



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA A DISTÂNCIA

José Crístellys Soares Temoteo

**A UTILIZAÇÃO DA REPRESENTAÇÃO 3D NA
VISUALIZAÇÃO DE GRÁFICOS DE FUNÇÕES
ESCALARES.**

João Pessoa - PB

2020

José Crístellys Soares Temoteo

**A UTILIZAÇÃO DA REPRESENTAÇÃO 3D NA
VISUALIZAÇÃO DE GRÁFICOS DE FUNÇÕES
ESCALARES**

Monografia de Graduação
apresentada ao Centro de Ciências
Exatas e da Natureza, da Universidade
Federal da Paraíba, como requisito
parcial para obtenção do título de
licenciado em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Adriano A. de Medeiros.

João Pessoa - PB

2020

Catalogação na Publicação
Seção de Catalogação e Classificação

| | |
|-------|---|
| T281u | <p>Temoteo, José Crístelys Soares. A utilização da representação 3D na visualização de gráficos de funções escalares / José Crístelys Soares Temoteo. - João Pessoa, 2020. 56 f. : il. color.</p> <p style="text-align: center;">Orientação: Adriano Alves Medeiros. Monografia (Graduação/Licenciatura em Matemática) – UFPB/CCEN.</p> <p style="text-align: center;">1. Funções reais - Ambiente virtual. 2. Modelagem 3D. 4. Software educacional - Winplot e Geogebra 3D. I. Medeiros, Adriano Alves. II. Título.</p> <p>UFPB/CCEN CDU 517.51(043.2)</p> |
|-------|---|

A UTILIZAÇÃO DA REPRESENTAÇÃO 3D NA VISUALIZAÇÃO DE GRÁFICOS DE FUNÇÕES ESCALARES

Monografia de Graduação apresentada ao Centro de Ciências Exatas e da Natureza, da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para obtenção do título de **licenciado em Matemática**.

Aprovado em: 14/12/ 2020

BANCA EXAMINADORA:

Adriano Alves de Medeiros

Prof. Dr. Adriano Alves Medeiros
Orientador/DM/CCEN/UFPB

Gabriela Albuquerque Wanderley

Prof. Dr.ª Gabriela Albuquerque Wanderley
Examinadora/DM/CCEN/UFPB

Marcio Silva Santos

Prof. Dr. Marcio Silva Santos.
Examinador /DM/CCEN/UFPB

A todos aqueles que de forma direta e indireta contribuíram para a realização desse trabalho, a minha família e especialmente a minha mãe e ao meu avô, que sempre me deram forças e incentivo para a continuidade dos meus estudos.

AGRADECIMENTOS

Em nossas vidas existem momentos que é de fundamental importância contar com o apoio de pessoas que nos ajudam na realização de nossos sonhos.

Para a realização desse trabalho de conclusão de curso, pude contar com o apoio de varias pessoas das quais prestarei, em sucintas palavras, os meus sinceros agradecimentos:

Ao Senhor DEUS, que me deu o dom da vida, e me tornou capaz de concluir esse trabalho, e deu-me forças para a conclusão deste curso, e as minhas conquistas na vida.

A minha família, Pai, Mãe e meu irmão Judeilton Segundo, um brilhante profissional e um ser humano incrível, que são exemplos de inspiração para mim, e que me apoiam durante esta longa caminhada da vida, e em decisões tomadas durante a construção desse trabalho.

Aos Meus amigos e a um em especial, Kleydson Ferreira, *in memoria*, que nos deixou de forma trágica, e aos de longa caminhada que me deram apoio tanto emocional e psicológico, quanto físico nas minhas batalhas.

A meu orientador **Prof. Dr. Adriano Alves Medeiros**, que apesar de todas as dificuldades desse ano, aceitou o desafio de trabalhar comigo para realização desse trabalho, analisando as falhas e me orientando para a realização do mesmo.

Se A é o sucesso, então A é igual a X mais Y mais Z. O trabalho é X; Y é o lazer; e Z é manter a boca fechada.

(Albert Einstein).

RESUMO

Neste trabalho serão encontradas informações sobre funções reais, ambiente virtual, sistemas para a modelagem 3D, sistemas para a modelagem de gráficos das funções reais, e conceito de software educacional. Estão detalhados os procedimentos necessários para a modelagem dos gráficos das funções reais em ambiente virtual, desde a escolha da função a ser modelada até a construção do gráfico da mesma no modelo tridimensional. Para a realização do modelamento foi utilizados dois software Winplot e Geogebra 3D, Sendo em parte do objetivo desse trabalho a analisar e utilizar estes softwares, e sua importância no ensino da matemática e do cálculo, e principalmente a visualização em 3D de funções reais no espaço R^3 . Também é apresentada uma comparação empírica entre a forma de trabalho de ambos os softwares, observando quais são seus pontos positivos e negativos em relação à modelagem de Gráficos de funções.

Palavras-chave: Ambiente Virtual. Funções Reais. Modelagem 3D. Software Educacional.

ABSTRACT.

In this work information about real functions, virtual environment systems for 3D modeling systems for modeling graphs of real functions and concept of educational software will be found. Procedures necessary for the modeling of real graphs of functions in a virtual environment, from the choice of the function to be modeled to build the chart in the same three-dimensional model are detailed. To perform the modeling was used and two Winplot Geogebra 3D software, being in part the purpose of this paper to analyze and use this software, and its importance in the teaching of mathematics and computation, and especially the 3D functions real space \mathbb{R}^3 . An empirical comparison of the form of work from both software's is also presented, observing what the strengths and weaknesses in relation to modeling Graphing functions.

Keywords: Virtual environment. Real functions. 3D modeling. Educational Software.

LISTA DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| Figura 1- Ambiente Virtual no Second Life | 17 |
| Figura 2 Coordenadas Cartesianas tridimensionais-(3D)..... | 18 |
| Figura 3 Gráfico da função injetora nos pontos: $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ | 22 |
| Figura 4- O arqueiro Matemático | 24 |
| Figura 5 - Ambiente Geogebra | 25 |
| Figura 6- instalador do winplot | 27 |
| Figura 7- Janela aberta após instalação do software..... | 27 |
| Figura 8-Janela principal do winplot..... | 28 |
| Figura 9 submenu da janela principal | 29 |
| Figura 10- Janela com menu para traçar gráficos em 3D | 29 |
| Figura 11-Janela de inserção de função | 30 |
| Figura 12-tag do Geogebra 3D | 32 |
| Figura 13-tela principal do Geogebra 3D..... | 33 |
| Figura 14- passos para obter a visualização 3D..... | 33 |
| Figura 15- janela de visualização em 3D..... | 34 |
| Figura 16- Gráfico da função Seno | 36 |
| Figura 17-: Janela de inserção e edição da função a ser modelada | 39 |
| Figura 18: Função Seno modelada em 3D visualização em malhas poligonais | 39 |
| Figura 19 Função Seno modelada em 3D visualização em modo espectral..... | 40 |
| Figura 20 Gráfico da função seno modelado em 3D visto de um ângulo frontal | 40 |
| Figura 21- Gráfico da função seno modelado em 3D visto de um ângulo inferior | 41 |
| Figura 22- Função Exponencial modelada em 3D visualização em modo espectral | 42 |
| Figura 23- Gráfico da função exponencial vista de um ângulo superior | 42 |
| Figura 24- Gráfico da função exponencial vista de um ângulo lateral..... | 43 |
| Figura 25- Função Exponencial modelada em 3D visualização em modo espectral vista de um ângulo lateral | 43 |
| Figura 26 -Janela para a visualização do gráfico da função em 3D. | 44 |
| Figura 27- Gráfico da função seno modelada em 3D com o Geogebra 3D | 45 |
| Figura 28- Gráfico da função seno , apos a translação de pontos do eixo(x) sobre o eixo (y) modelado em 3D com o Geogebra..... | 46 |

| | |
|---|----|
| Figura 29-: Gráfico da função seno , apos a translação de pontos do eixo(y) sobre o eixo (x) modelado em 3D com o Geogebra..... | 46 |
| Figura 30 Gráfico da função seno modelada em 3D com o Geogebra | 47 |
| Figura 31 Gráfico da função Exponencial , apos a translação de pontos do eixo(x) sobre o eixo (y) modelado em 3D com o Geogebra | 47 |
| Figura 32 Gráfico da função seno , apos a translação de pontos do eixo(y) sobre o eixo (x) modelado em 3D com o Geogebra..... | 48 |

LISTA DE QUADROS

| | |
|--|----|
| Quadro 1-Sintaxe das principais funções do winplot..... | 30 |
| Quadro 2-Sintaxe de algumas funções do Geogebra 3D..... | 34 |
| Quadro 3-Comparação entre os softwares, no desenvolvimento de algumas ferramentas..... | 50 |

SUMÁRIO

| | |
|---|-----------|
| 1-MEMORIAL..... | 14 |
| 1.1-Histórico da Formação Escolar..... | 14 |
| 1.2-Histórico de Formação Universitária | 14 |
| 2-INTRODUÇÃO. | 16 |
| 3-FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICO..... | 18 |
| 3.1-AMBIENTES VIRTUAIS | 18 |
| 3.2-REALIDADE VIRTUAL | 21 |
| 3.3-PROCESSO DE REPRESENTAÇÃO 3D | 22 |
| 3.4-AS FUNÇÕES REAIS | 23 |
| 3.5-SOFTWARE EDUCACIONAL..... | 25 |
| 4-SISTEMAS PARA A REPRESENTAÇÃO 3D | 28 |
| 4.1-WINPLOT | 28 |
| 4.1.1-História e informações sobre o Winplot | 28 |
| 4.1.2-Utilizando o Winplot..... | 30 |
| 4.2-GEOGEBRA E SUA VERSÃO EM 3D..... | 33 |
| 4.2.1-Historia e informações sobre o Geogebra..... | 33 |
| 4.2.2-Utilizando o Gogebra 3D..... | 34 |
| 5-METODOLOGIA..... | 37 |
| 5.1-A ESCOLHA DAS FUNÇÕES A SEREM REPRESENTADAS E SUAS CARACTERISTICAS | 37 |
| 5.1.1-Breve histórico e características da Função Seno | 37 |
| 5.1.2-Breve histórico e características da Função Exponencial | 38 |
| 5.2-PROCEDIMENTOS DE REPRESENTAÇÃO COM O WINPLOT | 40 |
| 5.2.1-Representação da função Seno com o Winplot..... | 40 |
| 5.2.2-Representação da função Exponencial com o Winplot | 43 |
| 5.3-PROCEDIMENTOS DE REPRESENTAÇÃO COM O GEOGEBRA 3D..... | 46 |
| 5.3.1Representação da função Seno com o Geogebra 3D..... | 47 |
| 5.3.2-Representação da função Exponencial. com Geogebra 3D..... | 48 |
| 6-COMPARAÇÃO DOS SOFTWARES DE REPRESENTAÇÃO 3D PARA AS FUNÇÕES SENO E EXPONENCIAL..... | 50 |

| | |
|-------------------------|-----------|
| 6.1-INTERFACE | 50 |
| 6.2-FERRAMENTAS | 51 |
| 6.3-COMPARAÇÃO | 51 |
| 7-CONCLUSÃO..... | 52 |
| REFERENCIAS..... | 54 |

1 MEMORIAL

Neste tópico apresentaremos uma breve descrição da formação acadêmica e profissional do discente.

1.1 Histórico da Formação Escolar

Nasci no dia 23 de Dezembro de 1990, na cidade de Itaporanga -PB. Sou filho de José Judeilton Bento Temoteo, eletricitista, e Maria de Fátima Soares, Agricultora, Meu pai tem o ensino fundamental Incompleto e Minha mãe concluiu o Médio. Desde a minha infância meus pais dicaram tudo aos meus estudos, mesmo com muitas dificuldades, pois eram sertanejos e viviam da roça, mas sempre me deram suporte necessario para estudar. Com isso iniciei meus estudos em escolas Publicas da minha cidade Itaporanga, mas exatamente na 7ª Serie, adentrei em uma escola particular , que na epoca era mantida pala diocese do municipio. Foi apartir de então que comecei a me sentir desafiado pela mudança de nivel de ensino, era significativamente grande, pois vinhas de otimas notas em matematica, e senti a dificuldade na escola particular, meus pais ate foram converdsr com meu professor de matematica, para entender o que estava acontecendo, e com essa conversa, entendi toda a didatica do prodeessor e comecei a me destacar na disciplina, tanto é que a sala da minha casa virou uma sala de aula, muitos estudante me procuravam pra ensiar reforço. De forma indireta entrei na vida academica e assim continuou no ensino médio.

No ano de 2008, conclui o endino médio nessa escola, Colégio Diocesano Don João da Mata, nessa reta final do ensino Médio, a turma propos realizarmos um cursinho onde os melhoeres alunos em cada disciplina , seria os professores das mesmas, e eu me tornei o professor de Matematica e Fisica, e assim obtivemmos sucesso no vestibular vindouro, e muito entraram na vida academica superior.

