

PROGRAMA INTEGRADO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA

UFPB-UFPE-UFRN

MATHEUS WANDERLEY GONDIM

**O ESTRUTURALISMO E O DEBATE ONTOLÓGICO EM FILOSOFIA
DA MATEMÁTICA**

RECIFE - PE

2019

MATHEUS WANDERLEY GONDIM

**O ESTRUTURALISMO E O DEBATE ONTOLÓGICO EM
FILOSOFIA DA MATEMÁTICA**

Trabalho acadêmico desenvolvido no curso de doutorado junto ao Programa Integrado de Pós-Graduação em Filosofia, apresentado para fins de defesa de tese de doutorado.

Orientador: Professor Doutor Fernando Raul de Assis Neto

RECIFE – PE

2019

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

G637e GONDIM, Matheus Wanderley.

O Estruturalismo e O Debate Ontológico em Filosofia da Matemática / Matheus Wanderley Gondim. - João Pessoa, 2019.

87f.

Orientação: Fernando Raul de Assis Neto.

Tese (Doutorado) - UFPB/CCHLA.

1. Filosofia da matemática. 2. Lógica. 3. Ontologia. 4. Estruturalismo. 5. Metafísica. I. ASSIS NETO, Fernando Raul de. II. Título.

UFPB/CCHLA

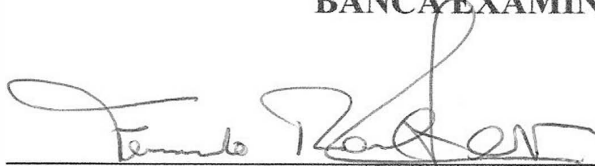
MATHEUS WANDERLEY GONDIM

**O ESTRUTURALISMO E O DEBATE ONTOLÓGICO EM
FILOSOFIA DA MATEMÁTICA**

Tese de doutorado apresentada ao Programa
Integrado de Pós Graduação em Filosofia –
UFPE, UFPB, UFRN.

Defesa realizada em: 30/09/2019

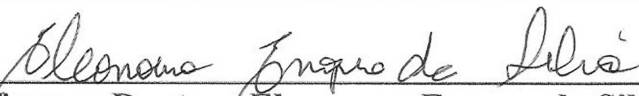
BANCA EXAMINADORA



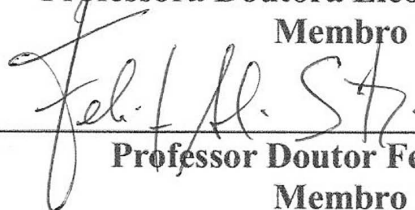
Professor Doutor Fernando Raul de Assis Neto
Orientador



Professor Doutor Alfredo de Oliveira Moraes
Membro Interno



Professora Doutora Eleonora Enoque da Silva
Membro Externo



Professor Doutor Felipe Arruda Sodré
Membro Externo



Professor Doutor Danilo Vaz-Curado Ribeiro de Menezes Costa
Membro Externo

Dedico este trabalho aos que me ensinaram e aos que pude ensinar. Que aquilo a que se refira o termo “aprendizado”, seja algo abstrato ou uma simples coleção de eventos, possa perdurar.

Agradecimentos

A meus pais, por todo o apoio e pela orientação que recebi desde cedo.

A Suelen, com quem redescobri a ternura e a força, e que sempre buscou o melhor em mim.

Aos amigos que me acompanharam nessa trajetória, compreenderam minhas faltas e me estimularam à conclusão desse trabalho: Júlio, que tantas vezes assumiu afazeres que não eram seus quando precisei trabalhar; Gilmara, e as orquestras de digitação; Paulo e o seu, quase sempre, tempestivo “já terminou a tese?”.

A Giovanni Queiroz (*In Memoriam*); pela orientação que perdura muito após sua partida.

A Fernando Raul, por ter assumido a difícil tarefa de continuar a orientação deste trabalho.

*Mathematics:
Just so “wow” it brooks
belief.*

(Van der Graaf Generator)

RESUMO

Esta tese de doutorado tem por objetivo defender um compromisso modal para a verdade em estruturas matemáticas, isto é, de que a matemática se compromete com proposições demonstráveis. Esta tarefa passa pela apresentação e rejeição do platonismo matemático em relação a Objetos, ou seja, o compromisso ontológico com Objetos abstratos da matemática. A negativa do platonismo é fundada no argumento a favor do estruturalismo proposto por Paul Benacerraf em *What Numbers Could Not Be*. O estruturalismo é então apresentado como uma postura que não demanda compromisso ontológico para que um conceito de verdade objetiva seja aplicado significativamente à matemática, sendo suficiente um compromisso com enunciados demonstráveis em instâncias de uma estrutura. O trabalho é organizado em três capítulos: no primeiro, são discutidos os conceitos-chave para a discussão ontológica; no segundo, é apresentada a tese platonista, o argumento da indispensabilidade e o argumento de Benacerraf pelo estruturalismo; no terceiro, é discutida a natureza da escolha de axiomas em teorias matemáticas, bem como a dificuldade de conciliação entre ontologia e epistemologia para uma definição da verdade em matemática, tal como defendida em *Mathematical Truth*, também de Benacerraf. Este último capítulo é concluído com a defesa da tese deste trabalho.

Palavras-chave: Filosofia da matemática; Ontologia; Estruturalismo; Lógica; Metafísica.

ABSTRACT

This doctoral dissertation aims at arguing for a modal commitment towards truth in mathematical structures, i.e., Mathematics commits itself to demonstrable propositions. This task involves presenting and rejecting mathematical platonism about mathematical Objects, that is, the ontological commitment to mathematics' abstract Objects. The denial of platonism is founded on Benacerraf's argument for structuralism, as presented in *What Numbers Could Not Be*. Structuralism is then presented as a view which does not demand ontological commitment in order to achieve a working concept of objective truth in mathematics, as commitment to demonstrable sentences in instances of structures is itself sufficient. The thesis is divided into three chapters: the first one includes a discussion of key concepts for discussing ontology in mathematics; the second one presents the platonist account, the indispensability argument and Benacerraf's argument for structuralism; the third chapter contains a discussion about the nature of axiom choices, as well as the difficulty in conciliating ontology and epistemology for a satisfactory definition of mathematical truth, as also defended by Benacerraf. This last chapter is then concluded with an argument for the proposed thesis.

Keywords: Philosophy of Mathematics; Ontology; Structuralism; Logic; Metaphysics.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	10
CAPÍTULO 1 – O problema ontológico na matemática	14
1.1 Pontos de partida	14
1.2 Objetos concretos e objetos abstratos	16
1.3 Existência	21
1.4 Compromisso ontológico	28
1.5 Verdade	34
CAPÍTULO 2 – Platonismo matemático, objetos e estruturas	42
2.1 A tese básica do platonismo	42
2.2 O argumento da indispensabilidade	46
2.3 <i>What numbers could not be e o estruturalismo</i>	52
CAPÍTULO 3 – Escolha de axiomas e epistemologia matemática	61
3.1 Justificação de axiomas: razões intrínsecas e extrínsecas.....	61
3.2 <i>Mathematical truth</i> : ontologia e epistemologia inconciliáveis.....	68
3.3 Estruturalismo, verdade e compromisso modal	73

CONSIDERAÇÕES FINAIS	79
REFERÊNCIAS	83

INTRODUÇÃO

A tese a ser desenvolvida neste trabalho propõe uma resposta para o problema ontológico geral da matemática ante a perspectiva filosófica do estruturalismo neste campo do conhecimento. Cotidianamente formulada, a questão se põe da seguinte maneira: a matemática é um exercício de criação ou descoberta?

Tal como a filosofia, a matemática é desenvolvida através da manipulação de conceitos e da linguagem (ainda que formalizada). Porém, ao passo que a comunidade filosófica dificilmente chega a algum acordo sobre alguma proposição que deva ser considerada verdade da filosofia, a comunidade de matemáticos é prolífica em produzir proposições ditas verdadeiras. Visto que verdade é um conceito dificilmente associado a uma atividade criativa, afinal não se diz que uma obra de arte é “verdadeira” (ao menos não no sentido empregado aqui), parece ser necessário atribuir algum elemento de descoberta à matemática.

Defende-se aqui que a matemática partilha das duas características. Por um lado, a matemática é criativa (ainda que, por vezes, guiada por algum compromisso com o mundo): axiomas, pressupostos da argumentação matemática, podem ser definidos sob vários critérios, e nem sempre auto-evidência é um deles. Por outro, uma vez definido um conjunto de axiomas, ainda que simples como a aritmética elementar, o conjunto de proposições que podem ser demonstradas a partir deles foge em muito ao escopo criativo de quem os definiu. Estes resultados a serem provados são mais bem caracterizados como descoberta do que como criação. Chegar a essa proposta e defini-la mais rigorosamente, contudo, envolve o percurso do trabalho completo.

No que diz respeito ao contexto da discussão filosófica, este trabalho discute primariamente fontes dos séculos XX e XXI. Ainda que a filosofia da matemática não seja restrita a este recorte temporal, a efervescência da matemática diante de problemas com paradoxos e a presença de lógicos e filósofos como Frege, Russell, Hilbert e Gödel e a continuidade da discussão no atual estado da arte justificam a escolha dentro das limitações do escopo de uma tese de doutorado.

Sob um ponto de vista teórico, a consolidação no século XX de sistemas formais axiomáticos, como o *Principia Mathematica* (1910) de Russell e da teoria dos conjuntos por nomes como Zermelo, Fraenkel e Bernays, se coloca como terreno fértil para a discussão aqui empreendida. Outro nome importante para o trabalho indubitavelmente é o de W. V. O. Quine, associado ao conceito de compromisso ontológico, indispensável a este trabalho.

Dois trabalhos de Paul Benacerraf, por sua vez, se apresentam como centrais à discussão realizada: *What Numbers Could Not Be* (1965) e *Mathematical Truth* (1973). No primeiro, Benacerraf apresenta um argumento a favor da proposta estruturalista, adotada neste trabalho. No segundo, o autor referido aborda o problema da verdade em matemática, o que oferece uma base filosófica para o estabelecimento da tese.

Por último, outra fonte filosófica que merece menção nesta introdução é Penelope Maddy, portadora de extensa produção acadêmica sobre temas de filosofia da matemática e cuja obra por si só mereceria um trabalho completo.

Quanto ao percurso filosófico, o problema deste trabalho é abordado primariamente pela via da ontologia, visto que uma das tentativas de solução da questão é atribuir existência a objetos matemáticos: assim,

justifica-se que proposições da matemática são verdadeiras pois se referem a esses objetos e suas propriedades. Esta posição, contudo, é rejeitada em detrimento da tese apresentada. Para a realização deste percurso, o trabalho divide-se em três capítulos.

O primeiro capítulo possui função propedêutica: definem-se os conceitos mais importantes para a compreensão de questões ontológicas bem como consolidação do vocabulário para a formulação da tese. São discutidas, entre outras, as noções de objeto abstrato, compromisso ontológico e verdade objetiva. O esclarecimento desses termos permite que o trabalho seja norteado pela seguinte questão: É possível considerar que a matemática contém enunciados objetivamente verdadeiros sem que haja compromisso ontológico com objetos abstratos?

O segundo capítulo apresenta a postura platonista, de que a matemática refere-se a objetos abstratos e, portanto, a verdade de enunciados da matemática é uma questão referencial: enunciados da matemática correspondem a fatos sobre esses objetos e a suas relações. É então discutido um dos principais argumentos em defesa dessa postura, o argumento da indispensabilidade, e são oferecidas razões para sua rejeição.

O capítulo é encerrado com a apresentação da crítica de Benacerraf ao platonismo contida em *What Numbers Could Not Be* e de sua tese estruturalista a respeito da matemática. Questões deixadas abertas pelo estruturalismo levam o curso para a porção seguinte do trabalho.

O terceiro capítulo começa pela discussão dos fundamentos dos sistemas formais: os axiomas. A distinção oferecida por Maddy (1988) entre justificativas intrínsecas e extrínsecas move a argumentação em direção à rejeição da possibilidade de determinação do valor de verdade dos axiomas. Esta discussão, acompanhada pela leitura de *Mathematical*

Truth e o estabelecimento da impossibilidade de conciliação plena entre a epistemologia matemática e uma ontologia tal como discutida até o momento sedimenta o caminho para a exposição da tese a ser defendida.

Este último capítulo encerra-se pela apresentação da tese, a defesa de que a matemática engendra não um compromisso ontológico, mas um compromisso modal. A respeito de uma estrutura, instanciada por um sistema formal, há proposições que podem ser demonstradas. O compromisso é, portanto, com essa possibilidade de demonstração (ou demonstrabilidade), e não com a existência de Objetos abstratos. Para tal, adota-se uma definição de verdade que preserva seu caráter objetivo, atribuindo o predicado “verdadeiro em uma estrutura *S*” às proposições avaliadas.

CAPÍTULO 1 – O PROBLEMA ONTOLÓGICO NA MATEMÁTICA

Com o propósito de que a linguagem adotada neste trabalho seja a mais precisa possível, faz-se necessário que as definições adotadas para os termos utilizados seja oferecida de antemão, especialmente quando tratamos de termos com usos amplos na escrita filosófica que aqui serão aplicados a problemas específicos da filosofia da matemática. Com esse objetivo, nesta seção serão apresentados os conceitos fundamentais ao desenvolvimento do texto.

1.1 Pontos de partida

Thomas Hofweber¹ aponta que a ontologia pode ser vista como uma disciplina filosófica que compreende quatro aspectos: O estudo do que existe, o estudo do compromisso ontológico, o estudo das características mais gerais das coisas que existem e como estas se relacionam umas com as outras das maneiras mais gerais, e o estudo da meta-ontologia, isto é, um estudo de quais e como devem ser as questões respondidas pela ontologia.

O primeiro aspecto apontado acima é claramente insuficiente para satisfazer os propósitos deste trabalho. Tentar explicar que tratar do problema ontológico na matemática é tratar do que existe na matemática é apenas uma tautologia superficial e não diz qualquer coisa sobre o que significa existir ou sobre como devem ser as possíveis respostas ao problema.

A compreensão inicial de que a ontologia é o estudo do que existe, contudo, é suficiente para a introdução de um termo importante: ao

¹ HOFWEBER, Thomas, **Logic and Ontology**. In The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2018 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <<https://plato.stanford.edu/archives/sum2018/entries/logic-ontology/>>.

falarmos de algo que existe, falamos de *entes*, palavra de origem grega normalmente traduzida simplesmente por “aquilo que é”. Contudo, para tratar de entes na matemática daqui por diante, o termo *Objeto matemático* será preferido, por uma questão de conformidade com a maior parte da literatura utilizada como fonte de pesquisa. Todavia, ainda é necessário elaborar um significado preciso do que são objetos matemáticos.

Filósofos costumam tratar Objetos como a segunda parte de uma dicotomia que envolve o Sujeito: a proposta da revolução copernicana de Immanuel Kant é certamente um dos melhores exemplos da importância dessa dualidade e também de como é o tratamento filosófico do conceito de objeto. Entretanto, supondo que tenhamos uma noção clara do que é o Sujeito, dizer que Objetos são todo o restante continua insuficiente, especialmente quando considerada a especificidade do tipo de Objeto que se pretende abordar neste trabalho².

Sob esta definição vaga, o termo “Objeto” pode incluir em seu escopo não somente coisas físicas e individualizadas (como a colher que uso neste momento para mexer meu café), mas também noções de caráter mais delicado, como classes de Objetos (tomadas como unidades)³, ou ainda coisas que dificilmente podem ser localizadas no espaço e no tempo: ideias, proposições (no sentido dado pelos lógicos) ou, finalmente, nossos Objetos matemáticos.

Refletir brevemente sobre os exemplos de Objetos do parágrafo acima é suficiente para perceber que, apesar de lidarmos diariamente com todos esses tipos de entidades, é relativamente simples falar apenas dos mais mundanos: as coisas físicas e individualizadas, e isto se abandonarmos um ceticismo extremo. Podemos nos referir aos objetos

² A proposta aqui não é realizar uma crítica à filosofia moderna, mas evidenciar a necessidade de clareza da definição de Objeto.

³ Enquadram-se nessa noção de classes de Objetos os universais: a classe dos cavalos, das mesas, das cadeiras etc.

físicos que podemos individualizar de maneira precisa, conferir-lhe atributos como massa, dimensões e duração, atribuir um termo de referência única (um nome próprio) e até mesmo dar definições de condições sob as quais o Objeto começa ou deixa de existir, a fim de evitar problemas como o do navio de Teseu⁴. Para qualificar estes Objetos, o termo “concreto” será usado⁵.

Os demais objetos mencionados, por sua vez, possuem um caráter diferente, visto que seus atributos não parecem ser facilmente redutíveis a caracteres espaço-temporais, mas nem por isso se apresentam desvinculados da realidade física: classes podem se referir a coleções de objetos no mundo, proposições possuem valor de verdade e sentenças sobre objetos matemáticos aplicam-se à física.

Em oposição aos objetos ditos concretos, é conveniente chamar esses *objetos abstratos*. O tópico seguinte tratará de algumas definições importantes sobre eles.

