

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Existência e multiplicidade de soluções para uma classe de sistemas elípticos em $\mathbb{R}^N$

Wendel Leite da Silva

JOÃO PESSOA – PB
MARÇO DE 2016

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Existência e multiplicidade de soluções para uma classe de sistemas elípticos em $\mathbb{R}^N$

por

Wendel Leite da Silva

sob a orientação do

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo

João Pessoa – PB
Março de 2016

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

L533e da Silva, Wendel Leite.

Existência e multiplicidade de soluções para uma classe de sistemas elípticos em RN / Wendel Leite da Silva. - João Pessoa, 2016.

76 f.

Orientação: Uberlandio Batista Severo.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Métodos variacionais. 2. Sistemas elípticos acoplados. 3. Não-linearidades superquadráticas. I. Severo, Uberlandio Batista. II. Título.

UFPB/BC

Existência e multiplicidade de soluções para uma classe de sistemas elípticos em $\mathbb{R}^N$

por

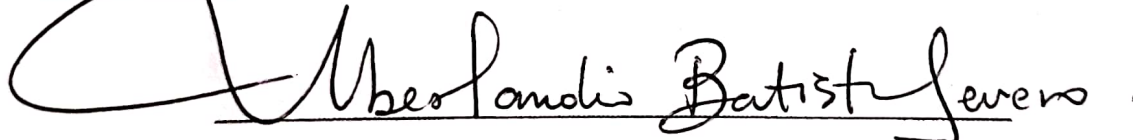
Wendel Leite da Silva ¹

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

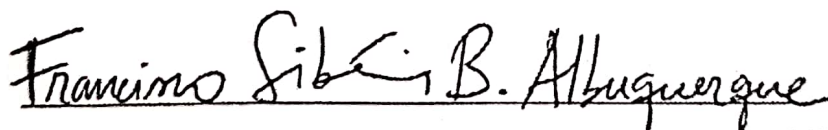
Área de Concentração: Análise

Aprovada em 4 de Março de 2016.

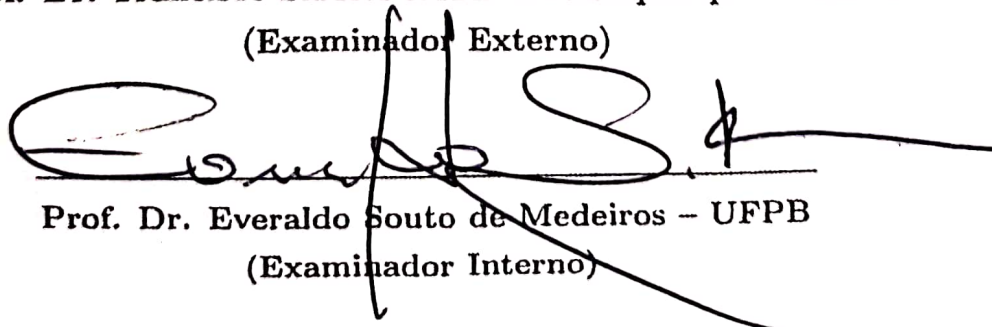
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo – UFPB
(Orientador)



Prof. Dr. Francisco Sibério Bezerra Albuquerque – UEPB
(Examinador Externo)



Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros – UFPB
(Examinador Interno)

¹O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração desta dissertação.

*Aos meus queridos irmãos
Gardenézio, José Genário e
Acilon Neto...*

Agradecimentos

A Deus acima de tudo, pois Ele supriu todas as minhas necessidades durante esse ano e me fez alcançar mais esta vitória.

Aos meus pais e irmãos, por estarem incondicionalmente ao meu lado.

Ao meu Orientador, Professor Uberlandio Batista Severo, por todos os conselhos, incentivo e pela imensa amizade dedicada durante todo período em que me orientou.

Aos professores Francisco Sibério Bezerra Albuquerque e Everaldo Souto de Medeiros, por participarem da banca examinadora.

Aos professores da pós-graduação, que contribuíram de forma essencial para a minha formação.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFPB por ter me concedido esta oportunidade. Agradeço também aos funcionários da Secretaria da PG-Mat, em especial, a grande amiga Carolina Câmara, pela atenção e cordialidade.

Aos colegas do Laboratório Milênio, Thiago, José Ribeiro, Lucas, Thyago Lunes, Mariana, Raiza, Rafael, Carlinha, Raoní, Nildo, Victor, Leon, Suelena, Aline, Angélica, Cássio, João Henrique, Douglas, Richardson, e Marcelo por todo o incentivo e pelos momentos compartilhados. Desejo sucesso a todos!

Ao pessoal do mestrado, Ageu, Sally, Tony, Zeh Gonçalves, Camila, Pedro, Belly, Djair, Esaú, pelo companherismo e momentos que estudamos juntos. Sucesso a vocês também!

A todos aqueles que de forma direta ou indireta contribuíram para a realização deste trabalho e que lamentavelmente não me recordo neste momento.

Enfim, ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, estudamos questões relacionadas à existência, multiplicidade e comportamento assintótico com respeito a um parâmetro positivo de soluções não nulas para uma classe de sistemas elípticos semilineares acoplados em $\mathbb{R}^N$, em que os potenciais são não negativos e não necessariamente coercivos. Na obtenção dos resultados, usamos métodos variacionais, a saber, teoremas do tipo minimax envolvendo as condições de Palais-Smale e de Cerami forte.

Palavras-chave: Métodos variacionais, Sistemas elípticos acoplados, Não-linearidades superquadráticas.

Abstract

In this work, we study questions related to the existence, multiplicity and asymptotic behavior with respect to a positive parameter of nonzero solutions for a class of coupled semilinear elliptic systems in $\mathbb{R}^N$, where the potentials are not negative and not necessarily coercive. To obtain the results, we use variational methods, namely, minimax type theorems involving the Palais-Smale and strong Cerami conditions.

Keywords: Variational methods, Coupled elliptic systems, Superquadratic nonlinearities.

Sumário

Introdução	1
1 Sistemas com não-linearidades superquadráticas em direções apropriadas	7
1.1 Resultados Preliminares	10
1.2 Existência de Soluções	18
1.3 Multiplicidade de Soluções	21
2 Sistemas com potenciais se anulando e comportamento assintótico com respeito a um parâmetro $\lambda > 0$	28
2.1 Preliminares	30
2.2 Soluções de Energia Mínima	36
2.3 Multiplicidade de Soluções	41
A Estudo sobre os autovalores de (LP)	55
B O espaço $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$	59
Referências Bibliográficas	65

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- X' denota o dual topológico de um espaço de Banach X ;
- $k, k_1, k_2, \dots$ denotam constantes positivas, possivelmente diferentes;
- $\square$ denota o final de uma demonstração;
- Denotamos o produto interno euclidiano de dois vetores $x, y \in \mathbb{R}^N$ por $x \cdot y$;
- $|\cdot|$ denota a norma euclidiana de $\mathbb{R}^N$;
- B_R denota a bola aberta em $\mathbb{R}^N$ de centro na origem e raio $R > 0$;
- Para qualquer conjunto $K \subset \mathbb{R}^N$, definimos $K^c = \mathbb{R}^N \setminus K := \{x \in \mathbb{R}^N; x \notin K\}$, $\text{int } K$ representa o interior do conjunto K e $\overline{K}$ representa o fecho do conjunto K ;
- Para cada $1 \leq p \leq \infty$ e $u \in L^p(K)$, denotamos a norma de u em $L^p(K)$ por $\|u\|_{L^p(K)}$. Se $K = \mathbb{R}^N$, escrevemos apenas $\|u\|_{L^p}$;
- $\text{supp}(u) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^N; u(x) \neq 0\}}$ denota o suporte da função u ;
- $C_0^\infty(\Omega)$ denota o conjunto de todas as funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^\infty(\Omega)$ e com suporte compacto contido no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$;
- $H_0^1(\Omega) := W_0^{1,2}(\Omega)$ denota o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ no espaço de Sobolev $W^{1,2}(\Omega)$ munido com sua norma usual: $\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + u^2) dx$;
- O espaço $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é definido como sendo completamento de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ com relação à norma

$$\|\phi\|_0 = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi|^2 \right)^{1/2}.$$

;

- $\rightarrow$ denota convergência forte em um espaço normado;

- $\rightharpoonup$ denota convergência fraca em um espaço normado;

- $u_+ = \max\{u, 0\}$ e $u_- = \max\{-u, 0\}$;

- O símbolo $o(h)$ representa uma função $\varepsilon(h)$ tal que $\frac{\varepsilon(h)}{\|h\|} \rightarrow 0$ quando $\|h\| \rightarrow 0$.

Em particular, $o(1)$ é entendido como uma sequência $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergindo a zero.

Introdução

Neste trabalho, com base nos artigos de Elves A. B. Silva e Liliane A. Maia [13], e Marcelo F. Furtado, Elves A. B. Silva e Magda S. Xavier [12], estudamos questões relacionadas a existência e multiplicidade de soluções não nulas para a seguinte classe de sistemas elípticos acoplados:

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda a(x)u = F_u(x, u, v), & x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + \lambda b(x)v = F_v(x, u, v), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (1)$$

em que $N \geq 3$, $a, b : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, \infty)$ são potenciais contínuos, λ é um parâmetro positivo e $F \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ satisfaz $F(x, 0, 0) \equiv 0$. Teremos ainda algumas hipóteses adicionais sobre as funções a , b e F ao longo deste trabalho.

Ao abordar o sistema (1), utilizamos métodos variacionais, ou seja, associamos ao sistema (1) um funcional energia $I : X \rightarrow \mathbb{R}$, onde X é um subespaço vetorial conveniente de $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Almejamos encontrar pontos críticos para I , que serão soluções fracas de (1). No estudo do funcional I , as hipóteses adicionais sobre os potenciais $a, b \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ e sobre a não-linearidade $F \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ desempenham papéis importantes no que diz respeito à existência de pontos críticos para I e, conseqüentemente, à existência de solução para o sistema (1).

Nosso trabalho é constituído de dois capítulos e dois apêndices.

No *Capítulo 1*, apresentamos resultados de existência e multiplicidade para o sistema (1) com o parâmetro λ constante igual a 1. Tais resultados foram obtidos por Elves A. B. Silva e Liliane A. Maia em [13]. Sobre os potenciais a e b , são consideradas as seguintes hipóteses:

- (A₁) existem constantes $a_0, b_0 > 0$ tais que $a(x) \geq a_0$ e $b(x) \geq b_0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$;
- (A₂) $\mu(\{x \in \mathbb{R}^N; a(x)b(x) < M\}) < \infty$ para todo $M > 0$, onde μ , aqui, denota a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^N$.

Com respeito à não-linearidade F , assumimos que $F \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e a seguinte condição de acoplamento subcrítico:

(F_1) existem constantes $c_1, q_1, q_2 > 0$, $p_1, p_2 > 1$ e funções $\alpha, \beta \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ tais que

$$\begin{aligned} |F_u(x, z)| &\leq c_1 |u|^{p_1-1} |v|^{q_1} + \alpha(x) |u| + c_1 |v|, \text{ para todo } (x, z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2, \\ |F_v(x, z)| &\leq c_1 |u|^{q_2} |v|^{p_2-1} + c_1 |u| + \beta(x) |v|, \text{ para todo } (x, z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

onde $z = (u, v)$, $2 \leq p_i + q_i < 2^* = 2N/(N-2)$, $i = 1, 2$ e α e β satisfazem

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} \alpha(x) = \alpha_\infty < a_0 \quad \text{e} \quad \limsup_{|x| \rightarrow \infty} \beta(x) = \beta_\infty < b_0.$$

Observemos que existe uma extensa bibliografia no estudo de sistemas elípticos variacionais (veja [6, 18, 21]). Em dois artigos recentes [8, 10], o problema (1) foi estudado sob condições acoplado-ressonantes. O principal objetivo deste capítulo é apresentar resultados que completam os de [8, 10], considerando sistemas com acoplamento em $\mathbb{R}^N$ que permitem, em particular, um crescimento superquadrático na primitiva $F(x, z)$ nas direções $z = (u, v)$, $u \neq 0$, $v \neq 0$. Nos dois primeiros resultados, assumimos a seguinte versão da condição de Ambrosetti-Rabinowitz [1, 14]:

(F_2) existem constantes $c_2 > 0$, $\theta > 2$, $p, q > 0$, $\mu, \nu \geq 0$, e funções $h_1, h_2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tais que $2 \leq \mu + \nu, p + q < 2^*$, $\mu + \nu > \frac{N}{2}(p + q - 2)$ (se $p + q > 2$ e $\mu > p$ [$\nu > q$], é suposto $\nu p > \mu(q - 2)$ [$\mu q > \nu(p - 2)$]; se $p + q = 2$, é suposto $\mu + \nu = 2$),

$$\begin{aligned} F(x, z) - \frac{1}{\theta} \nabla F(x, z) \cdot z &\leq c_2 |u|^p |v|^q + h_1(x), \text{ para todo } (x, z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2, \\ \frac{1}{2} \nabla F(x, z) \cdot z - F(x, z) &\geq c_2 |u|^\mu |v|^\nu - h_2(x), \text{ para todo } (x, z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

onde $\nabla F(x, z) = (F_u(x, z), F_v(x, z))$.

A hipótese (F_2) é uma versão para o nosso cenário da condição introduzida em [18] (veja também [6] para uma condição relacionada) para estudar uma classe de problemas integro-diferenciais em domínios limitados em $\mathbb{R}^N$. Considerando o problema linear acoplado

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x)u = \lambda v, & x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + b(x)v = \lambda u, & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (LP)$$

denotamos por λ_1 o primeiro autovalor positivo para o problema (LP). Assumindo a condição:

(F_3) existe $\lambda \in (0, \lambda_1]$ tal que

$$F(x, z) - \lambda uv = o(|z|^2), \text{ quando } |z| \rightarrow 0, \text{ uniformemente em } \mathbb{R}^N,$$

podemos enunciar o primeiro resultado:

Teorema 1. *Suponha as condições (A_1) e (A_2) válidas. Se F satisfaz $(F_1) - (F_3)$, então o problema (1) possui uma solução não nula.*

No próximo resultado, mostraremos a existência de infinitas soluções para (1) sob a presença de simetria. Mais especificamente, suponhamos que (F_4) $F(x, z)$ é par com respeito a variável $z \in \mathbb{R}^2$. Sob esta condição, temos o seguinte resultado:

Teorema 2. *Suponha as condições (A_1) e (A_2) válidas. Se F satisfaz (F_1) , (F_2) e (F_4) , então o problema (1) possui uma infinidade de pares de soluções não nulas.*

A existência de uma solução não trivial para o problema escalar em $\mathbb{R}^N$ foi provada por Rabinowitz [15] para condições não-lineares subcríticas com crescimento superlinear e potenciais coercivos. Depois Bartsch e Wang [2] estudaram o problema escalar sob condições similares àsquelas em [2, 15] e uma versão da condição (A_2) para esse cenário. Também observamos que estas hipóteses tem sido usadas em [9] para generalizar ao $\mathbb{R}^N$ os resultados no problema elíptico duplamente ressonante sob uma condição de não quadraticidade local aos quais têm sido provados em [11].

Os Teoremas 1 e 2 podem ser vistos como versões para os sistemas elípticos com acoplamento dos correspondentes resultados em [2, 15]. Notemos que a condição (A_2) permite uma situação em que nenhum dos potenciais seja coercivos ou que satisfaça a condição introduzida em [2].

Nos dois últimos resultados deste capítulo, será estabelecido versões dos Teoremas 1 e 2 onde c_2 , dado por (F_2) , é zero. Neste caso, a segunda relação em (F_2) não é necessária:

$(\widehat{F_2})$ existem $\theta > 2$ e uma função $h_1 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tais que

$$F(x, z) - \frac{1}{\theta} \nabla F(x, z) \cdot z \leq h_1(x), \text{ para todo } (x, z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2.$$

Além disso, vamos também supor a condição:

(F_5) existe $c_3 \geq 0$ tal que

$$\sup_{t \geq 0} \int_{\mathbb{R}^N} [\lambda_1 t^2 u_1 v_1 - F(x, tz_1)] dx \leq c_3 < \infty,$$

onde $z_1 = (u_1, v_1)$ é a autofunção de (LP) associada com λ_1 .

Agora podemos enunciar o próximo teorema.

Teorema 3. *Suponha as condições (A_1) e (A_2) válidas. Se F satisfaz (F_1) , $(\widehat{F_2})$, (F_3) e (F_5) , então o problema (1) possui uma solução não nula.*

E por fim, supondo que F satisfaz (F_4) e (F_6) existem $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e um subconjunto aberto Ω de $\mathbb{R}^N$ tais que

$$\frac{F(x, ta, tb)}{t^2} \rightarrow \infty \text{ quando } t \rightarrow \infty, \text{ uniformemente para } x \in \Omega,$$

obtemos o seguinte resultado:

Teorema 4. *Suponha as condições (A_1) e (A_2) válidas. Se F satisfaz (F_1) , $(\widehat{F_2})$, (F_4) e (F_6) , então o problema $(\mathbb{I})$ possui uma infinidade de pares de soluções não nulas.*

O Capítulo 2 é dedicado a resultados sobre existência, multiplicidade e comportamento assintótico de soluções para o sistema elíptico acoplado $(\mathbb{I})$. Tais resultados foram obtidos por Marcelo F. Furtado, Elves A. B. Silva e Magda S. Xavier [12]. A não-linearidade $F \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ é a função $F(x, u, v) = |u|^p|v|^q/(p+q)$, onde $p, q > 1$ e $p+q < 2^*$. Assim, o sistema $(\mathbb{I})$ reduz-se a

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda a(x)u = \frac{p}{p+q}|u|^{p-2}u|v|^q, & x \in \mathbb{R}^N \\ -\Delta v + \lambda b(x)v = \frac{q}{p+q}|u|^p|v|^{q-2}v, & x \in \mathbb{R}^N \\ u, v \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (S_\lambda)$$

onde $N \geq 3$, λ é um parâmetro positivo, $p, q > 1$ e $p+q < 2^*$. As hipóteses sobre os potenciais não negativos a e b são as seguintes:

(H_1) $a, b \in C(\mathbb{R}^N, [0, \infty))$, $\Omega_a := \text{int } a^{-1}(0)$ e $\Omega_b := \text{int } b^{-1}(0)$ têm fronteiras suaves, $\overline{\Omega_a} = a^{-1}(0)$, $\overline{\Omega_b} = b^{-1}(0)$, e $\Omega_a \cap \Omega_b$ é um conjunto não vazio;

(H_2) existe $M_0 > 0$ tal que o conjunto $F := \{x \in \mathbb{R}^N; a(x)b(x) \leq M_0\}$ tem medida de Lebesgue finita.

Diferentemente do Capítulo 1, note que não foi assumido nenhum limite inferior positivo para os potenciais a e b . Portanto, não esperamos achar soluções para (S_λ) no espaço de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N)$. Contudo, tirando vantagem do acoplamento forte do sistema e a hipótese (H_2) , somos capazes de usar métodos variacionais para estudar (S_λ) considerando o funcional associado definido num subespaço fechado próprio de $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Também veremos que os conjuntos Ω_a e Ω_b podem ser ilimitados e que o fato de que $\Omega_a \cap \Omega_b$ ser um conjunto não vazio é essencial para os resultados. Como no caso escalar em [2], o principal resultado deste capítulo mostra que o sistema elíptico semilinear

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{p}{p+q}|u|^{p-2}u|v|^q & \text{em } \Omega_a, \\ -\Delta v = \frac{q}{p+q}|u|^p|v|^{q-2}v & \text{em } \Omega_b, \\ u \in H_0^1(\Omega_a), \quad v \in H_0^1(\Omega_b), \end{cases} \quad (L)$$

pode ser visto como um limite para (S_λ) quando λ tende ao infinito. Vale a pena mencionar que, embora Ω_a e Ω_b possam ser conjuntos abertos distintos, o sistema (L) é variacional. Notemos também que a condição (H_2) implica que Ω_a e Ω_b têm medida de Lebesgue finita, pois $\Omega_a, \Omega_b \subset F$. Assim, temos que a imersão $H_0^1(\Omega_a) \times H_0^1(\Omega_b) \hookrightarrow L^r(\Omega_a) \times L^s(\Omega_b)$ é compacta para $1 \leq r, s < 2^*$.

A fim de enunciar os resultados, introduzimos os subespaços fechados de $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ associados aos potenciais a e b :

$$X_a := \left\{ u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^N} a(x)u^2 dx < \infty \right\} \quad \text{e} \\ X_b := \left\{ v \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^N} b(x)v^2 dx < \infty \right\}.$$

Para qualquer $\lambda \geq 0$ dado, consideremos o espaço de Hilbert $X = X_a \times X_b$ munido com o produto interno

$$\langle (u, v), (\varphi, \phi) \rangle_\lambda := \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u \nabla \varphi + \nabla v \nabla \phi + \lambda a(x)u\varphi + \lambda b(x)v\phi] dx$$

cuja norma associada será denotada por $\|\cdot\|_\lambda$.

Associado ao problema (S_λ) , temos o funcional energia $I_\lambda : X \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$I_\lambda(z) := \frac{1}{2} \|z\|_\lambda^2 - \frac{1}{p+q} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p |v|^q dx, \quad z = (u, v) \in X.$$

Em vista das hipóteses (H_1) e (H_2) , o funcional I_λ está bem definido e é de classe C^1 . Além disso, a teoria de regularidade elíptica implica que os pontos críticos de I_λ são soluções clássicas do problema (S_λ) .

No primeiro resultado, estudamos a existência e comportamento das soluções de energia mínima de (S_λ) . Recordamos que uma solução de energia mínima para o nosso problema é um ponto crítico de I_λ associado com o menor nível crítico positivo deste funcional. Neste contexto, uma vez provado a existência da solução de energia mínima, podemos sempre encontrar uma solução de energia mínima positiva. Aqui, chamamos $z = (u, v)$ uma função positiva se u e v são positivas em quase todo ponto de $\mathbb{R}^N$.

