



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
Mestrado - Doutorado

FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA PLACAS DELGADAS APOIADAS EM BASES ELÁSTICAS DE KERR

por

Marciano Marinho de Souza

Tese submetida à Universidade Federal da Paraíba para obtenção
do título de Doutor

Marciano Marinho de Souza

**FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE
CONTORNO PARA PLACAS DELGADAS APOIADAS
EM BASES ELÁSTICAS DE KERR**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Doutor.

Orientador: Professor Dr. Abel Cavalcante Lima Filho

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S729f Souza, Marciano Marinho de.
FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA
PLACAS DELGADAS APOIADAS EM BASES ELÁSTICAS DE KERR /
Marciano Marinho de Souza. - João Pessoa, 2019.
145 f.

Orientação: ABEL CAVALCANTE LIMA FILHO LIMA.
Tese (Doutorado) - UFPB/CENTRO DE TECNO.

1. BASE ELÁSTICA. 2. EQUAÇÕES INTEGRAIS. 3. MEC. 4.
SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS. I. LIMA, ABEL CAVALCANTE LIMA
FILHO. II. Título.

UFPB/BC

FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA PLACAS DELGADAS APOIADAS EM BASES ELÁSTICAS DE KERR

Por

Marciano Marinho de Souza

Tese de Doutorado apresentada em 26 de Julho de 2019 - Período letivo 2019.1



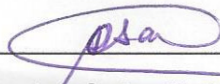
Prof. Dr. Abel Cavalcante Lima Filho

Orientador – UFPB/CT



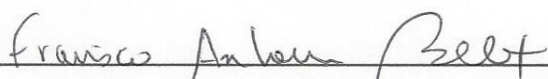
Prof. Dr. Ângelo Vieira Mendonça

Co-Orientador – UFPB/CT



Prof. Dr. Carlos Antônio Cabral dos Santos

Examinador Interno – UFPB/CT



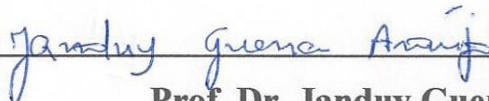
Prof. Dr. Francisco Antônio Belo

Examinador Interno – UFPB/CT



Prof. Dr. Lenimar Nunes de Andrade

Examinador Externo – UFPB/DM



Prof. Dr. Janduy Guerra Araújo

Examinador Externo – UFCG/CDSA

FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA PLACAS DELGADAS APOIADAS EM BASES ELÁSTICAS DE KERR

RESUMO

Devido a uma representação matemática mais simples aliada a um esforço computacional sensivelmente menor que as técnicas puras do meio contínuo para simular problemas de interação solo-estrutura, modelos de estruturas apoiados em bases elásticas têm despertando grande interesse na comunidade acadêmica e em profissionais de Engenharia. O presente trabalho tem por objetivo desenvolver uma matemática do Método dos Elementos de contorno para placas delgadas apoiadas em base elástica de Kerr, em que as condições de modo que todas as etapas exigidas por este método numérico utilizando software Mathcad são devidamente efetuadas. Inicialmente, parte-se para a dedução das soluções fundamentais que estão relacionadas a três conjuntos distintos de raízes dependentes das propriedades mecânicas da placa e da base elástica de Kerr. Em seguida, é deduzida a transformação das equações diferenciais parciais governantes do problema em equações integrais equivalentes, envolvendo integrais definidas no contorno contendo as variáveis do problema e integrais no domínio contendo o carregamento externo. Além disso, essas integrais de domínio também são transformadas em integrais de contorno quando o carregamento for constante na placa. A partir da discretização do contorno do problema em elementos de contorno (definição de nós funcionais e funções interpoladoras para as variáveis), e cálculo das integrais resultantes, as representações integrais do problema são transformadas em um sistema algébrico, que após aplicações das condições de contorno, é resolvido e as variáveis no contorno determinadas. Os campos de interesse no domínio da placa e da camada de cisalhamento podem ser calculados via equações integrais discretizadas utilizando-se os valores de contorno já determinados. Finalmente, exemplos numéricos são apresentados em que as soluções do MEC são comparadas com outros resultados, baseados em soluções analíticas ou numéricas de acordo com a disponibilidade, mostrando um bom desempenho da solução do MEC proposta.

Palavras chaves: Base elástica, Equações Integrais, MEC e Soluções fundamentais.

FORMULATION OF THE METHOD OF CONTOUR ELEMENTS FOR THIN PLATES SUPPORTED ON KERR ELASTIC FOUNDATIONS

ABSTRACT

Due to a simpler mathematical representation and computationally effortlessly smaller effort than pure continuum-based techniques to simulate soil-structure interaction problems, structures resting on elastic foundations models have aroused great interest in the academic community and engineering professionals. The present work aims to establish a boundary element method for thin plates supported on Kerr elastic foundation, where all the steps required by this numerical method are properly addressed. Initially, the derivation of the fundamental solutions associated with three distinct sets of roots which are dependent on the mechanical properties of both thin plate and Kerr elastic foundation is done. Then, the partial differential equations of the problem are transformed into equivalent integral equations, involving integrals defined on the problem boundary containing the problem variables and integrals defined across the domain problem containing the external load. In addition, these domain integrals are also transformed into boundary integrals when a constant loading is applied on the plate. From the discretization of problem boundary using boundary elements (definition of functional nodes and interpolating functions for the variables), and calculation of the resulting integrals, the integral representations of the problem are transformed into an algebraic system which is solved to determine the variables in the boundary problem. The fields of interest defined on the plate domain and shear layer domain can be calculated by discretization of integral equations using the known values of boundary variables. Finally, numerical examples are presented in which BEM solutions are compared to other results, based on analytical or numerical solutions according to their availabilities, showing a good performance of the proposed BEM solution.

Key words : BEM, Elastic Foundation, Fundamental Solutions, Integral Equations.

DEDICATÓRIA

Este trabalho é dedicado às pessoas que contribuíram significativamente para minha formação no âmbito profissional e, sobretudo, pessoal, às pessoas que de uma forma ou de outra me ajudaram e continuam me apoiando a superar os obstáculos encontrados ao longo do caminho.

E quem são estas pessoas? São os meus pais Martiniano Marinho de Souza e Maria Paulino de Souza que estão ao lado de Deus, a minha amada esposa Laurenise Maria de Sousa, os meus amigos Janduy Guerra Araújo, Fábio Araújo de Lima.

AGRADECIMENTOS

Sou enormemente grato a Deus, por ter me propiciado a vida e dado sabedoria para atingir os meus objetivos e superar os obstáculos.

Aos meus pais, a minha esposa pelo carinho e afeto durante todas as etapas de realizadas deste trabalho.

Aos professores Dr. Ângelo Vieira Mendonça e Abel Cavalcante Lima Filho, pela Orientação desta Tese de Doutorado.

Aos professores Dr. Nelson Nery de Oliveira castro DMAT/UFPB pela orientação de Dissertação do Mestrado, Dr. Antônio Andrade e Silva e Dr. Lenimar Numes de Andrade por suas orientações na graduação e mestrado em matemática.

À coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica do Centro de Tecnologia da Universidade Federal da Paraíba, PPGEM/CT/UFPB.

Ao Professor Dr. Carlos Antônio Cabral dos Santos, que através do mesmo iniciei o meu caminho na PPGEM/CT/UFPB.

A UFCG por conceder a licença para a realização do Doutorado.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1.....	15
1.1 CARACTERIZAÇÃO	15
1.2 MOTIVAÇÃO	17
1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	17
1.4 OBJETIVO PRINCIPAL	23
1.5 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	23
1.6 ORGANIZAÇÃO DA TESE	23
CAPÍTULO 2	25
2.1 PLACA DELGADAS ISOLADAS	25
2.2 PLACA SOBRE A BASE ELÁSTICA DE WINKLER	39
2.3 PLACA SOBRE A BASE ELÁSTICA DE PASTERNAK	44
2.4 PLACA SOBRE A BASE ELÁSTICA DE KERR	50
CAPÍTULO 3	79
3.1 EQUAÇÕES INTEGRAIS NO DOMÍNIO	79
3.1.1 PLACA SOBRE A BASE ELÁSTICA DE PASTERNAK	79
3.1.2 PLACA SOBRE BASE ELÁSTICA DE KERR	85
3.2 EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTOURO	90
3.3 TRANSFORMAÇÃO DE EQUAÇÕES DE DOMÍNIO EM EQUAÇÕES DE CONTOURO	100
CAPÍTULO 4	108
4.1 INTRODUÇÃO	108
4.2 EQUAÇÕES INTEGRAIS DISCRETIZADAS	109
4.3 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES	111
4.4 CONDIÇÕES DE CONTOURO	112
4.5 TIPOS DE ELEMENTOS UTILIZADOS	113
4.5.1 ELEMENTO RETO	115
4.5.2 ELEMENTO CIRCULAR COM INTERPOLAÇÃO LINEAR	117
4.6 MONTAGEM DA MATRIZ [H] E [G]	118
CAPÍTULO 5	120
5.1 PLACA QUADRADA SUBMETIDA COM DIVERSAS RIGIDEZES NA BASE ELÁSTICA DE KERR	120
5.2 PLACA QUADRADA SUBMETIDA A CARREGAMENTOS COMBINADOS	122
5.3 PLACA QUADRADA SOBMETIDA A CARREGAMENTO CONCENTRADO EM SEU CENTRO	125
5.4 PLACA RETANGULAR SUBMETIDA A CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO	127

5.5 PLACA CIRCULAR ENGASTADA SOB A BASE DE PASTERNAK COM CARREGAMENTO CONCENTRADO	129
5.6 PLACA CIRCULAR ENGASTADA SOB O CARREGAMENTO COM CARGA CONCENTRADA	130
5.7 PLACA SIMPLEMENTE APOIADA EM TODO O CONTORNO COM CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA	132
5.8 PLACA APOIADA SOB CARREGAMENTO CONCENTRADO	133
CONCLUSÕES	135
REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICAS	136
APÊNDICE	140

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1.a: Fundação de máquinas	15
Figura 1.1.b: Páio de taxiamento de acronaves	15
Figura 1.1.c: Estacionamento de veículos pesados	16
Figura 1.1.d: Rodovias de pavimentos rígidos	16
Figura 1.2.a: Placa apoiada sobre o meio contínuo	16
Figura 1.2.b: Fundação elástica	17
Figura 1.3: Placa sobre a base elástica base de Winkler	19
Figura 1.4: Placa sobre a base elástica base de Pasternak	19
Figura 1.5: Placa sobre a base elástica base de Kerr	20
Figura 2.1: Placa sem base elástica	25
Figura 2.2: Corpo em equilíbrio sob ações de forças	25
Figura 2.3: Forças internas atuando no corpo seccionado	26
Figura 2.4: Região infinitesimal do corpo seccionado	26
Figura 2.5: Definição de tensões nas facetas x e y	27
Figura 2.6: Deformações no plano x_1, x_2 do retângulo ABCD	28
Figura 2.7: Deformações lineares unidimensionais do elemento infinitesimal de um corpo sólido	29
Figura 2.8: Deformações angulares infinitesimais	29
Figura 2.9: Campos de deslocamentos	30
Figura 2.10: Equilíbrio de forças cortantes na placa	32
Figura 2.11: Momentos e forças cortantes atuando no plano médio	32
Figura 2.12: Transformação de sistemas	33
Figura 2.13: Representação dos símbolos na placa	39
Figura 2.14: Força p de interação atuando sobre a base elástica de Winkler. a) Modelo de Winkler, b) Força de interação p	39

Figura 2.15: Proporcionalidade da força p com o deslocamento w na base elástica de Winkler	40
Figura 2.16: Forças e momentos atuando na base elástica	40
Figura 2.17.a: Analogia entre a placa flexível sobre o líquido	41
Figura 2.17.b: Analogia entre a placa flexível sobre molas	42
Figura 2.18: Força de interação atuando sobre a base elástica de Pasternak. a) Modelo de Pasternak, b) As forças de interações p e f	44
Figura 2.19: Tensões tangenciais transversais na camada de cisalhamento	45
Figura 2.20: Forças de interação no modelo de Pasternak	47
Figura 2.21: Placa sobre a base elástica de Pasternak	49
Figura 2.22.a: Deslocamento e esforços no modelo de Kerr. a) Força de interação p e f	51
Figura 2.22.b: Deslocamento e esforços no modelo de Kerr. b) Esforços sobre o modelo de Kerr	52
Figura 2.23: Fonte aplicada na placa	54
Figura 2.24: Fonte aplicada na camada de cisalhamento	54
Figura 2.25: Estudos dos sinais das funções. a) $f_1(kf)$; $f_2(kf)$; $\Delta(kf)$	58
Figura 2.26: Estudos dos sinais das raízes para o caso onde as três raízes z_1, z_2 e z_3 são reais positivas distintas	59
Figura 2.27: Cossenos diretores de interesse	67
Figura 2.28: Relações importantes que relacionam os vetores unitários $\vec{n}$, $\vec{m}$ e $\vec{s}$	68
Figura 3.1: Forças atuando nos espaços real e virtual	80
Figura 3.2: Angularidade no contorno (canto)	82
Figura 3.3: Esforços e deslocamentos sobre a base elástica de Kerr	90
Figura 3.4: Contorno circular acrescido a um ponto p de um canto da placa	91
Figura 3.5: Região carregada Ω	101
Figura 4.1: Contorno de uma placa dividida em elemento de contorno	108
Figura 4.2: Sistema de equações integrais aplicadas no ponto fonte p com resultado no ponto campo q	112

Figura 4.3.: Elementos retos e curvos	114
Figura 4.4: Elemento de contorno linear contínuo	115
Figura 4.5: Elemento reto	117
Figura 4.6: Elemento circular	117
Figura 4.7: Posições possíveis para o ponto Q: a) Fora do elemento, b) Coincidente com um dos nós do elemento	119
Figura 5.1: Deslocamento $\hat{w}$ no ponto central considerando $\hat{G} = 0.01$	120
Figura 5.2: Deslocamento $\hat{w}$ no ponto central considerando $\hat{G} = 20$	121
Figura 5.3: Placa sobre base de Kerr sob carregamento combinados	122
Figura 5.4: Erros relativos dos deslocamentos da placa em função das malhas	123
Figura 5.5 Inclinações dw/dx ao longo de uma linha central	124
Figura 5.6: Placa sobre base de Kerr sob carregamento concentrado em seu centro ...	125
Figura 5.7: Erros relativos dos deslocamentos adimensionalizados em função do Tipo de Malha	126
Figura 5.8: Placa sobre base de Kerr sob carregamento distribuído	127
Figura 5.9: Malha de MEC: a) Tipo 1; b) Tipo 2 e c) Tipo 3	128
Figura 5.10: Deslocamentos adimensionalizados na linha central de uma placa quadrada.....	129
Figura 5.11: Placa circular engastada sob a base de Pasternak com carregamento concentrado.....	129
Figura 5.12: Placa circular engastada sob o carregamento com carga concentrada	131
Figura 5.13: Malha circular: a) 16 Elementos; b) 32 Elementos	131
Figura 5.14: Placa simplesmente apoiada em todo o contorno com carga uniformemente distribuída	133
Figura 5.15: Placa simplesmente apoiada com carregamento concentrada	134

LISTA DE QUADROS

Quadro 5.1: Resultado dos deslocamentos w ($\times 10^{-4}\text{m}$) da placa ao longo da linha central	123
Quadro 5.2: Resultado dos deslocamentos v ($\times 10^{-4}\text{m}$) da camada de cisalhamento ao longo da linha central na direção x	124
Quadro 5.3: Resultado dos deslocamentos adimensionalizados da placa e da camada de cisalhamento ao longo da linha central usando a malha Tipo3	126
Quadro 5.4: Resultado dos deslocamentos adimensionalizados $\hat{w}$ e $\hat{v}$ no ponto central	128
Quadro 5.5: Resultado para placa circular engastada sob base de Pasternak com carregamento concentrado	130
Quadro 5.6: Resultado dos deslocamentos para placa circular	132
Quadro 5.7: Resultado de Placa simplesmente apoiado em todo o contorno com carga uniformemente distribuído	133
Quadro 5.8: Resultado de Placa simplesmente apoiada com carregamento concentrado	134

LISTA DE SÍMBOLOS

E	- Módulo de elasticidade longitudinal
G	- Módulo de elasticidade transversal
ν	- Coeficiente de Poisson
σ_x	- Tensão normal à direção x
σ_y	- Tensão normal à direção y
σ_z	- Tensão normal à direção z
τ	- Tensão de cisalhamento
γ	- Distorção
δ	- Carga fundamental
P	- Carga axial
q	- Carga real
p	- Força de interação
h	- Espessura da placa
k	- Constante elástica da mola
w	- Deslocamento vertical
r	- Raio
u	- Deslocamento na direção do eixo x_2
v	- Deslocamento na direção do eixo x_1
c_r	- Cosseno diretor
x, y, z	- Coordenadas do sistema generalizado
x	- Ponto campo, incógnita
$\hat{x}$	- Coordenada do ponto fonte
L	- Comprimento

$\mathbf{M}_x$	- Momento fletor de primeira ordem
Q_x	- Esforço cortante de primeira ordem
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{zy}$	- Distorção no plano xy, xz e yz, respectivamente
$\delta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})$	- Delta de Dirac
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	- Deformação linear na direção dos eixos x, y e z, respectivamente
ϕ	- Rotação da seção
ψ	- Função escalar
$\mathbf{D}$	- Módulo de rigidez à flexão
Δ	- Laplaciano
∇	- Gradiente de uma função
λ	- Coeficiente de Reissner

LISTA DE ABREVIATURAS

ABNT	- Associação Brasileira de Normas Técnicas
MDF	- Método das Diferenças Finitas
MEC	- Método dos Elementos de Contorno
MEF	- Método dos Elementos Finitos
UFPB	- Universidade Federal da Paraíba

CAPÍTULO 1

1.1 CARACTERIZAÇÃO

Um dos problemas de grande interesse em engenharia (principalmente na sub-área de mecânica dos sólidos) é sem dúvida a interação solo-estrutura, por exemplo, placas apoiadas no solo. Os casos práticos mais usuais desses problemas podem ser associados a fundações de máquinas (Figura 1.1.a), pátio de taxiamento de aeronaves (Figura 1.1.b), estacionamento de veículos pesados (Figura 1.1.c), rodovias de pavimentos rígidos (Figura 1.1.d).



Figura 1.1.a Fundação de máquinas. Fonte: Concretizar (2017)



Figura 1.1.b Pátio de taxiamento de aeronaves. Fonte: Autor



Figura 1.1.c Estacionamento de veículos pesados. Fonte: Mapa da Obra (2016)



Figura 1.1.d Rodovias de pavimentos rígidos. Fonte: Siemens/Divulgação (2019)

A estrutura e o solo são usualmente representados matematicamente por modelos baseados em idealizações do meio contínuo (Figura 1.2.a), ou por modelos idealizados como fundação elástica (Figura 1.2.b).

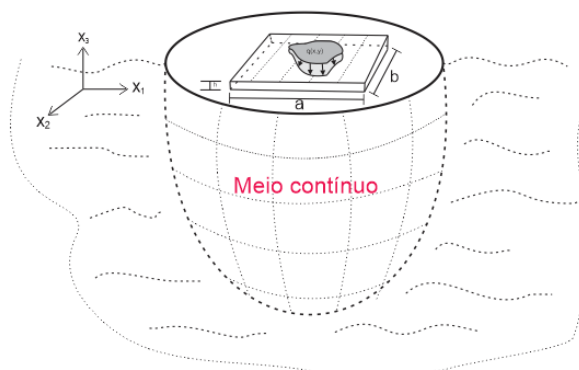


Figura 1.2.a: Placa apoiada sobre o meio contínuo. Fonte: Autor

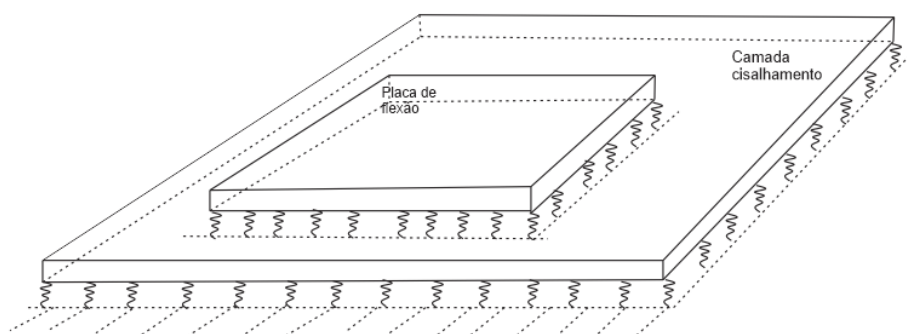


Figura 1.2.b: Fundação elástica. Fonte: Autor

Os modelos que são assumidos representar a interação solo-estrutura são regidos por equações governantes, cuja solução é necessária para determinação dos campos físicos de interesse do problema, por exemplo, deslocamentos, tensões, esforços, etc. Em muitos casos, soluções analíticas para as equações governantes não estão disponíveis, o que tem levado ao desenvolvimento de soluções numéricas empregando-se técnicas como o Método dos Elementos Finitos (MEF), Método dos Elementos de Contorno (MEC), combinação MEC-MEF, e outras.

1.2 MOTIVAÇÃO

As soluções numéricas para placas sobre base elástica de Kerr são ainda pouco estudadas, inclusive em elementos finitos, o que gera diversos aspectos que merecem ser elucidados. No que se refere a utilização do método dos elementos de contorno como solução desse problema, a construção da técnica ainda é incipiente, constando apenas soluções fundamentais de deslocamentos para alguns casos específicos, não atendendo todas as soluções requeridas em uma potencial solução do MEC. Neste sentido, a motivação de este trabalho é preencher algumas destas lacunas, por exemplo, a dedução das equações integrais e suas soluções fundamentais completas.

1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Existem diversas publicações onde o solo é representado como um meio contínuo elástico (discussões sobre a aplicabilidade desse tipo de idealização são

descritas em Harr (1966) e Poulos & Davis (1980) e Dutta & Roy (2006). Aparentemente, Kelvin & Tait (1889), Boussinesq (1885) e Cerruti (1882) foram os pioneiros a proporem soluções matemáticas específicas para os meios contínuos elásticos de domínios infinitos e semi-infinitos (os dois últimos estudaram, respectivamente, casos particulares de carregamentos concentrados aplicados normal e tangencialmente à superfície livre do semi-espço). Contudo, foi no trabalho de Mindlin (1936) que essas soluções foram unificadas e estendidas para o estudo de campos de deslocamentos e de tensões devido a uma carga concentrada aplicada no interior de um sólido semi-infinito. Assim, diversos pesquisadores têm adotado os modelos do contínuo para representar o solo na interação com a placa sobre a base elástica. Messafer & Coates (1993) desenvolveram uma formulação em que o método dos elementos finitos é associado ao método dos elementos de contorno para a análise deste problema. Em Mendonça e Paiva (2003) é apresentada uma formulação para os casos de radiês simples onde a placa é modelada pelo MEF (Método dos Elementos Finitos) utilizando-se dois elementos finitos: DKT (Teoria Discreta de Kirchhoff) e o HSM (Hybrid Stress Model). A representação do solo é feita via MEC (método dos elementos de contorno) onde é utilizada uma interpolação linear para as forças de contato e empregando-se as soluções do problema fundamental de Boussinesq-Cerruti. Fatemi-Ardakani (1987), Paiva (1993), Calderón (1996), Mendonça e Paiva (2000) desenvolveram formulações para a análise desse problema em que tanto o solo como a placa são analisados pelo método dos elementos de contorno. Devido à menor exigência de manipulações matemáticas e custo computacional, modelos menos rigorosos que os do meio contínuo têm sido encontrados largamente na literatura. Um grupo bem representativo deles é associado às bases elásticas. O mais antigo e mais frequentemente utilizado modelo de base elástica é o de Winkler (1867).

Nele, o solo é representado por uma série de molas elásticas lineares verticais, infinitesimalmente espaçadas, e mutuamente independentes. Além disso, o modelo de Winkler é representado por um único parâmetro associado à rigidez da mola, vide Fig.1.3. Trabalhos para análise numérica de placas delgadas sobre base de Winkler podem ser encontradas utilizando o Método das Diferenças Finitas Chakravorty & Ghosh (1975), o Método dos Elementos Finitos Cheung & Zienkiewicz (1965) e Métodos Elementos de Contorno Calderón (1991), Manzoli (1992). Placas espessas sobre base de Winkler também modeladas pelo MEC, conforme Al-Hosani (1991). A

principal limitação do modelo de Winkler é sua incapacidade de representar a continuidade do solo.

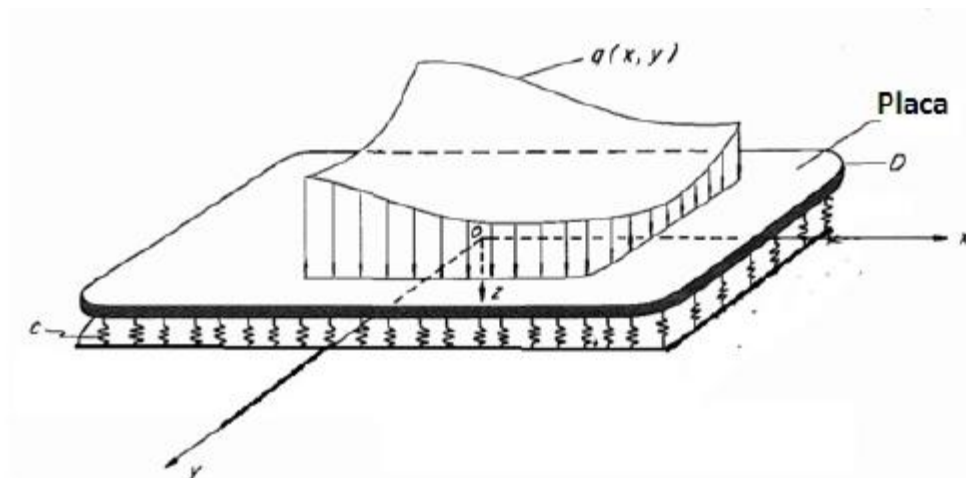


Figura 1.3: Placa sobre a base elástica base de Winkler. Fonte: Kneifati (1985)

Contornar outras abordagens foram propostas, por exemplo, modelos de fundações elásticas as de dois parâmetros, cujo mais popular é o modelo de Pasternak, vide Fig.1.4.

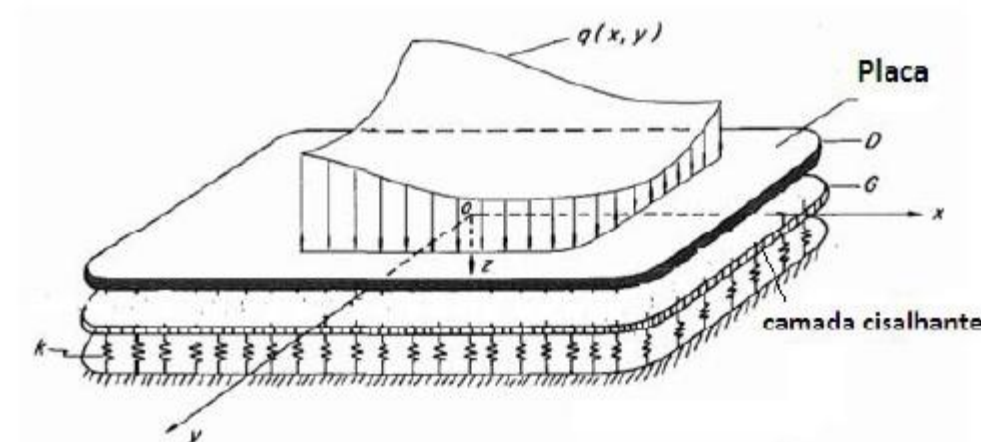


Figura 1.4: Placa sobre a base elástica base de Pasternak. Fonte: Kneifati (1985)

Nesse modelo, é assumido que as molas são interconectadas por uma camada contínua que só resiste ao cisalhamento, de forma que dois parâmetros (um associado à rigidez das molas e outro ao módulo de distorção da camada) caracterizam o problema.

Yang (1972) utilizou o MEF para analisar, estaticamente, placas delgadas sobre base de Pasternak. Gibigaye et al. (2009) utilizou MEF para resposta dinâmica de uma placa de pavimentação rígida baseada em um solo inercial. Balas et al. (1984), Wang et al. (1992), Fadhil e El-Zafrany (1994), Rashed et al. (1999) modelaram placas espessas

pelo MEC. Uğurlu (2016) utilizou MEF para análise de vibração de tanques de armazenamento de fluidos apoiadas na base elástica de Pasternak. Decorrente de uma generalização dos modelos de dois parâmetros tem-se os de três parâmetros, vide Fig.1.5.

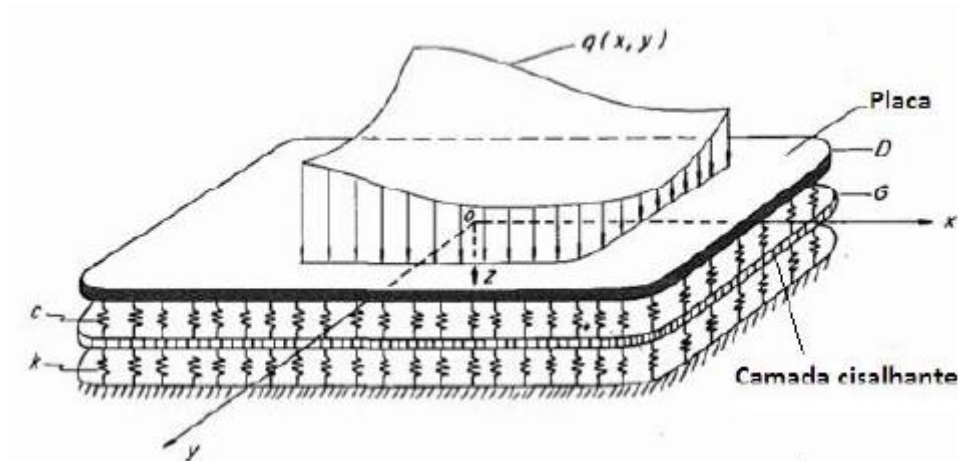


Figura 1.5: Placa sobre a base elástica base de Kerr. Fonte: Kneifati (1985)

Uma característica básica desses modelos é sua flexibilidade e conveniência, que eles oferecem para representar o nível de "continuidade" entre as superfícies carregadas do solo e aquelas vizinhas que não estão.

Kerr (1968) estendeu o método proposto por Kantorovich (1958) para analisar placas retangulares apoiadas, submetidas à uma carga distribuído uniformemente. Verificou-se que o termo gera uma solução aproximada, em toda a região da placa, observando não apenas as rotações da placa, mas também os momentos de flexão e forças de cisalhamento.

Como continuidade de sua pesquisa, Kerr (1969) apresenta o método de Kantorovich (1958) estendido para a solução de problemas de auto valores em equações diferenciais parciais. Os exemplos específicos apresentados no seu trabalho constam: as vibrações de uma membrana retangular e a estabilidade de uma placa retangular elástica comprimida no seu plano.

Rades (1970) realizou uma análise em uma viga uniforme de comprimento finito suportada por um tipo base de Pasternak e submetido a uma força harmônica concentrada no ponto médio da viga. A influência da "camada de cisalhamento" é exibida por comparação com a resposta da viga que é suportada por uma tipo da base Winkler.

Rades (1971) estudou os modelos propostos por Kerr em relação para problemas das vibrações forçadas de uma viga rígida suportada por um meio elástico de profundidade finita.

Além disso, Redes apresentou um modelo semelhante ao da base de Kerr submetido a uma placa circular. Ambas as condições com cargas estática e dinâmica. O coeficiente de reação da placa é expresso em termos dos módulos da base e o raio da placa.

Stadler (1971), obteve com uma solução analítica de forma única para dinâmica de uma placa infinita. A placa pode ser submetida a condições iniciais arbitrárias e carregamento, onde os efeitos de uma base elástica (Winkler), sob as cargas uniformes no plano são consideradas.

Kerr (1972) estudou placas de gelo flutuantes sujeitas a cargas estáticas ou dinâmicas. O mesmo baseou-se na teoria de uma placa homogênea fina, embora placas de gelo flutuante vistas no módulo de Young possam variar fortemente com a profundidade.

Kerr (1976) apresenta um artigo começando com uma discussão sobre uma série de problemas de valor de contorno que tinha sido publicados em mecânica estrutural, cuja formulação intuitiva levou as condições de contorno ou correspondências incorretas. Assim, ele utilizou métodos variacionais para obter formulações bem colocadas para aqueles problemas. Kerr (1978) fez uma nova abordagem para avaliar certas integrais infinitas. O método consiste em demonstrar uma série de integrais que envolvem uma função modificada de Bessel.

Kerr (1983) analisou as velocidades críticas de movimentação de cargas sobre placas de gelo flutuantes que foram determinadas por vários autores.

As análises realizadas por Kerr prosseguiram, e em Kerr (1984) foi apresentado um artigo que discute uma abordagem para a geração de modelos de base. Mostra-se que a hipótese de que, a priori, a pressão de contato está relacionada com dos deslocamentos de superfície e suas derivadas superiores.

Kneifati (1985) apresentou um artigo para o modelo de base que consiste em duas camadas interligadas por uma mola de camada de corte que foi sugerido por Kerr em (1964). Os resultados são comparações com as soluções correspondentes quando, a base é modelada como: contínuo elástico; base Winkler; e base Pasternak.

Kerr (1989) utilizou funções de Green para uma placa delgada elástica infinita, ligadas respectivamente a base de Pasternak ou de Kerr, submetidas a uma força concentrada, obtidas em termos de funções de Bessel. As soluções foram deduzidas utilizando diferentes funções, dependendo do tipo de fundação elástica, propriedades mecânicas da base e da placa.

Worku (2010) apresenta um modelo generalizado de fundação elástica idealizado para uma camada elástica apoiada sobre uma base rígida. Em contraste com trabalhos anteriores não há tensões ou deslocamentos, ou seja, os mesmos são desprezados a priori. A equação diferencial parcial de segunda ordem é obtida semelhante ao modelo mecânico de Kerr.

Shahsavari et al. (2017), utilizaram o método de Galerkin aplicado a um problema de placas onde seu modelo abrange um estudo paramétrico realizado para avaliar os efeitos do parâmetro mecânico o mesmo da fundação elástica conclui em sua pesquisa que o modelo de fundação de Kerr apresenta melhor solução que o de Pasternak e Winkler.

Rahman (2017) utilizou um procedimento analítico na solução de um problema de placas circulares e retangulares para o modelo de Kerr. O mesmo resolveu seus exemplos utilizando Matlab e obteve soluções exatas para os exemplos de aplicação demonstrados em seu trabalho.

Chen (2018) utilizou um método de variáveis complexas e formulação fraca para resolver problemas de placas sobre bases elásticas, com os modelos de fundação de Winkler e Pasternak. A partir de resultados comparativos concluiu que o seu método é eficaz para domínios irregulares e condições de contorno complexas arbitrárias.

Avcar (2018) propôs uma solução para o problema sobre base elástica de Winkler e Pasternak para um estudo de vibração livre de placas de materiais graduados funcionalmente.

Já as soluções numéricas do MEF para estruturas apoiadas em base de Kerr têm se concentrado majoritariamente em vigas Morfidis (2007) e Limkatanyu et al.(2013).

Assim, neste plano de trabalho tem-se como objetivo estabelecer soluções numéricas segundo a filosofia do Método dos Elementos de Contorno para placas delgadas (Kirchhoff) apoiadas sobre base elástica de Kerr.

1.4 OBJETIVO PRINCIPAL

Estabelecer uma formulação do Método dos Elementos de Contorno para analisar placas delgadas apoiadas em base elástica de Kerr.

1.5 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Deduzir as soluções fundamentais de placas Kirchhoff (delgadas) na base de Kerr e estabelecer suas equações integrais e representações algébricas;

1.6 ORGANIZAÇÃO DA TESE

No Capítulo 2 é apresentado os fundamentos de placas sem contato com, bases elásticas, onde são discutidos os conceitos de deformação, tensões, momentos, forças cortantes, e equações de equilíbrio para placas segundo a teoria de Kirchhoff. Além disso, ainda no Capítulo 2, essas discussões são extendidas para placas delgadas sobre bases elásticas representadas pelos modelos de Winkler e Pasternak. Um ponto de destaque do capítulo 2 é a dedução das soluções fundamentais da placas delgadas apoiada na base elástica de kerr, cuja existência é condicionada a três conjuntos de raízes que dependem das propriedades mecânicas da placa e da base elástica. Já no Capítulo 3 são apresentadas as equações integrais de placas delgadas sobre bases elásticas de Pasternak e Kerr. Um dos pontos de destaque desse capítulo é o estabelecimento das equações integrais de domínio e de contorno para o problema de placas delgadas sobre a base de Kerr, em que as equações diferenciais parciais e acopladas são transformadas em equações integrais equivalentes utilizando o método dos resíduos ponderados. Além disso, com o intuito de se preservar a característica pura do MEC (redução de dimensionalidade da solução em uma ordem), apresenta-se a dedução em que as equações integrais de domínio associadas ao carregamento são transformadas em equações integrais de contorno. Ainda no capítulo 3, tem-se a dedução dos termos livres de integral decorrentes das singularidades das soluções fundamentais requeridas nas equações integrais de contorno transformadas. No Capítulo 4 as equações integrais de contorno são discretizadas usando elementos de contorno de acordo a geometria da placa, onde para este trabalho são usados elementos retos e circulares, de modo que nessa pesquisa as variáveis em cada elementos de contorno são aproximadas por funções interpoladoras. Após o cálculo das integrais requeridas, o

sistema de equações integrais discretizadas é transformado em um sistema algébrico, que após a imposição das condições de contorno, as variáveis de contorno são determinadas. No Capítulo 5 são apresentados os exemplos numéricos para diversos de casos de problemas envolvendo placas com ou sem base elásticas, onde os resultados da formulação proposta são comparadas com respostas numéricas e/ou analíticas, de acordo com a disponibilidade.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTOS DE PLACAS DELGADAS ESTÁTICAS

No presente capítulo serão abordados os conceitos de placas delgadas isoladas (sem contato com outros meios), placas delgadas sobre bases elásticas uniparamétrica (Winkler), bi-paramétrica (Pasternak) e tri-paramétrica (Kerr).

2.1 PLACAS DELGADAS ISOLADAS

De acordo com Paiva (1987), a placa é um corpo limitado por duas superfícies planas ou de pequena curvatura, sendo a distância entre estas superfícies, denominada espessura, que é pequena em comparação com as outras dimensões. A superfície equidistante das superfícies limites é denominada superfície média, ou plano médio conforme indicado na Figura 2.1. Onde q é a carga distribuída e h a espessura da placa.

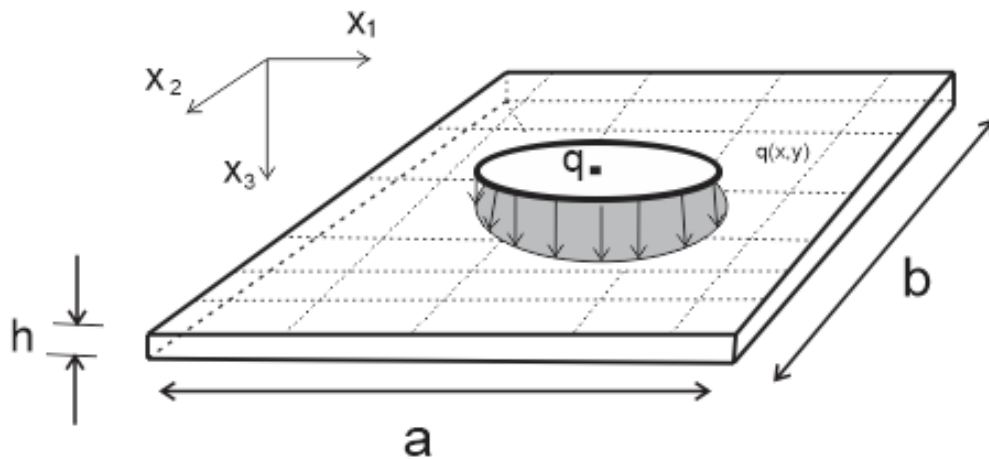


Figura 2.1 Placa sem base elástica. Fonte: Autor.

Seja um corpo em equilíbrio sob ação de forças externas $F_1, F_2, \dots, F_7$, indicadas na figura 2.2.

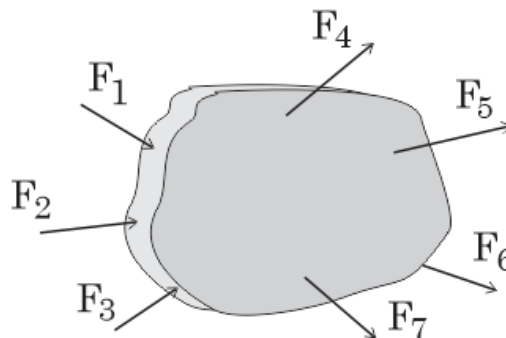


Figura 2.2 Corpo em equilíbrio sob ações de forças. Fonte: Autor.

Se o corpo for seccionado por um plano S, as forças internas, exibidas nas figura 2.3a e 2.3b observa-se as forças externas indicadas.

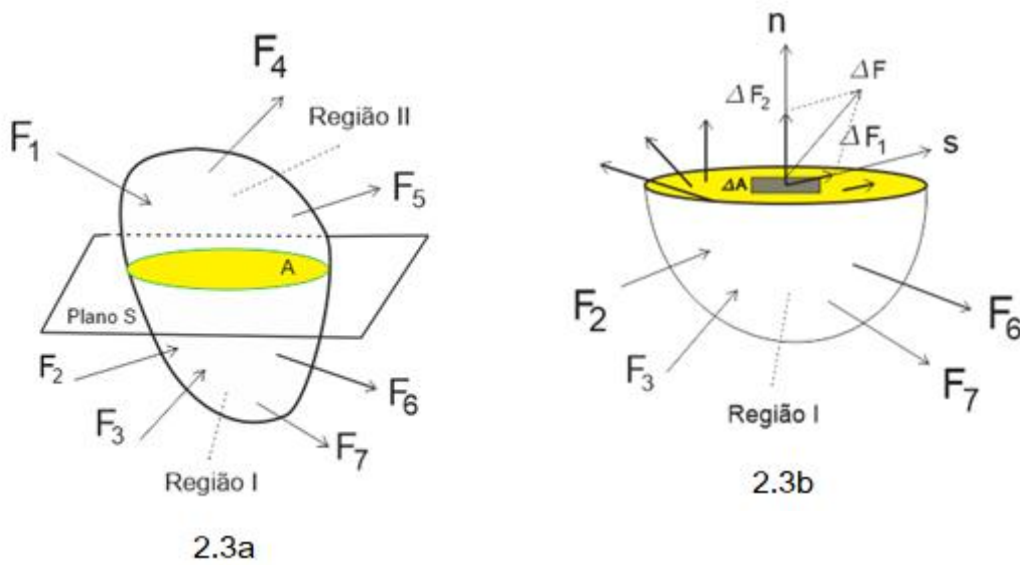


Figura 2.3 Forças internas atuando no corpo seccionado. Fonte: Autor

Onde ΔF é a resultante das forças na área ΔA . Pressão média é:

$$\rho_{\text{médio}} = \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (2.1)$$

Se ΔA tende a dA , então a região ΔA torna-se infinitesimal, isto é, o ponto M, conforme apresentado Figura 2.4.