1.2 Objetos concretos e abstratos

Conforme discutido na seção anterior, objetos matemáticos devem se enquadrar na categoria mais ampla de objetos abstratos. Desta forma, se faz necessário discutir e estabelecer as definições que constituirão o vocabulário deste trabalho.

Definir o que são objetos abstratos não é tarefa fácil, e enfrenta problemas similares aos enfrentados por Tarski em suas tentativas em

⁴ Cf. GALLOIS, Andre. **Identity Over Time**. In The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2016 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <<https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/identity-time/>>.

⁵ Isso não significa dizer que todos os objetos concretos são facilmente individualizados. A escala quântica é o exemplo paradigmático de objetos concretos com tratamento filosófico complicado. Todavia, não serão o foco deste trabalho.

definir a verdade⁶. No caso dos objetos abstratos, a dificuldade consiste em produzir uma definição que se refira aos objetos que normalmente nos referimos pelo termo “abstrato” e somente a eles, isto é, haja uma adequação material ao uso do termo. Além disso, é importante que a definição não seja uma mera lista do que chamamos de objetos abstratos, isto é, seja capaz de nos oferecer uma ferramenta, um conceito, para classificar qualquer objeto com o qual nos depararmos.

É importante lembrar que não se pretende neste trabalho esgotar todas as definições possíveis e aceitáveis de objetos ou mesmo de separações entre entes concretos e abstratos. O que se busca aqui é uma definição suficientemente precisa e satisfatória para o manejo teórico dos objetos dos quais a matemática trata. Sejam eles os Objetos postulados pelas teorias (i.e. sistemas formais) da matemática ou ainda as estruturas⁷ codificadas por essas teorias.

Outro sinal da dificuldade em se dizer o que são objetos abstratos, e subsequentemente da importância em se incluir esta seção no trabalho, é a maneira pela qual se costumam apresentar definições desses objetos: costumeiramente incluem a negação de algum atributo conferido aos objetos concretos. Essa tendência é perfeitamente compreensível visto que é muito menos controverso falar de características que devem ser comuns entre cadeiras, prédios e planetas do que algo que seja compartilhado entre proposições, *qualia* e números. Esse problema é apontado por Gideon Rosen⁸.

⁶ Cf. TARSKI, Alfred. **A Concepção Semântica da Verdade**. Tradução: Celso Reni Braiba, Jesus de Paula Assis, Luiz Henrique de Araújo Dutra e Cezar A. Mortari. 1. ed. São Paulo: UNESP, 2007.

⁷ O tópico específico das estruturas será abordado mais adiante em outro capítulo.

⁸ Cf. ROSEN, Gideon. **Abstract Objects**. In *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2018 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/win2018/entries/abstract-objects/>. Neste artigo, Rosen examina diferentes maneiras de definir Objetos abstratos: a via da negação, a via do exemplo, a via da confluência e a via da abstração. A via do exemplo cai no problema da listagem já mencionado anteriormente; a via da confluência trata objetos abstratos como universais; a via da abstração apresenta uma definição Fregeana, para a qual uma abstração é o que resta de um conjunto de objetos se for considerado somente o que há em comum entre eles. Esta última, contudo, não esclarece as

Um atributo de objetos concretos normalmente negados para se obter uma definição de objetos abstratos é a *sensibilidade*. Em outras palavras, dizer que objetos abstratos são aqueles não-sensíveis ou, ainda, que não afetam nossos sentidos.

Há, porém, uma maneira de argumentar pela insuficiência dessa definição: a não ser que estejamos dispostos a considerar objetos físicos detectáveis por instrumentos mas não por nossos sentidos como sendo objetos abstratos, teremos de refinar ou substituir a definição. Todavia, ainda que se considere a apresentação em dados instrumentais como razão para afirmar que um objeto é “sensível”, essa definição é normalmente completada pelo requisito de que os objetos, para serem considerados abstratos, sejam não mentais. Essa exigência estabelece uma separação importante que merece comentário.

Quando exemplos de Objetos abstratos foram dados mais acima neste capítulo, falou-se em fenômenos da experiência sensorial, *qualia*. Como algo dependente da mente por sua própria definição, estariam excluídos da definição proposta. Eliminá-los da definição não parece ser um grande problema, visto que não são o foco deste trabalho, mas isso chama a atenção para um ponto que será importante e recorrente: como é possível tratar de Objetos que não pertencem ao mundo físico (os que poderiam ser considerados como “sensíveis”) e também não são mentais?

Essa forma de encarar Objetos abstratos parece oferecer mais problemas do que soluções, pois os coloca em uma categoria ontológica metafisicamente carregada: estamos falando de existência de coisas cuja natureza é especialmente diferente daquela da maioria dos objetos que costumamos tratar. Todavia, é justamente o que defende a tese platonista na filosofia da matemática, que será abordada em detalhes no capítulo

propriedades das abstrações. A via negação, portanto, parece, apesar de seus defeitos, a única que oferece algum *insight* sobre o que são Objetos abstratos.

seguinte. Por ora, vale a pena retornar a uma forma mais filosoficamente geral de falar sobre Objetos abstratos tomados dessa forma.

Construir essa definição de Objetos abstratos de baixo para cima evidencia o caráter problemático da questão, e para um não filósofo pode até parecer prepóstera; contudo, é uma abordagem metafísica recorrente na história da filosofia. O idealismo de Platão já foi brevemente mencionado, a discussão de suas implicações no famoso problema medieval dos *universais* destaca a questão e, mais recentemente, há o embate entre Logicistas, Intuicionistas e Formalistas em filosofia da matemática.

Definir objetos abstratos como não sensíveis e não mentais não é a única via possível. Outro modo particularmente interessante é defini-los como *objetos causalmente ineficazes*, isto é, incapazes de dar início a cadeias de causa e efeito. Alguns motivos pelos quais essa forma de definir objetos é importante para esse trabalho merecem ser destacadas a seguir.

A razão mais forte pela qual essa razão parece preferível é o fato de que a mesma não apela para os aspectos mental e sensorial. Falar de objetos abstratos assim não significa prontamente atribuir-lhes por definição a ausência de destes caracteres; nesse sentido, pode-se dizer que é uma definição mais limpa e que apela para menos conceitos prévios.

Também vale perceber que uma noção intuitiva de causalidade aplica-se tanto a fatos materiais como fatos psicológicos. A ciência e a linguagem cotidiana falam em eventos físicos causando outros eventos; e no vocabulário psicológico fala-se em certos pensamentos causando outros.

Ainda que alguém se estranhe da aplicação da noção de causalidade a eventos psicológicos, um bom modo de notar a relação entre essas ideias é o exame de um conceito de livre arbítrio: a capacidade de dar início a cadeias causais.

Para que a definição da ineficácia causal funcione, é importante separar a noção de causalidade daquela de consequência lógica⁹. Em termos formais, dizer que uma sentença A é consequência lógica de outra sentença B significa concordar com pelo menos uma das seguintes afirmações: 1 – A e B pertencem a uma dada linguagem L, e nesta linguagem existe uma dedução aceitável em que se pode chegar em A partindo de B aplicando um número finito de passos que atendam às regras de inferência de L, neste sentido, diz-se que A é consequência lógica de B em termos sintáticos; 2 – A e B possuem interpretações em uma linguagem L para as quais A é verdadeira sempre que B também for verdadeira, diz-se assim que A é consequência lógica de B em termos semânticos.

O esboço do conceito de consequência lógica apresentado acima pode ser entendido como a apresentação de uma forma pela qual linguagens formais são capazes de representar relações de causa e efeito no mundo, mas as duas noções não devem de modo algum ser confundidas. Por um lado temos uma relação entre sentenças em uma linguagem (consequência lógica), e por outro temos uma relação entre eventos envolvendo objetos no mundo (causalidade). Isso não significa dizer que a causalidade seja sensível, mas sim que diz respeito ao mundo e não à estruturas linguísticas e lógicas.

Desta maneira, podemos, sob a definição da ineficácia causal, considerar os objetos de ciências formais como sendo abstratos, ainda que estes estejam envolvidos em relações de consequência lógica. Visto que a matemática pode ser considerada uma ciência formal, a definição parece adequada para este trabalho.

⁹ “Consequência lógica” aqui é usado no sentido exposto por Tarski: “A sentença X segue-se logicamente das sentenças da classe K se e somente se todo modelo da classe K é também um modelo da sentença X”. TARSKI, Alfred. **A Concepção Semântica da Verdade**. Trad. Cezar Augusto Mortari e Luiz Henrique de Araújo Dutra (Orgs). Trad. Celso Braidão et al. São Paulo: Editora Unesp, 2007. Este conceito incorpora ambas as definições pela via sintática e semântica, dado um sistema lógico consistente e completo.

Assim, ao se considerar que há objetos tratados pelas ciências formais que podem ser considerados como abstratos pela definição defendida nos parágrafos acima, é possível discutir acerca do que significa conferir-lhes o atributo da existência; afinal, pretende-se aqui discutir problemas de ontologia.

1.3 Existência

Conforme aponta Quine no início do seu texto *Sobre o que há*¹⁰, formular o problema ontológico aparentemente é extremamente simples: a questão pode ser expressa pela pergunta “O que há?” e respondida com “Tudo”. A discussão que se segue, contudo, certamente mostra que o problema é muito mais sério que isso.

Uma tentativa inicial de responder ao problema envolve trazer uma definição simplória de existência: dizer, por exemplo, que “existir” significa ocupar lugar no espaço. Parece justo até que se traga à tona questões sobre a existência de coisas como ideias ou outros objetos abstratos: como podemos falar e concordar acerca de sentenças envolvendo objetos que não existem (sob essa definição)? É evidente a necessidade de uma definição melhor do que significa existir.

Um objetivo a ser adotado aqui é evitar o que Quine chama de “barba de Platão”: a obrigação conferir existência a qualquer coisa de que se fale. Uma doutrina desse tipo é contraproducente, visto que atestar a inexistência de um objeto nos forçaria a, paradoxalmente, comprometer-se com sua existência.

Uma forma indireta para se examinar o que significa existir envolve

¹⁰ QUINE, W.V.O. **On What There is**. In *From a Logical Point of View*. New York: Harper and Row, 1963.

procurar pelas condições sob as quais sentenças como “x existe” são verdadeiras. Um exame deste tipo possui ao menos duas vantagens: 1 - escapar das ambiguidades do vocabulário do senso comum; e 2 – fazer proveito do vocabulário da lógica e da semântica.

Bertrand Russell faz algo parecido em *Sobre a denotação*¹¹ ao analisar a verdade de certas sentenças da linguagem natural incluindo na sua formalização um uso especial de quantificadores existenciais. Em síntese, é possível explicar como, por exemplo, a frase “O atual rei da França é careca” e sua (aparente) negação “O atual rei da França não é careca” são ambas falsas sem o abandono do princípio do terceiro excluído; basta considerar que elas “escondem” uma proposição existencial da forma “Existe alguém que é o atual rei da França e é careca”.

Antes de se transitar pelo domínio de linguagens formais, contudo, é importante explicitar algumas definições. Afinal, o intuito é o de evitar ambiguidades. A partir de agora, termos como “quantificadores existenciais” serão usados em conformidade com a linguagem da lógica de predicados, bem como outros termos teóricos que se seguem e serão discutidos.

O quantificador existencial ($\exists$) é usado normalmente para denotar a existência de uma estrutura (tal como uma interpretação) que satisfaça a sentença sob seu escopo. Em termos formais, a implicação imediata desse tipo de recurso é o estabelecimento de uma relação entre sintaxe e semântica, isto é, as inferências sintáticas autorizadas que envolvem o uso do quantificador devem coincidir com sua aplicação a modelos em metalinguagens, tais como o uso da teoria dos conjuntos. Esse tratamento formal do quantificador existencial, pode-se dizer, parece contemplar apenas parte do problema do sentido do termo “existir”.

Ao predicar existência a algum objeto, o intuito não é simplesmente

¹¹ RUSSELL, Bertrand. **On Denoting**. In *Mind*. Vol. XIV, no. 4. Pp. 479-493. 1905.

atestar que ele faz parte de alguma construção teórica. Em seu sentido mais forte, existir significa ser parte de uma realidade independente. Com objetos concretos, temos a realidade física sobre a qual é corriqueiro concordar. Ao tratar de objetos abstratos, contudo, a questão requer tratamento mais atento.

É possível adotar uma tese platônica, que dá nome a uma das posturas que serão analisadas no capítulo seguinte, e postular que objetos abstratos existem independentemente do nosso trabalho de criação de teorias, e a matemática, de certa forma, os “descobre” (ao invés de ser “criada”). Entretanto, defender a necessidade de uma metafísica tão rica (em oposição às paisagens desertas de Quine) requer justificativas fortes a fim de que se passe pelo fio da navalha de Ockham.

Por outro lado, é possível também buscar um sentido mais próximo da definição formal descrita mais acima que comprometa minimamente o uso mais amplo do termo “existir”, isto é, de pertencer ao mundo de maneira que não seja meramente conceitual. Ainda assim, essa versão de existência não fica livre de problemas metafísicos. É possível perceber essa questão levando-se em consideração dois desenvolvimentos teóricos pertinentes: a definição de verdade de Alfred Tarski e os Teoremas da incompletude de Gödel.

Tarski apresenta uma noção de outro termo metafisicamente carregado, a verdade, e procura construí-la de maneira que não seja contraditória com o sentido comum do termo. Essa noção será brevemente apresentada a seguir. Na sequência, comentários serão feitos aos problemas trazidos pelas teses da incompletude de Gödel à discussão acerca da existência de objetos abstratos.

Em *The Semantic Conception of Truth: and the Foundations of Semantics* é possível, inclusive, perceber a preocupação de Tarski com essa dificuldade que há em relacionar definições formais com o que ele chama

de definições materiais:

Nossa discussão será centrada em torno da noção de *verdade*. O problema principal é o de oferecer uma *definição satisfatória* dessa noção, isto é, uma definição que seja *materialmente adequada e formalmente correta*.¹² (Grifos do autor)

A necessidade de obedecer a esses dois critérios (correção formal e adequação material) requer a aplicação da noção de satisfação, na qual o predicado de verdade faz parte de uma metalinguagem para referir-se a sentenças de uma linguagem objeto. Esse artifício preserva o uso do termo “verdadeiro” e evita problemas sintáticos gerados por linguagens semanticamente fechadas, que são propensas a paradoxos e antinomias.

No domínio das linguagens formais, uma metalinguagem é uma linguagem distinta daquela propriamente estudada (a linguagem-objeto) e que é suficientemente complexa para descrever completamente a linguagem objeto, isto é, reescrever todas as suas fórmulas. Além disso, deve ter alguma capacidade adicional que a torne útil para estudar o funcionamento da linguagem-objeto. Tarski observa que para discutir o problema da verdade, é indispensável essa dualidade¹³. Aceitar essa conclusão implica aceitar que o mesmo deve ser feito para falar da ontologia de objetos que participam de linguagens formais, o que, obviamente, inclui os Objetos abstratos da matemática.

Falar da existência de Objetos abstratos da matemática é, indiretamente, falar de condições de verdade de sentenças da matemática. Tratar o predicado “existe” internamente à linguagens formais com um uso que não seja meramente sintático (como no caso do quantificador existencial) incorre, portanto, na criação de uma linguagem semanticamente fechada.

¹² TARSKI, Alfred. **A Concepção Semântica da Verdade**. Tradução: Celso Reni Braiba, Jesus de Paula Assis, Luiz Henrique de Araújo Dutra e Cezar A. Mortari. 1. ed. São Paulo: UNESP, 2007. P.158

¹³ TARSKI, Alfred. Op. Cit. Cf. p. 168 e ss.

Neste ponto, é importante deixar claro que, como a construção de uma linguagem consistente (sem contradições) não garante que as sentenças da linguagem sejam verdadeiras, decorre disso afirmar que a existência dos objetos referidos pelos nomes da mesma linguagem também não é garantida. Não podemos, portanto, falar da existência dos números em virtude somente da prova de Gentzen acerca da consistência da aritmética¹⁴.

Isto ocorre pois “consistência” se refere a um conceito que diz respeito somente a algo interno à linguagem que se fala: quando dizemos que uma linguagem é consistente, dizemos que ela não é capaz de produzir contradições com suas próprias ferramentas (axiomas e regras de inferência, no caso de um cálculo axiomático).

Entretanto, a discussão muda de figura quando se fala de completude. Aqui se faz necessário oferecer uma definição adequada do termo, Raymond Wilder oferece uma para sistemas axiomáticos:

Um sistema axiomático Σ é completo se não há uma Σ -sentença A tal que A é um axioma independente no sistema $\Sigma + A$, isto é, tal que ambos $\Sigma + A$ e $\Sigma + \sim A$ são ambos satisfazíveis.¹⁵

Ainda na mesma obra, o referido autor define que um certo sistema de axiomas é satisfazível se existe uma interpretação para tal sistema¹⁶. Isto é, um modelo que torne suas fórmulas verdadeiras.