1.2 Histórico da Formação Universitária.

Em 2009, com o sucesso do nosso cursinho, obtive sucesso logo e cara, entrei para o curso de Ciecncias contabeis da UFCG-Campus Sousa, como também para o curso de

Licenciatura em Computação, na Época ofertado pela UEPB, campus VII-Patos, so que surgiu um outro problema, como se manter nessas cidades, não tinha dinheiro para me manter, resumindo, perdi o curso de contabilidade, os esforços agora era pra garantir o curso de computação, esse como minha cidade siapusera de um onibus para os estudantes da FIP, os que estudaram na UEPB, também foram contempolados, e com isso , passei a viajar todos os dias da semana, das 16 horas as 18 horas, viajariamos indo a cidade de Patos, e das 22 as 24 horas, voltariamosa cidade e Itaporanga, e essa luta perdurou por 4 anos, mas eu não estava feliz, pois eu por condições não estava em nenhum dos curso que queria, um deles Engenharia Elétrica, pois seguia os moldes de meu pai , eletricista, e queria apender mais sobre os fenomenos elétricos, e nem estava no curso de matematica, que era e é minha paixão. Vale destacar que nesse periodo, eu fui aprovado no concurso para tecnico administrativo do Estado da Paraiba, onde comecei a me inserir no mercado de trabalho, como tinha o curso fui trabalhar diretamente na 7 ° Regional de Ensino , ando manutenção nos laboratórios das escolas que ompoem a regional. Como ja estava trabalhando, comecei a trilhar realmente meus sonhos, em 2014, conseqei entrar para o Curso de Licenciatura em Matematica da UFPB virtual, fiquei muiito feliz e passei a unificar o que tinha aprendido no curso de complutação, e analisar a matematica, esse trabalho academico, surge apartir dessa união, matematica e computação.

Em 2016, interrompi o curso, por um motivo fundamental, como ja estava mais estável no trabalho, decidi que ia cursar engenharia Elétrica, meu outro sonho, e depois de muitas batalhas no ano de 2017, consequi, sou um andarílio por cursos, mas os meus sonhos iam se concretizar, como estava mais maduro, com melhores condições financeiras, um pouco melhor, mas estava, vim e estou morando na capital do estado, trasferi meu emprego, comecei a cursar Engenharia Elétrica, estou muito feliz no curso. No ano de 2019, quando saiu o edital para seleção de alunos para o curso de Matematica , mais uma vez Deus me mostrou que os sonhos são possiveis,e comecei a cainhada para a conclusão do curso, e hoje estou, relatando minha vida academia e profissonal.

Assim, sabemos que com determinação e esforço podemos realizar nossos sonhos, um garoto que com todas dificuldades, tinha um desejo de cursar matemática, cursar engenharia Elétrica, ver os curso trabalhando juntos para solucionar problemas e ver que aos meus quase 30 anos de vida estou vendo cada vez mais perto os sonhos serem concretizados.

2-INTRODUÇÃO

No decorrer dos anos os estudos e pesquisas voltados para a área da virtualização da realidade têm aumentado conceitualmente, devido a sua grande aplicabilidade nas áreas, militares, tecnológicas e científica. Com isso surgiu demanda pelo aperfeiçoamento de profissionais para as distintas áreas da Tecnologia. Um problema que ainda se encontra em aberto e que possui diversas aplicações práticas é o de representar um ambiente natural em um ambiente virtual. Para entendermos o conceito ambiente 3D, devemos entender fortemente o conceito de ambientes virtuais e realidade virtual. Sabemos que ambos estão ligados diretamente ao ambiente tridimensional, que é um passo mais adiante nos estudos da virtualização do real. Na área educacional, ainda existe diversos problemas da aplicabilidade de virtualização que se encontra em aberto, o que gera uma motivação na busca por tecnologias que possamos trabalhar. Em especial na educação, em que a virtualização pode ser utilizada para se trabalhar com alguns dos pilares do processo de ensino-aprendizagem, como a interdisciplinaridade e o desenvolvimento de materiais didáticos

Para (VALENTE 1999) Programas de processamento de texto, planilhas, manipulação de banco de dados, construção e transformação de gráficos, sistemas de autoria, calculadores numéricos, são aplicativos extremamente úteis tanto ao aluno quanto ao professor. Talvez estas ferramentas constituam uma das maiores fontes de mudança do ensino e do processo de manipular informação. As modalidades de softwares educativos descritas acima podem ser caracterizadas como uma tentativa de computadorizar o ensino tradicional.

Este trabalho se propõe a mostrar a visualização de gráficos de algumas funções reais, em um ambiente virtual 3D. Deixamos registrada uma sequência de passos que ajudarão nossos futuros leitores a compreenderem como se gera gráficos de funções contínuas de interesse prático em ambiente virtual. Uma expectativa é destacada, pretendemos ajudar na compreensão das possibilidades de inovação pedagógica por meio de software. Nesse sentido, utilizamos de dois softwares distintos que julgamos serem pouco conhecidos no nosso ambiente acadêmico, são eles: Winplot e Geogebra 3D. Esses dois softwares possuem pontos positivos e negativos quando se compara um em relação ao outro, iremos explicar quais são. Para exemplificar o uso desses softwares no ensino básico, abordamos duas funções da matemática básica, a função seno e o logaritmo na

base natural, e de Euler. Com esses exemplos um professor do ensino básico poderá utilizar este trabalho como roteiro na elaboração de aulas de qualquer outra função contínuo ensino básico.

Inspirados por isso, e com o espírito de contribuir para o ensino básico de matemática, elaboramos este trabalho com o objetivo geral de apresentar roteiros para a elaboração de gráficos de funções reais contínuas em ambientes virtuais 3D por meio do Winplot e do Geogebra 3D, destacando ao fim pontos positivos e negativos de um em relação ao outro. Assim, estaremos contribuindo para o incentivar professores e alunos a transformar o ensino teórico de matemática em algo aplicado ao dia a dia, além de tornar as aulas mais empolgantes.

E tem por objetivos específicos:

- Esclarecer ideias relacionadas a gráficos de funções reais em um ambiente virtuais 3D;
- Facilitar o raciocínio e interpretação, para promover um conhecimento mais amplo em relação a funções reais;
- Relatar a utilização do Software Winplot, e Geogebra 3D para modelamento tridimensional de funções reais;
- Demonstrar resultados obtidos após o uso da aplicação.

O presente trabalho foi estruturado da seguinte forma. No primeiro capítulo, é apresentada a fundamentação teórica da pesquisa. Este capítulo parte de estudos e pesquisas de obras de referência sobre conceitos a respeito de ambientes virtuais, realidade virtual, modelamento em três dimensões (3D), funções reais e software educacional.

No segundo capítulo, tratamos dos sistemas para a modelagem 3D e dos *softwares* Winplot e Geogebra 3D, utilizados para a realização do trabalho. O terceiro capítulo tratamos de apresentar a metodologia aplicada desde seus objetivos, passando pelo o processo de modelagem das funções reais e maneira de manuseá-lo, até a sua aplicação e, posteriormente, uma análise dos sistemas para a modelagem 3D e dos softwares Winplot e Geogebra 3D que permitiu a identificação de resultados que serviram de base para as conclusões.

Neste capítulo serão encontradas partes introdutórias deste trabalho, tais como o cenário, onde se encontra o foco do trabalho realizado, os objetivos, que é como e o que se deve fazer e mostrar os resultados a serem feitos, uma justificativa do por que da realização do trabalho, a metodologia para expressar o método que está sendo utilizado, a forma com que o trabalho é feito e um cronograma para delimitar os prazos de produção do trabalho.

3-FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo serão caracterizados as bases teóricas de autores que trataram de assuntos relevantes para a construção deste trabalho, tais como: Ambientes Virtuais, Realidade Virtual, Modelagem 3D, Funções Reais e Software Educacional.

3.1-AMBIENTES VIRTUAIS

O ambiente virtual é uma composição de um ambiente real, virtualizado dentro de um computador, causando a sensação de que esta sendo visto é real, levando o usuário ao que é chamado de realidade virtual.

De acordo com Espinha (2007), os ambientes virtuais são espaços gerados por computador que representam mundos virtuais. Ele ressalta que esse ambiente tem sido utilizado em diversas aplicações como exemplos podemos citar a aplicação em programas com fins militares, em que situações de combate são simuladas por meio da realidade virtual, para fins científicos, que ajuda na redução de custos com experimentos, no desenvolvimento de jogos educacionais, e no lazer, muito utilizado no desenvolvimento de jogos para um ou mais jogadores.

Segundo (KIRNER; TORI, 2004), os ambientes virtuais se baseiam em algum ambiente real, desta forma, tendo como exemplo, uma praça, uma cidade, uma escola, dentre outros.

Kirner *e tal.* (2006, p.3) reforçam que:

“O ambiente virtual pode ter várias formas, representando prédios ou objetos como automóveis e personagens (avatars). A precisão geométrica, bem como cores, texturas e iluminação são elementos importantes nesses casos. Em outros casos, o ambiente virtual pode não ter nenhuma referência no mundo real, constituindo-se um modelo abstrato. Mesmo assim, os atributos de cores, texturas e iluminação, continuam sendo importantes para uma boa visualização e imersão. Há situações, em que o ambiente virtual é utilizado para avaliar alguma simulação física, na qual a precisão do comportamento físico é mais importante que a fidelidade visual. É o caso de reações químicas, que podem usar representações simples das moléculas baseadas em esferas coloridas, por exemplo. Em qualquer situação, no entanto, o banco de dados geométrico deve ser tal que represente de forma consistente o ambiente virtual e possa ser recuperado e visualizado em tempo real.”

A Figura 1, ilustra um ambiente virtual (AV) no Second Life.



Figura 1- Ambiente Virtual no Second Life

Fonte: <http://www.mundotecno.info/noticias/o-second-life>

De acordo com a Figura 1, podemos compreender melhor quanto a semelhança de um Ambiente Virtual com um Ambiente Real.

Na Figura 2, podemos perceber a composição de dimensões em estudo, isto é, a exemplos, para uma dimensão temos uma reta, para duas um quadrado, e para três um cubo. Além disso, a (Figura 2) mostra o sistema de coordenadas cartesianas tridimensionais (3D) A o produzir as três dimensões a sensação de realidade é obtida.

Dim (2009) ressalta que:

"Um AV não necessariamente engloba todos os itens existentes na realidade. Ele deve representar apenas os objetos necessários para provocar a sensação de presença ao usuário. Além disso, podem ser inseridos objetos que normalmente não haveria no ambiente." (DIM, 2009, p.18)

Um ambiente virtual pode esta representada em duas ou três dimensões. A sensação de realidade só é obtida ao máximo quando este ambiente tiver representação tridimensional (DIM, 2009).

Para demonstrar melhor as dimensões de que compõem um AV, observa-se a Figura 2.

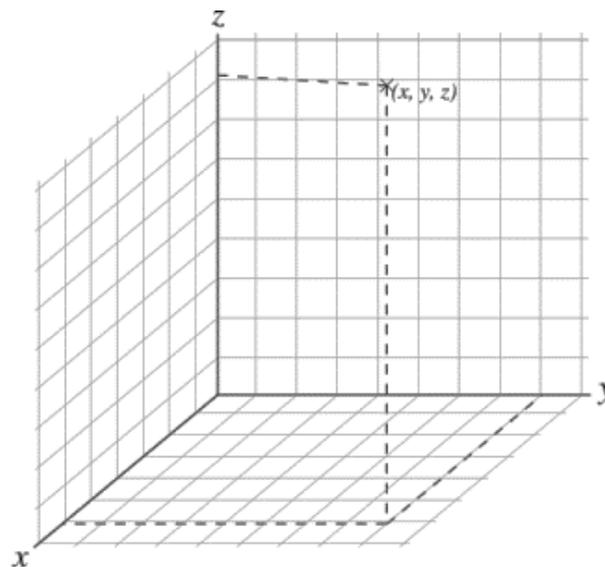


Figura 2 Coordenadas Cartesianas tridimensionais-(3D)

Fonte: <http://teoria-de-la-relatividad.blogspot.com.br/2009/03/7d-invariantes.html>

3.2-REALIDADE VIRTUAL

Os primeiros trabalhos envolvendo a Realidade virtual tiveram início na década de 50, quando uma cineasta utilizava dispositivos que proporcionava a sensação de presença dos sentidos de seus telespectadores em um Ambiente Virtual tridimensional. De acordo com (KIRNER et . al. 2006, p.3):

"Coube a um cineasta, na década de 1950, a concepção do primeiro dispositivo que propiciava a imersão dos sentidos do usuário em um mundo virtual tridimensional, a um engenheiro, na década de 1960, a construção do primeiro capacete de realidade virtual e a um profissional misto de artista e cientista da computação, na década de 1980, a proposta do termo que veio a consolidar-se como denominação da área tema deste livro. Como se vê, apesar de ser relacionada com tecnologia computacional de ponta, o que é verdade, a Realidade Virtual (RV) não é uma área de pesquisa tão recente quanto possa parecer, nem restrita a profissionais da computação."

Uma definição mais concreta sobre o conceito de realidade virtual, é antes de tudo uma interface avançada do usuário para acessar aplicações executadas no computador e tendo como característica principal a visualização, movimentação e interação em tempo real com elementos do ambiente tridimensional. (KIRNER et . al. 2006).

O termo Realidade Virtual tem uma ligação direta com o termo Ambiente virtual, sendo assim são termos que são completamente dependentes, pois para a existência de uma realidade virtual, há a necessidade de um Ambiente Virtual para essa realidade ser imersa. (NETTO et. al., 2002).

Para Kirner et. al. (2004), a Realidade Virtual é uma tecnologia que proporciona ao usuário uma interface avançada, possibilitando assim a utilização de um software e a percepção do usuário dentro de um ambiente virtual tridimensional gerado por um computador.

