

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Introdução aos Espaços de Lorentz e Sobolev-Lorentz e Aplicações

Hector Alan dos Santos Pereira

JOÃO PESSOA – PB
ABRIL DE 2019

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Introdução aos Espaços de Lorentz e Sobolev-Lorentz e Aplicações

por

Hector Alan dos Santos Pereira

sob a orientação do

Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro

João Pessoa – PB
Abril de 2019

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

P436i Pereira, Hector Alan Dos Santos.

Introdução aos Espaços de Lorentz e Sobolev-Lorentz e Aplicações / Hector Alan Dos Santos Pereira. - João Pessoa, 2019.
94 f.

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Espaços de Lorentz, Sistemas Hamiltonianos, Espaço.
I. Título

UFPB/BC

Introdução aos Espaços de Lorentz e Sobolev-Lorentz e Aplicações

por

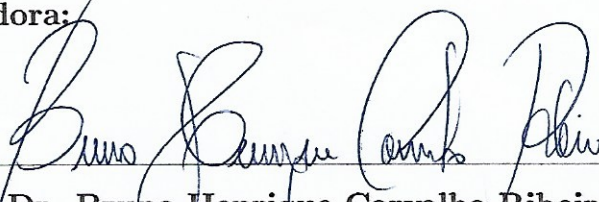
Hector Alan dos Santos Pereira ¹

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovado em 30 de Abril de 2019.

Banca Examinadora:


Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro – UFPB
(Orientador)


Prof. Dr. Edcarlos Domingos da Silva – UFG

(Examinador Externo)


Prof. Dr. Uberlândio Batista Severo – UFPB
(Examinador Interno)

¹O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração desta dissertação.

Aos meus pais.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por tudo que aconteceu em minha vida.

Especialmente aos meus pais, que sempre cuidaram, incentivaram e lutaram para me manter estudando mesmo quando as condições financeiras não eram das melhores. Aos meus irmãos pelo amor e carinho mesmo demonstrado em brigas.

Agradeço profundamente à minha esposa Camila pelo amor e dedicação a esta família, que acompanhou de perto a minha jornada no mestrado e que tem uma parcela enorme de contribuição para que este sonho fosse possível.

Aos meus amigos de mestrado, em especial ao Castelo, Marcos, Lorena, Douglas Queiroz, Douglas Magno, José Pereira, Rubens, Álvaro e Mariana. Foram muitas histórias de brigas, desesperos, alegrias e superações.

Aos meus amigos de vida: Deivison, Dilmar, Dyogenys, Luiz Gonzaga, André, Adauri, Joaci, Fabiana, Dean e Donizete. Obrigado pela amizade, parceria e por sempre torcerem por mim.

Aos grandes amigos do Litoral Sul Janiely, Linda, Djair, Lisiane e Cristiano por serem essas pessoas maravilhosas.

Aos meus amigos de apartamento, começando por Tarcy que me ajudou bastante com a sua amizade e as comidas; Cássio por esse coração grandioso, sem ele possivelmente não teria vindo à João Pessoa. agradeço a Was por dividir o quarto comigo e por me ajudar bastante com sugestões, com a teoria durante o mestrado e por ser esse irmão maravilhoso e rico.

Ao professor Bruno que teve a gentileza de me orientar durante todo o mestrado, pelas suas críticas construtivas, pela sua paciência, pela sua amizade e compreensão. Muito obrigado por contribuir para o meu desenvolvimento.

Por fim, agradeço Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq pelo financiamento dos meus estudos durante todo este tempo.

Resumo

Estudamos nesse trabalho os Espaços de Lorentz e Sobolev-Lorentz que generalizam, respectivamente, os Espaços de Lebesgue e Sobolev e mostramos que tais espaços podem ser utilizados para melhorar condições de crescimento de funções não lineares em sistemas hamiltonianos com crescimento quase crítico.

Palavras-chave: Espaços de Lorentz, Sistemas Hamiltonianos, Espaços de Sobolev-Lorentz.

Abstract

In this work, we study the Lorentz and Sobolev-Lorentz Spaces that generalize the Lebesgue and Sobolev Spaces, respectively, and show that such spaces can be used to improve the growth conditions of nonlinear functions in almost critical Hamiltonian systems.

Keywords: Lorentz Spaces, Hamiltonian Systems, Sobolev-Lorentz Spaces.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Função Distribuição	3
1.2 Rearranjamento Decrescente	8
1.3 Exemplos de Função Distribuição e Rearranjamento Decrescente	15
1.4 Propriedades de Rearranjamento Decrescente	19
1.5 Operação $**$	42
2 Espaços de Lorentz $L(p, q)$	48
2.1 Definição do Espaço de Lorentz	48
2.2 Norma no Espaço de Lorentz	62
2.3 Propriedades Topológicas e Métricas do espaço de Lorentz	68
3 Espaços de Sobolev-Lorentz	81
3.1 Definição dos Espaços de Sobolev-Lorentz e propriedades	82
3.2 Modelagens para o Sistema Hamiltoniano em espaços de Sobolev e em espaços de Sobolev-Lorentz	87
Referências Bibliográficas	93

Introdução

Neste trabalho, com base nos artigos de [1], [5] e [18], estudamos o espaço de Lorentz $L(p, q)$ que são generalizações naturais dos espaços de funções de Lebesgue e coincidem com os espaços L^p quando $p = q$. Por possuírem estruturas topológica e geométrica bastante ricas, tais espaços vêm sendo utilizados, nas décadas recentes, em Análise, Equações Diferenciais, Equações Integrais, etc.

Nosso objetivo nos dois primeiros capítulos é apresentar, descrever e estudar os espaços de Lorentz $L(p, q)$, no qual precisaremos definir e estudar propriedades de função distribuição e rearranjo decrescente. Além disso, estudamos o espaço de Lorentz-Sobolev e mostramos que este é um espaço melhor que o de Sobolev, no sentido de se estudar as soluções fracas para uma classe de sistemas hamiltonianos superlineares, com condição de fronteira de Dirichlet, em domínios limitados de fronteira suave.

No *Capítulo 1*, estudamos o rearranjo decrescente f^* de uma função f e, para isso, a definição da função distribuição μ_f é necessária. Mostramos também alguns exemplos e algumas propriedades de rearranjo decrescente. Enunciamos e provamos alguns teoremas importantes como a desigualdade de Hardy-Littlewood

$$\int_{\Omega} f(x)g(x)d\mu \leq \int_0^{\infty} f^*(t)g^*(t)dt.$$

Assumindo que o espaço de medida é não atômico, tal desigualdade pode ser generalizada para n -funções. Na última seção, definimos a operação $**$ que será muito importante nos espaços de Lorentz, pois tornará este um espaço de Banach, separável e reflexivo para $1 < p < \infty$ e $1 < q < \infty$.

O *Capítulo 2* é dedicado aos estudos dos espaços de Lorentz $L(p, q)$ que é o conjunto de todas as classes de funções mensuráveis f tais que o funcional $\| \cdot \|_{pq}$ é finito, onde

$$\|f\|_{p,q} = \begin{cases} \left(\int_0^{\infty} (t^{\frac{1}{p}} f^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}, & \text{se } 0 < p < \infty, 0 < q < \infty \\ \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t), & \text{se } 0 < p \leq \infty, 0 < q \leq \infty, \end{cases}$$

em que f^* é o rearranjo decrescente da função mensurável f . Mostramos que o espaço $L(p, q)$ é um espaço vetorial e o funcional $\| \cdot \|_{pq}$ serve como norma em $L(p, q)$

quando $1 \leq q < p < \infty$ ou $p = q = \infty$. Para o caso $p = \infty$, o funcional $\|\cdot\|_{pq}^*$ onde

$$\|f\|_{pq}^* = \begin{cases} \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}, & \text{se } 0 < p < \infty, 0 < q < \infty \\ \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t), & \text{se } 0 < p \leq \infty, 0 < q \leq \infty, \end{cases}$$

é subaditivo e equivalente ao funcional $\|\cdot\|_{pq}$ para $1 < p < \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$ e daí $L(p, q)$ é um espaço normado com a norma $\|\cdot\|_{pq}^*$. Na última seção deste capítulo, mostramos que espaços de Lorentz $L(p, q)$ são completos, além de estudar outras propriedades topológicas tais como a separabilidade.

No *Capítulo 3*, definimos os espaços de Sobolev-Lorentz

$$W^{1,(p,q)}(\Omega) = L^{(p,q)}(\Omega) \cap \{f; \partial_i f \in L^{(p,q)}(\Omega); i = 1, 2, \dots, n\}$$

equipado com a norma

$$\|f\|_{W^{1,(p,q)}(\Omega)} = \|f\|_{L^{(p,q)}(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|\partial_i f\|_{L^{(p,q)}(\Omega)},$$

onde $L^{(p,q)}(\Omega) = L(p, q)$ com a norma $\|\cdot\|_{pq}^*$. Este espaço é equivalente ao espaço $H^{1,(p,q)}(\Omega)$ que é definido como o completamento do conjunto

$$\{\varphi \in C^\infty(\Omega); \|\varphi\|_{1,(p,q);\Omega} < \infty\},$$

no qual

$$\|\varphi\|_{1,(p,q);\Omega} = (\|\varphi\|_{L^{(p,q)}(\Omega)}^r + \|\nabla \varphi\|_{L^{(p,q)}(\Omega; \mathbb{R}^n)}^r)^{\frac{1}{r}},$$

e $\nabla \varphi = (\partial_1 \varphi, \partial_2 \varphi, \dots, \partial_n \varphi)$ é o gradiente de φ . Analogamente, definimos $H^{1,p,q}(\Omega)$ como o completamento do conjunto

$$\{\varphi \in C^\infty(\Omega); \|\varphi\|_{1,p,q;\Omega} < \infty\},$$

onde

$$\|\varphi\|_{1,p,q;\Omega} = (\|\varphi\|_{L^{p,q}(\Omega)}^r + \|\nabla \varphi\|_{L^{p,q}(\Omega; \mathbb{R}^n)}^r)^{\frac{1}{r}},$$

é a quasi norma pq Sobolev-Lorentz. O espaço de Sobolev-Lorentz é Banach reflexivo para $1 < p < \infty$ e $1 < q < \infty$. Na última seção mostramos que o espaço de Sobolev-Lorentz é um espaço melhor que o de Sobolev, no sentido de se estudar soluções fracas para uma classe de sistemas hamiltonianos superlineares, com condição de fronteira de Dirichlet, em domínios limitados de fronteira suave, isto é, mostramos que podemos melhorar as imersões de Sobolev em espaços de Lorentz.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos alguns conceitos básicos que serão necessários no decorrer do texto tais como, função distribuição e rearranjo decrescente, que também é uma função distribuição com respeito a medida de Lebesgue. Abordaremos alguns exemplos de função distribuição e rearranjo decrescente. Além disso, iremos explorar conceitos de espaços de medida não atômica, medida ressonante, além de algumas propriedades que serão de suma importância para os espaços de Lorentz e Lorentz-Sobolev nos Capítulos 2 e 3. Encerraremos esse capítulo com a operação $**$ que será bastante discutida nos espaços de Lorentz no capítulo 2. Assumiremos que (Ω, Σ, μ) é um espaço de medida σ -finito, f e g são funções Σ -mensuráveis em Ω . Algumas vezes, escreveremos Ω em vez de (Ω, Σ, μ) . Assumiremos também que uma função é crescente quando for não decrescente, respectivamente será decrescente quando for não crescente.

1.1 Função Distribuição

O objetivo desta seção será introduzir o conceito de função distribuição e provar algumas propriedades sobre tal função.

Definição 1.1. A função distribuição μ_f de uma função f é definida por

$$\begin{aligned}\mu_f : [0, \infty) &\longrightarrow [0, \infty] \\ \lambda &\longmapsto \mu_f(\lambda) = \mu(\{x \in \Omega; |f(x)| > \lambda\}).\end{aligned}$$

Observe que μ_f depende apenas do valor absoluto $|f|$ de f e μ_f pode assumir valor ∞ .

Teorema 1.1. *Sejam f e g duas funções Σ -mensuráveis em Ω . Então,*

1. Preliminares

- i) μ_f é decrescente e contínua à direita;
- ii) Se $|f(x)| \leq |g(x)|$ para $x \in \Omega$ $\mu - a.e.$, então $\mu_f(\lambda) \leq \mu_g(\lambda)$ para todo $\lambda \geq 0$;
- iii) $\mu_{f+g}(\lambda_1 + \lambda_2) \leq \mu_f(\lambda_1) + \mu_g(\lambda_2)$ para quaisquer $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$;
- iv) $\mu_{fg}(\lambda_1 \lambda_2) \leq \mu_f(\lambda_1) + \mu_g(\lambda_2)$ para quaisquer $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$;
- v) Se $|f(x)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf |f_n(x)|$ para $x \in \Omega$ $\mu - a.e.$, então $\mu_f(\lambda) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \mu_{f_n}(\lambda)$ para qualquer $\lambda \geq 0$.

Em particular,

$$|f_n(x)| \uparrow |f(x)| \mu - a.e. \text{ em } \Omega \implies \mu_{f_n}(\lambda) \uparrow \mu_f(\lambda).$$

Demonstração.

- i) Sejam λ_1, λ_2 quaisquer tais que $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2$. Então

$$\{x \in \Omega; |f(x)| > \lambda_2\} \subset \{x \in \Omega; |f(x)| > \lambda_1\}.$$

Logo,

$$\mu_f(\lambda_2) \leq \mu_f(\lambda_1),$$

o que prova que μ_f é decrescente.

Mostremos agora a continuidade à direita de μ_f .

Seja,

$$A_\lambda = \{x \in \Omega; |f(x)| > \lambda\},$$

e fixe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ qualquer e como $\mathbb{N}$ é enumerável, tome a sequência $(A_{\lambda_0 + \frac{1}{n}})$.

Observe que

$$A_{\lambda_0} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_{\lambda_0 + \frac{1}{n}}).$$

De fato,

$$\{x \in \Omega; |f(x)| > \lambda_0 + \frac{1}{n}\} \subset \{x \in \Omega; |f(x)| > \lambda_0\}.$$

Daí,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_{\lambda_0 + \frac{1}{n}}) \subset A_{\lambda_0}.$$

No entanto, seja $x \in A_{\lambda_0} = \{x \in \Omega; |f(x)| > \lambda_0\}$ então $|f(x)| = \lambda_0 + c$ onde $c > 0$, segue que

$$|f(x)| > \lambda_0 + \frac{1}{n}$$

1. Preliminares

para algum $n \in \mathbb{N}$, logo

$$A_{\lambda_0} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_{\lambda_0 + \frac{1}{n}}).$$

Note que $(A_{\lambda_0 + \frac{1}{n}})$ é uma sequência crescente pois, quando n cresce $(\lambda_0 + \frac{1}{n})$ decresce e assim, $(A_{\lambda_0 + \frac{1}{n}})$ cresce.

Como

$$\mu_f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{\lambda_0 + \frac{1}{n}}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_f(A_{\lambda_0 + \frac{1}{n}}) = \mu_f(A_{\lambda_0})$$

Segue que,

$$\mu_f\left(\lambda_0 + \frac{1}{n}\right) = \mu_f(A_{\lambda_0 + \frac{1}{n}}) \longrightarrow \mu_f(A_{\lambda_0}) = \mu_f(\lambda_0)$$

Portanto μ_f é contínua à direita.

ii) Se $|f(x)| \leq |g(x)|$ para $x \in \Omega$ $\mu - a.e.$ Então,

$$\{x \in \Omega; |g(x)| > \lambda\} \subset \{x \in \Omega; |f(x)| > \lambda\}.$$

Logo,

$$\mu_g(\lambda) \leq \mu_f(\lambda)$$

para todo $\lambda \geq 0$.

iii) Observe que

$$\{x \in \Omega; |f(x) + g(x)| > \lambda_1 + \lambda_2\} \subset \{x \in \Omega; |f(x)| > \lambda_1\} \cup \{x \in \Omega; |g(x)| > \lambda_2\}$$

pois, se $a \in \{x \in \Omega; |f(x) + g(x)| > \lambda_1 + \lambda_2\}$ segue que,

$$|f(a)| + |g(a)| \geq |f(a) + g(a)| > \lambda_1 + \lambda_2.$$

Suponha que $|f(a)| \leq \lambda_1$. Então

$$|g(a)| > \lambda_1 - |f(a)| + \lambda_2$$

o que implica que

$$|g(a)| > \lambda_2.$$

Logo, $a \in \{x \in \Omega; |f(x)| > \lambda_1\} \cup \{x \in \Omega; |g(x)| > \lambda_2\}$.

De forma análoga temos o caso $|g(a)| \leq \lambda_2$.

Portanto,

$$\mu_{f+g}(\lambda_1 + \lambda_2) \leq \mu_f(\lambda_1) + \mu_g(\lambda_2).$$

iv) Temos que,

$$\{x \in \Omega; |f(x)g(x)| > \lambda_1\lambda_2\} \subset \{x \in \Omega; |f(x)| > \lambda_1\} \cup \{x \in \Omega; |g(x)| > \lambda_2\},$$

pois se $a \in \{x \in \Omega; |f(x) + g(x)| > \lambda_1\lambda_2\}$ suponha que $|f(a)| \leq \lambda_1$.

Como,

$$|f(a)g(a)| = |f(a)||g(a)| > \lambda_1\lambda_2,$$

isto é,

$$|g(a)| > \frac{\lambda_1}{|f(a)|}\lambda_2,$$

segue que

$$|g(a)| > \lambda_2.$$

Caso $|g(a)| \leq \lambda_2$ o resultado é análogo. O caso onde $|f(a)|$ ou $|g(a)| = 0$ é óbvio. Portanto, o resultado segue.

v) Seja $A_n = \{x \in \Omega; |f_n(x)| > \lambda\}$ para $n = 1, 2, 3, \dots$

Pela definição de $\liminf$ temos

$$\liminf |f_n(x)| = \sup_{m \in \mathbb{N}} \inf_{n > m} |f_n(x)| \quad \forall x \in \Omega \quad \mu - ae.$$

Por hipótese,

$$|f(x)| \leq \liminf |f_n(x)| = \sup_{m \in \mathbb{N}} \inf_{n > m} |f_n(x)| \quad \forall x \in \Omega \quad \mu - ae.$$

Então,

$$\forall x \in \Omega \text{ tal que } |f(x)| > \lambda, \text{ existe } m \in \mathbb{N} \text{ tal que } |f_n(x)| > \lambda \quad \forall n > m.$$

Assim,

$$A_\lambda \subset \liminf A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \left[\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n \right].$$

É claro que $\{\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n\}_{m=1}^{\infty}$ é crescente e para $m \geq 1$ temos

$$\mu\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n\right) \leq \inf_{n \geq m} \mu(A_n) \leq \sup_{m \in \mathbb{N}} \inf_{n > m} \mu(A_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \mu_f(\lambda) &= \mu(A_\lambda) \\
 &\leq \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \left[\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n\right]\right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n\right) \\
 &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \\
 &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_{f_n}(\lambda).
 \end{aligned}$$

Para o caso particular,

$$\liminf f_n(x) = \sup \inf f_n(x) = \lim f_n(x) = f(x).$$

Logo,

$$\mu_f(\lambda) \leq \liminf \mu_{f_n}(\lambda), \forall \lambda \geq 0.$$

Por outro lado,

$$|f_n(x)| \leq |f(x)|, \forall x \in \Omega \implies \mu_{f_n}(\lambda) \leq \mu_f(\lambda), \forall \lambda \geq 0$$

e assim,

$$\inf \mu_{f_n}(\lambda) \leq \mu_f(\lambda), \forall \lambda \geq 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

o que significa que,

$$\sup \inf \mu_{f_n}(\lambda) \leq \mu_f(\lambda), \forall \lambda \geq 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$\liminf \mu_{f_n}(\lambda) \leq \mu_f(\lambda), \forall \lambda \geq 0.$$

Portanto,

$$\liminf \mu_{f_n}(\lambda) = \mu_f(\lambda), \forall \lambda \geq 0.$$

□

1.2 Rearranjamento Decrescente

Nesta seção, introduziremos a definição de rearranjamento decrescente e algumas propriedades importantes.

Definição 1.2. O rearranjamento decrescente de f é a função

$$\begin{aligned} f^* : [0, \infty) &\longrightarrow [0, \infty] \\ t &\longmapsto f^*(t) = \inf\{\lambda \geq 0; \mu_f(\lambda) \leq t\} \end{aligned}$$

onde usaremos a convenção $\inf \emptyset = \infty$.

Note que, se μ_f é estritamente decrescente então f^* é claramente o inverso de μ_f . O teorema a seguir mostra que o rearranjamento decrescente também é uma função distribuição com respeito à medida de Lebesgue no intervalo $[0, \infty)$ e portanto valem todas as propriedades do Teorema 1.1 acima.

Teorema 1.2. A equação

$$f^*(t) = m(\{\lambda \in \mathbb{R}; \mu_f(\lambda) > t\}) = m_{\mu_f}(t)$$

vale, onde $t \geq 0$ e m é a medida de Lebesgue.

Demonstração. Seja

$$s = \sup\{\lambda \geq 0; \mu_f(\lambda) > t\}.$$

Como μ_f é decrescente pelo Teorema 1.1 temos que $t < \mu_f(s) \leq \mu_f(\lambda) \forall 0 \leq \lambda < s$, e assim,

$$m(\{\lambda \geq 0; \mu_f(\lambda) > t\}) = s = \sup\{\lambda \geq 0; \mu_f(\lambda) > t\}.$$

Veja que $f^*(t) = \inf\{\lambda \geq 0; \mu_f(\lambda) \leq t\} = \sup\{\lambda \geq 0; \mu_f(\lambda) > t\}$, pois como

$$s = \sup\{\lambda \geq 0; \mu_f(\lambda) > t\},$$

então para todo $\lambda > s$, teremos $\mu_f(\lambda) \leq t$ e consequentemente,

$$f^*(t) = \inf\{\lambda \geq 0; \mu_f(\lambda) \leq t\} = s = \sup\{\lambda \geq 0; \mu_f(\lambda) > t\}.$$

Portanto,

$$f^*(t) = \sup\{\lambda \geq 0; \mu_f(\lambda) > t\} = m(\{\lambda \geq 0; \mu_f(\lambda) > t\}) = m_{\mu_f}(t).$$

□

Teorema 1.3. *As seguintes propriedades valem:*

$$i) \quad f^*(t) > \lambda \iff \mu_f(\lambda) > t;$$

ii) f e f^* são equimensuráveis, ou seja,

$$\mu(\{x \in \Omega; |f(x)| > \lambda\}) = m(\{t > 0; f^*(t) > \lambda\}),$$

para todo $\lambda \geq 0$ onde m é a medida de Lebesgue.

iii) Se $\lambda \geq 0$ e $\mu_f(\lambda) < \infty$, então $f^*(\mu_f(\lambda)) \geq \lambda$ e $f^*(\mu_f(\lambda) + \varepsilon) \leq \lambda \forall 0 < \varepsilon < f^*(t)$.
Se $t \geq 0$ e $f^*(t) < \infty$, então $\mu_f(f^*(t)) \leq t$ e $\mu_f(f^*(t) - \varepsilon) \geq t \forall \varepsilon > 0$.

iv) Para $0 < p < \infty$,

$$(|f|^p)^* = f^*(t)^p.$$

v) Se $A \in \Sigma$, então $(f\chi_A)^* \leq f^*(t)\chi_{[0, \mu(A))} \forall t \geq 0$.

Demonstração.

i) $\Rightarrow$) Seja $f^*(t) = \lambda_0$, e por hipótese $\lambda_0 = \inf\{s \geq 0; \mu_f(s) \leq t\} > \lambda$. Como $\mu_f(\lambda)$ é decrescente, então para todo $\lambda \leq \lambda_0$ teremos $\mu_f(\lambda) > t$, caso contrário λ_0 não seria o ínfimo.

Suponhamos agora que $\mu_f(\lambda) > t$. Sabemos que μ_f é decrescente e consequentemente $\lambda < \inf\{s \geq 0; \mu_f(s) \leq t\}$ pois, caso contrário teríamos $\mu_f(\lambda) \leq t$, o que seria um absurdo.

ii) O resultado é imediato do item i) pois,

$$\begin{aligned} m_{f^*}(\lambda) &= m(\{t \geq 0; f^*(t) > \lambda\}) \\ &= m(\{t \geq 0; \mu_f(\lambda) > t\}) \\ &= m([0, \mu_f(\lambda))) \\ &= \mu_f(\lambda). \end{aligned}$$

iii) Suponhamos que $\mu_f(\lambda) < \infty$. Como μ_f é decrescente, segue que $\mu_f(s) \leq \mu_f(\lambda)$ implica $s \geq \lambda$, concluimos que

$$f^*(\mu_f(\lambda)) = \inf\{s \geq 0; \mu_f(s) \leq \mu_f(\lambda)\} \geq \lambda.$$

Seja, $\epsilon > 0$ arbitrário, assim,

$$f^*(\mu_f(\lambda) + \epsilon) = \inf\{s \geq 0; \mu_f(s) \leq \mu_f(\lambda) + \epsilon\} \leq \lambda.$$

Seja agora, $t \geq 0$ e $f^*(t) < \infty$. Então, pela continuidade de μ_f à direita,

$$\mu_f(f^*(t)) = \mu(\inf\{\lambda \geq 0; \mu_f(\lambda) \leq t\}) \leq t.$$

Considere, $\epsilon > 0$, e por *ii*) obtemos que,

$$\begin{aligned} \mu_f(f^*(t) - \epsilon) &= \mu(\{x \in \Omega; |f(x)| > f^*(t) - \epsilon\}) \\ &= m(\{s > 0; f^*(s) > f^*(t) - \epsilon\}) \geq t. \end{aligned}$$

iv) Seja $0 < p < \infty$, então

$$\begin{aligned} (|f(x)|^p)^*(t) &= \inf\{\lambda \geq 0; \mu_{|f|^p}(\lambda) \leq t\} \\ &= \inf\{\lambda \geq 0; \mu(\{x \in \Omega; (|f(x)|)^p > \lambda\}) \leq t\} \\ &= \inf\{s^p \geq 0; \mu(\{x \in \Omega; |f(x)| > s\}) \leq t\} \\ &= f^*(t)^p \end{aligned}$$

onde $s = \lambda^{\frac{1}{p}}$.

v) Considere $A \in \Sigma$, como $|f\chi_A(x)| \leq |f(x)|, \forall x \in \Omega$, então temos pelo item *ii*) do Teorema 1.1 que $\mu_{f\chi_A}(\lambda) \leq \mu_f(\lambda), \forall \lambda \geq 0$.

