UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO *STRICTU SENSU* EM FÍSICA

# *Formalismo de Primeira Ordem para Vórtices Compactos em Modelos Generalizados*

Ivanice Zafalan

João Pessoa-PB
12 de dezembro de 2018

**Ivanice Zafalan**

# *Formalismo de Primeira Ordem para Vórtices Compactos Generalizados*

Tese apresentada ao curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de doutora em Física na área de Concentração de Física de Partículas e Campos.

Orientador:
**Prof. Dr. Laércio Losano**
Coorientador:
**Prof. Dr. Dionísio Bazeia Filho**

João Pessoa-PB
12 de Dezembro de 2018

**Catalogação na publicação**
**Seção de Catalogação e Classificação**

Z17f Zafalan, Ivanice.
Formalismo de Primeira Ordem para Vórtices Compactos em Modelos Generalizados / Ivanice Zafalan. - João Pessoa, 2019.
0 f128.

Orientação: Laércio Losano.
Coorientação: Dionísio Bazeia.
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Defeitos topológicos. 2. Soluções localizada e energias finitas. I. Losano, Laércio. II. Bazeia, Dionísio. III. Título.

UFPB/BC

Danilo Wilson Lemos Menezes
Técnico em Assuntos Educacionais
Mat. SIAPE 2647774

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de **Doutorado** da aluna **Ivanice Zafalan**, candidata ao Título de Doutora em Física na Área de Concentração Física das Partículas Elementares e Campos.

Aos doze dias do mês de dezembro do ano de dois mil e dezoito, às 15:00, no Auditório da Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para examinar a candidata ao grau de Doutora em Física na área de Física das Partículas Elementares e Campos, **Ivanice Zafalan**. A comissão examinadora foi composta pelos professores doutores: *Laércio Losano* (UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, Dionísio Bazeia Filho (UFPB), coorientador, *Carlos Antônio de Sousa Pires* (UFPB), *Albert Petrov* (UFPB), *Adalto Rodrigues Gomes* (UFMA) e *Fabiano Manoel de Andrade* (UEPG). Dando início aos trabalhos, o Prof. Laércio Losano comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para que a candidata fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de tese intitulado "*Formalismo de primeira ordem para vórtices compactos em modelos generalizados*". Concluída a exposição, a candidata foi arguida pela Banca Examinadora, que emitiu o seguinte parecer: **"aprovada"**. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutora em Física na forma da lei. E para constar, eu, Danilo Wilson Lemos Menezes, redigi esta ata que vai assinada por mim e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **12 de dezembro de 2018**.

Prof. Dr. Laércio Losano
*Orientador – PPGF/UFPB*

Prof. Dr. Dionísio Bazeia Filho
*Coorientador – PPGF/UFPB*

Prof. Dr. Carlos Antônio de Sousa Pires
*PPGF/UFPB*

Prof. Dr. Albert Petrov
*PPGF/UFPB*

Prof. Dr. Adalto Rodrigues Gomes
*UFMA*

Prof. Dr. Fabiano Manoel de Andrade
*UEPG*

*"Na vida, não existe nada a ser temido, apenas a ser compreendido".*

Marie Curie (1867-1934)

*À minha mãe Cleonice Leite de Abreu Zafalan (in memoriam).*

# Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço aos meus pais (in memoriam), aos meus filhos e as minhas netas. Um agradecimento com muito carinho, dedico ao meu orientador, professor Laércio Losano e ao meu coorientador, professor Dionísio Bazeia Filho que, com bastante dedicação, orientaram-me na condução dessa tese, assegurando sua realização. Agradeço também a todos os meus professores da UFPB, desde a graduação à pós-graudação, com quem tive contato nas disciplinas que cursei. Deixo um agradecimento imenso ao professor Roberto Menezes e ao amigo Matheus Araujo Marques, com os quais tive o prazer de trabalhar diretamente, o que nos rendeu bons frutos. Cabe aqui mencionar o amigo para todas as horas, Cristino José dos Santos Ferreira. Aos inúmeros amigos que participaram com discussões, apoio e ótimos momentos, a gratidão é mais que especial e, para não ser injusta ou me alongar muito, escolho dois destes para representar a todos, Danilo Cesar Moreira e Elisama Eraldene Marques Lima.

# Resumo

O objetivo desta tese é o estudo de vórtices compactos em modelos generalizados. Para tanto, começamos por revisar alguns tópicos em teoria clássica de campos, trabalhando essencialmente com campos escalares no espaço plano. Revisamos o estudo de alguns defeitos topológicos e não topológicos: kinks, lumps e vórtices. Na sequência, introduzimos resultados originais, dentre os quais, exploramos dois novos modelos de vórtices generalizados e dois novos modelos de vórtices generalizados compactos para o sistema Maxwell-Higgs. Estes últimos encolhem para um intervalo finito da coordenada radial, com soluções, densidade de energia e campo magnético fora deste intervalo, nulos. Concluímos com a apresentação de um formalismo de primeira ordem para vórtices compactos generalizados no qual, como resultado, chegamos ao cálculo da energia sem o conhecimento explícito da forma das suas soluções.

**Palavras-chave**: defeitos topológicos, soluções localizadas, energias finitas.

# Abstract

The purpose of this work is the compacts vortex study in generalized models. Thus, we started by reviewing some topics of Classical Field Theory, approaching essentially scalar fields in plane space. We review the study of some topological and non-topological defects such as kinks, lumps and vortex. Furthermore, we present original results such as two new models of generalized vortexes and two new models of generalized compacts vortexes for Maxwell-Higgs system. The latter shrink to a finite interval of the radial coordinate where solutions for energy density and magnetic field vanish outside this range. We conclude present a first order formalism for generalized compacts vortex for which we arrive at the energy calculation without the explicit knowledge of the form of its solutions.

**Keywords**: topological defects, localized solutions, finite energies.

# Sumário


**1 Introdução** **1**

**2 Kinks e Lumps** **8**

2.1 Método de Bogomol'nyi . . . . . 12

2.2 Estabilidade Linear . . . . . 14

2.3 Kink . . . . . 17

2.3.1 Potencial $\lambda\phi^4$ . . . . . 17

2.3.1.1 Equações BPS . . . . . 18

2.3.1.2 Estabilidade Linear do Modelo $\phi^4$ . . . . . 20

2.3.2 Modelo seno-Gordon . . . . . 21

2.4 Lumps . . . . . 23

2.4.1 Lumps com Potencial $\phi^3$ . . . . . 23

2.4.2 Lumps com Potencial $\phi^4$ Invertido . . . . . 25

**3 Vórtices** **28**

3.1 Vórtices Maxwell-Higgs . . . . . 29

3.1.1 O Modelo . . . . . 29

3.1.2 Equações BPS . . . . . 34

3.1.3 Soluções Analíticas Aproximadas . . . . . 36

3.1.4 Soluções Numéricas . . . . . 39

3.2 Vórtices Chern-Simons-Higgs . . . . . 40

3.2.1 O Modelo . . . . . 40

3.2.2 Equações BPS . . . . . 45

3.2.3 Soluções Analíticas Aproximadas . . . . . 47

3.2.4 Soluções Numéricas . . . . . 47

**4 Vórtices Compactos Generalizados** **49**

4.1 O Modelo Generalizado . . . . . 50

4.2 Vórtices Generalizados: Primeiro Modelo . . . . . 54

4.3 Vórtices Generalizados: Segundo Modelo . . . . . 57

4.4 Exemplo de Vórtice Compacto . . . . . 60
4.5 Outro Exemplo com Vórtices compactos . . . . . 64

**5 Formalismo de Primeira Ordem para Vórtices 68**
5.1 Vórtices no Modelo Maxwell-Higgs Generalizados . . . . . 68
5.1.1 Modelo com Abordagem Numérica . . . . . 74
5.1.2 Modelo com Abordagem Analítica . . . . . 75
5.1.2.1 Exemplo . . . . . 77
5.1.2.2 Outro Exemplo . . . . . 82
5.2 Vórtices no Modelo Chern-Simons-Higgs Generalizados . . . 83
5.2.1 Modelo Um . . . . . 88
5.2.2 Modelo Dois . . . . . 90
5.3 Vórtices Maxwell-Chern-Simons-Higgs Generalizados . . . . . 94
5.3.1 Modelo Mais Geral . . . . . 99

**6 Conclusões e Perspectivas 102**

# Lista de Figuras


1.1 Rede de vórtices formados durante uma transição de fase em um cristal líquido. As bolhas estão em fase nucleada (esquerda), as bolhas crescem e colidem para formar cordas (centro), e a rede de cordas engrossam (direita) [Bowick et al, 1994]. . . . . 2

1.2 Supercondutor do tipo II: diagrama de fase HxT (à esquerda). Linhas de fluxo de vótices aprisionadas e rede de vórtices (à direita).[por Luis Ghivelder] . . . . . 3

1.3 Diagrama de fases do $He^4$. $He\,I$ é conhecido como "normal", enquanto $He\,II$ é um superfluido. [por prof. Jair LP] . . . . . 4

1.4 Parede de domínio do tipo Ising. . . . . 6

2.1 Potencial que suporta soluções com pressão negativa e energia divergente (à esquerda). Potencial que suporta soluções com pressão nula e energia finita. . . . . 11

2.2 Potencial $\lambda\phi^4$ Eq. (2.44) (à esquerda). Solução $\phi_{\pm}(x)$ Eq. (2.49), onde $\phi_+$ é o Kink (linha sólida) e $\phi_-$ é o anti-kink (linha tracejada) (à direita), ambos com $\lambda = v = 1$ . . . . . 18

2.3 Densidade de energia $\rho(x)$ Eq. (2.56) . . . . . 20

2.4 Potencial de estabilidade $U(x)$ (2.58), do tipo Pöschl-Teller modificado (à esquerda). O modo zero $\eta_0(x)$ Eq. (2.61) (à direita). . . . . 21

2.5 O modelo seno-Gordon: potencial Eq. (2.62) à esquerda; a solução kink $\phi^+(x)$ (linha sólida) e do anti-kink $\phi^-(x)$ (linha tracejada) Eq. (2.66) à direita. . . . . 22

2.6 O modelo seno-Gordon: a densidade de energia Eq. (2.67) à esquerda e o potencial estabilidade Eq. (2.68) à direita. . . . . 23

2.7 Potencial Eq. (2.70). Solução do tipo lump $\phi(x)$, Eq. (2.72). . . . . 24

2.8 Densidade de energia $\rho(x)$, Eq. (2.73). . . . . 24

2.9 Potencial estabilidade $U(x)$, Eq. (2.76) (à esquerda). A derivada de $\phi'(x)$, Eq. (2.77). . . . . 25

2.10 Potencial $\phi^4$ invertido Eq. (2.78) (à esquerda). O lump para o modelo $\phi^4$ invertido Eq. (2.80) (à direita). . . . . 26

2.11 Densidade de energia Eq. (2.81) (à esquerda). Potencial de estabilidade $U(x)$ Eq. (2.83) (à direita). 27

2.12 Para comparação temos à esquerda, a densidade de energia dos modelos: kink $\phi^4$ (linha cheia) e do lump $\phi^4$ invertido (linha tracejada) e à direita a função $\eta_0$ para os modelos $\phi^4$ (linha cheia) e $\phi^4$ invertido, (linha Traçejada). . . . . 27

3.1 Potencial do modelo $\varphi^4$ Eq. (3.23) à esquerda e seu perfil $3D$, para $\lambda = v = 1$. . . . . 35
3.2 As funções: $a(r)$ (à esquerda superior), $g(r)$ (à direita superior), densidade de energia, $\rho(r)$ (à esquerda inferior) e o campo magnético $B(r)$ (à direita inferior). . . . . 40
3.3 Potencial do modelo $\varphi^6$ Eq. (3.60) e seu perfil em $3D$, para $\lambda = v = \kappa = 1$. . . . . 47
3.4 A função $a(r)$ (à esquerda superior), $g(r)$ (à direita superior), a densidade de energia $\rho(r)$ (à esquerda inferior) e o campo magnético $B(r)$ (à direita inferior). . . . . 48

4.1 O potencial (4.21) (linha sólida) e o potencial para o modelo Maxwell-Higgs padrão (3.23) (linha tracejada). Com $e = v = 1$. . . . . 54
4.2 As funções: $a(r)$ (à esquerda) e $g(r)$ (à direita) deste novo modelo para $n = 1, 2, 3, 5$ e 10, linhas: solida; pontilhada; tracejada; traço ponto e traçejado longo, respectivamente. . . . . 56
4.3 A densidade de energia, $\varepsilon(r)$ (à esquerda) e o campo magnético $B(r)$ (à direita) deste novo modelo para $n = 1, 2, 3, 5$ e 10, linhas: solida; pontilhada; tracejada; traço ponto e traçejado longo, respectivamente. . . . . 56
4.4 As funções: $a(r)$ (à esquerda superior), $g(r)$ (à direita superior), a densidade de energia, $\varepsilon(r)$ (à esquerda inferior) e o campo magnético $B(r)$ (à direita inferior) dos modelos novo e usual, linhas: sólida e tracejada, nesta ordem, com $n = 3$. . . . . 57
4.5 Os dois potenciais (4.27) e (4.28), mostrados com linha sólida e tracejada, nesta ordem. . . . 58
4.6 As funções: $a(r)$ (à esquerda superior), $g(r)$ (à direita superior), densidade de energia, $\varepsilon(r)$ (à esquerda inferior) e o campo magnético $B(r)$ (à direita inferior), linhas: solida; pontilhada; tracejada; traço ponto e traçejado longo, respectivamente. . . . . 59
4.7 As funções: $a(r)$ (à esquerda) e $g(r)$ (à direita), para o segundo novo modelo, linha sólida e o de Chern-Simons padrão linha tracejada, com $n = 3$. . . . . 59
4.8 A densidade de energia, $\varepsilon(r)$ (à esquerda) e o campo magnético $B(r)$ (à direita), para o segundo novo modelo linha sólida e o de Chern-Simons padrão linha tracejada, ambos com $n = 3$. . . . 60
4.9 O potencial (4.33) para $l = 1, 2, 3, \ldots, 10$. . . . . 61
4.10 As soluções $a_c(r)$ à esquerda e $g_c(r)$ à direita para $n = 1$. Consideramos inicialmente, $l = 1$ em seguida aumentamos para valores cada vez maiores de $l$. As linhas tracejadas representam o limite compacto, dado por Eqs. (4.37) com $n = 1$. . . . . 63
4.11 A densidade de energia (à esquerda) e o campo magnético (à direita) para $n = 1$. Consideramos inicialmente, $l = 1$ em seguida aumentamos para valores cada vez maiores de $l$. As linhas tracejadas representam o limite compacto, dado por Eqs. (4.44) com $n = 1$. . . . . 64
4.12 O potencial (4.40) para $l = 1, 2, 3, \ldots, 10$. . . . . 65
4.13 As soluções $a_c(r)$ (à esquerda) e $g_c(r)$ (à direita) para $n = 1$, com $l = 1$, seguido de valores cada vez maiores para $l$. As linhas tracejadas representam o limite compacto, dado por Eqs. (4.41) com $n = 1$. . . . . 66

4.14 A densidade de energia (à esquerda) e o campo magnético (à direita) para $n = 1$. Com $l = 1$, seguido de valores cada vez maiores para $l$. As linhas tracejadas representam o limite compacto com $n = 1$. . . . . 66

5.1 Potencial da Eqs. (5.51), com $e, v, \alpha, n = 1$, com $l = 1, 2, 3, \cdots, 12$. . . . . 79

5.2 As funções: $a(r)$ (à esquerda) e $g(r)$ (à direita), Eqs. (5.52) considerando as Eqs. (5.50), com $e, v, \alpha, n = 1$ e $l = 1, 2, 4, 8, 16, 32$ linhas cheias e as Eqs. (5.54), linha tracejada. . . . . 80

5.3 O campo magnético $B(r) = -a'/(er)$ (à direita) e a densidade de energia Eq. (5.55) (à esquerda), ambas associadas as Eqs. (5.52) considerando as condições Eqs. (5.50), com $e, v, \alpha, n = 1$ e $l = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 2048$, linhas cheias e o limite assintótico $l \to \infty$ e a expressão, (5.54), linha tracejada. . . . . 81

5.4 A densidade de energia Eq. (5.55), associadas as Eqs. (5.52), mostradas no plano $r, \theta$, com $e, v, \alpha, n = 1$ e $l = 8, 32, 256$, e um valor de $l \to \infty$. . . . . 81

5.5 Potencial da Eq. (5.88b), com $e, v, \kappa = 1$. . . . . 89

5.6 A função $a(r)$ (à direita) e $g(r)$ (à esquerda), Eqs. (5.89), com $e, v, \kappa = 1$. . . . . 89

5.7 O campo elétrico (à esquerda), o campo magnético (no centro) e a densidade de energia (à direita), para as soluções $a(r)$ e $g(r)$ das Eqs. (5.89), com $e, v, \kappa = 1$. . . . . 90

5.8 Potencial da Eq. (5.92b), com $e, v, \kappa = 1$. . . . . 91

5.9 A função $a(r)$ (à esquerda), a função $g(r)$ (à direita), para as soluções das Eqs. (5.93), com $e, v, \kappa, n = 1$, $l = 1, 2, 3, 5, 7, 10, 40$, linha sólida e um valor muito grande de $l$, linha tracejada. . 92

5.10 O campo elétrico (à esquerda), o campo magnético (no centro) e a densidade de energia (à direita), para as soluções $a(r)$ e $g(r)$ das Eqs. (5.93), com $e, v, \kappa, n = 1$ e $l = 1, 2, 3, 5, 7, 10, 40$. . 93

5.11 A densidade de energia Eq. (5.99) (na cor azul), associadas as Eqs. (5.93) mostradas no plano $r, \theta$, com $e, v, \alpha, n = 1$ e $l = 1, 2, 3, 10$, e um valor muito grande de $l$. . . . . 94

# Trabalhos Publicados

1. D. Bazeia, L. Losano, M. A. Marques, R. Menezes and I. Zafalan, *Compact Vortices*, Eur. Phys. J. C, **77**, 63 (2017).

2. D. Bazeia, L. Losano, M. A. Marques, R. Menezes and I. Zafalan, *First Order Formalism for Generalized Vortices*, Nucl. Phys., B **934**, 212 (2018).

# Capítulo 1

# Introdução

*Sempre que partimos do conhecido para o desconhecido,*
*podemos esperar compreendê-lo, mas inevitavelmente,*
*devemos aprender ao mesmo tempo, um novo*
*significado da palavra "compreensão"*

Werner Heisenberg (1901-1976)

O estudo da topologia e sua aplicabilidade em física vem de longa data e o que torna excitante tais aplicações na física é justamente a sua natureza de abstração. Sua importância vai além da descrição específica do sistema em estudo e pode relacionar-se também com fenômenos primordiais distintos. Esta área preocupa-se com o estudo de formas, espaços e sobre como as diferentes formas podem ser continuamente deformadas, transformando-se umas nas outras. Para um conjunto específico de efeitos topológicos em teoria de campos se dá o nome de *defeito topológico*, que são soluções topologicamente diversas para equações diferenciais parciais não lineares [1].

Defeitos topológicos são objeto de estudo em inúmeras áreas da ciência, como biologia (pulsos elétricos em organismos vivos), oceanografia (tsunamis), meteorologia (tornados na atmosfera da terra e em outros planetas), astrofísica (vórtices em galáxias), óptica (armazenamento e transmissão de informações em fibras ópticas) e física da matéria condensada (vórtices em supercondutores). Em cosmologia, a formação de defeitos topológicos foi teoricamente imprescindíveis às transições de fase do nosso universo primordial, pois essas transições de fase poderiam ser responsáveis pela formação de uma distribuição aleatória de defeitos, como a rede de vórtices que aparece no cristal líquido, mostrado na Fig, 1.1. Logo, os defeitos topológicos desempenharam um papel crucial na história do nosso universo, em seu estágio primordial. Já, em física das partículas elementares, teorias modernas como supercordas e outras mais complexas ainda como supermembranas são utilizadas

afim de melhorar nossa compreensão sobre a constituição de tais partículas e suas interações [2]-[5].

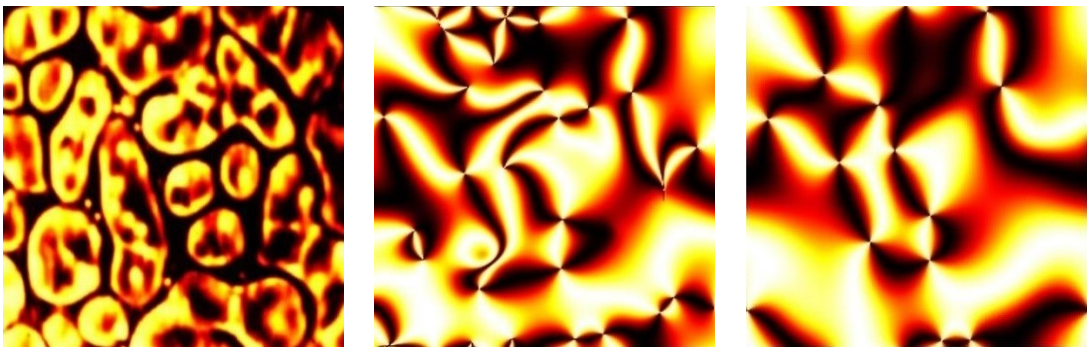

Figura 1.1: Rede de vórtices formados durante uma transição de fase em um cristal líquido. As bolhas estão em fase nucleada (esquerda), as bolhas crescem e colidem para formar cordas (centro), e a rede de cordas engrossam (direita) [Bowick et al, 1994].

A classificação e as propriedades desses defeitos topológicos dependem basicamente do número da dimensão espacial do sistema em estudo. Em física de altas energias, como exemplos desses defeitos topológicos, temos: kinks, vórtices e monopolos em uma, duas e três dimensões, respectivamente. As soluções do tipo kinks requerem apenas um campo escalar e real, representando o exemplo mais simples dentro da teoria de campos. Por outro lado, vórtices são estudados a partir de um campo complexo acoplado a um campo de gauge abeliano enquanto os monopolos resultam da presença de campos complexos não abelianos, sendo as Refs. [4]-[11] uma boa opção para os leitores interessados. Convém ressaltar que, dentre os defeitos mencionados, o estudo de vórtices é o objetivo principal desta tese.

A hipótese a respeito da existência de vórtices foi precedida de muitas interpretações controversas. Várias críticas foram feitas à teoria cosmológica de René Descartes, que formulou um estudo sobre vórtices para explicar a gravitação, contendo cordas cósmicas, talvez as primeiras da ciência moderna. Naquela época, este foi um modelo que ganhou muitos adeptos, mas foi duramente contestada por Newton, através do tratado intitulado *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, cujas propostas prevaleceram. Porém, desenvolvimentos recentes em física de partículas, o modelo padrão por exemplo, lançam dúvidas sobre a visão cosmológica newtoniana, principalmente devido a noção bem estabelecida de quebra espontânea de simetria e ao avanço na compreensão das transições de fases cosmológicas, que nos induzem a considerar a possibilidade de aparições de defeitos topológicos, como as cordas de vórtices [4].

O estudo sistematizado de vórtices foi introduzido por Hermann von Helmholtz [12] através dos seus trabalhos em mecânica dos fluidos [13]. Neste contexto, vórtice é um escoamento giratório de um fluído, no qual as linhas de corrente apresentam um

padrão circular ou espiral. Estes padrões são movimentos ao redor de um centro de rotação, que surgem devido a diferença de pressão entre duas regiões vizinhas. A direção de rotação que um vórtice adota depende da força que o provocou, como no caso da força de Coriolis que, sob a influência inercial do planeta, faz com que os vórtices naturais do hemisfério norte girem no sentido anti-horário e os do hemisfério sul no sentido horário.

Nos anos de 1950, Ginzburg e Landau [14, 15] apresentaram uma teoria fenomenológica para descrever a supercondutividade, que foi originalmente concebida com grande sucesso por John Bardeen, Leon Cooper e John Robert Schrieffer, ficando conhecida na literatura como teoria BCS [16, 17]. Posteriormente, Nikolay Bogoliubov [18] deu uma elegante formulação matemática para esta teoria e, a partir de então, importantes trabalhos surgiram, como se verifica nas referências [19]-[22]. Aqui destacamos o trabalho de Abrikosov [23, 24], que mostrou a possibilidade da existência de soluções localizadas do tipo vórtices para a teoria macroscópica de Ginzburg-Landau, na presença de um campo magnético externo. Era sabido que os supercondutores têm a propriedade física de repelir as linhas de campo magnético quando estão abaixo de uma temperatura crítica, o denominado efeito Meissner [25]. No entanto, para uma classe de supercondutores, após um determinado valor do campo crítico, tal campo adquire uma escala de comprimento com profundidade finita de penetração no supercondutor (comprimento London), formando filamentos chamados vórtices. A essa classe de supercondutores é dado o nome de supercondutor do tipo II, nos quais existem dois valores críticos para o campo magnético, $H_{C_1} < H_{C_2}$, estando localizados, entre esses dois valores, os vórtices de Abrikosov (Fig. 1.2).

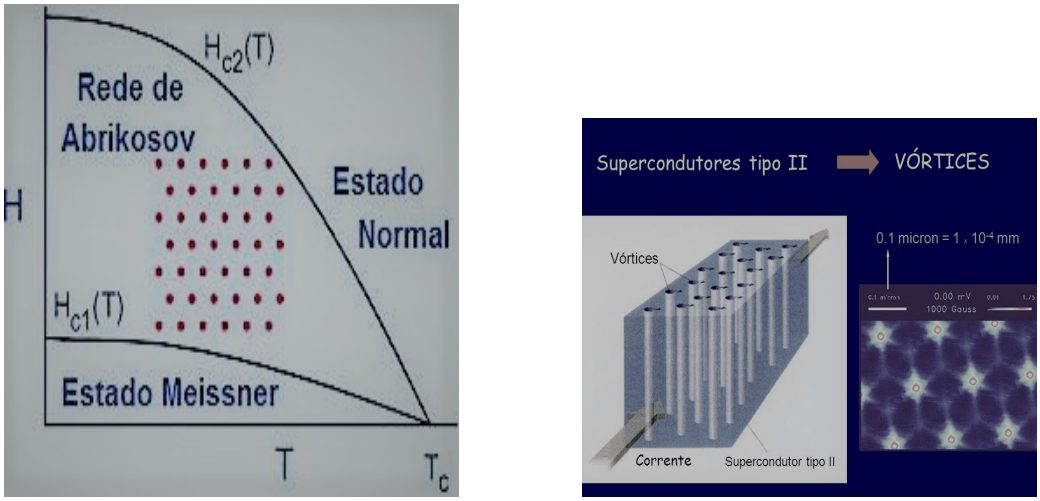


Figura 1.2: Supercondutor do tipo II: diagrama de fase HxT (à esquerda). Linhas de fluxo de vótices aprisionadas e rede de vórtices (à direita).[por Luis Ghivelder]

A partir desses trabalhos pioneiros, as propriedades dos vórtices foram intensamente investigadas e verificadas experimentalmente. Aplicações de modelos do tipo Ginzburg-Landau em física da matéria condensada levaram ao descobrimento de novas teorias com soluções do tipo vórtices. Podemos mencionar, como exemplo, o Efeito Hall Quântico inteiro e fracionário [26] e a supercondutividade a altas temperaturas [27], que são fenômenos essencialmente planares.

Embora a teoria de Ginzburg-Landau seja não relativística, a capacidade de estabelecermos paralelos entre a física de altas energias e a física da matéria condensada repousa sobre uma linha tênue, devido às semelhanças entre as energias livres, especialmente na vizinhança da transição de fase. Em particular, para transições de fase de segunda ordem, os potenciais contribuem com a energia livre, na forma de Ginzburg-Landau

$$V(\varphi) = \alpha(T - T_c)|\varphi|^2 + \frac{\beta}{2}|\varphi|^4, \tag{1.1}$$

onde $\varphi$ é o parâmetro de ordem ou um campo, o coeficiente $\alpha$ tem uma dependência bem definida com a temperatura e $\beta$ é uma constante.

Um outro exemplo clássico da aplicações de modelos do tipo Ginzburg-Landau em matéria condensada, de um estado com fase que apresenta quebra de simetria não trivial é o hélio superfluido $H_e{}^4$. O diagrama de fase do hélio é mostrado na Fig. 1.3. O hélio superfluido, Hélio II, ocupa o campo de baixas temperaturas ($T \lesssim 2K$) e baixas pressões ($p \lesssim 25atm$) do diagrama de fases.

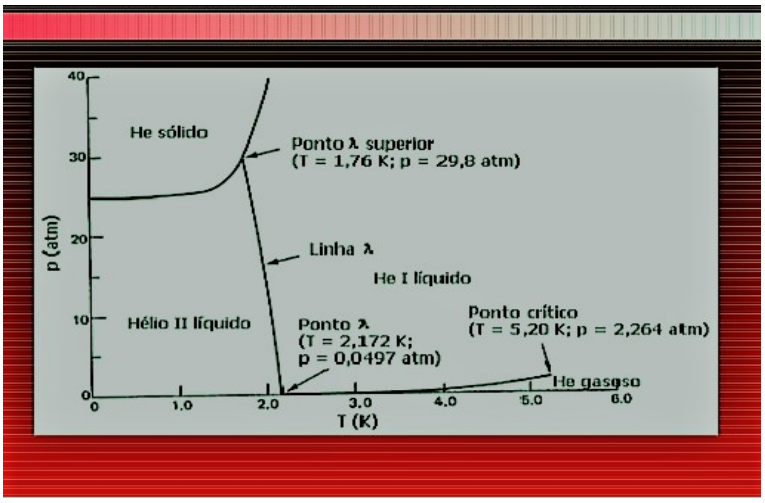


Figura 1.3: Diagrama de fases do $H_e{}^4$. $He\,I$ é conhecido como "normal", enquanto $He\,II$ é um superfluido. [por prof. Jair LP]

As propriedades surpreendentes do hélio superfluido estão associadas ao condensado de Bose-Einstein dos átomos de $H_e{}^4$. A baixas pressões e temperaturas críticas $T_c$, uma fração de átomos se condensam em um fluído quântico descrito por $\bar{\varphi} = |\varphi|e^{i\theta}$, onde a fase $\theta$ é responsável por muitas das intrigantes propriedades do Hélio II. A

conexão formal entre o Hélio II, estudado em matéria condensada e na teoria de campos, pode ser estabelecida quando assume-se que a densidade de energia livre pode ser expandida em uma série de potências de $|\varphi|$ e tem uma forma do tipo Ginzburg-Landau

$$f(r) = \alpha|\varphi|^2 + \frac{\beta}{2}|\varphi|^4 + \frac{1}{2m}|\nabla\varphi(r)|^2, \tag{1.2}$$

com $\alpha$ e $\beta$ como na equação, (1.1). Estes são sistemas essencialmente não relativísticos [28].

Aqui o nosso interesse está no estudo de vórtices resultantes de uma quebra espontânea de simetria contínua [29]-[31], que surgem em sistemas relativísticos no espaço-tempo tridimensional $(2,1)$. Seu estudo é feito a partir da introdução de uma densidade lagrangiana, na qual o campo escalar complexo deve estar acoplado a um campo de gauge por um grupo de simetria $U(1)$. A versão relativística para o modelo Ginzburg-Landau foi introduzida por Nielsen-Olesen [32], onde podemos ver a semelhança entre o potencial dado pela Eq. (1.1) e o potencial escalar de Higgs de quarta ordem. Esta versão relativística admite soluções estáticas do tipo vórtices puramente magnéticas, isto é, são soluções eletricamente neutras, que apresentam uma densidade de energia localizada e carga topológica, que é conhecido como modelo de Maxwell-Higgs.

Na década de 1960, modelos com simetria de gauge não abeliana foram inseridos como proposta para unificar as interações eletrofracas. A famosa teoria GWS (S. Glashow, S. Weinberg, A. Salam) [21], [33]-[35], com quebra espontânea de simetria de $SU(2)xU(1)$ para $U(1)$, estabeleceu-se como modelo padrão para a física de partículas elementares, sendo confirmada pela recente descoberta dos bósons de Higgs (2012). As partículas essenciais da teoria são: $W^{\pm}$ carregadas e $Z$ neutra [5]. Na sequência, importantes trabalhos que consideram simetrias de gauge não abelianas foram desenvolvidas [36]-[43] e diferente dos vórtices de Maxwell-Higgs, estes trabalhos que envolvem o termo Chern-Simons são eletricamente carregados.

As equações de movimento que emergem dos modelos em teoria de campos receberam uma base analítica rigorosa através dos trabalhos de Trauble [44], Uhlenbeck, Stuart entre outros. Os geométricos e topológicos contribuíram com uma base sólida através dos estudos de Atiyah, Hitchin e colaboradores [45]. Em vórtices, as equações de movimento são equações diferenciais de segunda ordem, acopladas, não lineares e não tem soluções analíticas conhecidas, exceto assintoticamente. No entanto, em 1976, E. Bogomol'nyi apresentou um trabalho de importância sem igual, no qual descobriu um meio de tornar possível o encontro de equações diferenciais parciais de primeira ordem, cujas soluções são também soluções das equações de movimento que são de segunda ordem. Esse método é desenvolvido no trabalho *Stability Of*

*Classical Solutions* Ref. [46], onde vários exemplos são expostos. Estas equações de primeira ordem, puramente estáticas, são chamadas de Equações de Bogomol'nyi, em sua homenagem.

Hoje a literatura encontra-se repleta de estudos sobre vórtices, mostrando seu poder de interdisciplinaridade. Podemos citar alguns trabalhos recentes como as Ref. [47]-[56], dentre as quais temos como exemplos: Duas Espécies de Vórtices em Modelo Sigma não linear Maciço [47], Vórtices não abeliano em Supercondutores Holográficos [49] e Vórtices Compactos [56].

Na primeira parte desta tese serão discutidos alguns tópicos sobre teoria de campos que são importantes para a compreensão deste trabalho. Revisaremos como o campo escalar $\phi$ é inserido em uma densidade de lagrangiana $\mathcal{L}$. Recapitularemos o método de Bogomol'nyi para alguns modelos, em que deduzimos as equações BPS, que são equações diferenciais de primeira ordem, cujas soluções são conhecidas como estados BPS. Com estes resultados, encontramos a mínima energia ou energia de Bogomol'nyi $E_B$. Verificaremos que, associada a estas soluções, a densidade de energia é localizada e, através do estudo da estabilidade linear, veremos que tais soluções são estáveis. Passamos ao estudo de kinks, que são os defeitos mais simples dentre os defeitos topológicos, pois requerem apenas um campo escalar real em $(1,1)$ dimensões no espaço-tempo. Os kinks, quando imersos em três dimensões espaciais, dão orígem às paredes de domínio, sendo que o exemplo mais acessível de tais paredes encontra-se entre os materiais magnéticos. A Fig. 1.4 mostra esse exemplo que é conhecido como parede de domínio de Ising. Dando sequência, veremos que os kinks são classificados como defeitos topológicos, revisaremos o estudo de lumps, com o mesmo procedimento utilizado para os kinks, onde se verificará que os lumps classificam-se como defeito não topológicos.

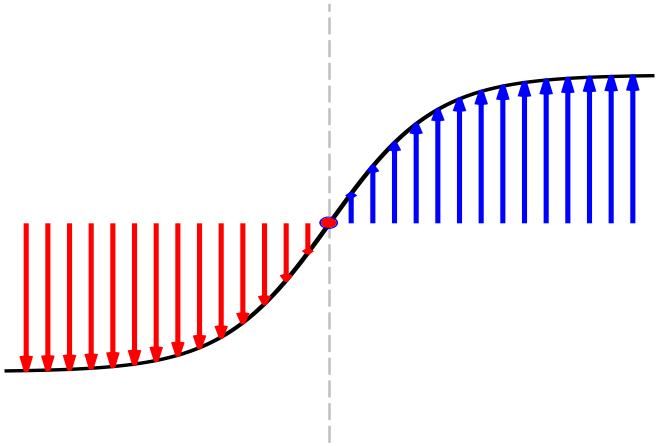

Figura 1.4: Parede de domínio do tipo Ising.

No capítulo 3 será introduzido o estudo de vórtices que, diferente dos kinks, são soluções que requerem seu estudo em (2,1) dimensões no espaço-tempo e são construídos a partir de um campo escalar complexo $\varphi$, acoplado a um campo de gauge $A_\mu$, via um grupo de simetria $U(1)$. Aqui estudaremos os modelos clássicos mais simples, de modo que a essência da teoria se sobressaia.

Na segunda parte desta tese, apresentaremos nossa contribuição através da introdução dos trabalhos publicados nas referências [56] e [57].

O capítulo 4 trata-se da construção de um modelo generalizado, sob circunstâncias específicas, em que várias possibilidades serão consideradas [56]. Para tanto, alteramos o termo de Maxwell adicionando a este, o fator $G(|\varphi|)$, chamado permeabilidade magnética. Esta modificação leva a teorias de campos planares e efetivas, que apresentam soluções do tipo vórtices, e que de modo intrigante, mapeiam os vórtices com dinâmica padrão dos sistemas Maxwell e Chern-Simons. Esta generalização nos inspirou a investigar a possibilidade de soluções do tipo compactons para este modelo, motivados pelos recentes avanços no estudo e manipulação de materiais em escala nanométrica, onde observou-se experimentalmente que as paredes de domínio podem modificar a configuração em geometrias restritas [58]. Questionamos se a miniaturização de materiais magnéticos pode modificar a estrutura conformacional dos vórtices. Neste sentido, existe um interesse atual em estudar a possibilidade de miniaturizar objetos topológicos para regiões compactas, como vórtices. Com esse intuíto, seguiremos um roteiro proposto em [55] a fim de mostrar como construir vórtices compactos no modelo generalizado do tipo Maxwell-Higgs.

No capítulo 5, nossa contribuição trará o estudo do formalismo de primeira ordem para vórtices compactos generalizado Ref. [57]. Introduzimos um procedimento para encontrar uma classe geral de densidades lagrangianas com o intuito de descrever as generalizações dos vórtices nos modelos Maxwell-Higgs abelliano, Chern-Simons-Higgs e Maxwell-Chern-Simons-Higgs. A investigação concentra-se na construção de modelos que suportam soluções do tipo vórtices relativísticos descritos em $(2,1)$ dimensões no espaço-tempo, que obedeçam a condição de stress nulo e que sejam compatíveis com as equações de movimento. O estudo mostra como encontrar vínculos específicos que restrinjam a escolha da densidade lagrangiana nos três casos distintos. No entanto, estes vínculos nos ajudam a introduzir uma função auxiliar que permite calcular a energia sem que a forma explícita das soluções sejam conhecidas.

Para finalizar, no capítulo 6, discutiremos as conclusões deste trabalho e as atuais perspectivas do campo de estudo.

# Capítulo 2

# Kinks e Lumps

Em teoria clássica de campos a densidade lagrangiana está conectada à dinâmica de um ou mais campos, definidos através do espaço e sua evolução no tempo. O espaço-tempo $\mathbb{R}^D \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{D+1}$. O campo escalar real é descrito por $\phi(t, \vec{x})$ que, nesta teoria, é definido como uma função real do vetor contravariante $x^\mu = (x^0 = t, \vec{x})$ (no sistema de unidades naturais, $\hbar = c = 1$), onde $x^0$ representa a parte temporal e $\vec{x}$ a parte espacial, no espaço de Minkowski. Pode-se considerar o campo, como representante da dinâmica de um número infinito de graus de liberdades. Formalmente, o valor atribuído a $\phi(x^0, \vec{x})$ em cada ponto do espaço é um grau de liberdade que evolui no tempo [59].

Para um único campo escalar real $\phi(x^\mu)$, com derivadas $\partial_\mu \phi = \partial\phi/\partial x^\mu$, em que a dimensão do espaço-tempo é $D+1$ ou $(D, 1)$ com $\vec{x} = (x^1, x^2 \cdots, x^D)$, a ação $S$ é escrita como,

$$S = \int d^{D+1}x \, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi), \tag{2.1}$$

onde a densidade lagrangiana $\mathcal{L}$ é uma função do campo $\phi$ e suas derivadas. O modelo da ação $S$ da equação acima é adimensional, uma vez que estamos usando o sistema natural de unidades em que ambas as coordenadas, espaciais e temporal têm dimensão do inverso da energia. A dinâmica para o modelo dado pela ação (2.1) pode ser estudada a partir da densidade lagrangiana,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \tag{2.2}$$

sendo a dimensão do campo $\phi$ dada, de forma simplificada por $(D-1)/2$. $V(\phi)$ é o potencial ou, mais exatamente, densidade de potencial, que representa a parte configuracional do sistema físico em análise, em princípio, considerado como qualquer função escalar e real do campo $\phi$. A segunda derivada deste potencial, em seu

mínimo, nos dá a expressão para a massa clássica que é definida como

$$m_i^2 = \left.\frac{d^2V}{d\phi^2}\right|_{\phi=\phi_i}. \tag{2.3}$$

A equação de movimento é escrita como

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + V_\phi(\phi) = 0. \tag{2.4}$$

Esta equação satisfaz a dinâmica do campo $\phi$, com $V_\phi = dV/d\phi$. A Eq. (2.4) é uma equação diferencial parcial e, como estamos interessados em encontrar soluções localizadas, torna-se necessário que a Eq. (2.4) seja também não linear. Requisito que é satisfeito através de uma escolha adequada para o potencial $V(\phi)$.

