UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA - UFPB
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA A DISTÂNCIA

André dos Santos Araujo

CÁLCULO DE ÁREAS POR MEIO DAS INTEGRAIS DEFINIDAS E IMPRÓPRIAS

Duas Estradas – PB

2020

André dos Santos Araujo

CÁLCULO DE ÁREAS POR MEIO DAS INTEGRAIS DEFINIDAS E IMPRÓPRIAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância da Universidade Federal da Paraíba como requisito para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino

Duas Estradas – PB

2020

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

A663c Araujo, Andre Dos Santos.
Cálculo de áreas por meio das integrais definidas e impróprias / Andre Dos Santos Araujo. - João Pessoa, 2020.
56 f. : il.

Orientação: Daniel Marinho Pellegrino.
TCC (Graduação) - UFPB/CCEN.

1. Teorema fundamental do cálculo. 2. Soma de Riemann. 3. Cálculo. 4. . I. Pellegrino, Daniel Marinho. II. Título.

UFPB/CCEN CDU 517.2/.3(043.2)

Elaborado por ANA ROBERTA SOUSA MOTA - CRB-15/101

ANDRÉ DOS SANTOS ARAUJO

CÁLCULO DE ÁREAS POR MEIO DAS INTEGRAIS DEFINIDAS E IMPRÓPRIAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino

Aprovado em: 04 / 12 / 2020

COMISSÃO EXAMINADORA:

Daniel Marinho

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino
UFPB – Orientador

Tony Kleverson Nogueira

Prof. Dr. Tony Kleverson Nogueira
UFERSA – Examinador

Anselmo Baganha Raposo Júnior

Prof. Ms. Anselmo Baganha Raposo Junior
UFMA – Examinador

Aos meus pais Antonio e Severina e aos meus irmãos pelo incentivo e apoio irrestrito, propiciando vitória nesta minha caminhada.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, **a Deus** por me dar forças, saúde, coragem e sabedoria para realização deste trabalho e continuar seguindo para alcançar meus objetivos.

Aos meus **pais,** Antonio Oliveira de Araujo e Severina dos Santos Araujo, pelo carinho, incentivo e apoio durante toda a minha trajetória educacional; aos meus irmãos Dioclécio e Washington por todo companheirismo e apoio.

Ao **meu orientador** Professor Dr. Daniel Marinho Pellegrino por ter aceitado meu pedido para construção desse trabalho e que me incentivou e contribuiu muito.

Aos meus **familiares e amigos** que sempre torceram e acreditaram no meu potencial e que contribuíram de maneira direta ou indiretamente na minha caminhada.

A **todos os professores** do Departamento de Matemática que contribuíram na minha formação acadêmica.

Aos meus **colegas de curso,** que durante esses quatro anos partilharam comigo momentos de alegrias, aflições, incentivos e conhecimentos. Em especial Romário, Julyanna, Thiago e Helen. Vocês foram essenciais na minha trajetória durante a graduação.

“O futuro pertence àqueles que acreditam na beleza de seus próprios sonhos”.

Eleanor Roosevelt

RESUMO

O presente trabalho investiga o cálculo de áreas de figuras planas com contornos curvilíneos por meio do Cálculo de Integrais Definidas e Impróprias. Apresentamos aspectos históricos do Cálculo Diferencial e Integral e ilustramos, de forma algébrica e geométrica, as integrais como somas de Riemann. Destacamos o Teorema Fundamental do Cálculo e sua demonstração, as propriedades das integrais definidas e impróprias e, finalmente, a divergência de integrais impróprias usando apenas limites. Concluímos que o trabalho se mostra potencialmente útil como material didático em cursos superiores de graduação.

Palavras-chave: Teorema Fundamental do Cálculo. Soma de Riemann. Áreas. Integral.

ABSTRACT

The present work investigates the calculation of the area of flat figures with curvilinear contours using defined and improper integrals. We present historical aspects of the Integral and Differential Calculus and we also illustrate, algebraically and geometrically, the integrals as Riemann sums. We highlight the Fundamental Theorem of Calculus and its proof, as well as the main properties of definite and improper integrals and, finally, the divergence of certain improper integrals just using limits. We conclude that this work is potentially useful as didactic material in undergraduate courses.

Keywords: Fundamental Calculus Theorem. Riemann sum. Areas. Integral.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O cálculo de áreas surgiu da necessidade do homem, desde as primeiras civilizações antigas, para demarcar terras e calcular áreas de plantio. Até as necessidades modernas para o cálculo de espaços determinados para construção civil e engenharia. Cada vez mais precisando de cálculos mais precisos e específicos para resolver problemas propostos às necessidades do tempo. Com o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral, foi possível constituir e calcular áreas de contornos curvos com uma precisão maior e, até mesmo, exata por meio das integrais definidas.

Até o ensino médio, estudamos os cálculos de áreas de figuras planas regulares e do círculo, sem maiores detalhes. Com esse estudo, através do Cálculo Diferencial e Integral, podemos ampliar os horizontes e calcular áreas de figuras planas delimitadas por curvas. Objetivando ampliar esse conhecimento para além das figuras regulares, buscamos através da pesquisa bibliográfica, utilizando livros didáticos de autores como Howard Eves, James Stewart, Diva Marília Flemming, Mirian Buss Gonçalves e Anselmo Baganha Raposo Júnior, bem como pesquisas em sites, artigos, monografias, teses entre outros materiais, trazer da forma mais clara e concisa possível à relevância e demonstração dos cálculos, e, para isso, utilizamos não apenas as notações e abordagem algébrica, mas também geométrica.

Diante do exposto, o interesse pela temática em questão surgiu a partir dos estudos das disciplinas de cálculo durante a graduação. Com essa abordagem do cálculo de áreas por meio das integrais definidas, o trabalho tem por finalidade demonstrar e contribuir com o desenvolvimento e aplicação do cálculo de áreas, sejam elas para o ensino-aprendizagem dos alunos em nível de graduação ou para finalidades de aplicações práticas, bem como, também, o presente trabalho apresenta aspectos que podem ser demonstrados para alunos de diversos cursos das ciências exatas.

Este trabalho tem como objetivo principal investigar e desenvolver o cálculo de áreas de figuras planas com contornos curvilíneos a partir da abordagem algébrica e geométrica, utilizando o Cálculo Diferencial e Integral por meio das integrais definidas e impróprias. Para alcançar o objetivo geral, foram determinados os seguintes objetivos específicos:

- Introduzir a história do cálculo.
- Dar a ideia geométrica de como a área abaixo de uma curva é calculada, com retângulos inscritos e circunscritos.
- Enunciar o Teorema Fundamental do Cálculo e dar uma ideia da demonstração.
- Dar exemplos de áreas calculadas.
- Definir e Apresentar a teoria de integrais impróprias e mostrar a sua divergência usando apenas limites.

Para um melhor resultado e explanação o trabalho foi dividido em seis capítulos e ficou organizado da seguinte forma:

O primeiro capítulo apresenta a introdução com os elementos pertinentes ao trabalho, com a apresentação do tema, problemática, justificativa e organização estrutural.

No segundo capítulo, são mostrados alguns aspectos importantes da história do desenvolvimento do cálculo de áreas ao longo do tempo, contribuições de inúmeros matemáticos e explanação do Teorema Fundamental do Cálculo.

Por sua vez, o terceiro capítulo, traz alguns questionamentos e apresenta o cálculo de áreas por meio da integral como somas de Riemann.

O quarto capítulo é dedicado ao desenvolvimento do Teorema Fundamental do Cálculo, demonstrações, apresentação das propriedades das integrais definidas e aplicações.

O quinto capítulo é dedicado ao estudo das integrais impróprias, que é um caso particular das integrais definidas, bem como, demonstrações de áreas calculadas, representação geométrica e uma abordagem demonstrando a divergência de integrais impróprias sem fazer o uso do Teorema Fundamental do Cálculo, usando apenas os conceitos de cálculos de limites.

Por fim, no sexto e último capítulo, são apresentadas as considerações finais com os principais resultados da pesquisa e futuros estudos da temática estudada.

2. INTRODUÇÃO À HISTÓRIA DO CÁLCULO

Ao longo da história, o Cálculo Diferencial e Integral que hoje conhecemos, recebeu importantes contribuições, desde antes de Cristo até os dias atuais, de célebres matemáticos como Arquimedes (287–212 a.C.), Johann Kepler (1571–1630), Descartes (1596–1650), Boaventura Cavalieri (1598–1647), Pierre de Fermat (1601–1665), Torricelli (1608–1647) e Isaac Barrow (1630–1677). Todos estes desempenharam um papel notável e profícuo na direção daquilo que, mais tarde, constituiria um marco no desenvolvimento do pensamento matemático, permitindo ao homem finalmente superar as barreiras da abordagem puramente algébrico-aritmética de problemas. Contudo, foi apenas após os trabalhos independentes de Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, no século XVII, que introduziram o conceito de derivada e flertaram com a necessidade de uma definição formal do conceito de limite, fornecendo respostas a perguntas que ficaram em aberto por séculos, como, por exemplo, o problema de determinar a área abaixo de uma curva, que pudemos conceber formalmente o Cálculo Diferencial e Integral. Grandes matemáticos trabalharam no aprimoramento dos trabalhos de Newton e Leibniz fazendo importantes descobertas. Entre eles, destacamos, os irmãos Bernoulli, L'Hospital, Lagrange, D'Alembert, Cauchy, Weierstrass e Riemann.

Leibniz fez suas descobertas entre os anos de 1675 e 1676, publicando-as em 1684 e 1686. Newton obteve seus resultados anos antes, entre 1666 e 1667. No entanto, só os divulgou a um grupo de amigos, vindo a publicá-los vários anos depois de Leibniz, em 1704 e um segundo livro em 1736. Com isso, houve uma grande disputa pelo título de inventor do Cálculo. Ambos criaram e utilizaram notações distintas, e, anos mais, tarde ficou provado que tanto Newton quanto Leibniz criaram de maneira independente o que hoje chamamos de cálculo. Segundo Fulini (2016) o Cálculo é tido como a mais importante e poderosa ferramenta matemática desenvolvida no século XVII, com aplicações em quase todas as áreas científicas. Para além da matemática, o encontramos na física, química, biologia, astronomia, economia, engenharia, medicina entre outras ciências.

O Cálculo Diferencial está relacionado à taxa de variação da reta tangente com relação ao gráfico de uma função. Já os problemas de integração, estão relacionados ao cálculo de áreas abaixo de uma curva determinada por uma função, bem como o cálculo do volume de sólidos. A integral ainda é tida como uma antiderivação, pois faz o processo inverso à derivação: quando integramos uma função contínua e, em seguida, realizamos o cálculo de derivação da função recém-obtida, voltamos à função original. Esse fato é evidenciado nos Teoremas Fundamentais do Cálculo. Embora a integral seja ensinada nos cursos de cálculo depois da abordagem lógica de limites e derivadas, o cálculo de integral foi desenvolvida antes do cálculo diferencial.

> A ideia da integração teve origem em processos somatórios, ligados ao cálculo de certas áreas e certos volumes e comprimentos. A diferenciação, criada bem mais tarde, resultou de problemas sobre tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos. Mais tarde ainda, verificou-se que a integração e a diferenciação estão relacionadas entre si, sendo cada uma delas operação inversa da outra. (EVES, 2004, p. 417).

Muitas das notações utilizadas hoje foram criadas por Leibniz, como o símbolo de integração $\int$, que é um “S alongado” derivado da palavra soma e a representação de $\frac{dy}{dx}$ para a derivada da função y com respeito à sua variável independente x.

3. CÁLCULO DE ÁREAS ABAIXO DE UMA CURVA

Até o final do Ensino Médio aprendemos a calcular áreas de polígonos e do círculo. Mas como calcular a área de figuras determinadas por um contorno curvilíneo? Desde a Grécia antiga, matemáticos já calculavam áreas aproximadas por meio do método da exaustão criado por Eudoxo, que consistia em aproximar áreas de regiões determinadas por contornos curvos por meio de regiões poligonais cuja área sabia-se calcular.

