

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional -
PROFMAT

Fractais: uma abordagem introdutória

Mailson Alves Farias

JOÃO PESSOA – PB
AGOSTO DE 2019

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional -
PROFMAT

Fractais: uma abordagem introdutória

por

Mailson Alves Farias

sob a orientação da

Prof^a. Dr^a. Miriam da Silva Pereira

João Pessoa – PB
Agosto/ 2019

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

F228f Farias, Mailson Alves.

Fractais: uma abordagem introdutória / Mailson Alves
Farias. - João Pessoa, 2020.
79 f. : il.

Orientação: Miriam Silva Pereira.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Fractal. 2. Curva de Peano. 3. Conjunto de Cantor.
4. Triângulo de Sierpinski. I. Pereira, Miriam Silva.
II. Título.

UFPB/BC

Fractais: uma abordagem introdutória

por

Mailson Alves Farias

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

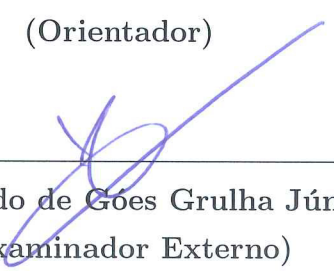
Área de Concentração: Matemática

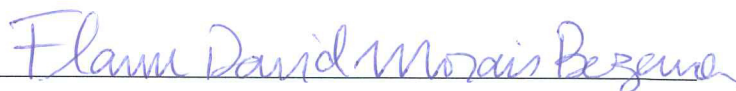
Aprovada em 27 de Agosto de 2019.

Banca Examinadora:



Prof^a. Dr^a. Miriam da Silva Pereira – UFPB
(Orientador)


Prof. Dr. Nivaldo de Góes Grulha Júnior – USP
(Examinador Externo)



Prof. Dr. Flann David Moraes Bezerra – UFPB
(Examinador Interno)

A Deus, aos meus pais e minhas irmãs, a minha esposa Jussara e a todos que acreditaram e torcerem por meu sucesso, sempre.

Agradecimentos

A Deus, por Sua proteção e fortalecimento da minha vida, me conduzindo nessa estrada que me traz a paz e a felicidade.

Aos meus pais, por estarem incondicionalmente ao meu lado e, por me ensinarem a ser o que sou.

À minha amada esposa Jussara, por partilhar cada segundo do meu dia e por abraçar os meus sonhos sempre ao meu lado.

Às minhas irmãs Suilan e Suilane e, aos meus sobrinhos, pela paciência e apoio durante todo o tempo que me afastei na realização desse estudo.

Aos meus professores, por toda a educação e pelos momentos de ensinamentos, que me fizeram crescer continuamente, com caráter e humildade, acima de tudo.

À minha orientadora, Prof^a Miriam, por toda dedicação, incentivo, orientação, contribuição e paciência ao longo da construção deste trabalho.

Aos professores Flank Bezerra e Nivaldo Júnior, por terem aceitado o convite para a banca examinadora.

Aos professores Bruno, Elisandra e Eduardo, por todos os incentivos, que me fizeram continuar, para conquistar mais essa vitória.

Aos amigos de graduação, os quais tive o prazer de reencontrá-los atuando como professores desta honrada instituição, Prof. Joedson e Manassés, os quais admiro e respeito, por cada momento partilhado nos estudos e por cada conselho recebido, serei eternamente grato.

Aos meus amigos, Erielson, Rafael e Rômulo que, muitas vezes cederam seus preciosos tempos de descanso para me ajudarem e me incentivarem à construção deste trabalho e a conquista deste objetivo.

Aos amigos do PROFMAT, Diego Lima, José Carlos Júnior, com os quais retomei a jornada e o gosto pelo estudo e, aos amigos Jucélio, Glauco e João Batista Meireles por cada momento partilhado ao longo dessa jornada e, a todos os demais amigos do curso que, com amor e respeito posso dizer, se tornaram parte direta dessa realização.

Por fim, a todos os meus familiares e amigos que, de forma direta ou indireta, estiveram ao meu lado, torcendo por essa conquista.

Por cada obstáculo superado, através da força e apoio que cada um de vocês me proporcionaram, gratidão eterna a todos!

Resumo

Neste trabalho, estudamos a Geometria Fractal, caracterizando alguns fractais clássicos e apresentando alguns aspectos históricos relacionados á esta teoria. Além disso, queremos destacar que a Geometria Fractal permite observar uma interessante conexão entre a construção de elementos matemáticos e alguns objetos presentes na natureza. Um aspecto interessante é que alguns conceitos relacionados já podem ser abordados no Ensino Fundamental e Médio.

Palavras-chave: Progressão Geométrica, conjunto de Cantor, triângulo de Sierpinski, Geometria Fractal.

Abstract

In this work, we study Fractal Geometry, characterizing some classic fractals and presenting some historical aspects related to this theory. Furthermore, we want to highlight that Fractal Geometry allows us to observe an interesting connection among the construction of mathematical elements and some objects present in the nature. An interesting aspect is that some related concepts can be approached in elementary and high school.

Keywords: Geometric progression, Cantor set, Sierpinski triangle, Fractal geometry.

Sumário

Introdução	2
1 Conceitos Básicos	4
1.1 O infinito nas obras de Escher	4
1.2 Noções preliminares	10
1.3 Logaritmos	15
2 Algumas observações sobre a Geometria euclidiana e a Geometria Fractal e seus aspectos relevantes	17
2.1 Alguns conceitos da Geometria euclidiana	17
2.2 A geometria de Mandelbrot e o surgimento dos fractais	20
2.3 Fractais na Ciência e Tecnologia	23
2.4 Classificação e Características dos fractais	29
2.5 Dimensão	32
2.6 Dimensão Fractal	33
3 Noções da Topologia	37
4 Fractais Clássicos	54
4.1 Curva de Peano	54
4.2 Conjunto de Cantor	56
4.3 A curva e a ilha de Von Koch	61
4.4 Triângulo de Sierpinski	71
Referências Bibliográficas	78

Lista de Figuras

1.1	Mauritus Cornellis Escher (1898-1972)	5
1.2	Queda d'Água (1960)	6
1.3	Subindo e Descendo (1960)	6
1.4	Cena do Filme "A Origem" (2010)	7
1.5	Mãos Desenhando-se (1948)	7
1.6	Répteis (1943)	8
1.7	Cada vez menor (1956)	8
1.8	Limite Circular III (1959)	9
1.9	Anjos e Demônios (1941)	10
2.1	Tales de Mileto (625-548 a.C., aproximadamente)	19
2.2	Euclides de Alexandria	19
2.3	Benoit B. Mandelbrot (1924-2010)	21
2.4	Imagem de Satélite	24
2.5	Relâmpagos	24
2.6	Couve-Flor	25
2.7	Folha de Samambaia	25
2.8	Antena Fractal relacionada ao Tapete de Sierpinski na Iteração 2	26
2.9	Fibra Ópticas Fractais	27
2.10	Ramificações no Pulmão (Modelagem e computação gráfica)	28
2.11	Curva de Hilbert até a quinta iteração	29
2.12	Conjunto de Mandelbrot	30
2.13	Floco de Neve	30
2.14	Autossemelhança e Complexidade infinita	32
2.15	Tipos de dimensões euclidianas	33
2.16	Secções numa linha de medida 1	34
2.17	Secções num quadrado de lado l	34
2.18	Secções num cubo de aresta l	35
3.1	Regiões obtidas	46

3.2	Semi-plano superior fechado ($y \geq 0$)	47
4.1	Giuseppe Peano (1858 à 1932)	54
4.2	Curva de Peano até a iteração 3	55
4.3	Georg Cantor (1845 à 1918)	56
4.4	Conjunto de Cantor até a iteração 3	57
4.5	Von Koch (1870 à 1924)	61
4.6	Construção da curva de Koch até a iteração 2	62
4.7	Região semicircular aplicada à curva de Koch	64
4.8	Regiões semicirculares aplicada à curva de Koch	65
4.9	Ilha de Von Koch até a terceira iteração	66
4.10	Hexágono circunscrito ao triângulo equilátero inicial	68
4.11	Hexágono circunscrito ao triângulo equilátero inicial	69
4.12	Waklau Sierpinski (1882-1969)	71
4.13	Triângulo de Sierpinski com quatro iterações	72
4.14	Passos da Iteração 1 do Triângulo de Sierpinski	73
4.15	Passos da Iteração 1 do Triângulo de Sierpinski	73

Lista de Tabelas

4.1	Quantidade e Comprimento dos lados da Ilha de Von Koch	67
-----	--	----

Introdução

Há muito tempo, os estudos e análises de situações vividas no cotidiano tem se desenvolvido através de observações e padrões apresentados e relacionados, muitas vezes, com aspectos relevantes da Matemática.

Seja por meio da abstração dos teoremas ou proposições, ou por meio das representações geométricas conectando a teoria com a realidade, podemos fazer conexões e entender a diversidade de fatos e coisas que existem em nosso planeta. Diante de situações como essas, o homem começou a ampliar o seu conhecimento e, através da observação, passou a identificar outros elementos, além daqueles já presentes na geometria euclidiana, introduzindo no século XIX uma nova teoria.

A geometria fractal foi desenvolvida com a intenção de justificar, através da repetição de padrões em figuras e objetos, as relações existentes em figuras e formas que antes não apresentavam os padrões das figuras da Geometria de Euclides, como por exemplo, a couve-flor, os relâmpagos, as ramificações de uma árvore, montanhas, entre outras formas encontradas na natureza.

Este trabalho tem o objetivo de apresentar um breve histórico da geometria fractal, a classificação, características, construções e propriedades pertinentes a alguns fractais clássicos, bem como o cálculo da sua dimensão. Assim, estruturamos o trabalho em quatro capítulos que foram divididos da seguinte forma:

No *Capítulo 1*, apresentamos, inicialmente, o infinito nas obras de Escher e alguns tópicos básicos de matemática, como as Progressões Geométricas e os Logaritmos, algumas noções da topologia, com o intuito de apresentar uma base matemática para os conceitos desenvolvidos nos demais capítulos.

O *Capítulo 2* é dedicado a um breve histórico da geometria de Euclides à Mandelbrot com o surgimento da geometria dos fractais, bem como a sua relevância para o desenvolvimento da ciência e das tecnologias.

No *Capítulo 3*, apresentamos uma classificação e principais características dos fractais.

Por fim, no *Capítulo 4*, construímos alguns fractais clássicos como, o conjunto de Cantor, a curva e a ilha de Koch e, o triângulo de Sierpinski e apresentamos algumas

características de cada um deles.

Capítulo 1

Conceitos Básicos

Neste capítulo, apresentamos definições e teoremas necessários para a compreensão do trabalho, com o intuito de desenvolver uma abordagem sobre a geometria de fractais. Para tanto, utilizamos as seguintes referências: [3], [4], [8], [9], [10], [11], [12] e [13].

1.1 O infinito nas obras de Escher

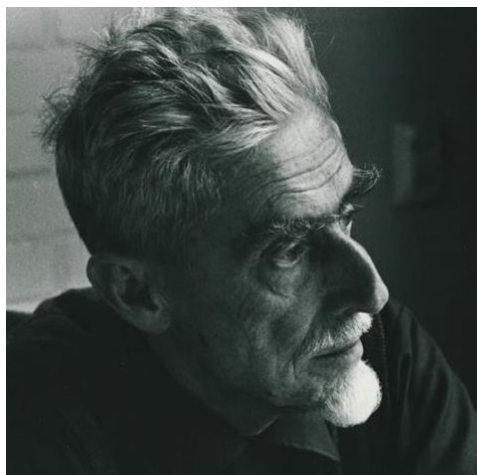
Em muitas obras de arte, é possível perceber a relação existente entre as técnicas utilizadas e os traços que nos remetem a conceitos relevantes da Matemática. Podemos citar, por exemplo, a geometria das figuras planas ou espaciais presentes em quadros e pinturas de variados artistas.

Mauritus Cornellis Escher (Figura 1.1) é um artista que quando analisamos suas obras encontramos uma estética impecável e desenvolvida, sobretudo, por meio de três técnicas peculiares: xilografia¹, litografia² e meio-tom, obtidas por matrizes que servem como uma espécie de carimbo para papéis e tecidos especiais, sendo que as duas primeiras constituem a maior parte de seu acervo artístico.

¹Um dos mais antigos métodos de impressão da história, o carimbo é elaborado a partir do entalhamento de figuras sobre uma prancha de madeira que é, em um segundo momento, coberta de tinta. Com este tipo de matriz são impressas estampas tanto em papel, como na maior parte dos trabalhos de Escher, quanto em tecido, prática comum no Oriente desde o século VII.

²Muito utilizada no surgimento da imprensa, trata-se de um método de impressão no qual a imagem que se deseja obter é desenhada com materiais gordurosos (lápiz, bastão, pasta, entre outros) sobre uma base de calcário especial (conhecida como *pedra litográfica*). Posteriormente, a pedra é submetida ao processo de entintagem, no qual soluções químicas e água fixam as áreas oleosas do desenho sobre a superfície e, por fim, a gravura é obtida por meio de uma prensa litográfica que desliza sobre o papel ou tecido.

Figura 1.1: Mauritus Cornellis Escher (1898-1972)



Fonte: @M.C.EscherPage (2014, p. 1)³

Podemos perceber, em alguma das suas obras, que,

Escher era um gênio da imaginação lúdica e um artesão habilidoso nas artes gráficas, mas a chave para muitos dos seus efeitos surpreendentes é a Matemática. Não a Matemática dos números e das fórmulas, mas a Geometria em todos os seus aspectos. Escher podia imaginar os efeitos fantásticos, mas a Geometria era uma ferramenta necessária para capturar esses efeitos. (TJABBES, 2010, p.9)

Escher criou estruturas impossíveis, em sintonia com a arte contemporânea, desenvolveu um novo campo de inspiração na inevitável contradição entre a bidimensionalidade do papel ou da tela e a realidade tridimensional.

Através desta percepção, ele desconstrói a previsibilidade nos desenhos, acrescentando movimentos de translação, rotação e reflexão, ou seja, transformações isométricas⁴ dando movimentos a figura no espaço.

Existem relatos de que o trabalho de Escher pode ser analisado e relacionado ao infinito, por meio de três características: Ciclos Sem Fim, Preenchimento de Superfícies e Limites.

Intuitivamente, podemos compreender o significado de Ciclo como a ocorrência de fatos ou ações de caráter periódico, a representação de um processo que não termina, deixando implícito neste significado a noção de infinito. Escher ilustrou os ciclos através de suas obras: Queda d'Água e Subindo e descendo que podem ser vistas nas Figuras 1.2 e 1.3.

⁴Uma transformação isométrica é uma operação que transforma uma figura noutra figura geometricamente igual, ou seja, não altera o comprimento dos segmentos da figura nem a amplitude dos seus ângulos. Assim sendo, a única coisa que é alterada é a posição da figura.

Figura 1.2: Queda d'Água (1960)



Fonte: [4], (1994, p. 76)

Podemos perceber na Figura 1.2 que a água de uma cascata põe em movimento a roda de um moinho e, num movimento de sobe e desce, numa calha inclinada entre duas torres, em forma de ziguezague, ela continua esse ciclo até o ponto em que a queda d'água de novo começa, sempre subindo ou descendo e sem perder a força.

Figura 1.3: Subindo e Descendo (1960)



Fonte: [4], (1994, p. 75)

Feita em litografia, a Figura 1.3, é outra figura que nos remete a observação de algo impossível, já que, nesse caso, alguns cavaleiros estão subindo ou descendo, sempre, numa escada sem fim. Esta arte, inspirou a construção de ilusões de óticas em diversas obras, como por exemplo no filme “A Origem” lançado em 2010, em que uma das cenas está representada na Figura 1.4.

Figura 1.4: Cena do Filme "A Origem" (2010)

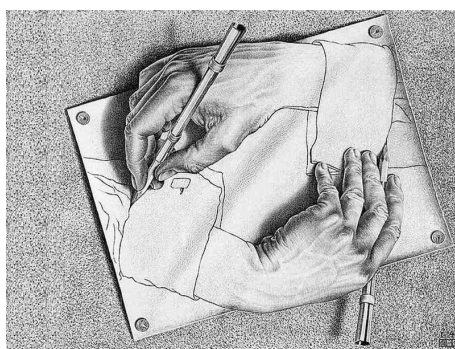


Fonte:[22], (2018, p.1)⁵

Nessas obras, a impressão que temos é de que as imagens estão sempre numa continuidade infinita, caracterizando os traços marcantes de uma das técnicas utilizadas por Escher, o ciclo sem fim.

Continuando a observação das obras de Escher, em relação à técnica de preenchimento de superfícies, podemos destacar a existência de algo estático mas, que nos causa a impressão de movimento, tendo em vista que há uma transformação do plano para espaço e de espaço para plano, numa interação entre os objetos bidimensionais e tridimensionais existentes nas figuras. Em relação a isso, destacamos a obra: Mãos Desenhando-se (Figura 1.5), em que é retratada uma folha de papel onde há pulsos que permanecem no plano da folha, enquanto duas mãos estão em ascensão de forma tridimensional, de frente uma para a outra e numa ação controversa ambas se desenham, usando o recurso de uma dobradura nos cantos.

Figura 1.5: Mãos Desenhando-se (1948)



Fonte: [4], (1994, p. 69)

As ideias de contradição são frequentemente utilizadas nas obras de Escher, tendo nesta obra um dos seus exemplos mais notórios. Note que, transformar uma parte unidimensional em uma parte tridimensional é realmente fascinante, o detalhe das linhas se apresentam de tal forma que é realmente difícil imaginar como ele conseguiu fazê-las parecer tão naturais e realistas.

Outro elemento da técnica de preenchimento de superfícies, utilizado por Escher, está representado na obra *Répteis* (Figura 1.6). Nesta obra foi usado um efeito contínuo de rotações e translações que nos deixa a impressão dos répteis estarem saindo e entrando continuamente na folha de papel.

Figura 1.6: Répteis (1943)



Fonte: [4], (1994, p. 28)

Nesta imagem, podemos ver um livro de esboços de desenhos, três tipos de mosaicos com a forma de lagartos em fila, que se dirigem para um dodecaedro pentagonal, causando a impressão de um movimento contínuo em que pode ser destacado o preenchimento da superfície.

Com relação à obra de Escher relacionada aos Limites, podemos perceber uma tentativa do autor em transmitir a ideia de infinito, considerando, além das translações isométricas, as semelhanças entre os desenhos, que diminuem sucessivamente, preenchendo o plano até o limite permitido pelo campo visual. Para exemplificar essa fase das obras de Escher podemos observar a Figura 1.7, onde está reproduzida a obra chamada de, Cada vez menor.

Figura 1.7: Cada vez menor (1956)



Fonte: [4], (1994, p. 20)

Podemos, num primeiro momento, olhar a Figura 1.7 apenas como um mosaico com o intuito de decoração. No entanto, com um pouco mais de atenção, o que fica notório

é que a figura demonstra um padrão determinado pelas formas que, gradativamente tem o seu tamanho ampliado da parte central para as bordas da figura, variando a forma dos limites apresentados, sendo infinitamente grande ou infinitamente pequeno a partir de um ponto central.

Um fato semelhante pode ser observado na obra Limite Circular III (Figura 1.8), onde é possível detectar semicírculos de cor branca se intersectando e dividindo a figura, em proporções correspondentes, de modo que, em cada uma das proporções formadas, a ideia transmitida é de que a infinidade de traços presentes nos deixam a impressão de limites máximos ou mínimos apresentados pelos peixes inseridos na figura, delimitado pelo trajeto de todas as fileiras formadas.

Figura 1.8: Limite Circular III (1959)

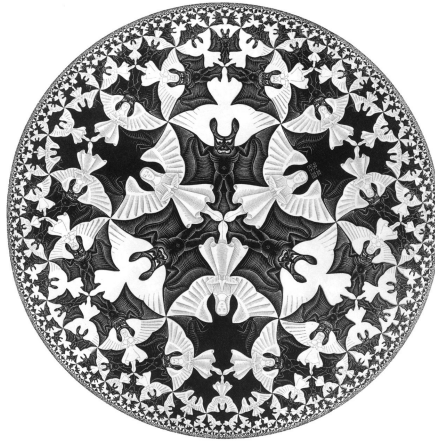


Fonte: [4], (1994, p. 24)

É possível observar ainda, que Escher utilizou quatro cores diferentes para representar os peixes da figura, contribuindo ainda mais para a distinção de cada uma das fileiras, o que provoca em nossa percepção, o sentido de que a redução da figura é feita da parte central para as extremidades, deixando a impressão de que as fronteiras nesta figura são inatingíveis.

Podemos associar estes e muitos outros trabalhos de Escher com a divisão do plano regular à teoria dos fractais, tema do nosso trabalho. Podemos, informalmente, definir um fractal como um objeto geométrico que pode ser multiplicado infinitamente em partes menores, cada uma delas semelhante ao objeto original. É possível perceber isso, por exemplo, na obra Anjos e Demônios (Figura 1.9).

Figura 1.9: Anjos e Demônios (1941)



Fonte: [4], (1994, p. 25)

A originalidade do trabalho de Escher atrai, não só os estudiosos de arte, mas o observador leigo, intrigado pelos labirintos das obras, bem como os matemáticos e físicos, fascinados pela capacidade de Escher em lidar com as fronteiras da lógica.

1.2 Noções preliminares

Definição 1.1. Uma sequência de números reais é uma função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, definida no conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ dos números naturais e tomando valores no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. O valor $f(n)$ será representado por a_n , para todo $n \in \mathbb{N}$ e chamado o termo geral, ou n -ésimo termo da sequência.