O tensor energia-momento é obtido à partir de uma variação infinitesimal do argumento $x$ na ação, Eq. (2.1). Então,

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\partial_\nu \phi - \eta_{\mu\nu}\mathcal{L}, \tag{2.5}$$

que, para esse modelo, usando a Eq. (2.2), resulta em

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \eta_{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}\partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - V(\phi)\right]. \tag{2.6}$$

Este tensor é simétrico em seus índices $\mu$ e $\nu$, isto é, $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$. As componentes do tensor energia-momento acima em $(1,1)$ dimensões no espaço-tempo são

$$T_{00} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\phi'^2 + V, \tag{2.7}$$

$$T_{01} = T_{10} = \dot{\phi}\,\phi', \tag{2.8}$$

$$T_{11} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\phi'^2 - V, \tag{2.9}$$

onde $\dot{\phi} = \partial\phi/\partial t$ e $\phi' = \partial\phi/\partial x$. Para o caso estático, $\phi = \phi(x)$, a equação de movimento se reduz a,

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{dV}{d\phi}. \tag{2.10}$$

Multiplicando a equação acima por $\phi'$, em ambos os lados temos,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2\right] = \frac{dV}{dx}, \tag{2.11}$$

que quando integrada com relação a $x$ nos dá

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 = V + c, \tag{2.12}$$

sendo $c$ é uma constante de integração. As componentes do tensor energia-momento Eq. (2.5), que sobrevivem, são $T_{00}$ e $T_{11}$, fornecendo-nos a densidade de energia $\rho(x)$ e a pressão $p$, respectivamente. Ou seja,

$$\rho(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 + V(\phi), \tag{2.13a}$$

$$p = \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 - V(\phi). \tag{2.13b}$$

Integrando a Eq. (2.13a) em todo o espaço temos como resultado a energia total $E$ que é dada por

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx\rho(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 + V\right], \tag{2.14}$$

onde as soluções $\phi(x)$ com energia $E$ finita são as de interesse físico. Portanto, para que esta energia seja finita devemos impor ao campo $\phi$, as condições a seguir

$$\lim_{x\to-\infty} \phi(x) = v_i; \qquad \lim_{x\to+\infty} \phi(x) = v_j, \tag{2.15a}$$

$$\lim_{|x|\to\infty} \phi'(x) = 0, \tag{2.15b}$$

em que $\phi'$ é a derivada do campo $\phi(x)$ com relação a coordenada $x$ e $v_i$, $v_j$ são mínimos adjacentes do potencial, ou seja, $V(\phi = v_i) = V(\phi = v_j) = 0$ [60]. Ao respeitar as condições acima e as condições de mínimos para o potencial, estamos garantindo que a energia total $E$ das soluções Eq. (2.10) seja finita. Nota-se ainda da Eq. (2.13b) que nos pontos onde $\phi'(x)$ se anula, o potencial adquire o valor $-p$, veja figura 2.1 (à esquerda) e, embora a densidade de energia $\rho(x)$ seja localizada, o $\lim_{x=\pm\infty} \rho(x) = V = -p$ resulta em uma energia total $E$ que diverge. Portando, para que $E$ seja finita a pressão $p$ deve ser nula, implicando em $c = 0$, na Eq. (2.12). Logo, esta se reduz a

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 = V, \tag{2.16}$$

que é uma equação de primeira ordem.

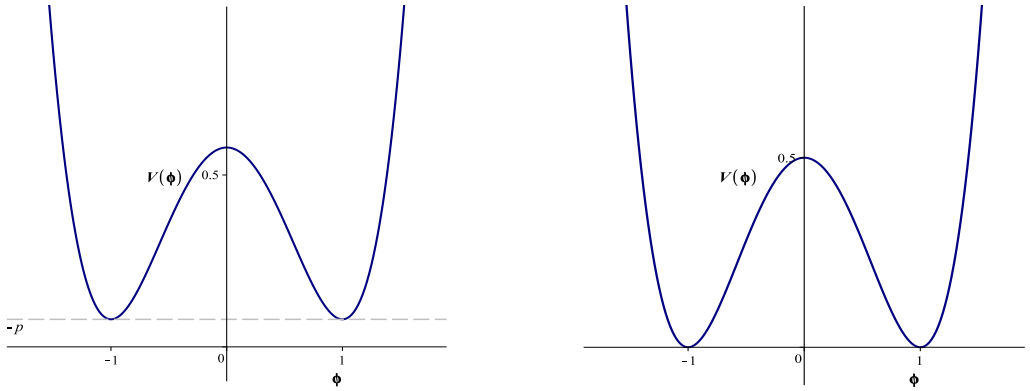


Figura 2.1: Potencial que suporta soluções com pressão negativa e energia divergente (à esquerda). Potencial que suporta soluções com pressão nula e energia finita.

As condições dadas pelas Eqs. (2.15a) estabelecem que, nos extremos, o campo $\phi(x)$ é um dos zeros do potencial. Além disso, um aspecto singular dessa condição é que o comportamento assintótico das soluções pode apresentar distintos valores, ou seja, existem duas possibilidades para o valor de $\phi(x)$ nos extremos. Uma delas é que o comportamento assintótico das soluções tenham o mesmo valor, $\phi(x \to \pm\infty) = v_i$. O outro caso ocorre, quando o comportamento assintótico das soluções é diferente, enquanto $\phi(x \to -\infty) = v_i$, $\phi(x \to +\infty) = v_j$ com $v_i \neq v_j$. Essas possibilidades estão intimamente ligadas ao conceito de corrente topológica, que é definida como

$$j_T^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\phi, \tag{2.17}$$

em que $\varepsilon^{\mu\nu}$ é um tensor antisimétrico. Um fato importante é que a corrente topológica, como dada acima, só é válida no espaço-tempo unidimensional $(1,1)$ podendo ser definida de forma a se adequar ao estudo de modelos com soluções especiais, Ref. [61]. Nota-se na Eq. (2.17) que a corrente toplógica é conservada. Uma vez que, $\partial_\mu j_T^\mu = 1/2(\varepsilon^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi)$, onde $\varepsilon^{\mu\nu}$ é antisimétrico e $\partial_\mu\partial_\nu\phi$, sendo $\phi$ uma função suave, é simétrica nos índices $\mu, \nu$. Logo, isto implica em,

$$\partial_\mu j_T^\mu = 0. \tag{2.18}$$

A densidade de carga associada a Eq. (2.17) é

$$\rho_T^0 = \frac{1}{2}\varepsilon^{01}\partial_1\phi = \frac{1}{2}\phi', \tag{2.19}$$

assim, consequentemente, a carga é dada por

$$\begin{aligned} Q_T &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\rho(x) = \frac{1}{2}[\phi(x\to+\infty) - \phi(x\to-\infty)] \\ &= \frac{1}{2}[v_j - v_i], \end{aligned} \tag{2.20}$$

onde $Q_T$ é chamada de carga topológica e, em decorrência da Eq. (2.18) vemos que $Q_T$ é uma quantidade conservada. Nota-se então, que a solução da equação de movimento Eq. (2.10) não foi usada para se concluir que a carga topológica $Q_T$ é conservada.

A partir de argumentos de caráter topológico a equação acima nos conduz a classificação de dois tipos de defeitos: Em primeiro lugar temos os defeitos topológicos, cujas soluções apresentam configurações de campos que mudam de valor de um extremo a outro, isto é, conectam mínimos de valores distintos, $v_i \neq v_j$ e portanto, têm uma carga topológica diferente de zero, $Q_T \neq 0$. A essas soluções são dados os nomes kink ($Q_T > 0$) e anti-kink ($Q_T < 0$). Na sequência, temos os defeitos não topológicos que apresentam soluções com configurações de campos que possuem o mesmo valor para ambos os extremos $v_i = v_j$ e, portanto, $Q_T = 0$ suas soluções são denominadas lumps. Mais detalhes sobre o estudo de defeitos topológicos, podem ser encontrados nas Ref. [4]-[8]. A seguir, discutiremos um método, que facilita de várias formas o estudo de defeitos topológicos, o método de Bogomol'nyi.

## 2.1 Método de Bogomol'nyi

Bogomol'nyi [46], desenvolveu um método que contribuiu de forma peculiar com o estudo de defeitos topológicos. Este método, conhecido na literatura como método de Bogomol'nyi, nos conduz a um conjunto especial de soluções chamadas BPS ou estados BPS em homenagem aos físicos Bogomol'nyi, Prassad e Sommerfield [46, 62].

O ponto de partida para a investigação desse método consiste em escrever o potencial $V(\phi)$ na forma,

$$V(\phi) = \frac{1}{2}W_\phi^2, \tag{2.21}$$

onde $V(\phi)$ deve, necessariamente, ser $V(\phi) \geq 0$ e $W$ uma função suave do campo escalar $\phi$ com, $W = W(\phi)$ e $W_\phi = dW/d\phi$. Substituindo esta última equação na

equação de movimento, Eq. (2.10), temos

$$\begin{aligned}\frac{d^2\phi}{dx^2} &= \frac{d}{d\phi}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{dW}{d\phi}\right)^2\right] = \frac{dW}{d\phi}\frac{d^2W}{d\phi^2} = W_\phi W_{\phi\phi} \\ \frac{d^2\phi}{dx^2} &= W_\phi W_{\phi\phi}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Para o cálculo da densidade de energia usamos a Eq. (2.13a) que, em termos da função $W(\phi)$, é dada por

$$\begin{aligned}\rho(x) &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 + W_\phi^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx} \mp W_\phi\right)^2 \pm \frac{dW}{dx}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

A energia total é

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx} \mp W_\phi\right)^2 \pm \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{dW}{dx}\right). \tag{2.24}$$

Como o primeiro termo é sempre positivo e o segundo termo é de superfície, a mínima energia acorre, quando

$$\frac{d\phi}{dx} \mp W_\phi = 0. \tag{2.25}$$

A equação acima é uma equação diferencial de primeira ordem e suas soluções são também soluções das equações de movimento, Eq. (2.10). Este é o método de Bogomol'nyi que, por vezes, é também chamado de Formalismo de primeira ordem. As soluções da Eq. (2.25), são chamadas de soluções BPS ou estados BPS. Os setores do potencial que apresentam essas soluções são ditos setores BPS. A energia total, neste formalismo, é calculada como:

$$E_B = |\Delta W(\phi(x))| = |W[\phi(x \to \infty)] - W[\phi(x \to -\infty)]|. \tag{2.26}$$

Essa energia é conhecida como energia de Bogomol'nyi, $E_B$ ou $E_{BPS}$. Portanto, os estados BPS são estados de mínima energia. Curiosamente, nesse limite de Bogomol'nyi, o cálculo dessa energia é independente do conhecimento prévio das soluções, que o modelo em estudo apresenta. Basta, então, que tenhamos uma função $W(\phi)$ e que saibamos a forma assintótica do comportamento do campo escalar $\phi$.

## 2.2 Estabilidade Linear

A estabilidade das soluções clássicas relacionam-se com a possibilidade dessas soluções decaírem para um estado de "vácuo" ou de menor energia. Isto ocorre porque todo sistema físico tende voluntariamente para um estado de mínima energia. Esta estabilidade está também diretamente ligada à topologia das soluções. Para estudar esta estabilidade basta considerar pequenas perturbações em torno da solução estática $\phi(x)$. Logo, escrevemos a solução $\phi(t,x)$ para o campo como

$$\phi(t,x) = \phi(x) + \eta(t,x), \tag{2.27}$$

onde $\eta(t,x)$ representa uma pequena excitação em torno da solução estática $\phi(x)$. Substituindo a Eq. (2.27) na Eq. (2.4), temos

$$\ddot{\eta} - \eta'' + U(x)\eta = 0, \tag{2.28}$$

sendo, $\ddot{\eta}$ a derivada segunda do campo $\eta$ com respeito ao tempo $t$, $\eta''$ a derivada segunda do campo $\eta$ com relação a coordenada $x$ e $U(x)$, dado por

$$U(x) = \left.\frac{d^2V}{d\phi^2}\right|_{\phi(x)}, \tag{2.29}$$

é o potencial de estabilidade. Lembrando que a segunda derivada do potencial no seu mínimo representa a massa do campo, Eq. (2.3). Então o potencial de estabilidade $U(x)$ tende assintoticamente às massas das excitações elementares. Como a solução estática só depende de $x$, podemos usar o método da separação de variáveis e escrever a perturbação como

$$\eta(t,x) = \sum_n \eta_n(x)\cos(w_n t). \tag{2.30}$$

Substituindo a equação acima na Eq. (2.28), temos uma equação do tipo Schrödinger, isto é,

$$H\eta_n = w_n^2\eta_n, \tag{2.31a}$$

onde,

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + U(x). \tag{2.32}$$

Vemos que $w_n^2$ deve ser positivo ou nulo, caso contrário, o termo cosseno na Eq. (2.30) passaria a ser cosseno hiperbólico, fazendo com que a suposição de pequenas flutualções fosse violada. Deste modo, autovalores negativos são proíbidos, se o que

queremos é uma solução que seja linearmente estável.

Agora, se $\phi(x)$ é uma solução estática, então, sua equação de movimento é aquela dada pela Eq. (2.10) a qual, derivando com respeito a $x$, encontramos,

$$-\frac{d^2\phi'}{dx^2}+\frac{d^2V}{d\phi^2}\phi' = 0, \tag{2.33a}$$

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2}+U(x)\right]\phi' = 0. \tag{2.33b}$$

Esta também resulta em uma equação do tipo Schrödinguer com autovalor nulo, ou seja, a derivada da solução estática é o próprio modo zero,

$$\eta_0(x)=\mathcal{N}\phi', \tag{2.34}$$

sendo $\mathcal{N}$ uma constante de normalização. Em geral, a quantidade de modos zero em um modelo, é $N\times D$, onde $N$ é o número de campos escalares e $D$ a dimensão espacial, [63]. A existência do modo zero não é condição suficiente para concluírmos que a solução $\phi(x)$ seja estável. Torna-se necessário buscarmos soluções em que possamos ter a certeza de que os autovalores ${w_n}^2$ são positivos e, desta forma, garantir a estabilidade da solução. Além disso, para situações na qual o potencial pode ser escrito como $V(\phi)=(1/2)W_\phi^2$, temos

$$U(x)=W_{\phi\phi}^2+W_\phi W_{\phi\phi\phi}, \tag{2.35}$$

e a equação de movimento Eq. (2.10) pode ser reduzida à primeira ordem e suas soluções são os estados BPS. Para esses estados, a Eq. (2.32) pode ser escrita como

$$H=-\frac{d^2}{dx^2}+W_{\phi\phi}^2+W_\phi W_{\phi\phi\phi}. \tag{2.36}$$

O hamiltoniano acima nos permite reescrevê-lo em termos dos operadores diferenciais de primeira ordem, $H=S_\pm^\dagger S_\pm$, onde

$$S_\pm = -\frac{d}{dx}\pm W\phi\phi, \tag{2.37a}$$

$$S_\pm^\dagger = \frac{d}{dx}\pm W\phi\phi. \tag{2.37b}$$

Com esses operadores, $S_\pm$, escrevemos o hamiltoniano $H_\pm$ como

$$H_{\pm} = S_{\pm}^{\dagger} S_{\pm}, \tag{2.38a}$$

$$H_{\pm}\eta_n(x) = w_n^2 \eta_n(x), \tag{2.38b}$$

$$S_{\pm}^{\dagger} S_{\pm}\eta_n(x) = w_n^2 \eta_n(x). \tag{2.38c}$$

As equações acima, junto com as Eqs. (2.37), representam

$$H_{\pm} = -\frac{d^2}{dx^2} + W_{\phi\phi}^2 \pm W_{\phi} W_{\phi\phi\phi}, \tag{2.39}$$

em que $H_{\pm}$ são parceiros supersimétricos [64, 65]. Vemos que $H_+$ se fatoriza na Eq. (2.38a) e mais, este reproduz exatamente a Eq. (2.36) donde conclui-se, que este é um operador não negativo. Para mostrar que os autovalores são com certeza positivos, aplicamos $\eta^{\dagger}$ à esquerda e $\eta$ à direita, da Eq. (2.38c) em seguida submetemos a integração em todo o espaço, isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \eta^{\dagger} S_{+}^{\dagger} S_{+}\eta = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \eta^{\dagger} w_n^2 \eta, \tag{2.40}$$

e, podemos escrever que os autovalores, $w_n^2$ são

$$w_n^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx\ |S_{+}\eta|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} dx\ |\eta|^2}, \tag{2.41}$$

evidenciando que $w_n^2 \geq 0$. Logo, concluímos que os estados BPS são realmente estáveis. Em particular, para esse caso que acabamos de explanar, em $(1,1)$ dimensões e com um campo $\phi$, temos apenas um modo zero. Observando a Eq. (2.25) vemos que o modo zero pode ser escrito como

$$\eta_0 = \mathcal{N} W_{\phi}. \tag{2.42}$$

Derivando a equação acima temos

$$\left(-\frac{d}{dx} \pm W_{\phi\phi}\right) \eta_0 = 0, \tag{2.43}$$

o que implica em $S_{\pm}\eta_0 = 0$.

## 2.3 Kink

O kink é o tipo mais simples de defeito topológico e requer apenas um campo escalar real $\phi$. Muitas das suas soluções são analíticas e apresentam uma simetria $Z_2$ ou de reflexão com $\phi \to -\phi$. Suas soluções estáticas vêm da Eq. (2.10).

### 2.3.1 Potencial $\lambda\phi^4$

O potencial $\lambda\phi^4$ pertence à classe de potenciais polinomiais. Este é o mais simples dentre eles que apresenta quebra espontânea de simetria, sendo definido como

$$V(\phi) = \frac{\lambda^2}{2}(v^2 - \phi^2)^2, \tag{2.44}$$

onde $\lambda$ e $v$ são constantes positivas, e o fator $1/2$ é uma escolha de interesse. O gráfico desse potencial encontra-se na Fig. 2.2. Observa-se na Eq. (2.44), que os mínimos desse potencial são degenerados e ocorrem em $\phi(x) = \pm v$, onde a massa quadrada associada a este potencial, para um $\lambda = v = \pm 1$ é

$$m^2 = \left.\frac{d^2V}{d\phi^2}\right|_{\phi(x)=\pm 1} = 4. \tag{2.45}$$

A equação de primeira ordem, Eq. (2.16), pode ser escrita como

$$\phi' = \pm\sqrt{2V(\phi)}, \tag{2.46}$$

que quando integrada nos dá

$$x - x_0 = \pm \int \frac{d\phi}{\sqrt{2V(\phi)}}, \tag{2.47}$$

em que $x_0$ é o ponto, onde a solução $\phi(x)$ se anula e onde o kink está centrado. Substituindo a equação para o potencial Eq. (2.44), na equação de primeira ordem Eq. (2.46) temos

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \pm\frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\phi}{v^2 - \phi^2} \\ &= \pm\frac{1}{\lambda v}\text{arctanh}\left(\frac{\phi}{v}\right). \end{aligned} \tag{2.48}$$

Invertendo a equação acima, encontramos

$$\phi_{\pm}(x) = \pm v \tanh[\lambda v(x)]. \tag{2.49}$$

Esta última expressão mostra as soluções analíticas para $\phi_{\pm}(x)$, onde $\phi_{+}(x)$ é uma soluções do tipo kink e $\phi_{-}(x)$ a solução do tipo anti-kink. Considerando a invariância translacional do modelo, pudemos escolher o centro da solução na origem, ou seja, em $x_0 = 0$. A Fig. 2.2 mostra o comportamento dessas soluções.

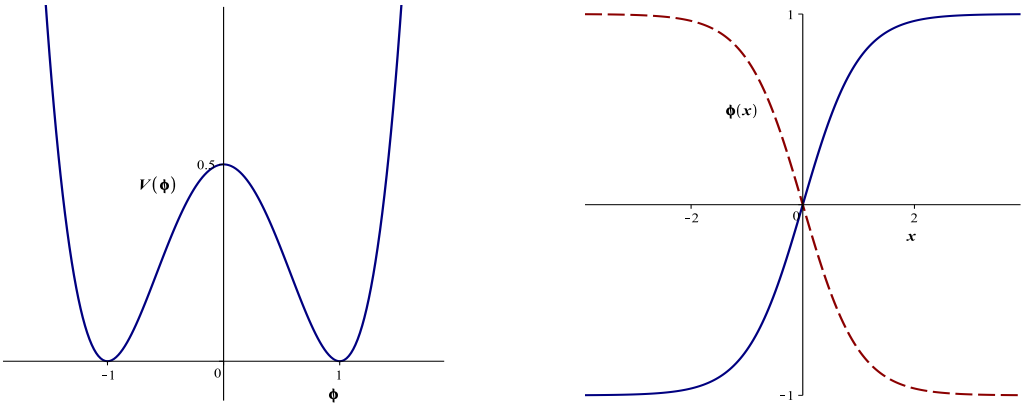


Figura 2.2: Potencial $\lambda\phi^4$ Eq. (2.44) (à esquerda). Solução $\phi_{\pm}(x)$ Eq. (2.49), onde $\phi_{+}$ é o Kink (linha sólida) e $\phi_{-}$ é o anti-kink (linha tracejada) (à direita), ambos com $\lambda = v = 1$

A densidade de energia, Eq. (2.13a), com $V(\phi)$ dado pela Eq. (2.44), é escrita como:

$$\rho(x) = \lambda^2 v^4 \mathrm{sech}^4[\lambda v(x)]. \tag{2.50}$$

A energia do kink e anti-kink são as mesmas. Integrando a Eq. (2.50), em todo o espaço, obtemos a energia total que é

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \rho(x) = \frac{4}{3}\lambda v^3. \tag{2.51}$$

#### 2.3.1.1 Equações BPS

O potencial $\lambda\phi^4$ como dado na Eq. (2.44) no sistema de unidades naturais e considerando a densidade lagrangiana Eq. (2.2) em $D$ dimensões espaciais temos o campo $\phi$ com dimensão de energia $(D-1)/2$. Isto implica que $v$ deve ter a mesma dimensão $(D-1)/2$ e $\lambda$ deve ter a dimensão $(3-D)/2$. Neste modelo, estudado em $(1,1)$ dimensões no espaço-tempo, as dimensões do campo escalar $\phi$ e das constantes $v$ e $\lambda$ têm dimensão de energia iguais a zero, zero e um, respectivamente. Tendo isto

em vista, podemos reescrever o potencial $V(\phi)$, da Eq. (2.44), de uma forma mais simples,

$$V(\phi) = \frac{1}{2}(1-\phi^2)^2. \tag{2.52}$$

A versão para $V(\phi)$ acima é possível, quando uma reescala apropriada é feita, ou seja, $\phi \to v\phi$, $x^\mu \to x^\mu/\lambda v$ e $\mathcal{L} \to \lambda^2 v^4 \mathcal{L}$. É interessante notar que, $\mathcal{L}$ e $\lambda^2 v^4 \mathcal{L}$, têm a mesma dimensão de energia e portanto, as Eq. (2.52) e Eq. (2.44) são equivalentes fisicamente. O potencial $V(\phi)$ dado logo acima, apresenta agora, quebra espontânea de simetria nos mínimos $\phi_\pm = \pm 1$ e um máximo em $\phi_0 = 0$ com $V(\phi_0) = 1/2$. Usando o método de Bogomol'nyi, onde $V(\phi) = (1/2)W_\phi^2$ e a Eq. (2.52), temos que $W_\phi = 1 - \phi^2$ e a função $W = W(\phi)$ para esse modelo é

$$W(\phi) = \phi - \frac{\phi^3}{3}. \tag{2.53}$$

A equação de movimento Eq. (2.10), combinada com a Eq. (2.52), nos conduz a

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = W_\phi W_{\phi\phi}, \tag{2.54a}$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 2\phi(\phi^2 - 1). \tag{2.54b}$$

Esta última equação é uma equação de movimento de segunda ordem. Estamos interessados em configurações que apresentem uma energia mínima e finita. As soluções, que atendem estes requisitos podem ser obtidas pelo formalismo de primeira ordem dada pela Eq. (2.25) que são equivalentes a Eq. (2.54b). As soluções são, então, dadas por

$$\phi_\pm(x) = \pm\tanh(x). \tag{2.55}$$

Estas são as soluções BPS ou estados BPS para o modelo $\phi^4$. Nota-se aqui, o centro do kink ($\phi_+$) e anti-kink ($\phi_-$) localizados no centro dos eixos coordenados. A densidade de energia é

$$\rho(x) = \mathrm{sech}^4(x). \tag{2.56}$$

A Fig. 2.3 mostra a densidade de energia acima, do kink (anti-kink), distribuída simétricamente em torno do seu centro, $x = 0$.

Como as soluções Eqs. (2.55) são estados BPS, a menor energia ou energia de Bogomol'nyi Eq. (2.26) da Sec. 2.1, para tais soluções, é dada simplesmente por $E_B = |\Delta W(\phi)| = 4/3$. Reforçamos, aqui, que esta energia foi obtida sem o conhecimento das soluções.

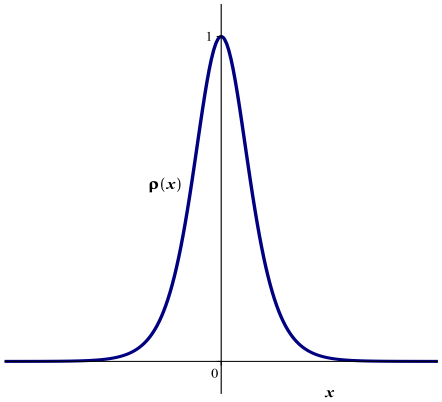


Figura 2.3: Densidade de energia $\rho(x)$ Eq. (2.56)

#### 2.3.1.2 Estabilidade Linear do Modelo $\phi^4$

Para o estudo da estabilidade linear, começamos pela derivada segunda do potencial Eq. (2.52), com respeito ao campo $\phi$, ou seja,

$$\frac{d^2V}{d\phi^2} = 2(3\phi^2 - 1). \tag{2.57}$$

Usando a definição Eq. (2.29) da Sec. 2.2, podemos escrever $U(x)$ como

$$U(x) = 4 - 6\text{sech}^2(x). \tag{2.58}$$

Este é o potencial de estabilidade para a solução da Eq. (2.55). O potencial $U(x)$ da equação acima é conhecido na literatura como potencial do tipo Pöschl-Teller modificado. A Eq. (2.58) é objeto de estudo de longa data; veja por exemplo, as referências [66, 67]. O gráfico deste potencial é mostrado na Fig. 2.4. De uma forma geral, pode-se considerar

$$U(x) = a + b\tanh(x) - c\,\text{sech}^2(x), \tag{2.59}$$

sendo $a$, $b$ e $c$ parâmetros reais positivos. Para $a > b$ e $c > a$, o espectro discreto pode conter o modo zero e outros autovalores que, para os estados ligados, são dados a partir de

$$w_n^2 = a - A_n^2 + \frac{b^2}{4A_n^2}, \tag{2.60a}$$

$$A_n = \frac{1}{2}[\sqrt{4c+1} - 1] - n; \tag{2.60b}$$

$$n < \frac{1}{2}[\sqrt{4c+1} - 1] - \sqrt{\frac{b}{2}}. \tag{2.60c}$$

Assim sendo, para o potencial de estabilidade Eq. (2.58), temos $a = 4$, $b = 0$ e $c = 6$, de maneira que o espectro de energia, para os estados ligados, é dado por $w_n^2 = n(4-n)$, com $n = 0$ e $n = 1$, ou seja, os estados ligados são $w_0^2 = 0$ e $w_1^2 = 3$. O modo zero é dado por

$$\eta_0(x) = \mathcal{N}\text{sech}^2(x) \tag{2.61}$$

e é mostrado na Fig. 2.4. Portanto, como este modelo não apresenta autovalores negativos em seu espectro de energia, pode-se concluir que, sob pequenas perturbações no campo $\phi(x)$, as soluções Eqs. (2.55) do modelo $\phi^4$ são estáveis.

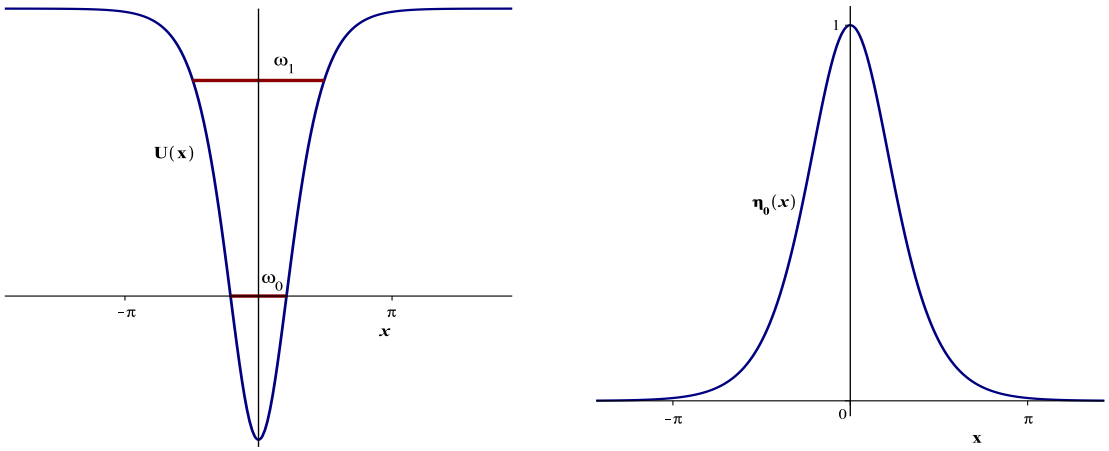


Figura 2.4: Potencial de estabilidade $U(x)$ (2.58), do tipo Pöschl-Teller modificado (à esquerda). O modo zero $\eta_0(x)$ Eq. (2.61) (à direita).

### 2.3.2 Modelo seno-Gordon

Uma teoria com modelos do tipo seno-Gordon, que apresentam soluções estáticas do tipo kink, foi estudada em diversos contextos [68]-[71] depois da sua introdução por Julio Rubistein [72]. O modelo seno-Gordon, apresentado no ano de 1970, é definido pelo potencial

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\text{sen}^2(\phi). \tag{2.62}$$

O gráfico deste potencial, Fig. 2.5, mostra que este potencial possui uma infinidade de mínimos e máximos, em que $\phi_{min} = \kappa\pi$, sendo $\kappa$ um número inteiro e máximos em $\phi_{max} = (2\kappa - 1)\pi/2$. Desta forma, em um intervalo $[0, \pi]$, por exemplo, temos um $V(\phi_{max}) = 1/2$. As equações de movimento para as soluções estáticas são

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \text{sen}(\phi)\cos(\phi). \tag{2.63}$$

Dado o potencial (2.62), podemos introduzir a função

$$W(\phi) = -\cos(\phi). \tag{2.64}$$

A equação de primeira ordem dada pela Eq. (2.25) é escrita agora como

$$\frac{d\phi}{dx} = \text{sen}(\phi). \tag{2.65}$$

Para este modelo existem infinitos setores topológicos idênticos e simétricos. Em particular, no setor $\bar{\phi}_0 = -\pi \leftrightarrow \bar{\phi}_1 = \pi$ a solução é

$$\phi^{\pm}(x) = 2\arctan(e^{\pm x}). \tag{2.66}$$

O comportamento da solução $\phi^{\pm}(x)$ é mostrado na Fig. 2.5. A densidade de energia é dada por

$$\rho(x) = \text{sech}^2(x). \tag{2.67}$$

O potencial de estabilidade obtido usando-se a Eq. (2.35) da Sec. 2.2 é

$$U(x) = 1 - 2\,\text{sech}^2(x). \tag{2.68}$$

O gráfico 2.6 mostra o potencial de estabilidade dado acima. Este potencial, no intervalo $[-\pi, +\pi]$ admite apenas um estado ligado, o modo zero dado por

$$\eta_0(x) = \sqrt{\frac{1}{2}}\text{sech}(x). \tag{2.69}$$

Portanto, as soluções $\phi(x)$ dadas pela expressão (2.66), são estáveis por pequenas perturbações.

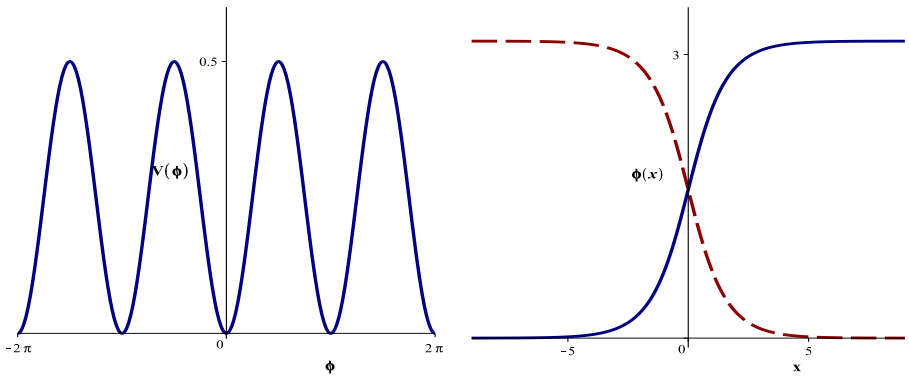


Figura 2.5: O modelo seno-Gordon: potencial Eq. (2.62) à esquerda; a solução kink $\phi^{+}(x)$ (linha sólida) e do anti-kink $\phi^{-}(x)$ (linha tracejada) Eq. (2.66) à direita.

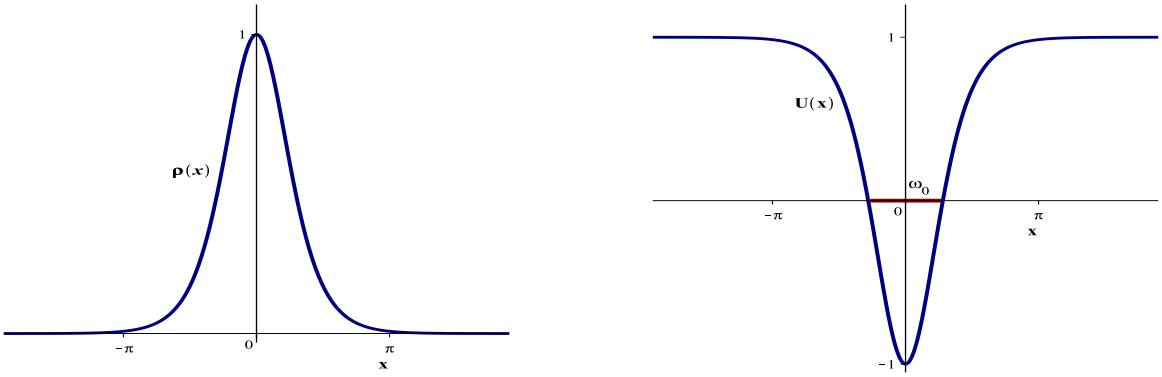


Figura 2.6: O modelo seno-Gordon: a densidade de energia Eq. (2.67) à esquerda e o potencial estabilidade Eq. (2.68) à direita.

## 2.4 Lumps

Da mesma forma que os kinks, lumps são defeitos em $(1,1)$ dimensões no espaço-tempo, com um campo escalar real $\phi$, mas para lumps nem sempre a simetria $Z_2$ é respeitada. Também, diferentemente dos kinks, as soluções do tipo lumps nos extremos, são iguais $[\phi(x \to -\infty) = \phi(x \to \infty)]$, o que implica em uma carga topológica nula, $Q = 0$. Portanto, são defeitos não topológicos. Passamos agora a estudar os defeitos tipo lumps através de dois exemplos.

### 2.4.1 Lumps com Potencial $\phi^3$

O potencial $\phi^3$ é definido por

$$V(\phi) = 2\phi^2(1-\phi), \tag{2.70}$$

Este potencial apresenta dois pontos críticos: um mínimo em $\phi_{min} = 0$ e um máximo em $\phi_{max} = 2/3$, conforme está na Fig. 2.7 à esquerda. Para soluções estáticas a equação de movimento Eq. (2.10) é,

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 2\phi\,(2-3\phi)\,. \tag{2.71}$$

A solução para o caso estático é, mais facilmente, obtida através da Eq. (2.16) em que

$$\phi(x) = \mathrm{sech}^2(x). \tag{2.72}$$

O comportamento desta solução é mostrado à direita da Fig. 2.7 .

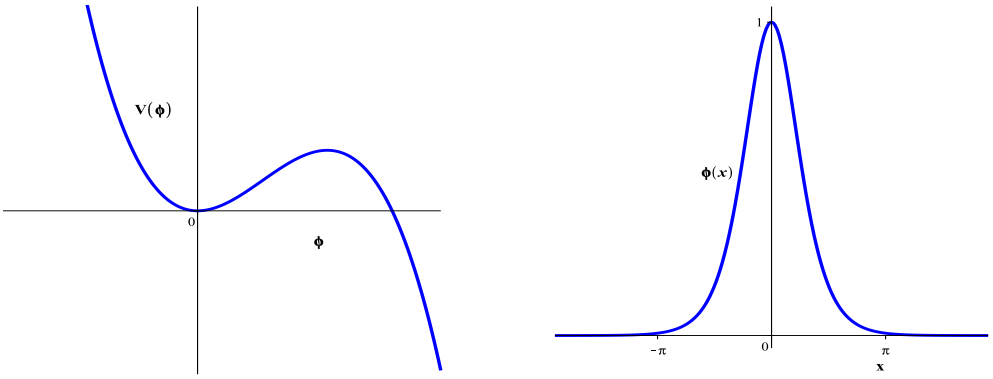


Figura 2.7: Potencial Eq. (2.70). Solução do tipo lump $\phi(x)$, Eq. (2.72).

A densidade de energia é encontrada, quando substituímos a solução Eq. (2.72) na Eq. (2.13a), para obter

$$\rho(x) = 4\,\mathrm{sech}^4(x)\tanh^2(x). \tag{2.73}$$

A expressão acima é mostrada no gráfico da Fig. 2.8.

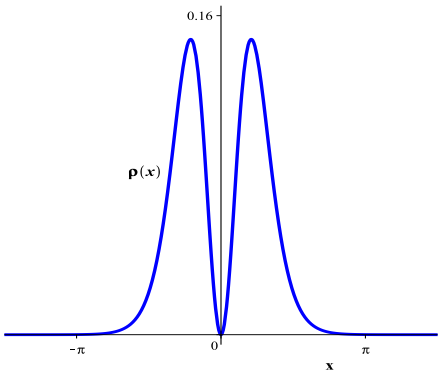


Figura 2.8: Densidade de energia $\rho(x)$, Eq. (2.73).

Integrando a densidade de energia $\rho(x)$ Eq. (2.73) em todo o espaço, encontramos a energia total $E$,

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\rho(x) = \frac{16}{15}. \tag{2.74}$$

O potencial de estabilidade é

$$\begin{aligned} U(x) &= \left.\frac{d^2V}{d\phi^2}\right|_{\phi(x)} \\ &= 4 - 12\phi\Big|_{\phi(x)}, \end{aligned} \tag{2.75}$$

e substituindo a solução Eq. (2.72), na equação acima, temos

$$U(x) = 4(1 - 3\text{sech}^2(x)). \tag{2.76}$$

Este potencial também encontra-se na classe de potenciais do tipo Pöschl-Teller modificado, ou seja, é do tipo $U(x) = a + b\text{tanh}(x) - c\text{sech}^2(x)$. Temos aqui, $a = 4$, $b = 0$, $c = 12$ e podemos usar as Eqs. (2.60), para encontrar que o espectro de energia dos estados ligados é dado por $w_n^2 = (n-1)(5-n)$ com $n = 0, 1, 2$, resultando em $w_0^2 = -5$, $w_1^2 = 0$ e $w_2^2 = 3$. A derivada de $\phi'(x)$ usando a Eq. (2.34) é

$$\phi'(x) \propto -2\text{sech}^2(x)\text{tanh}(x). \tag{2.77}$$

O potencial de estabilidade Eq. (2.76) admite um autovalor negativo. Portanto, o lump do modelo $\phi^3$ é instável sob pequenas perturbações. A Fig. 2.9 apresenta o comportamento do Potencial $U(x)$ e $\phi'(x)$.