Teorema 5. *Suponha as condições (H_1) e (H_2) válidas. Então existe $\Lambda > 0$ tal que, para todo $\lambda \geq \Lambda$, o sistema (S_λ) possui uma solução de energia mínima positiva z_λ . Além disso, se $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ é tal que $\lambda_n \rightarrow \infty$ e (z_{λ_n}) é uma sequência de soluções de energia mínima positiva de (S_{λ_n}) , então (z_{λ_n}) converge em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ ao longo de uma subsequência para uma solução de energia mínima positiva de (L) .*

No próximo resultado, usamos a simetria do problema para estabelecer multiplicidade de soluções para valores grandes de λ . Mais especificamente, provaremos

Teorema 6. *Suponha as condições (H_1) e (H_2) válidas. Então, para qualquer $k \in \mathbb{N}$ dado, existe $\Lambda_k > 0$ tal que, para cada $\lambda \geq \Lambda_k$, o sistema (S_λ) possui pelo menos k pares de soluções não nulas.*

Como no caso das soluções de energia mínima encontradas no Teorema 5, as soluções derivadas do Teorema 6 têm energia uniformemente limitada com respeito a λ . Isto nos permite mostrar que estas soluções convergem em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ para uma solução de (L) quando $\lambda \rightarrow \infty$. Mais geralmente, temos o seguinte resultado de concentração:

Teorema 7. *Sejam $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ uma sequência tal que $\lambda_n \rightarrow \infty$ e (z_{λ_n}) uma sequência de soluções de (S_{λ_n}) tal que $\liminf_{n \rightarrow \infty} I_{\lambda_n}(z_{\lambda_n}) < \infty$. Então (z_{λ_n}) converge em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ ao longo de uma subsequência para uma solução de (L).*

Os resultados obtidos neste capítulo são motivados pelos que foram obtidos em [2, 3] para o caso escalar, onde é considerado o potencial $c_\lambda(x) = \lambda c(x) + 1$ com c tendo a propriedade de que o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^N; c(x) \leq M_0\}$ tem medida de Lebesgue finita, para algum $M_0 > 0$.

Obeservemos que existe uma bibliografia extensa no estudo de sistemas elípticos em domínios limitados (veja [6, 18] por exemplo). No caso de sistemas gradientes em todo $\mathbb{R}^N$, em [7] o autor prova a existência de uma solução não nula para o problema (P) (lá mencionado) sob coercividade dos potenciais a e b e uma condição de não quadraticidade na não-linearidade. Gostaríamos de enfatizar que, ao invés dos trabalhos acima mencionados, o acoplamento do sistema (S_λ) nos permite considerar potenciais que não são limitados por baixo por constantes positivas. Podemos ter um dos potenciais tendendo a zero quando $|x| \rightarrow \infty$ desde que o outro potencial vá para o infinito numa taxa adequada.

No Apêndice A, apresentamos uma caracterização variacional do primeiro autovalor positivo do sistema linear acoplado

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x)u = \lambda v, & x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + b(x)v = \lambda u, & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (LP)$$

Tal caracterização será bastante útil para provar os teoremas principais do Capítulo 1.

No Apêndice B, apresentamos e demonstramos alguns resultados complementares sobre o espaço $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ que serão utilizados ao longo deste trabalho, essencialmente no Capítulo 2.

Visando tornar os capítulos independentes e não necessitar recorrer sempre à introdução, enunciaremos novamente, em cada capítulo, as hipóteses sobre a não-linearidade $F \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e os potenciais $a, b \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, bem como, os respectivos resultados principais.

Capítulo 1

Sistemas com não-linearidades superquadráticas em direções apropriadas

Neste capítulo, apresentamos resultados sobre a existência e multiplicidade de soluções para o sistema

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x)u = F_u(x, u, v), & x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + b(x)v = F_v(x, u, v), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (P)$$

onde $N \geq 3$ e os potenciais a e b são funções contínuas satisfazendo

(A₁) existem constantes $a_0, b_0 > 0$ tais que $a(x) \geq a_0$ e $b(x) \geq b_0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$,

(A₂) $\mu(\{x \in \mathbb{R}^N; a(x)b(x) < M\}) < \infty$ para todo $M > 0$.

Aqui, μ denota a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^N$. Vamos supor também que $F \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ satisfaz $F(x, 0, 0) \equiv 0$ e a seguinte condição de acoplamento subcrítico:

(F₁) existem constantes $c_1, q_1, q_2 > 0$, $p_1, p_2 > 1$ e funções $\alpha, \beta \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ tais que

$$\begin{aligned} |F_u(x, z)| &\leq c_1 |u|^{p_1-1} |v|^{q_1} + \alpha(x) |u| + c_1 |v|, \text{ para todo } (x, z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2, \\ |F_v(x, z)| &\leq c_1 |u|^{q_2} |v|^{p_2-1} + c_1 |u| + \beta(x) |v|, \text{ para todo } (x, z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

onde $z = (u, v)$, $2 \leq p_i + q_i < 2^* := 2N/(N-2)$, $i = 1, 2$ e α e β satisfazem

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} \alpha(x) = \alpha_\infty < a_0 \quad \text{e} \quad \limsup_{|x| \rightarrow \infty} \beta(x) = \beta_\infty < b_0. \quad (1.1)$$

Note que, integrando a primeira desigualdade em (F₁), de 0 até u , obtemos

$$|F(x, z) - F(x, 0, v)| \leq \frac{c_1}{p_1} |u|^{p_1} |v|^{q_1} + \alpha(x) \frac{u^2}{2} + c_1 |u| |v|, \quad (1.2)$$

para todo $(x, z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2$. Do mesmo modo, temos que

$$|F(x, z) - F(x, u, 0)| \leq \frac{c_1}{p_2} |u|^{q_2} |v|^{p_2} + c_1 |u| |v| + \beta(x) \frac{v^2}{2},$$

para todo $(x, z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2$. Assim, fazendo $u = 0$ na desigualdade acima e usando $F(x, 0, 0) \equiv 0$, obtemos

$$|F(x, 0, v)| \leq \beta(x) \frac{v^2}{2}, \text{ para todo } (x, v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}.$$

Daí, segue de (1.2) que a condição (F_1) implica

$$|F(x, z)| \leq \frac{c_1}{p_1} |u|^{p_1} |v|^{q_1} + \alpha(x) \frac{u^2}{2} + \beta(x) \frac{v^2}{2} + c_1 |u| |v|, \quad (1.3)$$

para todo $(x, z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2$.

Existe uma extensa bibliografia no estudo de sistemas elípticos variacionais (veja [6, 18, 21]). Em dois artigos recentes [8, 10], o problema (P) foi estudado sob condições de acoplamento ressonantes. O principal objetivo deste capítulo é complementar os resultados em [8, 10] considerando sistemas com acoplamento em $\mathbb{R}^N$ que permitem, em particular, um crescimento superquadrático na primitiva $F(x, z)$ nas direções $z = (u, v)$, $u \neq 0$, $v \neq 0$. Nos dois primeiros resultados, assumimos a seguinte versão da condição de Ambrosetti-Rabinowitz [1, 14]:

(F_2) existem constantes $c_2 > 0$, $\theta > 2$, $p, q > 0$, $\mu, \nu \geq 0$, e funções $h_1, h_2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tais que $2 \leq \mu + \nu$, $p + q < 2^*$, $\mu + \nu > \frac{N}{2}(p + q - 2)$ (se $p + q > 2$ e $\mu > p$ [$\nu > q$], é suposto $\nu p > \mu(q - 2)$ [$\mu q > \nu(p - 2)$]; se $p + q = 2$, é suposto $\mu + \nu = 2$),

$$\begin{aligned} F(x, z) - \frac{1}{\theta} \nabla F(x, z) \cdot z &\leq c_2 |u|^p |v|^q + h_1(x), \text{ para todo } (x, z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2, \\ \frac{1}{2} \nabla F(x, z) \cdot z - F(x, z) &\geq c_2 |u|^\mu |v|^\nu - h_2(x), \text{ para todo } (x, z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

onde $\nabla F(x, z) = (F_u(x, z), F_v(x, z))$.

A hipótese (F_2) é uma versão para este trabalho de uma condição introduzida em [18] (veja também [6] para uma condição relacionada) para estudar uma classe de problemas integro-diferenciais em domínios limitados em $\mathbb{R}^N$. Notemos também que $c_2 > 0$ e a segunda relação em (F_2) implicam que $F(x, tz)/t^2 \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$, para todo $z = (u, v) \in \mathbb{R}^2$, $u \neq 0$, $v \neq 0$ (veja Seção 1.2). Considerando o problema linear acoplado

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x)u = \lambda v, & x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + b(x)v = \lambda u, & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (LP)$$

denotamos por λ_1 o primeiro autovalor positivo para o problema (LP) (recomendamos ao leitor o Apêndice A para um estudo sobre os autovalores de (LP)). Supondo a condição:

(F_3) existe $\lambda \in (0, \lambda_1]$ tal que

$$F(x, z) - \lambda uv = o(|z|^2), \text{ quando } |z| \rightarrow 0, \text{ uniformemente em } \mathbb{R}^N,$$

podemos enunciar o primeiro resultado de existência:

Teorema 1.1. *Suponha as condições (A_1) e (A_2) válidas. Se F satisfaz $(F_1) - (F_3)$, então o problema (P) possui uma solução não nula.*

No próximo resultado, será verificado a existência de infinitas soluções para (P) sob a presença de simetria. Mais especificamente, suponhamos que

(F_4) $F(x, z)$ é par com respeito à variável $z \in \mathbb{R}^2$.

Sob esta condição, temos o seguinte resultado de multiplicidade de soluções:

Teorema 1.2. *Suponha as condições (A_1) e (A_2) válidas. Se F satisfaz (F_1) , (F_2) e (F_4) , então o problema (P) possui uma infinidade de pares de soluções não nulas.*

A existência de uma solução não trivial para o problema escalar em $\mathbb{R}^N$ foi provada por Rabinowitz [15] para condições subcríticas não lineares com crescimento superlinear e potenciais coercivos. Depois Bartsch e Wang [2] estudaram o problema escalar sob condições similares àsquelas em [2] [15] e uma versão da condição (A_2) para esse caso. Também observamos que estas hipóteses foram usadas em [9] para generalizar ao $\mathbb{R}^N$ os resultados obtidos no problema elíptico duplamente ressonante sob uma condição de não quadraticidade local aos quais foram provados em [11].

Os Teoremas 1.1 e 1.2 podem ser vistos como versões para os sistemas elípticos com acoplamento dos resultados correspondentes em [2] [15]. Notemos que a condição (A_2) permite tratar casos em que os potenciais são coercivos ou satisfazem a condição introduzida em [2].

Nos dois últimos resultados deste capítulo, estabelecemos versões dos Teoremas 1.1 e 1.2 onde c_2 , dado por (F_2) , é zero. Neste caso, a segunda relação em (F_2) não é necessária:

$(\widehat{F}_2)$ existe $\theta > 2$ e uma função $h_1 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tais que

$$F(x, z) - \frac{1}{\theta} \nabla F(x, z) \cdot z \leq h_1(x), \text{ para todo } (x, z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2.$$

Supondo também a condição

(F_5) existe $c_3 \geq 0$ tal que

$$\sup_{t \geq 0} \int_{\mathbb{R}^N} [\lambda_1 t^2 u_1 v_1 - F(x, tz_1)] dx \leq c_3 < \infty,$$

onde $z_1 = (u_1, v_1)$ é a autofunção de (LP) associada com λ_1 , podemos enunciar o seguinte resultado de existência:

Teorema 1.3. *Suponha as condições (A_1) e (A_2) válidas. Se F satisfaz (F_1) , $(\widehat{F_2})$, (F_3) e (F_5) , então o problema (P) possui uma solução não nula.*

Além disso, supondo que F satisfaz (F_4) e a condição (F_6) existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e um subconjunto aberto Ω de $\mathbb{R}^N$ tais que

$$\frac{F(x, ta, tb)}{t^2} \rightarrow \infty \text{ quando } t \rightarrow \infty, \text{ uniformemente para } x \in \Omega,$$

obtemos um resultado de multiplicidade de solução:

Teorema 1.4. *Suponha as condições (A_1) e (A_2) válidas. Se F satisfaz (F_1) , $(\widehat{F_2})$, (F_4) e (F_6) , então o problema (P) possui uma infinidade de pares de soluções não nulas.*

1.1 Resultados Preliminares

A fim de aplicar o método variacional para estudar (P) , definimos o espaço $E = E_a \times E_b$ em que

$$E_a = \{u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}); \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + a(x)u^2) dx < \infty\} \quad \text{e}$$

$$E_b = \{v \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}); \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + b(x)v^2) dx < \infty\},$$

munido com o produto interno

$$\langle (u, v), (\phi, \psi) \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla \phi + \nabla v \nabla \psi + a(x)u\phi + b(x)v\psi) dx$$

cujas norma associada será denotada por $\|\cdot\|$. Também definimos as normas de E_a e E_b , respectivamente, por

$$\|u\|_{E_a}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + a(x)u^2) dx \quad \text{e} \quad \|v\|_{E_b}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + b(x)v^2) dx.$$

Argumentos padrões mostram que o funcional energia $I : E \rightarrow \mathbb{R}$ associado a (P) , definido por

$$I(z) = \frac{1}{2}\|z\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, z)dx, \quad z = (u, v) \in E, \quad (1.4)$$

está bem definido, é de classe C^1 e a derivada é dada por

$$I'(z) \cdot w = \langle z, w \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(x, z) \cdot w dx, \quad z, w \in E.$$

Além disso, os pontos críticos de I são precisamente as soluções fracas do sistema (P) . A condição (A_1) e o teorema de Sobolev implicam que a imersão $E \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \times L^s(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ é contínua para $2 \leq s \leq 2^*$. Contudo, uma vez que não estamos supondo que a ou b são coercivos, i.e. $a(x)$ ou $b(x)$ vão para $+\infty$ quando $|x| \rightarrow \infty$, esta imersão não pode ser compacta.

Agora vamos introduzir alguns resultados preliminares relativo a uma versão da condição de Palais-Smale para o funcional I dado por (1.4) .

Definição 1.1. Sejam E um espaço de Banach real e $I : E \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 . Dizemos que uma sequência $(z_n) \subset E$ é *Cerami forte* [(SCe)] se $I(z_n) \rightarrow c$, $I'(z_n) \rightarrow 0$ e $(\|z_n\|_E \|I'(z_n)\|_{E'})$ é uma sequência limitada. O funcional I satisfaz a *condição de Cerami forte* se toda sequência Cerami forte $(z_n) \subset E$ possui uma subsequência convergente.

A seguir, provemos três resultados técnicos.

Lema 1.1. Suponha $p, q > 0$ e $\mu, \nu \geq 0$ satisfazendo a condição (F_2) . Defina $\gamma = p + q$ e $\eta = \mu + \nu$. Então existe $r > 1$ tal que

- (i) $rp \geq \mu, rq \geq \nu$,
- (ii) $2(r - 1) \leq \gamma r - \eta \leq 2^*(r - 1)$,
- (iii) $\frac{\gamma r - \eta}{r} < 2$.

Demonstração. Faremos a prova do lema analisando casos.

Caso 1. $\gamma = 2$ (o que implica $\eta = 2$).

Neste caso, a desigualdade (ii) se reduz a $2r - 2 \leq 2^*r - 2^*$, isto é, $r(2^* - 2) \geq 2^* - 2$ a qual é verdadeira para todo $r > 1$. A desigualdade (iii) torna-se $(2r - 2)/r < 2$ que é verdadeira para todo $r > 0$. Finalmente, sendo $p, q > 0$, o item (i) é válido para todo $r > 1$ suficientemente grande.

Caso 2. $\gamma > 2, \eta \geq 2$.

Neste caso, supondo (ii) verdadeiro, temos

$$2r - 2 \leq \gamma r - \eta \Leftrightarrow (\gamma - 2)r \geq \eta - 2 \Leftrightarrow r \geq \frac{\eta - 2}{\gamma - 2}.$$

Além disso,

$$\gamma r - \eta \leq 2^* r - 2^* \Leftrightarrow (2^* - \gamma)r \geq 2^* - \eta \Leftrightarrow r \geq \frac{2^* - \eta}{2^* - \gamma}.$$

Agora, se (iii) é verdadeira, então

$$\gamma r - \eta < 2r \Leftrightarrow r < \frac{\eta}{\gamma - 2}.$$

Logo, os itens (ii) e (iii) são verdadeiros se, e somente se, existe $r > 1$ tal que

$$r \geq \frac{\eta - 2}{\gamma - 2}, \quad r \geq \frac{2^* - \eta}{2^* - \gamma}, \quad \text{e} \quad r < \frac{\eta}{\gamma - 2}.$$

Assim, para existir tal r , devemos ter

$$\max \left\{ \frac{\eta - 2}{\gamma - 2}, \frac{2^* - \eta}{2^* - \gamma} \right\} < \frac{\eta}{\gamma - 2}.$$

É claro que $\frac{\eta - 2}{\gamma - 2} < \frac{\eta}{\gamma - 2}$. Agora,

$$\begin{aligned} \frac{2^* - \eta}{2^* - \gamma} < \frac{\eta}{\gamma - 2} &\Leftrightarrow 2^* \gamma - 2 \cdot 2^* - \eta \gamma + 2\eta < 2^* \eta - \gamma \eta \\ &\Leftrightarrow 2^*(\gamma - 2) < (2^* - 2)\eta \\ &\Leftrightarrow \eta > \frac{2^*(\gamma - 2)}{(2^* - 2)} = \frac{2N/(N - 2)}{2N/(N - 2) - 2}(\gamma - 2) = \frac{N}{2}(\gamma - 2), \end{aligned}$$

ou seja, $\frac{2^* - \eta}{2^* - \gamma} < \frac{\eta}{\gamma - 2} \Leftrightarrow \eta > \frac{N}{2}(\gamma - 2)$, o que é verdade por hipótese. Assim, provamos que existe $r > 1$ conveniente que satisfaz (ii) e (iii). Agora, vejamos que tal r escolhido também satisfaz o item (i). De fato, se $p \geq \mu$, é claro que $rp \geq \mu$. Então, suponha $p < \mu$. Note que $rp \geq \mu$ se, e somente se, $r \geq \mu/p$. Para isto ocorrer, devemos ter

$$\frac{\mu}{p} < \frac{\eta}{\gamma - 2}.$$

Como $\gamma > 2$ e $\mu > p$, segue de (F_2) que $p\nu > \mu(q - 2)$. Assim, basta notar que

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{p} < \frac{\eta}{\gamma - 2} &\Leftrightarrow \frac{\mu}{p} < \frac{\mu + \nu}{p + q - 2} \\ &\Leftrightarrow \mu p + \mu q - 2\mu < p\mu + p\nu \\ &\Leftrightarrow p\nu > \mu(q - 2). \end{aligned}$$

Portanto, $rp \geq \mu$ e de modo análogo, mostramos que $rq \geq \nu$. Isto completa a prova

do lema. □

Lema 1.2. Suponha as condições (A_1) e (A_2) válidas. Se F satisfaz (F_1) , então toda sequência (SCe) limitada possui uma subsequência convergente.

Demonstração. Seja $(z_n) = ((u_n, v_n)) \subset E$ uma sequência (SCe) limitada. Sendo E reflexivo, podemos assumir, passando a uma subsequência se necessário, que $z_n \rightharpoonup z = (u, v)$ em E . Sendo I de classe C^1 , segue da definição de convergência fraca que z é um ponto crítico de I . Com isso, e devido às imersões compactas, podemos supor que

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u \text{ em } E_a, \ v_n \rightharpoonup v \text{ em } E_b, \\ u_n \rightarrow u, \ v_n \rightarrow v \text{ em } L_{loc}^s(\mathbb{R}^N) \text{ para } 2 \leq s < 2^*. \end{cases} \quad (1.5)$$

Mostraremos que a primeira desigualdade na condição (F_1) implica que $u_n \rightarrow u$ em E_a . Uma vez que $I'(z) = 0$, $I'(z_n) \rightarrow 0$ e (u_n) é limitada, temos

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|_{E_a}^2 &= I'(z_n)(u_n - u, 0) + \int_{\mathbb{R}^N} [(u_n - u)(F_u(x, z_n) - F_u(x, z))] dx \\ &\leq o(1) + \int_{\mathbb{R}^N} [F_u(x, z_n)(u_n - u) + F_u(x, z)(u - u_n)] dx \end{aligned} \quad (1.6)$$

quando $n \rightarrow \infty$. Escolhendo $0 < \delta < a_0 - \alpha_\infty$, afirmamos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} F_u(x, z_n)(u_n - u) dx \leq o(1) + \left(\frac{\alpha_\infty + \delta}{a_0} \right) \|u_n - u\|_{E_a}^2, \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (1.7)$$

De fato, definindo $G(z_n) = \int_{\mathbb{R}^N} F_u(x, z_n)(u_n - u) dx$, podemos usar (F_1) para obter $R > 0$ tal que $\alpha(x) < \alpha_\infty + \delta$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $|x| > R$. Assim,

$$\begin{aligned} G(z_n) &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |F_u(x, z_n)| |u_n - u| dx \\ &\leq c_1 \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p_1-1} |v_n|^{q_1} |u_n - u| dx + \int_{\mathbb{R}^N} \alpha(x) |u_n| |u_n - u| dx \\ &\quad + c_1 \int_{\mathbb{R}^N} |v_n| |u_n - u| dx \\ &\leq c_1 \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p_1-1} |v_n|^{q_1} |u_n - u| dx + \int_{B_R} \alpha(x) |u_n| |u_n - u| dx \\ &\quad + (\alpha_\infty + \delta) \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |u_n| |u_n - u| dx + c_1 \int_{\mathbb{R}^N} |v_n| |u_n - u| dx \\ &\leq c_1 \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p_1-1} |v_n|^{q_1} |u_n - u| dx + \int_{B_R} \alpha(x) |u_n| |u_n - u| dx \\ &\quad + (\alpha_\infty + \delta) \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} (|u| |u_n - u| + |u_n - u|^2) dx + c_1 \int_{\mathbb{R}^N} |v_n| |u_n - u| dx. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 G(z_n) &\leq c_1 \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p_1-1} |v_n|^{q_1} |u_n - u| dx + \int_{B_R} \alpha(x) |u_n| |u_n - u| dx \\
 &\quad + (\alpha_\infty + \delta) \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} (|u| |u_n - u| + |u_n - u|^2) dx \\
 &\quad + c_1 \int_{\mathbb{R}^N} |v_n| |u_n - u| dx.
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Primeiro note que, pela convergência local em (1.5) e pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{B_R(0)} \alpha(x) |u_n| |u_n - u| dx \right| &\leq \|\alpha(x)\|_{L^\infty} \|u_n\|_{L^2} \|u_n - u\|_{L^2(B_R(0))} \\
 &\leq k_1 \|u_n\|_{E_a} \|u_n - u\|_{L^2(B_R(0))} \\
 &\leq k_2 \|u_n - u\|_{L^2(B_R(0))} \rightarrow 0,
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

quando $n \rightarrow \infty$.