Observação 1.1. Usaremos ainda a notação $\{a_n\}$ para indicar o conjunto de valores da sequência. Essa distinção é importante, pois uma sequência pode possuir infinitos elementos, mesmo que seu conjunto de valores seja finito.

Exemplo 1.1. A sequência $1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$ é infinita, cujo n -ésimo termo é igual a $a_n = (-1)^{n-1}$.

É importante observar que, de acordo com a Definição 1.1, o primeiro índice de uma sequência a_n é $n = 1$, ou seja, a_1 é o primeiro termo da sequência. Por outro lado, podemos observar que a sequência $a_n = \frac{1}{\sqrt{n-3}}$ só faz sentido para $n = 4, 5, \dots$ de modo que seu primeiro termo é a_4 , mas não podemos pensar que isso seja um obstáculo, já que podemos fazer uma translação de índices de forma que o primeiro termo da sequência tenha índice $n = 1$. De fato, definindo a sequência por $b_n = a_{n+4} = \frac{1}{\sqrt{n}}$, a sequência fica definida a partir de $n = 1$.

Seja (a_n) uma sequência. Dizemos que (a_n) é crescente se $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < \dots$, ou seja, se $a_n < a_{n+1}$. Por outro lado, se $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > \dots$,

ou seja, se $a_n < a_{n+1}$ dizemos que a sequência é decrescente e, ainda, a sequência (a_n) é dita não-crescente se $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$ e não-decrescente se $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$.

Se uma sequência satisfaz qualquer uma dessas condições ela é dita monótona.

Uma sequência (a_n) é dita limitada superiormente se existir um número real θ tal que, para todo número natural n , temos $a_n \leq \theta$. De maneira análoga dizemos que uma sequência (a_n) é limitada inferiormente se existir um número real α tal que, para todo número natural n , temos $a_n \geq \alpha$. Se existirem reais α e θ tais que, para todo número natural n , temos, $\alpha \leq a_n \leq \theta$ dizemos que a_n é uma sequência limitada. Diante disso, podemos perceber que uma sequência é limitada se, e somente se, ela é limitada superiormente e inferiormente. Em outras palavras, uma sequência é limitada se todos os seus termos pertencem ao intervalo $[\alpha, \theta]$.

É interessante perceber que algumas sequências Matemáticas apresentam uma certa regra, isto é, uma lei de formação, capaz de caracterizá-las através de um determinado padrão. Um exemplo disso são as Progressões Geométricas que podem ser determinadas a partir de uma fórmula de recorrência.

Definição 1.2. Dada uma sequência finita $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ chamamos de Progressão Geométrica a sequência em que cada termo a_n , a partir do segundo termo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante real q , chamada de razão da Progressão Geométrica, isto é, $a_n = a_{n-1}q$, $n > 1$.

Podemos determinar uma expressão que nos possibilite obter um termo qualquer da Progressão Geométrica conhecendo o primeiro termo a_1 e a razão q . Segue da definição de Progressão Geométrica de razão q , admitindo $a_1 \neq 0$ e $q \neq 0$ que

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1q \\ a_3 &= a_2q = a_1qq = a_1q^2 \\ a_4 &= a_3q = a_1q^2q = a_1q^3 \\ a_5 &= a_4q = a_1q^3q = a_1q^4 \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1}q = a_1q^{n-2}q = a_1q^{n-1}. \end{aligned}$$

Assim, a expressão

$$a_n = a_1q^{n-1} \tag{1.1}$$

é chamada de Fórmula do Termo Geral da Progressão Geométrica. Esta fórmula nos permite conhecer qualquer termo da Progressão Geométrica em função do primeiro termo a_1 e da razão q .

Definição 1.3. Seja $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ uma Progressão Geométrica de razão q , com $q > 0$ e $q \neq 1$. Denotamos a soma desses n primeiros termos como S_n , isto é,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n. \quad (1.2)$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade acima por q , já que $q > 0$ e $q \neq 1$ obtemos:

$$\begin{aligned} qS_n &= q(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n) \\ &= a_1q + a_2q + a_3q + \dots + a_{n-1}q + a_nq \\ &= a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + a_nq. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Fazendo a diferença entre (1.3) e (1.2),

$$qS_n - S_n = (a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + a_nq) - (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) = a_nq - a_1.$$

Como $a_n = a_1q^{n-1}$, segue que

$$S_n(q - 1) = a_1q^{n-1}q - a_1 = a_1q^n - a_1 = a_1(q^n - 1).$$

Dividindo por $(q - 1)$ o resultado obtido, a soma dos n primeiros termos de uma Progressão Geométrica pode ser escrita como:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}, \quad (q \neq 1). \quad (1.4)$$

É importante observar que se $q = 1$ o resultado não pode ser aplicado. Neste caso, a Progressão Geométrica seria estacionária, pois todos os seus termos seriam iguais. Assim, para calcular a soma dos seus n primeiros termos é suficiente escrever a seguinte expressão $S_n = na_1$.

Exemplo 1.2. Considere uma Progressão Geométrica de termo geral $a_n = q^n$ com

$n \in \mathbb{N}$ onde $q = \frac{1}{10}$. Podemos caracterizar a sequência da seguinte forma:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{10} = 0,1 \\ a_2 &= \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{100} = 0,01 \\ a_3 &= \left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{1000} = 0,001 \\ a_4 &= \left(\frac{1}{10}\right)^4 = \frac{1}{10000} = 0,0001 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Logo, a sequência obtida é uma Progressão Geométrica cujos termos são $(0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; \dots)$. Assim, a medida que o valor de n aumenta, o valor de a_n diminui, ficando cada vez mais próximo de 0.

Definição 1.4. Uma sequência $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$, onde $n \in \mathbb{N}$ tem um limite l se, dado $\varepsilon > 0$, é possível obter um número natural n_0 tal que $|a_n - l| < \varepsilon$ quando $n > n_0$. Neste caso, indica-se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ e dizemos que a sequência converge para l .

Exemplo 1.3. A sequência $(a_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots\right)$ converge para 1. Com efeito, note que, dado qualquer $\varepsilon > 0$,

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Assim, dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe $n_0 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ tal que $n > n_0$, então $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$. Portanto, segue da Definição 1.4 que a sequência (a_n) converge para 1.

Teorema 1.1. Toda sequência da forma $(1, q, q^2, q^3, \dots, q^n, \dots)$, com $q \in \mathbb{R}$, tal que $|q| < 1$, converge para zero.

Demonstração. Como $q \in \mathbb{R}$ e $|q| < 1$, vamos analisar algumas possibilidades que q pode assumir:

1º caso) Se $q = 0$, então claramente a sequência converge para 0, pois, a partir do primeiro termo a sequência (q^n) é constante e igual a zero.

2º caso) Se $0 < q < 1$, então podemos escrever $q = \left|\frac{1}{b}\right|$, com $b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$. Para mostrar que $b_n a_n = 0$, por definição, dado $\varepsilon > 0$, precisamos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

se $n > n_0$ então $|q^n - 0| < \varepsilon$. Para isso, como $q^n = \left|\frac{1}{b}\right|^n$, note que:

$$\begin{aligned} |q^n - 0| < \varepsilon &\Leftrightarrow \left|\frac{1}{b}\right|^n < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{|b|^n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{|b|^n}} < \sqrt[n]{\varepsilon} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{|b|} < \sqrt[n]{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}} < |b|. \end{aligned}$$

Sendo assim, tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{\sqrt[n_0]{\varepsilon}} < |b|$. Portanto, se $n > n_0$, então $|q^n - 0| < \varepsilon$, o que implica que $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, com $0 < q < 1$.

3º caso) Se $-1 < q < 0$, considere as subsequências: $(y_k) = (1, q^2, q^4, \dots, q^{2k}, \dots)$ e $(z_k) = (q, q^3, \dots, q^{2k-1}, \dots)$ cujos expoentes são pares e ímpares, respectivamente. Como todos os termos de (y_k) são positivos, pelo que foi provado no segundo caso, obtemos que $\lim y_k = 0$. Por outro lado, como $(z_k) = (q, q^3, \dots, q^{2k-1}, \dots) = q(1, q^2, \dots, q^{2k-2}, \dots) = q(y_k)$, temos que $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \lim_{k \rightarrow \infty} q(y_k) = 0$, pois $\lim y_k = 0$ e q é constante (em particular q é limitado, já que $-1 < q < 0$). Sendo assim, segue que $\lim q^n = 0$, com $-1 < q < 0$.

Com isso, concluímos que $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, com $q \in \mathbb{R}$, tal que $|q| < 1$. ■

Teorema 1.2. Se $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ é uma Progressão Geométrica infinita, com razão q , tal que $-1 < q < 1$. Então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q} \quad (1.5)$$

Demonstração. Inicialmente, notamos que.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Pelo Teorema 1.1 temos $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\frac{a_1}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q}.$$

■

Observação 1.2. Se $a_1 = 0$, a condição $-1 < q < 1$ é desnecessária para a convergência da sequência $(S_1, S_2, S_3, \dots)$. Nesse caso, a Progressão Geométrica é $(0, 0, \dots)$ e sua soma é 0 qualquer que seja q . Se $a_1 \neq 0$ e $q < -1$ ou $q > 1$, a sequência $(S_1, S_2, S_3, \dots)$ não converge.

1.3 Logaritmos

Nesta seção, relembremos a definição e algumas propriedades dos logaritmos.

Definição 1.5. Sejam a e b números reais positivos com $a \neq 1$. O logaritmo de b na base a é o expoente x ao qual se deve elevar a base a de modo que a^x seja igual a b , ou seja,

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b. \quad (1.6)$$

Na expressão (1.6), dizemos que a é a base do logaritmo, b é o logaritmando e x é o logaritmo.

No próximo resultado descrevemos algumas propriedades operacionais dos logaritmos.

Proposição 1.3. Sejam a, b e c números reais com $a > 0$, $a \neq 1$ e $b, c > 0$. Então,

- 1) $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$;
- 2) $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$;
- 3) $\log_a(b^r) = r \log_a b$, para qualquer $r \in \mathbb{R}$;
- 4) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, com $a > 0$, $a \neq 1$ e $b > 0$, $c > 0$ e $c \neq 1$.

Demonstração.

Durante a prova, usamos $\log_a b = x$, $\log_a c = y$.

- 1) Tomando $\log_a(bc) = z$, temos,

$$a^z = bc = a^x a^y = a^{x+y} \Rightarrow z = x + y,$$

concluimos que $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$.

- 2) Agora, seja $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = z$. Da definição de logaritmo obtemos

$$a^z = \frac{b}{c} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \Rightarrow z = x - y,$$

assim, $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

- 3) Seja $\log_a b^r = y$, então

$$a^y = (a^x)^r = a^{rx} \Rightarrow y = rx.$$

Portanto, $\log_a(b^r) = r \log_a b$.

4) Considere $\log_c a = z$. Inicialmente, note que, $z \neq 0$ pois $a \neq 1$. Assim:

$$(c^z)^x = a^x = b = c^y \Rightarrow zx = y \Rightarrow x = \frac{y}{z}.$$

$$\text{Então, } \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

O item 4 da Proposição 1.3 é utilizada em algumas ocasiões que precisamos converter logaritmos que possuem bases diferentes para uma única base conveniente. Tal propriedade é conhecida como mudança de base.

Capítulo 2

Algumas observações sobre a Geometria euclidiana e a Geometria Fractal e seus aspectos relevantes

Neste capítulo relembremos alguns matemáticos importantes da geometria euclidiana, como também, para outro tipo de geometria, considerada não-euclidiana, bem como, apresentamos as características e a classificação dos fractais, além da definição de uma das suas características mais importantes, relacionadas à sua medida, a dimensão, na intenção de conhecer um pouco mais da riqueza matemática presente na geometria desses elementos. As principais referências usadas foram: [1], [5], [10], [6], [15], [14] e [17].

2.1 Alguns conceitos da Geometria euclidiana

É comum observarmos elementos geométricos que nos fazem lembrar dos polígonos regulares, ou até mesmo dos sólidos geométricos, como por exemplo, demarcações de lotes de terreno, plantas-baixa de casas, pirâmides, cones, entre outros. Elementos como esses fazem parte da história da matemática, bem como das construções criadas pela humanidade desde séculos, pois, a partir de figuras como essas, grandes construtores tiveram inspiração e modernizaram o nosso mundo.

Inicialmente, a palavra Geometria, a qual vem do Grego “*Geometrein*”, se origina da composição de palavras: “*Geo*” que significa “*Terra*” e “*Metria*” cujo significado é “*Medida*”. Assim, a palavra “*Geometria*” significa “*Medida da Terra*”. Comparar formas e medidas, é uma das primeiras considerações relacionadas à geometria, visto que, o homem sentia a necessidade de fazer algumas observações que estavam diretamente ligadas ao trabalho daquele tempo.

2. Algumas observações sobre a Geometria euclidiana e a Geometria Fractal e seus aspectos relevantes

A história colabora com essa afirmação relatando que, no antigo Egito, no vale do Rio Nilo, o homem efetuava medições na terra devido às grandes inundações que ocorriam, dada a necessidade de remarcar os terrenos assim que o nível da água baixava. Esses motivos, levaram ao homem, algumas técnicas para desenvolver instrumentos que fossem úteis para a medição de áreas, volumes, bem como o próprio tempo.

Com isso, a Geometria foi se inserindo e aos poucos tomando origem em partes do Oriente Antigo, inicialmente como uma ciência prática para solucionar problemas relacionados à agricultura e à engenharia, com a finalidade de analisar formas diferenciadas de objetos.

Desse modo, uma das primeiras descobertas geométricas foram feitas baseadas na noção de distância, que foi um dos primeiros conceitos geométricos desenvolvidos. Com isso, o homem "primitivo" preparou, meio que inconscientemente, em grande escala o caminho para o desenvolvimento da Geometria que posteriormente seria conhecida e aplicada.

Diante dessa necessidade do homem em medir, quantificar formas e calcular, a Geometria teórica tornava-se um critério essencial para o desenvolvimento e a aplicação de suas comprovações.

Seja por interesse nas necessidades práticas da construção das pirâmides e da marcação de terras, seja pelo simples lazer dos sacerdotes, o fato é que naquela época foram descobertas intuitivamente importantes propriedades geométricas que serviram de estímulos para que outros povos se dedicassem ao estudo da geometria, entre os quais o povo grego, que transformou a geometria em algo muito diferente de seus predecessores. A geometria puramente intuitiva deu lugar a uma geometria sistemática, em que os fatos geométricos eram demonstrados através de raciocínio dedutivo. (BIANCHINI e PACCOLA, 1995, p. 326)

No entanto, foram necessários alguns séculos de estudos e contribuições à geometria até que tal área da matemática fosse analisada e estudada. As disputas ocorridas naqueles tempos, acabaram derrubando o trono dos reis egípcios e os gregos assumiram o papel. Personagens como Tales de Mileto (Figura 2.1), fundador da geometria demonstrativa, entre outros, marcaram os avanços nos estudos da geometria que transcenderam o tempo.

2. Algumas observações sobre a Geometria euclidiana e a Geometria Fractal e seus aspectos relevantes

Figura 2.1: Tales de Mileto (625-548 a.C., aproximadamente)



Fonte: [2], (1995, p. 326)

Um pouco mais tarde, surge então, o museu de Alexandria, que com seu aspecto de Universidade atraiu os maiores cientistas e pesquisadores da época. Muito embora, não se tenha registros que confirmem com maior exatidão, sobre o nascimento e a existência de Euclides (Figura 2.2), ainda assim, a geometria e todos os aspectos relacionados as figuras planas e aos sólidos geométricos recebem o nome desse notável matemático.

Figura 2.2: Euclides de Alexandria



Fonte: [2], (1995, p. 347)

Sabe-se muito pouco sobre a vida de Euclides; nem mesmo é comprovado que tenha nascido em Alexandria, como se afirma com frequência. Há evidências, contudo, de que seja autor, além dos *Elementos*, de outras obras de matemática, sobre lugares geométricos, cônicas, etc. *Os Elementos* de Euclides são um conjunto de treze livros publicados por volta do ano 300 a.E.C., mas não temos registros da obra original, somente versões e traduções tardias. (ROQUE, 2012, p.151)

Em sua obra, é possível perceber com detalhes a arte de Euclides, seu método,

rigor e capacidade de sistematizar, descrevendo a Geometria em forma de axiomas e postulados essenciais para a estrutura da Geometria reconhecida até os dias atuais como Geometria Euclidiana. Do livro I de Euclides podemos destacar, os seguintes postulados:

- 1) Pode-se traçar uma única reta ligando-se dois pontos;
- 2) Um segmento de reta pode ser prolongado indefinidamente em ambas as direções;
- 3) Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e qualquer raio;
- 4) Todos os ângulos retos são iguais;
- 5) Se uma reta, ao cortar outras duas, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então estas duas retas encontrar-se-ão no lado onde estão esses ângulos.

Mesmo sendo um dos mais antigos escritos da Matemática na forma axiomática-dedutiva e, sem sombra de dúvidas, uma excelente contribuição para o estudo da Geometria, com o passar dos tempos, foram surgindo vários questionamentos sob sua estruturação lógica, principalmente relacionado ao quinto postulado de Euclides, o que fez com que muitos considerassem que Euclides usava pressupostos não explicitados sobre o assunto e assim, novas pesquisas e contribuições nos estudos da geometria surgiram, mas certamente a grandiosidade da sua obra e a sua influência científica é considerada, até os dias atuais, como inigualável.

2.2 A geometria de Mandelbrot e o surgimento dos fractais

Com o passar do tempo, o homem começou a observar a natureza e percebeu a existência de padrões que, muitas vezes, não se encaixavam aos padrões apresentados nas figuras planas ou nos sólidos geométricos, pois, outras características podiam ser identificadas e assim, cada uma dessas novas características, tornava-se desejada à investigação matemática, para tentar justificar a geometria que havia em cada uma dessas figuras naturais.

Na tentativa de encontrar um esquema, um determinado padrão que possibilitasse descrever as estruturas que cada uma dessas figuras apresentava, o homem começou a perceber, através de formas como: a couve-flor, os raios, o curso de um rio e suas ramificações, até padrões presentes em algumas árvores e os detalhes dos seus galhos

2. Algumas observações sobre a Geometria euclidiana e a Geometria Fractal e seus aspectos relevantes

e folhas, na análise da geometria dos órgãos do corpo humano e suas estruturas, que estava diante de relações geométricas que transcendia a geometria euclidiana.

As formas encontradas nos animais e plantas chamam a atenção dos matemáticos, por exemplo, muitas conchas formam espirais, as estrelas do mar possuem um conjunto simétrico de braços, alguns vírus adotam formas geométricas regulares. Mas além dos padrões de forma, existem os padrões de movimento, como o andar humano, os pés tocam o solo num ritmo regular, esquerda-direita, ou a sidewinder, uma cobra do deserto que se move como uma espiral de uma mola helicoidal, jogando seu corpo para frente em forma de curvas tentando minimizar seu contato com a areia quente. (STEWART, 1996, p. 122)

Características como essas nos faz acreditar, assim como historicamente é relatado que, de fato, há uma explicação Matemática por trás disso. Mas, antes de nos aprofundarmos na natureza e nos padrões de figuras como essas, apresentamos um pouco da história de um dos grandes pesquisadores que contribuiu para a criação de uma nova geometria.

Nascido em Varsóvia, capital da Polônia, no ano de 1924, Benoit B. Mandelbrot (Figura 2.3), descendente de uma família judaica, aos 12 anos de idade, teve que deixar o seu país junto com a sua família, tendo em vista as constantes ameaças trazidas pela guerra à Europa.

Figura 2.3: Benoit B. Mandelbrot (1924-2010)



Fonte: [17], (2018, p. 235).

Embora não tivesse estudado álgebra avançada ou cálculo, Benoit Mandelbrot percebeu que o seu gosto e aproximação com a geometria acabava explicando problemas em outros ramos da matemática. Para ele, as figuras geométricas eram tão próximas

2. Algumas observações sobre a Geometria euclidiana e a Geometria Fractal e seus aspectos relevantes

que, a sua intimidade em lidar com tais figuras, tornava o seu prazer pela matemática ainda mais interessante.

No ano de 1952, Mandelbrot obteve o seu título de PHD na Universidade de Paris e, aos poucos, o seu esforço contínuo para ampliar os conhecimentos matemáticos adquiridos fez com que ele fosse para o Instituto de Estudos Avançados em Princeton, onde continuou a explorar muitos campos diferentes da Matemática.

Buscando relações para descrever a geometria observada na natureza e que, transcendia os estudos apresentados por Euclides, Benoit Mandelbrot começou a investigar e analisar estruturas naturais, percebendo que tais estruturas, apresentavam determinados padrões que se repetiam em cada uma das suas partes, mas que não se encaixavam perfeitamente as características apresentadas pelas formas da geometria euclidiana.

Benoit B. Mandelbrot, fez com que a história da geometria, ganhasse novos capítulos tendo em vista que ele considerou elementos novos, que antes, apesar de serem perceptíveis não considerados. Em um dos questionamentos feitos por Mandelbrot, podemos perceber isso, já que, a geometria apresentada por ele

dá conta de extensões com reentrâncias e saliências, depressões e fragmentação. Foi dele a indagação: “que extensão tem o litoral da Grã-Bretanha?”. Ele sabia que a resposta variava conforme a escala de medição, considerando as distâncias, não apenas por segmentos de retas, mas levando em conta os contornos das curvas e outros acidentes. (SOUZA, 2018, p. 235).

Esse questionamento feito por Mandelbrot foi importante para o avanço do estudo da Geometria, de tal modo que,

Era preciso ter uma imaginação excepcional para considerar a possibilidade de uma geometria diferente daquela de Euclides, pois o espírito humano por dois milênios estivera limitado, pelo preconceito da tradição, à firme crença de que o sistema de Euclides era certamente a única maneira de descrever em termos geométricos o espaço físico, e que qualquer sistema geométrico contrário não poderia ser consistente. (EVES, 1997, p.22).