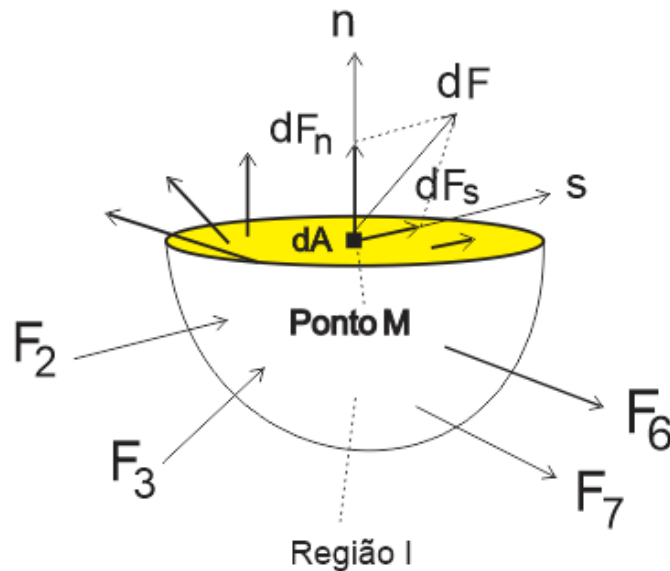


Figura 2.4 Região infinitesimal do corpo seccionado. Fonte: Autor

Assim, as forças que atuam nessa região torna-se também infinitesimais, isto é, dF , dF_n e dF_t . Então:

$$\rho = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA} \quad (2.2)$$

As componentes de tensões em coordenadas cartesianas x, y e z, podem ser mostradas conforme a Figura (2.5) e escritas como:

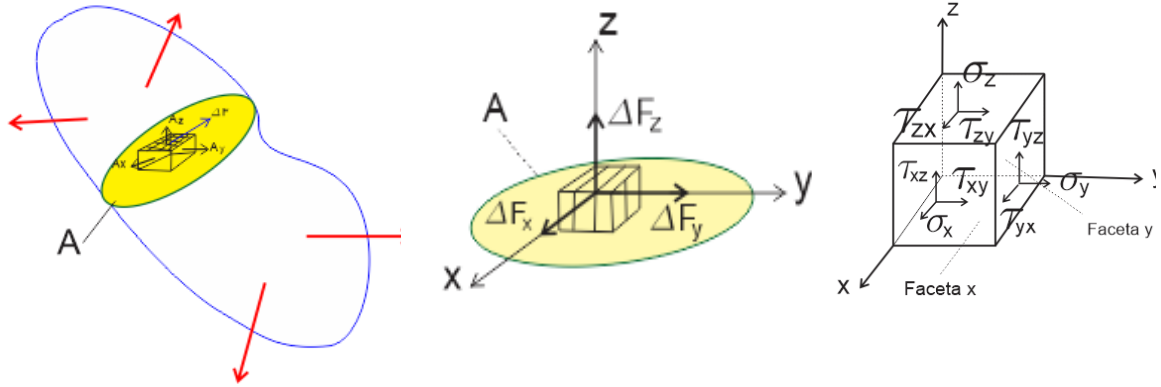


Figura 2.5 Definição de tensões nas facetas x e y. Fonte: Autor

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A_x} = \frac{dF_x}{dA_x} \\ \tau_{yx} &= \lim_{\Delta A_y \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A_y} = \frac{dF_x}{dA_y} \\ \tau_{zx} &= \lim_{\Delta A_z \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A_z} = \frac{dF_x}{dA_z} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A_x} = \frac{dF_y}{dA_x} \\ \sigma_y &= \lim_{\Delta A_y \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A_y} = \frac{dF_y}{dA_y} \\ \tau_{zy} &= \lim_{\Delta A_z \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A_z} = \frac{dF_y}{dA_z} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A_x} = \frac{dF_z}{dA_x} \\ \tau_{yz} &= \lim_{\Delta A_y \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A_y} = \frac{dF_z}{dA_y} \\ \sigma_z &= \lim_{\Delta A_z \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A_z} = \frac{dF_z}{dA_z} \end{aligned} \quad (2.5)$$

O tensor de tensões é a representação matricial das componentes das tensões sendo escrito como:

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Redefinindo os eixos cartesianos (x,y,z) para (x_1, x_2, x_3) , o tensor de tensões em (2.6) fica:

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Outra relação de interesse é aquela que relaciona as forças de superfície P_j com as componentes de tensão σ_{ij} , chamada de relação de Cauchy, dada por:

$$P_j = \sigma_{ij} n_j \quad (2.7)$$

Onde os n_j são os cossenos diretores da normal ao plano de interesse.

Deformações são grandezas tensoriais que estão associadas à mudança de forma dos corpos, conforme mostrado na Figura 2.6, e que são escritas a partir de derivações apropriadas dos deslocamentos u_1, u_2 e u_3 segundo as direções x_1, x_2 e x_3 .

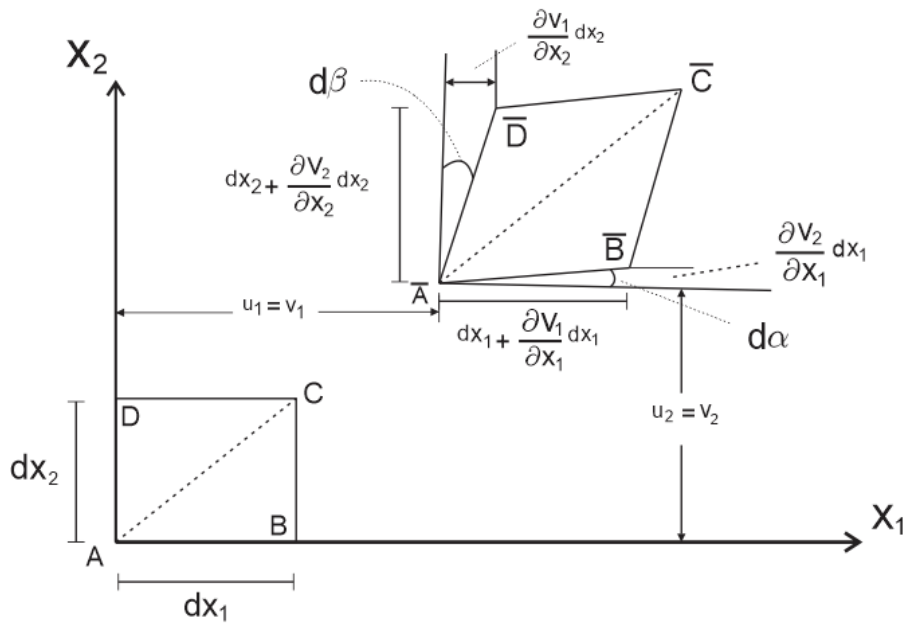


Figura 2.6 Deformações no plano x_1, x_2 do retângulo ABCD. Fonte: Autor

As deformações podem ser divididas em deformações lineares que caracterizada por preservar a ortogonalidade das facetas, vide Figura 2.7 e as deformações angulares também chamadas de distorções, Figura 2.8 em que a ortogonalidade não é mantida.

Assumindo hipótese de mudança de forma infinitesimal, as deformações são escritas como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.8)$$

A partir de (2.7), observa-se a simetria do tensor das deformações, isto é:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = \frac{1}{2}(u_{j,i} + u_{i,j}) = \varepsilon_{ji} \quad (2.8a)$$

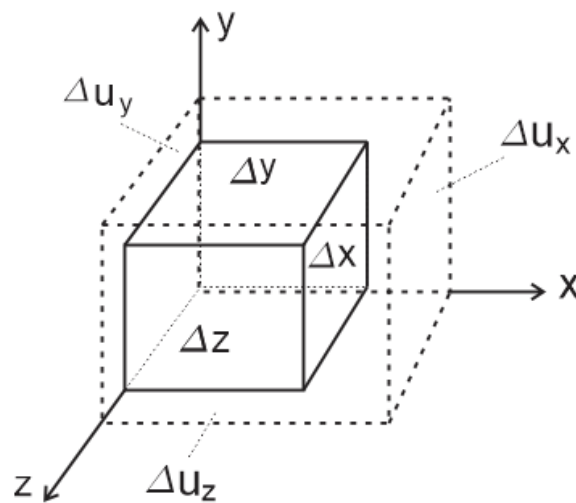


Figura 2.7 Deformações lineares unidimensionais do elemento infinitesimal de um corpo sólido. Fonte: Autor

Já as deformações angulares γ (distorções) infinitesimais são ilustradas como:

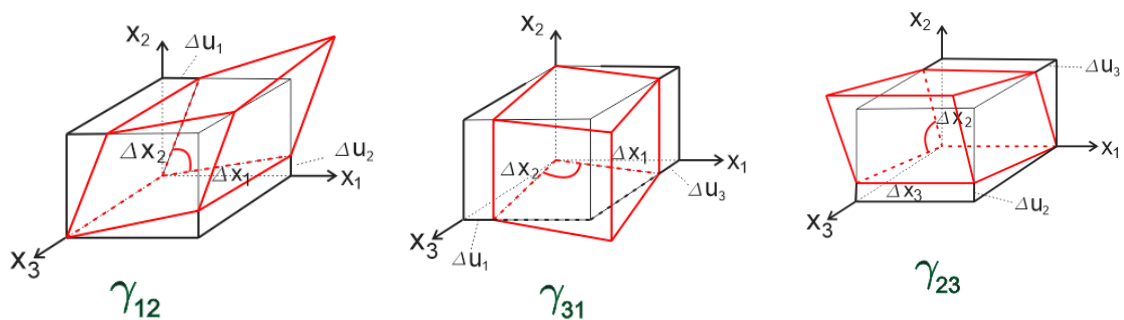


Figura 2.8 Deformações angulares infinitesimais. Fonte: Autor

As seguintes hipóteses são admitidas no modelo de placas de Kirchhoff.

1. As deformações no plano são pequenas em comparação com a unidade $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{xy} \ll 1$;
2. Seções transversais inicialmente planas permanecem planas e ortogonais ao plano de placa deformada, implicando na nulidade das tensões cisalhantes transversas $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$;
3. Material da placa é elástico-linear, homogêneo e isótropo; isto é, segue a Lei de Hooke.
4. Os efeitos das tensões normais transversas oriundas do carregamento podem ser desprezados no comportamento global da placa, quando comparada com as contribuições das tensões normais no plano da estrutura.

O campo de deslocamento transversal é dado por:

$$w_0(x_1, x_2, x_3) = w(x_1, x_2), \quad (2.8b)$$

Onde w é o deslocamento transversal do plano médio ($x_3 = z = 0$), vide Figura 2.9. Como pode ser evidenciado.

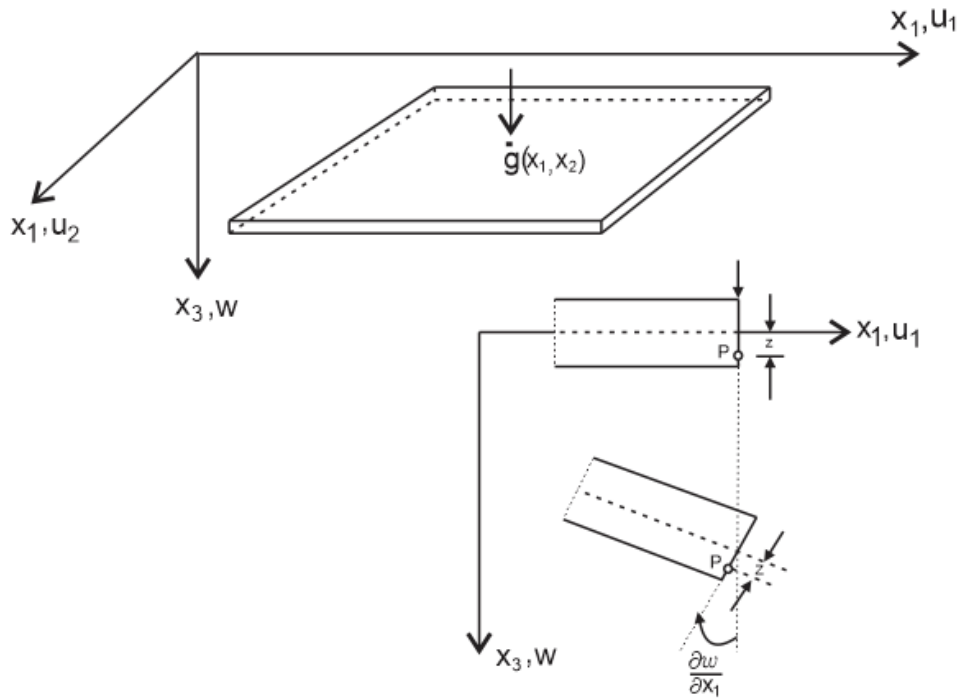


Figura 2.9: Campos de deslocamentos. Fonte: Autor

A partir das hipóteses de Kirchhoff, os deslocamentos axiais na placa são dados como:

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = -z \frac{\partial w}{\partial x_1} \quad \text{e} \quad u_2(x_1, x_2, x_3) = -z \frac{\partial w}{\partial x_2} \quad (2.9)$$

Se as componentes axiais de deslocamentos (2.9) forem escritas em notação indicial, tem-se:

$$u_i = -zw_{,i}; \quad i = 1, 2 \quad (2.10)$$

As deformações podem ser escritas em função dos deslocamentos pela substituição de (2.10) em (2.9),

$$\varepsilon_{ij} = -zw_{,ij}; \quad i, j = 1, 2 \quad (2.11)$$

Além disso, as curvaturas podem ser definidas como:

$$K_{ij} = -w_{,ij}; \quad i, j = 1, 2 \quad (2.12)$$

Ou

$$\varepsilon = zK \quad (2.13)$$

Dado que é assumido que o material constituinte da placa é, linear, homogêneo e isotrópico, as relações entre tensões e deformações no estado plano de tensões ($\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$) obtém-se:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + \varepsilon_{ij} \right]. \quad k, i, j = 1, 2 \quad (2.14)$$

Onde: ν coeficiente de Poisson, δ_{ij} é o Delta de Kronecker; E, o Modulo de elasticidade longitudinal.

Substituindo (2.11) em (2.14), as tensões ficam expressas em função das curvaturas

$$\sigma_{ij} = -\frac{Ez}{1-\nu^2} [\nu \delta_{ij} w_{,kk} + (1-\nu) w_{,ij}]. \quad k, i, j = 1, 2 \quad (2.15)$$

Se as tensões forem integradas ao longo da espessura em função do braço de alavanca (z) tem-se as componentes de momento

$$M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} z dz \quad (2.16)$$

Onde h é a espessura da placa. Após o cálculo da integração em (2.16), têm-se as relações entre momentos e curvaturas dadas por:

$$M_{ij} = D [\nu \delta_{ij} w_{,kk} + (1-\nu) w_{,ij}]. \quad k, i, j = 1, 2 \quad (2.17)$$

Onde D é a rigidez à flexão da placa dada por:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

As forças transversais de um elemento diferencial de placa estão indicadas na Figura 2.10 :

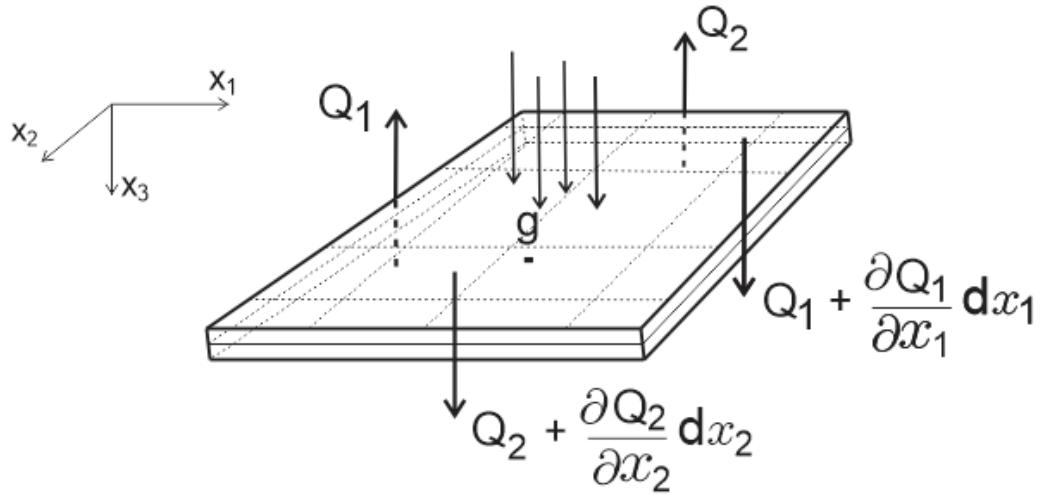


Figura 2.10 Equilíbrio de forças cortantes na placa. Fonte: Autor.

Ao se fazer o somatório resulta no equilíbrio de forças do elemento diferencial da placa na direção x_3 , obtém-se:

$$g = -Q_{i,i}; \quad i = 1,2 \quad (2.18)$$

Onde g é a carga aplicada sobre a placa.

Na Figura 2.11 são mostradas as forças e momentos atuantes em um elemento diferencial de placas.

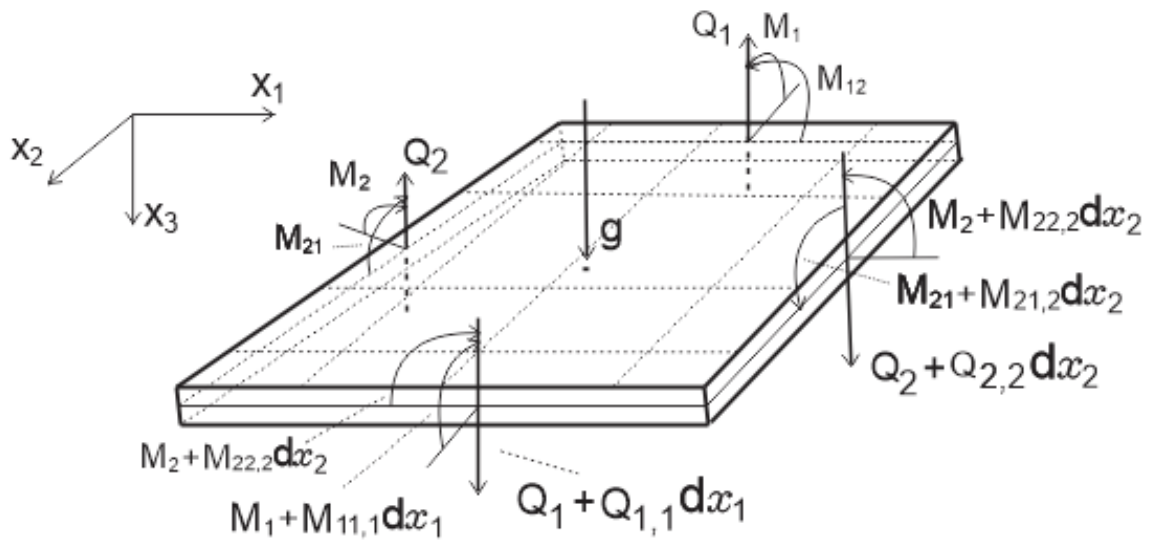


Figura 2.11: Momentos e forças cortantes atuando no plano médio.

Fonte: Autor.

Fazendo-se o equilíbrio em momentos, segundo os eixos x_1 e x_2 , obtém as relações de equilíbrio em momentos e forças cortantes:

$$M_{ij,i} - Q_i = 0; \quad i, j = 1,2 \quad (2.19)$$

Diferenciando-se (2.19) e substituindo em (2.18), resulta na equação de equilíbrio em momentos.

$$M_{ij,ij} = -g; \quad i, j = 1, 2 \quad (2.20)$$

A substituição dos momentos (2.17) em (2.20) resulta na equação de Lagrange:

$$w_{,iijj} = \frac{g}{D}; \quad i, j = 1, 2 \quad \text{ou} \quad \nabla^4 w = g/D \quad (2.21)$$

Onde ∇^4 é o operador bi-harmônico.

Da substituição de (2.17) em (2.19), obtém as forças cortantes expressas em termos dos deslocamentos:

$$Q_i = -Dw_{,ikk}; \quad i, k = 1, 2 \quad (2.22)$$

Convém notar que a equação de equilíbrio (2.21) requer a satisfação de quatro condições de contorno na placa de Kirchhoff. No entanto, o problema físico requer que seis condições sejam satisfeitas no contorno (uma força cortante, dois momentos, um deslocamento transversal e duas rotações). Kirchhoff resolveu esse problema definindo um novo esforço, chamado de força cortante equivalente de Kirchhoff, dado por

$$V_i = Q_i + m_{ij,j}; \quad i, j = 1, 2 \quad (2.23)$$

Com isso, as condições de contorno ficam reduzidas a apenas quatro (uma força cortante equivalente, um momento, um deslocamento transversal e uma rotação).

Os esforços podem ser transformados do sistema (x_1, x_2) para outro sistema definido em $(n; s)$ conforme indicado na Figura (2.12).

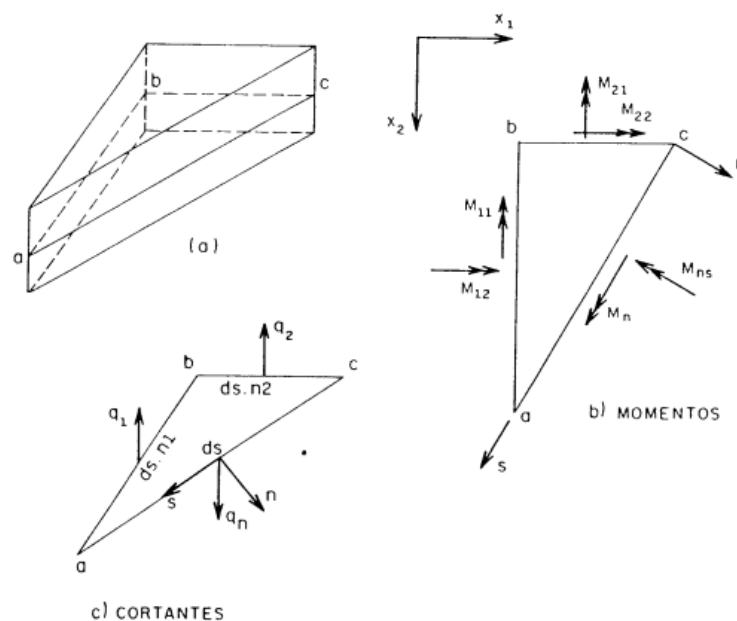


Figura 2.12: Transformação de sistema. Fonte: Paiva (1987).

Assim, a partir de relações trigonométricas entre esses sistemas, as seguintes transformações podem ser escritas em função de Q_1 e Q_2 :

$$Q_n = Q_1 \cos \phi + Q_2 \sin \phi \quad (2.24)$$

Ou

$$Q_n = Q_i n_i \quad (2.25)$$

Onde $\cos \phi = n_1$ e $\sin \phi = n_2$.

Já os momentos fletores e volventes nas direções n e s são dados por:

$$M_{nn} = M_{11}n_1^2 + 2M_{12}n_2n_1 + M_{22}n_2^2 \quad \text{e} \quad (2.26)$$

$$M_{ns} = (M_{22} - M_{11})n_2n_1 + M_{12}(n_1^2 - n_2^2)$$

De forma compacta, tem-se:

$$M_{nn} = n_i M_{ij} n_j \quad \text{e} \quad M_{ns} = n_i M_{ij} s_j \quad (2.27)$$

A cortante equivalente de Kirchhoff no contorno em relação ao sistema de coordenadas (n,s) , fica:

$$V_n = Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \quad (2.28)$$

Se uma placa circular estiver submetida a um carregamento axissimétrico, ela pode ser escrita utilizando um sistema polar de coordenada radial. Assim, algumas relações de interesse em deslocamento transversais w e esforços de placa de Kirchhoff, segundo Chueiri (1994), que podem ser escritas como:

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{dw}{dr} \frac{dr}{dn} \quad (2.29)$$

Onde:

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{\partial r}{\partial x_i(p)} \frac{\partial x_i(p)}{\partial m} \quad (2.30)$$

Sendo $m_i = \frac{\partial x_i(p)}{\partial m}$ os cossenos diretores de $\vec{m}$ em relação ao sistema de coordenadas (x_1, x_2) . Portanto, tem-se:

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{\partial r}{\partial x_i(p)} m_i \quad (2.31)$$

As derivadas de $r = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2}$ em relação à direção x_i , no ponto q ,

são dadas por:

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial x_i(q)} = \frac{x_i(q) - x_i(p)}{r} = -r_{,i} \\ \frac{\partial r}{\partial x_j(q)} = -\frac{\delta_{ij} - r_{,i} \cdot r_{,j}}{r} = -r_{,ij} \end{cases} \quad (2.32)$$

$$M_n = -D \left\{ \frac{d^2 w}{dr^2} [v + (1-v)(r_{,i} n_i)^2] + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} [v + (1-v)(r_{,j} s_j)^2] \right\} \quad (2.33)$$

$$M_{ns} = -D(1-v)(r_{,i} n_i)(r_{,j} s_j) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_n}{\partial m} = & -D \left\{ \frac{d^3 w}{dr^3} [v + (1-v)(r_{,j} s_j)^2] + \frac{d^2 w}{dr^2} \left[2 \frac{(1-v)}{r} (m_i n_i \cdot (r_{,j} n_j) - \right. \right. \\ & \left. \left. - (r_{,j} s_j)^2 \cdot r_{,i} m_i) \right] - D \left\{ \frac{r_{,i} m_i}{r^2} \frac{dw}{dr} [v + (1-v)(r_{,j} s_j)^2] + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} [v + \right. \right. \\ & \left. \left. + (1-v)(r_{,j} s_j)^2] + \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} [2(1-v)(m_i s_i \cdot (r_{,j} s_j) - (r_{,j} s_j)^2 \cdot r_{,i} m_i)] \right\} \right\} \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{ns}}{\partial m} = & D(1-v) \left\{ \frac{1}{r} (m_i n_i \cdot (r_{,j} s_j) + m_i s_i \cdot (r_{,j} n_j) - 2r_{,i} n_i \cdot r_{,j} s_j \cdot r_{,\ell} m_\ell) \times \right. \\ & \left. \times \left(\frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) + r_{,i} n_i \cdot r_{,j} s_j \left(\frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$Q_n = -D(r_{,i} n_i) \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = & D(1-v)(r_{,i} n_i) \left\{ (r_{,j} s_j)^2 \left(-\frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{[4(-r_{,j} s_j)^2 - 1]}{r} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \right\} + \\ & + D \frac{(1-v)}{r} [1 - 2(r_{,j} s_j)^2] \left(\frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned}
V_n = & -D(1-\nu)r_{,i}n_i \left[\left[(r_{,j}s_j)^2 + \frac{1}{1-\nu} \right] \left(\frac{d^3w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) + \right. \\
& + \frac{[1 - 4(r_{,j}s_j)^2]}{r} \left(\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) + \\
& \left. + \frac{D(1-\nu)}{R} [1 - 2(r_{,j}s_j)^2] \left(\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \right]
\end{aligned} \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_n}{\partial m} = & -D \frac{(1-\nu)}{r} (m_j n_i - r_{,i} n_i r_{,j} m_j) \left\{ \left[(r_{,j}s_j)^2 + \frac{1}{1-\nu} \right] \times \right. \\
& \times \left(\frac{d^3w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) + \frac{[1 - 4(r_{,j}s_j)^2]}{r} \left(\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \Big\} - \\
& -D(1-\nu)r_{,i}n_i \left\{ \frac{2}{r} [m_i s_i \cdot (r_{,j}s_j) - (r_{,j}s_j)^2 \cdot r_{,i}m_i] \times \right. \\
& \times \left(\frac{d^3w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) + \left[(r_{,j}s_j)^2 + \frac{1}{1-\nu} \right] \times \\
& \times \left(\frac{d^4w}{dr^4} + \frac{1}{r} \frac{d^3w}{dr^3} - \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} \right) \Big\} - D(1-\nu)r_{,i}n_i \times \\
& \times \left\{ \frac{1}{r^2} [r_{,i}m_i - 8r_{,j}s_j \cdot m_i s_i + 4(r_{,j}s_j)^2 \cdot r_{,i}m_i] \left(\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) + \right. \\
& + \frac{[1 - 4(r_{,j}s_j)^2]}{r} \left(\frac{d^3w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \Big\} + D \frac{(1-\nu)}{R} \times \\
& \times \left\{ \frac{-4}{r} \left(m_i s_i \cdot (r_{,j}s_j) - (r_{,j}s_j)^2 \cdot r_{,i}m_i \right) \left(\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) + \right. \\
& + \left. [1 - 4(r_{,j}s_j)^2] \left(\frac{d^3w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \Big\}
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Onde R é o raio de curvatura do contorno da placa.

Além das relações de placas com domínios finitos (problemas reais), é de interesse para desenvolvimento do método dos elementos de contorno que relações associadas a problemas de placas de domínio infinito (problemas virtuais) sejam estabelecidas.

Esses problemas são denominados de problemas fundamentais, cuja caracterização é dada por:

a) Placa de raio infinito na qual é aplicada uma fonte $\delta(p,q)$ no ponto fonte "p" com leitura de seus efeitos no ponto campo "q". Além disso, $\delta(p,q)$ é o delta de Dirac, cujas propriedades podem ser encontradas no Apêndice.

b) O problema contém todas as propriedades mecânicas do problema real.

A partir dessas hipóteses, tem-se que as equações de equilíbrio do problema fundamental de placas delgadas isoladas são análogas àsquelas do problema real (2.21), de forma que sua equação governante pode ser escrita como:

$$D\nabla^4 w^*(p, q) = \delta(p, q) \quad (2.41)$$

A solução da equação governante do problema fundamental (2.41) é denominada de solução fundamental, que, segundo Bazine (1978), pode ser escrita como:

$$w^*(p, q) = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln(r) \quad (2.42)$$

Onde $r = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2}$, sendo (x_p, y_p) e (x_q, y_q) as coordenadas dos ponto-fonte p e ponto-campo q.

Por outro lado, Stern (1979) apresenta uma forma alternativa a (2.42):

$$w^*(p, q) = \frac{1}{8\pi D} r^2 \left[\ln(r) - \frac{1}{2} \right] \quad (2.43)$$

Substituindo-se de forma conveniente (2.43) em (2.29), obtêm-se as relações encontradas em muitos trabalhos, por exemplo, Paiva (1987), Karam (1986), Chueiri (1994):

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{r_{,i} n_i}{4\pi D} r \ln(r) \quad (2.44)$$

Por outro lado, as derivadas direcionais mostradas na direção $\vec{m}$ de (2.31) ficam:

$$\frac{\partial w}{\partial m} = - \frac{dw}{dr} \frac{dr}{dm} \quad (2.45)$$

Já a derivada de (2.45) resulta em:

$$\frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right) = - (m_i n_i - r_{,i} m_i r_{,j} n_j) \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} - r_{,i} m_i r_{,j} n_j \frac{d^2 w}{dr^2} \quad (2.46)$$

Substituindo-se (2.43) em (2.33) a (2.40), têm-se as formas explícitas das derivadas das soluções fundamentais podendo ser expressas de acordo com Paiva (1987), Chueiri (1994) como:

$$\frac{\partial W^*}{\partial n} = \frac{r_{,i} n_i}{4\pi D} r \ln(r) \quad (2.47)$$

$$M_n^* = -\frac{1}{4\pi D} [(1 + \nu)\ln(r) + (1 - \nu)(r_{,i} n_i)^2 + \nu] \quad (2.48)$$

$$M_{ns}^* = -\frac{1}{4\pi} (1 - \nu)(r_{,i} n_i)(r_{,j} s_j) \quad (2.49)$$

$$V_n^* = \frac{r_{,i} n_i}{4\pi R} \left[2(1 - \nu)(r_{,j} s_j)^2 - 3 + \nu \right] + \frac{1 - \nu}{4\pi R} [1 - 2(r_{,i} s_i)^2] \quad (2.50)$$

Onde $r = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2}$ é a distância entre os pontos p e q .

Além disso, há interesse de se determinar as derivadas dos esforços fundamentais (2.48) a (2.50) na direção do vetor $\vec{m}$, que podem ser escritas como:

$$\frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{\partial W^*}{\partial n} \right) = -\frac{1}{4\pi D} [(r_{,i} m_i)(r_{,j} n_j) + (m_i n_i)\ln(r)] \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial M_n^*}{\partial m} = \frac{1}{4\pi R} \{ (1 + \nu)(r_{,i} m_i) + 2(1 - \nu)(r_{,i} n_i)[(m_j n_j) - (r_{,j} m_j)(r_{,k} n_k)] \} \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial M_{ns}^*}{\partial m} = \frac{1 - \nu}{4\pi R} \{ (m_i n_i)(r_{,j} s_j) + (m_i s_i)(r_{,j} n_j) - 2(r_{,i} m_i)(r_{,j} n_j)(r_{,k} n_k) \} \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_n^*}{\partial m} = & \frac{1}{4\pi R^2} \{ 2(1 - \nu)(r_{,i} s_i)[4(r_{,j} s_j)(r_{,k} m_k)(r_{,\ell} n_\ell) - 2(m_j s_j)(r_{,k} n_k) - \\ & - (m_j n_j)(r_{,k} s_k)] + (3 - \nu)[(m_i n_i) - 2(r_{,i} m_i)(r_{,j} n_j)] \} + \\ & + \frac{1 - \nu}{\pi R r} (r_{,i} s_i)[(m_j s_j) - (r_{,j} m_j)(r_{,k} s_k)] \end{aligned} \quad (2.54)$$

A interpretação geométrica dos termos $(m_i n_i)$, $(r_{,j} s_j)$, $(r_{,i} m_i)$, $(r_{,k} n_k)$ e R é mostrada na Figura 2-13.

$$p = kw \quad (2.55)$$

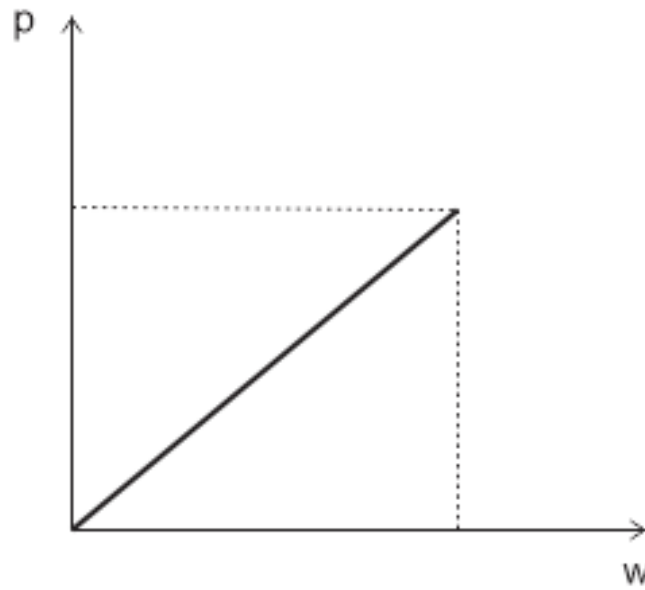


Figura 2.15 Proporcionalidade da força p com o deslocamento w na base elástica de Winkler. Fonte: Autor

De forma análoga à equação (2.19), o equilíbrio vertical de força da placa na base elástica de Winkler, conforme indicado na Figura 2.16, fica:

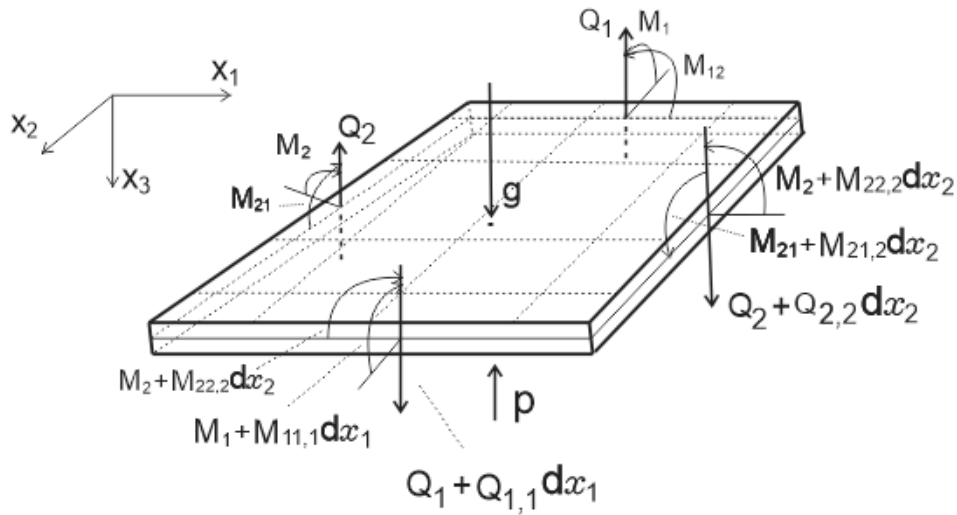


Figura 2.16 Forças e momentos atuando na base elástica. Fonte: Autor.

$$Q_{i,i} = -g + p \quad (2.56)$$

Onde p é dado por (2.55).

Já a equação de equilíbrio em momentos pode ser obtida analogamente a (2.20), resultando em:

$$M_{ij,ji} = -g + p; i, j = 1, 2 \quad (2.57)$$

Substituindo-se (2.17) e (2.55) na equação (2.57), fica:

$$w_{,iijj} + \frac{k}{D} w = \frac{g}{D}; \quad i = 1, 2 \quad (2.58)$$

As forças cortantes Q_i e a força equivalentes de Kirchhoff V_i podem ser escritas analogamente ao caso da placa livre de base elástica, dadas em (2.22) e (2.23).

O problema fundamental da placa delgada sobre fundação de Winkler é caracterizado por um domínio Ω^* associado a uma placa circular de raio infinito submetida a uma fonte pontual e com as mesmas propriedades mecânicas do problema real. Desta forma, a equação governante do problema fundamental é análoga a sua correspondente no problema real (2.58), resultando em:

$$w_{,iijj}^* + \frac{k}{D} w^* = \frac{\delta}{D}; \quad i = 1, 2 \quad (2.60)$$

Um dos primeiros a estudar a solução fundamental da equação (2.60) foi Wyman (1950) em problemas de placas circulares infinitas flutuando em uma camada de líquido de densidade ρ submetida a uma carga concentrada P no seu centro. Convém notar que o empuxo devido ao volume de líquido deslocado pela imersão da placa é $\rho g w$, conforme mostrado na Figura 2.17.

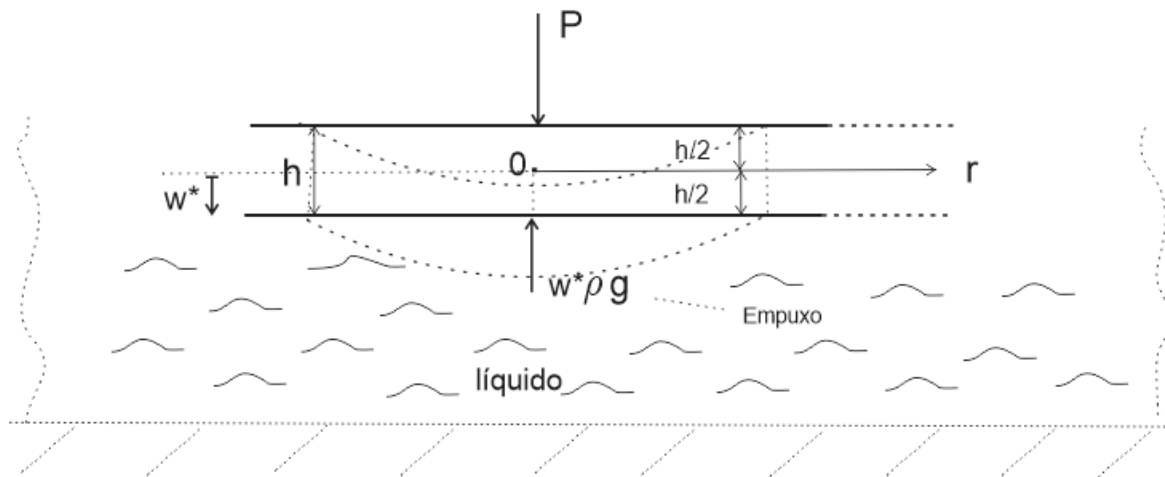


Figura 2.17.a Analogia entre a placa flexível sobre o líquido. Fonte: Autor

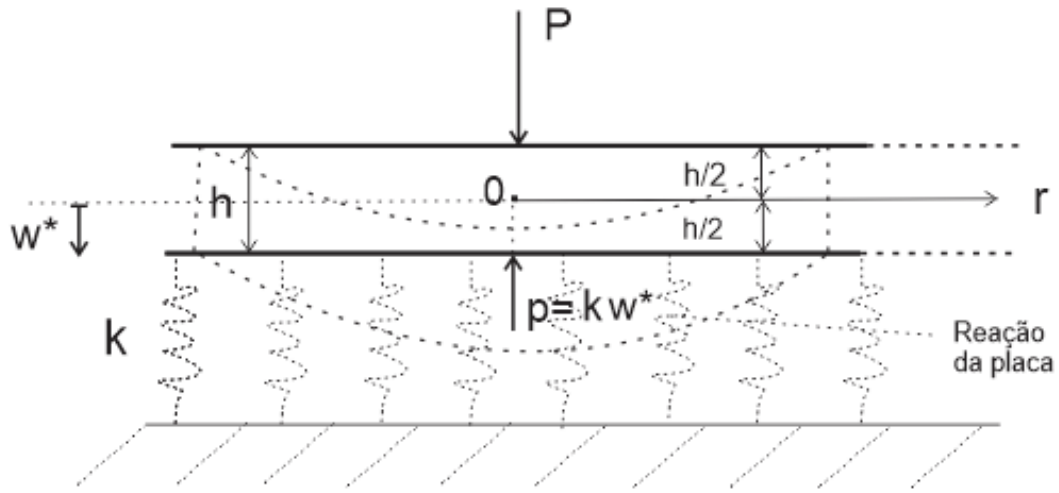


Figura 2.17.b Analogia entre a placa flexível sobre sobre molas. Fonte: Autor

A solução fundamental em deslocamento de Wyman (1950) é dada por

$$w^* = -\frac{P}{2\pi D \rho g} Kei(r/l), P = 1, r = xl \text{ onde } l = (D/\rho g)^{1/4}. \quad (2.61)$$

Onde kei é a parte imaginária das funções de kelvin de primeira espécie e ordem zero.

Por outro lado, Brebbia e Costa (1985) apresenta a seguinte solução:

$$w^* = -\frac{1}{2\pi D \lambda^2} Kei(\rho), \quad \text{onde } \rho = \lambda r \text{ e } \lambda = \sqrt{k/D} \quad (2.62)$$

Se for feita analogia entre a placa flutuando em um líquido e a placa em fundação elástica tem-se que as forças reativas em ambos os casos podem ser dadas por $p_1 = \rho g w^* = k w^*$. Assim, conclui-se que a solução (2.61) dada por Wyman (1950) é análoga àquela dada em (2.62) por Brebbia e Costa (1985).

Outras soluções fundamentais de interesse para o desenvolvimento de soluções do MEC em placas delgadas apoiadas em fundações de Winkler foram discutidas em Brebbia e Costa (1985):

$$w_n^* = -\frac{1}{2\pi D \lambda} Kei'(\rho) \cos(\bar{n}, \bar{r}) \quad (2.63)$$

$$M_n^* = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \left((1 - \nu) \frac{2}{\rho} Kei'(\rho) - Ker(\rho) \right) \times \right. \quad (2.64)$$

$$\left. \times (2 \cos(\bar{n}, \bar{r})^2 - 1) - (1 + \nu) Kei(\rho) \right]$$

$$M_{ns}^* = -\frac{(1-\nu)}{2\pi} \left[Kei(\rho) - \frac{2}{\rho} Kei'(\rho) \right] \cos(\bar{t}, \bar{r}) \times \cos(\bar{n}, \bar{r}) \quad (2.65)$$

$$V_n^* = -\frac{1}{2\pi} [(1-\nu)\{\cos(\bar{n}, \bar{r}) \cos(\bar{t}, \bar{r}) \cdot \psi +$$

$$+ \cos(\bar{n}, \bar{r}) \cdot \phi\} - \lambda Kei'(\rho) \cos(\bar{n}, \bar{r})]$$

Onde;

$$\begin{cases} \psi = \lambda Kei'(\rho) - \frac{4}{r} Ker(\rho) + \frac{8}{\rho r} Kei'(\rho) \\ \phi = \frac{1}{r} Ker(\rho) - \frac{2}{\rho r} Kei'(\rho) \end{cases} \quad (2.67)$$

$$\frac{\partial w_n^*}{\partial n} = \frac{1}{2\pi D} [Ker(\rho) \cos(\bar{n}, \bar{r}) \cos(\bar{n}_0, \bar{r}) Kei'(\rho) \times$$

$$\times \{\cos(\bar{n}, \bar{n}_0) - 2 \cos(\bar{n}_0, \bar{r}) \cos(\bar{n}, \bar{r}) / \rho\}] \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_n^*}{\partial n} = \frac{1}{4\pi} & \left[(1-\nu) \left(\frac{2}{\rho} Ker(\rho) - \frac{2}{\rho r} Kei'(\rho) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{2}{\rho r} Kei'(\rho) - \lambda Ker'(\rho) \right) \cos(\bar{n}_0, \bar{r}) (\cos(\bar{n}, \bar{r})^2 - 1) - \right. \\ & \left. - 4(1-\nu) \phi \cos(\bar{n}, \bar{r}) \cdot (\cos(\bar{n}_0, \bar{n}) - \cos(\bar{n}_0, \bar{r}) \times \right. \\ & \left. \times \cos(\bar{n}, \bar{r})) - (1+\nu) \lambda Ker'(\rho) \cos(\bar{n}_0, \bar{r}) \right] \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{ns}^*}{\partial n} = \frac{1}{2\pi} & \left[\cos(\bar{t}, \bar{r}) \cos(\bar{n}_0, \bar{r}) \cos(\bar{n}, \bar{r}) \left(\lambda Ker'(\rho) + \frac{8}{\rho r} Kei'(\rho) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{4}{r} Ker(\rho) \right) + (\cos(\bar{t}, \bar{r}) \cos(\bar{n}_0, \bar{n}) + \cos(\bar{n}_0, \bar{t}) \cos(\bar{n}, \bar{r})) \times \right. \\ & \left. \times \left(\frac{Ker(\rho)}{r} - \frac{2}{\rho r} kei'(\rho) \right) \right] \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_n^*}{\partial n} = \frac{1}{2\pi} & [(1-\nu)\{\cos(\bar{t}, \bar{r})^2 [3 \cos(\bar{n}_0, \bar{r}) \times \\ & \times \cos(\bar{n}, \bar{r}) - \cos(\bar{n}_0, \bar{n})] + 2 \cos(\bar{n}, \bar{r}) \cos(\bar{r}, \bar{r}) \times \\ & \times \cos(\bar{t}, \bar{n}_0)\} \frac{\psi}{r} + (1-\nu)\{\cos(\bar{n}_0, \bar{r}) \cos(\bar{n}, \bar{r}) \cos(\bar{t}, \bar{r}) \frac{\partial}{\partial r} (\psi)\} + \\ & + (1-\nu) \left\{ \left[\cos(\bar{n}, \bar{n}_0) - \cos(\bar{n}, \bar{r}) \cos(\bar{n}_0, \bar{r}) \right] \frac{\phi}{r} + \right. \\ & \left. + \cos(\bar{n}, \bar{r}) \cos(\bar{n}_0, \bar{r}) \frac{\partial \phi}{\partial r} \right\}] \end{aligned} \quad (2.71)$$

Para se ter uma uniformização de notação das expressões no texto deste trabalho, convém notar que $\cos(\bar{n}, \bar{r}) = r_i n_i$ e $\cos(\bar{t}, \bar{r}) = s_j n_j$. Além disso, Brebbia e Costa (1985) mostraram as expansões para pequenos argumentos das funções de Kelvin e suas derivadas:

$$\begin{cases} Kei(x) = -\left(\frac{x^2}{4}\right) \ln x - \frac{\pi}{4} + \frac{1.1159x^2}{4} + \dots \\ Kei'(x) = -\frac{x}{2} \ln x - \frac{x}{4} + 0.558x + \dots \\ Ker(x) = -\ln x + 0.1159 + \frac{x^2}{16} + \dots \end{cases} \quad (2.72)$$

Outras soluções fundamentais adicionais de interesse de placas delgadas sobre base de Winkler podem ser encontradas em Manzoli (1992).