A fim de estimar a primeira integral em (1.8), dado $\varepsilon > 0$, escolhemos $R_1 > 0$ tal que $\mu(C_\varepsilon) < \varepsilon$, onde $C_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^N \setminus B_{R_1}; a(x)b(x) \leq \varepsilon^{-2}\}$ (veja Seção 1.3). Para este valor de R_1 , tomando $r_1 = (p_1 + q_1)/(p_1 - 1)$, $r_2 = (p_1 + q_1)/q_1$ e $r_3 = p_1 + q_1$, de modo que $1/r_1 + 1/r_2 + 1/r_3 = 1$, podemos invocar a convergência local e a desigualdade de Hölder para obter

$$\begin{aligned}
 \int_{B_{R_1}(0)} |u_n|^{p_1-1} |v_n|^{q_1} |u_n - u| dx &\leq \|u_n\|_{L^{r_1}}^{p_1-1} \|v_n\|_{L^{r_2}}^{q_1} \|u_n - u\|_{L^{r_3}(B_{R_1}(0))} \\
 &= \|u_n\|_{L^{p_1+q_1}}^{p_1-1} \|v_n\|_{L^{p_1+q_1}}^{q_1} \|u_n - u\|_{L^{p_1+q_1}(B_{R_1}(0))} \\
 &\leq k_3 \|z_n\|^{p_1+q_1-1} \|u_n - u\|_{L^{p_1+q_1}(B_{R_1}(0))}.
 \end{aligned}$$

Sendo (z_n) limitada e $u_n \rightarrow u$ em $L^{p_1+q_1}(B_{R_1})$, temos que

$$\int_{B_{R_1}} |u_n|^{p_1-1} |v_n|^{q_1} |u_n - u| dx < \varepsilon, \tag{1.10}$$

para todo n suficientemente grande. Definindo $D_\varepsilon = \mathbb{R}^N \setminus (B_{R_1} \cup C_\varepsilon)$ e usando a desigualdade de Hölder junto com (1.5), encontramos $M_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
 \int_{D_\varepsilon} |u_n|^{p_1-1} |v_n|^{q_1} |u_n - u| dx &\leq \left[\int_{D_\varepsilon} (|u_n|^{p_1-1} |v_n|^{q_1})^{\frac{p_1+q_1}{p_1+q_1-1}} dx \right]^{\frac{p_1+q_1-1}{p_1+q_1}} \|u_n - u\|_{L^{r_3}(D_\varepsilon)} \\
 &\leq M_1 \left[\int_{D_\varepsilon} (|u_n|^{p_1-1} |v_n|^{q_1})^{\frac{p_1+q_1}{p_1+q_1-1}} dx \right]^{\frac{p_1+q_1-1}{p_1+q_1}}.
 \end{aligned}$$

Supondo, sem perda de generalidade, que $q_1 > p_1 - 1$, aplicamos a desigualdade de

Hölder e (1.5) mais uma vez para encontrar $M_2 > 0$ tal que

$$\int_{D_\varepsilon} |u_n|^{p_1-1} |v_n|^{q_1} |u_n - u| dx \leq M_2 \left[\int_{D_\varepsilon} (|u_n v_n|)^{\frac{p_1+q_1}{2}} dx \right]^{\frac{2(p_1-1)}{p_1+q_1}}. \quad (1.11)$$

Agora, tomemos $t \in (0, 1]$ tal que $p_1 + q_1 = 2t + (1-t)2^*$, obtendo, pela desigualdade de Hölder e a definição de D_ε ,

$$\begin{aligned} \int_{D_\varepsilon} (|u_n v_n|)^{\frac{p_1+q_1}{2}} dx &= \int_{D_\varepsilon} |u_n v_n|^t |u_n v_n|^{(1-t)\frac{2^*}{2}} dx \\ &\leq \left(\int_{D_\varepsilon} |u_n v_n| dx \right)^t \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{\frac{2^*}{2}} |v_n|^{\frac{2^*}{2}} dx \right)^{1-t} \\ &\leq \left(\varepsilon \int_{D_\varepsilon} \sqrt{a(x)} |u_n| \sqrt{b(x)} |v_n| dx \right)^t \left(\|u_n\|_{L^{2^*}}^{2^*/2} \|v_n\|_{L^{2^*}}^{2^*/2} \right)^{1-t} \\ &\leq \varepsilon^t \left[\left(\int_{D_\varepsilon} a(x) u_n^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{D_\varepsilon} b(x) v_n^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right]^t \left(\|u_n\|_{L^{2^*}}^{2^*/2} \|v_n\|_{L^{2^*}}^{2^*/2} \right)^{1-t} \\ &\leq \varepsilon^t (\|u_n\|_{E_a} \|v_n\|_{E_b})^t \left(\|u_n\|_{L^{2^*}}^{2^*/2} \|v_n\|_{L^{2^*}}^{2^*/2} \right)^{1-t}. \end{aligned}$$

Pelas imersões contínuas $E_a, E_b \hookrightarrow L^{2^*}$, segue da expressão acima, (1.11) e a limitação de (z_n) em E que existe $r > 0$ e $M_3 > 0$ tais que

$$\int_{D_\varepsilon} |u_n|^{p_1-1} |v_n|^{q_1} |u_n - u| dx \leq M_3 \varepsilon^r, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (1.12)$$

Por outro lado, pela desigualdade de Hölder generalizada e (1.5),

$$\begin{aligned} \int_{C_\varepsilon} |u_n|^{p_1-1} |v_n|^{q_1} |u_n - u| dx &\leq \\ &\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p_1+q_1} dx \right)^{\frac{p_1-1}{p_1+q_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p_1+q_1} dx \right)^{\frac{q_1}{p_1+q_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u|^{2^*} dx \right)^{\frac{1}{2^*}} \mu(C_\varepsilon)^s \\ &< k_4 \varepsilon^s, \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $s = \frac{2^* - (p_1 + q_1)}{2^*(p_1 + q_1)} > 0$. Daí, segue da desigualdade acima, (1.10) e (1.12) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p_1-1} |v_n|^{q_1} |u_n - u| dx \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (1.13)$$

Analogamente,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n| |u_n - u| dx \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} |u| |u_n - u| dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.14)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} (\alpha_\infty + \delta) \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |u_n - u|^2 dx &\leq (\alpha_\infty + \delta) \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{|\nabla(u_n - u)|^2}{a_0} + \frac{a(x)}{a_0} |u_n - u|^2 \right] dx \\ &\leq \left(\frac{\alpha_\infty + \delta}{a_0} \right) \|u_n - u\|_{E_a}^2. \end{aligned}$$

Assim, a desigualdade acima junto com (1.8), (1.9), (1.13) e (1.14) provam a afirmação. De modo similar, mostramos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} F_u(x, z)(u - u_n) dx \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Logo, por (1.6) e (1.7), obtemos

$$\|u_n - u\|_{E_a}^2 \leq o(1) + \left(\frac{\alpha_\infty + \delta}{a_0} \right) \|u_n - u\|_{E_a}^2, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Daí,

$$\left(1 - \frac{\alpha_\infty + \delta}{a_0} \right) \|u_n - u\|_{E_a}^2 \leq o(1), \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Pela escolha de δ , concluímos que $u_n \rightarrow u$ em E_a .

Procedendo de maneira análoga, podemos usar a segunda desigualdade em (F_1) para mostrar que $v_n \rightarrow v$ em E_b . Isto conclui a prova do lema. $\square$

Baseado nos resultados precedentes, podemos afirmar

Lema 1.3. Suponha as condições (A_1) e (A_2) válidas. Se F satisfaz (F_1) e (F_2) ou $(\widehat{F_2})$, então o funcional I satisfaz a condição (SCe).

Demonstração. Seja $(z_n) = ((u_n, v_n)) \subset E$ uma sequência (SCe), i.e. (z_n) satisfaz (i) $I(z_n) \rightarrow c$ e $I'(z_n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, e (ii) $\|z_n\| \|I'(z_n)\| \leq M < \infty$. Pelo Lema 1.2, é suficiente mostrar que (z_n) é uma sequência limitada. Supondo que F satisfaz (F_2) , obtemos

$$\begin{aligned} c_2 \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^\mu |v_n|^\nu dx &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(x, z_n) \cdot z_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, z_n) dx + \int_{\mathbb{R}^N} h_2(x) dx \\ &= I(z_n) - \frac{1}{2} I'(z_n) z_n + \int_{\mathbb{R}^N} h_2(x) dx \\ &\leq I(z_n) + \frac{1}{2} \|I'(z_n)\| \|z_n\| + \|h_2\|_{L^1}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 I(z_n) - \frac{1}{\theta} \langle I'(z_n), z_n \rangle &= \frac{1}{2} \|z_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, z_n) dx - \frac{1}{\theta} \|z_n\|^2 + \frac{1}{\theta} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(x, z_n) \cdot z_n dx \\
 &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \right) \|z_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \left[F(x, z_n) - \frac{1}{\theta} \nabla F(x, z_n) \cdot z_n \right] dx \\
 &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \right) \|z_n\|^2 - c_2 \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p |v_n|^q dx - \int_{\mathbb{R}^N} h_1(x) dx.
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \right) \|z_n\|^2 \leq I(z_n) - \frac{1}{\theta} \langle I'(z_n), z_n \rangle + c_2 \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p |v_n|^q dx + \int_{\mathbb{R}^N} h_1(x) dx.$$

Por (i) e (ii), encontramos $M_1 > 0$ suficientemente grande de modo que

$$c_2 \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^\mu |v_n|^\nu dx \leq I(z_n) - \frac{1}{2} \langle I'(z_n), z_n \rangle \|h_2\|_{L^1} \leq M_1, \quad (1.15)$$

e

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \right) \|z_n\|^2 &\leq I(z_n) - \frac{1}{\theta} \langle I'(z_n), z_n \rangle + c_2 \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p |v_n|^q dx + \|h_1\|_{L^1} \\
 &\leq c_2 \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p |v_n|^q dx + M_1.
 \end{aligned} \quad (1.16)$$

Considerando $\gamma = p + q$ e $\eta = \mu + \nu$, aplicamos o Lema [1.1](#) para encontrar $r > 1$ tal que $rp \geq \mu$, $rq \geq \nu$, $2(r-1) \leq \gamma r - \eta \leq 2^*(r-1)$ e $(\gamma r - \eta)/r < 2$. Uma vez que $|u_n(x)|, |v_n(x)| \leq |z_n(x)|$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
 (|u_n|^\mu |v_n|^\nu)^{\frac{1}{r}} |z_n|^{\frac{\gamma r - \eta}{r}} &= |u_n|^{\frac{\mu}{r}} |v_n|^{\frac{\nu}{r}} |z_n|^{\frac{rp - \mu}{r}} |z_n|^{\frac{rq - \nu}{r}} \\
 &\geq |u_n|^{\frac{\mu}{r}} |v_n|^{\frac{\nu}{r}} |u_n|^{\frac{rp - \mu}{r}} |v_n|^{\frac{rq - \nu}{r}} \\
 &= |u_n|^p |v_n|^q.
 \end{aligned}$$

Daí,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p |v_n|^q dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} (|u_n|^\mu |v_n|^\nu)^{\frac{1}{r}} |z_n|^{\frac{\gamma r - \eta}{r}} dx,$$

e aplicando a desigualdade de Hölder para a última relação, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p |v_n|^q dx \leq \left[\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^\mu |v_n|^\nu dx \right]^{\frac{1}{r}} \left[\int_{\mathbb{R}^N} |z_n|^{\frac{\gamma r - \eta}{r-1}} dx \right]^{\frac{r-1}{r}}.$$

Consequentemente, pela desigualdade [\(1.15\)](#), existe $M_2 > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p |v_n|^q dx \leq M_2 \|z_n\|_{L^{\frac{\gamma r - \eta}{r-1}}}^{\frac{\gamma r - \eta}{r}} \times L^{\frac{\gamma r - \eta}{r-1}}.$$

Como a injeção $E \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \times L^s(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ é contínua para $2 \leq s \leq 2^*$, $\frac{\gamma r - \eta}{r - 1} \in [2, 2^*]$ e $\theta > 2p$, segue da desigualdade acima e (1.16) que existem $M_3, M_4 > 0$ tais que

$$\|z_n\|_E^2 \leq M_3 \|z_n\|_E^{\frac{\gamma r - \eta}{r}} + M_4.$$

Finalmente pela escolha de r , temos que $\frac{\gamma r - \eta}{r} < 2$ e, assim, podemos concluir que (z_n) é uma sequência limitada. O caso em que a condição $(\widehat{F}_2)$ é válida, a conclusão que (z_n) é limitada é uma consequência direta de (1.16) com $c_2 = 0$. Isto conclui a prova do lema. $\square$

A seguir, enunciamos as versões dos resultados abstratos em [1] que serão usados na prova dos Teoremas 1.1-1.2.

Teorema 1.5. ([17, 19]) *Seja E um espaço de Banach real. Seja $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ um funcional (SCe) satisfazendo $I(0) = 0$ e as condições*

(I₁) existe $\rho > 0$ tal que $I(z) \geq 0$, para todo $z \in \partial B_\rho(0)$;

(I₂) existem $\beta \in \mathbb{R}$, $e \in E$ tais que $I(te) \leq \beta$, para todo $t \geq 0$.

Então I possui um ponto crítico não nulo.

Teorema 1.6. ([17, 22]) *Seja $E = V \oplus W$ um espaço de Banach real com V de dimensão finita. Suponha que $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ é par satisfazendo $I(0) = 0$, (SCe) e as condições*

(I₃) existe $\rho > 0$ tal que $I(z) \geq 0$, para todo $z \in \partial B_\rho(0) \cap W$.

(I₄) existe um subespaço $\widehat{V} \subset E$ com $\dim V < \dim \widehat{V} < \infty$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tais que $I(z) \leq \beta$, para todo $z \in \widehat{V}$.

Então I possui $\dim \widehat{V} - \dim V$ pares de pontos críticos não triviais.

Observação 1.1. Os Teoremas 1.5 e 1.6 em [17, 19] e [17, 22] estão provados para a condição de Palais-Smale [1, 14]. A versão para a condição (SCe) é baseada na prova do Lema de Deformação em [20].

1.2 Existência de Soluções

Nesta seção, iremos provar os Teoremas 1.1 e 1.3 verificando que o funcional I , dado por (1.4), satisfaz as hipóteses do Teorema 1.5. Começamos recordando uma caracterização variacional do autovalor λ_1 (veja o Apêndice A):

$$\lambda_1 = \sup \left\{ \mu \geq 0; \|z\|^2 - 2\mu \int_{\mathbb{R}^N} uv dx \geq 0, \forall z \in E \right\}. \quad (1.17)$$

Consequentemente, tomando $\lambda \in [0, \lambda_1)$, dado por (F_3) , existe $\lambda < \mu \leq \lambda_1$ tal que $\|z\|^2 - 2\mu \int_{\mathbb{R}^N} uv dx \geq 0$, para todo $z \in E$. Assim,

$$\frac{1}{2}\|z\|^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} uv dx \geq \frac{1}{2}\|z\|^2 - \frac{\lambda}{2\mu}\|z\|^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2\mu}\right)\|z\|^2,$$

para todo $z \in E$. Pondo $c_3 = \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2\mu} > 0$, temos que

$$\frac{1}{2}\|z\|^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} uv dx \geq c_3\|z\|^2, \text{ para todo } z \in E. \quad (1.18)$$

Agora, dado $\varepsilon > 0$, usamos (F_3) para achar $\delta > 0$ tal que

$$F(x, z) - \lambda uv \leq \varepsilon|z|^2, \text{ para todo } (x, z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2 \text{ com } |z| \leq \delta.$$

Além disso, observando que $F(x, 0, 0) \equiv 0$ e aplicando (F_1) , obtemos constantes $c_4 > 0$ e $2 < \sigma < 2^*$ tais que

$$F(x, z) - \lambda uv \leq c_4|z|^\sigma, \text{ para todo } (x, z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2 \text{ com } |z| > \delta.$$

Combinando as duas últimas desigualdades, obtemos

$$F(x, z) - \lambda uv \leq \varepsilon|z|^2 + c_4|z|^\sigma, \text{ para todo } (x, z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2.$$

Consequentemente, pela definição (1.4) e a desigualdade (1.18),

$$\begin{aligned} I(z) &= \frac{1}{2}\|z\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, z) dx \\ &\geq c_3\|z\|^2 + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} uv dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, z) dx \\ &\geq c_3\|z\|^2 - \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |z|^2 dx - c_4 \int_{\mathbb{R}^N} |z|^\sigma dx \\ &= c_3\|z\|^2 - \varepsilon\|z\|_{L^2}^2 - c_4\|z\|_{L^\sigma}^\sigma, \end{aligned}$$

para todo $z \in E$. Usando a imersão contínua $E \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \times L^s(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, $2 \leq s \leq 2^*$, temos que

$$\begin{aligned} I(z) &\geq c_3\|z\|^2 - \varepsilon k_1\|z\|^2 - c_4 k_2\|z\|^\sigma \\ &\geq (c_3 - \varepsilon k_1 - c_4 k_2\|z\|^{\sigma-2})\|z\|^2, \end{aligned}$$

para todo $z \in E$. Sendo $\sigma > 2$, podemos tomar $\varepsilon > 0$ e $\|z\| = \rho$ suficientemente pequenos de modo que $c_3 - \varepsilon k_1 - c_4 k_2 \|z\|^{\sigma-2} \geq 0$, ou seja,

$$I(z) \geq 0, \text{ para todo } z \in E \text{ com } \|z\| = \rho.$$

Assim, concluímos que I satisfaz a condição (I_1) .

Agora, para provar o Teorema [1.1](#), vamos supor a condição (F_2) para verificar que I satisfaz a condição (I_2) quando $\eta > 2$ (o caso $\eta = 2$ é provado por um argumento similar). Dado $(x, z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2$, considerando a função $g(t) = F(x, tz) = F(x, tu, tv)$, $t \geq 0$, temos que

$$\begin{aligned} g'(t) &= F_u(x, tz)u + F_v(x, tz)v \\ &= \frac{1}{t} \nabla F(x, tz) \cdot tz \\ &\geq \frac{1}{t} [2F(x, tz) + 2c_2 |tu|^\mu |tv|^\nu - 2h_2(x)] \\ &= \frac{2g(t)}{t} + 2c_2 t^{\eta-1} |u|^\mu |v|^\nu - \frac{2h_2(x)}{t}, \end{aligned}$$

para todo $t > 0$. Mas

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{g(t)}{t^2} \right) = \frac{1}{t^2} \left[g'(t) - \frac{2g(t)}{t} \right].$$

Assim,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{g(t)}{t^2} \right) \geq \frac{1}{t^2} \left[2c_2 t^{\eta-1} |u|^\mu |v|^\nu - \frac{2h_2(x)}{t} \right] = 2c_2 t^{\eta-3} |u|^\mu |v|^\nu - \frac{2h_2(x)}{t^3}, \quad t > 0.$$

Integrando a desigualdade acima com respeito à variável t , de 1 até t , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{g(t)}{t^2} - g(1) &\geq \frac{2c_2 |u|^\mu |v|^\nu}{\eta - 2} (t^{\eta-2} - 1) - 2h_2(x) \int_1^t \frac{ds}{s^3} \\ &= \frac{2c_2 |u|^\mu |v|^\nu}{\eta - 2} (t^{\eta-2} - 1) - \left(1 - \frac{1}{t^2} \right) h_2(x), \end{aligned}$$

para todo $t \geq 1$. Daí,

$$\frac{F(x, tz)}{t^2} \geq F(x, z) + \frac{2c_2 |u|^\mu |v|^\nu}{\eta - 2} (t^{\eta-2} - 1) - |h_2(x)| \left(1 - \frac{1}{t^2} \right),$$

para todo $t \geq 1$. Consequentemente,

$$F(x, tz) \geq t^2 F(x, z) + \frac{2c_2 |u|^\mu |v|^\nu}{\eta - 2} (t^\eta - t^2) - |h_2(x)| (t^2 - 1),$$

para todo $t \geq 1$. A seguir, fixemos $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\varphi \neq 0$, e tomamos $e = (\varphi, \varphi)$. Usando

a relação acima, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(x, te) dx \geq t^2 \int_{\mathbb{R}^N} F(x, e) dx + \frac{2c_2 \|\varphi\|_{L^\eta}^\eta}{\eta - 2} (t^\eta - t^2) - (t^2 - 1) \|h_2\|_{L^1},$$

para todo $t \geq 1$. Sendo $\eta > 2$, concluimos que

$$\frac{1}{t^2} \int_{\mathbb{R}^N} F(x, te) dx \rightarrow \infty, \text{ quando } t \rightarrow \infty. \quad (1.19)$$

Logo,

$$\frac{1}{t^2} I(te) = \frac{1}{2} \|e\|^2 - \frac{1}{t^2} \int_{\mathbb{R}^N} F(x, te) dx \rightarrow -\infty$$

quando $t \rightarrow \infty$ e, assim, I satisfaz (I_2) sempre que a condição (F_2) vale. Pelo Lema 1.3, I satisfaz a condição (SCe). Além disso, já temos que $I(0) = 0$ e I satisfaz (I_1) e (I_2) . Portanto, pelo Teorema 1.5, concluimos que o problema (P) possui uma solução não nula. Isto conclui a prova do Teorema 1.1.

Para provar o Teorema 1.3, ainda precisamos verificar que o funcional I satisfaz a condição (I_2) . Mas, tomando $e = z_1$ (autofunção de (LP) associada ao autovalor λ_1) e notando que $\|z_1\|^2 = 2\lambda_1 \int_{\mathbb{R}^N} u_1 v_1 dx$, segue de (F_5) que

$$I(te) = \frac{1}{2} t^2 \|z_1\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, tz_1) dx = \int_{\mathbb{R}^N} [\lambda_1 t^2 u_1 v_1 - F(x, tz_1)] dx \leq c_3 := \beta,$$

para todo $t \geq 0$. Isto mostra que (I_2) vale e o teorema está provado.

1.3 Multiplicidade de Soluções

O objetivo desta seção é provar os Teoremas 1.2 e 1.4 verificando que o funcional I satisfaz as hipóteses do Teorema 1.6 com $\dim \widehat{V} - \dim V$ tão grande quanto queremos. Seja $\{z_1, z_2, \dots, z_k, \dots\}$ uma base ortonormal para E . Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos $E_k = \text{span}\{z_1, \dots, z_k\}$. A fim de provar o Teorema 1.2, precisamos do seguinte resultado técnico.