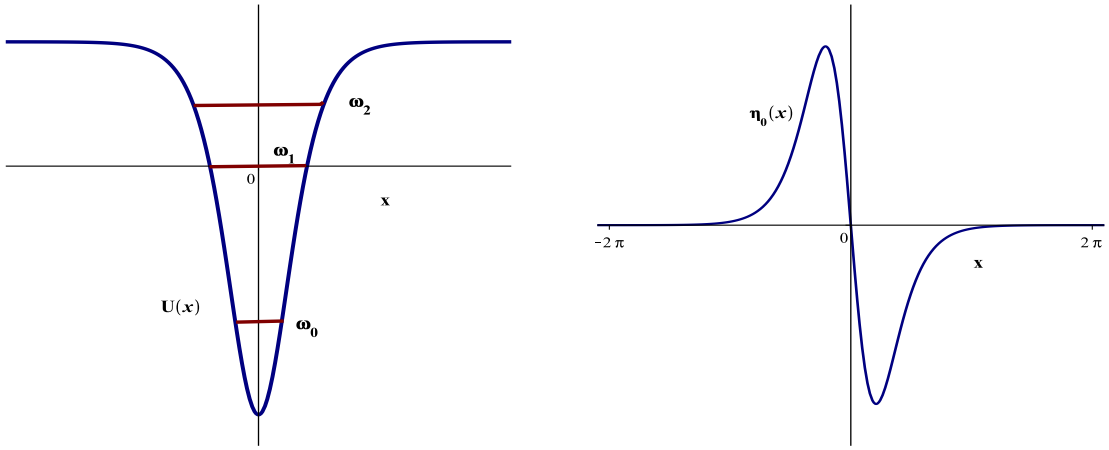


Figura 2.9: Potencial estabilidade $U(x)$, Eq. (2.76) (à esquerda). A derivada de $\phi'(x)$, Eq. (2.77).

### 2.4.2 Lumps com Potencial $\phi^4$ Invertido

O modelo $\phi^4$ invertido é caracterizado pelo potencial,

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2 - \frac{1}{2}\phi^4. \tag{2.78}$$

Esse potencial possui um mínimo em $\phi_{min} = 0$ e dois máximos em $\phi_{max_\pm} = \pm 1/\sqrt{2}$. Para configurações estáticas, a equação de movimento é,

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \phi - 2\phi^3. \tag{2.79}$$

Usando a Eq. (2.16) encontramos a solução,

$$\phi_{\pm}(x) = \pm\,\mathrm{sech}(x). \tag{2.80}$$

Esta é a solução do tipo lump para o modelo $\phi^4$ invertido. Esta solução e o potencial Eq. (2.78) são mostradas na Fig. 2.10. Para a densidade de energia temos

$$\rho(x) = \mathrm{sech}^2(x)\tanh^2(x). \tag{2.81}$$

Esta densidade de energia atinge valor máximo nos pontos $x = \pm arctanh(1/\sqrt{2})$ e é nula no centro. A derivada de $\phi'(x)$ é,

$$\phi'(x) \;\propto\; -\mathrm{sech}(x)\tanh(x). \tag{2.82}$$

O potencial de estabilidade também é do tipo Pöschl-Teller modificado, ou seja,

$$U(x) = 1 - 6\mathrm{sech}^2(x). \tag{2.83}$$

O potencial de estabilidade acima e a densidade de energia Eq. (2.81) são mostrados na Fig. 2.11. O espectro de energia para os estados ligados, para este potencial de estabilidade é dados por $w_n^2 = (n-1)(3-n)$ onde $n = 0, 1$ com $w_0^2 = -3$ e $w_1^2 = 0$. Nota-se que este potencial de estabilidade contém um autovalor negativo. Logo, a solução do tipo lump do modelo $\phi^4$ invertido não é estável sob pequenas perturbações nas soluções $\phi(x)$.

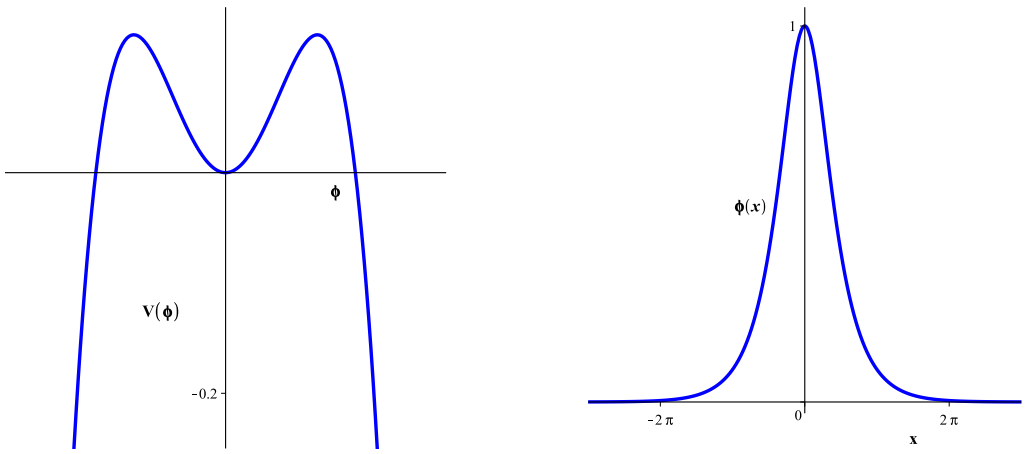


Figura 2.10: Potencial $\phi^4$ invertido Eq. (2.78) (à esquerda). O lump para o modelo $\phi^4$ invertido Eq. (2.80) (à direita).

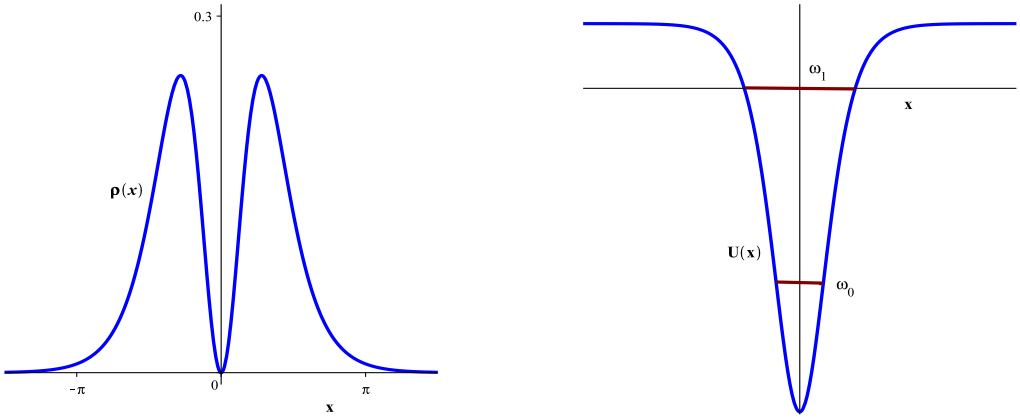


Figura 2.11: Densidade de energia Eq. (2.81) (à esquerda). Potencial de estabilidade $U(x)$ Eq. (2.83) (à direita).

Para modelos com um campo escalar real, a estabilidade do sistema é assegurada pelas suas características topológicas. Podemos observar estas características na Fig. 2.12, em que expomos, para comparação, os gráficos da densidade de energia $\rho(x)$, e do modo zero $\eta_0(x)$ para os modelos $\phi^4$ com soluções do tipo kink e a função $\phi'(x)$ para o modelo $\phi^4$ invertido com soluções do tipo lump. Observa-se neste gráfico que a densidade de energia do kink é localizada e igualmente distribuída em torno do seu centro. Para lumps isso não acontece, pois a densidade de energia do lump Eq. (2.81) é nula em $x = 0$ e apresenta dois pontos de máximos. Encontramos também, diferenças no comportamento de $\eta_0$ e de $\phi'(x)$ entre esses modelos, nesta ordem. Para o $\phi^4$, a função $\eta_0$ Eq. (2.61), permanece na parte superior do eixo das coordenadas, enquanto que para o modelo $\phi^4$ invertido, Eq. (2.82), a função $\phi'(x)$ cruza o eixo das coordenadas o que não acontece para os kinks.

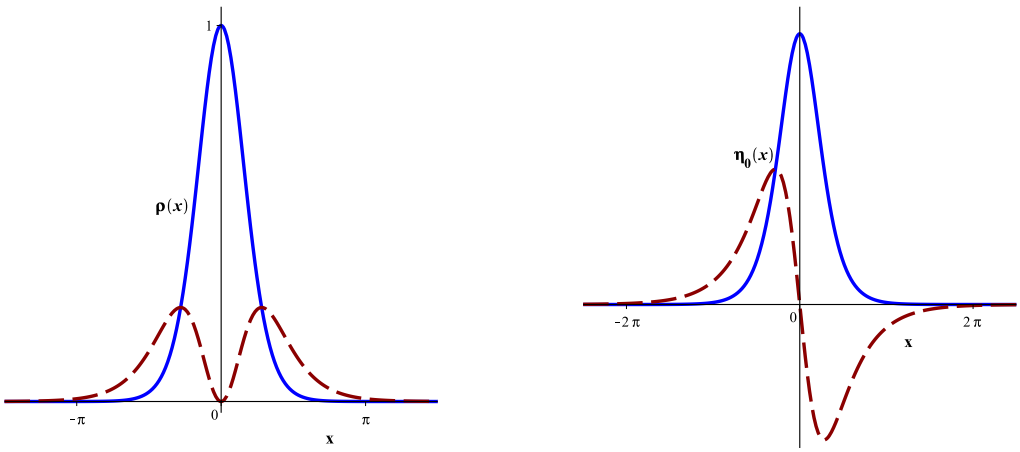


Figura 2.12: Para comparação temos à esquerda, a densidade de energia dos modelos: kink $\phi^4$ (linha cheia) e do lump $\phi^4$ invertido (linha tracejada) e à direita a função $\eta_0$ para os modelos $\phi^4$ (linha cheia) e $\phi^4$ invertido, (linha Traçejada).

# Capítulo 3

# Vórtices

Defeitos topológicos do tipo vórtices são estudados em um sistema tridimensional, ou seja, no espaço-tempo de (2,1) dimensões, que pode ser relativistico ou não. Em teoria de campos, encontramos dois tipos de vórtices: vórtices globais, com apenas um campo escalar complexo $\varphi$, com energia que diverge, quando $|x| \to \infty$ e vórtices locais. Este último de particular interesse apresenta uma teoria construída com um campo escalar complexo $\varphi$, acoplado a um campo de gauge abeliano $A_\mu$, via um grupo de simetria contínua $U(1)$ e sua energia é localizada e finita. Daí nosso interesse e objetivo desta seção. A ideia básica consiste no estudo de vórtices em sistemas planares e relativísticos. Sua análise é realizada por meio de uma densidade lagrangiana $\mathcal{L}$, que apresenta uma simetria $U(1)$ local e abeliana [19]-[21]. Para este sistema, as equações de movimemnto são obtidas através das equações de Euler-Lagrange. Estas são equações diferenciais de segunda ordem, acopladas e não lineares, portanto de difícil solução analítica. Contudo, temos o método de Bogomol'nyi, que nos permite obter um conjunto de equações de primeira ordem, equações BPS, das quais as soluções são os estados BPS ou estados de mínima energia para os vórtices. Suas soluções, são também soluções das equações de movimento. Aqui o estudo dos vórtices BPS, será feito com base em dois modelos usuais: a eletrodinâmica de Maxwell-Higgs [5, 32, 82] e de Chern-Simons-Higgs [37, 38]. As soluções para estes modelos serão obtidas numericamente, com soluções analíticas apenas para aproximações assintóticas $|x| \to \infty$ e próximo à origem em $x \to 0$. Ambas as soluções, numérica e analítica aproximadas serão apresentadas. Usaremos a métrica de Minkowski com a assinatura $(+,-,-)$.

## 3.1 Vórtices Maxwell-Higgs

Este modelo, conhecido na literatura como vórtices de Maxwell-Higgs, foi introduzido por Nielsen e Olesen [32], com a intenção de investigar modelos em teoria de campos com soluções do tipo vórtices. Entre suas características, veremos que este sistema tem uma densidade de energia localizada e não dispersiva, com energia total $E$ finita e quantizada, apresenta fluxo magnético $\Phi$ também quantizado, mas é eletricamente neutro, $\vec{E} = 0$. Sendo este um modelo de vórtice local, para seu estudo faz-se necessário o uso de um campo escalar complexo $\varphi$ acoplado a um campo de gauge $A_\mu$.

### 3.1.1 O Modelo

Para este modelo, a densidade lagrangiana, $\mathcal{L}$, é dada por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_\mu\varphi|^2 - V(|\varphi|), \tag{3.1}$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, com $\mu = \nu = 0, 1, 2$, é o tensor campo eletromagnético, $A_\mu$ é o campo de gauge, acoplado ao campo $\varphi$ por meio da derivada covariante $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$. Na equação acima, cada termo tem uma função específica: o primeiro termo, termo de Maxwell, carrega a responsabilidade de descrever a dinâmica do campo $A_\mu$. Já o termo que contém a derivada covariante realiza a dinâmica do campo complexo $\varphi$; $V(|\varphi|)$ é o potencial, que depende apenas do módulo do campo $\varphi$. Neste sistema, a dimensão do campo $\varphi$, do campo $A_\mu$ e da constante de acoplamento $e$ são iguais e dadas por $[\varphi] = [A_\mu] = [e] = [M]^{\frac{1}{2}}$, onde $M$ é a dimensão de massa ou, equivalentemente, de energia. Ainda, devido a invariância por transformação de gauge local da densidade lagrangiana Eq. (3.1), os campos $\varphi$ e $A_\mu$ obedecem a seguinte lei de transformação:

$$\varphi \rightarrow \varphi e^{-ie\theta(x^\mu)} \tag{3.2a}$$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\theta(x^\mu). \tag{3.2b}$$

Podemos expandir o termo $|D_\mu\varphi|^2$,

$$|D_\mu\varphi|^2 = \partial_\mu\varphi\partial^\mu\bar{\varphi} - A_\mu j^\mu + e^2 A_\mu A^\mu|\varphi|^2, \tag{3.3}$$

onde $j^\mu$ é uma corrente que se relaciona apenas com o campo $\varphi$ sendo dada por

$$j^\mu = ie(\bar{\varphi}\partial^\mu\varphi - \varphi\partial^\mu\bar{\varphi}). \tag{3.4}$$

Desta forma, podemos reescrever a Eq. (3.1) como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \partial_\mu\varphi\partial^\mu\bar{\varphi} - A_\mu j^\mu + e^2 A_\mu A^\mu|\varphi|^2 - V(|\varphi|). \tag{3.5}$$

As equações de movimento são:

$$D_\mu D^\mu\varphi = -\frac{\partial V(|\varphi|)}{\partial\bar{\varphi}}, \tag{3.6a}$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \tag{3.6b}$$

para os campos $\varphi$ e $A_\mu$, respectivamente. Com,

$$J^\mu = ie(\overline{\varphi}D^\mu\varphi - \varphi\overline{D^\mu\varphi}), \tag{3.7}$$

sendo $J_\mu$ a corrente conservada de Noether [83], onde $J_\mu = (\rho, \vec{J})$. Este, diferentemente daquele dado pela Eq. (3.4), depende tanto do campo $\varphi$ como também do campo $A_\mu$. A equação acima é invariante de gauge e concorda com a lei de conservação, $\partial_\mu J^\mu = 0$. Nesta, a densidade de carga é representada por $\rho$ e a corrente vetorial por $\vec{J}$. Comparando as Eqs. (3.4) e Eq. (3.7), vemos que constituem um vínculo

$$J^\mu = j^\mu - 2e^2 A^\mu|\varphi|^2. \tag{3.8}$$

Define-se o tensor energia-momento como:

$$T_{\mu\nu} = -F_{\mu\lambda}F_\nu{}^\lambda + \overline{D_\mu\varphi}D_\nu\varphi + \overline{D_\nu\varphi}D_\mu\varphi - \eta_{\mu\nu}\mathcal{L}. \tag{3.9}$$

Como estamos em (2,1) dimensões, o tensor $F_{\mu\nu}$ tem como componentes $-F^{0i} = E^i = (E_x, E_y)$ e $F^{ij} = -B$, para $i = 1$ e $j = 2$, onde $B$ é campo magnético. Observa-se que $B$ contribui apenas com o seu módulo, pois o espaço em que estamos trabalhando não nos dá acesso à terceira dimensão espacial. Podemos escrever o

tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$, em componentes, o que resulta em

$$T_{00} = \frac{1}{2}(E^2+B^2) + \overline{D_0\varphi}D_0\varphi + \overline{D_i\varphi}D^i\varphi + V(|\varphi|), \tag{3.10a}$$

$$T_{0i} = T_{i0} = -\varepsilon_{ij}E_jB + \overline{D_0\varphi}D_i\varphi + D_0\varphi\overline{D_i\varphi}, \tag{3.10b}$$

$$T_{ij} = T_{ji} = -E_iE_j + \overline{D_i\varphi}D_j\varphi + D_i\varphi\overline{D_j\varphi}, \tag{3.10c}$$

$$T_{ii} = -E_i^2 + \frac{1}{2}(E^2+B^2) + \overline{D_0\varphi}D_0\varphi + \overline{D_i\varphi}D_i\varphi - \overline{D_j\varphi}D_j\varphi - V(|\varphi|). \tag{3.10d}$$

Agora, analisando a componente temporal $\nu = 0$ da Eq. (3.6b) e considerando um sistema estático, temos:

$$\partial_i\partial^i A^0 = -2e^2A^0|\varphi|^2, \tag{3.11}$$

com $i$ representando um somatório apenas nas coordenadas espaciais. Observando a equação acima, constata-se que a lei de Gauss é satisfeita para uma escolha do gauge temporal $A^0 = 0$. Essa escolha para $A^0$ implica em $\vec{E} = 0$ e, portanto, esse sistema Maxwell-Higgs é eletricamente neutro. Desta forma, as equações de movimento Eqs. (3.6) passam a ser escritas como:

$$D_iD^i\varphi = -\frac{\partial V(|\varphi|)}{\partial\overline{\varphi}} \tag{3.12a}$$

$$\partial_iF^{ij} = J^j. \tag{3.12b}$$

As componentes do tensor energia-momento para o caso estático que sobrevivem são:

$$T_{00} = \frac{1}{2}B^2 + \overline{D_i\varphi}D^i\varphi + V(|\varphi|), \tag{3.13a}$$

$$T_{11} = \frac{1}{2}B^2 + \overline{D_1\varphi}D_1\varphi - \overline{D_2\varphi}D_2\varphi - V(|\varphi|), \tag{3.13b}$$

$$T_{22} = \frac{1}{2}B^2 - \overline{D_1\varphi}D_1\varphi + \overline{D_2\varphi}D_2\varphi - V(|\varphi|), \tag{3.13c}$$

$$T_{12} = T_{21} = \overline{D_1\varphi}D_2\varphi + \overline{D_2\varphi}D_1\varphi. \tag{3.13d}$$

As soluções das Eqs. (3.12) são obtidas, observando-se que os vórtices são estudados em um regime estático e com simetria rotacional. Portanto, qualquer configuração estática, rotacionalmente simétrica e de vorticidade $n$, pode ser escrita com o auxílio do ansatz,

$$\varphi(r,\theta) = vg(r)e^{in\theta}, \tag{3.14a}$$

$$\vec{A}(r,\theta) = -\frac{\hat{\theta}}{er}[a(r)-n]. \tag{3.14b}$$

A equação acima representa o *ansatz* usual para investigar a presença de soluções do tipo vórtices. A função $g(r)$ é real e depende apenas de $r$, enquanto $v$ é uma constante, que assegura a quebra espontânea de simetria, bem como, controla a dimensão do campo $\varphi$ e o parâmetro $n$ mede o número de voltas dadas em torno de um círculo unitário, quando $\theta$ varia continuamente em um intervalo, $\theta \in [0, 2\pi]$. Observa-se nas Eqs. (3.14) que certas condições devem ser impostas aos campos $\varphi$ e $A_\mu$, ou seja,

$$g(r\to 0) \to 0 \qquad a(r\to 0) \to n, \tag{3.15a}$$

$$g(r\to \infty) \to 1 \qquad a(r\to \infty) \to 0. \tag{3.15b}$$

A primeira condição acima é necessária para evitarmos configurações, que apresentem singularidades na origem. A segunda condição garante que tenhamos uma energia total $E$ finita.

Com as condições Eqs. (3.15) bem estabelecidas, podemos reescrever as equações de movimento estáticas que, na forma vetorial, ficam

$$-\nabla^2\varphi + 2ie\vec{A}.\vec{\nabla}\varphi + e^2\vec{A}.\vec{A}\varphi - \frac{\partial V(|\varphi|)}{\partial\overline{\varphi}} = 0, \tag{3.16a}$$

$$\nabla^2\vec{A} + \vec{J} = 0. \tag{3.16b}$$

Substituindo o *ansatz* Eq. (3.14), nas equações acima, e usando coordenadas polares temos:

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{d\varphi}{dr}+\frac{1}{r^2}\frac{d^2\varphi}{d\theta^2}\right] = v\left[\frac{(rg')'}{r}-\frac{n^2}{r^2}g\right]e^{in\theta}, \tag{3.17a}$$

$$\begin{aligned} 2ie\vec{A}.\vec{\nabla}\varphi &= 2ie\left(-\frac{1}{er}[a-n]\right)\hat{\theta}.\left[\frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\hat{\theta}\right] \\ &= v\left[2n\frac{ag}{r^2}-2n^2\frac{g}{r^2}\right]e^{in\theta}, \end{aligned} \tag{3.17b}$$

$$\begin{aligned} e^2\vec{A}.\vec{A}\varphi &= e^2\frac{1}{e^2r^2}[a-n]^2vge^{in\theta} \\ &= v\left[\frac{a^2g}{r^2}-2n\frac{ag}{r^2}+n^2\frac{g}{r^2}\right]e^{in\theta}, \end{aligned} \tag{3.17c}$$

$$\frac{\partial V(|\varphi|)}{\partial\bar{\varphi}} = \frac{1}{2}\frac{\varphi}{|\varphi|}\frac{\partial V(|\varphi|)}{\partial|\varphi|} = \frac{1}{2v}\frac{dV(g)}{g},$$

$$\begin{aligned} \nabla^2\vec{A}\Big|_\theta &= \nabla^2A_\theta-\frac{1}{r^2}A_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{dA_r}{d\theta}; \qquad (A_r \text{ é função apenas de r}) \\ &= \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{d}{dr}\left(\frac{A}{r}\right)\right]-\frac{A}{r^3}; \qquad A=-\frac{1}{e}(a-n) \\ &= \left[-\frac{1}{er}\frac{d^2a}{dr^2}+\frac{1}{er^2}\frac{da}{dr}\right]\hat{\theta}, \end{aligned} \tag{3.17d}$$

$$\vec{J} = \frac{2ev^2g^2a}{r}\hat{\theta}. \tag{3.17e}$$

Para mais detalhes vide Ref. [84]. Com os resultados das Eqs. (3.17), podemos escrever as equações de movimento Eqs. (3.16), como

$$\frac{[rg'(r)]'}{r}-\frac{a^2(r)g(r)}{r^2}-\frac{1}{2v^2}V_g(g(r)) = 0 \tag{3.18a}$$

$$r\left(\frac{a'(r)}{r}\right)'-2e^2v^2g^2(r)a(r) = 0, \tag{3.18b}$$

onde $V_g(g(r))$ é a derivada do potencial com o *ansatz*, com respeito à função $g(r)$. Embora estas duas equações tenham uma aparência simples, na verdade são bastante complicadas de serem resolvidas analiticamente, pois são equações diferenciais de segunda ordem, não lineares e acopladas. Suas soluções deven se obtidas numericamente, com soluções analíticas assintótica em $|x|\to\infty$ e próximo a orígem $x\to 0$. Por outro lado, através do método de Bogomol'nyi, podemos encontrar equações de primeira ordem, cujas soluções são também soluções das equações de movimento

dadas acima, como veremos a seguir.

### 3.1.2 Equações BPS

As equações BPS surgem quando, no limite de Bogomol'nyi, a energia total $E$ é minimizada. Essa energia é obtida à partir da integração em todo o espaço das coordenadas, da densidade de energia $\rho$ que é igual, neste caso, à componente temporal $\mu = \nu = 0$ do tensor energia-momento, ou seja, $T_{00} = \rho$. Como estamos em um regime estático, com $A_0 = 0$, a densidade de energia é $\rho = T_{00} = -\mathcal{L}$. Portanto,

$$\rho = \frac{1}{2}B^2 + |\vec{D\varphi}|^2 + V(|\varphi|), \tag{3.19}$$

onde,

$$|\vec{D\varphi}|^2 = |(D_1 \pm iD_2)\varphi|^2 \pm e|\varphi|^2 B \tag{3.20}$$

$$= |(D_1 \pm iD_2)\varphi|^2 \mp e(v^2 - |\varphi|^2)B \pm ev^2 B. \tag{3.21}$$

Assim, a expressão para a energia total é

$$\begin{aligned} E &= \int d^2r \left[|(D_1 \pm iD_2)\varphi|^2 + \frac{1}{2}B^2 \mp e(v^2 - |\varphi|^2)B + V(|\varphi|)\right] \\ &= \int d^2r \left[|(D_1 \pm iD_2)\varphi|^2 + \frac{1}{2}[B \mp e(v^2 - |\varphi|^2)]^2 - \frac{1}{2}e^2(v^2 - |\varphi|^2)^2 + V(|\varphi|)\right] \\ &\pm ev^2 \int d^2r\, B. \end{aligned} \tag{3.22}$$

O método de Bogomol'nyi mostra que, a distribuição das linhas de campos dentro dos vórtices são obtidas, quando há minimização da sua energia. E para que essa energia seja mínima, identifica-se o potencial como

$$V(|\varphi|) = \frac{\lambda}{2}(v^2 - |\varphi|^2)^2, \tag{3.23}$$

com $\lambda \equiv e^2$ no limite de Bogomol'nyi. Na Fig. 3.1 mostramos esse potencial e, embora não tenhamos acesso a terceira dimensão espacial, optamos por apresentar o seu perfil $3D$, já que neste é visível o círculo de mínimos degenerados em $|\varphi| =$

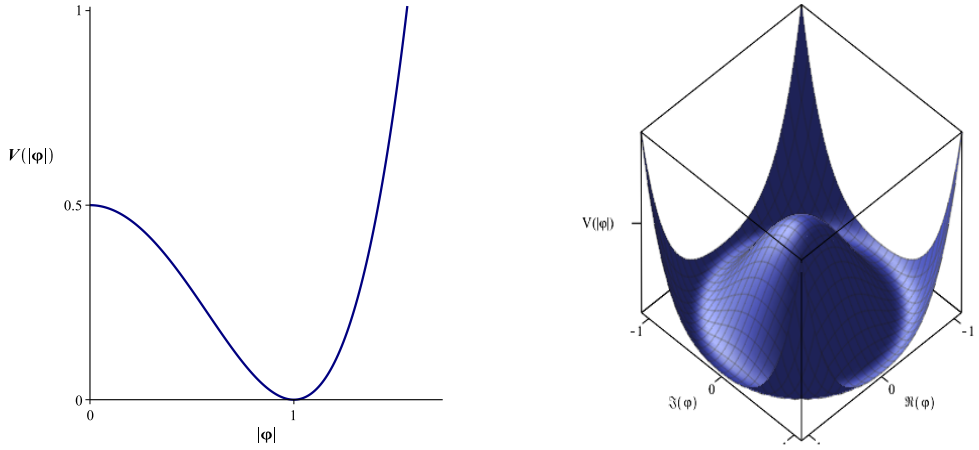


Figura 3.1: Potencial do modelo $\varphi^4$ Eq. (3.23) à esquerda e seu perfil $3D$, para $\lambda = v = 1$.

1. Segue-se também, para que a energia seja mínima na Eq. (3.22), que devemos identificar as equações auto-duais como

$$D_1\varphi \pm iD_2\varphi = 0, \tag{3.24a}$$

$$B \mp e(v^2 - |\varphi|^2) = 0. \tag{3.24b}$$

Estas são as equações BPS. Com a definição do campo magnético, $\vec{B} = \vec{\nabla}\mathrm{x}\vec{A}$ e, considerando que $\vec{A}$ é função apenas de $r$ na direção $\hat{\theta}$, encontramos que

$$B = -\frac{1}{e}\frac{a'(r)}{r}. \tag{3.25}$$

Com esta expressão para o campo magnético $B$ e com o *ansatz* Eq. (3.14), as equações Eqs. (3.24) podem ser escritas da seguinte forma

$$g'(r) = \pm\frac{a(r)g(r)}{r}, \tag{3.26a}$$

$$\frac{a'(r)}{r} = \mp e^2v^2(1 - g^2(r)). \tag{3.26b}$$

Estas últimas equações são as equações BPS, cujas soluções do tipo vórtices nos conduzem aos estados BPS, estados de menor energia para este modelo, Maxwell-Higgs. Estas equações são acopladas, mas de primeira ordem, contudo suas soluções são obtidas apenas numericamente.

O mínimo da energia $E_B$ é calculada considerando as Eqs. (3.23) e (3.24) e

fazendo uso da expressão para o campo magnético Eq. (3.25). Logo,

$$\begin{aligned} E_B &= 2\pi \int_0^\infty r dr\, (ev^2 B) \\ &= 2\pi \int_0^\infty r dr\, ev^2 \left( -\frac{1}{e}\frac{a'(r)}{r} \right) \\ &= -2\pi v^2 [a(\infty) - a(0)] \\ &= 2\pi v^2 |n|. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Portanto, o mínimo da energia ou energia de Bogomol'nyi é uma quantidade quantizada e dada por $E_B = 2\pi v^2 |n|$.

Além disso, o campo magnético $B$ contribui com a existência do fluxo magnético $\Phi$, que também é uma quantidade quantizada, ou seja,

$$\begin{aligned} \Phi &= 2\pi \int_0^\infty r dr\, B \\ &= -2\pi \int_0^\infty r dr \left( \frac{1}{e}\frac{a'(r)}{r} \right) \\ &= -\frac{2\pi}{e} [a(\infty) - a(0)] \\ &= \frac{2\pi}{e} n, \end{aligned} \tag{3.28}$$

onde $n$ é um número inteiro e chamado de *winding number* ou vorticidade.

### 3.1.3 Soluções Analíticas Aproximadas

As soluções analíticas são obtidas a partir do processo de linearização das condições de contorno Eqs. (3.15) e das equações BPS Eqs. (3.26). Assim as soluções aproximadas para $g(r)$ e $a(r)$, que são válidas apenas em $r \to 0$ e $r \to \infty$, são

Para $r \to 0$,

$$g(r) \approx \delta_g, \tag{3.29a}$$

$$a(r) \approx n - \delta_a, \tag{3.29b}$$

onde valem as condições, $\delta_g(r \to 0) \to 0$ e $\delta_a(r \to 0) \to n$. Nota-se aqui, que apenas as contribuições de primeira ordem em $\delta_g$ e $\delta_a$ são consideradas. Desta forma, as

Eqs. (3.26) tonam-se

$$\frac{\delta_g'}{\delta_g} = \frac{n}{r} \tag{3.30a}$$

$$\delta_a' = e^2 v^2 r \tag{3.30b}$$

Integrando as equações acima, temos

$$\delta_g = Ar^n \tag{3.31a}$$

$$\delta_a = \frac{e^2 v^2}{2} r^2, \tag{3.31b}$$

onde A é uma constante real. Assim, as soluções aproximadas quando $r \to 0$ são

$$g(r) \approx Ar^{|n|} \tag{3.32a}$$

$$a(r) \approx n - \frac{e^2 v^2}{2} r^2, \tag{3.32b}$$

as quais atendem as condições de contorno para $r \to 0$, evitando quaisquer singularidades na origem. A forma das equações acima sugere o uso do método série de potência [85], ou seja,

$$g(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{g_k} r^k \tag{3.33a}$$

$$a(r) = n - \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{a_k} r^k, \tag{3.33b}$$

o que resulta para $n$ positivo, que

$$g(r) = A(mr)^n - \frac{A}{4(n+2)}(mr)^{n+2} + \mathcal{O}(r^{3n+2}) \tag{3.34a}$$

$$a(r) = n - \frac{(mr)^2}{2} + \frac{A^2}{2(2n+2)}(mr)^{2n+2} + \mathcal{O}(r^{4n+2}). \tag{3.34b}$$

onde $m$ é a massa dada por $m = \sqrt{2}ev$.

Analogamente, no limite assintótico, $r \to \infty$, temos $g(r \to \infty) \approx 1$. Assim,

$$\delta_g = 1 - g << 1 \tag{3.35a}$$
$$\delta_g' = -g', \tag{3.35b}$$

onde $\delta_g' = d\delta_g/dr$. Substituindo a Eq. (3.35b) na Eq. (3.26a), ficamos com

$$\delta_g' = \frac{a}{r}. \tag{3.36}$$

Ainda usando a Eq. (3.35b) nas Eqs. (3.26b), temos

$$a'(r) = 2e^2v^2r\delta_g.$$

Agora, derivando a Eq. (3.36) e usando a equação acima, chegamos a

$$r^2\delta_g'' + r\delta_g' - 2e^2v^2r^2\delta_g = 0, \tag{3.37}$$

análogamente,

$$r^2\delta_a'' - r\delta_a' - 2e^2v^2r^2\delta_a = 0. \tag{3.38}$$

Identificamos estas duas últimas equações com a equação de Bessel modificada, ou seja,

$$r^2\delta_g''(\sqrt{2}evr) + r\delta_g'(\sqrt{2}evr) - (2e^2v^2r^2 - \nu^2)\delta_g(\sqrt{2}evr) = 0, \tag{3.39a}$$

$$r^2\delta_a''(\sqrt{2}evr) + r\delta_a'(\sqrt{2}evr) - (2e^2v^2r^2 - \nu^2)\delta_a(\sqrt{2}evr) = 0, \tag{3.39b}$$

com $\nu = 0$, respectivamente. As soluções assintóticas, para $r \to \infty$ são:

$$g(r) = 1 - CK_0(\sqrt{2}evr) \sim \frac{1}{\sqrt{r}}e^{-\sqrt{2}r}, \tag{3.40a}$$

$$a(r) = \sqrt{2}evrCK_1(\sqrt{2}evr) \sim \sqrt{r}\,e^{-\sqrt{2}r}. \tag{3.40b}$$

Sendo $C$ um parâmetro real, $K_0$ e $K_1$ são as funções de Bessel modificada do segundo

tipo de ordens zero e um, nessa ordem.

### 3.1.4 Soluções Numéricas

Para resolver as Eqs. (3.26) numericamente, calculamos o valor aproximado para a função $a(r)$ com $r = 0.1$ usando a Eq. (3.32b) e chamamos de $a_0$, em seguida escolhemos um valor inicial para a constante $A$, Eq. (3.32a) e depois integramos a partir da origem até $g(r) > 1$ ou $a(r) < 0$. Com a intensão de atender as condições impostas aos campos $\varphi$ e $A_\mu$ dadas pelas Eqs. (3.15) repetimos o procedimento até encontrarmos valores corretos para a constante $A$ de forma a satisfazer tais condições. Os valores para a constante $A$ e $a_0$ estão listados na tabela a seguir para $n = 1, 2, 3, 5$ e 10.

| $n$ | $A$ | $a_0$ |
|---|---|---|
| 1 | 8.51092883367834 x $10^{-2}$ | 0.995 |
| 2 | 4.7111497 x $10^{-3}$ | 1.995 |
| 3 | 2.063231 x $10^{-4}$ | 2.995 |
| 5 | 2.570099 x $10^{-7}$ | 4.995 |
| 10 | 3.646396 x $10^{-14}$ | 9.995 |

Tabela 3.1: Valores encontrados para a constante $A$ e $a_0$ que atendem as condições dadas pelas Eqs. (3.15), com $\lambda = e = v = 1$.

A Fig. 3.2 mostra os resultados obtidos através do estudo numérico para as funções $a(r)$ Eq. (3.26b), $g(r)$ Eq. (3.26a), para a densidade de energia $\rho(r)$ Eq. (3.19) e para o campo magnético $B(r)$ Eq. (3.25). Por simplicidade usamos $\lambda = v = 1$. As vorticidades $n$ usadas foram: $n = 1, 2, 3, 5, 10$ conforme legenda.

Vemos nesta figura que o comportamento da função $a(r)$ apresenta um máximo igual a $n$ em $r = 0$ para todos os $n's$ considerados. A partir deste ponto, o comportamento passa a ser monotonicamente decrescente, tendendo a zero suavemente, quando $r \to \infty$. Assim, é possível observar a dependência explícita com a vorticidade $n$, pois quanto maior este valor, maior é a taxa decrecente da função $a(r)$. A função $g(r)$ não depende explicitamente do valor de $n$, ou seja, para qualquer valor da vorticidade, esta função sai de zero em $r = 0$, cresce monotonicamente, tendendo ao valor 1 para $r \to \infty$. Desta forma, ambas as funções atendem as condições de contorno Eqs. (3.15). Também a densidade de energia $\rho(r)$ satisfaz essas condições. Em seu comportamento vemos que esta é centrada e localizada. O comportamento do campo magnético $B(r)$, assim como a função $g(r)$, independe da vorticidade para $r \to \infty$, uma vez que $B \sim a'/r \sim g \sim 1$.

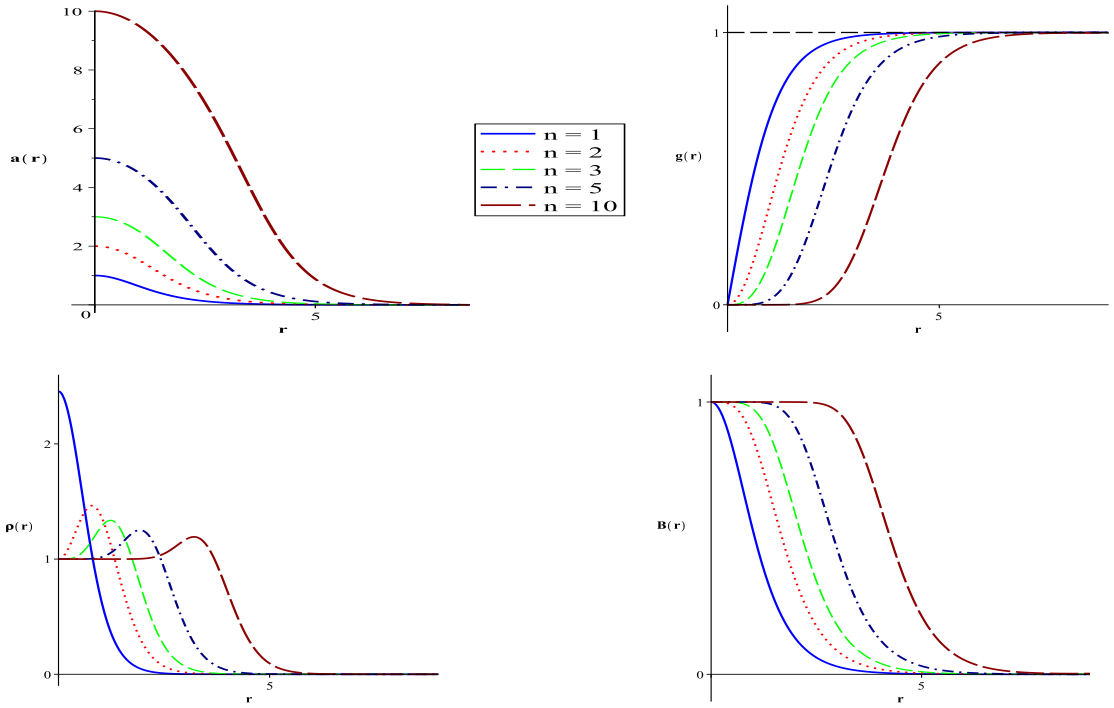


Figura 3.2: As funções: $a(r)$ (à esquerda superior), $g(r)$ (à direita superior), densidade de energia, $\rho(r)$ (à esquerda inferior) e o campo magnético $B(r)$ (à direita inferior).

## 3.2 Vórtices Chern-Simons-Higgs

Uma teoria com a inclusão do termo de Chern-Simons pode ser estudada com ou sem o termo de Maxwell. Optamos por um sistema sem esse termo, pois, desta forma, os resultados são mais simples, tornando bastante acessível à essência do modelo. A dinâmica do campo de gauge $A_\mu$ é garantida pelo termo de Chern-Simons, $(k/4)\epsilon^{\alpha\beta\gamma}A_\alpha F_{\beta\gamma}$, uma vez que a longas distâncias, $r \to \infty$, o termo Chern-Simons é dominante em relação ao termo de Maxwell.

Esta teoria admite interessantes soluções do tipo vórtices, tanto do ponto de vista matemático como também físico. A natureza no limite de Bogomol'nyi é diferente daquela previamente estudada. Enquanto os vórtices de Maxwell-Higgs requerem um potencial do tipo $\varphi^4$, veremos que os vórtices Chern-Simons requerem um potencial escalar proporcional a $\varphi^6$. Uma outra carcterística peculiar deste modelo é que este é eletricamente carregado $\vec{E} \neq 0$ [36, 86].

