



**Universidade Federal da Paraíba**  
**Campus I – Centro de Tecnologia**  
**Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental**  
**Doutorado**

# **CONTRIBUIÇÕES À ANÁLISE DINÂMICA DA AÇÃO DO VENTO EM PILARES DE PONTES VIA TÉCNICA DO MEIO CONTÍNUO E MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Autor

Wesley Imperiano Gomes de Melo

Tese de doutorado apresentada à Universidade Federal da Paraíba para obtenção do grau de  
Doutor

**WESLEY IMPERIANO GOMES DE MELO**

**CONTRIBUIÇÕES À ANÁLISE DINÂMICA DA AÇÃO DO VENTO  
EM PILARES DE PONTES VIA TÉCNICA DO MEIO CONTÍNUO  
E MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação  
em Engenharia Civil e Ambiental do Centro de  
Tecnologia da Universidade Federal da Paraíba,  
como parte dos requisitos necessários à obtenção  
do título de Doutor na área de conhecimento de  
Estruturas e Materiais

Orientador Científico: Prof.º Dr. Normando Perazzo Barbosa

**Catálogo na publicação**  
**Seção de Catalogação e Classificação**

M528c Melo, Wesley Imperiano Gomes de.

CONTRIBUIÇÕES À ANÁLISE DINÂMICA DA AÇÃO DO VENTO EM  
PILARES DE PONTES VIA TÉCNICA DO MEIO CONTÍNUO E MÉTODO  
DOS ELEMENTOS FINITOS / Wesley Imperiano Gomes de  
Melo. - João Pessoa, 2019.  
333 f. : il.

Orientação: Normando Perazzo Barbosa.  
Tese (Doutorado) - UFPB/CT.

1. Pilares de pontes. 2. Flexo-torção. 3. Generalização  
da Teoria dos Painéis-parede (GTPP). 4. Análise  
dinâmica. 5. Estabilidade e ação do vento. 6. MEF. 7.  
Armadura ao bimomento. I. Barbosa, Normando Perazzo.  
II. Título.

UFPB/BC

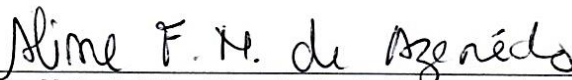
# CONTRIBUIÇÕES À ANÁLISE DINÂMICA DA AÇÃO DO VENTO EM PILARES DE PONTES VIA TÉCNICA DO MEIO CONTÍNUO E MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Autor


**WESLEY IMPERIANO GOMES DE MELO**

Tese aprovada em 05 de novembro de 2019

  
Prof.º Dr. Normando Perazzo Barbosa – UFPB  
Orientador

  
Prof.ª Dr.ª Aline Figueiredo da Nobrega Azeredo – UFPB  
Examinadora Interna

  
Prof.º Dr. José Antonio Riul – UFPB  
Examinador Interno

  
Prof.º Dr. Romilde Almeida de Oliveira – UNICAP  
Examinador Externo

  
Prof.º Dr. Romildo Morant de Holanda – UFRPE  
Examinador Externo



## EPÍGRAFE

---

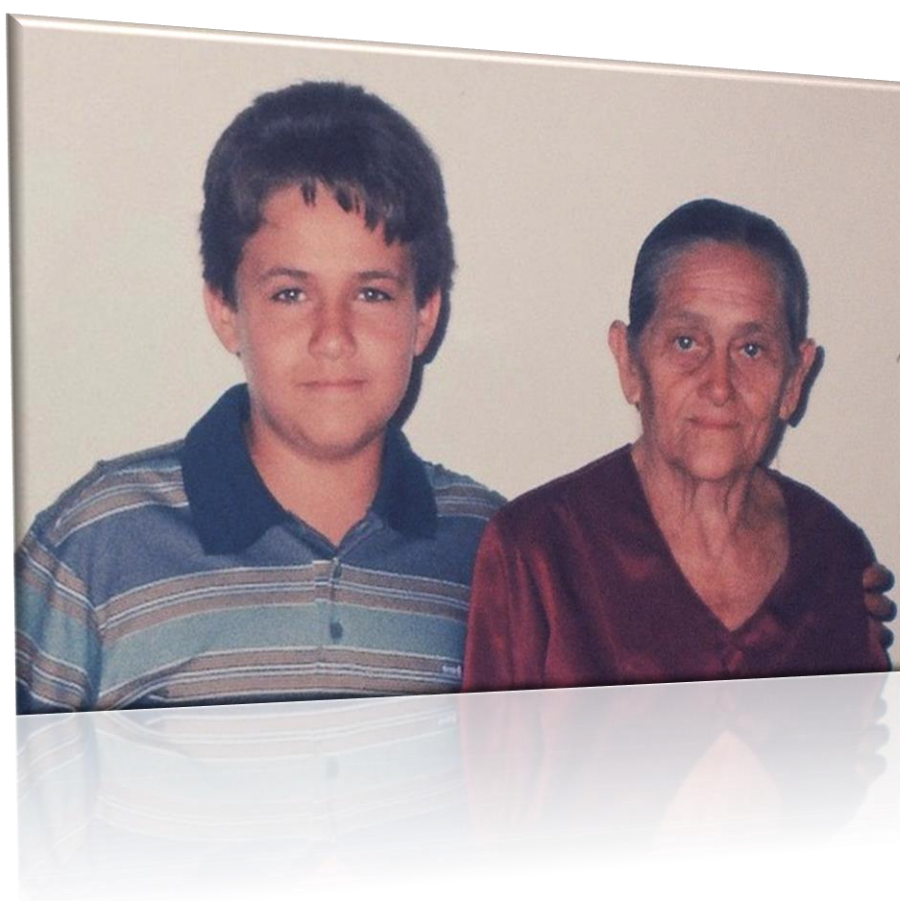


*“Se eu fosse recomençar meus estudos,  
seguiria o conselho de Platão e começaria  
pela matemática.”*

*Galileo Galilei*

## DEDICATÓRIA

---



*A minha Avó **Francisca Gomes de Melo** (in memoriam), minha eterna Vó Nininha, a quem atribuo às melhores lembranças, os melhores sentimentos e as mais sutis recordações. A quem atribuo o alicerçar do homem íntegro que me formei, a quem devo toda fé que possuo.*

## AGRADECIMENTOS

---

Agradeço a DEUS e às forças do bem por permitirem meu trilhar constante nos degraus do crescimento pessoal e profissional;

Agradeço ao Prof.<sup>o</sup> Dr. Normando Perazzo Barbosa pela orientação desta Tese, agradeço também pelas valorosas lições que me foram passadas à nível de graduação e pós-graduação relacionadas a engenharia estrutural;

Agradeço a amiga e colega Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Maria Angela Pereira Xavier por sua valorosa contribuição em disponibilizar textos acadêmicos pertinentes a esta Tese, agradeço também por sua amizade e pelos diálogos sobre engenharia estrutural;

Agradeço a todos os amigos e colegas professores da UFRPE/UACSA pelo incentivo à esta pesquisa, em especial ao caro prof. Dr. Romildo Morant por sua contribuição inestimável nesta tese, agradecimento extensível ao prof. Dr. Romilde Oliveira;

Agradeço também à coordenadora do curso de engenharia civil da UACSA, prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Cecília Lins, e ao amigo e diretor prof. Dr. Marcos Oriá pela compreensão e no incentivo a confecção desta tese;

Estendo também os agradecimentos ao Diego Lima pelo incentivo nesta tese, agradeço também à senhora Josefa Silva pela motivação na conclusão desta tese e conseguinte obtenção do título de doutor;

Agradeço a minha avó materna Francisca Gomes de Melo (*in memoriam*), minha sempre eterna Vó Nininha, por minha formação moral, pela escolha incessante do bom proceder e por ser meu amparo, escudo e espelho profundo;

Agradeço a minha avó paterna Ângela Imperiano da Conceição (*in memoriam*), pelo exemplo sempre presente de perseverança e de não se deixar abater nas adversidades e agradeço também aos meus avôs Antônio Pereira de Melo (*in memoriam*) e Cícero Imperiano da Silva (*in memoriam*), pela memória impoluta; e

Agradeço a todos que contribuíram de forma direta ou indiretamente para a elaboração desta Tese, o meu muito obrigado a todos!

## RESUMO

---

MELO, W.I.G. **Contribuições à análise dinâmica da ação do vento em pilares de pontes via técnica do meio contínuo e método dos elementos finitos.** 2019. Tese (Doutorado em Engenharia Civil – Estruturas), Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2019.

O aprimoramento da análise estrutural vem se acelerando nas duas últimas décadas, primordialmente sob modelagem pelo Método dos Elementos Finitos. No caso especial de pontes, mediante tal modelagem, os efeitos dinâmicos são computados com maior rigor e confiabilidade e devido à grande agilidade de processamento imposta pelo mercado, a utilização de softwares comerciais tornou-se corriqueira. Em face da utilização de tais programas de análise e dimensionamento, o engenheiro estrutural ganha a praticidade de simular diversos estados de carga, porém deve sempre possuir mecanismos de validação e verificação de tais resultados. Daí, nessa tese, a Técnica do Meio Contínuo (TMC) será abordada, resgatada e aplicada na análise dinâmica de pilares de pontes, objetivando-se fomentar ferramenta de corroboração das simulações em softwares comerciais (geralmente via MEF). Os efeitos dinâmicos considerados nos mencionados pilares através da TMC foram obtidos com precisão excelente, o que permitiu a validação quanto aos seguintes aspectos: fenômeno da flexo-torção, teoria dos painéis-paredes, vibrações em núcleos estruturais contraventados por lintéis e estabilidade elástica. Além da exposição da TMC na análise dinâmica, evidencia-se a postulação de fluxogramas e marchas de cálculo sob a ótica de processamentos matriciais de equações diferenciais, bem como procedida a Generalização da Teoria dos Painéis – Parede (GTPP) para ocorrência de paredes não ortogonais. A inovação ocorre no seguinte: desacoplamento dinâmico da vibração de painéis-paredes metálicos e de concreto armado, amortecimento proporcional para rigidez estrutural particionada no núcleo e nos lintéis de contraventamento, equações de Maney no equilíbrio dos lintéis e na condensação matricial. Por fim, para seções de paredes finas de concreto armado, submetidas ao bimomento, é postulada a marcha de cálculo e apresentadas tabelas adimensionais para obtenção da armadura resistente.

**Palavras – chave:** Pilares de pontes; Flexo-torção; Generalização da Teoria dos Painéis-parede (GTPP); Análise dinâmica; Estabilidade e ação do vento; MEF; Armadura ao bimomento.

## ABSTRACT

---

MELO, W.I.G. **Contributions to analysis of wind action on bridge columns via the continuous medium technique and the finite element method.** 2019. Thesis (PhD in Structures), Federal University of Paraíba, João Pessoa, 2019.

The improvement of structural analysis has been accelerating in the last two decades, primarily under Finite Element Method (FEM) modeling. Particularly with bridges, through such modeling, the dynamic effects are computed with greater rigor and reliability and due to the great agility of processing imposed by the market, the use of commercial software has become commonplace. In view of the use of such analysis and sizing programs, the structural engineer gains the practicality of simulating several load states, but must always have mechanisms for validation and verification of such results. Hence, in this thesis, the continuous medium technique (CMT) will be approached, restored and applied to the dynamic analysis of bridge columns, aiming at fostering a corroboration tool for simulations in commercial software (usually via FEM). The dynamic effects considered in the aforementioned columns through CMT were obtained with excellent precision, which allowed the validation of the following aspects: torsional bending phenomenon, wall panel theory, vibrations in structural cores braced by lintels, and elastic stability. In addition to the CMT exposure in the dynamic analysis, the postulation of flowcharts and calculation margins are evidenced from the point of view of matrix processing of differential equations, as well as the realization of the Wall Panel Theory Generalization (WPTG) procedures for the occurrence of non-orthogonal walls. Innovation takes place in the following: dynamic decoupling of the vibration of metal wall panels and reinforced concrete, proportional damping for structural rigidity partitioned in the core and in the bracing lintels, Maney equations in the balance of the lintels, and in the matrix condensation. Finally, for sections of reinforced concrete thin walls, subject to the bimoment, the calculation march and dimensionless tables are postulated to obtain the resistant steel area.

**Keywords:** Bridge columns; Torsional bending; Wall Panel Theory Generalization (WPTG); Dynamic analysis; Stability and wind action; FEM; Bimoment steel area.

## RÉSUMÉ

---

**MELO, W.I.G . Contributions à l'analyse dynamique de l'action du vent sur les piliers des ponts par la technique du moyen continu et méthode des éléments finis.** 2019. Thèse (Doctorat en Structures), Université Fédéral de la Paraíba, João Pessoa, 2019.

L'amélioration de l'analyse structurelle a accéléré au cours des deux dernières décennies, principalement sur la modélisation par la Méthode des Éléments Finis. Dans le cas particulier de ponts, par la modélisation, les effets dynamiques sont calculés avec plus de rigueur et de fiabilité en raison de la grande agilité de traitement imposée par le marché, l'utilisation de logiciels commerciaux est devenue habituelle. Face à l'utilisation de tels programmes d'analyse et de dimensionnement, l'ingénieur en structure peut simuler plusieurs états de charge, mais il doit toujours disposer de mécanismes de validation et de vérification de ces résultats. Donc, dans cette thèse, la technique du moyen continu (TMC) sera abordée, sauvée et appliquée à l'analyse dynamique des piliers de ponts. Visant à fomentier un outil de corroboration des simulations dans des logiciels commerciaux (en général par le MEF). Les effets dynamiques considérés dans les piliers mentionnés par le biais TMC ont été obtenus avec une excellente précision, ce qui a permis la validation des aspects suivants: phénomène de la flexion-torsion, théorie des panneaux-parois vibrations dans les noyaux structurels renforcé par linteaux et stabilité élastique. Au-delà de l'exposition de l'exposition à la TMC dans l'analyse dynamique, il est évident que la postulation des organigrammes et des marches de calcul du point de vue du traitement matriciel d'équations différentielles, ainsi que la généralisation de la théorie des panneaux-parois (GTPP) pour la survenue de murs non orthogonaux. L'innovation est la suivante: découplage dynamique des vibrations provenant des panneaux-parois métalliques et en béton armé, amortissement proportionnel pour la rigidité structurelle cloisonnée dans les linteaux centraux et de contreventement, équations de Maney dans l'équilibre des linteaux et la condensation de la matriciale En guise de conclusion, pour les sections de béton armé à parois minces soumises au bimomento, les tables de marche et de calcul sans dimension sont postulées pour obtenir le renforcement résistant.

**Mots – clés:** Piliers de ponts; flexion-torsion; Généralisation de la théorie des Panneaux-parois GTPP); Analyse dynamique; Stabilité et action du vent; MEF; Armure du bimoment.

## LISTA DE FIGURAS

---

### Capítulo 1

Figura 1.1	Ponte Argered sob vãos centrais de 129 metros	11
Figura 1.2	Ponte Ganter, com pilares maciços e vazados, localizada na Suíça	11
Figura 1.3	Ponte sobre o vale dos diabos	12
Figura 1.4	Pilar da ponte Siegtal, com 100 metros de altura	12
Figura 1.5	Pilar da ponte presidente Costa e Silva, durante execução do tabuleiro	13

### Capítulo 2

Figura 2.1	Ponte Férrea em Brumadinho com pilares em duplo C contraventados por lintéis	17
Figura 2.2	Ponte Férrea no SA com pilares em duplo T: (a) visão panorâmica e (b) detalhe no pilar	18
Figura 2.3	Ponte de la Pyle na fase de construção, da qual observa-se o pilar em duplo T com abas de dimensões constantes ao longo da altura do pilar	18
Figura 2.4	Ponte com pilares em duplo C contraventados individualmente por lintéis	19
Figura 2.5	Ação do vento em pontes: (a) carga lateral atuante no conjunto tabuleiro – vigas e (b) efeito de elevação do tabuleiro em decorrência da ação do vento lateral	20
Figura 2.6	Rajada de vento atuante no tabuleiro de uma ponte com única linha de pilares e as forças solicitantes	20
Figura 2.7	Linha de pilares sob divisão da carga longitudinal	21
Figura 2.8	Dimensões características do apoio Neoprene	21
Figura 2.9	Linha de pilares sob divisão da carga lateral	22
Figura 2.10	Coeficiente da força aplicada lateralmente no tabuleiro devido a ação do vento	23
Figura 2.11	Coeficiente da força vertical oriunda da ação do vento e aplicada no tabuleiro	23
Figura 2.12	Vibração lateral de ponte em viga	24
Figura 2.13	Ação lateral do vento no tabuleiro: (a) configuração deformada e carga inclinada do vento, (b) procedimento de cálculo da rigidez do conjunto Pilar – Neoprene e (c) carregamentos concentrados no topo do pilar e devidos ao tráfego e à ação do vento no tabuleiro	24
Figura 2.14	Ponte com duas linhas de pilares com a aplicação do conceito de centro elástico	25
Figura 2.15	Posicionamento do centro elástico mediante rigidez a flexão dos pilares	26
Figura 2.16	Momento no centro elástico e decorrentes forças reativas no i-ésimo pilar	27
Figura 2.17	Momento no centro elástico, Translade de forças do CC para CE e decorrentes forças reativas no i-ésimo pilar	28
Figura 2.18	Partição das cargas no plano do tabuleiro da ponte com duas linhas de pilares	29
Figura 2.19	Partição das cargas no plano do tabuleiro da ponte, esforços axiais nos pilares	30
Figura 2.20	Painéis planos de contraventamento: (a) Associação em série, (b) Parede, (c) Pórtico e (d) deslocamentos horizontais	31

Figura 2.21	Painéis planos de contraventamento: (a) Parede com base engastada elasticamente, (b) Associação de Parede com base elástica e Pórtico	32
Figura 2.22	Painéis associados em séries com lintéis: (a) Paredes, (b) Parede e Pórtico	33
Figura 2.23	Efeitos de 2ª ordem via TMC para painéis – parede	33
Figura 2.24	Efeitos de 2ª ordem via TMC para Pórtico plano	34
Figura 2.25	Efeitos de 2ª ordem via TMC para a associação de paredes por lintéis	34
Figura 2.26	Técnica do Meio Contínuo (a) conjunto de pilares com único travamento na horizontal e (b) deslocamento proporcionado pela força $F$	35
Figura 2.27	Componentes do vetor unitário na mola $i$	35
Figura 2.28	Deslocamentos no centro elástico	36
Figura 2.29	Coordenadas do Centro Elástico	38
Figura 2.30	Painéis ortogonais com molas $x$ e $y$	39
Figura 2.31	Carregamentos, deformada e elemento diferencial da Parede Isolada	41
Figura 2.32	Parede com base engastada elasticamente e sua deformada	43
Figura 2.33	Movimento harmônico $u(t)$	45
Figura 2.34	Deslocamento $u(t)$ de um sistema massa-mola	46
Figura 2.35	Forças reativas no sistema massa-mola não amortecido	46
Figura 2.36	Forças reativas no sistema massa-mola amortecido	47
Figura 2.37	Frequências harmônicas: (a) viga biapoada e (b) viga Biengastada	47
Figura 2.38	Superposição modal de frequências	48
Figura 2.39	Função com período $2\pi$	49
Figura 2.40	Espectro de frequências $\omega_j$	50
Figura 2.41	Fator de amplificação dinâmica $j$ por razão $\beta$ de frequências	52
Figura 2.42	Deslocamento para razão $\beta$ unitária	53
Figura 2.43	Ciclo de energia introduzida e dissipada no sistema	54
Figura 2.44	Ciclo de energia: (a) estaticamente estável e dinamicamente instável com $\Delta E > \Delta u^D$ e (b) estática e dinamicamente estável com $\Delta E < \Delta u^D$	54
Figura 2.45	Amplificação do deslocamento na condição de ressonância em comparação do amortecimento estrutural	55
Figura 2.46	Deslocamento máximo quando da condição de ressonância	55
Figura 2.47	Condições iniciais de deslocamento e velocidade	57
Figura 2.48	Movimento não periódico com $\xi > 1$	58
Figura 2.49	Movimento criticamente amortecido	59
Figura 2.50	Movimento amortecido com $\xi < 1$	59
Figura 2.51	Deslocamento permanente em face do transiente	61
Figura 2.52	Amplificação do movimento via FAD	62
Figura 2.53	Ângulo de fase inicial	63
Figura 2.54	Vetor de estados para barra genérica	64
Figura 2.55	Excitação aperiódica	66
Figura 2.56	Vórtice de Base	68
Figura 2.57	Vórtice Confinado entre edificações	69
Figura 2.58	Perfis de velocidade do vento, segundo ASCE 7-05	70
Figura 2.59	Simplificação Bidimensional do fluxo do vento	71
Figura 2.60	Amostras para Tratamento Estatístico das flutuações	72
Figura 2.61	Padrão Estatístico no Processo Estacionário	72
Figura 2.62	Influência do Desvio – Padrão na Distribuição Gaussiana	73
Figura 2.63	Distribuição por correntes de rajadas de vento	73



Figura 2.64	Correlação entre os registros $x_1(t)$ e $x_2(t)$	74
Figura 2.65	Perfil de velocidade do vento	74
Figura 2.66	Carregamentos laterais no pilar de ponte devido à ação do vento: distribuição com a aproximação da corrente do ar	75
Figura 2.67	Carregamentos laterais no pilar de ponte devido à ação do vento: idealização de carregamentos	75
Figura 2.68	Ciclo de variação da tangente do arco $-\frac{\pi}{2} < 2\theta < \frac{\pi}{2}$ e $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$	83
Figura 2.69	Rotação $\phi$ em seção circular após deformação gerada pelo momento de torção $M_t$	84
Figura 2.70	Torção de Saint – Venant: (a) rotação $\phi$ em torno do centro de torção ou cisalhamento D e (b) deslocamento $\omega_f$ na direção z	85
Figura 2.71	Teoria de Flexo – torção: (a) esquema do giro da seção e (b) binário de forças equivalente ao Bimomento	87
Figura 2.72	Notação positiva para as variáveis $M_t, m, \phi$ e $B$	88
Figura 2.73	Pilar de ponte: (a) com contraventamento por lintéis, (b) sem lintéis, (c) deformado e (d) Condições de contorno	89
Figura 2.74	Representação gráfica de $\beta_1$ por variação de $\alpha H$ em detrimento de $\xi$	90
Figura 2.75	Representação gráfica de $\beta_2$ por variação de $\alpha H$ em detrimento de $\xi$	91
Figura 2.76	Representação gráfica de $\beta_3$ por variação de $\alpha H$ em detrimento de $\xi$	91
Figura 2.77	Pilar de ponte com seção transversal em duplo T: (a) carregamento do vento e (b) ordenadas setoriais nos pontos de rotulação dos lintéis (meio do vão)	92
Figura 2.78	Deformação dos lintéis após rotulação plástica no meio do vão	92
Figura 2.79	Pilar em núcleo: (a) em planta, (b) não contraventado, (c) sem lintéis	93
Figura 2.80	Elementos diferenciais dos painéis – parede: (a) 1, (b) 2 e (c) 3	94
Figura 2.81	Elementos diferenciais do (a) painel – parede 4 e (b) painel – parede 5	94
Figura 2.82	Reações elásticas do lintel via equações de Maney	96
Figura 2.83	Convenção dos deslocamentos nas interseções dos painéis – parede	99
Figura 2.84	Transformação de coordenadas locais para global	102
Figura 2.85	Painéis – parede: (a) Transformação de coordenadas locais para global; (b) Carregamento atuante no pilar e consequente esforço cortante externo $V_{ext}$ gerado	103
Figura 2.86	Transformação de coordenadas do CG para D: (a) translações e (b) rotação	104
Figura 2.87	Eixos coordenados sobre o CG e o centro de torção D	105
Figura 2.88	Pilar em seção de duplo T: (a) painéis – parede e (b) ação do vento e frenagem	107
Figura 2.89	Elementos diferenciais dos painéis – parede: (a) 1, (b) 7 e (c) 4	107
Figura 2.90	Elementos diferenciais do: (a) painel – parede 2 e 3; e (b) painel – parede 5 e 6	108
Figura 2.91	Procedimento de transformação das coordenadas locais para o sistema global	112
Figura 2.92	Representação gráfica da resultante $\tau_{Res}$ e posicionamento relativo à D	113
Figura 2.93	Determinação geométrica do centro de torção D mediante polo arbitrário P	114
Figura 2.94	Posicionamento do centro de torção D para a seção de paredes finas	115
Figura 2.95	Graus de liberdade no centro de torção D	116
Figura 2.96	Funcionamento estrutural do pilar de acordo no eixo de sollicitação	116
Figura 2.97	Diagramas de: (a) coordenadas y e (b) coordenadas z	117
Figura 2.98	Diagramas de ordenadas de área setorial com polo arbitrário	117
Figura 2.99	Cálculo vetorial da área delimitada pelo centro de torção e os nós inicial e final da barra	119

Figura 2.100	Convenção positiva da varredura na integração para determinar a área setorial $\omega_{pc}$	120
Figura 2.101	Diagrama de área setorial absoluta $\omega_{pc}$ para o pilar em C	120
Figura 2.102	Diagrama de ordenadas setoriais $\omega_{pc}$ para seção de duplo T com dupla simetria	121
Figura 2.103	Diagrama de ordenadas setoriais $\omega_p$ para seção de duplo T sem qualquer simetria	122
Figura 2.104	Diagrama de coordenadas y para a seção em duplo T, com origem no CG	123
Figura 2.105	Diagrama de coordenadas z para a seção em duplo T, com origem no CG	123
Figura 2.106	Diagrama de ordenadas setoriais $\omega_{pc}$ para seção assimétrica em duplo T	124
Figura 2.107	Deslocamentos num plano qualquer: (a) Genéricos e (b) Graus de Liberdade	125
Figura 2.108	Método das forças: (a) sistema principal, (b) 1º sistema derivado, (c) 2º sistema derivado, (d) 3º sistema derivado	126
Figura 2.109	Diagramas de esforços solicitantes: (a) $M_i \equiv \bar{M}_i$ , (b) $M_f \equiv \bar{M}_f$ , (c) $V_i \equiv V_f \equiv \bar{V}_f \equiv \bar{V}_i$ , (d) $N_f \equiv \bar{N}_f$	127
Figura 2.110	Elemento de barra com dimensões na seção transversal variável linearmente ao longo do eixo axial x	128
Figura 2.111	Momento Estático de Área para seção retangular linearmente variável no eixo axial x	129
Figura 2.112	Grupamento dos parâmetros para uma barra em balanço	132
Figura 2.113	Sistema de massa-mola com cinco graus de liberdade	132
Figura 2.114	Pórtico Plano com “n” graus de liberdade	133
Figura 2.115	Modelagem do pilar com seção variável	134
Figura 2.116	Pilar subdividido em elementos finitos	134
Figura 2.117	Ponte com pilares de seção linearmente variável	136
Figura 2.118	Modos de vibração: (a) 1º modo, (b) 2º modo e (c) 3º modo do pilar maciço	137

### Capítulo 3

Figura 3.1	Condições de contorno do elemento finito	141
Figura 3.2	Representação gráfica das funções $u$ e $u_0$	142
Figura 3.3	Pilar engastado na base	144
Figura 3.4	Subdivisão do pilar em elementos finitos	145
Figura 3.5	Barra engastada nas extremidades: (a) carregamentos e (b) reações elásticas associadas as reações de engastamento perfeito, nos extremos da barra	147
Figura 3.6	Detalhamento de reações: (a) reações de engastamento perfeito e (b) reações elásticas	149
Figura 3.7	Compatibilização entre os graus de liberdade e as reações elásticas	150
Figura 3.8	Nomenclatura matricial para $n$ barras	151
Figura 3.9	Sistemas derivados, pelo método dos deslocamentos, para a barra engastada nas duas extremidades: (a) $\theta_i = 1$ , (b) $\theta_f = 1$ , (c) $v_i = 1$ e (d) $v_f = 1$	152
Figura 3.10	Princípio da superposição de efeitos no pilar com $N$ elementos finitos	153
Figura 3.11	Elemento finito: (a) reações elásticas e (b) graus de liberdade	156
Figura 3.12	Numeração dos elementos finitos: (a) nós, (b) barras, (c) equilíbrio dos nós ao longo do pilar e (d) equilíbrio do topo do pilar	157
Figura 3.13	Convenção no elemento: (a) dos graus de liberdade, (b) dos esforços solicitantes e (c) sequência de numeração dos graus de liberdade	160

Figura 3.14	Transformação de referencial do CG para D: (a) translações e (b) rotações $\theta_z$ e $\theta_y$ no centro de torção D	162
Figura 3.15	Convenção dos esforços solicitantes via teoria da flexo – torção	164
Figura 3.16	Projeção das coordenadas do centro de torção no sistema global	167
Figura 3.17	Convenção positiva dos: (a) esforços solicitantes no sistema dos lintéis, (b) graus de liberdade e (c) sequência de numeração dos graus de liberdade	168
Figura 3.18	Correlação entre os deslocamentos dos extremos do lintel com o centro de torção	170
Figura 3.19	Elemento finito de barra para o pilar em núcleo estrutural e contraventado	172
Figura 3.20	Elemento finito (E.F.) do pilar em duplo T: (a) dimensões em planta e numeração das paredes e (b) convenção positiva dos esforços solicitantes nos extremos do EF	172
Figura 3.21	Graus de liberdade do pilar em duplo T sem qualquer simetria	173
Figura 3.22	Transformação do sistema de coordenadas do centro de gravidade para o SGC em $O_S$ , passando pelo centro de torção D	175
Figura 3.23	Reações elásticas nos lintéis para o SLC	176
Figura 3.24	Referencial dos lintéis: (a) Posicionamento no pilar em duplo T, (b) Transformação do SLC do lintel j para as coordenadas do centro de torção e (c) Ângulo de inclinação do lintel j em relação aos eixos do centro de torção	177
Figura 3.25	Graus de liberdade nos extremos dos lintéis (1) e (2): (a) no SLC dos lintéis e (b) no sistema global de coordenadas $\{D^*\}_g$	178
Figura 3.26	Correlação dos graus de liberdade nas extremidades dos lintéis e do centro de torção para o SGC	180
Figura 3.27	Correlação dos graus de liberdade para a rotação: (a) $\phi_D^*$ com as distâncias no eixo $y_g$ , (b) $\phi_D^*$ com as distâncias no eixo $z_g$ , (c) $\theta_{y_D}^*$ , (d) $\theta_{z_D}^*$ , (e) $\theta_{z_{L_i}}^{*(1)}$ e (f) $\theta_{y_{L_i}}^{*(1)}$	181
Figura 3.28	Coordenadas do centro de torção e dos extremos dos lintéis: (a) com o SGC no centro de gravidade da seção e (b) como o SGC contendo toda a seção no 1º quadrante	183
Figura 3.29	Elemento finito de barra para o pilar em duplo T e contraventado por lintéis nas faces abertas	186

## Capítulo 4

Figura 4.1	Estado de carga do pilar de ponte	187
Figura 4.2	Equilíbrio elástico do pilar: (a) configuração indeformada e (b) condição de equilíbrio	188
Figura 4.3	Carga crítica mediante solução aproximada de 1ª e 2ª ordens	190
Figura 4.4	Condições de equilíbrio: (a) em termos da carga atuante $P$ e da deformada do pilar e (b) via analogia com uma esfera	190
Figura 4.5	Pilar de ponte: (a) configuração deformada, (b) elemento infinitesimal $dp$ do peso próprio	191
Figura 4.6	Diagrama de corpo livre com a convenção positiva para o momento fletor	192
Figura 4.7	Transformação do referencial $\bar{x}$ para $x$ e de intervalo de integração	193
Figura 4.8	Pilar engastado na base: (a) com seção transversal linearmente variável e (b) com seção constante	194

Figura 4.9	Condições de contorno na direção $y$	197
Figura 4.10	Interpolação polinomial para $n$ graus de liberdade	199
Figura 4.11	Polinômio de interpolação quártica para operadores de diferenças finitas centrais	199
Figura 4.12	Ponto de aplicação para operadores de diferenças finitas centrais	200
Figura 4.13	Ponto de aplicação da diferença finita assimétrica à direita, com abscissa $x = \delta \equiv h$	202
Figura 4.14	Discretização do pilar via diferenças finitas	204
Figura 4.15	Obtenção da carga crítica via método das diferenças finitas	205
Figura 4.16	Pilar: (a) estado de carga e (b) configuração deformada	206
Figura 4.17	Representação gráfica de $\phi(t)$ para condição de equilíbrio indiferente	209
Figura 4.18	Representação gráfica de $\phi(t)$ para condição de equilíbrio estável	210
Figura 4.19	Configurações do pilar: (a) estado de carga, (b) seção retangular maciça e (c) seção retangular vazada em termos da espessura relativa via $\eta$	212
Figura 4.20	Curva de convergência de $p_{CR}$ para pilar engastado na base e seção retangular maciça	213
Figura 4.21	Curvas de convergência de $p_{CR}$ para pilar engastado na base e seção retangular vazada com espessura relativa das paredes	215
Figura 4.22	Geometria do pilar de seção circular vazada e constante na altura: (a) estado de carga e (b) seção transversal maciça e (c) seção anelar	216
Figura 4.23	Curvas de convergência de $p_{CR}$ para pilar engastado na base e seção circular maciça e vazada com espessura relativa das paredes	217
Figura 4.24	Pilar retangular maciço: (a) estado de carga e (b) perspectiva	218

## Capítulo 5

Figura 5.1	Seção de paredes finas submetida à: (a) Flexão simples, (b) Torção pura, (c) Flexo – Torção, (d) deformação decorrente Flexo – torção	219
Figura 5.2	Seção de paredes finas: (a) dimensões relevantes do pilar em paredes finas, (b) elemento diferencial e (c) deformação de corpo rígido no plano $yz$	220
Figura 5.3	Distribuição de tensão cisalhante nas paredes do pilar sob flexo – torção	221
Figura 5.4	Vigas contraventadas por lintéis: (a) modelo mecânico e (b) modelo contínuo	221
Figura 5.5	Posicionamento generalizado das paredes no núcleo estrutural em C	223
Figura 5.6	Diagrama de ordenadas setoriais $\omega_p$ com polo provisório P	224
Figura 5.7	Eixos locais $x^{**}$ e $y^{**}$ e correlação com os eixos auxiliares $x^*$ e $y^*$	225
Figura 5.8	Diagrama de coordenadas: (a) $y$ e (b) $z$ , para as paredes inclinadas que compõem o núcleo estrutural	226
Figura 5.9	Diagrama de ordenadas absolutas $\omega_{pc}$ com polo de varredura no centro de torção	228
Figura 5.10	Núcleo estrutural: (a) geometria analisada, (b) gráfico de variação de $I_\omega$ para $\theta_3$ de $285^\circ$ , (c) gráfico de variação de $I_\omega$ para $\theta_3$ de $322,5^\circ$ e (d) gráfico de variação de $I_\omega$ para $\theta_3$ de $360^\circ$	230
Figura 5.11	Posicionamento dos painéis no pilar em duplo T	231
Figura 5.12	Pilar em duplo T generalizado: (a) diagrama $\omega_p$ , (b) diagrama $y$ e (c) diagrama $z$	232
Figura 5.13	Duplo T: varredura no núcleo (a) à direita, (b) à esquerda e (c) diagrama $\omega_{pc}$	235

Figura 5.14	Pilar em duplo T: (a) geometria analisada; gráfico de variação de $I_{\omega}$ para (b) $\theta_3 = 285^{\circ}$ e $\theta_7 = 195^{\circ}$ ; (c) $\theta_3 = 322,5^{\circ}$ e $\theta_7 = 217,5^{\circ}$ ; e (d) $\theta_3 = 360^{\circ}$ e $\theta_7 = 180^{\circ}$	237
Figura 5.15	Elemento submetido a flexo – torção: (a) empenamento, (b) elemento diferencial	238
Figura 5.16	Pilar de ponte: (a) carregamentos, (b) Centros ( $CE \equiv D$ ), $CC$ e $CG$	239
Figura 5.17	Convenção positiva do momento de torção $M_t$ e do braço de alavanca $e_z$	240
Figura 5.18	Posicionamento dos centros geométricos ( $CC$ , $CG$ , $CM$ e $CT$ ) na seção C	241
Figura 5.19	Fluxograma 1 de desacoplamento do sistema de equações diferenciais para a análise dinâmica dos painéis – parede metálicos	242
Figura 5.20	Três primeiros modos de vibração do pilar em núcleo com base engastada	245
Figura 5.21	Modos de vibração: (a) primeiro, (b) segundo, (c) terceiro	245
Figura 5.22	Pilar metálico em núcleo estrutural: (a) seção de paredes finas e (b) frequências de vibração via modelagem no software ANSYS Release 11	246
Figura 5.23	Modos de vibração via modelagem no software ANSYS Release 11, para pilar metálico com seção aberta de paredes finas	247
Figura 5.24	Vinte primeiros modos de vibração via modelagem no software Release 11, para pilar metálico com seção contraventada por lintéis	247
Figura 5.25	1º modo de vibração para pilar metálico contraventado por lintéis: (a) via ANSYS sem mobilizar os lintéis, (b) via ANSYS com mobilização à flexão dos lintéis e (c) via eq. (5.19)	248
Figura 5.26	2º modo de vibração para pilar metálico contraventado por lintéis: (a) via ANSYS sem mobilizar os lintéis, (b) via ANSYS com mobilização à flexão dos lintéis e (c) via eq. (5.19)	249
Figura 5.27	3º modo de vibração para pilar metálico contraventado por lintéis: (a) via ANSYS sem mobilizar os lintéis, (b) via ANSYS com mobilização à flexão dos lintéis e (c) via eq. (5.19)	249
Figura 5.28	4º modo de vibração para pilar metálico contraventado por lintéis: (a) via ANSYS sem mobilizar os lintéis, (b) via ANSYS com mobilização à flexão dos lintéis e (c) via eq. (5.19)	249
Figura 5.29	Pilar metálico em duplo T: (a) geometria da seção transversal e (b) frequências de vibração via modelagem no ANSYS Release 11, para pilar metálico sem lintéis	250
Figura 5.30	Modos de vibração do pilar metálico em duplo T sem lintéis via modelagem no ANSYS: 1º modo em (a) x, (b) y; 2º modo em (c) x, (d) y e (e) 3º modo em y	250
Figura 5.31	Modos de vibração do pilar metálico em duplo T contraventamento por lintéis via modelagem no ANSYS: 1ª modo em (a) x, (b) y, 2º modo em (c) x, (d) y, 3º modo em (e) x e (f) y	251
Figura 5.32	Massa distribuída submetida à aceleração $\ddot{z}$	254
Figura 5.33	Centros de massa e de gravidade: (a) Posicionamento, (b) Transformação de referencial do $CM$ ao $CG$	255
Figura 5.34	Fluxograma 2 do desacoplamento dinâmico via Procedimento 1	257
Figura 5.35	Referencial principal de inércia à flexão do pilar	258
Figura 5.36	Fluxograma 3 do desacoplamento dinâmico via Procedimento 2	259
Figura 5.37	Frequências de vibração via modelagem no software ANSYS Release 11, para pilar C em concreto armado (C – 90) com seção aberta de paredes finas	261

Figura 5.38	Primeiros modos de vibração via modelagem no software ANSYS Release 11, para pila rem C e concreto armado (C – 90) sem contraventamento por lintéis	262
Figura 5.39	Pilar C contraventado por lintéis e em concreto C – 90: 1º modo de vibração (a) em torno de y, (b) ativando os lintéis quanto à flexão, 2º modo (c) em y, (d) ativando os lintéis e (e) 3º modo em x	263
Figura 5.40	Pilar C em de concreto C – 40, modos de vibração ativando os lintéis quanto a flexão: (a) 1º modo ( $\omega_1 = 1,91493 \text{ rad/s}$ ), (b) 2º modo e (c) 3º modo via modelagem no ANSYS	263
Figura 5.41	Modos de vibração do pilar de concreto armado em duplo T sem lintéis via modelagem no ANSYS: (a) 1º modo à flexão em torno do eixo x, (b) 1º modo com deformação à flexão em torno do eixo y, (c) 2º modo à flexão em torno do eixo x, (d) 2º modo à flexão em torno do eixo y e (e) 3º modo à flexão em torno do eixo y	264
Figura 5.42	Modos de vibração do pilar de concreto armado em duplo T contraventamento por lintéis via modelagem no ANSYS: (a) 1º modo com deformação à flexão em torno do eixo y, (b) 1º modo com deformação à flexão em torno do eixo x, (c) 2º modo à flexão em torno do eixo y, (d) 2º modo à flexão em torno do eixo x e (e) 3º modo à flexão no eixo x	265
Figura 5.43	Geometria da seção transversal e decomposição em massas de formato canônico	268
Figura 5.44	Posicionamento do $CG$ e $CM$ na seção transversal	269
Figura 5.45	Transformação do referencial no centro de torção $D$ para a origem $O_s$	270
Figura 5.46	Pilar em núcleo (a) seção transversal e (b) diagrama de área setorial	271
Figura 5.47	Pilar metálico: (a) geometria, (b) carregamentos e condições de contorno	273
Figura 5.48	Cenários de carregamento: (a) Cenário 1, (b) Cenário 2, (c) Cenário 3	274
Figura 5.49	Convenção dos esforços solicitantes dos elementos finitos na flexo – torção	274
Figura 5.50	Ponte apoiada sobre três pilares de paredes finas: (a) vista lateral, (b) configuração em planta dos pilares	276
Figura 5.51	Ângulos entre os esforços cortantes externos $\mathcal{V}_{ext_{P_1}}, \mathcal{V}_{ext_{P_2}}, \mathcal{V}_{ext_{P_3}}$ e os eixos $y_{DL}$ definidos nos centros de torção de cada um dos três pilares	277
Figura 5.52	Ângulos formados entre os esforços cortantes externos ativados pela frenagem em cada pilar e os eixos $y_{DL}$ em cada um dos três pilares	280

## Capítulo 6

Figura 6.1	Resultantes $R_{cd_1}, R_{cd_2}$ e $R_{sd}$ para seção com simetria nas abas e paredes	281
Figura 6.2	Bimomentos resistentes de cálculo e solicitante de cálculo sob a convenção do parafuso direito com observador direcionado ao infinito positivo do eixo axial do pilar	282
Figura 6.3	Modelagem da armadura ao bimomento: (a) com armadura concentrada nas quinas e (b) armadura distribuída e reforço nas interseções das paredes	283
Figura 6.4	Posicionamento das linhas neutras na seção de paredes finas	283
Figura 6.5	Posicionamento das linhas neutras na seção em duplo T	284
Figura 6.6	Distribuição da armadura calculada para a seção em duplo T	284

Figura 6.7	Aplicação da carga reativa $P$ no topo do pilar: (a) corte, (b) configuração dos centros geométricos para seção em núcleo C e (c) posicionamento da carga $P$ na seção em duplo T	285
Figura 6.8	Aplicação da carga $P$ no topo do núcleo C: (a) translação do CC para o CG e (b) sistema equivalente de cargas verticais ao longo das paredes delgadas	286
Figura 6.9	Sistema equivalente de cargas verticais nas paredes finas para a atuação do peso – próprio do pilar na seção da base	287
Figura 6.10	Cargas atuantes no pilar de ponte em paredes finas com ações verticais e ação lateral do vento	288
Figura 6.11	Ordenadas e cotas no diagrama de área setorial principal: (a) notação da flexo-torção e (b) definidas para o dimensionamento ao bimomento	289
Figura 6.12	Posicionamento da resultante de tração $R_{sd}$	292
Figura 6.13	Ordenadas setoriais do diagrama $\omega_{pc}$ sob atuação da resultante $R_{sd}$	293
Figura 6.14	Resultantes para a seção de paredes finas com armadura distribuída	297
Figura 6.15	Ordenadas setoriais sob a ação das resultantes nas armaduras comprimidas	298
Figura 6.16	Ordenadas setoriais sob a ação das resultantes nas armaduras tracionadas	300
Figura 6.17	Razões entre as dimensões $a$ , $b$ e $t$ da seção transversal: (a) configuração 1 e (b) configuração 2	303
Figura 6.18	Dimensões, em planta, da seção transversal aberta e composta por paredes finas	308
Figura 6.19	Distribuição da armadura $A_s$ ao longo das paredes finas, no exemplo 6.3	310
Figura 6.20	Formulário de programa em Visual Basic para dimensionamento ao bimomento, sob armadura nas quinas tracionadas	311
Figura 6.21	Diagrama de ordenadas setoriais principais $\omega_{pc}$ , sob notação adaptada, no duplo T	312
Figura 6.22	Resultantes nas armaduras, comprimidas e tracionadas, distribuídas no duplo T	313
Figura 6.23	Interação das resultantes nas armaduras com o diagrama $\omega_{pc}$ adaptado	314
Figura 6.24	Dimensões da seção transversal em duplo T e submetida ao bimomento do ex. 6.2	316

## Apêndices

Figura A.1	Deformada do pilar de pontes e condições de contorno para a flexo-torção	A3
------------	--	----

## LISTA DE TABELAS

---

### Capítulo 2

Tabela 2.1	Parâmetros para gerar a matriz de rigidez do pilar de seção linearmente variável	137
------------	--	-----

### Capítulo 4

Tabela 4.1	Deflexões em $y$ , no topo do pilar retangular, por incremento em $p$ até convergência	212
Tabela 4.2	Deflexões em $y$ , no topo do pilar, para seção retangular vazada para $\eta = 5$ e $\eta = 10$	214
Tabela 4.3	Deflexões em $y$ , no topo do pilar, para seção retangular vazada sob $\eta = 15$ e $\eta = 20$	214
Tabela 4.4	Deflexões em $y$ , no topo do pilar, para seção circular vazada (anelar)	216
Tabela 4.5	Deflexões em $y$ , no topo do pilar circular, por incremento em $p$ até convergência	217
Tabela 4.6	Deflexão $y$ , para a seção retangular maciça e variável linearmente	218

### Capítulo 5

Tabela 5.1	Valores de $I_{\omega}$ ( $\times 10^7$ ) $m^6$ para variação das inclinações das paredes (2) e (3)	229
Tabela 5.2	Valores de $I_{\omega}$ ( $\times 10^8$ ) $m^6$ para as inclinações das paredes (2), (3), (6) e (7)	238
Tabela 5.3	Frequência e período em função do modo de vibração e $\lambda$	246
Tabela 5.4	Comparação dos três primeiros modos de vibração à flexão, via modelagem computacional	248
Tabela 5.5	Validação numérica mediante Xavier (1987) e Smith e Taranath (1972)	271
Tabela 5.6	Validação numérica da rotação no topo do pilar	272
Tabela 5.7	Validação numérica do cenário 1, quanto a rotação e o Bimomento, mediante Barbosa (1980)	272
Tabela 5.8	Validação numérica do cenário 2, quanto a rotação e o Bimomento, mediante Barbosa (1980)	272
Tabela 5.9	Validação numérica na seção transversal e no diagrama de ordenadas setoriais	275
Tabela 5.10	Validação numérica da rotação $\phi$ e do bimomento $B$ para o cenário 1	275
Tabela 5.11	Validação numérica da rotação $\phi$ e do bimomento $B$ para os cenários de carregamentos 2 e 3	275
Tabela 5.12	Funções do esforço cortante por pilar	278
Tabela 5.13	Valores de bimomento por pilar no $CG$ e $D$ , e do conjunto de pilares em $O_s$	279
Tabela 5.14	Valores de rotação por pilar no $CG$ e do conjunto de pilares em $O_s$	280
Tabela 5.15	Valores de bimomento para a atuação do esforço de frenagem dos veículos	280



## Capítulo 6

Tabela 6.1	Tabela para a obtenção da armadura na seção de paredes finas sob configuração 1 (ver figura 6.17 a) e grupo I de resistência do concreto via NBR 8953 (ABNT, 2015)	304
Tabela 6.2	Tabela para a obtenção da armadura na seção de paredes finas sob configuração 1 (ver figura 6.17 a) e grupo II de resistência do concreto via NBR 8953 (ABNT, 2015)	305
Tabela 6.3	Tabela para a obtenção da armadura na seção de paredes finas sob configuração 2 (ver figura 6.17 b) e grupo I de resistência do concreto via NBR 8953 (ABNT, 2015)	306
Tabela 6.4	Tabela para a obtenção da armadura na seção de paredes finas sob configuração 2 (ver figura 6.17 b) e grupo II de resistência do concreto via NBR 8953 (ABNT, 2015)	307
Tabela 6.5	Valores de dimensionamento para a seção apresentada na figura 6.18 e bimomento no módulo de $1500 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$ (valor característico)	309
Tabela 6.6	Áreas de aço $A_s$ , seção da fig. 6.18, em detrimento da variação do bimomento	309
Tabela 6.7	Valores de dimensionamento para a seção de paredes finas, no ex. 6.2, via marcha de cálculo N° 4	309

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

---

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
ASCE	American Society of Civil Engineers
C – 40	Concreto de resistência à compressão de 40 MPa
CC	Centro de Carga
CE	Centro Elástico
CG	Centro de Gravidade
CT	Centro de Torção
D	Centro de Torção
DNER	Departamento Nacional de Estradas e Rodagens
EDO	Equação Diferencial Ordinária
EDP	Equação Diferencial Parcial
EF	Elemento Finito
GTPP	Generalização da Teoria dos Painéis – Parede
NBR	Norma Brasileira Regulamentadora
MEF	Método dos Elementos Finitos
PTV	Princípio dos Trabalhos Virtuais
TFT	Teoria da Flexo – Torção
TMC	Técnica do Meio Contínuo
TPD	Teoria das Pequenas Deformações
TPP	Teoria dos Painéis – Parede
ELU-F	Estado Limite último por Flexão
SLC	Sistema Local de Coordenadas
SGC	Sistema Global de Coordenadas

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>CONSIDERAÇÕES INICIAIS .....</b>	<b>1</b>
1.1	RELEVÂNCIA DA TESE .....	1
	a) Contribuições da Tese .....	2
1.2	ESTADO DA ARTE .....	5
	a) Flexo-torção e análise estática dos painéis-parede .....	5
	b) Análise dinâmica dos painéis-parede .....	7
	c) Estabilidade elástica de pilares .....	9
	d) Dimensionamento de seções de concreto armado .....	10
	e) Evolução construtiva .....	11
1.3	OBJETIVOS .....	13
	1.3.1 Objetivo Geral .....	13
	1.3.2 Objetivos Específicos .....	13
1.4	ORGANIZAÇÃO DA TESE E METODOLOGIA .....	14
	<b>PARTE I – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....</b>	<b>16</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....</b>	<b>17</b>
2.1	TÉCNICA DO MEIO CONTÍNUO APLICADA A PILARES ALTOS .....	17
	2.1.1 Partição da carga do vento nos pilares de pontes .....	19
	a) Primeira configuração de partição da ação do vento nos pilares de pontes ...	20
	b) Segunda configuração de partição da ação do vento nos pilares de pontes ...	22
	c) Rotação no centro elástico e deslocamentos de corpo rígido .....	25
	d) Partição das cargas $q_{H_y}^*$ , $q_{H_z}^*$ e $q_V^*$ para os pilares .....	28
	2.1.2 Definições e aspectos históricos da TMC .....	30
	2.1.3 Distribuição das forças do vento nos painéis de contraventamento .....	35
	a) Painéis contraventados por único travamento horizontal .....	35
	b) Painéis em direções ortogonais e único travamento horizontal .....	39
	2.1.4 Análise dos painéis pela técnica do meio contínuo .....	40
	a) Parede sobre base elástica .....	43
2.2	DINÂMICA DAS ESTRUTURAS .....	45
	2.2.1 Definições iniciais .....	45
	2.2.2 Sistema massa-mola .....	45
	2.2.3 Vibração não amortecida .....	47
	a) Vibração Livre .....	47
	b) Vibração Forçada Harmonicamente .....	50
	2.2.4 Vibração amortecida .....	53
	a) Ciclo de energia .....	53
	b) Vibração amortecida livre .....	56
	c) Vibração forçada harmonicamente .....	60
	d) Espaço de estados .....	64
	e) Excitação aperiódica .....	66
2.3	AÇÃO DO VENTO NO PILAR DE PONTE .....	68
	2.3.1 Atuação das correntes do vento .....	68
	2.3.2 Variação da velocidade do vento com a altura .....	69
	2.3.3 Simplificação bidimensional do fluxo do vento .....	71

2.3.4	Equacionamento da turbulência .....	71
a)	Correlação .....	73
2.3.5	Formato do carregamento do vento .....	75
2.4	DESACOPLAMENTO DO SISTEMA DINÂMICO NÃO AMORTECIDO .....	76
a)	Primeira Transformação de Referencial .....	76
b)	Segunda Transformação de Referencial .....	77
c)	Terceira Transformação de Referencial .....	77
d)	Marcha de Cálculo N° 1 .....	78
e)	Solução da Equação Diferencial no Referencial Generalizado .....	79
2.5	DESACOPLAMENTO DO SISTEMA DINÂMICO AMORTECIDO .....	80
a)	Marcha de Cálculo N° 2 .....	80
2.6	DIAGONALIZAÇÃO VIA MÉTODO DE JACOBI .....	81
2.7	TEORIA DA FLEXO – TORÇÃO (TFT) .....	83
2.7.1	Equação diferencial da Flexo – Torção .....	83
2.7.2	Solução via Teoria da Flexo – Torção para o pilar em núcleo estrutural .....	88
2.7.3	Solução via Teoria da Flexo – Torção para seção transversal em duplo T ...	91
2.8	TEORIA DOS PAINÉIS – PAREDE .....	93
2.8.1	Pilar em núcleo estrutural .....	93
a)	Equações de equilíbrio dos elementos diferenciais .....	95
b)	Equações de equilíbrio nos lintéis .....	96
c)	Equações diferenciais dos painéis – parede .....	99
d)	Equações de equilíbrio em termo dos esforços cortantes .....	101
e)	Sistema de equações diferenciais do pilar em núcleo .....	104
f)	Desacoplamento do sistema de EDO's do pilar em núcleo .....	105
2.8.2	Pilar com seção transversal em duplo T .....	106
a)	Equações de equilíbrio dos elementos diferenciais .....	108
b)	Equações diferenciais dos painéis – parede e equilíbrio em cortante .....	110
2.9	POSICIONAMENTO DO CENTRO DE TORÇÃO .....	112
a)	Pilar em núcleo estrutural .....	115
a.1)	Marcha de Cálculo N° 3 .....	118
b)	Pilar com seção transversal em duplo T .....	121
2.10	MATRIZ DE RIGIDEZ DE BARRA COM SEÇÃO TRANSVERSAL RETANGULAR LINEARMENTE VARIÁVEL .....	125
a)	Introdução .....	125
b)	Modelagem do pilar de ponte via massas concentradas .....	131
c)	Condensação matricial .....	134
d)	Modelagem por cinco elementos finitos de barra para seção retangular linearmente variável .....	136
e)	Verificação da modelagem do MEF via TMC .....	138
<b>PARTE II – CONTRIBUIÇÕES DA TESE .....</b>		<b>140</b>
<b>3</b>	<b>FORMULAÇÃO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS DE PILARES EM SEÇÕES C E DUPLO T .....</b>	<b>141</b>
3.1	INTRODUÇÃO .....	141
a)	Método dos resíduos ponderados .....	143
b)	Equação integral do pilar via MEF .....	143
c)	Sistema algébrico via MEF .....	145
3.2	EQUAÇÃO DE MANEY PARA ELEMENTO FINITO .....	147
3.3	EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO DO ELEMENTO FINITO .....	152
3.4	ELEMENTO FINITO SOB FLEXÃO .....	154
3.5	SISTEMA DE EQUILÍBRIO DINÂMICO PARA N ELEMENTOS FINITOS ...	157
3.6	ELEMENTO FINITO DE BARRA COM SEÇÃO DE PAREDES FINAS E EM FORMATO DE NÚCLEO C .....	159

	a) Matriz de rigidez à flexão dos painéis – parede com seção aberta .....	160
	b) Transformação de coordenadas do CG para o centro de torção D .....	162
	c) Matriz de rigidez dos painéis – parede via teoria da flexo – torção .....	163
	d) Matriz de rigidez do pilar em núcleo no SLC .....	166
	e) Transformação do SLC para o SGC .....	166
	f) Matriz de rigidez dos lintéis .....	168
	g) Transformação de coordenadas para os lintéis .....	169
	h) Correlação dos deslocamentos nos lintéis com o centro de torção D .....	169
	i) Matriz de rigidez unificada do pilar e dos lintéis .....	171
	j) Representação do elemento finito .....	171
3.7	<b>ELEMENTO FINITO DE BARRA COM SEÇÃO DE PAREDES FINAS E EM FORMATO DE DUPLO T .....</b>	<b>172</b>
	a) Matriz de rigidez à flexão do pilar em duplo T com seção aberta .....	173
	b) Matriz de rigidez do pilar em duplo T no SGC .....	173
	c) Matriz de rigidez dos lintéis no SGC .....	175
	d) Correlação dos deslocamentos nos lintéis com o centro de torção, no SGC ..	179
	e) Matriz de rigidez unificada do pilar e dos lintéis (1) e (2) .....	185
	f) Representação do elemento finito .....	185
<b>4</b>	<b>ESTABILIDADE ELÁSTICA DE PILARES DE PONTES COM INÉRCIA VARIÁVEL AO LONGO DO COMPRIMENTO .....</b>	<b>187</b>
4.1	INTRODUÇÃO .....	187
	a) Carga crítica via critério energético .....	188
4.2	EQUAÇÃO DIFERENCIAL VIA TÉCNICA DO MEIO CONTÍNUO .....	191
	a) Equação diferencial via teoria da linha elástica no campo das pequenas deformações .....	192
	b) Equação diferencial via derivação prévia do momento fletor $\mathfrak{M}(x)$ .....	195
4.3	INAPLICABILIDADE DA EQUAÇÃO CLÁSSICA DE BESSEL .....	196
4.4	RESOLUÇÃO VIA MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS .....	198
	a) Operadores centrais .....	199
	b) Operadores assimétricos à direita .....	202
	c) Discretização .....	203
	d) Determinação da carga crítica .....	205
4.5	ESTABILIDADE DINÂMICA .....	206
	4.5.1 ESTADO DE CARGA 1 .....	207
	a) Equilíbrio indiferente ( $P = P_{CR}$ ) .....	208
	b) Equilíbrio instável ( $P > P_{CR}$ ) .....	209
	c) Equilíbrio estável ( $P < P_{CR}$ ) .....	210
	4.5.2 ESTADO DE CARGA 2 .....	211
4.6	EXEMPLOS DE APLICAÇÃO .....	212
	Ex. 4.1 .....	212
	Ex. 4.2 .....	215
	Ex. 4.3 .....	218
<b>5</b>	<b>VIBRAÇÃO DE PILARES COM SEÇÃO DE PAREDES FINAS VIA TÉCNICA DO MEIO CONTÍNUO APLICADA A GTPP .....</b>	<b>219</b>
5.1	INTRODUÇÃO .....	219
5.2	GENERALIZAÇÃO DA TEORIA DOS PAINÉIS – PAREDE (GTPP) .....	222
	a) Aplicação aos pilares em formato de núcleo “C” com reforço por abas .....	222
	Ex. 5.1 (a) .....	229
	b) Aplicação aos pilares com seção transversal em formato de duplo T .....	231
	Ex. 5.1 (b) .....	237
5.3	FLEXO – TORÇÃO EM PILARES METÁLICOS .....	238

5.3.1	Análise dinâmica via TMC .....	240
a)	Modos de Vibração .....	243
Ex. 5.2	.....	246
Ex. 5.3	.....	250
b)	Vibração forçada não amortecida .....	252
c)	Vibração forçada amortecida .....	253
5.4	FLEXO – TORÇÃO EM PILARES DE CONCRETO ARMADO .....	254
5.4.1	Formulação dinâmica .....	254
a)	Desacoplamento dinâmico .....	256
a.1)	Procedimento 1 .....	256
a.2)	Procedimento 2 .....	258
5.4.2	Análise modal .....	260
Ex. 5.4	.....	261
Ex. 5.5	.....	264
5.4.3	Amortecimento proporcional .....	266
5.4.4	Posicionamento do centro de massa .....	268
5.4.5	Transformação de referenciais .....	269
a)	Transladar do centro de gravidade $CG$ para o centro de torção $D$ .....	269
b)	Transladar do centro de torção $D$ para a origem das coordenadas $O_s$ .....	270
5.5	EXEMPLOS DE APLICAÇÃO .....	271
Ex. 5.6	.....	271
Ex. 5.7	.....	272
Ex. 5.8	.....	273
Ex. 5.9	.....	277
Ex. 5.10	.....	280
<b>6</b>	<b>DIMENSIONAMENTO DE SEÇÕES DE PAREDES FINAS DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDAS AO BIMOMENTO .....</b>	<b>281</b>
6.1	INTRODUÇÃO .....	281
6.2	PILAR EM FORMATO DE “C” COM REFORÇO POR ABAS .....	289
6.2.1	Equacionamento ao bimomento utilizando a armadura concentrada nas quinas tracionadas .....	289
a)	Posicionamento das linhas neutras .....	289
b)	Armadura resistente ao bimomento .....	292
c)	Marcha de Cálculo N° 4 .....	295
6.2.2	Equilíbrio ao bimomento com armadura distribuída .....	296
a)	Posicionamento das linhas neutras .....	296
b)	Armadura resistente ao bimomento .....	300
6.2.3	Tabelas adimensionais para armadura concentrada .....	303
6.2.4	Inviabilidade das tabelas adimensionais para armadura distribuída .....	308
6.2.5	Exemplos de aplicação .....	308
Ex. 6.1	.....	308
Ex. 6.2	.....	309
Ex. 6.3	.....	310
6.2.6	Programação em visual basic para armadura nas quinas .....	311
6.3	PILAR EM FORMATO DE DUPLO T .....	312
a)	Posicionamento das linhas neutras .....	312
b)	Armadura resistente ao bimomento .....	313
Ex. 6.4	.....	316
<b>7</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS E SUGESTÕES .....</b>	<b>317</b>
7.1	CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	317
7.2	SUGESTÕES PARA TESES FUTURAS .....	320

<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>321</b>
Apêndice A .....	A1
Apêndice B .....	B1
Apêndice C .....	C1
Apêndice D .....	D1
Apêndice E .....	E1

## CONSIDERAÇÕES INIAIS

---

*“Afirmo muitas vezes que, se você mediar aquilo de que está falando e expressar em números, você conhece alguma coisa sobre o assunto; mas, quando você não o pode exprimir em números, seu conhecimento é pobre e insatisfatório”.*

*Lord William Kelvin*



## **CONSIDERAÇÕES INICIAIS**

---

### **1.1. RELEVÂNCIA DA TESE**

A modelagem de pontes é processada, em sua maioria, por simulação em softwares baseados em elementos finitos. Quanto aos estudos acadêmicos das solicitações dinâmicas em pontes, eles ficam restritos a analisar e modelar rigorosamente o tabuleiro e considera-se o desacoplamento da superestrutura e mesoestrutura, servindo os pilares de meros apoios. Isto é notadamente observado em Kermani e Waldron (1993), Chen et al. (2013), Buljac et al. (2017) e Ying et al. (2017).

Com base nessa lacuna será então abordado nesta tese o fenômeno da flexo-torção nos pilares altos (com seção em paredes finas) de pontes em decorrência da ação do vento, explicitando a ocorrência de momento de torção sob variação linear na altura do referido pilar e associado a flexão. As análises estática e dinâmica dos painéis-parede que formam o mencionado pilar, os efeitos de 2ª ordem sob ação conjunta do vento e da reação do tabuleiro (problema de estabilidade elástica), também são considerados. Por fim é postulada a rotina de dimensionamento estrutural para seção transversal composta por paredes finas (com abas e paredes simétricas) e submetida ao bimomento, bem como apresentadas tabelas adimensionais.

Desta forma, a pesquisa foi desenvolvida conforme quatro eixos temáticos, sendo estes: flexo-torção e análise estática dos painéis-parede, análise dinâmica dos painéis-parede, estabilidade elástica dos pilares (efeitos de 2ª ordem) e dimensionamento da seção de paredes finas submetida ao bimomento.

### a) Contribuições da tese

#### a.1) 1ª Contribuição: MATRIZ DE RIGIDEZ PARA SEÇÃO RETANGULAR LINEARMENTE VARIÁVEL VIA INTEGRAÇÃO DIRETA.

Nas páginas 125 a 131 (ver capítulo 2) da tese é apresentada a obtenção da matriz de rigidez do elemento de barra, com seção retangular maciça e linearmente variável, através da integração direta para a determinação dos termos da matriz de flexibilidade da referida barra. A aplicação de tal formulação e a conseguinte verificação via simulação em ANSYS são apresentadas nas páginas 136 – 139. **Na literatura consta apenas tal matriz via integração numérica ou por meio de soluções aproximadas, caracterizando nesta tese a obtenção direta da matriz de rigidez do EF com barra de seção retangular linearmente variável.**

#### a.2) 2ª Contribuição: SISTEMA DINÂMICO PARA ELEMENTO FINITO APLICADO AOS PILARES SOB CARGAS LATERAIS.

Nas páginas 147 a 159 (capítulo 3) da tese é apresentada a formulação do elemento finito de barra via equações de Maney, contendo para o problema fundamental a aplicação de cargas laterais para compor os esforços desequilibrantes. **Não há na literatura a formulação de tal elemento finito para o caso de pilares de pontes sob ação do vento.**

#### a.3) 3ª Contribuição: ELEMENTO FINITO DE BARRA PARA O PILAR EM NÚCLEO ESTRUTURAL (C OU DUPLO T) CONSIDERANDO A DEFORMAÇÃO POR CORTE.

Nas páginas 159 a 186 (capítulo 3) da tese é apresentada a formulação do elemento finito de barra, para seções de paredes finas, via análise matricial com a união das teorias de flexão no núcleo estrutural (método dos deslocamentos) e da flexo – torção, computando-se o efeito do empenamento e a ação do bimomento, tanto para seção em C ou em duplo T.

Em Heidebrecht e Swift (1971), Barbosa (1980) e Smith e Coull (1991) a definição do elemento finito em questão é procedida com a desconsideração da deformação por corte na obtenção da matriz de rigidez dos elementos estruturais (núcleo estrutural e lintéis). **Não há na literatura a formulação de tal elemento finito com a consideração da deformação por corte no núcleo estrutural e nos lintéis, daí a contribuição.**

**a.4) 4ª Contribuição:** APRESENTAR A EDO DO PROBLEMA DE ESTABILIDADE ELÁSTICA DE PILARES, COM SEÇÃO TRANSVERSAL LINEARMENTE VARIÁVEL E CONSTANTE.

No capítulo 4 desta tese é equacionado o problema de estabilidade elástica para pilares de pontes, sob a ação conjunta do vento e da reação do tabuleiro. Configurando assim, a ação de cargas laterais (considerando a ação do vento no tabuleiro, o tráfego e o peso-próprio), bem como a reação do tabuleiro e o peso próprio do pilar. Procede-se ainda a análise de seções transversais maciças e vazadas com paredes fechadas e com carga crítica determinada em função da espessura das paredes. **Não existe na literatura o equacionamento da carga crítica para pilares de pontes (na ação conjunta de cargas do vento e o tráfego no tabuleiro).**

**a.5) 5ª Contribuição:** GENERALIZAÇÃO DA TEORIA DOS PAINÉIS – PAREDE (GTPP) VIA TMC.

Consiste no equacionamento do núcleo estrutural em formato de C ou em duplo T com paredes não ortogonais, sendo apresentada no capítulo 5 (ver páginas 222 – 237). Daí, via técnica do meio contínuo procede-se: a determinação do centro de torção, traçado do diagrama de ordenadas setoriais principal  $\omega_{pc}$  (com polo de varredura no centro de torção da seção de paredes finas) e o correspondente momento de inércia setorial  $I_\omega$ . **Isto também não é encontrado na literatura.**

**a.6) 6ª Contribuição:** RESOLUÇÃO DA TEORIA DA FLEXO-TORÇÃO PARA A AÇÃO DO VENTO NO PILAR, VIA TMC.

Nas páginas 238 a 240 (capítulo 5) da tese é apresentada a solução da Equação Diferencial Ordinária (EDO):  $\phi'' - r^2 \cdot \phi''' = \frac{m}{G \cdot I_t}$ , sendo utilizado momento de torção sob distribuição linear:  $m(x) = A \cdot x + B$ . Na literatura a solução dessa EDO é executada sob momento de torção constante, ver Mori e Munaiar Neto (2017, p. 140 – 145), mesmo quando da análise de núcleos estruturais em edifícios altos. Conforme observa-se em Smith e Coull (1991, p. 323 – 326), os carregamentos laterais são aproximados sob distribuição uniforme na altura, o que conduz a momento de torção constante. **Assim, com a análise procedida nesta tese computa-se a ação do vento via teoria da flexo – torção (TFT), o que não consta na literatura.**

**a.7) 7ª Contribuição:** ANÁLISE DINÂMICA DOS PAINÉIS-PAREDE METÁLICOS ATRAVÉS DA TMC.

Nas páginas 249 a 253 (capítulo 5) desta tese é apresentada a análise dinâmica de núcleos estruturais metálicos, os também denominados painéis – parede e definidos em Barbosa (1980, p. II – 55). Admite-se para tais elementos a rigidez particionada em duas matrizes, sendo:  $[J]$  a matriz de rigidez do núcleo estrutural e  $[S]$  a matriz de rigidez dos lintéis que promovem o contraventamento. A equação diferencial é então expressa por:  $-[J].\{v''''\} + [S].\{v''\} + [M].\{\ddot{v}\} = \{V_f'\}$ . Apresenta-se no apêndice A as soluções das EDO's desacopladas mediante sistema generalizado de coordenadas, ver páginas 105 e 106. Nesta tese há a contribuição da análise dinâmica de pilares de pontes em formato de núcleos estruturais, onde o tabuleiro conduz a momento fletor ( $\mathfrak{M}_{z_H}$ ,  $\mathfrak{M}_{y_H}$ ) e bimomento ( $B_H$ ) não nulos no topo.

Na literatura encontra-se a análise da vibração livre, em Laier (1978, p. 11 – 18), e da vibração forçada, ver Laier (1984, p.75 – 88) para paredes de edifícios, considerando-se assim, seções com rigidez em única matriz. Bem como, no modelo contínuo para paredes via “Teoria de vigas de Navier – Bernoulli” que é apresentado em Laredo (1977, p. 273 – 283). Tal formulação é postulada para seções clássicas (maciças ou vazadas), sem ser de paredes finas abertas. **Portanto, a formulação proposta nesta tese é inédita.**

**a.8) 8ª Contribuição:** ANÁLISE DINÂMICA DOS PAINÉIS-PAREDE DE CONCRETO ARMADO PELA TMC.

Nas páginas 254 a 265 (capítulo 5) desta tese apresenta-se a análise dinâmica de núcleos estruturais de concreto armado. Caracterizando a não coincidência do centro de massa com o centro de gravidade da seção transversal, e a equação diferencial de tal problema é expressa por:  $-[J].\{v_{CG}''''\} + [S].\{v_{CG}''\} + +[\bar{M}].\{\ddot{v}_{CG}\} = \{V_f'\}$ . **Isto tem caracter inédito.**

**a.9) 9ª Contribuição:** AMORTECIMENTO PROPORCIONAL PARA RIGIDEZ PARTICIONADA EM DUAS MATRIZES.

Nas páginas 266 a 267 (capítulo 5) desta tese é apresentada a composição da matriz de amortecimento  $[C]$  para o sistema estrutural com rigidez particionada em duas matrizes, a exemplo: as matrizes de rigidez do núcleo  $[J]$  e dos lintéis  $[S]$ . Para tal, quantificam-se as parcelas das matrizes de rigidez  $[J]$ ,  $[S]$  e, de massa  $[M]$  (seção de aço) ou  $[\bar{M}]$  (seção de

concreto), que através das frequências  $\omega_j^*$ , compõem a matriz de amortecimento [C]. **Não existe na literatura, tal formulação com a rigidez da estrutura particionada em duas matrizes.**

#### **a.10) 10ª Contribuição: DIMENSIONAMENTO DA SEÇÃO DE PAREDES FINAS EM CONCRETO ARMADO E SUBMETIDA AO BIMOMENTO.**

No capítulo 6 desta tese é formulado o processo de obtenção da armadura resistente ao bimomento atuando em seções transversais de paredes finas em concreto. Procede-se tal equacionamento para núcleos estruturais em formato de C e de duplo T, adotando-se por hipótese paredes e abas simétricas, quanto as dimensões. **Não há na literatura o equacionamento de seção de paredes finas em concreto armado e sob ação do bimomento.**

## **1.2. ESTADO DA ARTE**

A Técnica do Meio Contínuo (TMC) foi bastante utilizada até os anos 1990, sobretudo com aplicação em edifícios altos. Porém, com a disseminação dos computadores surgiram inúmeros programas computacionais de análise estrutural fazendo uso do método dos elementos finitos, de maior praticidade. Assim a TMC foi relativamente esquecida, daí a ausência de publicações recentes no tema. Neste estado da arte apresentam-se tópicos relacionados ao projeto de pilares de paredes finas, indicando-se literatura na qual grande parte dos trabalhos fizeram uso da TMC, e por fim correlaciona-se tal técnica com o projeto de pilares de pontes.

### **a) Flexo-torção e análise estática dos painéis-parede**

A análise da flexo-torção em estruturas de paredes finas foi inicialmente postulada por Bazile Zakharovitch Vlassov, que em 1936 publica “*La statique des enveloppes*”, sua tese de doutorado. Continuando nos anos seguintes a estudar mais aprofundadamente as estruturas de paredes finas, no francês: “*membres en voiles minces*”. Rematando tais avanços na teoria geral dos elementos esbeltos de paredes finas através do livro publicado em 1940, reeditado em 1958 e transcrito para o francês em 1962, sob o título: “*pièces longues en voiles minces*” (VLASSOV, 1962).

Na década de 70 do século XX ocorreu maciça contribuição ao tema flexo-torção em seções de paredes finas, através da Técnica do Meio Contínuo. As paredes acopladas foram analisadas em Gluck (1970) e discutida tal análise por Wynhoven et al. (1970). Em seguida, por Smith e Taranath (1972) analisam o problema da coluna com seção em U, reforçadas por de abas, e submetidas à torção uniforme, sendo estudados o bimomento e a rotação em torno do eixo axial sob o centro de torção e proposto o contraventamento por lintéis com formação de rótula plástica no meio do vão. Em Wakabayashi e Yagui (1973) as análises do núcleo estrutural são processadas mediante teoria da flexo-torção associada a análise matricial de estruturas, buscando-se assim, implementar em subseqüentes estudos de edifícios altos.

No estudo de duas paredes finas acopladas mediante lintéis pode-se ressaltar Gluck e Gellert (1972), Tso e Biswas (1973a, 1973b) e Danay et al. (1974). Na contribuição de único núcleo formado por seção de paredes finas e contraventado por lintéis (para edifícios altos), tem-se como indispensável citar Wakabayashi e Yagui (1973) em conjunto com Heidebrecht e Smith (1973). Este último com a utilização de funções adimensionais para expressar o empenamento  $\phi$  e suas conseqüentes derivadas até a terceira ordem. Nestes trabalhos sempre foi desprezada a parcela da deformação por corte. A consideração de tal deformação, devido ao corte, é proposta em Serra e Yagui (1995) e o efeito de carga axial aplicado no centro de cisalhamento em Yagui e Serra (1995). Porém ambos consideram cargas laterais constantes, não procedendo a análise da ação do vento, cuja atuação gera momento de torção variável na altura da estrutura.

O efeito da deformação por corte em seções de núcleos estruturais é analisado em Smith e Abate (1984), porém detém-se na formulação pela teoria da flexo – torção, não analisando o problema sob a ótica da teoria dos painéis – parede. Nesta mesma linha de raciocínio cita-se Khan e Smith (1975) que apresenta a solução analítica para seções abertas com distribuição de lintéis idênticos e repetidos ao longo da altura do pilar. O equacionamento do lintel, em ambos os artigos, não considera o lintel como viga e computa seu efeito no núcleo estrutural através da formação de rótula plástica no centro do vão. Assim é que nesta tese, procede-se o equacionamento do referido lintel mediante equações de Maney. Evitando-se a imposição (consideração) da ocorrência obrigatória da rotulação plástica no centro do vão do lintel (ver item 2.8.1 b). Já em âmbito da produção de dissertações e teses nacionais ressalta-se: Rachid (1975) que apresenta a formulação da teoria de flexo – torção via método energético e focado em determinar a carga crítica para flambagem lateral, das aqui mencionadas paredes finas de seção transversal aberta, já em Carvalho (1980) incrementa-se o estudo da carga de flambagem.

Já, em Barbosa (1980) tal contraventamento é analisado mediante imposição de cargas laterais constantes ao longo da altura. Para Marques (1983) o núcleo estrutural é constituído por duas paredes em formato de U e acopladas mediante lintéis unindo as abas das paredes, ficando submetido a momento de torção  $M_t$  no centro de gravidade do sistema. Por fim, em Costa (1984) incrementa-se nos núcleos a fundação flexível mediante vinculação elástica. A análise dos efeitos de segunda ordem nos núcleos estruturais é realizada em Xavier (1987) com cargas verticais distribuídas ao longo da altura, tanto para núcleos isolados contraventados ou não por lintéis, bem como de paredes em formato de U e acopladas mediante lintéis, sendo publicado com novo detalhamento em Xavier e Melo (2018). Anos mais tarde, Bastistelle (1991) acresce na análise de 2ª ordem, o efeito das deformações axiais dos pilares, porém não aplica tal conceito aos núcleos estruturais (nos subsequentes painéis-parede).

Em Ribeiro (1987) estudam-se os núcleos mediante análise matricial do método dos deslocamentos e sua conseguinte associação tridimensional à pórticos, em seguida Yoshida (1988) integra os núcleos estruturais aos pilares ou aos pendurais de aço. E a análise dinâmica da associação tridimensional de pórticos, núcleos e paredes via TMC é abordado em Laier (1984). Já para o devido desacoplamento do sistema de equações recorre-se a Rosman (1972), realizando tal procedimento mediante traslado do sistema de referências para um sistema generalizado. No âmbito de livros é fundamental mencionar Smith e Coull (1991), que no capítulo 13 dedica-se ao estudo de pilares de seções com paredes finas abertas e contraventadas por lintéis ou lajes. Nesta última publicação o problema é resolvido mediante a técnica do meio contínuo, a teoria da flexo-torção e o elemento finito via análise matricial com acoplamento da flexão e do empenamento, porém desprezando a deformação por corte. Por fim, Nemir (1985) faz um apanhado detalhado de todas as hipóteses e equações envolvidas no fenômeno da flexo-torção, bem como resultados experimentais de cargas e momentos críticos. As referidas análises são procedidas para vigas contínuas e pórticos, em qual linha de raciocínio cita-se Kolbrunner (1969).

### **b) Análise dinâmica dos painéis-parede**

A mensuração dos efeitos dinâmicos em pontes é realizada, primordialmente em 1890, por coeficientes de impacto, porém as publicações técnicas mais relevantes ocorreram na década de 30 do século XX. Na década de 60 do mencionado século, ressaltam-se três

publicações dos efeitos dinâmicos, sendo: o primeiro de autoria de Fleming e Romualdi (1961), onde a análise dinâmica é processada por integração numérica da equação do movimento e modelagem por massas concentradas (para pontes com tabuleiro em vigas biapoiadas e contínuas). A segunda publicação é o estudo da estabilidade dinâmica de colunas e procedido por Bailey (1963), sendo enunciada a deflexão harmônica para pequenas e grandes deformações. E por último, a ação do vento em pilares de edifícios altos é analisado por Ferraz (1966) com a modelagem das ações oriundas do vento em formato de cargas laterais concentradas por nível de travamento (nas lajes para o caso de edifícios altos).

Na década seguinte, as análises foram procedidas em dois eixos, sendo estes: por primeira temática tem-se a modelagem estocástica das forças e rajadas provenientes do vento, mencionando-se Hart (1970), Vaicaitis (1975), O'Rourke et al. (1975), Peterka e Cermak (1976a, 1976b) e Saul et al. (1976). No segundo eixo temático, procede-se a simulação dinâmica dos núcleos estruturais, ressaltando Reinhorn et al. (1977) para a análise de edifícios com um eixo de simetria, removendo o acoplamento da torção com a flexão (o mesmo princípio é aplicável a pilares de pontes em formato de núcleo estrutural). A análise dinâmica dos painéis-parede pela TMC é processada em Laier (1978), com ênfase nos modos de vibração livre. Anos mais tarde, é que Laier (1984) postula a análise modal para os painéis (sem considerar rigidez particionada em duas matrizes) sob vibração forçada e aplicando-na em edifícios altos. Nesse sentido, é que nesta tese procede-se a extensão de tal análise para os pilares de pontes com seção transversal de paredes finas metálicas e aplica-se tal conceito de forma inédita em seções de concreto armado.

Em Ribeiro (1991) analisa-se a auto-correção e a correlação cruzada das pressões oriundas da ação do vento em faces retangulares e ensaiados em túnel de vento, o qual torna-se relevante na determinação da rajada de vento padrão. Não obstante, em Yin e Fang (2011) é ressaltada a importância da vibração lateral em pontes com pilares altos, isso devido a perda da rigidez lateral à flexão, principalmente ao lançar seções transversais em paredes finas para agregar viabilidade econômica ao projeto. Daí, a proposição nesta tese de proceder análise dos efeitos dinâmicos em pilares altos compostos por painéis-parede, analisando-no quanto: a estabilidade elástica sob imposição de carga lateral, a flexo – torção, os modos de vibração e o dimensionamento ao bimomento.



### **c) Estabilidade elástica de pilares**

A estabilidade elástica de pilares é algo a muito estudado. No âmbito de artigos técnicos podemos mencionar: Massonnet (1959), o qual retoma o cálculo da carga crítica desde a coluna ideal, analisa a coluna de paredes finas sob formato de C e em cruz, e também verifica os cenários de excentricidade da aplicação da carga compressiva no topo e na base (equacionando o momento crítico e validando-o por ensaio mecânico). Em Glück e Gellert (1972) é analisada a estabilidade lateral de pilares em paredes finas contraventadas por lintéis espaçados ao longo da altura e presentes na face aberta do pilar. Já em Lau e Hancock (1987) é analisada a seção de paredes finas com uma das faces aberta e reforçada por abas, tomando por vinculações os apoios elásticos.

Os painéis em formato de paredes de corte são analisados quanto à estabilidade em Rutenberg et al. (1988), porém o único estado de carga analisado é a atuação do peso próprio, distoando das análises processadas em Timoshenko e Gere (2009), isso por proceder análise de 1ª ordem com carregamento lateral sob formato equivalente para computar o diagrama de momento fletor para a configuração deformada. Tempos depois, Paulay e Priestley (1993) analisam a ductilidade (quanto ao fenômeno de estabilidade) de paredes estruturais em concreto armado, via parametrização de ensaios experimentais. Para a ótica de núcleos estruturais com duas paredes opostas parcialmente contraventadas por lintéis e apoiados sob base elástica, cita-se Nadjai e Johnson (1996). No âmbito de aplicações e replicações da deduções de Timoshenko e Gere (2009) em problemas mais paupáveis, cita-se o estudo da estabilidade em gasodutos por decorrência da pressão interna e procedido por Craveiro e Gay Neto (2016). Em Sepahi et al. (2010) é procedida a análise da posição deformada e carga crítica para colunas com não linearidade geométrica, porém é apenas considerado carga concentrada no topo e peso próprio do pilar de seção maciça.

Após tal apanhado, verificou-se a ausência da análise da carga crítica para pilares com estado de carga composto pela ação do vento (carga lateral sob variação linear) e pelas cargas verticais. Nesta tese propõe-se a contribuir em tal lacuna e procede-se no capítulo quatro à verificação da estabilidade elástica de pilares maciços e vazados para atuação conjunta do vento (cargas laterais), reação do tabuleiro da ponte (carga vertical  $P$  no topo do pilar) e do peso próprio  $p$  do referido pilar.

#### **d) Dimensionamento de seções de concreto armado**

O equacionamento da armadura resistente ao momento de torção e da flexão em pilares (quando da atuação em seções maciças ou vazadas com paredes fechadas) é amplamente estudado na literatura. Fazendo-se relevante mencionar Sussekind (1991), Amaral (1971) e Saliger (1963), bem como Araújo (2014). Em todos os textos referenciados observa-se que a análise das tensões oriundas da torção é processada mediante analogia da treliça de Mörsch (treliça espacial com bielas de compressão a 45°).

O estudo da flexão oblíqua em seções de concreto armado é criteriosamente detalhado em Langendonck (1959), sendo explicitado o funcionamento estrutural sob ótica de zonas tracionadas e comprimidas através do posicionamento e inclinação da linha neutra. Para pilares de grande altura e seção variável, faz-se relevante mencionar a análise da estabilidade e da flexo-torção, procedidas em Fuentes (1987).

Em Ichinose e Takiguchi (1987) é analisada a ocorrência das formas de deformação por esforço cortante para barras em concreto armado, procedendo a análise por uma malha de tensores ortogonais ao invés da tradicional treliça de Mörsch. Já, em Branson (1966) a flexão é analisada em elementos sob flexão simples. Em Stasio e Buren (1960) as colunas são analisadas sob a ótica da flexão composta (sempre em cenário desassociado da torção). Anos mais tarde, em Rahal e Collins (1995) é procedida a análise conjunta da torção e do efeito de corte, via treliça de Mörsch. A análise experimental de lintéis, sob a forma de paredes de corte, é realizada por Tassios et al. (1996), onde verifica-se a redução dos momentos fletores e a dissipação de energia, estas promovidas pela imposição dos referidos lintéis.

Diante de tais contribuições na literatura para pilares de seção maciça, sempre sob a ótica da ação da flexão em separação da torção. Propõe-se então nesta tese a formalização da rotina de dimensionamento de seções transversais de concreto armado, composta por paredes finas, e submetidas ao bimomento. Em outros termos, equaciona-se a armadura resistente a solicitação conjunta do momento fletor e da torção em termos do esforço solicitante decorrente, no caso o bimomento.

### e) Evolução construtiva

A ponte Angered localizada em Göteborg (na Suécia) é apresentada por Estrutura em Revista (1980, p.7), sendo característicos os pilares com altura máxima de 50 metros e seções transversais vazadas com dimensões externas entre 4 a 9 metros. As referidas paredes finas são de espessura de 40 a 45 cm, e resistência à compressão do concreto ( $f_{ck}$ ), normalmente, de 45 MPa e com algumas seções em concreto de resistência C – 50. Ver figura 1.1.

**Figura 1.1: Ponte Angered sob vãos centrais de 129 metros**



Fonte: (Estrutura em Revista, 1980)

Em Recordes Mundiais (1985, p.24), Gottemoeller (1998, p.53) e Rossiter (2008) apresenta-se a ponte de Ganter, cuja relevância para esta tese é a altura máxima dos pilares de 150 metros por sobre vale profundo. A ponte localiza-se na Suíça, ao longo da estrada Simplon Pass (no “Canton of Valais”, a 10 km de Brig). Nesta ponte, os pilares extremos são maciços e de seção retangular, enquanto os demais são de seção retangular vazada e variável na altura. Daí a motivação para a análise procedida no capítulo quatro desta tese. Vide figura 1.2.

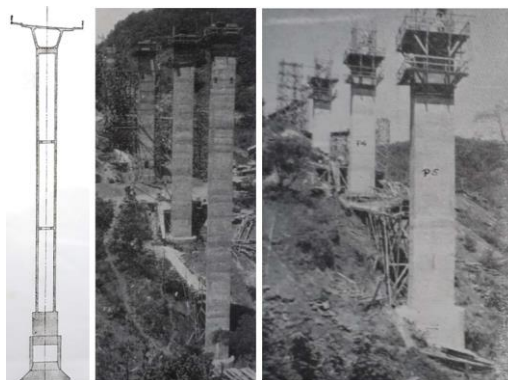
**Figura 1.2: Ponte Ganter, com pilares maciços e vazados, localizada na Suíça**



Fonte: (Gottemoeller, 1998)

Cita-se ainda a ponte sobre o vale dos diabos, apresentada em Pfeil (1960), localizada na BR – 14 ao sair da cidade de Santa Maria – RS. Os pilares extremos possuem seção retangular maciça de (3 x 0,8) m, já os pilares centrais são compostos por seção transversal retangular vazada de (3 x 1,2) a (3 x 1,6) m. A altura do pilar mais alto é de 43 metros. Vide figura 1.3.

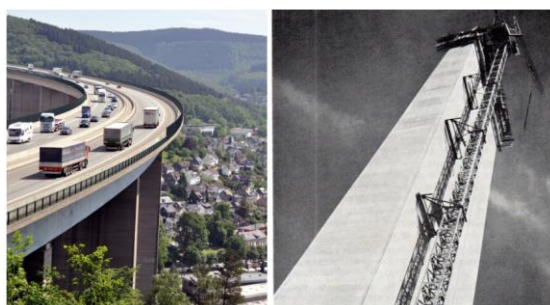
**Figura 1.3: Ponte sobre o vale dos diabos**



**Fonte: (Pfeil, 1960)**

Em Beyer e Thul (1969) são apresentados comentários sobre pontes com relevante lançamento estrutural. A exemplificar cita-se a ponte Siegtal (localizada no vale Sieg na Alemanha, sendo uma das inspirações para o projeto da ponte Rio – Niterói), com pilares de 100 metros de altura. Vide figura 1.4.

**Figura 1.4: Pilar da ponte Siegtal, com 100 metros de altura**



**Fonte: (Beyer e Thul, 1969)**

Por fim, referencia-se DNER (1984), onde são apresentados detalhes de projeto e execução da ponte presidente Costa e Silva (mais conhecida como ponte Rio – Niterói). Os pilares são de formato retangular vazado e variável linearmente na altura, com topo maciço para emprego dos aparelhos de apoios do tipo Neoprene. A termo de informação, as placas de Neoprene tem base de (70 x 70) cm e fretagem de (1 a 2) mm, de acordo com o projeto. Os pilares possuem altura na ordem de 70 metros. Na figura 1.5 apresenta-se o pilar de um dos vãos centrais durante a fase de construção do tabuleiro da referida ponte.

**Figura 1.5: Pilar da ponte presidente Costa e Silva, durante execução do tabuleiro**



**Fonte: (DNER, 1984)**

### **1.3. OBJETIVOS**

#### **1.3.1. Objetivo Geral**

Desenvolver um método de análise de pilares altos de pontes pela Técnica do Meio Contínuo (TMC), levando em conta as cargas permanentes e a ação dinâmica do vento, fornecendo assim ferramentas de verificação para modelagens em softwares comerciais.

#### **1.3.2. Objetivos Específicos**

São objetivos específicos desta tese os seguintes:

- Explicar a técnica do meio contínuo aplicada à análise estrutural de painéis de contraventamento e promover a correspondente aplicação aos pilares de pontes;
- Abordar a teoria da flexo-torção e aplicá-la aos pilares de pontes, em formato de núcleo estrutural “C” e em duplo T;
- Estender a teoria dos painéis-parede dos núcleos estruturais C em edifícios altos para os pilares altos de pontes, e generalizá-la para seções C e duplo T;
- Avaliar a estabilidade elástica do pilar submetido à ação conjunta do vento, da reação do tabuleiro e do peso próprio;

- Deduzir os modos de vibração do pilar através da TMC com a utilização da teoria dos painéis-parede (TPP);
- Postular o dimensionamento de seções (em “C” e em duplo T) de paredes finas em concreto armado, com paredes e abas simétricas em dimensões, e submetida ao bimomento e
- Validar a modelagem do pilar em núcleo pela TMC através do método dos elementos finitos, utilizando elementos de barra baseados no acoplamento do método dos deslocamentos com a teoria da flexo-torção.

#### 1.4. ORGANIZAÇÃO DA TESE E METODOLOGIA

A metodologia empregada nesta tese para atingir os objetivos postulados no item 1.3, foram:

- **Revisão Bibliográfica:** Foi realizada revisão bibliográfica das análises estática e dinâmica em pilares de pontes, do ano 1950 ao corrente ano (onde constatou-se a maciça contribuição nos anos 70), verificando-se a lacuna em vibrações de pilares altos formados por seções de paredes finas abertas e parcialmente contraventadas por lintéis;
- **Processamento Teórico:** Para tal análise dinâmica dos pilares de pontes em paredes finas, retoma-se (no sentido de resgate) a técnica do meio contínuo, por se tratar de técnica com pouco custo de processamento. Mesmo assim, é empregada também a análise discreta via método dos elementos finitos (utilizada na flexo-torção) e do método das diferenças finitas (para resolver a EDO do problema de estabilidade elástica) e
- **Simulação Numérica:** A fim de validar a formulação dinâmica dos painéis-parede, procede-se a modelagem dos modos de vibração do referido pilar com seção transversal de paredes finas via software ANSYS Release 11.

A organização desta tese é realizada mediante sete capítulos, dos quais, este primeiro destina-se a explicitar a relevância, os objetivos, e estado da arte e a metodologia empregada.

O capítulo 2 é intitulado “Fundamentação teórica” e foi redigido para resgatar a técnica do meio contínuo aplicada as análises estática e dinâmica da ação do vento, bem como enunciar conceitos básicos (necessários para esta tese) sobre: dinâmica das estruturas, teoria da flexo-

torção (TFT), teoria dos painéis-parede (TPP), distribuição do fluxo do vento e o posicionamento do centro de torção (também denominado de centro de corte ou de centro de cisalhamento). Já no final deste capítulo é apresentada matriz de rigidez do elemento finito de barra, com seção transversal retangular linearmente variável ao longo do eixo longitudinal, sendo modelado o comportamento dinâmico do respectivo pilar sob a ótica dos modos de vibração, através da TMC e do MEF com a utilização do software ANSYS Release 11.

O capítulo 3 é destinado a formulação do elemento finito de barra sob flexo – torção e composto por seção de paredes finas. Procede-se a formulação do acoplamento da flexão e da torção através da análise matricial do pilar em núcleo estrutural, tanto em formato de C e de duplo T.

O capítulo 4 destina-se a verificação da estabilidade elástica dos pilares de pontes, com seção transversal constante ou variável, bem como para configuração maciça ou vazada. É empregado o método das diferenças finitas para resolver a equação diferencial do problema de estabilidade. Ao término deste capítulo, exemplificam-se as análises com pilares de seção: retangular, circular, tubular e anelar.

No capítulo 5 é desenvolvida a formulação dinâmica da ação do vento em painéis-parede (pilares com seção de paredes finas em formato de C e em duplo T) via técnica do meio contínuo. São analisados pilares metálicos e de concreto armado, e realizada a validação dos modos de vibração mediante simulação no software ANSYS Release 11.

No capítulo 6 procede-se o equacionamento da seção de paredes finas, com paredes e abas simétricas quanto as dimensões, em concreto armado e submetida ao bimomento. Sendo também postulada a decorrente rotina de cálculo e geradas as tabelas adimensionais para o dimensionamento das armaduras.

Finalmente, no capítulo 7 são realizadas as considerações finais e elencadas cinco sugestões para contribuições em futuras teses. Ao final desta tese constam cinco apêndices, onde: no apêndice A é apresentada a solução da equação diferencial da TPP no sistema generalizado de coordenadas (ver capítulo 2), o apêndice B destina-se a modelar o pilar com seção variável (ver capítulo 2), o apêndice C contém a programação do capítulo 4, o apêndice D é atribuído ao capítulo 5 e no apêndice E consta um tutorial da simulação dos modos de vibração no software ANSYS.

**PARTE I****FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA**

---

*“Toda a nossa ciência, comparada com a realidade, é primitiva e infantil e, no entanto, é a coisa mais preciosa que temos”.*

*Albert Einstein*



---

## FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

---

### 2.1. TÉCNICA DO MEIO CONTÍNUO APLICADA A PILARES ALTOS

Conforme é apresentado em Chitty (1947), Laredo (1977) e em Laier (1984) a modelagem dinâmica de estruturas é convenientemente processada via Técnica do Meio Contínuo, ao considerar a rigidez dos elementos de conexão horizontais (lajes e vigas) como propriedades e solicitações distribuídas ao longo da edificação. Para os pilares distribuem-se tais propriedades e solicitações ao longo da altura. Processa-se em Laier (1984) a análise da vibração de paredes, preconizando no Brasil, o início das contribuições da técnica do meio contínuo (TMC) aplicada a problemas dinâmicos. Nesta tese será empregada a formulação dinâmica da TMC em pilares de pontes com seção de paredes finas, especificamente no capítulo 5, modela-se o pilar metálico e de concreto armado em formato de núcleo estrutural contraventado por lintéis. Como se vê na Figura 2.1, a configuração de pilares em paredes finas foi utilizada na ponte ferroviária cujos vãos centrais foram levados pela onda de rejeitos de mineração, quando da ruptura da barragem de Brumadinho, em Minas Gerais.

**Figura 2.1: Ponte Férrea em Brumadinho com pilares em duplo C contraventados por lintéis**



Fonte: (Brumadinho, 2019)

Outro exemplo de ponte férrea com pilares de seção de paredes finas é a ponte sobre o rio Olifants, sendo localizada na província Western Cape no sul da África (SA), com pilares em formato de duplo T e com abas variáveis na altura. Vide figura 2.2.

**Figura 2.2: Ponte Férrea no SA com pilares em duplo T: (a) visão panorâmica e (b) detalhe no pilar**



Fonte: (BUSSATA; MOYO, 2015)

Já a ponte de la Pyle fica situada sobre o lago Vouglans na França, compreendida a oeste pela cidade de *La Tour-du-Meix* e a leste pela cidade *Coyron* e possui 65 metros de altura. Essa ponte é apresentada cientificamente em Courbon (1968) e torna-se relevante mencionar nesta tese por possuir pilares em duplo T com seção transversal constante. Ver Figura 2.3.

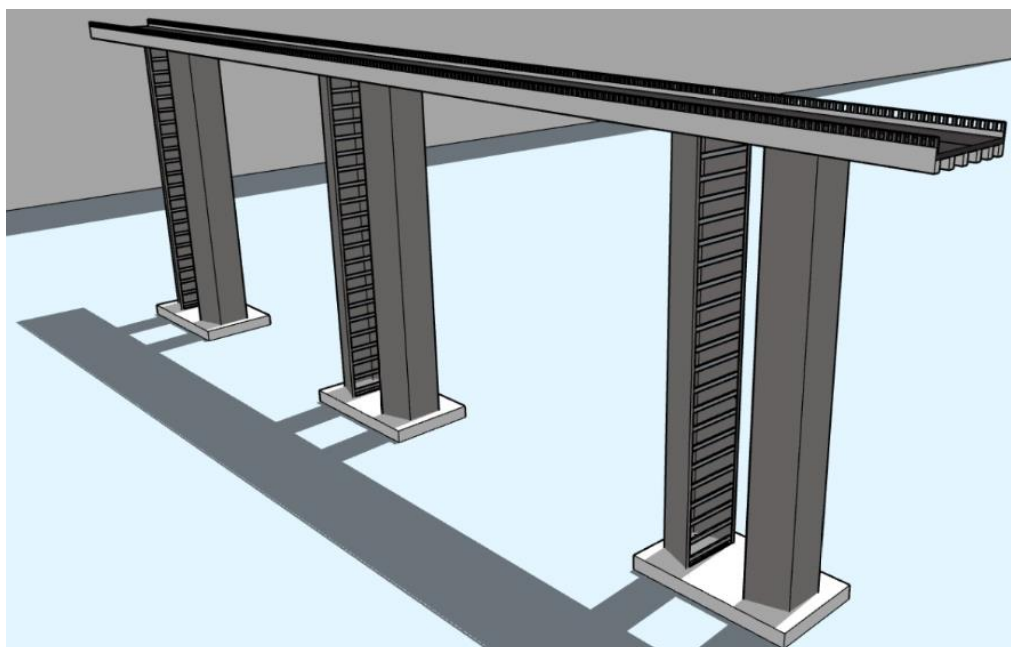
**Figura 2.3: Ponte de la Pyle na fase de construção, da qual observa-se o pilar em duplo T com abas de dimensões constantes ao longo da altura do pilar**



Fonte: (Pilar da ponte de la Pyle, 2019)

O arranjo estrutural apresentado na figura 2.1, pilar em duplo C e contraventados em conjunto por lintéis, é estudado em Marques (1983). Desta forma, propõe-se nesta tese a análise do pilar em duplo C com os lintéis contraventando cada Núcleo que compõe o pilar, mantendo-se a simetria do conjunto e fornecendo assim uma diretriz detalhada para projeto de tal elemento estrutural. Tal arranjo é apresentado na Figura 2.4 e ressalta-se que o pilar em C será analisado no capítulo 5, quanto a variação das inclinações das paredes laterais em detrimento da minimização do bimomento.

**Figura 2.4: Ponte com pilares em duplo C contraventados individualmente por lintéis**

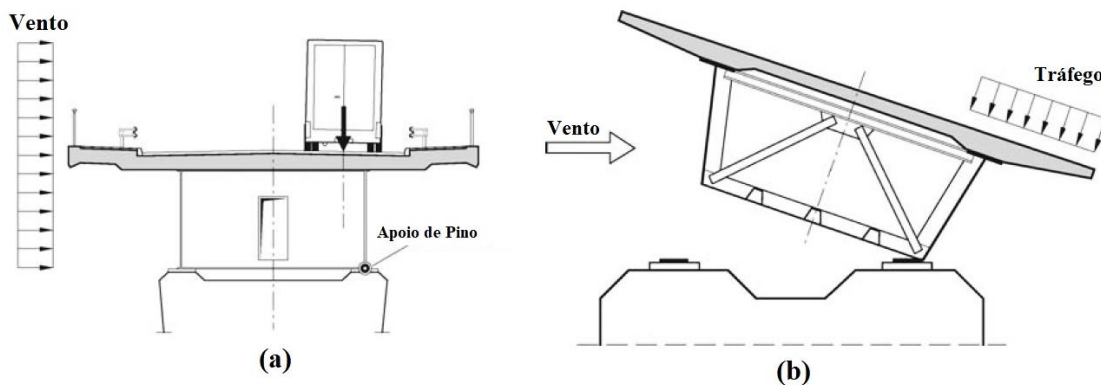


Fonte: O Autor (2019)

### **2.1.1. Partição da carga do vento nos pilares de pontes**

A ação do vento no conjunto tabuleiro – vigas da ponte é caracterizada pelo efeito de elevação de tal conjunto estrutural, sendo ilustrado esse fenômeno na figura 2.5. Já a partição da carga lateral do vento será abordada conforme duas teorias, a primeira configuração é baseada meramente na distribuição pela rigidez dos pilares (em conjunto com o apoio por Neoprene). A segunda configuração é embasada no conceito de centro elástico, sendo derivada do equacionamento procedido em Stamato (1978) para núcleos de edifícios altos, onde consideram-se as rigidezas nos pilares em decorrência da flexão nos eixos principais de inércia e dos esforços axiais.

**Figura 2.5: Ação do vento em pontes: (a) carga lateral atuante no conjunto tabuleiro – vigas e (b) efeito de elevação do tabuleiro em decorrência da ação do vento lateral**

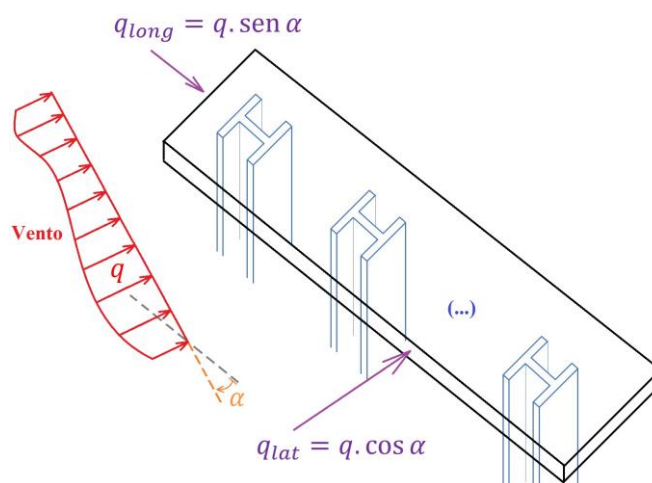


Fonte: Adaptado de (LEBET; HIRT, 2013)

#### **a) Primeira configuração de partição da ação do vento nos pilares de pontes**

Nesta primeira configuração adota-se a distribuição da ação do vento via rigidez dos conjuntos pilares – apoio Neoprene, e para tal equacionamento cita-se Pfeil (1979, p. 209 – 226) e adota-se uma ponte com um única linha de pilares (conforme apresentado na figura 2.2). Vide na Figura 2.6 a ativação das cargas longitudinal e transversal ao tabuleiro da ponte e em decorrência da ação do vento sob rajada de carga  $q$ . A rajada de vento é adotada sob inclinação  $\alpha$  em relação ao eixo longitudinal da ponte reta apresentada em tal figura.

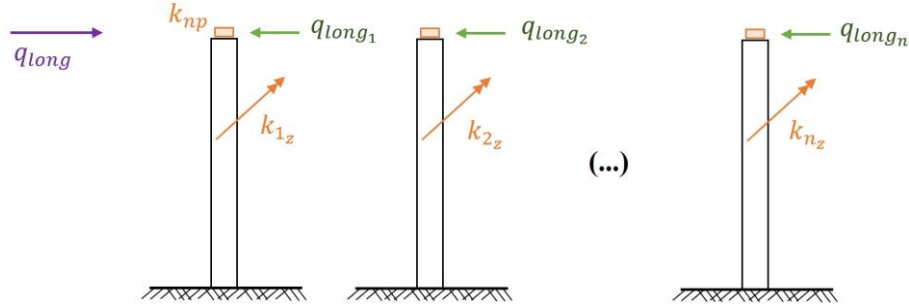
**Figura 2.6: Rajada de vento atuante no tabuleiro de uma ponte com única linha de pilares e as forças solicitantes**



Fonte: O Autor (2019)

Na figura 2.7 é analisada a aplicação da carga longitudinal  $q_{long}$ , sendo adotado o processo de separação dos deslocamentos apresentado em Campanari (1985, v. 1, p. 326 – 348).

**Figura 2.7: Linha de pilares sob divisão da carga longitudinal**



Fonte: O Autor (2019)

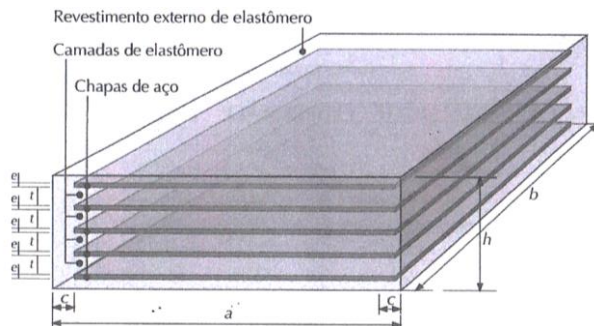
Ficando as cargas longitudinais nos pilares sob a seguinte distribuição:

$$q_{long_1} = q_{long} \cdot \frac{k_{c1z}}{\sum_i k_{iz}} \quad (2.1 a)$$

$$q_{long_n} = q_{long} \cdot \frac{k_{cnz}}{\sum_i k_{iz}} \quad (2.1 b)$$

onde:  $k_{cnz}$  é a rigidez do conjunto Pilar – Neoprene, ver página 304 do volume 1 de Campanari (1985);  $k_i$  é a rigidez do fuste do pilar;  $k_{np}$  é a rigidez do Neoprene e obtida via distorção por carga lateral. E para a seção constante e pilar engastado na base e livre no topo, tem-se rigidez do fuste do pilar definida por:  $k_i = 3.E \cdot \frac{I_i}{H_i^3}$ , com  $I_i$  sendo a inércia do pilar na direção perpendicular ao movimento e  $H_i$  a altura do pilar analisado. Já para o apoio Neoprene, tem-se por rigidez:  $k_{np} = G_n \cdot \frac{A_n}{h_n}$ , sendo:  $G_n$  o módulo de elasticidade transversal do material;  $h_n$  é a altura útil do Neoprene (entre as fretagens); e  $A_n = (a - 2 \cdot c) \cdot (b - 2 \cdot c)$  é a área da seção de corte paralela ao topo do pilar. Ver na figura 2.8 para as dimensões do apoio Neoprene.

**Figura 2.8: Dimensões características do apoio Neoprene**



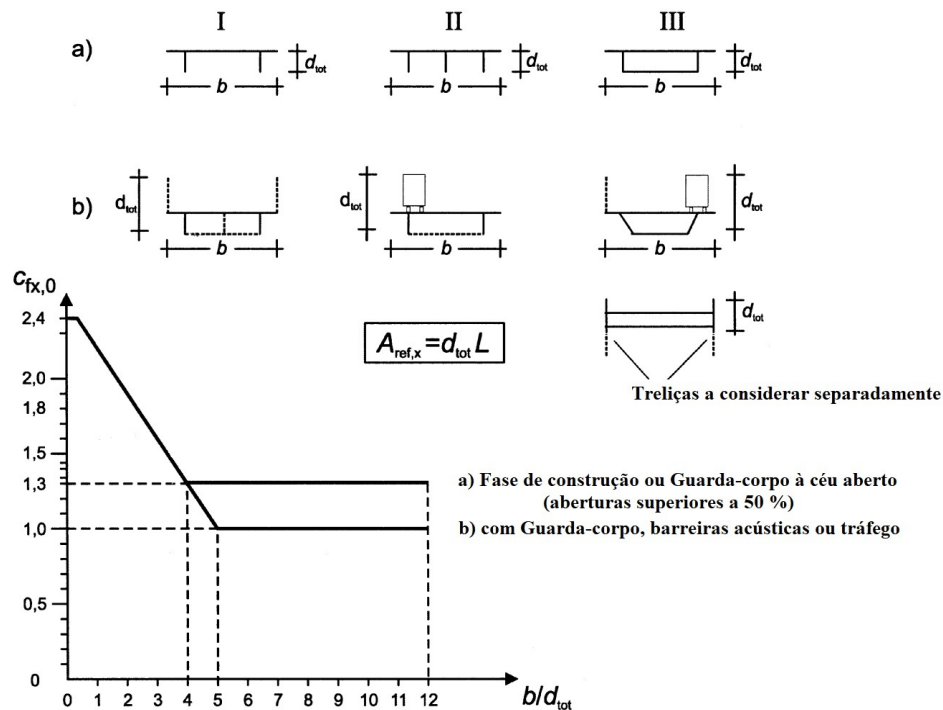
Fonte: (MARCHETTI, 2008)





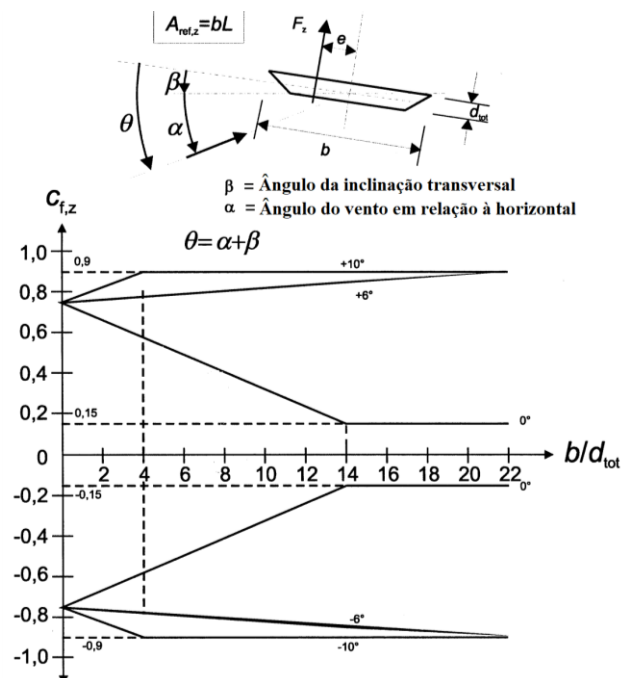
Nesse sentido, ressalta-se o EUROCODE 01 (pr FR 1991 – 1 – 4: 2005) quando da quantificação da ação do vento no tabuleiro da ponte. Apresentam-se na figura 2.10 as configurações das pontes e o decorrente coeficiente de força na direção lateral do tabuleiro. Já na figura 2.11 é apresentado o coeficiente da força aplicada no tabuleiro sob a direção vertical.

**Figura 2.10: Coeficiente da força aplicada lateralmente no tabuleiro devido a ação do vento**



Fonte: (EUROCODE 01, 2005)

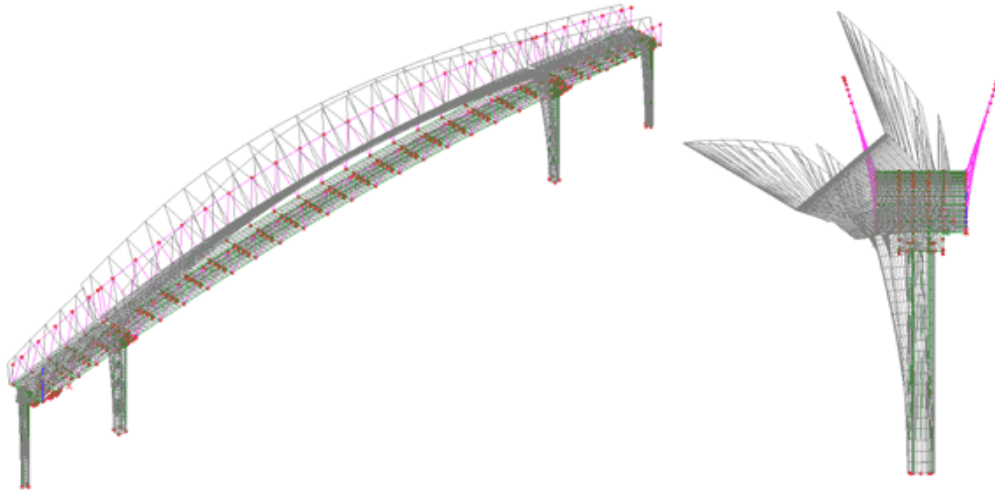
**Figura 2.11: Coeficiente da força vertical oriunda da ação do vento e aplicada no tabuleiro**



Fonte: (EUROCODE 01, 2005)

Na figura 2.12 é apresentada a configuração deformada de uma ponte em vigas sob ação lateral do vento, e a partir de tal conclui-se que a forma de desconsiderar a hipótese da laje (tabuleiro da ponte) funcionar como diafragma, é impor no equacionamento o levantamento do tabuleiro em decorrência da carga do vento.

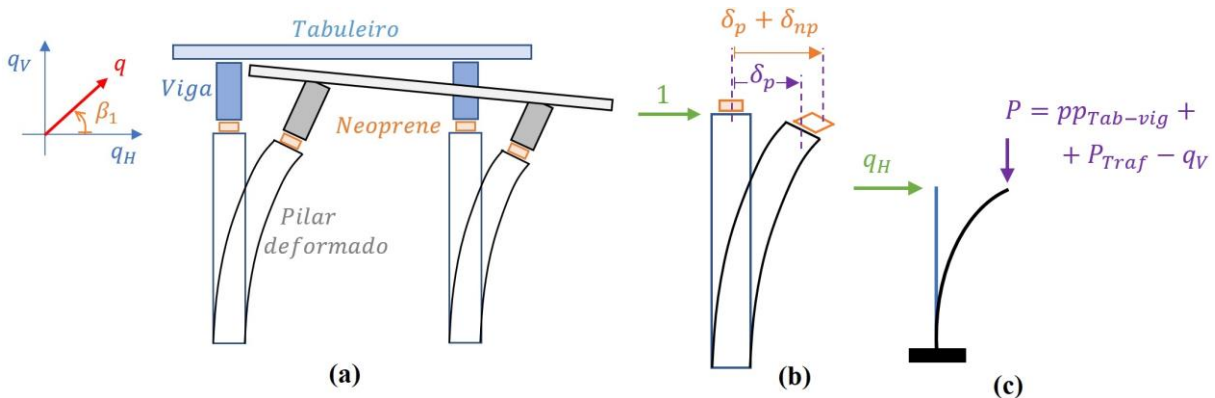
**Figura 2.12: Vibração lateral de ponte em viga**



**Fonte: (Vibração lateral e torção, 2019)**

Baseado nos conceitos apresentados nas figuras 2.10 e 2.11 postula-se na figura 2.13, e em consonância com a figura 2.12, que a ação do vento no tabuleiro da ponte é representada através da carga  $q$  com inclinação  $\beta_1$ . Mediante a rajada de vento sob inclinação  $\beta_1$  computa-se o efeito de elevação do tabuleiro da ponte, conforme apresentado na figura 2.5 (b).

