Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física

Erick Frade Silva

Propriedades do transporte quântico de sistemas correlacionados: ruído de disparo, desigualdade de Bell e estrutura de bandas.

João Pessoa

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

F799p Frade Silva, Erick.
Propriedades do transporte quântico de sistemas correlacionados: ruído de disparo, desigualdade de Bell e estrutura de bandas. / Erick Frade Silva. - João Pessoa, 2019.
167 f. : il.

Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Transporte Quântico. 2. Equações de Correlação. 3. Ruído de disparo. 4. Paridade. 5. Reversão Temporal. 6. Quiralidade. 7. Emaranhamento. 8. Concorrência. 9. Desigualdade de Bell. 10. Desigualdade CHSH. 11. Anyons. I. Título

UFPB/BC

24 de Agosto de 2019

Erick Frade Silva

Propriedades do transporte quântico de sistemas correlacionados: ruído de disparo, desigualdade de Bell e estrutura de bandas.

Tese apresentada ao Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba para obtenção do título de doutor em física.

Área de concentração: Matéria Condensada.

Orientador: Dr. Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos.

João Pessoa

24 de Agosto de 2019

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de **Doutorado** do aluno **Erick Frade Silva**, candidato ao Título de Doutor em Física na Área de Concentração Física da Matéria Condensada.

Aos vinte e três dias do mês de julho do ano de dois mil e dezenove, às 10:00, no Auditório da Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para examinar o candidato ao grau de Doutor em Física na área de Física da Matéria Condensada, **Erick Frade Silva**. A comissão examinadora foi composta pelos professores doutores: *Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos* (UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, *Basílio Baseia* (UFPB), *Knut Bakke Filho* (UFPB), *Raimundo Nogueira Costa Filho* (UFC) e *Ailton Fernandes de Macêdo Júnior* (UFRPE). Dando início aos trabalhos, o Prof. Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para que o candidato fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de tese intitulado "*Propriedades do transporte quântico de sistemas correlacionados: ruído de disparo, desigualdade de Bell e estrutura de bandas*". Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o seguinte parecer: **"aprovado".** Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutor em Física na forma da lei. E para constar, eu, Danilo Wilson Lemos Menezes, redigi esta ata que vai assinada por mim e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **23 de julho de 2019**.

Prof. Dr. Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos
Orientador – PPGF/UFPB

Prof. Dr. Basílio Baseia
PPGF/UFPB

Prof. Dr. Knut Bakke Filho
PPGF/UFPB

Prof. Dr. Raimundo Nogueira Costa Filho
UFC

Prof. Dr. Ailton Fernandes de Macêdo Júnior
UFRPE

Agradecimentos

Acima de tudo, gostaria de agradecer Daiana, minha esposa e o amor da minha vida. Rir, sofrer, dormir e viver sempre juntos tornou minha vida misteriosamente plena e calma. Você é minha melhor amiga, minha companheira, minha vida.

A meu pai, Rubens, quem me garantiu acesso a todos os meios possíveis para ter uma boa educação e uma boa vida. Sobretudo, agradeço por ser meu espelho de uma boa pessoa e um bom profissional.

A minha mãe, Rosemary, que sempre esteve presente ofertando um amor incondicional e imenso. Mesmo que por muitos anos morando à distância, não senti um momento sequer a ausência de minha mãe. Amo-a de maneira igualmente incondicional e imensa.

A meu orientador, Jorge Gabriel, por sua qualidade como físico, o qual me proporcionou um excelente parâmetro para minha carreira.

A minhas irmãs, em particular, Larissa, que sempre esteve junto a mim em todos os momentos da minha vida, bons e ruins, o que possibilitou o companheirismo fraterno, uma constante do espaço e do tempo.

A meus amigos, em especial meu cunhado Bertúlio, pelas nossas conversas e ter se mostrado uma pessoa em quem posso confiar.

Ao departamento de física (UFPB) e a Universidade Federal da Paraíba.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo incentivo à pesquisa.

‘‘Creio, perante a evolução imensa,
Que o homem universal de amanhã vença
O homem particular que eu ontem fui!’’

Augusto dos Anjos. Último Credo.

Lista de Símbolos.

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

,

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Resumo

O estudo de sistemas quânticos(*e.g.* pontos quânticos.) pode ser mediado pela análise da interação com partículas. Nesta perspectiva, o processo de espalhamento subjacente pode indicar propriedades físicas associadas a competição entre simetrias, tunelamento, fases generalizadas, entre outros efeitos eminentemente quânticos. Portanto, dadas as características probabilísticas dos efeitos, um importante sinal teórico-experimental está associado ao surgimento de funções de correlação fortes, o que permite estudos do espalhamento quântico de uma forma essencialmente completa.

Nós desenvolvemos um formalismo para o cálculo de funções de correlação através de operadores de campo e estudamos sua aplicabilidade em diferentes estruturas quânticas. Verificamos a influência das simetrias de paridade, reversão temporal e quiralidade do sistema no transporte quântico de dois portadores. A seguir, mostraremos como detectar emaranhamento entre dois elétrons via equações de correlação do transporte através de uma estrutura balística. Por fim, estudamos estatísticas não-usuais através da análise do comportamento dos anyons em um sistema quântico e verificaremos uma possível descrição para modelar Isolantes Topológicos.

Palavras Chave: Transporte Quântico, Equações de Correlação, Ruído de Disparo, Paridade, Reversão Temporal, Quiralidade, Emaranhamento, Concorrência, Desigualdade de Bell, Desigualdade CHSH, Anyons.

Abstract

The quantum system's investigation can be approached by the analysis of its interaction with particles. In this perspective, the scattering process may indicate physical properties associated with the competition betwenn simetries, tunneling, generalized phases, and other quantum effects. Therefore, given the probabilistic nature of the effects, an important theoretical-experimental hint is associated to correlation functions, which allows the study of quantum scattering in a complete manner.

We develop the correlation functions through the field operator's formalism and study its applicability in different contexts of quantum structures. We verify the influence of parity, time reversal and quirality on two carriers quantum transport. Then, we show how to detect entanglement between two electrons via the Transport's correlation equations of a ballistic structure. Finally, we study non-usual statistics through the analysis of the behavior of anyons in a quantum system and we will verify a possible description to model Topological Insulators.

Key Words: Quantum Transport, Correlation Equations, Shot noite, Parity, Time Reversal, Quirality, Entanglement, Concurrence, Bell Inequality, CHSH Inequality, Anyons.

Conteúdo

Lista de Figuras **11**

1 Introdução **13**
1.1 Mecânica Quântica. 13
1.1.1 O Problema do Espalhamento. 17
1.2 Experimento Hanbury Brown-Twiss. 22
1.3 Espaço de Fock. 24

2 As Funções de Correlação. **28**
2.1 Ruído. 28
2.1.1 Análise de Fourier, Média e Desvio Padrão. 28
2.1.2 Função de Correlação e o Ruído Espectral. 32
2.2 O Formalismo das Funções de Correlação. 37
2.2.1 Operador de Campo. 37
2.2.2 Conexão entre os estados de entrada e saída. 41
2.2.3 Funções de Correlação: o ruído de disparo. 45
2.3 Estatística HBT 49

3 Simetrias: paridade, reversão temporal e quiralidade. **52**
3.1 Paridade e Reversão Temporal 52
3.2 O Formalismo $\mathcal{PT}$. 54
3.3 A Cavidade HBT-PT. 55
3.4 Quiralidade: grafeno. 63

4 Informação Quântica: quantificando o emaranhamento. **73**
4.1 Paradoxo EPR, Desigualdade de Bell e Emaranhamento. 73
4.1.1 Postulados da Mecânica Quântica. 73
4.1.2 Paradoxo EPR: realismo e localidade. 75
4.1.3 Teorema de Bell e Emaranhamento. 78
4.2 Entropia e Grau de Emaranhamento. 84
4.2.1 Entropia de Shannon e von Neumann 84
4.2.2 Concorrência. 89
4.3 Emaranhamento pela Estatística. 98
4.3.1 Produção de Pares Emaranhados. 98
4.3.2 Emaranhamento pelas Equações de Correlação. 106

5 Estatísticas não-usuais: anyons. **112**
5.1 Anyons. 112
5.2 Modelo Kronig-Penney para Anyons. 119

6 Conclusões. **126**

Bibliografia **128**

A Análise de Fourier para funções não-periódicas. **138**

B Comutadores do Operador de Campo. **140**

C Normalização de (2.32) e (2.33). **142**

D Demonstração de (3.6). **144**

E Demonstração da Matriz S_T, (3.13) **146**

F Demonstração de (4.104). **148**

G Primeira Publicação. **150**

H Segunda Publicação. **158**

Lista de Figuras

1.1 Aparato de dupla fenda e a referida densidade de probabilidade. 14
1.2 Aparato de uma fenda e a referida densidade de probabilidade. 15
1.3 Partícula incidindo em uma região descrita pelo potencial $V(x)$. 18
1.4 Modelo de espalhamento bidimensional. 19
1.5 Esboço do interferômetro Hanbury Brown-Twiss: por R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss [9]. 22
1.6 tabela comparando as medições para as distâncias entre as antenas $d = 0$ e $d = 1.8$cm: por R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss [9]. 23
1.7 Esboço do aparato descrito por E. Purcell. 23

2.1 Pontos plotados que avaliam o comportamento de f à partir do parâmetro μ. A seguir o respectivo gráfico formando a distribuição. 29
2.2 Gráfico com periodicidade formado à partir da soma de funções trigonométricas. 29
2.3 Representação do espalhamento no interferômetro Hanbury Brown-Twiss: por E. Frade Silva, A. L. R. Barbosa, J. G. G. S. Ramos. [42] 49

3.1 Análise da paridade em um problema clássico. 53
3.2 Representação esquemática de uma secção amplificadora-atenuadora. . . . 56
3.3 Representação esquemática de uma cavidade de bombeamento com simetria PT. 56
3.4 Representação esquemática da cavidade com simetria PT encerrada por barreiras de tunelamento: por H. Schomerus [54]. 57
3.5 Representação esquemática da aparato HBT acoplado a secções de bombeamento e barreiras de tunelamento: por E. Frade Silva, A. L. R. Barbosa, J. G. G. S. Ramos. [42]. 58
3.6 Representação esquemática do *toy model* utilizando o aparato HBT-PT . . 62
3.7 Ácido tartárico e ácido racêmico, respectivamente.*https://alunosonline.uol.com.br/quimica/historia -isomeria-optica.html* 63
3.8 Aparato Stern-Gerlach: por H. Wennerström, P. Westlund. [62] 64
3.9 Resultado do experimento de Stern-Gerlach: por W. Gerlach, O. Stern. [63]. 64
3.10 Modelo de um grafeno: por E. Frade Silva *et al.* [67] 65
3.11 Fulereno, nanotubo de carbono e grafite à partir de uma folha de grafeno: por A. Geim, K. Novoselov. [68] 66
3.12 Banda de energia do grafeno, acentuando o ponto de Dirac: por A. H. Castro Neto *et al.* [71] 66
3.13 Um processo de espalhamento sob o efeito da operação de quiralidade. . . . 68
3.14 Grafeno acoplado à barreiras e um sistema de bombeamento: por E. Frade Silva *et al.* [67].. 69

3.15 As funções de correlação (3.33)-(3.36): por E. Frade Silva *et al.* [67]. . . . 71

4.1 Aparato com polarizadores com diferença angular θ: por *Bell's theorem, Wikipedia*. 79
4.2 Aparato para produção de pares emaranhados: por C. W. J. Beenakker [105] 99
4.3 Aparato HBT para produção de pares emaranhados. 106
4.4 Aparato HBT para produção de pares emaranhados com barreiras. 107

5.1 Aparato Hall bidimensional. É ligado uma corrente na direção y. Com o campo magnético, surge a corrente Hall na direção x. 113
5.2 Situação da distribuição eletrônica antes e após um campo magnético intenso. 113
5.3 Energia de Fermi entre 2 níveis de Landau. 114
5.4 Quantização da Corrente Hall após diminuir o nível de Fermi. 114
5.5 Efeito Hall Quântico Anômalo. 115
5.6 Representação clássica de um anyon. 116
5.7 Modelo de Kronig-Penney. 120
5.8 Modelo de Kronig-Penney anelar. 121
5.9 Representação de um anyon tunelando em cada ponto da rede. 123
5.10 Representação de um anyon tunelando entre bandas. 123
5.11 As linhas verticais, representam o lado direito de (5.25). Em colorido, o lado esquerdo, com todos os n_0's possíveis. 125

Capítulo 1

Introdução

1.1 Mecânica Quântica.

A mecânica quântica é a teoria que descreve o comportamento das partículas quando a escala em questão é microscópica. Em última análise, a mecânica quântica deve ser capaz de reproduzir resultados de teorias macroscópicas, como por exemplo, a mecânica newtoniana. Por essa razão, ainda direciona-se muitos esforços para encontrar uma teoria quântica da gravidade satisfatória[1], na tentativa de obter, como caso limite, a teoria da gravitação universal.

Muito se pode discutir a respeito da mecânica quântica antes de efetivamente endereçar-se um tratamento quantitativo, como por exemplo, o experimento de Stern-Gerlach, onde pôde-se observar a existência de um grau de liberdade extra intrínseco das partículas, o chamado spin. O espalhamento Compton, onde se observa a natureza corpuscular da luz. O experimento de difração do elétron por cristais, onde se observa a natureza ondulatória do elétron etc. Todos esses experimentos não podem ser descritos ou previstos por nenhuma outra teoria senão a quântica, o que nos leva a estabelecer os princípios que dão corpo à teoria.

Dessa forma, vamos estabelecer os princípios que regem o comportamento quântico de um dado sistema. Esses princípios podem ser discutidos de maneira mais clara e direta à luz da equação que avalia a evolução temporal de um sistema quântico, a equação de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\Psi(\vec{r},t)+V(r)\Psi(\vec{r},t)=i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec{r},t)}{\partial t}, \tag{1.1}$$

onde $\hbar=\frac{h}{2\pi}$ é a constante de Planck reduzida, m é o termo de inércia do sistema, $V(r)$ é o potencial do sistema que só depende de sua configuração, embora existam tratamentos mais gerais que trabalham com um potencial dependente do tempo. A função de onda, Ψ, contempla o comportamento probabilístico do sistema para uma determinada medição, em outras palavras, descreve a evolução do estado de um sistema. Se, por exemplo, estamos estudando a evolução temporal de uma partícula, estabelece-se que o módulo ao

quadrado de $\Psi(\vec{r},t)$ informará a probabilidade, $P_{\vec{r},t}$, de encontrar a partícula entre na secção volumétrica V e $V+\mathrm{d}V$, no instante t, a saber

$$P_{x,t} = |\Psi(\vec{r},t)|^2 \,\mathrm{d}V,$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(\vec{r},t)|^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 1, \tag{1.2}$$

onde, da teoria da probabilidade, utilizamos o fato que ao integrar por todo o espaço, estamos contemplando todos os pontos onde a partícula pode estar localizada, não por acaso, o módulo ao quadrado da função de onda chama-se densidade de probabilidade do sistema. A relação acima é conhecida como regra de Born, que introduz a interpretação probabilística da função de onda. Inevitavelmente, essa interpretação conduz-nos às famosas discussões epistemológicas e ontológicas a respeito do comportamento de um sistema quântico, no entanto, como dissemos anteriormente, estamos assumindo uma postura mais prática para descrever a teoria quântica. Para tratar de tais questões, recomendamos a leitura da referência [2]. Ademais, discutiremos os postulados da mecânica quântica com mais ênfase no capítulo 4.

Outro aspecto relevante inserido na função de onda é que esta contempla a natureza dual das partículas, *i.e.* estas podem ser tomadas como onda e corpúsculo de maneira complementar, por isso chamamos esse fato de princípio da complementaridade. A natureza da partícula será manifestada de acordo com o aparato de medição do experimento em questão. O princípio pode ser observado através da análise do experimento da dupla fenda[3] utilizando elétrons, como veremos a seguir.

Se tomamos uma pistola de feixe de elétrons e incidimos em uma dupla fenda cuja separação é da ordem do seu comprimento de onda, vamos obter o mesmo padrão de interferência no anteparo conhecido no contexto do experimento de Young, refletido na densidade de probabilidade, como vemos na Figura 1.1.

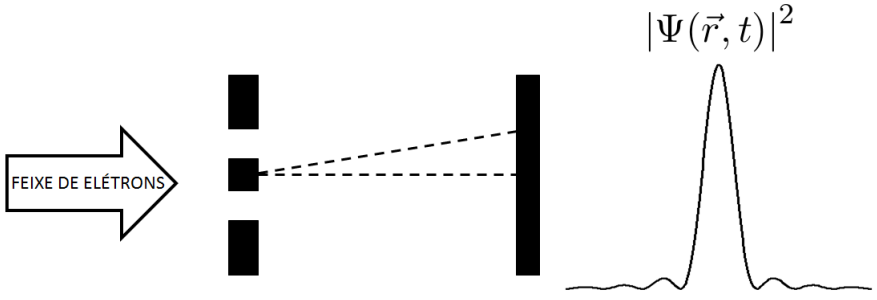


Figura 1.1: Aparato de dupla fenda e a referida densidade de probabilidade.

Por outro lado, se tapamos uma das fendas, obtemos no anteparo um padrão diferente, de forma que obteríamos o mesmo padrão caso fosse tapado a outra fenda, como vemos na Figura 1.2.

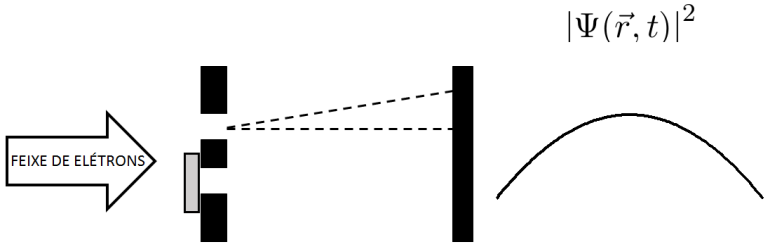


Figura 1.2: Aparato de uma fenda e a referida densidade de probabilidade.

Se somamos as duas contribuições do caso de uma fenda, claramente não obteremos o padrão da fenda dupla. Isso se deve ao primeiro caso contemplar a natureza ondulatória da partícula, através de interferências destrutivas e construtivas. Já no segundo, sem o fenômeno da interferência, obterá-se uma densidade de probabilidade compatível com uma partícula incidente no anteparo.

Não somente as naturezas possíveis da partícula coexistem de maneira complementar, como também algumas quantidades dinâmicas como a posição, x, e momento, p, da partícula. Isso traduz-se no que conhecemos como relação de comutação. Para tanto, atribuimos aos possíveis observáveis características de operadores que, ao atuar na função de onda, informam o possível valor do observável do sistema. Quantitativamente, temos

$$\hat{O}\Psi = \lambda\Psi, \tag{1.3}$$

onde $\hat{O}$ representa o operador do observável de interesse e λ, o valor de sua possível medição. Os operadores atuam no espaço matemático chamado Espaço de Hilbert(iremos trabalhar melhor esse conceito mais adiante), assim, podem assumir diferentes formas dependendo do espaço em que estão sendo descritos. Em particular, para o espaço das posições, o operador posição será $\hat{r}$, enquanto o operador momento será $\hat{p} \to -i\hbar\vec{\nabla}$. Independente do espaço de Hilbert, pelo princípio da complementaridade, os operadores posição e momento deverão obedecer a relação

$$\begin{aligned} \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} &= i\hbar, \\ [\hat{x}, \hat{p}] &= i\hbar. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Acima, introduzimos a notação de comutador. Existem outras relações de comutação, no entanto, reduziremos nossa discussão apenas a acima. É interessante notar que o princípio da complementaridade apresenta-nos uma relação entre posição e momento da partícula, isso acarreta em uma imprecisão inerente às medições simultâneas desses operadores, traduzindo-se na desigualdade abaixo

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}, \tag{1.5}$$

onde Δ denota o desvio padrão da referida quantidade. Esse é o chamado princípio da incerteza de Heisenberg. Alguns autores argumentam que o princípio da incerteza surge naturalmente da análise de Fourier para a função de onda, cujas variáveis conjugadas consistem nas quantidades complementares, o que inevitavelmente nos remete à relação (1.4). O fato é que (1.5) informa-nos um limite experimental para a medição de quantidades complementares. No entanto, a relação (1.5) só existe para os chamados pares canonicamente conjugados. Nada impede, por exemplo, de medirmos a posição de um elétron e a sua energia sem desvio algum.

Finalmente, a equação de Schrödinger deve, também, tratar de sistemas mais complexos, compostos por duas ou mais partículas, e a função de onda, novamente, descreve o estado do sistema. Assim, para um sistema de N partículas, temos a função de onda $\Psi(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N, t)$. Se identificamos, no lado esquerdo da equação de Schrödinger (1.1), o primeiro termo como a energia cinética de uma partícula de massa m, temos, então, para um sistema de N partículas

$$-\sum_{i=1}^{N} \frac{\hbar^2}{2m_i} \vec{\nabla}_i^2 \Psi(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N, t) + V(r_1, ..., r_N)\Psi(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N, t)}{\partial t}. \quad (1.6)$$

É importante ressaltar que as partículas são indistinguíveis a nível quântico, dessa forma, quaisquer troca entre essas partículas deve resultar na descrição do mesmo sistema, a saber

$$\Psi(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_i, ..., \vec{r}_j, ..., \vec{r}_N, t) \rightarrow \pm\Psi(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_j, ..., \vec{r}_i, ..., \vec{r}_N, t). \quad (1.7)$$

Observamos que essa troca vai influenciar na paridade da função de onda sem, contudo, alterar a equação (1.6). O sinais gerados pela troca de partículas irão influenciar fundamentalmente no comportamento das partículas com relação a sua natureza. Para trocas que geram sinais positivos, dizemos que a função de onda é simétrica e as partículas possuem natureza bosônica, por exemplo, o fóton. Para trocas que geram sinais negativos, dizemos que a função de onda é antissimétrica e caracterizam as partículas fermiônicas, por exemplo, o elétron.

A natureza da partícula irá influenciar nos princípios da mecânica quântica, por exemplo, para bósons, é válido o princípio da complementaridade (1.4) discutido acima, para férmions, o princípio da complementaridade irá ser traduzido por uma relação de anticomutação.

$$\begin{aligned} \hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x} &= i\hbar, \\ \{\hat{x}, \hat{p}\} &= i\hbar. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Outrossim, podemos escrever a função de onda total em termos das funções de ondas de

partículas independentes. Para o caso de 2 partículas, temos

$$\Psi(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) \pm \psi_1(x_2)\psi_2(x_1)\Big]. \tag{1.9}$$

Devemos notar que a função de onda acima está de acordo com a indistinguibilidade e a condição (1.7). Em particular, para o caso fermiônico, temos um resultado interessante: a probabilidade de 2 partículas fermiônicas ocuparem o mesmo estado quântico é nula. Essa assertiva não é válida somente para a posição e sim para quaisquer quantidades que descrevem o estado do sistema quântico, a esse fato chamamos de princípio de exclusão de Pauli.

Até aqui desenvolvemos os princípios orientadores para tratar um sistema quântico. Estes serão utilizados para discutir certos modelos de estruturas que reproduzirão o chamado espalhamento quântico.

1.1.1 O Problema do Espalhamento.

Como vimos anteriormente, o primeiro termo do lado esquerdo da equação de Schrödinger pode ser entendido como a energia cinética do sistema. De fato, utilizando a representação do operador momento no espaço de Hilbert das posições, se substituimos na energia cinética de uma partícula de momento p, temos precisamente o primeiro termo de (1.1), associado com o termo de potencial, temos que o lado esquerdo na realidade pode ser compreendido como um operador hamiltoniano do sistema,

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}, \\ \hat{H} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V(r). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Na mecânica hamiltoniana, se tomamos um sistema fechado, dizemos que a função hamiltoniana é a própria energia do sistema. De maneira análoga, tomamos um sistema quântico fechado, isso ocasiona em estados estacionários para o sistema. Se atuamos o operador hamiltoniano na função de onda, isso terá como resultado as energias possíveis do sistema,

$$\hat{H}\Psi = E\Psi, \tag{1.11}$$

o que nos remete a tomar o lado direito da equação de Schrödinger como o operador de energia, $E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$. Esse fato nos direciona a assumir que a função de onda $\Psi(\vec{r}, t)$ pode ser escrita em termos de uma função de onda espacial e outra temporal, a saber

$$\Psi(x, t) = \psi(x)\varphi(t). \tag{1.12}$$

Aqui já reduzimos a dependência espacial para somente uma dimensão, sem perda de generalidade. Também tomamos uma solução particular composta de duas funções, embora, uma solução mais geral seja de várias ondas superpostas. Se aplicamos o operador energia com o respectivo autovalor, temos que $\varphi(t) \sim \exp(iEt/\hbar)$ e temos a equação de Schrödinger independente do tempo

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x). \tag{1.13}$$

Aqui recuperamos a intenção inicial de Schrödinger de transformar os problemas em mecânica quântica em resolução de problemas de equação de autovalor, onde $\psi(x)$ são as autofunções do problema. Com a equação acima, podemos começar a construir modelos de espalhamento quântico.

Um espalhamento quântico deve contemplar a partícula propagando em direção a um alvo, interagir com esse alvo em seguida ser propagada em sentindo oposto ao alvo. Podemos descrever isso analisando um caso bastante simples de uma partícula incidindo em uma região descrita por um potencial desconhecido. Sem especificar por qual lado a partícula incide no potencial, esta poderá ser transmitida ou refletida, como observamos no esquema representado na Figura 1.3.

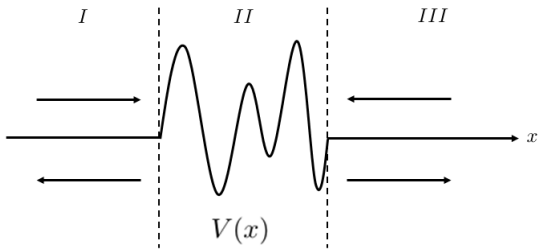


Figura 1.3: Partícula incidindo em uma região descrita pelo potencial $V(x)$.

Para as regiões I e III, podemos aplicar a equação de Schrödinger 1.13. A solução será dada em termos da composição de várias ondas planas de diferentes amplitudes. Como a partícula interagiu com um potencial localizado, as amplitudes que satisfarão as condições impostas por essa interação variarão de forma discreta, assim, a solução será dada em termos da soma de várias ondas planas, a saber

$$\begin{aligned}
\Psi(x,t) &= \sum_{n=1}^{N} a_n e^{\frac{i}{\hbar}(p_n x + E_n t)} + b_n e^{\frac{i}{\hbar}(p_n x - E_n t)}, \\
\Psi(x,t) &= \sum_{n=1}^{N} a_n e^{i(k_n x + \omega_n t)} + b_n e^{i(k_n x - \omega_n t)}, \\
\Psi(x) &= \sum_{n=1}^{N} a_n e^{-ik_n x} + b_n e^{ik_n x},
\end{aligned} \tag{1.14}$$

onde a_n e b_n são as amplitudes de entrada e saída, respectivamente. Definimos, também, $k_n = \frac{\sqrt{2mE_n}}{\hbar}$ e $\omega_n = \frac{E_n}{\hbar}$. É importante comentar, também, que tomamos um limite superior para o somatório pois tomar $N \to \infty$, consistiria em contemplar infinitas energias possíveis para o potencial, o que não ocorre na prática. Na última linha, eliminamos a dependência temporal, uma vez que esperamos o sistema alcançar o regime estacionário, o que acarreta na função de onda depende somente da variável espacial.

Notamos também que a função de onda é composta por vários modos k_n, de maneira que cada modo é chamado de canal de propagação. Também, cada linha que se liga ao potencial e possui vários canais de propagação damos o nome de guia.

Com o problema acima, não há muito o que ser feito além do resultado (1.14), no entanto, estamos interessados na técnica utilizada para encontrar tal solução: obtemos informações do sistema que não é possível descrever analiticamente sem, contudo, resolvê-lo, observamos isso quando fixamos que a função de onda do sistema é formada pelos autovalores do potencial em questão.

Podemos estender a discussão acima para o caso bidimensional, tomando N_g guias de propagação ligados a uma região espalhadora, agora chamada de ponto quântico, como mostramos na Figura 1.4.

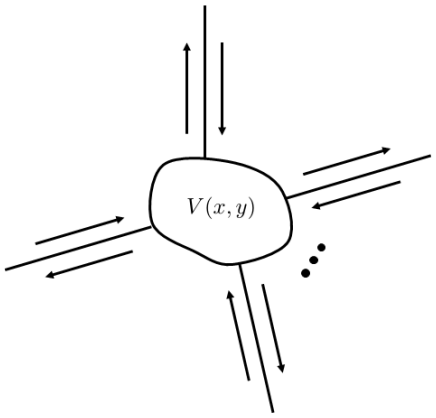


Figura 1.4: Modelo de espalhamento bidimensional.

De maneira absolutamente análoga ao caso unidimensional, podemos escrever a função de onda total como a soma de todas as funções de ondas dos N_g's guias, a saber

$$\Psi(\vec{r}) = \sum_{g=1}^{N_g} \sum_{n=1}^{N} a_n^{(g)} e^{-i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} + b_n^{(g)} e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}}. \tag{1.15}$$

É interessante notar que cada guia contemplará N amplitudes de propagação possíveis, a essas amplitudes denominamos de canais. Novamente, observamos que não é necessário ter conhecimento de detalhes da região de espalhamento, apenas ter o aparato adequado para medir as características da função de onda resultantes da interação entre a partícula e o ponto quântico. Outra quesito que auxiliará na resolução do problema são as condições

de contorno, isso irá variar para diferentes problemas, mas uma condição que sempre estará presente é a regra de Born, (1.2). No entanto, para as funções de onda acima, aplicar a regra de Born geraria uma relação extremamente complicada de se analisar. Por essa razão, utilizamos a técnica da matriz de espalhamento.

Observando as funções de onda (1.14) e (1.15), notamos que a probabilidade de se obter uma determinada onda, propagando-se em um determinado guia, é dada somente pela relação entre as amplitudes de entrada e saída, a e b. Assim, podemos argumentar que as amplitudes de probabilidade podem ser escritas em termos umas das outras, mediado por uma quantidade s. Em acordo com a literatura padrão, escrevemos a i-ésima amplitude de saída do guia g em termos de todas as amplitudes de entrada de todos os guias, assim, temos

$$b_i^{(g)} = \sum_{j=1}^{N} s_{ij}^{g1} a_j^{(1)} + s_{ij}^{g2} a_j^{(g2)} + ... + s_{ij}^{gN_g} a_j^{(N_g)},$$

$$b_i^{(g)} = \sum_{g'=1}^{N_g} \sum_{j=1}^{N} s_{ij}^{gg'} a_j^{(g')}. \tag{1.16}$$

Apesar da pesada notação, a quantidade $s_{ij}^{gg'}$ informa como se dá a transformação da amplitude de entrada, $a_j^{(g')}$, na amplitude de saída $b_i^{(g)}$, de toda forma, podemos simplificar a notação reunindo o número de amplitudes e guias em um único índice cuja extensão é $[1,N \times N_g]$, mas manteremos a notação acima por ora. Além disso, para descrever corretamente o problema do espalhamento, s deve contemplar todas as propriedades concernentes ao ponto quântico, o que viabiliza a aplicação das condições de contorno do problema, com a técnica da matriz de espalhamento, verificaremos que a implementação das condições de contorno será mais simples. Organizando todas as amplitudes de saída

e entrada em termos de matrizes coluna, teremos

$$\begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ \vdots \\ b_N^{(1)} \\ \vdots \\ b_1^{(N_g)} \\ \vdots \\ b_N^{(N_g)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11}^{11}a_1^{(1)} + ... + s_{1N}^{11}a_N^{(1)} + ... + s_{1N}^{1N_g}a_N^{(N_g)} + ... + s_{1N}^{1N_g}a_N^{(N_g)} \\ \vdots \\ s_{N1}^{11}a_1^{(1)} + ... + s_{NN}^{11}a_N^{(1)} + ... + s_{1N}^{1N_g}a_N^{(N_g)} + ... + s_{1N}^{1N_g}a_N^{(N_g)} \\ \vdots \\ s_{11}^{N_g1}a_1^{(1)} + ... + s_{1N}^{N_g1}a_N^{(1)} + ... + s_{1N}^{N_gN_g}a_N^{(N_g)} + ... + s_{1N}^{N_gN_g}a_N^{(N_g)} \\ \vdots \\ s_{N1}^{N_g1}a_1^{(1)} + ... + s_{NN}^{N_g1}a_N^{(1)} + ... + s_{1N}^{N_gN_g}a_N^{(N_g)} + ... + s_{1N}^{N_gN_g}a_N^{(N_g)} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ \vdots \\ b_N^{(1)} \\ \vdots \\ b_1^{(N_g)} \\ \vdots \\ b_N^{(N_g)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11}^{11} & \dots & s_{1N}^{1N_g} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{N1}^{N_g1} & \dots & s_{NN}^{N_gN_g} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{(1)} \\ \vdots \\ a_N^{(1)} \\ \vdots \\ a_1^{(N_g)} \\ \vdots \\ a_N^{(N_g)} \end{pmatrix},$$

$$B = SA, \tag{1.17}$$

onde introduzimos os vetores de saída, B e entrada, A e a chamada matriz de espalhamento S, quadrada e de ordem $N \times N_g$. Aparentemente, apenas rescrevemos o problema do espalhamento da função de onda (1.15) em termos das amplitudes de saída e entrada. No entanto, para verificar a utilidade de (1.17), tomamos o caso de uma função de onda descrita por 2 autofunções, a saber

$$\Psi = \psi_1 + \psi_2. \tag{1.18}$$

Tomando $\psi_{1,2}$ ortogonais entre si, daí, o módulo ao quadrado da função de onda será dado por

$$|\Psi|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 . \tag{1.19}$$

Se assumirmos que Ψ descreve um problema de espalhamento, logo, a probabilidade de detecção da partícula antes do espalhamento, deve ser a mesma após a interação com o centro espalhador, assim, teremos

$$|a_1|^2 + |a_2|^2 = |b_1|^2 + |b_2|^2 . \tag{1.20}$$

O resultado acima pode ser generalizado para o caso mais geral explorado acima. Em termos de matrizes vetores, temos que

$$A^\dagger A = B^\dagger B, \tag{1.21}$$

onde † representa o transposto conjugado. Se substituimos no lado direito a relação (1.17), temos que a igualdade (1.21) só é satisfeita se

$$S^{\dagger}S = \mathbb{I}_{N\times N_g}. \tag{1.22}$$

Aqui vemos explicitamente a condição prima para qualquer problema de espalhamento: a conservação da probabilidade de detecção é dada pela unitariedade da matriz de espalhamento do problema. Não somente isso: quaisquer condições especiais exigidas pelo sistema devem ser contempladas na matriz de espalhamento, de fato, isso foi levado à cabo por Wigner *et al* ao resolver problemas de espalhamento nuclear aplicando argumentos de simetria na matriz de espalhamento[4, 5]. Atualmente, para estudar sistemas através de modelos realísticos, utiliza-se a teoria das matrizes aleatórias, no caso de transporte quântico em cavidades mesoscópicas, implementa-se aleatoriedade na matriz de espalhamento[6, 7]. Com efeito, vamos utilizar a técnica da matriz de espalhamento para descrever um aparato muito famoso na literatura da ótica, o experimento de Hanbury Brown-Twiss.

1.2 Experimento Hanbury Brown-Twiss.

Robert Hanbury Brown e Richard Q. Twiss desenvolveram um interferômetro para medir o diâmetro angular das estrelas[8]. Em geometria, o diâmetro angular consiste no diâmetro aparente de um objeto dada sua distância com relação ao ponto de observação, conhecendo-se o diâmetro angular de um objeto e a distância entre este e o observador, é possível determinar o tamanho real do objeto. O interferômetro de Hanbury Brown-Twiss(HBT) sucede em medir o diâmetro angular das estrelas analisando a correlação da luz emitida por estas. Abaixo, podemos ver um esboço do aparato, consistindo em antenas para captação do sinal, em seguida de detectores para informar que há sinal, filtros passa-baixa e correlatores, esquematizado na Figura 1.5.

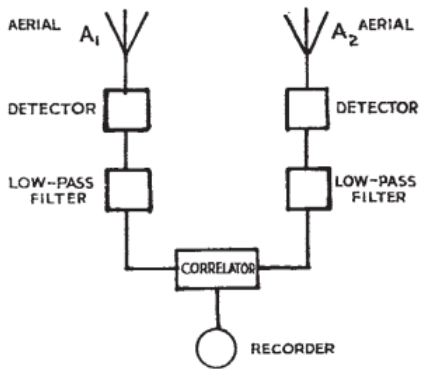


Figura 1.5: Esboço do interferômetro Hanbury Brown-Twiss: por R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss [9].

A luz emitida pelas estrelas, por ter uma frequência pequena, interage muito pouco com a ionosfera, o que viabiliza a medição. Quando captada pelas antenas A_1 e A_2, os detectores informam que há sinal criando uma corrente elétrica devido ao efeito fotoelétrico, essa corrente irá para os filtros passa-baixa, a fim de limpar o sinal para frequências menores. O sinal resultante vai para o correlator para, enfim, analisar o resultado. Essa análise consistirá em comparar a correlação do sinal recebido e compará-la para diferentes distâncias entre as antenas. Com efeito, na tabela abaixo retirada da referência [9], vemos na Figura 1.6 a comparação das medidas para as distâncias $d = 0$ e $d = 1.8$cm

	Cathodes superimposed ($d = 0$)		Cathodes separated ($d = 2a = 1{\cdot}8$ cm.)	
	Experimental ratio of correlation to r.m.s. deviation $S_e(0)/Ne$	Theoretical ratio of correlation to r.m.s. deviation $S(0)/N$	Experimental ratio of correlation to r.m.s. deviation $S_e(d)/Ne$	Theoretical ratio of correlation to r.m.s. deviation $S(d)/N$
1	+ 7·4	+ 8·4	− 0·4	≃ 0
2	+ 6·6	+ 8·0	+ 0·5	≃ 0
3	+ 7·6	+ 8·4	+ 1·7	≃ 0
4	+ 4·2	+ 5·2	− 0·3	≃ 0

Figura 1.6: tabela comparando as medições para as distâncias entre as antenas $d = 0$ e $d = 1.8$cm: por R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss [9].

Com efeito, Hanbury Brown e Twiss conseguiram medir o diâmetro angular da estrela Sirius [10]. No entanto, embora seja um excelente resultado para a rádio astronomia, o interferômetro HBT mede um caráter mais fundamental das partículas que o apontado pela sua proposta inicial.

Essa discussão foi iniciada por E. Brannen e H. Fergunson[11] onde estes contestavam a validade do efeito da correlação medida pelo interferômetro HBT, alegando que tal correlação não existia, ou a teoria quântica precisava ser revisitada. No entanto, E. M. Purcell contra-argumentou não somente alegando em favor da validade do interferômetro HBT e do efeito medido, como também o descreveu como "uma grande islustração" dos princípios elementares da mecânica quântica[12]. Para tanto, ele descreveu um aparato em que um emissor de fótons monocromático incidia em um fotocátodo ligado a outros dois detectores, representado na Figura 1.7.

Figura 1.7: Esboço do aparato descrito por E. Purcell.

Quando a luz incidia no fotocátodo, este gerava uma corrente elétrica a ser medida pelo detector 1 ou pelo detector 2, como havia 2 caminhos possíveis para a corrente, logo existia um desvio padrão inerente para cada detector. Purcell alegou que, ao movimentar o fotocátodo em sentido ao fotoemissor, o desvio padrão de cada detector aumetaria, isso

indica um aumento na correlação entre os fótons incidentes no fotocátodo, chamamos isso de correlação positiva. Esse simples aparato indica que ao diminuir o intervalo de tempo de incidência dos fótons no fotocátodo, isso ocasionaria na detecção de fótons correlacionados no mesmo detector, fisicamente, isso indica que fótons correlacionados tendem a ocupar o mesmo estado quântico. Contrariamente, utilizando um aparato análogo ao descrito acima, no entanto; para elétrons, temos que isso ocasionaria uma correlação negativa, indicando que elétrons tendem a ocupar estados diferentes, o que já era esperado pelo princípio de exclusão de Pauli.

De fato, em 1987, C. Hong, Z. Ou e L. Mandel mediram exatamente o efeito descrito acima com uma precisão abaixo do picosegundo[13], por isso, o chamado efeito *bunching*[1] dos fótons é conhecido também como efeito Hong-Ou-Mandel. De forma análoga, existe o chamado efeito anti-*bunching* para os elétrons, ou, efeito Hong-Ou-Mandel eletrônico[14, 15].

Embora tenhamos apontado o caráter mais fundamental do experimento Hanbury Brown-Twiss, não formalizamos quantitativamente suas características, pois, embora introduzimos uma noção quantitativa da mecânica quântica, não temos ainda o aparato formal para descrever sistemas de muitas partículas, que consiste na discussão do espaço de Fock.

1.3 Espaço de Fock.

Como foi dito anteriormente, o tratamento de sistemas complexos (várias partículas) é intratável no ponto de vista matemático, por isso, é inevitável endereçar o tratamento estatístico para esses sistemas, e esse tratamento estatístico perpassa pelo conceito de estado, por isso, devemos desenvolver mais alguns conceitos.

Na secção 1.1 introduzimos conceitos necessários para trabalhar com sistemas quânticos, no entanto, existem outras formas de estabelecer os mesmos princípios sem apelar para análise experimental, por isso, as regras estabelecidas *a priori* são chamadas de postulados. Contudo, esses serão explorados no capítulo 4, onde vamos confrontar os conceitos de realidade e localidade com a mecânica quântica por intermédio dos seus postulados. Assim, precisamos trabalhar, à parte, o chamado espaço de Hilbert.

Ao estabelecer (1.13), dissemos que Schrödinger quantificou os sistemas quânticos em resolução de problemas de autovalor, então, à princípio, o espaço matemático que descreva tal sistema deve conter as autofunções de (1.13), além das condições para as funções de onda, estabelecidas pelos princípios da mecânica quântica. Então, esse espaço matemático deve ser descrito por funções complexas e de quadrado integrável, devido à regra de Born. Essas funções não precisam ser necessariamente ortogonais, o importante é que o produto

[1] Do inglês, "agrupar "(Tradução livre).

interno entre 2 funções complexas quaisquer seja também uma função complexa e de quadrado integrável, é esse fato que irá gerar o chamado Espaço de Hilbert.

A discussão acima foi uma grande simplificação do espaço de Hilbert, onde deixamos de lado vários detalhes técnicos que podem ser avaliados nas referências [16, 17]. O fato importante a ser discutido é que agora temos uma boa noção a respeito do significado os operadores: ao atuar em um sistema quântico, matematicamente isso consiste em modificar o espaço de Hilbert que descreve tal sistema. Também, o produto interno entre duas funções complexas consiste em avaliar o chamado *overlap* entre dois estados quânticos, a isso chamamos de projeção. Se o produto interno for nulo, temos que as funções complexas são autofunções do sistema, formando um espaço de Hilbert de funções ortogonais. Se qualquer ponto no espaço de Hilbert for descrito pelas autofunções em questão, dizemos que este é um espaço completo.

No entanto, como dissemos acima, para descrever sistemas complexos, é necessário o tratamento estatístico, e isso sucede considerando que o estado do sistema pode ser descrito dividindo em estados mais ínfimos a serem ocupados por cada componente do sistema, a tais estados chamamos de microestados. Assim, os microestados irão combinar-se para reproduzir o estado do sistema como um todo. No entanto, existem várias possibilidades de ocupação dos microestados pelos componentes do sistema, o que resulta em várias cópias de configurações diferentes, mas reproduzindo o mesmo estado quântico. O conjunto dessas cópias chamamos de *ensemble*. No contexto da mecânica estatística, J. W. Gibbs estabeleceu que um *ensemble* consiste no conjunto de pontos do espaço de fase do sistema, de maneira análoga, o *ensemble* de configurações que descreve um estado de um sistema quântico consiste no conjunto de pontos definidos no espaço de Hilbert desse sistema, e cada ponto é descrito pelo vetor-estado $|\alpha\rangle$, onde $|\rangle$ é o chamado *ket* e $\langle|$ é chamado *bra*.

Não vamos nos ater discutindo a respeito do formalismo *braket*, isso será deixado para adiante quando discutirmos os postulados da mecânica quântica, até lá, quando necessário, discutiremos brevemente algumas propriedades, por ora, devemos manter em mente que $|\alpha\rangle$ possui uma descrição mais geral que o da função de onda ψ, pois, é possível demonstrar que $\psi(x)$ nada mais é que a representação de $|\alpha\rangle$ em um espaço de Hilbert descrito pelos vetores coordenadas $|x\rangle$.

Agora que temos a visualização estatística do problema, podemos estabelecer uma forma alternativa de visualizar um sistema complexo: cada componente do sistema pode ser descrito por um espaço de Hilbert próprio, *i.e.*, o espaço de Hilbert que descreve o sistema como um todo é dividio em espaços de Hilbert que descrevem cada partícula. Cada espaço de Hilbert pode ter diferentes dimensões, por isso, para descrever o espaço do sistema como um todo, dizemos que este é o resultado do produto tensorial dos espaços

de Hilbert dos N componentes do sistema, matematicamente temos

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_N. \tag{1.23}$$

Assim, podemos construir o estado que descreve o sistema através dos estados que descrevem cada partícula em seu próprio espaço de Hilbert, a saber

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= |\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N\rangle\,, \\ |\alpha\rangle &= |\alpha_1\rangle \otimes |\alpha_2\rangle \otimes ... \otimes |\alpha_N\rangle\,, \\ |\alpha\rangle &= |\alpha_1\rangle\, |\alpha_2\rangle\, ...\, |\alpha_N\rangle\,. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Aqui, podemos observar a verdadeira utilidade do espaço de Fock para descrever sistemas complexos: se tomamos um operador que atua na i-ésima partícula, temos que ele atuará no referido espaço Hilbert, traduzindo-se no autovalor do operador para aquela partícula, a saber

$$\begin{aligned} \hat{O}_i\, |\alpha_1, ..., \alpha_N\rangle &= |\alpha_1\rangle\, ...\hat{O}_i\, |\alpha_i\rangle\, ...\, |\alpha_N\rangle\,, \\ \hat{O}_i\, |\alpha_1, ..., \alpha_N\rangle &= \lambda_i\, |\alpha_1, ..., \alpha_N\rangle\,. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Quando discutimos a respeito do princípio de exclusão de Pauli, utilizamos implicitamente a discussão acima para construir a função de onda (1.9) para o caso de um sistema com 2 partículas, e vamos aproveitá-la igualmente para discutir o problema do espalhamento de maneira mais formal, o que vai acarretar no que chamamos de funções de correlação. Também, é importante comentar que o espaço de Fock, além de utilizado para o caso de sistemas de várias partículas[18], é amplamente utilizado para a construção de teoria quântica de campos[19]. Com efeito, vamos implementar esta última ideia para a construção das equações de correlação.

No capítulo 2, iremos derivar o formalismo das equações de correlação. Estabeleceremos o regime de aplicação das equações e modularemos o efeito Hanbury Brown-Twiss para o problema do espalhamento, o que será nosso alicerce para os próximos sistemas trabalhados.

No capítulo 3, estudaremos as simetrias e como detectá-las no espalhamento quântico. Primeiramente, acoplaremos as simetrias de paridade e revesão temporal no sistema HBT, em seguida, mostramos como detectar as ressonância daquele via equações de correlação. Por fim, acoplaremos a simetria de quiralidade e, novamente, observamos as ressonâncias pelo mesmo procedimento.

No capítulo 4, discutiremos sobre o paradoxo EPR e o emaranhamento quântico. Em seguida, discutiremos a respeito da criação de pares emaranhados e como identificar o emaranhamento por intermédio das equações de correlação e a relação desta última com

o teorema *no-go* representado pela identidade CHSH.

Finalmente, no capítulo 5, estudaremos partículas que não são identificadas nem como férmions, nem como bósons. Também, analisaremos o efeito dessa propriedade única em cadeias de potenciais, a fim de estudar propriedades de transporte do sistema, o que ocasionará uma possível descrição de isolantes topológicos.

Por fim, apenas à título de informação, destacamos que no final de cada capítulo apresentamos um resultado novo, com base no estudo das aplicações das equações de correlação em diferentes contextos da literatura, tal fato nos proporcionou a publicação de 2 artigos, apresentados nos apêndices G e H.

Capítulo 2

As Funções de Correlação.

Mesmo no contexto da mecânica clássica, há nos experimentos o erro inerente das medidas, quer pela manipulação humana, ou pela precisão do aparato, ou por interações internas e externas do sistema em questão etc. Assim, para os aparatos, sempre se faz necessário conhecer o erro cometido à cada medida, o que nos remete naturalmente para o chamado desvio padrão, de forma mais técnica, dizemos que esse erro é causado pelo ruído natural do sistema em questão.

O ruído no sistema pode ter vários agentes causadores, assim, conhecendo-se o tipo de ruído, inevitavelmente obtemos mais informações sobre o sistema, portanto, faz-se necessário iniciar uma discussão a respeito de como lidar com observáveis e o respectivo ruído, em seguida, verificaremos como utilizar esse conhecimento para construir um modelo de detecção de partículas através do ruído.

2.1 Ruído.

2.1.1 Análise de Fourier, Média e Desvio Padrão.

Se estamos interessados em avaliar um dado sistema, devemos realizar medidas sobre o mesmo. Para tanto, faz-se necessário interagir com o sistema, direta ou indiretamente. No caso do movimento dos corpos, as medidas são realizadas por observação direta[20], por isso houve muita resistência na aceitação de conceitos como ação à distância. Na termodinâmica, os sistemas são igualmente avaliados por medições diretas, como volume, temperatura e pressão, no entanto, aqui há uma sutileza muito importante utilizada até nas medições atuais. Em muitos sistemas, só é possível fazer medições tomando variações lentas do sistema, o que nos remete às diferenciais exatas e inexatas[21].

Outrossim, temos o advento do eletromagnetismo. Além de seu grande poder teórico, aquele propiciou novos intrumentos de medição tanto para firmar-se teoricamente, quanto para auxiliar outras teorias. De fato, com o avanço teórico e tecnológico, houve a necessidade de aprimorar as técnicas de observação. Por exemplo, não é possível realizar uma

medição direta em um sistema quântico devido à escala, para tanto, é necessário utilizar um aparato clássico para interagir com tal sistema [3], como foi o caso explorado no capítulo anterior: o aparato HBT detecta a presença de fótons à partir da interação com o fotocátodo, cujo resultado é a criação de uma corrente, e isso sucede em vários outros contextos, o que marca o domínio dos aparatos eletrônicos para medições de sistemas. [22, 23]

O fato é que os aparatos, quer por observação direta ou indireta do sistema em questão, irão fornecer uma gama de resultados, e avalia-se tais resultados à partir da comparação com o comportamento de um parâmetro μ, seja a posiçã, o valor da corrente elétrica etc. Podemos plotar os pontos das medidas do observável em questão, f, em termos do parâmetro avaliado. A obtenção do gráfico irá depender da quantidade de pontos obtido e a precisão dos instrumentos utilizados, como vemos na Figura 2.1

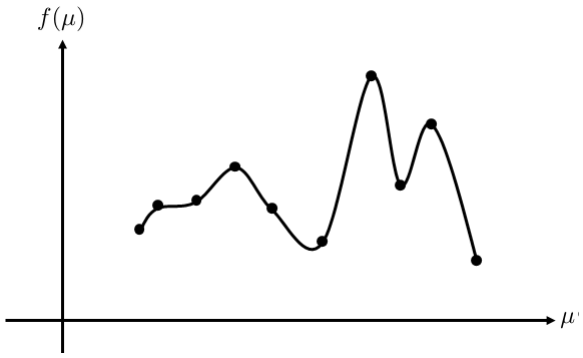


Figura 2.1: Pontos plotados que avaliam o comportamento de f à partir do parâmetro μ. A seguir o respectivo gráfico formando a distribuição.

Certamente, é bastante complicado avaliar certas situações, então, para estudar esses observáveis, é necessário o uso de algumas técnicas que facilitam sua visualização, a primeira delas é a chamada decomposição de Fourier.

Se tomamos um gráfico cuja função não tem uma expressão clara, mas há uma periodicidade evidente, sempre é possível escrever em termos de funções trigonométricas, por exemplo, na Figura 2.2, temos um gráfico que é gerado pela soma de senos e cossenos com diferentes fatores multiplicativos.

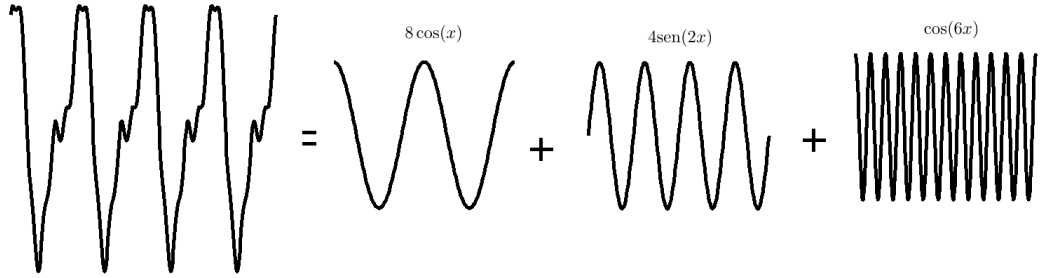


Figura 2.2: Gráfico com periodicidade formado à partir da soma de funções trigonométricas.

Se x for o tempo, a quantidade que o acompanha no argumento é conhecido na física como frequência angular, e geralmente é representado pela letra grega ω, se denotar espaço, é chamado de número de onda e é denotado pela letra k, genericamente vamos chamar essa quantidade de q. Já os números que multiplicam as funções são chamados de amplitude. Dessa forma, podemos expressar qualquer função periódica em termos de senos e cossenos, bastando contemplar todos os fatores multiplicativos possíveis, o que introduz a chamada série de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(q_n x) + b_n \text{sen}(q_n x). \tag{2.1}$$

Como a função é periódica, então $f(x) = f(x + L)$, onde L é a largura de periodicidade da função, se aplicamos tal condição acima, temos que $q_n = \frac{2n\pi}{L}$. Também, para definir as amplitudes a_0, a_n e b_n, utilizamos a propriedade de ortogonalidade das funções periódicas e obtemos que

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\mathrm{d}x, \tag{2.2}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(q_n x)\mathrm{d}x, \tag{2.3}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\text{sen}(q_n x)\mathrm{d}x. \tag{2.4}$$

Resolvendo as integrais em (2.2), (2.3) e (2.4), encontrará-se a forma de $f(x)$.

À princípio, a série de Fourier traz uma ótima opção para analisar gráficos como o da Figura 2.2, no entanto, o vínculo de haver periodicidade pode limitar a análise de tais funções, sendo assim, para contemplar as funções não-periódicas, basta assumir que a largura de periodicidade é $L \to \infty$, assim, as amplitudes a serem contempladas variarão de forma contínua como função de $\tilde{\mu}$, multiplicada pelas funções trigonométricas representadas na forma exponencial, de forma quantitativa, para uma função dependente do parâmetro μ, temos

$$f(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tilde{\mu}) e^{i\tilde{\mu}\mu}\mathrm{d}\tilde{\mu}, \tag{2.5}$$

Demonstramos a transição de (2.1) para a forma contínua (2.5) no apêndice A. De forma análoga às amplitudes (2.2)-(2.4), temos a função $g(\tilde{\mu})$ dada por

$$g(\tilde{\mu}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mu) e^{-i\tilde{\mu}\mu}\mathrm{d}\mu. \tag{2.6}$$

As expressões (2.5) e (2.6) são conhecidas como transformada de Fourier, o que na reali-

dade consiste em uma decomposição em ondas de forma contínua. Essa análise, quando aplicada na Figura 2.2, permite-nos encontrar uma expressão para $f(\mu)$ obtida à partir das medidas do experimento. Não por acaso, essa técnica é muito utilizada na análise de sinais digitais e resolução de equações diferenciais. Aqui, desenvolvemos a análise de Fourier de forma mais prática, no entanto, para um estudo formal das séries de Fourier, recomendamos a referência [24].

A análise de Fourier é útil para fornecer uma expressão para $f(\mu)$ do experimento em questão, ou mesmo trabalhar algebricamente com aquela. No entanto, alguns experimentos avaliam o comportamento probabilístico de um sistema, damos o nome de processos estocásticos. Dessa forma, a obtenção dos pontos para plotagem de um experimento, como representado na Figura 2.1, passa a ter características probabilísticas, em teoria de probabilidade dá-se o nome de "realização" em vez de "medição". Assim, para cada realização, o valor μ possuirá uma probabilidade de obtenção mediada pela função $f(\mu)$, por isso, a última recebe a alcunha de função de distribuição. Se tomarmos todas as probabilidades possíveis, temos certeza de que obteremos um dado valor μ, para uma função de distribuição contínua, temos quantitativamente

$$\int_{\mathcal{M}} f(\mu)\mathrm{d}\mu = 1 \tag{2.7}$$

onde $\mathcal{M}$ representa o conjunto de todos os valores possíveis para o parâmetro em questão. A igualdade (2.7) chamamos também de condição de normalização, análogo à equação (1.2). Na realidade, estamos formalizando o que vimos na Introdução para aplicação em diferentes contextos. Como agora μ é uma variável estocástica, devemos buscar algum método que trate do problema propriamente, de fato, para tratar sistemas estocásticos, podemos questionar se há uma forma de determinar um valor mais provável de obtenção, para tanto assumimos que as possíveis realizações concentram-se em torno de um dado valor μ, o que equivale ao cálculo de centro de massa de um corpo rígido para o caso de teoria das probabilidades, a tal quantidade chamamos de média de μ e é dada por

$$\langle\mu\rangle = \frac{\displaystyle\int_{\mathcal{M}} \mu f(\mu)\mathrm{d}\mu}{\displaystyle\int_{\mathcal{M}} f(\mu)\mathrm{d}\mu},$$

$$\langle\mu\rangle = \int_{\mathcal{M}} \mu f(\mu)\mathrm{d}\mu. \tag{2.8}$$

Assumimos que $f(\mu)$ está normalizada. Podemos também avaliar como as realizações distribuem-se no espaço $\mathcal{M}$, para isso utilizamos um conceito análogo ao de momento de inércia, definido no contexto da rotação de corpos rígidos; que consiste em calcular a

chamada média quadrática de μ, a saber

$$\langle \mu^2 \rangle = \int_{\mathcal{M}} \mu^2 f(\mu) \mathrm{d}\mu. \tag{2.9}$$

Não por acaso, a quantidade acima é chamada segundo momento, ao passo que (2.8) é chamada primeiro momento. O terceiro e o quarto momento também possuem significado na teoria das distribuições, o primeiro avalia a assimetria dos valores μ no respectivo espaço com relação à media, enquanto o segundo analisa o comportamento dos valores extremos de μ com respeito à média[25].

Agora que estamos de posse da média quadrática, podemos introduzir uma quantidade que avalia, em média, o quão uma dada realização dista da média do sistema, a essa quantidade chamamos de desvio padrão. Quantitativamente, o desvio padrão seria dado por $\langle \mu - \langle \mu \rangle \rangle$, no entanto, isso levaria a um resultado trivial, para evitar tal inconsistência, define-se o desvio padrão como a raiz quadrada da média quadrática de $\mu - \langle \mu \rangle$, a saber

$$\begin{aligned} \Delta\mu &= \sqrt{\langle (\mu - \langle \mu \rangle)^2 \rangle}, \\ (\Delta\mu)^2 &= \langle \mu^2 \rangle - \langle \mu \rangle^2 . \end{aligned} \tag{2.10}$$

O quadrado do desvio padrão é chamado de variância. A quantidade acima é a mesma medida no contexto do interferômetro HBT: quando o fotocátodo emitia uma corrente para o detector 1, por exemplo, isso criava um desvio padrão no detector 2, e vice-versa, esse fato permitiu a análise descrita por Purcell. Com efeito, o desvio padrão é a quantidade utilizada para introduzir o princípio de incerteza de Heisenberg, na ocasião, dissemos que para um par canonicamente conjugado haverá um limite experimental dado por (1.5), utilizando o conceito de desvio padrão discutido acima, isso consiste em afirmar que um sistema quântico sempre será descrito por variáveis estocásticas se forem pares canonicamente conjugados. Como o desvio padrão descreve a característica da aleatoriedade de cada realização, chamamos também aquele de flutuação espontânea.

Até aqui fizemos uma breve discussão de como tratar do problema das medições, no entanto, para um caso mais realístico, devemos levar me conta que outros parâmetros, ou até o mesmo parâmetro, podem influenciar na medição da quantidade de interesse, o que nos remeterá naturalmente para o conceito de ruído.

