UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

ALGUNS ASPECTOS DAS TEORIAS MODIFICADAS DA GRAVITAÇÃO VIA FORMALISMO DE PALATINI

Adriano Rocha Soares

João Pessoa - PB

- 2020 -

Adriano Rocha Soares

ALGUNS ASPECTOS DAS TEORIAS MODIFICADAS DA GRAVITAÇÃO VIA FORMALISMO DE PALATINI

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos para a obtenção do título de doutor em Física, área de concentração: Física das Partículas elementares e campos

Orientador: Prof. Dr. José Roberto Soares do Nascimento

João Pessoa - PB

- 2020 -

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S676a Soares, Adriano Rocha.
Alguns aspectos das teorias modificadas da gravitação via formalismo de Palatini / Adriano Rocha Soares. - João Pessoa, 2020.
91 f. : il.

Orientação: José Roberto Soares do Nascimento.
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Gravitação Modificada. 2. Formalismo de Palatini. 3. Defeitos Topológicos. 4. Completeza geodésica. I. Nascimento, José Roberto Soares do. II. Título.

UFPB/BC

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de **Doutorado** do aluno **Adriano Rocha Soares**, candidato ao Título de Doutor em Física na Área de Concentração Física das Partículas Elementares e Campos.

Aos vinte e um dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e vinte, às 14:00, no Auditório da Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para examinar o candidato ao grau de Doutor em Física na área de Física das Partículas Elementares e Campos, **Adriano Rocha Soares**. A comissão examinadora foi composta pelos professores doutores: *José Roberto Soares do Nascimento* (UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, *Dionísio Bazeia Filho* (UFPB), *Roberto Menezes da Silva* (UFPB), *Tiago Homero Mariz do Nascimento* (UFAL) e *Diego Rubiera Garcia* (UCM). Dando início aos trabalhos, o Prof. José Roberto Soares do Nascimento comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para que o candidato fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de tese intitulado "*Alguns aspectos das teorias modificadas da gravitação via formalismo de Palatini*". Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o seguinte parecer: **"aprovado".** Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutor em Física na forma da lei. E para constar, eu, Danilo Wilson Lemos Menezes, redigi esta ata que vai assinada por mim e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **21 de fevereiro de 2020**.

Prof. Dr. José Roberto Soares do Nascimento
Orientador – PPGF/UFPB

Prof. Dr. Dionísio Bazeia Filho
PPGF/UFPB

Prof. Dr. Roberto Menezes da Silva
PPGF/UFPB

Prof. Dr. Tiago Homero Mariz do Nascimento
UFAL

Prof. Dr. Diego Rubiera Garcia
UCM

Dedico este trabalho à minha família.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus cuja graça e misericórdia me permitiram concluir este trabalho.

Agradeço à minha família pelo apoio, em especial, minha amada mãe, Maria Nerci Rocha Soares, e minha avó, Jovelina Soares. Aos meus irmãos: Dirceu Rocha Soares e Diego Rocha Soares. Agradeço à minha amada esposa, Hidayane Gonçalves da Silva, pelo amor e carinho, mas também por tornar o processo muito mais agradável. Agradeço aos meus sogros, José Hilário e Maria de Lurdes, por todo o apoio.

Agradeço profundamente ao meu orientador, Prof. Dr. José Roberto Soares do Nascimento, cuja orientação foi baseado no respeito, seriedade e responsabilidade. Agradeço pela paciência e orientação em todos esses anos de mestrado e doutorado.

Também agradeço profundamente ao meu amigo e colaborador Dr. Paulo José Ferreira Porfírio da Silva, que me ajudou muito através das orientações e muitas discussões que tivemos sobre física.

Agradeço ao Prof. Dr. Gonzalo J. Olmo pela coorientação que foi fundamental na construção deste trabalho.

Agradeço ao Prof. Dr. Albert Yu. Petrov pela colaboração, pelas aulas e pela ajuda ao longo do doutorado.

Agradeço aos colegas do doutorado Tiago Moy, Cristino José, Ricardo Vitória, Antônio José e Adriano Oliveira, pelas conversas descontraídas nas pausas para o café. Agradeço também ao meu amigo Mariano, pelo café e pelas conversas agradáveis.

Agradeço ao departamento de física da UFPB, cuja excelência dos profissionais o tornam um lugar profundamente inspirador.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (**Capes**), pelo apoio financeiro e o importantíssimo trabalho que realiza na construção de uma ciência nacional baseada na excelência e em valores democráticos.

Resumo

Embora a teoria da Relatividade Geral de Einstein tenha passado pelos chamados testes clássicos com sucesso, ao longo do tempo, medidas cada vez mais precisas das variações de temperatura na radiação cósmica de fundo e pesquisas envolvendo galáxias e aglomerados de galáxias mostraram uma série de fenômenos que até o momento não foram explicados pela Teoria da Relatividade Geral; entre eles, podemos citar os mais paradigmáticos: a expansão acelerada do universo e a não prevista curva de rotações de galáxias. Além disso, Penrose e Hawking mostraram que para certos tipos de fontes de matéria, a teoria prevê singularidades geodésicas. Numa singularidade a capacidade de fazer medidas é perdida e o conceito de evento (onde e quando) não faz sentido, portanto, numa teoria física, singularidades representam uma limitação. Em face desses problemas, surgiu a pergunta natural: será que podemos formular uma teoria da gravidade capaz de evitar as singularidades, explicar as observações e, no limite apropriado, recair na teoria da Relatividade Geral? De fato, houve muitas propostas. Nesta tese, vamos explorar duas delas: uma teoria $f(R)$ da gravidade e a teoria Born-Infeld da gravitação. Vamos abordar esses modelos através do formalismo métrico-afim, também chamado de formalismo de Palatini. Nessa formulação, a conexão é, *a priori*, independente da métrica, em contraste com o formalismo métrico, onde a conexão depende das componentes da métrica. Numa teoria alternativa da gravitação, em geral, essas duas formulações não são equivalentes. No vácuo, os dois modelos que vamos tratar reduzem-se à Relatividade Geral mais uma constante cosmológica efetiva, quando tratadas via formalismo de Palatini; por isso, precisamos de fontes de matéria para obtermos novas soluções. Nessa perspectiva, vamos acoplar o tensor energia-momento do monopolo global e do modelo sigma não linear à gravidade modificada. Vamos obter soluções muito interessantes e bem diferentes daquelas previstas pela Relatividade Geral. Entre elas, destacamos soluções geodesicamente completas, ou seja, sem singularidades, como buracos negros regulares e buracos de minhoca atravessáveis.

Palavras-Chave: Gravitação modificada. Formalismo de Palatini. Defeitos Topológicos. Completeza geodésica.

Abstract

Although Einstein's theory of General Relativity has successfully passed for the classical tests along the time. Increasingly accurate measurements of temperature variations in cosmic background radiation and research involving galaxies and galaxy clusters have been shown a series of phenomena that have not yet been explained by the general theory of relativity; among them, we can mention the most paradigmatic of them: the accelerated expansion of the universe and the unexpected curve of galaxy rotation. In addition, Penrose and Hawking showed that for specific kinds of matter sources, the theory predicts geodesic singularities. At the singularity, General Relativity breaks down, namely, the theory is not valid at this level because one cannot take physical measurements since the geometrical quantities blow up at the singularity. On the face of these problems, the natural question comes up: can we formulate a theory of gravity capable of avoiding the singularities, explain the cosmological observations and, within the appropriate limit, reduces to the theory of General Relativity? In fact, there has been many proposals. In this thesis, we will explore two of them: a $f(R)$ theory of gravity and Born-Infeld gravity. We will restrict our analysis to these models in metric-affine approach, also called Palatini formalism. In this formulation, the connection is, *a priori*, independent of the metric, in contrast to the metric formalism, where the connection depends on the metric components. In an alternative theory of gravity, in general, these two formulations are not equivalent. In the absence of matter, the two models we are going to deal with reduce to General Relativity plus an effective cosmological constant, so we need matter sources to get new solutions. In this perspective, we will couple the energy-moment tensor of the global monopole and of a non-linear sigma model to modified gravity. We will obtain very interesting solutions and very different from those provided by General Relativity. Among them, we highlight geodesically complete solutions, that is, without singularities, such as regular black holes and traversable wormholes.

Keywords: Modified Gravity. Palatini formalism. Topological defects. Geodesic Completeness.

Publicações

- J. R. Nascimento, G. J. Olmo, P. J. Porfírio, A. Y. Petrov, and **A. R. Soares**, *Global monopole in Palatini $f(R)$ gravity*, Phys. Rev. D 99, 064053 (2019).

- J. R. Nascimento, G. J. Olmo, P. Porfírio, A. Y. Petrov, and **A. R. Soares**, *Nonlinear σ-models in the Eddington-inspired Born-Infeld Gravity*, arXiv: hep-th/1912.10779. (Aceito para publicação em Phys. Rev. D, 2020)

Sumário

Lista de Figuras **iv**

1 Introdução **10**

2 Introdução à Relatividade Geral e a solução de Scharzschild com o Monopolo Global **16**

2.1 Derivada Covariante 17

2.2 Transporte Paralelo e geodésicas 20

2.2.1 O tensor de Riemann 21

2.3 As Equações de campo da Relatividade Geral 22

2.4 A solução do Monopolo Global 24

2.4.1 Geodésicas associada a um espaço-tempo esfericamente simétrico . . . 27

3 Sobre a Completeza Geodésica do Espaço-Tempo e a Equação de Raychaudhuri **29**

3.1 Congruências geodésicas 31

4 Teorias Modificadas da Gravitação no Formalismo Métrico-Afim **37**

4.1 Equações de campo para Teorias $f(\mathcal{R})$ no formalismo de Palatini 38

4.2 O modelo Born-Infeld da gravitação 42

4.3 Solução Estática e Esfericamente Simétrica 45

5 Monopolo Global na Teoria $f(\mathcal{R})$ da Gravitação **47**

5.1 Monopolo Global na gravitação $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} - \lambda\mathcal{R}^2$ 47

5.2 Geodésicas 50

5.3 Partículas testes no espaço-tempo do MG 52

5.4 Geodésicas nulas 53

5.5 Completeza geodésica 57

5.5.1 Completeza no caso $\lambda < 0$ 58

5.5.2 Completeza no caso $\lambda > 0$ 59

6 Modelo Sigma não Linear numa Teoria Born-Infeld da Gravitação **62**

6.1 Modelo Sigma não Linear 64

6.2 Modelo canônico 66

6.2.1 Buraco de minhoca de Ellis Topologicamente Carregado 67

6.3 Lei de Potência 69

6.3.1 Lei de Potência com $\epsilon < 0$ 71

7 Conclusão **77**

Referências Bibliográficas **80**

Lista de Figuras

2.1 Comutador das derivadas covariantes 21

5.1 Função $r(x)$ dada pela Eq.(5.5). Neste gráfico nós estabelecemos $\alpha = 0.1$. . . . 48

5.2 Funçao $A(x)$ para os três casos destacados, (i), (ii) e (iii). 50

5.3 Regiões nas quais os parâmetros devem está para que a solução atenda às condições (i), (ii) e (iii). Veja que a região (ii) se trata da linha que separa as regiões (i) e (iii) 51

5.4 Potencial efetivo para diversos valores de L. Nós estabelecemos $\alpha = 0.2$ e $\frac{\lambda}{(GM)^2} = -0.18$. 53

5.5 Órbitas circulares para valores diferentes de $\frac{L}{GM}$. Nós a obtemos a partir da equação $\frac{dV_{\text{eff}}}{dx} = 0$. Os pontos pretos indicam as coordenadas da MOCE. O lado esquerdo corresponde às órbitas instáveis e o direito, estáveis. 53

5.6 Potencial efetivo para vários valores de $\frac{\lambda}{(GM)^2}$. Nós tomamos $\alpha = 0.2$ e $\frac{L}{GM} = 5$. Note que $\lambda = 0$ é o caso da TRG. 54

5.7 Potencial efetivo V_{ef} para $\lambda > 0$. Independentemente de L, ele mantém a forma, muito embora o pico decresça quando $\frac{L}{GM}$ decresce. O gráfico menor ilustra o comportamento próximo à $x = 0$. Observe que isso não ocorre para $\lambda < 0$, também não ocorre na solução de Schwarzschild. Nesta figura nós estabelecemos $\alpha = 0.2$ e $\frac{\lambda}{(GM)^2} = 0.18$. 54

5.8 Comportamento do parâmetro afim no limite $x \to 0$. Nós tomamos $\alpha = 0.8$ e $\lambda = 0.7$. 60

6.1 Em (a) construímos o gráfico de $z(y)/r_{min}$: A linha cheia corresponde a $\kappa\eta = 0.2$, e a pontilhada, $\kappa\eta = 0.4$. Em (b) desenhamos o diagrama de imersão para $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $t =$ constante. Nós escolhemos $\kappa\eta = 0.2$. O lado superior (azul) corresponde a $x > 0$ e o inferior (amarelo) corresponde a $x < 0$. 69

6.2 Gráfico de $r^2(x)$ para dois valores de ϵ. Para esta ilustração, tomamos $\kappa^2\eta^2 = 0.2$, $Q = 1$. 70
6.3 Constante de regularização δ para vários valores de η. Estabelecemos $Q = 1$ e $\kappa^2 = 1$. Observe que $\eta = 0$ corresponde ao caso eletrostático. 74
6.4 (a) Função δ em termos de $|\epsilon|$ e β com $\kappa^2 = 1$. (b) Valores do parâmetro λ em termos de β e ϵ com $\kappa^2 = 1$. 75

Capítulo 1

Introdução

Embora a gravidade seja a primeira interação conhecida e estudada pela humanidade, ela ainda permanece como a mais misteriosa. Somente com os trabalhos de Isaac Newton enormes avanços científicos na compreensão dessa interação começaram a ser dados. Para Newton, a gravidade é uma força do tipo ação à distância; isso significa que a força de atração entre dois ou mais corpos massivos é instantaneamente transmitida, ou seja, se miraculosamente um dos corpos desaparecer, os demais corpos instantaneamente deixarão de ser atraídos pelo corpo que desapareceu. Juntamente com as três leis de Newton, a lei da gravitação universal compõe o arcabouço teórico que permitiu unificar e explicar as leis de Kepler para os movimentos de corpos celestes bem como a queda de corpos nas vizinhanças da terra. Com exceção de alguns poucos casos, a Mecânica Newtoniana conseguiu prever e explicar quase todos os fenômenos relacionados ao movimento e a gravidade por mais de 200 anos. É importante destacar que as leis de Newton são válidas apenas nos chamados referenciais inerciais, definidos a partir da primeira lei de Newton. As transformações que relacionam as coordenadas de espaço e tempo entre dois referenciais inerciais na mecânica clássica são chamadas de transformações de Galileu (TG), a partir dela pode-se mostrar que as leis da mecânica são as mesmas em qualquer referencial inercial, esse é o conteúdo do *princípio de relatividade de Galileu*.

No final do século XIX, os físicos estavam com um problema. Sabia-se, a partir dos trabalhos de Maxwell e Hertz[1], que a luz era uma onda eletromagnética que no vácuo apresenta uma velocidade de propagação c; na época, contudo, pensava-se que a onda eletromagnética não se propagava no vácuo, mas sim em relação a um meio que eles denominaram de éter. Sendo assim, as equações de Maxwell só seriam válidas no referencial privilegiado do éter. Se isso fosse verdade, tal referencial poderia ser detectado através de experiências envolvendo a

[1] James Clerk Maxwell (1831-1879) previu teoricamente a existência de ondas eletromagnéticas e Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894) as produziu artificialmente.

luz. Muitas tentativas para detectar o referencial das equações de Maxwell foram realizadas[2], mas nenhuma delas o encontrou [2]. Em suma, Einstein resolveu o problema a partir de dois postulados [2]:

- **Princípio de relatividade**: *As leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais. Não existe nenhum sistema inercial preferencial.*
- **Princípio de constância da velocidade da Luz**: *A velocidade da luz no vácuo tem o mesmo valor c em todos os referenciais inerciais.*

As implicações desses dois postulados mudaram profundamente a forma como os físicos enxergavam a natureza do, até então, espaço e o tempo. O princípio de relatividade de Galileu foi substituído pelo princípio de relatividade, que engloba toda física, inclusive a teoria eletromagnética. As transformações de Galileu (TG) foram substituídas pelas transformações de Lorentz (TL). Na TL, as coordenadas de espaço e tempo estão relacionadas e através dela pode-se mostrar que o conceito de simultaneidade é relativo; portanto, o intervalo espacial, que é um locus de pontos simultâneos, também é relativo. Assim nasce a Teoria da Relatividade Restrita (TRR). Com o advento da TRR os conceitos separados de espaço e tempo deram lugar ao conceito de espaço-tempo, uma "arena" onde desenrolam-se todos os fenômenos físicos. A geometria dessa arena é descrita pela métrica plana de Minkowski [3, 4].

A TRR estabelece que a velocidade da luz no vácuo é o limite superior para a velocidade de transmissão de informação, o que mostra que a TRR permanecia incompatível com a gravitação newtoniana, que pressupõe uma interação do tipo ação à distância. Para resolver esse problema, Einstein partiu de um fato experimental evidenciado por Galileu, trata-se da igualdade entre massa inercial e massa gravitacional. O raciocínio delineado a partir dessa igualdade permitiu estabelecer uma relação entre gravidade e referenciais acelerados. Por outro lado, é possível mostrar que a geometria relacionada à referenciais não inerciais é curva, e não euclidiana. Nessa perspectiva, Einstein abandonou a ideia de um espaço-tempo absoluto, ou seja, que não é influenciado pela distribuição de matéria, em favor de um espaço-tempo curvo. Nesta interpretação, a gravidade não é uma força e sim a manifestação da curvatura do espaço-tempo; surge, então, a Teoria da Relatividade Geral de Einstein (TRG). Matematicamente, a geometria do espaço-tempo na TRG é caracterizada pelo tensor de Riemann que acopla-se à matéria, re-

[2]Entre as quais, a mais conhecida é o experimento de Michelson-Morley [1], que com auxílio de um interferômetro tentou sem sucesso detectar o movimento da terra em relação ao referencial privilegiado chamado de éter.

presentado pelo tensor energia-momento, através das equações de Einstein. Einstein reportou a TRG em 1915 e desde então a teoria tem explicado em uma ampla faixa de escala muitos fenômenos gravitacionais, principalmente aqueles relacionados ao nosso sistema solar. As duas últimas verificações estão relacionadas à existência de buracos negros. A primeira, reportada em 2016 pela colaboração LIGO [5], foi a detecção de ondas gravitacionais oriundas da colisão de dois buracos negros. Essa observação demonstra que, de fato, a interação gravitacional leva um tempo finito para se propagar, ao contrário do que previa a gravitação newtoniana. A segunda, reportada em 2019, foi a primeira foto de um buraco negro (na verdade, a sombra do buraco negro) capturada pela colaboração Event Horizon Telescope [6].

No entanto, nas últimas décadas, o progresso científico e tecnológico propiciado pela própria TRG têm levantado questionamentos sobre o limite de validade desta teoria. As questões são de natureza teórica e observacional. Pelo lado observacional, o modelo cosmológico padrão, denominado também de ΛCDM [7], pressupõe a existência da energia escura, um fluído de pressão negativa que preenche todo o universo e que é responsável pela sua expansão acelerada. A proposta mais simples para a energia escura poderia ser a bem conhecida constante cosmológica, o problema é que o valor previsto pela física de partículas para a constante é 120 ordens de grandeza maior do que o valor observado [8]. Além disso, baseado em pesquisas envolvendo galáxias e aglomerado de galáxias [9, 10], o modelo ΛCDM requer a existência de outra componente exótica, a matéria escura. Juntas, as densidades de matéria e energia escura respondem por aproximadamente 96% da densidade total de energia do universo; nos 4% restantes estão a matéria bariônica e uma parte ínfima de radiação [11, 12]. O modelo ΛCDM também pressupõe o paradigma inflacionário [13], uma expansão exponencial do universo logo em seus instante iniciais, a fim de resolver os chamados problemas cosmológicos, dentre os quais, podemos citar: o problema da chateza do universo (curvatura nula), o problema da super abundância de monopolos magnéticos (eles ainda não foram observado, mas teoricamente deveriam) e a singularidade Big Bang.

Do ponto de vista teórico, já é esperado que em alguma escala de energia, próximo à escala de Planck, a TRG deva ser substituída por uma teoria quântica da gravitação (TQG) que, por sua vez, resolveria o problema da singularidade. Apesar de todos os esforços realizados nas últimas décadas, até a presenta data não há uma completa TQG . Essas, entre muitas outras questões, não têm uma explicação natural a partir dos dois fundamentos do modelo cosmológico padrão, a saber, a TRG e a teoria quântica de campos. Isto sugere que uma ou, talvez, até as

duas teorias devam ser ampliadas. Adotaremos neste trabalho um posicionamento menos conservador, admitindo a possibilidade de extensão da TRG. Vamos abordar o problema no regime de altas energias (regime de campo gravitacional forte), onde a TRG prevê singularidades.

As propostas mais comuns de alterações da TRG são baseadas na modificação da ação de Einstein-Hilbert. O procedimento consiste em substituir o escalar de curvatura R por uma função que envolve invariantes de curvatura de ordem superior $f(R, R^2, R\Box R, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}, ...)$ [14, 15, 16], a fim de enlarguecer a fenomenologia do setor gravitacional e acomodar teoricamente as observações cosmológicas. Esta abordagem é bem motivada por teorias de grande unificação, tais como supergravidade, onde correções quânticas, em um laço ou mais, exigem que a ação de Einstein-Hilbert seja corrigida com invariantes de curvatura de ordem superior [17, 18]. O problema que surge a partir dessa possibilidade é que as respectivas equações de campo são de ordem superior também, o que implica geralmente no aparecimento de graus de liberdade fantasmas [19, 20]. Por outro lado, esse problema pode ser evitado se abordarmos a teoria no formalismo métrico-afim, também conhecido como formalismo de Palatini[3] [22, 23, 24]. Esse formalismo se baseia no fato de que a conexão e a métrica são quantidades geométricas distintas e, portanto, devem ser obtidas a partir das equações de campo, em contraste com o formalismo métrico, no qual, a priori, a conexão depende das componentes da métrica. Embora ambos os formalismos, métrico e de Palatini, sejam equivalentes no contexto da TRG [25], em geral, numa teoria alternativa da gravidade isso não acontece. Sendo assim, apesar da literatura privilegiar a abordagem métrica, não há por enquanto uma motivação física para preferir uma em detrimento da outra. Na verdade, matematicamente, o formalismo de Palatini é mais atraente, visto a independência entre métrica e conexão. Além disso, no vácuo, as teorias $f(R)$, via formalismo de Palatini, reduzem-se às equações de Einstein acrescida de uma constante cosmológica, preservando assim importantes característica da TRG, como buracos negros estáticos. Nesse sentido, se desejamos obter novidades na dinâmica gravitacional a partir de teorias modificadas no formalismo de Palatini, devemos considerar a introdução de matéria.

Nesta tese, também vamos considerar uma formulação alternativa da gravidade que tem chamado bastante atenção nos últimos anos,a teoria Born-Infeld da gravidade. Esse modelo é baseado nos trabalhos de Eddington e nas ideias que levaram Max Born e Leopold Infeld à construção da eletrodinâmica não linear. Assim como a teoria $f(R)$, só teremos novidades na

[3] Apesar do nome, não foi Palatini que introduziu esse formalimo, e sim o próprio Einstein [21].

dinâmica gravitacional se considerarmos a presença de matéria. Entre muitas características importantes apresentadas por esse modelo, está a possibilidade de cosmologias sem singularidades, buracos negros regulares e soluções de buracos de minhoca atravessáveis, tudo isso sem necessidade de matéria exótica ou efeitos quânticos.

Nesta tese, vamos considerar fontes de matéria que, na TRG, geram configurações de campos gravitacionais conhecidos como defeitos topológicos. A razão para se esperar tais soluções reside nas teorias de grande unificação, que preconizam que, a partir do Big Bang, o universo se expandiu e esfriou, passando por uma série de transições de fase acompanhadas da quebra espontânea de simetria; como resultado, espera-se que tenha ocorrido o surgimento de defeitos topológicos [26, 27]. Particularmente, vamos considerar um específico tipo de defeito, o Monopolo Global (MG), caracterizado pela quebra espontânea de simetria $SO(3)$ em $U(1)$. Como não apresenta campos de gauge, sua principal forma de detecção se dá por via gravitacional. No contexto da TRG, o campo gravitacional desse tipo de defeito foi primeiramente obtido por Barriola e Vilenkin [28]. Além do MG, também vamos considerar o modelo sigma não linear (MSNL), cujo termo cinético, em geral, não é o termo canônico. Nós consideramos esta outra fonte de matéria (MSNL) porque ela está relacionada aos chamados k-defeitos [29], que tem atraído muita atenção nos últimos anos [30, 31, 32, 33].

Motivados pelas novas possibilidades que podem aparecer com uma teoria alternativa da gravidade, é interessante explorar que tipos de soluções o tensor energia-momento relacionado ao MG e o MSNL podem fornecer via formalismo de Palatini. No formalismo métrico, essa investigação já vêm sendo realizada a mais tempo. Em [34], Barros e Romero investigaram o MG na teoria Brans-Dicke da gravidade no limite de campo fraco. Em [35] a mesma metodologia foi usada, mas na teoria $f(R)$ e em [36] eles obtiveram a solução das equações de campo de maneira exata. O trabalho [35] ainda motivou uma série de outros trabalhos [37, 38, 39, 40]. No formalismo de Palatini, o MG foi recentemente estudado numa teoria Born-Infeld em [41], os autores mostraram, entre outros resultados, que a deflexão da luz no regime de campo forte é menor do que o previsto no trabalho de Barriola e Vilenkin [28]. Em todas essas soluções citadas, a respectiva solução corresponde à um espaço-tempo que apresenta singularidades.

Nesta tese vamos calcular o campo gravitacional gerado pelo tensor energia-momento associado ao MG e ao MSNL numa teoria $f(R)$ e numa teoria Born-Infeld através do formalismo de Palatini. Vamos obter soluções que diferem bastante não só daquelas previstas pela TRG, mas também daquelas obtidas no contexto da gravitação modificada via formalismo mé-

trico. Entre elas, vamos obter soluções que vão desde buracos negros singulares, passando por soluções de buracos negros regulares, até buracos de minhoca atravessáveis.

Esta tese está organizada da seguinte forma: No capítulo 2 fazemos uma introdução à TRG, destacando o papel da conexão e resolvendo a equação de Einstein para o tensor energia-momento do MG. No capítulo 3, apresentamos a definição de singularidade geodésica e introduzimos a equação de Raychaudhuri, que demonstra o caráter atrativo da TRG. No capítulo 4, apresentamos o formalismo de Palatini e o aplicamos a dois tipos de teorias modificadas da gravitação: $f(R)$ e Born-Infeld. No capítulo 5, apresentamos nossa contribuição original ao tema [42], calculamos o campo gravitacional gerado pelo tensor energia-momento correspondente à região exterior ao núcleo do MG. Entre outros resultados, a solução é conformalmente relacionada à métrica de Reissner- Nordström e, para valores específicos dos parâmetros, podemos ter soluções geodesicamente completas. No capítulo 6, apresentamos nossa segunda contribuição ao tema [43]. Nesse trabalho, consideramos um modelo sigma não linear como fonte de matéria numa teoria Born-Infeld da gravidade, obtivemos soluções de buracos negros regulares e buracos de minhoca atravessáveis para determinados valores dos parâmetros. Por fim, no capítulo 7, nós concluímos o trabalho destacando os principais resultados.