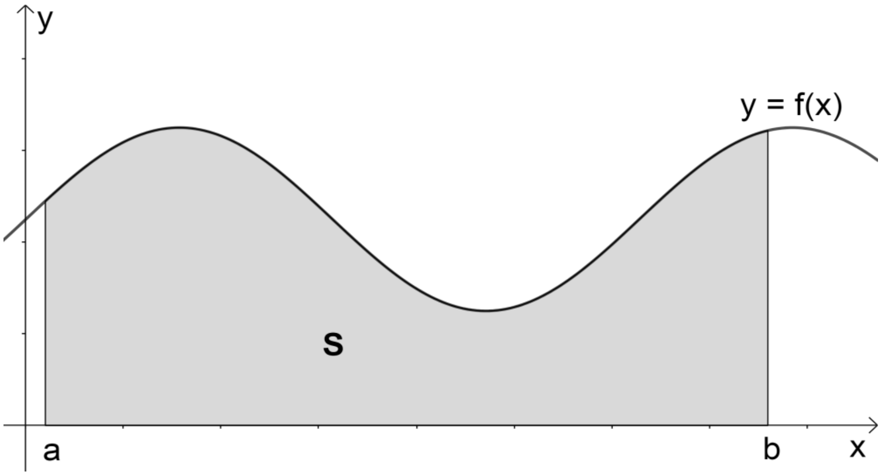
A área sob o gráfico de uma função é determinada através do cálculo da integral definida, seguindo a dinâmica do método de Eudoxo. Considerando uma função não negativa, $f(x)$, definida sobre um intervalo, podemos determinar de modo aproximado a área da região compreendida entre os extremos do intervalo o gráfico de f e o eixo Ox do seguinte modo: particionamos o intervalo, isto é, o subdividimos em intervalos de comprimento pequeno e consideramos retângulos com base sobre cada subintervalo e altura escolhida de modo conveniente de modo que a área da região desejada seja aproximada pela soma das áreas de cada retângulo. Quanto menores os comprimentos dos subintervalos, mais próximo o valor aproximado estará do valor real da área da região considerada. A formalização desse processo foi estabelecida de modo equivalente, mas independente, nos trabalhos de Georg Friedrich Bernhard Riemann e Gaston Darboux. O primeiro desenvolveu o conceito de soma de Riemann e o segundo os conceitos de soma inferior e soma superior para a criação de conceitos de integral que, posteriormente, revelaram desembocar no mesmo ente.

3.1 Integral como Somas de Riemann

Definição: Seja $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Dividindo o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de mesmo comprimento, para cada $1 \leq i \leq n$, escolhamos x_i no i-ésimo subintervalo. Fazendo $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, observamos que a área da região compreendida entre o gráfico de f, o eixo Ox e as retas $x = a$ e $x = b$ é

$$A = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\text{máx}\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(k_i)\Delta x_i$$

Figura 1 - Região S

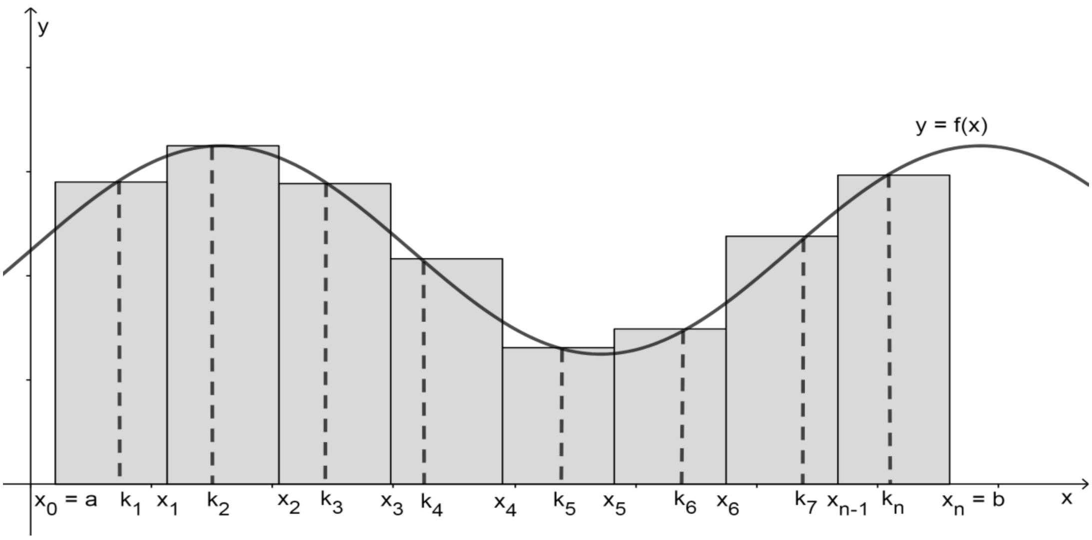


De modo mais geral, tomemos uma partição P do intervalo $[a, b]$, isto é, consideremos uma subdivisão de $[a, b]$ em n subintervalos, escolhendo os pontos:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < \cdots < x_n = b.$$

Seja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ o comprimento do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Em cada um desses subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, escolhemos um ponto qualquer k_i. Para cada $i, i = 1, \dots, n$, construímos um retângulo de base Δx_i e altura $f(k_i)$.

Figura 2 - Representação geométrica da soma de Riemann



A soma das áreas dos n retângulos, que representamos por S_n, é dada por:

$$S_n = f(k_1)\Delta x_1 + f(k_2)\Delta x_2 + \cdots + f(k_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(k_i)\Delta x_i.$$

Podemos observar que se $\max\{\Delta x_i,\ i = 1, \dots, n\}$ torna-se muito pequeno, a soma das áreas retangulares aproxima-se do que, intuitivamente, entendemos como sendo a área sob a curva.

As séries da forma

$$\sum_{i=1}^{n} f(k_i)\Delta x_i$$

são denominadas de somas de Riemann para f no intervalo $[a, b]$. Quando $k_i = x_{i-1}$ para todo $i = 1, \dots, n$ diremos que a soma de Riemann acima é pela esquerda e quando $k_i = x_i$ para todo $i = 1, \dots, n$, diremos que é pela direita.

Exemplo 1. Use uma soma de Riemann pela direita para estimar a área sob a curva crescente, $f(x) = \frac{x^2}{2}$ em [0,2] com número de subintervalos da partição $n = 10$.

Dividindo $[0,2]$ em 10 subintervalos de mesmo comprimento, concluímos que cada subintervalo tem comprimento $\Delta x = \frac{1}{5}$ e que as extremidades superiores dos subintervalos são $0{,}2$, $0{,}4$, $0{,}6$, $0{,}8$, 1, $1{,}2$, $1{,}4$, $1{,}6$, $1{,}8$ e 2. Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{x^2}{2}dx &\approx \frac{1}{5}[f(0{,}2) + f(0{,}4) + f(0{,}6) + f(0{,}8) + f(1) + f(1{,}2) + f(1{,}4) + f(1{,}6) \\ &\quad + f(1{,}8) + f(2)] \\ &= \frac{1}{5}(0{,}02 + 0{,}08 + 0{,}18 + 0{,}32 + 0{,}5 + 0{,}72 + 0{,}98 + 1{,}28 + 1{,}62 + 2) \\ &= 1{,}54\ u.a.\end{aligned}$$

Vemos que $A \approx 1{,}54$.

Exemplo 2. Use uma soma de Riemann pela esquerda para estimar a área sob a curva crescente, $f(x) = \frac{x^2}{2}$ em $[0,2]$ com número de subintervalos da partição $n = 10$.

Dividindo $[0,2]$ em 10 subintervalos de mesmo comprimento, concluímos que cada subintervalo tem comprimento $\Delta x = \frac{1}{5}$ e que as extremidades inferiores dos subintervalos são 0, $0,2$, $0,4$, $0,6$, $0,8$, 1, $1,2$, $1,4$, $1,6$ e $1,8$. Assim,

$$\int_0^2 \frac{x^2}{2}dx \approx \frac{1}{5}[f(0) + f(0,2) + f(0,4) + f(0,6) + f(0,8) + f(1) + f(1,2) + f(1,4) + f(1,6) + f(1,8)$$
$$= \frac{1}{5}(0 + 0,02 + 0,08 + 0,18 + 0,32 + 0,5 + 0,72 + 0,98 + 1,28 + 1,62)$$
$$= 1,14\, u.a.$$

Logo, $A \approx 1,14$.

3.2 Regra do ponto médio

Outra forma de calcular a área com melhor precisão que as anteriores é usar a regra do ponto médio, que consiste em considerar somas de Riemann da forma

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)\Delta x.$$

Exemplo 3. Use a regra do ponto médio para estimar a área sob a curva $f(x) = \frac{x^2}{2}$ de $[0,2]$ com número de subintervalos da partição $n = 10$.

Dividindo $[0,2]$ em 10 subintervalos de mesmo comprimento, concluímos que cada subintervalo tem comprimento $\Delta x = \frac{1}{5}$ e que os pontos médios dos dez subintervalos são $0,1, 0,3, 0,5, 0,7, 0,9, 1,1, 1,3, 1,5, 1,7, 1,9$; dessa forma, a regra do ponto médio resulta em

$$\int_0^2 \frac{x^2}{2}dx \approx \frac{1}{5}[f(0,1) + f(0,3) + f(0,5) + f(0,7) + f(0,9) + f(1,1) + f(1,3) + f(1,5) + f(1,7) + f(1,9)$$
$$= \frac{1}{5}(0,005 + 0,045 + 0,125 + 0,245 + 0,405 + 0,605 + 0,845 + 1,125 + 1,445 + 1,805) = 1,33\, u.a.$$

Abaixo, ilustramos geometricamente a aproximação da área da região em destaque nos Exemplos 1, 2 e 3 acima por meio de somas de Riemann pela esquerda e pela direita, considerando partições com 10 subintervalos de mesmo comprimento, 25 subintervalos de mesmo comprimento e 80 subintervalos de mesmo comprimento.

Figura 3 - Soma de Riemann pela esquerda de $f(x) = \frac{x^2}{2}$

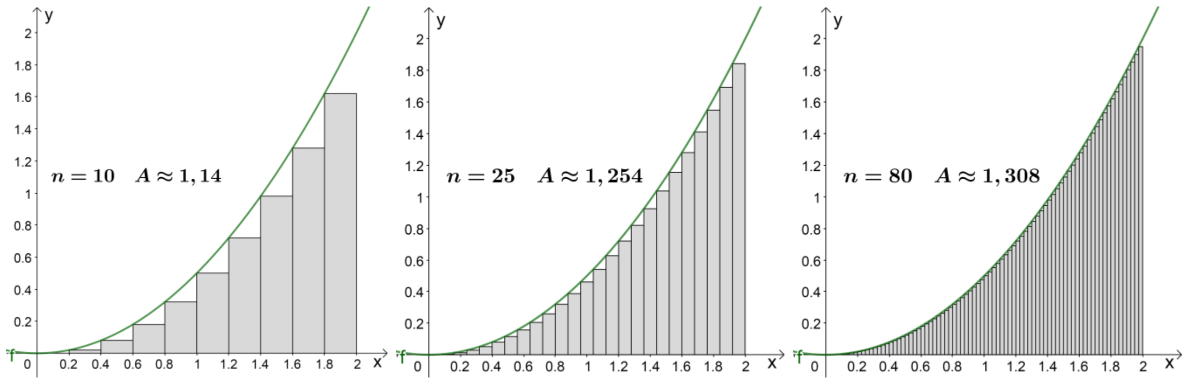
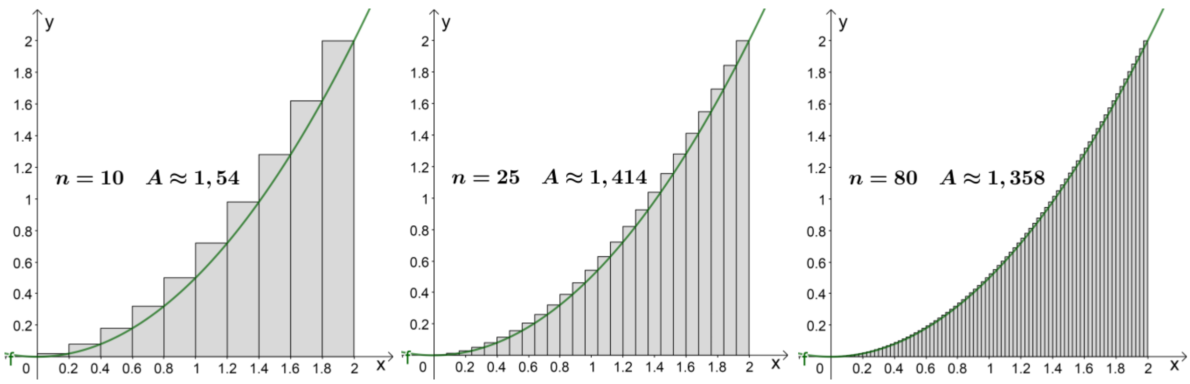


Figura 4 - Soma de Riemann pela direita de $f(x) = \frac{x^2}{2}$



Observando os gráficos acima, temos a sensação clara de que quanto maior o número de subintervalos de mesmo comprimento em que $[0,2]$ é dividido, melhor é a aproximação da área da região determinada pelo gráfico $f(x) = \frac{x^2}{2}$ por meio de somas de Riemann.