Suponhamos que $t < \mu(A)$, segue pelo Teorema 1.2 que,

$$\begin{aligned} (f\chi_A)^*(t) &= m_{\mu_{f\chi_A}}(\lambda) \\ &= m(\{\lambda \geq 0; \mu_{f\chi_A}(\lambda) > t\}) \\ &\leq m(\{\lambda \geq 0; \mu_f(\lambda) > t\}) \\ &= m_{\mu_f}(t) \\ &= f^*(t) \\ &= f^*\chi_{[0, \mu(A)]}(t). \end{aligned}$$

Por outro lado, $\mu(\{x \in \Omega; |f\chi_A(x)| > \lambda\}) \leq \mu(A)$, daí se $t \geq \mu(A)$ então

$$\begin{aligned} (f\chi_A)^*(t) &= \inf\{\lambda \geq 0; \mu_{f\chi_A}(\lambda) \leq t\} \\ &= \inf\{\lambda \geq 0; \mu(\{x \in \Omega; |f\chi_A(x)| > \lambda\}) \leq t\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$(f\chi_A)^*(t) = 0 = f^*(t)\chi_{[0, \mu(A)]}(t)$$

para todo $t \geq \mu(A)$. Portanto,

$$(f\chi_A)^*(t) \leq f^*(t)\chi_{[0, \mu(A))}(t) \quad \forall t \geq 0.$$

□

Observação 1.1. Note que no item *ii*) a desigualdade não valeria se fosse,

$$\mu(\{x \in \Omega; |f(x)| \geq \lambda\}) = m(\{t > 0; f^*(t) \geq \lambda\}).$$

Pois, considere

$$f(x) = \frac{x}{x+1}.$$

Então,

$$\begin{aligned} f^*(t) &= \inf\{\lambda \geq 0; \mu(\{x \in \Omega; |f(x)| > \lambda\}) \leq t\} \\ &= \inf\{\lambda \geq 0; \mu(\{x \in \Omega; |\frac{x}{x+1}| > \lambda\}) \leq t\} \\ &\equiv 1 \end{aligned}$$

e,

$$\mu(\{x \in \Omega; |\frac{x}{x+1}| \geq 1\}) = 0 \neq \infty = m(\{t \in \mathbb{R}; |f^*(t)| \geq 1\}).$$

Teorema 1.4 (Unicidade). *O rearranjo decrescente de uma função mensurável f é único.*

Demonstração. Mostraremos que se existem duas funções decrescentes contínuas à direita e equimensuráveis com f então elas são iguais. Sejam então f_1^* e f_2^* tais funções e suponhamos $f_1^*(t_0) \neq f_2^*(t_0)$ para algum $t_0 \in \mathbb{R}$. Suponhamos ainda que,

$$f_1^*(t_0) > f_2^*(t_0).$$

Seja $\epsilon > 0$ tal que $f_1^*(t_0) > f_2^*(t_0) + \epsilon$.

Como, $f_1^*(t)$ é contínua à direita, existe um intervalo não vazio $[t_0, t_1]$ tal que $f_1^*(t) > f_2^*(t_0) + \epsilon, \forall t \in [t_0, t_1]$. Sabemos que f_1^* e f_2^* são decrescentes, logo

$$f_1^*(t) > f_2^*(t_0) + \epsilon, \forall t \in [0, t_1]$$

assim,

$$m(\{t \geq 0; f_1^*(t) > f_2^*(t_0) + \epsilon\}) \geq m([0, t_1]) = t_1.$$

No entanto,

$$f_2^*(t) \geq f_2^*(t_0), \quad \forall t \in [0, t_0].$$

O que implica que

$$m(\{t \geq 0; f_2^*(t) > f_2^*(t_0) + \epsilon\}) < t_1.$$

Isto contradiz a equimensurabilidade de f pelo item *ii*) do Teorema 1.3 e concluimos que,

$$f_1^*(t) = f_2^*(t) \quad \forall t \geq 0.$$

□

Teorema 1.5. *Valem as desigualdades :*

$$i) \quad (f + g)^*(t_1 + t_2) \leq f^*(t_1) + g^*(t_2) \quad \forall t_1, t_2 \geq 0;$$

$$ii) \quad (fg)^*(t_1 + t_2) \leq f^*(t_1)g^*(t_2) \quad \forall t_1, t_2 \geq 0;$$

Em particular,

$$(f + g)^*(t) \leq f^*\left(\frac{t}{2}\right) + g^*\left(\frac{t}{2}\right)$$

e,

$$(fg)^*(t) \leq f^*\left(\frac{t}{2}\right)g^*\left(\frac{t}{2}\right) \quad \forall t \geq 0.$$

Demonstração. Se $f^*(t_1) + g^*(t_2) = \infty$, então não temos o que provar. Caso, $f^*(t_1) + g^*(t_2) < \infty$ então, $f^*(t_1) < \infty$ e $g^*(t_2) < \infty$.

Sejam, $\lambda_1 = f^*(t_1)$ e $\lambda_2 = g^*(t_2)$, temos pelo item *iii*) do Teorema 1.3 que,

$$\mu(f^*(t_1)) = \mu_f(\lambda_1) \leq t_1,$$

e

$$\mu(g^*(t_2)) = \mu_g(\lambda_2) \leq t_2.$$

Usando o item *iii*) do Teorema 1.1 obtemos que

$$\mu_{f+g}(\lambda_1 + \lambda_2) \leq \mu_f(\lambda_1) + \mu_g(\lambda_2) \leq t_1 + t_2.$$

Segue diretamente da definição de rearranjo decrescente

$$\begin{aligned} (f + g)^*(t_1 + t_2) &= \inf\{\lambda \geq 0; \mu_{f+g}(\lambda) \leq t_1 + t_2\} \\ &\leq \lambda_1 + \lambda_2 \\ &= f^*(t_1) + g^*(t_2). \end{aligned}$$

Suponhamos agora $f^*(t_1)g^*(t_2) < \infty$. Pelo item *iv*) do Teorema 1.1 e pelo item *iii*) do Teorema 1.3 temos

$$\mu_{f+g}(\lambda_1\lambda_2) \leq \mu_f(\lambda_1) + \mu_g(\lambda_2) \leq t_1 + t_2.$$

Pela definição de rearranjo decrescente,

$$\begin{aligned} (fg)^*(t_1 + t_2) &= \inf\{\lambda \geq 0; \mu_{fg}(\lambda) \leq t_1 + t_2\} \\ &\leq \lambda_1\lambda_2 \\ &= f^*(t_1)g^*(t_2). \end{aligned}$$

Tome $t_1 = t_2 = \frac{t}{2}$ então

$$\begin{aligned} (f + g)^*(t) &= (f + g)^*\left(\frac{t}{2} + \frac{t}{2}\right) \\ &\leq f^*\left(\frac{t}{2}\right) + g^*\left(\frac{t}{2}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (fg)^*(t) &= (f + g)^*\left(\frac{t}{2} + \frac{t}{2}\right) \\ &\leq f^*\left(\frac{t}{2}\right)g^*\left(\frac{t}{2}\right). \end{aligned}$$

□

Observação 1.2. $(f + g)^*(t) \leq f^*(t) + g^*(t)$ e $(fg)^*(t) \leq f^*(t)g^*(t)$ não valem em geral.

De fato. Sejam A e B conjuntos mensuráveis tais que $A \cap B \neq \emptyset$ e $0 < \mu(A) < \mu(B)$. Sejam

$$f(x) = \chi_A(x) \text{ e } g(x) = \chi_B(x).$$

Então, da definição de rearranjo decrescente, temos que

$$f^*(t) = \inf\{\lambda \geq 0; \mu(\{x \in \Omega; |\chi_A(x)| > \lambda\}) \leq t\}.$$

Se $t = 0$,

$$f^*(0) = \inf\{\lambda \geq 0; \mu(\{x \in \Omega; |\chi_A(x)| > \lambda\}) \leq 0\} = 1.$$

Se $0 < t < \mu(A)$ segue que,

$$f^*(t) = \inf\{\lambda \geq 0; \mu(\{x \in \Omega; |\chi_A(x)| > \lambda\}) \leq t\} = 1.$$

Observe que se $\lambda < 1$ então $\mu(\{x \in \Omega; |\chi_A(x)| > \lambda\}) = \mu(A) > t$.

Se $t \geq \mu(A)$,

$$f^*(t) = 0.$$

Logo,

$$f^*(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq t < \mu(A) \\ 0, & \text{se } t \geq \mu(A). \end{cases}$$

Da mesma forma,

$$g^*(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq t < \mu(B) \\ 0, & \text{se } t \geq \mu(B). \end{cases}$$

Portanto,

$$f^*(t) + g^*(t) = \begin{cases} 2, & \text{se } 0 \leq t < \mu(A) \\ 1, & \text{se } \mu(A) \leq t \leq \mu(B) \\ 0, & \text{se } t \geq \mu(B). \end{cases}$$

Como $(f + g)(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x)$, então

$$(f + g)^*(t) = \inf\{\lambda \geq 0; \mu(\{x \in \Omega; |\chi_A(x) + \chi_B(x)| > \lambda\}) \leq t\}.$$

Caso $0 \leq t < \mu(A \cap B)$,

$$(f + g)^*(t) = 2,$$

Pois, se $(f + g)^*(t) < 2$ teríamos

$$\mu(\{x \in \Omega; |\chi_A(x) + \chi_B(x)| > \lambda\}) = \mu(A \cap B) > t.$$

Se $\mu(A \cap B) \leq t < \mu(A \cup B)$,

$$(f + g)^*(t) = 1.$$

Se $t \geq \mu(A \cup B)$,

$$(f + g)^*(t) = 0,$$

i.e.,

$$(f + g)^*(t) = \begin{cases} 2, & \text{se } 0 \leq t < \mu(A \cap B) \\ 1, & \text{se } \mu(A \cap B) \leq t < \mu(A \cup B) \\ 0, & \text{se } t \geq \mu(A \cup B). \end{cases}$$

Para o caso do produto, o resultado é de forma análoga.

1.3 Exemplos de Função Distribuição e Rearranjamento Decrescente

Nesta seção abordaremos alguns exemplos de função distribuição e rearranjo decrescente, no qual iniciaremos com a função característica. Tais exemplos serão utilizados em seções seguintes.

Exemplo 1.1. Seja φ uma função simples na forma, $\varphi(x) = \sum_{j=1}^k a_j \chi_{E_j}(x)$

onde,

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_k > 0, E_j = \{x \in \Omega; \varphi(x) = \alpha_j\}.$$

Então,

$$\mu_\varphi(\lambda) = \mu(\{x \in \Omega; |\varphi(x)| > \lambda\}) = \mu(\{x \in \Omega; \sum_{j=1}^k a_j \chi_{E_j}(x) > \lambda\}).$$

Daí se $\lambda \in [\alpha_2, \alpha_1)$ segue que,

$$\begin{aligned} \mu_\varphi(\lambda) &= \mu(\{x \in \Omega; \sum_{j=1}^k a_j \chi_{E_j}(x) > \lambda\}) \\ &= \mu(E_1). \end{aligned}$$

Se $\lambda \in [\alpha_3, \alpha_2)$ temos

$$\begin{aligned} \mu_\varphi(\lambda) &= \mu(\{x \in \Omega; \sum_{j=1}^k a_j \chi_{E_j}(x) > \lambda\}) \\ &= \mu(E_1) + \mu(E_2). \end{aligned}$$

Seguindo esse procedimento, e se $\lambda \in [\alpha_{j+1}, \alpha_j)$ teremos

$$\mu_\varphi(\lambda) = \sum_{i=1}^j \mu(E_i).$$

Considere

$$\beta_j = \sum_{i=1}^j \mu(E_i) \text{ e } F_j = [\alpha_{j+1}, \alpha_j), \text{ com } j = 1, 2, 3, \dots, k \text{ e } \alpha_{k+1} = 0.$$

Note que se $\lambda \in [\alpha_{j+1}, \alpha_j)$, então

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^k \beta_j \chi_{F_j}(\lambda) &= \beta_1 \chi_{[\alpha_2, \alpha_1)}(\lambda) + \beta_2 \chi_{[\alpha_3, \alpha_2)}(\lambda) + \cdots + \beta_j \chi_{[\alpha_{j+1}, \alpha_j)}(\lambda) + \cdots + \beta_k \chi_{[\alpha_{k+1}, \alpha_k)}(\lambda) \\
 &= \mu(E_1) \chi_{[\alpha_2, \alpha_1)}(\lambda) + \sum_{i=1}^2 \mu(E_i) \chi_{[\alpha_3, \alpha_2)}(\lambda) + \cdots + \\
 &\quad + \sum_{i=1}^j \mu(E_i) \chi_{[\alpha_{j+1}, \alpha_j)}(\lambda) + \cdots + \sum_{i=1}^k \mu(E_i) \chi_{[\alpha_{k+1}, \alpha_k)}(\lambda) \\
 &= 0 + 0 + \cdots + \sum_{i=1}^j \mu(E_i) \chi_{[\alpha_{j+1}, \alpha_j)}(\lambda) + 0 + \\
 &\quad + \cdots + 0 \\
 &= \sum_{i=1}^j \mu(E_i) \chi_{[\alpha_{j+1}, \alpha_j)}(\lambda) \\
 &= \mu_\varphi(\lambda).
 \end{aligned}$$

Portanto, a função distribuição de uma função simples também é uma função simples. Vejamos agora, o seu rearranjo decrescente. Por definição,

$$\begin{aligned}
 \varphi^*(t) &= \inf\{\lambda \geq 0; \mu_\varphi(\lambda) \leq t\} \\
 &= \inf\{\lambda \geq 0; \mu(\{x \in \Omega; \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{E_j}(x) > \lambda\}) \leq t\}.
 \end{aligned}$$

Considere $\beta_0 = 0$ e $t \in [\beta_0, \beta_1)$, ou seja, $0 \leq t < \mu(E_1)$. Assim,

$$\begin{aligned}
 \varphi^*(t) &= \inf\{\lambda \geq 0; \mu_\varphi(\lambda) \leq t\} \\
 &= \alpha_1.
 \end{aligned}$$

Se $t \in [\beta_1, \beta_2)$ então,

$$\begin{aligned}
 \varphi^*(t) &= \inf\{\lambda \geq 0; \mu_\varphi(\lambda) \leq t\} \\
 &= \alpha_2.
 \end{aligned}$$

Seguindo esse procedimento para $t \in [\beta_j - 1, \beta_j)$ segue que,

$$\begin{aligned}\varphi^*(t) &= \inf\{\lambda \geq 0; \mu_\varphi(\lambda) \leq t\} \\ &= \alpha_j.\end{aligned}$$

Assim podemos escrever,

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{[\beta_j-1, \beta_j)}(t).$$

Concluimos que o rearranjo decrescente de uma função simples também é uma função simples.

Exemplo 1.2. Seja $\Omega = [0, \infty)$, $\Sigma =$ todos os subconjuntos mensuráveis a Lebesgue de Ω . Seja, $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - (x - 1)^2, & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

Se $0 \leq \lambda < 1$. Então, onde, $1 - (x - 1)^2 > \lambda$ teremos $1 - \sqrt{1 - \lambda} < x < 1 + \sqrt{1 - \lambda}$.

Daí,

$$\mu_f(\lambda) = m(\{x \in \Omega; |f(x)| > \lambda\}) = 2\sqrt{1 - \lambda}.$$

Se $\lambda \geq 1$ então,

$$m(\{x \in \Omega; |f(x)| > \lambda\}) = m(\emptyset).$$

Portanto,

$$m_f(\lambda) = \begin{cases} 2\sqrt{1 - \lambda}, & \text{se } 0 \leq \lambda \leq 1 \\ 0, & \text{se } \lambda > 1. \end{cases}$$

No caso do rearranjo decrescente de f .

Se $t = 0$ então,

$$f^*(t) = 1.$$

Se $0 < t \leq 2$ temos

$$f^*(t) = 1 - \frac{t^2}{4}.$$

Caso $t > 2$ claramente $f^*(t) = 0$.

Portanto,

$$f^*(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t^2}{4}, & \text{se } 0 \leq t \leq 2 \\ 0, & \text{se } t > 2. \end{cases}$$

Observação 1.3. Um cálculo direto mostra que as integrais de f , m_f , e f^* , são as mesmas.

Exemplo 1.3. Seja $\Omega = [0, \infty)$, Σ = todos os subconjuntos mensuráveis a Lebeasgue de Ω .

Sejam, $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0 \\ \ln\left(\frac{1}{1-x}\right), & \text{se } 0 < x < 1 \\ \infty, & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ \ln\left(\frac{1}{x-2}\right), & \text{se } 2 < x < 3 \\ 0, & \text{se } x \geq 3, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} g : [0, \infty) &\rightarrow [0, \infty] \\ x &\mapsto g(x) = x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h : [0, \infty) &\rightarrow [0, \infty] \\ x &\mapsto h(x) = \frac{x}{1+x}. \end{aligned}$$

Então teremos

$$\mu_f(\lambda) = 1 + \frac{2}{e^\lambda},$$

$$f^*(t) = \begin{cases} \infty, & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ \ln\left(\frac{2}{t-1}\right), & \text{se } 1 < t < 3 \\ 0, & \text{se } t \geq 3. \end{cases}$$

A função distribuição e o rearranjo decrescente de g são $\mu_g(\lambda) = \infty$ e $g^*(t) = +\infty$ respectivamente. Para a função h ,

$$\mu_h(\lambda) = \begin{cases} \infty, & \text{se } 0 \leq \lambda < 1 \\ 0, & \text{se } \lambda \geq 1. \end{cases}$$

E por fim,

$$h^*(t) \equiv 1.$$

Observação 1.4. Note que este último exemplo mostra que uma função finita pode ter sua função distribuição ou rearranjo decrescente infinito.

Exemplo 1.4. Tome $\Omega = \mathbb{N}$, $\sum = 2^{\mathbb{N}}$ e $\mu(\{n\}) = 1$.

Considerando f uma função mensurável qualquer, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma sequência $(a_n); n = 1, 2, 3, \dots$. Assim,

$$\mu_f(\lambda) = \mu(\{x \in \Omega; |a_n| > \lambda\}) \forall \lambda \geq 0.$$

Para o rearranjo decrescente podemos, interpretar como uma sequência se definirmos,

$$a_n^* = f^*(t) \text{ para } n-1 \leq t < n,$$

ou seja,

$$a_n^* = \inf\{\lambda \geq 0; \mu_f(\lambda) \leq n-1\} = \inf\{\lambda \geq 0; \mu(\{x \in \Omega; |a_n| > \lambda\}) \leq n-1\}.$$

Portanto a sequência (a_n^*) é a sequência $(|a_n|)$ permutada em ordem decrescente.

1.4 Propriedades de Rearranjo Decrescente

O objetivo desta seção é apresentar algumas propriedades de rearranjo decrescente que serão abordadas futuramente, tais como mostrar que a norma L^p de uma função pode ser calculada por sua função distribuição ou por seu rearranjo decrescente. Provaremos também a Desigualdade de Hardy-Littlewood que diz que a integral do módulo produto de duas funções mensuráveis sobre o mesmo espaço de medida é menor ou igual à integral do produto dos seus rearranjos decrescentes. Definiremos ainda nesta seção os espaços de medida não atômico e ressonantes e abordaremos alguns problemas que até então não tínhamos um resultado satisfatório, como por exemplo mostrar onde a Desigualdade de Hardy-Littlewood vale para mais funções.

Lema 1.6. Valem as igualdades,

$$\int_{\Omega} |f(x)| d\mu = \int_0^{\infty} \mu_f(\lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} f^*(t) dt.$$

$$\sup \lambda \mu_f(\lambda) = \sup_{t>0} t f^*(t).$$

Demonstração. Começaremos provando para funções simples e depois faremos para uma função qualquer.

Seja φ uma função simples positiva, com domínio em Ω , dada na forma

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{E_j},$$

onde $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_k > 0$ e $E_i \cap E_j = \emptyset$. Pelo exemplo [1.1](#) vimos que,

$$\mu_\varphi(\lambda) = \sum_{j=1}^k \beta_j \chi_{F_j}(\lambda)$$

onde $\beta_j = \sum_{i=1}^j \mu(E_i)$ e $F_j = [\alpha_{j+1}, \alpha_j)$, com $j = 1, 2, 3, \dots, k$ e $\alpha_{k+1} = 0$. Assim, pela definição de integral de uma função simples,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mu_\varphi(\lambda) d\lambda &= \sum_{j=1}^k \beta_j m([\alpha_{j+1}, \alpha_j)) \\ &= \sum_{j=1}^k \beta_j (\alpha_j - \alpha_{j+1}) \end{aligned}$$

e como,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \beta_j (\alpha_j - \alpha_{j+1}) &= \beta_1 (\alpha_1 - \alpha_2) + \beta_2 (\alpha_2 - \alpha_3) + \dots + \beta_k (\alpha_k - \alpha_{k+1}) \\ &= \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 (\beta_2 - \beta_1) + \dots + \alpha_k (\beta_k - \beta_{k-1}), \end{aligned}$$

note que,

$$\beta_2 - \beta_1 = \mu(E_1) + \mu(E_2) - \mu(E_1) = \mu(E_2),$$

$$\beta_3 - \beta_2 = \mu(E_1) + \mu(E_2) + \mu(E_3) - \mu(E_1) - \mu(E_2) = \mu(E_3),$$

e dessa forma,

$$\beta_k - \beta_{k-1} = \mu(E_k).$$

Logo,

$$\sum_{j=1}^k \beta_j (\alpha_j - \alpha_{j+1}) = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mu(E_j).$$

Segue então que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mu_\varphi(\lambda) d\lambda &= \sum_{j=1}^k \alpha_j \mu(E_j) \\ &= \int_\Omega \varphi(x) d\mu.\end{aligned}$$

Para o caso de uma função positiva, seja $|f| \in M^+(\Omega, \Sigma)$. Sabemos que existe uma sequência (f_n) de funções simples, mensuráveis tais que $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ tal que $\lim f_n(x) = |f(x)| \forall x \in \Omega$.

Daí, utilizando o Teorema da Convergência Monótona, o item v) do Teorema 1.1 e o que foi provado para funções simples temos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(x)| d\mu &= \int_\Omega \lim f_n(x) d\mu \\ &= \lim \int_\Omega f_n(x) d\mu \\ &= \lim \int_0^\infty \mu_{f_n}(\lambda) d\lambda \\ &= \int_0^\infty \lim \mu_{f_n}(\lambda) d\lambda \\ &= \int_0^\infty \mu_f(\lambda) d\lambda.\end{aligned}$$

Utilizando o Teorema da Convergência Monótona, o item v) do Teorema 1.1, o Teorema 1.2 e o que foi provado para funções simples temos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(x)| d\mu &= \int_\Omega \lim f_n(x) d\mu \\ &= \lim \int_\Omega f_n(x) d\mu \\ &= \lim \int_0^\infty f_n^*(t) dt \\ &= \int_0^\infty \lim f_n^*(t) dt \\ &= \int_0^\infty f^*(t) dt.\end{aligned}$$

O que prova a primeira parte do teorema.

Suponhamos que exista um $\lambda_0 \in (0, \infty)$ tal que $\mu_f(\lambda_0) = \infty$. Então

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda \mu_f(\lambda) = \infty$$

e

$$\sup_{t>0} t f^*(t) \geq \sup_{t>0} t \lambda_0 = \infty.$$

Se existe $t_0 \in (0, \infty)$ tal que $f^*(t_0) = \infty$. Então,

$$\sup_{t>0} t f^*(t) = \infty$$

e

$$\mu_f(\lambda) > t_0 \quad \forall \lambda \in (0, \infty).$$

Assim, Caso exista algum $\lambda \in \{\lambda \geq 0; \mu_f(\lambda) \leq t_0\}$ então, como o domínio da função distribuição é $(0, \infty)$, teremos um $\lambda \in (0, \infty)$ tal que $\mu_f(\lambda) \leq t_0$, ou seja,

$$f^*(t_0) = \inf\{\lambda \geq 0; \mu_f(\lambda) \leq t_0\} = \infty > \lambda.$$

O que contraria a hipótese do ínfimo, logo

$$\sup_{\lambda>0} \lambda \mu_f(\lambda) > \sup_{\lambda>0} \lambda t_0 = \infty.$$

Suponhamos agora que $\mu_f(\lambda) < \infty \quad \forall \lambda$ e $f^*(t) < \infty \quad \forall t \geq 0$. Mostremos que

$$\sup_{\lambda>0} \lambda \mu_f(\lambda) \leq \sup_{t>0} t f^*(t).$$

Consideremos $\sup_{t>0} t f^*(t) < \infty$ pois, caso contrário não teríamos o que provar. Então, como $\mu_f(\lambda) < \infty \quad \forall \lambda \geq 0$ e pelo Teorema [1.3](#) (iii),

$$\sup_{t>0} t f^*(t) \geq \mu_f(\lambda) f^*(\mu_f(\lambda)) \geq \mu_f(\lambda) \lambda$$

$\forall \lambda \geq 0$. Logo,

$$\sup_{\lambda>0} \lambda \mu_f(\lambda) \leq \sup_{t>0} t f^*(t).$$

Mostremos agora que

$$\sup_{t>0} t f^*(t) \leq \sup_{\lambda>0} \lambda \mu_f(\lambda).$$

Assumindo que $\mu_f(\lambda) < \infty$, pois caso contrário não há o que provar. Por hipótese $f^*(t) < \infty \quad \forall t \geq 0$, temos pelo item iii) do Teorema [1.3](#) que

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda>0} \lambda \mu_f(\lambda) &\geq (f^*(t) - \epsilon) \mu_f(f^*(t) - \epsilon) \\ &\geq (f^*(t) - \epsilon) t, \end{aligned}$$

$\forall 0 < \epsilon < f^*(t)$ e $\forall t > 0$.