**Figura 2.13: Ação lateral do vento no tabuleiro: (a) configuração deformada e carga inclinada do vento, (b) procedimento de cálculo da rigidez do conjunto Pilar – Neoprene e (c) carregamentos concentrados no topo do pilar e devidos ao tráfego e à ação do vento no tabuleiro**

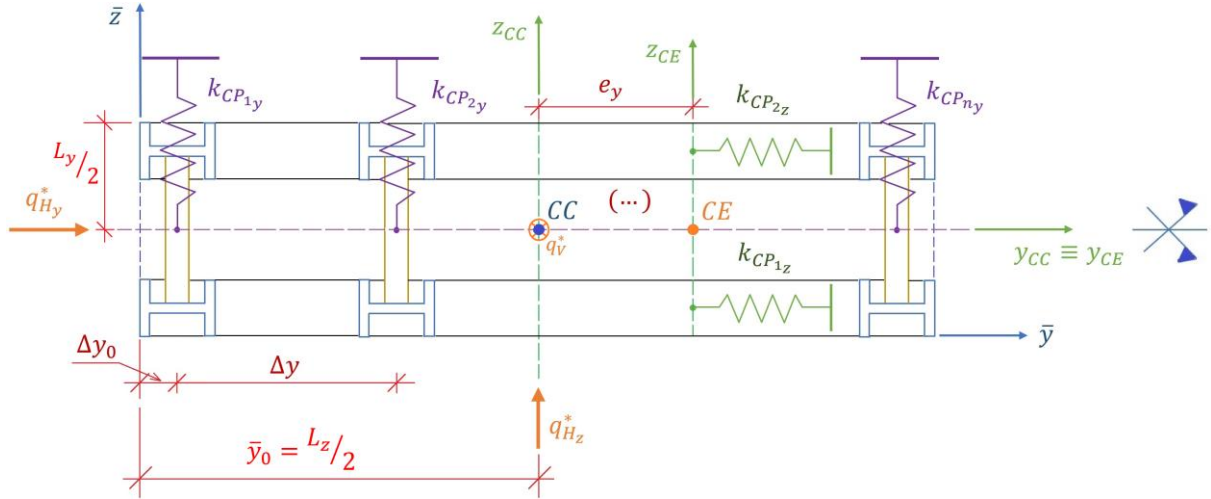


**Fonte: O Autor (2019)**



Na figura 2.14 é apresentada a segunda configuração de distribuição de pilares de pontes, sendo esta com duas linhas de pilares e com repartição das cargas do vento através do conceito do centro elástico (ver também a figura 2.30).

**Figura 2.14: Ponte com duas linhas de pilares com a aplicação do conceito de centro elástico**



Fonte: O Autor (2019)

$$\text{sendo: } q_{Hy}^* = q \cdot L_y \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta_1 \quad (2.3 a)$$

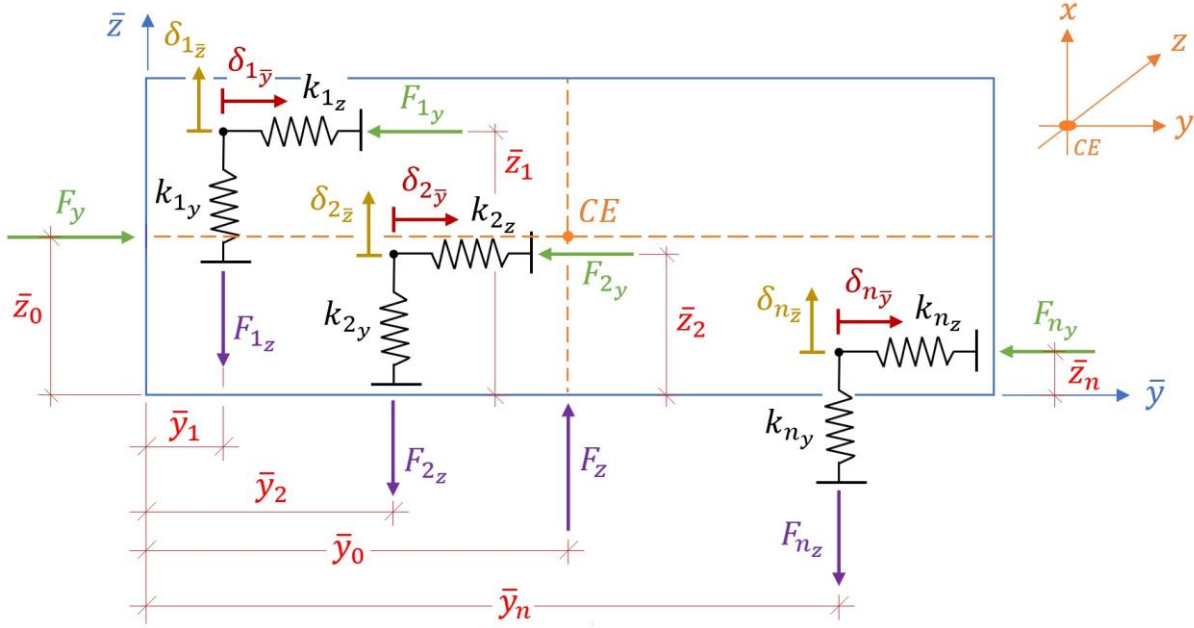
$$q_{Hz}^* = q \cdot L_z \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta_1 \quad (2.3 b)$$

$$q_V^* = q \cdot \sin \beta_1 \cdot (L_z \cdot \cos \alpha + L_y \cdot \sin \alpha) \quad (2.3 c)$$

Agora, mediante Stamato (1978) deve-se transformar a carga  $q_V^*$  aplicada em forma de reação de apoio no centro de carga (do conjunto de todos os pilares da ponte), para o formato de cargas concentradas em cada um dos pilares. Bem como, deve-se realizar a distribuição das cargas longitudinal  $q_{Hy}^*$  e lateral  $q_{Hz}^*$  para cada um dos pilares que constituem a mesoestrutura da ponte apresentada na figura 2.14.

### c) Rotação no centro elástico e deslocamentos de corpo rígido

Define-se o centro elástico como o ponto no qual ao serem aplicadas forças surgem apenas translações, não ocorrendo assim rotação do conjunto de elementos estruturais. Assim, na figura 2.15 adota-se um conjunto de molas nas direções  $y$  e  $z$  principais de inércia, objetivando-se assim obter as forças em cada pilar devido ao deslocamento de corpo rígido.

**Figura 2.15: Posicionamento do centro elástico mediante rigidez à flexão dos pilares****Fonte: O Autor (2019)**

Através do equilíbrio de forças nas direções principais de inércia e do balanço de momentos, exprimem-se as coordenadas do centro elástico (CE), baseadas nos eixos auxiliares  $\bar{y}$  e  $\bar{z}$ , como:

$$\bar{z}_0 = \frac{\sum_i k_{i_z} \cdot \bar{z}_i}{\sum_i k_{i_z}} \quad (2.4 a)$$

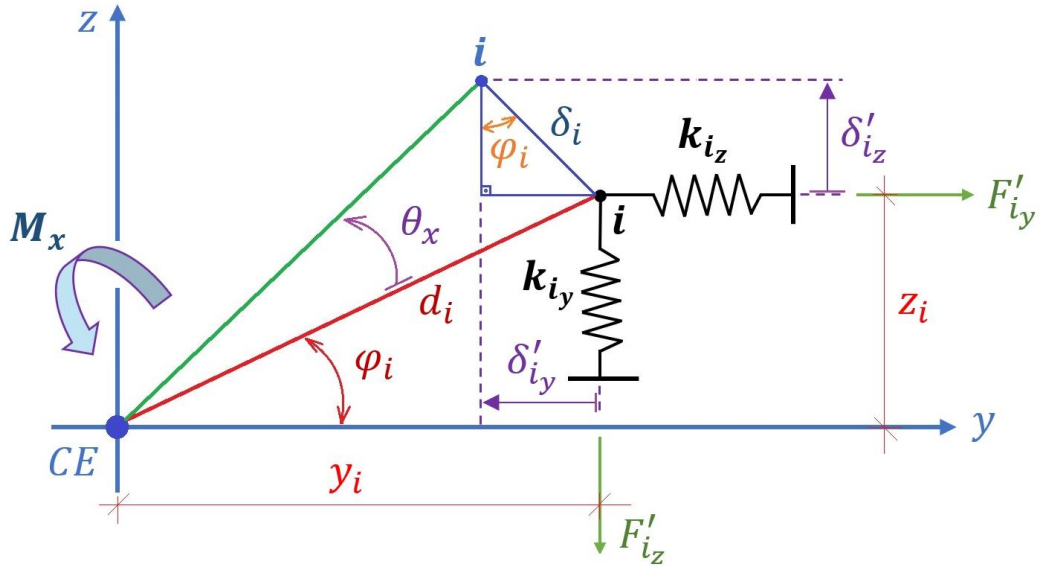
$$\bar{y}_0 = \frac{\sum_i k_{i_y} \cdot \bar{y}_i}{\sum_i k_{i_y}} \quad (2.4 b)$$

E de forma proporcional, tem-se as forças em cada mola (pilar) por translações de corpo rígido, expressas por:

$$F_{i_y} = \frac{k_{i_z}}{\sum_i k_{i_z}} \cdot F_y \quad (2.5 a)$$

$$F_{i_z} = \frac{k_{i_y}}{\sum_i k_{i_y}} \cdot F_z \quad (2.5 b)$$

Na figura 2.16 aplicam-se os eixos coordenados  $y$  e  $z$  no centro elástico e em seguida promove-se a rotação  $\theta_x$ , a fim de determinar as forças ativadas em cada pilar e o momento  $M_x$  no CE que promove tal rotação.

**Figura 2.16: Momento no centro elástico e decorrentes forças reativas no i-ésimo pilar**

Fonte: O Autor (2019)

Mediante operações trigonométricas na translação do ponto  $i$  apresentado na figura 2.16, escreve-se:

$$\delta'_{iy} = d_i \cdot \theta_x \cdot \sin \varphi_i \quad (2.6 a)$$

$$\delta'_{iz} = d_i \cdot \theta_x \cdot \cos \varphi_i \quad (2.6 b)$$

analisando as forças  $F'_{iy}$  e  $F'_{iz}$ , via coeficientes de rigidez, exprimem-se tais forças reativas como:

$$F'_{iy} = k_{iy} \cdot y_i \cdot \theta_x \quad (2.7 a)$$

$$F'_{iz} = k_{iz} \cdot z_i \cdot \theta_x \quad (2.7 b)$$

Realizando o equilíbrio de momento no centro elástico, ver figura 2.16, exprime-se o momento gerador da rotação  $\theta_x$ , como:

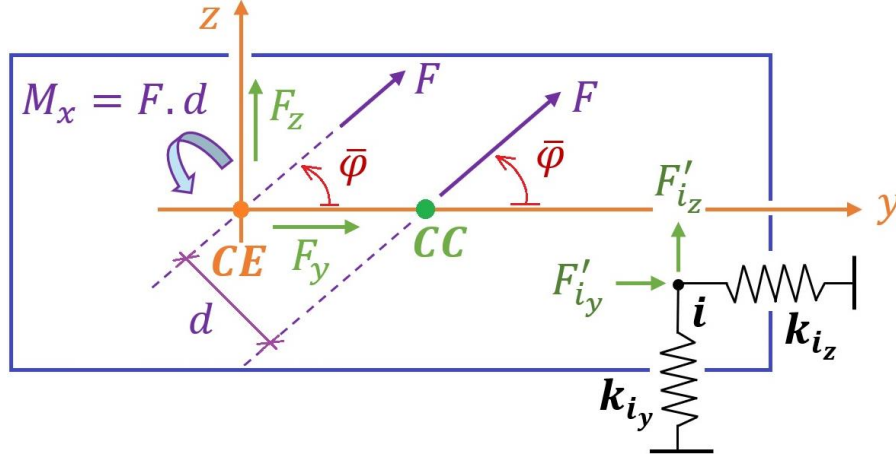
$$M_x = \sum_{i=1}^n F'_{iz} \cdot y_i + \sum_{i=1}^n F'_{iy} \cdot z_i \quad (2.8)$$

Aplicam-se as equações (2.7) na eq. (2.8), expressa-se a rotação  $\theta_x$  no centro elástico após aplicação do momento  $M_x$ , como:

$$\theta_x = \frac{M_x}{\sum_i k_{iy} \cdot (y_i)^2 + \sum_i k_{iz} \cdot (z_i)^2} \quad (2.9)$$

Para atuação da carga  $F$  no centro elástico, com inclinação  $\bar{\varphi}$  em relação ao eixo  $y$ , braço de alavanca  $d$ , e decorrente momento  $M_x = F \cdot d$ , apresentam-se na figura 2.17 as forças transladadas do centro de carga para o centro elástico e as decorrentes forças reativas no  $i$ -ésimo pilar.

**Figura 2.17: Momento no centro elástico, Translade de forças do CC para CE e decorrentes forças reativas no  $i$ -ésimo pilar**



Fonte: O Autor (2019)

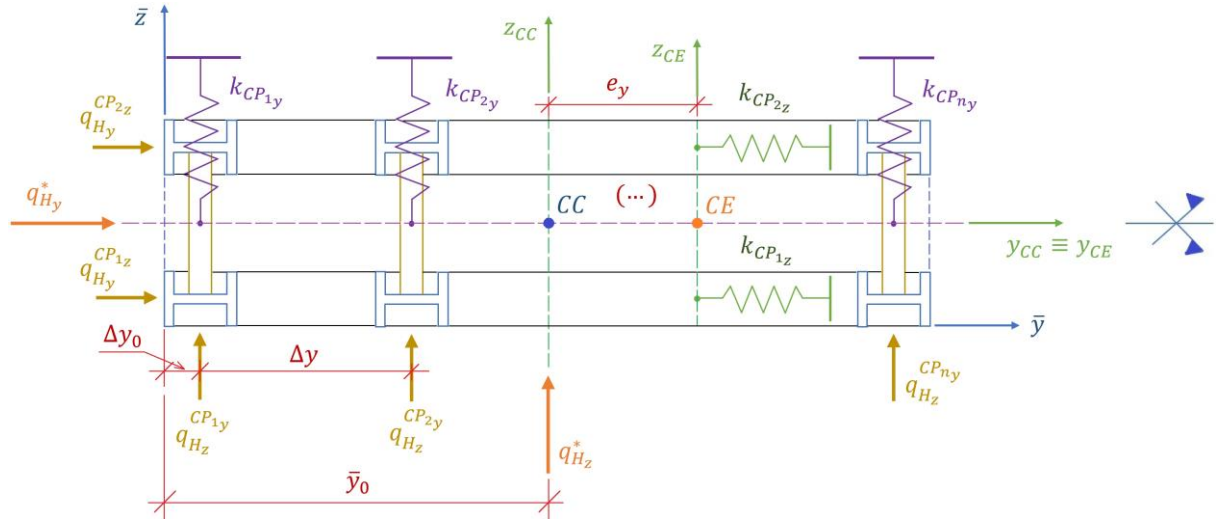
Considerando as equações (2.5); (2.7) e (2.9) em conjunto como momento  $M_x = F \cdot d$  sobre o centro elástico, exprimem-se as forças reativas no  $i$ -ésimo pilar, como:

$$F'_{iy} = \frac{k_{iz}}{\sum_i k_{iz}} \cdot F_y + k_{iz} \cdot z_i \cdot \frac{F \cdot d}{\sum_i k_{iy} \cdot (y_i)^2 + \sum_i k_{iz} \cdot (z_i)^2} \quad (2.10 a)$$

$$F'_{iz} = \frac{k_{iy}}{\sum_i k_{iy}} \cdot F_z + k_{iy} \cdot y_i \cdot \frac{F \cdot d}{\sum_i k_{iy} \cdot (y_i)^2 + \sum_i k_{iz} \cdot (z_i)^2} \quad (2.10 b)$$

#### d) Partição das cargas $q_{Hy}^*$ , $q_{Hz}^*$ e $q_V^*$ para os pilares

Por fim, aplicando-se as definições apresentadas no letra (c) desse item, representa-se na figura 2.18 a partição das cargas no plano do tabuleiro da ponte com base no centro elástico. Observa-se ainda que a carga longitudinal  $q_{Hy}^*$  será repartida igualmente entre os painéis  $k_{CP_{1z}}$  e  $k_{CP_{2z}}$  de contraventamento (formados pelos pilares na direção  $y$ ), isso devido a simetria da estrutura.

**Figura 2.18: Partição das cargas no plano do tabuleiro da ponte com duas linhas de pilares**

Fonte: O Autor (2019)

Caso a simetria do eixo  $y$  seja quebrada, exprime-se a partição da carga na direção longitudinal mediante a eq. (2.5), por:

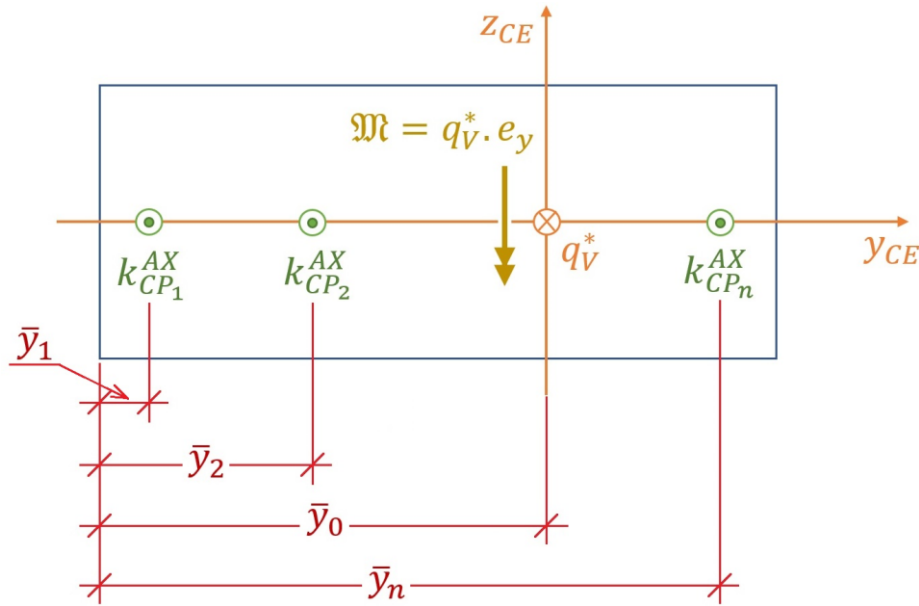
$$q_{Hy}^{CP1z} = \frac{k_{CP1z}}{k_{CP1z} + k_{CP2z}} \cdot q_{Hy}^* \quad (2.11 a)$$

$$q_{Hy}^{CP2z} = \frac{k_{CP2z}}{k_{CP1z} + k_{CP2z}} \cdot q_{Hy}^* \quad (2.11 b)$$

Na subdivisão da carga na direção  $z$  aplicam-se as equações (2.10), valendo-se do momento gerado pelo translate da carga  $q_{Hz}^*$  do centro de carga para o centro elástico (ver figura 2.17). Ficando a carga no  $i$ -ésimo painel de rigidez  $k_{CPiy}$  expressa por:

$$q_{Hz}^{CPiy} = \frac{k_{CPiy}}{\sum_i k_{CPiy}} \cdot q_{Hz}^* + k_{CPiy} \cdot (\bar{y}_i - \bar{y}_0) \cdot \frac{q_{Hz}^* \cdot \left( \bar{y}_0 - \frac{L_z}{2} \right)}{\sum_i k_{CPiy} \cdot (\bar{y}_i - \bar{y}_0)^2 + \sum_i k_{CPiz} \cdot (\bar{z}_i - \bar{z}_0)^2} \quad (2.12)$$

Resta agora computar a subdivisão da carga vertical  $q_V^*$ , a qual é transladada para o centro elástico e gera momento  $\mathfrak{M}$  em torno do eixo  $z_{CE}$ , conforme é apresentado de forma esquemática na figura 2.19.

**Figura 2.19: Partição das cargas no plano do tabuleiro da ponte, esforços axiais nos pilares**

Fonte: O Autor (2019)

Baseado no conceito de flexão composta associado a definição de centro elástico, exprime-se a partição da carga vertical  $q_V^*$ , no  $i$ -ésimo painel de contraventamento, como:

$$q_{V_i}^* = \frac{k_{CP_i}^{AX}}{\sum_i k_{CP_i}^{AX}} \cdot q_V^* + (\bar{y}_0 - \bar{y}_i) \cdot \frac{q_V^* \cdot \left(\bar{y}_0 - \frac{L_z}{2}\right)}{\sum_i k_{CP_i}^{AX} \cdot (\bar{y}_0 - \bar{y}_i)^2} \quad (2.13)$$

### 2.1.2. Definições e aspectos históricos da TMC

A utilização da técnica contínua em detrimento de modelos discretos, a exemplo do método dos elementos finitos (BREBRIA; FERRANTE, 1975), método das diferenças finitas (GUELFOND, 1963), método dos elementos de contornos e dentre outros, é motivada pela simplificação de processamento (consequência da redução do número de parâmetros envolvidos). O número de parâmetros via análise discreta, por elementos finitos, será função da malha de discretização. E quanto mais refinada a malha, mais os resultados se aproximam da realidade. Para a análise discreta via elementos finitos são apresentados diversos tipos de elementos em Dhatt et al. (2005) com continuidade  $C^0$ ;  $C^1$  e  $C^2$ , isso para problemas estruturais unidimensionais (1D), bidimensionais (2D) e tridimensionais (3D).

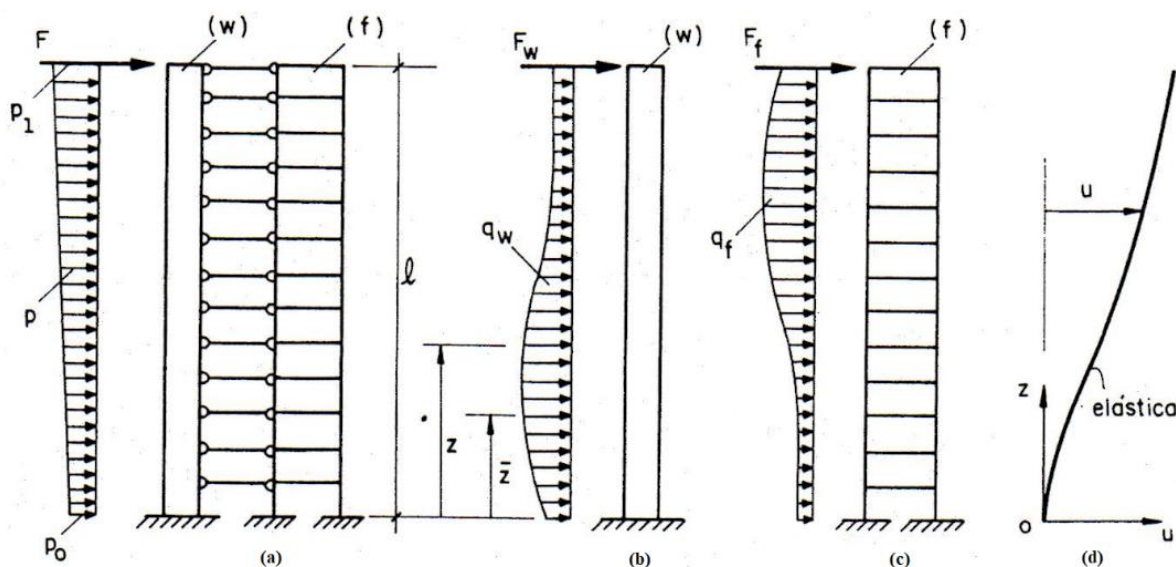
Na modelagem dinâmica dos painéis verticais via técnica do meio contínuo é que Laier (1984) reitera que o travamento ocorre de forma horizontal ao longo da altura. Empregando as

lajes (os travamentos horizontais nas paredes) como elementos de rigidez infinita em seus planos e despreza a rigidez transversal. Os mesmos conceitos da TMC são debatidos com mais detalhes em Stamato (1980) para a formulação estática. A análise dos efeitos provenientes de forças verticais nos pilares com travamentos horizontais será abordada no item 2.1.3 desta tese, desconsiderando as movimentações nas demais direções, além da horizontal. A fim de justificar tal simplificação vem Laier (1984) reforçando que as magnitudes das movimentações horizontais são bem maiores do que as verificadas na direção vertical e por tanto desprezadas estas últimas.

Os elementos que compõem os painéis de contraventamento são apresentados e analisados em Stamato (1980), tornando-se relevantes para esta tese, os seguintes:

- **Parede:** São painéis planos com rigidez elevada ao corte e deformáveis ao efeito da flexão. Vide figura 2.20 (b).
- **Pórtico:** São painéis planos com rigidez elevada à flexão e deformáveis ao esforço cortante. Conforme figura 2.20 (c).
- **Associação em série de Parede e Pórtico:** De acordo com o exposto nas figuras 2.20 (a) e conseguinte deformação apresentada na figura 2.20 (d). É caracterizada pela ligação, distribuída ao longo da altura, através de barras biarticuladas (denominadas de lintéis).

**Figura 2.20: Painéis planos de contraventamento: (a) Associação em série, (b) Parede, (c) Pórtico e (d) deslocamentos horizontais**

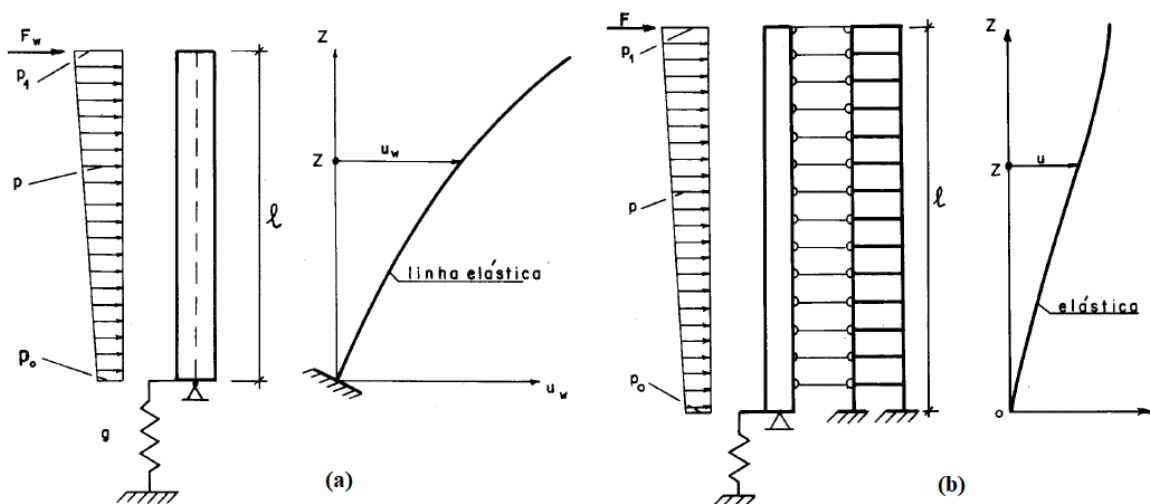


Fonte: (STAMATO, 1980)

Onde as barras biarticuladas são barras de ligação e representam as lajes ou as vigas dos andares (para ocorrência de lajes, são supostas de rigidez transversal desprezível e infinitamente rígida no plano, de modo a transmitir integralmente as deformações sofridas ao pórtico, isso para edifícios altos). Para o caso de pontes procede-se a desconsideração de tal hipótese, ver item 2.1.1, mais especificamente nas figuras 2.5; 2.12 e 2.13.

Em Mancini (1972) é aplicado o painel em forma de parede sobre engastamento elástico e processada a análise estática mediante a técnica do meio contínuo, sendo inclusive associado em série com o pórtico. Nos quais, o momento de engastamento elástico  $M_0$  é modelado mediante a rotação do apoio  $\phi$  e a rigidez  $g$  do engastamento elástico. Vide figura 2.21 e item 2.1.4 (a).

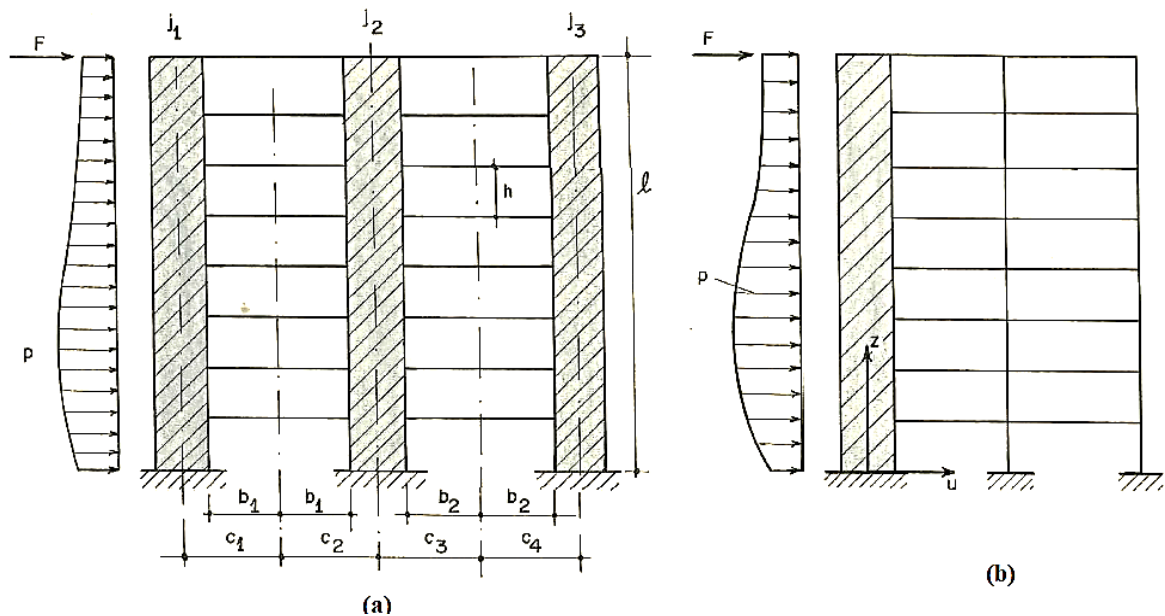
**Figura 2.21: Painéis planos de contraventamento: (a) Parede com base engastada elasticamente, (b) Associação de Parede com base elástica e Pórtico**



Fonte: (MANCINI, 1972)

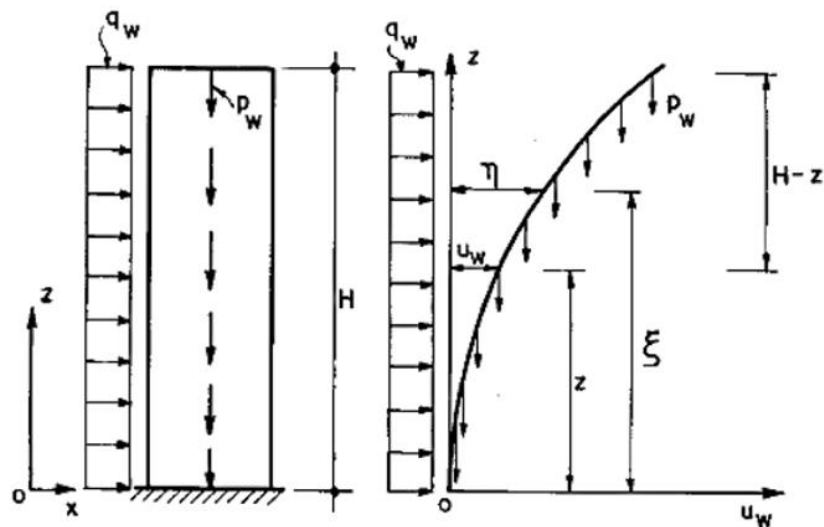
Os estudos dos painéis – parede associados por lintéis são aprofundados em Mancini (1973). Os lintéis, nada mais são que vigas engastadas em ambas as extremidades e com a capacidade de resistir a momento fletor e ao esforço cortante, são então barras que ligam as paredes e/ou pórticos. Conforme observa-se na figura 2.22 a associação em série de paredes (Fig. 2.22 a) e de pórticos com paredes (ver figura 2.22 b) ocorre por meio de lintéis distribuídos na altura da estrutura. Além do mais, é importante notar que nos lintéis não aparecem esforços normais, devido ao comportamento das lajes (ou travamentos horizontais, simplesmente) como diafragmas. Esta última consideração é válida para o caso de edifícios altos, no caso de pontes ver a eq. (2.13) com a quantificação de tais esforços axiais nos pilares.



**Figura 2.22: Painéis associados em séries com lintéis: (a) Parede, (b) Parede e Pórtico**

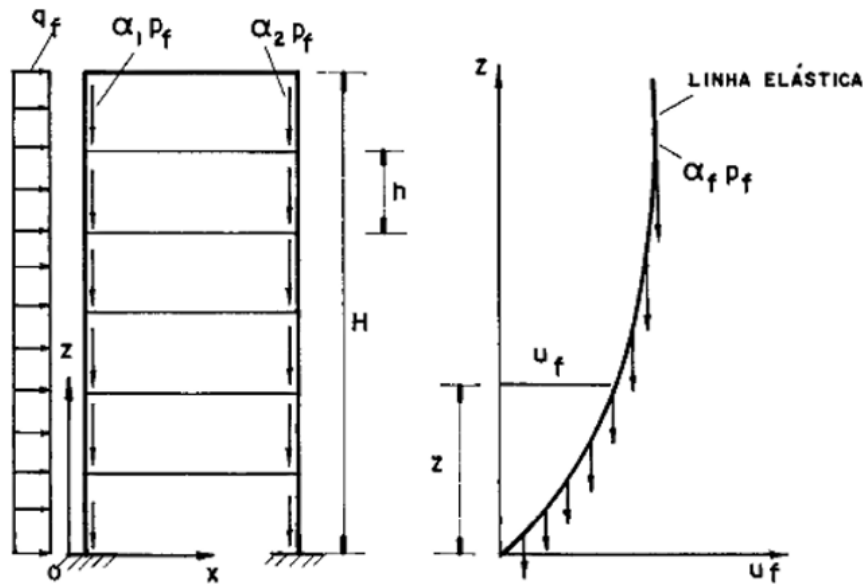
Fonte: (MANCINI, 1973)

Em Xavier (1987) são analisados os painéis com os carregamentos: horizontal  $q_w$  (uniformemente distribuído na altura  $H$  e como simplificação da ação do vento) e vertical  $p_w$  (distribuído no eixo dos elementos verticais e passando pelo centro de gravidade). A exemplo, apresentam-se três configurações de painéis de contraventamento analisados quanto a estabilidade, ver figuras 2.23 a 2.25.

**Figura 2.23: Efeitos de 2ª ordem via TMC para painéis – parede**

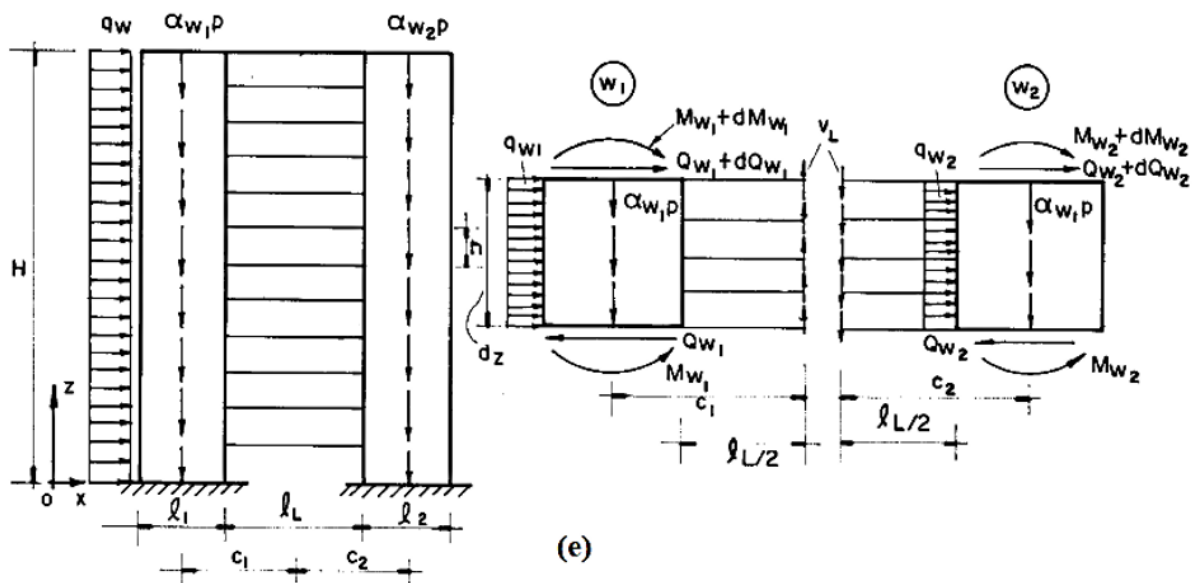
Fonte: (XAVIER, 1987)

Figura 2.24: Efeitos de 2ª ordem via TMC para Pórtico plano



Fonte: (XAVIER, 1987)

Figura 2.25: Efeitos de 2ª ordem via TMC para a associação de paredes por lintéis



Fonte: (XAVIER, 1987)

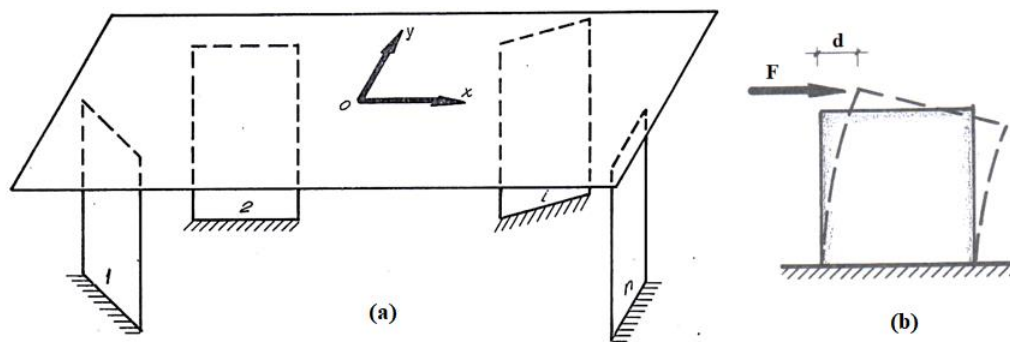
A solução das equações diferenciais oriundas do processamento via técnica do meio contínuo é realizada pelo método das diferenças finitas, tanto em Xavier (1987) quanto em Mancini (1973). A resolução das referidas EDO's é realizada via diferenças finitas por se tratar de um método numérico de boa convergência e apresentar boas soluções. Neste sentido, a fim de validar os resultados obtidos via diferenças finitas é que Xavier (1987) procede a resolução das EDO's também via Método de Stodola-Vianello.

### 2.1.3. Distribuição das forças do vento nos painéis de contraventamento

#### a) Painéis contraventados por único travamento horizontal

A rigidez  $k_s$  do painel é definido como a força necessária para provocar um deslocamento unitário na direção da força aplicada. Vide figura 2.26 (b) e eq. (2.14):

**Figura 2.26: Técnica do Meio Contínuo (a) conjunto de pilares com único travamento na horizontal e (b) deslocamento proporcionado pela força F**

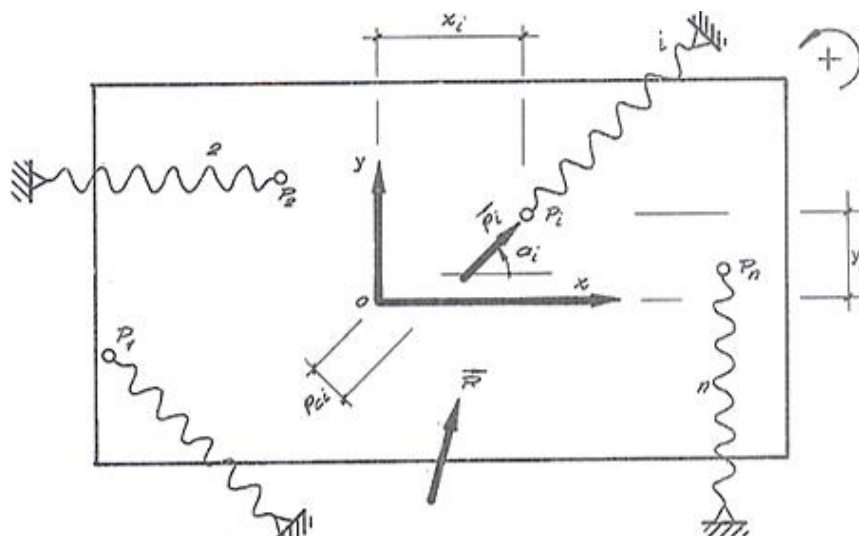


Fonte: (STAMATO, 1978)

$$k_s = \frac{F}{d} \quad (2.14)$$

Neste sentido, uma força resultante qualquer proveniente da atuação conjunta das cargas externas no nível do travamento horizontal, pode ser representada em três componentes ( $p_{xi}$ ,  $p_{yi}$  e  $p_{ci}$ ). Conforme apresentado na figura 2.27.

**Figura 2.27: Componentes do vetor unitário na mola i**



Fonte: (STAMATO, 1978)

As componentes do vetor unitário nas direções  $x$  e  $y$  e o momento  $p_{ci}$  gerado no ponto de referência, adotando-se como positivo o giro no sentido anti-horário, são definidas por:

$$p_{xi} = \bar{p}_i \cdot \cos(\alpha_i) \quad (2.15 a)$$

$$p_{yi} = \bar{p}_i \cdot \sin(\alpha_i) \quad (2.15 b)$$

$$p_{ci} = p_{yi} \cdot x_i - p_{xi} \cdot y_i = x_i \cdot \sin(\alpha_i) - y_i \cdot \cos(\alpha_i) \quad (2.15 c)$$

onde:  $p_{xi}$  – Componente na direção  $x$ , do vetor unitário  $\bar{p}_i$ ;

$p_{yi}$  – Componente na direção  $y$ , do vetor unitário  $\bar{p}_i$ ;

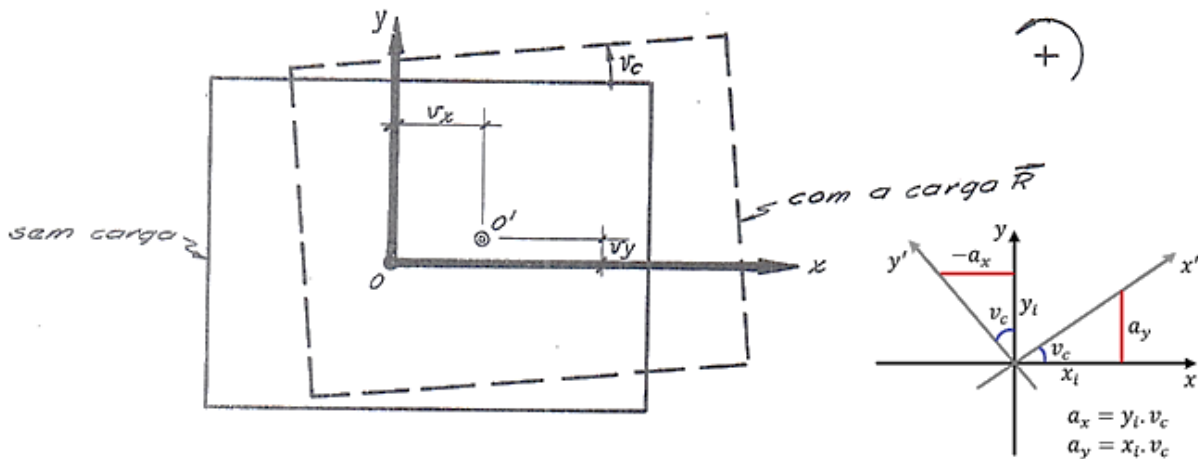
$\bar{p}_i$  – Vetor unitário na direção da mola " $i$ ";

$\alpha_i$  – Ângulo formado entre a direção  $x$  e a mola " $i$ " e

$p_{ci}$  – Momento em relação ao ponto de referência " $O$ " gerado por  $\bar{p}_i$ .

De forma geral, a atuação das cargas advindas do vento geram deslocamentos horizontais diferenciais, em relação aos bordos da estrutura. Neste tocante, o vetor deslocamento é regido pelo ângulo de rotação  $v_c$  definido entre o travamento horizontal e as componentes da nova posição do ponto de referência ( $O'$ ), conforme apresentado na fig. 2.28.

**Figura 2.28: Deslocamentos no centro elástico**



Fonte: Adaptado de (STAMATO, 1978)

Os deslocamentos que ocorrem nos diversos elementos constituintes dos painéis contraventados  $\vec{u}_i$ , possuem como componentes  $u_{xi}$  e  $u_{yi}$ , resultando definidos por:

$$u_{xi} = v_x - y_i \cdot v_c \quad (2.16 a)$$

$$u_{yi} = v_y + x_i \cdot v_c \quad (2.16 b)$$

O encurtamento da mola " $i$ " é definido através da projeção do deslocamento  $\vec{u}_i$  do painel contraventado na direção da mola representada pelo vetor unitário  $\bar{p}_i$ , sendo definido por:

$$d_i = u_{xi} \cdot p_{xi} + u_{yi} \cdot p_{yi} \quad (2.17)$$

Aplicando as equações (2.15) e (2.16) na eq. (2.17), chega-se ao deslocamento  $d_i$  do painel  $i$  expresso por:

$$d_i = p_{xi} \cdot v_x + p_{yi} \cdot v_y + p_{ci} \cdot v_c \quad (2.18)$$

Emprega-se o conceito de rigidez definido na eq. (2.14) e unindo-o a eq. (2.18), conclui-se que a força  $F_i$  necessária para ocasionar o deslocamento  $d_i$ , será:

$$F_i = k_{si} \cdot (p_{xi} \cdot v_x + p_{yi} \cdot v_y + p_{ci} \cdot v_c) \quad (2.19)$$

A carga resultante  $\vec{R}$  decorrente da aplicação conjunta das várias forças  $\vec{F}_i$  nos painéis, é definida vetorialmente, por:

$$\vec{R} = \sum_i F_i \cdot \vec{p}_i \quad (2.20)$$

Aplica-se a eq. (2.19) na eq. (2.20) e ressalta-se que as projeções  $v_x$  e  $v_y$  do deslocamento  $OO'$  é o mesmo para ambos os  $i$ -ésimos painéis. A resultante  $\vec{R}$  fica na notação vetorial para as direções  $x$  e  $y$ , relativas ao momento em relação ao ponto de referência  $O$ , escrita por:

$$\vec{R} = v_x \sum_i k_{si} \cdot p_{xi} \cdot \vec{p}_i + v_y \sum_i k_{si} \cdot p_{yi} \cdot \vec{p}_i + v_c \sum_i k_{si} \cdot p_{ci} \cdot \vec{p}_i \quad (2.21 a)$$

$$R_x = v_x \sum_i k_{si} \cdot p_{xi}^2 + v_y \sum_i k_{si} \cdot p_{yi} \cdot p_{xi} + v_c \sum_i k_{si} \cdot p_{ci} \cdot p_{xi} \quad (2.21 b)$$

$$R_y = v_x \sum_i k_{si} \cdot p_{xi} \cdot p_{yi} + v_y \sum_i k_{si} \cdot p_{yi}^2 + v_c \sum_i k_{si} \cdot p_{ci} \cdot p_{yi} \quad (2.21 c)$$

$$R_c = v_x \sum_i k_{si} \cdot p_{xi} \cdot p_{ci} + v_y \sum_i k_{si} \cdot p_{yi} \cdot p_{ci} + v_c \sum_i k_{si} \cdot p_{ci}^2 \quad (2.21 d)$$

Para facilitar a notação, pode-se reescrever as eq.'s (2.21), como:

$$R_x = S_{xx} \cdot v_x + S_{xy} \cdot v_y + S_{xc} \cdot v_c \quad (2.22 a)$$

$$R_y = S_{yx} \cdot v_x + S_{yy} \cdot v_y + S_{yc} \cdot v_c \quad (2.22 b)$$

$$R_c = S_{cx} \cdot v_x + S_{cy} \cdot v_y + S_{cc} \cdot v_c \quad (2.22 c)$$

onde:  $S_{ab} = \sum k_{si} \cdot p_{ai} \cdot p_{bi} = S_{ba}$

Observa-se que o sistema formado pelas equações (2.22) é acoplado e para tanto é conveniente lançar mão de técnicas para proceder o desacoplamento. Mediante generalização da componente  $R_x$ , via transformação do deslocamento  $v_x$  em  $\bar{v}_x$ , define-se o novo referencial. Isto também se aplica a componente  $R_y$  em função da coordenada generalizada  $\bar{v}_y$ . Para concluir o desacoplamento do sistema, expressa-se o momento  $R_c$  em termos da rotação  $\bar{v}_c$ . Ficando:

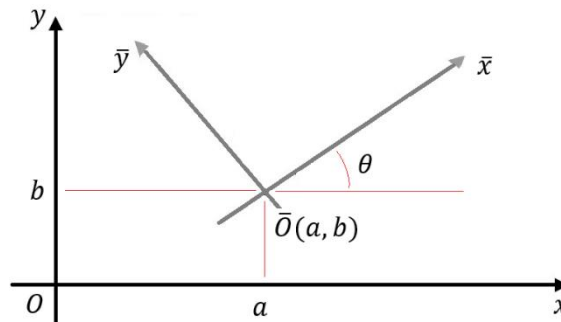
$$\bar{R}_x = \bar{S}_{xx} \cdot \bar{v}_x \quad (2.23 a)$$

$$\bar{R}_y = \bar{S}_{yy} \cdot \bar{v}_y \quad (2.23 b)$$

$$\bar{R}_c = \bar{S}_{cc} \cdot \bar{v}_c \quad (2.23 c)$$

O referencial generalizado é obtido via translações  $a$  e  $b$  dos eixos, além de uma rotação com inclinação  $\theta$  (positiva no sentido de giro da direção  $x$  para a direção  $\bar{x}$ ). A origem do novo referencial  $\bar{x}\bar{y}$  é definida nas coordenadas  $(a, b)$  em relação ao plano cartesiano  $xy$  e denominada de centro elástico (STAMATO; MANCINI, 1973). Conforme ilustrado na figura 2.29 e nas equações (2.14):

**Figura 2.29: Coordenadas do Centro Elástico**



Fonte: O Autor (2019)

$$tg(2\theta) = \frac{2 \cdot S_{xy}}{S_{xx} - S_{yy}} \quad (2.24 a)$$

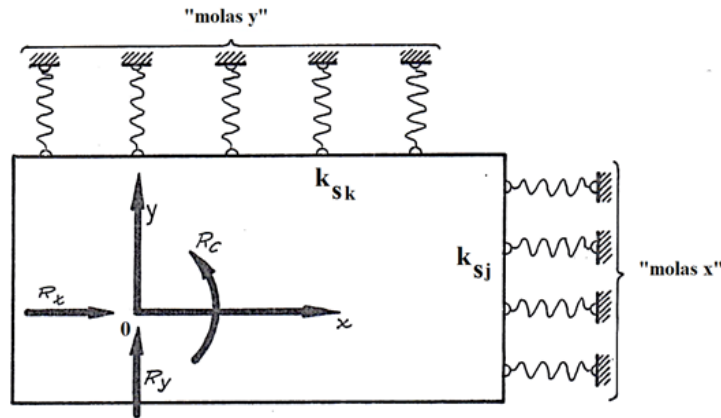
$$a = \frac{S_{yc} \cdot S_{xx} - S_{cx} \cdot S_{xy}}{S_{xx} \cdot S_{yy} - S_{xy}^2} \quad (2.24 b)$$

$$b = \frac{-S_{xc} \cdot S_{yy} + S_{cy} \cdot S_{xy}}{S_{xx} \cdot S_{yy} - S_{xy}^2} \quad (2.24 c)$$

### b) Painéis em direções ortogonais e único travamento horizontal

Conforme apresentado em Stamato (1978), define-se o painel com molas na direção  $x$  (denominado simplesmente de molas  $x$ ) e outro na direção  $y$  (as molas  $y$ ). A rigidez na direção  $x$  é representada por  $k_{sj}$  e na direção ortogonal de  $k_{sk}$ . Vide figura 2.30.

**Figura 2.30: Painéis ortogonais com molas  $x$  e  $y$**



Fonte: (STAMATO, 1978)

As componentes nas três dimensões, por molas, são expressas por:

$$p_{xj} = p_{yk} = 1 \quad (2.25 a)$$

$$p_{xk} = p_{yj} = 0 \quad (2.25 b)$$

$$p_{cj} = -p_{xj} \cdot y_j = p_{yk} \cdot x_k \quad (2.25 c)$$

Uma vez que o produto da rigidez ( $k_{sj}$ ) nas molas  $x$  pelas coordenadas na direção  $y$  ( $y_j$ ) é nulo, verifica-se o mesmo para o produto da rigidez ( $k_{sk}$ ) nas molas  $y$  pelas coordenadas na direção  $x$  ( $x_k$ ). Assim, pela definição ilustrada na figura 2.26 e expressa na equação (2.14), tem-se os coeficientes de rigidez, expressos por:

$$S_{ab} = \sum k_{si} \cdot p_{ai} \cdot p_{bi} \quad (2.26 a)$$

$$S_{xy} = S_{xc} = S_{yc} = 0 \quad (2.26 b)$$

$$S_{xx} = \sum_j k_{sj} \quad (2.26 c)$$

$$S_{yy} = \sum_k k_{sk} \quad (2.26 d)$$

$$S_{cc} = \sum_j k_{sj} \cdot y_j^2 + \sum_k k_{sk} \cdot x_k^2 \quad (2.26 e)$$

Aplicam-se agora as eq.'s (2.26) nas eq.'s (2.22) e chega-se, a:

$$v_x = \frac{R_x}{S_{xx}} \quad (2.27 a)$$

$$v_y = \frac{R_y}{S_{yy}} \quad (2.27 b)$$

$$v_c = \frac{R_c}{S_{cc}} \quad (2.27 c)$$

Valendo-se da eq. (2.19) e das eq.'s (2.25) e (2.27), concluem-se como forças nas molas  $x$  e  $y$ , as seguintes:

$$\frac{F_j}{k_{sj}} = \frac{R_x}{S_{xx}} - \frac{R_{cc}}{S_{cc}} \cdot y_j \quad (2.28 a)$$

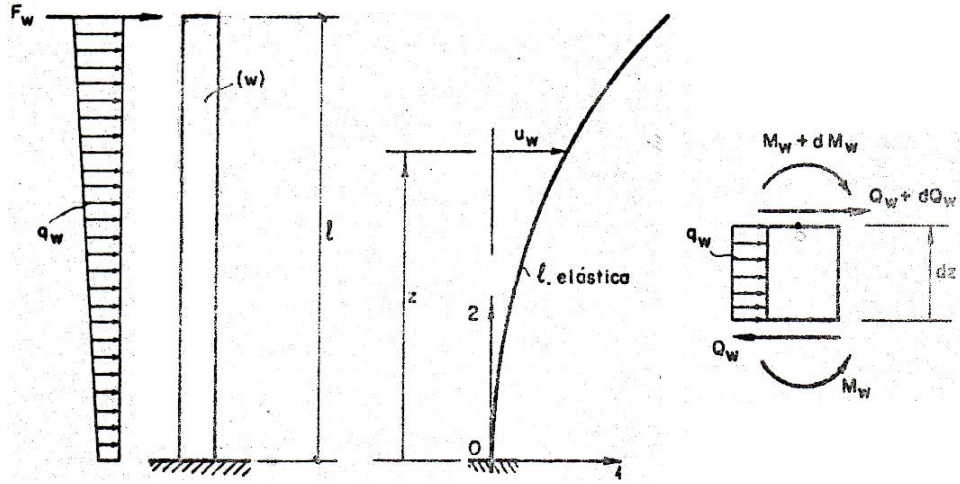
$$\frac{F_k}{k_{sk}} = \frac{R_y}{S_{yy}} - \frac{R_{cc}}{S_{cc}} \cdot x_k \quad (2.28 b)$$

#### 2.1.4. Análise dos painéis pela técnica do meio contínuo

A Solução via Técnica do Meio Contínuo é procedida analiticamente, sendo caracterizada pela redução do número de parâmetros elásticos e geométricos, descrevendo o comportamento macroscópico da estrutura. A solução discreta consiste em analisar a estrutura via métodos numéricos, tais como: Método das Diferenças Finitas, Método dos Elementos Finitos, Método dos Elementos de Contorno e dentre outros mais. Permitindo assim a resolução de estruturas com maior diversidade geométrica. Esta última forma de solução é caracterizada pela possibilidade de discretização da estrutura em diferentes formas, seja unidimensional, bidimensional ou tridimensional e por diversas funções interpoladoras.

A Parede, do inglês “Wall”, é um elemento estrutural rígido ao esforço cortante e deformável apenas ao momento fletor. Vide figura 2.31.



**Figura 2.31: Carregamentos, deformada e elemento diferencial da Parede Isolada**

FONTE: (STAMATO, 1980)

Os parâmetros envolvidos são:  $u_w$  – Deslocamento na Parede em função da altura  $Z$ ;  $q_w$  – Força horizontal distribuída em forma de trapézio na altura total  $l$  e  $F_w$  – Força horizontal aplicada no topo da parede. Equilibra-se o elemento diferencial da parede apresentada na figura 2.31, em termos do momento no ponto central da face superior do elemento diferencial, bem como procede-se o equilíbrio de forças horizontais, chegando-se a:

$$\frac{dM_w}{dZ} = -Q_w \quad (2.29 a)$$

$$\frac{dQ_w}{dZ} = -q_w \quad (2.29 b)$$

onde:  $Q_w$  – Esforço cortante da parede em função da altura e do carregamento lateral e

$M_w$  – Momento fletor da parede em função da altura e do carregamento lateral.

Deriva-se a equação (2.29 a) e após aplicação na equação (2.29 b), tem-se a relação diferencial entre o momento fletor e carga distribuída  $q_w$ , expressa por:

$$\frac{d^2 M_w}{dZ^2} = q_w \quad (2.30)$$

A função do carregamento horizontal  $q_w$  é adotada como trapezoidal (para computar a ação do vento) e fica escrita como:

$$q_w(Z) = \left( \frac{q_1 - q_0}{l} \right) \cdot Z + q_0 \quad (2.31)$$

onde:  $q_1$  é o valor da carga horizontal distribuída, no topo da parede ( $Z = l$ ) e  
 $q_0$  é o valor da carga horizontal distribuída, para a base da parede ( $Z = 0$ ).

Baseado na equação diferencial (2.30) que rege a relação do momento fletor e do carregamento, basta proceder a integração dupla a fim de explicitar a equação do momento fletor  $M_w$ , ficando:

$$M_w(Z) = \left( \frac{q_1 - q_0}{l} \right) \cdot \frac{Z^6}{6} + q_0 \cdot \frac{Z^2}{2} + C_1 \cdot Z + C_2 \quad (2.32)$$

A fim de determinar as constantes de integração, utiliza-se duas condições de contorno em esforços. A primeira é o momento fletor nulo no topo da parede [ $M_w(Z = l) = 0$ ] e a segunda condição é o esforço cortante nulo [ $Q_w(Z = l) = 0$ ], também no topo da referida parede. Resultando assim, como equação do momento fletor:

$$M_w(Z) = \left( \frac{q_1 - q_0}{l} \right) \cdot \frac{Z^6}{6} + q_0 \cdot \frac{Z^2}{2} - \left[ F_w + (q_0 + q_1) \cdot \frac{l}{2} \right] \cdot Z + F_w \cdot l + (q_0 + 2 \cdot q_1) \cdot \frac{l^2}{6} \quad (2.33)$$

Por fim, para obter a equação da deformada  $u_w(Z)$ , utiliza-se a equação diferencial da linha elástica, expressa por:

$$(E_w \cdot I_w) \cdot \frac{d^2 u_w(Z)}{dZ^2} = M_w(Z) \quad (2.34)$$

Aplicando a equação (2.33) na eq. (2.34) e realizando-se a integração por duas vezes, tem-se:

$$(E_w \cdot I_w) \cdot u_w(Z) = (q_1 - q_0) \cdot \frac{Z^5}{120 \cdot l} + q_0 \cdot \frac{Z^4}{24} - C_1 \cdot \frac{Z^3}{6} + C_2 \cdot \frac{Z^2}{2} + C_3 \cdot Z + C_4 \quad (2.35)$$

$$\text{onde: } C_1 = \left[ F_w + (q_0 + q_1) \cdot \frac{l}{2} \right] \quad \text{e} \quad C_2 = \left[ F_w \cdot l + (q_0 + 2 \cdot q_1) \cdot \frac{l^2}{6} \right]$$

Aplicam-se agora, duas as condições de contorno: uma em deslocamento e a outra em rotação (na base do pilar e tidas como nulas), concluindo-se que as constantes de integração  $C_3$  e  $C_4$  são nulas. Isto para o apoio conferido pelo engaste, conforme ilustrado na figura 2.31. Ficando expressa a equação da deflexão lateral do pilar, em termos do carregamento distribuído e da carga concentrada no topo, expressa por:

$$u_w(Z) = \frac{1}{(E_w \cdot I_w)} \cdot \left\{ (q_1 - q_0) \cdot \frac{Z^5}{120 \cdot l} + q_0 \cdot \frac{Z^4}{24} - C_1 \cdot \frac{Z^3}{6} + C_2 \cdot \frac{Z^2}{2} \right\} \quad (2.36)$$

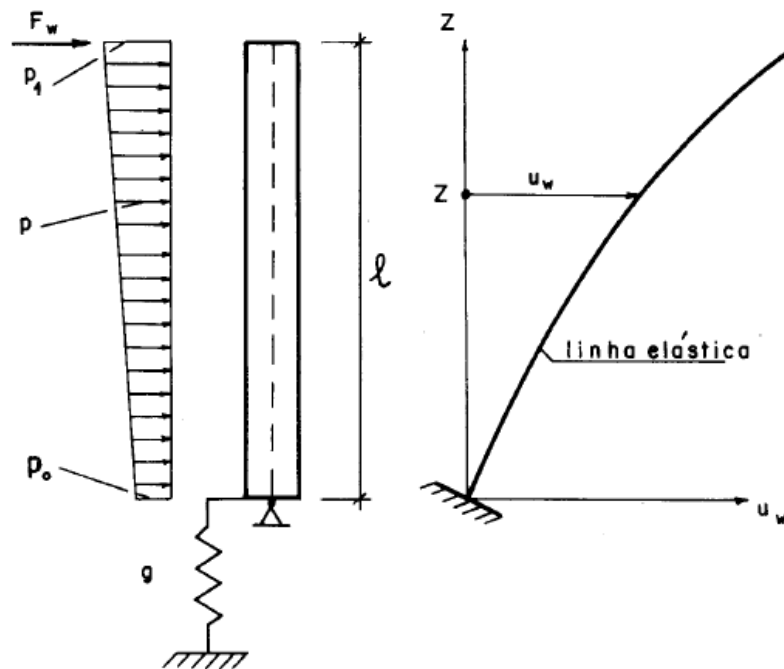
A equação (2.36) pode ser simplificada para o caso particular onde não se aplique a carga concentrada no topo ( $F_w = 0$ ) e com a carga lateral distribuída constantemente na altura e de valor  $q_w$ , ficando expressa por:

$$u_w(Z) = \frac{q_w \cdot l^4}{24 \cdot (E_w \cdot I_w)} \cdot \left[ \left(1 - \frac{Z}{l}\right)^4 + 4 \cdot \frac{Z}{l} - 1 \right] \quad (2.37)$$

#### a) Parede sobre base elástica

O procedimento realizado neste item 2.1.4 das equações (2.29) a (2.35) permanecem inalterados, modificando apenas as condições de contorno para a obtenção das constantes de integração  $C_3$  e  $C_4$ . Vide figura 2.32 onde o apoio na base é elástico e de constante  $g$ . Assim a rotação não será mais nula e sim a razão entre o momento fletor na base  $M_w(Z = 0)$  pelo coeficiente de rigidez  $g$  do referido apoio elástico.

**Figura 2.32: Parede com base engastada elasticamente e sua deformada**



Fonte: (MANCINI, 1972)

Baseado na equação do momento fletor (2.33), conclui-se momento na base da parede para o caso particular de  $F_w = 0$  e  $q_w$  constante, expresso por:

$$M_w(Z = 0) = \frac{q_w \cdot l^2}{2} \quad (2.38 a)$$

$$\left. \frac{du_w(Z)}{dZ} \right|_{Z=0} = \frac{M_w(Z = 0)}{g} = \frac{q_w \cdot l^2}{2 \cdot g} \quad (2.38 b)$$

Por fim, aplicando-se a condição de contorno expressa na eq. (2.38 b) sobre a eq. (2.35), obtém-se a equação da deformada  $u_w(Z)$  para base elástica, definida por:

$$u_w(Z) = \frac{q_w \cdot l^4}{24 \cdot (E_w \cdot I_w)} \cdot \left[ \left(1 - \frac{Z}{l}\right)^4 + 4 \cdot \frac{Z}{l} - 1 \right] + \frac{q_w \cdot l^2}{2 \cdot g} \quad (2.39)$$

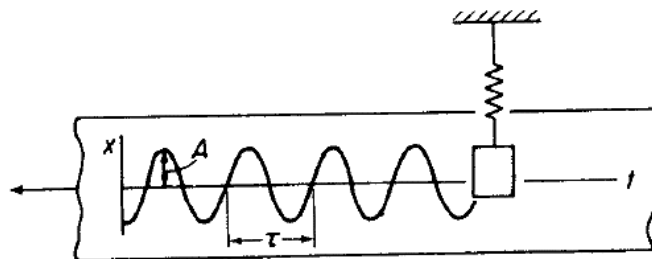
$$\text{com: } C_3 = (E_w \cdot I_w) \cdot \frac{q_w \cdot l^2}{2 \cdot g}.$$

## 2.2. DINÂMICA DAS ESTRUTURAS

### 2.2.1. Definições iniciais

A característica fundamental para um movimento ser harmônico é a periodicidade do mesmo. Em outros termos é o movimento que se repete em certo intervalo de tempo, denominado de período ( $\tau$ ). Para exemplificar o movimento harmônico é apresentada a função do deslocamento no tempo  $u(t)$  na eq. (2.40) e representação gráfica na figura 2.33.

**Figura 2.33: Movimento harmônico  $u(t)$**

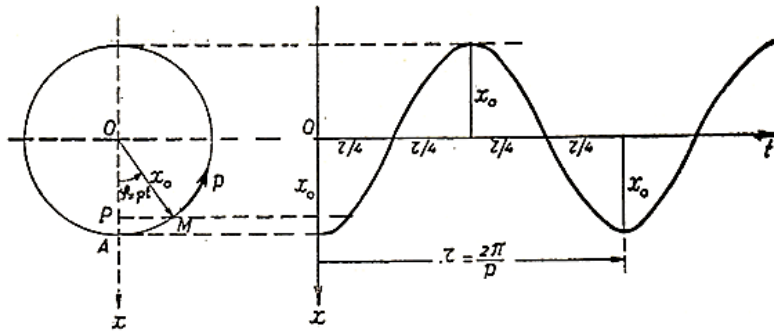


Fonte: (THOMSON, 1978)

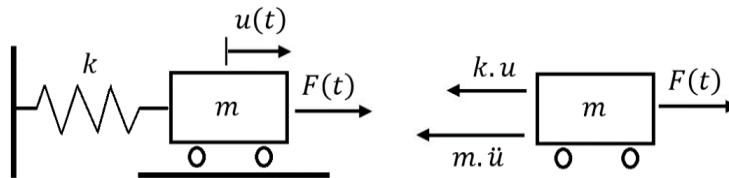
$$u(t) = u(t + \tau) = A \cdot \sin \theta \quad (2.40)$$

### 2.2.2. Sistema massa-mola

Equivale a movimentação de um grau de liberdade e para tanto admite-se uma massa  $m$  solicitada a movimentar-se ou por uma força excitatriz ou devido a condições iniciais de deslocamento e velocidade. Sendo então admitido o sistema massa-mola submetido a força  $F(t)$  e com rigidez  $k$ , apresenta-se na figura 2.34 o deslocamento  $u(t)$  em modulação harmônica.

**Figura 2.34: Deslocamento  $u(t)$  de um sistema massa-mola****Fonte: (FONSECA, 1964)**

Ao analisar o sistema massa – mola e desconsiderar a dissipação de energia, diz-se que o sistema analisado é não amortecido. Neste sentido, as forças reativas no referido sistema são: a pseudo-força inercial ( $m \cdot \ddot{u}$ ) e a força de reação da mobilização da mola ( $k \cdot u$ ). Onde a parcela inercial ( $m \cdot \ddot{u}$ ) na realidade é uma pseudo-força, pelo fato de não ser aplicada na estrutura e sim representante da resistência a movimentação (inércia). Tais forças reativas são oriundas da atuação da força  $F(t)$ , conforme apresentado na figura 2.35.

**Figura 2.35: Forças reativas no sistema massa-mola não amortecido****Fonte: O Autor (2019)**

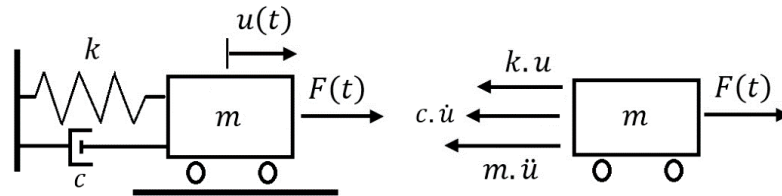
A partir do equilíbrio das forças atuantes no diagrama de corpo livre na massa "m" e em conformidade do conceitos discutidos em Paz (1992), a equação diferencial para o problema massa-mola pode ser obtida aplicando-se o Princípio de D'Alembert. Para tal, o sistema está em equilíbrio dinâmico mediante inserção de forças externas reativas, dentre estas a pseudo-força que compute a parcela inercial do movimento em questão. Neste sentido, ao realizar o equilíbrio de forças, conclui-se a equação diferencial que caracteriza o problema em questão, como:

$$F(t) = m \cdot \ddot{u}(t) + k \cdot u(t) \quad (2.41)$$

Já, no sistema massa-mola amortecido é característico a atuação de forças reativas devido a rigidez, outra oriunda da pseudo-força decorrente da inércia do sistema e ainda a força dissipativa devido ao amortecimento ( $c \cdot \dot{u}$ ). Com tais forças dissipativas e reativas, configura-

se um sistema não conservativo onde a energia introduzida ao sistema ( $\Delta E$ ) é dissipada por diversas fontes, a exemplo do atrito entre os materiais constituintes da estrutura (computada como  $\Delta u^D$ ). Com a quantificação da força dissipativa de amortecimento caracteriza-se o estado de equilíbrio de forças. Conforme é apresentado nas figuras 2.36 e 2.43.

**Figura 2.36: Forças reativas no sistema massa-mola amortecido**



Fonte: O Autor (2019)

Aplicando-se o Princípio de D'Alembert no sistema massa-mola amortecido apresentado na figura 2.36, chega-se a equação diferencial que rege o problema:

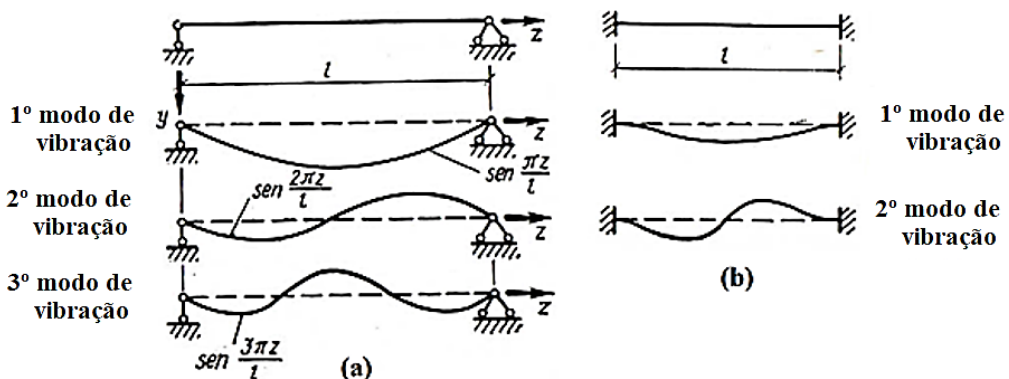
$$m.\ddot{u} + c.\dot{u} + k.u = F(t) \quad (2.42)$$

### 2.2.3. Vibração não amortecida

#### a) Análise Harmônica

Estruturas contínuas são caracterizadas por possuir massa e rigidez distribuídas ao longo do comprimento, ou seja, no domínio. Desta forma, a vibração numa determinada estrutura ocorre como combinação dos diversos modos de vibração. Vide figura 2.37.

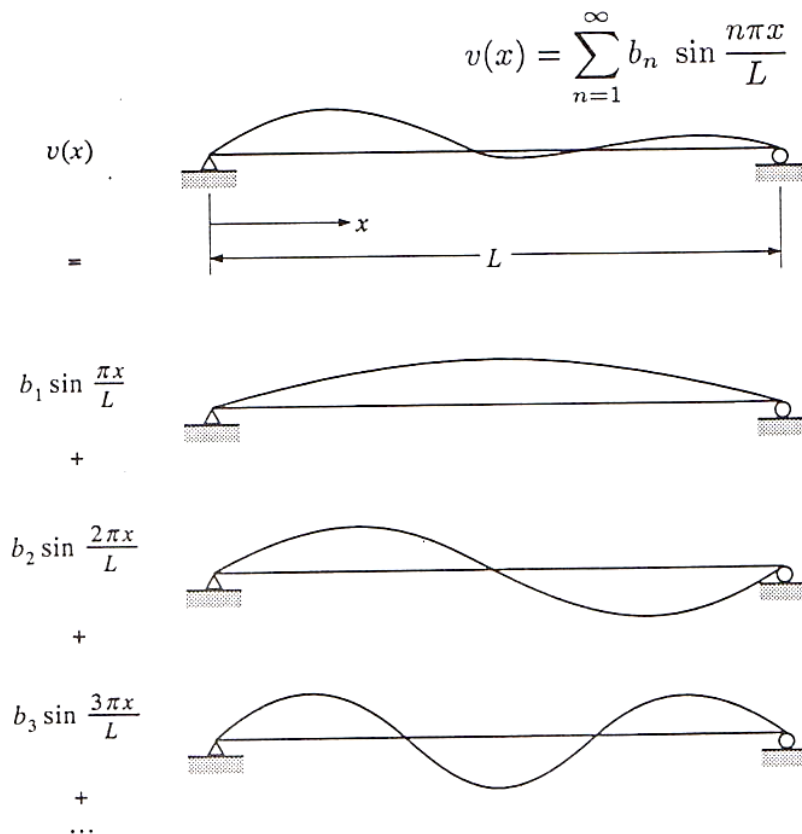
**Figura 2.37: Frequências harmônicas: (a) viga biapoada e (b) viga Biengastada**



Fonte: (KISELIOV, 1983)

Para uma estrutura com determinado conjunto de frequências harmônicas  $\{f_1, f_2, f_3, \dots, f_n\}$ , conforme mostrada na figura 2.38, pode-se expressar  $v(x)$  como combinação das frequências. Tem-se a vibração caracterizada ao longo dos vários modos de vibração desde uma semi-onda (no 1º modo de vibração, com frequência fundamental  $f_1$ ) até a  $n$ -ésima semi-onda,  $\{f_1, 2.f_1, 3.f_1, \dots, n.f_1\}$ .

**Figura 2.38: Superposição modal de frequências**



**Fonte: (CLOUGH; PENZIEN, 1993)**

Na análise harmônica é definida como frequência fundamental  $f_1$ , aquela que necessite de menor quantidade de energia para ativação do modo de vibração. Sendo caracterizada por uma única semi-onda e sendo responsável pelo maior deslocamento da estrutura. No caso apresentado nas figuras 2.37 e 2.38 o modo mais comprometedor da integridade estrutural será o primeiro, isto tomando como base a ocorrência do estado limite último por flexão (ELU-F).

Em geral, para um sistema contínuo, onde a vibração ocorre (por definição) pela combinação dos modos fundamentais, compreendendo infinitas frequências. Neste sentido, é possível organizar as frequências em ordem crescente e realizar a combinação para as primeiras



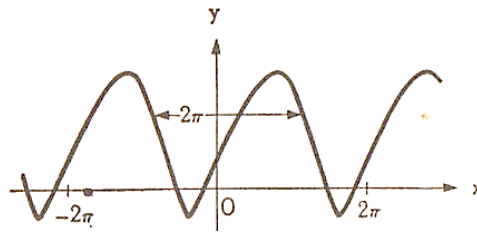
frequências e desprezar as demais, isto sem grandes prejuízos. Tal modelagem é viável devido ocorrência das maiores amplitudes de deslocamento, com as menores frequências.

Utilizando a série de Fourier, demonstrada e com aplicabilidade descrita em Kreider (1966), para expressar o deslocamento  $u(t)$ . Considera-se também que o comprimento  $x$  está para o período  $2L$ , assim como o ângulo  $\theta$  está para  $2\pi$ . E valendo-se também da definição do ângulo  $\theta$  como o produto da frequência angular fundamental  $\omega_1$  pelo tempo  $t$ . Escreve-se o deslocamento  $u(t)$ , em termos da série de Fourier, como:

$$u(t) = \frac{u_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cdot \cos(j \cdot \omega_1 \cdot t) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \cdot \sin(j \cdot \omega_1 \cdot t) \quad (2.43)$$

onde:  $\tau_1$  é o período fundamental e apresentado na figura 2.39, e:  $\omega_1 = \frac{2\pi}{\tau_1}$ .

**Figura 2.39: Função com período  $2\pi$**



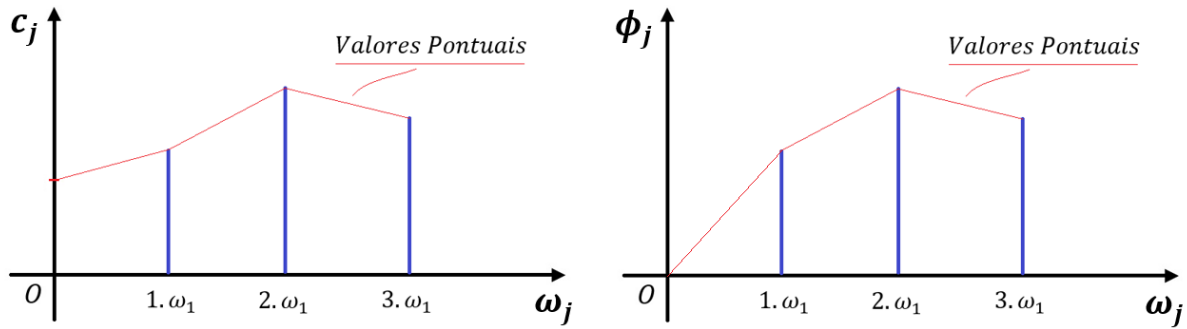
Fonte: (KAPLAN, 1963)

Podendo ainda, a série apresentada na eq. (2.43) ser reescrita para o agrupamento das funções trigonométricas, como:

$$u(t) = \frac{u_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} c_j \cdot \cos(j \cdot \omega_1 \cdot t - \phi_j) \quad (2.44)$$

onde:  $c_j = \sqrt{(a_j)^2 + (b_j)^2}$ .

Graficamente, os espectros de frequências são caracterizados por valores pontuais, uma vez que não existem valores de frequências intermediárias. Conforme é apresentado na figura 2.40, e ainda observa-se que a primeira frequência de vibração não possui defasagem, por este motivo que o gráfico das defasagens  $\phi_j$  em termos das frequências  $\omega_j$  inicia na origem.

**Figura 2.40: Espectro de frequências  $\omega_j$** 

Fonte: O Autor (2019)

Na análise estrutural, determinam-se as frequências de vibração da estrutura e enquadram-nas no espectro de frequências naturais. Caso ocorra a coincidência de alguma destas frequências de vibração estrutural com qualquer uma das frequências naturais da mesma, configura-se o fenômeno de ressonância. Em caso contrário, diz-se que a estrutura não corre risco de colapso por ressonância.

### b) Vibração Forçada Harmonicamente

Admite-se para a figura 2.35 a excitação harmônica em termos da combinação de funções trigonométricas da frequência excitatriz  $\bar{\omega}$ , ficando a equação diferencial ordinária do problema, eq. (2.41), reescrita como:

$$m. \ddot{u} + k. u = F_1. \cos(\bar{\omega}. t) + F_2. \sin(\bar{\omega}. t) \quad (2.45)$$

A solução homogênea, oriunda da vibração livre, será:

$$u_H(t) = A. \cos(\omega. t) + B. \sin(\omega. t) \quad (2.46)$$

A solução particular (quanto ao deslocamento, velocidade e aceleração) será:

$$u_P(t) = C. \cos(\bar{\omega}. t) + D. \sin(\bar{\omega}. t) \quad (2.47 a)$$

$$\dot{u}_P(t) = C. \bar{\omega}. \sin(\bar{\omega}. t) + D. \bar{\omega}. \cos(\bar{\omega}. t) \quad (2.47 b)$$

$$\ddot{u}_P(t) = -C. \bar{\omega}^2. \cos(\bar{\omega}. t) - D. \bar{\omega}^2. \sin(\bar{\omega}. t) \quad (2.47 c)$$

Aplica-se a solução particular constante nas eq.'s (2.47) na eq. (2.45), determinando-se as constantes  $C$  e  $D$  da referida solução. Em seguida a solução geral será a união das soluções homogênea (eq. 2.46) e particular (eq. 2.47 a), e os coeficientes  $A$  e  $B$  são determinados via imposição das condições iniciais de deslocamento  $u_0$  e de velocidade  $\dot{u}_0$ . Resultando:

$$u(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t) + B \cdot \sin(\omega \cdot t) + C \cdot \cos(\bar{\omega} \cdot t) + D \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t) \quad (2.48)$$

$$\text{onde: } A = u_0 - C; \quad B = \frac{\dot{u}_0}{\omega} - D \cdot \frac{\bar{\omega}}{\omega}; \quad C = \frac{F_1}{m \cdot (\omega^2 - \bar{\omega}^2)} \quad \text{e} \quad D = \frac{F_2}{m \cdot (\omega^2 - \bar{\omega}^2)}.$$

Define-se a deformação estática  $\delta_s$  como a razão entre a força e a rigidez, e evidencia-se ainda o fator de amplificação  $j$ , a função do deslocamento ao longo do tempo fica reescrita como:

$$u(t) = u_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) + \frac{\dot{u}_0}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t) + \delta_s^{F_1} \cdot j \cdot [\cos(\bar{\omega} \cdot t) - \cos(\omega \cdot t)] \\ + \delta_s^{F_2} \cdot j \cdot [\sin(\bar{\omega} \cdot t) - \beta \cdot \sin(\omega \cdot t)] \quad (2.49)$$

$$\text{onde: } j = \frac{1}{1 - \beta^2} \quad ; \quad \beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} \quad ; \quad \delta_s^{F_1} = \frac{F_1}{k} \quad \text{e} \quad \delta_s^{F_2} = \frac{F_2}{k}.$$

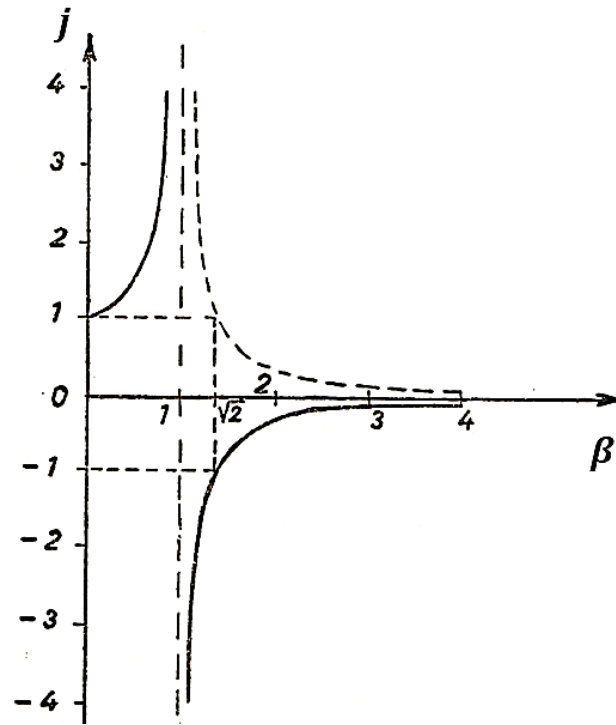
A solução geral pode ser dividida em duas parcelas, a primeira será a parcela transiente  $u_T(t)$  e a segunda será a parcela permanente  $u_{per}(t)$ , conforme segue:

$$u_T(t) = E_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - \phi_0) - \delta_s^{F_1} \cdot j \cdot \cos(\omega \cdot t) - \delta_s^{F_2} \cdot j \cdot \beta \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (2.50 a)$$

$$u_{per}(t) = \delta_s^{F_1} \cdot j \cdot \cos(\bar{\omega} \cdot t) + \delta_s^{F_2} \cdot j \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t) \quad (2.50 b)$$

$$\text{onde: } E_0 = u_0 \cdot \sqrt{1 + \text{tg}^2 \phi_0} \quad \text{e} \quad \phi_0 = \text{tg}^{-1} \left( \frac{\dot{u}_0}{\omega \cdot u_0} \right).$$

Graficamente, o fator de amplificação dinâmica  $j$ , é representado na figura 2.41 em função da razão  $\beta$  das frequências da solicitação  $\bar{\omega}$  e do sistema  $\omega$ .

**Figura 2.41: Fator de amplificação dinâmica  $j$  por razão  $\beta$  de frequências**

Fonte: Adaptado de (FONSECA, 1964)

Observa-se que a solução apresentada na eq. (2.49) é válida para a razão de frequências  $\beta$  diferente da unidade. No caso de  $(\beta = 1)$ , ocorre o fenômeno de Ressonância, uma vez que os deslocamentos tendem a infinito. A ocorrência de ressonância é devida ao sistema estudado nessa seção ser considerado conservativo, por não ser amortecido (não havendo dissipação da energia fornecida ao sistema pela força excitatriz). É conveniente subdividir o funcionamento do sistema massa-mola em três casos: o caso 1 onde a razão  $(\beta < 1)$  é inferior a unidade, o caso 2 quando  $(\beta > 1)$  é superior a unidade e o Caso 3, no qual, a razão  $\beta$  assume a unidade.

No caso da razão  $\beta$  unitária, a resposta do deslocamento do sistema  $u(t)$  apresentado na eq. (2.49) é conduzido a uma indeterminação matemática do tipo divisão de zero por zero. E a fim de eliminar tal indeterminação matemática, procede-se a multiplicar da solução particular  $u_p(t)$ , eq. (2.47 a), pela variável independente “ $t$ ”. Consistindo em empregar a teoria das equações lineares com coeficientes constantes, conforme apresentado por Fonseca (1964). Resultando a solução particular e a solução geral para o caso de  $\beta$  unitário, definida por:

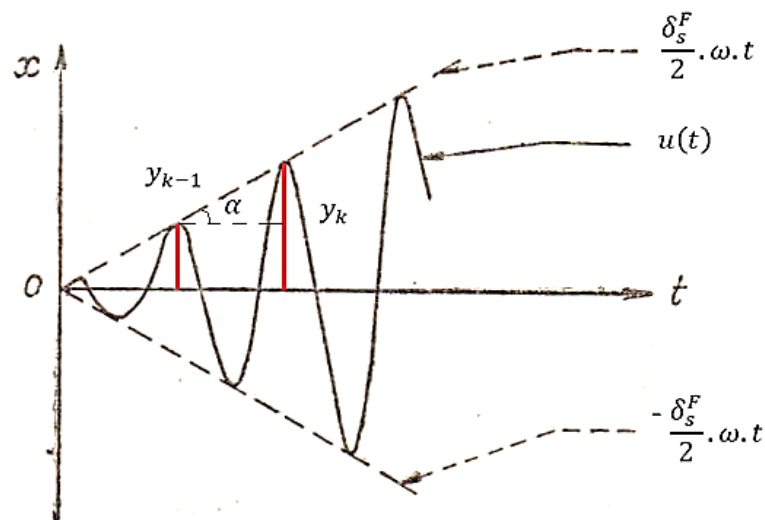
$$u_p(t) = [C \cdot \cos(\omega \cdot t) + D \cdot \sin(\omega \cdot t)] \cdot t \quad (2.51 a)$$

$$u(t) = E_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - \phi_0) + \left[ \frac{\delta_s^{F_1}}{2} \cdot \omega \cdot t + \frac{\delta_s^{F_2}}{2} \right] \cdot \sin(\omega \cdot t) + \frac{\delta_s^{F_2}}{2} \cdot \omega \cdot t \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (2.51 b)$$

onde;  $E_0$  e  $\phi_0$  são definidos na eq. (2.50 a).

O deslocamento para o caso da razão  $\beta$  unitária é apresentada na figura 2.42. Nesta configuração do sistema massa – mola não amortecido e com razão de frequência unitária, configurando assim a coincidência da frequência de excitação " $\bar{\omega}$ " e da frequência natural de vibração da estrutura " $\omega$ ". Para tal, observa-se que o deslocamento  $u(t)$  é crescente e tende a infinito, isto devido a desconsideração da dissipação de energia por amortecimento.

**Figura 2.42: Deslocamento para a razão  $\beta$  unitária**



Fonte: Adaptado de (FONSECA, 1964)

#### 2.2.4. Vibração amortecida

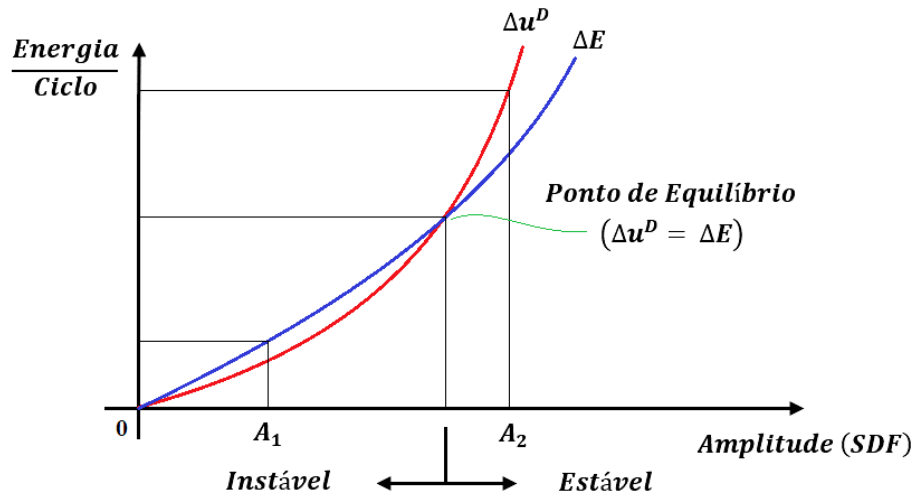
De acordo com as vibrações cíclicas define-se a energia dissipada no sistema. E ainda em decorrência do tipo de amortecimento é observada a variabilidade da relação força – deslocamento e daí a relevância do estudo da dissipação energética via amortecimento.

##### a) Ciclo de Energia

Os sistemas amortecidos são (por definição) não conservativos, pois ocorre o consumo de energia através dos mecanismos de amortecimento. Sendo característico o ponto de

equilíbrio, no qual a energia introduzida no sistema  $\Delta E$  é igual a energia interna dissipada  $\Delta u^D$ . Ao passo que a energia introduzida é superior a energia dissipada, tem-se o regime instável. Já o regime estável é quando a energia introduzida é inferior a energia dissipada. Vide figura 2.43.

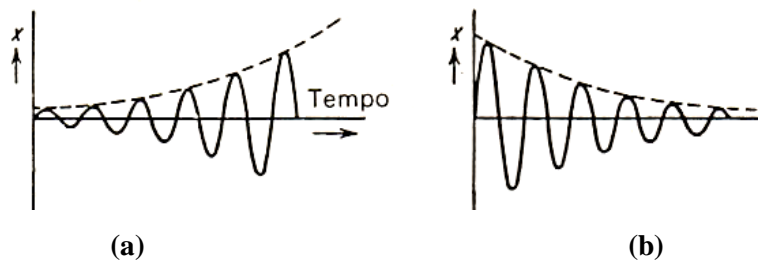
**Figura 2.43: Ciclo de energia introduzida e dissipada no sistema**



Fonte: O Autor (2019)

Quando a energia fornecida ao sistema  $\Delta E$  é superior a energia dissipada por amortecimento  $\Delta u^D$ , configura-se o aumento gradual das amplitudes dos deslocamentos e o sistema tende a romper por não suportar tais deformações. Já na ocorrência da energia dissipada  $\Delta u^D$  superar a introduzida  $\Delta E$ , verifica-se o decréscimo dos deslocamentos, o que configura a estabilidade da movimentação. Tais condições de equilíbrio são representadas na figura 2.44.

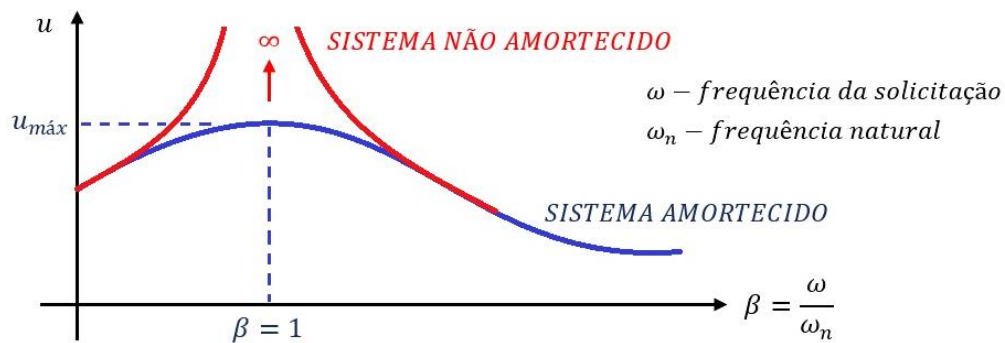
**Figura 2.44: Ciclo de energia: (a) estaticamente estável e dinamicamente instável com  $\Delta E > \Delta u^D$  e (b) estática e dinamicamente estável com  $\Delta E < \Delta u^D$**



Fonte: Adaptado de (DEN HARTOG, 1972)

Enquanto na vibração não amortecida verifica-se o deslocamento tendendo a infinito (com o efeito da ressonância), na vibração amortecida constata-se apenas a amplificação dos deslocamentos quando da coincidência das frequência de solicitação ( $\bar{\omega}$ ) e de vibração natural ( $\omega$ ) da estrutura. Fato este que é evidenciado na figura 2.45.

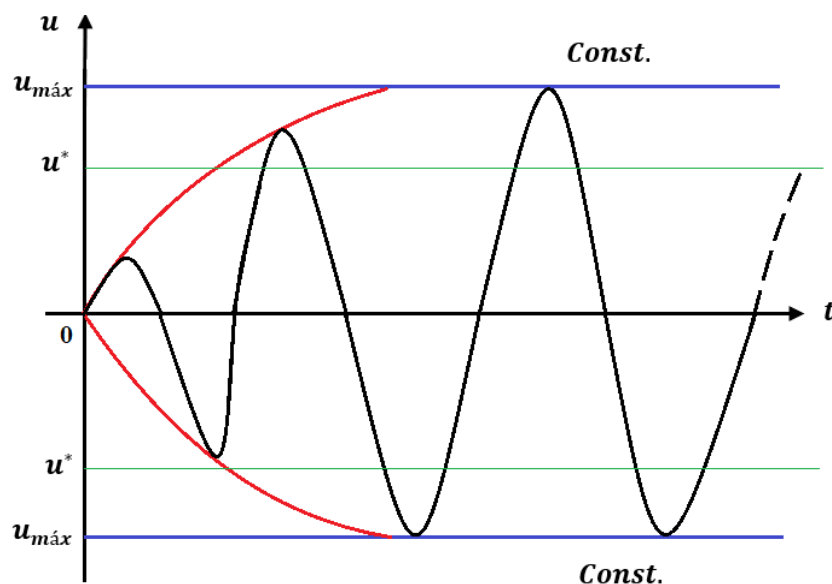
**Figura 2.45: Amplificação do deslocamento na condição de ressonância em comparação com o sistema amortecido**



Fonte: O Autor (2019)

Devido a dissipação de energia ocasionada pelo amortecimento, justifica-se a não ocorrência do fenômeno de ressonância para o caso da razão de frequências ser unitária, uma vez que os deslocamentos são amplificados na ocorrência de  $\beta$  unitário. Porém mesmo sem que os deslocamentos cheguem a infinito, a estrutura rompe por não apresentar capacidade de suporte aos enormes deslocamentos acarretados neste estado de solicitação. Vide na figura 2.46 que o deslocamento máximo  $u_{m\acute{a}x}$  supera o deslocamento suportável  $u^*$  pela estrutura.

**Figura 2.46: Deslocamento máximo quando da condição de ressonância**



Fonte: O Autor (2019)

Mesmo que o deslocamento não seja infinito se tornaria muito dispendioso o dimensionamento estrutural para suportar tais deformações amplificadas, apresentadas esquematicamente na figura 2.46. Bem como tornaria muito desagradável a utilização da estruturas, quanto ao conforto sensorial dos usuários. Assim, a solução é impedir que ocorra

este cenário de coincidência de frequências, alterando a massa ou a rigidez estrutural de forma que os modos naturais de vibração ocorram com frequências distintas da excitatriz.

No ponto de equilíbrio ( $\Delta E = \Delta u^D$ ), indicado na figura 2.43, é possível ocorrer a condição de instabilidade, isso em decorrência da estrutura não suportar as elevadas deformações. Em estruturas de aço, verifica-se a instabilidade plástica após o fenômeno de estricção. Já, em estruturas de concreto ocorre o esmagamento das bielas.

### b) Vibração Amortecida Livre

Na solução homogênea da equação diferencial do sistema massa – mola amortecido que consta na figura 2.36 e cuja EDO é apresentada na equação (2.42), será desconsiderada a força excitatriz  $F(t)$ . E para tal, propõe-se como solução homogênea a função exponencial:

$$u = A \cdot e^{\bar{\lambda} \cdot t} \quad (2.52 \ a)$$

$$\dot{u} = A \cdot \bar{\lambda} \cdot e^{\bar{\lambda} \cdot t} \quad (2.52 \ b)$$

$$\ddot{u} = A \cdot \bar{\lambda}^2 \cdot e^{\bar{\lambda} \cdot t} \quad (2.52 \ c)$$

Aplica-se a solução proposta nas equações (2.52) na eq. (2.42) com a imposição da força excitatriz nula, ou não atuante,  $F(t) = 0$ . Chegando-se a equação característica:

$$\bar{\lambda}^2 + \frac{c}{m} \cdot \bar{\lambda} + \frac{k}{m} = 0 \quad (2.53)$$

A equação característica do problema homogêneo, eq. (2.53), é uma equação de 2º grau e para tanto as raízes  $\bar{\lambda}$ , são expressas por:

$$\bar{\lambda} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega^2} \quad (2.54)$$

onde:  $k = m \cdot \omega^2$



A partir das raízes apresentadas na equação (2.54), pode-se dividir o estudo do problema homogêneo em três casos, estes em função do sinal da raiz quadrada das raízes  $\bar{\lambda}$ . O Caso 1 é aplicável aos automóveis e caracterizado pelo amortecimento supercrítico, já o Caso 3 é aplicável as estruturas usuais da engenharia civil, a exemplo de edifícios e pontes. No Caso 2 é caracterizado o amortecimento crítico, onde o termo da raiz da quadrada das raízes  $\bar{\lambda}$  é nulo, ver eq. (2.54). Ficando os casos, delineados no seguinte formato:

➤ **Caso 1:** Amortecimento supercrítico

$$\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega^2} > 0 \therefore c > \pm 2.m.\omega$$

➤ **Caso 2:** Amortecimento crítico

$$c_{CR} = \pm 2.m.\omega$$

➤ **Caso 3:** Amortecimento subcrítico

$$c < \pm 2.m.\omega$$

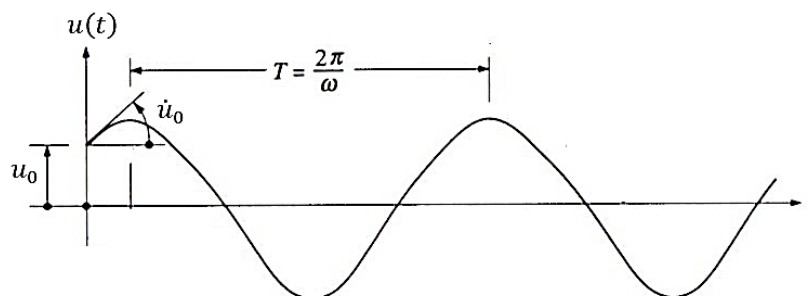
Utilizando a definição de razão de amortecimento  $\xi$  como a divisão entre o amortecimento  $c$  e o amortecimento crítico  $c_{CR}$ , reescreve-se as raízes apresentadas na eq. (2.54), como:

$$\bar{\lambda} = \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \cdot \omega \quad (2.55)$$

onde:  $\xi \cdot c_{CR} = c$  e  $\xi_{CR} = 1$ .

Nas soluções homogêneas para os três casos de gradação de amortecimento, procede-se a imposição das condições iniciais de deslocamento  $u_0$  e de velocidade  $\dot{u}_0$ , ilustrados na figura 2.47.

**Figura 2.47: Condições iniciais de deslocamento e velocidade**



Fonte: Adaptado de (CLOUGH; PENZIEN, 1993)

Os três casos de amortecimento, quanto a intensidade, são expressos em termos da razão de amortecimento  $\xi$ . Possuindo as seguintes funções como respostas para o deslocamento  $u(t)$ :

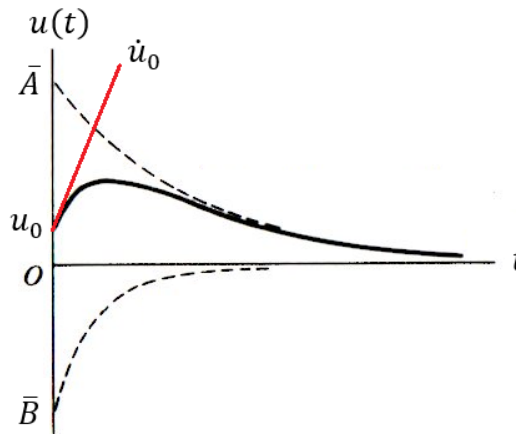
➤ **Caso 1:** Amortecimento supercrítico ( $\xi > 1$ )

$$u(t) = e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \cdot \left[ \bar{A} \cdot \cosh \left( \sqrt{\xi^2 - 1} \cdot \omega \cdot t \right) + \bar{B} \cdot \sinh \left( \sqrt{\xi^2 - 1} \cdot \omega \cdot t \right) \right] \quad (2.56)$$

onde:  $\bar{A} = u_0$  e  $\bar{B} = \frac{\dot{u}_0 + u_0 \cdot \xi \cdot \omega}{\omega \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}}$ .

Graficamente, na figura 2.48, observa-se que em decorrência do amortecimento ser supercrítico é notório que o consumo energético via dissipação por amortecimento é maior do que a energia fornecida ao sistema. Caracterizando, assim, a não ocorrência de oscilação.

**Figura 2.48: Movimento não periódico com  $\xi > 1$**



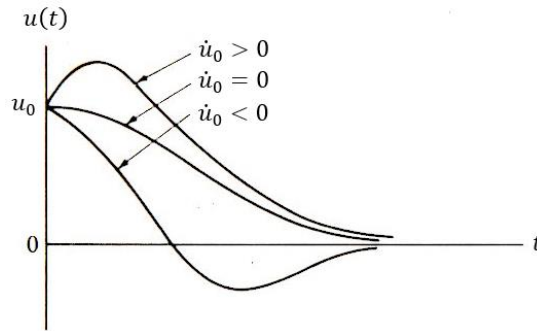
Fonte: Adaptado de (THOMSON, 1978)

➤ **Caso 2:** Amortecimento crítico ( $\xi = 1$ )

$$u(t) = (\bar{A} \cdot t + \bar{B}) \cdot e^{-\omega \cdot t} \quad (2.57)$$

onde:  $\bar{A} = \dot{u}_0 + \omega \cdot u_0$  e  $\bar{B} = u_0$

Na figura 2.49 são apresentadas três possibilidades de movimento amortecido crítico para o deslocamento inicial  $u_0$  e em função do sinal da velocidade  $\dot{u}_0$ .

**Figura 2.49: Movimento criticamente amortecido**

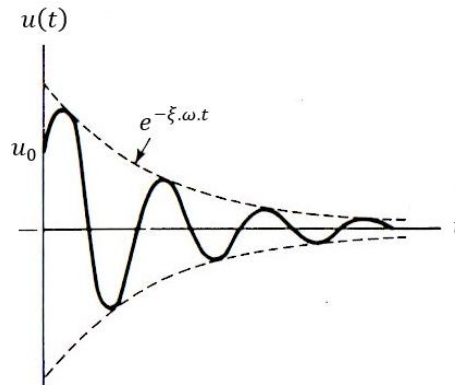
Fonte: Adaptado de (THOMSON, 1978)

➤ **Caso 3:** Amortecimento subcrítico ( $\xi < 1$ )

$$u(t) = e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \cdot [\bar{A} \cdot \cos(\omega_d \cdot t) + \bar{B} \cdot \sin(\omega_d \cdot t)] \quad (2.58)$$

onde:  $\omega_d = \omega \cdot \sqrt{1 - \xi^2}$  ;  $\bar{A} = u_0$  e  $\omega_d \cdot \bar{B} = \dot{u}_0 + \xi \cdot \omega \cdot u_0$ .

Neste caso, observa-se através da figura 2.50 que o movimento amortecido subcriticamente é harmônico e logo caracterizado como oscilatório, porém vai diminuindo rapidamente pela envoltória da função exponencial.

**Figura 2.50: Movimento amortecido com  $\xi < 1$** 

Fonte: Adaptado de (THOMSON, 1978)

Observa-se na figura 2.50, que o deslocamento máximo pode ser maior do que o deslocamento inicial  $u_0$ , isto dependendo da velocidade inicial  $\dot{u}_0$ . Também é possível reescrever a função resposta de deslocamento para o Caso 3, equação (2.58), em termo de seno, como:

$$u(t) = e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \cdot C_0 \cdot \sin(\omega_d \cdot t + \beta_0) \quad (2.59)$$

$$\text{onde: } \omega_d = \omega \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \quad ; \quad C_0 = \sqrt{u_0^2 + \frac{(\dot{u}_0 + \xi \cdot \omega \cdot u_0)^2}{\omega_d^2}} \quad \text{e} \quad \beta_0 = \text{tg}^{-1} \left( \frac{u_0 \cdot \omega_d}{\dot{u}_0 + \xi \cdot \omega \cdot u_0} \right).$$

### c) Vibração forçada harmonicamente

Admite-se a excitação harmônica para o sistema massa – mola apresentado na figura 2.36 sob formato de combinação linear de funções trigonométricas e com frequência  $\bar{\omega}$ . Procede-se analogamente a Silva (2000), obtendo-se a equação diferencial ordinária do problema (a partir da eq. 2.42) expressa por:

$$m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = F_1 \cdot \cos(\bar{\omega} \cdot t) + F_2 \cdot \text{sen}(\bar{\omega} \cdot t) \quad (2.60)$$

A solução homogênea, com os coeficientes a determinar, será:

$$u_H(t) = \bar{A} \cdot \cos(\omega \cdot t) + \bar{B} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) \quad (2.61 a)$$

A solução particular com os respectivos coeficientes a determinar em termos de deslocamento, velocidade e aceleração, será:

$$u_P(t) = \bar{C} \cdot \cos(\bar{\omega} \cdot t) + \bar{D} \cdot \text{sen}(\bar{\omega} \cdot t) \quad (2.62 a)$$

$$\dot{u}_P(t) = \bar{C} \cdot \bar{\omega} \cdot \cos(\bar{\omega} \cdot t) + \bar{D} \cdot \bar{\omega} \cdot \text{sen}(\bar{\omega} \cdot t) \quad (2.62 b)$$

$$\ddot{u}_P(t) = \bar{C} \cdot \bar{\omega}^2 \cdot \cos(\bar{\omega} \cdot t) + \bar{D} \cdot \bar{\omega}^2 \cdot \text{sen}(\bar{\omega} \cdot t) \quad (2.62 c)$$

Aplicando-se a solução particular constante nas eq.'s (2.62) na eq. (2.60), determinam-se as constantes  $\bar{C}$  e  $\bar{D}$  da referida solução. Em seguida a solução geral será a união das soluções homogênea e particular, e com os coeficientes  $\bar{A}$  e  $\bar{B}$  determinados via imposição das condições iniciais de deslocamento  $u_0$  e de velocidade  $\dot{u}_0$ . Assim expressa por:

$$u(t) = \bar{A} \cdot \cos(\omega \cdot t) + \bar{B} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) + \bar{C} \cdot \cos(\bar{\omega} \cdot t) + \bar{D} \cdot \text{sen}(\bar{\omega} \cdot t) \quad (2.63)$$

$$\text{onde: } \bar{A} = u_0 - \bar{C} \quad ; \quad \bar{B} = \frac{\dot{u}_0}{\omega_d} + \xi \cdot \frac{\omega}{\omega_d} \cdot \bar{A} - \bar{D} \cdot \frac{\bar{\omega}}{\omega_d} ;$$

$$\bar{C} = \frac{(1 - \beta^2) \cdot F_1 - 2 \cdot \xi \cdot \beta \cdot F_2}{k \cdot [(1 - \beta^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \beta)^2]} \quad \text{e} \quad \bar{D} = \frac{(1 - \beta^2) \cdot F_2 + 2 \cdot \xi \cdot \beta \cdot F_1}{k \cdot [(1 - \beta^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \beta)^2]}.$$

Realizando operações matemáticas, tem-se a função do deslocamento ao longo do tempo, reescrita como:

$$u(t) = e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \cdot [\bar{A} \cdot \cos(\omega_d \cdot t) + \bar{B} \cdot \sin(\omega_d \cdot t)] + \bar{C} \cdot \cos(\bar{\omega} \cdot t) + \bar{D} \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t) \quad (2.64)$$

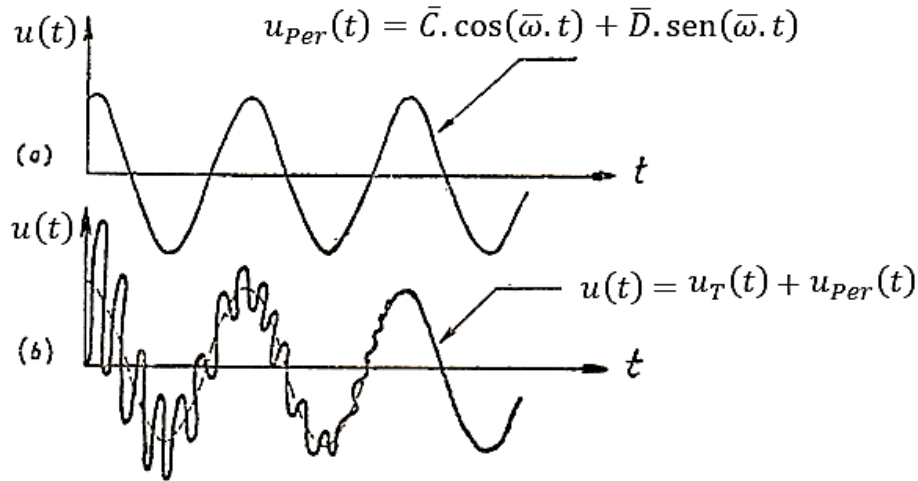
A solução geral é dividida em duas parcelas, a primeira é a parcela transiente e a segunda é a parcela permanente. A parcela permanente está ligada a frequência da solicitação  $\bar{\omega}$ , resultando em:

$$u_T(t) = e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \cdot [\bar{A} \cdot \cos(\omega_d \cdot t) + \bar{B} \cdot \sin(\omega_d \cdot t)] \quad (2.65 \text{ a})$$

$$u_{per}(t) = \bar{C} \cdot \cos(\bar{\omega} \cdot t) + \bar{D} \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t) \quad (2.65 \text{ b})$$

A parcela transiente expressa na equação (2.65 a) equivale a uma perturbação da parcela permanente. Conforme pode-se observar na figura 2.51.

**Figura 2.51: Deslocamento permanente em face do transiente**



Fonte: Adaptado de (FONSECA, 1964)

A amplitude do movimento permanente, apresentado na equação (2.65 b), expressa em única função de cosseno, fica reescrita como:

$$u_{per}(t) = \frac{j}{k} \cdot \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \cdot \cos(\bar{\omega} \cdot t - \phi_m) \quad (2.66)$$

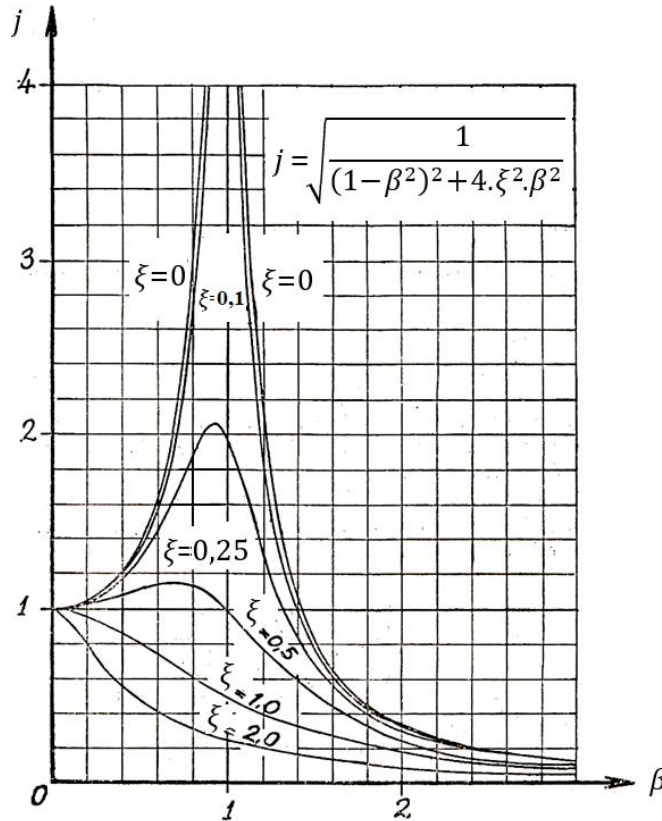
onde:  $\phi_m = \text{tg}^{-1} \left[ \frac{2 \cdot \xi \cdot \beta \cdot F_1 + (1 - \beta^2) \cdot F_2}{(1 - \beta^2) \cdot F_1 - 2 \cdot \xi \cdot \beta \cdot F_2} \right]$  ;  $j = \sqrt{\frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot \beta^2}}$  e  $\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$ .

Ao analisar as condições de ressonância e do Fator de Amplificação Dinâmica ( $FAD \equiv "j"$ ) para o sistema amortecido, verifica-se que não é possível ocorrer valor infinito do FAD, isso devido à dissipação de energia pelo amortecimento. A fim de determinar o máximo valor do FAD, calcula-se a derivada desse em relação a razão de frequências  $\beta$  e extremiza-se ao impor nulidade na referida derivação. Com:  $\beta = \sqrt{1 - 2 \cdot \xi^2}$ , escreve-se:

$$\frac{d}{d\beta}(j) = \beta \cdot [2 \cdot (1 - \beta^2) - 4 \cdot \xi^2] = 0 \quad (2.67)$$

Debruçando-se ainda mais na definição da razão de frequências  $\beta = \sqrt{1 - 2 \cdot \xi^2}$ , equação (2.66), conclui-se a ocorrência de vibração apenas para as estruturas com razão de amortecimento  $\xi$  menor que a unidade, por apresentar raiz quadrada de número real. Constatando-se também esta informação pela figura 2.52.

**Figura 2.52: Amplificação do movimento via FAD**



Fonte: Adaptado de (FONSECA, 1964)

Ainda, analisando a equação da razão de frequências  $\beta$  (razão entre as frequências da solicitação e da vibração da estrutura) em detrimento da razão de amortecimento  $\xi$ , vide equação (2.67), e constata-se que não ocorre ressonância para  $\xi \geq 2^{-1/2}$ . Também observa-se que os valores máximos do FAD, na condição de ressonância ( $\beta = 1$ ), ocorrem para razões  $\beta$  menores que a unidade. Onde os picos de deslocamentos são menos recuados, quanto menor for a razão de amortecimento  $\xi$ .

O ângulo de fase inicial  $\phi_m$  é expresso, por:

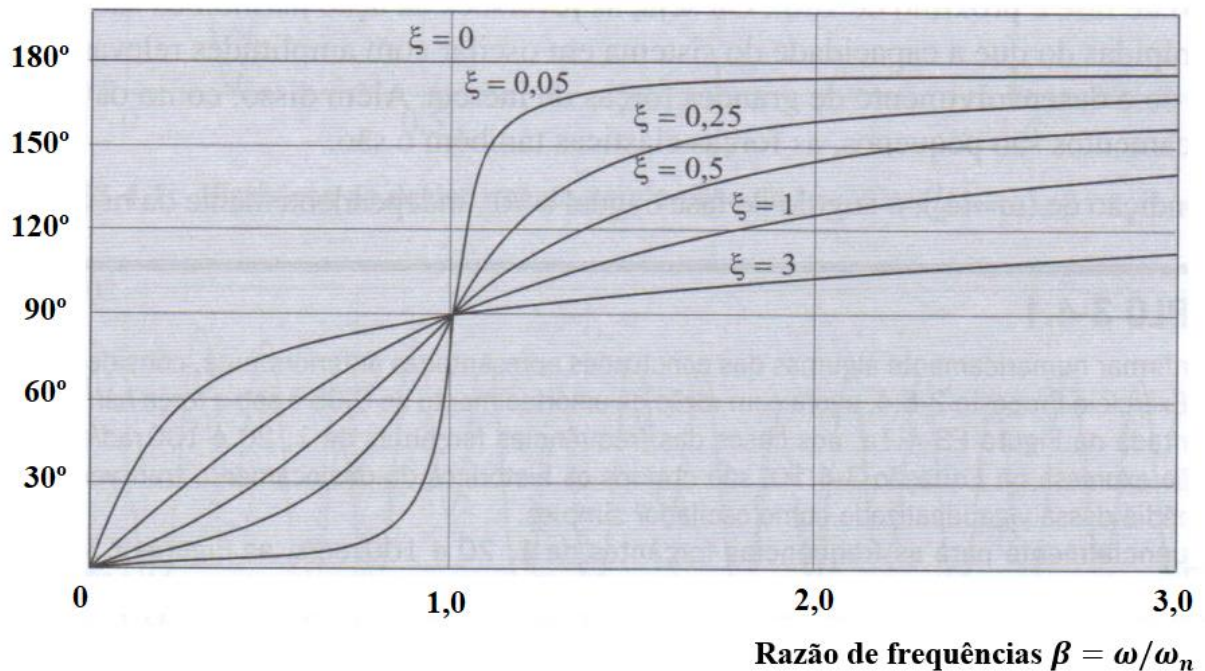
$$tg(\phi_m) = \frac{\bar{D}}{\bar{C}} = \frac{(2 \cdot \xi \cdot \beta) \cdot F_1 + (1 - \beta^2) \cdot F_2}{(1 - \beta^2) \cdot F_1 - (2 \cdot \xi \cdot \beta) \cdot F_2} \quad (2.68)$$

No caso particular, da força excitatriz ser função apenas do cosseno, tem-se o ângulo de fase inicial expresso na equação (2.68), reescrito como:

$$tg(\phi_m) = \frac{2 \cdot \xi \cdot \beta}{(1 - \beta^2)} \quad (2.69)$$

sendo apresentado graficamente na figura 2.53.