Lema 1.4. Suponha as condições (A_1) e (A_2) válidas. Se $p, q > 0$ e $2 \leq p + q < 2^*$, então dado $\delta > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p |v|^q dx \leq \delta \|z\|^{p+q}, \text{ para todo } z \in E_k^\perp, k \geq k_0.$$

Demonstração. Primeiro, suponhamos que $p = q = 1$. Argumentando por contradição, suponhamos que existe $c > 0$ e uma sequência $(z_k) = ((u_k, v_k)) \subset E_k^\perp$ tais que $\|z_k\| = 1$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_k| |v_k| dx \geq c > 0. \quad (1.20)$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que

$$\begin{cases} z_k \rightharpoonup 0 \text{ em } E, \\ u_k, v_k \rightarrow 0 \text{ em } L_{loc}^s(\mathbb{R}^N) \text{ para } 2 \leq s < 2^*. \end{cases} \quad (1.21)$$

Pela condição (A_2) , dado $\varepsilon > 0$, temos que $\mu(\{x \in \mathbb{R}^N; a(x)b(x) \leq \varepsilon^{-2}\}) < \infty$. Assim, para $R > 0$,

$$\begin{aligned} \mu(\{x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R; a(x)b(x) \leq \varepsilon^{-2}\}) &= \mu(\{x \in \mathbb{R}^N; a(x)b(x) \leq \varepsilon^{-2}\}) \\ &\quad - \mu(\{x \in B_R(0); a(x)b(x) \leq \varepsilon^{-2}\}) \\ &\rightarrow 0, \text{ quando } R \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Logo, podemos escolher $R > 0$ tal que $\mu(C_\varepsilon) < \varepsilon$, onde

$$C_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R; a(x)b(x) \leq \varepsilon^{-2}\}.$$

Pela desigualdade de Hölder com expoentes $N/2$, 2^* e 2^* , obtemos

$$\int_{C_\varepsilon} |u_k| |v_k| dx \leq \mu(C_\varepsilon)^{\frac{2}{N}} \|u_k\|_{L^{2^*}} \|v_k\|_{L^{2^*}}.$$

Segue da convergência fraca em (1.21) que existe $M > 0$ tal que $\|u_k\|_{L^{2^*}} \|v_k\|_{L^{2^*}} \leq M$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Daí,

$$\int_{C_\varepsilon} |u_k| |v_k| dx \leq M \mu(C_\varepsilon)^{\frac{2}{N}} \leq M \varepsilon^{\frac{2}{N}}. \quad (1.22)$$

Agora, definindo $D_\varepsilon = \mathbb{R}^N \setminus (B_R \cup C_\varepsilon)$, podemos usar a desigualdade de Hölder mais uma vez para obter

$$\begin{aligned} \int_{D_\varepsilon} |u_k| |v_k| dx &\leq \varepsilon \int_{D_\varepsilon} \sqrt{a(x)} |u_k| \sqrt{b(x)} |v_k| dx \\ &\leq \varepsilon \left(\int_{D_\varepsilon} a(x) u_k^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{D_\varepsilon} b(x) v_k^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u_k|^2 + |\nabla v_k|^2 + a(x) u_k^2 + b(x) v_k^2] dx \\ &\leq \varepsilon \|z_k\|^2 = \varepsilon. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Além disso, por (1.21), temos que $\|u_k\|_{L^2(B_R)}, \|v_k\|_{L^2(B_R)} \rightarrow 0$. Assim, para todo k suficientemente grande,

$$\int_{B_R} |u_k| |v_k| \leq \|u_k\|_{L^2(B_R)} \|v_k\|_{L^2(B_R)} < \varepsilon. \quad (1.24)$$

Em vista de (1.22)-(1.24) e o fato de que $\varepsilon > 0$ pode ser escolhido arbitrariamente pequeno, obtemos uma contradição com (1.20). Isto prova o lema para $p = q = 1$. Agora, consideremos o caso geral. Supondo $p \geq q$, afirmamos que existe $c_5 > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p |v|^q dx \leq c_5 \|uv\|_{L^{\frac{p+q}{2}}}^q \|z\|^{p-q}, \text{ para todo } z \in E. \quad (1.25)$$

De fato, a desigualdade acima é trivialmente verdadeira para $p = q$. Assim, podemos assumir que $p > q$. Aplicando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p |v|^q dx &= \int_{\mathbb{R}^N} (|u||v|)^q |u|^{p-q} dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |uv|^{\frac{p+q}{2}} dx \right)^{\frac{2q}{p+q}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+q} dx \right)^{\frac{p-q}{p+q}} \\ &= \|uv\|_{L^{\frac{p+q}{2}}}^q \|u\|_{L^{p+q}}^{p-q}. \end{aligned}$$

Como $|u(x)| \leq |z(x)|$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, segue da imersão contínua $E \hookrightarrow L^{p+q}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \times L^{p+q}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ que existe $c_5 > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^{p+q}} \leq c_5 \|z\|, \text{ para todo } z \in E.$$

Isto prova a afirmação (1.25). Tomando $t \in (0, 1]$ tal que $p + q = 2t + (1-t)2^*$, pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (|u||v|)^{\frac{p+q}{2}} dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |uv|^t |uv|^{(1-t)\frac{2^*}{2}} dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |uv| dx \right)^t \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{2^*}{2}} |v|^{\frac{2^*}{2}} dx \right)^{1-t} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |uv| dx \right)^t \left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{2^*} dx \right)^{1/2} \right]^{1-t} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |uv| dx \right)^t \left[\|u\|_{L^{2^*}}^{\frac{2^*}{2}} \|v\|_{L^{2^*}}^{\frac{2^*}{2}} \right]^{1-t} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |uv| dx \right)^t \|z\|_{L^{2^*} \times L^{2^*}}^{2^*(1-t)} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |uv| dx \right)^t k_1 \|z\|^{2^*(1-t)}. \end{aligned}$$

Finalmente, dado $\delta > 0$, usando o fato de que o lema vale para o caso $p = q = 1$ com $\hat{\delta} = \left(\frac{\delta}{c_5 k_1}\right)^{\frac{p+q}{2qt}}$, encontramos $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |uv| dx\right)^t \leq \left[\left(\frac{\delta}{c_5 k_1}\right)^{\frac{p+q}{2qt}} \|z\|^2\right]^t = \left(\frac{\delta}{c_5 k_1}\right)^{\frac{p+q}{2q}} \|z\|^{2t},$$

para todo $z \in E_k^\perp$, $k \geq k_0$. Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (|u||v|)^{\frac{p+q}{2}} dx &\leq \left(\frac{\delta}{c_5 k_1}\right)^{\frac{p+q}{2q}} \|z\|^{2t} k_1 \|z\|^{2^*(1-t)} \\ &= \left(\frac{\delta}{c_5 k_1}\right)^{\frac{p+q}{2q}} k_1 \|z\|^{p+q}, \end{aligned}$$

para todo $z \in E_k^\perp$, $k \geq k_0$. Logo,

$$\|uv\|_{L^{\frac{p+q}{2}}}^q \leq (c_5)^{-1} \delta \|z\|^{2q}, \text{ para todo } z \in E_k^\perp, k \geq k_0.$$

Combinando a desigualdade acima com (1.25), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p |v|^q dx \leq \delta \|z\|^{2q} \|z\|^{p-q} = \delta \|z\|^{p+q}, \text{ para todo } z \in E_k^\perp, k \geq k_0.$$

Isto conclui a prova do lema. □

O próximo resultado segue de (1.1) e o fato de que a imersão $E \hookrightarrow L^s(U) \times L^s(U)$, $2 \leq s < 2^*$, é compacta se $U \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado.

Lema 1.5. Suponha as condições (A_1) e (A_2) válidas. Se α e $\beta \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ satisfazem (1.1), então existe $r > 1$ com a seguinte propriedade: dado $\delta > 0$, podemos encontrar $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \alpha(x) u^2 dx &\leq \frac{1}{r} \int_{\mathbb{R}^N} a(x) u^2 dx + \delta \|z\|^2, \text{ para todo } z \in E_k^\perp, k \geq k_1, \\ \int_{\mathbb{R}^N} \beta(x) v^2 dx &\leq \frac{1}{r} \int_{\mathbb{R}^N} b(x) v^2 dx + \delta \|z\|^2, \text{ para todo } z \in E_k^\perp, k \geq k_1. \end{aligned}$$

Demonstração. Suponhamos, por contradição, que existe $\delta > 0$ e uma sequência $z_k = (u_k, v_k) \in E_k^\perp$ tais que $\|z_k\| = 1$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \alpha(x) u_k^2 dx > \frac{1}{r} \int_{\mathbb{R}^N} a(x) u_k^2 dx + \delta, \text{ para todo } r > 1.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que

$$\begin{cases} z_k \rightharpoonup 0 \text{ em } E, \\ u_k, v_k \rightarrow 0 \text{ em } L^s_{loc}(\mathbb{R}^N) \text{ para } 2 \leq s < 2^*. \end{cases}$$

Pela condição (1.1), existe $R > 0$ tal que $\alpha(x) < a_0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R$. Assim, para todo $r > 1$ e todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_{B_R} \alpha(x) u_k^2 dx + \int_{B_R^c} \alpha(x) u_k^2 dx > \frac{1}{r} \int_{\mathbb{R}^N} a(x) u_k^2 dx + \delta.$$

Como $\alpha(x) < a_0$ para $|x| \geq R$, temos

$$\int_{B_R} \alpha(x) u_k^2 dx + \int_{B_R^c} a_0 u_k^2 dx > \frac{1}{r} \int_{\mathbb{R}^N} a(x) u_k^2 dx + \delta,$$

para todo $r \geq 1$ e todo $k \in \mathbb{N}$. Daí,

$$\begin{aligned} \int_{B_R} \alpha(x) u_k^2 dx &> \frac{1}{r} \int_{\mathbb{R}^N} a(x) u_k^2 dx - \int_{B_R^c} a_0 u_k^2 dx + \delta \\ &= \frac{1}{r} \int_{B_R} a(x) u_k^2 dx + \left(\frac{1}{r} - 1 \right) \int_{B_R^c} a(x) u_k^2 dx \\ &\quad + \int_{B_R^c} (a(x) - a_0) u_k^2 dx + \delta \\ &\geq \frac{1}{r} \int_{B_R} a(x) u_k^2 dx + \left(\frac{1-r}{r} \right) \int_{B_R^c} a(x) u_k^2 dx + \delta, \end{aligned}$$

para todo $r > 1$ e todo $k \in \mathbb{N}$. Uma vez que $a, \alpha \in L^\infty(B_R)$ e $u_k \rightarrow 0$ em $L^2(B_R)$, segue que

$$0 \geq \left(\frac{1-r}{r} \right) \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{B_R^c} a(x) u_k^2 dx + \delta, \text{ para todo } r > 1,$$

o que é uma contradição. □

Agora podemos verificar a condição (I_3) . Seja $r > 1$ constante dada pelo Lema 1.5. Pela desigualdade (1.3), temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |F(x, z)| dx \leq \frac{c_1}{p_1} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p_1} |v|^{q_1} dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} [\alpha(x) u^2 + \beta(x) v^2] dx + c_1 \int_{\mathbb{R}^N} |u| |v| dx.$$

Dado $\delta > 0$, segue do Lema 1.4 que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{c_1}{p_1} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p_1} |v|^{q_1} dx \leq \delta \|z\|^{p_1+q_1} \text{ e } c_1 \int_{\mathbb{R}^N} |u| |v| dx \leq \delta \|z\|^2,$$

para todo $z \in E_k^\perp$, $k \geq k_0$. Pelo Lema [1.5](#), existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} [\alpha(x)u^2 + \beta(x)v^2]dx &\leq \frac{1}{r} \int_{\mathbb{R}^N} [a(x)u^2 + b(x)v^2]dx + 2\delta\|z\|^2 \\ &\leq \frac{1}{r}\|z\|^2 + 2\delta\|z\|^2, \end{aligned}$$

para todo $z \in E_k^\perp$, $k \geq k_1$. Assim, tomando $k = \max\{k_0, k_1\}$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |F(x, z)|dx \leq \delta\|z\|^\sigma + \delta\|z\|^2 + \frac{1}{2r}\|z\|^2 + \delta\|z\|^2, \text{ para todo } z \in E_k^\perp,$$

onde $\sigma = p_1 + q_1$. Daí,

$$\begin{aligned} I(z) &= \frac{1}{2}\|z\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, z)dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|z\|^2 - \delta\|z\|^\sigma - 2\delta\|z\|^2 - \frac{1}{2r}\|z\|^2 \\ &= \left(\frac{r-1}{2r} - \delta\|z\|^{\sigma-2} - 2\delta \right) \|z\|^2, \end{aligned}$$

para todo $z \in E_k^\perp$ e todo $\delta > 0$. Tomando $\delta = \frac{r-1}{12r}$, temos que, para todo $z \in E_k^\perp \cap B_1(0)$,

$$\begin{aligned} I(z) &\geq \left[\frac{r-1}{2r} - \frac{r-1}{12r} (\|z\|^{\sigma-2} + 2) \right] \|z\|^2 \\ &\geq \left[\frac{r-1}{2r} - \frac{r-1}{12r} \cdot 3 \right] \|z\|^2 \\ &= \left(\frac{r-1}{2r} \right) \|z\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Isto prova a condição (I_3) com $V = E_k$ e $W = E_k^\perp$.

Agora, dado $m \in \mathbb{N}$, tomemos $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{m+k} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\text{supp}(\varphi_i) \cap \text{supp}(\varphi_j) = \emptyset$ para cada $i \neq j \in \{1, \dots, m+k\}$. Considere

$$\widehat{V} = \text{span}\{(\varphi_1, \varphi_1), \dots, (\varphi_{m+k}, \varphi_{m+k})\}.$$

Para cada $i \in \{1, \dots, m+k\}$, seja $f_i(t) = I(t(\varphi_i, \varphi_i))$, $t \in \mathbb{R}$. Então $f_i \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Além disso, por [\(1.19\)](#), temos que

$$f_i(t) = t^2 \left(\frac{1}{2} \|(\varphi_i, \varphi_i)\|^2 - \frac{1}{t^2} \int_{\mathbb{R}^N} F(x, t\varphi_i, t\varphi_i) dx \right) \longrightarrow -\infty, \text{ quando } |t| \rightarrow \infty.$$

Assim, existe $C_i > 0$ tal que $f_i(t) \leq C_i$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Agora, seja

$$e = t_1(\varphi_1, \varphi_1) + \dots + t_{m+k}(\varphi_{m+k}, \varphi_{m+k}) \in \widehat{V}.$$

Uma vez que $\text{supp}(\varphi_i) \cap \text{supp}(\varphi_j) = \emptyset$ sempre que $i \neq j$ e F satisfaz $F(x, 0, 0) \equiv 0$, segue que

$$\begin{aligned} I(e) &= I(t_1(\varphi_1, \varphi_1)) + \dots + I(t_{m+k}(\varphi_{m+k}, \varphi_{m+k})) \\ &= f_1(t_1) + \dots + f_{m+k}(t_{m+k}) \leq C_1 + \dots + C_{m+k} =: \beta. \end{aligned}$$

Logo, I satisfaz (I_4) . Além disso, pela condição (F_4) , segue que I é um funcional par. Assim, uma vez que I satisfaz $I(0) = 0$, (I_3) , (I_4) e (SCe) , podemos aplicar o Teorema 1.6 para concluir que, para cada $m \in \mathbb{N}$, o problema (P) possui $\dim \hat{V} - \dim V = m$ pares de soluções não nulas. Isto conclui a prova do Teorema 1.2.

Para provar o Teorema 1.4, ainda precisamos verificar a condição (I_4) . Considere-mos a, b e Ω , aberto de $\mathbb{R}^N$, dados por (F_6) e tomemos $\varphi_1, \dots, \varphi_{m+k} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ como anteriormente com $\text{supp}(\varphi_i) \subset \Omega$, para cada $1 \leq i \leq m+k$. Então, definindo

$$\hat{V} = \text{span}\{(a\varphi_1, b\varphi_1), \dots, (a\varphi_{m+k}, b\varphi_{m+k})\}$$

podemos, como anteriormente, aplicar a condição (F_6) para verificar que (I_4) vale e, assim, concluir a prova do Teorema 1.4.

Capítulo 2

Sistemas com potenciais se anulando e comportamento assintótico com respeito a um parâmetro $\lambda > 0$

O objetivo deste capítulo é estudar a existência, multiplicidade e comportamento assintótico de soluções para o sistema elíptico acoplado

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda a(x)u = \frac{p}{p+q}|u|^{p-2}u|v|^q, \\ -\Delta v + \lambda b(x)v = \frac{q}{p+q}|u|^p|v|^{q-2}v, \\ u, v \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (S_\lambda)$$

onde $N \geq 3$, λ é um parâmetro real positivo, $p, q > 1$ e $p + q < 2^*$. As hipóteses sobre os potenciais não negativos a e b são:

(H_1) $a, b \in C(\mathbb{R}^N, [0, \infty))$, $\Omega_a := \text{int } a^{-1}(0)$ e $\Omega_b := \text{int } b^{-1}(0)$ têm fronteiras suas-
ves, $\overline{\Omega_a} = a^{-1}(0)$, $\overline{\Omega_b} = b^{-1}(0)$, e $\Omega_a \cap \Omega_b$ é um conjunto não vazio;

(H_2) existe $M_0 > 0$ tal que o conjunto $F := \{x \in \mathbb{R}^N; a(x)b(x) \leq M_0\}$ tem medida de Lebesgue finita.

Diferentemente do Capítulo 1, note que não foi assumido nenhum limite inferior positivo para os potenciais a e b . Portanto, não esperamos achar soluções para (S_λ) no espaço de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N)$. Contudo, tirando vantagem do acoplamento forte do sistema e a hipótese (H_2), somos capazes de usar métodos variacionais para estudar (S_λ) considerando o funcional associado definido num subespaço fechado próprio de

2. Sistemas com potenciais se anulando e comportamento assintótico com respeito a um parâmetro $\lambda > 0$

$\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Também veremos que os conjuntos Ω_a e Ω_b podem ser ilimitados e que o fato de $\Omega_a \cap \Omega_b$ ser um conjunto não vazio é essencial para a obtenção dos resultados. Como no caso escalar em [2], o principal resultado deste capítulo mostra que o sistema elíptico semilinear

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{p}{p+q}|u|^{p-2}u|v|^q & \text{em } \Omega_a, \\ -\Delta v = \frac{q}{p+q}|u|^p|v|^{q-2}v & \text{em } \Omega_b, \\ u \in H_0^1(\Omega_a), \quad v \in H_0^1(\Omega_b), \end{cases} \quad (L)$$

pode ser visto como um limite para (S_λ) quando λ tende ao infinito. Vale a pena mencionar que, embora Ω_a e Ω_b possam ser conjuntos abertos distintos, o sistema (L) é variacional. Notemos também que a condição (H_2) implica que Ω_a e Ω_b têm medida de Lebesgue finita, pois $\Omega_a, \Omega_b \subset F$. Assim, temos que a imersão $H_0^1(\Omega_a) \times H_0^1(\Omega_b) \hookrightarrow L^r(\Omega_a) \times L^s(\Omega_b)$ é compacta para $1 \leq r, s < 2^*$.

A fim de enunciar os resultados, introduzimos os subespaços fechados de $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ associados com os potenciais a e b :

$$\begin{aligned} X_a &:= \left\{ u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^N} a(x)u^2 dx < \infty \right\} \quad \text{e} \\ X_b &:= \left\{ v \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^N} b(x)v^2 dx < \infty \right\}. \end{aligned}$$

Para qualquer $\lambda \geq 0$ dado, consideremos o espaço de Hilbert $X = X_a \times X_b$ munido com o produto interno

$$\langle (u, v), (\varphi, \phi) \rangle_\lambda := \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u \nabla \varphi + \nabla v \nabla \phi + \lambda a(x)u\varphi + \lambda b(x)v\phi] dx$$

cujas norma associada será denotada por $\|\cdot\|_\lambda$. Note que $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ é o produto interno usual do espaço $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

Observação 2.1. Se $\lambda_1 \leq \lambda_2$, então $\|z\|_{\lambda_1} \leq \|z\|_{\lambda_2}$ para todo $z \in X$.

Associado com o problema (S_λ) , temos o funcional energia $I_\lambda : X \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$I_\lambda(z) := \frac{1}{2}\|z\|_\lambda^2 - \frac{1}{p+q} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p|v|^q dx, \quad z = (u, v) \in X.$$

Em vista das hipóteses (H_1) e (H_2) , o funcional I_λ está bem definido e é de classe C^1 . Além disso, a teoria de regularidade elíptica implica que os pontos críticos de I_λ são soluções clássicas do problema (S_λ) .

No primeiro resultado, consideramos a existência e comportamento das soluções de energia mínima de (S_λ) . Recordamos que uma solução de energia mínima para o nosso problema é um ponto crítico de I_λ associado com o menor nível crítico positivo deste funcional. Em nosso contexto, uma vez provada a existência da solução de energia mínima, podemos sempre encontrar uma solução de energia mínima positiva. Aqui, observamos que chamamos $z = (u, v)$ uma função positiva se u e v são positivas em quase todo ponto em $\mathbb{R}^N$.

Teorema 2.1. *Suponha as condições (H_1) e (H_2) válidas. Então existe $\Lambda > 0$ tal que, para todo $\lambda \geq \Lambda$, o sistema (S_λ) possui uma solução de energia mínima positiva z_λ . Além disso, se $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ é tal que $\lambda_n \rightarrow \infty$ e (z_{λ_n}) é uma sequência de soluções de energia mínima positiva de (S_{λ_n}) , então (z_{λ_n}) converge em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ ao longo de uma subsequência para uma solução de energia mínima positiva de (L) .*

No próximo resultado, usamos a simetria do problema para estabelecer multiplicidade de soluções para valores grandes de λ . Mais especificamente, temos:

Teorema 2.2. *Suponha as condições (H_1) e (H_2) válidas. Então, para qualquer $k \in \mathbb{N}$ dado, existe $\Lambda_k > 0$ tal que, para cada $\lambda \geq \Lambda_k$, o sistema (S_λ) possui pelo menos k pares de soluções não nulas.*

Como no caso das soluções de energia mínima encontradas no Teorema 2.1, as soluções derivadas do Teorema 2.2 têm energia uniformemente limitada com respeito a λ . Isto nos permite mostrar que estas soluções convergem em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ para uma solução de (L) quando $\lambda \rightarrow \infty$. Mais geralmente, temos o seguinte resultado de concentração:

Teorema 2.3. *Sejam $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ uma sequência tal que $\lambda_n \rightarrow \infty$ e (z_{λ_n}) uma sequência de soluções de (S_{λ_n}) tal que $\liminf_{n \rightarrow \infty} I_{\lambda_n}(z_{\lambda_n}) < \infty$. Então (z_{λ_n}) converge em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ ao longo de uma subsequência para uma solução de (L) .*

Este capítulo está organizado da seguinte maneira. Na Seção 2.1, apresentamos alguns resultados técnicos que serão usados ao longo do capítulo. Também investigamos o comportamento das sequências de Palais-Smale quando λ vai para o infinito. Provaremos o Teorema 2.1 na Seção 2.2. O final da Seção 2.3 é dedicado à prova dos Teoremas 2.2 e 2.3.