É importante perceber o envolvimento de uma noção de verdade Tarskiana na definição acima: é preciso uma metalinguagem para falar de completude. O problema para a ontologia de objetos matemáticos, contudo,

¹⁴ Cf. SZABO, M. E. **The Collected Papers of Gerhard Gentzen**. North-Holland Publishing Company, Amsterdam: 1969.

¹⁵ WILDER, Raymond L. **Introduction to the Foundations of Mathematics**. Dover Publications, 2nd Edition, 1965. P.32. Tradução minha. Texto original: “Definition. An axiom system Σ is complete if there is no Σ -statement A such that A is an independent axiom in the system $\Sigma + A$; i.e., such that both $\Sigma + A$ and $\Sigma + \sim A$ are satisfiable.”

¹⁶ Ibid. P.25.

ainda não está claro.

De acordo com a definição acima, é importante notar que se tem como consequência imediata dela que para um sistema completo não existe qualquer fórmula verdadeira (de acordo com uma interpretação qualquer) que já não faça parte do sistema, seja como axioma ou na forma de uma fórmula provável pelos métodos dedutivos permitidos pelo sistema.

Um sistema desse tipo pareado com sua interpretação é “bem comportado” sob um ponto de vista ontológico. Se temos uma linguagem e uma interpretação para a mesma que é capaz de descrever todos os seus objetos e relações, não há motivo para complicar a metafísica. Por sinal, buscar esse tipo de complicação seria inócuo.

Poder-se-ia discutir se a interpretação disponível corresponde ao “mundo real”, se é uma lista adequada dos fatos. Contudo, fazer isso envolveria, de alguma maneira, transformar os fatos em uma metalinguagem para falar acerca da verdade da interpretação. É fácil perceber que isso logo levaria a uma cadeia infinita de metalinguagens que se tornam a linguagem-objeto de outras metalinguagens.

Alguém que não esteja ciente do conjunto de problemas filosóficos relacionados ao que se convencionou chamar de “crise nos fundamentos da matemática” poderia apostar que a teoria por trás de pelo menos partes aparentemente mais “triviais” da matemática seria seguramente completa: os matemáticos deveriam ter um meio seguro, um fundamento, para alcançar todas as sentenças verdadeiras da matemática. Entretanto, este não é o caso.

Os teoremas da incompletude de Gödel garantem que, para o sistema de aritmética fundado nos axiomas de Peano, sempre existirão fórmulas que não podem ser demonstradas ou refutadas. É importante perceber que o teorema também demonstra que o sistema não pode ser tornado completo, a limitação é inerente aos sistemas formais desse tipo. Esse dado leva a

algumas consequências filosóficas importantes.

Os resultados de Gödel são comumente apresentados como um golpe ao programa formalista encabeçado por David Hilbert¹⁷, visto que aponta uma limitação fundamental dos sistemas formais. Aqui, contudo, vale trazer a discussão para o problema da existência.

Ao tratar sistemas formais como linguagens, é praticamente inevitável que questões semânticas sejam abordadas. Isso ocorre sempre que haja qualquer consideração ao valor de verdade das sentenças envolvidas. É comum, inclusive, que as conclusões de Gödel sejam apresentadas fazendo referência à verdade. Afinal, o próprio conceito de completude, conforme foi visto, relaciona-se com noções semânticas. Semântica, contudo, implica ontologia apenas quando se considera que a linguagem-objeto faz referência ao mundo (seja concreto ou abstrato). Já em termos puramente formais, é possível estabelecer a semântica apenas associando a linguagem-objeto a uma metalinguagem, tal como se faz entre o cálculo de predicados e a teoria dos conjuntos ou à teoria dos modelos.

Um raciocínio possível ao tratar a semântica como tendo valor ontológico é o seguinte: sentenças (fórmulas) bem formadas sobre números podem ser construídas na aritmética e representam alguma proposição acerca dos números. Proposições devem ser verdadeiras ou falsas, conforme o entendimento tradicional. Pelo teorema de Gödel, há pares de fórmulas e suas respectivas negações que não podem ser demonstrados. Dada uma semântica clássica bivalente, para cada par composto por uma fórmula e sua negação, uma delas deve ser verdadeira e a outra, falsa. Há, portanto, sentenças verdadeiras sobre números que são indemonstráveis na aritmética.

É importante apontar que esse raciocínio depende de que sejam

¹⁷ Cf. KENNEDY, Juliette. **Kurt Gödel**. In The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2018 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <<https://plato.stanford.edu/archives/win2018/entries/goedel/>>.

aceitas algumas premissas importantes, duas das quais merecem ser reiteradas e uma terceira, explicitada. Em primeiro lugar, deve-se adotar uma semântica bivalente para as proposições: as fórmulas devem possuir somente dois valores semânticos possíveis (verdadeiro ou falso). Em segundo lugar, a negação na sintaxe do sistema formal deve ser interpretada como uma operação que altera o valor de verdade da fórmula envolvida. E, por último, deve-se adotar uma postura realista quanto à semântica: cada sentença possui um valor de verdade independentemente de que esse seja demonstrado ou não.

Ser um realista quanto à semântica é uma postura que anda de mãos dadas com o realismo quanto a objetos abstratos caso seja adotada alguma noção de verdade como correspondência (ainda que uma noção metafisicamente modesta como a de Tarski). Encarados dessa forma, os teoremas da incompletude de Gödel só parecem levar a um realismo sobre objetos matemáticos se, de antemão, adotar-se uma postura realista quanto à semântica.

Essa associação entre semântica e ontologia se tornará mais evidente ao discutirmos a ideia de compromisso ontológico, no tópico seguinte.

1.4 Compromisso ontológico

A noção de compromisso ontológico é uma ferramenta útil para explicar a relação entre uma determinada teoria e a existência de certos objetos no mundo. Colocado de outra forma, é uma maneira de examinar as condições de verdade de uma dada teoria: o que precisa existir para que determinado conjunto de sentenças seja verdadeiro?

Um dos textos mais influentes a respeito desse problema é o texto *On*

What There Is, de Willard van Orman Quine¹⁸. Desse texto, se destaca o gosto de Quine por “paisagens desertas”, no que diz respeito à ontologia. Idealmente, deve-se buscar assumir o menor número de entidades possível para que as sentenças da teoria em questão sejam verdadeiras. Isso pode ser descrito como uma instância do princípio da navalha de Ockham.

A maneira que Quine encontra de fazer jus a esta restrição recorre a uma noção enxuta de “verdade”, na qual se diminui a carga metafísica e se põe que dizer que uma sentença é verdadeira é o mesmo que simplesmente afirma-la¹⁹. Além disso, o autor faz uso do conceito de variáveis ligadas para estabelecer a seguinte formulação:

Uma teoria está comprometida somente e somente só às entidades às quais as variáveis ligadas da teoria são capazes de se referir de modo que as afirmações realizadas na teoria sejam verdadeiras.²⁰

Por variáveis ligadas entendemos aqui as aquelas, em uma linguagem de um sistema dedutivo formal, que estão quantificadas e fazem parte do escopo de quantificadores. Assim, ao tomarmos uma fórmula de uma linguagem de primeira ordem do tipo:

$$\exists x(Cx \wedge Px)$$

Na qual as letras predicativas *C* e *P* significam, respectivamente, os predicados “é cachorro” e “possui pelos pretos”, temos, pela definição de Quine, que uma teoria se compromete ontologicamente com todas as entidades a que a variável *x* possa se referir e tornar a afirmação

¹⁸ Encontrado em: QUINE, Willard Van Orman. **De um Ponto de Vista Lógico**. Tradução: Antonio Ianni Segatto. São Paulo: UNESP, 2011.

¹⁹ HYLTON, Peter e KEMP, Gary. **Willard Van Orman Quine**. In *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2019 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <<https://plato.stanford.edu/archives/spr2019/entries/quine/>>.

²⁰ Encontrado em QUINE, Willard Van Orman. Op. Cit.

representada pela fórmula verdadeira. Isto é, se “Argos” é o nome de uma entidade que atende aos predicados “é cachorro” e “possui pelos pretos” temos, por este critério, que a teoria da qual a fórmula do exemplo faz parte se compromete com a existência de Argos.

Certamente, essa é uma definição razoável para nossas intuições acerca de Objetos concretos, já brevemente discutida²¹; mas ao tratar de Objetos abstratos sua aplicação se torna um pouco mais convoluta. Será necessário logo adiante de como se apresentam teorias matemáticas, mas antes vale a pena tecer algumas notas sobre um tipo especial de objeto abstrato: os fictícios.

De fato, a discussão inicial em *Sobre o que há* gira em torno desse tipo de Objeto: atestar que algo não existe parece, sob algumas interpretações, gerar um compromisso ontológico com o algo de que se fala. Problemas acerca da existência de algo como “Pégaso” ou com o valor de verdade de sentenças cujos sujeitos não existem são tópicos comuns ao tratar dessa questão; e muitos outros pontos de interesse para discussões de cunho metafísico podem ser tocados em desdobramentos dessa discussão: como modalidade e a distinção entre atualidade e existência.

No que diz respeito ao uso de modalidade para falar da existência de Objetos abstratos, algumas relações interessantes podem ser traçadas entre objetos fictícios e objetos da matemática²². Ao falar de modalidade, fala-se aqui dos conceitos de necessidade e possibilidade, bem como sua carga metafísica.

Falar que uma proposição P “é possível” ($\Diamond P$) pode significar, de um ponto de vista formal, que tanto P como sua negação $\neg P$ não entram em contradição com outras proposições que foram assumidas como

²¹ Certamente, poderia ser discutida a aplicação da definição para entidades inobserváveis na física, mas este é um assunto para outro momento.

²² Aqui, espero que fique claro que o termo “objeto” não está associado a nenhum compromisso ontológico assumido, por ora, para com ficções ou aquilo do que trata a matemática.

verdadeiras. Assim, dizer que “É possível que amanhã eu pinte o meu cabelo de roxo” é válido, de acordo com esta definição, pois as proposições representadas por ambas as sentenças “Amanhã pintarei o cabelo de roxo” e “Amanhã não pintarei o cabelo de roxo” não entram em contradição com as demais proposições aceitas por mim sobre o mundo, tais como “Eu possuo cabelos” e “Há tinturas roxas para cabelos disponíveis no mercado”. O mesmo não ocorreria se eu fosse calvo, por exemplo.

É comum, contudo, atribuir possibilidade também a objetos e não somente a proposições. Esse recurso envolve separar as noções de “existência” e de “atualidade”: “atualidade” aqui enxergada como o atributo de pertencer ao mundo atual, enquanto “existência” se enquadra em uma noção mais próxima ao de existir como uma forma platônica. Quine rejeita esse tipo de atribuição de existência em “Sobre o que há” veementemente como parte de sua defesa de “paisagens metafísicas desertas”; mas vale apontar que uma confusão entre existência e possibilidade pode ser vista como a raiz dessa atribuição de possibilidade a objetos.

A esta altura, espera-se que a importância deste esclarecimento para o tratamento da ontologia de objetos matemáticos esteja evidente: confundir existência e possibilidade pode turvar ainda mais o problema dos objetos dos quais trata a matemática. Afinal, nenhum deles jamais será “atualizado” (em um sentido forte do termo), isso significa dizer que não são possíveis?

Uma maneira de desfazer essa trama de confusão é adotar extrema parcimônia ao falar de possibilidade em teorias matemáticas e tratá-la em sentido exclusivamente metalinguístico. Ao passo que possibilidade parece um conceito útil quando temos em concorrência o que aceitamos como o conjunto dos fatos sobre o mundo e a nossa necessidade de falar sobre contra-factuais (sentenças como “se eu tivesse ganho na loteria”), o mesmo

conceito não parece se aplicar muito bem ao falarmos dos Objetos abstratos da matemática.

Suponha uma questão acerca de números (mas que poderia ser sobre qualquer outro Objeto da matemática), para a qual haja uma hipótese na forma “existe pelo menos um número que possui a propriedade K”. Acrescentar um modal “é possível” a esta proposição é, no mínimo, ambíguo. Afinal, que distinção significativa pode-se traçar entre dizer “É possível que exista pelo menos um número que possua a propriedade K” ou simplesmente afirmar a existência?

Um sentido diferente de modalidade, e muito mais útil, será defendido nesta tese. Tal como determinar as regras do jogo do xadrez dá ensejo todos os jogos de xadrez possíveis, a definição de sistemas formais dá ensejo a sentenças que podem ser demonstradas em seus respectivos cálculos. Caso demonstrabilidade seja equiparada a verdade, ainda que em um sentido condicional, um sistema axiomático determina uma classe de proposições verdadeiras.

Deve-se perceber que esta noção de modalidade está aliada a um raciocínio condicional, tal como os contra-factuais da linguagem cotidiana. Determinar um conjunto de condições iniciais acarreta todas as consequências deste. Um teorema matemático não passa a ser teorema somente quando é demonstrado, mas já faz parte implicitamente do sistema que permite sua prova. Essa discussão será retomada no terceiro capítulo.

O critério de Quine para compromisso ontológico, aliado a uma afiada navalha de Ockham, parece prover uma boa ferramenta de identificação dos compromissos ontológicos de teorias científicas e até mesmo de sistemas de crenças do senso comum, como teorias da mente do tipo “*folk psychology*”: basta que seja realizada uma formalização e reformulação das sentenças que contenham nomes em função de variáveis ligadas que, aliada a alguma semântica, teremos as sentenças verdadeiras

da teoria e o compromisso ontológico atrelado a elas.

Contudo, o mesmo empreendimento é menos trivial para as teorias matemáticas. Ainda que as teorias da matemática já estejam formalizadas, existem, usando o linguajar de teoria dos conjuntos, classes de equivalência: há conjuntos de teorias que podem ser associadas por uma relação de equivalência. Normalmente, isso significa que podemos reescrever uma teoria em termos de outra, tal como a aritmética com os axiomas de Peano pode ser reescrita com os axiomas da teoria axiomática de Zermelo-Fraenkel.

Para o exemplo dado acima, a questão que surge é a seguinte: devemos nos comprometer com a existência de números (aritmética), conjuntos, ou os dois? Temos, ainda no caso do exemplo, dois sistemas formais distintos que podem representar a aritmética, mas que geram compromissos ontológicos distintos. O critério quineano de compromisso ontológico não fornece uma ferramenta para decidir entre esses dois casos; a passagem a seguir retrata isso:

[...] Olhamos para variáveis ligadas em sua vinculação com a ontologia não para saber o que há, mas para saber o que uma dada observação ou doutrina, nossa ou de outro, *diz que há*.²³

Assim, há teorias equivalentes (em um sentido formal) que, todavia, se comprometem com a existência de entidades diferentes; e decidir qual deve ser adotada torna-se um problema. Sob um ponto de vista pragmático, pode-se buscar algum critério heurístico: deve-se adotar a teoria mais simples, a com maior potencial explicativo, a adotada pela maior parte da comunidade acadêmica... Porém, isso resolve no máximo a busca pela teoria cujo uso é mais adequado, mas não avança a compreensão de como determinamos de que objetos fala a matemática (se fala de algum).

²³ QUINE. Op. Cit. P.30

Caso não seja adotada também uma postura pragmática em relação à noção de “verdade” na qual sentenças verdadeiras são aquelas simplesmente cujo uso é aceito, há quem argumente que uma noção de verdade objetiva seja a única alternativa; este é o caso defendido por Donald Davidson.

No próximo capítulo, ao discutir o argumento da indispensabilidade, a questão pragmática será discutida. Por ora, o foco deve passar para uma breve discussão acerca da verdade.

1.5 Verdade

Na última seção, a discussão acerca do compromisso ontológico de teorias tratou de uma maneira pela qual linguagens se relacionam com o mundo: concordar com uma teoria significa, pelo que foi dito, concordar que existem certas coisas. Contudo, pouco ainda foi dito sobre o que significa dizer que certas sentenças de uma teoria são verdadeiras.

Discutir profundamente sobre o tema da verdade fugiria ao escopo deste trabalho. O objetivo desta seção é mais modesto: serão tecidas considerações sobre a noção de “verdade objetiva” tal como abordada por Donald Davidson.

Em *Truth Rehabilitated*²⁴, Davidson argumenta pela manutenção da noção de verdade objetiva. O autor explica:

Verdade é objetiva se a verdade de uma crença ou sentença é independente de que seja justificada por todas as nossas evidências, acreditada por nossos vizinhos, ou seja boa para agir de acordo.²⁵

²⁴ DAVIDSON, Donald. **Truth Rehabilitated**. In DAVIDSON, Donald. **Truth, Language and History**. New York: Oxford University Press, 2005.

²⁵ Ibid. P. 7. P. 7. Tradução minha. Texto original: “Truth is objective if the truth of a belief or sentence is independent of whether it is justified by all our evidence, believed by our neighbors, or is good to steer by”.

Vale notar que o texto citado trata da verdade em um sentido amplo e não aborda especificamente o problema da verdade em matemática²⁶; entretanto, isso não significa que as contribuições de Davidson não sejam importantes para a discussão aqui empreendida. No trecho acima, o autor traz a semente da importância do *erro* para a sua concepção filosófica da verdade: evidências, acordo ou vantagem pragmática não garantem que uma sentença seja verdadeira; contribuem, no máximo, para a sua plausibilidade.