### 3.2.1 O Modelo

O modelo Chern-Simons-Higss é definido a partir da seguinte densidade lagrangiana,

$$\mathcal{L} = |D_\mu \varphi|^2 + \frac{k}{4}\epsilon^{\alpha\beta\gamma} A_\alpha F_{\beta\gamma} - V(|\varphi|). \tag{3.41}$$

O parâmetro $k$ é o coeficiente de Chern-Simons, $\epsilon^{\alpha\beta\gamma}$ é o símbolo de Levi-Civita e os outros termos, $|D_\mu\varphi|^2$ e $F_{\alpha\gamma}$, são definidos como na seção anterior. Na densidade lagrangiana acima, a dinâmica do campo $A_\mu$ é determinada única e exclusivamente pelo termo de Chern-Simons, segundo termo na Eq. (3.41). Esta densidade lagrangiana não é invariante de gauge, porém uma transformação de gauge local Eq. (3.2) induz a uma derivada total, que pode ser ignorada, pois quando integrada sob toda a superfície esta simplesmente se anula, tornando a ação $S$ correspondente a Eq. (3.41), invariante sob tal transformação, [87]. Para esta teoria o potencial sugerido (veja Fig. 3.3) tem a forma:

$$V(|\varphi|) = \frac{\lambda^2}{4}|\varphi|^2(|\varphi|^2 - v^2)^2, \tag{3.42}$$

onde $\lambda$ é uma constante de acoplamento adimensional. O potencial $V(|\varphi|)$ como definido acima, apresenta um vácuo simétrico em $|\varphi| = 0$, o que implica em um $V(|\varphi| = 0) = 0$ e um vácuo assimétrico para um $|\varphi| = v$, com $V(|\varphi| = v) = 0$. A formação de configurações topológicas é estabelecida apenas para os vácuos assimétricos ($Q_T \neq 0$).

Escrevendo a derivada covariante $D_\mu$, em termos da derivada habitual $\partial_\mu$, podemos expandir $\mathcal{L}$, dada na Eq. (3.41), como

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\varphi\partial^\mu\bar{\varphi} - A_\mu j^\mu + e^2 A_\mu A^\mu|\varphi|^2 + \frac{k}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}A_\alpha F_{\beta\gamma} - V(|\varphi|), \tag{3.43}$$

sendo a corrente $j^\mu$ dependente apenas do campo $\varphi$, como definido na Eq. (3.4). A análise dimensional para este modelo, mostra que $[\varphi] = [M]^{\frac{1}{2}}$, $[A_\mu] = [M]^1$ e $[k] = [e] = [M]^0$, sendo $[M]$ a dimensão de massa ou energia. As equações de campo, que emergem a partir da equação acima, são

$$D_\mu D^\mu\varphi = -\frac{\partial V(|\varphi|)}{\partial\bar{\varphi}}, \tag{3.44a}$$

$$\frac{k}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}F_{\nu\mu} = J^\alpha, \tag{3.44b}$$

para o campo $\bar{\varphi}$ e $A_\mu$, nessa ordem. E, como dado na prévia seção,

$$\begin{aligned} J^{\alpha} &= -ie(\overline{\varphi}D^{\alpha}\varphi - \varphi\overline{D^{\alpha}\varphi}) \\ &= j^{\alpha} - 2e^2 A^{\alpha}|\varphi|^2, \end{aligned} \tag{3.45}$$

com $j^{\alpha}$ definido como na Eq. (3.4).

Para esse modelo, o tensor energia-momento é definido da seguinte forma,

$$T_{\mu\nu} = \overline{D_{\mu}\varphi}D_{\nu}\varphi + \overline{D_{\nu}\varphi}D_{\mu}\varphi - \eta_{\mu\nu}\overline{D_{\alpha}\varphi}D^{\alpha}\varphi + \eta_{\mu\nu}V(|\varphi|) \tag{3.46}$$

Observa-se nesta última equação um fato interessante: o termo de Chern-Simons, o qual faz com que a densidade lagrangiana $\mathcal{L}$ da Eq. (3.41) não seja invariante de gauge, não aparece na expressão para o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$, dada acima. Este fato faz com que o tensor continue sendo, assim como em Maxwell-Higgs, simétrico nos índices $\mu$, $\nu$, ou seja, $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$. Em componentes, o tensor Eq. (3.46), pode ser escrito como

$$T_{00} = |D_0\varphi|^2 + |\vec{D}\varphi|^2 + V(|\varphi|) \tag{3.47a}$$

$$T_{01} = T_{10} = \overline{D_0\varphi}D_1\varphi + \overline{D_1\varphi}D_0\varphi \tag{3.47b}$$

$$T_{02} = T_{20} = \overline{D_0\varphi}D_2\varphi + \overline{D_2\varphi}D_0\varphi \tag{3.47c}$$

$$T_{11} = |D_0\varphi|^2 - |D_1\varphi|^2 + |D_2\varphi|^2 - V(|\varphi|) \tag{3.47d}$$

$$T_{22} = |D_0\varphi|^2 + |D_1\varphi|^2 - |D_2\varphi|^2 - V(|\varphi|) \tag{3.47e}$$

$$T_{12} = \overline{D_1\varphi}D_2\varphi + \overline{D_2\varphi}D_1\varphi. \tag{3.47f}$$

Considerando a partir de agora vórtices estáticos, temos que a componente temporal $\nu = 0$ da Eq. (3.44b) fica dada por

$$-kB = J^0. \tag{3.48}$$

Por outro lado, da Eq. (3.45) temos que $J^0 = -2e^2 A^0 |\varphi|^2$. Combinando estas duas últimas equações, encontramos

$$A^0 = \frac{k}{2e^2}\frac{B}{|\varphi|^2}. \tag{3.49}$$

A equação acima constitui um importante vínculo, que é justamente a versão Chern-Simons para a lei de Gauss. Por meio deste vínculo concluímos que aqui o gauge temporal $A^0 = 0$ não é permitido. Por consequência, o modelo Chern-Simons é carregado elétricamente $\vec{E} \neq 0$, com uma carga $Q$, dada por:

$$\begin{aligned} Q &= \int d^2r\, J^0 \\ &= -k \int d^2r\, B \\ &= -k\Phi. \end{aligned} \tag{3.50a}$$

São válidos para esse modelo, o mesmo *ansatz* Eqs. (3.14), as mesmas condições de contorno Eqs. (3.15) e a mesma definição para o campo magnético Eq. (3.25) que os usados no modelo Maxwell-Higgs. Consequentente, o fluxo magnético tem o mesmo valor que aquele dado na Eq. (3.28). Logo, a carga elétrica total $Q$ é

$$Q = -\frac{2k\pi}{e}n. \tag{3.51}$$

As equações de movimento para os campos Eqs. (3.44), considerando o sistema estático, podem ser escritas na forma vetorial, ou seja,

$$e^2(\vec{A}.\vec{A} - A_0^2)\varphi - \nabla^2\varphi + 2ie\vec{A}.\vec{\nabla}\varphi = -\frac{\partial V(|\varphi|)}{\partial\bar{\varphi}} \tag{3.52a}$$

$$\vec{J} + k\frac{dA_0}{dr}\hat{\theta} = 0 \tag{3.52b}$$

Aqui, podemos aproveitar os resultados dos cálculos vetoriais dado pelas Eqs. (3.17), usar o *ansatz* Eqs. (3.14) e desta forma, escrever as equações de movimento como

$$\frac{(rg')'}{r} - \frac{a^2 g}{r^2} + e^2 g A^0 - \frac{m^2}{4}(3g^3 - g)(g^2 - 1) = 0, \tag{3.53a}$$

$$r\left(\frac{a'}{r}\right)' - a'(ln\, g^2)' - m^2 a g^4 = 0, \tag{3.53b}$$

$$A^0 + \frac{|k|}{2e^3 v^2}\left(\frac{a'}{g^2 r}\right) = 0, \tag{3.53c}$$

onde a massa quadrada é $m^2 = 4e^4 v^4/k^2$. Como vemos, as Eqs. (3.53) são equações diferenciais de segunda ordem acopladas e não lineares. Estas equações não apresentam soluções analíticas conhecidas e mesmos suas soluções assintóticas são bastante complicadas de serem obtidas. Uma maneira para contornar este problema, pode ser obtida através do método de Bogomol'nyi, mas antes de apresentá-lo vamos expressar as componentes do tensor energia-momento, em termos do *ansatz* Eq. (3.14), fazendo uso de coordenadas polares. Assim, temos

$$T_{00} = \frac{k^2}{4e^4 v^2}\left[\frac{a'}{rg}\right]^2 + v^2\left[g'^2 + \frac{a^2 g^2}{r^2}\right] + V \tag{3.54a}$$

$$T_{01} = T_{10} = \frac{k^2}{2e^2}\frac{(a^2)'}{r^2}\text{sen}(\theta) \tag{3.54b}$$

$$T_{02} = T_{20} = -\frac{k^2}{2e^2}\frac{(a^2)'}{r^2}\cos(\theta) \tag{3.54c}$$

$$T_{11} = \frac{k^2}{4e^4 v^2}\left[\frac{a'}{rg}\right]^2 + v^2\left[g'^2 - \frac{a^2 g^2}{r^2}\right] - V \tag{3.54d}$$

$$T_{22} = \frac{k^2}{4e^4 v^2}\left[\frac{a'}{rg}\right]^2 - v^2\left[g'^2 - \frac{a^2 g^2}{r^2}\right] - V \tag{3.54e}$$

$$T_{12} = T_{21} = v^2\left[g'^2 - \frac{a^2 g^2}{r^2}\right]\text{sen}(2\theta). \tag{3.54f}$$

Com as componentes $T_{01}$ e $T_{02}$ definidas acima, podemos calcular uma outra quantidade, que no modelo Maxwell-Higgs é nula, mas aqui não é. Esta quantidade é

dada por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= \int d^2r\, \epsilon^{ij} x_i T_{0j} \\
&= \int d^2r\, [x^2 T_{01} - x^1 T_{02}] \\
&= 2\pi \int r dr \left[ r\text{sen}(\theta) \left( \frac{k}{2e^2} \frac{(a^2)'}{r^2} \right) \text{sen}(\theta) - r\cos(\theta) \left( -\frac{k}{2e^2} \frac{(a^2)'}{r^2} \right) \cos(\theta) \right] \\
&= \frac{k\pi}{e^2} \int_0^\infty dr \frac{da^2}{dr} \\
&= \frac{k\pi}{e^2} [a^2(\infty) - a^2(0)] \\
&= -\frac{k\pi}{e^2} n^2, \qquad (3.55a)
\end{aligned}$$

este é o momento angular $\mathcal{M}$ dos vórtices Chern-Simons.

### 3.2.2 Equações BPS

A energia total $E$, é obtida a partir da componente $T_{00}$ do tensor energia-momento, dado pela Eq. (3.47), onde $T_{00} = \rho$, sendo $\rho$ a densidade de energia. Lembrando que $A_0$ é dado por Eq. (3.49), podemos escrever

$$\begin{aligned}
\rho &= |D_0\varphi|^2 + |\vec{D}\varphi|^2 + V(|\varphi|) \\
&= e^2 A_0^2 |\varphi|^2 + |(D_1 \pm iD_2)\varphi|^2 \pm eB|\varphi|^2 + V(|\varphi|) \\
&= |(D_1 \pm iD_2)\varphi|^2 + e^2 A_0^2 |\varphi|^2 \pm e(|\varphi|^2 - v^2)B + V(|\varphi|) \\
&= |(D_1 \pm iD_2)\varphi|^2 + \frac{k^2}{4e^2} \frac{B^2}{|\varphi|^2} \pm e(|\varphi| - v^2)B + V(|\varphi|) \pm ev^2 B \\
&= |(D_1 \pm iD_2)\varphi|^2 + \left| \frac{|k|}{2e} \frac{B}{|\varphi|} \pm \frac{e^2}{|k|} |\varphi| (|\varphi|^2 - v^2) \right|^2 - \frac{e^4}{k^2} |\varphi|^2 (|\varphi|^2 - v^2)^2 \\
&+ V(|\varphi|) \pm ev^2 B. \qquad (3.56)
\end{aligned}$$

Logo, a energia total $E$, considerando o modelo Chern-Simons, é

$$E = \int d^2r \left[ |(D_1 \pm iD_2)\varphi|^2 + \left| \frac{|k|}{2e}\frac{B}{|\varphi|} \pm \frac{e^2}{|k|}|\varphi|(|\varphi|^2 - v^2) \right|^2 - \frac{e^4}{k^2}|\varphi|^2(|\varphi|^2 - v^2)^2 \right.$$
$$\left. + V(|\varphi|) \right] \pm ev^2 \int d^2r\, B, \tag{3.57}$$

onde, para que a energia $E$ seja mínima, devemos identificar as equações auto duais ou de Bogomol'nyi como

$$D_1\varphi \pm iD_2\varphi = 0, \tag{3.58a}$$

$$\frac{|k|}{2e}\frac{B}{|\varphi|} \pm \frac{e^2}{|k|}|\varphi|(|\varphi|^2 - v^2) = 0, \tag{3.58b}$$

A equação Eq. (3.58a) é idêntica àquela obtida no sistema Maxwell-Higgs Eq. (3.24a), por isso nos leva ao mesmo resultado da Eq. (3.26a). Substituindo a expressão para o campo magnético Eq. (3.25) e o *ansatz* Eqs. (3.14), na Eq. (3.58b), obtemos

$$g' = \pm\frac{ag}{r}, \tag{3.59a}$$
$$\frac{a'}{r} = \pm\frac{m^2}{2}g^2(g^2 - 1), \tag{3.59b}$$

onde $m$ é a massa que é dada por $m = 2ev/|k|$. Em tempo, devemos também, para que a energia $E$ seja mínima, identificar o potencial $V(|\varphi|)$, como sendo

$$V(|\varphi|) = \frac{e^4}{k^2}|\varphi|^2(|\varphi|^2 - v^2)^2. \tag{3.60}$$

Este potencial é mostrado na Fig. 3.3 à esquerda e, pelas mesmas razões discutidas na Sec. 3, apresentamos à direita o seu perfil $3D$.

Comparando a equação acima com a equação para o potencial (3.42), verificamos que $\lambda^2 = 4e^4/k^2$ confere com o limite de Bogomol'nyi da eletrodiâmica de Chern-Simons, com energia total mínima dada por:

$$E_B = \pm ev^2 \int d^2r\, B = \pm ev^2\Phi = 2\pi v^2|n|. \tag{3.61}$$

Esta é a energia mínima ou energia de Bogomol'nyi $E_B$.

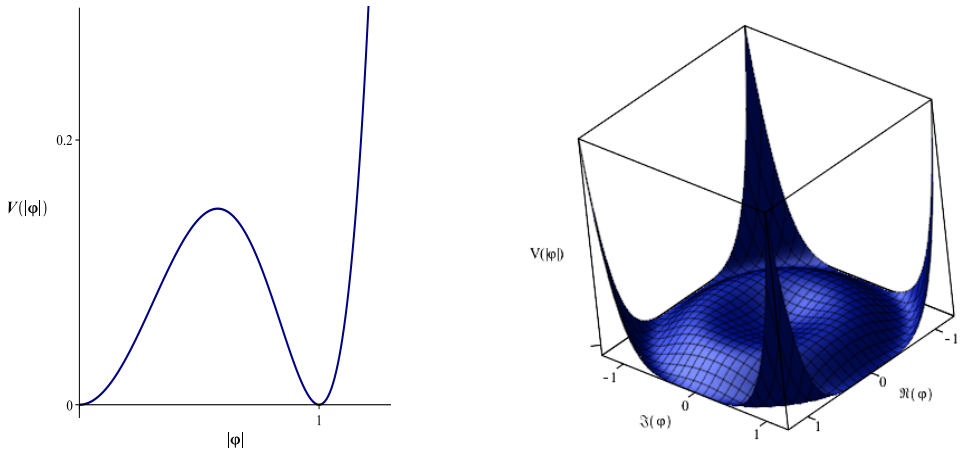


Figura 3.3: Potencial do modelo $\varphi^6$ Eq. (3.60) e seu perfil em $3D$, para $\lambda = v = \kappa = 1$.

### 3.2.3 Soluções Analíticas Aproximadas

Aqui as soluções analíticas aproximadas são obtidas de forma análoga àquela utilizada para o modelo Maxwell-Higgs. Portanto, não há necessidade de desenvolver todo o processo, iremos apenas reproduzir os resultados. Para $r \to 0$, temos:

$$g(r \to 0) = A(mr)^2 - \frac{A^3}{2(2n+2)^2}(mr)^{3n+2} + \mathcal{O}((mr)^{5n+2}) \tag{3.62a}$$

$$a(r \to 0) = n - \frac{A^2}{2(2n+1)}(mr)^{2n+2} + \frac{A^4}{2(4n+2)}(mr)^{4n+2} + \mathcal{O}((mr)^{4n+4}), \tag{3.62b}$$

com $m = 2e^2v^2/|k|$. Para $r \to \infty$, temos

$$g(r \to \infty) = 1 - CK_0(mr) \tag{3.63a}$$

$$a(r \to \infty) = CmrK_1(mr), \tag{3.63b}$$

onde $C$ é uma constante e $K_0$ e $K_1$ são as funções de Bessel modificada do segundo tipo de ordens zero e um, respectivamente.

### 3.2.4 Soluções Numéricas

As soluções numéricas para este modelo são obtidas de modo análogo ao que foi feito para o modelo Maxwell-Higgs. A Fig. 3.4 mostra os resultados obtidos através do estudo numérico das funções $a(r)$ Eq. (3.59b), $g(r)$ Eq. (3.59a), da densidade de energia $\rho(r)$ Eq. (3.56) e para o campo magnético $B(r)$ Eq. (3.25). Por simplicidade usamos $\lambda = e = v = 1$.

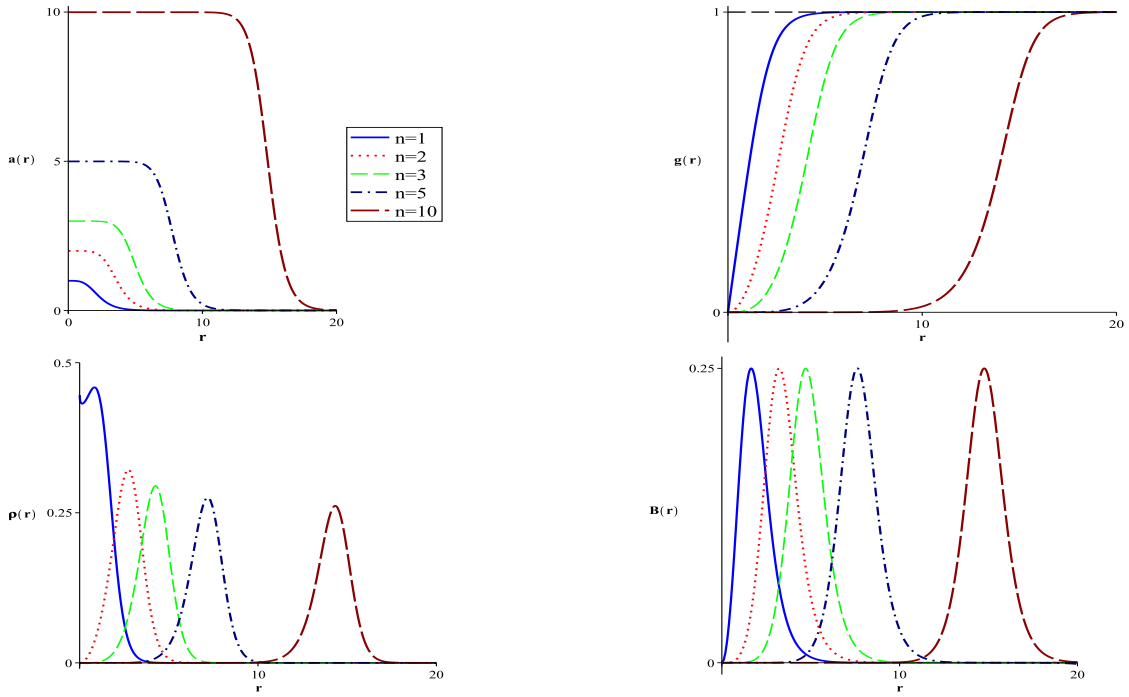


Figura 3.4: A função $a(r)$ (à esquerda superior), $g(r)$ (à direita superior), a densidade de energia $\rho(r)$ (à esquerda inferior) e o campo magnético $B(r)$ (à direita inferior).

As vorticidades usadas foram: $n = 1, 2, 3, 5$ e $n = 10$ conforme legenda na Fig. 3.4. Para este modelo, podemos ver na figura acima que o comportamento das funções $a(r)$ e $g(r)$ são similares aqueles discutidos no modelo Maxwell-Higgs, com a diferença de que estas funções tem uma taxa decrescente e crescente, respectivamente muito maior. Já o gráfico para a densidade de energia $\rho(r)$ e para o campo magnético $B(r)$ apresentam uma forma bastante diferente, em comparação com aquele modelo discutido previamente. Mas, as condições Eqs. (3.15), são igualmente repeitadas. Este modelo, apresenta características bastante peculiares o que faz com que muitas diferenças sejam encontradas, quando comparado com o modelo Maxwell-Higgs. Como exemplo, podemos citar que, enquanto o modelo Maxwell-Higgs é caracterizado por um potencial do tipo $\varphi^4$, apresentando apenas vácuo assimétrico, o modelo Chern-Simons-Higgs requer um potencial do tipo $\varphi^6$, que apresenta não só vácuos assimétricos como, também, vácuo simétrico. Outra diferença importante, encontra-se no fato de que o sistema Maxwell-Higgs apresenta campo magnético $B(r) \neq 0$, mas é eletricamente neutro $\vec{E} = 0$. Enquanto que para Chern-Simons tanto o campo magnético $B(r) \neq 0$ como o campo elétrico $\vec{E} \neq 0$ estão presentes na teoria permitindo, ainda, expressar o setor elétrico em termos do setor magnético [85], constituindo um importante vínculo: $A^0 \sim B/|\varphi|^2$.

# Capítulo 4

# Vórtices Compactos Generalizados

O presente capítulo terá como suporte o artigo [56] em que é feita uma generalização dos vórtices Maxwell-Higgs, através da introdução de uma função dependente do campo de Higgs, multiplicada pelo termo de Maxwell [39, 41]. Esta nova teoria é estudada em $(2,1)$ dimensões no espaço-tempo e é elétricamente neutra, com momento angular nulo. Neste contexto, a função mencionada acima pode ser vista como um tipo de *permeabilidade magnética* uma vez que, vórtices neutros não têm campo elétrico associados a eles. Esta *permeabilidade magnética* será representada pela função $G(|\phi|)$. Assim, esta função é uma generalização, em que, no limite $G(|\phi|) \to 1$, voltamos ao modelo Maxwell-Higgs original. Será mostrado também que, para uma escolha específica de $G(|\phi|)$, o sistema generalizado suporta soluções do tipo vórtices as quais mapeiam os vórtices auto duais, presentes no modelo Chern-Simons-Higgs. A diferença é que estes são vórtices eletricamente neutros e com momento angular nulo. Para esta teoria generalizada, vamos reproduzir as equações BPS [46, 88] e mostrar explicitamente que este conjunto de equações resolvem as correspondentes equações de movimento para qualquer que seja a função $G(|\phi|)$.

Concluímos este capítulo com o estudo de vórtices compactos. A ideia de compacton surgiu pela primeira vez em 1993, quando Rosenau e Hyman [74] introduziram modelos envolvendo não linearidade e dispersão não linear. Essas estruturas são mais facilmente encontradas em sistemas com dinâmicas generalizadas [77]. Os autores das Refs. [75, 76] investigaram a presença de compactons em modelos com cinemática padrão obtendo resultados interessantes. Já os autores da Ref. [55] fizeram uma nova contribuição para o estudo de compactons com dinâmica usual. Inspirados por esta última referência, investigamos a possibilidade de inserir soluções do tipo vórtices compactos em modelos generalizados, como se segue.

## 4.1 O Modelo Generalizado

Aqui a generalização se dá introduzindo a permeabilidade magnética $G(|\phi|)$, no termo de Maxwell, de tal forma que a densidade lagrangiana passa a ser escrita como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G(|\phi|)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_\mu\phi|^2 - V(|\phi|), \tag{4.1}$$

onde $G(|\phi|)$ é uma função adimensional do campo $\phi$. A introdução desta função permite-nos descrever a presença de uma permeabilidade magnética. Outros autores já consideraram esta função, no contexto de soluções do tipo vórtices [39, 41]. Para o leitor interessado, recomenda-se as Refs. [89, 90, 91] e suas referências. Aqui, nossa motivação está no estudo de vórtices compactos generalizados.

O modelo generalizado (4.1) tem como equações de movimento,

$$D_\mu D^\mu\phi + \frac{1}{4}\frac{\partial G}{\partial\bar{\phi}}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\partial V}{\partial\bar{\phi}} = 0, \tag{4.2a}$$

$$\partial_\mu(GF^{\mu\nu}) + J^\nu = 0, \tag{4.2b}$$

onde $J^\mu$ é a corrente conservada de Noether, a qual é definida como $J^\mu = -ie[\bar{\phi}D^\mu\phi - \phi\overline{D^\mu\phi}]$. O tensor energia-momento generalizado é

$$T_{\mu\nu} = G(|\phi|)F_{\mu\lambda}F_\nu{}^\lambda + \overline{D_\mu\phi}D_\nu\phi + \overline{D_\nu\phi}D_\mu\phi - \eta_{\mu\nu}\mathcal{L}. \tag{4.3}$$

Por definição, as componentes do tensor intensidade do campo eletromagnético $F^{\mu\nu}$ [92] nos dá as componentes do campo elétrico $-F^{0i}$, isto é, $-F^{0i} = E^i = (E_x, E_y)$ e as componentes $-F^{ij}$ nos dá as componentes do campo magnético onde $-F^{ij} = \epsilon^{ijk}B_k$ com $B_i = (B_x, B_y)$ lembrando que estamos em $(2,1)$ dimensões, neste caso, a componente do campo magnético que sobrevive é $-F^{12} = B$. Vale ressaltar ainda que, como não temos acesso à terceira dimensão espacial, o campo magnético $B$ contribui apenas com seu módulo. Com esses dados podemos abrir o tensor energia-momento, dado acima, em componentes:

$$
\begin{aligned}
T_{00} &= \frac{G(|\phi|)}{2}(E^2+B^2) + \overline{D_0\phi}D_0\phi + \overline{D_i\phi}D_i\phi \\
&+ V(|\phi|), \qquad (4.4a)
\end{aligned}
$$

$$
T_{0i} = -\epsilon_{ij}E_jB + \overline{D_0\phi}D_i\phi + \overline{D_i\phi}D_0\phi, \qquad (4.4b)
$$

$$
\begin{aligned}
T_{ij} &= -E_iE_j - \frac{1}{2}G(|\phi|)\delta_{ij}(E^2+B^2) + \overline{D_i\phi}D_j\phi \\
&+\overline{D_j\phi}D_i\phi + \delta_{ij}\overline{D_\alpha\phi}D^\alpha\phi - \delta_{ij}V(|\phi|), \qquad (4.4c)
\end{aligned}
$$

onde $(i,j)=(1,2)$.

Para investigar a presença de vórtices, supõe-se que os campos sejam estáticos. Como consequência, pode-se usar o gauge temporal $A_0=0$ e, com isto, surge um importante fato neste modelo que é a neutralidade do campo elétrico, ou seja, este sistema generalizado é eletricamente neutro. Vale ressaltar que tal escolha, $A_0=0$, é compatível com $\nu=0$ na Eq. (4.2b). A densidade de energia que é dada pela componente $T_{00}=\varepsilon$ do tensor energia-momento fica,

$$
\varepsilon = T_{00} = \frac{1}{2}G(|\phi|)B^2 + |\vec{D}\phi|^2 + V(|\phi|). \qquad (4.5)
$$

Como dito na Sec. 3, a presença de vórtices são investigadas considerando o *ansatz*,

$$
\begin{aligned}
\phi(r,\theta) &= vg(r)e^{in\theta}, \qquad (4.6a)\\
\vec{A}(r) &= -\frac{\vec{\theta}}{er}[a(r)-n], \qquad (4.6b)
\end{aligned}
$$

sendo $r$ e $\theta$ as coordenadas radial e angular, nesta ordem, onde $r\in[0,\infty)$ e $\theta\in[0,2\pi]$. O número inteiro e positivo $n$ é a vorticidade ou *winding number* $n=\pm1,\pm2,\ldots$. Este conta quantas voltas o campo escalar dá ao redor de si, quando $\theta$ varia no intervalo $[0,2\pi)$.

As configurações de campos devem obedecer às seguintes condições:

$$
g(r\to0) \to 0 \quad \text{e} \quad a(r\to0)\to n, \qquad (4.7a)
$$

$$
g(r\to\infty) \to 1 \quad \text{e} \quad a(r\to\infty)\to 0. \qquad (4.7b)
$$

Estas imposições evitam que hajam singularidades e garantem que a energia seja

finita. O campo magnético $B$, para configurações de campos regidas pelas Eqs. (4.6), é dado por

$$B = -\frac{a'}{er}. \tag{4.8}$$

Com a definição do *ansatz* Eqs. (4.6) e usando as Eqs. (3.17) da Sec. 3.1.1, podemos escrever as equações de movimento generalizadas como

$$\frac{[rg']'}{r} - \frac{a^2 g}{r^2} - \frac{1}{2v^2}V_g - \frac{1}{4e^2v^2}G_g\left[\frac{a'}{r}\right]^2 = 0, \tag{4.9a}$$

$$rG\left[\frac{a'}{r}\right]' - 2e^2v^2g^2a + a'g'G_g = 0, \tag{4.9b}$$

com o " $'$ " indicando a diferencial com relação à coordenada radial $r$, $V_g = dV(g(r))/dg$ e $G_g = dG(g(r))/dg$.

Além disso, o momento angular é dado por

$$\mathcal{M} = \int d^2r\, \varepsilon^{ij} x_i T_{0j}; \tag{4.10}$$

e, como $T_{0i} = 0$, vemos que o momento angular $\mathcal{M}$ é nulo.

A existência do campo magnético $B$ permite-nos calcular o fluxo magnético o qual é dado por

$$\Phi = 2\pi \int_0^\infty r dr B(r). \tag{4.11}$$

Quando substituímos a Eq. (4.8), na equação acima, temos como resultado

$$\Phi = \frac{2\pi}{e} n. \tag{4.12}$$

Constata-se então, que a invariância topológica faz com que o fluxo magnético seja um múltiplo de $2\pi/e$, ou seja, este fluxo magnético é uma quantidade quantizada.

Podemos escrever a densidade de energia, com o auxílio da Eq. (4.5) e da Eq. (3.20), do capítulo de revisão, e obtemos que

$$\begin{aligned}\varepsilon &= |(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 + \frac{1}{2}G(|\phi|)\left[B \pm \frac{e(|\phi|^2 - v^2)}{G(|\phi|)}\right]^2 \\ &- \frac{e^2}{2}\frac{(|\phi|^2 - v^2)^2}{G(|\phi|)} + V(|\phi|) \pm ev^2 B.\end{aligned} \tag{4.13}$$

Integrando a equação acima em todo o espaço temos a energia total, ou seja,

$$\begin{aligned} E &= \int d^2r \left[ |(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 + \frac{1}{2}G(|\phi|) \left[ B \pm \frac{e(|\phi|^2 - v^2)}{G(|\phi|)} \right]^2 \right. \\ &- \left. \frac{e^2}{2} \frac{(|\phi|^2 - v^2)^2}{G(|\phi|)} + V(|\phi|) \right] \pm \int d^2r \, e \, v^2 \, B. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Para que esta energia total $E$ seja mínima, devemos identificar o potencial como sendo

$$V(|\phi|) = \frac{e^2}{2} \frac{(|\phi|^2 - v^2)^2}{G(|\phi|)}; \tag{4.15}$$

a equação acima constitui um vínculo entre o potencial $V(|\phi|)$ e a permeabilidade magnética $G(|\phi|)$. E os campos devem satisfazer a seguintes equações BPS generalizadas:

$$D_1\phi \pm iD_2\phi = 0; \tag{4.16a}$$

$$B \mp \frac{e(v^2 - |\phi|^2)}{G(|\phi|)} = 0. \tag{4.16b}$$

Logo, no limite de Bogomol'ny, a energia total mínima para as configurações de campos estáticos é dada por

$$E_B = 2\pi v^2 |n|. \tag{4.17}$$

O mecanismo de minimizar a energia no limite de Bogomol'nyi nos conduziu a um conjunto de equações de primeira ordem Eqs. (4.16), ao vínculo Eq. (4.15) e como resultado encontramos a energia total $E_B$ dada pela Eq. (4.17). Portanto, pode-se concluir que este modelo generalizado admite um formalismo de primeira ordem.

Por simplicidade, a partir de agora, faremos $e = v = 1$ tomando por base o *ansatz* Eqs. (4.6) e a expressão para o campo magnético Eq. (4.8), as Eqs. (4.16) tornam-se

$$g' = \pm \frac{ag}{r} \tag{4.18a}$$

$$\frac{a'}{r} = \mp \frac{(1 - |\phi|^2)}{G(|\phi|)}. \tag{4.18b}$$

Estas são as equações de primeira ordem generalizadas. A densidade de energia é,

$$\varepsilon = 2V(|\phi|) + \frac{2a^2g^2}{r^2}. \tag{4.19}$$

Observando as Eqs. (4.9) e (4.18) nota-se que o modelo Maxwell-Higgs original é recuperado no limite em que $G(|\phi|) \to 1$.

## 4.2 Vórtices Generalizados: Primeiro Modelo

Para investigar novos modelos e suas soluções do tipo vórtices, primeiro sugerimos uma função $G(|\phi|)$, escrevemos o potencial correspondente conforme Eq. (4.15) e estudamos as soluções do tipo vórtices, sua densidade de energia $\varepsilon$ e o campo magnético $B$.

Para este primeiro modelo, define-se a função permeabilidade magnética, $G(|\phi|)$, da seguinte forma

$$G(|\phi|) = \frac{(1-|\phi|^2)^2}{(1-|\phi|)^2}. \tag{4.20}$$

De acordo com o vínculo Eq. (4.15), o novo potencial é

$$V(|\phi|) = \frac{1}{2}(1-|\phi|)^2. \tag{4.21}$$

Os mínimos deste potencial ocorrem em $|\phi| = 1$ e apresenta um máximo em $|\phi| = 0$ com $V_{max}(0) = 0.5$. A Fig. 4.1 mostra o potencial dado acima, junto com o potencial do modelo Maxwell-Higgs padrão, para comparação.

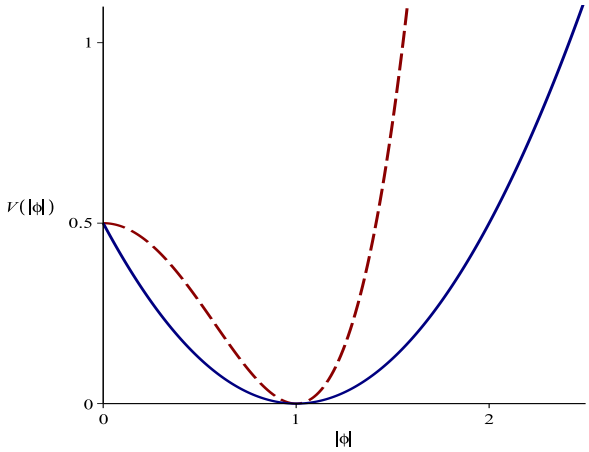


Figura 4.1: O potencial (4.21) (linha sólida) e o potencial para o modelo Maxwell-Higgs padrão (3.23) (linha tracejada). Com $e = v = 1$.

A densidade de energia $\varepsilon$ e campo magnético $B$ são dados por

$$\varepsilon = (1-g)^2 + 2\frac{a^2 g^2}{r^2}, \tag{4.22a}$$

$$B = \pm\frac{1-g}{1+g}. \tag{4.22b}$$

As soluções das quantidades acima são obtidas resolvendo, primeiramente, as equações BPS, que, para este modelo generalizado, são dadas por

$$g' = \pm\frac{ag}{r}, \tag{4.23a}$$

$$\frac{a'}{r} = \mp\frac{1-g}{1+g}. \tag{4.23b}$$

Embora estas equações sejam aparentemente simples, sua soluções não são possíveis de serem encontradas analiticamente. Portanto devemos prosseguir com uma investigação numérica. Mas antes, é interessante saber como as funções $a(r)$ e $g(r)$ comportam-se assintóticamente. Considerando as condições impostas aos campos Eq. (4.7), sabe-se que no limite de $r \to \infty$, as equações acima podem ser aproximadas por $\delta' = \pm a/r$ e $a' = \mp\delta/2$, onde a quantidade $\delta = 1 - g \ll 1$. Logo, o comportamento no infinito tem como soluções,

$$g_\infty(r) = 1 - CK_0\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right), \tag{4.24a}$$

$$a_\infty(r) = CrK_1\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right). \tag{4.24b}$$

O procedimento usado aqui para chegar as equações acima é análogo àquele utilizado na Sec. 3.1.3 do capítulo anterior. Da mesma forma, o comportamento próximo a origem para um $r \to 0$, apresenta soluções em série de potencias que para valores positivos de $n$ são

$$g_0(r) = Ar^n - \frac{A}{2(n+1)}r^{n+2} + \mathcal{O}(r^{2n+2}), \tag{4.25a}$$

$$a_0(r) = n - \frac{r^2}{2} + \frac{2A}{n+2}r^{n+2} + \mathcal{O}(r^{2n+2}), \tag{4.25b}$$

onde $A$ é uma constante a ser determinada numericamente, usando-se o mesmo procedimento mostrado na seção 3.1 e subseção 3.1.4 do capítulo de revisão 3, ou seja, para encontrar as soluções numéricas das Eqs. (4.23), partimos da escolha de um valor inicial para $A$ na Eq. (4.25a) e então, efetuamos sua integração procurando obter um comportamento apropriado para $g(r)$ para valores muito grandes de $r$. Este

processo é repetidamente realizado até encontrarmos o correto valor para $A$ que atenda, simultaneamente, às equações para $a(r)$ e $g(r)$ dadas acima. Os resultados numéricos para as funções $a(r)$ e $g(r)$ Eqs. (4.23), a densidade de energia (4.22a), e para o campo magnético, (4.22b) são mostrados nas Figs. 4.2 e 4.3.

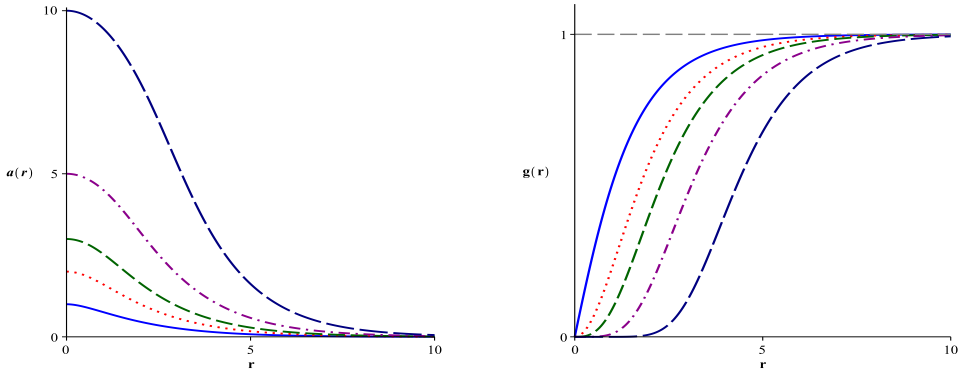


Figura 4.2: As funções: $a(r)$ (à esquerda) e $g(r)$ (à direita) deste novo modelo para $n = 1, 2, 3, 5$ e 10, linhas: solida; pontilhada; tracejada; traço ponto e traçejado longo, respectivamente.

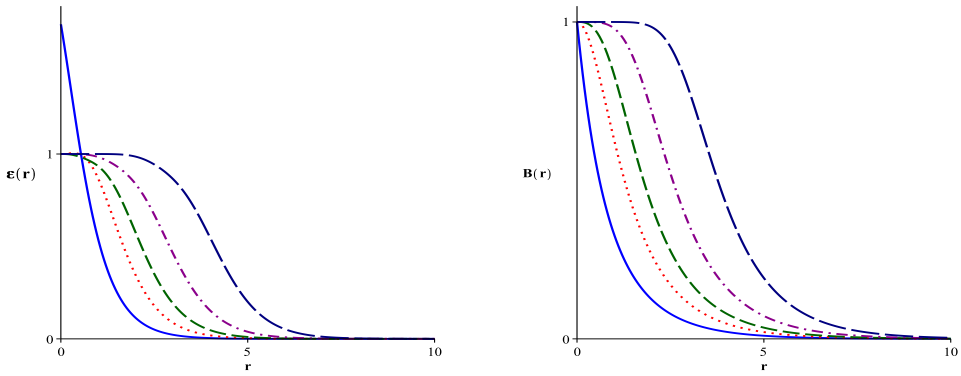


Figura 4.3: A densidade de energia, $\varepsilon(r)$ (à esquerda) e o campo magnético $B(r)$ (à direita) deste novo modelo para $n = 1, 2, 3, 5$ e 10, linhas: solida; pontilhada; tracejada; traço ponto e traçejado longo, respectivamente.