2.1 Preliminares

Nesta seção, apresentamos alguns resultados preliminares para a prova do Teorema 2.1. Para qualquer conjunto mensurável $K \subset \mathbb{R}^N$, escrevemos $\mu(K)$ para denotar a medida de Lebesgue de K . Começamos com dois resultados técnicos.

Lema 2.1. Para qualquer conjunto mensurável $K \subset \mathbb{R}^N$, existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\int_K |u|^p |v|^q dx \leq c \|z\|_0^{p+q-2+2^*t/r} \left(\int_K |uv| dx \right)^\beta, \quad \text{para todo } z = (u, v) \in X,$$

onde $r := 2^*/(2^* - p - q + 2) > 1$, $t \in (0, 1)$ satisfaz $r = 2^*t/2 + (1 - t)$ e $\beta := (1 - t)/r$.

Demonstração. Da definição de r , temos

$$\frac{p-1}{2^*} + \frac{q-1}{2^*} + \frac{1}{r} = 1.$$

Pela desigualdade de Hölder e a imersão contínua $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ (vide Teorema [B.1](#)), temos

$$\begin{aligned} \int_K |u|^p |v|^q dx &= \int_K |u|^{p-1} |v|^{q-1} |uv| dx \\ &\leq \left(\int_K |u|^{2^*} dx \right)^{\frac{p-1}{2^*}} \left(\int_K |v|^{2^*} dx \right)^{\frac{q-1}{2^*}} \left(\int_K |uv|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq k_1 \|z\|_0^{p+q-2} \left(\int_K |uv|^r dx \right)^{\frac{1}{r}}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Como $1 < r < 2^*/2$, existe $t \in (1, 0)$ tal que $r = 2^*t/2 + (1 - t)$. Pela desigualdade de Hölder com expoentes $1/t, 1/(1 - t)$ e a imersão contínua $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ novamente, obtemos

$$\begin{aligned} \int_K |uv|^r dx &= \int_K |uv|^{2^*t/2} |uv|^{1-t} dx \\ &\leq \left(\int_K |uv|^{2^*/2} dx \right)^t \left(\int_K |uv| dx \right)^{1-t} \\ &\leq \left(\frac{1}{2} \int_K (|u|^{2^*} + |v|^{2^*}) dx \right)^t \left(\int_K |uv| dx \right)^{1-t} \\ &\leq k_2 \|z\|_0^{2^*t} \left(\int_K |uv| dx \right)^{1-t}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Combinando a última desigualdade e [\(2.1\)](#), temos que existe $c > 0$ tal que

$$\int_K |u|^p |v|^q dx \leq c \|z\|_0^{p+q-2+2^*t/r} \left(\int_K |uv| dx \right)^{\frac{1-t}{r}}.$$

Isto conclui a prova do lema. □

2. Sistemas com potenciais se anulando e comportamento assintótico com respeito a um parâmetro $\lambda > 0$

Lema 2.2. Existe uma constante $\widehat{c} > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p |v|^q dx \leq \widehat{c} \|z\|_1^{p+q}, \quad \text{para todo } z = (u, v) \in X.$$

Demonstração. Pelo Lema 2.1, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p |v|^q dx \leq c \|z\|_0^{p+q-2+2^*t/r} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |uv| dx \right)^{\frac{1-t}{r}}. \quad (2.3)$$

Relembremos que o conjunto F dado em (H_2) tem medida de Lebesgue finita e $a(x)b(x) > M_0$ em F^c . Aplicando a desigualdade de Hölder com expoentes $2^*, 2^*, N/2$ e usando a imersão contínua $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |uv| dx &= \int_F |uv| dx + \int_{F^c} |uv| dx \\ &\leq \|u\|_{L^{2^*}(F)} \|v\|_{L^{2^*}(F)} \mu(F)^{2/N} + \frac{1}{\sqrt{M_0}} \int_{F^c} \sqrt{a(x)} |u| \sqrt{b(x)} |v| dx \\ &\leq k_1 \|z\|_0^2 + \frac{1}{\sqrt{M_0}} \left(\int_{F^c} a(x) u^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{F^c} b(x) v^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq k_1 \|z\|_1^2 + \frac{1}{\sqrt{M_0}} \|z\|_1 \|z\|_1 \\ &= k_2 \|z\|_1^2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

A última desigualdade e (2.3) fornecem $\widehat{c} > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p |v|^q dx &\leq \widehat{c} \|z\|_1^{p+q-2+2^*t/r} \|z\|_1^{\frac{(1-t)2}{r}} \\ &= \widehat{c} \|z\|_1^{p+q-2+\frac{2}{r}(2^*t/2+(1-t))} \\ &= \widehat{c} \|z\|_1^{p+q}, \end{aligned}$$

onde temos usado que $r = 2^*t/2 + (1-t)$. Isto prova o lema. $\square$

Uma vez que estamos interessados em soluções positivas de (S_λ) , vamos trabalhar com um funcional um pouco diferente daquele que foi definido na Introdução do capítulo. Mais especificamente, considere $I_\lambda : X \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$I_\lambda(z) := \frac{1}{2} \|z\|_\lambda^2 - \frac{1}{p+q} \int_{\mathbb{R}^N} u_+^p v_+^q dx, \quad z = (u, v) \in X.$$

Em vista do lema acima, ele está bem definido. Além disso, podemos usar os resultados acima e a hipótese (H_2) para mostrar que $I_\lambda \in C^1(X, \mathbb{R})$ para todo $\lambda > 0$ e

$$I'_\lambda(z) \cdot w = \langle z, w \rangle_\lambda - \frac{1}{p+q} \int_{\mathbb{R}^N} (p u_+^{p-1} v_+^q, q u_+^p v_+^{q-1}) \cdot w dx, \quad z = (u, v), w \in X.$$

Observemos que, para todo $z = (u, v) \in X$,

$$\begin{aligned} I'_\lambda(z) \cdot z &= \|z\|_\lambda^2 - \frac{1}{p+q} \int_{\mathbb{R}^N} (pu_+^{p-1}v_+^q u + qu_+^p v_+^{q-1}v) dx \\ &= \|z\|_\lambda^2 - \frac{1}{p+q} \int_{\mathbb{R}^N} (pu_+^p v_+^q + qu_+^p v_+^q) dx \\ &= \|z\|_\lambda^2 - \int_{\mathbb{R}^N} u_+^p v_+^q dx, \end{aligned}$$

e, portanto, se z é um ponto crítico de I_λ , então

$$\|z\|_\lambda^2 = \int_{\mathbb{R}^N} u_+^p v_+^q dx.$$

Relembremos a seguinte condição de compacidade:

Definição 2.1. Sejam E um espaço de Banach e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$. Dizemos que $(z_n) \subset E$ é uma *sequência de Palais-Smale no nível c* (sequência $(PS)_c$ abreviadamente) para I se $I(z_n) \rightarrow c$ e $I'(z_n) \rightarrow 0$ em E' . Dizemos que I satisfaz $(PS)_c$ se qualquer sequência $(PS)_c$ para I possui uma subsequência convergente.

Lema 2.3. Sejam $\lambda \geq 1$ e $(z_n) \subset X$ uma sequência $(PS)_c$ para I_λ . Então valem as seguintes afirmações:

- (i) (z_n) é limitada em X ;
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n\|_\lambda^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} (u_n)_+^p (v_n)_+^q dx = c \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+q} \right)^{-1}$;
- (iii) se $c \neq 0$, então $c \geq \gamma_0 > 0$, para algum γ_0 que não depende de λ .

Demonstração. Temos que

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+q} \right) \|z_n\|_\lambda^2 = I_\lambda(z_n) - \frac{1}{p+q} I'_\lambda(z_n) \cdot z_n = c + o(1) + o(1) \|z_n\|_\lambda \quad (2.5)$$

quando $n \rightarrow \infty$, e portanto (i) vale. Além disso, quando $n \rightarrow \infty$, temos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+q} \right) \|z_n\|_\lambda^2 &= c + o(1) + o(1) \|z_n\|_\lambda = I_\lambda(z_n) - \frac{1}{2} I'_\lambda(z_n) \cdot z_n \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+q} \right) \int_{\mathbb{R}^N} (u_n)_+^p (v_n)_+^q dx, \end{aligned}$$

donde segue (ii). Agora, observemos que, como $\lambda \geq 1$, segue do Lema 2.2 e a Observação 2.1 que

$$I'(z) \cdot z = \|z\|_\lambda^2 - \int_{\mathbb{R}^N} u_+^p v_+^q dx \geq \|z\|_\lambda^2 - \widehat{c} \|z\|_1^{p+q} \geq \|z\|_\lambda^2 - \widehat{c} \|z\|_\lambda^{p+q} \geq \frac{1}{2} \|z\|_\lambda^2$$

sempre que $\|z\|_\lambda \leq (2\widehat{c})^{-1/(p+q-2)} := \sqrt{\delta}$. Agora, provemos a contrapositiva de (iii).

Suponha que

$$c < \delta \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+q} \right) := \gamma_0.$$

Por (ii), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|z_n\|_\lambda < \sqrt{\delta}$ para todo $n \geq n_0$. Assim,

$$\frac{1}{2} \|z_n\|_\lambda^2 \leq I'(z_n) \cdot z_n \leq \|I'(z_n)\|_{X'} \|z_n\|_X, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Uma vez que $I'_\lambda(z_n) \rightarrow 0$ e $\|z_n\| < \sqrt{\delta}$ para todo $n \geq n_0$, concluímos que $z_n \rightarrow 0$ em X . Consequentemente, $I_\lambda(z_n) \rightarrow 0$ e isto implica que $c = 0$, o que é uma contradição e, portanto, o lema está provado. $\square$

Lema 2.4. Dados $\varepsilon > 0$ e $C_0 > 0$, existem $\Lambda_\varepsilon = \Lambda(\varepsilon, C_0) > 0$ e $R_\varepsilon = R(\varepsilon, C_0) > 0$ tais que, se $(z_n) = ((u_n, v_n)) \subset X$ é uma sequência $(PS)_c$ para I_λ com $c \leq C_0$ e $\lambda \geq \Lambda_\varepsilon$, então

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{B_{R_\varepsilon}^c} (u_n)_+^p (v_n)_+^q dx \leq \varepsilon.$$

Demonstração. Como $\|\cdot\|_0 \leq \|\cdot\|_\lambda$, podemos usar o Lema 2.1 e o Lema 2.3(i) para obter

$$\begin{aligned} \int_{B_R^c} (u_n)_+^p (v_n)_+^q dx &\leq c \|z_n\|_0^{p+q-2+2^*t/r} \left(\int_{B_R^c} |u_n v_n| dx \right)^\beta \\ &\leq c \|z_n\|_\lambda^{p+q-2+2^*t/r} \left(\int_{B_R^c} |u_n v_n| dx \right)^\beta \\ &\leq k_1 \left(\int_{B_R^c} |u_n v_n| dx \right)^\beta, \end{aligned} \tag{2.6}$$

para todo $R > 0$. Pela desigualdade de Hölder, a imersão contínua $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ e o Lema 2.3(i) novamente, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{B_R^c \cap F} |u_n v_n| dx &\leq \mu(B_R^c \cap F)^{2/N} \|u_n\|_{L^{2^*}} \|v_n\|_{L^{2^*}} \\ &\leq k_2 \mu(B_R^c \cap F)^{2/N} \|z_n\|_\lambda^2 \\ &\leq k_3 \mu(B_R^c \cap F)^{2/N}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

2. Sistemas com potenciais se anulando e comportamento assintótico com respeito a um parâmetro $\lambda > 0$

Por outro lado, sendo (z_n) limitada e $a(x)b(x) > M_0$ em $B_R^c \cap F^c$, temos que

$$\begin{aligned} \int_{B_R^c \cap F^c} |u_n v_n| dx &\leq \frac{1}{\lambda \sqrt{M_0}} \int_{B_R^c \cap F^c} \sqrt{\lambda a(x)} |u_n| \sqrt{\lambda b(x)} |v_n| dx \\ &\leq \frac{1}{2\lambda \sqrt{M_0}} \int_{B_R^c \cap F^c} (\lambda a(x) u_n^2 + \lambda b(x) v_n^2) dx \\ &\leq \frac{1}{2\lambda \sqrt{M_0}} \|z_n\|_\lambda^2 \\ &\leq k_4/\lambda. \end{aligned}$$

Assim, segue da estimativa acima, (2.7) e (2.6) que

$$\int_{B_R^c} (u_n)_+^p (v_n)_+^q dx \leq k_1 (k_3 \mu(B_R^c \cap F) + k_4/\lambda)^\beta.$$

Como F tem medida de Lebesgue finita, temos que $\mu(B_R^c \cap F) \rightarrow 0$ quando $R \rightarrow \infty$. Consequentemente, dado $\varepsilon > 0$, existem $R_\varepsilon > 0$ e $\Lambda_\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: para todo $R \geq R_\varepsilon$ e $\lambda \geq \Lambda_\varepsilon$ tem-se

$$\int_{B_R^c} (u_n)_+^p (v_n)_+^q dx \leq \varepsilon, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Em particular, temos que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{B_{R_\varepsilon}^c} (u_n)_+^p (v_n)_+^q dx \leq \varepsilon, \quad \text{para todo } \lambda \geq \Lambda_\varepsilon.$$

Isto completa a prova do lema. □

No próximo lema, verificamos que I_λ satisfaz a geometria do Passo da Montanha.

Lema 2.5. Existem $\alpha, \rho > 0$ e $z_0 \in X$, todos eles independentes de $\lambda \geq 1$, tais que

- (i) $I_\lambda(z) \geq \alpha$ para todo $\|z\|_\lambda = \rho$,
- (ii) $I_\lambda(z_0) \leq I_\lambda(0) = 0$ e $\|z_0\|_\lambda > \rho$.

Demonstração. Pelo Lema 2.2, temos que

$$I_\lambda(z) = \frac{1}{2} \|z\|_\lambda^2 - \frac{1}{p+q} \int_{\mathbb{R}^N} u_+^p v_+^q dx \geq \frac{1}{2} \|z\|_\lambda^2 - \frac{\widehat{c}}{p+q} \|z\|_\lambda^{p+q} \geq \frac{1}{4} \rho^2,$$

desde que $\|z\|_\lambda = \rho := ((p+q)/4\widehat{c})^{1/(p+q-2)}$. Disto segue (i). Além disso, se $\varphi \in$

2. Sistemas com potenciais se anulando e comportamento assintótico com respeito a um parâmetro $\lambda > 0$

$C_0^\infty(\Omega_a \cap \Omega_b) \setminus \{0\}$, $\varphi_+ \neq 0$, temos que $a(x)\varphi = b(x)\varphi = 0$ em $\mathbb{R}^N$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} I_\lambda(t(\varphi, \varphi)) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{t^2}{2} \|(\varphi, \varphi)\|_\lambda^2 - \frac{t^{p+q}}{p+q} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_+^p \varphi_+^q dx \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[t^2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^2 dx - \frac{t^{p+q}}{p+q} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_+^{p+q} dx \right] \\ &= -\infty \end{aligned}$$

uniformemente em λ . Assim, existe $t_0 > 0$ suficientemente grande tal que $I_\lambda(t_0(\varphi, \varphi)) \leq I_\lambda(0) = 0$ e $\|t_0(\varphi, \varphi)\|_\lambda > \rho$. Definindo $z_0 = t_0(\varphi, \varphi)$, segue que (ii) vale. $\square$

Observação 2.2. Seja z_0 dado pelo lema acima. Para cada $\lambda > 0$, podemos definir o *nível do Passa da Montanha* de I_λ como

$$c_\lambda := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_\lambda(\gamma(t)),$$

onde

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], X); \gamma(0) = 0, \gamma(1) = z_0\}.$$

Para uma referência mais adiante, observemos que

$$0 < \alpha \leq c_\lambda \leq \beta_0 := \max_{t \in [0,1]} I_\lambda(tz_0). \quad (2.8)$$

2.2 Soluções de Energia Mínima

Dedicamos esta seção para a prova do Teorema 2.1. Sejam $\varepsilon > 0$ a ser escolhido depois, $C_0 := \beta_0$ dado por (2.8) e considere $\Lambda_\varepsilon, R_\varepsilon$ fornecidos pelo Lema 2.4. Em vista da Observação 2.2, obtemos, para todo $\lambda \geq \Lambda_\varepsilon$ fixado, uma sequência $(z_k) \subset X$ tal que

$$I_\lambda(z_k) \rightarrow c_\lambda \quad \text{e} \quad I'_\lambda(z_k) \rightarrow 0.$$

Pelo Lema 2.3(i), (z_k) é limitada em X e, portanto, a menos de uma subsequência, temos que $z_k \rightharpoonup z_\lambda := (u_\lambda, v_\lambda)$ fracamente em X .

Provaremos que $I'_\lambda(z_\lambda) = 0$. Seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e denote por K o suporte de φ . Uma vez que a imersão $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L_{loc}^{p+q-1}(\mathbb{R}^N)$ é compacta, temos, a menos de uma subsequência, que

$$\begin{aligned} (u_k, v_k) &\rightarrow (u_\lambda, v_\lambda) \quad \text{fortemente em } L^{p+q-1}(K) \times L^{p+q-1}(K), \\ (u_k(x), v_k(x)) &\rightarrow (u_\lambda(x), v_\lambda(x)) \quad \text{quase sempre em } K, \\ |u_k(x)|, |v_k(x)| &\leq h_k(x) \in L^{p+q-1}(K) \quad \text{quase sempre em } K. \end{aligned}$$

2. Sistemas com potenciais se anulando e comportamento assintótico com respeito a um parâmetro $\lambda > 0$

Consequentemente, para quase todos os pontos de K , temos que

$$(u_k)_+^{p-1}(v_k)_+^q|\varphi| \leq |u_k|^{p-1}|v_k|^q|\varphi| \leq |h_k|^{p+q-1}|\varphi| \in L^1(K).$$

Assim, segue das convergências acima e do Teorema da Convergência Dominada que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} (u_k)_+^{p-1}(v_k)_+^q \varphi dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_K (u_k)_+^{p-1}(v_k)_+^q \varphi dx \\ &= \int_K (u_\lambda)_+^{p-1}(v_\lambda)_+^q \varphi dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (u_\lambda)_+^{p-1}(v_\lambda)_+^q \varphi dx, \quad \text{para todo } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Analogamente, obtemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} (u_k)_+^p(v_k)_+^{q-1} \psi dx = \int_{\mathbb{R}^N} (u_\lambda)_+^p(v_\lambda)_+^{q-1} \psi dx, \quad \text{para todo } \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Além disso, pela definição de convergência fraca, $\langle z_k, w \rangle_\lambda \rightarrow \langle z_\lambda, w \rangle_\lambda$ quando $k \rightarrow \infty$, para todo $w \in X$. Daí, pelos limites acima, temos que, para cada $(\varphi, \psi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k \rightarrow \infty} I'_\lambda(z_k) \cdot (\varphi, \psi) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\langle z_k, (\varphi, \psi) \rangle_\lambda - \frac{1}{p+q} \int_{\mathbb{R}^N} [p(u_k)_+^{p-1}(v_k)_+^q \varphi + q(u_k)_+^p(v_k)_+^{q-1} \psi] dx \right] \\ &= \langle z_\lambda, (\varphi, \psi) \rangle_\lambda - \frac{1}{p+q} \int_{\mathbb{R}^N} [p(u_\lambda)_+^{p-1}(v_\lambda)_+^q \varphi + q(u_\lambda)_+^p(v_\lambda)_+^{q-1} \psi] dx \\ &= I'_\lambda(z_\lambda) \cdot (\varphi, \psi). \end{aligned}$$

Uma vez que $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em X , segue que $I'_\lambda(z_\lambda) = 0$ em X , ou seja, z_λ é um ponto crítico de I_λ .

Agora, afirmamos que $z_\lambda \neq 0$. De fato, suponha que $z_\lambda = 0$. Assim $u_k, v_k \rightarrow 0$ em $L^2(B_{R_\varepsilon})$. Logo, pelo Lema [2.1](#), a limitação de (z_k) em X e a desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned} \int_{B_{R_\varepsilon}} (u_k)_+^p(v_k)_+^q dx &\leq c \|z_k\|_\lambda^{p+q-2+2^*t/r} \left(\int_{B_{R_\varepsilon}} |u_k v_k| dx \right)^\beta \\ &\leq k_1 \left(\int_{B_{R_\varepsilon}} |u_k v_k| dx \right)^\beta \\ &\leq k_2 \left(\int_{B_{R_\varepsilon}} |u_k|^2 + |v_k|^2 dx \right)^\beta \longrightarrow 0 \quad \text{quando } k \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.10)$$

2. Sistemas com potenciais se anulando e comportamento assintótico com respeito a um parâmetro $\lambda > 0$

Assim, segue do Lema 2.3(ii) e Lema 2.4 que, para $\lambda \geq \Lambda_\varepsilon$,

$$\begin{aligned} c_\lambda \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+q} \right)^{-1} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} (u_k)_+^p (v_k)_+^q dx \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_{B_{R_\varepsilon}} (u_k)_+^p (v_k)_+^q dx + \int_{B_{R_\varepsilon}^c} (u_k)_+^p (v_k)_+^q dx \right) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Uma vez que $\varepsilon > 0$ é dado e não depende de λ , concluímos que $c_\lambda = 0$, contradizendo (2.8). Isto mostra que $z_\lambda \neq 0$.

Aplicando o Lema de Fatou, obtemos

$$\begin{aligned} c_\lambda &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(I_\lambda(z_k) - \frac{1}{2} I'_\lambda(z_k) \cdot z_k \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+q} \right) \int_{\mathbb{R}^N} (u_k)_+^p (v_k)_+^q dx \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+q} \right) \int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda^p v_\lambda^q dx = I_\lambda(z_\lambda). \end{aligned}$$

Por outro lado, como $I'_\lambda(z_\lambda) \cdot z_\lambda = 0$, temos que

$$\|z_\lambda\|_\lambda^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (u_\lambda)_+^p (v_\lambda)_+^q dx > 0.$$

Para cada $t > 0$, definimos $g(t) = I_\lambda(tz_\lambda)$. Assim, $g'(t) = I'_\lambda(tz_\lambda) \cdot z_\lambda$. Logo

$$\begin{aligned} g'(t) = 0 &\iff \frac{g'(t)}{t} = I'_\lambda(tz_\lambda) \cdot (tz_\lambda) = 0 \\ &\iff t^2 \|z_\lambda\|_\lambda^2 - t^{p+q} \int_{\mathbb{R}^N} (u_\lambda)_+^p (v_\lambda)_+^q dx = 0 \\ &\iff (t^2 - t^{p+q}) \|z_\lambda\|_\lambda^2 = 0 \\ &\iff t^2 - t^{p+q} = 0 \\ &\iff t = 1. \end{aligned}$$

Daí, $t_0 = 1$ é o único ponto crítico de g , e como $g(t) \rightarrow -\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$, segue que este ponto crítico é um ponto de máximo global de g . Assim,

$$I_\lambda(z_\lambda) = \max_{t \geq 0} \{I_\lambda(tz_\lambda)\} \geq \max_{t \in [0,1]} \{I_\lambda(tz_\lambda)\} \geq c_\lambda,$$

donde segue que $I_\lambda(z_\lambda) = c_\lambda$. Consequentemente, z_λ é uma solução de energia mínima.