Usando a definição de integral definida, calcularemos de forma precisa a área da região em destaque. Dividindo o intervalo $[0,2]$ em n intervalos de mesmo comprimento, concluímos que cada subintervalo terá comprimento $\Delta x = \frac{2}{n}$. Os extremos dos subintervalos são $x_0 = 0 < x_1 = \frac{2}{n} < \cdots < x_{n-1} = \frac{2(n-1)}{n} < x_n = 2$. Usando uma soma de Riemann pela esquerda, obtemos

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i-1}^2}{2} \cdot \frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2(i-1)}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{4}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 = \frac{4}{n^3}\sum_{i=1}^{n-1} i^2.$$

Do binômio de Newton sabemos que

$$\sum_{i=0}^{k}(i+1)^3 = \sum_{i=0}^{k} i^3 + 3\sum_{i=0}^{k} i^2 + 3\sum_{i=0}^{k} i + \sum_{i=0}^{k} 1,$$

para todo k, de onde extraímos que

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{k+1} i^3 - \sum_{i=1}^{k} i^3 - \frac{3k(k+1)}{2} - (k+1)\right)$$

$$= \frac{1}{6}(2(k+1)^3 - 3k(k+1) - 2(k+1) = \frac{(k+1)(2k^2+4k+2-3k-2)}{6}$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

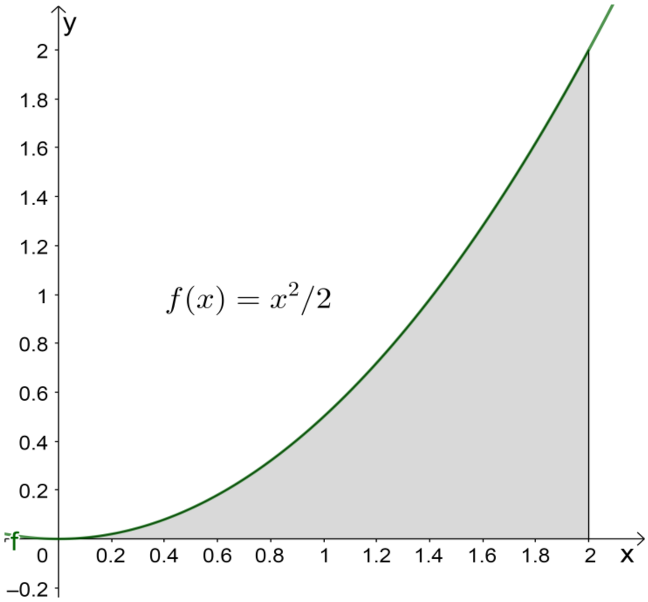
Assim,

$$A \approx \frac{4}{n^3}\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{4(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

e, consequentemente,

$$A = \int_0^2 \frac{x^2}{2}\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) = \frac{4}{3}u.a.$$

Figura 5 - Representação geométrica da função $f(x) = \frac{x^2}{2}$



Exemplo 4. Use retângulos para estimar a área sob a curva crescente, $f(x) = \sqrt{x}$ no intervalo $[1,2]$ considerando uma partição de 5 subintervalos de mesmo comprimento.

As alturas dos retângulos serão os valores da função $f(x) = \sqrt{x}$ nas extremidades esquerdas dos subintervalos. Os valores das extremidades esquerdas são 1, $1{,}2$, $1{,}4$, $1{,}6$ e $1{,}8$. O comprimento de cada subintervalo é $\frac{2-1}{5} = \frac{1}{5}$. Logo, a soma é

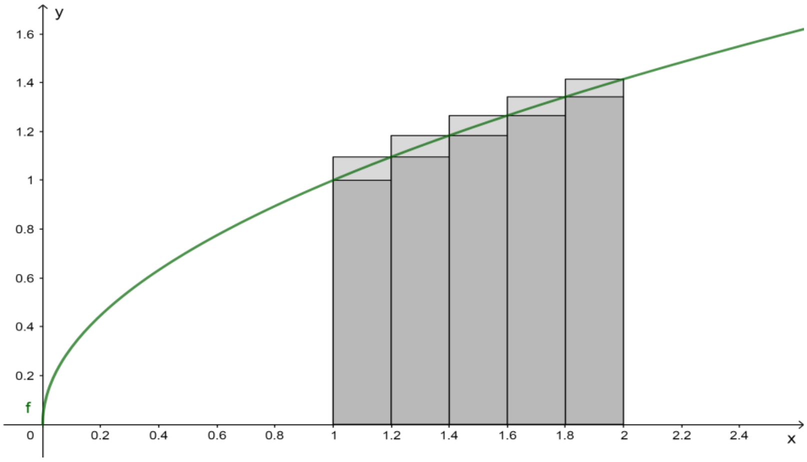
$$\int_1^2 \sqrt{x}dx \approx \Delta x[f(1) + f(1{,}2) + f(1{,}4) + f(1{,}6) + f(1{,}8)]$$
$$= 0{,}2 \cdot \left(\sqrt{1} + \sqrt{1{,}2} + \sqrt{1{,}4} + \sqrt{1{,}6} + \sqrt{1{,}8}\right)$$
$$= 1{,}095445115.$$

Calculando a mesma soma pela da função $f(x) = \sqrt{x}$ pelas extremidades direitas que são dadas pelos valores $1{,}2, 1{,}4, 1{,}6, 1{,}8$ e 2, obtemos,

$$\int_1^2 \sqrt{x}dx \approx \Delta x[f(1{,}2) + f(1{,}4) + f(1{,}6) + f(1{,}8) + f(2)]$$
$$= 0{,}2 \cdot \left(\sqrt{1{,}2} + \sqrt{1{,}4} + \sqrt{1{,}6} + \sqrt{1{,}8} + \sqrt{2}\right)$$
$$= 1{,}2598852969$$

Ou seja, a área está entre $1{,}095445115 < A < 1{,}2598852969$.

Figura 6 - Representação geométrica da soma de Riemann pela direita e esquerda



Exemplo 5. Utilizando a regra do ponto médio, obtemos resultados melhores como mostrado abaixo. Os pontos médios dos subintervalos são $1{,}1, 1{,}3, 1{,}5, 1{,}7$ e $1{,}9$. Sendo o comprimento dos subintervalos $\Delta x = \frac{1}{5}$, temos

$$\int_1^2 \sqrt{x}dx \approx \Delta x[f(1{,}1) + f(1{,}3) + f(1{,}5) + f(1{,}7) + f(1{,}9)]$$

$$= 0{,}2 \cdot \left(\sqrt{1{,}1} + \sqrt{1{,}3} + \sqrt{1{,}5} + \sqrt{1{,}7} + \sqrt{1{,}9}\right)$$

$$= 1{,}2191949002.$$

3.3 Integral definida

O que fizemos no caso de funções não negativas para o cálculo de áreas motiva a definição de integral para uma função contínua qualquer.

Definição: Seja f definida num intervalo $[a, b]$ e seja P uma partição qualquer de $[a, b]$. A integral definida de a até b é denotada por:

$$Área = \int_a^b f(x)dx = \lim_{max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i.$$

Desde que o limite exista.

4. TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Calcular áreas de figuras planas por meio da soma de Riemann é um processo trabalhoso. Neste sentido, O Teorema Fundamental do Cálculo, facilita o cálculo de integrais reduzindo-o ao cálculo de primitivas, isto é, a antiderivação. Vale ressaltar que a integral definida não depende do conceito de área para ser eficaz, a integral definida é um valor, e suas aplicações se estende a incontáveis problemas, em sua maioria, práticos.

Parte I) Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a,b]$, então a função $F:[a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

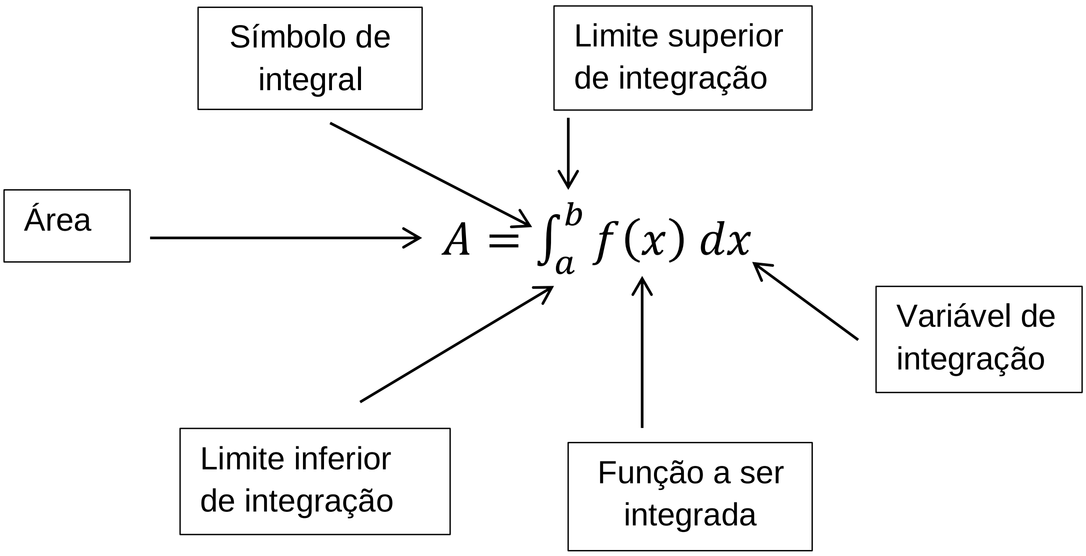
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

é derivável e $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$. A função F é chamada de primitiva ou antiderivada da função $f(x)$.

Parte II) Se $f(x)$ é uma função contínua no intervalo fechado $[a,b]$ e $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, ou seja, $F'(x) = f(x)$, então

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a).$$

Onde temos a seguinte notação para a integral.



Teorema: (Mudança de Variável) Seja u uma função diferenciável sobre o intervalo aberto H tal que u' é contínua e seja I um intervalo aberto tal que $u(x) \in I$, para todo $x \in H$. Se f é contínua sobre I, então $f \circ u$ é contínua sobre H e

$$\int_a^b f\big(u(x)\big)\, u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt,$$

para todo $a, b \in H$.

Demonstração: Como u é diferenciável sobre H, segue que u é contínua sobre H. Assim, $f \circ u$ é uma composição de funções contínuas e, portanto, uma função contínua. Fixe $c \in I$ e seja $F(u) = \int_c^u f(t)dt$. Então, pela primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo segue que $F'(u) = f(u)$, para todo $u \in I$. Seja $g = F \circ u$. Da regra da cadeia, temos que

$$g'(x) = F'\big(u(x)\big)\, u'(x) = f\big(u(x)\big)\, u'(x).$$

Logo, da segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_a^b f\big(u(x)\big)\; u'(x)dx = \int_a^b g'(x)dx = g(b) - g(a) = F\big(u(b)\big) - F\big(u(a)\big)$$

$$= \int_c^{u(b)} f(t)dt - \int_c^{u(a)} f(t)dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt.$$

Exemplo 6. Encontre a área correspondente a $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$.