Ao longo deste trabalho, nós adotamos o sistema de unidades naturais, onde a constante de Planck e a velocidade da luz no vácuo são iguais a unidade: $\hbar = c = 1$. Todas as dimensões são dadas em termos de energia, cuja unidade básica adotada é o elétron-volt (eV):

$$[\text{Energia}] = [\text{Massa}] = [\text{Comprimento}]^{-1} = [\text{Tempo}]^{-1} \, .$$

Capítulo 2

Introdução à Relatividade Geral e a solução de Scharzschild com o Monopolo Global

Na TRG o espaço-tempo é um objeto geométrico dinâmico descrito matematicamente por um tensor métrico. Esta é a forma como Einstein vislumbrou a natureza do espaço-tempo. Antes disso, há pouco mais de 100 anos, o conceito Newtoniano de espaço e tempo absoluto ainda estava presente na física, não mais como o espaço e o tempo separadamente, mas como uma nova entidade, o espaço-tempo de Minkowski. Vamos discutir algumas das ideias que levaram Einstein a superar o conceito de absoluto e conceber o espaço-tempo como algo dinâmico e influenciado pela matéria. A ideia a partir da qual a TRG foi construída já era conhecida há muito tempo pelos físicos, trata-se da equivalência entre massa inercial e massa gravitacional. A primeira[1] é entendida como a resistência à mudança no movimento devido a atuação de uma força, enquanto que a segunda é uma medida da interação gravitacional, no mesmo sentido em que a carga elétrica mede a interação elétrica. Essa equivalência nada trivial é chamada de ***Princípio de Equivalência*** [2](PE). Outra implicação do PE é que um observador não pode discernir entre um referencial uniformemente acelerado e um campo gravitacional através de experiências locais[3] envolvendo a queda livre de partículas testes. Com o advento da TRR, massa e energia ganharam o mesmo status, em vista disso, Einstein generalizou o PE, de modo que não há como discernir entre um referencial uniformemente acelerado e um campo gravita-

[1] A massa inercial de um dado corpo é a razão entre a força resultante que atua sobre o corpo e a aceleração que ele adquiri, a famosa segunda lei de Newton.

[2] É por causa do PE que os corpos sujeitos apenas à ação do campo gravitacional caem em direção à terra com a mesma aceleração, independentemente de seu peso, conforme Galileu já havia observado.

[3] Nós destacamos que a experiência deve ser feita localmente porque o campo gravitacional não é homogênio, se a distância entre as partículas for grande podemos inferir a presença do campo gravitacional a partir da aproximação das partículas enquanto caem.

cional através de qualquer que seja a experiência, e não apenas a queda de corpos. Essa versão é chamada de ***Princípio de Equivalência de Einstein (PEE)***. O PPE torna sem sentido um dos principais desconforto na TRR, o conceito de referencial inercial (RI), um sistema de referência privilegiado, onde partículas que não interagem permanecem no seu estado de movimento. A questão é que, devido ao caráter universal da gravitação, não sabemos mais se uma possível aceleração deve-se a um referencial não inercial ou a um campo gravitacional. Como não há nada gravitacionalmente neutro que podemos estabelecer como referencial inercial, devemos abandonar essa ideia antagônica de referenciais inerciais e não inerciais. A alternativa adotada foi considerar como referencial partículas em queda livre, ou seja, sujeita apenas à interação gravitacional. Nesta perspectiva, a ideia de um sistema de referência global, como temos na TRR, deve ser abandonada também, visto que dois observadores em queda livre e que estão significativamente afastados parecem está acelerados um em relação ao outro; portanto, um observador não pode estender seu sistema de referência ao longo de todo o espaço-tempo. Estas implicações levaram Einstein a concluir que o espaço-tempo é curvo e a gravidade, na verdade, é a manifestação dessa curvatura. Partículas livres (sujeitas apenas à gravidade) deslocam-se ao longo de trajetórias denominadas de geodésicas, uma generalização do movimento retilíneo uniforme.

O objeto central que codifica a curvatura numa variedade chama-se conexão, a partir dela podemos construir a derivada covariante, que é a generalização da derivada parcial para espaços curvos. Ela também permite determinar a trajetória de partículas livres, ou seja, as geodésicas. Além disso, é a partir da conexão que o tensor de Riemann, a expressão matemática para a curvatura, é construído. Ela é realmente um objeto matemática que desempenha um papel central na compreensão de espaços curvos. Em seguida, baseados nas referências [25, 44], vamos introduzir os elementos essenciais à compreensão e estudo da TRG e suas extensões.

2.1 Derivada Covariante

A derivada parcial usual, ∂, não é uma grandeza tensorial, portanto não serve para compor uma descrição matemática de leis físicas. O operador diferencial que a substitui é a derivada covariante ∇, que apresenta as seguintes propriedades quando atua em tensores, digamos T e S:

(i) Linearidade: $\nabla(T + S) = \nabla T + \nabla S$,

(ii) Regra de Leibniz: $\nabla(T \otimes S) = (\nabla T) \otimes S + T \otimes (\nabla S)$,

(iii) Comuta com contrações: $\nabla_\mu \left(T^\lambda{}_{\lambda\rho}\right) = (\nabla T)^\lambda{}_{\lambda\rho}$,

(iv) Quando aplicada a escalares reduz-se à derivada parcial: $\nabla_\mu \phi = \partial_\mu \phi$.

A partir do item (ii), pode-se mostrar que a derivada covariante pode ser escrita como a derivada parcial mais um termo linear [25]. Para um vetor v^α, funciona da seguinte forma

$$\nabla_\mu v^\alpha = \partial_\mu v^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} v^\sigma \; ; \tag{2.1}$$

ou seja, para cada direção μ, a derivada covariante é dada pela derivada parcial mais uma correção oriunda de n matrizes $\Gamma^\alpha_{\mu\sigma}$ que são os coeficientes da **conexão**. A conexão não é um tensor; de fato, pode-se mostrar que as componentes da conexão dadas em dois sistemas de coordenadas diferentes, digamos x e x', estão relacionadas por

$$\Gamma'^{\nu}_{\mu\lambda} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\beta}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma}\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} - \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\beta}\frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\mu \partial x^\lambda}. \tag{2.2}$$

Assim, a presença do segundo termo evidencia que essa não é uma lei de transformação tensorial, justificando nossa afirmação. De forma similar a (2.1), a derivada covariante de uma 1-forma, ω_ν, é dada por

$$\nabla_\mu \omega_\nu = \partial_\mu \omega_\nu + \tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}\omega_\lambda \; . \tag{2.3}$$

Onde $\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$ é um conjunto de matrizes que também satisfaz a (2.2). Para vermos como $\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$ relaciona-se com $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$, usamos os itens (iii) e (iv) para derivarmos uma quantidade escalar formada pela contração dos vetores arbitrários ω_α e v^α.

$$\begin{aligned} \nabla_\mu(\omega_\alpha v^\alpha) &= (\nabla_\mu \omega_\alpha)v^\alpha + \omega_\alpha(\nabla_\mu v^\alpha) \\ (\partial_\mu\omega_\alpha)v^\alpha + \omega_\alpha \partial_\mu v^\alpha &= (\partial_\mu\omega_\alpha)v^\alpha + (\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\alpha}\omega_\lambda)v^\alpha + \omega_\alpha\partial_\mu v^\alpha + \omega_\alpha\Gamma^\alpha_{\mu\lambda}v^\lambda \end{aligned} \tag{2.4}$$

Da expressão acima, concluímos que $\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\alpha}\omega_\lambda v^\alpha = -\Gamma^\alpha_{\mu\lambda}\omega_\alpha v^\lambda = -\Gamma^\lambda_{\mu\alpha}\omega_\lambda v^\alpha$. Como ω_α e v^α são arbitrários, então $\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\alpha} = -\Gamma^\lambda_{\mu\alpha}$. Portanto, a derivada covariante de uma 1-forma é dada por

$$\nabla_\mu \omega_\nu = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\omega_\lambda \; . \tag{2.5}$$

Para um tensor de rank arbitrário o procedimento é o mesmo. De modo geral, a derivada covariante de um tensor $T^{\mu_1\mu_2\mu_3\cdots}{}_{\nu_1\nu_2\nu_3\ldots}$ é dada por

$$\begin{aligned}\nabla_\sigma T^{\mu_1\mu_2\mu_3\cdots}{}_{\nu_1\nu_2\nu_3\ldots} &= \partial_\sigma T^{\mu_1\mu_2\mu_3\cdots}{}_{\nu_1\nu_2\nu_3\ldots} + \Gamma^{\mu_1}_{\sigma\lambda} T^{\lambda\mu_2\mu_3\cdots}{}_{\nu_1\nu_2\nu_3\ldots} + \Gamma^{\mu_2}_{\sigma\lambda} T^{\mu_1\lambda\mu_3\cdots}{}_{\nu_1\nu_2\nu_3\ldots} + \ldots \\ &\quad - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu_1} T^{\mu_1\mu_2\mu_3\cdots}{}_{\lambda\nu_2\nu_3\ldots} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu_2} T^{\mu_1\mu_2\mu_3\cdots}{}_{\nu_1\lambda\nu_3\ldots} - \ldots \end{aligned} \tag{2.6}$$

Dada uma variedade, podemos definir sobre ela mais de uma conexão e cada uma delas define uma derivada covariante. A TRG se baseia em uma conexão específica determinada pela métrica $g_{\mu\nu}$ e que denominamos de conexão de Levi-Civita. Antes de obtê-la, observe que permutando os índices inferiores da conexão $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ obtemos outra conexão $\Gamma^\lambda_{\nu\mu}$. A diferença estre elas determina uma quantidade tensorial $S^\lambda{}_{\mu\nu}$ chamada de tensor de torção, que denominaremos só de torção:

$$S^\lambda{}_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} = 2\Gamma^\lambda_{[\mu\nu]} \tag{2.7}$$

Claro, se a conexão for simétrica a torção é nula. Podemos obter a conexão de Levi-Civita impondo mais duas condições.

(iv) A conexão é simétrica: $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{(\mu\nu)}$,

(v) A derivada covariante da métrica é sempre nula (Compatibilidade métrica): $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$.

Dessa forma podemos calcular a derivada covariante da métrica referente às três permutações dos índices, ou seja,

$$\begin{aligned}\nabla_\rho g_{\mu\nu} &= \partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\rho\mu} g_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda_{\rho\nu} g_{\mu\lambda}\ , \\ \nabla_\mu g_{\nu\rho} &= \partial_\mu g_{\nu\rho} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} - \Gamma^\lambda_{\mu\rho} g_{\nu\lambda}\ , \\ \nabla_\nu g_{\rho\mu} &= \partial_\nu g_{\rho\mu} - \Gamma^\lambda_{\nu\rho} g_{\lambda\mu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} g_{\rho\lambda}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Desde que a conexão seja simétrica, podemos facilmente mostrar que $\partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\nu g_{\rho\mu} + 2\Gamma^\lambda_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} = 0$. Contraindo esta expressão com $g^{\rho\sigma}$, imediatamente obtemos a conexão de Levi-Civita

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \left(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}\right). \tag{2.9}$$

O estudo de uma variedade cuja a conexão é a conexão de Levi-Civita é chamada de geometria Riemanniana (ou pseudo Riemanniana, quando a assinatura da métrica é Lorentziana). Nos capítulos posteriores, quando apresentarmos o formalismo métrico-afim, vamos abrir mão dessa condição e vamos determinar a conexão dinamicamente, sem estabelecer de antemão qualquer

relação com a métrica.

2.2 Transporte Paralelo e geodésicas

Para compararmos vetores em diferentes pontos numa variedade curva (espaços tangentes), introduzimos o conceito de transporte paralelo. Transportar paralelamente um vetor significa mantê-lo constante ao longo da curva. A taxa instantânea de variação do tensor é calculada a partir da derivada covariante. Assim, dada uma curva com parâmetro λ, $x^\mu(\lambda)$, para que um vetor T^μ se mantenha constante ao longo da curva devemos ter

$$\frac{DT^\alpha}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda}\nabla_\mu T^\alpha = 0, \tag{2.10}$$

onde $\frac{DT^\alpha}{d\lambda}$ é a derivada direcional ao longo da curva e $\frac{dx^\mu}{d\lambda}$ é o vetor tangente à curva. Em palavras, a derivada covariante de um tensor T paralelamente transportado ao longo de uma curva é nula. Observe que a definição de transporte paralelo depende da conexão e como podemos ter mais de uma conexão definida sobre a variedade, podemos ter diferentes resultados.

O passo seguinte consiste em obtermos a geodésica, que é a generalização do conceito de linha reta para espaços curvos. A equação para a geodésica pode ser obtida sob duas perspectiva, que na TRG são equivalentes. A primeira, uma perspectiva afim e mais simples, diz que a geodésica é a curva ao longo da qual o respectivo vetor tangente é transportado paralelamente; ou seja, dada uma curva $x^\mu(\lambda)$ e seu vetor tangente $t^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$, a equação geodésica é determinada por $\frac{Dt^\mu}{d\lambda} = t^\sigma\nabla_\sigma t^\mu = 0$, que implica

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0\ . \tag{2.11}$$

Se $\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = 0$, como acontece no espaço plano no sistema de coordenadas cartesiano, a equação (2.11) descreve a equação de uma linha reta. A segunda maneira de obtermos a equação geodésica é motivada por uma perspectiva métrica. Vamos derivar para geodésicas tipo-tempo. Portanto, partimos do funcional tempo próprio

$$\tau = \int\left(\sqrt{-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}}\right)d\lambda\ . \tag{2.12}$$

Identificando o parâmetro afim λ com o tempo próprio, pode-se mostrar que as curvas que

extremizam (2.12) são equivalentes às curvas que extremizam o funcional a seguir

$$I = \frac{1}{2}\int \left(g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} \right) d\tau \ . \tag{2.13}$$

Variando I, podemos mostrar que

$$\delta I = -\int \left[g_{\sigma\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}\right)\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} \right] \delta x^\sigma d\tau \ . \tag{2.14}$$

Assim, a condição estacionária $\delta I = 0$ conduz à seguinte equação para a geodésica

$$\frac{d^2x^\rho}{d\tau^2} + \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}\left(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}\right)\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \ . \tag{2.15}$$

Como podemos observar, esta equação é igual à Eq.(2.11) quando a conexão é a conexão de Levi-Civita (2.9). Este resultado mostra que podemos ter dois tipos de geodésicas definidos sobre um espaço-tempo, as geodésicas da métrica e as geodésicas da conexão independente. Na TRG, onde a conexão independente é igual à conexão métrica, os dois tipos de geodésicas se confundem, mas em outras teorias da gravidade isso não ocorre necessariamente, conforme vamos ver no capítulo 4.

2.2.1 O tensor de Riemann

Em geral, num espaço curvo, o transporte paralelo de um tensor ao longo de um curva altera o tensor em uma maneira que depende da curvatura englobada pela curva. Localmente, a curvatura é expressa pelo tensor de Riemann, também chamado de tensor de curvatura, que pode ser obtido através do comutador de duas derivadas covariantes. A ideia é relativamente simples: o comutador de duas derivadas covariantes mede a diferença entre transportar um vetor paralelamente primeiro ao longo de uma direção, digamos μ, e então ao longo de outra direção, digamos ν versus a ordem oposta, ou seja, primeiro na direção ν e depois na direção μ, conforme ilustramos na Fig.2.1.

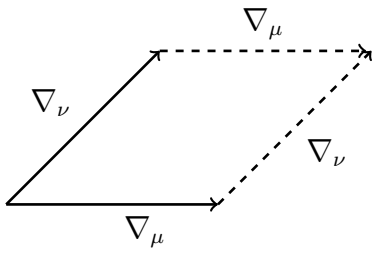


Figura 2.1: Comutador das derivadas covariantes

Seja V^ρ o tensor, então podemos mostrar que

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\rho = R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}V^\sigma - S^\lambda{}_{\mu\nu}\nabla_\lambda V^\rho \,, \tag{2.16}$$

onde $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$ é o tensor de Riemann, dado por

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^\rho_{\nu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\epsilon}\Gamma^\epsilon_{\nu\sigma} - \partial_\nu\Gamma^\rho_{\mu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\epsilon}\Gamma^\epsilon_{\mu\sigma} \,, \tag{2.17}$$

e $S^\lambda{}_{\mu\nu}$ é a torção dada pela equação (2.7). Observe que o tensor de Riemann é construído inteiramente a partir da conexão sem fazer qualquer referencia à métrica. Se, entretanto, a conexão for a de Levi-Civita, o tensor de curvatura dependerá da métrica. Este particular ponto de vista mostra que o tensor de Riemann da métrica de Minkowski em coordenadas cartesianas é nulo, por essa razão é que se diz que o espaço é plano. De fato, mesmo em sistemas de coordenadas onde a conexão não é nula, se o espaço for plano, o tensor de Riemann será nulo. A partir da contração do tensor de Riemann podemos formar outros tensores, como o tensor de Ricci $R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}$ e o escalar de Ricci R, também chamado de escalar de curvatura que é dado pelo traço do tensor de Ricci, ou seja, $R = R^\mu{}_\mu$.

Agora que temos introduzido os principais elementos do nosso estudo, todos baseados na conexão, vamos introduzir as equações da TRG, que relacionam as componentes do tensor de curvatura às componentes do tensor energia-momento.

2.3 As Equações de campo da Relatividade Geral

Vamos derivar as equações de campo da TRG a partir da formulação lagrangiana. O campo dinâmico é a métrica $g_{\mu\nu}$ do espaço-tempo, a conexão associada é a de Levi-Civita (2.9), e não a conexão independente. A ação total da teoria, denominada de ação de Einstein-Hilbert S_{EH}, é a soma da ação gravitacional, que envolve o escalar de curvatura, mais a ação de matéria $S_M(\Psi, g_{\mu\nu})$ que envolve os campos responsáveis pela curvatura do espaço-tempo, representados por Ψ, e a métrica, ela é dada por

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa^2}\int R\sqrt{-g}d^4x + S_M(\Psi, g_{\mu\nu}) \,, \tag{2.18}$$

onde $\kappa^2 = 8\pi G$, sendo G a constante gravitacional de Newton e g o determinante da métrica. Variando a ação (2.18) com respeito à métrica, temos

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{2\kappa^2}\int \left[\delta\sqrt{-g}R + \sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\right)\right] d^4x + \delta S_M \,. \tag{2.19}$$

Antes de seguirmos adiante, vamos fazer uma observação útil para nossos cálculos. Sabe-se que, para uma matriz quadrada M com $\det M \neq 0$, temos a seguinte relação $\ln(\det M) = \mathrm{Tr}(\ln M)$. Variando esta relação, temos $\frac{\delta \det M}{\det M} = \mathrm{Tr}(M^{-1}\delta M)$. Agora, como $g = \det g_{\mu\nu}$, podemos escrever

$$\frac{\delta g}{g} = g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \quad \rightarrow \quad \delta g = g g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -g g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \tag{2.20}$$

Com esta observação, podemos escrever

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{\delta g}{2\sqrt{-g}} = \frac{g g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}}{2\sqrt{-g}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \tag{2.21}$$

Substituindo em (2.19) e agrupando os termos, ficamos com

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{2\kappa^2}\int \sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\delta g^{\mu\nu} d^4x + \frac{1}{2\kappa^2}\int \sqrt{-g} g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} d^4x + \delta S_M. \tag{2.22}$$

Com auxílio da identidade de Palatini $\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda(\delta\Gamma^\lambda_{\nu\mu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\mu})$ [44] e da compatibilidade métrica ($\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$) podemos mostrar que $I = \int \sqrt{-g} g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} d^4x = \int \sqrt{-g}\nabla_\lambda\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\sigma_{\sigma\mu}\right)$. Veja que I é uma integral com respeito ao elemento natural de volume da divergência de um vetor $J^\lambda = g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\sigma_{\sigma\mu}$. Assim, assumindo que o termo de superfície se anula no contorno, o teorema de Stokes afirma que I não dará nenhuma contribuição a (2.22). Portanto, escrevendo $\delta S_M = \int\left[\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}\right]\sqrt{-g}\, d^4x$, a (2.22) fica

$$\delta S_{EH} = \int\left[\frac{1}{2\kappa^2}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}\right]\sqrt{-g} d^4x\ . \tag{2.23}$$

Os pontos estacionários são aqueles onde $\delta S_{EH} = 0$, isso fornece a famosa equação de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa^2 T_{\mu\nu}\ , \tag{2.24}$$

onde $T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}$ é o tensor energia-momento. A equação (2.24) também pode ser escrita em termos do traço T do tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$, ou seja,

$$R^\mu{}_\nu = \kappa^2\left(T^\mu{}_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu{}_\nu T\right). \tag{2.25}$$

A equação de Einstein representa um conjunto de equações diferenciais parciais de segunda ordem para a métrica $g_{\mu\nu}$. Como podemos observar, a distribuição de matéria (lado direito) determina a geometria do espaço-tempo (lado esquerdo); por sua vez, a geometria determina como a matéria se desloca no espaço-tempo, essa é a síntese da equação (2.24). Logo após Einstein reportar a sua TRG, Karl Schwarzschild obteve uma solução exata para as equações

de campo (2.24) [45]. A solução, denominada solução de Schwarzschild, descreve o espaço-tempo gerado por um corpo esférico e estático, mas somente na região externa ao corpo, ou seja, no vácuo. Tal solução foi efetivamente o ponto de partida para estudar um dos fenômenos mais impressionantes da natureza, o buraco negro. A métrica de Schwarzschild é estática e esfericamente simétrica, em coordenadas esféricas (t, r, θ, φ) ela é dada por

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \,. \tag{2.26}$$

Onde a constante M é interpretada como a massa do objeto. É fácil observar que se a massa é nula, ou no limite assintótico ($r \to \infty$), a solução recai na métrica de Minkowski, que descreve o espaço plano, como é esperado. Em seguida, ao contrária da métrica de Schwarzschild, que descreve o espaço-tempo em uma região de vácuo, vamos obter uma solução das equações de Einstein na presença de matéria.

2.4 A solução do Monopolo Global

De acordo com a teoria do Big Bang, o universo evoluiu a partir de um estado extremamente quente e denso. Nesse processo, ele se expandiu e esfriou passando por uma série de transições de fase. É bem conhecido, principalmente em sistemas estudados pela física da matéria condensada, que quando o sistema passa de uma fase para outra com menor temperatura pode ocorrer o fenômeno da quebra espontânea de simetria. Basicamente, a nova fase, que é um estado de mínima energia do sistema, apresenta um grau de simetria menor do que a fase anterior (simetria da lagrangiana). Por outro lado, a configuração de mínima energia é infinitamente degenerada, por essa, razão na transição de fase, o sistema escolhe espontaneamente um dos estados de mínima energia. Diferentes regiões do sistema podem evoluir para diferentes estados de mínima energia e a interface entre essas regiões são chamadas de defeitos topológicos. Existe uma variedades de defeitos topológicos, cada um deles é caracterizado pelo tipo de simetria que é espontaneamente quebrada. No contexto cosmológico, essas ideias foram introduzidas pelo físico britânico T.W.B. Kibble, o chamado mecanismo de Kibble [26]. Transições de fase no universo primordial decorrentes da expansão e esfriamento podem ter dado origem a diversos defeitos topológicos no contexto cosmológico, entre os quais podemos citar as paredes de domínio, quebra da simetria $\mathbb{Z}2$, a corda cósmica, quebra da simetria $SO(2)$, e o monopolo global, quebra da simetria $SO(3)$ [27]. Vamos calcular a métrica para um espaço-tempo na presença de um Monopolo Global (MG). Os primeiros a realizar esse estudo foram Barriola e

Vilenkin [28], nesta seção vamos obter os principais resultados encontrado por eles.

A ação de matéria S_M que descreve o MG é composta por um tripleto de campos escalares Ψ^a, onde a vai de um a três:

$$S_M = \int \left[-\frac{1}{2}(\partial_\mu \Psi^a)(\partial^\mu \Psi^a) - \frac{1}{4}\chi(\Psi^a\Psi^a - \eta^2)^2 \right] \sqrt{-g}\, d^4x, \quad \text{com} \quad \chi > 0 \quad \text{e} \quad \eta > 0. \tag{2.27}$$

As constantes χ e η são, respectivamente, a constante de acoplamento e a escala de energia da quebra espontânea de simetria, da ordem de $\sim 10^{16}$ GeV. O campo escalar Ψ^a comporta-se como um vetor em um espaço interno tridimensional caracterizado pelo índice latino. Observe que a ação (2.27) é invariante sobre o grupo de simetria $SO(3)$. Variando a ação em relação ao campo Ψ^a, obtemos as equações de campo

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \Psi^a - \chi\left(\Psi^b\Psi^b - \eta^2\right)\Psi^a = 0. \tag{2.28}$$

Qualquer tripleto de campos escalares constante satisfazendo a condição $\Psi^b\Psi^b = \eta^2$ resolve as equações de campo e corresponde à solução de mínima energia. Essa condição $\Psi^b\Psi^b = \eta^2$ define a variedade do vácuo. Considere um o tripleto $\Psi^a = (0, 0, \eta)$, veja que se o rotacionarmos de um ângulo arbitrário, tal transformação conduz à um outro tripleto, que também faz parte do variedade do vácuo. Agora se o rotacionarmos em torno de si mesmo, ou seja em torno do eixo Ψ^3, o vetor permanece invariante. É nesse sentido que dizemos que a simetria $SO(3)$ é espontaneamente quebrada em $U(1)$.

A solução mais simples é esfericamente simétrica e estática, por isso se escolhe o seguinte ansatz

$$\Psi^a = \eta f(r)\frac{x^a}{r}, \quad \text{onde} \quad x^a x^a = r^2 \tag{2.29}$$

e $f(r)$ é uma função da coordenada radial. Vamos considerar o espaço-tempo estático e esfericamente simétrico

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\,, \tag{2.30}$$

onde $A(r)$ e $B(r)$ são funções da coordenada radial r. Introduzindo o ansatz (2.29) na equação (2.28) e lembrando que $\nabla_\mu\nabla^\mu\Psi^a = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Psi^a\right)$, obtém-se a equação para $f(r)$,

$$\frac{1}{r^2\sqrt{AB}}\frac{d}{dr}\left(r^2\sqrt{\frac{A}{B}}\frac{df}{dr}\right) - \frac{2f}{r^2} - \chi\eta^2 f(f^2-1) = 0\,. \tag{2.31}$$

Podemos também calcular o tensor energia-momento, $T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}$, cujo resultado é dado

por

$$T^0{}_0 = -\eta^2\left[\frac{f'^2}{2B}+\frac{f^2}{r^2}+\frac{1}{4}\chi\eta^2(f^2-1)^2\right], \tag{2.32}$$

$$T^1{}_1 = -\eta^2\left[-\frac{f'^2}{2B}+\frac{f^2}{r^2}+\frac{1}{4}\chi\eta^2(f^2-1)^2\right], \tag{2.33}$$

$$T^2{}_2 = T^3{}_3 = -\eta^2\left[\frac{f'^2}{2B}+\frac{1}{4}\chi\eta^2(f^2-1)^2\right]. \tag{2.34}$$

Observe que assintoticamente (fora do núcleo do MG) onde $f(r)\to 1$, teremos

$$T^0{}_0 \approx T^1{}_1 \approx -\frac{\eta^2}{r^2} \qquad \text{e} \qquad T^2{}_2 = T^3{}_3 \approx 0\,. \tag{2.35}$$

Para obtermos a métrica, usamos a equação (2.25), a partir da qual obtemos

$$R^1{}_1 - R^0{}_0 = \kappa^2(T^1{}_1 - T^0{}_0) \quad \text{e} \quad R^2{}_2 = -\kappa^2\left(\frac{T^0{}_0}{2}+\frac{T^1{}_1}{2}\right). \tag{2.36}$$

Combinando estas duas equações, temos $\frac{R^0{}_0 - R^1{}_1}{2} - R^2{}_2 = \kappa^2 T^0{}_0$; calculando esta quantidade vamos ter

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r}{B}\right) = 1+\kappa^2 r^2 T^0{}_0\,, \tag{2.37}$$

cuja integração fornece

$$\frac{1}{B} = 1-\kappa^2\eta^2-\frac{\kappa^2}{r}\eta^2\int_0^r r^2\left[\frac{f'^2}{2B}+\frac{(f^2-1)}{r^2}+\frac{\chi}{4}\eta^2(f^2-1)^2\right]dr. \tag{2.38}$$

Para obtermos uma expressão para $A(r)$ usamos $R^1{}_1 - R^0{}_0 = \kappa^2(T^1{}_1 - T^0{}_0)$, de onde temos $\frac{1}{A}\frac{dA}{dr}+\frac{1}{B}\frac{dB}{dr} = \kappa^2 Br((T^1{}_1 - T^0{}_0)$, cuja integração fornece

$$A(r) = \frac{1}{B(r)}\exp\left[\int_\infty^r \kappa^2(T^1{}_1 - T^0{}_0)rB(r)dr\right]. \tag{2.39}$$

Veja que, pela (2.35), fora do núcleo do monopolo, temos $A(r) = \frac{1}{B(r)}$. Portanto, $A(r) = \frac{1}{B(r)} = 1-\kappa^2\eta^2-\frac{2GM}{r}$, onde $M = 4\pi\eta^2\int_0^r r^2\left[\frac{f'^2}{2N^2}+\frac{f^2-1}{r^2}+\frac{\lambda}{4}\eta^2(f^2-1)^2\right]dr$ é a massa do monopolo; Harari e Lousto avaliaram numericamente essa quantidade e chegaram a conclusão que a massa é negativa $M\approx -6\pi\frac{\eta}{\sqrt{\chi}}$ [46], o que corresponde a um potencial gravitacional de natureza repulsiva. Com estes resultados podemos escrever a métrica para o espaço-tempo fora

do núcleo do MG,

$$ds^2 = -\left(1-\kappa^2\eta^2-\frac{2GM}{r}\right)dt^2+\left(1-\kappa^2\eta^2-\frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)\,. \tag{2.40}$$

Temos duas possíveis interpretações para este resultado [28]. A primeira é que em escalas astrofísicas, para valores razoáveis de η e χ, o termo de massa torna-se negligenciável, então, após reescalar as variáveis t e r, a métrica é dada por

$$ds^2 = -dt^2+dr^2+(1-\kappa^2\eta^2)r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2). \tag{2.41}$$

Nesse caso, a correspondente solução não exerce qualquer atração gravitacional sobre a matéria[4]; por outro lado, o espaço-tempo apresenta um déficit de ângulo sólido, $\Delta\Omega$, dado por $\Delta\Omega = 32\pi^2G\eta^2$. Como consequência do déficit angular, no regime de campo fraco, a luz sofre um desvio angular dado por $\delta\varphi = 4\pi^2G\eta^2$. Na segunda interpretação, o MG é engolido por um buraco negro e a solução resultante é a métrica de Schwarzschild (2.26) com um monopolo. Neste caso, observe que se não houver monopolo, a métrica recaí na solução de Schwarzschild. Além disso, nessa interpretação, o raio do horizonte de eventos é dado por $r_h = \frac{2GM}{1-\alpha^2}$, o que significa que é maior do que o raio de Schwarzschild $2GM$.