Uma vez que $I'_\lambda(z_\lambda) \cdot ((u_\lambda)_-, (v_\lambda)_-) = \|((u_\lambda)_-, (v_\lambda)_-)\|_\lambda^2 = 0$, temos que $u_\lambda, v_\lambda \geq 0$ em $\mathbb{R}^N$. Vejamos que $u_\lambda > 0$ em $\mathbb{R}^N$. De fato, suponha que exista $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que $u_\lambda(x_0) = 0$ e seja $B_R(x_0)$ uma bola arbitrária em $\mathbb{R}^N$ de centro x_0 . Assim, u_λ atinge um mínimo não positivo no interior de $\overline{B_R(x_0)}$. Como $u_\lambda \geq 0$ e satisfaz a primeira

2. Sistemas com potenciais se anulando e comportamento assintótico com respeito a um parâmetro $\lambda > 0$

equação de (S_λ) , temos que

$$-\Delta u_\lambda + \lambda a(x)u_\lambda \geq 0.$$

Assim, pelo Princípio do Máximo Forte, u_λ é constante em $B_R(x_0)$ e como $u_\lambda(x_0) = 0$, temos que $u_\lambda = 0$ em $B_R(x_0)$. Sendo o raio desta bola arbitrário, concluímos que $u_\lambda = 0$ em $\mathbb{R}^N$. Isto é uma contradição. Analogamente, mostramos que $v_\lambda > 0$ em $\mathbb{R}^N$. Isto prova a primeira parte do Teorema 2.1.

Agora, consideremos o comportamento de concentração de soluções com respeito ao parâmetro $\lambda > 0$. Suponha que $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ é uma sequência tal que $\lambda_n \rightarrow \infty$ e seja $z_{\lambda_n} = (u_{\lambda_n}, v_{\lambda_n})$ a solução associada a (S_{λ_n}) tal que $I_{\lambda_n}(z_{\lambda_n}) = c_{\lambda_n}$. No que segue, escrevemos apenas z_n , u_n e v_n para denotar z_{λ_n} , u_{λ_n} e v_{λ_n} , respectivamente.

Primeiro notemos que, por (2.8),

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+q}\right) \|z_n\|_{\lambda_n}^2 = I_{\lambda_n}(z_n) = c_{\lambda_n} \leq \beta_0. \quad (2.11)$$

Assim, passando a uma subsequência se necessário, temos que $z_n \rightharpoonup \bar{z} := (\bar{u}, \bar{v})$ fracamente em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e $z_n(x) \rightarrow \bar{z}(x)$ quase sempre em $\mathbb{R}^N$. Dado $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_a)$, lembrando que $a = 0$ em Ω_a e usando $(\varphi, 0)$ como função teste, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla \varphi dx + \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} a(x) u_n \varphi dx = \frac{p}{p+q} \int_{\mathbb{R}^N} (u_n)_+^{p-1} (v_n)_+^q \varphi dx,$$

donde

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla \varphi dx = \frac{p}{p+q} \int_{\mathbb{R}^N} (u_n)_+^{p-1} (v_n)_+^q \varphi dx.$$

Como φ tem suporte compacto, podemos tomar o limite na expressão acima e argumentar como na prova de (2.9) para obter

$$\int_{\Omega_a \cup \Omega_b} \nabla \bar{u} \nabla \varphi dx = \frac{p}{p+q} \int_{\Omega_a \cup \Omega_b} (\bar{u})_+^{p-1} (\bar{v})_+^q \varphi dx, \quad \text{para todo } \varphi \in C_0^\infty(\Omega_a). \quad (2.12)$$

Analogamente, temos

$$\int_{\Omega_a \cup \Omega_b} \nabla \bar{v} \nabla \psi dx = \frac{q}{p+q} \int_{\Omega_a \cup \Omega_b} (\bar{u})_+^p (\bar{v})_+^{q-1} \psi dx, \quad \text{para todo } \psi \in C_0^\infty(\Omega_b). \quad (2.13)$$

Afirmamos que $\bar{u} = 0$ em Ω_a^c . A fim de ver isto, tomemos $j \in \mathbb{N}$ e definimos o conjunto

$$C_j := \left\{ x \in B_j(0); a(x) > \frac{1}{j} \right\}.$$

2. Sistemas com potenciais se anulando e comportamento assintótico com respeito a um parâmetro $\lambda > 0$

Note que, por (2.11),

$$0 \leq \int_{C_j} u_n^2 dx \leq \frac{j}{\lambda_n} \int_{C_j} \lambda_n a(x) u_n^2 dx \leq \frac{j}{\lambda_n} \|z_n\|_{\lambda_n}^2 \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Sendo C_j limitado e $u_n \rightarrow \bar{u}$ em $L_{loc}^2(\mathbb{R}^N)$, concluímos que $\int_{C_j} \bar{u}^2 dx = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Assim, $\bar{u} = 0$ quase sempre em $\Omega_a^c = \cup_{j=1}^{\infty} C_j$. Relembrando que Ω_a tem fronteira suave, concluímos que $\bar{u} \in H_0^1(\Omega_a)$. Analogamente, $\bar{v} \in H_0^1(\Omega_b)$. Assim, $(\bar{u}, \bar{v})$ é uma solução do problema limite (L). Afim de verificar que $\bar{z} \neq 0$, definimos

$$m := \inf_{z \in \mathcal{N}} J(z),$$

onde $J : H_0^1(\Omega_a) \times H_0^1(\Omega_b) \rightarrow \mathbb{R}$ é dado por

$$J(u, v) := \frac{1}{2} \int_{\Omega_a \cup \Omega_b} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) dx - \frac{1}{p+q} \int_{\Omega_a \cup \Omega_b} u_+^p v_+^q dx$$

e $\mathcal{N}$ é a variedade de Nehari de J , a saber:

$$\mathcal{N} := \{(u, v) \in H_0^1(\Omega_a) \times H_0^1(\Omega_b); (u, v) \neq (0, 0), J'(u, v) \cdot (u, v) = 0\}.$$

Uma vez que $H_0^1(\Omega_a) \times H_0^1(\Omega_b)$ pode ser visto como um subespaço de X , temos que $c_\lambda \leq m$, para todo λ . Por outro lado,

$$m \geq c_{\lambda_n} = I_{\lambda_n}(z_n) - \frac{1}{2} I'_{\lambda_n}(z_n) \cdot z_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+q} \right) \int_{\mathbb{R}^N} (u_n)_+^p (v_n)_+^q dx.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, usando o Lema de Fatou e $J'(\bar{u}, \bar{v}) = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} m &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+q} \right) \int_{\mathbb{R}^N} (u_n)_+^p (v_n)_+^q dx \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+q} \right) \int_{\mathbb{R}^N} (\bar{u})_+^p (\bar{v})_+^q dx = J(\bar{u}, \bar{v}) \geq m. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Consequentemente, $J(\bar{u}, \bar{v}) = m$ e, portanto, $\bar{z} \neq 0$ é uma solução de energia mínima de (L). Como $C_0^\infty(\Omega_a)$ é denso em $H_0^1(\Omega_a)$, segue de (2.12) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \bar{u}_-|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla \bar{u} \nabla \bar{u}_- dx = \frac{p}{p+q} \int_{\mathbb{R}^N} (\bar{u})_+^{p-1} (\bar{v})_+^q \bar{u}_- dx = 0.$$

Analogamente, segue de (2.13) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \bar{v}_-|^2 dx = 0.$$

2. Sistemas com potenciais se anulando e comportamento assintótico com respeito a um parâmetro $\lambda > 0$

Logo, $\|(\bar{u}_-, \bar{v}_-)\|_0 = 0$ e, assim, $\bar{u}, \bar{v} \geq 0$. Daí, segue do Princípio do Máximo Forte e (2.12)-(2.13) que $\bar{u} > 0$ em Ω_a e $\bar{v} > 0$ em Ω_b .

A fim de finalizar a prova, usaremos a convergência fraca de (z_n) , o fato que z_n é uma solução de (S_{λ_n}) , (2.14) e $(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathcal{N}$ para obter

$$\begin{aligned}
\|z_n - \bar{z}\|_{\lambda_n}^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla(u_n - \bar{u})|^2 + |\nabla(v_n - \bar{v})|^2] dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} [\lambda_n a(x)(u_n - \bar{u})^2 + \lambda_n b(x)(v_n - \bar{v})^2] dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2 + \lambda_n a(x)u_n^2 + \lambda_n b(x)v_n^2) dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla \bar{u}|^2 + |\nabla \bar{v}|^2 + \lambda_n a(x)\bar{u}^2 + \lambda_n b(x)\bar{v}^2) dx \\
&\quad - 2 \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n \nabla \bar{u} + \nabla v_n \nabla \bar{v} + \lambda_n a(x)u_n \bar{u} + \lambda_n b(x)v_n \bar{v}) dx \quad (2.15) \\
&= \|z_n\|_{\lambda_n}^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla \bar{u}|^2 + |\nabla \bar{v}|^2) dx + o(1) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (u_n)_+^p (v_n)_+^q dx - \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla \bar{u}|^2 + |\nabla \bar{v}|^2) dx + o(1) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (\bar{u})_+^p (\bar{v})_+^q dx - \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla \bar{u}|^2 + |\nabla \bar{v}|^2) dx + o(1) \\
&= o(1),
\end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$. Uma vez que $\|\cdot\|_0 \leq \|\cdot\|_{\lambda_n}$, segue que $z_n \rightarrow \bar{z}$ em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Isto conclui a prova do Teorema 2.1. $\square$

2.3 Multiplicidade de Soluções

Nesta seção, apresentamos as provas dos Teoremas 2.2 e 2.3. Uma vez que não estamos interessados no sinal das soluções, redefinimos o funcional I_λ por

$$I_\lambda(z) := \frac{1}{2} \|z\|_\lambda^2 - \frac{1}{p+q} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p |v|^q dx, \quad z = (u, v) \in X.$$

Como na Seção 2.1, $I_\lambda \in C^1(X, \mathbb{R})$ para todo $\lambda > 0$ e

$$I'_\lambda(z) \cdot w = \langle z, w \rangle_\lambda - \frac{1}{p+q} \int_{\mathbb{R}^N} (p|u|^{p-2}u|v|^q, q|u|^p|v|^{q-1}v) \cdot w dx, \quad z = (u, v), w \in X.$$

Os pontos críticos de I_λ são exatamente as soluções fracas de (S_λ) . Além disso, para todo $z = (u, v) \in X$,

$$\begin{aligned} I'_\lambda(z) \cdot z &= \|z\|_\lambda^2 - \frac{1}{p+q} \int_{\mathbb{R}^N} (p|u|^{p-2}|v|^q u^2 + q|u|^p|v|^{q-2}v^2) dx \\ &= \|z\|_\lambda^2 - \frac{1}{p+q} \int_{\mathbb{R}^N} (p|u|^p|v|^q + q|u|^p|v|^q) dx \\ &= \|z\|_\lambda^2 - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p|v|^q dx, \end{aligned}$$

e, portanto, se z é um ponto crítico de I_λ , então

$$\|z\|_\lambda^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p|v|^q dx.$$

Para uma referência futura, notemos que, argumentando como na prova dos Lemas 2.1 e 2.2, obtemos $c, \hat{c} > 0$ tais que

$$\int_{B_R^c} |u|^{p-1}|v|^{q-1}|\phi\eta| dx \leq c\|u\|_{L^{2^*}^-(B_R^c)}^{p-1}\|v\|_{L^{2^*}^-(B_R^c)}^{q-1}\|(\phi, \eta)\|_0^{2^*t/r} \left(\int_{B_R^c} |\phi\eta| dx \right)^\beta \quad (2.16)$$

e

$$\begin{aligned} \int_{B_R^c} |\phi\eta| dx &\leq \hat{c}\|(\phi, \eta)\|_0^2 \mu(B_R^c \cap F)^{2/N} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{M_0}} \left(\int_{B_R^c \cap F^c} a(x)\phi^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{B_R^c \cap F^c} b(x)\eta^2 dx \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

para todo $R > 0$ e $(u, v), (\phi, \eta) \in X$. Aqui, $r > 1$, $t \in (0, 1)$ e $\beta > 0$ são dados pelo Lema 2.1.

A fim de obter múltiplos pontos críticos para I_λ , usaremos a seguinte versão do Teorema do Passo da Montanha Simétrico.

Teorema 2.4. *Sejam E um espaço de Banach real e $W \subset E$ subespaço de dimensão finita. Suponha que $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ é um funcional par satisfazendo $I(0) = 0$ e as condições:*

- (i) *existe uma constante $\rho > 0$ tal que $I|_{\partial B_\rho} \geq 0$;*
- (ii) *existe $M > 0$ tal que $\sup_{z \in W} I(z) < M$.*

Se I satisfaz $(PS)_c$ para qualquer $0 < c < M$, então I possui pelo menos $\dim W$ pares de pontos críticos não triviais.

Nosso primeiro objetivo é provar uma condição de compacidade local para I_λ . Começamos com a seguinte versão do Lema de Brézis-Lieb [5].

2. Sistemas com potenciais se anulando e comportamento assintótico com respeito a um parâmetro $\lambda > 0$

Lema 2.6. Seja $((u_n, v_n)) \subset X$ tal que $(u_n, v_n) \rightharpoonup (u, v)$ fracamente em X . Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} (|u_n|^p |v_n|^q - |u_n - u|^p |v_n - v|^q) dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p |v|^q dx.$$

Demonstração. Seja A_n a integral no lado esquerdo da expressão acima e note que

$$\begin{aligned} A_n &= - \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 \frac{d}{dt} (|u_n - tu|^p |v_n|^q + |u_n - u|^p |v_n - tv|^q) dt dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 p |u_n - tu|^{p-2} (u_n - tu)(-u) |v_n|^q dt dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 q |u_n - u|^p |v_n - tv|^{q-2} (v_n - tv)(-v) dt dx \\ &= p \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 f_n(t, x) u dt dx + q \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 g_n(t, x) v dt dx \end{aligned} \tag{2.18}$$

com

$$f_n(t, x) := |u_n - tu|^{p-2} (u_n - tu) |v_n|^q \quad \text{e} \quad g_n(t, x) := |u_n - u|^p |v_n - tv|^{q-2} (v_n - tv).$$

Como $((u_n, v_n))$ é limitada em X e $p+q < 2^*$, tomando uma subsequência, se necessário, podemos supor

$$\begin{aligned} (u_n, v_n) &\rightarrow (u, v) \quad \text{fortemente em } L_{loc}^{p+q}(\mathbb{R}^N) \times L_{loc}^{p+q}(\mathbb{R}^N), \\ (u_n(x), v_n(x)) &\rightarrow (u(x), v(x)) \quad \text{quase sempre em } \mathbb{R}^N, \\ |u(x)|, |v(x)|, |u_n(x)|, |v_n(x)| &\leq h_R(x) \in L^{p+q}(B_R) \quad \text{quase sempre em } B_R. \end{aligned} \tag{2.19}$$

para qualquer $R > 0$. A convergência pontual implica que, para quase todo $(t, x) \in (0, 1) \times \mathbb{R}^N$,

$$f_n(t, x) \rightarrow f(t, x) := (1-t)^{p-1} |u|^{p-2} u |v|^q, \quad g_n(t, x) \rightarrow g(t, x) = 0. \tag{2.20}$$

Afirmamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 f_n(t, x) u dt dx = \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 f(t, x) u dt dx \tag{2.21}$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 g_n(t, x) v dt dx = \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 g(t, x) v dt dx = 0. \tag{2.22}$$

2. Sistemas com potenciais se anulando e comportamento assintótico com respeito a um parâmetro $\lambda > 0$

Assumindo a afirmação, notando que, para todo conjunto mensurável $K \subset \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned} \int_K \int_0^1 f(t, x) u dt dx &= \int_K \left[\frac{-(1-t)^p}{p} |u|^{p-2} u^2 |v|^q \right]_{t=0}^{t=1} dx \\ &= \frac{1}{p} \int_K |u|^p |v|^q dx, \end{aligned}$$

e tomando o limite em (2.18), obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = p \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 f(t, x) u dt dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p |v|^q dx.$$

Assim, a fim de provar o lema, é suficiente verificar (2.21) e (2.22). Em vista de (H_2) , para qualquer $0 < \varepsilon < 1$, podemos escolher $R = R(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\max \left\{ \frac{1}{p} \int_{B_R^c} |u|^p |v|^q dx, \mu(B_R^c \cap F)^{2\beta/N}, \left(\int_{B_R^c} a(x) u^2 dx \right)^{\beta/2} \right\} < \varepsilon, \quad (2.23)$$

onde $\beta > 0$ vem do Lema 2.1. Assim, temos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 (f_n - f) u dt dx \right| &\leq \left| \int_{B_R} \int_0^1 (f_n - f) u dt dx \right| + \left| \int_{B_R^c} \int_0^1 f_n u dt dx \right| \\ &\quad + \left| \int_{B_R^c} \int_0^1 f u dt dx \right| \\ &= \left| \int_{B_R} \int_0^1 (f_n - f) u dt dx \right| + \left| \int_{B_R^c} \int_0^1 f_n u dt dx \right| \\ &\quad + \left| \frac{1}{p} \int_{B_R^c} |u|^p |v|^q dx \right| \\ &\leq \left| \int_{B_R} \int_0^1 (f_n - f) u dt dx \right| + \left| \int_{B_R^c} \int_0^1 f_n u dt dx \right| + \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Em vista de (2.19), temos que

$$\begin{aligned} |(f_n - f)u| &\leq (|f_n| + |f|)|u| \leq (|u_n - tu|^{p-1} |v_n|^q + |u|^{p-1} |v|^q)|u| \\ &\leq k_1 h(x)^{p+q} \in L^1(B_R), \end{aligned}$$

para todo $x \in B_R$. Consequentemente, podemos usar (2.20) e o Teorema da Convergência Dominada para obter

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{B_R} \int_0^1 (f_n - f) u dt dx \right| = 0. \quad (2.25)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{B_R^c} \int_0^1 f_n u dt dx \right| &\leq \int_{B_R^c} \int_0^1 |u_n - tu|^{p-1} |v_n|^q |u| dt dx \\
 &\leq k_2 \int_{B_R^c} \int_0^1 (|u_n|^{p-1} |v_n|^q |u| + t |u|^{p-1} |v_n|^q |u|) dt dx \quad (2.26) \\
 &\leq k_2 \int_{B_R^c} (|u_n|^{p-1} |v_n|^q |u| + |u|^p |v_n|^q) dx.
 \end{aligned}$$

Sendo $((u_n, v_n))$ limitada em X , podemos usar (2.16), (2.17) e (2.23) para concluir que

$$\begin{aligned}
 \int_{B_R^c} |u_n|^{p-1} |v_n|^{q-1} |u v_n| dx &\leq k_3 \left(\int_{B_R^c} |u v_n| dx \right)^\beta \leq k_4 \varepsilon \quad \text{e} \\
 \int_{B_R^c} |u|^p |v_n|^q dx &= \int_{B_R^c} |u|^{p-1} |v_n|^{q-1} |u v_n| dx \leq k_5 \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Substituindo estas expressões em (2.26), obtemos

$$\left| \int_{B_R^c} \int_0^1 f_n u dt dx \right| \leq k_6 \varepsilon.$$

A estimativa acima, (2.25) e (2.24) implicam que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 (f_n - f) u dt dx \right| \leq k_7 \varepsilon.$$

Sendo $0 < \varepsilon < 1$ arbitrário, concluímos que (2.21) vale. A prova de (2.22) é análoga e será omitida. Isto conclui a prova do lema. $\square$

Lema 2.7. Seja $(z_n) = ((u_n, v_n)) \subset X$ uma sequência $(PS)_c$ para I_λ . Então, passando a uma subsequência, $z_n \rightharpoonup z := (u, v)$ fracamente em X , onde z é um ponto crítico de I_λ . Além disso, $(\tilde{z}_n) := (z_n - z)$ é uma sequência $(PS)_{c'}$ para I_λ , com $c' = c - I_\lambda(z)$.