**Figura 2.53: Ângulo de fase inicial**



Fonte: Adaptado de (SORIANO, 2014)

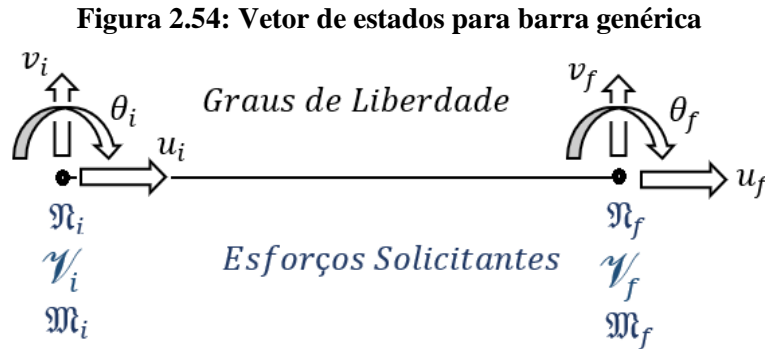
#### d) Espaço de estados

Utiliza-se espaço de estados, quando a análise é procedida em vetores contendo variáveis distintas. No caso da análise estrutural é exemplificável com o vetor que contenha, ao mesmo tempo, esforços nodais, rotações e deslocamentos. Geralmente para representar tal vetor utiliza-se a letra  $X$ , ficando o vetor de estado escrito como:

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} \mathfrak{N} \\ \phi \\ d \end{Bmatrix} \quad (2.70)$$

onde:  $\mathfrak{N}$  – Esforço Normal,  $\phi$  – Rotações e  $d$  – deslocamentos.

Uma aplicação clássica dos espaços de estado ocorre na análise matricial de estruturas, onde o vetor de variáveis englobam os esforços solicitantes e os graus de liberdade. Correlacionando tais vetores de estados para os nós inicial e final da barra, via matriz de transferência  $[T]$ . Tal equacionamento é observado na figura 2.54; na equação (2.71) e na eq. (3.44 a).



Fonte: O Autor (2019)

$$\begin{Bmatrix} u_f \\ v_f \\ \theta_f \\ N_f \\ V_f \\ M_f \end{Bmatrix} = [T] \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ N_i \\ V_i \\ M_i \end{Bmatrix} \quad (2.71)$$

sendo:  $u_i, v_i, \theta_i$  – Graus de liberdade para o nó inicial, quanto a incidência da barra;

$u_f, v_f, \theta_f$  – Graus de liberdade para o nó final, quanto a incidência da barra e

$[T]$  – Matriz de transferência da barra.



A equação do movimento, vide equação 2.42, é representada em termos matriciais, pelas parcelas de rigidez, massa e amortecimento, por:

$$[M].\{\ddot{u}\} + [C].\{\dot{u}\} + [K].\{u\} = \{F\} \quad (2.72)$$

onde:  $[M]$  – é a matriz de massa da estrutura;

$[C]$  – é a matriz de amortecimento estrutural;

$[K]$  – é a matriz de rigidez da estrutura e

$\{\ddot{u}\}, \{\dot{u}\}, \{u\}$  – são os vetores de acelerações, velocidades e deslocamentos, definidos nos graus de liberdade.

Na resolução da equação (2.72) almeja-se então, a diagonalização das três matrizes que compõem o sistema de equações diferenciais, a fim de gerar um conjunto com "n" equações diferenciais desacopladas, ou seja, independentes entre si. Para facilitar tal diagonalização utiliza a matriz de amortecimento  $[C]$  proporcional as matrizes de rigidez  $[K]$  e de massa  $[M]$  da estrutura. Com este artifício, procede-se a diagonalização das matrizes  $[K]$  e  $[M]$ , uma vez que a matriz  $[C]$  já estará automaticamente diagonalizada.

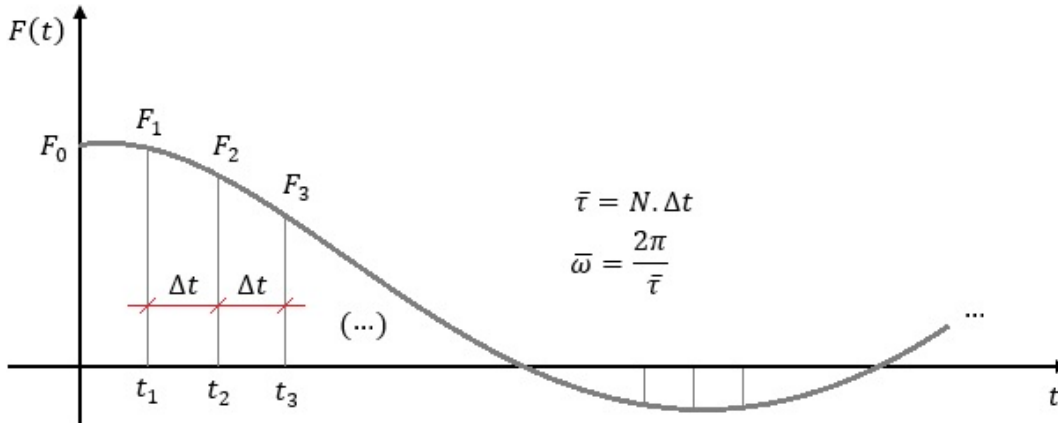
A diagonalização consiste em realizar a solução do problema de autovetores e autovalores associados a análise processada. E, para tal resolução pode-se citar os seguintes métodos de processamento:

- Sequências de Sturm;
- Método de Lanczos;
- Método de Jacobi (Ver item 2.6);
- Método de Given;
- Método de Householder;
- Método da Bisseção;
- Métodos LR, QR, QL e
- Método de Moler & Sterwart.

### e) Excitação aperiódica

Admitem-se fontes excitatrizes não periódicas, a exemplo de rajadas de vento. E a fim de proceder a integração (resolução) da equação diferencial ordinária, vale-se da subdivisão da função  $F(t)$  ao longo do tempo (CHOPRA, 2001, p. 126 – 129). Vide figura 2.55.

**Figura 2.55: Excitação aperiódica**



Fonte: O Autor (2019)

Relembra-se a série de Fourier:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1} a_j \cdot \cos(j \cdot \bar{\omega} \cdot t) + \sum_{j=1} b_j \cdot \sin(j \cdot \bar{\omega} \cdot t) \quad (2.73)$$

$$\text{onde: } a_j = \frac{2}{\bar{\tau}} \cdot \int_0^{\bar{\tau}} F(t) \cdot \cos(j \cdot \bar{\omega} \cdot t) dt; \quad b_j = \frac{2}{\bar{\tau}} \cdot \int_0^{\bar{\tau}} F(t) \cdot \sin(j \cdot \bar{\omega} \cdot t) dt; \quad \frac{a_0}{2} = \frac{1}{\bar{\tau}} \cdot \int_0^{\bar{\tau}} F(t) dt.$$

E baseado na EDO da vibração amortecida, eq. (2.42), e após aplicar a força excitatriz  $F(t)$  expressa na equação (2.73), conclui-se por soluções parciais:

$$m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = \frac{a_0}{2} \quad (2.74 a)$$

$$m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = a_j \cdot \cos(j \cdot \bar{\omega} \cdot t) \quad (2.74 b)$$

$$m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = b_j \cdot \sin(j \cdot \bar{\omega} \cdot t) \quad (2.74 c)$$

Resultando na solução completa  $u(t)$  com a divisão em duas parcelas: a primeira é o deslocamento permanente  $u_p(t)$  e a segunda parcela é a transiente  $u_T(t)$ . Onde  $j$  equivale ao número de equações, ficando os deslocamentos expressos por:

$$u_p(t) = \frac{a_0}{2 \cdot k} + \sum_{j=1} \frac{a_j}{\gamma} \cdot \cos(j \cdot \bar{\omega} \cdot t - \phi_j) + \sum_{j=1} \frac{b_j}{\gamma} \cdot \sin(j \cdot \bar{\omega} \cdot t - \phi_j) \quad (2.75 \ a)$$

$$u_T(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t) + B \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (2.75 \ b)$$

$$\text{onde: } \gamma = k \cdot \sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2 \cdot \beta \cdot \xi)^2}$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\bar{\tau}} \cdot \left( \frac{F_0 + F_1}{2} + \frac{F_1 + F_2}{2} + \frac{F_3 + F_4}{2} + \dots \right) \cdot \Delta t = \frac{1}{N} \cdot \left( \frac{F_0 + F_N}{2} + \sum_{j=1}^{N-1} F_j \right)$$

$$a_j = \frac{2}{N} \cdot \left[ F_N \cdot \sin \left( j \cdot \frac{2 \cdot \pi}{\bar{\tau}} \cdot t_N \right) + \sum_{i=1}^{N-1} F_i \cdot \sin \left( j \cdot \frac{2 \cdot \pi}{\bar{\tau}} \cdot t_i \right) \right]$$

$$b_j = \frac{2}{N} \cdot \left[ F_N \cdot \sin \left( j \cdot \frac{2 \cdot \pi}{\bar{\tau}} \cdot t_N \right) + \sum_{i=1}^{N-1} F_i \cdot \cos \left( j \cdot \frac{2 \cdot \pi}{\bar{\tau}} \cdot t_i \right) \right]$$

Por fim, ressalta-se que o tratamento matemático de uma força regida por função aperiódica pode ocorrer mediante:

- Integral de Fourier;
- Integral de Duhamel (Convolução);
- Transformação de Laplace;
- Função interpoladora e
- Integração numérica.

## 2.3. AÇÃO DO VENTO NO PILAR DE PONTE

### 2.3.1. Atuação das correntes do vento

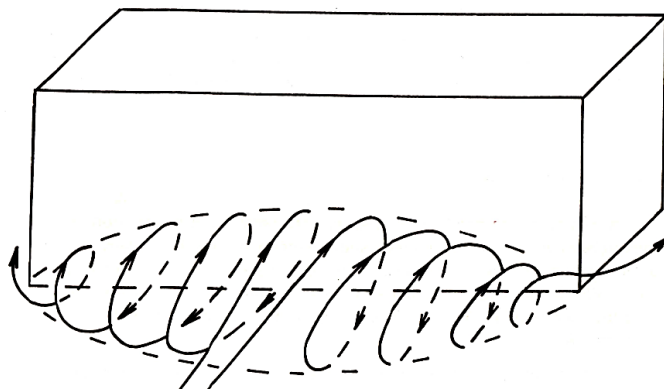
Em Standerski (2012) são apresentados como efeitos dinâmicos do vento em tabuleiros de pontes, os seguintes:

- Galope;
- Drapejamento;
- Excitação por vórtices e
- Rajadas e Martelamento (devido a turbulência).

Conforme definido em Blessmann (2011, p. 87), os vórtices de Kármán ocorrem quando o número de Reynolds atinge certo valor, surgindo dispndimento aleatório de turbilhões de ambos os lados do objeto, surgindo assim duas filas de turbilhões, os então vórtices de Kármán. Os vórtices são classificados da seguinte forma:

- **Vórtices de base:** Quando o vento incide perpendicularmente a uma fachada, surge na proximidade do solo, um vórtice de eixo aproximadamente horizontal. Vide figura 2.56.

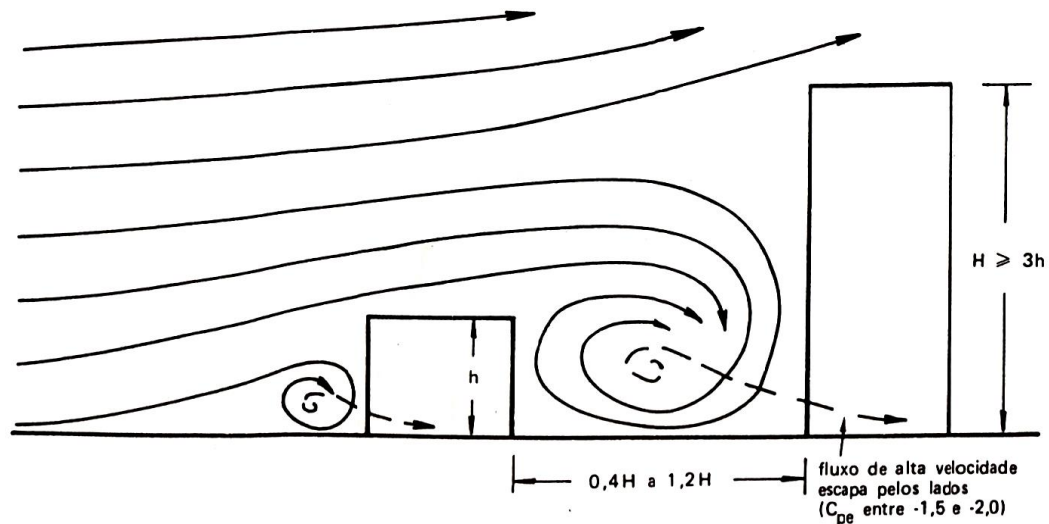
**Figura 2.56: Vórtice de Base**



FONTE: (BLESSMANN, 2011)

- **Vórtices confinados:** Quando o caso anterior ocorre um edifício alto a sotavento, em relação a um edifício mais baixo, formando-se assim o vórtice confinado. Conforme é apresentado na figura 2.57.

**Figura 2.57: Vórtice Confinado entre edificações**



FONTE: (BLESSMANN, 2011)

### 2.3.2. Variação da velocidade do vento com a altura

A variação da velocidade do vento com a altura também é denominada de velocidade de perfil. A velocidade do vento na superfície é bem inferior do que a velocidade nas elevadas alturas, isto devido ao arrasto no fluxo do vento ocasionado pelo atrito da rugosidade da superfície terrestre. Segundo Taranath (2011) o formato do perfil para ventos fortes depende, principalmente, de:

- Grau de rugosidade da superfície;
- Efeitos globais de arrasto de edifícios e
- Árvores e qualquer outra saliência que dificulte e/ou impeça o fluxo do vento.

Ainda segundo Taranath (2011) a altura em que a influência da rugosidade da superfície torna-se nula, ocorre a 360 metros acima do solo. Sendo o movimento regido apenas pelos efeitos dos ventos locais e sazonais. O limite de nulidade da influência da rugosidade da superfície é denominado de Camada Limite Atmosférica.

O equacionamento do perfil do vento no interior da camada limite atmosférica, é definido por:

$$V(z) = V_g \cdot \left( \frac{z}{z_g} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (2.76)$$

onde:  $V(z)$  – é a velocidade média do vento na altura  $z$ ;

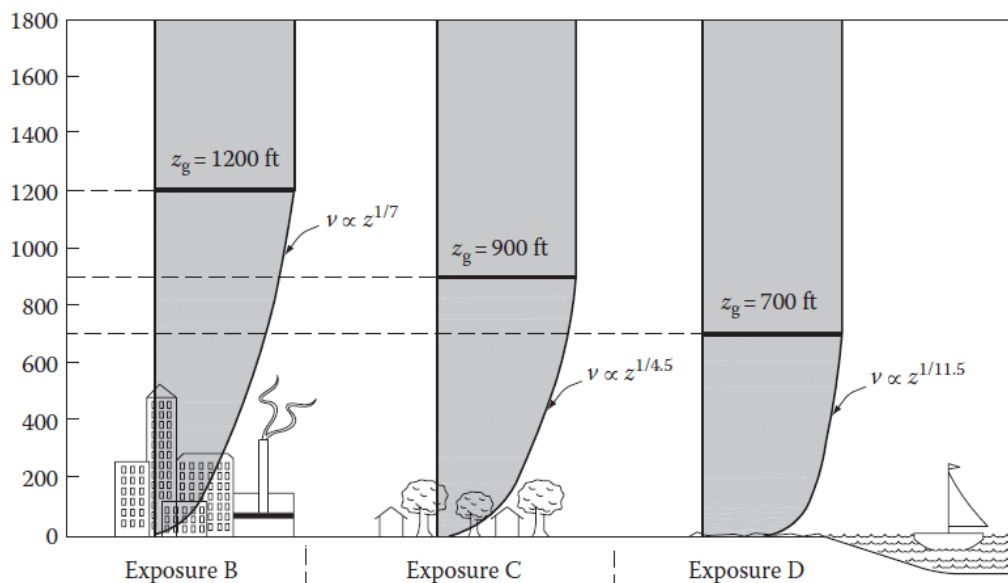
$V_g$  – é a velocidade do vento gradiente;  $z$  – altura acima do solo;

$z_g$  – é a altura nominal da camada limite, ou altura gradiente e

$\alpha$  – é o coeficiente. A variação de  $\frac{1}{\alpha}$  ocorre de 0,087 para zonas abertas até 0,20 em áreas urbanas construídas.

Observa-se na figura 2.58 o formato do perfil do vento por zona de atuação, bem como o coeficiente  $\alpha$ . A zona de exposição B (centros de grandes cidades) é característica por coeficiente  $\alpha$  no valor de 7 e  $\frac{1}{\alpha} = 0,143$ . Para a zona C, de campos arborizados ou arredores de cidades ou ainda terrenos abertos, tem-se:  $\alpha = 4,5$  e  $\frac{1}{\alpha} = 0,222$ . Por fim, para a zona D, que consiste em: campos planos abertos, zonas costeiras e superfície de água não sujeitas a furacões, é atribuído  $\alpha = 11,5$  e  $\frac{1}{\alpha} = 0,087$ .

**Figura 2.58: Perfis de velocidade do vento, segundo ASCE 7-05**

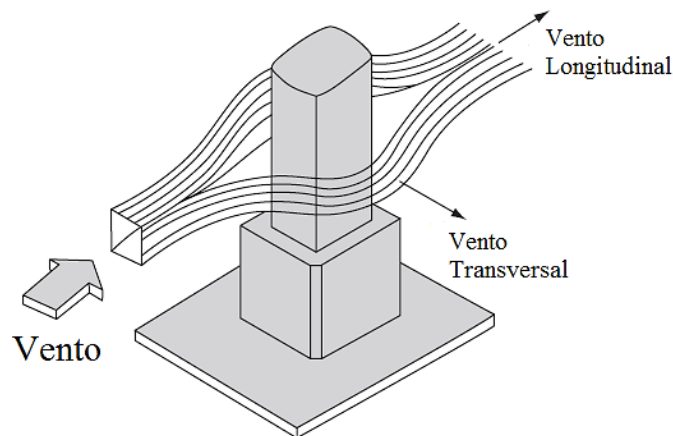


**FONTE: (TARANATH, 2011)**

### 2.3.3. Simplificação bidimensional do fluxo do vento

O fluxo do vento para obras de construção civil é considerado bidimensional (2D), pois a força e o momento relativos ao eixo vertical é considerado insignificante (Elevação e Momento de Guinada). A consideração bidimensional é expressa na figura 2.59, com as forças ao longo do fluxo e na direção transversal do vento.

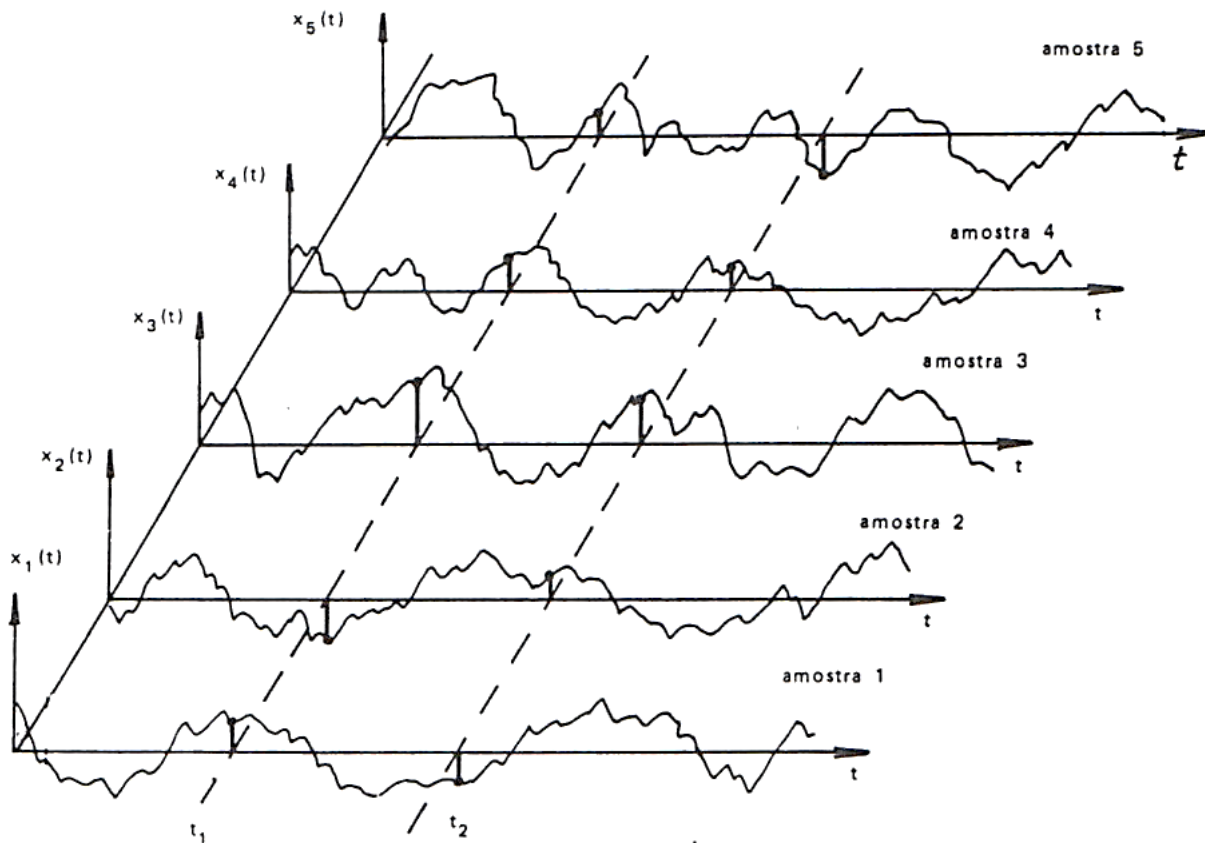
**Figura 2.59: Simplificação bidimensional do fluxo do vento**



**FONTE: (TARANATH, 2011)**

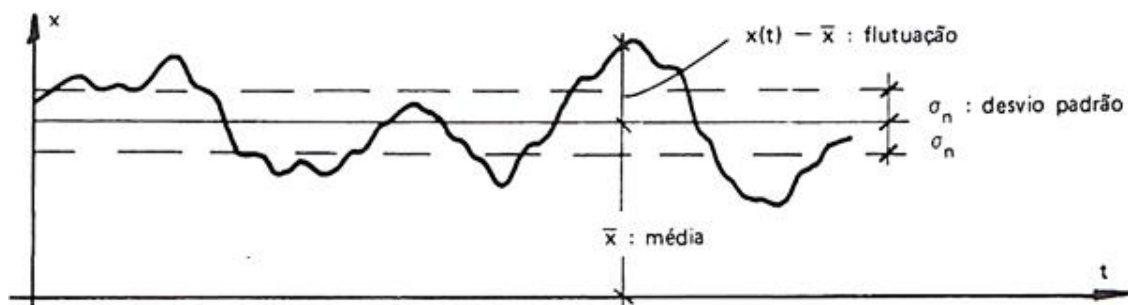
### 2.3.4. Equacionamento da turbulência

O estudo da turbulência foi primordialmente realizado de forma empírica, isto devido a dificuldade de descrever matematicamente o fenômeno. Porém, solucionada com o passar do tempo e através da aplicação dos conceitos estatísticos para computar a aleatoriedade. Aos fenômenos aleatórios com irregulares flutuações, pode-se aplicar um estudo pela teoria das probabilidades e médias estatísticas, conforme apresentado em Blessmann (2011) e na figura 2.60.

**Figura 2.60: Amostras para tratamento estatístico das flutuações**

FONTE: (BLESSMANN, 2011)

Na ocorrência de um padrão estatístico (média, variância e demais variáveis) para todas as amostras possíveis e sendo invariável para qualquer origem do tempo, o processo será definido como aleatório e estacionário. Conforme observa-se na figura 2.61.

**Figura 2.61: Padrão Estatístico no Processo Estacionário**

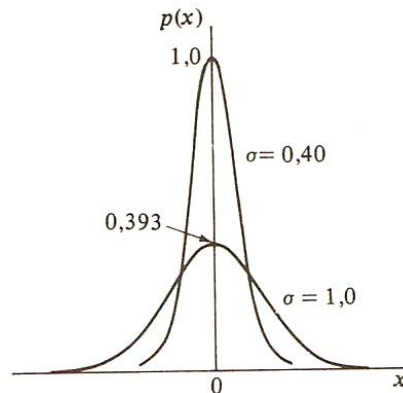
FONTE: (BLESSMANN, 2011)

Observa-se ainda que o Processo Aleatório é Estacionário e também Ergódico. Define-se processo ergódico quando qualquer parâmetro estatístico obtido para um conjunto de registro representativo do processo é igual ao correspondente parâmetro calculado sobre um conjunto representativo.



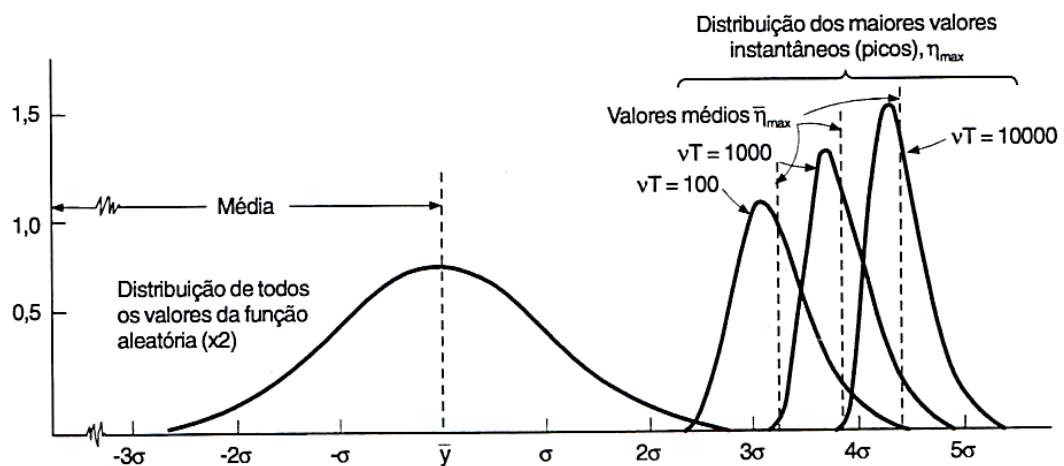
O desvio  $\sigma$  é uma medida de dispersão relativo à média. Assim quanto maior o valor do desvio, mais afastado da média estarão os valores. Vide figura 2.62. Já, na figura 2.63 é apresentada a distribuição por rajadas de vento.

**Figura 2.62: Influência do Desvio – Padrão na Distribuição Gaussiana**



FONTE: (THOMSON, 1978)

**Figura 2.63: Distribuição por correntes de rajadas de vento**

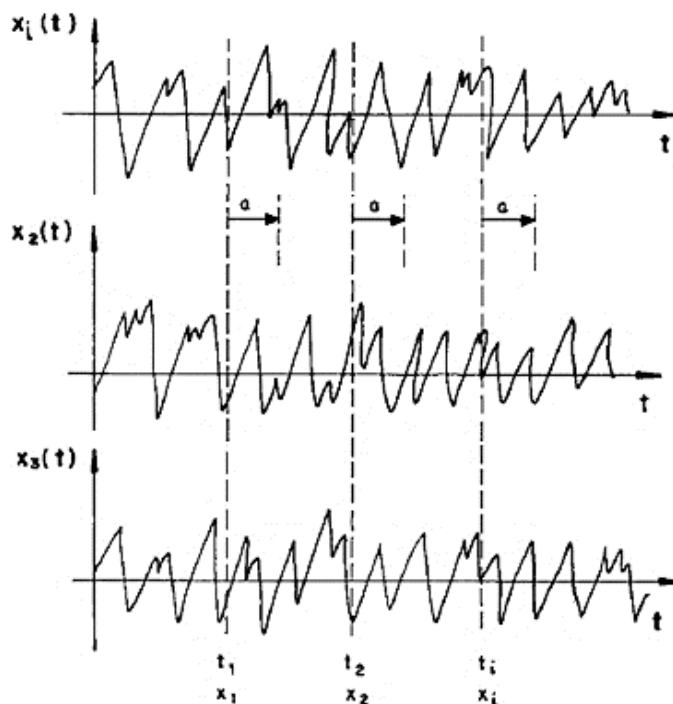


FONTE: (BLESMAAN, 1998)

### a) Correlação

A Correlação entre dois registros,  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ , equivale a multiplicação das ordenadas dos registros para cada tempo  $t$  e determinado o valor médio. Conforme Thomson (1978) e Laier (1989) a Correlação é uma medida de similaridade entre quantidades. Vide figura 2.64.

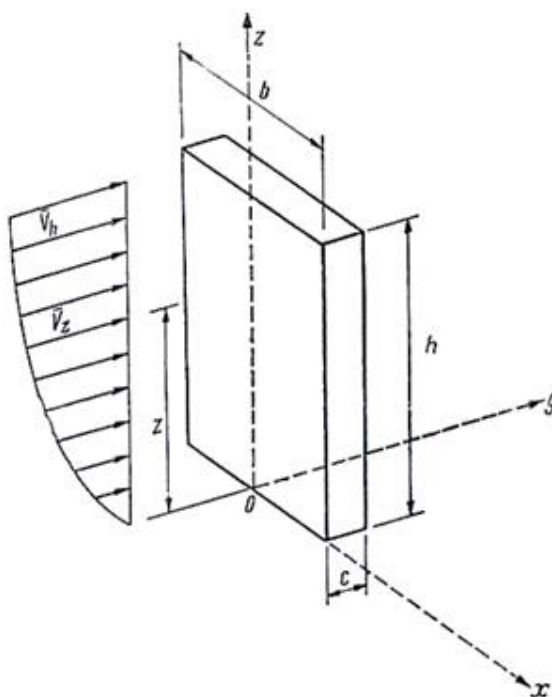
**Figura 2.64: Correlação entre os registros  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$**



FONTE: (LAIER, 1989)

Para as normatizações vigentes, a exemplo do EUROCODE 01 (pr FR 1991-1-4:2005) e da NBR 6123 (ABNT, 1988), o perfil das velocidades de incidência da rajada de vento na face do pilar ou da edificação como um todo é apresentada na figura 2.65.

**Figura 2.65: Perfil de velocidade do vento**

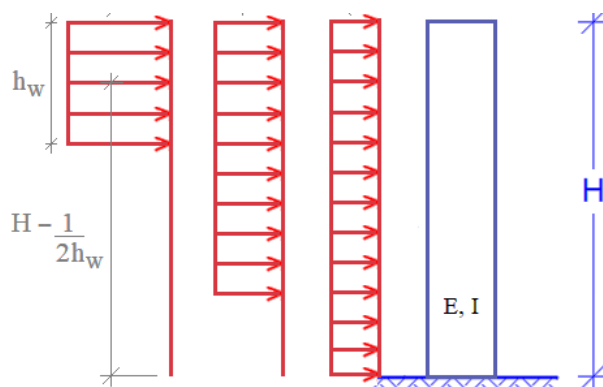


FONTE: (GHIOCEL; LUNGU, 1975)

### 2.3.5. Formato do carregamento do vento

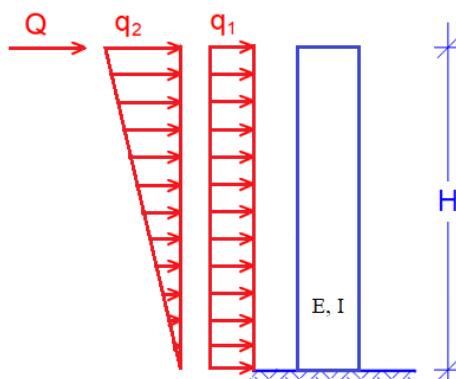
A vibração lateral é potencializada pela ação do vento e para tal carregamento adota-se a atuação combinada de carga constante na altura  $q_1$ , da carga distribuída linearmente na edificação e com valor máximo de  $q_2$  no topo do pilar e a carga  $Q$  concentrada no topo da estrutura em análise. Essa última carga tem a finalidade de representar a atuação do vento no tabuleiro da ponte (no caso da análise dos pilares). Esta representação das cargas é embasada em Solnes e Sigbjornsson (1973) com o perfil de velocidade do vento crescente ao longo da altura, bem como no fato do carregamento lateral ser preenchido do topo em direção à base do pilar, à medida que a corrente de ar se aproxima do obstáculo. No caso, o pilar é apresentado em Koten (1967) e na figura 2.66. A mencionada aplicação de três carregamentos laterais  $q_1$ ,  $q_2$  e  $Q$  torna-se então evidente, e ilustrada na figura 2.67.

**Figura 2.66: Carregamentos laterais no pilar de ponte devido à ação do vento: distribuição com a aproximação da corrente do ar**



Fonte: O Autor (2019)

**Figura 2.67: Carregamentos laterais no pilar de ponte devido à ação do vento: idealização de carregamentos**



Fonte: O Autor (2019)

## 2.4. DESACOPLAMENTO DO SISTEMA DINÂMICO NÃO AMORTECIDO

Para um sistema dinâmico contínuo, logo com " $n$ " graus de liberdade, pode-se gerar as equação do movimento em os diversos sistemas de coordenadas. Porém, para que se possa resolver tal sistema dinâmico será necessário reescrever as " $n$ " equações diferenciais num sistema coordenado que promova o total desacoplamento do sistema e gere equações independentes entre si. Este sistema é denominado de Sistema de Coordenadas Generalizadas, determinado a partir de sucessivas translações/rotações de sistemas de referências, um dos métodos que propicia tal desacoplamento é o Método de Jacobi (ver item 2.6. Além de tal processo de diagonalização, pode-se recorrer a condensação matricial que é apresentada no item 2.10 (c) desta tese e por referência pode-se citar Argyris e Mlejnek (1991, p. 210).

Define-se o Sistema de Coordenadas Generalizadas, como sendo as coordenadas independentes entre si, que descrevem o funcionamento de determinado Sistema Dinâmico. Bem como, promovem o desacoplamento do sistema de equações diferenciais. Utiliza-se, em geral, a letra " $q$ " para representar tais coordenadas generalizadas.

Estende-se a notação da equação diferencial, apresentada na equação (2.41), expressão da vibração forçada não amortecida, para estruturas de " $n$ " graus de liberdade (Sistemas Contínuos), e reescreve-se:

$$[M].\{\ddot{u}\} + [K].\{u\} = \{F\} \quad (2.77)$$

onde:  $[M]$  é a matriz de massa;

$[K]$  é a matriz de rigidez;

$\{u\}, \{\dot{u}\}$  são os vetores deslocamento e velocidade e  $\{F\}$  é o vetor de forças.

### a) Primeira transformação de referencial

Baseado em He e Fu (2001, p. 97), a primeira transformação de referencial consiste em passar do deslocamento  $u$  (no referencial inicial) para um novo referencial e representa-lo por  $x$ , isso através da matriz de autovalores  $[\varphi]$  da matriz de massa. Nesta transformação de referencial verifica-se a diagonalização da matriz de massa  $[M]$ , daí a utilização do problema de autovetores  $[m^*]$ . Ficando o sistema de equações diferenciais, eq. (2.77), reescrito como:

$$[m^*].\{\ddot{x}\} + [\varphi]^T.[K].[\varphi].\{x\} = [\varphi]^T.\{F\} \quad (2.78)$$

onde:  $[m^*]$  é a matriz de massa  $[M]$  diagonalizada;  $[m^*] = [\varphi]^T.[M].[\varphi]$  e  $\{u\} = [\varphi].\{x\}$ .

### b) Segunda transformação de referencial

A segunda transformação de referencial será de  $x$  para  $y$  e procedida via imposição da raiz quadrada inversa da matriz de massa diagonalizada, isso a fim de manter a simetria do sistema. Objetivando-se nesta 2ª transformação, a mudança da matriz diagonal  $[m^*]$  pela matriz identidade.

Após tal transformação, surge a matriz dinâmica inversa  $[D]$ , reescrevendo-se o ainda sistema de equações diferenciais apresentado, eq. (2.78), como:

$$[I].\{\ddot{y}\} + [D].\{y\} = [m^*]^{-\frac{1}{2}}.[\varphi]^T.\{F\} \quad (2.79)$$

onde:  $[D] = [m^*]^{-\frac{1}{2}}.[\varphi]^T.[K].[\varphi].[m^*]^{-\frac{1}{2}}$  ;  $\{x\} = [m^*]^{-\frac{1}{2}}.\{y\}$  e  $\{\ddot{x}\} = [m^*]^{-\frac{1}{2}}.\{\ddot{y}\}$ .

### c) Terceira transformação de referencial

Constata-se na eq. (2.79) que resta apenas diagonalizar a matriz  $[D]$ , daí procede-se a resolução do problema de autovalores  $[\psi]$  e Autovetores  $[\omega^2]$ . Nesta terceira e última transformação de referencial do sistema de equações diferenciais, eq. (2.79), é do referencial  $y$  para  $q$ . Transforma-se então, o sistema num conjunto de equações diferenciais desacopladas, e expresso por:

$$\{\ddot{q}\} + [\omega^2].\{q\} = \{F^0\} \quad (2.80)$$

onde:  $[\omega^2] = [\psi]^T.[D].[\psi]$  ;  $\{F^0\} = [\Phi]^T.[\varphi]^T.\{F\}$  ;  $[\Phi]^T = [\psi]^T.[m^*]^{-\frac{1}{2}}$ ;

$\{y\} = [\psi].\{q\}$  ;  $\{\ddot{y}\} = [\psi].\{\ddot{q}\}$  e ainda:  $[\Phi] = [m^*]^{-\frac{1}{2}}.[\psi]$ .

Após as três transformações de referencial, o sistema de equações diferenciais apresentado na eq. (2.77) é reescrito no conjunto de equações diferenciais ordinárias por grau de liberdade. Tal conjunto de equações é referenciado no sistema generalizado, e expresso por:

$$\ddot{q}_j + \omega_j^2 \cdot q_j = F_j^0 \quad (2.81)$$

onde:  $\omega_j$  – frequência da EDO do grau  $j$  de liberdade, no sistema generalizado de coordenadas.

Após resolver as EDO's por grau de liberdade, apresentadas na eq. (2.81) em termos de  $q$ , utiliza-se a transformação reversa de referencial até retornar ao referencial inicial  $u$ , expressando:

$$\{u\} = [\varphi] \cdot [\Phi] \cdot \{q\} \quad (2.82)$$

A partir da equação (2.82) escrevem-se as condições iniciais, no referencial generalizado  $q$ , por:

$$\{q_0\} = [\Phi]^{-1} \cdot [\varphi]^{-1} \cdot \{u_0\} \quad (2.83 a)$$

$$\{\ddot{q}_0\} = [\Phi]^{-1} \cdot [\varphi]^{-1} \cdot \{\ddot{u}_0\} \quad (2.83 b)$$

#### d) Marcha de Cálculo N° 1

A sequência de cálculo das respostas do sistema dinâmico não amortecido é organizado em forma de marcha de cálculo, conforme demonstrado nos itens 2.4 (a) até 2.4 (c). Assim, fica postulada a seguinte marcha de cálculo:

- **1ª Etapa:** Caracterizar o sistema dinâmico não amortecido, pelo sistema de EDO's.

$$[M] \cdot \{\ddot{u}\} + [K] \cdot \{u\} = \{F\}$$

- **2ª Etapa:** Proceder a diagonalização da matriz de massa.

$$[m^*] = [\varphi]^T \cdot [M] \cdot [\varphi]$$

onde;  $[\varphi]$  é a matriz de autoversores, podendo ser obtida via método do polinômio característico, ou pelo método de Jacobi.

- **3ª Etapa:** Obter a matriz dinâmica inversa.

$$[D] = [m^*]^{-\frac{1}{2}} \cdot [\varphi]^T \cdot [K] \cdot [\varphi] \cdot [m^*]^{-\frac{1}{2}}$$

- **4ª Etapa:** Realizar a diagonalização da matriz dinâmica inversa.

$$[\omega^2] = [\psi]^T \cdot [D] \cdot [\psi]$$

onde;  $[\omega^2]$  é a matriz de autovalores, obtida via análise modal do sistema.

- **5ª Etapa:** Determinar a matriz modal ponderada.

$$[\Phi] = [m^*]^{-\frac{1}{2}} \cdot [\psi]$$

- **6ª Etapa:** Obter o vetor de forças no referencial do desacoplamento do sistema.

$$\{F^0\} = [\Phi]^T \cdot [\varphi]^T \cdot \{F\}$$

- **7ª Etapa:** Apresentar o conjunto de EDO's no referencial generalizado.

$$\ddot{q}_j + \omega_j^2 \cdot q_j = F_j^0$$

- **8ª Etapa:** Considerar as condições iniciais  $\{u_0\}$  e  $\{\dot{u}_0\}$  no referencial generalizado  $\{q_0\}$  e  $\{\dot{q}_0\}$  e resolver o conjunto de EDO's desacopladas (ver letra c deste item).

$$\{q_0\} = [\Phi]^{-1} \cdot [\varphi]^{-1} \cdot \{u_0\}$$

$$\{\dot{q}_0\} = [\Phi]^{-1} \cdot [\varphi]^{-1} \cdot \{\dot{u}_0\}$$

- **9ª Etapa:** Determinar as funções de deslocamento por grau de liberdade, isso para o sistema inicial de referência.

$$\{u(t)\} = [\varphi] \cdot [\Phi] \cdot \{q_0(t)\}$$

- **10ª Etapa:** Determinar as formas modais da estrutura  $[\Phi^0]$ , sendo:

$\{\Phi^0\}_j$  é o j-ésimo vetor coluna normalizado de  $[\bar{\Phi}] = [\varphi] \cdot [\Phi]$ , ou seja:

$$\eta_j^0 = \sqrt{\sum_{i=1} \bar{\Phi}_{ij}^2}; \quad \Phi_{ij}^0 = \frac{\bar{\Phi}_{ij}}{\eta_j^0}; \quad q_j = \eta_j^0 \cdot \bar{q}_j$$

- **11ª Etapa:** Determinar a massa e a rigidez modais.

$$M_j = \{\Phi^0\}_j^T \cdot [M] \cdot \{\Phi^0\}_j; \quad K_j = \{\Phi^0\}_j^T \cdot [K] \cdot \{\Phi^0\}_j$$

### e) Solução da equação diferencial no referencial generealizado

A equação diferencial desacoplada é expressa por:

$$\ddot{q} + \omega^2 \cdot q = F \cdot \text{sen}(\bar{\omega} \cdot t) \quad (2.84)$$

e como solução apresenta-se:

$$q(t) = q_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) + \frac{F}{\omega^2 \cdot (1 - \beta^2)} \cdot [\text{sen}(\bar{\omega} \cdot t) + D \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)] \quad (2.85)$$

$$\text{onde: } D = \frac{\dot{q}_0 \cdot \omega \cdot (1 - \beta^2)}{F} - \beta.$$

## 2.5. DESACOPLAMENTO DO SISTEMA DINÂMICO AMORTECIDO

A sequência de cálculo das respostas do sistema dinâmico amortecido é organizada em forma de marcha de cálculo, como:

### a) Marcha de Cálculo Nº 2

- **1ª Etapa:** Caracterizar o sistema dinâmico amortecido, pelo sistema de EDO's.

$$[M] \cdot \{\ddot{u}\} + [C] \cdot \{\dot{u}\} + [K] \cdot \{u\} = \{F\}$$

$$\text{onde: } [C] = \alpha_m \cdot [M] + \alpha_k \cdot [K]$$

- **2ª Etapa:** Proceder a diagonalização da matriz de massa.

$$[m^*] = [\varphi]^T \cdot [M] \cdot [\varphi]$$

onde;  $[\varphi]$  é a matriz de autoversores.

- **3ª Etapa:** Obter a matriz dinâmica inversa.

$$[D] = [m^*]^{-\frac{1}{2}} \cdot [\varphi]^T \cdot [K] \cdot [\varphi] \cdot [m^*]^{-\frac{1}{2}}$$

- **4ª Etapa:** Realizar a diagonalização da matriz dinâmica inversa.

$$[\omega^2] = [\psi]^T \cdot [D] \cdot [\psi]$$

onde;  $[\omega^2]$  é a matriz de autovalores, obtida via análise modal do sistema.

- **5ª Etapa:** Determinar a matriz modal ponderada.

$$[\Phi] = [m^*]^{-\frac{1}{2}} \cdot [\psi]$$



- **6ª Etapa:** Obter o vetor de forças no referencial do desacoplamento do sistema.

$$\{F^0\} = [\Phi]^T \cdot [\varphi]^T \cdot \{F\}$$

- **7ª Etapa:** Apresentar o conjunto de EDO's no referencial generalizado.

$$\ddot{q}_j + (2 \cdot \xi_j \cdot \omega_j) \cdot \dot{q}_j + \omega_j^2 \cdot q_j = F_j^0$$

a solução da EDO, com excitação harmônica  $F_j^0 = F_1 \cdot \text{sen}(\bar{\omega}_j \cdot t) + F_2 \cdot \text{cos}(\bar{\omega}_j \cdot t)$ , fica expressa por:

$$q(t) = A \cdot \text{cos}(\omega_d \cdot t) + B \cdot \text{sen}(\omega_d \cdot t) + C \cdot \text{sen}(\bar{\omega} \cdot t) + D \cdot \text{cos}(\bar{\omega} \cdot t)$$

com:  $\omega_d = \omega \cdot \sqrt{1 - \xi^2}$  para amortecimento subcrítico ( $\xi < 1$ );

$$A = q_0 - D \quad ; \quad B = \frac{\dot{q}_0 + \xi \cdot \omega \cdot A - \bar{\omega} \cdot D}{\omega_d} ;$$

$$C = \frac{F_1}{(\omega^2 - \bar{\omega}^2)} + \frac{2 \cdot \omega \cdot \xi \cdot \bar{\omega}}{(\omega^2 - \bar{\omega}^2)} \cdot D \quad \text{e} \quad D = \frac{(1 - \beta^2) \cdot F_2 - 2 \cdot \beta \cdot \xi \cdot F_1}{\omega^2 \cdot [(1 - \beta^2)^2 + (2 \cdot \beta \cdot \xi)^2]}$$

- **8ª Etapa:** Considerar as condições iniciais  $\{u_0\}$  e  $\{\dot{u}_0\}$  no referencial generalizado, sob a forma:  $\{q_0\}$  e  $\{\dot{q}_0\}$  e resolver o conjunto de EDO's.

$$\{q_0\} = [\Phi]^{-1} \cdot [\varphi]^{-1} \cdot \{u_0\} \quad \text{e} \quad \{\dot{q}_0\} = [\Phi]^{-1} \cdot [\varphi]^{-1} \cdot \{\dot{u}_0\}$$

- **9ª Etapa:** Determinar as funções de deslocamento por grau de liberdade no sistema inicial de referência.

$$\{u(t)\} = [\varphi] \cdot [\Phi] \cdot \{q_0(t)\}$$

- **10ª e 11ª Etapas:** idem a marcha de cálculo N° 1.

## 2.6. DIAGONALIZAÇÃO VIA MÉTODO DE JACOBI

Conforme apresentado em Silva (2007) e Quarteroni et al. (2007) o método proposto por Jacobi, para diagonalizar matrizes simétricas, consiste em realizar rotações sucessivas até que todos os termos não pertencentes a diagonal principal sejam nulos (ou tão pequenos que para certa tolerância seja admitido zero). Assim, torna-se expresso por:

$$[A^k] = [G_{pq}]^T \cdot [A^{k-1}] \cdot [G_{pq}] \quad (2.86)$$

onde;  $[A^k]$  é a matriz simétrica diagonalizada;

$$[A^k] = \begin{bmatrix} a_{pp}^k & a_{pq}^k \\ a_{qp}^k & a_{qq}^k \end{bmatrix} ; \quad [A^{k-1}] = \begin{bmatrix} a_{pp}^{k-1} & a_{pq}^{k-1} \\ a_{qp}^{k-1} & a_{qq}^{k-1} \end{bmatrix} ; \quad [G_{pq}] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \text{ e}$$

$[G_{pq}]$  é a matriz de rotação.

Após realizar a multiplicação das matrizes na eq. (2.86), tem-se os elementos da matriz diagonalizada  $[A^k]$ , expressos por:

$$a_{pp}^k = a_{pp}^{k-1} \cdot \cos^2 \theta - a_{qp}^{k-1} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta - a_{pq}^{k-1} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta + a_{qq}^{k-1} \cdot \sin^2 \theta \quad (2.87 a)$$

$$a_{qp}^k = a_{pq}^k = a_{pp}^{k-1} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta - a_{qp}^{k-1} \cdot \sin^2 \theta + a_{pq}^{k-1} \cdot \cos^2 \theta - a_{qq}^{k-1} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \quad (2.87 b)$$

$$a_{qq}^k = a_{pp}^{k-1} \cdot \sin^2 \theta + a_{qp}^{k-1} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta + a_{pq}^{k-1} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta + a_{qq}^{k-1} \cdot \cos^2 \theta \quad (2.87 c)$$

A partir da eq. (2.87 a), conclui-se que a matriz é simétrica. Para tanto, pode-se reescrever os termos da matriz diagonalizada, como:

$$a_{pp}^k = a_{pp}^{k-1} \cdot \cos^2 \theta - 2 \cdot a_{qp}^{k-1} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta + a_{qq}^{k-1} \cdot \sin^2 \theta \quad (2.88 a)$$

$$a_{qp}^k = a_{pq}^k = a_{pp}^{k-1} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta + a_{pq}^{k-1} \cdot (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - a_{qq}^{k-1} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \quad (2.88 b)$$

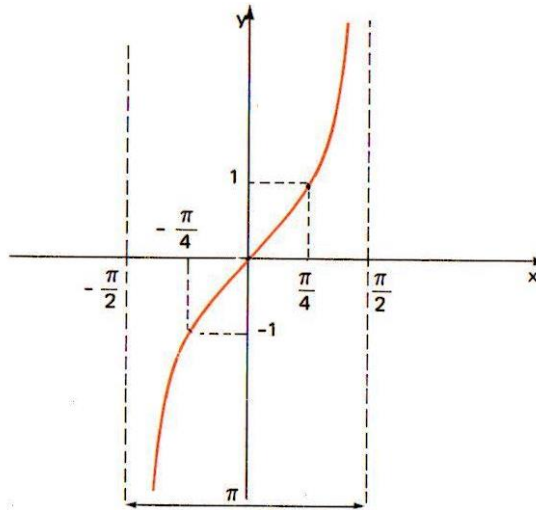
$$a_{qq}^k = a_{pp}^{k-1} \cdot \sin^2 \theta + 2 \cdot a_{qp}^{k-1} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta + a_{qq}^{k-1} \cdot \cos^2 \theta \quad (2.88 c)$$

Agora, é necessário impor nulidade ao termo fora da diagonal principal, apresentado na eq. (2.88 b). Para tal, utilizam-se relações trigonométricas do arco duplo e conclui-se o ângulo de rotação (para a nulidade dos termos não pertencentes a diagonal principal) escrito como:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2 \cdot a_{pq}^{k-1}}{(a_{qq}^{k-1} - a_{pp}^{k-1})} \quad (2.89)$$

Em conformidade com Antar Neto et al. (1979), a atuação do arco duplo ( $2\theta$ ) e simples ( $\theta$ ) é apresentado na figura 2.68.

**Figura 2.68:** Ciclo de variação da tangente do arco  $-\frac{\pi}{2} < 2\theta < \frac{\pi}{2}$  e  $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$



Fonte: (ANTAR NETO et al., 1979)

Em função do posicionamento do elemento da matriz  $[A]$ , a ser diagonalizada, expressa-se o ângulo  $\theta$ , como:

- **Elemento  $A_{ij}$  pertencente a diagonal principal:** Desta forma,  $a_{pp} = a_{qq}$ , e tem-se:

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

- **Elemento  $A_{ij}$  fora da diagonal principal:** Desta forma,  $a_{pp} \neq a_{qq}$ , utilizando-se:

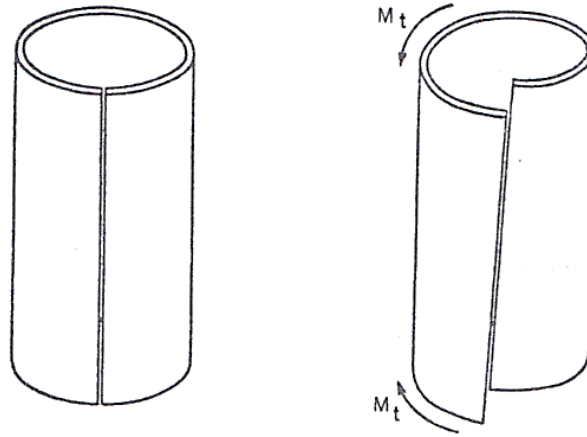
$$\theta = \frac{1}{2} \cdot \text{tg}^{-1} \left( \frac{2 \cdot a_{pq}^{k-1}}{(a_{qq}^{k-1} - a_{pp}^{k-1})} \right)$$

## 2.7. TEORIA DA FLEXO – TORÇÃO (TFT)

### 2.7.1. Equação diferencial da flexo – torção

O empenamento é definido como o deslocamento relativo entre os pontos alinhados de uma seção transversal. Assim, são deslocamentos longitudinais gerados pela rotação elástica  $\phi$  (em torno do centro de torção D), vide figura 2.69.

**Figura 2.69: Rotação  $\phi$  em seção circular após deformação gerada pelo momento de torção  $M_t$**



Fonte: (SCHIEL, 1983)

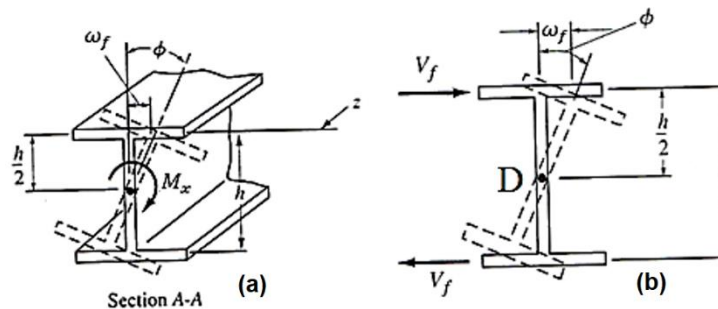
Para tal fenômeno, a primeira parcela da equação diferencial será a torção de Saint – Venant, conforme observa-se na figura 2.70, e expressa por:

$$M_{ft} = M_{\omega} = -E \cdot C_{\omega} \cdot \frac{d^3 \phi}{dx^3} \quad (2.90)$$

onde:  $M_{ft}$  – momento de flexo-torção;  $C_{\omega}$  – constante torsional por empenamento;

$E$  – módulo de elasticidade longitudinal e  $\phi$  – rotação elástica em torno de D.

**Figura 2.70: Torção de Saint – Venant: (a) rotação  $\phi$  em torno do centro de torção ou cisalhamento D e (b) deslocamento  $\omega_f$  na direção z**



Fonte: Adaptado de (SALMON et al., 2009)

A segunda parcela da equação diferencial é oriunda do momento de torção livre e baseado em Langendonck (1960, p. 208), ficando expressa, por:

$$M_s = G \cdot J \cdot \frac{d\phi}{dx} \quad (2.91)$$

onde:  $M_s$  – momento da torção livre;  $J = I_t$  – momento de inércia torsional e

$G$  – módulo de elasticidade transversal.



Analisando o ângulo de distorção  $\gamma$  do elemento diferencial e considerando-no nulo, faz-se a imposição de tal consideração sobre a equação (2.93 b), ressaltando nos deslocamentos longitudinais  $u$  dependendo unicamente do eixo esqueleto  $s$ . Daí, conclui-se:

$$n \cdot \phi' + \frac{\partial u}{\partial s} = 0 \quad (2.94 a)$$

como os deslocamentos longitudinais  $u$  dependem unicamente do eixo esqueleto  $s$ , reescreve-se a eq. (2.94 a), como:

$$n \cdot \phi' + \frac{du}{ds} = 0 \quad (2.94 b)$$

ao realizar a integração da equação (2.94 b) ao longo do eixo esqueleto, escreve-se:

$$\int_{O_s}^Q \frac{du}{ds} ds = - \int_{O_s}^Q (n \cdot \phi') ds \quad (2.94 c)$$

onde:  $O_s$  é a origem do eixo esqueleto  $s$  e  $\omega$  é a área setorial, sendo definida por Vlassov (1962), como:  $\omega = \int_{O_s}^Q n ds$ . Ficando a eq. (2.94 c) reescrita, como:

$$u = -\omega \cdot \phi' \quad (2.94 d)$$

considerando o sentido positivo de convenções de sinais e já definido o posicionamento do centro de torção ( $C.T. = D$ ), chega-se a:

$$u = \omega_{pc} \cdot \phi' \quad (2.94 e)$$

Da equação (2.94 e) tem-se a definição de  $\omega_{pc}$  como a área setorial principal. Ressalta-se ainda, o conceito de bimomento  $B$  introduzido por Vlassov (1962), vide figura 2.71 (b). Assim, o bimomento é semelhante ao binário de forças, sendo auto – equilibrantes, e sem repercutir esforços internos do tipo normal ou cisalhante (PROENÇA, 2009, p. 305). Sendo expresso por:

$$B = \int_S \sigma_x \cdot \omega_{pc} \cdot dS \quad (2.95)$$

Adota-se como simplificação para a lei de Hooke, o coeficiente de Poisson  $\nu$  desprezível, expressando:

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x \quad (2.96 a)$$

o deslocamento axial  $u$  é apresentado na equação (2.94 e), de qual expressa-se a deformação específica  $\varepsilon_x$ , como:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(\omega \cdot \phi')}{\partial x} = \omega_{pc} \cdot \phi'' \quad (2.96 b)$$

aplicando-se as equações (2.96 a) e (2.96 b) na definição do bimomento (equação 2.95), donde obtém-se:

$$B = E \cdot I_\omega \cdot \phi'' \quad (2.96 c)$$

sendo:  $I_\omega = C_\omega = \int_S \omega_{pc}^2 \cdot dS$  – o momento de inércia setorial;  $E$  o módulo de elasticidade longitudinal e  $\phi$  a rotação em relação ao eixo axial  $x$ .

Combinam-se as equações (2.90) e (2.96 c), a fim de estabelecer a relação entre o bimomento  $B$  e o momento de flexo – torção  $M_{ft}$ , e exprime-se:

$$M_{ft} = -B' \quad (2.97)$$

A equação diferencial do fenómeno da flexo – torção, em termos da rotação  $\phi$  da seção, expressa na eq. (2.92), pode ser reescrita com a notação simplificada nas derivadas, como:

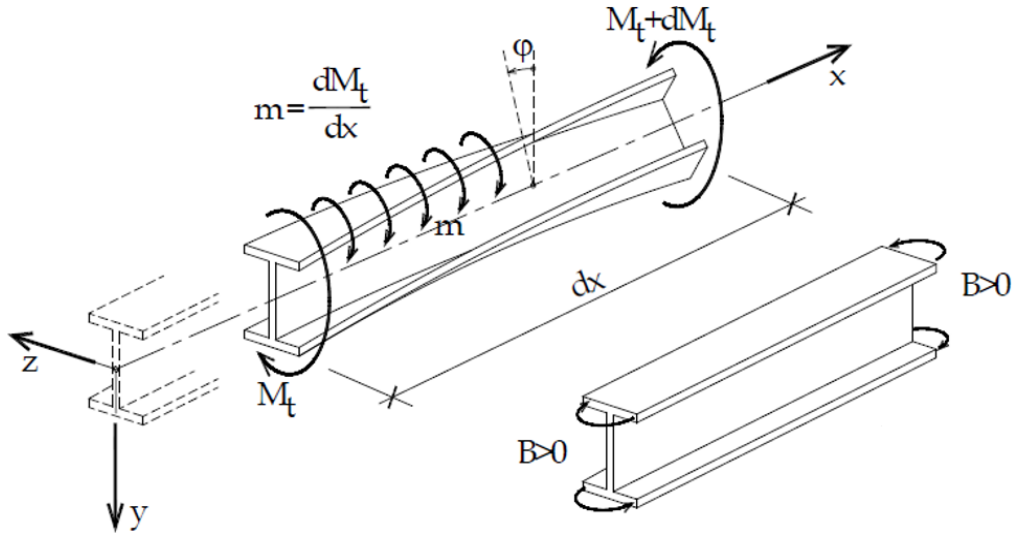
$$G \cdot I_t \cdot \phi' - E \cdot I_\omega \cdot \phi''' = M_t \quad (2.98)$$

Aplica-se a combinação das equações (2.90) e (2.97) na equação (2.98), e em seguida procede-se a derivação em relação ao eixo longitudinal  $x$ . Por fim, a equação diferencial da flexo – torção, em termos do bimomento  $B$ , fica expressa por:

$$\left( \frac{G \cdot I_t}{E \cdot I_\omega} \right) \cdot B - B'' = M'_t = m \quad (2.99)$$

sendo;  $m$  o momento de torção distribuído ao longo do eixo axial  $x$ .

A convenção positiva dos esforços estudados neste item é apresentada figura 2.72.

**Figura 2.72: Notação positiva para as variáveis  $M_t$ ,  $m$ ,  $\phi$  e  $B$** 

Fonte: Adaptado de (MORI; MUNAIAR NETO, 2017)

### 2.7.2. Solução via teoria da flexo – torção para o pilar em núcleo estrutural

Mediante solução de equações diferenciais, cujos procedimentos constam em Boyce e DiPrima (2006), procede-se a solução da EDO do problema de flexo – torção em termos das rotações (equação 2.98). Ficando a solução expressa por:

$$\phi(x) = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot \sinh\left(\frac{x}{r}\right) + C_4 \cdot \cosh\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{m}{2 \cdot G \cdot I_t} \cdot x^2 \quad (2.100)$$

$$\text{com: } r = \sqrt{\frac{E \cdot I_\omega}{G \cdot I_t}} = \sqrt{2 \cdot (1 + \nu) \cdot \frac{I_\omega}{I_t}}.$$

Alterando-se a equação diferencial para termos do bimomento, ver eq. (2.99), expressa-se por solução:

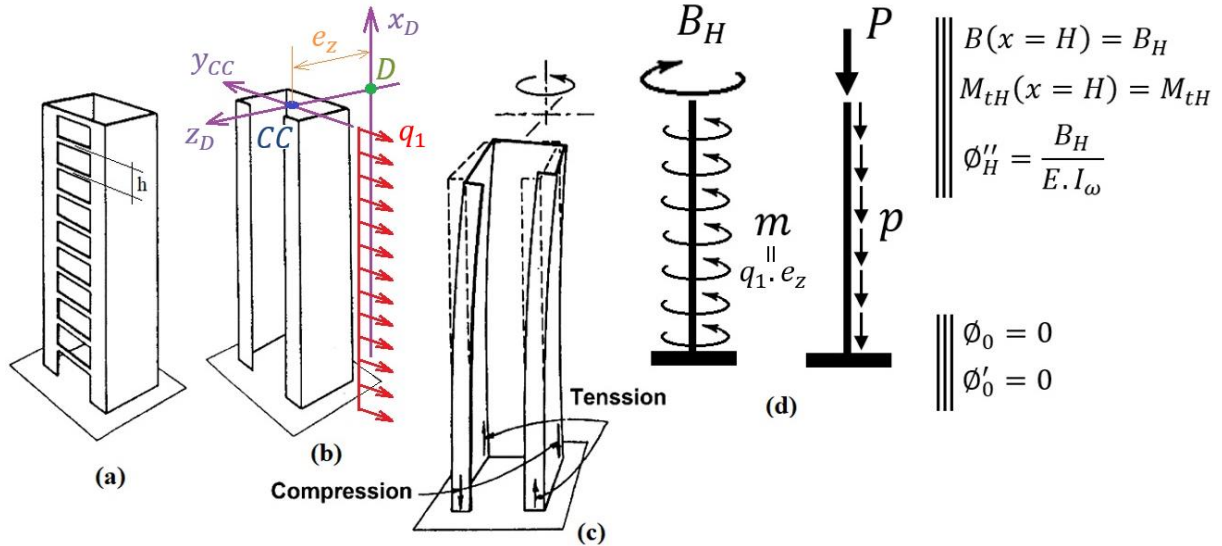
$$B = A_1 \cdot \sinh\left(\frac{x}{r}\right) + A_2 \cdot \cosh\left(\frac{x}{r}\right) + r^2 \cdot m \quad (2.101)$$

Para a análise do pilar de ponte tem-se como estado de carga: submissão a carga vertical  $P$  concentrada no topo e decorrente da reação do tabuleiro, a atuação da carga uniformemente distribuída  $p$  na altura e oriunda do peso-próprio, além da carga lateral  $q_1$  uniforme e aplicada no centro de carga CC. Resultando então, em momento de torção  $m$  distribuído e gerado pela



carga  $q_1$ , sendo decorrência da encentricidade ( $e_z$ ) do CC até o centro de torção D. Vide a indicação do momento de torção  $m$  na figura 2.73.

**Figura 2.73: Pilar de ponte: (a) com contraventamento por lintéis, (b) sem lintéis, (c) deformado e (d) condições de contorno**



Fonte: Adaptado de (SMITH; COULL, 1991)

A análise procedida nesse subtópico é avanço do estudo procedido por Barbosa (1980) em núcleos estruturais em edifícios altos. Ampliando-se nesta tese aos pilares de pontes, nos quais são modificadas algumas condições de contorno, mais especificamente no topo do pilar. Tem-se como discrepância mais relevante, a ação concentrada de bimomento no topo (ao invés de distribuído na altura como se verifica nos edifícios altos).

A solução da EDO expressa na eq. (2.98) para o pilar apresentado na figura 2.73, em termos da rotações  $\phi$ , fica expressa por:

$$\phi(x) = A_1 + A_2 \cdot x + A_3 \cdot \cosh(\alpha \cdot x) + A_4 \cdot \sinh(\alpha \cdot x) + \frac{m}{\alpha^2 \cdot E \cdot I_\omega} \cdot x^2 \quad (2.102)$$

sendo:  $l, I_L$  – comprimento e momento de inércia à flexão do lintel;

$h$  – distância relativa entre dois lintéis;  $A_i$  – área interna ao eixo esqueleto  $s$ ;

$\alpha = \alpha_1$  – quando do caso de seções de paredes finas aberta (sem lintéis);

$\alpha = \alpha_2$  – para seções de paredes finas contraventada por lintéis;

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{G \cdot I_t}{E \cdot I_\omega}} \quad ; \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{G \cdot I_t \cdot h + k^*}{h \cdot E \cdot I_\omega}} \quad ; \quad k^* = \frac{48 \cdot E \cdot I_L \cdot A_i^2}{l^3} \quad e \quad I_L = \frac{e_L \cdot h_L^3}{12}.$$

Aplica-se na eq. (2.102) as condições de contorno presentes na figura 2.73 e escreve-se a rotação  $\phi$  em termos de funções adimensionais  $\beta$ , sob a seguinte fórmula:

$$\phi = -\frac{m.H^4}{E.I_\omega.(\alpha.H)^4}.\beta_1 + \frac{B_H.H^2}{E.I_\omega.(\alpha.H)^2}.\beta_2 - \frac{M_{tH}.H^3}{E.I_\omega.(\alpha.H)^3}.\beta_3 \quad (2.103)$$

sendo:  $B_H, M_{tH}$  – bimomento e momento de torção no topo do pilar da ponte;

$H$  – altura total do pilar da ponte;  $\xi = \frac{x}{H}$ ;  $\beta = f(\xi)$ ;

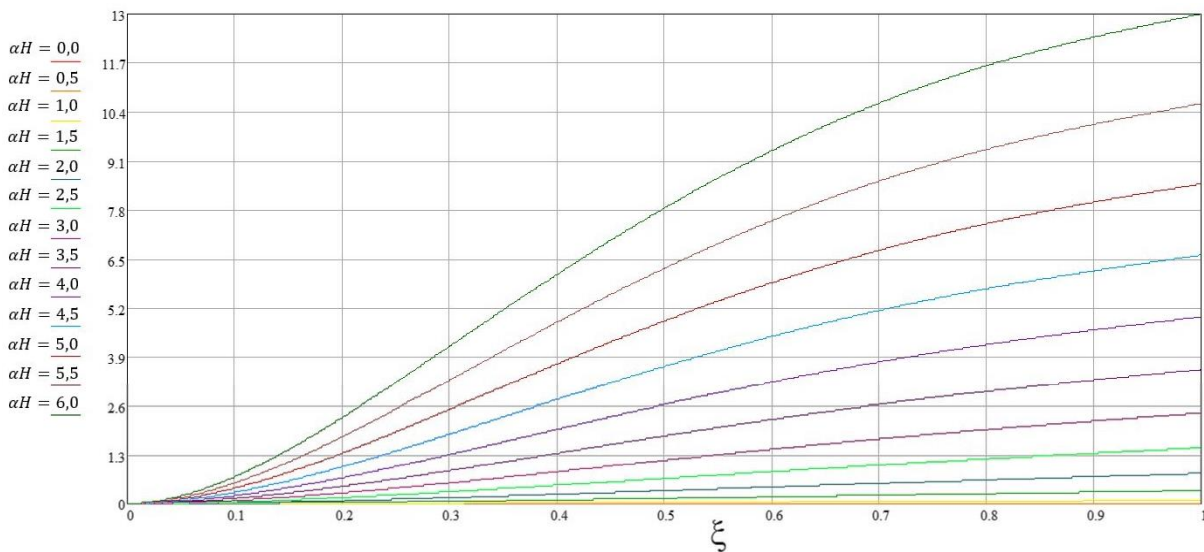
$$\beta_1 = -\left\{ \frac{1 - \cosh(\alpha.H.\xi)}{\cosh(\alpha.H)} + (\alpha.H). \tanh(\alpha.H). [1 - \cosh(\alpha.H.\xi)] \right. \\ \left. + (\alpha.H)^2. \left[ \frac{\xi^2}{2} - \xi + \frac{\sinh(\alpha.H.\xi)}{(\alpha.H)} \right] \right\};$$

$$\beta_2 = \frac{1}{\cosh(\alpha.H)} \cdot [-1 + \cosh(\alpha.H.\xi)] \quad \text{e}$$

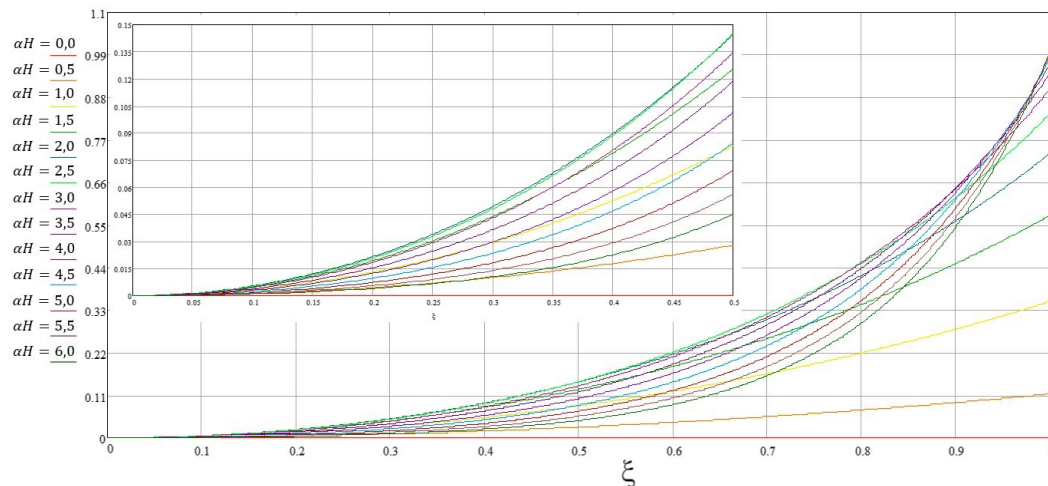
$$\beta_3 = -[\sinh(\alpha.H.\xi) - \cosh(\alpha.H.\xi). \tanh(\alpha.H) - (\alpha.H).\xi].$$

nas figuras 2.74 até 2.76 são apresentadas graficamente as funções adimensionais  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  e  $\beta_3$ , respectivamente. As curvas são geradas em decorrência da variação do adimensional  $\alpha H$ .

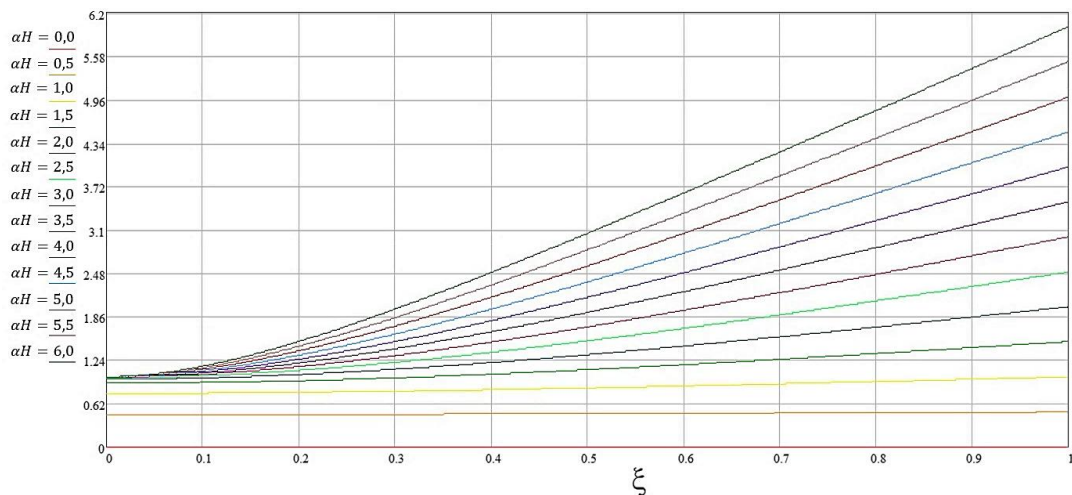
**Figura 2.74: Representação gráfica de  $\beta_1$  por variação de  $\alpha H$  em detrimento de  $\xi$**



**Fonte: O Autor (2019)**

**Figura 2.75: Representação gráfica de  $\beta_2$  por variação de  $\alpha H$  em detrimento de  $\xi$** 

Fonte: O Autor (2019)

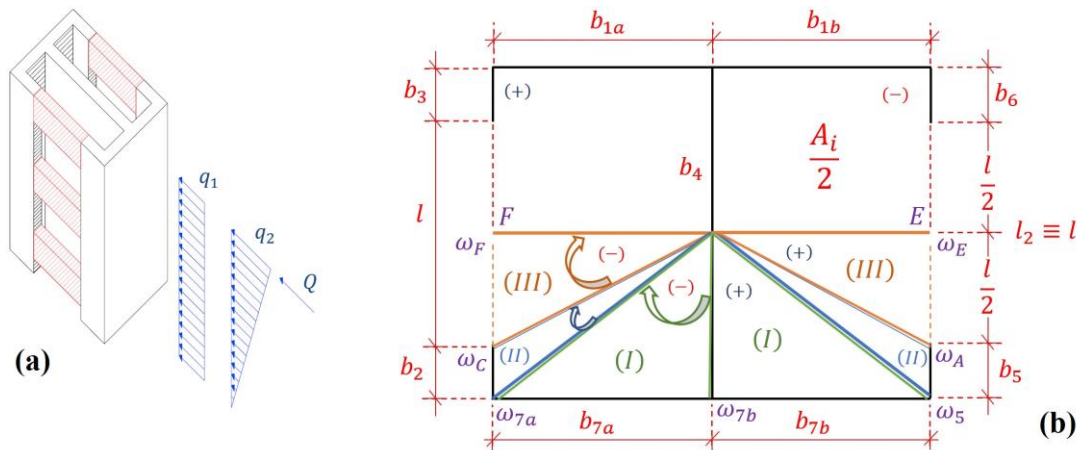
**Figura 2.76: Representação gráfica de  $\beta_3$  por variação de  $\alpha H$  em detrimento de  $\xi$** 

Fonte: O Autor (2019)

### 2.7.3. Solução da teoria da flexo – torção em pilar de seção transversal em duplo T

Neste subtópico procede-se a utilização da geometria típica de pilares de pontes, em formato de duplo T, bem como são modificadas algumas condições de contorno, mais especificamente no topo do pilar. Observando-se na figura 2.77 (a) o estado de carga para a ação do vento, e na fig. 2.77 (b) expõe-se a notação para o traçado do diagrama de ordenadas setoriais da seção transversal em duplo T.

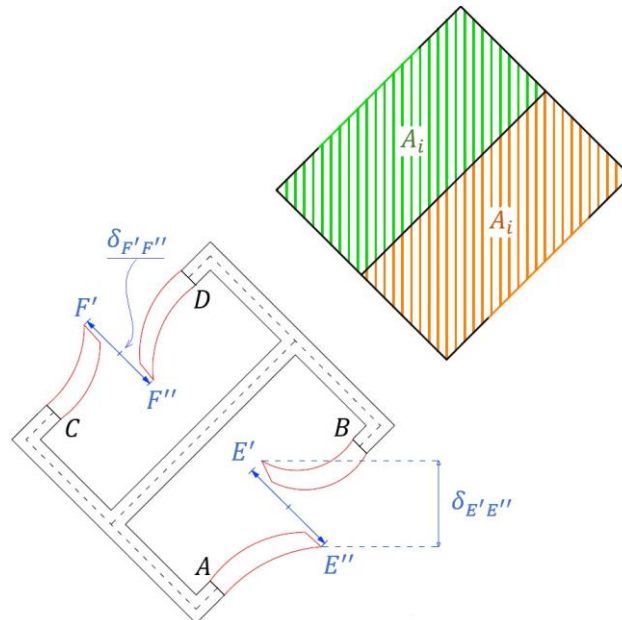
**Figura 2.77: Pilar de ponte com seção transversal em duplo T: (a) carregamento do vento e (b) ordenadas setoriais nos pontos de rotulação dos lintéis (meio do vão)**



Fonte: O Autor (2019)

A solução da EDO expressa na eq. (2.98) para o pilar apresentado na figura 2.77, em termos das rotações  $\phi$ , será a mesma apresentada na equação (2.102), quando aproximada a ação do vento unicamente pela carga lateral  $q_1$ . A única diferença é o cálculo da área interna, que consiste agora, na área de cada um dos dois núcleos em C que compõe o duplo T. Na figura 2.78 é apresentado o diagrama de deformação dos lintéis após a rotulação plástica da seção do meio do vão, bem como explicitando-se o cálculo da área interna  $A_i$ . Em tais lintéis será utilizado o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) para a determinação dos deslocamentos relativos  $\delta_{E'E''}$  e  $\delta_{F'F''}$ .

**Figura 2.78: Deformação dos lintéis após rotulação plástica no meio do vão**



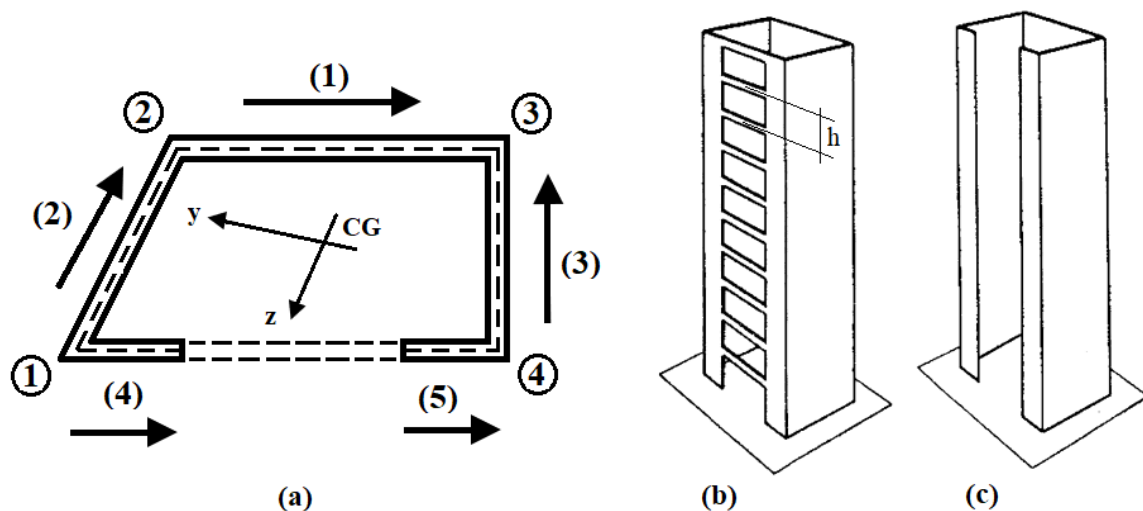
Fonte: O Autor (2019)

## 2.8. TEORIA DOS PAINÉIS – PAREDE (TPP)

### 2.8.1. Pilar em núcleo estrutural

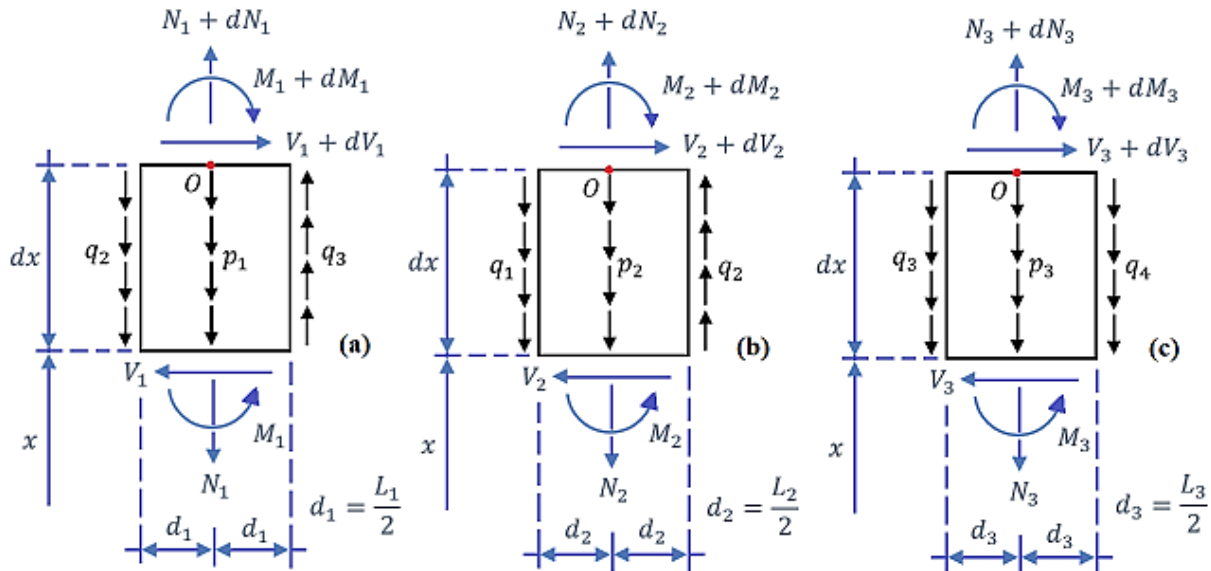
Formula-se a teoria dos painéis – parede, partindo de um pilar de seção transversal aberta e de paredes finas, sendo contraventado parcialmente por lintéis (com comprimento  $L_L$  e espaçados de eixo a eixo de  $h$ ). Com o formato de núcleo estrutural e composto por cinco paredes numeradas de (1) a (5), configurando quatro interseções, conforme apresentado na figura 2.79.

**Figura 2.79: Pilar em núcleo: (a) em planta, (b) contraventado, (c) sem lintéis**

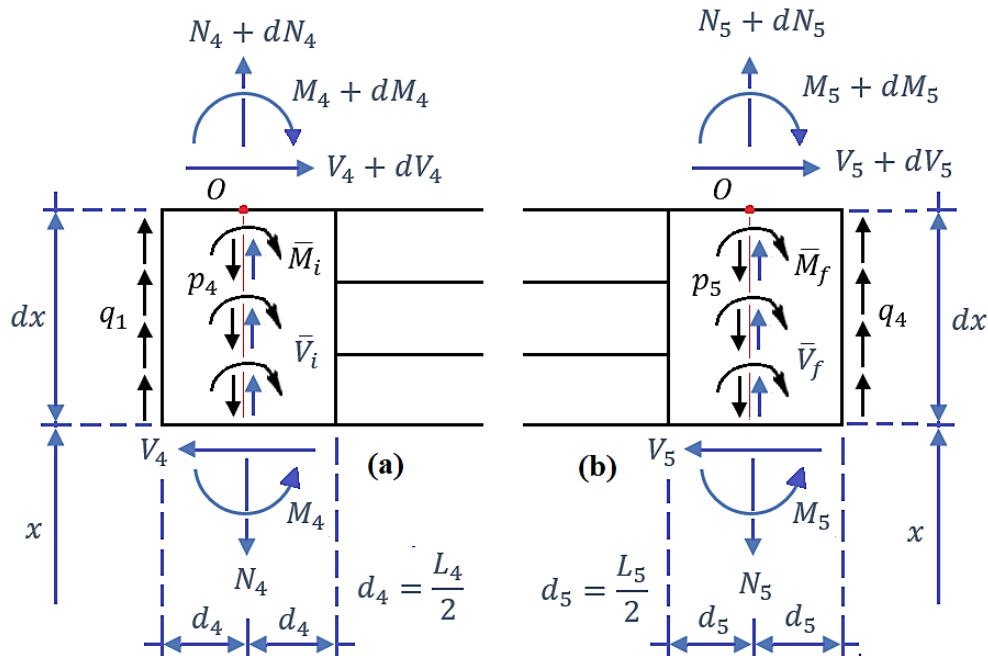


Fonte: Adaptado de (SMITH; COULL, 1991)

A formulação dos painéis – parede é apresentada inicialmente em Mancini (1972) com único elemento estrutural (vide figura 2.21). Em Barbosa (1980), Tso (1983) e em Smith e Taranath (1972) os painéis – parede são resolvidos via teoria da flexo – torção e subdivididos. Baseado nos conceitos desenvolvidos pelos mencionados autores, procede-se o equilíbrio de forças verticais e de momento no ponto  $O$  para os elementos diferenciais ilustrados nas figuras 2.80 e 2.81.

**Figura 2.80: Elementos diferenciais dos painéis – parede: (a) 1, (b) 2 e (c) 3**

Fonte: O Autor (2019)

**Figura 2.81: Elementos diferenciais do: (a) painel – parede 4 e (b) painel – parede 5**

Fonte: O Autor (2019)

A definição dos painéis – parede é proposta por Barbosa (1980, p. II-55), sendo também denominados simplesmente de paredes. O painel – parede é, então, um painel plano com deformabilidade ao momento fletor e com rigidez elevada ao corte. É caracterizado por seção transversal constante ao longo do eixo axial e com vinculação por engaste na base.

### a) Equações de equilíbrio dos elementos diferenciais

Procedendo o equilíbrio dos elementos diferenciais apresentados nas figuras 2.80 e 2.81, chega-se:

$$\frac{dM_1}{dx} = -V_1 + (q_2 + q_3) \cdot \frac{L_1}{2} \quad (2.104 a)$$

$$\frac{dN_1}{dx} = p_1 + q_3 - q_2 \quad (2.104 b)$$

$$\frac{dM_2}{dx} = -V_2 + (q_1 + q_2) \cdot \frac{L_2}{2} \quad (2.104 c)$$

$$\frac{dN_2}{dx} = p_2 + q_1 - q_2 \quad (2.104 d)$$

$$\frac{dM_3}{dx} = -V_3 + (q_3 - q_4) \cdot \frac{L_3}{2} \quad (2.104 e)$$

$$\frac{dN_3}{dx} = p_3 + q_3 + q_4 \quad (2.104 f)$$

$$\frac{dM_4}{dx} = -V_4 - q_1 \cdot \frac{L_4}{2} - \bar{M}_i \quad (2.104 g)$$

$$\frac{dN_4}{dx} = p_4 - q_1 - \bar{V}_i \quad (2.104 h)$$

$$\frac{dM_5}{dx} = -V_5 + q_4 \cdot \frac{L_5}{2} - \bar{M}_f \quad (2.104 i)$$

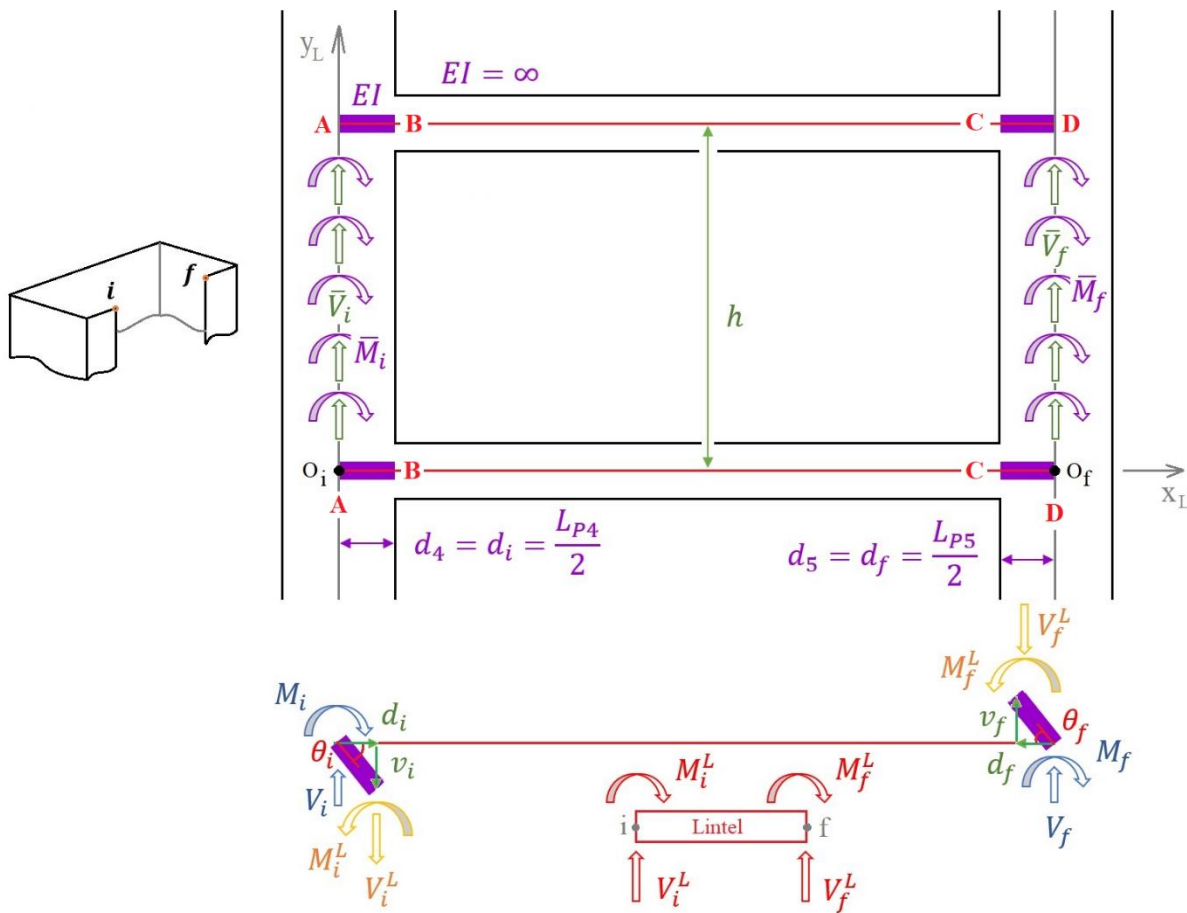
$$\frac{dN_5}{dx} = p_5 - q_4 - \bar{V}_f \quad (2.104 j)$$

onde:  $\bar{M}_i$ ,  $\bar{V}_i$ ,  $\bar{M}_f$  e  $\bar{V}_f$  são as reações elásticas nos lintéis e apresentados nas equações (2.110).

### b) Equações de equilíbrio nos lintéis

Na figura 2.82 são apresentadas as reações elásticas do lintel ( $V_i^L, V_f^L, M_i^L, M_f^L$ ) e o decorrente translade para os painéis – parede de apoio ( $\bar{V}_i, \bar{V}_f, \bar{M}_i, \bar{M}_f$ ). Ressaltando que os trechos em superposição com os painéis (A-B e C-D) são de rigidez à flexão tidas como infinitas ( $EI \rightarrow \infty$ ). Os referidos trechos são compreendidos entre o eixo dos painéis – parede e a extremidade do lintel. Ver Szerémi (1977, p. 209).

**Figura 2.82: Reações elásticas do lintel via equações de Maney**



Fonte: O Autor (2019)

Transladam-se as reações elásticas do lintel para o eixo dos painéis – parede, mediante equilíbrio dos nós inicial e final ( $O_i, O_f$ ), obtendo:

$$\sum M(O_i) = 0 \quad \therefore \quad M_i = M_i^L - V_i^L \cdot d_i \quad (2.105 \ a)$$

$$\sum M(O_f) = 0 \quad \therefore \quad M_f = M_f^L + V_f^L \cdot d_f \quad (2.105 \ b)$$



$$\sum F_{O_i}(y_L) = 0 \quad \therefore \quad V_i = V_i^L \quad (2.105 \text{ c})$$

$$\sum F_{O_f}(y_L) = 0 \quad \therefore \quad V_f = V_f^L \quad (2.105 \text{ d})$$

Matricialmente:

$$\{M\} = [R_L] \cdot \{M_L\} \quad (2.106)$$

onde:  $\{M\}^T = \{M_i \quad M_f \quad V_i \quad V_f\}$  é o vetor de reações elásticas no CG dos painéis – parede;

$\{M_L\}^T = \{M_i^L \quad M_f^L \quad V_i^L \quad V_f^L\}$  é o vetor de reações elásticas nas extremidades do lintel e

$$[R_L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -d_i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_f \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ é a matriz de correlação.}$$

Utilizam-se as equações de Maney sob a formulação matricial em consonância com o método dos deslocamentos por superposição de sistemas principal e derivados, ver Parcel e Maney (1944, p. 147 – 172). As reações elásticas do lintel ficam expressas no seguinte sistema:

$$\{M_L\} = [k_L] \cdot \{d^L\} \quad \therefore \quad \begin{Bmatrix} M_i^L \\ M_f^L \\ V_i^L \\ V_f^L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_i^L & a^L & -b_i^L & b_i^L \\ a^L & k_f^L & -b_f^L & b_f^L \\ -b_i^L & -b_f^L & t^L & -t^L \\ b_i^L & b_f^L & -t^L & t^L \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \phi_i^L \\ \phi_f^L \\ v_i^L \\ v_f^L \end{Bmatrix} \quad (2.107)$$

$$\text{com: } \varphi_{c_L} = \frac{3 \cdot E \cdot I_L}{G \cdot A_L \cdot L_L^2} \cdot k_{c_L}; \quad t^L = \frac{2 \cdot b^L}{L_L}; \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}; \quad A_L = e_L \cdot h_L; \quad I_L = \frac{e_L \cdot h_L^3}{12};$$

$$k^L = k_i^L = k_f^L = \frac{4 \cdot E \cdot I_L}{L_L} \cdot \frac{1 + \varphi_{c_L}}{1 + 4 \cdot \varphi_{c_L}}; \quad a^L = \frac{2 \cdot E \cdot I_L}{L_L} \cdot \frac{1 - 2 \cdot \varphi_{c_L}}{1 + 4 \cdot \varphi_{c_L}}; \quad b^L = b_i^L = b_f^L = \frac{k^L + a^L}{L_L};$$

$k_{c_L}, e_L, h_L$  e  $I_L$  é o fator de forma, a base, a altura e o momento de inércia (respectivamente) para a seção transversal do lintel.

Será admitido que a rigidez à flexão (tida por infinita) dos painéis – parede, conduz a manutenção dos deslocamentos na extremidade do lintel  $\{d^L\}$  sobre os deslocamentos no CG das paredes  $\{d\}$ . Resultando em:

$$\{d\} = [I] \cdot \{d^L\} \quad (2.108)$$

onde:  $\{d\}^T = \{\theta_i \quad \theta_f \quad v_i \quad v_f\}$ ;  $\{d^L\}^T = \{\phi_i^L \quad \phi_f^L \quad v_i^L \quad v_f^L\}$  e  $[I]$  é a matriz identidade.

Por fim, quanto à análise dos lintéis, aplica-se a equação (2.108) na eq. (2.107), resultando em:

$$\{M_L\} = [k_L] \cdot [I] \cdot \{d\} \equiv [k_L] \cdot \{d\} \quad (2.109 a)$$

para compor  $\{M\}$  em termos de  $\{M_L\}$ , basta proceder a transformação de referencial (mediante pré-multiplicação ao vetor de forças por  $[R_L]$  e transformação para tensores de 2ª ordem na matriz  $[k_L]$ ), obtendo:

$$\{M\} = [K] \cdot \{d\} \quad (2.109 b)$$

onde:  $\{M\} = [R_L] \cdot \{M_L\}$ ;  $[K] = [R_L] \cdot [k_L] \cdot [k_L]^T$ ;  $\{M\}^T = \{M_i \quad M_f \quad V_i \quad V_f\}$ ;  $t = t^L$ ;

$$b_i = b_i^L + d_i \cdot t^L; \quad b_f = b_f^L + d_f \cdot t^L; \quad b_f^* = b_f^L - d_f \cdot t^L; \quad a_i = a^L + d_f \cdot b_i - b_f^L \cdot d_i;$$

$$a_f = a^L + d_i \cdot b_f - b_i^L \cdot d_f; \quad k_i = k_i^L + d_i \cdot b_i + b_i^L \cdot d_i; \quad k_f = k_f^L + d_f \cdot b_f + b_f^L \cdot d_f \quad e$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_i & a_i & -b_i & b_i \\ a_f & k_f & -b_f & b_f \\ -b_i & b_f^* & t & -t \\ b_i & b_f & -t & t \end{bmatrix}.$$

resultando nas reações elásticas no CG dos painéis – parede, transformadas pela técnica do meio contínuo, nas reações elásticas distribuídas ( $\bar{M}_i$ ,  $\bar{V}_i$ ,  $\bar{M}_f$  e  $\bar{V}_f$ ), ao longo da distância  $h$  entre os lintéis, como:

$$\bar{M}_i = \frac{M_i}{h} = \frac{k_i \cdot \theta_i + a_i \cdot \theta_f - b_i \cdot v_i + b_i \cdot v_f}{h} \quad (2.110 a)$$

$$\bar{V}_i = \frac{V_i}{h} = \frac{-b_i \cdot \theta_i + b_f^* \cdot \theta_f + t \cdot v_i - t \cdot v_f}{h} \quad (2.110 b)$$

$$\bar{M}_f = \frac{M_f}{h} = \frac{a_f \cdot \theta_i + k_f \cdot \theta_f - b_f \cdot v_i + b_f \cdot v_f}{h} \quad (2.110 c)$$

$$\bar{V}_f = \frac{V_f}{h} = \frac{b_i \cdot \theta_i + b_f \cdot \theta_f - t \cdot v_i + t \cdot v_f}{h} \quad (2.110 d)$$

com:  $v_i = \omega_i \cdot \phi'$  e  $v_f = \omega_f \cdot \phi'$  (ver definição da equação 2.94 e); bem como através de geometria. Conclui-se:  $\theta_i = v_i / d_4 = 2 \cdot \omega_i \cdot \phi' \cdot (L_4)^{-1}$  e  $\theta_f = v_f / d_5 = 2 \cdot \omega_f \cdot \phi' \cdot (L_5)^{-1}$ . Sendo

$\omega_i$  a ordenada setorial (do diagrama  $\omega_{pc}$  apresentado nas figuras 2.101 e 5.9) no ponto  $i$  (ver figura 2.82) e  $\omega_f$  a ordenada setorial (do diagrama  $\omega_{pc}$ ) no ponto  $f$  (ver figura 2.82).

### c) Equações diferenciais dos painéis – parede

Mediante deformação específica axial dos painéis – paredes em termos dos esforços normais de cada um dos referidos painéis, expressa-se as derivadas segundas dos deslocamentos  $\delta_i$ , por:

$$(E.A_1). \delta_1'' = p_1 + q_2 - q_3 \quad (2.111 a)$$

$$(E.A_2). \delta_2'' = p_2 + q_1 - q_2 \quad (2.111 b)$$

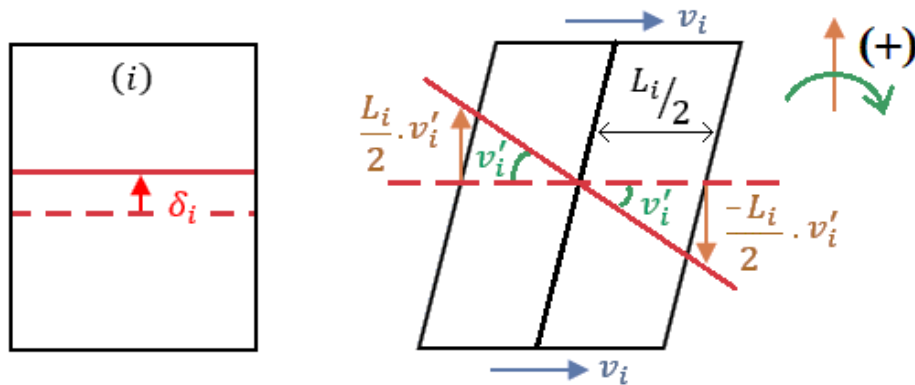
$$(E.A_3). \delta_3'' = p_3 + q_3 + q_4 \quad (2.111 c)$$

$$(E.A_4). \delta_4'' = p_4 - q_1 - \bar{V}_i \quad (2.111 d)$$

$$(E.A_5). \delta_5'' = p_5 - q_4 - \bar{V}_f \quad (2.111 e)$$

A compatibilidade de deslocamentos verticais nos pontos de interseção é analisada para adoção de rotações  $v'_i$  em torno do eixo axial no CG do painel – parede. Vide na figura 2.83 a notação positiva do deslocamento e da rotação.

**Figura 2.83: Convenção dos deslocamentos nas interseções dos painéis – parede**



Fonte: O Autor (2019)

Expressam-se, a compatibilização de deslocamentos nas interseções das paredes do núcleo estrutural apresentado na figura 2.79, como:

$$\delta_2 + \frac{L_2}{2} \cdot v'_2 = \delta_4 + \frac{L_4}{2} \cdot v'_4 \quad (2.112 \ a)$$

$$\delta_2 - \frac{L_2}{2} \cdot v'_2 = \delta_1 + \frac{L_1}{2} \cdot v'_1 \quad (2.112 \ b)$$

$$\delta_1 - \frac{L_1}{2} \cdot v'_1 = \delta_3 - \frac{L_3}{2} \cdot v'_3 \quad (2.112 \ c)$$

$$\delta_3 + \frac{L_3}{2} \cdot v'_3 = \delta_5 - \frac{L_5}{2} \cdot v'_5 \quad (2.112 \ d)$$

Derivam-se as equações (2.112) em relação ao eixo axial  $x$ , reescrevendo-nas como:

$$\delta_2'' + \frac{L_2}{2} \cdot v_2''' = \delta_4'' + \frac{L_4}{2} \cdot v_4''' \quad (2.113 \ a)$$

$$\delta_2'' - \frac{L_2}{2} \cdot v_2''' = \delta_1'' + \frac{L_1}{2} \cdot v_1''' \quad (2.113 \ b)$$

$$\delta_1'' - \frac{L_1}{2} \cdot v_1''' = \delta_3'' - \frac{L_3}{2} \cdot v_3''' \quad (2.113 \ c)$$

$$\delta_3'' + \frac{L_3}{2} \cdot v_3''' = \delta_5'' - \frac{L_5}{2} \cdot v_5''' \quad (2.113 \ d)$$

com;  $\delta_i$  sendo o deslocamento axial no CG do painel – parede  $i$ .

Matricialmente reescreve-se a junção das equações (2.111) a (2.113), como:

$$\{q\} = [M_1]^{-1} \cdot [M_3] \cdot \{v'\} + [M_1]^{-1} \cdot [M_4] \cdot \{v_w'''\} + [M_1]^{-1} \cdot [M_{10}] \cdot \{p\} \quad (2.114)$$

onde:  $\{v_w\}^T = \{v_w \quad \omega_w \quad \phi_w\}$  é o vetor de deslocamentos no sistema local dos painéis – parede (o índice  $w$  expressa que as grandezas estão no sistema de local de referência);  $\{v\}^T = \{v \quad \omega \quad \phi\}$  é o vetor dos deslocamentos no CG para o sistema global de referências;  $\{p\}$  é o vetor do peso – próprio dos painéis – parede;  $\{q\}$  é o vetor de carga distribuída verticalmente nas interseções dos painéis;  $A_i, L_i$  são a área da seção transversal e comprimento do painel – parede  $i$  (respectivamente);  $b_i, t, b_f$  são os coeficientes de rigidez das equações de Maney e  $\omega_i, \omega_f$  são as coordenadas do diagrama de ordenadas setoriais nos extremos inicial e final dos lintéis.

$$\begin{aligned}
e: [M_1] &= \begin{bmatrix} A_2 + A_4 & -A_4 & 0 & 0 \\ -A_1 & A_1 + A_2 & -A_2 & 0 \\ 0 & -A_3 & A_1 + A_3 & A_1 \\ 0 & 0 & A_5 & A_3 + A_5 \end{bmatrix}; [M_{10}] = \begin{bmatrix} 0 & -A_4 & 0 & A_2 & 0 \\ -A_2 & A_1 & 0 & 0 & 0 \\ A_3 & -A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A_5 & 0 & A_3 \end{bmatrix}; \\
[M_4] &= \frac{E}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -L_2 \cdot A_2 \cdot A_4 & 0 & L_4 \cdot A_2 \cdot A_4 & 0 \\ -L_1 \cdot A_1 \cdot A_2 & -L_2 \cdot A_1 \cdot A_2 & 0 & 0 & 0 \\ -L_1 \cdot A_1 \cdot A_3 & 0 & L_3 \cdot A_1 \cdot A_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L_3 \cdot A_3 \cdot A_5 & 0 & -L_5 \cdot A_3 \cdot A_5 \end{bmatrix}; [M_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_2 \end{bmatrix}; \\
[M_3] \cdot \{v'\} &= \{M_2\} = \begin{Bmatrix} -A_2 \cdot \bar{V}_i \\ 0 \\ 0 \\ -A_3 \cdot \bar{V}_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \cdot \phi' \\ 0 \\ 0 \\ d_2 \cdot \phi' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v' \\ \omega' \\ \phi' \end{Bmatrix}; \{q\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix}; \{p\} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{Bmatrix};
\end{aligned}$$

$$d_1 = -\frac{A_2}{h} \cdot \left[ \left( -2 \cdot \frac{b_i}{L_4} + t \right) \cdot \omega_i + \left( 2 \cdot \frac{b_f}{L_5} - t \right) \cdot \omega_f \right] \text{ e } d_2 = -\frac{A_3}{h} \cdot \left[ \left( 2 \cdot \frac{b_i}{L_4} - t \right) \cdot \omega_i + \left( 2 \cdot \frac{b_f}{L_5} + t \right) \cdot \omega_f \right].$$

#### d) Equações de equilíbrio em termo dos esforços cortantes

Após promover o equilíbrio do núcleo estrutural em relação aos esforços cortantes, aplica-se a equação diferencial da linha elástica de vigas. E ressalta-se que nos painéis – parede (4) e (5), vide figura 2.81, são utilizadas as equações de G. A. Maney (formuladas em 1915). Por fim, para cada i-ésima parede que compõe o núcleo estrutural são apresentados os esforços cortantes  $\mathcal{V}_i$ , como:

$$\mathcal{V}_1 = -J_1 \cdot v_1''' + (q_2 + q_3) \cdot \frac{L_1}{2} \quad (2.115 a)$$

$$\mathcal{V}_2 = -J_2 \cdot v_2''' + (q_1 + q_2) \cdot \frac{L_2}{2} \quad (2.115 b)$$

$$\mathcal{V}_3 = -J_3 \cdot v_3''' + (q_4 - q_3) \cdot \frac{L_3}{2} \quad (2.115 c)$$

$$\mathcal{V}_4 = -J_4 \cdot v_4''' - q_1 \cdot \frac{L_4}{2} - \bar{M}_i \quad (2.115 d)$$

$$\mathcal{V}_5 = -J_5 \cdot v_5''' + q_4 \cdot \frac{L_5}{2} - \bar{M}_f \quad (2.115 e)$$

sendo:  $q_i, \mathcal{V}_i, L_i$  a carga vertical distribuída na interseção  $i$ , o esforço cortante na parede  $i$  e o comprimento do painel – parede  $i$ . E  $v_i$  é o deslocamento no CG do painel – parede  $i$ , sob a direção do eixo local  $y$ .

Analisando os esforços cortantes, das equações (2.115), obtidos via equações de equilíbrio das paredes e ordenando-os matricialmente, escreve-se:

$$\{\mathcal{V}_\omega\} = [M_5] \cdot \{v_\omega'''\} + [M_6] \cdot \{v'\} + [M_7] \cdot \{q\} \quad (2.116)$$

sendo:  $\{\mathcal{V}_\omega\}$  o vetor de esforços cortantes no sistema local de referências;  $J_i = E \cdot I_{z_i}$ ;

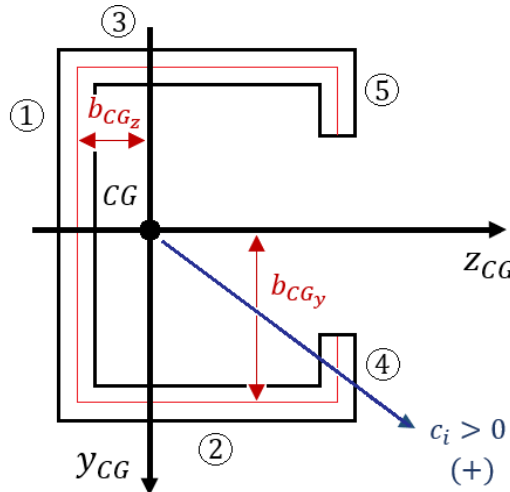
$$d_3 = -\frac{1}{h} \cdot \left[ \left( -2 \cdot \frac{k_i}{L_4} - b_i \right) \cdot \omega_i + \left( 2 \cdot \frac{a}{L_5} + b_i \right) \cdot \omega_f \right]; d_4 = -\frac{1}{h} \cdot \left[ \left( 2 \cdot \frac{a}{L_4} - b_f \right) \cdot \omega_i + \left( 2 \cdot \frac{k_f}{L_5} + b_f \right) \cdot \omega_f \right];$$

$$[M_5] = \begin{bmatrix} -J_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -J_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -J_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -J_5 \end{bmatrix}; [M_7] = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & L_1 & L_1 & 0 \\ L_2 & L_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L_3 & L_3 \\ -L_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_5 \end{bmatrix} \text{ e } [M_6] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \\ 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}.$$

Expressa-se o vetor  $\{\mathcal{V}_\omega\}$  em termos de  $\{v'\}$ , isto mediante a substituição da equação (2.114) na eq. (2.116). Além do mais, transladando o vetor de deslocamentos locais  $\{v_\omega\}$  para o sistema global de referências (via transformação  $\{v_\omega\} = [M_8] \cdot \{v\}$ ), vide figuras 2.84 e 2.85 (a), daí escreve-se:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{V}_\omega\} &= ([M_8] + [M_7] \cdot [M_1]^{-1} \cdot [M_3]) \cdot \{v'\} + [M_7] \cdot [M_1]^{-1} \cdot [M_{10}] \cdot \{p\} \\ &\quad + ([M_5] + [M_7] \cdot [M_1]^{-1} \cdot [M_4]) \cdot [M_8] \cdot \{v\} \end{aligned} \quad (2.117)$$

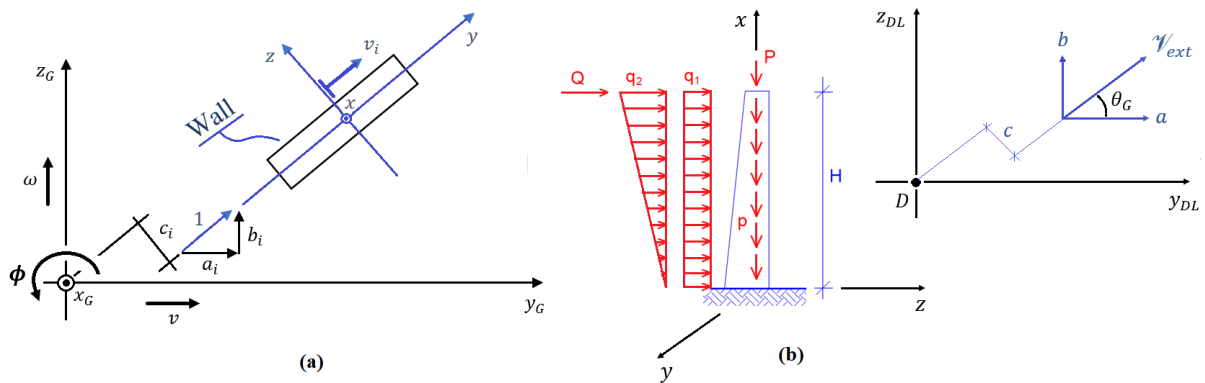
**Figura 2.84: Transformação de coordenadas locais para global**



Fonte: O Autor (2019)

$$\text{com: } [M_8] = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -b_{CG_z} \\ 0 & -1 & b_{CG_y} \\ 0 & -1 & -(b_y - b_{CG_y}) \\ -1 & 0 & (b_z - b_{CG_z}) \\ -1 & 0 & (b_z - b_{CG_z}) \end{bmatrix}.$$

**Figura 2.85: Painéis – parede: (a) transformação de coordenadas locais para global; (b) carregamento atuante no pilar e consequente esforço cortante externo  $\mathcal{V}_{ext}$  gerado**



Fonte: O Autor (2019)

Realizando o equilíbrio de esforços cortantes  $\mathcal{V}_{ext}$  gerados pelo carregamento externo, vide figura 2.85 (b), obtém-se:

$$\mathcal{V}_{ext} \cdot \{A^*\} = [M_8]^T \cdot \{\mathcal{V}_\omega\} + [M_9] \cdot \{v'\} \quad (2.118)$$

com:  $I_{t_i}$  – o momento de inércia torsional do painel – parede genérico  $i$ ;

$\theta_G$  – o ângulo formado entre o eixo global  $y_G$  e o local  $y$ , ver fig. 2.85 (b) e

$e_z$  – a distância entre o centro de carga (CC) e o centro de gravidade (CG).

$$[M_9] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G \cdot \sum_i^n I_{t_i} \end{bmatrix}; \quad \{A^*\} = \begin{Bmatrix} \cos(\theta_G) \\ \sin(\theta_G) \\ e_z \cdot \cos(\theta_G) \end{Bmatrix};$$

$$\mathcal{V}_{ext} = D_1 \cdot x^2 + D_2 \cdot x + D_3;$$

$$D_1 = -q_2 \cdot (2 \cdot H)^{-1};$$

$$D_2 = -q_1 \text{ e}$$

$$D_3 = Q + (q_1 \cdot H).$$

### e) Sistema de equações diferenciais do pilar em núcleo

Aplica-se a equação (2.118) na eq. (2.117) e resulta como equação diferencial (expressa no centro de gravidade), para o pilar em formato de núcleo estrutural apresentado na figura 2.64 (b), a seguinte:

$$-[J].\{v'''\} + [S].\{v'\} = \{\mathcal{V}_f\} \quad (2.119)$$

sendo:  $[J] = -[M_8]^T.([M_5] + [M_7].[M_1]^{-1}.[M_4]).[M_8]$  ;

$[S] = [M_8]^T.([M_6] + [M_7].[M_1]^{-1}.[M_3]) + [M_9]$  e

$\{\mathcal{V}_f\} = \mathcal{V}_{ext}.\{A^*\} - [M_8]^T.([M_7].[M_1]^{-1}.[M_{10}]).\{p\}$ .