2.3 PLACA SOBRE A BASE ELÁSTICA DE PASTERNAK

O modelo de Winkler não leva em consideração as interações entre as molas, o que implica que ele não transmite os efeitos para fora das regiões diretamente perturbadas. Uma das tentativas de reduzir esse problema da continuidade foi através do modelo de Pasternak, em que foi inserindo ao sistema de molas uma camada de cisalhamento de modo a viabilizar interações de cisalhamento entre molas vizinhas, conforme mostrado nas Figuras 2.18a e 2.18b.

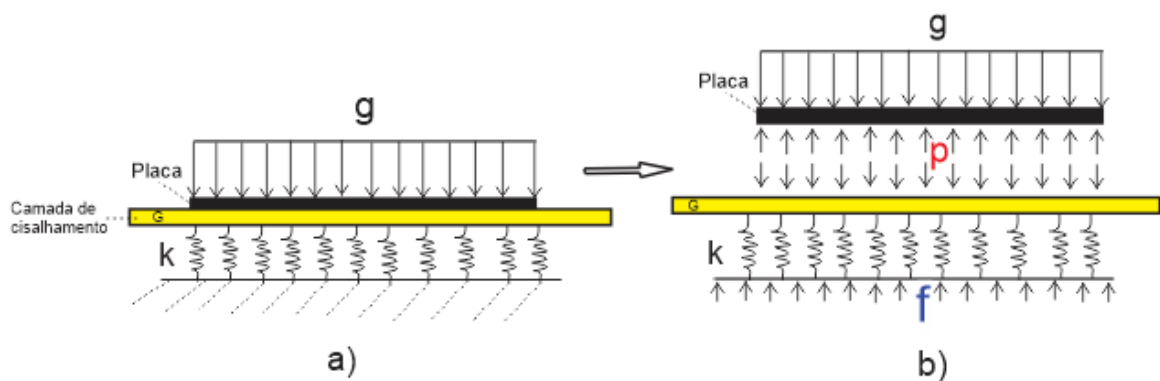


Figura 2.18: Força de interação atuando sobre a base elástica de Pasternak. a) Modelo de Pasternak, b) As Forças de interações p e f. Fonte: Autor

Desta forma, o modelo da base elástica de Pasternak leva em consideração dois parâmetros: constante de mola (k) e constante (G) da camada cisalhamento. Também é assumido que as tensões cisalhantes da camada de cisalhamento são proporcionais às distorções implicando que a força cortante na camada de cisalhamento T é proporcional a inclinação da elástica ($w_{,i}$).

As forças cortantes na camada de cisalhamento são dadas por:

$$\begin{cases} T_1 = \int \sigma_{13} dx_3 & (2.73. a) \\ T_2 = \int \sigma_{23} dx_3 & (2.73. b) \end{cases} \quad (2.73)$$

Onde as direções das forças cortantes na camada de cisalhamento são determinadas pela integração de σ_{13} e σ_{23} ao longo da espessura da camada, como mostrada na Figura 2.19.

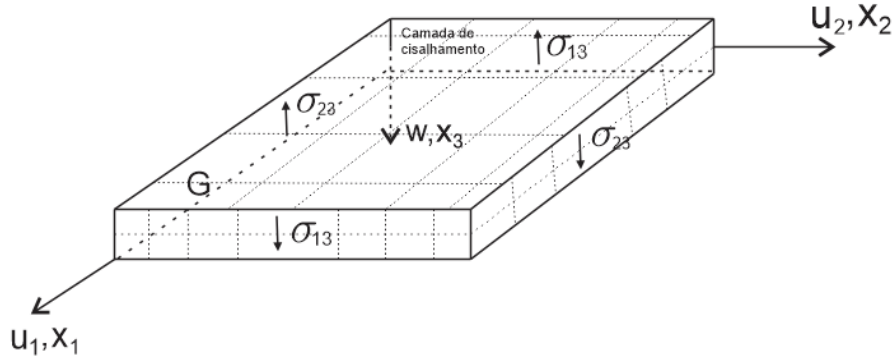


Figura 2.19 Tensões tangenciais transversas na camada de cisalhamento. Fonte: Autor

De acordo com a lei de Hooke, as tensões tangenciais transversas podem ser escritas como:

$$\begin{cases} \sigma_{13} = G^* \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) & (2.74. a) \\ \sigma_{23} = G^* \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) & (2.74. b) \end{cases} \quad (2.74)$$

Onde G^* é o módulo de elasticidade transversal da camada de cisalhamento, w é deslocamento transversal, e u e v são os deslocamento tangenciais ao plano camada de cisalhamento.

Como a camada de cisalhamento se estende infinitamente no plano xy , é assumido que:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \cong 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \cong 0 \end{cases} \quad (2.75)$$

Substituindo-se (2.74.a) em (2.73.a) e (2.74.b) em (2.73.b), as forças cortantes na camada de cisalhamento são reescritas como:

$$\begin{cases} T_1 = \int_{-t/2}^{t/2} G^* \frac{\partial w}{\partial x_1} dx_3 = G^* \frac{\partial w}{\partial x_1} t \\ T_2 = \int_{-t/2}^{t/2} G^* \frac{\partial w}{\partial x_2} dx_3 = G^* \frac{\partial w}{\partial x_2} t \end{cases} \quad (2.76.1) \quad (2.76.2) \quad (2.76)$$

Onde t é a espessura da camada de cisalhamento.

Então, as forças cortantes na camada podem ainda ser escritas como:

$$\begin{cases} T_1 = G \frac{\partial w}{\partial x_1} \\ T_2 = G \frac{\partial w}{\partial x_2} \end{cases} \quad \text{Ou, } T_i = G w_{,i} \quad (2.77)$$

Onde G é a constante definida como o segundo parâmetro do modelo de Pasternak e dado por $G=tG^*$. Convém notar que usualmente na literatura o parâmetro de cisalhamento do modelo de Pasternak é informado diretamente como o G não se fazendo o cálculo parcial tG^* .

Já o equilíbrio vertical de forças na camada de cisalhamento, conforme mostrado na Figura 2.20 fica:

$$-f + p = \frac{\partial T_2}{\partial x_2} + \frac{\partial T_1}{\partial x_1} = 0. \quad \text{ou} \quad p = f - T_{i,i} \quad (2.78)$$

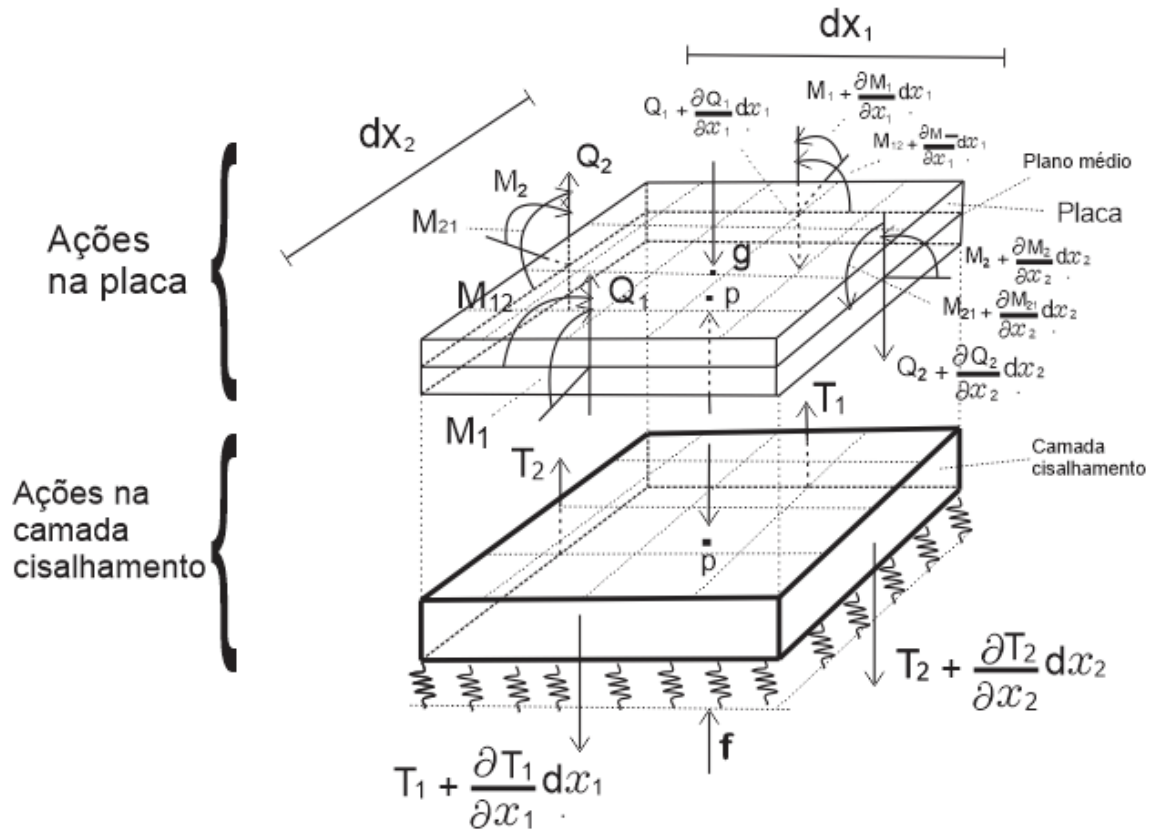


Figura 2.20 Forças de interação no modelo de Pasternak. Fonte: Autor

Além disso, tem-se que as forças na camada de cisalhamento (2.77) podem ser escritas em função das inclinações dos deslocamentos.

Derivando-se (2.77) e substituindo-a em (2.78) tem-se:

$$p = f - Gw_{i,i} \quad \text{ou,} \quad p = f - G\nabla^2 w \quad (2.79)$$

Mas f é admitida proporcional ao deslocamento w , resulta em:

$$p = kw - G\nabla^2 w. \quad (2.80)$$

Na Figura 2.20 são mostradas todas as ações que atua sobre a placa e a camada de cisalhamento no modelo de Pasternak, cujas resultantes em força e momentos, permitem escrever as seguintes equações de equilíbrio:

$$\begin{cases} Q_{i,i} + g - p = 0 \\ M_{ij,j} = -g + p; i, j = 1, 2 \end{cases} \quad (2.81)$$

Onde p é dado em (2.80).

De forma análoga ao modelo da placa delgada sobre fundação elástica de Winkler, obtem-se a equação governante do modelo real da placa sobre fundação elástica de Pasternak:

$$\nabla^4 w + \frac{k}{D} w - \frac{G}{D} \nabla^2 w = \frac{g}{D} \quad (2.82)$$

As forças cortantes equivalentes de Kirchhoff V_i em placas delgadas sobre base de Pasternak ficam:

$$V_i = Q_i + M_{ij,j} + Gw_{,i} \quad (2.83)$$

Já (2.83) no sistema (n.s) é escrita na forma:

$$V_n = Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} + G \frac{\partial w}{\partial n} \quad (2.84)$$

Conforme já descrito previamente no modelo de placa sobre fundação de Winkler, o problema fundamental de placa delgada sobre fundação de Pasternak é caracterizado por uma placa de raio infinito (problema virtual) na qual é aplicada uma fonte no ponto fonte "p" com leitura de seus efeitos no ponto campo "q" e que contém todas as propriedades do problema real. Assim, por analogia ao problema real da placa (2.82) obtém-se a equação governante fundamental para o problema de placas delgadas na fundação de Pasternak.

$$\nabla^4 w^*(p, q) + \frac{k}{D} w^*(p, q) - \frac{G}{D} \nabla^2 w^*(p, q) = \delta(p, q) \quad (2.85)$$

Se for considerado $G = 0$, obtém a força de interação para o modelo de Winkler dado em (2.55), mostrando que a força de interação sobre a base elástica de Winkler é um caso particular da base elástica de Pasternak.

A equação governante do problema em (2.85) pode ser reescrita na forma da equação governante do problema fundamental proposta por Balaš et al. (1982):

$$\nabla^2 \nabla^2 w^* - 2x \nabla^2 w^* + w^* = \frac{g}{k}, x = \frac{G}{2\sqrt{kD}} \geq 0. \quad (2.86)$$

Onde x é um parâmetro definido como:

$$x = \frac{G}{2\sqrt{kD}} \geq 0. \quad (2.87)$$

Na Figura (2.21) é mostrada a associação dos problemas real e fundamental para o modelo de Pasternak em relação as equações (2.82) e (2.85).

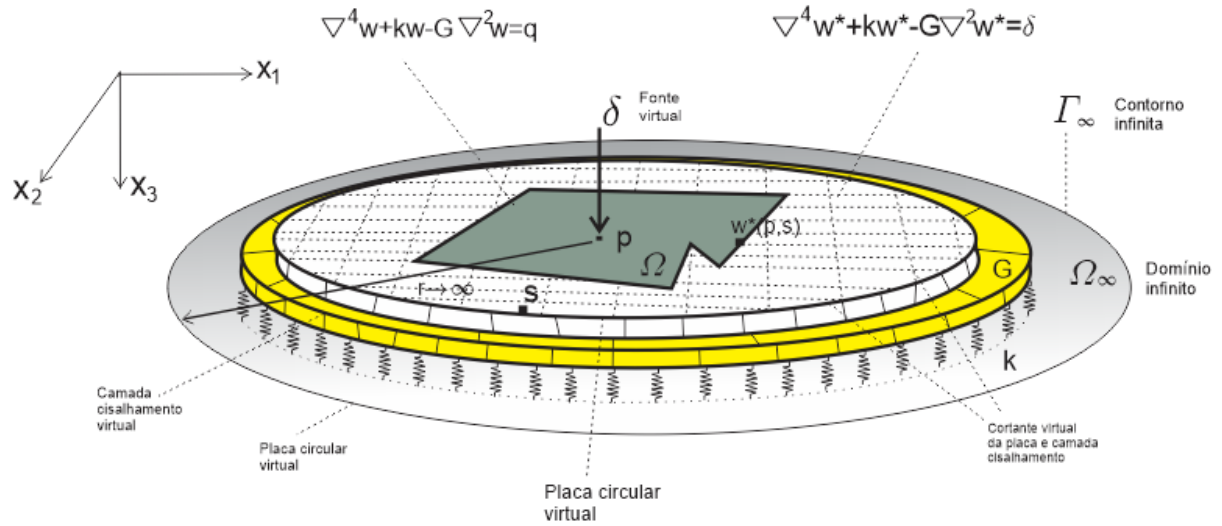


Figura 2.21: Placa sobre a base elástica de Pasternak. Fonte: Autor.

A equação (2.86), proposta por Balaš et al. (1982), pode ser escrita na forma

$$(\nabla^2 - a^2)(\nabla^2 - b^2)w^* = \frac{\delta}{k} \quad (2.88)$$

Onde

$$a^2 = x + (x^2 - 1)^{1/2} \text{ e } b^2 = x - (x^2 - 1)^{1/2} \quad (2.89)$$

Dependendo do intervalo de variação de x , Balaš et al. (1982) sugerem diferentes soluções fundamentais:

Quando $s > 1$, a solução fundamental da equação (2.88) é dada por:

$$G^*(p, q) = -\frac{1}{4\pi\sqrt{x^2 - 1}}[K_0(ar) - K_0(br)] \quad (2.90)$$

Onde K_0 é a função de Bessel modificada da segunda espécie e ordem zero.

No caso de $0 \leq s < 1$ um novo parâmetro ψ é introduzido por $x = \cos 2\eta$; $\eta \in (0; \frac{\pi}{4})$,

e os parâmetros a e b tornam complexos conjugados, $a = e^{i\eta} = \bar{b}$, onde $i = \sqrt{-1}$.

Então de (2.88), e usando a relação $\overline{K_\nu} = K_\nu(\bar{z})$ as função de Bessel modificadas de ordem ν , obtém-se:

$$G^*(p, q) = -\frac{1}{4\pi \sin(2\psi)} \text{Im} K_0(e^{i\eta} r). \quad (2.91)$$

Onde $\text{Im} K_0(z)$ denota a parte imaginária de $K_0(z)$. No caso de $x = 0$, que corresponde fisicamente a uma fundação de Winkler, $\eta = \pi/4$ então:

$$G^*(p, q) = -\frac{1}{2\pi} Kei(r). \quad (2.92)$$

Segundo Balaš et al. (1982), quando $s = 1$, a solução fundamental é dada por:

$$G^*(p, q) = \frac{1}{4\pi} r K_1(r). \quad (2.93)$$

Como será mostrado nos capítulos 3 e 4, além das soluções fundamentais primitivas para deslocamentos e esforços, outras soluções fundamentais requeridas pelo MEC exigem a derivação direcional das soluções primitivas, que podem ser escritas como:

$$\frac{\partial G^*(p, q)}{\partial \eta(p)} = \frac{1}{4\pi\sqrt{x^2 - 1}} \frac{1}{r} r_{,i} n_i(p) [a K_1(a r) - b K_1(b r)], \quad (2.94a)$$

para $x > 1$;

$$\frac{\partial G^*(p, q)}{\partial \eta(p)} = \frac{1}{2\pi \sin(2\eta)} \frac{1}{r} r_{,i} n_i(p) \text{Im}[e^{i\eta} K_1(e^{i\eta} r)] \quad (2.94b)$$

para $0 \leq x < 1$;

$$\frac{\partial G^*(p, q)}{\partial \eta(p)} = -\frac{1}{4\pi} r_{,i} n_i(p) K_0(r), \text{ para } x = 1 \quad (2.94c)$$

$$M_n^* = -\frac{D}{\ell^2} [(1 - \nu) w_{,ij} n_i n_j + \nu \nabla^2 w] \quad (2.95)$$

$$M_{ns}^* = -\frac{D}{\ell^2} (1 - \nu) w_{,ij} n_i s_j \quad (2.96)$$

$$V_n^* = -\frac{D}{\ell^3} n_i \nabla^2 w_{,i} - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{D}{L^2} (1 - \nu) w_{,ij} n_i t_j \right] \quad (2.97)$$

Onde $i, j = 1, 2$.

2.4 PLACAS SOBRE A BASE ELÁSTICA DE KERR

O modelo Pasternak é mais eficiente na continuidade em relação ao modelo de Winkler, no entanto, ele produz um aumento da força cortante no contorno da placa. Devido a este fato Kerr (1989) mostrou que colocando molas entre a camada de cisalhamento a placa retirava essa deficiência do problema da continuidade no modelo

de Pasternak. Na Figura 2.22b é mostrada o modelo de Kerr, que em relação ao de Pasternak possui uma força de interação “p” entre a camada de cisalhamento e a placa. Convém notar que o deslocamento transversal final recebem contribuições dos deslocamentos gerados pelo primeiro e segundo sistema, como é mostrada na Figura 2.22, resultando na seguinte superposição de efeitos:

$$w = w_1 + v. \quad (2.98)$$

Onde $w_1(x_1, x_2)$ é o deslocamento da placa devido ao encurtamento das molas superiores, e $v(x_1, x_2)$ é o deslocamento da camada de cisalhamento, vide a Figura 2.22a.

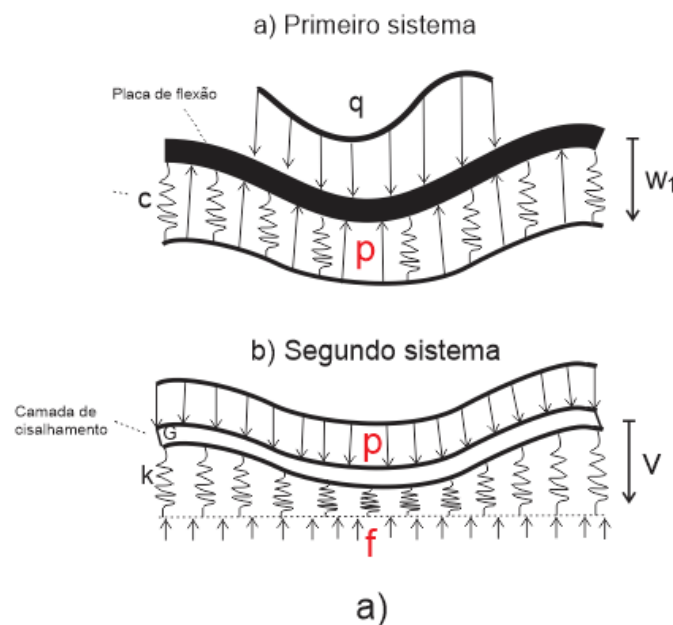


Figura 2.22.a Deslocamento e esforços no modelo de Kerr. a) Força de interação p e f ,
Fonte: Autor

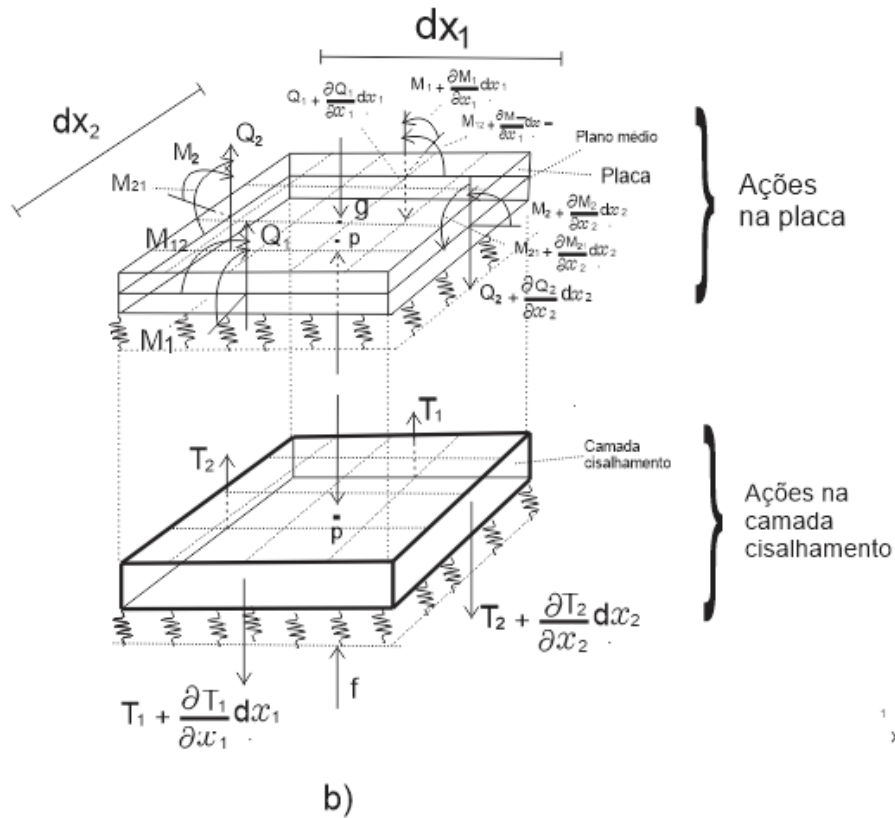


Figura 2.22.b Deslocamento e esforços no modelo de Kerr. b) Esforços sobre o modelo de Kerr. Fonte: Autor

No primeiro sistema, “p” é dada pela deformação da mola com rigidez “c” e associada ao deslocamento w_1 :

$$p = cw_1 \quad (2.99)$$

Ao se fazer o equilíbrio de forças do elemento diferencial da placa na direção x_3 indicado na Figura 2.22b, obtém-se:

$$g - p = -Q_{i,i}; \quad i = 1,2 \quad (2.100)$$

Fazendo-se o equilíbrio em momentos, segundo os eixos x_1 e x_2 , obtém as relações em momentos e forças cortantes:

$$M_{ij,i} - Q_i = 0; \quad i, j = 1,2 \quad (2.101)$$

Substituindo-se (2.101), (2.98), (2.99) em (2.100), obtém:

$$D\nabla^4 w + c(w - v) = g \quad (2.101a)$$

No segundo sistema, tem-se a contribuição do conjunto formado pela mola com rigidez k e pela camada de cisalhamento com parâmetro de rigidez G . Uma equação de equilíbrio pode ser determinado pelo balanço de forças na direção x_3 , conforme indicado na Figura 2.22b,

$$-f + p = \frac{\partial T_2}{\partial x_2} + \frac{\partial T_1}{\partial x_1} + g_2 = 0 \quad \text{ou} \quad p = f - T_{i,i} \quad (2.102)$$

Mas a força elástica da mola inferior é dada por:

$$f = kv \quad (2.103)$$

Ainda disso, a força cortante desenvolvida na camada de cisalhamento é dada por:

$$\begin{cases} T_1 = G \frac{\partial v}{\partial x_1} \\ T_2 = G \frac{\partial v}{\partial x_2} \end{cases} \quad \text{Ou, } T_i = G w_{,i} \quad (2.104)$$

Substituindo-se (2.99), (2.103) e (2.104) em (2.102), a equação de equilíbrio do segundo sistema fica:

$$-c(w - v) + kv - G\nabla^2 v = g_2 \quad (2.105)$$

Ou, na forma matricial, as equações (2.101a) e (2.105) podem ser reescrita como:

$$\begin{pmatrix} D\nabla^4 + c - \delta_1 & -c \\ -c & c + k - G\nabla^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ g_2 \end{pmatrix} \quad (2.106)$$

As expressões são referentes aos momentos M_{ij} , T_i cortante na camada de cisalhamento, $q_i = M_{ij,j}$ cortante na placa, e V_n cortante equivalente de Kirchhoff são dadas por:

$$\begin{aligned} M_{ij} &= -D(1 - \nu) \left[w_{,ij} + \frac{\nu}{1 - \nu} \delta_{ij} w_{,kk} \right] \\ q_i &= M_{ij,j} = -D(1 - \nu) \left[w_{,ijj} + \frac{\nu}{1 - \nu} w_{,ikk} \right] \end{aligned} \quad (2.107)$$

$$V_n = q_n + m_{ij,k} n_i s_j s_k$$

$$T_i = G v_{,i}$$

Conforme já discutido anteriormente, o problema fundamental consiste de uma placa virtual de domínio infinito submetida a fontes pontuais e com as mesmas propriedades mecânicas e geométricas de seção transversal do problema real. No problema de placas delgadas apoiadas em base elástica de Kerr duas situações independentes de aplicação das fontes são estudadas: No primeiro caso, a fonte está aplicada no domínio da placa apenas, vide Figura 2.23. Já no segundo, a fonte é aplicada na camada de cisalhamento conforme indicada na Figura 2.24.

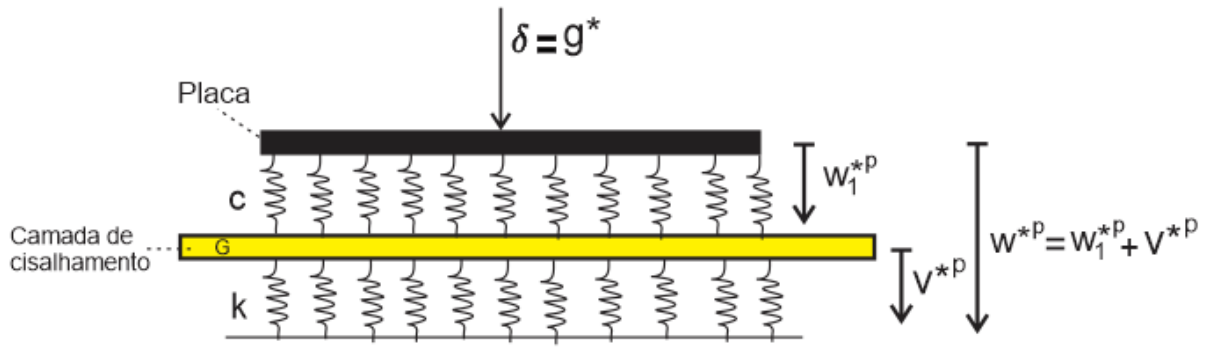


Figura 2.23: Fonte aplicada na placa. Fonte: Autor.

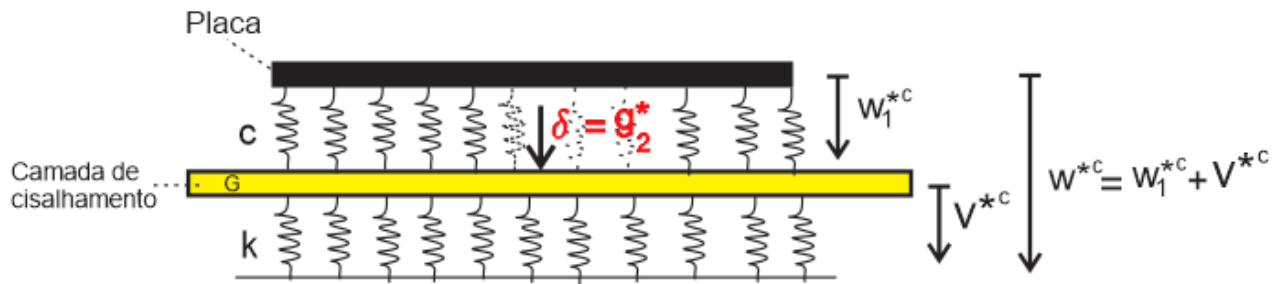


Figura 2.24: Fonte aplicada na camada de cisalhamento. Fonte: Autor.

Por analogia ao problema real, as equações de equilíbrio do problema fundamental, quando for ativada fonte na placa, são dada por:

$$\begin{cases} D\nabla^4 w^{*p}(p, q) + c[w^{*p}(p, q) - v^{*p}(p, q)] = \delta \\ -c[w^{*p}(p, q) - v^{*c}(p, q)] + kv^{*c}(p, q) + G\nabla^2 v^{*c}(p, q) = 0 \end{cases} \quad (2.109)$$

Por outro lado, se a fonte for aplicada na camada de cisalhamento as equações governantes do problema fundamental ficam:

$$\begin{cases} D\nabla^4 w^{*c}(p, q) + c[w^{*c}(p, q) - v^{*c}(p, q)] = 0 \\ -c[w^{*c}(p, q) - v^{*c}(p, q)] + kv^{*c}(p, q) + G\nabla^2 v^{*c}(p, q) = \delta \end{cases} \quad (2.110)$$

Se ambos os sistema (2.109) e (2.110) forem agrupados, a equação governante do sistema, que é acoplado, pode ser escrita matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} D\nabla^4 + c & -c \\ -c & c + k + G\nabla^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^{*p} \\ v^{*p} \end{bmatrix} = \delta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Ou} \quad [B][G^*] = \delta[I] \quad (2.111)$$

Onde ,

$$[B] = \begin{bmatrix} D\nabla^4 + c & -c \\ -c & c + k + G\nabla^2 \end{bmatrix}, [G^*] = \begin{bmatrix} w^{*p} & w^{*c} \\ v^{*p} & v^{*c} \end{bmatrix} \text{ e } [I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

As equações do problema fundamental da placa sobre a base de Kerr, constitui-se em um sistema acoplado, que exige manipulações matemáticas mais árduas para sua solução. Alternativamente, neste trabalho, utiliza-se o método de Hörmander (1963) para fazer seu desacoplamento, viabilizando o uso de recursos mais simplificados para solução das equações diferenciais.

Hörmander (1963) propõe uma função escalar ψ tal que:

$$[G^*] = [B^{co}]^T \psi \quad (2.112)$$

Onde $[B^{co}]^T$ é a a matriz dos cofatores de B.

Então, Substituindo (2.111) em (2.112), obtém:

$$[B] [B^{co}]^T \psi = \delta [I] \quad (2.113)$$

Além disso, por definição, uma matriz inversa pode ser dada por:

$$B^{-1} = \frac{[B^{co}]^T}{\det(B)}, \text{ implicando } B^{-1} \det(B) = [B^{co}]^T \quad (2.114)$$

Então, substituindo (2.114) em (2.113), tem-se:

$$[B] [B^{-1}] \det(B) \psi = \delta [I] \quad (2.115)$$

De onde obtém:

$$\det(B) \psi = \delta. \quad (2.115a)$$

Com isso, o desacoplamento da equação governante de Kerr, dada em (2.111) fica:

$$\det[B] \psi = \delta \text{ ou } (ck - Gc\nabla^2 + (c + k)D\nabla^4 - GD\nabla^6)\psi = \delta \quad (2.116)$$

A equação característica de (2.116) fica:

$$(ck - Gc\nabla^2 + (c + k)D\nabla^4 - GD\nabla^6)\psi = 0 \quad (2.117)$$

Fazendo a mudança de variável $\nabla^2 \psi = z$, então a equação (2.117) pode ser escrita na seguinte forma:

$$a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0 \quad (2.118)$$

$$\text{Onde: } \begin{cases} a_3 = 1 \\ a_2 = -\frac{(c+k)}{G} \\ a_1 = \frac{c}{D} \\ a_0 = -\frac{ck}{GD} \end{cases}$$

Para resolver a equação (2.118) será usado o método de solução de equações polinomiais cúbicas de Cardano-Tartaglia desenvolvido no século XVI por algebristas italianos (Scipione Del Ferro, Tartaglia e Cardano). De acordo com método deles a equação (2.118) pode ser reescrita na forma:

$$\begin{cases} z_1 = S + T - \frac{1}{3}a_2 \\ z_2 = -\frac{1}{2}(S + T) - \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{2}\sqrt{3}(S - T)i \\ z_3 = -\frac{1}{2}(S + T) - \frac{1}{3}a_2 - \frac{1}{2}\sqrt{3}(S - T)i \end{cases} \quad (2.119)$$

Onde;

$$\begin{cases} R = \frac{9a_1a_2 - 27a_0 - 2a_2^3}{54} \\ Q = \frac{3a_1 - a_2^2}{9} \\ S = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}} \\ T = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}} \end{cases} \quad (2.120)$$

Dependendo do valor do discriminante $\Delta = Q^3 + R^2$, as soluções da equação (2.118) podem implicar nas seguintes situações:

$$\begin{cases} \text{Se } \Delta > 0, \text{ a equação terá uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas;} \\ \text{Se } \Delta = 0, \text{ a equação terá três raízes reais, sendo duas iguais;} \\ \text{Se } \Delta < 0, \text{ a equação terá três raízes reais distintas.} \end{cases} \quad (2.121)$$

Para se fazer um estudo das raízes, a equação (2.118) foi reescrita da seguinte forma:

$$\frac{kf^2}{\mu} - \frac{kf^2}{\mu} \frac{\lambda}{\mu} z + \left(\frac{kf}{\mu} + kf \right) D \cdot z^2 - \frac{\lambda}{\mu} kf \cdot D \cdot z^3 = 0 \quad (2.122)$$

Fazendo a seguinte mudança de variável,
$$\begin{cases} \lambda = \frac{Gf}{cf} \\ \mu = \frac{kf}{cf} \\ Gf = \frac{\lambda}{\mu} Gf \end{cases},$$

O discriminante $\Delta = Q^3 + R^2$ pode reescrito na forma $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$,

onde $R = \frac{q}{2}$ e $Q = \frac{p}{3}$,

$$\text{com } \begin{cases} p = \frac{kf}{D\mu} - \frac{(\mu+1)^2}{\lambda^2} \\ q = -\frac{2}{27} \frac{(\mu+1)^3}{\lambda^3} + \frac{kf \cdot (\mu+1)}{3D\mu\lambda} - \frac{kf}{D\lambda} \end{cases}$$

Desta forma, o discriminante da equação (2.122) é dado por:

$$\Delta(kf) = \frac{1}{4} \left[-\frac{2}{27} \frac{(\mu+1)^3}{\lambda^3} + \frac{kf \cdot (\mu+1)}{3D\mu\lambda} - \frac{kf}{D\lambda} \right]^2 + \frac{1}{27} \left[\frac{kf}{D\mu} - \frac{(\mu+1)^2}{\lambda^2} \right]^3 \quad (2.123)$$

Ou de forma fatorada, a equação (2.123) pode ser escrita em termos de duas funções:

$$\Delta(kf) = f_1(kf) \cdot f_2(kf) \quad (2.124)$$

Onde,

$$\begin{cases} f_1(kf) = kf \\ f_2(kf) = kf^2 + \left[\frac{D\mu(20\mu - 8\mu^2 + 1)}{4\lambda^2} \right] kf + \frac{D^2\mu^3(\mu+1)^3}{\lambda^4} \end{cases} \quad (2.125)$$

Da expressão do discriminante obtida em (2.123) será estudada a natureza de suas raízes de acordo com os casos em (2.121). Assim, se $f_1(kf) = 0$, obtém:

$$\Delta(kf) = 0$$

Se $kf=0$, implica na eliminação do conjunto de molas inferior do modelo de fundação elástica de Kerr. Portanto não aplicável aos casos aqui estudados.

Se $kf \neq 0$, implica em $kf>0$ ou $kf<0$.

Para $kf<0$ implica em molas com comportamento físico anômalo, por que isso levaria a um alongamento da mola submetida a uma força de compressão.

Finalmente, a base elástica do modelo de Kerr fica com valores $kf>0$. Assim, se for atribuído $\Delta = 0$ na equação (2.119), obtem-se:

$$kf^2 + \left[\frac{D\mu(20\mu - 8\mu^2 + 1)}{4\lambda^2} \right] kf + \frac{D^2\mu^3(\mu + 1)^3}{\lambda^4} = 0 \quad (2.126)$$

Usando a equação de Bhaskara em (2.126), obtém as seguintes raízes:

$$\begin{cases} kf_1 = \frac{D\mu(20\mu - 8\mu^2 + 1)}{8\lambda^2} + \frac{D\mu(8\mu + 1)}{8\lambda^2} \sqrt{1 - 8\mu} \\ kf_2 = \frac{D\mu(20\mu - 8\mu^2 + 1)}{8\lambda^2} - \frac{D\mu(8\mu + 1)}{8\lambda^2} \sqrt{1 - 8\mu} \end{cases} \quad (2.127)$$

Se $8\mu - 1 \leq 0$, tem-se um conjunto valores de raízes de (2.127) positivas, o que viabiliza $\Delta = 0$ e valores de kf fisicamente consistentes. Assim, as raízes da equação característica (2.118) para obedecerem às condições (2.121) devem satisfazer as seguintes condições:

Caso 1) Para se obter uma raiz real positiva e duas raízes complexas conjugadas, tem-se as condições: $k < kf_2$ ou $k > kf_1$, com $\mu < 1/8$, $\mu \geq 1/8$.

Caso 2) Para se obter três raízes reais positivas, sendo duas raízes iguais tem-se as condições: $k = kf_2$ ou $k = kf_1$, com $\mu < 1/8$.

Caso 3) Para se obter três raízes reais positivas distintas tem-se as condições: $kf_2 < k < kf_1$, com $\mu < 1/8$.

Nas Figuras 2.25 e 2.26 são mostradas o comportamento das raízes kf_2 e kf_1 para cada caso:

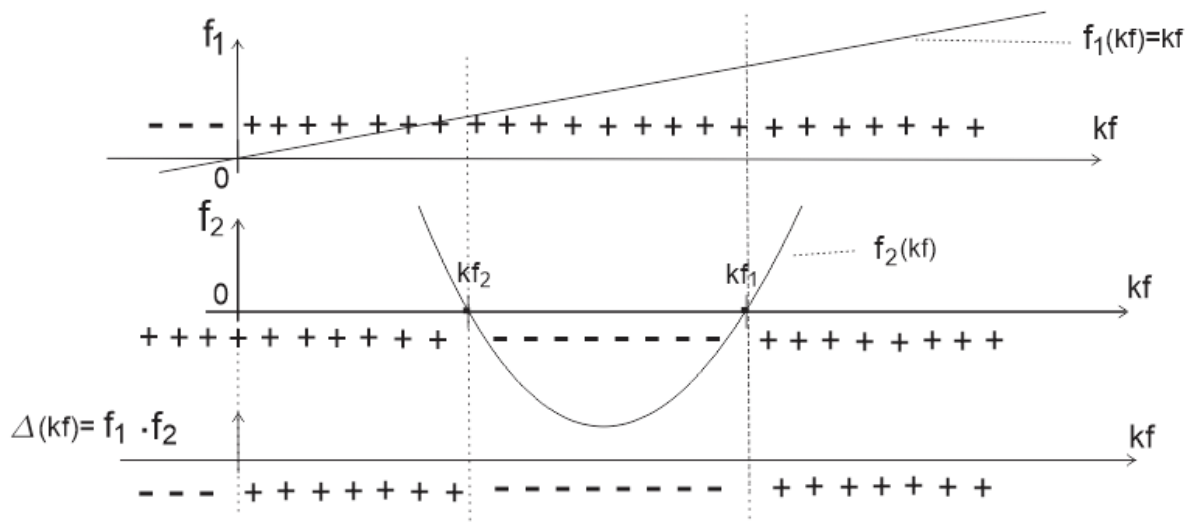


Figura 2.25 Estudos dos sinais das funções: a) $f_1(kf)$; $f_2(kf)$; $\Delta(kf)$. Fonte: Autor

Na figura 2.26 é mostrada que kf_2 e kf_1 são raízes da equação (2.123), assim pelo caso 1 obtém as seguintes raízes para equação (2.118).

$$\begin{cases} z_1 = 2\sqrt[3]{R} - \frac{1}{3}a_2 \\ z_2 = -\sqrt[3]{R} - \frac{1}{3}a_2 \\ z_3 = -\sqrt[3]{R} - \frac{1}{3}a_2 \end{cases} \quad (2.128)$$

Onde $R = \frac{9a_1a_2 - 27a_0 - 2a_2^3}{54}$.