2.1.2 Função de Correlação e o Ruído Espectral.

Em mecânica estatística, podemos calcular os momentos de uma partícula com movimento aleatório, no entanto, para um conjunto partículas, se considerarmos uma possível interação entre as partículas, o cálculo da flutuação da posição de uma partícula irá afetar no cálculo da flutuação de uma segunda partícula. Igualmente, no aparato HBT, é

necessário um formalismo de mais de um parâmetro, dado que há 2 detectores, dessa forma, faz-se necessário estender a discussão da função de distribuição do sistema para mais parâmetros.

Considerando um aparato de medição de N parâmetros, e utilizando o mesmo raciocínio desenvolvido anteriormente, temos a função de distribuição $f(\mu_1, ..., \mu_N)$. Então, para encontrar o n-ésimo momento do i-ésimo parâmetro, tomamos

$$\langle \mu_i^n \rangle = \frac{\int_{\mathcal{M}_1} ... \int_{\mathcal{M}_N} \mu_i^n f(\mu_1, ..., \mu_N) \mathrm{d}\mu_1 ... \mathrm{d}\mu_N}{\int_{\mathcal{M}_1} ... \int_{\mathcal{M}_N} f(\mu_1, ..., \mu_N) \mathrm{d}\mu_1 ... \mathrm{d}\mu_N},$$

$$\langle \mu_i^n \rangle = \int_{\mathcal{M}_1} ... \int_{\mathcal{M}_N} \mu_i^n f(\mu_1, ..., \mu_N) \mathrm{d}\mu_1 ... \mathrm{d}\mu_N, \tag{2.11}$$

onde novamente assumimos a condição de normalização para o caso de N parâmetros no denominador. Sem perda de generalidade, podemos tomar o caso de um aparato com 2 parâmetros, μ_1 e μ_2, podemos calcular o valor esperado para medições combinadas desses dois parâmetros, a saber

$$\langle \mu_1 \mu_2 \rangle = \int_{\mathcal{M}_1} \int_{\mathcal{M}_2} \mu_1 \mu_2 f(\mu_1, \mu_2) \mathrm{d}\mu_1 \mathrm{d}\mu_2. \tag{2.12}$$

O cálculo para mais parâmetros e momentos de ordem superior pode ser facilmente generalizado, a relação acima é chamada de momento conjunto. Outrossim, como argumentamos na introdução desta subsecção, é mais interessante para propósito experimentais que calculemos o efeito da flutuação de um parâmetro na flutuação do segundo parâmetro, e vice-versa, assim, tomamos a média dos desvios padrões combinados, o que introduz a chamada função de correlação, a saber

$$S(\mu_1, \mu_2) = \langle \Delta\mu_1 \Delta\mu_2 \rangle . \tag{2.13}$$

É interessante notar que se $\mu_1 = \mu_2$ obtemos a variância do sistema dado por (2.10), no entanto, se a medição ocorrer em instantes diferentes, temos a chamada função de autocorrelação e dependerá da diferença dos instantes que procedeu-se cada medição, a saber

$$S(t - t') = \langle \Delta\mu(t) \Delta\mu(t') \rangle . \tag{2.14}$$

A função de correlação é dependente da diferença dos instantes pois estamos implicitamente assumindo que o tempo é homogêneo, o que confere a esta ser uma função

par. Outro ponto importante é que a função de correlação deve anular-se quando temos $t - t' \to \infty$, o que indica que a segunda medida foi realizada muito tempo depois da primeira, o que ocasiona na anulação da correlação.

Tomar os parâmetros do experimento à partir do tempo gera uma sutileza, pois não iremos mais avaliar a média do lado direito de (2.14) à partir de (2.12), uma vez que não existe função de distribuição para ponderar como $\Delta\mu(t)\Delta\mu(t')$ irá distribuir-se ao longo do tempo, dado que não se deve atribuir ponderação para μ ao longo do tempo, pois isso ocasionaria na quebra da homogeneidade do tempo. Dessa forma, tomamos o produto da flutuação $\Delta\mu$ no instante t e em um instante posterior τ e tomamos cada contribuição desse produto de 0 até um instante T a fim de calcular a média aritmética de $\Delta\mu(t)\Delta\mu(t+\tau)$. Com isso, tem-se uma forma alternativa de definir função de autocorrelação

$$S(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \Delta\mu(t)\Delta\mu(t+\tau)\mathrm{d}t. \tag{2.15}$$

Consideramos o limite $T \to \infty$ pois desejamos avaliar todas as contribuições possíveis do sistema, fisicamente, isso consiste em obter todos os parâmetros que representam todos os estados permitidos ao sistema. Essa consideração é chamada de Hipótese Ergódica e é esta que permite a correspondência da teoria com a prática, *i.e.* , a equação (2.15) ser igual a (2.14).

A função de correlação definida em (2.13) também nos leva a avaliar o comportamento temporal de μ: como este é um parâmetro estocástico, podemos utilizar as técnicas desenvolvidas na subsecção anterior. Com efeito, fazendo a decomposição de Fourier, temos

$$\mu(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mu}(\omega) e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{2.16}$$

Para substituir (2.16) em (2.14), primeiramente assumimos que $\langle\mu\rangle = 0$, isso sempre é possível pois basta deslocar o eixo dos parâmetros de forma a obedecer a tal condição, assim, temos imediatamente que

$$S(t-t') = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \langle\Delta\tilde{\mu}(\omega)\Delta\tilde{\mu}(\omega')\rangle\, e^{i(\omega t+\omega' t')}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\omega' \tag{2.17}$$

Como o lado esquerdo de (2.16) só possui a dependência com $t - t'$, então, é necessário impor que

$$\langle\tilde{\mu}(\omega)\tilde{\mu}(\omega')\rangle = \delta(\omega+\omega')\tilde{S}(\omega),$$

onde $\delta(x)$ é a função delta de Dirac e, por ora, vamos considerar $S(\omega)$ apenas como uma função auxiliar. Ao aplicar tal condição em (2.16), utilizando a propriedade de filtragem

da função delta, temos que

$$S(t-t') = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{S}(\omega) e^{i\omega(t-t')} \mathrm{d}\omega. \tag{2.18}$$

Aparentemente, realizamos uma decomposição de Fourier com a função de correlação S, no entanto, nada foi dito a respeito de $\tilde{S}$, sequer sabemos seu significado, portanto, não podemos inferir que (2.18) representa a transformada de Fourier de S. Para demonstrar isso, precisamos introduzir o conceito de densidade espectral.

Apesar de termos introduzido o conceito de desvio padrão para sistemas estocásticos, muitas vezes esse conceito não é muito direto de ser observado, por isso que a maioria dos instrumentos de medição não informam imediatamente médias ou desvio padrões, e sim intensidades. Por exemplo, para calcular a energia estocada em um sistema elétrico, tomamos o módulo ao quadrado do campo elétrico do meio, analogamente, no contexto da ótica, o módulo ao quadrado do campo eletromagnético informa a intensidade da onda em um dado ponto[26]. Igualmente, a intensidade de um som é calculada à partir do módulo ao quadrado de sua amplitude de pressão. Assim, o cálculo da intensidade de um determinado observável está ligado ao seu módulo ao quadrado, outrossim, para muitos experimentos, é mais fácil utilizar parâmetros dependentes da frequência a utilizar a dependência temporal, uma vez que, dependendo da escala do experimento, o uso da dependência temporal é extremamente inviável, além disso, a frequência é intimamente ligada à energia do sistema[27]. Com isso, podemos avaliar como se dá a distribuição energética da flutuação de um dado parâmetro μ tomando a razão do módulo ao quadrado de $\Delta\tilde{\mu}$ e o tempo de medição desses parâmetros, T, para avaliar a distribuição energética na flutuação para todo o sistema, tomamos o limite assintótico de T, daí temos a chamada densidade espectral

$$\tilde{S}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{2\pi \left|\Delta\tilde{\mu}(\omega)\right|^2}{T}. \tag{2.19}$$

Por ora, não podemos associar a densidade espectral com a função $\tilde{S}$ em (2.18), que é o que vamos demonstrar agora.

Como tomamos a decomposição de Fourier de $\Delta\mu(t)$ em (2.16), podemos tomar a transformação inversa, a saber

$$\tilde{\mu}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t. \tag{2.20}$$

É importante comentar que estendemos o limite inferior de integração para valores de flutuações nulos, pois, consideramos que as medições foram iniciadas em $t = 0$. Com isso,

podemos substituir (2.20) na definição de densidade espectral e temos

$$\tilde{S}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{2\pi\Delta\tilde{\mu}(\omega)\Delta\tilde{\mu}^*(\omega)}{T},$$

$$\tilde{S}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{2\pi}{T}\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta\mu(t)e^{-i\omega t}\Delta\mu(t')e^{i\omega t'}\mathrm{d}t\mathrm{d}t',$$

$$\tilde{S}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta\mu(t)\Delta\mu(t')e^{-i\omega(t-t')}\mathrm{d}t\mathrm{d}t', \qquad t \mapsto t'+\tau$$

$$\tilde{S}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta\mu(t')\Delta\mu(t'+\tau)e^{-i\omega\tau}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t',$$

$$\tilde{S}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta\mu(t')\Delta\mu(t'+\tau)\mathrm{d}t'\right]e^{-i\omega\tau}\mathrm{d}\tau,$$

$$\tilde{S}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\tau)e^{-i\omega\tau}\mathrm{d}\tau,$$

$$\tilde{S}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(t-t')e^{-i\omega(t-t')}\mathrm{d}(t-t'). \tag{2.21}$$

O resultado acima, juntamente com (2.18) demonstra que a densidade espectral de um sistema é, na realidade, a transformada de Fourier da função de correlação, esse é o chamado teorema Wiener-Khintchine[28]. Com efeito, a demonstração desse teorema nos traz um resultado muito interessante: podemos calcular a correlação das flutuações de um parâmetro estocástico analisando a flutuação do espectro desse sistema, a tal flutuação também denominamos de ruído, por isso, $\tilde{S}$ também é chamado de ruído espectral. Se refletirmos um pouco a respeito do resultado acima, observamos que se há flutuação na densidade do espectro do sistema, logo podemos concluir que isso irá afetar de alguma forma a medição da flutuação dos parâmetros em diferentes instantes, o que é precisamente o que a função de correlação avalia.

O ruído em um sistema pode ter várias causas, o conhecimento da origem do ruído é o que nos traz informação útil a respeito do sistema e auxilia na concepção dos resultados. Por exemplo, J. Johnson descobriu uma flutuação na diferença de potencial das extremidades de um condutor elétrico, ainda que não houvesse corrente, o que o levou a atribir tal flutuação à agitação térmica dos portadores de carga[29], mais tarde, H. Nyquist descreveu teoricamente o processo [30], por essa razão, ruídos cuja natureza é causado pela temperatura do ambiente são chamados de ruído de Nyquist-Johnson, também ruído térmico, ou ruído branco. É o ruído térmico que é observado quando se trata do famoso movimento Browniano[31].

Por outro lado, W. Schottky estudou o efeito da emissão termiônica utilizando arma de elétrons em uma placa de metal, esse aparato permite um alto controle no sinal do feixe de elétrons incidente na placa. Além do ruído térmico, Schottky percebeu que havia uma flutuação na energia necessária para suceder com a emissão termiônica da placa devido à atuação da arma de elétrons. Essa flutuação ocasionava um aumento na corrente termiônica, microscopicamente, a emissão de um elétron da chapa de metal fará com que outro elétron na chapa seja mais facilmente arrancado pela arma de elétrons, esse é o chamado efeito Schottky[32] e à flutuação devido à emissão do elétron é chamado de ruído de disparo[1], isso também permitiu a Schottky calcular o valor da carga elétrica com mais precisão que R. Millikan. O ruído de disparo nos traz uma bela demonstração da atuação da mecânica quântica, pois, veremos como este influencia na estatística das partículas em questão[33], esse fato será utilizado avulsamente ao longo do nosso trabalho. Para outros tipos de ruídos, recomendamos a referência [34].

Com os exemplos trabalhados acima, observamos a importância da análise do ruído e que informação este nos traz a respeito do sistema, assim, nada mais natural que estabelecer um formalismo que tome conclusões a respeito de um dado sistema à partir do ruído, logo, pelas funções de correlação.

2.2 O Formalismo das Funções de Correlação.

Na Introdução, estabelecemos o formalismo da matriz de espalhamento e o experimento de Hanbury Brown-Twiss, a seguir, na secção anterior, vimos como tratar processos estocásticos endereçando um tratamento estatístico, na ocasião também vimos como extrair informações do sistema à partir do ruído. Com isso, podemos tornar nossa atenção agora a construir um formalismo que calcula a função de correlação, logo o ruído, de um problema de espalhamento quântico, descrito à partir de uma matriz de espalhamento, para tanto, vamos primeiramente construir o estado que descreve o sistema.

2.2.1 Operador de Campo.

Vimos na subsecção 1.3 que para descrever um sistema complexo, abrimos mão do chamado espaço de Fock, que irá denotar o estado que descreve o sistema como um todo. Para o caso de um problema de espalhamento, o estado que descreverá tal sistema contemplará a quantidade de guias acoplada à região espalhadora, como na Figura 1.4 e a função de onda (1.15), assim, temos o estado

$$|\psi\rangle = |n_1, ..., n_{N_g}\rangle \,, \tag{2.22}$$

[1]Tradução livre de "*shot noise*".

onde n_i é o número de partículas transportadas no i-ésimo guia. Como os guias são independentes, podemos representar o estado total $|\alpha\rangle$ como o produto tensorial de N_q estados, como feito em (1.24). Em particular, podemos trabalhar com o estado do α-ésimo guia e denotar a criação de uma partícula neste à partir da atuação do chamado operador de criação, $\hat{a}^\dagger$, atuando no estado de vácuo, a saber

$$|\alpha\rangle = \hat{a}^\dagger_\alpha |0\rangle . \tag{2.23}$$

Contrariamente, o transposto conjugado de $\hat{a}^\dagger$ é o operador de aniquilação, *i.e.*, esse "aniquila" uma partícula no referido guia. Os operadores de criação e aniquilação possuem uma íntima relação com os operadores de posição e momento para o caso do oscilador harmônico quântico, o que acarreta na relação de comutação

$$\begin{aligned} \hat{a}(\vec{r}_\alpha)\hat{a}^\dagger(\vec{r}'_\alpha) + \epsilon\hat{a}^\dagger(\vec{r}'_\alpha)\hat{a}(\vec{r}_\alpha) &= \delta(\vec{r}_\alpha - \vec{r}'_\alpha), \\ \left[\hat{a}(\vec{r}_\alpha), \hat{a}^\dagger(\vec{r}'_\alpha)\right]_\epsilon &= \delta(\vec{r}_\alpha - \vec{r}'_\alpha), \end{aligned} \tag{2.24}$$

onde ϵ irá definir o tipo de comutador em questão, o que resulta também na natureza da partícula criada no guia: se $\epsilon = 1$, temos operadores para elétrons, se $\epsilon = -1$, são para bósons. Veremos também que isso está intimamente ligado à estatística que o aparato irá detectar. Esses operadores geralmente são introduzidos para se criar, por exemplo, teorias de campos que para partículas elementares ou ótica física[19, 35]. Também tomamos a dependência espacial dos operadores $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$, o que ocasionou no lado direito de (2.24) em uma delta de Dirac, em outros contextos, essa dependência poderia ser dado por uma variável discreta, assim teria-se a delta de Kronecker. Explicitamos a dependência espacial dos operadores a fim de adaptar para a situação que estamos interessados, que é representar o estado (2.23) no espaço das posições, como fizemos na secção 1.3. Para realizar isso, utilizamos o chamado método projetivo. Para visualizá-lo, tomamos o estado $|\psi\rangle$ normalizado, a saber

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1, \tag{2.25}$$

que é absolutamente a mesma condição de Born para a função de onda, como visto . Para recuperar (2.25) à partir de (1.2), dizemos que a função de onda $\psi(\vec{r})$, que satisfaz a equação de Schrödinger (1.1), é dada pela projeção do estado $|\psi\rangle$ no espaço vetorial das

posições, $\psi(x) = \langle\vec{r}|\psi\rangle$, assim, temos

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\vec{r})^* \psi(\vec{r}) \mathrm{d}V = 1, \\
&\int_{-\infty}^{+\infty} \langle\psi|\vec{r}\rangle \langle\vec{r}|\psi\rangle \, \mathrm{d}V = 1, \\
&\langle\psi| \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}V \, |\vec{r}\rangle \langle\vec{r}| \right) |\psi\rangle = 1.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Assim, para obter (2.25), temos que o termo entre parênteses de (2.26) deve ser um termo identicamente neutro, a esse termo chamamos de relação de completeza. Para se estudar a relação de completeza e o método projetivo de maneira mais formal, recomendamos a referência [36].

Com isso, podemos representar o estado de uma partícula no α-ésimo guia de uma maneira mais adequada, tomando a relação de completeza no estado em (2.23), vem

$$\begin{aligned}
|\alpha\rangle &= \int \mathrm{d}\vec{r}_\alpha \, |\vec{r}_\alpha\rangle \langle\vec{r}_\alpha|\alpha\rangle \,, \\
|\alpha\rangle &= \int \mathrm{d}\vec{r}_\alpha \psi_i(\vec{r}_\alpha) \hat{a}^\dagger(\vec{r}_\alpha) \, |0\rangle \,, \\
|\alpha\rangle &= \hat{\psi}^\dagger_{\alpha i} \, |0\rangle \,,
\end{aligned} \tag{2.27}$$

onde consideramos que cada guia é unidimensional, por isso a relação de completeza é integrada somente em $\vec{r}$. Também utilizamos o operador de criação definido no espaço das posições, $\hat{a}^\dagger(\vec{r}_\alpha)$. O índice i foi colocado a fim de permitir que contemplemos a indistinguibilidade de 2 ou mais partículas. Enfim, introduzimos o chamado operador de campo, $\hat{\psi}_{\alpha i}$ [37]. Como podemos ver pela sua construção, ao atuar no estado de vácuo, o operador de campo cria uma partícula alterando a densidade de probabilidade do espaço, que é a própria função de onda da partícula criada.

É importante notar também que não é contemplado os modos possíveis de propagação da partícula no guia α, isso porque fixamos na construção do nosso formalismo que cada guia possuirá um modo de propagação, *i.e.*; um canal. Assim, nesta construção, canal e guia são sinônimos.

O advento do operador de campo possibilita formas alternativas e mais interessantes para tratar a representação do problema do espalhamento, outrossim, o operador de campo estende a álgebra de comutadores (2.24), com efeito temos outras relações de comutação

dadas por

$$\left[\hat{\psi}_{\alpha i}, \hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i}\right]_{\epsilon} = 1, \tag{2.28}$$

$$\left[\hat{\psi}_{\alpha i}, \hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha j}\right]_{\epsilon} = \left[\hat{\psi}_{\alpha j}, \hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i}\right]^{*}_{\epsilon} = I, \tag{2.29}$$

$$\left[\hat{\psi}_{\alpha i}, \hat{\psi}_{\beta j}\right]_{\epsilon} = \left[\hat{\psi}_{\alpha i}, \hat{\psi}_{\beta i}\right]_{\epsilon} = 0, \tag{2.30}$$

onde I é chamado de integral de *overlap*, que é definida por

$$I = \int \mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}_{\alpha} \psi^{*}_{i}(\vec{\mathrm{r}}_{\alpha}) \psi_{j}(\vec{\mathrm{r}}_{\alpha}). \tag{2.31}$$

A integral de *overlap* avalia o grau de sobreposição dos estados por intermédio das funções de onda, esse grau de sobreposição dependerá do parâmetro utilizado no aparato em questão, por exemplo, na referência [15], o parâmetro utilizado é o tempo de atraso entre as detecções de duas partículas. A demonstração das relações (2.28)-(2.30) é dada no apêndice B.

Podemos utilizar o operador de campo para construir, também, um estado de duas partículas no mesmo guia, a saber

$$|\alpha\alpha\rangle = \left[1 - \epsilon |I|^{2}\right]^{-1/2} \hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i} \hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha j} |0\rangle \,. \tag{2.32}$$

Observamos que o estado em (2.32) não é determinado para 2 férmions com *overlap* perfeito, $I = 1$, isso se deve ao seu fator de normalização, o que acarreta no estado obedecer o princípio de exclusão. De fato, a grande vantagem de utilizar o operador de campo definido em (2.27), no nosso contexto, é que podemos construir um estado simétrico, ou assimétrico, de 2 partículas em diferentes guias implementando o princípio de exclusão (1.9), a saber

$$|\alpha\beta\rangle_{\pm} = \left[2(1 \pm |I|^{2})\right]^{-1/2} \left(\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i} \hat{\psi}^{\dagger}_{\beta j} \pm \hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha j} \hat{\psi}^{\dagger}_{\beta i}\right) |0\rangle \,. \tag{2.33}$$

Os fatores de normalização em (2.32) e (2.33) serão demonstrados no apêndice C. A diferença prima entre os estados (2.32) e (2.33) é que, à princípio, pode-se distinguir 2 partículas em um mesmo guia, a menos do caso de *overlap* máximo. Para o caso de $I = 1$, temos que tanto para (2.32) quanto (2.33) não é definido para o caso fermiônico: no primeiro devido explicitamente pela natureza da partícula transportada, no segundo, devido à simetria da função de onda que a descreve, o que acarreta em uma relação íntima da estatística da partícula e simetrias, ponto esse que será analisado no próximo capítulo, por ora, é fortuito que desenvolvamos um método para avaliar a estatística das partículas espalhadas à partir do que foi desenvolvido nesta subsecção.

2.2.2 Conexão entre os estados de entrada e saída.

Na subsecção anterior, vimos que o método projetivo auxilia na representação em diferentes bases, como também auxilia na obtenção da probabilidade de obtenção de um estado. De fato, analisando (2.26), vemos que a interpretação de Born surge somente quando assumimos uma base para projetar o estado $|\psi\rangle$, caso contrário, (2.25) deve ser vista como uma condição de normalização. Assim, o método projetivo é uma ferramenta bastante útil para tratar os problemas de espalhamento quântico, uma vez que podemos calcular a probabilidade de obtenção de uma dada configuração de um sistema. Para tanto, tomamos um estado de um sistema complexo, dado por $|\psi_i\rangle$ e projetamos neste o estado final, $|\psi_f\rangle$, com a configuração desejada, daí obtemos a probabilidade

$$P(\psi_f) = \langle\psi_f|\psi_i\rangle\,. \tag{2.34}$$

No entanto, para explicitar a probabilidade quantitativamente à partir do estado inicial, é necessário estabelecermos uma conexão entre esse e o estado final, essa conexão é realizada tomando absolutamente a mesma análise feita na subsecção 1.1.1 quando estabelecemos uma relação linear entre as amplitudes de saída e entrada da função de onda do sistema, assim, a matriz de espalhamento vai desempenhar absolutamente o mesmo papel aqui.

Para inserir a matriz de espalhamento nesse novo formalismo, primeiramente consideramos que o sistema está à temperatura nula, o que acarreta na eliminação do ruído térmico, por conseguinte, cada guia só possuirá uma amplitude de propagação, ou simplesmente um canal, então, podemos estabelecer uma simples relação de entrada e saída à partir do operador de campo, a saber

$$\hat{\psi}^\dagger_{\alpha i} = r_{\alpha\alpha}\hat{\psi}^\dagger_{\alpha i} + \sum_a^{N_g} t_{\alpha a}\hat{\psi}^\dagger_{ai}, \tag{2.35}$$

onde $r_{\alpha\alpha}$ é o coeficiente de reflexão e $t_{\alpha a}$, o coeficiente de transmissão, por essa razão, o índice a deve contemplar todos os guias a menos do guia α. Considerando o espalhamento entre duas partículas, vamos estabelecer a relação entre estados de entrada e saída substituindo (2.35) em (2.32), a saber

$$\begin{aligned}
|\alpha\alpha\rangle &= \left[1-\epsilon|I|^2\right]^{-1/2}\left(r_{\alpha\alpha}\hat{\psi}^\dagger_{\alpha i} + \sum_{a\neq\alpha}^{N_g} t_{\alpha a}\hat{\psi}^\dagger_{ai}\right)\left(r_{\alpha\alpha}\hat{\psi}^\dagger_{\alpha j} + \sum_{a'\neq\alpha}^{N_g} t_{\alpha a'}\hat{\psi}^\dagger_{a'j}\right)|0\rangle\,, \\
&= \left[1-\epsilon|I|^2\right]^{-1/2}\left[r^2_{\alpha\alpha}\hat{\psi}^\dagger_{\alpha i}\hat{\psi}^\dagger_{\alpha j} + r_{\alpha\alpha}\sum_{a\neq\alpha}^{N_g} t_{\alpha a}\left(\hat{\psi}^\dagger_{\alpha i}\hat{\psi}^\dagger_{aj} + \hat{\psi}^\dagger_{ai}\hat{\psi}^\dagger_{\alpha j}\right) + \sum_{a\neq\alpha}^{N_g}\sum_{a'\neq\alpha}^{N_g} t_{\alpha a}t_{\alpha a'}\hat{\psi}^\dagger_{ai}\hat{\psi}^\dagger_{a'j}\right]|0\rangle\,.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Se analisamos o somatório duplo, percebemos que há termos quadráticos de t tal que $a = a'$, o que acarreta em termos repetidos. Para contemplar os termos onde $a \neq a'$, podemos variar somente um dos índices, depois proceder com a soma do outro restante. Isso permite que possamos reescrever o 3° somatório na seguinte forma

$$\sum_{a\neq\alpha}^{N_g}\sum_{a'\neq\alpha}^{N_g} t_{\alpha a}t_{\alpha a'}\hat{\psi}^\dagger_{ai}\hat{\psi}^\dagger_{a'j} = \sum_{a\neq\alpha}^{N_g}\left\{t^2_{\alpha a}\hat{\psi}^\dagger_{ai}\hat{\psi}^\dagger_{aj} + \sum_{n}^{N_g-a} t_{\alpha a}t_{\alpha a+n}\left(\hat{\psi}^\dagger_{ai}\hat{\psi}^\dagger_{a+nj} + \hat{\psi}^\dagger_{a+ni}\hat{\psi}^\dagger_{aj}\right)\right\}, \quad (2.37)$$

onde introduzimos o índice n, avaliado de 1 até $N_g - a$. Observamos que não precisamos nos preocupar com os coeficientes de ordem maior acometida pelo crescimento de n (por exemplo, o coeficiente t_{15}, no caso de um sistema com 4 terminais), porque esses termos representarão estados que simplesmente não existem para o nosso problema. Outrossim, variar livremente n traria dificuldades computacionais como veremos mais adiante. Substituindo (2.37) no somatório (2.36), temos

$$\begin{aligned}
|\alpha\alpha\rangle &= \left[1-\epsilon|I|^2\right]^{-1/2}\left[r^2_{\alpha\alpha}\hat{\psi}^\dagger_{\alpha i}\hat{\psi}^\dagger_{\alpha j} + r_{\alpha\alpha}\sum_{a\neq\alpha} t_{\alpha a}\left(\hat{\psi}^\dagger_{\alpha i}\hat{\psi}^\dagger_{aj} + \hat{\psi}^\dagger_{ai}\hat{\psi}^\dagger_{\alpha j}\right) + \right.\\
&\quad \left. + \sum_{a\neq\alpha}\left\{t^2_{\alpha a}\hat{\psi}^\dagger_{ai}\hat{\psi}^\dagger_{aj} + \sum_n t_{\alpha a}t_{\alpha a+n}\left(\hat{\psi}^\dagger_{ai}\hat{\psi}^\dagger_{a+nj} + \hat{\psi}^\dagger_{a+ni}\hat{\psi}^\dagger_{aj}\right)\right\}\right]|0\rangle\,,\\
|\alpha\alpha\rangle &= \left[1-\epsilon|I|^2\right]^{-1/2}\left[r^2_{\alpha\alpha}\hat{\psi}^\dagger_{\alpha i}\hat{\psi}^\dagger_{\alpha j} + r_{\alpha\alpha}\sum_{a\neq\alpha} t_{\alpha a}\left(\hat{\psi}^\dagger_{\alpha i}\hat{\psi}^\dagger_{aj} - \epsilon\hat{\psi}^\dagger_{\alpha j}\hat{\psi}^\dagger_{ai}\right) + \right.\\
&\quad \left. + \sum_{a\neq\alpha}\left\{t^2_{\alpha a}\hat{\psi}^\dagger_{ai}\hat{\psi}^\dagger_{aj} + \sum_n t_{\alpha a}t_{\alpha a+n}\left(\hat{\psi}^\dagger_{ai}\hat{\psi}^\dagger_{a+nj} - \epsilon\hat{\psi}^\dagger_{aj}\hat{\psi}^\dagger_{a+ni}\right)\right\}\right]|0\rangle\,,\\
|\alpha\alpha\rangle &= r^2_{\alpha\alpha}|\alpha\alpha\rangle + \sqrt{2}r_{\alpha\alpha}\sum_{a\neq\alpha} t_{\alpha a}|\alpha a\rangle_{-\epsilon} + \sum_{a\neq\alpha}\left\{t^2_{\alpha a}|aa\rangle + \sqrt{2}\sum_n t_{\alpha a}t_{\alpha a+n}|aa+n\rangle_{-\epsilon}\right\},\\
|\alpha\alpha\rangle &= r^2_{\alpha\alpha}|\alpha\alpha\rangle + \sqrt{2}r_{\alpha\alpha}t_{\alpha a}|\alpha a\rangle_{-\epsilon} + t^2_{\alpha a}|aa\rangle + \sqrt{2}t_{\alpha a}t_{\alpha a+n}|aa+n\rangle_{-\epsilon}\,, \qquad (2.38)
\end{aligned}$$

onde emitimos o somatório na última linha. A expressão acima informa a relação de estados de entrada e saída de duas partículas para um sistema de um número qualquer de guias. Outrossim, é interessante notar que o lado direito pode representar tanto o estado de entrada quanto de saída, isso dependerá de como foi definida a relação linear entre as amplitudes, *i.e.*, se a matriz de espalhamento foi definida por $B = SA$, ou $A = SB$. Dada a restrição da matriz de espalhamento ser unitária, ambas as definições só diferem pelo complexo conjugado, no entanto, veremos mais tarde que o mais importante é o módulo ao quadrado das entradas da matriz. Outro ponto importante que podemos apontar é que a natureza da partícula transportada irá influenciar fundamentalmente nos estados do lado direito de (2.38), logo, influenciará nas probabilidades quando aplicarmos o método projetivo. Por ora, vamos dar continuidade nas construções do estados de entrada e saída

considerando agora (2.33), aplicando novamente (2.35), temos

$$
\begin{aligned}
|\alpha\beta\rangle_{\pm} &= \left[2(1\pm|I|^2)\right]^{-1/2}\left[\left(r_{\alpha\alpha}\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i}+\sum_{a\neq\alpha}t_{\alpha a}\hat{\psi}^{\dagger}_{ai}\right)\left(r_{\beta\beta}\hat{\psi}^{\dagger}_{\beta j}+\sum_{b\neq\beta}t_{\beta b}\hat{\psi}^{\dagger}_{bj}\right)\pm\right.\\
&\left.\pm\left(r_{\alpha\alpha}\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha j}+\sum_{a\neq\alpha}t_{\alpha a}\hat{\psi}^{\dagger}_{aj}\right)\left(r_{\beta\beta}\hat{\psi}^{\dagger}_{\beta i}+\sum_{b\neq\beta}t_{\beta b}\hat{\psi}^{\dagger}_{bi}\right)\right]|0\rangle\,,\\
|\alpha\beta\rangle_{\pm} &= \left[2(1\pm|I|^2)\right]^{-1/2}\left[r_{\alpha\alpha}r_{\beta\beta}\left(\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i}\hat{\psi}^{\dagger}_{\beta j}\pm\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha j}\hat{\psi}^{\dagger}_{\beta i}\right)+r_{\alpha\alpha}\sum_{b\neq\beta}t_{\beta b}\left(\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i}\hat{\psi}^{\dagger}_{bj}\pm\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha j}\hat{\psi}^{\dagger}_{bi}\right)\cdot\right.\\
&\left.\cdot\, r_{\beta\beta}\sum_{a\neq\alpha}t_{\alpha a}\left(\hat{\psi}^{\dagger}_{ai}\hat{\psi}^{\dagger}_{\beta j}\pm\hat{\psi}^{\dagger}_{aj}\hat{\psi}^{\dagger}_{\beta i}\right)+\sum_{a\neq\alpha}\sum_{b\neq\beta}t_{\alpha a}t_{\beta b}\left(\hat{\psi}^{\dagger}_{ai}\hat{\psi}^{\dagger}_{bj}\pm\hat{\psi}^{\dagger}_{aj}\hat{\psi}^{\dagger}_{bi}\right)\right]|0\rangle\,. \quad (2.39)
\end{aligned}
$$

Aqui, há uma sutileza: não podemos associar os somatórios no colchete, uma vez que os índices destes possuem restrições diferentes, como, por exemplo, aplicar $b=\alpha$. Assim, devemos extrair estes termos dos somatórios a fim de que possuam as mesmas restrições e possamos renomear os índices, a saber

$$
\begin{aligned}
r_{\alpha\alpha}\sum_{b\neq\beta}t_{\beta b}\left(\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i}\hat{\psi}^{\dagger}_{bj}\pm\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha j}\hat{\psi}^{\dagger}_{bi}\right) &= r_{\alpha\alpha}t_{\beta\alpha}\left(\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i}\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha j}\pm\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha j}\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i}\right)+r_{\alpha\alpha}\sum_{\substack{b\neq\alpha\\ b\neq\beta}}t_{\beta b}\left(\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i}\hat{\psi}^{\dagger}_{bj}\pm\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha j}\hat{\psi}^{\dagger}_{bi}\right),\\
r_{\alpha\alpha}\sum_{b\neq\beta}t_{\beta b}\left(\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i}\hat{\psi}^{\dagger}_{bj}\pm\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha j}\hat{\psi}^{\dagger}_{bi}\right) &= r_{\alpha\alpha}t_{\beta\alpha}(1\mp\epsilon)\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i}\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha j}+r_{\alpha\alpha}\sum_{\substack{b\neq\alpha\\ b\neq\beta}}t_{\beta b}\left(\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i}\hat{\psi}^{\dagger}_{bj}\pm\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha j}\hat{\psi}^{\dagger}_{bi}\right),
\end{aligned}
\quad (2.40)
$$

Analogamente, para o 2° somatório, vem

$$
r_{\beta\beta}\sum_{a\neq\alpha}t_{\alpha a}\left(\hat{\psi}^{\dagger}_{ai}\hat{\psi}^{\dagger}_{\beta j}\pm\hat{\psi}^{\dagger}_{aj}\hat{\psi}^{\dagger}_{\beta i}\right)=r_{\beta\beta}t_{\alpha\beta}(1\mp\epsilon)\hat{\psi}^{\dagger}_{\beta i}\hat{\psi}^{\dagger}_{\beta j}+r_{\beta\beta}\sum_{\substack{a\neq\alpha\\ a\neq\beta}}t_{\alpha a}\left(\hat{\psi}^{\dagger}_{ai}\hat{\psi}^{\dagger}_{\beta j}\pm\hat{\psi}^{\dagger}_{aj}\hat{\psi}^{\dagger}_{\beta i}\right). \quad (2.41)
$$

Igualmente para o somatório duplo, temos

$$
\begin{aligned}
\sum_{a\neq\alpha}\sum_{b\neq\beta}t_{\alpha a}t_{\beta b}\left(\hat{\psi}^{\dagger}_{ai}\hat{\psi}^{\dagger}_{bj}\pm\hat{\psi}^{\dagger}_{aj}\hat{\psi}^{\dagger}_{bi}\right) &= \sum_{a\neq\alpha}t_{\alpha a}t_{\beta\alpha}\left(\hat{\psi}^{\dagger}_{ai}\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha j}\pm\hat{\psi}^{\dagger}_{aj}\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i}\right)+\sum_{a\neq\alpha}\sum_{\substack{b\neq\alpha\\ b\neq\beta}}t_{\alpha a}t_{\beta b}\left(\hat{\psi}^{\dagger}_{ai}\hat{\psi}^{\dagger}_{bj}\pm\hat{\psi}^{\dagger}_{aj}\hat{\psi}^{\dagger}_{bi}\right),\\
\sum_{a\neq\alpha}\sum_{b\neq\beta}t_{\alpha a}t_{\beta b}\left(\hat{\psi}^{\dagger}_{ai}\hat{\psi}^{\dagger}_{bj}\pm\hat{\psi}^{\dagger}_{aj}\hat{\psi}^{\dagger}_{bi}\right) &= t_{\alpha\beta}t_{\beta\alpha}\left(\hat{\psi}^{\dagger}_{\beta i}\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha j}\pm\hat{\psi}^{\dagger}_{\beta j}\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i}\right)+\sum_{\substack{a\neq\alpha\\ a\neq\beta}}t_{\alpha a}t_{\beta\alpha}\left(\hat{\psi}^{\dagger}_{ai}\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha j}\pm\hat{\psi}^{\dagger}_{aj}\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i}\right)+\\
&+\sum_{\substack{b\neq\alpha\\ b\neq\beta}}t_{\alpha\beta}t_{\beta b}\left(\hat{\psi}^{\dagger}_{\beta i}\hat{\psi}^{\dagger}_{bj}\pm\hat{\psi}^{\dagger}_{\beta j}\hat{\psi}^{\dagger}_{bi}\right)+\sum_{\substack{a\neq\alpha\\ a\neq\beta}}\sum_{\substack{b\neq\alpha\\ b\neq\beta}}t_{\alpha a}t_{\beta b}\left(\hat{\psi}^{\dagger}_{ai}\hat{\psi}^{\dagger}_{bj}\pm\hat{\psi}^{\dagger}_{aj}\hat{\psi}^{\dagger}_{bi}\right).
\end{aligned}
\quad (2.42)
$$

Após termos encontrado as mesmas condições para os índices dos somatórios de (2.39), substituimos (2.40)-(2.42) e temos

$$
\begin{aligned}
|\alpha\beta\rangle_{\pm} &= \left[2(1 \pm |I|^2)\right]^{-1/2} \Bigg[r_{\alpha\alpha} r_{\beta\beta} \left(\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i} \hat{\psi}^{\dagger}_{\beta j} \pm \hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha j} \hat{\psi}^{\dagger}_{\beta i} \right) + r_{\alpha\alpha} t_{\beta\alpha} (1 \mp \epsilon) \hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i} \hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha j} + \\
&+ r_{\alpha\alpha} \sum_{\substack{b \neq \alpha \\ b \neq \beta}} t_{\beta b} \left(\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i} \hat{\psi}^{\dagger}_{b j} \pm \hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha j} \hat{\psi}^{\dagger}_{b i} \right) + r_{\beta\beta} t_{\alpha\beta} (1 \mp \epsilon) \hat{\psi}^{\dagger}_{\beta i} \hat{\psi}^{\dagger}_{\beta j} + r_{\beta\beta} \sum_{\substack{a \neq \alpha \\ a \neq \beta}} t_{\alpha a} \left(\hat{\psi}^{\dagger}_{a i} \hat{\psi}^{\dagger}_{\beta j} \pm \hat{\psi}^{\dagger}_{a j} \hat{\psi}^{\dagger}_{\beta i} \right) + \\
&+ t_{\alpha\beta} t_{\beta\alpha} \left(\hat{\psi}^{\dagger}_{\beta i} \hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha j} \pm \hat{\psi}^{\dagger}_{\beta j} \hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i} \right) + \sum_{\substack{a \neq \alpha \\ a \neq \beta}} t_{\alpha a} t_{\beta\alpha} \left(\hat{\psi}^{\dagger}_{a i} \hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha j} \pm \hat{\psi}^{\dagger}_{a j} \hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i} \right) + \\
&+ \sum_{\substack{b \neq \alpha \\ b \neq \beta}} t_{\alpha\beta} t_{\beta b} \left(\hat{\psi}^{\dagger}_{\beta i} \hat{\psi}^{\dagger}_{b j} \pm \hat{\psi}^{\dagger}_{\beta j} \hat{\psi}^{\dagger}_{b i} \right) + \sum_{\substack{a \neq \alpha \\ a \neq \beta}} \sum_{\substack{b \neq \alpha \\ b \neq \beta}} t_{\alpha a} t_{\beta b} \left(\hat{\psi}^{\dagger}_{a i} \hat{\psi}^{\dagger}_{b j} \pm \hat{\psi}^{\dagger}_{a j} \hat{\psi}^{\dagger}_{b i} \right) \Bigg] |0\rangle \,. \qquad (2.43)
\end{aligned}
$$

Com os índices do somatório com as mesmas condições, podemos renomeá-las de forma a associar seus somandos, a menos do último somatório, pois este possui termos cruzados. Tomando as relações de comutação (2.30), podemos combinar o 1° e 6°, 3° e 7° e 5° e 8° termos, no que acarreta na simplificação

$$
\begin{aligned}
|\alpha\beta\rangle_{\pm} &= \left[2(1 \pm |I|^2)\right]^{-1/2} \Bigg[(r_{\alpha\alpha} r_{\beta\beta} \mp \epsilon t_{\alpha\beta} t_{\beta\alpha}) \left(\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i} \hat{\psi}^{\dagger}_{\beta j} \pm \hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha j} \hat{\psi}^{\dagger}_{\beta i} \right) + r_{\alpha\alpha} t_{\beta\alpha} (1 \mp \epsilon) \hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i} \hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha j} + \\
&+ r_{\beta\beta} t_{\alpha\beta} (1 \mp \epsilon) \hat{\psi}^{\dagger}_{\beta i} \hat{\psi}^{\dagger}_{\beta j} + \sum_{\substack{a \neq \alpha \\ a \neq \beta}} (r_{\alpha\alpha} t_{\beta a} \mp \epsilon t_{\alpha a} t_{\beta\alpha}) \left(\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i} \hat{\psi}^{\dagger}_{a j} \pm \hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha j} \hat{\psi}^{\dagger}_{a i} \right) + \\
&+ \sum_{\substack{a \neq \alpha \\ a \neq \beta}} (r_{\beta\beta} t_{\alpha a} \mp \epsilon t_{\alpha\beta} t_{\beta a}) \left(\hat{\psi}^{\dagger}_{\beta i} \hat{\psi}^{\dagger}_{a j} \pm \hat{\psi}^{\dagger}_{\beta j} \hat{\psi}^{\dagger}_{a i} \right) + \sum_{\substack{a \neq \alpha \\ a \neq \beta}} \sum_{\substack{b \neq \alpha \\ b \neq \beta}} t_{\alpha a} t_{\beta b} \left(\hat{\psi}^{\dagger}_{a i} \hat{\psi}^{\dagger}_{b j} \pm \hat{\psi}^{\dagger}_{a j} \hat{\psi}^{\dagger}_{b i} \right) \Bigg] |0\rangle \,. \qquad (2.44)
\end{aligned}
$$

Para o somatório duplo, podemos utilizar uma identidade análoga à (2.37) de forma que facilita a expressar os estados em termos de (2.32) e (2.33), a saber

$$
\sum_{a,b} t_{\alpha a} t_{\beta b} \hat{\psi}^{\dagger}_{a i} \hat{\psi}^{\dagger}_{b j} = \sum_{a} \left[t_{\alpha a} t_{\beta a} \hat{\psi}^{\dagger}_{a i} \hat{\psi}^{\dagger}_{a j} + \sum_{n} \left(t_{\alpha a} t_{\beta a+n} \hat{\psi}^{\dagger}_{a i} \hat{\psi}^{\dagger}_{a+n j} + t_{\alpha a+n} t_{\beta a} \hat{\psi}^{\dagger}_{a+n i} \hat{\psi}^{\dagger}_{a j} \right) \right] . \qquad (2.45)
$$

Aplicando a identidade acima em cada parcela do somatório duplo e tomando novamente

a relação de comutação (2.30), obtemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{a,b} t_{\alpha a} t_{\beta b} \left(\hat{\psi}^{\dagger}_{ai} \hat{\psi}^{\dagger}_{bj} \pm \hat{\psi}^{\dagger}_{aj} \hat{\psi}^{\dagger}_{bi} \right) &= \sum_{a} \left[t_{\alpha a} t_{\beta a} \hat{\psi}^{\dagger}_{ai} \hat{\psi}^{\dagger}_{aj} + \sum_{n} \left(t_{\alpha a} t_{\beta a+n} \hat{\psi}^{\dagger}_{ai} \hat{\psi}^{\dagger}_{a+nj} + t_{\alpha a+n} t_{\beta a} \hat{\psi}^{\dagger}_{a+ni} \hat{\psi}^{\dagger}_{aj} \right) \right] \\
&\quad \pm \sum_{a} \left[t_{\alpha a} t_{\beta a} \hat{\psi}^{\dagger}_{aj} \hat{\psi}^{\dagger}_{ai} + \sum_{n} \left(t_{\alpha a} t_{\beta a+n} \hat{\psi}^{\dagger}_{aj} \hat{\psi}^{\dagger}_{a+ni} + t_{\alpha a+n} t_{\beta a} \hat{\psi}^{\dagger}_{a+nj} \hat{\psi}^{\dagger}_{ai} \right) \right], \\
\sum_{a,b} t_{\alpha a} t_{\beta b} \left(\hat{\psi}^{\dagger}_{ai} \hat{\psi}^{\dagger}_{bj} \pm \hat{\psi}^{\dagger}_{aj} \hat{\psi}^{\dagger}_{bi} \right) &= \sum_{a} \Bigg[t_{\alpha a} t_{\beta a} (1 \mp \epsilon) \hat{\psi}^{\dagger}_{ai} \hat{\psi}^{\dagger}_{aj} + \sum_{n} \left(t_{\alpha a} t_{\beta a+n} \mp \epsilon t_{\alpha a+n} t_{\beta a} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \left(\hat{\psi}^{\dagger}_{ai} \hat{\psi}^{\dagger}_{a+nj} \pm \hat{\psi}^{\dagger}_{aj} \hat{\psi}^{\dagger}_{a+ni} \right) \Bigg]. \qquad (2.46)
\end{aligned}$$

Observamos agora que não somente os somatórios de (2.44) podem ser escritos em termos dos estados (2.32) e (2.33), como também o somatório duplo, a menos de alguns termos cuja constante de normalização deve ser compatibilizada. De fato, introduzindo a quantidade

$$\mathcal{I}^{\pm}_{\epsilon} = \sqrt{\frac{1 - \epsilon |I|^2}{(1 \pm |I|^2)}} \qquad (2.47)$$

Temos os estados $|\alpha\beta\rangle_{\pm}$ descritos em termos da conexão dada pela matriz de espalhamento, a saber

$$\begin{aligned}
|\alpha\beta\rangle_{\pm} &= \mathcal{I}^{\pm}_{\epsilon} \sqrt{(1 \mp \epsilon)} \left(r_{\alpha\alpha} t_{\beta\alpha} |\alpha\alpha\rangle + r_{\beta\beta} t_{\alpha\beta} |\beta\beta\rangle + t_{\alpha a} t_{\beta a} |aa\rangle \right) + \\
&\quad + \left(r_{\alpha\alpha} r_{\beta\beta} \mp \epsilon t_{\alpha\beta} t_{\beta\alpha} \right) |\alpha\beta\rangle_{\pm} + \left(r_{\alpha\alpha} t_{\beta a} \mp \epsilon t_{\alpha a} t_{\beta\alpha} \right) |\alpha a\rangle_{\pm} + \\
&\quad + \left(r_{\beta\beta} t_{\alpha a} \mp \epsilon t_{\alpha\beta} t_{\beta a} \right) |\beta a\rangle_{\pm} + \left(t_{\alpha a} t_{\beta a+n} \mp \epsilon t_{\alpha a+n} t_{\beta a} \right) |aa+n\rangle_{\pm} . \qquad (2.48)
\end{aligned}$$

Com os estados (2.38) e (2.48) e a matriz de espalhamento do sistema, podemos conhecer todas as relações possíveis do estado de entrada e saída do sistema mediada pelas amplitudes de probabilidade dada pelos termos da matriz de espalhamento. Contudo, de um ponto de vista mais prático, devemos utilizar os estados acima para encontrar as probabilidades de obtenção de uma dada configuração, o que vai acarretar no cálculo das funções de correlação.

2.2.3 Funções de Correlação: o ruído de disparo.

Na subsecção anterior, expressamos a relação entre estados de entrada e saída que contemplam o espalhamento de duas partículas, talrelação é dada; como esperado, pela matriz de espalhamento. Dessa forma, pelo que foi desenvolvido até aqui, é possível calcular a probabilidade de obtenção de uma dada configuração.

No entanto, devemos identificar que tipo de função irá ser obtida à partir da projeção do estado que descreve duas partículas. Primeiramente, devemos atentar que os estados

$|\alpha\alpha\rangle$ e $|\alpha\beta\rangle_{\pm}$ devem ser ortogonais, uma vez que são independentes entre si. A ortogonalidade permite escrever um estado de duas partículas, $|\psi\rangle$, em termos de uma base dada pelos estado de Fock, $|\alpha\alpha\rangle$ e $|\alpha\beta\rangle_{\pm}$, a saber

$$|\psi\rangle = |\alpha\alpha\rangle \langle\alpha\alpha|\psi\rangle + |\alpha\beta\rangle_{+} \, {}_{+}\langle\alpha\beta \,|\, \psi\rangle + |\alpha\beta\rangle_{-} \, {}_{-}\langle\alpha\beta \,|\, \psi\rangle \, . \tag{2.49}$$

Os termos *braket* são na verdade as amplitudes de probabilidade de obtenção respectivo estado. Assim, analogamente a (1.18), para calcular, por exemplo, a probabilidade da configuração descrita por $|\alpha\alpha\rangle$, temos

$$P(\alpha\alpha) = |\langle\alpha\alpha|\psi\rangle|^2 \, . \tag{2.50}$$

Se tomamos o observável n_α como o número de partículas no guia α, $P(\alpha\alpha)$ será a probabilidade de obtenção de duas partículas no guia α, ou, como visto na subsecção 2.1.2, $\langle n_\alpha n_\alpha\rangle$, como são os mesmos observáveis, então, temos a média quadrática $\langle n_\alpha^2\rangle$. Se redefinirmos o valor da origem, podemos tomar $\langle n_\alpha\rangle = 0$, assim, de acordo com (2.10), temos que

$$\langle(\Delta n_\alpha)^2\rangle = |\langle\alpha\alpha|\psi\rangle|^2 \, . \tag{2.51}$$

É importante comentar a quantidade de informações que (2.51) abrange: como visto na subsecção 2.1.2, a variância (2.51) na realidade é a função de autocorrelação de n_α, pelo teorema Wiener-Khintchine, este também é o ruído do sistema. Como estamos considerando o caso da flutuação causada pela transmissão da partícula pelo ponto quântico, temos que esse é o ruído de disparo.

Igualmente, podemos calcular a probabilidade $P(\alpha\beta)$. Atentando para o fato que existem os estados simétricos e assimétricos, temos que a probabilidade será dada por

$$\begin{aligned} P(\alpha\beta) &= |\, {}_{+}\langle\alpha\beta \,|\, \psi\rangle \,|^2 + |\, {}_{-}\langle\alpha\beta \,|\, \psi\rangle \,|^2, \\ \langle\Delta n_\alpha \Delta n_\beta\rangle &= |\, {}_{+}\langle\alpha\beta \,|\, \psi\rangle \,|^2 + |\, {}_{-}\langle\alpha\beta \,|\, \psi\rangle \,|^2. \end{aligned} \tag{2.52}$$

De maneira análoga à discutida com respeito (2.51), temos que a expressão acima também é o ruído de disparo devido à transmissão das partículas do estado $|\psi\rangle$ transmitidas para os guias α e β.

Agora que sabemos as amplitudes geradas devido à expansão de $|\psi\rangle$ nas bases $|\alpha\alpha\rangle$ e $|\alpha\beta\rangle_{\pm}$ são, na verdade, funções de correlação. Para tomarmos mais conclusões a respeito do sistema através das funções de correlação (2.51) e (2.52), é necessário estabelecer as condições iniciais do sistema para dar uma forma para $|\psi\rangle$. Assim, podemos assumir que o estado $|\psi\rangle$ foi preparado inserindo uma partícula no guia α e outra no β. Se utilizamos

o operador de campo definido em (2.27), temos que o estado preparado será

$$|\psi\rangle = \hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i}\hat{\psi}^{\dagger}_{\beta j}|0\rangle\,,$$
$$|\psi\rangle = \tfrac{1}{2}\left[2(1-|I|^2)\right]^{1/2}|\alpha\beta\rangle_{-} + \tfrac{1}{2}\left[2(1+|I|^2)\right]^{1/2}|\alpha\beta\rangle_{+}\,, \tag{2.53}$$

onde rescrevemos o estado $|\psi\rangle$ em termos da base da base $|\alpha\beta\rangle_{\pm}$ utilizando (2.33). Como estabelecido, (2.53) é o estado de entrada, no entanto, podemos expressar o estado $|\psi\rangle$ em termos dos possíveis estados de saída utilizando a matriz de espalhamento, nesse caso, a matriz de espalhamento conecta as amplitudes de saída com as de entrada, $A = SB$, assim, substituindo (2.48), temos

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle \;=\; & \frac{1}{2}\left[2(1-|I|^2)\right]^{1/2}\Big[\mathcal{I}^{-}_{\epsilon}\sqrt{(1+\epsilon)}\,(r_{\alpha\alpha}t_{\beta\alpha}|\alpha\alpha\rangle + r_{\beta\beta}t_{\alpha\beta}|\beta\beta\rangle + t_{\alpha a}t_{\beta a}|aa\rangle) + \\
& + (r_{\alpha\alpha}r_{\beta\beta}+\epsilon t_{\alpha\beta}t_{\beta\alpha})|\alpha\beta\rangle_{-} + (r_{\alpha\alpha}t_{\beta a}+\epsilon t_{\alpha a}t_{\beta\alpha})|\alpha a\rangle_{-} + \\
& + (r_{\beta\beta}t_{\alpha a}+\epsilon t_{\alpha\beta}t_{\beta a})|\beta a\rangle_{-} + (t_{\alpha a}t_{\beta a+n}+\epsilon t_{\alpha a+n}t_{\beta a})|aa+n\rangle_{-}\Big] + \\
& + \frac{1}{2}\left[2(1+|I|^2)\right]^{1/2}\Big[\mathcal{I}^{+}_{\epsilon}\sqrt{(1-\epsilon)}\,(r_{\alpha\alpha}t_{\beta\alpha}|\alpha\alpha\rangle + r_{\beta\beta}t_{\alpha\beta}|\beta\beta\rangle + t_{\alpha a}t_{\beta a}|aa\rangle) + \\
& + (r_{\alpha\alpha}r_{\beta\beta}-\epsilon t_{\alpha\beta}t_{\beta\alpha})|\alpha\beta\rangle_{+} + (r_{\alpha\alpha}t_{\beta a}-\epsilon t_{\alpha a}t_{\beta\alpha})|\alpha a\rangle_{+} + \\
& + (r_{\beta\beta}t_{\alpha a}-\epsilon t_{\alpha\beta}t_{\beta a})|\beta a\rangle_{+} + (t_{\alpha a}t_{\beta a+n}-\epsilon t_{\alpha a+n}t_{\beta a})|aa+n\rangle_{+}\Big].
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Com o estado inicial escrito na forma (2.54), podemos calcular de imediato as variâncias dadas por (2.51), projetando $|\psi\rangle$ em $|\alpha\alpha\rangle$ e tomando o módulo ao quadrado, temos

$$\begin{aligned}
\langle(\Delta n_\alpha)^2\rangle &= |\langle\alpha\alpha|\psi\rangle|^2\,,\\
\langle(\Delta n_\alpha)^2\rangle &= \left|\frac{1}{2}\left[2(1-|I|^2)\right]^{1/2}\mathcal{I}^{-}_{\epsilon}\sqrt{(1+\epsilon)}r_{\alpha\alpha}t_{\beta\alpha} + \frac{1}{2}\left[2(1+|I|^2)\right]^{1/2}\mathcal{I}^{+}_{\epsilon}\sqrt{(1-\epsilon)}r_{\alpha\alpha}t_{\beta\alpha}\right|^2,\\
\langle(\Delta n_\alpha)^2\rangle &= \frac{1}{2}\left[(1-\epsilon|I|^2)\right]|r_{\alpha\alpha}|^2|t_{\beta\alpha}|^2\left[\sqrt{(1+\epsilon)}+\sqrt{(1-\epsilon)}\right]^2,\\
\langle(\Delta n_\alpha)^2\rangle &= \frac{1}{4}(1-\epsilon|I|^2)|r_{\alpha\alpha}|^2|t_{\beta\alpha}|^2\left[(1+\epsilon)+(1-\epsilon)\right]^2,\\
\langle(\Delta n_\alpha)^2\rangle &= |r_{\alpha\alpha}|^2|t_{\beta\alpha}|^2(1-\epsilon|I|^2).
\end{aligned} \tag{2.55}$$

De forma análoga para os estados $|\beta\beta\rangle$ e $|aa\rangle$, temos as variâncias

$$\langle(\Delta n_\beta)^2\rangle = |r_{\beta\beta}|^2|t_{\alpha\beta}|^2(1-\epsilon|I|^2), \tag{2.56}$$
$$\langle(\Delta n_a)^2\rangle = |t_{\alpha a}|^2|t_{\beta a}|^2(1-\epsilon|I|^2). \tag{2.57}$$

As variâncias (2.55)-(2.57) informam as probabilidades de obter a configuração das duas partículas sendo transmitidas para o referido índice presente na variância que indica o guia a ser transmitido. Podemos verificar um resultado muito interessante quando tomamos o

caso fermiônico($\epsilon = 1$) e com *overlap* máximo, temos que todas as variâncias anulam-se, reforçando o princípio de exclusão de Pauli onde dois férmions não podem compartilhar o mesmo estado quântico, o que denota que as equações de correlação são bons candidatos para descrição de sistemas quânticos no regime estabelecido.