De acordo com Marins et. al. (2007), a Realidade Virtual é baseada na utilização de interfaces computacionais iterativas, com objetivo principal de causar no usuário a sensação de realidade e reforçam que:

A potencialidade do uso de Realidade Virtual em educação está baseada exatamente em características, pelo fato de permitir que o aprendiz explore ambientes, processos ou objetos através da iteração, imersão e navegação; ou seja, dentro do próprio ambiente de estudo, ele experimenta o conhecimento de forma interativa e aprenda sobre um assunto a partir de sua imersão no próprio contexto desse assunto (MARTINS et. al., 2007, p. 2.)

3.3-PROCESSO DE REPRESENTAÇÃO 3D

Para Dim (2009), todo o processo de criação de um objeto e um ambiente tridimensional para ser visualizado em um computador é chamado de processo de modelagem 3D.

O modelo tridimensional tem por finalidade auxiliar a visualização e interpretação de objetos projetados. Durante o processo de modelagem o usuário monta um modelo digitalizado do objeto. Após a criação desse objeto, o usuário. Uma vez construído o objeto, o usuário pode tomar referências e basear em relação ao modelo que deseja representar. (NETO, 2004).

Segundo Neto (2004), o modelamento tridimensional é baseado em um processo onde um fato ou fenômeno é representado através da abstração. Sendo estes fatos ou fenômenos representações matemáticas ou físicas, os mesmos são produzidos com o auxílio da computação gráfica e são interpretados na forma de algoritmos computacionais sob a forma de algoritmos computacionais. A modelagem de objetos no computador pode ser encarada sob dois aspectos: Modelagem Geométrica e Modelagem Procedural.

Após o modelamento dos objetos, é necessário que ocorra o processo de renderização, que é o processo pelo qual ocorre a conversão dos dados do objeto modelado tridimensional, em imagens bidimensionais computadorizadas, dando assim a sensação de profundidade para serem visualizadas. (DIM, 2009).

Caracterizando a renderização (Neto e Melo, [200-], p.3) Ressaltam que:

"Após a construção de todos os modelos tridimensionais, da definição das câmeras e fontes de iluminação, do processo de definição das características da superfície de cada objeto, além da animação dos personagens, todos os elementos que compõe a animação já estão completos. Numa etapa posterior, é necessário que todos esses parâmetros sejam calculados e transferidos para uma imagem final bidimensional, ou mesmo para uma sequência de imagens bidimensionais, no caso de uma animação. É interessante perceber que, a tridimensionalidade de uma imagem realizada em 3D é ilusória, uma vez que tanto o processo de criação, no ambiente do software, quanto a imagem final, estão atrelados à um plano bidimensional, seja ele um monitor, um papel, uma película, etc. "

3.4-AS FUNÇÕES REAIS

As funções são conceituadas basicamente, por meio de uma dependência de um conjunto a elementos de outro conjunto, e esses conjuntos são subconjuntos do conjunto dos números reais. Ribeiro (2012).

Flemming (2009) ressalta que funções que são definidas em conjuntos reais são funções de conjuntos reais de variável real. De acordo com Stewart (2006), essas funções são representadas de variadas maneiras, tais como: verbalmente descrevendo-a através de palavras, por tabelamento, algebricamente por meio de equação ou por gráfico.

A matemática tem em seu contexto diversas maneiras para explicar e definir formalmente uma função. Nesse trabalho a definição de função utilizada foi citada por Fleming (2009):

Definição 1.: Função: Sejam A e B subconjuntos . Uma função $f: A \rightarrow B$ é uma lei ou regra que a cada elemento de A faz corresponder a elementos de B.

Definição 2.: Domínio e Imagem: O conjunto A é chamado domínio de f e é denotado por $D(f)$. O conjunto B é chamado contradomínio ou campo de valores de f . Para um elemento x pertencente a A, a componente $f(x)$ pertencente a B é chamado valor da função no ponto x ou imagem de x por f .

De modo geral é comum escrever uma função f de um variável real, com a configuração $y = f(x)$, onde x pertencente ao conjunto domínio A.

Após uma definição mais concreta do que é função, percebe-se que o conjunto B

depende de elementos do conjunto, Assim os valores da função são determinados pela variável x (Abscissa), inserida no domínio da função. Desta forma, Stewart (2006) define a variável que independe de uma função pelo símbolo x , referente a um determinado numero aleatório dentro do domínio da função, e define a variável que depende como o termo y (Ordenada) referente a um numero que representa a variação da função (f).

Como o intuito principal desse trabalho é a utilização de gráficos de funções reais, conceituaremos o termo gráfico de uma função real.

Guidorizzi (2001) define gráfico como : $f: A \rightarrow B$ uma função, o seu gráfico pode ser descrito e representado da seguinte maneira: $G(f) = \{(x, f(x)) / x \in A\}$, onde, $G(f)$ é um conjunto denominado gráfico de f .

Guidorizzi (2001, p.26). Ressalta que:

“[...] assim, o gráfico de f é um subconjunto do conjunto de todos os pares ordenados (x,y) de números reais. Munindo-se o plano de um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas, o gráfico de f pode então ser pensado como o lugar geométrico pelo ponto $(x, f(x))$ quando x percorre o domínio de f .”

A definição de gráfico pode ser mais bem representada pela Figura 3.

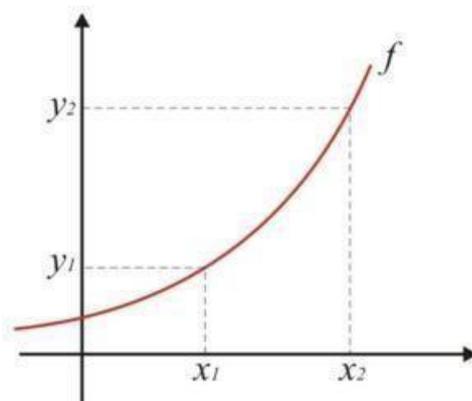


Figura 3 Gráfico da função injetora nos pontos: $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$.

Fonte: <http://www.infoescola.com/matematica/funcao-injetora>.

Segundo Stewart (2006), as condições gerais para a análise destas funções em intervalos são de que as mesmas sejam contínuas nesse intervalo.

Definição– Função contínua: uma função é dita **contínua** quando as pequenas variações nos domínios correspondem a pequenas variações nas imagens. Nos pontos onde a função não é contínua, diz-se que ocorre um ponto de descontinuidade..

De acordo com, Ribeiro (2012, p. 17) As funções matemáticas possuem uma enorme variedade de características que as tornam distintas não apenas em sua representação equacional, mas também em sua representação gráfica. Todavia, em meio a esta diversidade, serão analisadas apenas as funções polinomiais e transcendentess. Assim chegamos ao termo funções polinomiais.

Para definirmos o contexto de função polinomial, tomaremos como base as idéias de Flemming (2009), no qual ele define função polinomial como:

Definição– Função Polinomial: Denotamos função polinomial de grau n , com $n \in \mathbb{N}$, função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por: $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$, onde $a_0 \neq 0$, a_1, a_2, \dots, a_n . São constantes reais chamadas coeficiente n , com $a_0 \neq 0$ determina-se o grau da função.

3.5-SOFTWARE EDUCACIONAL.

Foi durante os anos 70 que o desenvolvimento de uma cultura educativa voltada para a informática teve suas iniciativas no Brasil, quando foi gerada uma discussão da utilização do computador no ensino da física. Mas nos dias atuais a utilização dessa ferramenta disseminou para diversas áreas do conhecimento de forma que o aprendizado seja potencializado.

Alguns Países como Inglaterra, França e EUA, criaram projetos para a inserção do computador no ambiente educacional, sendo preciso, então, desenvolver produtos de software específicos para suas necessidades. O Brasil seguiu o mesmo caminho, sendo assim, vários projetos foram e estão sendo desenvolvidos, relacionados ao uso do microcomputador em sala de aula e também relacionados ao desenvolvimento de software para os mais diversos conteúdos programáticos. Algum grupo de pesquisa vem utilizando o

termo *software* educacional ou software educativo, outros o termo *courseware*, outros, ainda, o termo Programas Educativos por Computador. Todos estes termos possuem o mesmo significado: material educacional para microcomputadores (ROCHA & CAMPOS, 1993, p.35).

Segundo Oliveira (2000 apud GOMES; PADOVANI, 2005), definiremos o software educacional como sendo um sistema computacional que proporciona interatividade com o usuário, utilizado para facilitar a aprendizagem de conceitos específicos, ou seja, instrumento para a aprendizagem de algo. Também podemos dizer que os softwares educacionais são os softwares pensados, programados e implementados com objetivos educacionais para serem utilizados dentro e fora do ambiente escolar.

De acordo com Lucena apud Teixeira e Brandão (2003), softwares educativos, são todos aqueles *softwares* que possam ser utilizados com algum objetivo educacional, por professores e alunos, independentemente de qual seja seu que seja o objetivo principal para o qual ele foi desenvolvido.

As imagens abaixo demonstram melhor o ambiente de um software educacional.

Software educacional desenvolvido com intuito de reforçar o ensino matemático de frações onde o aluno se diverte ao realizar cálculos, o mesmo é direcionado a alunos em fases fundamentais do ensino da matemática. (figura 4).



Figura 4– O arqueiro Matemático

Fonte: <http://www.somatematica.com.br/matkids/arqmat.html>

Software voltado à criação de gráficos de funções tem um bom auxílio às áreas de álgebra e

geometria, utilizado em universidades e por cursos técnicos além do seu bom desempenho no ensino médio em construções de gráficos de funções, bom exemplo de software que será utilizado no desenvolvimento desse trabalho (figura 5).

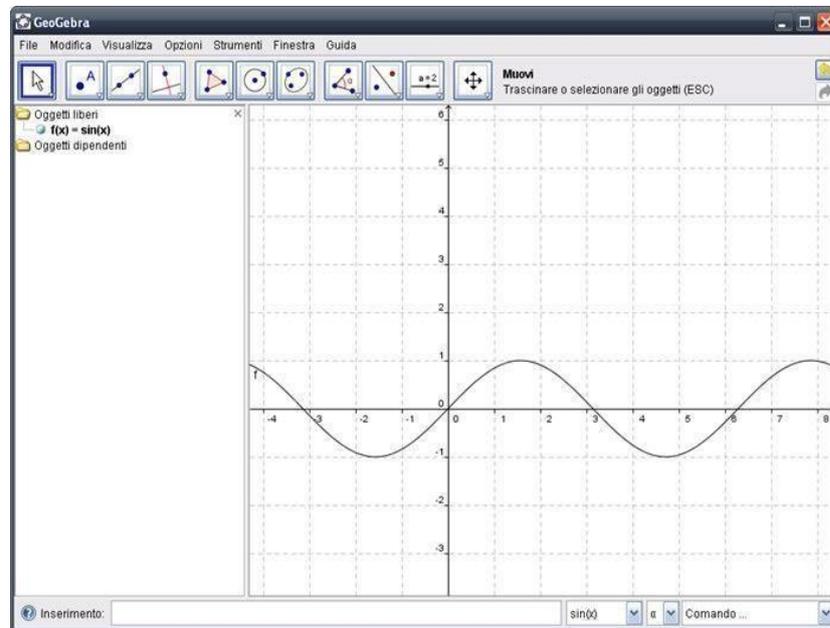


Figura 5 - Ambiente Geogebra.

Fonte: <http://annette-sbs.blogspot.com.br/2012/12/download-geogebra-40410.html>

O objetivo geral dos softwares educacionais é auxiliar no processo ensino aprendizagem de uma dada disciplina (GAMEZ, 1998, p.12).

Para que isto ocorra, o software deve possuir uma série de características, como ser fácil de utilizar, ser amigável para o usuário, ser fácil de compreender, favorecer a assimilação dos conteúdos, possuir aspectos motivacionais que despertem e mantenham a atenção do usuário, ser capaz de atrair e conquistar o interesse dos usuários, verificar o grau de compreensão dos alunos, bem como de suas dificuldades, entre outros aspectos.

Foi objetivando uma aprendizagem de forma lúdica que surgiram os primeiros softwares educacionais, a fim de proporcionar ao usuário uma interação mais próxima do real. Assim, um software educacional é um programa idealizado e criado por especialistas na área de programação que envolve em seu conteúdo diversas áreas de aprendizagem específicas, como, por exemplo, língua portuguesa, jogos matemáticos, ciências, etc.

Os softwares são classificados ao nível educacional como sequencial, relacional e criativo. Software sequencial quando o aluno memoriza o conteúdo apresentado e o repete

quando necessário, sendo um sujeito passivo. É dito relacional quando o estudante adquire habilidades e relaciona com outros fatos e outras fontes de informação; sendo uma interação homem/máquina, o aluno ficara isolado. Diz que o programa é criativo se ele cria a interação entre pessoas e tecnologias, favorecendo o aprendizado participativo.

4-SISTEMAS PARA REPRESENTAÇÃO 3D.

Neste capítulo iremos detalhar os sistemas para o processo de modelagem, com os softwares *Winplot* e *Geogebra 3D*, mostrando um pouco da história de sua criação e um detalhamento minucioso de sua usabilidade e utilização.

4.1-WINPLOT.

4.1.1-História e informações sobre o Winplot.

O Winplot é um software livre que foi desenvolvido por volta de 1985 por Richard Parris, professor da *Philips Exeter Academy*, então chamado de PLOT e era rodado em DOS. (Um dos primeiros Sistemas Operacionais), e tem sua escrita na linguagem C++.