Demonstração. Sendo (z_n) limitada em X , temos que, para alguma subsequência, $z_n \rightharpoonup z := (u, v)$ fracamente em X . Argumentando como na prova do Teorema 2.1, podemos

mostrar que $I'_\lambda(z) = 0$. A convergência fraca de (z_n) e o Lema 2.6 implicam que

$$\begin{aligned}
 I_\lambda(z_n - z) &= \frac{1}{2} \|z_n - z\|_\lambda^2 - \frac{1}{p+q} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u|^p |v_n - v|^q dx \\
 &= \frac{1}{2} \|z_n\|_\lambda^2 - \langle z_n, z \rangle_\lambda + \frac{1}{2} \|z\|_\lambda^2 \\
 &\quad + \frac{1}{p+q} \int_{\mathbb{R}^N} (|u_n|^p |v_n|^q - |u_n - u|^p |v_n - v|^q) dx \\
 &\quad - \frac{1}{p+q} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p |v_n|^q dx \\
 &= \frac{1}{2} \|z_n\|_\lambda^2 - \frac{1}{2} \|z\|_\lambda^2 - \frac{1}{p+q} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p |v_n|^q dx \\
 &\quad + \frac{1}{p+q} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p |v|^q dx + o(1) \\
 &= I_\lambda(z_n) - I_\lambda(z) + o(1) = c - I_\lambda(z) + o(1),
 \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$. Resta mostrar que $I'_\lambda(z_n - z) \rightarrow 0$ em X' . Primeiro notemos que, para todo $(\varphi, \psi) \in X$ dado tal que $\|(\varphi, \psi)\| \leq 1$, temos

$$\begin{aligned}
 I'_\lambda(z_n - z) \cdot (\varphi, \psi) &= I'_\lambda(z_n) \cdot (\varphi, \psi) - I'_\lambda(z) \cdot (\varphi, \psi) \\
 &\quad - \frac{p}{p+q} \int_{\mathbb{R}^N} f_n \varphi dx - \frac{q}{p+q} \int_{\mathbb{R}^N} g_n \psi dx,
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 f_n(x) &:= |u_n - u|^{p-2} (u_n - u) |v_n - v|^q - |u_n|^{p-2} u_n |v_n|^q + |u|^{p-2} u |v|^q \quad \text{e} \\
 g_n(x) &:= |u_n - u|^p |v_n - v|^{q-2} (v_n - v) - |u_n|^p |v_n|^{q-2} v_n + |u|^p |v|^{q-2} v.
 \end{aligned}$$

Como $I'_\lambda(z_n) \rightarrow 0$ e $I'(z) = 0$, é suficiente mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|(\varphi, \psi)\|_{X_a} \leq 1} \int_{\mathbb{R}^N} |f_n| |\varphi| dx = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|(\varphi, \psi)\|_{X_b} \leq 1} \int_{\mathbb{R}^N} |g_n| |\psi| dx, \quad (2.27)$$

onde estamos denotando

$$\|\varphi\|_{X_a}^2 := \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla \varphi|^2 + \lambda a(x) \varphi^2) dx, \quad \|\psi\|_{X_b}^2 := \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla \psi|^2 + \lambda b(x) \psi^2) dx.$$

Dado $0 < \varepsilon < 1$, podemos escolher $R = R(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\max \left\{ \|u\|_{L^{2^*}(B_R^c)}, \mu(B_R^c \cap F)^{2\beta/N}, \left(\int_{B_R^c} b(x) v^2 dx \right)^{\beta/2} \right\} < \varepsilon, \quad (2.28)$$

com $\beta > 0$ dado pelo Lema 2.1. Usando a desigualdade de Hölder com expoentes

2. Sistemas com potenciais se anulando e comportamento assintótico com respeito a um parâmetro $\lambda > 0$

$2N/(N+2)$ e 2^* , a imersão contínua $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ e $\|\varphi\|_{X_a} \leq 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{B_R} |f_n| |\varphi| dx &\leq \left(\int_{B_R} |f_n|^{\frac{2N}{N+2}} dx \right)^{\frac{N+2}{2N}} \left(\int_{B_R} |\varphi|^{2^*} dx \right)^{1/2^*} \\
&\leq k_1 \left(\int_{B_R} |f_n|^{\frac{2N}{N+2}} dx \right)^{\frac{N+2}{2N}} \|\varphi\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq k_1 \left(\int_{B_R} |f_n|^{\frac{2N}{N+2}} dx \right)^{\frac{N+2}{2N}} \|\varphi\|_{X_a} \\
&\leq k_1 \left(\int_{B_R} |f_n|^{\frac{2N}{N+2}} dx \right)^{\frac{N+2}{2N}}.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Definindo $\theta := (p+q-1)2N/(N+2) < 2^*$, podemos supor que

$$\begin{aligned}
(u_n, v_n) &\rightarrow (u, v) \quad \text{fortemente em } L^\theta(B_R) \times L^\theta(B_R), \\
(u_n(x), v_n(x)) &\rightarrow (u(x), v(x)) \quad \text{quase sempre em } B_R, \\
|u(x)|, |v(x)|, |u_n(x)|, |v_n(x)| &\leq h_R(x) \in L^\theta(B_R) \quad \text{quase sempre em } B_R.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$|f_n| \leq |u_n - u|^{p-1} |v_n - v|^q + |u_n|^{p-1} |v_n|^q + |u|^{p-1} |v|^q \leq k_2 h_R^{p+q-1},$$

e portanto, $|f_n(x)|^{2N/(N+2)} \leq k_3 h_R(x)^\theta \in L^1(B_R)$, quase sempre em B_R . Uma vez que $f_n(x) \rightarrow 0$ quase sempre em B_R , segue do Teorema da Convergência Dominada e [\(2.29\)](#) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R} |f_n| |\varphi| dx = 0 \quad \text{uniformemente para } \|\varphi\|_{X_a} \leq 1. \tag{2.30}$$

Por outro lado, note que

$$\begin{aligned}
f_n &= -|u_n - u|^{p-2} (u_n - u) |v_n|^q + f_n + |u_n - u|^{p-2} (u_n - u) |v_n|^q \\
&= |u_n - u|^{p-2} (u_n - u) (|v_n - v|^q - |v_n|^q) \\
&\quad + |v_n|^q (|u_n - u|^{p-2} (u_n - u) - |u_n|^{p-2} u_n) + |u|^{p-2} u |v|^q.
\end{aligned}$$

Daí,

$$|f_n| \leq s_n + t_n + |u|^{p-1} |v|^q,$$

onde

$$\begin{aligned}
s_n &:= |u_n - u|^{p-1} | |v_n - v|^q - |v_n|^q | \quad \text{e} \\
t_n &:= |v_n|^q | |u_n - u|^{p-2} (u_n - u) - |u_n|^{p-2} u_n |
\end{aligned}$$

2. Sistemas com potenciais se anulando e comportamento assintótico com respeito a um parâmetro $\lambda > 0$

Assim, temos que

$$\int_{B_R^c} |f_n| |\varphi| dx \leq \int_{B_R^c} s_n |\varphi| dx + \int_{B_R^c} t_n |\varphi| dx + \int_{B_R^c} |u|^{p-1} |v|^{q-1} |v\varphi| dx \quad (2.31)$$

Uma vez que $\|\varphi\|_{X_a} \leq 1$, segue que

$$\begin{aligned} \|(\varphi, v)\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla \varphi|^2 + |\nabla v|^2) dx \leq 1 + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx \quad \text{e} \\ \int_{B_R^c \cap F^c} a(x) \varphi^2 dx &\leq 1. \end{aligned}$$

Usando (2.16), (2.17) e (2.28), temos que, para todo $\|\varphi\|_{X_a} \leq 1$,

$$\int_{B_R^c} |u|^{p-1} |v|^{q-1} |v\varphi| dx \leq k_4 \varepsilon^{p-1} \left(\int_{B_R^c} |\varphi v| dx \right)^\beta \leq k_5 \varepsilon^{p-1}. \quad (2.32)$$

Agora, procedemos com a estimativa de $\int_{B_R^c} s_n |\varphi| dx$. Definindo $w(t) := |v_n - tv|^q$, lembrando que $q > 1$ e usando o Teorema do Valor Médio, obtemos

$$||v_n - v|^q - |v_n|^q| = |w(1) - w(0)| = |w'(t_0)| = q |v_n - t_0 v|^{q-1} |v|$$

para algum $t_0 \in [0, 1]$. Sendo $((u_n, v_n))$ limitada em X e $t_0 \in [0, 1]$, segue de (2.16), (2.17) e (2.28) que

$$\begin{aligned} \int_{B_R^c} s_n |\varphi| dx &\leq q \int_{B_R^c} |u_n - u|^{p-1} |v_n - t_0 v|^{q-1} |\varphi v| dx \\ &\leq q \|u_n - u\|_{L^{2^*}}^{p-1} \|v_n - t_0 v\|_{L^{2^*}}^{q-1} \|(\varphi, v)\|_0^{2^* t/r} \left(\int_{B_R^c} |\varphi v| dx \right)^\beta \\ &\leq k_6 \left(\int_{B_R^c} |\varphi v| dx \right)^\beta \\ &\leq k_6 (k_7 \varepsilon + k_8 \varepsilon) \\ &\leq k_9 \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.33)$$

A estimativa para $\int_{B_R^c} t_n |\varphi| dx$ será feita em dois casos:

Caso 1. $p \geq 2$.

Suponha primeiro $p > 2$ e defina $w(t) := |u_n - tu|^{p-2} (u_n - tu)$. Então, $w'(t) = (p-1)|u_n - tu|^{p-2} (-u)$. Aplicando o Teorema do Valor do Médio, obtemos

$$||u_n - u|^{p-2} (u_n - u) - |u_n|^{p-2} u_n| = |w(1) - w(0)| = |w'(t_0)| \leq (p-1) |u_n - t_0 u|^{p-2} |u|$$

para algum $t_0 \in [0, 1]$. Assim,

$$\begin{aligned} \int_{B_R^c} t_n |\varphi| dx &\leq (p-1) \int_{B_R^c} |u_n - t_0 u|^{p-2} |u| |v_n|^{q-1} |\varphi v_n| dx \\ &\leq k_{10} \left(\int_{B_R^c} |u|^{p-1} |v_n|^{q-1} |\varphi v_n| dx + \int_{B_R^c} |u_n|^{p-2} |u| |v_n|^{q-1} |\varphi v_n| dx \right) \\ &\leq k_{11} \left(\varepsilon^{p-1} + \int_{B_R^c} |u_n|^{p-2} |u| |v_n|^{q-1} |\varphi v_n| dx \right). \end{aligned} \quad (2.34)$$

A fim de estimar a última integral acima, aplicamos a desigualdade de Hölder com

$$\frac{p-2}{2^*} + \frac{1}{2^*} + \frac{q-1}{2^*} + \frac{1}{r} = 1,$$

para obter

$$\begin{aligned} \int_{B_R^c} |u_n|^{p-2} |u| |v_n|^{q-1} |\varphi v_n| dx &\leq \|u_n\|_{L^{2^*}}^{p-2} \|u\|_{L^{2^*}(B_R^c)} \|v_n\|_{L^{2^*}}^{q-1} \left(\int_{B_R^c} |\varphi v_n|^r dx \right)^{1/r} \\ &\leq k_{12} \|u\|_{L^{2^*}(B_R^c)} \left(\int_{B_R^c} |\varphi v_n|^r dx \right)^{1/r}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Como (v_n) é limitada em X_b , segue de (2.2) e (2.17) que

$$\begin{aligned} \left(\int_{B_R^c} |\varphi v_n|^r dx \right)^{1/r} &\leq k_{13} \|(\varphi, v_n)\|_0^{2^* t/r} \left(\int_{B_R^c} |\varphi v_n| dx \right)^\beta \\ &\leq k_{14} (k_{15} \varepsilon + k_{16} \varepsilon) \\ &\leq k_{17}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Assim, segue de (2.35) que

$$\int_{B_R^c} |u_n|^{p-2} |u| |v_n|^{q-1} |\varphi v_n| dx \leq k_{18} \varepsilon,$$

e, consequentemente,

$$\int_{B_R^c} t_n |\varphi| dx \leq k_{19} \varepsilon, \quad \text{para todo } \|\varphi\|_{X_a} \leq 1.$$

Se $p = 2$, as integrais na segunda linha de (2.34) são iguais e, portanto, a estimativa acima também vale para este caso.

Caso 2. $1 < p < 2$.

Neste caso, a derivada da função w definida no primeiro caso pode ser singular, e

2. Sistemas com potenciais se anulando e comportamento assintótico com respeito a um parâmetro $\lambda > 0$

não podemos aplicar o Teorema do Valor Médio diretamente. A fim de contornar esta dificuldade, primeiro definimos

$$h_n(x) := |u_n - u|^{p-2}(u_n - u) - |u_n|^{p-2}u_n.$$

Como antes, temos que

$$\begin{aligned} \int_{B_R^c} t_n |\varphi| dx &= \int_{B_R^c} |h_n| |v_n|^{q-1} |\varphi v_n| dx \\ &\leq k_{20} \left(\int_{B_R^c} |h_n|^{\frac{2^*}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{2^*}}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Afirmamos que a última integral na desigualdade acima é pequena. De fato, primeiro note que

$$\begin{aligned} |h_n| &\leq |u|^{p-1} \quad \text{se } |u| = 0, \\ |h_n| &\leq (|u_n| + |u|)^{p-1} + |u_n|^{p-1} \leq k_{21}|u|^{p-1} \quad \text{se } |u_n| \leq 2|u|. \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$|h_n| \leq k_{22}|u|^{p-1} \quad \text{quase sempre em } \{|u_n| \leq 2|u|\} \cup \{|u| = 0\}. \quad (2.37)$$

Por outro lado, no conjunto $\{|u_n| > 2|u| > 0\}$, podemos aplicar o Teorema do Valor Médio para $w(t) := |u_n - tu|^{p-2}(u_n - tu)$ para obter

$$|h_n| \leq |w(1) - w(0)| \leq k_{23}|u_n - t_0 u|^{p-2}|u|,$$

para algum $t_0 \in [0, 1]$. Como $|u_n| > 2|u|$, temos que $|u_n - t_0 u| \geq |u_n| - t_0|u| \geq |u|$. Assim, desde que $p - 2 < 0$, segue que $|u_n - t_0 u|^{p-2} \leq |u|^{p-2}$. Logo, $|h_n| \leq k_{24}|u|^{p-1}$. Esta desigualdade, (2.37) e (2.28) implicam que

$$\int_{B_R^c} |h_n|^{\frac{2^*}{p-1}} dx \leq k_{25} \int_{B_R^c} |u|^{2^*} dx \leq k_{26}\varepsilon^{2^*}.$$

Segue de (2.36) que

$$\int_{B_R^c} t_n |\varphi| dx \leq k_{27}\varepsilon^{p-1} \quad \text{para todo } \|\varphi\|_{X_a} \leq 1.$$

Logo, uma vez que $0 < \varepsilon < 1$, os dois casos juntos nos fornece

$$\int_{B_R^c} t_n |\varphi| dx \leq k_{28}\varepsilon^{\min\{1, p-1\}} \quad \text{para todo } \|\varphi\|_{X_a} \leq 1.$$

2. Sistemas com potenciais se anulando e comportamento assintótico com respeito a um parâmetro $\lambda > 0$

Assim, podemos usar (2.30)-(2.33) e a estimativa acima para concluir que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f_n| |\varphi| dx \leq \int_{B_R} |f_n| |\varphi| dx + \int_{B_R^c} |f_n| |\varphi| dx \leq k_{29} \varepsilon^{\min\{1, p-1\}},$$

para todo $\|\varphi\|_{X_a} \leq 1$ e $n \geq n_0$. Sendo $0 < \varepsilon < 1$ arbitrário, concluimos que a primeira igualdade em (2.27) vale. A segunda pode ser verificada de maneira similar e isto conclui a prova do Lema 2.7. $\square$

Na sequência, seguimos [3] a fim de obter uma propriedade de compacidade local para o funcional I_λ .

Proposição 2.5. Para qualquer $C_0 > 0$ dado, existe $\Lambda = \Lambda(p, q, C_0) > 0$ tal que I_λ satisfaz $(PS)_c$, para todo $c \leq C_0$ e $\lambda \geq \Lambda$.

Demonstração. Seja γ_0 dado pelo Lema 2.3(iii) e fixe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\varepsilon < \frac{\gamma_0}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+q} \right)^{-1}.$$

Fixado $C_0 > 0$, sejam Λ_ε e R_ε dados pelo Lema 2.4. Provaremos que a proposição vale para $\Lambda = \Lambda_\varepsilon$. Seja $(z_n) = ((u_n, v_n)) \subset X$ uma sequência $(PS)_c$ para I_λ com $c \leq C_0$ e $\lambda \geq \Lambda$. Pelo Lema 2.7, podemos supor que $(u_n, v_n) \rightharpoonup z := (u, v)$ fracamente em X e $\tilde{z}_n = (\tilde{u}_n, \tilde{v}_n) := (u_n - u, v_n - v)$ é uma sequência $(PS)_{c'}$ para I_λ , com $c' = c - I_\lambda(z)$. Afirmamos que $c' = 0$. Se isto é verdade, segue do Lema 2.3(ii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{z}_n\|_\lambda^2 = c' \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+q} \right)^{-1} = 0,$$

isto é, $z_n \rightarrow z$ em X . Suponha, por contradição, que $c' \neq 0$. Pelo Lema 2.3 temos que $(\tilde{z}_n)$ é limitada e $c' \geq \gamma_0 > 0$. Uma vez que $\tilde{u}_n \rightarrow 0$, $\tilde{v}_n \rightarrow 0$ em $L^2(B_{R_\varepsilon})$, podemos usar o Lema 2.1 e a desigualdade de Young para obter

$$\begin{aligned} \int_{B_{R_\varepsilon}} |\tilde{u}_n|^p |\tilde{v}_n|^q dx &\leq c \|\tilde{z}_n\|_\lambda^{p+q-2+2^*t/r} \left(\int_{B_{R_\varepsilon}} |\tilde{u}_n \tilde{v}_n| dx \right)^\beta \\ &\leq k_1 \left(\int_{B_{R_\varepsilon}} |\tilde{u}_n \tilde{v}_n| dx \right)^\beta \\ &\leq k_2 \left(\int_{B_{R_\varepsilon}} (|\tilde{u}_n|^2 + |\tilde{v}_n|^2) dx \right)^\beta \longrightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

2. Sistemas com potenciais se anulando e comportamento assintótico com respeito a um parâmetro $\lambda > 0$

Pelo Lema 2.3(ii), temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{u}_n|^p |\tilde{v}_n|^q dx = c' \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+q} \right)^{-1}.$$

Assim, segue dos limites acima e do Lema 2.4 que

$$\begin{aligned} \gamma_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+q} \right)^{-1} &\leq c' \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+q} \right)^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{u}_n|^p |\tilde{v}_n|^q dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{B_{R_\varepsilon}} |\tilde{u}_n|^p |\tilde{v}_n|^q dx + \int_{B_{R_\varepsilon}^c} |\tilde{u}_n|^p |\tilde{v}_n|^q dx \right) \\ &\leq \varepsilon \leq \frac{\gamma_0}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+q} \right)^{-1}, \end{aligned}$$

isto é, $0 < \gamma_0 \leq \gamma_0/2$. Esta contradição finaliza a prova. $\square$

Agora, estamos prontos para provar os Teoremas 2.2 e 2.3.

Prova do Teorema 2.2. Primeiro, tomemos um aberto limitado $\Omega \subset \Omega_a \cap \Omega_b$. Dado $k \in \mathbb{N}$, definimos o conjunto $W := \text{span}\{(\varphi_1, \varphi_1), \dots, (\varphi_k, \varphi_k)\}$, onde φ_i é uma autofunção correspondente ao i -ésimo autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. Dado $z \in W$, temos que $z = \sum_{i=1}^k a_i(\varphi_i, \varphi_i) = (u, u)$, onde $u = \sum_{i=1}^k a_i \varphi_i$. Note que $\text{supp}(u) \subset \Omega \subset \Omega_a \cap \Omega_b$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} I_\lambda(z) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (2|\nabla u|^2 + \lambda a(x)u^2 + \lambda b(x)u^2) dx - \frac{1}{p+q} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+q} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{p+q} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+q} dx \\ &= \|\nabla u\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+q} \|u\|_{L^{p+q}}^{p+q}. \end{aligned}$$

Note que $\|\nabla \cdot\|_{L^2}$ e $\|\cdot\|_{L^{p+q}}$ são duas normas em $V := \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$. Como V tem dimensão finita, segue que elas são equivalentes. Logo, existe $c_k > 0$ tal que $\|\nabla u\|_{L^2} \leq c_k \|u\|_{L^{p+q}}$. Daí,

$$I_\lambda(z) \leq c_k^2 \|u\|_{L^{p+q}}^2 - \frac{1}{p+q} \|u\|_{L^{p+q}}^{p+q}.$$

Sendo $p+q > 2$, obtemos $M_k > 0$, independente de $\lambda > 0$, tal que

$$\sup_{z \in W} I_\lambda(z) < M_k.$$

Além disso, como na prova do Lema 2.5, podemos obter $\rho > 0$, independente de $\lambda > 0$,

tal que

$$I_\lambda(z) \geq 0 \quad \text{para qualquer } \|z\|_\lambda = \rho.$$

Pela Proposição 2.5, existe $\Lambda_k > 0$ tal que I_λ satisfaz $(PS)_c$ para qualquer $c \leq M_k$ e $\lambda \geq \Lambda_k$. Assim, para todo $\lambda \geq \Lambda_k$ fixado, podemos aplicar o Teorema 2.4 para obter k pares de soluções não triviais para (S_λ) . Portanto, o teorema está provado. $\square$

Prova do Teorema 2.3. Primeiro notemos que, como z_{λ_n} é um ponto crítico de I_{λ_n} , temos que

$$I_{\lambda_n}(z_{\lambda_n}) = \frac{1}{2} \|z_{\lambda_n}\|_{\lambda_n}^2 - \frac{1}{p+q} \int_{\mathbb{R}^N} |u_{\lambda_n}|^p |v_{\lambda_n}|^q dx = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+q} \right) \|z_{\lambda_n}\|_{\lambda_n}^2.$$

Uma vez que $\liminf_{n \rightarrow \infty} I_{\lambda_n}(z_{\lambda_n}) < \infty$, podemos supor, tomando uma subsequência se necessário, que (z_{λ_n}) é limitada. Assim, passando a uma subsequência, temos que

$$\begin{aligned} z_{\lambda_n} &\rightharpoonup \bar{z} := (\bar{u}, \bar{v}) \quad \text{fracamente em } \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \\ (u_n, v_n) &\rightarrow (\bar{u}, \bar{v}) \quad \text{fortemente em } L_{loc}^{p+q}(\mathbb{R}^N) \times L_{loc}^{p+q}(\mathbb{R}^N), \\ (u_n(x), v_n(x)) &\rightarrow (\bar{u}(x), \bar{v}(x)) \quad \text{quase sempre em } \mathbb{R}^N, \end{aligned} \tag{2.38}$$

Como na última parte de Teorema 2.1, podemos mostrar que $\bar{u} \in H_0^1(\Omega_a)$, $\bar{v} \in H_0^1(\Omega_b)$ e $\bar{z}$ é uma solução de (L) .