Para calcular as outras correlações, projetamos o estado $|\psi\rangle$ no estado $|\alpha\beta\rangle$ a fim de calcular $\langle \Delta n_\alpha \Delta n_\beta \rangle$, tomando (2.52) e (2.54), vem

$$\begin{aligned}
\langle \Delta n_\alpha \Delta n_\beta \rangle &= |\,{}_+\langle \alpha\beta \,|\, \psi\rangle\,|^2 + |\,{}_-\langle \alpha\beta \,|\, \psi\rangle\,|^2, \\
\langle \Delta n_\alpha \Delta n_\beta \rangle &= \frac{1}{2}(1+|I|^2)\,|r_{\alpha\alpha}r_{\beta\beta} - \epsilon t_{\alpha\beta}t_{\beta\alpha}|^2 + \frac{1}{2}(1-|I|^2)\,|r_{\alpha\alpha}r_{\beta\beta} + \epsilon t_{\alpha\beta}t_{\beta\alpha}|^2\,, \\
\langle \Delta n_\alpha \Delta n_\beta \rangle &= \frac{1}{2}(1-|I|^2)\Big[|r_{\alpha\alpha}|^2|r_{\beta\beta}|^2 + |t_{\alpha\beta}|^2|t_{\beta\alpha}|^2 + \epsilon\left(r^*_{\alpha\alpha}r^*_{\beta\beta}t_{\alpha\beta}t_{\beta\alpha} + r_{\alpha\alpha}r_{\beta\beta}t^*_{\alpha\beta}t^*_{\beta\alpha}\right)\Big] + \\
&\quad + \frac{1}{2}(1+|I|^2)\Big[|r_{\alpha\alpha}|^2|r_{\beta\beta}|^2 + |t_{\alpha\beta}|^2|t_{\beta\alpha}|^2 - \epsilon\left(r^*_{\alpha\alpha}r^*_{\beta\beta}t_{\alpha\beta}t_{\beta\alpha} + r_{\alpha\alpha}r_{\beta\beta}t^*_{\alpha\beta}t^*_{\beta\alpha}\right)\Big], \\
\langle \Delta n_\alpha \Delta n_\beta \rangle &= |r_{\alpha\alpha}|^2|r_{\beta\beta}|^2 + |t_{\alpha\beta}|^2|t_{\beta\alpha}|^2 - \epsilon|I|^2\left(r^*_{\alpha\alpha}r^*_{\beta\beta}t_{\alpha\beta}t_{\beta\alpha} + r_{\alpha\alpha}r_{\beta\beta}t^*_{\alpha\beta}t^*_{\beta\alpha}\right). \qquad (2.58)
\end{aligned}$$

De forma análoga, calculando as outras equações de correlação possíveis, vem

$$\langle n_\alpha n_a\rangle = |r_{\alpha\alpha}|^2|t_{\beta a}|^2 + |t_{\alpha a}|^2|t_{\beta\alpha}|^2 - \epsilon|I|^2(r_{\alpha\alpha}t_{\beta a}t^*_{\alpha a}t^*_{\beta\alpha} + r^*_{\alpha\alpha}t^*_{\beta a}t_{\alpha a}t_{\beta\alpha}). \qquad (2.59)$$

$$\langle n_\beta n_a\rangle = |r_{\beta\beta}|^2|t_{\alpha a}|^2 + |t_{\beta a}|^2|t_{\alpha\beta}|^2 - \epsilon|I|^2(r_{\beta\beta}t_{\alpha a}t^*_{\beta a}t^*_{\alpha\beta} + r^*_{\beta\beta}t^*_{\alpha a}t_{\beta a}t_{\alpha\beta}). \qquad (2.60)$$

$$\langle n_a n_{a+n}\rangle = |t_{\alpha a}|^2|t_{\beta a+n}|^2 + |t_{\alpha a+n}|^2|t_{\beta a}|^2 - \epsilon|I|^2(t_{\alpha a}t_{\beta a+n}t^*_{\alpha a+n}t^*_{\beta a} + t^*_{\alpha a}t^*_{\beta a+n}t_{\alpha a+n}t_{\beta a}). \qquad (2.61)$$

Agora temos as configurações restantes para ocupação do sistema, representadas pelas equações de correlaçao (2.59)-(2.61). É necessário apontar que as equações de correlação possuem uma característica absolutamente geral no que diz respeito ao número de guias do sistema espalhador de 2 partículas. Embora restringimos a temperatura do sistema à zero, o que acarretou nas equações contemplarem o ruído de disparo, expressamos as equações de correlação em termos das entradas da matriz de espalhamento que descreve como se dá o processo no sistema, isso é importante tanto no ponto de vista computacional, uma vez que podemos encontrar as equações de correlação de qualquer sistema de forma recursiva, quanto no ponto de vista da abrangência de aplicações, posto que a única condição que deve ser obedecida é a de unitariedade, para conservar o número de partículas. Com efeito, é possível mostrar que a soma das funções de correlação, (2.55)-(2.61), é 1 se, e somente se, $SS^\dagger = \mathbb{I}$. Assim, podemos explorar, por exemplo, o efeito da simetria dos sistemas no transporte quântico, tal simetria irá refletir na matriz de espalhamento e observada pelas equações de correlação, isso será feito no próximo capítulo. Outrossim, podemos descrever um sistema caótico utilizando o formalismo de matrizes aleatórias[38], o que ocasionará no uso do método diagramático[39]. Muito se pode fazer com as equações de correlação, no entanto, é necessário apontar que a formulação trabalhada até aqui não é mais geral

que a descrita pelo formalismo de Büttiker, onde se encontra uma expressão para o ruído contemplando casos mais gerais a temperaturas não-nulas[40], com esse formalismo, é possível obter uma série de expressões para o ruído[41] como também aplicá-las em outros cenários. Contudo, reforçamos que o formalismo aqui desenvolvido, embora menos geral, é mais simples e direto: uma vez obtida a matriz de espalhamento do sistema, calcular todas as configurações possíveis do sistema está automaticamente conhecido, claro que o ponto complicador pode ser um número exarcebado de guias, mas, dado a recursividade, um programa simples pode facilmente calcular as equações de correlação.

Para finalizar este capítulo, vamos aplicar as equações de correlação em um sistema relativamente simples e já abordado aqui: o experimento Hanbury Brown-Twiss.

2.3 Estatística HBT

Para implementar o aparato Hanbury Brown-Twiss nas equações de correlação, primeiramente precisamos derivar a matriz de espalhamento que denota o processo de espalhamento do sistema do sistema, para tanto, tomamos o aparato HBT representado por 2 emissores em um centro espalhador, esse é ajustado de tal forma a só refletir ou transmitir as partículas incidentes para outros 2 guias que estão ligados em detectores, por isso geralmente representa-se esse centro espalhador como um espelho fino. Com isso, o sistema HBT necessita de 4 guias de propagação, como vemos na Figura 2.3

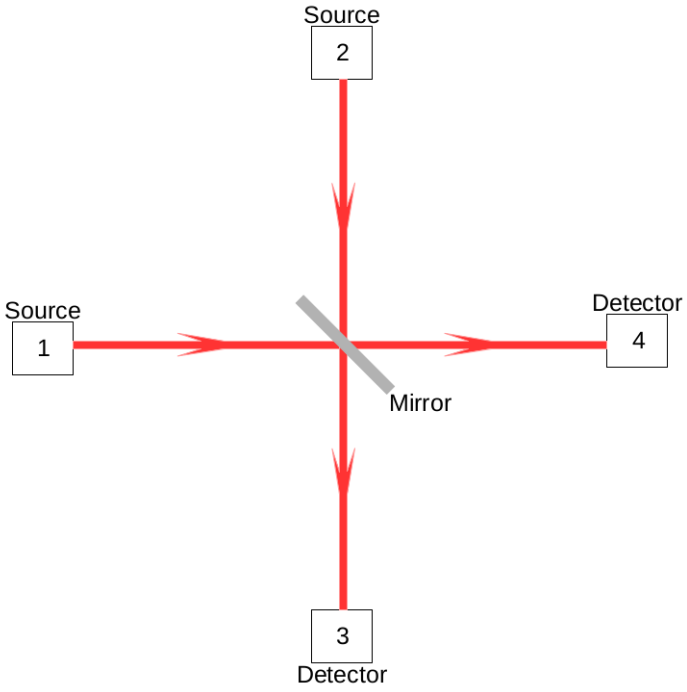


Figura 2.3: Representação do espalhamento no interferômetro Hanbury Brown-Twiss: por E. Frade Silva, A. L. R. Barbosa, J. G. G. S. Ramos. [42]

Com isso, podemos escrever o problema do espalhamento HBT tomando as entradas

da matriz de espalhamento com os coeficientes de reflexão e transmissão do espelho, a saber

$$\begin{pmatrix} b_3^\dagger \\ b_4^\dagger \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r^* & t^* \\ 0 & 0 & t^* & r^* \\ r & t & 0 & 0 \\ t & r & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_1^\dagger \\ a_2^\dagger \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} b_3^\dagger \\ b_4^\dagger \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = S_{\mathrm{HBT}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_1^\dagger \\ a_2^\dagger \end{pmatrix}, \tag{2.62}$$

Nota-se que fizemos $b_{1,2} = b_{3,4}^\dagger$ e $a_{1,2}^\dagger = a_{3,4}$, uma vez que a matriz de espalhamento possui blocos que são conjugados entre si, isso foi necessário para garantir a unitariedade da matriz de espalhamento. Na prática, representa as partículas injetadas pelos guias 3 e 4, no entanto, isso representa absolutamente o mesmo problema.

Já que o espalhamento é dado pela introdução de duas partículas nos guias 1 e 2, temos que $\alpha = 1$ e $\beta = 2$, assim, podemos utilizar as equações de correlação (2.55)-(2.61) para encontrar a estatística do sistema. Observamos que a matriz de espalhamento possui 2 blocos de entradas com valor zero, para o aparato HBT, esses blocos contemplam os casos em que há reflexão para os guias que conduzem as partículas incidentes, portanto, quaisquer equação de correlação que descreva esses casos de reflexão deverá ser nula, o que resulta apenas nas equações (2.57) e (2.61) não-nulas. Na literatura de transporte quântico, quando um sistema é descrito por uma matriz de espalhamento que só possui blocos de transmissão, esse sistema é chamado balístico. Tomando primeiramente (2.57) para $a = 3$, aplicamos as referidas entradas de S_{HBT} temos

$$\begin{aligned} \langle(\Delta n_3)^2\rangle &= |t_{13}|^2|t_{23}|^2(1-\epsilon|I|^2), \\ \langle(\Delta n_3)^2\rangle &= |r|^2|t|^2(1-\epsilon|I|^2). \end{aligned} \tag{2.63}$$

De maneira análoga, para $a = 4$, temos

$$\langle(\Delta n_4)^2\rangle = |r|^2|t|^2(1-\epsilon|I|^2). \tag{2.64}$$

Para a última equação de correlação (2.61), temos que aplicar os valores de n para contemplar todas as equações de correlação, no entanto, para o caso de 4 guias, sempre teremos

$n = 1$, valores maiores contemplarão guias não existentes, a saber

$$\begin{aligned}
\langle \Delta n_3 \Delta n_{33+1} \rangle &= |t_{13}|^2 |t_{23+1}|^2 + |t_{23}|^2 |t_{13+1}|^2 - \epsilon |I|^2 (t_{13} t_{43+1} t_{23}^* t_{13+1}^* + t_{13}^* t_{23+1}^* t_{23} t_{13+1}), \\
\langle \Delta n_3 \Delta n_4 \rangle &= |t_{13}|^2 |t_{24}|^2 + |t_{23}|^2 |t_{14}|^2 - \epsilon |I|^2 (t_{13} t_{24} t_{23}^* t_{14}^* + t_{13}^* t_{24}^* t_{23} t_{14}), \\
\langle \Delta n_3 \Delta n_4 \rangle &= |r|^4 + |t|^4 - \epsilon |I|^2 (r^2 t^{*2} + r^{*2} t^2), \\
\langle \Delta n_3 \Delta n_4 \rangle &= |r|^4 + |t|^4 + 2\epsilon |I|^2 |r|^2 |t|^2, \qquad (2.65)
\end{aligned}$$

na última linha, utilizamos a condição de unitariedade da matriz de espalhamento onde obtém-se a relação $rt^* + r^* t = 0$, também temos $|r|^2 + |t|^2 = 1$, essa última condição irá ocasionar que a soma das equações de correlação seja normalizada, como se pode constatar por verificação direta. As equações (2.63)-(2.65) configuram a estatística HBT, de fato, estas apresentam todas as características fundamentais do aparato HBT apontadas por Purcell, como abordado na secção 1.2: tomando o caso $I = 1$, para bósons, temos que as variâncias assumem valores maiores que a correlação (2.65), tomando $r = t$, essa última anula-se completamente, o que evidencia o efeito Hong-Ou-Mandel.

Para férmions e $I = 1$, além das variâncias anularem-se, temos que $\langle \Delta n_3 \Delta n_4 \rangle = 1$, isso já era esperado, uma vez que a configuração dos dois férmions no mesmo guia é proibida pelo princípio de Pauli, restando apenas a configuração de 1 partícula transportada para cada guia.

Embora nos traga informações extremamente importantes, o aparato HBT é relativamente simples de se analisar, uma vez que não há o chamado *backscattering*, *i.e.*, reflexões de volta para os guias de emissão. Efeitos de *backscattering* aparecem quando implementamos mais condições ao sistema, como por exemplo, simetrias. Isso ocasionará em efeitos interessantes para a estatística do sistema, que é exatamente o que vamos explorar no proximo capítulo.

Capítulo 3

Simetrias: paridade, reversão temporal e quiralidade.

Em variados contextos, um sistema pode apresentar a mesma configuração para diferentes valores de um dado parâmetro, por exemplo, um pêndulo oscilando em 2 pontos diferentes do universo com mesma aceleração local da gravidade irá possuir o mesmo período de oscilação, a tal simetria, chamamos de homogeneidade do espaço.

Observamos que com este exemplo simples, podemos tomar inferências interessantes a respeito do sistema como um todo, no caso, o universo. Assim, estabelecer uma simetria tem consequências diretas no sistema, isso foi formalizado após o famoso teorema de Noether, concebido no começo do século XX[43], onde este associa para cada simetria uma lei de conservação, por exemplo, assumindo-se a homogeneidade do espaço, pelo teorema de Noether, temos a conservação do momento linear.

Com o advento das equações de correlação do capítulo anterior, temos uma forma alternativa de analisar as consequências da imposição de simetrias do sistema analisando o efeito disso no processo de espalhamento, para tanto, precisamos trabalhar como implementar simetrias na matriz de espalhamento. Para dar início a tal tratamento, vamos tomar o formalismo mais simples conhecido.

3.1 Paridade e Reversão Temporal

Na grande maioria das equações que descrevem os mais variados sistemas, há a presença implícita de muitas simetrias, não que isso seja uma condição *sine qua non* para estabelecer uma lei da natureza, mas porque a presença de simetrias inevitavelmente agrega características gerais de muitos sistemas, como é o caso das chamadas paridade(P) e reversão temporal(T).

A paridade consiste na propriedade de reflexão espacial do sistema, $\vec{r} \to -\vec{r}$. Esta está intimamente ligada à homogeneidade do espaço: não há razões para o sistema comportar-

se diferentemente devido à troca do sentido das coordenadas do sistema, como podemos ver pelo esquema na Figura 3.1, de um problema dinâmico de uma força $\vec{F}$ atuando em um corpo de massa m. Expressamos tal problema utilizando as coordenadas cartesianas e o mesmo eixo formado pela paridade, como podemos verificar na Figura 3.1

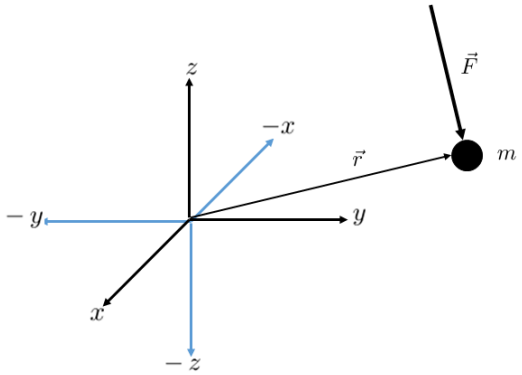


Figura 3.1: Análise da paridade em um problema clássico.

Se endereçarmos o tratamento newtoniano para esse problema, temos que a troca por paridade deve ter o mesmo resultado, afinal, tal troca não altera as características dinâmicas do sistema. Esse fato sucede em outros contextos, como é o caso das equações de Maxwell.

De maneira análoga, podemos analisar tal comportamento para o tempo, no entanto, como este não é coordenada nas teorias clássicas, deve-se tomar o sistema "involuindo" no tempo(como um vídeo sendo reproduzindo do fim para o começo). Para sistemas físicos, essa "involução" no tempo deve ser simétrica uma vez que não se deve privilegiar a ocorrência de um dado comportamento em um dado instante, assim, estabelece-se a chamada reversão temporal, $t \to -t$.

Assim, como a paridade, a reversão temporal também está presente em muitas leis da física, como a já citada segunda lei de Newton e qualquer outra lei com derivada segunda do tempo, como a equação da onda. Para teorias ondulatórias, é necessária apontar uma pequena sutileza, pois, para uma função dependende do tempo $f(t)$, podemos desmembrá-la em ondas aplicando a transformada de Fourier, aplicando a reversão temporal, só reobtemos a função f aplicando o complexo conjugado, a saber

$$\begin{aligned} f(-t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{-i\omega t} \mathrm{d}\omega, \\ f^*(-t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g^*(\omega) e^{i\omega t} \mathrm{d}\omega, \\ f^*(-t) &= f(t), \end{aligned} \tag{3.1}$$

assumimos também que as amplitudes g são reais, assim, a reversão temporal acarreta

em soluções reais para a descrição de um dado sistema.

É importante comentar também que a análise das simetrias de paridade e reversão temporal para linhas espectrais e orbitais atômicos ocasiona nas chamadas regras de seleção, como a regra de Laporte e a degenerescência de Kramers[36].

Por outro lado, a quebra dessas simetrias também nos traz informações úteis para o sistema, como no caso das interações fracas[44]; para a quebra da paridade e do famoso problema da seta do tempo[45], que engendra discussões de ordem ontológica da física, como o paradoxo de Loschmidt, problema em aberto há mais de 100 anos.

No entanto, aqui vamos nos ater a implementar essas simetrias no problema do espalhamento quântico, para tanto, podemos utilizar um formalismo que introjeta tais simetrias na sua própria descrição, que é o que vamos desenvolver agora

3.2 O Formalismo $\mathcal{PT}$.

No capítulo 1, introduzimos os princípios da mecânica quântica em um apelo menos formal, contudo, na década de 30, P. Dirac trabalhou a mecânica quântica introduzindo o formalismo *braket*, já utilizado aqui[47]. No seu formalismo, Dirac também estabeleceu a condição no qual o sistema gera "bons números quântico", *i.e.*, que possuem correspondência com a medição. No caso do espectro do sistema, E, para se obter valores reais, é necessário que consideremos um sistema fechado e descrito por um hamiltoniano hermitiano, a saber

$$\hat{H} = \hat{H}^{\dagger}, \tag{3.2}$$

isso garante automaticamente a obtenção de autovalores reais quando aplicado na equação (1.11).

Embora a assumpção de Dirac seja suficiente, não se pode concluir que ela seja necessária, uma vez que esta não possui nenhuma justificativa física, o que ocasiona em uma certa liberdade para estabelecer formulações que possam englobar (3.2) e descrever aspectos mais genéricos de sistemas quânticos. Por exemplo, existem formulações de hamiltonianos não-hermitianos para descrever processos dissipativos [48, 49] e decaimentos radioativos[50]

Isso foi levado a outro patamar por C. Bender e S. Boettcher ao estabelecer que o operador hamiltoniano não precisa ser hermitiano, mas sim, ser invariante por simetria de paridade e reversão temporal. Com efeito, se procedermos com a troca de paridade e

reversão temporal na equação de Schrödinger, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{PT}\hat{H}\Psi(\vec{r},t) &= \mathcal{PT}i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec{r},t)}{\partial t},\\
\mathcal{PT}\hat{H}\left(\mathcal{PT}\right)^{-1}\mathcal{PT}\Psi(\vec{r},t) &= \mathcal{PT}\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right]\left(\mathcal{PT}\right)^{-1}\mathcal{PT}\Psi(\vec{r},t),\\
-\frac{\hbar^2}{2m}\big(-\vec{\nabla}\big)\big(-\vec{\nabla}\big)\Psi^*(-\vec{r},-t)+V(-r)\Psi^*(-\vec{r},-t) &= (-i)\hbar\frac{\partial\Psi^*(-\vec{r},-t)}{\partial(-t)},\\
-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\Psi^*(-\vec{r},-t)+V(r)\Psi^*(-\vec{r},-t) &= i\hbar\frac{\partial\Psi^*(-\vec{r},-t)}{\partial t},\\
\hat{H}\Psi^*(-\vec{r},-t) &= i\hbar\frac{\partial\Psi^*(-\vec{r},-t)}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Na segunda linha, avaliamos o comportamento do operador hamiltoniano frente a uma transformação de paridade e reversão temporal, ao passo que também vimos o efeito de tal operação na função de onda utilizando (3.1) juntamente com a inversão devido ao operador paridade. Avaliar concomitantemente o comportamento temporal do operador e do estado é chamado de representação de Dirac, no entanto, não vamos entrar no mérito das representações das bases no momento, por ora, vamos manter em mente que estamos interessados em saber o comportamento do sistema com respeito às simetrias. Também, implicitamente, assumiu-se que o potencial é invariante por paridade. Isso demonstrou que sistemas quânticos podem ser descritos também estabelecendo-se a simetria obedecida. Outrossim, Bender e Boetther efetivamente demonstraram que osciladores quânticos com termos imaginários lineares possuem espectro real de energia, a menos que haja uma quebra espontânea das simetrias de paridade e reversão temporal[51]. Vários outros trabalhos foram gerados à partir da assumpção da simetria PT[52, 53], em particular, citamos o trabalho de H. Schomerus onde este avalia o processo de espalhamento unidimensional de uma cavidade que obedece a simetria PT por intermédio de um mecanismo de absorção e amplificação do sinal da partícula [54]. Vamos trabalhar o modelo de Schomerus, no entanto, estendendo este para o caso bidimensional com 4 guias.

3.3 A Cavidade HBT-PT.

Para construir uma cavidade com simetria de paridade e reversão temporal, Schomerus analisou o sinal de uma partícula à partir de um mecanismo de secções de bombeamento. Essas secções podem tanto amplificar quanto atenuar o sinal da partícula, quanticamente, isso consiste em criar ou aniquilar partículas. Com essas informações, podemos tratar as secções como pontos de espalhamento quântico, como podemos ver na Figura 3.2.

Figura 3.2: Representação esquemática de uma secção amplificadora-atenuadora.

Assim, secções de amplificação-atenuação podem ser representadas por uma matriz de espalhamento S_0 que conecta as amplitudes de probabilidade da partícula, para o caso de 2 guias ligados à secção, temos a matriz de espalhamento

$$S_0 = \begin{pmatrix} r_0 & t_0 \\ t_0' & r_0' \end{pmatrix},$$
$$S_0 = \begin{pmatrix} 0 & t_0 \\ t_0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

onde fizemos $r_0 = r_0' = 0$ e $t_0 = t_0'$ para representar uma secção que somente amplifica ou atenua o sinal, assim, t_0 deve ser interpretado como o fator de bombeamento da secção. O fator t_0 pode ser compreendido também como uma fonte de quebra de simetria de reversão temporal, uma vez que aquele irá contribuir com uma fase extra na amplitude de espalhamento. veremos adiante que essa fase é o que irá determinar os pontos de ressonância do sistema.

Então, para implementar a simetria PT com a cavidade à partir de secções de bombeamento, é necessário que haja uma relação entre os fatores de bombeamento entre uma secção amplificadora e outra atenuadora, como podemos ver no esquema apresentado na Figura 3.3.

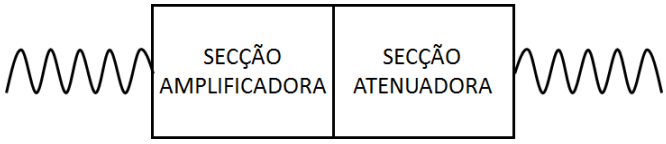


Figura 3.3: Representação esquemática de uma cavidade de bombeamento com simetria PT.

Observamos que o sistema é invariante por simetria de paridade e reversão temporal. O ponto interessante desse sistema é que Schomerus identificou um regime na cavidade em que a emissão de radiação é autossustentável[1]. Esse regime só é possível quando o sistema é encerrado por barreiras de tunelamento, a fim de que haja a chamada retroalimentação do sistema[35], e quando há a quebra da simetria PT. Podemos observar a representação esquemática do sistema e de todas as amplitudes possíveis na Figura 3.4.

[1]tradução livre de "*self-sustained*".

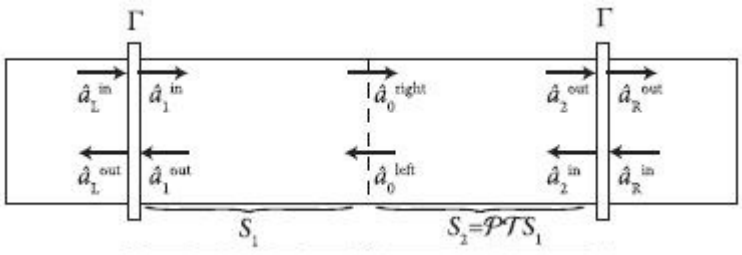


Figura 3.4: Representação esquemática da cavidade com simetria PT encerrada por barreiras de tunelamento: por H. Schomerus [54].

Vemos que as barreiras de tunelamento também contribuem para o processo de espalhamento, ocasionando em amplitudes de transmissão e reflexão, assim, podemos representar a matriz de espalhamento das barreiras como

$$S_\Gamma = -\begin{pmatrix} \sqrt{1-\Gamma} & \imath\sqrt{\Gamma} \\ \imath\sqrt{\Gamma} & \sqrt{1-\Gamma} \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

onde Γ é a probabilidade de transmissão da barreira. Além da retroalimentação, podemos estudar o regime resonante da cavidade tomando $\Gamma \to 0$, o que levará a cavidade só realizar transporte quando a energia do sinal da partícula assumir o valor de uma de suas ressonâncias. Essa técnica é muito útil para estudar propriedades de cavidades fechadas, no nosso caso, as simetrias, o que faremos mais adiante.

Observamos que para representar a cavidade pelo processo de espalhamento, devemos atuar o operador $\mathcal{PT}$ na matriz de espalhamento S_0, análogo a como foi feito em (3.3). O resultado dessa operação é dado por

$$\mathcal{PT}S_0 = \sigma_x S_0^{*-1}\sigma_x, \tag{3.6}$$

onde σ_x é a chamada matriz de Pauli. A demonstração de (3.6) é feita no apêndice D. Aplicando para secções balísticas, tomamos (3.4) em (3.6), vem

$$\mathcal{PT}S_0 = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{t_0^*} \\ \dfrac{1}{t_0^*} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Para que o processo acima seja representado por uma única matriz de espalhamento, é necessário acoplar todos os elementos que ocasionam no espalhamento(barreiras e cavidade) através da técnica que iremos apresentar a seguir para o caso de 4 guias.

Aparentemente, teríamos o aumento do grau de complicação do problema, uma vez que aumentamos em uma dimensão o espalhamento das partículas, entretanto, se encontrarmos a matriz de espalhamento do sistema, podemos utilizar as equações de correlação para imediatamente caracterizar o ruído de disparo e fazer as devidas análises. Para

tanto, devemos tomar um centro espalhador e acoplar o mecanismo de bombeamento e as barreiras para estabelecer a simetria PT e fazer análise das ressonâncias. Esse centro espalhador não deve possuir *backscattering*, para que não interfira na transmissão do sinal. Fortuitamente, já temos um sistema com essa característica que é o aparato HBT, assim, para realizar o mesmo tratamento de Schomerus para 4 guias, tomamos o esquema da Figura 3.5.

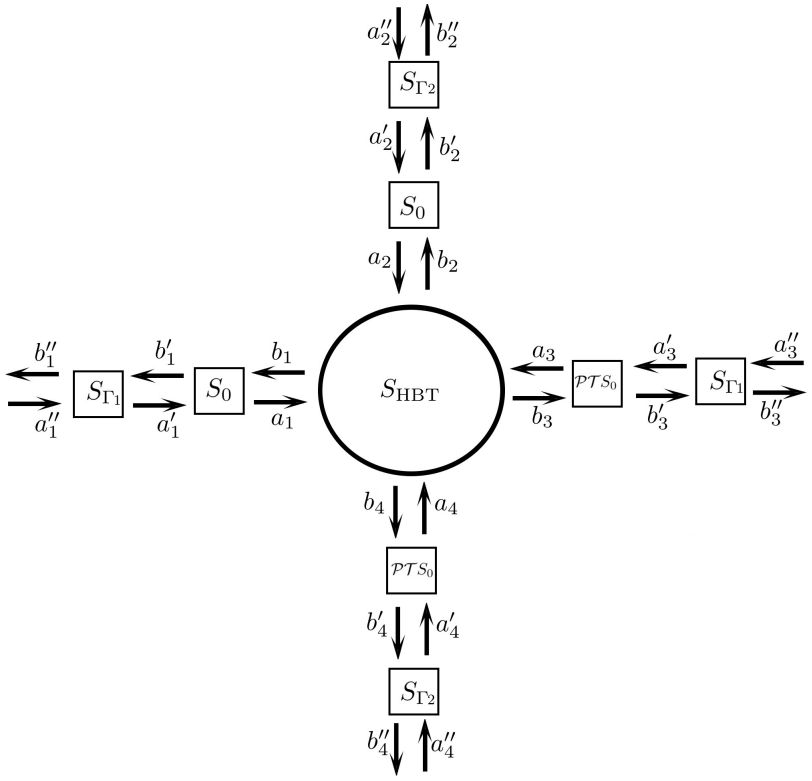


Figura 3.5: Representação esquemática da aparato HBT acoplado a secções de bombeamento e barreiras de tunelamento: por E. Frade Silva, A. L. R. Barbosa, J. G. G. S. Ramos. [42].

Como dissemos acima, o aparato HBT foi escolhido para que não interfira na transmissão do sinal, assim, aplicamos nas entradas de S_{HBT}, definida em (2.62), valores de igual probabilidade de reflexão, r e transmissão, t, do espelho, assim, temos $-r = it = \sqrt{2}/2$. Isso também permite que façamos a troca dos índices dos guias $3 \rightleftharpoons 4$, como veremos a seguir, facilitará para escrever a equação de espalhamento. Assim, podemos escrever todas as equações de espalhamento de cada parte do sistema, respeitando as amplitudes

de entrada e saída para cada componente, a saber

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ i & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

$$\begin{pmatrix} b'_i \\ a_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t_0 \\ t_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_i \\ b_i \end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

$$\begin{pmatrix} b'_{i+2} \\ a_{i+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{t_0^*} \\ \frac{1}{t_0^*} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_{i+2} \\ b_{i+2} \end{pmatrix}, \tag{3.10}$$

$$\begin{pmatrix} b''_j \\ a'_j \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \sqrt{1-\Gamma} & i\sqrt{\Gamma} \\ i\sqrt{\Gamma} & \sqrt{1-\Gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a''_j \\ b'_j \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

onde $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3, 4$. Para expressar o sistema acima somente com uma matriz de espalhamento, devemos eliminar as amplitudes internas, a, b, a', b', e escrever a equação de espalhamento somente com as amplitudes externas. Primeiramente, substituimos a e b de (3.9) e (3.10) em (3.8), o que fará que a equação de espalhamento seja escrita em termos de a' e b', a saber

$$\begin{pmatrix} \frac{b'_1}{t_0} \\ \frac{b'_2}{t_0} \\ t_0^* b'_3 \\ t_0^* b'_4 \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ i & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0 a'_1 \\ t_0 a'_2 \\ \frac{a'_3}{t_0^*} \\ \frac{a'_4}{t_0^*} \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{Diag}\left(\frac{1}{t_0}, \frac{1}{t_0}, t_0^*, t_0^*\right) \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ b'_4 \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ i & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{Diag}\left(t_0, t_0, \frac{1}{t_0^*}, \frac{1}{t_0^*}\right) \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \\ a'_4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ b'_4 \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \mathrm{Diag}\left(t_0, t_0, \frac{1}{t_0^*}, \frac{1}{t_0^*}\right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ i & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{Diag}\left(t_0, t_0, \frac{1}{t_0^*}, \frac{1}{t_0^*}\right) \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \\ a'_4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ b'_4 \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{t_0}{t_0^*} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ i & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \\ a'_4 \end{pmatrix}, \tag{3.12}$$

onde Diag(...) é a notação para a matriz diagonal e o argumento são as respectivas entra-

das. Observamos que o acomplamento da matriz HBT com as secções de bombeamento resultaram em uma matriz ainda balística, isso já era esperado, uma vez que tanto o aparato HBT quanto as secções são balísticas. Outro ponto interessante é que, ainda que tenhamos acoplado as secções de maneira a garantir a simetria PT, a matriz de espalhamento acima possui a mesma estatística dada pelo aparato HBT, (2.63)-(2.65), isso também já era esperado, dado que um sistema com simetria PT, como o visto na Figura 3.3, não altera o sinal da partícula, e mostra também que a disposição das secções está absolutamente simétrica. É importante notar também que a matriz de espalhamento acima não é hermitiana, isso se deve à inserção do sistema de bombeamento, no entanto, como dissemos anteriormente, a estatística desse sistema ainda informa valores reais, o que está de acordo com o formalismo de Bender-Boettcher.

Agora, acoplando as barreiras, fazemos o mesmo procedimento de substituir as amplitudes a' b' de (3.11) em (3.12), e com um pouco de álgebra, temos a equação de espalhamento do sistema escrita em termos das amplitudes mais externas, a'' e b'', cuja matriz de espalhamento total é dada por

$$S_{\mathrm{T}} = -\frac{1}{(1-\Gamma)\left(\frac{t_0}{t_0^*}\right)^2 - 1}\begin{pmatrix} s & 0 & s' & -is' \\ 0 & s & -is' & s' \\ s' & is' & s & 0 \\ is' & s' & 0 & s \end{pmatrix}, \tag{3.13}$$

onde definimos as entradas

$$s = \sqrt{1-\Gamma}\left[\left(\frac{t_0}{t_0^*}\right)^2 - 1\right], \tag{3.14}$$

$$s' = -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{t_0}{t_0^*}\Gamma. \tag{3.15}$$

A demonstração da matriz de espalhamento é feita no apêndice E. Como a matriz acima tanto faz a descrição do aparato HBT, quanto estende o sistema PT de Schomerus, chamamos o sistema acima de HBT-PT.

Observamos que o acoplamento das barreiras ocasionou em termos de reflexão, representado na diagonal principal da matriz de espalhamento. Tomando $\Gamma \to 0$, isso caracterizará um sistema fechado, temos que somente os termos da diagonal não se anulam, o que informa a descrição correta do sistema: se a probabilidade de transmissão é muito pequena, o sistema só possuirá amplitudes de reflexão. Podemos ver isso de forma mais clara se aplicarmos as entradas da matriz S_T nas equações de correlação (2.38) e (2.48). Para tanto, injetamos duas partículas pelos terminais 1 e 2, as possíveis configurações

serão dadas por

$$\langle(\Delta n_1)^2\rangle = \langle(\Delta n_2)^2\rangle = 0, \tag{3.16}$$

$$\langle(\Delta n_3)^2\rangle = \langle(\Delta n_4)^2\rangle = \frac{1}{4}\frac{\Gamma^4}{\left|(1-\Gamma)\left(\frac{t_0}{t_0^*}\right)^2 - 1\right|^4}(1-\epsilon|I|^2), \tag{3.17}$$

$$\langle\Delta n_1\Delta n_2\rangle = (1-\Gamma)^2\frac{\left|\left(\frac{t_0}{t_0^*}\right)^2 - 1\right|^4}{\left|(1-\Gamma)\left(\frac{t_0}{t_0^*}\right)^2 - 1\right|^4}, \tag{3.18}$$

$$\langle\Delta n_1\Delta n_3\rangle = \langle\Delta n_2\Delta n_4\rangle = \langle\Delta n_1\Delta n_4\rangle = \langle\Delta n_2\Delta n_3\rangle = \frac{1}{2}\Gamma^2(1-\Gamma)\frac{\left|\left(\frac{t_0}{t_0^*}\right)^2 - 1\right|^2}{\left|(1-\Gamma)\left(\frac{t_0}{t_0^*}\right)^2 - 1\right|^4}, \tag{3.19}$$

$$\langle\Delta n_3\Delta n_4\rangle = \frac{1}{2}\frac{\Gamma^4}{\left|(1-\Gamma)\left(\frac{t_0}{t_0^*}\right)^2 - 1\right|^4}(1+\epsilon|I|^2). \tag{3.20}$$

As equações acima representam a estatística do aparato HBT-PT, por intermédio do ruído de disparo. Com estas, é possível fazer análise tanto teórica quanto experimental do sistema acima.

Novamente, se aplicamos $\Gamma \to 0$, temos que a estatística se reduz à $\langle\Delta n_1\Delta n_2\rangle = 1$, o que representa as partículas refletidas pelos mesmos guias em que foram injetadas. Entretanto, se implementarmos a condição $\mathrm{Im}\,(t_0^2) = 0$ para o parâmetro de bombeamento, reobtemos a estatística HBT, (2.63)-(2.65), independentemente do valor da barreira. A independência do transporte das partículas em relação às barreiras deve ser entendida como a condição de ressonância do sistema. Também, pode ser interpretada como o regime em que há a quebra de simetria PT, uma vez que o transporte da partícula independente do valor da barreira de tunelamento indica que as partículas atingiram uma ressonância do sistema ou, em termos matemáticos, um pólo da matriz de espalhamento, tal condição só é possível quando as simetrias do sistema são quebradas[55]. Também nos mostra relação íntima da barreira para com as simetrias internas do sistema, esse fato é útil, por exemplo, para criar modelos com simetria PT de sistemas que possuem barreira de tunelamento, como o diodo[56, 57]. De fato, já existem formulações e simulações que analisam a quebra de simetria para sistemas de bombeamento análogos a HBT-PT[58, 59].

Podemos sumariar todas as assumpções acima tomando as correlações abaixo

$$(\Delta n_3)^2 = (\Delta n_4)^2 = \begin{cases} \dfrac{1-\epsilon|\mathrm{I}|^2}{4}, \text{se } \mathrm{Im}(t_0) = 0 \\ 0, \text{ se } \mathrm{Im}(t_0) \neq 0 \end{cases}, \tag{3.21}$$

$$\langle n_3 n_4 \rangle = \begin{cases} \dfrac{1+\epsilon|\mathrm{I}|^2}{2}, \text{ se } \mathrm{Im}(t_0) = 0 \\ 0, \text{ se } \mathrm{Im}(t_0) \neq 0 \end{cases}, \tag{3.22}$$

$$\langle n_1 n_2 \rangle = \begin{cases} 0, \text{ se } \mathrm{Im}(t_0) = 0 \\ 1, \text{ se } \mathrm{Im}(t_0) \neq 0 \end{cases}, \tag{3.23}$$

É importante comentar que o resultado acima rendeu uma publicação em [42] e está presente no apêndice G.

Para finalizar esta secção, podemos elaborar um *toy model* de transporte quântico muito interessante. Unindo os guias 3 e 4 em um único guia, podemos evitar o problema da superposição dos estados para o caso de transporte de elétrons aplicando um campo magnético na região intermediária, como vemos na Figura 3.6.

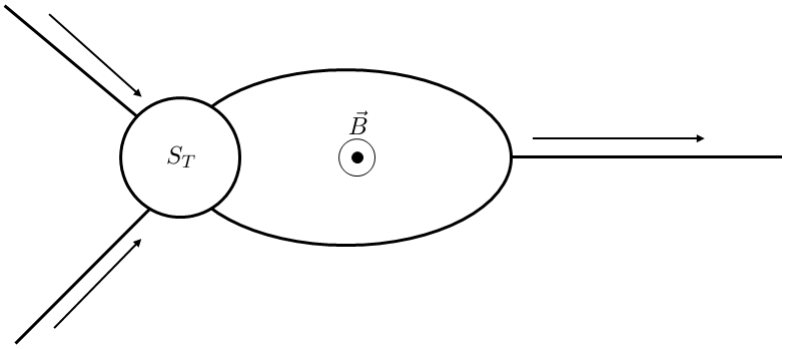


Figura 3.6: Representação esquemática do *toy model* utilizando o aparato HBT-PT .

Tomando mais uma vez o regime de sistema fechado, temos que a estatística do sistema acima será dada por (3.21)-(3.23). Uma vez que temos o controle experimental do fator de bombeamento, a construção acima permite que tenhamos o controle do transporte das partículas pelo sistema, o que ocasiona no modelamento de um sistema para estatística de contagem[60].

É muito interessante o efeito do acoplamento da simetria PT em um sistema de transporte quântico, são muitas as aplicações que podem resultar desse acoplamento. É possível descrever mais sistemas se aplicarmos mais simetrias no sistema de transporte, em particular, uma estrutura muito interessante e descoberta recentemente, o grafeno. Para tanto, vamos iniciar o estudo da chamada simetria quiral.

3.4 Quiralidade: grafeno.

A simetria da quiralidade foi primeiramente introduzida por L. Pasteur, onde este descobriu que os detritos que se depositavam no fundo dos barris de vinho devido ao processo de fermentação nem sempre possuiam a mesma propriedade ótica: uma parte desses detritos já era o conhecido ácido tartárico. Este possui a propriedade ótica de desviar a luz polarizada para a direita, na química isso é chamado de propriedade dextrógira. A outra parte dos detritos, chamada de mistura racêmica, não apresentavam essa propriedade, *i.e.*, eram oticamente inativos. Pasteur investigou esse fato tomando a mistura racêmica e separando manualmente a porção que desviava a luz para a direita, *i.e.*, o próprio ácido tartárico. Assim, isolando a parte restante da mistura racêmica, Pasteur observou que esta desviava a luz para a esquerda, caracterizando assim, uma substância levógira, o qual ele denominou de ácido racêmico.

O mais interessante é que o ácido tartárico e o racêmico compartilham de absolutamente todas as propriedades físicas(ponto de ebulição, fusão etc.), o que diferia era somente a atividade ótica. Assim, Pasteur estabeleceu que o ácido tartárico e racêmico possuem a mesma constituição atômica, com o arranjo espacial simetricamente especular, como vemos na Figura 3.7.

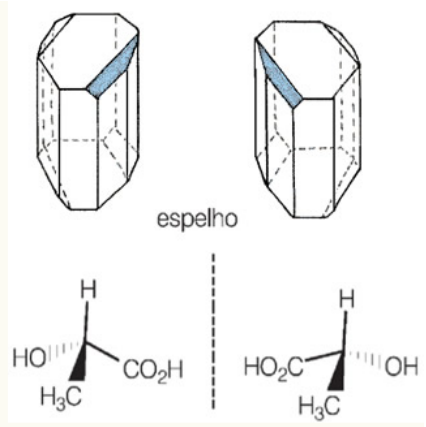


Figura 3.7: Ácido tartárico e ácido racêmico, respectivamente.*https://alunosonline.uol.com.br/quimica/historia -isomeria-optica.html*

Observamos que o ácido tartárico e o racêmico não são sobreponíveis, *i.e.*, se colocarmos um composto sobre o outro, veremos que os átomos não vão assumir as posições dos seus correspondentes, assim como nossas mãos: colocando uma em cima da outra, vemos que os dedos não correspondem. Isso só acontece quando juntamos as palmas, que é justamente a simetria especular. Por essa razão, dizemos que a simetria acima é chamada de quiral, do latim, *khéir*, que significa "mão". Para bósons, quiralidade também é chamada de helicidade.

Formalmente, dizemos que um determinado sistema possui simetria quiral, ou é dotado de quiralidade, quando representamos o sistema especularmente e não obtemos a mesma

configuração. Como vimos com o exemplo acima, algumas estruturas moleculares possuem quiralidade, isso pode influenciar na reação do composto em um dado experimento. Em física, a presença da quiralidade ocasiona em graus de liberdade internos do sistema.

Para verificar a última alegação, consideremos uma partícula. A princípio, esta não teria quiralidade, uma vez que partículas deve ser indistinguíveis, assim, sua imagem seria igual. Mas, como vimos no exemplo do ácido tartárico: bósons(no exemplo, a luz) possuem um grau de liberdade interno, uma vez que ao interagir com o composto, este polarizou para a esquerda ou direita. Quando o ácido tartárico estava misturado com o ácido racêmico, haviam bósons tanto polarizado para a esquerda quanto para a direita, como se trata de uma quantidade física de valores opostos, isso acarretará no cancelamento da polarização, que resultou no anulamento da atividade ótica.

Para férmions, já citamos na introdução o experimento Stern-Gerlach, que se trata do bombardeamento de átomos de prata em um campo magnético não-uniforme(Figura 3.8). Como os átomos de prata são íons positivos de carga +1, por conservação de momento angular, este deve ter a rotação intrínseca oposta do elétron liberado para a formação do íons. Assim, ao interagir com o campo magnético, analogamente a luz para os ácidos tartárico e racêmico, os átomos de prata alinhavam-se paralela ou antiparalelamente àquele, assim, quando projetamos esses átomos de prata em uma tela, a quiralidade irá expressar-se através de um buraco no centro da mancha formada devido ao feixe de átomos, como vemos na Figura 3.9.

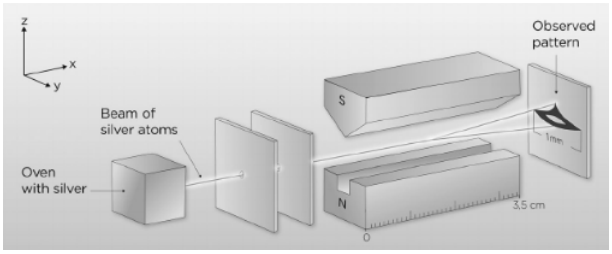


Figura 3.8: Aparato Stern-Gerlach: por H. Wennerström, P. Westlund. [62]

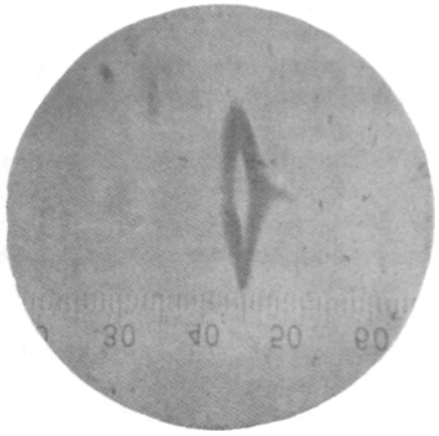


Figura 3.9: Resultado do experimento de Stern-Gerlach: por W. Gerlach, O. Stern. [63].

Assim, já que o átomo de prata adquiriu um momento angular não-nulo devido à ionização de um elétron, concluimos que o elétron possui quiralidade, o qual já dissemos se tratar do spin. Isso traz consequências interessantes, pois é um grau de liberdade extra que caracteriza o estado do elétron, assim, cada orbital eletrônico pode comportar 2 elétrons, devido à presença do spin. Como no caso bosônico, também chama-se a

quiralidade de helicidade, no entanto, esta última é definida como a projeção do spin na direção do momento linear do férmion em questão.

A quiralidade, pois, é um fato. No entanto, se endereçarmos um tratamento quantitativo para um sistema quântico através da equação de Schrödinger, a quiralidade não se expressa naturalmente, assim, é necessário estabelecer aquela de maneira *ad hoc* na solução, como é o caso do átomo de hidrogênio[64]. Por outro lado, se tomarmos o tratamento relativístico(*e.g.* equação de Dirac e Klein-Gordon), a quiralidade da partícula se expressa naturalmente, como também o aparecimento de sua antipartícula[65], em particular, uma estrutura muito interessante para analisar essas características é o grafeno.

Descoberto em 2004 por C. Novoselov e A. Geim[66], o grafeno consiste em uma rede cristalina bidimensional em forma de favo de mel com carbonos dispostos em cada vértice, em outras palavras, o grafeno consiste em uma estrutura cristalina da espessura atômica(Figura 3.10).

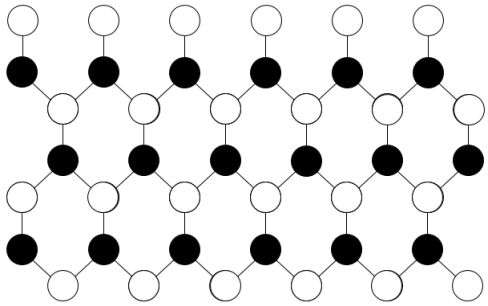


Figura 3.10: Modelo de um grafeno: por E. Frade Silva *et al.* [67]

Essa disposição confere ao grafeno propriedades muito interessantes, uma vez que dada a sua bidimensionalidade, é possível construir outros sistemas tridimensionais, como por exemplo, se for introduzido disposições pentagonais nas ligações da rede do carbono, pode-se formar o fulereno, muito utilizado na síntese de compostos químicos. Se contorcermos o grafeno de maneira a obter-se a forma geométrica de um cilindro, temos o nanotubo de carbono, muito utilizado na nanotecnologia pelas suas proriedades de condução térmica, elétrica e mecânica. Também, se empilharmos o grafeno em várias camadas, temos o grafite(Figura 3.11). Com efeito, o grafeno foi descoberto à partir de detritos de experimentos de grafite.

As características de transporte do grafeno são igualmente interessantes, uma vez que o elétron é transportado pelo grafeno à velocidades da ordem da velocidade da luz[69], isso se deve principalmente aos elétrons do orbital não ligado à rede, uma vez que o carbono possui 4 ligações. Para analisar o transporte, é necessário estudar as propriedades de *bulk* do grafeno, assim, deve-se endereçar um tratamento de teoria de bandas para entender o comportamento dos portadores no grafeno, para tanto é necessário estabelecer os vetores que definem a rede de Bravais do grafeno, isso é feito considerando uma superposição de 2 camadas triangulares[70], como já contemplado na Figura 3.10. Assim, toma-se

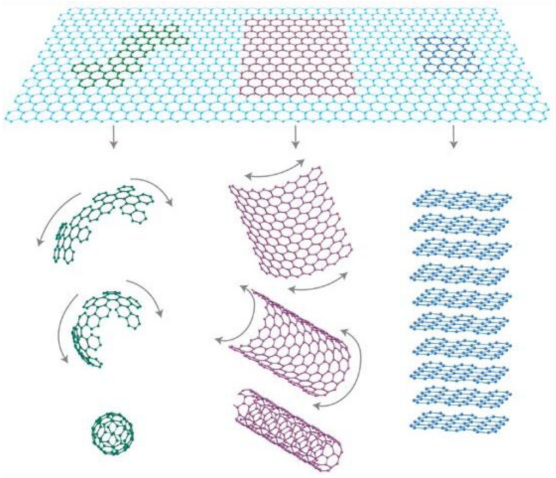


Figura 3.11: Fulereno, nanotubo de carbono e grafite à partir de uma folha de grafeno: por A. Geim, K. Novoselov. [68]

a chamada aproximação *tight-binding*, onde se considera somente as interações com os vizinhos mais próximos. Utilizando o chamado *hopping model*, onde estabelece-se que a dinâmica do elétron na rede é regida por operadores de criação e aniquilação que atuam nos vizinhos mais próximos ao longo da rede, a saber

$$\hat{H} = -t \sum_{\langle ij \rangle;\sigma} \hat{a}^{\dagger}_{i\sigma} \hat{b}_{j\sigma} + \hat{b}^{\dagger}_{i\sigma} \hat{a}_{j\sigma}, \tag{3.24}$$

onde $\hat{a}$ e $\hat{b}$ são operadores das subredes e σ a direção do spin e t é o chamado parâmetro de *hopping*. A notação $\langle\rangle$ indica que a soma é feita somente para vizinhos próximos. Com efeito, o modelo acima contempla o transporte do elétron ao longo de cada átomo de carbono da rede. Realizando o devido tratamento algébrico feito na referência [70], obtém-se a chamada banda de energia do grafeno, como vemos na Figura 3.12.

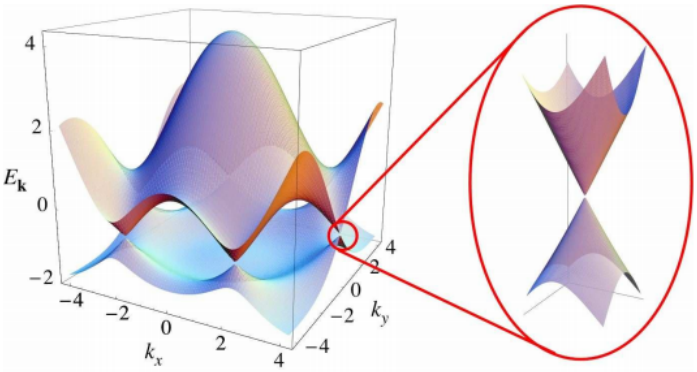


Figura 3.12: Banda de energia do grafeno, acentuando o ponto de Dirac: por A. H. Castro Neto *et al.* [71]

Podemos ver também na Figura 3.12 os chamados pontos de Dirac, os pontos onde as

bandas positivas e negativas se encontram. São assim chamados pois possuem a mesma relação de dispersão da luz no vácuo, o que já era esperado, pois, como dito, os elétrons movem-se relativisticamente no grafeno. É interessante notar também que para energias abaixo desse ponto, temos a predominância de buracos no transporte, acima, a de elétrons.

Outrossim, podemos visualizar o ponto de Dirac à luz da simetria de quiralidade, como é fácil perceber na Figura 3.12, a banda acima nada mais é que a imagem especular da banda debaixo, como estas não se sobrepõe, temos a presença de quiralidade. Na prática, a quiralidade se expressa no grafeno pela presença dos pares elétron-buraco no transporte, como é possível ver no operador hamiltoniano (3.24): quando um elétron é criado na subrede A, um buraco é criado na subrede B, e vice-versa. Portanto, devemos estabelecer uma forma de expressar a simetria de quiralidade explicitamente à partir do Hamiltoniano, para tanto, devemos observar que os estados quirais devem ser resultados da operação de um operador relacionado à quiralidade, $\hat{C}$, resultando em energias negativas, isso é traduzido algebricamente por[72]

$$\hat{C}\hat{H}\hat{C} = -\hat{H}. \tag{3.25}$$

Observamos que a equação acima traz uma degenerescência na energia, dado que na realidade não existe energias negativas.

Uma das formas da identidade (3.25) ser satisfeita é tomar o Hamiltoniano anti-diagonal, isso representa um sistema descrito por contínuas transições para diferentes estados, o que precisamente descreve o grafeno; dada a discussão acima. Sob a condição de um hamiltoniano anti-diagonal, o operador quiralidade assume a forma

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_N & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_N \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

Outra maneira de visualizar o operador quiralidade é como reflexão com relação ao eixo z, assim, podemos expressar o operador $\hat{C}$ em termos da matriz de Pauli σ_z, que é a representação (3.26) com ordem estendida.

Podemos expressar a condição de quiralidade em termos da matriz de espalhamento, no entanto, para tanto é necessário apontar uma sutileza. Tomando um processo de espalhamento, representamos o mesmo processo pela sua imagem especular, como vemos na Figura 3.13

Observamos que em um procesos de espalhamento, devemos levar em consideração o sentido do guia de onda, como já vimos na análise de Fourier, para que se inverta o sentido, é necessário tomar o complexo conjugado da função, para matrizes, temos o composto conjugado, assim, a condição de quiralidade para espalhamento é dada por

$$S = \hat{C}S^{\dagger}\hat{C}. \tag{3.27}$$

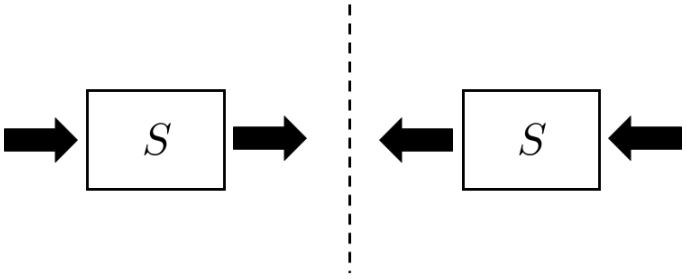


Figura 3.13: Um processo de espalhamento sob o efeito da operação de quiralidade.

Notamos que não há o sinal negativo de (3.25), pois esse sinal contempla as energias negativas referentes à antipartícula e, como vimos na Figura 3.13 e na análise de Fourier, mudar o sinal da energia ocasiona na inversão do sentido do guia de onda. Novamente, para que o operador quiralidade $\hat{C}$ assuma a forma (3.26), é necessário que S só possua sua diagonal principal não-nula, como já vimos, isso se trata de um espalhamento balístico, o que é precisamente o espalhamento dado pelo grafeno quando a energia de Fermi do sistema, a maior energia possível de ocupação dos portadores, estiver centrada no ponto de Dirac. Assim, para modelar o transporte do grafeno em termos de matriz de espalhamento, esta deve ser balística e possuir simetria de quiralidade. Fortuitamente, já conhecemos uma matriz de espalhamento balística, que é o próprio aparato HBT, (2.62), no entanto, devemos ajustá-la de modo a obedecer a condição de quiralidade (3.27), para tanto, introduzimos uma fase na matriz de espalhamento, a saber

$$S_{\text{gra}} = e^{i\varphi} \begin{pmatrix} 0 & 0 & r^* & t^* \\ 0 & 0 & t^* & r^* \\ r & t & 0 & 0 \\ t & r & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.28}$$

onde a fase φ varia de 0 a $\pi/2$. De fato , aplicando a matriz S_{gra} em (3.27), observa-se imediatamente que não é recuperada a forma original da matriz de espalhamento, a menos que $\varphi = \pi/2$, portanto, a fase acrescentada é responsável em avaliar o grau de quiralidade do sistema, considerando o caso do grafeno, isso indica o quão longe do ponto de Dirac a energia de Fermi está, como também indica o grau de impureza do sistema. Caso o portador seja bósons, φ avalia a chamada Quiralidade Ótica[73].

Outrossim, é importante notar que a inserção da fase φ não irá modificar a estatística do grafeno com relação ao aparato HBT, assim, para explorar o efeito da quiralidade, devemos adotar o mesmo procedimento anterior de acoplar barreiras no sistema para analisar o caso ressonante, adicionando também o sistema de bombeamento para avaliar conjuntamente as simetrias de paridade e reversão temporal, como vemos na Figura 3.14.

O acoplamento poderia ser feito sem o uso do mecanismo de bombeamento, no entanto, introduzindo a simetria PT, isso possibilitará o efeito de várias simetrias no transporte,

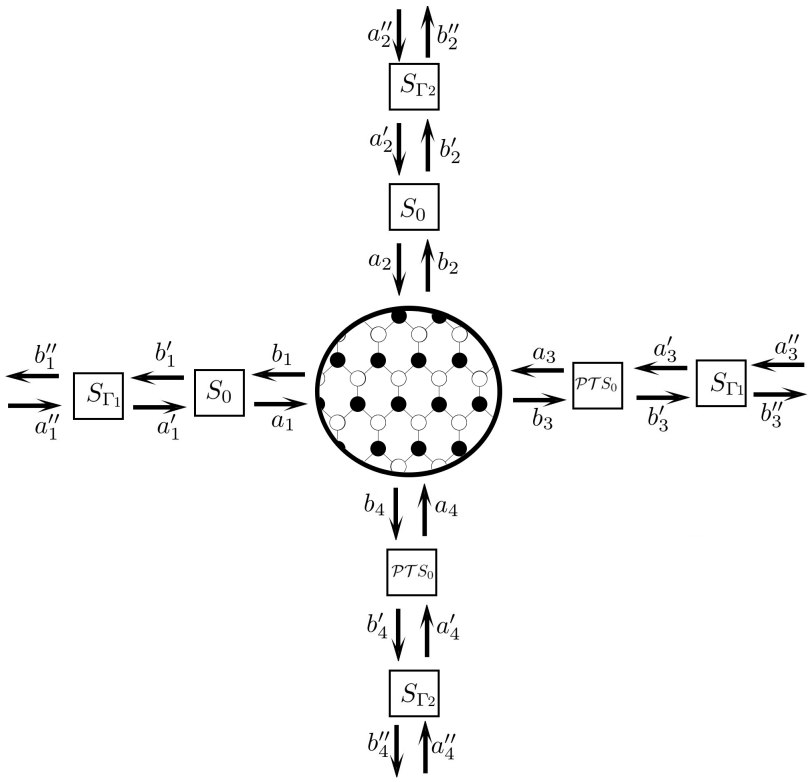


Figura 3.14: Grafeno acoplado à barreiras e um sistema de bombeamento: por E. Frade Silva *et al.* [67]..

no caso específico do grafeno, a operação da quiralidade na hamiltoniana do sistema descreverá uma antipartícula, assim, a quiralidade resulta na conjugação de carga do portador, portanto, o sistema da Figura 3.14 possuirá as simetrias de paridade, reversão temporal e, indiretamente, conjugação de carga, com efeito, podemos avaliar o efeito do acoplamento das simetrias acima por intermédio da estatística do transporte do sistema. Assim, procedendo absolutamente com a mesma técnica para derivar (3.13), temos a matriz de espalhamento do sistema

$$\mathbf{S}_{\mathrm{T}} = \frac{1}{1 - e^{2i(\varphi+2\theta)}(1-\Gamma)} \begin{pmatrix} \mathbf{s} & 0 & \mathbf{s}' & -i\mathbf{s}' \\ 0 & \mathbf{s} & -i\mathbf{s}' & \mathbf{s}' \\ \mathbf{s}' & i\mathbf{s}' & \mathbf{s} & 0 \\ i\mathbf{s}' & \mathbf{s}' & 0 & \mathbf{s} \end{pmatrix}, \tag{3.29}$$

onde tomamos os fatores de bombeamento na forma exponencial, $t_0 = |t_0|e^{i\theta}$, e definimos as entradas da matriz (3.29) como

$$\mathbf{s} = \sqrt{1-\Gamma}\left[e^{2i(\varphi+2\theta)} - 1\right], \tag{3.30}$$

$$\mathbf{s}' = e^{i(\varphi+2\theta)}\Gamma. \tag{3.31}$$

É importante notar que tomando o caso $\varphi = 0$, retomamos a matriz de espalhamento

que descreve o caso HBT-PT. Também, devemos apontar que ainda que $\varphi = \pi/2$, a matriz de espalhamento $\mathbf{S}_{\mathrm{T}}$ não possuirá simetria quiral, a menos que o sistema esteja em regime ressonante, como verificaremos quando analisarmos a estatística do sistema. Com efeito, de posse da matriz de espalhamento, é imediato calcularmos a estatística devido a esse sistema por intermédio das equações de correlação (2.38) e (2.48). Considerando as partículas incidente nos guias 1 e 2, e com um pouco de álgebra, temos que

$$\langle(\Delta n_1)^2\rangle = \langle(\Delta n_2)^2\rangle = 0, \tag{3.32}$$

$$\langle(\Delta n_3)^2\rangle = \langle(\Delta n_4)^2\rangle = \frac{1}{4}\frac{\Gamma^4}{\Big[1+(1-\Gamma)^2-2(1-\Gamma)\cos(\varphi+2\theta)\Big]^2}(1-\epsilon|I|^2), \tag{3.33}$$

$$\langle\Delta n_1\Delta n_2\rangle = \frac{4(1-\Gamma)^2\Big[1-\cos(\varphi+2\theta)\Big]^2}{\Big[1+(1-\Gamma)^2-2(1-\Gamma)\cos(\varphi+2\theta)\Big]^2}, \tag{3.34}$$

$$\langle\Delta n_1\Delta n_3\rangle = \langle\Delta n_2\Delta n_4\rangle = \langle\Delta n_1\Delta n_4\rangle = \langle\Delta n_2\Delta n_3\rangle = \frac{2\Gamma^2(1-\Gamma)\Big[1-\cos(\varphi+2\theta)\Big]^2}{\Big[1+(1-\Gamma)^2-2(1-\Gamma)\cos(\varphi+2\theta)\Big]^2}, \tag{3.35}$$

$$\langle\Delta n_3\Delta n_4\rangle = \frac{1}{2}\frac{\Gamma^4}{\Big[1+(1-\Gamma)^2-2(1-\Gamma)\cos(\varphi+2\theta)\Big]^2}(1+\epsilon|I|^2). \tag{3.36}$$

Aqui, podemos fazer algumas inferências interessantes a respeito das equações de correlação do sistema acima. As equações (3.33) e (3.36) denotam o transporte completo das partículas pelo sistema, enquanto (3.34) representa a reflexão de ambas as partículas, *backscattering* total. Como dissemos anteriormente, a quiralidade vai depender do grau de impureza no sistema, ou dopagem, então, podemos avaliar o efeito desses últimos no transporte tomando o que chamamos de condição forte para paridade e reversão temporal, $\theta = \pi k$ (k inteiro), tal condição consiste na independência da simetria PT com respeito à φ. Assim, expandindo (3.33), (3.36) e (3.34) para φ muito pequeno, o que indica dopar levemente o sistema, temos

$$\langle(\Delta n_{tr})^2\rangle = f_\epsilon(I)\left[1+2\frac{1-\Gamma}{\Gamma^2}\varphi^2\right], \tag{3.37}$$

$$\langle(\Delta n_{bs})^2\rangle \sim \varphi^4, \tag{3.38}$$

onde $\langle(\Delta n_{tr})^2\rangle$ denota a correlação para o transporte das 2 partículas e $\langle(\Delta n_{bs})^2\rangle$, a correlação de *backscattering* e $f_\epsilon(I)$, uma função do *overlap*. A expressão acima possui um resultado importante: quando se toma o regime de sistema fechado, $\Gamma \to 0$, os termos de correções devido à dopagem tomam proporções que passam a influenciar bastante na estatística do sistema, o que indica que efeitos de borda do sistema(barreiras) são de extrema importância para o transporte quântico dopados ou quirais. O estudo da

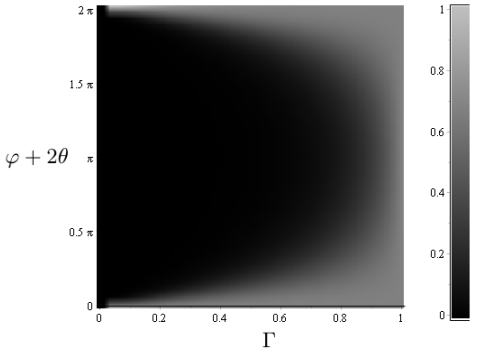
dopagem poderia ser feita também para o grafeno, bastando realizar tal expansão em torno de $\varphi = \pi/2$.