Solução: Fazendo $u(x) = x^2 + 1$, temos que, $du = 2x\, dx$, isto é, $x\, dx = \frac{du}{2}$. Temos ainda que $u(0) = 1$ e $u(1) = 2$. Substituindo os dados na integral, obtemos que

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{u} du = \left[\frac{1}{2}\ln|u|\right]\Bigg|_1^2$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2}\; u.a.$$

4.1 Propriedades da integral definida

Propriedade I: Seja $f(x)$ uma função integrável e k uma constante, então essa constante pode ser inserida ou extraída do integrando.

$$\int_a^b k\, f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

Propriedade II: A integral da soma é a soma das integrais no intervalo.

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Propriedade III: A integral da diferença é a diferença das integrais no intervalo.

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

Propriedade IV: Se $f(x)$ é uma função integrável no intervalo $[a, b]$ e c é um ponto qualquer no intervalo $[a, b]$ então podemos fazer a soma dos intervalos.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\,, onde\ a < c < b$$

Propriedade V: Seja $f(x)$ integrável no intervalo $[a, b]$ e $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$, então temos que

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Propriedade VI: Sejam as funções $f(x)$ e $g(x)$ integráveis no intervalo $[a, b]$ e $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

Propriedade VII: Integrais com limites de integração inferior e superior iguais o resultado sempre vai dar zero, ou seja, é quando temos que $a = b$, então

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Propriedade VIII: Se $f(x) \leq 0$, ou seja, $b < a$ num intervalo fechado $[a, b]$ então

$$Área = \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Propriedade IX: Se f é uma função contínua em $[a, b]$, então

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Teorema do Valor Médio para Integrais: Se $f(x)$ é uma função contínua em $[a, b]$, então existe um ponto x_i entre a e b de tal forma que:

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(x_i).$$

Definição 1: Se $F(x)$ e $G(x)$ são funções primitivas de $f(x)$ no intervalo I, então existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $G(x) = F(x) + c$, para todo $x \in I$.

Teorema Fundamental do Cálculo: Demonstração da 1ª parte

Proposição: Seja $f(x)$ uma função contínua num intervalo $[a, b]$. Então a função $F: [a, b] \to \mathbb{R}$, é definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

é tal que $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in [a, b]$.

Demonstração:

Vamos determinar a derivada $F'(x)$, usando a definição de derivadas.

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}.$$

Temos:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt;$$

$$F(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt;$$

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$$

Usando a propriedade IV, podemos escrever:

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt,$$

E, então temos que:

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$$

$$= \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt$$

Como f é contínua em $[x, x + \Delta x]$, pelo teorema do valor médio para integrais, existe um ponto x_0 entre x e $x + \Delta x$ tal que.

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = (x + \Delta x - x)f(x_0)$$

$$= f(x_0)\Delta x.$$

Portanto,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0)\Delta x}{\Delta x} = f(x_0).$$

Como x_0 está entre x e $x + \Delta x$, segue que $x_0 \to x$ quando $\Delta x \to 0$. Como f é contínua, temos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0) = \lim_{x_0 \to x} f(x_0) = f(x).$$

Logo,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x),$$

ou seja, $F'(x) = f(x)$.

Demonstração da 2º parte.

Teorema: Se f é contínua no intervalo $[a,b]$ e se F é uma primitiva qualquer de f neste intervalo, então

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Demonstração: Como f é contínua em $[a,b]$, pela primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo sabemos que $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é uma primitiva de f no intervalo $[a,b]$. Seja $G(x)$ uma primitiva qualquer de f sobre o intervalo $[a,b]$, do Teorema do Valor Médio segue que

$$F(x) = G(x) + c, \forall x \in [a,b].$$

Como $F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$ e $F(b) = \int_a^b f(t)dt$, calculando a diferença $F(b) - F(a)$, obtemos:

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(t)dt - 0 = F(b) - F(a) = (F(b) + c) - (F(a) + c) = G(b) - G(a).$$

Exemplo 7. Calcule a área limitada pelo gráfico da função $f(x) = sen\, x$ e o eixo Ox no intervalo $[0,\pi]$.

Solução: Como a função $f(x) = -\cos x$ é uma primitiva de $sen\, x$, temos

$$\int_0^\pi sen\, x\, dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = -(-1) + 1 = 2\ u.a.$$

Exemplo 8. Calcular a área limitada pelos gráficos $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 2$ no intervalo $[-1,2]$.

Solução:

$$\int_{-1}^2 (x + 2 - x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^2$$

$$= \left(\frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} + 2 \cdot (-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{4}{2} + 4 - \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right) = \frac{9}{2} = 4{,}5 \; unidades \; de \; área$$

Exemplo 9. Calcule a área abaixo da parábola $f(x) = x^2 + 1$ e delimitada pelas retas $x = -1$ e $x = 2$ e o eixo das abscissas.

Solução:

$$\int_{-1}^{2} (x^2 + 1)dx = \frac{x^3}{3} + x\Big|_{-1}^{2} = \left(\frac{2^3}{3} + 2\right) - \left(\frac{(-2)^3}{3} - 1\right)$$

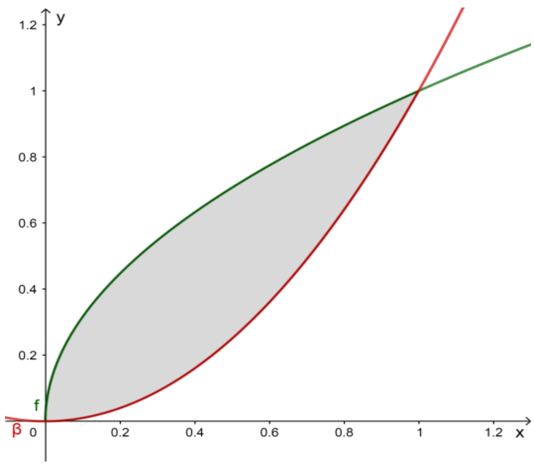
$$= \left(\frac{8}{3} + 2\right) - \left(\frac{-1}{3} - 1\right) = \frac{14}{3} + \frac{4}{3} = \frac{18}{3} = 6 \; u.a.$$

Exemplo 10. Calcule a área delimitada pelas funções $f(x) = \sqrt{x}$ e $\beta(x) = x^2$ no intervalo $[0,1]$.

Solução:

$$\int_{0}^{1} \sqrt{x} - x^2 dx = \int_{0}^{1} x^{1/2} - x^2 dx = \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{1} = \frac{1^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{1^3}{3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \; u.a.$$

Figura 7 - Região entre os gráficos das funções $f(x)$ e $\beta(x)$



Exemplo 11. Encontre a área abaixo da curva da função $f(x) = x^3$, no intervalo de integração $[0,2]$.

Solução:

$$\int_{0}^{2} x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{2} = \frac{2^4}{4} - (0) = 4 \; unidades \; de \; área.$$

Exemplo 12. Encontre a área compreendida entre as funções $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$ no intervalo $[0,2]$.

Solução: As curvas $y = x$ e $y = x^2$ interceptam-se nos pontos de abscissa 0, 1 e 2 no intervalo $[0,1], x \geq x^2$ e, no intervalo $[1,2], x \leq x^2$. Logo, a área total é dada pela soma das áreas dos intervalos.

$$A_1 = \int_0^1 (x - x^2)dx + A_2 = \int_1^2 (x^2 - x)dx.$$

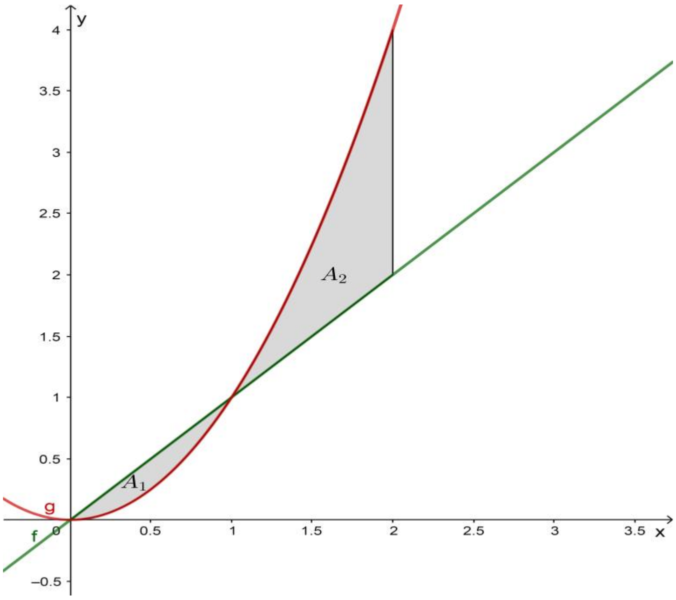
$$A_1 = \int_0^1 (x - x^2)dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = \left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3}\right) - (0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\ u.a.$$

$$A_2 = \int_1^2 (x^2 - x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\bigg|_1^2 = \left[\left(\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2}\right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2}\right)\right]$$

$$= \left[\left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)\right] = \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right] = \frac{5}{6}\ u.a.$$

Logo, a área total é $A_1 + A_2 = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1\ u.a.$

Figura 8 - Representação da área entre os gráficos de $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$



Exemplo 13. Calcule a área compreendida entre as curvas $\alpha(x) = x^2 + 1$ e $\beta(x) = 3 - x^2$ no intervalo de integração $[-1,1]$.

Solução: como a função $\alpha(x) \leq \beta(x)$, a área entre os gráficos é dada por

$$\int_{-1}^{1}\big(\beta(x)-\alpha(x)\big)dx=\int_{-1}^{1}(3-x^2)-(x^2+1)dx=\int_{-1}^{1}(2-2x^2)dx.$$

Logo, a área é,

$$\int_{-1}^{1}(2-2x^2)dx=\left[2x-\frac{2}{3}x^3\right]_{-1}^{1}$$

$$=\left[\left(2\cdot 1-\frac{2}{3}\cdot 1\right)-\left(2(-1)-\frac{2}{3}(-1)^3\right)\right]$$

$$=\left[\left(2-\frac{2}{3}\right)+\left(2-\frac{2}{3}\right)\right]=\left[\frac{4}{3}+\frac{4}{3}\right]=\frac{8}{3}\ u.a.$$

Exemplo 14. Encontre a área da curva $f(t)=t^3-4t$ abaixo do eixo x no intervalo $[0,2]$.

Solução:

$$\int_{0}^{2}t^3-4tdt=\frac{t^4}{4}-\frac{4t^2}{2}\bigg|_{0}^{2}=\left[\frac{2^4}{4}-\left(4\cdot\frac{2^2}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{16}{4}-\frac{16}{2}=4-8=|-4|=4\,u.a.$$

Exemplo 15. Encontre a área correspondente a integral $\int_{0}^{3\sqrt{3}/2}\frac{x^3}{(4x^2+9)^{3/2}}dx$.