Com o lançamento do Windows ele passou a se chamar Winplot. O programa pode ser encontrado em outros seis idiomas além da versão original em inglês. A versão utilizada pela equipe PIBID Matemática CAC/UFG foi a versão em português traduzido pelo professor Adelmo Ribeiro de Jesus da Universidade Federal da Bahia no ano de 2001. (Gianeri, 2005, p.2).

O seu download e instalação são muito simples, basta fazermos uma busca na internet, aqui temos um breve tutorial informando ao usuário como conseguir o seu download e instalação; utilizaremos este link: <http://math.exeter.edu/rparris/peanut/wp32z.exe>, desta forma iremos baixá-lo. Após baixarmos iremos abrir o wp32z e descomprimos o arquivo.



Figura 6– instalador do winplot

Fonte: autoria própria

Feito isto iremos ate a pasta de instalação e iremos executá-lo, a seguinte janela será aberta:

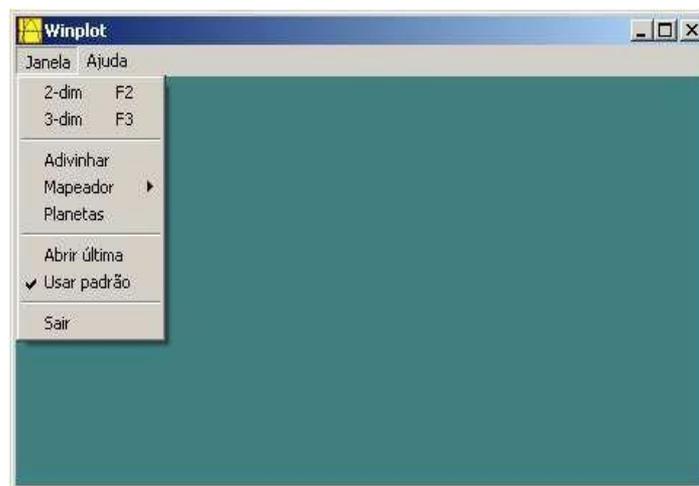


Figura 7– Janela aberta após instalação do software.

Fonte: autoria própria

Este é o Wimplot através desta janela o usuário escolhera o modo de trabalho que ira ser executado no caso de funções de duas ou três dimensões, nesse trabalho irá trabalhar primordialmente com gráficos de funções em três dimensões.

São vários os fatos nos quais me levaram a trabalhar com este software, dentre os quais se encontram: O mesmo é um software que não requer pagamento para a sua licença, é de fácil utilização, tem sua versão disponível também em português, é muito simples e de fácil a sua instalação, é pequeno (Menor que 2 megabytes) roda em plataformas Linux e Windows (95, 98, ME, 2K, XP, Vista, 7, 8, 8.1); possibilita também através de parâmetros a animação de inúmeros gráficos.

Desde quando foi inventado no ano de 1985, este software vem sendo atualizado constantemente. A sua primeira versão rodava no DOS, e tinha por nome Plot; com sua versão aprimorada para o Windows, surgiu o nome Winplot, resultados da fusão das nomenclaturas Windows e Plot, utilizarão a versão mais atualizada.

4.1.2- Utilizando o Winplot.

Quando damos um duplo clique no ícone  se abrirá a seguinte janela.

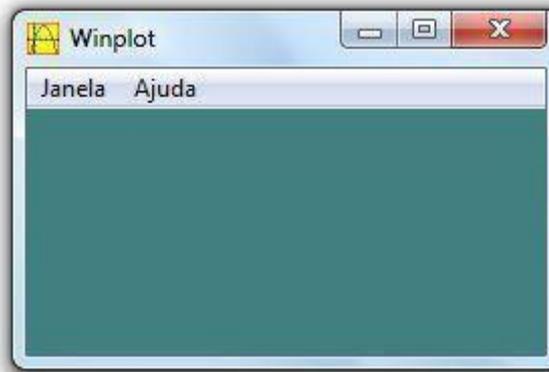


Figura 8-Janela principal do winplot.

Fonte: Autoria própria.

Janela principal do software, os *submenu*, mostrado na figura correspondem aos menus janela (à esquerda) e Ajuda (à direita).

A figura abaixo mostra o *submenu* da janela principal

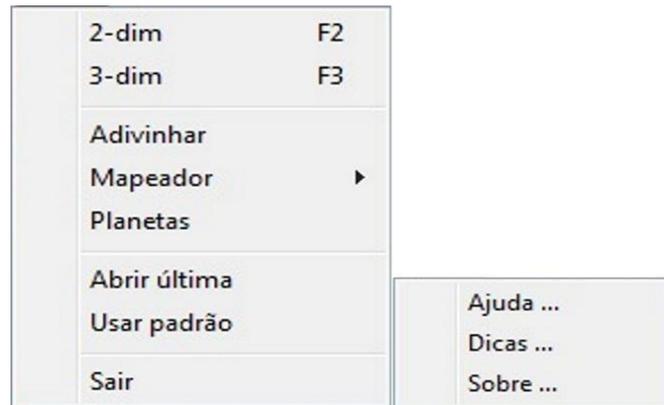


Figura:9-Sub menu da janela principal

Fonte: autoria própria.

Para obtermos representação de gráfico com duas variáveis, ou seja, representar superfícies no espaço tridimensional, que é o nosso objetivo durante essa pesquisa, com o winplot iremos escolher a opção 3-dim(F3) como mostra a figura abaixo (Figura 8).

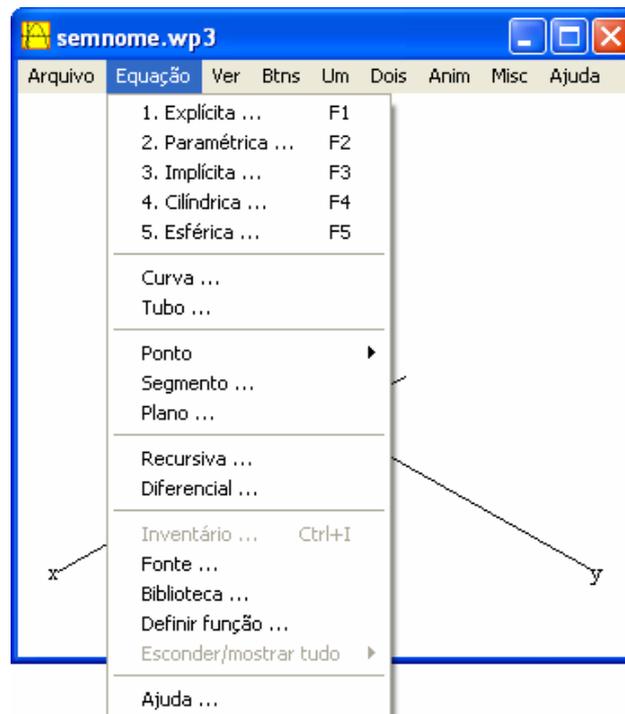


Figura 10- Janela com menu para traçar gráficos em 3D

Fonte: autoria própria

Podemos escolher dentre as equações do tipo: Explícitas Paramétricas, Implícitas ou Polares. A opção escolhida para este trabalho é a equação *Explícita*, pois é mais comum para usuários e alunos que utilizam o software para a realização de modelamento de gráficos.

A função explícita, são as mais comuns para os alunos, são funções do tipo:

$$f(x,y) = xx + \cos(3y), f(x,y) = x^2 + y^2.$$

Para inserir uma função, basta clicar em **Equação/Explícita**, surgindo a seguinte janela:

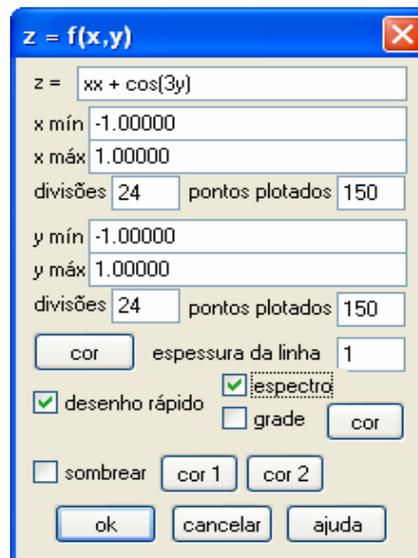
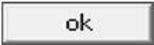


Figura 11-Janela de inserção de função

Fonte: autoria própria

Nesta janela, devem-se digitar as expressões padrões para definir uma função .

$$z=f(x, y).$$

Assim só precisamos digitar a função que desejamos modelar o seu gráfico e clicarmos em  para que o programa mostre o grafico.

Um detalhe muito importante sobre a utilização do software Winplot é quanto a sua sintaxe que deve ser repetida, ao ser digitada a fórmula é preciso observar as regras de sintaxe.

O quadro abaixo demonstra algumas das regras de sintaxes para a inserção de equações no software.

Quadro 1-Sintaxe das principais funções do winplot

| | | | | | | | | | |
|----------------|---------------|---------------|-----------|----------|--------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| Função | x^n | a^x | $\log x$ | $\ln x$ | $\sqrt[n]{x}$ | $ x $ | $\text{sen } x$ | $\text{cos } x$ | $\text{tan } x$ |
| Sintaxe | $x^{\wedge}n$ | $a^{\wedge}x$ | $\log(x)$ | $\ln(x)$ | $\text{root}(n,x)$ | $\text{abs}(x)$ | $\text{sin}(x)$ | $\text{cos}(x)$ | $\text{tan}(x)$ |

Fonte: Autoria própria.

Podemos encontrar mais detalhadamente as funções e regras de sintaxe para o winplot na opção: Equação e após iremos escolher a opção Biblioteca.

A utilização deste software no ensino da matemática vem quebrando diversas barreiras, para aqueles que gostam de matemática, pois o mesmo abrange e auxilia em diversas áreas do ensino, neste trabalho abordaremos primordialmente a plotagem/modelagem, de funções, que são consideráveis para muitos, não tão simples, e quando se trata de visualizar seus gráficos em um modelo tridimensional torna de suma importância um detalhamento e a curiosidade do resultado que será obtido.

4.2-GEOGEBRA E SUA VERSÃO EM 3D

4.2.1-Historia e informações sobre o Geogebra.

O Geogebra é um software computacional educativo livre, tem em suas bases de trabalho a Geometria, Álgebra e o Cálculo. Seu Criador foi um professor da Universidade Salzburgo na Áustria. No ano de 2001 o professor *Markus Hohenwarter* em sua tese de Mestrado cria um software para desenvolvimento educativo da matemática, cujo o nome deu-se pelo seu potencial trabalho com a **GEOMETRIA** e a **álGEBRA** e também com o cálculo; Surge assim uma brilhante ferramenta para o trabalho da matemática, para o auxílio do ensino –aprendizagem.

Podemos obter o geogebra em sua versão mais atualizada em vários *sites* na internet, pois o mesmo é um software muito utilizados tanto no ensino fundamental e médio quanto nas Universidades deste país. Mas um requisito importante deve ser desenvolvido na linguagem de programação JAVA, o usuário deve ter em seu computador a máquina virtual JAVA, para que possa vir a utilizar o mesmo. Tanto o Geogebra quanto a máquina virtual JAVA estão disponíveis no endereço eletrônico: <http://www.geogebra.org/cms/>.

Ao entrar no site vá a downloads e escolha o sistema a qual deseja requisitar a instalação do Geogebra.

Nosso trabalho não consiste em trabalhar com essa versão do software, e sim em uma versão mais atualizada. a mesma encontra em sua versão a possibilidade de visualizarmos gráficos em modo tridimensional que é de fato o que queremos realizar neste trabalho.

Desde o final do ano de 2010, os desenvolvedores do Geogebra vêm medindo esforços na criação de uma versão do Geogebra em que diversos objetivos geométricos pudessem ser explorados em um espaço tridimensional. A figura abaixo mostra a *tag*, do software.



Figura 12-tag do Geogebra 3D

Fonte: <http://jpiton.blogspot.com.br/2010/12/geogebra-3d-5.0-beta-release.html>

Para a obtenção do mesmo devemos saber que, GeoGebra 5.0 com versão 3D já está disponível para testes. É uma boa oportunidade para experimentar, pode fazer download desta versão: Web start:

<http://www.geogebra.org/webstart/5.0/geogebra-50-jogl1.jnlp>

Após baixar e instalar utilizaremos a ferramenta para nossos trabalhos, mas vale salientar que como a versão do Geogebra foi atualizada o “JAVA” também foi, e o usuário deve atualizá-lo.

4.2.2- Utilizando o Geogebra 3D.

Ao darmos um duplo clique no ícone  abra a seguinte janela para o usuário.

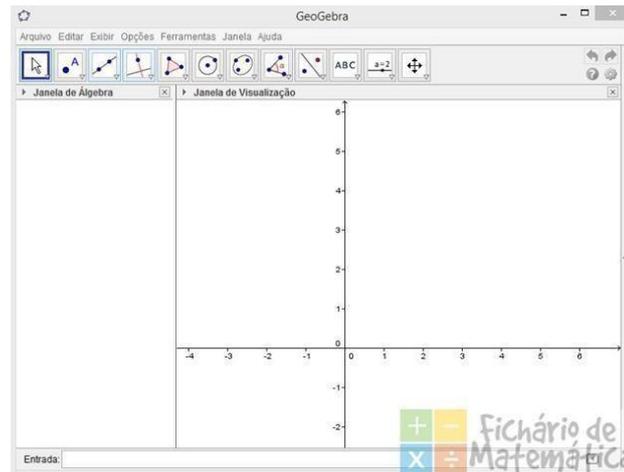


Figura 13-tela principal do Geogebra 3D.