Por fim, realiza-se o translado das coordenadas do centro de gravidade para o centro de torção, mediante matriz de transformação  $[T]$ . Ficando o sistema de EDO's expresso por:

$$-[T]^T.[J].[T].\{v_D'''\} + [T]^T.[S].[T].\{v_D'\} = [T]^T.\{\mathcal{V}_f\} \quad (2.120)$$

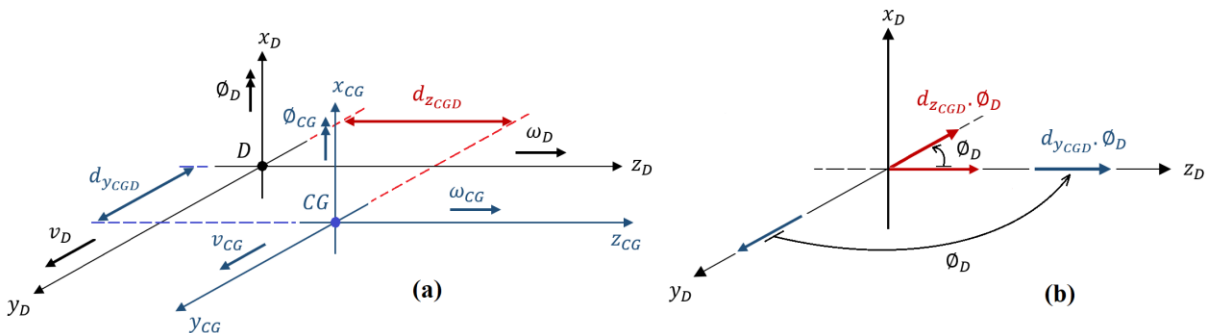
sendo:  $\{v\} \equiv \{v_{CG}\} = [T].\{v_D\}$  ;

$\{v_{CG}\}, \{v_D\}$  – deslocamentos no centro de gravidade e no centro de torção e

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -z_{CG} \\ 0 & 1 & y_{CG} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

onde:  $\{v_D\}$  é o vetor de deslocamentos no centro de torção;  $[T]$  é a matriz de translado de coordenadas do CG para o centro de torção e  $y_{CG}, z_{CG}$  são as coordenadas do centro de gravidade em relação à origem adotada. Na figura 2.86 é apresentada graficamente a transformação de coordenadas do CG para o centro de torção (D).

**Figura 2.86: Transformação de coordenadas do CG para D: (a) translações e (b) rotação**



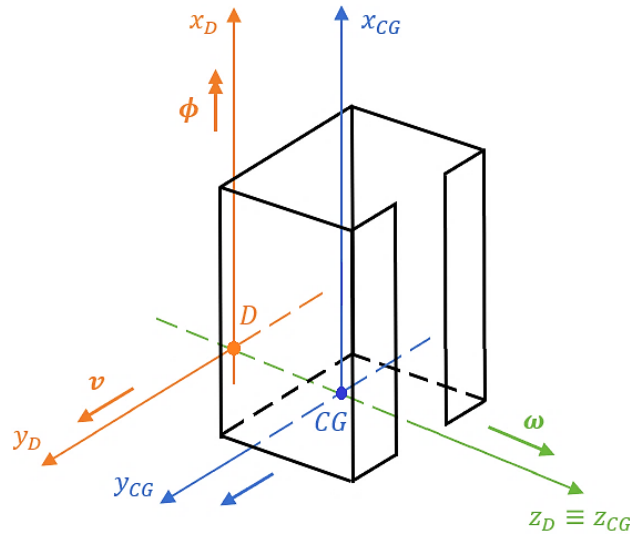
Fonte: O Autor (2019)



### f) Desacoplamento do sistema de EDO's do pilar em núcleo

O sistema de EDO's apresentado na equação (2.119) é acoplado, uma vez que os vetores  $\{v''''\}^T = \{v'''' \quad \omega'''' \quad \phi''''\}$  e  $\{v'\}^T = \{v' \quad \omega' \quad \phi'\}$  são pré-multiplicados por matrizes não diagonais. Ressaltando-se ainda que o deslocamento  $v$  ocorre na direção do eixo  $y_D$  definido com origem no centro de torção, bem como o deslocamento  $\omega$  para o eixo  $z_D$  e a rotação  $\phi$  ocorre em torno do eixo axial  $x_D$  (vide figura 2.87).

**Figura 2.87: Eixos coordenados sobre o CG e o centro de torção D**



Fonte: O Autor (2019)

A diagonalização do sistema apresentado na equação (2.119) é realizado mediante três transformações de referencial, sendo estas:

- **1ª Transformação de referencial:** Mediante matriz de translação e rotação  $[R_e]$  do sistema de coordenadas  $(y_D, z_D)$ , no centro de torção, para os eixos principais de inércia  $(y_R, z_R)$ .

$$\{v\} = [R_e] \cdot \{\bar{v}\} \quad (2.121 a)$$

onde a matriz  $[R_e]$  é definida mediante figura 2.29 e eq.'s (2.24). Ficando o sistema reescrito como:

$$-[\bar{J}] \cdot \{\bar{v}''''\} + [\bar{S}] \cdot \{\bar{v}'\} = \{\bar{\mathcal{V}}_f\} \quad (2.121 b)$$

sendo:  $[\bar{J}] = [R_e]^T \cdot [J] \cdot [R_e]$  ;  $[\bar{S}] = [R_e]^T \cdot [S] \cdot [R_e]$  e  $\{\bar{\mathcal{V}}_f\} = [R_e]^T \cdot \{\mathcal{V}_f\}$ .

$$\text{com: } [R_e] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & b \\ \sin \theta & \cos \theta & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- **2ª Transformação de referencial:** Converter a matriz de rigidez  $[J]$  em matriz identidade, via transformação quadrática por  $[\bar{J}]^{-1/2}$ . Tem-se:

$$-\{\bar{v}'''\}^* + [S]^* \cdot \{v'\}^* = \{\mathcal{V}_f\}^* \quad (2.121 c)$$

sendo:  $\{\bar{v}\} = [\bar{J}]^{-\frac{1}{2}} \cdot \{v\}^*$ ;  $[S]^* = [\bar{J}]^{-1/2} \cdot [\bar{S}] \cdot [\bar{J}]^{-1/2}$  e  $\{\mathcal{V}_f\}^* = [\bar{J}]^{-1/2} \cdot \{\bar{\mathcal{V}}_f\}$ .

- **3ª Transformação de referencial:** Diagonalização da matriz  $[S]^*$  através da análise modal do sistema (ver método de Jacobi no item 2.6).

$$-\{\bar{v}'''\}^{**} + [\lambda^2] \cdot \{v'\}^{**} = \{\mathcal{V}_f\}^{**} \quad (2.121 d)$$

onde:  $[\lambda^2] = [A_V]^T \cdot [S]^* \cdot [A_V]$  é a matriz de autovalores da matriz  $[S]^*$ ;  $[A_V]$  é a matriz de autovetores; e  $\{v\}^* = [A_V] \cdot \{v\}^{**}$ ;  $\{\mathcal{V}_f\}^{**} = [A_V]^T \cdot \{\mathcal{V}_f\}^*$ .

Após a diagonalização do sistema expresso na eq. (2.119), aplicam-se as condições de contorno (já adequadas ao referencial generalizado). Sendo as condições de contorno no sistema generalizado, as seguintes:

$$\{v_0\}^{**} = [\Phi]^{-1} \cdot [R_e]^{-1} \cdot \{v_o\} \quad (2.121 e)$$

$$\{\dot{v}_0\}^{**} = [\Phi]^{-1} \cdot [R_e]^{-1} \cdot \{\dot{v}_o\} \quad (2.121 f)$$

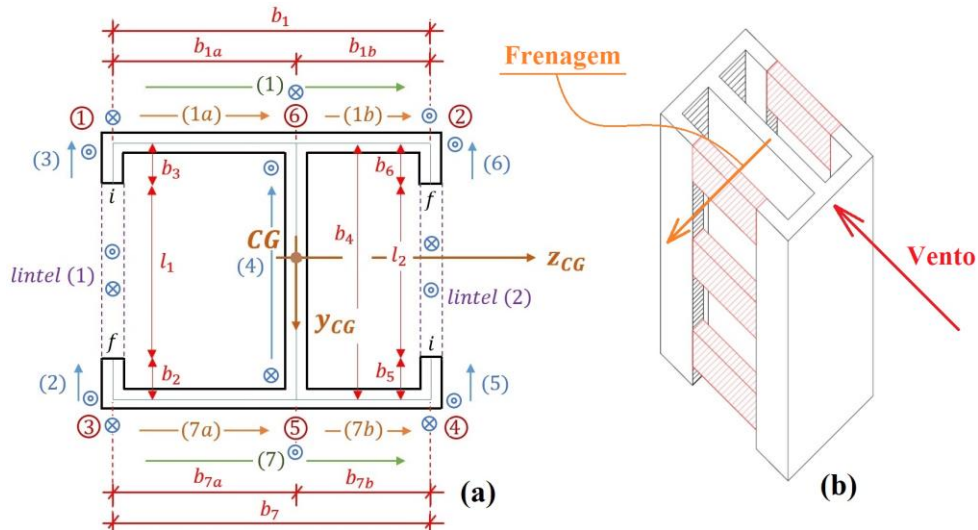
com:  $[\Phi] = [\bar{J}]^{-1/2} \cdot [A_V]$  e  $\{v_o\}, \{\dot{v}_o\}$  as condições iniciais no sistema inicial de referências. Por fim, o vetor de esforços cortantes  $\{\mathcal{V}_f\}$ , mediante matriz modal ponderada  $[\Phi]$ , é expresso no referencial generalizado sob a forma de  $\{\mathcal{V}_f\}^{**}$ , sob a forma:

$$\{\mathcal{V}_f\}^{**} = [\Phi]^T \cdot [R_e]^T \cdot \{\mathcal{V}_f\} \quad (2.121 g)$$

Desta feita, segue o processo de desacoplamento semelhante a marcha de cálculo Nº 1 (apresentada na letra d, do item 2.4). E a solução da eq. (2.121 d) é apresentada no apêndice A.

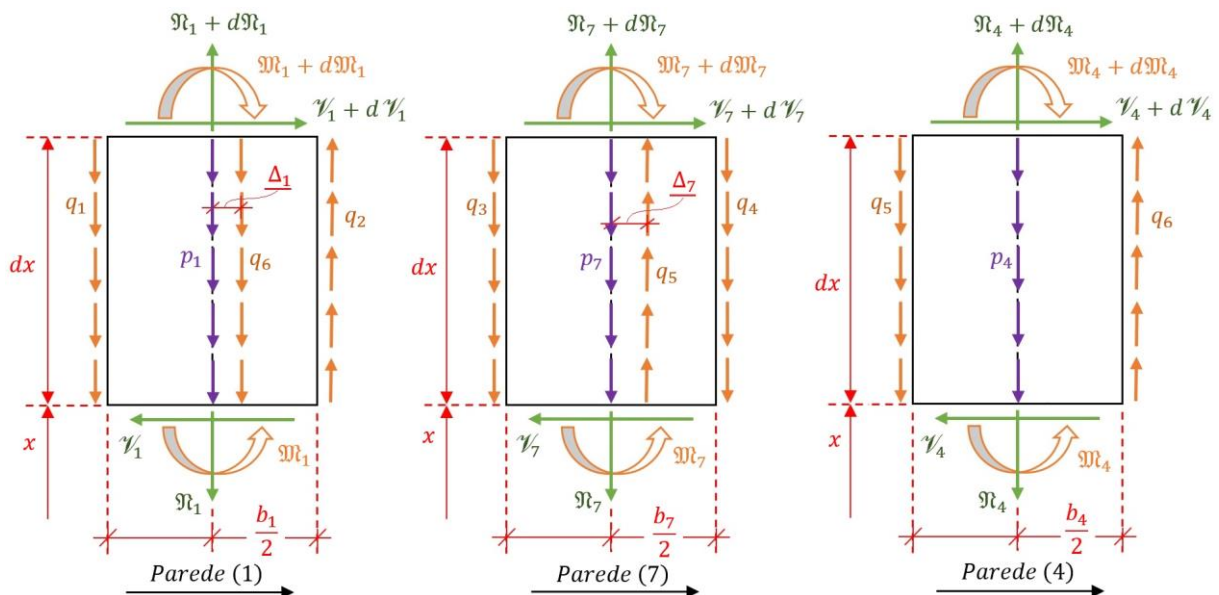
### 2.8.2. Pilar com seção transversal em duplo T

Formula-se a teoria dos painéis – parede, partindo de um pilar de seção transversal aberta e de paredes finas, sendo contraventado parcialmente por lintéis (com comprimento  $L_L$  e espaçados de eixo a eixo de  $h$ ). Com o formato de núcleo estrutural e composto por sete paredes e seis interseções, conforme apresentado na figura 2.88.

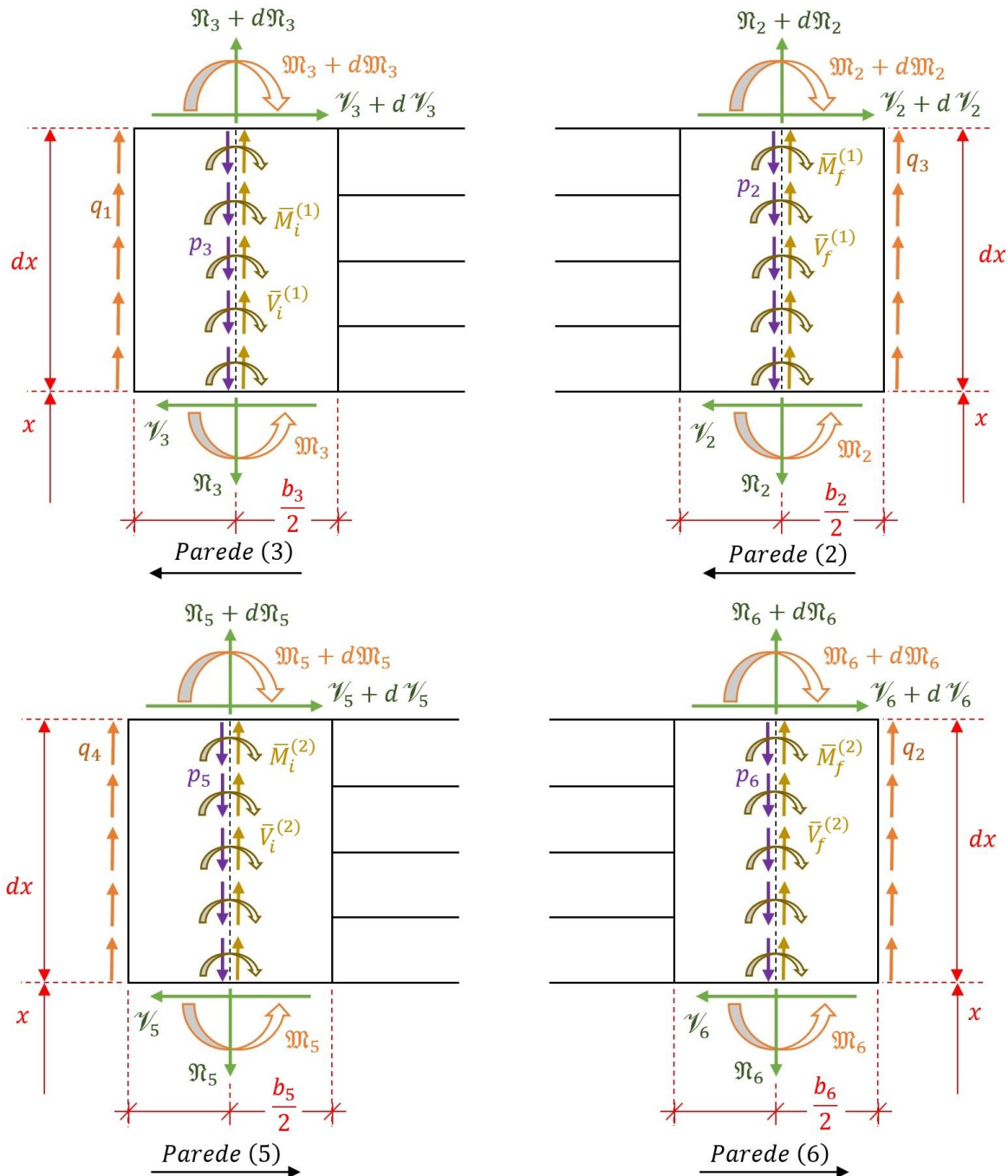
**Figura 2.88: Pilar em seção de duplo T: (a) painéis – parede e (b) ação do vento e frenagem**

Fonte: O Autor (2019)

Ressaltando que em Mancini (1972), Barbosa (1980), Tso (1983) e em Smith e Taranath (1972) os painéis – parede são analisados núcleos estruturais em formato de C e destinados a edifícios altos, já nesta tese procede-se a formulação da teoria dos painéis – parede para pilares de pontes, adotando-se assim seções simétricas para caracterização da seção transversal típica dos referidos elementos estruturais. Porém, a fim de tornar o equacionamento genérico, faz-se a demonstração com dimensões independentes da imposição de condições de simetria. Nas figuras 2.89 e 2.90 são apresentados os elementos diferenciais das paredes que compõem a seção em duplo T, bem como os fluxos de cisalhamento nas interseções.

**Figura 2.89: Elementos diferenciais dos painéis – parede: (a) 1, (b) 7 e (c) 4**

Fonte: O Autor (2019)

**Figura 2.90: Elementos diferenciais do: (a) painel – parede 2 e 3; e (b) painel – parede 5 e 6**

Fonte: O Autor (2019)

**a) Equações de equilíbrio dos elementos diferenciais**

Equilibrando os elementos diferenciais das paredes, conforme apresentado nas figuras 2.89 e 2.90, conclui-se por variação dos momento fletores e do esforços normais, os seguintes:

$$\frac{d\mathfrak{M}_1}{dx} = -\mathcal{V}_1 + (q_1 + q_2) \cdot \frac{b_1}{2} - q_6 \cdot \frac{(b_{1a} - b_{1b})}{2} \quad (2.122 a)$$

$$\frac{d\mathfrak{N}_1}{dx} = p_1 + q_1 - q_2 + q_6 \quad (2.122 b)$$

$$\frac{d\mathfrak{M}_2}{dx} = -\mathcal{V}_2 + q_3 \cdot \frac{b_2}{2} - \bar{M}_f^{(1)} \quad (2.122 c)$$

$$\frac{d\mathfrak{N}_2}{dx} = p_2 - q_3 - \bar{V}_f^{(1)} \quad (2.122 d)$$

$$\frac{d\mathfrak{M}_3}{dx} = -\mathcal{V}_3 - q_1 \cdot \frac{b_3}{2} - \bar{M}_i^{(1)} \quad (2.122 e)$$

$$\frac{d\mathfrak{N}_3}{dx} = p_3 - q_1 - \bar{V}_i^{(1)} \quad (2.122 f)$$

$$\frac{d\mathfrak{M}_4}{dx} = -\mathcal{V}_4 + (q_5 + q_6) \cdot \frac{b_4}{2} \quad (2.122 g)$$

$$\frac{d\mathfrak{N}_4}{dx} = p_4 + q_5 - q_6 \quad (2.122 h)$$

$$\frac{d\mathfrak{M}_5}{dx} = -\mathcal{V}_5 - q_4 \cdot \frac{b_5}{2} - \bar{M}_i^{(2)} \quad (2.122 i)$$

$$\frac{d\mathfrak{N}_5}{dx} = p_5 - q_4 - \bar{V}_i^{(2)} \quad (2.122 j)$$

$$\frac{d\mathfrak{M}_6}{dx} = -\mathcal{V}_6 + q_2 \cdot \frac{b_6}{2} - \bar{M}_f^{(2)} \quad (2.122 k)$$

$$\frac{d\mathfrak{N}_6}{dx} = p_6 - q_2 - \bar{V}_f^{(2)} \quad (2.122 l)$$

$$\frac{d\mathfrak{M}_7}{dx} = -\mathcal{V}_7 + (q_3 - q_4) \cdot \frac{b_7}{2} + q_5 \cdot \frac{(b_{7a} - b_{7b})}{2} \quad (2.122 m)$$

$$\frac{d\mathfrak{N}_7}{dx} = p_7 + q_3 + q_4 - q_5 \quad (2.122 n)$$

onde as reções elásticas por lintel são representadas nas equações (2.109 b) e (2.110), resultando após aplicação dos coeficientes em cada lintel, por:

$$\{\bar{M}^{(1)}\} = [\bar{K}^{(1)}] \cdot \{\bar{d}^{(1)}\} \quad (2.123 a)$$

$$\{\bar{M}^{(2)}\} = [\bar{K}^{(2)}] \cdot \{\bar{d}^{(2)}\} \quad (2.123 b)$$

sendo:  $\{\bar{M}^{(1)}\}^T = \{\bar{M}_i^{(1)} \quad \bar{M}_f^{(1)} \quad \bar{V}_i^{(1)} \quad \bar{V}_f^{(1)}\}$ ;  $\{\bar{M}^{(2)}\}^T = \{\bar{M}_i^{(2)} \quad \bar{M}_f^{(2)} \quad \bar{V}_i^{(2)} \quad \bar{V}_f^{(2)}\}$ ;

$$\begin{aligned}\{\bar{d}^{(1)}\}^T &= \{\theta_i^{(1)} \quad \theta_f^{(1)} \quad v_i^{(1)} \quad v_f^{(1)}\}; \quad \{\bar{d}^{(2)}\}^T = \{\theta_i^{(2)} \quad \theta_f^{(2)} \quad v_i^{(2)} \quad v_f^{(2)}\}; \\ \theta_i^{(1)} &= 2 \cdot \frac{\omega_i^{(1)}}{b_3} \cdot \phi'; \quad \theta_f^{(1)} = 2 \cdot \frac{\omega_f^{(1)}}{b_2} \cdot \phi'; \quad v_i^{(1)} = \omega_i^{(1)} \cdot \phi'; \quad v_f^{(1)} = \omega_f^{(1)} \cdot \phi'; \\ \theta_i^{(2)} &= 2 \cdot \frac{\omega_i^{(2)}}{b_5} \cdot \phi'; \quad \theta_f^{(2)} = 2 \cdot \frac{\omega_f^{(2)}}{b_6} \cdot \phi'; \quad v_i^{(2)} = \omega_i^{(2)} \cdot \phi' \quad \text{e} \quad v_f^{(2)} = \omega_f^{(2)} \cdot \phi' .\end{aligned}$$

### b) Equações diferenciais dos painéis – parede e equilíbrio em cortantes

Compatibilizando os deslocamentos nas interseções das paredes e adotando-se a convenção de deslocamentos e rotações apresentada na figura 2.83, exprimem-se as equações de compatibilidade em deslocamentos nas mencionadas interseções, como:

$$\delta_3 - \frac{b_3}{2} \cdot v'_3 = \delta_1 + \frac{b_1}{2} \cdot v'_1 \quad (2.124 \ a)$$

$$\delta_1 - \frac{b_1}{2} \cdot v'_1 = \delta_6 - \frac{b_6}{2} \cdot v'_6 \quad (2.124 \ b)$$

$$\delta_2 + \frac{b_2}{2} \cdot v'_2 = \delta_7 + \frac{b_7}{2} \cdot v'_7 \quad (2.124 \ c)$$

$$\delta_5 + \frac{b_5}{2} \cdot v'_5 = \delta_7 - \frac{b_7}{2} \cdot v'_7 \quad (2.124 \ d)$$

$$\delta_7 = \delta_4 + \frac{b_4}{2} \cdot v'_4 \quad (2.124 \ e)$$

$$\delta_1 = \delta_4 - \frac{b_4}{2} \cdot v'_4 \quad (2.124 \ f)$$

Derivam-se as equações (2.124) em relação ao eixo axial  $x$ , e com as equações (2.122) em conjunto com a deformação específica por esforço normal, organiza-se matricialmente o sistema de equilíbrio dos painéis – parede, como:

$$\{q\} = [M_1]^{-1} \cdot [M_3] \cdot \{v'\} + [M_1]^{-1} \cdot [M_4] \cdot \{v'''\} + [M_1]^{-1} \cdot [M_{10}] \cdot \{p\} \quad (2.125)$$

sendo:  $\Delta_1 = b_{1a} - b_{1b}$  ;  $\Delta_7 = b_{7a} - b_{7b}$  ;  $[M_4] = E/2 \cdot [M_4^*]$  ;

$$\begin{aligned}
[M_1] &= \begin{bmatrix} A_1 + A_3 & -A_3 & 0 & 0 & 0 & A_3 \\ A_6 & A_1 - A_6 & 0 & 0 & 0 & A_6 \\ 0 & 0 & A_2 + A_7 & A_2 & -A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_5 & A_5 + A_7 & -A_5 & 0 \\ 0 & 0 & -A_4 & -A_4 & A_4 + A_7 & -A_7 \\ A_4 & -A_4 & 0 & 0 & -A_1 & A_1 + A_4 \end{bmatrix}; \{q\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix}; \{p\} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{Bmatrix}; \\
[M_4^*] &= \begin{bmatrix} -b_1 \cdot A_1 \cdot A_3 & 0 & -b_3 \cdot A_1 \cdot A_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 \cdot A_1 \cdot A_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_6 \cdot A_1 \cdot A_6 & 0 \\ 0 & b_2 \cdot A_2 \cdot A_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_7 \cdot A_2 \cdot A_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_7 \cdot A_5 \cdot A_7 \\ 0 & 0 & 0 & -b_4 \cdot A_4 \cdot A_7 & b_5 \cdot A_5 \cdot A_7 & 0 & 0 \\ 2 \cdot \Delta_1 \cdot A_1 \cdot A_4 & 0 & 0 & -b_4 \cdot A_1 \cdot A_4 & 0 & 0 & -2 \cdot \Delta_7 \cdot A_4 \cdot A_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\
[M_3] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & d_3 \\ 0 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\bar{V}_i^{(1)} \cdot A_1}{\phi'} \\ 0 & 0 & -\frac{\bar{V}_f^{(2)} \cdot A_1}{\phi'} \\ 0 & 0 & -\frac{\bar{V}_f^{(1)} \cdot A_7}{\phi'} \\ 0 & 0 & -\frac{\bar{V}_i^{(2)} \cdot A_7}{\phi'} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } [M_{10}] = \begin{bmatrix} -A_3 & 0 & A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -A_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_1 & 0 \\ 0 & A_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_7 & 0 & -A_5 \\ 0 & 0 & 0 & -A_7 & 0 & 0 & A_4 \\ -A_4 & 0 & 0 & A_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Após promover o equilíbrio do núcleo estrutural (em duplo T) com relação aos esforços cortantes, escreve-se para cada  $i$ -ésima parede a equação de equilíbrio no  $i$ -ésimo esforço cortante  $\mathcal{V}_i$ . E mediante notação matricial, tem-se:

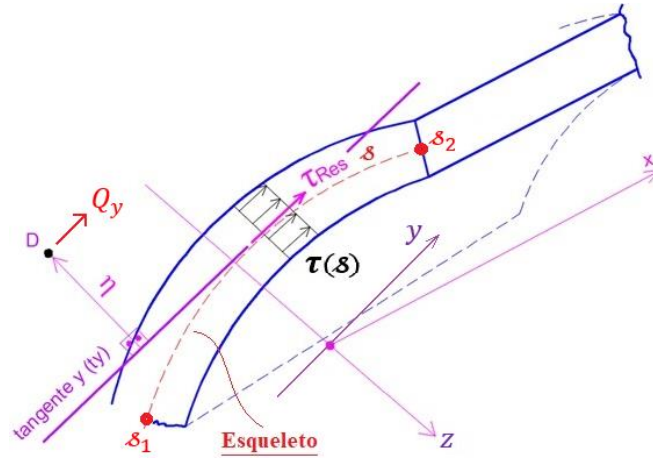
$$\{\mathcal{V}_\omega\} = [M_5] \cdot \{v_\omega'''\} + [M_6] \cdot \{v'\} + [M_7] \cdot \{q\} \quad (2.126)$$

$$\begin{aligned}
\text{sendo: } [M_6] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_5 \\ 0 & 0 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_8 \end{bmatrix}; \quad d_5 = -\frac{\bar{M}_i^{(1)}}{\phi'}; \quad d_6 = -\frac{\bar{M}_i^{(2)}}{\phi'}; \quad d_7 = -\frac{\bar{M}_f^{(1)}}{\phi'}; \quad d_8 = -\frac{\bar{M}_f^{(2)}}{\phi'}; \quad J_i = E \cdot I_{z_i}; \\
[M_5] &= \begin{bmatrix} -J_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -J_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -J_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -J_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -J_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -J_7 \end{bmatrix} \text{ e } [M_7] = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} b_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & -2 \cdot \Delta_1 \\ 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ -b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & -b_5 & 0 & 0 \\ 0 & b_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_7 & -b_7 & 2 \cdot \Delta_7 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Na Fig. 2.91 é apresentado o procedimento de transformação do vetor de deslocamentos  $\{v_\omega\}$  no sistema local para o sistema global de referências, via transformação  $\{v_\omega\} = [M_8] \cdot \{v\}$ .





**Figura 2.92: Representação gráfica da resultante  $\tau_{Res}$  e posicionamento relativo à  $D$** 

Fonte: O Autor (2019)

Ao realizar a integração ao longo do eixo esquelético  $\mathcal{S}$  do ponto  $\mathcal{S}_1$  até  $\mathcal{S}_2$  e considerando constante a espessura das paredes (espessura  $t$ ), realiza-se o equilíbrio de momento em torno do centro de torção  $D$ , conforme figura 2.92, resultando em:

$$\int_{\mathcal{S}} [\tau(s) \cdot \eta \cdot t] dS = 0 \quad (2.127)$$

Modifica-se a eq. (2.127) para termos do comprimento infinitesimal  $d\mathcal{S}$ , e a espessura  $t$  é adotada constante, assim ao substituir a tensão cisalhante  $\tau(s)$ , chega-se a:

$$t \cdot \int_{\mathcal{S}_1}^{\mathcal{S}_2} \left( \frac{Q_y \cdot M_s}{t \cdot I_z} \cdot \eta \right) d\mathcal{S} = 0 \quad (2.128)$$

Sabendo que  $Q_y$  é a carga aplicada na direção  $y$  e posicionada no centro de torção, realiza-se a integração por partes da eq. (2.128), concluindo como primeira condição de posicionamento do centro de torção, a seguinte:

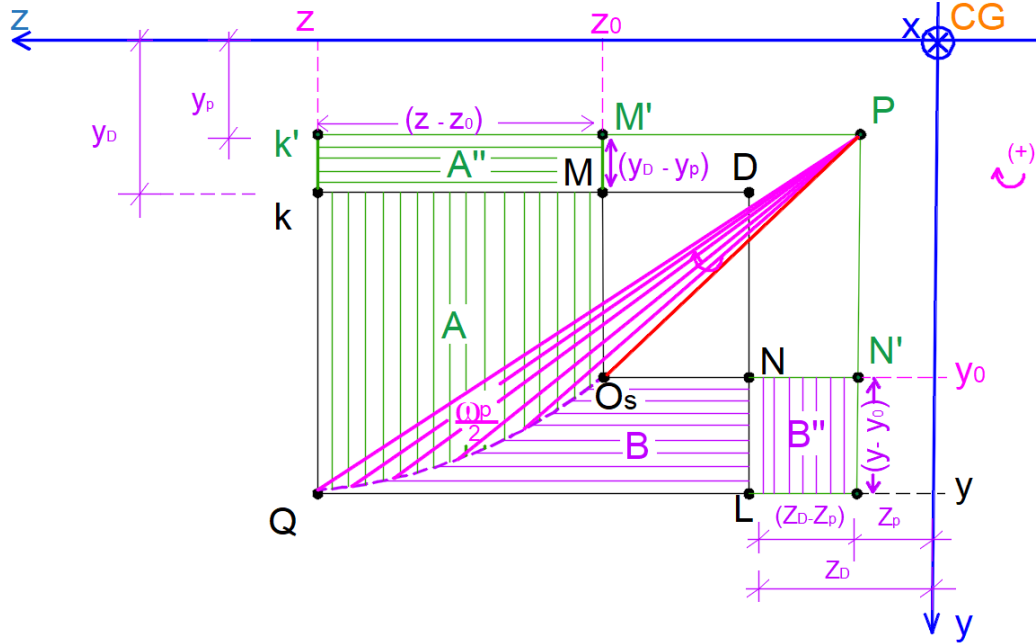
$$\int_{\mathcal{S}_1}^{\mathcal{S}_2} (\omega \cdot y) dS = 0 \quad (2.129)$$

onde:  $\omega = \int_{\mathcal{S}_1}^{\mathcal{S}_2} \eta d\mathcal{S}$  é a área setorial, sendo uma propriedade geométrica definida por Vlassov (1962). Ressalta-se que a condição na equação (2.129) advém da aplicação de cargas  $Q_y$  no centro de torção. Assim ao aplicar a carga  $Q_z$  na direção principal de inércia  $z$ , postula-se como segunda condição de posicionamento do centro de torção ( $CT \equiv D$ ), a seguinte:

$$\int_S (\omega \cdot z) dS = 0 \quad (2.130)$$

Devido a não ser viável aplicar as condições de posicionamento do centro de torção  $D$ , expressas nas equações (2.129) e (2.130), de forma direta (por sua inerente complexidade algébrica), procede-se então uma interpretação geométrica, ver Mori e Munaier Neto (2017, p. 33 – 44). Parte-se de um ponto genérico  $P$  denominado de polo arbitrário com coordenadas  $y_p$  e  $z_p$  em relação ao centro de gravidade da seção transversal, conforme é ilustrado na figura 2.93. Faz-se o cálculo da ordenada setorial  $\omega_p$  (com polo no ponto arbitrário  $P$ ) ao longo do segmento  $O_s Q$  da parede fina a ser analisado.

**Figura 2.93: Determinação geométrica do centro de torção  $D$  mediante polo arbitrário  $P$**



Fonte: O Autor (2019)

Realiza-se a varredura  $DO_sQ$ , que é igual à metade da área setorial  $\omega_{pQ}$  (uma vez que a varredura  $PO_sQ$  equivale a metade da área setorial arbitrária  $\omega_p$  do ponto  $Q$ , conforme teoria apresentada em Vlassov). Assim, via cálculo das áreas  $A, B, A'$  e  $B'$ , conclui-se que:

$$\omega = A - B \quad (2.131 a)$$

$$\omega_p = A' - B' \quad (2.131 b)$$

$$\omega = \omega_p + (y - y_0) \cdot (z_D - z_p) - (z - z_0) \cdot (y_D - y_p) \quad (2.131 c)$$

onde:  $O_s$  é a origem do eixo esqueleto;  $y_0, z_0$  são as coordenadas da origem;  $y_D, z_D$  são as coordenadas do centro de torção e  $y_p, z_p$  são as coordenadas do polo arbitrário  $P$ .

Por não ser conhecido o posicionamento do centro de torção  $D$  e esta ser a motivação de tal análise é que se aplicam as equações (2.131) nas equações (2.129) e (2.130). Após adotar a nulidade dos momentos estáticos  $M_s$  e do produto de inércia  $y.z$  (por se tratar de eixos principais de inércia), chegam-se as coordenadas do centro de torção, como:

$$z_D = z_p + dz \quad (2.132 a)$$

$$y_D = y_p + dy \quad (2.132 b)$$

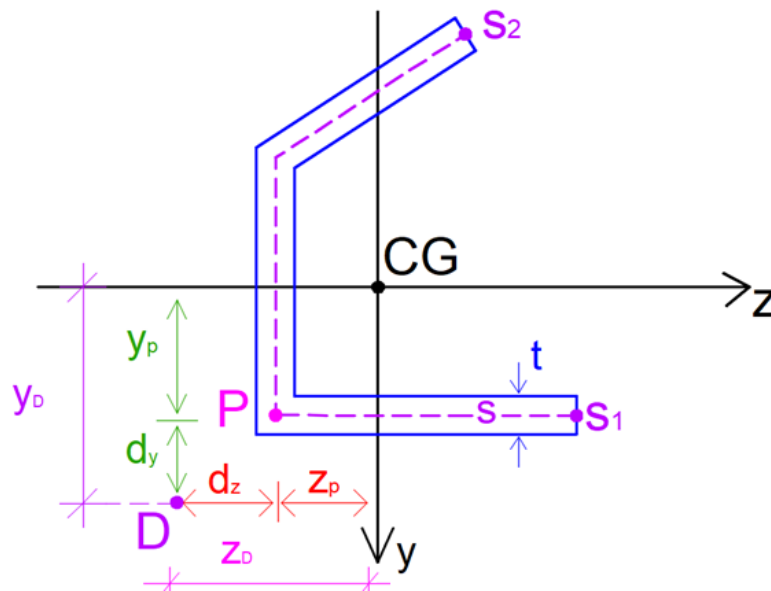
$$\text{sendo: } d_z = -\frac{1}{I_z} \cdot \int_S (\omega_p \cdot y) dS \quad \text{e} \quad d_y = \frac{1}{I_y} \cdot \int_S (\omega_p \cdot z) dS.$$

onde:  $dz$  e  $dy$  são as distâncias paralelas aos eixos centroidais  $z_{CG}$  e  $y_{CG}$ , respectivamente. As distâncias são compreendidas entre o centro de torção  $D$  e o polo arbitrário  $P$ .

#### a) Pilar em núcleo estrutural

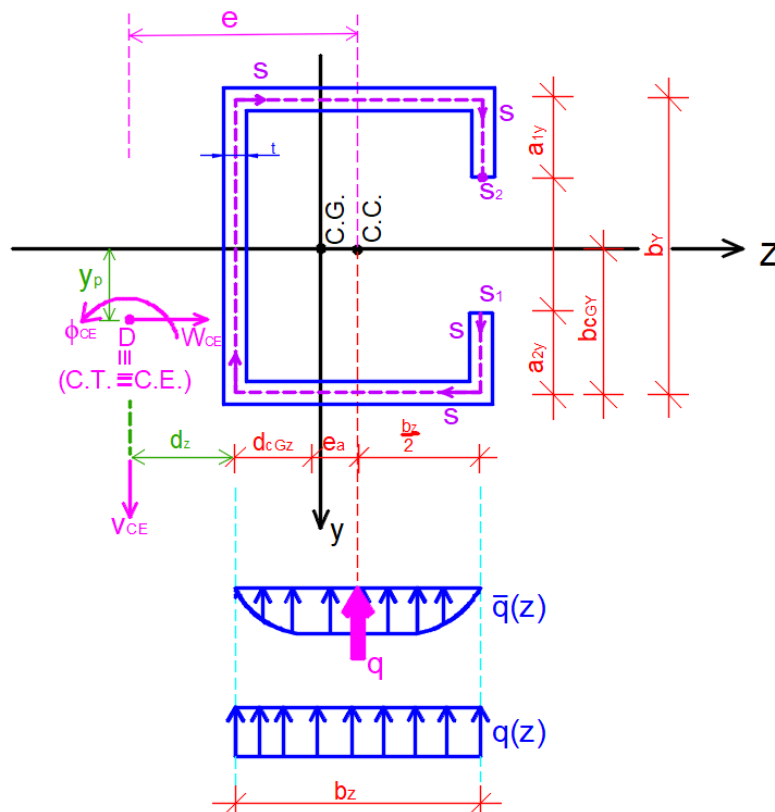
Na figura 2.94 é apresentado o posicionamento do centro de torção  $D$  em detrimento do polo arbitrário  $P$  e do centro de gravidade da seção transversal. E na figura 2.95 são indicados os graus de liberdade ( $\omega_{CE}$ ,  $v_{CE}$  e  $\phi_{CE}$ ) no centro de torção, bem como as conseguintes cotas e carregamentos transversais  $q(z)$ .

**Figura 2.94: Posicionamento do centro de torção  $D$  para a seção de paredes finas**



Fonte: O Autor (2019)

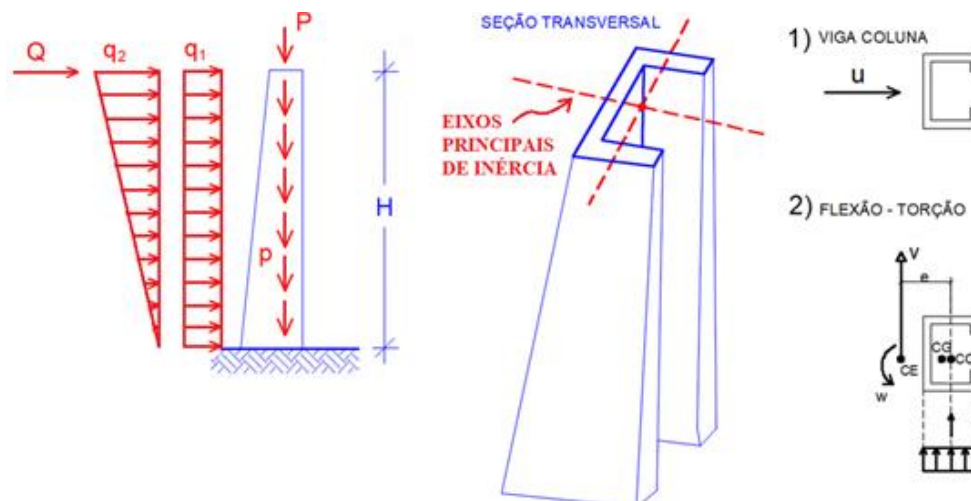
**Figura 2.95: Graus de liberdade no centro de torção  $D$**



Fonte: O Autor (2019)

Na figura 2.96 são apresentadas duas possibilidades de funcionamento estrutural do pilar em núcleo, sendo ativado o funcionamento de viga coluna quando da atuação do carregamento no eixo simétrico de inércia principal. A segunda possibilidade é a ativação da flexo – torção devido a excentricidade entre o centro de carga (CC) e o centro elástico (CE), este último também denominado de centro de torção (D).

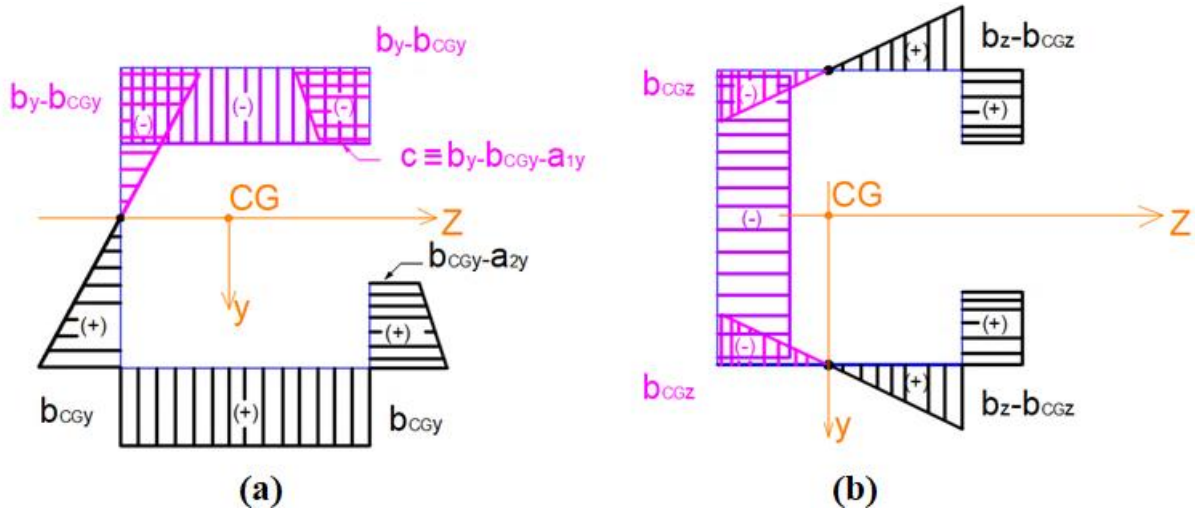
**Figura 2.96: Funcionamento estrutural do pilar de acordo com o eixo de solicitação**



Fonte: O Autor (2019)

Para a seção transversal em formato de C (com abas de reforço de tamanhos  $a_{1y}$  e  $a_{2y}$ ), os diagramas de coordenadas  $y$  e  $z$  são apresentados na figura 2.97.

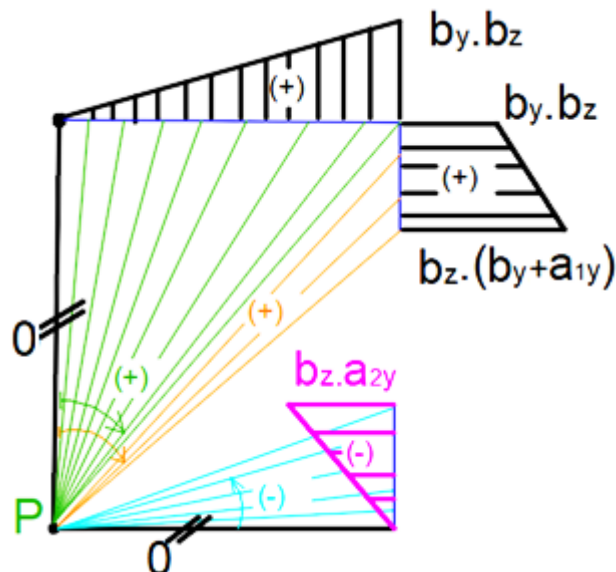
**Figura 2.97: Diagramas de: (a) coordenadas  $y$  e (b) coordenadas  $z$**



Fonte: O Autor (2019)

O diagrama de ordenadas setoriais provisórias  $\omega_p$  é apresentado na figura 2.98, para o qual o polo  $P$  é arbitrário e posicionado na interseção de duas paredes finas, a fim de facilitar o processamento.

**Figura 2.98: Diagrama de ordenadas de área setorial com polo arbitrário  $P$**



Fonte: O Autor (2019)

Postula-se o procedimento de posicionamento do centro de torção e a conseguinte determinação da inércia setorial  $I_\omega$ , através da marcha de cálculo N° 3.

### a.1) Marcha de Cálculo Nº 3

- **1ª Etapa:** Verificar se há eixo(s) de simetria(s), e impor o polo arbitrário  $P$  nos referidos eixos. Caso não haja eixo de simetria, aplica-se  $P$  em qualquer ponto ao longo do eixo esqueleto  $s$ .

**Observação:** Nas barras que contenham o ponto  $P$ , tem-se  $\omega_p$  nulo. Isso por não existir área definida entre o ponto arbitrário  $P$  e os nós inicial e final do segmento de barra em análise.

- **2ª Etapa:** Traçar o diagrama de área setorial provisório  $\omega_p$ , mediante polo arbitrário  $P$ .
- **3ª Etapa:** Traçar o diagrama de coordenadas  $y$  e  $z$  para a seção transversal. Vide o modelo apresentado na figura 2.97.
- **4ª Etapa:** Calcular as propriedades geométricas das seções transversais, posicionar o centro de gravidade e determinar os momentos de inércia  $I_z$  e  $I_y$ .
- **5ª Etapa:** Calcular via tabelas de Kurt – Beyer, ver Campanari (1985, v.3, p. 899), o cruzamento das áreas nas integrais ao longo do esqueleto  $s$ . Lembrar de usar a convenção apresentada nas figuras 2.93 e 2.94.

$$d_z = -\frac{1}{I_z} \cdot \int_s (\omega_p \cdot y) dS; \quad d_y = \frac{1}{I_y} \cdot \int_s (\omega_p \cdot z) dS$$

- **6ª Etapa:** Calcular as coordenadas do centro de torção  $D$  (também denominada de centro elástico –  $CE$ ), via:

$$z_D = z_p + d_z; \quad y_D = y_p + d_y$$

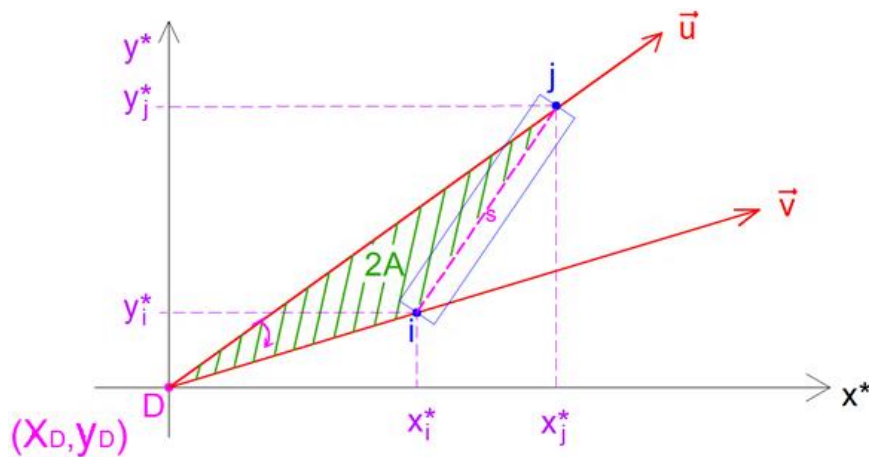
- **7ª Etapa:** Definir  $O_s$  como a origem do eixo esqueleto  $s$ . No caso de eixo de simetria, posiciona-se  $O_s$  sobre tal eixo. Em caso contrário,  $O_s$  é adotado em alguma das bordas (quinas) da seção transversal.
- **8ª Etapa:** Utilizar o centro de torção ( $D$ ) como polo de varredura e procede-se o traçado do diagrama de ordenadas setoriais  $\omega_{pc}$ .

- **9ª Etapa:** Calcular a Inércia setorial através da integração quadrática do diagrama  $\omega_{pc}$  pela espessura  $t$ , ficando expressa por:

$$I_{\omega} = \int_S (\omega_{pc})^2 dS = t \cdot \int_s (\omega_{pc})^2 ds \quad (2.133)$$

com:  $dS = t \cdot ds$ . **Observação:** Adota-se o centro de torção como polo de varredura ao longo do trecho, no intervalo do nó inicial ( $i$ ) ao final ( $j$ ) do segmento (parede). Efetua-se assim, o cálculo da área compreendida entre os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , e via o cálculo vetorial apresentado na figura 2.99.

**Figura 2.99:** Cálculo vetorial da área delimitada pelo centro de torção e os extremos do painel



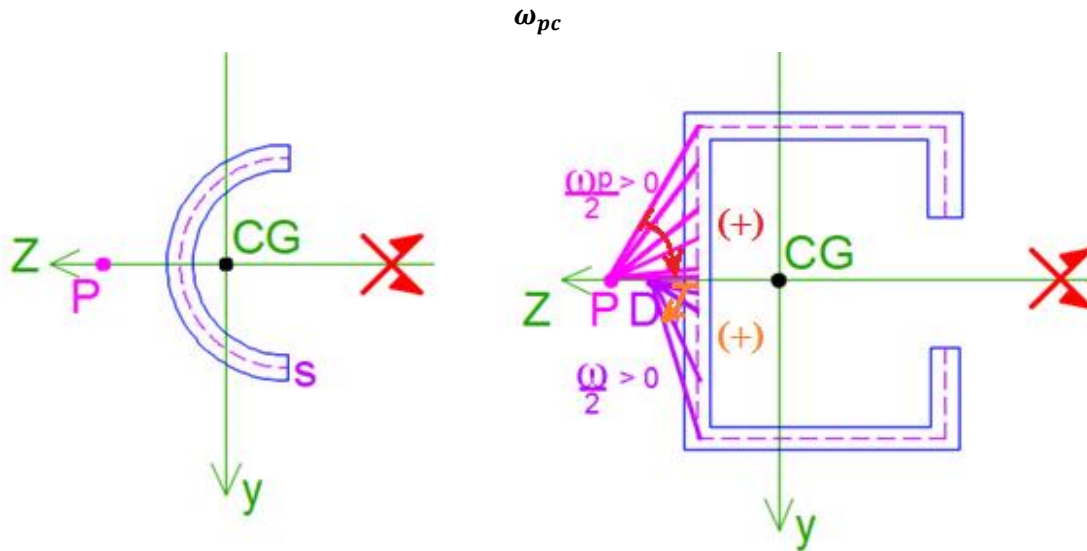
Fonte: O Autor (2019)

$$\vec{u} \times \vec{v} = [(x_j^* - x_D^*) \cdot (y_i^* - y_D^*) - (x_i^* - x_D^*) \cdot (y_j^* - y_D^*)] \cdot \vec{k}$$

adota-se o módulo do produto vetorial  $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$  igual ao dobro da área compreendida entre os pontos  $D, i$  e  $j$ . Resultando como determinate equivalente o seguinte:

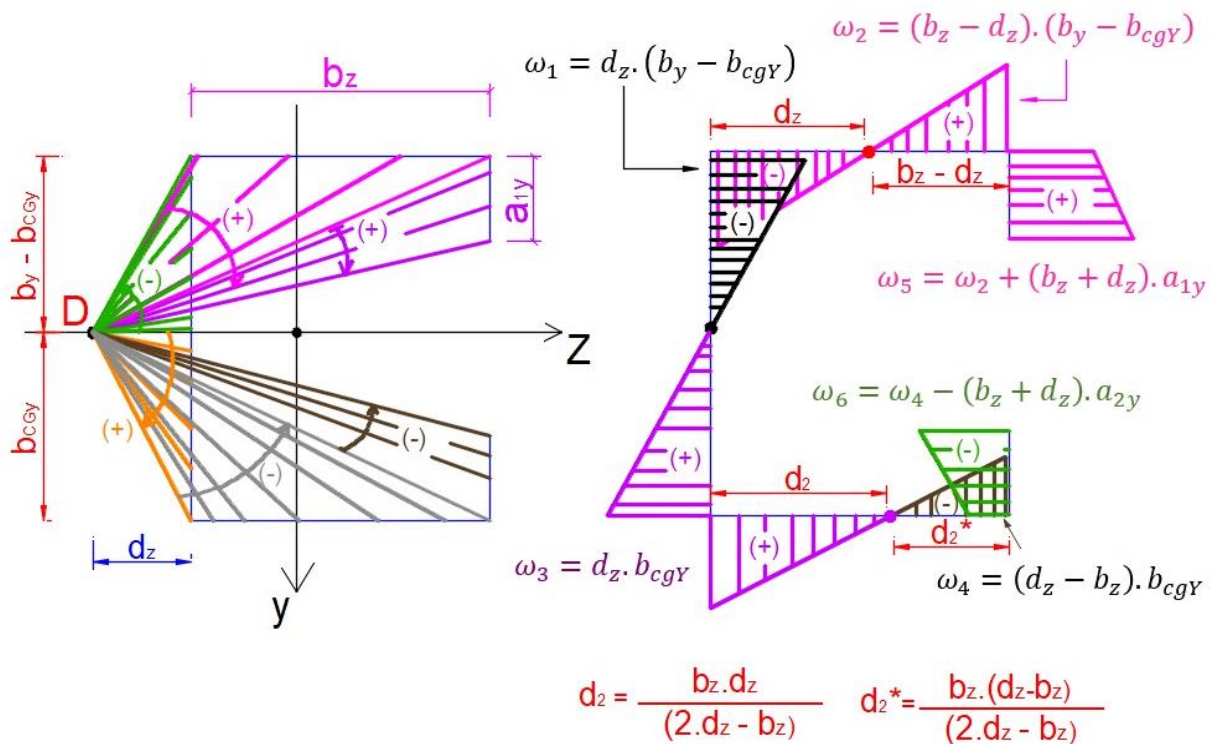
$$2A = \begin{vmatrix} 1 & x_i^* & y_i^* \\ 1 & x_D^* & y_D^* \\ 1 & x_j^* & y_j^* \end{vmatrix} \quad (2.134)$$

onde:  $i$  é o nó inicial do trecho da seção transversal a ser integrada,  $j$  é o nó final e  $D$  o centro de torção. E  $x^*$  e  $y^*$  são os eixos de referência adotados para a varredura;  $x_g^*, y_g^*$  são as coordenadas do ponto genérico  $g$  e o sinal positivo da varredura durante a integração é o apresentado na figura 2.100.

**Figura 2.100: Convenção positiva da varredura na integração para determinar a área setorial**

Fonte: O Autor (2019)

Aplicando a marcha de cálculo N° 3 (ver item 2.9 a.1) no pilar com seção apresentada na figura 2.95. Conclui-se como diagrama de área setorial  $\omega_{pc}$  o apresentado na figura 2.101. Sendo também denominado de diagrama de ordenadas setoriais absolutas.

**Figura 2.101: Diagrama de ordenadas setoriais absolutas  $\omega_{pc}$  para o pilar em C**

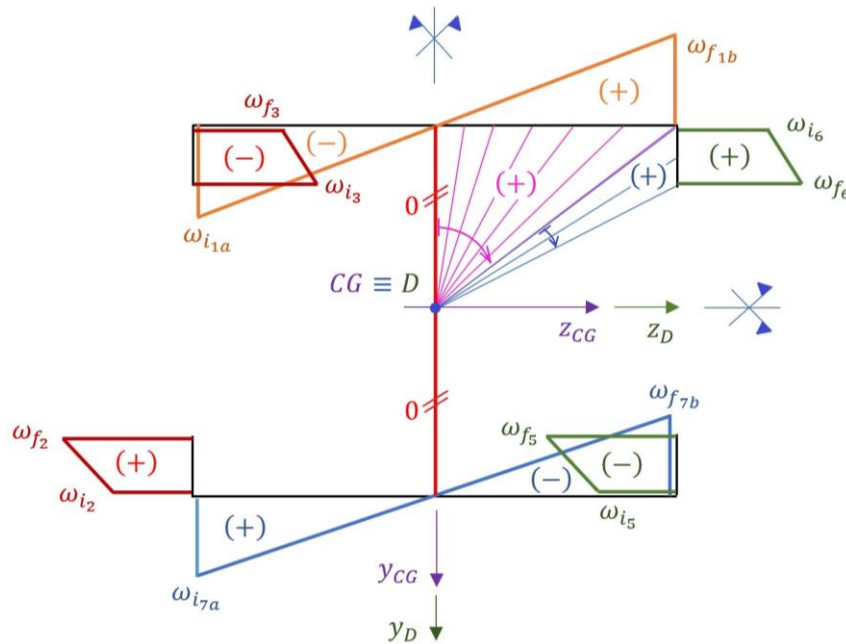
Fonte: O Autor (2019)



### b) Pilar com seção transversal em duplo T

Na figura 2.102 é apresentado o diagrama de ordenadas setoriais  $\omega_{pc}$ , cujo polo de varredura é o centro de torção D, para a seção transversal em duplo T com simetria nos dois eixos principais de inércia. Daí, observa-se que o centro de torção coincide com o centro de gravidade e pela propriedade da área setorial compreendida entre as extremidades da parede e o centro geométrico D, conclui-se que as ordenadas setoriais no painel central são nulos.

**Figura 2.102: Diagrama de ordenadas setoriais  $\omega_{pc}$  para seção de duplo T com dupla simetria**



Fonte: O Autor (2019)

baseado nas dimensões dos painéis – parede apresentadas na figura 2.88, exprimem-se as ordenadas setoriais nas extremidades dos referidos painéis, como:

$$\omega_{f_{1b}} \equiv \omega_{i_6} = \frac{b_1 \cdot b_4}{4}; \quad \omega_{f_6} = \frac{b_1}{2} \cdot \left( \frac{b_4}{2} + b_6 \right); \quad \omega_{i_{1a}} \equiv \omega_{f_3} = \frac{-b_1 \cdot b_4}{4}; \quad \omega_{i_3} = -\omega_{f_6};$$

$$\omega_{i_{7a}} = -\omega_{f_{7b}} = \frac{b_4 \cdot b_7}{4}; \quad \omega_{i_2} \equiv \omega_{i_{7a}}; \quad \omega_{i_5} \equiv \omega_{f_{7b}} \quad \text{e} \quad \omega_{f_2} = -\omega_{f_5} = \frac{b_7}{2} \cdot \left( \frac{b_4}{2} + b_2 \right).$$

As propriedades geométricas da seção transversal apresentada na figura 2.88 com a consideração de dimensões distintas entre as paredes e sem qualquer eixo de simetria, são expressas por:

$$b_{CG_z} = \frac{\sum_i x_{CG_i}^* \cdot A_i}{\sum_i A_i} \quad (2.135 a)$$

$$b_{CG_y} = \frac{\sum_i y_{CG_i}^* \cdot A_i}{\sum_i A_i} \quad (2.135 b)$$

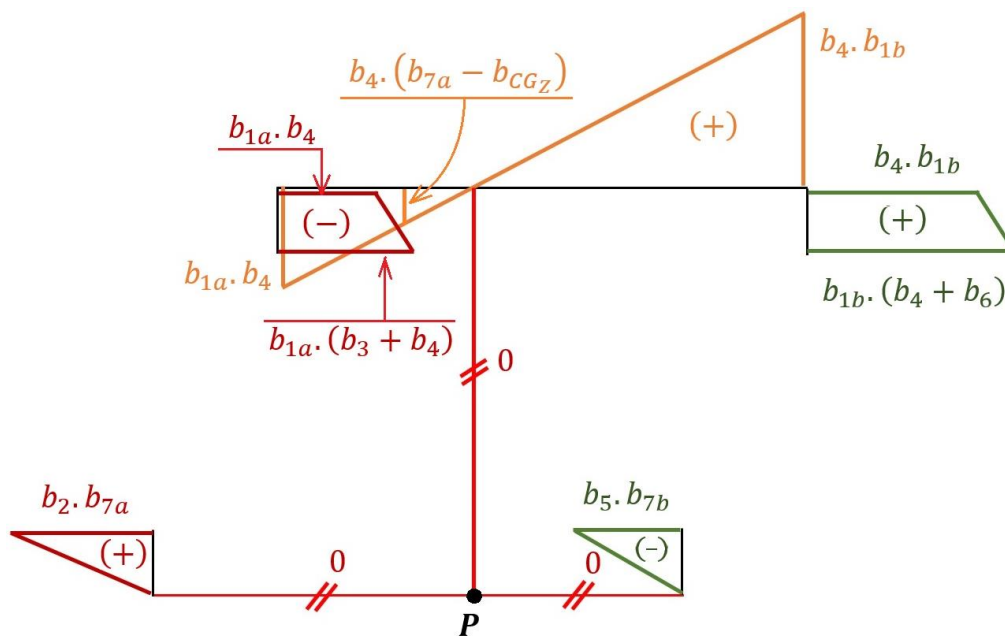
$$I_z = \sum_{i=1}^7 \{I_{z_i} + A_i \cdot d_{y_i}^2\} \quad (2.135 c)$$

$$I_y = \sum_{i=1}^7 \{I_{y_i} + A_i \cdot d_{z_i}^2\} \quad (2.135 d)$$

sendo:  $A_i$  a área do  $i$ -ésimo painel – parede;  $b_{CG_z}$  e  $b_{CG_y}$  são as coordenadas do centro de gravidade ao admitir dois eixos auxiliares  $x^*$  e  $y^*$  com origem na interseção dos eixos esqueleto dos painéis – parede (2) e (7);  $d_{y_i}$  e  $d_{z_i}$  são as distâncias de translação dos momentos de inércia centroidais via Teorema de Steiner;  $I_{z_i}$  e  $I_{y_i}$  são os momentos de inércia centroidais do  $i$ -ésimo painel – parede; já  $I_z$  e  $I_y$  são os momentos de inércia da seção transversal em duplo T.

Na figura 2.103 é apresentado o diagrama de ordenadas setoriais provisórias  $\omega_p$ , com polo de varredura arbitrado na interseção entre as paredes (4) e (7), cumprindo assim a 2ª etapa da marcha de cálculo N° 3 e buscando-se assim localizar o centro de torção D e traçar o diagrama  $\omega_{pc}$  para a seção sem qualquer eixo de simetria.

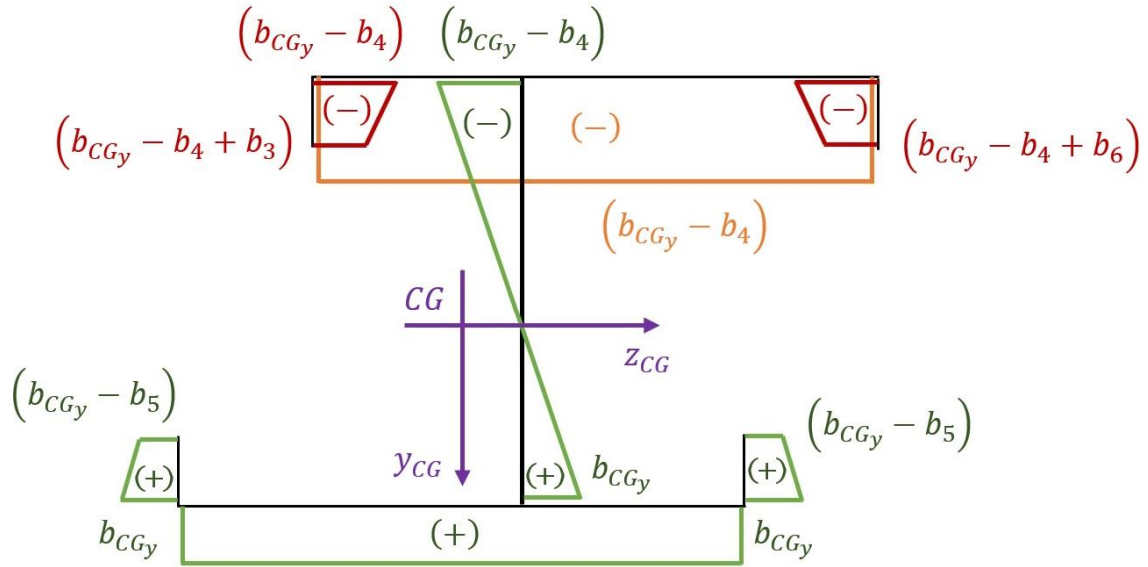
**Figura 2.103: Diagrama de ordenadas setoriais  $\omega_p$  para seção de duplo T sem qualquer simetria**



Fonte: O Autor (2019)

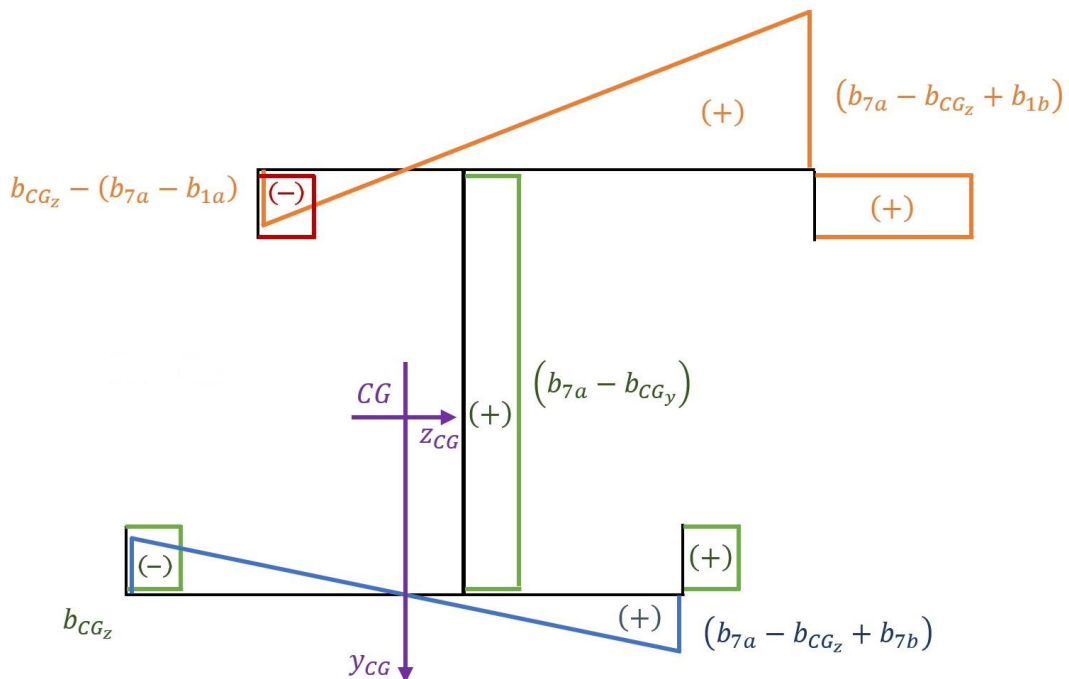
Em seguida procede-se o traçado dos diagramas de coordenadas  $y$  e  $z$  (3ª etapa da marcha de cálculo N° 3) em relação ao centro de gravidade da seção transversal em duplo T, os quais são apresentados nas figuras 2.104 e 2.105, respectivamente.

**Figura 2.104: Diagrama de coordenadas  $y$  para a seção em duplo T, com origem no CG**



Fonte: O Autor (2019)

**Figura 2.105: Diagrama de coordenadas  $z$  para a seção em duplo T, com origem no CG**

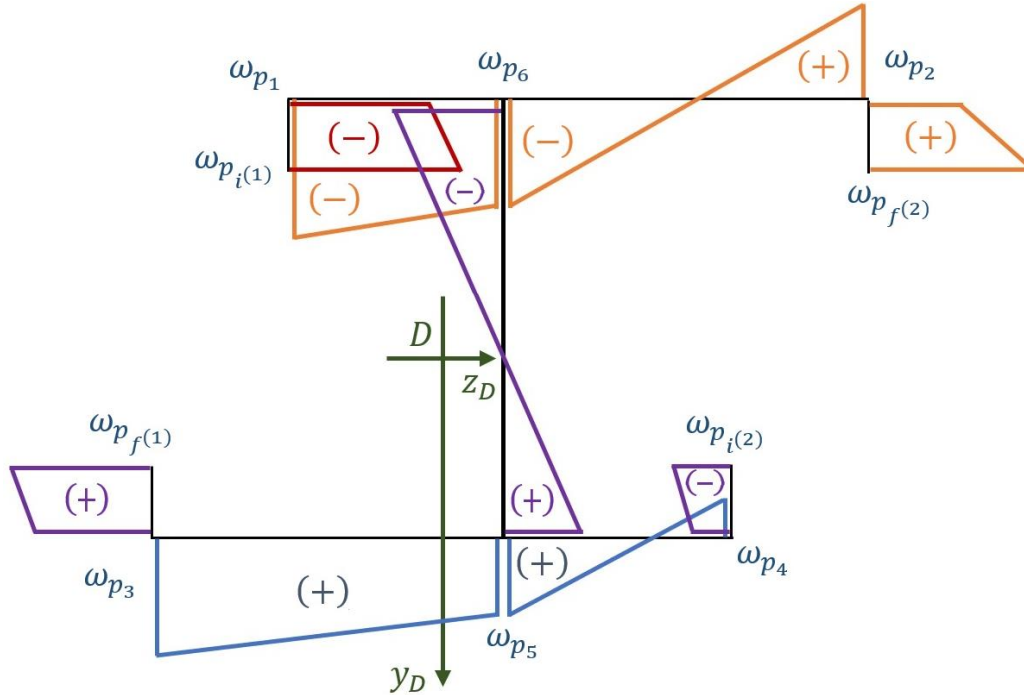


Fonte: O Autor (2019)

O diagrama de ordenadas setoriais principais  $\omega_{pc}$  para a seção sem qualquer simetria é calculada mediante procedimento geométrico apresentado nas figuras 2.93 e 2.99, bem como

na determinação dos incrementos de ordenada setorial  $\Delta\omega_{(i)}$  no painel – parede genérico i, via equação (2.134). Resultando no diagrama apresentado na figura 2.106, mediante realização das 5ª, 6ª e 8ª etapas da marcha de cálculo N° 3.

**Figura 2.106: Diagrama de ordenadas setoriais  $\omega_{pc}$  para seção assimétrica em duplo T**



Fonte: O Autor (2019)

por ordenadas setoriais principais, postulam-se:

$$\omega_{p_1} = d_z \cdot (d_y - b_4) - b_{1a} \cdot (b_4 - d_y) \quad (2.136 \ a)$$

$$\omega_{p_2} = -d_z \cdot (b_4 - d_y) + b_{1b} \cdot (b_4 - d_y) \quad (2.136 \ b)$$

$$\omega_{p_3} = d_y \cdot (b_{7a} + d_z) \quad (2.136 \ c)$$

$$\omega_{p_4} = d_y \cdot (d_z - b_{7b}) \quad (2.136 \ d)$$

$$\omega_{p_5} = d_y \cdot d_z \quad (2.136 \ e)$$

$$\omega_{p_6} = -d_z \cdot (b_4 - d_y) \quad (2.136 \ f)$$

$$\omega_{p_{i(1)}} = d_z \cdot (d_y + b_3 - b_4) - b_{1a} \cdot (b_3 + b_4 - d_y) \quad (2.136 \ g)$$

$$\omega_{p_{f(1)}} = d_z \cdot (d_y - b_2) + b_{7a} \cdot (b_2 + d_y) \quad (2.136 \ h)$$

$$\omega_{p_{i(2)}} = d_z \cdot (d_y - b_5) - b_{7b} \cdot (b_5 + d_y) \quad (2.136 \ i)$$

$$\omega_{p_{f(2)}} = -d_z \cdot (b_4 - b_6 - d_y) + b_{1b} \cdot (b_4 - d_y) \quad (2.136 \ j)$$

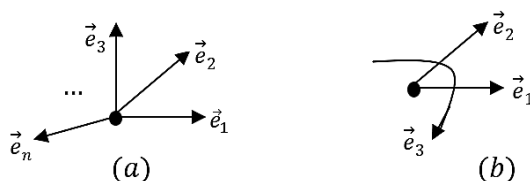
## 2.10. MATRIZ DE RIGIDEZ DE BARRA COM SEÇÃO TRANSVERSAL RETANGULAR LINEARMENTE VARIÁVEL

### a) Introdução

Na análise estrutural é relevante o Método dos Deslocamentos, o qual consiste em resolver a estrutura através da obtenção das deformações iniciais na estrutura (SUSSEKIND, 1978). Conforme ilustrado em Kassimali (2015), a vantagem da utilização do Método dos Deslocamentos em detrimento do Método das Forças baseia-se no fato de não haver dificuldade em escolher as incógnitas, uma vez que o problema fundamental é um só por estrutura. Para um pilar de ponte de elevado comprimento, é economicamente relevante que se adote seção transversal variável, com base mais robusta do que o topo. Assim, ao agregar tal afunilamento no fuste do pilar é construtivamente mais viável que tal variação seja linear, daí a motivação deste item da fundamentação teórica com a obtenção exata da matriz de rigidez de um elemento de barra com seção transversal retangular, e linearmente variável ao longo do eixo axial  $x$ . No campo das soluções aproximadas em tal determinação, cita-se Luo et al. (2007) e Brown (1984).

Na análise dos problemas estáticos ou dinâmicos faz-se relevante conhecer a definição de graus de liberdade. Pois em um ponto qualquer num plano, os deslocamentos podem ocorrer por “ $n$ ” direções (onde apenas três destes são linearmente independentes), a depender do sistema de referência, sendo denominados graus de liberdade. Ver figura 2.107.

**Figura 2.107: Deslocamentos num plano qualquer: (a) Genéricos e (b) Graus de Liberdade**



Fonte: O Autor (2019)

Conforme apresentado em Krasnov et al. (1990) no Curso de Matemática Superior – Volume 1:

“Um sistema ordenado de vectores  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n$  de um espaço linear  $V$  se denomina base deste espaço linear se os vectores  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n$  são linearmente independentes e todo vector de  $V$  pode ser representado como Combinação Linear desta Base. ” (KRASNOV et al., 1990, vol 1, p. 190).

Para o pilar de uma ponte com tabuleiro elevado a 100 metros, exemplo aqui desenvolvido, torna-se relevante subdividi-los em diversas barras, isso para a devida análise estrutural. E nestas barras é característica a modelagem matemática dos deslocamentos lineares e angulares nos nós. A rigidez da barra é, por definição, o momento necessário a ser aplicado no extremo da barra para que este, suposto livre ao giro, sofra uma rotação unitária (SUSSEKIND, 1978). A compatibilização dos deslocamentos, estes em decorrência das vinculações extraídas via definição do método das forças, será adotada a partir da convenção positiva dos eixos coordenados. Dessa forma, mediante formulação presente em Kiseliow (1976), escreve-se o sistema de equações de compatibilidade de deslocamentos, em notação matricial, como:

$$\{d\} = [F] \cdot \{X\} + \{\delta\} + \{\delta^T\} \quad (2.137)$$

com:  $\{d\}$  o vetor de deslocamentos nas vinculações hiperestáticas extraídas da estrutura;

$\{X\}$  o vetor de incógnitas, logo as forças ou esforços nas vinculações extraídas;

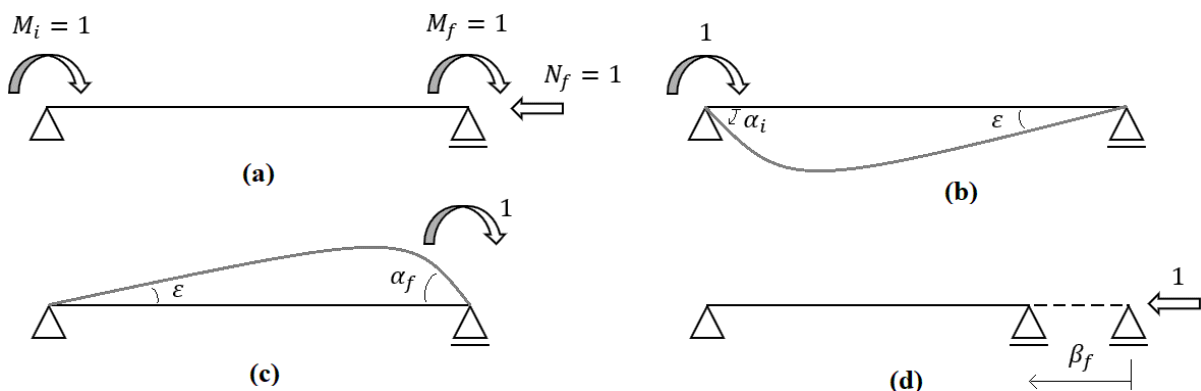
$\{\delta\}$  o vetor de deslocamentos no problema fundamental, conforme postula Maney (1915);

$\{\delta^T\}$  o vetor de deslocamentos no problema térmico, nas vinculações extraídas e

$[F]$  a matriz de flexibilidade, sendo montada via deslocamentos no sistemas derivados.

Para a montagem da matriz de flexibilidade  $[F]$  basta apenas considerar apenas os sistemas derivados. Além disso, o vetor  $\{\delta\}$  é desprezado nesta análise, pois almeja-se apenas obter a matriz de flexibilidade. Tais sistemas derivados de uma barra biengastada são apresentados na figura 2.108, tanto quanto o sistema principal.

**Figura 2.108: Método das forças: (a) sistema principal, (b) 1º sistema derivado, (c) 2º sistema derivado, (d) 3º sistema derivado**



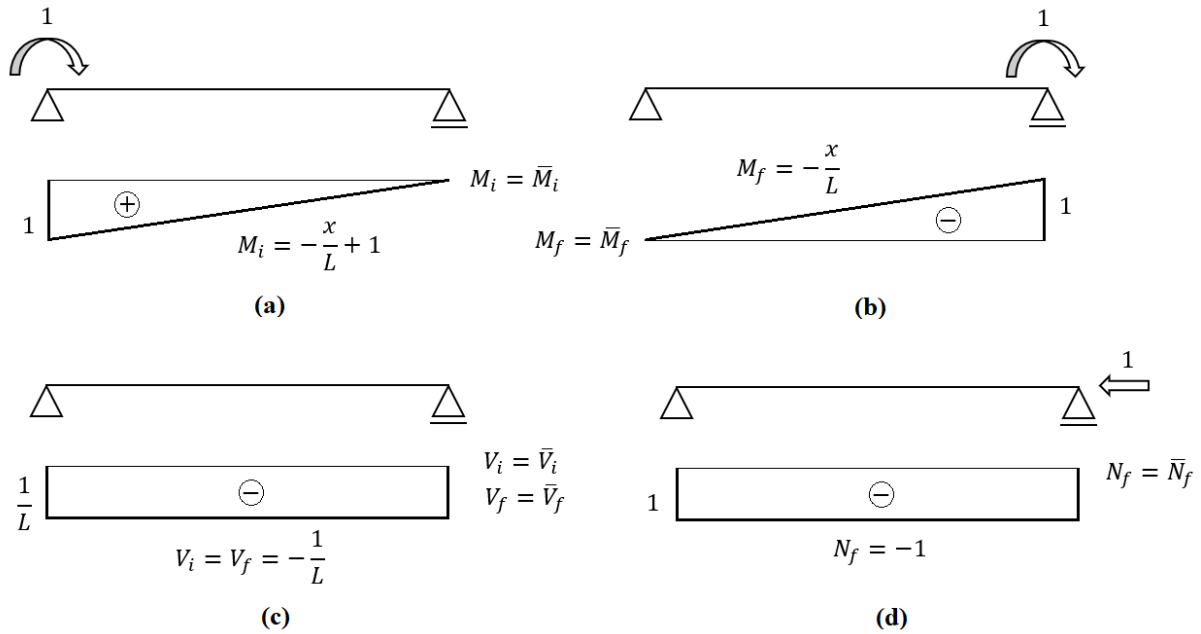
Fonte: O Autor (2019)

Ao nó inicial tem-se o grau de liberdade em rotação, como  $\theta_i$ . O nó final caracteriza-se pelo grau de liberdade também em rotação  $\theta_f$ . E por fim,  $\delta_f$  em deslocamento linear para o nó final. Assim o sistema de equações fica expresso por:

$$\begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_f \\ \delta_f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_i & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \alpha_f & 0 \\ 0 & 0 & \beta_f \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} M_i \\ M_f \\ N_f \end{Bmatrix} \quad (2.138)$$

A fim de aplicar o princípio dos trabalhos virtuais (PTV), ressalta-se que no deslocamento virtual não é possível ocorrer deslocamento real, isso quando o ponto material está em equilíbrio. E para que uma partícula esteja em equilíbrio, deve-se satisfazer a condição de nulidade ao trabalho de todas as forças externas (STAMATO, 1983). Em termo dos esforços solicitantes dos casos de estados de carga apresentados nas figuras 2.108 e 2.109.

**Figura 2.109: Diagramas de esforços solicitantes: (a)  $M_i \equiv \bar{M}_i$ , (b)  $M_f \equiv \bar{M}_f$ , (c)  $V_i \equiv \bar{V}_i$ , (d)  $N_f \equiv \bar{N}_f$**



Fonte: O Autor (2019)

escrevem-se os deslocamentos linear  $\beta_f$  e angulares  $\alpha_i$ ,  $\alpha_f$  e  $\varepsilon$ , como:

$$\alpha_i = \int_0^L \frac{(M_i \cdot \bar{M}_i)}{E \cdot I_z(x)} dx + \int_0^L k_c \cdot \frac{(V_i \cdot \bar{V}_i)}{G \cdot A(x)} dx \quad (2.139 a)$$

$$\alpha_f = \int_0^L \frac{(M_f \cdot \bar{M}_f)}{E \cdot I_z(x)} dx + \int_0^L k_c \cdot \frac{(V_f \cdot \bar{V}_f)}{G \cdot A(x)} dx \quad (2.139 b)$$

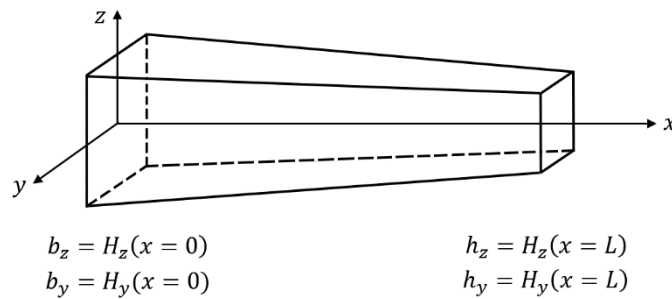
$$\varepsilon = \int_0^L \frac{(M_i \cdot M_f)}{E \cdot I_z(x)} dx + \int_0^L k_c \cdot \frac{(V_i \cdot V_f)}{G \cdot A(x)} dx \quad (2.139 c)$$

$$\beta_f = \int_0^L \frac{(N_f \cdot \bar{N}_f)}{E \cdot A(x)} dx \quad (2.139 d)$$

onde;  $k_c$  é o fator de forma da seção transversal.

Na figura 2.110 é apresentado o elemento de barra com comprimento  $L$  e dimensões na seção transversal  $H_y(x)$  e  $H_z(x)$ .

**Figura 2.110: Elemento de barra com dimensões na seção transversal variável linearmente ao longo do eixo axial  $x$**



**Fonte: O Autor (2019)**

escreve-se a área da seção transversal  $A(x)$  e o momento de inércia  $I_z(x)$  em torno do eixo  $z$ , como:

$$I_z(x) = k_1 \cdot x^4 + k_2 \cdot x^3 + k_3 \cdot x^2 + k_4 \cdot x + k_5 \quad (2.140 a)$$

$$A(x) = k_6 \cdot x^2 + k_7 \cdot x + k_8 \quad (2.140 b)$$

com:  $k_1 = A \cdot C^3$ ;  $k_2 = C^2 \cdot (3 \cdot A \cdot D + B \cdot C)$ ;  $k_3 = 3 \cdot C \cdot D \cdot (A \cdot D + B \cdot C)$ ;

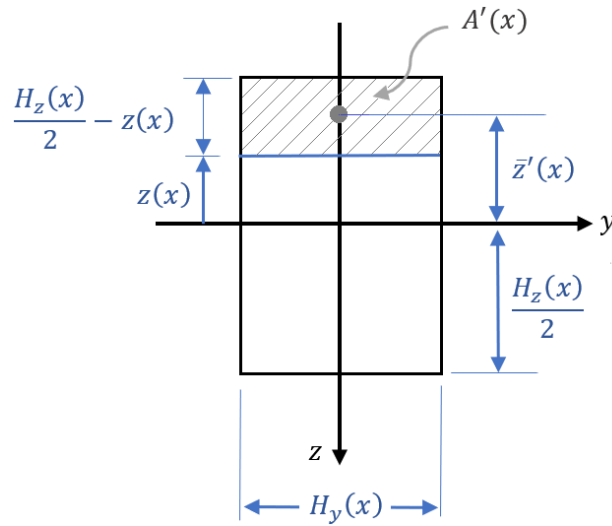
$k_4 = D^2 \cdot (A \cdot D + 3 \cdot B \cdot C \cdot D)$ ;  $k_5 = B \cdot D^3$ ;  $k_6 = A \cdot C$ ;  $k_7 = A \cdot D + B \cdot C$ ;  $k_8 = B \cdot D$ ;

$$A = \frac{h_z - b_z}{L}; \quad B = b_z; \quad C = \frac{h_y - b_y}{L} \quad \text{e} \quad D = b_y.$$

Na figura 2.111 é caracterizada a análise do momento estático de área  $Q(x)$ , para uma seção retangular de dimensões  $H_y(x)$  e  $H_z(x)$ .



**Figura 2.111: Momento Estático de Área para seção retangular linearmente variável no eixo axial  $x$**



Fonte: O Autor (2019)

chega-se a:

$$A'(x) = \left[ \frac{H_z(x)}{2} - z(x) \right] \cdot H_y(x) \quad (2.141 a)$$

$$I_z(x) = \frac{H_z(x) \cdot H_y^3(x)}{12} \quad (2.141 b)$$

$$\bar{z}'(x) = \frac{A'(x)}{2 \cdot H_y(x)} + z(x) \quad (2.141 c)$$

$$Q(x) = A'(x) \cdot \bar{z}'(x) = \frac{H_y(x)}{2} \cdot \left[ \frac{H_z^2(x)}{4} - z^2(x) \right] \quad (2.141 d)$$

Procede-se o cálculo do fator de forma  $k_c$ , após transformar a integração na área  $A$  para termos do comprimento, obtendo-se:

$$k_c = \frac{A(x)}{I_z^2(x)} \cdot \int_A \frac{Q^2(x)}{H_y^2(x)} dA = \frac{A(x)}{I_z^2(x)} \cdot \int_{-\frac{H_z(x)}{2}}^{\frac{H_z(x)}{2}} \left[ \frac{Q^2(x)}{H_y^2(x)} \cdot H_y(x) \right] dz \quad (2.142)$$

Ao aplicar as equações (2.141) na equação (2.142), e realizar a integração em  $z$  e consequentes simplificações, conclui-se que o fator de forma  $k_c$  permanece inalterado ao longo do eixo  $x$  e vale:

$$k_c = \frac{6}{5} \quad (2.142 a)$$

Por fim, ao aplicar as equações (2.140), (2.141) e (2.142 a) nas equações (2.139), obtém-se os coeficientes de flexibilidade ( $\alpha_i$ ,  $\alpha_f$ ,  $\varepsilon$  e  $\beta_f$ ), expressos por:

$$\alpha_i = \frac{12}{E \cdot \eta_3} \cdot \left[ \eta_1 - \eta_2 \cdot \ln \left( \frac{B + A \cdot L}{A} \right) + \eta_2 \cdot \ln \left( \frac{B}{A} \right) + \eta_2 \cdot \ln \left( \frac{D + C \cdot L}{C} \right) - \eta_2 \cdot \ln \left( \frac{D}{C} \right) \right] \\ + \frac{k_c}{G \cdot \eta_4} \cdot \left[ \ln \left( \frac{B + A \cdot L}{D + C \cdot L} \right) - \ln \left( \frac{B}{D} \right) \right] \quad \text{if } A \cdot D \neq B \cdot C \quad (2.143 \text{ a})$$

$$\alpha_f = \frac{12}{E \cdot \eta_7} \cdot \left[ \eta_5 + \eta_6 \cdot \ln \left( \frac{B + A \cdot L}{A} \right) - \eta_6 \cdot \ln \left( \frac{B}{A} \right) - \eta_6 \cdot \ln \left( \frac{D + C \cdot L}{C} \right) + \eta_6 \cdot \ln \left( \frac{D}{C} \right) \right] \\ + \frac{k_c}{G \cdot \eta_4} \cdot \left[ \ln \left( \frac{B + A \cdot L}{D + C \cdot L} \right) - \ln \left( \frac{B}{D} \right) \right] \quad \text{if } A \cdot D \neq B \cdot C \quad (2.143 \text{ b})$$

$$\varepsilon = \frac{12}{E \cdot \eta_{10}} \cdot \left[ \eta_8 + \eta_9 \cdot \ln \left( \frac{B + A \cdot L}{A} \right) - \eta_9 \cdot \ln \left( \frac{B}{A} \right) - \eta_9 \cdot \ln \left( \frac{D + C \cdot L}{C} \right) + \eta_9 \cdot \ln \left( \frac{D}{C} \right) \right] \\ + \frac{k_c}{G \cdot \eta_4} \cdot \left[ \ln \left( \frac{B + A \cdot L}{D + C \cdot L} \right) - \ln \left( \frac{B}{D} \right) \right] \quad \text{if } A \cdot D \neq B \cdot C \quad (2.143 \text{ c})$$

$$\beta_f = \frac{1}{E} \cdot \left[ \frac{\ln \left( \frac{B + A \cdot L}{D + C \cdot L} \right) - \ln \left( \frac{B}{D} \right)}{(A \cdot D - B \cdot C)} \right] \quad \text{if } A \cdot D \neq B \cdot C \quad (2.143 \text{ d})$$

$$\alpha_i = \alpha_f = \frac{4 \cdot L}{E \cdot B \cdot D^3} + \frac{k_c}{G \cdot B \cdot D \cdot L} \quad \text{if } A \cdot D = B \cdot C \quad (2.143 \text{ e})$$

$$\varepsilon = \frac{-2 \cdot L}{E \cdot B \cdot D^3} + \frac{k_c}{G \cdot B \cdot D \cdot L} \quad \text{if } A \cdot D = B \cdot C \quad (2.143 \text{ f})$$

$$\beta_f = \frac{L}{E \cdot B \cdot D} \quad \text{if } A \cdot D = B \cdot C \quad (2.143 \text{ g})$$

com:  $\eta_1 = L \cdot (A \cdot D + B \cdot C) \cdot (2 \cdot B \cdot D + 3 \cdot A \cdot D \cdot L - B \cdot C \cdot L)$ ;  $\eta_2 = 2 \cdot D^2 \cdot (A \cdot L + B)^2$ ;  
 $\eta_3 = -2 \cdot D^2 \cdot L^2 \cdot (A \cdot D + B \cdot C)^3$ ;  $\eta_4 = L^2 \cdot (A \cdot D + B \cdot C)$ ;  
 $\eta_5 = -L \cdot (A \cdot D - B \cdot C) \cdot (2 \cdot B \cdot D - A \cdot D \cdot L + 3 \cdot B \cdot C \cdot L)$ ;  $\eta_6 = 2 \cdot B^2 \cdot (C \cdot L + D)^2$ ;  
 $\eta_7 = 2 \cdot L^2 \cdot (C \cdot L + D)^2 \cdot (A \cdot D - B \cdot C)^3$ ;  $\eta_8 = -\frac{L}{2} \cdot (A \cdot D - B \cdot C) \cdot (2 \cdot B \cdot D + A \cdot D \cdot L + B \cdot C \cdot L)$ ;  
 $\eta_9 = B \cdot D \cdot (A \cdot L + B) \cdot (C \cdot L + D)$  e  $\eta_{10} = D \cdot L^2 \cdot (C \cdot L + D) \cdot (A \cdot D + B \cdot C)^3$ .

No método dos deslocamentos, promove-se o travamento dos nós vinculados da estrutura, isso a fim de configurar as ligações das barras mediante engastes. Em notação matricial, o sistema de equações de equilíbrio dos esforços desequilibrantes por nó é expresso da seguinte forma:

$$\{M\} = [K].\{D\} + \{\gamma\} + \{\gamma^T\} \quad (2.144)$$

com:  $\{M\}$  o vetor de esforços aplicados na estrutura hiperestática, nas vinculações impostas;

$\{D\}$  o vetor de incógnitas, logo os deslocamentos nas vinculações inseridas (impostas);

$\{\gamma\}$  o vetor de esforços desequilibrantes no problema fundamental;

$\{\gamma^T\}$  o vetor de esforços desequilibrantes no problema térmico e

$[K]$  a matriz de rigidez, sendo montada via deslocamentos no sistemas derivados.

Valendo-se das definições presentes em Kassimali (2015) e Kiseliiov (1976), a matriz de rigidez  $[K]$  será a inversa da matriz de flexibilidade  $[F]$ . Concluem-se os termos de rigidez, como:

$$[K] = [F]^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_i & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \alpha_f & 0 \\ 0 & 0 & \beta_f \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} k_i & a & 0 \\ a & k_f & 0 \\ 0 & 0 & r_f \end{bmatrix} \quad (2.145 a)$$

$$k_i = \frac{\alpha_f}{\alpha_i \cdot \alpha_f - \varepsilon^2} \quad (2.145 b)$$

$$k_f = \frac{\alpha_i}{\alpha_i \cdot \alpha_f - \varepsilon^2} \quad (2.145 c)$$

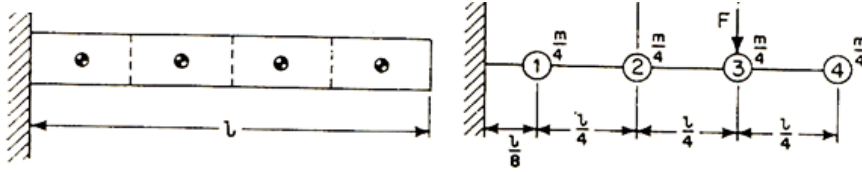
$$a = \frac{-\varepsilon}{\alpha_i \cdot \alpha_f - \varepsilon^2} \quad (2.145 d)$$

$$r_f = \frac{1}{\beta_f} \quad (2.145 e)$$

a presente formulação foi proposta por George Alfred Maney no ano de 1915, ver Maney (1915); e Parcel e Maney (1944), e também denominado de método da rotação – flecha.

### **b) Modelagem do pilar de ponte via massas concentradas**

Na análise dinâmica do pilar subdividido em quatro barras (por exemplo), com massas concentradas no centro dos segmentos de barra e em consonância com o procedido em Crede (1972). Bem como proceder a extensão de tal subdivisão em “n” barras, seguindo com massas concentradas nas n-ésimas barras com massa total “m” dividida por “n” elementos. Vide figura 2.112.

**Figura 2.112: Grupamento dos parâmetros para uma barra em balanço**

FONTE: (CREDE, 1972)

Na figura 2.112 é estendido o conceito de massas concentradas para cinco massa  $m_i$  e com molas de rigidez  $k_i$ , com excitação do movimento pela força dinâmica  $F_5(t)$  aplicada na quinta massa. Vide configuração apresentada na figura 2.113.

**Figura 2.113: Sistema de massa – mola com cinco graus de liberdade**

FONTE: Adaptado de (PAVLOU, 2015)

O conjunto de equações de equilíbrio (conforme princípio de D'Alembert), para o conjunto apresentado na figura 2.113, será:

$$m_1 \cdot \ddot{u}_1 + k_1 \cdot u_1 - k_2 \cdot (u_2 - u_1) = 0 \quad (2.146 \ a)$$

$$m_2 \cdot \ddot{u}_2 + k_2 \cdot (u_2 - u_1) - k_3 \cdot (u_3 - u_2) = 0 \quad (2.146 \ b)$$

$$m_3 \cdot \ddot{u}_3 + k_3 \cdot (u_3 - u_2) - k_4 \cdot (u_4 - u_3) = 0 \quad (2.146 \ c)$$

$$m_4 \cdot \ddot{u}_4 + k_4 \cdot (u_4 - u_3) - k_5 \cdot (u_5 - u_4) = 0 \quad (2.146 \ d)$$

$$m_5 \cdot \ddot{u}_5 + k_5 \cdot (u_5 - u_4) = 0 \quad (2.146 \ e)$$

As equações (2.146) são reescritas, em termos dos deslocamentos  $u_i$ , como:

$$m_1 \cdot \ddot{u}_1 + (k_1 + k_2) \cdot u_1 - k_2 \cdot u_2 = 0 \quad (2.147 \ a)$$

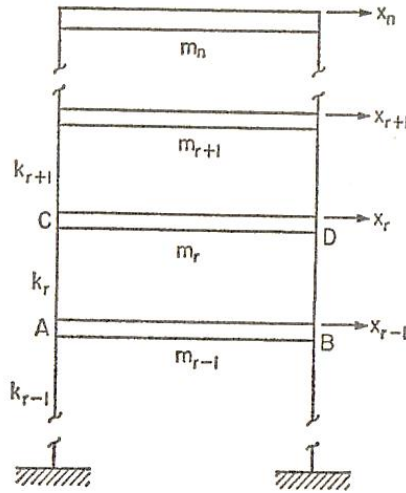
$$m_2 \cdot \ddot{u}_2 - k_2 \cdot u_1 + (k_2 + k_3) \cdot u_2 - k_3 \cdot u_3 = 0 \quad (2.147 \ b)$$

$$m_3 \cdot \ddot{u}_3 - k_3 \cdot u_2 + (k_3 + k_4) \cdot u_3 - k_4 \cdot u_4 = 0 \quad (2.147 \ c)$$

$$m_4 \cdot \ddot{u}_4 - k_4 \cdot u_3 + (k_4 + k_5) \cdot u_4 - k_5 \cdot u_5 = 0 \quad (2.147 \ d)$$

$$m_5 \cdot \ddot{u}_5 - k_5 \cdot u_4 + k_5 \cdot u_5 = F_5(t) \quad (2.147 \ e)$$

Em Warburton (1976) é verificada a equação geral para massas  $m_i$  sobre vibração forçada não amortecida, conforme é apresentado na figura 2.114.

**Figura 2.114: Pórtico Plano com “n” graus de liberdade****FONTE: (WARBURTON, 1976)**

E:

$$m_j \cdot \ddot{x}_j = P_j(t) - k_j \cdot (x_j - x_{j-1}) + k_{j+1} \cdot (x_{j+1} - x_j) \quad (2.148 a)$$

$$m_j \cdot \ddot{x}_j + (k_j + k_{j+1}) \cdot x_j - k_j \cdot x_{j-1} - k_{j+1} \cdot x_{j+1} = P_j(t) \quad (2.148 b)$$

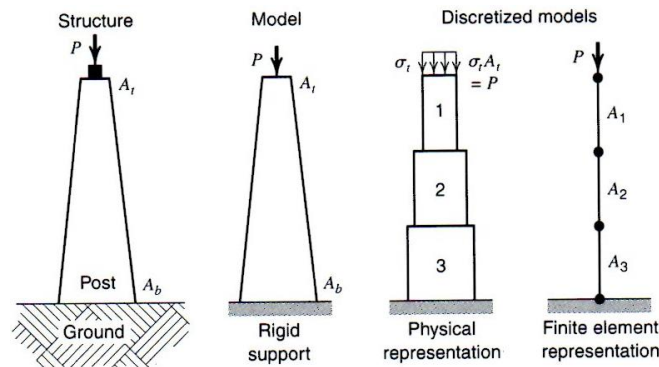
Em termos matriciais, tem-se reescrita as equações (2.147), por:

$$[M] \cdot \{\ddot{u}\} + [K] \cdot \{u\} = \{F(t)\} \quad (2.149)$$

$$\text{onde: } [M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_5 \end{bmatrix}; [K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 & 0 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 + k_5 & -k_5 \\ 0 & 0 & 0 & -k_5 & k_5 \end{bmatrix};$$

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix}; \{\ddot{u}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \\ \ddot{u}_4 \\ \ddot{u}_5 \end{Bmatrix}; \{F(t)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_5(t) \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad F_5(t) = F_5 \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t).$$

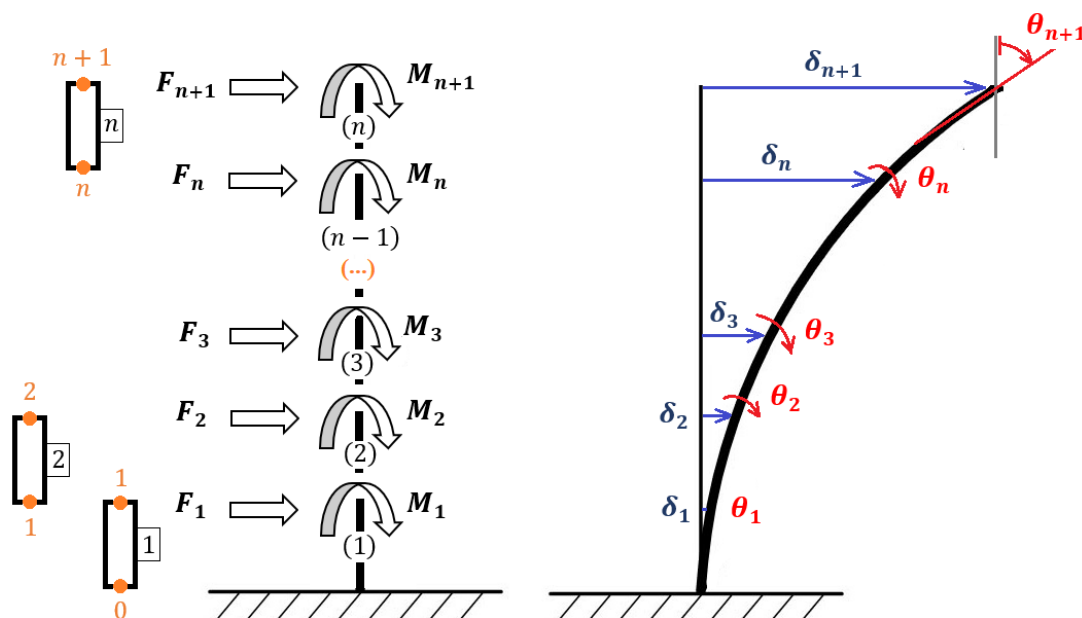
Na formulação até agora apresentada neste item e no capítulo 3 (MEF), as barras analisadas são consideradas com seção transversal constante, isso quanto as dimensões e as demais propriedades. Porém, no estudo de pilares de pontes em vigas torna-se importante a execução dos pilares com seção transversal variável ao longo da altura, isto a fim de conferir racionalidade e economia aos custos finais de execução do elemento estrutural. Neste tocante é que Cook et al. (2002) traz a modelação estrutural de um pilar sobre carga compressiva no topo. Modelando também como seções constantes e escalonadas ao longo da altura, conforme é apresentado na figura 2.115.

**Figura 2.115: Modelagem do pilar com seção variável**

FONTE: (COOK et al., 2002)

### c) Condensação matricial

Baseado em Paz (1992) e na aplicação no cálculo de frequências naturais em Alves Filho (2009, p. 200), a condensação matricial consiste em reescrever o sistema de equações em termo de algumas de suas variáveis. Na figura 2.116 é apresentado um pilar com  $n$  subdivisões e  $(n + 1)$  nós, bem como os decorrentes graus de liberdade ( $\delta$  e  $\theta$ ) e as forças nodais, isso a fim de exemplificar tal procedimento de condensação.

**Figura 2.116: Pilar subdividido em elementos finitos**

Fonte: O Autor (2019)

Ficando o sistema de EDO's, para a vibração não amortecida, expresso por:

$$\begin{bmatrix} [M_{\theta\theta}] & [M_{\theta\delta}] \\ [M_{\delta\theta}] & [M_{\delta\delta}] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\ddot{\theta}\} \\ \{\ddot{\delta}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{\theta\theta}] & [K_{\theta\delta}] \\ [K_{\delta\theta}] & [K_{\delta\delta}] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\theta\} \\ \{\delta\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{M\} \\ \{F\} \end{Bmatrix} \quad (2.150)$$

onde:  $\{\theta\}^T = \{\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \dots \ \theta_{n-1} \ \theta_n\}$ ;  $\{\delta\}^T = \{\delta_1 \ \delta_2 \ \delta_3 \ \dots \ \delta_{n-1} \ \delta_n\}$ ;  
 $\{M\}^T = \{M_1 \ M_2 \ M_3 \ \dots \ M_{n-1} \ M_n\}$ ;  $\{F\}^T = \{F_1 \ F_2 \ F_3 \ \dots \ F_{n-1} \ F_n\}$ ;  
 $[M_{\theta\theta}]$ ,  $[M_{\theta\delta}]$ ,  $[M_{\delta\theta}]$ ,  $[M_{\delta\delta}]$  – ver no capítulo 3 (MEF via Maney e ver eq.'s 3.36) e  
 $[K_{\theta\theta}]$ ,  $[K_{\theta\delta}]$ ,  $[K_{\delta\theta}]$ ,  $[K_{\delta\delta}]$  – ver no capítulo 3 (MEF via Maney e ver eq.'s 3.36).

A submatriz  $[M_{\theta\theta}]$  apresenta os termos de massas rotacionais, verificando-se a pouca representatividade (em magnitude) em relação as massas translacionais (inclusas na submatriz  $[M_{\delta\delta}]$ ). Desta afirmação, desprezam-se também as submatrizes  $[M_{\theta\delta}]$  e  $[M_{\delta\theta}]$ , e reescreve-se a eq. (2.150) como:

$$\begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [M_{\delta\delta}] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\ddot{\theta}\} \\ \{\ddot{\delta}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{\theta\theta}] & [K_{\theta\delta}] \\ [K_{\delta\theta}] & [K_{\delta\delta}] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\theta\} \\ \{\delta\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{M\} \\ \{F\} \end{Bmatrix} \quad (2.151)$$

Expressando a equação (2.151) em formato de sistema de equações matriciais, tem-se:

$$[K_{\theta\theta}] \cdot \{\theta\} + [K_{\theta\delta}] \cdot \{\delta\} = \{M\} \quad (2.152 \ a)$$

$$[M_{\delta\delta}] \cdot \{\ddot{\delta}\} + [K_{\delta\theta}] \cdot \{\theta\} + [K_{\delta\delta}] \cdot \{\delta\} = \{F\} \quad (2.152 \ b)$$

A fim de expressar os deslocamentos  $\{\delta\}$ , procede-se o isolamento do vetor de rotações  $\{\theta\}$  na equação (2.152 a) e ao aplicar na eq. (2.152 b), concluindo:

$$[M_{\delta\delta}] \cdot \{\ddot{\delta}\} + [K_{\delta\theta}] \cdot ([K_{\theta\theta}]^{-1} \cdot \{M\} - [K_{\theta\theta}]^{-1} \cdot [K_{\theta\delta}] \cdot \{\delta\}) + [K_{\delta\delta}] \cdot \{\delta\} = \{F\} \quad (2.153)$$

reorganizando, tem-se:

$$[M_{\delta\delta}] \cdot \{\ddot{\delta}\} + [K^*] \cdot \{\delta\} = \{F^*\} \quad (2.153 \ a)$$

com:  $[K^*] = [K_{\delta\delta}] - ([K_{\delta\theta}] \cdot [K_{\theta\theta}]^{-1} \cdot [K_{\theta\delta}])$ ;  $\{F^*\} = \{F\} - ([K_{\delta\theta}] \cdot [K_{\theta\theta}]^{-1} \cdot \{M\})$ ;

sendo:  $[K^*]$  a matriz de rigidez condensada e  $\{F^*\}$  o vetor condensado das forças transversais.

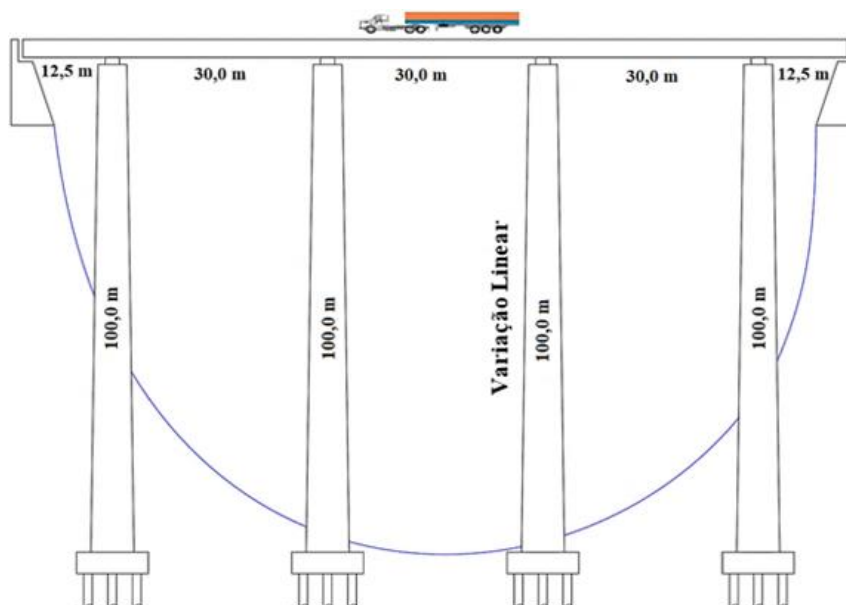
A EDO condensada para a vibração amortecida de maneira proporcional ( $[C^*] = \alpha_m \cdot [M_{\delta\delta}] + \alpha_k \cdot [K^*]$ ) fica expressa por:

$$[M_{\delta\delta}] \cdot \{\ddot{\delta}\} + [C^*] \cdot \{\dot{\delta}\} + [K^*] \cdot \{\delta\} = \{F^*\} \quad (2.154)$$

#### d) Modelagem por cinco elementos finitos de barra para seção retangular linearmente variável

Para exemplificar a utilização da matriz de rigidez de seção retangular linearmente variável em pilares de pontes, adotam-se como dimensões da seção transversal na base  $b_y = 12,5\text{ m}$  e  $b_z = 25\text{ m}$ . Já no topo utilizam-se:  $h_y = 5\text{ m}$  e  $h_z = 10\text{ m}$ . E obtêm-se os modos de vibração mediante análise modal (YANG et al., 2004), modelando o pilar em cinco elementos finitos (CREDE, 1972) e cuja formulação geral para  $n$  massa apresentada em Warburton (1964). Por fim, utiliza-se a condensação matricial (McGUIRE e GALLAGHER, 1979; RUBINSTEIN, 1966). O material empregado na ponte é concreto armado de classe de resistência C – 90, ver NBR 6118 (ABNT, 2014). Para o módulo de elasticidade longitudinal é utilizado  $E = 4,67 \times 10^{10}\text{ MPa}$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,20$ , vide figura 2.117. A fim de validar a exemplificação, realiza-se a modelagem no software ANSYS Release 11. Ressalta-se que para os modos de vibração, as dimensões adotadas para a seção transversal torna-se irrelevante.

**Figura 2.117: Ponte com pilares de seção linearmente variável**



**Fonte: O Autor (2019)**

De tal análise, obtêm-se na tabela 2.1 os coeficientes para gerar a matriz de rigidez do pilar, as frequências de vibração  $\omega_i$  e os Autoversores  $\lambda_i^2$  (via a nulidade do determinante  $[[K] - \lambda \cdot [M]]$ ), assim exprimem-se para os três primeiros modos de vibração:

$$\omega_1 = 7,85434 \frac{\text{rad}}{\text{s}}; \quad \omega_2 = 8,45070 \frac{\text{rad}}{\text{s}}; \quad \omega_3 = 8,85416 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (2.155 \text{ a} - \text{c})$$



**Tabela 2.1: Parâmetros para gerar a matriz de rigidez do pilar de seção linearmente variável**

Elemento	1	2	3	4	5
$A$ (ADM)	- 0,015	- 0,015	- 0,015	- 0,015	- 0,015
$B$ (m)	25,000	22,000	19,000	16,000	13,000
$C$ (ADM)	- 0,075	- 0,075	- 0,075	- 0,075	- 0,075
$D$ (m)	12,500	11,000	9,500	8,000	6,500
$\alpha_i \equiv \alpha_f$ ( $x 10^5$ )	6,540	4,430	2,890	1,799	1,050
$k_i$ ( $x 10^{13}$ ) [N.m]	2,274	1,364	0,759	0,382	0,166
$k_f$ ( $x 10^{13}$ ) [N.m]	2,261	1,356	0,754	0,379	0,165
$a$ ( $x 10^{13}$ ) [N.m]	1,134	0,680	0,378	0,190	0,083

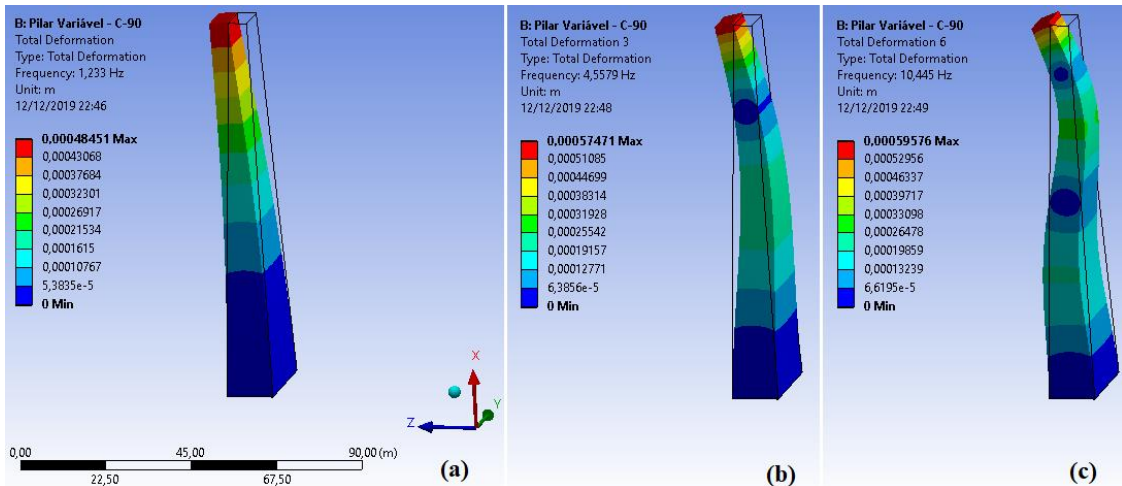
Fonte: O Autor (2019)

Conforme processamento exposto no Apêndice (B.1), a matriz de rigidez  $[K]$  e de massa  $[M]$ , para o pilar ao considerar os cinco elementos finitos (já na forma condensada), valem:

$$[K] = \begin{bmatrix} 1,701 \times 10^{13} & 7,634 \times 10^{11} & 3,178 \times 10^{10} & 1,196 \times 10^9 & 3,891 \times 10^7 \\ 7,634 \times 10^{11} & 1,019 \times 10^{13} & 4,241 \times 10^{11} & 1,596 \times 10^{10} & 5,193 \times 10^8 \\ 3,178 \times 10^{10} & 4,241 \times 10^{11} & 5,666 \times 10^{12} & 2,132 \times 10^{11} & 6,939 \times 10^9 \\ 1,196 \times 10^9 & 1,596 \times 10^{10} & 2,132 \times 10^{11} & 2,848 \times 10^{12} & 9,270 \times 10^{10} \\ 3,891 \times 10^7 & 5,193 \times 10^8 & 6,939 \times 10^9 & 9,270 \times 10^{10} & 1,238 \times 10^{12} \end{bmatrix} \frac{N}{m}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 1,955 \times 10^7 & 9,995 \times 10^5 & 0 & 0 & 0 \\ 9,995 \times 10^5 & 1,227 \times 10^7 & 6,761 \times 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 6,761 \times 10^5 & 7,281 \times 10^6 & 4,374 \times 10^5 & 0 \\ 0 & 0 & 4,374 \times 10^5 & 4,030 \times 10^6 & 2,685 \times 10^5 \\ 0 & 0 & 0 & 2,685 \times 10^5 & 1,984 \times 10^6 \end{bmatrix} kg$$

Na figura 2.118 é apresentado um grupo de modos de vibração, para o pilar maciço da ponte apresentada na figura 2.117, modelando no software ANSYS Release 11. Foram utilizados 62.468 nós e 13.635 elementos finitos, produzindo uma malha com 93,99 %.

**Figura 2.118: Modos de vibração: (a) 1º modo, (b) 2º modo e (c) 3º modo do pilar maciço**

Fonte: O Autor (2019)

A validação da primeira frequência de vibração  $f_1$  (mediante equação 2.155 a) é processada e resulta em:

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2 \cdot \pi} = \frac{7,85434 \frac{rad}{s}}{2 \cdot \pi} = 1,25005 \text{ Hz} \quad (2.156)$$

Comparando-se a primeira frequência de vibração mediante modelagem no ANSYS, ver figura 2.118, com o valor apresentado na equação (2.156), conclui-se uma aproximação de:

$$\Delta(\%) = \frac{(1,25005 - 1,23300) \text{ Hz}}{1,25005 \text{ Hz}} \cdot 100\% = 1,36 \% \quad (2.157)$$

A discrepância de 1,36 % entre a primeira frequência de vibração, via cálculo manual por elementos finitos de barra e pela modelagem no software ANSYS, é decorrente do pequeno número de elementos de barra utilizados na modelagem manual (exemplo da letra d desse item e no item B.1 do Apêndice B). Porém, a formulação aqui presente é bastante satisfatória para verificar a ordem de grandeza dos resultados obtidos via modelagem em softwares comerciais.