Solução: Primeiro observamos que $(4x^2+9)^{3/2}=\left(\sqrt{4x^2+9}\right)^3$, portanto a substituição trigonométrica é apropriada. Embora $\sqrt{4x^2+9}$ não seja exatamente uma expressão da tabela de substituições trigonométricas, ela se torna parte delas quando fazemos a substituição preliminar $u=2x$. Quando combinamos esta com a substituição da tangente, temos $x=\frac{3}{2}tg\,\theta$, que resulta em $dx=\frac{3}{2}sec^2\,\theta d\theta$ e

$$\sqrt{4x^2+9}=\sqrt{9\,tg^2\,\theta+9}=3\,sec\,\theta$$

Quando $x=0$, $tg\,\theta=0$, assim $\theta=0$; quando $x=3\frac{\sqrt{3}}{2}, tg\,\theta=\sqrt{3}$, logo $\theta=\frac{\pi}{3}$. Portanto,

$$\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2+9)^{3/2}}dx = \int_0^{\pi/3} \frac{\frac{27}{8}tg^3\,\theta}{27\,sec^3\,\theta}\,\frac{3}{2}sec^2\,\theta d\theta$$

$$= \frac{3}{16}\int_0^{\pi/3} \frac{tg^3\,\theta}{sec\,\theta}d\theta = \frac{3}{16}\int_0^{\pi/3} \frac{sen^3\,\theta}{cos^2\,\theta}d\theta$$

$$= \frac{3}{16}\int_0^{\pi/3} \frac{1-cos^2\,\theta}{cos^2\,\theta}sen\,\theta d\theta$$

Agora substituímos $u = cos\,\theta$, de modo que $du = -\,sen\,\theta d\theta$. Quando $\theta = 0$, $u = 1$; quando $\theta = \frac{\pi}{3}, u = \frac{1}{2}$. Portanto,

$$\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2+9)^{3/2}}dx = -\frac{3}{16}\int_1^{1/2} \frac{1-u^2}{u^2}du$$

$$= \frac{3}{16}\int_1^{1/2}(1-u^{-2})du = \frac{3}{16}\left[u+\frac{1}{u}\right]_1^{1/2}$$

$$= \frac{3}{16}\left[\left(\frac{1}{2}+2\right)-(1+1)\right] = \frac{3}{32}\ u.a.$$

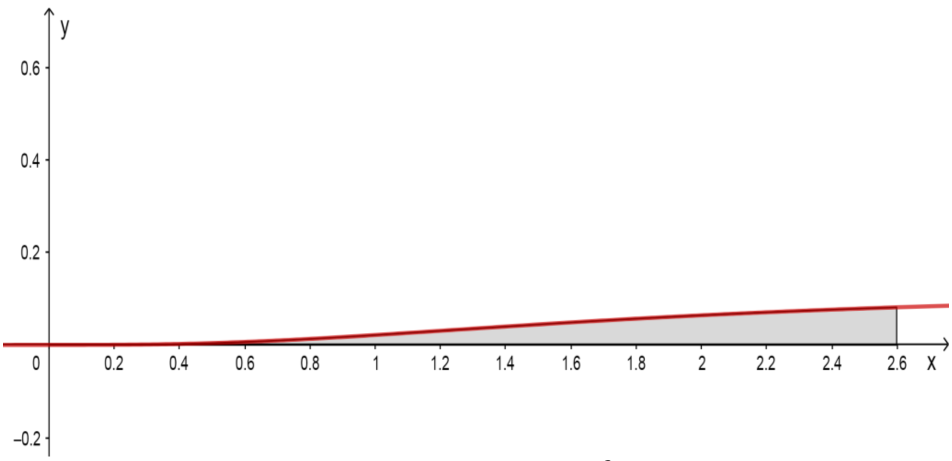


Figura 9 - Gráfico de $\frac{x^3}{(4x^2+9)^{3/2}}$

4.2 Função par e função ímpar

Definição I: Uma função $f(x)$ é considerada par quando $f(-x) = f(x), \forall x \in D(f(x))$, ou seja, os valores simétricos devem possuir a mesma imagem.

Definição II: Uma função $f(x)$ é denominada ímpar quando $f(-x) = -f(x)$, para qualquer valor de $x \in D(f(x))$, ou seja, os valores simétricos possuem imagens simétricas.

4.2.1 Simetria: (Integrais de funções simétricas)

Suponha que $f(x)$ seja contínua no intervalo $[-a, a]$. Então:

a) Se $f(x)$ é uma função par, então

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2 \cdot \int_{0}^{a} f(x)dx.$$

b) Se $f(x)$ é uma função ímpar, então

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

Exemplo 16. Calcule a área abaixo do gráfico da função $f(x) = |2x|$ no intervalo de integração $[-2,2]$.

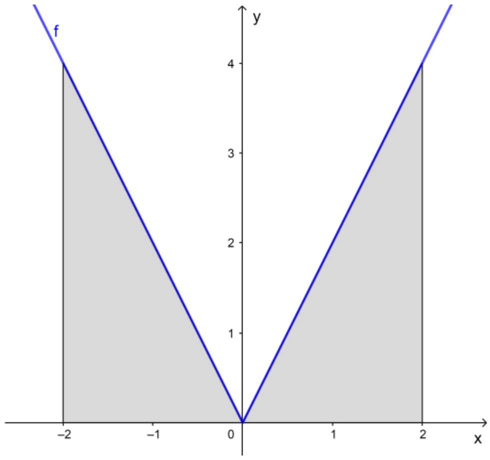
Solução: Temos que a função é par, pois, $f(-x) = |-2x| = |2x| \Rightarrow f(x) = f(-x)$, então

$$\int_{-2}^{2} |2x|dx = 2\int_{0}^{2} 2x\ dx$$

$$= \int_{-2}^{2} |2x|dx = 2 \cdot 2 \cdot \left.\frac{x^2}{2}\right|_{0}^{2}$$

$$= 4 \cdot \left[\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right] = 4 \cdot [2 - 0] = 8\ u.a.$$

Figura 10 - Representação geométrica da integral da função $f(x) = |2x|$



Exemplo 17. Calcule a área abaixo do gráfico da função $f(x) = x^2 + 1$ no intervalo de integração $[-1,1]$.

Solução: A função é par, pois $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 \Rightarrow f(x) = f(-x)$, logo,

$$\int_{-1}^{1} x^2 + 1 = 2 \cdot \frac{x^3}{3} + x \Big|_0^1 = 2 \cdot \left[\left(\frac{1^3}{3} + 1\right) - \left(\frac{0^3}{3} + 0\right)\right]$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{3} + 1\right) = 2{,}67.$$

Exemplo 18. Calcule a integral $f(x) = x^5 - x$ no intervalo $[-1,1]$.

Solução:

$$\int_{-1}^{1} (x^5 - x)dx.$$

Temos que $f(x)$ é ímpar, pois $f(-x) = -f(x)$.

$$f(-x^5 + x) = -f(x^5 - x).$$

Como a função $f(x)$ é ímpar, não precisamos calcular a integral no intervalo $[-1,1]$, pois neste caso a integral vale zero, já que o intervalo de integração é simétrico em relação à origem e as áreas se anulam, ou seja

$$\int_{-1}^{1} (x^5 - x)dx = 0.$$

Exemplo 19. Calcule a integral de $\beta(x) = 2x$ no intervalo $[-2,2]$.

Solução: Como $\beta(-x) = -\beta(x)$, então a função é ímpar, logo a integral definida é zero

$$\int_{-2}^{2} 2x\, dx = 0.$$

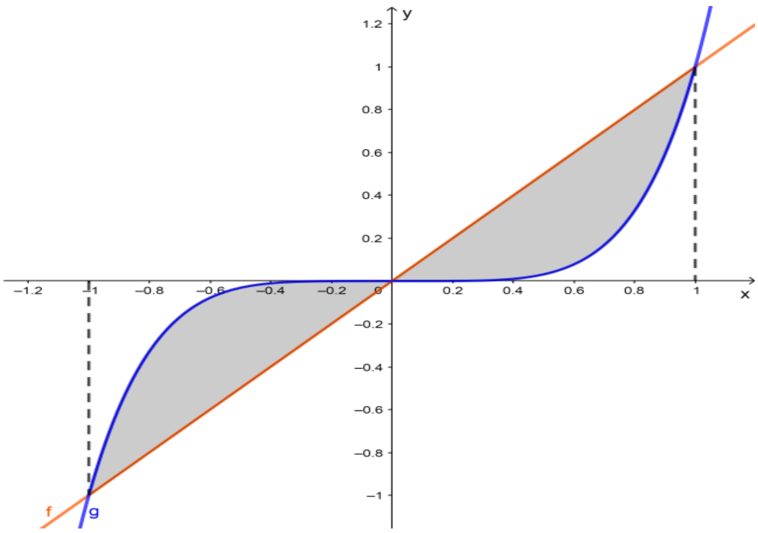
Exemplo 20. Calcule a área delimitada pelos gráficos das funções $f(x) = x$ e $g(x) = x^5$ no intervalo $[-1,1]$.

Solução:

$$\int_{-1}^{1} (x - x^5)dx = 2 \cdot \int_{0}^{1} (x - x^5)dx = 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= 2\left[\left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^6}{6}\right) - \left(\frac{0^2}{2} - \frac{0^6}{6}\right)\right] = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) = 2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}\ u.a.$$

Figura 11 - Representação geométrica do cálculo da integral entre as funções $f(x) = x$ e $g(x) = x^5$



4.3 Áreas de figuras planas por meio das integrais

Exemplo 1. Encontre a área do triângulo formado pelo gráfico da função $f(x) = 2x - 4$, e pelo eixo $0x$ e pelas retas $x = 2$ e $x = 8$.

Pode-se calcular por meio da fórmula $A = \frac{(B-b)\cdot h}{2}$ em que encontramos como resultado da área do triângulo

$$A = \frac{(8-2)12}{2} = 36\ u.a.$$

No entanto, também podemos calcular por meio da integral definida.

$$\int_2^8 2x - 4\, dx = \frac{2x^2}{2} - 4x\Big|_2^8$$

$$= \left[\left(2\cdot\frac{8^2}{2} - (4\cdot 8)\right) - \left(2\cdot\frac{2^2}{2} - (4\cdot 2)\right)\right] = 32 - (-4) = 36\ u.a.$$

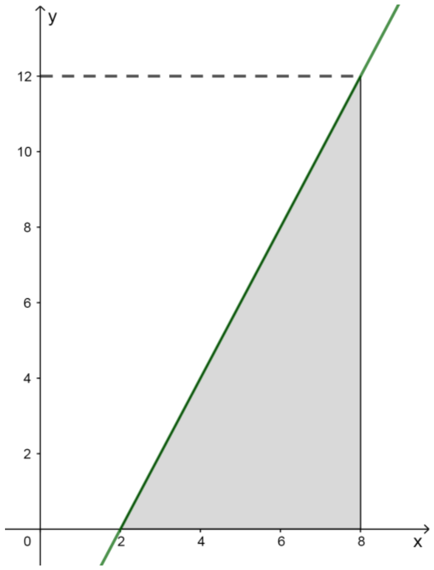


Figura 12 – Gráfico de $f(x) = 2x - 4$

Exemplo 2. Calcule a área do retângulo formado pelo gráfico da função $f(x) = 7$, e pelo eixo $0x$ e pelas retas $x = 2$ e $x = 6$.

Pode-se calcular por meio da fórmula $A = b\cdot h$ em que encontramos como resultado da área do retângulo

$$A = (6-2) \cdot 7 = 28\, unidades\ de\ \text{área}.$$

No entanto, também podemos calcular por meio da integral definida.

$$\int_{2}^{6} 7dx = 7x \Big|_{2}^{6} = [(7 \cdot 6) - (7 \cdot 2)] = [42 - 14] = 28\, u.a.$$

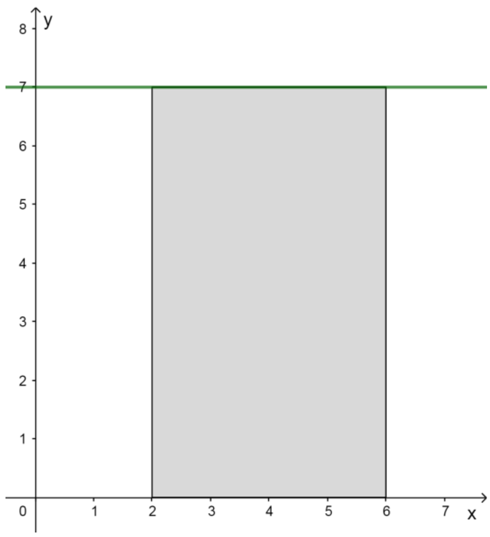


Figura 13 - Gráfico de $f(x) = 7$

Área do círculo

Considerando a equação reduzida da circunferência, dada por $x^2 + y^2 = r^2$. Isolando o y

$$y^2 = r^2 - x^2$$

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}.$$

As áreas das regiões entre o eixo dos x e do gráfico de $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ e de $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ são as áreas dos semicírculos superior e inferior do círculo. Assim,

$$A = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 + x^2}\, dx - \int_{-r}^{r} -\sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

$$= \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 + x^2}\, dx + \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

$$= 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

Mas podemos tomar apenas um quarto do círculo. Simplificando o cálculo, temos que

$$A = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx.$$

Exemplo 3. Encontre a área da região delimitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 4$.