2.4.1 Geodésicas associada a um espaço-tempo esfericamente simétrico

Em seguida vamos obter as equações geodésicas para um espaço-tempo estático e esfericamente simétrico, cujo elemento de linha em coordenadas esféricas (t, x, θ, φ) é dado por (2.30):

$$ds^2 = -C(x)dt^2+B(x)dr^2+r^2(x)(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2). \tag{2.42}$$

Nós escolhemos um elemento de linha genérico porque os resultados apresentados aqui serão utilizados em vários contextos diferentes ao longo deste trabalho. As geodésicas que iremos considerar são as geodésicas da métrica. A respectiva lagrangiana (2.13) é dada por

$$\mathcal{L} = g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\zeta}\frac{dx^\nu}{d\zeta}; \tag{2.43}$$

com $\mathcal{L} = -1$ para geodésicas tipo-tempo, $\mathcal{L} = 0$ para geodésicas tipo-luz e $\mathcal{L} = 1$ para geodésicas tipo-espaço. ζ é o parâmetro afim associado à geodésica. A partir da métrica (2.42),

[4] Lembre-se que no limite newtoniano $g_{00} = -(1+2\Phi)$, onde Φ é o potencial Newtoniano [44]. Neste caso, onde $g_{00} = -1$, temos $\Phi = 0$, ou seja, a atração gravitacional é nula.

podemos escrever

$$\mathcal{L} = -C(x)\left(\frac{dt}{d\zeta}\right)^2 + B(x)\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^2 + r^2(x)\left(\frac{d\theta}{d\zeta}\right)^2 + r^2(x)\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{d\zeta}\right)^2. \tag{2.44}$$

Como o espaço-tempo que estamos estudando é esfericamente simétrico, vamos nos concentrar nas geodésicas radiais. Sem perda de generalidade, podemos escolher $\theta = \frac{\pi}{2}$, de modo que

$$\mathcal{L} = -C(x)\left(\frac{dt}{d\zeta}\right)^2 + B(x)\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^2 + r^2(x)\left(\frac{d\varphi}{d\zeta}\right)^2. \tag{2.45}$$

Através da equação de Euler-Lagrange para as coordenadas t e φ podemos mostrar que as seguintes quantidades são conservadas

$$E = C(x)\frac{dt}{d\zeta} \qquad \text{e} \quad L = r^2(x)\frac{d\varphi}{d\zeta}. \tag{2.46}$$

Para partículas sem massa, E e L são interpretados como a energia e o momento angular, respectivamente; enquanto que para partículas massivas, elas correspondem à energia e o momento angular por unidade de massa. Em termos dessas quantidades (2.46), a equação (2.45) pode ser escrita como

$$C(x)B(x)\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^2 = E^2 - C(x)\left(\frac{L^2}{r^2(x)} - \mathcal{L}\right). \tag{2.47}$$

Podemos interpretar essa equação como o movimento unidimensional de uma partícula clássica de massa unitária e energia total $\mathcal{E} = \frac{E^2}{C(x)B(x)}$ sujeita a um potencial efetivo unidimensional $V_{ef} = \frac{1}{B(x)}\left(\frac{L^2}{r^2} - \mathcal{L}\right)$. Nessa perspectiva, a Eq.(2.47) fica como

$$\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^2 = \mathcal{E} - V_{ef}\,. \tag{2.48}$$

Vamos usar essas equações para estudarmos a completeza geodésicas das soluções, entre outros aspectos nos capítulos seguintes.

Capítulo 3

Sobre a Completeza Geodésica do Espaço-Tempo e a Equação de Raychaudhuri

Embora a TRG tenha promovido inúmeros avanços no que diz respeito à compreensão da natureza do espaço-tempo e a estrutura do universo, a teoria apresenta o problema da singularidade. É bem conhecido que na solução de Schwarzschild os escalares de curvatura divergem "em $r = 0$", ou que na solução cosmológica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) o universo partiu de um estado singular, onde a densidade e a curvatura divergem. Na época de Einstein pensava-se que tais anomalias eram decorrente do alto grau de simetria que essas soluções apresentam e, então, soluções mais realísticas não deveriam apresentar esse problema. Esse, porém, não era o caso, de fato, com base em algumas afirmações físicas razoáveis[1], Penrose e Hawking mostraram que a TRG inevitavelmente conduz às singularidades. Nesse sentido, este é um aspecto da TRG em que Einstein não proporcionou predições, ao contrário de quase todo o restante. Para dar prosseguimento à nossa discussão, devemos ser mais claros com o que queremos dizer com o termo singularidade. Quando o potencial elétrico diverge em um ponto, digamos "$r = 0$", se diz que existe uma singularidade nesse ponto. Nesse caso, como em outras teorias com exceção da TRG, o espaço-tempo é previamente definido, por isso não há problema com essa afirmação. Na TRG, entretanto, o objetivo é justamente obter a própria estrutura do espaço-tempo. É necessário que o espaço-tempo e a métrica definida sobre ele sejam bem definidos para que a ideia de eventos tenha validade física. Nesse sentido, o "$r = 0$" da solução de Schwarszchild ou a singularidade "big bang" da solução FLRW não fazem parte do respectivo espaço-tempo. Portanto, diferentemente das outras teorias clássicas da

[1]Como a positividade da energia, existência de superfícies aprisionadas (trapped surface) evidenciando a presença de fortes campos gravitacionais e a algumas afirmações sobre a estrutura global/causal do espaço-tempo [47, 48, 25].

física, não podemos conceber singularidade como um lugar. Outra tentativa de estabelecer um critério geral para definir singularidade poderia ser com base no comportamento da curvatura que na solução de Schwarzschild explode no limite $r \to 0$. Conforme discutimos em (2.2.1), a curvatura é caracterizada pelo tensor de Riemann $R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}$, então poderíamos pensar em definir a singularidade com base no mau comportamento das componentes desse tensor. Isso, entretanto, não é uma boa escolha, visto que o mau comportamento pode ser decorrente de uma má escolha do sistema de coordenadas. Ao invés disso, poderíamos então escolher como critério o comportamento divergente dos escalares de curvatura ($g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$, ...) à medida que se aproxima da região excluída do espaço-tempo, já que eles independem do sistema de coordenadas. Essa também não é uma boa escolha, primeiro porque há uma infinidade deles e não há uma maneira natural de escolhê-los. Além disso, existem soluções, como o espaço-tempo de uma corda cósmica[2] estática e com simetria cilíndrica (t, ρ, φ, z) [27, 49], onde o tensor de Riemann e os escalares de curvatura são bem definidos em todo lugar, exceto na origem do defeito $\rho = 0$, que apresenta uma singularidade cônica. De fato essa solução corresponde ao espaço-tempo de Minkowski com um déficit angular. Esses dentre muitos outros exemplos ilustram a dificuldade em se definir singularidade na TRG. O critério que adotaremos para definir singularidade é baseado no trabalho de Geroch [25, 50]. A ideia é que o "buraco" deixado pela remoção da singularidade pode ser detectado por meio do comportamento das geodésicas. Em um tal espaço, que denominamos de singular, haverá geodésicas com parâmetro afim finito, ou seja, a curva vai terminar em algum lugar. O respectivo parâmetro afim não pode ser estendido além desse lugar e, portanto, dizemos que a geodésica (que pode ser tipo-tempo, tipo-espaço e tipo-luz) é incompleta. A incompleteza geodésica implica que o espaço-tempo é singular. Embora haja algumas objeções a este critério, ele é muito adequado. Primeiro, não depende de coordenadas. Segundo, num espaço-tempo onde o parâmetro afim de geodésicas tipo-tempo ou tipo-luz é finito (pelo menos em uma direção), implica que observadores e raios de luz podem simplesmente desaparecer, deixar de existir ou, no sentido inverso, simplesmente vir a existência do nada. Em qualquer um dos casos, não aceitamos isso como verdadeiro, visto que não há fundamentação científica. Portanto, o critério da completeza geodésica é mais importante do que as divergências dos escalares de curvatura e permite definirmos um espaço-tempo como singular ou não.

Vamos considerar como exemplo a solução de Schwarzschild (2.26). Neste caso, em

[2] Qualquer plano passando pelo centro da solução (2.41) apresenta a mesma geometria da corda cósmica para $z =$ constante.

comparação com (2.42), temos $r = x$ e $C = 1/B = 1 - \frac{2GM}{r}$. A equação (2.47) torna-se

$$\left(\frac{dr}{d\zeta}\right)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\left(\frac{L^2}{r^2} - \mathcal{L}\right). \tag{3.1}$$

Isto corresponde à equação unidimensional de uma partícula clássica de massa unitária sujeita a um potencial efetivo dado por $V_{ef} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\left(\frac{L^2}{r^2} - \mathcal{L}\right)$. Dentro do horizonte de eventos a estrutura causal do espaço-tempo é tal que todos os observadores e raios de luz se deslocam sempre no sentido decrescente de r. No limite $r \to 0$, temos $V_{ef} \approx -\frac{2GM}{r}\left(\frac{L^2}{r^2} - \mathcal{L}\right)$, esse é o mesmo resultado que teríamos caso considerássemos a solução de Schwarzschild com o MG (2.40), visto que a presença do termo $\kappa^2\eta^2$ não influencia o potencial nesse regime. Para todos os tipos de geodésicas com $L \neq 0$, a equação (3.1) implica $(\frac{dr}{d\zeta})^2 \approx \frac{2GML^2}{r^3}$. Integrando vamos ter

$$\zeta \approx \zeta_0 \pm \frac{2}{5}\sqrt{\frac{r^5}{2GML^2}}\,, \tag{3.2}$$

onde o sinal $-$ corresponde a geodésicas se aproximando de $r = 0$, enquanto que o sinal $+$ representa geodésicas se afastando de $r = 0$. ζ_0 representa o parâmetro afim em $r = 0$. Como podemos observar, o parâmetro afim não pode ser estendido além de $r = 0$, o que significa que o espaço-tempo de Schwarzschild, com ou sem MG, não é geodesicamente completo, portanto, é singular. Mas é importante ter em mente que esse resultado, válido na TRG, pode ser alterado em outras teorias alternativas à gravitação de Einstein, conforme vamos mostrar.

3.1 Congruências geodésicas

Vimos que no caso específico da solução de Schwarzschild, as geodésicas que cruzam o horizonte de eventos inevitavelmente chegam a $r = 0$ e terminam lá, demonstrando claramente que o espaço-tempo é singular. Em seguida, vamos estudar como o comportamento das geodésicas diz respeito aos tipos de campos gravitacionais gerados por determinados tipos de fontes (energia-momento). Isto será feito com base, sobretudo, na equação de Raychaudhuri, que governa a expansão de uma família de geodésicas vizinhas. Para tal objetivo, vamos investigar a evolução de uma congruência de geodésicas (tipo-tempo e tipo-luz) uniparamétricas. Uma congruência é um conjunto de curvas numa região aberta do espaço-tempo tal que em cada ponto da região passa uma, e apenas uma, curva.

Seja, portanto, $\gamma_s^\mu(\zeta)$ uma família de geodésicas uniparamétricas de parâmetro ζ; onde cada s representa uma curva distinta. Os pontos pertencentes a cada geodésicas são dados por

$x^\mu(s,\zeta)$, então, naturalmente, temos dois vetores, um tangente à curva dado por $U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\zeta}$ e o outro, que chamaremos de vetor desvio[3], dado por $V^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$. O vetor tangente é normalizado e é paralelamente transportado:

$$U_\mu U^\mu = -1, \qquad U^\lambda \nabla_\lambda U^\mu = 0\,. \tag{3.3}$$

Tomando a derivada de V^μ ao longo da congruência, vamos ter

$$\begin{aligned} \frac{DV^\mu}{d\zeta} &= U^\nu \nabla_\nu V^\mu = (\nabla_\nu U^\mu)\, V^\nu \\ U^\nu \nabla_\nu V^\mu &= B^\mu{}_\nu V^\nu\,, \end{aligned} \tag{3.4}$$

onde $B^\mu{}_\nu \equiv \nabla_\nu U^\mu$. Veja que o tensor $B_{\mu\nu}$ quantifica a possibilidade de V_μ ser paralelamente transportado ao longo da congruência, em outras palavras, é uma medida da falha em manter as geodésicas paralelas no sentido do espaço plano.

Dado o vetor U^μ, podemos decompor a métrica do espaço-tempo $g_{\mu\nu}$ em uma parte longitudinal, $-U_\mu U_\nu$ e uma parte transversa $P_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + U_\mu U_\nu$. A parte transversa é puramente espacial: $U^\mu P_{\mu\nu} = U^\nu P_{\mu\nu} = 0$, e $B_{\mu\nu}$ pertence ao espaço transverso: $U^\mu B_{\mu\nu} = U^\nu B_{\mu\nu} = 0$.

Como $B_{\mu\nu}$ é um tensor de rank 2, podemos dividi-lo em uma parte simétrica e uma parte antissimétrica, $B_{\mu\nu} = B_{(\mu\nu)} + B_{[\mu\nu]}$. A parte simétrica ainda pode ser dividida em uma parte cujo traço é nulo e outra onde o traço não é nulo, ou seja:

$$\begin{aligned} B_{\mu\nu} &= \frac{1}{3}\Theta P_{\mu\nu} + \underbrace{B_{(\mu\nu)} - \frac{1}{3}\Theta P_{\mu\nu}}_{\text{traço nulo}} + B_{[\mu\nu]} \\ B_{\mu\nu} &= \frac{1}{3}\Theta P_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}\,, \end{aligned} \tag{3.5}$$

onde introduzimos as quantidade que caracterizam a decomposição. Θ representa a **expansão** da congruência de geodésicas, ele é dado por $P^{\mu\nu}B_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}B_{\mu\nu} + \underbrace{U^\mu U^\nu B_{\mu\nu}}_{=0} = \nabla_\nu U^\nu$, ou seja, $\Theta = \mathrm{Tr}(B_{\mu\nu})$. A quantidade $\sigma_{\mu\nu} = B_{(\mu\nu)} - \frac{1}{3}\Theta P_{\mu\nu}$ é chamada de **deformação**, ela é simétrica, mas o traço é nulo[4]. A deformação representa a mudança na forma da congruência à medida que ela evolui. Por fim, $\omega_{\mu\nu} = B_{[\mu\nu]}$ é a parte antissimétrica e representa a **rotação** da congruência. A evolução da congruência é obtida tomando-se a derivada covariante destas quantidades. Vamos nos concentrar na equação de evolução da expansão Θ. Para isso, derivamos $B_{\mu\nu}$ e em

[3] Em inglês esse vetor é chamado de *deviation vector*. Ele recebe esse nome porque aponta na direção das geodésicas vizinhas.

[4] $g^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} = \Theta - \frac{1}{3}P_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = \Theta - \frac{1}{3}(g_{\mu\nu} + U_\mu U_\nu)g^{\mu\nu} = \Theta - \frac{1}{3}(4-1) = 0$.

seguida tomamos o traço, como abaixo.

$$\begin{aligned}
\frac{DB_{\mu\nu}}{d\zeta} &= U^\sigma \nabla_\sigma B_{\mu\nu} = U^\sigma \nabla_\sigma \nabla_\nu U_\mu \\
&= U^\sigma \left[R^\lambda{}_{\mu\nu\sigma} U_\lambda + \nabla_\nu \nabla_\sigma U_\mu \right] \\
&= \nabla_\nu \left(\underbrace{U^\sigma \nabla_\sigma U_\mu}_{=0} \right) - \left(\nabla_\nu U^\sigma \right) \left(\nabla_\sigma U_\mu \right) + R_{\lambda\nu\mu\sigma} U^\sigma U^\lambda \\
\frac{DB_{\mu\nu}}{d\zeta} &= -B^\sigma{}_\nu B_{\mu\sigma} - R_{\mu\lambda\nu\sigma} U^\sigma U^\lambda \, . \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Tomando o traço desta equação, obtemos

$$\frac{d\Theta}{d\zeta} = -\frac{1}{3}\Theta^2 - \sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} - R_{\mu\nu}U^\mu U^\nu \, . \qquad (3.7)$$

Esta é a equação de Raychaudhuri para uma congruência de geodésicas tipo-tempo; observe que ela é obtida sem fazer qualquer menção à equação de Einstein. Agora vejamos como aplicar a equação de Raychaudhuri para demonstrar o caráter atrativo de um determinado tipo de fonte ($T_{\mu\nu}$) satisfazendo a condição de energia forte (em inglês, *Strong Energy Condition*):

$$\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) U^\mu U^\nu \geq 0 \quad \text{onde } U^\mu \text{ é um vetor tipo-tempo com } U^\mu U_\mu = -1. \qquad (3.8)$$

Com auxílio da equação (2.25) podemos reescrever o último termos de (3.7) como $R_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = \kappa^2 \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) U^\mu U^\nu$; então, a partir da condição de energia forte,

$$R_{\mu\nu}U^\mu U^\nu \geq 0 \, . \qquad (3.9)$$

Como a deformação e a rotação são vetores espaciais, temos $\sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} \geq 0$ e $\omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} \geq 0$. Além disso, vamos considerar que a congruência é ortogonal a uma hipersuperfície. Nesse caso o teorema de Frobenius afirma que a rotação é nula [51][5]. Com estas observações a equação de

[5]

Teorema 1 (Frobenius) *Uma congruência de curvas (tipo-tempo, tipo-espaço ou tipo-luz) é ortogonal a uma hipersuperfície se e somente se* $U_{[\mu}\nabla_\nu U_{\rho]} = 0$.

Desenvolvendo o termo $U_{[\mu}\nabla_\nu U_{\rho]}$ vamos ter

$$\begin{aligned}
U_{[\mu}\nabla_\nu U_{\rho]} &= \frac{2}{3!}\left(U_\mu \nabla_{[\nu} U_{\rho]} + U_\nu \nabla_{[\rho} U_{\mu]} + U_\rho \nabla_{[\mu} U_{\nu]} \right) \\
\frac{3!}{2} U_\mu \nabla_{[\nu} U_{\rho]} &= \left(U_\mu B_{[\nu\rho]} + U_\nu B_{[\rho\mu]} + U_\rho B_{[\mu\nu]} \right) \\
\frac{3!}{2} U_\mu \nabla_{[\nu} U_{\rho]} &= \left(U_\mu \omega_{\nu\rho} + U_\nu \omega_{\rho\mu} + U_\rho \omega_{\mu\nu} \right) . \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

Contraindo essa expressão com U^μ e lembrando que $\omega_{\mu\nu}$ é espacial, $U^\mu \omega_{\mu\nu} = 0$, o teorema de Frobenius implica que a rotação é nula $\omega_{\nu\rho} = 0$.

Raychaudhuri torna-se

$$\frac{d\Theta}{d\zeta} = -\frac{1}{3}\Theta^2 - \underbrace{(\sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} + R_{\mu\nu}U^\mu U^\nu)}_{\geq 0}\,; \tag{3.11}$$

logo, $\frac{d\Theta}{d\zeta} \leq -\frac{1}{3}\Theta^2$. Integrando essa equação ficamos com

$$\frac{1}{\Theta(\zeta)} \geq \frac{1}{\Theta_0} + \frac{\zeta}{3}\,, \qquad \text{onde } \Theta_0 \text{ é a expansão inicial.} \tag{3.12}$$

Vamos considerar que inicialmente a congruência está convergindo, $\Theta_0 < 0$. Nesse caso, a Eq.(3.12) implica que a convergência irá continuar ainda mais conforme ζ aumenta. Por outro lado, se inicialmente a geodésica estiver se expandindo, $\Theta_0 > 0$, essa expansão se tornará cada vez mais lenta. Com isso concluímos que, num espaço-tempo onde a geometria é determinada por uma fonte de matéria satisfazendo a condição de energia forte, as geodésicas tendem a convergir e nunca a se "repelirem". Do ponto de vista físico, esse tipo de matéria dá origem a campos gravitacionais atrativos.

Agora vamos considerar uma congruência de geodésicas tipo-luz. Neste caso, o vetor tangente, que denominamos de k^μ, é tipo-luz, ou seja, ele é ortogonal a si próprio: $k^\mu k_\mu = 0$. Isto significa que não podemos usar $g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu$ como a parte transversa da métrica, porque $(g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu)\, k^\mu \neq 0$. Para obtermos a parte transversa é necessário introduzirmos outro vetor nulo, l^μ, tal que $k^\mu l_\mu = -1$.Vamos chamar de $T_\perp$ o espaço transverso no qual estamos interessados, e seja um vetor V^μ pertencente a esse espaço. Então $T_\perp$ é definido tal que

$$T_\perp = \{V^\mu | V^\mu k_\mu = 0, V^\mu l_\mu = 0\}\ . \tag{3.13}$$

Então a métrica transversa será dada por

$$Q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + k_\mu l_\nu + l_\mu k_\nu\ . \tag{3.14}$$

Admitindo que V^μ e W^μ pertencem a $T_\perp$, destacamos as seguintes propriedades de $Q_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} Q_{\mu\nu}V^\mu W^\nu &= g_{\mu\nu}V^\mu W^\nu \\ Q^\mu{}_\nu V^\nu &= V^\mu \\ Q^\mu{}_\nu k^\nu &= Q^\mu{}_\nu l^\nu = 0 \\ Q^\mu{}_\nu Q^\nu{}_\sigma &= Q^\mu{}_\sigma \\ k^\sigma \nabla_\sigma Q^\mu{}_\nu &= 0 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Assim como no caso da congruência de geodésicas tipo-tempo, a falha em transportar paralelamente o vetor desvio V^μ é quantificada pelo tensor $B^\mu{}_\nu = \nabla_\nu k^\mu$. Como antes, $B^\mu{}_\nu$ é ortogonal ao vetor tangente: $\kappa^\mu B^\mu{}_\nu = 0$; no entanto, $B^\mu{}_\nu$ não é ortogonal a l^μ. Como as informações relevantes estão contidas no espaço transverso, o que realmente nos interessa é $\widehat{B}^\mu{}_\nu = Q^\mu{}_\alpha Q^\beta{}_\nu B^\alpha{}_\beta$. Nós então podemos mostrar, usando as propriedades (3.15) que

$$\frac{DV^\mu}{d\zeta} = \widehat{B}^\mu{}_\nu V^\nu. \tag{3.16}$$

Agora decompomos $\widehat{B}^\mu{}_\nu$ na expansão Θ, na deformação $\widehat{\sigma}_{\mu\nu}$ e na rotação $\widehat{\omega}_{\mu\nu}$:

$$\widehat{B}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\Theta Q_{\mu\nu} + \widehat{\sigma}_{\mu\nu} + \widehat{\omega}_{\mu\nu}\ . \tag{3.17}$$

Onde $\Theta = Q^{\mu\nu}\widehat{B}_{\mu\nu} = \widehat{B}^\mu{}_\mu$, $\widehat{\sigma}_{\mu\nu} = \widehat{B}_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2}\Theta Q_{\mu\nu}$ e $\widehat{\omega}_{\mu\nu} = \widehat{B}_{[\mu\nu]}$. O fator 2 ao invés de 3 deve-se ao fato do espaço transverso ser bidimensional. Novamente, calculando a evolução de $\widehat{B}_{\mu\nu}$,

$$\begin{aligned}
\frac{D\widehat{B}_{\mu\nu}}{d\zeta} &= k^\sigma\nabla_\sigma\widehat{B}_{\mu\nu} = k^\sigma\nabla_\sigma\left(Q^\alpha{}_\mu Q^\beta{}_\nu\nabla_\alpha k_\beta\right)\\
\frac{D\widehat{B}_{\mu\nu}}{d\zeta} &= Q^\alpha{}_\mu Q^\beta{}_\nu k^\sigma\nabla_\sigma\nabla_\alpha k_\beta\\
\frac{D\widehat{B}_{\mu\nu}}{d\zeta} &= -Q^\alpha{}_\mu Q^\beta{}_\nu\left(B_\alpha{}^\sigma B_{\beta\sigma} + R_{\alpha\lambda\beta\sigma}k^\lambda k^\sigma\right)\\
\frac{D\widehat{B}_{\mu\nu}}{d\zeta} &= -\widehat{B}_\mu{}^\sigma\widehat{B}_{\nu\sigma} - Q^\alpha{}_\mu Q^\beta{}_\nu R_{\alpha\lambda\beta\sigma}k^\lambda k^\sigma\ ,
\end{aligned} \tag{3.18}$$

e tomando o traço em seguida, obtemos

$$\frac{d\Theta}{d\zeta} = -\frac{1}{2}\Theta^2 - \widehat{\sigma}_{\mu\nu}\widehat{\sigma}^{\mu\nu} + \widehat{\omega}_{\mu\nu}\widehat{\omega}^{\mu\nu} - R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu\ . \tag{3.19}$$

Esta é a equação de Raychaudhuri para uma congruência de geodésicas tipo-luz. Nesta equação aparece um 2 ao invés de um 3 porque o espaço transverso $T_\perp$ é bidimensional, $Q_{\mu\nu}Q^{\mu\nu} = 2$. Também chamamos atenção para o fato de (3.19) não depender da escolha particular do vetor l^μ. Além disso, observe que

$$\begin{aligned}
\Theta &= Q^{\mu\nu}\widehat{B}_{\mu\nu} = Q^{\mu\nu}Q_\mu{}^\alpha Q_\nu{}^\beta B_{\alpha\beta}\\
\Theta &= Q^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta}\\
\Theta &= g^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta}\ .
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Novamente, a expansão é dada pelo traço de $B_{\alpha\beta}$, ou seja, $\Theta = \nabla_\mu k^\mu$.

Como k^μ é um vetor tipo-luz, a equação de Einstein (2.25) nos permite escrever

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu &= \kappa^2\left(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}\right)k^\mu k^\nu \\ R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu &= \kappa^2 T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu\ . \end{aligned} \tag{3.21}$$

Agora, se a fonte $T_{\mu\nu}$ obedece a condição de energia nula [6] (em inglês, *Null energy condition - NEC*, essa é a menos restritiva entre as condições de energia) então

$$R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0\ . \tag{3.22}$$

Se considerarmos novamente uma congruência ortogonal a uma hipersuperfície, pelo teorema de Frobenius, a rotação será nula, $\widehat{\omega}_{\mu\nu}=0$. Com isso, podemos concluir que as geodésicas são convergentes. O significado físico é que fontes que obedecem a condição de energia nula dão origem a campos gravitacionais atrativos.

Como discutimos, as condições (3.9) e (3.22) foram necessárias para que as congruências com rotação nula convergissem. Por esta razão, $R_{\mu\nu}U^\mu U^\nu \geq 0$ é chamada de condição de convergência tipo-tempo (CCT) e $R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0$ é chamada de condição de convergência tipo nula (CCN) (ou tipo-luz) [48]. Na TRG as condições CCT e CCN implicam em fontes que obedecem as condições de energia, conforme também discutimos. Em soluções como buracos de minhoca, a CCN é violada ao menos na garganta de modo que, para sustentar o buraco de minhoca, é necessário fontes que violem as condições de energia [52]. Por outro lado, se a descrição da interação gravitacional for substituída por uma teoria alternativa à TRG, existe a possibilidade de violarmos a CCN sem violar as condições de energia, uma vez que as equações de campo são diferentes das equações de Einstein, com isso podemos alcançar soluções tipo buracos de minhoca sem violarmos as condições de energia.