Fonte:<http://www.fichariodematematica.com>

Dessa forma para obtermos o campo de visualização tridimensional iremos às opções do menu **EXIBIR** clique em: **Janela de Visualização 3D**, como é demonstrado na figura(12) abaixo:

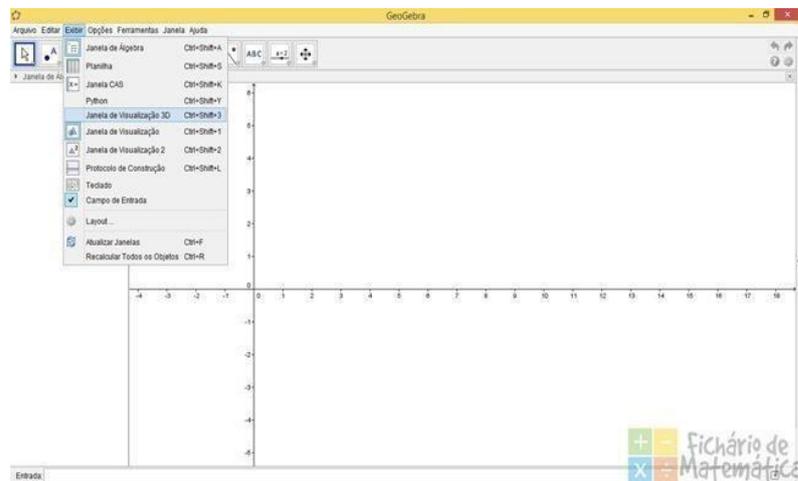


Figura 14- passos para obter a visualização 3D

Fonte: <http://www.fichariodematematica.com>

Feito todos os procedimentos necessários a janela com o gráfico tridimensional será aberta, como demonstrado na figura abaixo. A janela de Visualização 3D estará ativada, permitindo ao usuário explorar diversos conceitos geométricos diretamente em um espaço tridimensional.

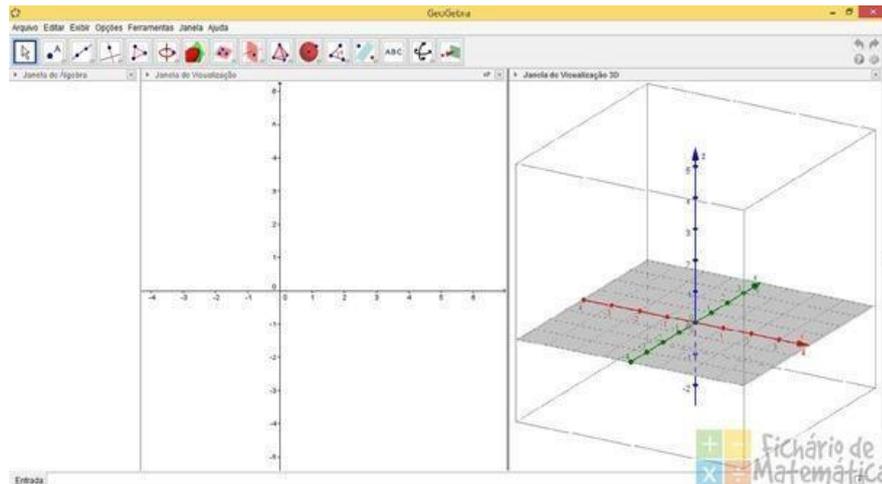


Figura 15- janela de visualização em 3D.

Fonte: <http://www.fichariodematematica.com>

Quando chegamos a esta fase iremos construir o gráfico desejado através da inserção da função no ícone **Entrada** na barra que se encontra na parte de baixo da janela e dessa forma obteremos o gráfico da função desejada e sua visualização em modelo tridimensional. É importante reforçar que assim como outros softwares o Geogebra tem uma sintaxe de funções onde devemos respeitá-las para a obtenção dos resultados. O quadro abaixo mostra algumas das sintaxes de funções atribuídas pelo Geogebra.

Quadro 2-Sintaxe de algumas funções do geogebra.

| Operação | Inserir |
|-----------------------|-----------------|
| Adição | + |
| Subtração | - |
| Multiplicação | * ou espaço |
| Produto escalar | * ou espaço |
| Divisão | / |
| Exponenciação | ^ ou 2 |
| Fatorial | ! |
| Valor absoluto | abs() |
| Raiz quadrada | sqrt() |
| Raiz cúbica | cbrt() |
| Função exponencial | exp() ou e^x |
| Logaritmo (base e) | ln() ou log() |

| | |
|------------------------------|------------------|
| Cosseno | $\cos()$ |
| Seno | $\sin()$ |
| Seno hiperbólico | $\sinh()$ |
| Maior inteiro menor ou igual | $\text{floor}()$ |
| Arredondar | $\text{round}()$ |

Fonte: [Http//www.geogebra.org/help/docuPT.pdf](http://www.geogebra.org/help/docuPT.pdf).

Uma observação deve ser feita em relação às funções pré-definidas do Geogebra:

- As funções pré-definidas têm que ser inseridas usando parênteses curvos.
- Não pode deixar espaços entre a função e os parênteses.

5-METODOLOGIA.

A proposta deste trabalho é apresentar os resultados obtidos da análise de duas funções reais; Seno e exponencial. Atraves de um procedimento de modelagem 3D utilizando os *softwares* Winplot e Geogebra 3D. E um detalhamento do modelamento em ambos os *softwares*.

5.1-A ESCOLHA DAS FUNÇÕES A SEREM REPRESENTADAS E SUAS CARACTERÍSTICAS.

Foi através de pesquisas durante o meu período de alunado que houve um intuito e o interesse de trabalhar com ambas as funções, pois são funções que para muitos considerados um “*bicho de sete cabeças*”, e sempre deixavam algo a mais a ser pesquisado. E através da computação vi a possibilidade de aprofundar meus conhecimentos, sobre as funções seno e exponencial, aplicando-as em um ambiente virtual tridimensional.

5.1.1-Breve histórico e características da Função Seno.

A palavra seno é derivada do latim *sinus*, que significa “*baía*” ou “*dobra*”, a partir de uma tradução errônea (viaárabe) do sânscrito *jiva*, e sua variante *jya*. Contudo, o nome

original do seno era a palavra hindu "gya", que significa corda (referindo-se a um trecho definido de uma circunferência). Assim, Aryabhata usou o termo *ardha-jiva* ("meia-corda"), que foi abreviado para *jivae* então transliterada pelos árabes como *jiba*.

Na língua árabe é comum escrever apenas as consoantes de uma palavra, deixando que o leitor acrescente mentalmente as vogais. Desse modo, os tradutores árabes registraram *jb*. Na sua tradução do árabe para o latim, Robert de Chester e Gherardo of Cremona, na Toledo do século XII interpretaram *jb* como as consoantes da palavra *jaib*, que significa "baía" ou "enseada", e escreveu *sinus*, que é o equivalente em latim. A partir daí, a *jiba*, ou meia corda em hindu passou a ser chamada de *sinus*, e, em português, seno.

A função seno é uma função periódica, tendo em vista que $\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen } x$, onde seu período é de 2π (π , é o valor em radianos equivalente a 180°). O domínio da função é todo o conjunto \mathbf{R} (Conjunto dos números reais), e o contradomínio da função é $[-1,1]$; O valor máximo da função é 1 em $x = \pi/2$ e o valor mínimo da função é -1 em $x = 3\pi/2$; A função é contínua em todo o seu domínio; É uma função crescente no intervalo $[0, \pi/2]$ e $[3\pi/2, 2\pi]$, e decrescente no intervalo $[\pi/2, 3\pi/2]$; A função é ímpar, já que:

$$\text{sen}(-x) = -\text{sen } x.$$

E o gráfico é simétrico em relação à origem (0,0). Como é demonstrado na figura abaixo:

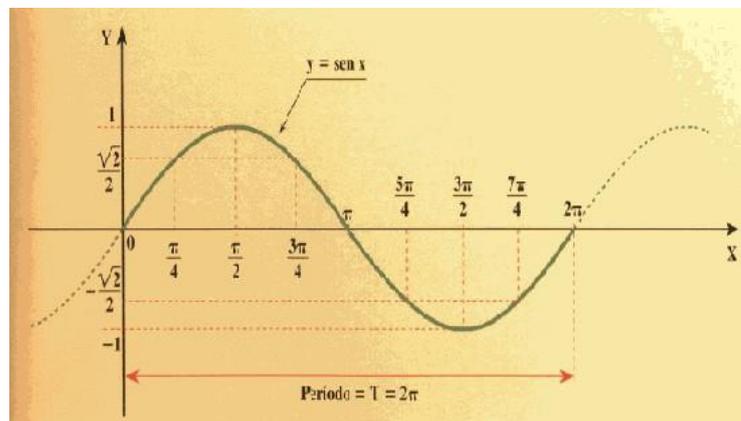


Figura 16- Gráfico da função Seno

Fonte: [http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm24/jssp5.htm#Função y = sen x:](http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm24/jssp5.htm#Função y = sen x;)

5.1.2-Breve histórico e características da Função Exponencial.

Conta à lenda que um rei solicitou aos seus súditos que lhe inventassem um novo jogo, a fim de diminuir o seu tédio. O melhor jogo teria direito a realizar qualquer desejo. Um

dos seus súditos inventou, então, o jogo de xadrez. O Rei ficou maravilhado com o jogo e viu-se obrigado a cumprir a sua promessa. Chamou, então, o inventor do jogo e disse que ele poderia pedir o que desejasse. O astuto inventor pediu então que as 64 casas do tabuleiro do jogo de xadrez fossem preenchidas com moedas de ouro, seguindo a seguinte condição: na primeira casa seria colocada uma moeda e em cada casa seguinte seria colocado o dobro de moedas que havia na casa anterior. O Rei considerou o pedido fácil de ser atendido e ordenou que providenciassem o pagamento. Tal foi sua surpresa quando os tesoureiros do reino lhe apresentaram a suposta conta, pois apenas na última casa o total de moedas era de 263, o que corresponde a aproximadamente $9\,223\,300\,000\,000\,000\,000 = 9,2233.1018$. Não se pode esquecer ainda que o valor entregue ao inventor seria a soma de todas as moedas contidas em todas as casas. O rei estava falido!

A lenda nos apresenta uma aplicação de *funções exponenciais*, especialmente da função $f(x) = 2^x$.

Função exponencial é toda função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, definida por $f(x) = a^x$ com $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $a \neq 1$. Neste tipo de função como podemos observar em $f(x) = a^x$, a variável independente x está no expoente, daí a razão da sua denominação. É importante também observar que a base a é um valor real constante, isto é, um número real; É notável que algumas restrições devam ser obedecidas, visto que temos $a > 0$ e $a \neq 1$, $a = 1$ teríamos uma função constante e não exponencial, pois 1 elevado a qualquer x real sempre resultaria em 1. Neste caso $f(x) = 1^x$ equivaleria a $f(x) = 1$ que é uma função constante, a restrição para $a = 0$, é quando estudamos a potenciação, vimos que 0^0 é indeterminado, então $f(x) = 0^x$ seria indeterminado quando $x = 0$. No caso de $a < 0$ não devemos nos esquecer de que não existe a raiz real de um radicando negativo e índice par.

Assim como no caso das funções afins, as funções exponenciais também podem ser classificadas como função crescente ou função decrescente. Se $a > 1$ temos uma função exponencial crescente, qualquer que seja o valor real de x . Se $0 < a < 1$ temos uma função exponencial decrescente em todo o domínio da função.

Em nosso trabalho utilizaremos a função exponencial cuja base é a constante de Euler. Nos estudos matemáticos o número de Euler, e utilizado em homenagem ao matemático *suíço Leonhard Euler*, é a base dos logaritmos naturais. As variantes do nome do número incluem: número de Napier, constante de Néper, número neperiano, constante matemática, número exponencial etc. A primeira referência à constante foi publicada em 1618 na tabela

de um apêndice de um trabalho sobre logaritmos de *John Napier*. No entanto, este não contém a constante propriamente dita, mas apenas uma simples lista de logaritmos naturais calculados a partir desta. A primeira indicação da constante foi descoberta por *Jakob Bernoulli*, quando tentava encontrar um valor para uma expressão exponencial complexa (muito comum no cálculo de juros compostos), e o seu valor é aproximadamente: **2, 718 281 828 459 045 235 360...** O número foi encontrado quando após o cálculo de uma expressão de características exponenciais foi calculada, a função era $(1+1/n)$ elevado a (n) , e foi observado que quando (n) tendia ao infinito o resultado tendia a se estabilizar em um valor constante que foi representado pelo número/constante de Euler, (e) , tendo como características, o seu valor Irracional é aproximado de $e=2,71828$. Esse número/constante é bastante utilizado como base da função exponencial $f(x) = e$ elevado a (x) .

5.2-PROCEDIMENTOS DE REPRESENTAÇÃO 3D COM O WINPLOT.

Detalharemos agora a modelagem das funções escolhidas com a utilização do software Winplot. O primeiro passo é reconhecer a sintaxe de funções que o programa aceita, para isso já foi detalhada em suas características, dessa forma a função deve ser inserida de forma diferente no programa, da sua formação original.