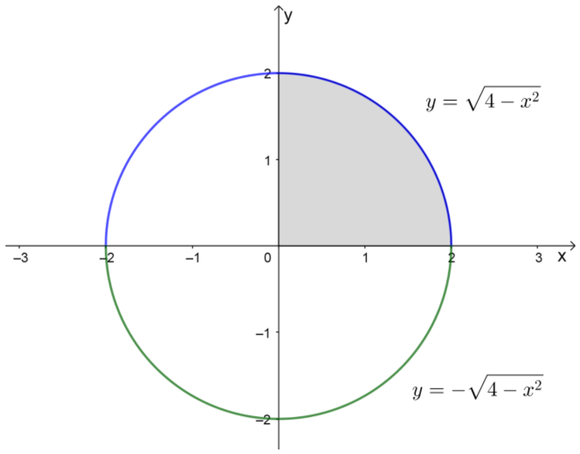


Figura 14 - Gráfico da equação $x^2 + y^2 = 4$

Fazendo a substituição trigonométrica $x = 2\,\mathrm{sen}\,\theta$ e $dx = 2\cos\theta\,d\theta$

$$\int \sqrt{2^2 - 2^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta} \cdot 2\cos\theta d\theta$$

$$= \int \sqrt{2^2(1 - \mathrm{sen}^2(\theta))} \cdot 2\cos\theta d\theta$$

$$= \int \sqrt{2^2\cos^2\theta} \cdot 2\cos\theta d\theta$$

$$= \int 2\cos\theta \cdot 2\cos\theta d\theta$$

$$= \int 2^2\cos^2\theta d\theta$$

$$= 2^2\int \cos^2\theta d\theta$$

A integral de $\cos^2\theta$ é $\frac{\theta}{2} + \frac{\mathrm{sen}\,2\theta}{4}$. Logo,

$$\frac{2^2}{2}\left[\theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right] + c$$

Como $\theta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right)$, então,

$$\frac{2^2}{2}\left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{1 - \frac{x^2}{2^2}}\right] + c$$

Aplicando os limites de integração, obtemos.

$$A = 4\int_0^2 \sqrt{2^2 - x^2}\, dx$$

$$A = 2 \cdot 2^2 \left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{1 - \frac{x^2}{2^2}}\right]_0^2$$

$$= 2 \cdot 2^2 \operatorname{arcsen} 1$$

O arco cujo seno vale 1 é $\frac{\pi}{2}$. Logo,

$$A = 8 \cdot \frac{\pi}{2} = 4\pi\ u.a.$$

5. INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

Uma integral definida é chamada de imprópria quando a função integranda é descontínua em um determinado ponto k tal que $k \in [a, b]$. Em muitas situações práticas é necessário considerar a área de uma determinada região que se estende indefinidamente, seja nos cálculos como os que envolvem estatísticas, física ou áreas de figuras planas que aplicaremos a seguir. Para resolver esses tipos de problemas de áreas, utilizamos o cálculo de integrais impróprias.

Tipo 1: Propriedades

1ª) Se $f(x)$ é contínua em $[a, \infty)$, então

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx$$

Desde que o limite exista.

2ª) Se $f(x)$ é contínua em $(-\infty, b]$, então

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Desde que o limite exista.

3ª) Se $f(x)$ é contínua em $(-\infty, +\infty)$, então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b \to +\infty} \int_c^b f(x)dx.$$

Onde c é uma constante real qualquer.

Podemos observar nos gráficos a seguir, a representação geométrica do cálculo de áreas quando temos uma integral de uma função $f(x)$ em intervalos ilimitados em um dos extremos ou nos dois extremos ao mesmo tempo.

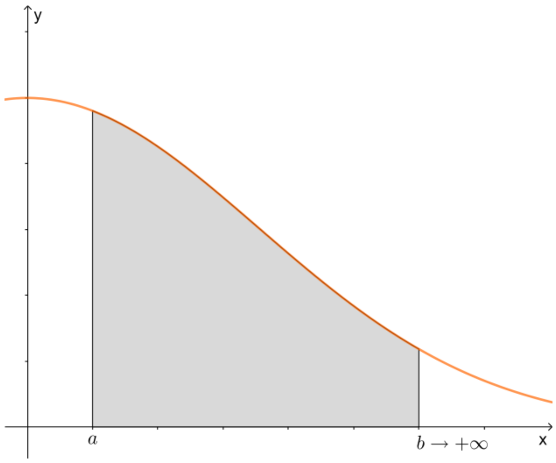


Figura 15 - Gráfico de $f(x)$

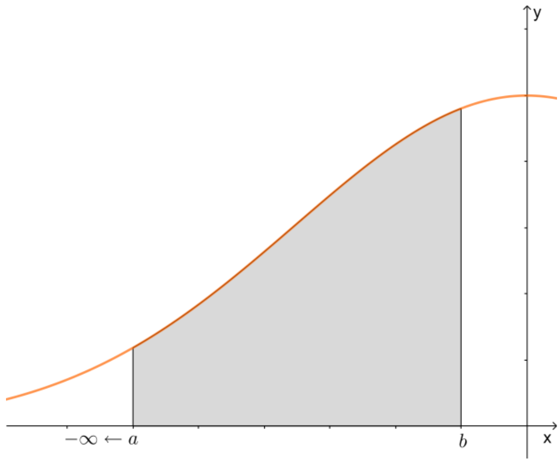


Figura 16 - Gráfico de $f(x)$

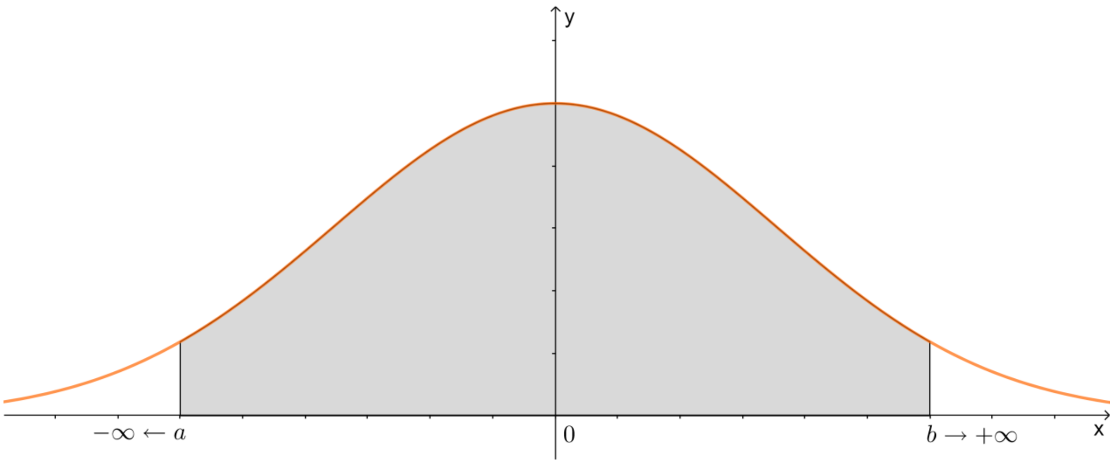


Figura 17 - Gráfico de $f(x)$

Exemplo 1. Calcule a integral $\int_0^{\infty} e^{-x}dx$.

$$\int_0^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}(-e^{-x})\Big|_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}(-e^{-b}+1) = 1.$$

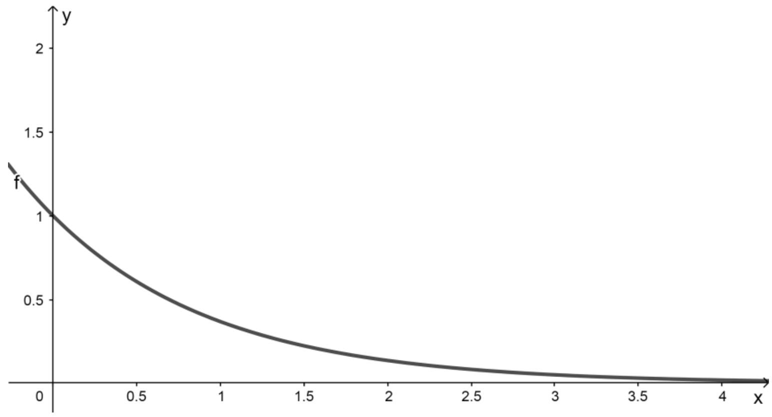


Figura 18 - Gráfico de $f(x) = e^{-x}$

Exemplo 2. Calcule a área da função $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+1} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \lim_{b \to -\infty} \int_{b}^{0} \frac{dx}{x^2+1} + \lim_{b \to \infty} \int_{0}^{b} \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \lim_{b \to -\infty} \left(-arctg(b)\right) + \lim_{b \to \infty} arctg(b)$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi\, u.a.$$

Exemplo 3. Calcule a área da integral imprópria da função $f(x) = \frac{1}{x}$ no intervalo $[1, \infty)$ e diga se é convergente ou divergente.

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \to \infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \to \infty} \ln|x| \,\Big|_{1}^{b}$$

$$= \lim_{b \to \infty} (\ln b - \ln 1) = \lim_{b \to \infty} \ln b = \infty.$$

Com isso, concluímos que a integral imprópria é divergente e sua área é infinita.

Exemplo 4. Encontre a área definida pela integral imprópria da função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ no intervalo $[1, \infty)$.

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \to \infty} \int_{1}^{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \to \infty} 2\sqrt{x} \,\Big|_{1}^{\infty}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to \infty} \infty - 2 = \infty.$$

Logo, a integral imprópria é divergente e sua área é infinita.

Exemplo 5. Calcule a área correspondente integral imprópria da função $f(x) = x^{-2}$ no intervalo $[1, \infty)$ e diga se é convergente ou divergente.

$$\int_1^{\infty} x^{-2} dx = \lim_{\varepsilon \to \infty} \int_1^{\varepsilon} x^{-2} dx = \lim_{\varepsilon \to \infty} \frac{x^{-1}}{-1}\bigg|_1^{\varepsilon}$$

$$= \left[\frac{\varepsilon^{-1}}{-1} - \frac{1^{-1}}{-1}\right] = \left[\left(\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{-1}\right) - \left(\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{-1}\right)\right]$$

$$= \left[-\frac{1}{\varepsilon} - \left(-\frac{1}{1}\right)\right] = \left[-\frac{1}{\varepsilon} + 1\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to \infty} -\frac{1}{\varepsilon} + 1 = -0 + 1 = 1.$$

A integral é convergente e sua área é igual a 1 unidades de área.

Tipo 2: Propriedades

Integrais de funções que se tornam infinitas em um ponto dentro do intervalo de integração são integrais impróprias do tipo 2.

1ª) Se $f(x)$ é uma função integrável em $[a, b)$ e descontínua em b, então

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx$$

Desde que o limite exista.

2ª) Se $f(x)$ é uma função integrável em $(a, b]$ e descontínua em a, então

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx$$

Desde que o limite exista como número.

3ª) Se $f(x)$ tem uma descontinuidade em um número c do intervalo aberto a, b e contínua em todos os outros pontos de $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{t \to c^-} \int_a^t f(x)dx + \lim_{t \to c^+} \int_t^b f(x)dx.$$

Se ambas as integrais impróprias do último membro forem convergentes, ou seja, se existirem os limites então ela é dita convergente. Caso pelo menos um dos limites não exista, então a integral imprópria será dita divergente.

Abaixo é mostrado a representação gráfica em detalhes dessas propriedades. Na figura 19 temos uma assíntota em b, ou seja, descontinuidade em b, na figura 20 temos uma descontinuidade em a, e, por fim, a figura 21 em que possue uma descontinuidade pela direita e pela esquerda ao mesmo tempo em c.