[6] A condição de energia nula afirma que para um vetor tipo-luz, $T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0$.

Capítulo 4

Teorias Modificadas da Gravitação no Formalismo Métrico-Afim

Para obtermos as equações de Einstein, nós assumimos um espaço-tempo dotado de compatibilidade métrica e cuja conexão era simétrica (sem torção). Com isso, nós concluímos que a conexão era completamente determinada pelas componentes da métrica. Contudo, devemos deixar claro que metricidade e afinidade são conceitos geométricos distintos, ou seja, em princípio, um não tem nada a ver com outro[53]. Metricidade está relacionada a medidas de comprimento e ângulos, enquanto que afinidade está relacionada a propriedades de invariância ao longo de uma variedade. Para ilustrar essa independência entre os conceitos, podemos tomar como exemplo a teoria da gravitação chamada de Teleparalelismo [54], onde a métrica é plana, mas a torção é diferente de zero (a conexão não é simétrica); nessa teoria a gravidade é dada pela torção. Um espaço com compatibilidade métrica e sem torção, como é o caso da TRG, é chamado de espaço Riemanniano. Em espaços não Riemannianos, métrica e conexão são independentes e o formalismo matemático nessas teorias é chamado de métrico-afim, ou formalismo de Palatini. Num espaço não Riemanniano, temos dois tipos de geodésicas, aquelas associadas à métrica, que depende da conexão de Levi-Civita, e aquelas associadas à conexão independente, e elas não são equivalentes. Sendo assim, devemos determinar qual tipo de geodésica a matéria irá seguir nesse espaço-tempo. Nós iremos assumir que a matéria irá seguir a conexão da métrica. Esse ponto de vista está em acordo com o princípio de equivalência de Einstein. Se a matéria seguisse as geodésicas da conexão independente, então não haveria a preservação de comprimentos e ângulos ao longo de deslocamentos. Portanto, a partir de experimentos não gravitacionais poderia-se fazer a distinção entre um campo gravitacional e um referencial acelerado na famosa experiência de pensamento do elevador. Isto violaria o princípio de equivalência de Einstein. Nas escalas de energias nas quais a TRG têm sido testada ainda

não foi verificado a violação desse princípio, mas em escalas de altíssimas energias, que ainda não foram verificadas, ainda existe essa possibilidade [55].

Em seguida, vamos considerar alguns casos específicos da formulação de duas teorias alternativas da gravidade no formalismo métrico-afim: a teoria $f(R)$ e uma teoria tipo Born-Infeld. Em ambos os casos vamos variar a ação tanto em relação a métrica quanto a conexão afim e, então, determinar essas quantidades de forma dinâmica [22, 24]. Também vamos deixar claro de antemão que estamos considerando apenas a parte simétrica do tensor de Ricci na ação gravitacional. Essa escolha, que é muito comum, evita graus de liberdade fantasmas na teoria, conforme foi mostrado recentemente [56].

4.1 Equações de campo para Teorias $f(\mathcal{R})$ no formalismo de Palatini

Numa teoria $f(\mathcal{R})$, a dinâmica gravitacional é descrita pela seguinte ação

$$S = \frac{1}{2\kappa^2}\int \sqrt{-g} f(\mathcal{R}) d^4x + S_m(g_{\mu\nu}, \Psi)\ , \tag{4.1}$$

onde $S_m(g_{\mu\nu}, \Psi)$ é a ação de matéria, que depende da métrica e dos campos de matéria (escalares, tensores, espinores, etc), representados por Ψ, mas não depende da conexão. O tensor de Riemann (2.17) é dado por $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\epsilon}\Gamma^{\epsilon}_{\nu\beta} - \partial_\nu \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\epsilon}\Gamma^{\epsilon}_{\mu\beta}$. Observe que escrevemos o escalar de Ricci $\mathcal{R}$ de forma caligráfica para destacarmos que ele é construído a partir da métrica e da conexão que, em princípio, independe da métrica: $\mathcal{R} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}(\Gamma)$.

Variando a ação (4.1), temos

$$\delta S \ = \ \frac{1}{2\kappa^2}\int \left[(\delta\sqrt{-g}) f(\mathcal{R}) + \sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} \left(R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\right)\right] d^4x + \delta S_m\ , \tag{4.2}$$

onde $f_{\mathcal{R}} = \frac{df(\mathcal{R})}{d\mathcal{R}}$. Com auxílio da equação (2.21), temos

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa^2}\int \left[\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\left(f_{\mathcal{R}}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f\right) + \sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\right] d^4x + \delta S_m. \tag{4.3}$$

Neste ponto, usaremos a identidade de Palatini para uma conexão não simétrica, visto que ainda não a obtemos: $\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda(\delta\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\mu}) + 2S^{\lambda}_{\rho\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu}$. Lembre-se que $2S^{\lambda}_{\rho\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}$ é a parte antissimétrica da conexão, chamada de tensor de torção (2.7). Com isso, podemos

expressar $I = \int(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu})d^4x$ como

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}\left[\nabla_\lambda(\delta\Gamma^\lambda_{\nu\mu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\mu}) + 2S^\lambda_{\rho\nu}\delta\Gamma^\rho_{\lambda\mu}\right]d^4x \\ I &= \int\Bigg\{\nabla_\lambda\left(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\nu\mu} - g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\sigma_{\sigma\mu})\right) + \delta\Gamma^\lambda_{\nu\mu}\left[-\nabla_\lambda(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu})\right. \\ &\quad \left.+\delta^\nu_\lambda\nabla_\rho(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\rho}) + 2\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\sigma}S^\nu_{\lambda\sigma}\right]\Bigg\}d^4x \end{aligned} \tag{4.4}$$

A segunda linha foi obtida a partir de $\nabla_\lambda\left(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\nu\mu}\right) = (\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu})\nabla_\lambda(\delta\Gamma^\lambda_{\nu\mu}) + \delta\Gamma^\lambda_{\nu\mu}\nabla_\lambda(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu})$, a fim de colocarmos $\delta\Gamma^\lambda_{\nu\mu}$ em evidência. Para alcançarmos esse objetivo ainda precisamos trabalhar o termo $\nabla_\lambda\left(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\nu\mu} - g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\sigma_{\sigma\mu})\right)$, que pode ser escrito como $\nabla_\lambda(\sqrt{-g}J^\lambda)$, com $J^\lambda = f_{\mathcal{R}}(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\nu\mu} - g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\sigma_{\sigma\mu})$. Agora, recordando que $\nabla_\lambda\sqrt{-g} = \partial_\lambda\sqrt{-g} - \Gamma^\sigma_{\lambda\sigma}\sqrt{-g}$ [57], vamos ter

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda(\sqrt{-g}J^\lambda) &= \partial_\lambda(\sqrt{-g}J^\lambda) - j^\lambda\sqrt{-g}(\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\sigma_{\sigma\lambda}) \\ &= \partial_\lambda(\sqrt{-g}J^\lambda) + 2\sqrt{-g}J^\lambda S^\sigma_{\sigma\lambda} \\ &= \partial_\lambda(\sqrt{-g}J^\lambda) + 2\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\nu\mu} - g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\phi_{\phi\mu})S^\sigma_{\sigma\lambda} \\ &= \partial_\lambda(\sqrt{-g}J^\lambda) + 2\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}\left(g^{\mu\nu}S^\sigma_{\sigma\lambda} - g^{\mu\rho}\delta^\nu_\lambda S^\sigma_{\sigma\rho}\right)\delta\Gamma^\lambda_{\nu\mu} \end{aligned} \tag{4.5}$$

Substituindo em (4.4), ficamos com

$$\begin{aligned} I &= \int\Bigg\{2\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}\left(g^{\mu\nu}S^\sigma_{\sigma\lambda} - g^{\mu\rho}\delta^\nu_\lambda S^\sigma_{\sigma\rho}\right) - \nabla_\lambda(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}) + \delta^\nu_\lambda\nabla_\rho(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\rho}) \\ &\quad + 2\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\sigma}S^\nu_{\lambda\sigma}\Bigg\}\delta\Gamma^\lambda_{\nu\mu}d^4x\,, \end{aligned} \tag{4.6}$$

onde temos descartado o termo de fronteira $\partial_\lambda(\sqrt{-g}J^\lambda)$. Portanto, a partir de (4.6) e (4.3) chegamos às equações de campo

$$f_{\mathcal{R}}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(\mathcal{R}) = \kappa^2 T_{\mu\nu}\,, \tag{4.7}$$

$$-\nabla_\lambda\left(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}\right) + \delta^\nu_\lambda\nabla_\rho\left(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\rho}\right) + 2\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}\left(g^{\mu\nu}S^\sigma_{\sigma\lambda} - \delta^\nu_\lambda g^{\mu\rho}S^\sigma_{\sigma\rho} + g^{\mu\sigma}S^\nu_{\lambda\sigma}\right) = H^{\nu\mu}_\lambda\,; \tag{4.8}$$

onde $T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}$ e $H^{\nu\mu}_\lambda = -\frac{\delta S_m}{\delta\Gamma^\lambda_{\nu\mu}}$. Como estamos admitindo que a torção não se acopla à matéria, temos $H^{\nu\mu} = 0$. Também vamos admitir que a conexão é simétrica e, portanto, a torção é nula $S^\nu_{\lambda\sigma} = 0$ [1] . Com estas afirmações, chegamos às seguintes equações de campo

[1] Nestes casos em que o tensor de Ricci é simétrico, a conexão pode ser escrita como a soma de um termo

para a métrica e a conexão, respectivamente:

$$f_{\mathcal{R}}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(\mathcal{R}) = \kappa^2 T_{\mu\nu}\ , \tag{4.9}$$

$$\nabla_\lambda\left(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}\right) = 0. \tag{4.10}$$

Antes de prosseguirmos é instrutivo considerarmos o caso especial da ação de Einstein-Hilbert, isto é, $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$. Nesse caso, $f_{\mathcal{R}} = 1$ e a equação para a métrica torna-se $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} = \kappa^2 T_{\mu\nu}$, embora seja parecida com a equação da TRG, não podemos neste estágio afirma que são iguais, visto que os tensores de curvatura são formados a partir da conexão independente. Então vamos avaliar a correspondente equação para a conexão, que será dada por$\nabla_\lambda\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\right) = 0$. Desenvolvendo essa equação, vamos ter

$$g^{\mu\nu}\partial_\lambda\sqrt{-g} + \sqrt{-g}\partial_\lambda g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}\left(-\Gamma^\alpha_{\lambda\alpha}g^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\lambda\epsilon}g^{\epsilon\nu} + \Gamma^\nu_{\lambda\epsilon}g^{\mu\epsilon}\right) = 0\ , \tag{4.11}$$

contraindo com $g_{\mu\nu}$, ficamos com

$$4\partial_\lambda\sqrt{-g} + \sqrt{-g}g_{\mu\nu}\partial_\lambda g^{\mu\nu} - 2\sqrt{-g}\Gamma^\alpha_{\lambda\alpha} = 0. \tag{4.12}$$

Com auxílio da relação $g_{\mu\nu}\partial_\lambda g^{\mu\nu} = -2\partial_\lambda \ln\sqrt{-g}$, e lembrando que $\partial_\lambda\sqrt{-g} = \sqrt{-g}\partial_\lambda \ln\sqrt{-g}$, a equação acima implica em $\Gamma^\alpha_{\lambda\alpha} = \partial_\lambda \ln\sqrt{-g}$. Inserindo este último resultado na equação (4.11) vamos obter $\nabla_\lambda g^{\mu\nu} = 0$, que é a condição de compatibilidade métrica. Foi esta condição que permitiu, na seção (2.1), obtermos a conexão como função das componentes da métrica (2.9), ou seja, a conexão de Levi-Civita. Sendo assim, $R_{\mu\nu}$ e $\mathcal{R}$ são construídos a partir da conexão da métrica e, portanto, a equação para a métrica torna-se a equação de Einstein. Desse modo, na TRG, o formalismo métrico-afim é equivalente ao formalismo métrico, no qual a conexão é, em princípio, dependente da métrica.

Vamos voltar às equações (4.9, 4.10). Como $f_{\mathcal{R}}$ é uma função de $\mathcal{R}$ que, por sua vez, depende da derivada primeira da conexão (2.17), poderíamos concluir, à primeira vista, que a (4.10) é uma equação de segunda ordem na conexão. Por outro lado, tomando o traço de (4.9), ficamos com

$$\mathcal{R}f_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}) - 2f(\mathcal{R}) = \kappa^2 T; \tag{4.13}$$

onde T é o traço do tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$. Observe que a Eq.(4.13) é uma relação algé-

simétrico mais uma parte vetorial, chamada de modo projetivo, que serve de fonte para a torção. Mas, devido a invariância projetiva do tensor de Ricci, o modo projetivo não influencia as equações de campo para a métrica e, por essa razão, podemos estabelecer desde já que a torção é nula [58, 22].

brica envolvendo T e $\mathcal{R}$, de modo que podemos resolvê-la para $\mathcal{R} = \mathcal{R}(T)$. Nessa perspectiva, a (4.10) é uma equação algébrica para a conexão, envolvendo a métrica $g_{\mu\nu}$ e a matéria através da função $f_{\mathcal{R}}$.

Para resolvermos a Eq.(4.10), vamos introduzir uma métrica auxiliar $h_{\mu\nu}$ tal que

$$\sqrt{-h}h^{\mu\nu} = \sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}; \tag{4.14}$$

onde h é o determinante de $h_{\mu\nu}$. Na notação matricial, a equação acima é escrita como $\sqrt{-h}\hat{h}^{-1} = \sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}\hat{g}^{-1}$, tomando o determinante encontramos $h = gf_{\mathcal{R}}^4$, com esse resultado obtemos $h^{\mu\nu} = \frac{1}{f_{\mathcal{R}}}g^{\mu\nu}$ de onde encontramos

$$h_{\mu\nu} = f_{\mathcal{R}}g_{\mu\nu}. \tag{4.15}$$

Sendo assim, a (4.10) pode ser escrita como $\nabla_\lambda\left(\sqrt{-h}h^{\mu\nu}\right) = 0$, que nos permite concluir que a conexão associada à métrica auxiliar $h_{\mu\nu}$ é a conexão de Levi-Civita, ou seja,

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}h^{\alpha\sigma}\left(\partial_\mu h_{\sigma\nu} + \partial_\nu h_{\mu\sigma} - \partial_\sigma h_{\mu\nu}\right). \tag{4.16}$$

Como $h_{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}$ são conformalmente relacionadas, se soubermos quem é $h_{\mu\nu}$, prontamente obtemos $g_{\mu\nu}$. Nesta perspectiva, vamos escrever a Eq.(4.9) em termos da métrica auxiliar, isto é, $f_{\mathcal{R}}R_{\mu\nu}(h) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(\mathcal{R}) = \kappa^2 T_{\mu\nu}$, que podemos escrever como

$$R^\mu{}_\nu(h) = \frac{\kappa^2}{f_{\mathcal{R}}^2}\left(\frac{f}{2\kappa^2}\delta^\mu{}_\nu + T^\mu{}_\nu\right); \tag{4.17}$$

onde $R^\mu{}_\nu(h) = h^{\mu\lambda}R_{\lambda\nu}(h)$ e $T^\mu{}_\nu = g^{\mu\lambda}T_{\lambda\nu}$. Observe que, desde que $R^\mu{}_\nu(h)$ é construído a partir da conexão de Levi-Civita que depende das derivadas primeira da métrica auxiliar (4.16), esta equação (4.17) é de segunda ordem para a métrica auxiliar. O lado direito de (4.17) depende da matéria através de $f = f(\mathcal{R})$, $f_{\mathcal{R}}$ e do tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$. Portanto, podemos resolver a (4.17) para a métrica auxiliar $h_{\mu\nu}$ e, a partir da relação $h_{\mu\nu} = f_{\mathcal{R}}g_{\mu\nu}$, obtermos a métrica $g_{\mu\nu}$.

Vamos considerar agora a solução de vácuo, ou seja, a solução corresponde à $T_{\mu\nu} = 0$. Nesse caso, temos $T = 0$ de modo que a Eq.(4.13) torna-se $f_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}) - 2f(\mathcal{R}) = 0$. Desde que a função $f(\mathcal{R})$ seja analítica, essa equação algébrica pode ser resolvida para $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{vac}$, onde $\mathcal{R}_{vac}$ é uma constante que depende dos parâmetros que caracterizam a lagrangiana $f(\mathcal{R})$. Nesse caso, $f(\mathcal{R}) = f(\mathcal{R}_{vac})$ também é uma constante; portanto, a métrica auxiliar coincide com a métrica física (absorvendo o fator conforme $f_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_{vac})$ em uma redefinição de unidades). Então, pela (4.16), concluímos que no vácuo a conexão é a conexão Levi-Civita. No vácuo, ficamos

com uma única equação dinâmica, Eq.(4.17), dada por $R_{\mu\nu}(g) = g_{\mu\nu}\Lambda_{ef}$, sendo $\Lambda_{ef} = \frac{f(\mathcal{R})}{2f'_{\mathcal{R}}}$ uma constante cosmológica efetiva. Portanto, se desejamos obter resultados diferentes da TRG, devemos considerar fontes de matéria.

4.2 O modelo Born-Infeld da gravitação

A teoria alternativa da gravidade que vamos estudar nesta seção é inspirada nos trabalhos de Born e Infeld [59, 60, 61, 62]. Esses dois físicos formularam na década de 30 a teoria conhecida como a eletrodinâmica de Born-Infeld [62], trata-se de uma eletrodinâmica não linear capaz de regularizar a auto-energia de uma partícula pontual carregada no nível clássico. Para formular a ação dessa teoria, eles se inspiraram na teoria da relatividade restrita, onde a lagrangiana de uma partícula livre envolve uma raiz quadrada que restringe a velocidade máxima da partícula à velocidade da luz no vácuo c: $L = -m^2c^2\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$. Quando $v \ll c$, L se reduz à respectiva lagrangiana da mecânica newtoniana. Da mesma forma, Born e Infeld procuraram por uma ação mais geral do que a ação da eletrodinâmica de Maxwell, mas que, no limite apropriada, se reduza à ação de Maxwell. Para alcançar esse objetivo, eles se basearam em um princípio de finitude, pois grandezas físicas não podem assumir valores arbitrariamente grandes, e em um principio de simetria, enlarguecendo o grupo das transformações de Lorentz, para o grupo das transformações gerais de coordenadas, motivados pela TRG. Com isso, eles chegaram a ação desejada, $S = -b^2\left[\int d^4x\sqrt{-|\eta_{\mu\nu}+\frac{F_{\mu\nu}}{b}|}-1\right]$; onde as barras significam o determinante da quantidade entre elas, o parâmetro b corresponde ao valor máximo que o campo elétrico pode assumir, isto implicará na regularização da auto-energia do elétron.

As primeiras tentativas de aplicar as ideias de Born e Infeld à gravidade, a fim de evitar singularidades, apareceram com o trabalho de Deser e Gibbons em [63]. Posteriormente, afim de evitar graus de liberdade fantasmas, Vollick [64] abordou a proposta de Deser e Gibbons no formalismo métrico-afim, motivado pelas ideias de Eddington [65]. A versão atual e mais apropriada das ideias de Born e Infeld deve-se aos trabalho de Bañados e Ferreira [66, 67], eles modificaram ligeiramente a abordagem adotada por Vollick [68]. O correspondente modelo passou a se chamar, em ingês, Eddington-inspired Born-Infeld (EiBI). Para uma revisão sobre o atual status da EiBI gravidade, suas motivações, aplicações e desafios, recomendamos o trabalho [68].

Adotaremos neste trabalho a versão de Bañados e Ferreira, com uma ligeira modificação,

vamos considerar que a conexão é simétrica. A ação é dada por

$$S_{BH} = \frac{1}{\kappa^2\epsilon}\int\left[\sqrt{-|g_{\mu\nu}+\epsilon R_{\mu\nu}(\Gamma)|}-\lambda\sqrt{-|g_{\mu\nu}|}\right]d^4x + S_m[g_{\mu\nu},\Psi]\ , \tag{4.18}$$

onde ϵ, que denominamos de BI parâmetro, tem dimensões de comprimento ao quadrado. As barras verticais significam o determinante da quantidade matricial que elas englobam. O tensor de Ricci $R_{\mu\nu}(\Gamma)$ é construído a partir da conexão Γ que, a priori, independe do tensor métrico $g_{\mu\nu}$. A ação $S_m[g_{\mu\nu},\Psi]$ descreve a dinâmica da métrica e dos campos de matérias representados Ψ. A constante λ é definida como $\lambda = 1+\epsilon\Lambda$, onde Λ é a constante cosmológica. Mas nesta tese não iremos considerá-la, então tomaremos $\lambda = 1$.

Vamos introduzir uma métrica auxiliar

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \epsilon R_{\mu\nu}, \tag{4.19}$$

em termos da qual a ação (4.18) é escrita como

$$S_{BI} = \frac{1}{\epsilon\kappa^2}\int\left[\sqrt{-h}-\sqrt{-g}\right]d^4x + S_m[g_{\mu\nu},\Psi]\ . \tag{4.20}$$

Onde h e g são, respectivamente, o determinante da métrica auxiliar $h_{\mu\nu}$ e da métrica física $g_{\mu\nu}$. Variando a ação com respeito a $h_{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}$ vamos ter

$$\delta S_m = \frac{1}{2\kappa^2\epsilon}\int\left[\sqrt{-h}h^{\mu\nu}(\delta g_{\mu\nu}+\epsilon\delta R_{\mu\nu})-\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\right]d^4x + \delta S_m\ . \tag{4.21}$$

As equações de campo para o tensor métrico são, portanto, dadas por

$$\sqrt{-h}h^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\left(g^{\mu\nu}-\epsilon\kappa^2 T^{\mu\nu}\right); \tag{4.22}$$

onde o tensor energia-momento é dado por $T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_m}{\delta g_{\mu\nu}}$. Estamos admitindo que a matéria não está acoplada à conexão. A equação para a conexão é obtida seguindo os mesmos passos desenvolvidos na seção (4.1), vamos obter

$$\nabla_\mu\left(\sqrt{-h}h^{\alpha\beta}\right) = 0\ . \tag{4.23}$$

A partir da Eq.(4.23) concluímos que a conexão associada à métrica auxiliar é a conexão de Levi-Civita, isto é, $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}h^{\alpha\lambda}\left(\partial_\mu h_{\lambda\nu}+\partial_\nu h_{\lambda\mu}-\partial_\lambda h_{\mu\nu}\right)$. Assumindo este ponto de vista, podemos obter $h_{\mu\nu}$ a partir da Eq.(4.19), escrevendo-a como $\epsilon R_{\mu\nu}(h) = (h_{\mu\nu}-g_{\mu\nu})$. Observe que o lado esquerdo desta equação apresenta derivadas de até segunda ordem em $h_{\mu\nu}$, para resolvê-la precisamos estabelecer a relação entre $h_{\mu\nu}$, a métrica $g_{\mu\nu}$ e a matéria $T_{\mu\nu}$. Nós faremos isso

a partir da Eq.(4.22). Nós assumimos que a métrica auxiliar e a métrica física relacionam-se através de uma matriz de deformação Ω:

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}\Omega^{\alpha}{}_{\nu}, \quad h^{\mu\nu} = \left(\Omega^{-1}\right)^{\mu}{}_{\alpha}\, g^{\alpha\nu}. \tag{4.24}$$

Substituindo (4.24) em (4.22) ficamos com

$$\sqrt{|\Omega|}\left(\Omega^{-1}\right)^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} - \epsilon\kappa^2 T^{\mu}{}_{\nu}. \tag{4.25}$$

Conforme podemos observar, a matriz deformação é uma função da distribuição local do tensor energia-momento. No caso $f(\mathcal{R})$ também observamos que o fator conforme $f_R(\mathcal{R})$, relacionando a métrica física e auxiliar, é determinado pela matéria (4.13). Contraindo a equação $\epsilon R_{\alpha\nu}(h) = (h_{\alpha\nu} - g_{\alpha\nu})$ com $h^{\alpha\mu}$, temos que $\epsilon R^{\mu}{}_{\nu}(h) = \frac{1}{\epsilon}\left(\delta^{\mu}{}_{\nu} - h^{\alpha\mu}g_{\alpha\nu}\right)$. Desenvolvendo um pouco mais, vamos ter

$$\begin{aligned}
R^{\mu}{}_{\nu}(h) &= \frac{1}{\epsilon}\left[\delta^{\mu}{}_{\nu} - \left(\Omega^{-1}\right)^{\alpha}{}_{\lambda}\, g^{\lambda\mu}g_{\alpha\nu}\right] \\
R^{\mu}{}_{\nu}(h) &= \frac{1}{\epsilon}\left[\delta^{\mu}{}_{\nu} - \left(\frac{\delta^{\alpha}{}_{\lambda} - \epsilon\kappa^2 T^{\alpha}{}_{\lambda}}{\sqrt{|\Omega|}}\right) g^{\lambda\mu}g_{\alpha\nu}\right] \\
R^{\mu}{}_{\nu}(h) &= \frac{\kappa^2}{\sqrt{|\Omega|}}\left[\frac{(\sqrt{|\Omega|}-1)}{\epsilon\kappa^2}\delta^{\mu}{}_{\nu} + T^{\mu}{}_{\nu}\right].
\end{aligned} \tag{4.26}$$

No vácuo ($T_{\mu\nu} = 0$), a matriz deformação é proporcional à matriz identidade (4.25), de modo que as métricas, física e auxiliar, tornam-se iguais. Portanto, no vácuo, as soluções desta teoria são as mesmas da Relatividade Geral. Assim como em $f(\mathcal{R})$, para que tenhamos alguma novidade física na dinâmica do espaço-tempo, devemos considerar a presença de matéria.

Nós podemos observar que as equações de campo para a métrica auxiliar nas teorias da gravitação $f(\mathcal{R})$ Eq.(4.17) e Born-Infeld Eq.(4.26) são similares no formalismo métrico-afim. De fato, elas podem ser unificadas em uma única estrutura dada por [24]

$$R^{\mu}{}_{\nu}(h) = \frac{\kappa^2}{\sqrt{|\Omega|}}\left[\mathcal{L}_G\delta^{\mu}{}_{\nu} + T^{\mu}{}_{\nu}\right]. \tag{4.27}$$

No caso $f(\mathcal{R})$, $\mathcal{L}_G = \frac{1}{2\kappa^2}f(\mathcal{R})$; além disso, a relação conforme entre as métricas é um caso particular onde $\Omega^{\mu}_{\nu} = f_{\mathcal{R}}\delta^{\mu}{}_{\nu}$. No caso Born-Infeld, $\mathcal{L}_G = \frac{\sqrt{|\Omega|}-1}{\kappa^2\epsilon}$. Nos próximos capítulos, vamos explorar fontes de matéria cuja a estrutura do respectivo tensor energia-momento permite resolver analiticamente a equação (4.27). Nesse sentido, na próxima seção vamos considerar essa específica fonte de matéria e resolver de forma geral a Eq.(4.27) para, mais adiante, consi-

derarmos casos bem específicos.