Além disso, na Fig. 4.4 apresentamos o estudo numérico das soluções para $a(r)$, $g(r)$, densidade de energia $\varepsilon$ e o campo magnético $B$ dos modelos Maxwell-Higgs novo e padrão, onde escolhemos a vorticidade $n = 3$ para que o leitor possa visualizar as diferenças entre os modelos. Nota-se que o comportamento das funções $a(r)$ e $g(r)$, do novo modelo, parecem se espalhar por uma região maior do plano, quando comparado com o modelo usual e a densidade de energia $\varepsilon$ e o campo magnético $B$, deste modelo em estudo, tem uma constante de decaimento menor do que no modelo Maxwell-Higgs padrão.

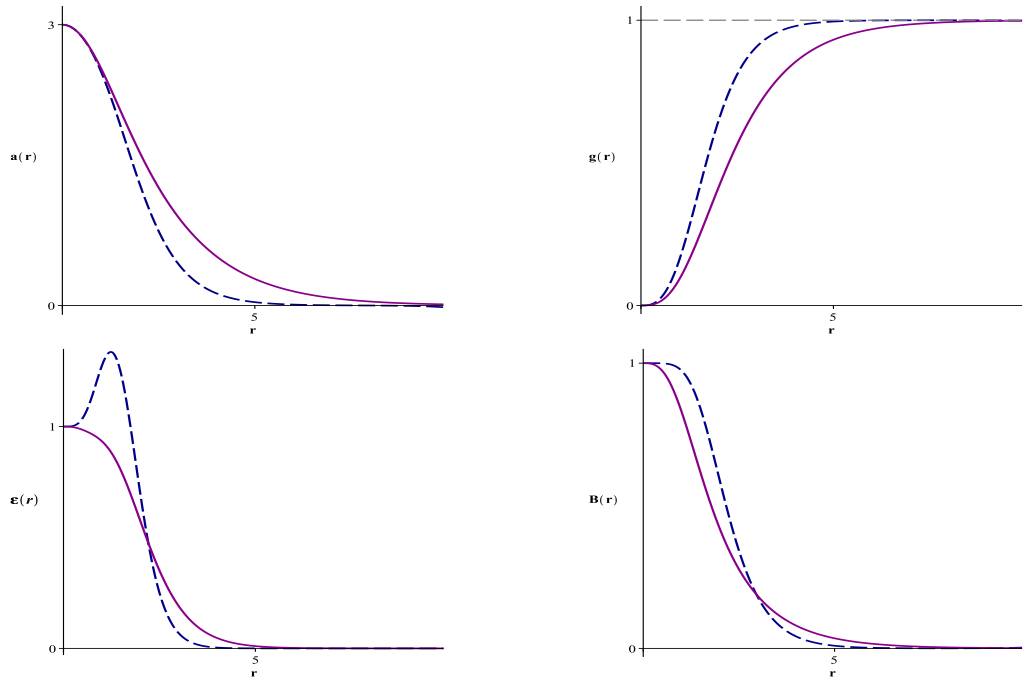


Figura 4.4: As funções: $a(r)$ (à esquerda superior), $g(r)$ (à direita superior), a densidade de energia, $\varepsilon(r)$ (à esquerda inferior) e o campo magnético $B(r)$ (à direita inferior) dos modelos novo e usual, linhas: sólida e tracejada, nesta ordem, com $n = 3$.

## 4.3 Vórtices Generalizados: Segundo Modelo

Pode-se descrever um outro sistema, com uma sugestão para função $G(|\phi|)$ tal que,

$$G(|\phi|) = \frac{(1-|\phi|^2)^2}{|\phi|^2(1-|\phi|)^2}. \tag{4.26}$$

Neste caso, o vínculo dado por (4.15), leva ao potencial

$$V(|\phi|) = \frac{1}{2}|\phi|^2(1-|\phi|)^2. \tag{4.27}$$

Este potencial é interessante, uma vez que é de quarta ordem no módulo do campo escalar $\phi$, como no potencial Maxwell-Higgs usual, mas se assemelha ao potencial de sexta ordem, que aparece no modelo de Chern-Simons-Higgs [37, 38] e tem a forma

$$V(|\phi|) = \frac{1}{2}|\phi|^2(1-|\phi|^2)^2. \tag{4.28}$$

Ambos têm mínimos assimétricos em $|\phi| = 1$ e mínimo simétrico em $|\phi| = 0$, como é mostrado na Fig. 4.5

Neste segundo modelo, a densidade de energia $\varepsilon(r)$ e o campo magnético $B$ são

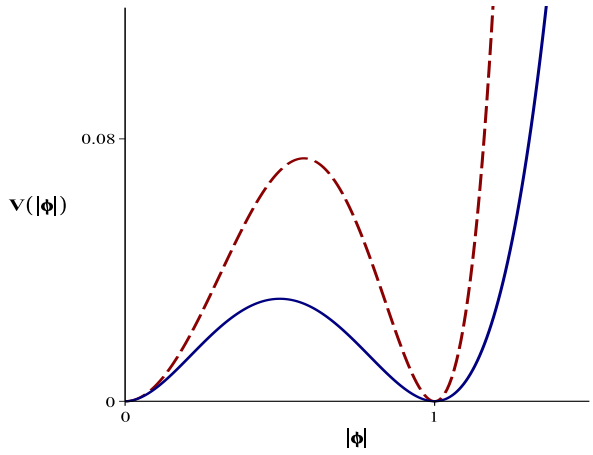


Figura 4.5: Os dois potenciais (4.27) e (4.28), mostrados com linha sólida e tracejada, nesta ordem.

escritos como

$$\varepsilon(r) = (1-g)^2 g^2 + \frac{2a^2 g^2}{r^2}, \tag{4.29a}$$

$$B = \frac{(1-g)g^2}{1+g}. \tag{4.29b}$$

As equações de primeira ordem são agora, dadas por

$$g' = \pm\frac{ag}{r}, \tag{4.30a}$$

$$\frac{a'}{r} = \mp\frac{(1-g)g^2}{1+g}. \tag{4.30b}$$

Para encontrar as soluções das equações acima, procedemos como antes: primeiro investigamos o comportamento assintótico no limite $r \to \infty$ e observamos que os campos nesse limite comportam-se como no modelo anterior, logo, são descritos pelas Eqs. (4.24). No entanto, próximo a origem $r \to 0$, os campos atendem uma nova solução em séries de potências que são dadas por

$$g = Ar^n - \frac{A^2}{2(n+1)(3n+2)} r^{3n+2} + \mathcal{O}(r^{4n+2}), \tag{4.31a}$$

$$a = n - \frac{A^2}{2n+2} r^{2n+2} + \frac{2A^3}{3n+2} r^{3n+2} + \mathcal{O}(r^{4n+2}). \tag{4.31b}$$

Esses resultados são integrados numericamente, como feito na prévia seção. O comportamento das funções $a(r)$, $g(r)$, da densidade de energia $\varepsilon$ e do campo magnético $B$ estão exibidos na Fig. 4.6 onde usamos os valores para $n$: $n = 1, 2, 3, 5$ e 10.

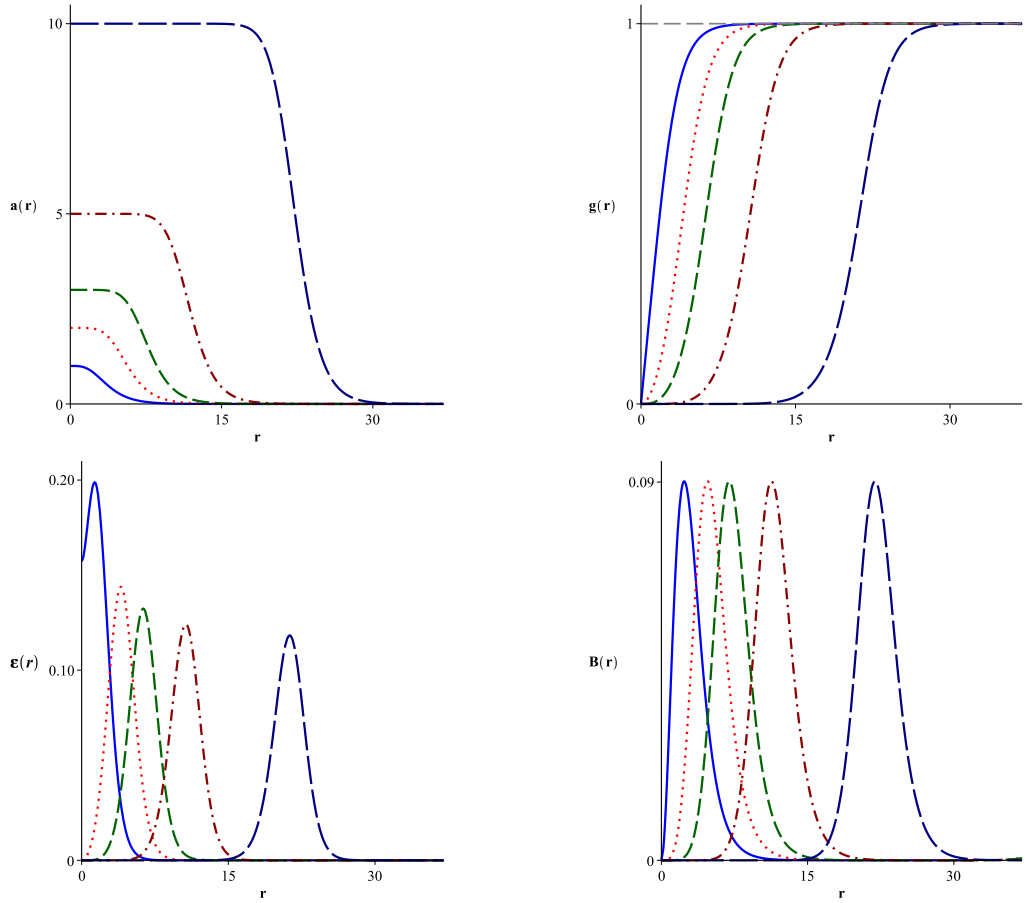


Figura 4.6: As funções: $a(r)$ (à esquerda superior), $g(r)$ (à direita superior), densidade de energia, $\varepsilon(r)$ (à esquerda inferior) e o campo magnético $B(r)$ (à direita inferior), linhas: solida; pontilhada; tracejada; traço ponto e traçejado longo, respectivamente.

Na Fig. 4.7, exibimos o comportamento das funções $a(r)$ e $g(r)$ para o modelo com permeabilidade magnética $G(|\phi|)$, dada pela Eq. (4.26), e para o modelo Chern-Simons original, com vorticidade $n = 3$, para comparação.

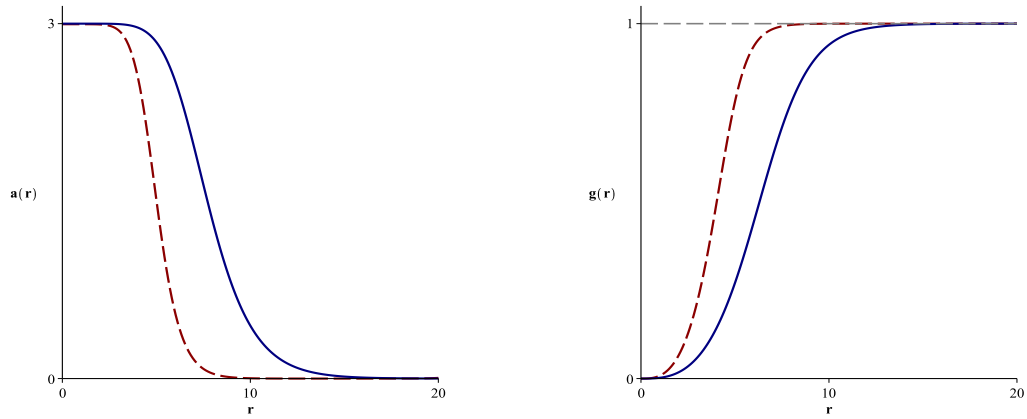


Figura 4.7: As funções: $a(r)$ (à esquerda) e $g(r)$ (à direita), para o segundo novo modelo, linha sólida e o de Chern-Simons padrão linha tracejada, com $n = 3$.

Já na Fig. 4.8, mostramos o comportamento da densidade de energia $\varepsilon$ e do campo magnético $B$ para o modelo com permeabilidade magnética $G(|\phi|)$, dada pela Eq. (4.26), e para o modelo Chern-Simons original, com vorticidade $n = 3$.

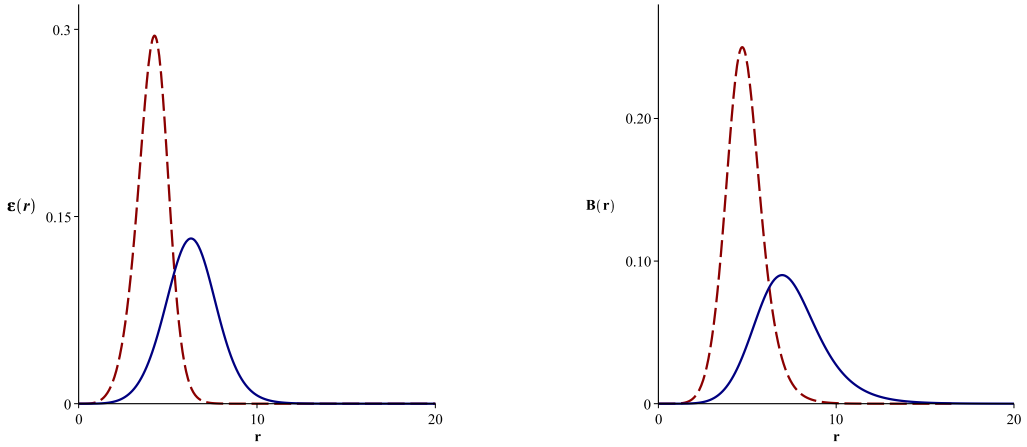


Figura 4.8: A densidade de energia, $\varepsilon(r)$ (à esquerda) e o campo magnético $B(r)$ (à direita), para o segundo novo modelo linha sólida e o de Chern-Simons padrão linha tracejada, ambos com $n = 3$.

Como no modelo anterior, podemos ver graficamente que as soluções $a(r)$ e $g(r)$ deste segundo modelo também se espalham, mas agora com uma maior evidência, por uma região maior do plano, quando comparado com o caso de Chern-Simons padrão. Quanto a densidade de energia e o campo magnético, nota-se que seus máximos apresentam valores menores e que são deslocados no eixo da coordenada radial $r$, quando uma comparação entre os dois modelos é feita.

## 4.4 Exemplo de Vórtice Compacto

Agora, nossa atenção estará voltada para a construção de vórtices compactos. Uma das primeiras observações dos resultados obtidos na Sec. 4.1 é a possibilidade de modificar a função $G(|\phi|)$ e, como consequência, alterar o potencial do modelo. Assim, inspirados pelo recente trabalho sobre kinks compactons [93], que parte de um método de alterar as interações do campo escalar, para que a solução permaneça dentro de um intervalo compacto da reta real, adicionamos os novos resultados obtidos das seções anteriores deste capítulo e ilustramos aqui a possibilidade da construção de vórtices compactos generalizados.

Antes de aprofundar no assunto, propriamente dito, vale recordar esforços recentes para descrever vórtices compactos. Na ref. [94] o autor lida com a mesma questão, mas alí considera-se um termo cinético não canônico, levando a um cenário diferente. Uma investigação similar, com modelos contendo também termos cinéticos

não canônicos, foi realizada na Ref. [95]. No entanto, observa-se que tanto a densidade de energia quanto o campo magnético não respondem tão significativamente quanto as soluções.

Esses resultados nos motivaram a reavaliar o assunto, com foco na construção de modelos generalizados, que suportam vórtices compactos genuínos, com a densidade de energia e campo magnético sendo nulos, fora de um intervalo compacto da coordenada radial $r$. Implementamos essa possibilidade abaixo, investigando dois modelos distintos que suportam vórtices compactos.

Na sequência, sugerimos a permeabilidade magnética da seguinte forma

$$G(|\phi|) = \frac{1-|\phi|^2}{1-|\phi|^{2l}}, \tag{4.32}$$

onde $l$ é um parâmetro real e positivo, tal que $l \geq 1$. Com esta escolha, o vínculo dado por (4.15) nos conduz ao potencial,

$$V(|\phi|) = \frac{1}{2}(1-|\phi|^2)(1-|\phi|^{2l}). \tag{4.33}$$

Observa-se que para o caso $l = 1$, voltamos ao modelo Maxwell-Higgs original. Este novo potencial tem todos os seus mínimos localizados em $|\phi| = 1$ e seu máximo local ocorre em $|\phi| = 0$, com $V(0) = 1/2$. A introdução do parâmetro $l$ torna o potencial dado pela equação acima bastante diferente. A Fig. 4.9 mostra esta peculiaridade, onde pode-se notar que quanto maior o valor de $l$ mais as linhas que representam este potencial, aproximam-se do valor de mínimo, ou seja, $|\phi| = 1$.

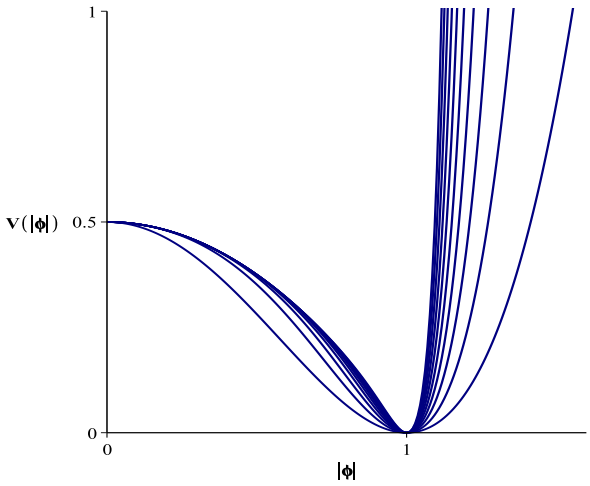


Figura 4.9: O potencial (4.33) para $l = 1, 2, 3, \ldots, 10$.

As equações de primeira ordem para este caso são

$$g' = \pm\frac{ag}{r}, \tag{4.34a}$$

$$\frac{a'}{r} = \mp(1-g^{2l}). \tag{4.34b}$$

Agora, investigamos primeiro o comportamento das funções $a(r)$ e $g(r)$ no limite $r \to 0$. Consideramos $a(r) \approx n + a_0(r)$ e $g(r) \approx g_0(r)$ indo até a primeira ordem em $a_0(r)$ e $g_0(r)$. Este procedimento nos leva a

$$a_0(r) = -\frac{r^2}{2}, \qquad g_0 = Ar^n\,, \tag{4.35}$$

onde $A$ é uma constante de integração. Atuando do mesmo modo, como nas precedente seções, o comportamento assintótico no limite de $r \to \infty$ nos leva a $a(r) \approx a_\infty(r)$ e $g(r) \approx 1 + g_\infty(r)$. Substituindo esses valores nas Eqs. (4.34), temos

$$a_\infty(r) = \sqrt{2l}CrK_1(\sqrt{2l}r), \tag{4.36a}$$

$$g_{\infty(r)} = -CK_0(\sqrt{2l}r), \tag{4.36b}$$

sendo $K_\nu(r)$ a função de Bessel modificada de segunda espécie e $C$ uma constante de integração. Para um $l$ geral, a ferramenta numérica é a mais apropriada, uma vez que soluções analíticas para as Eqs. (4.34) são muito complicadas. Mas para um $n$ geral e grandes valores de $l$ é possível mostrar que o modelo suporta soluções compactas,

$$a_c(r) = \begin{cases} n - \frac{1}{2}r^2, & |r| \leq \sqrt{2n} \\ 0, & |r| > \sqrt{2n}. \end{cases} \tag{4.37a}$$

$$g_c(r) = \begin{cases} \left(\frac{r}{\sqrt{2n}}\right)^n e^{(2n-r^2)/4}, & |r| \leq \sqrt{2n} \\ 1, & |r| > \sqrt{2n}. \end{cases} \tag{4.37b}$$

Surge aqui um questionamento: a solução da Eq. (4.37a) é regular no ponto $r = \sqrt{2n}$, uma vez que descontinuidades na derivada da função $a_c(r)$, nesse ponto, podem ocorrer ? Verificamos o perfil compacto e notamos que neste modelo generalizado, a permeabilidade magnética $G(|\phi|)$ atua como um fator regulador do comportamento de tal função, uma vez que no limite $l \to \infty$ a função $G(|\phi|)$ anula-se para $|\phi| = 1$, isto regulariza a função $a_c(r)$ e o limite BPS, Eq. (4.17), ainda é válido para as soluções compactas. Na Fig. 4.10, exibimos as soluções para $n = 1$ e para vários

valores de $l$, incluindo as soluções compactas.

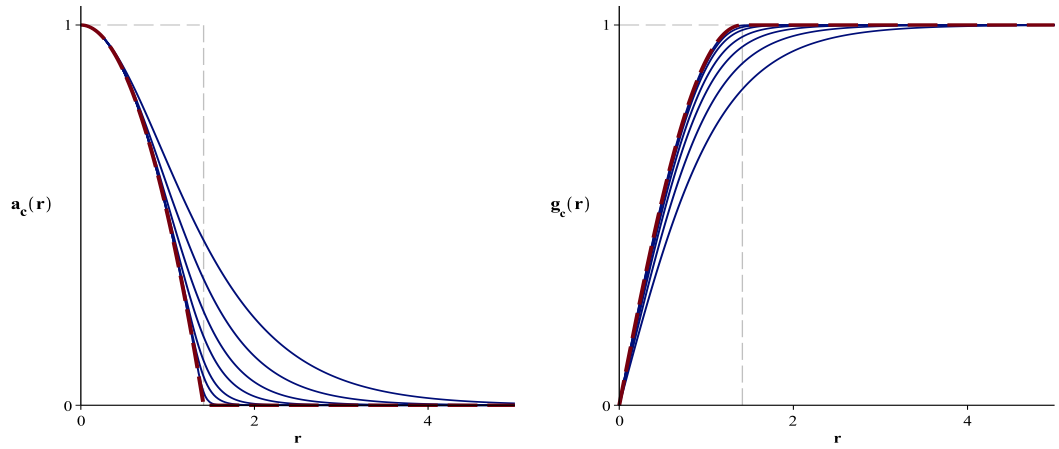


Figura 4.10: As soluções $a_c(r)$ à esquerda e $g_c(r)$ à direita para $n = 1$. Consideramos inicialmente, $l = 1$ em seguida aumentamos para valores cada vez maiores de $l$. As linhas tracejadas representam o limite compacto, dado por Eqs. (4.37) com $n = 1$.

Verificamos também que a densidade de energia e o campo magnético tendem a se tornarem compactos e para um $l$ muito grande obtém-se

$$\epsilon_c(r) = \begin{cases} 1 - \left(2n + 1 - \frac{r^2}{2} - \frac{2n^2}{r^2}\right)\left(\frac{r^2}{2n}\right)^n e^{(2n-r^2)/2}, & |r| \leq \sqrt{2n} \\ 0, & |r| \leq \sqrt{2n}. \end{cases} \tag{4.38a}$$

$$B_c(r) = \begin{cases} 1, & |r| \leq \sqrt{2n} \\ 0, & |r| > \sqrt{2n}, \end{cases} \tag{4.38b}$$

Na ref. [95], em particular, a proposta para compactificar as soluções de vórtices não foi capaz de fazer com que a densidade de energia tornasse nula fora do intervalo compacto. Esta foi talvez a razão para chamar as soluções de vórtices como semelhantes a compactas. Aqui, o vórtice torna-se uma solução compacta, uma vez que tanto a densidade de energia quanto o campo magnético vão naturalmente para o intervalo compacto. Ilustramos este fato na Fig. 4.11, exibindo a densidade de energia e o campo magnético para $n = 1$ e para vários outros valores de $l$. É interessante ver que no limite compacto o campo magnético é constante dentro do intervalo compacto, por isso parece mapear o campo magnético de um solenóide infinitamente longo. Como comentamos anteriormente, a descontinuidade no campo magnético no modelo generalizado não modifica a densidade de energia, devido à presença da permeabilidade magnética generalizada, $G(|\phi|)$.

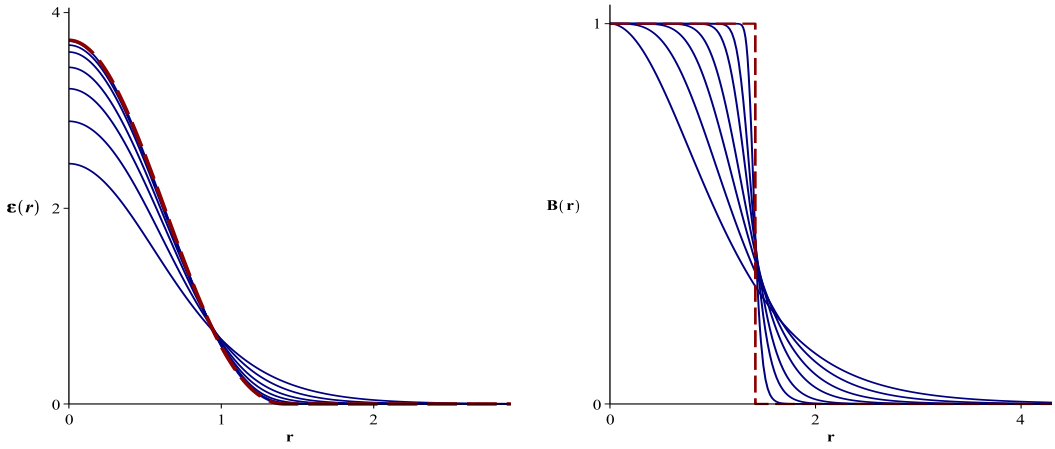


Figura 4.11: A densidade de energia (à esquerda) e o campo magnético (à direita) para $n = 1$. Consideramos inicialmente, $l = 1$ em seguida aumentamos para valores cada vez maiores de $l$. As linhas tracejadas representam o limite compacto, dado por Eqs. (4.44) com $n = 1$.

## 4.5 Outro Exemplo com Vórtices compactos

Um outro modelo surge, quando escolhemos a permeabilidade magnética como

$$G(|\phi|) = \frac{1 - |\phi|^2}{3|\phi|^2(1 - |\phi|^{2l})}, \tag{4.39}$$

onde $l$ é definido segundo o modelo anterior. Assim, devido ao vínculo Eq. (4.15), o potencial tem a forma

$$V(|\phi|) = \frac{3}{2}|\phi|^2(1 - |\phi|^2)(1 - |\phi|^{2l}). \tag{4.40}$$

Este potencial, para um $l = 1$, torna-se idêntico ao potencial $|\phi|^6$, que estudamos na teoria Chern-Simons-Higgs Sec. 3.2. A equação acima apresenta um mínimo local em $|\phi| = 0$ e um conjunto de mínimos locais em $|\phi| = 1$. O máximo deste potencial ocorre entre estes dois mínimos. A Fig. 4.12 ilustra este potencial Eq. (4.40) para vários valores de $l$.

As equações de primeira ordem são obtidas à partir da substituição da Eq. (4.39) nas equações de primeira ordem generalizadas Eqs. (4.18), ou seja,

$$g' = \pm\frac{ag}{r}, \tag{4.41a}$$

$$\frac{a'}{r} = \mp 3g^2(1 - g^{2l}). \tag{4.41b}$$

O comportamento das funções acima próximo à origem é $a(r) \approx n - a_0(r)$ e $g(r) \approx$

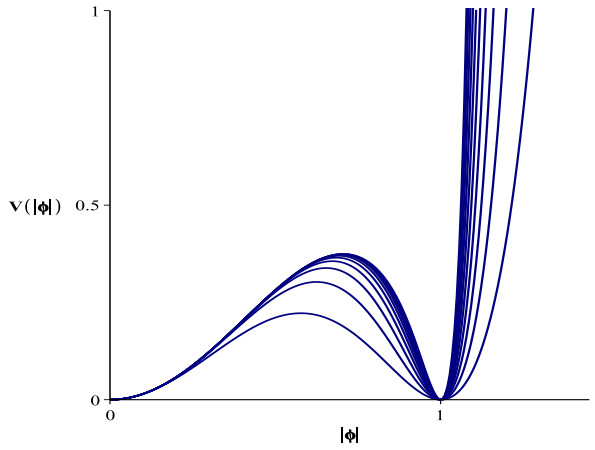


Figura 4.12: O potencial (4.40) para $l = 1, 2, 3, \ldots, 10$.

$g_0(r)$, de modo que até primeira ordem em $a_0(r)$ e $g_0(r)$ obtemos

$$a_0(r) = \frac{3A^2}{2(n+1)} r^{2(n+1)}, \tag{4.42a}$$

$$g_0(r) = Ar^n, \tag{4.42b}$$

onde $A$ é uma constante de integração, obtida da mesma forma que nos vórtices padrão Sec. 3. Assintoticamente, temos $a(r) \approx a_\infty(r)$ e $g(r) \approx 1 - g_\infty(r)$ com

$$a_\infty(r) = \sqrt{6l} C r K_1(\sqrt{6l} r), \tag{4.43a}$$

$$g_\infty(r) = -C K_0(\sqrt{6l} r), \tag{4.43b}$$

onde $K_\nu$ é a função de Bessel modificada de segunda espécie e $C$ uma constante de integração. Para um $l$ geral, as equações (4.41) são resolvidas numericamente. No entanto, para $n$ positivo e um $l$ muito grande, é possível mostrar que o modelo suporta as soluções compactas do tipo

$$a_c(r) = \begin{cases} \frac{(n+2)[(n^2+2n)^{n+1} - (3r^2)^{n+1}]}{(n+2)^2(n^2+2n)^n + (3r^2)^{n+1}}, & |r| \leq r_c \\ 0, & |r| > r_c, \end{cases} \tag{4.44a}$$

(4.44b)

$$g_c(r) = \begin{cases} \frac{2(n+1)(n+2)(3n^2+6n)^{n/2} r^n}{(n+2)^2(n^2+2n)^n + (3r^2)^{n+1}}, & |r| \leq r_c \\ 1, & |r| > r_c, \end{cases} \tag{4.44c}$$

onde $r_c = \sqrt{(n^2+2n)/3}$ é o raio das soluções compactas. A discussão a respeito da regularidade dessas soluções é similar àquelas discutidas na seção anterior. Na Fig. 4.13 é mostrado o comportamento das soluções $a(r)$, $g(r)$ e as soluções compactas para um $n = 1$ e vários valores de $l$.

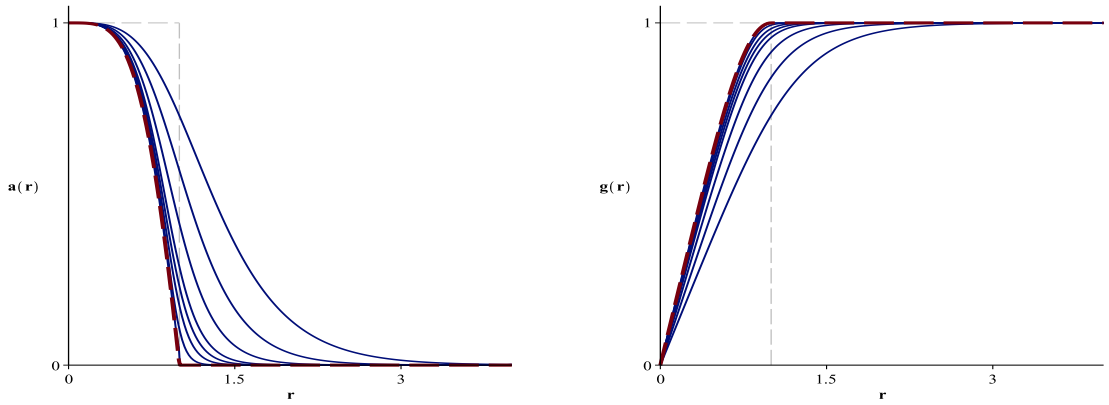


Figura 4.13: As soluções $a_c(r)$ (à esquerda) e $g_c(r)$ (à direita) para $n = 1$, com $l = 1$, seguido de valores cada vez maiores para $l$. As linhas tracejadas representam o limite compacto, dado por Eqs. (4.41) com $n = 1$.

Em seguida, concentramo-nos na densidade de energia e no campo magnético. A expressão para a densidade de energia no limite compacto é muito pesada por isso, aqui ela é suprimida. No entanto, o campo magnético tem uma forma mais apresentável dada por

$$B_c(r) = \begin{cases} \dfrac{12[(n+1)(n+2)^2\left[(3n^2+6n)r^2\right]^n}{[(n^2+2n)^n(n+2)^2+(3r^2)^{n+1}]^2}, & |r|\leq r_c \\ 0, & |r|>r_c. \end{cases} \tag{4.45}$$

Na Fig. 4.14, mostramos como a densidade de energia e o campo magnético se comportam para $n = 1$ e os muitos valores de $l$.

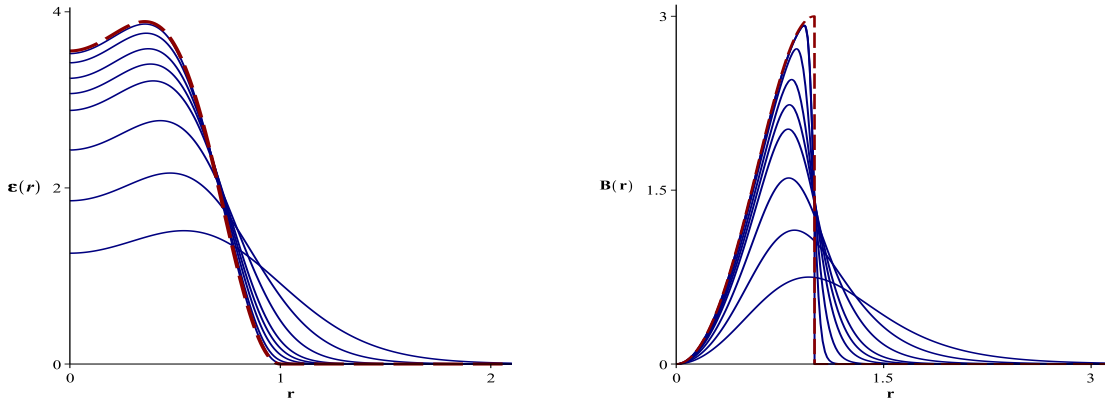


Figura 4.14: A densidade de energia (à esquerda) e o campo magnético (à direita) para $n = 1$. Com $l = 1$, seguido de valores cada vez maiores para $l$. As linhas tracejadas representam o limite compacto com $n = 1$.

Como no modelo anterior, a descontinuidade do campo magnético no limite compacto não apresenta nenhum problema, uma vez que também aqui, este problema é contornado pela presença da permeabilidade magnética generalizada $G(|\phi|)$.

# Capítulo 5

# Formalismo de Primeira Ordem para Vórtices

Neste capítulo, o foco é a Ref. [57], em que desenvolvemos um procedimento com o intuíto de encontrar a classe mais geral possível de densidades lagrangianas, que descrevam generalizações dos modelos Maxwell-Higgs abelianos, Chern-Simons-Higgs e Maxwell-Chern-Simons-Higgs. A investigação concentra-se na construção de modelos que suportam soluções do tipo vórtices relativísticos, descritos em $(2,1)$ dimensões no espaço-tempo, que obedeçam a condição de estresse nulo e que nos levem a equações diferenciais de primeira ordem, que são compatíveis com as equações de movimento. Como veremos, os resultados deste estudo revelaram vínculos que restringem a escolha das densidades lagrangianas, contudo nos ajudam a introduzir uma função auxiliar, que permite calcular a energia sem que a forma explícita das soluções sejam conhecidas.