Ao abrirmos o software iremos escolher o item **janela**, e dentro desse item escolheremos o subitem **3-dim. F3** - dessa forma abrirá uma nova janela para gráficos de três dimensões (**3D**). Escolheremos no menu tipos de equações, as do tipo explícitas, que é a mais utilizado e simples, por alunos, para a obtenção dos gráficos de funções.

5.2.1-Representação da função Seno (x,y) com winplot.

Quando todo o passo a passo for cumprido até chegarmos ao quadro de inserção das funções, todo esse processo foi detalhado em capítulos anteriores, vamos introduzir a função a ser modelada observando e respeitando os critérios de sintaxe de funções do *software* winplot, para a função seno, o seu tipo de inserção de acordo com sua sintaxe é $\text{Sin}(x)$ dessa maneira obteremos os resultados desejados, ainda na opção de inserir a função, limitar o gráfico em seu Máximo e mínimo (tanto em x quanto em y), as secções e pontos plotados, a espessura da linha que contorna o gráfico, a ate mesmo a cor de acordo com o gosto do usuário. A figura abaixo ilustra a janela para inserção e edição do gráfico da

função a ser modelada

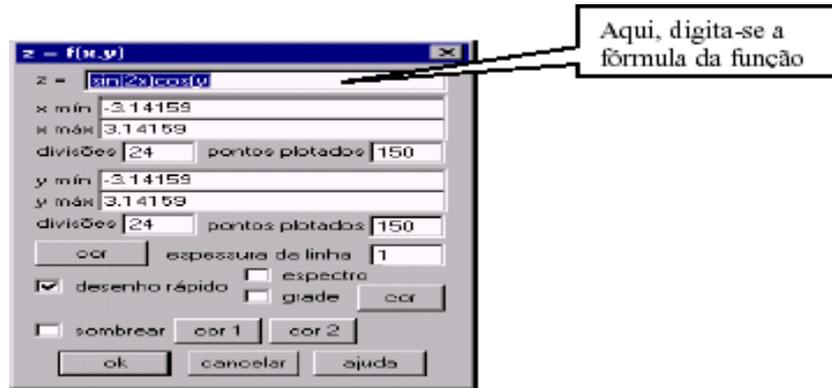


Figura 17:- Janela de inserção e edição da função a ser modelada

Fonte: Autoria Propria.

A partir do momento que introduzirmos a função desejada, vale destacar que vários gráficos tridimensionais podem ser criados de acordo com o tipo de variáveis inseridas, como por exemplo: $\sin.(xx+yy)/(xx+yy)$, $\sin(x+y)/(x+y)$, $\sin(xx+yy)$ e $\sin(x+y)$. Em nosso trabalho utilizaremos a forma mais simples para visualização tridimensional do gráfico, que é **seno (x+y)**. A sequência de figuras a baixo é a demonstração do gráfico da função seno com x somado ao valor de y, ou seja, os valores da abscissa(x) somados aos valores da ordenada (y) aplicados a função seno. Foi aplicado em intervalo de (-4 a 4) para x e de (-4 a 4) para y, em seus máximos e mínimos, e a espessura da linha de 1 cm, modo padrão, e de cor azul.

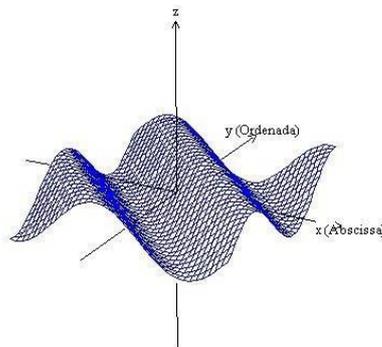


Figura 18: Função Seno (x+y) modelada em 3D visualização em malhas poligonais.

Fonte: Autoria Própria

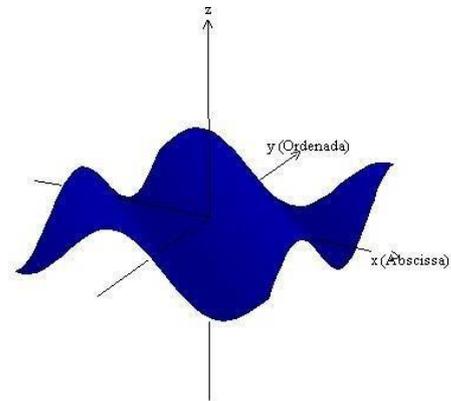


Figura 19 Função Seno $(x+y)$ modelada em 3D visualização em modo espectral.

Fonte: Autoria Própria.

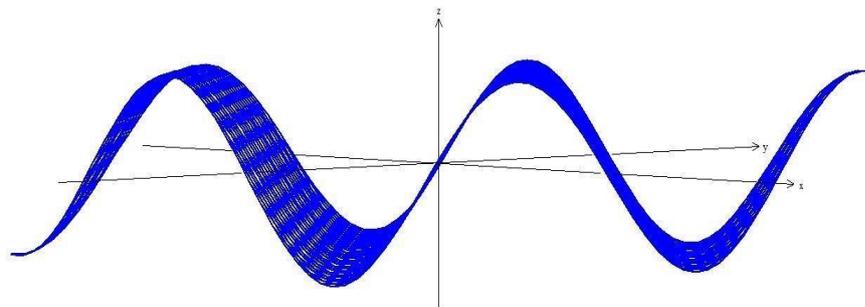


Figura 20 Gráfico da função seno modelado em 3D visto de um ângulo frontal

Fonte: Autoria Própria.

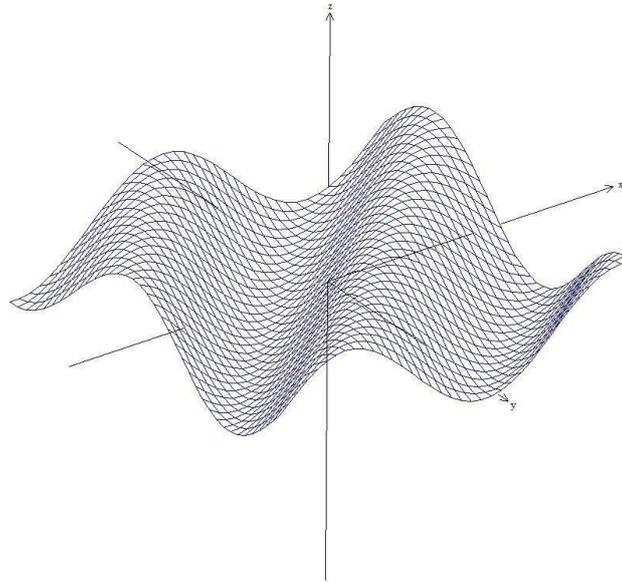


Figura 21- Gráfico da função seno modelado em 3D visto de um ângulo inferior

Fonte: Autoria Própria.

O importante é destacarmos a utilização das malhas poligonais, que é um dos métodos mais utilizados para a modelagem 3D, este método aproxima uma superfície através de uma malha poligonal normalmente através de triângulos e retângulos, na construção de Gráficos tridimensionais e na construção e renderização de objetos.

5.2.2-Representação da função Exponencial (x, y) com winplot.

Da mesma forma que modelamos a função seno no software winplot, utilizaremos para modelar a função exponencial, da somatória de valores x (Abscissa) com valores y (Ordenada), a utilização da soma dos valores é uma maneira de identificarmos e utilizarmos tanto valores de x , quanto valores de y , aplicados na função exponencial. A sequência de figuras abaixo demonstra a modelagem da função em vários ângulos e tipos. Vale destacar que o modo como se foram inseridos os valores e todo o passo a passo para a obtenção dos resultados foi descrito em capítulos anteriores, e para não ficar repetitivo demonstro aqui só a amostra dos resultados obtidos. Mas devemos tomar cuidado quanto à sintaxe da função para o software, ao abrirmos a janela de inserção da função vamos digitar a função Exp; Respeitando dessa forma sua sintaxe. Foi aplicado em intervalo de (-6 a 6) para x e de (-6 a 6) para y , em seus máximos e mínimos, e a espessura da linha de 1 cm, modo padrão, de

cor alaranjada dando uma tonalidade de destaque e diferente função seno e um pouco mais forte.

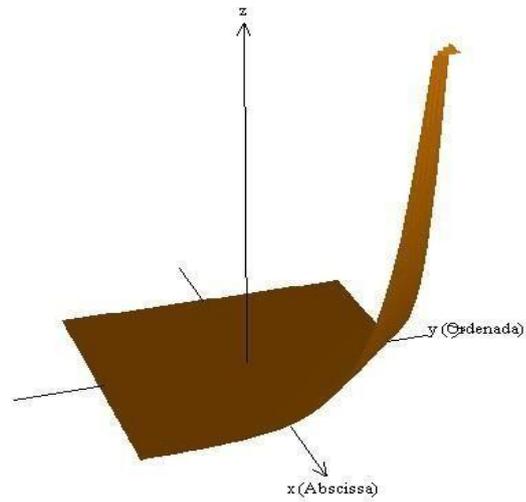


Figura 22- Função Exponencial modelada em 3D visualização em modo espectral.

Fonte: Autoria Própria.

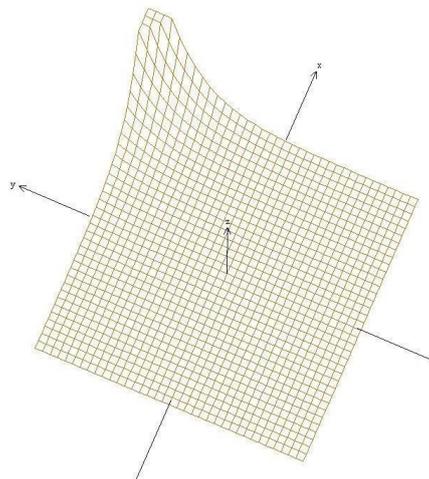


Figura 23:- Gráfico da função exponencial vista de um ângulo superior.

Fonte: Autoria Própria.

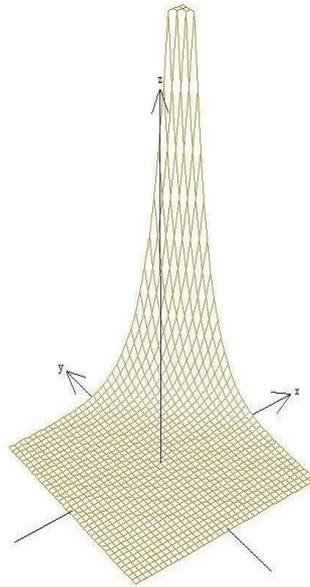


Figura 24- Gráfico da função exponencial vista de um ângulo lateral Fonte:

Autoria Própria.

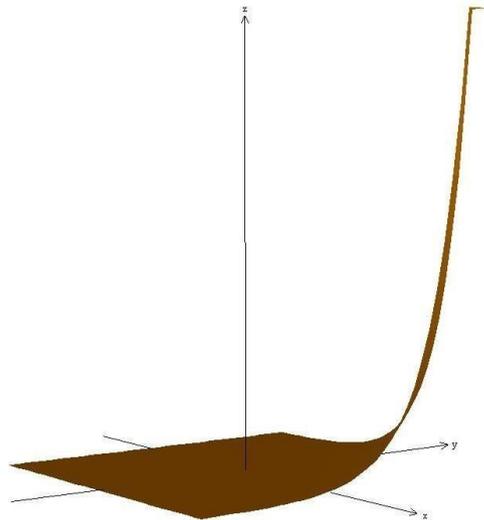


Figura 25- Função Exponencial modelada em 3D visualização em modo spectral vista de um ângulo lateral.

Fonte: Autoria Própria.

5.3-PROCEDIMENTOS DE REPRESENTAÇÃO 3DCOM O GEOGEBRA 3D.

Agora vamos utilizar outro software para realizarmos o modelamento tridimensional das funções seno e exponencial, este espaço é destinado à realização do procedimento.

Toda uma sequência de utilização do software geogebra 3D foi demonstrado em capítulos anteriores, vamos destacar aqui a penas o momento onde o modelamento 3D é utilizado. A figura abaixo mostra o item para a escolha da visualização tridimensional das funções modeladas. Primeiro clicamos em exibir e logo depois em Janela de visualização 3D. Assim abrirá do lado mais a direita da tela do programa a opção de visualização tridimensional que desejamos.

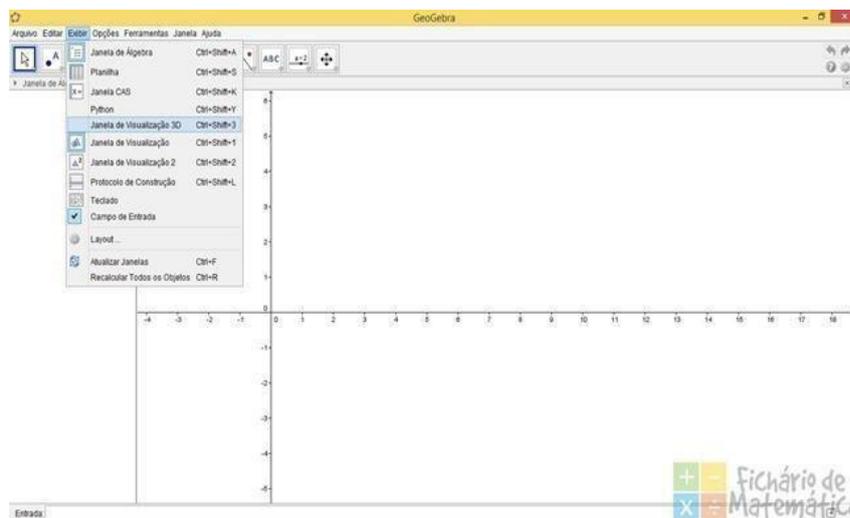


Figura 26-Janela para a visualização do gráfico da função em 3D.