Logo,

$$\sup_{t>0} t f^*(t) \leq \sup_{\lambda>0} \lambda \mu_f(\lambda).$$

Portanto,

$$\sup_{\lambda>0} \lambda \mu_f(\lambda) = \sup_{t>0} t f^*(t).$$

□

Teorema 1.7. *Seja $0 < p < \infty$. Então,*

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu = p \int_0^{\infty} \lambda^{p-1} \mu_f(\lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} f^*(t)^p dt$$

e

$$\sup_{\lambda>0} \lambda \mu_f(\lambda)^{\frac{1}{p}} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t),$$

Além disso, para $p = \infty$ temos que,

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| = \inf\{\lambda \geq 0; \mu_f(\lambda) = 0\} = f^*(0).$$

Demonstração. Seja $0 < p < \infty$. Como f é mensurável, $|f|^p$ também é, $\forall 0 < p < \infty$, daí, pelo Lema anterior e pelo Teorema de Mudança de Variáveis obtemos que,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu &= \int_0^{\infty} \mu_{|f|^p}(\lambda) d\lambda \\ &= \int_0^{\infty} \mu(\{x \in \Omega; |f|^p > \lambda\}) dt \\ &= \int_0^{\infty} \mu_{|f|}(\lambda^{\frac{1}{p}}) d\lambda \\ &= \int_0^{\infty} \mu_f(\gamma) d(\gamma^p) \\ &= p \int_0^{\infty} \gamma^{p-1} \mu_f(\gamma) d\gamma. \end{aligned}$$

Para a segunda igualdade note que

$$|f|^p \text{ e } (f^*)^p,$$

são equimensuráveis pois, pelo item *ii*) do Teorema 1.3 temos, $|f|^p$ e $(|f|^p)^*$ são

equimensuráveis. Pelo item *iv*) do teorema 1.3, $(|f|^p)^* = (f^*)^p$. Logo,

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu = \int_0^{\infty} f^{*p} dt.$$

Provemos agora que

$$\sup \lambda \mu_f(\lambda)^{\frac{1}{p}} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t).$$

Pelo Lema 1.6 e pelo item *iv*) do Teorema 1.3 temos

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) &= \sup_{t>0} (t(f^*(t))^p)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{t>0} (t(|f|^p)^*)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{\lambda>0} (\lambda \mu_{|f|^p}(\lambda))^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{\lambda>0} (\lambda \mu_f(\lambda^{\frac{1}{p}}))^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{u>0} (u^p \mu_f(u))^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{u>0} u (\mu_f(u))^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Caso $p = \infty$: pela definição de supremo essencial e como a função distribuição é positiva, temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| &= \inf \{ \lambda \in \mathbb{R}; \mu(\{x \in \Omega; |f(x)| > \lambda\}) = 0 \} \\ &= \inf \{ \lambda \in \mathbb{R}; \mu_f(\lambda) = 0 \} \\ &= \inf \{ \lambda \in \mathbb{R}; \mu_f(\lambda) \leq 0 \} \\ &= f^*(0). \end{aligned}$$

□

O lema a seguir, servirá para provar a desigualdade de Hardy-Littlewood.

Lema 1.8. Vale a desigualdade,

$$\int_{\Omega} |f(x)| d\mu \leq \int_0^a f^* dt,$$

$\forall A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) \leq a$.

Demonstração. Considere $a < \infty$. Então pelo Lema 1.6 e pelo Teorema 1.3 item *v*)

segue que

$$\begin{aligned}
 \int_A |f(x)| d\mu &= \int_{\Omega} |f(x)\chi_A(x)| d\mu \\
 &= \int_0^{\infty} (f\chi_A)^*(t) dt \\
 &\leq \int_0^{\infty} f^*(t)\chi_{[0, \mu(A))}(t) dt \\
 &= \int_0^{\mu(A)} f^*(t) dt \\
 &\leq \int_0^a f^*(t) dt.
 \end{aligned}$$

□

Teorema 1.9 (Desigualdade de Hardy-Littlewood). *Vale a desigualdade*

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| d\mu \leq \int_0^{\infty} f^*(t)g^*(t) dt.$$

Demonstração. Caso uma das funções sejam identicamente nula, não há o que provar. Mostremos primeiro que vale para funções simples positivas e depois para uma funções positivas mensuráveis quaisquer. Seja, φ uma função simples na forma,

$$\varphi = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{E_j},$$

onde $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_k > 0$ e $E_i \cap E_j = \emptyset$ se $i \neq j$ com $i, j = 1, 2, \dots, k$. Seja $F_j = \bigcup_{i=1}^j E_i$ e $\beta_j = \alpha_j - \alpha_{j+1}$, com $\alpha_{k+1} = 0$. Se $x \in E_i$ com $i = 1, 2, \dots, n$, então, $x \in F_t \forall t \geq i$ e assim,

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^k \beta_j \chi_{F_j}(x) &= (\alpha_i - \alpha_{i+1}) + (\alpha_{i+1} - \alpha_{i+2}) + \dots + (\alpha_{k-1} - \alpha_k) + (\alpha_k - \alpha_{k+1}) \\
 &= \alpha_i.
 \end{aligned}$$

Daí, pelo exemplo [1.2](#) e pelo Lema [1.8](#) obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |\varphi(x)g(x)|d\mu &= \int_{\Omega} \left| \left(\sum_{j=1}^k \beta_j \chi_{F_j}(x) \right) g(x) \right| d\mu \\
&= \sum_{j=1}^k \beta_j \int_{F_j} |g(x)| d\mu \\
&\leq \sum_{j=1}^k \beta_j \int_0^{\mu(F_j)} g^*(t) dt \\
&= \sum_{j=1}^k (\alpha_j - \alpha_{j+1}) \int_0^{\mu(F_j)} g^*(t) dt \\
&= (\alpha_1 - \alpha_2) \int_0^{\mu(E_1)} g^*(t) dt + (\alpha_2 - \alpha_3) \int_0^{\mu(E_1 \cup E_2)} g^*(t) dt + \dots + \\
&\quad + (\alpha_k - \alpha_{k+1}) \int_0^{\mu(\bigcup_{j=1}^k E_j)} g^*(t) dt \\
&= \alpha_1 \int_0^{\mu(E_1)} g^*(t) dt + \alpha_2 \left(\int_0^{\mu(E_1 \cup E_2)} g^*(t) dt - \int_0^{\mu(E_1)} g^*(t) dt \right) + \dots + \\
&\quad + \alpha_k \left(\int_0^{\mu(\bigcup_{j=1}^k E_j)} g^*(t) dt - \int_0^{\mu(\bigcup_{j=1}^{k-1} E_j)} g^*(t) dt \right) \\
&= \alpha_1 \int_0^{\mu(E_1)} g^*(t) dt + \alpha_2 \int_{\mu(E_1)}^{\mu(E_1 \cup E_2)} g^*(t) dt + \dots + \alpha_k \int_{\mu(\bigcup_{j=1}^{k-1} E_j)}^{\mu(\bigcup_{j=1}^k E_j)} g^*(t) dt \\
&= \sum_{j=1}^k \alpha_j \int_{\gamma_{j-1}}^{\gamma_j} g^*(t) dt \\
&= \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{[\gamma_{j-1}, \gamma_j)}(t) g^*(t) dt \\
&= \int_0^{\infty} \varphi^*(t) g^*(t) dt,
\end{aligned}$$

onde $\gamma_j = \mu(\bigcup_{j=1}^k E_j)$. Para o caso onde $|f| \in M^+(\Omega, \Sigma)$ sabemos que existe uma sequência de funções mensuráveis (f_n) simples tais que $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ com $\lim f_n(x) = |f(x)|, \forall x \in \Omega$, e combinando o Teorema da Convergência Monótona, o Teorema [1.1](#) item *v*), o Teorema [1.2](#) e usando o fato que vale a desigualdade para funções simples positivas teremos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |f(x)g(x)|d\mu &= \int_{\Omega} \lim f_n(x)|g(x)|d\mu \\
&= \lim \int_{\Omega} f_n(x)|g(x)|d\mu \\
&= \lim \int_{\Omega} |f_n(x)g(x)|d\mu \\
&\leq \lim \int_0^{\infty} f_n^*(t)g^*(t)dt \\
&= \int_0^{\infty} \lim f_n^*(t)g^*(t)dt \\
&= \int_0^{\infty} f^*(t)g^*(t)dt.
\end{aligned}$$

Caso $a = \infty$, pelo Lema [1.6](#),

$$\int_A |f(x)|d\mu = \int_{\Omega} |f(x)|d\mu \leq \int_0^{\infty} f^*(t)dt.$$

□

Perceba que se aplicarmos essa desigualdade para as funções f, g e h , veremos que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |f(x)g(x)h(x)|d\mu &= \int_{\Omega} |(fg)(x)h(x)|d\mu \\
&\leq \int_0^{\infty} (f.g)^*(t)h^*(t)dt.
\end{aligned}$$

E, o resultado não vale imediatamente para mais de duas funções. Note também que se aplicarmos o Teorema [1.5](#) e usando o fato de que o rearranjo é decrescente teremos um resultado que não é satisfatório pois,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |f(x)g(x)h(x)|d\mu &\leq \int_0^{\infty} (f.g)^*(t)h^*(t)dt \\
&\leq \int_0^{\infty} f^*\left(\frac{t}{2}\right)g^*\left(\frac{t}{2}\right)h^*(t)dt.
\end{aligned}$$

Como o rearranjo é decrescente,

$$\int_0^{\infty} f^*\left(\frac{t}{2}\right)g^*\left(\frac{t}{2}\right)h^*(t)dt \geq \int_0^{\infty} f^*(t)g^*(t)h^*(t)dt.$$

Portanto, precisaremos de um resultado que seja mais forte que o Teorema [1.5](#) e para isso precisaremos de uma medida a qual chamaremos de medida não atômica que será definida a seguir e combinaremos o Lema de Hardy com um teorema que diz que a

integral do rearranjo decrescente do produto de duas funções   menor ou igual a integral do produto dos seus rearranjos decrescentes. Para provar tal teorema precisaremos do resultado que virá depois da definição de medida não-atômica.

Definição 1.3. Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida. Dizemos que μ   uma medida não atômica quando para qualquer conjunto mensurável A com $\mu(A) > 0$ existe pelo menos um subconjunto $B \subset A$ tal que $\mu(A) > \mu(B) > 0$.

Teorema 1.10. *Seja μ uma medida não atômica e seja a um número real qualquer satisfazendo $0 \leq a \leq \mu(\Omega)$. Então,*

i) *Se $\mu(\Omega) < \infty$, então existe um conjunto $A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) = a$ e*

$$\int_A |f(x)| d\mu = \int_0^a f^*(t) dt.$$

ii) *Se $\mu(\Omega) = \infty$ e $f^*(a) > \lim_{t \rightarrow \infty} f^*(t)$, então existe um conjunto $A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) = a$ e*

$$\int_A |f(x)| d\mu = \int_0^a f^*(t) dt.$$

iii) $\sup_{\mu(A)=a} \int_A |f(x)| d\mu = \int_0^a f^*(t) dt.$

Demonstração.

i) Consideremos dois casos.

Caso 1: Existe $\alpha > 0$ tal que $\mu_f(\alpha) = a$. Neste caso temos

$$f^*(a) = \inf\{\lambda \geq 0; \mu_f(\lambda) \leq a\} \leq \alpha$$

o que implica que

$$a = \mu_f(\alpha) \leq \mu_f(f^*(a)) \leq a,$$

ou seja, $a = \mu_f(f^*(a))$.

Seja

$$A = \{x \in \Omega; |f(x)| > f^*(a)\}.$$

Note que

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu(\{x \in \Omega; |f(x)| > f^*(a)\}) \\ &= \mu_f(f^*(a)) \\ &= a. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 1.3 item *ii*) f e f^* são equimensuráveis e assim,

$$\begin{aligned}\mu_{f\chi_A}(\lambda) &= \mu(\{x \in \Omega; |f\chi_A(x)| > \lambda\}) \\ &= \mu(\{x \in A; |f(x)| > \lambda\}) \\ &= \begin{cases} a, & \text{se } 0 \leq \lambda \leq f^*(a) \\ \mu_f(\lambda), & \text{se } \lambda > f^*(a). \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m_{f^*\chi_{[0,a]}}(\lambda) &= m(\{\lambda \geq 0; |f^*\chi_{[0,a]}(t)| > \lambda\}) \\ &= \begin{cases} a, & \text{se } 0 \leq \lambda \leq f^*(a) \\ m_{f^*}(\lambda), & \text{se } \lambda > f^*(a) \end{cases} \\ &= \mu_{f\chi_A}(\lambda).\end{aligned}$$

Portanto, $f^*\chi_{[0,a]}$ e $f\chi_A$ são equimensuráveis, o que implica que

$$\int_A |f(x)| d\mu = \int_0^a f^*(t) dt.$$

Caso 2: a não está na imagem de μ_f .

Como $\mu(\Omega) < \infty$, f é mensurável e μ_f é decrescente,

$$\begin{aligned}0 &= \mu(\{x \in \Omega; |f(x)| = \infty\}) \\ &= \mu(\cap_{n=1}^{\infty} \{x \in \Omega; |f(x)| > n\}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in \Omega; |f(x)| > n\}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_f(n) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mu_f(\lambda).\end{aligned}$$

Seja $\lambda_0 = f^*(a)$ e suponhamos inicialmente $\lambda_0 > 0$. Como $a > 0$ pois $a = 0$ está na imagem de μ_f basta considerar λ suficientemente grande. Segue da definição de rearranjo decrescente e o fato de que $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mu_f(\lambda) = 0$ que,

$$\lambda_0 = \inf\{\lambda \geq 0; \mu_f(\lambda) \leq a\} < \infty.$$

Daí, concluímos pelo Teorema 1.3 *iii*) que

$$\begin{aligned}\mu_f(\lambda_0) &= \mu_f(f^*(a)) \\ &< a \\ &< \mu_f(\lambda)\end{aligned}$$

para $0 < \lambda < \lambda_0$.

Assim, se a_1 denota o limite à esquerda de λ_0 que existe pois μ_f é decrescente, teremos

$$\begin{aligned}a_0 &= \mu_f(\lambda_0) \\ &< a \\ &\leq \mu_f(\lambda_0^-) \\ &= a_1.\end{aligned}$$

O que implica

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= f^*(a) \\ &= \inf\{\lambda \geq 0; \mu_f(\lambda) \leq a\} \\ &= \inf\{\lambda \geq 0; \mu_f(\lambda) \leq t \ \forall \ a_0 \leq t \leq a_1\} \\ &= f^*(t) \text{ para } a_0 \leq t < a_1.\end{aligned}$$

Note que $a_1 = \mu(\{x \in \Omega; |f(x)| \geq \lambda_0\})$. De fato, como $F = \{x \in \Omega; |f(x)| \geq \lambda_0\}$ é a interseção da sequência decrescente de conjuntos $F_n = \{x \in \Omega; |f(x)| \geq \lambda_0 - \frac{1}{n}\}$ para $n = 1, 2, \dots$. Sabemos que $\mu(\Omega) < \infty$ e assim,

$$\begin{aligned}\mu(\{x \in \Omega; |f(x)| \geq \lambda_0\}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in \Omega; |f(x)| \geq \lambda_0 - \frac{1}{n}\}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_f(\lambda_0 - \frac{1}{n}) \\ &= \mu_f(\lambda_0^-) \\ &= a_1.\end{aligned}$$

Considere $G = \{x \in \Omega; |f(x)| = \lambda_0\}$. Então

$$\begin{aligned}\mu(G) &= \mu(\{x \in \Omega; |f(x)| = \lambda_0\}) \\ &= \{x \in \Omega; |f(x)| \geq \lambda_0\} - \{x \in \Omega; |f(x)| > \lambda_0\} \\ &= a_1 - a_0.\end{aligned}$$

Como a medida é não atômica, podemos selecionar um subconjunto $B \subset G$ com medida $\mu(B) = a - a_0$. Defina agora $A = \{x \in \Omega; |f(x)| > \lambda_0\} \cup B$, isto implica que $\mu(A) = \mu_f(\lambda_0) + a - a_0 = a_0 + a - a_0 = a$. Além disso,

$$\int_A |f(x)| d\mu = \int_{\{x \in \Omega; |f(x)| > \lambda_0\}} |f(x)| d\mu + \int_B |f(x)| d\mu.$$

Sabemos que a_0 está na imagem de μ_f e pelo que foi feito no caso 1,

$$\begin{aligned}\int_{\{x \in \Omega; |f(x)| > \lambda_0\}} |f(x)| d\mu &= \int_0^{\mu(\{x \in \Omega; |f(x)| > \lambda_0\})} f^*(t) dt \\ &= \int_0^{a_0} f^*(t) dt.\end{aligned}$$

Além disso, $|f(x)| = \lambda_0$ para $x \in B$, e como vimos que $\lambda_0 = f^*(t)$ para $a_0 \leq t < a_1$, a segunda integral vale

$$\begin{aligned}\int_B |f(x)| d\mu &= \lambda_0 \mu(B) \\ &= \lambda_0 (a - a_0) \\ &= \int_{a_0}^a f^*(t) dt\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_A |f(x)| d\mu = \int_0^a f^*(t) dt.$$

Para $\lambda_0 = 0$, usando o item *iii* do Teorema [1.3](#) encontraremos $a_0 = \mu_f(0) < a$, neste caso podemos escolher um conjunto B disjunto do suporte de f tal que $\mu(B) = a - a_0$. Defina novamente, $A = \{x \in \Omega; |f(x)| > 0\} \cup B$ com $\mu(A) = a_0 + a - a_0 = a$.

Perceba que

$$\begin{aligned}f^*(t) &= \inf\{\lambda \geq 0; \mu_f(\lambda) \leq t\} \\ &= 0 \quad \forall t \geq a_0.\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\int_A |f(x)| d\mu &= \int_{\{x \in \Omega; |f(x)| > \lambda_0\}} |f(x)| d\mu + \int_B |f(x)| d\mu \\ &= \int_0^{a_0} f^*(t) dt \\ &= \int_0^a f^*(t) dt.\end{aligned}$$

O que completa a prova do item *i*).

ii) Por hipótese $f^*(a) > \lim_{t \rightarrow \infty} f^*(t) = f^*(\infty)$, logo $a < \infty$ e $\mu_f(\lambda) < \infty$ na vizinhança de $f(a)$.

Considere então, $G = \{x \in \Omega; |f(x)| > f^*(a)\}$, $H = \{x \in \Omega; |f(x)| \geq f^*(a)\}$. Observe que se existe $\alpha > 0$ tal que $\mu_f(\alpha) = a$, então pela primeira parte do item anterior $\mu_f(f^*(a)) = a$, o que implica que

$$\begin{aligned}\mu(G) &= \mu(\{x \in \Omega; |f(x)| > f^*(a)\}) \\ &= a \\ &\leq \mu(\{x \in \Omega; |f(x)| \geq f^*(a)\}) \\ &= \mu(H).\end{aligned}$$

Caso não exista $\alpha > 0$ tal que μ_f atinja. Sabemos que $\mu_f(\lambda) < \infty$ na vizinhança de $f^*(a)$, i.é., $\mu_f(f^*(a)) < \infty$ e pelo item *iii*) do Teorema 1.3 para $f^*(a) > 0$ teremos $f^*(\mu_f(f^*(a))) \geq f^*(a)$, ou seja, $\mu_f(f^*(a)) \leq a$ e como a não é atingido por μ_f , $\mu(G) = \mu_f(f^*(a)) < a$. E da mesma forma que foi feita na segunda parte do item *i*)

$$\begin{aligned}\mu(H) &= \mu(\{x \in \Omega; |f(x)| \geq f^*(a)\}) \\ &= a_1 \\ &\geq a.\end{aligned}$$

Se $f^*(a) = 0$ basta usar mais uma vez o item *iii*) do Teorema 1.3, o que nos dá, $\mu_f(f^*(a)) \leq a$ e $\mu_f(f^*(a) - \epsilon) \geq a \forall \epsilon > 0$. Logo, $\mu(G) \leq a$ e $\mu(H) \geq a$. De qualquer forma, $\mu(G) \leq a \leq \mu(H)$.

Como a medida μ é não atômica, podemos escolher um subconjunto A tal que $G \subset A \subset H$ com $\mu(A) = a$. Seguindo procedimentos análogos aos do item *i*) veremos que $f\chi_A$ e $f^*\chi_{[0,a]}$ são equimensuráveis e $(f\chi_A)^*(t) = f^*\chi_{[0,a]}(t)$. De fato, pelo item *v*) do Teorema 1.3, temos $(f\chi_A)^*(t) \leq f^*\chi_{[0,a]}(t)$. Se $t < a$, então $(f\chi_A)^*(t) = \inf\{\lambda \geq 0; \mu_{f\chi_A}(\lambda) \leq t\} \geq f^*(a)$. Pois suponhamos que $(f\chi_A)^*(t) = \lambda' < f^*(a)$. Pela definição do conjunto A , sabemos que $x \in A$ implica $|f(x)| \geq f^*(a)$ e $\mu_{f\chi_A}(\lambda') = \mu(\{x \in$

$A; |f(x)| > \lambda'\} = \mu(A) = a > t$ o que é um absurdo.

Se $x \notin A$ então, $|f(x)| \leq f^*(a) \leq (f\chi_A)^*(t)$ e

$$\begin{aligned} B &= \{x \in \Omega; |f(x)| > (f\chi_A)^*(t)\} \\ &= \{x \in A; |f(x)| > (f\chi_A)^*(t)\} \\ &= \{x \in \Omega; |f(x)\chi_A(x)| > (f\chi_A)^*(t)\}. \end{aligned}$$

Pelo item *ii*) do Teorema 1.3 obtemos

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \mu(\{x \in \Omega; |f(x)\chi_A(x)| > (f\chi_A)^*(t)\}) \\ &= m(\{s > 0; (f\chi_A)^*(s) > (f\chi_A)^*(t)\}) \\ &< t. \end{aligned}$$

Pelo item *i*) do Teorema 1.3, temos que $f^*(t) \leq (f\chi_A)^*(t)$.

Portanto, $(f\chi_A)^*(t) = f^*\chi_{[0,a]}(t)$.

A equimensurabilidade de $f\chi_A$ e $f^*\chi_{[0,a]}$ nos dá

$$\int_A |f(x)| d\mu = \int_0^a f^*(t) dt.$$

O que prova o item *ii*) pois quando $t \geq a$ temos $(f\chi_A)^*(t) = 0 = f^*\chi_{[0,a]}(t)$.

iii) Do Lema 1.8 temos imediatamente que

$$\sup_{\mu(A)=a} \int_A |f(x)| d\mu \leq \int_0^a f^*(t) dt.$$

Portanto se $f^*(a) > f^*(\infty)$, do item anterior temos a igualdade. Se $f(a) = f(\infty)$.