4.3 Solução Estática e Esfericamente Simétrica

As fontes de matéria que iremos considerar ao longo do nosso trabalho apresentam a seguinte estrutura para o tensor energia-momento:

$$T^{\mu}{}_{\nu} = \text{diag}(-\rho, -\rho, P_\theta, P_\theta) \ , \tag{4.28}$$

onde ρ é a densidade de energia e P_θ é a pressão, essas quantidades são funções que dependem das coordenadas do espaço-tempo. Essa estrutura aparece em fontes como campos elétricos, campos escalares e certos fluidos anisotrópicos. Desde que a matriz deformação depende de $T_{\mu\nu}$, vamos assumir que ela apresenta a mesma estrutura, ou seja,

$$\Omega^{\mu}{}_{\nu} = \text{diag}\left[\Omega_+, \Omega_+, \Omega_-, \Omega_-\right] \ . \tag{4.29}$$

As componentes da matriz deformação, $\Omega_\pm$, dependem da distribuição de matéria (veja a (4.25), por exemplo). Substituindo a (4.28) em (4.27), ficamos com

$$R^{\mu}{}_{\nu}(h) = \frac{\kappa^2}{\sqrt{|\Omega|}} \begin{pmatrix} (\mathcal{L}_G - \rho)\hat{I}_{2\times 2} & \hat{0}_{2\times 2} \\ \hat{0}_{2\times 2} & (\mathcal{L}_G + P_\theta)\hat{I}_{2\times 2} \end{pmatrix} , \tag{4.30}$$

$\hat{I}_{2\times 2}$ é a matriz identidade e $\hat{0}_{2\times 2}$ é uma matriz nula. O passo seguinte consiste em avaliar o lado esquerdo de (4.30). Para uma configuração estática e esfericamente simétrica, consideramos o seguinte elemento de linha para a métrica auxiliar $h_{\mu\nu}$

$$d\tilde{s}^2 = -A(x)e^{2\Phi(x)}dt^2 + \frac{dx^2}{A(x)} + \tilde{r}^2(x)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \ , \tag{4.31}$$

as coordenadas (t, x) são ortogonais ao setor esférico, dado pelas coordenadas (θ, φ). $A(x)$ e $\Phi(x)$ são funções arbitrárias da coordenada radial auxiliar x. Calculamos $R^{\mu}{}_{\nu}(h)$ tendo em mente que a conexão associada à $h_{\mu\nu}$ é a conexão de Levi-Civita (4.16), dessa forma obtemos, após algumas simplificações algébricas, que

$$R^{t}{}_{t}(h) - R^{x}{}_{x}(h) = \frac{2}{\tilde{r}}\left(\frac{d^2\tilde{r}}{dx^2} - \frac{d\Phi}{dx}\frac{d\tilde{r}}{dx}\right) , \tag{4.32}$$

$$R^{\theta}{}_{\theta}(h) = \frac{1}{\tilde{r}^2}\left[1 - \tilde{r}\frac{d\tilde{r}}{dx}\left(A\frac{d\Phi}{dx} + \frac{dA}{dx}\right) - A\left(\tilde{r}\frac{d^2\tilde{r}}{dx^2} + \left(\frac{d\tilde{r}}{dx}\right)^2\right)\right] . \tag{4.33}$$

Como $T^t_{\ t} = T^x_{\ x}$, a Eq. (4.30) implica em $\left(\frac{d^2\tilde{r}}{dx^2} - \frac{d\Phi}{dx}\frac{d\tilde{r}}{dx}\right) = 0$. Sem perda de generalidade, esse resultado nos permite estabelecer $\Phi(x) = 0$ e $\tilde{r} = x$. Então podemos escrever o elemento de linha para $h_{\mu\nu}$ como

$$d\tilde{s}^2 = -A(x)dt^2 + \frac{dx^2}{A(x)} + x^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \tag{4.34}$$

A partir da relação entre as métricas, Eq.(4.24) e a Eq.(4.29), obtemos o elemento de linha para a métrica $g_{\mu\nu}$, ou seja,

$$ds^2 = -\frac{A(x)}{\Omega_+}dt^2 + \frac{1}{\Omega_+ A(x)}dx^2 + r^2(x)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi)\ , \tag{4.35}$$

onde

$$r^2 = \frac{x^2}{\Omega_-}\ . \tag{4.36}$$

A partir da Eq.(4.33), a componente $R^\theta_{\ \theta}(h)$ torna-se

$$R^\theta_{\ \theta}(h) = \frac{1}{x^2}\left(1 - A - x\frac{dA}{dx}\right). \tag{4.37}$$

Para continuar vamos considerar o seguinte Ansatz

$$A(x) = 1 - \frac{2M(x)}{x}. \tag{4.38}$$

Com este Ansatz, a Eq.(4.37) torna-se

$$R^\theta_{\ \theta}(h) = \frac{2}{x^2}\frac{dM}{dx}. \tag{4.39}$$

Agora usamos a equação (4.30) para expressar $R^\theta_{\ \theta}(h)$ e assim ficamos com

$$\frac{2}{x^2}\frac{dM}{dx} = \frac{\kappa^2}{\sqrt{|\Omega|}}(\mathcal{L}_G + P_\theta)\ . \tag{4.40}$$

Para prosseguirmos é necessário conhecermos especificamente o modelo da gravitação e as fontes de matéria. Dessa forma, podemos determinar a matriz Ω e a função $M(x)$, que por sua vez, determina $A(x)$; com estas quantidade podemos obter $h_{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}$. Faremos isso nos próximos capítulos.

Capítulo 5

Monopolo Global na Teoria $f(\mathcal{R})$ da Gravitação

Conforme discutimos nos capítulos anteriores, para que tenhamos novos efeitos gravitacionais em teorias $f(R)$ no formalismo de Palatini, nós devemos considerar a presença de fontes de matéria cujo traço do tensor energia-momento não seja nulo, do contrário obteremos os mesmos resultados obtidos na TRG. Por isso, neste capítulo, nós vamos acoplar o tensor energia-momento referente à região externa ao núcleo do MG (2.35) ao modelo de gravidade $f(R)$ de Starobinsky [69]. Esse modelo, que é uma extensão da TRG para o regime de altas energias, têm despertado muitos interesses no contexto de inflação cósmica. Este capítulo é baseado no trabalho da referência [42].

5.1 Monopolo Global na gravitação $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} - \lambda\mathcal{R}^2$

Para a teoria $f(\mathcal{R})$ da gravitação, lembramos que $\mathcal{L}_G = \frac{f(\mathcal{R})}{2\kappa^2}$ e $\Omega^\mu_\nu = f_\mathcal{R}\delta^\mu{}_\nu$. Neste caso, portanto, $\Omega_+ = \Omega_- = f_\mathcal{R}$. Sendo assim, podemos escrever a métrica (4.35) da seguinte forma

$$ds^2 = \frac{1}{f_\mathcal{R}}\left[-A(x)dt^2 + \frac{dx^2}{A(x)} + x^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\right]. \tag{5.1}$$

Além disso, vamos ter $\sqrt{|\Omega|} = f_\mathcal{R}^2$; usando estes resultados na Eq.(4.40), ficamos com

$$\frac{2}{x^2}\frac{dM}{dx} = \frac{\kappa^2}{f_\mathcal{R}^2}\left(\frac{f(\mathcal{R})}{2\kappa^2} + P_\theta\right). \tag{5.2}$$

Para prosseguirmos, vamos considerar o modelo de Starobinsky [69] $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} - \lambda\mathcal{R}^2$, onde a constante λ tem dimensão de comprimento ao quadrado. Este modelo implica que $f_\mathcal{R} = 1 - 2\lambda\mathcal{R}$. Inserindo esse último resultado em (4.13), nós encontramos o escalar de curvatura

em termos do traço T do tensor energia-momento,

$$\mathcal{R} = -\kappa^2 T, \tag{5.3}$$

exatamente como ocorre na TRG. Como fonte de matéria, vamos usar a aproximação do MG (2.35), onde $T^{\mu}{}_{\nu} = \text{diag}\left(-\frac{\eta^2}{r^2}, -\frac{\eta^2}{r^2}, 0, 0\right)$, exatamente como (4.28). Como o traço é dado por $T = -\frac{2\eta^2}{r^2}$, temos que $\mathcal{R} = \frac{2\alpha^2}{r^2}$, onde definimos a constante adimensional $\alpha = \kappa\eta$. Substituindo em $f_{\mathcal{R}}$, ficamos com

$$f_{\mathcal{R}} = 1 - \frac{4\lambda\alpha^2}{r^2}\,. \tag{5.4}$$

A relação (4.15) implica em $x^2 = f_{\mathcal{R}} r^2$ que, com auxílio da equação (5.4), torna-se

$$r^2 = x^2 + 4\lambda\alpha^2. \tag{5.5}$$

A Fig.5.1 mostra o comportamento da coordenada $r(x)$ para diversos valores da constante

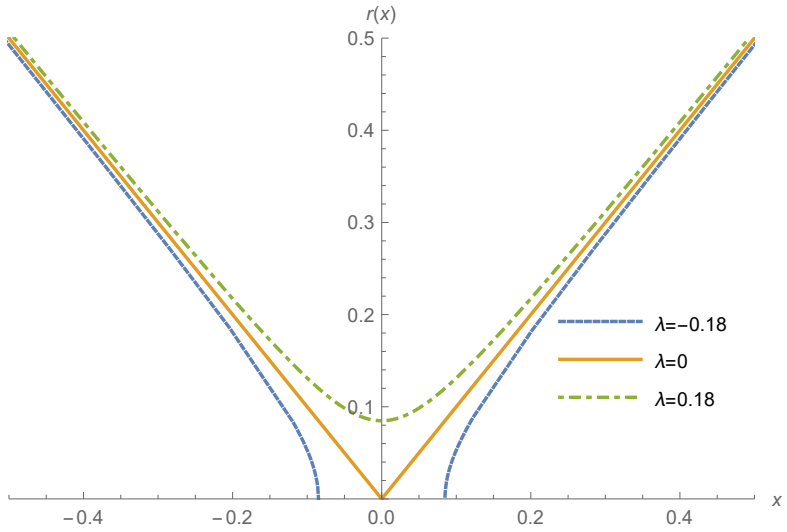


Figura 5.1: Função $r(x)$ dada pela Eq.(5.5). Neste gráfico nós estabelecemos $\alpha = 0.1$.

λ. Conforme podemos observar, nós temos três possibilidades. Quando $\lambda < 0$ e $\lambda = 0$, a coordenada radial apresenta um valor mínimo igual a zero. Já para $\lambda > 0$, a coordenada radial apresenta um valor mínimo r_m não nulo correspondente a $x = 0$, ou seja, $r(x = 0) = r_m = 2\alpha\sqrt{\lambda}$. Como a coordenada radial tem um valor mínimo não nulo, neste caso, o setor esférico da solução apresenta uma área mínima, assim como acontece em soluções tipo buracos de minhoca. Vamos mostrar que essa possibilidade permite obtermos soluções geodesicamente completas. Nos casos $\lambda = 0$, correspondente à TRG, e $\lambda < 0$, a coordenada radial r vai de zero até $+\infty$; vamos mostrar que nesses casos, assim como na TRG, a solução não é geodesicamente

completa. Ainda podemos observar na Fig.5.1 que assintoticamente as coordenadas $r(x)$ e x coincidem.

Agora que já sabemos o modelo de gravitação e a fonte de matéria, podemos resolver a Eq.(5.2) que, após as devidas substituições, torna-se

$$\frac{dM}{dx} = \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\lambda\alpha^4}{x^2}, \tag{5.6}$$

cuja integração fornece

$$M(x) = \frac{\alpha^2 x}{2} - \frac{\lambda\alpha^4}{x} + C\,. \tag{5.7}$$

Onde C é uma constante de integração que vamos escolher como $C = GM$, a fim de que no limite apropriado ($\lambda = 0$) a solução recaia na solução da TRG. Aqui, M é interpretada como a massa do black hole com o MG e G é constante gravitacional de Newton. Substituindo (5.7) em (4.38), ficamos com

$$A(x) = 1 - \alpha^2 - \frac{2GM}{x} + \frac{2\lambda\alpha^4}{x^2}\,. \tag{5.8}$$

Substituindo (5.4) e (5.8) em (5.1), nós obtemos o seguinte elemento de linha

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{x^2+4\lambda\alpha^2}{x^2}\Bigg[-\left(1-\alpha^2-\frac{2GM}{x}+\frac{2\lambda\alpha^4}{x^2}\right)dt^2 + \left(1-\alpha^2-\frac{2GM}{x}+\frac{2\lambda\alpha^4}{x^2}\right)^{-1}dx^2 \\ &+ x^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)\Bigg]. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Esta métrica descreve duas possibilidades de espaço-tempo, correspondente a $\lambda > 0$ e $\lambda < 0$. Cada possibilidade divide-se em duas regiões, $x > 0$ e $x < 0$. Na região $x > 0$ para $\lambda > 0$, esta métrica está conformalmente relacionada à métrica de Reissner-Nordström com carga topológica (α^2) e com a carga elétrica dada pela quantidade $Q^2 = 2\lambda\alpha^4$. No limite assintótico ($x \to \infty$), esta solução tende a solução de Barriola e Vilenkin (2.41), e somente quando $\lambda = 0$ de fato recaímos na solução prevista pela TRG (2.40). Desse modo, as alterações na ação de Einstein-Hilbert tornam-se mais relevantes na regiões mais internas da solução.

A localização dos horizontes de eventos é determinada pela equação $A(x) = 0$, que fornece

$$x_\pm = \frac{GM \pm \sqrt{(GM)^2 - 2\alpha^4\lambda(1-\alpha^2)}}{1-\alpha^2}\,. \tag{5.10}$$

Para $\lambda < 0$, temos dois horizontes de eventos localizados em $x = x_-$ no lado $x < 0$, e em $x = x_+$ no lado $x > 0$ (neste caso, o valor mínimo para a coordenada radial é zero e a solução é tipo Schwarzschild). Quando $\lambda > 0$, os dois horizontes ficam no lado $x > 0$, enquanto que

no lado $x < 0$ não há horizontes. Nós vamos nos concentrar principalmente no caso em que $\lambda > 0$, que apresenta as seguintes possibilidades quanto aos horizontes de eventos em $x > 0$:

(i) Sem horizontes: $(GM)^2 < 2\alpha^4\lambda(1-\alpha^2)$

(ii) Degenerado: $(GM)^2 = 2\alpha^4\lambda(1-\alpha^2)$

(iii) Dois horizontes : $(GM)^2 > 2\alpha^4\lambda(1-\alpha^2)$

Na Fig.5.2, nós ilustramos o comportamento da função $A(x)$ para os três casos destacados, e na Fig.5.3 nós apresentamos o alcance dos possíveis valores das quantidades adimensionais $\lambda/(GM)^2$ e α^2 para cada uma das possibilidades acima. Observamos que para valores realísticos de λ (da ordem de poucos centímetros quadrados) e para um dado valor de α, digamos $\alpha = 0.2$, teremos dois horizontes de eventos quando M for grande (região (iii)). Conforme M decresce, em algum valor crítico eles irão coincidir formando um único horizonte (região (ii), fronteira destacada pela seta). Conforme M decresce mais ainda, a solução deixa de ter horizontes (região (i)), ou seja, $A(x)$ é completamente positiva.

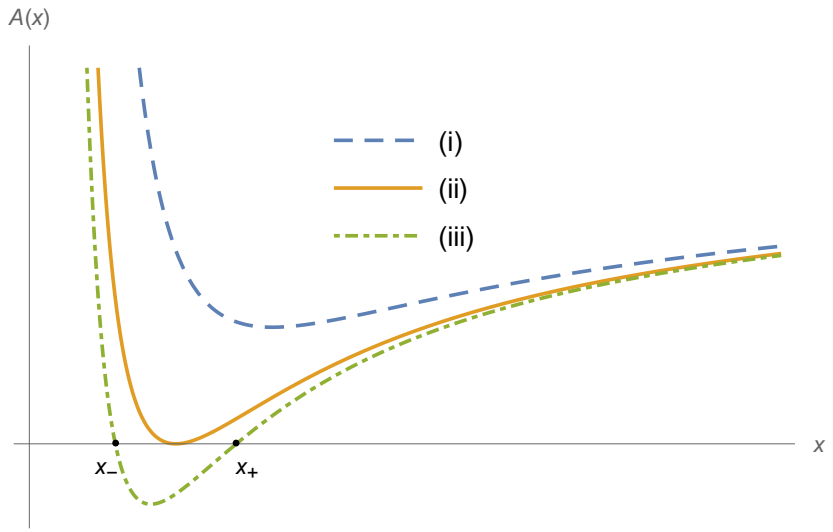


Figura 5.2: Funçao $A(x)$ para os três casos destacados, (i), (ii) e (iii).

5.2 Geodésicas

Agora nós vamos investigar as propriedades deste espaço-tempo através do estudo das geodésicas associadas ao movimento de partículas testes. Conforme temos visto, há duas conexões definidas neste espaço, ou seja, a conexão independente e a conexão da métrica (Levi-civita). Como o setor de matéria não se acopla à conexão, as partículas testes irão seguir as

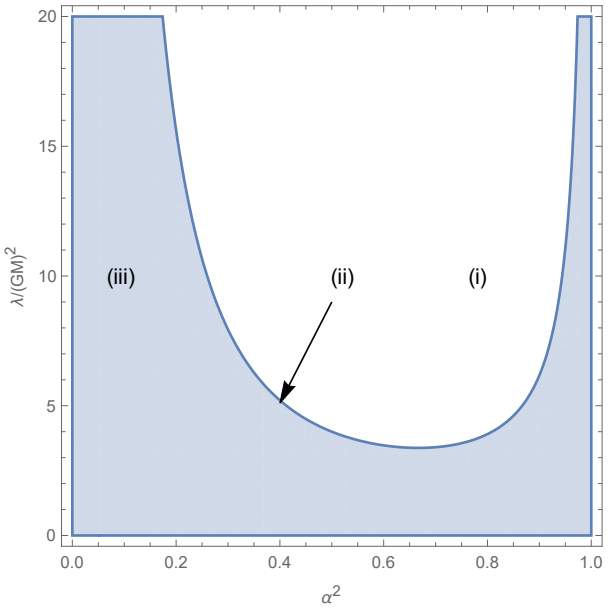


Figura 5.3: Regiões nas quais os parâmetros devem está para que a solução atenda às condições (i), (ii) e (iii). Veja que a região (ii) se trata da linha que separa as regiões (i) e (iii)

geodésicas associadas à conexão de Levi-Civita. Para fazermos esse estudo, vamos usar os resultados da seção 2.4.1.

Comparando as métricas (5.1) e (2.42), nós encontramos $C(x) = \frac{A(x)}{f_{\mathcal{R}}}$ e $B = \frac{1}{f_{\mathcal{R}}A(x)}$. Com isto, a equação da geodésica radial (2.47) torna-se

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^2 = \frac{f_{\mathcal{R}}^2 E^2}{2} - \frac{f_{\mathcal{R}}A}{2}\left(\frac{L^2}{r^2(x)} - \mathcal{L}\right). \tag{5.11}$$

Observe que (5.11) pode ser reconhecida como a equação de movimento de uma partícula clássica de massa unitária com energia $\mathcal{E} = \frac{f_{\mathcal{R}}^2 E^2}{2}$ e sujeita à ação de um potencial $V_{ef} = \frac{f_{\mathcal{R}}A}{2}\left(\frac{L^2}{r^2(x)} - \mathcal{L}\right)$. Para simplificar podemos escrever

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^2 = \mathcal{E} - V_{\text{eff}}. \tag{5.12}$$

Embora estejamos tratando de órbitas, que implica movimentos além duma direção, as geodésicas radiais fornecem muitas informações gerais, que justifica analisarmos o problema mais simples como é o caso da Eq.(5.12). A forma explicita do potencial efetivo para a métrica (5.9) é

$$V_{ef} = \frac{x^2}{2(x^2+4\lambda\alpha^2)}\left(1-\alpha^2-\frac{2GM}{x}+\frac{2\lambda\alpha^4}{x^2}\right)\left(\frac{L^2}{x^2+4\lambda\alpha^2}-\mathcal{L}\right). \tag{5.13}$$

Esta expressão será muito útil para estudarmos o comportamento das geodésicas radias neste

espaço-tempo. Através dela vamos calcular o desvio da luz no regime de campo fraco e, além disso, mostrar para quais valores dos parâmetros a solução descreve um espaço-tempo geodesicamente completo.

5.3 Partículas testes no espaço-tempo do MG

A equação (5.12) nos permite avaliar muitos aspectos do movimento de partículas nesse espaço-tempo. As regiões do espaço-tempo onde pode haver movimento radial deve obedecer a condição $\mathcal{E} - V_{\text{eff}} > 0$; em $\mathcal{E} = V_{\text{eff}}$ haverá um ponto de deflexão, ou seja, a partícula irá mudar de direção. Órbitas circulares podem acontecer nas regiões onde o potencial é plano, $\frac{dV_{\text{eff}}}{dx} = 0$, e elas podem ser de dois tipos: estáveis, se $\frac{d^2V_{\text{eff}}}{dx^2} > 0$, ou instáveis, se $\frac{d^2V_{\text{eff}}}{dx^2} < 0$. Órbitas estáveis são aquelas onde as partículas se mantém mesmo após algumas pertubações; enquanto que em órbitas instáveis as partículas afastam-se da trajetória circular, mesmo mediante pequenas pertubações.

Exceto para geodésicas tipo-luz com $L = 0$, para o qual o potencial efetivo é identicamente nulo, os zeros do potencial coincidem com a localização dos horizontes de eventos Eq.(5.10). Para x superior a x_+ o comportamento do potencial efetivo com respeito a L é semelhante tanto para $\lambda > 0$ quanto para $\lambda < 0$. Nesse sentido, nós ilustramos seu comportamento para geodésicas tipo-tempo ($\mathcal{L} = -1$) com $\lambda < 0$ e para diversos valores de $\frac{L}{GM}$, Fig. 5.4. Nós podemos observar que conforme $\frac{L}{GM}$ diminui, o máximo do potencial efetivo também decresce, enquanto o mínimo move-se para a esquerda. Se diminuirmos ainda mais $\frac{L}{GM}$ as duas órbitas circulares irão coincidir produzindo a menor órbita circular estável (MOCE) (Fig. 5.5); para $L < L_{MOCE}$, as órbitas circulares desaparecem.

No que se refere à região externa ao horizonte de eventos, as mudanças decorrentes de $\lambda \neq 0$ são relevantes apenas próximo ao máximo do potencial, conforme ilustramos na Fig. 5.6. Note que para $\lambda < 0$, quando diminuímos λ, o máximo do potencial cresce e move-se para a esquerda. Para $\lambda > 0$, quando aumentamos λ, o máximo do potencial decresce e desloca-se para a direita. A MOCE também sofre alterações em relação à TRG, onde $\lambda = 0$. Para $\lambda < 0$, ambos L_{MOCE} e x_{MOCE} diminuem; enquanto que para $\lambda > 0$, L_{MOCE} e x_{MOCE} aumentam.

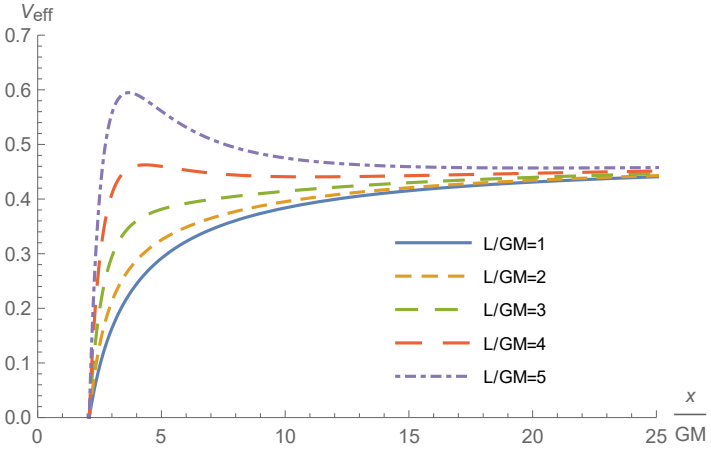


Figura 5.4: Potencial efetivo para diversos valores de L. Nós estabelecemos $\alpha = 0.2$ e $\frac{\lambda}{(GM)^2} = -0.18$.

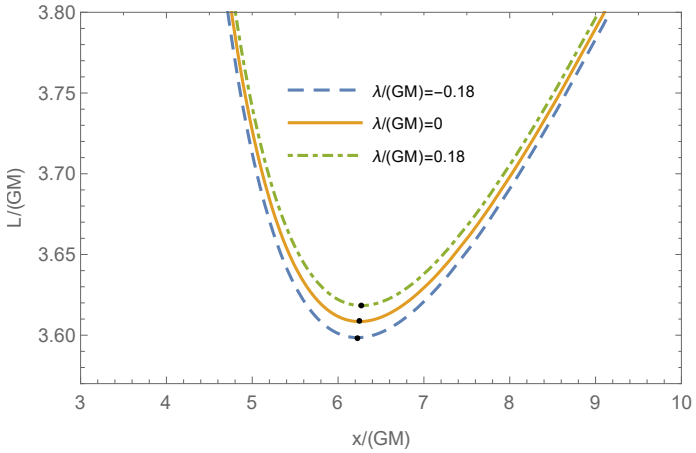


Figura 5.5: Órbitas circulares para valores diferentes de $\frac{L}{GM}$. Nós a obtemos a partir da equação $\frac{dV_{\text{eff}}}{dx} = 0$. Os pontos pretos indicam as coordenadas da MOCE. O lado esquerdo corresponde às órbitas instáveis e o direito, estáveis.

5.4 Geodésicas nulas

Diferentemente de partículas massivas, a forma do potencial efetivo não depende de L para geodésicas tipo-luz (também chamadas de geodésicas nulas) ($\mathcal{L} = 1$). Vamos relembrar agora algumas propriedades do buraco negro de Schwarzschild acerca das geodésicas nulas. Nesse caso, o potencial efetivo para $L \neq 0$ apresenta um pico referente à única órbita circular, que é instável. Portanto, sob qualquer pertubação a luz pode colapsar no buraco negro ou seguir para longe dele. Para $\lambda < 0$ acontece a mesma coisa com a nossa solução. No caso $\lambda > 0$, além do pico, o potencial apresenta um vale que está dentro do horizonte de eventos Fig. 5.7 e, por essa razão, não se trata de possíveis órbitas circulares estáveis. No entanto, esse comportamento do potencial implicará na completeza de geodésicas tipo-luz, conforme

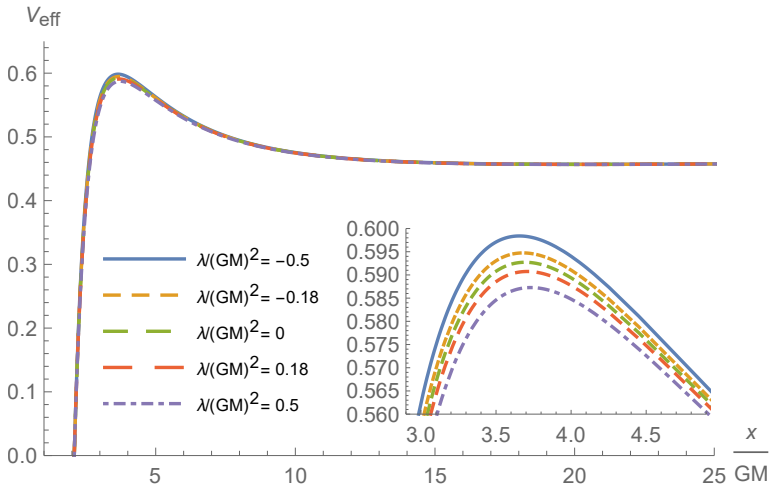


Figura 5.6: Potencial efetivo para vários valores de $\frac{\lambda}{(GM)^2}$. Nós tomamos $\alpha = 0.2$ e $\frac{L}{GM} = 5$. Note que $\lambda = 0$ é o caso da TRG.

mostraremos mais adiante.

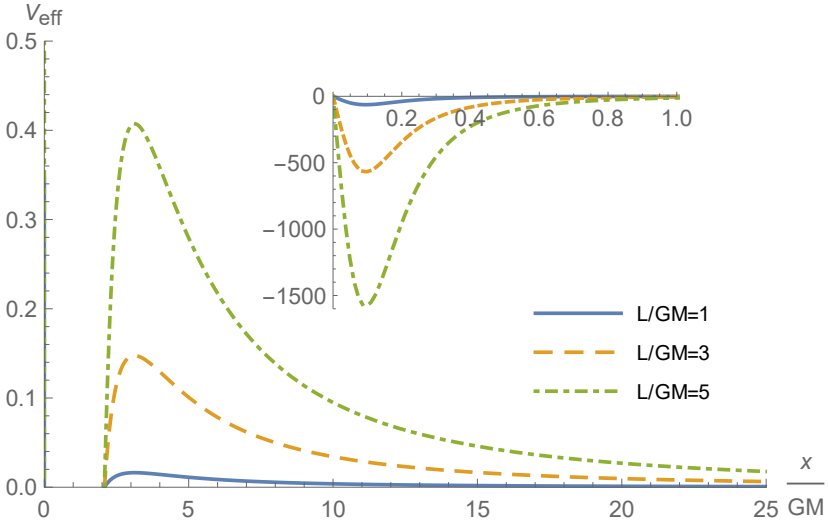


Figura 5.7: Potencial efetivo V_{ef} para $\lambda > 0$. Independentemente de L, ele mantém a forma, muito embora o pico decresça quando $\frac{L}{GM}$ decresce. O gráfico menor ilustra o comportamento próximo à $x = 0$. Observe que isso não ocorre para $\lambda < 0$, também não ocorre na solução de Schwarzschild. Nesta figura nós estabelecemos $\alpha = 0.2$ e $\frac{\lambda}{(GM)^2} = 0.18$.

.