Mandelbrot observou que boa parte de elementos da natureza não podem ser descritos pela geometria euclidiana, pois nessa, as formas estão associadas a eixos perpendiculares, especificada assim, em uma, duas ou três dimensões, de certa forma, a algum ponto pertencente a uma linha, área ou volume respectivamente. Em uma das suas afirmações, Mandelbrot, considera que nuvens não são esferas, montanhas não são cones, continentes não são círculos, troncos de árvores não são suaves e relâmpagos não viajam em linha reta.

Diante dos questionamentos e levando em consideração todas as observações feitas por Mandelbrot foi criada a Geometria Fractal. O termo Geometria Fractal tem origem

no adjetivo em latim “*Fractus*”, do verbo em latim “*Frangere*” que corresponde a “Fraturado” ou “quebrado”, refletindo uma natureza de irregularidades. Essa geometria estuda estruturas mais complexas que as formas apresentadas na geometria euclidiana, analisando as propriedades e comportamentos de cada uma dessas estruturas, buscando estabelecer padrões para as formas encontradas na natureza.

Fractal é uma estrutura geométrica ou física, cujas partes apresentam semelhanças, geralmente, com a estrutura original, mesmo estando em diferentes escalas. Mas vale salientar que, a característica da semelhança entre as partes da estrutura de fractais naturais torna-se limitada em função da escala.

Seja por meios geométricos ou por forma de padrões aleatórios, através de processos recursivos, os fractais podem ser obtidos, apresentando características que podem ser encontradas em diversas formas da natureza e se encontram em diversos lugares, como por exemplo, nos flocos de neve.

É importante ressaltar que, os fractais do tipo matemático, são considerados distintos dos fractais naturais, tendo em vista que esse último, são considerados finitos, já os do tipo matemático são criados por meio de processos de iterações recursivas e alguns deles serão apresentados nos próximos capítulos deste trabalho.

2.3 Fractais na Ciência e Tecnologia

Com o avanço das tecnologias computacionais, bem como das ciências, artes, músicas, entre outros, a geometria fractal tem se destacado cada vez mais. Uma vez que, algumas estruturas que não se encaixavam aos padrões geométricos euclidianos, passaram, através do estudo com fractais, a receber determinados algoritmos matemáticos que as caracterizavam, observando-se melhor os seus devidos detalhes. Com isso, alguns elementos da natureza que antes não eram elaborados de forma matemática, começaram a se aproximar muito mais dessa geometria, passando a ser verificados, tornando possível criar modelos mais próximos daquilo que se apresenta na realidade de cada um desses elementos.

Dado o avanço das teorias e estudos desenvolvidos pela Matemática, Astronomia, Biologia e Física, entre outras ciências, é possível destacar a importância da geometria fractal, como nas imagens de satélites, que cada vez mais, tornam possíveis a aproximação da realidade, mostrando as características do nosso planeta, suas planícies, áreas territoriais, dentre outros aspectos relevantes, como linhas costeiras, como podemos observar na Figura 2.4, destacando-se que, independente da escala em que se amplie a imagem, outros detalhes são apresentados, mas sempre relacionados com a imagem original.

Figura 2.4: Imagem de Satélite



Fonte: Google Maps¹ (2019, com adaptações).

Nessa imagem, é possível perceber um recorte de um mapa apresentado numa tela de computador. Considerando esse recurso é possível aproximar a imagem, destacando que em cada aproximação, alguns detalhes que antes eram imperceptíveis sem o auxílio da tecnologia e da teoria dos fractais, passam a ser destacados com uma maior precisão.

Segundo Mandelbrot, um “raio não viaja em linha” e com isso pode-se destacar através da análise das suas ramificações, a presença de fractais, com os seus padrões associados à semelhança e a proporcionalidade relacionados em cada uma de suas partes. Na Figura 2.5 podemos perceber esses padrões destacados por Mandelbrot.

Figura 2.5: Relâmpagos



Fonte: Escola Focus² (2019, p. 1).

Algumas estruturas da natureza apresentam uma distribuição de partes idênticas, mas não são estruturas exatamente equivalentes, como é o caso da couve-flor (Figura 2.6) e a samambaia (Figura 2.7). Mas ainda assim, são estruturas que podem ser analisadas sob os aspectos estruturais da geometria fractal, como veremos no próximo

capítulo.

Figura 2.6: Couve-Flor



Fonte: Retirada de [10] (2016)

Figura 2.7: Folha de Samambaia



Fonte: Retirada de [10] (2016)

Outros exemplos que possuem características fractais que podem ser citados e vistos na natureza são as nuvens formadas no céu, algumas árvores e galhos, bem como suas ramificações, em que é possível destacar a repetição de padrões.

Esses padrões transcendem o campo da geometria euclidiana, mas de certo modo, chama a atenção na riqueza de detalhes e nos algoritmos matemáticos que estão por trás de toda essa proporcionalidade existente entre as partes que formam a estrutura, bem como nos leva a compreender a beleza da teoria associada à prática Matemática.

A teoria apresentada por Mandelbrot é de extrema importância no avanço dos estudos da geometria, já que:

Na constituição de nosso mundo, da natureza em geral, por mares e oceanos, separando continentes e ilhas, com suas costas, suas montanhas e rios, rochas, plantas e animais, e acima as nuvens etc., temos componentes com suas formas nas quais dominam a irregularidade e o caos; tentar simplificá-las, empregando formas usuais da clássica geometria euclidiana,

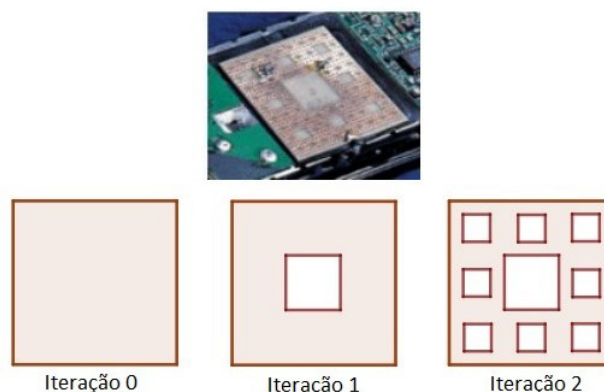
2. Algumas observações sobre a Geometria euclidiana e a Geometria Fractal e seus aspectos relevantes

como triângulos, círculos, esferas, cones, etc., seria absurdamente inadequado. A geometria dos fractais pode fornecer aproximações para essas formas. (BARBOSA, 2005, p.10-11).

As irregularidades predominante nos fenômenos naturais, ou na tecnologia criada pelo avanço dos estudos feitos pelo homem, originou uma ciência conhecida como Teoria do Caos, através da qual, alguns padrões são identificados, mesmo que em situações caóticas, ou seja, desordenadas, sem uma previsão lógica, de forma aleatória.

Com essa percepção, Benoit Mandelbrot, o “pai dos fractais” contribuiu para que a geometria, considerada não-euclidiana, tivesse um importante avanço também na análise das novas tecnologias, como é o caso das inovações das TV’s digitais, antenas fractais (Figura 2.8), criadas por engenheiros para serem utilizadas em telefones celulares e outros dispositivos sem fio que precisam de uma antena que possa ter recepção similar em muitos comprimentos de onda diferentes, ou seja, essas antenas necessitam de uma estrutura semelhante em escalas diferentes, como por exemplo, uma antena celular baseada no Tapete de Sierpinski, a qual é uma figura plana construída a partir de processo recursivo, na qual suas características são definidas como fractais e que podem ser criados a partir de um quadrado, o qual inicialmente é dividido em nove quadrados de mesma área, em seguida retira-se o quadrado central, considera-se os quadrados restantes e repete-se esse procedimento continuamente.

Figura 2.8: Antena Fractal relacionada ao Tapete de Sierpinski na Iteração 2

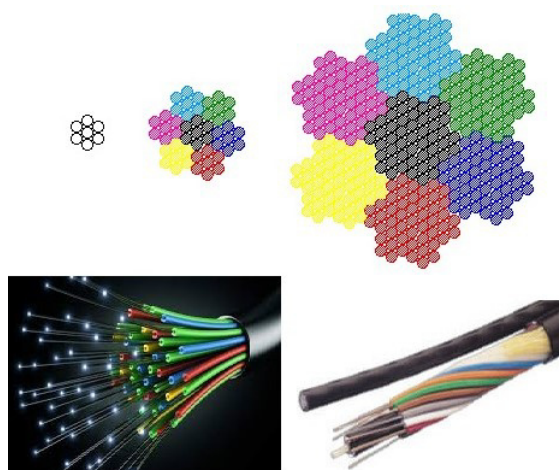


Fonte: Tranversos³ (2019, com adaptações).

Muito embora, a evolução tecnológica sempre esteja se modificando e outras formas estejam surgindo, tais antenas, revolucionaram o ramo da telefonia, já que a partir delas, os sinais dos aparelhos celulares obtiveram uma melhoria na capacidade de transmissão e na otimização do espaço telefônico utilizado, criando e melhorando a distribuição dos serviços oferecidos.

Outra alta tecnologia que pode ser citada utilizando fractais, foi obtida pela empresa Incom⁴ em 1994, a qual desenvolveu um envelopamento de fibras ópticas apropriado para produzir ondas com baixas distorções. Com isso, a empresa idealizou o desenho de feixes de fibras ópticas fractais, nomeadas de multifibras, fornecendo uma melhoria no contraste de imagem.

Figura 2.9: Fibra Ópticas Fractais



Fonte: Prisma e MTI Tecnologia⁵ (2019, com adaptações).

Na área das telecomunicações, as antenas e fibras fractais tem contribuído na emissão de sinais, oferecendo respostas em frequências distintas, cada vez mais eficazes, aumentando o nível de capacidade na interação entre os seus usuários, oferecendo uma inigualável vantagem em projetos de redes sem fio, como é o caso das transmissões *wireless* com antenas cada vez mais leves e compactas, ocupando de forma integrada ao interior do aparelho as conexões necessárias para a alta tecnologia na comunicação.

É possível destacar a importância do aprofundamento no estudo da geometria fractal e a Teoria do Caos com o advento do avanço tecnológico, especificamente no ramo da computação gráfica e recursos cada vez mais sofisticados que possibilitam ao homem ir mais além, criando e recriando, soluções que favorecem ao bem da humanidade e a evolução na pesquisa de outras áreas, seja através da percepção no campo das ciências e tecnologias ou, através do desenvolvimento de projetos para a economia, avaliando a cotação da bolsas de valores, analisando situações da vida real, como por exemplo, as oscilações no coração e no cérebro, através de exames de imagens cada vez mais sofisticados, análise da corrente sanguínea e suas interligações microscópicas, permi-

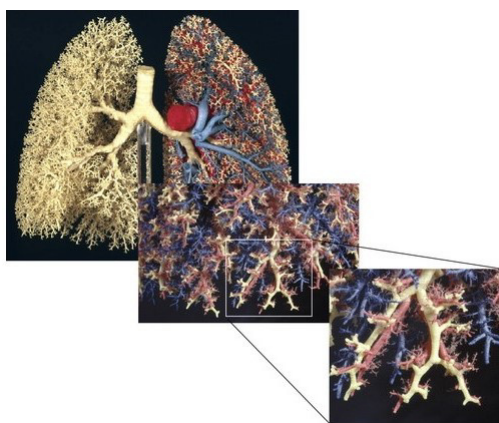
⁴Incom é a principal inovadora mundial em microestruturas de vidro e polímero, possibilitando a visão do futuro com suas inovadoras tecnologias, fundada em 1971, com sede em Charlton, MA. Em 2012, a Incom adquiriu a Paradigm Optics of Vancouver, um movimento que facilitou seu crescimento em dispositivos e tecnologia de fibra ótica de polímero. Disponível em: <https://incomusa.com/about/>. Acesso em: 15 de mai 2019

2. Algumas observações sobre a Geometria euclidiana e a Geometria Fractal e seus aspectos relevantes

tindo equacionar e reformular antigos problemas da humanidade, buscando possíveis soluções.

Diante disso, podemos destacar a importância da geometria fractal na modelagem das ramificações do pulmão (Figura 2.10) ou no sistema de artérias do coração, dentre outros órgãos do corpo humano, já que, padrões utilizados por alguns fractais, servem como modelo para essas estruturas naturais.

Figura 2.10: Ramificações no Pulmão (Modelagem e computação gráfica)



Fonte: Journal of Applied Physiology⁶ (2019, p. 1)

Esses órgãos necessitam de concentrar uma maior superfície e um maior volume em pequenos espaços, assim como o sistema circulatório que percorre uma grande área num volume limitado. Estruturas como essas, tem semelhança com outro fractal obtido por meio de funções iteradas, chamado de Curva de Koch, o qual apresentamos suas características, com maior atenção no capítulo 4 deste trabalho. Nesse caso, a estrutura pressiona uma linha de extensão infinita numa área pequena, bem como os vasos sanguíneos que também formam uma continuidade, se ramificando, dividindo e voltando a ramificar-se, se tornando cada vez mais estreitos. Aspectos dessa natureza, estão intrinsicamente ligados aos fractais.

Podemos perceber, a partir dos estudos e pesquisas feitas por Mandelbrot que, os fractais estão em toda parte do universo. Em tudo que se manifesta sob formas inanimadas, em aspectos biológicos vivos, como em protozoários, na pluricelularidade da vida, em formas microscópicas, conservando entre elas uma similaridade que faz com que estejam intrinsicamente ligadas por meio de propriedades expressando toda beleza e conjectura da geometria fractal.

2.4 Classificação e Características dos fractais

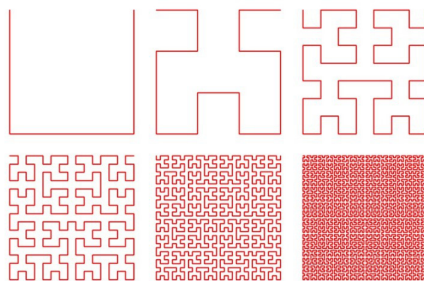
Antes de reconhecer as características de um fractal, vamos fazer uma breve apresentação dos tipos de fractais existentes, procurando estabelecer um pouco mais de conhecimento sobre essas estruturas, antes vista como objetos estranhos na matemática, ou como alguns literários relatam, “monstros matemáticos”.

Dependendo da forma de como é gerado, podemos classificar os fractais em três grupos principais:

- 1) Fractais gerados por meio de sistemas de funções iteradas;
- 2) Fractais gerados por meio de relações de recorrência;
- 3) Fractais aleatórios.

Fractais gerados por meio de sistemas de funções iteradas, também conhecido como fractais determinísticos ou fractais geométricos, são aqueles, gerados por uma regra fixa de substituição geométrica, mas bem definida, aplicada a cada iteração. Uma característica marcante nesse tipo de fractal é a autossimilaridade, já que cada uma das partes da estrutura fractal se assemelha com o todo, mesmo em diferentes escalas de ampliação. Como exemplo dessa classe de fractais podemos citar: o triângulo de Sierpinski, a curva e a ilha de Koch e o conjunto de Cantor, que serão apresentados com um pouco mais de detalhes, no capítulo seguinte, além desses, podemos ver na Figura 2.11 a curva de Hilbert, que é uma curva fractal contínua de preenchimento de espaço descrita em (1891) pelo alemão David Hilbert (1862 – 1943).

Figura 2.11: Curva de Hilbert até a quinta iteração

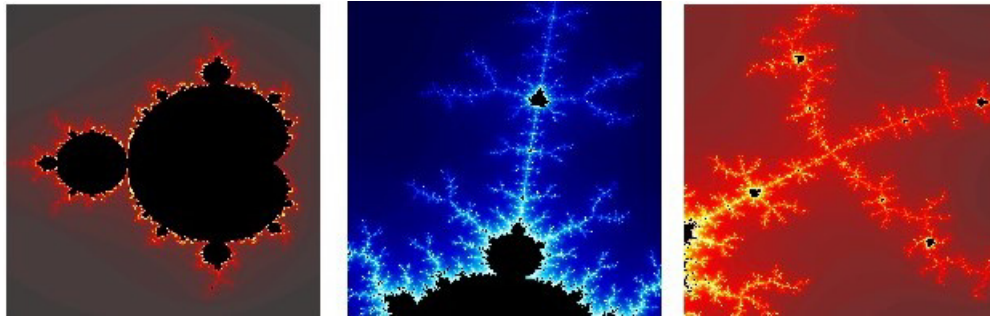


Fonte: DataGenetics⁷ (2019, p. 1).

Os Fractais definidos por uma relação de recorrência, são chamados também de fractais de fuga do tempo. Reconhecidos por possuírem uma forma mais livre de similaridade, de modo que o fractal apresenta inúmeras cópias reduzidas, mesmo sendo imagens distorcidas ou degeneradas, com isso não são considerados totalmente autossimilantes. Com o avanço da tecnologia computacional, fractais dessa classe podem

ser reproduzidos apresentando toda a sua complexidade. Um exemplo dessa classe de fractais é o conjunto de Mandelbrot, o “pai dos fractais”. A imagem desse fractal pode ser vista na Figura 2.12, na qual está exposta, também, duas ampliações do conjunto.

Figura 2.12: Conjunto de Mandelbrot



Fonte: Alguma Matemática⁸ (2019, p. 1).

Os Fractais aleatórios, também conhecidos como fractais naturais, é uma classe de fractais em que destacamos a autossemelhança estatística. Nessa classe de fractais podemos perceber que a parte total da figura se assemelha a ampliação de uma parte. Essa classe de fractais estão relacionadas com a Teoria do Caos, dadas as estruturas fragmentadas, extremamente bela e complexas encontradas nessa classe de fractais, buscando padrões dentro de um sistema dinâmico.

O estudo dessa classe de fractais é muito utilizado para a modelagem em diversas áreas de estudo e tecnologia, como na Biologia, Medicina, Geografia, Mercado financeiro, Ciências da Computação, entre outras áreas. Um exemplo dessa classe de fractal pode ser observado através de cada uma das partes de um floco de neve, como nos mostra a Figura 2.13.

Figura 2.13: Floco de Neve



Fonte: pxhere.com⁹ (2019, p. 1)

Os Fractais, além de apresentar estruturas geométricas complexas e diferentes das

2. Algumas observações sobre a Geometria euclidiana e a Geometria Fractal e seus aspectos relevantes

formas geométricas euclidiana, apresentam determinadas características que faz com que esses elementos sejam ainda mais especiais.

Uma das primeiras características observadas em figuras fractais pode ser definida da seguinte forma;

Autossemelhança, que é a semelhança em que uma parte do objeto fractal tem com o todo, podendo ser subdividida em autossemelhança exata e autossemelhança aproximada ou estatística, mantendo uma semelhança, independente da escala em que o objeto é observado.

Com relação a essa subdivisão encontrada na autossemelhança, podemos diferenciá-las dizendo que;

A autossemelhança exata, presentes em figuras criadas por processos de iteração matemática são elaboradas através de um conjunto de réplicas perfeitas da figura ou objeto original, considerando ainda que, esse tipo de autossemelhança está presente em muitos fractais.

A autossemelhança aproximada, conhecida também como autossemelhança estatística, é aquela que se aproxima dos objetos naturais, como é possível destacar a presença dessas características em algumas figuras da natureza, a exemplo disso, as ramificações de uma árvore.

Outra característica fractal destacada pela grande quantidade de detalhes que são apresentados em cada uma das partes da figura é a complexidade infinita.

Complexidade Infinita é a característica pela qual, por mais que se amplie um objeto fractal, independente da escala de ampliação, os detalhes que são observados são infinitos, ou seja, sempre existirão, de forma infinita, reentrâncias, saliências e rugosidades apresentadas a cada ampliação, podemos citar como exemplo dessa característica, as linhas costeiras, que a cada ampliação num mapa podemos perceber uma maior quantidade dos detalhes que vão aparecendo no desenho.

Uma das formas em que os fractais são construídos é chamada de processo de iteração que é a repetição de um procedimento aplicado infinitamente. Portanto, quanto maior for o número de iterações nesse processo, mais detalhes serão percebidos, mesmo que aconteça a continuidade de formação de novas partes semelhantes da figura ou objeto e com isso, uma Complexidade Infinita de detalhes, na qual é considerado o limite do processo de iterações. A exemplo disso, podemos observar a Figura 2.14.

Figura 2.14: Autossemelhança e Complexidade infinita



Fonte: Fractais na natureza¹⁰ (2019, com adaptações).

Na Figura 2.14, podemos observar a semelhança entre as árvores naturais com a árvore fractal que além de apresentarem uma autossemelhança estatística, apresentam também, um grande número de detalhes, o que nos faz perceber, a complexidade infinita em cada uma das suas ramificações.

Uma das mais importantes características fractais é chamada de Dimensão fractal que diante da rugosidade apresentada em muitos objetos fractais, é utilizada para quantificar, de certa forma, o grau de irregularidade, fragmentação ou intensidade do conjunto considerado.

Dada a importância dessa característica, reservamos uma seção desse capítulo para abordar um pouco mais sobre a dimensão fractal.

2.5 Dimensão

Inicialmente, é preciso considerar que, quando estamos pensando em dimensões de figuras, objetos, dentre outras coisas, estamos nos referindo à possibilidade de medi-los, considerando um determinado espaço. Assim, podemos dizer que a dimensão é o número de parâmetros necessários para a identificação de um ponto nesse espaço.