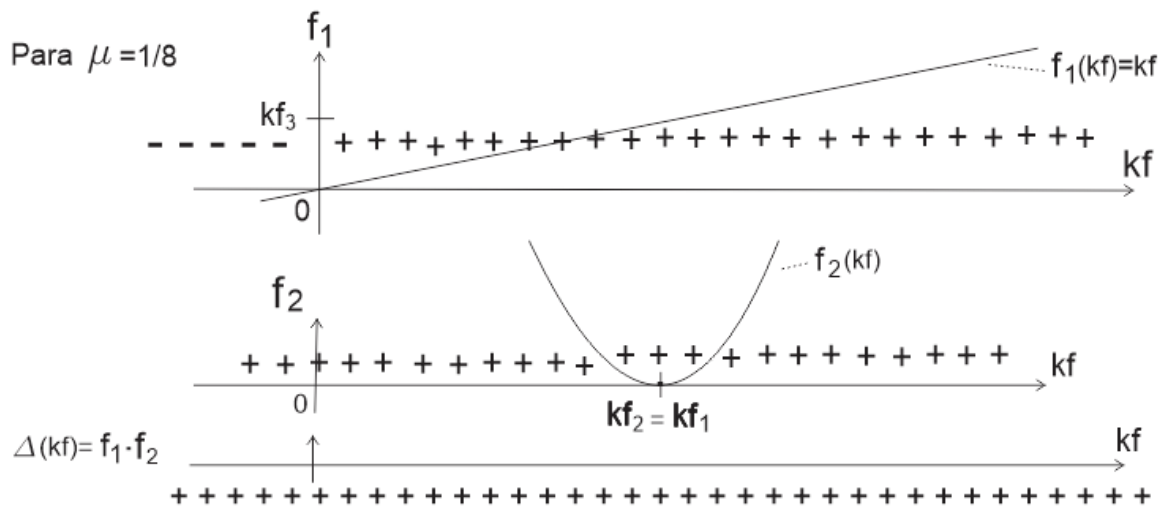


Figura 2.26 Estudos dos sinais das raízes para o caso onde as três raízes z_1, z_2 e z_3 são reais positivas e distintas. Fonte: Autor

Por outro lado, se $8\mu - 1 > 0$ implica em $\Delta > 0$, que produz uma raiz real z_1 e duas raízes complexas conjugadas z_2 e z_3 na equação característica (2.119).

A equação (2.116) pode ser escrita na forma (2.118) com a seguinte mudança de variável $\nabla^2 = z$, de onde se obtém um polinômio de terceiro grau, logo existem três raízes como soluções z_1, z_2 e z_3 , desta forma a equações (2.118) pode ser escrita na de forma fatorada:

$$(\nabla^2 - z_1) \underbrace{(\nabla^2 - z_2)(\nabla^2 - z_3)}_B \psi = -\frac{\delta}{GD} \quad (2.129)$$

De onde (2.129) é reescrita com seguinte mudança,

$$\begin{cases} (\nabla^2 - z_2)(\nabla^2 - z_3)\psi = B \\ (\nabla^2 - z_1)B = -\frac{\delta}{GD} \end{cases} \quad (2.130)$$

Analogamente, outra composição na equação (2.129) pode ser escrita como:

$$\begin{cases} (\nabla^2 - z_1)\psi = A \\ (\nabla^2 - z_2)(\nabla^2 - z_3)A = -\frac{\delta}{GD} \end{cases} \quad (2.131)$$

Considerando a combinação linear dos sistemas (2.130) e (2.131), obtém:

$$\begin{cases} (\nabla^2 \nabla^2 - \nabla^2 z_1)\psi = \nabla^2 A \\ (\nabla^2 \nabla^2 - \nabla^2 z_3 - \nabla^2 z_2 + z_2 z_3)\psi = B \end{cases} \quad (2.132)$$

Ou ainda pela combinação linear das equações em (2.132), tem-se:

$$(-\nabla^2 z_3 - \nabla^2 z_2 + \nabla^2 z_1 + z_2 z_3)\psi = B - \nabla^2 A \quad (2.133)$$

Ou

$$(-z_3 - z_2 + z_1)\nabla^2 \psi + z_2 z_3 \psi = B - \nabla^2 A \quad (2.134)$$

Da combinação linear de (2.133) e (2.131), obtém:

$$\begin{cases} (z_3 + z_2 - z_1)\nabla^2 \psi - z_1(z_3 + z_2 - z_1)\psi = (z_3 + z_2 - z_1)A \\ (z_2 z_3 + z_1^2 - z_1 z_2 - z_1 z_3)\psi = B - \nabla^2 A + (z_3 + z_2 - z_1)A \end{cases} \quad (2.135)$$

Assim,

$$[z_3(z_2 - z_1) - z_1(z_2 - z_1)]\psi = B - \nabla^2 A + (z_3 + z_2 - z_1)A \quad (2.136)$$

Daí,

$$\psi = \frac{(z_3 + z_2 - z_1)A + B - \nabla^2 A}{(z_3 - z_1)(z_2 - z_1)} \quad (2.137)$$

Da equação (2.137) será deduzida a função ψ para os três casos dadas em (2.121), obedecendo a seguinte ordem $\Delta > 0$ (caso 1), $\Delta = 0$ (caso 2) e $\Delta < 0$ (caso 3), onde nesta dedução utiliza-se a solução do Problema Fundamental de Helmholtz (PFH) para determinar as expressões para A e B.

Primeiro caso (Uma raiz positiva real e duas raízes complexas conjugadas)

Considerado as seguintes condições para as raízes z_1 , z_2 e z_3 da equação (2.118), são dadas por:

$$z_1 > 0; z_2 = \alpha + \beta i \text{ e } z_3 = \alpha - \beta i.$$

$$(z_3 - z_1)(z_2 - z_1) = (\alpha - z_1)^2 - (\beta)^2 \quad (2.138)$$

De (2.130);

$$(\nabla^2 - z_1)B = -\frac{\delta}{GD} \quad (2.139)$$

Cuja solução do PFH em (2.139), fica:

$$B = \frac{1}{2\pi GD} K_0(r\sqrt{z_1}) \quad (2.140)$$

O sistema (2.131) pode ser decomposto como:

$$\begin{cases} (\nabla^2 - z_3)A_1 = -\frac{\delta}{GD} \\ (\nabla^2 - z_2)A = A_1 \end{cases} \quad (2.141)$$

e

$$\begin{cases} (\nabla^2 - z_2)A_2 = -\frac{\delta}{GD} \\ (\nabla^2 - z_3)A = A_2 \end{cases} \quad (2.142)$$

Onde as soluções do PFH das (2.141) e (2.142) são dadas por:

$$\begin{cases} A_1 = \frac{1}{2\pi GD} K_0(r\sqrt{z_3}) \\ A_2 = \frac{1}{2\pi GD} K_0(r\sqrt{z_2}) \end{cases} \quad (2.143)$$

Das equações (2.142), (2.141) obtem-se por combinação linear a expressão para A, cuja sua solução é obtida substituindo as suas soluções dadas em (2.143), obtendo:

$$A = \frac{A_2 - A_1}{(z_3 - z_2)} = \frac{1}{2\pi GD(z_2 - z_3)} [K_0(r\sqrt{z_2}) - K_0(r\sqrt{z_3})] \quad (2.144)$$

Como z_2 e z_3 são complexos conjugados, então a seguinte relação pode ser escrita na forma:

$$[K_0(r\sqrt{z_2}) - K_0(r\sqrt{z_3})] \equiv 2i \operatorname{Im}[K_0(r\sqrt{z_2})] \quad (2.145)$$

Então, substituindo (2.145) em (2.144), obtém:

$$A = \frac{1}{2\pi\text{GD}\beta i} 2i \operatorname{Im}[K_0(r\sqrt{z_2})] = \frac{1}{2\pi\text{GD}\beta} \operatorname{Im}[K_0(r\sqrt{z_2})] \quad (2.146)$$

Onde β é o imaginário das raízes z_2 e z_3 .

Para obter a função escalar ψ da equação (2.137), é necessário o cálculo $\nabla^2 A$, cuja definição para um problema axissimétrico é dada por:

$$\nabla^2 A = \frac{d^2 A}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA}{dr}$$

Desta forma a primeira derivada de A fica:

$$\frac{dA}{dr} = \frac{d \left\{ \frac{1}{2\pi\text{GD}\beta} \operatorname{Im}[K_0(r\sqrt{z_2})] \right\}}{dr} = \frac{-1}{2\pi\text{GD}\beta} \operatorname{Im}[\sqrt{z_2} K_1(r\sqrt{z_2})] \quad (2.147)$$

Já a segunda resulta em:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A}{dr^2} &= \frac{d^2 \left\{ \frac{1}{2\pi\text{GD}\beta} \operatorname{Im}[\sqrt{z_2} K_1(r\sqrt{z_2})] \right\}}{dr^2} = \\ &= \frac{1}{2\pi\text{GD}\beta} \operatorname{Im} \left[z_2 \left\{ K_0(r\sqrt{z_2}) + \frac{K_1(r\sqrt{z_2})}{r\sqrt{z_2}} \right\} \right] \end{aligned} \quad (2.148)$$

A partir de (2.147) e (2.148), o laplaciano de A fica:

$$\begin{aligned} \nabla^2 A &= \frac{1}{2\pi\text{GD}\beta} \operatorname{Im} \left[z_2 \left\{ K_0(r\sqrt{z_2}) + \frac{K_1(r\sqrt{z_2})}{r\sqrt{z_2}} \right\} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2\pi\text{GD}\beta} \operatorname{Im} \left[\frac{z_2}{r\sqrt{z_2}} K_1(r\sqrt{z_2}) \right] \end{aligned} \quad (2.149)$$

Que após a simplificação resulta:

$$\nabla^2 A = \frac{1}{2\pi\text{GD}\beta} \operatorname{Im} [z_2 \{K_0(r\sqrt{z_2})\}] \quad (2.150)$$

Substituindo em (2.140), (2.144) e (2.150) em (2.137), obtém:

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{(z_3 + z_2 - z_1)A + B - \nabla^2 A}{(z_3 - z_1)(z_2 - z_1)} \\ &= \frac{-1}{2\pi\text{GD}[(\alpha - z_1)^2 - (\beta)^2]} \left\{ \frac{1}{\beta} \text{Im}[(2\alpha - z_2 - z_1)K_0(r\sqrt{z_2})] \right. \\ &\quad \left. + K_0(r\sqrt{z_1}) \right\}\end{aligned}\quad (2.151)$$

$$\text{Onde, } \alpha_2 = \frac{1}{2\pi\text{GD}[(\alpha - z_1)^2 - (\beta)^2]}.$$

Então, a solução do problema desacoplado dada em (2.115a) (caracterizado pela função escalar), é dada por:

$$\psi = \alpha_2 \left\{ \frac{1}{\beta} \text{Im}[(2\alpha - z_2 - z_1)K_0(r\sqrt{z_2})] + K_0(r\sqrt{z_1}) \right\} \quad (2.152)$$

Para determinar as soluções fundamentais do modelo de Kerr algumas expressões úteis são consideradas a seguir:

$$\begin{cases} \nabla^2 A = \frac{-1}{2\pi\text{GD}\beta} \text{Im}[z_2\{K_0(r\sqrt{z_2})\}] \\ \nabla^4 A = \frac{-1}{2\pi\text{GD}\beta} \text{Im}[z_2^2\{K_0(r\sqrt{z_2})\}] \\ \nabla^6 A = \frac{-1}{2\pi\text{GD}\beta} \text{Im}[z_2^3\{K_0(r\sqrt{z_2})\}] \end{cases} \quad (2.153)$$

Similarmente a (2.153), também são consideradas os seguintes operadores para a função B, que resulta:

$$\begin{cases} \nabla^2 B = \frac{-1}{2\pi\text{GD}\beta} z_1 K_0(r\sqrt{z_1}) \\ \nabla^4 B = \frac{-1}{2\pi\text{GD}\beta} z_1^2 K_0(r\sqrt{z_1}) \\ \nabla^6 B = \frac{-1}{2\pi\text{GD}\beta} z_1^3 K_0(r\sqrt{z_1}) \end{cases} \quad (2.154)$$

Convém notar que as soluções fundamentais são expressas em termos da relação de Hörmander (2.115), cujas soluções depende da função ψ .

$$\begin{bmatrix} w^{*p} & w^{*c} \\ v^{*p} & v^{*c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (c + k)\psi - G\nabla^2\psi & c\psi \\ c\psi & D\nabla^4\psi + c\psi \end{bmatrix} \quad (2.155)$$

Isto é,

$$\begin{cases} w^{*p} = (c + k)\psi - G\nabla^2\psi \\ w^{*c} = v^{*p} = c\psi \\ v^{*c} = D\nabla^4\psi + c\psi \end{cases} \quad (2.156)$$

A equação (2.137) requer a obtenção prévia dos seguintes resultados:

$$\begin{cases} \nabla^2\psi = \frac{(2\alpha - z_1)\nabla^2 A + \nabla^2 B - \nabla^4 A}{(z_2 - z_1)(z_3 - z_1)} \\ \nabla^4\psi = \frac{(2\alpha - z_1)\nabla^4 A + \nabla^4 B - \nabla^6 A}{(z_2 - z_1)(z_3 - z_1)} \end{cases} \quad (2.157)$$

Substituindo as expressões (2.153) e (2.154) em (2.157), obtém:

$$\nabla^2\psi = \alpha_2 \left\{ \frac{1}{\beta} \operatorname{Im}[(2\alpha - z_1)z_2 - z_2^2]K_0(r\sqrt{z_2}) \right\} - z_1 K_0(r\sqrt{z_1}) \quad (2.158)$$

$$\nabla^4\psi = \alpha_2 \left\{ \frac{1}{\beta} \operatorname{Im}[(2\alpha - z_1)z_2^2 - z_2^3]K_0(r\sqrt{z_2}) \right\} - z_1^2 K_0(r\sqrt{z_1}) \quad (2.159)$$

Do sistema (2.156) as soluções fundamentais para o Caso 1 do modelo kerr são obtidas substituindo (2.152), (2.158) e (2.159).

$$w^{*c} = v^{*p} = c\alpha_2 \left\{ \frac{1}{\beta} \operatorname{Im}[(2\alpha - z_2 - z_1)K_0(r\sqrt{z_2})] - K_0(r\sqrt{z_1}) \right\} \quad (2.160)$$

$$\begin{aligned} w^{*p} = \alpha_2 \left\{ \frac{1}{\beta} \operatorname{Im}[(c + k)(2\alpha - z_2 - z_1)K_0(r\sqrt{z_2})] \right. \\ \left. + G\{[(2\alpha - z_1)z_2 - z_2^2]K_0(r\sqrt{z_2})\} + (c + k - G)K_0(r\sqrt{z_1}) \right\} \end{aligned} \quad (2.161)$$

Então (2.161), fica:

$$w^{*p} = \alpha_2 \left\{ \frac{1}{\beta} \operatorname{Im}[\alpha_3 K_0(r\sqrt{z_2})] + (c + k - Gz_1)K_0(r\sqrt{z_1}) \right\} \quad (2.162)$$

Onde, $\alpha_3 = (c + k + Gz_2)(2\alpha - z_3 - z_1)$.

$$\begin{aligned} v^{*c} = D\alpha_2 \left\{ \frac{1}{\beta} \operatorname{Im}[(2\alpha - z_1)z_2^2 - z_2^3]K_0(r\sqrt{z_2}) \right\} + z_1^2 K_0(r\sqrt{z_1}) \\ + c\alpha_2 \left\{ \frac{1}{\beta} \operatorname{Im}[(2\alpha - z_2 - z_1)K_0(r\sqrt{z_2})] + K_0(r\sqrt{z_1}) \right\} \end{aligned} \quad (2.163)$$

Assim (2.163), fica:

$$v^{*c} = \alpha_2 \left\{ \frac{1}{\beta} \operatorname{Im}[(c + Dz_2^2)(2\alpha - z_2 - z_1)K_0(r\sqrt{z_2})] + (c + Dz_1^2)K_0(r\sqrt{z_1}) \right\} \quad (2.164)$$

$$\alpha_4 = \alpha_6 = (2\alpha - z_2 - z_1), \quad \alpha_9 = (c + Dz_2^2) \quad \alpha_8 = (c + k - Gz_1) \quad \alpha_{10} = (c + Dz_1^2) \\ \alpha_7 = (c + k - Gz_1) = \alpha_6.$$

Uma forma mais compacta para escrever as soluções fundamentais dadas em (2.162) a (2.164) é:

$$w^{*p} = \alpha_2 \phi_{p0} \quad (2.165)$$

$$w^{*c} = v^{*p} = c\alpha_2 \phi_{c0} \quad (2.166)$$

$$v^{*c} = \alpha_2 \phi_{1c0} \quad (2.167)$$

onde as funções ϕ_{p0} , ϕ_{c0} e ϕ_{1c0} são dadas no Apêndice.

Convém notar que outras soluções fundamentais de interesse no MEC requerem derivadas de ordem superior das soluções fundamentais primitivas de deslocamentos. Então para o Caso 1 (uma raiz real positiva e duas complexas conjugadas) as derivadas superiores em r podem ser dadas por:

$$\frac{dw^{*p}}{dr} = \alpha_2 \left\{ \frac{\operatorname{Im}}{\beta} [-\alpha_3 \sqrt{z_2} K_1(r\sqrt{z_2})] - \alpha_8 \sqrt{z_1} K_1(r\sqrt{z_1}) \right\} \quad (2.168)$$

$$\frac{d^2 w^{*p}}{dr^2} = \alpha_2 \left\{ \frac{\alpha_8}{r} \sqrt{z_1} K_1(r\sqrt{z_1}) + \alpha_8 z_1 K_0(r\sqrt{z_1}) + \right. \\ \left. + \frac{\operatorname{Im}}{\beta} \left\{ \frac{\alpha_3}{r} \sqrt{z_2} K_1(r\sqrt{z_2}) \right\} + \alpha_3 z_2 K_0(r\sqrt{z_2}) \right\} \quad (2.169)$$

$$\frac{d^3 w^{*p}}{dr^3} = \alpha_2 \left\{ -\frac{\operatorname{Im}}{\beta} \left[\sqrt{z_2} \alpha_3 \left(z_2 + \frac{2}{r^2} \right) K_1(r\sqrt{z_2}) + \frac{\alpha_3 z_2 K_0(r\sqrt{z_2})}{r} \right] - \right. \\ \left. - \left[\sqrt{z_1} \alpha_8 \left(z_1 + \frac{2}{r^2} \right) K_1(r\sqrt{z_1}) + \frac{\alpha_8 z_1 K_0(r\sqrt{z_1})}{r} \right] \right\} \quad (2.170)$$

$$\frac{d^4 w^{*p}}{dr^4} = \alpha_2 \left\{ \frac{\operatorname{Im}}{\beta} \left\{ \alpha_3 \left(z_2 + \frac{3}{r^2} \right) \left[2 \frac{\sqrt{z_2}}{r} K_1(r\sqrt{z_2}) + z_2 K_0(r\sqrt{z_2}) \right] \right\} + \right. \\ \left. + \alpha_8 \left(z_1 + \frac{3}{r^2} \right) \left[2 \frac{\sqrt{z_1}}{r} K_1(r\sqrt{z_1}) + z_1 K_0(r\sqrt{z_1}) \right] \right\} \quad (2.171)$$

Onde,

$$\begin{cases} \alpha = \text{Re}(z_2) \\ \beta = \text{Im}(z_2) \\ \alpha_3 = (2\alpha - z_1 - z_2)(c + k - G \cdot z_2) \\ \alpha_8 = (c + k - G \cdot z_1) \\ \alpha_2 = \frac{1}{2\pi G D [(\alpha - z_1)^2 + \beta^2]} \end{cases} \quad (2.172)$$

$$\frac{dw^{*c}}{dr} = \alpha_2 c \left\{ \frac{\text{Im}}{\beta} [-\alpha_6 \sqrt{z_2} K_1(r\sqrt{z_2})] - \sqrt{z_1} K_1(r\sqrt{z_1}) \right\} \quad (2.173)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w^{*c}}{dr^2} = \alpha_2 c \left\{ \frac{1}{r} \sqrt{z_1} K_1(r\sqrt{z_1}) \right\} + z_1 K_0(r\sqrt{z_1}) + \\ + \frac{\text{Im}}{\beta} \left\{ \frac{\alpha_6}{r} \sqrt{z_2} K_1(r\sqrt{z_2}) \right\} + \alpha_6 z_2 K_0(r\sqrt{z_2}) \end{aligned} \quad (2.174)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3 w^{*c}}{dr^3} = \alpha_2 c \left\{ -\frac{\text{Im}}{\beta} \left[\sqrt{z_2} \alpha_6 \left(z_2 + \frac{2}{r^2} \right) K_1(r\sqrt{z_2}) + \frac{\alpha_6 z_2 K_0(r\sqrt{z_2})}{r} \right] - \right. \\ \left. - \left[\sqrt{z_1} \left(z_1 + \frac{2}{r^2} \right) K_1(r\sqrt{z_1}) + \frac{z_1 K_0(r\sqrt{z_1})}{r} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.175)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^4 w^{*c}}{dr^4} = \alpha_2 c \left\{ \frac{\text{Im}}{\beta} \left\{ \alpha_6 \left(z_2 + \frac{3}{r^2} \right) \left[2 \frac{\sqrt{z_2}}{r} K_1(r\sqrt{z_2}) + z_2 K_0(r\sqrt{z_2}) \right] \right\} + \right. \\ \left. + \left(z_1 + \frac{3}{r^2} \right) \left[2 \frac{\sqrt{z_1}}{r} K_1(r\sqrt{z_1}) + z_1 K_0(r\sqrt{z_1}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.176)$$

Onde,

$$\begin{cases} \alpha = \text{Re}(z_2) \\ \beta = \text{Im}(z_2) \\ \alpha_6 = (2\alpha - z_1 - z_2) \\ \alpha_2 = \frac{1}{2\pi G D [(\alpha - z_1)^2 + \beta^2]} \end{cases} \quad (2.177)$$

Convém notar que as derivadas finais das soluções fundamentais primitivas em deslocamento em relação ao ponto fonte, podem ser expressas utilizando a regra da cadeia conforme é mostrada a seguir:

A derivada é feito no ponto campo, pois é na direção de $\vec{n}$. Isto é:

$$\frac{dw^{*p}}{dn} = \frac{dw^{*p}}{dx_i} n_i \quad (2.178)$$

Por (2.178);

$$\frac{dw^{*p}}{dx_i(q)} = \frac{dw^{*p}}{dr} \frac{dr}{dx_i(q)} n_i = \frac{dw^{*p}}{dr} r_{,i} n_i \quad (2.179)$$

Onde:

$$r_{,1} = \frac{x_1(q) - x_1(p)}{r} \quad \text{e} \quad r_{,2} = \frac{x_2(q) - x_2(p)}{r} \quad (2.180)$$

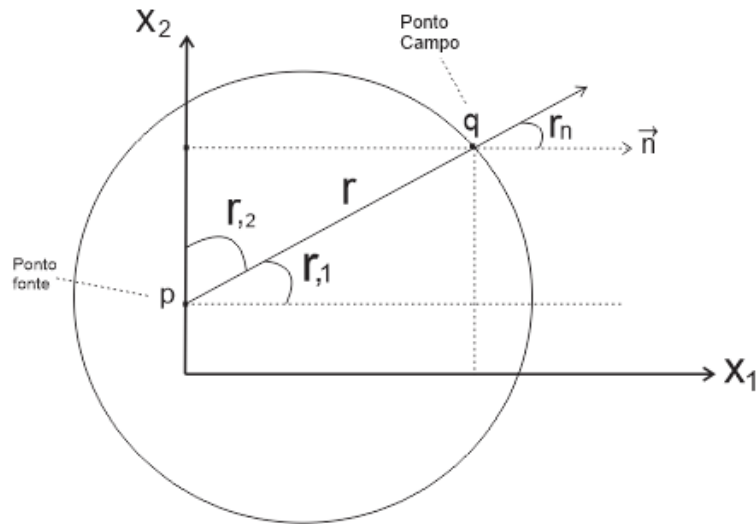


Figura 2.27 Cossenos diretores de interesse. Fonte: Autor

e

$$\begin{cases} \vec{r} \cdot \vec{n} = r_{,i} n_i \\ \vec{r} \cdot \vec{m} = r_{,j} m_j \\ \vec{r} \cdot \vec{s} = r_{,\ell} s_{\ell} \\ \vec{m} \cdot \vec{n} = m_j n_j \\ \vec{m} \cdot \vec{s} = m_j s_j \end{cases}$$

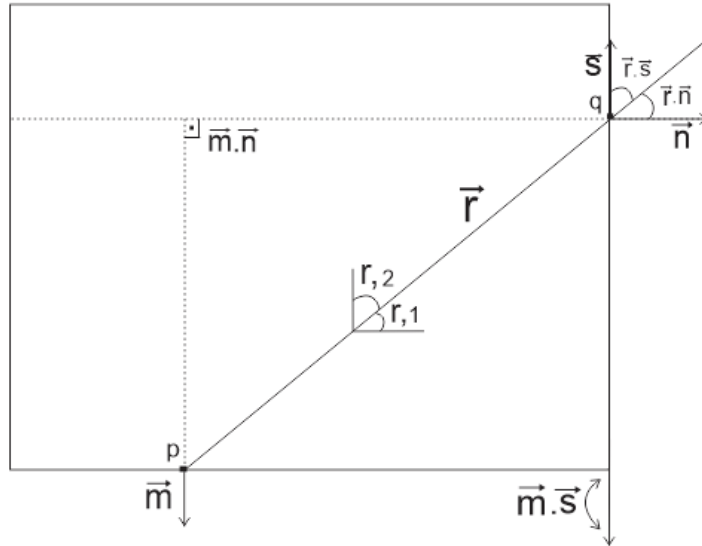


Figura 2.28 Relações importantes que relacionam os vetores unitários $\vec{n}$, $\vec{m}$ e $\vec{s}$.

Fonte: Autor

$$\frac{\partial(r_{,i})}{\partial x_j(p)} = -\frac{1}{r} \{\delta_{ij} - r_{,i} r_{,j}\} \quad \text{e} \quad \frac{\partial(r_{,i})}{\partial x_j(q)} = \frac{1}{r} \{\delta_{ij} - r_{,i} r_{,j}\} \quad (2.181)$$

Para calcular os esforços no contorno dados por,

$$\begin{cases} M_n = M_{ij} n_i n_j & (\text{Momento fletor}) \\ M_{ns} = M_{ij} n_i s_j & (\text{Momento volvente}) \\ Q_n = Q_i n_i & (\text{Força cortante}) \end{cases} \quad (2.182)$$

é necessário o desenvolvimento prévio das seguintes derivadas de $r_{,i}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial(r_{,i})}{\partial x_j(q)} = \frac{1}{r} \{\delta_{ij} - r_{,i} r_{,j}\} \\ \frac{\partial(r_{,i} \cdot r_{,j})}{\partial x_j(q)} = \frac{1}{r} \{\delta_{lk} r_{,j} + \delta_{ij} r_{,k} - 2r_{,i} r_{,j} r_{,k}\} \end{cases} \quad (2.183)$$

E

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} K_0(r\lambda) = -\lambda K_1(r\lambda) \\ \frac{\partial}{\partial r} K_1(r\lambda) = -\lambda \left[K_0(r\lambda) + \frac{K_1(r\lambda)}{r\lambda} \right] \end{cases} \quad (2.184)$$

Assim os esforços para o Caso 1 são calculados utilizando às expressões (2.165) a (2.176), e suas derivadas (2.183) a (2.184), obtêm-se as seguintes expressões:

$$M_n^{*p} = -D \left\{ \frac{d^2 w^{*p}}{dr^2} \left[v + (1-v)(r_i n_i)^2 \right] + \frac{1}{r} \frac{dw^{*p}}{dr} \left[v + (1-v)(r_j s_j)^2 \right] \right\} \quad (2.185)$$

$$M_{ns}^{*p} = -D(1-v)(r_i n_i)(r_j s_j) \left(\frac{d^2 w^{*p}}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw^{*p}}{dr} \right) \quad (2.186)$$

$$T_n^{*p} = G. (r_i n_i) \frac{dv^{*p}}{dr} \quad (2.187)$$

$$V_n^{*p} = -D(1-v)r_i n_i \left[\left[(r_j s_j)^2 + \frac{1}{1-v} \right] \left(\frac{d^3 w^{*p}}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w^{*p}}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw^{*p}}{dr} \right) + \right. \\ \left. + \frac{[1-4(r_j s_j)^2]}{r} \left(\frac{d^2 w^{*p}}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw^{*p}}{dr} \right) \right] + \frac{D(1-v)}{R} [1-2(r_j s_j)^2] \left(\frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw^{*p}}{dr} \right) \quad (2.188)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_n^{*p}}{\partial m} = & D \frac{(1-v)}{r} (m_j n_j - r_i n_i r_j m_j) \left\{ \left[(r_j s_j)^2 + \frac{1}{1-v} \right] + \right. \\ & + \left(\frac{d^3 w^{*p}}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w^{*p}}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw^{*p}}{dr} \right) + \frac{[1-4(r_j s_j)^2]}{r} \left(\frac{d^2 w^{*p}}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw^{*p}}{dr} \right) \Big\} + \\ & + D(1-v)(r_i n_i) \left\{ \frac{2}{r} [m_i s_i \cdot (r_j s_j) - (r_j s_j)^2 \cdot r_i m_i] \times \right. \\ & \times \left(\frac{d^3 w^{*p}}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w^{*p}}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d^3 w^{*p}}{dr^3} \right) \Big\} + D(1-v)(r_i n_i)(r_j m_j) \times \\ & \times \left[(r_j s_j)^2 + \frac{1}{1-v} \right] \left(\frac{d^4 w^{*p}}{dr^4} + \frac{1}{r} \frac{d^3 w^{*p}}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^3 w^{*p}}{dr^3} + \frac{2}{r^3} \frac{dw^{*p}}{dr} - \frac{1}{r^2} \frac{dw^{*p}}{dr} \right) + \\ & + D(1-v)(r_i n_i) \frac{(r_j m_j)}{r} \frac{d^3 w^{*p}}{dr^3} \times (1 - (r_j s_j)^2) + 2D(1-v)(r_i n_i) \times \\ & \times (4(m_i s_i) \cdot (r_j s_j) - 8(r_j s_j)^2 \cdot r_i m_i + r_k m_k) \times \\ & \times \left(\frac{1}{r^2} \frac{dw^{*p}}{dr} - \frac{1}{r} \frac{d^2 w^{*p}}{dr^2} \right) + \frac{D(1-v)}{R} [r_i m_i \frac{d^3 w^{*p}}{dr^3} (2(r_j s_j)^2 - 1) - \\ & - \left[(4(m_i s_i) \cdot (r_j s_j) - 6(r_j s_j)^2 \cdot r_i m_i + r_k m_k) \left(\frac{1}{r^2} \frac{dw^{*p}}{dr} - \frac{1}{r} \frac{d^2 w^{*p}}{dr^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.189)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_n^{*p}}{\partial m} = & D(r_i m_i) \frac{d^3 w^{*p}}{dr^3} \left[v + (1-v)(r_j n_j)^2 \right] + \frac{D}{r} \frac{d^2 w^{*p}}{dr^2} [(1-v) \times \\ & \times (2(m_i n_i) \cdot (r_j n_j) - (r_i m_i) (2(r_i n_i)^2 - (r_j s_j)^2)) + (r_i m_i) v] - \\ & - D \left[3(r_i m_i)(1-v)(r_j s_j)^2 + (r_i m_i) v - 2(m_k s_k)(r_j s_j)(1-v) \right] \frac{1}{r^2} \frac{dw^{*p}}{dr} \end{aligned} \quad (2.190)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{ns}^{*p}}{\partial m} = & -D(1-v) \left\{ \frac{1}{r} (m_i n_i \cdot (r_j s_j) + m_i s_i \cdot (r_j n_j) - 2r_i n_i \cdot r_j s_j \cdot r_\ell m_\ell) \times \right. \\ & \times \left(\frac{d^2 w^{*p}}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw^{*p}}{dr} \right) + r_i n_i \cdot r_j s_j \left(\frac{d^3 w^{*p}}{dr^3} p - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w^{*p}}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw^{*p}}{dr} \right) \left. \right\} \end{aligned} \quad (2.191)$$

$$\frac{\partial T_n^{*p}}{\partial m} = -Gf \left\{ \frac{1}{r} [m_i n_i - r_j n_j \cdot r_\ell m_\ell] \frac{1}{r} \frac{dv^{*p}}{dr} + r_j n_j \cdot \frac{d^2 v^{*p}}{dr^2} \right\} \quad (2.192)$$

$$\begin{aligned} V_n^{*c} = & -D(1-v)(r_i n_i) \left\{ \left[(r_j s_j)^2 + \frac{1}{1-v} \right] \left(\frac{d^3 w^{*c}}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w^{*c}}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw^{*c}}{dr} \right) + \right. \\ & + \frac{[1 - 4(r_j s_j)^2]}{r} \left(\frac{d^2 w^{*c}}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw^{*c}}{dr} \right) + \frac{D(1-v)}{R} [1 - 2(r_j s_j)^2] \times \\ & \times \left(\frac{d^2 w^{*c}}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw^{*c}}{dr} \right) \left. \right\} + G(r_i n_i) \frac{dw^{*c}}{dr} \end{aligned} \quad (2.193)$$

$$M_n^{*c} = -D \left\{ \frac{d^2 w^{*c}}{dr^2} \left[v + (1-v)(r_i n_i)^2 \right] + \frac{1}{r} \frac{dw^{*c}}{dr} \left[v + (1-v)(r_j s_j)^2 \right] \right\} \quad (2.194)$$

$$M_{ns}^{*c} = -D(1-v) r_i n_i \cdot r_j s_j \left(\frac{d^2 w^{*c}}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw^{*c}}{dr} \right) \quad (2.195)$$

$$T_n^{*c} = G \cdot (r_i n_i) \frac{dv^{*c}}{dr} \quad (2.196)$$

Caso dois (três raízes reais positivas com duas raízes iguais):

Considerando as seguintes condições para as raízes $z_1 > 0$, $z_2 > 0$ e $z_3 > 0$ com $z_2 = z_3$, em (2.121), a equação (2.118) é escrita na forma:

$$(\nabla^2 - z_1)(\nabla^2 - z_2)^2 \psi = t \quad (2.197)$$

Onde $t = -\frac{\delta}{GD}$

A equação (2.197) pode ser escrita em termos das seguintes funções auxiliares A, B e C:

$$(\nabla^2 - z_2)(\nabla^2 - z_2)A = t \quad (2.198)$$

$$(\nabla^2 - z_1)B = t \quad (2.199)$$

$$(\nabla^2 - z_1)(\nabla^2 - z_2)C = t \quad (2.200)$$

Onde,

$$(\nabla^2 - z_1)\psi = A \quad (2.201)$$

$$(\nabla^2 - z_2)(\nabla^2 - z_2)\psi = B \quad (2.202)$$

$$(\nabla^2 - z_2)\psi = C \quad (2.203)$$

Aplicando o Laplaciano em (2.201) e subtraindo-se de (2.202), obtém-se:

$$[\nabla^2(z_1 - 2z_2) + z_2^2]\psi = B - \nabla^2 A \quad (2.204)$$

Multiplicando (2.203) por $-(z_1 - 2z_2)$ e somando com a equação (2.204), resulta:

$$\psi = \frac{B - \nabla^2 A - (z_1 - 2z_2)C}{z_2(z_1 - z_2)} \quad (2.205)$$

Para apresentar a função explícita dada em (2.205) é preciso obter as expressões para A, B e C, então substituindo (2.203) em (2.200), obtém-se:

$$(\nabla^2 - z_1)C_1 = -\frac{\delta}{GD}, \text{ implicando em } C_1 = \frac{K_o(r\sqrt{z_1})}{2\pi GD} \quad (2.206)$$

Onde,

$$(\nabla^2 - z_1)C = C_1 \quad (2.207)$$

De forma análoga, tem-se:

$$(\nabla^2 - z_1)C = C_2 \quad (2.208)$$

Obtém:

$$(\nabla^2 - z_2)C_2 = -\frac{\delta}{GD}, \text{ implicando em } C_2 = \frac{K_o(r\sqrt{z_2})}{2\pi GD} \quad (2.209)$$

Isolando C em (2.207) e (2.208), finalmente:

$$C = \frac{C_1 - C_2}{z_2 - z_1} \quad (2.210)$$

Assim, de (2.206) e (2.209), obtém-se:

$$C = \frac{1}{2\pi GD} \frac{K_0(r\sqrt{z_2}) - K_0(r\sqrt{z_1})}{z_2 - z_1} \quad (2.211)$$

De (2.209), obtém-se:

$$B = \frac{K_0(r\sqrt{z_1})}{2\pi GD} \quad (2.212)$$

O desenvolvimento da expressão para A, será feita utilizando a equação.

$$A = \frac{1}{2\pi GD} \frac{K_0(r\sqrt{z_2}) - K_0(r\sqrt{z_1})}{z_2 - z_1}, \quad (2.213)$$

z_2 tendendo a z_1 . No entanto, uma indeterminação é obtida quando z_1 tende a z_2 em (2.213). Então aplica-se a regra de L'hospital para se remover a indeterminação, de forma que o valor de A fica:

$$A = -\frac{r\sqrt{z_2}}{4\pi GD z_2} K_1(r\sqrt{z_2}) \quad (2.214)$$

O Laplaciano de (2.214) é obtido pela expressão $\nabla^2 A = \frac{d^2 A}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}$, consequentemente $\nabla^4 A$ e $\nabla^6 A$, obtem-se:

$$\nabla^2 A = \frac{1}{4\pi GD} [2K_0(r\sqrt{z_2}) - r\sqrt{z_2} K_1(r\sqrt{z_2})], \quad (2.215)$$

$$\nabla^4 A = \frac{1}{4\pi GD} [4z_2 K_0(r\sqrt{z_2}) - r z_2 \sqrt{z_2} K_1(r\sqrt{z_2})], \quad (2.216)$$

$$\nabla^6 A = \frac{1}{4\pi GD} z_2^2 [r\sqrt{z_2} K_1(r\sqrt{z_2}) - 6K_0(r\sqrt{z_2})], \quad (2.217)$$

Desta forma, para obter a expressão ψ basta substituir (2.211), (2.212) e (2.215) em (2.205), resulta em:

$$\psi = \frac{1}{2\pi GD(z_1 - z_2)} \left[\frac{r}{2\sqrt{z_2}} K_1(r\sqrt{z_2}) + \frac{K_0(r\sqrt{z_2}) - K_0(r\sqrt{z_1})}{z_2 - z_1} \right] \quad (2.218)$$

De forma análoga ao Caso 1 para obter (2.150), foi usado o operador de Hörmander para desacoplar o sistema (2.111), e assim encontrar as soluções fundamentais para o Caso 2. Desta forma, devem-se ser calculadas as expressões dadas em (2.151), mas utilizando a expressão (2.218), que são dadas por:

$$\nabla^2 \psi = a5 [a3 a4 z_1 K_0(r\sqrt{z_1}) - z_2 K_1(r\sqrt{z_2})(4a1 - a2 + a3 a4) + a1 r z_2 K_1(r\sqrt{z_2})] \quad (2.219)$$

Onde,

$$\nabla^4 \psi = a5 [(6a1 + a2 - a3 a4) z_2^2 K_0(r\sqrt{z_2}) + a3 a4 z_1^2 K_0(r\sqrt{z_1}) - a1 r z_2^2 \sqrt{z_2} K_1(r\sqrt{z_2})] \quad (2.220)$$

$$\begin{cases} a1 = \frac{1}{4\pi GD} \\ a2 = \frac{1}{2\pi GD} \\ a3 = \frac{1}{2\pi GD(z_2 - z_1)} \\ a4 = (z_1 - 2z_2) \\ a5 = \frac{1}{z_2(z_1 - z_2)} \end{cases} \quad (2.221)$$

Desta forma, para encontrar as soluções fundamentais para o Caso 2 de acordo (2.150), e com o auxílio de (2.218), (2.219) e (2.220), obtém-se as expressões desejadas como se segue:

$$w^{*p} = \alpha_2 \{a1 r K_1(r\sqrt{z_2}) + a2 K_0(r\sqrt{z_1}) - a3 K_0(r\sqrt{z_2})\} \quad (2.222)$$

Onde,

$$\begin{cases} \alpha_2 = \frac{1}{2\pi GD(z_1 - z_2)} \\ a1 = (z_1 - z_2) \\ a2 = (z_2 - z_3) \\ a3 = (z_1 - z_3) \end{cases} \quad (2.223)$$

Já as derivadas de ordem superiores são dadas por:

$$\frac{dw^{*p}}{dr} = -\alpha_2 \{a1 \sqrt{z_2} r K_0(r\sqrt{z_2}) + a2 \sqrt{z_1} K_1(r\sqrt{z_1}) - a3 \sqrt{z_2} K_1(r\sqrt{z_2})\} \quad (2.224)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w^{*p}}{dr^2} = & -\alpha_2 \left\{ a1 \left[\sqrt{z_2} r K_0(r\sqrt{z_2}) - z_2 r K_1(r\sqrt{z_2}) \right] - \right. \\ & \left. - a2 z_1 \left[K_0(r\sqrt{z_1}) + \frac{K_1(r\sqrt{z_1})}{r\sqrt{z_1}} \right] + a3 z_2 \left[K_0(r\sqrt{z_2}) + \frac{K_1(r\sqrt{z_2})}{r\sqrt{z_2}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.225)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^3 w^{*p}}{dr^3} = & -\alpha_2 \left\{ a_1 \left[z_2 \sqrt{z_2} r K_0(r\sqrt{z_2}) - z_2 K_1(r\sqrt{z_2}) \right] + \right. \\
& + a_2 z_1 \left[\sqrt{z_1} K_1(r\sqrt{z_1}) + \frac{K_0(r\sqrt{z_1})}{r} + 2 \frac{K_1(r\sqrt{z_1})}{r^2 \sqrt{z_1}} \right] - \\
& \left. - a_3 z_2 \left[\sqrt{z_2} K_1(r\sqrt{z_2}) + \frac{K_0(r\sqrt{z_2})}{r} + 2 \frac{K_1(r\sqrt{z_2})}{r^2 \sqrt{z_2}} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{2.226}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^4 w^{*p}}{dr^4} = & -\alpha_2 \left\{ a_1 z_2 \left[2\sqrt{z_2} K_0(r\sqrt{z_2}) + \frac{K_1(r\sqrt{z_2})}{r} - z_2 r K_1(r\sqrt{z_2}) \right] + \right. \\
& - a_2 z_1 \left[\frac{(z_1 r^2 + 3) [2K_1(r\sqrt{z_1}) + r \sqrt{z_1} K_0(r\sqrt{z_1})]}{r^3 \sqrt{z_1}} \right] + \\
& \left. + a_3 z_2 \left[\frac{(z_2 r^2 + 3) [2K_1(r\sqrt{z_2}) + r \sqrt{z_2} K_0(r\sqrt{z_2})]}{r^3 \sqrt{z_2}} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{2.227}$$

$$w^{*c} = \alpha_2 c \left\{ a_1 r K_1(r\sqrt{z_2}) + a_2 K_0(r\sqrt{z_1}) - a_3 K_0(r\sqrt{z_2}) \right\} \tag{2.228}$$

Onde,

$$\begin{cases} \alpha_2 = \frac{1}{2\pi G D (z_1 - z_2)^2} \\ a_1 = \frac{(z_2 - z_1)}{2\sqrt{z_2}} \\ a_2 = -1 \\ a_3 = -1 \end{cases} \tag{2.229}$$

$$\frac{dw^{*c}}{dr} = -\alpha_2 c \left\{ a_1 \sqrt{z_2} r K_0(r\sqrt{z_2}) + a_2 \sqrt{z_1} K_1(r\sqrt{z_1}) - a_3 \sqrt{z_2} K_1(r\sqrt{z_2}) \right\} \tag{2.230}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 w^{*c}}{dr^2} = & -\alpha_2 c \left\{ a_1 \left[\sqrt{z_2} K_0(r\sqrt{z_2}) - z_2 r K_1(r\sqrt{z_2}) \right] - \right. \\
& - a_2 z_1 \left[K_0(r\sqrt{z_1}) + \frac{K_1(r\sqrt{z_1})}{r\sqrt{z_1}} \right] + a_3 z_2 \left[K_0(r\sqrt{z_2}) + \frac{K_1(r\sqrt{z_2})}{r\sqrt{z_2}} \right] \left. \right\}
\end{aligned} \tag{2.231}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3 w^{*c}}{dr^3} = & -\alpha_2 c \left\{ a_1 \left[z_2 \sqrt{z_2} r K_0(r\sqrt{z_2}) - z_2 K_1(r\sqrt{z_2}) \right] + \right. \\ & + a_2 z_1 \left[\sqrt{z_1} K_1(r\sqrt{z_1}) + \frac{K_0(r\sqrt{z_1})}{r} + 2 \frac{K_1(r\sqrt{z_1})}{r^2 \sqrt{z_1}} \right] - \\ & \left. - a_3 z_2 \left[\sqrt{z_2} K_1(r\sqrt{z_2}) + \frac{K_0(r\sqrt{z_2})}{r} + 2 \frac{K_1(r\sqrt{z_2})}{r^2 \sqrt{z_2}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.232)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^4 w^{*c}}{dr^4} = & -\alpha_2 c \left\{ a_1 z_2 \left[2\sqrt{z_2} K_0(r\sqrt{z_2}) + \frac{K_1(r\sqrt{z_2})}{r} - z_2 r K_1(r\sqrt{z_2}) \right] + \right. \\ & - a_2 z_1 \left[\frac{(z_1 r^2 + 3) [2K_1(r\sqrt{z_1}) + r \sqrt{z_1} K_0(r\sqrt{z_1})]}{r^3 \sqrt{z_1}} \right] + \\ & \left. + a_3 z_2 \left[\frac{(z_2 r^2 + 3) [2K_1(r\sqrt{z_2}) + r \sqrt{z_2} K_0(r\sqrt{z_2})]}{r^3 \sqrt{z_2}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.233)$$

De modo análogo ao Caso 1, as equações de esforços fundamentais M_n^{*p} , M_{ns}^{*p} , Q_n^{*p} , V_n^{*p} e $\frac{\partial M_{ns}^{*p}}{\partial s}$ sobre a placa delgada (teoria de Kirchhoff) apoiada em base elástica (modelo Kerr) utilizando as equações (2.185) a (2.192).