Dado $\varepsilon > 0$, podemos argumentar como na prova do Lema 2.4 para concluir que, para algum $R > 0$ grande, temos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R^c} |u_n|^p |v_n|^q dx \leq \varepsilon.$$

Tomando R suficientemente grande, podemos ainda supor que $\int_{B_R^c} |\bar{u}|^p |\bar{v}|^q dx \leq \varepsilon$. Além disso, a convergência local em (2.38) implica que existem $h_1, h_2 \in L^1(B_R)$ tais que $|u_n|^{p+q} \leq h_1$ e $|v_n|^{p+q} \leq h_2$ quase sempre em B_R , para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, pela desigualdade de Young com expoentes $(p+q)/p$ e $(p+q)/q$, temos que

$$|u_n|^p |v_n|^q \leq \frac{p}{p+q} |u_n|^{p+q} + \frac{q}{p+q} |v_n|^{p+q} \leq \frac{p}{p+q} h_1 + \frac{q}{p+q} h_2 \in L^1(B_R).$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada, temos que

$$\int_{B_R} |u_n|^p |v_n|^q dx \longrightarrow \int_{B_R} |\bar{u}|^p |\bar{v}|^q dx, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^N} (|u_n|^p |v_n|^q - |\bar{u}|^p |\bar{v}|^q) dx \right| &\leq \int_{B_R^c} |u_n|^p |v_n|^q dx + \int_{B_R^c} |\bar{u}|^p |\bar{v}|^q dx \\ &\quad + \left| \int_{B_R} (|u_n|^p |v_n|^q - |\bar{u}|^p |\bar{v}|^q) dx \right|, \end{aligned}$$

segue das estimativas e convergências acima que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{R}^N} (|u_n|^p |v_n|^q - |\bar{u}|^p |\bar{v}|^q) dx \right| \leq 2\varepsilon,$$

e, portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p |v_n|^q dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}|^p |\bar{v}|^q dx.$$

Assim, podemos argumentar como em (2.15), no final da demonstração do Teorema 2.1 para concluir que $\|z_{\lambda_n} - \bar{z}\|_0 \leq \|z_{\lambda_n} - \bar{z}\|_{\lambda_n} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Consequentemente, $z_n \rightarrow \bar{z}$ fortemente em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e o teorema está provado. $\square$

Apêndice A

Estudo sobre os autovalores de (LP)

Neste apêndice, temos como objetivo apresentar uma caracterização variacional do primeiro autovalor positivo do sistema linear acoplado

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x)u = \lambda v, & x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + b(x)v = \lambda u, & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (LP)$$

Relembremos que os potenciais a e b são funções contínuas satisfazendo

(A₁) existem constantes $a_0, b_0 > 0$ tais que $a(x) \geq a_0$ e $b(x) \geq b_0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$,

(A₂) $\mu(\{x \in \mathbb{R}^N; a(x)b(x) < M\}) < \infty$ para todo $M > 0$.

Aqui, μ denota a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^N$. Além disso, definimos $E = E_a \times E_b$ com

$$E_a = \{u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}); \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + a(x)u^2)dx < \infty\} \quad \text{e}$$
$$E_b = \{v \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}); \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + b(x)v^2)dx < \infty\},$$

munido com o produto interno

$$\langle (u, v), (\phi, \psi) \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla \phi + \nabla v \nabla \psi + a(x)u\phi + b(x)v\psi)dx$$

cujas norma associada será denotada por $\|\cdot\|$.

Cálculos padrões nos mostram que λ é um autovalor de (LP) se, e somente se,

$$T(u, v) = \frac{1}{\lambda}(u, v),$$

onde $T : E \rightarrow E$ é o operador linear limitado autoadjunto definido por

$$\langle T(u, v), (\phi, \psi) \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} (u\psi + v\phi)dx.$$

Além disso, temos o seguinte resultado

Lema A.1. O operador linear limitado autoadjunto T é compacto.

Demonstração. Seja $z_n = ((u_n, v_n))$ uma sequência limitada em E . Sendo E reflexivo, temos que (a menos de uma subsequência) $z_n \rightharpoonup z = (u, v)$ em E . Sem perda de generalidade, podemos supor que $z = (0, 0)$. Uma vez que T é linear limitado, seja $M > 0$ tal que

$$\|z_n\| \leq M, \quad \|Tz_n\| \leq M. \quad (\text{A.1})$$

Pela condição (A_2) , dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher $R > 0$ tal que

$$\mu(C_\varepsilon) < \varepsilon, \quad (\text{A.2})$$

onde $C_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R; a(x)b(x) \leq \varepsilon^{-2}\}$. Agora escrevendo $T = (T_1, T_2)$, pela definição de T , temos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|Tz_n\|^2 = \langle Tz_n, Tz_n \rangle = \langle T(u_n, v_n), (T_1z_n, T_2z_n) \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} u_n T_2 z_n dx + \int_{\mathbb{R}^N} v_n T_1 z_n dx. \end{aligned}$$

Desde que $u_n \rightarrow 0$ em $L^2(B_R)$, segue da desigualdade de Hölder e (A.1) que

$$\left| \int_{B_R} u_n T_2 z_n dx \right| \leq \|T_2 z_n\|_{L^2(B_R)} \|u_n\|_{L^2(B_R)} \leq M \mu(B_R) \|u_n\|_{L^2(B_R)} \rightarrow 0, \quad (\text{A.3})$$

quando $n \rightarrow \infty$. Definindo $D_\varepsilon = \mathbb{R}^N \setminus (B_R \cup C_\varepsilon)$ podemos usar a desigualdade de Hölder e (A.1) novamente para obter

$$\begin{aligned} \left| \int_{D_\varepsilon} u_n T_2 z_n dx \right| &\leq \varepsilon \int_{D_\varepsilon} \sqrt{a(x)} u_n \sqrt{b(x)} T_2 z_n dx \\ &\leq \varepsilon \left(\int_{D_\varepsilon} a(x) |u_n|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{D_\varepsilon} b(x) |T_2 z_n|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \varepsilon \|z_n\| \|Tz_n\| \leq \varepsilon M^2. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Por outro lado, segue de (A.1) , (A.2) e a desigualdade de Hölder com expoentes $2/N$

e $N/(N-2)$ que

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{C_\varepsilon} u_n T_2 z_n dx \right| &\leq \left[\int_{C_\varepsilon} |u_n|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \|T_2 z_n\|_{L^2} \\
 &\leq \left[\mu(C_\varepsilon)^{2/N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2N/(N-2)} dx \right)^{(N-2)/N} \right]^{\frac{1}{2}} \|T_2 z_n\|_{L^2} \quad (\text{A.5}) \\
 &= \mu(C_\varepsilon)^{1/N} \|u_n\|_{L^{2^*}} \|T_2 z_n\|_{L^2} \\
 &\leq k\varepsilon^{\frac{1}{N}}.
 \end{aligned}$$

Logo, sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário, segue de (A.3)-(A.5) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_n T_2 z_n dx \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Argumentos análogos mostram que

$$\int_{\mathbb{R}^N} v_n T_1 z_n dx \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Consequentemente, $Tz_n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Isto conclui a prova do lema. $\square$

O Lema A.1 nos diz que T é um operador linear compacto e autoadjunto, ou seja, T satisfaz as hipóteses dos seguintes teoremas da teoria espectral para operadores compactos autoadjuntos cujas demonstrações podem ser encontradas em [4].

Teorema A.1. *Sejam E um espaço de Banach de dimensão infinita e $T : E \rightarrow E$ um operador linear compacto. Seja $EV(T)$ o conjunto dos autovalores de T . Então um dos seguintes casos valem:*

- $EV(T)$ é um conjunto finito,
- $EV(T)$ é uma sequência convergindo para zero.

Teorema A.2. *Sejam H um espaço de Hilbert separável e $T : H \rightarrow H$ um operador linear compacto e autoadjunto. Então H possui uma base de Hilbert composta por autovetores de T .*

Os Teoremas (A.1)-(A.2) implicam que T possui uma sequência de autovalores $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\mu_n \rightarrow 0$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, $1/\mu_n$ é um autovalor de (LP) . Observando que $(u, -v)$ é uma autofunção associada com o autovalor $-\lambda$ sempre que (u, v) é uma autofunção associada com λ , concluímos que (LP) possui uma sequência de autovalores $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{Z}^*}$ com

$$\cdots \leq \lambda_{-n} \leq \cdots \leq \lambda_{-2} \leq \lambda_{-1} < 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \cdots,$$

tal que $\lambda_n \rightarrow \pm\infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Note que $\lambda_{-n} = -\lambda_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Nosso objetivo é caracterizar o autovalor λ_1 . Para tanto, em vista do Teorema (A.2), seja $\{z_n = (u_n, v_n)\}_{n \in \mathbb{Z}^*}$ uma base de Hilbert de E , onde z_n é uma autofunção de (LP) associada ao autovalor λ_n . Seja

$$A = \left\{ \mu \geq 0; \|z\|^2 - 2\mu \int_{\mathbb{R}^N} uv dx \geq 0, \forall z = (u, v) \in E \right\}.$$

Afirmamos que $\lambda_1 = \sup A$. De fato, note que

$$2 \int_{\mathbb{R}^N} u_1 v_1 dx = \langle Tz_1, z_1 \rangle = \frac{1}{\lambda_1} \|z_1\|^2 \implies \|z_1\|^2 = 2\lambda_1 \int_{\mathbb{R}^N} u_1 v_1 dx > 0.$$

Seja $\mu \in A$. Então $\|z\|^2 - 2\mu \int_{\mathbb{R}^N} uv dx \geq 0$, para todo $z \in E$. Tomando $z = z_1$, temos que

$$2\lambda_1 \int_{\mathbb{R}^N} u_1 v_1 dx = \|z_1\|^2 \geq 2\mu \int_{\mathbb{R}^N} u_1 v_1 dx \implies \lambda_1 \geq \mu.$$

Logo, $\lambda_1 \geq \sup A$. Agora, dado $z = (u, v) \in E$, podemos escrever

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} \langle z, z_i \rangle z_i + \sum_{j=1}^{\infty} \langle z, z_{-j} \rangle z_{-j}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} Tz &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle z, z_i \rangle Tz_i + \sum_{j=1}^{\infty} \langle z, z_{-j} \rangle Tz_{-j} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle z, z_i \rangle \frac{1}{\lambda_i} z_i - \sum_{j=1}^{\infty} \langle z, z_{-j} \rangle \frac{1}{\lambda_j} z_{-j}. \end{aligned}$$

Consequentemente, usando a desigualdade de Bessel, obtemos

$$\begin{aligned} 2 \int_{\mathbb{R}^N} uv dx &= \langle Tz, z \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle z, z_i \rangle^2 \frac{1}{\lambda_i} - \sum_{j=1}^{\infty} \langle z, z_{-j} \rangle^2 \frac{1}{\lambda_j} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \langle z, z_i \rangle^2 \frac{1}{\lambda_i} \\ &\leq \frac{1}{\lambda_1} \sum_{i=1}^{\infty} \langle z, z_i \rangle^2 \leq \frac{1}{\lambda_1} \|z\|^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|z\|^2 - 2\lambda_1 \int_{\mathbb{R}^N} uv dx \geq 0, \quad \forall z \in E.$$

Isto mostra que $\lambda_1 \in A$ e, portanto, $\lambda_1 = \sup A$.

Apêndice B

O espaço $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$

Neste Apêndice, vamos estudar o espaço $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ que é definido como sendo completamento de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ com relação à norma

$$\|\phi\|_0 = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi|^2 \right)^{1/2}.$$

Temos que $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\langle u, v \rangle_0 = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v.$$

Além disso, $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é caracterizado pelo seguinte

Lema B.1. $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) = D \equiv \left\{ u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^N), \quad i = 1, 2, \dots, N \right\}.$

Demonstração. (i) $D \subset \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$

Seja $u \in D$ e $M \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $0 \leq M \leq 1$ definida por $M(x) = 1$, $x \in B_1(0)$ e $M(x) = 0$, $x \in B_2(0)^c$.

Considere a sequência $M_n(x) = M\left(\frac{x}{n}\right)$ e $u_n = M_n u$; $u_n \in D$ e tem suporte compacto.

De fato,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} = \int_{\mathbb{R}^N} |M_n u|^{2^*} \leq \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} < \infty$$

o que implica $u_n \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$.

Por outro lado,

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} = \frac{\partial M_n}{\partial x_i} u + M_n \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{1}{n} \frac{\partial M}{\partial x_i} + M_n \frac{\partial u}{\partial x_i};$$

daí

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left| M_n \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 < \infty$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial M_n}{\partial x_i} u \right|^2 &= \frac{1}{n^2} \int_{|x| \leq 2n} \left| \frac{\partial M}{\partial x_i} \right|^2 |u|^2 \leq \frac{C}{n^2} \left(\int_{|x| \leq 2n} |u|^{2^*} \right)^{2/2^*} ((2\omega_N n)^N)^{2/N} \\ &\leq C_N |u|_{2^*}^2 < \infty \end{aligned}$$

de modo que $u_n \in D$.

Além disso, $u_n \rightarrow u$ em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Para isto, devemos mostrar que

$$\left\| \frac{\partial M_n}{\partial x_i} u \right\|_{L^2} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \left\| M_n \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2} \rightarrow 0.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial M_n}{\partial x_i} u \right|^2 &= \int_{n \leq |x| \leq 2n} \left| \frac{\partial M_n}{\partial x_i} u \right|^2 \leq \frac{C}{n^2} \int_{n \leq |x| \leq 2n} |u|^2 \\ &\leq \frac{C}{n^2} \left(\int_{n \leq |x| \leq 2n} |u|^{2^*} \right)^{2/2^*} [(2\omega_N n)^N - (\omega_N n)^N]^{2/N} \\ &\leq C_N \left(\int_{n \leq |x| \leq 2n} |u|^{2^*} \right)^{2/2^*} \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

pois $u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$.

Por outro lado,

$$\left(M_n \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \rightarrow 0 \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N$$

e

$$\left(M_n \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \leq 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left| M_n \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \rightarrow 0.$$

Seja, agora, $v \in D$ com suporte compacto. Então $\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e tem suporte compacto. Assim, se ρ_n é uma sequência regularizante (ver definição em Brezis [4]) temos que

$$\phi_n = \rho_n * v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi_n}{\partial x_i} = \rho_n * \frac{\partial v}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \text{em } L^2(\mathbb{R}^N).$$

Daí,

$$\|\phi_n - v\|_0^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi_n - \nabla v|^2 \longrightarrow 0.$$

Portanto, se $u \in D$, existe uma sequência $\{\phi_n\} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\|\phi_n - u\|_0 \rightarrow 0$ de modo que $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

(ii) $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \subset D$

Seja $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Então, por definição, existe $\{\phi_n\} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\|\phi_n - u\|_0 \rightarrow 0.$$

Logo,

$$\left\| \frac{\partial \phi_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2} \rightarrow 0, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N.$$

Desde que $L^2(\mathbb{R}^N)$ é completo, segue que

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^N), \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N.$$

Por outro lado, existe $C > 0$ tal que

$$|\phi_n|_{2^*} \leq C |\nabla \phi_n|_2$$

logo,

$$\|\phi_n - \phi_m\|_{L^{2^*}} \leq C \|\nabla \phi_n - \nabla \phi_m\|_{L^2} \rightarrow 0 \quad \text{quando } m, n \rightarrow \infty$$

donde $\{\phi_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Portanto existe $v \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\phi_n \rightarrow v \quad \text{em } L^{2^*}(\mathbb{R}^N).$$

Afirmamos que $\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial v}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \dots, N$.

De fato, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \phi_n}{\partial x_i} \varphi \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Mas

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \phi_n}{\partial x_i} \varphi = - \int_{\mathbb{R}^N} \phi_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \longrightarrow - \int_{\mathbb{R}^N} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}.$$

Como $\int_{\mathbb{R}^N} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial v}{\partial x_i} \varphi$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial v}{\partial x_i} \varphi, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Logo, pelo Lema de Du Bois-Raimond, concluímos

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Daí $\|u - v\|_0^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u - \nabla v|^2 = 0$, o que implica $u = v$. Portanto, $u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ e $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $i = 1, 2, \dots, N$, donde $u \in D$.
Por (i) e (ii), temos $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) = D$. □

Agora, vamos provar um resultado bastante útil.

Teorema B.1. $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ está imerso continuamente em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Pelo Lema B.1, podemos definir a seguinte norma em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$:

$$\|u\|_1 = \|u\|_{L^{2^*}} + \|u\|_0.$$

Afirmamos que $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ munido com a norma acima também é um espaço de Banach. De fato, seja $\{u_n\}$ uma sequência de Cauchy em $(\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N), \|\cdot\|_1)$, isto é,

$$\|u_n - u_m\|_1 \rightarrow 0, \quad \text{quando } m, n \rightarrow \infty.$$

Assim $\{u_n\}$ também é de Cauchy em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ e em $(\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N), \|\cdot\|_0)$. Portanto,

$$u_n \rightarrow u \text{ em } L^{2^*}(\mathbb{R}^N) \text{ e } \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightarrow v_i \text{ em } L^2(\mathbb{R}^N)$$

para $i = 1, 2, \dots, N$.

Por um raciocínio análogo ao do Lema B.1, teremos

$$v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N.$$

Assim,

$$u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \text{ e } \|u_n - u\|_1 = \|u_n - u\|_{2^*} + \|u_n - u\|_0 \rightarrow 0$$

mostrando que $(\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N), \|\cdot\|_1)$ é um espaço de Banach.

Desde que $\|u\|_0 \leq \|u\|_1$, segue do Teorema da Aplicação Aberta, que existe uma constante $K > 0$ tal que

$$\|u\|_1 \leq K\|u\|_0.$$

Logo,

$$\|u\|_{L^{2^*}} \leq \|u\|_1 \leq K\|u\|_0,$$

donde segue que a imersão $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ é contínua. □

Outro resultado importante envolvendo o espaço $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é o seguinte:

Teorema B.2. *Seja $\{u_n\} \subset \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ uma sequência limitada. Então, a menos de subsequência, existe $u_0 \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$$u_n \rightarrow u_0 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Demonstração. Desde que $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Hilbert, existe $u_0 \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ de modo que

$$u_n \rightharpoonup u_0 \text{ em } \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N),$$

a menos de subsequência. É imediato que a imersão $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow H^1(B_R)$ é contínua, para todo $R > 0$. Logo, pelas imersões de Sobolev, obtemos

$$u_n \rightarrow u_0 \text{ em } L^2(B_R), \quad \forall R > 0.$$

Assim fixado $R = 1$, existe uma subsequência $\{u_n^1\} \subset \{u_n\}$ que satisfaz

$$u_n^1 \rightarrow u_0 \text{ q.t.p. em } B_1.$$

Agora usando as imersões de Sobolev para $\{u_n^1\}$, encontramos uma subsequência $\{u_n^2\} \subset \{u_n^1\}$ tal que

$$u_n^2 \rightarrow u_0 \text{ q.t.p. em } B_2.$$

Seguindo assim, fixado $k \in \mathbb{N}$, existe uma subsequência de $\{u_n\}$ que satisfaz

$$u_n^k \rightarrow u_0 \text{ q.t.p. em } B_k.$$

A sequência diagonal $\{u_k^k\}$ tem a propriedade desejada, isto é,

$$u_k^k \rightarrow u_0 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

De fato, seja $C_j = \{x \in B_j; \lim_{n \rightarrow \infty} u_n^j \neq u_0(x)\}$. Temos que $\mu(C_j) = 0$. Considere $C = \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$.

Assim $\mu(C) = 0$. Fixado $x \in \mathbb{R}^N \setminus C$ e $k_0 \in \mathbb{N}$ com $x \in B_{k_0}$, segue que

$$x \in B_k \quad \forall k \geq k_0.$$

Portanto

$$u_n^k(x) \rightarrow u_0(x), \quad \text{quando } n \rightarrow \infty \text{ para } k \geq k_0.$$

B. O espaço $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$

Sendo $\{u_k^k\}$ uma subsequência de $\{u_n^k\}$, obtemos

$$u_k^k \rightarrow u_0 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N$$

e assim fica provada a proposição. □

Referências Bibliográficas

- [1] A. AMBROSETTI AND P. H. RABINOWITZ, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. 14 (1973), 349-381.
- [2] T. BARTSCH AND Z. WANG, *Existence and multiplicity results for some superlinear elliptic problems on R^N* , Comm. in PDE 20 (1995), 1725-1741.
- [3] T. BARTSCH AND Z. WANG, *Multiple positive solutions for a nonlinear Schrödinger equation*, Z. Angew. Math. Phys. 51 (2000) 366-384.
- [4] H. BRÉZIS *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2010.
- [5] H. BRÉZIS AND E. LIEB, *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*, Proc. Amer. Math. Soc. 88 (1983) 486-490.
- [6] D. G. COSTA AND C. A. MAGALHÃES, *A unified approach to a class of strongly indefinite functionals*, J. Diff. Equ. 125 (1996), 521-547.
- [7] D. G. COSTA, *On a class of elliptic systems in R^N* , Electron. J. Differential Equations 7 (1994) 1-14.
- [8] M. F. FURTADO, L. A. MAIA AND E. A. B. SILVA, *Existence and multiplicity results for some superlinear elliptic problems on R^N* , Comm. in PDE 27 (2002), 515-536.
- [9] M. F. FURTADO, L. A. MAIA AND E. A. B. SILVA, *On a double resonant problem in R^N* , Int. and Diff. Equ. 15 (2002), 1335-1344.
- [10] M. F. FURTADO, L. A. MAIA AND E. A. B. SILVA, *Systems with coupling in R^N for a class of noncoercive potentials*. Proc. of the Fourth International Conference on Dynamical Systems and Differential Equations, (Wilmington, 2002), Disc. and Cont. Dyn. Syst., suppl. vol. (2003), 295-304.

- [11] M. F. FURTADO, L. A. MAIA AND E. A. B. SILVA, *Double resonant problems which are locally nonquadratic at infinity*, Electron. J. Diff. Equ. Conf. 06 (2001), 155-171.
- [12] M. F. FURTADO, E. A. B. SILVA AND M. S. XAVIER, *Multiplicity and concentration of solutions for elliptic systems with vanishing potentials*, J. Differential Equations 249 (2010) 2377-2396.
- [13] L. A. MAIA AND E. A. B. SILVA, *On a class of coupled elliptic systems in $\mathbb{R}^N$* , Nonlinear differ. equ. appl. 14 (2007) 303-313.
- [14] P. H. RABINOWITZ, *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math. 65, AMS, Providence, RI, 1986.
- [15] P. H. RABINOWITZ, *On a class of nonlinear Schrödinger Equations*, Z. Angew. Math. Phys. 42 (1992), 270-291.
- [16] U. B. SEVERO, *Sobre soluções da equação $-\Delta u + a(x)u = \rho(x)u^p$ em $\mathbb{R}^N$* , Tese de dissertação, Universidade de Brasília, 1998.
- [17] E. A. B. SILVA, *Critical point theorems and applications to differential equations*, Ph.D. thesis, University of Wisconsin-Madison, 1988.
- [18] E. A. B. SILVA, *Existence and multiplicity of solutions for semilinear elliptic systems*, Nonlinear Diff. Eq. and Appl. 1 (1994), 339-363.
- [19] E. A. B. SILVA, *Linking theorems and applications to semilinear problems at resonance*, Nonlinear Analysis 16 (1991), 455-477.
- [20] E. A. B. SILVA, *Subharmonic solutions for subquadratic Hamiltonian systems*, J. Diff. Equ. 115 (1995), 120-145.
- [21] E. A. B. SILVA, *Nontrivial solutions for noncooperative elliptic systems at resonance*, Electron. J. Diff. Equ. Conf. 06 (2001), 267-283.
- [22] E. A. B. SILVA AND M. S. XAVIER, *Multiplicity of solutions for quasilinear elliptic systems with critical growth*, to appear in NoDEA.