Sejam

$$G = \{x \in \Omega; |f(x)| > f^*(a)\}$$

e

$$H = \{x \in \Omega; |f(x)| > f^*(a) - \frac{\epsilon}{a}\},$$

onde $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno. Segue pelo item *ii*) do Teorema 1.3 que

$$\begin{aligned} \mu(G) &= \mu(\{x \in \Omega; |f(x)| > f^*(a)\}) \\ &= m(\{t \geq 0; f^*(t) > f^*(a)\}) \\ &\leq a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu(H) &= \mu(\{x \in \Omega; |f(x)| > f^*(a) - \frac{\epsilon}{a}\}) \\
&= m(\{t \geq 0; f^*(t) > f^*(a) - \frac{\epsilon}{a}\}) \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Além disso, $\mu(G) \leq a \leq \mu(H)$. Logo, existe um conjunto $A(\epsilon) = A$ tal que, $G \subset A \subset H$ e $\mu(A) = a$. Por argumentos análogos aos do item *i*), as funções $f\chi_G$ e $f^*\chi_{[0, \mu(G)]}$ são equimensuráveis. Consequentemente,

$$\int_G |f(x)| d\mu = \int_0^{\mu(G)} f^*(t) dt.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
\int_A |f(x)| d\mu &= \int_G |f(x)| d\mu + \int_{A \setminus G} |f(x)| d\mu \\
&\geq \int_0^{\mu(G)} f^*(t) dt + \int_{A \setminus G} (f^*(\infty) - \frac{\epsilon}{a}) dt \\
&= \int_0^{\mu(G)} f^*(t) dt + (f^*(\infty) - \frac{\epsilon}{a})(\mu(A) - \mu(G)) \\
&= \int_0^{\mu(G)} f^*(t) dt + (f^*(\infty) - \frac{\epsilon}{a})(a - \mu(G)) \\
&= \int_0^{\mu(G)} f^*(t) dt + f^*(\infty)(a - \mu(G)) - \epsilon + \frac{\epsilon}{a}(\mu(G)) \\
&\geq \int_0^{\mu(G)} f^*(t) dt + f^*(\infty)(a - \mu(G)) - \epsilon.
\end{aligned}$$

Se $t \in (\mu(G), a)$, neste caso,

$$\begin{aligned}
f^*(t) &= \inf\{\lambda \geq 0; \mu_f(\lambda) \leq t\} \\
&= f^*(a) \\
&= f^*(\infty).
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\int_A |f(x)| d\mu &\geq \int_0^{\mu(G)} f^*(t) dt + f^*(\infty)(a - \mu(G)) - \epsilon \\
&= \int_0^{\mu(G)} f^*(t) dt + \int_{\mu(G)}^a f^*(t) dt - \epsilon \\
&= \int_0^a f^*(t) dt - \epsilon.
\end{aligned}$$

Como ϵ é arbitrário, então vale que

$$\sup_{\mu(A)=a} \int_A |f(x)| d\mu \geq \int_0^a f^*(t) dt.$$

Deste modo,

$$\sup_{\mu(A)=a} \int_A |f(x)| d\mu = \int_0^a f^*(t) dt.$$

□

Teorema 1.11. *Seja μ uma medida não atômica. Então*

$$\int_0^a (fg)^*(t) dt \leq \int_0^a (f)^*(t) g^*(t) dt$$

para qualquer $a > 0$. Em particular,

$$\int_0^\infty (fg)^*(t) dt \leq \int_0^\infty (f)^*(t) g^*(t) dt.$$

Demonstração. considere $a < \infty$ positivo, e combinando o item *iii*) do Teorema anterior com a Desigualdade de Hardy-Littlewood e com o item *v*) do Teorema [1.3](#) vale que

$$\begin{aligned} \int_0^a (fg)^*(t) dt &= \sup_{\mu(A)=a} \int_A |(fg)(x)| d\mu \\ &= \sup_{\mu(A)=a} \int_A |f(x)g(x)| d\mu \\ &= \sup_{\mu(A)=a} \int_\Omega |f(x)g(x)\chi_A(x)| d\mu \\ &\leq \sup_{\mu(A)=a} \int_0^\infty f^*(t)(g\chi_A)^*(t) dt \\ &\leq \sup_{\mu(A)=a} \int_0^a f^*(t)(g)^*(t) dt \\ &= \int_0^a f^*(t)(g)^*(t) dt. \end{aligned}$$

Considere agora, $a = \infty$, daí pelo Lema [1.6](#) e pela desigualdade de Hardy-Littlewood

(Teorema 1.9) obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^\infty (fg)^*(t)dt &= \int_\Omega |(fg)(x)|d\mu \\ &= \int_\Omega |f(x)g(x)|d\mu \\ &\leq \int_0^\infty f^*(t)(g)^*(t)dt.\end{aligned}$$

□

Lema 1.12. (Lema de Hardy) Sejam f e g funções positivas mensuráveis a Lebesgue em $(0, \infty)$ e suponha que

$$\int_0^a f(t)dt \leq \int_0^a g(t)dt$$

para todo $a > 0$.

Seja h uma função qualquer decrescente em $(0, \infty)$. Então

$$\int_0^\infty h(t)f(t)dt \leq \int_0^\infty h(t)g(t)dt.$$

Demonstração. Provaremos primeiro para o caso de funções simples positivas.

Seja φ uma função simples na forma

$$\varphi = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{[0, a_j)}(t)$$

onde $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_k > 0$ e $a_1 > a_2 > \dots > a_k > 0$.

Desse modo,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \varphi(t)f(t)dt &= \sum_{j=1}^k \alpha_j \int_0^\infty f(t)\chi_{[0, a_j)}(t)dt \\ &= \sum_{j=1}^k \alpha_j \int_0^{a_j} f(t)dt \\ &\leq \sum_{j=1}^k \alpha_j \int_0^{a_j} g(t)dt \\ &= \int_0^\infty \varphi(t)g(t)dt.\end{aligned}$$

Para o caso geral, basta usar o Teorema da Convergência Monótona e teremos

$$\begin{aligned}\int_0^\infty h(t)f(t)dt &= \int_0^\infty \lim_{n \rightarrow \infty} h_n f(t)dt \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty h_n g(t)dt \\ &= \int_0^\infty h(t)g(t)dt.\end{aligned}$$

□

Teorema 1.13. *Seja μ uma medida não atômica e sejam f, g e h funções Σ -mensuráveis em Ω . Então*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)h(x)|d\mu \leq \int_0^\infty f^*(t)g^*(t)h^*(t)dt.$$

Demonstração. Aplicando a desigualdade de Hardy-Littlewood obtemos imediatamente que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(x)g(x)h(x)|d\mu &= \int_\Omega |f(x)(gh)(x)|d\mu \\ &\leq \int_0^\infty f^*(t)(gh)^*(t)dt.\end{aligned}$$

Temos pelo Teorema 1.11 que

$$\int_0^\infty (gh)^*(t)dt \leq \int_0^\infty g^*(t)(h)^*(t)dt$$

e segue pelo Lema anterior

$$\int_0^\infty f^*(t)(gh)^*(t)dt \leq \int_0^\infty f^*(t)(g)^*(t)h^*(t)dt.$$

Consequentemente

$$\int_\Omega |f(x)g(x)h(x)|d\mu \leq \int_0^\infty f^*(t)(g)^*(t)h^*(t)dt.$$

□

Observe que para o caso de n funções mensuráveis, basta usar o princípio da indução e o Teorema 1.13.

Uma outra pergunta interessante é se existe uma função h Σ -mensurável que é equimensurável com g e vale a igualdade

$$\int_\Omega |f(x)h(x)|d\mu = \int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt.$$

No geral, a resposta para tal questão é não, porque depende se o espaço é finito e se é ou não-atômico ou completamente atômico (onde todos os átomos tem medidas iguais). Tal espaço será chamado de ressonante. Vejamos as definições desses espaços.

Definição 1.4. Dado um espaço de medida (Ω, Σ, μ) , um conjunto $A \subset \Omega$ em Σ é chamado um átomo se $\mu(A) > 0$ e para todo $B \subset A$ mensurável tal que $\mu(B) < \mu(A)$ implica em $\mu(B) = 0$. Se existir um $B \subset A$ tal que $\mu(A) > \mu(B) > 0$ dizemos então que o conjunto A é não-atômico.

Definição 1.5. Um espaço de medida (Ω, Σ, μ) é dito ressonante se é σ -finito e ou é não atômico ou é completamente atômico onde todos os átomos tem medidas iguais.

Observação 1.5. O Teorema a seguir vale para o caso de μ ser ressonante. Provaremos apenas o caso onde μ é não atômico. O caso onde μ é completamente atômico onde todos os átomos tem medidas iguais pode ser encontrado em [2].

Teorema 1.14. Se μ é ressonante, então

$$\sup_{\tilde{g} \in \omega} \int_{\Omega} |(f)(x)\tilde{g}(x)|d\mu = \int_0^{\infty} f^*(t)g^*(t)dt$$

onde $\omega = \{\tilde{g} \in \Sigma; \mu_{\tilde{g}}(\lambda) = \mu_g(\lambda) \forall \lambda \geq 0\}$.

Além disso, se $\mu(\Omega) < \infty$, então existe uma função $\tilde{g}$ que é Σ -mensurável tal que

$$\int_{\Omega} |f(x)\tilde{g}(x)|d\mu \leq \int_0^{\infty} f^*(t)g^*(t)dt.$$

Demonstração. Consideremos f e g positivas, pois se umas das duas for nula o resultado é imediato. Como foi dito anteriormente, faremos apenas o caso onde μ é não atômica.

Seja μ não atômica com $\mu(\Omega) < \infty$. Como g é positiva, podemos encontrar uma sequência de funções (g_n) simples positivas tal que $g_n \uparrow g$. Para qualquer $n \geq 1$ fixado, podemos representar g_n por

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{D_j}(x)$$

onde $D_1 \subset D_2 \subset \dots \subset D_K$ e $\alpha_j > 0$ com $j = 1, 2, \dots, k$. Tome uma sequência de conjuntos $E_1, E_2, \dots, E_k$ tal que $\mu(E_j) = \mu(D_j)$ para $j = 1, 2, \dots, k$.

Pelo item *i*) do Teorema 1.10 para cada $\mu(D_j)$ temos,

$$\int_{E_j} f(x) = \int_0^{\mu(D_j)} f^*(t)dt.$$

Seja

$$\begin{aligned}\tilde{g}_n : \Omega &\longrightarrow [0; \infty) \\ x &\longmapsto \tilde{g}_n(x) = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{E_j}(x).\end{aligned}$$

Como $\mu(E_j) = \mu(D_j)$ para cada $j = 1, 2, \dots, k$, segue que

$$\begin{aligned}\tilde{g}_n^*(t) &= \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{[0, \mu(E_j))}(t) \\ &= \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{[0, \mu(D_j))}(t) \\ &= g_n^*(t).\end{aligned}$$

Desse modo, conseguimos uma sequência de funções $(\tilde{g}_n)$ simples tal que $\tilde{g}_n$ é equimensurável com g_n para cada $n = 1, 2, \dots, k$.

Pelo item *v)* do Teorema 1.1 e o fato que $\tilde{g} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{g}_n$, obtemos que

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{g}}(\lambda) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in \Omega; |\tilde{g}_n(x)| > \lambda\}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in \Omega; |g_n(x)| > \lambda\}) \\ &= \mu_g(\lambda).\end{aligned}$$

Consequentemente g e $\tilde{g}$ são equimensuráveis. Além disso, segue de

$$\int_{E_j} f(x) d\mu = \int_0^{\mu(E_j)} f^*(t) dt$$

que

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} f(x) \tilde{g}_n(x) d\mu &= \int_{\Omega} f(x) \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{E_j}(x) d\mu \\
 &= \sum_{j=1}^k \alpha_j \int_{E_j} f(x) d\mu \\
 &= \sum_{j=1}^k \alpha_j \int_0^{\mu(D_j)} f^*(t) dt \\
 &= \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^k f^*(t) \alpha_j \chi_{[0, \mu(D_j))}(t) dt \\
 &= \int_0^{\infty} f^*(t) g_n^*(t) dt.
 \end{aligned}$$

O que prova para g_n com $n = 1, 2, \dots, k$. Utilizando o Teorema da Convergência Monótona, o item (v) do Teorema [1.1](#) e o fato de que g e $\tilde{g}$ são equimensuráveis segue que

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} f(x) \tilde{g}(x) d\mu &= \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x) \tilde{g}_n(x) d\mu \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(x) \tilde{g}_n(x) d\mu \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f^*(t) \tilde{g}_n^*(t) dt \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f^*(t) g_n^*(t) dt \\
 &= \int_0^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f^*(t) g_n^*(t) dt \\
 &= \int_0^{\infty} f^*(t) g^*(t) dt.
 \end{aligned}$$

Suponhamos agora que $\mu(\Omega) = \infty$, com μ não atômica e $\alpha > 0$ um número real tal que,

$$\alpha < \int_0^{\infty} f^*(t) g^*(t) dt.$$

Assumindo mais uma vez que f e g são positivas. Como μ é σ -finita, podemos encontrar uma sequência (E_n) tal que $E_i \subset E_j$ se $i \neq j$ e $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, n = 1, 2, \dots$. Escolha as sequências (f_n) e (g_n) de funções simples com suporte em $E_n, n = 1, 2, \dots$ tal que $f_n \uparrow f$ e $g_n \uparrow g$.

Aplicando o Teorema [1.1](#) para rearranjo decrescente e o Teorema da Convergência Monótona, temos que

$$\int_0^\infty f_n^*(t)g_n^*(t)dt \longrightarrow \int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt.$$

Portanto, existe $n_0 \geq 1$ tal que

$$\alpha < \int_0^\infty f_{n_0}^*(t)g_{n_0}^*(t)dt.$$

Logo, (E_{n_0}, Σ, μ) é um espaço de medida finito não atômico, e aplicando a primeira parte da prova encontramos um $\hat{h}$ em E_{n_0} equimensurável $g\chi_{E_{n_0}}$ com

$$\int_{E_{n_0}} f(x)\hat{h}(x)d\mu = \int_0^\infty (f\chi_{E_{n_0}})^*(t)(g\chi_{E_{n_0}})^*(t)dt.$$

Por construção $f_{n_0} \leq f\chi_{E_{n_0}}$ e $g_{n_0} \leq g\chi_{E_{n_0}}$. Dessa maneira,

$$\begin{aligned} \alpha &< \int_0^\infty f_{n_0}^*(t)g_{n_0}^*(t)dt \\ &\leq \int_0^\infty (f\chi_{E_{n_0}})^*(t)(g\chi_{E_{n_0}})^*(t)dt \\ &= \int_{E_{n_0}} f(x)\hat{h}(x)d\mu \\ &= \int_\Omega f(x)h(x)d\mu, \end{aligned}$$

onde

$$h(x) = \begin{cases} \hat{h}(x), & \text{se } x \in E_{n_0} \\ 0, & \text{se } x \notin E_{n_0}. \end{cases}$$

Tomando

$$\tilde{g}(x) = h(x)\chi_{E_{n_0}}(x) + g(x)\chi_{E_{n_0}^c}(x); x \in \Omega,$$

claramente $\tilde{g}$ é equimensurável com g e daí,

$$\begin{aligned} \alpha &< \int_\Omega f(x)h(x)d\mu \\ &\leq \int_\Omega f(x)\tilde{g}(x)d\mu. \end{aligned}$$

A Desigualdade de Hardy-Littlewoode [1.9](#) implica que

$$\int_\Omega f(x)\tilde{g}(x)d\mu \leq \int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt$$

logo,

$$\sup \int_\Omega f(x)\tilde{g}(x)d\mu = \int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt.$$

□

1.5 Operação **

Nesta seção, definiremos a operação ** e mostraremos algumas propriedades. Tal operação será importantíssima para mostrar que o espaço de Lorentz $L(p, q)$ é um espaço vetorial normado para muitos valores de p e q .

Definição 1.6. Considere a função $f^{**} : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ dada por

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds.$$

Observação 1.6. f^{**} é também maximal entre todas as médias de f^* tomadas sobre conjuntos de medida t e é chamada de função maximal de f .

Observação 1.7. Mesmo que f^{**} com $t = 0$ não esteja incluído na definição acima, o limite com t próximo de zero pela direita, é definido para todos os rearranjos decrescentes, pois pelo Teorema [1.7](#),

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{**}(t) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds \\ &= f^*(0) \\ &= \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|. \end{aligned}$$

Teorema 1.15. *Sejam f_n funções Σ -mensuráveis em Ω , $n = 1, 2, \dots$. Então*

- i) f^{**} é decrescente e contínua em $(0, \infty)$.
- ii) $f^*(t) \leq f^{**}(t), \forall t > 0$.
- iii) Se $|f(x)| \leq |g(x)|$, para $x \in \Omega$ μ -a.e., então $f^{**} \leq g^{**}$.
- iv) Se (f_n) é uma sequência tal que $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ para $x \in \Omega$ μ -a.e., então $f_n^{**} \leq f^{**}$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{**} = f^{**}$ para qualquer $t > 0$.

Demonstração.

- i) A continuidade de f^{**} segue diretamente da continuidade da integral, logo o que precisamos provar é que f^{**} é decrescente. Sejam $t_1, t_2 \in (0, \infty)$ tal que $0 < t_1 < t_2$.

Então

$$\begin{aligned}
 f^{**}(t_2) &= \frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} f^*(s) ds \\
 &= \frac{1}{t_2} \int_0^{t_1} f^*(s) ds + \frac{1}{t_2} \int_{t_1}^{t_2} f^*(s) ds \\
 &\leq \frac{1}{t_2} \int_0^{t_1} f^*(s) ds + \frac{1}{t_2} f^*(t_1)(t_2 - t_1) \\
 &= \frac{1}{t_2} \int_0^{t_1} f^*(s) ds + \left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right) f^*(t_1) t_1 \\
 &\leq \frac{1}{t_2} \int_0^{t_1} f^*(s) ds + \left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right) \int_0^{t_1} f^*(s) ds \\
 &= \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} f^*(s) ds \\
 &= f^{**}(t_1).
 \end{aligned}$$

ii) Como f^* é decrescente, então

$$\begin{aligned}
 f^*(t) &= \frac{1}{t} f^*(t)(t - 0) \\
 &= \frac{1}{t} \int_0^t f^*(t) ds \\
 &\leq \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds \\
 &= f^{**}(t).
 \end{aligned}$$

iii) Pelo item (ii) do Teorema [1.1](#) e o Teorema [1.2](#) temos que $f^*(t) \leq g^*(t)$, $\forall t \geq 0$.

Além disso, como f^* e g^* são não negativos, segue que para $t > 0$

$$\begin{aligned}
 f^{**}(t) &= \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds \\
 &\leq \frac{1}{t} \int_0^t g^*(s) ds \\
 &= g^{**}(t).
 \end{aligned}$$

iv) utilizando o item (ii) do Teorema [1.1](#) para rearranjo decrescente com respeito à medida de Lebesgue, temos que

$$f_n^*(t) \leq f^*(t), n = 1, 2, \dots,$$

e pelo item (v) do Teorema 1.1

$$f_n^*(t) \longrightarrow f^*(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Pelo item anterior $f_n^{**}(t) \leq f^{**}(t)$, $n = 1, 2, \dots$, aplicando o Teorema da Convergência Monótona temos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{**}(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f_n^*(s) ds \\ &= \frac{1}{t} \int_0^t \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^*(s) ds \\ &= \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds \\ &= f^{**}(t), \quad \forall t > 0. \end{aligned}$$

□

Exemplo 1.5. Seja E um conjunto mensurável qualquer e seja $f = \chi_E$. Sabemos que

$$f^*(t) = \chi_{[0, \mu(E))}(t).$$

Pela definição de f^{**} obtemos

$$\begin{aligned} f^{**}(t) &= \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds \\ &= \frac{1}{t} \int_0^t \chi_{[0, \mu(E))}(s) ds \\ &= \begin{cases} 1, & \text{se } t \leq \mu(E) \\ \frac{\mu(E)}{t}, & \text{se } t > \mu(E) \end{cases} \end{aligned}$$

Exemplo 1.6. Seja ϕ uma função simples dada na forma

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{E_j}(x),$$

onde $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_k > 0$, e $E_j = \{x \in \Omega; \varphi(x) = \alpha_j\}$.

Pelo exemplo 1.1 vimos que

$$\varphi^*(t) = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{[\beta_{j-1}, \beta_j)}(t),$$

onde

$$\beta_j = \sum_{i=1}^j \mu(E_i).$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \varphi^{**}(t) &= \frac{1}{t} \int_0^t \varphi^*(s) ds \\ &= \frac{1}{t} \int_0^t \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{[\beta_{j-1}, \beta_j)}(s) ds \\ &= \frac{1}{t} \left(\int_0^t \alpha_1 \chi_{[0, \beta_1)}(s) ds + \int_0^t \alpha_2 \chi_{[\beta_1, \beta_2)}(s) ds + \cdots + \int_0^t \alpha_k \chi_{[\beta_{k-1}, \beta_k)}(s) ds \right) \end{aligned}$$

Se $t \in (0, \beta_1)$. Então,

$$\begin{aligned} \varphi^{**}(t) &= \frac{1}{t} [\alpha_1(t - 0)] \\ &= \alpha_1. \end{aligned}$$

Se tivermos $t \in [\beta_1, \beta_2)$ temos

$$\begin{aligned} \varphi^{**}(t) &= \frac{1}{t} \left(\alpha_1 \int_0^{\beta_1} ds + \alpha_2 \int_{\beta_1}^t ds \right) \\ &= \frac{1}{t} (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 (t - \beta_1)) \\ &= \frac{1}{t} [\alpha_1 \mu(E_1) + \alpha_2 (t - \mu(E_1))] \\ &= \frac{1}{t} \alpha_1 \mu(E_1) + \frac{1}{t} [\alpha_2 (t - \mu(E_1))]. \end{aligned}$$

Porém, para cada $t \in [\beta_2, \beta_3)$,

$$\begin{aligned} \varphi^{**}(t) &= \frac{1}{t} \left(\alpha_1 \int_0^{\beta_1} ds + \alpha_2 \int_{\beta_1}^{\beta_2} ds + \alpha_3 \int_{\beta_2}^t ds \right) \\ &= \frac{1}{t} (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 (\beta_2 - \beta_1) + \alpha_3 (t - \beta_2)) \\ &= \frac{1}{t} (\alpha_1 \mu(E_1) + \alpha_2 (\mu(E_1) + \mu(E_2) - \mu(E_1)) + \alpha_3 (t - (\mu(E_1) + \mu(E_2)))) \\ &= \frac{1}{t} \sum_{j=1}^2 \alpha_j \mu(E_j) + \frac{\alpha_3}{t} \left(t - \sum_{j=1}^2 \mu(E_j) \right). \end{aligned}$$

Seguindo esse procedimento para $t \in [\beta_{m-1}, \beta_m)$, $m = 1, 2, \dots, k$ resulta que

$$\varphi^{**}(t) = \frac{1}{t} \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j \mu(E_j) + \frac{\alpha_m}{t} \left(t - \sum_{j=1}^{m-1} \mu(E_j) \right).$$

Por fim, caso $t > \beta_k$ temos

$$\varphi^{**}(t) = \frac{1}{t} \sum_{j=1}^k \alpha_j \mu(E_j).$$

Portanto,

$$\varphi^{**}(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j \mu(E_j) + \frac{\alpha_m}{t} \left(t - \sum_{j=1}^{m-1} \mu(E_j) \right), & \text{se } \beta_{m-1} < t \leq \beta_m \text{ com } m = 1, 2, \dots, k \\ \frac{1}{t} \sum_{j=1}^k \alpha_j \mu(E_j), & \text{se } t > \beta_k. \end{cases}$$

Exemplo 1.7. Seja $\Omega = [0, \infty)$, $\Sigma =$ todos os subconjuntos de Ω e m a medida de Lebesgue. Defina $f : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - (x - 1)^2, & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

Pelo exemplo 1.2 Temos que se $0 < t \leq 2$,

$$\begin{aligned} f^{**}(t) &= \frac{1}{t} \int_0^t \left(1 - \frac{s^2}{4} \right) ds \\ &= 1 - \frac{t^2}{12}. \end{aligned}$$

Caso $t > 2$,

$$\begin{aligned} f^{**}(t) &= \frac{1}{t} \int_0^2 f^*(s) ds \\ &= \frac{4}{3t}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$f^{**}(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t^2}{12}, & \text{se } 0 < t \leq 2 \\ \frac{4}{3t}, & \text{se } t > 2. \end{cases}$$

Teorema 1.16 (Subaditividade). *Se μ é uma medida ressonante. Então,*

$$(f + g)^{**}(t) \leq f^{**}(t) + g^{**}(t),$$

para todo $t > 0$.

Demonstração. Aplicando o Teorema [1.10](#) obtemos que,

$$\begin{aligned} f^{**}(t) &= \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds \\ &= \frac{1}{t} \sup_{\mu(E)=t} \int_E |f(x)| d\mu. \end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade triangular e a subaditividade do supremo segue que,

$$\begin{aligned} (f + g)^{**}(t) &= \frac{1}{t} \sup_{\mu(E)=t} \int_E |f(x) + g(x)| d\mu \\ &\leq \frac{1}{t} \sup_{\mu(E)=t} \left(\int_E |f(x)| d\mu + \int_E |g(x)| d\mu \right) \\ &\leq \frac{1}{t} \sup_{\mu(E)=t} \int_E |f(x)| d\mu + \frac{1}{t} \sup_{\mu(E)=t} \int_E |g(x)| d\mu \\ &= f^{**}(t) + g^{**}(t). \end{aligned}$$

□

Capítulo 2

Espaços de Lorentz $L(p, q)$

Neste capítulo, introduziremos na primeira seção o espaço de Lorentz $L(p, q)$ que é definido pelo conjunto das funções tal que $\|\cdot\|_{pq}$ está bem definido em $L(p, q)$. Mostraremos que este funcional satisfaz todas as propriedades de uma norma exceto a desigualdade triangular para certos valores de p e q , ou seja, é uma quasi-norma. Além disso mostraremos para quais valores de p e q o espaço $L(p, q)$ é um espaço normado com a norma definida. Na seção seguinte definiremos o funcional $\|\cdot\|_{pq}^*$ com a operação $**$ no lugar da operação $*$ e este novo funcional satisfaz a desigualdade triangular o que torna $(L(p, q), \|\cdot\|_{pq}^*)$ um espaço normado para mais valores de p e q com $\|\cdot\|_{pq}^*$ equivalente a $\|\cdot\|_{pq}$. Por fim estudaremos algumas propriedades topológicas dos espaços de Lorentz tais como mostrar para quais valores de p e q $L(p, q)$ é Banach, a separabilidade e o dual de $L(p, q)$. Os espaços de Lorentz $L(p, q)$ generalizam os espaços de Lebesgue pois $L(p, p) = L^p$ como veremos mais adiante.

2.1 Definição do Espaço de Lorentz

Definição 2.1. Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida e $0 < p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$. Então o espaço de Lorentz $L(p, q)$ é o conjunto de todas as classes de funções Σ -mensuráveis f tais que, $\|f\|_{p,q} < \infty$, onde

$$\|f\|_{p,q} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} f^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}, & \text{se } 0 < p \leq \infty, 0 < q < \infty, \\ \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t), & \text{se } 0 < p \leq \infty, 0 < q = \infty. \end{cases}$$

Observação 2.1. O caso $p = \infty$ não é interessante pois $\|f\|_{\infty,q} < \infty$ implica em $f = 0$ $\mu - a.e.$ em Ω . De fato, suponha que $L(\infty, q)$ seja um espaço não trivial. Então, existe uma função f não nula em $L(\infty, q)$, logo existe $c > 0$ e um $A \in \Sigma$ de medida positiva tal que, $|f(x)| > c \forall x \in A$.