Agora nós vamos calcular a deflexão da luz no regime de campo fraco, ou seja, quando a trajetória da luz está muito além da posição do máximo do potencial, que é denominado de raio da esfera de fótons. Para tanto, vamos iniciar a partir da Eq.(5.11) com $\mathcal{L} = 0$,

$$\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^2 = f_{\mathcal{R}}^2 E^2 - f_{\mathcal{R}} A(x) \frac{L^2}{r^2} \,. \tag{5.14}$$

A partir da relação $x^2 = f_{\mathcal{R}} r^2$, podemos escrever esta equação como

$$\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^2 = f_{\mathcal{R}}^2 \left(E^2 - A(x)\frac{L^2}{x^2}\right) . \tag{5.15}$$

Substituindo $x^2 = f_{\mathcal{R}} r^2$ na quantidade conservada L Eq. (2.46), nós mostramos que $\left(\frac{d\varphi}{d\zeta}\right)^{-2} = \frac{x^4}{f_{\mathcal{R}}^2 L^2}$. Multiplicando essa última expressão por (5.15) e manipulando um pouco, ficamos com

$$\frac{d\varphi}{dx} = \left(\frac{x^4}{\beta^2} - x^2 A(x)\right)^{-1/2} , \tag{5.16}$$

onde introduzimos o parâmetro de impacto aparente $\beta = \frac{L}{E}$. Essa expressão é válida para qualquer teoria $f(\mathcal{R})$ e, portanto, pode ser usada para calcular a deflexão da luz em qualquer teoria desde que se conheça a função $A(x)$.

Seja $x = x_0$ o raio de deflexão da órbita da luz; então $\mathcal{E}(x_0) = V_{\text{eff}}(x_0)$, ou seja,

$$\frac{f_{\mathcal{R}}^2(x_0)E^2}{2} = \frac{f_{\mathcal{R}}(x_0)A(x_0)}{2}\frac{L^2}{r^2(x_0)} . \tag{5.17}$$

Simplificando essa expressão, ficamos com

$$\beta^{-2} = \frac{A(x_0)}{x_0^2} . \tag{5.18}$$

Por simetria, a contribuição $\Delta\varphi$ devido à região anterior e posterior ao ponto de deflexão x_0 são iguais. Com isso, nós podemos escrever a mudança total na coordenada angular como

$$\Delta\varphi = 2\int_{x_0}^{\infty} \left(\frac{x^4}{\beta^2} - x^2 A(x)\right)^{-1/2} dx . \tag{5.19}$$

Agora é útil fazermos a seguinte mudança de variável: Seja $u = \frac{1}{x}$, então $dx = -x^2 du$. Com isto, a expressão acima fica

$$\Delta\varphi = 2\int_0^{u_0} \left(\frac{1}{\beta^2} - u^2 A(u)\right)^{-1/2} du , \tag{5.20}$$

onde $u_0 = \frac{1}{x_0}$ e, de (5.8), $A(u) = 1 - \alpha^2 - 2GMu + 2\lambda\alpha^4 u^2$. Da equação (5.18) podemos substituir β em (5.20) e então ficamos com $\Delta\varphi = 2\int_0^{u_0} \left(u_0^2 A(x_0) - u^2 A(u)\right)^{-1/2} du$. Substituindo os valores para $A(x)$ e $A(x_0)$, temos

$$\Delta\varphi = 2\int_0^{u_0} \left[u_0^2\left(1 - \alpha^2 - 2GMu_0 + 2\lambda\alpha^4 u_0^2\right) - u^2\left(1 - \alpha^2 - 2GMu + 2\lambda\alpha^4 u^2\right)\right]^{-1/2} du. \tag{5.21}$$

Esta integral não tem uma solução exata. Entretanto, nós estamos interessados no limite de

campo fraco, o que nos permite confortavelmente calcular o ângulo de deflexão da luz até a primeira ordem em GM e λ:

$$\Delta\phi = \Delta\phi\Big|_{GM=\lambda=0} + GM\frac{\partial(\Delta\phi)}{\partial GM}\Big|_{GM=\lambda=0} + \lambda\frac{\partial(\Delta\phi)}{\partial\lambda}\Big|_{GM=\lambda=0} + GM\lambda\frac{\partial^2(\Delta\phi)}{\partial GM\partial\lambda}\Big|_{GM=\lambda=0} + \mathcal{O}((GM)^2\lambda^2). \tag{5.22}$$

Fazendo isso, encontramos

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}} + \frac{4GM}{\beta(1-\alpha^2)^2} - \frac{3\pi\lambda\alpha^4}{2\beta^2(1-\alpha^2)^{5/2}} + \frac{GM\alpha^4\lambda(3\pi-28)}{\beta^3(1-\alpha^2)^4} + \mathcal{O}((GM)^2\lambda^2). \tag{5.23}$$

A deflexão angular $\delta\varphi$ até a primeira ordem é, portanto,

$$\begin{aligned}\delta\varphi &= \Delta\phi - \pi = \pi\left(\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} - 1\right) + \frac{4GM}{\beta(1-\alpha^2)^2} - \frac{\lambda\alpha^4}{\beta^3(1-\alpha^2)^{5/2}}\left[\frac{3\pi\beta}{2} + \frac{GM(28-3\pi)}{(1-\alpha^2)^{3/2}}\right] \\ &+ \mathcal{O}((GM)^2\lambda^2)\,.\end{aligned} \tag{5.24}$$

O primeiro termo corresponde à deflexão da luz quando desprezamos o termo de massa, isso deve-se ao déficit angular presente nesse espaço-tempo [28]. O segundo termo é a deflexão de um buraco negro com o MG [70]. Finalmente, o terceiro termo é a contribuição da correção quadrática na ação de Einstein-Hilbert em baixas ordens. De fato essa contribuição é muito pequena, mas pode aumentar ou diminuir a deflexão angular dependendo do sinal de λ. Para $\lambda > 0$, o termo de correção é negativo, ou seja, a deflexão é menor do que aquela esperada pela TRG, enquanto que para $\lambda < 0$ é maior. Se nós desprezarmos o termo de massa, a deflexão será da por

$$\begin{aligned}\delta\varphi &\simeq \pi\left(\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} - 1\right) - \frac{3\pi\alpha^4\lambda}{2\beta^2(1-\alpha^2)^{5/2}} \\ \delta\varphi &\simeq \frac{\alpha^2\pi}{2} - \frac{3\pi\lambda\alpha^4}{2\beta^2}\,.\end{aligned} \tag{5.25}$$

Embora muito pequena, mesmo no regime assintótico a teoria modificada da gravitação deixa uma assinatura que pode ser observada. O fator extra na deflexão provém da alteração na ação de Einstein-Hilbert. De fato, no regime assintótico, nós temos quase nenhuma novidade em relação à TRG. Mas no regime de alta curvatura, para algumas possibilidades nossa solução difere muito da TRG, conforme vamos agora estudar.

5.5 Completeza geodésica

Nesta seção nós vamos investigar a completeza geodésica desta solução para os possíveis valores de λ. Para isso nós vamos analisar o comportamento da solução nas regiões mais internas do nosso espaço-tempo, isto é, no regime de alta curvatura. É importante relembrar que este critério, a completeza geodésica, é até então o mais aceito para determinar se o espaço-tempo é singular ou não [25, 48]. Sendo assim, não é o comportamento dos invariantes de curvatura que determina a presença de singularidade no espaço-tempo.

Antes de entrarmos nos detalhes, é útil fazermos algumas observações, já que estamos trabalhando com a coordenada radial x. Quando $\lambda < 0$, nós já observamos pela Eq.(5.5) que o módulo mínimo de x corresponde a $r^2(x_m) = 0$, ou seja, $x_m^2 = 4|\lambda|\alpha^2$. Por outro lado, quando $\lambda > 0$ a coordenada x chega até zero, que equivale a $r = r_m = 2\alpha\sqrt{\lambda}$. Tendo isso em mente, vamos calcular os invariantes de curvatura associados à métrica $g_{\mu\nu}$, cujas as geodésicas descrevem o movimento de partículas testes. Os invariantes de curvatura $g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ e $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ divergem quando $x \to 0$ para $\lambda > 0$,

$$R(g) \approx -\frac{6\alpha^2}{x^2} + \frac{3M}{\alpha^2\lambda x} + \frac{11}{4\lambda} + \dots \tag{5.26}$$

$$R^{\mu\nu}(g)R_{\mu\nu}(g) \approx \frac{18\alpha^4}{x^4} - \frac{18M}{\lambda x^3} + \dots , \tag{5.27}$$

e para $\lambda < 0$, quando $x \to x_m$,

$$R(g) \approx -\frac{3\left(3\alpha^3\sqrt{\lambda} - 2\alpha\sqrt{\lambda} + 2M\right)}{4(x - x_m)} + \dots \tag{5.28}$$

$$R^{\mu\nu}(g)R_{\mu\nu}(g) \approx \frac{9\left(9\alpha^6\lambda - 12\alpha^4\lambda + 4\alpha^2\lambda + 4M^2 + 12\alpha^3\sqrt{\lambda}M - 8\alpha\sqrt{\lambda}M\right)}{16\left(x - x_m\right)^6} + \dots \tag{5.29}$$

Desse modo a curvatura diverge em ambos os casos, quando $\lambda > 0$ a divergência ocorre na "garganta da solução" e em $\lambda < 0$, no centro. No entanto, esse não é o critério para definirmos se um espaço-tempo apresenta singularidades ou não. Conforme discutimos no capítulo 3, o que determina se o espaço-tempo é singular ou não é a completeza geodésica. Por isso, vamos investigar na próxima seção a completeza geodésica neste espaço-tempo.

5.5.1 Completeza no caso $\lambda < 0$

Vamos começar pelo caso $\lambda < 0$, onde não há estrutura do tipo buraco de minhoca. Nesse caso, podemos escrever o potencial efetivo (5.13), para região $x > 0$ (a região $x < 0$ tem o mesmo comportamento), como

$$V_{ef} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x_m^2}{x^2 - x_m^2}\right)\left(1 - \alpha^2 - \frac{2GM}{x} - \frac{2|\lambda|\alpha^4}{x^2}\right)\left(\frac{L^2}{x^2 - x_m^2} - \mathcal{L}\right) . \tag{5.30}$$

No limite $x \to x_m$, nós teremos

$$V_{ef} \approx -\frac{L^2 x_m^2}{(x^2 - x_m^2)^2} \qquad \text{e} \quad \mathcal{E} \approx \frac{x_m^4 E^2}{(x^2 - x_m^2)^2} . \tag{5.31}$$

Assim como ocorre na solução de Schwarszchild, o potencial torna-se infinitamente atrativo. Entretanto, a energia efetiva $\mathcal{E}$ diverge positivamente, de modo que, pela (5.12), teremos

$$\frac{dx}{d\zeta} \approx \pm\frac{\sqrt{x_m^4 E^2 + x_m^2 L^2}}{(x^2 - x_m^2)} . \tag{5.32}$$

Vamos denominar o parâmetro afim em $x = x_m$ de ζ_0. Assim, integrando esta equação a partir de $x = x_m$ até um arbitrário valor de x, vamos ter

$$\zeta(x) \approx \ \zeta_0 \pm \frac{(x_m - x)^2(2x_m + x)}{3\sqrt{x_m^4 E^2 + x_m^2 L^2}} . \tag{5.33}$$

Em relação a $x = x_m$, os sinais $+$ refere-se à partículas saindo e $-$, à partículas chegando. Nós podemos observar que quando $x \to x_m$, $\zeta \to \zeta_0$; ou seja, o parâmetro afim não pode ser estendido além de ζ_0, isso significa que estas geodésicas são incompletas no passado ou no futuro. Este resultado é válido para os três tipos de geodésicas, tipo-tempo, tipo-luz e tipo-espaço, com ou sem $L = 0$. Portanto, para $\lambda < 0$, nossa solução não apresenta nenhuma vantagem em relação à TRG no que diz respeito a completeza geodésica do espaço-tempo, assim, nesse caso, o espaço-tempo é singular.

5.5.2 Completeza no caso $\lambda > 0$

Neste caso, vamos ter uma mudança radical em relação ao caso anterior $\lambda < 0$. Primeiramente, observe que no limite $x \to 0$ da região $x > 0$, o potencial (5.13) é dado por

$$\lim_{x\to 0} V_{\text{eff}} = \begin{cases} \frac{L^2+4\lambda\alpha^2}{16\lambda}, & \text{se} \quad \mathcal{L} = -1, \\ \frac{L^2}{16\lambda}, & \text{se} \quad \mathcal{L} = 0, \\ \frac{L^2-4\lambda\alpha^2}{16\lambda}, & \text{se} \quad \mathcal{L} = 1\ . \end{cases} \tag{5.34}$$

De (5.4) nós temos que $f_{\mathcal{R}} = 1 - \frac{4\lambda\alpha^2}{x^2+4\lambda\alpha^2}$. Como a energia efetiva é dada por $\mathcal{E} = \frac{f_{\mathcal{R}}^2 E^2}{2}$, nós então concluímos que $\lim_{x\to 0} \mathcal{E} = 0$. Desse modo, pela Eq.(5.12), para geodésicas tipo-tempo e tipo-luz (com $L \neq 0$), existe um ponto de deflexão antes de $x = 0$. Isto significa que partículas testes massivas e raios luz com $L \neq 0$ sempre encontram um ponto de deflexão antes de alcançarem a "garganta" localizada em $x = 0$. Para geodésicas tipo-luz com $L = 0$, o potencial é identicamente nulo e a equação (5.12) implica

$$\frac{dx}{d\zeta} \approx \pm E \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4\lambda\alpha^2}}. \tag{5.35}$$

Integrando, ficamos com

$$\zeta(x) \approx \pm \left[\sqrt{x^2 + 4\lambda\alpha^2} + 2\alpha\sqrt{\lambda} \ln \left(\frac{x}{2\lambda\alpha^2 + \sqrt{\lambda\alpha^2(x^2 + 4\lambda\alpha^2)}} \right) \right]. \tag{5.36}$$

A presença do logaritmo nesta expressão significa que o parâmetro afim torna-se ilimitado quando $x \to 0$. Nesse limite nós temos que $\lambda \to +\infty$ para raios de luz se aproximando de $x = 0$ e $\lambda \to -\infty$ para os raios de luz que estão se afastando, conforme ilustramos na Fig.5.8. Como o parâmetro afim ζ é definido sobre todo o eixo real, a geodésica é completa. Isto representa um avanço em relação à solução de Reissner-Nordström, onde geodésicas tipo-luz com $L = 0$ também são incompletas, ou seja, não podem ser estendidas além da singularidade $r = 0$ [24]. Portanto, de modo geral, para geodésicas tipo-luz e tipo-tempo, nós já podemos concluir que nosso espaço-tempo é geodesicamente completo.

Por questões de completeza, agora vamos considerar geodésicas tipo-espaço, onde $\mathcal{L} = 1$. Como $\mathcal{E} = \frac{f_{\mathcal{R}}^2 E^2}{2}$, próximo à $x = 0$, a Eq.(5.12) implica que

$$\frac{dx}{d\zeta} \approx \pm \sqrt{\frac{4\alpha^2\lambda - L^2}{16\lambda}}, \tag{5.37}$$

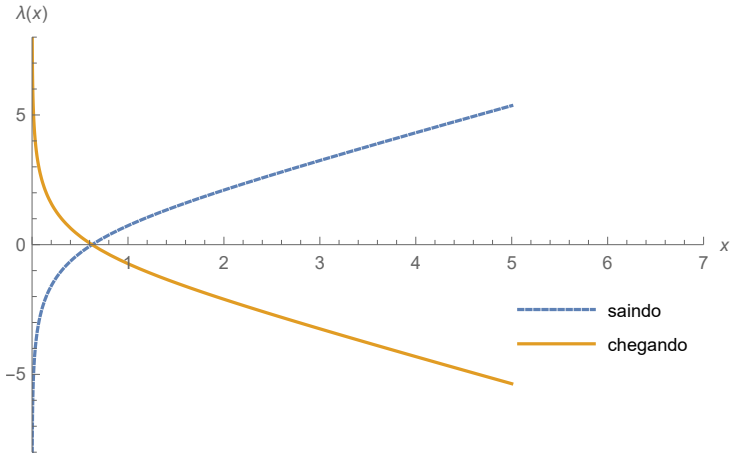


Figura 5.8: Comportamento do parâmetro afim no limite $x \to 0$. Nós tomamos $\alpha = 0.8$ e $\lambda = 0.7$.

cuja integração fornece

$$\zeta(x) \approx \zeta_0 \pm \left(\sqrt{\frac{4\alpha^2\lambda - L^2}{16\lambda}} \right) x \, . \tag{5.38}$$

Neste caso, o parâmetro afim da geodésica tipo-espaço estende-se além da garganta $x = 0$, para regiões negativas de x. Observe que estas são as únicas curvas capazes de cruzar a garganta, desde que geodésicas tipo-tempo e tipo-luz com $L \neq 0$ são repelidas antes de alcançá-la, e geodésicas tipo-luz com $L = 0$ levam um tempo afim infinito para alcançar a garganta. Desse modo nós concluímos que para $\lambda > 0$ todas as geodésicas são completas e, portanto, o espaço-tempo é regular, mesmo que os invariantes de curvatura divirjam na garganta da solução, conforme discutimos no início desta seção.

Para concluir este capítulo, vamos fazer uma revisão destacando nossos principais resultados. Nós investigamos a geometria gerada pelo MG numa teoria $f(\mathcal{R})$ através do formalismo de Palatini. Na região $x > 0$ do caso $\lambda > 0$, nós encontramos que a métrica é conformalmente relacionada à métrica de Reissner-Nordström com a carga topológica do MG. Apesar de compartilharem muitas características em comum, por exemplo, a estrutura dos horizontes de eventos, em nosso caso, a solução é geodesicamente completa, enquanto que o espaço-tempo de Reissner-Nordström não é. Para $\lambda < 0$, a solução tem as mesmas propriedades da solução de Schwarzschild, uma vez que a carga efetiva $Q^2 = 2\lambda\alpha^4$ seria negativa; ainda nesse caso, mostramos que o espaço-tempo é singular, porque o parâmetro afim associado às geodésicas não podem ser estendidas além de x_m (que equivale a $r = 0$). Por outro lado, para $\lambda > 0$, a existência de uma área mínima no setor esférico possibilitou uma estrutura tipo buraco de minhoca que resultou na completeza geodésica do espaço-tempo, apesar da divergência dos in-

variantes de curvatura no limite $x \to x_m$. Devemos destacar que essa solução não é um buraco de minhoca, por que a garganta da solução ($x = 0$) não é uma região fisicamente acessível. Nós mostramos que partículas massivas e raios de luz com $L \neq 0$ mudam de direção antes de alcançarem a garganta, enquanto raios de luz com $L = 0$ teriam que levar um tempo infinito para alcançarem a garganta. Em vista disso, não há a necessidade de considerarmos o tensor energia-momento associado ao núcleo do MG, porque dada a auto consistência da solução, tal núcleo não é necessário. Neste caso, a ausência de uma fonte para o campo escalar (que é sustentado por efeitos topológicos) implica que essa solução pode ser reconhecida como um *geon* [71].

Capítulo 6

Modelo Sigma não Linear numa Teoria Born-Infeld da Gravitação

Neste capítulo vamos estudar o modelo sigma não linear numa teoria Born-Infeld da gravitação, baseados em nossa contribuição ao tema [43]. Para isso vamos desenvolver um pouco mais os resultados da seção 4.2 para este contexto específico.

Para obtermos a matriz deformação (4.24), substituímos o tensor energia-momento (4.28) na equação (4.25). Observando que $\sqrt{|\Omega|} = \Omega_+\Omega_-$, então podemos mostrar que

$$\Omega_- = 1 + \epsilon\kappa^2\rho, \quad \text{e} \quad \Omega_+ = 1 - \epsilon\kappa^2 P_\theta \, . \tag{6.1}$$

Como $r^2 = \frac{x^2}{\Omega_-}$, imediatamente concluímos que

$$x^2 = r^2 + \epsilon\kappa^2 r^2 \rho \, . \tag{6.2}$$

Lembrando que neste caso $\mathcal{L}_G = \frac{\sqrt{|\Omega|}-1}{\epsilon\kappa^2}$, nós também podemos desenvolver um pouco mais a Eq.(4.40). Com auxílio da (6.1), temos

$$\begin{aligned} \frac{2}{x^2}\frac{dM(x)}{dx} &= \frac{(\Omega_-)-1}{\epsilon\Omega_-} = \frac{1}{2\epsilon}\underbrace{\frac{x^2}{\Omega_-}}_{r^2}(\Omega_{-1}-1) \\ \frac{dM(x)}{dx} &= \frac{\kappa^2 r^2\rho}{2} \, . \end{aligned}$$

Com isto, a (4.38) será dada por

$$A(x) = 1 - \frac{2GM}{x} - \frac{\kappa^2}{x}\int r^2\rho \, dx \, , \tag{6.3}$$

onde estabelecemos a constante de integração como GM a fim de que no limite apropriado, $\epsilon \to 0$, a solução recaia na solução prevista pela TRG. Com estes resultados (6.1, 6.2 e 6.3)

podemos obter a métrica que descreve o espaço-tempo,

$$ds^2 = -\frac{A(x)}{\Omega_+}dt^2 + \frac{1}{\Omega_+ A(x)}dx^2 + r^2(x)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi) \,, \tag{6.4}$$

de forma mais direta, como faremos mais adiante nas próximas seções.

A fim de tornar claro alguns aspectos das nossas futuras discussões, é oportuno calcularmos $R_{\mu\nu}(g)k^\mu k^\nu$ para uma congruência de geodésicas radiais nulas no espaço-tempo descrito pela métrica (6.4). A partir da primeira equação em (2.46) e lembrando que $k^\mu k_\mu = 0$, vamos obter os seguintes vetores nulos $k^t = \frac{\Omega_+}{A(x)}$ e $(k^r)^2 = \Omega_+$, nós estabelecemos $E = 1$. Com isso vamos ter

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}(g)k^\mu k^\nu &= g_{\mu\alpha}R^\alpha{}_\nu k^\mu k^\nu \\ &= \frac{\Omega_+}{A}\left[-R^t{}_t + R^x{}_x\right] \,. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Devemos ter em mente que estamos trabalhando com o tensor de Ricci da métrica, e não o da conexão independente, visto que os raios de luz não “sentem"a presença da conexão independente. Nós então podemos mostrar que $-R^t{}_t + R^x{}_x = -\frac{2A}{r}\frac{d}{dx}\left(\Omega_+\frac{dr}{dx}\right)$. Substituindo esse resultado na expressão acima, temos

$$R_{\mu\nu}(g)k^\mu k^\nu = -\frac{2\Omega_+}{r}\frac{d}{dx}\left(\Omega_+\frac{dr}{dx}\right) . \tag{6.6}$$

A partir de $r^2 = \frac{x^2}{\Omega_-}$ e (6.1), obtemos $r^2 = \frac{x^2}{1+\epsilon\rho}$. Com isso, temos

$$\frac{dr}{dx} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon\rho}}\left[1 - \left(\pm\frac{\epsilon r}{2(1+\epsilon\rho)}\frac{d\rho}{dx}\right)\right] \,. \tag{6.7}$$

onde o sinal $-$ corresponde ao lado $x < 0$ e $+$, ao lado $x > 0$. Para continuarmos com nosso cálculo, precisamos conhecer $\frac{d\rho}{dx}$. Para uma métrica estática e esfericamente simétrica, como a que estamos considerando, e um tensor energia-momento da forma 4.28, a conservação do tensor energia-momento, $\nabla_\mu T^{\mu\nu}$, torna-se

$$\frac{d\rho}{dx} = -\frac{2}{r(x)}\left(\frac{dr}{dx}\right)(\rho + P_\theta) \,. \tag{6.8}$$

Introduzindo essa expressão em (6.7), ficamos com $\frac{dr}{dx} = \pm\frac{\sqrt{1+\epsilon\rho}}{1-\epsilon P_\theta}$. Substituindo essa equação em (6.6) e após algumas manipulações simples vamos então obter

$$R_{\mu\nu}(g)k^\mu k^\nu = \frac{2\epsilon}{r^2(x)}(\rho + P_\theta) \,. \tag{6.9}$$

Esse resultado foi primeiramente obtido por Shaikh em [72] com uma abordagem ligeiramente diferente desta. A partir desse resultado já podemos tirar importantes conclusões acerca da gravidade Born-Infeld. Conforme vimos na seção 3.1, a CCN implica na convergência das geodésicas, mostrando o caráter atrativo da TRG; além disso, a CCN também implica na conservação da CEN. Nosso resultado (6.9) mostra que isso não é, em geral, verdadeiro para a gravidade Born-Infeld. Observe que para obedecermos todas as condições de energia devemos apenas ter

$$\rho \geq 0 \,, \qquad \rho + P_\theta \geq 0 \,, \qquad \rho \geq |P_\theta| \,. \tag{6.10}$$

Assim, podemos violar a CCN sem violar as condições de energia, desde que $\epsilon < 0$. A relevância desse resultado está na possibilidade de obtermos soluções tipo buracos de minhoca ou buracos negros regulares sem a necessidade de matéria exótica. Na próxima seção vamos considerar fontes de matérias cujo tensor energia-momento tem essa mesma estrutura, (4.28). Vamos mostrar que em alguns casos, onde $\epsilon < 0$, o modelo realmente fornece soluções regulares.

6.1 Modelo Sigma não Linear

Nesta seção, vamos apresentar o modelo sigma não linear com o termo cinético generalizado. Vamos mostrar que o respectivo tensor energia-momento se encaixa na estrutura algébrica considerada em (4.28) e, portanto, podemos acoplá-lo à gravidade Born-Infeld para obtermos a respectiva métrica do espaço-tempo através dos resultados mostrados acima.

Partimos da Lagrangiana que descreve um K-monopolo [33]

$$S = \int \left[\mathcal{K}(X) - \frac{\lambda}{4}(\vec{\Psi}\cdot\vec{\Psi} - \eta^2)^2 \right] \sqrt{-g}\, d^4x \,, \tag{6.11}$$

onde $\mathcal{K}(X)$ é um funcional do termo cinético canônico $X = \frac{1}{2}\partial_\mu\vec{\Psi}\cdot\partial^\mu\vec{\Psi}$. As constantes λ e η são, respectivamente, uma constante de acoplamento e uma escala de energia. Observe que $\vec{\Psi}$ corresponde a um tripleto de campos escalares acoplados. O modelo (6.11) é invariante sob o grupo de simetria contínua $SO(3)$ que corresponde a rotações de $\vec{\Psi}$ no espaço interno, usamos o termo "interno" para diferenciar de transformações relacionadas ao espaço-tempo. Qualquer solução que satisfaça a condição

$$\vec{\Psi}\cdot\vec{\Psi} = \eta^2 \tag{6.12}$$

corresponde a uma solução de mínima energia, por essa razão, a (6.12) define a variedade do vácuo. O grupo de simetria da variedade do vácuo é o $U(1)$, nesse sentido o modelo (6.11)

apresenta quebra espontânea de simetria $SO(3) \to U(1)$. No modelo sigma não linear o campo escalar permanece na variedade do vácuo, de modo que λ é interpretado como um multiplicador de Lagrange. Por questões de simplicidade, vamos fazer a seguinte redefinição $\vec{\Psi} = \eta\vec{\Phi}$, de modo que a (6.12) implica $\vec{\Phi} \cdot \vec{\Phi} = 1$; essa condição induz um sistema de coordenadas ϕ^a sobre a variedade do vácuo tal que $\vec{\Phi} = \vec{\Phi}(\phi^a)$, onde $a = 1, 2$. Sendo assim, temos $X = \frac{\eta^2}{2}\frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial\phi^i}\frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial\phi^j}\partial_\mu\phi^i\partial^\mu\phi^j$ e, portanto, a ação efetiva do modelo sigma não linear será dada por [73, 74]

$$S = \int \mathcal{K}(X)\sqrt{-g}d^4x \,, \tag{6.13}$$

onde $X = \frac{1}{2}\eta^2\xi_{ij}\partial_\mu\phi^i\partial^\mu\phi^j$. A quantidade ξ_{ij} é a métrica da variedade bidimensional do vácuo: $\xi_{ij} = \frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial\phi^i} \cdot \frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial\phi^j}$. A equação de campo e o respectivo tensor energia-momento $T^\mu{}_\nu$ são dados por

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left[\sqrt{-g}\eta^2\mathcal{K}_X\xi_{bi}\partial^\mu\phi^i\right] - \frac{\mathcal{K}_X}{2}\eta^2\partial_\mu\phi^i\partial^\mu\phi^j\frac{\partial\xi_{ij}}{\partial\phi^b} = 0 \,, \tag{6.14}$$

$$T^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu\mathcal{K} - \eta^2\mathcal{K}_X\partial^\mu\phi^a\partial_\nu\phi^a \,, \tag{6.15}$$

com $\mathcal{K}_X \equiv \frac{d\mathcal{K}(X)}{dX}$. Para um espaço-tempo esfericamente simétrico, como $ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + C(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$, o ansatz $\phi^1 = \theta$ e $\phi^2 = \varphi$ satisfaz as equações de campo quando [75]

$$\xi_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{bmatrix} . \tag{6.16}$$

Isso significa que cada orientação no espaço (θ, ϕ) corresponde à um vetor $\vec{\Phi}$ interno pertencente à variedade do vácuo. Em virtude do ansatz, ficamos com $T^0{}_0$=$T^1{}_1 = \mathcal{K}(X)$, e $T^2{}_2$=$T^3{}_3 = \mathcal{K}(X) - X\mathcal{K}_X$. Sendo assim, podemos escrever o tensor energia-momento como

$$T^\mu{}_\nu = \text{diag}\left(\mathcal{K}, \mathcal{K}, \mathcal{K} - X\mathcal{K}_X, \mathcal{K} - X\mathcal{K}_X\right) . \tag{6.17}$$

comparando (6.17) com a (4.28), temos

$$\rho = -\mathcal{K} \quad \text{and} \quad P_\theta = \mathcal{K} - X\mathcal{K}_X \,. \tag{6.18}$$

Portanto, se conhecermos a forma funcional de $\mathcal{K}(X)$, podemos, em princípio, obter a métrica que descreve o espaço-tempo na presença deste tipo de matéria. Nas próximas seções vamos considerar dois modelo particulares para $\mathcal{K}(X)$, o canônico, que corresponde à região externa ao núcleo do MG, e uma lei de potência.