## 5.1 Vórtices no Modelo Maxwell-Higgs Generalizados

Aqui a generalização se dá tomando a dinâmica não canônica [96]. Para tanto, consideraremos a ação generalizada para o campo escalar complexo $\varphi$ e o campo de gauge $A_\mu$, em $(2,1)$ dimensões no espaço-tempo, com métrica de Minkowski, $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+,-,-)$, ou seja,

$$S = \int d^3x \mathcal{L}(X, Y, |\varphi|), \tag{5.1}$$

sendo

$$X = \overline{D_\mu \varphi} D_\mu \varphi \qquad \text{e} \qquad Y = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \tag{5.2}$$

onde $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $\varphi$ é o campo escalar complexo e $A_\mu$ o campo de gauge. A barra sobre os objetos representa o complexo conjugado. A variação da ação (5.1), com relação aos campos $\varphi$ e $A_\mu$, nos dá as equações de movimento

$$D_\mu(\mathcal{L}_X D^\mu \varphi) = \frac{\varphi}{2|\varphi|}\mathcal{L}_{|\varphi|}, \tag{5.3a}$$

$$\partial_\mu(\mathcal{L}_Y F^{\mu\nu}) = J^\nu, \tag{5.3b}$$

sendo a corrente $J_\mu = ie\mathcal{L}_X(\overline{\varphi} D_\mu \varphi - \varphi \overline{D_\mu \varphi})$. Aqui, usamos a notação, $\mathcal{L}_X = \partial\mathcal{L}/\partial X$, $\mathcal{L}_Y = \partial\mathcal{L}/\partial Y$, e $\mathcal{L}_{|\varphi|} = \partial\mathcal{L}/\partial|\varphi|$. Podemos abrir as Eqs. (5.3) em componentes, da seguinte forma

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_X D_\mu D^\mu \varphi + 2\mathcal{L}_{XX} D^\mu \varphi \, \Re(\overline{D_\alpha \varphi} \partial_\mu D^\alpha \varphi) - \frac{1}{2}\mathcal{L}_{XY} D^\mu \varphi F_{\alpha\beta} \partial_\mu F^{\alpha\beta} \\ &= \frac{\varphi}{2|\varphi|}\mathcal{L}_{|\varphi|} - \mathcal{L}_{X|\varphi|} D^\mu \varphi \, \Re\left(\frac{\overline{\varphi}}{|\varphi|}\partial_\mu \varphi\right), \end{aligned} \tag{5.4a}$$

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_Y \partial_\mu F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{L}_{YY} F^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \partial_\mu F^{\alpha\beta} + 2\mathcal{L}_{YX} F^{\mu\nu} \, \Re(\overline{D_\alpha \varphi} \partial_\mu D^\alpha \varphi) \\ &= J^\nu - \mathcal{L}_{Y|\varphi|} F^{\mu\nu} \, \Re\left(\frac{\overline{\varphi}}{|\varphi|}\partial_\mu \varphi\right). \end{aligned} \tag{5.4b}$$

Nestas equações, $\Re(z)$ expressa a parte real de $z$. O tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ para este modelo generalizado é

$$T_{\mu\nu} = \mathcal{L}_Y F_{\mu\lambda} F^\lambda{}_\nu + \mathcal{L}_X(\overline{D_\mu \varphi} D_\nu \varphi + \overline{D_\nu \varphi} D_\mu \varphi) - \eta_{\mu\nu}\mathcal{L}. \tag{5.5}$$

Para soluções estáticas, a componente temporal da Eq. (5.4b), a qual é a versão da lei de Gauss para este modelo, é compatível com $A_0 = 0$. Portanto, os vórtices Maxwell-Higgs generalizados são eletricamente neutros [32, 88]. Desta forma, as

componentes do tensor energia-momento que sobrevivem são

$$
\begin{aligned}
T_{00} &= -\mathcal{L}, && (5.6a)\\
T_{12} &= T_{21}\mathcal{L}_X(\overline{D_1\varphi}D_2\varphi + \overline{D_2\varphi}D_1\varphi), && (5.6b)\\
T_{11} &= \mathcal{L}_Y B^2 + 2\mathcal{L}_X|D_1\varphi|^2 + \mathcal{L} && (5.6c)\\
T_{22} &= \mathcal{L}_Y B^2 + 2\mathcal{L}_X|D_2\varphi|^2 + \mathcal{L} && (5.6d)
\end{aligned}
$$

E, como usual, o *ansatz* para investigação de vórtices é

$$
\begin{aligned}
\varphi(r,\theta) &= g(r)e^{in\theta}, && (5.7a)\\
\vec{A} &= \frac{\hat{\theta}}{er}[a(r)-n], && (5.7b)
\end{aligned}
$$

sendo $r$ e $\theta$ as coordenadas polares e $n$ um número inteiro que representa a vorticidade. As condições de contorno, que as funções $a(r)$ e $g(r)$ devem obedecer, são

$$
g(0) = 0, \qquad a(0) = n, \qquad \lim_{r\to\infty} g(r) = v, \qquad \lim_{r\to\infty} a(r) = 0, \tag{5.8}
$$

e $v$ como sendo o parâmetro que assegura a quebra de simetria, de forma que os valores em $a(0) = n$ e $g(0) = 0$ evitam singularidades na origem, e os valores assintóticos $a(\infty) = 0$ e $g(\infty) = v$ garantem que a energia seja finita. Com o *ansatz* Eq. (5.7), as funções $X$ e $Y$ na Eq. (5.2) tornam-se

$$
X = -\left(g'^2 + \frac{a^2 g^2}{r^2}\right) \qquad \text{e} \qquad Y = -\frac{a'^2}{2e^2 r^2}, \tag{5.9}
$$

onde "$g'$" expressa a derivada da função $g$ com relação a $r$. Além disso, o campo magnético $B = -F^{12}$, como dado no capítulo 3, é $B = -a'/er$ e o fluxo magnético quantizado é

$$
\begin{aligned}
\Phi &= 2\pi\int_0^\infty r dr\, B(r)\\
&= \frac{2\pi}{e}n && (5.10)
\end{aligned}
$$

Com o *ansatz* dado pelas Eqs. (5.7), as Eqs. (5.3) tornam-se

$$\frac{(r\mathcal{L}_X g')'}{r} - \frac{\mathcal{L}_X a^2 g}{r^2} + \frac{1}{2}\mathcal{L}_{|\varphi|} = 0 \tag{5.11a}$$

$$r\left(\mathcal{L}_Y \frac{a'}{r}\right)' - 2e^2\mathcal{L}_X a g^2 = 0. \tag{5.11b}$$

Abrindo em componentes as equações acima, temos

$$\mathcal{L}_X g'' + \left(\mathcal{L}_{XX}X' + \mathcal{L}_{XY}Y' + \mathcal{L}_{X|\varphi|}g' + \frac{\mathcal{L}_X}{r}\right)g' - \frac{\mathcal{L}_X a^2 g}{r^2} + \frac{1}{2}\mathcal{L}_{|\varphi|} = 0, \tag{5.12a}$$

$$\mathcal{L}_Y a'' + \left(\mathcal{L}_{YX}X' + \mathcal{L}_{YY}Y' + \mathcal{L}_{Y|\varphi|}g' - \frac{\mathcal{L}_Y}{r}\right)a' - 2e^2\mathcal{L}_X a g^2 = 0, \tag{5.12b}$$

sendo

$$X' = -2\left(g'g'' + \frac{a^2 g g'}{r^2} + \frac{a a' g^2}{r^2} - \frac{a^2 g^2}{r^3}\right), \tag{5.13a}$$

$$Y' = -\frac{1}{e^2}\left(\frac{a'a''}{r^2} - \frac{a'^2}{r^3}\right). \tag{5.13b}$$

A componente $T_{00}$ do tensor energia-momento não sofre mudança com a introdução do *ansatz* Eqs. (5.7), ou seja, $T_{00} = -\mathcal{L}$. As componentes restantes tonam-se

$$T_{12} = \mathcal{L}_X\left(g'^2 - \frac{a^2 g^2}{r^2}\right)\mathrm{sen}(2\theta), \tag{5.14a}$$

$$T_{11} = \mathcal{L}_Y\frac{a'^2}{e^2 r^2} + 2\mathcal{L}_X\left(g'^2\cos^2\theta + \frac{a^2 g^2}{r^2}\mathrm{sen}^2\theta\right) + \mathcal{L}, \tag{5.14b}$$

$$T_{22} = \mathcal{L}_Y\frac{a'^2}{e^2 r^2} + 2\mathcal{L}_X\left(g'^2\mathrm{sen}^2\theta + \frac{a^2 g^2}{r^2}\cos^2\theta\right) + \mathcal{L}. \tag{5.14c}$$

Das equações acima, vemos que $T_{11} \neq T_{22}$. Mas, usando a matriz de rotação em coordenadas polares, é possível mostrar que $T_{r\theta} = 0$ e que,

$$T_{rr} = T_{\theta\theta} = \mathcal{L}_Y\frac{a'^2}{e^2 r^2} + 2\mathcal{L}_X\left(g'^2 + \frac{a^2 g^2}{r^2}\right) + \mathcal{L}. \tag{5.15}$$

Desta forma, vemos que em um sistema de coordenadas polares, as componentes espaciais do tensor energia-momento não dependem do ângulo $\theta$.

Na sequência, fazemos uma reescala na coordenada radial $r$, de tal forma que $r \to z = \lambda r$ e aplicamos nas funções $a(r)$ e $g(r)$. De modo que $X \to X^{(\lambda)} =$

$\lambda^2 X(z)$ e $Y \to Y^{(\lambda)} = \lambda^4 Y(z)$, onde $X(z)$ e $Y(z)$ são agora, funções da variável $z$. Substituindo essa reescala nas Eqs. (5.9), temos como resultado que a energia $E \to E^{(\lambda)}$ fica

$$E^{(\lambda)} = -2\pi \int_0^\infty r dr\, \mathcal{L}(X^{(\lambda)}, Y^{(\lambda)}, g^{(\lambda)}) \tag{5.16a}$$

$$= -2\pi \int_0^\infty r dr\, \lambda^{-2} \mathcal{L}(\lambda^2 X(z), \lambda^4 Y(z), g(z)). \tag{5.16b}$$

Assim, $E^{(\lambda)}$ deve ser minimizada para $\lambda = 1$. Logo, a condição $\partial E^{(\lambda)}/\partial\lambda|_{\lambda=1} = 0$ nos leva a

$$\int_0^\infty r dr\, (\mathcal{L} - \mathcal{L}_X X - 2\mathcal{L}_Y Y) = 0. \tag{5.17}$$

Portanto, sob reescala, a equação acima é uma condição para que as soluções sejam estáveis. Observando as componentes do tensor energia-momento, Eq. (5.14), para que $T_{\mu\nu}$ seja axialmente simétrico, ou seja, independente do ângulo $\theta$, devemos tomar

$$g'^2 = \frac{a^2 g^2}{r^2}. \tag{5.18}$$

Isto faz com que $X = -2g'^2 = -2a^2 g^2/r^2$. Levando isto em conta, observa-se da Eq. (5.14a), que $T_{12} = T_{21} = 0$ e que

$$T_{11} = T_{22} = \mathcal{L}_Y \frac{a'^2}{e^2 r^2} + 2\mathcal{L}_X g'^2 + \mathcal{L}. \tag{5.19}$$

Temos, da conservação do tensor energia-momento $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ que $T_{11} = T_{22} = C$, sendo $C$ uma constante. Então, para que a condição Eq. (5.17) seja satisfeita, devemos ter $T_{11} = T_{22} = 0$ concluindo que

$$\mathcal{L} - \mathcal{L}_X X - 2\mathcal{L}_Y Y = 0. \tag{5.20}$$

Esta última condição constitui um vínculo entre as funções $a(r)$, $g(r)$, $a'(r)$ e $g'(r)$. Derivando a expressão acima, encontramos

$$2g' \left[\frac{1}{r}(r\mathcal{L}_X g')' - \frac{\mathcal{L}_X a^2 g}{r^2} + \frac{1}{2}\mathcal{L}_{|\varphi|}\right] + \frac{a'}{e^2 r^2}\left[r\left(\mathcal{L}_Y \frac{a'}{r}\right)' - 2e^2 \mathcal{L}_X a g^2\right] = 0, \tag{5.21}$$

Nota-se que esta última expressão contém as equações de movimento Eqs. (5.11). Usando a Eq. (5.18) na (5.20), podemos escrever uma equação de primeira ordem para $a(r)$ na forma de uma expressão algébrica do tipo $M(a'/r, a/r, g) = 0$. Logo, a Eq. 5.20 é uma equação de primeira ordem.

O comportamento das soluções $a(r)$ e $g(r)$, próximo a origem, podem ser aproximados por

$$a_0(r) \approx n - \bar{a}_0(r) \qquad \text{e} \qquad g_0(r) \approx \bar{g}_0(r), \tag{5.22}$$

onde consideramos apenas os termos de primeira ordem em $\bar{a}_0(r)$ e $\bar{g}_0(r)$. Estas aproximações mais a Eq. (5.18), fornece a mesma expressão $g_0(r) \approx Ar^n$, dada pela Eq. (3.32a) da Sec. 3.1 do Cap. 3, independentemente de qualquer que seja a forma da densidade lagrangiana. Entretanto, o comportamento de $a_0(r)$ não é geral, é obtido através da Eq. (5.20), que depende explicitamente do modelo em consideração.

Para obter a densidade de energia $\varepsilon$, partimos do fato de que para esse sistema $T_{00} = -\mathcal{L} = \varepsilon$, onde $T_{00}$ é dado pela Eq. (5.6a). Portanto, substituindo a Eq. (5.18) na expressão para $\mathcal{L}$, Eq. (5.20) temos

$$\varepsilon = \mathcal{L}_Y \frac{a'^2}{e^2 r^2} + 2\mathcal{L}_X g'^2. \tag{5.23}$$

Vemos nesta última equação que a densidade de energia depende apenas das derivadas primeira das funções $a(r)$ e $g(r)$. Portanto, podemos escrever a densidade de energia da seguinte forma

$$\varepsilon = \mathcal{L}_Y \frac{a'}{e^2 r} \frac{a'}{r} + 2\mathcal{L}_X r\, g' \frac{g'}{r}. \tag{5.24}$$

Este é um fato de extremo interesse, pois permite o uso de uma função auxiliar $W = W(a, g)$, em que considera-se

$$W_a = \mathcal{L}_Y \frac{a'}{e^2 r} \qquad \text{e} \qquad W_g = 2\mathcal{L}_X r g', \tag{5.25}$$

lembrando que $W(a, g)$ deve obedecer ao vínculo $W_g = 2\mathcal{L}_X a g$ para ser compatível com a Eq. (5.18). Desta forma, a densidade de energia pode ser escrita como:

$$\varepsilon = \frac{1}{r} \frac{dW}{dr}, \tag{5.26}$$

e a energia total $E$ fica dada por

$$E = 2\pi |W[a(\infty), g(\infty)] - W[a(0), g(0)]|. \tag{5.27}$$

As condições de contorno das Eqs. (5.8) mostram que $E = 2\pi |W(0, v) - W(n, 0)|$. Esta é uma novidade importante do procedimento, em que mostra que o formalismo de primeira ordem não só facilita a tarefa de obter soluções, como também permite calcular a energia com exatidão, sem sequer conhecer as soluções para os campos $\varphi$

e $A_\mu$. A questão é como calcular $W = W(a, g)$. A resposta depende do modelo em consideração, como comentaremos mais adiante.

Antes de usar as equações de primeira ordem, é necessário verificar sua compatibilidade com as Eqs. (5.11). Em particular, tomando a raiz quadrada da Eq. (5.18), a qual resulta em $g' = ag/r$, a Eq. (5.12a) torna-se

$$\frac{a'}{r} g\mathcal{L}_X + \frac{ag}{r}\left(\mathcal{L}_{XX}X' + \mathcal{L}_{XY}Y' + \mathcal{L}_{X|\varphi|}\frac{ag}{r}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{L}_{|\varphi|} = 0, \tag{5.28}$$

onde $X'$ e $Y'$ indica a derivada radial das funções $X$ e $Y$ Eqs. (5.9). Usando a equação de primeira ordem Eq. (5.18) na Eq. (5.13a), obtemos

$$X' = -4\left[\frac{a^2g^2}{r^3}(a-1) + \frac{aa'g^2}{r^2}\right]. \tag{5.29}$$

Como usamos a equação de movimento Eq. (5.11a), para encontrar o vínculo Eq. (5.28), poderíamos deduzir que a equação de movimento Eq. (5.11b) nos levaria a outro vínculo. No entanto, sendo a Eq. (5.28) satisfeita e usando as equações de primeira ordem Eq. (5.18) e Eq. (5.20), vemos, a partir da Eq. (5.21), que a equação de movimento Eq. (5.11b) é diretamente satisfeita. Portanto, a compatibilidade entre as equações de primeira ordem e as equações de movimento é verificada.

A Eq. (5.28) mostra que nem toda densidade lagrangiana suporta soluções com stress nulo. As densidades de lagrangiana que atendam a tais soluções nos dão uma equação na forma $I(a'', a', a, g, r) = 0$. No entanto, se for possível, pode-se usar a equação de primeira ordem, Eq. (5.20) para isolar $a'$ como uma função de $a$, $g$ e $r$, de modo que a Eq. (5.28) torne uma restrição na forma $I(a, g, r) = 0$. Em geral, esse vínculo só pode ser testado, depois que as soluções das equações de primeira ordem Eq. (5.18) e Eq. (5.20) forem encontradas e fazendo $I(a, g, r) = 0$. Um modo de saber se as soluções satisfazem o vínculo, *a priori*, é interpretá-la como uma equação diferencial. Isso pode ser feito, considerando as densidades lagrangianas, que levam a um vínculo, que resulta em uma equação diferencial cuja variável é $g$. Isso acontece quando a restrição $I(a, g, r) = 0$ depende apenas de $g$. Neste caso, é possível calcular como o campo escalar se insere na densidade lagrangiana. No entanto, o termo com $\mathcal{L}_{XX}$ e $\mathcal{L}_{XY}$ tornam a construção de modelos analíticos muito difícil, porque não é possível escrever explicitamente $r$ e $a$ em termos de $g$. A seguir mostraremos um caso para esclarecer esta discussão.

### 5.1.1 Modelo com Abordagem Numérica

Um exemplo que podemos considerar é a densidade lagrangiana,

$$\mathcal{L} = -\alpha X^2 + Y - V(|\varphi|), \tag{5.30}$$

sendo $\alpha$ uma constante real. Substituindo a densidade lagrangiana dada acima na Eq. (5.28), esta torna-se

$$12\alpha\frac{a^2g^3}{r^3}a' + 8\alpha\frac{a^3g^3}{r^4}(a-1) = \frac{1}{2}V_{|\varphi|}, \tag{5.31}$$

lembrando que estamos considerando a Eq. (5.18). Podemos tentar eliminar $r$ e $a$ na equação acima. Para isto, usamos a equação Eq. (5.20), a qual nos dá

$$\frac{1}{2e^2}\frac{a'^2}{r^2} = V - 4\alpha\frac{a^4g^4}{r^4}. \tag{5.32}$$

Esta última expressão pode ser escrita como $a' = er\sqrt{2V - 8\alpha a^4g^4/r^4}$ que, quando substituída na Eq. (5.31), temos

$$-12\alpha e\frac{a^2g^3}{r^2}\sqrt{2V - 8\alpha\frac{a^4g^4}{r^4}} + 8\alpha\frac{a^3g^3}{r^4}(a-1) = \frac{1}{2}V_g. \tag{5.33}$$

Portanto, embora seja possível resolver o problema usando as equações de primeira ordem Eq. (5.18) e Eq. (5.32), é impossível encontrar um potencial para a Eq. (5.33) analiticamente, visto que $r$ e $a$ aparecem na restrição acima. É claro que é possível usar uma abordagem numérica para calcular o potencial da equação acima, de forma que a densidade lagrangiana que atenda a restrição acima, seja apenas numérica, ou seja, sem uma expressão analítica para o potencial. Observe que, se a solução é conhecida, pode-se escrever $r$ e $a$ como funções de $g$ e determinar o potencial na equação acima. Entretanto, o objetivo deste trabalho é encontrar uma classe mais geral de densidades lagrangianas, que permitam o cálculo da energia sem que as soluções analíticas, na ausência de stress, sejam conhecidas. Então, vemos que a única possibilidade de fazê-lo é tomando expressões lineares em $X$, com um fator que dependa apenas do campo escalar.

### 5.1.2 Modelo com Abordagem Analítica

Propomos a seguinte densidade lagrangiana:

$$\mathcal{L} = K(|\varphi|)X + G(Y, |\varphi|). \tag{5.34}$$

Com a expressão acima, a Eq. (5.28) passa a ser

$$\frac{a'g}{r}K + \frac{1}{2}G_{|\varphi|} = 0. \tag{5.35}$$

Usando a Eq. (5.20) obtemos

$$G - 2YG_Y = 0. \tag{5.36}$$

Esta é uma equação algébrica para $Y$ em função de $\varphi$ e aqui, recordamos a recente investigação [54], que lida com questões semelhantes. Portanto, podemos usar a forma explícita de $Y$ na Eq. (5.9) fazendo

$$-Y = \frac{1}{2e^2}\frac{a'^2}{r^2} = V_{eff}(|\varphi|), \tag{5.37}$$

onde $V_{eff}(|\varphi|)$ é o potencial efetivo associado ao modelo proposto. Com a expressão acima pode-se escrever uma equação de primeira ordem para a função $a(r)$ dada por

$$a'/r = -e\sqrt{2V_{eff}}, \tag{5.38}$$

que, quando substituída na Eq. (5.35), nos dá um novo vínculo entre as funções $K(|\varphi|$, $V_{eff}(|\varphi|)$ e $\varphi$ da seguinte forma,

$$2egK\sqrt{2V_{eff}} - G_{|\varphi|} = 0. \tag{5.39}$$

Aqui, $G_{|\varphi|}$ é uma função apenas da variável $g$, pois sua dependência implícita com $Y$ é agora escrita, em termos do potencial efetivo, como dado na Eq. (5.37). Esta equação pode ser usada para construir a densidade lagrangiana. Note que só usamos a Eq. (5.11a). Neste caso, pode-se mostrar que as Eqs. (5.18), (5.36), (5.37) e a restrição Eq. (5.39) resolvem, automaticamente, a equação de movimento Eq. (5.11b), como esperado da Eq. (5.21). Para as densidades lagrangianas escritas na forma da Eq. (5.34), usamos as Eqs. (5.25), combinadas com as equações Eq. (5.18) e Eq. (5.38) e encontramos a função

$$W(a,g) = -\frac{a}{e}\left(G_Y\sqrt{-2Y}\right)_{Y=-V_{eff}}, \tag{5.40}$$

desde que esta atenda a restrição Eq. (5.39). Assim, se o potencial efetivo é conhecido, a energia pode ser calculada analiticamente. Este resultado mostra que para modelos na forma da Eq. (5.34), a função $W = W(a,g)$ é dada pela expressão Eq. (5.40).

Para exemplificar, tomemos o modelo Maxwell-Higgs padrão, em que

$$K(|\varphi|) = 1 \qquad \text{e} \qquad G(Y,|\varphi|) = Y - V(|\varphi|). \tag{5.41}$$

Para encontrar o potencial efetivo que surge do vínculo Eq. (5.39), deve-se primeiro

resolver a Eq. (5.36) para $-Y$, que, referente à esse modelo, nos dá $V_{eff}(|\varphi|) = V(|\varphi|)$. E, usando a Eq. (5.39), pode-se mostrar que o único potencial que é permitido para este caso padrão é o potencial

$$V(|\varphi|) = \frac{e^2}{2}(v^2 - |\varphi|^2)^2. \tag{5.42}$$

Com este potencial as equações de primeira ordem são

$$g' = \frac{ag}{r} \qquad \text{e} \qquad \frac{a'}{r} = -e^2(v^2 - g^2). \tag{5.43}$$

E, a densidade de energia $\varepsilon = T_{00}$, onde $T_{00}$ é dado pela Eq. (5.6a), torna-se

$$\begin{aligned} \varepsilon &= -X - Y + V \\ &= \frac{2}{e^2}\frac{a^2 g^2}{r^2} + e^2(v^2 - g^2)^2. \end{aligned} \tag{5.44a}$$

Este é o modelo Maxwell-Higgs, o primeiro modelo relativístico considerado para vórtices. Suas soluções foram estudadas por análise numérica nas Refs. [32, 46, 88], com energia total $E$ dada por $E = 2\pi|n|v^2$.

#### 5.1.2.1 Exemplo

Considerando a classe de modelos da Eq. (5.34), é possível generalizar o modelo original com uma função geral $K(|\varphi|)$ e

$$G(Y, |\varphi|) = -P(|\varphi|)(-Y)^s - V(|\varphi|), \tag{5.45}$$

onde $s$ é uma constante real tal que $s > 1/2$. O caso padrão é facilmente obtido fazendo-se $P(|\varphi|) = K(|\varphi|) = 1$, com $s = 1$.

Neste novo caso, o potencial efetivo obtido através da Eq. (5.36) é

$$V_{eff}(|\varphi|) = \left(\frac{V(|\varphi|)}{(2s-1)P(|\varphi|)}\right)^{\frac{1}{s}}. \tag{5.46}$$

O vínculo Eq. (5.39), em termos do potencial efetivo dado acima torna-se

$$\left(2V_{eff}\frac{dP}{dg} + (2s-1)P\frac{dV_{eff}}{dg}\right) s\, V_{eff}^{s-1} = -2egK\sqrt{2V_{eff}}, \tag{5.47}$$

que nos leva a um potencial do tipo

$$V(|\varphi|) = (2s-1)P(|\varphi|)\left(\frac{ev^2 - e\int_0^{|\varphi|} d\tilde{g}\, 2\,\tilde{g}\, K(\tilde{g})}{s\sqrt{2}\, P(|\varphi|)}\right)^{\frac{2s}{2s-1}}, \tag{5.48}$$

também aqui, $v$ é o parâmetro envolvido com a quebra de simetria. Nota-se, na equação acima, que não podemos escolher qualquer função $P(|\varphi|)$. Devido a sua relação com $V(|\varphi|)$, $P(|\varphi|)$ deve ser uma função que permita a quebra espontânea de simetria do potencial. Impomos então que $V(v) = 0$. Nesse caso, as equações de primeira ordem são

$$g' = \frac{ag}{r} \tag{5.49a}$$

$$\frac{a'}{r} = -e\left(\frac{ev^2 - e\int_0^{g} d\tilde{g}\, 2\,\tilde{g}\, K(\tilde{g})}{s\, 2^{(1-s)}\, P(g)}\right)^{\frac{1}{2s-1}}. \tag{5.49b}$$

Para elucidar este exemplo, tomemos

$$s = \frac{2}{3}, \qquad P(|\varphi|) = \alpha, \qquad K(|\varphi|) = l\left(\frac{|\varphi|}{v}\right)^{2(l-1)}, \tag{5.50}$$

onde $\alpha$ é uma constante que mantém a dimensão do termo $P(|\varphi|)(-Y)^s$ fixo, e $l$ é um parâmetro real, tal que $l \geq 1$. Neste caso, o potencial Eq. (5.48) torna-se

$$V(|\varphi|) = \frac{27e^4v^8}{64\alpha^3}\left[1 - \left(\frac{|\varphi|}{v}\right)^{2l}\right]^4. \tag{5.51}$$

O potencial acima lembra o estudado na Ref. [55], que foi usado para compactificar soluções do tipo kink. Este roteiro proposto nos levou ao estudo de vórtices compactos, na referência [56]. No entanto, nesta última referência, a compactificação só acontece por conta da permeabilidade magnética $G(|\varphi|)$, que aqui chamamos de função $P(|\varphi|)$, de forma que a função $K(|\varphi|)$, na Ref. [56], não desempenhava nenhum papel. Aqui, mostramos como a função $K(|\varphi|)$ trabalha para alterar o comportamento dos vórtices através do parâmetro $l$, deixando $P(|\varphi|)$ inalterado.

O potencial Eq. (5.51) tem seus mínimos localizados em $|\varphi| = v$ e seu máximo local em $|\varphi| = 0$, tal que $V_{max} = V(0) = 27e^4v^8/64\alpha^3$. Esse comportamento não muda, independentemente da escolha do valor de $l$. Na Fig. 5.1, mostramos o potencial acima para $e, v, \alpha = 1$, $l = 1$ e valores de $l$ cada vez maiores. Pode-se ver que um platô aparece entre $0 > |\varphi| \leq v$ e se torna mais amplo à medida que $l$ aumenta.

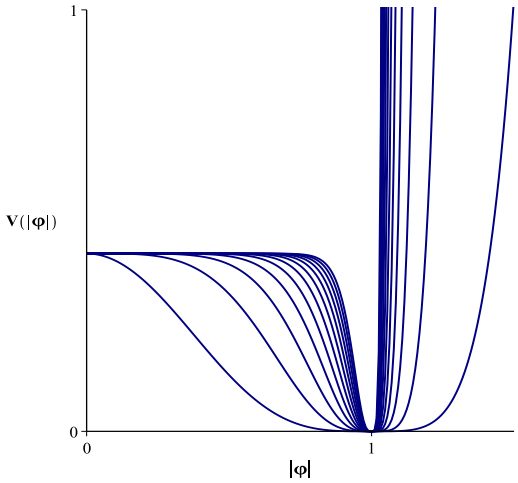


Figura 5.1: Potencial da Eqs. (5.51), com $e, v, \alpha, n = 1$, com $l = 1, 2, 3, \cdots, 12$.

Dada as escolhas Eq. (5.50), as equações de primeira ordem Eqs. (5.49) são escritas como

$$g' = \frac{ag}{r}, \tag{5.52a}$$

$$\frac{a'}{r} = -\frac{27e^4v^6}{16\alpha^3}\left[1 - \left(\frac{g}{v}\right)^{2l}\right]^3. \tag{5.52b}$$

O comportamento destas soluções próximo à origem, usando as Eqs. (5.22), é

$$a_0(r) \approx n - \frac{27e^4v^6}{32\alpha^3}r^2 \qquad \text{e} \qquad g_0(r) \approx Ar^n, \tag{5.53}$$

onde $A$ é uma constante real a ser ajustada à curva. Encontrar soluções analíticas para este conjunto de equações de primeira ordem Eq. (5.52) não é uma tarefa fácil. Então, continuamos nossa investigação numericamente. No entanto, usando as equações de primeira ordem aproximadas Eqs. (5.53), conseguimos encontrar as expressões analíticas quando $l \to \infty$ para $a_c(r)$ e $g_c(r)$, dadas por

$$a_c(r) = \begin{cases} n - \frac{27e^4v^6}{32\alpha^3}r^2, & r \le r_c \\ 0, & r > r_c. \end{cases} \tag{5.54a}$$

$$g_c(r) = \begin{cases} v\left(\frac{r}{r_c}\right)^n \exp\left(\frac{27e^4v^6}{64\alpha^3}(r_c^2 - r^2)\right), & r \le r_c \\ v, & r > r_c. \end{cases} \tag{5.54b}$$

Nas expressões acima $r_c = 4\sqrt{6\alpha^3 n}/(9e^2v^3)$ é o raio de compactificação que ocorre quando ambas as funções $a_c(r)$ e $g_c(r)$ alcançam os valores assintóticos em um valor

de $r$ finito. No entanto, elas não são diferenciáveis, assim não temos soluções para as equações de movimento para $r \to \infty$. Contudo, na Fig. 5.2 mostramos as soluções numéricas para $e, v, \alpha, n = 1$ e valores de $l$ cada vez maiores, incluindo $a_c(r)$ e $g_c(r)$ para ilustrar como as soluções se comportam.

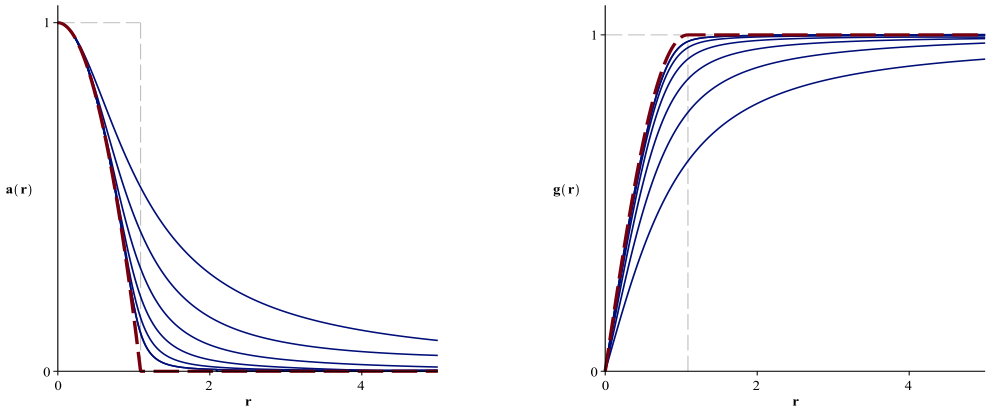


Figura 5.2: As funções: $a(r)$ (à esquerda) e $g(r)$ (à direita), Eqs. (5.52) considerando as Eqs. (5.50), com $e, v, \alpha, n = 1$ e $l = 1, 2, 4, 8, 16, 32$ linhas cheias e as Eqs. (5.54), linha tracejada.

O campo magnético dado por $B(r) = -a'/(er)$ também é calculado, numericamente, para um valor de $l$ geral e é mostrado na Fig. 5.3 para vários valores de $l$.

Para obter a expressão para a densidade de energia, usamos a Eq. (5.6a) que nos dá

$$\varepsilon(r) = \alpha \left( \frac{a'}{\sqrt{2}\, e\, r} \right)^{\frac{4}{3}} + 2l \left( \frac{g}{v} \right)^{2(l-1)} g'^2 + \frac{27 e^4 v^8}{64 \alpha^3} \left( 1 - \left( \frac{g}{v} \right)^{2l} \right)^4 . \tag{5.55}$$

A equação acima deve ser combinada com as soluções numéricas das equações de primeira ordem Eqs. (5.52). Na Fig. 5.3, mostramos esta densidade de energia. Vemos que esta densidade de energia tende a tornar-se uniforme dentro do espaço compacto $0 > r \leq r_c$, à medida que o parâmetro $l$ torna-se cada vez maior. A região em que $1 > l \leq 2$ mostra o comportamento da densidade de energia próximo à origen, o que não é perturbativo em $l$ para $r \to 0$. Isto pode ser verificado analiticamente com a ajuda das expressões para as funções $a(r)$ e $g(r)$ próximo à origem, como dadas nas Eqs. (5.53), que nos conduzem a

$$\varepsilon_r^{r \approx 0}(r) = \frac{81 e^4 v^8}{64 \alpha^3} + 2 n^2 v^2 l \beta^{2l} r^{2(nl-1)} + \frac{27 e^4 v^8}{64 \alpha^3} (1 - \beta^{2l} r^{2nl})^4, \tag{5.56}$$

onde $\beta = A/v$. A expressão acima mostra que, para um $n = 1$ e $l = 1$, $\varepsilon_1^{r \approx 0}(0) =$

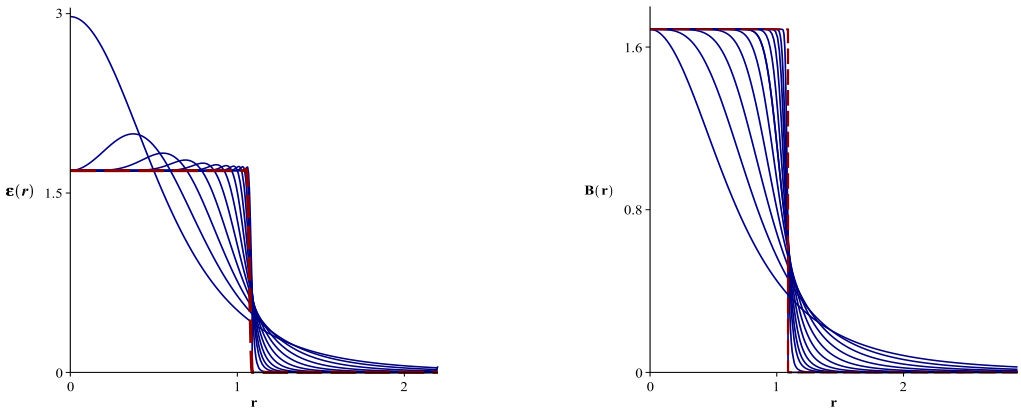


Figura 5.3: O campo magnético $B(r) = -a'/(er)$ (à direita) e a densidade de energia Eq. (5.55) (à esquerda), ambas associadas as Eqs. (5.52) considerando as condições Eqs. (5.50), com $e, v, \alpha, n = 1$ e $l = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 2048$, linhas cheias e o limite assintótico $l \to \infty$ e a expressão, (5.54), linha tracejada.

$27e^4v^8/(16\alpha^3) + 2v^2\beta^2$, e para $n = 1$ e $l \neq 1$, $\varepsilon_l^{r\approx 0} = 27e^4v^8/(16\alpha^3)$. Vemos então que, perto da origem, o comportamento da densidade de energia como função de $l$ não é perturbativo. Vale ressaltar que, sem usar o formalismo de primeira ordem generalizado Eq. (5.27), a energia pode ser calculada através de integração numérica onde obtem-se $E \approx 2\pi$ para $e, v, \alpha, n = 1$. Mostraremos, no final desta seção, que essa energia também pode ser calculada facilmente por integração direta com o uso da função auxiliar $W(a, g)$ definida pela Eq. (5.40). Para enfatizar o comportamento da configuração de vórtices descrita acima, na Fig. 5.4, mostramos a densidade de energia no plano $(r, \theta)$ para alguns valores de $l$, incluindo o limite de um valor de $l \to \infty$.

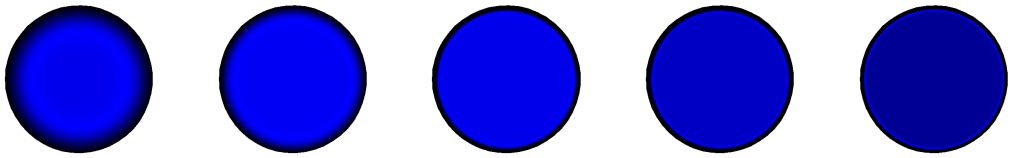

Figura 5.4: A densidade de energia Eq. (5.55), associadas as Eqs. (5.52), mostradas no plano $r, \theta$, com $e, v, \alpha, n = 1$ e $l = 8, 32, 256$, e um valor de $l \to \infty$.

A partir dos resultados mostrados na Fig. 5.4, em que a cor azul representa a densidade de energia no plano, vemos da esquerda para a direita que o efeito de aumentar $l$ faz com que o vórtice encolha para uma região compacta, semelhante a um disco encolhendo suavemente, e isso é diferente do caso da configuração do vórtice de Chern-Simons, que estudaremos na próxima subseção.

#### 5.1.2.2 Outro Exemplo

Outra possibilidade é estudar um modelo de Born-Infeld, inspirado na Ref. [97], que lembra o modelo para kinks, ALTW [98] e Ref. [54]. Para fazer isso, tomamos $K(|\varphi|) = 1$ e escrevemos

$$G(Y, |\varphi|) = M^2 - M^2\sqrt{\left(1 + \frac{2V(|\varphi|)}{m^2}\right)\left(1 - \frac{2Y}{M^2}\right)}. \tag{5.57}$$

Neste caso, usando a Eq. (5.36), temos o potencial efetivo dado por

$$V_{eff}(|\varphi|) = V(|\varphi|). \tag{5.58}$$

O vínculo Eq. (5.39) torna-se o mesmo do caso padrão, o qual nos dá o potencial dado pela Eq. (5.42) e as equações de primeira ordem Eqs. (5.43). Pode-se mostrar, com o uso da Eq. (5.6a), que a densidade de energia é

$$\begin{aligned} \varepsilon &= X + M^2\sqrt{\left(1 + \frac{2V(|\varphi|)}{m^2}\right)\left(1 - \frac{2Y}{M^2}\right)} - M^2 \\ &= \frac{2}{e^2}\frac{a^2 g^2}{r^2} + e^2(v^2 - g^2)^2. \end{aligned} \tag{5.59}$$

Então, como esse modelo e o modelo usual dado pela Eq. (5.41) admitem as mesmas soluções com estresse nulo e a mesma expressão para a densidades de energia, eles são chamados de modelos gêmeos.

Voltamos agora à questão do cálculo da função $W$, considerando a energia dos modelos apresentados acima, que são todos da classe da Eq. (5.34). Mostramos na Eq. (5.27) que é possível usar a função $W = W(a, g)$ para o cálculo da energia sem conhecer a forma explícita das soluções. Usando a Eq. (5.40), temos a função $W$ para o modelo Eq. (5.45) dada por

$$W(a, g) = a\left(\int_0^g d\tilde{g}\, 2\,\tilde{g}\, K(\tilde{g}) - v^2\right), \tag{5.60}$$

Com a sugestão dada pela Eq. (5.50) a função $W$ torna-se

$$W = -av^2\left(1 - \left(\frac{g}{v}\right)^{2l}\right). \tag{5.61}$$

Finalmente, para o modelo Born-Infeld, Eq. (5.57), temos

$$W = a(g^2 - v^2). \tag{5.62}$$

Em todos os casos, consideramos $W(0,v) = 0$ o valor obtido para energia é $E = 2\pi|n|v^2$, ou seja, o mesmo valor obtido para o modelo usual dado pela Eq. (5.41). Na sequência, considerando este formalismo de primeira ordem, vamos introduzir os vórtices Chern-Simons-Higgs.