Sem a possibilidade de erro, Davidson argumenta, tanto verdade como significado e até mesmo o pensamento se tornam noções vazias²⁷. Assim, quem concorde com Davidson a respeito da verdade objetiva e com o critério de compromisso ontológico de Quine parece estar fadado a se comprometer com objetos matemáticos, ainda que não esteja claro quais. Para isso, é necessário que se tenha em mente o que significa dizer que uma sentença no domínio da matemática esteja “certa” ou “errada”.

Dizer que um enunciado matemático é objetivamente verdadeiro equivale a dizer, pela definição dada mais acima, que a verdade deste independe dos matemáticos, isto é, era verdadeiro antes da existência do estudo da matemática e continuará a ser mesmo que deixem de existir todas as criaturas capazes de compreendê-lo ou prová-lo.

Atestar essa independência de enunciados é, por um lado, aparentemente intuitivo ao passo que é, também, um compromisso metafisicamente carregado. Retomando o critério de objetividade de Davidson, parece razoável rejeitar que a matemática seja um mero fruto de acordo entre os matemáticos, tampouco seja refém daquilo que nos é

²⁶ *Mathematical Truth*, de Paul Benacerraf cumprirá a função de uma referência especializada sobre este tema.

²⁷ Esse argumento perpassa a obra de Davidson em vários pontos, como se pode observar, por exemplo, em *What Thought Requires* e *Thought and Talk*.

imediatamente útil. Todavia, não é imediatamente óbvio qual o papel da justificativa na matemática, isto é, das *provas*.

Tomada ainda uma concepção objetiva da verdade, existem fatos matemáticos anteriores às suas demonstrações. Isto é, um determinado enunciado que represente uma proposição, possui um valor de verdade por si só. Assim, sob essa perspectiva, a prova matemática possui um caráter demonstrativo. Tal como o formato da terra já era o mesmo antes dos cálculos de Eratóstenes, falar de objetividade para a matemática equivale a dizer que as proposições verdadeiras assim o são independentemente de que alguém tenha se ocupado de prová-las.

É necessário, contudo, tomar cuidado com essa analogia. Quando tratamos de ciências empíricas, é comum conceder independência a fatos particulares, e, conseqüentemente, ao valor de verdade de proposições. “Eu estou digitando em um computador preto” é uma sentença verdadeira somente em virtude de eu estar, no momento em que escrevo isso, digitando em um computador preto, e não depende necessariamente de como este computador veio a existir ou de minha história até o momento. Poderia ser um dispositivo de outra marca, desde que preto, e eu poderia ter feito uma refeição diferente algumas horas antes, a sentença ainda seria verdadeira.

Já sentenças de ciências formais estão, ainda que se conceda independência relativa às demonstrações, fortemente vinculadas à teoria da qual fazem parte. Os axiomas e as inferências válidas em uma teoria determinam, de antemão, quais são as sentenças demonstráveis na mesma, ainda que as demonstrações não tenham sido realizadas.

Aqui se pode identificar um problema sério: uma ciência formal possui ferramentas, até certos limites, para demonstrar sentenças quando assumidos certos sistemas formais. Um sistema formal para a aritmética

como o *Principia Mathematica*²⁸ de Russell e Whitehead é suficiente para demonstrar sentenças da aritmética; mas a relação entre demonstrabilidade e verdade não está incluída nesse pacote.

No máximo, pode-se construir uma prova de consistência e assegurar que não há contradições. Sob uma interpretação generosa do significado de consistência e calcada na lógica clássica há, no máximo, uma garantia condicional: se os axiomas do sistema forem verdadeiros, as sentenças nele demonstradas também o serão²⁹. E isso parece ser o máximo aonde se pode chegar sem ingressar na tarefa metafisicamente ingrata de decidir se e quais axiomas são verdadeiros.

Neste momento deve ficar evidente uma questão que há de ser tratada por quem se decida por aceitar a existência de verdades objetivas na matemática: se há proposições verdadeiras e temos apenas ferramentas que garantem uma verdade condicional do tipo “se tais axiomas são verdadeiros, essa proposição também é”, como poderíamos *acessar* proposições verdadeiras?

Como será visto no capítulo 3, esse é um problema fundamental para os que adotem uma perspectiva platonista para a matemática. O problema é análogo, inclusive, à questão platônica sobre como objetos abstratos podem ser conhecidos.

O problema pode ainda ser reformulado com referência à importância que Davidson concede ao erro. Se há algum modo de decidir se os axiomas de uma teoria são verdadeiros e, conseqüentemente, seus teoremas, e se consistência é um atributo fundamentalmente distinto da verdade, então deve ser possível que existam teorias consistentes e falsas,

²⁸ Cf. WHITEHEAD, Alfred North e RUSSELL, Bertrand. **Principia Mathematica**. Cambridge: Cambridge University Press, 1956.

²⁹ A prova de consistência da lógica proposicional apresentada por Setephen C. Kleene, em *Introduction to Metamathematics* é uma instância do que é dito aqui. O artifício consiste em mostrar que os axiomas possuem uma propriedade distinta das contradições (são tautologias), e que essa propriedade é preservada nos teoremas.

isto é, falsas.

É possível ler o projeto logicista justamente com uma tentativa de adotar como fundamentos da matemática apenas sentenças que fossem inquestionavelmente verdadeiras. Frege, provavelmente um dos adeptos do logicismo mais lembrados, acreditava que a melhor fonte para buscar esse tipo de verdade era a lógica:

A palavra “verdadeiro” indica o objeto da lógica tal como “belo” aquele da estética e “bem” o da ética. Todas as ciências possuem a verdade como seu objetivo; mas a lógica se preocupa com esta de maneira bem diferente. [...] Descobrir verdades é tarefa de todas as ciências; mas à lógica cabe discernir as leis da verdade.³⁰

Ao atribuir à lógica a tarefa de descobrir as leis da verdade e colocá-la como fundamento da matemática, Frege (e, em certa medida, os demais logicistas) depositam naquela o papel de impedir o erro na matemática. A lógica torna-se, assim, uma bússola epistemológica para uma perspectiva de matemática que pretenda a obtenção de verdades objetivas.

Porém, o posicionamento da lógica nesse pedestal não é incontroverso. Primeiramente, há apenas um deslocamento da pergunta pela garantia de verdade dos fundamentos: não mais axiomas matemáticos, mas agora axiomas lógicos. Em segundo lugar, como aferir a verdade da lógica?

Frege trata a lógica como análoga às ciências naturais: assim como estas se ocupariam de leis da natureza, isto é, generalizações de ocorrências que sempre se mantêm, aquela se ocupa de generalizações necessárias acerca da Verdade. Frege é explícito em dizer que não são leis do pensamento, em um sentido psicológico, mas leis às quais o pensamento e

³⁰ FREGE, Gottlob. **The Thought: A logical inquiry.** *In Mind*. Vol. LXV, No. 259. Julho de 1956. Texto original: “The word ‘true’ indicates the aim of logic as does ‘beautiful’ that of aesthetics or ‘good’ that of ethics. All sciences have truth as their goal; but logic is also concerned with it in a quite different way from this. [...] To discover truths is the task of all sciences; it falls to logic to discern the laws of truth.”

o raciocínio estariam subordinados³¹.

Caso seja adotada uma perspectiva realista para as ciências, isto é, de que o conhecimento científico se aproxima da produção de sentenças objetivamente verdadeiras; a analogia pode significar que a lógica também caminharia no mesmo sentido. Dado o platonismo de Frege, parece plausível conceder que ele concordaria com essa postura.

Porém, é temerário considerar que a lógica possui o mesmo tipo de unidade que as ciências pelo menos almejam possuir. Normalmente, é um problema ter duas teorias científicas que entrem em conflito ao se pronunciarem sobre o mesmo objeto de estudo; caso uma não possa ser reescrita em termos da outra, a conclusão deve ser que uma das duas deve conter enunciados falsos.

Já, quanto à lógica, sistemas axiomáticos não equivalentes podem ser formulados e não é evidente qual deveria ser o critério de escolha para decidir qual dos dois deve ser aplicado. Atualmente, é notório que o estudo da lógica abrange não somente o que se convencionou chamar de “lógica clássica”, mas também extensões e restrições (ou “desvios”, conforme a terminologia proposta por Susan Haack³²) desta, e discutir se há uma lógica “certa” é estéril, ainda que indivíduos expressem suas preferências por um sistema específico.

Assim, a busca por um fundamento para a verdade de enunciados da matemática não parece se resolver com a lógica, ainda que esta tenha sido uma ferramenta valiosa para o desenvolvimento da metamatemática.

Um exemplo desse debate metalinguístico que envolve o desenvolvimento da lógica é a proposta intuicionista que, inclusive, desafia o posicionamento metafísico dos logicistas ao advogar por um viés construtivo da matemática; o que afeta a relação com noções de infinito e

³¹ Ibid.

³² Cf. HAACK, Susan. **Deviant Logic, Fuzzy Logic: Beyond the Formalism**. The University of Chicago Press. Rev. Ed. Chicago, 1996.

de provas admissíveis, como no enfraquecimento de provas por absurdo.

Outro aspecto que não deve ser esquecido são os resultados aceitos pela comunidade de lógicos e matemáticos que estabelecem diversos limites sobre o que a matemática, ainda que descritas com ferramentas lógicas, pode ou não fazer. Os teoremas de incompletude de Gödel (um logicista convicto, ressalte-se) estabelecem famosamente a existência de sentenças indecidíveis. Reconhecer este resultado, aceitar a lógica clássica no que tange o princípio do terceiro excluído e aderir à noção de que a verdade é objetiva implica em aceitar que há sentenças objetivamente verdadeiras acerca de objetos abstratos e que jamais seremos capazes de demonstrar. Esta é, no mínimo, uma posição metafisicamente ousada.

Um tipo de problema ainda mais sério para a esperança de objetividade na matemática reside no axioma da escolha para a teoria dos conjuntos: trata-se de um axioma independente (não pode ser provado pelos outros axiomas de Zermelo-Fraenkel) e que é indispensável para a obtenção de certos teoremas; alguns intuitivos, outros contraintuitivos. Escolher adotar o axioma ou não não é algo que pode ser determinado pela lógica; e tal como no caso das proposições indecidíveis do parágrafo anterior, pessoas com determinada postura metafísica devem concordar que a inclusão do mesmo deve ser objetivamente “certa” ou “errada”.

Essas considerações acerca da verdade levam a duas faces de um dilema. Acatar a verdade objetiva vem com uma série de dificuldades acerca dos fundamentos da matemática, ainda que se aproxima da noção desejada de que a matemática deve descrever o mundo de alguma forma ou ser independente das mentes humanas. Por outro lado, enfraquecer a noção de verdade em matemática também é um compromisso de difícil digestão; afinal, a matemática é uma ferramenta indiscutivelmente útil para descrever a realidade e, como tal, enunciados devem ser julgados não só formalmente, mas também pela maneira como se aplicam ao mundo.

No próximo capítulo, será apresentado um ataque famoso à noção de que a matemática postula necessariamente a existência de certos objetos. Trata-se da proposta estruturalista trazida por Paul Benacerraf em *What numbers could not be*. Será discutido também o argumento da indispensabilidade e passaremos à discussão do significado metafísico do que seriam as estruturas.

CAPÍTULO 2 – PLATONISMO MATEMÁTICO, OBJETOS E ESTRUTURAS

No capítulo anterior foram discutidos alguns conceitos necessários ao desenvolvimento da tese sob um ponto de vista propedêutico. Neste capítulo, será apresentado a postura metafísica acerca da matemática que se convencionou chamar de “platonismo matemático”³³.

Após a exposição do platonismo, o trabalho deverá seguir para a discussão do artigo *What numbers could not be*, de Paul Benacerraf, como maneira de introduzir o estruturalismo e dar prosseguimento ao encadeamento do trabalho.

2.1 A tese básica do platonismo

Como é comum ocorrer em debates densos, posicionamentos filosóficos individuais variam sutilmente em suas nuances, o que torna a classificação dessas posturas uma tarefa difícil e frequentemente aberta a críticas.

Uma forma de escapar dessa dificuldade é trabalhar com autores e textos específicos, uma alternativa comum a que se recorre em trabalhos monográficos. Porém, o objetivo aqui é argumentar acerca do platonismo matemático de maneira geral e, portanto, deverá ser tomado o compromisso de trabalhar com uma caracterização igualmente geral. Será, sempre que possível e metodologicamente adequado, realizado o recurso a exemplos particulares e justificação bibliográfica.

³³ Para fins de brevidade e fluidez da leitura e dado o limite do escopo deste trabalho, será adotada a denominação “platonismo”, deixando a qualificação implícita.

Øystein Linnebo caracteriza o platonismo como “a perspectiva metafísica de que há objetos matemáticos abstratos cuja existência é independente de nós e de nossa linguagem, pensamento e práticas”³⁴, isto é, uma perspectiva realista acerca de objetos matemáticos tal como se identifica a postura realista acerca dos universais.

Tal como discutido no primeiro capítulo, uma característica tipicamente associada a objetos abstratos é a *ineficácia causal*, o que os torna fundamentalmente distinto de objetos concretos. Pode-se ir mais longe e atestar que objetos abstratos assim considerados são diferentes até de outros objetos que poderiam ser tidos, à primeira vista, como abstratos, tais como estados psicológicos. Negar causalidade a algo significa separá-lo do espaço e do tempo completamente.

O platonismo, assim definido, compromete-se com a já discutida verdade objetiva de enunciados da matemática. Há, portanto, a tentativa de descrever uma paisagem ontológica (usando a metáfora de Quine) bem definida: a matemática fala de certos objetos abstratos e os enunciados verdadeiros da matemática são aqueles que se referem adequadamente a esses objetos.

Com isso, podem ser identificadas três tarefas básicas para um platonista: determinar exatamente com quais objetos matemáticos há compromisso ontológico; delinear uma epistemologia acerca desses objetos e, não menos importante, oferecer uma justificativa filosófica para a tese básica do platonismo.

A definição geral da tese platonista exposta nesta seção não é suficiente para determinar exatamente qual é a paisagem ontológica com a

³⁴ LINNEBO, Øystein. **Platonism in the Philosophy of Mathematics**. In The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2018 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <<https://plato.stanford.edu/archives/spr2018/entries/platonism-mathematics/>>.

qual se comprometem os seus defensores; de fato, há várias paisagens platônicas delineáveis. Pode-se adotar uma versão extrema, na qual há compromisso com todos os objetos matemáticos: formas geométricas, números, conjuntos, espaços topológicos e tudo o que for objeto de estudo da matemática; como também é possível advogar por uma posição mais modesta, na qual apenas alguns objetos da matemática recebem o status ontológico de objetos abstratos independentes.

Tal como um físico se compromete apenas com partículas fundamentais que em conjunto expliquem o comportamento de corpos maiores, o argumento do “platonista modesto” do parágrafo acima segue de maneira semelhante. O matemático com essa inclinação deve então se perguntar sempre, diante de uma teoria matemática que fale de certos objetos, se estes podem ser explicados em termos de outros mais simples.

Assim como para o modelo padrão da física um nêutron pode ser descrito como determinada configuração de *quarks*, entidades mais fundamentais, uma descrição ontológica bem definida da matemática deveria se ocupar em buscar os objetos elementares.

É interessante notar que essa perspectiva fundacionalista possui, em princípio, menos inconvenientes em sua aplicação à matemática do que à física e à realidade concreta em geral. Objetos concretos apresentam propriedades emergentes, algo que vem atrelado a uma série de discussões filosóficas: podemos explicar, por exemplo, atitudes proposicionais tais como crenças e desejos em termos da física? Há argumentos filosóficos que propõem respostas inconciliáveis a essa questão e que parecem longe de qualquer esperança de consenso. Por outro lado, a matemática é notoriamente bem sucedida ao explicar algumas de suas partes em termos de outras.

A aritmética dos números naturais, por exemplo, pode ser expressa por axiomas de teoria dos conjuntos (Zermelo-Fraenkel) sem que qualquer propriedade daqueles fique de fora. Sob um ponto de vista ontológico, é possível argumentar que ambas as teorias se referem aos mesmos objetos, reduzindo o compromisso geral.

Uma observação aparentemente trivial, contudo, merece ser feita: é importante não confundir nomes, seus sentidos e os objetos nomeados. Não se deve entender o resultado comentado no parágrafo anterior ingenuamente como algo que signifique que existem conjuntos e não existem números. O que a reconstrução da aritmética com o vocabulários da teoria dos conjuntos deve significar, contudo, é que ambos os vocabulários se referem aos mesmos objetos de modo diferente.

O platonista modesto acomoda em sua paisagem ontológica, portanto, uma série de objetos matemáticos abstratos aos quais nossas teorias matemáticas se referem, por vezes, de maneira redundante. Contudo, mesmo nesta visão menos suntuosa ontologicamente, ainda não fica claro qual é o critério de ingresso para o universo platônico de objetos matemáticos. Critérios pragmáticos não servem aqui, sob o risco que dar a perder a objetividade da verdade dos enunciados da matemática: não devem garantir passagem franca de objetos pelos portões do paraíso platônico o simples acordo entre matemáticos ou a mera consistência interna de teorias.