Outra característica importante das equações de correlação do sistema acima é como identificar as ressonâncias por intermédio das simetrias, isso é feito, novamente, tomando o regime de sistema fechado. Vimos que para identificar o regime ressonante, como vimos no caso HBT-PT, deve-se obter a própria estatística HBT. Então, analisando as correlações (3.33)-(3.36), a estatística HBT é reobtida tomando $\cos(\varphi + 2\theta) = 1$, *i.e.*,

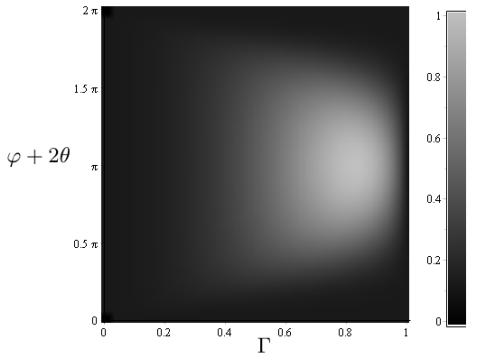
$$\varphi + 2\theta = 2\pi k, \tag{3.39}$$

onde k é um número inteiro. Aqui, vemos explicitamente como o grau de pureza do sistema se relaciona com a simetria PT, essa condição permite encontrar todas as ressonâncias do sistema e nos mostra patentemente o quão a inserção das simetrias no sistema influencia no transporte. Esse fato torna possível elaborar outras propostas de sistemas com outras simetrias que estão contidas nas chamadas classes de Cartan[74] e encontrar as respectivas ressonâncias por um procedimento análogo ao realizado aqui.

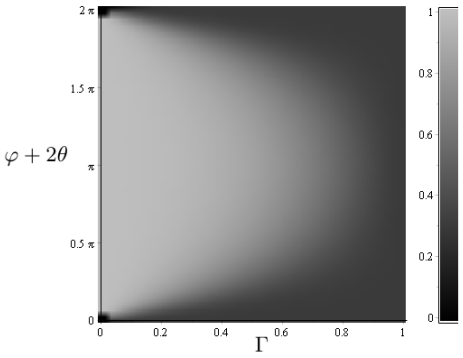
De maneira geral, é possível obter todas as situações físicas possíveis analisando a relação entre $\varphi + 2\theta$ e Γ plotando o gráfico do comportamento das funções de correlação (3.33)-(3.36) em termos dessas variáveis, conforme observado na Figura 3.15.



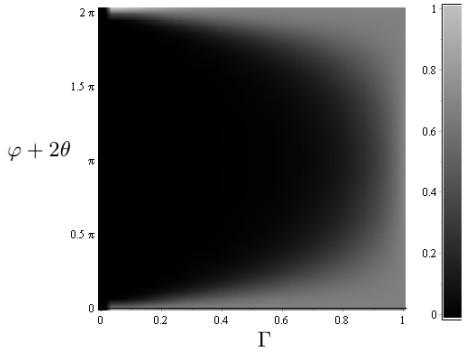
$[(\Delta n_1)^2 = (\Delta n_2)^2$ para férmions e $\langle \Delta n_3 \Delta n_4 \rangle$ para bósons.]



$[\langle \Delta n_{[1,2]} \Delta n_{[3,4]} \rangle$.]



$[\langle \Delta n_1 \Delta n_2 \rangle$.]



$[\langle \Delta n_3 \Delta n_4 \rangle$ para férmions e $(\Delta n_1)^2 = (\Delta n_2)^2$ para bósons.]

Figura 3.15: As funções de correlação (3.33)-(3.36): por E. Frade Silva *et al.* [67].

É interessante notar na Figura 3.15 que as correlações que contemplam apenas o transporte de um dos portadores e a reflexão de outro, ($\langle \Delta n_{[1,2]} \Delta n_{[3,4]} \rangle$), possui uma forte dependência do sistema com Γ na região intermediária de 0 a 2π. Esse fato será utilizado para estudar a criação do par elétron-buraco e o grau de emaranhamento existente entre estes. Nos outros casos, a transição de 0 a 1 nos valores das correlações é mais abrupto.

Por fim, podemos encontrar todas as ressonâncias do sistema cuja estrutura central é o grafeno, apenas ajustando devidamente o sistema de bombeamento, fazendo $\varphi = \pi/2$, temos as condições de ressonância

$$\theta_{\text{gra}} = \pi k - \frac{\pi}{4}. \tag{3.40}$$

Dessa forma, pode-se explorar melhor as propriedades de transporte do grafeno indiretamente pelo acoplamento do sistema de bombeamento. É interessante notar que essa condição também indica quando o sistema em questão quebra a simetria PT, uma vez que se trata da condição de ressonância.

Novamente, apontamos que esse trabalho rendeu outra publicação, observada na referência [67] e no apêndice H.

Observamos também que o sistema trabalhado acima obedece o teorema CPT, devido a O. Greenberg, onde este afirma que a quebra das simetrias de conjugação de carga, paridade e reversão temporal ocasionam na quebra da invariância de Lorentz[75], uma vez que o sistema só possui simetria de conjugação de carga para um valor específico de φ, uma vez que este contempla o grau de quiralidade do sistema. Além disso, é possível haver invariância de Lorentz ainda que tais simetrias sejam violadas, por intermédio de campos não-locais[76], o que nos remete a explorar o regime de emaranhamento do sistema construído acima, o que faremos no próximo capítulo.

Neste capítulo trabalhamos a importância das simetrias no transporte do sistema, apontando que não é necessário a condição de operadores da mecânica quântica serem Hermitianos para obter-se possíveis resultados experimentais. Trabalhamos as simetrias de paridade, reversão temporal e quiralidade. Também, como foi dito anteriormente, é possível estender ainda mais a discussão do efeito das simetrias na estatística do sistema, apenas encontrando a matriz de espalhamento que obedece as devidas condições, no entanto, para fazer tal procedimento, necessitaria abordar outros aspectos físicos presentes no sistema.

Capítulo 4

Informação Quântica: quantificando o emaranhamento.

A tecnologia e a ciência coexistem de forma simbiótica: a medida que uma evolui, a outra se desenvolve igualmente, por exemplo há pouco mais de 300 anos, apenas 20 elementos da tabela periódica eram conhecidos, após a concepção das leis de Newton, a velocidade de descobertas de novos elementos teve um crescimento exponencial até, finalmente, a tabela ser completada[77]. Esse exemplo nos serve para motivar o início do estudo da informação quântica e sua aplicação no transporte quântico. De fato, o advento da informação quântica só foi possível pelo estudo da teoria das comunicações, dado que a era dos computadores começara.

Neste capítulo, iremos desenvolver as noções de informação quântica e emaranhamento partindo da famosa objeção à formulação da mecânica quântica, o que ocasionou no paradoxo EPR, desigualdade de Bell e CHSH. A seguir, analisaremos o emaranhamento entre um elétron e um buraco, este último criado devido à reflexão de um elétron por um ponto quântico. Por fim, veremos como avaliar o emaranhamento devido a um par elétron-buraco, transportados por um sistema qualquer, utilizando as equações de correlação. Assim, vamos dar início a tal estudo explorando diretamente os postulados da mecânica quântica.

4.1 Paradoxo EPR, Desigualdade de Bell e Emaranhamento.

4.1.1 Postulados da Mecânica Quântica.

Iniciaremos a discussão que levou ao que conhecemos hoje como emaranhamento, elencando os pontos mais importantes para compreender o seu significado físico. A ideia do emaranhamento surgiu a fim de resolver o problema encontrado nas bases teóricas da

mecânica quântica apontado pelo chamado paradóxo EPR(Einstein, Podolsky e Rosen)[78], dessa forma, é natural que estabeleçamos os postulados da mecânica quântica para que possamos explorar exatamente os pontos levantados em [78], como prometido na Introdução. Esses postulados já foram utilizados e discutidos implicitamente ao longo do texto até aqui, por isso, ateremo-nos a somente os postulados necessários para explorar o problema em questão.

Na abordagem heurística da mecânica quântica, estabelece-se 4 postulados para o tratamento de um sistema quântico, a saber

Postulado 1. *O estado da partícula é descrito por um vetor, representado por* $|\psi\rangle$*, em um espaço de Hilbert.*

O primeiro postulado estabelece que o espaço matemático da mecânica quântica é o chamado espaço de Hilbert, cuja maior característica é ser um espaço infinito e complexo. Já discutimos em maiores detalhes esse postulado na Introdução, podemos passar adiante. Tomando agora o segundo postulado.

Postulado 2. *Toda quantidade física mensurável A é descrita por um operador hermitiano* $\hat{A}$ *atuando no espaço de Hilbert.*

Esse postulado é necessário para podermos encontrar a base em que vamos expandir o estado $|\psi\rangle$, assumindo que o autoestado de $\hat{A}$ seja $|a\rangle$, temos, então $\hat{A}\,|a\rangle = a\,|a\rangle$ e utilizamos as propriedades de uma base completa para expressarmos $|\psi\rangle$.

Existe algo mais sutil no postulado acima com relação à discussão ontológica da mecânica quântica: é esse que define a chamada realidade do mensurável $\hat{A}$, *i.e.*, existe um correspondente físico real para cada autovalor a gerado pela equação secular $\hat{A}\,|a\rangle = a\,|a\rangle$, por essa razão que $\hat{A}$ deve ser hermitiano, pois, é possível demonstrar que um operador hermitiano só gera autovalores reais. Embora, como já trabalhamos no capítulo anterior, essa condição é apenas *ad hoc*, não sendo necessário assumi-la em outros contextos.

Para o terceiro postulado, temos

Postulado 3. *Fazer uma medida, de mensurável A, em uma partícula com estado* $|\psi\rangle$ *equivale a encontrar um dos autovalores de* $\hat{A}$*(com probabilidade* $\sim |\,\langle a|\psi\rangle\,|^2$*) e modificar o estado* $|\psi\rangle \to |a\rangle$*.*

Esse postulado estabelece a característica probabilística da mecânica quântica, trazendo muitos outras consequências, uma delas o próprio emaranhamento, como veremos adiante.

Alguns físicos tentaram contornar a natureza probabilística da mecânica quântica para poder embutir o caráter clássico, por intermédio das chamadas variáveis ocultas[79], no entanto, mais tarde, veremos que tal descrição é impossível.

Finalmente, temos o quarto postulado

Postulado 4. *O estado* $|\psi\rangle$ *satisfaz a equação de Schrödinger,*

$$\imath\hbar\frac{\partial\,|\psi\rangle}{\partial t} = \hat{H}\,|\psi\rangle\,, \tag{4.1}$$

sendo $\hat{H}$ *o operador hamiltoniano.*

Para construir o operador hamiltoniano $\hat{H}$, devemos tomar o procedimento de quantização dado pelo Postulado 2, a esse procedimento denominamos primeira quantização. Assim como para encontrar a forma dos operadores, devemos primeiramente estabelecer em que espaço de Hilbert desejamos encontrar o estado $|\psi\rangle$, após isso, encontramos as probabilidades que desejamos calcular por intermédio do postulado 3. Observamos que o procedimento elencado acima utiliza o conceito de todos os postulados, o que, *a priori*, descreve qualquer sistema quântico. Como veremos adiante, trataremos de um problema quântico simples à luz dos postulados. Também, utilizamos todos esses postulados no desenvolvimento dos capítulos anteriores, no entanto, por intermédio dos princípios. Não há um consenso exato na quantidade necessária de postulados para estabelecer a teoria da mecãnica quântica[80], no entanto, em todas as formulações, os 4 postulados acima estão sempre presentes e, para nosso propósito, são suficientes.

À princípio, a mecânica quântica possui uma proposta muito interessante pois destoa do entendimento clássico descrevendo muitos experimentos que a mecânica newtoniana não é capaz de descrever, no entanto, a mecânica quântica definida pelo seus postulados geram algumas contradições quando confrontamos seus postulados à luz de uma filosofia natural, como definiu Einstein, Podolsky e Rosen. Com essa alegação polêmica, iniciamos a discussão para o paradoxo EPR.

4.1.2 Paradoxo EPR: realismo e localidade.

O artigo devido à Einstein, Podolsky e Rosen fora concebido em 1935, seguido de longos debates de A. Einstein e N. Bohr, devido à descrença da natureza probabilística de um sistema quântico do primeiro. Em correspondência com Max Born[81]. Nessas cartas, Einstein alega que a descrição da teoria quântica é incompleta, por isso sua formulação tem descrição probabilística dos processos, em outras palavras, uma das características fundamentais da mecânica quântica para Einstein é circunstancial. Assim, se fosse possível construir uma formulação onde se pode prever o resultado do observável físico do sistema, a mecânica quântica recairia como caso particular da mecânica estatística, o que tornaria os postulados da subsecção anterior supérfluos. Essa diferença se dá no espaço de fase: na mecânica estatística, cada estado do sistema é descrito por coordenadas generalizadas bem definidas, por outro lado, na mecânica quântica, as coordenadas generalizadas do estado estão definidas em um intervalo finito da ordem de $\hbar$, obedecendo o princípio da incerteza.

Assim, para justificar o posicionamento de Einstein, estabelece-se primeiramente o conceito de uma teoria completa

Definição 1. *Todo elemento de realidade física deve ter uma contraparte na teoria física.*

Essa definição não é final, no entanto, possui uma característica de suficiência. A importância da definição de completeza é introduzir a noção de realidade. Com efeito, fora precisamente na questão da realidade física da mecânica que que o artigo de Einstein, Podolsky e Rosen questiona sua formulação. Para tanto, estabelece-se outra definição, agora relativa à realidade de uma teoria em si:

Definição 2. *Se, sem causar nenhum distúrbio no sistema, pudermos prever com 100% de certeza o valor de uma quantidade física, então existe um elemento de realidade física à essa quantidade física.*

Assim como a Definição 1, esta não é absoluta, contudo, a suficiência de ambas as definições já viabilizam a contestação de Einstein. Implicitamente, essas definições acabam por abordar o caráter ontológico de uma dada teoria. É imediato observar que existem formalismos que cumprem tais condições, como a mecânica clássica, eletromagnetismo e relatividade, no entanto, ao confrontar a mecânica quântica com tal definição por intermédio dos postulados, imediatamente temos uma disparidadae entre os mesmos. Especificamente do Postulado 2 e 3 como comentamos na ocasião, podemos ver isso mais claramente no exemplo dado por Einstein, Podolsky e Rosen.

Assumindo um estado de uma partícula dado por $|\psi\rangle$, expressamos este na base das coordenadas, $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$. O comportamento da partícula é descrito completamente pela função de onda ψ, assim, devemos realizar testes na mesma para saber se a mecânica quântica possui realidade física. Tomando a função de onda como

$$\psi(x) = \mathrm{e}^{\frac{\imath}{\hbar}p_0 x}. \tag{4.2}$$

Em termos da ótica, a função de onda (4.2) descreve uma partícula livre monocromática, em termos dinâmicos, essa partícula possui uma energia bem definida.

Tomando o operador momento, $\hat{p}$, para o caso unidimensional dado por

$$\hat{p} = -\imath\hbar\frac{\partial}{\partial x}. \tag{4.3}$$

Se aplicamos o operador momento na função de onda (4.2), temos que

$$\hat{p}\psi(x) = p_0\psi(x). \tag{4.4}$$

Pelo postulado 2, podemos afirmar que o momento da partícula é bem definido antes de realizar a medida, uma vez que a função de onda é monocromática, apresentando, pois, um caráter real para a mecânica quântica até aqui, dada as definições acima. Contudo, o

tratamento acima só foi possível porque, implicitamente, abrimos mão do conhecimento da posição da partícula ao expandir o estado $|\psi\rangle$ no espaço das posições, assim como o operador $\hat{p}$. Em outras palavras, não teríamos como prever com exatidão os autovalores do operador $\hat{x}$ no espaço das coordenadas, pois este contempla todas as posições possíveis, ocasionando na natureza probabilística da posição. Ainda que fosse possível medir a posição da partícula, para um caso ligeiramente mais complicado como uma partícula que possa ter dois momentos possíveis, p_1 e p_2, a condição de realidade física para a quantidade momento é quebrada, pois, de acordo com o postulado 3, existiria um caráter probabilístico para medir p_1 e p_2, e isso está de acordo com o princípio da incerteza, uma vez que, em se tratando de variáveis canonicamente conjugadas, não é possível obter obter informações de uma quando sabe-se exatamente o valor da outra. Esse argumento já está embutido no Postulado 3, podemos verificar isso pelo caso acima: quando realizamos a medida operando $\hat{p}$, perturbamos o sistema de forma a impossibilitar a medida concomitante de $\hat{x}$. Além disso, um outro problema é a questão da chamada localidade. Esta não é discutida explicitamente no artigo do paradoxo EPR. Na ocasião, a questão da localidade foi abordado como uma contradição lógica devido à formulação da mecânica quântica, como iremos argumentar a seguir utilizando o exemplo devido a D. Bohm.

Consideremos um núcleo radioativo que realiza emissão de raios gama. Sob um processo específico, foi medido que a energia do fóton do raio gama converte-se na massa equivalente a de um elétron e um pósitron, esse processo é chamado de criação de pares($\gamma \rightarrow e^- + e^+$). Considerando o momento angular do núcleo zero, tornamos nossa atenção para o spin de cada partícula produzida. Por conservação do momento angular, temos que o estado que descreve concomitantemente o spin do elétron e do pósitron é dado pelo estado antissimétrico

$$|\sigma_{e^-}\sigma_{e^+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right), \tag{4.5}$$

onde σ denota o spin da partícula em questão. Temos que utilizamos a notação de um estado que descreve 2 sistemas diferentes, elétron e o pósitron, pois estamos utilizando a linguagem do estado de Fock para tal representação.

À partir do estado (4.5), podemos calcular a probabilidade de se obter uma determinada configuração do spin do par elétron-pósitron, se definirmos um operador cujos autovetores sejam os estados $|\uparrow\downarrow\rangle$ e $|\downarrow\uparrow\rangle$. Contudo, pelos postulados da mecânica quântica, o estado (4.5) só possui realidade física após o processo de medida, antes disso, os spins do elétron e do pósitron são dados por probabilidades. O grande problema apontado por Einstein *et al* é que, dada a configuração acima, se medirmos o spin do elétron, isso indicaria que o pósitron assumiu a direção oposta para que haja a conservação do momento angular, ainda que tal processo de medição ocorresse à uma distância infinita entre os

pares. Claramente isso contraria a definição 2, ganhando o caráter de paradoxo. À época, isso parecia absurdo, pois não havia nenhum componente físico que levasse a informação da medição realizada no elétron para o pósitron, por exemplo. Por essa razão, Einstein denominou esse fato de "assustadora ação à distância[1]", ao passo que E. Schrödinger deu a famosa alcunha de Emaranhamento[2].

Além disso, se construirmos uma analogia utilizando o fato acima para dois sistemas A e B quaisqer que possuem estados descritos concomitantemente, se fizermos medições no sistema A, pela mecânica quântica, acabamos por perturbar o sistema B, o que interfere na descrição de realismo do último, criando novamente uma contradição. Atualmente, esse fenômeno é conhecido por não-localidade.

Pelas razões elencadas acima é que se pôde tomar a conclusão que a mecânica quântica é uma teoria física incompleta. Somente quase 20 anos depois, David Bohm elabora um formalismo alternativo para incentivar o debate epistemológico da mecânica quântica[81], onde ele propõe uma descrição da teoria quântica através de variáveis ocultas, o que à princípio assegura a localidade, logo, o realismo. Contudo, 10 anos depois, o formalismo de Bohm mostrou-se incorreto com o advento do teorema de Bell, como descreveremos agora.

4.1.3 Teorema de Bell e Emaranhamento.

John S. Bell foi um físico de partículas experimental e diletante nos fundamentos da teoria quântica. Em 1966, ele reascendeu a discussão epistemológica da mecânica quântica quando demonstrou o seu famoso teorema[82].

O teorema de Bell é uma maneira de verificar se um determinado formalismo para a teoria quântica fornece uma descrição física real, por essa razão, dizemos que é um teorema *no-go*. A demonstração do teorema começa assumindo que duas partículas estejam interagindo inicialmente, em seguida, separam-se em sentidos opostos em diferentes aparatos, como vemos na Figura 4.1.

Também consideramos, a princípio, que os aparatos de medida A e B sejam dois polarizadores não-paralelos, cuja orientação seja definida pelos vetores unitários $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Como quantidade de medida, vamos definir respectivamente os observáveis A e B. A seguir, assumimos que a mecânica quântica é incompleta pelo argumento do paradoxo EPR, isso não somente ocasiona que os observáveis A e B devem depender dos seus respectivos vetores, como também de uma variável oculta λ, que pode possuir dinâmica e equações de movimento bem definida, como argumentara Bohm, a saber

[1] tradução livre de *spooky action at a distance*. Ele utilizou a mesma terminologia utilizada por Newton com relação à interação gravitacional, uma vez que não se tinha a noção de campo na época.

[2] Tradução livre do alemão *Verschräkung*.

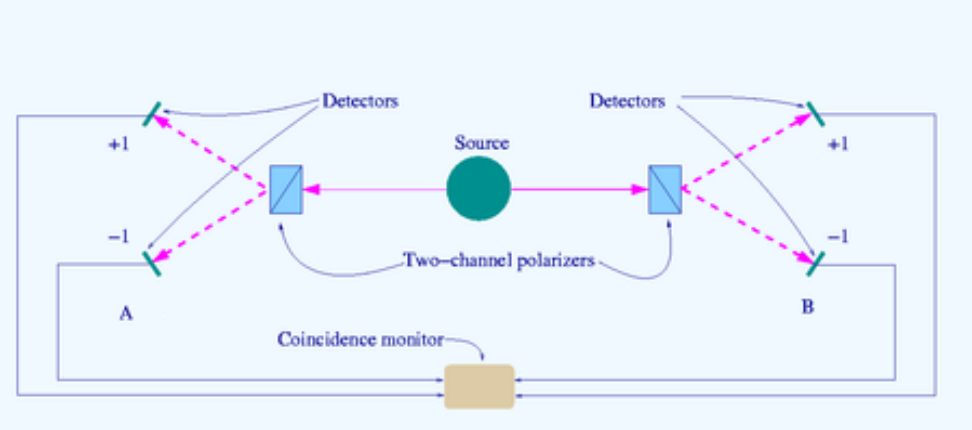


Figura 4.1: Aparato com polarizadores com diferença angular θ: por *Bell's theorem, Wikipedia.*

$$A = A(\vec{a}, \lambda) = \pm 1, \tag{4.6}$$

$$B = B(\vec{b}, \lambda) = \pm 1. \tag{4.7}$$

Isso faz com que a descrição da ação à distância seja evitada, pois, a variável oculta seria a responsável pelo aparente "emaranhamento" dos estados. A variável oculta também introduz uma densidade de probabilidade para ambos os observáveis do sistema, $\rho(\lambda)$, com a condição de normalização

$$\int \rho(\lambda) \mathrm{d}\lambda = 1. \tag{4.8}$$

Essa densidade ocasionaria uma estatística correlacionada entre os dois sistemas, como vimos no capítulo 2. Com efeito, agora podemos calcular a probabilidade de se obter um dado valor $\vec{a}$ e $\vec{b}$ tomando a probabilidade como

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = \int_{\mathcal{P}} \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda) \mathrm{d}\lambda. \tag{4.9}$$

Podemos ver que, pela descrição acima, que agora é possível conceder aos observáveis A e B realidade física, pois, com a variável oculta, A e B podem ser considerados aparatos independentes, logo, locais.

Considerando que o momento angular total da partícula é zero, antes de elas se separarem, temos que os observáveis A e B, se ajustados paralelamente($\vec{a} = \vec{b}$), possuem a seguinte propriedade

$$A(\vec{a}, \lambda) = -B(\vec{a}, \lambda). \tag{4.10}$$

Aqui, devemos ter em mente agora que esse vínculo é estabelecido à partir da variável oculta λ e isso foi estabelecido antes do processo de medida, o que nos remete irremediavelmente ao formalismo determinístico que Einstein tinha em mente para descrever a mecânica quântica[83]. Considerando que estamos medindo o spin de 2 elétrons, outra

propriedade imediata para A e B é

$$\left[A(\vec{a},\lambda)\right]^2 = \left[B(\vec{b},\lambda)\right]^2 = 1. \tag{4.11}$$

Com as propriedades acima, podemos reescrever (4.9) utilizando (4.10), a saber

$$P(\vec{a},\vec{b}) = -\int_{\mathcal{P}} \rho(\lambda) A(\vec{a},\lambda) A(\vec{b},\lambda) \mathrm{d}\lambda. \tag{4.12}$$

Tomando outra probabilidade que avalia a relação entre os observáveis A e C, de vetor unitário $\vec{c}$, tomamos a diferença

$$\begin{aligned}
P(\vec{a},\vec{b}) - P(\vec{a},\vec{c}) &= -\int_{\mathcal{P}} \rho(\lambda) \left[A(\vec{a},\lambda)A(\vec{b},\lambda) - A(\vec{a},\lambda)A(\vec{c},\lambda)\right] \mathrm{d}\lambda, \\
\left|P(\vec{a},\vec{b}) - P(\vec{a},\vec{c})\right| &= \left|-\int_{\mathcal{P}} \rho(\lambda) A(\vec{a},\lambda)A(\vec{b},\lambda) \left[1 - A(\vec{b},\lambda)A(\vec{c},\lambda)\right] \mathrm{d}\lambda\right|, \\
\left|P(\vec{a},\vec{b}) - P(\vec{a},\vec{c})\right| &\leq \int_{\mathcal{P}} \left|\rho(\lambda) A(\vec{a},\lambda)A(\vec{b},\lambda) \left[1 - A(\vec{b},\lambda)A(\vec{c},\lambda)\right]\right| \mathrm{d}\lambda, \\
\left|P(\vec{a},\vec{b}) - P(\vec{a},\vec{c})\right| &\leq \int_{\mathcal{P}} \rho(\lambda) \left[1 + A(\vec{b},\lambda)B(\vec{c},\lambda)\right] \mathrm{d}\lambda, \\
\left|P(\vec{a},\vec{b}) - P(\vec{a},\vec{c})\right| &\leq 1 + P(\vec{b},\vec{c}).
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Na segunda linha, utilizamos a propriedade (4.11), na terceira, a desigualdade triangular. Na quarta linha, utilizamos o fato que $\left|A(\vec{a},\lambda)A(\vec{b},\lambda)\right| \leq 1$ e $\rho(\lambda)\left[1 - A(\vec{b},\lambda)A(\vec{c},\lambda)\right]$ é positiva definida. A inequação (4.13) é chamada de desigualdade de Bell e deve ser satisfeita por qualquer teoria quântica com descrição realística e local. A desigualdade (4.13) irá permitir que avaliemos se a mecânica quântica construída à partir dos postulados da subsecção anterior, é uma teoria local e real.

Aproveitando a notação e o aparato da Figura 4.1, vamos construir o operador da probabilidade que avalia o spin de A e de B. Para tanto, expandimos o operador spin no espaço de Hilbert construído à partir da base dada pela matrizes de Pauli. Assim, considerando o o operador do observável A paralelo ao eixo z, temos que

$$\hat{S}_A = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

Tomando o operador do observável B com um ângulo polar θ em relação à A, temos

$$\hat{S}_B = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\theta \\ \mathrm{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}. \tag{4.15}$$

Os operadores acima expressam a medição dada pelo aparato da Figura 4.1 utilizando os postulados da mecânica quântica. Com isso, podemos construir o operador que descreve a probabilidade de medição simultânea, tomando-se a união dos dois espaços de Hilbert acima, o que efetivamente é o espaço de Fock. Utilizando a definição de produto tensorial visto na Introdução, temos que

$$\hat{S} = \hat{S}_A \otimes \hat{S}_B = \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 & 0 \\ \text{sen}\theta & -\cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos\theta & -\text{sen}\theta \\ 0 & 0 & -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{4.16}$$

Agora, utilizamos o estado (4.5) para descrever os possíveis estados presentes no aparato. Uma vez que estamos expressando o sistema pelo o eixo z da base das matrizes de Pauli, os estados devem ser descritos pelos autovetores

$$|S_A S_B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right], \tag{4.17}$$

$$|S_A S_B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.18}$$

Utilizando o postulado 3, obtemos a medida do aparato realizando a atuação de $\hat{S}$ no estado (4.18), então, temos que

$$\hat{S}\,|S_A S_B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \text{sen}\theta \\ -\cos\theta \\ \cos\theta \\ \text{sen}\theta \end{pmatrix}, \tag{4.19}$$

Também pelo postulado 3, temos que a probabilidade de obtenção de uma dada configuração é dado por $P(A,B) = \langle S_A S_B|\hat{S}|S_A S_B\rangle$. Assim, tomando o *bra* de (4.18) e atuando em (4.19), e com um pouco de álgebra, temos que

$$P(A,B) = -\cos\theta. \tag{4.20}$$

Observamos que a probabilidade depende unicamente do ângulo formado pelos observáveis A e B. Podemos reescrever (4.20) em termos de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ utilizando a definição de produto interno

$$P(\vec{a},\vec{b}) = -\vec{a}\cdot\vec{b}. \tag{4.21}$$

Agora que temos a probabilidade escrita em termos das medidas dos observáveis A e B, podemos fazer o teste da mecânica quântica pelo teorema de Bell.

Considerando o aparato A fixo e B móvel, ajustamos inicialmente B de forma que $\vec{a} \perp \vec{b}$, assim, temos imediatamente

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = 0. \tag{4.22}$$

Agora, ajustando B de forma que a nova direção $\vec{c}$ seja tal que forme um ângulo de 45° com o aparato A, assim, temos

$$P(\vec{a}, \vec{c}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{4.23}$$

Também, temos que a probabilidade entre $\vec{b}$ e $\vec{c}$ é dada por

$$P(\vec{b}, \vec{c}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{4.24}$$

Aplicando (4.22), (4.23) e (4.24) em (4.13), temos

$$\begin{aligned} \left| 0 + \frac{\sqrt{2}}{2}) \right| &\leq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sqrt{2} &\leq 1, \end{aligned} \tag{4.25}$$

o que é um absurdo. É importante apontar que a intenção inicial de Bell era a mesma de Einstein e Bohm: demonstrar que a mecânica quântica é uma teoria incompleta, no entanto, o resultado acima denota que, de fato, esta não é uma teoria com realidade local, *i.e.*, o que Einstein chamara de "ação à distância fantasmagórica"; o emaranhamento, é uma fenômeno quântico existente. Com efeito, inspirados no resultado (4.25), muitos experimentos demonstraram que a mecânica quântica efetivamente não satisfazia a desigualdade de Bell, como o seminal experimento de Stuart J. Freedman e John F. Clauser[84] e o experimento mais preciso de Alain Aspect[85], onde este consegue detectar o emaranhamento entre pares de fótons em situações onde seria necessário velocidades superluminais para enviar informação de um ponto a outro do aparato. Mais tarde, veremos que ambos os experimentos podem ser descritos pelo aparato HBT, por ora, para que apliquemos o teorema de Bell em qualquer aparato, é necessário a discussão de uma sutileza.

Embora o teorema de Bell já demonstre a propriedade não-local da mecânica quântica, experimentalmente não se deve aplicá-lo, uma vez que em um aparato real, a probabilidade (4.21) não é totalmente válida, e isso acarreta em um erro ao aplicá-la da desigualdade de Bell. Um dos possíveis erros é que o próprio aparato pode gerar variáveis ocultas que relacionam-se entre si, não permitindo avaliar corretamente se a mecânica quântica é uma teorial local e real pela desigualdade (4.13). Dessa forma, sugeriu-se que em vez de

avaliar a probabilidade dos observáveis em si, deve-se avaliar a probabilidade de obtenção da média desses observáveis, pois este último já é o resultado da atuação das eventuais variáveis ocultas do próprio aparato. Quantitativamente, temos

$$P(\vec{a},\vec{b}) = \int\limits_{\mathcal{P}} \rho(\lambda)\,\langle A(\vec{a},\lambda)\rangle\,\langle B(\vec{b},\lambda)\rangle\,\mathrm{d}\lambda. \tag{4.26}$$

Agora vemos que a avaliação da probabilidade (4.26) é reduzida a somente a variável oculta que conecta $\vec{a}$ e $\vec{b}$, reproduzindo um caso mais realístico. Devemos ter em mente também que $\langle A\rangle \leq 1$ e $\langle B\rangle \leq 1$. Assim, podemos proceder analogamente como na demonstração da desigualdade (4.13), a saber

$$\begin{aligned}
P(\vec{a},\vec{b}) - P(\vec{a},\vec{b'}) &= \int \mathrm{d}\lambda\rho(\lambda)\big(\,\langle A(\vec{a},\lambda)\rangle\,\langle B(\vec{b},\lambda)\rangle - \langle A(\vec{a},\lambda)\rangle\,\langle B(\vec{b'},\lambda)\rangle\,\big),\\
P(\vec{a},\vec{b}) - P(\vec{a},\vec{b'}) &= \int \mathrm{d}\lambda\rho(\lambda)\left[\langle A(\vec{a},\lambda)\rangle\,\langle B(\vec{b},\lambda)\rangle\,\big(1 \pm \langle A(\vec{a'},\lambda)\rangle\,\langle B(\vec{b'},\lambda)\rangle\,\big)\right] -\\
&\quad - \int \mathrm{d}\lambda\rho(\lambda)\left[\langle A(\vec{a},\lambda)\rangle\,\langle B(\vec{b'},\lambda)\rangle\,\big(1 \pm \langle A(\vec{a'},\lambda)\rangle\,\langle B(\vec{b},\lambda)\rangle\,\big)\right],\\
\Big|P(\vec{a},\vec{b}) - P(\vec{a},\vec{b'})\Big| &\leq \int \mathrm{d}\lambda\rho(\lambda)\left[\Big|\langle A(\vec{a},\lambda)\rangle\,\langle B(\vec{b},\lambda)\rangle\Big|\,\big(1 \pm \langle A(\vec{a'},\lambda)\rangle\,\langle B(\vec{b'},\lambda)\rangle\,\big)\right] +\\
&\quad + \int \mathrm{d}\lambda\rho(\lambda)\left[\Big|\langle A(\vec{a},\lambda)\rangle\,\langle B(\vec{b'},\lambda)\rangle\Big|\,\big(1 \pm \langle A(\vec{a'},\lambda)\rangle\,\langle B(\vec{b},\lambda)\rangle\,\big)\right],\\
\Big|P(\vec{a},\vec{b}) - P(\vec{a},\vec{b'})\Big| &\leq \int \mathrm{d}\lambda\rho(\lambda)\left[\big(1 \pm \langle A(\vec{a'},\lambda)\rangle\,\langle B(\vec{b'},\lambda)\rangle\,\big) + \big(1 \pm \langle A(\vec{a'},\lambda)\rangle\,\langle B(\vec{b},\lambda)\rangle\,\big)\right],\\
\Big|P(\vec{a},\vec{b}) - P(\vec{a},\vec{b'})\Big| &\leq 2 \pm \Big[P(\vec{a'},\vec{b'}) + P(\vec{a'},\vec{b})\Big],\\
\Big|P(\vec{a},\vec{b}) - P(\vec{a},\vec{b'})\Big| &\leq 2 - \Big|P(\vec{a'},\vec{b'}) + P(\vec{a'},\vec{b})\Big|,\\
\Big|P(\vec{a},\vec{b}) + P(\vec{a'},\vec{b'}) + P(\vec{a'},\vec{b}) - P(\vec{a},\vec{b'})\Big| &\leq 2,
\end{aligned} \tag{4.27}$$

onde utilizamos na terceira linha $|a-b| \leq |a|+|b|$. Na última linha, utilizamos a desigualdade triangular novamente. Na penúltima linha, podemos justificar isso por um simples tratamento de inequações do tipo $|x-1|+|x-2| \leq 3$, por exemplo. Geometricamente, observamos na quinta linha que a desigualdade restringe mais o lado direito através da adição e subtração do termo entre colchetes em torno do ponto 2, reescrevemos isso como a subtração do valor absoluto do mesmo termo em torno de 2, gerando a penúltima linha.

A desigualdade (4.27) ainda expressa o mesmo enunciado do teorema de Bell a respeito da realidade local da mecânica quântica, embora de uma forma mais geral. Essa desigualdade foi devido a J. Clauser, M. Horne, A. Shimony e R. Holt[86], por essa razão, a expressão acima é conhecida pelo acrônimo dos seus autores: Desigualdade CHSH, e pode ser utilizada para avaliar os experimentos discutidos acima. De fato, mais a frente, aplicaremos tal desigualdade para o caso de espalhamento em nanoestruturas e analisar como este relaciona-se com a estatística do sistema.

Até aqui, desenvolvemos as ideias necessárias para identificar o emaranhamento de sistemas quânticos, no entanto, isso levanta outras questões como, por exemplo, é possível diferenciar o emaranhamento de situações diferentes? Um sistema pode ser mais emaranhado que outro? É o que trataremos na próxima secção.

4.2 Entropia e Grau de Emaranhamento.

Após uma breve discussão a respeito do fenômeno do emaranhamento, é natural que estejamos interessados em quantificá-lo fisicamente. O procedimento para tanto é fazer analogias com a termodinâmica, por exemplo, podemos estabelecer um critério similar ao da 2° lei com respeito à impossibilidade de se criar um *moto continuum*: para o caso quântico, estabelece-se que é impossível, para qualquer processo reversível, criar ou destruir o grau de emaranhamento[87] de um dado sistema, dessa forma, veremos adiante que uma forma bastante conveniente de medir o grau de emaranhamento, especificamente para um sistema bipartido, é através da entropia. Assim, trabalharemos o conceito de entropia e matriz densidade.

Esses últimos conceitos foram formulados tomando uma via dissonante da física, a chamada teoria da informação, assim, iniciaremos a discussão à partir da ideia original do criador de tal teoria: C. Shannon.

4.2.1 Entropia de Shannon e von Neumann

Estamos interessados em informação. Para estocar ou reproduzir uma determinada informação(por exemplo, uma palavra no computador) devemos fazer uso da noção de *bits*, afinal, para se comunicar com um computador, devemos mandar a mensagem por intermédio de correntes no sistema, ou a ausência desta, daí vem a chamada linguagem binária. Para mandar um "2" para o computador, convenciona-se na linguagem binária como "10", na prática, isso é representado por um pulso e nenhum, respectivamente.

Com isso, podemos fazer uma infinidade de ações apenas mandando vários pulsos de 0's e 1's para o computador, tão logo, surge a necessidade de realizar o estudo dessa quantidade de informações que trabalharemos, foi precisamente isso que C. Shannon trabalhou à época[88].

Considerando um conjunto de elementos a serem codificados em linguagem binária A, temos que a quantidade $X(A)$ denota o tamanho da quantidade de informação, em *bits*, necessária para codificar os elementos de A.

Tendo dois conjuntos de elementos a serem codificados, A e B, se desejamos combiná-los, toma-se o produto do número de elementos de cada conjunto, $A.B$. Assim, para avaliar a quantidade de informação necessária para codificar um elemento do novo conjunto, deve-se levar em consideração a quantidade que fora necessária para codificar isoladamente as

partes desse novo elemento, assim, temos que

$$X(A.B) = X(A) + X(B). \tag{4.28}$$

Com isso, se estivermos interessados em endereçar uma característica funcional para X, deve-se levar em conta a codificação para linguagem binária dos elementos de um conjunto A e a propriedade (4.28). Com efeito, uma possível representação é dada por

$$X(A) = \log_2 |A|. \tag{4.29}$$

Observamos que a definição acima obedece de imediato a condição (4.28). Se no conjunto A tivermos N elementos para um dispositivo de codificação binário, temos então 2^N possibilidades para codificar tais elementos, temos então

$$X(2^N) = \log_2 2^N = N, \tag{4.30}$$

que é a quantidade de *bits* necessária para codificar os N elementos. Além disso, a função logarítmica é viável para processos de codificações muito grandes, pois a escala logaritmica desacelera o crescimento da quantidade em estudo e permite a avaliação da mesma, o que é extremamente adequado para os computadores, pois utiliza-se cadeias infidáveis de códigos binários para implementar uma dada ação.

Embora estabelecemos uma relação funcional entre a quantidade de elementos a serem codificados e a quantidade de informação necessária para tanto. A grande ideia de Shannon veio com o seguinte questionamento[89]: é possível definir uma quantidade que avalia quanta informação é produzida após a realização de um determinado processo? Vamos tomar o exemplo da língua portuguesa: estamos interessados em descobrir uma determinada palavra codificada por um dado processo. Sabe-se que a letra "a" é a mais comum do português e que a letra "k" é muito menos comum. Dessa forma, descobrir que uma das letras que compõe tal palavra é "k" é de muito mais valia informacional que a letra "a", pois reduz drasticamente as opções de palavras para decodificarmos. Com isso, observamos que cada elemento de um dado conjunto possuem ocorrências diferentes, assim, podemos avaliar a quantidade X à partir da probabilidade de ocorrência de um dado elemento do conjunto, $X = X(p_i)$, onde p_i é a probabilidade de tal ocorrência. Assim, podemos expressar a quantidade necessária de informação necessária para estocar o i-ésimo elemento de um conjunto tomando

$$\begin{aligned} X(p_i) &= \log_2 \left(\frac{1}{p_i}\right), \\ X(p_i) &= -\log_2 p_i, \end{aligned} \tag{4.31}$$

Tomamo o inverso de p_i, pois $p_i \leq 1$, o que ocasionaria em valores negativos do logaritmo,

o que não faz sentido para a definição de X. Vamos analisar (4.31) novamente à luz do exemplo das palavras da lingua portuguesa: a probabilidade de existir a letra "a" em uma palavra é muito grande, assim, por (4.31), a quantidade de informação necessária para decodificar uma palavra qualquer é igualmente grande, *i.e.*, mais respostas devem ser obtidas para que a decodificação da palavra seja precisa. Dessa forma, podemos entender X também como o grau de incerteza do i-ésimo elemento que temos com respeito ao sistema em questão: quanto maior X para um elemento do sistema, maior será a imprecisão inerente a este para uma dado processo, como formar palavras, por exemplo.

Dessa forma, podemos avaliar o grau de incerteza do sistema como um todo, introduzindo a quantidade H que avalia a média de incerteza de todo o sistema, a saber

$$\begin{aligned} H(p_1, ..., p_N) &= \sum_{i=1}^{N} p_i X(p_i), \\ H(p_1, ..., p_N) &= -\sum_{i=1}^{N} p_i \log_2 p_i. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Com (4.32), avalia-se o grau de incerteza informacional do sistema: se H for muito grande, um elemento do sistema não acarreta em muito ganho informacional, assim como o inverso, para H pequeno, temos um ganho de informação grande.

Uma outra propriedade de H é quando assumimos que a ocorrência dos elementos do sistema são equiprováveis, *i.e.*, para um sistema de N elementos, temos que $p_i = 1/N$. Aplicando em (4.32), temos que

$$\begin{aligned} H(1/N, ...) &= -\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} \log_2 (1/N), \\ H(1/N, ...) &= \frac{1}{N} \log_2 N \underbrace{\sum_{i=1}^{N}}_{=N}, \\ H(1/N, ...) &= \log_2 N. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Essa expressão representa o grau de informação máxima para cada elemento decodificado, em outras palavras, (4.33) é o limite superior de informação atribuída a cada elemento.

Podemos demonstrar essa alegação rapidamente tomando

$$\begin{aligned}
\log_2 N &= \log_2\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{p_i}p_i\right), \\
\log_2 N &\geq \sum_{i=1}^{N}\log_2\left(\frac{1}{p_i}p_i\right) \geq \sum_{i=1}^{N} p_i \log_2\left(\frac{1}{p_i}\right), \\
\log_2 N &\geq -\sum_{i=1}^{N} p_i \log_2 p_i, \\
\log_2 N &\geq H(p_1, ..., p_N), \quad \square
\end{aligned} \tag{4.34}$$

onde, na segunda linha, utilizamos a desigualdade de Jensen. A propriedade (4.34) ressalta uma propriedade absolutamente análoga no contexto da física: a entropia, S. De fato, no contexto da mecânica estatística, a entropia não somente tem a mesma forma de H em (4.32), como também é máxima para estados equiprováveis de ocupação, por essa razão, (4.32) é conhecida como entropia de Shannon.

É necessário apontar o fato interessante que obtemos aqui: à partir de considerações completamente distintas, entropia e informação estão intimamente ligadas, uma vez que possuem descrições quantitativas iguais. Isso também é um indicativo de que podemos estender alguns conceitos na física à partir da teoria da informação. Não por acaso, isso ocasionou na chamada informação quântica e viabilizou a quantificação do emaranhamento, uma vez que utiliza-se o conceito de troca de informações para estabelecer uma das possíveis definições daquele. Assim, devemos tornar nossa atenção do caso acima para o contexto quântico.

Para denotar entropia na mecânica quântica, assumimos que quando não se tem controle total de um sistema quântico, este será descrito pelos os estados $|\psi_i\rangle$, que não são necessariamente ortogonais, cada um com probabilidadae p_i de procedência, tal que $\sum p_i = 1$, sendo assim, para extrair informações de um operador $\hat{X}$ desse sistema, tomamos

$$\begin{aligned}
\langle\hat{X}\rangle &= \sum_i p_i \langle\psi_i|\hat{X}|\psi_i\rangle, \\
\langle\hat{X}\rangle &= \sum_{i,j,k} p_i \langle\psi_i|\phi_j\rangle\langle\phi_j|\hat{X}|\phi_k\rangle\langle\phi_k|\psi_i\rangle, \\
\langle\hat{X}\rangle &= \sum_{i,j,k} p_i \langle\phi_k|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\phi_j\rangle\langle\phi_j|\hat{X}|\phi_k\rangle, \\
\langle\hat{X}\rangle &= \sum_{j,k} \langle\phi_k|\hat{\rho}|\phi_j\rangle\langle\phi_j|\hat{X}|\phi_k\rangle, \\
\langle\hat{X}\rangle &= \sum_k \langle\phi_k|\hat{\rho}\hat{X}|\phi_k\rangle, \\
\langle\hat{X}\rangle &= \mathrm{Tr}\left(\hat{\rho}\hat{X}\right),
\end{aligned} \tag{4.35}$$

onde utilizamos uma base ortonormal $\{|\phi_i\rangle\}$ e introduzimos o novo operador chamado matriz densidade,

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right| . \tag{4.36}$$

Observamos que tal operador fornece informações do sistema em questão, ainda que tal sistema não seja controlado por processos conhecidos. Outra grande vantagem é que podemos encontrar a matriz densidade do sistema em outra representação conhecida, uma vez que não há razões físicas nenhuma para preferir uma base no lugar de outra. Algumas propriedades advindas desse fato podem ser demonstradas. Expressando o operador matriz densidade em termos da base que o diagonaliza, $\{|\rho\rangle\}$, e tomando o traço, vem

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\hat{\rho} = \sum_{i,j} p_i \underbrace{\langle\rho_j|\rho_i\rangle \langle\rho_i|\rho_j\rangle}_{=\delta_{ij}} = \sum_i p_i, \\ \mathrm{Tr}\hat{\rho} = 1. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Essa propriedade apenas retoma que a soma das probabilidades de cada estado deve ser normalizada. Outra propriedade bastante interessante é que se a matriz densidade for descrita somente por um único estado, $|\psi\rangle$, temos

$$\begin{aligned} & \hat{\rho} = \left|\psi\right\rangle \left\langle\psi\right| , \\ \Rightarrow \quad & \hat{\rho}^2 = \hat{\rho}. \end{aligned} \tag{4.38}$$

A consequência dessa propriedade é quando substituimos $\hat{X} = \hat{\rho}$ em (4.35) e utilizamos a propriedade (4.37) e (4.38), obtemos imediatamente que $\langle\hat{\rho}\rangle = 1$, indicando que o sistema possui um estado puro(ou monocromático na linguagem da ótica).

Finalmente, com o conceito da matriz densidade, podemos dar uma definição para a entropia na mecânica quântica. De forma análoga à derivada em (4.32), podemos encontrar a entropia de um sistema quântico tomando o operador $-\log_2\hat{\rho}$ e aplicá-lo em (4.35), teremos então

$$S = -\mathrm{Tr}\left(\hat{\rho}\log_2\hat{\rho}\right). \tag{4.39}$$

Vemos que entropia nada mais é que a média da entropia inerente de cada componente do sistema. A expressão (4.35) é conhecida como entropia de von Neumann[16]. Podemos

recuperar a entropia de Shannon tomando a base $|\rho\rangle$, teremos

$$\begin{aligned} S &= -\sum_i \langle\rho_i|\,\hat{\rho}\log_2\hat{\rho}\,|\rho_i\rangle\,, \\ S &= -\sum_{i,j} \langle\rho_i|\,\hat{\rho}\,|\rho_j\rangle\,\langle\rho_j|\log_2\hat{\rho}\,|\rho_i\rangle\,, \\ S &= -\sum_{i,j} p_i \log_2 p_j \underbrace{\langle\rho_i|\rho_j\rangle\,\langle\rho_j|\rho_i\rangle}_{\delta_{ij}}, \\ S &= -\sum_i p_i \log_2 p_i. \quad \square \end{aligned} \tag{4.40}$$

Aqui utilizamos um passo não-trivial na terceira linha para encontrar tal solução, uma vez que a função logarítimica é transcendental, para tanto, assumimos que $\log_2\hat{\rho}\,|\rho_i\rangle = \log_2 p_i\,|\rho_i\rangle$. Observamos que a entropia de Von Neumann é a generalização do conceito de entropia. Uma outra propriedade da entropia de Von Neumann é que se o sistema for descrito por um estado puro, logo a entropia é nula. Isso já era esperado, uma vez que, pela definição de entropia de Shannon, um estado puro não possui incerteza informacional. No entanto, a entropia de Shannon não é suficiente para descrever sistemas quânticos, entre outras propriedades de muito interesse[90], principalmente para o caso do emaranhamento, no entanto, o nosso maior interesse na entropia de von Neumann é a descrição para sistemas quânticos bipartidos, que consistem em sistemas divididos em 2 subsistemas, como é o caso do experimento Hanbury Brown-Twiss. Em particular, o emaranhamento existente entre sistemas bipartidos pode ser quantificado pela chamada concorrência, como veremos na subsecção seguinte.

4.2.2 Concorrência.

Sistemas quânticos compostos são interessantes pelo seu caráter único apontado pelo fenômeno do emaranhamento: como vimos anteriormente, foi necessário assumir um sistema bipartido para discutir a respeito da realidade local do sistema. De fato, muito pode ser discutido utilizando sistemas bipartidos, inclusive, quantificar o emaranhamento presente no sistema, para tanto, abrimos mão de dois conceitos que descrevem o estado de tal sistema: estados puro e misto.

Para o caso de um sistema bipartido A e B ser descrito por um estado puro, $|\psi\rangle$, sempre podemos expressá-lo pelas respectivas bases que descrevem os subsistemas, a saber

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} c_i\,|\phi_i^A\rangle \otimes |\phi_i^B\rangle = \sum_{i=1}^{N} c_i\,|\phi_i^A\rangle\,|\phi_i^B\rangle\,. \tag{4.41}$$

É possível demonstrar que para tal caso, sempre é possível escrever o estado na forma (4.41) pela chamada decomposição de Schmidt[91], para c_i positivo e real. A equação

acima possui propriedades extremamente interessantes. A primeira delas é que podemos fazer operações tanto no sistema A quanto B que obteremos o mesmo resultado. É imediato verificar isso quando definimos o projetor $P_i^{A,B} = |\phi_i^{A,B}\rangle\otimes|I_{\dim(B,A)}\rangle\,\langle\phi_i^{A,B}|\otimes\langle I_{\dim(B,A)}|$, aplicando no *braket* para o estado $|\psi\rangle$, temos que $\langle\psi|P_i^{A,B}|\psi\rangle = c_i$. O fato do estado $|\psi\rangle$ possuir probabilidades bem definidas pelas bases de A e B é que caracteriza-o como puro. Também, (4.41) obedece a propriedade de estados puros para matriz densidade (4.38), como é possível constatar apenas substituindo (4.41) em (4.38) e utilizar a condição de normalização de (4.41), que é a soma de todos c_i^2 resultando em 1. Podemos expressar a propriedade de operações no sistema sem perturbar um dos subsistemas de maneira mais formal através do chamado Traço Parcial.

Vamos construir um operador que só faz medições no sistema A, assim, o operador deve ter uma forma dada por $\hat{O} = \hat{O}_A \otimes I_{\dim B}$, assim, utilizando (4.35), para o estado puro (4.41), temos

$$\begin{aligned}
\langle\hat{O}\rangle &= \mathrm{Tr}\left(\hat{\rho}\hat{O}\right), \\
\langle\hat{O}\rangle &= \sum_i c_i^2\,\langle\phi_i^A|\,\langle\phi_i^B|\,\hat{\rho}\hat{O}_A\otimes I_{\dim B}\,|\phi_i^A\rangle\,|\phi_i^B\rangle\,, \\
\langle\hat{O}\rangle &= \sum_i c_i^2\,\langle\phi_i^A|\,\langle\phi_i^B|\,\hat{\rho}\sum_k|\phi_k^B\rangle\,\langle\phi_k^B|\phi_i^B\rangle\,\hat{O}_A\sum_j|\phi_j^A\rangle\,\langle\phi_j^A|\phi_i^A\rangle\,, \\
\langle\hat{O}\rangle &= \sum_j\langle\phi_j^A|\sum_k\langle\phi_k^B|\left(\sum_i c_i^2\,|\phi_i^A\rangle\,|\phi_i^B\rangle\,\langle\phi_i^B|\,\langle\phi_i^A|\right)\hat{\rho}\,|\phi_k^B\rangle\,\hat{O}_A\,|\phi_j^A\rangle\,, \\
\langle\hat{O}\rangle &= \sum_j\langle\phi_j^A|\sum_k\langle\phi_k^B|\,\hat{\rho}\,|\phi_k^B\rangle\,\hat{O}_A\,|\phi_j^A\rangle\,, \\
\langle\hat{O}\rangle &= \sum_i\langle\phi_i^A|\,\hat{\rho}_A\hat{O}_A\,|\phi_i^A\rangle = \mathrm{Tr}\left(\hat{\rho}_A\hat{O}_A\right), \\
\langle\hat{O}\rangle &= \langle\hat{O}_A\rangle\,.
\end{aligned} \tag{4.42}$$

É necessário atentar que na terceira linha fora utilizado 2 relações de completeza, não somente uma. Isso foi feito a fim de explicitar a matriz densidade de $|\psi\rangle$ na quinta linha. Também introduzimos o traço parcial

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_A &= \sum_i\langle\phi_i^B|\,\hat{\rho}\,|\phi_i^B\rangle\,, \\
\hat{\rho}_A &= \mathrm{Tr}_B\left(\hat{\rho}\right).
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Observamos que o traço parcial nos proporciona propriedades interessantíssimas a respeito de sistemas bipartidos: observamos que em (4.42), para se obter informações do sistema B sem perturbá-lo, basta que procedamos com experimentos em A, dessa forma, podemos avaliar separadamente a entropia de cada subsistema do estado (4.41). De fato, tomando

a entropia do subsistema A, utilizamos a matriz densidade $\hat{\rho}_A$, a saber

$$\begin{aligned} S_A &= -\mathrm{Tr}\left(\hat{\rho}_A \log_2 \hat{\rho}_A\right), \\ S_A &= -\sum_i \langle \phi_i^A | \, \hat{\rho}_A \log_2 \hat{\rho}_A \, | \phi_i^A \rangle, \\ S_A &= -\sum_i c_i^2 \log_2 c_i^2. \end{aligned} \tag{4.44}$$

De forma análoga, se calculamos a entropia para o sistema B, encontramos que $S_A = S_B$. Isso já era um resultado esperado, uma vez que a decomposição de Schmidt fornece o mesmo peso para ambos os estados que descrevem os subsistemas.

É possível que haja uma confusão com relação à extensividade da entropia, pois, como foi dito anteriormente, a entropia total do sistema, S_{AB}, para um estado puro é nula, embora as suas partes não o sejam. No entanto, é possível demonstrar que para sistemas quânticos bipartido, puro ou misto, vale a desigualdade[92]

$$S_{AB} \leq S_A + S_B. \tag{4.45}$$

Isso é um fato totalmente sem análogo clássico, uma vez que a entropia é uma quantidade extensiva, sendo assim, a soma das partes devendo resultar no todo. Podemos argumentar que a desigualdade (4.45) é efeito do emaranhamento presente entre os estados A e B, uma vez que estados que são escritos pela decomposição de Schmidt necessariamente estão emaranhados[93].

Com efeito, podemos raciocinar à partir dos fatos acima o seguinte: se ambos os sistemas partilham dos mesmos autovalores, ainda que expressos em espaços de Hilbert diferentes, então, uma possível definição para emaranhamento entre dois subsistemas A e B pode ser dada através da entropia presente em um desses subsistemas, assim, podemos definir emaranhamento presente no estado puro $|\psi\rangle$ como

$$E(\psi) = S(\hat{\rho}_A) = S(\hat{\rho}_B) = -\sum_i^N c_i^2 \log_2 c_i^2. \tag{4.46}$$

Apontamos que essa não é a única forma de quantificar emaranhamento[94], no entanto, para nosso propósito, a entropia de von Neumann nos é suficiente. Podemos justificar o formato do emaranhamento (4.46) tomando o chamado *ebit*.