O homem utilizava essa definição, pelo menos até o século XIX, se baseando no número de coordenadas, o que se fazia suficiente para criar possibilidades de realizar medidas em cada uma das direções de um espaço. Naquela época, tal definição atendia as necessidades matemáticas e esse tipo de dimensão é chamada de dimensão euclidiana. A exemplo disso, podemos citar o cálculo de distâncias através de um mapa, no qual, as coordenadas são utilizadas para identificar pontos no plano e a partir desses pontos, com auxílio de um instrumento de medida é possível dimensionar a distância entre eles.

Tendo em vista que, a geometria euclidiana, é a parte da matemática responsável por estudar as formas geométricas, podemos perceber através das formas apresentadas por essa geometria que, as dimensões podem ser classificadas em: adimensional (forma geométrica sem dimensão, ou seja, dimensão zero: pontos), unidimensional (forma geométrica que possui apenas uma direção ou um sentido: retas), bidimensional (formas

que possuem duas direções ou dois sentidos: o plano) e tridimensional (formas que são caracterizadas por apresentarem três direções diferentes, como altura, largura e profundidade: sólidos geométricos), como podemos ver na Figura 2.15.

Figura 2.15: Tipos de dimensões euclidianas



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Durante muito tempo, o comprimento, a largura e a altura de um objeto geométrico, nos davam, de certo modo, uma definição de dimensão, cujo valor é um número positivo. Mas, com o passar do tempo, outras ideias e estudos surgiram, como é o caso da Geometria Fractal que apresenta outras possibilidades de dimensões, as quais estão inteiramente relacionadas com o formato dos objetos ou figuras, apresentando uma correspondência existente entre as irregularidades, mesmo que estejam em diferentes escalas e que, muitas vezes, pode ser representada, também, por um número racional.

2.6 Dimensão Fractal

Como vimos, através dos fractais, podemos dizer que o homem conseguiu sobrepor barreiras e assim, começou a observar elementos naturais através de outras formas geométricas, percebendo que cada uma delas apresentava uma determinada semelhança que se enquadravam em classes, agora, subdivididas, de acordo com a sua forma e o seu grau de irregularidades, bem como através das características fractais apresentadas.

Atualmente, utilizando recursos tecnológicos computacionais, o homem pode avançar ainda mais, na análise de formas e irregularidades que caracterizam os fractais. A partir disso, começaram a surgir programas específicos que possuem a capacidade de medir, como por exemplo, através de imagens geradas por satélite que utilizam softwares cada vez mais avançados em imagem e escalas métricas, capaz de nos apresentar diversos detalhes importantes, a cada ampliação.

A dimensão fractal é uma das características que faz com que ela se torne ainda mais útil para comparar formas fractais, pois através dessa, conseguimos representar o nível de ocupação da forma no espaço. Com isso, quanto maior for o número de irregularidades apresentadas em uma forma fractal, maior será a sua dimensão.

2. Algumas observações sobre a Geometria euclidiana e a Geometria Fractal e seus aspectos relevantes

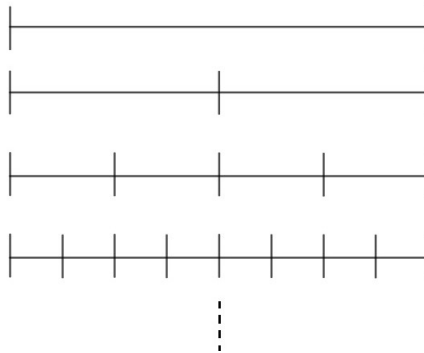
Desse modo, podemos observar que a dimensão fractal não é caracterizada, necessariamente, por um número inteiro, já que, essa medida representa o grau de ocupação deste no espaço e surge como uma alternativa de medição, obtendo assim o grau de complexidade de uma forma.

Para calcular a dimensão de um fractal Benoit Mandelbrot, utilizou as ideias do matemático alemão Hausdorff (1868 - 1942), que desenvolveu trabalhos na área de topologia e Besicovitch (1891 - 1970), matemático russo com estudos e contribuições na área de conjuntos de dimensão não-inteira. Com isso, podemos calcular a dimensão fractal do seguinte modo.

Inicialmente, seja $N(\varepsilon)$ a quantidade de objetos formados em uma determinada dimensão.

Considere um segmento (unidimensional $d = 1$) cujo comprimento seja l e em seguida seccione esse segmento em segmentos iguais, cuja medida seja ε . Observe a Figura 2.16.

Figura 2.16: Secções numa linha de medida l



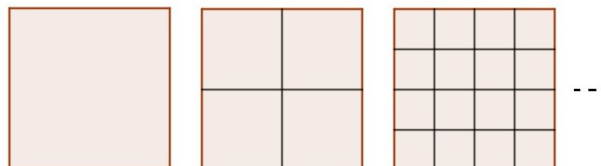
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Observe que, a medida que ε diminui, a quantidade de segmentos formados $N(\varepsilon)$ aumenta, de tal forma que,

$$N(\varepsilon) = l \left(\frac{1}{\varepsilon} \right). \quad (2.1)$$

Analogamente em um plano, seja l o lado do quadrado (bidimensional $d = 2$) (Figura 2.17). Dessa forma, note que,

Figura 2.17: Secções num quadrado de lado l



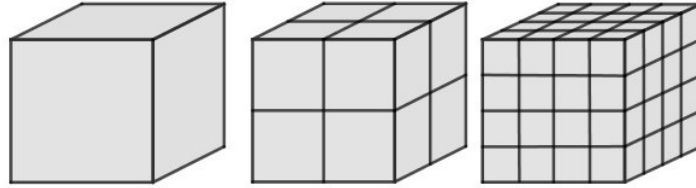
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

2. Algumas observações sobre a Geometria euclidiana e a Geometria Fractal e seus aspectos relevantes

a cada vez que o tamanho de ε diminui, a quantidade de quadrados $N(\varepsilon)$ aumenta. Assim, temos, $N(\varepsilon) = l^2 \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2$.

Continuando esse processo, usando um objeto tridimensional, seja l a aresta de um cubo (Figura 2.18) e, note que,

Figura 2.18: Secções num cubo de aresta l



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

a cada vez que o tamanho de ε diminui, a quantidade de cubos $N(\varepsilon)$ aumenta. Assim, temos, $N(\varepsilon) = l^3 \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^3$.

Se continuarmos esse processo, podemos verificar que a quantidade de objetos formados é dada por:

$$N(\varepsilon) = l^d \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d. \quad (2.2)$$

onde d é a dimensão que o objeto ocupa.

Para verificar a validade dessa igualdade, procedemos usando o princípio da indução em d . Usando o caso base, para $d = 1$ note que isso é verdade, basta considerar 2.1. Supondo que $N(\varepsilon) = l^d \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d$ seja verdadeira e multiplicando $N(\varepsilon)$ por $l \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, segue que, $l^d \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d l \left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = l^{(d+1)} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{(d+1)}$. Assim a igualdade é válida para $d + 1$ e, portanto, pelo princípio da indução finita, a Equação 2.2 é verdadeira.

Agora, aplicando logaritmo em ambos os lados da igualdade, segue que:

$$\begin{aligned} \log N(\varepsilon) &= \log l^d \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d \\ &= \log l^d + \log \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d \\ &= d \left(\log l + \log \left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \right) \end{aligned}$$

portanto, como o termo em l será desprezível para pequenos valores de ε , temos que a

dimensão de capacidade é dada por:

$$d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \frac{1}{\varepsilon}} \quad (2.3)$$

onde ε é o tamanho da aresta da caixa e $N(\varepsilon)$ é a quantidade de caixas preenchidas.

Com esse resultado, podemos concluir que a dimensão d de objetos autossemelhantes, sejam eles fractais ou não, é dada pela equação 2.3.

Utilizando esse resultado, podemos verificar o valor da dimensão das figuras fractais que podem ser observadas no próximo Capítulo onde apresentamos alguns elementos e propriedades que constituem essa maravilhosa descoberta que, a cada instante tem aberto portas e caminhos, antes jamais imaginados, mas que revolucionam as pesquisas e os debates que interessam não só a matemática, mas as ciências e suas ramificações, bem como a construção de fractais clássicos e algumas de suas propriedades.

Capítulo 3

Noções da Topologia

Neste capítulo, relembremos algumas noções topológicas que serão necessárias para justificar algumas proposições que estão inseridas no Capítulo 4 deste trabalho.

Definição 3.1. Para cada n natural considere o subconjunto $I_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ dos n primeiros números naturais. Dizemos que um conjunto X é finito quando é vazio ou se existe $n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção $f : I_n \rightarrow X$. Escrevendo $x_1 = f(1), x_2 = f(2), \dots, x_n = f(n)$ temos $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. A bijeção f é chamada de contagem dos elementos de X e o número n é chamado de número de elementos, ou número cardinal do conjunto finito X . Denotamos a cardinalidade de X por $\#X = n$.

Exemplo 3.1. O conjunto $X = \{3, 4, 5, \dots, k+2\}$, com $k \in \mathbb{N}$ fixo é finito. Basta notar que a função $\psi : I_k \rightarrow X$ definida por $\psi(n) = n+2$, com $n = 1, 2, \dots, k$ é bijetora.

Definição 3.2. Dizemos que um conjunto é infinito quando não é finito, isto é, não existe bijeção $f : I_n \rightarrow X$ para todo número natural n .

Exemplo 3.2. Se $\mathbb{N}_1 = \mathbb{N} - \{1\}$, então $\varphi(n) = n+1$ é uma bijeção de $\mathbb{N}$ no subconjunto $\mathbb{N}_1$. Em geral, fixando $p \in \mathbb{N}$ podemos considerar, $\mathbb{N}_p = \{p+1, p+2, \dots\}$ e definir a bijeção $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_p$, tal que $\varphi(n) = n+p$.

Fenômenos assim já havia sido observado por Galileu, que foi o primeiro a notar que “há tantos números pares quantos números naturais”, mostrando que se $P = \{2, 4, 6, \dots\}$ é o conjunto dos números pares, então $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow P$, dada por $\varphi(n) = 2n$, é uma bijeção.

Exemplo 3.3. O conjunto dos números primos é infinito. De fato, suponhamos por absurdo que o conjunto P dos números primos é finito, ou seja, $P = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ para algum k número natural. Tomando o número natural $p = (p_1 p_2 \dots p_k) + 1$ temos $p_i < p$ para todo $i = 1, 2, 3, \dots, k$, ou seja, $p \notin P$. Como qualquer número pode

ser escrito como produto de números primos temos que p_i divide p para algum $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Então, p_i divide 1 e, portanto, $p_i = 1$, uma contradição.

Definição 3.3. Um conjunto X é chamado de enumerável quando é finito ou quando existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \rightarrow X$. Neste caso, dizemos que f define uma enumeração dos elementos de X . Escrevendo $f(1) = x_1, f(2) = x_2, \dots, f(n) = x_n, \dots$, então $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$.

Quando o conjunto X é infinito e quando não existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \rightarrow X$, dizemos que o conjunto X é não-enumerável.

Exemplo 3.4. O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é enumerável. De fato, podemos definir a aplicação $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $f(n) = \frac{(n-1)}{2}$ para n ímpar e $f(n) = -\frac{n}{2}$ para n par. Tomando $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ números ímpares, tais que $f(n_1) = f(n_2)$, temos

$$\frac{(n_1-1)}{2} = \frac{(n_2-1)}{2} \Rightarrow n_1-1 = n_2-1 \Rightarrow n_1 = n_2.$$

Tomemos agora, $n_3, n_4 \in \mathbb{N}$ números pares, tais que $f(n_3) = f(n_4)$, então

$$-\frac{n_3}{2} = -\frac{n_4}{2} \Rightarrow -n_3 = -n_4 \Rightarrow n_3 = n_4.$$

Logo, f é injetiva. Dado $m \geq 0$, com $m \in \mathbb{Z}$, tomando $n = 2m + 1$ ímpar, tal que

$$f(n) = f(2m+1) = \frac{(2m+1)-1}{2} = m.$$

Logo para todo $m \geq 0$, com $m \in \mathbb{Z}$, existe $n \in \mathbb{N}$, n ímpar, tal que $f(n) = m$.

Agora, seja $m < 0$, com $m \in \mathbb{Z}$. Sendo assim, note que $-m > 0$ e tome $n = 2(-m)$ par, tal que $m = -\frac{n}{2}$. Logo, para todo $m < 0$ com $m \in \mathbb{Z}$, existe $n \in \mathbb{N}$ par, tal que $f(n) = m$. Portanto, f é sobrejetiva.

Dessa forma, obtemos que f é uma bijeção e, portanto, o conjunto $\mathbb{Z}$ é enumerável.

Exemplo 3.5. O conjunto de todas as sequências infinitas formadas com os símbolos 0 e 1, como por exemplo $S = \{(01100010\dots), \dots\}$ é não-enumerável. Seja S o conjunto de todas as sequências infinitas formadas com os símbolos 0 e 1, ou seja, S é o conjunto de todas as funções $s : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, o valor $s(n)$, igual a 0 ou 1, é o n -ésimo termo da sequência s . Afirmamos que nenhum subconjunto enumerável $X = \{s_1, s_2, \dots, s_n, \dots\} \subset S$ é igual a S . Assim, dado X , indiquemos com s_{nm} o n -ésimo termo da sequência $s_m \in X$. Formamos uma nova sequência $s^* \in S$ tomando o n -ésimo termo de s^* igual a 0 se for $s_{nn} = 1$, ou igual a 1 se $s_{nn} = 0$. A sequência s^* não pertence ao conjunto X , pois, seu n -ésimo termo é diferente do n -ésimo termo

de s_n . Com isso, podemos observar que não existe bijeção $f : \mathbb{N} \rightarrow S$ e portanto, o conjunto S é não-enumerável.

Observação 3.1. Usamos no Exemplo 3.5, o raciocínio conhecido como “método da Diagonal de Cantor”.

Definição 3.4. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é limitado superiormente quando existe algum $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$, para todo $x \in X$. Nesse caso, dizemos que b é uma cota superior do conjunto X .

Definição 3.5. Seja $X \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente e não-vazio. Um número $b \in \mathbb{R}$ é chamado de supremo do conjunto X , ou seja, $b = \sup X$, quando é a menor das cotas superiores de X . Mais precisamente, b é o supremo do conjunto X quando cumpre as seguintes condições:

- 1) Para todo $x \in X$, tem-se $x \leq b$;
- 2) Se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $x \leq c$ para todo $x \in X$ então $b \leq c$.

Exemplo 3.6. Seja A o intervalo aberto $A = (0, 1)$. Então, 1 é mais geralmente qualquer $c > 1$, é uma cota superior para A . Por outro lado, nenhum $b < 1$ pode ser cota superior para A , pois, dado $b < 1$, tomando o ponto médio $m = \frac{b+1}{2}$, note que $m \in A$, mas $m > b$. Com isso, podemos concluir que, para todo $b < 1$, b não é cota superior para A . Portanto, 1 é a menor de todas as cotas superiores de A , ou seja, $\sup A = 1$.

Teorema 3.1. Dada uma sequência decrescente $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset I_4 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$ de intervalos não-vazios, limitados e fechados, $I_n = [a_n, b_n]$, existe pelo menos um número real c tal que $c \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Obervemos que as inclusões $I_n \supset I_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ significam que $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$.

Inicialmente, seja $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$. Note que o conjunto A é limitado superiormente, por exemplo, por b_1 . Consequentemente, por 3.5, existe $c \in \mathbb{R}$, tal que $c = \sup A$. Assim, como c é uma cota superior de A , temos que $c \geq a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, como cada b_n é cota superior de A , temos $c \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue que $c \in I_n$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. ■

Teorema 3.2. Se $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ são números reais então:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$. Esse teorema é chamado de Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Demonstração. Inicialmente, tomemos uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = (a_1 - b_1x)^2 + (a_2 - b_2x)^2 + \dots + (a_n - b_nx)^2, \text{ com } x \in \mathbb{R}.$$

Observe que, a função f é formada por n parcelas e, ainda, cada uma das parcelas corresponde a uma função quadrática. Assim a função f é uma função quadrática, bem como, para cada $i \in \mathbb{N}$ temos $(a_i - b_ix)^2 \geq 0$ e, com isso, $f(x) \geq 0$. Disso, temos que $\Delta \leq 0$. Note que,

$$\begin{aligned} f(x) &= (a_1 - b_1x)^2 + (a_2 - b_2x)^2 + \dots + (a_n - b_nx)^2 \\ &= a_1^2 - 2a_1b_1x + b_1^2x^2 + \dots + a_n^2 - 2a_nb_nx + b_n^2x^2 \\ &= (b_1^2 + \dots + b_n^2)x^2 - 2(a_1b_1 + \dots + a_nb_n)x + (a_1^2 + \dots + a_n^2). \end{aligned}$$

Fazendo $A = (b_1^2 + \dots + b_n^2)$, $B = 2(a_1b_1 + \dots + a_nb_n)$ e $C = (a_1^2 + \dots + a_n^2)$, temos,

$$\begin{aligned} \Delta &= B^2 - 4AC \\ &= [2(a_1b_1 + \dots + a_nb_n)]^2 - 4(b_1^2 + \dots + b_n^2)(a_1^2 + \dots + a_n^2) \\ &= 4(a_1b_1 + \dots + a_nb_n)^2 - 4(b_1^2 + \dots + b_n^2)(a_1^2 + \dots + a_n^2) \leq 0 \\ &\Rightarrow 4(a_1b_1 + \dots + a_nb_n)^2 \leq 4(b_1^2 + \dots + b_n^2)(a_1^2 + \dots + a_n^2) \\ &\Rightarrow (a_1b_1 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (b_1^2 + \dots + b_n^2)(a_1^2 + \dots + a_n^2) \end{aligned}$$

Agora, vamos analisar quando ocorre a igualdade. Para isso, note que, se $\Delta = 0$, então $f(x)$ tem apenas um zero, ou seja, existe x_0 único, tal que $f(x_0) = 0$. Com isso, $(a_1 - b_1x_0)^2 + (a_2 - b_2x_0)^2 + \dots + (a_n - b_nx_0)^2 = 0$. Dessa forma, para que a soma dessas parcelas seja igual a zero, é necessário que, cada uma das parcelas sejam iguais a zero. Portanto,

$$\begin{aligned} (a_1 - b_1x_0)^2 = 0 &\Rightarrow a_1 - b_1x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{a_1}{b_1}, \text{ e} \\ (a_2 - b_2x_0)^2 = 0 &\Rightarrow a_2 - b_2x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{a_2}{b_2}, \text{ e} \\ &\vdots \\ (a_n - b_nx_0)^2 = 0 &\Rightarrow a_n - b_nx_0 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{a_n}{b_n}. \end{aligned}$$

Assim, $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$. ■

Definição 3.6. Uma métrica no espaço M é uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado a distância de x a y , de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:

- 1) $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- 2) $d(x, y) = d(y, x)$;
- 3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Um Espaço Métrico (M, d) é um conjunto não vazio M munido de uma métrica d .

Exemplo 3.7. A aplicação $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2},$$

é uma métrica sobre $\mathbb{R}^2$. De fato, para quaisquer $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ temos:

- 1) $d(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} \geq 0$ e
 $d(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} = 0$
 $\Leftrightarrow (y_1 - x_1)^2 = 0$ e $(y_2 - x_2)^2 = 0$
 $\Leftrightarrow y_1 = x_1$ e $y_2 = x_2$.
 $\Leftrightarrow x = y$.

- 2) Inicialmente, notamos que $(y_k - x_k)^2 = (x_k - y_k)^2 \quad \forall x_k, y_k \in \mathbb{N}$. Assim,

$$d(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = d(y, x).$$

- 3) Para provarmos a desigualdade triangular, utilizamos o Teorema 3.2. Sejam $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, em $\mathbb{R}^2$, podemos observar que;

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)$$

Em particular, para qualquer $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, temos;

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2).$$

Dessa desigualdade, podemos observar que;

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \leq |a_1 b_1 + a_2 b_2| \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2).$$

Por outro lado, sabemos que;

$$\begin{aligned}(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 &= (a_1^2 + a_2^2) + 2(a_1b_1 + a_2b_2) + (b_1^2 + b_2^2) \\ &\leq (a_1^2 + a_2^2) + 2 \left(\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)} \sqrt{(b_1^2 + b_2^2)} \right) + (b_1^2 + b_2^2) \\ &= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)} + \sqrt{(b_1^2 + b_2^2)}.\end{aligned}$$

Seja $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ e $z = (z_1, z_2)$ em $\mathbb{R}^2$ e tomemos $a_1 = z_1 - x_1$, $a_2 = z_2 - x_2$, $b_1 = y_1 - z_1$, $b_2 = y_2 - z_2$. Com isso, note que; $a_1 + b_1 = y_1 - x_1$ e $a_2 + b_2 = y_2 - x_2$. Assim, temos que;

$$(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 \leq \left(\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (z_2 - x_2)^2} + \sqrt{(y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2} \right)^2.$$

Portanto, segue que;

$$\begin{aligned}\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} &\leq \sqrt{((y_1 - x_1)^2 + (z_2 - x_2)^2)} + \sqrt{(y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2} \\ &\Rightarrow d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z).\end{aligned}$$

O que prova o item (3).

Logo, a aplicação $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma métrica sobre $\mathbb{R}^2$.

Observação 3.2. A métrica d é a métrica natural, pois ela provém da fórmula para o cálculo da distância da Geometria Euclidiana e é chamada de métrica euclidiana, ou também, de métrica usual em $\mathbb{R}^2$.

O Exemplo 3.8 apresenta três maneiras naturais de se definir a distância entre dois pontos no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 3.8. Os pontos de $\mathbb{R}^n$ são as listas $x = (x_1, \dots, x_n)$ onde cada uma das n coordenadas x_i , com $i = 1, \dots, n$ é um número real. Dados $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$, escrevemos;

- 1) $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}};$
- 2) $d'(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|;$
- 3) $d''(x, y) = \max \{ |x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n| \} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$

As funções $d, d', d'' : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são métricas sobre $\mathbb{R}$.