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
 \|f\|_{\infty, q}^q &= \int_0^\infty f^*(t)^q \frac{dt}{t} \\
 &\geq \int_0^\infty (f\chi_A)^*(t)^q \frac{dt}{t} \\
 &= \int_0^\infty \inf\{\lambda \geq 0; \mu(\{x \in A; |f(x)| > \lambda\}) \leq t\}^q \frac{dt}{t} \\
 &\geq \int_0^{\mu(A)} c^q \frac{dt}{t} = \infty,
 \end{aligned}$$

o que é um absurdo. Portanto $\|f\|_{\infty, q} < \infty$ implica que $f = 0$ $\mu - a.e.$ em Ω .

Exemplo 2.1. Considere A um conjunto Σ -mensurável de medida finita. Suponhamos que $0 < p < \infty$ e $0 < q < \infty$. Assim,

$$\begin{aligned}
 \|\chi_A\|_{p, q} &= \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} \chi_{[0, \mu(A))}(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &= \left(\int_0^{\mu(A)} t^{\frac{q}{p}-1} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &= \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{1}{q}} \mu(A)^{\frac{1}{p}}.
 \end{aligned}$$

Suponhamos agora $0 < p < \infty$ e $q = \infty$. Daí,

$$\begin{aligned}
 \|\chi_A\|_{p, \infty} &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} (\chi_A)^*(t) \\
 &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} \chi_{[0, \mu(A))}(t) \\
 &= \mu(A)^{\frac{1}{p}}.
 \end{aligned}$$

Teorema 2.1. *Seja $0 < p \leq \infty$. Então $L(p, p) = L^p$, ou seja, $\|f\|_{p, p} = \|f\|_p$.*

Demonstração. Provaremos inicialmente o caso onde $0 < p < \infty$. Resulta da definição e pelo Teorema [1.7](#) que

$$\begin{aligned}
 \|f\|_{p, p} &= \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} f^*(t))^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \left(\int_0^\infty f^*(t)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \left(\int_\Omega |f|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \|f\|_p.
 \end{aligned}$$

Caso $p = \infty$, usamos o fato de f^* ser decrescente e mais uma vez o Teorema 1.7. Dessa forma

$$\begin{aligned} \|f\|_{\infty, \infty} &= \sup_{t>0} f^*(t) \\ &= f^*(0) \\ &= \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| \\ &= \|f\|_{\infty}. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.2. *O espaço de Lorentz $L(p, q)$ é um espaço linear. Além disso, se $0 < p \leq \infty$ e $0 < q \leq \infty$ então $\|\cdot\|_{pq}$ é uma quasi-norma.*

Demonstração. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f \in L(p, q)$. Então

$$\begin{aligned} (\alpha f)^*(t) &= \inf\{\lambda \geq 0; \mu(\{x \in \Omega; |\alpha f(x)| > \lambda\}) \leq t\} \\ &= \inf\{\lambda \geq 0; \mu\left(\{x \in \Omega; |f(x)| > \frac{\lambda}{|\alpha|}\}\right) \leq t\} \\ &= \inf\{|\alpha|s \geq 0; \mu(\{x \in \Omega; |f(x)| > s\}) \leq t\} \\ &= |\alpha|f^*(t). \end{aligned}$$

Suponhamos $0 < p < \infty$ e $0 < q < \infty$. Segue que,

$$\begin{aligned} \|\alpha f\|_{pq} &= \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} (\alpha f)^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= |\alpha| \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} f^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= |\alpha| \|f\|_{pq}. \end{aligned}$$

Sejam, $f, g \in L(p, q)$, aplicando o Teorema 1.5 e fazendo $u = \frac{t}{2}$ obtemos que,

$$\begin{aligned}
 \|f + g\|_{pq} &= \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}}(f + g)^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &\leq \left(\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}}(f^*\left(\frac{t}{2}\right) + g^*\left(\frac{t}{2}\right))]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &= \left(\int_0^\infty [(2u)^{\frac{1}{p}}(f^*(u) + g^*(u))]^q \frac{du}{u} \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &\leq 2^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty [2 \max(u^{\frac{1}{p}} f^*(u), u^{\frac{1}{p}} g^*(u))]^q \frac{du}{u} \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &\leq 2^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty 2^q ((u^{\frac{1}{p}} f^*(u))^q + (u^{\frac{1}{p}} g^*(u))^q) \frac{du}{u} \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &= 2^{\frac{1}{p}+1} \left(\int_0^\infty (u^{\frac{1}{p}} f^*(u))^q \frac{du}{u} + \int_0^\infty (u^{\frac{1}{p}} g^*(u))^q \frac{du}{u} \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &= 2^{\frac{1}{p}+1} (\|f\|_{pq}^q + \|g\|_{pq}^q)^{\frac{1}{q}} \\
 &\leq 2^{\frac{1}{p}+1} [2 \max(\|f\|_{pq}^q, \|g\|_{pq}^q)]^{\frac{1}{q}} \\
 &\leq 2^{\frac{1}{p}+1+\frac{1}{q}} (\|f\|_{pq} + \|g\|_{pq}).
 \end{aligned}$$

Se $0 < p \leq \infty$ e $q = \infty$,

$$\begin{aligned}
 \|\alpha f\|_{p\infty} &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}}(\alpha f)^*(t) \\
 &= |\alpha| \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t).
 \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema 1.5,

$$\begin{aligned}
 \|f + g\|_{p\infty} &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}}(f + g)^*(t) \\
 &\leq \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}}(f^*\left(\frac{t}{2}\right) + g^*\left(\frac{t}{2}\right)) \\
 &= \sup_{u>0} (2u)^{\frac{1}{p}}(f^*(u) + g^*(u)) \\
 &\leq 2^{\frac{1}{p}} (\sup_{u>0} u^{\frac{1}{p}} f^*(u) + \sup_{u>0} u^{\frac{1}{p}} g^*(u)) \\
 &= 2^{\frac{1}{p}} (\|f\|_{p\infty} + \|g\|_{p\infty}).
 \end{aligned}$$

De qualquer forma, αf e $f + g$ estão em $L(p, q)$ o que significa que $L(p, q)$ é linear. Claramente $\|f\|_{pq} = 0$ se e somente se $f = 0$ o que implica que $\|\cdot\|_{pq}$ é uma quasinorma para $0 < p \leq \infty$ e $0 < q \leq \infty$ pois não vale a desigualdade triangular. $\square$

Teorema 2.3. $\|\cdot\|_{pq}$ é uma norma se, e somente se, ou $1 \leq q \leq p$ ou $p = q = \infty$.

Demonstração. Pelo Teorema anterior, para provar que $\|\cdot\|_{pq}$ é uma norma basta mostrar agora que vale a desigualdade triangular. Mostraremos apenas o caso onde a medida μ é não-atômica, o caso no qual a medida é completamente atômica pode ser encontrado em [5].

Sejam $f, g \in L(p, q)$ com $1 \leq q \leq p$. Então, $t^{\frac{q}{p}-1}$ é decrescente e assim, $(t^{\frac{q}{p}-1})^* = t^{\frac{q}{p}-1}$. Resulta do Teorema 1.14 que

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{pq} &= \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}}(f + g)^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1} (f + g)^*(t)^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_0^\infty (t^{\frac{q}{p}-1})^* (f + g)^*(t)^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \sup \left(\int_\Omega |f(x) + g(x)|^q |h(x)| d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \sup \left(\int_\Omega |f(x) + g(x)|^q (|h(x)|^{\frac{1}{q}})^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

onde o supremo é tomado sobre todas as funções h que são equimensuráveis com $t^{\frac{q}{p}-1}$. Segue da Desigualdade de Minkowski, da subaditividade do supremo e mais uma vez do Teorema 1.14 que,

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{pq} &= \sup \left(\int_\Omega |f(x)|^q |h(x)|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \sup \left[\left(\int_\Omega |f(x)|^q |h(x)|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_\Omega |g(x)|^q |h(x)|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ &\leq \sup \left(\int_\Omega |f(x)|^q |h(x)|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} + \sup \left(\int_\Omega |g(x)|^q |h(x)|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1} f^*(t)^q dt \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1} g^*(t)^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|f\|_{pq} + \|g\|_{pq}. \end{aligned}$$

Caso $p = q = \infty$, fazendo $u = \frac{t}{2}$ e pelo Teorema 1.5

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{\infty\infty} &= \sup_{t>0} (f + g)^*(t) \\ &\leq \sup_{t>0} \left(f^*\left(\frac{t}{2}\right) + g^*\left(\frac{t}{2}\right) \right) \\ &= \sup_{u>0} (f^*(u) + g^*(u)) \\ &\leq \sup_{u>0} f^*(u) + \sup_{u>0} g^*(u) \\ &= \|f\|_{\infty\infty} + \|g\|_{\infty\infty}. \end{aligned}$$

Por outro lado se não tivermos ou $1 \leq q \leq p$ ou $p = q = \infty$, não valerá a desigualdade triangular pois:

Caso 1) $1 \leq p < q < \infty$. Sejam, $a, h, \epsilon > 0$ e considere,

$$f(x) = (1 + \epsilon)\chi_{[0, a+h)}(x) + \chi_{[a+h, a+2h)}(x),$$

e,

$$g(x) = \chi_{[0, h)}(x) + (1 + \epsilon)\chi_{[h, a+2h)}(x).$$

Da definição de rearranjo decrescente

$$f^*(t) = \inf\{\lambda \geq 0; \mu(\{x \in \Omega; |(1 + \epsilon)\chi_{[0, a+h)}(x) + \chi_{[a+h, a+2h)}(x)| > \lambda\}) \leq t\},$$

e

$$g^*(t) = \inf\{\lambda \geq 0; \mu(\{x \in \Omega; |\chi_{[0, h)}(x) + (1 + \epsilon)\chi_{[h, a+2h)}(x)| > \lambda\}) \leq t\}.$$

Se $0 \leq t < a + h$. Então,

$$f^*(t) = 1 + \epsilon = g^*(t).$$

Se $a + h \leq t < a + 2h$,

$$f^*(t) = 1 = g^*(t).$$

Por fim, se $t \geq a + 2h$,

$$f^*(t) = 0 = g^*(t).$$

Portanto, $f^* = g^* = f$.

Como

$$(f + g)(x) = (2 + \epsilon)\chi_{[0, h)}(x) + (2 + 2\epsilon)\chi_{[h, a+h)}(x) + (2 + \epsilon)\chi_{[a+h, a+2h)}(x),$$

encontramos que

$$(f + g)^*(t) = \inf\{\lambda \geq 0; \mu(K) \leq t\}$$

onde $K = \{x \in \Omega; |(2 + \epsilon)\chi_{[0, h)}(x) + (2 + 2\epsilon)\chi_{[h, a+h)}(x) + (2 + \epsilon)\chi_{[a+h, a+2h)}(x)| > \lambda\}$.

Assim, se $0 \leq t < a$

$$(f + g)^*(t) = 2 + 2\epsilon.$$

Se $a \leq t < a + 2h$,

$$(f + g)^*(t) = 2 + \epsilon.$$

Se $t \geq a + 2h$,

$$(f + g)^*(t) = 0.$$

Isto implica que

$$(f + g)^*(t) = (2 + 2\epsilon)\chi_{[0,a)}(x) + (2 + \epsilon)\chi_{[a,a+2h)}(x).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|f\|_{pq}^q &= \int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} f^*(t))^q \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} (1 + \epsilon)\chi_{[0,a+h)}(t) + \chi_{[a+h,a+2h)}(t))^q \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1} (1 + \epsilon)\chi_{[0,a+h)}(t) + \chi_{[a+h,a+2h)}(t))^q dt \\ &= \int_0^{a+h} t^{\frac{q}{p}-1} (1 + \epsilon)^q dt + \int_{a+h}^{a+2h} t^{\frac{q}{p}-1} dt \\ &= \frac{p}{q} [(a + h)^{\frac{q}{p}} (1 + \epsilon)^q + (a + 2h)^{\frac{q}{p}} - (a + h)^{\frac{q}{p}}], \end{aligned}$$

como $f^* = g^*$, temos então $\|f\|_{pq}^q = \|g\|_{pq}^q$.

De forma análoga,

$$\|f + g\|_{pq}^q = \frac{p}{q} [a^{\frac{q}{p}} (2 + 2\epsilon)^q + ((a + 2h)^{\frac{q}{p}} - a^{\frac{q}{p}}) (2 + \epsilon)^q].$$

Assumindo que vale $\|f + g\|_{pq} \leq \|f\|_{pq} + \|g\|_{pq}$
é claro que, $\|f + g\|_{pq}^q \leq (2 \max(\|f\|_{pq}, \|g\|_{pq}))^q \leq 2^q \max(\|f\|_{pq}, \|g\|_{pq})^q$.

Resultando em

$$\frac{p}{q} [a^{\frac{q}{p}} (2 + 2\epsilon)^q + ((a + 2h)^{\frac{q}{p}} - a^{\frac{q}{p}}) (2 + \epsilon)^q] \leq 2^q \frac{p}{q} [(a + h)^{\frac{q}{p}} (1 + \epsilon)^q + (a + 2h)^{\frac{q}{p}} - (a + h)^{\frac{q}{p}}].$$

Consequentemente,

$$[a^{\frac{q}{p}} (1 + \epsilon)^q + ((a + 2h)^{\frac{q}{p}} - a^{\frac{q}{p}}) (1 + \frac{\epsilon}{2})^q] \leq [(a + h)^{\frac{q}{p}} (1 + \epsilon)^q + (a + 2h)^{\frac{q}{p}} - (a + h)^{\frac{q}{p}}].$$

Multiplicando ambos lados por (-1)

$$-[a^{\frac{q}{p}} (1 + \epsilon)^q + ((a + 2h)^{\frac{q}{p}} - a^{\frac{q}{p}}) (1 + \frac{\epsilon}{2})^q] \geq -(a + h)^{\frac{q}{p}} (1 + \epsilon)^q - (a + 2h)^{\frac{q}{p}} + (a + h)^{\frac{q}{p}}.$$

Vale então que

$$-(a + 2h)^{\frac{q}{p}} - (a + h)^{\frac{q}{p}} \leq (a + h)^{\frac{q}{p}} (1 + \epsilon)^q - a^{\frac{q}{p}} (1 + \epsilon)^q - (a + 2h)^{\frac{q}{p}} (1 + \frac{\epsilon}{2})^q + a^{\frac{q}{p}} (1 + \frac{\epsilon}{2})^q$$

Adicionando $(1 + \frac{\epsilon}{2})^q(a + 2h)^{\frac{q}{p}}$ em ambos lados obtemos,

$$-(a + 2h)^{\frac{q}{p}} - (a + h)^{\frac{q}{p}} + (1 + \frac{\epsilon}{2})^q(a + 2h)^{\frac{q}{p}} \leq (a + h)^{\frac{q}{p}}(1 + \epsilon)^q - a^{\frac{q}{p}}(1 + \epsilon)^q + a^{\frac{q}{p}}(1 + \frac{\epsilon}{2})^q.$$

Daí,

$$\begin{aligned} -(a + 2h)^{\frac{q}{p}} - (a + h)^{\frac{q}{p}} + (1 + \frac{\epsilon}{2})^q(a + 2h)^{\frac{q}{p}} - (1 + \frac{\epsilon}{2})(a + h)^{\frac{q}{p}} &\leq (a + h)^{\frac{q}{p}}(1 + \epsilon)^q - a^{\frac{q}{p}}(1 + \epsilon)^q + \\ &+ a^{\frac{q}{p}}(1 + \frac{\epsilon}{2})^q - (1 + \frac{\epsilon}{2})(a + h)^{\frac{q}{p}}. \end{aligned}$$

Podemos escrever a desigualdade como

$$(a + 2h)^{\frac{q}{p}} - (a + h)^{\frac{q}{p}} \leq \frac{(1 + \epsilon)^q - (1 + \frac{\epsilon}{2})^q}{(1 + \frac{\epsilon}{2})^q - 1} [(a + h)^{\frac{q}{p}} - a^{\frac{q}{p}}].$$

como $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{(1 + \epsilon)^q - (1 + \frac{\epsilon}{2})^q}{(1 + \frac{\epsilon}{2})^q - 1} = 1$ segue que,

$$(a + 2h)^{\frac{q}{p}} - (a + h)^{\frac{q}{p}} \leq (a + h)^{\frac{q}{p}} - a^{\frac{q}{p}}.$$

Ou seja,

$$(a + 2h)^{\frac{q}{p}} + a^{\frac{q}{p}} \leq 2(a + h)^{\frac{q}{p}}.$$

Considere $f(x) = \int_0^x t^{\frac{q}{p}-1} dt$ o que nos fornece, $f(a + 2h) = \frac{p}{q}(a + 2h)^{\frac{q}{p}}$, $f(a) = \frac{p}{q}a^{\frac{q}{p}}$ e $f(a + h) = \frac{p}{q}(a + h)^{\frac{q}{p}}$ isto é,

$$f(a + 2h) + f(a) \leq 2f(a + h),$$

como f é contínua e vale a desigualdade acima, então f é côncava pois escreva

$$x = a + 2h, y = a \text{ e } \lambda = \frac{1}{2}. \text{ Dessa forma,}$$

$$\begin{aligned} f((1 - \lambda)x + \lambda y) &= f((\frac{1}{2})(a + 2h) + \frac{a}{2}) \\ &= f(a + h) \\ &\geq \frac{1}{2}f(a + 2h) + \frac{1}{2}f(a) \\ &= (1 - \lambda)f(x) + \frac{1}{2}f(y). \end{aligned}$$

Pela concavidade de f , a derivada $f'(x) = x^{\frac{p}{q}-1}$, tem que ser decrescente, i.e., $q \leq p$, o

que é um absurdo, pois supomos $q > p$.

Caso 2) $1 \leq p < q = \infty$. Considere os conjuntos mensuráveis $A \subset B \subset \Omega$ tal que,

$$1 < \left(\frac{\mu(B)}{\mu(A)} \right)^{\frac{1}{p}} = a,$$

e

$$\mu(B - A) \leq \mu(A).$$

Considere também,

$$f(x) = a\chi_A(x) + \chi_{B-A}(x)$$

e

$$g(x) = \chi_A(x) + a\chi_{B-A}(x).$$

Dessa forma,

$$f^*(t) = \begin{cases} a, & \text{se } 0 \leq t < \mu(A), \\ 1, & \text{se } \mu(A) \leq t < \mu(B), \\ 0, & \text{se } t \geq \mu(B), \end{cases}$$

$$g^*(t) = \begin{cases} a, & \text{se } 0 \leq t < \mu(B - A), \\ 1, & \text{se } \mu(B - A) \leq t < \mu(B), \\ 0, & \text{se } t \geq \mu(B), \end{cases}$$

isto é o mesmo que

$$f^*(t) = a\chi_{[0, \mu(A))}(t) + \chi_{[\mu(A), \mu(B))}(t),$$

$$g^*(t) = a\chi_{[0, \mu(B-A))}(t) + \chi_{[\mu(B-A), \mu(B))}(t).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|f\|_{p\infty} &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \\ &= \max(a\mu(A)^{\frac{1}{p}}, \mu(B)^{\frac{1}{p}}) \\ &= \mu(B)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|g\|_{p\infty} &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} g^*(t) \\ &= \max(a\mu(B - A)^{\frac{1}{p}}, \mu(B)^{\frac{1}{p}}) \\ &= \mu(B)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= a\chi_A(x) + \chi_{B-A}(x) + \chi_A(x) + a\chi_{B-A}(x) \\ &= (a+1)\chi_B(x), \end{aligned}$$

então

$$(f+g)^*(t) = \begin{cases} a+1, & \text{se } 0 \leq t < \mu(B), \\ 0, & \text{se } t \geq \mu(B). \end{cases}$$

Claramente

$$\begin{aligned} \|f+g\|_{p\infty} &= (a+1)\mu(B)^{\frac{p}{q}} \\ &> 2\mu(B)^{\frac{p}{q}} \\ &= \|f\|_{p\infty} + \|g\|_{p\infty}. \end{aligned}$$

Caso 3) $0 < p < 1$ e $0 < q < \infty$.

Sejam A, B conjuntos mensuráveis tais que, $A \cap B = \emptyset$. Tome, $f(x) = \chi_A(x)$ e $g(x) = \chi_B(x)$. Sabemos que,

$$f^*(t) = \chi_{[0, \mu(A))}(t),$$

e

$$g^*(t) = \chi_{[0, \mu(B))}(t).$$

Temos,

$$\begin{aligned} (f+g)^*(t) &= \inf\{\lambda; \mu(\{x \in \Omega; |\chi_A(x) + \chi_B(x)| > \lambda\}) \leq t\} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq t < \mu(A \cup B), \\ 0, & \text{se } t \geq \mu(A \cup B). \end{cases} \end{aligned}$$

Dáí,

$$\begin{aligned} \|f\|_{pq} &= \left(\int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1} \chi_{[0, \mu(A))}(t)^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{1}{q}} \mu(A)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

De forma análoga

$$\|g\|_{pq} = \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{1}{q}} \mu(B)^{\frac{1}{p}},$$

$$\begin{aligned}
 \|f + g\|_{pq} &= \left(\int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1} (f + g)^*(t)^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &= \left(\int_0^{\mu(A \cup B)} t^{\frac{q}{p}-1} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &= \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{1}{q}} (\mu(A \cup B))^{\frac{1}{p}} \\
 &= \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{1}{q}} (\mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B))^{\frac{1}{p}} \\
 &= \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{1}{q}} (\mu(A) + \mu(B))^{\frac{1}{p}}.
 \end{aligned}$$

Logo, se vale a desigualdade triangular então

$$\left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{1}{q}} (\mu(A) + \mu(B))^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{1}{q}} (\mu(A)^{\frac{1}{p}} + \mu(B)^{\frac{1}{p}}),$$

isto é,

$$(\mu(A) + \mu(B))^{\frac{1}{p}} \leq \mu(A)^{\frac{1}{p}} + \mu(B)^{\frac{1}{p}}.$$

O que não acontece se $0 < p < 1$ e $0 < q < \infty$.

Caso 4) $0 < p < 1$ e $q = \infty$ considerando as mesmas funções f, g do caso anterior

$$\begin{aligned}
 \|f\|_{pq} &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \\
 &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} \chi_{[0, \mu(A))}(t) \\
 &= \mu(A)^{\frac{1}{p}}.
 \end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\|g\|_{pq} = \mu(B)^{\frac{1}{p}},$$

$$\|f + g\|_{pq} = (\mu(A) + \mu(B))^{\frac{1}{p}}.$$

O resultado segue como no caso anterior.

Caso 5) $0 < p < \infty$ e $0 < q < 1$.

Defina

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } 0 \leq x < 2^{-p}, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e

$$g(x) = \begin{cases} 4, & \text{se } 0 \leq x < 2^{-2p}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo,

$$f^*(t) = \begin{cases} 2, & \text{se } 0 \leq t < 2^{-p}, \\ 0, & \text{se, } t \geq 2^{-p}, \end{cases}$$

$$g^*(t) = \begin{cases} 4, & \text{se } 0 \leq t < 2^{-2p}, \\ 0, & \text{se, } t \geq 2^{-2p}. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|f\|_{pq} &= \left(\int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1} f^*(t)^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\frac{p}{q} 2^q (2^{-p})^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Analogamente

$$\|g\|_{pq} = \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

De

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} 6, & \text{se } 0 \leq x < 2^{-2p}, \\ 2, & \text{se, } 2^{-2p} < x < 2^{-p}, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

obtemos que

$$(f + g)^*(t) = \begin{cases} 6, & \text{se } 0 \leq x < 2^{-2p}, \\ 2, & \text{se, } 2^{-2p} < x < 2^{-p}, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

Resultando que

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{pq} &= \left(\int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1} (f + g)^*(t) dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_0^{2^{-2p}} 6^q t^{\frac{q}{p}-1} dt + \int_{2^{-2p}}^{2^{-p}} 2^q t^{\frac{q}{p}-1} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\frac{p}{q} 6^q (2^{-2p})^{\frac{q}{p}} + 2^q \frac{p}{q} \left((2^{-p})^{\frac{q}{p}} - (2^{-2p})^{\frac{q}{p}} \right) \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{1}{q}} (6^q 2^{-2q} + 1 - 2^{-q})^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Suponhamos que vale,

$$\|f + g\|_{pq} \leq \|f\|_{pq} + \|g\|_{pq}.$$

Então vale

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}} (6^q 2^{-2q} + 1 - 2^{-q})^{\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Isto é o mesmo que

$$3^q 2^{-q} - 2^{-q} + 1 \leq 2^q,$$

ou seja,

$$2^{-q}(3^q - 1) \leq 2^q - 1,$$

o que significa que

$$3^q - 4^q + 2^q \leq 1.$$

Esta última desigualdade é impossível para $0 < q < 1$. □

Relacionaremos diferentes espaços de Lorentz, e para isso precisaremos do Lema a seguir.

Lema 2.4. Seja h uma função decrescente em $(0, \infty)$. Se $0 < \alpha \leq 1$ e $\beta \geq 0$, então

$$\left(\int_0^\infty t^{\beta-1} h(t) dt\right)^\alpha \leq \alpha \beta^{1-\alpha} \int_0^\infty t^{\alpha\beta-1} h(t)^\alpha dt,$$

e a constante $\alpha \beta^{1-\alpha}$ é *sharp*, ou seja, não existe menor constante $c < \alpha \beta^{1-\alpha}$ tal que vale a desigualdade.