Vamos definir 1 *ebit* como cada par de Bell do tipo (4.5) presente no sistema bipartido. Como podemos constatar por verificação direta, se aplicarmos (4.5) em (4.46), obtemos exatamente 1. Mesmo que N sistemas bipartidos estejam parcialmente emaranhados, podemos utilizar a quantidade definida acima para descrever tal emaranhamento, concentrando-os em um número menor de sistemas maximamente emaranhados[95]. Então, tomando dois observadores, realizando medições separadamente, por exemplo Arlice(A)

e Bebeto(B). Em cada referencial, Arlice e Bebeto recebem uma parcela do sistema de tal sorte a obedecer a decomposição de Schimdt (4.41). Assumindo que com apenas operações locais e sem comunicação quântica, se cada um produzir M cópias da parcela que receberam, teremos que o estado total criado será

$$|\psi\rangle |0\rangle_1 ... |0\rangle_M \longrightarrow |\psi\rangle |\psi\rangle_1 ... |\psi\rangle_M , \tag{4.47}$$

onde o subíndice denota a cópia. É importante ressaltar que só é possível copiar o estado $|\psi\rangle$ pois é um estado puro, não sendo limitado pelo teorema *no-cloning*[64, 96]. Outro ponto significativo é que uma possível comunicação quântica entre Arlice e Bebeto ocasionaria na mudança de entropia, o que ocasionaria uma quebra de emaranhamento.

Tomando que o emaranhamento do estado inicial $|\psi\rangle$ é descrito por (4.46), após realizada as cópias por Arlice e Bebeto, o emaranhamento do sistema é acrescido de $ME(\psi)$, obedecendo a entropia de von Neumann para um limite assintótico de M. Não demonstraremos isso, uma vez que a demonstração foge do escopo desta tese, mas pode ser vista nas referências[97, 98, 99] de forma bastante clara. Uma vez que $E(\psi)$ é definido à partir da formação de cópias do estado puro, aquele é chamado de emaranhamento de formação. Com as definições trabalhadas acima, podemos estender o conceito de emaranhamento para o caso de estados mistos.

Agora, não podemos falar de emaranhamento através da entropia de von Neumann, uma vez que haveriam mais de um estado puro, o que ocasiona na entropia não anulando-se e invalidando a relação (4.46). Assim, para quantificar a entropia no caso de estados mistos, imaginemos agora que o sistema seja construído de forma que não tenhamos total controle sobre o mesmo, assim, teremos que representá-lo em termos de vários estados puros, logo, o mesmo não pode ser representado por alguma decomposição de Schmidt, sendo mais adequadamente expressa associando-se uma probabilidade para cada estado possível do sistema, isso está expresso na matriz densidade (4.36) composta por vários estados puros $|\psi_i\rangle$.

De forma análoga ao realizado anteriormente para o caso de estados puros, Arlice e Bebeto fazem M cópias de cada singleto enviado à eles por operações locais e sem comunicação quântica. Supondo que o singleto em questão enviado para os dois seja descrito, dentre todos os autoestados possíveis da matriz densidade, pelo estado $|\psi_i\rangle$, assim, produzir M cópias do singleto em questão acrescerá no sistema um emaranhamento de $p_i ME(\psi_i)$. Observamos que agora, o acréscimo de emaranhamento é mediado pela probabilidade concernente do singleto na matriz densidade (4.36). No entanto, à medida que envia-se singletos para copiá-los, alguns eventualmente poderão serem descritos por uma decomposição de Schmidt, dessa forma, Arlice e Bebeto devem jogar tais amostras fora do ensemble das cópias para representar corretamente $\hat{\rho}$[99, 100], portanto, para quantificar o emaranhamento de formação da matriz densidade, devemos somar todas

as contribuições do emaranhamento de cada estado puro, minimizado pela exclusão do aparecimento de estados puros descritos pela decomposição de Schimidt (4.41), assim, teremos

$$E(\hat{\rho}) = \min \sum_{i=1}^{N} p_i E(\psi_i). \tag{4.48}$$

Observamos que a equação acima denota uma média. Com efeito, o emaranhamento de formação para estados mistos pode ser definido como o menor valor esperado do emaranhamento do ensemble $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ para formar a matriz densidade $\hat{\rho}$.

Ainda que saibamos quantificar o emaranhamento de formação, é muito difícil encontrar uma equação explícita de forma que apliquemos os procedimentos acima. Inclusive, até atualmente, não há nenhuma forma genérica para calcular o emaranhamento de formação de várias partículas, contudo, para 2 partículas, pode-se calcular o emaranhamento de dois estados arbitários para duas partículas por intermédio da quantidade chamada concorrência[101].

Para observarmos como surge o conceito da concorrência como medidor de emaranhamento, tomamos um estado puro qualquer $|\psi\rangle$ de um sistema bipartido A e B, expandido na base $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$, a saber

$$|\psi\rangle = \alpha_1 |00\rangle + \alpha_2 |01\rangle + \alpha_3 |10\rangle + \alpha_4 |11\rangle, \tag{4.49}$$

onde temos $\sum_i \alpha_i^2 = 1$. Como os estados são produtos de Kronecker, podemos reescrever a expressão acima como

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= |0\rangle (\alpha_1 |0\rangle + \alpha_2 |1\rangle) + |1\rangle (\alpha_3 |0\rangle + \alpha_4 |1\rangle), \\ |\psi\rangle &= |0\rangle \langle 0|\psi\rangle + |1\rangle \langle 1|\psi\rangle . \end{aligned} \tag{4.50}$$

Argumentamos que se os sistemas A e B são independentes, então, $|\psi\rangle$ deveria ser um estado puro de A, portanto, $\langle 0|\psi\rangle$ deve ser paralelo à $\langle 1|\psi\rangle$. Com efeito, observamos por (4.49) e (4.50) que tal fato deixa a medição do sistema A independente de B. Como consequência, estabelecemos para os coeficientes

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1}{\alpha_3} = \frac{\alpha_2}{\alpha_4} \Rightarrow \alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3 = 0, \\ C(\psi) = 0, \end{aligned} \tag{4.51}$$

onde definimos a quantidade chamada concorrência $C(\psi)$, para o caso acima, de um sistema totalmente não-emaranhado. Podemos mostrar que a concorrência obedece a condição para um sistema totalmente emaranhando quando assume o valor $C(\psi) = 1$.

Definindo a chamada base de Bell $\{|b_1\rangle, |b_2\rangle, |b_3\rangle, |b_4\rangle\}$, tal que

$$\begin{aligned}
|b_1\rangle &= \frac{1}{2}\left(|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle\right), \\
|b_2\rangle &= \frac{i}{2}\left(|\uparrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle\right), \\
|b_3\rangle &= \frac{i}{2}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle\right), \\
|b_2\rangle &= \frac{1}{2}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle\right),
\end{aligned} \tag{4.52}$$

onde mudamos a representação $|0\rangle \to |\uparrow\rangle$ e $|1\rangle \to |\downarrow\rangle$. Expandindo o estado $|\psi\rangle$ na base de Bell, temos

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{4} \beta_i |b_i\rangle,$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left(\beta_1 + \imath\beta_2\right)|\uparrow\uparrow\rangle + \frac{1}{2}\left(\beta_1 - \imath\beta_2\right)|\downarrow\downarrow\rangle + \frac{1}{2}\left(\beta_4 + \imath\beta_3\right)|\uparrow\downarrow\rangle - \frac{1}{2}\left(\beta_4 - \imath\beta_3\right)|\downarrow\uparrow\rangle \tag{4.53}$$

Aplicando os coeficientes encontrados na definição da concorrência, temos que

$$C(\psi) = \left|\sum_i \beta_i^2\right|. \tag{4.54}$$

O módulo advém da possibilidade dos valores negativos da soma. Dessa forma, se a expansão (4.53) for uma legítima decomposição de Schmidt, temos que a concorrência terá valor 1, indicando máximo emaranhamento. Podemos encontrar uma forma mais geral para a concorrência tomando a definição

$$C(\psi) = |\,\langle\psi|\tilde{\psi}\rangle\,|, \tag{4.55}$$

onde $|\tilde{\psi}\rangle = \sigma_y \otimes \sigma_y |\psi^*\rangle$, e σ_y é a própria matriz de Pauli que aqui desempenha um papel de *spin-flip*, ou seja $\sigma_y |0,1\rangle = i\,|1,-0\rangle$. De fato, com a definição acima, é possível encontrar o valor encontrado em (4.54) à partir de (4.53).

Como foi dito anteriormente, a concorrência serve como passo para encontrar o emaranhamento de formação dado em (4.46) pelo teorema[101]

Teorema 1. *O emaranhamento de formação de um estado descrito pela matriz densidade $\hat{\rho}$ de 2 qubits é função da concorrência, dada po*

$$E(\rho) = H(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - C^2}), \tag{4.56}$$

onde H é a entropia de Shannon.

Não demonstraremos o teorema acima pois foge do escopo desta tese. Aquele está demonstrado nas referências [99, 101], mas podemos ver explicitamente como a concorrência

realiza a transição de estados emaranhados para não-emaranhados à partir da identidade CHSH [102].

Como vimos anteriormente, sempre podemos representar um estado bipartido por (4.41). Aplicando uma transformação adequada, podemos representar o estado por

$$|\psi\rangle = \alpha_1 |\uparrow\uparrow\rangle + \alpha_2 |\downarrow\downarrow\rangle . \tag{4.57}$$

Pela decomposição de Schmidt, temos que α_i são números reais, assim, tem-se o vínculo $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$ e, tomando (4.55) a concorrência de (4.57) será dada por

$$C = |\, \langle \tilde{\psi} | \psi \rangle \,| = 2\alpha_1\alpha_2. \tag{4.58}$$

Agora, vamos definir separadamante o lado esquerdo da identidade CHSH

$$\begin{aligned} \varepsilon &= P(\vec{a}, \vec{b}) + P(\vec{a}', \vec{b}') + P(\vec{a}', \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{b}'), \\ \varepsilon &= \langle \vec{\sigma_1} \cdot \hat{a}\vec{\sigma_2} \cdot \hat{b} \rangle + \langle \vec{\sigma_1} \cdot \hat{a}'\vec{\sigma_2} \cdot \hat{b}' \rangle + \langle \vec{\sigma_1} \cdot \hat{a}'\vec{\sigma_2} \cdot \hat{b} \rangle - \langle \vec{\sigma_1} \cdot \hat{a}\vec{\sigma_2} \cdot \hat{b}' \rangle , \end{aligned} \tag{4.59}$$

onde os índices 1 e 2 referem-se ao subsistema do estado, $|\psi\rangle = |1, 2\rangle$. Vamos realizar uma transformação nos versores $\hat{b}$ e $\hat{b}'$ para novos versores ortogonais $\hat{c}$ e $\hat{c}'$, a saber

$$\begin{aligned} \hat{b} &= \cos\theta\hat{c} + \mathrm{sen}\theta\hat{c}', \\ \hat{b}' &= \cos\theta\hat{c} - \mathrm{sen}\theta\hat{c}'. \end{aligned} \tag{4.60}$$

Aplicando (4.60) em (4.59), teremos

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \cos\theta \langle \vec{\sigma_1} \cdot \hat{a}\vec{\sigma_2} \cdot \hat{c} \rangle + \mathrm{sen}\theta \langle \vec{\sigma_1} \cdot \hat{a}\vec{\sigma_2} \cdot \hat{c}' \rangle + \cos\theta \langle \vec{\sigma_1} \cdot \hat{a}'\vec{\sigma_2} \cdot \hat{c} \rangle - \mathrm{sen}\theta \langle \vec{\sigma_1} \cdot \hat{a}'\vec{\sigma_2} \cdot \hat{c}' \rangle + \\ &\quad + \cos\theta \langle \vec{\sigma_1} \cdot \hat{a}'\vec{\sigma_2} \cdot \hat{c} \rangle + \mathrm{sen}\theta \langle \vec{\sigma_1} \cdot \hat{a}'\vec{\sigma_2} \cdot \hat{c}' \rangle - \cos\theta \langle \vec{\sigma_1} \cdot \hat{a}\vec{\sigma_2} \cdot \hat{c} \rangle + \mathrm{sen}\theta \langle \vec{\sigma_1} \cdot \hat{a}\vec{\sigma_2} \cdot \hat{c}' \rangle , \\ \varepsilon &= 2\cos\theta \langle \vec{\sigma_1} \cdot \hat{a}'\vec{\sigma_2} \cdot \hat{c} \rangle + 2\mathrm{sen}\theta \langle \vec{\sigma_1} \cdot \hat{a}\vec{\sigma_2} \cdot \hat{c}' \rangle \end{aligned} \tag{4.61}$$

A nova forma de ε permite-nos ver de forma direta como maximizá-lo, pois, se temos uma expressão em termos de funções senoidais, podemos verificar o seu máximo por uma transformação de variável, a saber

$$\begin{aligned} F = \underbrace{A}_{\to C\mathrm{sen}\phi} \cos x + \underbrace{B}_{\to C\cos\phi} \mathrm{sen}x, \\ F = C\mathrm{sen}\big(x + \phi\big). \end{aligned}$$

Sabemos que do ciclo trigonométrico que $\mathbf{max}F = \sqrt{A^2 + B^2}$. Dessa forma, temos que a condição para maximização de (4.61) será

$$\mathbf{max}\varepsilon = 2\sqrt{\langle \vec{\sigma_1} \cdot \hat{a}'\vec{\sigma_2} \cdot \hat{c} \rangle^2 + \langle \vec{\sigma_1} \cdot \hat{a}\vec{\sigma_2} \cdot \hat{c}' \rangle^2} \tag{4.62}$$

Para trabalhar com a expressão (4.62), vamos tomar a forma explícita dos versores, a saber

$$\hat{a} = \big(\text{sen}a_\theta \text{cos}a_\theta, \text{sen}a_\theta \text{sen}a_\phi, \text{cos}a_\theta\big),$$

onde os índices θ e ϕ referem-se aos ângulos polar e azimutal, respectivamente. Para o operador de medição de spin, temos $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$, tal que σ_i é a matriz de Pauli. Se expressamos os estados $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$ no eixo z na base de Pauli, temos que o efeito da atuação de cada matriz em cada estado é dado por

$$\begin{aligned}
\sigma_x \left|(\uparrow,\downarrow)\right\rangle &= \left|(\downarrow,\uparrow)\right\rangle, \\
\sigma_y \left|(\uparrow,\downarrow)\right\rangle &= i\left|(\downarrow,-\uparrow)\right\rangle, \\
\sigma_z \left|(\uparrow,\downarrow)\right\rangle &= \left|(\uparrow,-\downarrow)\right\rangle.
\end{aligned}$$

Com isso, podemos verificar o efeito da atuação de $\vec{\sigma}\cdot\hat{a}$ no estado $|(\uparrow,\downarrow)\rangle$, a saber

$$\begin{aligned}
\vec{\sigma}\cdot\hat{a}\left|(\uparrow,\downarrow)\right\rangle &= \big(\text{sen}a_\theta \text{cos}a_\theta \sigma_x + \text{sen}a_\theta \text{sen}a_\phi \sigma_y + \text{cos}a_\theta \sigma_z\big)\left|(\uparrow,\downarrow)\right\rangle, \\
\vec{\sigma}\cdot\hat{a}\left|(\uparrow,\downarrow)\right\rangle &= \text{sen}a_\theta \text{cos}a_\theta \left|(\downarrow,\uparrow)\right\rangle + i\text{sen}a_\theta \text{sen}a_\phi \left|(\downarrow,-\uparrow)\right\rangle + \text{cos}a_\theta \left|(\uparrow,-\downarrow)\right\rangle.
\end{aligned}$$

Para calcular a média $\langle\vec{\sigma}\cdot\vec{a}\rangle$, temos que fazer a multiplicação dos *bra*'s $\langle(\uparrow,\downarrow)|$ e $\langle(\downarrow,\uparrow)|$. Primeiramente, fazendo o produto para o *bra* $\langle(\uparrow,\downarrow)|$, temos

$$\left\langle(\uparrow,\downarrow)\right| \vec{\sigma}\cdot\hat{a}\left|(\uparrow,\downarrow)\right\rangle = \pm\text{cos}a_\theta,$$

o sinal + refere-se ao lado esquerdo de $|(\uparrow,\downarrow)\rangle$ e o $-$, ao lado direito. Agora, realizando o produto para o *bra* $\langle(\downarrow,\uparrow)|$, temos

$$\left\langle(\downarrow,\uparrow)\right| \vec{\sigma}\cdot\hat{a}\left|(\uparrow,\downarrow)\right\rangle = \text{sen}a_\theta\big(\text{cos}a_\theta \pm i\text{sen}a_\phi\big) = \text{sen}a_\theta e^{\pm i a_\phi}.$$

Assim, tomando o produto $\vec{\sigma}_1\cdot\hat{a}$ e $\vec{\sigma}_2\cdot\hat{c}'$ e tomando a média para o estado $|\psi\rangle$, temos

$$\begin{aligned}
\langle\vec{\sigma}_1\cdot\hat{a}\vec{\sigma}_2\cdot\hat{c}'\rangle &= \Big(\alpha_1\langle\uparrow\uparrow| + \alpha_2\langle\downarrow\downarrow|\Big)\vec{\sigma}_1\cdot\hat{a}\vec{\sigma}_2\cdot\hat{c}'\Big(\alpha_1|\uparrow\uparrow\rangle + \alpha_2|\downarrow\downarrow\rangle\Big), \\
\langle\vec{\sigma}_1\cdot\hat{a}\vec{\sigma}_2\cdot\hat{c}'\rangle &= \alpha_1^2\langle\uparrow|\vec{\sigma}_1\cdot\hat{a}|\uparrow\rangle\langle\uparrow|\vec{\sigma}_2\cdot\hat{c}'|\uparrow\rangle + \alpha_2^2\langle\downarrow|\vec{\sigma}_1\cdot\hat{a}|\downarrow\rangle\langle\downarrow|\vec{\sigma}_2\cdot\hat{c}'|\downarrow\rangle + \\
&\quad +\alpha_1\alpha_2\Big(\langle\uparrow|\vec{\sigma}_1\cdot\hat{a}|\downarrow\rangle\langle\uparrow|\vec{\sigma}_2\cdot\hat{c}'|\downarrow\rangle + \langle\downarrow|\vec{\sigma}_1\cdot\hat{a}|\uparrow\rangle\langle\downarrow|\vec{\sigma}_2\cdot\hat{c}'|\uparrow\rangle\Big), \\
\langle\vec{\sigma}_1\cdot\hat{a}\vec{\sigma}_2\cdot\hat{c}'\rangle &= \big(\alpha_1^2+\alpha_2^2\big)\text{cos}a_\theta\text{cos}c'_\theta + \alpha_1\alpha_2\Big[\text{sen}a_\theta\text{sen}c'_\theta e^{-i\left(a_\phi+c'_\phi\right)} + \text{sen}a_\theta\text{sen}c'_\theta e^{i\left(a_\phi+c'_\phi\right)}\Big], \\
\langle\vec{\sigma}_1\cdot\hat{a}\vec{\sigma}_2\cdot\hat{c}'\rangle &= \text{cos}a_\theta\text{cos}c'_\theta + 2\alpha_1\alpha_2\text{sen}a_\theta\text{sen}c'_\theta\text{cos}\left(a_\phi+c'_\phi\right).
\end{aligned}$$

Para efeito de maximização de (4.62), devemos também buscar a maximização do termo acima. Observamos que podemos utilizar a maximização de funções trigonométricas na expressão acima dado que a mesma é escrita em termos de funções senoidais. Tomando a

maximização para o ângulo a_θ, temos que

$$\mathbf{max}\left\langle \vec{\sigma}_1 \cdot \hat{a}\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{c}' \right\rangle = \left(\cos^2 c'_\theta + 4\alpha_1^2\alpha_2^2 \mathrm{sen}^2 c'_\theta \cos^2\left(a_\phi + c'_\phi\right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

Observando a expressão acima, temos que esta ainda possui um máximo, com a condição $a_\phi = -c'_\phi$, assim, temos finalmente

$$\mathbf{max}\left\langle \vec{\sigma}_1 \cdot \hat{a}\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{c}' \right\rangle = \left(\cos^2 c'_\theta + 4\alpha_1^2\alpha_2^2 \mathrm{sen}^2 c'_\theta \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.63}$$

Analogamente para $\langle \vec{\sigma}_1 \cdot \hat{a}'\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{c} \rangle$, vem

$$\mathbf{max}\left\langle \vec{\sigma}_1 \cdot \hat{a}'\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{c} \right\rangle = \left(\cos^2 c_\theta + 4\alpha_1^2\alpha_2^2 \mathrm{sen}^2 c_\theta \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.64}$$

Assim, a expressão que maximiza (4.62) é dada por

$$\mathbf{max}\varepsilon = 2\left[\cos^2 c_\theta + \cos^2 c'_\theta + 4\alpha_1^2\alpha_2^2 \left(\mathrm{sen}^2 c_\theta + \mathrm{sen}^2 c'_\theta \right) \right]^{\frac{1}{2}} \tag{4.65}$$

Finalmente, observamos que $\hat{c}$ e $\hat{c}'$ devem obedecer a relação $\hat{c} \cdot \hat{c}' = 0$, assim, temos

$$\begin{gathered} \left(\mathrm{sen}c_\theta \mathrm{cos}c_\theta, \mathrm{sen}c_\theta \mathrm{sen}c_\phi, \mathrm{cos}c_\theta\right) \cdot \left(\mathrm{sen}c'_\theta \mathrm{cos}c'_\theta, \mathrm{sen}c'_\theta \mathrm{sen}c'_\phi, \mathrm{cos}c'_\theta\right) = 0, \\ \mathrm{sen}c_\theta \mathrm{sen}c'_\theta \mathrm{cos}(c_\phi - c'_\phi) + \mathrm{cos}c_\theta \mathrm{cos}c'_\theta = 0. \end{gathered}$$

Resolvendo para $\cos c'_\theta$ e aplicando em (4.65), temos que a expressão se maximiza para $c_\phi = c'_\phi$. Assim, temos

$$\begin{gathered} \cos\left(c_\theta - c'_\theta\right) = 0, \\ \Rightarrow c_\theta = c'_\theta + \frac{(2n-1)\pi}{2}, \\ \cos^2 c_\theta = \mathrm{sen}^2 c'_\theta. \end{gathered}$$

Aplicando tal condição em (4.65), temos finalmente que

$$\begin{gathered} \mathbf{max}\varepsilon = 2\left(1 + 4\alpha_1^2\alpha_2^2\right)^{\frac{1}{2}}, \\ \mathbf{max}\varepsilon = 2\left(1 + C^2\right)^{\frac{1}{2}}, \end{gathered} \tag{4.66}$$

Aqui, verificamos como a concorrência relaciona-se com emaranhamento: se C for nulo, temos que $\mathbf{max}\varepsilon = 2$, indicando que a identidade CHSH jamais será quebrada para tal sistema. Para um sistema com alguma concorrência, observamos que o sistema em questão pode possuir emaranhamento, uma vez que para qualquer $C > 0$, temos que a identidade

CHSH é quebrada. Assim, a existência de concorrência entre estados bipartidos indica emaranhamento, e seu valor maximal indica o grau máximo de emaranhamento.

Aqui, realizamos um longo caminho para definir propriamente a concorrência, a fim de analisar e quantificar o emaranhamento entre sistemas bipartidos. De fato, alguns experimentos já realizarem medição direta da concorrência em microcavidades óticas[103] e a elaboração de protocolos para medição daquela em sistemas óticos e atômicos[104]. Em particular, seguindo nosso desenvolvimento, exploraremos a concorrência entre um elétron e um buraco, este último criado à partir de um processo de espalhamento, como veremos na secção seguinte.

4.3 Emaranhamento pela Estatística.

Até aqui, estabelecemos vários conceitos importantes que caracterizam fundamentalmente a mecânica quântica. Trabalhamos o paradoxo apontado por Einstein, Podolski e Rosen, o que deflagrou o emaranhamento quântico. Logo em seguida, pudemos quantificar o emaranhamento à partir da concorrência, que permite calcular a entropia de um dado sistema. Agora, mostraremos a concorrência entre um par elétron-buraco, resultantes de um processo de espalhamento. Tal tratamento irá permitir que expressemos a concorrência em termos das funções de correlação do sistema, isso terá como consequência expressar o emaranhamento à partir da estatística do último. Assim, iniciaremos esta secção, desenvolvendo o mesmo procedimento devido a C. Beenakker *et al.* para a formação de pares[105].

4.3.1 Produção de Pares Emaranhados.

Vimos que a primeira detecção de estados emaranhados foi realizada tomando luz espalhada por um *beam splitter*[84, 85]. Com efeito, mais tarde foi provado que o emaranhamento de fótons pode ser descrito por intermédio da ótica linear usual[106] em um *beam splitter*, que essencialmente não requer mais que 1 fóton para detectar o emaranhamento[107, 108].

Contudo, não é possível fazer uma analogia direta no tratamento de emaranhamento com elétrons, uma vez que, quando o elétron está em um terminal de propagação, aquele está em equilíbrio com um reservatório térmico acoplado ao guia[40], o que impede de haver emaranhamento, pois a não-classicalidade é um pré-requisito para tanto[109, 110], dado que emaranhamento é um efeito puramente quântico. Por essa razão, propostas que abordam a questão do emaranhamento de elétrons geralmente partem de um estado composto de Fock relativo ao spin do elétron. Essas propostas apresentam-se muito promissoras para a medição de emaranhamento, dado que o tempo para *dephasing*, *i.e.*; o tempo para perda de coerência, dos estados de spin é relativamente longo(na ordem de

μs). Ainda sim, o desafio para reproduzir o par do *gedankenexperiment* do paradoxo EPR, (4.5), ainda existe, uma vez que para tal procedimento, sempre recorre-se à interação, quer por um supercondutor(pela reflexão de Andreev)[111], quer por interação coulombiana; fazendo um par de elétrons interagirem inserindo-os em uma cavidade mesoscópica[112], ou mesmo pela interação de troca[113].

Por outro lado, uma forma alternativa de avaliar o emaranhamento fermiônico, livre de interação, é entre o par elétron-buraco, cujo emaranhamento é avaliado exclusivamente através do problema de espalhamento. O aparato consiste em uma estrutura condutora bidimensional, os elétrons presentes nessa estrutura obedecem a distribuição de Fermi-Dirac, no entanto, se aplicamos um forte campo magnético perpendicular à estrutura, teremos uma distribuição distinta. Classicamente, a carga orbitaria circularmente em torno do campo, no entanto, essas órbitas são quantizadas, adicionando, assim, um grau de liberdade nos níveis de energia do elétron, chamados de níveis de Landau[114]. O fato mais interessante é que os elétrons na borda da estrutura irão propargar-se ao longo desta, chamamos esse de estados de borda[3], e nos referimos ao meio de propagação como canal de borda[4]. Se ajustarmos a energia de Fermi entre dois níveis consecutivos de Landau, os elétrons na energia de Fermi serão exclusivamente de estados de borda, o que viabiliza o transporte de elétrons[115], como podemos ver na Figura 4.2.

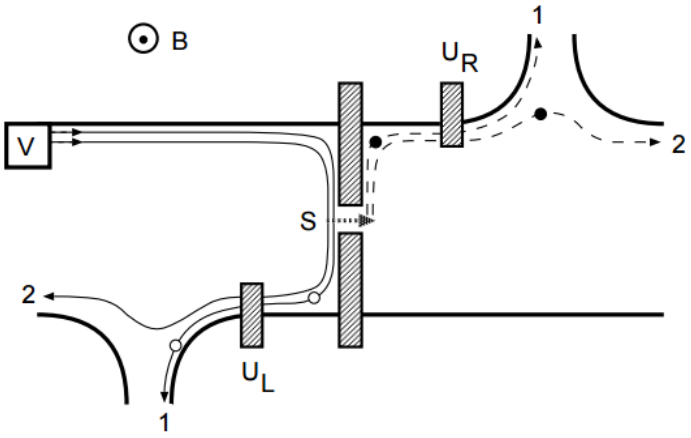


Figura 4.2: Aparato para produção de pares emaranhados: por C. W. J. Beenakker [105]

Na Figura 4.2, V é um potencial ajustável e os quadrados sombreados são barreiras de potencial couloumbiano. Se ajustarmos eV suficientemente próximo de E_F para o nível de Landau adequado, poderemos retirar um par de elétrons do reservatório. Ao adentrar no sistema, os elétrons propagam-se por diferentes canais de borda, até o ponto em que o par chega em um *split gate*, descrito por uma matriz de espalhamento S. Caso seja transmitido para a parte da direita, um dos elétrons deixa um buraco propagando-se para a esquerda. Caso a transmissão não ocorra, consideramos o estado resultante dado por

[3]Tradução livre de "*edge states*".
[4]Tradução livre de "*edge channel*".

um estado de vácuo, $|0\rangle$. O emaranhamento se dá quando o elétron transmitido pelo *split gate*, para o mesmo nível de Landau na metade da direita do aparato, encontra um *gate*, U_R, a fim de "misturar" os canais de borda, essa mistura apaga a informação sobre o canal de borda em que o elétron estava sendo propagado. Isso é necessário, pois, se medíssemos o elétron antes do *gate*, teríamos um ganho de informação devido ao caminho tomado pelo elétron, o que acarretaria na quebra de emaranhamento com o buraco. Este último, por sua vez, irá encontrar outro *gate*, U_L, isso acarreta na criação de emaranhamento entre o elétron e o buraco, $1/\sqrt{2}(|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle)$, onde a seta da esquerda refere-se ao spin do buraco, e o da direita, do elétron. Agora, verificaremos as características do emaranhamento entre o par elétron-buraco.

Vamos implementar a mesma notação utilizada em [105]. Tomando o estado inicial $|\Psi_{\text{in}}\rangle$ formado por dois elétrons, com energia Θ, transportados pelos canais de borda. Temos que ambos estão em níveis de Landau degenerados pelo *spin*, assim, podemos escrever o estado inicial por intermédio dos operadores de criação atuando no estado de vácuo

$$|\Psi_{\text{in}}\rangle = \prod_{0<\Theta<eV} \hat{a}^{\dagger}_{\text{in},1}(\Theta)\hat{a}^{\dagger}_{\text{in},2}(\Theta)\,|0\rangle\,, \tag{4.67}$$

onde o índice $i = 1$ indica o spin para cima, e $i = 2$, para baixo. Além disso, o produtório assimila valores para a energia, tal que $\Theta > 0$, pois somente os elétrons acima da energia de Fermi contribuirão para o transporte. Para contemplar o espalhamento para a parte direita do aparato, introduzimos um operador de criação $\hat{b}^{\dagger}_i$, que cria um elétron transmitido para a direita no respectivo nível de Landau com spin i. Para tanto, reescrevemos (4.67) tal que

$$|\Psi_{\text{in}}\rangle = \prod_{0<\epsilon<eV} \begin{pmatrix} \hat{a}^{\dagger}_{\text{in},1} \\ \hat{a}^{\dagger}_{\text{in},2} \\ \hat{b}^{\dagger}_{\text{in},1} \\ \hat{b}^{\dagger}_{\text{in},2} \end{pmatrix}^{T} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}^{\dagger}_{\text{in},1} \\ \hat{a}^{\dagger}_{\text{in},2} \\ \hat{b}^{\dagger}_{\text{in},1} \\ \hat{b}^{\dagger}_{\text{in},2} \end{pmatrix} |0\rangle\,,$$

$$|\Psi_{\text{in}}\rangle = \prod_{0<\epsilon<eV} \begin{pmatrix} \hat{a}^{\dagger}_{\text{in}} \\ \hat{b}^{\dagger}_{\text{in}} \end{pmatrix}^{T} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sigma_x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}^{\dagger}_{\text{in}} \\ \hat{b}^{\dagger}_{\text{in}} \end{pmatrix} |0\rangle\,, \tag{4.68}$$

onde introduzimos os vetores coluna

$$(a,b)^{\dagger}_{\text{in}} = \begin{pmatrix} (a,b)^{\dagger}_{\text{in},1} \\ (a,b)^{\dagger}_{\text{in},2} \end{pmatrix}. \tag{4.69}$$

Agora, para descrever o processo de espalhamento, novamente introduzimos uma matriz que irá relacionar os operadores antes de interagir com o *split gate*, $\hat{a}_{\text{in}}$ e $\hat{b}_{\text{in}}$, com os operaores que contemplam o caso após a interação, $\hat{a}_{\text{ou}}$ e $\hat{b}_{\text{out}}$. Já sabemos que tal matriz

é a própria matriz de espalhamento, a saber

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{\text{out}} \\ b_{\text{out}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{\text{in}} \\ b_{\text{in}} \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} r^\dagger & t^\dagger \\ t'^\dagger & r'^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{\text{out}} \\ b_{\text{out}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a}_{\text{in}} \\ b_{\text{in}} \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} \hat{a}^\dagger_{\text{in}} \\ b^\dagger_{\text{in}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^T & t^T \\ t'^T & r'^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}^\dagger_{\text{out}} \\ b^\dagger_{\text{out}} \end{pmatrix}. \tag{4.70}$$

Por conservação de corrente de probabilidade, utilizamos a propriedade de unitariedade da matriz de espalhamento para reescrever a equação de espalhamento na forma (4.70). Essa forma é mais interessante, pois se substituirmos em (4.68), teremos o estado inicial $|\Psi_{\text{in}}\rangle$ dado pelas amplitudes após a interação com o *split gate*, assim, o estado deve ser renomeado para um estado de saída $|\Psi_{\text{out}}\rangle$, portanto, substituindo (4.70), temos

$$|\Psi_{\text{out}}\rangle = \prod_{0<\Theta<eV} \begin{pmatrix} \hat{a}^\dagger_{\text{out}} \\ \hat{b}^\dagger_{\text{out}} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sigma_x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^T & t^T \\ t'^T & r'^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}^\dagger_{\text{out}} \\ \hat{b}^\dagger_{\text{out}} \end{pmatrix} |0\rangle,$$
$$|\Psi_{\text{out}}\rangle = \prod_{0<\Theta<eV} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \hat{a}^\dagger_{\text{out}} \\ \hat{b}^\dagger_{\text{out}} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} r\sigma_x r^T & r\sigma_x t^T \\ t\sigma_x r^T & t\sigma_x t^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}^\dagger_{\text{out}} \\ \hat{b}^\dagger_{\text{out}} \end{pmatrix} |0\rangle,$$
$$|\Psi_{\text{out}}\rangle = \prod_{0<\Theta<eV} \frac{1}{2} \left[(\hat{a}^\dagger_{\text{out}})^T r\sigma_x r^T \hat{a}^\dagger_{\text{out}} + (\hat{a}^\dagger_{\text{out}})^T r\sigma_x t^T \hat{b}^\dagger_{\text{out}} + (\hat{b}^\dagger_{\text{out}})^T t\sigma_x r^T \hat{a}^\dagger_{\text{out}} + (\hat{b}^\dagger_{\text{out}})^T t\sigma_x t^T \hat{b}^\dagger_{\text{out}} \right] |0\rangle,$$
$$|\Psi_{\text{out}}\rangle = \prod_{0<\Theta<eV} \frac{1}{2} \left[(\hat{a}^\dagger_{\text{out}})^T r\sigma_x r^T \hat{a}^\dagger_{\text{out}} + (\hat{a}^\dagger_{\text{out}})^T r\sigma_x t^T \hat{b}^\dagger_{\text{out}} + \left((\hat{a}^\dagger_{\text{out}})^T r\sigma_x t^T \hat{b}^\dagger_{\text{out}} \right)^T + (\hat{b}^\dagger_{\text{out}})^T t\sigma_x t^T \hat{b}^\dagger_{\text{out}} \right] |0\rangle,$$
$$|\Psi_{\text{out}}\rangle = \prod_{0<\Theta<eV} \left\{ (\hat{a}^\dagger_{\text{out}})^T r\sigma_x t^T \hat{b}^\dagger_{\text{out}} + \frac{1}{2} \left[(\hat{a}^\dagger_{\text{out}})^T r\sigma_x r^T \hat{a}^\dagger_{\text{out}} + (\hat{b}^\dagger_{\text{out}})^T t\sigma_x t^T \hat{b}^\dagger_{\text{out}} \right] \right\} |0\rangle, \tag{4.71}$$

onde utilizamos o fato que o segundo e o terceiro termo da terceira linha são absolutamente iguais, pois cada termo nada mais é que um operador acompanhado de entradas da matriz de espalhamento, não matrizes realmente.

Faremos uma álgebra rápida para trabalhar melhor os outros termos no colchete de (4.71). Assumindo uma forma qualquer para a matriz r, temos para o primeiro termo no

colchete

$$r\sigma_x r^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

$$r\sigma_x r^T = \begin{pmatrix} 2ab & ad+bc \\ ad+bc & 2cd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow (\hat{a}^\dagger_{\text{out}})^T r\sigma_x r^T \hat{a}^\dagger_{\text{out}} = \begin{pmatrix} \hat{a}^\dagger_{\text{out},1} \\ \hat{a}^\dagger_{\text{out},2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{a}^\dagger_{\text{out},1} \\ \hat{a}^\dagger_{\text{out},2} \end{pmatrix},$$

$$(\hat{a}^\dagger_{\text{out}})^T r\sigma_x r^T \hat{a}^\dagger_{\text{out}} = a'\hat{a}^\dagger_{\text{out},1}\hat{a}^\dagger_{\text{out},1} + 2b'\hat{a}^\dagger_{\text{out},1}\hat{a}^\dagger_{\text{out},2} + c'\hat{a}^\dagger_{\text{out},2}\hat{a}^\dagger_{\text{out},2}. \tag{4.72}$$

Observamos, pois, que as matrizes sanduichadas pelos operadores no colchete, além de simétricas, fornecem combinações de operadores com mesmo índice, tal combinação, quando atuando no estado de vácuo, não forma um par, pois, dois elétrons estariam compartilhando o mesmo estado, isso não é possível, de acordo com o princípio de exclusão de Pauli, assim, tais termos devem ser eliminados. Aplicando tal fato em (4.71), temos

$$|\Psi_{\text{out}}\rangle = \prod_{0<\Theta<eV} \left\{ (\hat{a}^\dagger_{\text{out}})^T r\sigma_x t^T \hat{b}^\dagger_{\text{out}} + \left[r\sigma_x r^T\right]_{12} \hat{a}^\dagger_{\text{out},1}\hat{a}^\dagger_{\text{out},2} + \left[t\sigma_x t^T\right]_{12} \hat{b}^\dagger_{\text{out},1}\hat{b}^\dagger_{\text{out},2} \right\} |0\rangle \tag{4.73}$$

Como podemos observar, o primeiro termo da expressão acima aborda um elétron que foi refletido para a esquerda do aparato, e o outro, transmitido para a direita, ocasionando na criação de um buraco que propaga-se juntamente com o elétron refletido para a esquerda, por essa razão, podemos redefinir o operador $\hat{a}^\dagger \to \hat{c}_i$, onde $\hat{c}_i$ é o operador de aniquilação do mar de Dirac que cria um buraco na esquerda do aparato. Nesse cenário, podemos considerar $\hat{a}^\dagger_{\text{out},1}\hat{a}^\dagger_{\text{out},2}|0\rangle$ como o novo estado de vácuo, dado que esse não contempla a criação de nenhum buraco no lado esquerdo. Outrossim, considerando um sistema de baixa transmissão pelo *split gate*, que consiste no caso ressonante, podemos desconsiderar o último termo, assim, teremos

$$|\Psi_{\text{out}}\rangle = \prod_{0<\Theta<eV} \left\{ \hat{c}^{\text{T}}_{\text{out}} r\sigma_x t^T \hat{b}^\dagger_{\text{out}} + \left[r\sigma_x r^T\right]_{12} \hat{a}^\dagger_{\text{out},1}\hat{a}^\dagger_{\text{out},2} \right\} |0\rangle,$$

$$|\Psi_{\text{out}}\rangle = \prod_{0<\Theta<eV} \left\{ \hat{c}^{\text{T}}_{\text{out}} \gamma \hat{b}^\dagger_{\text{out}} + \sqrt{1-w}\hat{a}^\dagger_{\text{out},1}\hat{a}^\dagger_{\text{out},2} \right\} |0\rangle,$$

$$|\Psi_{\text{out}}\rangle = \prod_{0<\Theta<eV} \sqrt{w}\,|\Phi\rangle + \sqrt{1-w}\,|0\rangle, \tag{4.74}$$

onde definimos $\gamma = r\sigma_x t^T$, veremos a seguir que é essa quantidade responsável pelo emaranhamento do par elétron-buraco. Também definimos o estado que contempla um

par elétron-buraco propagados nos canais de borda

$$|\Phi\rangle = w^{-\frac{1}{2}} \hat{c}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{out}} \gamma \hat{b}^{\dagger}_{\mathrm{out}} |0\rangle , \tag{4.75}$$

onde w é o fator de normalização do estado, podemos encontrá-lo tomando a forma mais explícita de $|\Phi\rangle$ expandindo o produto $\hat{c}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{out}} \gamma \hat{b}^{\dagger}_{\mathrm{out}}$ e escrevendo em termos da base $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle |11\rangle\}$, temos

$$\begin{aligned} |\Phi\rangle = w^{-\frac{1}{2}} \Big[\gamma_{11} c_{\mathrm{out},1} b^{\dagger}_{\mathrm{out},1} + \gamma_{12} c_{\mathrm{out},1} b^{\dagger}_{\mathrm{out},2} + \gamma_{21} c_{\mathrm{out},2} b^{\dagger}_{\mathrm{out},1} + \gamma_{22} c_{\mathrm{out},2} b^{\dagger}_{\mathrm{out},2} \Big] |0\rangle , \\ |\Phi\rangle = w^{-\frac{1}{2}} \Big[\gamma_{11} |00\rangle + \gamma_{12} |01\rangle + \gamma_{21} |10\rangle + \gamma_{22} |11\rangle \Big]. \end{aligned} \tag{4.76}$$

Assim, por um cálculo direto, temos que o fator w será pela soma do módulo ao quadrado de cada termo de γ, portanto, temos que

$$\begin{aligned} w = |\gamma_{11}|^2 + |\gamma_{12}|^2 + |\gamma_{21}|^2 + |\gamma_{22}|^2, \\ w = \mathrm{Tr}\left[\gamma \gamma^{\dagger}\right]. \end{aligned} \tag{4.77}$$

Observamos também que o elétron e o buraco, representados no estado $|\Phi\rangle$, estão expressos de forma que podemos calcular o emaranhamento existente nesse estado através da concorrência. De fato, calculando o estado $|\tilde{\Phi}\rangle$, dado pela operação de *spin-flip*, $\sigma_y |0, 1\rangle = i |1, -0\rangle$, temos

$$|\tilde{\Phi}\rangle = i w^{-\frac{1}{2}} \Big[\gamma^{*}_{11} |11\rangle - \gamma^{*}_{12} |10\rangle - \gamma^{*}_{21} |01\rangle + \gamma^{*}_{22} |00\rangle \Big]. \tag{4.78}$$

Assim, podemos calcular a concorrência entre o elétron e o buraco por (4.55) calculando

o produto entre o *ket* (4.76) e o *bra* (4.78), a saber

$$
\begin{aligned}
C(\Phi) &= |\,\langle\tilde{\Phi}|\Phi\rangle\,|,\\
C(\Phi) &= 2w^{-1}\,|\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}\gamma_{21}|\,,\\
C(\Phi) &= 2w^{-1}\sqrt{\left(\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}\gamma_{21}\right)\left(\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}\gamma_{21}\right)^{*}},\\
C(\Phi) &= 2w^{-1}\sqrt{\mathrm{Det}\gamma\mathrm{Det}\gamma^{\dagger}},\\
C(\Phi) &= \frac{2\sqrt{\mathrm{Det}\gamma\gamma^{\dagger}}}{\mathrm{Tr}\gamma\gamma^{\dagger}},\\
C(\Phi) &= \frac{2\sqrt{\mathrm{Det}\left(r\sigma_x t^{\mathrm{T}}\right)\left(r\sigma_x t^{\mathrm{T}}\right)^{\dagger}}}{\mathrm{Tr}\left(r\sigma_x t^{\mathrm{T}}\right)\left(r\sigma_x t^{\mathrm{T}}\right)^{\dagger}},\\
C(\Phi) &= \frac{2\sqrt{\mathrm{Det}\left(rr^{\dagger}\right)\mathrm{Det}\left(tt^{\dagger}\right)^{\mathrm{T}}}}{\mathrm{Tr}\left(r\sigma_x t^{\mathrm{T}}t^{*}\sigma_x r^{\dagger}\right)},\\
C(\Phi) &= \frac{2\sqrt{\mathrm{Det}\left(\mathbb{I}-tt^{\dagger}\right)\mathrm{Det}\left(tt^{\dagger}\right)^{\mathrm{T}}}}{\mathrm{Tr}\left[\sigma_x\left(\mathbb{I}-tt^{\dagger}\right)\sigma_x\left(tt^{\dagger}\right)^{\mathrm{T}}\right]},
\end{aligned}
\tag{4.79}
$$

onde utilizamos a propriedade distributiva do determinante, cíclica do traço e o vínculo da matriz de espalhamento $SS^{\dagger}=\mathbb{I}$. Observamos que a nossa expressão reduziu-se à dependência dos termos de transmissão, $tt^{\dagger}$. Sempre é possível substituir a matriz $tt^{\dagger}$ para a matriz diagonal de seus autovalores T_1 e T_2, que são precisamente a probabilidade de transmissão da esquerda do terminal de entrada para a direita, parao canal 1 e 2, respectivamente. Assim, temos a matriz de autovalores de transmissão

$$
tt^{\dagger}=\begin{pmatrix} T_1 & 0\\ 0 & T_2\end{pmatrix}. \tag{4.80}
$$

Efetivamente, isso consiste em expressar as matrizes na base dos autovalores de transmissão, daí a matriz diagonal. Além disso, É importante notar que $tt^{\dagger}=\left(tt^{\dagger}\right)^{\mathrm{T}}$ e

$$
\sigma_x\left(\mathbb{I}-tt^{\dagger}\right)\sigma_x tt^{\dagger}=\begin{pmatrix}(1-T_1)T_2 & 0\\ 0 & (1-T_2)T_1\end{pmatrix} \tag{4.81}
$$

Aplicando (4.80) e (4.81) em (4.79), temos finalmente

$$
\begin{aligned}
C(\Phi) &= \frac{2\sqrt{T_1T_2(1-T_1)(1-T_2)}}{T_1+T_2-2T_1T_2},\\
C(\Phi) &= \frac{2\sqrt{T_1T_2}}{T_1+T_2},
\end{aligned}
\tag{4.82}
$$

onde utilizamos a condição de regime ressonante assumindo a baixa transmissividade em (4.74). Um resultado muito importante é quando $T_1=T_2$, temos que $C(\Phi)=1$, *i.e.*,

quando a taxa de transmissão para o lado direito da estrutura for igual para os dois canais, temos que a concorrência é máxima, isso acontece porque os canais de propagação que representam o spin do elétron possuem a mesma probabilidade de ocorrência, acarretando no estado de Bell $1/\sqrt{2}(|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle)$, que é maximamente emaranhado, como vimos em (4.57).

A expressão (4.82) informa o grau de emaranhamento dado a probabilidade de ocupação do spin, representado pela taxa de transmissão para um dado canal em uma estrutura eletrônica. Como vimos no capítulo 2, isso indica que o emaranhamento pode ser tratado em termos de correlações. Para tanto, devemos construir a probabilidade $P(\vec{a},\vec{b})$ para o caso do espalhamento do sistema da Figura 4.2, para tanto, podemos expressar os canais de spin, para o espalhamento de duas partículas, utilizando o estado bipartido (4.49) e construir um operador de medição análogo à (4.16). Qualquer medição no estado, resultaria em um estado com uma diferença de fase, que pode ser inserida nas amplitudes de probabilidade, assim, teremos a probabilidade não-normalizada dada por

$$\begin{aligned}
P(\vec{a},\vec{b}) &= \frac{\langle\psi|\hat{S}(\vec{a},\vec{b})|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}, \\
P(\vec{a},\vec{b}) &= \frac{|\alpha_{++}|^2 + |\alpha_{--}|^2 - |\alpha_{-+}|^2 - |\alpha_{+-}|^2}{|\alpha_{++}|^2 + |\alpha_{--}|^2 + |\alpha_{-+}|^2 + |\alpha_{+-}|^2}, \\
P(\vec{a},\vec{b}) &= \frac{S_{++} + S_{--} - S_{-+} - S_{+-}}{S_{++} + S_{--} + S_{-+} + S_{+-}}, \\
P(\vec{a},\vec{b}) &= \frac{S_{11} + S_{22} - S_{21} - S_{12}}{S_{11} + S_{22} + S_{21} + S_{12}}.
\end{aligned} \tag{4.83}$$

Na segunda linha, utilizamos os autovalores do operador de spin atuando no estado bipartido. Na terceira linha, utilizamos a discussão do capítulo 2, onde identificamos as amplitudes do estado bipartido (2.49) como as funções correlações. Na última linha, utilizamos os índices que representam os canais de spin do sistema da Figura 4.2.

Na referência [105], para contemplar o processo de espalhamento do sistema da Figura 4.2, foi utilizado a equação de correlação de Büttiker[40] no limite de temperatura zero, podemo rescrevê-la em termos das entradas da matriz de espalhamento (4.70), assim, temos a expressão para a correlação entre o canal i e j, a saber

$$S_{ij} = -\frac{e^3 V}{\mathrm{h}} \left| \left(rt^\dagger\right)_{ij} \right|^2. \tag{4.84}$$

Então, de fato, ao encontrar o lado esquerdo da idendidade CHSH, em (4.27), é possível maximizar a mesma, em seguida, verificar a relação (4.66). Isso confirma de fato que a estrutura da Figura 4.2 emaranha os pares elétron-buraco quando ocorre a transissão apenas de 1 elétron. Aqui, pretendemos realizar uma proposta similar, no entanto, introduzindo canais de spin e um sistema com mais terminas. Então, aplicaremos as equações de correlação deste trabalho para calcular o emaranhamento.

4.3.2 Emaranhamento pelas Equações de Correlação.

Vamos adotar um sistema ligeiramente diferente da Figura 4.2, embora, adotemos absolutamente a mesma técnica para o transporte de elétrons na nanoestrutura. Para implementarmos tal procedimento, utilizando as equações de correlação, devemos primeiramente acoplar mais terminais ao ponto quântico em que iremos realizar o espalhamento de dois elétrons, para em seguida analisar os casos em que há a transmissão, e a reflexão, de um elétron em cada terminal. O sistema que propomos está esboçado na Figura 4.3.

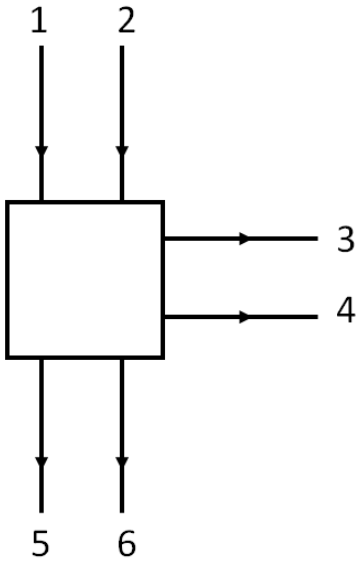


Figura 4.3: Aparato HBT para produção de pares emaranhados.

É importante notar que o sistema é balístico e, com os devidos ajustes do aparato, podemos dividir o feixe em probabilidades iguais para os outros terminais, o que configura um aparato HBT de 6 terminais: 2 de entrada e 4 de saída. Para estabelecer a analogia com o sistema anterior, vamos considerar o espalhamento dos elétrons para os terminais 3 e 4 como reflexão. Com isso, podemos construir o problema de espalhamento do sistema acima de maneira análoga ao caso (2.62), a saber

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & s_{31}^* & s_{41}^* & s_{51}^* & s_{61}^* \\ 0 & 0 & s_{32}^* & s_{42}^* & s_{52}^* & s_{62}^* \\ s_{31} & s_{32} & 0 & 0 & s_{53}^* & s_{63}^* \\ s_{41} & s_{42} & 0 & 0 & s_{54}^* & s_{64}^* \\ s_{51} & s_{52} & s_{53} & s_{54} & 0 & 0 \\ s_{61} & s_{62} & s_{63} & s_{64} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & S_{12}^\dagger & S_{13}^\dagger \\ S_{12} & 0 & S_{23}^\dagger \\ S_{13} & S_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}, \tag{4.85}$$

onde organizamos em pares as amplitudes com índice vizinho a e b nas matrizes coluna de ordem 2, A_i e B_i, e os blocos de cada terminal em matrizes de ordem 2, S_{ij}. Com efeito, se aplicarmos as entradas acima nas equações de correlação, verificaremos que só existem probabilidades de detectar as partículas nos terminais 3, 4, 5 e 6, tal como o aparato HBT, ainda que fossem acopladas barreiras nesses terminais. Esse último fato nos auxiliará para a produção de emaranhamento, uma vez que necessariamente as partículas serão detectadas nos terminais de saída e poderemos misturar os estados das partículas. Então, para implementar o emaranhamento de um buraco e um elétron, devemos misturar esses terminais por intermédio de barreiras, conforme representado na Figura 4.4.

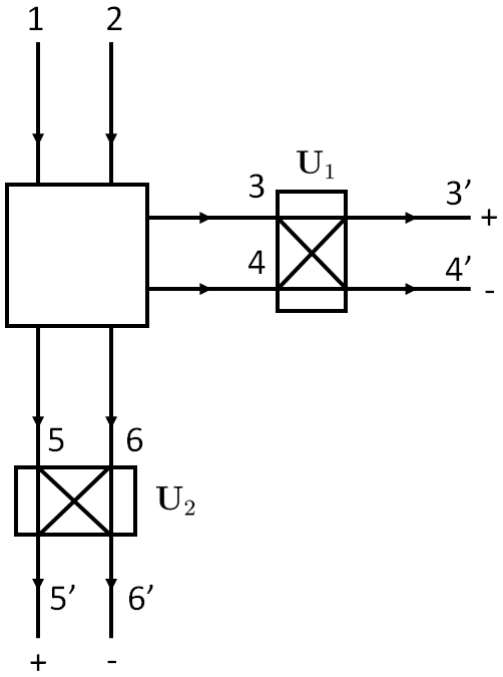


Figura 4.4: Aparato HBT para produção de pares emaranhados com barreiras.

É importante notar que já fizemos a identificação dos canais de spin a fim de construir a probabilidade $P(\vec{a}, \vec{b})$ em (4.83), no entanto, em termos das barreiras $\mathbf{U}_1$ e $\mathbf{U}_2$. Para tanto, devemos escrever o problema de espalhamento devido a cada barreira. Como as barreiras só devem misturar os terminais, assim, esta não deve possuir blocos de reflexão, assim, temos

$$\begin{pmatrix} B_2' \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_1^\dagger & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2' \\ B_2 \end{pmatrix}, \tag{4.86}$$

$$\begin{pmatrix} B_3' \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_2^\dagger & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_3' \\ B_3 \end{pmatrix}, \tag{4.87}$$

onde $\mathbf{U}_1$ e $\mathbf{U}_2$ são matrizes unitárias de ordem 2. Realizando uma substituição direta de (4.86) e (4.87) em (4.85), escrevemos o problema de espalhamento do sistema todo, a

saber

$$\begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 B_1' \\ \mathbf{U}_1^\dagger B_2' \\ \mathbf{U}_2^\dagger B_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & S_{12}^\dagger & S_{13}^\dagger \\ S_{12} & 0 & S_{23}^\dagger \\ S_{13} & S_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 A_1' \\ \mathbf{U}_1^\dagger A_2' \\ \mathbf{U}_2^\dagger A_3' \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} B_1' \\ B_2' \\ B_3' \end{pmatrix} = \mathrm{Diag}\left[\mathbb{I}_2, \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2\right] \begin{pmatrix} 0 & S_{12}^\dagger & S_{13}^\dagger \\ S_{12} & 0 & S_{23}^\dagger \\ S_{13} & S_{23} & 0 \end{pmatrix} \mathrm{Diag}\left[\mathbb{I}_2, \mathbf{U}_1^\dagger, \mathbf{U}_2^\dagger\right] \begin{pmatrix} A_1' \\ A_2' \\ A_3' \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} B_1' \\ B_2' \\ B_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & S_{12}^\dagger \mathbf{U}_1^\dagger & S_{13}^\dagger \mathbf{U}_2^\dagger \\ \mathbf{U}_1 S_{12} & 0 & \mathbf{U}_1 S_{23}^\dagger \mathbf{U}_2^\dagger \\ \mathbf{U}_2 S_{13} & \mathbf{U}_2 S_{23} \mathbf{U}_1^\dagger & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1' \\ A_2' \\ A_3' \end{pmatrix}. \tag{4.88}$$

Agora que possuimos a matriz de espalhamento, podemos utilizar as entradas da matriz nas equações de correlação e avaliar o emaranhamento do sistema acima. Assim, aplicando as equações de correlação (2.58)-(2.61) em (4.83), atentando ao fato que devemos contemplar um elétron em um terminal de reflexão e outro de transmissão, para que se crie um buraco, a saber

$$\begin{aligned} P(\vec{a}, \vec{b}) &= \frac{S_{++} + S_{--} - S_{-+} - S_{+-}}{S_{++} + S_{--} + S_{-+} + S_{+-}}, \\ P(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) &= \frac{\langle n_3 n_5 \rangle + \langle n_4 n_6 \rangle - \langle n_4 n_5 \rangle - \langle n_3 n_6 \rangle}{\langle n_3 n_5 \rangle + \langle n_4 n_6 \rangle + \langle n_4 n_5 \rangle + \langle n_3 n_6 \rangle}, \\ P(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) &= \frac{(|s_{32}|^2 - |s_{42}|^2)(|s_{51}|^2 - |s_{61}|^2) + (|s_{31}|^2 - |s_{41}|^2)(|s_{52}|^2 - |s_{62}|^2) - 2|I|^2 \mathbb{S}_-}{(|s_{32}|^2 + |s_{42}|^2)(|s_{51}|^2 + |s_{61}|^2) + (|s_{31}|^2 + |s_{41}|^2)(|s_{52}|^2 + |s_{62}|^2) - 2|I|^2 \mathbb{S}_+}, \end{aligned} \tag{4.89}$$

Ao aplicarmos as equações de correlação do sistema da Figura 4.4, reorganizamos os termos de tal modo a obtermos a equação (4.89), e definimos

$$\mathbb{S}_\pm = \mathrm{Re}[(s_{32} s_{31}^* \pm s_{42} s_{41}^*)(s_{51} s_{52}^* \pm s_{61} s_{62}^*)]. \tag{4.90}$$

Com a equação (4.89), temos a probabilidade em termos das entradas da matriz de espalhamento de qualquer sistema balístico de 6 terminais, o que vai nos permitir encontrar o emaranhamento entre o elétron e o buraco por intermédio da identidade CHSH, (4.27). Entretanto, precisamos trabalhar a expressão acima para encontrar uma forma explícita para o lado esquerdo da identidade CHSH e verificar quando ocorre a violação da mesma.

Assim, dando início ao tratamento, verificamos que a probabilidade só utiliza as entradas da primeira linha da matriz de espalhamento de (4.88). Então, vamos estabelecer

uma forma para as matrizes $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$, A e B, a saber

$$\mathbf{U}_1 = \begin{pmatrix} u_1 & u_1' \\ u_1'^* & -u_1 \end{pmatrix}, \tag{4.91}$$

$$\mathbf{U}_2 = \begin{pmatrix} u_2 & u_2' \\ u_2'^* & -u_2 \end{pmatrix}, \tag{4.92}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \tag{4.93}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}, \tag{4.94}$$

onde todas as entradas, com exceção de u_1, são complexas. As matrizes $\mathbf{U}_1$ e $\mathbf{U}_2$ possuem essa forma aparentemente específica pois estas devem obedecer a condição $\mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}$. Tomando os produto $\mathbf{U}_1 A$ e $\mathbf{U}_2 B$ por (4.91), (4.92), (4.93) e (4.94), temos

$$\mathbf{U}_1 A = \begin{pmatrix} u_1 a_1 + u_1' a_3 & u_1 a_2 + u_1' a_4 \\ u_1'^* a_1 - u_1 a_3 & u_1'^* a_2 - u_1 a_4, \end{pmatrix}, \tag{4.95}$$

$$\mathbf{U}_2 B = \begin{pmatrix} u_2 b_1 + u_2' b_3 & u_2 b_2 + u_2' b_4 \\ u_2'^* b_1 - u_2 b_3 & u_2'^* b_2 - u_2 b_4, \end{pmatrix}. \tag{4.96}$$

Antes de aplicarmos as entradas em $P(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2)$, vamos tomar $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$ e $b_1 = b_2 = b_3 = b_4$, a fim de tornarmos o problema tratável. Afinal, tomar tal simplificação, equivale a manter a fase do elétron a mesma, quer este seja transportado para os terminais de reflexão ou transmissão, o que permite manter a coerência entre os elétrons transportados.

