o estudo dos conceitos de autovalores, autovetores, diagonalização e a noção da exponenciação de matrizes. Aproveitamos a oportunidade para realizar mais um estudo sobre estes conceitos, que são de suma importância para a formação de um profissional em Matemática. Esperamos que este trabalho de conclusão de curso sirva de motivação para os estudantes de Matemática.

Referências

ARAUJO, T. de. *Álgebra linear: Teoria e Aplicações*. [S.l.]: SBM, Rio de Janeiro, 1^o*edição*, 2014.*Citado*2*vezesnaspáginas*10*e* 37.

CALLIOLI, C. A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. F. *Álgebra linear e Aplicações*. [S.l.]: Atual, São Paulo, 6^o*edição*, 2007.*Citado*3*vezesnaspáginas*10, 37*e* 50.

HEFEZ, A.; FERNANDEZ, C. d. S. *Introdução à álgebra linear*. [S.l.]: SBM, Rio de Janeiro, 2012. Citado na página 10.

KOLMAN, B.; HILL, D. R. *Introdução a Álgebra linear e Aplicações*. [S.l.]: Editora LTC, Rio de Janeiro, 8^o*edição*, 2013.*Citado*2*vezesnaspáginas*10*e* 37.

KUERTEN, C. *Algumas Aplicações de Matrizes*. [S.l.]: Trabalho de conclusão de curso, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, Florionópolis, 2002. Citado na página 50.

LIMA, E. L. *Algebra Linear*. [S.l.]: IMPA, Rio de Janeiro, 1^o*edição*, 2014.*Citado*2*vezesnaspáginas*10*e* 37.

PELLEGRINI, J. C. *álgebra linear*. [S.l.]: Disponível em: https://www.ime.unicamp.br/ deleo/MA327/ld4.pdf. Acesso em 18 de outubro 2020, 2015. Citado na página 50.

SILVA, E. L. da. A função exponencial do ponto de vista das matrizes. 2014. Citado 3 vezes nas páginas 50, 52 e 53.

UNICAMP. *Álgebra Linear e Aplicações*. Disponível em: <https://www.ime.unicamp.br/~marcia/AlgebraLinear/index.html>. Acesso em: 17 out. 2020. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 37.