6.2 Modelo canônico

O modelo canônico é aquele correspondente à região externa ao núcleo de um MG [28, 70]. É importante destacar que esse modelo já foi considerado na literatura [41]. Por questão de completeza, vamos considerá-lo novamente aqui, como um caso particular, mas também vamos considerar outros aspectos que não foram considerados em [41], como a possibilidade de soluções tipo buracos de minhoca.

A lagrangiana do modelo é simplesmente o termo canônico, dada por

$$\mathcal{K} = -X. \tag{6.19}$$

De acordo com a (6.18), a densidade e a pressão são dadas por $\rho = \frac{\eta^2}{r^2}$ e $P_\theta = 0$; substituindo essas quantidades em (6.2) ficamos com

$$r^2 = x^2 - \epsilon\kappa^2\eta^2. \tag{6.20}$$

Esta expressão mostra que se $\epsilon < 0$, a coordenada radial r apresenta um valor mínimo r_0 em $x = 0$, ou seja, $r_0^2 = |\epsilon|\kappa^2\eta^2$. Isto mostra que a solução apresenta uma área mínima, assim como ocorre nas soluções de buracos de minhoca. Se $\epsilon > 0$, a coordenada radial r não tem valor mínimo não nulo. Substituindo ρ em (6.3) e (6.1), obtemos $A(x) = 1 - \kappa^2\eta^2 - \frac{2GM}{x}$ e $\Omega_+ = 1$. Inserindo estes resultados em (6.4), obtemos a métrica que descreve esse espaço-tempo:

$$ds^2 = -\left(1 - \kappa^2\eta^2 - \frac{2GM}{x}\right)dt^2 + \left(1 - \kappa^2\eta^2 - \frac{2GM}{x}\right)^{-1} dx^2 + (x^2 - \epsilon\kappa^2\eta^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\,. \tag{6.21}$$

Podemos também escrever esta expressão em termos de r, basta verificar que $\left(\frac{dx}{dr}\right)^2 = \frac{r^2}{r^2+\epsilon\kappa^2\eta^2}$. Então, ficamos com [41]

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \kappa^2\eta^2 \mp \frac{2GM}{\sqrt{r^2 + \epsilon\kappa^2\eta^2}}\right)dt^2 + \frac{r^2}{r^2 + \kappa^2\epsilon\eta^2}\left(1 - \kappa^2\eta^2 \mp \frac{2GM}{\sqrt{r^2 + \epsilon\kappa^2\eta^2}}\right)^{-1} dr^2 \\ &+ r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\,, \end{aligned} \tag{6.22}$$

onde o sinal $-$ se refere à região $x > 0$ e o sinal $+$, à região $x < 0$. Somente no caso $\epsilon = 0$, essa solução se reduz à solução de Schwarzschild com o monopolo [70]. Vamos analisar esta solução (6.21) sob dois pontos de vista. Primeiro, vamos considerar $\epsilon > 0$. Nesse caso, o valor mínimo de x é tal que $x_0^2 = \epsilon\kappa^2\eta^2$. Dessa forma, concluímos que a métrica é regular em toda parte. Além disso, notamos que, devido a dependência em $1/x$, a métrica não é simétrica em

relação à $x = 0$. No lado $x > 0$ temos uma solução tipo Schwarzschild com o MG, com um horizontes de eventos localizado em $x = x_h = \frac{2GM}{1-\kappa^2\eta^2}$. Na região $x < 0$ a solução descreve um campo gravitacional repulsivo. Em suma, não é possível passar de uma região para a outra, isso pode ser facilmente observado a partir do potencial efetivo para geodésicas radiais (2.48), onde teremos $V_{ef} \approx -\frac{2GM}{x}\left(\frac{L^2}{x^2-x_0^2} - \mathcal{L}\right)$ próximo à $x = x_0$. Sendo assim, partículas e raios de luz vindos de $x < 0$ em direção a $x > 0$ são "repelidos"antes de alcançarem $x = x_0$, enquanto que partículas e raios de luz vindos de $x > 0$ em direção a $x < 0$ cruzam o horizonte de eventos, mas não podem se estender além de $x = x_0$, que corresponde à $r = 0$. Por essa razão, esse espaço-tempo é geodesicamente incompleto.

De forma similar, vamos agora analisar o caso $\epsilon < 0$, que apresenta uma superfície mínima de raio igual a r_0, que na variável auxiliar corresponde à $x = 0$. Neste caso, o potencial efetivo é dado por (2.48)

$$V_{ef} \approx -\frac{2GM}{x}\left(\frac{L^2}{r_0^2} - \mathcal{L}\right) . \tag{6.23}$$

Para todas as geodésicas tipo-tempo e geodésicas tipo-luz com $L \neq 0$, esse potencial é infinitamente atrativo na região próxima à $x = 0$ no lado $x > 0$, mas repulsivo na região $x < 0$. Assim, as geodésicas que partem da região $x > 0$ em direção à $x < 0$, chegam à superfície mínima $x = 0$, mas não podem atravessá-la, portanto essas geodésicas são incompletas. Por outro lado, para geodésicas nulas com $L = 0$ (momento angular nulo), o potencial é identicamente nulo, de modo que os raios de luz com essas propriedades podem atravessar a superfície mínima ($x = 0$) e chegar à região $x < 0$. Nós observamos que mesmo apresentando uma superfície mínima, geodésicas tipo-tempo e algumas geodésicas tipo-luz são incompletas, por essa razão, reconhecemos esse espaço-tempo como singular, pois na superfície mínima os observadores deixariam de existir.

6.2.1 Buraco de minhoca de Ellis Topologicamente Carregado

Para concluirmos esta seção, vale a pena destacar que, ao estabelecermos o termo massivo $M = 0$ em (6.22) no caso $\epsilon < 0$, obtemos uma solução de buracos de minhoca tão simples quanto à de Morris and Thorne [76], mas agora a solução apresenta um déficit angular por conta da carga topológica do MG. Tal cenário pode ser interpretado como o resultado da completa evaporação de um buraco negro com carga topológica [70]. Tomando $M = 0$ em (6.22),

ficamos com

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{dr^2}{(1-\kappa^2\eta^2)\left(1-\frac{|\epsilon|\kappa^2\eta^2}{r^2}\right)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \tag{6.24}$$

onde reescalamos a coordenada temporal para absorvermos o fator $(1-\kappa^2\eta^2)$. Esta é uma solução que descreve um buraco de minhoca com um déficit de ângulo sólido, o raio da garganta é $r_0 = \sqrt{|\epsilon|}\kappa\eta$. Comparando com a métrica Morris-Thorne [76],

$$ds^2 = -e^{\Phi(r)}dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{b(r)}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \tag{6.25}$$

encontramos que a função redshift $\Phi = 0$ e a função de forma $b(r)$ é dada por

$$b(r) = r\kappa^2\eta^2 + (1-\kappa^2\eta^2)\frac{|\epsilon|\kappa^2\eta^2}{r}\,. \tag{6.26}$$

Como $\lim_{r\to\infty}\frac{b(r)}{r} = \kappa^2\eta^2$, a solução não é assintoticamente plana [77] o que já era esperado por conta da carga do MG. Em seguida, vamos construir o diagrama de imersão. Para tal, é suficiente considerarmos a métrica para o plano equatorial $\theta = \frac{\pi}{2}$, ou seja,

$$ds^2 = \frac{dr^2}{(1-\kappa^2\eta^2)\left(1-\frac{|\epsilon|\kappa^2\eta^2}{r^2}\right)} + r^2 d\phi^2. \tag{6.27}$$

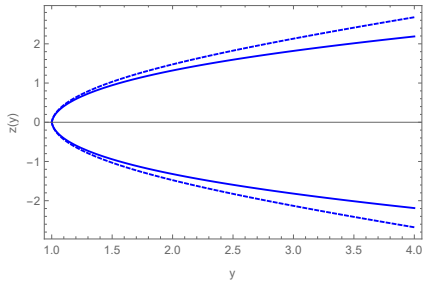
Agora construiremos uma superfície imersa no espaço euclidiano tridimensional com as mesmas propriedade de (6.27). Em coordenadas cilíndricas, (z, r, ϕ), ela é dada por $ds_E^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2$; que, para compararmos com (6.27), escrevemos como

$$ds_E^2 = \left[1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right] dr^2 + r^2 d\phi^2. \tag{6.28}$$

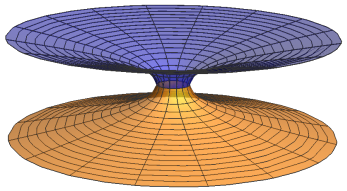
Para que as métricas (6.27) e (6.27) sejam iguais, devemos ter

$$\frac{1}{r_0^2}\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 = \frac{1}{(1-\kappa^2\eta^2)\left(1-\frac{1}{y^2}\right)} - 1, \tag{6.29}$$

onde definimos $y = \frac{r}{r_{min}}$. Avaliando numericamente a equação (6.29) obtemos a função $z(y)/r_{min}$ e o diagrama de imersão, Fig.6.1. Vale apena destacar que em [78], Jusufi também obteve uma solução de buraco de minhoca com carga topológica, no entanto, para obtê-la ele acoplou à gravidade o MG, especificamente $T^{\mu}_{\ \nu} = diag\,(-\eta^2/r^2, -\eta^2/r^2, 0, 0)$, mais um fluido anisotrópico com equação de estado $\mathcal{P}_r(r) = \omega\rho(r)$ com $\omega < 1$; ou seja, um fluído que viola as condições de energia, como de fato deve ocorrer para soluções tipo buraco de minhoca



(a)



(b)

Figura 6.1: Em (a) construímos o gráfico de $z(y)/r_{min}$: A linha cheia corresponde a $\kappa\eta = 0.2$, e a pontilhada, $\kappa\eta = 0.4$. Em (b) desenhamos o diagrama de imersão para $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $t =$ constante. Nós escolhemos $\kappa\eta = 0.2$. O lado superior (azul) corresponde a $x > 0$ e o inferior (amarelo) corresponde a $x < 0$.

dentro da TRG. Por outro lado, na gravidade EiBI, a solução (6.24) é sustentada por uma única fonte de matéria que satisfaz as condições de energia, o MG.

6.3 Lei de Potência

Nesta seção, vamos acoplar à gravidade Born-Infeld um modelo sigma descrito por uma lei de potência:

$$\mathcal{K}(X) = -X - \beta X^2, \qquad (\beta > 0)\ . \tag{6.30}$$

A constante β tem dimensão de área ao quadrado. Na perspectiva da TRG, este modelo foi estudado em [79, 80]. Observe que no limite $\beta \to 0$ recaímos no modelo com o termo cinético canônico, X. A partir do modelo (6.30), a (6.18) fornece $\rho = X + \beta X^2$ e $P_\theta = \beta X^2$, isto é,

$$\rho = \frac{\eta^2}{r^2} + \frac{Q^2}{r^4} \quad \text{and} \quad P_\theta = \beta \frac{Q^2}{r^4}\ . \tag{6.31}$$

Por questões de simplicidade, definimos $Q^2 \equiv \beta\eta^4$. Nesse sentido, a (6.31) pode ser interpretada como o arranjo de um MG mais uma carga elétrica [81]. Individualmente, cada uma dessas configurações já foi estudada na teoria EiBI [24, 41]. Nós, no entanto, vamos também estudar a configuração conjunta. Primeiro vamos obter a relação entre as coordenadas radiais da métrica auxiliar e da métrica física. A partir da (6.2) temos que

$$x^2 = r^2 + \epsilon\kappa^2\eta^2 + \frac{\epsilon\kappa^2 Q^2}{r^2}\ . \tag{6.32}$$

Esta equação fornece duas soluções para $r^2(x)$, mas a solução que nos interessa é aquela que no limite apropriado, $\epsilon \to 0$, recaí na solução prevista pela TRG, onde $r = x$. Com base nisto,

obtemos

$$r^2(x) = \frac{(x^2 - \epsilon\kappa^2\eta^2)}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(x^2 - \epsilon\kappa^2\eta^2)^2 - 4\epsilon\kappa^2 Q^2}\,. \tag{6.33}$$

Novamente, o comportamento da função $r^2(x)$ vai depender do valor de ϵ. Conforme ilustramos na Fig.6.2, para $\epsilon < 0$, a solução apresentará uma superfície mínima, correspondente à $x = 0$ cujo raio será $r_0^2 = r^2(x = 0)$, ou seja,

$$r_0^2 = \frac{1}{2}\left(|\epsilon|\kappa^2\eta^2 + \sqrt{|\epsilon|^2\kappa^4\eta^4 + 4|\epsilon|\kappa^2 Q^2}\right). \tag{6.34}$$

Além disso, para $\epsilon > 0$, a coordenada radial também tem um valor mínimo dado por $\hat{r}_0^4 = \epsilon\kappa^2 Q^2$ correspondente à $x^2 = \hat{x}_0^2 = \epsilon\kappa^2\eta^2 + 2Q\sqrt{\epsilon}$.

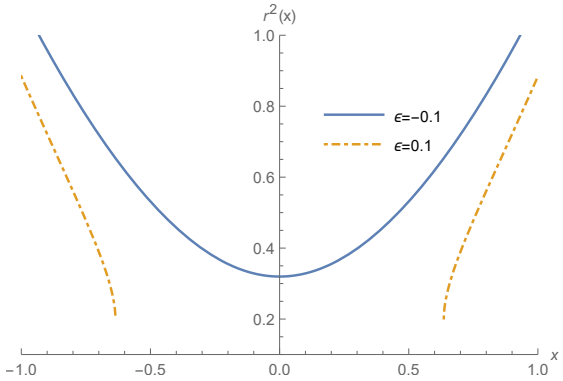


Figura 6.2: Gráfico de $r^2(x)$ para dois valores de ϵ. Para esta ilustração, tomamos $\kappa^2\eta^2 = 0.2$, $Q = 1$.

Para obtermos $A(x)$ inserimos a densidade $\rho = \frac{\eta^2}{r^2} + \frac{Q^2}{r^4}$ em (6.3), com isso temos

$$A(x) = 1 - \kappa^2\eta^2 - \frac{2GM}{x} - \frac{\kappa^2 Q^2}{x}\int \frac{dx}{r^2(x)}\,, \tag{6.35}$$

que com auxílio da (6.33) pode ser obtida de forma exata. Antes, no entanto, vamos considerar alguns casos particulares. No limite assintótico ($(r, x) \to \infty$), temos $x \approx r$ de modo que

$$A \approx 1 - \kappa^2\eta^2 - \frac{2GM}{r} + \frac{\kappa^2 Q^2}{r^2} \qquad \text{com} \quad \Omega_+ \approx 1\,, \tag{6.36}$$

independentemente do sinal de ϵ; essa aproximação se torna exata quando $\epsilon = 0$. Portanto, assintoticamente ou no limite $\epsilon \to 0$, o espaço-tempo é descrito pela solução de Reissner Nordström com a carga topológica do MG [79, 82], onde Q desempenha o papel da carga elétrica. Por outro lado, no regime de altas energias, a solução difere bastante do que teríamos na TRG, além disso, suas propriedades mudam significativamente dependendo do valor de ϵ. Se $\epsilon > 0$, na superfície de área mínima $\Omega_+ = 1 - \epsilon\left(\frac{\kappa^2 Q^2}{\hat{r}_0^4}\right)$, como $\hat{r}_0^4 = \epsilon\kappa^2 Q^2$, $\Omega_+ = 0$. A partir da Eq.(2.48),

as geodésicas radias serão governadas pela equação $\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^2 = \Omega_+^2 E^2 - \Omega_+ A(x)\left(\frac{L^2}{r^2} - \mathcal{L}\right)$. Nós então observamos que as geodésicas não poderão se estender além da superfície mínima, e a solução só será válida na região $r \geq \hat{r}_0$. Por essa razão, vamos nos concentrar no caso $\epsilon < 0$, que é mais interessante.

6.3.1 Lei de Potência com $\epsilon < 0$

Vamos começar considerando $\epsilon < 0$. Nesse caso, no limite $x \to 0$, temos $r^2(x) \approx r_0^2 + \frac{r_0^2 x^2}{(2r_0^2 - |\epsilon|\eta^2)}$. Substituindo essa última equação em (6.35), ficamos com

$$\begin{aligned} A(x) &\approx 1 - \kappa^2\eta^2 - \frac{2GM}{x} - \frac{\kappa^2 Q^2}{r_0^2} - \frac{C\kappa^2 Q^2}{x} \\ A(x) &\approx 1 - \kappa^2\eta^2 - \frac{\kappa^2 Q^2}{r_0^2} - \frac{1}{x}(2GM + C\kappa^2 Q^2) \end{aligned} \tag{6.37}$$

Onde C é uma constante de integração com implicações físicas relevantes desde que ela controla o comportamento da métrica nesse limite. Em particular se $C > -\frac{2GM}{\kappa^2 Q^2}$, então $\lim_{x\to 0} A(x) = -\infty$. Se $C < -\frac{2GM}{\kappa^2 Q^2}$, então $\lim_{x\to 0} A(x) = +\infty$. Como $\Omega_+(x=0) = 1 + \frac{|\epsilon|\kappa^2 Q^2}{r_0^4}$, concluímos que nestes casos observados a métrica diverge. Entretanto, quando $C = -\frac{2GM}{\kappa^2 Q^2}$ a divergência na garganta é suprimida, ou seja, $A_0 = A(x=0)$ é dada por

$$A_0 = 1 - \kappa^2\eta^2 - \frac{\kappa^2 Q^2}{r_0^2}\,. \tag{6.38}$$

Para entendermos as implicações decorrentes de se considerar $C \neq -\frac{2GM}{\kappa^2 Q^2}$, vamos novamente recorrer à equação (2.48), de onde tiramos que o potencial é dado por

$$V_{ef} = \Omega_+ A(x)\left(\frac{L^2}{r^2} - \mathcal{L}\right)\,. \tag{6.39}$$

Quando $C < -\frac{2GM}{\kappa^2 Q^2}$, no limite $x \to 0$, para todas as geodésicas tipo-tempo e geodésicas nulas com $L \neq 0$, o potencial efetivo torna-se positivamente divergente no lado $x > 0$ e negativamente divergente no lado $x < 0$. Desse modo, partículas partindo de $x > 0$ em direção a $x < 0$ são impedidas de chegar até $x = 0$, visto que o lado direito de $\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^2 = \mathcal{E} - V_{ef}$ irá se anular em algum ponto antes de $x = 0$. Entretanto, partículas partindo de $x < 0$ em direção a $x > 0$ serão atraídas para a garganta $x = 0$, mas não poderão atravessá-la por que do outro lado há uma barreira de potencial infinita, implicando, portanto, em incompleteza geodésica. Nesse sentido, fisicamente somente a região $x > 0$ é válida. A situação oposta ocorre se tomarmos $C > -\frac{2GM}{\kappa^2 Q^2}$. Sendo assim, a situação física mais favorável é aquela onde temos $C = -\frac{2GM}{\kappa^2 Q^2}$.

Por essa razão, vamos desenvolver um pouco mais a função $A(x)$, a fim de esclarecer em mais detalhes a natureza dessa solução. Resolvendo a Eq.(6.34) para Q, obtemos $\frac{\kappa^2 Q^2}{r_0^2} = \frac{r_0^2}{|\epsilon|} - \kappa^2\eta^2$, que ao substituirmos em (6.38), vamos ter

$$A_0 = 1 - \frac{r_0^2}{|\epsilon|}\,. \tag{6.40}$$

Como $A(x)$ é finita na garganta, todas as partículas com $E^2 > \frac{1}{\Omega_+}\left(1 - \frac{r_0^2}{|\epsilon|}\right)\left(\frac{L^2}{r_0^2} - \mathcal{L}\right)$ podem se mover livremente de uma lado para outro da garganta; portanto, a solução é geodesicamente completa. A expressão 6.40 implica em três tipos de soluções. Se $\frac{r_0^2}{|\epsilon|} > 1$, a superfície mínima é tipo-espaço, ou seja, situa-se dentro do horizonte de eventos; nesse caso, a solução descreve um buraco negro regular. Por outro lado, quando $\frac{r_0^2}{|\epsilon|} < 1$ a superfície mínima é tipo-tempo, ou seja, não há horizonte de eventos e a solução descreve um buraco de minhoca atravessável. E quando $\frac{r_0^2}{|\epsilon|} = 1$, teremos uma situação extremal. A partir do nosso estudo aproximativo foi possível tirarmos informações importantes, mas ainda não determinamos o valor da constante C. Para tanto, vamos calcular a solução exata de (6.3). Por tentativa e erro, achamos que é mais conveniente, para este cálculo, trabalharmos com a coordenada radial r na região equivalente à $x > 0$.

A partir de (6.32), podemos mostrar que $\frac{dx}{dr} = \frac{r^4 - \epsilon Q^2}{r^2\sqrt{r^4 + \epsilon\eta^2 r^2 + \epsilon Q^2}}$, substituindo em (6.3), ficamos com

$$\begin{aligned}
A(r) &= 1 - \frac{2GMr}{\sqrt{r^4 + \epsilon\kappa^2(\eta^2 r^2 + Q^2)}} - \frac{\kappa^2 r}{\sqrt{r^4 + \epsilon\kappa^2(\eta^2 r^2 + Q^2)}} \int \frac{(\eta^2 r^2 + Q^2)(r^4 - \epsilon\kappa^2 Q^2)}{r^4\sqrt{r^4 + \epsilon\kappa^2(\eta^2 r^2 + Q^2)}} dr \\
A(r) &= 1 - \frac{2MGr}{\sqrt{r^4 - |\epsilon|\kappa^2(\eta^2 r^2 + Q^2)}} - \frac{\kappa^2 Q^2 + \kappa^2\eta^2 r^2}{3r^2} \\
&\quad - \frac{2\kappa^2 r}{3\sqrt{r^4 - |\epsilon|\kappa^2(\eta^2 r^2 + Q^2)}} \int \frac{(2Q^2 + \eta^2 r^2)}{\sqrt{r^4 - |\epsilon|\kappa^2(\eta^2 r^2 + Q^2)}} dr.
\end{aligned} \tag{6.41}$$

A segunda linha acima é obtida a partir de uma integração por partes considerando $\epsilon < 0$. Para simplificar, vamos escrever a expressão acima da seguinte forma

$$A = 1 - \frac{2GMr}{\sqrt{r^4 - |\epsilon|\kappa^2(\eta^2 r^2 + Q^2)}} - \frac{\kappa^2 Q^2 + \kappa^2\eta^2 r^2}{3r^2} - \frac{2r}{3\sqrt{r^4 - |\epsilon|\kappa^2(\eta^2 r^2 + Q^2)}} I(r), \tag{6.42}$$

onde $I(r) = I_1(r) + I_2(r)$ com

$$I_1(r) = \int \frac{2\kappa^2 Q^2}{\sqrt{r^4 - |\epsilon|\kappa^2(\eta^2 r^2 + Q^2)}} dr, \quad I_2(r) = \int \frac{\kappa^2\eta^2 r^2}{\sqrt{r^4 - |\epsilon|\kappa^2(\eta^2 r^2 + Q^2)}} dr. \tag{6.43}$$

Vamos escrever $I(r)$ em termos do raio mínimo r_0. Para isso, resolvemos a (6.34) para $\kappa^2\eta^2 =$

$\frac{r_0^2}{|\epsilon|} - \frac{\kappa^2 Q^2}{r_0^2}$ e substituímos em (6.42) e (6.43), que após algumas simplificações resulta em

$$A = 1 - \frac{2GM}{r\sqrt{\left(1-\frac{r_0^2}{r^2}\right)\left(1+\frac{|\epsilon|\kappa^2Q^2}{r_0^2r^2}\right)}} - \frac{\kappa^2Q^2+\kappa^2\eta^2r^2}{3r^2} - \frac{2I(r)}{3r\sqrt{\left(1-\frac{r_0^2}{r^2}\right)\left(1+\frac{|\epsilon|\kappa^2Q^2}{r_0^2r^2}\right)}} \tag{6.44}$$

com

$$I_1(r) = \int \frac{2\kappa^2Q^2}{r^2\sqrt{\left(1-\frac{r_0^2}{r^2}\right)\left(1+\frac{|\epsilon|\kappa^2Q^2}{r_0^2r^2}\right)}}dr, \quad I_2(r) = \int \frac{\kappa^2\eta^2}{\sqrt{\left(1-\frac{r_0^2}{r^2}\right)\left(1+\frac{|\epsilon|\kappa^2Q^2}{r_0^2r^2}\right)}}dr\ . \tag{6.45}$$

Integrando I_1 e I_2, temos

$$I_1 = -\frac{2\kappa^2Q^2}{r}AppellF_1\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},\left(\frac{r_0}{r}\right)^2,-\frac{|\epsilon|\kappa^2Q^2}{(rr_0)^2}\right]\ , \tag{6.46}$$

$$I_2 = \kappa^2\eta^2 rAppellF_1\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\left(\frac{r_0}{r}\right)^2,-\frac{|\epsilon|\kappa^2Q^2}{(rr_0)^2}\right]\ , \tag{6.47}$$

onde $AppellF_1$ é uma função hipergeométrica de Appell. Agora observe que o segundo e quarto termo da Eq.(6.44) divergem no limite $r \to r_0$; para evitarmos essa divergência, devemos ter

$$2GM = -\frac{2}{3}I(r_0); \tag{6.48}$$

onde $I(r_0)$ significa que estamos avaliando $I(r)$ na garganta da solução. Inserindo (6.48) na (6.42), ficamos com

$$A = 1 - \frac{Q^2+\eta^2r^2}{3r^2} - \frac{2}{3r}\frac{I(r)-I(r_0)}{\sqrt{\left(1-\frac{r_0^2}{r^2}\right)\left(1+\frac{|\epsilon|Q^2}{r_0^2r^2}\right)}}. \tag{6.49}$$