## 5.2 Vórtices no Modelo Chern-Simons-Higgs Generalizados

Consideraremos agora a ação mais geral para o sistema de Chern-Simons:

$$S = \int d^3x \left[\mathcal{L}(X,|\varphi|) + \frac{\kappa}{4}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}A_\alpha F_{\beta\gamma}\right], \tag{5.63}$$

onde $X$ é definido como na Eq. (5.2) e o último termo entre colchetes é o termo de Chern-Simons. Devemos atentar ao fato que não podemos considerar uma generalização do termo de Chern-Simons nesta densidade lagrangiana, pois a invariância de gauge seria quebrada. A variação da ação Eq. (5.63), em relação aos campos $\varphi$ e $A_\mu$, nos dá as equações de movimento

$$D_\mu(\mathcal{L}_X D^\mu\varphi) = \frac{\varphi}{2|\varphi|}\mathcal{L}_{|\varphi|}, \tag{5.64a}$$

$$\frac{\kappa}{2}\epsilon^{\lambda\mu\nu}F_{\mu\nu} = J^\lambda, \tag{5.64b}$$

onde a corrente é $J_\mu = ie\mathcal{L}_X(\overline{\varphi}D_\mu\varphi - \varphi\overline{D_\mu\varphi})$. Abrindo em componentes, a equação do campo escalar $\varphi$ Eq. (5.64a), obtem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X D_\mu D^\mu\varphi + 2\mathcal{L}_{XX}\,\Re\left(\overline{D_\alpha\varphi}\partial_\mu D^\alpha\varphi\right)D^\mu\varphi &+ \mathcal{L}_{X|\varphi|}\,\Re\left(\frac{\overline{\varphi}}{|\varphi|}\partial_\mu\varphi\right)D^\mu\varphi \\ &= \frac{\varphi}{2|\varphi|}\mathcal{L}_{|\varphi|}.\end{aligned} \tag{5.65}$$

O tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$, para o modelo generalizado Eq. (5.63), é dado por

$$T_{\mu\nu} = \mathcal{L}_X(\overline{D_\mu\varphi}D_\nu\varphi + \overline{D_\nu\varphi}D_\mu\varphi) - \eta_{\mu\nu}\mathcal{L}. \tag{5.66}$$

As componentes do tensor energia-momento para soluções estáticas são dadas por

$$
\begin{aligned}
T_{00} &= 2\,\mathcal{L}_X\, e^2\, A_0^2\, |\varphi|^2 - \mathcal{L}, && \text{(5.67a)}\\
T_{01} &= -A_0 J_1 \quad \text{e} \quad T_{02} = -A_0 J_2, && \text{(5.67b)}\\
T_{12} &= T_{21} = \mathcal{L}_X(\overline{D_1\varphi} D_2\varphi + \overline{D_2\varphi} D_1\varphi), && \text{(5.67c)}\\
T_{11} &= 2\,\mathcal{L}_X |D_1\varphi|^2 + \mathcal{L}, && \text{(5.67d)}\\
T_{22} &= 2\,\mathcal{L}_X |D_2\varphi|^2 + \mathcal{L}, && \text{(5.67e)}
\end{aligned}
$$

No caso de soluções estáticas, diferentemente dos vórtices de Maxwell estudado na seção anterior, não podemos, para a lei de Gauss - componente Temporal da Eq. (5.64b), tomar $A_0 = 0$. Portanto, os vórtices Chern-Simons-Higgs são eletricamente carregados. O fato de que $A_0 \neq 0$ implica em $T_{01}$ e $T_{02}$ diferentes de zero, tornando os vórtices Chern-Simons com momento também diferente de zero. Tomamos o *ansatz* Eqs. (5.7) e as condições de contorno Eqs. (5.8), consideramos $A_0$ uma função que dependa apenas da coordenada radial $r$ e o campo elétrico como dado por $(E_x, E_y) \equiv E^i = \partial^i A_0 = -A_0' x^i/r$. Neste caso,

$$
X = e^2 g^2 A_0^2 - (g'^2 + a^2 g^2/r^2), \tag{5.68}
$$

como não alteramos o ansatz, o campo magnético continua sendo $B = -F_{12} = -a'/(er)$ e o fluxo magnético também obedece à quantização na Eq. (5.10). Da componente temporal da Eq. (5.64b), nota-se que $A_0$ obedece ao vínculo,

$$
A_0 = \frac{\kappa}{2\mathcal{L}_X e^2}\frac{B}{|\varphi|^2}. \tag{5.69}
$$

Este vínculo é o responsável pelos vórtices Chern-Simons serem carregados [13, 14]. A carga elétrica é dada por $Q = 2\pi \int r dr J^0$. A equação acima nos permite escrever a carga em termos do fluxo magnético Eq. (5.10) como

$$
\begin{aligned}
Q &= -\kappa\Phi && \text{(5.70)}\\
&= -\frac{2\kappa\pi}{e} n
\end{aligned}
$$

desta forma, mostra-se que a carga elétrica é uma quantidade quantizada. As equações de movimento Eqs. (5.64), com o *ansatz* Eqs. (5.7), e considerando $A_0 = A_0(r)$, são

$$\frac{(r\mathcal{L}_X g')'}{r} + \mathcal{L}_X\, g\left(e^2A_0^2 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{L}_{|\varphi|} = 0, \tag{5.71a}$$

$$\frac{a'}{r} + \frac{2\mathcal{L}_X e^3 g^2 A_0}{\kappa} = 0, \tag{5.71b}$$

$$A_0' + \frac{2\mathcal{L}_X e a g^2}{\kappa r} = 0. \tag{5.71c}$$

A equação de movimento para o campo escalar Eq. (5.71a) pode ser expandida, como feito com a Eq. (5.65). Isso resulta em

$$\mathcal{L}_X g'' + \left(\mathcal{L}_{XX}X' + \mathcal{L}_{X|\varphi|}g' + \frac{\mathcal{L}_X}{r}\right)g' + \mathcal{L}_X g\left(e^2A_0^2 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{L}_{|\varphi|}. \tag{5.72}$$

Ao analisar as componentes do tensor energia-momento, encontramos outra diferença entre esse modelo e o estudado na seção anterior. Lá, a componente $T_{00}$ não sofria mudança na sua forma explícita, pois independente do *ansatz* $T_{00} = -\mathcal{L}$. Aqui, devido ao fato de que $A_0 \neq 0$, a introdução do *ansatz* Eqs. (5.7) provoca uma mudança na forma explícita da componente $T_{00}$ da Eq. (5.67a). Portanto, as componentes do tensor energia-momento para este modelo Eqs. (5.67), considerando as Eqs. (5.7), são

$$T_{00} = 2\mathcal{L}_X e^2 g^2 A_0^2 - \mathcal{L}, \tag{5.73a}$$

$$T_{01} = -2\mathcal{L}_X \frac{eag^2A_0}{r} sen\theta, \tag{5.73b}$$

$$T_{02} = 2\mathcal{L}_X \frac{eag^2A_0}{r} cos\theta, \tag{5.73c}$$

$$T_{12} = T_{21} = \mathcal{L}_X\left(g'^2 - \frac{a^2g^2}{r^2}\right) sen(2\theta), \tag{5.73d}$$

$$T_{11} = 2\mathcal{L}_X\left(g'^2 cos^2\theta + \frac{a^2g^2}{r^2} sen^2\theta\right) + \mathcal{L}, \tag{5.73e}$$

$$T_{22} = 2\mathcal{L}_X\left(g'^2 sen^2\theta + \frac{a^2g^2}{r^2} cos^2\theta\right) + \mathcal{L}. \tag{5.73f}$$

Agora, usamos o mesmo procedimento, como feito na seção anterior, para soluções com tensão nula e reescala da energia. A condição de tensão nula nos conduz a $T_{12} = T_{21} = 0$, a qual resulta na Eq. (5.18) e no reescalamento na energia, para

mostrar que $T_{11} = T_{22} = 0$, nos leva a

$$\mathcal{L} + 2\mathcal{L}_X\, g'^2 = 0. \tag{5.74}$$

Pode-se derivar a equação acima em relação a $r$, usar a equação de primeira ordem Eq. (5.18) e a versão da Lei de Gauss Eq. (5.71b) para obter

$$2g'\left(\frac{(r\mathcal{L}_X g')'}{r} + \mathcal{L}_X\, g\left(e^2A_0^2 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{L}_{|\varphi|}\right) - \frac{\kappa a'}{er}\left(A_0' + \frac{2\mathcal{L}_X e a g^2}{\kappa r}\right) = 0. \tag{5.75}$$

A equação acima apresenta o mesmo fato que na Eq. (5.21) para os vórtices de Maxwell-Higgs: contém as equações de movimento Eqs. (5.71), exceto a lei de Gauss Eq. (5.71b), que foi obtida com o auxílio da Eq. (5.69). Considerando as equações de primeira ordem, Eqs. (5.74), (5.18) e (5.71b), podemos escrever a densidade de energia Eq. (5.73a) como

$$\varepsilon = \frac{\kappa^2}{2\mathcal{L}_X e^4 g^2}\frac{a'^2}{r^2} + 2\mathcal{L}_X g'^2. \tag{5.76}$$

Então, também como nos vórtices de Maxwell, vemos que a densidade de energia depende apenas das derivadas das funções $a(r)$ e $g(r)$. Logo, podemos usar a função auxiliar $W = W(a, g)$ e tomar

$$W_a = \frac{\kappa^2}{2\mathcal{L}_X e^4 g^2}\frac{a'}{r} \qquad \text{e} \qquad W_g = 2\mathcal{L}_X\, r g'. \tag{5.77}$$

No entanto, como já foi mencionado, $W$ deve obedecer ao vínculo $W_g = 2\mathcal{L}_X a g$ para ser compatível com a Eq. (5.18). Além disso, a Eq. (5.71b) nos permite escrever $W_a = -\kappa A_0/e$. Neste caso, a densidade de energia pode ser escrita como

$$\varepsilon = \frac{1}{r}\frac{dW}{dr}, \tag{5.78}$$

e a energia total é dada por

$$E = 2\pi|W[a(\infty), g(\infty)] - W[a(0), g(0)]|. \tag{5.79}$$

Devido a semelhança no procedimento deste caso, com aquele estudado na seção anterior, omitimos aqui alguns detalhes do procedimento de se chegar a energia total $E$.

A condição de tensão nula fornece as equações de primeira ordem Eqs. (5.18) e Eq. (5.74). No entanto, precisamos encontrar soluções para três funções: $A_0(r)$, $a(r)$ e $g(r)$. Assim, devemos usar as Eqs. (5.18) e Eq. (5.74) com uma das equações de movimento Eq. (5.71) para resolver o problema. Nota-se então que duas das equações de movimento constituem um vínculo que relacionam estas funções. Mas, antes de prosseguir, deve-se verificar a compatibilidade das equações de primeira ordem Eq. (5.18) e Eq. (5.74) com as equações de movimento Eqs. (5.71). Usando $g' = ag/r$ na Eq. (5.72) ficamos com

$$\frac{ag}{r}\mathcal{L}_{XX}X' + e^2 A_0\, g\mathcal{L}_X\left(A_0 - \frac{2e}{\kappa}g^2\mathcal{L}_X\right) + \frac{a^2g^2}{r^2}\mathcal{L}_{X|\varphi|} + \frac{1}{2}\mathcal{L}_{|\varphi|} = 0, \tag{5.80}$$

onde $X'$ representa a derivada radial da função $X$. Usando a Eq. (5.75), pode-se mostrar que a equação de primeira ordem Eq. (5.18) junto com a Eq. (5.74) e a equação de movimento Eq. (5.71b), nos modelos que obedecem a equação acima, implicam que a equação de movimento Eq. (5.71c) seja automaticamente resolvida. Além disso, com argumentos semelhantes à seção anterior, obtemos da Eq. (5.80), que um caminho para construir analiticamente a densidade lagrangiana é considerar nesta, apenas modelos com dependência linear em $X$. Portanto, até o momento, a densidade lagrangiana mais geral que permite ser construída analiticamente é

$$\mathcal{L} = K(|\varphi|)X - V(|\varphi|), \tag{5.81}$$

onde $K(|\varphi|)$ é uma função adimensional. Este modelo foi estudado na Ref. [95]. No entanto, daremos aqui uma outra abordagem no estudo da densidade lagrangiana acima. Neste caso, a Eq. (5.80) torna-se

$$e^2A_0^2\, gK - \frac{2e^3}{\kappa}g^3A_0K^2 + \frac{1}{2}e^2A_0^2\, g^2K_g - \frac{1}{2}V_g = 0. \tag{5.82}$$

Da Eq. (5.74), obtemos a equação

$$eA_0 = \sqrt{\frac{V(g)}{g^2K(g)}}. \tag{5.83}$$

Colocando a equação acima na Eq. (5.82), pode-se mostrar que o potencial e a função $K(|\varphi|)$ estão relacionados pela equação

$$\frac{d}{dg}\left(\sqrt{\frac{V}{g^2K}}\right) = -\frac{2e^2}{\kappa}gK. \tag{5.84}$$

Resolvendo esta última equação para o potencial, temos

$$V(|\varphi|) = \frac{e^4}{\kappa^2}|\varphi|^2 K(|\varphi|)\left(v^2 - \int_0^{|\varphi|} d\tilde{g}\, 2\,\tilde{g}\, K(\tilde{g})\right)^2 . \tag{5.85}$$

Novamente, como na seção anterior, $v$ é o parâmetro envolvido na quebra de simetria. Nota-se que nenhuma função $K(|\varphi|)$ permite que haja quebra de simetria do potencial. A solução é impor que $V(v) = 0$. Neste caso, a Eq. (5.18) e a combinação das Eqs. (5.71b) e Eq. (5.83), para o potencial acima, nos dão as equações de primeira ordem

$$g' = \frac{ag}{r} \tag{5.86a}$$

$$\frac{a'}{r} = -\frac{2e^4 g^2 K(g)}{\kappa^2}\left(v^2 - \int_0^{|\varphi|} d\tilde{g}\, 2\,\tilde{g}\, K(\tilde{g})\right). \tag{5.86b}$$

Usando a forma do potencial dada pela Eq. (5.85), as Eqs. (5.77) e a Eq. (5.83), pode-se mostrar que a função $W$ é

$$W(a, g) = -av^2 + a\int_0^g d\tilde{g}\, 2\,\tilde{g}\, K(\tilde{g}). \tag{5.87}$$

Assim, considerando que $W(0, v) = 0$, a energia para este modelo, Eq. (5.81), com potencial Eq. (5.85) é $E = 2\pi|n|v^2$. Alguns exemplos que se enquadram na classe de modelos estudados acima podem ser encontrados em Ref. [96]. Em particular, podemos incluir um novo modelo, que será discutido a seguir.

### 5.2.1 Modelo Um

Para este modelo, define-se

$$K(|\varphi|) = \left(\frac{|\varphi|}{v}\right)^2 \ln^2\left(\frac{|\varphi|}{v}\right), \tag{5.88a}$$

$$V(|\varphi|) = \frac{e^4 v^6}{\kappa^2}\left(\frac{|\varphi|}{v}\right)^4 \ln^2\left(\frac{|\varphi|}{v}\right)\left\{1 - \frac{1}{16}\left(\frac{|\varphi|}{v}\right)^4\left[8\ln^2\left(\frac{|\varphi|}{v}\right) - 4\ln\left(\frac{|\varphi|}{v}\right) + 1\right]\right\}^2 . \tag{5.88b}$$

Essas funções são compatíveis com o vínculo da Eq. (5.84). O potencial acima apresenta um mínimo em $|\varphi| = 0$ e outro em $|\varphi| = 1$. Entre estes mínimos, existe

um máximo, difícil de ser calculado analiticamente. No entanto, para $e, v, \kappa = 1$, obtivemos o máximo localizado em $|\varphi| \approx 0,596$. Na Fig. 5.5, exibimos esse potencial.

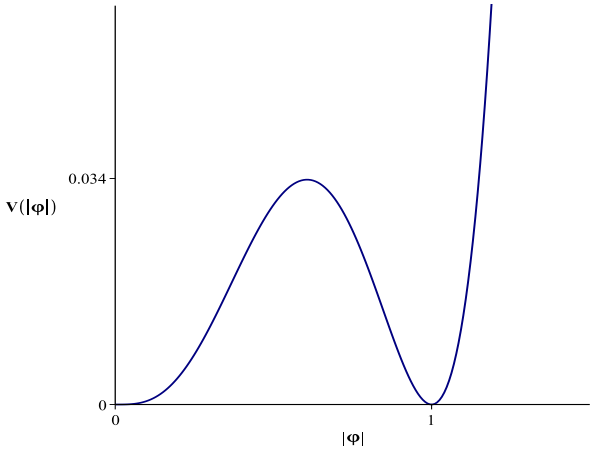


Figura 5.5: Potencial da Eq. (5.88b), com $e, v, \kappa = 1$.

Neste caso as equações de primeira ordem Eqs. (5.86) tornam-se

$$g' = \frac{ag}{r} \tag{5.89a}$$

$$\frac{a'}{r} = -\frac{2e^4v^4}{\kappa^2}\left(\frac{g}{v}\right)^4 \ln^2\left(\frac{g}{v}\right)\left\{1 - \frac{1}{16}\left(\frac{g}{v}\right)^4\left[8\ln^2\left(\frac{g}{v}\right) - 4\ln\left(\frac{g}{v}\right) + 1\right]\right\}. \tag{5.89b}$$

O comportamento das Eqs. (5.89) são mostrados na figura abaixo, Fig. 5.6, para $e, v, \kappa = 1$.

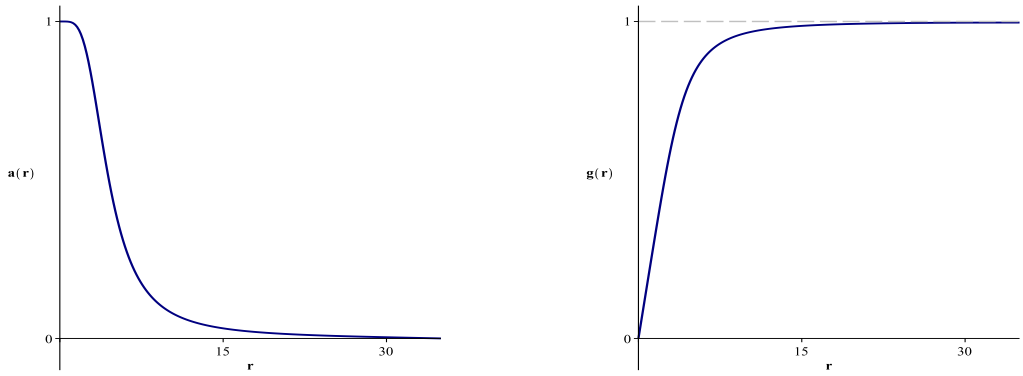


Figura 5.6: A função $a(r)$ (à direita) e $g(r)$ (à esquerda), Eqs. (5.89), com $e, v, \kappa = 1$.

Calculando a densidade de energia temos como resultado que

$$\varepsilon = \frac{v^2\kappa^2}{2e^4g^4}\ln^{-2}\left(\frac{g}{v}\right)\frac{a'^2}{r^2} + 2\left(\frac{g}{v}\right)^2\ln^2\left(\frac{g}{v}\right)g'^2. \tag{5.90}$$

Na Fig. 5.7 mostramos a densidade de energia Eq. (5.90), o campo elétrico e magnético dados por $E = A_0'$ e $B = -a'/(er)$, respectivamente.

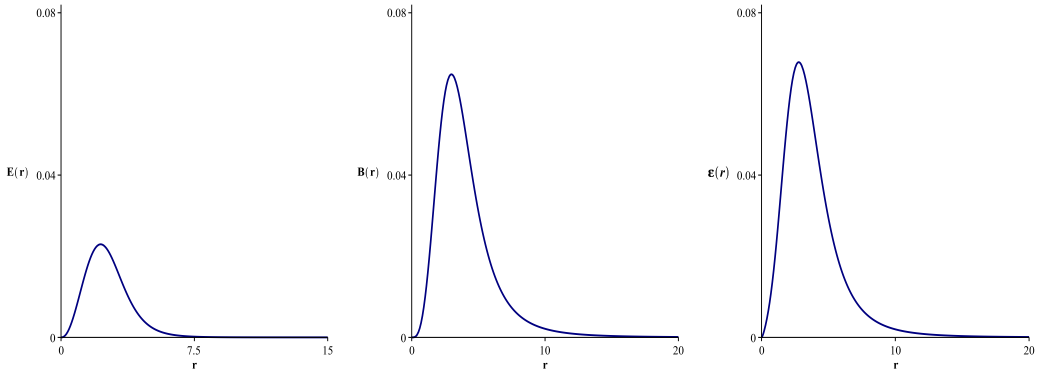


Figura 5.7: O campo elétrico (à esquerda), o campo magnético (no centro) e a densidade de energia (à direita), para as soluções $a(r)$ e $g(r)$ das Eqs. (5.89), com $e, v, \kappa = 1$.

A energia total pode ser calculada a partir de $W = W(a, g)$ que neste caso é dado por

$$W(a,g) = av^2\left\{\frac{1}{16}\left(\frac{g}{v}\right)^4\left[8\ln^2\left(\frac{g}{v}\right) - 4\ln\left(\frac{g}{v}\right) + 1\right] - 1\right\}. \tag{5.91}$$

E isto nos dá $E = |\Delta W(a,g)| = 2\pi|n|v^2$.

### 5.2.2 Modelo Dois

Outros exemplos de modelos generalizados do tipo Chern-Simons surgiram recentemente como, por exemplo, na Ref. [99]. Em particular, o segundo modelo ali investigado é muito interessante, pois dá origem a vórtices compactos do tipo Chern-Simons, com a densidade de energia sendo reduzida a uma região do tipo de um anel no plano $(r, \theta)$. O modelo Dois é construído partindo-se da Eq. (5.81) e considerando-se:

$$K(|\varphi|) = l\left(\frac{|\varphi|}{v}\right)^{2(l-1)}, \tag{5.92a}$$

$$V(|\varphi|) = l\frac{e^4v^6}{\kappa^2}\left(\frac{|\varphi|}{v}\right)^{2l}\left[1 - \left(\frac{|\varphi|}{v}\right)^{2l}\right]^2, \tag{5.92b}$$

onde $l \geq 1$ é um número real, com $l = 1$ nos levando ao modelo Chern-Simons padrão. O gráfico do potencial acima é mostrado na Fig. 5.8.

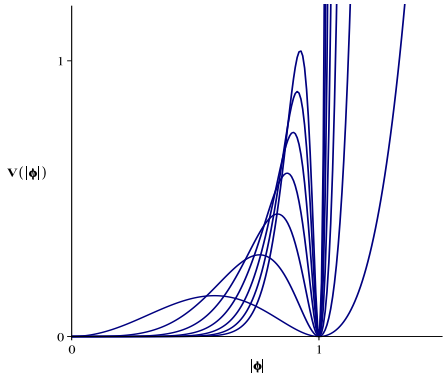


Figura 5.8: Potencial da Eq. (5.92b), com $e, v, \kappa = 1$.

Nota-se que a expressão para $K(|\varphi|)$, Eq. (5.92a) é exatamente a mesma que usamos antes na Eq. (5.50) para o sistema Maxwell-Higgs. Para este caso, as equações de primeira ordem Eqs. (5.86) tornam-se

$$g' = \frac{ag}{r} \tag{5.93a}$$

$$\frac{a'}{r} = -\frac{2le^4v^4}{\kappa^2}\left(\frac{g}{v}\right)^{2l}\left[1-\left(\frac{g}{v}\right)^{2l}\right]. \tag{5.93b}$$

As equações de primeira ordem acima são muito difíceis de serem resolvidas analiticamente para um $l$ geral. Partimos então, primeiramente, para o estudo do comportamento das funções $a(r)$ e $g(r)$, quando $r \to 0$ e $r \to \infty$. Próximo à origem, em primeira ordem de $\bar{a}$, $\bar{g}$ e com $n = 1$ temos $a(r) = 1 - \bar{a}$ e $g(r) = \bar{g}$, o que nos leva a

$$\bar{a} \sim \frac{lr^{2(l+1)}}{l+1} \tag{5.94}$$

$$\bar{g} \sim r. \tag{5.95}$$

Do mesmo modo acontece, quando $r \to \infty$ temos $a(r) = \tilde{a}$ e $g(r) = 1 - \tilde{g}$ que resulta em

$$\tilde{a} \sim 2lrK_1(2lr), \tag{5.96}$$

$$\tilde{g} \sim K_1(2lr). \tag{5.97}$$

Nesta última equação, $K_{0,1}(z)$ é a função de Bessel modificada do segundo tipo. O comportamento assintótico das funções $a(r)$ e $g(r)$ mostram que estas se aproximam de suas condições de contorno cada vez mais rápido, à medida que $l$ aumenta. Assim, as soluções tendem a se tornar compactas, à medida que os valores de $l$ aumentam cada vez mais. Ainda que para um $l$ geral as soluções analíticas para as Eqs. (5.93) são difíceis de serem encontradas, descobrimos que, para um $l \to \infty$, tais soluções tendem a obter o perfil compacto do tipo

$$a_c(r) = \begin{cases} 1, & r \leq r_c \\ 0, & r > r_c. \end{cases} \tag{5.98a}$$

$$g_c(r) = \begin{cases} \frac{r}{r_c}, & r \leq r_c \\ 1, & r > r_c. \end{cases} \tag{5.98b}$$

A Fig. 5.9 mostra o comportamento das funções dadas pelas Eqs. (5.93), com $e, v, \kappa, n = 1$, para $l = 1, 2, 3, 5, 7, 10, 40$ e um valor de $l$ muito grande, Eqs. (5.98). Nota-se na Fig. 5.9 que a curva para um $l = 1$ é a mais distante da região compacta a medida que $l$ aumenta as curvas vão se aproximando desta região até que para um $l$ muito grande a curva delimita a região compacta.

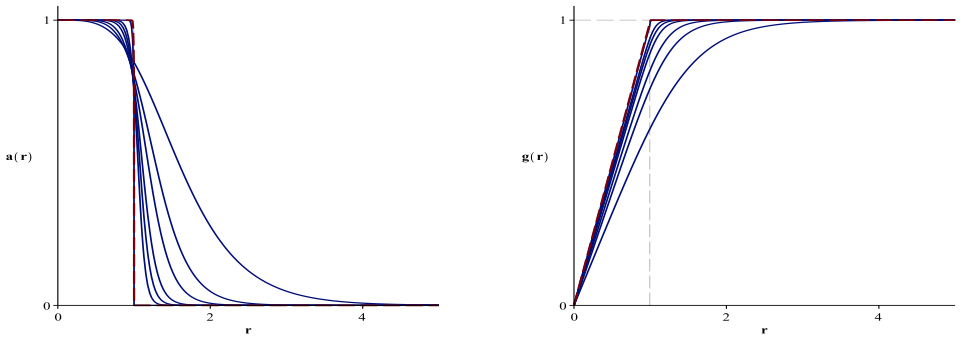


Figura 5.9: A função $a(r)$ (à esquerda), a função $g(r)$ (à direita), para as soluções das Eqs. (5.93), com $e, v, \kappa, n = 1$, $l = 1, 2, 3, 5, 7, 10, 40$, linha sólida e um valor muito grande de $l$, linha tracejada.

A densidade de energia é escrita como

$$\varepsilon = \frac{2le^4v^6}{\kappa^2}\left(\frac{g}{v}\right)^{2l}\left[1-\left(\frac{g}{v}\right)^{2l}\right]^2 + \frac{2lv^2a^2}{r^2}\left(\frac{g}{v}\right)^{2l}. \tag{5.99}$$

Na Fig. 5.10, mostramos a densidade de energia dada acima, o campo magnético e o campo elétrico para o modelo dado pelas Eqs. (5.92).

Observa-se na Fig. (5.10) que conforme o aumento de $l$, o campo elétrico, o campo magnético e a densidade de energia ficam cada vez mais altas e mais finas, tendendo a uma delta de Dirac. Estas quantidades tendem a tornar-se compactas,

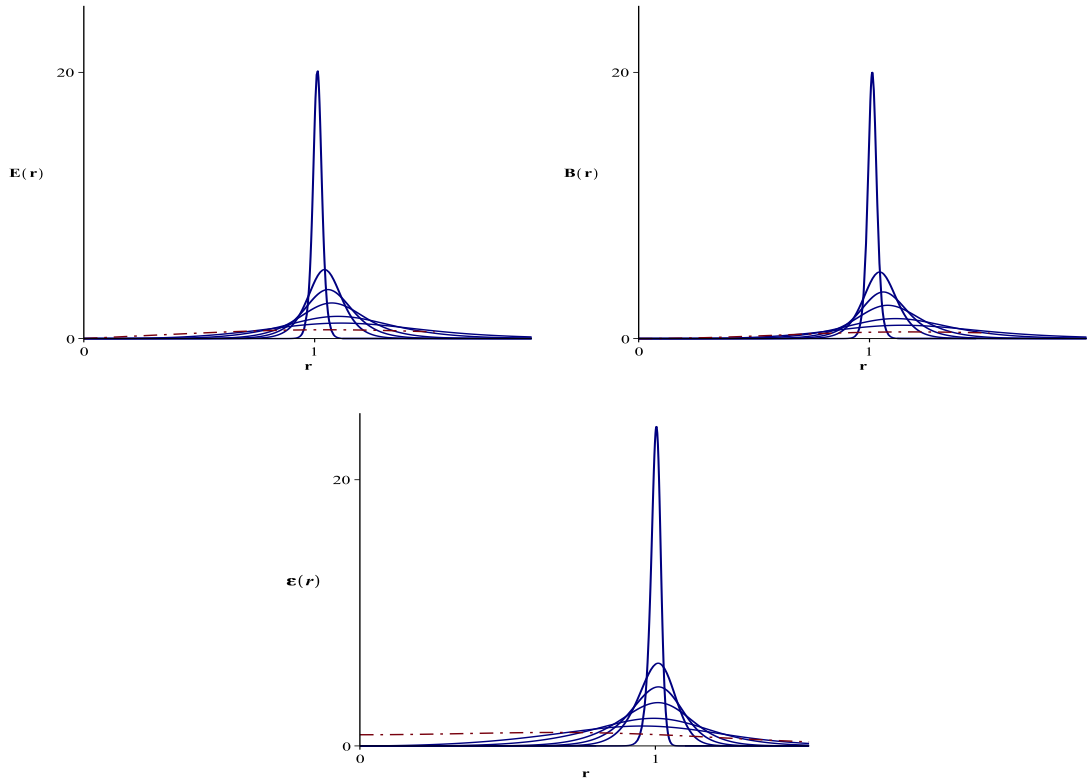


Figura 5.10: O campo elétrico (à esquerda), o campo magnético (no centro) e a densidade de energia (à direita), para as soluções $a(r)$ e $g(r)$ das Eqs. (5.93), com $e, v, \kappa, n = 1$ e $l = 1, 2, 3, 5, 7, 10, 40$.

vivendo em uma região estreita em torno de $r = r_c$. Em particular, a densidade de energia comporta-se de tal forma que a energia total obtida por integração numérica é sempre próxima a $2\pi$, independentemente do valor de $l$. Pode-se concluir então que o vórtice tende a se tornar compacto à medida que $l$ aumenta para valores cada vez maiores, sobrevivendo apenas dentro de um anel estreito em torno de $r = r_c$.

Este caso foi mostrado na Ref. [99] em que a densidade de energia do vórtice compacto encolhe para uma região semelhante a um anel. Ilustramos este fato na Fig. 5.11 para alguns valores de $l$, em que tal densidade é representada, no plano $(r, \theta)$, pela cor azul. Notamos que o efeito de aumentar $l$ para fazer o vórtice se restringir a uma certa região é muito mais significativo do que aparentava no caso anterior com o estudo do modelo Maxwell-Higgs. Além disso, o efeito aqui é diferente, uma vez que a densidade de energia encolhe para uma região como a de um anel e não para a região parecida com um disco, como aquela que é mostrada na Fig. 5.4.

Na Ref. [99], a energia do vórtice foi calculada numericamente. Aqui, no entanto, com o formalismo desenvolvido acima, podemos usar a função $W$ que é dada pela Eq. (5.91) para obter a energia total da configuração de vórtice.

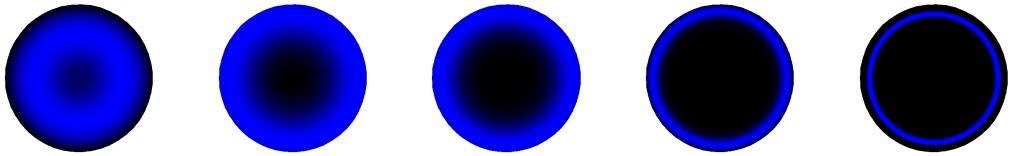

Figura 5.11: A densidade de energia Eq. (5.99) (na cor azul), associadas as Eqs. (5.93) mostradas no plano $r, \theta$, com $e, v, \alpha, n = 1$ e $l = 1, 2, 3, 10$, e um valor muito grande de $l$.

Vemos que, em termos de $a(r)$ e $g(r)$, a função $W(a, g)$ pode ser escrita como

$$W(a, g) = -av^2 \left[1 - \left(\frac{g}{v}\right)^{2l}\right]. \tag{5.100}$$

Isto é tal que, a energia total torna-se $E = 2\pi|n|v^2$, e para $v = 1$ e $n = 1$, tem-se $E = 2\pi$, em total acordo com o resultado numérico obtido na Ref. [99].

## 5.3 Vórtices Maxwell-Chern-Simons-Higgs Generalizados

Nesta seção vamos considerar uma ação generalizada para o sistema Maxwell-Chern-Simons, na forma

$$S = \int d^3x \left[\mathcal{L}(X, Y, Z, |\varphi|, N) + \frac{\kappa}{4}\epsilon^{\alpha\beta,\gamma} A_\alpha F_{\beta\gamma}\right], \tag{5.101}$$

sendo $X$ e $Y$ dados como na Eq. (5.2) e $Z = (1/2)\partial_\mu N \partial^\mu N$. A introdução do campo escalar neutro $N$ vem auxiliar a implementação do formalismo de primeira ordem, como obtido nas seções anteriores. A variação da ação acima, com relação aos campos $\varphi$, $A_\mu$ e $N$, nos dá as equações de movimento

$$D_\mu(\mathcal{L}_X D^\mu \varphi) = \frac{\overline{\varphi}}{2|\varphi|}\mathcal{L}_{|\varphi|}, \tag{5.102a}$$

$$\partial_\mu(\mathcal{L}_Y F^{\mu\nu}) + \frac{\kappa}{2}\epsilon^{\lambda\mu\nu} F_{\mu\nu} = J^\lambda, \tag{5.102b}$$

$$\partial_\mu(\mathcal{L}_Z \partial^\mu N) = \mathcal{L}_N, \tag{5.102c}$$

onde a corrente é $J_\mu = ie\mathcal{L}_X(\overline{\varphi} D_\mu \varphi - \varphi \overline{D_\mu \varphi})$. Abrindo em componentes a equação para o campo $\varphi$ Eq. (5.102a), para o campo $A_\mu$ Eq. (5.102b) e para o campo auxiliar

$N$ Eq. (5.102c), temos respectivamente

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X D_\mu D^\mu\varphi &+ 2\mathcal{L}_{XX}\,\Re\,(\overline{D_\alpha\varphi}\partial_\mu D^\alpha\varphi)D^\mu\varphi-\tfrac{1}{2}\mathcal{L}_{XY}F_{\alpha\beta}(\partial_\mu F^{\alpha\beta})D^\mu\varphi+\mathcal{L}_{XN}(\partial_\mu N)D^\mu\varphi\\ &= \tfrac{\overline{\varphi}}{2|\varphi|}\mathcal{L}_{|\varphi|}-\mathcal{L}_{X|\varphi|}\,\Re\left(\tfrac{\overline{\varphi}}{|\varphi|}\partial_\mu\varphi\right)D^\mu\varphi-\mathcal{L}_{XZ}(\partial_\alpha N)(\partial_\mu\partial^\alpha N)D^\mu\varphi, \qquad (5.103a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_Y\partial_\mu F^{\mu\lambda} &+ 2\mathcal{L}_{YX}\,\Re\,(\overline{D_\alpha\varphi}\partial_\mu D^\alpha\varphi)F^{\mu\lambda}-\tfrac{1}{2}\mathcal{L}_{YY}F_{\alpha\beta}(\partial_\mu F^{\alpha\beta})F^{\mu\lambda}+\mathcal{L}_{YZ}(\partial_\alpha N)(\partial_\mu\partial^\alpha N)F^{\mu\lambda}\\ &= J^\lambda-\tfrac{\kappa}{2}\epsilon^{\lambda\mu\nu}F_{\mu\nu}-\mathcal{L}_{Y|\varphi|}\,\Re\left(\tfrac{\overline{\varphi}}{|\varphi|}\partial_\mu\varphi\right)F^{\mu\lambda}-\mathcal{L}_{YN}(\partial_\mu N)F^{\mu\lambda} \qquad (5.103b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\eta^{\mu\nu}\mathcal{L}_Z &+ \mathcal{L}_{ZZ}\partial^\mu N\partial^\nu N)\partial_\mu\partial_\nu N+2\mathcal{L}_{ZX}\,\Re\,(\overline{D_\alpha\varphi}\partial_\mu D^\alpha\varphi)\partial^\mu N-\tfrac{1}{2}\mathcal{L}_{ZY}F_{\alpha\beta}(\partial_\mu F^{\alpha\beta})\partial^\mu N\\ &= \mathcal{L}_N-\mathcal{L}_{Z|\varphi|}\,\Re\left(\tfrac{\overline{\varphi}}{|\varphi|}\partial_\mu\varphi\right)\partial^\mu N-\mathcal{L}_{ZN}\partial_\mu N\partial^\mu N. \qquad (5.103c)\end{aligned}$$

O tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ para o modelo generalizado, Eq. (5.101), é dado por

$$T_{\mu\nu}=\mathcal{L}_Y F_{\mu\alpha}F^{\lambda}{}_{\mu}+\mathcal{L}_X(\overline{D_\mu\varphi}D_\nu\varphi+\overline{D_\nu\varphi}D_\mu\varphi)+\mathcal{L}_Z(\partial_\mu N)(\partial_\nu N)-\eta_{\mu\nu}\mathcal{L}. \qquad (5.104)$$

Considerando soluções estáticas, as componentes do tensor energia-momento têm a forma

$$\begin{aligned}T_{00} &= \mathcal{L}_Y E^2+2\mathcal{L}_X e^2A_0^2\,|\varphi|^2-\mathcal{L}, && (5.105a)\\ T_{01} &= \mathcal{L}_Y E_2B-A_0J_1 \quad \text{e} \quad T_{02}=-\mathcal{L}_Y E_1B-A_0J_2 && (5.105b)\\ T_{12} &= T_{21}=-\mathcal{L}_Y E_1E_2+\mathcal{L}_X(\overline{D_1\varphi}D_2\varphi+\overline{D_2\varphi}D_1\varphi)-\mathcal{L}_Z(\partial_1N)(\partial_2N), && (5.105c)\\ T_{11} &= \mathcal{L}_Y(B^2-(E_1)^2)+2\mathcal{L}_X|D_1\varphi|^2+\mathcal{L}_Z(\partial_1N)^2+\mathcal{L}, && (5.105d)\\ T_{22} &= \mathcal{L}_Y(B^2-(E_2)^2)+2\mathcal{L}_X|D_2\varphi|^2+\mathcal{L}_Z(\partial_2N)^2+\mathcal{L}. && (5.105e)\end{aligned}$$

Nas equações acima, usamos as definições $E^i=(E_x,E_y)=-F^{0i}$ e $B=-F^{12}$ para os campos elétrico e magnético como previamente discutido, logo abaixo das Eqs. (5.67). No entanto, para essa nova situação, a componente temporal da Eq. (5.102b) indica que o campo magnético $B$ e a componente temporal do campo de gauge $A_0$ estão relacionados por

$$A_0=\frac{\kappa B}{2e^2\mathcal{L}_X|\varphi|^2}+\frac{(r\mathcal{L}_Y A_0')'}{2e^2\mathcal{L}_X|\varphi|^2r}. \qquad (5.106)$$

Embora essa expressão para $A_0$ tenha um termo adicional, quando comparada com o vínculo da Eq. (5.69), pode-se mostrar que a carga ainda pode ser escrita em termos do fluxo magnético $\Phi$ Eq. (5.10). Sendo a carga elétrica dada por $Q=-\kappa\Phi$ e como $\Phi$ é quantizado temos que a carga elétrica, para esse modelo, também é quantizada.