Calculando agora os termos em (4.89) através das entradas em (4.95) e (4.96), temos

$$|s_{31}|^2 \pm |s_{41}|^2 = |s_{32}|^2 \pm |s_{42}|^2 = |a_1|^2 \left(|u_1 + u_1'|^2 \pm |u_1 - u_1'^*|^2\right), \tag{4.97}$$

$$|s_{51}|^2 \pm |s_{61}|^2 = |s_{52}|^2 \pm |s_{62}|^2 = |b_1|^2 \left(|u_2 + u_2'|^2 \pm |u_2 - u_2'^*|^2\right), \tag{4.98}$$

$$\mathbb{S}_\pm = |a_1|^2 |b_1|^2 \left(|u_1 + u_1'|^2 \pm |u_1 - u_1'^*|^2\right)\left(|u_2 + u_2'|^2 \pm |u_2 - u_2'^*|^2\right), \tag{4.99}$$

Agora, podemos aplicar (4.97)-(4.99) em (4.89), daí teremos a probabilidade

$$P(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) = \frac{\left(|u_1 + u_1'|^2 - |u_1 - u_1'^*|^2\right)\left(|u_2 + u_2'|^2 - |u_2 - u_2'^*|^2\right)\left(1 - |I|^2\right)}{\left(|u_1 + u_1'|^2 + |u_1 - u_1'^*|^2\right)\left(|u_2 + u_2'|^2 + |u_2 - u_2'^*|^2\right)\left(1 + |I|^2\right)},$$

$$P(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) = \frac{4\mathrm{Re}(u_1 u_1'^*) 4\mathrm{Re}(u_2 u_2'^*)(1 - |I|^2)}{4(1 + |I|^2)},$$

$$P(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) = \frac{(1 - |I|^2)}{4(1 + |I|^2)} \mathrm{Tr}\left(\mathbf{U}_1 \sigma_z \mathbf{U}_1 \sigma_x\right) \mathrm{Tr}\left(\mathbf{U}_2 \sigma_z \mathbf{U}_2 \sigma_x\right). \tag{4.100}$$

Na segunda linha, desenvolvemos o módulo e utilizamos a condição de unitariedade

das matrizes $\mathbf{U}_1$ e $\mathbf{U}_2$. Na terceira linha, utilizamos o fato que $\mathrm{Tr}\left(\mathbf{U}_{1,2}\sigma_z\mathbf{U}_{1,2}\sigma_x\right) = 4\mathrm{Re}(u_{1,2}u'^{*}_{1,2})$, como é possível constatar por verificação direta.

Com isso, podemos encontrar o lado esquerdo da identidade CHSH (4.59). Análogo ao caso de medidores de spin, para relacionar os misturadores, tomamos as seguintes rotações

$$\mathbf{U}'_1 = \frac{1}{2}\left(\mathbf{I}_2 + i\sigma_z\right)\mathbf{U}_1\left(\mathbf{I}_2 - i\sigma_z\right), \tag{4.101}$$

$$\mathbf{U}_2 = e^{i\sigma_y\frac{\delta}{2}}\mathbf{U}_1 e^{-i\sigma_y\frac{\delta}{2}}, \tag{4.102}$$

$$\mathbf{U}'_2 = e^{-i\sigma_y\frac{\delta}{2}}\mathbf{U}_1 e^{i\sigma_y\frac{\delta}{2}}, \tag{4.103}$$

onde δ é o ângulo de rotação. É necessário atentar que a rotação de $\mathbf{U}_2$ e $\mathbf{U}'_2$ são com respeito ao misturador que está sendo avaliado na probabilidade $P(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2)$, e não somente a $\mathbf{U}_1$, como sugere as expressões acima.

Tomando a forma explícita das matrizes acima, e com um pouco de álgebra(demonstrada no Apêndice F), temos finalmente o lado esquerdo da identidade CHSH

$$\varepsilon = \frac{8(1-|I|^2)}{(1+|I|^2)}u_1\mathrm{Re}(u'_1)\left\{u_1\mathrm{Re}(u'_1)\cos^2\delta - \mathrm{sen}\delta\left[u_1^2 - \mathrm{Re}(u'_1)^2\right]\right\}. \tag{4.104}$$

Aqui, conseguimos tomar algumas conclusões interessantes. A primeira é que para emaranharmos o par elétron-buraco, não é necessário que seus estados estejam em *overlap*, em outras palavras, é possível termos emaranhamento sem correlação, e vice-versa. Não obstante, observando a expressão acima, vemos que se o par estiver totalmente correlacionado, $I = 1$, temos como resultado a quebra de emaranhamento. Outrossim, é interessante notar a influência indireta da correlação entre os estados do par elétron-buraco no emaranhamento por intermédio da integral de *overlap*.

Outro ponto interessante para discutirmos é se tomarmos a relação $u_1 = \pm\mathrm{Re}(u'_1)$, como resultado disso, temos que para qualquer angulação entre os misturadores $\mathbf{U}_1$ e $\mathbf{U}_2$ tal que $0 \leq \delta < \pi/2$, sempre teremos um par emaranhado, a menos que seus estados estejam integralmente sobrepostos.

Se tomarmos os misturadores como as barreiras adotadas nos capítulos anteriores, observamos que a parte real da taxa de tunelamento será responsável pelo emaranhamento. Com efeito, a parte real da entrada da matriz de espalhamento informa o grau de atenuação, ou amplificação, após interação com a barreira. Uma vez que a taxa de reflexão e transmissão estejam balanceadas, teremos o emaranhamento máximo, como já era esperado.

É importante comentar que além dos sistemas das secções anteriores, temos também outros meios de definir emaranhamento pela correlação entre sistemas bipartidos, puro ou mistos, como exemplo, temos por meio da chamada Discórdia Quântica[5][116], onde avalia-se o quão uma correlação de dois sistemas é "quântica", um dos possíveis agentes do

[5]Tradução Livre de *Quantum Discord.*

quão quântica uma correlação pode ser é o próprio emaranhamento. É oportuno salientar que podemos explorar muitos outros aspectos de sistemas quânticos correlacionados pelo conceito da Discórdia Quântica, como extrair trabalho de sistemas correlacionados [117], como fonte de criptografia quântica na ausência de emaranhamento[118] e um candidato muito promissor para computação quântica, dado que aquela é mais resistente em meios dissipativos que emaranhamento[119]. O que irremediavelmente nos leva a uma pergunta: é possível descrever discórdia quântica pelas equações de correlação? Iremos explorar isto em um momento mais oportuno.

Neste capítulo, discutimos detalhadamente o fenômeno do emaranhamento. Vimos o caráter físico da informação, e sua relação com a entropia, definida no contexto da mecânica estatística. Isso permitiu com que pudéssemos explorar o conceito de emaranhamento, levantado primeiramente pelo aparente paradoxo EPR, através da chamada desigualdade de Bell e CHSH. Também, pudemos introduzir uma quantidade que avalia o grau de emaranhamento de um sistema bipartido, chamado de concorrência. Essas quantidades nos proporcionou construir um modelo de criação de pares emaranhados de um elétron e um buraco transportados em estruturas nanoscópicas. Nesse modelo, observa-se o emaranhamento tanto pela concorrência quanto pelas equações de correlação no formalismo de Büttiker, sem detalhar a fundo o último. Isso nos deu base para tomar um modelo análogo de transporte de elétrons por canais de spin, e permitiu que encontrássemos como o par elétron-buraco se emaranham nessa nova estrutura à partir das equações de correlação.

Os fatos elencados acima, juntamente com os resultados do capítulo anterior nos leva a questionar: é possível encontrar o efeito da presença de simetrias no sistema no emaranhamento via equação de correlação? Ou mesmo a relação de simetrias e informação? Novamente, em um momento oportuno, exploraremos essas perguntas com mais detalhes.

Em outras palavras, ao explorar a estatística do transporte desse sistema, pudemos verificar o fenômeno do emaranhamento. No entanto, por serem canais de spin, a estatística é bem comportada, e por vezes até previsível, devido aos princípios que norteiam o comportamento do espalhamento em si por causa do spin. Esse fato pode ser contornado se começarmos a questionar como podemos dar um grau de liberdade a mais para a estatística da partícula, e verificar o efeito disso para o sistema. E é justamente esse o foco do próximo capítulo.

Capítulo 5

Estatísticas não-usuais: anyons.

Neste capítulo, daremos início à análise a respeito de estatísticas que diferem daquelas já bem estabelecidas pela literatura(férmions e bósons). A análise de tais estatísticas é importante principalmente no contexto do transporte eletrônico bidimensional, onde se detectam as cargas fracionárias.

Assim, percebeu-se que se houver um portador no transporte bidimensional, este deve obedecer uma estatística diferente: não possusi a estatística regida pela Fermi-Dirac ou Bose-Einstein, daí a ideia de uma partícula com estatísica fracionária, esses serão os anyons.

Neste capítulo, estudaremos as propriedades de transporte dos anyons via estrutura de bandas por um anel quântico, e verificaremos algumas propriedades interessantes a respeito dessa estrutura que inicia nossos estudos da estatística fracionária, como por exemplo, a descrição de um isolante topológico via um tratamento simples. Para tanto, daremos início a discussão abordando a estrutura padrão para o caso de transporte bidimensional: o efeito Hall quântico

5.1 Anyons.

O efeito Hall quântico foi descoberto por K. von Klitzing[120] em 1980. O aparato é basicamente análogo a sua contraparte clássica, devido ao próprio E. Hall: um condutor imerso em um campo magnético perpendicular à direção da corrente que passa pelo condutor. Também é aplicada uma diferença de potencial na direção transversal da corrente, no entanto, o condutor é bidimensional (Figura 5.1).

Para alcançar a quantização, é necessário sujeitar o sistema a temperaturas muito baixas e campos magnéticos de intensidade extremamente altas. Deve-se fazer isso para fixar as energias dos elétrons abaixo da energia de Fermi, formando a função degrau. Já o campo magnético atuará para a criação de *gaps* entre os níveis de energias. Esses níveis são chamados de níveis de Landau[3], já discutido na secção 4.3.1. No entanto, discutiremos com mais detalhes aqui.

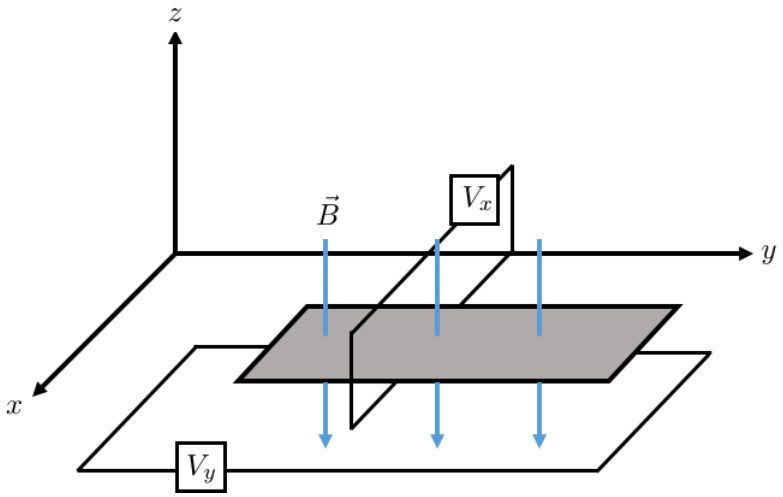


Figura 5.1: Aparato Hall bidimensional. É ligado uma corrente na direção y. Com o campo magnético, surge a corrente Hall na direção x.

Como já dissemos, à temperaturas baixas, a distribuição dos elétrons no condutor será dada pela função degrau, ou Heaviside. Se aplicarmos uma diferença de potencial, teríamos a criação de uma corrente dada pelos elétrons mais próximos à energia de Fermi. Agora, ligando o campo magnético, os níveis de Landau ficam evidentes. Já a corrente, devido a força de Lorentz, passa a se intensificar na direção transversal do condutor à medida que o campo também se intesifica, enquanto a corrente longitudinal diminui drasticamente, como podemos ver na Figura 5.2.

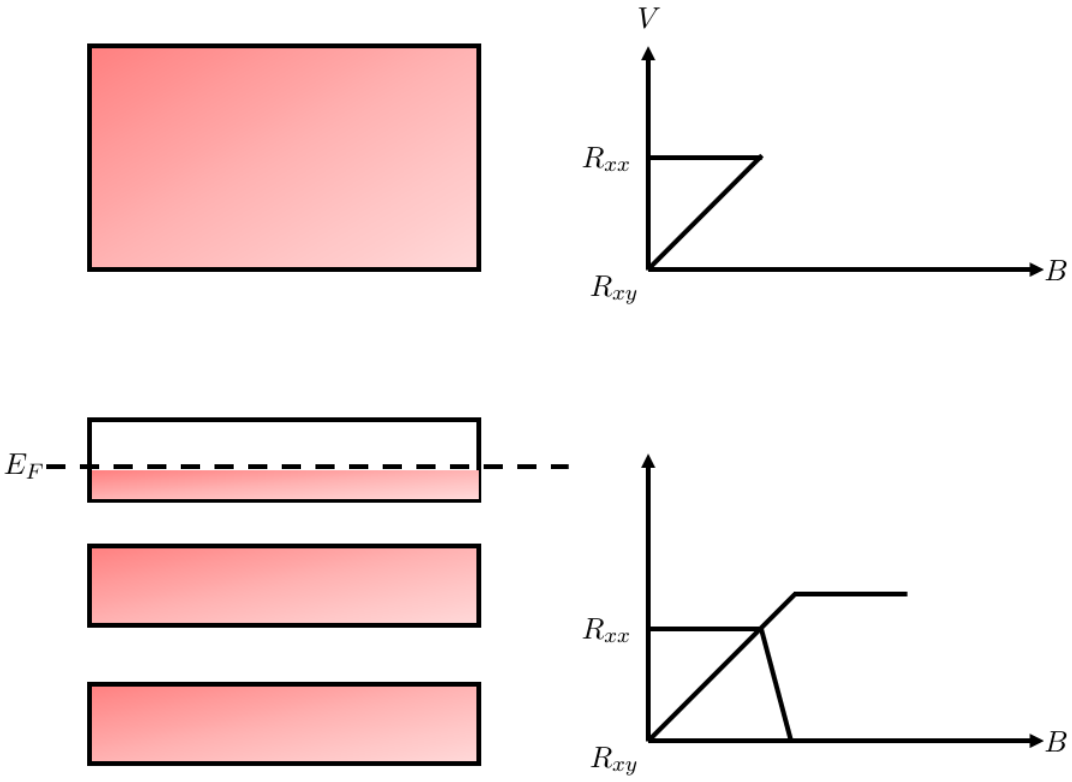


Figura 5.2: Situação da distribuição eletrônica antes e após um campo magnético intenso.

A grande descoberta de von Klitzing foi detectar que a corrente transversal cresce em *plateaus*, ou seja, a corrente Hall é quantizada em valores exatos de $\frac{e^2}{h}$. Cada um desses *plateaus* corresponde a um momento em que a energia de Fermi está situada entre 2 níveis de Landau. Por outro lado, classicamente, deveria existir uma corrente constante na direção longitudinal do condutor, no caso quântico essa corrente é nula enquanto a energia de Fermi se situar em um nível de Landau. Quando está situada em um *gap*, cria-se um movimento desordenado na corrente transversal que possibilita para alguns elétrons de condução propagarem-se na direção longitudinal, ocasionando um pico nessa, como podemos verificar na Figura 5.3.

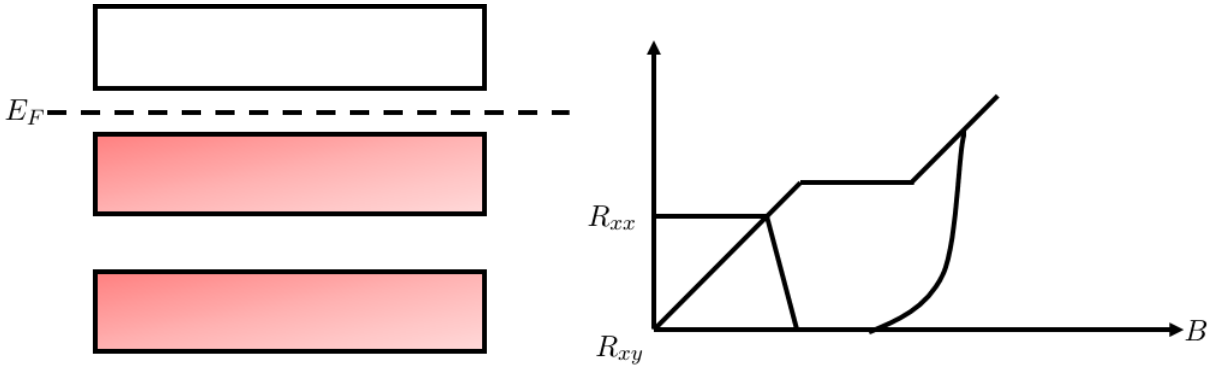


Figura 5.3: Energia de Fermi entre 2 níveis de Landau.

Daí, quando a energia de Fermi torna a ocupar um nível de Landau, temos novamente a corrente transversal constante, agora em um valor maior, pois os elétrons de condução ocupam uma densidade maior no nível de Landau, e a corrente longitudinal nula, como podemos ver na Figura 5.4.

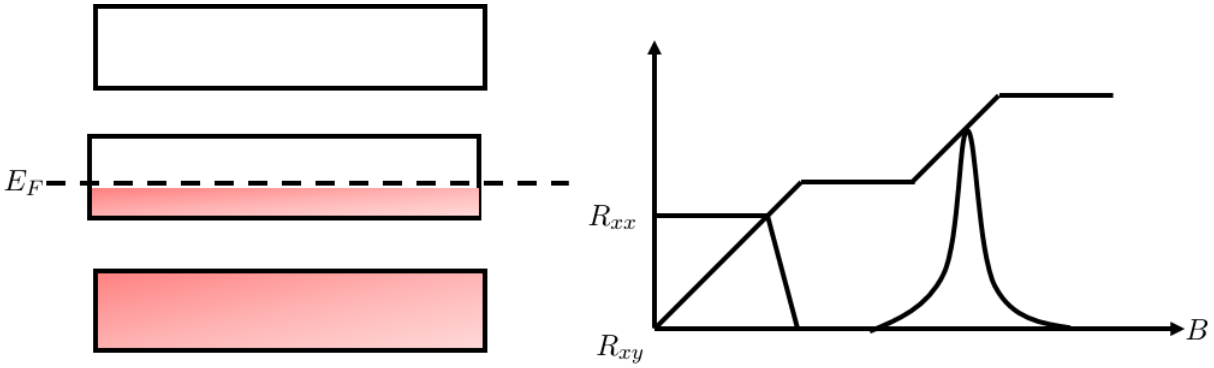


Figura 5.4: Quantização da Corrente Hall após diminuir o nível de Fermi.

Esse fenômeno rendeu a K. von Klitzing o prêmio Nobel de física de 1985. Alguns anos após a descoberta de von Klitzing, H. Störmer e D. Tsui[121, 122] realizaram o mesmo experimento do efeito Hall quântico com um aparato que permitia maior mobilidade eletrônica devido a menos impurezas, e detectaram um pico a mais na transição de dois *plateaus*, mais precisamente, esse pico ocorria a 1/3 do quanta de corrente(Figura 5.5).

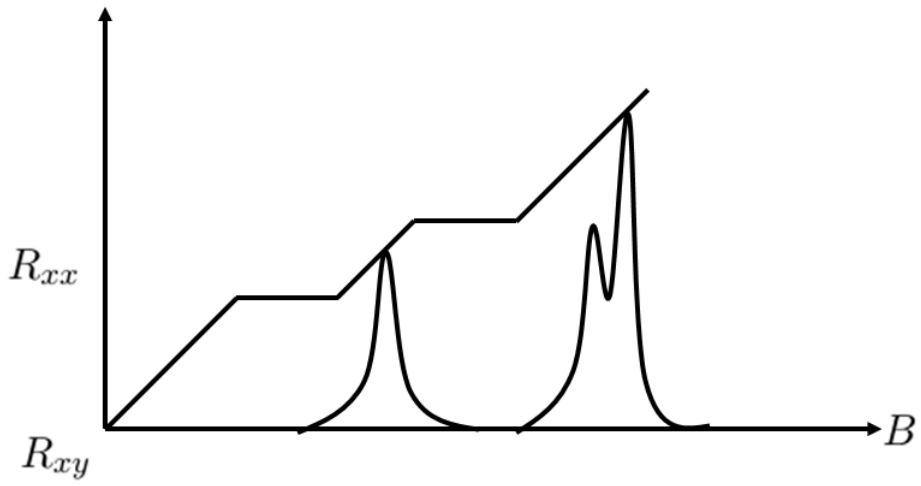


Figura 5.5: Efeito Hall Quântico Anômalo.

Por conta disso, esse fenômeno ficou conhecido como efeito Hall quântico francionário(ou anômalo), enquanto o primeiro ganhou a alcunha de efeito Hall quântico inteiro. No ano seguinte, R. Laughlin[123] descreveu teoricamente a ocorrência do efeito Hall quântico fazendo analogia com física de plasmas. Devido a descoberta do experimento, isso rendeu a eles o prêmio Nobel de 1998.

É importante comentar rapidamente que a teoria de Laughlin só prevê o efeito Hall quântico fracionário para denominadores ímpares, para que a função de onda seja antissimétrica. No entanto, o mesmo grupo que detectou o efeito Hall quântico fracionário, também detectou um novo pico, agora com denominador par em relação a um dos *plateus*, mais precisamente 5/2. Muitos outros estados com denominador par foram detectados subsequentemente, até hoje não se sabe precisamente a causa disso.

No entanto, o efeito Hall quântico nos traz uma informação extremamente importante: a existência de estados estacionários que comportam partículas com cargas fracionárias. Assim, muitos se debruçaram sobre esse fato para tentar explicar a causa disso. Um dos primeiros trabalhos a estabelecer uma relação entre partículas de cargas fracionárias e estatística fracionária foi devido a D. Arovas, J. Schrieffer, F. Wilczek[125] e B. Halperin[126]. Isso abriu precedente para postular que na verdade, o transporte pode ser realizado por partículas que obedecem a estatística fracionária, hoje conhecemos como anyons.

Os anyons foram primeiramente postulados por F. Wilczek a fim de explicar o momento angular de vórtices em supercondutores[127, 128]. Uma forma de abordar o modelo anyônico de Wilczek consiste em uma partícula de carga q confinada em um plano, assumiremos em $x - y$. Esse último, é atravessado perpendicularmente por um solenoide, de maneira que a partícula se situe no meio do solenoide (Figura 5.6).

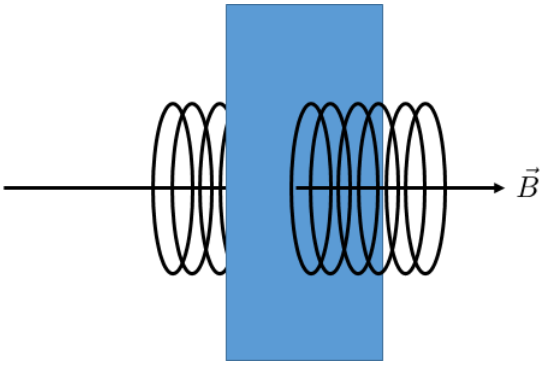


Figura 5.6: Representação clássica de um anyon.

Se o último estiver desligado, sabemos da primeira quantização que o momento angular dessa partícula será $L_z = n\hbar$. Ao ligar o solenoide, é gerado um campo magnético no seu interior, se variarmos a corrente lentamente, temos um fluxo magnético que atravessa o plano perpendicularmente, tal fluxo irá ocasionar o aparecimento de uma força elétrica que irá variar o momento angular da partícula. Para calcular tal variação, tomamos a lei de Faraday

$$\begin{aligned} \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \\ E &= -\frac{1}{2\pi r}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}, \\ \vec{E} &= -\frac{1}{2\pi r}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}(\hat{k} \times \hat{r}), \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde integramos no círculo de raio r que tem o centro atravessado pelo campo magnético. Com a expressão acima, podemos calcular a variação do momento angular $\vec{\tau}$ da partícula, a saber

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} &= \vec{\tau} = q\vec{r} \times \vec{E}, \\ \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} &= -\frac{q}{2\pi r}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}(r\hat{r}) \times (\hat{k} \times \hat{r}), \\ \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} &= -\frac{q}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\hat{k}, \\ \Rightarrow \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} &= -\frac{q}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Nesse ponto, é importante apontar que o momento angular da partícula não varia em números inteiros, indicando que efetivamente, temos um novo tipo de partícula. Como sua estatística depende da associação conjunta entre o fluxo magnético e da carga, é comum chamar esta de partícula composta[1]. Dada essa composição, podemos assumir que existe uma relação entre carga e fluxo tal que $q = C\Phi$, substituindo em (5.2), temos

[1]Tradução livre de *composite particle*.

que

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} &= -\frac{C\Phi}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}, \\
\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{C\Phi^2}{4\pi}\right), \\
\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{q\Phi}{4\pi}\right), \\
\Rightarrow L &= n\hbar - \frac{q\Phi}{4\pi}.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

A equação acima nos mostra que o momento angular de uma partícula carregada no plano pode assumir valores tanto inteiros, caso que corresponde a férmions, quanto semi-inteiros, caso de bósons. O modelo acima, embora semiclássico, mostra-nos como podemos construir uma partícula de estatística fracionária. Com efeito, podemos implementar tal ideia para o caso quântico, para tanto, a fim de contemplar o campo magnético, utilizamos o acoplamento mínimo na equação de Schrödinger, expressa em coordenadas polares, a saber

$$\frac{1}{2m}\left[\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}\right]^2 \psi(r,\theta) + V\psi(r,\theta) = E\psi(r,\theta), \tag{5.4}$$

onde $\vec{A}$ é o potencial vetor, definido à partir do fluxo Φ por

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}, \\
\Phi &= \int \vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{S}, \\
\Phi &= \oint \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{r}, \\
\vec{A} &= \frac{\Phi}{2\pi r}\hat{\theta},
\end{aligned} \tag{5.5}$$

onde $\mathrm{d}\vec{S}$ é o elemento de área formado pela curva contida no plano. Implicitamente, assumimos a lei de Gauss para o magnetismo, daí $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$. Na terceira linha, utilizamos o teorema de Stokes e tomamos $\hat{\theta}$ como o versos que aponta na direção em que θ varia positivamente.

Para verificarmos a estatística fracionária, devemos verificar o comportamento da função de onda frente a uma rotação do sistema. Se aplicássemos o operador momento angular em uma função de onda de um férmion ou bóson, teríamos um número inteiro de $\hbar$, uma rotação no sistema à princípio não mudaria esse fato. No entanto, observaremos que devido à presença do campo, teremos uma fase extra devido à nova estatística. Para tanto, procedemos com uma mudança de gauge local. Isso é possível pois o potencial

vetor não é univocamente definido, ou seja, a troca

$$\vec{A}' \to \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda \tag{5.6}$$

não deve gerar uma descrição diferente para (5.4). Para tanto, deve haver uma mudança de fase na função de onda tal que

$$\psi'(r,\theta) = e^{i\frac{q\Lambda}{\hbar c}}\psi(r,\theta), \tag{5.7}$$

onde Λ é uma função escalar. Podemos demonstrar rapidamente tal fato trabalhando com a equação (5.4) de maneira a encontrar a equação de onda para ψ', a saber

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2m}\left[\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}\right]^2 e^{-i\frac{q\Lambda}{\hbar c}} e^{i\frac{q\Lambda}{\hbar c}}\psi(r,\theta) + V\psi(r,\theta) &= E\psi(r,\theta),\\
\frac{e^{-i\frac{q\Lambda}{\hbar c}}}{2m}\left[\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{\nabla}\Lambda - \frac{q}{c}\vec{A}\right]^2 e^{i\frac{q\Lambda}{\hbar c}}\psi(r,\theta) + V\psi(r,\theta) &= E\psi(r,\theta),\\
\frac{1}{2m}\left[\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}'\right]^2 e^{i\frac{q\Lambda}{\hbar c}}\psi(r,\theta) + V e^{i\frac{q\Lambda}{\hbar c}}\psi(r,\theta) &= E e^{i\frac{q\Lambda}{\hbar c}}\psi(r,\theta),\\
\frac{1}{2m}\left[\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}'\right]^2 \psi'(r,\theta) + V\psi'(r,\theta) &= E\psi'(r,\theta). \quad \square
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Assim, quando procedemos com uma mudança de gauge local, a função de onda ganha uma fase extra. Essa mudança de fase será responsável em modificar a estatística da função de onda para um dado calibre se estivermos no espaço bidimensional. Nesse caso, o potencial vetor será dado por (5.5). Podemos ajustar o calibre para que tenhamos uma equação de onda aparentemente sem campo, a saber

$$\Lambda = -\frac{\Phi\theta}{2\pi}. \tag{5.9}$$

Aplicando (5.9) em (5.6) e utilizando a forma do gradiente em coordenadas polares, temos

$$\begin{aligned}
A' \to \frac{\Phi}{2\pi r}\hat{\theta} + \frac{\hat{\theta}}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{\Phi\theta}{2\pi}\right),\\
A' \to 0.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Nesse cenário, temos um problema quântico aparentemente sem campo. Podemos entender isso da mesma maneira que tratamos o anyon classicamente: assumimos o campo magnético como propriedade intrínseca da partícula descrita nesse problema. E podemos ver o efeito disso substituindo (5.9) em (5.7), a saber

$$\begin{aligned}
\psi'(r,\theta) &= e^{-i\frac{q}{\hbar c}\frac{\Phi\theta}{2\pi}}\psi(r,\theta),\\
\psi'(r,\theta+2\pi) &= e^{-i\frac{q}{\hbar c}\frac{\Phi}{2\pi}(\theta+2\pi)}\psi(r,\theta),\\
\psi'(r,\theta+2\pi) &= e^{-i\frac{q\Phi}{\hbar c}}\psi'(r,\theta).
\end{aligned} \tag{5.11}$$

A condição acima mostra se a partícula composta com o campo magnético se desloca e retorna para seu ponto inicial com uma fase extra proporcional ao fluxo magnético, um resultado análogo a (5.3). Podemos verificar isso de maneira mais clara tomando uma solução estacionária para a função no caso sem campo ψ no plano, o que ocasionaria uma função de onda na forma $\sim \exp(in\theta)$, onde n é um inteiro. O momento angular dessa função de onda é $n\hbar$, como já esperado. Ligando o campo, temos (5.11), isso ocasionará a nova função de onda ter um momento angular do tipo $n\hbar + q\Phi/2\pi c$. Assim, podemos assumir que a função de onda com a propriedade (5.11) pode efetivamente representar um anyon.

Agora que sabemos o comportamento quântico de um anyon através de sua função de onda, podemos analisar o comportamento de transporte deste via estrutura de bandas. Com efeito, nosso próximo objetivo é estudar o comportamento de um anyon em um anel quântico, uma estrutura extremamente utilizada no estudo do transporte eletrônico[129]. Para tanto, utilizaremos um modelo análogo ao exemplo clássico no estudo de teoria de bandas.

5.2 Modelo Kronig-Penney para Anyons.

A física do estado sólido se propõe a encontrar propriedades de um sistema complexo por intermédio de considerações nas suas componentes mais elementares. Daí, direciona-se o tratamento adequado para o problema, quer por intermédio da física clássica, quântica, cristalografia ou eletromagnetismo etc.

Uma das consequências de tal análise, via mecânica quântica, é o aparecimento da chamada estrutura de bandas do sistema. Após encontrar a última, a posição da energia de Fermi irá definir a condutividade do material: se este é condutor, semicondutor e isolante. O sistema mais usual para o estudo de teoria de bandas são de estruturas cristalinas, isso é feito principalmente devido a sua simetria pois facilita o tratamento.

Tomando os sistemas cristalinos, é possível endereçar um tratamento geral para esses sistemas via análise da função de onda de uma partícula interagindo com aquele. Esse tratamento é dado pelo chamado teorema de Bloch[130], que diz

Teorema 2. *Qualquer solução da equação de Schrödinger em um potencial periódico tem a forma de uma onda plana modulada, por uma função apropriada que possui a periodicidade da rede.*

Em outras palavras, a solução da equação de Schrödinger para um sistema cristalino, descrito via potencial periódico, deve ter a forma

$$\psi(x) = e^{ikx}u(x), \tag{5.12}$$

onde $u(x)$ é uma função que obedece a periodicidade da rede. Alternativamente, reali-

zando um deslocamento que obedece a periodicidade da rede, a, temos também para o teorema de Bloch

$$\begin{aligned}\psi(x+a) &= e^{ik(x+a)}u(x+a),\\ \psi(x+a) &= e^{ika}e^{ikx}u(x),\\ \psi(x+a) &= e^{ika}\psi(x).\end{aligned} \tag{5.13}$$

Fisicamente, o teorema de Bloch implica que para um deslocamento a, a função de onda ganhará uma fase extra que causará uma alteração na coerência da onda livre, isso tem implicações fundamentais na física de estado sólido, como por exemplo, o aparecimento das estruturas de bandas.

Assim, tornou-se natural que se iniciasse os estudos de sistemas complexos via mecânica quântica. Um dos primeiros resultados que foram resultados diretos do teorema de Bloch é o modelo de Kronig-Penney[131], devido a R. Kronney e W. Penney, que consiste em uma cadeia unidimensional de N potenciais quadráticos de altura $-V_0$ (Figura 5.7).

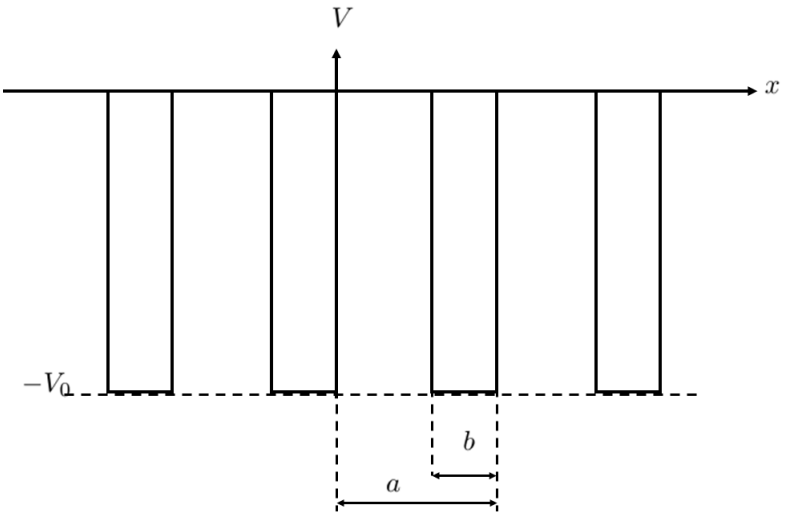


Figura 5.7: Modelo de Kronig-Penney.

Após resolver a equação de Schrödinger e aplicar as devidas condições de contorno e o teorema de Bloch, temos as bandas de energia da estrutura. Esse cálculo é padrão no contexto da física do estado sólido, recomendamos a literatura [132] para verificação do cálculo. Aqui, adaptaremos o modelo de Kronig-Penney para os anyons.

Primeiramente, devemos adaptar a estrutura de Kronig-Penney para que a estatística aniônica apareça naturalmente, assim, assumimos novamente uma cadeia de N potenciais de altura $-V_0$, no entanto, dispostos ao longo de um anel de raio r, como podemos ver na Figura 5.8.

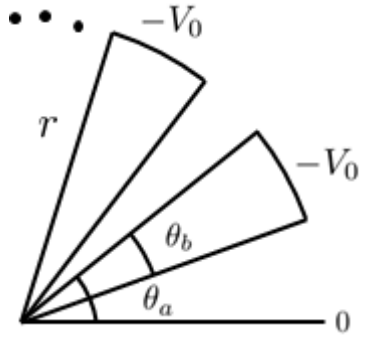


Figura 5.8: Modelo de Kronig-Penney anelar.

Assim, aplicando um campo magnético na estrutura, teríamos o problema descrito pela equação (5.4). Entretanto, podemos aplicar a mudança de calibre (5.9), e teremos um problema aparentemente sem campo com uma partícula com estatística fracionária, o anyon.

Agora, escrevendo a equação (5.4) em termos de coordenadas polares, temos

$$-\frac{\hbar^2}{2mr^2}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\theta^2} + V(\theta)\psi = E\psi. \tag{5.14}$$

onde o potencial é dado por

$$V(\theta) = \begin{cases} 0, & 0 < \theta < \theta_a - \theta_b, \quad \text{(I)}, \\ -V_0, & \theta_a - \theta_b < \theta < \theta_a, \quad \text{(II)}. \end{cases} \tag{5.15}$$

Aqui, assumiremos as mesmas constantes da rede de Krönig-Penney, considerando $a = r\theta_a$ e $b = r\theta_b$. Resolvendo a equação (5.14) para as regiões I e II, temos as soluções

$$\psi_{\mathrm{I}} = Ae^{ik_1 r\theta} + A'e^{-ik_1 r\theta}, \tag{5.16}$$

$$\psi_{\mathrm{II}} = Be^{k_2 r\theta} + B'e^{-k_2 r\theta}, \tag{5.17}$$

onde $k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ e $k_2^2 = \frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}$. Nesse ponto, deve-se estabelecer as condições de contorno para definir as constantes A, A', B e B'. No entanto, como estamos tratando de uma estatística diferente, devemos atentar para o comportamento da partícula nos pontos extremos. O procedimento mais comum para estudar pontos extremos do sistema é aplicar condições periódicas de contorno, no caso de redes cristalinas chamamos de condições de contorno de Born-Von Karman[133], devido a M. Born e T. von Karman. Aqui, implementaremos tais condições de maneira que a condição (5.11) seja respeitada. Assim, estabelecemos que

$$\psi_{\mathrm{I}}(0) = e^{i\frac{q\Phi}{\hbar c}}\psi_{\mathrm{II}}(2\pi), \tag{5.18}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\psi_{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=0} = e^{i\frac{q\Phi}{\hbar c}} \left.\frac{\mathrm{d}\psi_{\mathrm{II}}}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=2\pi}. \tag{5.19}$$

As condições acima dizem respeito à continuidade da função de onda, conservação da corrente de probabilidade e a condição da estatística aniônica. De maneira análoga, devemos adaptar o teorema de Bloch para o caso aniônico, assim, estabelecemos que

$$\psi(\theta+\theta_a) = e^{ikr\theta_a}e^{-i\frac{q\Phi}{\hbar c}}\psi(\theta) \tag{5.20}$$

Essa forma foi escolhida novamente, de maneira a respeitar (5.11). Podemos ver que a expressão acima obedece aquela quando tomamos N passos ao longo da rede, daí teremos $N\theta_a = 2\pi$. Se o número de onda obedecer a condição de discreteza da rede, $k = \frac{2\pi n}{Na}$, reobtemos (5.11). A última relação está relacionada com a densidade de estados disponíveis na estrutura. Com isso, podemos estabelecer condições de contorno com respeito à estrutura da rede, a saber

$$\psi_{\mathrm{I}}(\theta_a-\theta_b) = e^{ikr\theta_a}e^{-i\frac{q\Phi}{\hbar c}}\psi_{\mathrm{II}}(-\theta_b), \tag{5.21}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\psi_{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=\theta_a-\theta_b} = e^{ikr\theta_a}e^{-i\frac{q\Phi}{\hbar c}}\left.\frac{\mathrm{d}\psi_{\mathrm{II}}}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=-\theta_b}. \tag{5.22}$$

Agora, aplicamos (5.16) e (5.17) em (5.18), (5.19) e (5.21), (5.22), teremos

$$\begin{aligned}
A + A' &= e^{i\frac{q\Phi}{\hbar c}}\left[Be^{2\pi rk_2} + B'e^{-2\pi rk_2}\right],\\
ik_1\left[A - A'\right] &= k_2e^{i\frac{q\Phi}{\hbar c}}\left[Be^{2\pi rk_2} - B'e^{-2\pi rk_2}\right],\\
Ae^{ik_1r(\theta_a-\theta_b)} + A'e^{-ik_1r(\theta_a-\theta_b)} &= e^{ikr\theta_a}e^{-i\frac{q\Phi}{\hbar c}}\left[Be^{-k_2r\theta_b} + B'e^{k_2r\theta_b}\right],\\
ik_1\left[Ae^{ik_1r(\theta_a-r\theta_b)} - A'e^{-ik_1r(\theta_a-r\theta_b)}\right] &= k_2e^{ikr\theta_a}e^{-i\frac{q\Phi}{\hbar c}}\left[Be^{-k_2r\theta_b} - B'e^{k_2r\theta_b}\right].
\end{aligned}$$

As equações acima forma um sistema linear cujas variáveis são A, A', B e B'. Para encontrar a solução desse sistema linear, utilizamos a técnica do determinante isolando a matriz coluna $[A, A', B, B']$. Como existem infinitas soluções para as funções (5.16) e (5.17), o sistema linear deve também resultar em infinitas soluções, o que acarreta no determinante do sistema também se anular, a saber

$$\begin{vmatrix}
1 & 1 & -e^{i\frac{q\Phi}{\hbar c}}e^{2\pi rk_2} & -e^{i\frac{q\Phi}{\hbar c}}e^{-2\pi rk_2}\\
ik_1 & -ik_1 & -k_2e^{i\frac{q\Phi}{\hbar c}}e^{2\pi rk_2} & k_2e^{i\frac{q\Phi}{\hbar c}}e^{-2\pi rk_2}\\
e^{ik_1r(\theta_a-\theta_b)} & e^{-ik_1r(\theta_a-\theta_b)} & -e^{ikr\theta_a}e^{-i\frac{q\Phi}{\hbar c}}e^{-k_2r\theta_b} & -e^{ikr\theta_a}e^{-i\frac{q\Phi}{\hbar c}}e^{k_2r\theta_b}\\
ik_1e^{ik_1r(\theta_a-\theta_b)} & -ik_1e^{-ik_1r(\theta_a-\theta_b)} & -k_2e^{ikr\theta_a}e^{-i\frac{q\Phi}{\hbar c}}e^{-k_2r\theta_b} & k_2e^{ikr\theta_a}e^{-i\frac{q\Phi}{\hbar c}}e^{k_2r\theta_b}
\end{vmatrix} = 0. \tag{5.23}$$

Resolvendo o determinante, e com um pouco de álgebra, temos a equação transcendental

$$\begin{aligned}
\left(\frac{k_2^2-k_1^2}{2k_1k_2}\right)\sinh[(2\pi+\theta_b)k_2r]\sin[(\theta_a-\theta_b)k_1r] + \cosh[(2\pi+\theta_b)k_2r]\cos[(\theta_a-\theta_b)k_1r] =\\
= \cos\left(kr\theta_a - 2\frac{q\Phi}{\hbar c}\right).
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Como é sabido, não é possível encontrar uma solução analítica para a equação acima, assim, devemos fazer uma aproximação. Para tanto, basta considerar o poço muito fundo e a abertura do poço muito pequena, assim, os termos de θ_b serão desprezados. Assumindo também que o comprimento do anel é muito pequeno, temos como resultado dessas aproximações

$$\frac{k_2^2 La}{2k_1}\frac{\sin(k_1 a)}{k_1 a} + \cos(k_1 a) = \cos\left(ka - 4\pi\nu\frac{\Phi}{\Phi_0}\right), \tag{5.25}$$

onde L é o comprimento do anel. Aqui, introduzimos o quanta de fluxo magnético, dado por $\Phi_0 = \frac{hc}{e}$ e o chamado fator de preenchimento[2], ν. O fator de preenchimento avalia a razão do número de elétrons por célula magnética[134]. Devemos entender a célula magnética como uma composição entre espaço e campo magnético. Assim, no efeito Hall quântico inteiro, para $\nu = 2$, temos 2 elétrons em 1 célula magnética, e a corrente é dada por $2e^2/\hbar$. No efeito Hall quântico fracionário, Laughlin mostrou que o fator de preenchimento consiste na fração que acompanha a carga elétrica da partícula em questão. Um tratamento análogo para anyons pode ser feito de maneira que o fator de preenchimento tenha a mesma interpretação no caso estudado por Laughlin[135].

Da equação (5.25), observamos que esta é satisfeita quando

$$k_1 = \frac{n\pi}{a} + \frac{4\pi\nu}{a}\frac{\Phi}{\Phi_0}. \tag{5.26}$$

A expressão (5.26) nos informa que anyons formam uma corrente estacionária ao longo da rede, devido ao elemento extra dependente do fluxo Φ. Também, percebe-se que esse fator extra permite que a promoção dos anyons para a banda seguinte. O que já era esperado, dado que o campo magnético forma correntes elétricas, como no efeito Hall. Essas duas situações podem ser observadas nas Figuras 5.9 e 5.10.

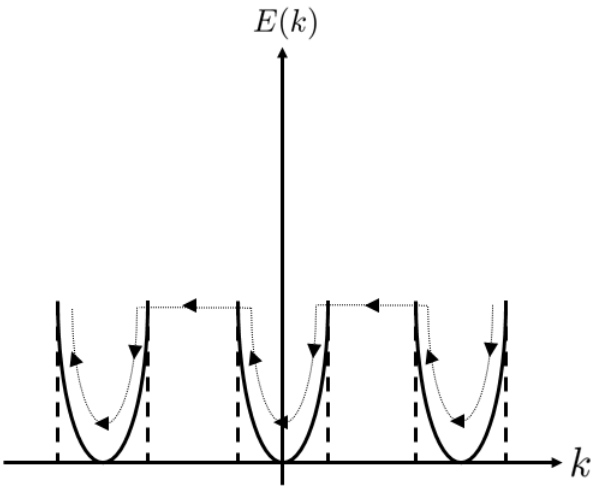


Figura 5.9: Representação de um anyon tunelando em cada ponto da rede.

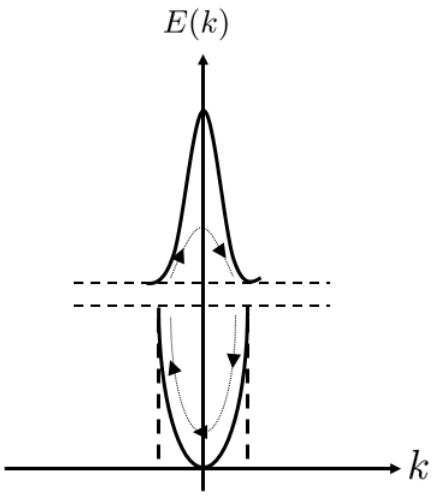


Figura 5.10: Representação de um anyon tunelando entre bandas.

[2]Tradução livre de "filling factor".

Para contemplar o comportamento das bandas de energia, devemos encontrar o espectro de energia devido a condição (5.26). Aplicando na fórmula que relaciona momento e energia e assumindo que o fluxo Φ é expresso em quantas de fluxo magnético, $\Phi = n_0\Phi_0$, temos

$$E_{n,n_0} = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2ma^2} + \frac{8\hbar^2\pi^2\nu^2 n_0^2}{ma^2} + \frac{4\hbar^2\pi^2\nu n n_0}{ma^2}. \tag{5.27}$$

Com o espectro (5.27), podemos verificar o fechamento de uma determinada banda ajustando um devido valor para o número de quanta magnético n_0. Para tanto, observamos os 2 últimos termos de (5.27): para que uma banda inteira seja fechada, temos que esses dois últimos termos devem se combinar de tal sorte que resulte em qualquer uma das outras bandas, assim, temos que

$$\begin{aligned} \frac{8\hbar^2\pi^2\nu^2 n_0^2}{ma^2} + \frac{4\hbar^2\pi^2\nu n n_0}{ma^2} &= \frac{\hbar^2\pi^2 m^2}{2ma^2}, \\ 16\nu^2 n_0^2 + 8\nu n n_0 &= m^2, \\ \Rightarrow 2\nu n_0 &= \sqrt{n^2 + m^2} - n, \end{aligned} \tag{5.28}$$

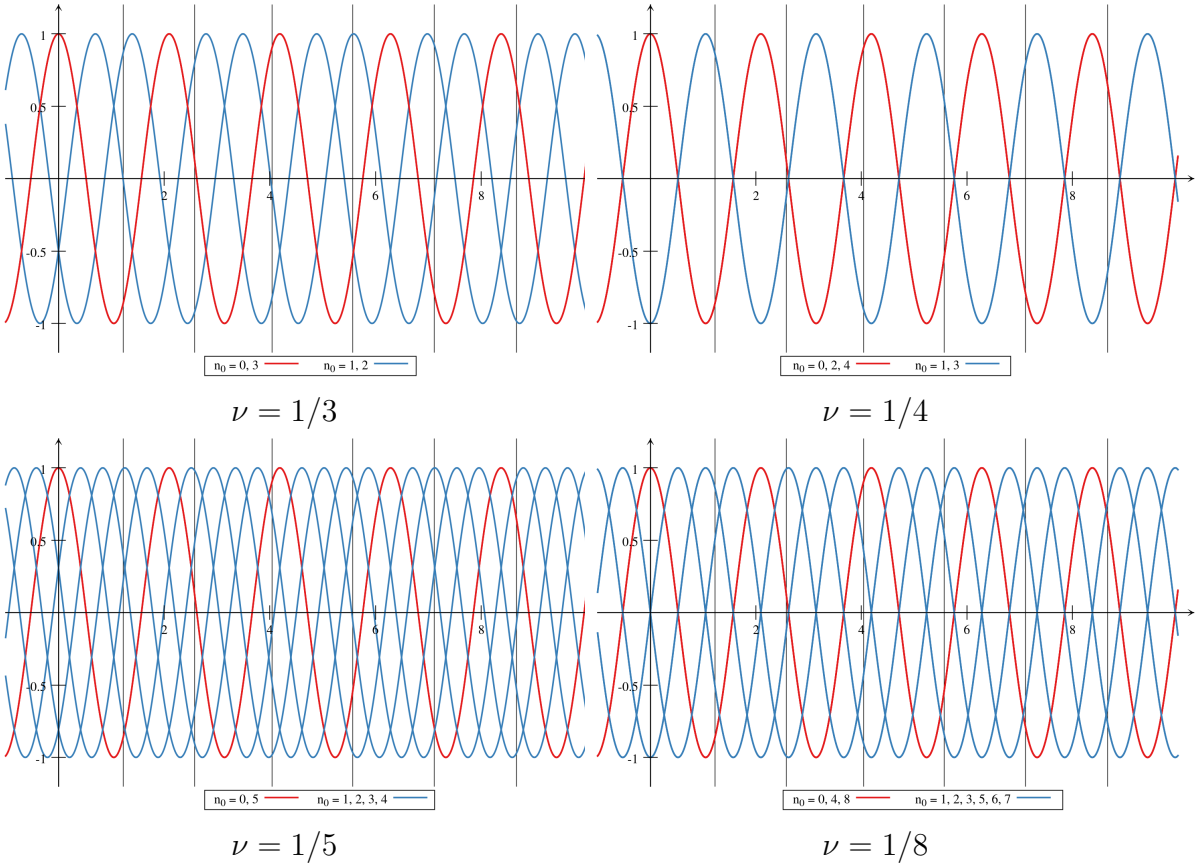
onde m é um número inteiro diferente de n. Eliminamos a solução com sinal negativo da raiz para evitar valores negativos para o lado direito de (5.28). A expressão acima informa a condição para o número de quanta magnético e fator de preenchimento a fim de fechar uma determinada banda do sistema.

Podemos verificar efetivamente o fechamento da banda, nas Figuras em 5.11 devido a (5.25) em que especificamos os fatores de preenchimento ν e variamos n_0. Observamos que para certos valores de n_0, temos a equação (5.25) satisfeita exatamente no ponto 0, indicando o fechamento da banda. Isso fica mais claro para fatores de preenchimento com denominadores ímpares.

O fato de haver soluções que apresentam fechamento de bandas pode ser um indicativo que o sistema que estamos trabalhando aqui apresenta um comportamento de isolante topológico. Nesse último, o efeito do fechamento de gap entre bandas de energia é devido à variação do chamado número de Chern, no nosso caso, seria n_0[136]. O primeiro trabalho a encontrar um número de Chern foi devido a Thouless*et al* [137].

Um isolante topológico pode ser entendido através de uma corrente na superfície da estrutura que está protegida topologicamente do restante do *bulk* do sistema. Essa corrente é composta por partículas ocupando os estados de borda. Esses estados de borda estão protegidos topologicamente por uma simetria, representadas na fase de Berry; relacionada à topologia do sistema[138], daí a terminologia "Isolante Topológico". Se essa simetria for de paridade ou reversão temporal, temos um isolante de Chern [139, 140]. Para mais informações a respeito de Isolantes Topológicos, recomendamos a referência [141]

Pela equação (5.27), temos que o gap entre a n-ésima e m-ésima banda é fechada quando observamos a condição (5.28), e isso acarreta precisamente em um estado que



$\nu = 1/3$ $\nu = 1/4$

$\nu = 1/5$ $\nu = 1/8$

Figura 5.11: As linhas verticais, representam o lado direito de (5.25). Em colorido, o lado esquerdo, com todos os n_0's possíveis.

obedece a simetria de paridade e reversão temporal, representado aqui como uma das soluções do poço infinito.

Neste capítulo, estudamos os anyons em uma estrutura anelar. Por causa disso, encontramos como resultado o comportamento de um sistema análogo a um isolante topológico. Tal resultado pode motivar o uso de anyons para o estudo de tais estruturas, afinal, a condição de isolante topológico aparece naturalmente à partir do estudo da estatística aniônica. O que também levanta a questão:

Também, é importante frisar que os anyons podem ser construídos de maneiras alternativas, como por exemplo, como férmions compostos que obedecem uma lagrangeana de Chern-Simmons. Muitos desses modelos podem ser estudados nas referências[142, 143].

Capítulo 6

Conclusões.

‘‘O ruído é o sinal.’’

Rolf Landauer.

Iniciamos as conclusões deste trabalho com um mote conhecido de R. Landauer, pois nele temos um grande resumo da ideia central trabalhada aqui: as equações de correlação devido ao espalhamento de duas partículas em uma estrutura quântica podem informar características de um sistema quântico sem precisarmos conhecer detalhes do sistema. Também mostramos que as funções de correlação estão intimamente ligadas ao ruído do sistema, no nosso caso, o ruído de disparo. Esses dois fatos por si só denotam a fala de Landauer.

Acima dos resultados, tentamos ao máximo redigir um texto autocontido, de maneira que, ainda que o leitor não seja iniciado na área, tenha condições de contemplar os resultados quando apresentados, ou mesmo aprender determinados conceitos para aplicação em outra área de interesse, dado que sempre analisamos os problemas aqui apresentados à partir das bases teóricas.

Com respeito aos resultados, no segundo capítulo, montamos os pontos quânticos em que ocorriam o processo de espalhamento. Esses pontos foram representados pela sua matriz de espalhamento. Com a posse das entradas da matriz, aplicamos nas equações de correlação e verificamos o comportamento do sistema. O primeiro exemplo que estudamos foi o efeito Hanbury Brown-Twiss, e verificamos como as equações de correlação denotam o efeito à partir da matriz de espalhamento. Acreditamos que essa técnica é a verdadeira utilidade das equações encontradas(como expressa Landauer) e isso nos motivou a estender os resultados analisando outras condições nos sistemas.

O primeiro caso foi pela imposição de simetrias. Verificamos que como detectar se o sistema está obedecendo tal simetria através do transporte das partículas. O método de detecção de tais simetrias se dá pelo ajuste dos parâmetros que as representam, daí, verifica-se como as equações de correlação que denotam o transporte das partículas dominam sobre as equações de denota *backscattering*. As simetrias aqui estudadas foram

a paridade, reversão temporal e quiralidade. Futuramente, estudaremos outras simetrias por via de regra estabelecida: mais uma vez analisando a matriz de espalhamento e verificando o efeito dessa nas equações de correlação. Isso pode ser feito com quantas simetrias puderem ser contempladas.

A seguir, estudamos o emanharamento no contexto do trasporte quântico. Baseado no trabalho de Beenaker, construimos um sistema em que é possível detectar o emaranhamento através das equações de correlação, o que culmina em encontrar condições para as entradas da matriz de espalhamento que violam a desigualdade CHSH. Com isso, será possível estudar, por exemplo, como as simetrias influenciam no emaranhamento do sistema. Também, poderemos fazer um tratamento parecido utilizando bósons, dado que o estudo foi feito para férmions. Tal estudo é interessante pois existem experimentos em que se analisa o emaranhamento do sistema de 2 fótons após a interação com um ponto quântico com simetria espacial[144].

Por fim, estudamos estatísticas não-usuais, a fim de generalizar a aplicabilidade das equações de correlação. Para tanto, utilizamos como portador os anyons. Verificamos o comportamento deste último em uma estrutura quântica e analisamos as bandas de energia para anyons. Vimos que os anyons ofereçam uma possível descrição para os chamados Isolantes Topológicos. Assim, nossa perspectiva futura nesse ponto será encontrar efetivamente equações de correlação para os anyons, também, na posse de tais equações, é possível que tratemos futuramente do transporte quântico em isolantes topológicos, se confirmada a correspondência.

Nesse breve ensejo em que detalhamos e discutimos algumas áreas de grande importante da física, gostaríamos de apontar que independente do procedimento em que se deseja alcançar um determinado resultado, é necessário manter em mente que o interesse final é sempre conhecer mais a natureza e suas belíssimas propriedades. Acreditamos de maneira profunda que a ciência é o único mecanismo para a humanidade alcançar a clareza plena da busca pela verdade e do bem-estar social.

Bibliografia

[1] C. Rovelli. Notes for a brief history of quantum gravity. arXiv:gr-qc/0006061. (2000)

[2] H. Reichenbach. Philosophic Foundations of Quantum Mechanics. Cambridge University Press. (1944)

[3] L. Landau, E. Lifshitz. Quantum Mechanics, Non-Relativistic Theory. Course of Theoretical Physics. Pergamon Press. (1958)

[4] E. I. Wigner, L. Eisenbud. Higher Angular Momenta and Long Range Interaction in Resonance Reactions. Phys. Rev. **72** 29 (1947).

[5] K. T. R. Davies, M. Baranger. Symmetry properties of the S-matrix with application to resonance reactions. Ann of Phys. **19** 383 (1962).

[6] M. Mehta. Random Matrices. Academic Press. (1991).

[7] P. Mello, N. Kumar. Quantum Transport in Mesoscopic Systems: Complexity and Statistical Fluctuations. Oxford University Press. (2004).

[8] R. Hanbury Brown, R. Q. Twiss. A new type of interferometer for use in radio astronomy. Phil. Mag. **45**, 663 (1954).

[9] R. Hanbury Brown, R. Q. Twiss. Correlation between Photons in two Coherent Beams of Light. Nature (London). **4497**, 27 (1956).

[10] R. Hanbury Brown, R. Q. Twiss. A Test of a new type of stellar interferometer on Sirius. Nature (London). **178**, 1046 (1956).

[11] E. Brannen, H. I. S. Ferguson. The Question of Correlation between Photons in Coherent Light Rays. Nature (London). **178**, 481 (1956).

[12] E. M. Purcell. The Question of Correlation between Photons in Coherent Light Rays. Nature (London). **178**, 1449 (1956).

[13] C. Hong, Z. Ou, L. Mandel. Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference. Phys. Rev. Lett. **59**, 2044 (1987).

[14] V. Giovannetti, D. Frustaglia, F. Taddei, R. Fazio. Electronic Hong-Ou-Mandel interferometer for multimode entanglement detection. Phys. Rev. B **74** 115315 (2006).

[15] T. Jonckheere, J. Rech, C. Wahl, T. Martin. Electron and hole Hong-Ou-Mandel interferometry. Phys. Rev. B. **86** 125425 (2012).

[16] J. von Neumann. Mathematical Foundations of Quantum Mechanics. Oxford University Press. (1955).

[17] E. Prugovecki. Quantum Mechanics in Hilbert Space. Academic Press. (1971).

[18] A. L. Fetter, J. D. Walecka. Quantum Theory of Many Particles System. Dover Publications. (1971).

[19] F. Mandl, G. Shaw. Quantum Field Theory. John Wiley & Sons. (1986).

[20] A. Sommerfeld. Mechanics. Academic Press. (1952).

[21] E. Fermi. Thermodynamics. Dover Publications. (1936).

[22] S. Bell. A Beginner's Guide to Uncertainty of Measurement. (2001).

[23] R. A. Witte. Electronic Test Instruments. Pearson Education. (2009).

[24] D. G. Figueiredo. Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais. Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico. (1977).

[25] L. E. Reichl. A Modern Course in Statistical Physics. Wiley-Interscience Publication. (1998).

[26] J. D. Jackson. Classical Electrodynamics. John Wiley & Sons. (1999).

[27] S. Thornton, J. Marion. Classical Dynamics of Particles and Systems. Thomson Learning. (2004).

[28] N. Wiener. Generalized harmonic analysis. Acta. Mathematica. **55** 117 (1930), A. Khintchine. Korrelationstheorie der stationären stochastischen Prozesse. Mathematische Annalen **109** 604 (1934).