Uma forma de estabelecer esse critério para o status ontológico de objetos é o que veio a ficar conhecido como argumento da indispensabilidade, que será o foco da próxima seção.

2.2 O argumento da indispensabilidade

Não existe uma única versão do que é conhecido como “argumento de indispensabilidade” mas, tal como é possível trazer uma definição geral da tese platonista, é possível também traçar amplamente essa classe de argumentos. Dois conceitos são essenciais para estabelecer esse tipo de argumento: a já discutida noção de compromisso ontológico, e a questão da aplicabilidade da matemática.

De modo geral, o argumento tem o sentido de uma demanda por aplicação da noção de compromisso ontológico. Conferimos status ontológico a entidades postuladas pelas melhores teorias científicas, pois são *indispensáveis* para tornar os enunciados destas verdadeiros. O mesmo deve ser feito, o raciocínio segue, a respeito de entidades matemáticas que participem dessas teorias do mesmo modo.

A indispensabilidade pode ser um critério convincente à primeira vista, pois rejeitá-la como um cartão de ingresso da matemática para a paisagem ontológica pode colocar em apuros a postura (um pouco) menos controversa do realismo acerca das ciências naturais. Porém, como já foi discutido em outros pontos, a analogia com as ciências empíricas apresenta problemas quando investigada mais de perto.

Parte essencial das ciências é sua propensão à revisão, traço dificilmente deixado de lado pelos historiadores e filósofos da ciência. Seja pela noção de falseabilidade de Karl Popper, pela ideia de revoluções científicas de Thomas Kuhn ou ainda através do anarquismo metodológico de Feyerabend; até o momento é parece pouco controverso que o corpo de enunciados aceito pela ciência em um determinado momento pode ser drasticamente substituído posteriormente. Ainda que haja uma esperança de

que a ciência convirja para o maior número possível de enunciados verdadeiros, garantia de verdade é algo que escapa.

O papel importante que Davidson reconhece ao erro para o desenvolvimento de atitudes proposicionais como a crença parece persistir na construção do corpo de enunciados da ciência.³⁵ Isso não significa, de maneira alguma, que deva ser adotada uma postura relativista em relação à verdade científica: é possível simplesmente aceitar que a ciência não é necessariamente uma descrição adequada do mundo, embora adote métodos para que se aproxime o máximo disso.

Adotar uma perspectiva da verdade fluida (em oposição à noção de objetividade já traçada) para a qual cada teoria científica já descartada era, a seu tempo, verdadeira, derrota o propósito do uso do argumento da indispensabilidade a serviço do platonismo. Se uma teoria científica é verdadeira por simples coerência interna, uma perspectiva igualmente coerentista da verdade torna verdadeiras por si próprias as teorias matemáticas consistentes, e borra qualquer determinação de referência aos objetos abstratos do platonista e torna o compromisso ontológico algo sem sentido.

A matemática, ainda que sujeita à revisão tal como é típico de qualquer atividade intelectual humana, parece ter uma relação bem diferente daquela que a ciência possui com a construção do seu corpo de enunciados. Ao passo que crer em uma cumulatividade progressiva das teorias científicas é, no mínimo, discutível, isso é algo que se pode fazer com poucas ressalvas à matemática.

³⁵ Note que aqui e em outros momentos é evitado o uso de termos como “conhecimento científico” e “conhecimento matemático” para que a definição tríplice tradicional de conhecimento como “crença verdadeira e justificada” não contamine a leitura. Verdade é um dos conceitos-chave para a discussão, e seria metodologicamente rigoroso pressupor que enunciados da ciência e da matemática são sempre verdadeiros.

A história da matemática, ainda que marcada por episódios notórios de desenvolvimento tal como poderíamos observar na história da ciência, não se caracteriza por revoluções marcadas pelo abandono completo de uma teoria em crise e sua substituição por uma nova. Noções kuhnianas como “ciência normal” e “mudança de paradigmas” têm, no mínimo, aplicação opaca à história da matemática, que parece melhor caracterizada pelo refino de ferramentas ou por composicionalidade de teorias.

Em “*T. S. Kuhn’s theories and mathematics: a discussion paper on the ‘new historiography’ of mathematics*”³⁶, Herbert Mehrtens busca acomodar esses conceitos à historiografia da matemática e, apesar de promover uma discussão interessante, encontra dificuldades em sua manobra conceitual. Reconhece, por exemplo, que “Poucas, se sequer alguma, teorias matemáticas foram derrubadas” e apela para as noções de obsolescência e mudança de postura metafísica da comunidade matemática.

Considerar uma teoria como obsoleta é algo muito mais fraco do que passar a tomar uma teoria como errada ou falsa. Significa não que a teoria fala de objetos dos quais não deveria falar (ainda que abstratos), mas apenas que foi substituída por uma outra com melhores ferramentas, a noção de “refino” já mencionada. Já a referida mudança de postura metafísica é algo que trata mais de uma questão sociológica, ou como os matemáticos enxergam a matemática, do que uma questão epistemológica relativa aos critérios de aceitação de uma teoria matemática. Mehrtens termina por concluir justamente nesse sentido.

Divergências acerca entre posturas metafísicas contracenaram em momentos importantes da história da matemática, sendo o debate entre logicismo, intuicionismo e formalismo provavelmente o mais famoso e

³⁶ MEHRTENS, Herbert. **T. S. Kuhn’s theories and mathematics: a discussion paper on the ‘new historiography’ of mathematics**. In *Historia Mathematica*, vol 3, 1976.

relevante contemporaneamente; e que deve servir para ilustrar um ponto importante. Uma mudança de postura metafísica, por si só, não é suficiente para alterar o rumo da matemática ao ponto de instaurar uma crise que leve à substituição de teorias em um movimento revolucionário. Os teoremas de incompletude provados por Gödel, um logicista e platonista convicto, não dependem dessa sua postura (e sua prova, atualmente, é incontroversa entre os matemáticos). A interpretação do significado de seu resultado para a matemática é o que parece sofrer maior variação: o resultado pode ser visto como um ataque contundente ao formalismo, um aceno positivo ao intuicionismo ou ainda gozar de um efeito ambíguo sobre o próprio logicismo³⁷.

A postura metafísica de um matemático no que diz respeito a compromisso ontológico, portanto, parece ser mais relevante para como ele interpreta resultados do que para quais resultados ele aceita. Rejeitar ou aceitar resultados diferentes é algo que necessita a interferência de posicionamentos epistemológicos. É o caso do intuicionismo, que, além de considerar os objetos da matemática como construções mentais (e não os objetos abstratos do platonista), vem acompanhada de uma rejeição de certos métodos de demonstração, incorporada pela lógica intuicionista³⁸.

Uma revolução drástica na matemática, portanto, só poderia surgir a partir de uma “mudança de paradigma metafísico” se esse fosse acompanhado de uma mudança drástica nas ferramentas admitidas. E, mesmo no caso do intuicionismo, se este fosse adotado radicalmente por toda a comunidade de matemáticos, não teríamos uma nova matemática mas apenas um encolhimento da matemática em sua versão clássica. Algo

³⁷ Cf. Raatikainen, Panu, "Gödel's Incompleteness Theorems", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2018 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <<https://plato.stanford.edu/archives/fall2018/entries/goedel-incompleteness/>>.

³⁸ Cf. Iemhoff, Rosalie, "Intuitionism in the Philosophy of Mathematics", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2019 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <<https://plato.stanford.edu/archives/sum2019/entries/intuitionism/>>.

que é muito diferente dos movimentos de revisão pelos quais passaram as ciências naturais.

O argumento da indispensabilidade, portanto, apesar de se fundar o critério aparentemente razoável de compromisso ontológico, sofre contundentemente sob alguns aspectos que serão abordados agora.

Em primeiro lugar, o argumento é construído estabelecendo implicitamente uma paridade que não se sustenta entre ciências naturais e a matemática. Enquanto as primeiras parecem sujeitas a revisões por fatores externos aos cientistas, como surgimento de novos dados ou formação de teorias com maior poder explicativo e inconciliáveis com sistemas anteriores, a matemática é mais dificilmente sujeita à revisão. Além disso, o compromisso ontológico individual de um matemático, sua “postura metafísica”, goza de independência em relação ao seu campo de estudo muito maior do que o de um cientista natural. Um biólogo que não acredite na existência de seres vivos é dificilmente concebível, diferentemente de um matemático não platonista.

Em segundo lugar, o argumento da indispensabilidade entra facilmente em conflito com a tese platonista, ainda que seja colocado como uma razão para o compromisso ontológico para com objetos abstratos da matemática. Um matemático com esse tipo de comprometimento está longe do que poderia ser chamado de “empirismo matemático”. O platonista defende a existência de objetos abstratos e independentes da natureza espaço-temporal das ciências naturais, e dificilmente rejeitaria parte do seu universo platônico diante de uma mudança de paradigma das ciências empíricas que alterasse quais teorias matemáticas são “indispensáveis”.

O terceiro ponto é a relação geralmente difícil do argumento da indispensabilidade com a prática matemática em geral, e não só com o

platonismo, como discorre Penelope Maddy em “*Indispensability and practice*”³⁹. O argumento da indispensabilidade, aponta Maddy, serve como confirmação à matemática aplicada, mas deixa de lado objetos matemáticos puros que não figuram em teorias científicas.

Outro ponto importante apontado pela autora em destaque é a confusão entre verdade e utilidade. O uso do infinito, por exemplo, é útil às ciências, mas não parece convincente que deva haver comprometimento ontológico com essa magnitude por uma simples questão pragmática. O próprio Quine parece reconhecer a contragosto certas infinitudes e rejeitar outras inteiramente.

Reconheço infinitos incontáveis somente pois me são forçadas pelas sistematizações mais simples conhecidas de outros assuntos mais bem-vindos. Magnitudes que extrapolam essas demandas, como $\aleph_1$ ou números inacessíveis, vejo apenas como matemática recreativa sem direitos ontológicos.⁴⁰

A busca de economia ontológica estimulada pelo argumento da indispensabilidade força a demarcação de fronteiras artificiais na matemática que parecem pouco convincentes. O tipo raciocínio matemático para a definição dos números Reais, um conjunto infinito incontável, não é fundamentalmente diferente do usado para a definição de conjuntos numéricos mais “esotéricos” (sob o ponto de vista de Quine), como os números Surreais de John Conway⁴¹.

³⁹ MADDY, Penelope. **Indispensability and Practice**. In The Journal of Philosophy, vol. LXXXIX, no. 6. Junho de 1992.

⁴⁰ QUINE, Willard V. O. **Reply to Charles Parsons**. In HAHN e SCHILPP. The Philosophy of W. V. Quine. Chicago and La Salle Ed.: Illinois, 1986. P. 400.

⁴¹ Para uma descrição desse conjunto numérico, Cf. KNUTH, Donald. **Surreal Numbers**. Addison-Wesley Publishing: Phillipines, 1974.

Duas considerações se fazem importantes neste ponto: o problema geral aqui discutido parece relacionar-se com a velha questão filosófica sobre a separação entre pensamento, linguagem e mundo. O argumento de indispensabilidade não oferece um bom relato da epistemologia matemática, pois força uma epistemologia empirista sobre argumentações formais. Ainda que a discussão metamatemática possa investigar a empiria, como é o que de fato está sendo feito aqui, o vocabulário matemático não realiza esse apelo.

Outro problema importante é o que levará à próxima seção. Estabelecer uma ontologia com objetos matemáticos que fazem parte de teorias maiores leva invariavelmente a confusões filosóficas. A linguagem formal da matemática analisada sob a perspectiva da lógica também formalizada apresenta a possibilidade de construir teorias não interpretadas, isto é, definidas apenas sintaticamente e sem valores semânticos. Para uma teoria tomada assim, torna-se sem sentido dizer a que objeto se refere ou até definir qual o valor de verdade de um enunciado dela isolado.

Paul Benacerraf apresenta um argumento célebre contra esse tipo de compromisso ontológico, que será abordado a seguir.

2.3 *What numbers could not be* e as estruturas matemáticas

Em seu texto *What numbers could not be*⁴², Benacerraf realiza um argumento particular contra o platonismo acerca de números tomados como objetos matemáticos abstratos. O problema levantado diz respeito à

⁴² BENACERRAF, Paul. **What Numbers Could not Be**. In *The Philosophical Review*, Vol. 74, No. 1, Jan 1965. Duke University Press. Encontrado em <http://www.jstor.org/stable/2183530>. Acesso em 19/07/2012.

formalização dos números naturais por meio das ferramentas da teoria dos conjuntos.

Antes de discutir o artigo propriamente dito, é importante estabelecer alguns pontos acerca do significado da ontologia de objetos abstratos. Existir como um objeto significa possuir alguma propriedade intrínseca que o separe de outros objetos; significa, de alguma maneira, possuir identidade. Para objetos físicos do nosso mundo macroscópico, isso não é, geralmente, problemático: temos a continuidade espaço-temporal. É bem certo que há questões filosóficas sobre os detalhes dessa continuidade, mas a identidade até mesmo de objetos complicados como pessoas só costuma ser questionada em situações-limite. E, ainda que a identidade se desfaça, sobra, para esses casos, a ostensão: apontamos o objeto e isso é suficiente para identifica-lo como tal. A característica ostensiva dos pronomes é, inclusive, um dos pontos fundamentais para a associação que Quine realiza entre compromisso ontológico e o uso de variáveis.

Ostensão, contudo, é ineficaz para o domínio dos objetos abstratos, como também é, por definição, o uso de qualquer atributo espaço-temporal. Como determinar que se fala de um Objeto abstrato e não de outro? Um realista acerca dos universais pode indicar por meio da abstração: “aquilo que há em comum entre todos os objetos vermelhos”; mas as críticas de Quine a esse tipo de compromisso são famosas, especialmente em *Sobre o que há*. Seu compromisso declarado com alguns objetos matemáticos, porém, mostra que seu esforço por redução da paisagem ontológica não alcançou alguns desses objetos.

Frege, como aponta Boolos em *Logic, logic and logic*, define números como extensões de conceitos⁴³. Assim, a identidade de um número é definida pelo conceito que se tem dele. O que se tem a partir

⁴³ BOOLOS, George. **Logic, logic and logic**. Harvard University Press: Cambridge, 1998. P. 149.

disso, para um platonista fregeano acerca de números, é que existem Objetos abstratos claramente distintos: refere-se a um Objeto quando se fala “zero” e a outro quando se fala “dois”.

O que há por trás disso é a noção de que Objetos possuem propriedades intrínsecas que os isolam dos demais; e é isto o que Benacerraf desafia com seu texto.

O autor em questão propõe uma experiência de pensamento, na qual imagina duas crianças que aprendem matemática sob uma educação logicista seguindo não a ordem pedagógica, mas o que ele chama de ordem “epistemológica”: primeiro lógica e teoria dos conjuntos, para então definir números com essa linguagem prévia.

A educação das crianças também, fica implícita no texto de Benacerraf, é platonista: para os educandos, *há* um conjunto N cujos elementos são o que os demais chamam de “números”⁴⁴, que possuem boa ordem para uma relação R (“menor que”, para as pessoas que aprendem matemática pela pedagogia convencional), bem como as demais propriedades que conhecemos dos naturais.

Notar esse platonismo implícito é uma chave de leitura importante, pois evita que se entenda o aprendizado matemático das personagens como produzindo apenas o que poderiam ser considerados enunciados analiticamente verdadeiros. Por “enunciados analíticos”, deve-se entender aqueles que seriam verdadeiros em função do significado dos seus termos (ou dos conceitos envolvidos, sob um ponto de vista mais puramente kantiano).

Há boas razões para abandonar a analiticidade neste caso. Internamente à matemática, há a questão da incompletude: há enunciados

⁴⁴ BENACERRAF, Paul. Op. Cit. P. 48.

na matemática (e na própria aritmética dos números naturais) cujo valor de verdade não pode ser decidido por métodos estritamente lógicos. Para um pensamento aristotelicamente clássico no qual deveria valer o princípio do terceiro excluído, torna-se insustentável uma visão da matemática com bases puramente analíticas. Outro problema que deve ser resolvido com o abandono das analiticidades é a restrição da definição de classes impredicativas (que levam ao paradoxo de Russell). Russell impõe limitações ao conceito de classe em seu sistema que impedem que uma classe seja definida livremente por uma propriedade, de modo que o conceito de classe toma um viés mais sintético que analítico.

Por outro lado, é possível abandonar a noção de analiticidade de maneira mais fundamental e rejeitá-la por completo: o argumento encontrado em “Dois dogmas do empirismo”⁴⁵ oferece boas razões filosóficas para tal. Por último, a relação profunda entre enunciados analíticos e as noções de “significado” e “conceito” parece por encerrar a verdade matemática em questões linguísticas e conceituais, o que eliminaria a discussão ontológica aqui empreendida.