Já as soluções fundamentais dos esforços quando a fonte for ativada na camada de cisalhamento podem ser obtidas utilizando as equações de (2.193) a (2.196).

Terceiro caso (três raízes positivas reais e distintas)

A função escalar ψ dada em (2.137) é dependente das funções auxiliares A, B e do Laplaciano de A. Quando as três raízes são reais positivas e distintas, o valor da função B é dada pela equação (2.140) e o valor da função A é dado (2.144), de forma A é Laplaciano pode ser escrito como:

$$\nabla^2 A = -\frac{1}{2\pi G D(z_3 - z_2)} \{z_3 K_0(r\sqrt{z_3}) - z_2 K_0(r\sqrt{z_2})\} \quad (2.234)$$

Substituindo-se (2.234), (2.140) em (2.137), a função escalar ψ fica:

$$\psi = -\frac{1}{2\pi GD(z_3 - z_1)(z_2 - z_1)} \times$$

$$\times \left[\frac{(z_3 - z_1)K_0(r\sqrt{z_2}) - (z_2 - z_1)K_0(r\sqrt{z_3})}{z_2 - z_3} + K_0(r\sqrt{z_1}) \right] \quad (2.235)$$

O Laplaciano e o bi-harmonico de (2.235) são respectivamente:

$$\nabla^2 \psi = -\frac{1}{2\pi GD(z_3 - z_1)(z_2 - z_1)} \times$$

$$\times \left[\frac{(z_3 - z_1)z_2 K_0(r\sqrt{z_2}) - (z_2 - z_1)z_3 K_0(r\sqrt{z_3})}{z_2 - z_3} + z_1 K_0(r\sqrt{z_1}) \right] \quad (2.236)$$

$$\nabla^4 \psi = -\frac{1}{2\pi GD(z_3 - z_1)(z_2 - z_1)} \times$$

$$\times \left[\frac{(z_3 - z_1)z_2^2 K_0(r\sqrt{z_2}) - (z_2 - z_1)z_3^2 K_0(r\sqrt{z_3})}{z_2 - z_3} + z_1^2 K_0(r\sqrt{z_1}) \right] \quad (2.237)$$

Substituindo-se (2.235), (2.236) e (2.237) na equação (2.156) resulta nas soluções fundamentais em deslocamentos:

$$w^{*p} = \alpha_2 \{ a_1 K_0(r\sqrt{z_3}) + a_2 K_0(r\sqrt{z_1}) - a_3 K_0(r\sqrt{z_2}) \} \quad (2.238)$$

$$\begin{cases} \alpha_2 = \frac{1}{2\pi GD(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_2 - z_3)} \\ a_1 = (z_1 - z_2)(c + k - G \cdot z_3) \\ a_2 = (c + k - G \cdot z_1)(z_2 - z_3) \\ a_3 = (z_1 - z_3)(c + k - G \cdot z_2) \end{cases} \quad (2.239)$$

$$\frac{dw^{*p}}{dr} = -\alpha_2 \{ a_1 \sqrt{z_3} K_1(r\sqrt{z_3}) + a_2 \sqrt{z_1} K_1(r\sqrt{z_1}) - a_3 \sqrt{z_2} K_1(r\sqrt{z_2}) \} \quad (2.240)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w^{*p}}{dr^2} = & -\alpha_2 \left\{ -a_1 z_3 \left[K_0(r\sqrt{z_3}) + \frac{K_1(r\sqrt{z_3})}{r\sqrt{z_3}} \right] + \right. \\ & \left. -a_2 z_1 \left[K_0(r\sqrt{z_1}) + \frac{K_1(r\sqrt{z_1})}{r\sqrt{z_1}} \right] + a_3 z_2 \left[K_0(r\sqrt{z_2}) + \frac{K_1(r\sqrt{z_2})}{r\sqrt{z_2}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.241)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3 w^{*p}}{dr^3} = & -\alpha_2 \left\{ a_1 z_3 \left[\sqrt{z_3} K_1(r\sqrt{z_3}) + \frac{K_0(r\sqrt{z_3})}{r} + 2 \frac{K_1(r\sqrt{z_3})}{r^2 \sqrt{z_3}} \right] + \right. \\ & + a_2 z_1 \left[\sqrt{z_1} K_1(r\sqrt{z_1}) + \frac{K_0(r\sqrt{z_1})}{r} + 2 \frac{K_1(r\sqrt{z_1})}{r^2 \sqrt{z_1}} \right] - \\ & \left. - a_3 z_2 \left[\sqrt{z_2} K_1(r\sqrt{z_2}) + \frac{K_0(r\sqrt{z_2})}{r} + 2 \frac{K_1(r\sqrt{z_2})}{r^2 \sqrt{z_2}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.242)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^4 w^{*p}}{dr^4} = & -\alpha_2 \left\{ -a_1 z_3 \left[\frac{(z_3 r^2 + 3)(2K_1 r\sqrt{z_3}) + r\sqrt{z_3} K_0(r\sqrt{z_3})}{r^3 \sqrt{z_3}} \right] - \right. \\ & - a_2 z_1 \left[\frac{(z_1 r^2 + 3)(2K_1 r\sqrt{z_1}) + r\sqrt{z_1} K_0(r\sqrt{z_1})}{r^3 \sqrt{z_1}} \right] + \\ & \left. + a_3 z_2 \left[\frac{(z_2 r^2 + 3)(2K_1 r\sqrt{z_2}) + r\sqrt{z_2} K_0(r\sqrt{z_2})}{r^3 \sqrt{z_2}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.243)$$

$$w^{*c} = \alpha_2 c \{ a_1 K_0(r\sqrt{z_3}) + a_2 K_0(r\sqrt{z_1}) - a_3 K_0(r\sqrt{z_2}) \} \quad (2.244)$$

$$\begin{cases} \alpha_2 = \frac{1}{2\pi G D (z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_2 - z_3)} \\ a_1 = (z_1 - z_2) \\ a_2 = (z_2 - z_3) \\ a_3 = (z_1 - z_3) \end{cases} \quad (2.245)$$

$$\frac{dw^{*c}}{dr} = -\alpha_2 c \{ a_1 \sqrt{z_3} K_1(r\sqrt{z_3}) + a_2 \sqrt{z_1} K_1(r\sqrt{z_1}) - a_3 \sqrt{z_2} K_1(r\sqrt{z_2}) \} \quad (2.246)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w^{*c}}{dr^2} = & -\alpha_2 c \left\{ -a_1 z_3 \left[K_0(r\sqrt{z_3}) + \frac{K_1(r\sqrt{z_3})}{r\sqrt{z_3}} \right] + \right. \\ & \left. -a_2 z_1 \left[K_0(r\sqrt{z_1}) + \frac{K_1(r\sqrt{z_1})}{r\sqrt{z_1}} \right] + a_3 z_2 \left[K_0(r\sqrt{z_2}) + \frac{K_1(r\sqrt{z_2})}{r\sqrt{z_2}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.247)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^3 w^{*c}}{dr^3} = & -\alpha_2 c \left\{ a_1 z_3 \left[\sqrt{z_3} K_1(r\sqrt{z_3}) + \frac{K_0(r\sqrt{z_3})}{r} + 2 \frac{K_1(r\sqrt{z_3})}{r^2 \sqrt{z_3}} \right] + \right. \\
& + a_2 z_1 \left[\sqrt{z_1} K_1(r\sqrt{z_1}) + \frac{K_0(r\sqrt{z_1})}{r} + 2 \frac{K_1(r\sqrt{z_1})}{r^2 \sqrt{z_1}} \right] - \\
& \left. - a_3 z_2 \left[\sqrt{z_2} K_1(r\sqrt{z_2}) + \frac{K_0(r\sqrt{z_2})}{r} + 2 \frac{K_1(r\sqrt{z_2})}{r^2 \sqrt{z_2}} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{2.248}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^4 w^{*c}}{dr^4} = & -\alpha_2 c \left\{ -a_1 z_3 \left[\frac{(z_3 r^2 + 3)(2K_1 r \sqrt{z_3}) + r \sqrt{z_3} K_0(r\sqrt{z_3})}{r^3 \sqrt{z_3}} \right] - \right. \\
& - a_2 z_1 \left[\frac{(z_1 r^2 + 3)(2K_1 r \sqrt{z_1}) + r \sqrt{z_1} K_0(r\sqrt{z_1})}{r^3 \sqrt{z_1}} \right] + \\
& \left. + a_3 z_2 \left[\frac{(z_2 r^2 + 3)(2K_1 r \sqrt{z_2}) + r \sqrt{z_2} K_0(r\sqrt{z_2})}{r^3 \sqrt{z_2}} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{2.249}$$

Conforme já visto no Caso 1, o procedimento para os esforços fundamentais da placa de Kirchhoff apoiada em base elástica de Kerr, dadas pelas relações (2.185 a 2.196), pode ser aplicado ao Caso 3.

CAPÍTULO 3

As equações diferenciais de equilíbrio do problema podem ser transformadas em equações integrais equivalentes, utilizando basicamente dois caminhos: no primeiro, tem-se o Teorema de Reciprocidade de Betti o qual será abordado na dedução das equações integrais de placas de Kirchhoff apoiadas em base elástica de Pasternak e no segundo tem-se o método dos resíduos ponderados, que será utilizado na dedução das equações integrais de placas de Kirchhoff apoiadas em base elástica de Kerr.

3.1 EQUAÇÕES INTEGRAIS NO DOMÍNIO

Nesta seção é discutida as representações integrais para pontos-fontes colocados no interior da placa.

3.1.1 PLACA SOBRE A BASE ELÁSTICA DE PASTERNAK

No problema de placa delgada sobre fundação de Pasternak, optou-se por descrever a transformação das equações diferenciais governantes em equações integrais equivalentes utilizando o Teorema da Reciprocidade. Assim, é necessária a definição de dois estados distintos de tensões e deformações: No primeiro está definido o problema real com suas tensões $\sigma_{ij}(q)$ e deformações $\varepsilon_{ij}(q)$, mobilizadas no ponto campo q . Já no segundo, associado ao problema fundamental, são mobilizadas as tensões $\sigma_{ij}^*(p, q)$ e deformações $\varepsilon_{ij}^*(p, q)$, com fonte aplicada em p e efeito em q .

O Teorema da Reciprocidade relaciona os dois problemas da seguinte forma:

$$\int_V \sigma_{ij}(q) \varepsilon_{ij}^*(p, q) dV = \int_V \sigma_{ij}^*(p, q) \varepsilon_{ij}(q) dV. \quad (3.1)$$

Onde V é o volume.

Assim, utilizando a relação deformação-curvatura da placa $\varepsilon_{ij} = -zw_{,ij}$, e a substituindo dela em (3.1), tem-se:

$$\int_V \sigma_{ij}(q) z w_{,ij}^*(p, q) dV = \int_V \sigma_{ij}^*(p, q) z w_{,ij}(q) dV. \quad (3.2)$$

Se as relações $\int \sigma_{ij}(q) z dz = M_{ij}(q)$ e $\int \sigma_{ij}^*(p, q) z dz = M_{ij}^*(p, q)$ forem substituídas em (3.2), tem-se a reciprocidade de momentos e curvaturas, vide Figura 3.1:

$$\int_{\Omega} M_{ij}(q) w_{,ij}^*(p, q) d\Omega = \int_{\Omega} M_{ij}^*(p, q) w_{,ij}(q) d\Omega. \quad (3.3)$$

Onde $dV = dz d\Omega$.

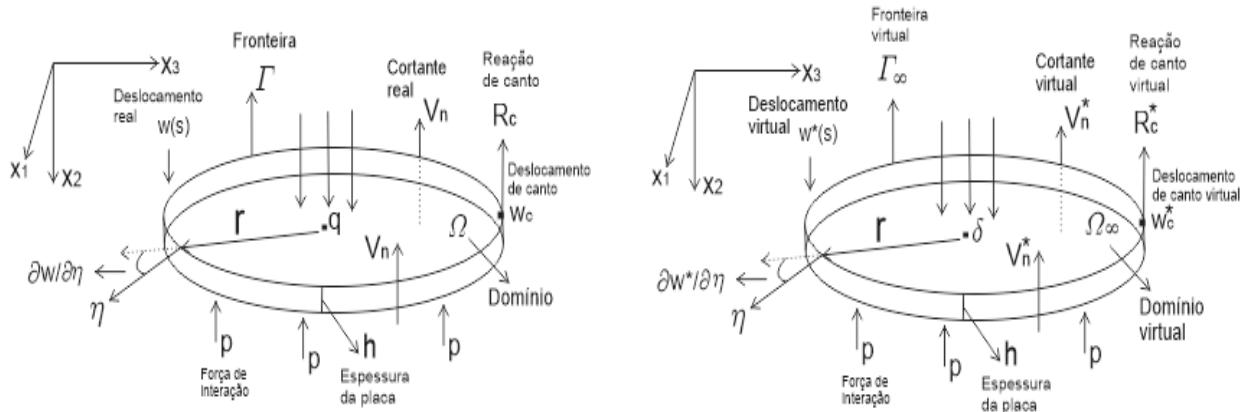


Figura 3.1 Forças atuando nos espaços real e virtual. Fonte: Autor

Aplicando integração por partes no lado direito de (3.3), fica:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} M_{ij}(q) w_{,ij}^*(p, q) d\Omega &= \int_{\Gamma} M_{ij}^*(p, q) w_{,k}(q) n_k d\Gamma - \\ &\quad - \int_{\Omega} M_{ij,j}^*(p, q) w_{,i}(q) d\Omega, \quad k = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

A partir dos momentos fletores e volventes fundamentais $M_n^* = M_{ij}^* n_i n_j$ e $M_{ns}^* = M_{ij}^* n_i s_j$ no contorno, os seguintes algebrismos podem ser feitos:

Multiplicando-se M_n^* por $n_k w_{,k}$ e M_{ns}^* por $s_k w_{,k}$, seguida da soma desses resultados, obtém:

$$M_n^* \eta_k w_{,k} + M_{ns}^* s_k w_{,k} = M_{ij}^* n_i w_{,k} (n_j n_k + s_j s_k) \quad (3.5)$$

Convém notar que a seguinte identidade é válida:

$$\delta_{jk} = (n_j n_k + s_j s_k) \quad (3.6)$$

Substituindo-se (3.6) em (3.5), fica:

$$M_n^* n_k w_{,k} + M_{ns}^* s_k w_{,k} = M_{ij}^* n_i w_{,j} \quad (3.7)$$

Substituindo-se (3.7) na integral de contorno de (3.4) fica:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} M_{ij}^*(p, q) \eta_j w_{,i}(q) d\Gamma &= \int_{\Gamma} M_n^*(p, q) w_{,k}(q) \eta_k d\Gamma - \\ &- \int_{\Gamma} M_{ns}^*(p, q) w_{,k}(q) s_k d\Gamma, \quad k = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Além disso, no contorno com angularidade (canto), vide Figura 3.2, a última integral em (3.8) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} M_{ns}^*(p, q) w_{,k}(q) s_k d\Gamma &= \\ &= [M_{ns}^*(p, q) w_{,k}(q) s_k]_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} - \int_{\Gamma} M_{ns,k}^*(p, q) s_k w(q) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.9)$$

Se (3.8) e (3.9) forem substituídas em (3.4), uma relação pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} M_{ij}(q) w_{,ij}^*(p, q) d\Omega &= [M_{ns}^*(p, q) w_{,k}(q) s_k]_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} - \int_{\Gamma} M_{ns,k}^*(p, q) s_k w(q) d\Gamma + \\ &+ \int_{\Gamma} M_n^*(p, q) w_{,k}(q) \eta_k w d\Gamma - \int_{\Omega} M_{ij,j}^*(p, q) w_{,i}(q) d\Omega \end{aligned} \quad (3.10)$$

Fazendo-se uma integração por partes no ultimo termo de (3.10) resulta:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} M_{ij}(q) w_{,ij}^*(p, q) d\Omega &= [M_{ns}^*(p, q) w_{,k}(q) s_k]_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} - \\ &- \int_{\Gamma} M_{ns,k}^*(p, q) s_k w(q) d\Gamma + \int_{\Gamma} M_n^*(p, q) w_{,k}(q) \eta_k d\Gamma - \\ &- \int_{\Gamma} M_{ij,j}^*(p, q) w(q) d\Gamma + \int_{\Omega} M_{ij,jj}^*(p, q) w(q) d\Omega \end{aligned} \quad (3.11)$$

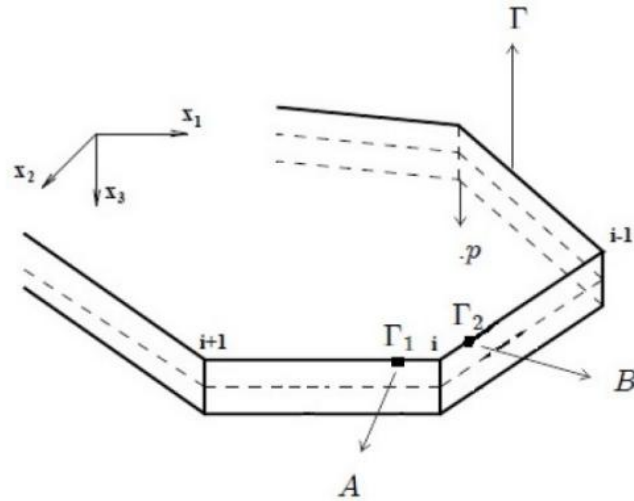


Figura 3.2 Angularidade no contorno (canto). Fonte: Autor

Por analogia ao equilíbrio do problema real dado em (2.81), a equação governante do problema fundamental fica:

$$M_{ij,jj}^*(p, q) - kw^*(p, q) + Gw_{,ii}^*(p, q) = -\delta(p, q) \quad (3.12)$$

Substituindo-se (3.12) em (3.11), seguida de uma integração por partes, resulta:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} M_{ij}(q)w_{,ij}^*(p, q)d\Omega &= [M_{ns}^*(p, q)w_{,k}(q)s_k]_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} - \\ &- \int_{\Gamma} M_{ns,k}^*(p, q)s_k w(q)d\Gamma + \int_{\Gamma} M_n^*(p, q)w_{,k}(q)n_k d\Gamma - \\ &- \int_{\Gamma} [M_{ij,j}^*(p, q) + Gw_{,i}^*(p, q)n_i]w(q)d\Gamma + \\ &+ \int_{\Omega} [-\delta(p, q) + kw^*(p, q)]w(q)d\Omega + \int_{\Omega} w_{,i}^*(p, q)w_{,i}(q)d\Omega \end{aligned} \quad (3.13)$$

A cortante equivalente de Kirchhof no contorno da placa na base de Pasternak é dada por:

$$V_n^* = Q_i^* n_i + M_{ns,k}^* s_k + Gw_{,i}^*(p, q)n_i. \quad (3.14)$$

Substituindo-se (3.14) em (3.13) fica:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} M_{ij}(q)w_{,ij}^*(p,q)d\Omega &= [M_{ns}^*(p,q)w_{,k}(q)s_k]_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} + \\
&+ \int_{\Gamma} M_n^*(p,q)w_{,k}(q)n_k d\Gamma - \int_{\Gamma} V_n^*(p,q)w(q)d\Gamma + \\
&+ \int_{\Omega} [-\delta(p,q) + kw^*(p,q)]w(q)d\Omega + \int_{\Omega} Gw_{,i}^*(p,q)w_{,i}(q)d\Omega
\end{aligned} \tag{3.15}$$

A relação recíproca de (3.15) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} M_{ij}^*(p,q)w_{,ij}(q)d\Omega &= [M_{ns}(q)w_{,k}^*(p,q)s_k]_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} + \\
&+ \int_{\Gamma} M_n(q)w_{,k}^*(p,q)n_k d\Gamma - \int_{\Gamma} V_n(q)w^*(p,q)d\Gamma + \\
&+ \int_{\Omega} [-g + kw(q)]w^*(p,q)d\Omega + \int_{\Omega} Gw_{,i}(q)w_{,i}^*(p,q)d\Omega
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Substituindo-se (3.16) e (3.15) em (3.3), resulta:

$$\begin{aligned}
&[M_{ns}^*(p,q)w_{,k}(q)s_k]_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} + \int_{\Gamma} M_n^*(p,q)w_{,k}(q)n_k d\Gamma - \\
&- \int_{\Gamma} V_n^*(p,q)w(q)d\Gamma - \int_{\Omega} \delta(p,q)w(q)d\Omega = \\
&= [M_{ns}(q)w_{,k}^*(p,q)s_k]_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} + \int_{\Gamma} M_n(q)w_{,k}^*(p,q)n_k d\Gamma - \\
&- \int_{\Gamma} V_n(q)w^*(p,q)d\Gamma - \int_{\Omega} gw^*(p,q)d\Omega
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Utilizando-se a propriedade do delta de Dirac $\int_{\Omega} \delta(p,q)f(q)d\Omega = f$ e ainda levando-se em conta que $R_c^* = -[M_{ns}^*]_{\Gamma_1}^{\Gamma_2}$ e $R_c = -[M_{ns}]_{\Gamma_1}^{\Gamma_2}$ são as reações de canto real e fundamental da placa delgada, a equação integral nos pontos de domínio é dada por:

$$\begin{aligned}
& w(q) + \int_{\Gamma} V_n^*(p, q)w(q)d\Gamma - \int_{\Gamma} M_n^*(p, q)w_{,k}(q)\eta_k d\Gamma + \\
& + R_i^*(p, q)w_i(q) = \int_{\Gamma} V_n(q)w^*(p, q)d\Gamma + \int_{\Gamma} M_n(q)w_{,k}^*(p, q)\eta_k d\Gamma + \\
& + R_i(q)w_i^*(p, q) + \int_{\Omega} g(q)w^*(p, q)d\Omega
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Onde $i = 1, 2, 3, n$ cantos, $k = 1, 2$.

Se equação (3.18) for escrita na forma aberta a equação integral para o deslocamento transversal da placa de delgada apoiada sobre a base elástica de Pasternak fica:

$$\begin{aligned}
& w(p) + \int_{\Gamma} \left[V_n^{*p}(p, q)w(q) - M_n^{*p}(p, q)\frac{\partial w}{\partial n}(q) \right] d\Gamma + \\
& + \sum_{i=1}^{N_c-1} R_{ci}^{*p}(p, q)w_{ci}(q) = \\
& = \int_{\Gamma} \left[V_n(q)w^{*p}(p, q) - M_n(q)\frac{\partial w^{*p}}{\partial n}(p, q) \right] d\Gamma + \\
& + \sum_{i=1}^{N_c-1} R_{ci}(q)w_{ci}^{*p}(p, q) + \int_{\Omega} g(p)w^{*p}(p, q)d\Omega
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Uma segunda equação integral é necessária para resolver o sistema, esta é tomada como a derivada direcional do vetor unitário $\vec{m}$ da equação (3.19) do deslocamento transversal no ponto fonte, dada por:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial w(p)}{\partial m} + \int_{\Gamma} V_{n,m}^*(p, q)w(q)d\Gamma - \\
& - \int_{\Gamma} M_{n,m}^*(p, q)\frac{\partial w}{\partial \eta} w_{,k}(q)\eta_k d\Gamma + R_{i,m}^*(p, q)w_i(q) = \\
& = \int_{\Gamma} V_n(q)w_{,m}^*(p, q)d\Gamma + \int_{\Gamma} M_n(q)w_{,km}^*(p, q)\eta_k d\Gamma + \\
& + R_i(q)w_{i,m}^*(p, q) + \int_{\Omega} g(q)w_{,im}^*(p, q)d\Omega
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Onde $i = 1, 2, 3, n$ cantos, $k = 1, 2$.

De forma análoga a equação do deslocamento (3.19), se a equação (3.20) for escrita na forma aberta fica:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial w(p)}{\partial m} + \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial V_n^{*p}}{\partial m}(p, q) w(q) - \frac{\partial M_n^{*p}}{\partial m}(p, q) \frac{\partial w}{\partial n}(p) \right] d\Gamma + \\
& + \sum_{i=1}^{N_c-1} \frac{\partial R_{c_i}^{*p}}{\partial m}(p, q) w_{c_i}(q) + \\
& = \int_{\Gamma} \left[V_n(q) \frac{\partial w^{*p}}{\partial m}(p, q) - M_n(q) \frac{\partial}{\partial m} \left[\frac{\partial w^{*p}}{\partial n}(p, q) \right] \right] d\Gamma + \\
& + \sum_{i=1}^{N_c-1} R_{c_i}(q) \frac{\partial w_{c_i}^{*p}}{\partial m}(p, q) + \int_{\Omega} g(p) \frac{\partial w^{*p}}{\partial m}(p, q) d\Omega
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Convém notar que quando a placa estiver na base de Winkler, as equações integrais (3.19) e 3.21) são validas. Apenas as soluções fundamentais da placa sobre base Pasternak devem ser ajustadas, atribuindo-se bastando $G=0$.

3.1.2 PLACA SOBRE BASE ELÁSTICA DE KERR

Diferentemente da aplicação do teorema da reciprocidade no caso da placa sobre fundação elástica de Pasternak, as equações diferenciais de placas apoiadas em fundação elástica de Kerr serão transformadas em equações integrais equivalentes utilizando o Método dos Resíduos Ponderados (MRP).

Conforme discutido no capítulo 2, as equações de equilíbrio do problema de placas delgadas apoiadas em base elástica de Kerr no ponto campo q são dadas por:

$$\begin{aligned}
& Dw_{,ijj}(q) + c(w(q) - v(q)) - g = 0 \\
& Ou \\
& -M_{ij,j}(q) + c(w(q) - v(q)) - g = 0
\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}
& -c(w(q) - v(q)) + kv(q) - Gv_{,ii}(q) = 0 \\
& Ou \\
& -c(w(q) - v(q)) + kv(q) - T_{i,i}(q) = 0
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Assumindo-se respectivamente as equações (3.22) e (3.23) como resíduos R_1 e R_2 , e ainda tomando-se funções-peso P_1 e P_2 , o MRP permite escrever a seguinte relação :

$$\int_{\Omega} R_1 P_1 + R_2 P_2 d\Omega = 0 \quad (3.24)$$

Ou

$$\int_{\Omega} \{ [-M_{ij,ij}(q) + c(w(q) - v(q)) - g] P_1 + [-c(w(q) - v(q)) + kv(q) - T_{i,i}(q)] P_2 \} d\Omega = 0 \quad (3.25)$$

Se as funções P_1 e P_2 forem tomadas respectivamente com os deslocamentos fundamentais na placa e na camada de cisalhamento devido a aplicação da fonte na placa vide Figura 2.23, a lei do resíduo ponderado dado em (3.25) fica:

$$\int_{\Omega} \{ [-M_{ij,ij}(q) + c(w(q) - v(q)) - g] w^{*p}(p, q) + [-c(w(q) - v(q)) + kv(q) - T_{i,i}(q)] v^{*p}(p, q) \} d\Omega = 0 \quad (3.26)$$

Integrando-se por partes (3.26), fica:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} [-M_{ij,i}(q) n_j w^{*p}(p, q) - T_i n_i v^{*p}(p, q)] d\Gamma + \\ & + \int_{\Omega} \{ M_{ij,i}(q) w_{,j}^{*p}(p, q) + T_i(q) v_{,i}^{*p}(p, q) + [c(w(q) - v(q)) - g] w^{*p}(p, q) \} d\Omega + \\ & + \int_{\Omega} [-c(w(q) - v(q)) + kv(q)] v^{*p}(p, q) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

Integrando-se por partes (3.27), fica:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} [-M_{ij,i}(q) n_j w_p^*(p, q) - T_i(q) n_i v_p^*(p, q) + M_{ij}(q) n_i w_{p,j}^*(p, q)] d\Gamma + \\ & + \int_{\Omega} \{ -M_{ij} w_{p,ij}^*(p, q) + G v_{p,i}^*(p, q) v_{,i} + c(w_p^*(p, q) - v_p^*(p, q)) w(q) - \\ & - c(w_p^*(p, q) - v_p^*(p, q)) v(q) + kv_p^*(p, q) v(q) - g w_p^*(p, q) \} d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

As relações recíprocas entre momentos e curvaturas dos problemas real e fundamental podem ser estabelecidas como:

$$\begin{aligned} M_{ij}(q) w_{,ij}^{*p}(p, q) = -D(1 - \nu) \left[w_{,ij}(q) w_{,ij}^{*p}(p, q) + \right. \\ \left. + \frac{\nu}{(1 - \nu)} w_{,kk}(q) w_{,jj}^{*p}(p, q) \right] = M_{ij}^{*p}(p, q) w_{,ij}(q) \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$T_i(q)v_{,i}^{*p}(p,q) = Gv_{,i}(q)v_{,i}^{*p}(p,q) = Gv_{,i}^{*p}(p,q)v_{,i}(q) = T_i^{*p}(p,q)v_{,i}(q) \quad (3.30)$$

Substituindo-se (3.30), (3.29) em (3.28) e integrando-se por partes esse resultado, fica:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} [-M_{ij,i}(q)n_j w^{*p}(p,q) - T_i(q)n_i v^{*p}(p,q) + M_{ij}(q)n_i w_{,j}^{*p}(p,q) - \\ & - M_{ij}^{*p}(p,q)n_i w_{,j}(q) - T_i^{*p}(p,q)n_i v(q)]d\Gamma + \int_{\Omega} M_{ij,i}^{*p}(p,q)w(q) d\Omega + \\ & + \int_{\Omega} [T_i^{*p}(p,q)v_{,i}(q) + c(w^{*p}(p,q) - v^{*p}(p,q))w(q) - \\ & - c(w^{*p}(p,q) - v^{*p}(p,q))v(q) + kv^{*p}(p,q)v(q) - gw^{*p}(p,q)]d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

Integrando-se (3.31) por partes fica:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} [-M(q)n_j w_p^{*p}(p,q) - T_i(q)n_i v^{*p}(p,q) + M_{ij}(q)n_i w_{,j}^{*p}(p,q) - \\ & - M_{ij}^{*p}(p,q)n_i w_{,j}(q) + T_i^{*p}(p,q)n_i v(q)]d\Gamma + \int_{\Omega} -M_{ij,ij}^{*p}(p,q)w(q) d\Omega + \\ & + \int_{\Omega} [-T_{i,i}^{*p}(p,q)v(q) + c(w^{*p}(p,q) - v^{*p}(p,q))w(q) - \\ & - c(w^{*p}(p,q) - v^{*p}(p,q))v(q) + kv^{*p}(p,q)v(q) - gw^{*p}(p,q)]d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

Utilizando um procedimento análogo ao discutido nas equações integrais de placas apoiadas em base elástica de Pasternak, as seguintes identidades podem ser escritas:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} M_{ij}(q)n_i w_{,j}^{*p}(p,q) d\Gamma = \int_{\Gamma} (M_n(q)w_{,j}^{*p}(p,q)n_j + M_{ns}(q)w_{,j}^{*p}(p,q)s_j)d\Gamma = \\ & = \int_{\Gamma} (M_n(q)w_{,j}^{*p}(p,q)n_j - M_{ns,i}(q)s_i w^{*p}(p,q))d\Gamma + [M_{ns}(q)w^{*p}(p,q)]_{\Gamma_1}^{\Gamma_1} \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} M_{ij}^{*p}(p,q)n_i w_{,j}(q) d\Gamma = \int_{\Gamma} [M_n^{*p}(p,q)w_{,j}(q)n_j + M_{ns}^{*p}(p,q)w_{,j}(q)s_j]d\Gamma = \\ & = \int_{\Gamma} [M_n^{*p}(p,q)w_{,j}(q)s_j - M_{ns,i}^{*p}(p,q)s_i w(q)]d\Gamma + [M_{ns}^{*p}(p,q)w(q)]_{\Gamma_1}^{\Gamma_1} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Substituindo-se (3.33) e (3.34) em (3.32) fica:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} [-V_n(q) w^{*p}(p, q) - T_n(q) v_p^*(p, q) + M_n(q) w_{,j}^{*p}(p, q) n_j - M_n^{*p}(p, q) w_{,i}(q) n_i + \\
& + V_n^{*p}(p, q) w(q) + T_n^{*p}(p, q) v(q)] d\Gamma - R_{ck}(q) w_k^{*p}(p, q) + R_{ck}^{*p}(p, q) w_k(q) + \\
& + \int_{\Omega} [\delta(p, q) w(q) - g w^{*p}(p, q)] d\Omega
\end{aligned} \quad (3.35)$$

Aplicando-se a propriedade de translação do delta de Dirac em (3.35) fica:

$$\begin{aligned}
w(p) + \int_{\Gamma} [V_n^{*p}(p, q) w(q) + T_n^{*p}(p, q) v(q) - M_n^{*p}(p, q) w_{,i}(q) n_i] d\Gamma + R_{ck}^{*p}(p, q) w_k(q) = \\
= \int_{\Gamma} [V_n(q) w^{*p}(p, q) + T_n(q) v^{*p}(p, q) - M_n(q) n_j w_{,j}^{*p}(p, q)] d\Gamma + R_{ck}(q) w_k^{*p}(p, q) + \\
+ \int_{\Omega} g w^{*p}(p, q) d\Omega
\end{aligned} \quad (3.36)$$

Onde $i=1,2$ e $k=1,2,\dots, n_{\text{cantos}}$

Se a equação (3.36) for escrita na forma aberta fica:

$$\begin{aligned}
w(p) + \int_{\Gamma} \left[V_n^{*p}(p, q) w(q) - M_n^{*p}(p, q) \frac{\partial w}{\partial n}(q) + T_n^{*p}(p, q) v(q) \right] d\Gamma + \\
+ \sum_{i=1}^{N_c-1} R_{ci}^{*p}(p, q) w_{ci}(q) + \\
= \int_{\Gamma} \left[V_n(q) w^{*p}(p, q) - M_n(q) \frac{\partial w^{*p}}{\partial n}(p, q) + T_n(q) v^{*p}(p, q) \right] d\Gamma + \\
+ \sum_{i=1}^{N_c-1} R_{ci}(q) w_{ci}^{*p}(p, q) + \int_{\Omega} g(p) w^{*p}(p, q) d\Omega
\end{aligned} \quad (3.37)$$

Se as funções P_1 e P_2 forem tomadas respectivamente com os deslocamentos fundamentais na placa e na camada de cisalhamento devido a aplicação da fonte na camada de cisalhamento vide Figura 2.24, a lei do resíduo ponderado dado, em (3.25) fica:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} [-M_{ij,ij}(q) + c(w(q) - v(q)) - g] w^{*c}(p, q) + \\
& + [-c(w(q) - v(q)) + kv(q) - T_{i,i}(q)] v^{*c}(p, q) d\Omega = 0
\end{aligned} \quad (3.38)$$

Se (3.38) for desenvolvida por um procedimento matemático análogo a (3.27), obtém-se a equação integral do deslocamento transversal da camada de cisalhamento dada por:

$$\begin{aligned}
v(p) + \int_{\Gamma} [V_n^{*c}(p, q) w(q) + T_n^{*c}(p, q)v(q) - M_n^{*c}(p, q)w_{,i}(q)n_i]d\Gamma + R_{ck}^{*c}(p, q)w_k(q) = \\
= \int_{\Gamma} [V_n(q) w^{*c}(p, q) + T_n(q)v^{*c}(p, q) - M_n(q)n_j w_{,j}^{*c}(p, q)]d\Gamma + R_{ck}(q)w_k^{*c}(p, q) + \\
+ \int_{\Omega} g w^{*c}(p, q)d\Omega
\end{aligned} \quad (3.39)$$

Se a equação integral de $v(p)$ for escrita na forma aberta fica:

$$\begin{aligned}
v(p) + \int_{\Gamma} \left[V_n^{*c}(p, q)w_{,i}(q) - M_n^{*c}(p, q)\frac{\partial w}{\partial n}(q) + T_n^{*c}(p, q)v(q) \right] + d\Gamma + \\
+ \sum_{i=1}^{N_c-1} R_{ci}^{*c}(p, q)w_{ci}(q) + \\
= \int_{\Gamma} \left[V_n(q)w^{*c}(p, q) - M_n(q)\frac{\partial w^{*c}}{\partial n}(p, q) + T_n(q)v^{*c}(p, q) \right] d\Gamma + \\
+ \sum_{i=1}^{N_c-1} R_{ci}(q)w_{ci}^{*c}(p, q) + \int_{\Omega} g(p)w^{*c}(p, q)d\Omega
\end{aligned} \quad (3.40)$$

Uma equação integral adicional é necessária para tornar o problema solucionável já que existem três incógnitas a serem determinadas no contorno. Assim, essa terceira representação integral pode ser obtida pela derivada de (3.36) em relação ao ponto-fonte:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w(p)}{\partial m(p)} + \int_{\Gamma} [V_{n,m}^{*p}(p, q) w(q) + T_{n,m}^{*p}(p, q)v(q) - M_{n,m}^{*p}(p, q)w_{,i}(q)n_i]d\Gamma + \\
+ R_{ck}^{*p}(p, q)w_k(q) = \int_{\Gamma} [V_n(q) w_{,m}^{*p}(p, q) + T_n(q)v_{,m}^{*p}(p, q) - \\
- M_n(q)n_j w_{,jm}^{*p}(p, q)]d\Gamma + R_{ck}(q)w_{k,m}^{*p}(p, q) + \int_{\Omega} g w_{,m}^{*p}(p, q)d\Omega
\end{aligned} \quad (3.41)$$

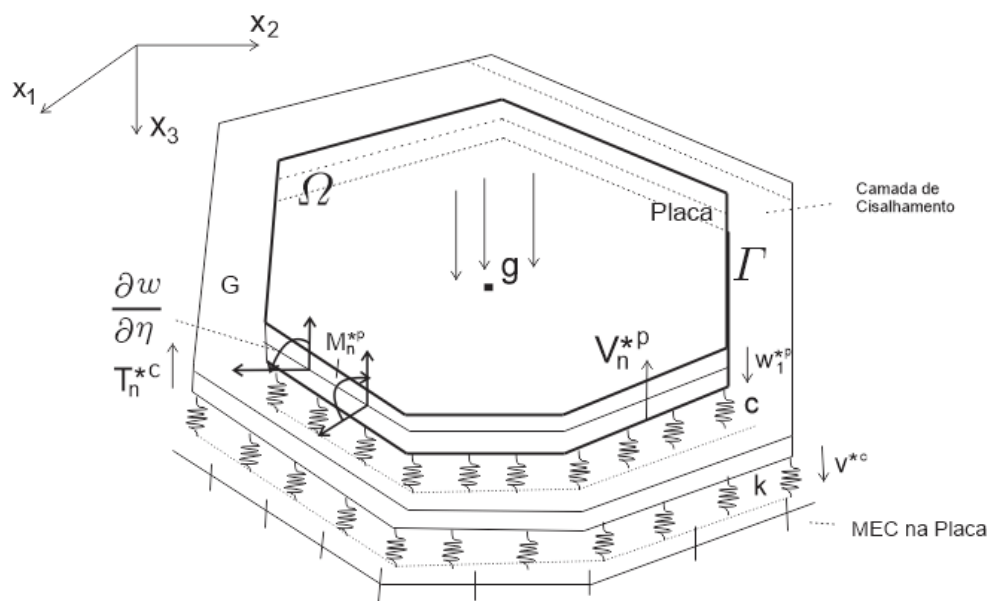


Figura 3.3: Esforços e deslocamentos sobre a base elástica de Kerr. Fonte: Autor

3.2 EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO

Para a formulação de flexão de placa através Método dos Elementos de Contorno, além das equações (3.41) e (3.42) para pontos do domínio, há necessidade da obtenção de equações integrais para pontos do contorno. Isto é necessário por que a solução numérica singular no contorno requer que o ponto fonte originalmente colocado migre para o contorno causando singularidades nas soluções fundamentais já que o raio r tende a zero.

Convém notar que parte das discussões feita neste capítulo para obtenção das equações integrais de contorno do problema de placas delgadas apoiadas na base elástica de Kerr serão desenvolvidas de forma análoga aos descrito em Paiva(1987), que estudou a aplicação do MEC em problemas de placas delgadas livres de fundação elástica.

Para isto, considere-se a Figura 3.4, onde se tem um ponto p , inicialmente no contorno; este ponto torna-se interior ao domínio pelo acréscimo de um contorno circular Γ_ξ , centrado em p , com raio ξ , e pela retirada da parcela $\bar{\Gamma}$, indicada na Figura 3.4.