#### e) Verificação da modelagem do MEF via TMC

Baseado na Teoria dos Painéis – Parede (TPP), exprime-se a equação diferencial da solicitação dinâmica do pilar maciço apresentado na figura 2.117, mediante eq. (2.119), como:

$$-[J] \cdot \{q''''(x, t)\} + [S] \cdot \{q''(x, t)\} + [M] \cdot \{\ddot{q}(x, t)\} = \{\mathcal{V}_f'(x, t)\} \quad (2.158)$$

onde:  $[J]$  é a matriz de rigidez do pilar;  $[S]$  é a matriz de rigidez dos lintéis (e para o pilar maciço, modelado neste item da tese, será nula);  $[M]$  é a matriz de massa do referido pilar e  $q(x, t)$  é a função dos deslocamentos dependentes do espaço e do tempo. Mediante a análise harmônica da eq. (2.158) e impondo-lhe o procedimento de separação de variáveis, escreve-se:

$$\frac{-j \cdot u''''(x)}{u(x)} = \frac{-m \cdot \ddot{g}(t)}{g(t)} = -\lambda_a^2 \quad (2.159)$$

onde:  $q(x, t) = u(x) \cdot g(t)$ . Exprime-se a equação característica da EDO escrita no espaço, via eq. (2.159), como:

$$j \cdot \omega^4 - \lambda_a^2 = 0 \quad (2.160)$$

e por solução da eq. (2.160), exprime-se:

$$\omega = \frac{\sqrt{\lambda_a}}{\sqrt{j}} \quad (2.161)$$

Mediante o cálculo da rigidez  $j$  expresso na eq. (2.116), onde  $j = E \cdot I$ , em conjunto com Pfeil (1979, p. 211), conclui-se por rigidez do pilar apresentado na figura 2.117, a seguinte:

$$j = E \cdot I = E \cdot \beta \cdot I_{z_{topo}} = 4,67 \times 10^4 \text{ Pa} \cdot 1,2793 \cdot \frac{10 \text{ m} \cdot (5 \text{ m})^3}{12} = 6,22326 \times 10^{12} \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (2.162)$$

conforme apresentado em Dziewolski (1964) segue-se o ajuste da rigidez do pilar mediante o coeficiente  $\alpha = 1/1,5$  (para estruturas simples) e exprime-se via eq. (5.20 d):

$$\sqrt{\sqrt{j}} = \sqrt{\sqrt{\frac{j}{H^2}} \cdot \alpha} = \sqrt{\sqrt{\frac{6,22326 \times 10^{12} \frac{\text{N}}{\text{m}}}{(100 \text{ m})^2}} \cdot \frac{1}{1,5}} = 105,29633 \quad (2.163)$$

Aplicando-se a eq. (2.163) na eq. (2.161) escreve-se as primeiras frequências de vibração do pilar de ponte, apresentado na figura 2.117, como:

$$\omega = \frac{\sqrt{\lambda_a}}{105,29633} \quad (2.164)$$

utilizando a primeira raiz do polinômio apresentado no Apêndice B, mais especificamente na página B.6, exprime-se a primeira frequência de vibração do referido pilar (via TMC) como:

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{6,16906 \times 10^5 \text{ rad/s}}}{105,29633} = 7,45927 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (2.165 \text{ a})$$

e em frequência fundamental, tem-se:  $f_1 = \frac{\omega_1}{2 \cdot \pi} = 1,18718 \text{ Hz} \quad (2.165 \text{ b})$

concluindo por divergência em relação a modelagem procedida no ANSYS Release 11, ver figura 2.118, a seguinte:

$$\Delta(\%) = \frac{|f_{TMC} - f_{ANSYS}|}{f_{TMC}} \cdot 100\% = \frac{|1,18718 - 1,233| \text{ Hz}}{1,18718 \text{ Hz}} \cdot 100\% = 3,87 \% \quad (2.165 \text{ c})$$

Observa-se que a diferença percentual pela TMC foi maior do que pelo MEF de barra, isso devido à interpolação realizada no coeficiente  $\beta$  da eq. (2.162). Bem como, constata-se a utilização do coeficiente de ajuste  $\alpha$  na eq. (2.163). Enquanto no Apêndice B a análise é processada pelo método dos elementos finitos, dispensando-se a imposição de tal coeficiente. Mesmo assim, consegue-se validar de forma satisfatória a análise modal do pilar apresentado na figura 2.117, tanto pela MEF como pela TMC.

**PARTE II****CONTRIBUIÇÕES DA TESE**

---

*“Uma vez que você tenha provado o voo, você  
andará pela terra com os olhos voltados para o  
céu, pois lá esteve e lá você desejará voltar”.*

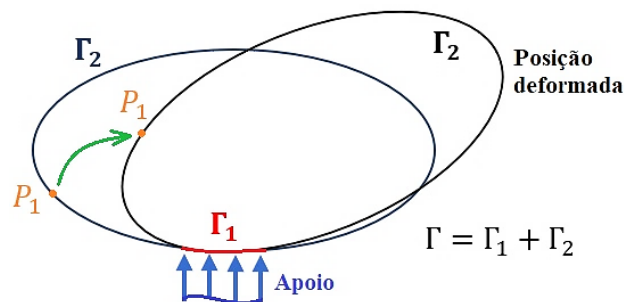
*Leonardo da Vinci*

## FORMULAÇÃO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS DE PILARES EM SEÇÕES C E DUPLO T

### 3.1. INTRODUÇÃO

Baseado em Absi (1969), Dhett et. al (2005), Zienkiewicz (1964); (1965) e (1966), bem como Vaz (2011) e Bathe (2019), considera-se uma equação diferencial,  $F(v) = b$ , válida no domínio  $\Omega$ , onde  $F$  é definido por operador e representa a derivação da função  $v$ . A fim de extrair  $v$  como solução da equação diferencial, faz-se necessária a integração por partes. Sendo importante definir a integração do produto interno entre o operador  $F(v)$  pela função ponderadora  $\mathcal{W}$ , tais integrações por partes necessitam das condições de contorno. Na figura 3.1 são apresentadas as condições de contorno, divididas nas superfícies:  $S(u)$  que é indeslocada (condições essenciais) e  $G(u)$  a superfície sob condições naturais ( $\mathfrak{M} = 0$  e/ou  $\mathcal{V} = 0$  e/ou  $\mathfrak{N} = 0$ ). Sendo  $\mathfrak{M}$  o momento fletor,  $\mathcal{V}$  o esforço cortante e  $\mathfrak{N}$  é o esforço normal.

**Figura 3.1: Condições de contorno do elemento finito**



Fonte: O Autor (2019)

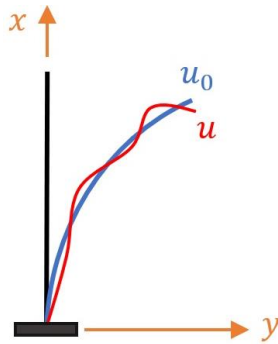
A solução exata para a equação diferencial  $F(u_0) = b$  será  $u_0$ , sendo de difícil ou impossível obtenção mediante integrações. Assim, pode-se aproximar a solução através de diversas funções  $u$ , surgindo as famílias de interpolação. Ficando a solução aproximadora  $u$ , expressa por:

$$u = \alpha_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot \psi_j \cong u_0 \quad (3.1)$$

onde:  $\alpha_0$  é o coeficiente para atender as condições de contorno;  $\alpha_j$  são os coeficientes a determinar e  $\psi_j$  são funções interpoladoras (linearmente independentes).

As funções  $\psi_j$  são escolhidas de acordo com as condições de contorno e/ou de continuidade. Admite-se que o conjunto de funções  $\psi_j$  está completo, quando o erro quadrático total for inferior a certa tolerância  $\varepsilon$  (vide figura 3.2).

**Figura 3.2: Representação gráfica das funções  $u$  e  $u_0$**



Fonte: O Autor (2019)

$$\int_{\Omega} (u_0 - u)^2 dx \leq \varepsilon^2 \quad (3.2)$$

Ao aplicar a solução aproximadora  $u$  na equação diferencial  $F(u_0) = b$ , percebe-se a ocorrência do resíduo  $R$ , ficando a função residual expressa por:

$$R = F(u) - b \neq 0 \quad (3.3)$$

Tal função residual (eq. 3.3) é forçada a nulidade para valores médios em todo o domínio. Resultando por objetivo minimizar o erro da aproximação da função exata  $u_0$  pela função  $u$ , caracterizando-se diversos métodos de acordo com o procedimento utilizado para tal minimização, dentre eles o método dos elementos finitos.

### a) Método dos resíduos ponderados

Conforme é apresentado em Reddy (1984, p. 102 – 113), o método dos resíduos ponderados consiste em distribuir o resíduo  $R$  (eq. 3.3), de forma que o valor médio seja nulo. Para tal imposição, define-se a função ponderadora  $\mathcal{W}$  como a combinação linear das funções interpoladoras  $\psi_j$ , ficando expressa por:

$$\mathcal{W} = \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot \psi_j \quad (3.4)$$

com:  $\beta_j$  os coeficientes da combinação linear.

Distribui-se o erro (resíduo) através da função ponderadora  $\mathcal{W}$ , ao longo do domínio  $\Omega$ , mediante o produto interno:

$$\langle R, \mathcal{W} \rangle = \int_{\Omega} (R \cdot \mathcal{W}) d\Omega = 0 \quad (3.5)$$

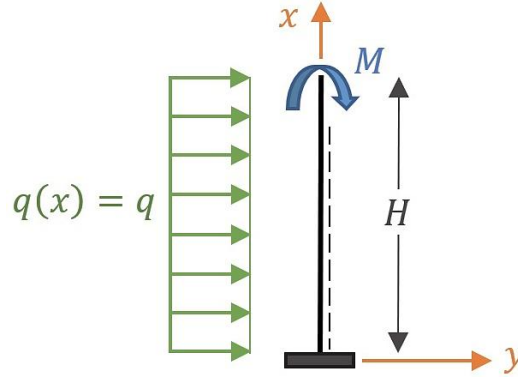
Aplica-se a eq. (3.4) na eq. (3.5), e os coeficientes  $\beta_j$  são admitidos arbitrários, chegando-se a:

$$\int_{\Omega} (R \cdot \psi_j) d\Omega = 0 \quad (3.6)$$

conclui-se que o resíduo  $R$  é ortogonal a cada função interpoladora  $\psi_j$ , e que a equação (3.6) representa um conjunto de equações por variação de  $j = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ .

### b) Equação integral do pilar via MEF

A fim de expor o fundamento do método dos elementos finitos (MEF), aplica-se o método dos resíduos ponderados no pilar apresentado na figura 3.3. E, em seguida realiza-se a integração por partes.

**Figura 3.3: Pilar engastado na base**

Fonte: O Autor (2019)

A função residual apresentada na eq. (3.3) fica reescrita, para o pilar ilustrado na figura 7.3, como:

$$R = \frac{d^2 v(x)}{dx^2} - b \quad (3.7)$$

$$\text{com: } b = -\frac{\mathfrak{M}(x)}{E \cdot I}.$$

A integração expressa na eq. (3.6) em termos dos contornos  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , mediante duas integrações por partes, fica reescrita como:

$$\int_{\Omega} (R \cdot \mathcal{W}) d\Omega = - \int_{\Gamma_1} \left( R_1 \cdot \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \eta} \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_2} (R_2 \cdot \mathcal{W}) d\Gamma \quad (3.8)$$

com:  $R = \nabla^2 u - b$ ;  $R_1 = u - \bar{u}$ ;  $R_2 = q - \bar{q}$ ;  $q = \partial u / \partial \eta$  é a derivada direcional de  $u$ ;  $\bar{u}$  equivale a  $u_0$  na superfície  $\Gamma_1$ ;  $\bar{q}$  equivale a  $q_0$  em  $\Gamma_2$ ;  $q_0 = \partial u_0 / \partial \eta$ ;  $u_0$  e  $q_0$  são soluções exatas.

Ficando a eq. (3.8) adaptada para o pilar (ver figura 3.3) em análise, como:

$$\int_0^H \left\{ \left[ \frac{d^2 v(x)}{dx^2} - b \right] \cdot \mathcal{W} \right\} dx + \left[ (u - \bar{u}) \cdot \frac{d\mathcal{W}}{dx} \right]_0^H = 0 \quad (3.9)$$

Integra-se por partes, a eq. (3.9), a equação integral obtida via resíduos ponderados. Obtendo-se a equação integral fundamental para o MEF, e expressa por:

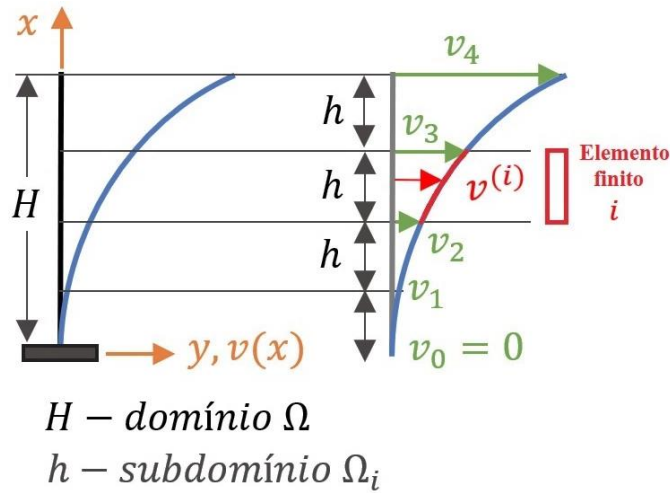


$$\int_0^H \left\{ \frac{dv(x)}{dx} \cdot \frac{d\mathcal{W}}{dx} \right\} dx - \left[ \mathcal{W} \cdot \frac{dv(x)}{dx} \right]_0^H - \left[ (u - \bar{u}) \cdot \frac{d\mathcal{W}}{dx} \right]_0^H + \int_0^H \{b \cdot \mathcal{W}\} dx = 0 \quad (3.10)$$

### c) Sistema algébrico via MEF

A primordial diferença entre o MEF e os demais métodos numéricos oriundos do método dos resíduos ponderados, é a subdivisão do domínio  $\Omega$  em vários trechos (subdomínios). A estes subdomínios denominam-se elementos de dimensões finitas, ou simplesmente de elementos finitos. Por fim, para cada trecho é definida uma função aproximadora  $u^{(i)}(x)$ , conforme é ilustrado na figura 3.4.

**Figura 3.4:** Subdivisão do pilar em elementos finitos



Fonte: O Autor (2019)

No  $i$  – ésimo elemento finito, a função aproximadora  $u^i$  (ver a equação 3.1) é expressa por:

$$u^{(i)} = \sum_{j=1}^n \alpha_j^{(i)} \cdot \psi_j^{(i)} \quad (3.11)$$

O MEF é decorrente do método de Rayleigh – Ritz, formulado por Ritz em 1909. E como tal, baseia-se no método da energia potencial estacionária. E o funcional de energia

potencial  $\Pi_p$  para toda a estrutura, será a soma das parcelas em cada elemento finito  $\Pi_p^{(i)}$ , assim:

$$\Pi_p = \sum_{i=1}^N \Pi_p^{(i)} \quad (3.12)$$

onde:  $N$  é o número de elementos finitos na discretização proposta.

Aplica-se a variação a energia  $\Pi_p$ , expressando em termo dos elementos finitos (por subdomínios), e escreve-se:

$$\delta \Pi_p = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{\partial \Pi_p^{(i)}}{\partial \alpha_1} \cdot \delta \alpha_1 + \frac{\partial \Pi_p^{(i)}}{\partial \alpha_2} \cdot \delta \alpha_2 + \dots + \frac{\partial \Pi_p^{(i)}}{\partial \alpha_N} \cdot \delta \alpha_N \right\} \quad (3.13)$$

com:  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$  os coeficientes da combinação linear das funções  $\psi_j$  para compor a função aproximadora  $u$ .

Reescreve-se a equação (3.13), em duplo somatório, como:

$$\delta \Pi_p = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{\partial \Pi_p^{(i)}}{\partial \alpha_j} \cdot \delta \alpha_j \right\} \quad (3.14)$$

Promove-se a minimização do funcional  $\Pi_p$  mediante a imposição de nulidade em sua primeira variação ( $\delta \Pi_p = 0$ ). Assim, via eq. (3.14) surge o sistema de equações algébricas do MEF:

$$\frac{\partial \Pi_p^{(i)}}{\partial \alpha_j} = 0 \quad (3.15)$$

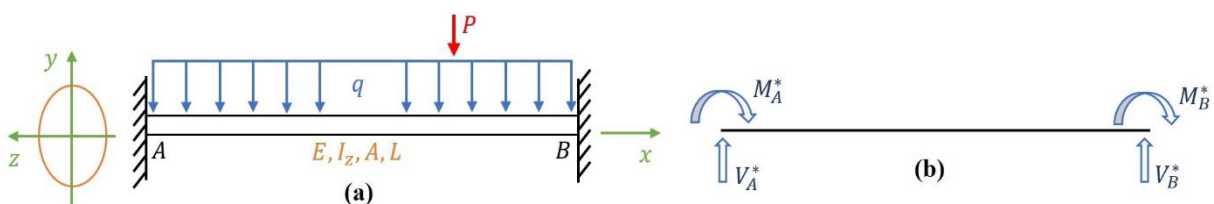
com; os parâmetros  $\alpha_j$  a determinar. As funções aproximadoras nos subdomínios  $u^{(i)}(x)$ , nos elementos finitos, devem atender as condições de contorno dos extremos do elemento  $i$ . No caso do pilar apresentado na figura 3.4, tem-se  $v_2$  e  $v_3$  como deslocamentos e  $v_2'$  e  $v_3'$  as rotações (ambos denominados de graus de liberdade).

### 3.2. EQUAÇÕES DE MANEY PARA ELEMENTO FINITO

Neste item o elemento finito analisado é aquele cujo sistema local de coordenadas (SLC) coincida com o sistema global de coordenadas (SGC), em outro termos, é o elemento não inclinada e com elementos de barra sequenciados. Esse elemento finito foi apresentado por George Alfred Maney como um método geral para resolução de estruturas hiperestáticas, sendo inclusive eficaz para estruturas com elevado grau hiperestático. O método foi apresentado em 1915 no boletim de estudos de engenharia da Universidade de Minnesota, objetivando solucionar o problema da ação do vento em edifícios de múltiplos andares, porém pode-se aplicar eficazmente nos esforços secundários (solicitantes) de pontes. O método postulado por Maney é especialmente útil para estruturas de nós rígidos, daí a utilização via método dos deslocamentos.

O referido método postulado por G. A. Maney baseia-se em trabalhos alemães sob esforços secundários em pontes, os quais ao ver de Maney não estavam generalizados, nem aplicados a outras ocorrências, daí a proposição de tal método geral. Em posterior este método postulado por G. A. Maney ficou conhecido como “Slope – Deflection Method” o método da rotação – flecha, citam-se como referências para tais afirmações Maney (1915) e Megson (2005). Na determinação dos esforços secundários em pontes “secondary stresses in bridges trusses” cita-se Grimm (1908), onde encontra-se a ideia inicial do “slope – deflection method” postulado anos mais tarde por G. A. Maney. Em tal análise dos esforços secundários observa-se a obtenção dos esforços internos para superestruturas de pontes com as vigas sobre o formato de arcos treliçados. A formulação do método da rotação – flecha é procedida considerando que a barra reta é submetida aos carregamentos externos:  $P$  (concentrado) e  $q$  (distribuído) e sob reações elásticas em momentos  $M_A^*$  e  $M_B^*$  e em cortantes  $V_A^*$  e  $V_B^*$ . Vide Figura 3.5.

**Figura 3.5: Barra engastada nas extremidades: (a) carregamentos e (b) reações elásticas associadas as reações de engastamento perfeito, nos extremos da barra**



Fonte: O Autor (2019)

Partindo da equação diferencial da linha elástica, equacionada por Navier, e baseada na hipótese de Bernoulli: “As seções transversais permanecem planas depois da deformação do prisma”. Ainda conforme Lacerda (1964), ressalta-se a definição de linha elástica do prisma, o que postula-se: “no prisma deformado, cada seção transversal é normal ao eixo médio deformado”. Assim, escreve-se:

$$(E.I). \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = \mathfrak{M}(x) \equiv M_A^* + V_A^* \cdot x \quad (3.16)$$

Integram-se duas vezes a equação (3.16), obtem-se:

$$(E.I). v(x) = M_A^* \cdot \frac{x^2}{2} + V_A^* \cdot \frac{x^3}{6} + C_1 \cdot x + C_2 \quad (3.17)$$

As duas constantes de integração ( $C_1$  e  $C_2$ ), apresentadas na equação (3.17), são determinadas mediante condições de contorno no ponto A, ficando expressas por:

$$C_1 = E.I. \theta_A \quad (3.18 a)$$

$$C_2 = E.I. v_A \quad (3.18 b)$$

para  $\left. \frac{dv(x)}{dx} \right|_{x=0} = \theta_A$  e  $v(x=0) = v_A$ , respectivamente.

Por fim, aplicam-se as equações (3.18) na eq. (3.17) e escreve-se a equação da deflexão como:

$$(E.I). v(x) = M_A^* \cdot \frac{x^2}{2} + V_A^* \cdot \frac{x^3}{6} + E.I. \theta_A \cdot x + E.I. v_A \quad (3.19 a)$$

e sua derivada, a equação da rotação, fica expressa por:

$$(E.I). \theta(x) = M_A^* \cdot x + V_A^* \cdot \frac{x^2}{2} + E.I. \theta_A \quad (3.19 b)$$

Aplica-se agora as equações (3.19) no extremo final da viga ( $x = L$ ) e exprime-se:

$$E.I. v_B = M_A^* \cdot \frac{L^2}{2} + V_A^* \cdot \frac{L^3}{6} + E.I. \theta_A \cdot L + E.I. v_A \quad (3.20 a)$$

$$(E.I). \theta_B = M_A^* \cdot L + V_A^* \cdot \frac{L^2}{2} + E.I. \theta_A \quad (3.20 b)$$

Exprimem-se as equações (3.20) sob formato matricial, como:

$$\begin{bmatrix} \frac{L^2}{2} & \frac{L^3}{6} \\ L & \frac{L^2}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} M_A^* \\ V_A^* \end{Bmatrix} = E \cdot I \cdot \begin{Bmatrix} (v_B - v_A) - \theta_A \cdot L \\ \theta_B - \theta_A \end{Bmatrix} \quad (3.21 a)$$

$$\text{ficando: } \begin{Bmatrix} M_A^* \\ V_A^* \end{Bmatrix} = \frac{12}{L^4} \cdot \begin{bmatrix} \frac{L^2}{2} & -\frac{L^3}{6} \\ -L & \frac{L^2}{2} \end{bmatrix} \cdot E \cdot I \cdot \begin{Bmatrix} (v_B - v_A) - \theta_A \cdot L \\ \theta_B - \theta_A \end{Bmatrix} \quad (3.21 b)$$

resultando em  $M_A^*$  e  $V_A^*$  expressas por:

$$M_A^* = -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \cdot v_A + \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \cdot v_B - \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \cdot \theta_A - \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} \cdot \theta_B \quad (3.21 c)$$

$$V_A^* = \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} \cdot v_A - \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} \cdot v_B + \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \cdot \theta_A + \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \cdot \theta_B \quad (3.21 d)$$

Observa-se que nas equações (3.21 c) e (3.21 d) tem-se as reações elásticas do extremo inicial da barra, em função dos graus de liberdade ( $\theta_A, \theta_B, v_A$  e  $v_B$ ). Daí, para obter as reações elásticas do extremo final (Nó B) utilizam-se as equações de equilíbrio em momento e em forças verticais (cortantes). Na figura 3.5 (b) é apresentado o diagrama de corpo rígido, basta aplicar o equilíbrio e obtem-se:

$$M_A^* + M_B^* + V_A^* \cdot L = 0 \quad (3.21 e)$$

$$V_A^* = -V_B^* \quad (3.21 f)$$

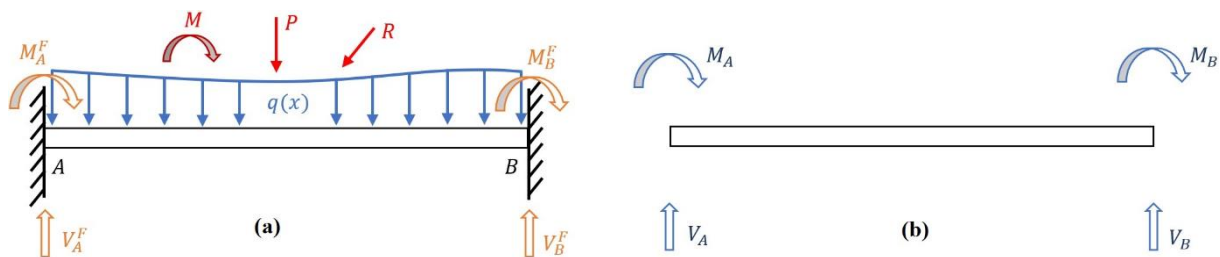
aplicam-se as equações (3.21 c) e (3.21 d) nas equações (3.21 e) e (3.21 f), concluindo-se:

$$M_B^* = -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \cdot v_A + \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \cdot v_B - \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} \cdot \theta_A - \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \cdot \theta_B \quad (3.21 g)$$

$$V_B^* = -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} \cdot v_A + \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} \cdot v_B - \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \cdot \theta_A - \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \cdot \theta_B \quad (3.21 h)$$

Na figura 3.6 é inserido o conceito de reações de engastamento perfeito.

**Figura 3.6: Detalhamento de reações: (a) reações de engastamento perfeito e (b) reações elásticas**



Fonte: O Autor (2019)

Analisando em conjunto as figuras 3.5 (b) e 3.6, conclui-se:

$$M_A^* = -M_A + M_A^F \quad (3.22 a)$$

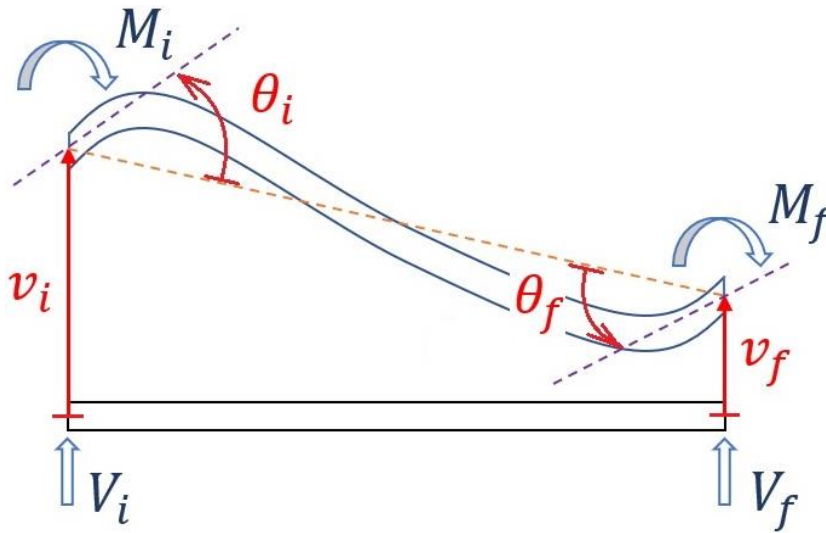
$$M_B^* = -M_B + M_B^F \quad (3.22 b)$$

$$V_A^* = -V_A + V_A^F \quad (3.22 c)$$

$$V_B^* = -V_B + V_B^F \quad (3.22 d)$$

Para compatibilizar as reações elásticas  $M_i$  e  $M_f$  com os graus de liberdade  $\theta_i$  e  $\theta_f$ , conforme ilustrado na figura 3.7, procede-se a troca de sinal dos termos dos referidos graus de liberdade (nas equações 3.21 c, d, g, h).

**Figura 3.7: Compatibilização entre os graus de liberdade e as reações elásticas**



Fonte: O Autor (2019)

Aplicando a compatibilização da figura 3.7 e cruzando as equações (3.21 c), (3.21 d), (3.21 g) e (3.21 h) com as eq.'s (3.22), escreve-se:

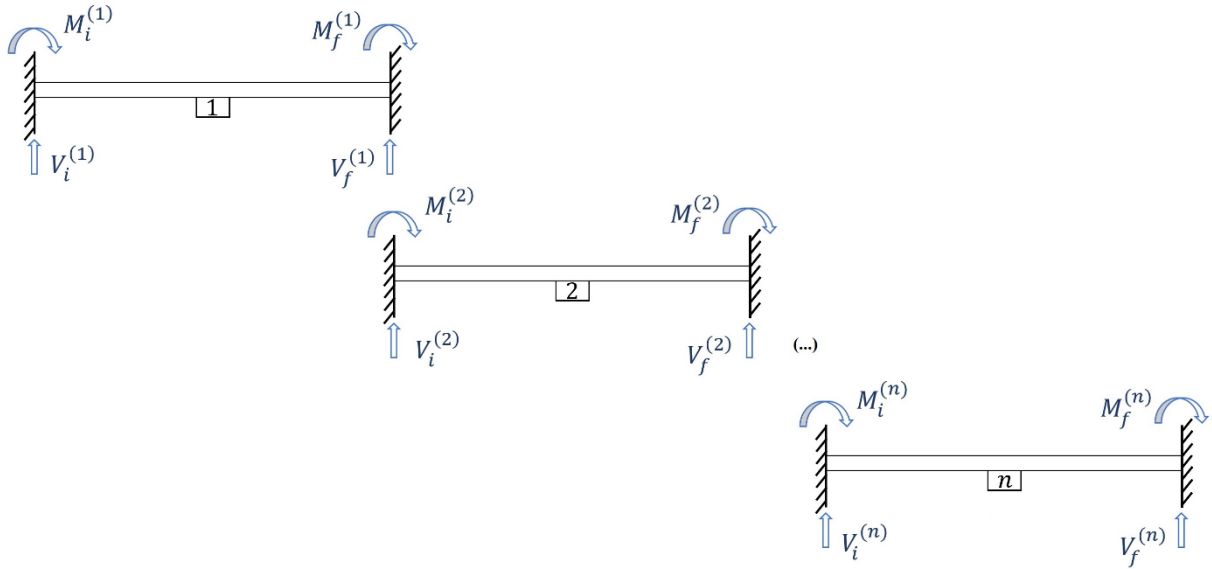
$$-M_A + M_A^F = \frac{4.E.I}{L}.\theta_A + \frac{2.E.I}{L}.\theta_B - \frac{6.E.I}{L^2}.v_A + \frac{6.E.I}{L^2}.v_B \quad (3.23 a)$$

$$-M_B + M_B^F = \frac{2.E.I}{L}.\theta_A + \frac{4.E.I}{L}.\theta_B - \frac{6.E.I}{L^2}.v_A + \frac{6.E.I}{L^2}.v_B \quad (3.23 b)$$

$$-V_A + V_A^F = -\frac{6.E.I}{L^2}.\theta_A - \frac{6.E.I}{L^2}.\theta_B + \frac{12.E.I}{L^3}.v_A - \frac{12.E.I}{L^3}.v_B \quad (3.23 c)$$

$$-V_B + V_B^F = \frac{6.E.I}{L^2}.\theta_A + \frac{6.E.I}{L^2}.\theta_B - \frac{12.E.I}{L^3}.v_A + \frac{12.E.I}{L^3}.v_B \quad (3.23 d)$$

Utiliza-se a notação matricial exposta na figura 3.8, buscando fornecer tratamento generalizado para  $n$  barras.

**Figura 3.8: Nomenclatura matricial para  $n$  barras**

Fonte: O Autor (2019)

organizam-se as equações (3.23) em formato matricial, como:

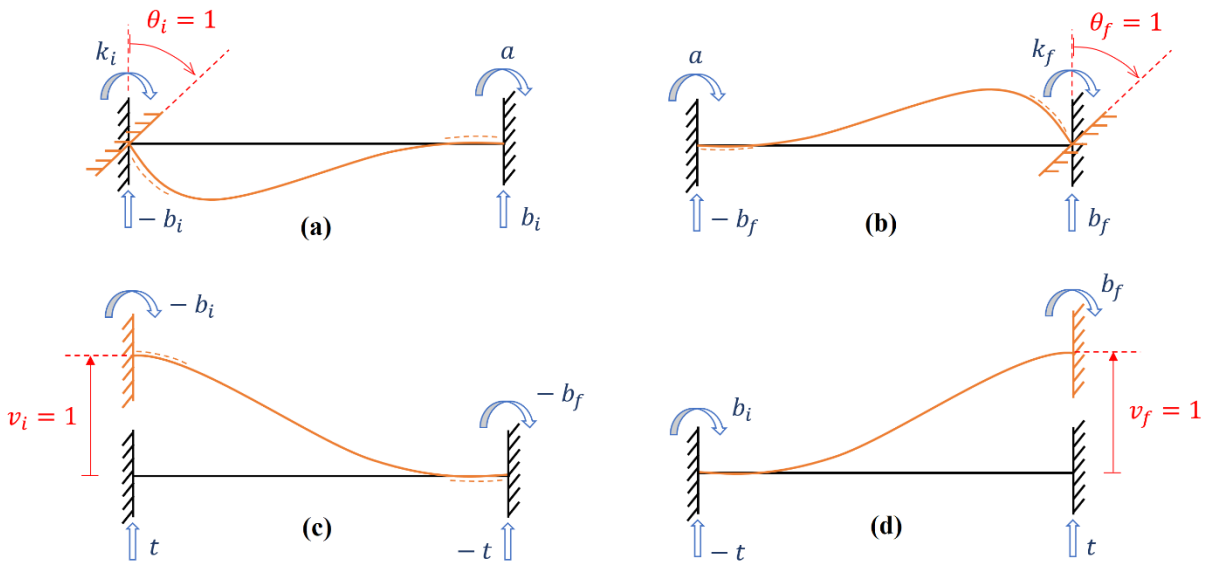
$$\begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \\ V_A \\ V_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4.E.I}{L} & \frac{2.E.I}{L} & -\frac{6.E.I}{L^2} & \frac{6.E.I}{L^2} \\ \frac{2.E.I}{L} & \frac{4.E.I}{L} & -\frac{6.E.I}{L^2} & \frac{6.E.I}{L^2} \\ -\frac{6.E.I}{L^2} & -\frac{6.E.I}{L^2} & \frac{12.E.I}{L^3} & -\frac{12.E.I}{L^3} \\ \frac{6.E.I}{L^2} & \frac{6.E.I}{L^2} & -\frac{12.E.I}{L^3} & \frac{12.E.I}{L^3} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ v_A \\ v_B \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} M_A^F \\ M_B^F \\ V_A^F \\ V_B^F \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

Por fim, utiliza-se a notação da figura 3.8 na equação (3.24) e reescreve-se a equação de equilíbrio para o método geral proposto por G. A. Maney em 1915, com nomenclatura apresentada em Falconi (2004, p. 403 – 405), como:

$$\begin{Bmatrix} M_i \\ M_f \\ V_i \\ V_f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_i & a & -b_i & b_i \\ a & k_f & -b_f & b_f \\ -b_i & -b_f & t & -t \\ b_i & b_f & -t & t \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_f \\ v_i \\ v_f \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} M_i^F \\ M_f^F \\ V_i^F \\ V_f^F \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

onde:  $k_i$ ,  $k_f$  são os coeficientes de rigidez para o sistema derivado com rotação unitária via método dos deslocamentos;  $a$  é a rigidez cruzada de tal sistema derivado;  $b_i$ ,  $b_f$  são as rigidezas quando dos sistemas derivados de deslocamentos unitários e  $t$  é a rigidez ao corte nos dois últimos sistemas derivados citados. Vide na figura 3.9 a notação utilizada.

**Figura 3.9: Sistemas derivados, pelo método dos deslocamentos, para a barra engastada nas duas extremidades: (a)  $\theta_i = 1$ , (b)  $\theta_f = 1$ , (c)  $v_i = 1$  e (d)  $v_f = 1$**

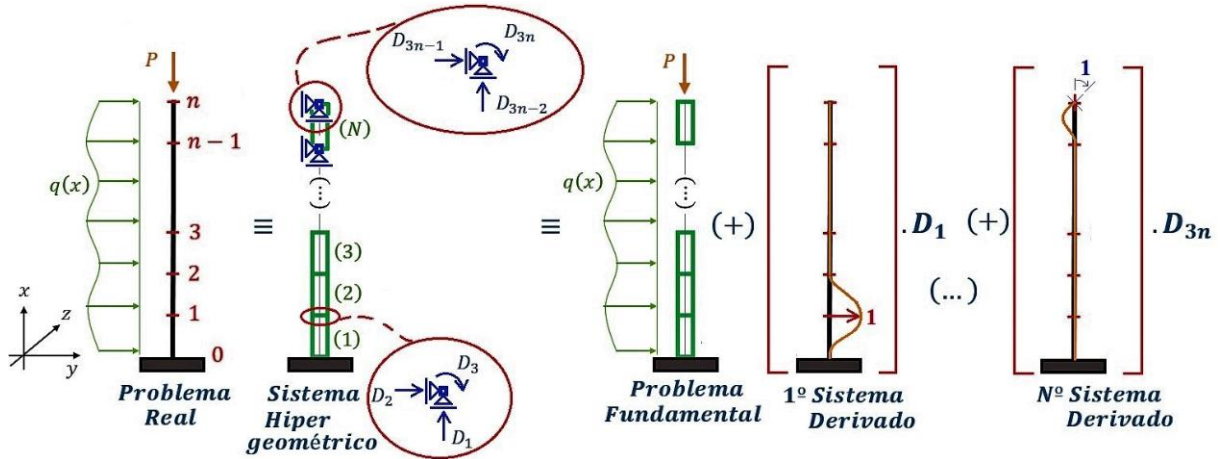


Fonte: O Autor (2019)

### 3.3. EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO DO ELEMENTO FINITO

Faz-se relevante mencionar que a abordagem primordial por elementos finitos consiste em discretizar a estrutura em pequenos elementos e proceder o refinamento da decorrente malha. Assim procede Meshkat-Dini e Tehranizadh (2009) através de elementos finitos quadriláteros. Daí que nesta tese opta-se pela formulação matricial do MEF embasada no método dos deslocamentos (como solução distinta da maioria das pesquisas constantes na literatura). Postula-se o MEF mediante utilização do princípio da superposição de efeitos e na conseguinte subdivisão do sistema hipergeométrico (gera o vetor de reações elásticas  $\{R_e\}$ ) em: problema fundamental (caracterizado pela atuação dos carregamentos e condições ambientais, gera o vetor de reações de engaste  $\{R_e^F\}$ ) e em  $n$  sistemas derivados (geram a matriz de rigidez  $[K_e]$ ). Vide figura 3.10. Por fim, observa-se a utilização do elemento finito de barra associado a análise matricial de estruturas.



**Figura 3.10: Princípio da superposição de efeitos no pilar com  $N$  elementos finitos**

Fonte: O Autor (2019)

Estendendo-se as equações equilíbrio baseadas no método dos deslocamentos, estas apresentadas em Parcel e Maney (1944), Parcel e Moorman (1955, p. 128 – 129 e p. 206 – 214) e Charlton (1982, p. 157 – 163). Adequando tais equações para excitação dinâmica, tem-se o sistema de equilíbrio expresso por:

$$\{R_e\} = [M_e] \cdot \{\ddot{d}\} + [K_e] \cdot \{d\} + \{R_e^F\} \quad (3.26)$$

onde:  $\{R_e\}$  é o vetor de reações elásticas (reações nodais de extremo do elemento finito);  $\{d\}$  é o vetor de deslocamentos (incógnitas, logo deslocamentos lineares e angulares);  $\{\ddot{d}\}$  é o vetor de aceleração nodal;  $\{R_e^F\}$  é o vetor de reações de extremo fixo;  $[M_e]$  e  $[K_e]$  são as matrizes de massa e de rigidez do elemento finito, respectivamente.

A equação (3.26) representa o sistema de equações de equilíbrio dos elementos finitos no sistema local de coordenadas (SLC), sendo necessário reescrevê-lo no sistema global de coordenadas (SGC), mediante transformação de coordenadas:  $\{d_g\} = [T_c] \cdot \{d\}$ , resultando em:

$$\{R\} = [M_g] \cdot \{\ddot{d}_g\} + [K_g] \cdot \{d_g\} + \{R^F\} \quad (3.27)$$

onde:  $\{R\} = [T_c] \cdot \{R_e\}$ ;

$$\{R^F\} = [T_c] \cdot \{R_e^F\};$$

$$[M_g] = [T_c] \cdot [M_e] \cdot [T_c]^T;$$

$$[K_g] = [T_c] \cdot [K_e] \cdot [T_c]^T \text{ e}$$

$[T_c]$  é a matriz de transformação de coordenadas.

### 3.4. ELEMENTO FINITO SOB FLEXÃO

Mediante análise do pilar apresentado na figura 3.3, e conforme preconizações dispostas em Timoshenko (1953, p. 73 – 75) onde relata a contribuição de Navier para equação diferencial que rege a linha elástica. Bem como nas definições apresentadas em Petyt (1998) para cálculo via elementos finitos, considera-se o carregamento no sentido positivo da direção  $y$ , expressando-se a equação diferencial da flexão, por:

$$E.I. v''''(x) = q(x) \quad (3.28)$$

sendo válido o campo das pequenas deformações e  $q(x)$  é o carregamento lateral na direção  $y$ .

Na equação residual (ver equação 3.7) procede-se a minimização do erro via equação (3.5), concluindo-se para EF sob flexão:

$$\int_0^h \{ [E.I. v''''(x) - q(x)] \cdot \mathcal{W}(x) \} dx = 0 \quad (3.29 a)$$

integra-se duas vezes por partes a eq. (3.29 a), chegando-se a:

$$\begin{aligned} \int_0^h [E.I. v''(x) \cdot \mathcal{W}''(x)] dx - \int_0^h [q(x) \cdot \mathcal{W}(x)] dx \\ = -[E.I. v_0'''(x) \cdot \mathcal{W}(x)]_0^h + [E.I. v_0''(x) \cdot \mathcal{W}'(x)]_0^h \end{aligned} \quad (3.29 b)$$

onde:  $v_0'''(x)$  é a derivada terceira da deflexão  $v(x)$  em relação ao eixo axial  $x$ , sendo aplicada na origem ( $x = 0$ ) e  $v_0''(x)$  idem para a derivada segunda.

adimensionalizando a equação (3.29 b), via ( $\xi = h^{-1} \cdot x$ ), e utilizando a função ponderadora  $\mathcal{W}(\xi)$  como a primeira variação da função aproximadora  $v(\xi)$ , reescreve-se:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \{ \delta \alpha \}^T \cdot \{ \psi'' \} \cdot E.I. \cdot \{ \psi'' \}^T \cdot \{ \alpha \} \cdot H d\xi - \int_0^1 \{ \delta \alpha \}^T \cdot \{ \psi \} \cdot q \cdot H d\xi \\ = -[\{ \delta \alpha \}^T \cdot E.I. v_0''' \cdot \{ \psi \}]_0^1 + [\{ \delta \alpha \}^T \cdot E.I. v_0'' \cdot \{ \psi' \}]_0^1 \end{aligned} \quad (3.29 c)$$

com:  $v(\xi) = \sum \alpha_j \cdot \psi_j = \{\psi\}^T \cdot \{\alpha\};$   
 $\mathcal{W}(\xi) = \{\psi\}^T \cdot \{\delta\alpha\} = \{\delta\alpha\}^T \cdot \{\psi\};$   
 $\mathcal{W}''(\xi) = \{\delta\alpha\}^T \cdot \{\psi''\}$  e  
 $v(\xi)$  a função da interpolação.

Reescreve-se a equação (3.29 c), com a utilização da matriz de rigidez  $[K_e]$  e dos vetores  $\{R_e\}$  e  $\{R_e^F\}$  e considerando  $EI$  constante, como:

$$\{\delta\alpha\}^T \cdot [K_e] \cdot \{\alpha\} + \{\delta\alpha\}^T \cdot \{R_e^F\} = \{\delta\alpha\}^T \cdot \{R_e\} \quad (3.30)$$

e:

$$[K_e] = E \cdot I \cdot H \cdot \int_0^1 \{\psi''\} \cdot \{\psi''\}^T d\xi; \{R_e^F\} = -H \cdot \int_0^1 \{\psi\} \cdot q(x) d\xi; \{R_e\} = \begin{Bmatrix} \mathcal{V}(0) \\ \mathfrak{B}(0) \\ -\mathcal{V}(H) \\ -\mathfrak{B}(H) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

$V_1, M_1, V_2$  e  $M_2$  são as reações elásticas. Por fim, a equação (3.30) equivale a equação (3.26), sem a parcela dinâmica. E  $\mathcal{V}(0), \mathcal{V}(H)$  são os esforços cortantes na base e no topo do pilar (respectivamente), sendo  $\mathfrak{B}(0), \mathfrak{B}(H)$  os momentos fletores na base e no topo do pilar (respectivamente).

Após a análise estática do elemento finito sob flexão, faz-se necessário definir a matriz de massa translacional  $[M_t]$ , a matriz de massa rotacional  $[M_r]$  e a matriz de rigidez geométrica  $[K_{eg}]$ , como:

$$[M_t] = \int_{\mathbb{V}} [N]^T \cdot \rho \cdot [N] d\mathbb{V} = \int_0^1 \rho \cdot H \cdot A(\xi) \cdot \{\psi(\xi)\} \cdot \{\psi(\xi)\}^T d\xi \quad (3.31 a)$$

$$[M_r] = \int_0^1 \rho \cdot H \cdot I_z(\xi) \cdot \{\psi'(\xi)\} \cdot \{\psi'(\xi)\}^T d\xi \quad (3.31 b)$$

$$[K_{eg}] = \int_0^1 H \cdot \mathfrak{N}(\xi) \cdot \{\psi'(\xi)\} \cdot \{\psi'(\xi)\}^T d\xi \quad (3.31 c)$$

sendo:  $\mathbb{V}$  o volume da estrutura analisada e  $[M_e] = [M_t] + [M_r]$ . Ficando os elementos de posição  $(i, j)$  das matrizes  $[K_e]$ ,  $[K_{eg}]$  e  $[M_e]$ , expressos por:

$$K_{e_{i,j}} = E.H. \int_0^1 I_z(\xi). \psi_i''(\xi). \psi_j''(\xi) d\xi \quad (3.32 a)$$

$$K_{eg_{i,j}} = H. \int_0^1 \mathfrak{N}(\xi). \psi_i'(\xi). \psi_j'(\xi) d\xi \quad (3.32 b)$$

$$M_{e_{i,j}} = \rho.H. \int_0^1 A(\xi). \psi_i(\xi). \psi_j(\xi) d\xi + \rho.H. \int_0^1 I_z(\xi). \psi_i'(\xi). \psi_j'(\xi) d\xi \quad (3.32 c)$$

sendo:  $\psi_1(\xi) = 1 - 3.\xi^2 + 2.\xi^3$ ;  $\psi_1'(\xi) = 6.h^{-1}.(-\xi + \xi^2)$ ;  $\psi_1''(\xi) = 6.h^{-2}.(-1 + 2.\xi)$ ;  
 $\psi_2(\xi) = (-\xi + 2.\xi^2 - \xi^3).h$ ;  $\psi_2'(\xi) = (-1 + 4.\xi - 3.\xi^2)$ ;  $\psi_2''(\xi) = 2.h^{-1}.(2 - 3.\xi)$ ;  
 $\psi_3(\xi) = 3.\xi^2 - 2.\xi^3$ ;  $\psi_3'(\xi) = 6.h^{-1}.(\xi - \xi^2)$ ;  $\psi_3''(\xi) = 6.h^{-2}.(1 - 2.\xi)$ ;  
e  $\psi_4(\xi) = (\xi^2 - \xi^3).h$ ;  $\psi_4'(\xi) = (2.\xi - 3.\xi^2)$  e  $\psi_4''(\xi) = 2.h^{-1}.(1 - 3.\xi)$ .

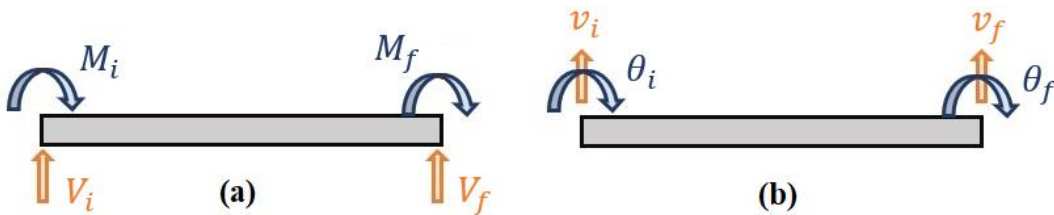
Resultando o sistema (ver equação 3.26) de equilíbrio dinâmico, expresso como:

$$\begin{Bmatrix} M_i \\ M_f \\ V_i \\ V_f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_i & -\gamma_i & \sigma & \tau_i \\ -\gamma_i & \beta_i & -\tau_f & \lambda \\ \sigma & -\tau_f & \alpha_f & \gamma_f \\ \tau_i & \lambda & \gamma_f & \beta_f \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_i \\ \ddot{\theta}_f \\ \ddot{v}_i \\ \ddot{v}_f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} t & -b_i & -t & -b_f \\ -b_i & k_i & b_i & a \\ -t & b_i & t & b_f \\ -b_f & a & b_f & k_f \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_f \\ v_i \\ v_f \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} M_i^F \\ M_f^F \\ V_i^F \\ V_f^F \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

onde:  $\alpha_i = M_{e_{1,1}}$ ;  $\gamma_i = -M_{e_{1,2}}$ ;  $\beta_i = M_{e_{2,2}}$ ;  $\alpha_f = M_{e_{3,3}}$ ;  $\gamma_f = -M_{e_{3,4}}$ ;  $\beta_f = M_{e_{4,4}}$ ;  
 $\sigma = M_{e_{1,3}}$ ;  $\tau_i = M_{e_{1,4}}$ ;  $\tau_f = -M_{e_{2,3}}$ ;  $\lambda = M_{e_{2,4}}$ ;  $t = K_{e_{1,1}}$ ;  $b_i = K_{e_{2,3}}$ ;  $b_f = K_{e_{3,4}}$ ;  
 $a = K_{e_{2,4}}$ ;  $k_i = K_{e_{2,2}}$  e  $k_f = K_{e_{4,4}}$ .

Baseado no método da distribuição de momentos, conforme Rizwan (2003, p. 258 – 261), apresenta-se na Fig. 3.11 o elemento finito; as reações elásticas e os graus de liberdade.

**Figura 3.11: Elemento finito: (a) reações elásticas e (b) graus de liberdade**

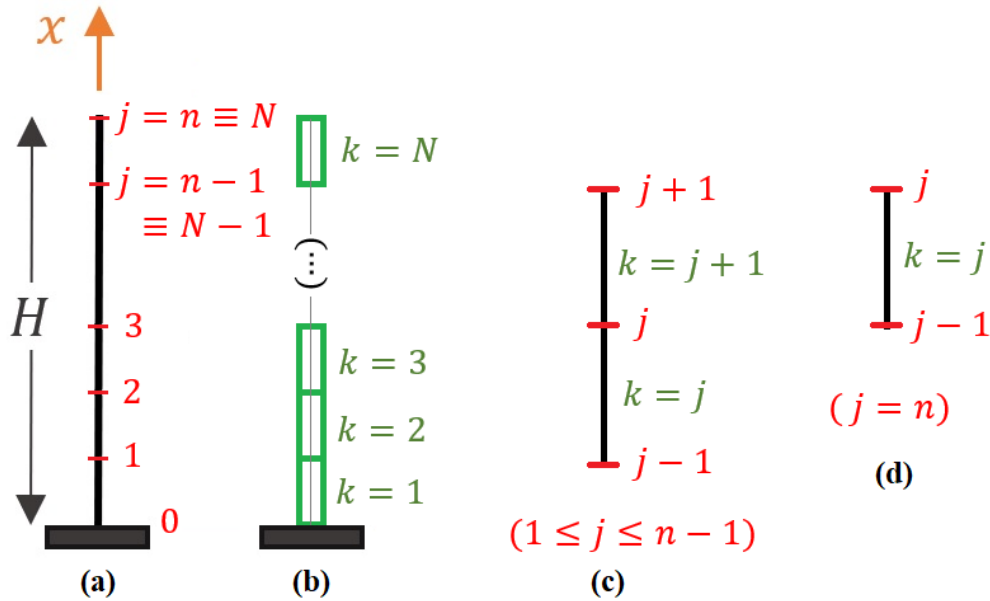


Fonte: O Autor (2019)

### 3.5. SISTEMA DE EQUILÍBRIO DINÂMICO PARA N ELEMENTOS FINITOS

Admite-se o pilar apresentado na figura 3.10 com  $N$  elementos finitos, e procede-se análogo ao postulado em Gallagher (1975, p. 20 – 89) e Fuchs (2016, p. 314 – 325). Para tal, baseia-se na nomenclatura genérica de nós variando de zero (na base) até  $j = n$  (no topo do pilar). Além disso, utiliza-se a numeração dos elementos finitos de  $k = 1$  (primeiro elemento finito) até  $k = N$ . Vide figura 3.12.

**Figura 3.12: Numeração dos elementos finitos: (a) nós, (b) barras, (c) equilíbrio dos nós ao longo do pilar e (d) equilíbrio do topo do pilar**



Fonte: O Autor (2019)

Realiza-se o equilíbrio de momentos e de forças transversais nos pontos (nós) ao longo do pilar, ver fig. 3.12 (a). Desta forma, utilizam-se as reações elásticas apresentadas na figura 3.11 (a), concluindo:

$$M_f^{(j)} + M_i^{(j+1)} = 0 \quad \therefore$$

$$\begin{aligned} -\gamma_i^{(j)} \cdot \ddot{\theta}_{j-1} + [\beta_i^{(j)} + \alpha_i^{(j+1)}] \cdot \ddot{\theta}_j - \gamma_i^{(j+1)} \cdot \ddot{\theta}_{j+1} - \tau_f^{(j)} \cdot \ddot{v}_{j-1} + [\lambda^{(j)} + \sigma^{(j+1)}] \cdot \ddot{v}_j \\ + \tau_i^{(j+1)} \cdot \ddot{v}_{j+1} - b_i^{(j)} \cdot \theta_{j-1} + [k_i^{(j)} + t^{(j+1)}] \cdot \theta_j - b_i^{(j+1)} \cdot \theta_{j+1} + b_i^{(j)} \cdot v_{j-1} \\ + [a^{(j)} - t^{(j+1)}] \cdot v_j - b_f^{(j+1)} \cdot v_{j+1} = -M_f^{(j)} - M_i^{(j+1)} \end{aligned} \quad (3.34 a)$$

$$\begin{aligned}
V_f^{(j)} + V_i^{(j+1)} &= 0 \quad \therefore \\
-\tau_i^{(j)} \cdot \ddot{\theta}_{j-1} + [\lambda^{(j)} + \sigma^{(j+1)}] \cdot \ddot{\theta}_j - \tau_f^{(j+1)} \cdot \ddot{\theta}_{j+1} + \gamma_f^{(j)} \cdot \ddot{v}_{j-1} + [\beta_f^{(j)} + \alpha_f^{(j+1)}] \cdot \ddot{v}_j \\
&+ \gamma_f^{(j+1)} \cdot \ddot{v}_{j+1} - b_f^{(j)} \cdot \theta_{j-1} + [a^{(j)} - t^{(j+1)}] \cdot \theta_j + b_i^{(j+1)} \cdot \theta_{j+1} + b_f^{(j)} \cdot v_{j-1} \\
&+ [k_f^{(j)} + t^{(j+1)}] \cdot v_j + b_f^{(j+1)} \cdot v_{j+1} = -V_f^{F(j)} - V_i^{F(j+1)} \quad (3.34 \text{ b})
\end{aligned}$$

Para o equilíbrio do topo do pilar, utiliza-se a fig. (3.12 d), chegando-se a:

$$\begin{aligned}
M_f^{(j=n)} &= 0 \quad \therefore \\
-\gamma_i^{(j)} \cdot \ddot{\theta}_{j-1} + \beta_i^{(j)} \cdot \ddot{\theta}_j - \tau_f^{(j)} \cdot \ddot{v}_{j-1} + \lambda^{(j)} \cdot \ddot{v}_j - b_i^{(j)} \cdot \theta_{j-1} + k_i^{(j)} \cdot \theta_j + b_i^{(j)} \cdot v_{j-1} + a^{(j)} \cdot v_j \\
&= -M_f^{F(j)} \quad (3.34 \text{ c})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_f^{(j=n)} &= 0 \quad \therefore \\
\tau_i^{(j)} \cdot \ddot{\theta}_{j-1} + \lambda^{(j)} \cdot \ddot{\theta}_j + \gamma_f^{(j)} \cdot \ddot{v}_{j-1} + \beta_f^{(j)} \cdot \ddot{v}_j - b_f^{(j)} \cdot \theta_{j-1} + a^{(j)} \cdot \theta_j + b_f^{(j)} \cdot v_{j-1} + k_f^{(j)} \cdot v_j \\
&= -V_f^{F(j)} \quad (3.34 \text{ d})
\end{aligned}$$

A fim de exemplificar a montagem das matrizes  $[K_e]$  e  $[M_e]$  apresentadas na eq. (3.26), adota-se o pilar subdividido em cinco elementos finitos ( $N = 5$ ) e escreve-se:

$$\begin{bmatrix} [Me]_{\theta\theta} & [Me]_{\theta\delta} \\ [Me]_{\delta\theta} & [Me]_{\delta\delta} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\ddot{\theta}\} \\ \{\ddot{\delta}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [Ke]_{\theta\theta} & [Ke]_{\theta\delta} \\ [Ke]_{\delta\theta} & [Ke]_{\delta\delta} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\theta\} \\ \{\delta\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{M\} \\ \{F\} \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

Com a finalidade de interligar a equação (3.35) do pilar com cinco elementos finitos, com a condensação matricial apresentada na letra c do item (2.10), bem como valendo-se da nomenclatura matricial da equação (2.150), escreve-se:

$$[Me]_{\theta\theta} = \begin{bmatrix} \beta_i^{(1)} + \alpha_i^{(2)} & -\gamma_i^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_i^{(2)} & \beta_i^{(2)} + \alpha_i^{(3)} & -\gamma_i^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_i^{(3)} & \beta_i^{(3)} + \alpha_i^{(4)} & -\gamma_i^{(4)} & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_i^{(4)} & \beta_i^{(4)} + \alpha_i^{(5)} & -\gamma_i^{(5)} \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma_i^{(5)} & \beta_i^{(5)} \end{bmatrix} \quad (3.36 \text{ a})$$

$$[Me]_{\theta\delta} = [Me]_{\delta\theta}^T = \begin{bmatrix} \lambda^{(1)} + \sigma^{(2)} & \tau_i^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ -\tau_f^{(2)} & \lambda^{(2)} + \sigma^{(3)} & \tau_i^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & -\tau_f^{(3)} & \lambda^{(3)} + \sigma^{(4)} & \tau_i^{(4)} & 0 \\ 0 & 0 & -\tau_f^{(4)} & \lambda^{(4)} + \sigma^{(5)} & \tau_i^{(5)} \\ 0 & 0 & 0 & -\tau_f^{(5)} & \lambda^{(5)} \end{bmatrix} \quad (3.36 \text{ b})$$

$$[Me]_{\delta\delta} = \begin{bmatrix} \beta_f^{(1)} + \alpha_f^{(2)} & \gamma_f^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_f^{(2)} & \beta_f^{(2)} + \alpha_f^{(3)} & \gamma_f^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_f^{(3)} & \beta_f^{(3)} + \alpha_f^{(4)} & \gamma_f^{(4)} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_f^{(4)} & \beta_f^{(4)} + \alpha_f^{(5)} & \gamma_f^{(5)} \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_f^{(5)} & \beta_f^{(5)} \end{bmatrix} \quad (3.36 c)$$

$$[Ke]_{\theta\theta} = \begin{bmatrix} k_i^{(1)} + t^{(2)} & -b_i^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ -b_i^{(2)} & k_i^{(2)} + t^{(3)} & -b_i^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & -b_i^{(3)} & k_i^{(3)} + t^{(4)} & -b_i^{(4)} & 0 \\ 0 & 0 & -b_i^{(4)} & k_i^{(4)} + t^{(5)} & -b_i^{(5)} \\ 0 & 0 & 0 & -b_i^{(5)} & k_i^{(5)} \end{bmatrix} \quad (3.36 d)$$

$$[Ke]_{\theta\delta} = [Ke]_{\delta\theta}^T = \begin{bmatrix} a^{(1)} - t^{(2)} & -b_f^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ b_i^{(2)} & a^{(2)} - t^{(3)} & -b_f^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & b_i^{(3)} & a^{(3)} - t^{(4)} & -b_f^{(4)} & 0 \\ 0 & 0 & b_i^{(4)} & a^{(4)} - t^{(5)} & -b_f^{(5)} \\ 0 & 0 & 0 & b_i^{(5)} & a^{(5)} \end{bmatrix} \quad (3.36 e)$$

$$[Ke]_{\delta\delta} = \begin{bmatrix} k_f^{(1)} + t^{(2)} & b_f^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ b_f^{(2)} & k_f^{(2)} + t^{(3)} & b_f^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & b_f^{(3)} & k_f^{(3)} + t^{(4)} & b_f^{(4)} & 0 \\ 0 & 0 & b_f^{(4)} & k_f^{(4)} + t^{(5)} & b_f^{(5)} \\ 0 & 0 & 0 & b_f^{(5)} & k_f^{(5)} \end{bmatrix} \quad (3.36 f)$$

$$\{\ddot{\theta}\}^T = \{\ddot{\theta}_1 \quad \ddot{\theta}_2 \quad \ddot{\theta}_3 \quad \ddot{\theta}_4 \quad \ddot{\theta}_5\} \quad (3.36 g)$$

$$\{\ddot{\delta}\}^T = \{\ddot{\delta}_1 \quad \ddot{\delta}_2 \quad \ddot{\delta}_3 \quad \ddot{\delta}_4 \quad \ddot{\delta}_5\} \quad (3.36 h)$$

$$\{\theta\}^T = \{\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \theta_4 \quad \theta_5\} \quad (3.36 i)$$

$$\{\delta\}^T = \{\delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3 \quad \delta_4 \quad \delta_5\} \quad (3.36 j)$$

$$\{M\}^T = \{M_1 \quad M_2 \quad M_3 \quad M_4 \quad M_5\} \quad (3.36 k)$$

$$\{F\}^T = \{F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad F_4 \quad F_5\} \quad (3.36 l)$$

### 3.6. ELEMENTO FINITO DE BARRA COM SEÇÃO DE PAREDES FINAS E EM FORMATO DE NÚCLEO C

Baseado em Smith e Coull (1991), Heidebrecht e Swift (1971) e em Barbosa (1980) procede-se a análise matricial do pilar em núcleo, via método dos deslocamentos. Os carregamentos externos são aplicados mediante imposição de cargas concentradas nos níveis dos lintéis. Cria-se assim, o elemento finito de barra sob flexo-torção em formato de núcleo C.

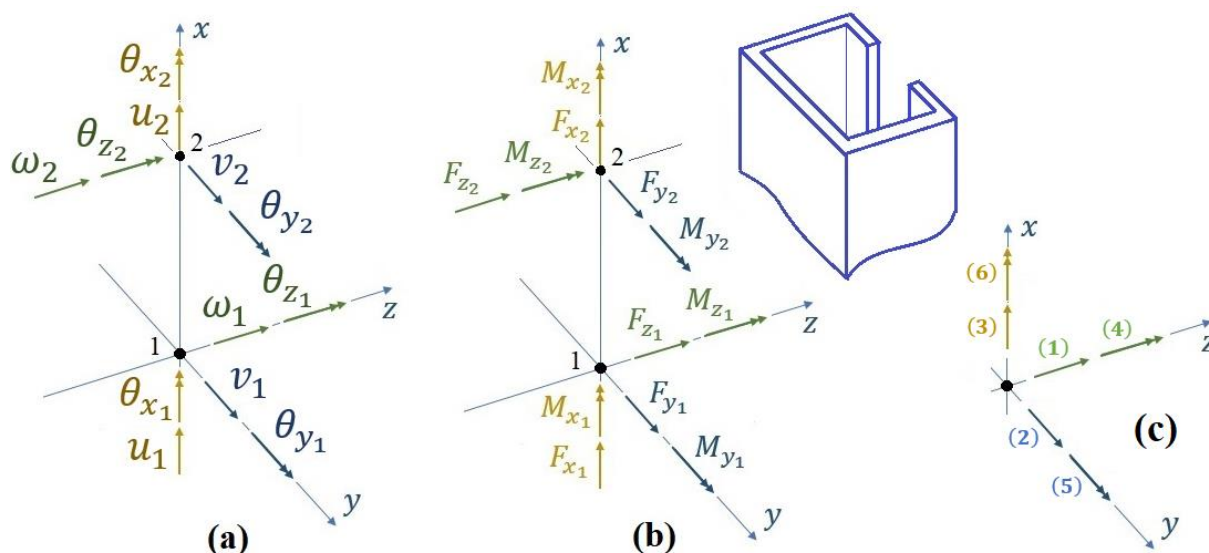
Os painéis – parede que compõem o núcleo estrutural são analisados como elementos finitos lineares com sete graus de liberdade (seis da análise matricial espacial e o empenamento oriundo da teoria da flexo – torção). A inserção do empenamento ocorre através da matriz de rigidez via teoria da flexo – torção, sendo inserido o bimomento  $B$  no vetor de forças e o empenamento  $\phi'$  no vetor de deslocamentos. Já, os lintéis são modelados com a capacidade de reação aos esforços normais, cortantes, momentos fletores e torsões.

A análise matricial, do conjunto painéis – parede contraventado por lintéis, foi implementada em Mathcad Prime 5.0 (versão estudantil), a fim de processar convenientemente os dados. A utilização do software Mathcad é motivada pelas inúmeras incógnitas geradas pelo sistema de equações de equilíbrio.

#### a) Matriz de rigidez à flexão dos painéis – parede com seção aberta

O trecho dos painéis – parede será o comprimento  $h$  e compreendido entre dois lintéis consecutivos, sendo denominados de elemento de painel – parede ou simplesmente de elemento de pilar. Vide figuras 3.13 e 3.19.

**Figura 3.13: Convenção no elemento: (a) dos graus de liberdade, (b) dos esforços solicitantes e (c) sequência de numeração dos graus de liberdade**



Fonte: O Autor (2019)



Na figura 3.13 observa-se que os eixos coordenados locais, do elemento do pilar, são impostos com origem no centro de torção. Por eixo longitudinal tem-se o eixo  $x$ , enquanto os demais eixos ( $y$  e  $z$ ) são traçados na seção transversal.

Da teoria do método dos deslocamentos, utiliza-se a matriz de rigidez do elemento de barra (pilar) com seção prismática. Observando-se que o centro de torção não coincide com o centro de gravidade da seção transversal, sendo utilizado o translação do sistema coordenado (ver letra d, deste item). Assim, no centro de gravidade exprime-se a matriz de rigidez do pilar com seção de paredes finas, como:

$$[K_F]_{CG} = \begin{bmatrix} [K_{F11}]_{CG} & [K_{F12}]_{CG} \\ [K_{F21}]_{CG} & [K_{F22}]_{CG} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

onde:  $[K_F]_{CG}$  é a matriz de rigidez (do pilar com seção aberta de paredes finas) devido à flexão e referenciada no centro de gravidade da seção transversal. Desta forma, as equações de Maney organizadas em formato matricial, e aplicadas ao pilar de seção de paredes finas, ficam expressas por:

$$\begin{Bmatrix} F_{zi} \\ F_{yi} \\ F_{xi} \\ M_{zi} \\ M_{yi} \\ F_{zf} \\ F_{yf} \\ F_{xf} \\ M_{zf} \\ M_{yf} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_z & 0 & 0 & 0 & -b_y & -t_z & 0 & 0 & 0 & -b_y \\ 0 & t_y & 0 & b_z & 0 & 0 & -t_y & 0 & b_z & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 & 0 & 0 & 0 & -r & 0 & 0 \\ 0 & b_z & 0 & k_z & 0 & 0 & -b_z & 0 & a_z & 0 \\ -b_y & 0 & 0 & 0 & k_y & b_y & 0 & 0 & 0 & a_y \\ -t_z & 0 & 0 & 0 & b_y & t_z & 0 & 0 & 0 & b_y \\ 0 & -t_y & 0 & -b_z & 0 & 0 & t_y & 0 & -b_z & 0 \\ 0 & 0 & -r & 0 & 0 & 0 & 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & b_z & 0 & a_z & 0 & 0 & -b_z & 0 & k_z & 0 \\ -b_y & 0 & 0 & 0 & a_y & b_y & 0 & 0 & 0 & k_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_i \\ v_i \\ u_i \\ \theta_{zi} \\ \theta_{yi} \\ \omega_f \\ v_f \\ u_f \\ \theta_{zf} \\ \theta_{yf} \end{Bmatrix} \quad (3.38)$$

com:

$$r = \frac{E \cdot A}{h}; \quad k_y = \frac{4 \cdot E \cdot I_y}{h} \cdot \frac{1 + \varphi_{cy}}{1 + 4 \cdot \varphi_{cy}}; \quad a_y = \frac{2 \cdot E \cdot I_y}{h} \cdot \frac{1 - 2 \cdot \varphi_{cy}}{1 + 4 \cdot \varphi_{cy}}; \quad b_y = \frac{k_y + a_y}{h};$$

$$k_z = \frac{4 \cdot E \cdot I_z}{h} \cdot \frac{1 + \varphi_{cz}}{1 + 4 \cdot \varphi_{cz}}; \quad a_z = \frac{2 \cdot E \cdot I_z}{h} \cdot \frac{1 - 2 \cdot \varphi_{cz}}{1 + 4 \cdot \varphi_{cz}}; \quad b_z = \frac{k_z + a_z}{h}; \quad \varphi_c = \frac{3 \cdot E \cdot I}{G \cdot A \cdot h^3} \cdot k_c;$$

$$t_z = \frac{2 \cdot b_z}{h} \quad \text{e} \quad t_y = \frac{2 \cdot b_y}{h}.$$

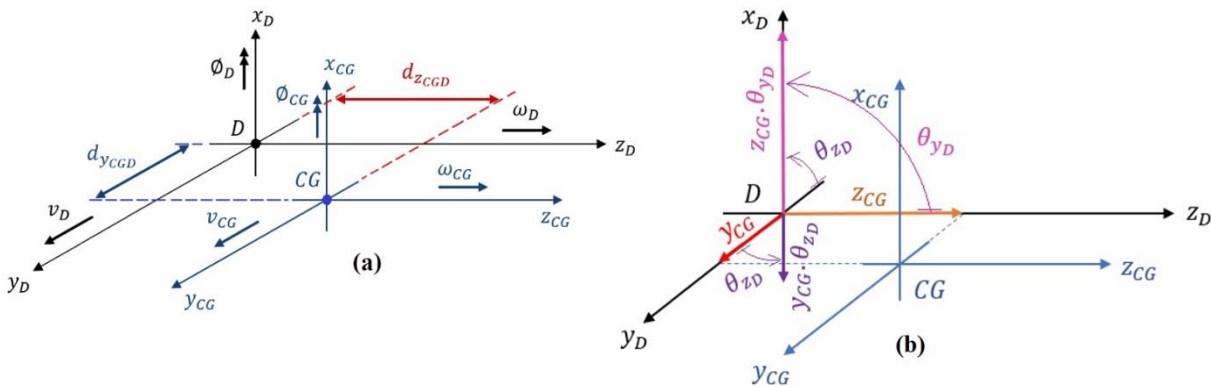
o fator de forma da seção transversal  $k_c$  é apresentado de maneira simplificada em Timoshenko e Gere (1984, v. 2, p. 349), como a razão entre a área da seção transversal pela área da alma na direção analisada. Ficando expresso por:

$$k_c = \frac{A}{A_{alma}} \quad (3.38 a)$$

### b) Transformação de coordenadas do CG para o centro de torção D

A transferência do referencial dos graus de liberdade, do centro de gravidade para o centro de torção, é procedida conforme o ilustrado na figura 3.14.

**Figura 3.14: Transformação de referencial do CG para D: (a) translações e (b) rotações  $\theta_z$  e  $\theta_y$  no centro de torção D**



Fonte: O Autor (2019)

Mediante correlação entre os deslocamentos lineares e angulares em  $D$  com a repercussão no  $CG$ , escreve-se:

$$\omega_{CG} = \omega_D \quad (3.39 a)$$

$$v_{CG} = v_D \quad (3.39 b)$$

$$u_{CG} = u_D - y_{CG} \cdot \theta_{zD} + z_{CG} \cdot \theta_{yD} \quad (3.39 c)$$

$$\theta_{zCG} = \theta_{zD} \quad (3.39 d)$$

$$\theta_{y_{CG}} = \theta_{y_D} \quad (3.39 e)$$

matricialmente, tem-se:

$$\{D\}_{CG} = [T] \cdot \{D\}_D \quad (3.39 f)$$

$$\begin{Bmatrix} \{D_{CG}\}_i \\ \{D_{CG}\}_f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{T}] & [0] \\ [0] & [\bar{T}] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{D_D\}_i \\ \{D_D\}_f \end{Bmatrix} \quad (3.39 g)$$

$$e: \{D_{CG}\}_i^T = \{\omega_{CGi} \quad v_{CGi} \quad u_{CGi} \quad \theta_{z_{CGi}} \quad \theta_{y_{CGi}}\}; \{D_D\}_i = \{\omega_{Di} \quad v_{Di} \quad u_{Di} \quad \theta_{z_{Di}} \quad \theta_{y_{Di}}\};$$

$$\{D_{CG}\}_f^T = \{\omega_{CGf} \quad v_{CGf} \quad u_{CGf} \quad \theta_{z_{CGf}} \quad \theta_{y_{CGf}}\}; \{D_D\}_f = \{\omega_{Df} \quad v_{Df} \quad u_{Df} \quad \theta_{z_{Df}} \quad \theta_{y_{Df}}\};$$

$$[\bar{T}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -y_{CG} & z_{CG} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz de rigidez (eq. 3.37) fica expressa, com o referencial no centro de torção, por:

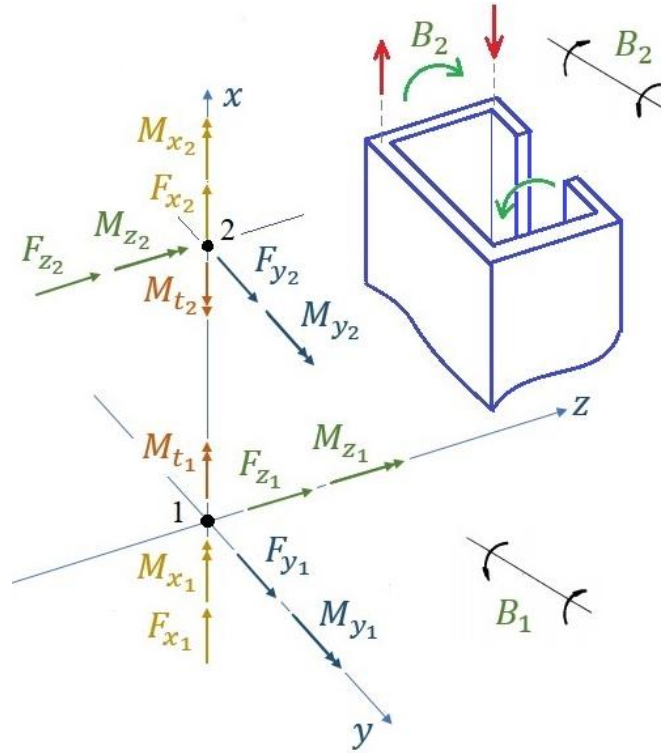
$$[K_F]_D = [T]^T \cdot [K_F]_{CG} \cdot [T] \quad (3.40)$$

$$\text{sendo: } [K_{F11}]_D = [\bar{T}]^T \cdot [K_{F11}]_{CG} \cdot [\bar{T}]; \quad [K_{F12}]_D = [\bar{T}]^T \cdot [K_{F12}]_{CG} \cdot [\bar{T}]; \quad [K_{F21}]_D = [K_{F12}]_D^T;$$

$$[K_{F22}]_D = [\bar{T}]^T \cdot [K_{F22}]_{CG} \cdot [\bar{T}].$$

### c) Matriz de rigidez dos painéis – parede via teoria da flexo – torção

Na figura 3.15 são apresentados os esforços solicitantes do pilar em núcleo, sob a perspectiva da teoria da flexo – torção (ver item 2.7).

**Figura 3.15: Convenção dos esforços solicitantes via teoria da flexo – torção****Fonte: O Autor (2019)**

Mediante resolução da equação diferencial da flexo – torção, ver equações (2.98) e (2.102), e aplicação das condições de contorno para o pilar apresentado na figura 3.3. Tem-se a rotação  $\phi(x)$  e o empenamento  $\phi'(x)$ , expressos por:

$$\phi(x) = \phi_1 + \frac{\phi'_1}{\alpha} \cdot \sinh(\alpha \cdot x) + \frac{B_1}{G \cdot I_t} \cdot [\cosh(\alpha \cdot x) - 1] + \frac{M_{t_1}}{\alpha \cdot G \cdot I_t} \cdot [\alpha \cdot x - \sinh(\alpha \cdot x)] \quad (3.41 a)$$

$$\phi'(x) = \phi'_1 \cdot \cosh(\alpha \cdot x) + \frac{B_1}{G \cdot I_t} \cdot \alpha \cdot \sinh(\alpha \cdot x) + \frac{M_{t_1}}{G \cdot I_t} \cdot [1 - \cosh(\alpha \cdot x)] \quad (3.41 b)$$

sendo as condições de contorno:  $\phi_1$  e  $\phi'_1$  a rotação e o empenamento no ponto 1 do elemento finito apresentado na figura 3.15;  $B_1$  e  $M_{t_1}$  o bimomento e o momento de torção (também para o ponto 1);  $B_1 = E \cdot I_\omega \cdot \phi''_0$ ; e  $M_{t_1} = G \cdot I_t \cdot \phi'_0 - E \cdot I_\omega \cdot \phi'''_0$ .

Aplica-se a equação (3.41 b), derivada em relação ao eixo axial  $x$ , na equação (2.96 c). Daí, exprime-se o bimomento  $B_x(x)$  como:

$$B_x(x) = \frac{G \cdot I_t \cdot \phi'_1}{\alpha} \cdot \sinh(\alpha \cdot x) + B_1 \cdot \cosh(\alpha \cdot x) - \frac{M_{t_1}}{\alpha} \cdot \sinh(\alpha \cdot x) \quad (3.42)$$

Procede-se a substituição da equação (3.41 a) na eq. (2.98), exprimindo-se a lei de variação do momento de torção  $M_{t_x}(x)$  (ao longo do eixo axial do elemento finito), como:

$$M_{t_x}(x) = M_{t_1} \quad (3.43)$$

Organiza-se matricialmente, as equações (3.41), (3.42) e (3.43), semelhante ao procedido em Henin (1978, p. 14 – 15), escreve-se:

$$\begin{Bmatrix} \phi_x(x) \\ \phi'_x(x) \\ B_x(x) \\ M_{t_x}(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sinh(\alpha \cdot x)}{\alpha} & \frac{\cosh(\alpha \cdot x) - 1}{G \cdot I_t} & \frac{\alpha \cdot x - \sinh(\alpha \cdot x)}{\alpha \cdot G \cdot I_t} \\ 0 & \cosh(\alpha \cdot x) & \frac{\alpha \cdot \sinh(\alpha \cdot x)}{G \cdot I_t} & \frac{1 - \cosh(\alpha \cdot x)}{G \cdot I_t} \\ 0 & \frac{G \cdot I_t \cdot \sinh(\alpha \cdot x)}{\alpha} & \cosh(\alpha \cdot x) & -\frac{\sinh(\alpha \cdot x)}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi'_1 \\ B_1 \\ M_{t_1} \end{Bmatrix} \quad (3.44)$$

sendo a correlação, mediante compatibilização de sinais entre a teoria da flexo – torção e a análise matricial canônica via método dos deslocamentos, apresentada na eq. (3.44 a) e direcionada aos graus de liberdade ( $\phi$ ,  $\phi'$ ,  $B$  e  $M_t$ ). Os pontos correlacionados são os extremos do elemento finito (apresentados na figura 3.15), e por notação dos espaço de estados (ver letra “d” do item 2.2.4 e, mais especificamente na eq. 2.71), tem-se:

$$\{E_2\} = [T] \cdot \{E_1\} \quad (3.44 a)$$

com:  $\{E_1\}$  e  $\{E_2\}$  os vetores de estado nos pontos 1 e 2 do elemento finito, respectivamente e  $[T]$  é a matriz de transferência. Sob as seguintes expressões:

$$\{E_1\} = \begin{Bmatrix} -\phi_1 \\ -\phi'_1 \\ B_1 \\ M_{t_1} \end{Bmatrix}; \{E_2\} = \begin{Bmatrix} -\phi_2 \\ -\phi'_2 \\ -B_2 \\ -M_{t_2} \end{Bmatrix} \text{ e } [T] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sinh(\alpha \cdot h)}{\alpha} & \frac{\cosh(\alpha \cdot h) - 1}{G \cdot I_t} & \frac{\alpha \cdot h - \sinh(\alpha \cdot h)}{\alpha \cdot G \cdot I_t} \\ 0 & \cosh(\alpha \cdot h) & \frac{\alpha \cdot \sinh(\alpha \cdot h)}{G \cdot I_t} & \frac{1 - \cosh(\alpha \cdot h)}{G \cdot I_t} \\ 0 & \frac{G \cdot I_t \cdot \sinh(\alpha \cdot h)}{\alpha} & \cosh(\alpha \cdot h) & -\frac{\sinh(\alpha \cdot h)}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Baseando-se na definição de coeficientes de rigidez, onde os deslocamentos e/ou rotações unitárias definem-se os sistemas derivados. Obtem-se a matriz de rigidez via teoria da flexo – torção (já referenciada no centro de torção), como:

$$[K_T] = \begin{bmatrix} [K_{T_{11}}] & [K_{T_{12}}] \\ [K_{T_{21}}] & [K_{T_{22}}] \end{bmatrix} \quad (3.45 a)$$

$$[K_T] = \gamma \cdot \begin{bmatrix} \alpha \cdot \sinh(\alpha \cdot h) & \cosh(\alpha \cdot h) - 1 & -\alpha \cdot \sinh(\alpha \cdot h) & \cosh(\alpha \cdot h) - 1 \\ \cosh(\alpha \cdot h) - 1 & h \cdot \cosh(\alpha \cdot h) - \frac{\sinh(\alpha \cdot h)}{\alpha} & -\{\cosh(\alpha \cdot h) - 1\} & \frac{\sinh(\alpha \cdot h)}{\alpha} - h \\ -\alpha \cdot \sinh(\alpha \cdot h) & -\{\cosh(\alpha \cdot h) - 1\} & \alpha \cdot \sinh(\alpha \cdot h) & -\{\cosh(\alpha \cdot h) - 1\} \\ \cosh(\alpha \cdot h) - 1 & \frac{\sinh(\alpha \cdot h)}{\alpha} - h & -\{\cosh(\alpha \cdot h) - 1\} & h \cdot \cosh(\alpha \cdot h) - \frac{\sinh(\alpha \cdot h)}{\alpha} \end{bmatrix} \quad (3.45 \text{ b})$$

sendo:  $\gamma = \frac{G \cdot I_t}{2 - 2 \cdot \cosh(\alpha \cdot h) + \alpha \cdot h \cdot \sinh(\alpha \cdot h)}$ .

#### d) Matriz de rigidez do pilar em núcleo no SLC

A montagem da matriz de rigidez do pilar em núcleo C no sistema local de coordenadas (SLC), é realizada mediante união das matrizes expressas nas equações (3.40) e (3.45).

$$[K_{FT}]_{14 \times 14} = \begin{bmatrix} [K_{FT_{11}}]_{7 \times 7} & [K_{FT_{12}}]_{7 \times 7} \\ [K_{FT_{21}}]_{7 \times 7} & [K_{FT_{22}}]_{7 \times 7} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

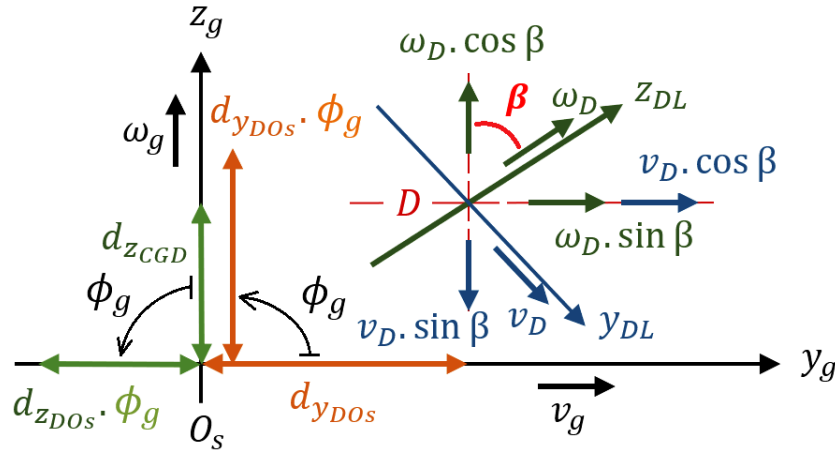
donde; as submatrizes de  $[K_{FT}]$  são compostas via parcela da flexão  $[K_F]_D$  e pela flexo – torção  $[K_T]$ , sob a seguinte configuração:

$$[K_{FT_{11}}]_{7 \times 7} = \begin{bmatrix} [K_{F_{11}}]_{D_{5 \times 5}} & [0]_{5 \times 2} \\ [0]_{2 \times 5} & [K_T]_{2 \times 2} \end{bmatrix}; \quad [K_{FT_{12}}]_{7 \times 7} = \begin{bmatrix} [K_{F_{12}}]_{D_{5 \times 5}} & [0]_{5 \times 2} \\ [0]_{2 \times 5} & [K_T]_{2 \times 2} \end{bmatrix};$$

$$[K_{FT_{21}}]_{7 \times 7} = \begin{bmatrix} [K_{F_{21}}]_{D_{5 \times 5}} & [0]_{5 \times 2} \\ [0]_{2 \times 5} & [K_T]_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [K_{FT_{22}}]_{7 \times 7} = \begin{bmatrix} [K_{F_{22}}]_{D_{5 \times 5}} & [0]_{5 \times 2} \\ [0]_{2 \times 5} & [K_T]_{2 \times 2} \end{bmatrix}.$$

#### e) Transformação do SLC para o SGC

Na figura 3.16 é apresentada a projeção das coordenadas do centro de torção ( $z_{DL}$ ,  $y_{DL}$  e  $x_{DL}$ ) para o referencial global ( $z_g$ ,  $y_g$  e  $x_g$ ) da estrutura.

**Figura 3.16: Projeção das coordenadas do centro de torção no sistema global**

Fonte: O Autor (2019)

A lei de transformação entre os referenciais, ver figura 3.16, vale:

$$\{D\}_g = [\bar{T}_{S1}] \cdot \{D\}_{DL} \quad (3.47 a)$$

$$\begin{Bmatrix} Z_g \\ y_g \\ x_g \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Z_{DL} \\ y_{DL} \\ x_{DL} \end{Bmatrix} \quad (3.47 b)$$

A matriz de rigidez após a transformação de coordenadas do SLC para o SGC é representada por  $[K_S]$ , ficando expressa (em termos da eq. 3.46) por:

$$[K_S]_{14 \times 14} = [T_S]^T \cdot [K_{FT}]_{14 \times 14} \cdot [T_S] \quad (3.48)$$

$$\text{com: } [T_S] = \begin{bmatrix} [\bar{T}_S]_{7 \times 7} & [0]_{7 \times 7} \\ [0]_{7 \times 7} & [\bar{T}_S]_{7 \times 7} \end{bmatrix}; \quad [\bar{T}_S] = \begin{bmatrix} [\bar{T}_{S1}]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 4} \\ [0]_{4 \times 3} & [\bar{T}_{S2}]_{4 \times 4} \end{bmatrix}; \quad [\bar{T}_{S2}] = \begin{bmatrix} [\bar{T}_{S1}]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 1} \\ [0]_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}.$$

Após implantar a rotação do sistema de coordenadas locais para o sistema global de coordenadas, mediante ângulo  $\beta$  apresentado na figura 3.16. O sistema de equações com a matriz de rigidez para o problema da flexão associada à torção, fica expresso por:

$$\{F\} = [T_S]^T \cdot [K_{FT}] \cdot [T_S] \cdot \{D\} \quad (3.49)$$

sendo:  $[K_S] = [T_S]^T \cdot [K_{FT}] \cdot [T_S]$ ;

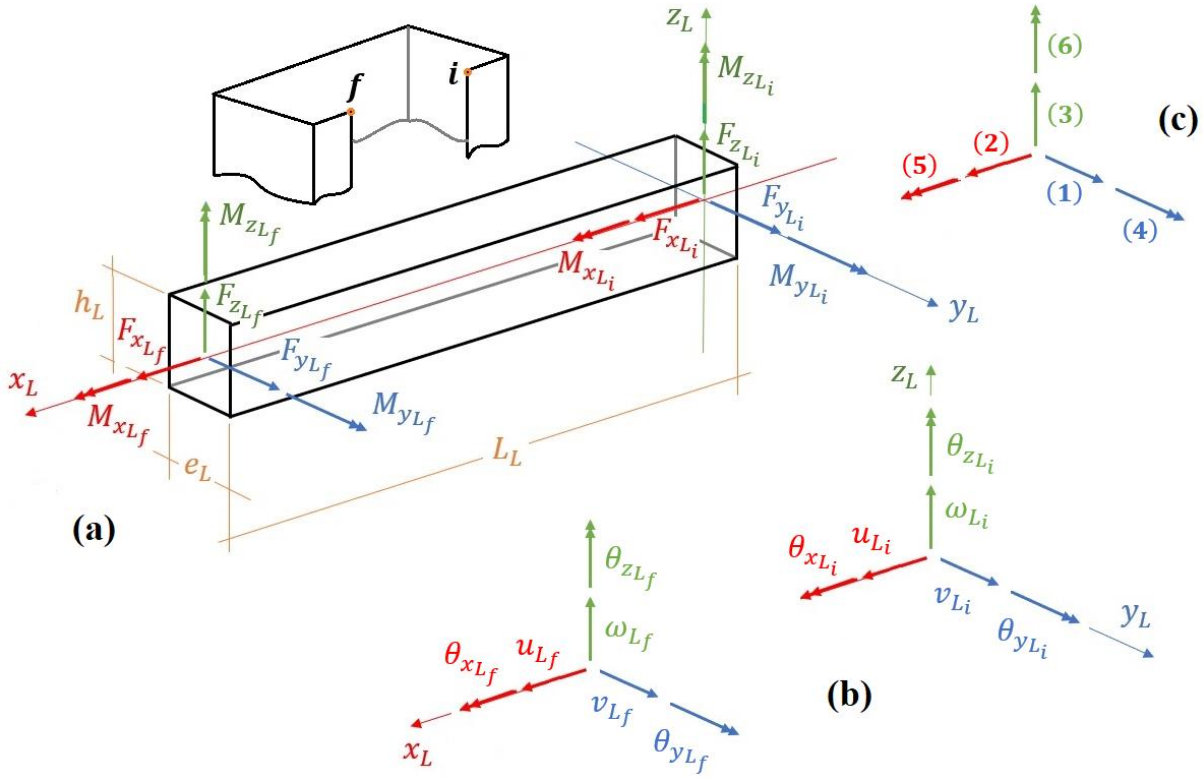
$$\{D\}^T = \{\omega_i \quad v_i \quad u_i \quad \theta_{zi} \quad \theta_{yi} \quad \phi_i \quad \phi'_i \quad \omega_f \quad v_f \quad u_f \quad \theta_{zf} \quad \theta_{yf} \quad \phi_f \quad \phi'_f\} \text{ e}$$

$$\{F\}^T = \{F_{zi} \quad F_{yi} \quad F_{xi} \quad M_{zi} \quad M_{yi} \quad M_{ti} \quad B_i \quad F_{zf} \quad F_{yf} \quad F_{xf} \quad M_{zf} \quad M_{yf} \quad M_{tf} \quad B_f\}.$$

### f) Matriz de rigidez dos lintéis

Na figura 3.17 é apresentado o sistema coordenado dos lintéis, com os conseguintes esforços solicitantes nas extremidades.

**Figura 3.17: Convenção positiva dos: (a) Esforços solicitantes no sistema dos lintéis, (b) Graus de liberdade e (c) sequência de numeração dos graus de liberdade**



Fonte: O Autor (2019)

Matricialmente, escreve-se a matriz de rigidez dos lintéis, como:

$$\{F_L\} = [K_L] \cdot \{D_L\} \quad (3.50)$$

$$\text{com: } \{D_L\}^T = \{v_{Li} \quad u_{Li} \quad \omega_{Li} \quad \theta_{yLi} \quad \theta_{xLi} \quad \theta_{zLi} \quad v_{Lf} \quad u_{Lf} \quad \omega_{Lf} \quad \theta_{yLf} \quad \theta_{xLf} \quad \theta_{zLf}\};$$

$$\{F_L\}^T = \{F_{yLi} \quad F_{xLi} \quad F_{zLi} \quad M_{yLi} \quad M_{xLi} \quad M_{zLi} \quad F_{yLf} \quad F_{xLf} \quad F_{zLf} \quad M_{yLf} \quad M_{xLf} \quad M_{zLf}\};$$

$$[K_{L11}] = \begin{bmatrix} t_{yL} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{zL} \\ 0 & r_L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{zL} & -b_{yL} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_{yL} & k_{yL} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{s}_L & 0 \\ b_{zL} & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{zL} \end{bmatrix}; [K_{L12}] = \begin{bmatrix} -t_{yL} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{zL} \\ 0 & -r_L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t_{zL} & -b_{yL} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{yL} & a_{yL} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\hat{s}_L & 0 \\ -b_{zL} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{zL} \end{bmatrix};$$



$$[K_{L_{21}}] = \begin{bmatrix} -t_{y_L} & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_{z_L} \\ 0 & -r_L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t_{z_L} & b_{y_L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_{y_L} & a_{y_L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\hat{s}_L & 0 \\ b_{z_L} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{z_L} \end{bmatrix}; [K_{L_{22}}] = \begin{bmatrix} t_{y_L} & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_{z_L} \\ 0 & r_L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{z_L} & b_{y_L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{y_L} & k_{y_L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{s}_L & 0 \\ -b_{z_L} & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{z_L} \end{bmatrix};$$

$$[K_L] = \begin{bmatrix} [K_{L_{11}}] & [K_{L_{12}}] \\ [K_{L_{21}}] & [K_{L_{22}}] \end{bmatrix};$$

$$I_{y_L} = \frac{e_L \cdot h_L^3}{12} \quad ; \quad I_{z_L} = \frac{h_L \cdot e_L^3}{12};$$

e os coeficientes  $r_L, b_{z_L}, b_{y_L}, k_{z_L}, k_{y_L}, a_{z_L}, a_{y_L}, t_{z_L}$  e  $t_{y_L}$  possuem as mesmas expressões apresentadas na equação (3.38), porém com os dados da seção transversal e comprimento dos lintéis. E por fim,  $\hat{s}_L$  é o termo correspondente a torção no lintel e expresso por:  $\hat{s}_L = \frac{G \cdot I_{t_L}}{L_L}$ .

### g) Transformação de coordenadas para os lintéis

A transformação de coordenadas do sistema de referência local do lintel (índice L) para o centro de torção (índice DL) é realizada mediante transformação quadrática na matriz de rigidez  $[K_L]$  para  $[K_{LD}]$ . Admitindo que os lintéis possuem eixos paralelos ao pilar em núcleo, logo aplicar-se adicionalmente a mesma transformação apresentada na equação (3.48), resulta na matriz de rigidez no sistema global de coordenadas, expressa por:

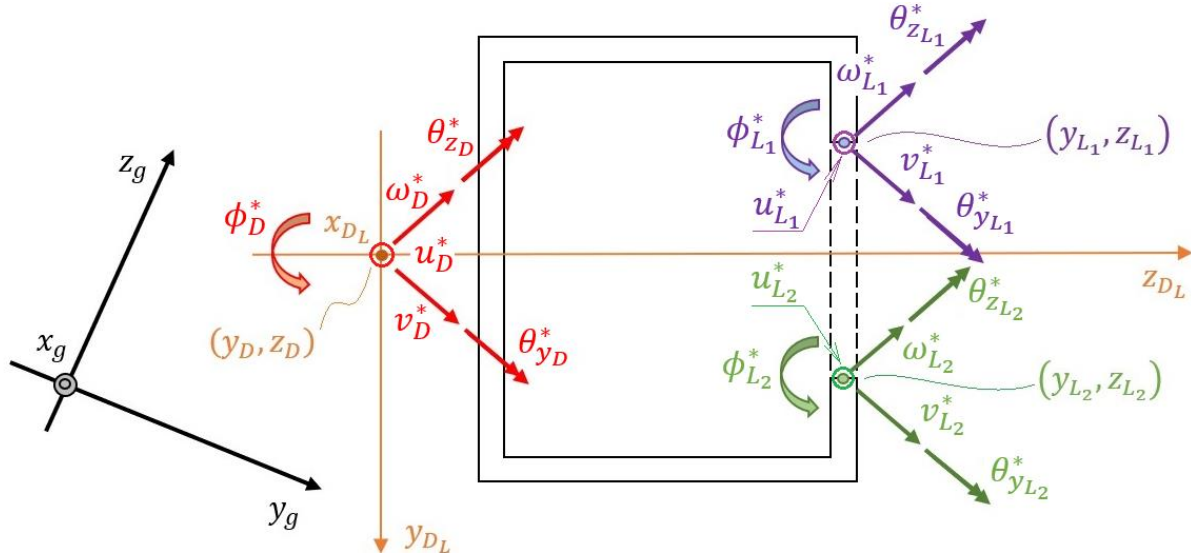
$$[K_{LD}] = [T_S]^T \cdot [T_L]^T \cdot [K_L] \cdot [T_L] \cdot [T_S] \quad (3.51)$$

sendo:  $[T_L] = [I]_{12 \times 12}$ .

### h) Correlação dos deslocamentos nos lintéis com o centro de torção D

Considerando os deslocamentos lineares e angulares apresentado na figura 3.18, correlacionam-se os deslocamentos nas extremidades do lintel (índice L) com os deslocamentos no centro de torção D (índice D), isso de forma semelhante ao procedido nas equações (3.39).

**Figura 3.18: Correlação entre os deslocamentos dos extremos do lintel, já no SGC, com o centro de torção**



Fonte: O Autor (2019)

A lei de correlação entre as extremidades do lintel  $\{D_{L_1}\}$  e  $\{D_{L_2}\}$ , com os deslocamentos no centro de torção sob o formato  $\{D_i\}$  e  $\{D_f\}$ , é realizada mediante as matrizes de transformação  $[R_{L_1}]$  para os deslocamentos  $\{D_{L_1}\}$  no extremo inicial do lintel, bem como  $[R_{L_2}]$  para o extremo final do lintel. Escreve-se assim:

$$\{F\} = [K_{LD}^*] \cdot \begin{Bmatrix} \{D^*\} \\ \{D^*\} \end{Bmatrix} \quad (3.52)$$

sendo:  $[K_{LD}^*] = [R_L]^T \cdot [K_{LD}] \cdot [R_L]$ ;  $\{D_{L_1}\} = [R_{L_1}] \cdot \{D^*\}$ ;  $\{D_{L_2}\} = [R_{L_2}] \cdot \{D^*\}$ ;

$$[R_L] = \begin{bmatrix} [R_{L_1}] & [0] \\ [0] & [R_{L_2}] \end{bmatrix}; [R_{L_1}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & z_D - z_{L_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y_D - y_{L_1} & -(z_D - z_{L_1}) & 0 & -\omega_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(y_D - y_{L_1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & y_D - y_{L_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & z_D - z_{L_1} \end{bmatrix};$$

e:  $(y_D, z_D)$ ;  $(y_{L_1}, z_{L_1})$  e  $(y_{L_2}, z_{L_2})$  – coordenadas do centro de torção e dos extremos inicial e final do lintel, em relação a origem adotada;  $\omega_1, \omega_2$  são as ordenadas setoriais do diagrama  $\omega_{pc}$  para os nós inicial e final do lintel (respectivamente). A forma desordenada da matriz  $[R_L]$  sem termos unitários apenas na diagonal é devida a mudança na sequência de numeração dos graus de liberdade em detrimento dos eixos coordenados, como consta nas figuras 3.13 (c) e 3.17 (c).

Para montar a matriz  $[R_{L_2}]$  basta substituir o índice  $L_1$  por  $L_2$  e a ordenada  $\omega_1$  por  $\omega_2$  na matriz  $[R_{L_1}]$ . Por fim, na equação (3.49) tem-se definida a matriz de rigidez do pilar no

sistema global  $[K_S]$  e na eq. (3.52) expressa-se a matriz de rigidez dos lintéis que procedem o travamento.

### i) Matriz de rigidez unificada do pilar e dos lintéis

Desta feita, unifica-se a matriz  $[K_D]$  como a matriz de rigidez do elemento de pilar em conjunto com o lintel na extremidade (2) do elemento finito (ver figura 3.19). Para tal composição, faz-se a superposição dos termos do empenamento  $\phi'$  dos lintéis. No caso, são superpostos os elementos de posição (7,7); (7,14); (14,7) e (14,14) de matriz  $[K_{LD}^*]$ . O procedimento de superposição é válido pois os lintéis fazem o travamento/ligação de duas paredes do mesmo pilar em núcleo estrutural. Assim, expressando-se  $[K_D]$  como:

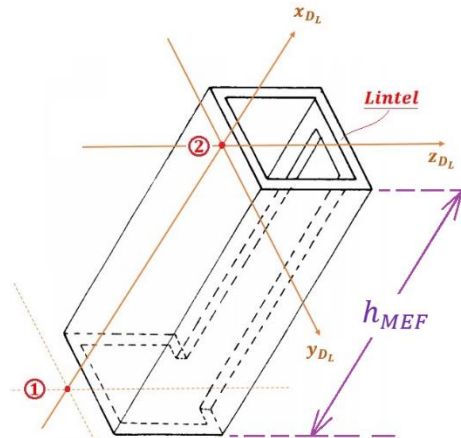
$$[K_D] = [K_S] + [K_{LD}]_{\text{empenamento}} \quad (3.53)$$

sendo:  $[K_{LD}]_{\text{empenamento}}$  a matriz  $[K_{LD}^*]$  (ver eq. 3.52) anulando-se todos os termos de posição distinta de:  $K_{LD7,7}^*$ ;  $K_{LD7,14}^*$ ;  $K_{LD14,7}^*$  e  $K_{LD14,14}^*$ . A matriz de rigidez do núcleo  $[K_S]$  no SGC é apresentada na equação (3.49).

### j) Representação do elemento finito

Conforme apresentado em Heidebrecht e Swift (1971, p. 1409) e ressaltado em Yoshida (1988, p. II – 7), o elemento finito de barra para o pilar em formato de núcleo estrutural contraventado por lintéis é o exposto na figura 3.19.

**Figura 3.19: Elemento finito de barra para o pilar em núcleo estrutural e contraventado**

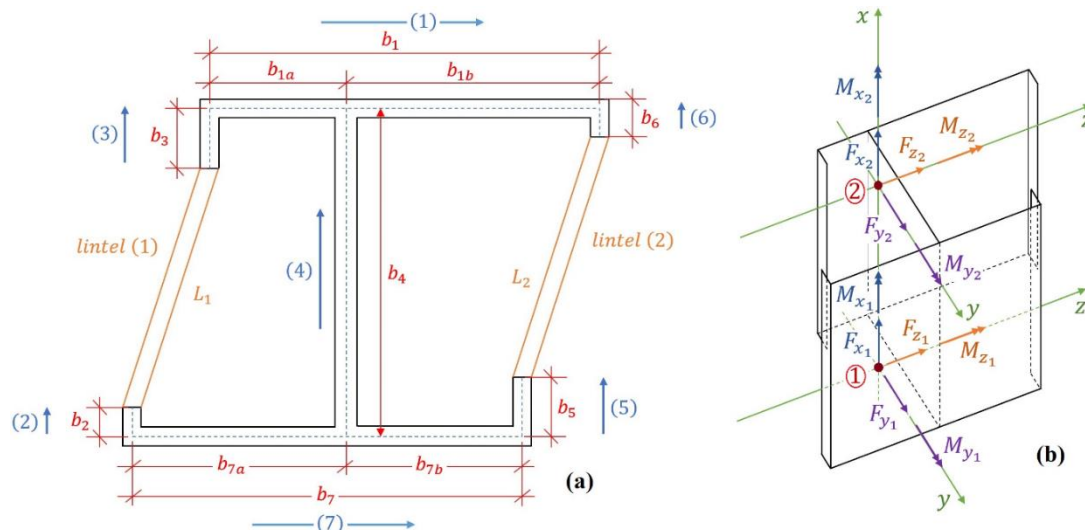


Fonte: Adaptado de (Yoshida, 1988)

### 3.7. ELEMENTO FINITO DE BARRA COM SEÇÃO DE PAREDES FINAS E EM FORMATO DE DUPLO T

Neste item procede-se a análise matricial do elemento finito de pilar de ponte em formato de duplo T, porém considerando assimetria nos eixos principais de inércia e paredes ortogonais entre si. A nomenclatura das dimensões e numeração das paredes é indicada na figura 3.20 (a) e a convenção positiva dos esforços solicitantes é apresentada na figura 3.20 (b).

**Figura 3.20: Elemento finito (E.F.) do pilar em duplo T: (a) dimensões em planta e numeração das paredes e (b) convenção positiva dos esforços solicitantes nos extremos do EF**

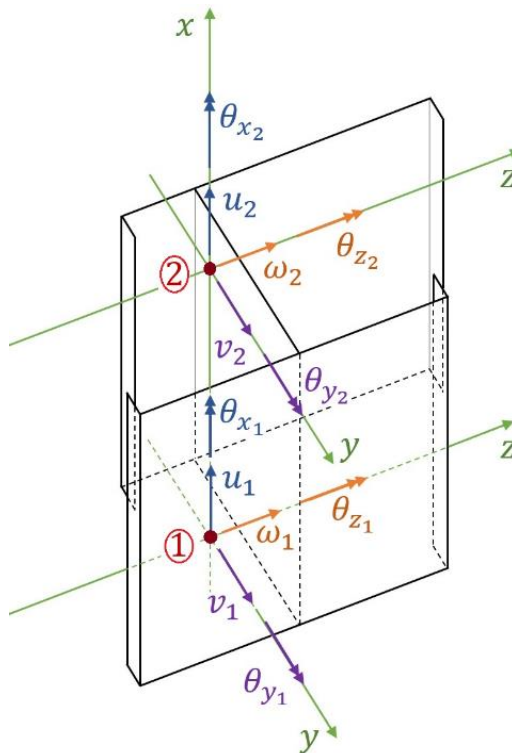


Fonte: O Autor (2019)

### a) Matriz de rigidez à flexão do pilar em duplo T com seção aberta

A matriz de rigidez do pilar sem a consideração dos lintéis é procedida mediante método dos deslocamentos, obtendo-se a matriz exposta nas equações (3.37) e (3.38). Porém ressalta-se apenas que os momentos de inércia  $I_y$  e  $I_z$  são apresentados nas equações (2.135), e que o fator de forma  $k_c$  será obtido mediante razão entre a área da seção transversal pela área da alma (por direção analisada), ver eq. (3.38 a). Por último, na figura 3.21 apresentam-se os graus de liberdade para o pilar em análise.

**Figura 3.21: Graus de liberdade do pilar em duplo T sem qualquer simetria**



Fonte: O Autor (2019)

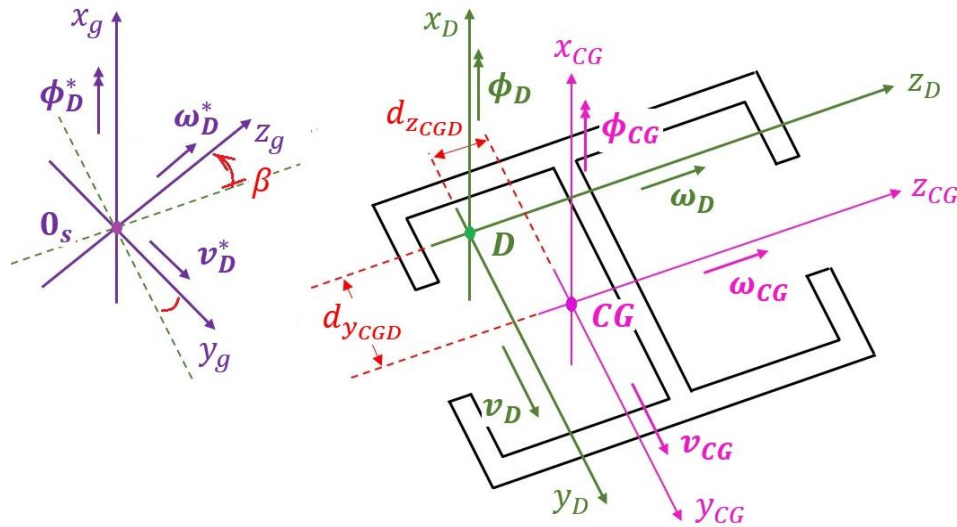
### b) Matriz de rigidez do pilar em duplo T no SGC

A matriz de rigidez do pilar em duplo T assimétrico no sistema global de coordenadas (SGC), sem considerar o contraventamento dos lintéis, é representada pela matriz  $[K_{FT}^*]$



sendo válidas as transformações das coordenadas do centro de gravidade (CG) da seção em duplo T para o centro de torção (D), ver figura 3.14. Bem como, a transformação do SLC ( $z_D$ ,  $y_D$  e  $x_D$ ) para o SGC ( $x_g$ ,  $y_g$  e  $z_g$ ). Tais transformações de coordenadas são apresentadas na figura 3.22.

**Figura 3.22: Transformação do sistema de coordenadas do centro de gravidade para o SGC em  $O_S$ , passando pelo centro de torção D**



Fonte: O Autor (2019)

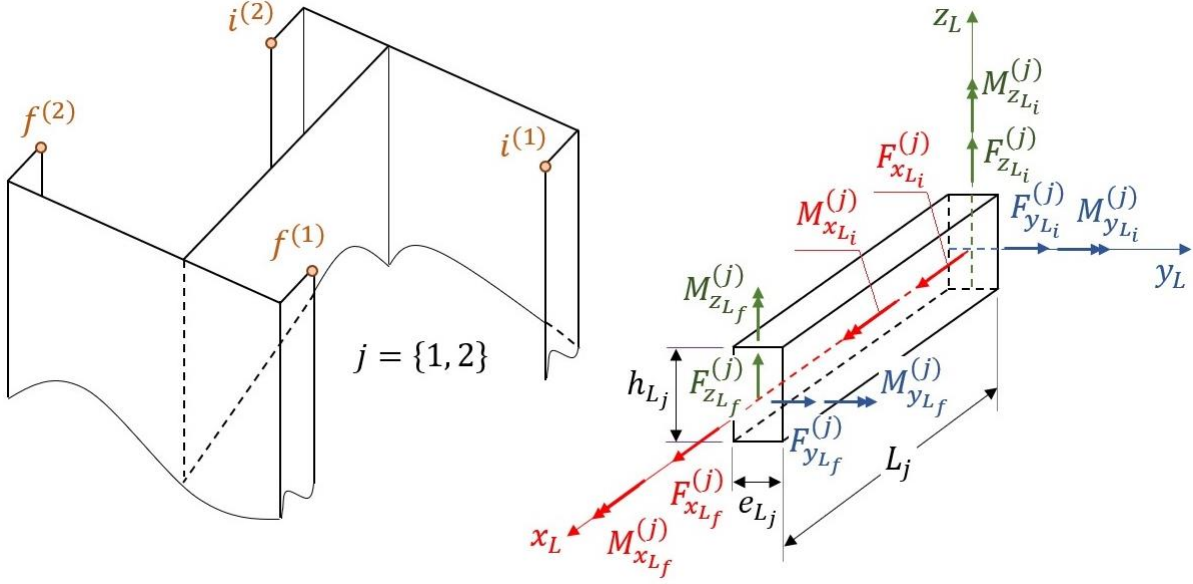
A inércia setorial  $I_\omega$  é obtida mediante aplicação da equação (2.133) no diagrama de ordenadas setoriais  $\omega_{pc}$  para a seção em análise e apresentado na figura 2.106. Já a inércia torsional  $I_t$  será calculada mediante um terço do somatório do cubo da espessura  $t$  pelo comprimento  $b_i$  do  $i$ -ésimo painel – parede que compõe o núcleo em questão (pilar em formato de duplo T). Ficando  $I_t$  expressa por:

$$I_t = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n=7} x_i^3 \cdot y_i \equiv \frac{1}{3} \sum_{i=1}^7 b_i \cdot t^3 \quad (3.55)$$

### c) Matriz de rigidez dos lintéis no SGC

A matriz de rigidez de cada um dos dois lintéis que promovem o contraventamento do pilar em duplo T (por nível), no sistema local de coordenadas, será obtida conforme notação apresentada na figura 3.23.

Figura 3.23: Reações elásticas nos lintéis para o SLC



Fonte: O Autor (2019)

Resultando na matriz  $[K_L^{(j)}]$  no SLC dos lintéis, expressa por:

$$[K_L^{(j)}] = \begin{bmatrix} t_{y_L}^{(j)} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{z_L}^{(j)} & -t_{y_L}^{(j)} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{z_L}^{(j)} \\ 0 & r_L^{(j)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_L^{(j)} & -t_{z_L}^{(j)} & -b_{y_L}^{(j)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{z_L}^{(j)} & -b_{y_L}^{(j)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_{y_L}^{(j)} & k_{y_L}^{(j)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{s}_L^{(j)} & 0 & 0 & 0 & b_{y_L}^{(j)} & a_{y_L}^{(j)} & -\hat{s}_L^{(j)} & 0 \\ b_{z_L}^{(j)} & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{z_L}^{(j)} & -b_{z_L}^{(j)} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{y_L}^{(j)} \\ -t_{y_L}^{(j)} & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_{z_L}^{(j)} & t_{y_L}^{(j)} & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_{z_L}^{(j)} \\ 0 & -r_L^{(j)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_L^{(j)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t_{z_L}^{(j)} & b_{y_L}^{(j)} & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{z_L}^{(j)} & b_{y_L}^{(j)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_{y_L}^{(j)} & a_{y_L}^{(j)} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{y_L}^{(j)} & k_{y_L}^{(j)} & \hat{s}_L^{(j)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\hat{s}_L^{(j)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{z_L}^{(j)} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{y_L}^{(j)} & -b_{z_L}^{(j)} & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{z_L}^{(j)} \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

$$\text{com: } r_L^{(j)} = \frac{E \cdot A_j}{h_{Lj}}; \quad A_j = e_{Lj} \cdot h_{Lj}; \quad I_{y_j} = \frac{e_{Lj} \cdot h_{Lj}^3}{12}; \quad I_{z_j} = \frac{h_{Lj} \cdot e_{Lj}^3}{12}; \quad I_{t_j} = I_{y_j} + I_{z_j};$$

$$k_{y_L}^{(j)} = \frac{4 \cdot E \cdot I_{y_j}}{h_{Lj}} \cdot \frac{1 + \varphi_{cy_j}}{1 + 4 \cdot \varphi_{cy_j}}; \quad k_{z_L}^{(j)} = \frac{4 \cdot E \cdot I_{z_j}}{h_{Lj}} \cdot \frac{1 + \varphi_{cz_j}}{1 + 4 \cdot \varphi_{cz_j}}; \quad a_{y_L}^{(j)} = \frac{2 \cdot E \cdot I_{y_j}}{h_{Lj}} \cdot \frac{1 - 2 \cdot \varphi_{cy_j}}{1 + 4 \cdot \varphi_{cy_j}};$$

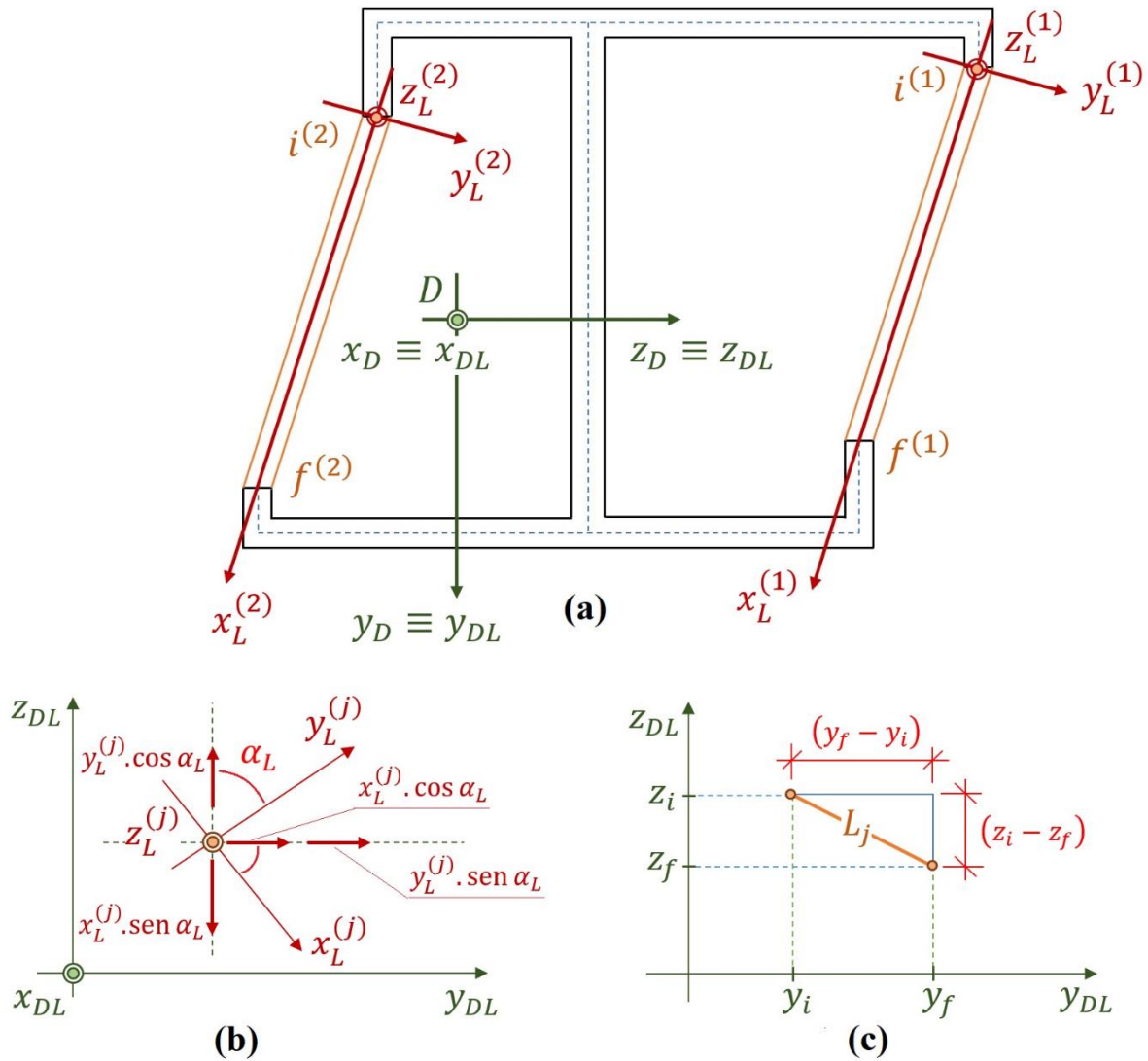
$$a_{z_L}^{(j)} = \frac{2 \cdot E \cdot I_{z_j}}{h_{Lj}} \cdot \frac{1 - 2 \cdot \varphi_{cz_j}}{1 + 4 \cdot \varphi_{cz_j}}; \quad b_{y_L}^{(j)} = \frac{k_{y_L}^{(j)} + a_{y_L}^{(j)}}{h_{Lj}}; \quad b_{z_L}^{(j)} = \frac{k_{z_L}^{(j)} + a_{z_L}^{(j)}}{h_{Lj}}; \quad t_{y_L}^{(j)} = \frac{2 \cdot b_{y_L}^{(j)}}{h_{Lj}};$$

$$t_{z_L}^{(j)} = \frac{2 \cdot b_{z_L}^{(j)}}{h_{Lj}}; \quad \varphi_{cy_j} = \frac{3 \cdot E \cdot I_{y_j}}{G \cdot A_j \cdot h_{Lj}^3} \cdot k_{cL}; \quad \varphi_{cz_j} = \frac{3 \cdot E \cdot I_{z_j}}{G \cdot A_j \cdot h_{Lj}^3} \cdot k_{cL}; \quad k_{cL} = \frac{5}{6} \quad \text{e} \quad \hat{s}_L^{(j)} = \frac{G \cdot I_{t_j}}{L_j}.$$



A transformação do sistema local de coordenadas dos lintéis ( $x_L, y_L$  e  $z_L$ ) para o sistema de coordenadas no centro de torção D será procedida conforme ilustrado na figura 3.24.