[29] J. B. Johnson. Thermal Agitation of Electricity in Conductors. Nature. **119**, 50 (1927).

[30] H. Nyquist. Thermal Agitation of Electric Charge in Conductors. Physical Review. **32**, 110 (1928).

[31] D. Abbott, B.R. Davis, N.J. Phillips, K. Eshraghian. Simple derivation of the thermal noise formula using window-limited Fourier transforms and other conundrums. IEEE Transactions on Education. **39**, (1996).

[32] W. Schottky. Über spontane Stromschwankungen in verschiedenen Elektrizitätsleitern. Ann. Phys. **57**, 541 (1918).

[33] R. Landauer. The noise is the signal. Nature. **392**, 658 (1998).

[34] W. B. Davenport, W. L. Root. An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise. John Wiley & Sons. (1987).

[35] M. Sargent III, M. O. Scully, W. E. Lamb. Laser Physics. Addison-Wesley Publishing. (1974).

[36] J. J. Sakurai. Modern Quantum Mechanics. Addison-Wesley Publishing. (1994).

[37] R. Loudon. Fermion and boson beam-splitter statistics. Phys. Rev. A. **58** 4094. (1998).

[38] C.W.J. Beenakker. Applications of random matrix theory to condensed matter and optical physics. https://arxiv.org/abs/0904.1432

[39] C.W.J. Beenakker, P.W. Brouwer. Diagrammatic method of integration over the unitary group, with applications to quantum transport in mesoscopic systems. Journal of Mathematical Physics, **37** (10), 4904 (1996).

[40] M. Büttiker. Scattering theory of current and intensity noise correlations in conductors and wave guides. Phys. Rev. B **46**, 12485 (1992).

[41] Y. Blanter, M. Büttiker. Shot Noise in Mesoscopic Conductors. Phys. Rep., **336** (2000).

[42] E. Frade Silva, A. L. R. Barbosa, J. G. G. S. Ramos. Parity and time-reversal symmetry in the Hanbury Brown-Twiss effect. Europhys. Lett. **117** 14001. (2017).

[43] E. Noether. Invariante Varionsprobleme. Math-phys. Klasse. 235. (1918).

[44] T. D. Lee, C. N. Yang. Question of Parity Conservation in Weak Interactions. Phys. Rev. **104** 254. (1956).

[45] A. S. Eddington. The Nature of the Physical World. Cambridge Press. (1929).

[46] J. Loschmidt, Sitzungsber. Kais. Akad. Wiss. Wien, Math. Naturwiss. **73**, 128 (1876).

[47] P. A. M. Dirac. Principle in Quantum Mechanics. Oxford University Press. (1938).

[48] F. S. Levin, H. Krüger. Many-body scattering theory methods as a means for solving bound-state problems: Applications of arrangement-channel quantum mechanics. Phys. Rev. A. **15** 2147 (1977).

[49] C. Mahaux and H. A. Weidenmuller, Shell-Model Approach to Nuclear Reactions (North-Holland, Amsterdam, 1969).

[50] N. Moiseyev. Non-Hermitian Quantum Mechanics (Cambridge University Press, (2011).

[51] C. M. Bender, S. Boettcher. Real Spectra in Non-Hermitian Hamiltonians Having $\mathcal{PT}$ Symmetry. Phys. Rev. Lett. **80** 5243. (1998).

[52] C. M. Bender. Making Sense of Non-Hermitian Hamiltonians. https://arxiv.org/pdf/hep-th/0703096.pdf

[53] Y. D. Chong, Li Ge, A. Douglas Stone. $\mathcal{PT}$-Symmetry Breaking and Laser-Absorber Modes in Optical Scattering Systems. Phys. Rev. Lett. **106** 093902. (2011)

[54] H. Schomerus. Quantum Noise and Self-Sustained Radiation of $\mathcal{PT}$-Symmetric Systems. Phys. Rev. Lett. **104** 233601, (2010).

[55] K. T. R. Davies, M. Baranger. Symmetry properties of the S-matrix with application to resonance reactions. Ann. Phys. **19** 383 (1962).

[56] A. P. Malvino. Eletrônica. AMGH Editora. (2011).

[57] A. A. Zyablovsky *et al.* $\mathcal{PT}$-symmetry in Optics. Physics-Uspekhi. **57**, 11. (2018).

[58] X. Zhou, Y. Chong. $\mathcal{PT}$-symmetry breaking and nonlinear optical isolation in coupled microcavities. Optics Express. **24**, 6916. (2016).

[59] Kosmas V. Kepesidis *et al.* $\mathcal{PT}$-symmetry breaking in the steady state of microscopic gain-loss systems. New J. Phys. **18** 095003 (2016).

[60] S. Gustavsson, *et al.* Counting Statistics of Single Electron Transport in a Semiconductor Quantum Dot. Adv. Sol. Sta. Phys. **46**, 31. (2008).

[61] A. P. Paiva. O Fenômeno da Quiralidade. (2008).

[62] H. Wennerström, P. Westlund. The Stern-Gerlach experiment and the effects of spin relaxation. Phys. Chem. **5** 1677. (2011).

[63] W. Gerlach, O. Stern. Der experimentelle Nachweis der Richtungsquantelung im Magnetfeld. Zeitschrift für Physik. **9** 349 (1922).

[64] D. J. Griffiths. Introduction to Quantum Mechanics. Pearson Education, Inc. (2005).

[65] W. Greiner. Relativistic Quantum Mechanics. Springer. (2000).

[66] K. Novoselov *et al.* Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films. Science. **306** 666. (2004).

[67] E. Frade Silva *et al.* Tunable $\chi/\mathcal{PT}$ Symmetry in Noise Graphene..Braz J Phys (2018). https://doi.org/10.1007/s13538-018-0576-6

[68] A. Geim, K. Novoselov. The Rise of Graphene. Nature Materials. **6**, 183. (2007).

[69] K. S. Novoselov *et al.* Two-dimensional gas of massless Dirac fermions in graphene. Nature. **438**, 197. (2005).

[70] C. Dartora, M. Jimenez, F. Zanella. Os fundamentos da física dos férmions de Dirac sem massa em (1+2)-D e o grafeno. Rev. Bras. Ens. Fís. **37** 3. (2015).

[71] A. H. Castro Neto *et al.* The electronic properties of graphene. Rev. Mod. Phys. **81**, 109. (2009).

[72] A. F. Macedo-Junior, A. M. S. Macêdo. Universal transport properties of asymmetric chiral quantum dots. Phys. Rev. B. **77**, 165313 (2008).

[73] Y. Tang, A. E. Cohen. Optical Chirality and Its Interaction with Matter. Phys. Rev. Lett. **104**, 163901 (2010).

[74] P. Jacquod, R. S. Whitney, J. Meair, M.Buttiker. Onsager relations in coupled electric, thermoelectric, and spin transport: The tenfold way. Phys. Rev. B **86** 155118 (2012).

[75] O. Greenberg. $\mathcal{CPT}$ Violation Implies Violation of Lorentz Invariance. Phys. Rev. Lett. **89**, 23. (2002).

[76] M. Chaichian, *et al.* $\mathcal{CPT}$ violation does not lead to violation of Lorentz invariance and vice versa. Phys. Lett. B. **699**, 177. (2011).

[77] Yu. Ts. Oganessian, *et al.* Synthesis of a New Element with Atomic Number $Z =$ 117. Phys. Rev. Lett. **104**, 142502. (2010).

[78] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? Phys. Rev. **47**, 777 (1935).

[79] D. Bohm. A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables. I. Phys. Rev. **85**, 166 (1952).

[80] V. Dorobantu. The Postulates of Quantum Mechanics. arXiv:physics/0602145

[81] D. Bohm. A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables. II. Phys. Rev. **166**, 180 (1952).

[82] J. S. Bell. On the Einstein-Podolski-Rosen Paradox. Physics **1**, 195 (1964).

[83] O aparente e o oculto: entrevista com David Bohm. Estud. av., São Paulo , v. 4, n. 8, p. 188-198, abr. 1990 . Disponível em http://dx.doi.org/10.1590/S0103-40141990000100014.

[84] S. J. Freedman e J. F. Clauser. Experimental Test of Local Hidden-Variable Theories. Phys. Rev. Lett **28**, 938 (1972).

[85] A. Aspect *et al.* Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers. Phys. Rev. Lett **49**, 1804 (1982).

[86] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, R. A. Holt. Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories. Phys. Rev. Lett. **23** 880 (1969).

[87] S. Popescu, D. Rorhlich. Thermodynamics and the measure of entanglement. Phys. Rev. A **56**, 3319 (1997).

[88] C. Shannon. Communication Theory of Secrecy Systems. Bell System Technical Journal **4**, 656 (1949).

[89] C. Shannon. A Mathematical Theory of Communication. Bell System Technical Journal **27**, 623 (1948).

[90] M. Nielsen, I. Chuang. Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge University.(2000)

[91] E. Schmidt. Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. Mathematische Annalen.**63**, 433 (1906).

[92] H. Araki and E. H. Lieb. Entropy Inequalities. Communication in Math. Phys. **18** 160 (1970).

[93] N. Gisin. Bell's inequality holds for all non-product states. Phys. Lett. A. **154**, 201(1991).

[94] V. Vedral, *et al.* Quantifying Entanglement. Phys. Rev. Lett. **78** 2275. (1997)

[95] R. Werner. Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model. Phys. Rev. A.**40**, 4277(1989).

[96] W. K. Wootters, W. H. Zurek. A single quantum cannot be cloned. Nature. **299** 802 (1982).

[97] C. H. Bennett, *et al.* Purification of Noisy Entanglement and Faithful Teleportation via Noisy Channels. Phys. Rev. Lett. **76** 722 (1996).

[98] W. K. Wootters. Entanglement of formation and concurrence. Quantum Information and Computation. **1**, 27 (2001).

[99] B. Schumacher. Quantum Coding. Phys. Rev. A. **51**, 2738 (1995).

[100] S. Hill, W. K. Wootters. Entanglement of a Pair of Quantum Bits. Phys. Rev. Lett. **78**, 5022 (1997).

[101] W. K. Wootters. Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubit. Phys. Rev. Lett. **80**, 2245 (1998)

[102] S. Popescu and D. Rohrlich. Generic quantum nonlocality. Phys. Lett. A **166**, 293 (1992).

[103] L. Cheng, *et al.* Direct measurement of nonlocal entanglement of two-qubit spin quantum states. Scientific Reports. **6**, 19482 (2016).

[104] L. Zhou, Y. Sheng. Concurrence Measurement for the Two-Qubit Optical and Atomic States. Entropy. **17** 4293 (2015).

[105] C. W. J. Beenakker, C. Emary, M. Kindermann, J. L. van Velsen. Proposal for Production and Detection of Entangled Electron-Hole Pairs in a Degenerate Electron Gas. Phys. Rev. Lett. **91** 147901 (2003).

[106] E. Knill, R. Laflamme, G. J. Milburn. A scheme for efficient quantum computation with linear optics. Nature, **46**, 409 (2001).

[107] T. Jennewein, G. Welhs, J. Pan, A. Zeilinger. Experimental Nonlocality Proof of Quantum Teleportation and Entanglement Swapping. Phys. Rev. Lett **88**, 017903 (2002).

[108] G. Weihs and A. Zeilinger, Photon statistics at beam-splitters: an essential tool in quantum information and teleportation, in "Coherence and Statistics of Photons and Atoms", J. Perina (Ed.), Wiley, 2001

[109] M. S. Kim, W. Son, V. Buzek, P. L. Knight. Entanglement by a beam splitter: Nonclassicality as a prerequisite for entanglement. Phys. Rev. A. **65** 032323 (2002).

[110] W. Xiang-bin. Theorem for the beam-splitter entangle. Phys. Rev. A. **66**, 024303 (2002)

[111] N. M. Chtchelkatchev, *et al.* Bell inequalities and entanglement in solid-state devices. Phys. Rev. B. **66**, 161320 (2002).

[112] W. D. Oliver, F. Yamaguchi, Y. Yamamoto. Electron Entanglement via a Quantum Dot. Phys. Rev. Lett. **88**, 037901 (2002).

[113] G. Burkard, D. Loss, and E. V. Sukhorukov. Noise of entangled electrons: Bunching and antibunching. Phys. Rev. B. **61**, 16303 (2000)

[114] E. Kaxiras. Atomic and Electronic Structure of Solids. Cambridge University Press (2003).

[115] C.W. J. Beenakker, H. van Houten. Quantum Transport in Semiconductor Nanostructures. Solid State Phys. **44**, 1 (1991).

[116] H. Ollivier, W. Zurek. Quantum Discord: A Measure of the Quantumness of Correlations. Phys. Rev. Lett. **88**, 017901 (2002).

[117] W. H. Zurek. Quantum discord and Maxwell's demons. Physical Review A, **67**, 012320 (2003).

[118] S. Pirandola. Quantum discord as a resource for quantum cryptography. Scientific Reports. **4**, 6956 (2014).

[119] F. F. Fanchini *et al.* Non-Markovian dynamics of quantum discord. Phys. Rev. A. **81**, 052107 (2010).

[120] K. v. Klitzing, G. Dorda, M. Pepper. New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance. Phys. Rev. Lett. **45**, 494 (1980).

[121] D. C. Tsui, H. L. Stormer, A. C. Gossard. Two-Dimensional Magnetotransport in the Extreme Quantum Limit. Phys. Rev. Lett. **48**, 1559 (1982).

[122] H. L. Störmer, D. C. Tsui. The Quantized Hall Effect. Science. **220**, 1241 (1983).

[123] R. Laughlin. Anomalous Quantum Hall Effect: An Incompressible Quantum Fluid with Fractionally Charged Excitations. Phys. Rev. Lett. **50**, 1395 (1983).

[124] R. Willett, *et al.* Observation of an even-denominator quantum number in the fractional quantum Hall effect. Phys. Rev. Lett. **59**, 1776 (1987).

[125] D. Arovas, J. Schrieffer, F. Wilczek. Fractional Statistics and the Quantum Hall Effect. Phys. Rev. Lett. **53**, 722 (1984).

[126] B. Halperin. Statistics of Quasiparticles and the Hierarchy of Fractional Quantized Hall States. Phys. Rev. Lett. **52**, 1583 (1984).

[127] F. Wilczek. Magnetic Flux, Angular Momentum, and Statistics. Phys. Rev. Lett. **48**, 1144 (1982).

[128] F. Wilczek. Quantum Mechanics of Fractional-Spin Particles. Phys. Rev. Lett. **49**, 957 (1982).

[129] B. A. Z. António *et al.* Transport through quantum rings. Eur. J. Phys. **34**, 831 (2013).

[130] F. Bloch. Über die Quantenmechanik der Elektronen in Kristallgittern. Zeitschrift für Physik. **52** 555, (1929).

[131] R. Kronig, W. Penney. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. **130**, 499 (1931).

[132] G. Grosso, G. Parravicini. Solid State Physics (Academic Press, 2003).

[133] M. Born, T. von Karman. Uber Schwingungen im Raumgittern. Physik. Zeits. **13**, 297 (1912).

[134] The Quantum Hall Effect. Poincaré Seminar 2004.

[135] A. Lerda. Anyons Quantum Mechanics of Particles with Fractional Statistics (Springer-Verlag, 1992).

[136] J. K. Asboth, L. Oroszlány, A. Pályi. A Short Course on Topological Insulators: Band-structure topology and edge states in one and two dimensions. arXiv:1509.02295 (2015).

[137] D. Thouless *et al.* Quantized Hall Conductance in a Two-Dimensional Periodic Potential. Phys. Rev. Lett. **49**, 405 (1982).

[138] D. Xiao, M. Chang, Q. Niu. Berry phase effects on electronic properties. Rev. Mod. Phys. **82** 1959 (2010).

[139] M. Freedman *et al.* A Class of $\mathcal{PT}$-Invariant Topological Phases of Interacting Electrons. Ann. Phys. **310**, 428 (2004).

[140] F. Haldane. Model for a Quantum Hall Effect without Landau Levels: Condensed-Matter Realization of the "Parity Anomaly" Phys. Rev. Lett. **61**, 2015 (1988).

[141] B. Bernevig. Topological Insulators and Topological Superconductors. Princeton University Press. (2013).

[142] Z. F. Ezawa. Quantum Hall Effects. Field Theoretical Approach and Related Topics. World Scientific Public (2000).

[143] A. Khare. Fractional Statistics and Quantum Theory. World Scientific Public (2005).

[144] T. Kuroda. Symmetric quantum dots as efficient sources of highly entangled photons: Violation of Bell's inequality without spectral and temporal filtering. Phys. Rev. B. **88**, 041306. (2013).

Apêndice A

Análise de Fourier para funções não-periódicas.

Como dissemos no capítulo 2, toda função bem comportada pode ser escrita em termos da série de Fourier. Aqui, mostraremos como expandir uma função aparentemente não-periódica em série de Fourier.

Para tanto, vamos rescrever a equação (2.1) em termos de exponenciais. Temos a expansão dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(q_n x) + b_n \text{sen}(q_n x),$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{e^{iq_n x} + e^{-iq_n x}}{2} \right) + b_n \left(\frac{e^{iq_n x} - e^{-iq_n x}}{2i} \right),$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} \right) e^{iq_n x} + \left(\frac{a_n + ib_n}{2} \right) e^{-iq_n x},$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{iq_n x} + c_n^* e^{-iq_n x},$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{iq_n x} + c_{-n} e^{iq_{-n} x},$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{iq_n x}. \tag{A.1}$$

Incorporamos a_0 no somatório. Introduzimos o $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ e consideramos $c_n^* = c_{-n}$. Para funções não-periódicas, consideramos que se repetem no infinito, assim, temos $L \to \infty$. Assim, como $q_n = \frac{2\pi n}{L}$, os valores de q_n passa a ser infinitamente próximos um dos outros, formando uma reta real, o que conhecemos como espaço recíproco. Por sua vez, c_n não tem valores discretos, mas contínuos, então temos $c_n \to c(q)$. Substituindo essas

características na definição de c_n e utilizando (2.3) e (2.4), temos que

$$c(q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iqx} \mathrm{d}x \tag{A.2}$$

Aqui, expressamos o espaço real em coordenadas polares, o que acarreta no comprimento da periodicidade em 2π. Com a aproximação, a série de Fourier será expressa por uma soma infinitesimal, assim, temos o somatório transforma-se em integral em q, assim, temos

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(q) e^{iqx} \mathrm{d}q. \tag{A.3}$$

Apêndice B

Comutadores do Operador de Campo.

Tomando o operador de campo definido em (2.27), vem

$$\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i} = \int \mathrm{d}\mathbf{r}_{\alpha}\psi_i(\mathbf{r}_{\alpha})\hat{\mathrm{a}}^{\dagger}(\mathbf{r}_{\alpha}). \tag{B.1}$$

Como já é sabido, a amplitude $\hat{\mathrm{a}}^{\dagger}(\mathbf{r}_{\alpha})$ obedece a álgebra

$$\left[\hat{\mathrm{a}}(\mathbf{r}_{\alpha}), \hat{\mathrm{a}}^{\dagger}(\mathbf{r}'_{\alpha})\right]_{\epsilon} = \delta(\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}'_{\alpha}), \tag{B.2}$$

onde $\epsilon = \pm 1$, nos remetendo ao tipo de comutador tratado, isso reflete na natureza da partícula, como já foi colocado. Vamos avaliar o comutador para o operador de campo tomando

$$\left[\hat{\psi}_{\alpha i}, \hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i}\right]_{\epsilon} = \hat{\psi}_{\alpha i}\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i} + \epsilon\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i}\hat{\psi}_{\alpha i},$$

substituindo (B.1), temos

$$\begin{aligned}
\left[\hat{\psi}_{\alpha i}, \hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i}\right]_{\epsilon} &= \int \mathrm{d}\mathbf{r}_{\alpha}\psi^{*}_i(\mathbf{r}_{\alpha})\hat{\mathrm{a}}(\mathbf{r}_{\alpha}) \int \mathrm{d}\mathbf{r}'_{\alpha}\psi_i(\mathbf{r}'_{\alpha})\hat{\mathrm{a}}^{\dagger}(\mathbf{r}'_{\alpha}) + \epsilon \int \mathrm{d}\mathbf{r}'_{\alpha}\psi_i(\mathbf{r}'_{\alpha})\hat{\mathrm{a}}^{\dagger}(\mathbf{r}'_{\alpha}) \int \mathrm{d}\mathbf{r}_{\alpha}\psi^{*}_i(\mathbf{r}_{\alpha})\hat{\mathrm{a}}(\mathbf{r}_{\alpha}), \\
&= \int\int \mathrm{d}\mathbf{r}_{\alpha}\mathrm{d}\mathbf{r}'_{\alpha}\psi^{*}_i(\mathbf{r}_{\alpha})\psi_i(\mathbf{r}'_{\alpha}) \left[\hat{\mathrm{a}}(\mathbf{r}_{\alpha})\hat{\mathrm{a}}^{\dagger}(\mathbf{r}'_{\alpha}) + \epsilon\hat{\mathrm{a}}^{\dagger}(\mathbf{r}'_{\alpha})\hat{\mathrm{a}}(\mathbf{r}_{\alpha})\right], \\
&= \int\int \mathrm{d}\mathbf{r}_{\alpha}\mathrm{d}\mathbf{r}'_{\alpha}\psi^{*}_i(\mathbf{r}_{\alpha})\psi_i(\mathbf{r}'_{\alpha})\delta(\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}'_{\alpha}), \\
&= \int \mathrm{d}\mathbf{r}_{\alpha}\psi^{*}_i(\mathbf{r}_{\alpha})\psi_i(\mathbf{r}_{\alpha}) = 1, \quad \square
\end{aligned}$$

que é precisamente o comutador (2.28).

Agora, vamos demonstrar o comutador (2.29). Avaliando o comutador à partir da

definição, vem

$$\begin{aligned}\left[\hat{\psi}_{\alpha i},\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha j}\right]_{\epsilon} &= \int \mathrm{d}\mathbf{r}_{\alpha}\psi_i^*(\mathbf{r}_{\alpha})\hat{\mathrm{a}}(\mathbf{r}_{\alpha})\int \mathrm{d}\mathbf{r}'_{\alpha}\psi_j(\mathbf{r}'_{\alpha})\hat{\mathrm{a}}^{\dagger}(\mathbf{r}'_{\alpha}) + \epsilon\int \mathrm{d}\mathbf{r}'_{\alpha}\psi_j(\mathbf{r}'_{\alpha})\hat{\mathrm{a}}^{\dagger}(\mathbf{r}'_{\alpha})\int \mathrm{d}\mathbf{r}_{\alpha}\psi_i^*(\mathbf{r}_{\alpha})\hat{\mathrm{a}}(\mathbf{r}_{\alpha}),\\ &= \int\int \mathrm{d}\mathbf{r}_{\alpha}\mathrm{d}\mathbf{r}'_{\alpha}\psi_i^*(\mathbf{r}_{\alpha})\psi_j(\mathbf{r}'_{\alpha})\left[\hat{\mathrm{a}}(\mathbf{r}_{\alpha})\hat{\mathrm{a}}^{\dagger}(\mathbf{r}'_{\alpha}) + \epsilon\hat{\mathrm{a}}^{\dagger}(\mathbf{r}'_{\alpha})\hat{\mathrm{a}}(\mathbf{r}_{\alpha})\right],\\ &= \int\int \mathrm{d}\mathbf{r}_{\alpha}\mathrm{d}\mathbf{r}'_{\alpha}\psi_i^*(\mathbf{r}_{\alpha})\psi_j(\mathbf{r}'_{\alpha})\delta(\mathbf{r}_{\alpha}-\mathbf{r}'_{\alpha})\\ &= \int \mathrm{d}\mathbf{r}_{\alpha}\psi_i^*(\mathbf{r}_{\alpha})\psi_j(\mathbf{r}_{\alpha}) = I. \quad \square \end{aligned} \tag{B.3}$$

Para demonstrar a igualdade entre os comutadores de (2.29), basta fazermos a troca de índices $i \leftrightarrow j$, notamos que a integral em (B.3) vai resultar em

$$\left[\hat{\psi}_{\alpha j},\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i}\right]_{\epsilon} = I^* = \left[\hat{\psi}_{\alpha i},\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha j}\right]^*_{\epsilon}. \quad \square \tag{B.4}$$

A igualdade (2.30) é justificada considerando que os operadores de campo atuam em terminais diferentes, assim, permitindo a comutação, desde que seja obedecida a natureza da partícula transportada. Assim temos imediatamente

$$\left[\hat{\psi}_{\alpha i},\hat{\psi}_{\beta i}\right]_{\epsilon} = \left[\hat{\psi}_{\alpha i},\hat{\psi}_{\beta j}\right]_{\epsilon} = 0. \quad \square \tag{B.5}$$

Esses operadores serão necessários para normalizar os estados de Fock que criamos para o sistema multiterminal com 2 partículas e calcular os estados que relacionam o *input* e o *output* do sistema, como é demonstrado no apêndice seguinte.

Apêndice C

Normalização de (2.32) e (2.33).

Vamos primeiramente normalizar o estado (2.32), a saber

$$|\alpha\alpha\rangle = A\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i}\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha j}\,|0\rangle\,. \tag{C.1}$$

Tomando a condição de normalização do estado de Fock $\langle\alpha\alpha|\alpha\alpha\rangle = 1$, utilizando a álgebra demonstrada no apêndice anterior, vem

$$\begin{gathered}
|A|^2\,\langle 0|\hat{\psi}_{\alpha j}\hat{\psi}_{\alpha i}\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i}\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha j}|0\rangle = 1,\\
|A|^2\,\langle 0|\hat{\psi}_{\alpha j}\left(1-\epsilon\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i}\hat{\psi}_{\alpha i}\right)\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha j}|0\rangle = 1,\\
|A|^2\,\langle 0|1-\epsilon\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha j}\hat{\psi}_{\alpha j}-\epsilon\hat{\psi}_{\alpha j}\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i}\hat{\psi}_{\alpha i}\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha j}|0\rangle = 1,\\
|A|^2\,\langle 0|1-\epsilon\left(I^{*}-\epsilon\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i}\hat{\psi}_{\alpha j}\right)\left(I-\epsilon\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha j}\hat{\psi}_{\alpha i}\right)|0\rangle = 1,\\
|A|^2\,(1-\epsilon|I|^2) = 1. \quad \square
\end{gathered} \tag{C.2}$$

Utilizamos a condição da inexistência de autoestados abaixo do estado de vácuo na última linha.

Agora, vamos avaliar a normalização dos estados simétricos(antissimétricos), dados em (2.33), a saber

$$|\alpha\beta\rangle_{\pm} = B\left(\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i}\hat{\psi}^{\dagger}_{\beta j}\pm\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha j}\hat{\psi}^{\dagger}_{\beta i}\right)|0\rangle\,; \tag{C.3}$$

Assim, tomando novamente a normalização do estado de Fock, vem

$$
\begin{aligned}
&\langle\alpha\beta|\alpha\beta\rangle_{\pm} = 1, \\
&|B|^2 \langle 0| \left(\hat{\psi}_{\beta j}\hat{\psi}_{\alpha i} \pm \hat{\psi}_{\beta i}\hat{\psi}_{\alpha j}\right)\left(\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i}\hat{\psi}^{\dagger}_{\beta j} \pm \hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha j}\hat{\psi}^{\dagger}_{\beta i}\right)|0\rangle = 1, \\
&|B|^2 \langle 0| \left(\hat{\psi}_{\beta j}\hat{\psi}_{\alpha i}\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i}\hat{\psi}^{\dagger}_{\beta j} + \hat{\psi}_{\beta i}\hat{\psi}_{\alpha j}\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha j}\hat{\psi}^{\dagger}_{\beta i}\right) \pm \\
&\qquad \pm \left(\hat{\psi}_{\beta j}\hat{\psi}_{\alpha i}\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha j}\hat{\psi}^{\dagger}_{\beta i} + \hat{\psi}_{\beta i}\hat{\psi}_{\alpha j}\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i}\hat{\psi}^{\dagger}_{\beta j}\right)|0\rangle = 1, \\
&|B|^2 \langle 0| \left(\hat{\psi}_{\alpha i}\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i}\hat{\psi}_{\beta j}\hat{\psi}^{\dagger}_{\beta j} + \hat{\psi}_{\alpha j}\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha j}\hat{\psi}_{\beta i}\hat{\psi}^{\dagger}_{\beta i}\right) \pm \\
&\qquad \pm \left(\hat{\psi}_{\alpha i}\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha j}\hat{\psi}_{\beta j}\hat{\psi}^{\dagger}_{\beta i} + \hat{\psi}_{\alpha j}\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i}\hat{\psi}_{\beta i}\hat{\psi}^{\dagger}_{\beta j}\right)|0\rangle = 1, \\
&|B|^2 \langle 0| \left[\left(1 - \epsilon\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i}\hat{\psi}_{\alpha i}\right)\left(1 - \epsilon\hat{\psi}^{\dagger}_{\beta j}\hat{\psi}_{\beta j}\right) + \left(1 - \epsilon\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha j}\hat{\psi}_{\alpha j}\right)\left(1 - \epsilon\hat{\psi}^{\dagger}_{\beta i}\hat{\psi}_{\beta i}\right)\right] \pm \\
&\qquad \pm \left[\left(I - \epsilon\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha j}\hat{\psi}_{\alpha i}\right)\left(I^* - \epsilon\hat{\psi}^{\dagger}_{\beta i}\hat{\psi}_{\beta j}\right) + \left(I^* - \epsilon\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i}\hat{\psi}_{\alpha j}\right)\left(I - \epsilon\hat{\psi}^{\dagger}_{\beta j}\hat{\psi}_{\beta i}\right)\right]|0\rangle = 1, \\
&|B|^2(2 \pm 2|I|^2) = 1. \quad \square
\end{aligned}
\tag{C.4}
$$

A igualdade acima é precisamente o fator de normalização que acompanha a expressão (2.33). É importante apontar que na quarta linha os operadores não comutam livremente: cada permutação de operadores de campo geram um $-\epsilon$, como se sucede duas permutações, temos um termo neutro.

Apêndice D

Demonstração de (3.6).

Vamos demonstrar primeiramente o efeito do operador paridade na matriz de espalhamento. Para o problema do espalhamento, a operação da paridade tem como efeito a troca dos guias apenas, sem contudo mudar a direção de propagação das ondas. Para verificar isso, vamos tomar (1.17) para o caso de 2 guias, a saber

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}\left[\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right] &= \mathcal{P}\left[\begin{pmatrix} r_1 & t_2 \\ t_1 & r_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right], \\
\begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \end{pmatrix} &= \mathcal{P}\left[\begin{pmatrix} r_1 & t_2 \\ t_1 & r_2 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r_2 & t_1 \\ t_2 & r_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \end{pmatrix} &= \sigma_x\begin{pmatrix} r_1 & t_2 \\ t_1 & r_2 \end{pmatrix}\sigma_x\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}, \\
\Rightarrow \mathcal{P}[S] &= \sigma_x S \sigma_x. \quad \square
\end{aligned} \tag{D.1}$$

A terceira linha justifica-se assumindo que o operador paridade não deve mudar as amplitudes de probabilidade da cavidade.

O operador de reversão temporal, como explicado na secção 3.1, tem como efeito nas amplitudes o complexo conjugado e inversão do sentido dos guias de ondas. Efetivamente, para as amplitudes de probabilidade, temos que $A^* = B$. Então, analisando uma vez mais

o problema do espalhamento, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}[B] &= \mathcal{T}[SA], \\
B^* &= (SA)^*, \\
B^* &= S^*A^*, \\
A &= S^*B, \\
B &= (S^*)^{-1}A, \\
\Rightarrow \mathcal{T}[S] &= (S^*)^{-1}. \quad \square
\end{aligned} \tag{D.2}$$

Apêndice E

Demonstração da Matriz S_T, (3.13)

Retomando o procedimento apontado na secção 3.3, aplicamos (3.11) em (3.12), temos

$$\begin{bmatrix} i\left(\sqrt{1-\Gamma}a_1^{\text{out}}+b_1^{\text{out}}\right) \\ i\left(\sqrt{1-\Gamma}a_2^{\text{out}}+b_2^{\text{out}}\right) \\ i\left(\sqrt{1-\Gamma}a_3^{\text{out}}+b_3^{\text{out}}\right) \\ i\left(\sqrt{1-\Gamma}a_4^{\text{out}}+b_4^{\text{out}}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{t_0}{t_0^*}\left(\sqrt{1-\Gamma}b_3^{\text{out}}+a_3^{\text{out}}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{t_0}{t_0^*}\left(\sqrt{1-\Gamma}b_4^{\text{out}}+a_4^{\text{out}}\right) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{t_0}{t_0^*}\left(\sqrt{1-\Gamma}b_3^{\text{out}}+a_3^{\text{out}}\right)+i\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{t_0}{t_0^*}\left(\sqrt{1-\Gamma}b_4^{\text{out}}+a_4^{\text{out}}\right) \\ i\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{t_0}{t_0^*}\left(\sqrt{1-\Gamma}b_1^{\text{out}}+a_1^{\text{out}}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{t_0}{t_0^*}\left(\sqrt{1-\Gamma}b_2^{\text{out}}+a_2^{\text{out}}\right) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{t_0}{t_0^*}\left(\sqrt{1-\Gamma}b_1^{\text{out}}+a_1^{\text{out}}\right)+i\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{t_0}{t_0^*}\left(\sqrt{1-\Gamma}b_2^{\text{out}}+a_2^{\text{out}}\right) \end{bmatrix}. \tag{E.1}$$

Agora, separamos as matrizes colunas das amplitudes B e A, temos

$$\mathcal{B}B = \mathcal{A}A \tag{E.2}$$

As matrizes $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são resultantes da manipulação algébrica que elimina as amplitudes internas à barreira do sistema, tal que

$$\mathcal{A} = -\sqrt{b}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{a}{b} & i\frac{a}{b} \\ 0 & 1 & i\frac{a}{b} & \frac{a}{b} \\ \frac{a}{b} & -i\frac{a}{b} & 1 & 0 \\ -i\frac{a}{b} & \frac{a}{b} & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{E.3}$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & ia \\ 0 & 1 & ia & a \\ a & -ia & 1 & 0 \\ -ia & a & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{E.4}$$

onde admitimos que

$$a = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\Gamma}\frac{t_0}{t_0^*}, \tag{E.5}$$

$$b = 1 - \Gamma. \tag{E.6}$$

Invertendo $\mathcal{B}$, temos

$$\mathcal{B}^{-1} = \frac{1}{2a^2-1}\begin{bmatrix} -1 & 0 & a & ia \\ 0 & -1 & ia & a \\ a & -ia & -1 & 0 \\ -ia & a & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{E.7}$$

Aplicando em (E.2), e retomando a forma *standard*, temos que a matriz de espalhamento será dada por $S = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}$, assim, procedendo com a multiplicação, temos que

$$S = -\frac{1}{2a^2-1}\begin{bmatrix} \frac{2a^2-b}{\sqrt{b}} & 0 & \frac{a}{\sqrt{b}}(b-1) & i\frac{a}{\sqrt{b}}(b-1) \\ 0 & \frac{2a^2-b}{\sqrt{b}} & i\frac{a}{\sqrt{b}}(b-1) & \frac{a}{\sqrt{b}}(b-1) \\ \frac{a}{\sqrt{b}}(b-1) & -i\frac{a}{\sqrt{b}}(b-1) & \frac{2a^2-b}{\sqrt{b}} & 0 \\ -i\frac{a}{\sqrt{b}}(b-1) & \frac{a}{\sqrt{b}}(b-1) & 0 & \frac{2a^2-b}{\sqrt{b}} \end{bmatrix}. \tag{E.8}$$

Tomando $s = \frac{2a^2-b}{\sqrt{b}}$ e $s' = \frac{a}{\sqrt{b}}(b-1)$, substituimos (E.5) e (E.6), e com um pouco de álgebra, temos que

$$s = \sqrt{1-\Gamma}\left[\left(\frac{t}{t^*}\right)^2 - 1\right], \tag{E.9}$$

$$s' = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{t}{t^*}\Gamma. \tag{E.10}$$

Como queríamos demonstrar.

Apêndice F

Demonstração de (4.104).

Para demonstrar a expressão, vamos proceder com alguma álgebra a rotação (4.102), utilizando a forma de $\mathbf{U}_{1,2}$ dada em (4.91) e (4.92) , a saber

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_2 &= e^{i\sigma_y\frac{\varphi}{2}}\mathbf{U}_1 e^{-i\sigma_y\frac{\varphi}{2}}, \\
\mathbf{U}_2 &= \mathbf{U}_1 + i\frac{\text{sen}\varphi}{2}\left[\sigma_y, \mathbf{U}_1\right], \\
\Rightarrow \text{Tr}(\mathbf{U}_2\sigma_z\mathbf{U}_2\sigma_x) &= \text{Tr}(\mathbf{U}_1\sigma_z\mathbf{U}_1\sigma_x) - \frac{\text{sen}^2\varphi}{2}\text{Tr}([\sigma_y, \mathbf{U}_1]\,\sigma_z\,[\sigma_y, \mathbf{U}_1]\,\sigma_x) + , \\
&\quad + \frac{i\text{sen}\varphi}{2}\text{Tr}([\sigma_y, \mathbf{U}_1]\,\sigma_z\mathbf{U}_1\sigma_x) + \frac{i\text{sen}\varphi}{2}\text{Tr}(\mathbf{U}_1\sigma_z\,[\sigma_y, \mathbf{U}_1]\,\sigma_x) \\
\text{Tr}(\mathbf{U}_2\sigma_z\mathbf{U}_2\sigma_x) &= (1-\text{sen}^2\varphi)\text{Tr}(\mathbf{U}_1\sigma_z\mathbf{U}_1\sigma_x) + i\text{sen}\varphi\text{Tr}(\mathbf{U}_1\sigma_z\,[\sigma_y, \mathbf{U}_1]\,\sigma_x) \\
\text{Tr}(\mathbf{U}_2\sigma_z\mathbf{U}_2\sigma_x) &= \cos^2\text{Re}(4u_1u_1') + i\text{sen}\varphi[4i(u_1^2 - [\text{Re}(u_1')]^2)] \\
\text{Tr}(\mathbf{U}_2\sigma_z\mathbf{U}_2\sigma_x) &= 4\cos^2\text{Re}(u_1u_1') - 4\text{sen}\varphi(u_1^2 - [\text{Re}(u_1')]^2). \qquad \text{(F.1)}
\end{aligned}$$

Aplicando (F.1) em (4.100), temos que

$$P(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) = \frac{4(1-|I|^2)}{(1+|I|^2)}u_1\text{Re}(u_1')\left\{u_1\text{Re}(u_1')\cos^2\varphi - \text{sen}\varphi\left[u_1^2 - \text{Re}(u_1')^2\right]\right\} \qquad \text{(F.2)}$$

Por um procedimento similar em (4.103), temos que

$$P(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2') = \frac{4(1-|I|^2)}{(1+|I|^2)}u_1\text{Re}(u_1')\left\{u_1\text{Re}(u_1')\cos^2\varphi + \text{sen}\varphi\left[u_1^2 + \text{Re}(u_1')^2\right]\right\} \qquad \text{(F.3)}$$

Procedendo com a rotação (4.101), temos o traço dado por

$$\text{Tr}(\mathbf{U}_1'\sigma_z\mathbf{U}_1'\sigma_x) = -4\text{Re}(u_1u_1') \qquad \text{(F.4)}$$

O que acarreta nas probabilidades

$$P(\mathbf{U}_1', \mathbf{U}_2) = \frac{4(1-|I|^2)}{(1+|I|^2)} u_1 \mathrm{Re}(u_1') \left\{ u_1 \mathrm{Re}(u_1') \cos^2\varphi - \mathrm{sen}\varphi \left[u_1^2 - \mathrm{Re}(u_1')^2 \right] \right\}. \quad \text{(F.5)}$$

$$P(\mathbf{U}_1', \mathbf{U}_2') = \frac{4(1-|I|^2)}{(1+|I|^2)} u_1 \mathrm{Re}(u_1') \left\{ u_1 \mathrm{Re}(u_1') \cos^2\varphi + \mathrm{sen}\varphi \left[u_1^2 + \mathrm{Re}(u_1')^2 \right] \right\}. \quad \text{(F.6)}$$

Assim, aplicando (F.2), (F.3), (F.5) e (F.6) no lado esquerdo de (4.27), temos (4.104), como queríamos demonstrar.

Apêndice G

Primeira Publicação.

A Letters Journal Exploring the Frontiers of Physics

January 2017

EPL, **117** (2017) 14001
doi: 10.1209/0295-5075/117/14001

www.epljournal.org

Parity and time-reversal symmetry in the Hanbury Brown-Twiss effect

E. F. Silva[1], A. L. R. Barbosa[2] and J. G. G. S. Ramos[1]

[1] *Departamento de Física, Universidade Federal da Paraíba - 58051-970, João Pessoa, Paraíba, Brazil*
[2] *Departamento de Física, Universidade Federal Rural de Pernambuco - Dois Irmãos, 52171-900 Recife, Pernambuco, Brazil*

received 13 January 2017; accepted in final form 2 February 2017
published online 10 February 2017

PACS 42.50.-p – Quantum optics
PACS 73.40.-c – Electronic transport in interface structures
PACS 73.23.-b – Electronic transport in mesoscopic systems

Abstract – We investigate the parity and time-reversal symmetry in the Hanbury Brown-Twiss experiment. For this purpose, we develop a general scattering matrix framework founded on the concatenation of many individual compounded scattering processes on the setup. Within such scattering formulation, we propose a theoretical and experimental mechanism which provides how to measure the symmetry of the system through the correlation function of a pair of particles transmitted through the leads. The correlation function naturally reveal the quantum statistics of both bosons and fermions and demonstrate a very preponderant role of PT-symmetry on the HBT experiment.

Copyright © EPLA, 2017

Introduction. – Over the last few years, parity and time-reversal (PT) symmetric Hamiltonians have been consolidated as a possible extension of the Hermitian Hamiltonian postulate of quantum mechanics [1], a Dirac proposal to obtain real energy eigenvalues [2]. Systems described by a PT-symmetric Hamiltonian have been tested since then in different scenarios. For instance, in condensed matter, a myriad of complex PT lattices generates real energy bands [3], and, in the Hatano-Nelson model, the typical non-Hermitian Hamiltonian has been used to analyze the flux lines of a magnetic field in a type-II superconductor [4]. Also, in quantum optics, the systems can be PT-symmetrically adjusted in a balanced section of a threshold laser with a coherent perfect absorber (CPA) [5]. Henceforth, in order to study the eigenvalue problem of a non-Hermitian system, we should identify its PT transformation.

Exploring the non-Hermitian Hamiltonian postulate, Schomerus investigates interesting properties of a PT-invariant one-dimensional resonator [6] and shows how to detect the PT-symmetry in such system using transport properties. The main underlying mechanism is the preservation of the number of particles in a quantum scattering through a simultaneous loss and gain system combined with PT-symmetry. In the Hermitian configuration, the system conventionally supports quasi-bound states with the lifetime estimated by the imaginary term of the self-energy, but slip away to support stationary states for non-Hermitian Hamiltonian. Schomerus demonstrates the PT-symmetry fingerprints of the Hamiltonian through the quantum noise, the stability at the lasing threshold, the emitted radiation, etc.

Motivated by the Schomerus ideas, we investigate how the shot-noise power, embedded in the amplitude of the temporal correlation function of multi-lead scattering, can reveal not only the nature of the particles, but also the PT-symmetry itself and its consequences. In the midst of all possible multi-lead experiments, we choose a cornerstone of optics, the Hanbury Brown-Twiss (HBT) interferometer.

The HBT experiment is due to Hanbury Brown and Twiss [7]. They propounded an interferometer that measures the intensity between particles[1] emitted, with a time delay, by two photomultipliers. The incident particles impinge on the mirror adjusted in a way that the particles split in two common components with their own particle detectors. Thus, Hanbury Brown and Twiss experiment

[1] Although in the original experiment was accomplished using fotons, later it was verified the opposite effect for fermions. In this manner, we will refer to the carriers as particles.

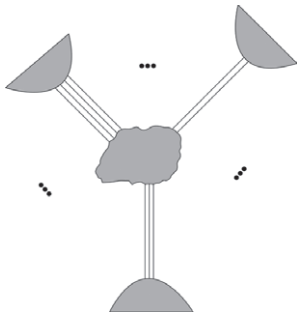


Fig. 1: Scattering center coupled to reservoirs through ideal leads.

permits to find a bunching effect between photons as they reached the detectors [8], determining some fingerprints on the correlation between the delayed photons emitted in the apparatus. Similarly, the transversal electronic transport of particles in an edge state of the quantum Hall effect [9] produces an anti-bunching effect [10]. In the former case, the HBT experiment is founded on bosonic particles, and, in the latter, it is founded on fermionic ones. Then, we recognize the HBT experiment as a mechanism to measure the statistical behavior of correlated particles. This ubiquitous possibility to measure the statistics of fundamental particles encouraged Glauber to formulate a general quantum optics concept [11] and other applications, *e.g.*, superconductivity (one can establish an isometry between a Cooper pair ray and the HBT experiment [12]), elementary particles (pion decay resulting of nuclear collisions [13]), solid-state physics (waves suffering Anderson localization are correlated according to the HBT experiment [14]) and quantum information (measuring the Bell's inequality violation [15]).

Therefore, we explore in this paper the emerging physical mechanisms attributed to the parity and time-reversal symmetry transformation. With this motivation, we analytically derive the resulting scattering matrix due to both the coupling of a tunneling probability barrier with arbitrary transmission parameter and to an amplifying/absorber system in each HBT's lead. The compound system will allow one to consider the phenomena as a result of resonant effects. As we derive the scattering matrix, denoted as HBT-PT, we analytically calculate the correlation function which relates the incident/scattered particles with the quantum statistics of the system. The final result allow ones to establish the physical requirements to detect the PT-symmetry on the HBT-PT system. Also, we indicate some remarkable physical consequences.

Scattering matrix. – In the current section, we deduce both the HBT (Hermitian) and the HBT-PT (non-Hermitian) scattering matrices. The first deduction is a revision to introduce the reader on the subject. The second deduction is an original result inspired by the Schomerus ideas and manifests some peculiarities.

Hermitian Hanbury Brown-Twiss setup. For pedagogical reasons and in order to render the paper self-contained, we first explore the conventional HBT experiment, exhibiting how the amplitude of the temporal correlation function of counting statistics (shot noise) is directly related to the nature of the particles. We consider now a generic system with α ideal leads coupled to a scattering center (SC) as depicted in fig. 1. The leads will transport particles (fermions or bosons) from the reservoirs to the SC, and also from the SC to the detectors. For this reason, the wave solution on the two-dimensional lead α can be written as

$$\psi_\alpha(x,y) = \sum_{n=1}^{N_\alpha} (a_n^{(\alpha)} \psi_n^{-(\alpha)} + b_n^{(\alpha)} \psi_n^{+(\alpha)}), \tag{1}$$

where the SC is the reference point. The coefficients $b_n^{(\alpha)}$ and $a_n^{(\alpha)}$ are the output and input amplitudes, respectively, while N_α is the number of open channels in the α-th lead. The functions $\psi_n^{\pm(\alpha)}$ are plane waves as we assume very far detectors (and emitters) from the SC. We can represent the scattering formulation of eq. (1) assuming that the output amplitudes are the result of a unitary transformation of the input amplitudes,

$$B = SA, \tag{2}$$

where A and B stands for the column vector of input and output amplitudes, respectively, and S is the scattering matrix which provides the relation between these amplitudes. The S-matrix is unitary, *i.e.*, $SS^\dagger = \mathbb{I}$ in order to preserve the probability current. The scattering matrix fulfills all constraints because it accounts all possible interactions that affect the transport properties of the system. The entries of the scattering matrix are usually written as

$$S = \begin{pmatrix} \mathbf{r} & \mathbf{t}' \\ \mathbf{t} & \mathbf{r}' \end{pmatrix}, \tag{3}$$

with $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ and $\mathbf{t}$, $\mathbf{t}'$ representing the reflection and transmission blocks of the scattering, respectively.

The scattering formalism can be applied to the simplest HBT setup, consisting of two incident particles in different leads, each one with a single open channel (energy). As previously mentioned, Hanbury Brown and Twiss proposed an interferometer that allows to measure the correlation between two particles emitted by different leads into a semi-transparent mirror. The latter can be interpreted as a scattering center which allows the particles to be transmitted or reflected to detector leads, as depicted in fig. 2. The mirror does not allow the reflection to the incident channel. Following fig. 2, the direct (perpendicular) switch from the source to the detector will be called henceforth transmission (reflection), with the amplitude denoted as t (r). Accordingly, the conditions that

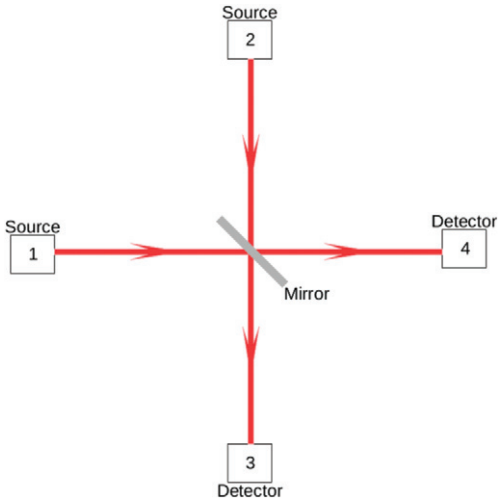


Fig. 2: (Colour online) Hanbury Brown-Twiss interferometer.

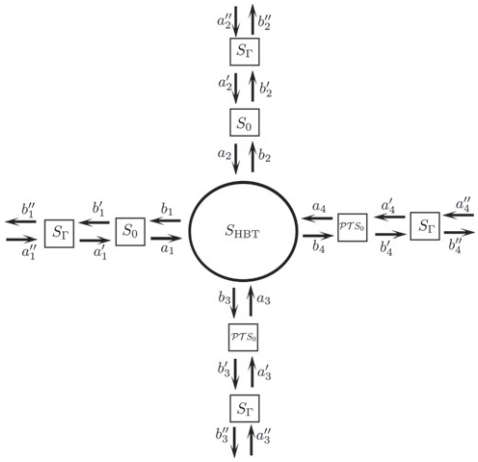


Fig. 3: Amplifying-absorber sections and barriers coupling to the HBT apparatus [6].

reproduce the HBT setup through eq. (2) are

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r^* & t^* \\ 0 & 0 & t^* & r^* \\ r & t & 0 & 0 \\ t & r & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = S_{\rm HBT} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

with r and t expressing the reflection and transmission amplitudes of the mirror, respectively. The 4×4 scattering matrix in eq. (4) has backscattering properties, allowing the permutation *source* $\leftrightarrow$ *detector*. This permutation is another interesting fact presented in $S_{\rm HBT}$ and reveals that it is Hermitian. For our conceptual proposal, without loss of generality, we set the mirror to reflect and transmit with the same probabilities amplitudes, *i.e.*, $-r = it = \sqrt{2}/2$. Therefore, the second quantization techniques [16] allow to find the detection probabilities of the two particles in the same lead, $P(ii), i = 3, 4$, or in different leads, $P(i, j),\ i \neq j = 3, 4$. The result is

$$\mathrm{P}(33) = \mathrm{P}(44) = \frac{1}{4}(1 - \epsilon|I|^2), \tag{5}$$

$$\mathrm{P}(34) = \frac{1}{2}(1 + \epsilon|I|^2). \tag{6}$$

Equations (5), (6) are valid for both fermions and bosons, while the parameter ϵ informs the two possibles algebras used: if $\epsilon = 1$, the algebra is fermionic, and, if $\epsilon = -1$, the algebra is bosonic. Furthermore, I is the overlap between the incident particles waves which mutually correlates due to their indistinguishability. Experimentally, the overlap parameter $I \in [0, 1]$ encodes the simultaneity of the emitted particles: if $I = 1$, the particles are emitted exactly at the same time, and, if $I = 0$, the particles are emitted with a sufficiently large time delay. Although the present system is the simplest example of a HBT experiment, we notice that it manifests the Pauli exclusion principle for the perfect overlapped fermionic waves as the probability to find the two particles in the same lead is zero from eq. (5). The opposite behavior occurs for the bosonic waves according to the same equation, resulting in the bunching effect.

Non-Hermitian Hanbury Brown-Twiss setup. Concluded a brief presentation of the conventional Hermitian HBT setup, we begin the HBT-PT formal analysis. The PT-symmetry in the HBT experiment can be controlled through an amplifying-absorber mechanism [6] which modulates the parity and time-reversal symmetry breaking. Therefore, performing an extension of the one-dimensional setup [6], we couple in the usual way two orthogonal amplifying sections in the leads 1 and 2, generating the following scattering matrices (fig. 3):

$$\begin{pmatrix} b'_i \\ a_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t_0 \\ t_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_i \\ b_i \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} b'_i \\ a_i \end{pmatrix} = S_0 \begin{pmatrix} a'_i \\ b_i \end{pmatrix}, \tag{7}$$

where t_0 is an experimental complex parameter which rules the amplifying rate section and $i = 1, 2$. The $\mathcal{T}$-symmetry can be broken basically through two mechanisms: a perpendicular magnetic field or some amplification/absorption parameter. Furthermore, the Hamiltonian H becomes non-Hermitian if the open system is coupled with amplification/absorption sections. It allows one to talk about non-Hermicity of well-established Hermitian systems, as in the two-dimensional electronic transport [17]. The effect of the broken $\mathcal{T}$ is algebraically identified with the operation $\mathcal{T}S_0 = (S_0^*)^{-1}$. On the other hand, a parity $\mathcal{P}$ transformation modifies the wave function $\psi(x)$ as $\mathcal{P}\psi(x) = \psi(-x)$, which exchanges the left/right or up/down leads as $\mathcal{P}S_0 = \sigma_x S_0 \sigma_x$. Therefore, the PT-symmetry is preserved if the diametrically

opposite (parity) leads balance the two absorber sections in the leads 3 and 4. The resulting scattering equation is the result of the parity and time-reversal operators, $\mathcal{P}$ and $\mathcal{T}$, respectively. We implement the procedure on S_0, following ref. [6] and inspecting the setup depicted in the fig. 3 as

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} b'_{i+2} \\ a_{i+2} \end{pmatrix} &= \mathcal{PT} S_0 \begin{pmatrix} a'_{i+2} \\ b_{i+2} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} b'_{i+2} \\ a_{i+2} \end{pmatrix} &= \sigma_x (S_0^*)^{-1} \sigma_x \begin{pmatrix} a'_{i+2} \\ b_{i+2} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} b'_{i+2} \\ a_{i+2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{t_0^*} \\ \frac{1}{t_0^*} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_{i+2} \\ b_{i+2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{8}$$

where σ_x is the Pauli matrix. Equation (8) is the expected resonant effect result [18]. The complete coupling of the HBT-PT setup sections is achieved with the substitution of a and b of eq. (7) and eq. (8) in the Hermitian HBT scattering equation given in eq. (4). The final result is

$$\begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ b'_4 \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{t_0}{t_0^*} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ i & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \\ a'_4 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Notice the scattering matrix in eq. (9) is no longer Hermitian as in eq. (4), although eq. (9) still reproduces the same outcome of the standard (Hermitian) HBT setup, as we shall show in the fourth section. The Hermitian case is recovered if $\mathrm{Im}(t_0) = 0$. Therefore, the imaginary part of t_0 is responsible for the crossover between the experiments HBT and the HBT-PT. Another subtle point on the peculiar non-Hermitian S-matrix is the noise (spontaneous particles emission) created by inserting the amplifying/absorbing sections. As we shall see below, the control of the additional noise can be mediated through tunneling barriers in the leads, exploring the resonant regime which control the transmitted particles [19]. As depicted in fig. 3, we couple a tunneling barrier in the leads in order to explore the resonant regime. The scattering produced by the barriers can be written as

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} b''_j \\ a'_j \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} \sqrt{1-\Gamma} & i\sqrt{\Gamma} \\ i\sqrt{\Gamma} & \sqrt{1-\Gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a''_j \\ b'_j \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} b''_j \\ a'_j \end{pmatrix} &= S_\Gamma \begin{pmatrix} a''_j \\ b'_j \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{10}$$

where $\Gamma \in [0,1]$ is the transmission probability generated by the barriers and $j = 1,2,3,4$. Proceeding in the usual way, we substitute a' and b' in eq. (9) and, after some algebra, we find a considerably simplified form to the total scattering matrix

$$S_{\mathrm{T}} = -\frac{1}{(1-\Gamma)\left(\frac{t_0}{t_0^*}\right)^2 - 1} \begin{pmatrix} s & 0 & s' & -is' \\ 0 & s & -is' & s' \\ s' & is' & s & 0 \\ is' & s' & 0 & s \end{pmatrix}, \tag{11}$$

where

$$s \equiv \sqrt{1-\Gamma}\left[\left(\frac{t_0}{t_0^*}\right)^2 - 1\right], \tag{12}$$

$$s' \equiv -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{t_0}{t_0^*}\Gamma. \tag{13}$$

Equation (11) represents the scattering matrix which combines the HBT experiment with the control mechanisms of parity and time-reversal symmetries (HBT-PT). One may argue that the barriers would affect the symmetry in each lead of eq. (9), but it is not true since S_Γ is invariant under $\mathcal{PT}$ transformation, $S_\Gamma = \mathcal{PT} S_\Gamma$, as one can verify. The scattering matrix S_{HBT} can be obtained from eq. (11) if $\mathrm{Im}(t_0) = 0$ and $\Gamma \to 1$, as expected. The resonant regime is achieved if $\mathrm{Im}(t_0) = 0$ and $\Gamma \to 0$, generating singularities in the output amplitudes with the consequent parity and time-reversal symmetry breaking.

Although the representation of the system through the scattering matrix of eq. (11), an experimental setup to measure the quantum statistics is highly non-trivial if the apparatus is symmetrically adjusted to satisfy parity and time reversal. A method would be the system immersion in a heat bath [6,20,21], from which we evaluate the system response using the noise due to the bath-system coupling and the consequent fluctuation dissipation [22]. This provides an analysis of the attenuation of the output amplitudes [23]. Clearly this method is very hard to implement in the four-leads detection apparatus. Fortuitously, we formulated an alternative approach inspired by the Schomerus ideas to determine the PT-symmetry using counting statistics, an original general formalism is developed in the next section for multi-lead systems.