Fonte: <http://www.fichariodematematica.com>

Após a realização desse processo, iniciaremos a inserção das funções a serem modeladas, o item **entrada**, que se encontra na tela principal dos *software* será inserido as funções, mas devemos destacar mais uma vez a sintaxe de funções do programa específico, no caso do Geogebra 3D, já foram detalhadas as sintaxes para algumas das principais funções matemáticas, inclusive as utilizadas para a realização desse trabalho, a função Seno tem como entrada: **Sin()**, e a função exponencial: **Exp.()**. Mais uma vez iremos inserir o somatório das variáveis x e y , para tomarmos uma dimensão mais exata de ambas às variáveis em um espaço tridimensional. Assim iremos inserir no item entrada **Sin(x+y)** para

a função Seno e **Exp. (x+y)**, para a função exponencial. A sequência de imagens abaixo, demonstrará a realização do trabalho feito utilizando o software geogebra3D, assim podemos fazer posteriormente uma comparação detalhada entre os softwares, é importante destacar que esse software utilizado é novo e está em fase inicial, para desenvolvimentos de métodos de visualização tridimensional.

5.3.1-Representação da função Seno.(x, y) com Geogebra 3D.

Agora iniciaremos a modelagem tridimensional da função seno, com a utilização do software matemático Geogebra. A figura abaixo foi obtida através de uma função do teclado chamada *Print* (Função que salva a imagem que esta sendo gerada pelo monitor), pois ainda não esta habilitada à função salvar para imagens tridimensionais, e sim apenas uma visualização.

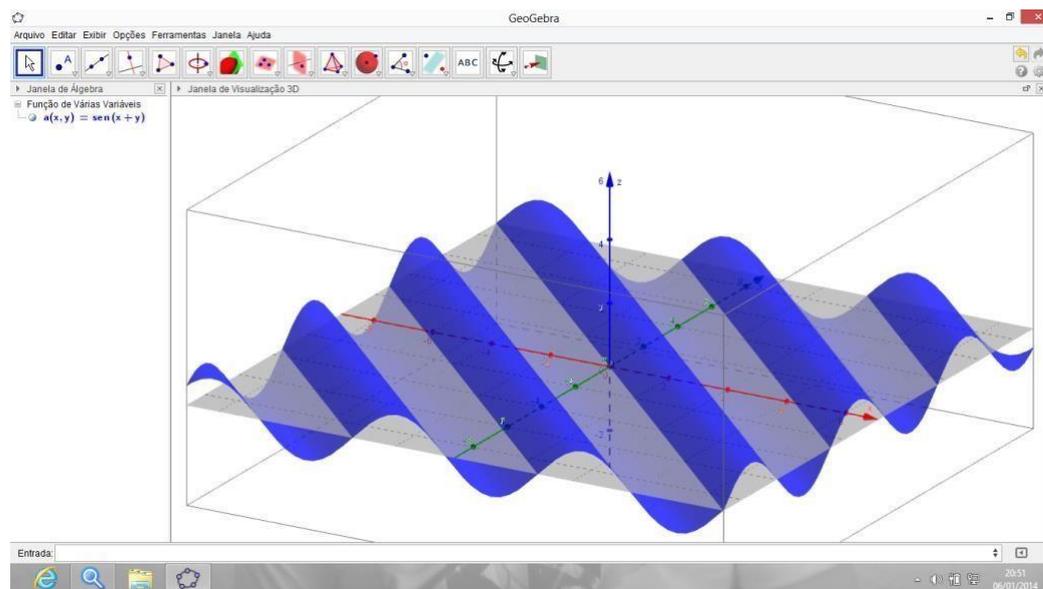


Figura 27- Gráfico da função seno (x+y) modelada em 3D com o Geogebra3D

Fonte: Autoria Própria.

Após a translação de pontos de x sobre o eixo y , e de pontos y sobre o eixo x , foi observado o comportamento do gráfico, as figuras abaixo demonstram, podemos perceber um pequeno deslocamento, para ambos os lados.

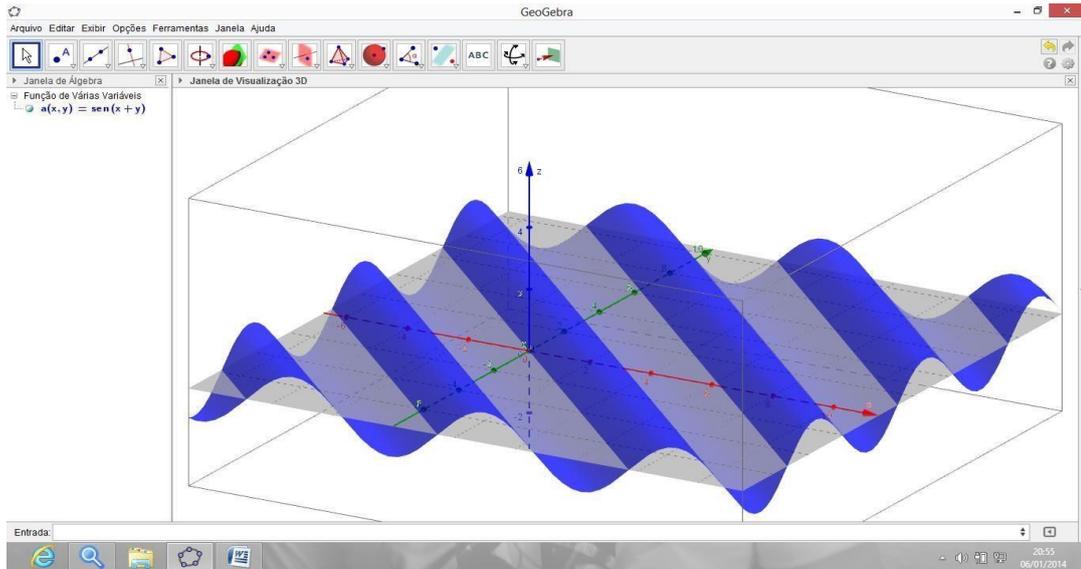


Figura 28- Gráfico da função seno $(x+y)$, após a translação de pontos do eixo(x) sobre o eixo (y) modelado em 3D com o Geogebra.

Fonte: Autoria Própria.

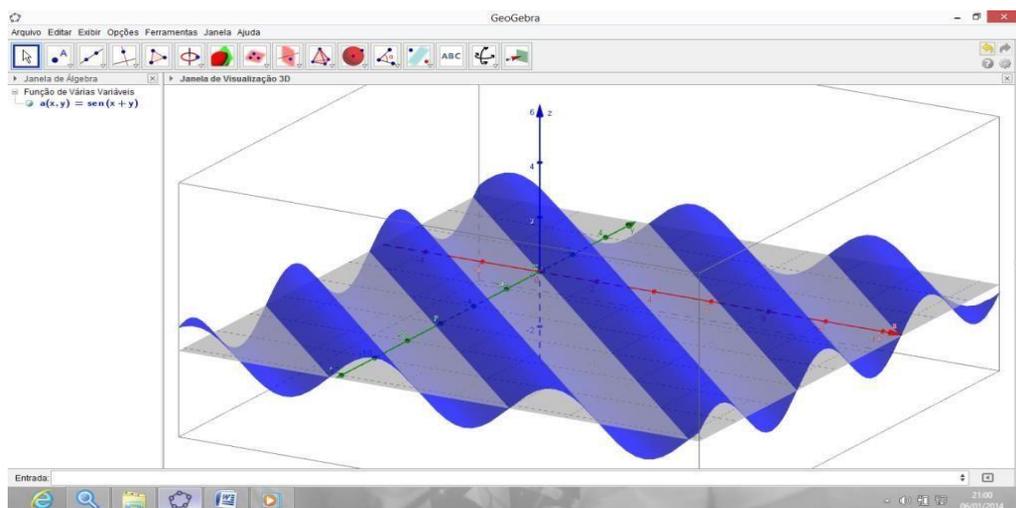


Figura 29- Gráfico da função seno $(x+y)$, após a translação de pontos do eixo(y) sobre o eixo (x) modelado em 3D com o Geogebra.

Fonte: Autoria Própria.

5.3.2-Representação da função Exponencial. (x,y) com Geogebra 3D.

Da mesma maneira que realizamos a modelagem da função seno anteriormente, iremos utilizar método igual para a função exponencial. A sequência de figuras abaixo demonstra os resultados obtidos com a modelagem tridimensional.

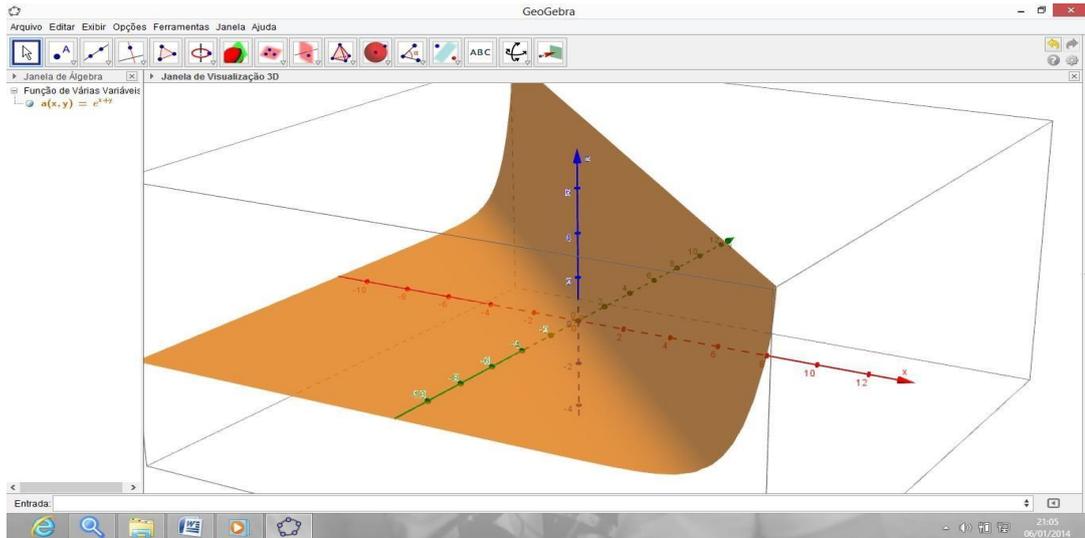


Figura 30 Gráfico da função seno (x,y) modelada em 3D com o Geogebra

Fonte: Autoria Própria.

Os mesmos procedimentos realizados com a função seno foram observados aqui, após a translação de pontos de x sobre o eixo y , e de pontos y sobre o eixo x , foram observados os comportamento do gráfico.

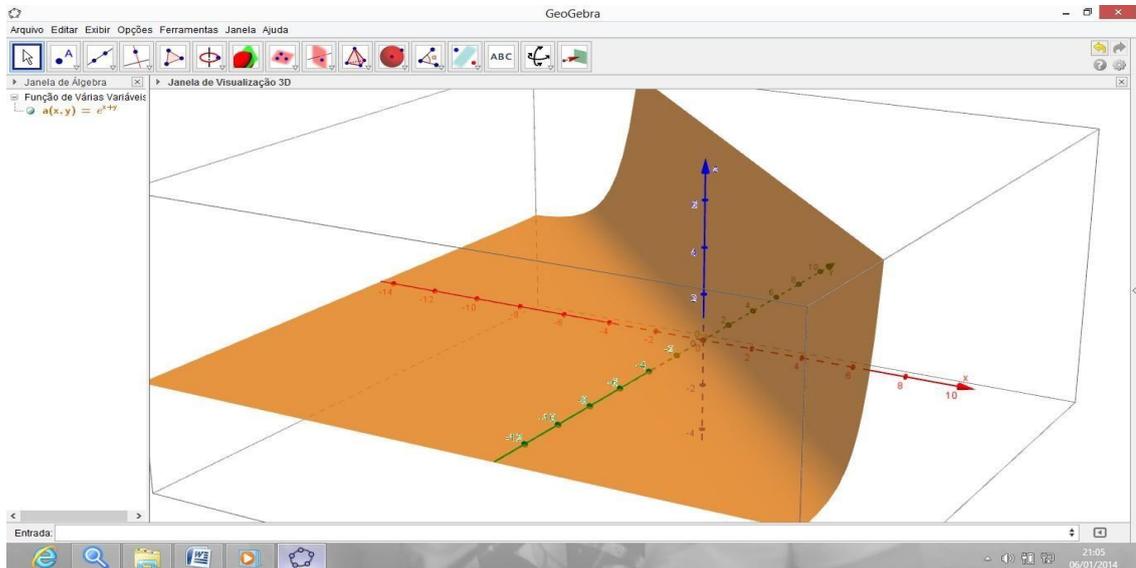


Figura 31- Gráfico da função Exponencial (x,y) , após a translação de pontos do eixo (x) sobre o eixo (y) modelado em 3D com o Geogebra

Fonte: Autoria Própria.