**Figura 3.24: Referencial dos lintéis: (a) Posicionamento no pilar em duplo T, (b) Transformação do SLC do lintel j para as coordenadas do centro de torção e (c) Ângulo de inclinação do lintel j em relação aos eixos do centro de torção**



Fonte: O Autor (2019)

Através da correlação entre os deslocamentos lineares no lintel j em detrimento do centro de torção, escreve-se a lei de transformação de coordenadas, como:

$$\{D\}_{DL} = [\bar{T}_L] \cdot \{D\}_L \quad (3.57)$$

$$e: \{D\}_{DL}^T = \{z_{DL} \quad y_{DL} \quad x_{DL}\}; \{D\}_L^T = \{y_L^{(j)} \quad x_L^{(j)} \quad z_L^{(j)}\}; [\bar{T}_L] = \begin{bmatrix} \cos \alpha_L & -\sin \alpha_L & 0 \\ \sin \alpha_L & \cos \alpha_L & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mediante transformação quadrática, na matriz de rigidez do lintel  $j$ , tem-se:

$$[K_{LD}^{(j)}] = [T_L]^T \cdot [K_L^{(j)}] \cdot [T_L] \quad (3.58)$$

$$\text{onde: } [T_L]_{12 \times 12} = \begin{bmatrix} [T_L^*]_{6 \times 6} & [0]_{6 \times 6} \\ [0]_{6 \times 6} & [T_L^*]_{6 \times 6} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [T_L^*]_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} [\bar{T}_L]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} \\ [0]_{3 \times 3} & [\bar{T}_L]_{3 \times 3} \end{bmatrix}.$$

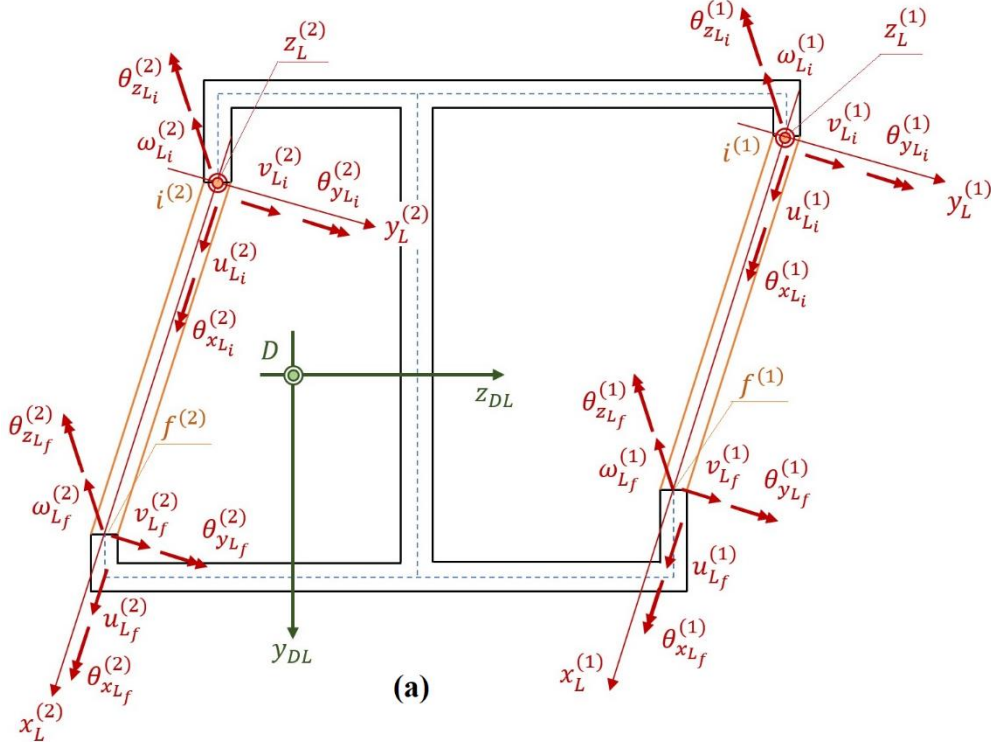
Por último, rotacionam-se os deslocamentos lineares nos extremos do lintéis para o sistema global, isso mediante a letra b desse item, resultando na matriz de rigidez do lintel no SGC expressa por:

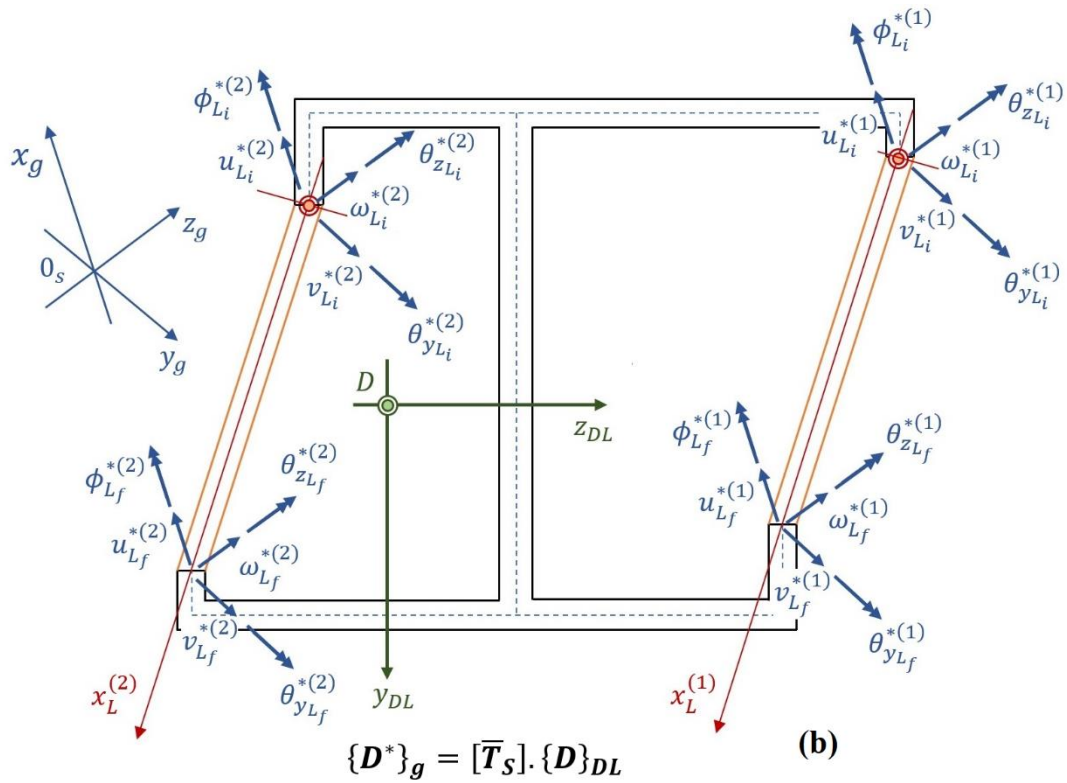
$$[K_{LD}^{*(j)}] = [T_S^L]^T \cdot [T_L]^T \cdot [K_L^{(j)}] \cdot [T_L] \cdot [T_S^L] \quad (3.59)$$

$$\text{com: } [T_S^L] = \begin{bmatrix} [T_S^*]_{6 \times 6} & [0]_{6 \times 6} \\ [0]_{7 \times 7} & [T_S^*]_{6 \times 6} \end{bmatrix}; [T_S^*] = \begin{bmatrix} [\bar{T}_{S_1}]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} \\ [0]_{3 \times 3} & [\bar{T}_{S_1}]_{3 \times 3} \end{bmatrix} \text{ e } [\bar{T}_{S_1}] \text{ apresentado na eq. (3.47 a).}$$

e nos graus de liberdade no sistema global de coordenadas, por extremidade dos lintéis, conforme apresentado na figura 3.25.

**Figura 3.25: Graus de liberdade nos extremos dos lintéis (1) e (2): (a) no SLC dos lintéis e (b) no sistema global de coordenadas  $\{D^*\}_g$**



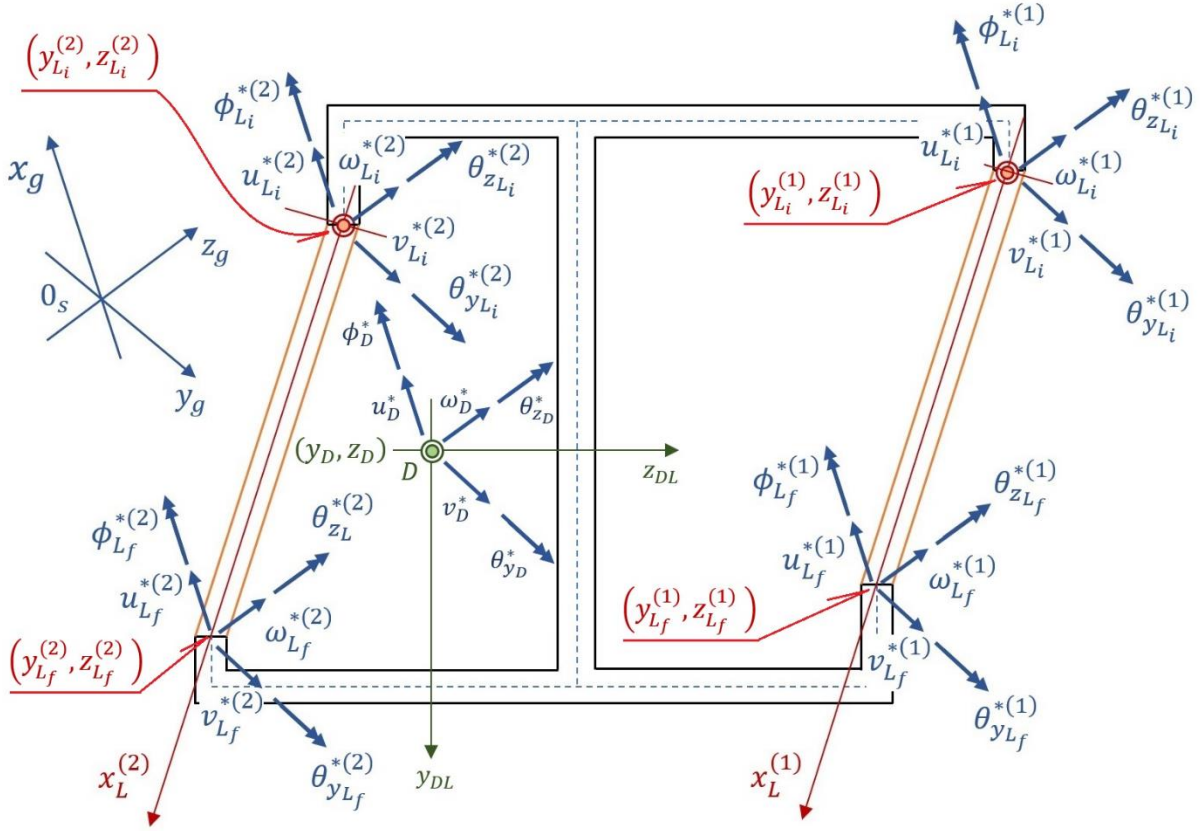


Fonte: O Autor (2019)

#### d) Correlação dos deslocamentos nos lintéis com o centro de torção, no SGC

Na figura 3.26 são apresentados os graus de liberdade no centro de torção D e nos extremos dos lintéis, já no sistema global de coordenadas (SGC).

**Figura 3.26: Correlação dos graus de liberdade nas extremidades dos lintéis e do centro de torção para o SGC**



Fonte: O Autor (2019)

Na figura 3.27 são apresentadas as rotações  $\phi_D^*$ ,  $\theta_{y_D}^*$  e  $\theta_{z_D}^*$  e suas repercussões nas extremidades iniciais dos lintéis. Bem como as rotações em  $y_g$  e  $z_g$ , nas extremidades iniciais dos lintéis ( $\theta_{y_{L_i}}^{(1)}$ ,  $\theta_{z_{L_i}}^{(1)}$  e  $\theta_{y_{L_i}}^{(2)}$ ,  $\theta_{z_{L_i}}^{(2)}$ ). por deslocamentos nos extremos iniciais dos lintéis, tem-se:

$$v_{L_i}^{*(1)} = v_D^* - \phi_D^* \cdot [z_{L_i}^{(1)} - z_D] \quad (3.60)$$

$$u_{L_i}^{*(1)} = u_D^* + \theta_{y_D}^* \cdot [z_{L_i}^{(1)} - z_D] - \theta_{z_D}^* \cdot [y_{L_i}^{(1)} - y_D] - \omega_i^{(1)} \cdot \phi_D^{*'} \quad (3.61)$$

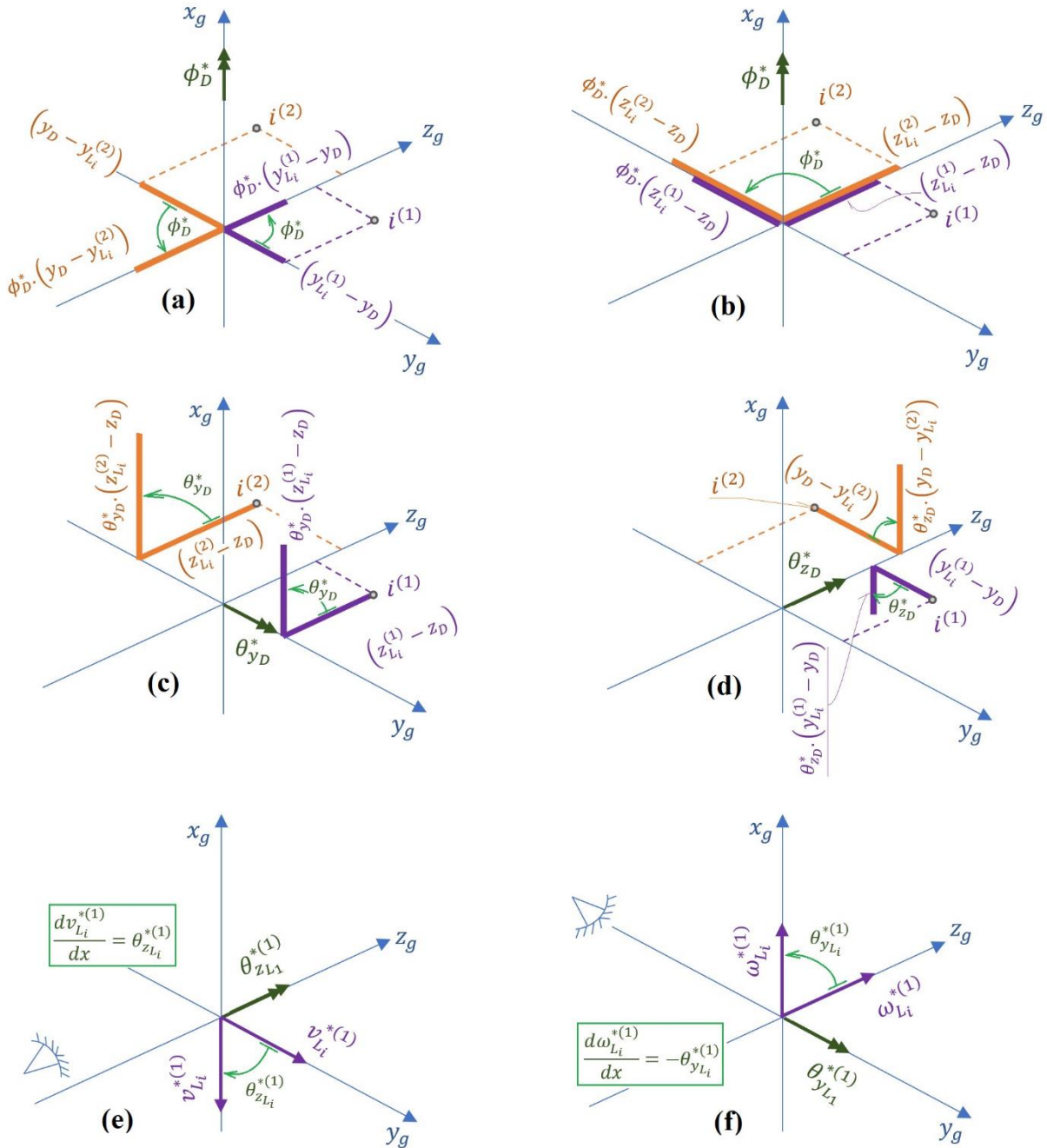
$$\omega_{L_i}^{*(1)} = \omega_D^* + \phi_D^* \cdot [y_{L_i}^{(1)} - y_D] \quad (3.62)$$

$$v_{L_i}^{*(2)} = v_D^* - \phi_D^* \cdot [z_{L_i}^{(2)} - z_D] \quad (3.63)$$

$$u_{L_i}^{*(2)} = u_D^* + \theta_{y_D}^* \cdot [z_{L_i}^{(2)} - z_D] + \theta_{z_D}^* \cdot [y_D - y_{L_i}^{(2)}] - \omega_i^{(2)} \cdot \phi_D^{*'} \quad (3.64)$$

$$\omega_{L_i}^{*(2)} = \omega_D^* - \phi_D^* \left[ y_D - y_{L_i}^{(2)} \right] \quad (3.65)$$

**Figura 3.27: Correlação dos graus de liberdade para a rotação:** (a)  $\phi_D^*$  com as distâncias no eixo  $y_g$ , (b)  $\phi_D^*$  com as distâncias no eixo  $z_g$ , (c)  $\theta_{y_D}^*$ , (d)  $\theta_{z_D}^*$ , (e)  $\theta_{z_{L_i}}^{*(1)}$  e (f)  $\theta_{y_{L_i}}^{*(1)}$



Fonte: O Autor (2019)

Procede-se a derivação das funções  $v_{L_i}^{*(1)}$  e  $\omega_{L_i}^{*(1)}$  em relação ao eixo  $x_g$ , ver equações (3.60) e (3.62) e obtêm-se os valores das rotações  $\theta_{z_{L_i}}^{*(1)}$  e  $\theta_{y_{L_i}}^{*(1)}$ . Analisando as figuras 3.27 (e) e (f), conclui-se:

$$\theta_{z_{L_i}}^{*(1)} \equiv \frac{dv_{L_i}^{*(1)}}{dx_g} = -\phi_D^* \cdot [z_{L_i}^{(1)} - z_D] \quad (3.66 a)$$

$$-\theta_{y_{L_i}}^{*(1)} \equiv \frac{d\omega_{L_i}^{*(1)}}{dx_g} = \phi_D^* \cdot [y_{L_i}^{(1)} - y_D] \quad (3.66 b)$$

Para a extremidade inicial do lintel (2) procede-se de forma análoga, derivando-se as eq.'s (3.63) e (3.65), concluindo-se por análise as figuras 3.27 (e) e (f):

$$\theta_{z_{L_i}}^{*(2)} \equiv \frac{dv_{L_i}^{*(2)}}{dx_g} = -\phi_D^* \cdot [z_{L_i}^{(2)} - z_D] \quad (3.66 c)$$

$$-\theta_{y_{L_i}}^{*(2)} \equiv \frac{d\omega_{L_i}^{*(2)}}{dx_g} = -\phi_D^* \cdot [y_D - y_{L_i}^{(2)}] \quad (3.66 d)$$

por rotações nos extremos iniciais dos lintéis, conclui-se:

$$\theta_{y_{L_i}}^{*(1)} = \theta_{y_D}^* - \phi_D^{*'} \cdot [y_{L_i}^{(1)} - y_D] \quad (3.67)$$

$$\phi_{L_i}^{*(1)} = \phi_D^* \quad (3.68)$$

$$\theta_{z_{L_i}}^{*(1)} = \theta_{z_D}^* - \phi_D^{*'} \cdot [z_{L_i}^{(1)} - y_D] \quad (3.69)$$

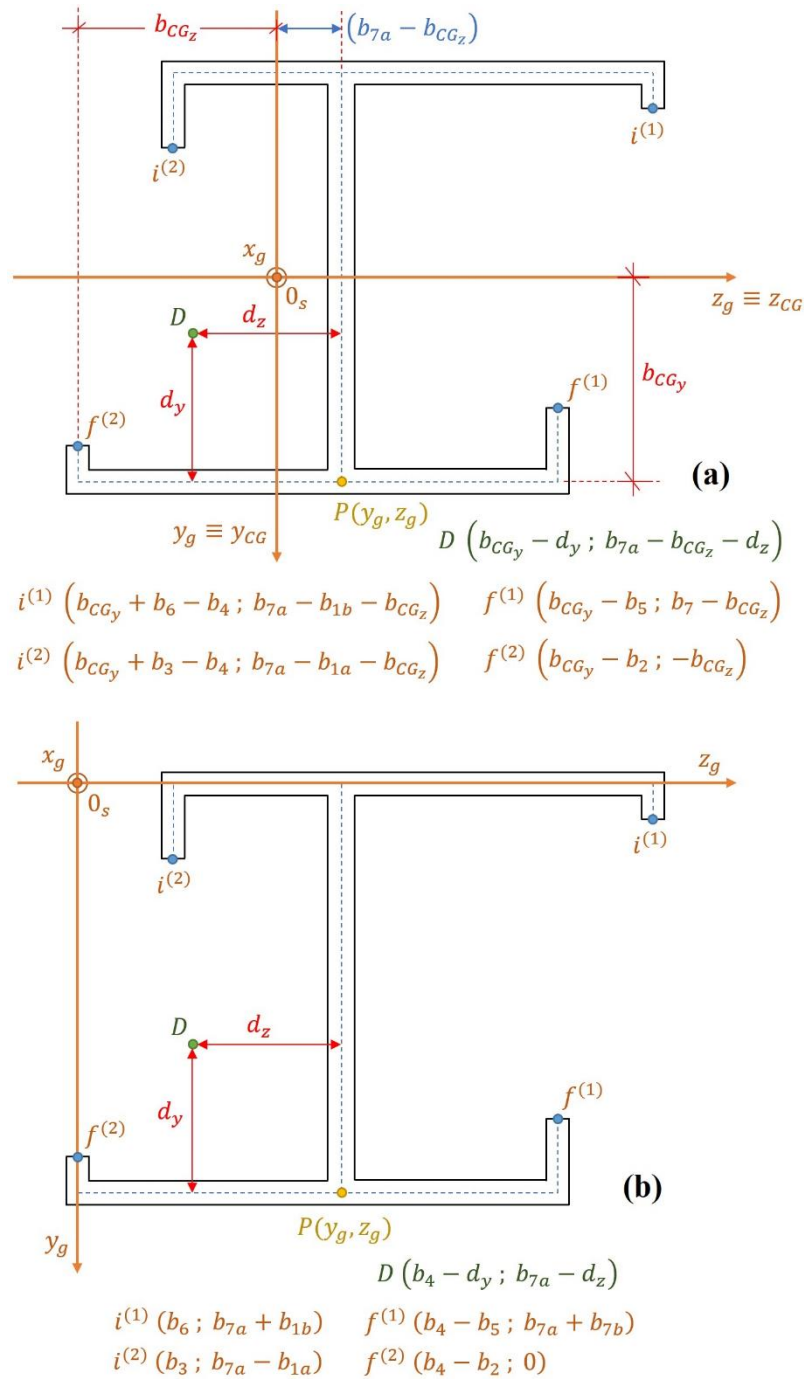
$$\theta_{y_{L_i}}^{*(2)} = \theta_{y_D}^* + \phi_D^{*'} \cdot [y_D - y_{L_i}^{(2)}] \quad (3.70)$$

$$\phi_{L_i}^{*(2)} = \phi_D^* \quad (3.71)$$

$$\theta_{z_{L_i}}^{*(2)} = \theta_{z_D}^* - \phi_D^{*'} \cdot [z_{L_i}^{(2)} - y_D] \quad (3.72)$$

Na figura 3.28 são apresentadas as coordenadas dos extremos dos lintéis e do centro de torção, sendo ilustradas duas possibilidades de posicionamento do eixos globais ( $x_g, y_g$  e  $z_g$ ).

**Figura 3.28: Coordenadas do centro de torção e dos extremos dos lintéis: (a) com o SGC no centro de gravidade da seção e (b) como o SGC contendo toda a seção no 1º quadrante**



Fonte: O Autor (2019)

Organizando em formato matricial a relação dos deslocamentos do nó inicial do lintel (1), eq.'s (3.60) a (3.62) e eq.'s (3.67) a (3.69), escreve-se:

$$\{D_{Li}^{*(1)}\} = [R_{Li}^{(1)}] \cdot \{D^*\} \quad (3.73)$$

$$\text{sendo: } \{D_{Li}^{*(1)}\} = \{v_{Li}^{*(1)} \quad u_{Li}^{*(1)} \quad \omega_{Li}^{*(1)} \quad \theta_{y_{Li}}^{*(1)} \quad \phi_{Li}^{*(1)} \quad \theta_{z_{Li}}^{*(1)}\};$$

$$\{D^*\} = \{\omega_D^* \quad v_D^* \quad u_D^* \quad \theta_{z_D}^* \quad \theta_{y_D}^* \quad \phi_D^* \quad \phi_D^{*'}\} \quad e$$

$$[R_{Li}^{(1)}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\{z_{Li}^{(1)} - z_D\} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\{y_{Li}^{(1)} - y_D\} & \{z_{Li}^{(1)} - z_D\} & 0 & -\omega_i^{(1)} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \{y_{Li}^{(1)} - y_D\} & -\{y_{Li}^{(1)} - y_D\} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -\{z_{Li}^{(1)} - z_D\} \end{bmatrix}.$$

Já, a correlação dos deslocamentos na extremidade inicial do lintel (2), eq.'s (3.63) a (3.65) e eq.'s (3.70) a (3.72), fica expressa por:

$$\{D_{Li}^{*(2)}\} = [R_{Li}^{(2)}] \cdot \{D^*\} \quad (3.74)$$

$$\text{sendo: } \{D_{Li}^{*(2)}\} = \{v_{Li}^{*(2)} \quad u_{Li}^{*(2)} \quad \omega_{Li}^{*(2)} \quad \theta_{y_{Li}}^{*(2)} \quad \phi_{Li}^{*(2)} \quad \theta_{z_{Li}}^{*(2)}\} \quad e$$

$$[R_{Li}^{(2)}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\{z_{Li}^{(2)} - z_D\} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \{y_D - y_{Li}^{(2)}\} & \{z_{Li}^{(2)} - z_D\} & 0 & -\omega_i^{(2)} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\{y_D - y_{Li}^{(2)}\} & \{y_D - y_{Li}^{(2)}\} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -\{z_{Li}^{(2)} - z_D\} \end{bmatrix}.$$

Por fim, estende-se as correlações para os extremos finais dos lintéis (1) e (2), sob a forma:

$$\{D_{Lf}^{*(1)}\} = [R_{Lf}^{(1)}] \cdot \{D^*\} \quad (3.75)$$

$$\{D_{Lf}^{*(2)}\} = [R_{Lf}^{(2)}] \cdot \{D^*\} \quad (3.76)$$

com  $[R_{Lf}^{(1)}]$  formulada mediante troca dos subíndices  $i$  por  $f$  da matriz  $[R_{Li}^{(1)}]$ . O mesmo procede-se com a matriz  $[R_{Lf}^{(2)}]$  em relação a  $[R_{Li}^{(2)}]$ . Conclui-se a correlação dos lintéis com o centro de torção, mediante transformação quadrática da matriz  $[K_{LD}^{*(j)}]$  por  $[R_L^{(j)}]$ , ficando:

$$[K_{LD}^{** (1)}] = [R_L^{(1)}]^T \cdot [K_{LD}^{*(1)}] \cdot [R_L^{(1)}] \equiv [R_L^{(1)}]^T \cdot [T_s]^T \cdot [T_L]^T \cdot [K_L^{(1)}] \cdot [T_L] \cdot [T_s] \cdot [R_L^{(1)}] \quad (3.77)$$

$$[K_{LD}^{** (2)}] = [R_L^{(2)}]^T \cdot [K_{LD}^{*(2)}] \cdot [R_L^{(2)}] \equiv [R_L^{(2)}]^T \cdot [T_s]^T \cdot [T_L]^T \cdot [K_L^{(2)}] \cdot [T_L] \cdot [T_s] \cdot [R_L^{(2)}] \quad (3.78)$$



$$\text{com: } [R_L^{(1)}] = \begin{bmatrix} [R_{Li}^{(1)}]_{6 \times 7} & [0]_{6 \times 7} \\ [0]_{6 \times 7} & [R_{Lf}^{(1)}]_{6 \times 7} \end{bmatrix}_{12 \times 14} \quad \text{e} \quad [R_L^{(2)}] = \begin{bmatrix} [R_{Li}^{(2)}]_{6 \times 7} & [0]_{6 \times 7} \\ [0]_{6 \times 7} & [R_{Lf}^{(2)}]_{6 \times 7} \end{bmatrix}_{12 \times 14}.$$

### e) Matriz de rigidez unificada do pilar e dos lintéis (1) e (2)

De acordo com o exposto por Heidebrecht e Swift (1971), quando os lintéis unem dois pontos do mesmo pilar (o que se verifica na figura 3.20 para os lintéis 1 e 2), apenas os termos devido ao empenamento  $\phi'$  contribuirão para a montagem da matriz de rigidez  $[K_D]$  do núcleo em duplo T e contraventado. Ficando expressa por:

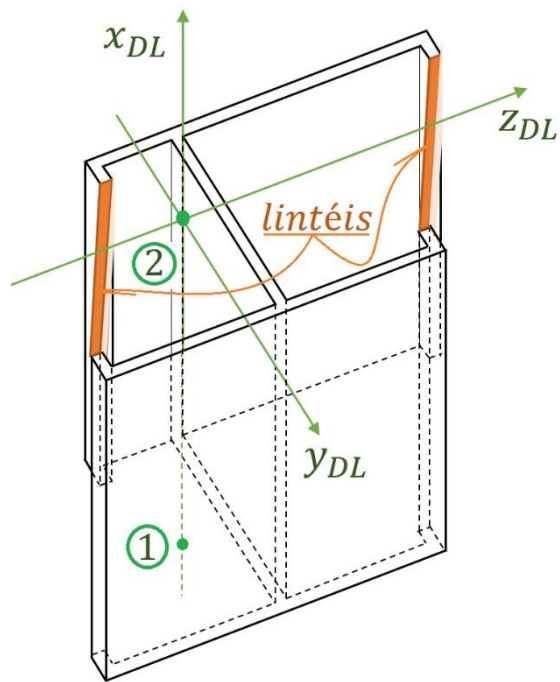
$$[K_D] = [K_S] + [K_{LD}^{***(1)}] + [K_{LD}^{***(2)}] \quad (3.79)$$

sendo:  $[K_S]$  a matriz de rigidez do pilar em dupla T no SGC sem computar o contraventamento dos lintéis, ver equação (3.54 b);  $[K_{LD}^{***(1)}]$  é a matriz  $[K_{LD}^{**(1)}]$ , ver eq. (3.77), anulando-se todos os termos das posições distintas de (7,7); (7,14); (14,7) e (14,14), faz-se isso para computar o empenamento no lintel (1). Por último,  $[K_{LD}^{***(2)}]$  é a matriz de ordem (14x14) com termos nulos com exceção dos termos (7,7); (7,14); (14,7) e (14,14), os quais são obtidos da matriz  $[K_{LD}^{**(2)}]$ , ver eq. (3.78).

### f) Representação do elemento finito

Analogamente ao procedido em Heidebrecht e Swift (1971) para o pilar em núcleo estrutural sob formato de C, apresenta-se na figura 3.29 o elemento finito para o pilar em duplo T e contraventamento nos extremos por lintéis.

**Figura 3.29: Elemento finito de barra para o pilar em duplo T e contraventado por lintéis nas faces abertas**



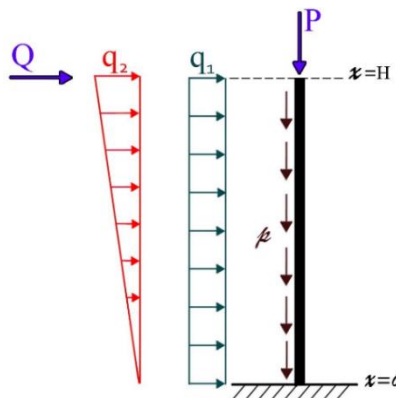
**Fonte: O Autor (2019)**

## ESTABILIDADE ELÁSTICA DE PILARES DE PONTES COM INÉRCIA VARIÁVEL AO LONGO DO COMPRIMENTO

### 4.1. INTRODUÇÃO

O estudo da estabilidade elástica de elementos estruturais é apresentado inicialmente em Massonnet (1959), Chajes (1974), Del Nero (1970) e em Timoshenko e Gere (2009) para diversas configurações de apoios, porém sempre com estados de carga compostos por apenas um carregamento, por vez. Em particular, na estabilidade elástica do pilar para atuação do peso próprio, resolve-se a EDO via funções de Bessel. Neste sentido, neste capítulo será procedida a análise da estabilidade elástica do referido pilar com estado de carga apresentada na fig.4.1, logo sob a atuação conjunta dos carregamentos laterais ( $q_1$ ,  $q_2$  e  $Q$ ) e longitudinais ( $P$ ,  $p$ ). As cargas concentradas no topo do pilar são obtidas mediante item 2.1.1, mais especificamente nas figuras 2.13, 2.14 e 2.18, bem como nas eq.'s (2.11), (2.12) e (2.13).

**Figura 4.1:** Estado de carga do pilar de ponte



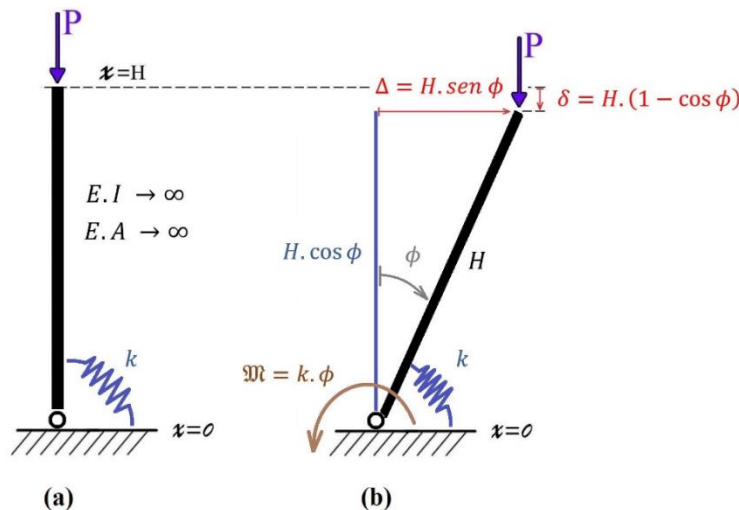
Fonte: O Autor (2019)

A resolução da equação diferencial oriunda da ação conjunta dos carregamentos é bastante laboriosa se conduzida via funções de Bessel, sendo mais eficaz e prática a utilização de métodos aproximados: a exemplo, citam-se o método das diferenças finitas (SOARE, 1962), (GUTKOWSKI, 1981) e (ALFUTOV, 2000). A obtenção da carga crítica será procedida através da EDO não homogênea, caracterizando assim um problema de ponto limite (resolvido mediante incremento sucessivo da carga  $P$  até que o deslocamento lateral no topo do pilar tenda a infinito). A verificação de tal resultado será realizada mediante valores exatos apresentados em Timoshenko e Gere (2009) para subcasos de aplicação de carregamento.

### a) Carga crítica via critério energético

Considere-se o pilar de ponte com rigidez axial ( $E.A \rightarrow \infty$ ) e rigidez à flexão ( $E.I \rightarrow \infty$ ) tidas infinitas e com base engastada através de mola rotacional de constante  $k$  de rigidez (fig 4.2 a). A configuração deformada do referido pilar é apresentada na fig. 4.2 (b).

**Figura 4.2: Equilíbrio elástico do pilar: (a) configuração indeformada e (b) condição de equilíbrio**



Fonte: O Autor (2019)

A energia potencial de deformação  $U$  é computada mediante a rotação  $\phi$  da seção transversal localizada na base do pilar e em termos da constante elástica  $k$  da mola, como:

$$U = \frac{k \cdot \phi^2}{2} \quad (4.1)$$

Já, o trabalho  $W$  oriundo da atuação da carga  $P$  no topo do pilar é expresso por:

$$W = P \cdot \delta \quad (4.2)$$

Na condição de equilíbrio indiferente ( $W = U$ ) fica caracterizada, por definição, a atuação da carga crítica  $P_{CR}$  e essa estabelecida por:

$$P_{CR} = \frac{k \cdot \phi^2}{2 \cdot \delta} \quad (4.3)$$

o deslocamento vertical  $\delta$  do topo do pilar é expresso, por geometria, como:

$$\delta = H \cdot (1 - \cos \phi) \quad (4.3 a)$$

numa solução aproximada impõe-se a eq. (4.3 a) apenas dois termos da série de potências de Taylor para o cosseno, e daí tem-se:

$$\delta \cong H \cdot \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\phi^2}{2!} \right) \right] = \frac{H \cdot \phi^2}{2} \quad (4.3 b)$$

resultando a carga crítica  $P_{CR}$ , via substituição da eq. (4.3 b) na eq. (4.3), como:

$$P_{CR} = \frac{k}{H} \quad (4.3 c)$$

A fim de obter a carga crítica com os efeitos de 2ª ordem, vide Fig. 4.2 (b), basta proceder o equilíbrio de momento na base do pilar, resultando:

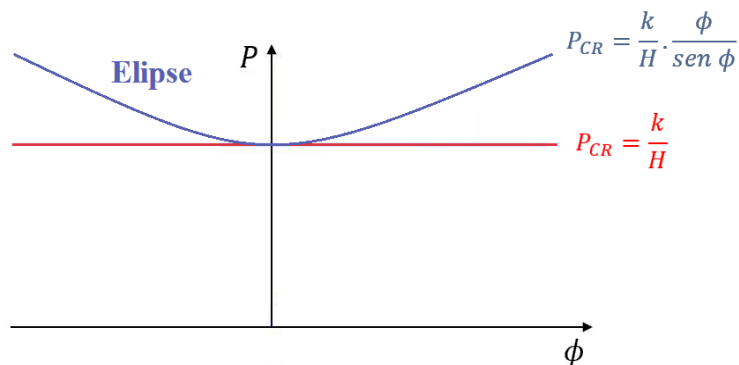
$$P_{CR} \cdot \Delta = k \cdot \phi \quad (4.4)$$

o deslocamento horizontal  $\Delta$  no topo do pilar é definido, de acordo com a geometria e a configuração deformada do pilar, por:

$$\Delta = H \cdot \sin \phi \quad (4.4 a)$$

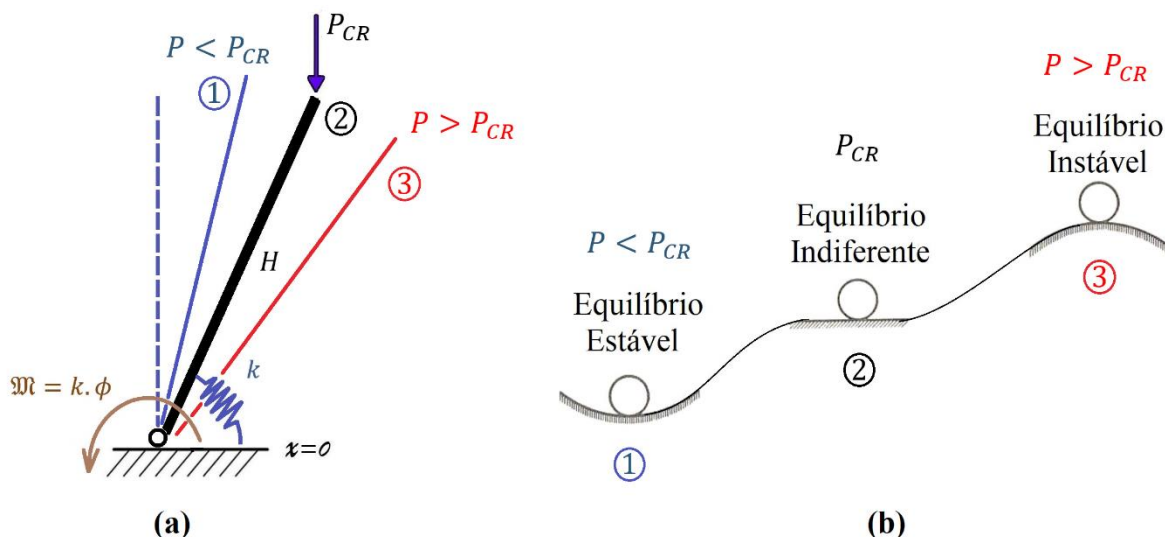
aplicando-se a eq. (4.4. a) na eq. (4.4) exprime-se a carga crítica, via solução aproximada de 2ª ordem e representada sob traçado elíptico na Fig. 4.3, como:

$$P_{CR} = \frac{k}{H} \cdot \frac{\phi}{\sin \phi} \quad (4.4 b)$$

**Figura 4.3: Carga crítica mediante solução aproximada de 1ª e 2ª ordens**

Fonte: O Autor (2019)

Por fim, em termos energéticos, configura-se a carga crítica na condição de equilíbrio indiferente ( $W = U$ ) e sob configuração instável. Configurando-se ainda a estabilidade na condição de equilíbrio ( $W < U$ ), onde a carga  $P$  atuante no topo do pilar é inferior a carga crítica. Ainda é relevante mencionar a instabilidade ocorrida na condição de equilíbrio ( $W > U$ ), quando o trabalho  $W$  realizado pelas cargas supera o potencial  $U$  de deformação do pilar. Nesta última, conduzindo a deformações elevadas e em tal ordem de grandeza que a estrutura não possua capacidade resistente suficiente aos esforços solicitantes ativados, entrando em regime de colapso. Tais condições de equilíbrio são apresentadas na fig. 4.4 (a), com a posição deformada do pilar e em termos da carga atuante. Na fig. 4.4 (b) apresenta-se em forma de analogia, a movimentação de uma esfera em diversas configurações da base de apoio.

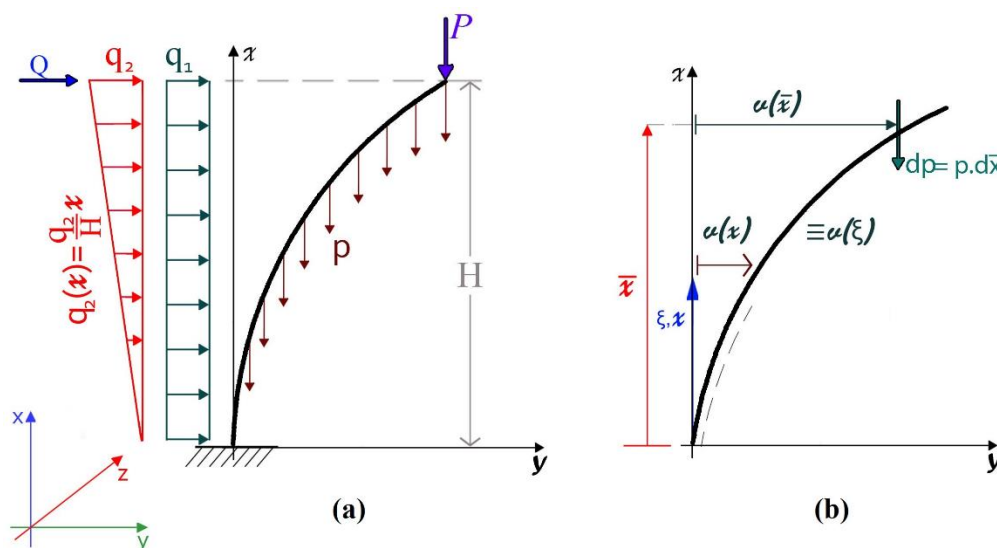
**Figura 4.4: Condições de equilíbrio: (a) em termos da carga atuante  $P$  e da deformada do pilar e (b) via analogia com uma esfera**

Fonte: Adaptado de (BELLUZI, V. 1, 1971)

## 4.2. EQUAÇÃO DIFERENCIAL VIA TÉCNICA DO MEIO CONTÍNUO

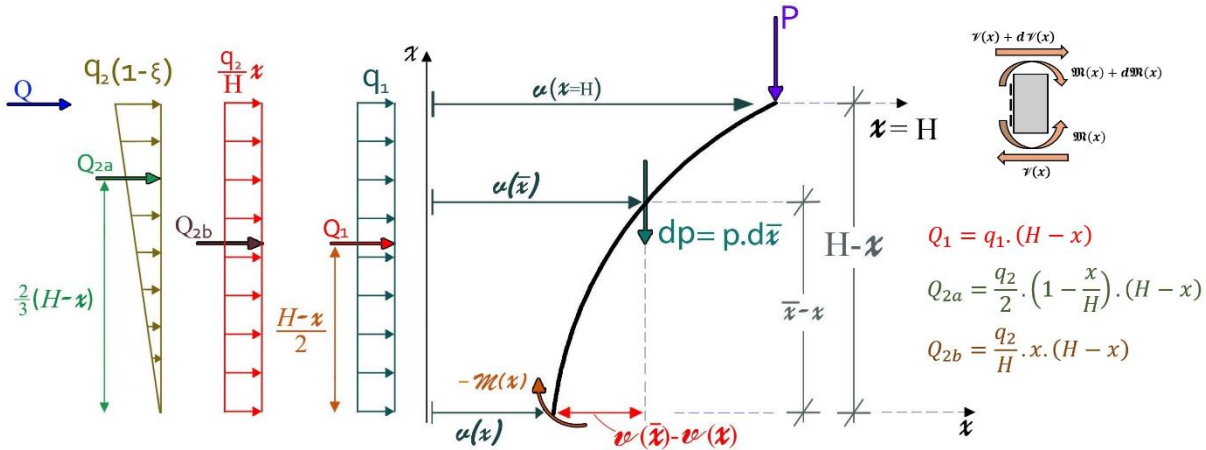
Ao considerar o pilar projetado para pontes e destinados a transportar grandes vales, ressalta-se a necessidade em computar o incremento de deflexões em decorrência do peso próprio  $p$  do pilar e das cargas laterais (essas últimas são oriundas preponderantemente das rajadas de vento). Ao analisar os efeitos de 1ª ordem (com a estrutura indeformada) verifica-se momento fletor gerado unicamente pelas cargas laterais  $q_1, q_2$  e  $Q$ . Porém computando os esforços na configuração deformada do pilar (efeitos de 2ª ordem), obtém-se a equação do momento fletor  $\mathfrak{M}(x)$  em termos tanto das cargas laterais quanto das cargas verticais  $p$  e  $P$ . Na fig. 4.5 (a) é apresentada tendência de deformação do pilar sob a imposição do estado de carga mencionado anteriormente, já na fig. 4.5 (b) evidencia-se elemento infinitesimal ( $dp$ ) do peso próprio  $p$  e conseguinte deflexão  $v(\bar{x})$  do pilar para a cota  $\bar{x}$ .

**Figura 4.5: Pilar de ponte: (a) configuração deformada, (b) elemento infinitesimal  $dp$  do peso próprio**



Fonte: O Autor (2019)

Na fig. 4.6 é apresentado o diagrama de corpo livre do pilar, tal ilustração destina-se a realizar o equilíbrio de momento numa seção genérica  $S$ . A localização da seção analisada é a cota  $x$  em relação a base do pilar.

**Figura 4.6: Diagrama de corpo livre com a convenção positiva para o momento fletor**

Fonte: O Autor (2019)

Resultando como equação para o momento fletor  $\mathfrak{M}(x)$ , a seguinte:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(x) = & - \int_x^H [v(\bar{x}) - v(x)] \cdot dp - [v(H) - v(x)] \cdot P + Q_1 \cdot \frac{(H - x)}{2} + Q_{2a} \cdot \frac{2}{3} \cdot (H - x) \\ & + Q_{2b} \cdot \frac{(H - x)}{2} + Q \cdot (H - x) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Após aplicar na eq. (4.5) as forças resultantes  $Q_1$ ,  $Q_{2a}$  e  $Q_{2b}$  decorrentes dos carregamentos laterais  $q_1$  e  $q_2$ , bem como impor o elemento infinitesimal  $dp = p(x) \cdot d\bar{x}$  (advindo da variação do peso próprio ao longo do comprimento do pilar). Tal consideração da variação de  $p(x)$  é em decorrência do lançamento estrutural otimizado economicamente por uso de material nas seções mais solicitadas. Destes procedimentos realizados, reescreve-se:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(x) = & - \int_x^H [v(\bar{x}) - v(x)] \cdot p(x) \cdot d\bar{x} - [v(H) - v(x)] \cdot P \\ & + (H - x) \cdot \left\{ \frac{q_1}{2} \cdot (H - x) + q_2 \cdot \left[ \left( \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2 \cdot H} \right) + \left( \frac{H}{3} - \frac{2}{3} \cdot x + \frac{x^2}{3 \cdot H} \right) \right] + Q \right\} \end{aligned} \quad (4.6)$$

#### a) Equação diferencial via teoria da linha elástica no campo das pequenas deformações

Utilizando a equação diferencial da flexão, sob hipótese do campo das pequenas deformações, proposta por Navier e baseada na hipótese de Bernoulli. Em decorrência desta

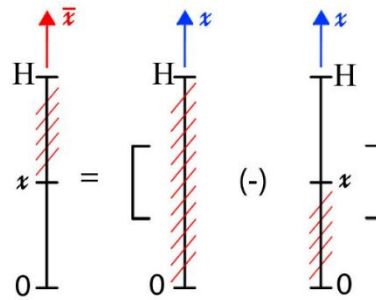


teoria torna-se desprezível a deformação pelo esforço cortante, ficando a equação de equilíbrio em momento expressa por:

$$\mathfrak{M}(x) = -E.I(x).v''(x) \quad (4.7)$$

Na figura 4.7 é apresentada a mudança do referencial  $\bar{x}$  para  $x$  e do intervalo de integração, isso a fim de unificar as parcelas incluídas na integral da eq. (4.6).

**Figura 4.7: Transformação do referencial  $\bar{x}$  para  $x$  e de intervalo de integração**



Fonte: O Autor (2019)

resulta desta transformação as integrais:

$$\int_x^H v(\bar{x}) d\bar{x} = \int_0^H v(x) dx - \int_0^x v(x) dx \quad (4.8 a)$$

$$\int_x^H v(x) d\bar{x} = v(x) \cdot \int_x^H d\bar{x} = (H - x) \cdot v(x) \quad (4.8 b)$$

Substituindo as eq.'s (4.8 a) e (4.8 b) na combinação das eq.'s (4.6) e (4.7), exprime-se:

$$E.I(x).v''(x) = \int_0^H p(x).v(x)dx - \int_0^x p(x).v(x) dx - p(x).v(x) \cdot \int_x^H d\bar{x} + [v(H) - v(x)].P + A.x^3 + B.x^2 + C.x + D \quad (4.9)$$

$$\text{sendo: } A = \frac{q_2}{6.H}; \quad B = -\frac{q_1}{2}; \quad C = \left(q_1 - \frac{q_2}{2}\right).H + Q; \quad D = -\left(\frac{3.q_1 - 2.q_2}{6}\right).H^2 - Q.H.$$

procede-se a derivação da eq. (4.9) como intuito de remover as integrais, reescrevendo-se:

$$-E.\frac{d}{dx}[I(x).v''(x)] = p(x).v(x) + \frac{d}{dx}[p(x).v(x).(H - x)] + \frac{d}{dx}[P.v(x)] + Q(x) \quad (4.10)$$

onde:  $Q(x) = A_1 \cdot x^2 + B_1 \cdot x + C$ ;

$$A_1 = -3 \cdot A = -\frac{q_2}{2 \cdot H}; \quad B_1 = -2 \cdot B = q_1; \quad \frac{d}{dx}[P \cdot v(H)] = P \cdot \frac{d}{dx}[v(H)] = 0;$$

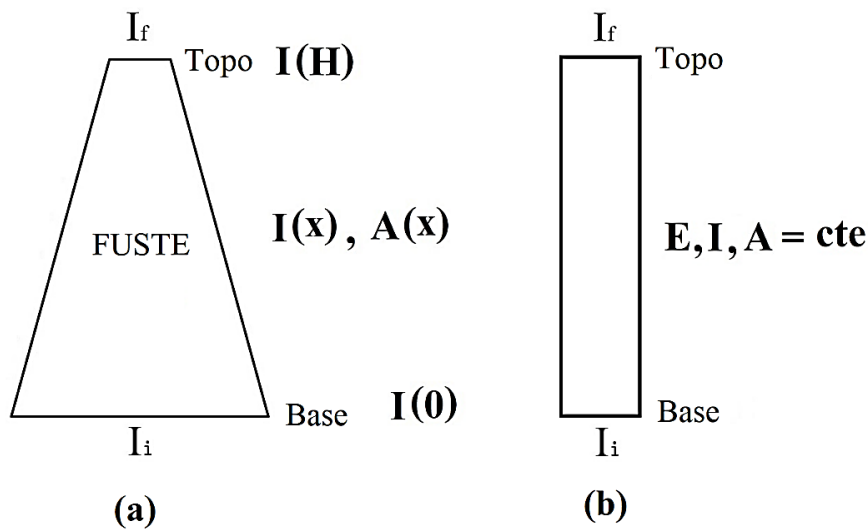
$$\int_0^H p(x) \cdot v(x) dx = cte \leftrightarrow \frac{d}{dx} \left[ \int_0^H p(x) \cdot v(x) dx \right] = 0 \quad e$$

$$\frac{d}{dx}[p(x) \cdot v(x) \cdot (H - x)] = [p'(x) \cdot v(x) + p(x) \cdot v'(x)] \cdot (H - x) - p(x) \cdot v(x).$$

após realizar a derivação da eq. (4.10) expressa-se a equação diferencial ordinária (EDO) que rege a estabilidade elástica do pilar analisado. Sendo adotada a variação da seção transversal do pilar (conforme ilustração na fig. 4.8 a), bem como o estado de carga e condições de contorno apresentados na figura 4.5. Resultando assim a EDO:

$$\begin{aligned} E \cdot [I'(x) \cdot v''(x) + I(x) \cdot v'''(x)] + [p'(x) \cdot v(x) + p(x) \cdot v'(x)] \cdot (H - x) + P \cdot v'(x) \\ = A_1 \cdot x^2 + B_1 \cdot x + C \end{aligned} \quad (4.11)$$

**Figura 4.8: Pilar engastado na base: (a) com seção transversal linearmente variável e (b) com seção constante**



Fonte: O Autor (2019)

Por caso particular cita-se a seção transversal constante, e para tal consideram-se  $p'(x)$  e  $I'(x)$  como nulos na eq. (4.11). Assim, reescreve-se a EDO como:

$$E \cdot I \cdot v'''(x) + [p \cdot (H - x) + P] \cdot v'(x) = A_1 \cdot x^2 + B_1 \cdot x + C \quad (4.12)$$

### b) Equação diferencial via derivação prévia do momento fletor $\mathfrak{M}(x)$

Derivando inicialmente a eq. (4.6) em relação ao eixo axial  $x$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \mathfrak{M}(x) = & -\frac{d}{dx} \left\{ \int_x^H p(x) \cdot [v(\bar{x}) - v(x)] d\bar{x} \right\} - P \cdot \frac{d}{dx} [v(H) - v(x)] \\ & + \frac{d}{dx} (A \cdot x^3 + B \cdot x^2 + C \cdot x + D) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Procedendo a análise das integrais, via fig. 4.7, e define-se:

$$\int_x^H v(\bar{x}) d\bar{x} = \int_0^H v(x) dx - \int_0^x v(x) dx \quad (4.14 a)$$

$$\frac{d}{dx} \left[ \int_x^H v(x) d\bar{x} \right] = \frac{d}{dx} \left[ \int_0^H v(x) dx - \int_0^x v(x) dx \right] \quad (4.14 b)$$

$$\frac{d}{dx} \left[ \int_0^H p(x) \cdot v(x) dx \right] = \frac{d}{dx} (cte) = 0 \quad (4.14 c)$$

$$\frac{d}{dx} \left[ \int_0^x p(x) \cdot v(x) dx \right] = \frac{d}{dx} [P_p(x) \cdot V_v(x) - P_p(0) \cdot V_v(0)] = p(x) \cdot v(x) \quad (4.14 d)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ \int_x^H p(x) \cdot v(x) d\bar{x} \right] &= \frac{d}{dx} \left[ p(x) \cdot v(x) \cdot \int_x^H d\bar{x} \right] = \frac{d}{dx} [p(x) \cdot v(x) \cdot (H - x)] \\ &= [p'(x) \cdot v(x) + p(x) \cdot v'(x)] \cdot (H - x) - p(x) \cdot v(x) \end{aligned} \quad (4.14 e)$$

$$P \cdot \frac{d}{dx} [v(H) - v(x)] = P \cdot \left\{ \frac{d}{dx} [v(H)] - \frac{d}{dx} [v(x)] \right\} = -P \cdot v'(x) \quad (4.14 f)$$

onde:  $P_p(x), V_v(x)$  são as funções primitivas de  $p(x)$  e  $v(x)$ , respectivamente.

Valendo-se dos termos desenvolvidos da eq. (4.14 a) até a eq. (4.14 f) e impondo-lhes na eq. (4.13), conclui-se:

$$\frac{d}{dx} \mathfrak{M}(x) = [p'(x) \cdot v(x) + p(x) \cdot v'(x)] \cdot (H - x) + P \cdot v'(x) + A_1 \cdot x^2 + B_1 \cdot x + C \quad (4.15)$$

Por fim, aplicando a teoria de Navier para a linha elástica (adotando o campo das pequenas deformações), tem-se a equação de equilíbrio expressa por:

$$E \cdot I(x) \cdot v''(x) = -\mathfrak{M}(x) \quad \therefore \quad E \cdot [I'(x) \cdot v''(x) + I(x) \cdot v'''(x)] = -\frac{d}{dx} \mathfrak{M}(x) \quad (4.16)$$

E ao igualar as eq.'s (4.15) e (4.16), além de impor as configurações da seção transversal ao longo do eixo longitudinal do pilar, chega-se as mesmas equações diferenciais expressas nas eq.'s (4.11) e (4.12) que foram obtidas na letra (a) deste item.

### 4.3. INAPLICABILIDADE DA EQUAÇÃO CLÁSSICA DE BESSEL

A fim de analisar a aplicabilidade da equação canônica de Bessel na resolução do problema de estabilidade elástica para o pilar com seção transversal constante ao longo do eixo longitudinal, que é expressa na eq. (4.12). Procede-se a adimensionalização do eixo longitudinal do pilar através de  $(\xi = H^{-1} \cdot x)$  e definem-se as transformações de referencial  $x$  para  $\xi$  nas derivadas, como:

$$v'(x) = \frac{dv(\xi)}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = v^I(\xi) \cdot \frac{1}{H} \quad (4.17 a)$$

$$v''(x) = \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{H} \cdot \frac{dv(\xi)}{d\xi} \right] = \frac{1}{H} \cdot \frac{d^2v(\xi)}{d\xi^2} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{H^2} \cdot v^{II}(\xi) \quad (4.17 b)$$

$$v'''(x) = \frac{1}{H^3} \cdot v^{III}(\xi) \quad (4.17 c)$$

Resultando como EDO adimensionalizada:

$$\begin{aligned} \frac{EI}{H^3} \cdot v^{III}(\xi) + \frac{[p \cdot (H - x) + P]}{H} \cdot v^I(\xi) \\ = -\frac{q_2}{2 \cdot H} \cdot (\xi \cdot H)^2 + q_1 \cdot \xi \cdot H + \left(-q_1 + \frac{q_2}{2}\right) \cdot H - Q \end{aligned} \quad (4.18)$$

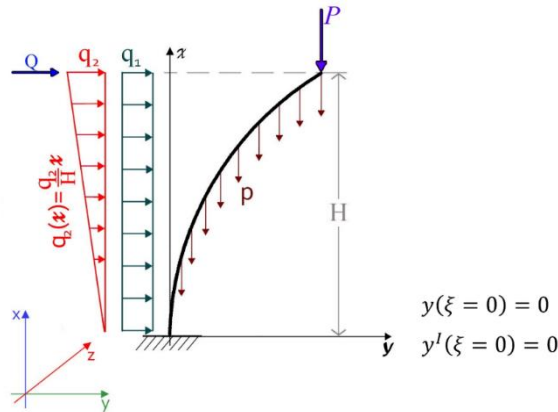
Multiplicando a Eq. (4.18) por  $(EI)^{-1} \cdot H^3$ , isto a fim de tornar unitário o coeficiente do termo de maior em derivação. Aliado a tal artifício matemático, procede-se a mudança de variável  $y = v^I$  (o super-índice  $I$  indica que a derivação é realizada em relação a  $\xi$ ) para que a EDO enquadre-se na equação clássica de Bessel, tem-se:

$$y''(\xi) + [p \cdot (1 - \xi) + P] \cdot \frac{H^3}{EI} \cdot y(\xi) = \frac{H^4}{EI} \cdot \left[ -\frac{q_2}{2} \cdot \xi^2 + q_1 \cdot \xi + \left( -q_1 + \frac{q_2}{2} \right) \right] - Q \cdot \frac{H^3}{EI} \quad (4.19)$$

Ao basear-se nas condições de contorno para o pilar engastado na base, vide fig. 4.9, e na mudança de variável  $x_1 = (1 - \xi)$ , reescreve-se a eq. (4.19) na forma de EDO homogênea, como:

$$y''(\xi) + \left[ p \cdot x_1 + \frac{P}{H} \right] \cdot \frac{H^3}{EI} \cdot y(\xi) = 0 \quad (4.20)$$

**Figura 4.9: Condições de contorno na direção y**



Fonte: O Autor (2019)

Ressaltando que a função clássica de Bessel, ver Spiegel (1974, p. 101), é expressa por:

$$x_1^2 \cdot y'' + (2 \cdot k + 1) \cdot x_1 \cdot y' + (\alpha^2 \cdot x_1^{2 \cdot r} + \beta^2) \cdot y = 0 \quad (4.21)$$

Ao multiplicar a eq. (4.20) por  $x_1^2$ , exprime-se a EDO em termos semelhantes a equação clássica de Bessel, como:

$$x_1^2 \cdot y''(\xi) + \left[ \frac{p \cdot H^3}{EI} \cdot x_1^3 + \frac{P \cdot H^2}{EI} \cdot x_1^2 \right] \cdot y(\xi) = 0 \quad (4.22)$$

Ao comparar a eq. (4.22) com a equação canônica de Bessel, eq. (4.21), verifica-se que a solução é aplicável apenas para a nulidade de carga vertical concentrada ( $P = 0 \text{ kN}$ ) no topo do pilar. Tal imposição é para que o coeficiente  $\beta$  seja definível, obtendo-se solução para esse

caso bem particular (onde não há atuação de carregamentos na superestrutura da ponte). A solução definida em séries por:

$$y = x_1^{-k^*} \cdot \left[ C_1 \cdot J_{k^*} \cdot \left( \frac{\alpha \cdot x_1^r}{r} \right) + C_2 \cdot J_{-k^*} \cdot \left( \frac{\alpha \cdot x_1^r}{r} \right) \right] \quad (4.23)$$

com as seguintes correlações:  $2 \cdot k + 1 = 0$ ;  $k = -\frac{1}{2}$ ;  $\alpha = H \cdot \sqrt{\frac{p \cdot H}{EI}}$ ;  $r = \frac{3}{2}$ ;  $\beta = 0$ ;

sendo:  $k^* = \sqrt{k^2 - \beta^2} = 1/2$ ;  $k^*/r = 1/3$  e

$$y = \frac{2}{3} \cdot x_1^{-1/2} \cdot \left[ C_1 \cdot J_{1/3} \cdot \left( \sqrt{\frac{p \cdot H^3}{EI}} \cdot x^{3/2} \right) + C_2 \cdot J_{-1/3} \cdot \left( \sqrt{\frac{p \cdot H^3}{EI}} \cdot x^{3/2} \right) \right].$$

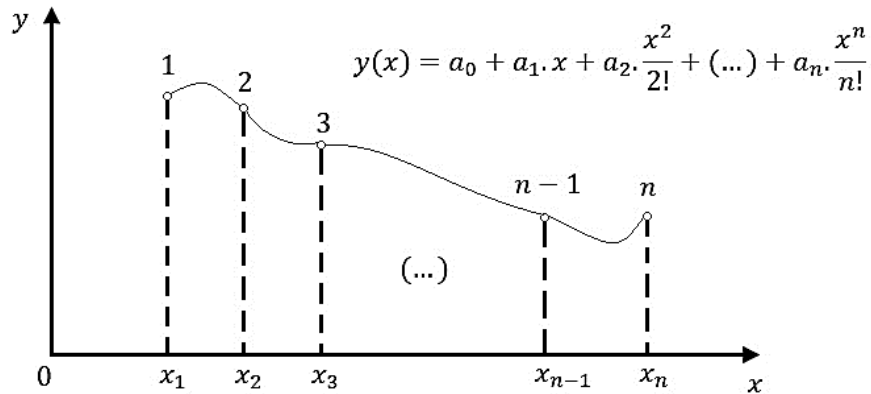
Após a aplicação da solução de Bessel, eq. (4.20), verifica-se que tal função  $y$  é de obtenção bastante custosa matematicamente e defínivel unicamente para o pilar sem carga vertical concentrada no topo do pilar. Implicando na inexistência de carregamento vertical na superestrutura da ponte (oriundo do tráfego no tabuleiro). Tal condição, resulta em solução incompleta para todos os estados de carga possíveis, isso a fim de dimensionar o pilar em análise.

#### 4.4. RESOLUÇÃO VIA MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

Com o intuito de transformar a equação diferencial que rege o problema da estabilidade elástica do pilar apresentado na fig. 4.5, num sistema de equações algébricas com a incógnita  $v$  por ponto de discretização do meio contínuo; utiliza-se a equação de interpolação. As funções  $\varphi$  são caracterizadas através de aplicação unitária por ponto discretizado, baseando-se em Soare (1962) e Guelfond (1963), define-se a interpolação polinomial de grau  $n$  (Função de Lagrange).

$$y = \sum_{k=1}^{k=n+1} y_k \cdot \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_{k-1}) \cdot (x - x_{k+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_{n+1})}{(x_k - x_1) \cdot (x_k - x_2) \cdot \dots \cdot (x_k - x_{k-1}) \cdot (x_k - x_{k+1}) \cdot \dots \cdot (x_k - x_{n+1})} \quad (4.24)$$

a representação gráfica do polinômio de interpolação é apresentada na figura 4.10.

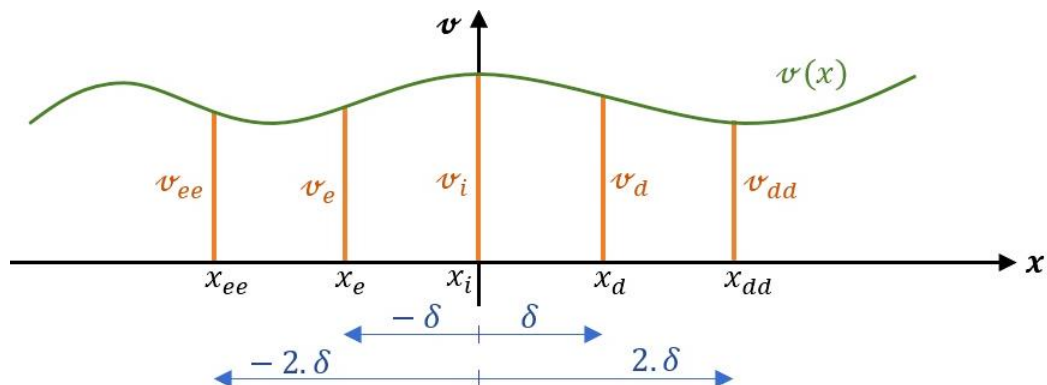
**Figura 4.10: Interpolação polinomial para  $n$  graus de liberdade**

Fonte: O Autor (2019)

Para o método das diferenças finitas, procede-se a aplicação de curvas de interpolação de ordem igual ou superior a maior derivação presente na EDO. No caso em questão, utiliza-se curva de interpolação quártica com o ponto  $j$  (ponto de aplicação) e os quatro adjacentes. Configurando-se dois tipos, basicamente, de diferenças finitas: centrais e assimétrica à direita. A formulação clássica do método das diferenças finitas é postulada com polinômio de interpolação parabólica e para tal referencia-se Quarteroni et al. (2007).

### a) Operadores centrais

O método das diferenças finitas centrais equivale a um caso particular do método da colocação, no qual considera-se pontos no entorno de  $j$ . Vide na figura 4.11 o polinômio de interpolação  $v(x)$  de ordem quatro.

**Figura 4.11: Polinômio de interpolação quártica para operadores de diferenças finitas centrais**

Fonte: O Autor (2019)

A função de interpolação  $v(x)$  apresentada na figura 4.11 é determinada mediante regra de Simpson, de formulação admitida em 1750 e citada em O'Hara e Ramming (2015), e expressa por:

$$v(x) = \alpha_a \cdot x^4 + \alpha_b \cdot x^3 + \alpha_c \cdot x^2 + \alpha_d \cdot x + \alpha_e \quad (4.25 a)$$

com os coeficientes  $\alpha_a$  até  $\alpha_e$  obtidos através da aplicação do polinômio  $v(x)$  nos pontos com abscissas:  $x_{ee}, x_e, x_i, x_d$  e  $x_{dd}$ , ficando expressos por:

$$\alpha_a = \frac{1}{24 \cdot \delta^4} \{v_{ee} - 4 \cdot v_e + 6 \cdot v_i - 4 \cdot v_d + v_{dd}\} \quad (4.25 b)$$

$$\alpha_b = \frac{1}{12 \cdot \delta^3} \{-v_{ee} + 2 \cdot v_e - 2 \cdot v_d + v_{dd}\} \quad (4.25 c)$$

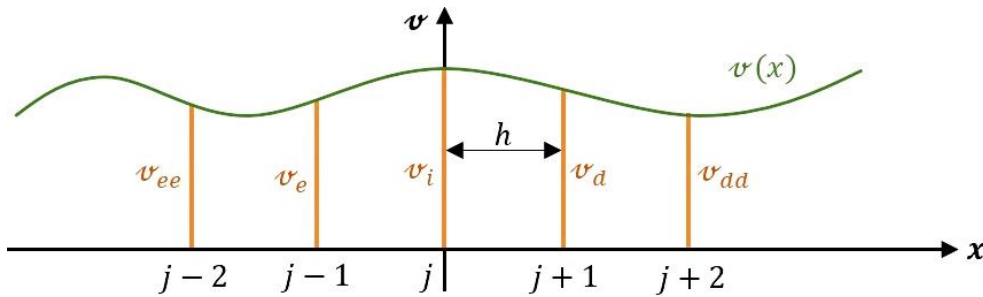
$$\alpha_c = \frac{1}{24 \cdot \delta^2} \{-v_{ee} + 16 \cdot v_e - 30 \cdot v_i + 16 \cdot v_d - v_{dd}\} \quad (4.25 d)$$

$$\alpha_d = \frac{1}{12 \cdot \delta} \{v_{ee} - 8 \cdot v_e + v_d - v_{dd}\} \quad (4.25 e)$$

$$\alpha_e = v_i \quad (4.25 f)$$

Após obter o polinômio  $v(x)$  expresso na equação (4.25 a), procedem-se as derivações até terceira ordem e caracteriza-se o ponto de aplicação centrado ( $j = 0$ ). Para tal aplicação, apresenta-se na figura 4.12 o ponto  $j$  e os vizinhos a distância relativa  $h$ .

**Figura 4.12: Ponto de aplicação para operadores de diferenças finitas centrais**



Fonte: O Autor (2019)

Os operadores das derivadas, até ordem 3 para as diferenças finitas centradas, ficam expressos em termos dos pontos de vizinhança à esquerda ( $j - 2$ ) e ( $j - 1$ ), bem como à direita ( $j + 1$ ) e ( $j + 2$ ) e definidos por:

$$v'_j = \frac{1}{12 \cdot h} \{v_{j-2} - 8 \cdot v_{j-1} + 8 \cdot v_{j+1} - v_{j+2}\} \quad (4.26 a)$$



$$v_j'' = \frac{1}{12.h^2} \{-v_{j-2} + 12.v_{j-1} - 30.v_j + 16.v_{j+1} - v_{j+2}\} \quad (4.26 b)$$

$$v_j''' = \frac{1}{2.h^3} \{-v_{j-2} + 2.v_{j-1} - 2.v_{j+1} + v_{j+2}\} \quad (4.26 c)$$

Ao aplicar os operadores de diferenças finitas centrais, apresentados nas eq.'s (4.26), na EDO não homogênea (Eq. 4.12). Escreve-se a lei de formação das equações algébricas decorrentes das aplicações no domínio ( $2 \leq j \leq n + 1$ ) do pilar, como:

$$\begin{aligned} &\{-T_1 + T_{2j}\} \cdot v_{j-2} + \{2.T_1 - 8.T_{2j}\} \cdot v_{j-1} + \{-2.T_1 + 8.T_{2j}\} \cdot v_{j+1} + \{T_1 - T_{2j}\} \cdot v_{j+2} \\ &= Q_j \end{aligned} \quad (4.27)$$

E, para o problema de ponto limite do pilar com seção transversal variável, eq. (4.11), tem-se a lei de colocação expressa por:

$$\begin{aligned} &(T_{1a} + T_{2j}) \cdot v_{j-2} + (T_{1b} - 8.T_{2j}) \cdot v_{j-1} + (T_{1c} + p_a) \cdot v_j + (T_{1d} + 8.T_{2j}) \cdot v_{j+1} \\ &+ (T_{1e} - T_{2j}) \cdot v_{j+2} = Q_j \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\text{com: } T_{1a} = -\frac{E.I_{j-2}}{144.h^3} + 8.\frac{E.I_{j-1}}{144.h^3} - \frac{E.I_j}{2.h^3} - 8.\frac{E.I_{j+1}}{144.h^3} + \frac{E.I_{j+2}}{144.h^3}; \quad T_{2j} = \frac{[p.(H - x_j) + P]}{12.h};$$

$$T_{1b} = 16.\frac{E.I_{j-2}}{144.h^3} - 128.\frac{E.I_{j-1}}{144.h^3} + 2.\frac{E.I_j}{2.h^3} + 128.\frac{E.I_{j+1}}{144.h^3} - 16.\frac{E.I_{j+2}}{144.h^3}; \quad T_1 = \frac{E.I}{2.h^3};$$

$$T_{1c} = -30.\frac{E.I_{j-2}}{144.h^3} + 240.\frac{E.I_{j-1}}{144.h^3} - 240.\frac{E.I_{j+1}}{144.h^3} + 30.\frac{E.I_{j+2}}{144.h^3};$$

$$T_{1d} = 16.\frac{E.I_{j-2}}{144.h^3} - 128.\frac{E.I_{j-1}}{144.h^3} - 2.\frac{E.I_j}{2.h^3} + 128.\frac{E.I_{j+1}}{144.h^3} - 16.\frac{E.I_{j+2}}{144.h^3};$$

$$T_{1e} = -\frac{E.I_{j-2}}{144.h^3} + 8.\frac{E.I_{j-1}}{144.h^3} + \frac{E.I_j}{2.h^3} - 8.\frac{E.I_{j+1}}{144.h^3} + \frac{E.I_{j+2}}{144.h^3} e$$

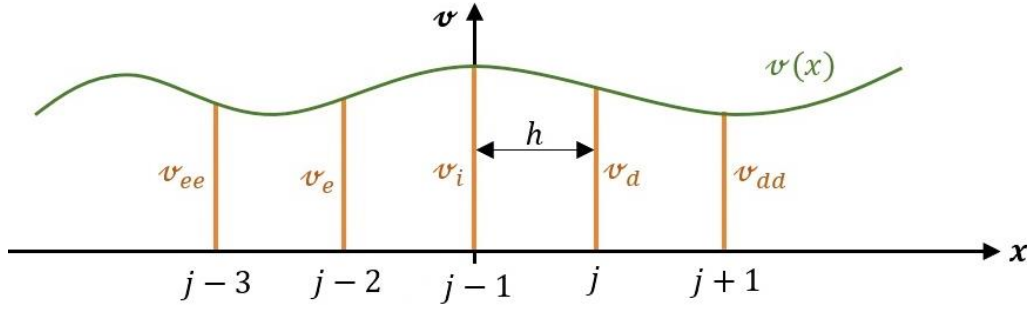
$$p_a = \frac{H - x_j}{12.h} \{p_{j-2} - 8.p_{j-1} + 8.p_{j+1} - p_{j+2}\}.$$

onde:  $I_j, I_{j-1}, I_{j+1}$  são os momentos de inércia nos pontos de colocação  $j, j-1, j+1$  (respectivamente);  $h$  é o intervalo de interpolação;  $v_{j-2}, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, v_{j+2}$  são as deflexões na direção  $y$  nos pontos de aplicação de  $j$ ;  $Q_j$  é a carga horizontal no ponto de aplicação, sendo:  $Q_j = Q(x = x_j) = A_1.x_j^2 + B_1.x_j + C$  e  $x_j$  é a coordenada  $x$  do ponto de colocação  $j$ .

### b) Operadores assimétricos à direita

Na figura 4.13 é apresentada a função interpoladora para a utilização do método das diferenças finitas com equacionamento assimétrico à direita. Assim, o ponto de aplicação  $j$  é posicionado a distância  $h$  da origem da abscissa. Ficam, então, um pontos a frente da aplicação.

**Figura 4.13: Ponto de aplicação da diferença finita assimétrica à direita, com abscissa  $x = \delta \equiv h$**



Fonte: O Autor (2019)

Baseado no exposto em Mancini (1973), a determinação dos operadores de diferenças finitas assimétricas à direita ficam expressos por:

$$v'_j = \frac{1}{12 \cdot h} \{-v_{j-3} + 6 \cdot v_{j-2} - 18 \cdot v_{j-1} + 10 \cdot v_j + 3 \cdot v_{j+1}\} \quad (4.29 \ a)$$

$$v''_j = \frac{1}{12 \cdot h^2} \{-v_{j-3} + 4 \cdot v_{j-2} + 6 \cdot v_{j-1} - 20 \cdot v_j + 11 \cdot v_{j+1}\} \quad (4.29 \ b)$$

$$v'''_j = \frac{1}{2 \cdot h^3} \{v_{j-3} - 6 \cdot v_{j-2} + 12 \cdot v_{j-1} - 10 \cdot v_j + 3 \cdot v_{j+1}\} \quad (4.29 \ c)$$

Analogamente ao procedido no item (a) desta subseção, expressam-se as leis de formação das equações algébricas (aplicável ao topo do pilar, no ponto  $j = n + 2$  apresentado na figura 4.14) para seção transversal constante e variável, respectivamente, tais como:

$$\begin{aligned} \{T_1 - T_{2j}\} \cdot v_{j-3} + 6 \cdot \{-T_1 + T_{2j}\} \cdot v_{j-2} + \{12 \cdot T_1 - 18 \cdot T_{2j}\} \cdot v_{j-1} + 10 \cdot \{-T_1 + T_{2j}\} \cdot v_j \\ + 3 \cdot \{T_1 + T_{2j}\} \cdot v_{j+1} = Q_j \end{aligned} \quad (4.30 \ a)$$

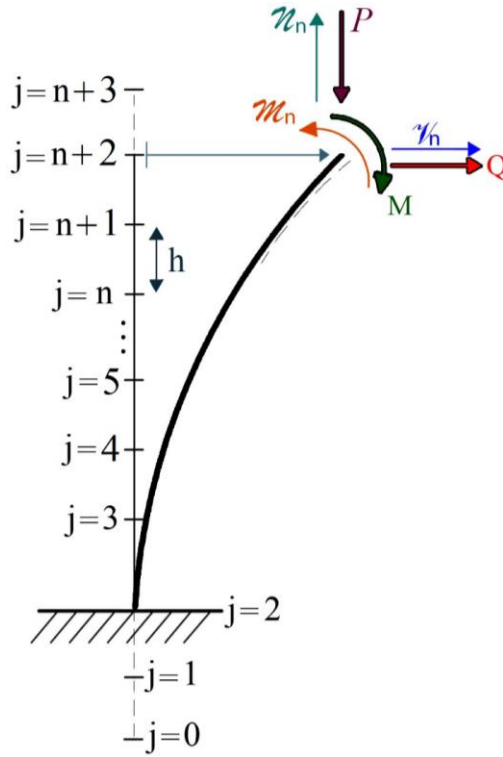
e

$$\begin{aligned} (T_{1aa} - T_{2j}) \cdot v_{j-3} + (T_{1bb} + 6 \cdot T_{2j}) \cdot v_{j-2} + (T_{1cc} - 18 \cdot T_{2j}) \cdot v_{j-1} \\ + (T_{1dd} + p_{aa} + 10 \cdot T_{2j}) \cdot v_j + (T_{1e} + 3 \cdot T_{2j}) \cdot v_{j+1} = Q_j \end{aligned} \quad (4.30 b)$$

$$\begin{aligned} \text{com: } T_{1aa} &= \frac{E \cdot I_{j-3}}{144 \cdot h^3} - 6 \cdot \frac{E \cdot I_{j-2}}{144 \cdot h^3} + 18 \cdot \frac{E \cdot I_{j-1}}{2 \cdot h^3} + 62 \cdot \frac{E \cdot I_j}{144 \cdot h^3} - 3 \cdot \frac{E \cdot I_{j+1}}{144 \cdot h^3}; \\ T_{1bb} &= -4 \cdot \frac{E \cdot I_{j-3}}{144 \cdot h^3} + 24 \cdot \frac{E \cdot I_{j-2}}{144 \cdot h^3} - 72 \cdot \frac{E \cdot I_{j-1}}{144 \cdot h^3} - 392 \cdot \frac{E \cdot I_j}{144 \cdot h^3} + 12 \cdot \frac{E \cdot I_{j+1}}{144 \cdot h^3}; \\ T_{1cc} &= -6 \cdot \frac{E \cdot I_{j-3}}{144 \cdot h^3} + 36 \cdot \frac{E \cdot I_{j-2}}{144 \cdot h^3} - 108 \cdot \frac{E \cdot I_{j-1}}{144 \cdot h^3} + 924 \cdot \frac{E \cdot I_j}{144 \cdot h^3} + 18 \cdot \frac{E \cdot I_{j+1}}{144 \cdot h^3}; \\ T_{1dd} &= 20 \cdot \frac{E \cdot I_{j-3}}{144 \cdot h^3} - 120 \cdot \frac{E \cdot I_{j-2}}{144 \cdot h^3} + 360 \cdot \frac{E \cdot I_{j-1}}{2 \cdot h^3} - 920 \cdot \frac{E \cdot I_j}{144 \cdot h^3} - 60 \cdot \frac{E \cdot I_{j+1}}{144 \cdot h^3}; \\ T_{1ee} &= -11 \cdot \frac{E \cdot I_{j-3}}{144 \cdot h^3} + 66 \cdot \frac{E \cdot I_{j-2}}{144 \cdot h^3} - 198 \cdot \frac{E \cdot I_{j-1}}{144 \cdot h^3} + 326 \cdot \frac{E \cdot I_j}{144 \cdot h^3} + 33 \cdot \frac{E \cdot I_{j+1}}{144 \cdot h^3} e \\ p_{aa} &= \frac{H - x_j}{12 \cdot h} \{-p_{j-3} + 6 \cdot p_{j-2} - 18 \cdot p_{j-1} + 10 \cdot p_j + 3 \cdot p_{j+1}\}. \end{aligned}$$

### c) Discretização

O problema da estabilidade do pilar de ponte, modelado via técnica do meio contínuo e representado pela equação diferencial ordinária apresentada na equação (4.11), será discretizado em  $n$  pontos. Serão aplicados os operadores de diferenças finitas centrais, desde o ponto ( $j = 2$ ) na base e coordenada ( $x = 0$ ) até o penúltimo ponto da malha discretizada ( $x = H - h$ ). Sendo  $h$  a distância entre os pontos da malha, aplicam-se os operadores assimétricos à direita no topo do pilar ( $x = H$ ). Verificando-se a necessidade de dois pontos abaixo da aplicação, isso para a diferença finita centrada (surgindo dois pontos fictícios abaixo da base do pilar e numerados de  $j = 0$  e  $j = 1$ ). Ao longo do pilar tem-se os pontos da numeração  $j = 2$  até  $j = n + 1$ . No topo do pilar ( $j = n + 2$ ) aplica-se a diferença finita assimétrica à direita e para tal impõe-se um ponto fictício ( $j = n + 3$ ) acima do topo. Vide Fig. 4.14.

**Figura 4.14: Discretização do pilar via diferenças finitas****Fonte: O Autor (2019)**

Para completar as equações do sistema de equações algébricos (em função da imposição dos três pontos fictícios), adicionam-se três equações extras e são provenientes das condições de contorno, quais são:

$$v(x=0) = 0 \quad \therefore \quad v_{(j=2)} = 0 \quad (4.31 \ a)$$

$$v'(x=0) = 0 \quad \therefore \quad v'_{(j=2)} = 0 \quad (4.31 \ b)$$

$$\mathfrak{M}(x=H) = 0 \quad \therefore \quad v''_{(j=2)} = 0 \quad (4.31 \ c)$$

As condições de contorno, via operadores de diferenças finitas, ficam expressas por:

$$M_{0,2} \cdot v_2 = q_0 \quad (4.32 \ a)$$

$$M_{1,0} \cdot v_0 + M_{1,1} \cdot v_1 + M_{1,3} \cdot v_3 + M_{1,4} \cdot v_4 = q_1 \quad (4.32 \ b)$$

$$M_{n+3,n-1} \cdot v_{n-1} + M_{n+3,n} \cdot v_n + M_{n+3,n+1} \cdot v_{n+1} + M_{n+3,n+2} \cdot v_{n+2} + M_{n+3,n+3} \cdot v_{n+3} = q_{n+3} \quad (4.32 \ c)$$

onde:  $M_{0,2} = M_{1,0} = 1$ ;  $M_{1,1} = -8$ ;  $M_{1,3} = 8$ ;  $M_{1,4} = -1$ ;  $M_{n+3,n-1} = -1$ ;  $M_{n+3,n} = 4$ ;

$$M_{n+3,n+1} = 6; M_{n+3,n+2} = -20; M_{n+3,n+3} = 11 \text{ e } q_0 = q_1 = q_{n+3} = 0.$$

Resultando, por fim, a aplicação das equações (4.27), (4.28) e (4.30) na malha de discretização apresentada na figura 4.14, no seguinte sistema de equações algébricas:

$$[M].\{v\} = \{q\} \quad (4.33 \text{ a})$$

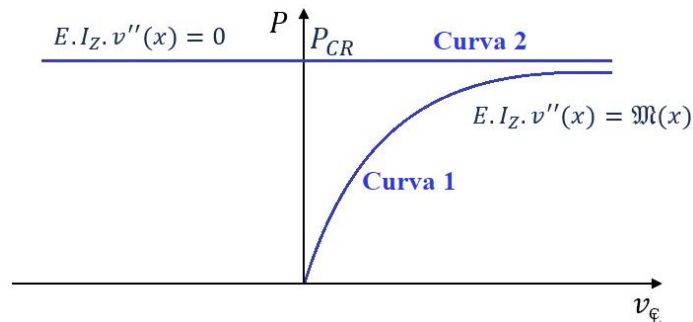
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -8 & 0 & 8 & -1 & \dots \\ M_{2,0} & M_{2,1} & 0 & M_{2,3} & M_{2,4} & \dots \\ & & \vdots & & & \ddots \\ & & & M_{n+2,n-1} & M_{n+2,n} & M_{n+2,n+1} & M_{n+2,n+2} & M_{n+2,n+3} \\ & & & M_{n+3,n-1} & M_{n+3,n} & M_{n+3,n+1} & M_{n+3,n+2} & M_{n+3,n+3} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n+2} \\ v_{n+3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{n+2} \\ q_{n+3} \end{Bmatrix} \quad (4.33 \text{ b})$$

sendo:  $\{v\}$  o vetor de incógnitas (deslocamentos transversais na direção y);  $[M]$  a matriz de coeficientes e  $\{q\}$  o vetor independente.

#### d) Determinação da carga crítica

A obtenção da carga crítica pode ser realizada via dois procedimentos: o primeiro com a EDO, eq. (4.11) ou eq. (4.12), não homogênea e em decorrência de problema de ponto limite (Curva 1 apresentada na fig. 4.15), sendo incrementada a carga  $P$  até a convergência. Para o segundo método referencia-se Chajes (1974, p. 110 – 115) e consiste em adotar a EDO homogênea (Curva 2 da fig. 4.15), logo com o termo particularizante ( $Q_j = 0$ ) nulo. Após a devida transformação de equação diferencial em sistema algébrico, mediante imposição dos operadores de diferenças finitas, obtém-se a carga crítica  $P_{CR}$  via solução não trivial.

**Figura 4.15: Obtenção da carga crítica via método das diferenças finitas**

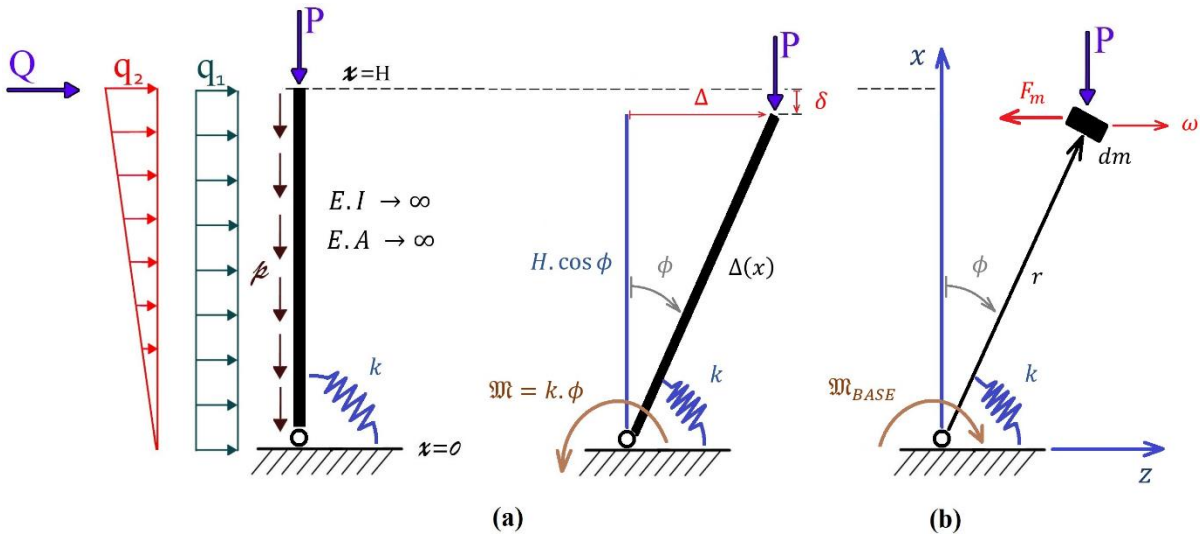


Fonte: O Autor (2019)

#### 4.5. ESTABILIDADE DINÂMICA

Considerando os conceitos de estabilidade dinâmica apresentados em Bazant e Cedolin (2010) para pilares, apresenta-se na figura 4.16 (a) o estado de carga de um pilar típico de ponte, bem como na fig. 4.16 (b) é exposta a configuração deformada e a movimentação na direção  $z$ .

**Figura 4.16: Pilar: (a) estado de carga e (b) configuração deformada**



Fonte: O Autor (2019)

A energia cinética  $\varepsilon$  e a quantidade de movimento  $Q_\varepsilon$  são expressas por:

$$\varepsilon = \frac{I \cdot (\dot{\phi})^2}{2} \quad (4.34 a)$$

$$Q_\varepsilon = \frac{d\varepsilon}{d\dot{\phi}} = 2 \cdot I \cdot \frac{\dot{\phi}}{2} \cdot \frac{d(\dot{\phi})}{d\dot{\phi}} = I \cdot \dot{\phi} \quad (4.34 b)$$

com:  $I$  – Momento de inércia à flexão, e expresso por:

$$I = \int r^2 dm$$

A pseudo - força inercial  $F_m$  é determinada mediante derivação da quantidade de movimento  $Q_\varepsilon$  em relação ao tempo, ficando expressa por:

$$F_m = \frac{d(Q_\varepsilon)}{dt} = I \cdot \frac{d(\dot{\phi})}{dt} = I \cdot \ddot{\phi} \quad (4.35)$$

O momento fletor na base  $\mathfrak{M}_{BASE}$  do pilar é determinado para a posição deformada que é indicada na fig. 4.16 (a), ao adotar o estado de carga  $(Q, q_1, q_2, p, P)$ , tem-se  $\mathfrak{M}_{BASE}$  expresso por:

$$\mathfrak{M}_{BASE} = P \cdot \Delta + \frac{q_1}{2} \cdot H^2 + \frac{q_2}{3} \cdot H^2 + Q \cdot H + \int_0^H p(x) \cdot \Delta(x) dx \quad (4.36)$$

sendo:  $\Delta = H \cdot \sin \phi$ ;  $\delta = H \cdot (1 - \cos \phi)$  e  $\Delta(x) = \frac{\Delta}{H} \cdot x$ .

Aplicando-se o princípio de D'Alembert, no pilar apresentado na fig. 4.16, será obtida a equação diferencial que rege a estabilidade dinâmica, como:

$$I \cdot \ddot{\phi} + k \cdot \phi = \mathfrak{M}_{BASE} \quad (4.37)$$

onde:  $k$  é a rigidez à flexão.

Ao agrupar os termos semelhantes da eq. (4.37), bem como admitindo o pilar de seção transversal constante [ $p(x) = p$ ], reescreve-se a EDO da estabilidade dinâmica como:

$$I \cdot \ddot{\phi} + k \cdot \phi = (P \cdot \sin \phi + Q) \cdot H + \left[ \left( \frac{3 \cdot q_1 + 2 \cdot q_2}{6} \right) + \frac{p \cdot \sin \phi}{2} \right] \cdot H^2 \quad (4.38)$$

#### 4.5.1. ESTADO DE CARGA 1

No primeiro estado de carga será admitida a ausência da atuação do vento ( $q_1 = q_2 = 0 \text{ kN/m}$ ,  $Q = 0 \text{ kN}$ ) e desprezada a relevância do peso próprio  $p$  em detrimento da carga vertical  $P$  atuante no topo do pilar. Resultando como EDO, a seguinte:

$$I \cdot \ddot{\phi} + k \cdot \phi = P \cdot H \cdot \sin \phi \quad (4.39)$$

a solução homogênea  $\phi_H(t)$  da equação diferencial, eq. (4.39), é expressa por:

$$\phi_H(t) = B_1 \cdot \sin(\omega_b \cdot t) + B_2 \cdot \cos(\omega_b \cdot t) \quad (4.39 a)$$

com:  $\omega_b = \sqrt{\frac{k}{I}}$ .

baseado na teoria das pequenas deformações (TPD) aplica-se na eq. (4.39) a condição de equivalência entre o seno e o próprio argumento ( $\text{sen } \phi \approx \phi$ ), concluindo-se:

$$I. \ddot{\phi} + (k - P.H). \phi = 0 \quad (4.39 \text{ b})$$

ao substituir a carga crítica obtida via análise estática, ver eq. (4.3 c), reescreve-se a EDO como:

$$I. \ddot{\phi} + \left(1 - \frac{P}{P_{CR}}\right). k. \phi = 0 \quad (4.39 \text{ c})$$

observa-se que a eq. (4.39 c) foi obtida para o campo das pequenas deformações. Já para as grandes deformações, basta que seja aplicada a carga crítica da eq. (4.4 b) na EDO apresentada na eq. (4.39). E após o devido equacionamento chega-se novamente na equação (4.39 c), que ao ser dividida pela inércia  $I$  passa a ser expressa por:

$$\ddot{\phi} + \omega_b^2. \left(1 - \frac{P}{P_{CR}}\right). \phi = 0 \quad (4.39 \text{ d})$$

Em função do sinal do termo que pré-multiplica a rotação  $\phi$  é possível definir três condições de equilíbrio, sendo estas: o equilíbrio indiferente ( $P = P_{CR}$ ), o equilíbrio instável ( $P > P_{CR}$ ) e o equilíbrio estável ( $P < P_{CR}$ ).

#### **a) Equilíbrio indiferente ( $P = P_{CR}$ )**

Esta condição de equilíbrio equivale na análise estática (procedida no item 4.1) a igualdade do trabalho  $W$  e da energia potencial de deformação  $U$ . E para tal condição de equilíbrio, reescreve-se a EDO apresentada na eq. (4.39 d) como:

$$\ddot{\phi} = 0 \quad (4.40)$$

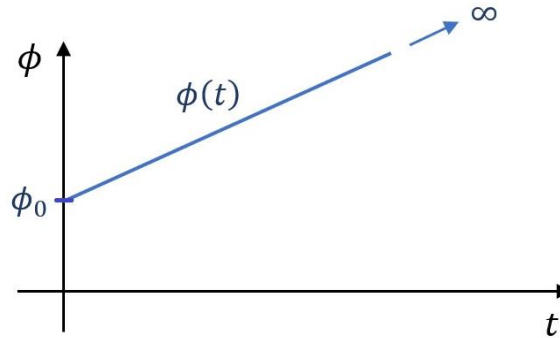
para as condições iniciais, em rotação  $\phi_0$  e em velocidade  $\dot{\phi}_0$ , escreve-se a resposta da EDO através da seguinte função linear, como:

$$\phi(t) = \dot{\phi}_0. t + \phi_0 \quad (4.40 \text{ a})$$



Na figura 4.17 é apresentada graficamente a função  $\phi(t)$ , expressa na eq. (4.40 a), e conclui-se que a solução é instável por crescer infinitamente segundo função linear.

**Figura 4.17: Representação gráfica de  $\phi(t)$  para condição de equilíbrio indiferente**



Fonte: O Autor (2019)

#### **b) Equilíbrio instável ( $P > P_{CR}$ )**

Esta condição de equilíbrio equivale ao trabalho  $W$  realizado pelas cargas ser superior, em magnitude, a energia potencial de deformação  $U$ . E para tanto, reescreve-se a eq. (4.39 d) como:

$$\ddot{\phi} - \omega_b^2 \cdot \left( \frac{P}{P_{CR}} - 1 \right) \cdot \phi = 0 \quad (4.41)$$

ao proceder a resolução desta EDO e considerar as condições iniciais em rotação, escreve-se a função resposta  $\phi(t)$  como:

$$\phi(t) = \frac{\dot{\phi}_0}{\lambda} \cdot \sinh(\lambda \cdot t) + \phi_0 \cdot \cosh(\lambda \cdot t) \quad (4.41 a)$$

$$\text{com: } \lambda = \pm \sqrt{\omega_b^2 \cdot \left( \frac{P}{P_{CR}} - 1 \right)}.$$

Percebe-se que a resposta  $\phi(t)$  apresentada na eq. (4.41 a) é instável, pois a rotação  $\phi$  cresce infinitamente mediante modulação hiperbólica, ocasionando assim o colapso estrutural.

**c) Equilíbrio estável ( $P < P_{CR}$ )**

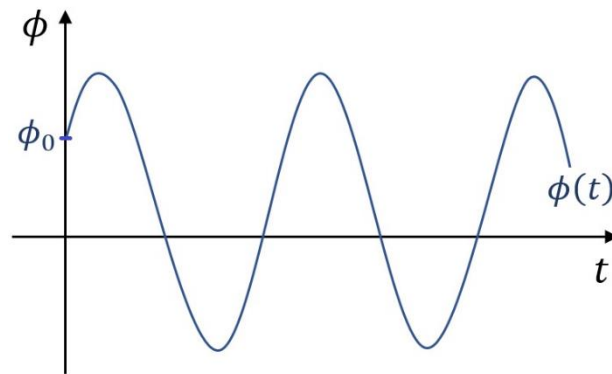
Nesta condição de equilíbrio, o trabalho  $W$  realizado pelas cargas é menor do que a energia potencial de deformação  $U$ , ficando válida a eq. (4.39 d). E para qual apresenta-se a solução:

$$\phi(t) = \frac{\dot{\phi}_0}{\bar{\omega}} \cdot \text{sen}(\bar{\omega} \cdot t) + \phi_0 \cdot \cos(\bar{\omega} \cdot t) \quad (4.42)$$

$$\text{com: } \lambda = \pm i \cdot \bar{\omega} \quad \text{e} \quad \bar{\omega}^2 = \omega_b^2 \cdot \left(1 - \frac{P}{P_{CR}}\right).$$

Na figura 4.18 representa-se graficamente a solução  $\phi(t)$  expressa na eq. (4.42). De qual conclui-se que a solução é estável. Tal conclusão é enunciada pelo comportamento harmônico ao longo do tempo, configurando rotações numa determinada faixa de amplitude máxima.

**Figura 4.18: Representação gráfica de  $\phi(t)$  para condição de equilíbrio estável**



**Fonte: O Autor (2019)**

#### 4.5.2. ESTADO DE CARGA 2

Neste estado de carga será adotada a atuação conjunta dos carregamentos apresentados na figura 4.16 (a). Ficando a EDO expressa na eq. (4.38), após aplicação da teoria das pequenas deformações ( $\sin \phi \approx \phi$ ), reescrita como:

$$I \cdot \ddot{\phi} + k \cdot \phi = (P \cdot \phi + Q) \cdot H + \left[ \left( \frac{3 \cdot q_1 + 2 \cdot q_2}{6} \right) + \frac{p \cdot \phi}{2} \right] \cdot H^2 \quad (4.43)$$

Ao realizar a análise estática do pilar, vide fig. 4.16, na condição de equilíbrio indiferente ( $W = U$ ), conclui-se a expressão da carga crítica  $P_{CR}$  em detrimentos dos demais carregamentos e da geometria de deformação:

$$P_{CR} = \frac{k}{H} - \frac{2}{\phi} \cdot \left\{ Q + \left[ \left( \frac{3 \cdot q_1 + 2 \cdot q_2}{6} \right) + \frac{p \cdot \phi}{2} \right] \cdot H \right\} \quad (4.44)$$

Ao agrupar as equações (4.43) e (4.44), expressa-se a equação diferencial que rege a estabilidade dinâmica do pilar submetido ao estado de carga 2, como:

$$\ddot{\phi} + \omega_b^2 \cdot \left( 1 - \frac{P}{P_{CR}} \right) \cdot \phi + b = 0 \quad (4.45)$$

$$\text{com: } \omega_b = \sqrt{\frac{k}{I}} \quad \text{e} \quad b = \frac{Q \cdot H}{I} + \left[ \frac{p \cdot \phi}{2} + \frac{(3 \cdot q_1 + 2 \cdot q_2)}{6} \right] \cdot \frac{H^2}{I}.$$

Ao realizar a resolução da EDO, ver eq. (4.45), e considerando as condições de equilíbrio (a), (b) e (c) do subitem (4.5.1), exprime-se as soluções para a rotação  $\phi(t)$  como:

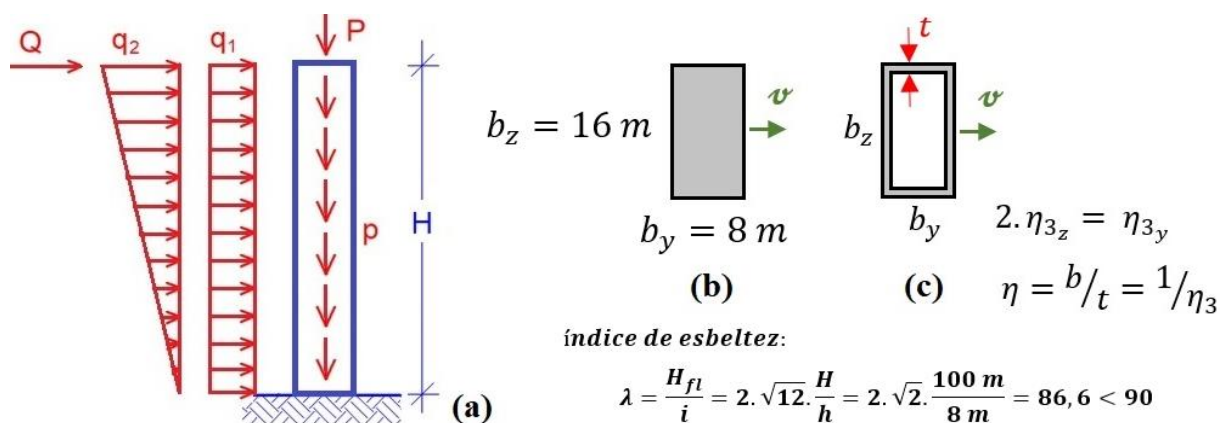
$$\phi(t) = \begin{cases} -\frac{b \cdot t^2}{2} + \dot{\phi}_0 \cdot t + \phi_0 & \text{para } P = P_{CR} \\ \frac{\dot{\phi}_0}{\lambda} \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t) + (\phi_0 - d) \cdot \cos(\bar{\omega} \cdot t) + d & \text{para } P > P_{CR} \\ (\phi_0 - d) \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t) + \frac{\dot{\phi}_0}{\bar{\omega}} \cdot \cos(\bar{\omega} \cdot t) + d & \text{para } P < P_{CR} \end{cases} \quad (4.46)$$

$$\text{com: } \lambda = \pm \sqrt{\omega_b^2 \cdot \left( \frac{P}{P_{CR}} - 1 \right)}; \quad d = \frac{b}{\omega_b^2} \cdot \frac{P_{CR}}{(P - P_{CR})}; \quad \bar{\omega}^2 = \omega_b^2 \cdot \left( 1 - \frac{P}{P_{CR}} \right); \quad \alpha = \pm i \cdot \bar{\omega}.$$

## 4.6. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

**EXEMPLO 4.1:** Nesta primeira aplicação será adotado o pilar metálico engastado na base e com extremidade livre no topo. Procedendo-se a análise da carga crítica para o pilar de ponte, sob configurações de seções transversais maciça e vazadas de formato retangular. O estado de carga será:  $q_1 = q_2 = 0 \text{ kN/m}$  e  $Q = 290 \text{ kN}$  como cargas laterais. Já o módulo de elasticidade vale  $E = 210 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$  e a altura do pilar é de 100 metros. Na figura 4.19 apresentam-se as configurações analisadas.

**Figura 4.19:** Configurações do pilar: (a) estado de carga, (b) seção retangular maciça e (c) seção retangular vazada em termos da espessura relativa via  $\eta$



Fonte: O Autor (2019)

Varia-se o valor do peso próprio  $p$  sob unidade “kN/m” e mantém-se inalterada a seção transversal, determinando-se a carga crítica via convergência do deslocamento no topo (vide figura 4.15). O processamento da EDO é apresentado no apêndice C e realizado via método das diferenças finitas. Na tabela 4.1 são apresentadas as deflexões para a seção maciça (fig. 4.19 b).

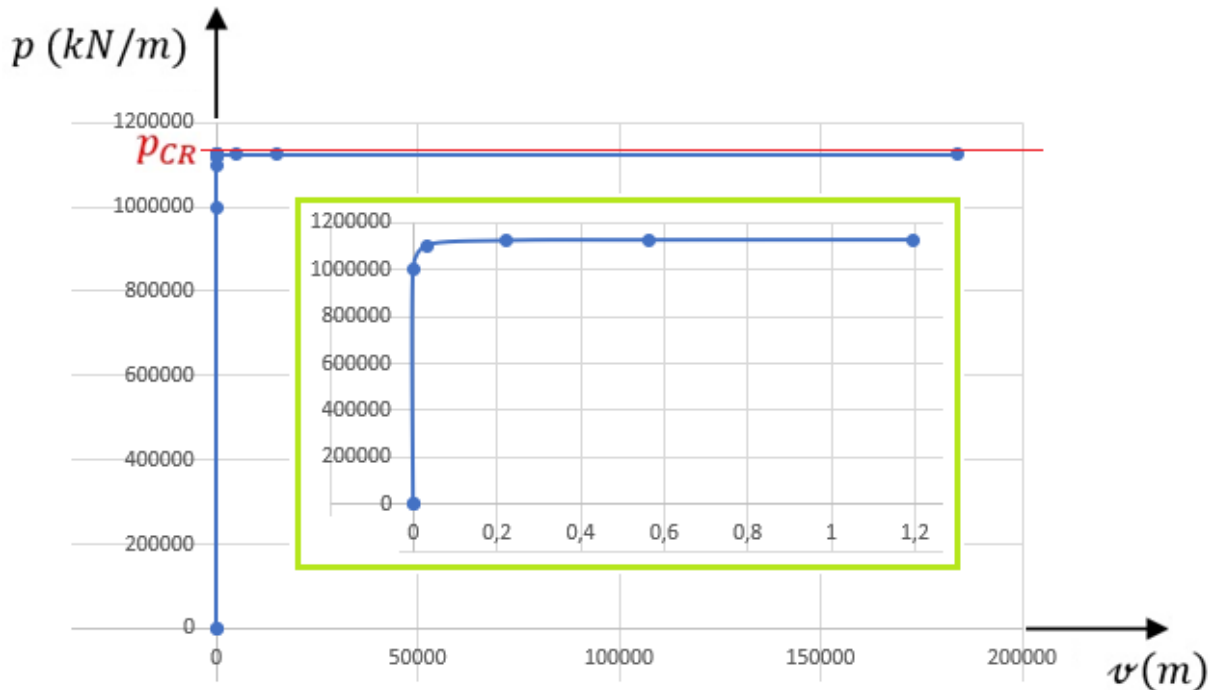
**Tabela 4.1 – Deflexões em y, no topo do pilar retangular, por incremento em  $p$  até convergência**

Diferenças Finitas com 100 pontos ( $h = 1 \text{ m}$ )			
$p \text{ (kN/m)}$	$v \text{ (m)}$	$p \text{ (kN/m)}$	$v \text{ (m)}$
0	0,00067	$112,32 \times 10^4$	6,22664
10	0,00067	$112,33 \times 10^4$	39,08649
$100 \times 10^4$	0,00060	$112,331 \times 10^4$	82,76339
$110 \times 10^4$	0,03178	$112,3317 \times 10^4$	308,01060
$112 \times 10^4$	0,22317	$112,33188 \times 10^4$	4.970,34480
$112,2 \times 10^4$	0,56156	$112,33189 \times 10^4$	15.111,65985
$112,27 \times 10^4$	1,19664	$112,3318945 \times 10^4$	184.024,58580

Fonte: O Autor (2019)

Na Figura 4.20 é apresentada a curva de convergência da carga crítica para a seção maciça.

**Figura 4.20: Curva de convergência de  $p_{CR}$  para pilar engastado na base e seção retangular maciça**



Fonte: O Autor (2019)

A carga crítica obtida através da convergência na curva apresentada na figura 4.20 é  $p_{CR} = 112,3318945 \times 10^4 \text{ kN/m}$ . Mediante solução analítica apresentada em Timoshenko e Gere (2009) tem-se  $p_{CR} = 112,35123 \times 10^4 \text{ kN/m}$ , caracterizando uma aproximação de 0,017 % a favor da segurança.

Nas tabelas 4.2 e 4.3 são apresentados os deslocamentos no topo do pilar com seção retangular vazada (ver figura 4.19 c), porém são simuladas quatro espessuras  $t$  relativas das paredes, via coeficiente  $\eta = \{5, 10, 15, 20\}$ . Na referida tabela apresentam-se também a carga crítica via Timoshenko e Gere (2009) e conseguinte percentual de aproximação.

Tabela 4.2 – Deflexões em y, no topo do pilar, para seção retangular vazada para  $\eta = 5$  e  $\eta = 10$ 

Diferenças Finitas com 100 pontos ( $h = 1\text{ m}$ )			
$\eta = 5$		$\eta = 10$	
$[10^5] p(\frac{kN}{m})$	$v\text{ (m)}$	$[10^5] p(\frac{kN}{m})$	$v\text{ (m)}$
11,16	0,38437	9,29	3,53645
11,1757	2,07456	9,292	78,50342
11,1790	27,41317	9,29205	167,01516
11,1792	105,53502	9,29207	304,21481
11,17927	40.995,52293	9,292094	21.390,73143
11,17927015	241.907,21360	9,2920943	160.345,53260
11,17927018	11.585.627,62397	9,29209434	1.197.181,06281
$p_{CR} = 11,18119 \times 10^5 \frac{kN}{m}$		$p_{CR} = 9,29369 \times 10^5 \frac{kN}{m}$	
Via Timoshenko e Gere (2009)		Via Timoshenko e Gere (2009)	
0,017 % (a favor da segurança)		0,017 % (a favor da segurança)	

Fonte: O Autor (2019)

Tabela 4.3 – Deflexões em y no topo do pilar, com seção retangular vazada sob  $\eta = 15$  e  $\eta = 20$ 

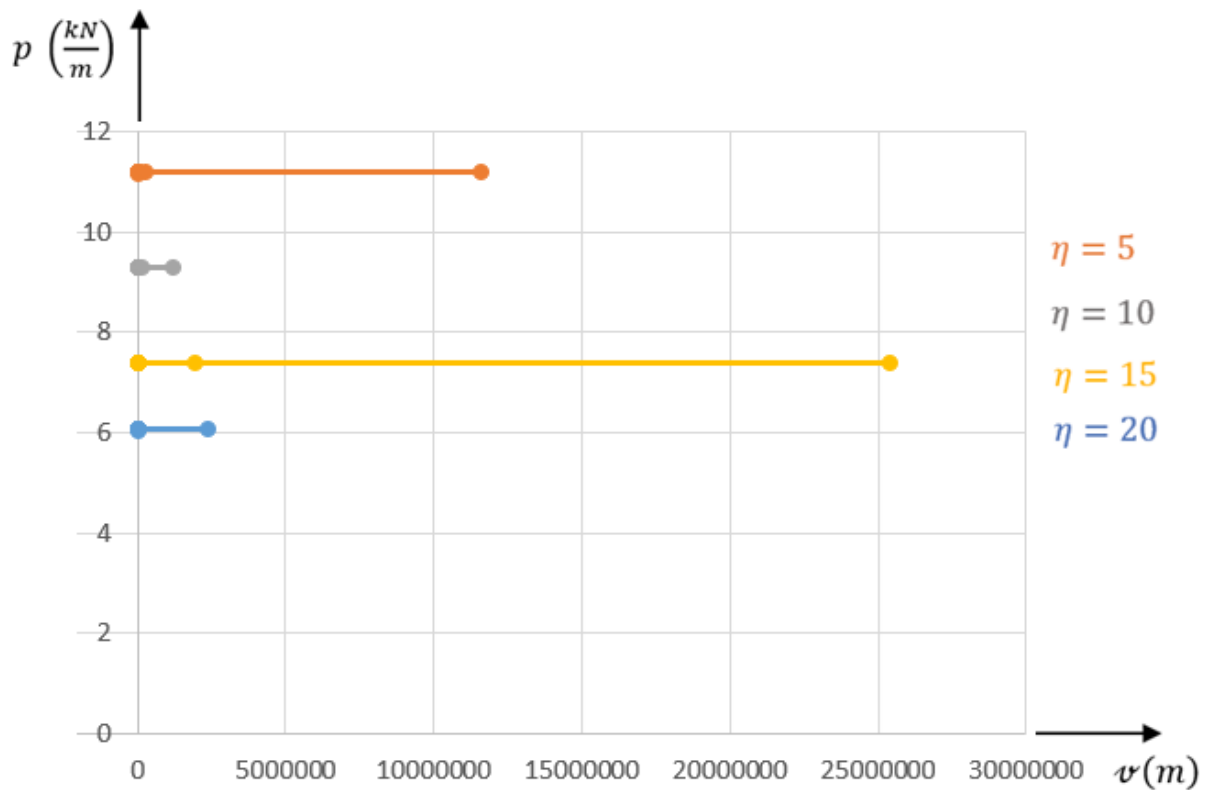
Diferenças Finitas com 100 pontos ( $h = 1\text{ m}$ )			
$\eta = 5$		$\eta = 10$	
$[10^5] p(\frac{kN}{m})$	$v\text{ (m)}$	$[10^5] p(\frac{kN}{m})$	$v\text{ (m)}$
7,392	4,06060	6,05	1,06790
7,3937	59,72808	6,0545	3,04075
7,39375	100,08278	6,0568	54,55065
7,39379	217,81425	6,05688	132,79715
7,39382	1.849,20169	6,056932	1.962,98015
7,393824	1.936.108,10456	6,0569355	27.118,06388
7,3938240035	25.369.692,40570	6,05693577	2.398.156,48192
$p_{CR} = 7,39509 \times 10^5 \frac{kN}{m}$		$p_{CR} = 6,05798 \times 10^5 \frac{kN}{m}$	
Via Timoshenko e Gere (2009)		Via Timoshenko e Gere (2009)	
0,017 % (a favor da segurança)		0,017 % (a favor da segurança)	

Fonte: O Autor (2019)

$$\text{com: } I_z(x) = \frac{b_z \cdot b_y^3}{12} \cdot \left\{ 1 - \left[ (1 - 2 \cdot \eta_{3_z}) \cdot (1 - 2 \cdot \eta_{3_y})^3 \right] \right\}; \quad b_z = 2 \cdot b_y; \quad \eta_{3_z} = \frac{t}{b_z}; \quad \eta_{3_y} = \frac{t}{b_y}.$$

Na figura 4.21 apresentam-se as curvas de convergência da carga crítica em forma comparativa, para os quatro cenários de espessura relativa das paredes.