Inicialmente, notamos que em $\mathbb{R}$, temos $d = d' = d''$, pois para cada $x, y \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sqrt{(x - y)^2} = |x - y|, \\ d'(x, y) &= |x - y|, \\ d''(x, y) &= \max \{|x - y|\} = |x - y|. \end{aligned}$$

Com isso, mostramos que as funções $d, d', d'' : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são métricas sobre $\mathbb{R}$.

Para $n > 1$ vamos verificar as condições da Definição 3.6.

1) Para cada $x = y \in \mathbb{R}^n$, temos;

$$\begin{aligned} d(x, x) &= \sqrt{(x_1 - x_1)^2 + \cdots + (x_n - x_n)^2} = \sqrt{0 + \cdots + 0} = 0; \\ d'(x, x) &= |x_1 - x_1| + \cdots + |x_n - x_n| = 0 + \cdots + 0 = 0; \\ d''(x, x) &= \max \{|x_1 - x_1|, \cdots, |x_n - x_n|\} = \max \{0, \cdots, 0\} = 0. \end{aligned}$$

2) Se $x \neq y$, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \neq y_i$. Assim,

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \geq \sqrt{(x_i - y_i)^2} = |x_i - y_i| > 0; \\ d'(x, y) &= |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| \geq |x_i - y_i| > 0; \\ d''(x, y) &= \max \{|x_1 - y_1|, \cdots, |x_n - y_n|\} \geq |x_i - y_i| > 0. \end{aligned}$$

3) Se $x, y \in \mathbb{R}^n$, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \neq y_i$. Assim,

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \\ &= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2} \\ &= d(y, x); \\ d'(x, y) &= |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| \\ &= |y_1 - x_1| + \cdots + |y_n - x_n| \\ &= d'(y, x); \\ d''(x, y) &= \max \{|x_1 - y_1|, \cdots, |x_n - y_n|\} \\ &= \max \{|y_1 - x_1|, \cdots, |y_n - x_n|\} \\ &= d''(y, x). \end{aligned}$$

4) Se $x, y, z \in \mathbb{R}^n$. Inicialmente, para verificar que d é uma métrica em $\mathbb{R}^n$ usamos a norma $\|x\|$, tal que $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, com $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$. Por

outro lado, note que $\bar{d}(x, y) = \|x - y\|$ é uma métrica em R^n , pois, as condições de métrica são verificadas e como $\bar{d} = d$, temos;

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, y) + d(y, z) \text{ e ainda,} \\ d'(x, z) &= |x_1 - z_1| + \cdots + |x_n - z_n| \\ &= |x_1 - y_1 + y_1 - z_1| + \cdots + |x_n - y_n + y_n - z_n| \end{aligned}$$

Usando o fato que

$$\begin{aligned} |a + b| &\leq |a| + |b| \text{ segue que} \\ &\leq |x_1 - y_1| + |y_1 - z_1| + \cdots + |x_n - y_n| + |y_n - z_n| \\ &= d'(x, y) + d'(y, z); \end{aligned}$$

Analogamente, temos;

$$\begin{aligned} d''(x, z) &= \max\{|x_1 - z_1|, \cdots, |x_n - z_n|\} \\ &= \max\{|x_1 - y_1 + y_1 - z_1|, \cdots, |x_n - y_n + y_n - z_n|\} \\ &\leq \max\{|x_1 - y_1| + |y_1 - z_1|, \cdots, |x_n - y_n| + |y_n - z_n|\} \\ &= \max\{|x_1 - y_1|, \cdots, |x_n - y_n|\} + \max\{|y_1 - z_1|, \cdots, |y_n - z_n|\} \\ &= d''(x, y) + d''(y, z). \end{aligned}$$

Com isso, mostramos que $d, d', d''; R^n \times R^n \rightarrow R^n$ são métricas.

Definição 3.7. Sendo a um ponto no espaço métrico M . Dado um número real $r > 0$, temos:

- a) A bola aberta de centro a e raio r é o conjunto $B(a, r)$ dos pontos de M cuja distância ao ponto a é menor do que r , ou seja;

$$B(a, r) = \{x \in M; d(x, a) < r\}.$$

- b) A bola fechada de centro a e raio r é o conjunto $B[a, r]$ dos pontos de M cuja distância ao ponto a é menor ou igual a r , ou seja;

$$B[a, r] = \{x \in M; d(x, a) \leq r\}.$$

- c) A esfera de centro a e raio r é o conjunto $S(a, r)$ dos pontos de M cuja distância

ao ponto a é igual a r , ou seja;

$$S(a, r) = \{x \in M; d(x, a) = r\}.$$

Exemplo 3.9. Com a métrica usual da reta, para todo $a \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, a bola aberta $B(a, r)$ é o intervalo aberto $(a - r, a + r)$, já que $|x - a| < r$ equivale a $-r < x - a < r$, isto é, $a - r < x < a + r$. De forma análoga, a bola fechada $B[a, r]$ é o intervalo fechado $[a - r, a + r]$ e a esfera $S(a, r)$ possui apenas os pontos $a - r$ e $a + r$.

Exemplo 3.10. Qualquer bola aberta de um espaço métrico (E, d) é um aberto de E . De fato, sejam $x \in E$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Dado $y \in B(x, \varepsilon)$, pretendemos mostrar que existe algum $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $B(y, \varepsilon') \subset B(x, \varepsilon)$. Para isso, basta tomar $\varepsilon' = \varepsilon - d(x, y)$, pois,

$$\begin{aligned} u \in B(y, \varepsilon') &\Leftrightarrow d(u, y) < \varepsilon - d(x, y) \\ &\Rightarrow d(x, u) \leq d(x, y) + d(y, u) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Exemplo 3.11. Qualquer bola fechada de um espaço métrico (E, d) é um fechado de E . De fato, sejam $x \in E$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Devemos mostrar que o conjunto $\{y \in E | d(x, y) > \varepsilon\}$ é um aberto. Sejam y um elemento desse conjunto e seja $\varepsilon' = d(x, y) - \varepsilon$, então $B(y, \varepsilon') \subset \{y \in E | d(x, y) > \varepsilon\}$.

Exemplo 3.12. No plano $\mathbb{R}^2$, as métricas d, d' e d'' correspondem em termos de bolas às seguintes figuras:

Para todo $a \in \mathbb{R}^2$ e $r > 0$, a bola aberta $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^2; d(x, a) < r\}$ é interior de um círculo de centro a e raio r , se

$$d(x, a) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} < r \Rightarrow (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2.$$

Ou o interior de um quadrado de centro a e diagonais iguais a $2r$ paralelas aos eixos coordenados, se

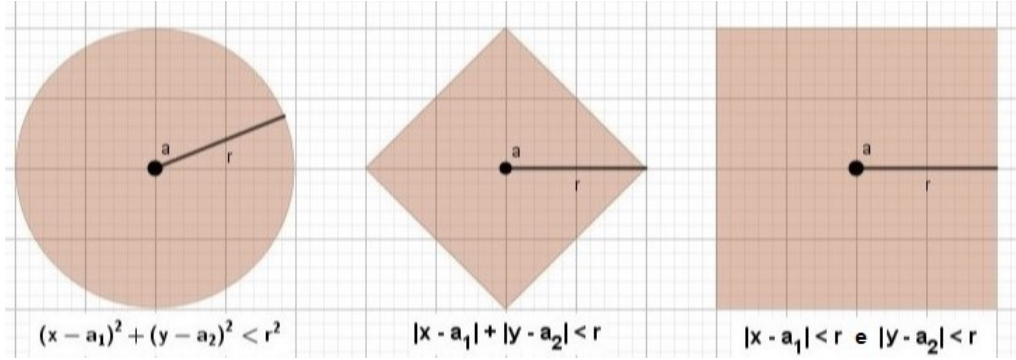
$$d'(x, a) = |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2|.$$

Ou o interior de um quadrado de centro a e lados com medida igual a $2r$ paralelos aos eixos coordenados, se

$$d''(x, a) = \max\{|x_1 - a_1|, |x_2 - a_2|\} < r \Rightarrow |x_1 - a_1| < r \text{ e } |x_2 - a_2| < r.$$

Na Figura 3.1 podemos observar a representação geométrica da bola fechada de centro a e raio r em cada caso tratado nos exemplos acima.

Figura 3.1: Regiões obtidas



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Particularmente, se $a = (0, 0)$ e $r = 1$, então, usando a métrica d , temos: $d((x, y), (0, 0)) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Com isso,

$$B(a, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}.$$

Usando a métrica d' , temos: $d((x, y), (0, 0)) = |x| + |y|$, portanto,

$$B(a, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| < 1\}.$$

Finalmente, usando a métrica d'' temos: $d''((x, y), (0, 0)) = \max\{|x|, |y|\}$, portanto,

$$B(a, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \max\{|x|, |y|\} < 1\}$$

Definição 3.8. Seja $a \in X \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que o ponto a é interior ao conjunto X quando existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset X$. Isto significa que todos os pontos suficientemente próximo de a também pertence a X . O conjunto $\text{int}(X)$ dos pontos interiores a X é chamado de interior do conjunto X .

É claro que, $\text{int}(X) \subset X$, quando $a \in \text{int}(X)$, dizemos que X é uma vizinhança de a .

Exemplo 3.13. Todo ponto $c \in (a, b)$ é um ponto interior a (a, b) . Note que, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $c + \frac{1}{n_0} > a$ e $c - \frac{1}{n_0} < b$. Tomando $\varepsilon = \frac{1}{n_0} > 0$ então $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset (a, b)$. Dessa forma, todo intervalo aberto é um conjunto aberto, já que, para todo $c \in (a, b)$ temos $c \in \text{int}(a, b)$. Seja o intervalo fechado $[a, b]$, os extremos $a, b \notin \text{int}[a, b]$, já que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos $a - \frac{1}{n} < a$ e $b + \frac{1}{n} > b$ e assim $\left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right) \not\subset [a, b]$.

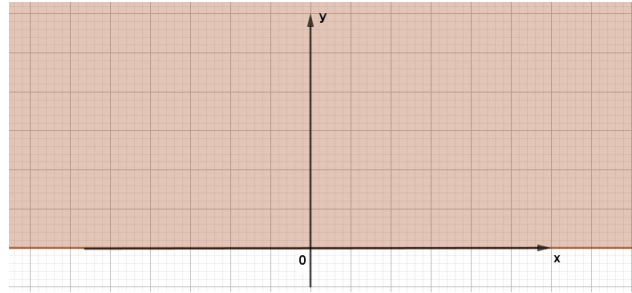
O conjunto vazio é aberto, pois se assim não fosse, existiria $x \in \emptyset$ tal que $x \notin \text{int}\emptyset$, o que seria absurdo, já que no conjunto vazio não há elementos.

O interior do conjunto $\mathbb{Q}$ não contém intervalos. De fato, considere o conjunto

$Q \subset \mathbb{Q}$, com $a, b \in Q$ tal que $a < b$, com isso, dado qualquer intervalo (a, b) temos que $(a, b) \not\subset Q$, já que entre dois números racionais existe sempre um número irracional, ou seja, $i \in (a, b)$ tal que $i \notin Q$. Com isso, concluímos que $(a, b) \not\subset Q$.

Exemplo 3.14. Seja $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0\}$ o semi-plano superior fechado, (Figura 3.2).

Figura 3.2: Semi-plano superior fechado ($y \geq 0$)



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Se $p = (a, b)$ com $b > 0$, então $p \in \text{int}X$. De fato, $B(a, b) \subset X$, pois,

$$\begin{aligned} (x, y) \in B &\Rightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < b \\ &\Rightarrow (y-b)^2 < b^2 \\ &\Rightarrow y^2 - 2by + b^2 < b^2 \Rightarrow y^2 < 2by \\ &\Rightarrow y > 0 \Rightarrow (x, y) \in X. \end{aligned}$$

Notemos ainda que os pontos da forma $q = (a, 0)$, pertencem a X , mas não são interiores a X . De fato, nenhuma bola de centro q pode estar contida em X , pois o ponto $\left(a, -\frac{r}{2}\right) \in B(q, r)$, mas $\left(a, -\frac{r}{2}\right) \notin X$. Portanto, temos que, $\text{int}(X) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\} = X$.

Definição 3.9. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, quando todos os seus pontos são interiores, isto é, quando $A = \text{int}(A)$.

Exemplo 3.15. Toda bola $B(a, r)$ é um conjunto aberto. De fato, seja $x \in B$, então, $|x - a| < r$, daí, $s = r - |x - a| > 0$. Afirmamos que $B(x, s) \subset B$. De fato, $y \in B(x, s) \Rightarrow |y - x| < r - |x - a|$. Assim,

$$\begin{aligned} y \in B(x, s) &\Rightarrow |y - a| \leq |x - y| + |x - a| < r - |x - a| + |x - a| = r \\ &\Rightarrow y \in B(a, r). \end{aligned}$$

Teorema 3.3.

- a) Se A_1 e A_2 são conjuntos abertos em $\mathbb{R}^n$, então a intersecção $A_1 \cap A_2$ é um conjunto aberto.
- b) Se $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família arbitrária de conjuntos abertos $A_\lambda \subset \mathbb{R}^n$, então $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é um conjunto aberto.

Demonstração:

- a) Se $x \in A_1 \cap A_2$ então $x \in A_1$ e $x \in A_2$. Como A_1 e A_2 são conjuntos abertos em $\mathbb{R}^n$, então $\exists r_1, r_2 > 0$ tais que $B(x, r_1) \subset A_1$ e $B(x, r_2) \subset A_2$. Seja $r = \min \{r_1, r_2\}$, então $B(x, r) \subset B(x, r_1) \subset A_1$ e $B(x, r) \subset B(x, r_2) \subset A_2 \Rightarrow B(x, r) \subset A_1 \cap A_2$. Com isso, todo $x \in A_1 \cap A_2$ é ponto interior, ou seja, $A_1 \cap A_2$ é conjunto aberto. ■

- b) Se $x \in A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$, então existe $\lambda \in L$, tal que $x \in A_\lambda$. Como A_λ é aberta, $\exists r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A_\lambda \subset A$, logo todo ponto de A é interior, ou seja, A é conjunto aberto. ■

Segue do Teorema 3.3 que a intersecção finita $A = A_1 \cap \dots \cap A_k$ de conjuntos abertos $A_1 \dots A_k$ é ainda um conjunto aberto.

Mas vale salientar que, a intersecção de uma família infinita de abertos não é necessariamente aberta. A exemplo disso, um ponto a é intersecção de uma família enumerável de abertos, ou seja $\bigcap_{k=1}^{\infty} B\left(a, \frac{1}{k}\right) = \{a\}$. Com efeito, se $x \neq a$ então $d(x, a) > 0$, logo existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, a) > \frac{1}{n}$. Assim, $x \notin B\left(a, \frac{1}{n}\right)$, com $n \in \mathbb{N}$.

Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ e A subconjunto de X . Dizemos que A é aberto em X , quando para cada ponto a de A , $B(a, r) \cap X \subset A$, ou seja, os pontos de X que estão suficientemente próximos de cada $a \in A$. A união de todas essas bolas é um conjunto aberto U tal que $A = U \cap X$. Com isso, um conjunto $A \subset X$ é aberto em X se, e somente se, $A = U \cap X$; onde U é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$. Por exemplo, $(0, 1]$ é aberto em $[0, 1]$, pois $(0, 1] = (0, 2) \cap [0, 1]$.

Dado um espaço métrico é essencial conhecer a definição de convergência, já que esse conceito é importantíssimo para a compreensão do tema que será apresentado logo em seguida.

Definição 3.10. Seja (X, d) um espaço métrico e (x_n) uma sequência em X . Dizemos que a sequência (x_n) converge se existe um número real $S \in X$, tal que, os termos da sequência (x_n) se aproximam cada vez mais de S , de modo que a distância de (x_n) a S pode ser tão pequena quanto quiser. Dessa forma, temos $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = S$.

Assim, dizemos que uma sequência que possui limite é convergente, caso contrário, dizemos que a sequência é divergente.

Exemplo 3.16. A sequência $a_n = \left(\frac{1}{n}\right)$ é convergente no espaço métrico $\mathbb{R}$ com métrica usual, pois $a_n = \left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$. Podemos perceber que, a sequência é formada pelos termos: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$, os quais, à medida que aumentamos o valor de n , se aproximam cada vez mais de zero.

Note que, para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$ com $x > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $Nx > y$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $N\varepsilon > 1$, ou seja, $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Com isso, $d\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$. Com isso, concluímos que $a_n = \left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$.

Definição 3.11. Dizemos que o ponto a é aderente ao conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ quando existe uma sequência de pontos $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de X que converge para a . Chamamos de fecho do conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ o conjunto $\overline{X} = \{x \in \mathbb{R}^n; x \text{ é aderente a } X\}$.

Um conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ é considerado fechado quando $F = \overline{F}$, isto é, quando o limite de toda sequência convergente de pontos de F é ainda um ponto de F . Todo ponto $x \in X$ é aderente a X pois é limite da sequência constante $(x, x, \dots)$. Assim, $X \subset \overline{X}$ qualquer que seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Além disso, se $X \subset Y$, então $\overline{X} \subset \overline{Y}$.

Exemplo 3.17. Se $|x| = r$, então $x \notin B(0, r)$, porém $x \in \overline{B}$. De fato, $x_k = \left(1 - \frac{1}{k}\right)x$, satisfaz, $x_k \in B$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$. Assim, $x \in \overline{B}$. Reciprocamente, se $x \in \overline{B}$, então $x = \lim x_k$, com $|x_k| < r$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Com isso, $|x| = \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| \leq r$. Portanto,

$$x \in \overline{B} \Leftrightarrow |x| \leq r, \text{ ou seja, } \overline{B} = B[0, r].$$

Exemplo 3.18. Dado o intervalo aberto $X = (a, b)$, temos que $\overline{X} \not\subset X$, tendo em vista que os pontos a e b são aderentes ao intervalo aberto (a, b) , pois $a = \lim \left(a + \frac{1}{n}\right)$ e $b = \lim \left(b - \frac{1}{n}\right)$, ou seja, a e b são limites de alguma sequência de pontos do intervalo aberto (a, b) . Com isso $a, b \in \overline{X}$, enquanto que $a, b \notin X$, o que significa que $\overline{X} = [a, b] \neq (a, b) = X$.

Teorema 3.4. Um ponto a é aderente ao conjunto X se, e somente se, toda vizinhança de a contém algum ponto de X .

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Suponha que a é aderente a $X \subset \mathbb{R}^n$, então $a = \lim x_n$, onde $x_n \in X$ é uma sequência. Seja V uma vizinhança de a em X , então existe $\varepsilon > 0$ tal

que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset V$. Para esse mesmo $\varepsilon > 0$, como $a = \lim x_n$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_0$, então

$$\begin{aligned} |x_n - a| < \varepsilon &\Leftrightarrow (x_n - a, x_n + a) < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset V. \end{aligned}$$

Logo, em particular, para $n_0 + 1$, temos que $x_{n_0+1} \in V$. Com isso, temos um ponto em V .

($\Leftarrow$) Suponha que toda vizinhança V de a contém ponto de X . Como para cada $n \in \mathbb{N}$, $\left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right) \subset X$ é uma vizinhança de a , segue que, podemos encontrar pontos $x_n \in X$ tais que $x_n \in \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Assim, obtemos uma sequência $(x_n) \subset X$ formada por tais números e, ainda, como $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ então $\lim x_n = a$. Portanto a é aderente a X . ■

Proposição 3.5. Dado $F \subset \mathbb{R}^n$, temos que $\overline{F} = F$ se, e somente se, seu complementar $A = \mathbb{R}^n - F$ é aberto. Em outras palavras um conjunto é fechado se, e somente se, contém todos os seus pontos aderentes.

Demonstração: Seja $a \in (\mathbb{R}^n - F)$, então $a \notin F$, ou seja, a não é aderente a F . Assim, para todo $r > 0$ temos a vizinhança $V \supset (a - r, a + r)$, a qual não possui pontos de F , ou seja, de acordo com o Teorema 3.4, $V \subset (\mathbb{R}^n - F)$. Com isso, $a \in (\mathbb{R}^n - F) = \text{int}(A)$ e portanto, A é aberto. Analogamente, mostraremos que $\overline{F} \subset F$. Seja $a \in F$ pelo Teorema 3.4, toda vizinhança de a contém pontos de F , com isso $a \notin \text{int}A$ e assim, $a \notin A$, já que A é aberto, então $a \in F$ e portanto F é fechado, como queríamos demonstrar. ■

Teorema 3.6.

a) Se F_1 e F_2 são fechados, então $F_1 \cup F_2$ é fechado.

b) Se $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família qualquer de conjuntos fechados, então a intersecção $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ é um conjunto fechado.

Demonstração:

a) Note que os conjuntos $A_1 = (\mathbb{R}^n - F_1)$ e $A_2 = (\mathbb{R}^n - F_2)$ complementares dos conjuntos F_1 e F_2 são abertos, de acordo com a Proposição 3.5. Com isso, pelo Teorema 3.3 (a) $A_1 \cap A_2 = \mathbb{R}^n - (F_1 \cup F_2)$ é um conjunto aberto e, portanto, pelo Teorema 3.6 $(F_1 \cup F_2)$ é fechado. ■

b) Da Proposição 3.5 temos que, para cada $\lambda \in L$, $A_\lambda = \mathbb{R}^n - F_\lambda$ é aberto. Do Teorema 3.3 segue-se que: $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é aberto. Por outro lado,

$$A = \mathbb{R}^n - \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda \Rightarrow A = \mathbb{R}^n - F$$

Portanto, segue que F é um conjunto fechado. ■

Definição 3.12. Dizemos que $a \in \mathbb{R}^n$ é ponto de acumulação do conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ quando toda bola de centro a contém algum ponto de X diferente de a , ou seja, quando $a \in \overline{X - \{a\}}$. Denotamos por X' o conjunto dos pontos de acumulação de X em M .