Dada essa discussão, Benacerraf atesta que suas crianças hipotéticas acreditam na existência de conjuntos e, particularmente, na existência do conjunto dos números naturais (definido, obviamente, por teoria dos conjuntos e não aritmeticamente). Uma simples tradução entre os termos que essas personagens conhecem e os termos que usamos para nos referir aos números naturais é, como é matematicamente conhecido, suficiente para que seja resolvida qualquer conversa sobre números entre eles e os que aprenderam a falar de números da maneira convencional: concordarão

⁴⁵ QUINE, Willard V. O. **Dois Dogmas do Empirismo**. In *De um Ponto de Vista Lógico*. Trad. Antonio Segatto. Ed. Unesp: São Paulo, 2011.

sobre resultados de operações e sobre teoremas gerais, visto que a aritmética pode ser completamente expressada por sua “língua nativa”.

Porém, como uma boa narrativa, as personagens do conto de Benacerraf se deparam com uma crise. A educação de cada um dos dois foi diferente a respeito de que conjunto era o que eles viriam a aprender a chamar de “números naturais”, e isso levou a divergências sobre alguns teoremas. Eles concordam, por exemplo, que “2 pertence a 3”, mas jamais poderiam concordar sobre o seguinte enunciado: “3 pertence a 17”.

Certamente, são declarações estranhas a se fazer sobre números para quem aprendeu aritmética da maneira tradicional, mas é importante frisar que, para eles, os números naturais são um conjunto que contém, como seus elementos, outros conjuntos: os números ⁴⁶. Assim, perguntar se um número pertence a outro, para eles, é tão incontroverso como perguntar se um conjunto pertence a outro. Porém, é hora de identificar a raiz do desacordo.

O que Benacerraf ilustra são duas construções dos números naturais pela via de números ordinais. Essas construções são regras recursivas para as quais é estabelecido um primeiro elemento e uma função sucessor, que dá o próximo elemento. Em *What numbers could not be* são comparados os ordinais de Zermelo e os ordinais de Von Neumann:

- Ordinais de Zermelo: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \dots$
- Ordinais de Von Neumann: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots$

Deve-se perceber que em ambos os casos o primeiro elemento é o conjunto vazio, porém a regra para encontrar o sucessor é diferente. Para

⁴⁶ A teoria dos conjuntos esboçada por Benacerraf em *What numbers could not be* não apresenta “urelementos”, isto é, objetos não são conjuntos mas que podem ser elementos de conjuntos.

um número n e seu sucessor n' , temos que, nos ordinais de Zermelo, $n' = \{n\}$; já nos ordinais de Von Neumann, temos $n' = n \cup \{n\}$. Assim, no primeiro caso cada “número” é um conjunto unitário que contém seu antecessor; ao passo que no outro cada “número” é um conjunto que possui tantos elementos como antecessores.

A fonte das divergências entre os dois alunos reside, portanto, em suas construções diferentes dos números ordinais. Agora importa discutir qual o significado disso para a questão filosófica deste trabalho.

De antemão, é importante desfazer qualquer esperança sobre haver um erro em alguma das duas construções apresentadas acima por meio de conjuntos. Ambas são equivalentes em sua representação dos números naturais no sentido em que todos os teoremas da aritmética de Peano, por exemplo, podem ser demonstrados com recurso seja aos ordinais de Zermelo ou aos ordinais de Von Neumann.

Ambas as construções também servem igualmente a uma busca de fundamento da aritmética na teoria dos conjuntos. Isto é, ambas permitem igualmente que os números naturais sejam explicados em termos mais simples. Caso adotem uma perspectiva de compromisso ontológico que privilegie a estipulação do menor número de entidades possível para que as teorias funcionem, os sujeitos da ilustração de Benacerraf devem se comprometer apenas com conjuntos e não com números.

A própria noção de tradução usada mais acima para explicar a redução de números a conjuntos captura a ideia de economia ontológica. Para os logicistas de Benacerraf, “2” não se refere a uma entidade nova no universo matemático restrito a conjuntos que eles aprenderam. “2” é um nome de um objeto com o qual eles já se comprometeram. O estranhamento ocorre pois ambos são capazes de usar o número como qualquer pessoa matematicamente alfabetizada, mas se referem, aparentemente, a objetos diferentes ($\{\{\emptyset\}\}$ e $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$). Há, portanto, uma indeterminação

profunda sobre o que significa “2”.

Benacerraf aponta que isso ocorre pela seguinte razão: números não possuem qualquer propriedade intrínseca. Isto é, todas as suas propriedades somente podem ser esclarecidas em relação a outros números e qualquer identificação entre um número e algo externo a aritmética requer uma definição mais específica do significado de “identidade”.

É possível dizer que “8 é o número de planetas do sistema solar” somente com um ajuda de um conceito de cardinalidade e do que são planetas do sistema solar. Falar do número 8 de maneira significativa sem recorrer a outros recursos que não à própria aritmética restringe o discurso a relações que este número estabeleça com outros números: ser o sucessor de 7, ser igual a 2^3 , ser divisível por 4 etc. A identificação de um número com um conjunto é, nesse sentido, apenas a aplicação de uma regra, e não requer nem revela qualquer ontologia a respeito de um objeto particular.

Os números naturais devem ser compreendidos, portanto, como uma estrutura na qual cada número é uma posição que só faz sentido se tomada em relação ao todo. Essa posição pode ser extrapolada para a matemática tomada mais amplamente, e é tipicamente denominada *estruturalismo*.

É necessário, neste momento, acautelar-se de uma primeira leitura na qual o platonismo pareça definitivamente eliminado. Ao passo que o compromisso ontológico com objetos pertencentes a teorias ou ainda com teorias específicas parece eliminado, não está ainda bem claro o que são e como deve ser o tratamento ontológico de estruturas.

Um platonista pode argumentar, por exemplo, que os números naturais definidos por teoria dos conjuntos, por lógica de primeira ordem ou pelos axiomas de Peano referem-se todos à mesma entidade abstrata: “Os Números Naturais”. Assim, um platonista que reconheça como razoável o raciocínio apresentado até aqui apenas deixará de comprometer-se com objetos matemáticos separados de suas estruturas e passará a

postular entes estruturais.

A referência ontológica, no caso do platonista hipotético acima, muda em relação ao que foi dito até aqui. Um nome como “2” ou “ $\{\{\emptyset\}\}$ ” não se refere a um objeto, mas um sistema inteiro é instância de uma estrutura. O problema continua análogo ao dos universais: tal como, para o realista, um cavalo é uma instância da “cavalidade” ou do “Cavalo” ideal, um sistema formal escrito por um matemático é uma instância de uma estrutura, para o platonista.

A definição que apela para a independência acerca da mente e do espaço e do tempo adotada para identificar objetos abstratos pode, desta forma, ser aplicada para estruturas. Considerar estruturas como entes abstratos desta forma configura a base da posição conhecida como estruturalismo *ante rem*. Shapiro defende sua versão bem desenvolvida dessa postura em *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*⁴⁷ defendendo que estruturas são independentes dos sistemas que as instanciam.

O platonismo nessa visão estruturalista pode ser considerado filosoficamente bem resolvido em relação aos ataques de Benacerraf em *What Numbers Could Not Be*, porém parece incorrer em apuros com a noção de verdade objetiva.

À medida que antigos objetos são revistos como posições em estruturas, a verdade de sentenças em sistemas formais que as descrevam deve ter seu critério revisado. Sentenças em um sistema formal não podem mais ser consideradas verdadeiras por si só: verdade passa a ser um atributo do conjunto de sentenças demonstradas no sistema. Dizer “2 é o sucessor de 1” só pode ser considerado verdadeiro a respeito da estrutura dos números naturais se for um enunciado tomado como parte de um

⁴⁷ SHAPIRO, Stewart. **Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology**. Oxford University Press: New York, 1997.

sistema que seja uma instância dos números naturais.

É possível notar aqui o quanto a epistemologia continua complicada. Se um sistema formal for descrito como o conjunto de sentenças formado por seus axiomas e os teoremas decorrentes destes e das regras de inferência, o platonista ainda resta sem uma boa maneira para decidir se o sistema instancia ou não uma estrutura abstrata e, portanto, se seus enunciados são verdadeiros ou não.

Inconsistência parece ser um bom critério para determinar que um sistema não pode instanciar uma estrutura, pois leva facilmente a sistemas triviais (aqueles nas quais todas as sentenças são demonstráveis). Por outro lado, consistência não oferece um bom crivo ontológico.

Completude, outra propriedade de sistemas formais, também não pode ser considerada critério de verdade; visto que apenas sistemas formais muito simples, que não abarcam toda a matemática, podem ser demonstrados completos. Isso aponta para a tese a ser defendida no capítulo seguinte: a matemática apresenta elementos definitivos para que se gere compromisso ontológico; a verdade em matemática deve ser explicada por um compromisso modal.

Essa tensão entre verdade e ontologia será o foco do capítulo seguinte, que levará a cabo argumentos dessa natureza contra o platonismo bem como um balanço das dificuldades de uma metafísica sem compromisso com entidades abstratas.

CAPÍTULO 3 – Escolha de axiomas e epistemologia matemática

O estruturalismo tal como apresentado no capítulo anterior se põe como uma maneira de compreender os enunciados da matemática em seus devidos contextos. Nestes, a referência a objetos abstratos tomados isoladamente é insustentável, o que faz com que a compreensão do que é verdade em matemática se reporte a como a matemática trata de estruturas. Visto que sistemas formais são os melhores candidatos a instanciar estruturas, é justo que os fundamentos destes sejam analisados: os axiomas.

Em um primeiro momento, a escolha de axiomas e seus tipos de justificativas serão trabalhados com referência principalmente às duas partes de *Believing the Axioms*, de Penelope Maddy. Em um segundo momento, será apresentado o argumento contido em *Mathematical Truth*, de Benacerraf, no qual é argumentado que ontologia e epistemologia são inconciliáveis para um relato adequado da verdade em matemática. Por último, será defendida a tese deste trabalho. Sem bons critérios para definir uma ontologia para a matemática, deve ser adotado o posicionamento que esteja de acordo com a melhor prática epistemológica: um compromisso modal com enunciados demonstráveis em sistemas formais.

3.1 Justificação de axiomas: razões intrínsecas e extrínsecas

O uso de axiomas, conforme já apontado, é central à prática matemática. Raciocinar a partir destes e de inferências lógicas pode ser uma boa descrição preliminar da atividade dos matemáticos para um leigo, que certamente logo perguntará o que são os tais axiomas. Definições como

“verdades auto-evidentes” ou “dados inquestionáveis da razão” provavelmente se seguem nesse diálogo, acompanhadas de um exemplo, possivelmente da geometria Euclidiana ou da aritmética de Peano. Esse tipo de definição, contudo, é frustrado muito antes de qualquer estudo mais aprofundado de questões metamatemáticas: basta que o interlocutor peça que eles sejam explicados.

Esse tipo de definição também obscurece o quanto o desenvolvimento histórico da matemática passa pela discussão dos axiomas. Seria leviano afirmar que Frege teria errado acerca de algo tão “auto-evidente” com o uso do axioma que levou Bertrand Russell a apontar uma inconsistência em seu sistema formal⁴⁸; a escolha de axiomas pertence a um jogo muito mais dinâmico do que uma simples fixação de pontos de partida sólidos para a longa caminhada matemática, como fazem parecer as noções mais ingênuas de axioma mencionadas no início desta seção.

Penelope Maddy, em *Believing the Axioms*⁴⁹, trata do quão pragmático e distante da noção idealizada discutida logo acima é o processo de escolha de axiomas. A autora aborda e compara diversos axiomas da teoria dos conjuntos, e classifica em *intrínsecas* e *extrínsecas* as justificativas para a sua adoção.

Axiomas adotados por razões intrínsecas, nesta definição, incluem aqueles que expressam o próprio conceito (no caso do texto de Maddy, o conceito de conjunto). Já as motivações extrínsecas envolvem questões “pragmáticas ou heurísticas”. Nas palavras da autora:

⁴⁸ As correspondências entre Frege e Russell podem ser encontradas em FREGE, Gottlob. **The Philosophical and Mathematical Correspondence**. Editado por GABRIEL, Gottfried et al. Traduzido por KAAL, Hans. Oxford: Blackweel, 1980. P. 130 e seguintes. O problema em questão trata da introdução de definições impredicativas no sistema formal proposto por Frege. Não se trata, contudo, de um problema restrito ao trabalho de Frege, mas que perpassa as primeiras tentativas de formalização da teoria dos conjuntos.

⁴⁹ MADDY, Penelope. **Believing the Axioms I**. In The Journal of Symbolic Logic. Vol. 52 n. 2. Jun. 1988.

[...] outros candidatos a axiomas são apoiados por justificativas mais fracas (pragmáticas, heurísticas), declaradas em termos de suas consequências, ou conexões interteóricas, ou poder explicativo, por exemplo.⁵⁰

É importante perceber o juízo de valor inculcado no trecho acima: justificar um axioma por uma razão extrínseca é, de antemão, considerado “mais fraco”. Essa postura é condizente com um compromisso com a noção de verdade objetiva, afinal um axioma deve, preferencialmente, expressar uma proposição verdadeira; utilidade e funcionalidade são propriedades secundárias para essa perspectiva. “Verdade” não possui obrigação para com a conveniência.

Por outro lado, o entrelaçamento da matemática com sistemas formais torna o trabalho com justificativas extrínsecas algo inevitável. A adoção de axiomas aparentemente inofensivos pode levar a conclusões insustentáveis, como o paradoxo de Russell; ao passo que a adoção de axiomas menos intuitivos pode ser necessária para a produção de teoremas úteis ou desejáveis. Isso não significa, contudo, que a adoção de motivações pragmáticas esteja desvinculada de qualquer posicionamento acerca de questões ontológicas.

Um platonista convicto, contudo, pode adotar razões extrínsecas como “correções de curso”. O axioma da infinidade na teoria dos conjuntos, por exemplo, não se faz necessário para as construções dos números naturais apresentadas no capítulo anterior; contudo, é imprescindível para que se possa definir os números reais e, conseqüentemente, a parte da matemática denominada “análise”. Assim, ainda que o axioma não seja “auto-evidente” (não é intuitivamente parte do conceito de conjunto que haja conjuntos infinitos), ele se faz necessário

⁵⁰ MADDY, Penelope. Op. Cit. P.482.

para partes da matemática que portem, para o platonista, enunciados verdadeiros. A motivação, nesse caso, é extrínseca ao conceito de conjunto, mas ainda diz respeito a uma postura metafísica.

Não é necessário que razões extrínsecas sejam uniformes entre os matemáticos. Um formalista que não se comprometa ontologicamente com quaisquer entidades matemáticas pode justificar o axioma da infinidade do exemplo logo acima simplesmente por sua utilidade para a fundamentação dos números reais: trata-se da inclusão de um recurso formal para garantir que certas demonstrações sejam realizáveis.

Já um platonista, por sua vez, pode adotar um axioma de maneira provisória: ciente de que funciona para os fins de sua teoria, mas insatisfeito com o que ele expressa. É esse o tipo de raciocínio que pode ser observado na introdução de *Principia Mathematica*, de Bertrand Russell e Alfred North Whitehead, ao justificarem um de seus axiomas (da redutibilidade):

Este axioma possui uma justificativa puramente pragmática: leva aos resultados desejados e a nenhum outro [até onde se sabe]. Mas claramente não é o tipo de axioma com o qual podemos ficar contentes.⁵¹

Ainda que este trabalho tenha apontado até aqui várias instâncias de desacordos, não se deve esquecer que a matemática é um campo que goza de estabilidade epistemológica não observada em outras áreas. Em meio a disputas sobre adoção de axiomas, é normalmente pacífico o aspecto

⁵¹ RUSSELL, Bertrand e WHITEHEAD, Alfred North. **Principia Mathematica**. Vol 1. 2nd ed. Cambridge University Press: Londres, 1927. P. xiv.

condicional: se um determinado axioma for adotado, certos teoremas se seguem⁵².

As divergências sobre ontologia, portanto, não interferem diretamente no caráter formal do que já foi feito. No capítulo anterior, também foi argumentado sobre como os compromissos ontológicos das ciências naturais também não são determinantes para a prática matemática (é bem certo que conhecimento matemático pode ser desenvolvido devido a sua aplicabilidade, mas não é a única razão para tal). Isso leva inevitavelmente ao seguinte questionamento: o que deve guiar epistemologicamente a matemática pura?

Entre as motivações extrínsecas abordadas por Maddy, ela destaca algumas “regras práticas” (“*rules of thumb*” no original). Dentre essas, há duas de particular interesse para a argumentação desta seção: a que ela chama “a um passo do desastre” e a “maximização”. Ambas, se extrapoladas do contexto de teoria dos conjuntos sobre o qual trata o texto da autora, são regras heurísticas para a construção de sistemas dedutivos mais “fortes”.