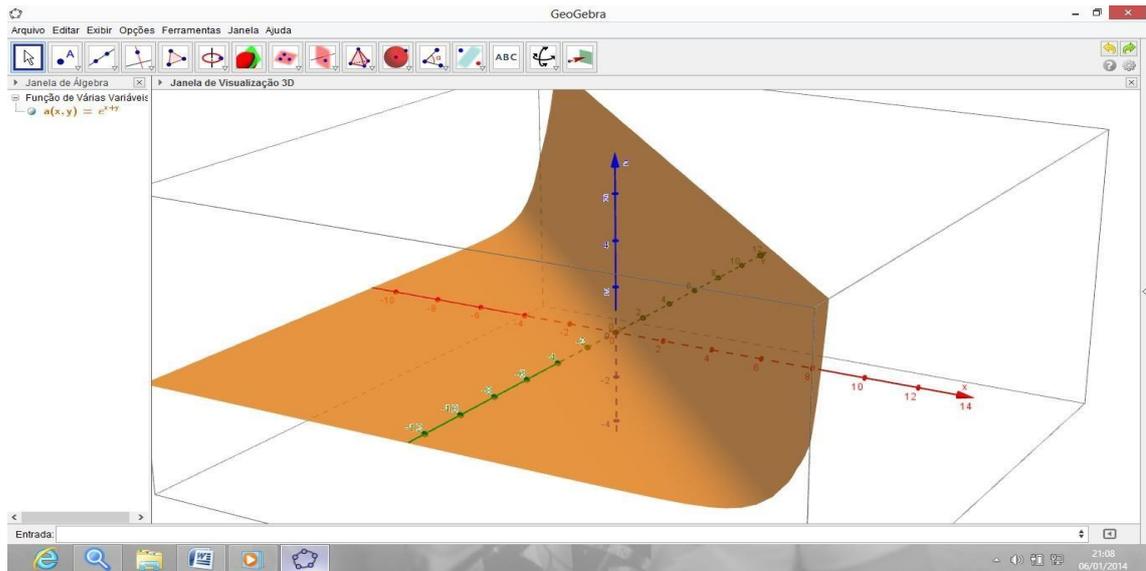


Figura 32 Gráfico da função seno $(x+y)$, após a translação de pontos do eixo(y) sobre o eixo (x) modelado em 3D com o Geogebra.

Fonte: Autoria Própria.

6-COMPARAÇÃO DOS SOFTWARES DE REPRESENTAÇÃO 3D PARA AS FUNÇÕES SENO E EXPONENCIAL.

Ambas as funções foram devidamente modeladas tanto no Winplot quanto no Geogebra 3D, desta forma as suas aplicações em ambientes educacionais voltados a área matemática é de suma importância, de acordo com as suas capacidades de realizarem as tarefas que a eles foram destinados. Contudo, há algumas diferenças que serão observadas cautelosamente. Este capítulo traz um breve comentário sobre a avaliação de ambos os *softwares*, e uma tabela comparativa.

6.1-INTERFACE.

A interface do *software* é importante dentro do processo de modelagem, uma interface robusta proporciona a boa visualização da função modelada é um método de acesso mais facilitado e rápido as funções disponíveis no software.

Os *softwares* trabalhados possuem boa interface, mas o winplot se destaca quanto à geração do gráfico, ele é simples e objetiva tanto na busca de funções quanto na geração final do gráfico. Possui uma janela principal com dois ícones de escolha, sendo um para gerar o gráfico e o outro de ajuda com dicas e um relato do *software*. Já o Geogebra 3D tem

sua interface mais completa, possui em sua tela principal um conjunto de funções bem detalhado, quanto ao tratamento de gráficos tridimensionais alguns requisitos são mais difíceis de ser cumprido, esse será avaliado no subitem mais adiante.

6.2-FERRAMENTAS.

As ferramentas disponibilizadas para a criação e edição de componentes do gráfico, que foram utilizadas em ambos os sistemas de modelamento cumpriram de forma perfeita a realização do trabalho, a diferença que se podem observar foi quanto à rotação do gráfico e o modo de salvamento das figuras, enquanto o winplot conseguia rotacionar perfeitamente todos os gráficos, o Geogebra 3D não conseguia realizar tal tarefa, e em relação ao salvamento da imagem gerada, podemos observar que o winplot tanto salvava a imagem para ser reaberta com o próprio programa quanto exportava a imagem para outro formato desejado, a exemplos PNG, que foi o utilizado para salvar imagens apresentado nesse trabalho. Já o Geogebra 3D permitia o salvamento apenas do gráfico em seu plano bidimensional, desta maneira, foi realizada uma análise bem mais detalhada quanto ao comportamento do software em sua modelagem tridimensional, e após a análise pude perceber que por se tratar de um software que esta em sua fase de criação para ambientes tridimensionais, ele permitia apenas a visualização e manipulação de algumas ferramentas, mas que não mudaria o resultado final da realização do trabalho. Assim foi necessária a utilização de uma ferramenta computacional já citada nesse capítulo, o *Print scren* (ferramenta computacional que permite o salvamento da imagem atual do monitor).

As demais características de ferramentas se assemelham, tais como as mudanças de cores, translação de pontos, introdução de pontos e formatação, tamanhos e formato do gráfico dentre outras.

Houve casos onde não foram utilizadas as mesmas ferramentas para a realização de determinada, a exemplos da visualização em malhas do gráfico, já que em um software o gráfico é modificado no outro o plano sofre modificação, de malhas.

6.3-COMPARAÇÃO.

Aqui será apresentado um quadro comparativo, onde será realizada a comparação dos *softwares*, e iremos informar qual deles é mais eficaz na realização de algumas funções. Os

itens utilizados serão os mais simples, e foi tomada como base a velocidade de realização de tarefas e disponibilidade, simplicidade e uso de ferramentas. Quando não houver distinção, o campo será preenchido com “Ambos”.

Quadro 3: Comparação entre os softwares, no desenvolvimento de algumas ferramentas

| Ferramentas utilizadas | Software que se destacou |
|---|---------------------------------|
| <i>Visualização</i> | <i>Winplot.</i> |
| <i>Rotação</i> | <i>Winplot.</i> |
| <i>Translação</i> | <i>Ambos.</i> |
| <i>Interface do software</i> | <i>Geogebra 3D.</i> |
| <i>Introdução/edição de cores</i> | <i>Ambos.</i> |
| <i>Métodos de salvamento e exportação</i> | <i>Winplot.</i> |
| <i>Busca e acessibilidade a ferramentas</i> | <i>Geogebra 3D.</i> |

Fonte: Autoria própria

7- CONCLUSÃO.

A realização desse trabalho lapidou meus conhecimentos e supriu os desejos e curiosidades de como seria gráficos de funções matemáticas, projetadas em um ambiente real, funções essas que em contexto matemático se torna muito difícil para alunos do ensino médio. Creio que assim como eu muitos ficam instigados a saber como é o comportamento de tais funções no mundo real em que vivemos as experiências aqui adquiridas durante a utilização da modelagem tridimensional, com o auxílio de dois *softwares*, que são poderosos quanto o modelamento de gráficos, o winpot que é uma ferramenta simples, mas bem efetiva na realização do trabalho, e já é pioneiro na realização de trabalhos com gráficos, inclusive com o espaço tridimensional, e o Geogebra 3D que esta se engatinhando em relação ao trabalho com gráficos tridimensional, mas é um potente gerador de gráficos bidimensionais, e podem ser utilizados para suprir as necessidades de alunos do ensino fundamental II, com a visualização de funções mais simples, e ensino médio com a visualização de funções um pouco mais complexas como a funções seno e exponencial, que

foram base para a realização desse trabalho, e o mais importante é que busquei trabalhar com *softwares* livres, ou seja não é preciso pagar para o seu uso, dessa forma podem ser utilizados por alunos que compõem variadas classes sociais, basta que ele tenha acesso a um computador, e professores que possam guiá-lo.

Durante o desenvolvimento desse trabalho um processo muito interessante foi utilizado, a renderização, que é um processo de conversão de dados de objetos modelados em um ambiente tridimensional, em imagens bidimensionais que dão a impressão da profundidade, causando uma ilusão do espaço tridimensional.

A utilização de dois softwares foi utilizada para demonstrar que a realização do trabalho pôde ser realizada de maneiras diferentes, existem softwares pagos que também seriam capazes de realizar tal trabalho, quanto a comparação o software winplot tem uma grande vantagem sobre o Geogebra 3D, quando se trata de modelagem 3D, mas os trabalho com o Geogebra 3D esta em sua fase inicial podendo tornar futuramente em uma ferramenta potente na área de modelagem tridimensional. Acredito que nos próximos softwares lançados, funções simples como salvar e algumas edições já serão implementadas, mas em outras áreas é um excelente software também.

De maneira mais sucinta houve a necessidade da utilização de uma ferramenta computacional devido à opção de salvamento da imagem do gráfico modelado no *software* Geogebra 3D não existir ainda, o *printscreen* foi utilizado, para salvar algumas imagens.

Assim avaliamos a importância da computação no âmbito educacional, e especificadamente na área de matemática, e vimos o crescente avanço do ensino da matemática com o avanço das tecnologias, e ira proporcionar a interação cada vez mais entre matemática e computação.

Portanto, destacaremos que para o desenvolvimento do trabalho a utilização de ambos os *softwares*, Winplot e Geogebra 3D, foram muito importantes em todo processo de modelagem e geraram um resultado bem satisfatório, proporcionando um bom entendimento do conceito de funções e a aplicação de seu gráfico no espaço tridimensional. Entretanto não podemos deixar de ressaltar que o winplot obteve melhor desempenho na execução do processo de modelagem, ate porque o Geogebra 3D, esta em sua fase de iniciação com trabalhos de modelamento em ambiente 3D.

REFERÊNCIAS

ARQUITETURA DIGITAL: A Realidade Virtual, suas Aplicações e Possibilidades.

Disponível em:

<http://www.coc.ufrj.br/index.php?option=com_content&task=view&id=1204&Itemid=23

>Acesso em: 10 jul. 2020.

CUNHA, G.; HAGUENAUER, C.; MARINS, V. **Realidade Virtual em Educação Criando Objetos de Aprendizagem com VRML**. A revista digital da CVA-RICESU, Rio de Janeiro – RJ, v.04, n.15, p.2-11, 2007.

DIM, C. A. **Modelagem de terrenos em ambientes virtuais 3D**. 2009.72f. Monografia (Licenciatura em Computação) - Universidade do Mato Grosso, COLÍDER, 2009.

ESPINHA, R.S.L. **Algoritmos distribuídos para ambientes virtuais de largaescala**. Rio de Janeiro, 2007. Monografia na Disciplina Algoritmos Distribuída-Departamento de Computação, PUCRJ. Rio de Janeiro, RJ, 2007.

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A: funções, limite, derivação e integração**. 6. ed. rev. e ampl. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2009.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**. 5 ed. Rio de Janeiro : LTC, 2001.

GOMES, A. S.; PADOVANI, Stephania. Usabilidade no ciclo de desenvolvimento de software educativo. In: Simpósio Brasileiro de Informática na Educação SBIE´2005, 2005 Juiz de Fora (MG). **Anais do Simpósio Brasileiro de Informática na Educação SBIE´2005, 2005**. v. 1.

KIRNER, C.; TORI, R. 2004 **Realidade Virtual: Conceitos, Tecnologia e Tendências**.

Em: VII Symposium on Virtual Reality. São Paulo, 2004

KIRNER, C.; SISCOOTTO, R.; TORI, R. **Fundamentos e Tecnologia de Realidade Virtual e Aumentada**. Apostila do Pré-Simpósio VIII Symposium on Virtual Reality, Belém-PA, n.1, p.2-34, 2006.

NETTO, A.V.; MACHADO, L.S.; OLIVEIRA, M.C.F. 2002. **Definições, Dispositivos e Aplicações**. Revista Eletrônica de Iniciação Científica, Porto Alegre: SBC, 2002

RIBEIRO, R. R. J. **Revisão bibliográfica de alguns métodos Numéricos para obtenção de zeros reais de funções Transcendentes e polinomiais**. 2012. 66f. Monografia (Bacharelado em Ciências e tecnologia) - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO, ANGICOS-RN, 2012

ROCHA, A.R.C.; CAMPOS, G.H.B. Avaliação da qualidade de software educacional. In: **Em aberto**. Brasília, ano 12, n. 57, jan/mar 1993. p. 32 – 44. Disponível em <<http://www.emaberto.inep.gov.br/index.php/emaberto/article/viewFile/845/757>>. Acesso em: 15 Junho 2020.

STEWART, James. **Cálculo**. 5 ed. São Paulo: Thomson Learning, 2006.

TEIXEIRA, A. C., BRANDAO, E.J.R. Software educacional: difícil começo. In: **Revista Novas Tecnologias na Educação – RENOTE**. Vol1. nº 1. CINTED/UFRGS, fev/2003. Disponível em <http://www.cinted.ufrgs.br/renote/fev2003/artigos/adriano_software.pdf> Acesso em: 12 Junho 2020.

Técnicas de animação em ambientes 3D. Disponível em: <http://www.ceart.udesc.br/revista_dapesquisa/.../animacao_ambientes_3D.pdf> Acesso em: 23 Junho. 2020.

VALENTE, José Armando. **Computadores e Conhecimento: repensando a educação. Por que o computador na educação**. Gráfica central da Unicamp, Campinas-SP, 1993