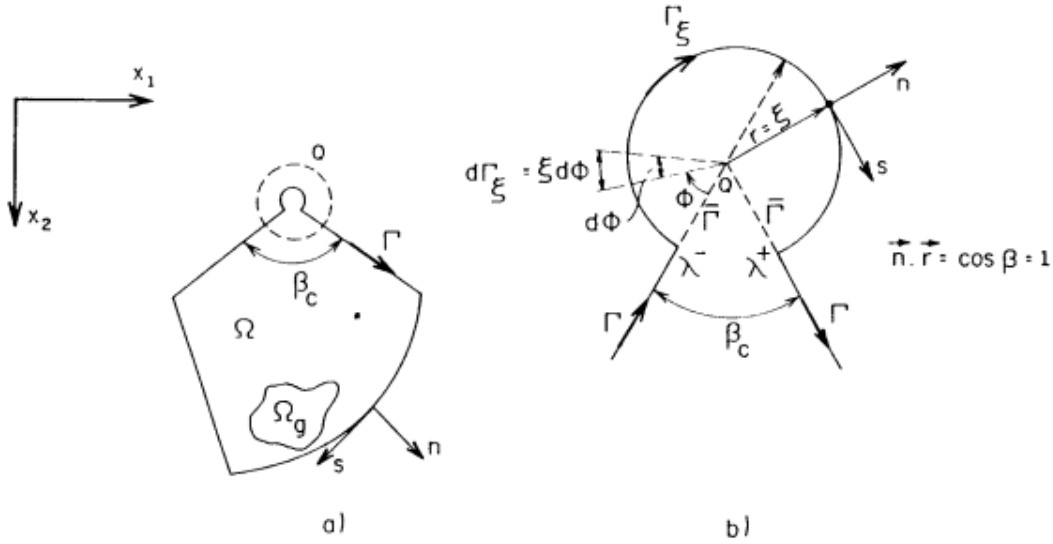


Figura 3.4 Contorno circular acrescido a um ponto p de um canto da placa. Fonte: Paiva (1987)

Após esta modificação no domínio da placa, a equação integral do deslocamento transversal na placa para o ponto p pode ser escrita, a partir de (3.50), e de forma análoga este procedimento se aplica nas equações integrais de rotação $\frac{\partial w^{*p}}{\partial n}$ e da camada de cisalhamento v^{*p} da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & w(p) + \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left[V_n^{*p}(p, q) w(q) - M_n^{*p}(p, q) \frac{\partial w}{\partial n}(q) + T_n^{*p}(p, q) v(q) \right] d\Gamma + \\
 & + \int_{\Gamma_\xi} \left[V_n^{*p}(p, q) w(q) - M_n^{*p}(p, q) \frac{\partial w}{\partial n}(q) + T_n^{*p}(p, q) v(q) \right] d\Gamma_\xi + \\
 & + \sum_{i=1}^{N_c-1} R_{ci}^{*p}(p, q) w_{ci}(q) + R_{c\lambda^-}^{*p}(p, q) w_{c\lambda^-}(q) + R_{c\lambda^+}^{*p}(p, q) w_{c\lambda^+}(q) = \\
 & = \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left[V_n(q) w^{*p}(p, q) - M_n(q) \frac{\partial w^{*p}}{\partial n}(p, q) + T_n(q) v^{*p}(p, q) \right] d\Gamma + \quad (3.42) \\
 & + \int_{\Gamma_\xi} \left[V_n(p) w^{*p}(p, q) - M_n(q) \frac{\partial w^{*p}}{\partial n}(p, q) + T_n(q) v^{*p}(p, q) \right] d\Gamma_\xi + \\
 & + \sum_{i=1}^{N_c-1} R_{ci}(p) w_{ci}^{*p}(p, q) + R_{c\lambda^-}(q) w_{c\lambda^-}^{*p}(p, q) + \\
 & + R_{c\lambda^+}^{*p}(p, q) w_{c\lambda^+}(q) + \int_{\Omega_g} g(p) w^{*p}(p, q) d\Omega
 \end{aligned}$$

Quando o ponto fonte se aproxima do contorno, implicando em $\xi \rightarrow 0$, a equação (3.42) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
& w(p) + \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \left[V_n^{*p}(p, q) w(q) - M_n^{*p}(p, q) \frac{\partial w}{\partial n}(q) + \right. \\
& \quad \left. + T_n^{*p}(p, q) v(q) \right] d\Gamma + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[V_n^{*p}(p, q) w(q) - \right. \\
& \quad \left. - M_n^{*p}(p, q) \frac{\partial w}{\partial n}(q) + T_n^{*p}(p, q) v(q) \right] d\Gamma_\xi + \\
& \quad + \sum_{i=1}^{N_c-1} R_{c_i}^{*p}(p, q) w_{c_i}(q) + \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[R_{c_{\lambda^-}}^{*p}(p, q) w_{c_{\lambda^-}}(q) + \right. \\
& \quad \left. + R_{c_{\lambda^+}}^{*p}(p, q) w_{c_{\lambda^+}}(q) \right] = \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \left[V_n(q) w^{*p}(p, q) - \right. \\
& \quad \left. - M_n(q) \frac{\partial w^{*p}}{\partial n}(p, q) + T_n(q) v^{*p}(p, q) \right] d\Gamma + \\
& \quad + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[V_n(q) w^{*p}(p, q) - M_n^{*p}(q) \frac{\partial w^{*p}}{\partial n}(p, q) + \right. \\
& \quad \left. + T_n(q) v^{*p}(p, q) \right] d\Gamma_\xi + \sum_{i=1}^{N_c-1} R_{c_i}(q) w_{c_i}^{*p}(p, q) + \\
& \quad + \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[R_{c_{\lambda^-}}(q) w_{c_{\lambda^-}}^{*p}(p, q) + R_{c_{\lambda^+}}^{*p}(p, q) w_{c_{\lambda^+}}(q) \right] + \\
& \quad + \int_{\Omega_g} g(q) w^{*p}(p, q) d\Omega
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Utilizando o conceito do valor principal das integrais em (3.43) conduzem às seguintes relações:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \left[V_n^{*p}(p, q) w(q) - M_n^{*p}(p, q) \frac{\partial w}{\partial n}(q) + T_n^{*p}(p, q) v(q) \right] d\Gamma = \\
& \quad = \int_{\Gamma} \left[V_n^{*p}(p, q) w(q) - M_n^{*p}(p, q) \frac{\partial w}{\partial n}(q) + T_n^{*p}(p, q) v(q) \right] d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \left[V_n(q) w^{*p}(p, q) - M_n(q) \frac{\partial w^{*p}}{\partial n}(p, q) + T_n(q) v^*(p, q) \right] d\Gamma = \\
& \quad = \int_{\Gamma} \left[V_n(q) w^*(p, q) - M_n(q) \frac{\partial w^*}{\partial n}(p, q) + T_n(q) v^*(p, q) \right] d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Para completar a análise da equação integral dada em (3.42) é necessário avaliar as parcelas definidas no contorno Γ_ξ . Utilizando-se o artifício de somar e subtrair deslocamentos e rotações no ponto fonte, as seguintes relações podem ser escritas:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[V_n^{*p}(p, q)w(q) - M_n^{*p}(p, q) \frac{\partial w}{\partial n}(q) + \right. \\
& \left. + T_n^{*p}(p, q)v(q) \right] d\Gamma_\xi = \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left\{ V_n^{*p}(p, q)[w(q) - w(p)] - \right. \\
& \left. - M_n^{*p}(p, q) \left[\frac{\partial w}{\partial n}(q) - \frac{\partial w}{\partial n}(p) \right] + T_n^{*p}(p, q)[v(q) - v(p)] \right\} d\Gamma_\xi + \\
& + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} V_n^{*p}(p, q)w(q) d\Gamma_\xi - \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} M_n^{*p}(p, q) \frac{\partial w}{\partial n}(q) d\Gamma_\xi + \\
& + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} T_n^{*p}(p, q)v(q) d\Gamma_\xi
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Utilizando a condição de Hölder para os deslocamentos e rotações da placa assim como deslocamentos na camada de cisalhamento, as seguintes relações podem ser escritas:

$$|w(p) - w(q)| \leq C_1 r^{\alpha_1(p,q)} \tag{3.47}$$

$$\left| \frac{\partial w}{\partial n}(p) - \frac{\partial w}{\partial n}(q) \right| \leq C_2 r^{\alpha_2(p,q)} \tag{3.48}$$

$$|v(p) - v(q)| \leq C_3 r^{\alpha_1(p,q)} \tag{3.49}$$

Onde C_1, C_2 e C_3 são constantes e $0 < \alpha_i \leq 1$, com $i=1,2$, a primeira integral de (3.46) se anula.

Substituindo-se (3.47), (3.48), (3.49) em (3.46), seguido do cálculo dos limites, resulta em:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[V_n^{*p}(p, q)w(q) - M_n^{*p}(p, q) \frac{\partial w}{\partial n}(q) + \right. \\
& \left. + T_n^{*p}(p, q)v(q) \right] d\Gamma_\xi = w(q) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} V_n^{*p}(p, q) d\Gamma_\xi - \\
& - \frac{\partial w}{\partial n}(q) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} M_n^{*p}(p, q) d\Gamma_\xi + v(q) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} T_n^{*p}(p, q) d\Gamma_\xi
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Convém notar que os esforços indicados em (3.50) são dependentes relações envolvendo funções de Bessel de segunda espécie e de ordens zero e um, $K_0(z)$ e $K_1(z)$, cujas expansões em série são dadas por:

$$K_0(z) = -\left(\frac{z}{2}\right) \cdot I_0(z) + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k! k!} (\psi(k+1) + \psi(k+2)) \right] \quad (3.51)$$

$$K_1(z) = -\left(\frac{z}{2}\right) \cdot I_1(z) + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^{-1} - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k! (k+1)!} (\psi(k+1) + \psi(k+2)) \right] \quad (3.52)$$

Onde:

$$I_m(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{k! (k+1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+m} \right] \quad (3.53)$$

Como $\xi \rightarrow 0$, então é necessário discutir como essas funções podem ser expressas em termos de pequenos argumentos, (i.e. $z \ll 1$)

$$\begin{cases} K_0(z) = -\gamma - \ln\left(\frac{z}{2}\right) \\ K_1(z) = \frac{1}{z} \end{cases} \quad (3.54)$$

Onde $\gamma=0,5772156649$ é a constante de Euler-Mascheroni.

Conforme pode ser visto na figura 3.4, o raio vetor r é coincidente com a normal do contorno do círculo auxiliar de raio de curvatura ($R = r$), tem-se que $r_i n_i = 1$, $r_i s_i = 0$, $m_i n_i = r_i m_i$, de forma que as soluções fundamentais em deslocamentos e em esforços, devido a fonte aplicada na placa, podem ser reduzidas a:

$$\frac{\partial w^{*p}}{\partial n} = \frac{dw^{*p}}{dr} \quad (3.55)$$

$$M_n^{*p} = -D \left\{ \frac{d^2 w^{*p}}{dr^2} + \frac{v}{r} \frac{dw^{*p}}{dr} \right\} \quad (3.56)$$

$$M_{ns}^{*p} = 0 \quad (3.57)$$

$$V_n^{*p} = -D(1 - \nu) \left[\frac{1}{1 - \nu} \left(\frac{d^3 w^{*p}}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w^{*p}}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw^{*p}}{dr} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{d^2 w^{*p}}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw^{*p}}{dr} \right) \right] + \frac{D(1 - \nu)}{r} \left(\frac{d^2 w^{*p}}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw^{*p}}{dr} \right) \quad (3.58)$$

$$T_n^{*p} = G \frac{dv^{*p}}{dr} \quad (3.59)$$

Além disso, as derivadas superiores w^{*p} em relação a r utilizadas nas equações (3.56), (3.57), (3.58) e (3.59), para pequenos argumentos, podem ser obtidas substituindo (3.58) nas equações w^{*p} no primeiro caso, w^{*p} no segundo caso e w^{*p} no terceiro caso. Por exemplo, para o primeiro caso das raízes, tem que:

$$\frac{dw^{*p}}{dr} = \alpha_2 \left\{ -\frac{\text{Im}}{\beta r} [\alpha_3] - \frac{\alpha_8}{r} \right\} \quad (3.60)$$

Convém notar que $\text{Im}[\alpha_3] = -\beta\alpha_8$, de forma que (3.60) resulta

$$\frac{dw^{*p}}{dr} = 0 \quad (3.61)$$

As demais derivadas ficam:

$$\frac{d^2 w^{*p}}{dr^2} = \alpha_2 \{ \alpha_8 z_1 K_{c1} + \frac{\text{Im}}{\beta} [\alpha_3 z_2 K_{c2}] \} \quad (3.62)$$

$$\frac{d^3 w^{*p}}{dr^3} = \alpha_2 \left\{ -\frac{\text{Im}}{\beta} \left[\alpha_3 \frac{z_2}{r} + \frac{\alpha_3 z_2 K_{c2}}{r} \right] - \left[\alpha_8 \frac{z_1}{r} + \frac{\alpha_8 z_1 K_{c1}}{r} \right] \right\} \quad (3.63)$$

Onde,

$$\begin{cases} \alpha = \text{Re}(z_2) \\ \beta = \text{Im}(z_2) \\ \alpha_3 = a1 = (c + k - G \cdot z_2)(2\alpha - z_1 - z_2) \\ \alpha_8 = a2 = (c + k - G \cdot z_1) \\ \alpha_2 = \frac{1}{2\pi G D [(\alpha - z_1)^2 + \beta^2]} \end{cases} \quad (3.64)$$

$$K_{c2} = -\gamma - \ln \left(\frac{r\sqrt{z_2}}{2} \right) \quad (3.65)$$

$$K_{c1} = -\gamma - \ln \left(\frac{r\sqrt{z_1}}{2} \right) \quad (3.66)$$

Já a derivada de v^{*p} em relação a r , no primeiro caso das raízes, fica:

$$\frac{dw^{*p}}{dr} = \alpha_2 c \left\{ -\frac{\text{Im}}{\beta r} [\alpha_6] - \frac{1}{r} \right\} \quad (3.67)$$

Convém notar que $\text{Im}[\alpha_6] = -\beta$, de forma que (3.78a) resulta em $\frac{dv^{*p}}{dr} = 0$.

Substituindo-se convenientemente (3.67), (3.63), (3.62) e (3.61) em (3.55) a (3.59) resulta em:

$$\frac{\partial w^{*p}}{\partial n} = T_n^{*p} = 0 \quad (3.68)$$

$$M_n^{*p} = -D\alpha_2 \left\{ \alpha_8 z_1 \left\{ \gamma - \ln \left(\frac{r\sqrt{z_1}}{2} \right) \right\} + \frac{\text{Im}}{\beta} [\alpha_3 z_2 \left\{ \gamma - \ln \left(\frac{r\sqrt{z_2}}{2} \right) \right\}] \right\} \quad (3.69)$$

$$V_n^{*p} = -D \frac{\alpha_2}{r} \left\{ -\frac{\text{Im}}{\beta} [\alpha_3 z_2] - \alpha_8 z_1 \right\} \quad (3.70)$$

Convém notar que $\text{Im}[\alpha_3 z_2] = -\beta \{ \alpha_8 z_1 + G[(\alpha - z_1)^2 + \beta^2] \}$, que quando substituída em (3.70) fica:

$$V_n^{*p} = -\frac{1}{2\pi r} \quad (3.71)$$

Substituindo-se as relações de (3.68), (3.69), (3.71) na equação (3.58), fica

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[V_n^{*p}(p, q) w(p) - M_n^{*p}(p, q) \frac{\partial w}{\partial n}(p) + \right. \\ \left. + T_n^{*p}(p, q) v(p) \right] d\Gamma_\xi = w(q) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} -\frac{1}{2\pi\xi} d\Gamma_\xi - \\ - \frac{\partial w}{\partial n}(q) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} -D\alpha_2 \left\{ \alpha_8 z_1 \left\{ \gamma - \ln \left(\frac{\xi\sqrt{z_1}}{2} \right) \right\} + \right. \\ \left. + \frac{\text{Im}}{\beta} [\alpha_3 z_2 \left\{ \gamma - \ln \left(\frac{\xi\sqrt{z_2}}{2} \right) \right\}] \right\} d\Gamma_\xi \end{aligned} \quad (3.72)$$

Sendo $d\Gamma_\xi = \xi d\phi$, a expressão (3.72) pode ser indicada na forma:

$$\begin{aligned}
\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[V_n^{*p}(p, q) w(p) - M_n^{*p}(p, q) \frac{\partial w}{\partial n}(p) + \right. \\
\left. + T_n^{*p}(p, q) v(p) \right] d\Gamma_\xi = w(p) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi}^{2\pi - \beta_c} -\frac{1}{2\pi\xi} \xi d\phi - \\
-\frac{\partial w}{\partial n}(p) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_0^{2\pi - \beta_c} -D\alpha_2 \left\{ \alpha_8 z_1 \left\{ \gamma - \ln \left(\frac{\xi \sqrt{z_1}}{2} \right) \right\} + \right. \\
\left. + \frac{\text{Im}}{\beta} [\alpha_3 z_2 \left\{ \gamma - \ln \left(\frac{\xi \sqrt{z_2}}{2} \right) \right\}] \right\} \xi d\phi
\end{aligned} \tag{3.73}$$

Onde β_c é o ângulo interno do canto da placa, indicado na Figura 3.4. Desenvolvendo-se, em (3.73), as integrais, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[V_n^{*p}(p, q) w(p) - M_n^{*p}(p, q) \frac{\partial w}{\partial n}(q) + T_n^{*p}(p, q) v(p) \right] d\Gamma_\xi = \\
= -\frac{2\pi - \beta_c}{2\pi} w(p)
\end{aligned} \tag{3.74}$$

Analogamente, as demais integrais sobre Γ_ξ indicadas em (3.74) conduzem a valores nulos, assim como ocorre com os limites das parcelas que envolvem as reações de canto R_c .

Para o segundo caso de raízes, w^{*p} e suas derivadas para argumentos muito pequenos ficam:

$$w^{*p} = \alpha_2 \left\{ \frac{a_1}{\sqrt{z_2}} + a_2 K_{c1} - a_3 K_{c2} \right\} \tag{3.75}$$

Onde

$$\begin{cases} \alpha_2 = \frac{1}{2\pi G D (z_1 - z_2)^2} \\ a_1 = \frac{(c + k - G \cdot z_2)(z_1 - z_2)}{2\sqrt{z_2}} \\ a_2 = -(c + k - G \cdot z_1) \\ a_3 = -(c + k - G \cdot z_1) \end{cases} \tag{3.76}$$

$$\frac{dw^{*p}}{dr} = -\alpha_2 \left\{ \frac{a_2}{r} - \frac{a_3}{r} + a_1 r \sqrt{z_2} K_{c2} \right\} = -\alpha_2 a_1 r \sqrt{z_2} K_{c2} \tag{3.77}$$

$$\frac{d^2 w^{*p}}{dr^2} = -\alpha_2 \left\{ -\frac{a1}{\sqrt{z_2}} z_2 + a1\sqrt{z_2} K_{c2} - a2 z_1 K_{c1} + a3 z_2 K_{c2} \right\} \quad (3.78)$$

$$\frac{d^3 w^{*p}}{dr^3} = -\frac{\alpha_2}{r} \{ a2 z_1 (1 + K_{c1}) - a3 z_2 (1 + K_{c2}) \} \quad (3.79)$$

A partir de (3.77) a (3.79), as outras soluções fundamentais sob argumentos muito pequenos ficam,

$$\frac{\partial w^{*p}}{\partial n} = -\alpha_2 a1 r \sqrt{z_2} K_{c2} \quad (3.80)$$

$$T_n^{*p} = -\alpha_2 G a1 r \sqrt{z_2} K_{c2} \quad (3.81)$$

$$M_n^{*p} = -D\alpha_2 \left\{ a2 z_1 \left\{ \gamma - \ln \left(\frac{r\sqrt{z_1}}{2} \right) \right\} + \frac{\text{Im}}{\beta} \left[-a3 z_2 \left\{ \gamma - \ln \left(\frac{r\sqrt{z_2}}{2} \right) \right\} \right] \right. \\ \left. - \frac{a1}{\sqrt{z_2}} z_2 + a1\sqrt{z_2} \left\{ \gamma - \ln \left(\frac{r\sqrt{z_2}}{2} \right) \right\} \right\} \quad (3.82)$$

$$V_n^{*p} = -D \frac{\alpha_2}{r} \left\{ a2 z_1 - a3 z_2 - \frac{a1}{\sqrt{z_2}} z_2 \right\} = -\frac{1}{2\pi r} \quad (3.83)$$

Substituindo-se (3.80) a (3.83) em (3.74), calculando-se os limites fica:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[V_n^{*p}(p, q) w(p) - M_n^{*p}(p, q) \frac{\partial w}{\partial n}(p) + T_n^{*p}(p, q) v(p) \right] d\Gamma_\xi = \\ = w(p) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi}^{2\pi - \beta_c} -\frac{1}{2\pi\xi} \xi d\phi + \frac{\partial w}{\partial n}(p) D\alpha_2 \times \\ \times \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_0^{2\pi - \beta_c} -\frac{a1}{\sqrt{z_2}} z_2 + a1\sqrt{z_2} \left\{ \gamma - \ln \left(\frac{\xi\sqrt{z_2}}{2} \right) \right\} \xi d\phi + \\ + \frac{\partial w}{\partial n}(p) D\alpha_2 \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_0^{2\pi - \beta_c} a2 z_1 \left\{ \gamma - \ln \left(\frac{\xi\sqrt{z_1}}{2} \right) \right\} + \\ + \frac{\text{Im}}{\beta} \left[-a3 z_2 \left\{ \gamma - \ln \left(\frac{\xi\sqrt{z_2}}{2} \right) \right\} \right] \xi d\phi + \\ + v(p) G\alpha_2 \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_0^{2\pi - \beta_c} a1\sqrt{z_2} \left\{ \gamma - \ln \left(\frac{\xi\sqrt{z_2}}{2} \right) \right\} \xi^2 d\phi = \\ = -\frac{2\pi - \beta_c}{2\pi} w(p) \end{aligned} \quad (3.84)$$

Se o procedimento aplicado na (3.72) for estendida para o terceiro caso de raízes, levará ao mesmo resultado mostrado nas equações (3.74) e (3.83).

Assim, tendo em vista as equações (3.44), (3.45) e (3.53), a expressão (3.43), a qual representa a equação integral para um ponto do contorno, fica:

$$\begin{aligned}
 & K(p)w(p) + \int_{\Gamma} \left[V_n^{*p}(p, q)w(q) - M_n^{*p}(p, q) \frac{\partial w}{\partial n}(q) + \right. \\
 & \left. + T_n^{*p}(p, q)v(q) \right] d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}^{*p}(p, q)w_{c_i}(q) = \\
 & = \int_{\Gamma} \left[V_n(q)w^{*p}(p, q) - M_n(q) \frac{\partial w^{*p}}{\partial n}(p, q) + T_n^{*p}(p, q)v(q) \right] d\Gamma + \\
 & + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(q)w_{c_i}^{*p}(p, q) + \int_{\Omega} g(q)w^{*p}(p, q)d\Omega
 \end{aligned} \tag{3.85}$$

$$K = \begin{cases} 1, & \text{se } p \in \Omega \\ \frac{1}{2}, & p \in \Gamma \text{ (contorno suave)} \\ 0, & p \notin \Omega \cup \Gamma \end{cases} \tag{3.86}$$

Após a inserção da região auxiliar no ponto da singularidade, a representação integral para os deslocamentos transversais da camada de cisalhamento de (3.47) passa a ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 & v(p) + \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left[V_n^{*c}(p, q)w(q) - M_n^{*c}(p, q) \frac{\partial w}{\partial n}(q) + T_n^{*c}(p, q)v(q) \right] d\Gamma + \\
 & + \int_{\Gamma_{\xi}} \left[V_n^{*c}(p, q)w(q) - M_n^{*c}(p, q) \frac{\partial w}{\partial n}(q) + T_n^{*c}(p, q)v(q) \right] d\Gamma_{\xi} + \\
 & + \sum_{i=1}^{N_c-1} R_{c_i}^{*c}(p, q)w_{c_i}(q) + R_{c_{\lambda}^-}^{*c}(p, q)w_{c_{\lambda}^-}(q) + R_{c_{\lambda}^+}^{*c}(p, q)w_{c_{\lambda}^+}(q) = \\
 & = \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left[V_n(q)w^{*c}(p, q) - M_n(q) \frac{\partial w^{*c}}{\partial n}(p, q) + T_n(q)v^{*c}(p, q) \right] d\Gamma + \\
 & + \int_{\Gamma_{\xi}} \left[V_n(q)w^{*c}(p, q) - M_n(q) \frac{\partial w^{*c}}{\partial n}(p, q) + T_n(q)v^{*c}(p, q) \right] d\Gamma_{\xi} + \\
 & + \sum_{i=1}^{N_c-1} R_{c_i}(q)w_{c_i}^{*c}(p, q) + R_{c_{\lambda}^-}(q)w_{c_{\lambda}^-}^{*c}(p, q) + \\
 & + R_{c_{\lambda}^+}^{*c}(p, q)w_{c_{\lambda}^+}(q) + \int_{\Omega_g} g(q)w^{*c}(p, q)d\Omega
 \end{aligned} \tag{3.87}$$

Empregando um procedimento análogo ao discutido para as equações integrais de contorno do deslocamento transversal da placa, as equações integrais de contorno do deslocamento transversal da camada de cisalhamento podem ser obtidas, bastando substituir pelas soluções fundamentais com ativação da fonte na camada, resultando em:

$$\begin{aligned}
 K(p)v(p) + \int_{\Gamma} \left[V_n^{*c}(p, q)w(q) - M_n^{*c}(p, q) \frac{\partial w}{\partial n}(q) + \right. \\
 \left. + T_n^{*c}(p, q)v(q) \right] d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}^{*c}(p, q)w_{c_i}(q) = \\
 = \int_{\Gamma} \left[V_n(q)w^{*c}(p, q) - M_n(q) \frac{\partial w^{*c}}{\partial n}(p, q) + T_n^{*c}(p, q)v(q) \right] d\Gamma + \\
 + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(q)w_{c_i}^{*c}(p, q) + \int_{\Omega} g(q)w^{*c}(p, q) d\Omega
 \end{aligned} \tag{3.88}$$

Onde,

$$K(Q) = \frac{\beta_c}{2\pi} \tag{3.89}$$

O termo livre pode ser escrito para diversas colocações do ponto fonte como:

$$K = \begin{cases} 1, & \text{se } p \in \Omega \\ \frac{1}{2}, & p \in \Gamma \text{ (contorno suave)} \\ 0, & p \notin \Omega \cup \Gamma \end{cases} \tag{3.90}$$

3.3 TRANSFORMAÇÃO DE EQUAÇÕES DE DOMÍNIO EM EQUAÇÕES DE CONTOURNO

As formulações puras do MEC são caracterizadas por trabalharem exclusivamente com integrais definidas no contorno. Isto implica que a discretização do problema se dá apenas no contorno, assim como a definição e interpolação das variáveis. Como resultado, obtém-se uma dos maiores atrativos do MEC, que é a redução dimensional da solução numérica em uma ordem. No entanto, em certos casos, como na presença de forças de corpo, problemas não lineares e não homogêneos,

integrais de domínio podem ser encontrados na representação integral do problema, eliminando a vantagem de redução de dimensionalidade do método. Assim, algumas técnicas necessitam ser aplicadas para lidar com essas integrais de domínio com o intuito de re-estabelecer o carácter puro às formulações do MEC. Neste trabalho será descrita uma estratégia baseada na segunda identidade Green para transformar as equações integrais de domínio decorrentes de carregamentos distribuídos constantes em equações integrais de contorno equivalentes.

Considere a Figura 5.1, na qual está representada a região Ω , seu contorno Γ e o ponto de carregamento q . Admitindo-se um sistema de coordenadas polares e utilizando as relações geométricas indicadas na Figura 5.1, as seguintes expressões podem ser escritas:

$$d\Omega = r dr d\theta \quad (3.91)$$

$$d\theta = \frac{r_{,i} n_i}{r} d\Gamma \quad (3.92)$$

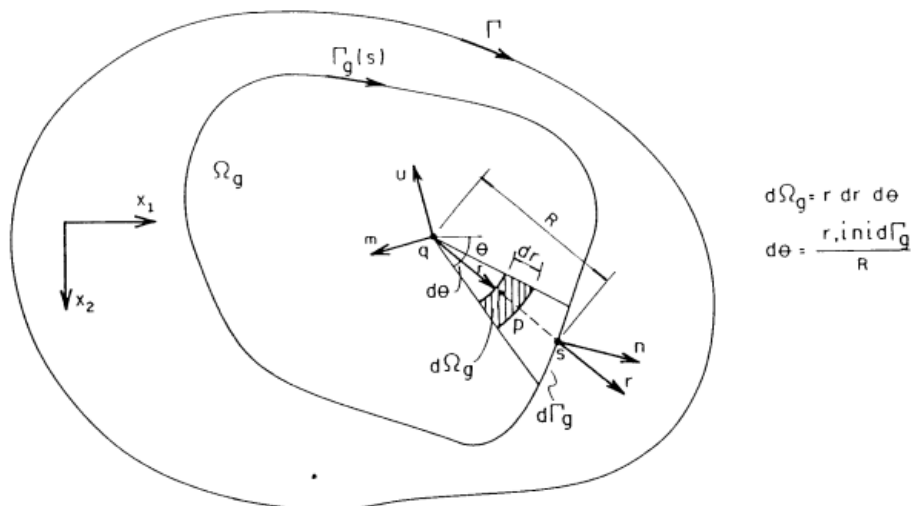


Figura 3.5 Região carregada Ω . Fonte: Paiva (1987)

Se $g(p)$ for constante, e tomando-se uma solução fundamental em deslocamento genérico w^* , dependente apenas de r , então a integral de domínio de carga, pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} g(p) w^* d\Omega = g(p) \int_{\Omega} w^* d\Omega \quad (3.93)$$

Integrando-se (3.93) em coordenadas polares, fica:

$$\int_{\Omega} g(p) w^* d\Omega = g(p) \int_0^{\theta} \int_0^r w^* r dr d\theta \quad (3.94)$$

Já a integração indefinida em r da equação (3.94) resulta em:

$$F^*(r) = \int w^* r dr \quad (3.95)$$

Ao analisar os limites de integração na equação (3.95), resulta:

$$\int_0^r w^* r dr = F^*(r) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F^*(\varepsilon) \quad (3.96)$$

Desta forma a partir (3.96), a equação (3.94) fica:

$$\int_{\Omega} g w^* r dr = g \int_0^{\theta} F^* d\theta - g \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon} F^*(\varepsilon) d\theta \quad (3.97)$$

A primeira parcela do lado direito da equação (3.96) pode ser transformada em integral de contorno, se a relação (3.95) for incorporada:

$$g \int_0^{\theta} F^* d\theta = g \int_{\Gamma} \chi^*(r) r_i n_i d\Gamma \quad (3.98)$$

Onde :

$$\chi^*(r) = \frac{F^*(r)}{r} = \frac{1}{r} \int w^* r dr \quad (3.99)$$

Já a segunda parcela do lado direito da equação (3.97), fica:

$$TL = g \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F^*(\varepsilon) \quad (3.100)$$

Onde TL é o termo livre da carga.

No caso da integral de domínio associada à equação integral das rotações (3.41), a transformação para equações do contorno pode ser feita pela derivação de (3.98) no ponto , resultando em:

$$\int_{\Omega} g(p) w_{,m}^* d\Omega = -g \int_{\Gamma} \Lambda^* d\Gamma + g \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r_j m_j \partial (r\chi)}{\partial r} \quad (3.101)$$

Onde

$$\Lambda^* = r_{,i} n_i \frac{\partial \chi^*}{\partial r} r_{,j} m_j + \chi^* \frac{\partial r_{,i} n_i}{\partial x_j} \quad (3.102)$$

A seguir serão deduzidos as soluções fundamentais χ^* e termos livres para cada um dos conjuntos de raízes:

Primeiro caso: Uma raiz real positiva e duas complexas conjugadas

Substituindo-se (2.162) em (3.99) tem-se:

$$\chi^{*p} = \frac{1}{r} \int r w^{*p} dr = -\alpha_2 \left\{ \frac{\text{Im}}{\beta} \left[\frac{\alpha_3}{z_2} \sqrt{z_2} K_1(r \sqrt{z_2}) \right] - \frac{\alpha_8}{z_1} \sqrt{z_1} K_1(r \sqrt{z_1}) \right\} \quad (3.103)$$

$$\begin{cases} \alpha = \text{Re}(z_2) \\ \beta = \text{Im}(z_2) \\ \alpha_3 = (c + k - G. z_2)(2\alpha - z_1 - z_2) \\ \alpha_8 = (c + k - G. z_1) \\ \alpha_2 = \frac{1}{2\pi G D [(\alpha - z_1)^2 + \beta^2]} \end{cases} \quad (3.104)$$

Já o valor de Λ^{*p} dado pela relação em (3.104), fica:

$$\begin{aligned} \Lambda^{*p} = & -\alpha_2 \left\{ -\frac{1}{r} (m_i n_i - r_{,i} n_i r_{,j} m_j) \left\{ \frac{\text{Im}}{\beta} \left[\frac{\alpha_3}{z_2} \sqrt{z_2} K_1(r \sqrt{z_2}) \right] - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\alpha_8}{z_1} \sqrt{z_1} K_1(r \sqrt{z_1}) \right\} + r_{,i} n_i r_{,j} m_j \left\{ \frac{\text{Im}}{\beta} \left[\alpha_3 (K_0(r \sqrt{z_2}) + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{1}{r \sqrt{z_2}} K_1(r \sqrt{z_2}) \right) \right] + \alpha_8 \left(K_0(r \sqrt{z_1}) + \frac{1}{r \sqrt{z_1}} K_1(r \sqrt{z_1}) \right) \right\} \right\} \end{aligned} \quad (3.105)$$

Substituindo-se (2.160) em (3.99) tem-se:

$$\chi^{*c} = \frac{1}{r} \int r w^{*c} dr = -\alpha_2 c \left\{ \frac{\text{Im}}{\beta} \left[\frac{\alpha_4}{z_2} \sqrt{z_2} K_1(r \sqrt{z_2}) \right] - \frac{1}{z_1} \sqrt{z_1} K_1(r \sqrt{z_1}) \right\} \quad (3.106)$$

onde

$$\begin{cases} \alpha = \text{Re}(z_2) \\ \beta = \text{Im}(z_2) \\ \alpha_4 = (2\alpha - z_1 - z_2) \\ \alpha_2 = \frac{1}{2\pi G D (z_1 - z_2) [(\alpha - z_1)^2 + \beta^2]} \end{cases} \quad (3.107)$$

Além disso, tem-se os cálculos dos termos livres para as cargas indicados na equação (3.100), o implica analisar a solução fundamental para pequenos argumentos. Então o termos livres associados a χ^{*p} e a χ^{*c} ficam:

$$\begin{aligned} K_{4p} &= g\phi \lim_{r \rightarrow 0} r \chi^{*p}(r) = g\phi \left[\lim_{r \rightarrow 0} r \alpha_2 \left\{ \frac{\text{Im} \left[\frac{\alpha_3}{\beta} \right]}{z_2 r} + \frac{\alpha_8}{z_1 r} \right\} \right] = \\ &= g\phi \left[\alpha_2 \left\{ \frac{\text{Im} \left[\frac{\alpha_3}{\beta} \right]}{z_2} + \frac{\alpha_8}{z_1} \right\} \right] \end{aligned} \quad (3.108)$$

$$\begin{aligned} K_{4c} &= g\phi \lim_{r \rightarrow 0} r \chi^{*c}(r) = g\phi \left[\lim_{r \rightarrow 0} r \alpha_2 c \left\{ \frac{\text{Im} \left[\frac{\alpha_4}{\beta} \right]}{z_2 r} + \frac{1}{z_1 r} \right\} \right] = \\ &= g\phi \left[\alpha_2 c \left\{ \frac{\text{Im} \left[\frac{\alpha_4}{\beta} \right]}{z_2} + \frac{1}{z_1} \right\} \right] \end{aligned} \quad (3.109)$$

Onde,

$$\phi = \begin{cases} 2\pi, & \text{se } p \in \Omega \\ \pi, & p \in \Gamma \text{ (contorno suave)} \\ 0, & p \notin \Omega \cup \Gamma \end{cases} \quad (3.110)$$

Segundo caso: Três raízes positivas reais com duas iguais

Substituindo-se (2.237) em (3.99) tem-se:

$$\begin{aligned} \chi^{*p} &= \frac{1}{r} \int r w^{*p} dr = -\alpha_2 a_1 \left[\frac{1}{z_2} \left(r \sqrt{z_2} K_0(r \sqrt{z_2}) \right) + 2 K_1(r \sqrt{z_2}) \right] + \\ &+ \frac{\alpha_2 a_2}{z_1} \sqrt{z_1} K_1(r \sqrt{z_1}) - \frac{\alpha_2 a_2}{z_2} \sqrt{z_2} K_1(r \sqrt{z_2}) \end{aligned} \quad (3.111)$$

Já o valor de Λ^{*p} associado a (3.111), utilizando a relação em (3.102), fica:

$$\begin{aligned} \Lambda^{*p} &= -\alpha_2 \left\{ -\frac{1}{r} (m_i n_i - r_{,i} n_i r_{,j} m_j) \left\{ \frac{a_1}{z_2} \left[r \sqrt{z_2} K_0(r \sqrt{z_2}) + 2 K_1(r \sqrt{z_2}) \right] + \right. \right. \\ &+ \frac{a_2}{z_1} \sqrt{z_1} K_1(r \sqrt{z_1}) - \frac{a_2}{z_2} \sqrt{z_2} K_1(r \sqrt{z_2}) \left. \right\} + \\ &+ r_{,i} n_i r_{,j} m_j \left\{ a_1 \left[\frac{K_0(r \sqrt{z_2})}{\sqrt{z_2}} + \frac{(z_2 r^2 + 2) K_1(r \sqrt{z_2})}{r z_2} \right] + \right. \\ &\left. \left. + a_2 \left[K_0(r \sqrt{z_1}) + \frac{1}{r \sqrt{z_1}} K_1(r \sqrt{z_1}) \right] - a_2 \left[K_0(r \sqrt{z_2}) + \frac{1}{r \sqrt{z_2}} K_1(r \sqrt{z_2}) \right] \right\} \right\} \end{aligned} \quad (3.112)$$

Onde

$$\begin{cases} \alpha_2 = \frac{1}{2\pi G D(z_1 - z_2)} \\ a_1 = \frac{(c + k - G \cdot z_2)}{2\sqrt{z_2}} \\ a_2 = \frac{(c + k - G \cdot z_1)}{(z_1 - z_2)} \end{cases} \quad (3.113)$$

Substituindo-se (2.274) em (3.99) tem-se:

$$\begin{aligned} \chi^{*c} = -\alpha_2 r_i n_i c \left\{ \frac{a_1}{z_2} [r \sqrt{z_2} K_0(r \sqrt{z_2}) + 2K_1(r \sqrt{z_2})] + \right. \\ \left. + \frac{a_2}{z_1} \sqrt{z_1} K_1(r \sqrt{z_1}) - \frac{a_2}{z_2} \sqrt{z_2} K_1(r \sqrt{z_2}) \right\} \end{aligned} \quad (3.114)$$

$$\begin{cases} \alpha_2 = \frac{1}{2\pi G D(z_1 - z_2)^2} \\ a_1 = \frac{(z_1 - z_2)}{2\sqrt{z_2}} \\ a_2 = 1 \end{cases} \quad (3.115)$$

Além disso, tem-se os cálculos dos termos livres para as cargas indicados na equação (3.100), o implica analisar a solução fundamental para pequenos argumentos. Então o termos livres associados a χ^{*p} e a χ^{*c} ficam:

$$\begin{aligned} K_{4p} = g\phi \lim_{r \rightarrow 0} r \chi^{*p}(r) = -g\phi \left[\lim_{r \rightarrow 0} r \alpha_2 \left\{ \frac{2a_1}{z_2 \sqrt{z_2} r} + \frac{a_2}{z_1 r} - \frac{a_2}{z_2 r} \right\} \right] = \\ = -g\phi \left[\alpha_2 \left\{ \frac{2a_1}{z_2 \sqrt{z_2}} + \frac{a_2}{z_1} - \frac{a_2}{z_2} \right\} \right] \end{aligned} \quad (3.116)$$

$$\begin{aligned} K_{4c} = g\phi \lim_{r \rightarrow 0} r \chi^{*c}(r) = -g\phi \left[\lim_{r \rightarrow 0} r \alpha_2 c \left\{ \frac{2a_3}{z_2 \sqrt{z_2} r} - \frac{a_4}{z_1 r} + \frac{a_4}{z_2 r} \right\} \right] = \\ = -g\phi \left[\alpha_2 c \left\{ \frac{2a_3}{z_2 \sqrt{z_2}} - \frac{a_4}{z_1} + \frac{a_4}{z_2} \right\} \right] \end{aligned} \quad (3.117)$$

Onde,

$$\phi = \begin{cases} 2\pi, & \text{se } p \in \Omega \\ \pi, & p \in \Gamma \text{ (contorno suave)} \\ 0, & p \notin \Omega \cup \Gamma \end{cases} \quad (3.118)$$

E,

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 = \frac{1}{2\pi G D(z_1 - z_2)} \\ a1 = \frac{(c + k - Gz_2)}{2\sqrt{z_2}} \\ a2 = \frac{(c + k - Gz_1)}{z_1 - z_2} \\ a3 = \frac{1}{2\sqrt{z_2}} \\ a3 = \frac{1}{z_1 - z_2} \end{array} \right. \quad (3.119)$$

Terceiro caso: Três raízes reais positivas distintas

Substituindo-se (2.274) em (3.99) tem-se:

$$\chi^{*p} = -\alpha_2 \left\{ \frac{a1\sqrt{z_3}}{z_3} K_1(r\sqrt{z_3}) + \frac{a2}{z_1} \sqrt{z_1} K_1(r\sqrt{z_1}) - \frac{a3}{z_2} \sqrt{z_2} K_1(r\sqrt{z_2}) \right\} \quad (3.120)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi^{*p}}{\partial m} = & -\alpha_2 \left\{ -\frac{1}{r} (m_i n_i - r_{,i} n_i r_{,j} m_j) \left\{ \frac{a1\sqrt{z_3}}{z_3} K_1(r\sqrt{z_3}) + \right. \right. \\ & + \frac{a2}{z_1} K_1(r\sqrt{z_1}) - \frac{a3}{z_2} K_1(r\sqrt{z_2}) \left. \right\} + \\ & + r_{,i} n_i r_{,j} m_j \left\{ a1 \left[K_0(r\sqrt{z_3}) + \frac{1}{r\sqrt{z_3}} K_1(r\sqrt{z_3}) \right] + \right. \\ & + a2 \left[K_0(r\sqrt{z_1}) + \frac{1}{r\sqrt{z_1}} K_1(r\sqrt{z_1}) \right] - a3 \left[K_0(r\sqrt{z_2}) + \frac{1}{r\sqrt{z_2}} K_1(r\sqrt{z_2}) \right] \left. \right\} \left. \right\} \end{aligned} \quad (3.121)$$

Onde

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 = \frac{1}{2\pi G D(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_2 - z_3)} \\ a1 = (z_1 - z_2)(c + k - G.z_3) \\ a2 = (c + k - G.z_1)(z_2 - z_3) \\ a3 = (z_1 - z_3)(c + k - G.z_2) \end{array} \right. \quad (3.122)$$

Substituindo-se (2.280) em (3.99) tem-se:

$$\chi^{*c} = -\alpha_2 r_i n_i c \left\{ \frac{a1\sqrt{z_3}}{z_3} K_1(r\sqrt{z_3}) + \frac{a2}{z_1} \sqrt{z_1} K_1(r\sqrt{z_1}) - \frac{a3}{z_2} \sqrt{z_2} K_1(r\sqrt{z_2}) \right\} \quad (3.123)$$

Onde

$$\begin{cases} \alpha_2 = \frac{1}{2\pi GD(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_2 - z_3)} \\ a1 = (z_1 - z_2) \\ a2 = (z_2 - z_3) \\ a3 = (z_1 - z_3) \end{cases} \quad (3.124)$$

Além disso, tem-se os cálculos dos termos livres para as cargas indicados na equação (3.100), o implica analisar a solução fundamental para pequenos argumentos. Então o termos livres associados a χ^{*p} e a χ^{*c} ficam:

$$\begin{aligned} K_{4p} &= g\phi \lim_{r \rightarrow 0} r \chi^{*p}(r) = -g\phi \left[\lim_{r \rightarrow 0} r \alpha_2 \left\{ \frac{a0}{z_3 r} + \frac{a1}{z_1 r} - \frac{a2}{z_2 r} \right\} \right] = \\ &= -g\phi \left[\alpha_2 \left\{ \frac{a0}{z_3} + \frac{a1}{z_1} - \frac{a2}{z_2} \right\} \right] \end{aligned} \quad (3.125)$$

$$\begin{aligned} K_{4c} &= g\phi \lim_{r \rightarrow 0} r \chi^{*c}(r) = -g\phi \left[\lim_{r \rightarrow 0} r \alpha_2 c \left\{ \frac{z_1 - z_2}{z_3 r} + \frac{z_2 - z_3}{z_1 r} - \frac{z_1 - z_3}{z_2 r} \right\} \right] = \\ &= -g\phi \left[\alpha_2 c \left\{ \frac{z_1 - z_2}{z_3} + \frac{z_2 - z_3}{z_1} - \frac{z_1 - z_3}{z_2} \right\} \right] \end{aligned} \quad (3.126)$$

Onde,

$$\alpha_2 = \frac{1}{2\pi GD(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_2 - z_3)} \quad (3.127)$$

E,

$$\phi = \begin{cases} 2\pi, & \text{se } p \in \Omega \\ \pi, & p \in \Gamma \text{ (contorno suave)} \\ 0, & p \notin \Omega \cup \Gamma \end{cases} \quad (3.128)$$

CAPÍTULO 4

MÉTODOS DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Neste capítulo descreve-se a construção dos sistemas algébricos utilizando-se a filosofia do MEC, em que as equações integrais de contorno são transformadas em um sistema algébrico de equações.

4.1 INTRODUÇÃO

Como é não possível obter-se a solução exata das equações integrais para a maioria dos casos de interesse prático, a alternativa é resolvê-las numericamente, transformando-as em equações algébricas. Essa transformação envolve a discretização do contorno da placa em segmentos, ditos “elementos de contorno”, sobre os quais deslocamentos e esforços são aproximados por funções previamente escolhidas, vide Figura 4.1 .

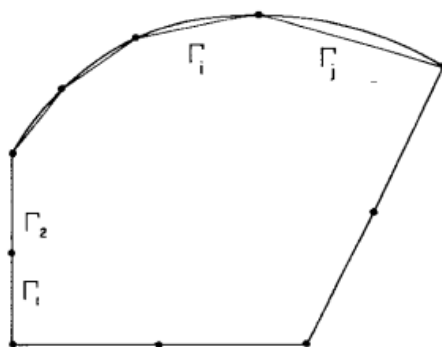


Figura 4.1 Contorno de uma placa dividida em elementos de contorno. Fonte: Paiva (1987)

As equações algébricas resultantes das transformações das equações integrais constituem um sistema de equações lineares onde as incógnitas são deslocamentos e esforços em pontos definidos sobre o contorno. Após a imposição das condições de

contorno e a resolução final do sistema de equações resultante no contorno, os valores do domínio podem ser obtidos.