Demonstração. Como h é decrescente

$$\begin{aligned} \beta h(t) t^{\beta-1} &= \frac{1}{a} [h(t)^\alpha t^{\alpha\beta}]^{\frac{1}{a}-1} \alpha \beta h(t)^\alpha t^{\alpha\beta-1} \\ &= \frac{1}{a} [h(t)^\alpha \alpha \beta \int_0^t s^{\alpha\beta-1} ds]^{\frac{1}{a}-1} \alpha \beta h(t)^\alpha t^{\alpha\beta-1} \\ &\leq \frac{1}{a} [\alpha \beta \int_0^t h(s)^\alpha s^{\alpha\beta-1} ds]^{\frac{1}{a}-1} \alpha \beta h(t)^\alpha t^{\alpha\beta-1} \\ &= \frac{d}{dt} [\alpha \beta \int_0^t h(s)^\alpha s^{\alpha\beta-1} ds]^{\frac{1}{a}}. \end{aligned}$$

O que implica que

$$\int_0^\infty \beta h(t) t^{\beta-1} dt \leq [\alpha \beta \int_0^\infty h(s)^\alpha s^{\alpha\beta-1} ds]^{\frac{1}{a}},$$

isto significa que

$$\beta^\alpha \left(\int_0^\infty h(t) t^{\beta-1} dt \right)^\alpha \leq [\alpha \beta \int_0^t h(s)^\alpha s^{\alpha\beta-1} ds],$$

isto é,

$$\left(\int_0^\infty t^{\beta-1} h(t) dt \right)^\alpha \leq \alpha \beta^{1-\alpha} \int_0^\infty t^{\alpha\beta-1} h(t)^\alpha dt.$$

Para mostrar que a $\alpha\beta^{1-\alpha}$ é *sharp*, tome $h(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ então

$$\begin{aligned} \left(\int_0^\infty t^{\beta-1} h(t) dt \right)^\alpha &= \left(\int_0^1 t^{\beta-1} dt \right)^\alpha \\ &= \left(\frac{1}{\beta} \right)^\alpha \\ &= \beta^{-\alpha} \\ &= \alpha \beta^{1-\alpha} \int_0^1 t^{\alpha\beta-1} dt. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.5. *Sejam $0 < p < \infty$ e $0 < q_1 \leq q_2 \leq \infty$. Então,*

$$\|f\|_{pq_2} \leq C \|f\|_{pq_1},$$

onde

$$C = \left(\frac{q_2}{p} \right)^{\frac{-1}{q_2}} \left(\frac{q_1}{p} \right)^{\frac{1}{q_1}},$$

e é *sharp*. Portanto,

$$L(p, q_1) \hookrightarrow L(p, q_2) \text{ continuamente.}$$

Demonstração. Considere, $h(t) = f^*(t)^{q_2}$, $\alpha = \frac{q_1}{q_2}$ e $\beta = \frac{q_2}{p}$. Aplicando o Lema 2.4 obtemos que

$$\begin{aligned} \|f\|_{pq_2}^{q_1} &= \left(\int_0^\infty t^{\frac{q_2}{p}-1} f^*(t)^{q_2} dt \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \\ &= \left(\int_0^\infty t^{\beta-1} h(t) dt \right)^\alpha \\ &\leq \alpha \beta^{1-\alpha} \int_0^\infty t^{\alpha\beta-1} h(t)^\alpha dt \\ &= \left(\frac{q_1}{q_2} \right) \left(\frac{q_2}{p} \right)^{1-\frac{q_1}{q_2}} \int_0^\infty t^{(\frac{q_1}{q_2})(\frac{q_2}{p}-1)} f^*(t)^{(q_2)(\frac{q_1}{q_2})} dt \\ &= \left(\frac{q_1}{q_2} \right) \left(\frac{q_2}{p} \right)^{1-\frac{q_1}{q_2}} \int_0^\infty t^{\frac{q_1}{p}-1} f^*(t)^{q_1} dt \\ &= \left(\frac{q_1}{p} \right) \left(\frac{q_2}{p} \right)^{-\frac{q_1}{q_2}} \|f\|_{pq_1}^{q_1}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \|f\|_{pq_2} &\leq \left(\frac{q_1}{p}\right)^{\frac{1}{q_1}} \left(\frac{q_2}{p}\right)^{-\frac{1}{q_2}} \|f\|_{pq_1} \\ &= C \|f\|_{pq_1}. \end{aligned}$$

Do Lema 2.4 vimos que C não pode ser melhorada. $\square$

Teorema 2.6. *Seja $\mu(\Omega) < \infty$. Então valem as imersões:*

$$i) \quad L(p, q) \hookrightarrow L(r, s) \quad \forall \quad 0 < r < p < \infty \quad e \quad 0 < q, s \leq \infty.$$

$$ii) \quad L(p, q) \hookrightarrow L(p, s) \quad \forall \quad 0 < q \leq s \leq \infty \quad e \quad 0 < p < \infty.$$

Demonstração. Sejam $0 \leq u \leq p_1 < p_2 \leq \infty$ e $f \in L(p_1, \infty)$ uma função qualquer. Temos,

$$\begin{aligned} \|f\|_{p_1 u} &= \left(\int_0^{\mu(\Omega)} \left(t^{\frac{1}{p_1}} f^*(t) \right)^u \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{u}} \\ &= \left(\int_0^{\mu(\Omega)} t^{\frac{u}{p_1} - \frac{u}{p_2} - 1} \left(t^{\frac{1}{p_2}} f^*(t) \right)^u dt \right)^{\frac{1}{u}} \\ &\leq \left(\int_0^{\mu(\Omega)} t^{\frac{u}{p_1} - \frac{u}{p_2} - 1} \left(\sup_{s>0} s^{\frac{1}{p_2}} f^*(s) \right)^u dt \right)^{\frac{1}{u}} \\ &= \left(\int_0^{\mu(\Omega)} t^{\frac{u}{p_1} - \frac{u}{p_2} - 1} \|f\|_{p_2 \infty}^u dt \right)^{\frac{1}{u}} \\ &= \frac{\mu(\Omega)^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}}}{\left(\frac{u}{p_1} - \frac{u}{p_2} \right)^{\frac{1}{u}}} \|f\|_{p_2 \infty}. \end{aligned}$$

Assim,

$$L(p_2, \infty) \hookrightarrow L(p_1, u),$$

e tomando $p_1 = r, p_2 = p$ e $u \leq s$ segue pelo Teorema 2.5 que

$$L(p, q) \hookrightarrow L(p, \infty) \hookrightarrow L(r, u) \hookrightarrow L(r, s).$$

ii) É imediato do Teorema 2.5, basta escrever $q = q_1$ e $s = q_2$. $\square$

2.2 Norma no Espaço de Lorentz

Vimos na seção anterior que $\|\cdot\|_{pq}$ não satisfaz a desigualdade triangular para todo $0 < p < \infty$ e $0 < q \leq \infty$. Nesta seção definiremos o funcional $\|\cdot\|_{pq}^*$ com a operação $**$ no lugar de $*$ e este funcional será equivalente ao funcional $\|\cdot\|_{pq}$, porém irá satisfazer

a desigualdade triangular para mais valores de p e q , dessa forma mostraremos que $L(p, q)$ é um espaço normado para $1 \leq p < \infty$ e $1 \leq q < \infty$.

Definição 2.2. Seja $f \in L(p, q)$. Então o funcional $\|\cdot\|_{pq}^*$ é definido por

$$\|f\|_{pq}^* = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}, & \text{se } 0 < p < \infty, 0 < q < \infty, \\ \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t), & \text{se } 0 < p \leq \infty, 0 < q \leq \infty. \end{cases}$$

Teorema 2.7. Se $1 < p < \infty, 1 \leq q \leq \infty$ ou $p = q = \infty$ então $(L(p, q), \|\cdot\|_{pq}^*)$ é um espaço normado. Além disso,

$$\|\cdot\|_{pq} \leq \|\cdot\|_{pq}^* \leq \frac{p}{p-1} \|\cdot\|_{pq}.$$

Demonstração. Claramente $\|f\|_{pq}^* \geq 0$ e $\|f\|_{pq}^* = 0 \Leftrightarrow f = 0 \mu - a.e.$ em Ω . Considere $1 < p < \infty, 1 \leq q < \infty$ e sejam, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f \in L(p, q)$. Assim,

$$\begin{aligned} \|\alpha f\|_{pq}^* &= \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} (\alpha f)^{**}(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{t} \int_0^t (\alpha f)^*(s) ds \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= |\alpha| \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= |\alpha| \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= |\alpha| \|f\|_{pq}^*. \end{aligned}$$

Sejam, $f, g \in L(p, q)$ e pela subaditividade da operação ** e aplicando a desigualdade de Minkowski obtemos que,

$$\begin{aligned}
\|f + g\|_{pq}^* &= \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}}(f + g)^{**}(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}}(f^{**}(t) + g^{**}(t)))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_0^\infty \left(\frac{t^{\frac{1}{p}}}{t^{\frac{1}{q}}} f^{**}(t) + \frac{t^{\frac{1}{p}}}{t^{\frac{1}{q}}} g^{**}(t) \right)^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\int_0^\infty \left(\frac{t^{\frac{1}{p}}}{t^{\frac{1}{q}}} f^{**}(t) \right)^q dt \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_0^\infty \left(\frac{t^{\frac{1}{p}}}{t^{\frac{1}{q}}} g^{**}(t) \right)^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|f\|_{pq}^* + \|g\|_{pq}^*.
\end{aligned}$$

Se porém, $1 < p < q = \infty$,

$$\begin{aligned}
\|\alpha f\|_{p\infty}^* &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}}(\alpha f)^{**}(t) \\
&= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{t} \int_0^t (\alpha f)^*(s) ds \right) \\
&= |\alpha| \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \\
&= |\alpha| \|f\|_{p\infty}^*
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\|f + g\|_{p\infty}^* &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}}(f + g)^{**}(t) \\
&\leq \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}}(f^{**}(t) + g^{**}(t)) \\
&\leq \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) + \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} g^{**}(t) \\
&= \|f\|_{p\infty}^* + \|g\|_{p\infty}^*.
\end{aligned}$$

Se $p = q = \infty$, $\|\alpha f\|_{\infty\infty}^* = |\alpha| \|f\|_{\infty\infty}^*$ e $\|f + g\|_{\infty\infty}^* \leq \|f\|_{\infty\infty}^* + \|g\|_{\infty\infty}^*$. Basta então mostrar que $\|f\|_{pq} \leq \infty$ para $1 < p < \infty, 1 \leq q \leq \infty$ ou $p = q = \infty$, isto é, mostraremos que $\|f\|_{pq}^* \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_{pq}$ desde que $1 < p < \infty, 1 \leq q \leq \infty$ ou $p = q = \infty$.

Considere, $\alpha = \frac{1}{p}$ e $q' = \frac{q}{q-1}$ (o conjugado de q), logo pela desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds &= \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) s^{\frac{\alpha}{q'}} s^{-\frac{\alpha}{q'}} ds \\
 &\leq \frac{1}{t} \left(\int_0^t |f^*(s) s^{\frac{\alpha}{q'}}|^q ds \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^t |s^{-\frac{\alpha}{q'}}|^{q'} ds \right)^{\frac{1}{q'}} \\
 &= \frac{1}{t} \left(\int_0^t |f^*(s)|^q s^{\frac{q\alpha}{q'}} ds \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^t s^{-\alpha} ds \right)^{\frac{1}{q'}} \\
 &= \left(\frac{1}{t} \right) (1 - \alpha)^{-\frac{1}{q'}} t^{-\frac{\alpha}{q'} + \frac{1}{q'}} \left(\int_0^t f^*(s)^q s^{\alpha(q-1)} ds \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &= \left(\frac{1}{t} \right)^{\frac{1}{q} + \frac{1}{q'}} (1 - \alpha)^{\frac{1-q}{q}} t^{-\frac{\alpha}{q'} + \frac{1}{q'}} \left(\int_0^t f^*(s)^q s^{\alpha(q-1)} ds \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &= (1 - \alpha)^{\frac{1-q}{q}} t^{-\frac{\alpha}{q'} - \frac{1}{q}} \left(\int_0^t f^*(s)^q s^{\alpha(q-1)} ds \right)^{\frac{1}{q}}.
 \end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados por t^α ,

$$\begin{aligned}
 t^\alpha \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds &\leq (1 - \alpha)^{\frac{1-q}{q}} t^{-\frac{\alpha}{q'} - \frac{1}{q} + \alpha} \left(\int_0^t f^*(s)^q s^{\alpha(q-1)} ds \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &= (1 - \alpha)^{\frac{1-q}{q}} t^{\alpha(1 - \frac{1}{q'}) - \frac{1}{q}} \left(\int_0^t f^*(s)^q s^{\alpha(q-1)} ds \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &= (1 - \alpha)^{\frac{1-q}{q}} t^{\frac{\alpha-1}{q}} \left(\int_0^t f^*(s)^q s^{\alpha(q-1)} ds \right)^{\frac{1}{q}}.
 \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{t} (t^\alpha \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds)^q &\leq \frac{1}{t} (1 - \alpha)^{1-q} t^{\alpha-1} \int_0^t f^*(s)^q s^{\alpha(q-1)} ds \\
 &= (1 - \alpha)^{1-q} t^{\alpha-2} \int_0^t f^*(s)^q s^{\alpha(q-1)} ds.
 \end{aligned}$$

Integrando ambos lados de 0 até ∞ e usando o Teorema de Fubini, encontramos que

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \frac{1}{t} \left(t^\alpha \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds \right)^q dt &\leq (1 - \alpha)^{1-q} \int_0^\infty t^{\alpha-2} \int_0^t f^*(s)^q s^{\alpha(q-1)} ds dt \\
 &= (1 - \alpha)^{1-q} \int_0^\infty \int_0^t t^{\alpha-2} f^*(s)^q s^{\alpha(q-1)} ds dt \\
 &= (1 - \alpha)^{1-q} \int_0^\infty \int_s^\infty t^{\alpha-2} f^*(s)^q s^{\alpha(q-1)} dt ds \\
 &= (1 - \alpha)^{1-q} \int_0^\infty f^*(s)^q s^{\alpha(q-1)} \int_s^\infty t^{\alpha-2} dt ds \\
 &= (1 - \alpha)^{-q} \int_0^\infty f^*(s)^q s^{\alpha q - 1} ds \\
 &= (1 - \alpha)^{-q} \int_0^\infty f^*(s)^q s^{\alpha q} \frac{ds}{s},
 \end{aligned}$$

consequentemente,

$$\left(\int_0^\infty \left(t^\alpha \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{1 - \alpha} \left(\int_0^\infty f^*(s)^q s^{\alpha q} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Como $\alpha = \frac{1}{p}$, temos que

$$\begin{aligned}
 \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} &\leq \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty f^*(s)^q s^{\frac{q}{p}} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &= \frac{p}{p - 1} \left(\int_0^\infty f^*(s)^q s^{\frac{q}{p}} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q}},
 \end{aligned}$$

o que implica que

$$\|f\|_{pq}^* \leq \frac{p}{p - 1} \|f\|_{pq}.$$

Se $1 < p < \infty$ e $q = \infty$,

$$\begin{aligned}
 \|f\|_{p\infty}^* &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \\
 &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds \right) \\
 &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}-1} \int_0^t f^*(s) s^{\frac{-1}{p}} s^{\frac{1}{p}} ds \\
 &\leq \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}-1} \int_0^t s^{\frac{-1}{p}} (\sup_{s>0} s^{\frac{1}{p}} f^*(s)) ds \\
 &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}-1} \int_0^t s^{\frac{-1}{p}} \|f\|_{p\infty} ds \\
 &= \|f\|_{p\infty} \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}-1} \int_0^t s^{\frac{-1}{p}} ds \\
 &= \frac{p}{p-1} \|f\|_{p\infty}.
 \end{aligned}$$

Caso $p = q = \infty$, como f^* e f^{**} são decrescentes,

$$\begin{aligned}
 \|f\|_{\infty\infty}^* &= \sup_{t>0} f^{**}(t) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds \right) \\
 &\leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{t} \int_0^t f^*(0) ds \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} f^*(0) t = f^*(0) = \|f\|_{\infty\infty}.
 \end{aligned}$$

Portanto, $(L(p, q), \|f\|_{pq}^*)$ é um espaço normado se $1 < p < \infty, 1 \leq q \leq \infty$ ou $p = q = \infty$. Para provar a primeira desigualdade, basta usar o fato de que $f^* \leq f^{**}$ para todo $t > 0$ (Teorema [1.15](#)) caso $1 < p < \infty$ e $1 \leq q < \infty$. De fato,

$$\begin{aligned}
 \|f\|_{pq} &= \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} f^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &\leq \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_{pq}^{**}.
 \end{aligned}$$

Se tivermos $1 < p < \infty$ e $q = \infty$,

$$\begin{aligned}
 \|f\|_{p\infty} &= \sup_{t>0} f^*(t) \\
 &\leq \sup_{t>0} f^{**}(t) \\
 &= \|f\|_{p\infty}^{**}
 \end{aligned}$$

Caso $p = q = \infty$ é análogo. Dessa maneira,

$$\|\cdot\|_{pq} \leq \|\cdot\|_{pq}^* \leq \frac{p}{p-1} \|\cdot\|_{pq},$$

o que significa que as quasi-normas $\|\cdot\|_{pq}$ e $\|\cdot\|_{pq}^*$ são equivalentes. $\square$

Observação 2.2. Se $p = q = 1$, então $\|\cdot\|_{11}^*$ não é uma norma em $L(p, q)$ pois, tome $f(x) = \chi_A(x)$, onde A é um conjunto mensurável com medida positiva. Logo,

$$\begin{aligned} \|f\|_{11} &= \int_0^\infty t f^{**}(t) \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^\infty f^{**}(t) dt \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds \right) dt \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{t} \int_0^t \chi_{[0, \mu(A))}(s) ds \right) dt \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Se μ é não atômico e σ -finito, o espaço de Lorentz não é normável para $0 < p < \infty$ e $0 < q < 1$ ou $0 < p < 1$ e $1 \leq q \leq \infty$ ou $p = 1$ e $1 < q \leq \infty$, esta prova poderá ser encontrada em [5].

2.3 Propriedades Topológicas e Métricas do espaço de Lorentz

Agora já podemos falar em propriedades topológicas para o espaço $L(p, q)$ tais como a completude, a separabilidade, a dualidade. Começaremos mostrando para quais valores de p e q o espaço de Lorentz é Banach.

Teorema 2.8. $L(p, q)$ é completo para $0 < p < \infty$ e $0 < q \leq \infty$ com a quase norma $\|\cdot\|_{pq}$. Em particular, $L(p, q)$ é um espaço de Banach se $1 < p < \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$, $p = q = 1$ ou $p = q = \infty$.

Demonstração. Seja $(f_n)_n$ uma sequência de Cauchy em $(L(p, q), \|\cdot\|_{pq})$. Então dado $\epsilon > 0$ existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geq n_0$ implica

$$\|f_m - f_n\|_{pq} \longrightarrow 0.$$

Do Teorema 2.4 com $q_2 = \infty$ e $0 < q_1 = q \leq \infty$ temos

$$\|f_m - f_n\|_{p\infty} \leq C\|f_m - f_n\|_{pq} < \epsilon,$$

ou seja,

$$\sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}}(f_m - f_n)^*(t) \longrightarrow 0,$$

quando $m, n \geq n_0$. Pelo Teorema 1.7,

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}}(f_m - f_n)^*(t) &= \sup_{\lambda>0} \lambda \mu_{f_m - f_n}(\lambda)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{\lambda>0} \lambda \mu(\{x \in \Omega; |f_m(x) - f_n(x)| > \lambda\})^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

O que significa que

$$\mu(\{x \in \Omega; |f_m(x) - f_n(x)| > \lambda\})^{\frac{1}{p}} < \epsilon,$$

para todo $m, n \geq n_0$ e $\lambda > 0$, ou seja, $(f_n)_n$ é uma sequência de Cauchy na medida μ , logo alguma subsequência (f_{n_k}) de funções mensuráveis converge para alguma função mensurável f μ -a.e. em Ω . Como $(f_n)_n$ é uma sequência de Cauchy em $(L(p, q), \|\cdot\|_{pq})$ então

$$\|f_n - f_{n_0}\|_{p\infty} < \epsilon,$$

para todo $n \geq n_0$, e $f_{n_k} - f_{n_0} \longrightarrow f - f_{n_0}$ μ a.e. em Ω .

Do Teorema 1.1

$$(f - f_{n_0})^*(t) \leq \liminf (f_{n_k} - f_{n_0})^*(t),$$

e pelo Lema de Fatou,

$$\begin{aligned} \|f - f_{n_0}\|_{pq} &= \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}}(f - f_{n_0})^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} \liminf (f_{n_k} - f_{n_0})^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \liminf \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}}(f_{n_k} - f_{n_0})^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \liminf \|f_{n_k} - f_{n_0}\|_{pq}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\|f - f_{n_0}\|_{pq} \longrightarrow 0,$$

quando $n_0 \longrightarrow \infty$. Como $f = f - f_{n_0} + f_{n_0}$ então,

$$\|f\|_{pq} \leq \|f - f_{n_0}\|_{pq} + \|f_{n_0}\|_{pq} < \infty.$$

Portanto $f \in L(p, q)$ para $0 < p < \infty$ e $0 < q < \infty$.

Se $q = \infty$,

$$\|f\|_{p\infty} \leq C\|f\|_{pq} < \infty$$

e assim $f \in L(p, \infty)$ para todo $0 < p < \infty$. Logo $L(p, q)$ é completo para $0 < p < \infty$ e $0 < q \leq \infty$. Para $1 < p < \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$, $p = q = \infty$ $L(p, q)$ é um espaço normado com a norma $\|\cdot\|_{pq}^*$ e para o caso $p = q = 1$, $L(p, q)$ é um espaço normado com a norma $\|\cdot\|_{pq}$. Daí pelo Teorema 2.6 e usando o fato de que $L(p, q)$ é completo, temos que o espaço de Lorentz é um espaço de Banach para $1 < p < \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$, $p = q = 1$ e $p = q = \infty$. $\square$

Para mostrar a separabilidade do espaço de Lorentz precisaremos mostrar que o conjunto de todas as funções simples é denso em $L(p, q)$, ou seja, qualquer função no espaço de Lorentz pode ser aproximada por uma função simples na norma de $L(p, q)$.

Teorema 2.9. *O conjunto de todas as funções simples integráveis S é denso em $L(p, q)$ para todo $0 < p < \infty$ e $0 < q < \infty$.*

Demonstração. Sejam $q < \infty$ e $f \in L(p, q)$ arbitrários, devemos mostrar que existe uma sequência de funções simples e integrável (s_n) tal que $\|f - s_n\|_{pq} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Assuma sem perda de generalidade que f é uma função positiva e portanto existe uma sequência de funções simples integráveis $0 \leq s_n \leq f$ para todo $n = 1, 2, \dots$ e $s_n \rightarrow f$ quando $n \rightarrow \infty$. Consequentemente pelo Teorema 1.5

$$\begin{aligned} (f - s_n)^*(t) &\leq f^*\left(\frac{t}{2}\right) + s_n^*\left(\frac{t}{2}\right) \\ &\leq 2f^*\left(\frac{t}{2}\right). \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema da Convergência Dominada seque que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty ((f - s_n)^*(t))^q dt &= \int_0^\infty \lim_{n \rightarrow \infty} ((f - s_n)^*(t))^q dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \lambda^{q-1} \mu(\{x \in \Omega; | f(x) - s_n(x) | > \lambda\}) dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1} ((f - s_n)^*(t))^q dt = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - s_n\|_{pq}^q = 0.$$

Como f é arbitrário então $\bar{S} = L(p, q)$, isto é, S é denso em $L(p, q)$. $\square$

Definição 2.3. Uma medida μ é separável se existe uma família enumerável Γ de conjuntos mensuráveis de Σ com medida finita tal que para qualquer $\epsilon > 0$ e qualquer $A \in \Sigma$ de medida finita podemos encontrar um conjunto $B \in \Gamma$ com $\mu(A \Delta B) < \epsilon$, onde $A \Delta B = \{x \in A \cup B \text{ e } x \notin A \cap B\}$.

Teorema 2.10. Se a medida μ é separável então espaço de Lorentz é separável para $0 < p < \infty, 0 < q < \infty$.

Demonstração. Considere que μ seja separável, seja $A \in \Sigma$ com medida finita e $\epsilon > 0$ arbitrário. Então existe uma família enumerável Γ de subconjuntos de Ω de medida finita e um $B \in \Gamma$ tal que

$$\mu(A \Delta B) = \mu((A - B) \cup (B - A)) < \epsilon.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|\chi_A - \chi_B\|_{pq} &= \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} (\chi_A - \chi_B)^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} (\chi_{A \Delta B})^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} \chi_{[0, \mu(A \Delta B))}(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_0^{\mu(A \Delta B)} t^{\frac{q}{p}-1} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{1}{q}} \mu(A \Delta B)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{1}{q}} \epsilon^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Logo, para qualquer função característica de um conjunto $A \in \Sigma$ de medida finita, podemos encontrar sempre outra função característica de um conjunto $B \in \Gamma$ tal que a norma da diferença entra as duas funções características é tão pequena quanto se queira.

Seja s uma função simples dada por,

$$s(x) = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{A_j}(x),$$

onde $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_k > 0$ e $A_j = \{x \in \Omega; s(x) = \alpha_j\}$ para todo $j = 1, 2, \dots, k$.