Exemplo 3.19. Em $\mathbb{R}$, tome $X = \mathbb{Q}, Y = \mathbb{Z}, U = [0, 1], V = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$, $W = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n; n = 1, 2, \dots\right\}$, então $X' = \mathbb{R}, Y' = \emptyset, U' = U, V' = 0$ e $W = e$. Assim, $X' \supset X, Y' \subset Y, U' = U, V' \subset V$ e $W' \not\subset W \not\subset W'$.

Definição 3.13. Se $a \in X$ não é ponto de acumulação de X , dizemos que a é um ponto isolado de X . Isto significa que existe $r > 0$ tal que a é o único ponto de X no intervalo $(a - r, a + r)$. Quando todos os pontos do conjunto X são isolados, X chamamos de um conjunto discreto.

Exemplo 3.20. Se o conjunto X é finito, então $X' = \emptyset$. De fato, suponhamos por absurdo que $X' \neq \emptyset$. Assim, existe $x_j \in X'$ se, e somente se, para todo $r > 0, B(x_j, r) \cap (X - \{x_j\}) \neq \emptyset$. Como X é finito, podemos escrever $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ com $n \in \mathbb{N}$. Agora definimos $r_j = \min\{|x - x_i|; x_i \in X - \{x_j\}\}$. Dessa forma, observamos que $B(x_j, r_j) \cap (X - \{x_j\}) = \emptyset$, o que é um absurdo.

Exemplo 3.21. O conjunto $\mathbb{Z}$ é infinito, mas todos os pontos de $\mathbb{Z}$ são isolados. De fato, dado qualquer $a \in \mathbb{Z}$ e $r = \frac{1}{2}$, segue que $(a - r, a + r) \cap \mathbb{Z} = \{a\}$. Logo, a é ponto isolado.

Exemplo 3.22. $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$. Basta observar que todo intervalo aberto em $\mathbb{R}$ contém racionais e irracionais e, usar a Definição 3.12.

Exemplo 3.23. Se $X = (a, b)$ então $X' = [a, b]$. Primeiramente perceba que todo ponto $x \in X = (a, b)$ é ponto de acumulação de X , ou seja, $x \in X'$, pois, para todo $\varepsilon > 0, (X - \varepsilon, X + \varepsilon) \cap ((a, b), \{x\}) \neq \emptyset$. Assim, basta provar que $a \in X'$ e $b \in X'$.

i) $a \in X'$. De fato, seja $(x_n) = \left(a + \frac{1}{n}\right)$ uma sequência de pontos em (a, b) , onde n é um número natural. Logo, $\lim x_n = \lim \left(a + \frac{1}{n}\right) = \lim a + \lim \frac{1}{n} = a + 0 = a$.
Portanto $a \in X'$

- ii) $b \in X'$. De fato, seja $(y_n) = \left(b - \frac{1}{n}\right)$, analogamente, temos $\lim y_n = b$. Com isso, $b \in X'$.

Assim, concluímos que $X' = [a, b]$.

Exemplo 3.24. Se $X = \left\{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ então, $X' = \{0\}$, ou seja, 0 é o único ponto de acumulação de X . De fato, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe um número natural n tal que $n > \frac{1}{\varepsilon} > 0$ se, e somente se, $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$. Assim, $\frac{1}{n} \in (0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon) \cap X$, então $0 \in X'$. Podemos observar que todo ponto $\frac{1}{n}$ de X é ponto isolado, logo não é ponto de acumulação. De fato, se $x = \frac{1}{n} \in X$, então, o ponto mais próximo de $\frac{1}{n}$ é $\frac{1}{n+1}$ e a distância entre esses pontos é $r = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right| = \left|\frac{n+1-n}{n(n+1)}\right| = \left|\frac{1}{n(n+1)}\right|$. Como $n(n+1) > 0$, segue que, $r = \frac{1}{n(n+1)} > 0$. Logo, $(x - r, x + r) \cap X = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) \cap X = \left\{\frac{1}{n}\right\} = x$ e, portanto, $x = \frac{1}{n}$ é ponto isolado de X .

Teorema 3.7. *Sejam a um ponto e X um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- 1) a é um ponto de acumulação de X ;
- 2) a é limite de uma sequência de pontos $x_k \in X - \{a\}$;
- 3) Todo bola de centro a contém uma infinidade de pontos de X .

Demonstração: Supondo (1) verdadeira, então a é aderente ao conjunto $X - \{a\}$. Portanto existe uma sequência de pontos $x_k \in X - \{a\}$, tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$, o que prova (2). Por outro lado, supondo (2) verdadeira, então, mostraremos que, para qualquer $n_0 \in \mathbb{N}$, o conjunto $\{x_n, n > n_0\}$ é infinito, pois se fosse finito, existiria algum termo x_{n_1} que se repetiria infinitas vezes. Com isso, poderíamos tomar a sequência constante igual a x_{n_1} que convergiria para x_{n_1} . Como a sequência é formada por elementos em $X - \{a\}$, temos que $x_{n_1} \neq a$. Essa contradição mostra que o conjunto é $\{x_n, n > n_0\}$ é infinito. Portanto (2) $\implies$ (3). Supondo que (3) seja verdadeira, para cada $k \in \mathbb{N}$, tomemos $x_k \in B\left(a, \frac{1}{k}\right) \cap X$ com $x_k \neq a$ (isto é possível, pois $B\left(a, \frac{1}{k}\right)$ contém uma infinidade de pontos de X). Desta forma, temos que $x_k \in X - \{a\}$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$. Portanto a é aderente a $X - \{a\}$, ou seja, $a \in X'$. Assim, concluímos que (3) $\implies$ (1). Com isso, concluímos que (1) $\implies$ (2) $\implies$ (3) $\implies$ (1). ■

O próximo teorema é conhecido como Teorema de Bolzano-Weierstrass.

Teorema 3.8. *Toda sequência limitada em $\mathbb{R}^n$ possui uma subsequência convergente.*

Demonstração: Seja x_k uma sequência limitada em $\mathbb{R}^n$. Dessa forma, temos que x_{k_1} é uma sequência limitada em $\mathbb{R}$. Portanto, pelo teorema de Bolzano Weirstrass em $\mathbb{R}$, existe $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$, infinito, tal que $\lim_{k \in \mathbb{N}_1} x_{k_1} = a_1$. Assim, a sequência $x_{k_2} \in \mathbb{N}_2$ é limitada em $\mathbb{R}$. Portanto, existe $\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1$ tal que, $\lim_{k \in \mathbb{N}_2} x_{k_2} = a_2$. Com isso, repetindo esse processo, temos n conjuntos infinitos, ou seja, $\mathbb{N} \supset \mathbb{N}_1 \supset \mathbb{N}_2 \supset \cdots \mathbb{N}_n$ com n números reais $a_1, \dots, a_n$ e para todo $i = 1, 2, \dots, n$ é válido $\lim_{k \in \mathbb{N}_1} x_k^i = a_i$. Portanto, tomando $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ temos que $\lim_{k \in \mathbb{N}_n} x_k^n = a$.

Definição 3.14. Uma sequência (x_n) em um espaço métrico M é chamada de sequência de Cauchy se para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$m, n \geq N \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon \quad (3.1)$$

Observe que numa sequência de Cauchy, a medida que a posição dos termos crescem, os termos se aproximam cada vez mais.

Exemplo 3.25. A sequência (x_n) em $\mathbb{R}$ dada por $x_n = \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ é uma sequência de Cauchy. Observe que, se $\varepsilon > 0$, pela propriedade Arquimediana, podemos encontrar n_0 tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Então se $m, n \geq n_0$, podemos supor que $n \geq m$, assim;

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_0},$$

com isso, temos;

$$\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \leq \left| \frac{1}{n_0} - 0 \right| = \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Portanto, conclui-se que x_n é uma sequência de Cauchy.

Teorema 3.9. Uma sequência em $\mathbb{R}^n$ converge, se e somente se, é uma sequência de Cauchy.

Esse teorema é conhecido como Teorema de Cauchy.

Demonstração: Seja (x_k) uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^n$. Sendo limitada, ela possui uma subsequência convergente $(x_r)_{r \in \mathbb{N}'}$. Seja $a = \lim_{r \in \mathbb{N}'} x_r$. Temos $\lim_{r \in \mathbb{N}'} |x_r - a| = 0$ e $\lim_{k \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{N}'} |x_k - x_r| = 0$, ou seja $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$.

Reciprocamente, se (x_k) é convergente, com $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$, então, como $|x_k - x_r| \leq |x_k - a| + |x_r - a|$, concluímos que $\lim_{k, r \rightarrow \infty} |x_k - x_r| = 0$, ou seja, (x_k) é uma sequência de Cauchy. ■

Essas definições e os teoremas, aqui apresentados, serão inteiramente importantes para a compreensão do próximo capítulo.

Capítulo 4

Fractais Clássicos

Neste capítulo apresentamos alguns fractais obtidos por meio de processos recursivos geométricos e destacamos alguns matemáticos que contribuíram para o estudo destes objetos. Utilizamos o triângulo de Sierpinski, a ilha de Von Koch e o conjunto de Cantor para analisar o comportamento e a presença das características fractais existentes e também definidas no capítulo anterior, buscando estabelecer uma maior percepção no que diz respeito à continuidade, proporcionalidade e semelhança que determinam cada um desses elementos fractais. Neste capítulo nos baseamos em [1], [11], [12] e [17].

4.1 Curva de Peano

Giuseppe Peano (Figura 4.1) é considerado como fundador da lógica simbólica matemática.

Figura 4.1: Giuseppe Peano (1858 à 1932)



Fonte: SOmatematica¹ (2019, p. 1).

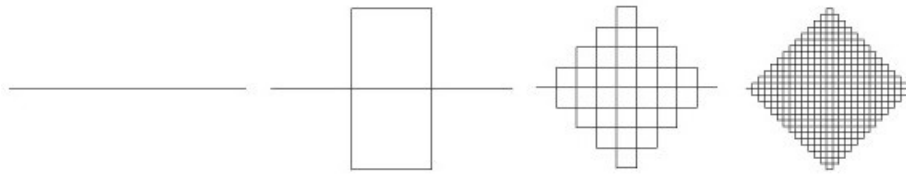
Peano introduziu os elementos básicos de cálculo geométrico e deu definições novas para o tamanho de um arco e para a área de uma superfície em forma de curva, se tornando o criador de um dos trabalhos que apresentam, em cada um dos seus detalhes, a autossemelhança, reconhecido atualmente como um fractal, criado a partir

de um processo recursivo, proposto para cobrir uma superfície plana quadrada, o qual destacamos a seguir, conhecido como Curva de Peano (Figura 4.2) na ocasião, podemos observar o seu processo de construção.

- Na iteração 0, consideramos um segmento de reta;
- No próximo passo, dividimos esse segmento em três partes iguais e sobre o traço médio, construa um retângulo bissectado pelo traço, formando dois quadrados semelhantes e com lado igual à terça parte do traço da origem;
- Na iteração n , consideramos os novos segmentos de reta formados na iteração $n - 1$ e repetimos os passos utilizados nessa mesma iteração.

A curva de Peano é obtida através da repetição infinita dessas iterações, formando a figura fractal que pode ser observada na Figura 4.2.

Figura 4.2: Curva de Peano até a iteração 3



Fonte: Wolfram Math World² (2019, p. 1).

Podemos observar que, a cada iteração, os segmentos formados na curva de Peano tem a sua medida reduzida a $\frac{1}{3}$ da medida do segmento anterior, enquanto que a quantidade de segmentos aumenta em nove vezes a quantidade da curva anterior. Com isso, seja $\varepsilon = \frac{1}{3}$ e $N(\varepsilon) = 9$, respectivamente o tamanho do segmento e a quantidade de segmentos formados a cada iteração. Usando o cálculo da dimensão fractal dada na Equação 2.3, temos que, a dimensão da curva de cantor é igual a

$$d \approx \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log 9}{\log \frac{1}{\frac{1}{3}}} = \frac{\log 9}{\log 3} \approx \frac{0,954}{0,477} \approx 2.$$

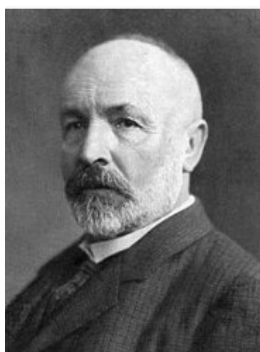
Com isso, podemos concluir que a dimensão fractal da curva de Peano é $d \approx 2$.

Dando continuidade à nossa apresentação de alguns fractais caracterizados pela autossimilaridade exata, podemos observar a seguir as construções, bem como o cálculo da dimensão fractal de cada um deles, além de apresentar algumas proposições importantes relacionadas ao Conjunto de Cantor, Curva e ilha de Koch e, ainda, o triângulo de Sierpinski.

4.2 Conjunto de Cantor

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (Figura 4.3) nasceu em Saint Petesburg, Rússia.

Figura 4.3: Georg Cantor (1845 à 1918)



Fonte: ThatsMaths.com³ (2019, p. 1).

Cantor criou a definição de números irracionais como sequências convergentes de números racionais. Provou a enumerabilidade dos números racionais, mostrando a correspondência um por um com os números naturais.

Após a existência dos números transcendentais (um número irracional que não é uma raiz de qualquer equação polinomial com coeficientes inteiros) ser estabelecida, Cantor mostrou pouco mais tarde que, de certa forma, quase todos os números são transcendentais.

Cantor é reconhecido, também, como criador de um dos “monstros” matemáticos, chamado de conjunto de Cantor, o qual foi demonstrado, por ele mesmo, como um conjunto não-enumerável e um pouco mais tarde, considerado um fractal.

O conjunto de Cantor (Figura 4.4) é um subconjunto do intervalo fechado $[0, 1]$ definido como limite de um processo de iterações, obtido pelo complemento de uma reunião de intervalos abertos.

Para construirmos esse conjunto seguiremos os passos:

- Na iteração 0, consideramos o intervalo fechado $[0, 1]$ da reta real;
- Na iteração 1, dividimos o intervalo em três partes iguais e retiramos a terceira parte central, chamada de terço médio;
- Na iteração 2, dividimos em três partes iguais cada uma das partes criadas na iteração anterior, em seguida, retiramos a terceira parte central de cada uma delas;
- Na iteração n , Repetimos o procedimento adotado na iteração $n - 1$ e retiramos a terceira parte central de cada um dos intervalos criados pela iteração $n - 1$.

Observação 4.1. Designamos por C_n o conjunto dos pontos restantes de I_{n-1} .

Figura 4.4: Conjunto de Cantor até a iteração 3



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Podemos observar que, se considerarmos o intervalo inicial $I_0 = [0, 1]$, temos $2^0 = 1$ intervalo cujo comprimento é igual a $\frac{1}{3^0} = 1$.

Na iteração 1, com a terça parte central retirada, temos $C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, ou seja, $2^1 = 2$ intervalos cujo comprimento de cada um deles mede $\frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$.

Na iteração 2, com a terça parte central, de cada intervalo obtido na iteração anterior, retirada, temos $C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$, ou seja, $2^2 = 4$ intervalos cujo comprimento de cada um deles mede $\frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.

Na iteração 3, com a terça parte central, de cada intervalo obtido na iteração anterior, retirada, temos, $2^3 = 8$ intervalos cujo comprimento de cada um deles mede $\frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$.

Prosseguindo dessa forma iremos obter uma sequência de conjuntos $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n, \dots$ de tal modo que $I \supset C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \dots \supset C_n \supset \dots$, onde C_n é constituído de pontos do conjunto C_{n-1} excluídos os terços médios abertos.

Dessa forma, podemos observar que cada um dos C_n equivale a 2^n intervalos fechados e disjuntos dois a dois e, portanto, o conjunto de Cantor é o que resta após aplicarmos esse procedimento para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja,

Definição 4.1. O conjunto de Cantor C é a interseção dos conjuntos C_n , obtidos através da remoção sucessiva dos terços médios abertos do intervalo $I = [0, 1]$, ou seja,

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Note que o conjunto de Cantor não é um conjunto vazio, ou seja $C \neq \emptyset$, pois os pontos $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ e 1 permanecem em todos os conjuntos C_n e portanto estão presentes no conjunto de Cantor.

Uma importante caracterização para o conjunto de Cantor, segue através do teorema,

Teorema 4.1. *Os elementos do conjunto de Cantor possui expansão ternária (base 3) usando os dígitos 0 e 2, isto é, $C = \left\{ x \in [0, 1]; x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i_n}{3^n}, \text{ para } i_n = 0 \text{ ou } i_n = 2 \right\}$.*

Demonstração: Na primeira iteração da construção do conjunto de Cantor, note que, quando retiramos o intervalo aberto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, excluimos os números $x \in [0, 1]$ cuja representação ternária $x = (0, x_1 x_2 x_3 \dots)_3$, tem $x_1 = 1$, exceto $\frac{1}{3} = (0, 1)_3$ que se mantém. Na segunda iteração do conjunto de cantor, são retirados os intervalos abertos $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ e $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$, isto é, aqueles cuja representação ternária são da forma $x = (0, 01x_3 x_4 x_5 \dots)_3$ e $x = (0, 21x_3 x_4 x_5 \dots)_3$, exceto $\frac{1}{9} = (0, 01)_3$ e $\frac{7}{9} = (0, 21)_3$ os quais se mantêm.

Na terceira iteração, são retirados os intervalos abertos $\left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right)$, $\left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right)$, $\left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right)$, e $\left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right)$, isto é, aqueles cuja representação ternária são da forma $x = (0, 001x_4 x_5 \dots)_3$ e $x = (0, 021x_4 x_5 \dots)_3$, $x = (0, 201x_4 x_5 \dots)_3$ e $x = (0, 221x_4 x_5 \dots)_3$ exceto os números $\frac{1}{27} = (0, 001)_3$, $\frac{7}{27} = (0, 021)_3$, $\frac{19}{27} = (0, 201)_3$ e $\frac{25}{27} = (0, 221)_3$ os quais se mantêm.

Observando que esse processo continua de forma indutiva, de forma geral, garantimos que os elementos do conjunto de Cantor são os números do intervalo $I = [0, 1]$ cuja representação ternária $x = (0, x_1 x_2 x_3 \dots)_3$ só contém os algarismos 0 e 2, excluindo aqueles que possuem um único algarismo igual a 1 como algarismo significativo final, como é o caso do número $\frac{25}{27} = (0, 221)_3$. Por outro lado, se observarmos que, na base ternária $(0, 221)_3 = (0, 2222 \dots)_3$ poderemos substituir o algarismo final 1 pela sequência $0, 2222 \dots$. Portanto, usando esta convenção, podemos afirmar que os elementos do conjunto de Cantor são os números do intervalo $I = [0, 1]$ cuja representação na base ternária, só contém os algarismos 0 e 2. ■

Com a finalidade de conhecermos um pouco mais dos números na base ternária, apresentamos a seguir, alguns exemplos,

Exemplo 4.1. O ponto $\frac{1}{3}$ tem expansão ternária igual a 0, 1, isto é, $\frac{1}{3} = 0, 1$.

Note que, podemos escrever

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3^1} + \frac{0}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \dots + \frac{0}{3^n} + \dots,$$

Portanto, $\frac{1}{3} = (0, 1)_3$.

Exemplo 4.2. $\frac{17}{27} = (0, 122)_3$

Note que,

$$\frac{17}{27} = \frac{1}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{0}{3^4} + \frac{0}{3^5} + \cdots,$$

O que nos faz inferir que $\frac{17}{27} = (0, 122)_3$.

Apresentamos, algumas propriedades relacionadas ao conjunto de Cantor. Inicialmente, vamos mostrar que o conjunto de Cantor C tem comprimento igual a zero. Para isso, consideramos a seguinte proposição,

Proposição 4.2. O conjunto de Cantor possui medida nula.

Demonstração: De fato, na n -ésima iteração, podemos observar que o conjunto de Cantor está contido em 2^n intervalos disjuntos, cujo comprimento de cada um deles é $\frac{1}{3^n}$. Assim, o comprimento de I_n é dado por, $2^n \frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Portanto, quando $n \rightarrow \infty$, o comprimento de $I_n \rightarrow 0$ e com isso, a medida do conjunto de Cantor é zero. ■

Proposição 4.3. O conjunto de Cantor possui interior vazio, isto é $\text{int}(C) = \emptyset$.

Demonstração: Inicialmente, suponhamos, por absurdo, que o interior do conjunto de Cantor seja não-vazio, ou seja, $\exists a \in C$ e $\epsilon > 0$ tal que $(a - \epsilon, a + \epsilon) \subset C$. Assim teríamos que o comprimento de C seria limitado inferiormente por $2\epsilon > 0$, o que é um absurdo, já que contradiz o que foi mostrado anteriormente. Com isso, $\text{int}(C) = \emptyset$. ■

Observe que, até o momento, conseguimos demonstrar que o conjunto de Cantor tem comprimento igual a zero e que o seu interior é vazio. Com essas demonstrações, o que nos causa a impressão é de que o conjunto de Cantor é enumerável, mas, provaremos, por absurdo que o conjunto de Cantor é não-enumerável de acordo com a afirmação de [11]. Para isso, vamos levar em consideração, a seguinte proposição,

Proposição 4.4. O conjunto de Cantor é um conjunto não-enumerável.