As equações de movimento Eqs. (5.102), com o *ansatz* da Eq. (5.7) considerando $A_0 = A_0(r)$, com as condições de contorno $A_0'(0) = 0$ e $A_0(\infty) = 0$, são dadas por

$$\frac{(r\mathcal{L}_X g')'}{r} + \mathcal{L}_X\, g\left(e^2A_0^2 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{L}_{|\varphi|} = 0, \tag{5.107a}$$

$$r\left(\frac{\mathcal{L}_Y a'}{r}\right)' - \kappa e r A_0' - 2e^2\mathcal{L}_X a g^2 = 0, \tag{5.107b}$$

$$\frac{(r\mathcal{L}_Y A_0')'}{r} - \frac{\kappa}{e}\frac{a'}{r} - 2e^2\mathcal{L}_X\, g^2 A_0 = 0, \tag{5.107c}$$

$$\frac{(r\mathcal{L}_Z N')'}{r} + \mathcal{L}_N = 0. \tag{5.107d}$$

Como feito nas Eqs. (5.102), também as equações acima podem ser expandidas em

$$\mathcal{L}_X\, g'' + \left(\mathcal{L}_X' + \frac{\mathcal{L}_X}{r}\right) g' + \mathcal{L}_X\, g\left(e^2A_0^2 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{L}_{|\varphi|} = 0, \tag{5.108a}$$

$$\mathcal{L}_Y a'' + \left(\mathcal{L}_Y' - \frac{\mathcal{L}_Y}{r}\right) a' - \kappa e r A_0' - 2e^2\mathcal{L}_X a g^2 = 0, \tag{5.108b}$$

$$\mathcal{L}_Y A_0'' + \left(\mathcal{L}_Y' + \frac{\mathcal{L}_Y}{r}\right) A_0' - \frac{\kappa}{e}\frac{a'}{r} - 2e^2\mathcal{L}_X\, g^2 A_0 = 0, \tag{5.108c}$$

$$\mathcal{L}_Z N'' + \left(\mathcal{L}_Z' + \frac{\mathcal{L}_Z}{r}\right) N' + \mathcal{L}_N = 0. \tag{5.108d}$$

Lembrando que "$'$" indica a derivada com relação a coordenada radial $r$ e

$$\mathcal{L}_X' = \mathcal{L}_{XX}X' + \mathcal{L}_{XY}Y' + \mathcal{L}_{XZ}Z' + \mathcal{L}_{XN}N' + \mathcal{L}_{X|\varphi|}|\varphi|', \tag{5.109}$$

$$\mathcal{L}_Y' = \mathcal{L}_{YY}Y' + \mathcal{L}_{YX}X' + \mathcal{L}_{YZ}Z' + \mathcal{L}_{YN}N' + \mathcal{L}_{Y|\varphi|}|\varphi|', \tag{5.110}$$

$$\mathcal{L}_Z' = \mathcal{L}_{ZZ}Z' + \mathcal{L}_{ZX}X' + \mathcal{L}_{ZY}Y' + \mathcal{L}_{ZN}N' + \mathcal{L}_{Z|\varphi|}|\varphi|' \tag{5.111}$$

Neste caso, como $E^i = -x^i A_0'/r$ e $B = -a'/(er)$, temos

$$X = e^2g^3A_0^2 - \left(g'^2 + \frac{a^2g^2}{r^2}\right), \tag{5.112a}$$

$$Y = \frac{1}{2}A_0'^2 - \frac{a'^2}{2e^2r^2}, \tag{5.112b}$$

$$Z = -\frac{1}{2}N'^2. \tag{5.112c}$$

As componentes do tensor energia-momento da Eq. (5.105) tornam-se

$$T_{00} = \mathcal{L}_Y A_0'^2 + 2\mathcal{L}_X e^2 g^2 A_0^2 - \mathcal{L}, \tag{5.113a}$$

$$T_{01} = \left(-\frac{\mathcal{L}_Y A_0' a'}{e} - 2\mathcal{L}_X e a g^2 A_0\right)\frac{sen\theta}{r}, \tag{5.113b}$$

$$T_{02} = \left(\frac{\mathcal{L}_Y A_0' a'}{e} + 2\mathcal{L}_X e a g^2 A_0\right)\frac{cos\theta}{r}, \tag{5.113c}$$

$$T_{12} = \left[2\mathcal{L}_X\left(g'^2 - \frac{a^2 g^2}{r^2}\right) - \mathcal{L}_Y A_0'^2 + \mathcal{L}_Z N'^2\right]\frac{sen2\theta}{2}, \tag{5.113d}$$

$$T_{11} = \mathcal{L}_Y \frac{a'^2}{e^2 r^2} + 2\mathcal{L}_X\left(g'^2 cos^2\theta + \frac{a^2 g^2}{r^2} sen^2\theta\right) - \left(\mathcal{L}_Y A_0'^2 - \mathcal{L}_Z N'^2\right)cos^2\theta + \mathcal{L}, \tag{5.113e}$$

$$T_{22} = \mathcal{L}_Y \frac{a'^2}{e^2 r^2} + 2\mathcal{L}_X\left(g'^2 sen^2\theta + \frac{a^2 g^2}{r^2} cos^2\theta\right) - \left(\mathcal{L}_Y A_0'^2 - \mathcal{L}_Z N'^2\right)sen^2\theta + \mathcal{L}. \tag{5.113f}$$

Para tensões nulas temos $T_{12} = T_{21} = 0$, a qual nos dá

$$2\mathcal{L}_X\left(g'^2 - \frac{a^2 g^2}{r^2}\right) - \mathcal{L}_Y A_0'^2 + \mathcal{L}_Z N'^2 = 0 \tag{5.114}$$

Usando a equação acima, temos por consequência,

$$T_{11} = T_{22} = \mathcal{L}_Y \frac{a'^2}{e^2 r^2} + 2\mathcal{L}_X\left(g'^2 + \frac{a^2 g^2}{r^2}\right) - \mathcal{L}_Y A_0'^2 + \mathcal{L}_Z N'^2 + \mathcal{L}. \tag{5.115}$$

Agora, também como feito anteriormente, pode-se fazer uma reescala na energia e mostrar que $T_{11} = T_{22} = 0$, ou seja

$$\mathcal{L}_Y \frac{a'^2}{e^2 r^2} + 2\mathcal{L}_X\left(g'^2 + \frac{a^2 g^2}{r^2}\right) - \mathcal{L}_Y A_0'^2 + \mathcal{L}_Z N'^2 + \mathcal{L} = 0. \tag{5.116}$$

Pode-se tomar a derivada da equação de primeira ordem Eq. (5.116) e usar a Eq. (5.114) para obter

$$\begin{aligned} &2g'\left[\frac{1}{r}\left(r\mathcal{L}_X g'\right)' + \mathcal{L}_X g\left(e^2 A_0^2 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{L}_{|\varphi|}\right] + \frac{a'}{e^2 r^2}\left[r\left(\frac{\mathcal{L}_Y a'}{r}\right)' - \kappa e r A_0'\right. \\ &\left. - 2e^2\mathcal{L}_X a g^2\right] - A_0'\left[\frac{1}{r}(r\mathcal{L}_Y A_0')' - \frac{\kappa}{e}\frac{a'}{r} - 2e^2\mathcal{L}_X g^2 A_0\right] \\ &+ N'\left[\frac{1}{r}\left(r\mathcal{L}_Z N'\right)' + \mathcal{L}_N\right] = 0, \end{aligned} \tag{5.117}$$

onde mostra-se que a equação acima é uma combinação das equações do movimento Eqs. (5.107). Neste caso, temos quatro equações de movimento dadas pelas Eqs. (5.107) e apenas duas equações de primeira ordem, dadas pelas Eq. (5.114) e Eq. (5.116). Torna-se necessário então encontrarmos mais duas equações de primeira ordem para resolver o problema. Antes de prosseguirmos, nota-se que usando

a Eq. (5.114), a densidade de energia, dada pela Eq. (5.113a), pode ser escrita como

$$\varepsilon = 2\mathcal{L}_X(g'^2 + e^2 g^2 A_0^2) + \mathcal{L}_Y \frac{a'^2}{e^2 r^2} + \mathcal{L}_Z N'^2. \tag{5.118}$$

Supondo que a Eq. (5.18) se mantém e combinando-a com as Eq. (5.114) e Eq. (5.116), as três equações de primeira ordem são dadas como

$$\begin{aligned} g'^2 - \frac{a^2 g^2}{r^2} &= 0, && (5.119a)\\ \mathcal{L}_Y A_0'^2 - \mathcal{L}_Z N'^2 &= 0, && (5.119b)\\ \mathcal{L} + 2\mathcal{L}_X g'^2 + \frac{\mathcal{L}_Y a'^2}{e^2 r^2} &= 0. && (5.119c) \end{aligned}$$

Aqui, observa-se que as Eqs. (5.119) são as únicas equações de primeira ordem possíveis. No entanto, elas não são suficientes para resolver o problema completamente, porque temos que encontrar soluções para as funções $a(r), g(r), N(r)$ e $A_0(r)$. Portanto, na classe dos vórtices generalizados de Maxwell-Chern-Simons Eq. (5.101), o uso de uma das equações de movimento Eqs. (5.107) torna-se necessário.

Considerando a lei de Gauss Eq. (5.107c) para o nosso modelo, podemos escrever a densidade de energia como

$$\varepsilon = \frac{(r\mathcal{L}_Y A_0 A_0')'}{r} - \mathcal{L}_Y A_0'^2 - \frac{\kappa A_0 a'}{er} + 2\mathcal{L}_X g'^2 + \mathcal{L}_Y \frac{a'^2}{e^2 r^2} + \mathcal{L}_Z N'^2. \tag{5.120}$$

Agora, usamos as equações de primeira ordem Eqs. (5.119) e tomamos a função auxiliar $W = W(a, g)$, tal que

$$W_a = \mathcal{L}_Y \frac{a'}{e^2 r} - \frac{\kappa A_0}{e} \qquad \text{e} \qquad W_g = 2\mathcal{L}_X r g'. \tag{5.121}$$

Por consequência, a densidade de energia pode ser escrita como uma derivada total do tipo

$$\varepsilon = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}[r\mathcal{L}_Y A_0 A_0' + W(a, g)]. \tag{5.122}$$

uma vez que o primeiro termo se anula, quando integrado em todo o espaço, a energia é então, dada por

$$E = 2\pi |W[a(\infty), g(\infty) - a(0), g(0)]|. \tag{5.123}$$

Assim, mais uma vez é verificado que este formalismo ajuda a calcular a energia sem o conhencimento prévio das soluções. Omitimos aqui alguns detalhes já que o pro-

cedimento para se chegar a Eq. (5.123) foi bastante explorado nas seções anteriores. Veja por exemplo a Sec. 5.1.

Para verificar a compatibilidade das equações de primeira ordem Eqs. (5.119), com as equações de movimento Eqs. (5.107) consideramos $g' = ag/r$ na Eq. (5.107a) para obter

$$\frac{a'}{r} g\mathcal{L}_X + \frac{ag}{r}\mathcal{L}'_X + e^2\mathcal{L}_X\, gA_0^2 + \frac{1}{2}\mathcal{L}_{|\varphi|} = 0, \tag{5.124}$$

sendo $\mathcal{L}'_X$ dado pela Eq. (5.109). Lembrando que esta última equação vem da equação de movimento Eq. (5.107a), pode-se mostrar que, se as equações de primeira ordem Eqs. (5.119) são compatíveis com duas das outras três equações de movimento Eqs. (5.117), concluímos que todas as equações de movimento dadas por Eqs. (5.107) são satisfeitas. Isso significa que uma das equações de movimento é uma identidade. Neste ponto, atuando da mesma forma que nas prévias seções, se quisermos construir um modelo com densidades lagrangianas por meio de soluções analíticas que suportam o procedimento Eq. (5.123), podemos tomar o caminho de ajustar $\mathcal{L}_{XX} = \mathcal{L}_{XY} = \mathcal{L}_{XZ} = \mathcal{L}_{XN} = 0$ e $\mathcal{L}_{X|\varphi|} = K_{|\varphi|}(|\varphi|)$ para obter uma restrição que dependa apenas das funções $g$ e $N$, as quais representam os campos escalares. Como estamos lidando com dois campos escalares no modelo, um segundo vínculo é necessário para determinar completamente como os campos escalares devem aparecer na densidade lagrangiana. Para procurá-lo, vemos que as Eq. (5.107c) e Eq. (5.107d) produzem

$$\frac{1}{r}[r\mathcal{L}_Z N' - \mathcal{L}_Y A'_0]' + \frac{\kappa a'}{er} + 2e^2\mathcal{L}_X g^2 A_0 + \mathcal{L}_N = 0. \tag{5.125}$$

Agora, usamos a Eq. (5.119b) e tomando $\mathcal{L}_Y = \mathcal{L}_Z$, temos $A'_0 = N'$. Desta forma, a Eq. (5.125) restringe o campo $N$ na densidade lagrangiana.

### 5.3.1 Modelo Mais Geral

Diante do exposto na subseção anterior podemos concluir que, até o momento, o modelo mais geral que permite uma construção analítica é dado pela seguinte densidade lagrangeana:

$$\mathcal{L} = K(|\varphi|)X + G(U, |\varphi|, N); \qquad \text{com} \qquad U = Y + Z. \tag{5.126}$$

Para esta densidade lagrangiana, a equação de primeira ordem Eq. (5.119b) indica que ${A'_0}^2 = {N'}^2$, podendo tomar $A_0(r) = N(r)$. Neste caso, temos $U = -{a'}^2/(2e^2r^2)$

e a Eq. (5.119c) nos dá

$$e^2 g^2 N^2 K + G - 2UG_U = 0. \tag{5.127}$$

A equação acima é uma equação algébrica que relaciona $U, g$ e $N$. Considerando que esta pode ser resolvida para $U$, escrevemos

$$-U = \frac{a'^2}{2e^2 r^2} = V_{eff}(g, N). \tag{5.128}$$

Então, tomamos $a'/(er) = -\sqrt{2V_{eff}}$ e combinamos com as Eq. (5.124) e Eq. (5.125) para obter os vínculos

$$egK\sqrt{2V_{eff}} = e^2 N^2 gK + \frac{e^2}{2} N^2 g^2 K_{|\varphi|} + \frac{1}{2} G_{|\varphi|}, \tag{5.129a}$$

$$\kappa\sqrt{2V_{eff}} = 2e^2 N g^2 K + G_N. \tag{5.129b}$$

Acima, temos duas equações diferenciais parciais, que determinam completamente como a dependência dos campos $\varphi$ e $N$ devem ser inseridos na densidade lagrangiana. Nesse caso, se as restrições Eqs. (5.129) forem satisfeitas, podemos usar as Eqs. (5.121) para escrever

$$W(a, g) = -\frac{a}{e}\left(G_U\sqrt{-2U} + \kappa N\right)_{-U=V_{eff}}. \tag{5.130}$$

Desta forma, a energia pode ser calculada analiticamente.

Como exemplo, consideremos o modelo Eq. (5.126) para o caso de um $K(|\varphi|)$ geral, ou seja,

$$G(U, |\varphi|, N) = -H(|\varphi|, N)(-U)^s - V(|\varphi|, N). \tag{5.131}$$

Aqui, $s$ é um parâmetro real, tal que $s > 1/2$. O caso $s = 1$ foi considerado na Ref. [100] e o caso padrão é obtido para $K(|\varphi|) = 1$ e $s = 1$. Usamos as Eq. (5.127) e Eq. (5.128) para a função acima e obtemos o potencial efetivo, dado por

$$V_{eff}(|\varphi|, N) = \left(\frac{V(|\varphi|, N) - e^2 N^2 |\varphi|^2 K(|\varphi|)}{(2s-1)H(|\varphi|, N)}\right)^{\frac{1}{s}}. \tag{5.132}$$

Os vínculos nas Eqs. (5.129) são agora escritos como

$$\left(2V_{eff}\frac{\partial H}{\partial g} + (2s-1)H\frac{\partial V_{eff}}{\partial g}\right) s{V_{eff}}^{s-1} = -2egK\sqrt{2V_{eff}}, \tag{5.133a}$$

$$\left(2V_{eff}\frac{\partial H}{\partial N} + (2s-1)H\frac{\partial V_{eff}}{\partial N}\right) s{V_{eff}}^{s-1} = -\kappa\sqrt{2V_{eff}}. \tag{5.133b}$$

A solução desta última equação, nos leva a um potencial do tipo

$$V(|\varphi|,N)=(2s-1)H(|\varphi|,N)\left(\frac{ev^2-e\int_0^{|\varphi|}d\tilde{g}\,2\,\tilde{g}\,K(\tilde{g})}{s\sqrt{2}H(|\varphi|,N)}\right)^{\frac{2s}{2s-1}}+e^2N^2|\varphi|^2K(|\varphi|), \tag{5.134}$$

onde $v$ é um parâmetro que controla a quebra a simetria e $K(|\varphi|)$ é uma função que permite a quebra de simetria do potencial. O modelo usual é facilmente obtido para $K(|\varphi|)=1$ com $s=1$, que leva ao potencial padrão, dado por

$$V_{\text{padrão}}(|\varphi|,N)=\frac{1}{2}(ev^2-e|\varphi|^2-\kappa N)^2+e^2N^2|\varphi|^2. \tag{5.135}$$

As equações de primeira ordem Eqs. (5.119), a serem resolvidas para o potencial Eq. (5.134), com um $K(|\varphi|)$ geral e $A_0(r)=N(r)$ são

$$g' = \frac{ag}{r}, \tag{5.136a}$$

$$\frac{a'}{r} = -er\left(\frac{ev^2-e\int_0^g d\tilde{g}\,2\,\tilde{g}\,K(\tilde{g})-\kappa N}{s2^{(1-s)}H(g,N)}\right)^{\frac{1}{2s-1}}. \tag{5.136b}$$

Como já mensionado, uma vez que temos quatro campos e apenas três equações de primeira ordem, o uso de uma das equações de movimento Eqs. (5.107) é necessário para resolver o problema. Em particular, podemos usar $\mathcal{L}_N=G_N$ na Eq. (5.107d) e escrever

$$\frac{(rN')'}{r}=-\kappa\left(\frac{ev^2-e\int_0^g d\tilde{g}\,2\,\tilde{g}\,K(\tilde{g})-\kappa N}{s2^{(1-s)}H(g,N)}\right)^{\frac{1}{2s-1}}+2e^2g^2NK(g). \tag{5.137}$$

Neste caso, para o cálculo analítico da energia, usamos a Eq. (5.121) para obter

$$W(a,g)=a\left(\int_0^g d\tilde{g}\,2\,\tilde{g}\,K(\tilde{g})-v^2\right). \tag{5.138}$$

Considerando que $W(0,v)=0$, temos $E=2\pi v^2|n|$.

É simples mostrar que esse resultado também é válido para o caso padrão, quando fazemos, $H(|\varphi|,N)=1$, $K(|\varphi|)=1$ e $s=1$, em que temos $W(a,g)=a(g^2-v^2)$. Um outro modelo que se enquadra na classe de sistemas que acabamos de obter, foi estudado numericamente na Ref. [100], contudo não leva a soluções compactas.

# Capítulo 6

# Conclusões e Perspectivas

Iniciamos esse trabalho com a revisão de alguns tópicos da teoria clássica de campos, com o objetivo de introduzir conhecimentos básicos e necessários para apresentarmos nossos resultados.

No capítulo 2 foi mostrado como o campo escalar se insere na teoria clássica de campos, tendo sempre como preferência as teorias que suportam configurações localizadas e topológicas. Neste sentido, mostramos que a corrente topológica $J_T$ define o caráter topológico do defeito. Utilizando potenciais apropriados, vimos que o método de Bogomol'nyi gera equações de primeira ordem cujas soluções são equivalentes às equações de movimento de segunda ordem, o que facilita a obtenção de soluções analíticas ou numéricas. Analisamos a estabilidade linear das soluções, afim de estabelecer se estas são estáveis ou instáveis. Na sequência, passamos ao estudo de kinks e lumps. Para ilustrar, revisamos dois exemplos clássicos de kinks: o potencial $\phi^4$ e o potencial seno-Gordon. Para lumps, foram estudados dois exemplos tradicionais: os potenciais $\phi^3$ e $\phi^4$ invertido.

Iniciamos o capítulo 3 com o estudo sobre vórtices, que surgem em (2,1) dimensões no espaço-tempo, requerendo um campo escalar complexo minimamente acoplado a um campo de gauge, por meio de um grupo de simetria $U(1)$. Como exemplo, foram discutidos os modelos tradicionais de Maxwell-Higgs e Chern-Simons-Higgs com a demonstração de suas características e peculiaridades. Nestes exemplos, as equações de movimento, equações BPS, soluções analíticas aproximadas e soluções numéricas foram particularmente descritas, estabelecendo uma fundamentação que embase nossa contribuição.

No capítulo 4 estudamos a presença de vórtices em um modelo generalizado de Maxwell-Higgs [56], de uma forma que pudessemos encontrar equações de primeira ordem e suas soluções. Para tanto, adicionamos ao termo de Maxwell uma função dependente do módulo do campo $\phi$, $G(|\phi|)$, que molda uma permeabilidade magnética

generalizada. Esta modificação nos conduz ao estudo de teorias de campos planares e efetivas com soluções do tipo vórtices que, sob certas condições, mapeiam os vórtices com dinâmica padrão de Maxwell-Higgs e Chern-Simons-Higgs.

Nesta nova teoria, foi possível desenvolver um formalismo de primeira ordem e encontrar os mesmos vórtices com dinâmica padrão descritos anteriormente. Além disso, verificamos que é possível modificar a função $G(|\phi|)$, para reproduzir diferentes modelos com distintos perfis de soluções, conforme estudado na Sec. 4.2. Posteriormente, na Sec. 4.4, este estudo foi usado para propor novos modelos, com o propósito de investigar a possibilidade de restringir as soluções em um intervalo compacto da coordenada radial, considerando dois modelos distintos, ambos com dinâmica padrão, como no caso dos kinks compactons proposto pela Ref. [55].

Os resultados indicaram a presença de comportamento compacto, com os vórtices contraindo para um intervalo em que suas soluções, densidade de energia e campo magnéticos apresentam valores nulos fora deste intervalo. Os dois modelos engendram diferenças entre si, sendo um deles descrito pelo potencial Eq. (4.33), semelhante ao modelo com dinâmica padrão de Maxwell-Higgs enquanto o outro modelo, com potencial Eq. (4.40), é análogo ao modelo Chern-Simons para $l = 1$. É possível observar o comportamento compacto nas Figs. 4.10 e 4.11, para o primeiro modelo, e nas Figs. 4.13 e 4.14 para o segundo modelo. Desta forma, um novo comportamento para vórtices foi verificado no estudo dos modelos da Sec. 4.4, vórtices compactos.

No capítulo 5, estudamos os vórtices generalizados nos sistemas Maxwell-Higgs, Chern-Simons-Higgs e Maxwell-Chern-Simons-Higgs, em que a existência de um formalismo de primeira ordem para que uma classe mais geral de modelos fosse possível em cada cenário [57]. Como mostrado neste capítulo, os resultados deste estudo revelaram vínculos que restringem a escolha das densidades lagrangianas que suportam soluções sem stress e de forma analítica. Entretanto, estes mesmos vínculos nos ajudaram a introduzir uma função auxiliar $W = W(a, g)$, que nos permitiu calcular a energia para qualquer dos modelos mencionados, sem que a forma explícita das soluções fossem conhecidas, devendo cada uma das três generalizações satisfar a condições específicas.

Expomos que existem duas equações de movimento para a estrutura Maxwell-Higgs que, por se tratar de um sistema eletricamente neutro, torna a lei de Gauss uma identidade o que não contribui com as equações de movimento. Neste caso, motivados por argumentos de reescala da energia e a condição de estresse nulo, surgem duas equações de primeira ordem. A classe de modelos que emergem deste sistema geram vínculos complicados de serem analisados. Alternativamente, um caminho para construir modelos analíticos foi introduzido com o cálculo da função

auxiliar $W = W(a, g)$, que nos permitiu avaliar a energia, sem que a forma das soluções fossem de conhecimento explícito.

A generalização no cenário Chern-Simons-Higgs, intencionalmente, não envolve o termo de Chern-Simons. A razão está no fato de que este termo não é invariante de gauge. Para a classe de modelos que estudamos, encontramos três equações de movimento, mas apenas duas equações de primeira ordem que suportam soluções com estresse nulo. Então, usamos a lei de Gauss como a terceira equação de primeira ordem já que, diferente do sistema Maxwell-Higgs, é carregado. Semelhante ao caso de Maxwell-Higgs, também aqui pudemos explorar um caminho para construir analiticamente a densidade lagrangiana e calcular $W = W(a, g)$ para este modelo, propiciando mensurar a energia das soluções com tensão nula.

Para o caso Maxwell-Chern-Simons-Higgs, o desenvolvimento do formalismo apresentou um maior grau de complexidade, quando comparado aos dois outros modelos acima mencionados. A necessidade de incluir um campo escalar neutro na densidade lagrangiana, para obter tal formalismo, ficou evidente. Obtivemos para esse modelo, quatro equações de movimento e apenas três equações de primeira ordem que surgiram da condição de estresse nulo. Portanto, mais uma vez, recorremos a lei de Gauss e com ela, a quarta equação de primeira ordem surge, completando o quadro para o formalismo de primeira ordem. Para construir analiticamente a densidade lagrangiana, procedemos similarmente nos cenários anteriores, encontrando a função auxiliar $W = W(a, g)$ e calculando a energia neste formalismo. Entretanto, agora duas são as restrições, Eqs. (5.129).

É importante enfatizar que nos três modelos, Maxwell-Higgs, Chern-Simons-Higgs e Maxwell-Chern-Simons-Higgs, as equações de movimento e os vínculos que surgem nos sistemas e obedecem às equações de primeira ordem, também nos conduz a construção da função auxiliar $W = W(a, g)$. De qualquer modo, o formalismo de primeira ordem para vórtices generalizados mostrou-se eficiente não só pela elegância do formalismo em si, como também nos propiciou meios para o cálculo da energia das configurações de campo com exatidão sem o conhecimento prévio da forma explícita das soluções. Até agora, estes resultados não se encontravam presentes na literatura dos vórtices.

Os principais resultados revelaram formas significativas de construir modelos generalizados. À parte, os resultados em soluções compactas dos modelos Maxwell-Higgs e Chern-Simons-Higgs são de interesse atual. Para o sistema Maxwell-Chern-Simons-Higgs, o formalismo de primeira ordem foi implementado com sucesso, mas estudos adicionais são necessários para que as soluções compactas sejam encontradas.

Do ponto de vista das perspectivas, nota-se que ambos os trabalhos desenvolvidos

nos capítulos 4 e 5 se entrelaçam e apontam inúmeras possibilidades a serem exploradas. Podemos começar, pelos próprios estudos adicionais para encontrar soluções compactas, necessários ao caso Maxwell-Chern-Simons-Higgs. Outras possíveis investigações incluem uma extensão dos vórtices compactos no formalismo atual para o caso de vórtices não topológicos, vórtices não abelianos e monopolos. Pode-se também tentar desenvolver procedimentos semelhantes para modelo com simetria ampliada para $U(1)$ x $U(1)$, o qual é de interesse no estudo de cordas supercondutoras [101] e do chamado setor oculto [102]-[104]. De particular interesse, pode-se mesclar os estudos dos dois últimos capítulos e propor uma densidade lagrangiana generalizada e com altas ordens derivativas do tipo

$$\mathcal{L} = K(|\varphi|)|D_\mu\varphi|^2 + \frac{\kappa}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho}A^\mu\partial^\nu\Box A^\rho. \tag{6.1}$$

Esta proposta está em fase de implementação.

# Referências Bibliográficas


[1] D. B. Reeves, *An introduction to topological defects in field theories*, Dept. Physics and Astronomy, Dartmouth College, (2014).

[2] F. A. C. C. Chalub, J. P. Zubelli, *Sólitons: Na Crista da Onda por mais de 100 Anos*, Revista de Matemática, **30**, 41 (2001).

[3] A. T. Filippov, *The Versatile Soliton*, (Birkhäuser, Boston, 2000).

[4] A. Vilenkin, E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects* (Cambridge University Press, Cambridge, 1994).

[5] N. S. Manton and P. Sutcliffe, *Topological solitons*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2004).

[6] T. Vachaspati, *Kinks and Domain Walls*, Cambridge University Press, Cambridge U.K. (2006).

[7] R. K. Dodd, J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, H. C. Morris (1982). *Solitons and Nonlinear Wave Equations*. London: Academic Press. ISBN 978-0-12-219122-0.

[8] P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, (1981).

[9] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, Wiley-VCH, Weinheim, Germany (2004).

[10] M. Gomes, *Teoria Quântica dos Campos*, Edusp, São Paulo, (2002).

[11] R. Rajaraman, *Solitons And Instantons*, North-Holland Elsevier Science Publishers B.V. (1982).

[12] H. von Helmholtz, *Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche der Wirbelbewegung entsprechen*, J. Für die reine und angewandte Mathematik, **55**, 2555 (1858).

[13] P. G. Saffman, *Vortex Dynamics*, Cambridge University Press (1992).

[14] V. L. Ginzburg and L.D. Landau, *On the Theory of superconductivity*, Zh. Eksp. Teor. Fiz., **20**, 1064 (1950).

[15] V. L. Ginzburg, *Some Remarks Concerning the Macroscopic Theory of Superconductivity*, J. Exptl. Theoret. Phys. (U.S.S.R.), **30**, 593 (1956), Soviet Phys. JETP, **3** 621 (1956).

[16] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J.R. Schriepper, *Microscopic Theory of Superconductivity*, Phys. Rev., **106**, 162 (1957).

[17] J. L. N. Cooper and J.R. Schrieffer, *Theory of superconductivity*, Phys. Rev., **108**, 1175 (1957).

[18] N. N. Bogoliubov, J. Exptl. Theoret. Phys. (U.S.S.R.), **34**, **58**, **73** (1958) [translation: Soviet Phys. - JETP **34**, **41**, **51** (1958)]; N. N. Bogoliubov, V. V. Tolmachev, and D. V. Shirkov, *A new Method in the Theory of Superconductivity* (Academy of Sciences of U.S.S.R., Moscow, 1958).

[19] Y. Nambu, *Axial Vector Current Conservation in Weak Interactions*, Phys. Rev. Lett., **4**, 380 (1960).

[20] Y. Nambu and G.J. Lasinio, *Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. I*, Phis. Rev., **122**, 345 (1961).

[21] J. Goldstone, A. Salam and S. Weinberg, *Broken Symmetries*, Phys. Rev., **127**, 965 (1962).

[22] A. L. Fetter and J.D. Walecka, *Quantum Theory of Many Particle Systems* (McGraw-Hill, New York, 1971).

[23] C. Rebbi and G. Soliani, *Solitons and Particles* (World scientifc, Singapure, 1984).

[24] A. A. Abrikosov, *On the Magnetic Properties of Superconductors of the Second Group*,J. Exptl. Theoret. Phys. (U.S.S.R.), **32**, 1442 (1957).

[25] W. Meissner, R. Ochsenfeld, *Ein neuer Effekt bei Eintritt der Supraleitfähigkeit.* Naturwissenschaften, **21**, (44): 787 (1933).

[26] R. B. Laughlin, *The Relationship Between High-Temperature Superconductivity and the Fractional Quantum Hall Effect*, Science 242, 525(1988); *Superconducting Ground State of Noninteracting Particles Obeying Fractional Statistics*, Phys. Rev. Lett., **60**, 2677 (1988).

[27] S. Desser, R. Jackiw and S. Templeton, *Topologically massive gauge theories*, Ann. Phys. **140**, 372 (N.Y.) (1982) 372.

[28] W. H. Zurek, *Cosmological Experiments in Condensed Matter Systems*, Phys. Reports, **276**, 177 (1996).

[29] P. W. Higgs, *Broken Symmetries Massless Particles and Gauge Fields*, Phys. Lett. **12**, 132 (1964).

[30] S. Coleman, *Aspects of Symmetry*, Cambridge University Press, Cambridge (1985).

[31] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*, Princeton, Princeton, (2003).

[32] H. B. Nielsen and P. Olesen, *Vortex-line models for dual strings*, Nucl. Phys., B **61**, 45 (1973).

[33] S. Glashow, *The Renormalizability of Vector Meson Interactions*, Nuc. Phys. **10**, 107 (1959).

[34] A. Salam, J. C. Ward, *Weak and Electromagnetic Interactions*, Nuovo Cimento **4**, 11 (1959).

[35] S. Weinberger, *A Model of Leptons*, Phys. Rev. Lett. **21**, 19 (1967).

[36] H. J. de Vega and F. A. Schaposnik, *Electrically Charged Vortices in Non-Abelian Gauge Theories with Chern-Simons Term*, Phys. Rev. Lett., **56**, 2564 (1986).

[37] J. Hong, Y. Kim and P. Y. Pac, *Multivortex Solutions of the Abelian Chem-Simous-Higgs Theory*, Phys. Rev. Lett., **64**, 2230 (1990).

[38] R. Jackiw and E. J. Weinberg, *Self-Dual Chern-Simons Vortices*, Phys. Rev. Lett., **64**, 2234 (1990).

[39] J. Lee and S. Nam, *Bogomol'nyi equations of Chern-Simons Higgs theory from a generalized abelian Higgs model* Phys. Lett. B **261**, 437 (1991).

[40] D. Bazeia, *A Note on Chern-Simons solitons*, Phys. Rev. D **43** 4074 (1991).

[41] D. Bazeia, *Vortices in a Generalized Higgs Model* Phys. Rev. D **46**, 1879 (1992).

[42] H. C. Kao, *Self-dual Yang-Mills Chern-Simons Higgs systems with an N = 3 extended supersymmetry*, Phys. Rev. D **50** 2881 (1994).

[43] C. Duval and P. A. Horváthy, *Chern-Simons Vortices*, [arXiv: hep-th/0307025].

[44] U. Essmann e H. Trauble, *The Direct Observation of Individual Flux Lines in Type II Superconductors*, Physics Letters, bf 24A, 526 (1967).

[45] M. F. Atiyah e N. J. Hitchin, *The Geometry and Dynamics of Magnetic Monopoles*, Princeton University Press, 1988.

[46] E. B. Bogomol'nyi, *Stability of Classical Solutions*, Sov. J. Nucl. Phys., **24**, 449 (1976) [Yad. Fiz. 24, 861 (1976)].

[47] A. Alonso-Izquierdo, W. G. Fuertes, and J. M. Guilarte, *Two Species of Vortices in Massive Gauged Non-linear Sigma Models*, JHEP **1502**, 139 (2015).

[48] C. P. Burgess, R. Diener, and M. Williams, *The Gravity of Dark Vortices: Effective Field Theory for Branes and Strings Carrying Localized Flux*, JHEP **1511**, 49 (2015).

[49] G. Tallarita, *Non-Abelian Vortices in Holographic Superconductors*, Phys. Rev., D **93**, 066011 (2016).

[50] X. Han and Y. Yang, *Magnetic Impurity Inspired Abelian Higgs Vortices*, JHEP **1602**, 46 (2016).

[51] P. Forgács and A. Lukács, *Vortices and Magnetic Bags in Abelian Models with Extended Scalar Sectors and Some of their Applications*, Phys. Rev. D **94**, 125018 (2016).

[52] J. Chagoya and G. Tasinato, *Galileon Higgs Vortices*, JHEP **1602**, 63 (2016).

[53] C. Adam, J. M. Speight, and A. Wereszczynski, *Volume of a Vortex and the Bradlow Bound*, Phys. Rev., D **95**, 116007 (2017).

[54] D. Bazeia, M. A. Marques, and R. Menezes, *Twinlike Models for Kinks, Vortices, and Monopoles*, Phys. Rev., D **96**, 025010 (2017).

[55] D. Bazeia, L. Losano, M. A. Marques and R. Menezes, *From Kinks to Compactons*, Phys. Lett., B **736**, 515 (2014).

[56] D. Bazeia, L. Losano, M. A. Marques, R. Menezes and I. Zafalan, *Compact Vortices*, Eur. Phys. J. C, **77**, 63 (2017).

[57] D. Bazeia, L. Losano, M. A. Marques, R. Menezes and I. Zafalan, *First Order Formalism for Generalized Vortices*, Nucl. Phys., B **934**, 212 (2018).

[58] P. O. Jubert, R. Allenspach, A. Bischof, *Magnetic Domain Walls in Constrained Geometries*, Phys. Rev. B **69**, 220410(R) (2004).

[59] D. Bazeia, *Campos Escalares em Ação*, Tese apresentada ao Departamento de Física, em cumprimento às exigências estabelecidas para Concurso Público para Professor Titular João Pessoa, Universidade Federal da Paraíba (2004).

[60] D. Bazeia, L. Losano, R. Meneses, M. A. M. Souza, *Campos Escalares Reais e a Quebra Espontânea de Simetria: uma Descrição Analítica para Defeitos Topológicos*, Lat. Am. J. Phys. Educ. **6**, No. 1, (2012).

[61] D. Bazeia, *Topological solitons in a vacuumless system*, Physical Review D, **60**, 067705 (1999).

[62] M. K. Prasad and Charles M. Sommerfield, *Exact Classical Solution for the 't Hooft Monopole and the Julia-Zee Dyon*, Phys. Rev. Lett. **35**, 760 (1975).

[63] R. Menezes, *Defeitos Globais em Teoria de Campos e Aplicações*, Tese de Doutorado, Universidade Federal da Paraíba (2007).

[64] F. Cooper, A. Khare, U. Sukhatme, *Supersymmetry and Quantum Mechanics*, Phys. Rep. **251**, 267 (1995).

[65] G. Junker, *Supersymmetric Methods in Quantum and Statistical Physics*, Springer, Berlin (1996).

[66] P. Morse, H. Feshbach, *Methods of Mathematical Physics*, (McGraw-Hill, New York, 1953).

[67] S. Flügge, *Practical Quantum Mechanics* (Springer, Berlin, 1974).

[68] C. D. Santangelo, R. D. Kamien, *Bogomol'nyi, Prasad, and Sommerfield Configurations in Smectics*, Phys. Rev. Lett. **91**, 045506 (2003).

[69] M. Faux, D. Spector, *A BPS interpretation of shape invariance* J. Phys. A **37**, 10397 (2004).

[70] P. G. Drazin, R. S. Johnson, *Solitons: An Introduction* (Cambridge, Cambridge/UK, 1993).

[71] R. Jackiw, *Quantum Meaning of Classical Field Theory*, Rev. Mod. Phys. **49**, 681 (1977).

[72] J. Rubinstein, *Sine-Gordon Equation*, Journal of Mathematical Physics, Volume 11, Number 1 (1970).

[73] A. N. Bogdanov, U. K. Rössler, M. Wolf, K. H. Müller, *Magnetic structures and reorientation transitions in noncentrosymmetric uniaxial antiferromagnets*, Phys. Rev. B **66**, 214410 (2002).

[74] P. Rosenau and J. M. Hyman, *Compactons: Solitons with finite wavelength*, Phys. Rev. Lett. **70**, 564 (1993).

[75] H. Arodz, *Topological Compactons*, Acta Phys. Pol. B **33**, 1241 (2002); H. Arodz, P. Klimas, and T. Tyranowski, *Compact Oscillons in the Signum-Gordon Model*, Phys. Rev. D **77**, 047701 (2008).

[76] G. Gaeta, T. Gramchev, and S. Walcher, *Compact Solitary Waves in Linearly Elastic Chains with non-smooth on-site Potential*, J. Phys. A **40**, 4493 (2007); G. Gaeta, *Compact Travelling Waves and non-smooth Potentials* EPL **79**, 20003 (2007).

[77] D. Bazeia, L. Losano, R. Menezes, and J. C. R. E. Oliveira, *Generalized Global Defect Solutions*, Eur. Phys. J. C **51**, 953 (2007).

[78] R. Hobart, *On the Instability of a Class of Unitary Field Models*, Proc. Phys. Soc. London 82, 201 (1963); G. H. Derrick, *Comments on Nonlinear Wave Equations as Models for Elementary Particles*, J. Math. Phys. 5, 1252 (1964).

[79] D. Bazeia, L. Losano, and R. Menezes, *First-order framework and generalized global defect solutions*, Phys. Lett. B **668**, 246 (2008).

[80] D. Bazeia, L. Losano, and R. Menezes, *New Results on Compact Structures*, Phys. Lett. B **731**, 293 (2014).

[81] D. Bazeia, L. Losano, M. A. Marques, and R. Menezes, *Compact Structures in Standard Field Theory*, EPL **107**, 61001 (2014).

[82] D. Finkelstein, *Kinks*, J. Math. Phys. **7**, 1218 (1966).

[83] E. Noether, *Invariante Variations Probleme*, Math. Phys, 235 (1918).

[84] G. B. Arfken, H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, 4th ed. (1995).

[85] C. M. C. Pereira, *Chiral and Flavor Symmetries in Holographic QCD: Pion Excited States, Strong Couplings of Charmed Mesons and Inverse Magnetic Catalysis*, Tese de Doutorado, Instituto de Física Teórica Universidade Estadual Paulista (2017), *Vórtices em teorias de campo com violação da invariância de Lorentz*, Discertação de Mestrado, Universidade Federal do Maranhão (2012).

[86] A. Khare, *Charged Vórtices and Q-balls in an Abelian Higgs Model Exhibiting a First Order Phase Transition*, Phys. Lett. B **255**, 393 (1991).

[87] A. C. Lehum, *Quebra de Simetria de Calibre no Modelo de Chern-Simons Supersimétrico*, Tese de doutorado, IF Universidade de São Paulo (2008).

[88] H. J. de Vega and F. A. Schaposnik, *A Classical Vortex Solution of the Abelian Higgs Model*, Phys. Rev. D **14** 1100 (1976).

[89] M. A. Anacleto, A. Ilha, J. R. S. Nascimento, R. F. Ribeiro, and C. Wotzasek, *Dual equivalence between Self-Dual and Maxwell-Chern-Simons models coupled to dynamical U(1) charged matter*, Phys. Lett. B 504, 268 (2001).

[90] D. Bazeia, E. da Hora, C. dos Santos, and R. Menezes, Phys. Rev. D 81, 125014 (2010); D. Bazeia, E. da Hora, D. Rubiera-Garcia, Phys. Rev. D 84, 125005 (2011); D. Bazeia, R. Casana, M. M. Ferreira Jr., E. da Hora, L. Losano, Phys. Lett. B 727, 548 (2013); D. Bazeia, R. Casana, M. M. Ferreira Jr., E. da Hora, EPL 109, 21001 (2015).

[91] H. S. Ramadhan, *Some exact BPS Solutions for Exotic Vortices and Monopoles* Phys. Lett. B **758**, 140 (2016).

[92] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, (3rd ed. Wiley, 1998).

[93] D. Bazeia, L. Losano, M. A. Marques and R. Menezes, *From Kinks to Compactons*, Phys. Lett. B, **736**, 515-521 (2014).

[94] E. Babichev, *Gauge k-vortices* Phys. Rev. D *77*, 065021 (2008).

[95] D. Bazeia, E. da Hora, R. Menezes, H. P. de Oliveira, C. dos Santos, *Compactlike kinks and Vortices in Generalized Models* Phys. Rev. D **81**, 125016 (2010).

[96] D. Bazeia, E. da Hora, C. dos Santos and R. Menezes, *Generalized self-dual Chern-Simons vortices*, Phys. Rev. D **81** 125014 (2010).

[97] K. Shiraishi, S. Hirenzaki, *Bogomolnyi Equations for Vortices in Born-Infeld Higgs Systems*, Int. J. Mod. Phys. A **6** 2635 (1991).

[98] M. Andrews, M. Lewandowski, M. Trodden, D. Wesley, *Distinguishing k-defects from their Canonical Twins*, Phys. Rev., D **82**, 105006 (2010).

[99] D. Bazeia, L. Losano, M. A. Marques, R. Menezes, *Compact Chern-Simons Vortices*, Phys. Lett., B **772**, 253 (2017).

[100] D. Bazeia, R. Casana, E. da Hora, R. Menezes, *Generalized self-dual Maxwell-Chern-Simons-Higgs model*, Phys. Rev. D **85** 125028 (2012).

[101] E. Witten, *Superconducting Strings*, Nucl. Phys. B **249**, 557 (1985).

[102] V. Silveira, A. Zee, *Scalar Phantoms*, Phys. Lett. B **161**, 136 (1985).

[103] P. Ariasa, F. A. Schaposnik, *Vortex Solutions of an Abelian Higgs Model with Visible and Hidden sectors*, JHEP **1412**, 11 (2014).

[104] P. Arias, E. Ireson, C. Núñez, F. Schaposnik, $\mathcal{N} = 2$ *SUSY Abelian Higgs Model with Hidden Sector and BPS Equations*, JHEP **02**, 156 (2015).