Podemos então definir uma nova função simples

$$\hat{s} = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{B_j}(x),$$

onde B_j é escolhido tal que $\mu(A_j \Delta B_j)^{\frac{1}{q}} < \epsilon$ para todo $j = 1, 2, \dots, k$. Daí,

$$\begin{aligned} \|s - \hat{s}\|_{pq} &= \left\| \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{A \Delta B} \right\|_{pq} \\ &\leq \sum_{j=1}^k \|\alpha_j \chi_{A \Delta B}\|_{pq} \\ &< k \alpha_1 \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}} \epsilon. \end{aligned}$$

Assim, para qualquer função simples s definida nos conjuntos Σ -mensuráveis $A_1, A_2, \dots, A_k$, podemos encontrar outra função simples $\hat{s}$ definida nos conjuntos $B_1, B_2, \dots, B_k$ onde $B_j \in \Gamma$, $j = 1, 2, \dots, k$. Como o conjunto de todas as funções simples é denso em $L(p, q)$,

$$\hat{S} = \left\{ \hat{s} = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{B_j}(x); B_j \in \Gamma, \alpha \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \dots \right\},$$

é denso em $L(p, q)$. Além disso o conjunto enumerável,

$$\hat{S}_Q = \left\{ \hat{s} = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{B_j}(x); B_j \in \Gamma, \alpha \in \mathbb{Q}, k = 1, 2, \dots \right\},$$

é denso em $\hat{S}$ e dessa maneira $\hat{S}_Q$ é denso em $L(p, q)$. Assim, o espaço de Lorentz é separável. $\square$

Observação 2.3. Se $L(p, q)$ é separável para $0 < p, q < \infty$, a medida μ também será separável. Este caso é encontrado em [5].

Para provar a dualidade enunciaremos a Desigualdade de Jensen cuja demonstração poderá ser encontrada em [20]. Provaremos em seguida o Lema conhecido como Desigualdade de Hardy que será fundamental para mostrar o dual de $L(p, q)$.

Teorema 2.11 (Desigualdade de Jensen para Integrais). *Seja (S, Σ, μ) um espaço de medida finita e $h : S \rightarrow I$ uma função μ -integrável. Então a desigualdade*

$$\varphi \left(\frac{1}{\mu(S)} \int_S h(s) d\mu(s) \right) \leq \frac{1}{\mu(S)} \int_S \varphi(h(s)) d\mu(s),$$

onde $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função convexa tal que $\varphi(h)$ é integrável.

Lema 2.12 (Desigualdade de Hardy). Seja h uma função decrescente positiva em $(0, \infty)$, $q \leq 1$ e $r > 0$. Então:

$$\text{i) } \left(\int_0^\infty \left(\int_0^t h(u) du \right)^q t^{-r-1} dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{q}{r} \left(\int_0^\infty (th(t))^q t^{-r-1} dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\text{ii) } \left(\int_0^\infty \left(\int_t^\infty h(u) du \right)^q t^{r-1} dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{q}{r} \left(\int_0^\infty (th(t))^q t^{r-1} dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

Demonstração.

i) Usaremos a desigualdade de Jensen junto com a função convexa $\varphi(x) = x^q$. Desse modo,

$$\begin{aligned} \left(\int_0^t h(u) du \right)^q &= \left(\int_0^t h(u) u^{1-\frac{r}{q}} u^{\frac{r}{q}-1} du \right)^q \left(\int_0^t u^{\frac{r}{q}-1} du \right)^q \left(\int_0^t u^{\frac{r}{q}-1} du \right)^{-q} \\ &= \left(\frac{1}{\int_0^t u^{\frac{r}{q}-1} du} \int_0^t h(u) u^{1-\frac{r}{q}} u^{\frac{r}{q}-1} du \right)^q \left(\int_0^t u^{\frac{r}{q}-1} du \right)^q \\ &\leq \frac{1}{\int_0^t u^{\frac{r}{q}-1} du} \left(\int_0^t (h(u) u^{1-\frac{r}{q}})^q u^{\frac{r}{q}-1} du \right) \left(\int_0^t u^{\frac{r}{q}-1} du \right)^q \\ &= \int_0^t (h(u) u^{1-\frac{r}{q}})^q u^{\frac{r}{q}-1} du \left(\int_0^t u^{\frac{r}{q}-1} du \right)^{q-1} \\ &= \left(\frac{q}{r} \right)^{q-1} t^{r-\frac{r}{q}} \int_0^t (h(u) u^{1-\frac{r}{q}})^q u^{\frac{r}{q}-1} du. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \left(\int_0^t h(u) du \right)^q t^{-r-1} &\leq \left(\frac{q}{r} \right)^{q-1} t^{r-\frac{r}{q}} \left(\int_0^t (h(u) u^{1-\frac{r}{q}})^q u^{\frac{r}{q}-1} du \right) t^{-r-1} \\ &= \left(\frac{q}{r} \right)^{q-1} t^{-\frac{r}{q}-1} \int_0^t (h(u) u^{1-\frac{r}{q}})^q u^{\frac{r}{q}-1} du. \end{aligned}$$

integrando ambos lados e aplicando o Teorema de Fubini obtemos que

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \left(\int_0^t h(u) du \right)^q t^{-r-1} dt &\leq \int_0^\infty \left(\frac{q}{r} \right)^{q-1} t^{-\frac{r}{q}-1} \int_0^t (h(u) u^{1-\frac{r}{q}})^q u^{\frac{r}{q}-1} du dt \\
 &= \left(\frac{q}{r} \right)^{q-1} \int_0^\infty t^{-\frac{r}{q}-1} \int_0^t (h(u) u^{1-\frac{r}{q}})^q u^{\frac{r}{q}-1} du dt \\
 &= \left(\frac{q}{r} \right)^{q-1} \int_0^\infty \int_0^t t^{-\frac{r}{q}-1} (h(u) u^{1-\frac{r}{q}})^q u^{\frac{r}{q}-1} du dt \\
 &= \left(\frac{q}{r} \right)^{q-1} \int_0^\infty \int_u^\infty t^{-\frac{r}{q}-1} (h(u) u^{1-\frac{r}{q}})^q u^{\frac{r}{q}-1} dt du \\
 &= \left(\frac{q}{r} \right)^{q-1} \int_0^\infty (h(u) u^{1-\frac{r}{q}})^q u^{\frac{r}{q}-1} \int_u^\infty t^{-\frac{r}{q}-1} dt du \\
 &= \left(\frac{q}{r} \right)^{q-1} \int_0^\infty (h(u) u^{1-\frac{r}{q}})^q u^{\frac{r}{q}-1} \left(\frac{q}{r} \right) u^{-\frac{r}{q}} du \\
 &= \left(\frac{q}{r} \right)^q \int_0^\infty h(u)^q u^{q-r-1} du \\
 &= \left(\frac{q}{r} \right)^q \int_0^\infty (h(u) u)^q u^{-r-1} du.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^t h(u) du \right)^q t^{-r-1} dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{q}{r} \left(\int_0^\infty (th(t))^q t^{-r-1} dt \right)^{\frac{1}{q}}.$$

ii) Seja $\tilde{h}(u) = \frac{h(\frac{1}{u})}{u^2}$, considere $v = \frac{1}{u}$ e $s = \frac{1}{t}$. Dessa maneira teremos, $ds = t^{-2} dt$, $dv = u^{-2} du$ e,

$$\begin{aligned}
 \left(\int_0^\infty \left(\int_s^\infty h(v) dv \right)^q s^{r-1} ds \right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\int_0^\infty \left(\int_{\frac{1}{t}}^\infty h(v) dv \right)^q t^{-r+1} ds \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &= \left(\int_0^\infty \left(\int_0^t h\left(\frac{1}{u}\right) u^{-2} du \right)^q t^{-r+1} t^{-2} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &= \left(\int_0^\infty \left(\int_0^t \tilde{h}(u) du \right)^q t^{-r-1} dt \right)^{\frac{1}{q}}.
 \end{aligned}$$

Daí, resulta do item anterior que

$$\begin{aligned} \left(\int_0^\infty \left(\int_s^\infty h(v) dv \right)^q s^{r-1} ds \right)^{\frac{1}{q}} &\leq \frac{q}{r} \left(\int_0^\infty (s \tilde{h}(s))^q s^{-r-1} ds \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \frac{q}{r} \left(\int_0^\infty \left(s \frac{h(\frac{1}{s})}{s^2} \right)^q s^{-r-1} ds \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \frac{q}{r} \left(\int_0^\infty (th(t))^q t^{r-1} dt \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.13 (Dualidade). *Se $1 < p < \infty$ e $1 \leq q < \infty$ ou $p = q = 1$, (p, q) então $L(p, q)^*$ é isomorfo a $L(p', q')$ onde p' e q' são os conjugados de p e q respectivamente.*

Demonstração. Se $p = q$, teremos $L(p, q) = L(p, p) = L(p)$, seque que $(L^p)^*$ é isomorfo a $L(p')$ $\forall 1 \leq p < \infty$. Seja $1 < p, q < \infty$ com $p \neq q$ e seja $g \in L(p', q')$ e defina φ como, $\varphi(f) = \int_\Omega f(x)g(x)dx \forall f \in L(p, q)$. É claro que φ é linear e usando a desigualdade de Hardy-Littlewood e a desigualdade de Hölder obtemos,

$$\begin{aligned} |\varphi(f)| &= \left| \int_\Omega f(x)g(x)dx \right| \\ &\leq \int_\Omega |f(x)g(x)|dx \\ &\leq \int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt \\ &\leq \int_0^\infty f^{**}(t)g^{**}(t)dt \\ &= \int_0^\infty t^{\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}} f^{**}(t)g^{**}(t) \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^\infty t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) t^{\frac{1}{p'}} g^{**}(t) \frac{dt}{t} \\ &\leq \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p'}} g^{**}(t))^{q'} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q'}} \\ &= \|f\|_{pq}^* \|g\|_{p'q'}^*. \end{aligned}$$

Portanto, φ é limitado e

$$\|\varphi\|_{[L(p,q)]^*}^* = \sup_{\|f\|_{pq}^*=1} |\varphi(f)| \leq \|g\|_{p'q'}^*.$$

Caso $1 < p < \infty$ e $q = 1$,

$$\begin{aligned} |\varphi(f)| &\leq \int_0^\infty t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) t^{\frac{1}{p'}} g^{**}(t) \frac{dt}{t} \\ &\leq \int_0^\infty t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \sup_{s>0} (s^{\frac{1}{p'}} g^{**}(s)) \frac{dt}{t} \\ &= \|f\|_{p1}^* \|g\|_{p'\infty}^*. \end{aligned}$$

Dessa forma

$$\|\varphi\|_{[L(p,1)]^*}^* \leq \|g\|_{p'\infty}^*.$$

Desse modo, para todas as funções em $L(p', q')$ podemos encontrar um funcional linear limitado em $L(p, q)$, ou seja, um elemento em $L(p, q)^*$.

Por outro lado, para $1 < p < \infty$ e $1 \leq q < \infty$ onde $p \neq q$, seja $\varphi \in L(p, q)^*$ arbitrário.

Defina $v(A) = \varphi(\chi_A)$ para qualquer conjunto $A \in \Sigma$. Segue que $v(\emptyset) = 0$ e se $\{A_n\}$ é uma sequência conjuntos mensuráveis dois a dois disjuntos tal que $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, obtemos pela linearidade de φ que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^\infty v(A_k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^\infty \varphi(\chi_{A_k}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\chi_{\sum_{k=1}^\infty A_k}) \\ &= \varphi(\chi_A) \\ &= v(A). \end{aligned}$$

Logo, v é aditivamente contável e se $\mu(A) = 0$, $\chi_A = 0$ $\mu - a.e.$ em Ω e assim $v(A) = \varphi(\chi_A) = 0$, isto é, v é absolutamente contínua com relação à medida μ . Pelo Teorema de Radon Nikodym, existe uma única função $g \in L(1, 1)$ tal que

$$\varphi(\chi_A) = v(A) = \int_A g(x) d\mu = \int_\Omega \chi_A(x) g(x) d\mu.$$

Pela linearidade de φ e pela densidade das funções simples, vemos que

$$\begin{aligned}
 \varphi(f) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j}\right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi(\chi_{A_j}) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \alpha_j \int_{\Omega} \chi_{A_j}(x) g(x) d\mu \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j}(x) g(x) d\mu \\
 &= \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_j \chi_{A_j}(x) g(x) d\mu \\
 &= \int_{\Omega} f(x) g(x) d\mu,
 \end{aligned}$$

no qual $\sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j} \rightarrow f$ quando $n \rightarrow \infty$. Segue pelo Teorema 1.13 que

$$\begin{aligned}
 \|\varphi\|_{[L(p,q)]^*}^* &= \sup_{f \in L(p,q)} \frac{|\varphi(f)|}{\|f\|_{pq}^*} \\
 &= \sup_{f \in L(p,q)} \frac{\int_0^\infty f^*(t) g^*(t) dt}{\|f\|_{pq}^*},
 \end{aligned}$$

com $\|f\|_{pq}^* \neq 0$. Tome f de tal modo que

$$f^*(t) = \int_{\frac{t}{2}}^\infty h(s) \frac{ds}{s},$$

onde $h(s) = s^{\frac{q'}{p'}-1} g^*(s)^{q'-1}$ e $1 < p, q < \infty$, $p \neq q$. Pela desigualdade de Hardy com

$r = \frac{q}{p} > 0$ e fazendo $u = \frac{t}{2}$ resulta que

$$\begin{aligned}
 \|f\|_{pq}^q &= \int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} f^*(t))^q \frac{dt}{t} \\
 &= \int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} \int_{\frac{t}{2}}^\infty h(s) \frac{ds}{s} \right)^q \frac{dt}{t} \\
 &= \int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1} \left(\int_{\frac{t}{2}}^\infty h(s) s^{-1} ds \right)^q dt \\
 &= \int_0^\infty (2u)^{\frac{q}{p}-1} \left(\int_u^\infty h(s) s^{-1} ds \right)^q 2du \\
 &= (2)^{\frac{q}{p}} \int_0^\infty \left(\int_u^\infty h(s) s^{-1} ds \right)^q (u)^{\frac{q}{p}-1} du \\
 &\leq (2)^{\frac{q}{p}} \left(\frac{q}{\underline{q}} \right)^q \int_0^\infty \left(\int_u^\infty h(s) s^{-1} ds \right)^q (u)^{\frac{q}{p}-1} du \\
 &= (p2^{\frac{1}{p}})^q \int_0^\infty h(u)^q (u)^{\frac{q}{p}-1} du \\
 &= (p2^{\frac{1}{p}})^q \int_0^\infty (u^{\frac{q'}{p'}-1} g^*(u)^{q'-1})^q (u)^{\frac{q}{p}-1} du \\
 &= (p2^{\frac{1}{p}})^q \int_0^\infty u^{\frac{q}{p}-1+q\frac{q'}{p'}-q} g^*(u)^{q(q'-1)} du.
 \end{aligned}$$

Desde que,

$$\begin{aligned}
 \frac{q}{p} - 1 + q\frac{q'}{p'} - q &= q \left(\frac{1}{p} - 1 \right) + q\frac{q'}{p'} - 1 \\
 &= q \left(-\frac{1}{p'} \right) + q\frac{q'}{p'} - 1 \\
 &= \frac{q}{p'} (-1 + q') - 1 \\
 &= \frac{q}{p'} \left(\frac{q'}{q} \right) - 1 \\
 &= \frac{q'}{p'} - 1,
 \end{aligned}$$

e $(q' - 1)q = q'$, obtemos

$$\begin{aligned}
 \|f\|_{pq}^q &\leq (p2^{\frac{1}{p}})^q \int_0^\infty u^{\frac{q'}{p'}-1} g^*(u)^{q'} du \\
 &= (p2^{\frac{1}{p}})^q \|g\|_{p'q'}^{q'} \\
 &\leq (p2^{\frac{1}{p}})^q (\|g\|_{p'q'}^*)^{q'}.
 \end{aligned}$$

Pela equivalência das quasi-normas, segue que

$$\begin{aligned} (\|f\|_{p'q'}^*)^{q'} &\leq (p'\|f\|_{p'q'})^{q'} \\ &\leq (p'p2^{\frac{1}{p}})^q (\|g\|_{p'q'}^*)^{q'}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{[L(p,q)]^*}^* &\geq \frac{\int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt}{\|f\|_{pq}^*} \\ &= \frac{1}{\|f\|_{pq}^*} \int_0^\infty \left(\int_{\frac{t}{2}}^\infty h(s) \frac{ds}{s} \right) g^*(t) dt \\ &\geq \frac{1}{\|f\|_{pq}^*} \int_0^\infty \left(\int_{\frac{t}{2}}^t h(s) \frac{ds}{s} \right) g^*(t) dt \\ &= \frac{1}{\|f\|_{pq}^*} \int_0^\infty \left(\int_{\frac{t}{2}}^t s^{\frac{q'}{p'}-1} g^*(s)^{q'-1} \frac{ds}{s} \right) g^*(t) dt \\ &\geq \frac{1}{\|f\|_{pq}^*} \int_0^\infty \left(\int_{\frac{t}{2}}^t s^{\frac{q'}{p'}-2} ds \right) g^*(t)^{q'} dt \\ &= \frac{1}{\|f\|_{pq}^*} \frac{p'}{q' - p'} \int_0^\infty \left(t^{\frac{q'}{p'}-1} - \left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{q'}{p'}-1} \right) g^*(t)^{q'} dt \\ &= \frac{1 - 2^{1-\frac{q'}{p'}}}{\|f\|_{pq}^*} \frac{p'}{q' - p'} \int_0^\infty t^{\frac{q'}{p'}-1} g^*(t)^{q'} dt \\ &= \frac{1 - 2^{1-\frac{q'}{p'}}}{\|f\|_{pq}^*} \frac{p'}{q' - p'} \|g\|_{p'q'}^{q'} \\ &\geq \frac{p'(1 - 2^{1-\frac{q'}{p'}})}{q' - p'} \frac{(p(\|g\|_{p'q'}^*)^{q'})^{q'}}{\|f\|_{pq}^*} \\ &\geq \frac{p'(1 - 2^{1-\frac{q'}{p'}})}{q' - p'} \frac{(p(\|g\|_{p'q'}^*)^{q'})^{q'}}{(p'p2^{\frac{1}{p}})(\|g\|_{p'q'}^*)^{\frac{q'}{q}}} \\ &= C(\|g\|_{p'q'}^*)^{q'-\frac{q'}{q}} \\ &= C\|g\|_{p'q'}^*, \end{aligned}$$

em que C é uma constante positiva que depende somente de p e q e, assim, $\|g\|_{p'q'}^* < \infty$. Desse modo $g \in L(p'q')$. Portanto, $L(p, q)^*$ e $L(p', q')$ são isomorfos. $\square$

Teorema 2.14 (ver [9]). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto $1 < p < \infty$ e $1 < q < \infty$. Então, o espaço de Lorentz $L(p, q)$ é uniformemente convexo.*

Daí, concluímos que $L(p, q)$ é reflexivo para $1 < p < \infty$ e $1 < q < \infty$ com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto.

Observação 2.4. Se μ é não atômico e σ -finito então para $1 < p, q < \infty$, $L(p, q)^* =$

$L(p', q')$ veja [13]. Se $1 < p < \infty$ e $0 < q \leq 1$, $L(p, q)^* = L(p', \infty)$, veja [13]. Se $0 < p < 1$ e $0 < q \leq \infty$, $L(p, q)^* = 0$. O caso $q < \infty$ foi provado em [13] e o caso $q = \infty$ foi provado em [11]. Caso $1 < q < \infty$, $L(1, q)^* = 0$, ver [13]. Se $0 < q \leq 1$, $L(1, q)^* = L^\infty$. Para $0 < q < 1$ veja [13], para $q = 1$, sabemos que $L(1, 1) = L^1$ e o resultado segue. Se $1 \leq p < \infty$, $L(p, 1)^* \neq 0$. Caso $p = 1$ veja [12] e para $1 < p < \infty$ veja [10].

Enunciaremos a desigualdade de Hölder para espaços de Lorentz, veja o Teorema 2.3 de [17] e o Teorema 2.2.1 de [16].

Teorema 2.15 (Desigualdade de Hölder). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Suponha $1 < p < \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$. Se $f \in L(p, q)$ e $g \in L(p', q')$. Então,*

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)|dx \leq \int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt \leq \|f\|_{pq} \|g\|_{p'q'}.$$

Capítulo 3

Espaços de Sobolev-Lorentz

Neste capítulo estudaremos algumas propriedades topológicas e métricas dos espaços de Sobolev-Lorentz e aplicações, considerando sempre que Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Na primeira seção veremos a definição do espaço de Sobolev-Lorentz e algumas propriedades. Na seção seguinte estudaremos uma aplicação deste espaço, veremos o que se ganha quando estudamos as condições de crescimento de $f(u)$ nos espaços de Sobolev-Lorentz com Ω limitado e $n \geq 3$, para o sistema Hamiltoniano dado por

$$\begin{cases} -\Delta u = v^p, & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v = u^q, & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $f(u) = u^q$, $g(v) = v^p$ são superlinearidades não lineares. Se $1 < p \leq 2^* - 1$ e $1 < q \leq 2^* - 1$ os espaços de Sobolev nos fornecem que $f(u) \sim u^{2^*-1}$ é o crescimento no máximo de f (ver [6]), além disso, se aumentarmos o valor de p o valor de q deve ser compensado, ou seja, podemos ter p supercrítico desde que o valor de q seja subcrítico, e para esses valores de p e q passa uma hipérbole, no qual é chamada de hipérbole crítica. É interessante conhecer qual o crescimento máximo da função f quando nos aproximamos da assíntota dessa hipérbole crítica que é dada por $p = \frac{2}{n-2}$ uma vez que próximo da assíntota, o valor de q fica livre. Para este caso os espaços de Lorentz-Sobolev nos fornecem respostas ótimas sobre as condições de crescimento da função f . Mostraremos esse fato considerando $p+1 = \frac{2}{n-2}$, isto é, $p+1$ na assíntota hipérbole crítica $\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} = 1 - \frac{2}{n}$, no sistema dado por

$$\begin{cases} -\Delta u = v^{\frac{2}{n-2}}, & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v = f(u), & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Veremos que nos espaços de Sobolev, $f(u) \sim e^{|u|^{\frac{n}{n-1}}}$ é o crescimento máximo de f , nos espaços de Sobolev-Fracionado $f(u) \sim e^{|u|^{\frac{n}{n-t}}}$ onde $t \in (0, 2)$ é o crescimento máximo de f , e quando estudamos essas condições de crescimento para os espaços de Sobolev-Lorentz, temos que $f(u) \sim e^{|u|^{\frac{n}{n-2}}}$ é o crescimento máximo de f . Para tanto como foi dito anteriormente, iniciaremos estudando as propriedades básicas dos espaços de Sobolev-Lorentz na próxima seção e em seguida retornaremos ao problema enunciado nessa introdução, para explicar a vantagem dessa abordagem.

3.1 Definição dos Espaços de Sobolev-Lorentz e propriedades

Usaremos $L^{p,q}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ para fazer menção a funções $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ que estão em $L(p, q)$ e $L^{p,q}(\Omega)$ para fazer menção a funções $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g \in L(p, q)$. $L^{p,q}$ significa que estamos considerando o espaço $(L(p, q), \|\cdot\|_{pq})$ e quando escrevemos $L^{(p,q)}$ significa que consideramos o espaço $(L(p, q), \|\cdot\|_{pq}^*)$.

Definição 3.1. Seja $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, dizemos que

$$f \in L^{p,q}(\Omega; \mathbb{R}^m) \Leftrightarrow f_i \in L^{p,q}(\Omega)$$

para $i = 1, 2, \dots, m \Leftrightarrow |f| \in L^{p,q}(\Omega)$, onde $|f| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2}$ e definimos

$$\|f\|_{L^{p,q}(\Omega; \mathbb{R}^m)} = \| |f| \|_{pq},$$

e

$$\|f\|_{L^{(p,q)}(\Omega; \mathbb{R}^m)} = \| |f| \|_{pq}^*.$$

Segue do caso real que

$$\|f\|_{L^{p,q}(\Omega; \mathbb{R}^m)} \leq \|f\|_{L^{(p,q)}(\Omega; \mathbb{R}^m)} \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_{L^{p,q}(\Omega; \mathbb{R}^m)},$$

para $1 < p < \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$, e como no caso real $\|\cdot\|_{L^{p,q}(\Omega; \mathbb{R}^m)}$ define uma norma quando $1 \leq q \leq p$ e uma quasi norma quando $p < q \leq \infty$. Temos que $(L^{p,q}(\Omega; \mathbb{R}^m); \|\cdot\|_{L^{p,q}(\Omega; \mathbb{R}^m)})$ é Banach para $1 \leq q \leq p$ e $(L^{p,q}(\Omega; \mathbb{R}^m); \|\cdot\|_{L^{(p,q)}(\Omega; \mathbb{R}^m)})$ é Banach para $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, são reflexivos se $1 < q < \infty$ e $1 < p < \infty$, além disso o dual de $L^{p,q}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ é $L^{p',q'}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ para $1 \leq q < \infty$ e $1 < p < \infty$. Ver [18] para maiores detalhes.

Definição 3.2. Sejam $1 < p < \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$ e considere $r = \min(p, q)$, $\varphi \in C^\infty(\Omega)$.

Definimos o espaço de Sobolev-Lorentz como sendo o espaço

$$W^{1,(p,q)}(\Omega) = L^{(p,q)}(\Omega) \cap \{f; \partial_i f \in L^{(p,q)}(\Omega); i = 1, 2, \dots, n\}$$

equipado com a norma

$$\|f\|_{W^{1,(p,q)}(\Omega)} = \|f\|_{L^{(p,q)}(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|\partial_i f\|_{L^{(p,q)}(\Omega)},$$

que é claramente equivalente a,

$$(\|f\|_{L^{(p,q)}(\Omega)}^r + \|\nabla f\|_{L^{(p,q)}(\Omega; \mathbb{R}^n)}^r)^{\frac{1}{r}},$$

onde ∇f é o gradiente distribucional de f .