Input and output states. – In order to provide the formalism, it is convenient to write the inputs in terms of the outputs

$$A = S^\dagger B. \tag{14}$$

We consider a multi singled channel lead system (MSCTS) operating at zero temperature. The scattering matrix of such system can be written as

$$S_{\mathrm{MSCTS}} = \begin{pmatrix} r_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1\alpha} \\ t_{21} & r_{22} & \cdots & t_{2\alpha} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{\alpha 1} & t_{\alpha 2} & \ldots & r_{\alpha\alpha} \end{pmatrix}. \tag{15}$$

As each lead has only one open channel, it is simple to express a field operator that creates a particle in the lead α with wave function $\psi_i(\vec{\mathrm{r}}_\alpha)$ [24],

$$\hat{\psi}^\dagger_{\alpha i} = \int \mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}_\alpha \psi_i(\vec{\mathrm{r}}_\alpha)\hat{a}^\dagger(\vec{\mathrm{r}}_\alpha). \tag{16}$$

We denote N as the number of leads in the system while $\hat{a}^\dagger(\vec{\mathrm{r}}_\alpha)$ is the standard creation operator. The field operator of eq. (16) will act in multiplet states of the Fock

space. On the other hand, the field operator will obey the following commutation relations:

$$\left[\hat{\psi}_{\alpha i}, \hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i}\right]_{\epsilon} = 1, \tag{17}$$

$$\left[\hat{\psi}_{\alpha i}, \hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha j}\right]_{\epsilon} = \left[\hat{\psi}_{\alpha j}, \hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i}\right]^{*}_{\epsilon} = I, \tag{18}$$

$$\left[\hat{\psi}_{\alpha i}, \hat{\psi}_{\beta j}\right]_{\epsilon} = \left[\hat{\psi}_{\alpha i}, \hat{\psi}_{\beta i}\right]_{\epsilon} = 0, \tag{19}$$

where I is the same overlap factor of eqs. (5) and (6) that are defined in terms of the wave functions as

$$I = \int \mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}_{\alpha} \psi^{*}_{i}(\vec{\mathrm{r}}_{\alpha}) \psi_{j}(\vec{\mathrm{r}}_{\alpha}). \tag{20}$$

The possible 2 incident particle states can be constructed using the field operator of eq. (16) and normalizing the fields. After some algebra, we obtain the states

$$|\alpha\alpha\rangle = \left[1 - \epsilon|I|^2\right]^{-1/2} \hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i} \hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha j} |0\rangle, \tag{21}$$

$$|\alpha\beta\rangle_{\pm} = \left[2(1 \pm |I|^2)\right]^{-\frac{1}{2}} \left(\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i} \hat{\psi}^{\dagger}_{\beta j} \pm \hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha j} \hat{\psi}^{\dagger}_{\beta i}\right) |0\rangle. \tag{22}$$

The relations expressed in eqs. (21) and (22) form the input states. They can be referred to as the singlet and doublet states, respectively. The latter contemplates the symmetric and antisymmetric ones. The particles interact in the SC and will be created in any other lead preserving the constraints imposed by the conservative laws on the scattering matrix. The relation between the input field operators and the output ones follows from eq. (14),

$$\hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i} = r_{\alpha\alpha} \hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i} + \sum_{a}^{N} t_{\alpha a} \hat{\psi}^{\dagger}_{a i}. \tag{23}$$

We substitute eq. (23) in eqs. (21) and (22) concomitantly with the commutation relations (17)–(19) and obtain the novel identity

$$\sum_{a,b} t_{\alpha a} t_{\beta b} \hat{\psi}^{\dagger}_{a i} \hat{\psi}^{\dagger}_{b j} = \sum_{a} \Bigg[t_{\alpha a} t_{\beta a} \hat{\psi}^{\dagger}_{a i} \hat{\psi}^{\dagger}_{a j} + \sum_{n} \left(t_{\alpha a} t_{\beta a+n} \hat{\psi}^{\dagger}_{a i} \hat{\psi}^{\dagger}_{a+n j} + t_{\alpha a+n} t_{\beta a} \hat{\psi}^{\dagger}_{a+n i} \hat{\psi}^{\dagger}_{a j} \right) \Bigg]. \tag{24}$$

We rearrange the terms of the resultant expression to find all the output Fock states. After some algebra, the input states in terms of output states are given through the novel general MSCTS equations

$$\begin{aligned} |\alpha\alpha\rangle &= r^2_{\alpha\alpha} |\alpha\alpha\rangle + \sqrt{2} r_{\alpha\alpha} t_{\alpha a} |\alpha a\rangle_{-\epsilon} + t^2_{\alpha a} |aa\rangle \\ &\quad + \sqrt{2} t_{\alpha a} t_{\alpha a+n} |aa+n\rangle_{-\epsilon}, \\ |\alpha\beta\rangle_{\pm} &= \mathcal{I}^{\pm}_{\epsilon} \sqrt{(1 \mp \epsilon)} \big(r_{\alpha\alpha} t_{\beta\alpha} |\alpha\alpha\rangle + r_{\beta\beta} t_{\alpha\beta} |\beta\beta\rangle \\ &\quad + t_{\alpha a} t_{\beta a} |aa\rangle \big) + \left(r_{\alpha\alpha} r_{\beta\beta} \mp \epsilon t_{\alpha\beta} t_{\beta\alpha} \right) |\alpha\beta\rangle_{\pm} \\ &\quad + \left(r_{\alpha\alpha} t_{\beta a} \mp \epsilon t_{\alpha a} t_{\beta\alpha} \right) |\alpha a\rangle_{\pm} \\ &\quad + \left(r_{\beta\beta} t_{\alpha a} \mp \epsilon t_{\alpha\beta} t_{\beta a} \right) |\beta a\rangle_{\pm} \\ &\quad + \left(t_{\alpha a} t_{\beta a+n} \mp \epsilon t_{\alpha a+n} t_{\beta a} \right) |aa+n\rangle_{\pm}, \end{aligned} \tag{25, 26}$$

where we define

$$\mathcal{I}^{\pm}_{\epsilon} = \sqrt{\frac{1 - \epsilon|I|^2}{(1 \pm |I|^2)}}. \tag{27}$$

It is necessary to fix some conventions which are implicit on the eqs. (25) and (26). Firstly, we have omitted all the sums in the indices a and n. To avoid misunderstandings, it is enough to consider that the index a varies from 1 to N and n varies from 1 to $N - a$. Secondly, an important feature is that α and β do not explicitly appear in the sum of a. Given these conventions, we realize that the doublet input states is expressed by all the possible doublet output states. The formalism can be applied in a myriad of scenarios involving multi-lead scattering processes and, in particular, it will allow us to find the correlation functions of the HBT-PT system.

Correlation function. – Given a doublet input state in a general system such as the one depicted in fig. 1, we can determine the probability of the input state projection on each possible output state of the system. Furthermore, such probability can be interpreted as a correlation function provided the states are doublets. Accordingly, the counting statistics can be expressed in terms of correlations (noise) as

$$|\langle\alpha\alpha|\mathrm{Input}\rangle|^2 = (\Delta n_{\alpha})^2, \tag{28}$$

$$|_{+}\langle\alpha\beta|\mathrm{Input}\rangle|^2 + |_{-}\langle\alpha\beta|\mathrm{Input}\rangle|^2 = \langle n_{\alpha} n_{\beta}\rangle, \tag{29}$$

where $(\Delta n_{\alpha})^2 = P(\alpha\alpha)$ and $\langle n_{\alpha} n_{\beta}\rangle = P(\alpha\beta)$ are the previously mentioned probabilities. The derivation of each possible relation between the input and output doublets expressed in eqs. (25) and (26) is useful to construct some input state through S' and, consequently, to find the correlation functions through (28) and (29).

Equations (21) and (22) can be cast into the form

$$\begin{aligned} \hat{\psi}^{\dagger}_{\alpha i} \hat{\psi}^{\dagger}_{\beta j} |0\rangle &= \frac{1}{2} \left[2(1 - |I|^2)\right]^{1/2} |\alpha\beta\rangle_{-} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[2(1 + |I|^2)\right]^{1/2} |\alpha\beta\rangle_{+}. \end{aligned} \tag{30}$$

With this set of equations, finally the correlation expressed in eq. (28) will be calculated. We substitute eq. (26) in the r.h.s of eq. (30) and multiply by one of the possible bras $\langle\alpha\alpha|$, $\langle\beta\beta|$ or $\langle aa|$. After some algebra and taking the square modulus, we get the correlation functions for an output lead of the same index,

$$(\Delta n_{\alpha})^2 = |r_{\alpha\alpha}|^2 |t_{\beta\alpha}|^2 (1 - \epsilon|I|^2), \tag{31}$$

$$(\Delta n_{\beta})^2 = |r_{\beta\beta}|^2 |t_{\alpha\beta}|^2 (1 - \epsilon|I|^2), \tag{32}$$

$$(\Delta n_{a})^2 = |t_{\alpha a}|^2 |t_{\beta a}|^2 (1 - \epsilon|I|^2). \tag{33}$$

Proceeding similarly to $_{\pm}\langle\alpha\beta|$, $_{\pm}\langle\alpha a|$, $_{\pm}\langle\beta a|$ and $_{\pm}\langle aa+n|$, we can evaluate eq. (29). The result is

$$\begin{aligned} \langle n_{\alpha} n_{\beta}\rangle &= |r_{\alpha\alpha}|^2 |r_{\beta\beta}|^2 + |t_{\alpha\beta}|^2 |t_{\beta\alpha}|^2 - \epsilon|I|^2 \\ &\quad \times \left(r^{*}_{\alpha\alpha} r^{*}_{\beta\beta} t_{\alpha\beta} t_{\beta\alpha} + r_{\alpha\alpha} r_{\beta\beta} t^{*}_{\alpha\beta} t^{*}_{\beta\alpha} \right), \end{aligned} \tag{34}$$

$$\langle n_\alpha n_a\rangle = |r_{\alpha\alpha}|^2|t_{\beta a}|^2 + |t_{\alpha a}|^2|t_{\beta\alpha}|^2 - \epsilon|I|^2 \times(r_{\alpha\alpha}t_{\beta a}t^*_{\alpha a}t^*_{\beta\alpha} + r^*_{\alpha\alpha}t^*_{\beta a}t_{\alpha a}t_{\beta\alpha}), \quad (35)$$

$$\langle n_\beta n_a\rangle = |r_{\beta\beta}|^2|t_{\alpha a}|^2 + |t_{\beta a}|^2|t_{\alpha\beta}|^2 - \epsilon|I|^2 \times(r_{\beta\beta}t_{\alpha a}t^*_{\beta a}t^*_{\alpha\beta} + r^*_{\beta\beta}t^*_{\alpha a}t_{\beta a}t_{\alpha\beta}), \quad (36)$$

$$\langle n_a n_{a+n}\rangle = |t_{\alpha a}|^2|t_{\beta a+n}|^2 + |t_{\alpha a+n}|^2|t_{\beta a}|^2 - \epsilon|I|^2(t_{\alpha a}t_{\beta a+n}t^*_{\alpha a+n}t^*_{\beta a} + t^*_{\alpha a}t^*_{\beta a+n}t_{\alpha a+n}t_{\beta a}). \quad (37)$$

Equations (31)–(37) determine all the possible outcomes of a generic MSCTS provided the corresponding scattering matrix. To our knowledge, this result, valid for any quantum system described by eqs. (1) and (2), is completely novel. These equations immediately inform the shot-noise power of the system, the single source of noise at zero temperature. We extend our considerations to both fermionic and bosonic particles using the index ϵ.

Now we focus on the HBT-PT scattering matrix, represented in the eq. (11). More specifically, the input indices on the defined HBT-PT are $\alpha = 1$ and $\beta = 2$. We substitute the scattering matrix elements in the correlation functions given above and obtain, after some algebra, the HBT-PT statistics,

$$(\Delta n_1)^2 = (\Delta n_2)^2 = 0, \quad (38)$$

$$(\Delta n_3)^2 = (\Delta n_4)^2 = \frac{1}{4}\frac{\Gamma^4}{\left|(1-\Gamma)\left(\frac{t_0}{t_0^*}\right)^2 - 1\right|^4} \times(1-\epsilon|I|^2), \quad (39)$$

$$\langle n_1 n_2\rangle = (1-\Gamma)^2\frac{\left|\left(\frac{t_0}{t_0^*}\right)^2 - 1\right|^4}{\left|(1-\Gamma)\left(\frac{t_0}{t_0^*}\right)^2 - 1\right|^4}, \quad (40)$$

$$\langle n_1 n_3\rangle = \langle n_2 n_4\rangle = \langle n_1 n_4\rangle = \langle n_2 n_3\rangle = \frac{1}{2}\Gamma^2(1-\Gamma)\frac{\left|\left(\frac{t_0}{t_0^*}\right)^2 - 1\right|^2}{\left|(1-\Gamma)\left(\frac{t_0}{t_0^*}\right)^2 - 1\right|^4}, \quad (41)$$

$$\langle n_3 n_4\rangle = \frac{1}{2}\frac{\Gamma^4}{\left|(1-\Gamma)\left(\frac{t_0}{t_0^*}\right)^2 - 1\right|^4}(1+\epsilon|I|^2). \quad (42)$$

There is an interesting phenomenology in eqs. (38)–(42). Firstly, we must note at this stage that in the absence of PT-symmetry, $\mathrm{Im}(t_0) = 0$, the standard (Hermitian) HBT effect result given in eqs. (5), (6) is recovered, independently of Γ. Therefore, the Hermitian HBT phenomenology is independent of resonant effects. On the other hand, in a striking manner, the shot-noise power of (non-Hermitian) HBT-PT apparatus strongly depends of the tunnel barriers Γ. Moreover, a remarkable fingerprint of the non-Hermitian experiment is its non-null correlation functions between input and output leads as indicated in eq. (41), although the overlap term, I, occurs only on output arms in both cases, as indicated in eqs. (39) and (42). Secondly, and even more remarkable, the limit $\Gamma \to 1$ of the five last equations is

$$(\Delta n_1)^2 = (\Delta n_2)^2 = \langle n_{1,2} n_{2,3,4}\rangle = 0, \quad (43)$$

$$(\Delta n_3)^2 = (\Delta n_4)^2 = \frac{1}{4}(1-\epsilon|\mathrm{I}|^2), \quad (44)$$

$$\langle n_3 n_4\rangle = \frac{1}{2}\left(1+\epsilon|\mathrm{I}|^2\right), \quad (45)$$

i.e., the same result of the eqs. (5) and (6). Therefore, the shot-noise power of both the Hermitian and non-Hermitian HBT is the same in the ideal system which once again indicates the preponderant role of tunneling in PT-symmetric systems.

Given the dependence of the HBT-PT on the tunneling, we analyze the opaque limit, *i.e.*, impenetrable barriers ($\Gamma \to 0$), and we obtain $\langle n_1 n_2\rangle = 1$ establishing that the only possible output is the input doublet which projects in itself, indicating the full reflection of the incident particles. Finally, we explore details of the non-Hermitian HBT-PT correlations generated through amplifying and absorber sections. The results on the opaque regime can be summarized in simple expressions for both systems

$$(\Delta n_3)^2 = (\Delta n_4)^2 = \begin{cases} \frac{1-\epsilon|\mathrm{I}|^2}{4}, & \text{if } \mathrm{Im}(t_0) = 0, \\ 0, & \text{if } \mathrm{Im}(t_0) \neq 0, \end{cases} \quad (46)$$

$$\langle n_3 n_4\rangle = \begin{cases} \frac{1+\epsilon|\mathrm{I}|^2}{2}, & \text{if } \mathrm{Im}(t_0) = 0, \\ 0, & \text{if } \mathrm{Im}(t_0) \neq 0, \end{cases} \quad (47)$$

$$\langle n_1 n_2\rangle = \begin{cases} 0, & \text{if } \mathrm{Im}(t_0) = 0, \\ 1, & \text{if } \mathrm{Im}(t_0) \neq 0, \end{cases} \quad (48)$$

The exclusive sensitivity of the non-Hermitian HBT-PT apparatus on the resonance phenomena allows us to conclude that the shot-noise power in its typical regime is a very appropriate observable of the PT-symmetry. Also, there are possible technological applications if we consider a "PT" gate similar to a transistor with alternating (input or output) 0 shot noise depending on the PT-symmetry of the system, as the previous equations indicate.

Conclusion. – In the present paper, we investigate the amplitude of the temporal correlation function (shot-noise power) of both a Hanbury Brown-Twiss Hermitian and a non-Hermitian (PT) experiment. The study is valid for bunching and anti-bunching effects of bosons and fermions, respectively. Inspired by the recent result of Schomerus, we consider the couple of amplifying-absorbing sections and also transmission barriers in the leads of the HBT apparatus. Through concatenation techniques, we obtain the resonant S-matrix of the HBT with parity and time-reversal symmetry (non-Hermitian).

Henceforth, we extended the correlation functions formalism, by means of field operators defined in the Fock space, which provide any statistics of a doublet input state of a multi-lead system, described by a generic scattering matrix. Once we derived the scattering matrix of

the HBT-PT experiment, we obtain its statistics applying it to the correlation functions. The latter result can be applied in particular to the arbitrary transmission probability, including the full opaque limit ($\Gamma \to 0$), and to arbitrary amplifying-absorbing rates, performing the full crossover to Hermitian and non-Hermitian (PT) statistics. Then we identify the breaking point of parity and time-reversal symmetries, the fingerprint presented on the shot-noise power that separates completely the two regimes and can be used to the fine detection of the controlled PT-symmetry and possibly to technological applications.

We hope that the developed multi-lead correlation function formalism permits to study other applications beyond the PT-symmetric Hanbury Brown-Twiss effect.

REFERENCES

[1] Bender C. M. and Boettcher S., *Phys. Rev. Lett.*, **80** (1998) 5243.
[2] Dirac P. A. M., *Principle in Quantum Mechanics* (Oxford University Press) 1938.
[3] Berry M. V. and O'Dell D. H. J., *J. Phys. A: Math. Gen.*, **31** (1998) 2093.
[4] Hatano N. and Nelson D. R., *Phys. Rev. Lett.*, **77** (1996) 570.
[5] Chong Y. D., Ge L. and Stone A. D., *Phys. Rev. Lett.*, **108** (2012) 259902.
[6] Schomerus H., *Phys. Rev. Lett.*, **104** (2010) 233601.
[7] Hanbury-Brown R. and Twiss R. G., *Philos. Mag.*, **45** (1954) 663.
[8] Hanbury Brown R. and Twiss R. Q., *Nature*, **27** (1956) 177.
[9] Büttiker M., *Phys. Rev. B*, **46** (1992) 12485.
[10] Henny M. *et al.*, *Science*, **284** (1999) 296.
[11] Glauber R. J., *Phys. Rev.*, **130** (1963) 2529.
[12] Choi M., *Phys. Rev. B*, **89** (2014) 014908.
[13] Gyulassy M., Kauffmann S. K. and Wilson L. W., *Phys. Rev. C*, **20** (1979) 2267.
[14] Lahini Y. *et al.*, *Phys. Rev. A*, **84** (2011) 041806.
[15] Samuelsson P., Sukhorukov E. V. and Büttiker M., *Phys. Rev. Lett.*, **92** (2004) 026805.
[16] Blanter Y. and Büttiker M., *Phys. Rep.*, **336** (2000).
[17] Otashie B., Niţa M. and Aldea A., *Phys. Rev. B*, **94** (2016) 195431.
[18] Chong Y. D., Ge L. and Stone A. D., *Phys. Rev Lett.*, **106** (2011) 093902.
[19] Doron E. and Smilansky U., *Phys. Rev. Lett.*, **68** (1992) 1255.
[20] Collett M. J. and Gardiner C. W., *Phys. Rev. A*, **30** (1984) 1386.
[21] Gardiner C. W. and Collett M. J., *Phys. Rev. A*, **31** (3761) 1985.
[22] Beenakker C. W. J., *Phys. Rev. Lett.*, **81** (1998) 1829.
[23] Jeffers J. R., Imoto N. and Loudon R., *Phys. Rev. A*, **47** (3346).
[24] Loudon R., *Phys. Rev. A*, **58** (1998) 4904.

Apêndice H

Segunda Publicação.

Brazilian Journal of Physics
https://doi.org/10.1007/s13538-018-0576-6

CONDENSED MATTER

Tunable $\chi/\mathcal{PT}$ Symmetry in Noisy Graphene

E. Frade Silva[1] · A. L. R. Barbosa[2] · M. S. Hussein[3,4] · J. G. G. S. Ramos[1]

Received: 31 January 2018
© Sociedade Brasileira de Física 2018

Abstract
We investigate the resonant regime of a mesoscopic cavity made of graphene or a doped beam splitter. Using Non-Hermitian Quantum Mechanics, we consider the Bender-Boettcher assumption that a system must obey parity and time reversal symmetry. Therefore, we describe such system by coupling chirality, parity, and time reversal symmetries through the scattering matrix formalism and apply it in the shot noise functions, also derived here. Finally, we show how to achieve the resonant regime only by setting properly the parameters concerning the chirality and the PT symmetry.

Keywords Chiral · Chirality · Parity · Time reversal · Graphene · Noise · Non-hermitian

1 Introduction

Many current investigations propose Hermitian models to describe dissipative processes in order to maintain the Dirac's assumption and obtain real observable values [1–3]. Although it has been demonstrated to be a sufficient condition to obtain acceptable numbers, it has never been proven that it is necessary. For instance, non-Hermitian Hamiltonians are treated as a standard technique to describe open systems with dissipative processes [4, 5], and the most known example is the radioactive decay [6]. Beyond that, there is an attempt of a possible generalization of quantum mechanics postulates for which the open systems may be described by parity and time reversal invariant Hamiltonians.

In general, parity and time reversal symmetry (PT) has been used as a physical artifice very useful to establish selection rules and to settle some properties of a quantum system. These features allowed one to predict fundamental particles, e.g., the kaons, and to engender philosophical debates in the very foundations of physics, as the time arrow problem and, concomitantly, the PT-symmetry description of quantum mechanics.

The latter was proposed by Bender and Boettcher [7] when they analyzed a non-Hermitian Harmonic Oscillator Hamiltonian and figured out that its spectrum is entire real, unless the PT-symmetry is spontaneously broken. Ever since, a plenty of works in this matter were published, both theoretically and experimentally, indicating that might be possible to obtain acceptable quantum mechanics using such assumption. Important application of $\mathcal{PT}$ symmetry in optics were developed. In particular, we mention two coupled $\mathcal{PT}$ symmetric waveguides: a $\mathcal{PT}$ symmetric Bragg scatterer and a $\mathcal{PT}$ microring laser [8, 9].

Moreover, fundamental symmetries, such as time reversal, spin rotation, and chirality, must be considered to describe cavities with a large number of resonances (e.g., heavy nuclei). Accordingly, the treatment given to this complex systems is to analyze their symmetries, ignoring its detailed internal properties [10]. The different combination of the absence, or presence, of these symmetries forms the tenfold Cartan classes [11]. In this way, it turns out to be natural to study systems such as mesoscopic cavities in the view of Bender-Boettcher formalism.

In principle, for a complex system, the resulting Hamiltonian must be random, but here, we address a deterministic behavior to the system for simplicity, which will allow the study of both quantum mechanical formalisms. We approach the problem by the scattering

✉ E. Frade Silva
ericksilvaro@gmail.com

[1] Departamento de Física, Universidade Federal da Paraíba, 58051-970, João Pessoa, Paraíba, Brazil

[2] Departamento de Física, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Dois Irmãos, 52171-900 Recife, Pernambuco, Brazil

[3] Instituto de Estudos Avançados and Instituto de Física, Universidade de São Paulo, C.P. 66318, 05314-970 São Paulo, SP, Brazil

[4] Departamento de Física, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, CTA, São José dos Campos, SP, Brazil

Published online: 23 May 2018

matrix theory, which seems the most simple way to couple the desired symmetries. In this paper, we restrict ourselves to the effect caused by the coupling of chirality and/or PT-symmetry. We chose such couplings because, as will be seen throughout the manuscript, chirality plays a very important role in modern mesoscopic cavities.

Since the characteristic scattering matrices are obtained, we derive the shot-noise functions which act as observables to quantify the coupled symmetries. Then, we demonstrate how the resonance regime condition of such systems can be achieved and its dependence with parameters which govern the degree of symmetry. We further find corrections to the transport functions of a PT cavity tuning the relative chirality parameter.

2 Scattering Matrix: Chirality, Parity, and Time Reversal

We begin by introducing the chiral symmetry and its applications to physics. For a two-dimensional bipartite lattice system, there is a twofold degeneracy in the spectrum. It is said that the system supports a chiral symmetry and may be described by the off-diagonal Hamiltonian [12]

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^\dagger & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

The off-diagonal terms A are called hopping matrices, since one considers the transition between the sublattices. Now we introduce the chiral operator, $\hat{C}$, which brings up a degeneracy in each energy spectrum level due to the bipartite lattice

$$\begin{aligned} &\left\{\mathcal{H}, \hat{C}\right\} = 0, \\ &\mathcal{H} = -\hat{C}\mathcal{H}\hat{C}. \end{aligned} \tag{2}$$

Comparing (2) with (1), the chiral operator can be represented by the matricial form

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_N & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_N \end{pmatrix}. \tag{3}$$

These features about the chiral operator are used to explore the topological states of condensed matter systems, such as crystalline [13] and Chern insulators [14]. Here, we investigate graphene [15], another important system which we will consider in this paper as the representative of the chiral systems, whether for pure physical treatment or technological applications.

The graphene is pictured in a honeycomb structure made of carbons in each vertex, as depicted in Fig. 1, and can be quantified by the Hamiltonian (1). This structure results in the chiral symmetry (2). Physically, the latter introduces the coexistence of a electron-hole pair in the Dirac Sea. In fact,

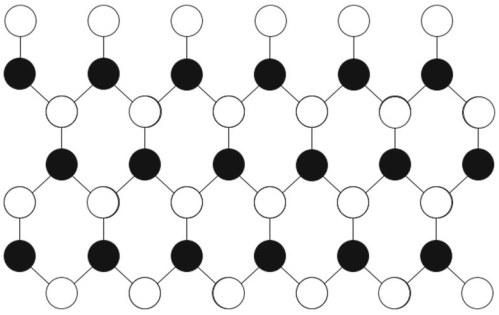


Fig. 1 Honeycomb lattice model. We can see the bipartite lattice by the different colors depicted, although they are all carbon

it was used to study some important theoretical issues about the transport in graphene, such as Klein paradox [16] and, for our concern, to study the charge conjugation symmetry. Here, we intend to study the transport properties of graphene considering further the parity and time reversal symmetries. A very straightforward way to couple these symmetries together is through the scattering matrix formalism, which we will develop now.

Considering a generic system with α ideal leads coupled to a cavity. The leads will transport carries from the reservoirs to the cavity, and also from the cavity to the detectors. For this reason, the solution for the lead α can be written as

$$\psi_\alpha(x, y) = \sum_{n=1}^{N_\alpha} (a_n^{(\alpha)} \psi_n^{-(\alpha)} + b_n^{(\alpha)} \psi_n^{+(\alpha)}), \tag{4}$$

where we consider the cavity (scattering center) as the reference point. The coefficients $b_n^{(\alpha)}$ and $a_n^{(\alpha)}$ are generically called the output and input amplitudes, respectively, while N_α is the number of open channels in the α-th lead. The wave functions $\psi_n^{\pm(\alpha)}$ are plane waves since we are assuming very far detectors (and emitters) from the cavity. We can represent the scattering picture of (4) assuming that the output amplitudes result from an unitary transformation of the input amplitudes,

$$B = SA, \tag{5}$$

where A and B stand for the column vector of input and output amplitudes, respectively and S is the scattering matrix which provides the relation between these amplitudes. We set the S matrix as unitary, (i.e., $SS^\dagger = \mathbb{I}$) in order to preserve the probability current. The scattering matrix fulfills all constraints because it accounts for all possible interactions that affect the transport properties of the system. Since we are treating the graphene case, the scattering matrix must fulfill another constraint due to chirality, which is [11]

$$S = \Sigma_z S^\dagger \Sigma_z. \tag{6}$$

We can establish (6) from (2) adopting a Hamiltonian-dependent model to the scattering matrix (e.g., Mahaux-Weidenmüller scattering model [5]), we recover S by the substitution $S(H, E) \rightarrow S(-\Sigma_z H \Sigma_z, -E)$. We turn our attention to the quantitative aspect of the scattering problem.

Usually, one may write the scattering matrix' entries as

$$S = \begin{pmatrix} \mathbf{r} & \mathbf{t}' \\ \mathbf{t} & \mathbf{r}' \end{pmatrix}, \tag{7}$$

with $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ and $\mathbf{t}$, $\mathbf{t}'$ representing the reflection and transmission blocks of S, respectively. We can apply the scattering formalism to the simplest graphene setup, consisting of two incident particles in different leads, each one with a single open channel. The graphene can be viewed as a scattering center which allows the particles to be transmitted or reflected to detector leads, as depicted in the Fig. 2.

Once we establish the conditions that reproduce the graphene setup, we can use (5) to write its scattering equation according to Fig. 2,

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = e^{i\varphi} \begin{pmatrix} 0 & 0 & r^* & t^* \\ 0 & 0 & t^* & r^* \\ r & t & 0 & 0 \\ t & r & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = S_{\text{gph}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

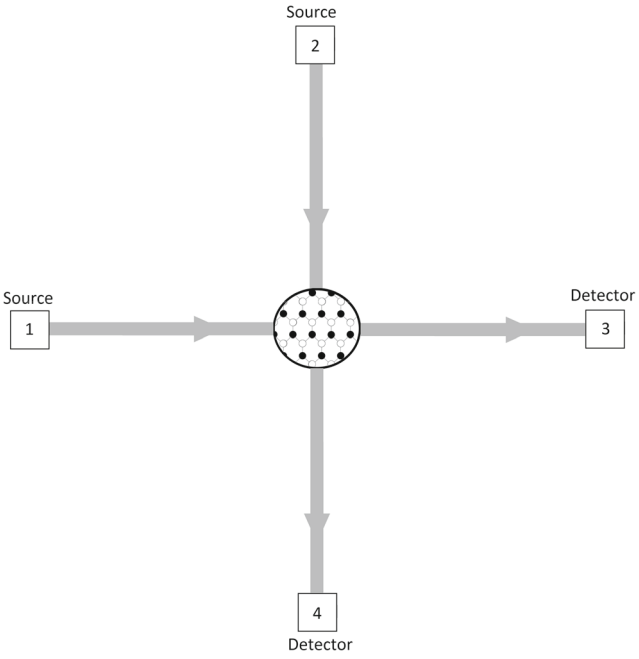


Fig. 2 Graphene as the scattering center transmitting two particles of different leads

which r and t express the reflection and transmission amplitudes of the mirror, respectively. The phase φ, evaluated to $[0, \pi/2]$, can be viewed as a degree of chirality. The maximum chirality is achieved setting $\varphi = \pi/2$ when (6) is fulfilled, physically the phase φ is the presence of impurities or doping in the graphene's structure [17]. For bosons transported through the cavity, this quantity plays the same role as Y. Tang and A. Cohen defined Optical Chirality [18]. For $\varphi = 0$, we have the Hanbury Brown-Twiss interferometer (HBT) [19]. The 4×4 scattering matrix in (8) takes into account the backscattering in lead 3 and 4, resulting in non-trivial values to b_1 and b_2 which will emerge when we introduce barriers in each lead. Also another interesting fact we observe is that S_{gph} obeys the chiral symmetry condition (6). For our conceptual proposal, without loss of generality, we set the reflection and transmission probabilities of the cavity as equivalent, i.e., $-r = it = \sqrt{2}/2$. In order to find the probabilities to detect both particles in lead 3 or 4 ($P(33)$ and $P(44)$, respectively), and one particle in lead 3 and 4 ($P(34)$), we consider each probability amplitude in (8) as field operators acting in the vacuum state. Observing the setup depicted in Fig. 2, the input state can be written as the creation operators $\hat{a}_1^\dagger$ and $\hat{a}_2^\dagger$ in the vacuum state. Then, one can calculate the probability to detect both particles in the same, or different, arms taking the square modulus of the projection of such input state and the respective state of interest, i.e., $P(ij) = |\langle 0|\hat{b}_i \hat{b}_j \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger |0\rangle|^2$. Using (8) and the commutation relations for fermions, or bosons, the probabilities of detection in the output arms are given by

$$\text{P}(33) = \text{P}(44) = \frac{1}{4}(1 - \epsilon |I|^2), \tag{9}$$

$$\text{P}(34) = \frac{1}{2}(1 + \epsilon |I|^2). \tag{10}$$

Equations (9) and (10) are valid for both fermions and bosons and the parameter ϵ inform two possible algebras used: if $\epsilon = 1$, we have the fermionic case, and, if $\epsilon = -1$, we have the bosonic's. Furthermore, I is the overlap between the incident particles states which correlates with each other due to their indistinguishability, I informs the simultaneity which the particles were emitted into the system: if $I = 1$, the particles are emitted exactly at the same time, whereas $I = 0$, the particles are emitted with a sufficiently large time delay. Despite the present system is the simplest case of a graphene setup, in the perfect overlapped situation, it manifests the very known Hong-Ou-Mandel (HOM) effect [20]: to the bosonic case, we observe a bunching behavior of the carriers, to fermions, anti-bunching. The latter is known as eletronic HOM effect [21, 22].

Now, we start the formal analysis to deduce the above system with PT symmetry. In order to explore the

PT-symmetry in the previous experiment, we need to implement a amplifying-absorber mechanism [24] in order to find means to break parity and time reversal symmetries, thus, performing an extension of the one dimensional case [25], we couple two amplifying sections, in leads 1 and 2, with the scattering matrix (Fig. 3)

$$\begin{pmatrix} b_i' \\ a_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t_0 \\ t_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i' \\ b_i \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} b_i' \\ a_i \end{pmatrix} = S_0 \begin{pmatrix} a_i' \\ b_i \end{pmatrix}, \tag{11}$$

where t_0 is an experimental parameter which rules the amplifying rate section and $i = 1, 2$. In order to maintain the PT-symmetry, it is necessary to balance the opposite arm by coupling two absorber sections in leads 3 and 4. The scattering equation is given by the result of the parity and time reversal operators, $\mathcal{P}$ and $\mathcal{T}$, by acting on S_0. Following the same procedure developed in [25] to determine the form of such operators in the one dimensional case, we have

$$\begin{pmatrix} b_{i+2}' \\ a_{i+2} \end{pmatrix} = \mathcal{PT} S_0 \begin{pmatrix} a_{i+2}' \\ b_{i+2} \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} b_{i+2}' \\ a_{i+2} \end{pmatrix} = \sigma_x (S_0^*)^{-1} \sigma_x \begin{pmatrix} a_{i+2}' \\ b_{i+2} \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} b_{i+2}' \\ a_{i+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{t_0^*} \\ \frac{1}{t_0^*} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i+2}' \\ b_{i+2} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

where σ_x is the Pauli matrix. Equation (12) is expected to hold since we adopted the solution (4) to a resonator [26]. We complete the coupling of the sections in graphene

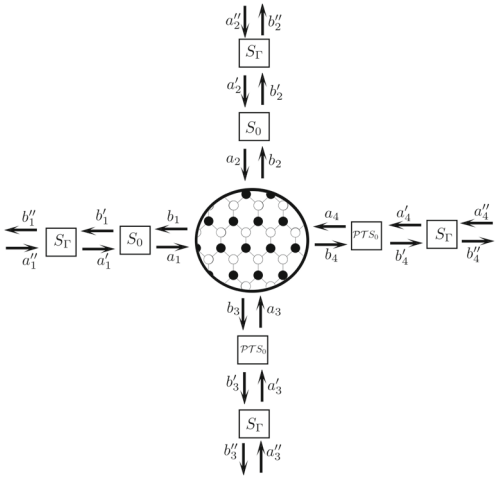


Fig. 3 Amplifying-absorber sections and barriers coupling to the graphene setup [25]

setup substituting a and b of (11) and (12) in the graphene scattering equation (8), and we get

$$\begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \\ b_3' \\ b_4' \end{pmatrix} = -e^{i\varphi} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{t_0}{t_0^*} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ i & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \\ a_4' \end{pmatrix}. \tag{13}$$

We note that the scattering matrix in (13) no longer reproduces the Chiral symmetry as in (8), but (13) still reproduces the same outcome of the standard graphene setup, (9) and (10), as will be seen in Section 4. Although we do recover former symmetry fixing the strong condition to the sections $\mathrm{Im}(t_0^2) = 0$, hence the imaginary part of t_0^2 is responsible for the crossover between the cases with graphene and the graphene-PT. Still working on Fig. 3, we couple a tunneling barrier in each arm, aiming to explore the resonant regime. The scattering equation of the barriers is

$$\begin{pmatrix} b_j'' \\ a_j' \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \sqrt{1-\Gamma} & i\sqrt{\Gamma} \\ i\sqrt{\Gamma} & \sqrt{1-\Gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_j'' \\ b_j' \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} b_j'' \\ a_j' \end{pmatrix} = S_\Gamma \begin{pmatrix} a_j'' \\ b_j' \end{pmatrix}, \tag{14}$$

where Γ is the barrier's transmission probability and $j = 1, 2, 3, 4$. Proceeding as in the previous case, we substitute a' and b' in (13), and after some algebra, we find the scattering matrix

$$S_\Gamma = \frac{1}{1 - e^{2i(\varphi+2\theta)}(1-\Gamma)} \begin{pmatrix} s & 0 & s' & -is' \\ 0 & s & -is' & s' \\ s' & is' & s & 0 \\ is' & s' & 0 & s \end{pmatrix}, \tag{15}$$

where we defined

$$s = \sqrt{1-\Gamma}\left[e^{2i(\varphi+2\theta)} - 1\right], \tag{16}$$
$$s' = e^{i(\varphi+2\theta)}\Gamma. \tag{17}$$

where we have made the complex variable substitution $t_0 = |t_0| e^{i\theta}$. Equation (15) represents the scattering matrix which combines the graphene scattering experiment with parity and time reversal symmetries. One may argue that the barriers would affect the symmetry in each lead of (13), however it is not an issue since S_Γ is invariant under $\mathcal{PT}$ transformation; $S_\Gamma = \mathcal{PT} S_\Gamma$, as one can verify. Concerning the strong condition of parity and time reversal, the system will not be affected by such quantities when $\theta = n\pi/2$, for $n = 0, 1, \ldots,$. This can be viewed as a special case where no phase is gained due to the amplification or attenuation due to the sections. Such interpretation will aid us to study the resonances of the above system. Also, we recover S_{gph} in (8) when we fix such values of θ and $\Gamma \to 1$, as expected, since there are no backscattering effects.

Although we have represented the system in a fairly simple form through the scattering matrix of the (15), some

techniques are very cumbersome to be used to determine its spectrum. One method would be immerse the system in a heat bath [25, 27, 28], and evaluate the response of the system by the noise due to the coupling bath-system using the fluctuation-dissipation theorem [29] in order to, finally, analyze the attenuation of the output amplitudes in the detection leads [30] where it will detect a resonance. Clearly, this method is very hard to implement in the four leads detection apparatus. Henceforth, we can approach such issue by the noise functions using the scattering formalism.

3 The Noise Functions

We begin the description of the formalism considering the whole system composed by reservoirs, leads and the cavity which is under investigation. The reservoirs will provide the particles to be transported through the system and its statistics, given by the Fermi-Dirac distribution for the fermionic case, or by the Bose-Einstein distribution, for the bosonic's. The leads are responsible for the propagation of the emitted particles to the cavity. We can solve the two-dimensional Schrödinger equation in the leads considering the x-axis the direction of propagation and the y-axis as the transversal modes, and represent the latter behavior by the single-particle quantum field operator given by

$$\hat{\Psi}(\vec{r}_\alpha, t) = \sum_n^N \int_0^\infty \mathrm{d}k_n \psi(k_n, x_\alpha)\chi_n(y_\alpha)\hat{a}_\alpha(k_n)e^{-\frac{E(k_n)}{\hbar}t} \tag{18}$$

$\chi_{\alpha n}$ are the transversal eingenfunctions, $\psi(k_{\alpha n}, x)$ some function that concern all the propagating quantities of the n-th channel beside $\hat{a}_{\alpha n}$ which is the destruction operator which fulfill the standard fermionic($\epsilon = 1$) and bosonic($\epsilon = -1$) algebra

$$\hat{a}_{\alpha n}\hat{a}^\dagger_{\beta m} + \epsilon\hat{a}_{\beta m}\hat{a}^\dagger_{\alpha n} = \delta_{\alpha\beta}\delta(m-n). \tag{19}$$

For our purpose, it is necessary discard the temperature in this problem and reduce the problem to the low frequency limit. Although it is an oversimplification, it will be enough to explore the effect due the symmetries in the transport of particles. These assumptions will reflect in the noise description of the problem, physically, the properties of the system will be given only by the transmission of the particles and its overlap, or indistinguishability degree. It will reflect in the field operator (18) as [31]

$$\hat{\Psi}(x_\alpha, t) = \int \mathrm{d}k_\alpha \psi(k_\alpha, x_\alpha)\hat{a}(k_\alpha)e^{-i\frac{E}{\hbar}t}. \tag{20}$$

We observe that the field operator creates a one mode particle in the α-th lead. The field operator of (20) will act in Fock space, since we are interested in the multiplet case. As we settled the usual destruction field operator, now it is possible create an input state to interact with the quantum dot, as in [23]. We inject a particle in lead 1 and 2 then we have the input state

$$|\Psi\rangle = \hat{\Psi}^\dagger(x_1, t)\hat{\Psi}^\dagger(x_2, t)|0\rangle \tag{21}$$

Since we intend to explore the properties by the noise, we have to represent an observable related to the particle's transport, in order to find the noise of the process, we recall for current operator given by

$$\hat{I}_\alpha(t) = \int \mathrm{d}x_\alpha \hat{T}\left[\Psi^\dagger(x_\alpha, t)\Psi(x_\alpha, t)\right], \tag{22}$$

where $\hat{T}$ is the normal ordering operator. As we are dealing only with processes of transmission of the particles after interact with the quantum dot (15), one can determine the possible outcomes through the calculation of the correlation function, given by [32]

$$S_{\alpha\beta}(t) = \frac{1}{2}\langle\Delta\hat{I}_\alpha\Delta\hat{I}_\beta + \Delta\hat{I}_\beta\Delta\hat{I}_\alpha\rangle \tag{23}$$

where $\Delta\hat{I}_\alpha = \hat{I}_\alpha - \langle\hat{I}_\alpha\rangle$ is the fluctuation of the current operator at the lead α and the state that evaluate $S_{\alpha\beta}(t)$ and ΔI_α is given by (21). With the aforementioned assumptions, we can use the Wiener-Khinchin theorem in (23) to obtain a fairly simple expression to the spectral density at low frequencies [33]

$$S_{\alpha\beta}(\omega) = \langle\Delta I_\alpha\Delta I_\beta\rangle_\omega, \tag{24}$$

which has the same form of the probability functions $P(ij)$. In (24), I_α is the current defined in the frequency domain

$$I_\alpha(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int I_\alpha(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t \tag{25}$$

The above analysis was necessary in order to identify the correlation function, e.g., (9) and (10), as a noise function. This may extend the concept of noise to scattering experiments. For the case of analyzing only the transmission of the carriers, one must impose the low frequency regime, then the correlation functions will be given by (24), which we call shot noise, or Poissonian noise, whether the carrier is a fermion or a boson [34, 35]. As we are analyzing the transmission properties due to the system depicted in Fig. 3, it is necessary develop a scattering formalism of such process to derive the respective noise functions, as we do next.

Since we already obtained the scattering matrix (15) for 4 propagating leads with one channel each, we consider the

scattering formalism with one channel per lead coupled to the quantum dot, then we write down the relation between of input and output amplitudes linked by the scattering matrix entries

$$\hat{a}_i = \sum_{j=1}^{4} s_{ij}\hat{b}_j \tag{26}$$

where s_{ij} is the scattering matrix entries. In fact, we established (26) based on (5). Then, with an analogous procedure used to derive (9) and (10), we project the input state (21) on the outcome state of interest and take its modulus square, we achieve all the possible configurations of a 4×4 scattering matrix system given by

$$\left(\Delta\hat{I}_{(1,2,3,4)}\right)^2 = |s_{1(1,2,3,4)}|^2|s_{2(1,2,3,4)}|^2\left(1-\epsilon|I|^2\right), \tag{27}$$

$$\langle\Delta\hat{I}_1\Delta\hat{I}_{(2,3,4)}\rangle = |s_{11}|^2|s_{2(2,3,4)}|^2 + |s_{1(2,3,4)}|^2|s_{21}|^2 - 2\epsilon|I|^2\mathrm{Re}\left(s_{11}s_{2(2,3,4)}s^*_{1(2,3,4)}s^*_{21}\right), \tag{28}$$

$$\langle\Delta\hat{I}_2\Delta\hat{I}_{(3,4)}\rangle = |s_{12}|^2|s_{2(3,4)}|^2 + |s_{1(3,4)}|^2|s_{22}|^2 - 2\epsilon|I|^2\mathrm{Re}\left(s_{12}s_{2(3,4)}s^*_{1(3,4)}s^*_{22}\right), \tag{29}$$

$$\langle\Delta\hat{I}_3\Delta\hat{I}_4\rangle = |s_{13}|^2|s_{24}|^2 + |s_{14}|^2|s_{23}|^2 - 2\epsilon|I|^2\mathrm{Re}\left(s_{13}s_{24}s^*_{14}s^*_{23}\right). \tag{30}$$

Equations (27)–(30) allow us to determine all possible outcomes of any four terminal system, even with backscattering and any symmetry embedded. It is important to note that we no longer refer to the above correlation functions as probabilities, $P(ij)$, but as noise functions, $\langle\Delta I_i\Delta I_j\rangle$. Such equations immediately inform the shot noise of the system, as we are considering the system at zero temperature and low frequency. Finally, we extend our considerations to both fermionic and bosonic cases through the index ϵ and also considered the indistinguishability degree between the particles by the overlap integral

$$I = \int \mathrm{d}k\mathrm{d}x\,\psi^*(x_a,k_a)\psi(x_b,k_b). \tag{31}$$

It is important to notice that applying (8) and (13) in the shot noise equations, we immediately obtain the probabilities (9) and (10), and recover the HOM statistics, as expected. Another feature is that (27) shows that it still preserves the exclusion principle for fermions, since we have a perfect indistinguishable pair, $I = 1$, then the mean squared fluctuation of the current operator is zero.

Having previously derived the graphene-like cavity with PT symmetry scattering matrix, represented in (15), now we can apply the scattering matrix elements in the shot noise functions, (27)–(30), and obtain, after some algebra, the graphene with PT symmetry statistics

$$(\Delta\hat{I}_1)^2 = (\Delta\hat{I}_2)^2 = 0, \tag{32}$$

$$(\Delta\hat{I}_3)^2 = (\Delta\hat{I}_4)^2 = \frac{1}{4}\frac{\Gamma^4}{\left[1+(1-\Gamma)^2-2(1-\Gamma)\cos(\varphi+2\theta)\right]^2}(1-\epsilon|I|^2), \tag{33}$$

$$\langle\Delta\hat{I}_1\Delta\hat{I}_2\rangle = \frac{4(1-\Gamma)^2\left[1-\cos(\varphi+2\theta)\right]^2}{\left[1+(1-\Gamma)^2-2(1-\Gamma)\cos(\varphi+2\theta)\right]^2}, \tag{34}$$

$$\langle\Delta\hat{I}_1\Delta\hat{I}_3\rangle = \langle\Delta\hat{I}_2\Delta\hat{I}_4\rangle = \langle\Delta\hat{I}_1\Delta\hat{I}_4\rangle = \langle\Delta\hat{I}_2\Delta\hat{I}_3\rangle = \frac{2\Gamma^2(1-\Gamma)\left[1-\cos(\varphi+2\theta)\right]^2}{\left[1+(1-\Gamma)^2-2(1-\Gamma)\cos(\varphi+2\theta)\right]^2}, \tag{35}$$

$$\langle\Delta\hat{I}_3\Delta\hat{I}_4\rangle = \frac{1}{2}\frac{\Gamma^4}{\left[1+(1-\Gamma)^2-2(1-\Gamma)\cos(\varphi+2\theta)\right]^2}(1+\epsilon|I|^2). \tag{36}$$

If it is applied $\varphi = 0$, one will obtain the statistics of a Hanbury Brown-Twiss apparatus embedded with parity and time reversal symmetry [36]. Equations (33) and (36) are the noise due to the full transportation of the carriers. Equation (35) represents the transportation of one carrier and the reflection of the other and (34) represents no transport at all. In the HBT regime, one can achieve the resonances setting the breaking PT symmetry condition to θ: only the full transportation noise equations will be non-trivial. Also, we can analyze how the slightest doping will affect the resonant regime in the former case. Expanding the above equations to the next non-trivial order of φ, one gets immediately the corrections due to the backscattering caused by impurities effects through the noise,

$$\langle(\Delta I_{tr})^2\rangle = f_\epsilon(I)\left[1+2\frac{1-\Gamma}{\Gamma^2}\varphi^2\right], \tag{37}$$

$$\langle(\Delta I_{bs})^2\rangle \sim \varphi^4, \tag{38}$$

where $f_\epsilon(I)$ is relative to the overlap term of the respective function, $\langle(\Delta I_{tr})^2\rangle$ is related to the noise functions which describes the full transmission of the carriers, and $\langle(\Delta I_{bs})^2\rangle$, is the noise functions with any type of backscattering. It is interesting to note that in a resonant regime($\Gamma \to 0$) of a doped system border effects of the cavity increase as corrections of the noise functions go up. It is possible too make the same expansion around $\varphi = \pi/2$, which will produce the noise functions with corrections due to impurities in graphene.

Also, it is possible to find every resonant regime condition of a more general system, as easily seen in the above equations when $\cos(\varphi+2\theta) = 1$, it will be obtained through a relation between the PT-symmetry parameter and the pureness degree of such a system

$$\varphi + 2\theta = 2\pi n \tag{39}$$

Equation (39) shows us that the true responsible for a full transportation of the particles by the system is how the PT-symmetry relates itself with the intrinsic symmetry, since

the noise functions turn to be independent of transmission barriers and the nature of the carriers. The generality of this statement is not casual: if one is interested in another Cartan class, it will be as possible to find the resonance condition by a similar treatment addressed here.

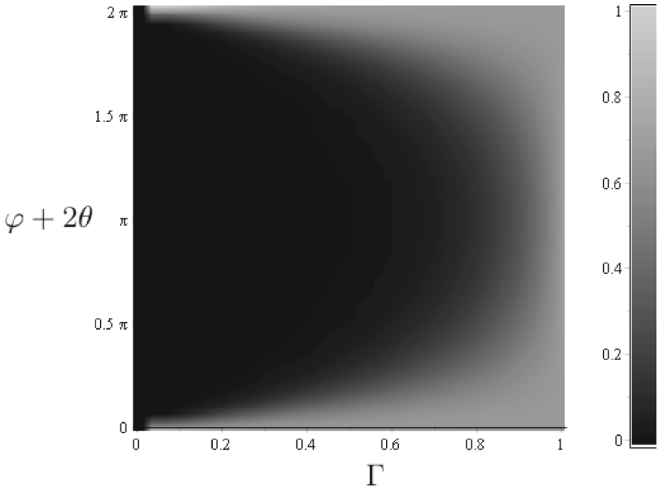
Moreover, it is possible to obtain more possible physical situations beside (39), as depicted in Fig. 4. As we can notice, in order to have non-trivial values to the backscattering noise equations, Fig. 4b, c, one must take into account the values of the transmission barriers. When the symmetry parameters do not fulfill (39), one can identify transitions between the backscattering to the full transmission case, and vice-versa, by varying Γ.

From a practical point of view, the studying of the relation between chirality and PT symmetry will reduce the values of φ to its extremes(0 or $\pi/2$) and it will given different quantization conditions when one reaches the closed cavity. Analyzing the perfect chirality condition, $\varphi = \pi/2$, and the resulting noise functions, we reach to the new quantization condition to a graphene-like system through the parity and time reversal breaking

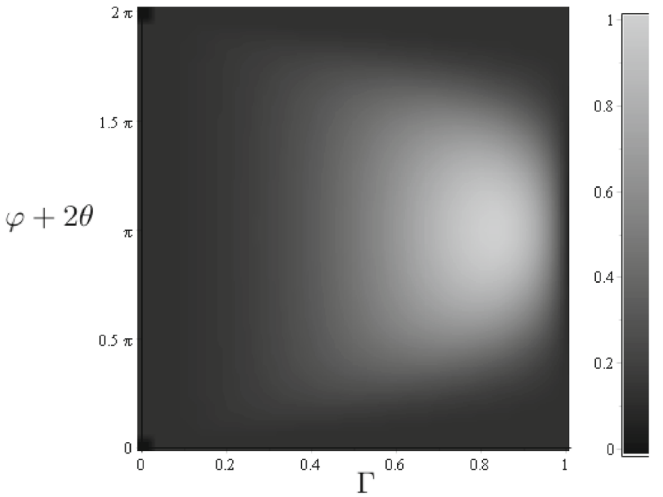
$$\theta_{gph} = n\pi - \frac{\pi}{4}. \tag{40}$$

The result (40) gives the entire resonances points of a $\chi/\mathcal{PT}$ symmetric system, provided the existence of such constraint between these two symmetries, the χ and the PT. Also, we look at the direct effect of the PT symmetry on an observable such as the shot noise and how a non-Hermitian Hamiltonian formulation can assist to find the energies of a system at any amount of doping.

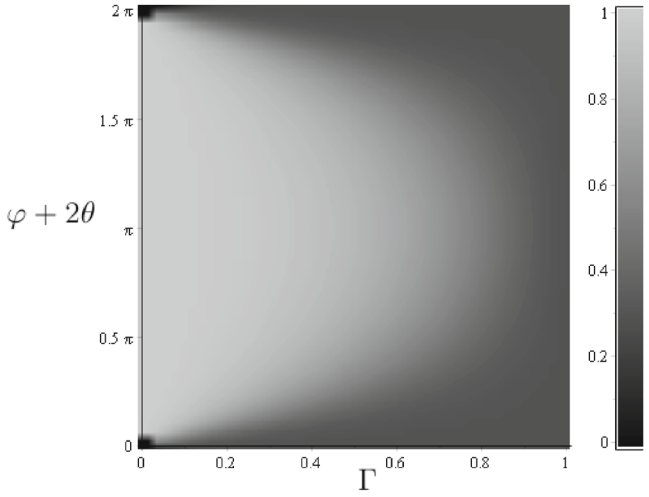
There are some interesting features in graphene experiment when we compare with the HBT and the HBT-PT case. As was studied in [36], the usual HBT scattering matrix possess the Hermitian condition, following the basic postulates



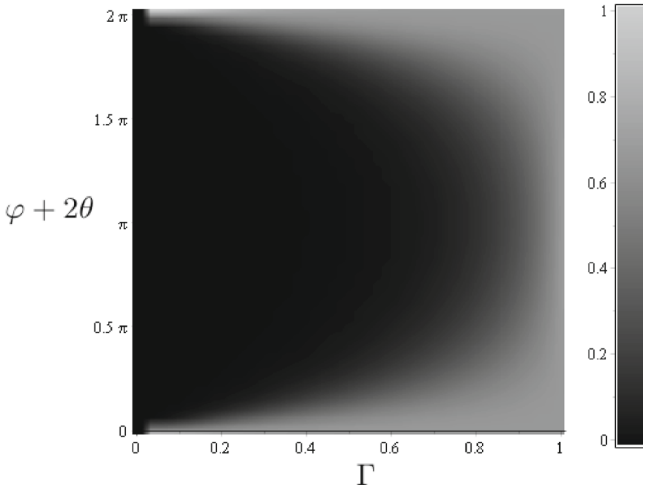
(a)$(\Delta\hat{I}_1)^2 = (\Delta\hat{I}_2)^2$ for fermions and $\langle\hat{I}_3\hat{I}_4\rangle$ for bosons.



(c)$\langle\hat{I}_{[1,2]}\hat{I}_{[3,4]}\rangle$.



(b)$\langle\hat{I}_1\hat{I}_2\rangle$.



(d)$\langle\hat{I}_3\hat{I}_4\rangle$ for fermions and $(\Delta\hat{I}_1)^2 = (\Delta\hat{I}_2)^2$ for bosons.

Fig. 4 The noise functions (32)–(36). Apart from the extreme values 0 and 2π, the system become strongly dependent on Γ

of quantum mechanics. On other hand, the HBT-$\mathcal{PT}$ system do not possess the latter condition, but does have the parity and time reversal symmetry. When one adjusts the HBT-PT sections in order to obey the condition $\mathrm{Im}(t_0^2) = 0$, the usual HBT scattering matrix and correlation functions are obtained, even in the presence of the barriers, which indicates when the PT symmetry of the system is broken. The situation is fairly different when we substitute the HBT system by a graphene. We learned above that graphene has the chiral symmetry expressed through the constraint $S = \Sigma_z S^\dagger \Sigma_z$, which causes the losing of hermiticity condition of its scattering matrix, even though the correlation functions are HBT-kind. Then, coupling the sections and barriers, we lose the chiral condition and gain parity and time reversal symmetry; however, when the sections obey $\mathrm{Im}(t_0^2) = 0$, the system enters in resonance regime and turn again chiral symmetric. Apparently, both HBT-$\mathcal{PT}$ and graphene systems share the property of recovering their initial condition, Hermiticity and chirality respectively, when we set $\mathrm{Im}(t_0^2) = 0$, but fundamentally they differ in its noise functions. The former do not explicitly depends of the barriers when we take away PT symmetry, this is clearly not the case of graphene, which, in the same amplifying-attenuation regime, depends directly of the tunnel barriers, as we can see substituting in the noise equations the values $\varphi = \pi/2$ and $\theta = n\pi/2$, the latter being the resonance condition to the HBT system.

4 Conclusion

In the present paper, we have analyzed a χ/PT symmetric system, such as graphene where chirality refers to the presence of a pair electron-hole, and encountered its resonances through a simple mechanism of setting the proper values of the quantities related to the symmetry of such system. Furthermore, it was found that the correction was due to the presence of impurity in a HBT-like system. For experimental purposes, one can set an experimental device symmetric by parity and time reversal following the procedure pointed in [36], and may encounter its resonances by the present procedure. Moreover, it is important to remark that one can find the resonance regime of any system, given its scattering matrix, just doing the same analysis of the symmetry parameters, φ and θ. Its possible either to construct further formulations of scattering matrices, with other symmetry parameters, since the proper constraint of the Cartan classes is fulfilled. Besides, the formalism used here leans toward the profound discussion of a more fundamental formulation of quantum mechanics based in symmetry principles. Although we did not discussed its proper implications, one can find some insightful discussions in references [6, 7, 37–39]. Finally, we envisage that the $\chi/\mathcal{PT}$ symmetry may find applications in microbiology and the DNA research in general.

Funding information This work was partly supported by the the Brazilian agencies, CNPq, CAPES, FACEPE and FAPESP. MSH acknowledges a Senior Visiting Professorship granted by CAPES/ITA. This work is also supported by the project INCT-FNA Proc. No. 464898/2014-5.

References

1. I.R. Senitzky, Phys. Rev. **131**, 2827 (1963)
2. C.W. Gardiner, M.J. Collett, Phys. Rev. A **31**, 3761 (1985)
3. K. Fujikawa, H. Terashima, Phys. Rev. E **58**, 7063 (1998)
4. F.S. Levin, H. Krüger, Phys. Rev. A **15**, 2147 (1977)
5. C. Mahaux, H.A. Weidenmuller, *Shell-Model Approach to Nuclear Reactions* (North-Holland, Amsterdam, 1969)
6. N. Moiseyev, *Non-Hermitian Quantum Mechanics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2011)
7. C.M. Bender, S. Boettcher, Phys. Rev. Lett. **80**, 5243 (1998)
8. T. Kotto, Nat. Phys. **6**, 166 (2010)
9. A.A. Zyabblovsky, A.P. Vinogradov, A.A. Pukhov, A.V. Dorofeenko, A.A. Lisyansky, Physics-Uspekhi **57**, 1063 (2014)
10. M.L. Mehta, *Random Matrices* (Academic Press Limited, New York, 1990)
11. P. Jacquod, R.S. Whitney, J. Meair, M. Buttiker, Phys. Rev. B **86**, 155118 (2012)
12. K. Slevin, T. Nagao, Phys. Rev. Lett. **70**, 635 (1993)
13. L. Fu, Phys. Rev. Lett. **106**, 106802 (2011)
14. F.D.M. Haldane, Phys. Rev. Lett. **61**, 2015 (1988)
15. A.H. Castro Neto, F. Guinea, N.M.R. Peres, K. Novoselov, A. Geim, Rev. Mod. Phys. **81**, 109 (2009)
16. M. Katsnelson, K. Novoselov, A. Geim, Nat. Phys. **2**, 620 (2006)
17. A. Mesaros, D. Sadri, J. Zaanen, Phys. Rev. B. **79**, 155111 (2009)
18. Y. Tang, A.E. Cohen, Phys. Rev. Lett. **104**, 163901 (2010)
19. R. Hanbury-Brown, R.G. Twiss, Phil. Mag. **45**, 663 (1954)
20. C.K. Hong, Z.Y. Ou, L. Mandel, Phys. Rev. Lett. **59**, 2044 (1987)
21. V. Giovannetti, D. Frustaglia, F. Taddei, R. Fazio, Phys. Rev. B **74**, 115315 (2006)
22. T. Jonckheere, J. Rech, C. Wahl, T. Martin, Phys. Rev. B. **86**, 125425 (2012)
23. Y. Blanter, M. Büttiker, Phys. Rep. **336**, 15 (2000)
24. S. Visheveshwara, Phys. Rev. Lett. **91**, 196803-1 (2003)
25. H. Schomerus, Phys. Rev. Lett. **104**, 233601 (2010)
26. Y.D. Chong, L. Ge, A.D. Stone, Phys. Rev. Lett. **9**, 093902 (2011)
27. M.J. Collett, C.W. Gardiner, Phys. Rev. A **30**, 1386 (1984)
28. C.W. Gardiner, M.J. Collett, Phys. Rev. A **31**, 3761 (1985)
29. C.W.J. Beenakker, Phys. Rev. Lett. **81**, 1829 (1998)
30. J.R. Jeffers, N. Imoto, R. Loudon, Phys. Rev. A **47**, 3346 (1993)
31. R. Loudon, Phys. Rev. A. **58**, 4904 (1998)
32. L.D. Landau, E. Lifshitz, *Statistical Physics* (Pergamon, Oxford, 1959)
33. M. Büttiker, Phys. Rev. B **46**, 12485 (1992)
34. W. Schottky, Ann. Phys. **57**, 541 (1918)
35. E.N. Gilbert, H.O. Pollak, Bell Syst. Tech. J **39**, 333 (1960)
36. E.F. Silva, A.L.R. Barbosa, J.G.G.S. Ramos, Eur. Phys. Lett. **117**, 14001 (2017)
37. A. Mostafazadeh, Phys. Rev. A **80**, 032711 (2009)
38. C. Bender, Rep. Prog. Phys. **70**, 6 (2007)
39. C. Bender, J. Phys. Conf. Ser. **631**, 012002 (2015)