Demonstração: Vamos supor, por absurdo, que C é um conjunto enumerável. Dessa forma os elementos de C podem ser listados. Assim, $C = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$. Escolhendo o intervalo $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ ou $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ que não contém a_1 , denotamos esse intervalo por $[c_1, d_1]$. Na segunda iteração de C retiramos o terço médio aberto do intervalo $[c_1, d_1]$ o que resulta em $[b_1, b_2] \cup [b_3, b_4]$. Escolhendo o intervalo $[b_1, b_2]$ ou $[b_3, b_4]$ que não contém a_2 , denotamos por $[c_2, d_2]$. Utilizando o processo indutivo, continuamos com esse processo, com isso os intervalos $[c_i, d_i]$ são fechados, não-vazios e encaixados.

Usando o teorema dos intervalos encaixados, podemos afirmar que, $\exists c \in \mathbb{R}$ tal que $c \in \bigcap_{i=1}^{\infty} [c_i, d_i]$. Além disso, temos que $c \in \mathbb{R}$ é único, já que se tivermos $c' \in \bigcap_{i=1}^{\infty} [c_i, d_i]$, então, $\forall \varepsilon > 0$, temos que, $|c - c'| \leq |d_i - c_i| = \frac{1}{3^i}$. O que podemos perceber que o resultado obtido é menor do que ε , tomando $i \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

Observe que $\forall k \in \mathbb{N}$ e $c \in C_k$, temos $[c_k, d_k] \subset C_k$. Assim, $c \in C$, já que $C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$. Podemos observar, também, que $c \neq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pois se $c = a_j$ para algum $j \in \mathbb{N}$, então $c \notin [c_j, d_j]$ conforme a seleção dos intervalos $[c_i, d_i]$ que fizemos. Dessa forma, temos uma contradição, já que $c \neq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $c \in C$.

Com isso, concluímos que o conjunto de Cantor é não-enumerável. ■

Prosseguindo o nosso propósito, analisamos uma outra proposição relacionada ao conjunto de Cantor.

Proposição 4.5. O conjunto de Cantor é um conjunto compacto.

Demonstração Precisamos demonstrar que C é um conjunto limitado e fechado. Ora, $I = [0, 1]$ é limitado. Como $C \subset I$ então, segue que C é limitado. Agora, indicando por $T_1, T_2, T_3, T_4, \dots, T_n, \dots$ os intervalos abertos retirados durante a construção do conjunto de Cantor. Segue do Teorema 3.3 que $\bigcup_{\lambda \in \mathbb{N}} T_\lambda$ é um conjunto aberto. Com isso $\left(\bigcup_{\lambda \in \mathbb{N}} T_\lambda\right)^k$ complementar do conjunto $\bigcup_{\lambda \in \mathbb{N}} T_\lambda$, tal que $\left(\bigcup_{\lambda \in \mathbb{N}} T_\lambda\right)^k = \mathbb{R} - \bigcup_{\lambda \in \mathbb{N}} T_\lambda$ é um conjunto fechado, conforme a Proposição 3.5. Por outro lado, como $[0, 1]$ é fechado e $C = \left(\bigcup_{\lambda \in \mathbb{N}} T_\lambda\right)^k \cap [0, 1]$, então C é fechado. Logo, podemos concluir que C é fechado e limitado e, com isso, C é um conjunto compacto. ■

Por fim, mostraremos agora que o conjunto de Cantor não contém pontos isolados, ou seja, todos os seus pontos são pontos de acumulação, conforme a proposição,

Proposição 4.6. O conjunto de Cantor não possui pontos isolados (todos os seus pontos, são pontos de acumulação).

Demonstração Considere c a extremidade de algum intervalo do conjunto de Cantor, tal que $c \in C$, por exemplo (c, b) que foi retirado do intervalo $[0, 1]$ em alguma etapa na construção de tal conjunto. Note que, assim que (c, b) foi retirado, ainda restou um intervalo $[a, c]$. Seguindo a construção de C , note, também, que ainda restarão terços finais de intervalo, da forma $[a_n, c]$, com isso, perceba que o comprimento $c - a_n$ tende a zero, ou seja $a_n \rightarrow c$. Assim, temos que c é um ponto de acumulação de C , isto é, c

não é ponto isolado, conforme definição 3.12. Por outro lado, suponhamos que $c \in C$ não seja extremo do intervalo retirado de $[0, 1]$ para construir o conjunto de Cantor e mostremos que c não é ponto isolado em C . Dessa forma, note que para cada $n \in \mathbb{N}$, c pertence ao interior de um intervalo $[x_n, y_n]$ que restou depois da n -ésima iteração da construção do conjunto de Cantor. Portanto, temos, $x_n < c < y_n$, com $x_n, y_n \in C$ e $y_n - x_n = \frac{1}{3^n}$. Assim, $c = \lim x_n = \lim y_n$ é ponto de acumulação de C e portanto C não possui pontos isolados. ■

Podemos observar, ainda, que a cada iteração na construção do conjunto de Cantor, a medida de cada um dos segmentos ε diminui em $\frac{1}{3}$ o valor da medida do segmento anterior, enquanto que a quantidade de intervalos formados $N(\varepsilon)$ é duplicado em relação a quantidade de intervalos anteriores. Dessa forma, temos $\varepsilon = \frac{1}{3}$ e $N(\varepsilon) = 2$. Portanto usando a Equação 2.3, temos;

$$d \approx \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log 2}{\log \frac{1}{\frac{1}{3}}} = \frac{\log 2}{\log 3} \approx \frac{0,301}{0,477} \approx 0,631.$$

Assim, concluímos que a dimensão fractal do conjunto de Cantor é não-inteira e o seu valor é $d \approx 0,631$.

4.3 A curva e a ilha de Von Koch

Outro grande matemático que contribuiu para o estudo dos fractais foi Niels Fabian Helge Von Koch (Figura 4.5), nascido em 25 de janeiro de 1870, em Estocolmo, Suécia. Von Koch desenvolveu trabalhos nas áreas de Teoria dos números e Equações diferenciais. Seus estudos tem importante aplicação na mecânica quântica e são bastante utilizados na Álgebra Linear.

Figura 4.5: Von Koch (1870 à 1924)



Fonte: Emily Fung⁴

Von Koch é reconhecido por um dos seus preciosos trabalhos, desenvolvido em 1906, conhecido como Curva de Koch, que quando aplicada aos lados de um triângulo equilátero, obtém-se o floco de neve de von Koch (também chamada de Ilha de von Koch) que é obtida como o limite da construção desse processo recursivo.

Usando o cálculo diferencial, considera-se que essa curva é contínua em toda a sua extensão, mas em nenhum ponto ela é diferenciável. Anos mais tarde, Mandelbrot propôs uma importante aplicação utilizando a curva de Koch, para o dimensionamento fractal de linhas costeiras.

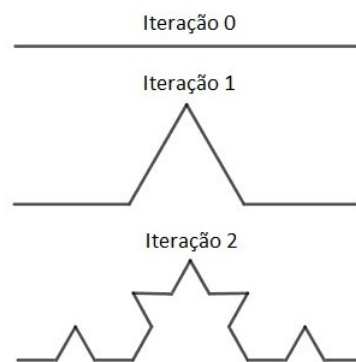
O processo de construção da curva de Koch se dá através das seguintes iterações:

- Na iteração 0, traçamos um segmento de reta de medida l ;
- No próximo passo, dividimos o segmento em três partes iguais, construímos um triângulo equilátero cuja base coincida com a terça parte central do segmento anterior e depois retiramos a base desse triângulo que é, também, a terça parte central do segmento inicial;
- Na iteração n , repetimos o procedimento das iterações anteriores para todos os segmentos formados.

Observação 4.2. Os triângulos inseridos em cada uma das terças partes centrais dos segmentos devem ser colocados sempre na mesma região.

Para uma maior compreensão da formação de cada segmento da curva de Koch, apresentamos a Figura 4.6.

Figura 4.6: Construção da curva de Koch até a iteração 2



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019

Para analisarmos algumas proposições importantes dessa figura, é necessário compreender cada passo das iterações. Portanto, inicialmente, tomemos l_0 como sendo a medida do segmento inicial.

Note que, na iteração 1, o segmento l_0 é dividido em três partes iguais, cuja medida desses segmentos é igual a $\frac{1}{3}l_0$. Em seguida, após inserido o triângulo equilátero na terça parte central e retirada a sua base, observamos que restarão quatro segmentos cuja medida dos seus comprimentos são iguais a $\frac{1}{3}l_0$. Repetindo esse processo recursivo, na iteração n dividimos cada um dos segmentos formados na iteração $n - 1$ em três partes iguais. Após adicionarmos os triângulos equiláteros em cada uma das partes centrais dos segmentos formados retira-se as suas respectivas bases, formando assim uma curva, conhecida como a curva de Koch.

Observação 4.3. Designamos por l_n a curva formada pelo conjunto de segmentos em cada uma das iterações.

Inicialmente seja $P_0 = l_0$, o comprimento do segmento inicial.

Podemos observar que a medida do segmento inicial l_0 após sofrer a iteração 1, será composta por quatro segmentos de medida igual a $\frac{1}{3}l_0$.

Repetindo a iteração, cada segmento gera quatro novos segmentos de medida igual a $\frac{1}{3}$ do segmento anterior. Assim, denotemos por l_n e k_n , respectivamente, o comprimento e a quantidade de segmentos formados após n iterações.

Portanto;

$$K_n = 4K_{n-1} \Rightarrow K_n = 4^n.$$

E ainda;

$$l_n = \frac{1}{3}l_{n-1} \Rightarrow l_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n l_0$$

Podemos observar ainda que, o comprimento da curva pode ser dado pelo produto da quantidade de segmentos K_n pelo comprimento de um segmento l_n , ou seja:

$$P_n = K_n l_n \Rightarrow P_n = 4^n \left(\frac{1}{3}\right)^n l_0 \Rightarrow P_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n l_0$$

Assim, conhecidas as etapas da construção dessa curva, apresentamos a seguir, algumas das suas propriedades.

Proposição 4.7. O número de segmentos da curva de Koch tende ao infinito.

Demonstração: Como definida anteriormente, a quantidade de segmentos da curva de Koch é dada por $K = 4^n$. Aplicando o limite em ambos os lados da igualdade temos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n.$$

Portanto, quando $n \rightarrow \infty$, então $\lim K \rightarrow \infty$. ■

Proposição 4.8. O comprimento de cada segmento da curva de Koch tende para zero.

Demonstração: Note que o comprimento de cada segmento da curva de Koch é dado por $l = \left(\frac{1}{3}\right)^n l_0 \Rightarrow l = \frac{l_0}{3^n}$. Aplicando o limite em ambos os lados da igualdade segue-se que:

$$\lim l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n l_0.$$

Assim, se $n \rightarrow \infty$, então, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n l_0$ tende a zero. Portanto; $\lim L \rightarrow 0$ ■

Proposição 4.9. O comprimento total da curva de Koch tende ao infinito.

Demonstração: Note que o comprimento total da curva de Koch é dado por $P = \left(\frac{4}{3}\right)^n l_0$.

Aplicando o limite em ambos os lados da igualdade segue-se que:

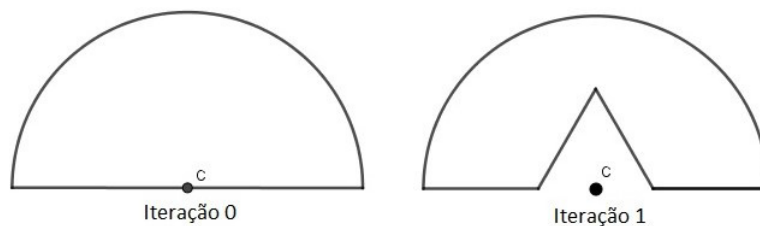
$$\lim P = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n l_0.$$

Assim, se $n \rightarrow \infty$, então, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n l_0$ tende ao ∞ , portanto; $\lim P \rightarrow \infty$ ■

Proposição 4.10. A curva de Koch é limitada.

Demonstração: Dado um segmento qualquer de medida l , uma iteração nesse segmento pertencerá à região semicircular de centro C que coincide com o centro do segmento inicial, conforme podemos observar na Figura 4.7.

Figura 4.7: Região semicircular aplicada à curva de Koch

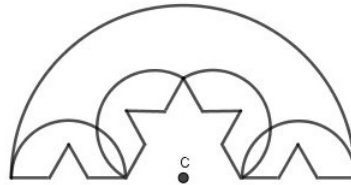


Fonte: Elaborada pelo autor, 2019

Podemos observar que na primeira iteração a curva atinge um ponto mais alto que coincide com o vértice do triângulo que foi utilizado na iteração para construí-la. Tal altura equivale a $\frac{\sqrt{3}}{6}l$. Como o raio do semicírculo é $\frac{l}{2}$ e $\frac{l}{2} > \frac{\sqrt{3}}{6}l$ segue que a curva se mantém na região delimitada pelo semicírculo e com isso, está limitada por essa região, nessa iteração.

Procedendo de forma análoga, a cada uma das iterações, outras curvas são formadas e estas estarão contidas em um semicírculo cujo raio é maior do que a altura do triângulo equilátero utilizado para gerar a curva da iteração. Quanto a isso, observemos a Figura 4.8.

Figura 4.8: Regiões semicirculares aplicada à curva de Koch



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019

Mas, como cada um desses semicírculos estão contidos no semicírculo da iteração anterior, em cada nova iteração, podemos concluir que toda a curva estará limitada na região semicircular inicial e, portanto, a curva de Koch é limitada. ■.

Podemos observar ainda que, a cada iteração para construir a curva de Koch, a quantidade de segmentos formados correspondem ao quádruplo do segmento anterior, enquanto que a medida de cada segmento diminui, correspondendo a $\frac{1}{3}$ da anterior em cada uma das iterações formadas. Com isso, façamos $N(\varepsilon) = 4$ e $\varepsilon = \frac{1}{3}$ e utilizando a Equação 2.3, segue que, a dimensão da curva de Koch é dada por:

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 4}{\log \frac{1}{\frac{1}{3}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 4}{\log 3} \approx \frac{0,602}{0,477} \approx 1,262.$$

Portanto concluímos que a dimensão fractal da curva de Koch é não-inteira e o seu valor é $d \approx 1,262$.

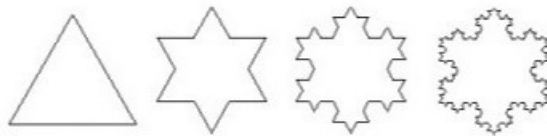
Um outro fractal clássico formado a partir de um triângulo equilátero que em cada um dos seus lados é aplicada as iterações da curva de Koch, é chamado de Ilha de Von Koch. O processo de construção desse fractal pode ser observado a seguir.

- Na iteração 0, construímos um triângulo equilátero de lado l ;

- Na iteração 1, dividimos cada um dos lados do triângulo anterior em três partes iguais e retiramos a parte central de cada um desses lados, substituindo por um triângulo equilátero de lado medindo a terça parte do lado anterior, extraindo a sua base;
- Na iteração 2, dividimos todas as partes formadas pela iteração anterior em três partes iguais e substituímos a parte central de cada uma delas por um triângulo equilátero de lado medindo a terça parte do lado anterior e extraímos a base de cada um desses triângulos;
- Na iteração n , dividimos todas as partes formadas pela iteração $n - 1$ em três partes iguais e substituímos a parte central de cada uma delas por um triângulo equilátero de lado medindo a terça parte do lado anterior e extraímos a base de cada um desses triângulos.

Nesse trabalho recursivo, obtemos como resultado uma curva contínua em todo os segmentos marcados por cada uma das iterações, mas em nenhuma parte diferenciável. A curva obtida após várias iterações, se assemelha a um floco de neve e, por esse motivo, a curva é chamada de Floco de Von Koch, ou Ilha de Von Koch. Observe a figura 4.9

Figura 4.9: Ilha de Von Koch até a terceira iteração



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Podemos observar que a quantidade de lados obtidos a cada iteração é quatro vezes maior que a quantidade anterior e, por outro lado, o comprimento dos lados de cada uma das figuras formadas é três vezes menor que o comprimento dos lados da figura anterior.

Para compreender com mais clareza essa afirmação, considere o comprimento do lado do triângulo equilátero inicial, sem perda de generalidade, igual a 1 unidade. Perceba que a quantidade de segmentos $N(\varepsilon)$ de cada uma das figuras formadas em cada iteração é dado por uma progressão geométrica de razão $q = 4$. Para maior clareza, podemos observar alguns dos valores relacionados a quantidade de segmentos formados e o comprimento de cada segmento ε , a cada iteração, através da Tabela:

Tabela 4.1: Quantidade e Comprimento dos lados da Ilha de Von Koch

Nível	Quantidade de segmentos $N(\varepsilon)$	Comprimento dos segmentos ε
0	$3 = 3 \cdot 1 = 3 \cdot 4^0$	$\varepsilon_0 = 1 = 3^0$
1	$12 = 3 \cdot 4 = 3 \cdot 4^1$	$\varepsilon_1 = \frac{1}{3} \varepsilon_0 = 3^{-1}$
2	$48 = 3 \cdot 16 = 3 \cdot 4^2$	$\varepsilon_2 = \frac{1}{3} \varepsilon_1 = 3^{-2}$
3	$192 = 3 \cdot 64 = 3 \cdot 4^3$	$\varepsilon_3 = \frac{1}{3} \varepsilon_2 = 3^{-3}$
4	$768 = 3 \cdot 256 = 3 \cdot 4^4$	$\varepsilon_4 = \frac{1}{3} \varepsilon_3 = 3^{-4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$3 \cdot 4^n$	$\varepsilon_n = 3^{-n}$

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Com isso, podemos observar pela recorrência formada que, a quantidade de Lados $N(\varepsilon)$ pode ser calculada a cada iteração por $N(\varepsilon) = 3 \cdot 4^n$ e, ainda, o comprimento de cada segmento formado corresponde a $\varepsilon_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Assim, podemos observar algumas proposições relacionadas à ilha de Von Koch.

Proposição 4.11. A quantidade de segmentos da ilha de Von Koch tende ao infinito, ou seja, $\lim_{n \rightarrow \infty} N(\varepsilon) = \infty$.

Demonstração Por definição, note que $N(\varepsilon) = 3 \cdot 4^n$. Aplicando o limite em ambos os lados, segue que;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N(\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot 4^n = \infty. \blacksquare$$

Proposição 4.12. O comprimento de cada segmento da ilha de Von Koch tende a zero, ou seja, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon = 0$.

Demonstração Por definição, note que $\varepsilon = 3^{-n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Aplicando o limite em ambos os lados, segue que;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0. \blacksquare$$

Proposição 4.13. O perímetro da ilha de Von Koch tende ao infinito.

Demonstração: Seja P_n o perímetro da ilha de Von Koch, definido por,

$$P_n = L_n C_n = (3 \cdot 4^n) 3^{-n} = 3 \left(\frac{4}{3} \right)^n.$$

Podemos observar que P_n é uma progressão geométrica, onde o primeiro termo $P_0 = 3$ é equivalente ao perímetro do triângulo inicial e, cuja razão $q = \frac{4}{3}$. Com isso, utilizando a expressão 1.4, temos;

$$S_n = \frac{3 \left(\left(\frac{4}{3} \right)^n - 1 \right)}{\frac{4}{3} - 1} = 3(4^n - 3)$$

Portanto, aplicando o limite, segue que, $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3(4^n - 3) = \infty$. ■

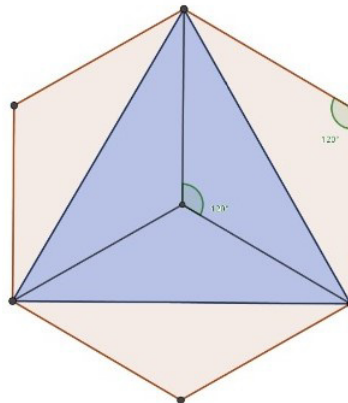
Apesar do perímetro da ilha de Von Koch tender ao infinito, como vimos na Proposição 4.13. Veremos que a área da ilha de Von Koch, é limitada. Comprovaremos esse fato, através de,

Proposição 4.14. A área da ilha de Von Koch é limitada.

Demonstração Para demonstrar que a área da ilha de Von Koch é limitada, procederemos com uma situação análoga com a utilizada na Proposição 4.10.

Inicialmente seja $A_0 = A$ a área do triângulo inicial e, na intenção de delimitar a área da ilha, circunscrevamos um hexágono com vértices em cada uma das pontas da figura na iteração 1. A Figura 4.10 ilustra a situação.

Figura 4.10: Hexágono circunscrito ao triângulo equilátero inicial

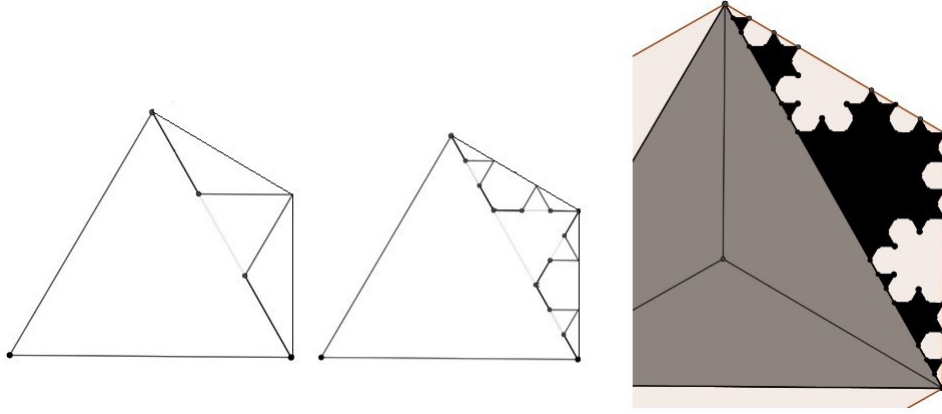


Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Com efeito, continuando o processo de construção da ilha de Koch, podemos observar que as figuras formadas a cada iteração continuarão inscritas no hexágono. Esse

fato pode ser observado através de uma ampliação, em um dos lados da ilha de Koch, através da Figura 4.11

Figura 4.11: Hexágono circunscrito ao triângulo equilátero inicial



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Vale salientar que o mesmo fato ocorre em todos os lados da ilha de Koch. Assim, prosseguindo com o nosso propósito, intuitivamente percebemos que, a área da ilha de Von Koch é menor do que a área do hexágono que equivale ao dobro da área do triângulo inicial, conforme nos mostra a figura 4.10 e portanto, a área da ilha de Von Koch estará compreendida entre A e $2A$.