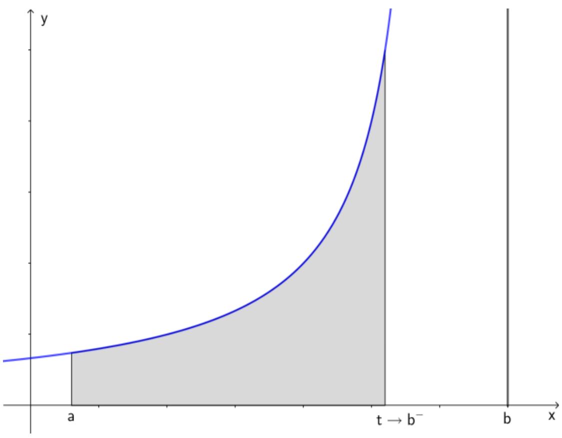


Figura 19 - Gráfico de $f(x)$

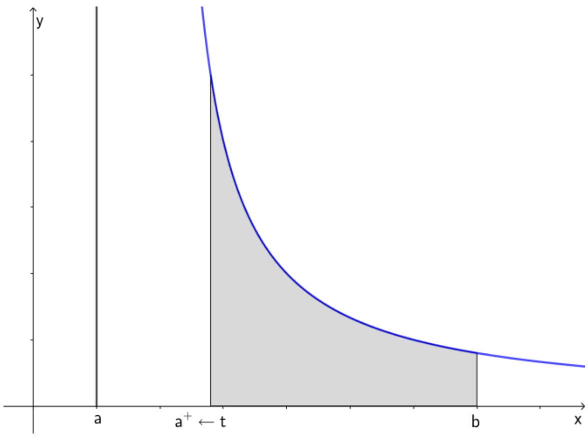


Figura 20 - Gráfico de $f(x)$

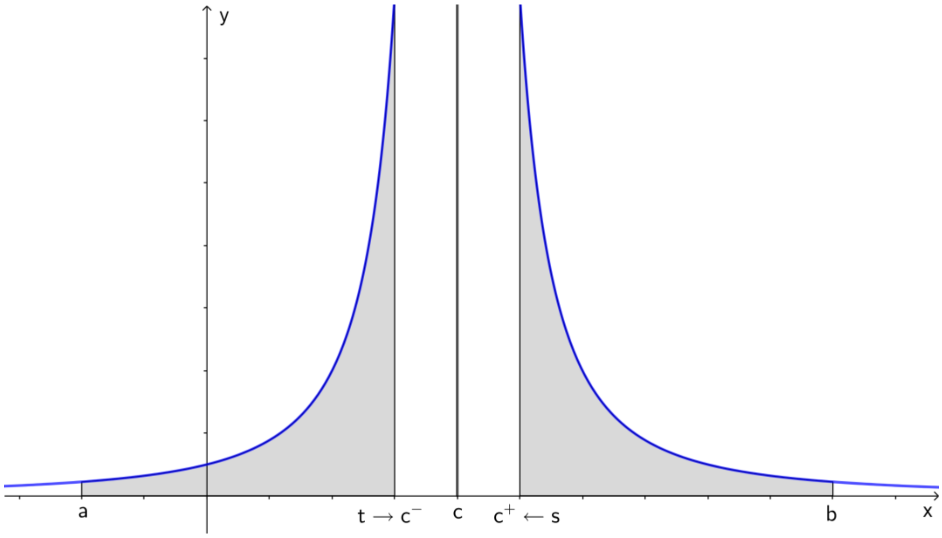


Figura 21 - Gráfico de $f(x)$

Exemplo 6. Encontre a área e verifique se a integral imprópria da função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ no intervalo $(0,9]$ é convergente ou divergente.

$$\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^9 \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} 2\sqrt{x}\,\Big|_\varepsilon^9$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(6 - 2\sqrt{\varepsilon}\right) = 6$$

Logo, a integral converge e sua área é $A = 6\,u.a.$ A qual é ilustrada pela figura 22 abaixo.

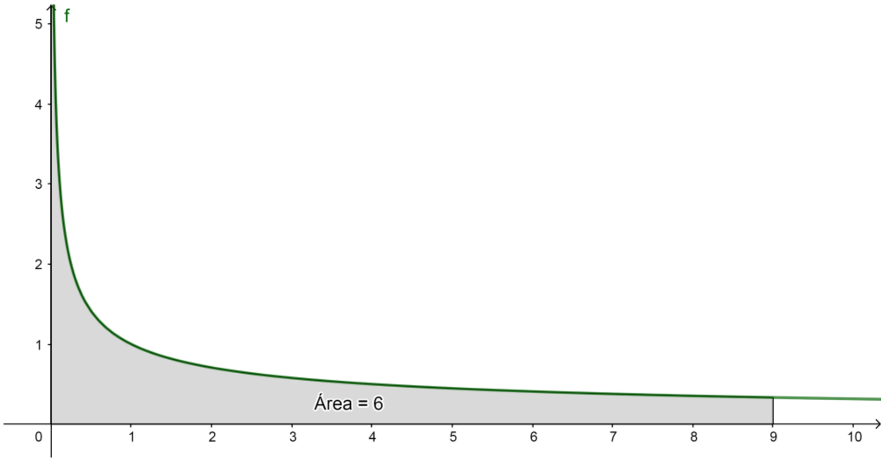


Figura 22 - Gráfico de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Exemplo 7. Calcule a área da região abaixo da curva para $y = \frac{1}{1-x}$, no intervalo $[0,1)$.

Para isso, precisamos investigar se a integral imprópria converge ou diverge.

$$I = \lim_{s \to 1^-} \int_0^s \frac{dx}{1-x} = \lim_{s \to 1^-} -\ln(1-x) \Big|_0^s$$

$$= \lim_{s \to 1^-} [-\ln(1-s) + ln1] = +\infty.$$

Portanto, a integral imprópria é divergente, não sendo possível encontrar sua área.

Exemplo 8. Encontre a área correspondente a integral imprópria de $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ com uma descontinuidade em $x = 0$ e contínua no intervalo $[-1,8]$.

$$\int_{-1}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int_{-1}^{8} \frac{1}{x^{2/3}} dx$$

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^{2/3}} dx + \int_{0}^{8} \frac{1}{x^{2/3}} dx = \lim_{t \to 0^-} \int_{-1}^{t} x^{-2/3} dx + \lim_{s \to ^+} \int_{s}^{8} x^{-2/3} dx$$

como

$$\lim_{t \to 0^-} \int_{-1}^{t} x^{-2/3} dx = \lim_{t \to 0^-} \left(3x^{1/3} \Big|_{-1}^{t}\right) = \lim_{t \to 0^-} \left(3t^{1/3} + 3\right) = 3$$

e

$$\lim_{s \to 0^+} \int_{s}^{8} x^{-2/3} dx = \lim_{s \to 0^+} \left(3x^{1/3} \Big|_{s}^{8}\right) = \lim_{s \to 0^+} \left(3 \cdot 8^{1/3} - 3s^{1/3}\right) = 6.$$

Logo, a integral é convergente e sua área é igual a 9.

Exemplo 9. Investigue a integral $f(x) = \int_{-2}^{3} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$ com uma descontinuidade em $x = 1$.

Solução:

$$\int_{-2}^{3} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} dx = \int_{-2}^{1} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} dx + \int_{1}^{3} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} dx$$

$$= \lim_{t\to 1^-}\int_{-2}^{t}\frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \lim_{s\to 1^+}\int_{s}^{3}\frac{dx}{(x-1)^{2/3}},$$

utilizando o método da substituição, podemos encontrar uma primitiva para a função. Fazendo $u = x - 1$ e $du = dx$, temos que

$$\int \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}dx = \int \frac{du}{u^{2/3}}dx = \int u^{-2/3}du = \frac{u^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} = \frac{u^{1/3}}{\frac{1}{3}} = 3(x-1)^{1/3} + c.$$

Utilizando a 3ª propriedade das integrais impróprias do tipo 2,

$$\lim_{t\to 1^-} 3(x-1)^{1/3}\Big|_{-2}^{t} + \lim_{s\to 1^+} 3(x-1)^{1/3}\Big|_{s}^{3}$$

$$= \lim_{t\to 1^-}\left[3(t-1)^{\frac{1}{3}} - 3(-2-1)^{\frac{1}{3}}\right] + \lim_{s\to 1^+}\left[3(3-1)^{\frac{1}{3}} - 3(s-1)^{\frac{1}{3}}\right]$$

$$= 0 + 3\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{2} + 0$$

$$= 3\left(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}\right)\ unidades\ de\ área.$$

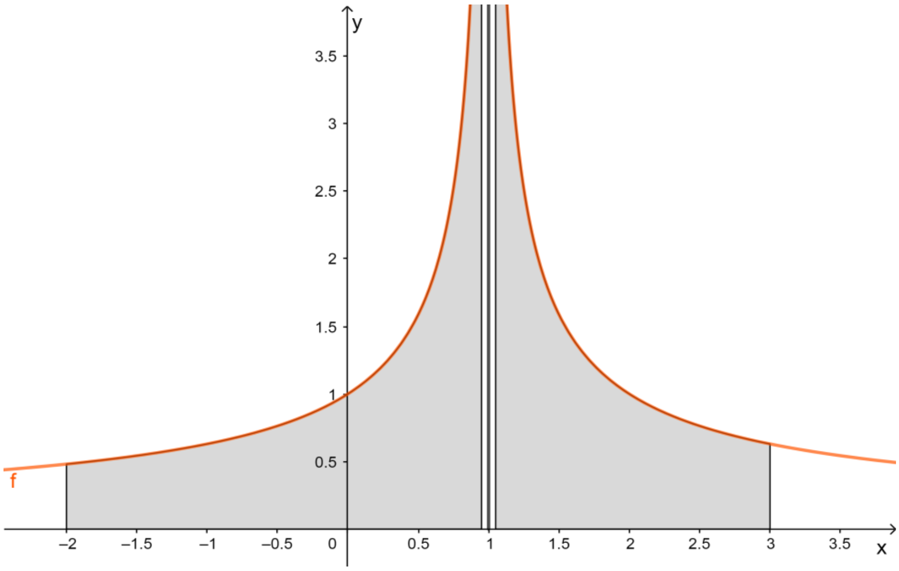


Figura 23 - Gráfico de $\frac{1}{(x-1)^{2/3}}$

5.1 Divergência de integrais impróprias usando limites

Nessa última seção ilustramos como a divergência de algumas integrais impróprias pode ser descoberta apenas com o cálculo de limites, sem o uso do Teorema Fundamental do Cálculo. Essa abordagem simplifica bastante alguns cálculos e parece ser esquecida na maioria dos livros de Cálculo.

O exemplo a seguir ilustra essa ideia. Sabemos que

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \infty,$$

pois, usando o Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}(\ln 1 - \ln\varepsilon) = \infty.$$

Será que é possível provar que a integral acima diverge sem usar o Teorema Fundamental do Cálculo? A resposta é positiva, e é dada pelo argumento seguinte:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{1}{x}\,dx + \int_{2\varepsilon}^1 \frac{1}{x}\,dx\right)$$

$$\geq \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\varepsilon\cdot\frac{1}{2\varepsilon}\right) + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{2\varepsilon}^1 \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx.$$

Logo, $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ não pode ser um número real e, portanto,

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \infty.$$

Em geral, temos o seguinte resultado:

Proposição 1: Se $f\colon (0,a] \to (0,\infty)$ é uma função contínua, decrescente em um intervalo $(0,b] \subset (0,a]$, com

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$$

então

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon f(2\varepsilon) > 0 \Rightarrow \int_0^a f(x)dx = \infty.$$

Prova: Primeiro, é claro que

$$\int_0^a f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_\varepsilon^{2\varepsilon} f(x)dx + \int_{2\varepsilon}^1 f(x)dx\right).$$

Como f é decrescente nas proximidades de 0, temos

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_\varepsilon^{2\varepsilon} f(x)dx + \int_{2\varepsilon}^1 f(x)dx\right) \geq \lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon f(2\varepsilon)) + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{2\varepsilon}^a f(x)dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon f(2\varepsilon)) + \int_0^a f(x)dx.$$

Logo

$$\int_0^a f(x)dx \geq \lim_{\varepsilon\to 0}\big(\varepsilon f(2\varepsilon)\big) + \int_0^a f(x)dx$$

e, como $\lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon f(2\varepsilon)) > 0$, concluímos que $\int_0^a f(x)dx$ não pode ser um número real e, consequentemente, diverge.

Um argumento similar pode ser usado para provar o seguinte:

Proposição 2: Se $f: [a,\infty) \to (0,\infty)$ é uma função contínua, decrescente em um intervalo $(b,\infty) \subset [a,\infty)$, com

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0,$$

então

$$\lim_{x\to\infty} xf(x) > 0 \Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx = \infty.$$

Prova: Seja

$$L = \lim_{x\to\infty} xf(x) > 0.$$

Primeiro, é claro que

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \geq \int_b^{\infty} f(x)dx.$$

Como f é decrescente em (d, ∞) para todo $d > b$, temos

$$\int_d^{\infty} f(x)dx \geq \lim_{x\to\infty}(x-d)f(x)$$

$$= \lim_{x\to\infty} xf(x) - \lim_{x\to\infty} df(x)$$

$$= \lim_{x\to\infty} xf(x)$$

$$= L.$$

Logo,

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{d\to\infty}\left(\int_a^d f(x)dx + \int_d^{\infty} f(x)dx\right)$$

$$\geq \lim_{d\to\infty}\left(\int_a^d f(x)dx\right) + L$$

e portanto

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \geq \int_a^{\infty} f(x)dx + L.$$

Assim, concluímos que $\int_a^{\infty} f(x)dx$ não pode ser um número real e, consequentemente, diverge.