O termo “força” aqui é usado com um sentido específico: diz-se que um sistema formal consistente é mais forte que outro (também consistente) quando nele mais teoremas podem ser demonstrados. Deste modo, diz-se que um cálculo lógico clássico é mais forte que um cálculo lógico intuicionista; e que ambos são mais fortes que um cálculo lógico positivo (sem negação). O requisito da consistência se presta a evitar que o sistema seja trivial, isto é, que demonstre qualquer fórmula.

⁵² Poderia ser levantada uma objeção a esse “acordo sobre condicionais” usando como exemplo o caso do intuicionismo. Afinal, o matemático intuicionista defende que demonstrações não-construtivas não deveriam ser aceitas e, portanto, deveriam ser rejeitados certos teoremas ainda que haja acordo sobre os axiomas. Contudo, a objeção não se sustenta. O intuicionista há de concordar que, se aceitos os axiomas da lógica clássica (incluindo a lei de dupla negação), a matemática clássica deve se seguir.

A regra prática “a um passo do desastre”⁵³ é apontada como um recurso metodológico adotado por Zermelo para a axiomatização da teoria dos conjuntos: seu espírito vai no sentido de adotar princípios da teoria ingênua (de Cantor, não axiomática) do modo mais liberal possível sem que se torne a teoria inconsistente. A ideia, portanto, é de que a teoria seja o mais forte possível dentro dos limites formais (consistência) e metamatemáticos: afinal, a teoria dos conjuntos deve expressar noções sobre nossa intuição acerca destes. Por esta última razão há o compromisso com a teoria ingênua.

Em outras palavras, se um axioma leva a uma contradição, deve-se enfraquecê-lo somente o necessário para que esta seja evitada e que o máximo do valor intuitivo do axioma seja preservado. O aspecto formal da consistência se impõe sobre a intuição contida na formulação do axioma.

A outra regra prática, da maximização, pode ser vista como o verso da mesma moeda da regra anterior. Axiomas que preservem a consistência devem ser acrescentados se aumentarem o poder dedutivo do sistema: Maddy cita a adoção do axioma da escolha como exemplo dessa regra⁵⁴. Mais uma vez, uma questão formal (demonstrar mais teoremas) se coloca como fator importante para a escolha de pressupostos.

Esta cisão entre razões intrínsecas e extrínsecas pode levar a uma conclusão precipitada e fazer crer que um platonista daria apenas razões intrínsecas para suas escolhas de fundamentos; afinal, deveriam se importar em assumir proposições verdadeiras objetivamente e não apenas proposições úteis. Contudo, o aspecto formal da matemática é incontornável, e qualquer um que trabalhe com sistemas formais estará sujeito às nuances de manuseá-los. O exemplo mais acima de Russell e

⁵³ MADDY, Penelope. Op. Cit. P. 485.

⁵⁴ MADDY, Penelope. Op. Cit. P. 497.

Whitehead é, como mostrado, um caso de logicistas dando razões extrínsecas para uma escolha de axioma.

Pode-se, todavia, ir mais a fundo e verificar que é possível que haja motivações ontológicas por trás até mesmo de ditas razões extrínsecas. A proposta de manter-se “a um passo do desastre” nos casos apresentados por Maddy, por exemplo, pode ser investigada a respeito: baseia-se não somente na tarefa de evitar inconsistências que tornem o sistema dedutivo trivial, mas também no pressuposto de que se deve adotar uma lógica clássica a respeito da contradição. Se assim não fosse, haveria muito mais presença de fundamentações paraconsistentes da matemática⁵⁵. Há, portanto, um compromisso com a impossibilidade de contradições. Certamente, este é um compromisso pouco ousado: parece intuitivo e simples de aceitar, e também é um compromisso negativo (com a inexistência ou impossibilidade de algo), mas que ainda assim está frequentemente associado a uma tomada de posição ontológica⁵⁶.

Esse posicionamento a respeito da ontologia em certas escolhas aparentemente triviais de axiomas é apontado por Paul Bernays em *Platonism in Mathematics*⁵⁷, cuja leitura sugere o quão cinzenta pode ser a linha entre as ditas justificativas intrínsecas e as extrínsecas.

Bernays mostra, por exemplo, como a adoção do princípio do terceiro excluído para a aritmética envolve um compromisso com a totalidade de conjuntos infinitos⁵⁸:

⁵⁵ Como sugerido, há trabalhos de fundamentação paraconsistente para a matemática; mas certamente não é o objetivo da maioria das adoções do princípio “a um passo do desastre”. Para uma abordagem paraconsistente da matemática, conferir MORTENSEN, Chris. **Inconsistent Mathematics**. Springer-Science+Business Media: Dordrecht, 1995.

⁵⁶ O uso do vocábulo “frequentemente” refere-se à a possibilidade de uma matemática puramente formalista sem qualquer ontologia.

⁵⁷ BERNAYS, Paul. **Platonism in Mathematics**. Traduzido para o inglês por Charles Parsons. Palestra proferida em 18 de junho de 1934, no ciclo *Conférences Internationales des Sciences Mathématiques* na Universidade de Genebra - Suíça.

⁵⁸ É justamente por esta razão que a matemática intuicionista não adota esse princípio aristotélico.

O mais fraco dos pressupostos “platonistas” introduzidos pela aritmética é o da totalidade dos inteiros. O *tertium non datum* para inteiros se segue disso; por exemplo: se P é um predicado dos inteiros, ou P é verdadeiro de cada número ou há pelo menos uma exceção.⁵⁹

É possível, no caso do terceiro excluído e do compromisso com a totalidade, observar uma dinâmica entre justificativas intrínsecas e extrínsecas. O princípio do terceiro excluído pode ser justificado extrinsecamente, visto que está associado à força dedutiva da lógica clássica e às regras para a redução ao absurdo e para a lei da dupla negação; mas também intrinsecamente, pela relação já apontada por Bernays com o compromisso com a totalidade.

Há duas conclusões possíveis a serem tiradas aqui, uma mais modesta e uma mais forte. A primeira é a de que a linha entre justificativas intrínsecas e extrínsecas é tênue, visto que nem sempre é evidente por que tipo de razão um pressuposto foi adotado. O passo maior a ser dado consiste em concluir que a insistência em razões ditas intrínsecas não contribui para uma compreensão mais adequada do significado da verdade em matemática. Essa será a posição defendida na próxima seção.

3.2 *Mathematical truth*: Ontologia e epistemologia inconciliáveis

Em *Mathematical Truth*, de 1973, Benacerraf expõe outra tese importante da sua carreira: definir o que é “verdade” em matemática é necessariamente insatisfatório seja sob o ponto de vista ontológico ou sob o ponto de vista epistemológico. O autor discute seu problema e chega a essa

⁵⁹ BERNAYS, Paul. Op. Cit. P.2.

conclusão tomando como ponto de partida uma comparação entre duas sentenças com formas semelhantes, mas conteúdos distintos: uma expressa algo empírico e outra expressa sentido matemático; e procede a analisar o que significa atribuir verdade a cada uma delas.

As sentenças são as seguintes⁶⁰: “(1) Existem pelo menos três grandes cidades mais antigas que Nova Iorque” e “(2) Existem pelo menos três números perfeitos maiores que 17”⁶¹. A discussão de Benacerraf, portanto, gira em torno de discutir o que significa dizer que (1) e (2) são verdadeiras. Ambas, pelo menos em princípio, possuem a mesma forma se reescritas em linguagem de primeira ordem, o que faz com que alguns pontos interessantes sejam levantados.

É possível, por um lado, manter uma versão unívoca do atributo “verdade” e atestar que (1) e (2) são ambos verdadeiros em um sentido referencial, isto é, referem-se a objetos e relações entre objetos. Ao passo que parece obedecer ao princípio da navalha de Ockham, incorre nas dificuldades platonistas já discutidas de tratar a matemática como algo que fala de objetos. Substituir as coleções de objetos por estruturas, ainda que em um sentido platônico, já significa não tratar os dois enunciados da mesma maneira.

Caso a argumentação realizada até aqui tenha sido razoável, é forçoso reconhecer que a verdade na matemática não pode ser tomada da mesma maneira que a verdade em questões empíricas. Isto vale mesmo caso se opte por defender uma versão objetiva da verdade neste domínio: ainda que se considere que a verdade de enunciados matemáticos seja

⁶⁰ BENACERRAF, Paul. **Mathematical Truth**. In The Journal of Philosophy. Vol. 70, N. 19. pp. 661-679. 1973. P. 663.

⁶¹ Números perfeitos, em teoria dos números, são definidos como os inteiros positivos que são iguais à soma de seus divisores. 6, por exemplo, é um número perfeito, já que $1+2+3=6$. Se existem infinitos números perfeitos é, atualmente, um problema aberto.

independente dos sujeitos, não é mais cabível colocá-la em paridade com a verdade referencial de enunciados empíricos.

A alternativa que se põe a essa tentativa frustrada de harmonizar a semântica da matemática com a semântica do restante da linguagem é perseguir um conceito de verdade que se alinhe à epistemologia matemática, isto é, um relato adequado do conhecimento matemático.

Até aqui se tem evitado o uso do termo “conhecimento”, visto que unir em um conceito as noções de verdade e justificação levaria possivelmente a confusões, além de incorrer nos problemas da definição tradicional de conhecimento⁶². A fim de minimizar essas dificuldades e preservar a clareza da discussão, “conhecimento matemático” será tratado no restante desse trabalho de modo pragmático: é conhecimento aquilo consolidado e aceito pela comunidade de matemáticos. Em defesa dessa aplicação do termo, há a inegável estabilidade da matemática se comparada às ciências empíricas: se é possível falar de conhecimento a respeito da física, conhecimento matemático não é um passo exagerado.

Tomada esta perspectiva, se tem que o conhecimento matemático associa-se fortemente à noção de prova. O problema evidente, contudo, se dá na dificuldade de se estabelecer um elo necessário entre prova e verdade, tal como o mesmo não existe entre justificativa e verdade. Ainda que se aceite que a lógica da argumentação matemática seja capaz de preservar nos teoremas a verdade dos axiomas (se houver), a verdade dos axiomas não deixa de ser um problema.

⁶² Por problemas da definição tradicional, refiro-me aqui às dificuldades encontradas em definir conhecimento como “crença verdadeira justificada”. Além da aporia no diálogo Teeteto, de Platão, há o célebre e incômodo “É o conhecimento crença verdadeira justificada?”, no qual Edmund Gettier aponta a falta de conexão necessária entre verdade e justificação. Cf. GETTIER, Edmund. **Is Justified True Belief Knowledge?**. In *Analysis*, vol. 23, 1963.

É ainda possível tentar defender a verdade dos axiomas comparando a confiança neles à que temos na nossa experiência imediata; é o que faz Gödel:

Mas, apesar do quão remotos da experiência sejam, nós possuímos algo como a percepção também dos objetos da teoria dos conjuntos, como se vê pelo fato de que os axiomas se forçam sobre nós como verdadeiros.⁶³

Sem dúvida, esta é uma posição filosoficamente ousada e possui o mérito de tomar a matemática como uma espécie peculiar de ciência empírica⁶⁴. Porém, pouco responde sobre as dificuldades do platonismo sobre o acesso a esse tipo de “verdade necessária”. A dinâmica entre justificativas intrínsecas e extrínsecas, por sua vez, se impõe contra essa ideia de que a intuição acerca dos axiomas seja uma boa ferramenta para decidir sobre seu valor de verdade.

Discussões acerca de quaisquer axiomas independentes seriam resolvidas pela intuição, se Gödel tivesse acertado quanto a esse ponto: haveria respostas para a adoção do axioma da escolha e o axioma das paralelas, por exemplo; bem como não haveria necessidade de recursos heurísticos como as regras práticas discutidas na seção anterior.

Benacerraf aponta, portanto, para uma tentativa de solução da questão pela via epistemológica através de um enfraquecimento da noção de verdade. Para tal, dialoga tanto com Quine como com Tarski ao reconstruir e criticar a verdade tomada como *convenção*. Isto é, um

⁶³ GÖDEL, Kurt. **What is Cantor's Continuum Problem?**. In *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*. BENACERRAF, Paul e PUTNAM, Hilary (orgs.). Cambridge University Press, Londres: 1964.

⁶⁴ E também não é uma aceção incomum. Departamentos de matemática em universidades no Brasil, por exemplo, são muito mais facilmente encontrados em centros de ciências “da natureza” ou “da terra” do que em centros de tecnologia.

enunciado é verdadeiro seja por ter sido postulado como verdade ou por atender a condições de verdade pré-estabelecidas⁶⁵.

Esse viés pragmático pode até ser suficiente para relatar superficialmente a atividade matemática: postulam-se axiomas, verdadeiros por convenção, e a preservação de verdade oferecida pela lógica (também aceita convencionalmente) garante a verdade dos teoremas. Mas não é difícil enxergar as razões pelas quais Benacerraf também o considera insatisfatório.

Em primeiro lugar, tratar a verdade desta maneira afasta-se drasticamente da semântica das linguagens naturais, a não ser que se enfraqueça a verdade também destas. Em segundo lugar, não esclarece problemas de decisão quando não há acordo (ou convenção) sobre o que deve ser tomado como verdadeiro. É possível, inclusive, tornar a própria tese convencionalista redundante se estratégias de convenção passarem a ser os antigos critérios de verdade: correspondência com dados empíricos ou força intuitiva (à la Gödel).

A conclusão de Benacerraf em *Mathematical Truth*, portanto, encerra em apuros: não há um bom relato da verdade para a matemática, visto que uma versão semanticamente uniforme com as linguagens naturais é incapaz de explicar como os matemáticos acessam a verdade dos axiomas e, por outro lado, uma versão que descreva a produção de conhecimento matemático de maneira mais adequada, e portanto dê conta de uma epistemologia, sofre também ao esclarecer o uso do termo “verdadeiro”. Há, contudo, uma terceira via a ser defendida nesta tese, da qual se ocupará a seção seguinte.

⁶⁵ BENACERRAF, Paul. Op. Cit. P. 676 e ss.

3.3 Estruturalismo, verdade e compromisso modal

Nesta seção pretende-se oferecer efetivamente a tese defendida neste trabalho: uma abordagem do conhecimento matemático (e, conseqüentemente, do significado de “verdade matemática”) que leve em conta uma perspectiva estruturalista e seja condizente tanto com a prática matemática, mas também com o máximo que seja possível preservar de uma noção de verdade objetiva.

A perspectiva estruturalista a ser adotada é, tal como a apresentada no segundo capítulo, uma que se vê livre de compromisso com objetos tomados fora do contexto de suas estruturas. Além dos argumentos de Benacerraf então apresentados, a adoção do estruturalismo se faz implícita na própria maneira como se discutem problemas sobre ontologia e verdade na filosofia da matemática. Discorrer sobre objetos matemáticos desvinculados de suas teorias é, no mínimo, infrutífero. Ainda se adote uma visão platonista acerca destes, isso não preclui as estruturas. A maneira axiomática de se fazer matemática exige que se fale destas. Com isso, deve-se entender que ainda que existam objetos abstratos individualizados, a matemática fala deles estruturalmente. Entender a verdade na matemática, portanto, passa pelo estruturalismo.

O status ontológico de estruturas, contudo, parece ser tão insolúvel quanto o dos universais. Felizmente, isso não impede o uso do predicado “verdadeiro” de maneira significativa: tal como é compreensível falar que “Acerolas são vermelhas” é uma sentença verdadeira sem, de fato, saber o status ontológico da vermelhidão, é possível de maneira análoga falar da verdade de enunciados matemáticos a respeito de estruturas instanciadas por teorias.

Aqui é importante perceber que há dois elementos para que a sentença da analogia apresentada acima seja verdadeira. “Acerolas são vermelhas” é verdadeira não só a respeito da referência de seus termos (os frutos e a cor tal como se apresentam no mundo), mas também do sentido de seus termos ⁶⁶. Mesmo em sentenças empíricas, verdade não é exclusivamente uma questão referencial. A sentença “Os frutos que guardei no congelador na primeira semana de setembro de 2019 são rubros” é verdadeira se os frutos forem acerolas (ou qualquer outro fruto vermelho), mas será falsa caso sejam, por exemplo, limões.

A relação que um objeto possui com a vermelhidão (seja lá qual for seu status ontológico) é expressa pelo predicado “é vermelho” de maneira similar à que um enunciado da matemática possui com uma estrutura (seja também qual for seu status). Defendo aqui que, ao dizer que um enunciado da matemática é verdadeiro, se diz que ele é verdadeiro a respeito de uma estrutura; tal como quando dizemos que um enunciado empírico é verdadeiro, dizemos que o é a respeito dos dados dos nossos sentidos.

Desta forma, é possível tratar enunciados como termos e atribuir-lhes o predicado de verdade conforme o seguinte exemplo:

I - ‘271 é um número primo’ é verdadeiro a respeito da estrutura dos números naturais.⁶⁷

Que pode ser generalizado da seguinte forma:

⁶⁶ Aqui é adotada a distinção elaborada por Frege entre sentido e referência. Cf. FREGE, Gottlob. **Sense and Reference**. In *The Philosophical Review*, vol. 57 n. 3. Trad. Max Black. 1948. Pp. 209-230.