4.2 EQUAÇÕES INTEGRAIS DISCRETIZADAS

Após a discretização do contorno do problema em elementos de contorno, definição de nós funcionais e a interpolação dos campos de interesse, as equações integrais (3.89) e (3.91) passam a ser escritas como:

$$\begin{aligned}
 & K(p)w(p) + \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} \{[\phi(q)]\{w_i\}_{\Gamma_k} V_n^{*p}(p, q) + \\
 & -[\phi] \left\{ \left(\frac{\partial w(q)}{\partial n} \right)_i \right\}_{\Gamma_k} M_n^{*p}(p, q) + [\phi]\{v_i(q)\}_{\Gamma_k} T_n^{*p}(p, q) \} d\Gamma + \\
 & + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}^{*p}(p, q) w_{c_i}(q) = \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} \{[\phi]\{V_{n_i}(q)\}_{\Gamma_k} w^{*p}(p, q) + \\
 & -[\phi]\{M_{n_i}(q)\}_{\Gamma_k} \frac{\partial w^{*p}}{\partial n}(p, q) + [\phi]\{T_n(q)\}_{\Gamma_k} v_i^{*p}(p, q) \} d\Gamma + \\
 & + \sum_{i=1}^{N_c} w_{c_i}^{*p}(p, q) R_{c_i}(q) + g \int_{\Gamma} \chi^{*p} r_{,i} n_i d\Gamma + K_{4p}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Onde m é o número total de elementos de contorno e N_c é o número de cantos da placa.

$$\begin{aligned}
 & K(Q)v(Q) + \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} \{[\phi(P)]\{w_i\}_{\Gamma_k} V_n^{*c}(Q, P) + \\
 & -[\phi] \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_i \right\}_{\Gamma_k} M_n^{*c}(Q, P) + [\phi]\{v_i\}_{\Gamma_k} T_n^{*c}(Q, P) \} d\Gamma(P) + \\
 & + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}^{*c}(Q, P) w_{c_i}(P) = \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} \{[\phi(P)]\{V_{n_i}\}_{\Gamma_k} w^{*c}(Q, P) + \\
 & -[\phi]\{M_{n_i}\}_{\Gamma_k} \frac{\partial w^{*c}}{\partial n}(Q, P) + [\phi]\{T_n(q)\}_{\Gamma_k} v_i^{*c}(p, q) \} d\Gamma(P) + \\
 & + \sum_{i=1}^{N_c} w_{c_i}^{*c}(Q, P) R_{c_i}(P) + g \int_{\Gamma} \chi^{*p} r_{,i} n_i d\Gamma + K_{4c}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Uma outra equação integral a ser discretizada é referente a (3,42), que quando o ponto-fonte é colocado no exterior do problema, fica reduzida a:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} \left\{ [\phi(q)] \{w_i\}_{\Gamma_k} \frac{\partial V_n^{*p}(p, q)}{\partial m} + \right. \\
& \left. - [\phi] \left\{ \left(\frac{\partial w(q)}{\partial n} \right)_i \right\}_{\Gamma_k} \frac{\partial M_n^{*p}(p, q)}{\partial m} + [\phi] \{v_i(q)\}_{\Gamma_k} \frac{\partial T_n^{*p}(p, q)}{\partial m} \right] d\Gamma + \\
& + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial R_{c_i}^{*p}}{\partial m}(p, q) w_{c_i}(q) = \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} \left\{ [\phi] \{V_{n_i}(q)\}_{\Gamma_k} \frac{\partial w^{*p}}{\partial m}(p, q) + \right. \\
& \left. - [\phi] \{M_{n_i}(q)\}_{\Gamma_k} \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{\partial w^{*p}}{\partial n} \right)(p, q) + [\phi] \{T_n(q)\}_{\Gamma_k} \frac{\partial v_i^{*p}}{\partial m}(p, q) \right] d\Gamma + \\
& + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial w_{c_i}^{*p}(p, q)}{\partial m} R_{c_i}(q) + g \int_{\Gamma} \frac{\partial \chi^{*p}}{\partial m} r_{,i} n_i d\Gamma
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Convém notar que a cada elemento de contorno associam-se um ou mais pontos denominados “nós” ou “pontos nodais” e os valores das variáveis a eles associados são denominados “valores nodais”. Os deslocamentos e esforços ao longo de cada elemento serão agora aproximados por funções polinomiais em função das quais é definido o número de pontos nodais do elemento. Assim, $[\phi(q)]\{w_i\}_{\Gamma_k}$ nas equações (4.1), (4.2) e (4.3) representa a interpolação do deslocamento transversal da placa w , isto é:

$$w = [\phi_i] \{w_i\}_{\Gamma_k} \tag{4.4}$$

Onde $[\phi_i]$ é a matriz das funções aproximadoras e $\{w_i\}_{\Gamma_k}$ é o vetor dos deslocamentos.

Além disso, os demais campos interpolados em (4.1)-(4.3) são:

$$v = [\phi_i] \{v_i\}_{\Gamma_k} \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} = [\phi_i] \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_i \right\}_{\Gamma_k} \tag{4.6}$$

$$M_n = [\phi_i] \{M_{n_i}\}_{\Gamma_k} \tag{4.7}$$

$$V_n = [\phi_i] \{V_{n_i}\}_{\Gamma_k} \tag{4.8}$$

$$T_n = [\phi_i] \{T_{n_i}\}_{\Gamma_k} \tag{4.9}$$

Onde $\left\{\left(\frac{\partial w(q)}{\partial n}\right)_i\right\}_{\Gamma_k}$, $\{v_i(q)\}_{\Gamma_k}$, $\{M_{ni}(q)\}_{\Gamma_k}$, $\{V_{ni}(q)\}_{\Gamma_k}$ e $\{T_{ni}(q)\}_{\Gamma_k}$, a exemplo de $\{w_i(q)\}_{\Gamma_k}$ são os valores nodais dos deslocamentos e esforços da placa e da camada de cisalhamento.

4.3 SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

As equações integrais discretizadas, para um ponto genérico q do contorno, é agora transformada em uma equação algébrica, pelo cálculo apropriado das integrais envolvidas. Assim, após o cálculo das integrais em (4.1) e (4.2), obtém-se:

$$a_i w_i + b_i \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_i + \hat{b}_i v_i = c_i V_{ni} + d_i M_{ni} + \hat{d}_i T_{ni} + f_k R_{ck} + P, \quad i=1, npn; k=1, N_c \quad (4.10)$$

$$a_i v_i + b_i \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_i + \hat{b}_i v_i = c_i V_{ni} + d_i M_{ni} + \hat{d}_i T_{ni} + f_k R_{ck} + P, \quad i=1, npn; k=1, N_c \quad (4.11)$$

Onde a repetição de índices indica somatório, n_{pn} é o número de pontos nodais do contorno e N_c é o número de cantos da placa.

Neste trabalho, optou-se por colocar a fonte em um ponto genérico no exterior da placa nas equações integrais discretizadas referentes ao canto e rotações no contorno da placa. Quando suas integrações requeridas forem efetuadas, tem-se as seguinte equações algébricas:

$$a''_i w_i + b''_i \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_i + \hat{b}''_i v_i = c''_i V_{ni} + d''_i M_{ni} + \hat{d}''_i T_{ni} + f''_k R_{ck} + P'', \quad i=1, npn; k=1, N_c \quad (4.12)$$

$$a'''_i w_i + b'''_i \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_i + \hat{b}'''_i v_i = c'''_i V_{ni} + d'''_i M_{ni} + \hat{d}'''_i T_{ni} + f'''_k R_{ck} + P''', \quad i=1, npn; k=1, N_c \quad (4.13)$$

Assim, quando equações algébricas similares (4.10),(4.11),(4.12), (4.13) forem escritas para todos os nós de contorno e cantos, o sistema algébrico de toda estrutura pode ser escrito, matricialmente, da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} H_{\Gamma\Gamma} & H_{\Gamma C} \\ H_{C\Gamma} & H_{CC} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_{\Gamma} \\ u_C \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} G_{\Gamma\Gamma} & G_{\Gamma C} \\ G_{C\Gamma} & G_{CC} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} p_{\Gamma} \\ p_C \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B_{\Gamma} \\ B_C \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{3n_{\Gamma}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{3n_C} \qquad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{3n_{\Gamma}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{3n_C}$

Onde n_{Γ} é o número de nós de contorno, e n_C é o número de nós de cantos.

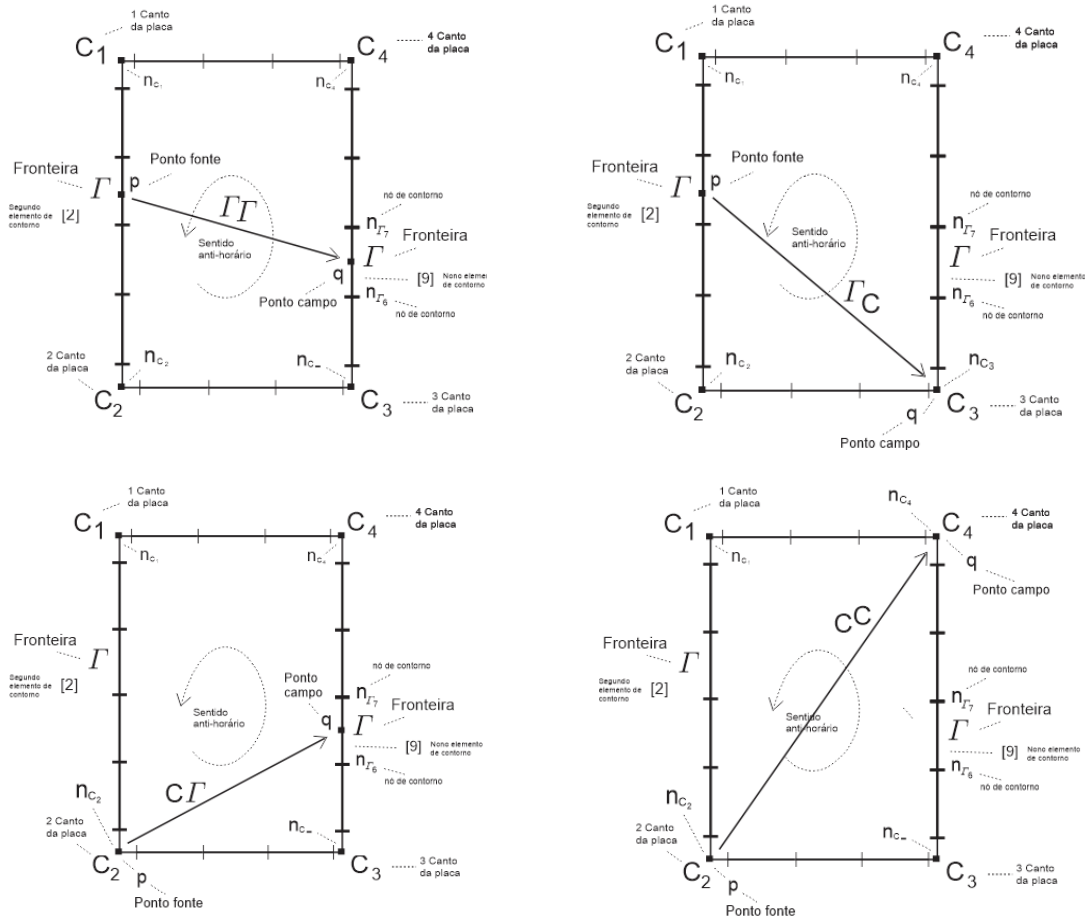


Figura 4.2 Sistema de equações integrais aplicadas no ponto fonte p com resultado no ponto campo q. Fonte: Autor.

O sistema de equações (4.41) pode ser escrita na forma compactada da seguinte forma:

$$[H^*] \{W_{\Gamma}\} = [G] \{V_{\Gamma}\} + \{P\} \quad (4.15)$$

A imposição das condições de contorno e a resolução do sistema final de equações, bem como a obtenção de deslocamentos e das rotações para pontos do domínio, serão apresentadas na próxima seção.

4.4 CONDIÇÕES DE CONTORNO

Ao sistema de equações (4.16),

$$[H] \{W_R\} = [G] \{V_R\} + [F] \{R_C\} + \{P\} \quad (4.16)$$

devem ser impostas as condições de contorno da placa. Para cada nó existem seis variáveis: $w, \frac{\partial w}{\partial n}, v, V_n, M_n$ e T_n , três das quais são sempre conhecidas. De um modo geral, quando um deslocamento $(w, \frac{\partial w}{\partial n}, v)$ é conhecido, o esforço correspondente $(V_n, M_n$ e $T_n)$ é conhecido e vice-versa. No caso das vinculações clássicas de placas – apoio, engaste e borda livre – têm-se:

- Borda simplesmente apoiada

$$\begin{cases} w = M_n = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial n} \text{ e } V_n \text{ desconhecidos} \\ v = T_n = 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

Borda engastada

$$\begin{cases} w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \\ M_n \text{ e } V_n \text{ desconhecidos} \\ v = 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

Borda livre

$$\begin{cases} M_n = V_n = 0 \\ w = \frac{\partial w}{\partial n} \text{ desconhecidos} \\ T_n = 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

Portanto, após a imposição das condições de contorno, têm-se em cada nó duas equações e duas incógnitas, exceto nos nós dos cantos, onde aparece também, como incógnita, a reação de canto da placa R_C .

4.5 TIPOS DE ELEMENTOS UTILIZADOS

Neste trabalho serão utilizados dois tipos de elementos para interpolar linearmente as variáveis da placa: a) elemento reto e b) elemento circular, vide Figuras 4.1.

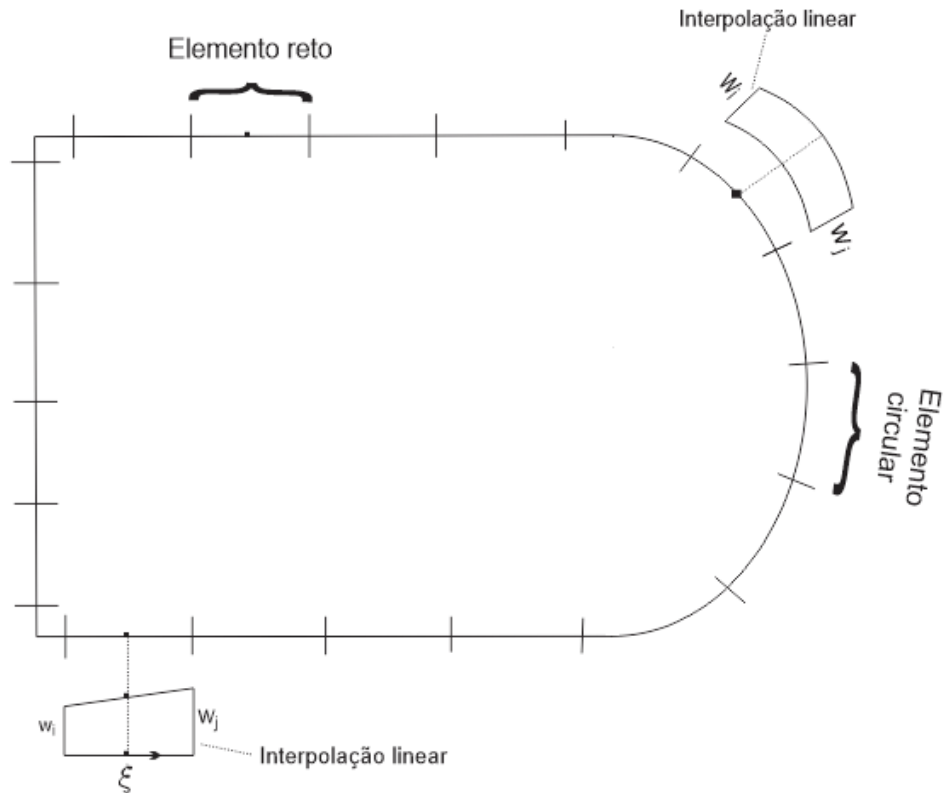


Figura 4.3 Elementos retos e curvos. Fonte: Autor

Considerando que os deslocamentos e esforços variam linearmente ao longo de cada elemento, os valores para quaisquer outros pontos sobre o elemento são obtidos a partir dos valores nodais posicionados em suas extremidades com o uso das funções aproximadoras, conforme indicado na figura 4.4.

$$w = [\phi_1 \ \phi_2] \begin{Bmatrix} w_i \\ w_j \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

$$v = [\phi_1 \ \phi_2] \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \end{Bmatrix} \quad (4.21)$$

$$T_n = [\phi_1 \ \phi_2] \begin{Bmatrix} T_{ni} \\ T_{nj} \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

$$T_n = [\phi_1 \ \phi_2] \begin{Bmatrix} T_{ni} \\ T_{nj} \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

$$V_n = [\phi_1 \ \phi_2] \begin{Bmatrix} V_{ni} \\ V_{nj} \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

$$M_n = [\phi_1 \ \phi_2] \begin{Bmatrix} M_{ni} \\ M_{nj} \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

Onde

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{2}(1 - \xi) \\ \phi_2 &= \frac{1}{2}(1 + \xi) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Onde i e j são os nós associados ao elemento de contorno genérico k , e n_k é o vetor normal a este elemento.

4.5.1 ELEMENTO RETO

Seja um elemento reto com nós funcionais definidos em suas extremidades conforme mostrado na Figura 4.4

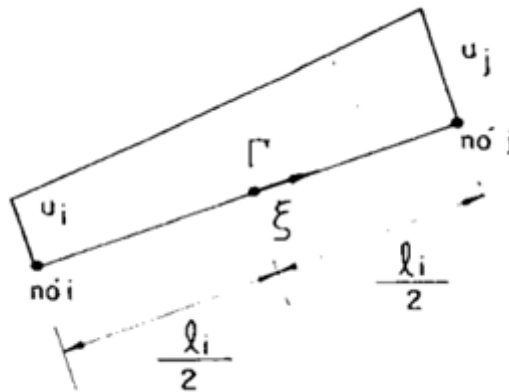


Figura 4.4 Elementos de contorno linear contínuo.

Certas propriedades geométricas de interesse do elemento reto são necessárias nas integrações das soluções fundamentais ponderadas pelas funções aproximadoras, vide figura 4.5:

a) Comprimento do elemento

$$L = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad (4.27)$$

b) Coordenadas do ponto campo q

$$\begin{aligned}x_q &= x_i\phi_i + x_j\phi_j \\y_q &= y_i\phi_i + y_j\phi_j\end{aligned}\tag{4.28}$$

c) Comprimento do raio vetor (distancia entre ponto campo q e ponto fonte p)

$$r = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2}\tag{4.29}$$

d) Cossenos diretores do raio vetor

$$\begin{aligned}r_{,1} &= \frac{x_q - x_p}{r} \\r_{,2} &= \frac{y_q - y_p}{r}\end{aligned}\tag{4.30}$$

e) Cossenos diretores do elemento

$$\begin{aligned}s_1 &= \frac{x_j - x_i}{r} \\s_2 &= \frac{y_j - y_i}{r}\end{aligned}\tag{4.31}$$

f) Cossenos diretores da normal ao elemento

$$\begin{aligned}n_1 &= \frac{y_j - y_i}{r} \\n_2 &= -\frac{x_j - x_i}{r}\end{aligned}\tag{4.32}$$

g) Funções interpoladoras

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{1}{2}(1 - \xi) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2s}{L}\right) \\ \phi_2 &= \frac{1}{2}(1 + \xi) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2s}{L}\right)\end{aligned}\tag{4.33}$$

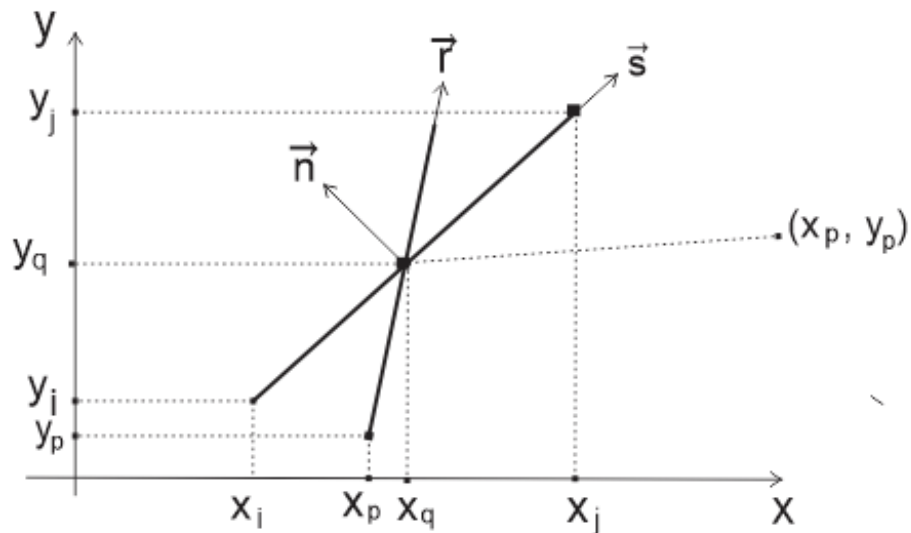


Figura 4.5 Elemento reto . Fonte: Autor

4.5.2 ELEMENTO CIRCULAR COM INTERPOLAÇÃO LINEAR

Seja um elemento circular com dois nós funcionais, em que as variáveis do problema serão aproximadas linearmente, vide figura 4.6.

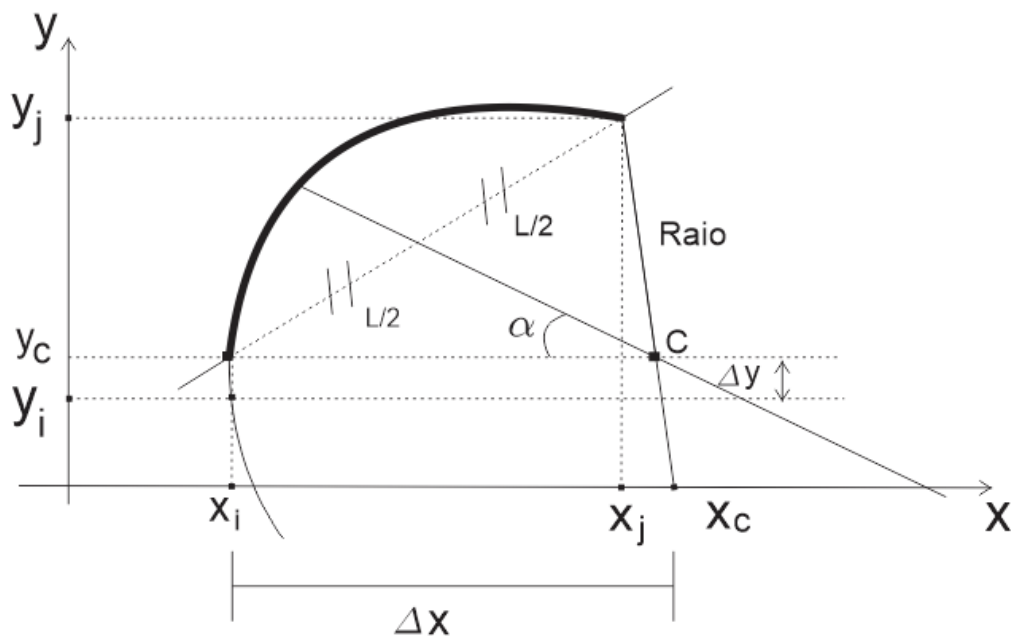


Figura 4.6 Elemento circular. Fonte: Autor

No elemento circular as propriedades geométricas de interesse são:

- Diferencial da projeção do ponto C as coordenadas do eixo xy.

$$\begin{aligned}\Delta x &= (x_c - x_i) = \eta_0 \left[-\text{fat} \sqrt{(\text{Raio})^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} \right] - \eta_1 \cdot \frac{L}{2} \\ \Delta y &= (y_c - y_i) = \eta_1 \left[-\text{fat} \sqrt{(\text{Raio})^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} \right] - \eta_0 \cdot \frac{L}{2}\end{aligned}\quad (4.34)$$

b) Tangente formado pela reta que passa em C com a coordenada cartesiana

$$\alpha = 2 \arcsen\left(\frac{L}{2 \text{ Raio}}\right) \quad (4.35)$$

c) Coordenadas do ponto centro do círculo

$$\begin{aligned}x_c &= x_i + \Delta x \\ y_c &= y_i + \Delta y\end{aligned}\quad (4.36)$$

d) Coordenada do ponto campo q

$$\begin{aligned}x_q &= \cos(\eta\alpha \cdot \text{fat})(x_i - x_c) - \sin(\eta\alpha \cdot \text{fat})(y_i - x_c) + x_c \\ y_q &= \cos(\eta\alpha \cdot \text{fat})(y_i - x_c) - \sin(\eta\alpha \cdot \text{fat})(x_i - x_c) + y_c\end{aligned}\quad (4.37)$$

e) Cossenos diretores da normal ao elemento circular

$$\begin{aligned}n_1 &= \frac{x_q - x_c}{\text{inc3}} \cdot \text{fat} \\ n_2 &= \frac{y_q - y_c}{\text{inc3}} \cdot \text{fat}\end{aligned}\quad (4.38)$$

4.6 MONTAGEM DAS MATRIZES [H] E [G]

Nos itens anteriores, foi mostrada a obtenção do sistema de equações lineares, (4.15), para os elementos retos e circular que relaciona esforços e deslocamentos dos nós do contorno interpolados linearmente. Embora as matrizes envolvidas nestas equações estejam bem definidas, a determinação de cada termo preciso ser analisada.

Para se obter esses valores deve-se calcular, para cada elemento de contorno, integrais do tipo:

$$I = \int_{\Gamma_k} \phi(P) \phi^*(Q, P) d\Gamma_k(P) \quad (4.39)$$

Onde $\phi(P)$ é a função aproximadora dos deslocamentos e esforços no contorno e $\phi^*(Q, P)$ é a solução fundamental. Nesta integração podem ocorrer duas situações distintas. Considere-se a figura 4.8, onde estão indicados o elemento de contorno linear contínuo, K, sobre o qual se está calculando a integral, e as possíveis posições do ponto de carregamento, coincidente ou não com um dos nós do elemento.

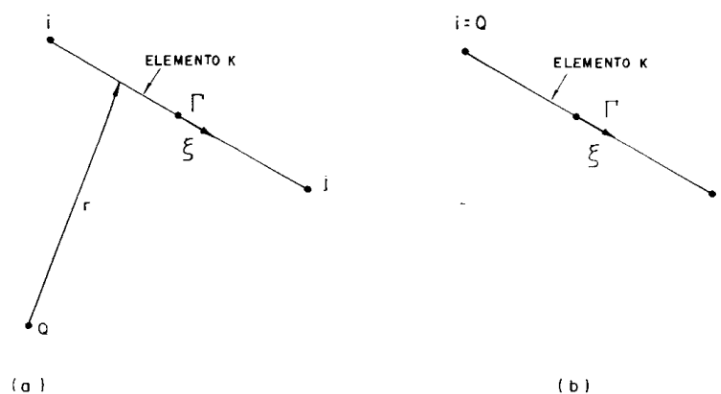


Figura 4.7 Posições possíveis para o ponto Q: a) Fora do elemento; b) Coincidente com um dos nós do elemento. Fonte: Paiva(1987)

Para o caso do ponto Q não pertencer ao elemento K (figura 4.3.a), não existem singularidades e, portanto, as integrais podem ser calculadas, numericamente ou não, no sentido usual de integração. O mesmo não ocorre quando o ponto P coincide com um dos nós do elemento, pois aparecem singularidades do tipo $1/r$ e $1/r^2$ e, apenas no sentido de valor principal de Cauchy, essas integrais podem ser calculadas. Para os dois casos, a integral pode ser calculada analítica ou numericamente; entretanto, do ponto de vista da automatização de cálculo, é conveniente que as integrais não singulares sejam calculadas numericamente e as singulares, analiticamente. O cálculo numérico geralmente é feito usando-se Quadratura de Gauss.

CAPÍTULO 5

APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Nesta seção são apresentadas algumas aplicações numéricas a fim de investigar tanto o desempenho quanto a aplicabilidade da presente formulação.

5.1 Placa quadrada submetida com diversas rigidezes na base elástica de Kerr

Seja uma placa quadrada com lado $a=5\text{m}$, espessura $h = 10\text{ cm}$, submetida a um carregamento distribuído de $g = 3\text{kN/m}^2$. As seguintes propriedades são assumidas para a placa: módulo de elasticidade da $E = 25000000\text{ kN/m}^2$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$. Já para a fundação elástica os parâmetros mecânicos são assumidos na forma adimensionalizada $\hat{c} = \alpha = \frac{ca^4}{D}$, $\hat{k} = \beta = \frac{ka^4}{D}$ e $\hat{G} = \gamma = \frac{Ga^2}{D}$. Neste exemplo é utilizada a discretização mais rica com 64 elementos de contorno lineares nas análises, vide Figura 5.9. Os resultados numéricos (MEC) e analíticos para os deslocamentos da placa no centro da placa são mostrados nas Figuras 5.1 e 5.2.

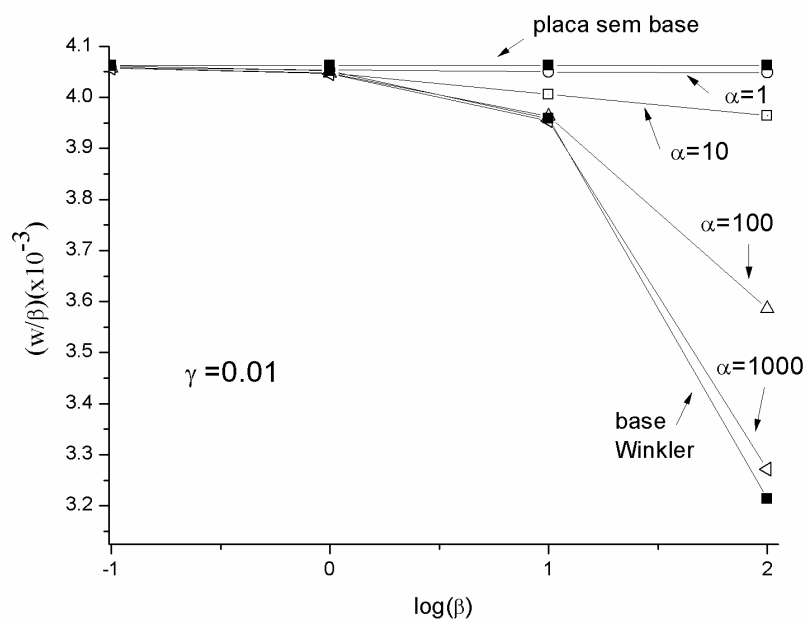


Figura 5.1 Deslocamento $\hat{w}$ no ponto central considerando $\hat{G} = 0.01$

No caso de pequenos coeficientes adimensionalizados $\hat{G} = \gamma$, os resultados do MEC da placas delgadas sobre a base de Kerr podem ser utilizados para representar placas sem base elástica se valores suficientemente pequenos de $\hat{c} = \alpha$ forem utilizados conforme mostrado na Figura 5.1. Por outro lado, outra situação limite é associada ao modelo de placa sobre base de Winkler, cuja representação pode ser obtida se valores suficientemente maiores de $\hat{c} = \alpha$ forem atribuídos às soluções fundamentais. Além disso, convém notar que as curvas de “placa sem base” e “base Winkler” na Figura 5.1 foram obtidas por soluções analíticas, já que valores exatamente nulos para $\hat{c} = \alpha$ degeneram os casos de raízes do polinômio característico demandados nas soluções fundamentais.

Se a base elástica de Kerr tiver $\hat{G} = \gamma$ com valores não-desprezíveis, um comportamento das soluções do MEC para sistema pode ser representado como na Figura 5.2.

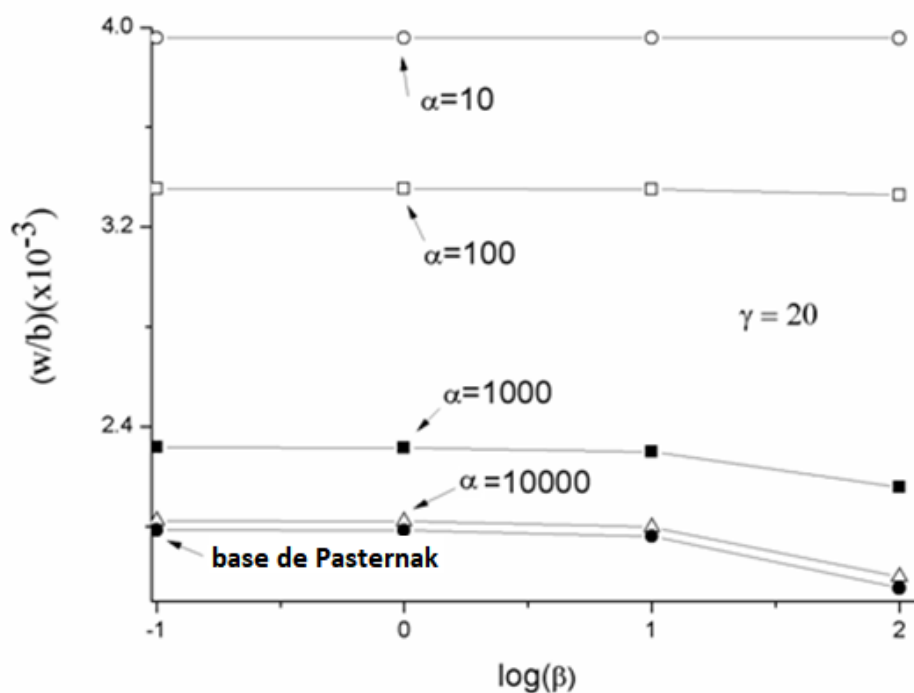


Figura 5.2 Deslocamento $\hat{w}$ no ponto central considerando $\hat{G} = 20$

Neste caso, se os valores de $\hat{c} = \alpha$ forem suficientemente acrescidos, os resultados da placa na base de Kerr tendem à placa sobre base de Pasternak, conforme mostrado na Figura 5.2.

5.2 Placa quadrada submetida a carregamentos combinados

Seja uma placa quadrada com lado $a=5\text{m}$, espessura $h = 10\text{ cm}$, submetida a um carregamento distribuído de $g = 3\text{ kN/m}^2$ e a um conjunto de cargas concentradas, $P_1 = 50\text{ kN}$ e $P_2 = 70\text{ kN}$, localizadas na placa conforme indicado na Figura 5.3. Para produzir o terceiro caso das raízes do polinômio característico (três raízes positivas distintas), foram adotadas as seguintes propriedades para a placa: módulo de elasticidade da $E = 25000000\text{ kN/m}^2$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$. Já para a fundação elástica os parâmetros mecânicos foram assumidos como $c = 208000\text{ kN/m}^2$, $k = 20800\text{ kN/m}^2$ e $G = 4160\text{ kN/(rad m)}$. Neste exemplo é utilizada a discretização de 32 elementos de contorno lineares nas análises, vide Figura 5.9-c. Os resultados numéricos (MEC) e analíticos para os deslocamentos da placa e da camada de cisalhamento ao longo do eixo central são mostradas no Quadro 5.1. Além disso, na Figura 5.5 são mostrados os erros relativos entre as soluções do MEC e as respostas analíticas para os deslocamentos da placa nas coordenadas $x=1,875\text{ m}$ e $4,375\text{ m}$ ao longo da linha central em função das malhas. Já os deslocamentos da camada de cisalhamento ao longo da linha central na direção x em função das malhas são mostrados no Quadro 5.2, enquanto os resultados das inclinações são mostradas na Figura 5.5.

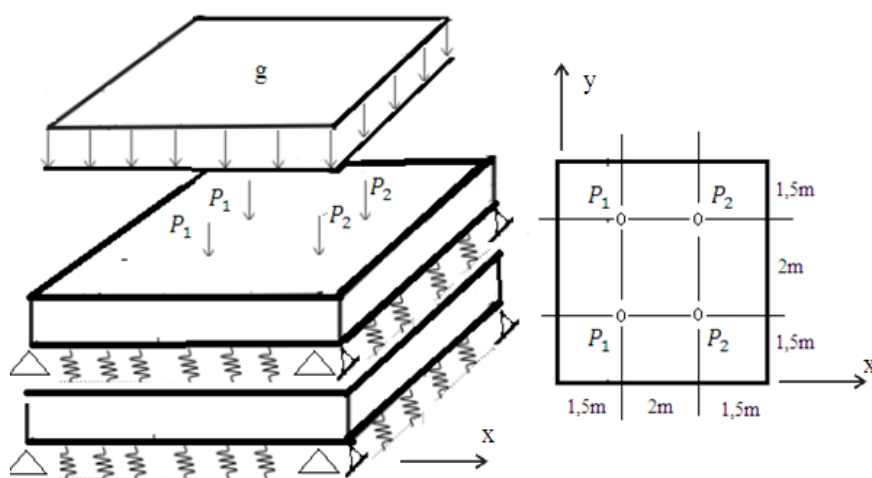


Figura 5.3 Placa sobre base de Kerr sob carregamentos combinados

Quadro 5.1 Deslocamentos $w(x10^{-4}m)$ da placa ao longo da linha central

$\frac{x}{a}$	$w(x10^{-4}m)$ MEC-8	$w(x10^{-4}m)$ MEC-16	$w(x10^{-4}m)$ MEC-32	$w(x10^{-4}m)$ MEC-64	$w(x10^{-4}m)$ Exata
0,125	2,6441	2,7343	2,7369	2,7365	2,7363
0,250	5,4771	5,5081	5,5093	5,5093	5,5093
0,375	5,4744	5,4830	5,4834	5,4834	5,4834
0,500	4,5654	4,5702	4,5704	4,5704	4,5730
0,625	6,7791	6,7897	6,7901	6,7901	6,7901
0,75	7,0254	7,0641	7,0653	7,0653	7,0653
0,875	3,2407	3,3522	3,3551	3,3545	3,3542

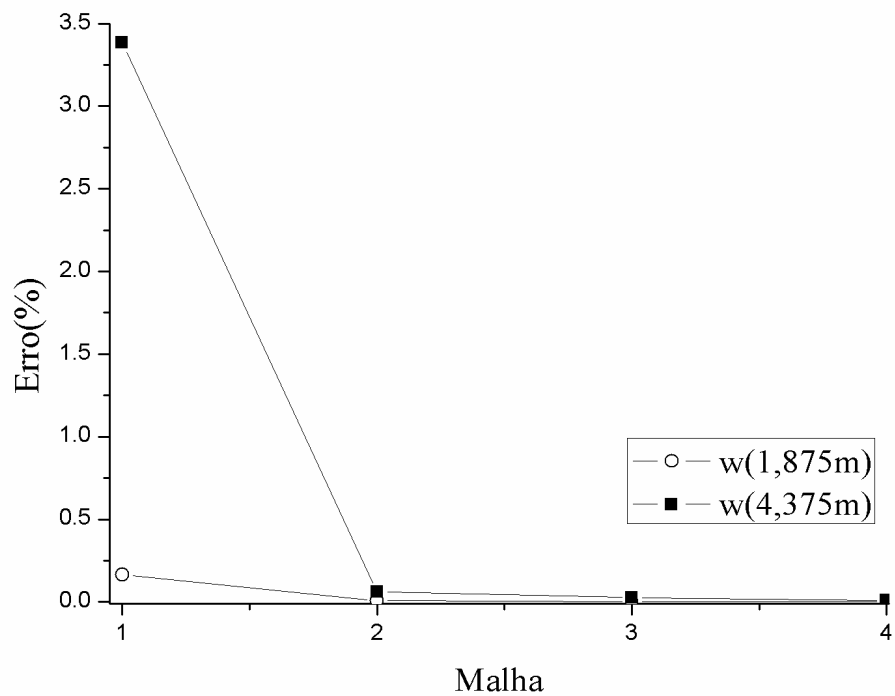


Figura 5.4 Erros relativos dos deslocamentos da placa em função das malhas

Quadro 5.2 Deslocamentos $v(x10^{-4}m)$ da camada de cisalhamento ao longo da linha central na direção x

$\frac{x}{a}$	MEC-8	MEC-16	MEC-32	MEC-64	Exata
0,125	2,5414	2,6232	2,6252	2,6250	2,6249
0,250	5,2930	5,3245	5,3257	5,3257	5,3257
0,375	5,3322	5,3413	5,3417	5,3417	5,3416
0,500	4,5090	4,5141	4,5143	4,5143	4,5170
0,625	6,6229	6,6341	6,6345	6,6345	6,6346
0,75	6,8236	6,8629	6,8641	6,8641	6,8641
0,875	3,1524	3,2535	3,2556	3,2553	3,2551

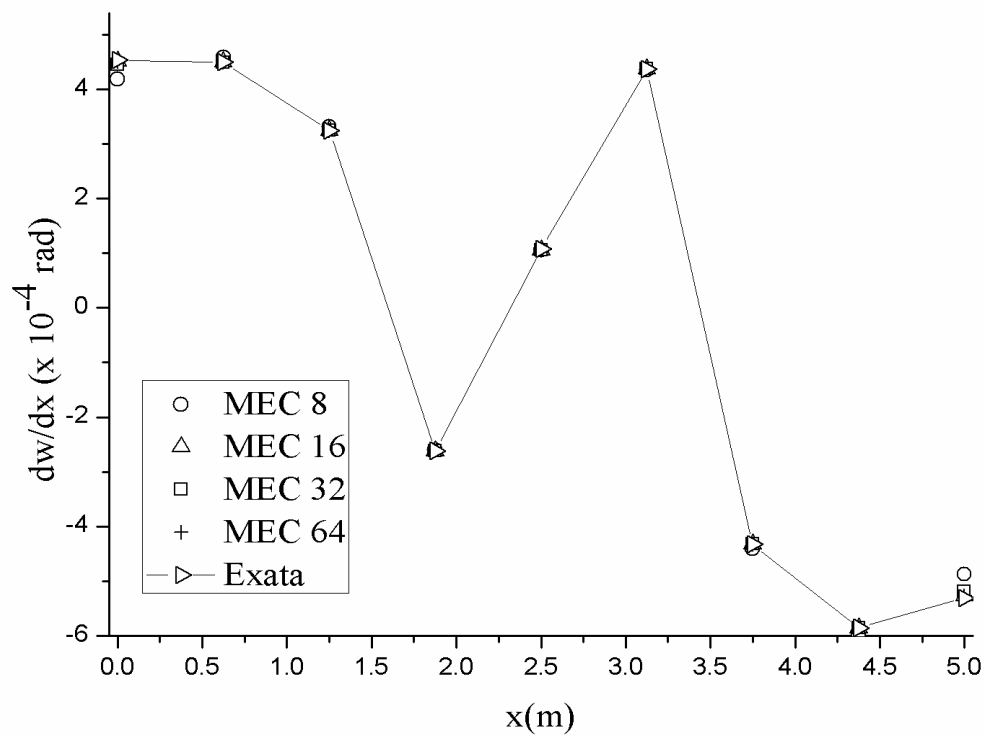


Figura 5.5 Inclinações $\frac{dw}{dx}$ ao longo de uma linha central

A partir das Quadros 5.1 e 5.2, Figuras 5.4 e 5.5, pode-se notar um bom desempenho do MEC frente às soluções analíticas, mesmo nos casos de discretizações mais pobres Tipo1 e Tipo2 da Figura 5.9.

5.3 Placa quadrada submetida a carregamento concentrado em seu centro

Seja uma placa quadrada com lado $a=1\text{m}$, espessura $h = 10\text{ cm}$, submetida a um carregamento concentrado de $P = 1000\text{ kN}$ em seu centro, apoiada sobre uma base de Kerr, conforme mostrada na Figura 5.6. Para produzir o segundo caso das raízes do polinômio característico (três raízes positivas, sendo duas iguais), foram utilizadas as seguintes valores para a placa: módulo de elasticidade da $E = 25000000\text{ kN/m}^2$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$. Já para a fundação elástica os parâmetros mecânicos foram assumidos como $c = 88454,915\text{ kN/m}^2$, $k = 8845,4915\text{ kN/m}^2$ e $G = 176,9098\text{ kN/(rad m)}$. Neste exemplo são utilizadas quatro discretizações (Tipo1, Tipo2, Tipo3, Tipo 4) associadas respectivamente a 8, 16, 32 e 64 elementos de contorno lineares nas análises, vide Figura 5.9.

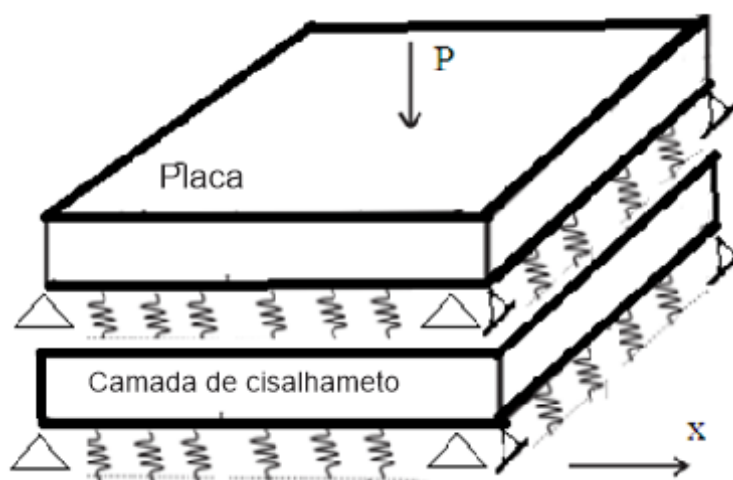


Figura 5.6 Placa sobre base de Kerr sob carregamento concentrado em seu centro.

Fonte: Autor

Os resultados numéricos (MEC) com 32 elementos e analíticos adimensionalizados para os deslocamentos da placa $\hat{w} = \frac{wD}{Pa^2}$ e da camada de cisalhamento $\hat{v} = \frac{vD}{Pa^2}$ ao longo do eixo central são mostradas no Quadro 5.3. Já na Figura 5.7 é mostrado um estudo de convergência para os deslocamentos adimensionalizados para o ponto de coordenadas $(a/4; a/2)$.