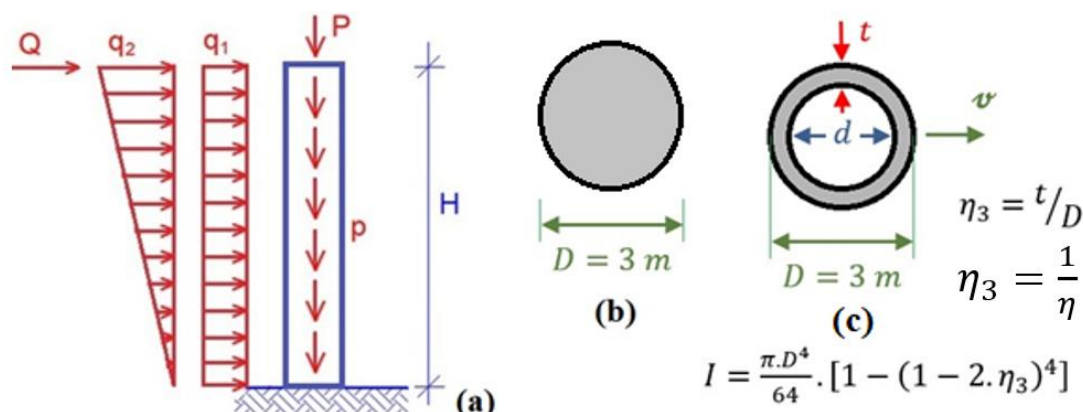
**Figura 4.21: Curvas de convergência de  $p_{CR}$  para pilar engastado na base e seção retangular vazada com espessura relativa das paredes**



Fonte: O Autor (2019)

**EXEMPLO 4.2:** Nesta segunda análise admite-se o pilar com seção transversal circular vazada e contida na equivalência do retângulo do exemplo 4.1, vide figura 4.22. Sendo o estado de carga:  $q_1 = 2 \text{ kN/m}$ ,  $q_2 = 3 \text{ kN/m}$ ,  $Q = 10 \text{ kN}$  e  $P = 0 \text{ kN}$ . O material utilizado será o aço, assim tem-se como módulo de elasticidade longitudinal:  $E = 210 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ . Adota-se a altura do pilar de 100 metros. Ver processamento no apêndice C. Busca-se neste exemplo a mera aplicação das equações (4.11) e (4.12) resolvidas mediante diferenças finitas (ver item 4.4), daí a não verificação do índice de esbeltez inferior a 90, sendo esse o critério para a estrutura funcionar no campo das pequenas deformações, isso segundo a NBR 6118 (ABNT, 2014).

**Figura 4.22: Geometria do pilar de seção circular vazada e constante na altura: (a) estado de carga, (b) seção transversal maciça e (c) seção anelar**



Fonte: O Autor (2019)

Na tabela 4.4 são apresentados os deslocamentos no topo do pilar para quatro espessuras relativas das paredes, bem como carga crítica por convergência e pelo cálculo analítico presente em Timoshenko e Gere (2009) e análise da aproximação. Ver Figura 4.22 (c).

**Tabela 4.4 – Deflexões em y, no topo do pilar, para seção circular vazada (anelar)**

Diferenças Finitas com 100 pontos ( $h = 1 \text{ m}$ )							
$\eta = 5$		$\eta = 10$		$\eta = 15$		$\eta = 20$	
$p(\frac{kN}{m})$	$v \text{ (m)}$	$p(\frac{kN}{m})$	$v \text{ (m)}$	$p(\frac{kN}{m})$	$v \text{ (m)}$	$p(\frac{kN}{m})$	$v \text{ (m)}$
5.500	0,03553	3.500	0,01898	2.800	0,13454	2.220	0,23094
5.600	0,07316	3.800	0,11038	2.840	0,60447	2.230	0,34657
5.660	0,19994	3.860	2,522919	2.845	1,07189	2.245	1,38812
5.690	1,48634	3.862	9,35073	2.850,500	7,16265	2.249	6,97158
5.692	2,60183	3.862,50	28,70482	2.850,800	10,37901	2.249,60	17,57173
5.693	4,16447	3.862,55	36,19672	2.851,400	101,82416	2.249,80	35,62892
5.694	10,42619	3.862,70	166,79780	2.851,450	383,08885	2.249,95	155,38855
5.694,66	1.363,99757	3.862,74	4.407,26714	2.851,465	2.236,58360	2.249,99	1.499,04343
$p_{CR} = 5.694,66 \text{ kN/m}$ Via convergência		$p_{CR} = 3.862,74 \text{ kN/m}$ Via convergência		$p_{CR} = 2.851,46 \text{ kN/m}$ Via convergência		$p_{CR} = 2.249,99 \text{ kN/m}$ Via convergência	
$p_{CR} = 5.695,64 \frac{kN}{m}$ Timoshenko e Gere (2009)		$p_{CR} = 3.863,41 \frac{kN}{m}$ Timoshenko e Gere (2009)		$p_{CR} = 2.851,96 \frac{kN}{m}$ Timoshenko e Gere (2009)		$p_{CR} = 2.250,38 \frac{kN}{m}$ Timoshenko e Gere (2009)	
$I_z = 3,461 \text{ m}^4$		$I_z = 2,347 \text{ m}^4$		$I_z = 1,733 \text{ m}^4$		$I_z = 1,367 \text{ m}^4$	
0,017 % (a favor da segurança)		0,017 % (a favor da segurança)		0,018 % (a favor da segurança)		0,017 % (a favor da segurança)	

Fonte: O Autor (2019)



Na tabela 4.5 apresenta-se a convergência dos deslocamentos no topo do pilar para seção transversal circular maciça. Para tal, a inércia vale:  $I_z = 3,976 \text{ m}^4$ . Ver Figura 4.22 (b).

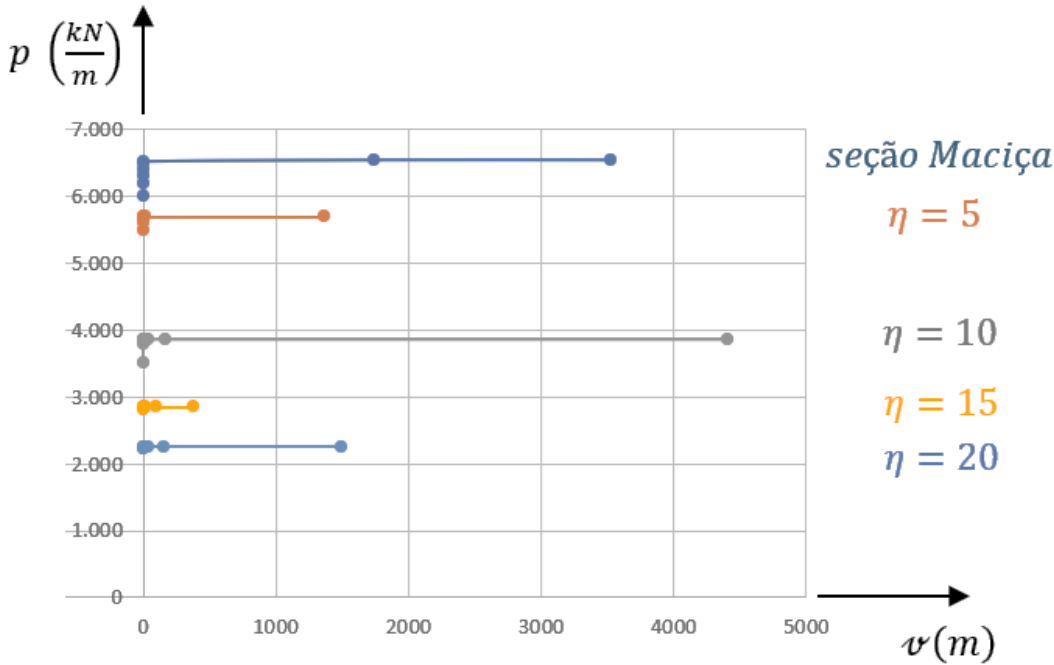
**Tabela 4.5 – Deflexões em y, no topo do pilar circular, por incremento em  $p$  até convergência**

Diferenças Finitas com 100 pontos ( $h = 1 \text{ m}$ )				
$p \text{ (kN/m)}$	$v \text{ (m)}$	$p \text{ (kN/m)}$	$v \text{ (m)}$	$p_{CR} = 6.542,58 \text{ kN/m}$
6.000	0,01270	6.500	0,16276	Via convergência
6.200	0,20160	6.520	0,3069	$p_{CR} = 6.543,71 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$
6.300	0,02850	6.542,580	1.748,54162	Via Timoshenko e Gere (2009)
6.400	0,04855	6.542,582	3.527,44185	0,017 % (a favor da segurança)

Fonte: O Autor (2019)

Na figura 4.23 é apresentada a plotagem comparativa das curvas (carga x deformação), isso em detrimento da espessura relativa da seção circular vazada.

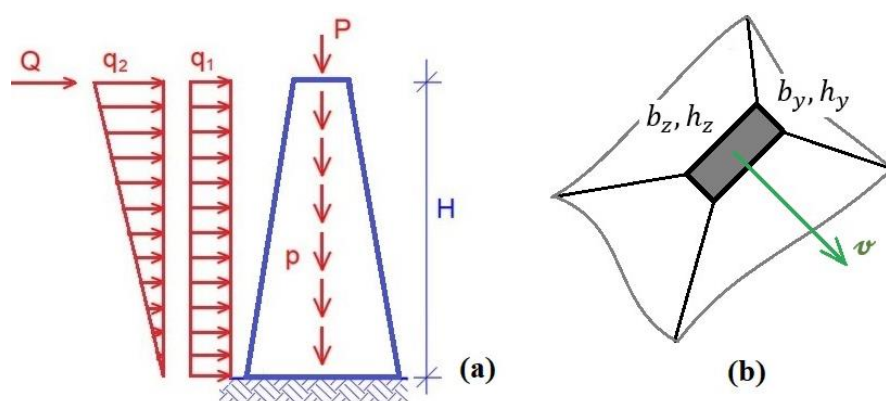
**Figura 4.23: Curvas de convergência de  $p_{CR}$  para pilar engastado na base e seção circular maciça e vazada com espessura relativa das paredes**



Fonte: O Autor (2019)

**EXEMPLO 4.3:** Admite-se o pilar analisado no exemplo 4.1 e sob mesmo estado de carga, material e altura. A única exceção é considera-lo de seção retangular variável linearmente na altura, sendo as dimensões na base:  $b_y = 10\text{ m}$  e  $b_z = 30\text{ m}$ . Já, para o topo adota-se:  $h_y = 4\text{ m}$  e  $h_z = 12\text{ m}$ . Vide figura 4.24 e apêndice C, no item C.3. Procede-se neste último exemplo a mera aplicação das equações de obtenção da carga crítica, sem almenjar verificações quanto ao índice de esbeltez.

**Figura 4.24: Pilar retangular maciço: (a) estado de carga e (b) perspectiva**



Fonte: O Autor (2019)

Na tabela 4.6 apresentam-se os deslocamentos no topo do pilar, isso mediante incremento no peso específico  $\gamma$  do material em  $kN/m^3$ .

**Tabela 4.6 – Deflexão  $v$ , para a seção retangular maciça e variável linearmente**

Diferenças Finitas com 100 pontos ( $h = 1\text{ m}$ )					
$\gamma [10^4]$	$p_{base} [10^6]$ ( $kN/m$ )	$v\text{ (m)}$	$\gamma [10^4]$	$p_{base} [10^6]$ ( $kN/m$ )	$v\text{ (m)}$
0	0	0,01732	1,458	4,374	21,08928
1,3	3,9	0,15462	1,459	4,377	150,33863
1,4	4,2	0,41511	1,4591	4,377	388,35275
1,45	4,35	2,67749	1,45915	4,37745	1.863,45913
1,451	4,353	3,00543	1,45916	4,37748	7.753,89744
1,454	4,362	4,75141	1,459162	4,377486	21.082,09253
1,457	4,371	11,34023	1,4591625	4,3774875	36.968,35366

$p_{CR} = 4,377 \times 10^6 \frac{kN}{m}$

Via convergência

$p_{CR} = 3,977 \times 10^6 \frac{kN}{m}$

Timoshenko e Gere (2009)

10,06 % (contra a  
segurança)

Fonte: O Autor (2019)

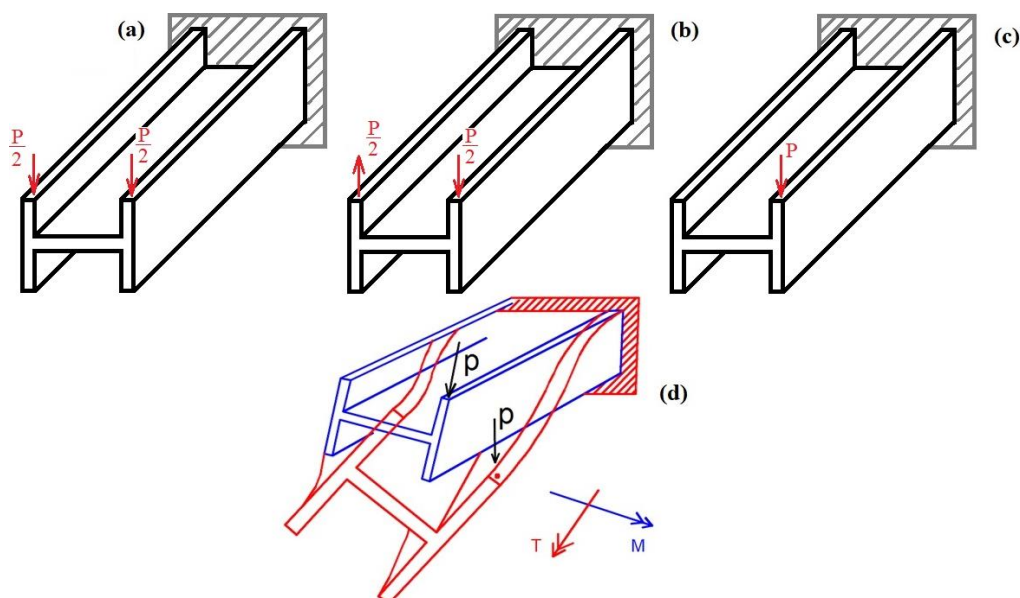
A carga crítica por convergência é  $p_{CR} = 4,37749 \times 10^6\text{ kN/m}$ , já via Timoshenko e Gere (2009, pag. 128) e sob interpolação no programa Cálculo Numérico V5 (versão livre), tem-se:  $p_{CR} = 3,977 \times 10^6\text{ kN/m}$ . verifica-se aproximação de 10,06 % contra a segurança.

## VIBRAÇÃO DE PILARES COM SEÇÃO DE PAREDES FINAS VIA TÉCNICA DO MEIO CONTÍNUO APLICADA A GTPP

### 5.1. INTRODUÇÃO

As seções transversais dos pilares altos de pontes tornam-se viáveis economicamente se adotados com seção vazada e de paredes finas. Em casos de seções assimétricas ativa-se o efeito combinado da flexão e da torção, devido a não coincidência dos centros de gravidade ( $CG$ ) e de torção ( $D$ ). Vide na figura 5.1 alguns estados de carga e a ativação do fenômeno da flexo – torção.

**Figura 5.1:** Seção de paredes finas submetida à: (a) flexão simples, (b) torção pura, (c) flexo – torção, (d) deformação decorrente flexo – torção

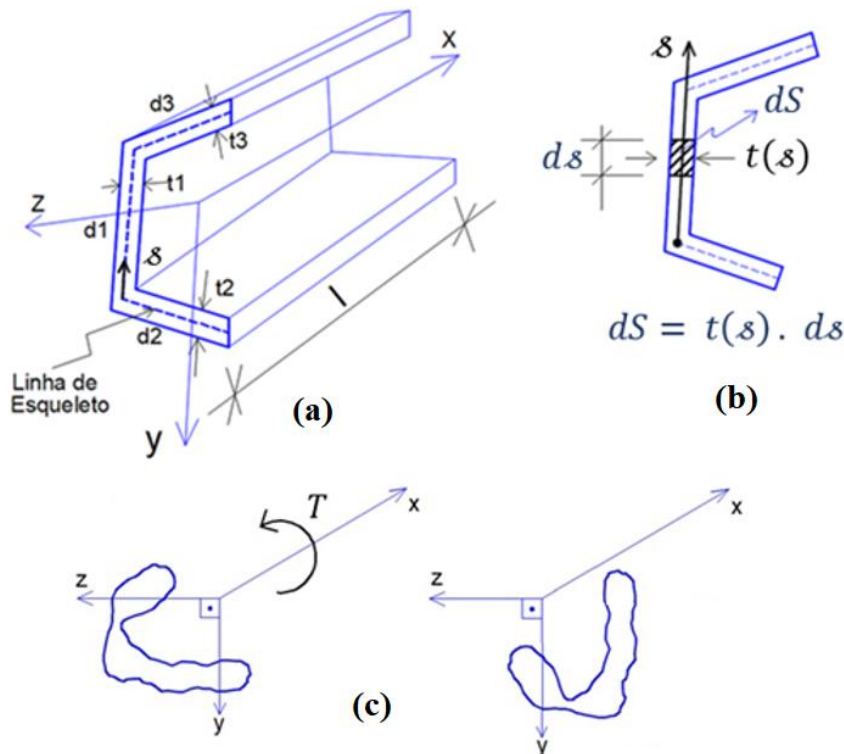


Fonte: O Autor (2019)

O estudo das seções de paredes finas postulado em Vlassov (1962) é baseado nas seguintes hipóteses:

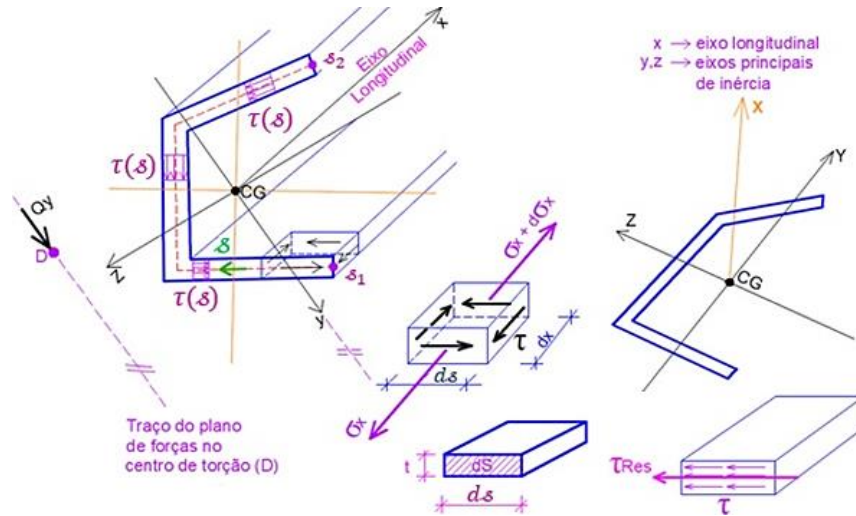
- Considera-se barra de seção delgada aberta, quando a espessura  $t$  for muito menor do que a dimensão característica  $d$  (na seção transversal), sendo aceitável quanto esta relação for no máximo um décimo ( $t/d \leq 0,1$ ). Vide fig. 5.2 (a).
- Após a deformação no pilar por flexo – torção, a seção transversal projeta-se indeformada. Logo, sem distorção do formato da referida seção transversal (seção rígida). Conforme é indicado na figura 5.2 (c).

**Figura 5.2: Seção de paredes finas: (a) dimensões relevantes do pilar em paredes finas, (b) elemento diferencial e (c) deformação de corpo rígido no plano yz**



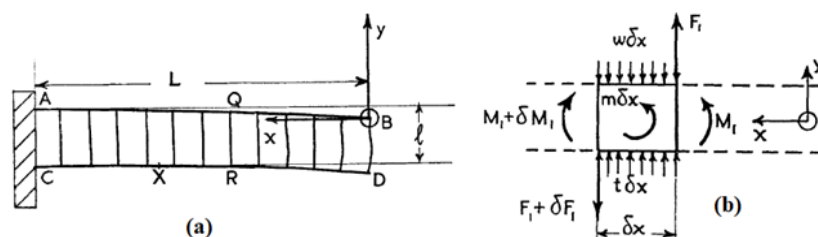
Fonte: O Autor (2019)

- Definido o eixo esqueleto  $s$  no eixo das paredes finas que compõem a seção transversal, admite-se distribuição constante da tensão de cisalhamento  $\tau$  ao longo do comprimento  $s$ . Quanto mais finas forem as paredes, mais realística tal hipótese. Na figura 5.3 é apresentada a distribuição uniforme da tensão cisalhante, bem como o posicionamento do centro de torção (D) e o estado plano de tensões que atua na parede fina.

**Figura 5.3: Distribuição de tensão cisalhante nas paredes do pilar sob flexo – torção**

Fonte: O Autor (2019)

A utilização das equações de Maney na modelagem de vigas no sistema aporticado em construções submetidas a ação do vento foi introduzida por Goldberg (1934), cuja aplicação será estendida nesta tese para a abordagem dos pilares contraventados por lintéis procedida via TMC, mantendo consonância com Szerémi (1977), conforme consta na letra “b” do subitem 2.8.1. A utilização das equações de Maney na simulação de pilares de torres é observado em Kouloušek (1947), procedendo-se a análise dinâmica via TMC. Nesse raciocínio, vem Chitty (1947) e analisa duas vigas paralelas entre si e engastadas em mesma base, as ligações entre as vigas são promovidas por barras secundárias (transversais ao eixo das vigas principais), denominadas de lintéis (ver fig. 5.4 a). Na figura 5.4 (b) promove-se o equacionamento através do modelo contínuo, sendo adotada a massa da estrutura e as cargas aplicadas pelos lintéis, sob distribuição uniforme no elemento contínuo. Esta ideia do meio contínuo formado pela distribuição da massa e do contraventamento por lintéis é empregada nos pilares de pontes altas, nos itens 5.3 e 5.4 desta tese.

**Figura 5.4: Vigas contraventadas por lintéis: (a) modelo mecânico e (b) modelo contínuo**

Fonte: (CHITTY, 1947)

Ressalta-se ainda, a análise dinâmica em estruturas elástica procedida por Vickers (1953), cujo equacionamento dos elementos estruturais é realizado via conceito de centro

elástico. Culminando por embasar Stamato (1978), isso quando da análise da distribuição das cargas oriundas da rajadas de vento incidentes nos painéis de contraventamento. Em seguida, listam-se Kouloušek (1959) e Dzierwolski (1964), onde no primeiro trabalho encontra-se a modelagem dinâmica do tabuleiro (viga contínua) de pontes através da TMC, e decorrente resolução da equação diferencial parcial via método da separação de variáveis. Obtem-se no processo de resolução da EDP a equação transcendental que conjuga os modos de vibração da estrutura, como observa-se em Volterra e Zachmanoglou (1965, p. 348 – 373). Por último, verifica-se em Dzierwolski (1964) a comparação entre a análise teórica e experimental nas solicitações em perfis metálicos de paredes finas, de qual ressalta-se a constatação de majoração na ordem de 1,3 a 1,5 entre os valores obtidos por modelagem da TMC em detrimento de ensaios experimentais, sendo procedidos tais ensaios para cargas laterais (o que pode-se mensurar na ação do vento em pilares). De tal constatação apresentada em Dzierwolski (1964) é que se propõe o coeficiente  $\alpha \left( = 1/1,5 \equiv 2/3 \right)$  de ajuste para as frequências de vibração, em estruturas simples, através da TMC, vide figuras 5.26 e 5.27 e tabela 5.4. Já, para as estruturas complexas, a exemplo da aplicação 5.9, utiliza-se como coeficiente de ajuste  $\alpha = 1/1,3$ .

## 5.2. GENERALIZAÇÃO DA TEORIA DOS PAINÉIS – PAREDE (GTPP)

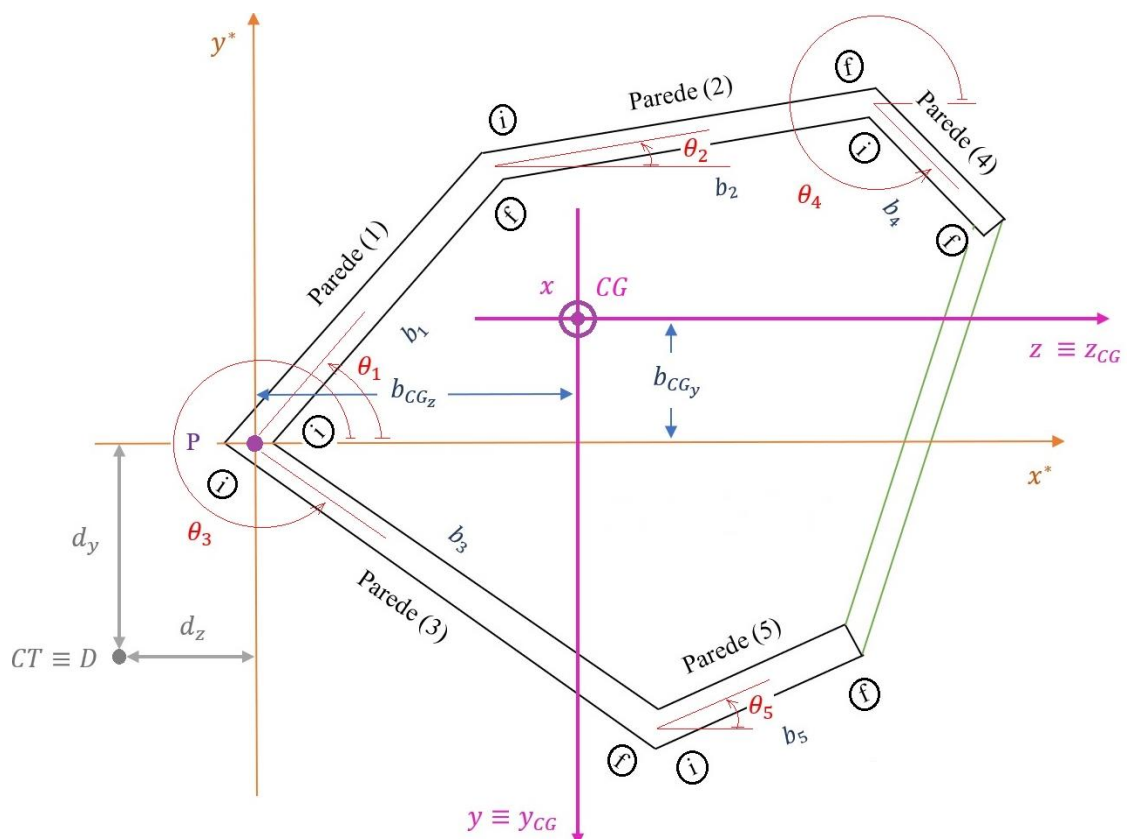
### a) Aplicação aos pilares em formato de núcleo C com reforço por abas

A determinação das propriedades da seção transversal em paredes finas, a exemplo do posicionamento do centro de torção, e quantificação da inércia setorial  $I_\omega$ , é objeto de formulação em Vlassov (1962). Porém, na determinação do diagrama de ordenadas setoriais absoluta  $\omega_{pc}$  e decorrente inércia setorial, apesar de Vlassov apresentar a formulação integral, constam apenas aplicações em seções com paredes curvas ou ortogonais entre si. Ainda no trabalho supracitado verifica-se exemplificação das paredes com inclinação distinta da ortogonalidade entre os painéis, porém em exercícios numéricos e sem a devida formulação trigonométrica generalizada. Em suma, para Vlassov (1962, p. 194 e 200) a análise de paredes inclinadas é realizada mediante exercício numérico. Daí, nesta seção da tese será formulada a

teoria dos painéis – parede constante em Barbosa (1980), com a notação de Vlassov, e sob equacionamento trigonométrico generalizado. Anos mais tarde, em Murray (1986, p. 54 – 192), em Kollbrunner e Basler (1969) e em Campanari (1985, v. 2, p. 723 – 749) são resgatadas as teorias postuladas em Vlassov (1962) e aplicadas em novos exemplos. Porém na ocorrência de paredes inclinadas a abordagem é sempre a mesma, por meio de dados de entrada (sem postular a formulação trigonométrica generalizada). Ainda, ressalta-se Zalka (2000, p. 121 – 153 e 238 – 277) onde a análise da estabilidade global de núcleos estruturais é procedida unicamente para paredes ortogonais entre si.

A prova de tal análise das propriedades geométricas das seções abertas de paredes finas puramente ortogonais entre si é vista em Blodgett (1966, p. 2.2-8 e 2.2-10), Pfeil (1986, v. 2, p. 323 – 331) e nas tabelas para estruturas metálicas apresentadas em Pfeil (1986, v. 3, p. 665 – 669). Em ambas as publicações, a inércia setorial  $I_\omega$  e as demais propriedades geométricas das seções de paredes finas são listadas unicamente para paredes com eixo esqueleto  $s$  ortogonais entre si. Assim, a generalização da teoria dos painéis – parede (GTPP) é processada neste item da tese por imposição de inclinação genérica para todas as paredes que compõem o núcleo estrutural. Ver a notação e o posicionamento dos eixos (centroidais e auxiliares) na figura 5.5.

**Figura 5.5: Posicionamento generalizado das paredes no núcleo estrutural em C**

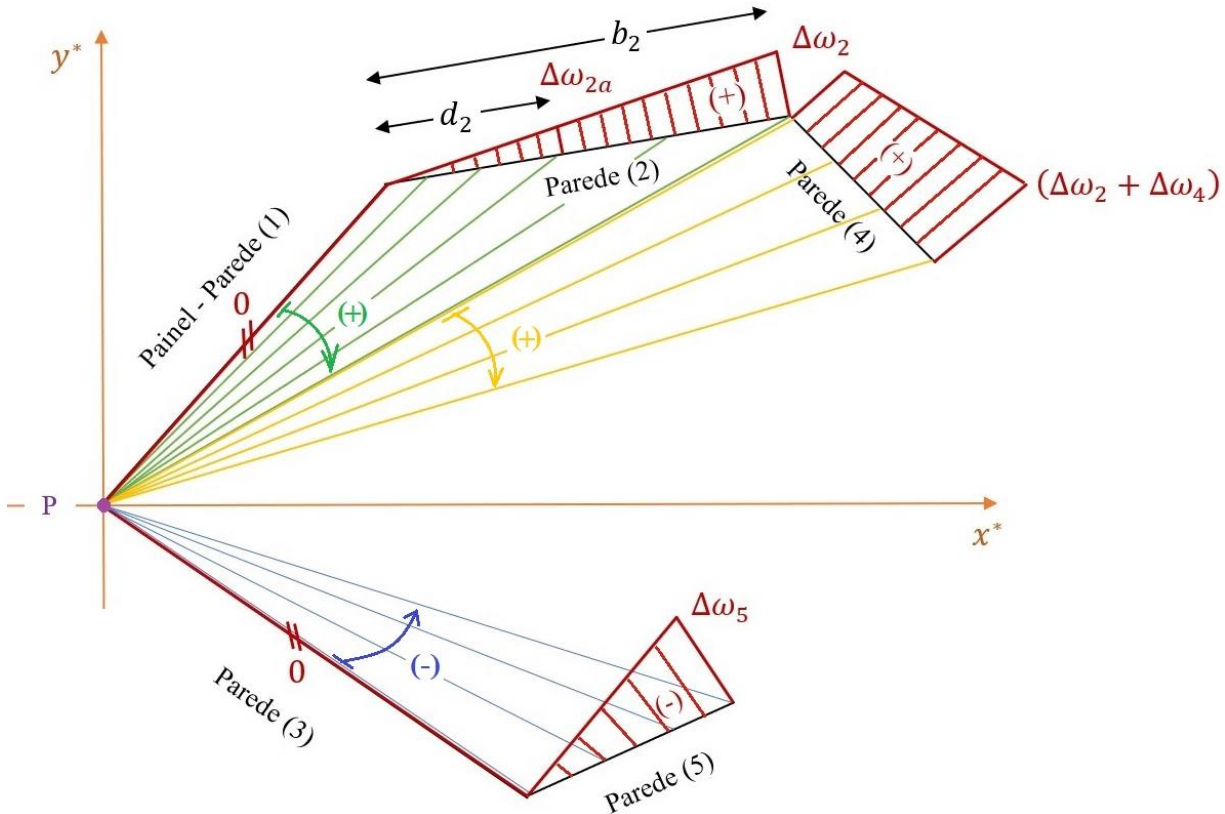


Fonte: O Autor (2019)



A partir do ponto provisório P localizado na interseção dos painéis – parede (1) e (3) procede-se o traçado do diagrama de ordenadas setoriais  $\omega_p$ , com polo arbitrário P. Para tal utiliza-se a convenção definida na figura 2.100 e cálculo vetorial de área entre dois vetores (definido na observação da 9ª etapa da marcha de cálculo N° 3 – ver item 2.9 a), concluindo por diagrama  $\omega_p$  o apresentado na figura 5.6.

**Figura 5.6: Diagrama de ordenadas setoriais  $\omega_p$  com polo provisório P**



Fonte: O Autor (2019)

$$\text{d'onde: } \Delta\omega_1 = \Delta\omega_3 = 0 \quad (5.1 a)$$

$$\Delta\omega_2 = b_1 \cdot b_2 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2) \quad (5.1 b)$$

$$\Delta\omega_4 = -b_1 \cdot b_4 \cdot \sin(\theta_4 - \theta_1) - b_2 \cdot b_4 \cdot \sin(\theta_4 - \theta_2) \quad (5.1 c)$$

$$\Delta\omega_5 = b_3 \cdot b_5 \cdot \sin(\theta_3 + \theta_5) \quad (5.1 d)$$

sendo:  $b_i$  o comprimento, em planta, do painel – parede  $i$  e  $\theta_i$  o ângulo de incidência da parede  $i$  em relação ao eixo auxiliar  $x^*$  (com origem sob o polo provisório P).

Mediante cálculo das coordenadas do centro de gravidade (CG) da seção transversal apresentada na figura 5.5, define-se o posicionamento do CG em detrimento do polo provisório P e dos eixos auxiliares  $x^*$  e  $y^*$ , como:



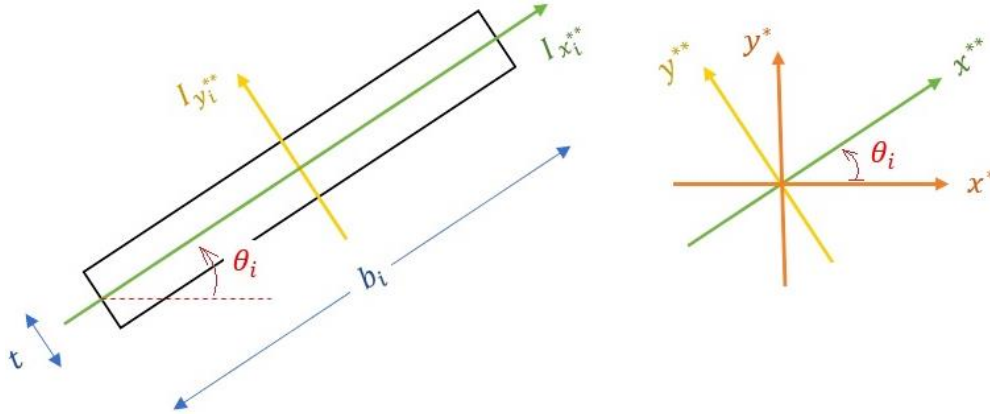
$$b_{CG_z} = \frac{b_1^* \cdot \cos \theta_1 + b_2^* \cdot \cos \theta_2 + b_3^* \cdot \cos \theta_3 + b_4^* \cdot \cos \theta_4 + b_5^* \cdot \cos \theta_5}{2 \cdot (b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5)} \quad (5.2 a)$$

$$b_{CG_y} = \frac{b_1^* \cdot \sin \theta_1 + b_2^* \cdot \sin \theta_2 + b_3^* \cdot \sin \theta_3 + b_4^* \cdot \sin \theta_4 + b_5^* \cdot \sin \theta_5}{2 \cdot (b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5)} \quad (5.2 b)$$

com:  $b_1^* = b_1^2 + 2 \cdot b_1 \cdot b_2 + 2 \cdot b_1 \cdot b_4$ ;  $b_2^* = b_1^2 + 2 \cdot b_2 \cdot b_4$ ;  $b_3^* = b_3^2 + 2 \cdot b_3 \cdot b_5$ .

Na figura 5.7 são apresentados os momentos de inércia nos eixos centroidais  $x^{**}$  e  $y^{**}$  de cada painel – parede; conseguinte rotação de inércia para os eixos auxiliares  $x^*$  e  $y^*$  e translação via teorema de Steiner. Compõe-se assim as inércias  $I_y$  e  $I_z$  em relação aos eixos centroidais da seção transversal do núcleo estrutural C generalizado.

**Figura 5.7: Eixos locais  $x^{**}$  e  $y^{**}$  e correlação com os eixos auxiliares  $x^*$  e  $y^*$**



Fonte: O Autor (2019)

resultando por momentos de inércia para o núcleo estrutural, os seguintes:

$$I_z = \sum_{i=1}^5 \{I_{z_i} + A_i \cdot \Delta y_i^2\} \quad (5.3 a)$$

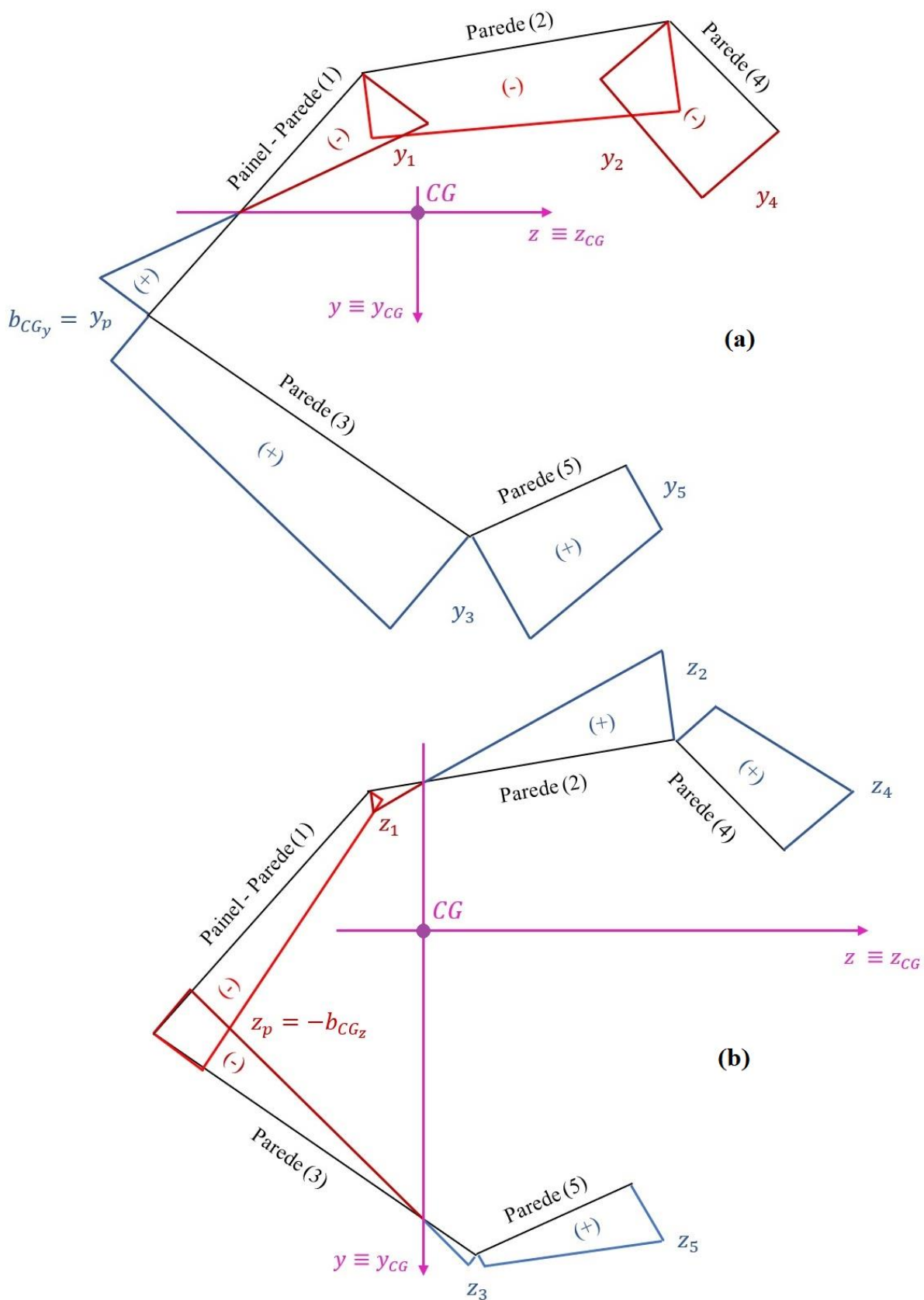
$$I_y = \sum_{i=1}^5 \{I_{y_i} + A_i \cdot \Delta z_i^2\} \quad (5.3 b)$$

com:  $\Delta y_i = |y_{CG_i}^* - b_{CG_y}|$ ;  $\Delta z_i = |x_{CG_i}^* - b_{CG_z}|$ ;  $I_{z_i} = \frac{I_{x_i}^{**} + I_{y_i}^{**}}{2} + \frac{I_{x_i}^{**} - I_{y_i}^{**}}{2} \cdot \cos(2 \cdot \theta_i)$ ;

$I_{y_i} = I_{x_i}^{**} + I_{y_i}^{**} - I_{z_i}$ ;  $I_{x_i}^{**} = \frac{b_i \cdot t^3}{12}$ ;  $I_{y_i}^{**} = \frac{t \cdot b_i^3}{12}$ . Sendo:  $t$  a espessura das paredes.

Os diagramas de coordenadas  $y$  e  $z$  do núcleo estrutural são apresentados na figura 5.8.

**Figura 5.8: Diagrama de coordenadas: (a) y e (b) z, para as paredes inclinadas que compõem o núcleo estrutural**



Fonte: O Autor (2019)

as coordenadas  $y_i$  e  $z_i$  das extremidades finais dos painéis – parede  $i$ , ficam expressas por:

$$z_1 = z_p + b_1 \cdot \cos \theta_1 \quad (5.4 a)$$

$$z_2 = z_1 + b_2 \cdot \cos \theta_2 \quad (5.4 b)$$

$$z_3 = z_p + b_3 \cdot \cos \theta_3 \quad (5.4 c)$$

$$z_4 = z_2 + b_4 \cdot \cos \theta_4 \quad (5.4 d)$$

$$z_5 = z_3 + b_5 \cdot \cos \theta_5 \quad (5.4 e)$$

$$y_1 = y_p - b_1 \cdot \sin \theta_1 \quad (5.4 f)$$

$$y_2 = y_1 - b_2 \cdot \sin \theta_2 \quad (5.4 g)$$

$$y_3 = y_p - b_3 \cdot \sin \theta_3 \quad (5.4 h)$$

$$y_4 = y_2 - b_4 \cdot \sin \theta_4 \quad (5.4 i)$$

$$y_5 = y_3 - b_5 \cdot \sin \theta_5 \quad (5.4 j)$$

com:  $z_p = -b_{CG_z}$  e  $y_p = b_{CG_y}$ .

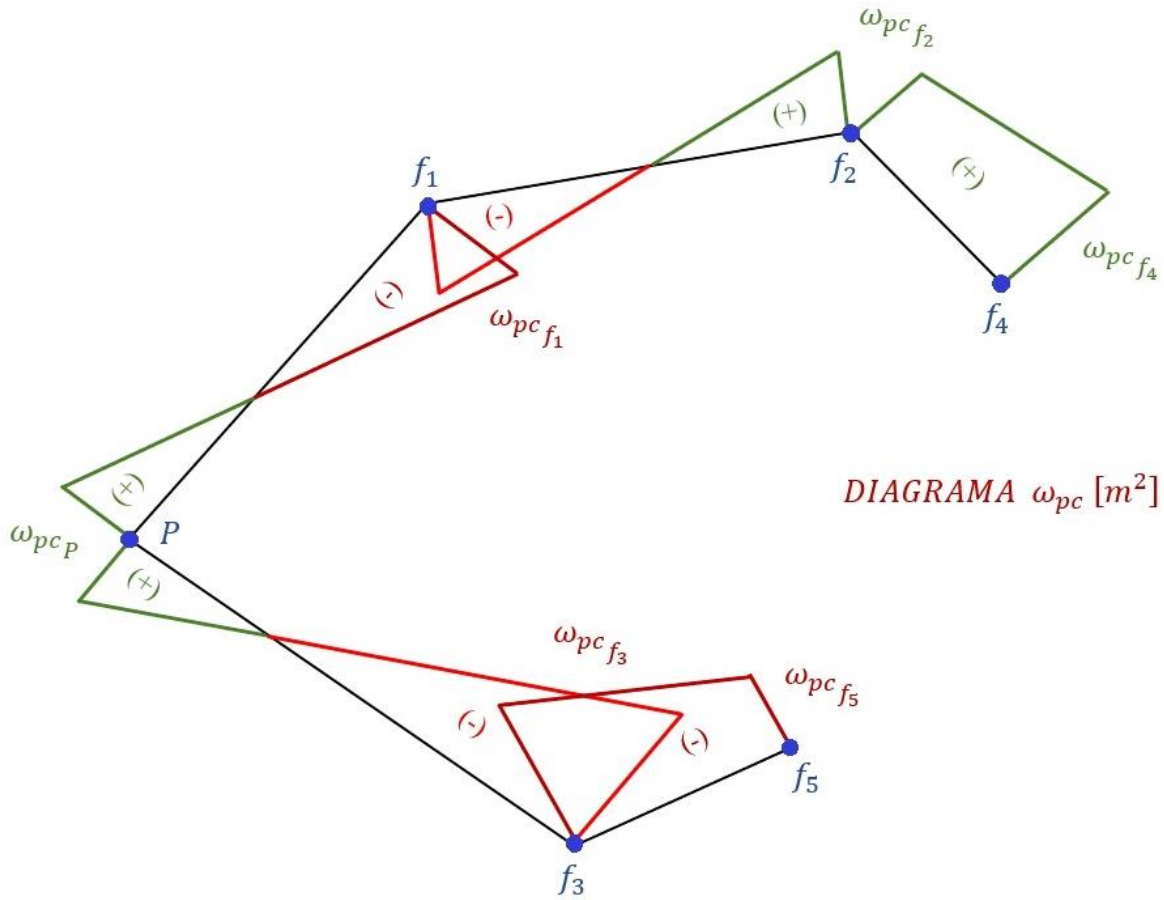
Agora, mediante a quinta (5ª) etapa da marcha de cálculo N° 3 aplicada a figura 5.5, e decorrente utilização do diagrama  $\omega_p$  (apresentado na figura 5.6) e das coordenadas  $y$  (ver figura 5.8 a) e  $z$  (ver figura 5.8 b). Conclui-se o posicionamento do centro de torção D, por interpretação geométrica, definido pelas distâncias  $d_y$  e  $d_z$  em relação aos polo provisório P (imposto na figura 5.5). Assim, escreve-se:

$$d_y = \frac{t}{6 \cdot I_y} \cdot \{ \Delta\omega_{2a} \cdot [-d_2 \cdot z_1 + (b_2 - d_2) \cdot z_2] + \Delta\omega_2 \cdot [z_2 \cdot (3 \cdot b_4 + 2 \cdot b_2 - 2 \cdot d_2) + 3 \cdot b_4 \cdot z_4] \\ + \Delta\omega_4 \cdot (b_4 \cdot z_2 + 2 \cdot b_4 \cdot z_4) - \Delta\omega_5 \cdot (b_5 \cdot z_3 + 2 \cdot b_5 \cdot z_5) \} \quad (5.5 a)$$

$$d_z = \frac{t}{6 \cdot I_z} \cdot \{ \Delta\omega_2 \cdot [b_2 \cdot y_1 + y_2 \cdot (2 \cdot b_2 + 3 \cdot b_4) + 3 \cdot b_4 \cdot z_4] + \Delta\omega_4 \cdot (b_4 \cdot y_2 + 2 \cdot b_4 \cdot y_4) \\ + \Delta\omega_5 \cdot (b_5 \cdot y_3 + 2 \cdot b_5 \cdot y_5) \} \quad (5.5 b)$$

$$\text{com: } \Delta\omega_{2a} = \frac{d_2}{b_2} \cdot \Delta\omega_2 \quad \text{e} \quad d_2 = \frac{|z_1| \cdot b_2}{|z_1| + |z_2|}.$$

Por fim, ao proceder o traçado do diagrama de ordenadas setoriais absoluto  $\omega_{pc}$ , como polo de varredura no centro de torção D, exprime-se  $\omega_{pc}$  na figura 5.9.

**Figura 5.9: Diagrama de ordenadas absolutas  $\omega_{pc}$ , com polo de varredura no centro de torção****Fonte: O Autor (2019)**

resultando por ordenadas  $\omega_{pc f_i}$ , nos extremos finais dos painéis – parede, os seguintes:

$$\omega_{pc f_1} = \omega_{pc P} + \Delta\omega_{pc f_1} \quad (5.6 a)$$

$$\omega_{pc f_2} = \omega_{pc f_1} + \Delta\omega_{pc f_2} \quad (5.6 b)$$

$$\omega_{pc f_3} = \omega_{pc P} + \Delta\omega_{pc f_3} \quad (5.6 c)$$

$$\omega_{pc f_4} = \omega_{pc f_2} + \Delta\omega_{pc f_4} \quad (5.6 d)$$

$$\omega_{pc f_5} = \omega_{pc f_3} + \Delta\omega_{pc f_5} \quad (5.6 e)$$

com:  $\omega_{pc P} = d_y \cdot d_z$ ;  $\Delta\omega_{pc f_2} = -b_2 \cdot (d_y \cdot \cos \theta_2 - d_z \cdot \sin \theta_2) + b_1 \cdot b_2 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2)$ ;

$\Delta\omega_{pc f_1} = b_1 \cdot (d_y \cdot \cos \theta_1 - d_z \cdot \sin \theta_1)$ ;  $\Delta\omega_{pc f_3} = -b_3 \cdot (d_y \cdot \cos \theta_3 - d_z \cdot \sin \theta_3)$ ;

$\Delta\omega_{pc f_4} = b_4 \cdot (d_y \cdot \cos \theta_4 - d_z \cdot \sin \theta_4) + b_1 \cdot b_4 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_4) + b_2 \cdot b_4 \cdot \sin(\theta_2 - \theta_4)$  e

$\Delta\omega_{pc f_5} = b_5 \cdot (d_y \cdot \cos \theta_5 - d_z \cdot \sin \theta_5) + b_3 \cdot b_5 \cdot \sin(\theta_3 - \theta_5)$ .

A inércia setorial  $I_\omega$  é obtida mediante aplicação da nona (9ª) etapa da marcha de cálculo N° 3 na figura 5.9, ficando expressa por:

$$I_\omega = t \cdot \left\{ \frac{b_1}{6} \cdot \omega_{pcp} \cdot (2 \cdot \omega_{pcp} + \omega_{pcf_1}) + \frac{b_1}{6} \cdot \omega_{pcf_1} \cdot (\omega_{pcp} + 2 \cdot \omega_{pcf_1}) \right. \\ + \frac{b_2}{6} \cdot \omega_{pcf_1} \cdot (2 \cdot \omega_{pcf_1} + \omega_{pcf_2}) + \frac{b_2}{6} \cdot \omega_{pcf_2} \cdot (\omega_{pcf_1} + 2 \cdot \omega_{pcf_2}) \\ + \frac{b_3}{6} \cdot \omega_{pcp} \cdot (2 \cdot \omega_{pcp} + \omega_{pcf_3}) + \frac{b_3}{6} \cdot \omega_{pcf_3} \cdot (\omega_{pcp} + 2 \cdot \omega_{pcf_3}) \\ + \frac{b_4}{6} \cdot \omega_{pcf_2} \cdot (2 \cdot \omega_{pcf_2} + \omega_{pcf_4}) + \frac{b_4}{6} \cdot \omega_{pcf_4} \cdot (\omega_{pcf_2} + 2 \cdot \omega_{pcf_4}) \\ \left. + \frac{b_5}{6} \cdot \omega_{pcf_3} \cdot (2 \cdot \omega_{pcf_3} + \omega_{pcf_5}) + \frac{b_5}{6} \cdot \omega_{pcf_5} \cdot (\omega_{pcf_3} + 2 \cdot \omega_{pcf_5}) \right\} \quad (5.7)$$

**EXEMPLO 5.1 (a):** A fim de exemplificar a generalização procedida no item 5.2 desta tese, é analisada a variação da inércia setorial  $I_\omega$  em detrimento das inclinações dos painéis – parede (2) e (3). Na tabela 5.1 são apresentados valores de inércia setorial  $I_\omega$  em detrimento da variação das inclinações  $\theta_2$  e  $\theta_3$ . Ver as inclinações adotadas na figura 5.10 (a).

**Tabela 5.1 – Valores de  $I_\omega$  ( $\times 10^7$ )  $m^6$  para modificação das inclinações das paredes (2) e (3)**

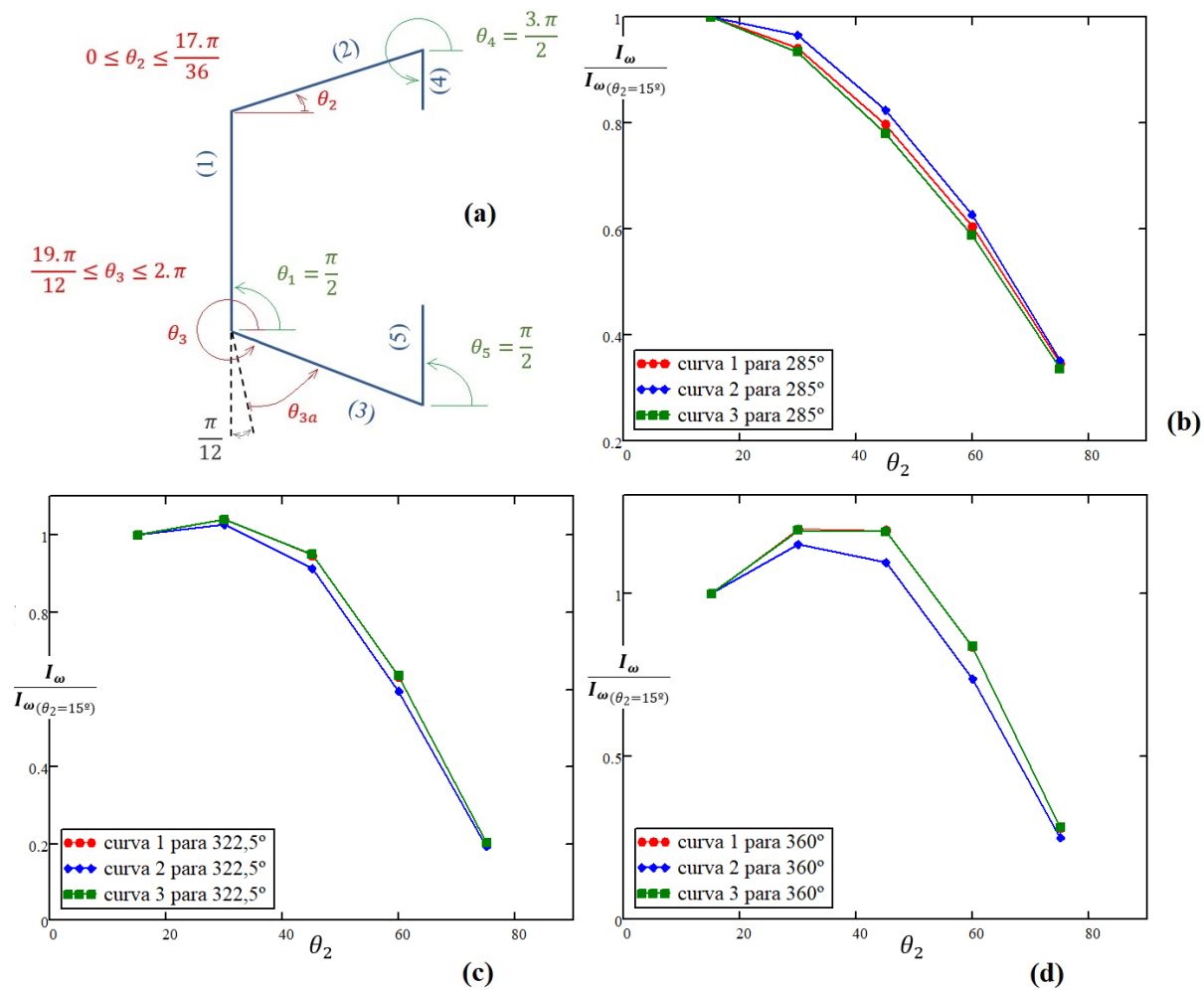
$\theta_2$	$\theta_3 = \frac{19 \cdot \pi}{12} (285^\circ)$			$\theta_3 = \frac{10,75 \cdot \pi}{6} (322,5^\circ)$			$\theta_3 = 2 \cdot \pi (360^\circ)$		
	curva 1	curva 2	curva 3	curva 1	curva 2	curva 3	curva 1	curva 2	curva 3
$\frac{\pi}{12} (15^\circ)$	0,639	0,361	53,103	1,482	0,907	118,798	1,093	0,720	88,025
$\frac{\pi}{6} (30^\circ)$	0,602	0,349	49,580	1,542	0,931	123,598	1,309	0,827	104,988
$\frac{\pi}{4} (45^\circ)$	0,509	0,298	41,449	1,401	0,827	112,565	1,304	0,787	104,769
$\frac{\pi}{3} (60^\circ)$	0,387	0,226	31,219	0,934	0,539	75,494	0,913	0,532	73,671
$\frac{5 \cdot \pi}{12} (75^\circ)$	0,222	0,127	17,886	0,296	0,174	23,988	0,306	0,181	24,667

Fonte: O Autor (2019)

Tal análise é objetivada para que projetistas de pontes retas possam identificar qual a melhor inclinação das referidas paredes, isso a fim de gerar menor bimomento (uma vez que  $I_\omega$  é relacionada ao bimomento mediante equação 2.96 c) e daí agrega-se economia ao projeto com a mera inclinação de duas das paredes que compõem o núcleo estrutural C.

Na figura 5.10 apresentam-se a configuração do núcleo estrutural analisado e os gráficos da variação da inércia setorial  $I_\omega$  com a modificação da inclinação das paredes (2) e (3). Ressalta-se que foi mantida uma inclinação mínima de  $15^\circ$  entre as paredes (1) e (2), bem como entre os painéis – parede (1) e (3). Mantendo-se assim, a configuração de núcleo estrutural, ao invés de tender a “shear walls”. Por fim, esclarece-se que os gráficos são traçados com valores de inércia setorial adimensionalizados via divisão por  $I_\omega$  para  $\theta_2 = 15^\circ$ .

**Figura 5.10: Núcleo estrutural: (a) geometria analisada, (b) gráfico de variação de  $I_\omega$  para  $\theta_3$  de  $285^\circ$ , (c) gráfico de variação de  $I_\omega$  para  $\theta_3$  de  $322,5^\circ$  e (d) gráfico de variação de  $I_\omega$  para  $\theta_3$  de  $360^\circ$**



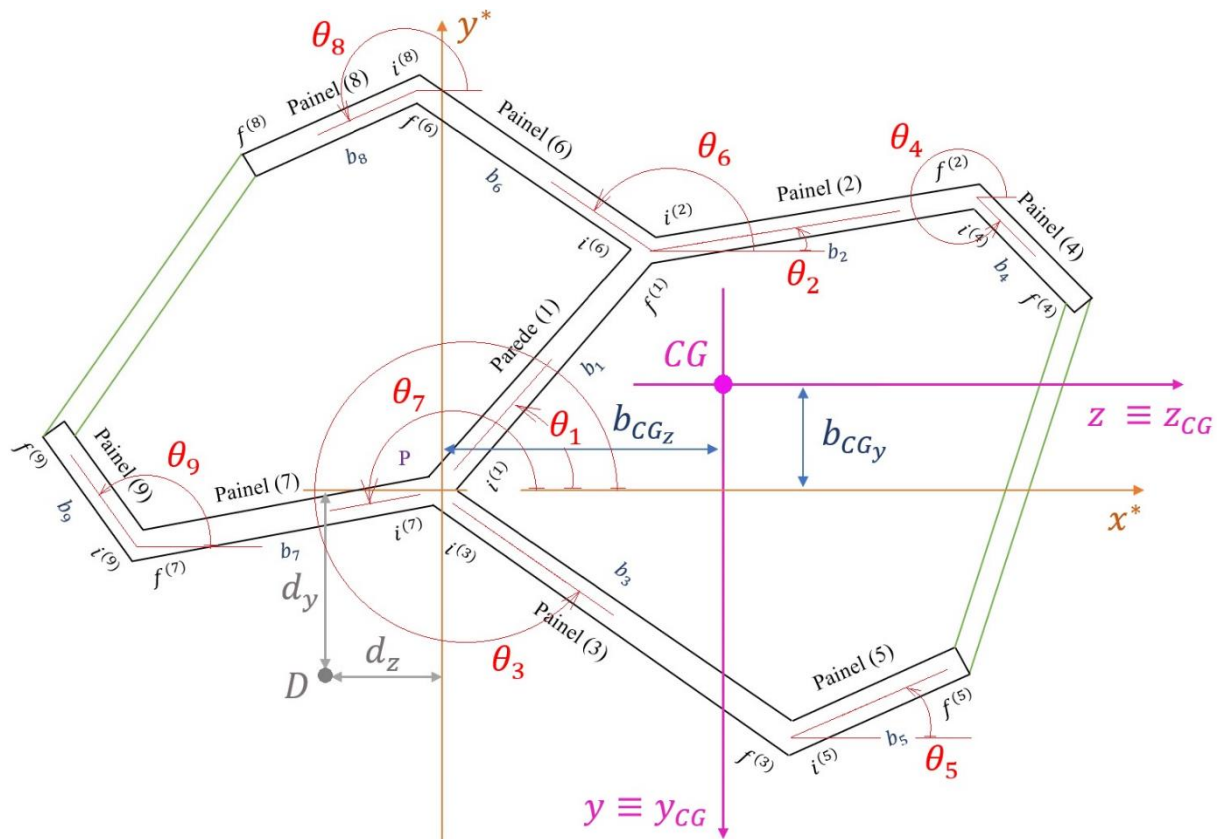
Fonte: O Autor (2019)

Nesta análise: a curva 1 equivale as razões  $\eta_3 = 1/40$  e  $\eta_4 = 4$ , a curva 2 as razões valem  $\eta_3 = 1/30$  e  $\eta_4 = 10$ , e por fim na curva 3 utiliza-se  $\eta_3 = 1/100$  e  $\eta_4 = 5$ . Em ambos os cenários de análise, adotam-se para as paredes:  $b_1 = b_2 = b_3$ ,  $b_4 = b_5$ ,  $t = b_1 \cdot \eta_3$  e  $b_4 = \eta_4 \cdot t$ .

### b) Aplicação aos pilares com seção transversal em formato de duplo T

Na figura 5.11 é apresentada a configuração da seção transversal em duplo T com posicionamento generalizado dos painéis – parede que a compõe. Indica-se ainda as inclinações  $\theta_j$  do  $j$ -ésimo painel.

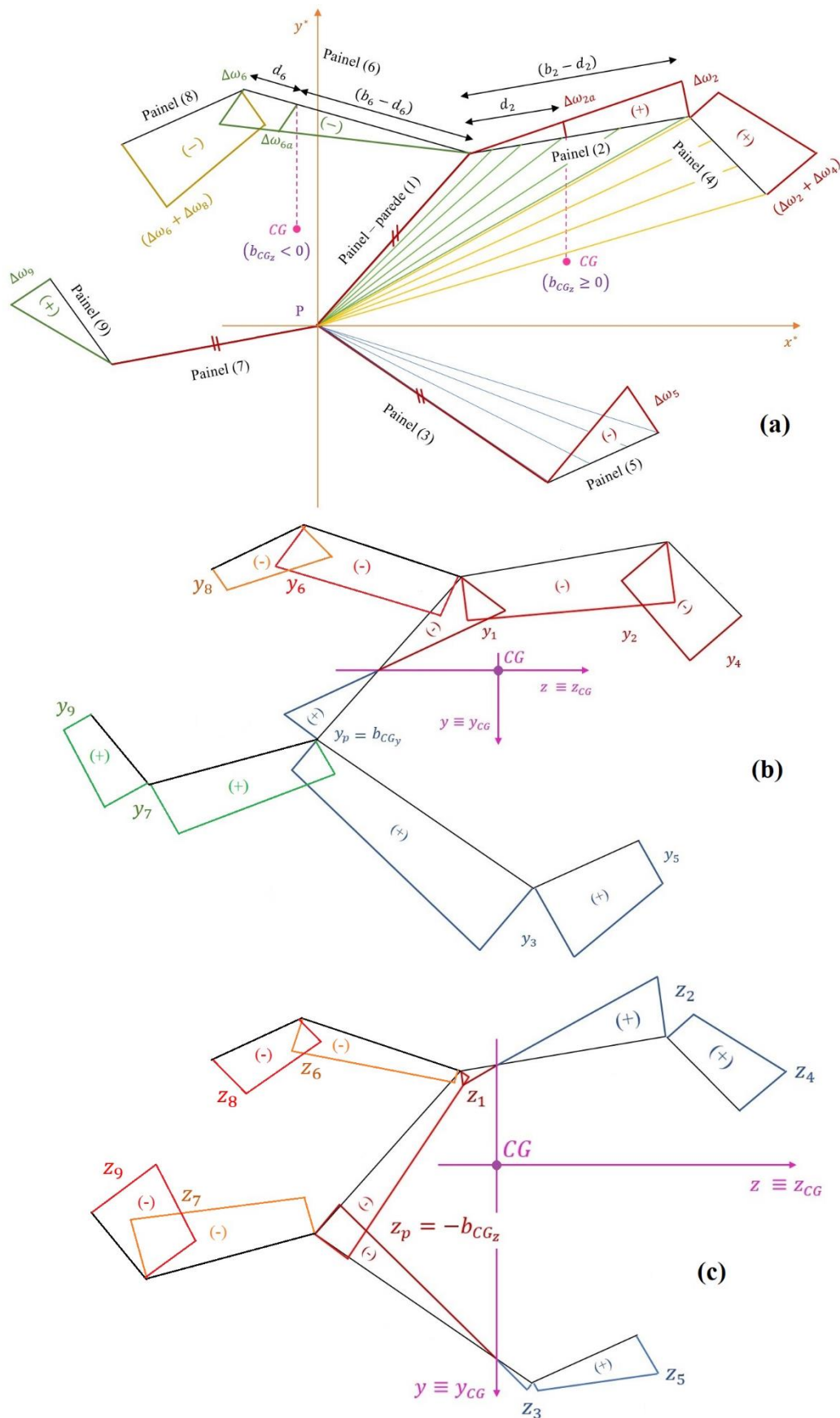
**Figura 5.11: Posicionamento dos painéis no pilar em duplo T**



Fonte: O Autor (2019)

Objetivando-se o posicionamento do centro de torção  $D$  são traçados os diagramas de ordenadas setoriais provisórias  $\omega_p$  (ver figura 5.12 a), de coordenadas  $y$  do  $j$ -ésimo painel – painel (vide figura 5.12 b) e o de coordenadas  $z$  (na figura 5.12 c). As coordenadas  $y$  e  $z$  dos painéis – parede são mensuradas com origem no centro de gravidade da seção transversal.

**Figura 5.12: Pilar em duplo T generalizado: (a) diagrama  $\omega_p$ , (b) diagrama  $y$  e (c) diagrama  $z$**



Fonte: O Autor (2019)



as ordenadas setoriais  $\omega_p$ , valem:

$$\Delta\omega_1 = \Delta\omega_3 = \Delta\omega_7 = 0 \quad (5.8 a)$$

$$\Delta\omega_2 = b_1 \cdot b_2 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2) \quad (5.8 b)$$

$$\Delta\omega_4 = -b_1 \cdot b_4 \cdot \sin(\theta_4 - \theta_1) - b_2 \cdot b_4 \cdot \sin(\theta_4 - \theta_2) \quad (5.8 c)$$

$$\Delta\omega_5 = b_3 \cdot b_5 \cdot \sin(\theta_3 + \theta_5) \quad (5.8 d)$$

$$\Delta\omega_6 = b_1 \cdot b_6 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_6) \quad (5.8 e)$$

$$\Delta\omega_8 = b_1 \cdot b_8 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_8) + b_6 \cdot b_8 \cdot \sin(\theta_6 - \theta_8) \quad (5.8 f)$$

$$\Delta\omega_9 = b_7 \cdot b_9 \cdot \sin(\theta_7 - \theta_9) \quad (5.8 g)$$

as coordenadas  $y$  e  $z$  dos extremos finais dos painéis – parede, são expressas por:

$$z_1 = z_p + b_1 \cdot \cos \theta_1 \quad (5.9 a)$$

$$z_2 = z_1 + b_2 \cdot \cos \theta_2 \quad (5.9 b)$$

$$z_3 = z_p + b_3 \cdot \cos \theta_3 \quad (5.9 c)$$

$$z_4 = z_2 + b_4 \cdot \cos \theta_4 \quad (5.9 d)$$

$$z_5 = z_3 + b_5 \cdot \cos \theta_5 \quad (5.9 e)$$

$$z_6 = z_1 + b_6 \cdot \cos \theta_6 \quad (5.9 f)$$

$$z_7 = z_p + b_7 \cdot \cos \theta_7 \quad (5.9 g)$$

$$z_8 = z_6 + b_8 \cdot \cos \theta_8 \quad (5.9 h)$$

$$z_9 = z_7 + b_9 \cdot \cos \theta_9 \quad (5.9 i)$$

$$y_1 = y_p - b_1 \cdot \sin \theta_1 \quad (5.9 j)$$

$$y_2 = y_1 - b_2 \cdot \sin \theta_2 \quad (5.9 k)$$

$$y_3 = y_p - b_3 \cdot \sin \theta_3 \quad (5.9 l)$$

$$y_4 = y_2 - b_4 \cdot \sin \theta_4 \quad (5.9 m)$$

$$y_5 = y_3 - b_5 \cdot \sin \theta_5 \quad (5.9 n)$$

$$y_6 = y_1 - b_6 \cdot \sin \theta_6 \quad (5.9 o)$$

$$y_7 = y_p - b_7 \cdot \sin \theta_7 \quad (5.9 p)$$

$$y_8 = y_6 - b_8 \cdot \sin \theta_8 \quad (5.9 q)$$

$$y_9 = y_7 - b_9 \cdot \sin \theta_9 \quad (5.9 r)$$

com:  $z_p = -b_{CG_z}$  e  $y_p = b_{CG_y}$ .

Agora, utilizando os diagramas de coordenadas  $y$  (ver figura 5.12 b),  $z$  (Fig. 5.12 c) e de ordenadas setoriais provisórias  $\omega_p$  (Fig. 5.12 a), conclui-se que as distâncias  $d_y$  e  $d_z$  são expressas por:

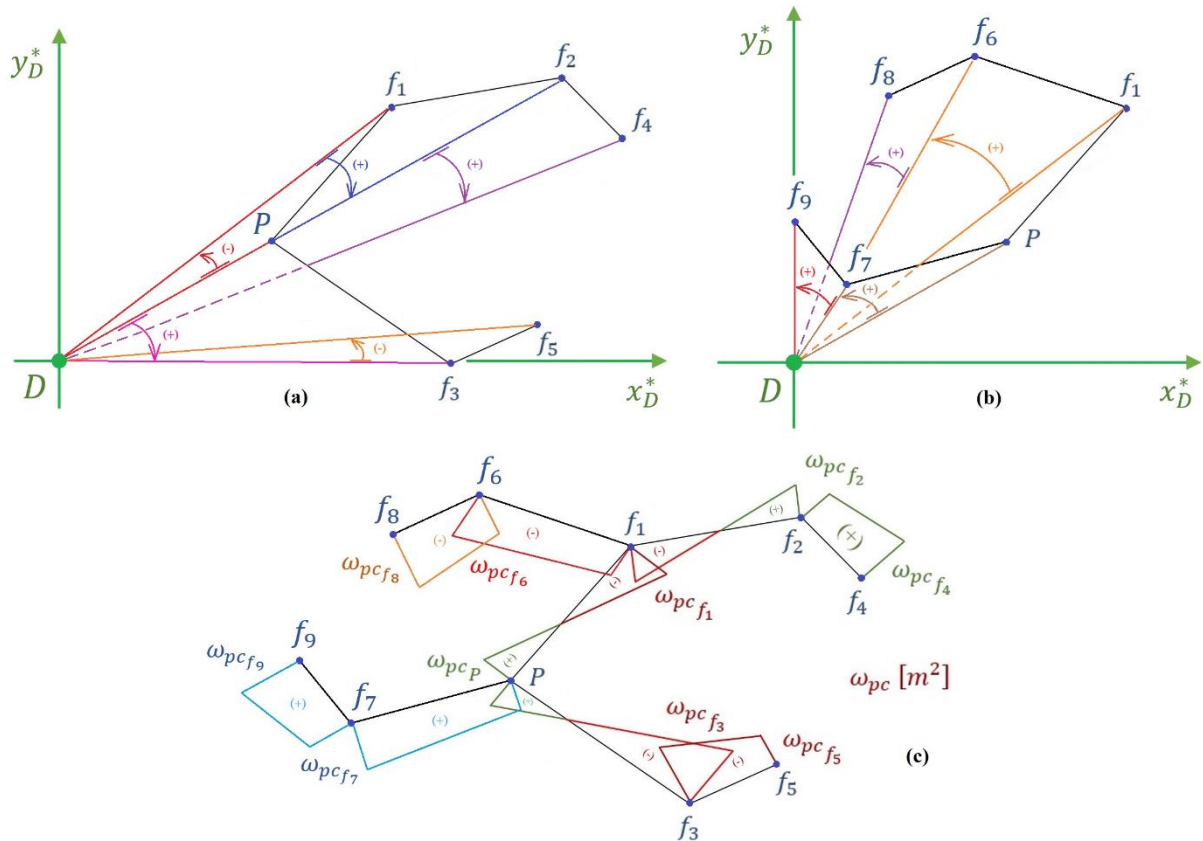
$$\begin{aligned}
 d_z &= \frac{-t}{I_z} \cdot \int_s \omega_p \cdot y \, ds \\
 &= \frac{-t}{I_z} \cdot \left\{ -\frac{b_2}{6} \cdot \Delta\omega_2 \cdot (y_1 + 2 \cdot y_2) - \frac{b_4}{6} \cdot \Delta\omega_2 \cdot (2 \cdot y_2 + y_4) - \frac{b_4}{6} \cdot (\Delta\omega_2 + \Delta\omega_4) \cdot (y_2 + 2 \cdot y_4) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{b_5}{6} \cdot \Delta\omega_5 \cdot (y_3 + 2 \cdot y_5) + \frac{b_6}{6} \cdot \Delta\omega_6 \cdot (y_1 + 2 \cdot y_6) + \frac{b_8}{6} \cdot \Delta\omega_6 \cdot (2 \cdot y_6 + y_8) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{b_8}{6} \cdot (\Delta\omega_6 + \Delta\omega_8) \cdot (y_6 + 2 \cdot y_8) + \frac{b_9}{6} \cdot \Delta\omega_9 \cdot (y_7 + 2 \cdot y_9) \right\} \quad (5.9 s)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_y &= \frac{t}{I_y} \cdot \int_s \omega_p \cdot z \, ds = \\
 &= \frac{t}{I_z} \cdot \left\{ -\frac{d_2}{6} \cdot \Delta\omega_{2a} \cdot z_1 + \frac{(b_2 - d_2)}{6} \cdot z_2 \cdot (\Delta\omega_{2a} + 2 \cdot \Delta\omega_2) + \frac{b_4}{6} \cdot \Delta\omega_2 \cdot (2 \cdot z_2 + z_4) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{b_4}{6} \cdot (\Delta\omega_2 + \Delta\omega_4) \cdot (z_2 + 2 \cdot z_4) - \frac{b_5}{6} \cdot \Delta\omega_5 \cdot (z_3 + 2 \cdot z_5) + \frac{b_6}{6} \cdot \Delta\omega_6 \cdot (z_1 + 2 \cdot z_6) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{b_8}{6} \cdot \Delta\omega_6 \cdot (2 \cdot z_6 + z_8) + \frac{b_8}{6} \cdot (\Delta\omega_6 + \Delta\omega_8) \cdot (z_6 + 2 \cdot z_8) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{b_9}{6} \cdot \Delta\omega_9 \cdot (z_7 + 2 \cdot z_9) \right\} \quad \text{if } b_{CG_z} \geq 0 \quad (5.9 t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{t}{I_z} \cdot \left\{ \frac{b_2}{6} \cdot \Delta\omega_2 \cdot (z_1 + 2 \cdot z_2) + \frac{b_4}{6} \cdot \Delta\omega_2 \cdot (2 \cdot z_2 + z_4) + \frac{b_4}{6} \cdot (\Delta\omega_2 + \Delta\omega_4) \cdot (z_2 + 2 \cdot z_4) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{b_5}{6} \cdot \Delta\omega_5 \cdot (z_3 + 2 \cdot z_5) + \frac{d_6}{6} \cdot z_6 \cdot (\Delta\omega_{6a} + 2 \cdot \Delta\omega_6) - \frac{(b_6 - d_6)}{6} \cdot \Delta\omega_{6a} \cdot z_1 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{b_8}{6} \cdot \Delta\omega_6 \cdot (2 \cdot z_6 + z_8) + \frac{b_8}{6} \cdot (\Delta\omega_6 + \Delta\omega_8) \cdot (z_6 + 2 \cdot z_8) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{b_9}{6} \cdot \Delta\omega_9 \cdot (z_7 + 2 \cdot z_9) \right\} \quad \text{if } b_{CG_z} < 0 \quad (5.9 u)
 \end{aligned}$$

$$\text{com: } d_2 = \frac{|z_1| \cdot b_2}{|z_1| + |z_2|}; \quad d_6 = \frac{|z_6| \cdot b_6}{|z_1| + |z_6|}; \quad \Delta\omega_{2a} = \frac{d_2}{b_2} \cdot \Delta\omega_2 \quad \text{e} \quad \Delta\omega_{6a} = \left(1 - \frac{d_6}{b_6}\right) \cdot \Delta\omega_6.$$

Na figura 5.13 (a) é apresentado o sentido de varredura no núcleo C a direita que compõe o pilar em duplo T. E na figura 5.13 (b) observa-se a varredura no núcleo à esquerda. E por fim, na figura 5.13 (c) verifica-se a configuração do diagrama de ordenadas setoriais absolutas  $\omega_{pc}$ .

**Figura 5.13: Duplo T: varredura no núcleo (a) à direita, (b) à esquerda e (c) diagrama  $\omega_{pc}$** 

Fonte: O Autor (2019)

As ordenadas setoriais principais  $\omega_{pc}$  são expressas por:

$$\omega_{pc_P} = d_y \cdot d_z \quad (5.10 a)$$

$$\omega_{pc_{f_1}} = \omega_{pc_P} + \Delta\omega_{pc_{f_1}} \quad (5.10 b)$$

$$\omega_{pc_{f_2}} = \omega_{pc_{f_1}} + \Delta\omega_{pc_{f_2}} \quad (5.10 c)$$

$$\omega_{pc_{f_3}} = \omega_{pc_P} + \Delta\omega_{pc_{f_3}} \quad (5.10 d)$$

$$\omega_{pc_{f_4}} = \omega_{pc_{f_2}} + \Delta\omega_{pc_{f_4}} \quad (5.10 e)$$

$$\omega_{pc_{f_5}} = \omega_{pc_{f_3}} + \Delta\omega_{pc_{f_5}} \quad (5.10 f)$$

$$\omega_{pc_{f_6}} = \omega_{pc_{f_1}} + \Delta\omega_{pc_{f_6}} \quad (5.10 g)$$

$$\omega_{pc_{f_7}} = \omega_{pc_P} + \Delta\omega_{pc_{f_7}} \quad (5.10 h)$$

$$\omega_{pc_{f_8}} = \omega_{pc_{f_6}} + \Delta\omega_{pc_{f_8}} \quad (5.10 i)$$

$$\omega_{pc_{f_9}} = \omega_{pc_{f_7}} + \Delta\omega_{pc_{f_9}} \quad (5.10 j)$$

$$\text{com: } \Delta\omega_{pc_{f_1}} = -b_1 \cdot (d_y \cdot \cos \theta_1 + d_z \cdot \sin \theta_1); \Delta\omega_{pc_{f_3}} = -b_3 \cdot (d_y \cdot \cos \theta_3 + d_z \cdot \sin \theta_3);$$

$$\Delta\omega_{pc_{f_2}} = -b_2 \cdot (d_y \cdot \cos \theta_2 + d_z \cdot \sin \theta_2) + b_1 \cdot b_2 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2);$$

$$\begin{aligned}
\Delta\omega_{pc_{f_4}} &= -b_4 \cdot (d_y \cdot \cos \theta_4 + d_z \cdot \sin \theta_4) + b_1 \cdot b_4 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_4) + b_2 \cdot b_4 \cdot \sin(\theta_2 - \theta_4); \\
\Delta\omega_{pc_{f_5}} &= -b_5 \cdot (d_y \cdot \cos \theta_5 + d_z \cdot \sin \theta_5) + b_3 \cdot b_5 \cdot \sin(\theta_3 - \theta_5); \\
\Delta\omega_{pc_{f_6}} &= -b_6 \cdot (d_y \cdot \cos \theta_6 + d_z \cdot \sin \theta_6) + b_1 \cdot b_6 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_6); \\
\Delta\omega_{pc_{f_7}} &= -b_7 \cdot (d_y \cdot \cos \theta_7 + d_z \cdot \sin \theta_7); \\
\Delta\omega_{pc_{f_8}} &= -b_8 \cdot (d_y \cdot \cos \theta_8 + d_z \cdot \sin \theta_8) + b_1 \cdot b_8 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_8) + b_6 \cdot b_8 \cdot \sin(\theta_6 - \theta_8) \quad e \\
\Delta\omega_{pc_{f_9}} &= -b_9 \cdot (d_y \cdot \cos \theta_9 + d_z \cdot \sin \theta_9) + b_7 \cdot b_9 \cdot \sin(\theta_7 - \theta_9);
\end{aligned}$$

A inércia setorial  $I_\omega$  é calculada pela aplicação da equação (2.133) no diagrama de ordenadas setoriais  $\omega_{pc}$  (ver figura 5.13 c), e expressa por:

$$\begin{aligned}
I_\omega &= t \cdot \int_s \omega_{pc}^2 ds \\
&= t \cdot \left\{ \frac{b_1}{6} \cdot \omega_{pc_P} \cdot (2 \cdot \omega_{pc_P} - \omega_{pc_{f_1}}) - \frac{b_1}{6} \cdot \omega_{pc_{f_1}} \cdot (\omega_{pc_P} - 2 \cdot \omega_{pc_{f_1}}) \right. \\
&\quad - \frac{b_2}{6} \cdot \omega_{pc_{f_1}} \cdot (-2 \cdot \omega_{pc_{f_1}} + \omega_{pc_{f_2}}) + \frac{b_2}{6} \cdot \omega_{pc_{f_2}} \cdot (-\omega_{pc_{f_1}} + 2 \cdot \omega_{pc_{f_2}}) \\
&\quad + \frac{b_3}{6} \cdot \omega_{pc_P} \cdot (2 \cdot \omega_{pc_P} - \omega_{pc_{f_3}}) - \frac{b_3}{6} \cdot \omega_{pc_{f_3}} \cdot (\omega_{pc_P} - 2 \cdot \omega_{pc_{f_3}}) \\
&\quad + \frac{b_4}{6} \cdot \omega_{pc_{f_2}} \cdot (2 \cdot \omega_{pc_{f_2}} + \omega_{pc_{f_4}}) + \frac{b_4}{6} \cdot \omega_{pc_{f_4}} \cdot (\omega_{pc_{f_2}} + 2 \cdot \omega_{pc_{f_4}}) \\
&\quad + \frac{b_5}{6} \cdot \omega_{pc_{f_3}} \cdot (2 \cdot \omega_{pc_{f_3}} + \omega_{pc_{f_5}}) + \frac{b_5}{6} \cdot \omega_{pc_{f_5}} \cdot (\omega_{pc_{f_3}} + 2 \cdot \omega_{pc_{f_5}}) \\
&\quad + \frac{b_6}{6} \cdot \omega_{pc_{f_1}} \cdot (2 \cdot \omega_{pc_{f_1}} + \omega_{pc_{f_6}}) + \frac{b_6}{6} \cdot \omega_{pc_{f_6}} \cdot (\omega_{pc_{f_1}} + 2 \cdot \omega_{pc_{f_6}}) \\
&\quad + \frac{b_7}{6} \cdot \omega_{pc_P} \cdot (2 \cdot \omega_{pc_P} + \omega_{pc_{f_7}}) + \frac{b_7}{6} \cdot \omega_{pc_{f_7}} \cdot (\omega_{pc_P} + 2 \cdot \omega_{pc_{f_7}}) \\
&\quad + \frac{b_8}{6} \cdot \omega_{pc_{f_6}} \cdot (2 \cdot \omega_{pc_{f_6}} + \omega_{pc_{f_8}}) + \frac{b_8}{6} \cdot \omega_{pc_{f_8}} \cdot (\omega_{pc_{f_6}} + 2 \cdot \omega_{pc_{f_8}}) \\
&\quad + \frac{b_9}{6} \cdot \omega_{pc_{f_7}} \cdot (2 \cdot \omega_{pc_{f_7}} + \omega_{pc_{f_9}}) \\
&\quad \left. + \frac{b_9}{6} \cdot \omega_{pc_{f_9}} \cdot (\omega_{pc_{f_7}} + 2 \cdot \omega_{pc_{f_9}}) \right\} \tag{5.10 k}
\end{aligned}$$

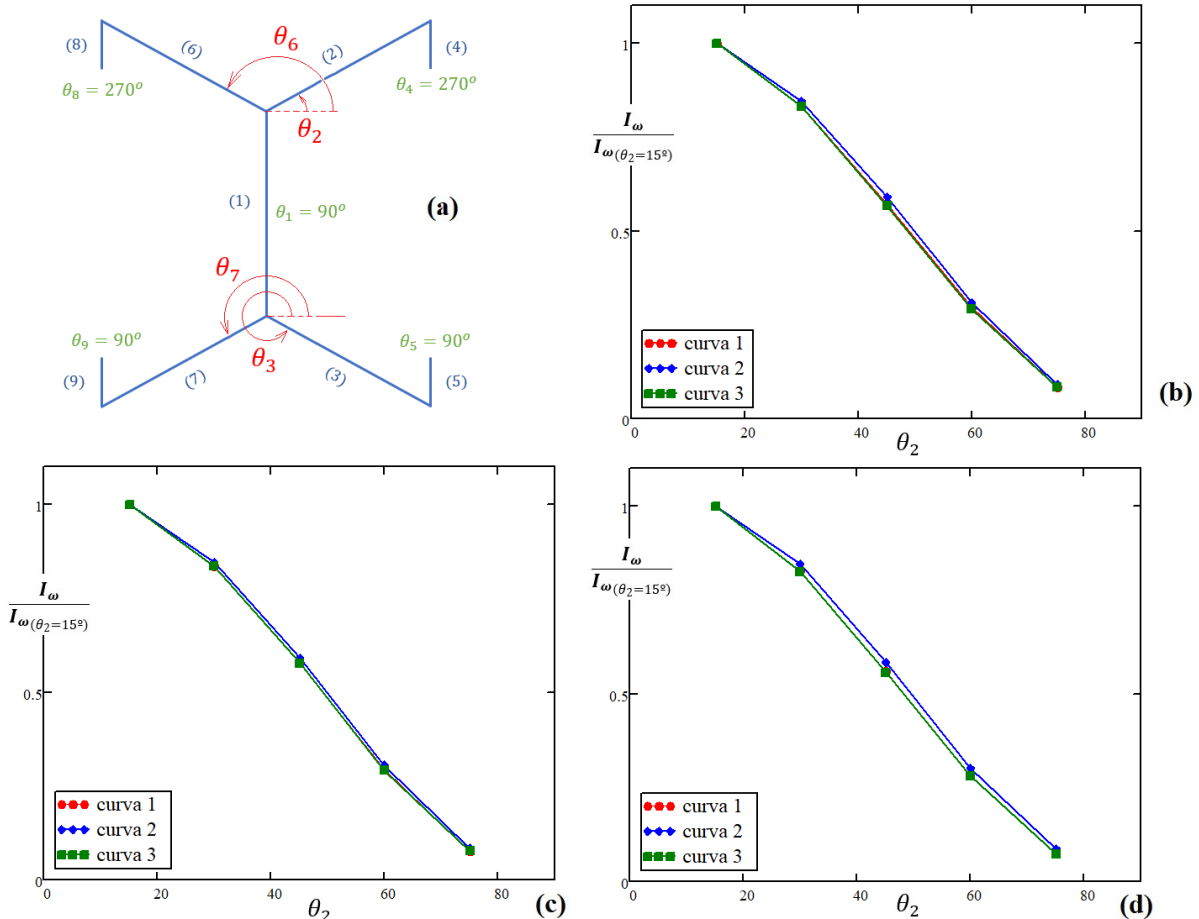
**EXEMPLO 5.1 (b):** Semelhante ao procedido no exemplo 5.1 (a) procede-se a análise da variação da inércia setorial  $I_\omega$  para o pilar em duplo T. Na figura 5.14 (a) é apresentada a geometria da seção simétrica em duplo T, com as indicações das inclinações dos painéis - parede. Na tabela 5.2 são apresentados valores de inércia setorial  $I_\omega$  em detrimento da variação das inclinações das paredes laterais (2) e (6).

**Tabela 5.2 – Valores de  $I_\omega$  ( $\times 10^8$ )  $m^6$  para as inclinações das paredes (2), (3), (6) e (7)**

$\theta_2$	$\theta_6$	$\theta_3 = \frac{19.\pi}{12}; \theta_7 = \frac{13.\pi}{12}$			$\theta_3 = \frac{19.\pi}{12}; \theta_7 = \frac{13.\pi}{12}$			$\theta_3 = \frac{19.\pi}{12}; \theta_7 = \frac{13.\pi}{12}$		
		curva 1	curva 2	curva 3	curva 1	curva 2	curva 3	curva 1	curva 2	curva 3
$\pi/12$	$11\pi/12$	1,221	0,502	104,968	1,967	0,821	168,500	1,744	0,753	148,573
$\pi/6$	$5\pi/6$	1,017	0,424	87,208	1,645	0,696	140,643	1,443	0,636	122,467
$\pi/4$	$3\pi/4$	0,697	0,295	59,561	1,136	0,486	96,917	0,977	0,440	82,704
$\pi/3$	$2\pi/3$	0,359	0,156	30,615	0,580	0,251	49,378	0,493	0,228	41,629
$5\pi/12$	$7\pi/12$	0,102	0,046	8,662	0,151	0,068	12,849	0,133	0,065	11,197

Fonte: O Autor (2019)

**Figura 5.14: Pilar em duplo T: (a) geometria analisada; gráfico de variação de  $I_\omega$  para (b)  $\theta_3 = 285^\circ$  e  $\theta_7 = 195^\circ$ ; (c)  $\theta_3 = 322,5^\circ$  e  $\theta_7 = 217,5^\circ$ ; e (d)  $\theta_3 = 360^\circ$  e  $\theta_7 = 180^\circ$**



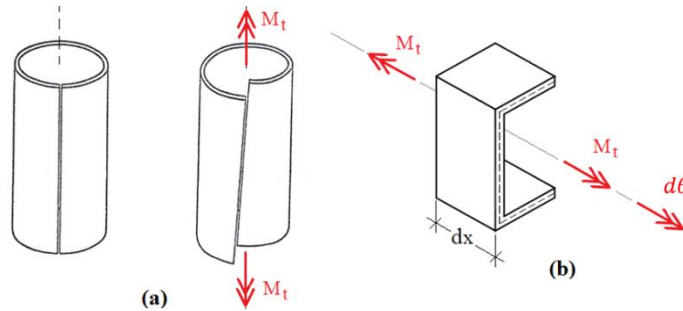
Fonte: O Autor (2019)

Já nas figuras 5.14 (b), (c) e (d) plotam-se os gráficos da variação de  $I_\omega$  em detrimento das inclinações dos painéis – parede (2), (6), (3) e (7). Adota-se ainda, três valores de inclinação espelhada para os painéis (3) e (7), sendo:  $\theta_3 = \{285^\circ; 322,5^\circ; 360^\circ\}$  e  $\theta_7 = \{195^\circ; 217,5^\circ; 180^\circ\}$ . As curvas 1, 2 e 3 são montadas de forma análoga ao exemplo 5.1 (a), e para as paredes, tem-se:  $b_1 = b_2 = b_3 = b_6 = b_7$ ,  $b_4 = b_5 = b_8 = b_9$ ,  $t = b_1 \cdot \eta_3$  e  $b_4 = \eta_4 \cdot t$ .

### 5.3. FLEXO – TORÇÃO EM PILARES METÁLICOS

O empenamento é proveniente da rotação  $\phi$  em torno do centro de torção  $D$ , e sua derivada  $d\phi$ , vide figura 5.15 (a). Enquanto que na figura 5.15 (b) é apresentado o elemento diferencial da seção de paredes finas, com o momento de torção  $M_t$  e giro relativo  $d\phi$ .

**Figura 5.15: Elemento submetido a flexo – torção: (a) empenamento, (b) elemento diferencial**



Fonte: O Autor (2019)

d'onde, o giro relativo  $d\phi$  é expresso por:

$$d\phi = \frac{M_t}{G \cdot I_t} dx \quad (5.11)$$

Mediante análise da tensão cisalhante  $\tau$  ao longo do eixo esqueleto, relaciona-se o giro da seção transversal  $\phi$  em relação ao centro de torção, e expressam-se os deslocamentos longitudinais  $u$  em termos apenas do eixo esqueleto  $s$ , por:

$$u = \omega_{pc} \cdot \phi' \quad (5.12)$$

Cruzando-se as eq.'s (2.95) e (2.96 c), expressa-se a parcela da tensão axial  $\sigma_x$ , como:

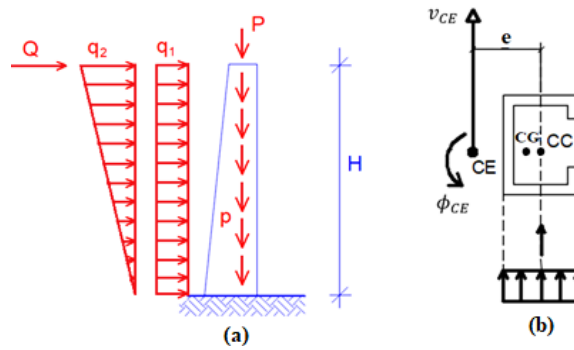
$$\sigma_x = \frac{B}{I_\omega} \cdot \omega_{pc} \quad (5.13)$$

A equação diferencial que rege a flexo – torção é advinda da união das parcelas do momento de torção livre  $M_l$  e da torção de Saint – Venant, ficando expressa por:

$$\phi'' - r^2 \cdot \phi'''' = \frac{m(x)}{G \cdot I_t} \quad (5.14)$$

Será admitida a possibilidade de carga transversal constante na altura  $q_1$  e de carga sob variação linear na altura do pilar  $q_2(x) = (q_2/H) \cdot x$ ; bem como carga concentrada  $Q$  no topo do referido pilar. Conduz-se assim, o momento de torção  $m(x) = A \cdot x + B$  sob variação linear em relação ao centro de torção. As cargas são aplicadas no centro de carga (CC) e em decorrência da excentricidade  $e$  quantifica-se o momento de torção, ver figura 5.16.

**Figura 5.16: Pilar de ponte: (a) carregamentos, (b) centros geométricos ( $CE \equiv D$ ), CC e CG**



Fonte: O Autor (2019)

A solução geral para a equação diferencial expressa na eq. (5.14), é:

$$\phi(x) = C_3 \cdot [\cosh(\alpha \cdot x) - 1] + C_2 \cdot \left[ x - \frac{\sinh(\alpha \cdot x)}{\alpha} \right] + \frac{(A \cdot x^3 + 3 \cdot B \cdot x^2)}{6 \cdot \alpha^2 \cdot E \cdot I_\omega} \quad (5.15)$$

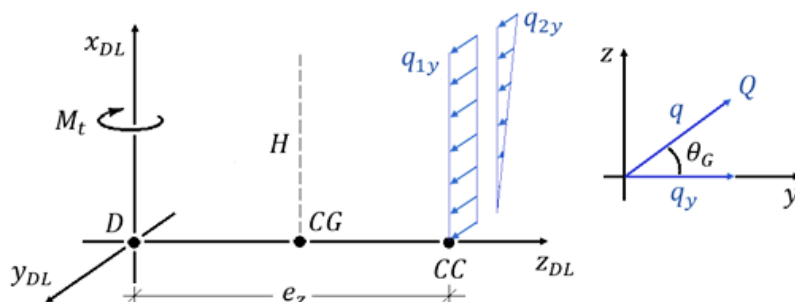
$$\text{onde: } C_2 = \frac{A \cdot [2 - (\alpha \cdot H)^2]}{2 \cdot \alpha^4 \cdot E \cdot I_\omega} - 2 \cdot \alpha^2 \cdot (M_{tH} + B \cdot H) \quad ; \quad q_{1y} = q_1 \cdot \cos(\theta_G) \quad ; \quad q_{2y} = q_2 \cdot \cos(\theta_G);$$

$$C_3 = \frac{\alpha^2 \cdot [\alpha \cdot B_H - M_{tH} \cdot \sinh(\alpha \cdot H)] + A \cdot k_1 + B \cdot \alpha \cdot [1 + (\alpha \cdot H) \cdot \sinh(\alpha \cdot H)]}{\alpha^5 \cdot E \cdot I_\omega \cdot \cosh(\alpha \cdot H)};$$

$$A = -\left(\frac{q_{2y}}{H}\right) \cdot e_z \quad ; \quad B = -q_{1y} \cdot e_z \quad ; \quad k_1 = \left\{ 1 - \frac{(\alpha \cdot H)^2}{2} \cdot \sinh(\alpha \cdot H) \right\} \quad e$$

$e_z$  é a distância no eixo  $z_{DL}$  entre o centro de carga (CC) e o centro de torção (D).

Procede-se assim, a extensão da teoria da flexo – torção (TFT) apresentada em Mori e Munaiar Neto (2017, p. 140 – 145) para momento de torção  $m(x)$  sob função linear. Tal extensão é realizada para computar a ação do vento na referida teoria, uma vez que o carregamento oriundo do vento é expresso nas figuras 2.67 e 5.17.

**Figura 5.17: Convenção positiva do momento de torção  $M_t$  e do braço de alavanca  $e_z$** 

Fonte: O Autor (2019)

Conforme apresentado em Laredo (1969), na modelagem do pilar contraventado por lintéis é adotado como principal hipótese o enrijecimento propiciado pelos lintéis. Já na análise de pilares de pontes, a laje (tabuleiro) é adotada flexível e conforme apresentado na figura 2.19 fornece cargas verticais no pilar. Tornando-se aplicável a Técnica do Meio Contínuo para tal modelagem, mais precisamente com o emprego da Teoria dos Painéis – Parede (ver item 2.8 desta tese). A abordagem procedida é consonante com Kouloušek (1947), quando do emprego das equações de Maney na modelagem dos lintéis de contraventamento. Além disso, a formulação dinâmica será baseada em Kouloušek (1959) e na resolução do problema dinâmico de pilares de pontes, pela TMC, será utilizado o método da separação de variáveis na resolução da EDP que rege o problema dinâmico. As replicações são devidamente empregadas nos pilares de pontes com seção de paredes finas em C ou em duplo T (ver subitem 5.3.1), sendo postulados: o diagrama de desacoplamento do sistema de EDP's que rege a solicitação dinâmica do vento, a obtenção dos primeiros modos de vibração via TMC e a decorrente comparação com a modelagem no software ANSYS Release 11.

### 5.3.1 Análise dinâmica via TMC

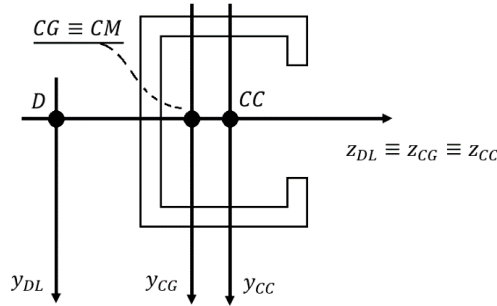
Para os pilares em núcleo formados por painéis – parede constituídos de chapas metálicas, tem-se a coincidência em posicionamento do centro de gravidade ( $CG$ ) com o centro de massa ( $CM$ ), fato este decorrente da homogeneidade de propriedades mecânicas e oriundas do processo de usinagem do aço. Vide tal posicionamento na figura 5.18. Para o caso do pilar em duplo T observa-se que, quando da dupla simetria, o centro de torção coincide com o centro de gravidade. Porém para o caso do pilar em duplo T assimétrico basta utilizar na equação



(5.16) as matrizes de rigidez  $[J]$  e  $[S]$ , apresentado no item 2.8.2, mais especificamente com as matrizes  $[M_1]$  a  $[M_{10}]$  das páginas 111 e 112 desta tese.

E por último, para a seção do pilar em núcleo C, basta utilizar as matrizes presentes no item 2.8.1 (ver páginas 93 a 104 desta tese) para abastecer a equação (5.16).

**Figura 5.18: Posicionamento dos centros geométricos (CC, CG, CM e CT) na seção C**



Fonte: O Autor (2019)

Na equação (2.119) é apresentada a análise estática do problema dos painéis – parede, sob referencial no centro de gravidade. Assim para a inclusão da parcela dinâmica no centro de massa (o que coincide com o centro de gravidade, basta que se proceda a integração da pseudo – força inercial  $(m \cdot \ddot{z})$  ao longo do eixo longitudinal  $x$  do pilar de ponte. Assim, a equação diferencial, da análise dinâmica não amortecida dos painéis – parede, fica expressa por:

$$-[J] \cdot \{v''''\} + [S] \cdot \{v''\} + [M] \cdot \{\ddot{v}\} = \{V_f'\} \quad (5.16)$$

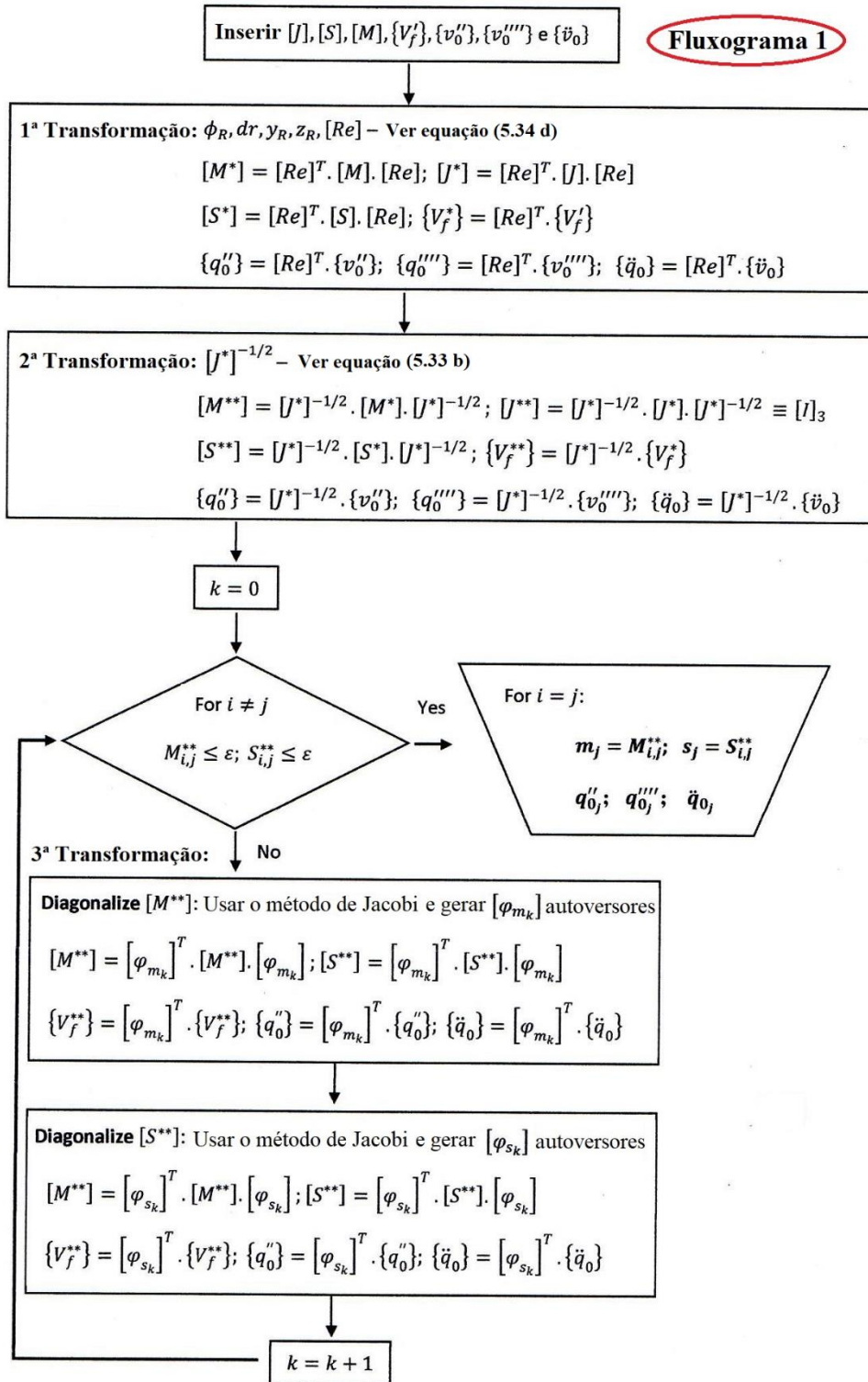
$$\text{com: } [M] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix}.$$

onde:  $I_p$  é o momento de inércia polar;  $m = M/H$  é a massa distribuída na altura  $H$  e  $\{\ddot{v}\}$  é o vetor de aceleração.

A equação diferencial, eq. (5.16), expressa a análise dinâmica dos painéis – parede metálicos, sendo escrita no centro de gravidade. Desse ponto, faz-se o desacoplamento do sistema mediante três transformações de coordenadas. A primeira transformação é realizada mediante matriz de translação e rotação  $[Re]$  do sistema de coordenadas  $\{v\}$  com eixos centroidais  $y_{CG}$  e  $z_{CG}$  para o sistema de coordenadas  $\{x\}$  com eixos  $y_R$  e  $z_R$ . Nesta primeira transformação, o sistema fica escrito no referencial de rigidez principal  $[J^*]$ . Enquanto na segunda transformação translada-se o sistema de coordenadas  $\{x\}$  para o sistema  $\{y\}$ , implicando no desacoplamento da matriz de rigidez  $[J]$ , e reescrita no formato da matriz identidade de ordem 3.

Por fim, para que o sistema fique desacoplado faz-se necessário aplicar um processo iterativo para diagonalizar, até certa tolerância  $\varepsilon$  (de magnitude), as matrizes  $[M^{**}]$  e  $[S^{**}]$ . Conforme é apresentado no fluxograma de desacoplamento, ver figura 5.19.

**Figura 5.19: Fluxograma 1 de desacoplamento do sistema de equações diferenciais para a análise dinâmica dos painéis – parede metálicos**



Fonte: O Autor (2019)

Após o processo de diagonalização do sistema de equações diferenciais, eq. (5.16), via fluxograma 1 apresentado na figura 5.19, consegue-se escrever as respostas para as referidas equações diferenciais. Em tal resolução, utiliza-se um conjunto de equações diferenciais desacopladas no referencial generalizado, resultando em:

$$-\frac{\partial^4 q_j(x, t)}{\partial x^4} + s_j \cdot \frac{\partial^2 q_j(x, t)}{\partial x^2} + m_j \cdot \frac{\partial^2 q_j(x, t)}{\partial t^2} = \bar{V}_{f_j}(x, t) \quad (5.17)$$

### a) Modos de Vibração

A equação diferencial parcial (EDP) apresentada na equação (5.17) é função do espaço  $x$  e do tempo  $t$ . Para tal resolução, adota-se o Método da Superposição Modal, no qual a função de duas variáveis  $q(x, t)$  será expressa pelo produto de duas funções parciais  $u(x)$  e  $g(t)$  definidas em cada um dos campos, espaço ( $x$ ) e temporal ( $t$ ). A função espacial adimensional  $u\left(\frac{x}{H}\right)$  para consequente análise dos modos de vibração, valendo-se da condição de apoio do pilar como engastado na base e livre na extremidade superior, é expressa por:

$$u\left(\frac{x}{H}\right) = B_1 \cdot \cosh\left(\lambda_1 \cdot \frac{x}{H}\right) + B_2 \cdot \sinh\left(\lambda_1 \cdot \frac{x}{H}\right) + B_3 \cdot \cos\left(\lambda_2 \cdot \frac{x}{H}\right) + B_4 \cdot \sin\left(\lambda_2 \cdot \frac{x}{H}\right) \quad (5.18)$$

onde:  $B_2 = -B_1 \cdot k_u$ ;  $B_3 = -B_1$ ;  $B_4 = \lambda_1 \cdot (\lambda_2)^{-1} \cdot B_1 \cdot k_u$ ;  $\lambda_1, \lambda_2$  são as raízes da equação característica da EDO homogênea no espaço  $x$ ;  $\omega^2$  é a constante de separação de variáveis e  $k_u = [\lambda_1^2 \cdot \sinh(\lambda_1) + \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \sin(\lambda_2)]^{-1} \cdot [\lambda_1^3 \cdot \cosh(\lambda_1) + \lambda_2^2 \cdot \cos(\lambda_2)]$ .

A equação transcendental, cujas raízes exprimem os modos de vibração da estrutura, é:

$$\frac{2 \cdot \lambda_1^3 \cdot \lambda_2^3}{\lambda_1 \cdot \lambda_2^5 + \lambda_1^5 \cdot \lambda_2} \cdot \cosh(\lambda_1) \cdot \cos(\lambda_2) + \frac{\lambda_1^2 \cdot \lambda_2^4 - \lambda_1^4 \cdot \lambda_2^2}{\lambda_1 \cdot \lambda_2^5 + \lambda_1^5 \cdot \lambda_2} \cdot \sinh(\lambda_1) \cdot \sin(\lambda_2) = -1 \quad (5.19)$$

Cuja frequência do modo de vibração  $i$  é  $\omega_i^*$  e o período  $T_i^*$ , são:

$$\omega_i = \frac{\omega_i^*}{H^2} = \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{H^2} \left[ \frac{\text{rad}}{s} \right] \quad (5.20 a)$$

$$f_i^* = \frac{\omega_i^*}{2\pi} \text{ [Hz]} \quad (5.20 b)$$

$$T_i = T_i^* \cdot H^2 = \frac{2\pi}{\lambda_1 \cdot \lambda_2} \cdot H^2 \quad (5.20 c)$$

$$\lambda = H \cdot \sqrt{s_j} \quad (5.20 d)$$

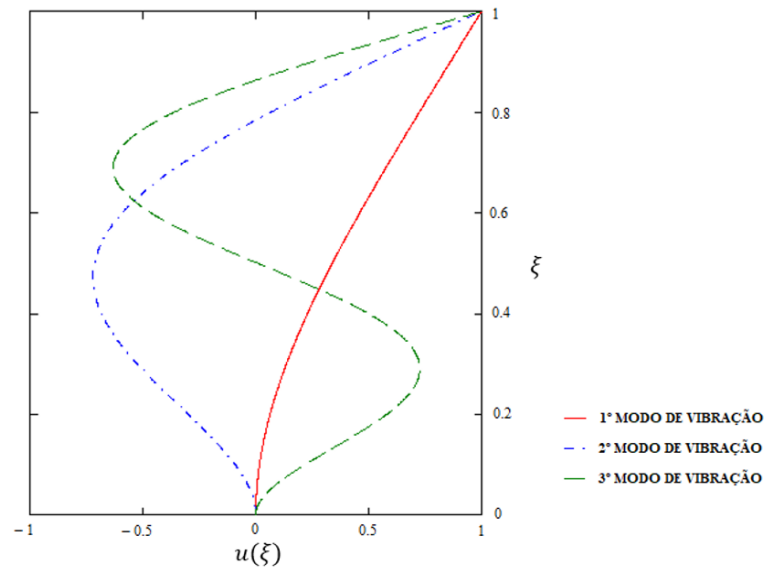
Com a transformação das funções trigonométricas contidas na equação (5.19), por série de potência com 11 termos, é possível obter os sete primeiros modos de vibração do pilar em núcleo estrutural. Admite-se o pilar com base engastada e topo livre e na tabela 5.3 apresentam-se parâmetros para determinação dos modos de vibração.