⁶⁷ Para o qual ‘a estrutura dos números naturais’ se refere ao que é instanciado por qualquer sistema que represente a aritmética, tal como os axiomas de Peano ou o *Principia Mathematica*.

II – ‘P’ é verdadeiro em S

Para o qual P é uma sentença de uma teoria e S uma estrutura instanciada por essa teoria.

Esta noção de verdade em relação a uma estrutura acomoda de modo interessante alguns dos problemas discutidos. Em primeiro lugar, respeita a semântica de linguagens naturais se tratarmos “verdadeiro em S ” como um universal; isto é, um termo que se refere a uma classe. Em segundo lugar, dá conta de como falar a respeito de sentenças em sistemas formais que instanciem estruturas diferentes. Diante de um resultado em teoria dos conjuntos que depende do axioma da escolha pode-se dizer, por exemplo: “O teorema de Vitali é verdadeiro na estrutura instanciada por ZFC” e “O teorema de Vitali é indecidível na estrutura instanciada por ZF”.

É importante perceber que falar de verdade em uma estrutura não é o mesmo que falar de verdade em um sistema formal. Em *What Numbers Could Not Be*, Benacerraf apresenta duas maneiras diferentes de formalizar os números naturais (por ordinais de Zermelo e por ordinais de Von Neumann), mas ambas instanciam a estrutura dos números naturais. Ser verdadeiro em uma estrutura significa ser verdadeiro em qualquer sistema que a instancie.

Desvincular estruturas de sistemas formais também permite oferecer uma explicação para a aplicabilidade de porções da matemática. Para tal, o mundo físico pode ser interpretado como instância de estruturas que também são instanciadas por sistemas formais (ou pelo menos parte delas). A parte finitária da estrutura dos números naturais, por exemplo, é

instanciada por objetos macroscópicos; a geometria euclidiana é instanciada por pequenas distâncias e geometrias não euclidianas por grandes distâncias para as quais a curvatura do espaço deve ser levada em conta.

Note que não há nem nunca houve razão pela qual a atividade do matemático deveria se limitar a descrever estruturas instanciadas pelo mundo físico; essa, inclusive, é uma das causas mais importantes do fracasso do argumento da indispensabilidade. As estruturas a que se referem teorias matemáticas estão livres desse tipo de entrave material, e o poder que há de falar sobre elas responde a limitações formais.

Até aqui, esta maneira de descrever a verdade matemática com estruturas pode ser acomodada em qualquer das três grandes escolas de pensamento. Um logicista diria que a lógica é a única estrutura instanciada pela matemática; um intuicionista diria que os conceitos e construções matemáticas formam tais estruturas e o formalista ferrenho as destilaria em sistemas formais.

A questão ontológica, por sua vez, também pode ser expressa pelo vocabulário estruturalista; e o problema passa a ser determinar se as estruturas são independentes do trabalho do matemático ou não: a resposta é positiva para o caso do platonista e negativa para um anti-platonista.

Há, contudo, um aspecto que defendo ser inescapável a qualquer postura filosófica a respeito da matemática. Mesmo a mais modesta das posturas deve aceitar que é da natureza de sistemas formais que, uma vez dados seus axiomas e regras de inferência, seja por convenção, intuição ou revelação, todas as suas consequências (seus teoremas) vêm a reboque, ainda que não previstas ou descobertas.

A definição de um sistema, seja com o objetivo de descrever uma realidade abstrata, um esquema conceitual ou uma porção (abstraída) da realidade física, é um ato através do qual o matemático faz surgir, no mínimo, um conjunto potencial de fatos sobre esse sistema a serem demonstrados. Questões abertas na matemática, se não forem descobertas indecidíveis, são parte desse tipo de conjunto.

Defendo que deve haver, no mínimo, um compromisso modal para a matemática. A natureza da matemática garante que há fatos matemáticos que *podem* ser demonstrados, e é com estes, no mínimo, que matemáticos se comprometem. Sejam fatos sejam encarados como consequências conceituais de uma atividade criativa na definição de suas condições iniciais ou descobertas acerca de entidades abstratas independentes de nós; suas demonstrações, se de acordo com as regras aceitas, são objetivamente válidas ou não; tal como não existem dúvidas sobre a legalidade de um lance em um jogo de xadrez jogado por quem conhece as regras.

Estruturas podem, seguindo esse raciocínio, ser descritas como domínios de possibilidade: a estrutura dos números naturais contém tudo aquilo que pode ser demonstrado a respeito dos números naturais.

Na bibliografia estuda, uma postura parecida com a aqui defendida pôde ser encontrada apenas em um texto de Hilary Putnam em *What is Mathematical Truth*⁶⁸, na qual é defendida brevemente uma noção modal da matemática em detrimento de uma noção existencial. O texto de Putnam, contudo, não toca no estruturalismo e após flertar com a questão da modalidade, passa a se ocupar mais de problemas de aplicabilidade.

A velha questão sobre se a matemática é criação ou descoberta pode ser respondida de maneira anticlimática: ambas. O matemático, ainda que

⁶⁸ PUTNAM, Hilary. **What is Mathematical Truth.** In Ibid. Mathematics, Matter and Method. Vol. 1. London: Cambridge University Press, 1975.

platônico, precisa criar sistemas formais que instanciem alguma estrutura. Uma vez definido o sistema, uma potencial infinidade de descobertas se põe à frente.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho buscou-se defender que abster-se de compromisso ontológico para com estruturas não impede a aplicação do conceito de verdade objetiva à matemática de maneira significativa. Para tal, foi primeiro necessário a discussão e demarcação do vocabulário filosófico relevante: existência, objetos abstratos, verdade e compromisso ontológico foram alguns dos pontos-chave discutidos.

A postura realista acerca de objetos abstratos da matemática, o platonismo matemático, se mostrou insuficiente para explicar como se pode chegar a teorias matemáticas verdadeiras. Apesar de manter a concepção referencial da verdade – de que sentenças são verdadeiras quando se referem adequadamente a objetos e relações –, é incapaz de dar conta de uma epistemologia razoável. No segundo capítulo, foi apresentado um golpe ainda mais severo contra o platonismo a respeito de objetos: a defesa da perspectiva estruturalista realizada por Benacerraf em *What Numbers Could Not Be*.

Embora o estruturalismo não torne o platonismo uma postura completamente obsoleta, o enfraquece significativamente. É possível, se aceito o argumento de Benacerraf, ser um platonista a respeito de estruturas matemáticas, mas não de objetos descontextualizados delas. No que tange a reflexão filosófica acerca da matemática, o estruturalismo faz com que o problema seja deslocado de objetos para sistemas formais e estruturas.

O exame da verdade em sistemas formais de um modo que não seja meramente sintático requer sejam considerados os axiomas – sendo

pressuposta a solidez dos sistemas formais em questão⁶⁹. Esse passo foi realizado no terceiro capítulo, no qual foi tratada a classificação de razões para adoção de axiomas em extrínsecas e intrínsecas. A argumentação apoiada pelos textos de Penelope Maddy ressalta a importância de razões extrínsecas. Perceber isso leva a consequências importantes para a argumentação empreendida nesta tese. Primeiramente, há um enfraquecimento da importância da intuição na escolha de axiomas e, portanto, de teses de algum tipo de acesso a “dados matemáticos”. Em segundo lugar, a uma forte indicação de que uma noção funcional de verdade em matemática deve acomodar a prática epistêmica e os seus compromissos.

O tratamento da verdade em matemática pela via epistemológica é reforçado, por um lado, pela incapacidade do argumento da indispensabilidade em resolver o problema e, por outro, pelo argumento de Benacerraf em *Mathematical Truth*. Embora Benacerraf prefira concluir que não há uma boa versão para a verdade em matemática, considero o exposto nos três capítulos o suficiente para defender uma tese sobre a verdade em matemática que apela para um compromisso modal e, portanto, uma redução do compromisso ontológico.

A noção defendida é a de que enunciados matemáticos são verdadeiros a respeito de uma estrutura, expressão abreviada no terceiro capítulo pelo predicado “ser verdadeiro em S”. O predicado se aplica a enunciados que são dedutíveis em sistemas formais que sejam instâncias da estrutura S, ou, ainda, verdadeiros e qualquer outra instância de S.

A impossibilidade de um critério referencial de verdade para a matemática faz com que esse critério tarskiano seja o, talvez, único

⁶⁹ Diz-se que um sistema formal é sólido se não deduz conclusões falsas a partir de premissas verdadeiras.

funcional e plausível. Isso não significa, todavia, que a verdade deva ser extirpada de toda objetividade em prol de uma versão relativista.

A noção de verdade objetiva adotada neste trabalho a partir da leitura de Davidson trata de uma definição na qual a verdade de um enunciado é independente de evidências, vantagem pragmática ou acordo. O uso defendido do predicado “verdadeiro em S” possui essas propriedades. Um fato matemático não passa a ser verdadeiro somente após o desenvolvimento de uma prova ou por ser útil; depende unicamente, no caso de sistemas formais, das condições iniciais – os axiomas – do sistema. E o acordo da comunidade sobre algum teorema, por sua vez, diz algo mais sobre a sociologia da matemática do que da matemática propriamente dita.

Embora o predicado “verdadeiro em S” seja compatível com uma postura platonista a respeito de estruturas, defendo aqui que tão grande compromisso ontológico seria supérfluo. O compromisso que deve haver é com o conjunto de teoremas demonstráveis que emerge a partir da definição de um sistema formal (escolha de axiomas e regras de inferência): os teoremas *podem* ser demonstrados (e por isso a modalidade) e são inerentes àquele sistema. Compromisso com essa possibilidade condicionada, atrelado a uma abstração do conjunto de sistemas formais equivalentes (as estruturas), é suficiente para que se faça bom uso do predicado “verdadeiro em S”.

O trabalho realizado e a tese aqui proposta ensejam continuidade de pesquisa. O debate em filosofia da matemática é efervescente, e direcionamentos mais formais se colocam como um caminho possível a ser seguido. O estudo de teorias com alto poder de abstração, como a teoria das categorias, por exemplo, é um campo fértil para desenvolvimentos filosóficos; visto que o trabalho com ferramentas formais pode tanto

oferecer material de reflexão filosófica válida como intensificar a ponte entre a filosofia e a matemática.

Se, por um lado, o estudo de sistemas formais pode gerar frutos da compreensão acerca das formas admissíveis de justificativa na matemática, outra perspectiva interessante de pesquisa é por um viés mais prático: pode haver grande proveito em investigar respostas de matemáticos profissionais a questões filosóficas, e assim avançar o entendimento dos sistemas de crença associados à matemática.

“A essência da matemática reside em sua liberdade”, se lê na célebre citação de Georg Cantor; espera-se que a tese defendida aqui seja compreendida justamente como uma homenagem ao que representa esse pensamento: a matemática, a filosofia e a liberdade intelectual. O trabalho com conceitos, tanto filosóficos como matemáticos, apresenta a liberdade de tratar não apenas sobre o domínio do que é atual, mas daquele muito maior que é o da possibilidade.

REFERÊNCIAS

BENACERRAF, Paul. **Mathematical Truth**. In *The Journal of Philosophy*. Vol. 70, N. 19. pp. 661-679. 1973.

BENACERRAF, Paul. **What Numbers Could Not Be**. In *The Philosophical Review*, Vol. 74, No. 1. Pp. 47-73. Janeiro de 1965.

BERNAYS, Paul. **Platonism in Mathematics**. Traduzido para o inglês por Charles Parsons. Palestra proferida em 18 de junho de 1934, no ciclo *Conférences Internationales des Sciences Mathématiques* na Universidade de Genebra - Suíça

BOOLOS, George. **Logic, logic and logic**. Cambridge: Harvard University Press, 1998.

DAVIDSON, Donald. **Truth Rehabilitated**. In DAVIDSON, Donald. *Truth, Language and History*. Oxford: Oxford University Press, 2009.

FREGE, Gottlob. **Sense and Reference**. In *The Philosophical Review*, vol. 57 n. 3. Trad. Max Black. 1948. Pp. 209-230.

FREGE, Gottlob. **The Philosophical and Mathematical Correspondence**. Editado por GABRIEL, Gottfried et al. Traduzido por KAAL, Hans. Oxford: Blackweel, 1980.

FREGE, Gottlob. **The Thought: A logical inquiry**. In *Mind*. Vol. LXV, No. 259. Julho de 1956.

GALLOIS, Andre. **Identity Over Time**. In *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2016 Edition), Edward N. Zalta (ed.), Disponível em: <<https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/identity-time/>>.

GETTER, Edmund. **Is Justified True Belief Knowledge?**. In *Analysis*, vol. 23, 1963.

GÖDEL, Kurt. **What is Cantor's Continuum Problem?**. In *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*. BENACERRAF, Paul e PUTNAM, Hilary (orgs.). Cambridge University Press, Londres: 1964.

HAACK, Susan. **Deviant Logic, Fuzzy Logic: Beyond the Formalism**. Chicago: The University of Chicago Press, 1996.

HOFWEBER, Thomas. **Logic and Ontology**. In *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2018 Edition), Edward N. Zalta (ed.), Disponível em: <<https://plato.stanford.edu/archives/sum2018/entries/logic-ontology/>>.

HYLTON, Peter e KEMP, Gary. **Willard Van Orman Quine**, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2019 Edition), Edward N. Zalta (ed.), Disponível em: <<https://plato.stanford.edu/archives/spr2019/entries/quine/>>.

IEMHOFF, Rosalie. **Intuitionism in the Philosophy of Mathematics**, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2019 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <<https://plato.stanford.edu/archives/sum2019/entries/intuitionism/>>.

KENNEDY, Juliette. **Kurt Gödel**. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2018 Edition), Edward N. Zalta (ed.). Disponível em: <<https://plato.stanford.edu/archives/win2018/entries/goedel/>>.

KLEENE, Stephen Cole. **Introduction to Metamathematics**. New York: Ishi Press International, 2009.

KNUTH, Donald. **Surreal Numbers**. Phillipines: Addison-Wesley

Publishing, 1974.

LINNEBO, Øystein. **Platonism in the Philosophy of Mathematics.** The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2018 Edition), Edward N. Zalta (ed.), Disponível em: <<https://plato.stanford.edu/archives/spr2018/entries/platonism-mathematics/>>.

MADDY, Penelope. **Believing the Axioms I.** In The Journal of Symbolic Logic. Vol. 52 n. 2. Jun. 1988.

MADDY, Penelope. **Believing the Axioms II.** In The Journal of Symbolic Logic. Vol. 52 n. 3. Set. 1988.

MADDY, Penelope. **Indispensability and Practice.** In The Journal of Philosophy, vol. LXXXIX, no. 6. Junho de 1992.

MEHRTENS, Herbert. **T. S. Kuhn's theories and mathematics: a discussion paper on the 'new historiography' of mathematics.** In *Historia Mathematica*, vol 3, 1976.

MORTENSEN, Chris. **Inconsistent Mathematics.** Springer-Science+Business Media: Dordrecht, 1995.

PUTNAM, Hilary. **What is Mathematical Truth.** In *Ibid. Mathematics, Matter and Method*. Vol. 1. London: Cambridge University Press, 1975.

QUINE, Willard V. O. **Reply to Charles Parsons.** In HAHN e SCHILPP. *The Philosophy of W. V. Quine*. Chicago and La Salle Ed.: Illinois, 1986. P. 400.

QUINE, Willard Van Orman. **De um Ponto de Vista Lógico.** Tradução: Antonio Ianni Segatto. São Paulo: UNESP, 2011.

RAATIKAINEN, Panu. **Gödel's Incompleteness Theorems**. The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2018 Edition), Edward N. Zalta (ed.), Disponível em: <<https://plato.stanford.edu/archives/fall2018/entries/goedel-incompleteness/>>.

ROSEN, Gideon. **Abstract Objects**. The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2018 Edition), Edward N. Zalta (ed.), Disponível em: <<https://plato.stanford.edu/archives/win2018/entries/abstract-objects/>>.

RUSSELL, Bertrand e WHITEHEAD, Alfred North. **Principia Mathematica**. Vol 1. 2nd ed. Cambridge University Press: Londres, 1927.

RUSSELL, Bertrand. **On Denoting**. *In Mind*. Vol. XIV, no. 4. Pp. 479-493. 1905.

SHAPIRO, Stewart. **Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology**. New York: Oxford University Press, 1997.

SZABO, M. E. **The Collected Papers of Gerhard Gentzen**. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1969.

TARSKI, Alfred. **A Concepção Semântica da Verdade**. Tradução: Celso Reni Braiba, Jesus de Paula Assis, Luiz Henrique de Araújo Dutra e Cezar A. Mortari. 1. ed. São Paulo: UNESP, 2007.

TENNANT, Neil. **Logicism and Neologicism**. The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2017 Edition), Edward N. Zalta (ed.), Disponível em: <<https://plato.stanford.edu/archives/win2017/entries/logicism/>>.

WHITEHEAD, Alfred North e RUSSELL, Bertrand. **Principia Mathematica**. Cambridge: Cambridge University Press, 1956.

WILDER, Raymond L. **Introduction to the Foundations of Mathematics.** Dover Publications, 2nd Edition, 1965.