Para calcularmos o $\lim_{r\to r_0} A(r)$, usamos a regra de l'Hôpital para avaliarmos o último termo da expressão acima. Fazendo isso, ficamos com

$$\lim_{r\to r_0} A = 1 - \frac{\kappa^2Q^2+\kappa^2\eta^2r_0^2}{3r_0^2} - \frac{2r_0^2(2\kappa^2Q^2+r_0^2\kappa^2\eta^2)}{3(|\epsilon|\kappa^2Q^2+r_0^4)}; \tag{6.50}$$

substituindo $\frac{\kappa^2Q^2}{r_0^2} = \frac{r_0^2}{|\epsilon|} - \kappa^2\eta^2$ nesta equação (6.50), temos

$$\lim_{r\to r_0} A = A_0 \ = \ 1 - \frac{r_0^2}{|\epsilon|}\ , \tag{6.51}$$

conforme já havíamos obtido na (6.40). Com as expressões (6.46) e (6.47) avaliadas em $r = r_0$,

a (6.48) implica

$$2GM = \frac{2}{3}\left\{\frac{2\kappa^2 Q^2}{r_0}K\left[-\frac{|\epsilon|\kappa^2 Q^2}{r_0^4}\right] + r_0\kappa^2\eta^2\left(K\left[-\frac{|\epsilon|\kappa^2 Q^2}{r_0^4}\right] - E\left[-\frac{|\epsilon|\kappa^2 Q^2}{r_0^4}\right]\right)\right\}, \quad (6.52)$$

onde $K[x]$ e $E[x]$ são integrais elípticas completas de primeiro e segundo tipo, respectivamente. Note que esta expressão está relacionada à constante C, que introduzimos anteriormente. Neste caso, onde a solução é geodesicamente completa $C = -\frac{2GM}{\kappa^2 Q^2}$. Portanto, temos

$$C = -\frac{4}{3r_0}K\left[-\frac{|\epsilon|\kappa^2 Q^2}{r_0^4}\right] - \frac{2r_0\eta^2}{3Q^2}\left(K\left[-\frac{|\epsilon|\kappa^2 Q^2}{r_0^4}\right] - E\left[-\frac{|\epsilon|\kappa^2 Q^2}{r_0^4}\right]\right). \quad (6.53)$$

Se tomarmos $Q = 0$, que corresponde ao modelo canônico, a equação 6.52 implica $2GM = \frac{2r_0\eta^2}{3}(K[0] - E[0]) = 0$, dado que $K[0] = E[0] = \frac{\pi}{2}$. Este resultado está de acordo com o que estudamos na seção 6.2, onde mostramos que soluções regulares são possíveis apenas no caso em que $M = 0$. Se tomarmos $\eta = 0$, a solução se reduz a uma configuração eletrostática, cujo estudo foi publicado nas referências [81, 83]. Lá, os autores mostraram que para $\delta \equiv \frac{\kappa^2 Q^2}{2GMr_0} \simeq 0.572$ a solução é regular. Nesse limite, reobtemos o resultado deles, o que demonstra a coerência dos nossos achados. Pelas definições das constantes δ e C, elas estão relacionadas através da expressão $C = -\frac{1}{r_0\delta}$. Outra possibilidade é admitirmos a coexistência simultânea de ambos, $\eta \neq 0$, $Q \neq 0$, admitindo que não há qualquer relação entre a carga topológica e a carga elétrica; nesse caso, a carga do monopolo implica em uma constante de regularização maior do que aquela prevista no caso puramente eletrostático [81], conforme ilustramos na Fig.6.3. Agora, vamos voltar à formulação inicial da teoria, onde temos apenas o modelo sigma não

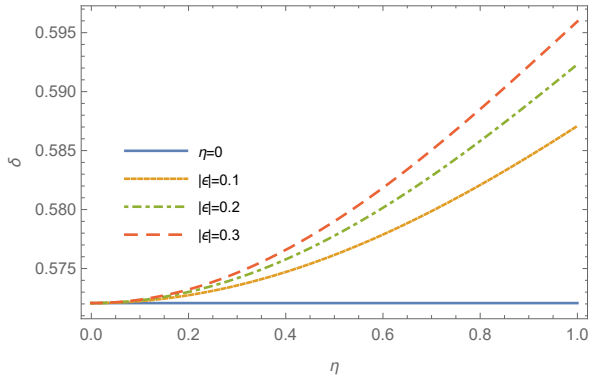
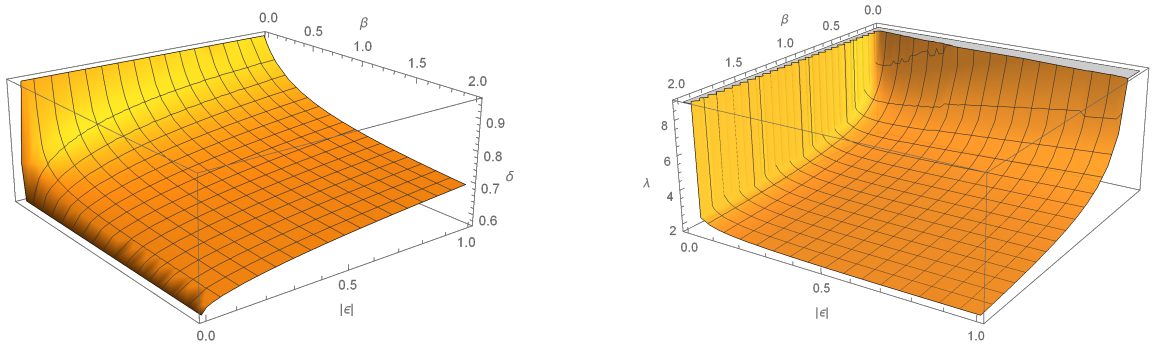


Figura 6.3: Constante de regularização δ para vários valores de η. Estabelecemos $Q = 1$ e $\kappa^2 = 1$. Observe que $\eta = 0$ corresponde ao caso eletrostático.

linear. Nesse caso, devemos ter em mente que $Q^2 = \beta\eta^4$; dito isto, a constante de regularização



(a) (b)

Figura 6.4: (a) Função δ em termos de $|\epsilon|$ e β com $\kappa^2 = 1$. (b) Valores do parâmetro λ em termos de β e ϵ com $\kappa^2 = 1$.

é dada por

$$\delta = \left[\frac{4}{3}K\left[-\frac{|\epsilon|\kappa^2\beta}{\xi^2}\right] + \frac{2\xi}{\beta}\left(K\left[-\frac{|\epsilon|\kappa^2\beta}{\xi^2}\right] - E\left[-\frac{|\epsilon|\kappa^2\beta}{\xi^2}\right]\right)\right]^{-1} ; \tag{6.54}$$

onde $\xi = \frac{|\epsilon|\kappa^2+\sqrt{|\epsilon|^2\kappa^4+4|\epsilon|\kappa^2\beta}}{2}$. Como podemos observar, neste caso, δ depende apenas de β e $\kappa^2|\epsilon|$. Na Fig. 6.4(a) ilustramos o comportamento de δ em termos dessas variáveis. A função δ apresenta os seguintes limites assintóticos: $\lim_{\beta\to\infty}\delta \simeq 0.57$, $\lim_{\beta\to 0}\delta \simeq 0.95$, $\lim_{|\epsilon|\to 0}\delta \simeq 0.57$, $\lim_{|\epsilon|\to\infty}\delta \simeq 0.95$. De onde concluímos que δ cresce quando $|\epsilon|$ aumenta, mas decresce quando β aumenta. Nós ainda podemos mostrar a partir da equação (6.54) como caracterizar a solução a partir da relação entre a massa e a carga topológica $\frac{\eta}{GM}$. A partir da definição de δ podemos mostrar que

$$\frac{\eta}{GM} = \frac{\lambda}{(r_0^2/|\epsilon|)}, \quad \text{onde} \quad \lambda = \frac{2\xi^{3/2}}{\kappa^2|\epsilon|\beta}\delta\,. \tag{6.55}$$

Nós plotamos a constante λ na Fig.6.4(b). Com isso, então concluímos que, se $\frac{\eta}{M} > \lambda$, a solução descreve um buraco de minhoca atravessável, mas se $\frac{\eta}{M} < \lambda$ a solução descreve um buraco negro regular, ou seja, a garganta está dentro do horizonte de eventos.

Para concluir este capítulo, deixe-nos destacar os principais resultados obtidos. No início do capítulo mostramos que para uma específica estrutura do tensor energia-momento, da qual o modelo sigma não linear pertence, é possível violarmos a condição de convergência nula sem violar as condições de energia. Para isso, foi necessário termos $\epsilon < 0$ e, de fato, essa possibilidade forneceu algumas soluções de buracos de minhoca.

Nós acoplamos à gravidade EiBI dois modelos sigmas não lineares, a fim de explorarmos novos efeitos gravitacionais relacionados ao MG. O primeiro deles, o modelo canônico, reproduziu os resultados encontrados por Lambaga e Ramadhan [41]. Além disso, chamamos

atenção ao fato que $M = 0$ produz um buraco de minhoca tipo Ellis [76], mas agora com um déficit angular, devido à carga do monopolo. O segundo modelo, uma lei de potência, permite interpretarmos o setor de matéria como engendramento de um MG mais uma carga elétrica, o que nos permitiu obtermos resultados já previstos para uma configuração eletrostática [81, 83]. Em ambos os casos, no limite assintótico $r \to \infty$, as soluções recaem nos resultados previstos pela TRG, independentemente de ϵ; por outro lado, no regime de alta curvatura, ou seja, nas regiões mais internas, a solução é bem diferente. Nós mostramos que para $\epsilon < 0$, as soluções apresentam uma área mínima, embora isso não represente de modo geral soluções geodesicamente completas. No caso da lei de potência, vimos que para uma determinada relação entre a carga topológica e a massa (6.55), a solução é geodesicamente completa e descreve buracos negros regulares e buracos de minhoca atravessáveis.

Ainda gostaríamos de destacar alguns aspectos topológicos das soluções obtidas. Na TRG, ambos os modelos, apresentam divergências no limite $r \to 0$. Entretanto, neste contexto de gravidade modificada, nos casos em que o setor esférico da solução tem uma superfície mínima, a origem do campo escalar é topológica não estando relacionada à defeitos topológicos [26]. Nesse sentido reconhecemos essas soluções como *geons* [71, 84].

Capítulo 7

Conclusão

Nós iniciamos esta tese chamando atenção para a limitação que a TRG apresenta em lidar de maneira natural com o problema da singularidade e as últimas descobertas da cosmologia. Isso motivou a busca por teorias da gravidade capazes de resolver pelo menos alguns desses problemas. Isso justifica o estudo do campo gravitacional gerado por fontes de matéria já conhecida, mas sob a ótica dessas novas teorias. Nesse sentido, estudamos as implicações do acoplamento de campos escalares à teorias modificadas da gravitação através do formalismo de Palatini. Nós exploramos duas teorias, o modelo $f(\mathcal{R})$ de Starobinsky [69] e a teoria Born-Infeld da gravitação [66]. Nós tivemos resultados muito interessantes que abordam o problema da singularidade do espaço-tempo e, em alguns casos, podem fornecer soluções geodesicamente completas.

Nos capítulos iniciais, fizemos uma introdução à TRG e obtivemos explicitamente a solução gerada pelo tensor energia-momento fora do núcleo do monopolo. Em seguida, introduzimos a definição de singularidade do espaço-tempo baseada na completeza geodésica. Mostramos que a solução de Schwarzschild, com ou sem MG, apresenta singularidade. Nós ainda fizemos uma introdução à equação de Raychaudhuri afim de mostrar o caráter atrativo do campo gravitacional gerado por fontes de matéria que satisfazem as condições de energia na TRG. No capítulo 4, apresentamos o formalismo de Palatini, no qual métrica e conexão são, *a priori*, independentes. Esse capítulo representa a espinha dorsal do trabalho, seus resultados foram aplicados nos outros dois capítulos posteriores.

No capítulo 5, consideramos pela primeira vez na literatura o acoplamento do tensor energia-momento relacionado à região externa ao núcleo do MG à uma teoria $f(\mathcal{R})$ via formalismo de Palatini [42]. A solução (Eq.5.9) tem características bem diferentes dependendo dos valores de λ. Para lambda $\lambda = 0$, nossos resultados recaem nas previsões obtidas através

da TRG. Para $\lambda < 0$, encontramos que a solução é semelhante à solução de Schwarzschild da TRG, apresentando, inclusive, singularidades geodésicas. Para $\lambda > 0$, nossa solução descreve um espaço-tempo com uma área mínima, assim como acontece em soluções de buracos de minhoca. Nós encontramos que a solução da região $x > 0$ é conformalmente relacionada à métrica de Ressner-Nordström. Nós calculamos o desvio da luz no regime de campo fraco e mostramos que, embora muito pequena, a mudança na Ação de Einstein-Hilbert deixa uma assinatura que pode ser observada através da deflexão da luz (5.25). Nós também investigamos a completeza das geodésicas, afim de determinar se o espaço-tempo é livre de singularidades. Nós então obtivemos as seguintes conclusões: todas as geodésicas tipo-tempo e tipo-luz com $L = 0$, não chegam até a garganta da solução, em outras palavras, as partículas e raios de luz são defletidos antes de alcançarem garganta e seguem para outras direções do espaço-tempo. Geodésicas tipo-luz com $L = 0$ levam um tempo afim infinito para alcançarem a garganta da solução e, por fim, geodésicas tipo-espaço são capazes de cruzar a garganta. Portanto, por não apresentar incompleteza geodésicas, reconhecemos que, para $\lambda > 0$, o espaço-tempo é regular. Esse resultado é muito diferente da solução de Ressner-Nordström, onde as geodésicas tipo-luz com $L = 0$ que cruzam o horizonte de eventos inevitavelmente termina em $r = 0$ [24].

No capítulo 6, acoplamos um modelo sigma não linear à gravidade EiBI, e os resultados foram publicados na referência [43]. Nós começamos calculando a CCN (3.22) para o espaço-tempo (6.4) gerado por um tensor energia-momento com uma estrutura bem determinada (4.28). Nós então concluímos que a CCN pode ser violada sem a violação das condições de energia, desde que o parâmetro ϵ seja negativo (6.9), com isso podemos ter soluções de buracos de minhoca suportada por matéria ordinária. No passo seguinte, nós então acoplamos dois modelos sigma não lineares à gravidade EiBI. O primeiro, o modelo canônico, cujo tensor energia-momento corresponde à região externa ao núcleo do MG, fornece dois tipos de soluções dependendo do valor de ϵ. Se $\epsilon = 0$, então nossos resultados se resumem aos mesmos resultados encontrados através da TRG; e, em todo caso, no limite assintótico a solução tende à solução de Barriola e Vilenkin [28]. Se $\epsilon > 0$, a solução é tipo Schwarzschild, ou seja, apresenta singularidades geodésicas. No caso $\epsilon < 0$, a solução apresenta uma área mínima, mas, a menos que a massa seja nula, a solução também não é geodesicamente completa. Agora, se a massa for nula, nós então teremos um buraco de minhoca tipo Ellis, mas com a carga topológica do MG, conforme nossa análise da CCN sugeriu. O segundo modelo sigma não linear que consideramos foi uma lei de potência, que também pode ser interpretado como o engendramento de uma carga

elétrica ($Q^2 = \beta\eta^4$) mais o MG. Nós nos concentramos sobretudo no caso em que $\epsilon < 0$, onde a solução apresenta uma área mínima no setor esférico e que reconhecemos como a garganta da solução. Mesmo neste caso, a solução não é, em geral, geodesicamente completa. No entanto, se uma dada relação entre os parâmetros do modelo for obedecida (6.52), as divergências na garganta da solução são suprimidas e, conforme mostramos, a solução é geodesicamente completa. Além disso, dependendo da relação envolvendo a carga topológica e a massa (6.55) podemos ter buracos negros regulares, buracos de minhoca e uma solução extremal.

Nós chamamos atenção ao fato de que embora nossa motivação inicial tenha partido de fontes de matérias que na TRG estão relacionadas a defeitos topológicos, algumas das nossas soluções ($\lambda > 0$ no capítulo 5 e $\epsilon < 0$ no capítulo 6) podem ser interpretadas como geons no mesmo sentido introduzido por Wheeler [71, 83]. Nessa perspectiva, substituímos a singularidade $r = 0$ por uma superfície mínima e, em muitos casos, isso forneceu soluções geodesicamente completas. Em virtude da carga topológica do MG, que pode ser evidenciada ainda mais no limite assintótico, podemos reconhecer as soluções citadas acima com geons "topologicamente carregados".

Referências Bibliográficas

[1] A. M. e E.W. Morley, *On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether*, Am. J. Sci **134**, 333 (1887).

[2] R. Resnick, *Introduction to special relativity* (Wiley, New York, 1968).

[3] F. T. Falciano, *Geometria, espaço-tempo e gravitação: conexão entre conceitos da relatividade geral*, Rev. Bras. Ensino Fís. **31**, 4308 (2009).

[4] J. L. Anderson, *Principles of relativity physics* (Academic Press, Nova York, 1967).

[5] B. P. Abbott and at al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration), *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*, Phys. Rev. Lett. **116**, 061102 (2016).

[6] T. E. H. T. Collaboration, *First M87 Event Horizon Telescope results. I. The shadow of the supermassive black hole*, Astrophys. J. Lett. **875**, L1 (2019).

[7] P. Bull and at al., *Beyond ΛCDM: Problems, solutions, and the road ahead*, Phys. Dark Univ. **12**, 56 (2016).

[8] S. Weinberg, *The cosmological constant problem*, Rev. Mod. Phys. **61**, 1 (1989).

[9] F. Zwicky, *Republication of: The redshift of extragalactic nebulae*, Gen. Relativ. Gravit. **41**, 207 (2009).

[10] V. C. Rubin and W. K. Ford Jr, *Rotation of the Andromeda nebula from a spectroscopic survey of emission regions*, Astrophys. J. **159**, 379 (1970).

[11] R. von Marttens, L. Casarini, D. Mota, and W. Zimdahl, *Cosmological constraints on parametrized interacting dark energy*, Phys. Dark Univ. **23**, 100248 (2019).

[12] S. M. Carroll, arXiv:astro-ph/0107571 .

[13] A. H. Guth, *Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems*, Phys. Rev. D **23**, 347 (1981).

[14] S. Capozziello and V. Faraoni, *Beyond Einstein gravity: A Survey of gravitational theories for cosmology and astrophysics* (Springer, New York, 2010).

[15] A. De Felice and S. Tsujikawa, *$f(R)$ theories*, Living Rev. Rel. **13**, 3 (2010).

[16] S. Nojiri, S. Odintsov, and V. Oikonomou, *Modified gravity theories on a nutshell: Inflation, bounce and late-time evolution*, Phys. Rep. **692**, 1 (2017).

[17] I. L. Buchbinder, S. Odintsov, and I. Shapiro, *Effective action in quantum gravity* (IOP Publishing, Bristol, 1992).

[18] G. A. Vilkovisky, *Effective action in quantum gravity*, Class. Quantum Grav. **9**, 895 (1992).

[19] K. S. Stelle, *Classical gravity with higher derivatives*, Gen. Relat. Gravit. **9**, 353 (1978).

[20] K. S. Stelle, *Renormalization of higher-derivative quantum gravity*, Phys. Rev. D **16**, 953 (1977).

[21] M. Ferraris, M. Francaviglia, and C. Reina, *Variational formulation of general relativity from 1915 to 1925 "Palatini's method" discovered by Einstein in 1925*, Gen. Relat. Gravit. **14**, 243 (1982).

[22] G. J. Olmo, *Palatini approach to modified gravity: $f(R)$ theories and beyond*, Internat. J. Modern Phys. D **20**, 413 (2011).

[23] T. P. Sotiriou and S. Liberati, *Metric-affine $f(R)$ theories of gravity*, Annals Phys **322**, 935 (2007).

[24] G. J. Olmo, *Nonsingular black holes in Palatini extensions of general relativity*, Springer Proc. Phys. **176**, 183 (2016).

[25] R. M. Wald, *General relativity* (Chicago University Press, Chicago, 1984).

[26] T. W. B. Kibble, *Topology of cosmic domains and strings*, J. Phys. A **9**, 1387 (1976).

[27] A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, *Cosmic strings and other topological defects* (Cambridge University Press, New York, 2000).

[28] M. Barriola and A. Vilenkin, *Gravitational field of a global monopole*, Phys. Rev. Lett. **63**, 341 (1989).

[29] C. Armendáriz-Picón, T. Damour, and V. Mukhanov, k-*Inflation*, Phys. Lett. B **458**, 209 (1999).

[30] C. Armendariz-Picon, V. Mukhanov, and P. J. Steinhardt, *Dynamical Solution to the Problem of a Small Cosmological Constant and Late-Time Cosmic Acceleration*, Phys. Rev. Lett. **85**, 4438 (2000).

[31] C. Armendariz-Picon, V. Mukhanov, and P. J. Steinhardt, *Essentials of k-essence*, Phys. Rev. D **63**, 103510 (2001).

[32] C. Armendariz-Picon and E. A. Lim, *Haloes of k-essence*, J. Cosmol. Astropart. Phys. **2005** (08), 007.

[33] E. Babichev, *Global topological k-defects*, Phys. Rev. D **74**, 085004 (2006).

[34] A. Barros and C. Romero, *Global monopoles in Brans-Dicke theory of gravity*, Phys. Rev. D **56**, 6688 (1997).

[35] T. R. P. Caramês, E. R. Bezerra de Mello, and M. E. X. Guimarães, *Gravitational field of a global monopole in a modified gravity*, Int. J. Mod. Phys. D: Conf. Ser. **3**, 446 (2011).

[36] T. R. P. Caramês, J. C. Fabris, E. R. Bezerra de Mello, and H. Belich, $f(R)$ *global monopole revisited*, Eur. Phys. J. C **77**, 496 (2017).

[37] T. R. P. Caramês, E. R. Bezerra de Mello, and M. E. X. Guimarães, *On the motion of a test particle around a global monopole in a modified gravity*, Mod. Phys. Lett. A **27**, 1250177 (2012).

[38] J. P. M. da Graça and V. B. Bezerra, *Gravitational field of a rotating global monopole in $f(R)$ theory*, Mod. Phys. Lett. A **27**, 1250178 (2012).

[39] J. Man and H. Cheng, *Thermodynamic quantities of a black hole with an $f(R)$ global monopole*, Phys. Rev. D **87**, 044002 (2013).

[40] J. Man and H. Cheng, *Analytical discussion on strong gravitational lensing for a massive source with a $f(R)$ global monopole*, Phys. Rev. D **92**, 024004 (2015).

[41] R. D. Lambaga and H. S. Ramadhan, *Gravitational field of global monopole within the Eddington-inspired Born-Infeld theory of gravity*, Eur. Phys. J. C **78**, 436 (2018).

[42] J. R. Nascimento, G. J. Olmo, P. J. Porfírio, A. Y. Petrov, and A. R. Soares, *Global monopole in Palatini $f(\mathcal{R})$ gravity*, Phys. Rev. D **99**, 064053 (2019).

[43] J. R. Nascimento, G. J. Olmo, P. Porfírio, A. Y. Petrov, and A. R. Soares, *Nonlinear σ-models in the Eddington-inspired Born-Infeld Gravity*, arXiv: hep-th/1912.10779 .

[44] S. M. Carroll, *Spacetime and geometry: An introduction to general relativity* (Addison-Wesley, San Francisco, 2004).

[45] A. Saa, *Cem anos de buracos negros: o centenário da solução de Schwarzschild*, Rev. Bras. Ensino Fís. **38** (2016).

[46] D. Harari and C. Loustó, *Repulsive gravitational effects of global monopoles*, Phys. Rev. D **42**, 2626 (1990).

[47] S. W. Hawking and R. Penrose, *The singularities of gravitational collapse and cosmology*, Proc. Roy. Soc. Lon. A **314**, 529 (1970).

[48] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The large scale structure of space-time*, Vol. 1 (Cambridge university press, Cambridge, England, 1973).

[49] M. S. Maior de Sousa and A. Alves de Lima, *Uma discussão sistemática sobre as cordas cósmicas e o modelo de vórtices abelianos proposto por Nielsen e Olesen*, Rev. Bras. Ensino Fís. **40** (2018).

[50] R. Geroch, *What is a singularity in general relativity?*, Annals of Physics **48**, 526 (1968).

[51] E. Poisson, *A relativist's toolkit: the mathematics of black-hole mechanics* (Cambridge university press, Cambridge, 2004).

[52] M. Visser, *Lorentzian wormholes: from Einstein to Hawking* (American Institute of Physics, New York, 1995).

[53] J. Zanelli, *Lecture notes on Chern-Simons (super-) gravities. Second edition (February 2008)*, arXiv: hep-th/0502193 .

[54] R. Aldrovandi and J. G. Pereira, *Teleparallel gravity: an introduction* (Springer, Heidelberg, Germany, 2012).

[55] C. M. Will, *The confrontation between general relativity and experiment*, Living Rev. Rel. **17**, 4 (2014).

[56] J. Beltrán Jiménez and A. Delhom, *Ghosts in metric-affine higher order curvature gravity*, Eur. Phys. J. C **79**, 656 (2019).

[57] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation* (Freeman Press, San Francisco, 1973) Chap. 21, pp. 500–501.

[58] V. I. Alfonso, C. Bejarano, J. B. Jiménez, G. J. Olmo, and E. Orazi, *The trivial role of torsion in projective invariant theories of gravity with non-minimally coupled matter fields*, Class. Quant. Gravit. **34**, 235003 (2017).

[59] M. Born, *Modified field equations with a finite radius of the electron*, Nature **132**, 282 (1933).

[60] M. Born, *On the quantum theory of the electromagnetic field*, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. **143**, 410 (1934).

[61] M. Born and L. Infeld, *Foundations of the new field theory*, Nature **132**, 1004 (1933).

[62] M. Born and L. Infeld, *Foundations of the new field theory*, Proc. R. Soc. Lond. A **144**, 425 (1934).

[63] S. Deser and G. W. Gibbons, *Born - Infeld - Einstein actions?*, Class. Quantum Grav. **15**, 35 (1998).

[64] D. N. Vollick, *Palatini approach to Born-Infeld-Einstein theory and a geometric description of electrodynamics*, Phys. Rev. D **69**, 064030 (2004).

[65] A. S. Eddington, *The mathematical theory of relativity* (Cambridge University Press, London, 1923).

[66] M. Bañados and P. G. Ferreira, *Eddington's Theory of Gravity and Its Progeny*, Phys. Rev. Lett. **105**, 011101 (2010).

[67] M. Bañados and P. G. Ferreira, *Erratum: Eddington's Theory of Gravity and Its Progeny [Phys. Rev. Lett. 105, 011101 (2010)]*, Phys. Rev. Lett. **113**, 119901 (2014).

[68] J. B. Jiménez, L. Heisenberg, G. J. Olmo, and D. Rubiera-Garcia, *Born–Infeld inspired modifications of gravity*, Physics Reports **727**, 1 (2018).

[69] A. Starobinsky, *A new type of isotropic cosmological models without singularity*, Phys Lett B **91**, 99 (1980).

[70] N. Dadhich, K. Narayan, and U. Yajnik, *Schwarzschild black hole with global monopole charge*, Pramana J. Phys. **50**, 307 (1998).

[71] J. A. Wheeler, *Geons*, Phys. Rev. **97**, 511 (1955).

[72] R. Shaikh, *Wormholes with nonexotic matter in Born-Infeld gravity*, Phys. Rev. D **98**, 064033 (2018).

[73] I. Prasetyo and H. S. Ramadhan, *Classical defects in higher-dimensional Einstein gravity coupled to nonlinear σ-models*, Gen. Rel. Grav. **49**, 115 (2017).

[74] H. S. Ramadhan, I. Prasetyo, and A. M. Kusuma, *Higher-dimensional black holes with Dirac-Born-Infeld (DBI) global defects*, Gen. Rel. Grav. **50**, 96 (2018).

[75] M. Gell-Mann and B. Zwiebach, *Spacetime compactification induced by scalars*, Phys. Lett. B **141**, 333 (1984).

[76] M. S. Morris and K. S. Thorne, *Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity*, Am. J. Phys. **56**, 395 (1988).

[77] F. S. N. Lobo, F. Parsaei, and N. Riazi, *New asymptotically flat phantom wormhole solutions*, Phys. Rev. D **87**, 084030 (2013).

[78] K. Jusufi, *Conical Morris-Thorne wormholes with a global monopole charge*, Phys. Rev. D **98**, 044016 (2018).

[79] H. S. Prasetyo, Ilham e Ramadhan, *Classical defects in higher-dimensional Einstein gravity coupled to nonlinear σ-models*, Gen. Rel. Grav. **49**, 115 (2017).

[80] X. hua Jin e Xin-zhou Li and D. jun Liu, *A gravitating global k-monopole*, Class. Quant. Grav. **24**, 2773 (2007).

[81] G. J. Olmo and D. Rubiera-Garcia, *Reissner-Nordström black holes in extended Palatini theories*, Phys. Rev. D **86**, 044014 (2012).

[82] K. Jusufi, *Gravitational lensing by Reissner-Nordström black holes with topological defects*, Astrophys. Space Sci. **361**, 24 (2016).

[83] G. J. Olmo, D. Rubiera-Garcia, and H. Sanchis-Alepuz, *Geonic black holes and remnants in Eddington-inspired Born–Infeld gravity*, Eur. Phys. J. C **74**, 2804 (2014).

[84] G. J. Olmo and D. Rubiera-Garcia, *Geons in Palatini theories of gravity*, Fundam. Theor. Phys. **189**, 161 (2017).