Considerando o lado do triângulo equilátero inicial igual l , sem perda de generalidade, e ainda, a área de um triângulo equilátero $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{2}$ temos que, a área do outro triângulo formado de lado igual a $\frac{1}{3}$ do anterior, é dada por $A' = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{9}A$. De acordo com as iterações, percebemos que inicialmente, o número de lados da figura é $N(\varepsilon) = 3.4^0$ e sua área é igual a $A_0 = A$. Analisando cada uma das iterações e tomando esses valores iniciais, podemos perceber ainda que, na primeira iteração, temos,

$$N(\varepsilon_1) = 3.4^1$$

$$A_1 = A_0 + N(\varepsilon_0) \left(\frac{1}{9}\right) A \Rightarrow A_1 = A + 3 \left(\frac{1}{9}\right)^1 A$$

Continuando as iterações, na segunda iteração temos,

$$N(\varepsilon_2) = 3.4^2$$

$$A_2 = A_1 + N(\varepsilon_1) \left(\frac{1}{9}\right) \left(\frac{1}{9}A\right) = A_1 + N(\varepsilon_1) \left(\frac{1}{9}\right)^2 A$$

$$A_2 = A + 3 \left(\frac{1}{9}\right) A + 3.4 \left(\frac{1}{9}\right)^2 A = A + \frac{1}{3}A + \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{4}{9}\right) A$$

Na terceira iteração,

$$N(\varepsilon_3) = 3.4^3$$

$$A_3 = A_2 + N(\varepsilon_2) \left(\frac{1}{9}\right)^3 A = A + \frac{1}{3}A + \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{9}\right) A + 3.4^2 \left(\frac{1}{9}\right)^3 A$$

$$A_3 = A + \left(\frac{1}{3}\right) A + \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{4}{9}\right) A + \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{4}{9}\right)^2 A$$

Na quarta iteração, temos,

$$N(\varepsilon_4) = 3.4^4$$

$$A_4 = A_3 + N(\varepsilon_3) \left(\frac{1}{9}\right)^4 A = A + \left(\frac{1}{3}\right) A + \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{4}{9}\right) A + \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{4}{9}\right)^2 A + 3.4^3 \left(\frac{1}{9}\right)^4 A$$

$$A_4 = A + \left(\frac{1}{3}\right) A + \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{4}{9}\right) A + \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{4}{9}\right)^2 A + \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{4}{9}\right)^3 A$$

$$A_4 = A + \left(\frac{A}{3}\right) \left[1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^3 \right]$$

Note que, a cada uma das iterações, a área de cada figura formada é dada pela soma da área inicial com o produto da terça parte da área inicial pela soma S_n de uma progressão geométrica de primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $q = \frac{4}{9}$, ou seja $|q| < 1$. Com isso, podemos dizer que, a área da ilha de Von Koch é dada por,

$$A_n = A + \frac{A}{3} S_n$$

Usando a expressão 1.5 podemos dizer que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{9}{5}$$

Considerando a área da ilha de Von Koch A_{V_k} , temos,

$$A_{V_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[A + \frac{A}{3} S_n \right]$$

$$A_{V_k} = A + \left(\frac{A}{3}\right) \left(\frac{9}{5}\right) = \frac{8}{5}A$$

Portanto, quando $n \rightarrow \infty$ a área da ilha de Von Koch $A_{V_k} \rightarrow \frac{8}{5}$ e, com esse resultado, podemos verificar que, embora o perímetro da ilha de Von Koch seja ilimitado,

a área é limitada e bem definida, cujo resultado equivale a $\frac{8}{5}$ da área da figura inicial. ■

Sobre a ilha de Von Koch e sua dimensão fractal, podemos perceber ainda que, sendo $N(\varepsilon)$ a quantidade de lados obtidos em cada uma das iterações e ε a medida de cada um dos segmentos formados, note que $N(\varepsilon) = 4$ e $\varepsilon = \frac{1}{3}$, com isso, usando a Equação 2.3 segue que, a dimensão fractal da ilha de Koch é,

$$d \approx \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log 4}{\log \frac{1}{\frac{1}{3}}} = \frac{\log 4}{\log 3} \approx \frac{0,602}{0,477} \approx 1,262.$$

Assim, concluímos que a dimensão fractal da ilha de Koch é não inteira, maior que a dimensão de uma linha, menor que a dimensão de um plano e o seu valor é $d \approx 1,262$.

4.4 Triângulo de Sierpinski

Waklau Sierpinski (Figura 4.12),

Figura 4.12: Waklau Sierpinski (1882-1969)



Fonte: Culture.pl⁵

Foi professor de Matemática e Física em Varsóvia. Durante este período, ele desenvolveu diversos trabalhos relacionados à teoria dos conjuntos e teoria dos números que trouxeram importantes contribuições para o desenvolvimento da geometria fractal. Sierpinski, recebeu muitas honras e homenagens ao longo de sua carreira na Matemática e suas contribuições são relevantes para a matemática ainda nos dias atuais.

O triângulo de Sierpinski pertence a uma classe de objetos matemáticos conhecidos como fractais. Para construirmos esse triângulo, utilizamos o seguinte procedimento:

- Na iteração 0, construímos um triângulo equilátero de lado l e, para fins de identificação, pintamos o triângulo com cor preta;
- Na iteração 1, marcamos os pontos médios de cada um dos lados do triângulo anterior e utilizamos esses pontos como vértice de um novo triângulo. Em seguida retiramos o triângulo central formado e identificamos o triângulo retirado com a cor branca;
- Na iteração 2, marcamos os pontos médios de cada um dos lados dos triângulos de cor preta resultantes da iteração anterior e utilizamos esses pontos como vértices de novos triângulos. Em seguida retiramos todos os triângulos centrais formados em cada um dos triângulos anteriores e os identificamos pela cor branca;
- Na iteração n , Repetimos os mesmos procedimentos adotados na iteração $n - 1$.

Com isso, o triângulo de Sierpinski é obtido como limite desse processo geométrico recursivo. A Figura 4.13 nos mostra o resultado desse processo até a quarta iteração.

Figura 4.13: Triângulo de Sierpinski com quatro iterações



Fonte: Culture.pl⁶ (2019, p. 1)

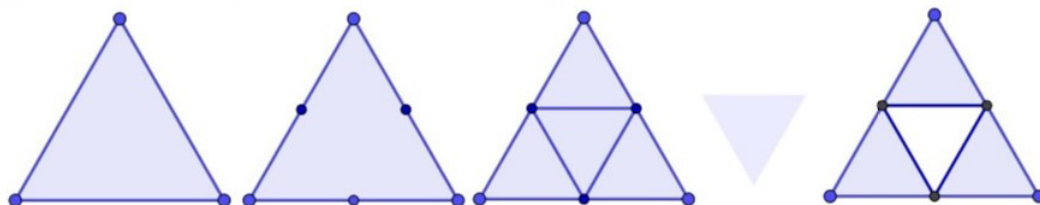
Para estudar algumas propriedades do triângulo de Sierpinski vamos introduzir um pouco mais de notações. Inicialmente, na iteração 0, consideramos a região fechada do triângulo equilátero, definindo-a como S_0 . Na iteração 1, vamos marcar o ponto médio de cada segmento de S_0 unindo-os e formando quatro triângulos equiláteros e eliminando a região interna do triângulo central, denominando-a de V_1 . Na iteração n , marcamos o ponto médio dos triângulos da região S_{n-1} , conectando-os e retirando a região interna do triângulo central de cada um dos triângulos existentes em S_{n-1} , formados pela conexão desses segmentos, denominando a união dessas áreas de V_n , gerando assim, a região S_n .

Observação 4.4. Designamos por S_n a região formada pelos triângulos restantes de I_{n-1}

Podemos observar que, se considerarmos a região inicial S_0 , temos que S_0 é igual a área de um triângulo equilátero, ou seja, $S_0 = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$, onde l é a aresta do triângulo e $P_0 = 3l$ é o perímetro do triângulo inicial.

Na iteração 1 é retirada a região V_1 que tem área equivalente a $\frac{1}{4}$ do triângulo anterior, ou seja, $V_1 = \frac{1}{4}S_0$, gerando a região $S_1 = \frac{3}{4}S_0$ e além disso, $S_1 \subset S_0$. Observe a Figura 4.14).

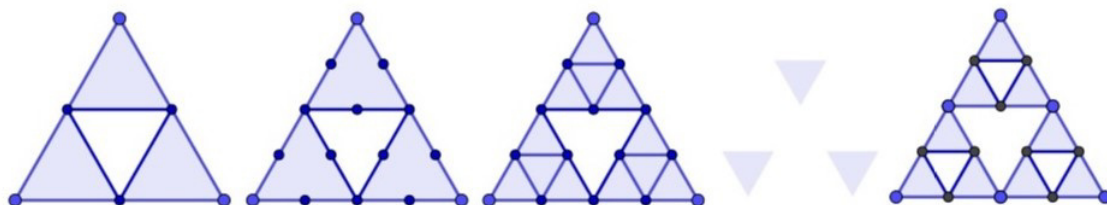
Figura 4.14: Passos da Iteração 1 do Triângulo de Sierpinski



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Na iteração 2, podemos observar agora que, a região S_1 , é formada por três triângulos equiláteros equivalentes, onde cada um deles tem área igual a $\frac{1}{4}S_0$. Repetindo o procedimento da iteração anterior, em cada um dos triângulos de S_1 é retirada uma região, cuja união destas é V_2 que é equivalente a $\frac{1}{4}S_1$, gerando assim a região $S_2 = \frac{3}{4}S_1$ e além disso, $S_2 \subset S_1 \subset S_0$. Observe a Figura 4.15).

Figura 4.15: Passos da Iteração 2 do Triângulo de Sierpinski



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Prosseguindo dessa forma iremos obter uma sequência de regiões $S_0, S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$, de tal modo que $S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset \dots \supset S_n \supset \dots \supset S$, em que S_n é constituída de regiões de S_{n-1} , retirando a região V_n .

Com isso, podemos definir o triângulo de Sierpinski da seguinte forma;

Definição 4.2. O triângulo de Sierpinski é a intersecção das regiões S_n , obtidas através das sucessivas remoções, de um triângulo equilátero, das regiões internas dos triângulos centrais de cada triângulo, quando conectados os seus pontos médios $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n\right)$, ou seja,

$$S = S_0 - \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n\right). \text{ Portanto, } S = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n.$$

Uma vez definido o triângulo de Sierpinski, apresentamos a seguir algumas das suas principais propriedades.

Proposição 4.15. A área do triângulo de Sierpinski tende a zero.

Demonstração Seja $A(S)$ a área do triângulo de Sierpinski. Como S_n perde $\frac{1}{4}$ da área do triângulo anterior, temos que a área de S_n equivale a $\frac{3}{4}$ da área de S_{n-1} . Com isso, segue que a área de S_n é igual $\left(\frac{3}{4}\right)^n$ da área inicial, ou seja, $A(S_n) = \left(\frac{3}{4}\right)^n A(S_0)$. Portanto, quando n tende ao infinito, a área de S_n tende a zero, ou seja, $\lim_{n \rightarrow \infty} A(S_n) = 0$. Como $S = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$, então $A(S) = A\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n\right)$. Aplicando o limite em ambos os lados, temos $\lim_{n \rightarrow \infty} A(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} A\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n\right)$. Por outro lado, como $\lim_{n \rightarrow \infty} A(S_n) = 0$, segue que $A\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n\right) = 0$ e, portanto, temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} A(S) = A\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n\right) = 0$. ■

Outra forma de verificarmos essa proposição é analisarmos a área deixada pelas regiões (V_n) , em cada triângulo, através da expressão. Inicialmente tome $A(V_n)$ como a área da região (V_n) e note que cada V_n é retirado de uma região de cada uma das iterações, de modo que não há reposição dessas regiões. Assim, podemos dizer que, $\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$ é uma união disjunta. Com isso, temos;

$$\begin{aligned} A\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i\right) &= A(V_1) + A(V_2) + A(V_3) + \dots \\ &= \left\{ \frac{1}{4}A(S_0) + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)A(S_0) + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2 A(S_0) + \dots \right\} \\ &= A(S_0) \left\{ \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots \right\} \end{aligned}$$

Note que a expressão entre chaves é uma soma de termos de uma progressão geométrica de $a_1 = \frac{1}{4}$ e cuja razão é $q = \frac{3}{4}$. Utilizando a expressão 1.5, temos;

$$\frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = 1$$

Com isso, a área da união das regiões vazias $A\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i\right)$, equivale a $A(S_0)$. Por outro

lado, temos que,

$$A(S) = A(S_0) - A\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i\right)$$

Portanto, quando $n \rightarrow +\infty$, temos que $A\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i\right) \rightarrow A(S_0)$ e assim, concluimos que a área do triângulo de Sierpinski tende a zero. ■

Proposição 4.16. O triângulo de Sierpinski não contém conjuntos abertos.

Demonstração: Note que, S_0 é fechado e ainda, $A\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i\right)$ é uma reunião de conjuntos abertos. Usando o Teorema 3.3, segue que $A\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i\right)$ é aberto. Por outro lado, note ainda que $S_0 = A\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i\right) \cup S_n$. Se S_n é aberto, então S_0 é aberto. Mas isso é uma contradição. Portanto, segue que o triângulo de Sierpinski não contém conjuntos abertos. ■

Proposição 4.17. O triângulo de Sierpinski é fechado, ou seja, $\overline{S} = S$.

Demonstração: De acordo com a proposição anterior S_n é fechado. Portanto, como $S = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$, utilizando o Teorema 3.6, segue-se que S é fechado. Com isso, concluimos que o triângulo de Sierpinski é fechado. ■

Proposição 4.18. O triângulo de Sierpinski é limitado.

Demonstração: Por definição, a região $S \subset \cdots \subset S_n \subset \cdots \subset S_2 \subset S_1 \subset S_0$. Mas S_0 é uma região formada por um triângulo equilátero e, portanto, limitada. Com isso, temos que S é limitado, ou seja, o triângulo de Sierpinski é limitado. ■

Proposição 4.19. O triângulo de Sierpinski é compacto.

Demonstração: Note que, com as Proposições 4.17 e 4.18, demonstramos, respectivamente, que S é uma região fechada e limitada. Portanto usando essas Proposições, segue que, S é compacto, ou seja, o triângulo de Sierpinski é compacto. ■

Outro resultado que podemos obter utilizando o triângulo de Sierpinski está relacionado ao seu perímetro. Para isso, apresentamos a seguinte proposição;

Proposição 4.20. O limite do perímetro do triângulo de Sierpinski é infinito, quando o número de iterações n tende ao infinito, ou seja, Se $n \rightarrow \infty$, então $P(S) \rightarrow \infty$.

Demonstração: Inicialmente, denotamos por $P(S_n)$ o perímetro formado em cada uma das iterações no triângulo de Sierpinski de lado l . Observe que, o perímetro do triângulo inicial S_0 é igual a $3l$. Note que, com a primeira iteração feita sobre esse triângulo, percebemos a formação de quatro triângulos cujos lados correspondem a metade do triângulo inicial, ou seja, o perímetro de cada um desses triângulos equivale a $\frac{3}{2}l$.

Ao retirar a região central interna V_1 do triângulo anterior, teremos três triângulos semelhantes e de perímetros iguais a $\frac{3}{2}l$ cada. Portanto o perímetro de S_1 é igual ao perímetro do triângulo inicial adicionado do perímetro formado com os segmentos deixados pela região retirada, ou seja,

$$\begin{aligned} P(S_1) &= 3l + 3 \left(\frac{3}{2}l \right) \\ &= 3l + 3 \left(\frac{3}{2}l \right). \end{aligned}$$

Repetindo o procedimento, temos que o perímetro de cada um dos triângulos S_i formados, mantém o perímetro do triângulo anterior adicionado da metade do perímetro da figura anterior, ou seja, $P(S_n) = P(S_{n-1}) + \frac{1}{2}P(S_{n-1}) = \frac{3}{2}P(S_{n-1})$. Assim, observando o perímetro do triângulo de Sierpinski, temos uma progressão geométrica de primeiro termo $a_1 = 3l$ e razão $q = \frac{3}{2}$. Utilizando a Equação 1.4, segue que,

$$S_n = \frac{3l \left[\left(\frac{3}{2} \right)^n - 1 \right]}{\frac{3}{2} - 1}.$$

Assim, podemos perceber que, quanto maior for a quantidade de termos, maior será o valor do perímetro de Sierpinski, ou seja, quando $n \rightarrow \infty$, temos que $P(S_n) \rightarrow \infty$, o que nos faz concluir que o limite do perímetro do triângulo de Sierpinski é infinito, ou seja $\lim_{n \rightarrow \infty} P(S) = \infty$. ■

Considerando que a cada iteração a quantidade de triângulos formados $N(\varepsilon)$ é o triplo do anterior e, ainda, cada um dos lados desse triângulo ε é igual a metade do triângulo anterior, segue da Equação 2.3 que,

$$d \approx \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log 3}{\log \frac{1}{\frac{1}{2}}} = \frac{\log 3}{\log 2} \approx \frac{0,477}{0,301} \approx 1,585.$$

Assim, concluimos que a dimensão fractal do triângulo de Sierpinski é não inteira, maior que a dimensão de uma linha, menor que a dimensão de um plano e o seu valor é $d \approx 1,585$.

Referências Bibliográficas

- [1] BARBOSA, RUY MADESEN, *Descobrendo a Geometria Fractal para a sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.
- [2] BIANCHINI, EDWALDO E PACCOLA, HERVAL, *Matemática, volume 2: versão alfa*. São Paulo: Moderna, 1995.
- [3] DANTE, LUIZ ROBERTO, *Matemática: Contexto e Aplicações*, São Paulo: Ática, 2ª Ed., 2013.
- [4] ESCHER, MAURITS CORNELIS, *Gravuras e Desenhos*, Taschen, 1994.
- [5] EVES, HOWARD, *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: Geometria*, Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1997.
- [6] FALCONER, KENNETH, *Fractal Geometry: Mathematical foundations and applications*, John Wiley, England, 2004.
- [7] FREITAS, C. O infinito. Technical Report, *Popularização da Matemática - Núcleo de Estágio da EB 2, 3*, Rio Grande do Sul, 2008.
- [8] IEZZI, GELSON, HAZZAN, S., *Fundamentos de Matemática Elementar*, São Paulo: Atual, 7ª Ed., 2004.
- [9] IEZZI, GELSON, DOLCE, OSVALDO, MURAKAMI, CARLOS, *Fundamentos de Matemática Elementar*, São Paulo: Atual, 9º Ed., 2004.
- [10] IEZZI, GELSON, ... [ET. AL.], *Matemática: ciência e aplicações: ensino médio, vol. 2*. São Paulo: Saraiva, 2016.
- [11] LIMA, ELON LAGES, *Análise Real volume 1. Funções de uma variável*, Rio de Janeiro: IMPA, 12º Ed., 2016.
- [12] LIMA, ELON LAGES, *Espaços Métricos.*, Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 3º Ed., 1993.

- [13] LIMA, ELON LAGES, *Curso de Análise 2*, Rio de Janeiro: IMPA, 2010.
- [14] NUSSENZVEIG, H. MOYSÉS(Organizador), *Complexidade e Caos*, Rio de Janeiro: UFRJ/COPEA, 1999.
- [15] MANDELBROT, BENOIT. B, *The fractal geometry of nature*, San Francisco: W. H. Freeman, 1982.
- [16] ROQUE, TATIANA, *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahat, 2012.
- [17] SOUZA, MARIA HELENA, *21 Teoremas Matemáticos que revolucionaram o mundo*. São Paulo: Planeta do Brasil, 2018.
- [18] STEWART, IAN, *Os Números da Natureza: a realidade irreal da imaginação matemática*. Rio de Janeiro: Rocco, 1996.
- [19] MENDES, ADIM MARTINS, *Uma breve introdução ao estudo da análise no R^n* . Dissertação, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2017.
- [20] TJABBES, P., *O Mundo Mágico de Escher*, Rio de Janeiro: Centro Cultural Banco do Brasil, 2010.
- [21] RUE, EVA LA, *Relâmpagos*. [S.I], 2018, Disponível em: <https://focusfoto.com.br/relampagos/>. Acesso em: 03 mai. 2019. il. color.
- [22] <http://www.blog.365filmes.com.br/2018/04/M-C-Escher-e-o-cinema-em-7-filmes.html>. Acesso em: 20 mar. 2019.
- [23] <https://culture.pl/en/article/sierpinski-fractals-code-breaking-and-a-crater-on-the-moon>. Acesso em: 10 jun. 2019.
- [24] <http://www.math.ubc.ca/~cass/courses/m308/projects/fung/page.html>. Acesso em: 10 jun. 2019.
- [25] <https://thatsmaths.com/2014/07/31/degrees-of-infinity/>. Acesso em: 25 jun. 2019.
- [26] <https://pt-br.facebook.com/M.C.EscherPage/> Acesso em: 08 jul. 2019.