Os exemplos a seguir ilustram a utilidade dos resultados acima, pois muitas vezes encontrar a primitiva das funções dadas pode ser uma tarefa difícil, ou mesmo impossível.

Exemplo 3. Temos que $\int_1^{\infty} \frac{x^2+x+1}{x^3} dx = \infty$, pois considerando $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^3}$, temos

$$\lim_{x\to\infty}\big(xf(x)\big) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x^2+x}{x^3} = 1.$$

Além disso, f é decrescente, e podemos usar a proposição 2.

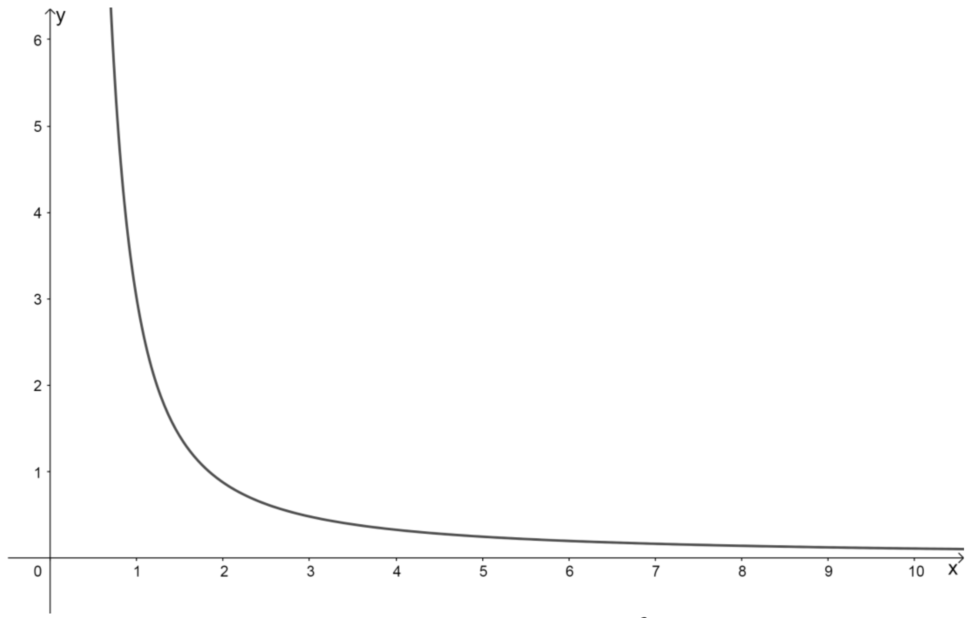


Figura 24 - Gráfico de $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^3}$

Exemplo 4. $\int_0^1 \frac{1}{x^{1-x}}\,dx = \infty$ pois considerando $f(x) = \frac{1}{x^{1-x}}$, temos

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon f(2\varepsilon) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x^{1-2x}} = 1$$

e f é decrescente. Portanto, podemos utilizar a proposição 1.

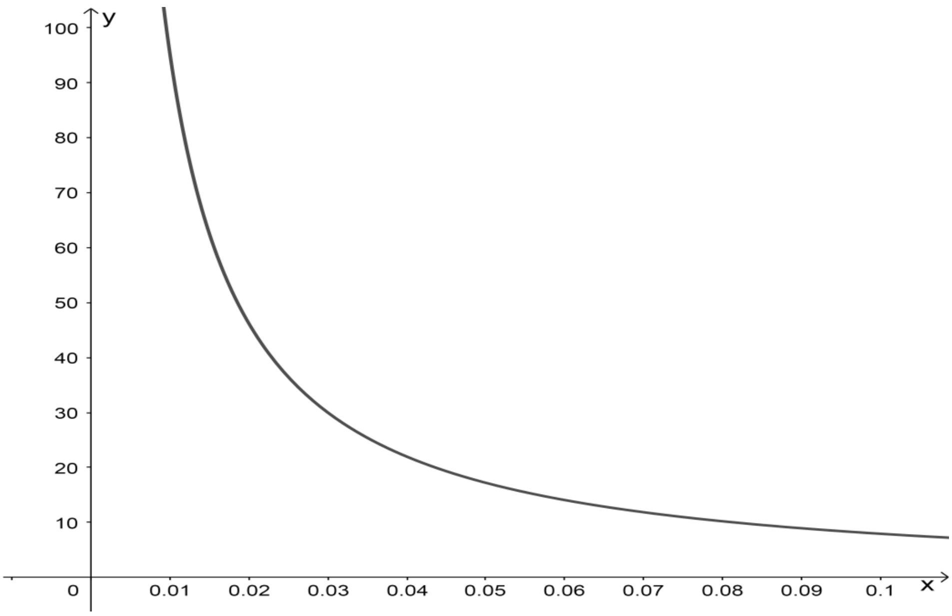


Figura 25 - Gráfico de $f(x) = \frac{1}{x^{1-x}}$

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo da determinação de áreas de regiões planas com contornos curvilíneos por meio das integrais revelou a relevância do Cálculo Integral sobretudo para as aplicações de natureza geométrica. Sua relação com o Cálculo Diferencial através da percepção de derivação e integração como processos inversos via Teorema Fundamental do Cálculo tornou maior o seu alcance em termos de aplicabilidade e diálogo com outras áreas do conhecimento.

O refinamento do método da exaustão de Eudoxo concebido por Riemann através das somas de Riemann permitiu o cálculo exato da área de regiões planas. Riemann, neste contexto, foi quem melhor formulou uma compreensão algébrico-geométrica das ideias de Newton e Leibniz, do que conhecemos hoje por cálculo de áreas por meio das integrais definidas.

Na seção 5.1, as Proposições 1 e 2 se mostram extremamente úteis e eficientes no que tange a determinação da divergência de integrais impróprias, principalmente quando comparadas com os métodos tradicionais presentes na maioria dos livros didáticos. De fato, o cálculo da integral imprópria por meio da definição pode conduzir ao cálculo de limites bastante complicados. Além disso, leva evidente vantagem em relação ao Critério de Comparação, método para determinar a convergência ou divergência de integrais impróprias presente na maioria dos livros didáticos em virtude do seguinte: o Critério de Comparação, como o nome sugere, se baseia em comparar a integral cuja convergência ou divergência se deseja concluir com outra convergência ou divergência já é conhecida baseado no seguinte princípio: sejam $f, g: (a, b) \to \mathbb{R}$ funções não-negativas (podendo ocorrer $a = -\infty$ e/ou $b = +\infty$).

- Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in (a, b)$ e $\int_a^b f(x)\, dx$ diverge, então $\int_a^b g(x)\, dx$ também diverge;
- Se $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in (a, b)$ e $\int_a^b f(x)\, dx$ converge, então $\int_a^b g(x)\, dx$ também converge.

Via de regra, o Critério de Comparação depende de manipulações algébrico-aritméticas do integrando que objetivam a obtenção de funções mais facilmente integráveis ou de forte apelo intuitivo que o estudante só adquire a medida que ganha experiência no assunto.

Para além das aplicações teóricas, o cálculo de áreas por integrais é de suma importância em diversos campos das ciências e situações práticas, como, por exemplo, a determinação de áreas desmatadas de uma determinada floresta, plantios agrícolas, áreas alagadas ou até mesmo problemas de otimização relacionados a áreas de objetos.

REFERÊNCIAS

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Tradução HYGINO H. Domingues. 5ª ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A:** Funções, limite, derivação e integração. 6. Ed. Florianópolis. Pearson Education, 2006.

FULINI, Márcio Antônio, **História do Cálculo Diferencial e Integral.** 2016, 56 p. Licenciatura em Matemática – Departamento de Matemática e Estatística (DEMAT), Universidade Federal de São João Del-rei, São João Del-rei, 2016. Disponivel em: <M Fulini - 2017 - dspace.nead.ufsj.edu.br>. Acesso em: 07 set. 2020.

GEOGEBRA CLÁSSICO. **Aplicativos matemáticos.** Disponível em: <https://www.geogebra.org/?lang=pt>. Acesso em: 11 set. 2020.

RAPOSO JÚNIO, Anselmo Baganha, **Calculo Integral das Funções de Uma Variável Real.** Universidade Federal do Maranhão. Não publicado.

STEWART, James. **Cálculo, Volume I.** Trad. EZ2Translate. 7. Ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

APÊNDICE

Integrais

1. $\int du = u + c.$
2. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1.$
3. $\int \frac{du}{u} = ln\|u\| + c.$
4. $\int a^u du = \frac{a^u}{ln\, a} + c, a > 0, a \neq 1.$
5. $\int e^u du = e^u + c.$
6. $\int sen\, u\, du = -\cos u + c.$
7. $\int \cos u\, du = sen\, u + c.$
8. $\int tg\, u\, du = ln\|sec\, u\| + c.$
9. $\int cotg\, u\, du = ln\|sen\, u\| + c.$
10. $\int sec\, u\, du = ln\|sec\, u + tg\, u\| + c.$
11. $\int cosec\, u\, du = ln\|cosec\, u - cotg\, u\| + c.$
12. $\int sec\, u\, tg\, u\, du = sec\, u + c.$
13. $\int cosec\, u\, cotg\, u\, du = -cosec\, u + c.$
14. $\int sec^2 u\, du = tg\, u + c.$
15. $\int cosec^2 u\, du = -cotg\, u + c.$
16. $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} arc\, tg \frac{u}{a} + c.$
17. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln \left\|\frac{u-a}{u+a}\right\| + c, u^2 > a^2.$
18. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = ln\left\|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right\| + c.$
19. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = ln\left\|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right\| + c.$
20. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = arc\, sen\, \frac{u}{a} + c, u^2 < a^2.$
21. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a} arc\, sec \left\|\frac{u}{a}\right\| + c.$

Identidades Trigonométricas

1. $sen^2 x + cos^2 x = 1.$	
2. $tg\,\theta = \frac{sen\,\theta}{\cos\theta}.$	
3. $1 + tg^2 x = sec^2 x.$	
4. $1 + cotg^2 x = cosec^2 x.$	
5. $sen^2 x = \frac{1 - cos\,2x}{2}.$	
6. $cos^2 x = \frac{1 + cos\,2x}{2}.$	
7. $sen\,2x = 2\,sen\,x\,cos\,x\,.$	
8. $2\,sen\,x\,cos\,y = sen(x - y) + sen(x + y).$	
9. $2\,sen\,x\,sen\,y = cos(x - y) - cos(x + y).$	
10. $2\,cos\,x\,cos\,y = cos(x - y) + cos(x + y).$	
11. $1 \pm sen\,x = 1 \pm cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$	

Fórmulas de Recorrência

1. $\int sen^n\,au\,du = -\frac{sen^{n-1}au\,cos\,au}{an} + \left(\frac{n-1}{n}\right)\int sen^{n-2}au\,du.$	
2. $\int cos^n\,au\,du = \frac{sen\,au\,cos^{n-1}au}{an} + \left(\frac{n-1}{n}\right)\int cos^{n-2}au\,du.$	
3. $\int tg^n\,au\,du = \frac{tg^{n-1}au}{a(n-1)} - \int tg^{n-2}au\,du.$	
4. $\int cotg^n au\,du = -\frac{cotg^{n-1}au}{a(n-1)} - \int cotg^{n-2}au\,du.$	
5. $\int sec^n\,au\,du = \frac{sec^{n-2}au\,tg\,au}{a(n-1)} + \left(\frac{n-2}{n-1}\right)\int sec^{n-2}au\,du.$	
6. $\int cosec^n au\,du = -\frac{cosec^{n-2}au\,cotg\,au}{a(n-1)} + \left(\frac{n-2}{n-1}\right)\int cosec^{n-2}au\,du.$	