Quadro 5.3 Deslocamentos adimensionalizados da placa e da camada de cisalhamento ao longo da linha central usando a malha Tipo3

$\frac{x}{a}$	$\hat{w}(x10^{-5})$ MEC	$\hat{w}(x10^{-5})$ Exata	$\hat{v}(x10^{-5})$ MEC	$\hat{v}(x10^{-5})$ Exata	<i>erro</i> $\hat{w}$ (%)	<i>erro</i> $\hat{v}$ (%)
0,125	5,385	5,388	5,396	5,398	0,0638	0,012
0,250	18,429	18,431	17,505	17,506	0,0049	0,0030
0,375	51,847	51,847	44,163	44,164	0,0014	0,0018
0,500	100,23	100,23	70,196	70,198	0,0049	0,003

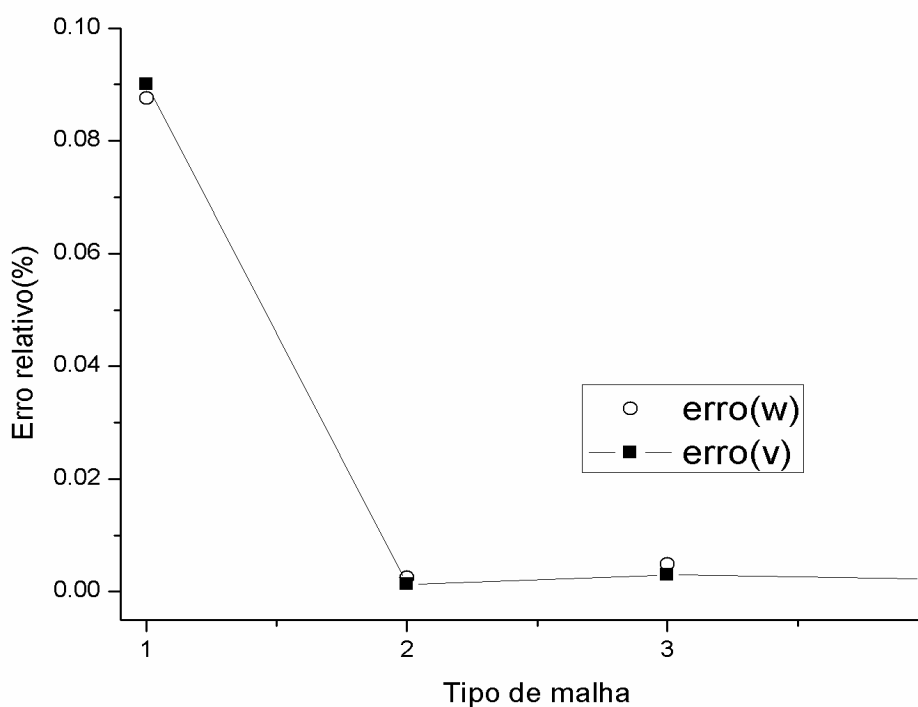


Figura 5.7 Erros relativos dos deslocamentos adimensionalizados em função do Tipo de Malha.

Conforme mostrados no Quadro 5.3 e Figura 5.7, os resultados do MEC estão em boa concordância com as respostas analítica. Além disso, os erros relativos para ambas respostas de deslocamentos são menores que 0,1%, até mesmo na malha mais pobre com 8 oitos elementos. Para as demais discretizações mais ricas, os erros reduzem

ainda mais, passando para valores menores que 0,0045%, mostrando um bom desempenho da solução do MEC.

5.4 Placa retangular submetida a carregamento distribuído

Seja uma placa retangular com lados de dimensões (a,b) , com $a = 5m$, espessura $h = 10\text{ cm}$, submetida a um carregamento distribuído de $g = 2kN/m^2$ sobre uma base de Kerr, conforme mostrada na Figura 5.8. Para produzir o primeiro caso das raízes do polinômio característico (uma raiz positiva e duas complexas conjugadas) foram adotadas as seguintes propriedades para a placa: módulo de elasticidade da $E = 25 \times 10^6\text{ kN/m}^2$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$. Já para a fundação elástica os parâmetros mecânicos, na forma adimensionalizada, foram assumidos como:

$$\hat{c} = \frac{ca^4}{D} = 200, \hat{k} = \frac{ka^4}{D} = 200 \text{ e } \hat{G} = \frac{Ga^2}{D} = 100.$$

Uma discretização de 32 elementos de contorno lineares é utilizada nas análises, vide Figura 5.9-c.

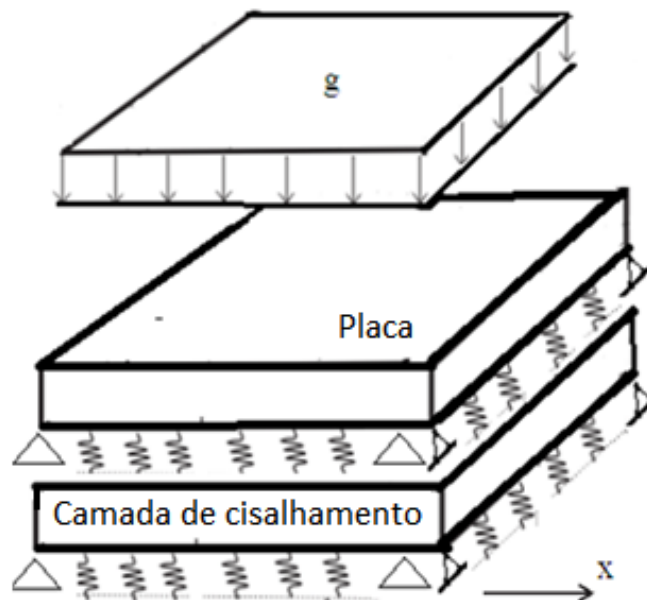


Figura 5.8 Placa sobre base de Kerr sob carregamento distribuído

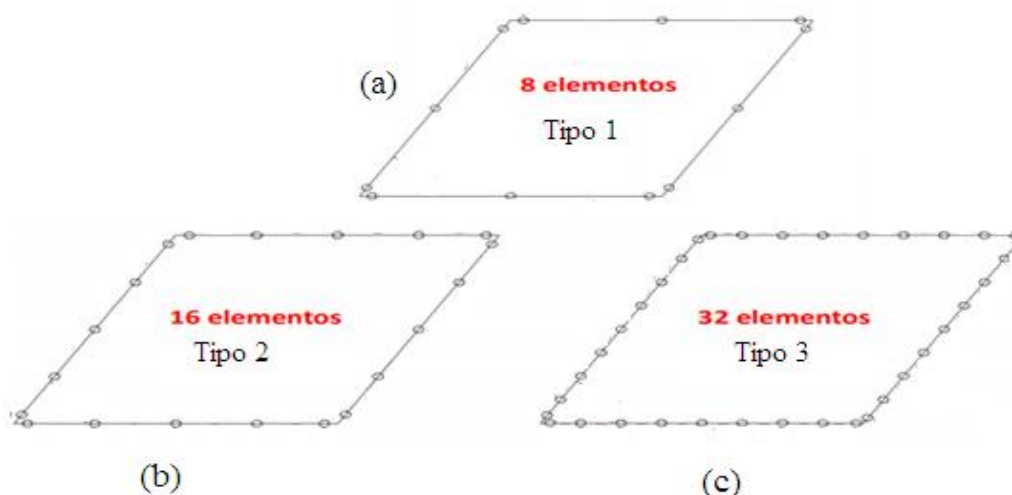


Figura 5.9 Malhas de MEC: a) Tipo1 , b)Tipo2 e c) Tipo3

Os resultados numéricos (MEC) e analíticos adimensionalizados para os deslocamentos da placa $\hat{w} = \frac{wD}{ga^4}$ e da camada de cisalhamento $\hat{v} = \frac{vD}{ga^4}$, para diversas relações entre os lados da placa (b/a), são mostradas no Quadro 5.4. Já na Figura 5.10 são mostrados os deslocamentos adimensionalizados para pontos ao longo da linha central de uma placa quadrada.

Quadro 5.4 Deslocamentos adimensionalizados $\hat{w}$ e $\hat{v}$ no ponto central.

$\frac{b}{a}$	$\hat{w}(x10^{-3})$ MEC	$\hat{w}(x10^{-3})$ Exata	$\hat{v}(x10^{-4})$ MEC	$\hat{v}(x10^{-4})$ Exata	<i>erro</i> $\hat{w}$ (%)	<i>erro</i> $\hat{v}$ (%)
1	2,721	2,734	2,352	2,365	0,4805	0,524
1,2	3,365	3,380	3,346	3,362	0,4417	0,492
1,4	3,827	3,842	4,192	4,212	0,4073	0,469
1,6	4,143	4,159	4,870	4,892	0,3742	0,452
1,8	4,354	4,369	5,394	5,417	0,339	0,435
2	4,491	4,505	5,789	5,813	0,300	0,415

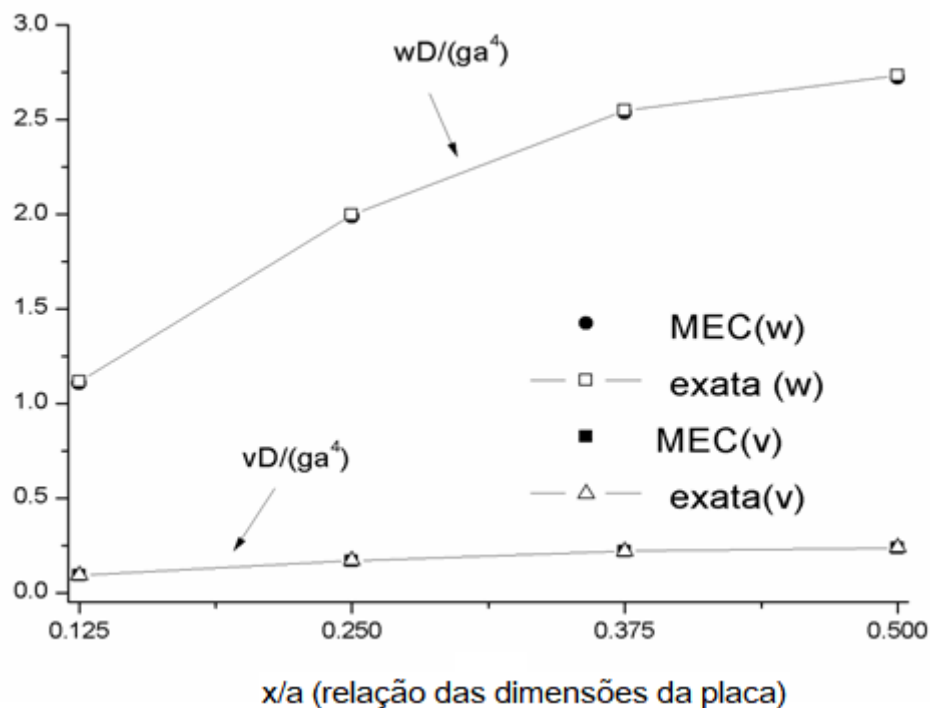


Figura 5.10 Deslocamentos adimensionais na linha central de uma placa quadrada.
Fonte: Autor

Uma boa concordância dos resultados do MEC e das respostas obtidas pela solução analítica pode ser observada tanto no Quadro 5.4, quanto na Figura 5.10, já que os erros relativos ficaram menores que 0,6% para a discretização de 32 elementos.

5.5 Placa circular engastada sob a base de Pasternak com carregamento concentrado

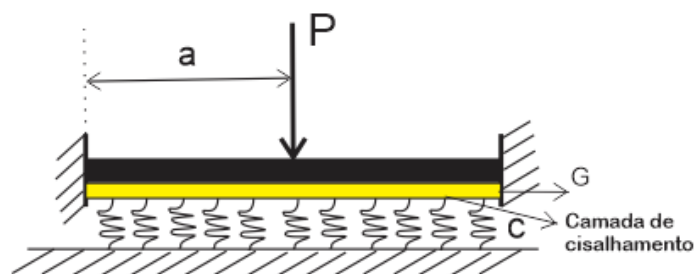


Figura 5.11 Placa circular engastada sob a base de Pasternak com carregamento concentrado. Fonte Autor

Nesta aplicação a placa circular engasta sob a base de Pasternak de raio “a” é submetida a uma força concentrada P em seu centro. Ela é analisada para 4, 8, 16 e 32

elementos de contorno, os valores dos deslocamentos são normalizados da seguinte forma:

$$s = \frac{a}{\sqrt{D/G}}, \quad \lambda = \frac{a}{\sqrt[4]{D/kf}} \quad (5.1)$$

$$s = 15, \quad \lambda = 12$$

O Quadro 5.5 apresenta os resultados obtidos pelo MEC para os deslocamentos, juntamente com as respostas de Katsikadelis e Kallivokas (1986).

Quadro 5.5: Placa circular engastada sob base de Pasternak com carregamento concentrado

	MEC	MEC	Katsikadelis, & Kallivokas (1986)
h/Raio	16 Elementos	32 Elementos	$\bar{w}_c$
0,001	1,1580E-04	1,1580E-04	1,1590E-04
	1,0507E-05	1,0507E-05	1,0507E-05
	5,1293E-07	5,1293E-07	5,1292E-07
	-1,1297E-08	-1,2970E-08	-1,1268E-08
0,01	1,1578E-04	1,1578E-04	1,1590E-04
	1,0517E-05	1,0517E-05	1,0517E-05
	5,1457E-07	5,1456E-07	5,1292E-07
	-1,3167E-08	-1,3163E-08	-1,1268E-08

Os resultados obtidos mostram, que para a placa circular engastada sob o carregamento com carga concentrada sob a base elástica de Pasternak, os valores obtidos no presente trabalho apresentam-se de forma satisfatória quando falta a comparação à referência da literatura.

5.6 Placa circular engastada sob o carregamento com carga concentrada

Nesta aplicação numérica, analisa-se uma placa circular engastada sob carregamento com carga concentrada.

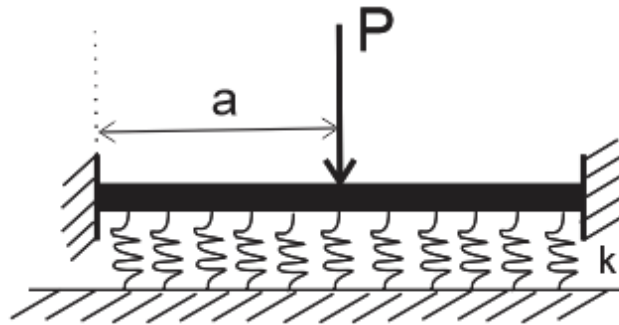


Figura 5.12 - Placa circular engastada sob o carregamento com carga concentrada.

Fonte: Autor

O coeficiente de Poisson é considerado 0,3. Uma carga concentrada P é aplicada sobre o domínio da placa. A análise é realizada para 8, 16 e 32 elementos, onde na Figura 5.12 são mostradas as discretização com 16 e 32 elementos circulares.

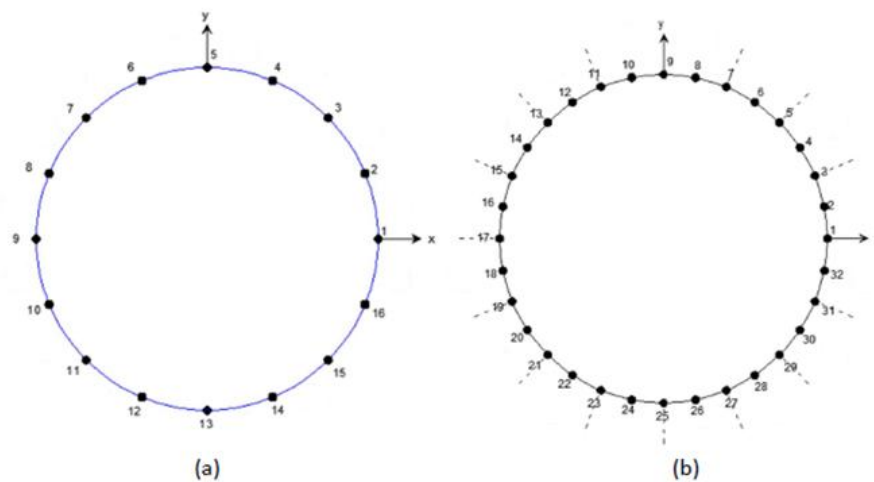


Figura 5.13 Malha circular: a) 16 Elementos; b) 32 Elementos

Os estudos paramétricos são obtidas pelas nas equações (5.2) e (5.3):

$$\bar{k}_f = \frac{k_f \cdot \text{Raio}^4}{D}, \quad \bar{w} = \frac{w \cdot D}{q \cdot \text{Raio}^4} \quad (5.2)$$

$$\bar{M} = \frac{M}{q \cdot \text{Raio}^2} \text{ e } \bar{Q} = \frac{Q}{q \cdot \text{Raio}^2} \quad (5.3)$$

O Quadro 5.6 apresenta os resultados obtidos pelo MEC para os deslocamentos, juntamente com as respostas Rashed (1998).

Quadro 5.6: Resultados dos deslocamentos para placa circular

			Presente Trabalho	Rashed et al. (1998)
$\bar{k}_f$	h/Raio	Nº Elementos	$\bar{w}_c$	$\bar{w}_c^{39}$
20	0,1	32	0,01348154	0,01347459
	0,2	32	0,01484481	0,01483778
	0,3	32	0,0169583	0,0169523

Os resultados verificados mostram, que para placa circular engastada sob o carregamento com carga concentrada sob a base elástica de Winkler, os valores obtidos no presente trabalho apresentam-se de forma satisfatória quando comparados às demais referências da literatura.

5.7 Placa simplesmente apoiada em todos o contorno com carga uniformemente distribuída

Nesta aplicação é analisada a placa quadrada de comprimento L , simplesmente apoiada ao longo do contorno e submetida a um carregamento uniformemente distribuído q , ver Figura 5.14. Foram considerados os seguintes parâmetros de entrada de dados, módulo de elasticidade $E = 10,92 \times 10^6 kN/m^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,30$, espessura da placa $h = 0,01 cm$, comprimento da placa $L = 1,00 m$ e carga unitária uniformemente distribuída. Os resultados estão mostrados no Quadro 5.7. Os elementos de contorno utilizados neste exemplo são retos com variação de campo linear.

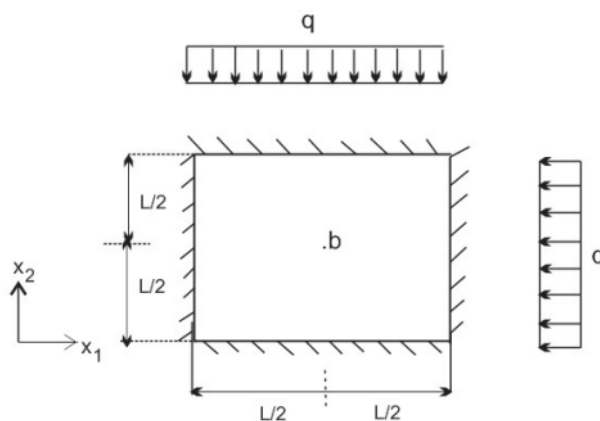


Figura 5.14 Placa simplesmente apoiada em todo o contorno com carga uniformemente distribuída. Fonte: Autor

Quadro 5.7: Resultado de Placa simplesmente apoiada em todo o contorno com carga uniformemente distribuída.

Ponto 'a'	Teoria de Kirchhoff		Solução Analítica Timoshenko (1959)
	12 Elementos	32 Elementos	
$\frac{wD}{qL^4} \times 10^{-2}$	0,0399	0,4035	0,4062
$\frac{m_x}{qL^2}$	0,0471	0,0476	0,0478

5.8 Placa apoiada sob carregamento concentrado

Nesta aplicação tem-se uma configuração de carregamento consistindo-se de uma força concentrada P aplicada no centro de gravidade da placa conforme indicada na Figura 5.15. O deslocamento adimensionalizado no ponto a , para diversas razões entre os lados ($1, L$) da placa, está indicado no Quadro 5.8. Os resultados obtidos pela formulação e a solução analítica de Timoshenko (1959) têm um bom nível de concordância para deslocamentos no centro da placa para diferentes razões entre as dimensões dos lados.

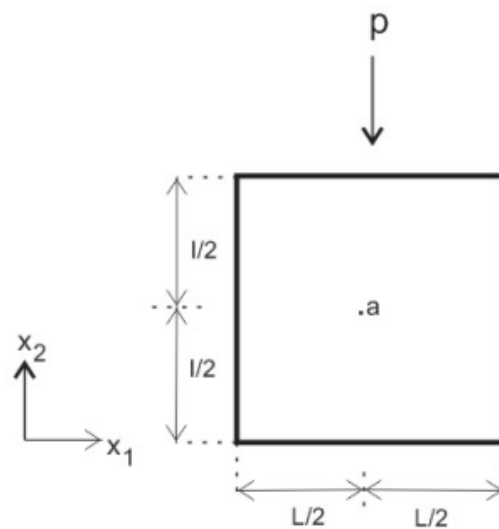


Figura 5.15 Placa simplesmente apoiada com carregamento concentrada.

Quadro 5.8 Resultado de Placa simplesmente apoiada com carregamento concentrado.

I/L		MEC	TIMOSHENKO (1959)
WD/(PL ²)	1,0	0,01155	0,01160
	1,1	0,01261	0,01265
	1,2	0,01349	0,01353
	1,4	0,01478	0,01484
	1,8	0,01614	0,01620
	2,0	0,01645	0,01651
	3,0	0,01684	0,01690

CONCLUSÕES

Os resultados obtidos a partir do método dos elementos de contorno - MEC, aplicado de forma inédita, em placas delgadas apoiadas em base elástica de Kerr evidenciaram vantagens computacionais e numéricas dessa técnica. Em particular, a redução da dimensionalidade da solução dos problemas tratados com esse método em uma ordem conduz a um ganho em termos computacionais devido à diminuição atrelada relacionada à discretização. Adicionalmente, os resultados numéricos obtidos pela aplicação do MEC em placas delgadas foram satisfatórios quando comparados com suas respectivas soluções analíticas, o que demonstrou a validade e rapidez dessa técnica. Neste trabalho, as principais contribuições para a solução do MEC para placas delgadas apoiadas em base elástica de Kerr foram: dedução de três conjuntos distintos de raízes para solução do MEC dependentes das propriedades mecânicas da placa e da base elástica de Kerr; dedução das equações integrais do problema incluindo integrais de contorno e de domínio; além disso, com o intuito de reter a característica principal do MEC, ou seja, a redução da dimensionalidade da solução do problema em uma ordem, as integrais de domínio referentes aos termos de carga foram transformadas em integrais de contorno e seus respectivos termos livres de integrais deduzidos. Nas análises numéricas foi estudada a convergência do MEC utilizando um conjunto de malhas de elementos de contorno. Além disso, foi mostrada que a solução do MEC para placa delgada sobre a base de Kerr pode ser aplicada para analisar placas delgadas sobre as bases elásticas de Winkler e Pasternak, e até mesmo placas sem base elástica, se valores das propriedades mecânicas da base Kerr forem apropriadamente atribuídos. Finalmente, as soluções do MEC se mostraram com bom desempenho frente a outras respostas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Al-Hosani, K.I.A.(1991) Stress analysis of thin and thick plates on elastic foundations using boundary and finite element methods. PhD thesis. School of Mechanical Engineering, Cranfield Institute of Technology, U.K.

Balaš J, Sladek V, Sladek J. (1984). The boundary integral equation method for plates resting on a two-parameter foundation. ZAMM, 64,135-146.

Costa A., B. Costa Jr and Brebbia, J. A.(1985), The boundary method applied to plates on elastic foundations, Engineering Analysis, Vol. 2, No, 4.

CONCRETIZAR CONSTRUTORA, (24/07/2017). Fundação para Centro de usinagem Heller. Disponível em: http://concretizarconstrutora.com.br/project_category/fundacoes-e-bases/> Acesso em: 13/06/2019.

Boussinesq, J.(1885). "Applications des potentials à L'etude de L'equilibre et du Moviment des Solides Elastique". Gualtier-Villars, Paris.

Chueiri L. H. M. (1994). Formulação do método dos elementos de contorno para análise elástoplástica de placas. Tese (Livre-docência), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de Sao Paulo, São Carlos, SP.

Calderón, E. T.,(1991). Uma formulação alternativa para o estudo de placas sobre fundação elástica pelo método dos elementos de contorno. Dissertação (Mestrado)-

Calderón, E. T., (1996). Sobre o uso do MEC para o estudo de interação de placas com o meio contínuo. Tese (Doutorado) - Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. Cerruti, V (1882). "Acc. Lincei., Mem. Fis. Mat.", Roma.

Chakravorty, A.K., & Ghosh, A.,1975. Finite difference solution for circular plates on elastic foundations. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v.9

Dutta, SC; Roy R (2002). A critical review on idealization and modeling for interaction among soil-foundation-structure system. Computers & Structures, 80:1579-1594.

Fadhil S, El-Zaframy A (1994). A boundary element analysis of thick reissner plates on two-parameter foundation. International Journal of Solids and Structures, 31,2901-2917.

Harr, ME(1966). Foundation of theoretical soil mechanics. New York:Mcgraw-Hill Book Company.

HAUS, URBANISMO, (17/05/2019). Alemanha inaugura a maior rodovia elétrica do mundo, que recarrega caminhões em movimento. Disponível em: <<https://www.gazetadopovo.com.br/haus/urbanismo/alemanha-rodovia-autobahn-letrica-maior-do-mundo-recarrega-caminhoes-em-movimento/>> Acesso em: 10/06/2019

Hörmander, L. (1963), Linear partial differential Operators, Springer-verlag, Berlin.

Wang J., X. Wang and M. Huang, (1993) ‘A boundary integral equation formulation for thick plates on a Winkler foundation’, Comput. Struct., 49, 179-185.

Katsikadelis, J. T., and Kallivokas, L. F. (1986). Clamped plates on Pasternak-type elastic foundation by the boundary element methods. J. Appl. Mech., 108 (Dec.), 909-917.

Karam V. J. (1986). Aplicação do método dos elementos de contorno a teoria de Reissner para flexão de placas. Tese, COPPE/UFRJ, m.Sc., Rio de Janeiro, RJ.

Kerr, A.D.,(1964) Elastic and viscoelastic fondation models. J. Applied Mechanics, 31, 491-498.

Kerr A. D.(1984), On the formal development of elastic foundation models. Ingenieur-Archiv, pp 455-464.

Kerr, A. D.(1972), Palmer W. T., The deformations and stresses in floating ice plates, acta mechanica15, vol. 15, pp 15-72.

Kerr, A. D.(1978), An indirect method for evaluating certain infinite integrals, Journal of applied mathematics and physics, vol. 29, issue 3, pp 380-386.

Kneifati MC (1985). Analysis of plates on a Kerr foundation model. Journal of Engineering Mechanics, 111, 1325-1342.

Limkatanyu S, Prachasaree W, Damrongwiriyanupap N, Kwon M, Jung W (2013). Exact stiffness for beams on Kerr-type foundation: Virtual force approach. Journal of Applied Mathematics, Article ID 626287,1-13.78

Manzoli, O. L., (1992). Formulação do método dos elementos de contorno para placas sobre fundação elástica. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Mendonça, AV; Paiva, JB (2003). An elastostatic FEM/BEM analysis of vertically loaded raft and piled raft foundation problems. Engineering Analysis with Boundary

Elements, 27, pp.913-931.

Mendonça AV, Paiva JB (2000). A boundary element for the static analysis of raft foundations on piles. *Engineering Analysis with Boundary Elements*; 20:237-247.

Messafer T, Coates LE (1993). An application of FEM/BEM coupling to foundation analysis. In: *Advances in Boundary Methods*. Brebbia, Connor(eds), 211-221, Southampton:CMP.

Mindlin RD (1936). A force at the interior point of a semi-infinite solid. *Physics*, 7,195-202.

Morfidis K (2007). Exact matrices for beams on three-parameter elastic foundations. *Computers and Structures*, 85, 1243-1256.

Paiva JB (1987). Formulação do método dos elementos de contorno para análise de interação solo-estrutura. Tese (Livre-docência), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP.

Pasternak, P.L. (1954). On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two-constants. *Moskow*.

Poulos, HG; Davis, EH (1980) *Pile foundation analysis and design*. New York: John Wiley and sons.

Rashed, Y, F., Aliabadi, M.H., and brebbia, C. A. (1998), The boundary element method for thick plates on a Winkler foundation. *Int. J. Num. Methods Engineering*, 41, 1435-1462,.

Rashed YF, Aliabadi MH, Brebbia CA (1999). A boundary element formulation for a Reissner plate on a Pasternak foundation. *Computers and Structures*,70,515-532.

Ribeiro G.O.(1992), Formulação do método dos elementos de contorno para a flexão de placas usando as hipóteses de Reissner. Tese (doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos, USP.

Rades M.(1970), Steady-State response of a finite beam on a Pasternak-Type foundation. *Int. J. Solids Structures*, vol. 6, pp 739-756.

Rades M.(1971), Dynamic response of a rigid circular plate on a Kerr-type foundation model, *j. engng sci*, vol. 9 pp 1061-1073.

Rades M.(1971), Forced vibrations of a rigid body on a three-parameter foundation, j. mech sci., vol. 13, pp 573-583.

Rades M.(1970), Steady-state response of a finite beam on a Pasternak-type foundation, j. solids structures, vol. 6, pp 739-756.

Rahman A. A. A.(2017), Closed Formed Solution for Thick Resting on Kerr Foundation, Internation Journal of Applied Eng. Vol12, pp 12133-12143.

SITE MAPADAOBRA.COM, (24/07/2016), Pavimento rígido: solução para corredores de ônibus. Disponível em: <<https://www.mapadaobra.com.br/inovacao/pavimento-rigido-para-corredores-de-onibus/>> Acesso em: 13/07/2019.

Shahsavari et al. (2017), A novel quasi-3D hyperbolic theory for free vibration of FG plates with porosities resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation, Aerospace Science and Technology, pp 134-149.

Stadler W.(1971), The general solution of the classical problem of the response of an infinite plate with an elastic foundation and damping. journal of elasticity, vol. 1, issue 1, pp 37-49, september.

Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S. (1940), Theory of Plates and Shells. McGraw-Hill, New York.

Wyman, M.(1950), Deflections of an infinite plate, Canadian Research, vol. 28, Sect. A, pp 293-302.

Worku, A.(2010), Part I: A generalized formulation of continuum models for elastic foundations, american society of civil engineers, vol. 10, pp 1641-1650.

Weën F. V.(1982). Application of the boundary integral equation method to reissner's plate model. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 18, 1-10.

Winkler, E.(1867). Die Lehre Von Der Elastizitat Und Fertigkeit. Dominicius, Prage.

Winkler, E.(1867), Die lehre von der elasticitaet und festigkeit. Prag, Dominicus.

Yang T.Y.(1972) A finite element analysis of plates on a two-parameter foundation model. Computers and Structures, 2, 593-614.

APÊNDICE

FUNÇÕES DE BESSEL MODIFICADAS K_0 E K_1

De acordo com Karam (1986), as funções de Bessel modificadas de ordem inteira $K_0(z)$ e $K_1(z)$ podem ser calculadas pelas expansões polinomiais seguintes [1],

$$I_0(z) = 1 + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{z^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots,$$

para um argumento z real:

a) Para $0 < z \leq 2$:

$$\begin{aligned} K_0(z) = & -\ln\left(\frac{z}{2}\right) I_0(z) - 0,57721566 + \\ & + 0,42278420 \left(\frac{z}{2}\right)^2 + 0,23069756 \left(\frac{z}{2}\right)^4 + 0,03488590 \left(\frac{z}{2}\right)^6 + \\ & + 0,00262698 \left(\frac{z}{2}\right)^8 + 0,00010750 \left(\frac{z}{2}\right)^{10} + 0,00000740 \left(\frac{z}{2}\right)^{12} \end{aligned} \quad (A.1)$$

$$\begin{aligned} K_1(z) = & \frac{1}{z} \left[z \ln\left(\frac{z}{2}\right) I_1(z) + 1 + 0,15443144 \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \right. \\ & - 0,67278579 \left(\frac{z}{2}\right)^4 - 0,18156897 \left(\frac{z}{2}\right)^6 - 0,01919402 \left(\frac{z}{2}\right)^8 - \\ & \left. - 0,01919402 \left(\frac{z}{2}\right)^8 - 0,00110404 \left(\frac{z}{2}\right)^{10} - 0,00004686 \left(\frac{z}{2}\right)^{12} \right] \end{aligned} \quad (A.2)$$

$$\begin{aligned} I_0(z) = & 1 + 3,5156229 t^2 + 3,0899424 t^4 + \\ & + 1,2067492 t^6 + 0,2659732 t^8 + \\ & + 0,0360768 t^{10} + 0,0045813 t^{12} \end{aligned} \quad (A.3)$$

$$\begin{aligned} I_1(z) = & z [0,5 + 0,87890594 t^2 + 0,51498869 t^4 + \\ & + 0,15084934 t^6 + 0,02658733 t^8 + \\ & + 0,00301532 t^{10} + 0,00032411 t^{12}] \end{aligned} \quad (A.4)$$

Onde $t = \frac{z}{3,75}$.

b) Para $z \geq 2$

$$\begin{aligned}
K_0(z) = \frac{1}{\sqrt{z} e^z} & \left[1,25331414 - 0,07832358 \left(\frac{2}{z}\right) + \right. \\
& + 0,02189568 \left(\frac{2}{z}\right)^2 - 0,01062446 \left(\frac{z}{2}\right)^3 + \\
& + 0,00587872 \left(\frac{z}{2}\right)^4 - 0,00251540 \left(\frac{z}{2}\right)^5 + \\
& \left. + 0,00053208 \left(\frac{z}{2}\right)^6 \right]
\end{aligned} \tag{A.5}$$

$$\begin{aligned}
K_1(z) = \frac{1}{\sqrt{z} e^z} & \left[1,25331414 + 0,23498619 \left(\frac{2}{z}\right) - \right. \\
& - 0,03655620 \left(\frac{2}{z}\right)^2 + 0,01504268 \left(\frac{z}{2}\right)^3 - \\
& - 0,00780353 \left(\frac{z}{2}\right)^4 + 0,00325614 \left(\frac{z}{2}\right)^5 - \\
& \left. - 0,00068245 \left(\frac{z}{2}\right)^6 \right]
\end{aligned} \tag{A.6}$$

As derivadas das funções $K_0(z)$ e $K_1(z)$ em relação ao argumento z podem ser obtidas pelas fórmulas de recorrência dadas em [1], ou seja:

$$e^{(v-1)\pi i} K_{v-1}(z) - e^{(v+1)\pi i} K_{v+1}(z) = \frac{2v}{z} e^{v\pi i} K_v(z) \tag{A.7a}$$

$$e^{v\pi i} K'_v(z) = e^{(v-1)\pi i} K_{v-1}(z) - \frac{v}{z} e^{v\pi i} K_v(z) \tag{A.7b}$$

$$e^{(v-1)\pi i} K_{v-1}(z) + e^{(v+1)\pi i} K_{v+1}(z) = 2e^{v\pi i} K'_v(z) \tag{A.7c}$$

$$e^{v\pi i} K'_v(z) = e^{(v+1)\pi i} K_{v+1}(z) + \frac{v}{z} e^{v\pi i} K_v(z) \tag{A.7d}$$

Com a utilização da fórmula de Euler dada por $e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta$, obtém-se, das equações acima:

De (A.7d), com $v=0$:

$$K'_0(z) = -K_1(z) \tag{A.8}$$

De (A.7a) (A.7c), com $v=1$:

$$\begin{cases} K_0(z) - K_2(z) = -\frac{2}{z}K_1(z) & (A.9.1) \\ K_0(z) - K_2(z) = -2K_1(z) & (A.9.2) \end{cases} \quad (A.9)$$

Tirando o valor $K_2(z)$ na equação (A.9.1) e substituindo em (A.9.2), chega-se a:

$$K_1(z) = -K_0(z) - \frac{1}{z}K_1(z) \quad (A.10)$$

Para fins deste texto são definidas:

$$\begin{cases} A(z) = K_0(z) + \frac{2}{z}\left[K_1(z) - \frac{1}{z}\right] & (A.11.1) \\ B(z) = K_0(z) + \frac{1}{z}\left[K_1(z) - \frac{1}{z}\right] & (A.11.2) \end{cases} \quad (A.11)$$

As derivadas dessas expressões em relação ao argumento z são obtidas a seguir.

Considerado (A.8) e (A.10) e derivando (A.11), obtém-se:

$$\begin{cases} A'(z) = -K_1(z) - \frac{2}{z^2}\left[K_1(z) - \frac{1}{z}\right] - \frac{2}{z}\left[K_0(z) + \frac{K_1(z)}{z} - \frac{1}{z^2}\right] \\ B'(z) = -K_1(z) - \frac{1}{z}\left[K_1(z) - \frac{1}{z}\right] - \frac{1}{z}\left[K_0(z) + \frac{K_1(z)}{z} - \frac{1}{z^2}\right] \end{cases} \quad (A.12)$$

Reagrupando (A.12), obtém-se:

$$\begin{cases} A'(z) = -K_1(z) - \frac{2}{z}\left[K_0(z) + \frac{2}{z}K_1(z) - \frac{2}{z^2}\right] \\ B'(z) = -K_1(z) - \frac{1}{z}\left[K_0(z) + \frac{2}{z}K_1(z) - \frac{2}{z^2}\right] \end{cases} \quad (A.13)$$

Substituindo a primeira das equações (A.11.1) e (A.13), obtém-se:

$$\begin{cases} A'(z) = -\frac{1}{z}[z K_1(z) + 2 A(z)] \\ B'(z) = -\frac{1}{z}[z K_1(z) + A(z)] \end{cases} \quad (A.14)$$

Expressões matemáticas usadas no capítulo 2 para compactar as soluções fundamentais de Kerr e suas derivadas superiores:

$$\begin{cases} \phi_{pi} = \frac{1}{\beta} \operatorname{Im}[\alpha_3(z_3)^{i/2} K_0(r\sqrt{z_2})] + \alpha_8(z_1)^{i/2} K_0(r\sqrt{z_1}) \\ \phi_{ci} = \frac{1}{\beta} \operatorname{Im}[\alpha_4(z_3)^{i/2} K_0(r\sqrt{z_2})] + (z_1)^{i/2} K_0(r\sqrt{z_1}) \\ \Delta_{pi} = \frac{1}{\beta} \operatorname{Im}[\alpha_3(z_3)^{i/2} K_1(r\sqrt{z_2})] + \alpha_8(z_1)^{i/2} K_1(r\sqrt{z_1}) \\ \Delta_{ci} = \frac{1}{\beta} \operatorname{Im}[\alpha_4(z_3)^{i/2} K_1(r\sqrt{z_2})] + (z_1)^{i/2} K_1(r\sqrt{z_1}) \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

E,

$$\begin{cases} \phi_{2pi} = \frac{1}{\beta} \operatorname{Im}[\alpha_3(z_3)^{i/2} K_0(r\sqrt{z_2})] + \alpha_8(z_1)^{i/2} K_0(r\sqrt{z_1}) \\ \phi_{2ci} = \frac{1}{\beta} \operatorname{Im}[\alpha_4(z_3)^{i/2} K_0(r\sqrt{z_2})] + (z_1)^{i/2} K_0(r\sqrt{z_1}) \\ \Delta_{2pi} = \frac{1}{\beta} \operatorname{Im}[\alpha_3(z_3)^{i/2} K_1(r\sqrt{z_2})] + \alpha_8(z_1)^{i/2} K_1(r\sqrt{z_1}) \\ \Delta_{2ci} = \frac{1}{\beta} \operatorname{Im}[\alpha_4(z_3)^{i/2} K_1(r\sqrt{z_2})] + (z_1)^{i/2} K_1(r\sqrt{z_1}) \\ \phi_{1ci} = \frac{1}{\beta} \operatorname{Im}[\alpha_4\alpha_9(z_3)^{i/2} K_0(r\sqrt{z_2})] + \alpha_{10}(z_1)^{i/2} K_0(r\sqrt{z_1}) \\ \Delta_{1ci} = \frac{1}{\beta} \operatorname{Im}[\alpha_4\alpha_9(z_3)^{i/2} K_1(r\sqrt{z_2})] + \alpha_{10}(z_1)^{i/2} K_1(r\sqrt{z_1}) \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

Para obter os resultados analíticos nos casos um, dois e três dados em (2.117), para carga concentrada "P" aplicada nas coordenadas (ξ, η) com leitura dos deslocamentos nas coordenadas (x, y) , já no caso do resultado analítico para carga distribuída é dado em (2.118), as expressões são dadas por:

$$\begin{aligned} wwK(x, y, \text{carga}, a, b, kf, Gf, cf) = & \left[\sum_{m=1}^{30} \sum_{n=1}^{30} \left[\frac{16 \cdot \left(\sin\left(m \frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right)^2 \right) \text{carga}}{\pi^2 mn} \times \right. \right. \\ & \times \frac{1 + \frac{kf}{cf} + \frac{Gf}{cf} \left[\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \right]}{D \cdot \frac{Gf}{cf} \cdot \pi^6 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^3 + \left(1 + \frac{kf}{cf} \right) D \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + Gf \cdot \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^3 + kf} \times \\ & \left. \left. \times \sin\left(m \frac{\pi}{a} x\right) \cdot \sin\left(n \frac{\pi}{b} y\right) \right] \right] \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{aligned}
wwKx(x, y, carga, a, b, kf, Gf, cf) = & \left[\sum_{m=1}^{30} \sum_{n=1}^{30} \left[\frac{16. \left(\sin \left(m \frac{\pi}{2} \right)^2 \cdot \sin \left(n \frac{\pi}{2} \right)^2 \right) carga}{\pi^2 mn} \left(m \frac{\pi}{a} \right) \times \right. \right. \\
& \times \frac{1 + \frac{kf}{cf} + \frac{Gf}{cf} \left[\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \right]}{D. \frac{Gf}{cf} \cdot \pi^6 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^3 + \left(1 + \frac{kf}{cf} \right) D \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + Gf. \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^3 + kf} \times \\
& \left. \left. \times \cos \left(m \frac{\pi}{a} x \right) \cdot \sin \left(n \frac{\pi}{b} y \right) \right] \right] \quad (A.18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
vvK(x, y, carga, a, b, kf, Gf, cf) = & \left[\sum_{m=1}^{30} \sum_{n=1}^{30} \left[\frac{16. \left(\sin \left(m \frac{\pi}{2} \right)^2 \cdot \sin \left(n \frac{\pi}{2} \right)^2 \right) carga}{\pi^2 mn} \times \right. \right. \\
& \times \frac{1 + \frac{kf}{cf} + \frac{Gf}{cf} \left[\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \right]}{D. \frac{Gf}{cf} \cdot \pi^6 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^3 + \left(1 + \frac{kf}{cf} \right) D \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + Gf. \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^3 + kf} \times \\
& \left. \left. \times \sin \left(m \frac{\pi}{a} x \right) \cdot \sin \left(n \frac{\pi}{b} y \right) \right] \right] \quad (A.19)
\end{aligned}$$

Teorema da divergência: Seja $\vec{F}: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vetorial tridimensional dado por $\vec{F}(x,y,z) = f_1(x,y,z) \vec{i} + f_2(x,y,z) \vec{j} + f_3(x,y,z) \vec{k}$ tal que suas componentes $f_1, f_2, f_3: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Sejam contínuas e tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas em D e $D \subset \mathbb{R}^3$ uma região do espaço regular e suave tal que sua fronteira $D \subset \mathbb{R}^3$ seja regular e suave, que suas projeções S_{xy} no plano xy , S_{yz} no plano yz e S_{xz} no plano xz sejam regiões fechadas do $\mathbb{R}^2$ com fronteira suave e que retas paralelas aos eixos coordenados que atravessem suas projeções que contem S em no máximo dois pontos, então:

$$\iiint_D \nabla \cdot \vec{F} dx dy dz = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma \quad (A.20)$$

Delta de Kronecker é definido pelo símbolo δ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), e definido como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases} \quad (A.21)$$

O Delta de Kronecker tem como objetivo controlar a função de aplicação e a função de leitura da carga.

A função de Dirac por definição é um a função $f(x)$ qualquer regular, ou “função generalizada” ou “função distribuição definida pela integral:

$$\int_a^c f(x) \delta(x-a) dx = \begin{cases} f(a), & \text{se } a \in (b, c) \\ 0, & \text{se } a \notin (b, c) \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

Ela tem como objetivo controlar a intensidade da carga, 0 (zero) se não for aplicada no corpo, e ∞ (infinito) se a leitura for feita em cima da aplicação da carga.