De forma análoga,

$$W^{1,p,q}(\Omega) = L^{p,q}(\Omega) \cap \{f; \partial_i f \in L^{p,q}(\Omega); i = 1, 2, \dots, n\}$$

com a norma

$$\|f\|_{W^{1,p,q}(\Omega)} = \|f\|_{L^{p,q}(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|\partial_i f\|_{L^{p,q}(\Omega)}.$$

Definição 3.3. Sejam $1 < p < \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$ e considere $r = \min(p, q)$, $\varphi \in C^\infty(\Omega)$. O espaço de Sobolev-Lorentz, $H^{1,(p,q)}(\Omega)$ é definido como o completamento do conjunto

$$\{\varphi \in C^\infty(\Omega); \|\varphi\|_{1,(p,q);\Omega < \infty}\},$$

no qual

$$\|\varphi\|_{1,(p,q);\Omega} = (\|\varphi\|_{L^{(p,q)}(\Omega)}^r + \|\nabla \varphi\|_{L^{(p,q)}(\Omega; \mathbb{R}^n)}^r)^{\frac{1}{r}},$$

e $\nabla \varphi = (\partial_1 \varphi, \partial_2 \varphi, \dots, \partial_n \varphi)$ é o gradiente de φ . Analogamente definimos $H^{1,p,q}(\Omega)$ como o completamento do conjunto

$$\{\varphi \in C^\infty(\Omega); \|\varphi\|_{1,p,q;\Omega < \infty}\},$$

onde,

$$\|\varphi\|_{1,p,q;\Omega} = (\|\varphi\|_{L^{p,q}(\Omega)}^r + \|\nabla \varphi\|_{L^{p,q}(\Omega; \mathbb{R}^n)}^r)^{\frac{1}{r}},$$

é a quasi norma pq Sobolev-Lorentz.

Definição 3.4. O espaço $H_0^{1,(p,q)}(\Omega)$ é definido como o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^{1,(p,q)}(\Omega)$

Usaremos $\|\cdot\|_{H^{1,(p,q)}(\Omega)}$ no lugar de $\|\cdot\|_{1,(p,q);\Omega}$ e $\|\cdot\|_{H^{1,p,q}(\Omega)}$ no lugar de $\|\cdot\|_{1,p,q;\Omega}$

quando estivermos trabalhando no espaço $H^{1,(p,q)}(\Omega)$ e $H^{1,p,q}(\Omega)$ respectivamente. A demonstração do Teorema a seguir poderá ser encontrada em no Teorema V.9 de [19].

Teorema 3.1. *Suponha $1 < p < \infty$ e $1 \leq q < \infty$. O espaço,*

$$C^\infty \cap \{u; \|u\|_{H^{1,(p,q)}(\Omega)} < \infty\}$$

é denso em $W^{1,(p,q)}(\Omega)$. Isto é, $H^{1,(p,q)}(\Omega) = W^{1,(p,q)}(\Omega)$.

Enunciaremos a desigualdade de Hölder generalizada para espaços de Lorentz cuja prova é encontrada em [16].

Teorema 3.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com medida finita. Seja $1 < p_1, p_2, p_3 < \infty$ e $1 \leq q_1, q_2, q_3 \leq \infty$ tais que*

$$\frac{1}{p_1} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}$$

e

$$\frac{1}{q_1} = \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3}$$

sempre que, $1 \leq q_1, q_2, q_3 < \infty$, ou $1 \leq q_1 = q_2 \leq q_3 = \infty$, ou $1 \leq q_1 = q_3 \leq q_2 = \infty$.

Então,

$$\|f\|_{L^{p_1,q_1}(\Omega;\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^{p_2,q_2}(\Omega;\mathbb{R}^n)} \|\chi_\Omega\|_{L^{p_3,q_3}(\Omega)}$$

.

Teorema 3.3. *$W^{1,(p,q)}(\Omega)$ e $H^{1,(p,q)}(\Omega)$ são espaços de Banach reflexivos quando $1 < p < \infty$ e $1 < q < \infty$.*

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência de Cauchy em $W^{1,(p,q)}(\Omega)$. Então, (u_n) e $(\partial_i u)$ são sequências de Cauchy em $L^{(p,q)}(\Omega)$ para $1 \leq i \leq n$. Como $(L^{(p,q)}(\Omega), \|\cdot\|_{L^{(p,q)}(\Omega)})$ é um espaço de Banach para $1 < p < \infty$ e $1 < q < \infty$, existem $u, v_i \in L^{(p,q)}(\Omega)$ tais que,

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } L^{(p,q)}(\Omega)$$

e

$$\partial_i u_n \longrightarrow v_i \text{ em } L^{(p,q)}(\Omega).$$

Seja $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Pelo Desigualdade de Hölder Generalizado para espaços de Lorentz temos

$$\left| \int_\Omega (u_n - u) \partial_i \varphi dx \right| \leq \|u_n - u\|_{L^{(p,q)}(\Omega)} \|\partial_i \varphi\|_{L^{(p',q')}(\Omega)} \longrightarrow 0,$$

$$\left| \int_\Omega (\partial_i u_n - v_i) \varphi dx \right| \leq \|\partial_i u_n - v_i\|_{L^{(p,q)}(\Omega)} \|\varphi\|_{L^{(p',q')}(\Omega)} \longrightarrow 0.$$

O que implica que,

$$\int_{\Omega} u_n \partial_i \varphi dx \longrightarrow \int_{\Omega} u \partial_i \varphi dx,$$

da mesma forma,

$$\int_{\Omega} \partial_i u_n \varphi dx \longrightarrow \int_{\Omega} v_i \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \partial_i \varphi dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n \partial_i \varphi dx \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \partial_i u_n \varphi dx \\ &= - \int_{\Omega} v_i \varphi dx. \end{aligned}$$

Ou seja, $\partial_i u = v_i \quad \forall 1 \leq i \leq n$ no sentido fraco. Resultando que $u \in W^{1,(p,q)}(\Omega)$ e

$$\|u_n - u\|_{W^{1,(p,q)}(\Omega)} = \|u_n - u\|_{L^{(p,q)}(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|\partial_i u_n - \partial_i u\|_{L^{(p,q)}(\Omega)} \longrightarrow 0.$$

Logo $W^{1,(p,q)}(\Omega)$ é Banach para $1 < p < \infty$ e $1 < q < \infty$. Considere agora a injeção canônica

$$\begin{aligned} J : W^{1,(p,q)}(\Omega) &\longrightarrow L^{(p,q)}(\Omega) \times L^{(p,q)}(\Omega)^n \\ u &\longmapsto (u, \nabla u). \end{aligned}$$

Pelo fato de que $W^{1,(p,q)}(\Omega)$ é Banach para $1 < p < \infty$ e $1 < q < \infty$, segue que $J(W^{1,(p,q)}(\Omega))$ para $1 < p < \infty$ e $1 < q < \infty$ é fechado em $L^{(p,q)}(\Omega) \times L^{(p,q)}(\Omega)^n$, logo $J(W^{1,(p,q)}(\Omega))$ é uniformemente convexo e reflexivo. Sabendo que $J(W^{1,(p,q)}(\Omega))$ e $W^{1,(p,q)}(\Omega)$ são isométricamente isomorfos, as mesmas propriedades valem também para $W^{1,(p,q)}(\Omega)$. $\square$

Provaremos a desigualdade de Poincaré e a desigualdade de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg para espaços de Sobolev-Lorentz. Para isso precisaremos de alguns resultados cujas provas serão omitidas.

Teorema 3.4. [ver [17] corolário 2.7] *Seja $1 < p < \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$. Suponha $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Seja f_k uma sequência de funções em $L^{p,q}(\Omega; \mathbb{R}^n)$, convergindo para f com respeito a p, q -quasinorma e pontualmente q.t.p em Ω . Então*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k\|_{L^{p,q}(\Omega, \mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^{p,q}(\Omega, \mathbb{R}^n)}.$$

Definição 3.5. Para cada função mensurável $f \in \mathbb{R}^n$ o funcional integral $I_1 f$ é definido por

$$(I_1 f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x - y|^{n-1}} dy.$$

Teorema 3.5. [ver [19] Corolário II.15] Seja $1 < p < \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$. Suponha $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado. Sejam u e v funções mensuráveis com suporte em Ω , $v \geq 0$ tal que $|u(x)| \leq (I_1 v)(x)$ para cada $x \in \Omega$. Se $v \in L^{p,q}(\Omega)$, temos que $u \in L^{p,q}$ e

$$\|u\|_{L^{p,q}(\Omega)} \leq C(n, p, q) \mu(\Omega)^{\frac{1}{n}} \|v\|_{L^{p,q}(\Omega)}.$$

O Teorema a seguir, é conhecido como a desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev. Para uma demonstração, veja [2].

Teorema 3.6. Sejam $1 < p < n$ e $1 \leq q \leq \infty$. Então existe uma constante $C(n, p, q) > 0$ tal que

$$\|I_1 f\|_{L^{\frac{np}{n-p},q}(\mathbb{R}^n)} \leq C(n, p, q) \|f\|_{L^{p,q}(\mathbb{R}^n)}.$$

Teorema 3.7. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Sejam $1 < p < \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$

i) (Desigualdade de Poincaré para espaços de Sobolev-Lorentz) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado. Sejam $1 < p < \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$. Então existe uma constante $C(n, p, q) > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^{p,q}(\Omega)} \leq C(n, p, q) \mu(\Omega)^{\frac{1}{n}} \|\nabla u\|_{L^{p,q}(\Omega)},$$

$$\forall u \in H_0^{1,(p,q)}(\Omega).$$

ii) (Desigualdade de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg) Se $1 < p < n$, então existe uma constante $C(n, p, q) > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^{\frac{np}{n-p},q}(\Omega)} \leq C(n, p, q) \mu(\Omega)^{\frac{1}{n}} \|\nabla u\|_{L^{p,q}(\Omega; \mathbb{R}^n)},$$

$$\forall u \in H_0^{1,(p,q)}(\Omega)$$

Demonstração. Como $H_0^{1,(p,q)}(\Omega)$ é o fecho de C_0^∞ em $H^{1,(p,q)}(\Omega)$, pelo Teorema 3.4 é suficiente provar i) e ii) mostrando para funções $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Seja $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Podemos estender u fazendo $u = 0$ em $\mathbb{R}^n - \Omega$, daí $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e u tem suporte compacto em Ω , por Gilbarg-Trudinger [3] Lema 7.14] temos,

$$|u(x)| \leq \frac{1}{\omega_{n-1}} (I_1 |\nabla \varphi|)(x)$$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$ onde $\omega_{n-1} = \mu(S(0,1))$. Considere $v = \frac{|\nabla u|}{\omega_{n-1}}$ assim, obtemos

$$|u(x)| \leq (I_1 v)(x),$$

u e v tem suporte em Ω .

Para mostrar *i*) o Teorema 3.5 diz que existe uma constante $C(n, p, q)$ tal que

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{p,q}(\Omega)} &\leq C(n, p, q) \mu^{\frac{1}{n}} \|\nabla u\|_{L^{p,q}(\Omega)} \\ &= C(n, p, q) \mu^{\frac{1}{n}} \|\nabla u\|_{L^{p,q}(\Omega; \mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Para *ii*) aplicamos o item *ii*) do Teorema 1.1 e o Teorema de Hardy-Litelwood-Sobolev para obtermos que

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{\frac{np}{n-p},q}(\Omega)} &= \left(\int_0^\infty t^{\frac{q}{n-p}-1} u^*(t)^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\int_0^\infty t^{\frac{q}{n-p}-1} (I_1 v)^*(t)^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_0^\infty t^{\frac{q}{n-p}-1} (I_1 \frac{|\nabla u|}{\omega_{n-1}})^*(t)^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \frac{1}{\omega_{n-1}} \|I_1 |\nabla u|\|_{L^{\frac{np}{n-p},q}(\Omega)} \\ &= \frac{1}{\omega_{n-1}} \|I_1 \nabla u\|_{L^{\frac{np}{n-p},q}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C(n, p, q) \|\nabla u\|_{L^{p,q}(\mathbb{R}^n)} \\ &= C(n, p, q) \|\nabla u\|_{L^{p,q}(\Omega)}. \end{aligned}$$

□

Observação 3.1. Claramente $\|\nabla u\|_{L^{p,q}(\Omega)}$ é uma norma equivalente a $\|u\|_{H_0^{1,p,q}(\Omega)}$ em $H_0^{1,p,q}(\Omega)$.

3.2 Modelagens para o Sistema Hamiltoniano em espaços de Sobolev e em espaços de Sobolev-Lorentz

Considere o sistema elíptico dado por

$$\begin{cases} -\Delta u = g(v), & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = f(u), & \text{em } \Omega \\ u = v = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde Ω um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ limitado, $n \geq 3$, f e $g \in C(\mathbb{R})$ não linearidades super-lineares. Começaremos esta seção modelando o problema acima em espaços de Sobolev, depois em espaço de Sobolev Fracionado, por fim enunciaremos alguns resultados (ver [1]) que serão cruciais para modelar tais problemas em espaços de Lorentz-Sobolev.

Uma modelagem natural para este sistema seria considerar o funcional

$$J : H_0^1 \times H_0^1 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \longmapsto \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Omega} G(v) dx - \int_{\Omega} F(u) dx.$$

Onde $F(s) = \int_0^s G(t) dt$, $G(s) = \int_0^s g(t) dt$. Para que (u, v) seja solução fraca do sistema, é necessário e suficiente que $J'(u, v) = 0$, para que J esteja bem definido, como $H_0^1 \hookrightarrow L^{2^*}$ temos que $F(u) \sim u^{2^*}$ e $G(u) \sim u^{2^*}$, o que nos fornece $f(u) \sim u^{2^*-1}$ e $g(u) \sim u^{2^*-1}$ onde $2^* = \frac{2n}{n-2}$ é o expoente crítico de Sobolev. Sairemos do espaço $H_0^1 = W^{1,2}$ e iremos para o Espaço $W^{1,\alpha}$.

Seja o funcional

$$J : W^{1,\alpha} \times W^{1,\beta} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \longmapsto \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \frac{n-2}{n} \int_{\Omega} v^{\frac{n}{n-2}} dx - \int_{\Omega} F(u) dx,$$

com $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ tal que

$$| \int_{\Omega} \nabla u \nabla v | \leq \| \nabla u \|_{\alpha} \| \nabla v \|_{\beta}.$$

Para que o funcional J esteja bem definido, impomos que

$$W^{1,\alpha} \hookrightarrow L^{\frac{n-2}{n}},$$

e como

$$W^{1,\alpha} \hookrightarrow L^{\frac{\alpha n}{n-\alpha}},$$

segue que,

$$\frac{\alpha n}{n-\alpha} = \frac{n-2}{n},$$

isso implica que

$$\alpha = \frac{n}{n-1}$$

e

$$1 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{\beta}.$$

Assim,

$$\frac{1}{\beta} = 1 - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}.$$

Logo $\beta = n$ e portanto

$$W^{1,\beta} = W^{1,n} \hookrightarrow L_\varphi(\Omega),$$

onde L_φ é o espaço de Orlicz com a n -função correspondente

$$\varphi(u) = e^{|u|^{\frac{n}{n-1}}},$$

ou seja, o crescimento máximo de F é $F(u) \sim e^{|u|^{\frac{n}{n-1}}}$.

Considere agora o espaço Fracionado

$$W^{s,p}(\Omega) = \{u \in W^{m,p}(\Omega); \frac{|D^\sigma u(x) - D^\sigma u(y)|}{|x-y|^{\gamma+\frac{n}{p}}} \in L^p(\Omega \times \Omega); \forall |\sigma| = m\},$$

onde $s = m + \gamma$ com $0 < \gamma < 1$, $m \geq 0$ inteiro e $1 \leq p < \infty$. A semi-norma de Sobolev é definida por

$$|u|_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\sigma|=m} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|D^\sigma u(x) - D^\sigma u(y)|}{|x-y|^{\gamma+\frac{n}{p}}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}},$$

com $1 \leq p < \infty$. Quando $p = 2$ a notação usada é $H^s(\Omega)$ ao invés de $W^{s,2}(\Omega)$.

Seja H um espaço de Hilbert separável com o produto escalar definido por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e considere o operador linear auto adjunto $T : D(T) \subset H \rightarrow H$ satisfazendo $\langle Tu, u \rangle \geq \|u\|^2 \forall u \in D(T)$, onde $D(T)$ denota o maior domínio possível onde podemos definir T dentro do espaço H . Note que $0 \notin \sigma(T)$ onde $\sigma(T)$ é o espectro de T , logo T é positivo e podemos então definir $T^{\frac{1}{2}} : D(T^{\frac{1}{2}}) \rightarrow H$ um operador auto adjunto e assim,

$$\langle T^{\frac{1}{2}}u, u \rangle \geq \|u\|^2 \forall u \in D(T^{\frac{1}{2}}).$$

Considere para cada $s > 0$ o operador $A^s = T^{\frac{s}{2}}$ e defina $E^s = D(A^s)$ onde cada E^s é um espaço de Hilbert com a norma do gráfico

$$\langle u, v \rangle_{E^s} = \langle u, v \rangle + \langle A^s u, A^s v \rangle.$$

De

$$\langle T^{\frac{1}{2}}u, u \rangle \geq \|u\|^2 \forall u \in D(T^{\frac{1}{2}}),$$

e da desigualdade de Cauchy-Schwarz temos,

$$\|A^s u\| \geq \|u\|, \forall u \in E^s,$$

consequentemente

$$\|u\|_{E^s} \text{ e } \|A^s u\|$$

são equivalentes. Considere $H(\Omega) = L^2(\Omega)$ então, $E^s = D(A^s) = H^s$ (ver [4]).

Podemos então considerar o operador $A^s : H^s(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ no qual foi definido acima. Intuitivamente A^s associa $u \in H^s$ a sua derivada fracionada de ordem s em L^2 . Defina agora o funcional

$$\begin{aligned} I : H^s(\Omega) \times H^t(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto \int_{\Omega} A^s u A^t v dx - \frac{n-2}{n} \int_{\Omega} G(v) dx - \int_{\Omega} F(u) dx, \end{aligned}$$

com $s + t = 2$.

Os pontos críticos de $I(u, v)$ são soluções fracas de [3.1]. Como $H^s \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2s}}$, então $F \sim v^{p+1}$ e $G \sim u^{q+1}$, onde temos as condições de crescimento

$$p + 1 = \frac{2n}{n - 2s},$$

$$q + 1 = \frac{2n}{n - 2t},$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} &= \frac{n-2s}{2n} + \frac{n-2t}{2n} \\ &= \frac{2n - 2(s+t)}{2n} \\ &= 1 - \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Portanto, novamente recaímos na hipérbole crítica.

Juntaremos agora o espaço de Sobolev com o espaço Fracionado e estudaremos os crescimentos de F e G .

Considere o funcional,

$$\begin{aligned} J : W^{s,\alpha}(\Omega) \times W^{t,\beta}(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto \int_{\Omega} A^s u A^t v dx - \frac{n-2}{n} \int_{\Omega} G(v) dx - \int_{\Omega} F(u) dx, \end{aligned}$$

com $s + t = 2$ e $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. De $W^{s,\alpha} \hookrightarrow L^{\frac{\alpha n}{n-\alpha s}}$ obtemos as seguintes condições para $p + 1$ e $q + 1$:

$$p + 1 = \frac{\alpha n}{n - \alpha s},$$

e

$$q + 1 = \frac{\alpha n}{n - \alpha t},$$

logo

$$\begin{aligned} \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} &= \frac{n - \alpha s}{\alpha n} + \frac{n - \beta t}{\beta n} \\ &= \frac{1}{\alpha} - \frac{s}{n} + \frac{1}{\beta} - \frac{t}{n} \\ &= \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - \frac{s+t}{n} \\ &= 1 - \frac{2}{n}, \end{aligned}$$

obtendo mais uma vez a hipérbole crítica.

Considere $p + 1$ na assíntota da hipérbole crítica, isto é,

$$\frac{n}{n-2} = p + 1 = \frac{\alpha n}{n - \alpha s}.$$

Daí, $\alpha = \frac{n}{n - (2 - s)}$, e $\beta = \frac{n}{t}$. Segue Por [\[15\]](#) que

$$W_0^{t,\beta} = W_0^{t,\frac{n}{t}} \hookrightarrow L_\varphi,$$

com

$$\varphi(u) = e^{|u|^{\frac{n}{n-t}}}, \forall t \in (0, 2).$$

Consequentemente, o crescimento máximo para F é $F(u) \sim e^{|u|^{\frac{n}{n-t}}}, \forall t \in (0, 2)$. Isto significa que o crescimento máximo de F depende da escolha de t .

Vejamos agora o problema [3.1](#) para o espaço de Lorentz com $n \geq 3$, $g(v) = |v|^{\frac{n}{n-2}}$. Para isso, enunciaremos alguns resultados.

Teorema 3.8 ([\[7\]](#)). *Suponha $q \leq p < n$, e $\nabla u \in L(p, q)$ então, $u \in L(p^*, q)$ onde, $p^* = \frac{np}{n-p}$ e $1 \leq q < \infty$.*

Teorema 3.9 ([\[8\]](#) e [\[7\]](#)). *Seja $\nabla u \in L(N, q)$ para algum $1 < q < \infty$. Então $e^{|u|^{\frac{q}{q-1}}} \in L^1$. Além disso, existe um $\theta > 0$ (dependendo de q) e $c > 0$ (dependendo de $\mu(\Omega)$) tal que*

$$\int_{\Omega} e^{\theta |u|^{\frac{q}{q-1}}} \leq C, \forall \|\nabla u\|_{N,q} \leq 1.$$

Seja

$$J(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \frac{n-2}{n} \int_{\Omega} |v|^{\frac{n}{n-2}} dx - \int_{\Omega} F(u) dx,$$

onde $\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$ é um produto no espaço de Lorentz, ou seja,

$$|\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx| \leq \|\nabla v\|_{L(p,q)} \|\nabla u\|_{L(p',q')},$$

no qual p, q, p', q' são determinados de tal forma que o último termo em $J(u, v)$ fique bem definido, o que significa que

$$v \in L^{\frac{n}{n-2}} = L(\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2}).$$

Pelo Teorema [3.8](#),

$$\frac{n}{n-2} = p^* = \frac{np}{n-p}$$

consequentemente

$$p = \frac{n}{n-1},$$

$$q = \frac{n}{n-2}.$$

Dessa forma impomos que

$$\nabla v \in L(\frac{n}{n-1}, \frac{n}{n-2}),$$

com, $p' = n$, e $q' = \frac{n}{2}$ os conjugados de p e q respectivamente. Assim,

$$\nabla u \in L(p', q') = L(n, \frac{n}{2}),$$

e pelo Teorema [3.9](#),

$$e^{|u|^{\frac{q'}{q'-1}}} = e^{|u|^q} = e^{|u|^{\frac{n}{n-2}}} \in L^1(\Omega)$$

o que implica que F tem crescimento máximo do tipo $F(u) \sim e^{|u|^{\frac{n}{n-2}}}$ e J fica bem definido em $W_0^1 L^{(\frac{n}{n-1}, \frac{n}{n-2})}(\Omega) \times W_0^1 L^{(n, \frac{n}{2})}(\Omega)$.

Referências Bibliográficas

- [1] B.RUF, *Lorentz Spaces and Nonlinear Elliptic Systems*. Contributions to nonlinear analysis, 471-489, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.,**66**, Birkhäuser, Basel, 2006.
- [2] C. BENNETT & R. SHARPLEY, *Interpolation of Operators*.Academic Press, 1988.
- [3] D. GILBARG & N. S.TRUNDIGER, *Elliptic Partial Diferential Equations of Second Order*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [4] DE SOUZA, EDNA, *Sobre a Existência de Soluções em Sistemas Elípticos Hamiltonianos em $\mathbb{R}^N$* . Paraíba. 2013. Dissertação(Mestrado em Matemática Pura e Aplicada) Universidade Federal da Paraíba.
- [5] E.KRISTIANSEN, *Decreasing Rearrangement and Lorentz $L(p, q)$ Spaces*.(Unpublished Master Thesi) Department of Mathematics of the Lulea University of Technology, 2002.
- [6] H. BREZIS, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2010.
- [7] H. BREZIS, *Laser beams and limiting cases of Sobolev inequalities*. Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications, College de France Seminar, Vol. II, H. Brezis, J.L. Lions, eds., Pitman, 1982.
- [8] H. BREZIS & S. WAINGER, *note on limiting cases of Sobolev embeddings and convolution inequalities*, Communications in Partial Diferential Equations, 1980, 773-789.
- [9] I. HALPERIN, *Uniform convexity in function spaces*.**DukeMath.J.**, v. 21, p. 195-204, 1954. Citation on page 44.
- [10] M. CWIKEL, *On the conjugates of some function spaces*.Studia Math. 45 (1973), 49-55.

- [11] M. Cwikel, *The dual of weak L^p* , Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 25(1975), 81-126.
- [12] M. Cwikel AND Y. SAGHER, $L(p, \infty)^*$, Indiana Univ. Math. J. 21 (1971/72), 781-786.
- [13] R.A.HUNT, *On $L(p, q)$ spaces*, *L'Enseignement Math.* **12**, (1966), 249- 276.
- [14] R.G. BARTLE, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. Wiley, New York, 1995.
- [15] R. S. STRICHARTZ, *A note on Trudinger's extension of Sobolev's inequality*, Indiana U. Math. J. 21 (1972), 841-842.
- [16] S. COSTEA, *Scaling Besov and Sobolev-Lorentz capacities in the Euclidean setting*. Publishing House of the Romanian Academy, Bucharest, 2012, xii+114 pages.
- [17] S. COSTEA, *Scaling invariant Sobolev-Lorentz capacity on R^n* . Indiana Univ. Math. J., **56** (2007), no. 6, 2641-2669.
- [18] S. COSTEA, *Sobolev-Lorentz spaces in the Euclidean setting and counterexamples*. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 152 (2017), 149-182.
- [19] S. COSTEA, *Strong A_∞ -weights and scaling invariant Besov and Sobolev-Lorentz capacities*. Ph.D thesis, University of Michigan, 2006.
- [20] Z.PAVIC, J.PECARIC & I.PERIC *Integral, Discrete and Functional Variants of Jensen's Inequality*. Journal of Matematic Inequalities, vol. 5, number 2, (2011), 253-264.