**Tabela 5.3 – Frequência e período em função do modo de vibração e  $\lambda$**

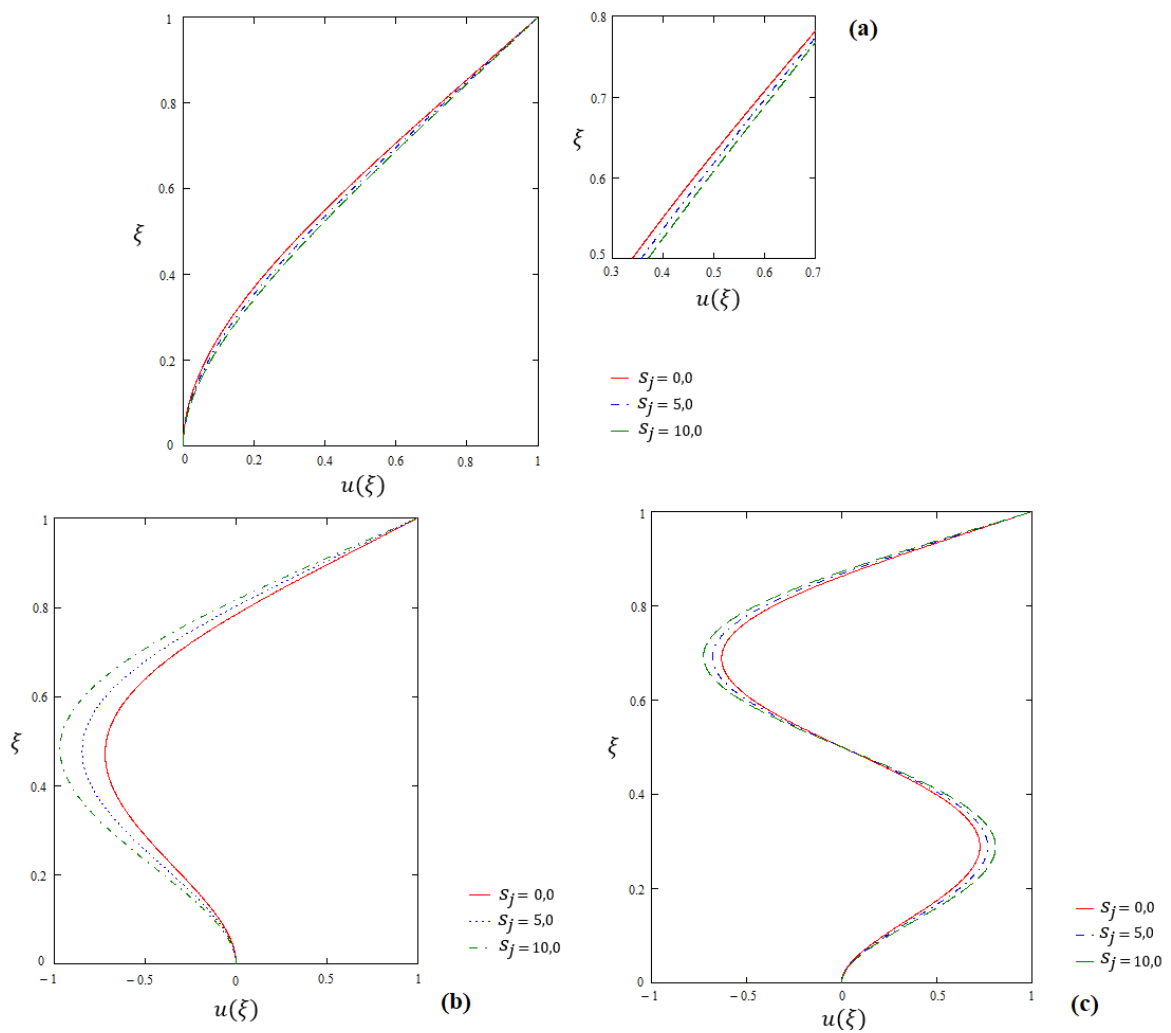
$\lambda$	Modo	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$	$i = 7$
0,0	$\lambda_1$	1,87510	4,69409	7,85483	9,08911	10,02092	11,68901	14,62618
	$\lambda_2$	1,87510	4,69409	7,85483	9,08911	10,02092	11,68901	14,62618
	$\omega_i^*$	3,51600	22,03448	61,69835	84,61192	105,97714	136,63295	213,92514
	$T_i^*$	1,78703	0,28515	0,10184	0,07606	0,05929	0,04599	0,02937
	$f_i^*$	0,55959	3,50690	9,81960	13,46640	16,86790	21,74580	34,04724
	$\lambda_i^{(a)}$	1,87510	4,69410	7,85550	10,99600	-----	-----	-----
	% $\Delta\lambda$	0,00000%	0,00021%	0,00853%	17,3417%	-----	-----	-----
0,5	$\lambda_1$	1,92738	4,73666	7,92626	9,11768	10,04144	11,69751	14,62569
	$\lambda_2$	1,79298	4,68358	7,89466	9,09022	10,01651	11,67612	14,60859
	$\omega_i^*$	3,45576	22,18454	62,57510	82,88171	100,58021	136,58151	213,66066
	$T_i^*$	1,81818	0,28322	0,10041	0,07581	0,06247	0,04600	0,02941
	$f_i^*$	0,55000	3,53082	9,95917	13,19087	16,00768	21,73913	34,00204
1,0	$\lambda_1$	1,98334	4,67319	7,89001	9,14477	10,06085	11,73094	15,10577
	$\lambda_2$	1,71279	4,56494	7,82638	9,08993	10,01103	11,68824	15,07263
	$\omega_i^*$	3,39704	21,33285	61,75023	83,12531	100,71946	137,11404	227,68374
	$T_i^*$	1,84961	0,29453	0,10175	0,07559	0,06238	0,04582	0,02760
	$f_i^*$	0,54065	3,39524	9,82801	13,22926	16,03078	21,82453	36,23188
5,0	$\lambda_1$	2,52714	5,10929	8,16649	9,37042	10,22620	11,77672	14,62109
	$\lambda_2$	1,17747	4,59400	7,85440	9,09971	9,97874	11,56249	14,56249
	$\omega_i^*$	2,97563	23,47208	64,14286	85,26813	102,04455	136,16819	211,26148
	$T_i^*$	2,11155	0,26769	0,09796	0,07369	0,06157	0,04614	0,02974
	$f_i^*$	0,47359	3,73566	10,20825	13,57036	16,24168	21,67317	33,62475
10,0	$\lambda_1$	3,25746	5,50391	8,42839	9,64266	10,43138	11,87014	14,61565
	$\lambda_2$	0,78169	4,50478	7,81267	9,10938	9,94051	11,44116	14,26945
	$\omega_i^*$	2,54634	24,79389	65,84820	87,83870	103,69321	135,80821	208,55730
	$T_i^*$	2,46754	0,25342	0,09542	0,07153	0,06059	0,04627	0,03013
	$f_i^*$	0,40526	3,94602	10,47998	13,98015	16,50437	21,61228	33,18951
20,0	$\lambda_1$	6,10829	8,61531	9,29340	10,43048	11,65087	12,06984	14,60359
	$\lambda_2$	4,16067	7,36367	8,14661	9,42311	10,75838	11,21076	13,90197
	$\omega_i^*$	25,41460	63,44026	75,70972	98,28751	125,34450	135,31202	203,01871
	$T_i^*$	0,24723	0,09904	0,08299	0,06393	0,05013	0,04643	0,03095
	$f_i^*$	4,04482	10,09693	12,04964	15,64211	19,94813	21,53780	32,31018
Onde: $\lambda_i^{(a)}$ é a raiz apresentada em Kiseliov (1983, p. 172), isso no capítulo destinado a ações dinâmicas em vigas de seção constante. Assim tais valores podem validar a formulação desta tese para $s_j = 0$ (sem lintéis).								

Fonte: O Autor (2019)

Na figura 5.20 é apresentado, para  $s_j = 0$ , a mudança da linha elástica nos três primeiros modos de vibração. Na figura 5.21 (a) observa-se o primeiro modo de vibração em termos de  $\lambda$ , já na fig. 5.21 (b) é apresentado o segundo modo e por fim, na figura 5.21 (c) consta o terceiro modo de vibração. Observa-se, ainda na Tab. 5.3, aproximações de 0,0002 % e de 0,008 % nos 2º e 3º modos (respectivamente). Tal constatação é procedida com base em Kiseliov (1983, p. 172).

**Figura 5.20: Três primeiros modos de vibração do pilar em núcleo com base engastada**

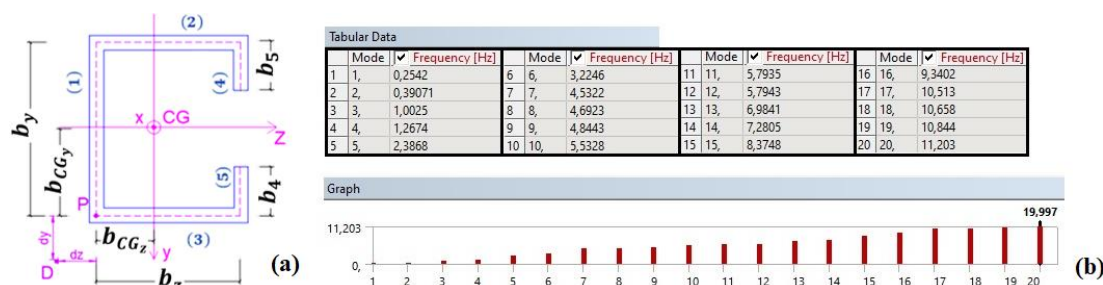
Fonte: O Autor (2019)

**Figura 5.21: Modos de vibração: (a) primeiro, (b) segundo, (c) terceiro**

Fonte: O Autor (2019)

**EXEMPLO 5.2:** A fim de exemplificar e verificar a formulação procedida para vibração de pilares com paredes finas (item 5.3.1 desta tese) modelou-se um pilar metálico no software ANSYS Release 11. Para tal, empregou-se 100 metros de altura e painéis – parede com dimensões:  $b_1 = b_2 = b_3 = 3,45\text{ m}$ ,  $b_4 = b_5 = 1,00\text{ m}$ , espessura  $t = 0,15\text{ m}$  e paredes ortogonais entre si. Notação adotada baseia-se na figura 5.5, vide também na fig. 5.22. As dimensões em planta são baseadas na chapa metálica grossa fabricada pela Gerdau e com espessura máxima de 15 centímetros e comprimento de 3,6 metros. Na modelagem em ANSYS foram utilizados 395.954 nós e 56.028 elementos finitos para o pilar sem lintéis, e 407.514 nós e 54.428 EF no pilar contraventado. As malhas de EF possuem 99,81 % de qualidade.

**Figura 5.22: Pilar metálico em núcleo estrutural: (a) seção de paredes finas e (b) frequências de vibração via modelagem no software ANSYS Release 11**



Fonte: O Autor (2019)

Na tabela 5.4 é apresentada a comparação entre os dois primeiros modos de vibração à flexão, quanto à mobilização dos lintéis. Analisando o cálculo manual, via tabela 5.3, em detrimento da simulação computacional no ANSYS Release 11, ver figura 5.23 (b), (e) e (f). Ressalta-se que o cálculo manual é procedido para pilar metálico sem lintéis, logo  $s_j = 0$ . A ponderação por  $\alpha = 2/3$  para as frequências via TMC é explicada na página 222, desta tese.

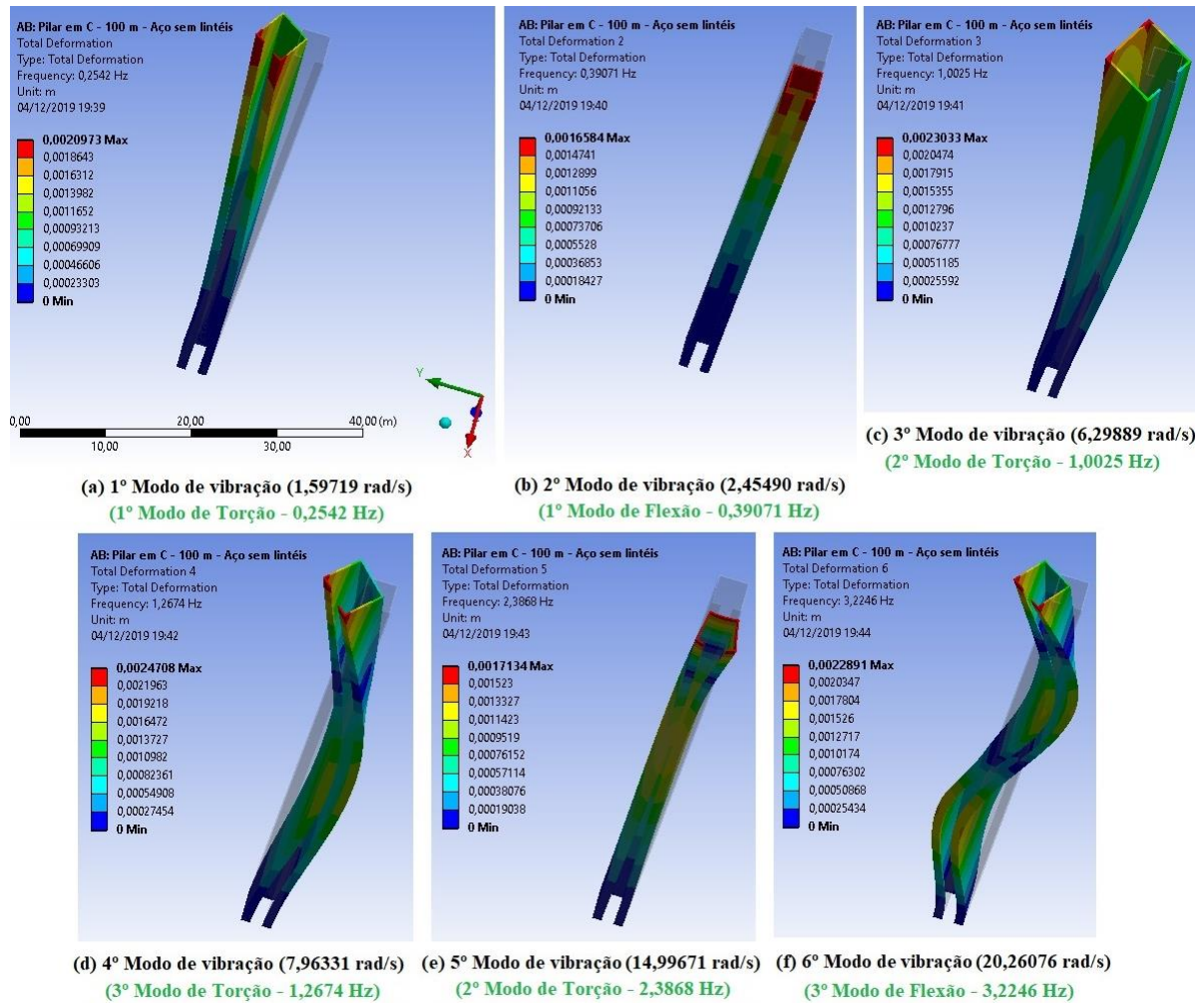
**Tabela 5.4 – Comparação dos três primeiros modos de vibração à flexão, via ANSYS**

Frequência à flexão	cálculo manual – via tabela 5.3	Simulação via ANSYS	$\Delta$ (%)
1 <sup>a</sup>	$\frac{2}{3} \cdot 0,56 = 0,37\text{ Hz}$	0,39 Hz	5,41
2 <sup>a</sup>	$\frac{2}{3} \cdot 3,51 = 2,34\text{ Hz}$	2,39 Hz	2,14

Fonte: O Autor (2019)

tais aproximações são devidas a resolução da eq. (5.19) com 11 termos da série de potência. Porém ao aumentar o número de termos da série, a trabalhabilidade do Mathcad versão estudantil é ultrapassada. Mesmo com a limitação do software na resolução da equação transcendental, eq. (5.19), verificam-se excelentes resultados nos dois primeiros modos de vibração. Observa-se ainda, que para pilares de seção maciça ( $s_j = 0$ ) a convergência é total no primeiro modo de vibração.

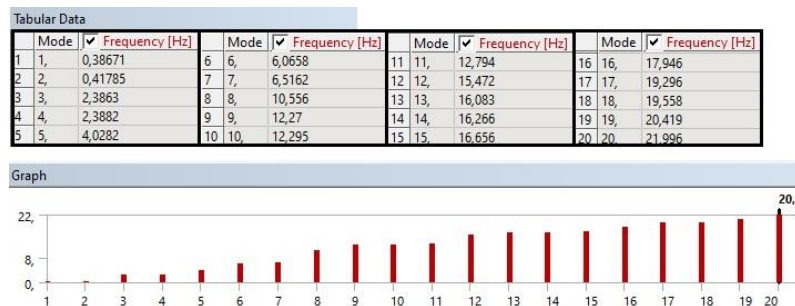
**Figura 5.23: Modos de vibração via modelagem no software ANSYS Release 11, para pilar metálico com seção aberta de paredes finas**



Fonte: O Autor (2019)

Na figura 5.24 são apresentados os vinte primeiros modos de vibração para o pilar metálico da figura 5.22.

**Figura 5.24: Vinte primeiros modos de vibração via modelagem no software ANSYS 2019 R1 versão acadêmica, para pilar metálico com seção contraventada por lintéis**

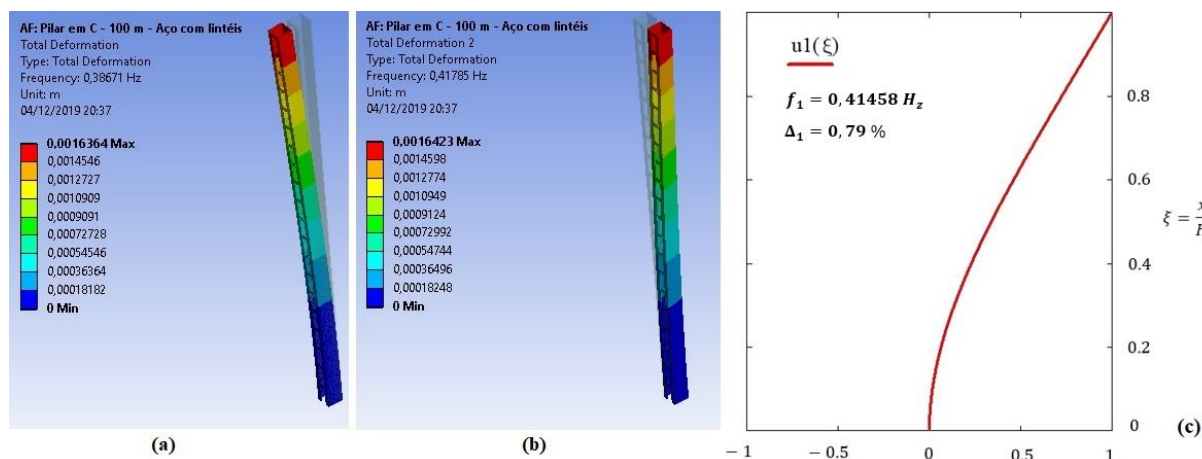


Fonte: O Autor (2019)



Na Figura 5.25 são expostos os primeiros modos de vibração nas duas direções centroidais, sendo a frequência de ativação dos lintéis à flexão ( $f_1$ ) de valor 0.42 Hz. Via processamento manual, operacionalizado pela solução da equação transcendental (5.19), obtém-se  $f_1$  no valor de 0.47 Hz (ver Tabela 5.3 para  $\lambda_j = 8,55$ ), conforme figura 5.25 (c).

**Figura 5.25: 1º modo de vibração para pilar metálico contraventado por lintéis: (a) via ANSYS sem mobilizar os lintéis, (b) via ANSYS com mobilização à flexão dos lintéis e (c) via eq. (5.19)**



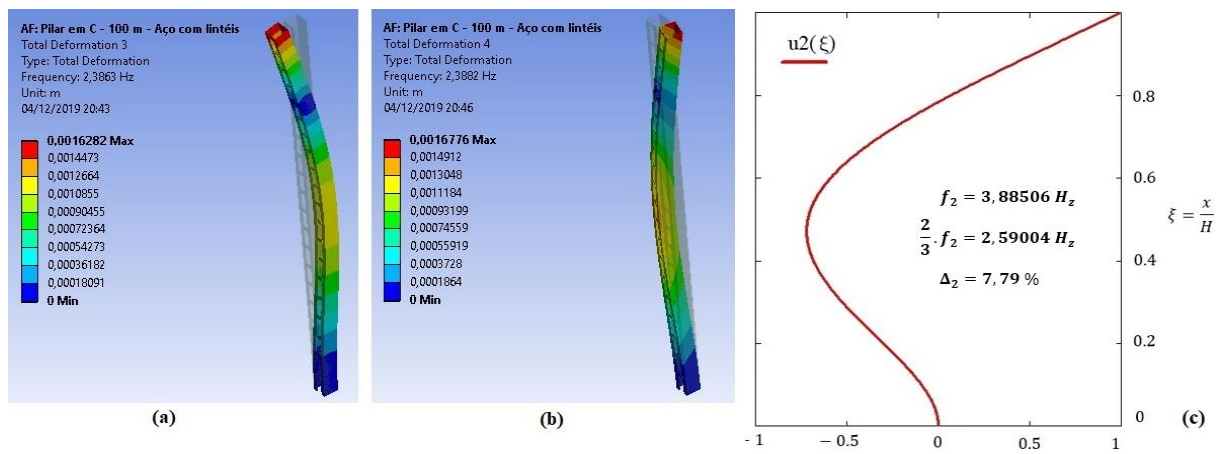
Fonte: O Autor (2019)

O valor de  $\lambda_j$  é obtido mediante cruzamento do apêndice D.2 (ver páginas D42 a D45), no processo de desacoplamento do sistema de EDP's, com a equação (5.20 d). Para este exemplo em questão, na página D45 constata-se  $s_1 = -7,31315 \times 10^{-3}$  para o primeiro modo de vibração. Por fim, para a altura de 100 metros do pilar, tem-se:  $\lambda_1 = 8,55$ . Conhecido  $\lambda = \lambda_1 = 8,55$  procede-se a interpolação dos valores de frequência para os quatro primeiros modos de vibração, isso através da tabela 5.3.

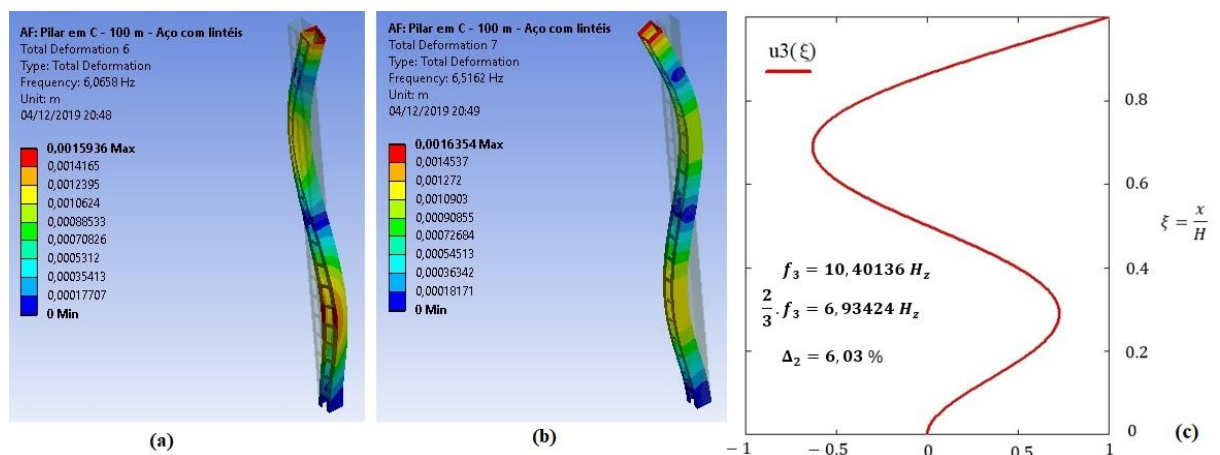
Baseado em tal procedimento, na figura 5.25 (c) observa-se convergência de 0,79 % para o 1º modo de vibração do pilar de paredes finas em formato de C. Já, nas figuras 5.26 (c), 5.27 (c) e 5.28 (c) observam-se aproximações da TMC com a modelagem no ANSYS Release 11, sob as ordens de grandeza: 7,79 %; 6,03 % e 11,30 % (respectivamente para os 2º, 3º e 4º modos de vibração). Apesar da divergência média 8 % nos 2º, 3º e 4º modos de vibração, pode-se afirmar que a modelagem do pilar via TMC é satisfatória por dois motivos. O primeiro motivo é que o dimensionamento estrutural do pilar é procedido mediante estado de maiores deformações, o 1º modo, e neste verifica-se convergência com ordem de exatidão em menos de 1 %. A segunda justificativa de eficácia da modelagem dinâmica via TMC é que através desta ferramenta pode-se conferir a ordem de grandeza dos resultados obtidos via modelagem em softwares comerciais.



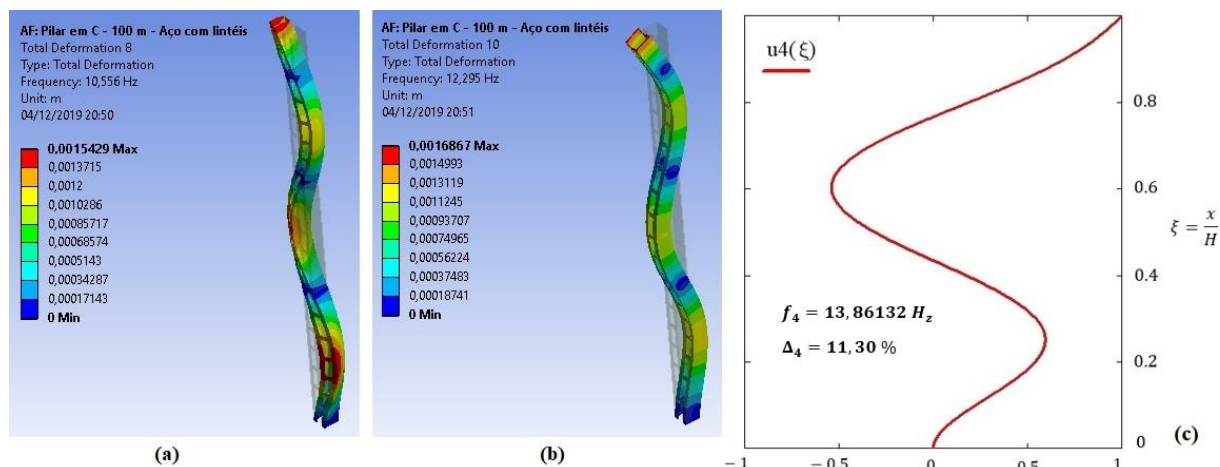
**Figura 5.26: 2º modo de vibração para pilar metálico contraventado por lintéis: (a) via ANSYS sem mobilizar os lintéis, (b) via ANSYS com mobilização à flexão dos lintéis e (c) via eq. (5.19)**



**Figura 5.27: 3º modo de vibração para pilar metálico contraventado por lintéis: (a) via ANSYS sem mobilizar os lintéis, (b) via ANSYS com mobilização à flexão dos lintéis e (c) via eq. (5.19)**



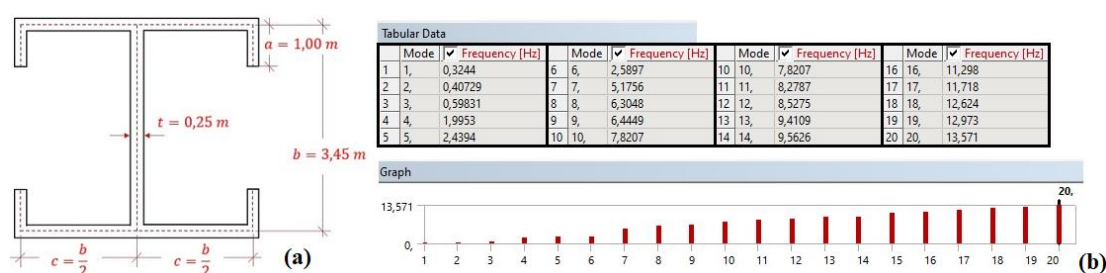
**Figura 5.28: 4º modo de vibração para pilar metálico contraventado por lintéis: (a) via ANSYS sem mobilizar os lintéis, (b) via ANSYS com mobilização à flexão dos lintéis e (c) via eq. (5.19)**



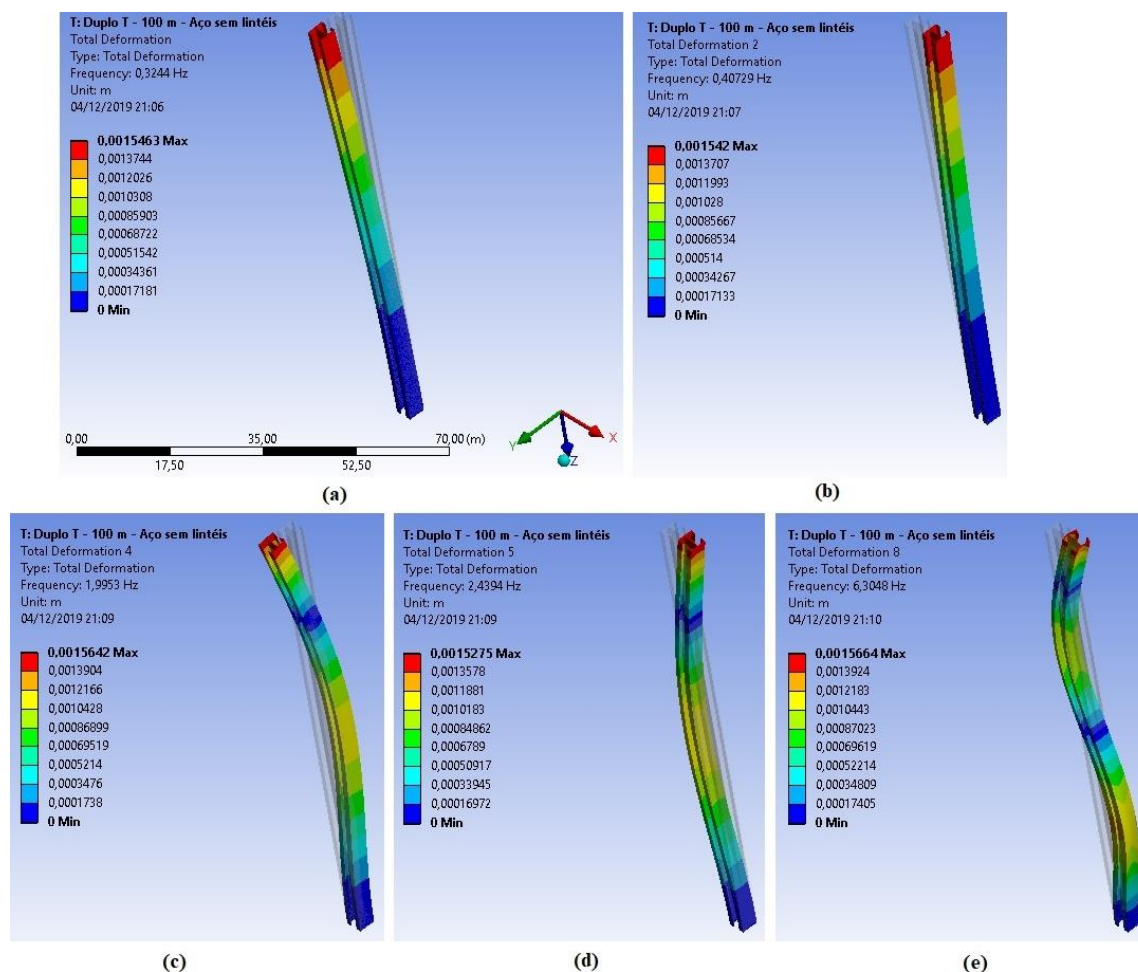
Fonte: O Autor (2019)

**EXEMPLO 5.3:** Procedeu-se a modelagem no software ANSYS, Release 11, do pilar exposto no exemplo 5.2, adaptando a seção transversal para a ocorrência do duplo T com dupla simetria. Apresentando-se na figura 5.29 a geometria de tal pilar metálico. E nas figuras 5.30 e 5.31 são apresentados os primeiros modos de vibração. A qualidade da malha de EF empregada no ANSYS foi de 99,66 %, com 470.738 nós e 66.700 EF para o pilar em duplo T sem lintéis. Bem como, foram utilizados 69.500 EF e 493.853 nós na modelagem do pilar contraventado.

**Figura 5.29: Pilar metálico em duplo T: (a) geometria da seção transversal e (b) frequências de vibração via modelagem no ANSYS Release 11, para pilar metálico sem lintéis**

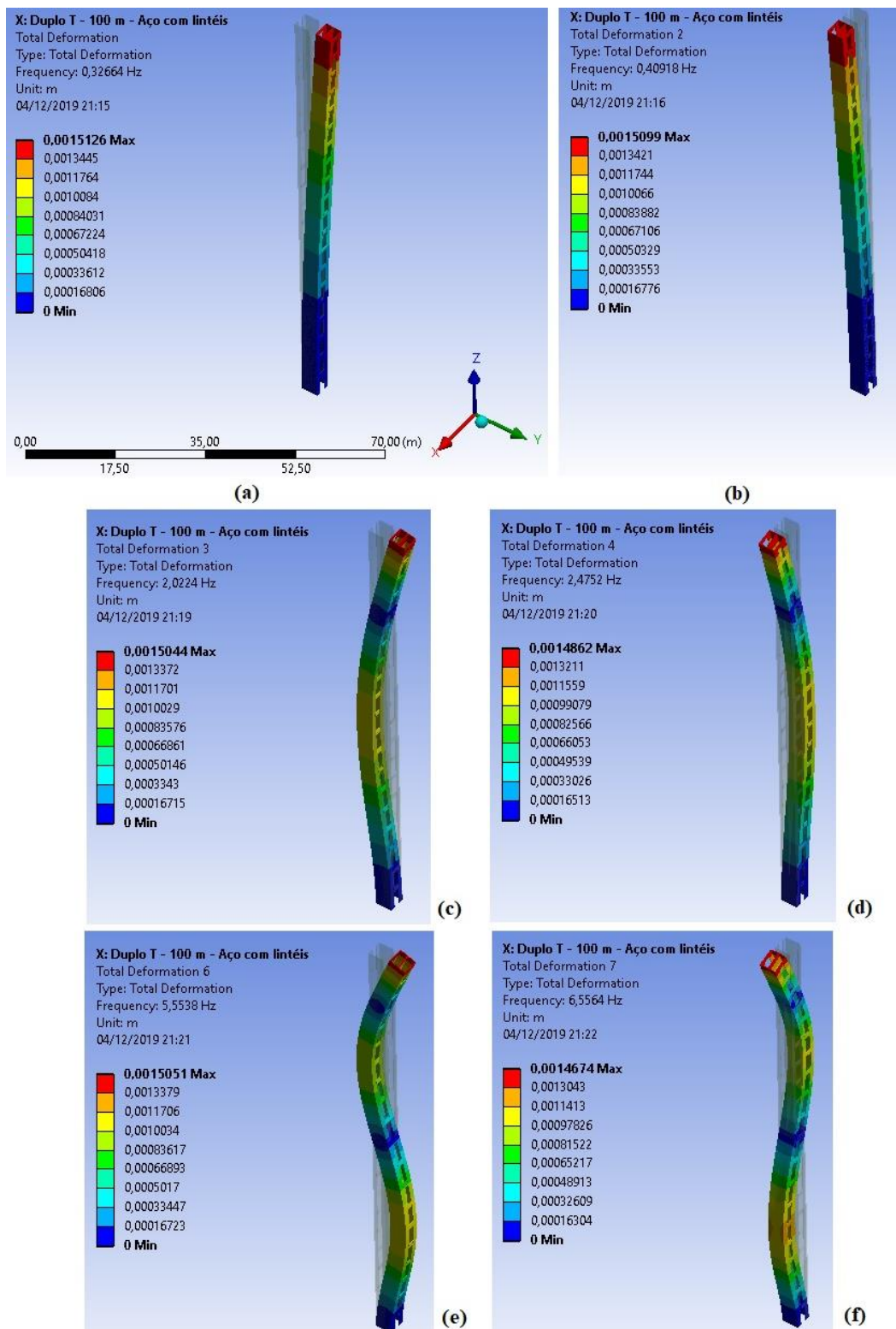


**Figura 5.30: Modos de vibração do pilar metálico em duplo T sem lintéis via modelagem no ANSYS: 1º modo em (a) x, (b) y; 2º modo em (c) x, (d) y e (e) 3º modo em y**



Fonte: O Autor (2019)

**Figura 5.31: Modos de vibração do pilar metálico em duplo T contraventamento por lintéis via modelagem no ANSYS: 1ª modo em (a) x, (b) y, 2º modo em (c) x, (d) y, 3º modo em (e) x e (f) y**



Fonte: O Autor (2019)

o pilar modelado no ANSYS possui lintéis com espessura  $e_L$  de 25 cm, altura  $h_L = 1,00$  metro. O espaçamento dos referidos lintéis é de 5,00 metros (de eixo a eixo).

### b) Vibração forçada não amortecida

Para a vibração forçada, ver equação (5.17), expressa-se o esforço cortante externo  $\mathcal{V}_f(x, t)$  dependente do espaço  $x$  e do tempo  $t$  como o produto de duas sub – funções  $\mathcal{V}_h(x)$  e  $\mathcal{V}_g(t)$ . E após aplicar  $q(x, t) = u(x) \cdot g(t)$ , em conjunto com as condições de ortogonalidade e a devida integração ao longo do comprimento do pilar de  $x = 0$  até  $x = H$ , escreve-se a equação diferencial temporal, como:

$$\ddot{g}_j(t) + k_g \cdot g_j(t) = \frac{1}{M_k^*} \cdot \int_0^H [u_j(x) \cdot \mathcal{V}_h(x) \cdot \mathcal{V}_g(t)] dx \quad (5.21)$$

onde:  $k_g = \gamma_j^2 \cdot (s - \omega_j^2)$ ;

$\gamma_j^2 = m^{-1} \cdot \omega_j^2$  e

$M_k^*$  é a massa modal.

Adotando-se a variação do esforço cortante ao longo do tempo  $\mathcal{V}_g(t)$  mediante função harmônica senoidal, obtém-se como solução  $g_k(t)$ , a seguinte:

$$g_k(t) = \frac{Q_k}{(k_g^2 - \bar{\omega}^2) \cdot M_k^*} \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t) \quad (5.22)$$

sendo;  $\bar{\omega}$  a frequência harmônica do esforço cortante ao longo do tempo  $\mathcal{V}_g(t)$ .

Ao utilizar as condições iniciais  $q_0$  e  $\dot{q}_0$  para o espaço  $x$  e no tempo inicial ( $t = 0$ ), bem como considerando-se as condições de ortogonalidade modal, determina-se a solução geral da EDP apresentada na equação (5.17), como:

$$q(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ u_j(x) \cdot [G_{1j} \cdot \sin(\gamma_j \cdot t) + G_{2j} \cdot \cos(\gamma_j \cdot t) + G_{3j} \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t)] \right\} \quad (5.23)$$

onde:  $q_0 = q(x, t = 0)$  ;  $\dot{q}_0 = \dot{q}(x, t = 0)$  ;  $G_{3j} = [(k_g^2 - \bar{\omega}^2) \cdot M_k^*]^{-1} Q_j$ ;

$$G_{1j} = \frac{1}{M_k^*} \cdot \int_0^H [u_j(x) \cdot m \cdot q_0] dx \quad \text{e}$$

$$G_{2j} = \frac{1}{\gamma_j \cdot M_k^*} \cdot \left\{ \int_0^H [u_j(x) \cdot m \cdot \dot{q}_0] dx - \frac{\bar{\omega} \cdot Q_j}{(k_g^2 - \bar{\omega}^2)} \right\}.$$

### c) Vibração forçada amortecida

Baseado em Awruch e González (1993), o equacionamento da vibração amortecida de vigas, considerando o ângulo de distorção  $\gamma_{xy}$ , é procedido conforme apresentado em Schapery (1969), Silva (2004, p. 65 – 70) e Meneses (2015, p.13). E para tal, aplica-se o modelo de Kelvin [ $\sigma_x = E \cdot (\varepsilon_x + c \cdot \dot{\varepsilon}_x)$ ] para tensões e deformações, e ao utilizar a definição do momento fletor, chega-se a EDP para o problema da viga de Euler sob vibração, expressa por:

$$(E \cdot I) \cdot \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + c \cdot (E \cdot I) \cdot \frac{\partial^5 v}{\partial t \cdot \partial x^4} + m \cdot \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = \mathcal{V}_h(x) \cdot \mathcal{V}_g(t) \quad (5.24)$$

Agora, procede-se a analogia do problema de viga de Euler, ver equação (5.24), adaptada corretamente para a teoria dos painéis – parede apresentada na equação (5.17). Observando-se que a parcela do amortecimento  $c$  é proporcional a  $\frac{\partial^4 q_j(x,t)}{\partial x^4}$ , ficando assim expressa, por:

$$-\frac{\partial^4 q_j(x,t)}{\partial x^4} + s_j \cdot \frac{\partial^2 q_j(x,t)}{\partial x^2} + c_j \cdot \frac{\partial^5 q_j(x,t)}{\partial x^4 \partial t} + m_j \cdot \frac{\partial^2 q_j(x,t)}{\partial t^2} = \mathcal{V}_h(x) \cdot \mathcal{V}_g(t) \quad (5.25)$$

E mediante processo de resolução da eq. (5.17), escreve-se a solução geral para a EDP da vibração amortecida dos painéis – parede, expressa na equação (5.25), como:

$$q(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ u_j(x) \cdot \left[ G_{1j}^c \cdot \sin(\gamma_j \cdot t) + G_{2j}^c \cdot \cos(\gamma_j \cdot t) + G_{3j}^c \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t) \right] \right\} \quad (5.26)$$

onde:  $G_{1j}^c = \frac{1}{M_k^*} \cdot \int_0^H [u_j(x) \cdot m \cdot q_0] dx$  ;  $G_{3j}^c = [(k_3^2 - c \cdot k_1^2 \cdot \bar{\omega} - \bar{\omega}^2) \cdot M_k^*]^{-1} Q_j$ ;

$$G_{2j}^c = \frac{1}{\gamma_j \cdot M_k^*} \cdot \left\{ \int_0^H [u_j(x) \cdot m \cdot \dot{q}_0] dx - \frac{\bar{\omega} \cdot Q_j}{(k_3^2 - c \cdot k_1^2 \cdot \bar{\omega} - \bar{\omega}^2)} \right\}; \quad \mathcal{V}_g(t) = \sin(\bar{\omega} \cdot t);$$

$$k_1^2 = \frac{(\omega^2 - c \cdot \omega^4)}{m}; \quad k_2^2 = \frac{\gamma^2 \cdot m - c \cdot \omega^4}{m}; \quad \gamma^2 = \frac{\omega^2 - c \cdot \omega^2}{m}; \quad k_3^2 = s \cdot k_2^2 - k_1^2;$$

$\bar{\omega}$  é a frequência da solicitação do esforço cortante  $\mathcal{V}_g(t)$ , e no tempo  $\mathcal{V}_h(x)$  equivale a função do esforço cortante, onde  $\mathcal{V}_{ext}$  consta na eq. (2.118), após passar pelo processo de diagonalização do sistema (ver fluxograma 1, figura 5.19).

## 5.4. FLEXO – TORÇÃO EM PILARES DE CONCRETO ARMADO

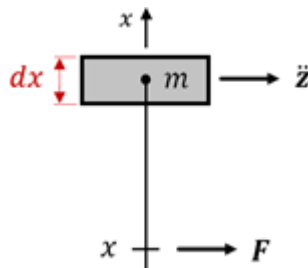
### 5.4.1 Formulação dinâmica

A análise dinâmica dos pilares de concreto armado é procedida nesse item da tese via Técnica do Meio Contínuo, cuja hipótese principal é considerar a massa da estrutura de forma distribuída ao longo da altura (ver figura 5.4). Conforme observa-se em Laredo (1977, p.273 – 283), a modelagem de elementos estruturais através da TMC conduz a valores satisfatórios para o primeiro modo de vibração. Como almeja-se dimensionar a estrutura, ao obter bons resultados para o 1º modo de vibração é possível caracterizar o cenário de maiores deformações e os consequentes esforços solicitantes.

A precisão dos valores no primeiro modo de vibração, conforme postulado por Laredo (1977), é observada na simulação do pilar metálico (ver tabela 5.3). Daí, nesse subitem destinado a análise de pilares de concreto armado, adota-se a TMC e toma-se a massa do concreto e a massa das armaduras (longitudinal e transversal) como distribuídas no meio contínuo (altura do pilar). Utilizando-se assim, a seção transversal homogeneizada para o posicionamento do centro de massa (ver item 5.4.4).

A análise estática dos Painéis – Parede, apresentada na equação (2.119), é expressa com referencial no centro de gravidade (*CG*). Porém, na análise dinâmica, a parcela da pseudo – força inercial é função da massa distribuída  $m$  e referenciada no centro de massa. Vide fig. 5.32 com a massa sob aceleração  $\ddot{z}$ .

**Figura 5.32: Massa distribuída submetida à aceleração  $\ddot{z}$**



Fonte: O Autor (2019)

A mencionada pseudo – força  $F$ , é:



$$F = \int_x^H (m \cdot \ddot{z}) dx \quad (5.27)$$

onde:  $m$  – massa distribuída,  $M$  – massa total do pilar,  $H$  – altura do pilar e  $m = M/H$ .

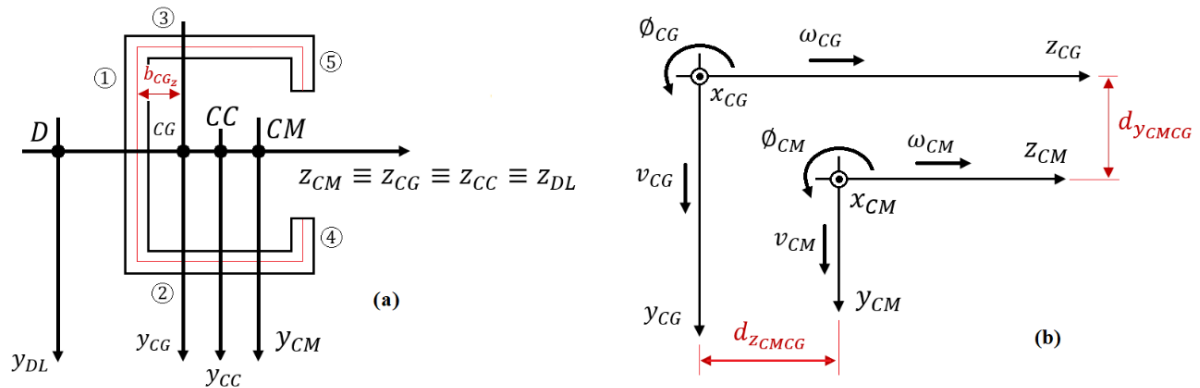
Para a estrutura tridimensional, tem-se:

$$\{dF\} = [M] \cdot \{\ddot{v}\} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{v} \\ \ddot{\omega} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} \quad (5.28)$$

onde:  $I_p$  – momento de inércia polar e  $[M]$  – matriz de massa no  $CM$ .

Devido ao fato da parcela dinâmica expressa na equação (5.28) estar referenciada no centro de massa ( $CM$ ) e a parcela estática no centro de gravidade ( $CG$ ) da seção bruta de concreto armado, faz-se necessária a transformação de coordenadas do ( $CM$ ) para o ( $CG$ ). Vide fig. 5.33.

**Figura 5.33: Centros de massa e de gravidade: (a) posicionamento, (b) transformação de referencial do  $CM$  ao  $CG$**



Fonte: O Autor (2019)

A relação dos deslocamentos no centro de massa em detrimento do centro de gravidade, vale:

$$v_{CM} = v_{CG} - d_{z_{CMCG}} \cdot \phi_{CG} \quad (5.29 a)$$

$$\omega_{CM} = \omega_{CG} + d_{y_{CMCG}} \cdot \phi_{CG} \quad (5.29 b)$$

$$\phi_{CM} = \phi_{CG} \quad (5.29 c)$$

Matricialmente as equações (5.29), constituem a lei de transformação de coordenadas do centro de massa para o centro de gravidade, ficam expressas assim:

$$\{v_{CM}\} = [\bar{T}_M] \cdot \{v_{CG}\} \therefore \begin{Bmatrix} v_{CM} \\ \omega_{CM} \\ \phi_{CM} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -d_{z_{CMCG}} \\ 0 & 1 & d_{y_{CMCG}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_{CG} \\ \omega_{CG} \\ \phi_{CG} \end{Bmatrix} \quad (5.30)$$

sendo:  $\{v_{CM}\}$  – vetor de deslocamentos no centro de massa,  $\{v_{CG}\}$  – vetor de deslocamentos no CG e  $[\bar{T}_M]$  – matriz de transformação linear do CM para o CG.

Em decorrência da lei de transformação expressa na equação (5.30), reescreve-se a parcela da movimentação dos painéis – parede, equação (5.28), da seguinte forma:

$$\{dF_{CM}\} = [M] \cdot \{\ddot{v}_{CM}\} = [\bar{T}_M]^T \cdot [M] \cdot [\bar{T}_M] \cdot \{\ddot{v}_{CG}\} \quad (5.31)$$

Derivando-se a equação (2.119) e somando-se a equação (5.31), tem-se o sistema de equações diferenciais, que rege o problema dinâmico dos painéis – parede, expresso por:

$$-[J] \cdot \{v_{CG}''''\} + [S] \cdot \{v_{CG}''\} + [\bar{M}] \cdot \{\ddot{v}_{CG}\} = \{V_f'\} \quad (5.32)$$

sendo:  $[\bar{M}] = [\bar{T}_M]^T \cdot [M] \cdot [\bar{T}_M]$ , e  $[\bar{M}]$  é a Matriz de massa referenciada no CG.

## a) Desacoplamento dinâmico

### a.1) Procedimento 1

O primeiro procedimento apresentado consiste em reescrever o sistema de equações diferenciais (ver equação 5.32) no referencial principal da rigidez do pilar à flexão  $[J^*]$ , mediante transformação linear por matriz de rotação e translação  $[Re]$ . Em seguida, transforma-se  $[J^*]$  em  $[J^{**}]$  que equivale à matriz Identidade  $[I]$ , via pré-multiplicação e multiplicação por  $[J^*]^{-1/2}$  a fim de manter a simetria das demais matrizes, e garantir conseguinte ortogonalidade modal e poder usar matrizes transpostas no lugar de matrizes inversas. Por fim, diagonaliza-se  $[M^{**}]$  e  $[S^{**}]$  através de processo iterativo até que todos os termos fora das diagonais principais das matrizes sejam de módulo inferior a determinada tolerância  $\varepsilon$ , conforme é apresentado no fluxograma 2, ver figura 5.34.

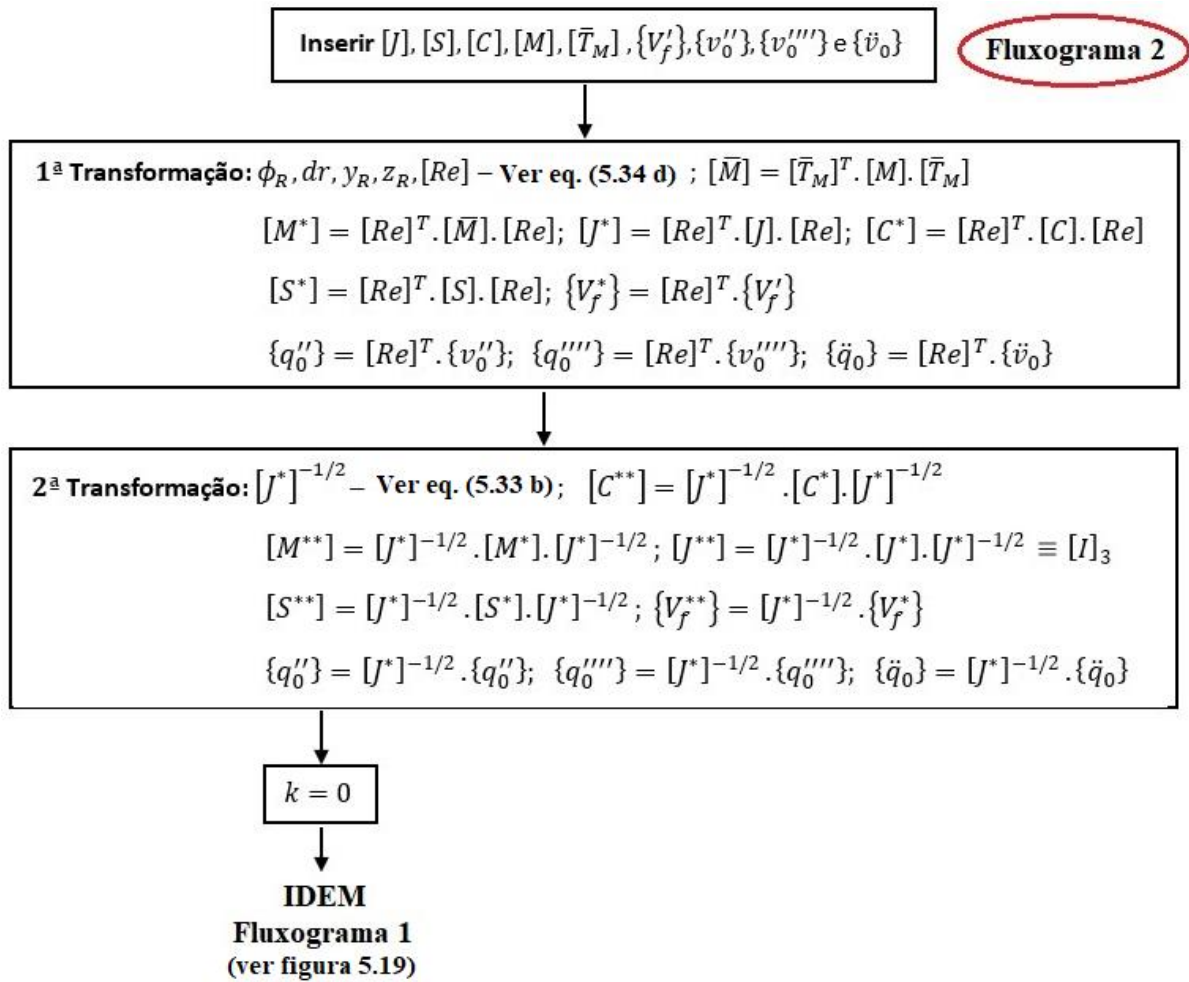
Faz-se relevante explicitar a nomenclatura usada na matriz  $[J^*]$  diagonalizada e a decorrente matriz  $[J^*]^{-1/2}$  elevada a  $-1/2$ . Escrevendo-se:



$$[J^*] = \begin{bmatrix} J_{11}^* & 0 & 0 \\ 0 & J_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & J_{33}^* \end{bmatrix} \quad (5.33 a)$$

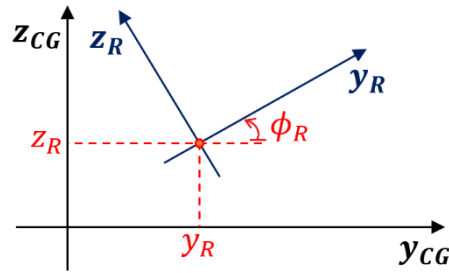
$$[J^*]^{-1/2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{J_{11}^*}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{J_{22}^*}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{J_{33}^*}} \end{bmatrix} \quad (5.33 b)$$

**Figura 5.34: Fluxograma 2 do desacoplamento dinâmico via Procedimento 1**



Fonte: O Autor (2019)

Ressalta-se que em tal procedimento, com base em Anastassiadis (1987, p. 16 – 20) e em Stamato (1978), a primeira transformação ocorre dos eixos centroidais ( $y_{CG}$  e  $z_{CG}$ ) para os eixos principais de inércia à flexão do pilar em formato de núcleo estrutural ( $y_R$  e  $z_R$ ), vide fig. 5.35.

**Figura 5.35: Referencial principal de inércia à flexão do pilar**

Fonte: O Autor (2019)

e expressa por:

$$\operatorname{tg}(2 \cdot \phi_R) = \frac{2 \cdot J_{1,2}}{J_{1,1} - J_{2,2}} \quad (5.34 a)$$

$$y_R = \frac{-J_{1,3} \cdot J_{1,2} + J_{2,3} \cdot J_{1,1}}{J_{1,1} \cdot J_{2,2} - (J_{1,2})^2} \quad (5.34 b)$$

$$z_R = \frac{-J_{1,3} \cdot J_{2,2} + J_{2,3} \cdot J_{1,2}}{J_{1,1} \cdot J_{2,2} - (J_{1,2})^2} \quad (5.34 c)$$

$$[Re] = \begin{bmatrix} \cos(\phi_R) & -\sin(\phi_R) & z_R \\ \sin(\phi_R) & \cos(\phi_R) & y_R \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.34 d)$$

O conjunto de EDP's desacopladas no referencial generalizado, para a vibração não amortecida dos painéis – parede, é:

$$-\frac{\partial^4 q_j(x, t)}{\partial x^4} + s_j \cdot \frac{\partial^2 q_j(x, t)}{\partial x^2} + m_j \cdot \frac{\partial^2 q_j(x, t)}{\partial t^2} = V_{fj}^0(x, t) \quad (5.35)$$

onde:  $s_j$  é o  $j$  – ésimo elemento da diagonal principal da matriz de rigidez à flexão dos lintéis  $[s]$ , já diagonalizada;  $m_j$  é o  $j$  – ésimo elemento para a matriz de massa  $[m]$ , já diagonalizada; e  $j$  é o  $j$  – ésimo modo de vibração da estrutura.

## a.2) Procedimento 2

Acrescenta-se o termo do amortecimento,  $[C] \cdot \{\dot{v}''''\}$ , através da matriz de amortecimento  $[C]$  constituída em termos proporcionais às demais matrizes. Assim, o sistema de EDP's para a vibração amortecida (viscosamente) dos painéis – parede é expresso por:

$$[\bar{M}] \cdot \{\ddot{v}_{CG}\} + [C] \cdot \{\dot{v}_{CG}''''\} + [S] \cdot \{v_{CG}''\} - [J] \cdot \{v_{CG}''''\} = \{V_f'\} \quad (5.36)$$

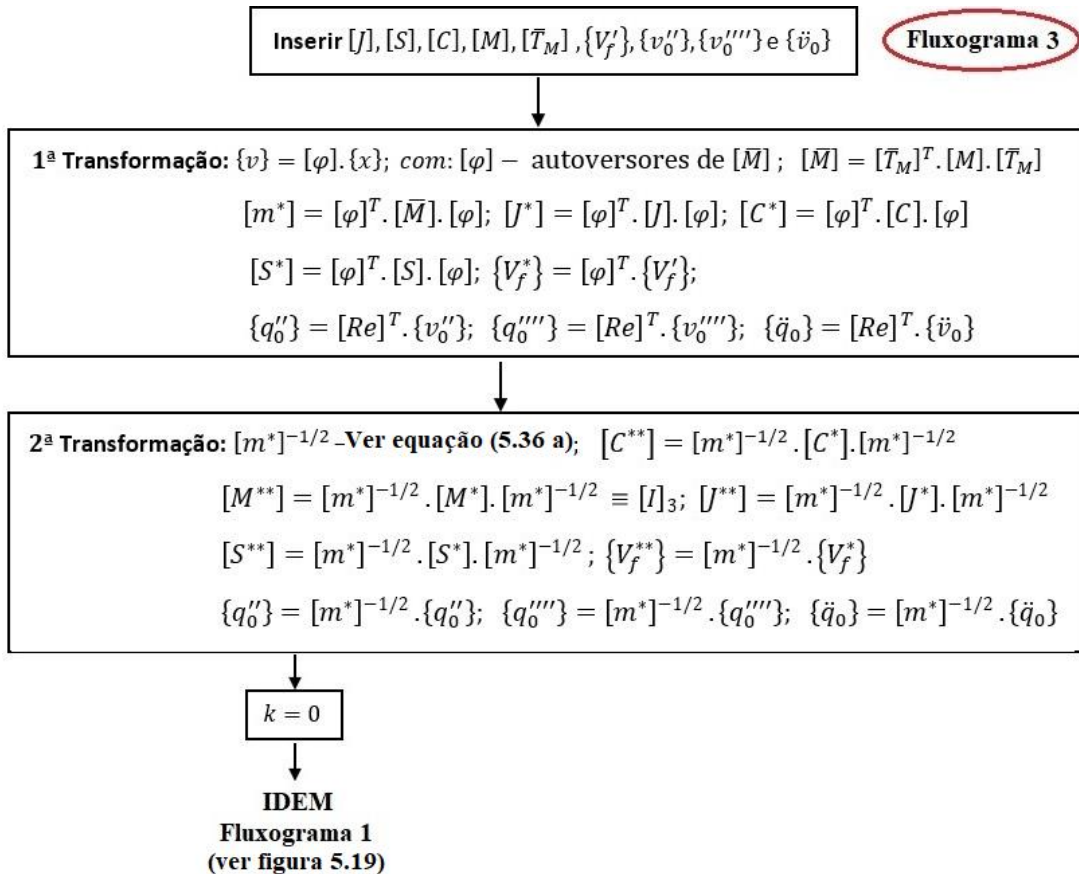
sendo:  $[C] = \alpha_M \cdot [\bar{M}] + \alpha_S \cdot [S] - \alpha_J \cdot [J]$ , e  $[C]$  é a matriz de amortecimento viscoso.

No presente desacoplamento, procedem-se três transformações de referencial, onde: a primeira transformação consiste em diagonalizar a matriz de massa  $[\bar{M}]$  que é referenciada no CG. Para tal diagonalização utiliza-se a rotina de diagonalização apresentada no item 2.6, o método de Jacobi. Já, na segunda transformação,  $[m^*]$  vira a matriz identidade  $[I]$  mediante transformação quadrática por  $[m^*]^{-1/2}$ . Por fim, na terceira transformação, aplica-se processo em “loop” para a diagonalização conjunta de  $[S^{**}]$  e  $[J^{**}]$  até certa tolerância adotada,  $\varepsilon_S$  para a rigidez dos lintéis e  $\varepsilon_J$  para a rigidez do núcleo. Na figura 5.36 é apresentado o fluxograma N° 3, e o conjunto de EDP's desacopladas, fica expresso por:

$$\frac{\partial^2 q_j(x, t)}{\partial t^2} + c_j \cdot \frac{\partial^5 q_j(x, t)}{\partial x^4 \partial t} + s_j \cdot \frac{\partial^2 q_j(x, t)}{\partial x^2} - j_j \cdot \frac{\partial^4 q_j(x, t)}{\partial x^4} = V_{fj}^0(x, t) \quad (5.36 a)$$

onde; a matriz  $[m^*]^{-1/2}$  é quadrada e de ordem 3, sendo formada por elementos não nulos apenas na diagonal principal, sob a seguintes lei de formação:  $m_{i,j}^* = 1/\sqrt{m_{ii}^*}$  para  $i = j$ .

**Figura 5.36: Fluxograma 3 do desacoplamento dinâmico via Procedimento 2**



### 5.4.2 Análise modal

Mediante resolução de EDP's pelo método da superposição modal, escrevem-se as EDO's no espaço  $x$  e no tempo  $t$ , para a vibração não amortecida, como:

$$j_j \cdot u''''(x) - s_j \cdot u''(x) - \omega_j^2 \cdot u(x) = 0 \quad (5.37 a)$$

$$\ddot{g}(t) - \omega_j^2 \cdot g(t) = 0 \quad (5.37 b)$$

onde:  $q(x, t) = u(x) \cdot g(t)$ , e  $\omega_j$  é o  $j$  – ésima frequência de vibração da estrutura.

A análise da equação (5.37 a) é realizada a fim de determinar os modos de vibração e correlacionar  $s_j$  e  $j_j$ . Daí, aplica-se  $u(x) = e^{\alpha \cdot x}$  e exprime-se a equação característica, por:

$$j_j \cdot \alpha^4 - s_j \cdot \alpha^2 - \omega_j^2 = 0 \quad (5.38)$$

As raízes ( $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ ) da equação característica, equação (5.38), em relação a  $j_j$  e  $s_j$ , são expressas, em termo da  $j$  – ésima frequência de vibração da estrutura, por:

$$\alpha_1 = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{s_j}{2 \cdot j_j}\right)^2 + \frac{\omega_j^2}{j_j}} + \frac{s_j}{2 \cdot j_j}} \quad (5.39 a)$$

$$\alpha_2 = \sqrt{s_j^2 - \alpha_1^2} \quad ; \quad j_j = (s_j \cdot \alpha^2 + \omega_j^2) \cdot \alpha^{-4} \quad (5.39 b - c)$$

A solução dos deslocamentos  $u(x)$ , fica expressa como:

$$u(x) = C_1 \cdot \sinh(\alpha_1 \cdot x) + C_2 \cdot \cosh(\alpha_1 \cdot x) + C_3 \cdot \sin(\alpha_2 \cdot x) + C_4 \cdot \cos(\alpha_2 \cdot x) \quad (5.40)$$

Adotando-se a adimensionalização das raízes  $\alpha$  para  $\lambda$ , via  $\lambda_1 = \alpha_1 \cdot H$  e  $\lambda_2 = \alpha_2 \cdot H$ , correlaciona-se as raízes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , por:

$$\lambda_1^2 - \lambda_2^2 = \lambda^2 \quad (5.41 a)$$

$$\lambda = H \cdot \sqrt{\frac{s_j}{j_j}} \quad (5.41 b)$$

Realiza-se, agora, o produto entre as raízes adimensionais ( $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ ), exprimindo as frequências da estrutura por:

$$\omega_j = \omega_j^* \cdot \frac{\sqrt{j_j}}{H^2} \quad (5.42)$$

O pilar analisado possui base engastada, logo com deslocamento  $u(x = 0) = 0$  nulo e rotação  $u'(x = 0) = 0$  também nula. No topo, a extremidade é livre e, em consequente o momento fletor e o esforço cortante são nulos, aplicando-se assim:  $u''(x = H) = u'''(x = H) = 0$ . Ao utilizar tais condições de contorno na equação (5.40), após devida adimensionalização, conclui-se o sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 \cdot \cosh(\lambda_1) & \lambda_1^2 \cdot \sinh(\lambda_1) & -\lambda_2^2 \cdot \cos(\lambda_2) & -\lambda_2^2 \cdot \sin(\lambda_2) \\ \lambda_1^3 \cdot \sinh(\lambda_1) & \lambda_1^3 \cdot \cosh(\lambda_1) & \lambda_2^3 \cdot \sin(\lambda_2) & -\lambda_2^3 \cdot \cos(\lambda_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (5.43)$$

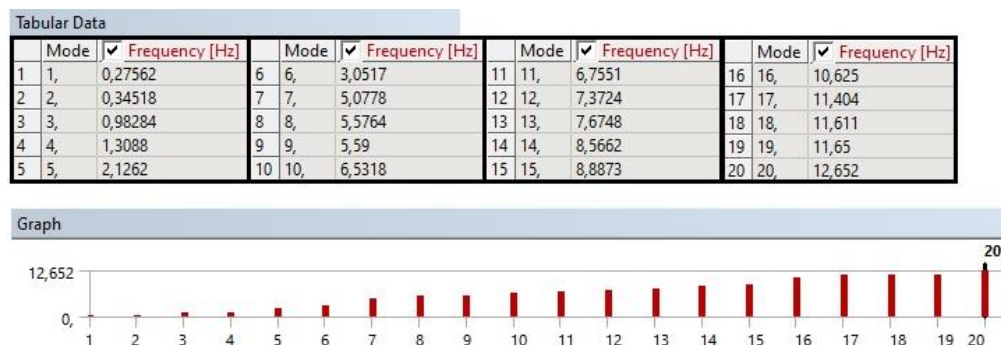
A solução não trivial do sistema apresentado na equação (5.43), conduz a equação transcendental, vide eq. (5.19). Ressaltando, que o período e a frequência são expressos por:

$$T_j = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_j} = T_j^* \cdot \frac{H^2}{\sqrt{J_j}} \quad (5.44 a)$$

$$\omega_j^* = \frac{1}{T_j^*} \quad (5.44 b)$$

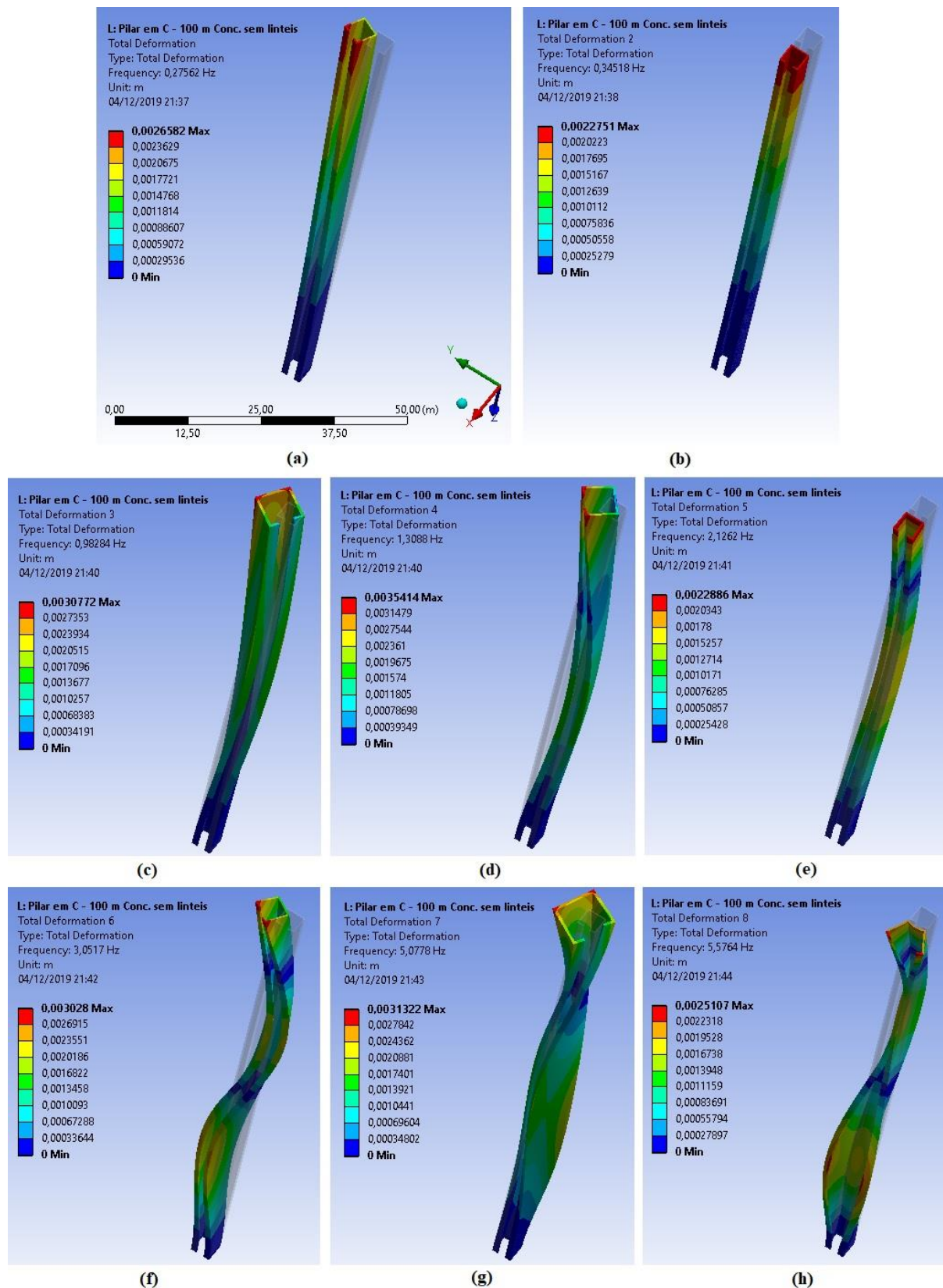
**EXEMPLO 5.4:** Procede-se semelhante ao exemplo 5.2, com exceção apenas do pilar ser de concreto armado com classe de resistência C – 90, ver NBR 6118 (ABNT, 2014). Nas figuras 5.37, 5.38 e 5.39 são apresentados os resultados da análise modal, realizada no pilar em núcleo estrutural C e de concreto armado, sendo processada via software ANSYS Release 11. Adotando-se por espessura das paredes finas  $t = 0,25 \text{ m}$ . E no caso do núcleo contraventado por lintéis, procede-se também a modelagem com concreto C – 40, vide figura 5.40. A malha de EF no ANSYS foi implementada com qualidade de 99,80 %, isso para 145.058 nós e 20.400 EF no pilar não contraventado. Já, no pilar com lintéis utilizou-se 149.478 nós e 20.880 EF.

**Figura 5.37: Frequências de vibração via modelagem no software ANSYS Release 11, para pilar C em concreto armado (C – 90) com seção aberta de paredes finas**



Fonte: O Autor (2019)

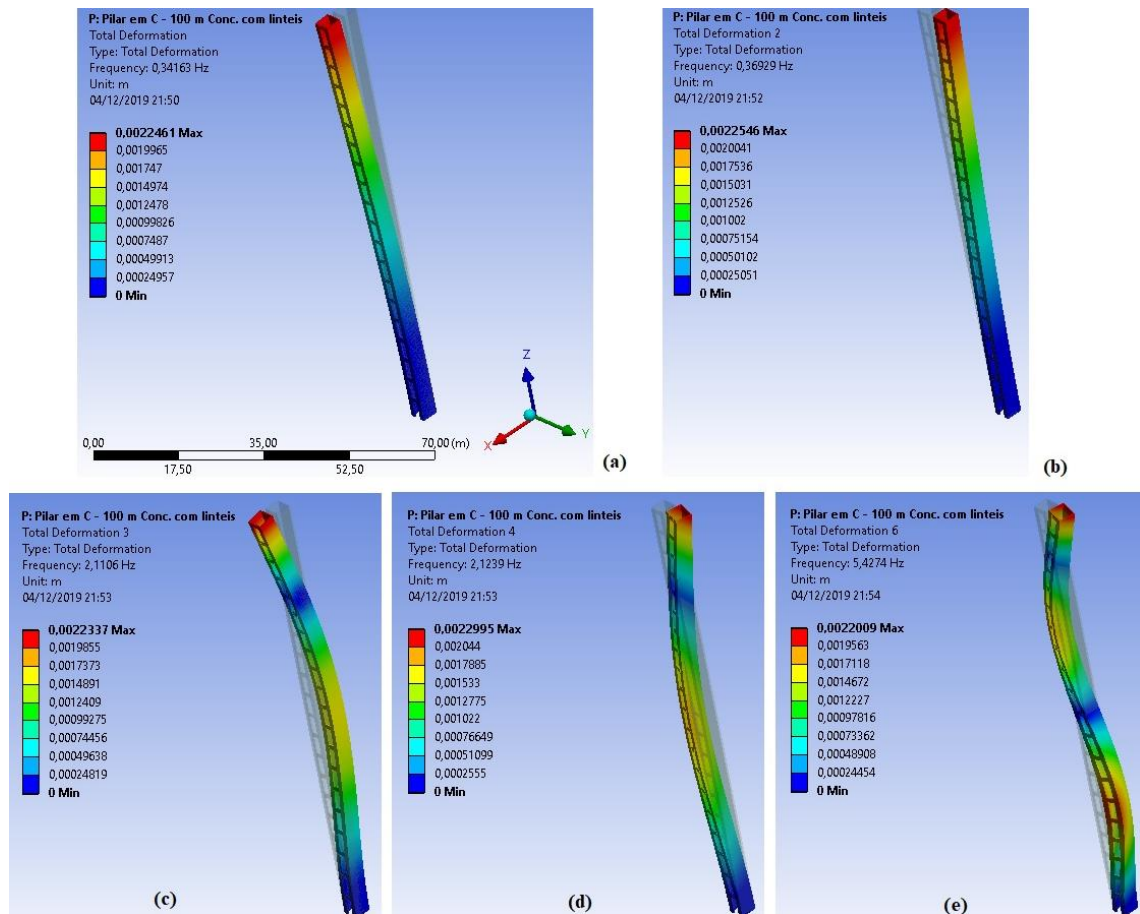
**Figura 5.38: Primeiros modos de vibração via modelagem no software ANSYS Release 11, para pilar em C e concreto armado (C – 90) sem contraventamento por lintéis**



Fonte: O Autor (2019)

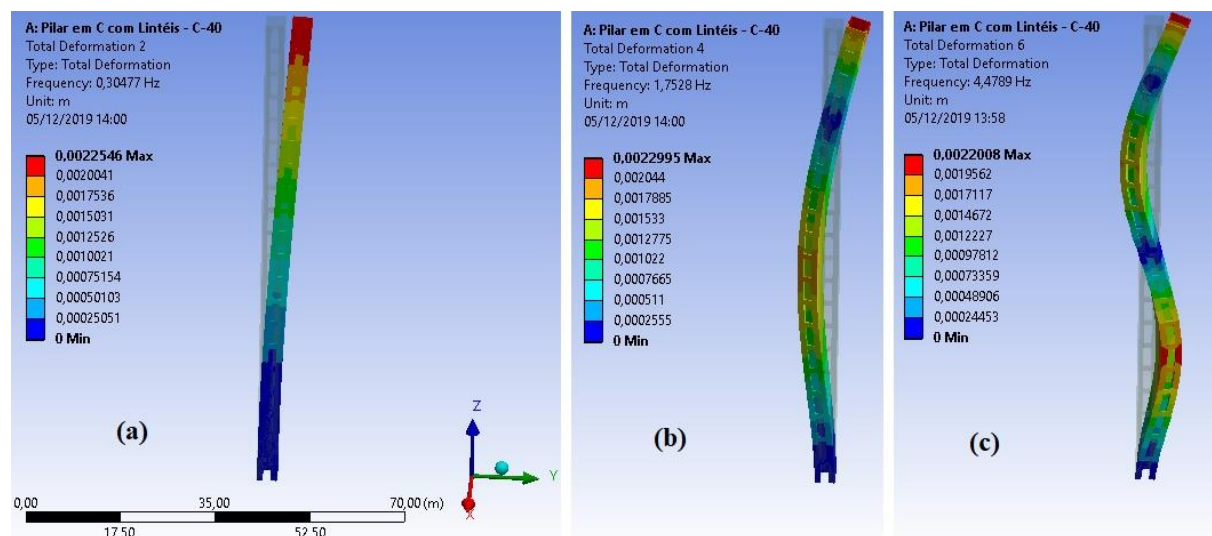


**Figura 5.39: Pilar C contraventado por lintéis e em concreto C – 90: 1º modo de vibração (a) em torno de y, (b) ativando os lintéis quanto à flexão, 2º modo (c) em y, (d) ativando os lintéis e (e) 3º modo em x**



Fonte: O Autor (2019)

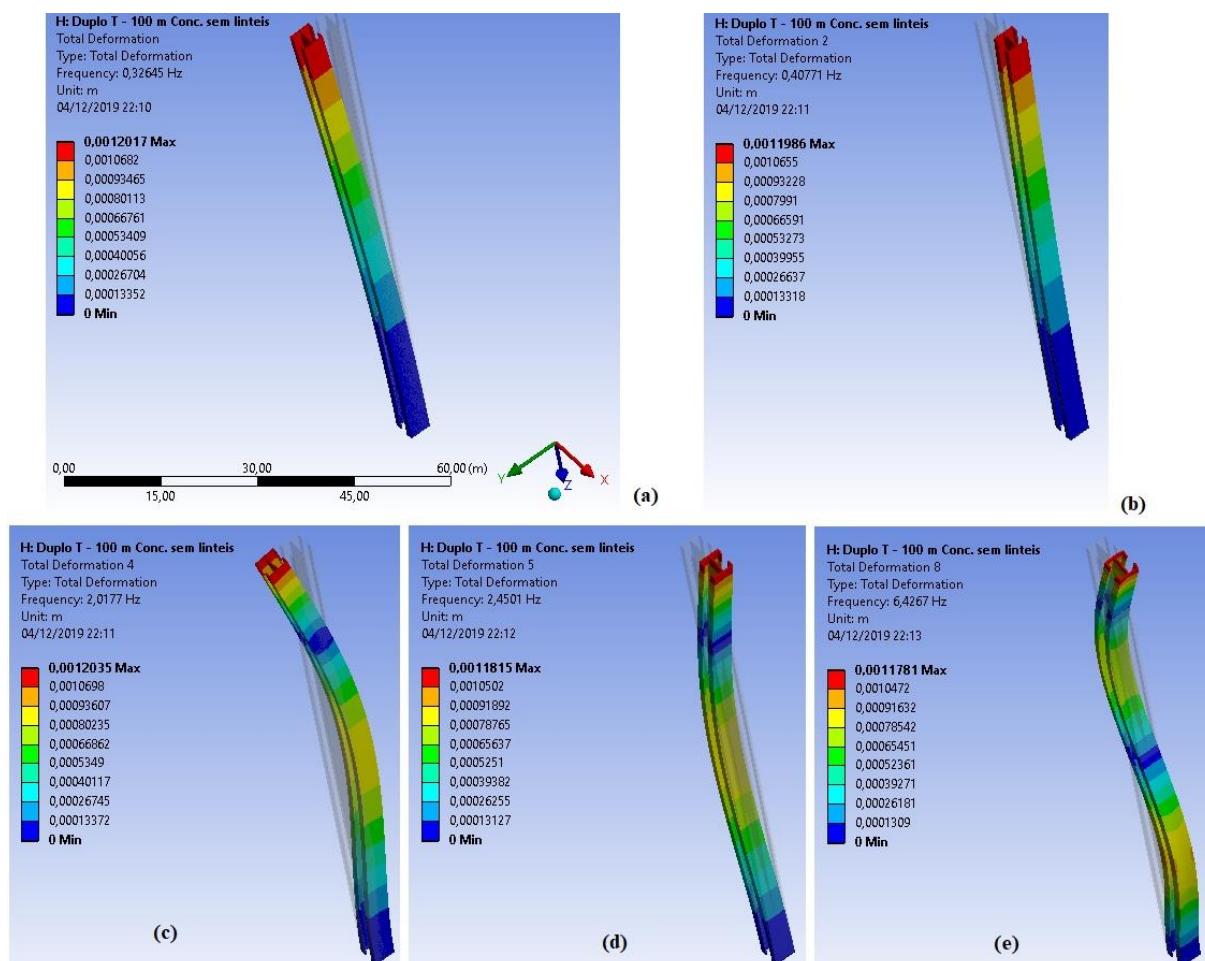
**Figura 5.40: Pilar C em de concreto C – 40, modos de vibração ativando os lintéis quanto a flexão: (a) 1º modo ( $\omega_1 = 1,91493 \text{ rad/s}$ ), (b) 2º modo e (c) 3º modo via modelagem no ANSYS**



Fonte: O Autor (2019)

**EXEMPLO 5.5:** Procede-se a modelagem do pilar exposto no exemplo 5.2 através do software ANSYS Release 11, adaptando a seção transversal para a ocorrência do duplo T com dupla simetria. Bem como, utilizando-se como material o concreto armado de classe de resistência C – 90. Apresenta-se assim, na figura 5.29 (a) a geometria de tal pilar, onde os lintéis são impostos com espessura  $e_L$  de 25 cm, altura  $h_L$  de 1,00 metro e ficam espaçados (de eixo a eixo) da distância  $h$  de 5,00 metros. Já, nas figuras 5.41 e 5.42 são apresentados os primeiros modos de vibração do pilar sem o contraventamento e com os travamentos promovidos pelos lintéis, respectivamente. No pilar sem lintéis foram utilizados 167.498 nós e 23.600 EF para a modelagem no ANSYS, obtendo-se qualidade de 99,65 % para a malha de EF. Já, para o pilar contraventado verificou-se 99,67 % de qualidade da malha, com a utilização de 162.313 nós e 22.560 elementos finitos.

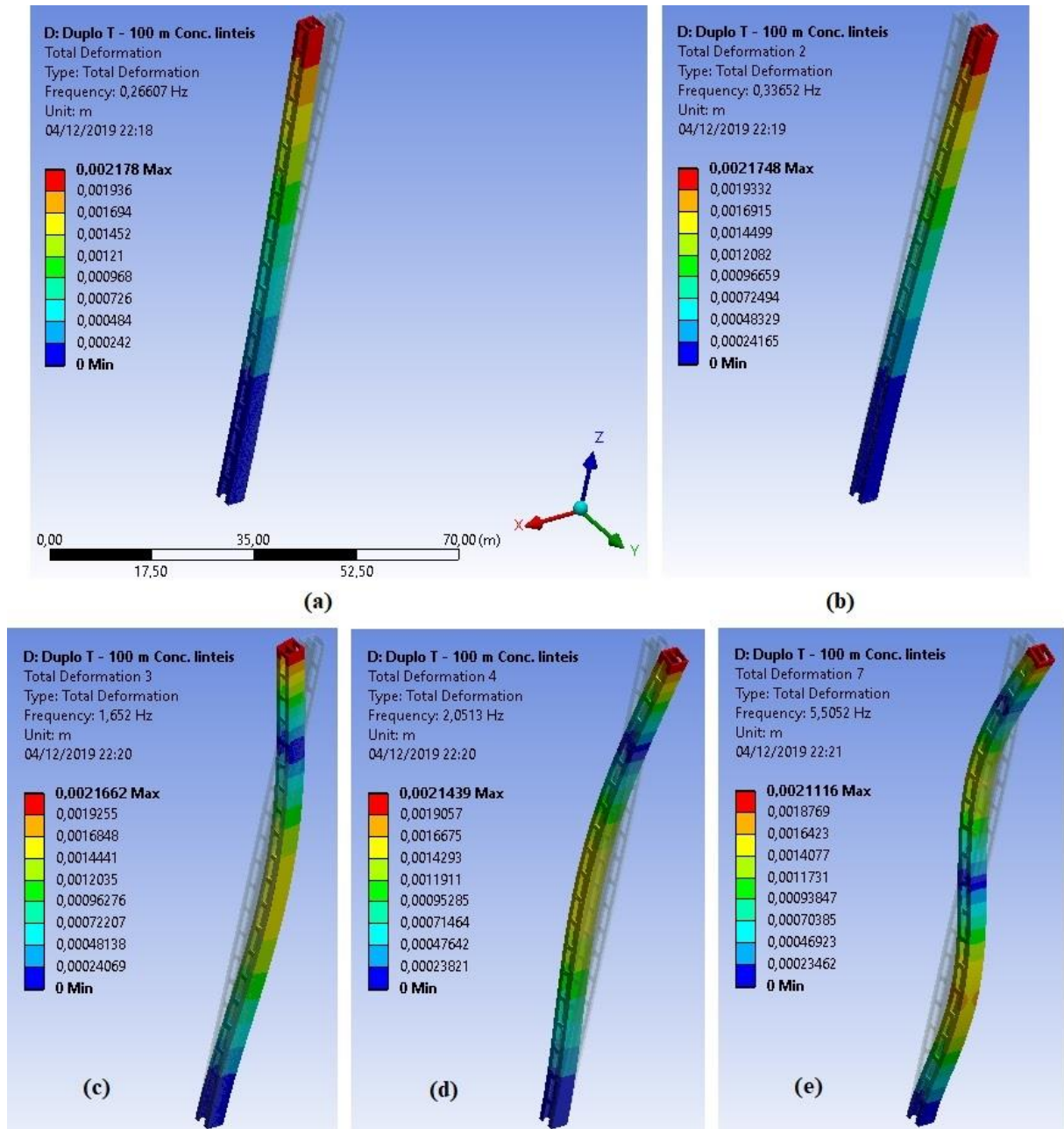
**Figura 5.41: Modos de vibração do pilar de concreto armado em duplo T sem lintéis via modelagem no ANSYS: (a) 1º modo à flexão em torno do eixo x, (b) 1º modo com deformação à flexão em torno do eixo y, (c) 2º modo à flexão em torno do eixo x, (d) 2º modo à flexão em torno do eixo y e (e) 3º modo à flexão em torno do eixo y**



Fonte: O Autor (2019)



**Figura 5.42: Modos de vibração do pilar de concreto armado em duplo T contraventamento por lintéis via modelagem no ANSYS: (a) 1º modo com deformação à flexão em torno do eixo y, (b) 1º modo com deformação à flexão em torno do eixo x, (c) 2º modo à flexão em torno do eixo y, (d) 2º modo à flexão em torno do eixo x e (e) 3º modo à flexão no eixo x**



Fonte: O Autor (2019)

### 5.4.3 Amortecimento proporcional

Na análise dinâmica das estruturas usuais é conveniente modelar a rigidez dos elementos que as compõem e agrupá-los em única matriz de rigidez  $[K]$  da estrutura, esta no referencial global de coordenadas. Já à pseudo-força inercial que a estrutura apresenta ao se deslocar, quando da solicitação dinâmica, é computada pelo produto da matriz de massa  $[M]$  com o vetor de acelerações  $\{\ddot{D}\}$  dos deslocamentos lineares e angulares. Por fim, modela-se o amortecimento viscoso da estrutura por uma matriz de amortecimento  $[C]$  proporcional às demais, onde tal proporcionalidade é determinada mediante análise modal e os decorrentes dois primeiros modos de vibração. Assim, procede a exemplo de Blume (1968) e em Fleming e Romualdi (1961).

Por outro lado, na análise dos pilares com seção transversal composta de paredes finas, verificam-se duas matrizes de rigidez. A primeira matriz  $[J]$ , refere-se à parcela da rigidez à flexão do referido pilar em si, e a segunda matriz  $[S]$ , é relativa à rigidez na flexão dos lintéis que promovem o contraventamento do pilar ao longo da altura (e distribuídos na extremidade aberta da seção transversal). Ao ressaltar o equacionamento dos referidos painéis – parede menciona-se Smith e Taranath (1972) e também Stamato e Mancini (1973), em tais análises faz-se a imposição estática do carregamento. Porém, na análise dinâmica, que aqui será procedida, soma-se a parcela da pseudo – força inercial da movimentação e, assim, o sistema de equações diferenciais parciais (EDP's) fica constituído por três matrizes. Para tanto, propõe-se o procedimento de proporcionalidade para montagem da matriz de amortecimento  $[C]$  dos pilares de paredes finas. Para tal proposição, vale-se do desacoplamento do sistema de EDP's baseado em Rosman (1972) e as necessárias transformações de referencial via Glück (1970).

Mediante o procedimento 2 de diagonalização do sistema de EDP's, apresentado na equação (5.36 a), chega-se a:

$$c_j = \alpha_M \cdot 1 + \alpha_S \cdot s_j - \alpha_J \cdot j_j \quad (5.45)$$

Via análise da EDP apresentada na equação (5.36 a) e conseguinte aplicação de  $u(x) = e^{\alpha x}$  e  $g(t) = e^{\omega t}$ , encontra-se como equação característica da vibração livre amortecida:

$$\omega^2 + (c_j \cdot \alpha^4) \cdot \omega + (s_j \cdot \alpha^2 - j_j \cdot \alpha^4) = 0 \quad (5.46)$$

A resolução da equação característica, equação (5.46), com a imposição de amortecimento crítico e conseguinte utilização da razão de amortecimento  $\xi_j$ , implica em  $c_j^0$  igual a:

$$c_j^0 = 2 \cdot \xi_j \cdot \omega_j \quad (5.47)$$

onde;  $\xi_j$  é a razão de amortecimento do  $j$ -ésimo modo de vibração. E a partir das equações (5.39 c) e (5.41 b) com a devida adimensionalização das raízes ( $\lambda_1 = \alpha_1 \cdot H$  e  $\lambda_2 = \alpha_2 \cdot H$ ), concluem-se  $s_j$  e  $j_j$ , em termos da frequência  $\omega_j$ , como:

$$j_j = \frac{\omega_j^2}{(\lambda_1^4 - \lambda_1^2 \cdot \lambda^2)} \quad (5.48 a)$$

$$s_j = \lambda^2 \cdot j_j \quad (5.48 b)$$

Por fim, aplicando-se as equações (5.47) e (5.48) na condição expressa na equação (5.45) e valendo-se da frequência  $\omega_j^*$  ao invés de  $\omega_j$ , pois almeja-se apenas estabelecer proporções das matrizes  $[\bar{M}]$ ,  $[J]$  e  $[S]$  que formam a matriz de amortecimento  $[C]$ , conclui-se:

$$\xi_j = \frac{\alpha_M}{2 \cdot \omega_j^*} + \frac{\alpha_S \cdot s_j}{2 \cdot \omega_j^*} - \frac{\alpha_J \cdot j_j}{2 \cdot \omega_j^*} \quad (5.49)$$

Impondo os três primeiros modos de vibração  $j = \{1, 2 \text{ e } 3\}$  na equação (5.49), monta-se um sistema de equações algébricas, cuja solução é:

$$\alpha_M = \frac{2 \cdot [\omega_1^* \cdot \xi_1 (j_2 \cdot s_3 - j_3 \cdot s_2) + \omega_2^* \cdot \xi_2 (j_3 \cdot s_1 - j_1 \cdot s_3) + \omega_3^* \cdot \xi_3 (j_1 \cdot s_2 - j_2 \cdot s_1)]}{j_1 \cdot (s_2 - s_3) + j_2 \cdot (s_3 - s_1) + j_3 \cdot (s_1 - s_2)} \quad (5.50 a)$$

$$\alpha_S = \frac{2 \cdot [\omega_1^* \cdot \xi_1 (j_3 - j_2) + \omega_2^* \cdot \xi_2 (j_1 - j_3) + \omega_3^* \cdot \xi_3 (j_2 - j_1)]}{j_1 \cdot (s_2 - s_3) + j_2 \cdot (s_3 - s_1) + j_3 \cdot (s_1 - s_2)} \quad (5.50 b)$$

$$\alpha_J = \frac{2 \cdot [\omega_1^* \cdot \xi_1 (s_3 - s_2) + \omega_2^* \cdot \xi_2 (s_1 - s_3) + \omega_3^* \cdot \xi_3 (s_2 - s_1)]}{j_1 \cdot (s_2 - s_3) + j_2 \cdot (s_3 - s_1) + j_3 \cdot (s_1 - s_2)} \quad (5.50 c)$$

A proporcionalidade na montagem da matriz  $[C]$  fica expressa por:

$$\mu_M = \frac{\alpha_M}{\alpha_M + \alpha_S + \alpha_J} \quad (5.51 a)$$

$$\mu_S = \frac{\alpha_S}{\alpha_M + \alpha_S + \alpha_J} \quad (5.51 b)$$

$$\mu_J = \frac{\alpha_J}{\alpha_M + \alpha_S + \alpha_J} \quad (5.51 c)$$

$$[C] = \mu_M \cdot [\bar{M}] + \mu_S \cdot [S] + \mu_J \cdot [J] \quad (5.51 d)$$

#### 5.4.4 Posicionamento do centro de massa

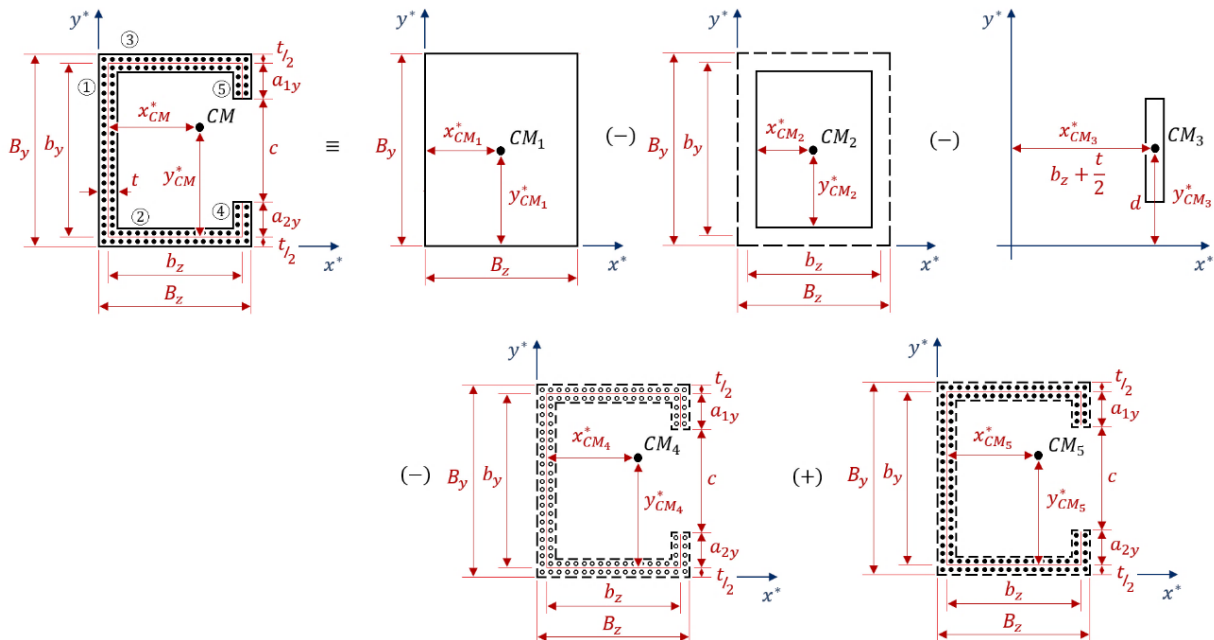
Para a seção transversal de paredes finas, aberta e em concreto armado, faz-se necessária a determinação das coordenadas do centro de massa ( $CM$ ), para tanto recorre-se à definição:

$$x_{CM}^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_{CM_i}^* \cdot m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (5.52 a)$$

$$y_{CM}^* = \frac{\sum_{i=1}^n y_{CM_i}^* \cdot m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (5.52 b)$$

sendo:  $x_{CM_i}^*$  e  $y_{CM_i}^*$  – as coordenadas do centro de massa canônico  $i$  em relação a um referencial genérico  $x^*$  e  $y^*$ ;  $m_i$  – a massa do elemento canônico  $i$ ;  $n$  – o número de massas canônicas que formam o núcleo estrutural; e  $x_{CM}^*$  e  $y_{CM}^*$  – as coordenadas do centro de massa da seção transversal em paredes finas (em relação ao referencial  $x^*$  e  $y^*$ ). Vide figura 5.43.

**Figura 5.43: Geometria da seção transversal e decomposição em massas de formato canônico**



Fonte: O Autor (2019)

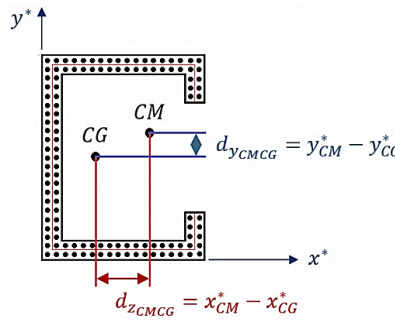
Adotando-se a subdivisão apresentada na figura 5.43, a massa específica do concreto como  $\rho_{CS} = 2400 \text{ kg/m}^3$  e a massa específica do aço como  $\rho_S = 7860 \text{ kg/m}^3$ , conclui-se:

$$x_{CM}^* = \frac{x_{CM1}^* \cdot m_1 - x_{CM2}^* \cdot m_2 - x_{CM3}^* \cdot m_3 - x_{CM4}^* \cdot M_4 + x_{CM5}^* \cdot M_5}{m_1 - m_2 - m_3 - M_4 + M_5} \quad (5.53 a)$$

$$y_{CM}^* = \frac{y_{CM1}^* \cdot m_1 - y_{CM2}^* \cdot m_2 - y_{CM3}^* \cdot m_3 - y_{CM4}^* \cdot M_4 + y_{CM5}^* \cdot M_5}{m_1 - m_2 - m_3 - M_4 + M_5} \quad (5.53 b)$$

Por fim, as distâncias entre os centros de massa ( $CM$ ) e o de gravidade ( $CG$ ), são apresentadas na figura 5.44.

**Figura 5.44: Posicionamento do  $CG$  e  $CM$  na seção transversal**



**Fonte: O Autor (2019)**

e valem:

$$d_{y_{CMCG}} = y_{CM}^* - y_{CG}^* \quad (5.54 a)$$

$$d_{z_{CMCG}} = x_{CM}^* - x_{CG}^* \quad (5.54 b)$$

### 5.4.5 Transformação de referenciais

#### a) Transladar do centro de gravidade $CG$ para o centro de torção $D$

Na figura 2.86 observa-se a compatibilização das rotações  $\phi_D$  (no centro de torção) e  $\phi_{CG}$  (no centro de gravidade) e dos deslocamentos  $\omega_D$  via  $\omega_{CG}$ , projetando-se as distância  $d_{y_{CGD}}$  e  $d_{z_{CGD}}$  paralelamente ao eixo  $y$  e ao eixo  $z$ , respectivamente. Do equilíbrio de deslocamentos, já em formato matricial, tem-se:

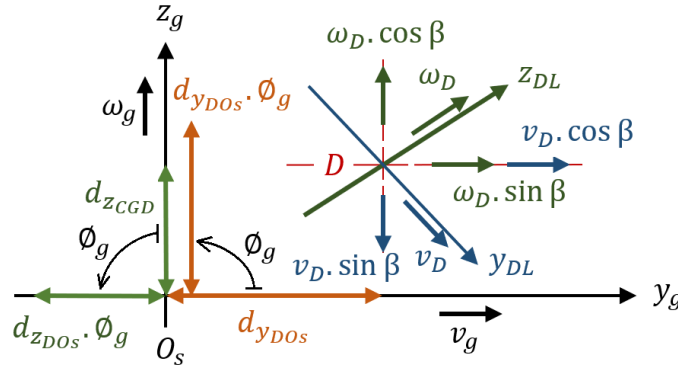
$$\{v_{CG}\} = [\bar{T}_D] \cdot \{v_D\} \quad (5.55 a)$$

$$\begin{Bmatrix} v_{CG} \\ \omega_{CG} \\ \phi_{CG} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -d_{z_{CGD}} \\ 0 & 1 & d_{y_{CGD}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_D \\ \omega_D \\ \phi_D \end{Bmatrix} \quad (5.55 b)$$

**b) Transladar do centro de torção  $D$  para a origem das coordenadas  $O_s$**

Analogamente ao procedido na letra “a” deste item e, considera-se a rotação  $\beta$  entre o referencial  $(y_{DL}, z_{DL}, x_{DL})$  no centro de torção e o referencial global  $(y_g, z_g, x_g)$ , conforme observa-se na figura 5.45.

**Figura 5.45: Transformação do referencial no centro de torção  $D$  para a origem  $O_s$**



Fonte: O Autor (2019)

chegando-se a:

$$v_D \cdot \cos \beta + \omega_D \cdot \sin \beta = v_g - d_{z_{DO_s}} \cdot \phi_g \quad (5.56 a)$$

$$-v_D \cdot \sin \beta + \omega_D \cdot \cos \beta = \omega_g + d_{y_{DO_s}} \cdot \phi_g \quad (5.56 b)$$

$$\phi_D = \phi_g \quad (5.56 c)$$

O equilíbrio apresentado na eq. (5.56), fica matricialmente expresso por:

$$\{v_D\} = [\bar{T}_S]^{-1} \cdot [\bar{T}_G] \cdot \{v_g\} \quad (5.57 a)$$

$$\begin{Bmatrix} v_D \\ \omega_D \\ \phi_D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -d_{z_{DO_s}} \\ 0 & 1 & d_{y_{DO_s}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_g \\ \omega_g \\ \phi_g \end{Bmatrix} \quad (5.57 b)$$

Combinam-se as eq.'s (5.55) e (5.57), translada-se diretamente do CG para  $O_s$ , assim:

$$\{v_g\} = [\bar{T}_S]^{-1} \cdot [\bar{T}_G] \cdot [\bar{T}_D]^{-1} \cdot \{v_{CG}\} \quad (5.58)$$

## 5.5. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

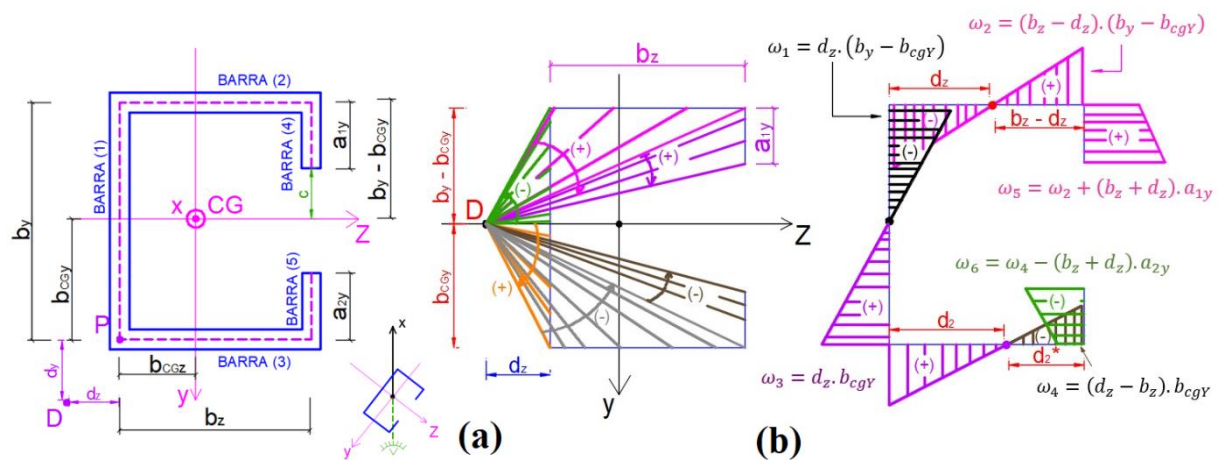
**EXEMPLO 5.6:** Nesta sexta aplicação será analisado um pilar de ponte com altura total  $H = 90 \text{ m}$  e com seção transversal aberta formada por paredes finas e contraventado parcialmente na altura por lintéis (espaçados de eixo a eixo por  $h = 3 \text{ m}$ ). Na figura 5.46 apresenta-se a configuração do pilar, para o qual procede-se a validação numérica das propriedades geométricas, vide tabela 5.5, mediante a dissertação de Xavier (1987) e o artigo de Smith e Taranath (1972). Utilizam-se as seguintes dimensões na seção transversal:  $b_y = b_z = 5 \text{ m}$ ,  $a_{1y} = a_{2y} = 1 \text{ m}$  e  $t = 0,25 \text{ m}$ .

**Tabela 5.5 – Validação numérica mediante Xavier (1987) e Smith e Taranath (1972)**

Seção do Pilar em Núcleo	Resultados		Diagrama de Área Setorial	Resultados		
	O autor (2019)	Xavier (1987)		O autor (2019)	Xavier (1987)	Smith e Taranath
$x_{CG} \text{ (m)}$	2,5	2,5	$\ \omega_1\  \text{ (m}^2\text{)}$	6,638	6,625	-----
$y_{CG} \text{ (m)}$	2,941	2,94	$\ \omega_2\  \text{ (m}^2\text{)}$	5,862	5,875	-----
$I_z \text{ (m}^4\text{)}$	20,284	20,28	$\ \omega_5\  \text{ (m}^2\text{)}$	13,517	13,525	-----
$I_y \text{ (m}^4\text{)}$	15,328	15,34	$I_\omega \text{ (m}^6\text{)}$	100,674	100,67	100,674
$I_t \text{ (m}^4\text{)}$	8,854	8,85	$d_z \text{ (m)}$	2,655	2,65	2,655
$(x \cdot 10^{-2})$			$d_y \text{ (m)}$	2,499	2,5	-----

Fonte: O Autor (2019)

**Figura 5.46: Pilar em núcleo (a) seção transversal e (b) diagrama de área setorial**



Fonte: O Autor (2019)

O módulo de elasticidade longitudinal utilizado foi de  $E = 20 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ , o coeficiente de poisson  $\nu = 0,25$  e a carga é uniformemente distribuída na altura ( $q_1 = 9,418 \text{ kN/m}$ ). O braço de alavanca  $e_z = z_D = 4,714 \text{ m}$  gera o momento de torção distribuído, também uniformemente, valendo  $m = 44,393 \text{ kN.m/m}$ . Vide na tabela 5.6 a validação dos valores de rotação  $\phi$  no topo do pilar.

**Tabela 5.6 – Validação numérica da rotação no topo do pilar**

$q_1^* = q_1 + p$ ( $\text{kN/m}$ )	Rotação $\phi$ (rad)			
	O autor (2019)	Xavier (1987)		
	Teoria de flexo – torção	Teoria dos painéis – parede	Método de Stodola – Vianello	Método das Diferenças Finitas
$p = 0 \text{ kN/m}$	- 0,087 ( $\approx 0,09$ )	- 0,137 ( $\approx 0,1$ )	- 0,097 ( $\approx 0,1$ )	- 0,097 ( $\approx 0,1$ )

Fonte: O Autor (2019)

**EXEMPLO 5.7:** Nesta sétima análise, adota-se a dissertação de Barbosa (1980) em dois cenários de carregamento: Cenário 1 – momento de torção distribuído  $m = 24922,5 \text{ lb.ft/ft}$  e Cenário 2 – momento de torção concentrado no topo  $M_{tH} = 155765 \text{ lb.ft}$ . O pilar em questão será modelado com 187,5 ft de altura e com travamentos por lintéis a cada  $h = 12,5 \text{ ft}$ . Vide tabelas 5.7 e 5.8 constam os valores de rotação  $\phi$  (rad) e bimomento  $B$  ( $\text{lb.ft}^2$ ), aplicando-se além da técnica do meio contínuo, o método dos elementos finitos (ver item 3.6). A geometria adotada é a apresentada na figura 5.46.

**Tabela 5.7 – Validação numérica do cenário 1, quanto a rotação e o Bimomento, mediante Barbosa (1980)**

	$\phi$ ( $\times 10^{-2} \text{ rad}$ )			$B$ ( $\times 10^8 \text{ lb.ft}^2$ )		
	O Autor (2019)	Barbosa (1987)	MEF	O Autor (2019)	Barbosa (1987)	MEF
Base (0 ft)	0,00000	0,000	0,000	-3,65416	-3,664	-3,653
4º Andar (50 ft)	-0,16920	-0,172	-0,169	-1,72242	-1,709	-1,721
9º Andar (112,5 ft)	-0,65105	-0,650	-0,651	-0,33290	-0,360	-0,352
Topo (187,5 ft)	-1,31907	-1,319	-1,320	0,00000	0,000	0,000

Fonte: O Autor (2019)

**Tabela 5.8 – Validação numérica do cenário 2, quanto a rotação e o bimomento, mediante Barbosa (1980)**

	$B$ ( $\times 10^7 \text{ lb.ft}^2$ )		
	O Autor (2019)	Barbosa (1987)	MEF
Base (0 ft)	-2,28068	-2,281	-2,281
4º Andar (50 ft)	-1,56620	-1,563	-1,566
9º Andar (112,5 ft)	-0,80862	-0,809	-0,809
Topo (187,5 ft)	0,00000	0,000	0,000

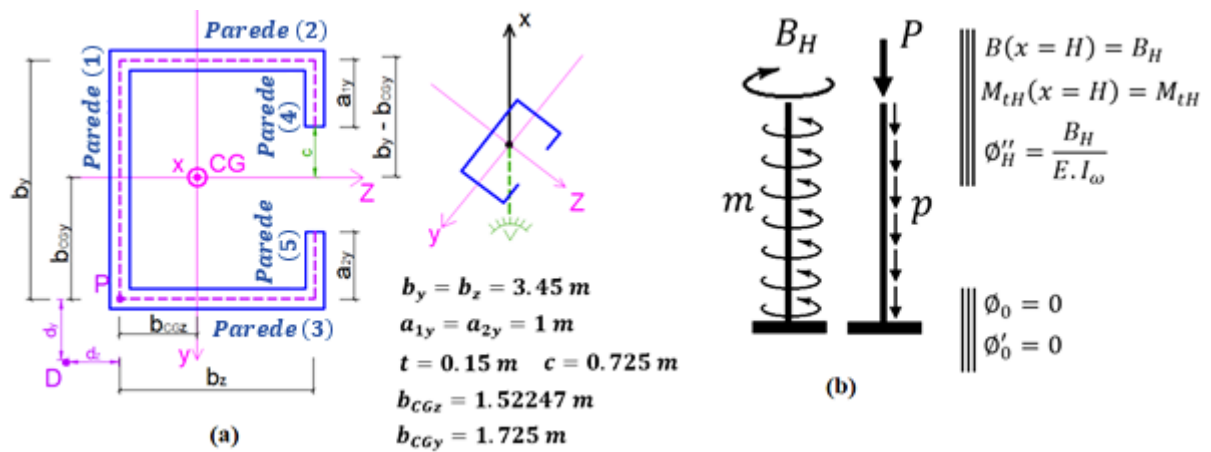
Fonte: O Autor (2019)



E para tal exemplo utilizou-se:  $b_y = b_z = 19 \text{ ft}$ ;  $a_{1y} = a_{2y} = 4,5 \text{ ft}$ ;  $t = 1 \text{ ft}$ ;  $\alpha = 0,944$ ;  $I_z = 4492,5 \text{ ft}^4$ ;  $d_z = 10,43 \text{ ft}$ ;  $I_\omega = 3,77629 \times 10^5 \text{ ft}^6$ ;  $I_t = 22 \text{ ft}^4$ ;  $\nu = 0,15$ ;  $E = 5,76 \times 10^8 \frac{\text{lb}}{\text{ft}^2}$  e  $G = 2,504 \times 10^8 \frac{\text{lb}}{\text{ft}^2}$ .

**EXEMPLO 5.8:** Nesta oitava aplicação, procede-se a análise do pilar de ponte em núcleo, formado por painéis – parede em formato de C, e com reforço nas extremidades livres mediante abas de comprimento unitário. Na figura 5.47 (a), apresentam-se as dimensões em planta do referido pilar, enquanto na figura 5.47 (b) são apresentadas as condições de contorno.

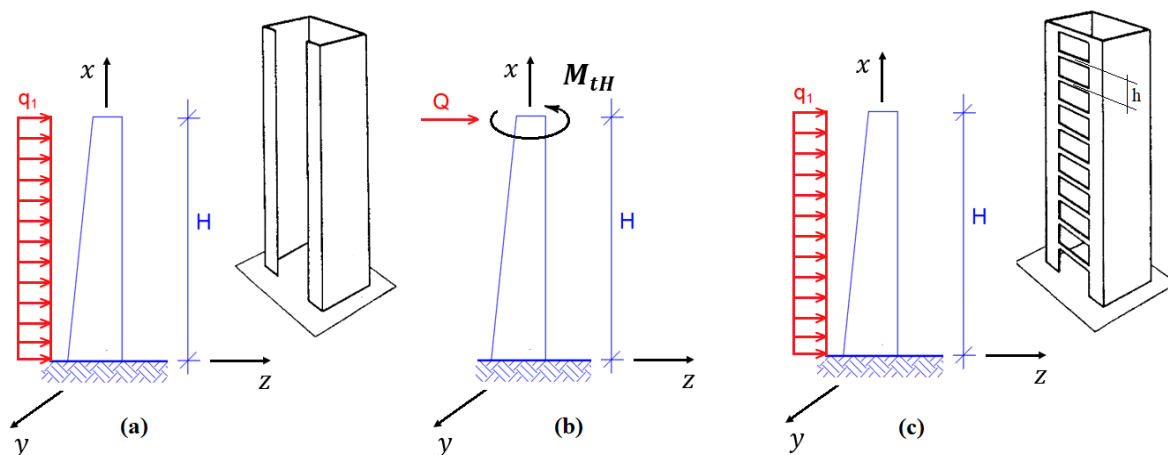
**Figura 5.47: Pilar metálico: (a) geometria, (b) carregamentos e condições de contorno**



Fonte: O Autor (2019)

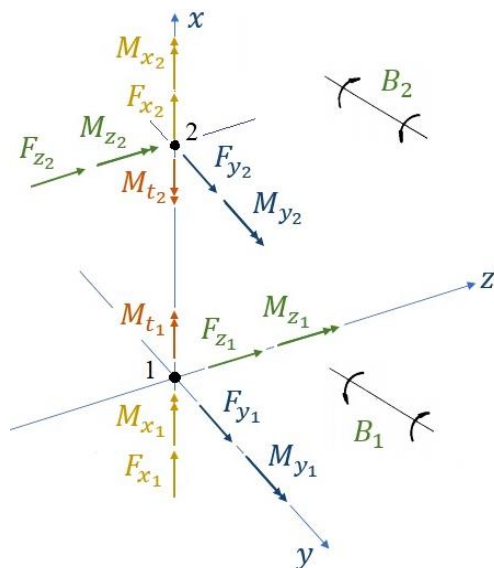
As propriedades mecânicas das chapas metálicas, ver NBR 8800 (ABNT, 2008), empregadas na construção do referido pilar são:  $E = 210 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ ,  $G = 8,07692 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$  e  $\nu = 0.3$ . Durante a análise definem-se três cenários de carregamentos, sendo estes: o Cenário 1 - para carregamento uniformemente  $q_1 = 50 \text{ kN/m}$  distribuído ao longo da altura ( $H = 100 \text{ m}$ ) do pilar e nulidade nos demais carregamentos ( $q_2$  e  $Q$ ), bem como no momento de torção no topo  $M_{tH}$  e bimomento  $B_H$ . No Cenário 2 é adotado apenas para atuação da carga concentrada no topo ( $Q = 40 \text{ kN}$ ) e momento de torção no topo sob valor  $M_{tH} = Q \cdot e_z = 148.08592 \text{ kN.m}$ .

Enquanto no Cenário 3 aplica-se o carregamento do cenário 1 com a atuação dos lintéis, promovendo o contraventamento ao longo da altura do pilar. Em suma, nos Cenários 1 e 2 o pilar é analisado como seção aberta de paredes finas e no Cenário 3 o pilar é contraventado parcialmente por lintéis (Ver figura 5.48).

**Figura 5.48: Cenários de carregamento: (a) Cenário 1, (b) Cenário 2, (c) Cenário 3**

Fonte: Adaptado de (SMITH; COULL, 1991)

E para decorrente validação numérica, vale-se do artigo de Smith e Taranath (1972) e da comparação entre as teorias apresentadas nos itens (2.7) e (2.8). Tanto quanto, o método dos elementos finitos, com elementos de tamanho  $h_{MEF} = 5 \text{ m}$  (ver figura 3.19), e devidamente formulados através das equações constitutivas da flexão e da flexo – torção. O MEF aqui empregado é apresentado na figura 5.49 e postulado em Smith e Coull (1991), Heidebrecht e Swift (1971), e em Barbosa (1980), considerando nos lintéis a deformação por corte.

**Figura 5.49: Convenção dos esforços solicitantes dos elementos finitos na flexo – torção**

Fonte: O Autor (2019)

Na tabela 5.9 são apresentadas as propriedades da seção transversal e do diagrama de ordenadas setoriais, e nas tabelas 5.10 e 5.11 são listados os valores de rotação  $\phi$  e do bimomento  $B$  para a base, meia altura e o topo do pilar (por cenário de carregamento).

**Tabela 5.9. Validação numérica na seção transversal e no diagrama de ordenadas setoriais**

Seção do Pilar em Núcleo	O autor (2019)	Smith e Taranath (1972)	Ordenadas Setoriais	O autor (2019)	Smith e Taranath (1972)
$x_{CG} (m)$	1,52247	-----	$\ \omega_1\  (m^2)$	3,41058	-----
$y_{CG} (m)$	1,72500	-----	$\ \omega_2\  (m^2)$	2,54067	-----
$I_z (m^4)$	4,07020	4,07020	$\ \omega_5\  (m^2)$	7,96782	-----
$I_y (m^4)$	3,38471	-----	$I_w (m^6)$	14,27556	14,27556
$I_t (m^4)$	0,01389	-----	$d_z (m)$	1,97715	1,97715
			$d_y (m)$	1,72422	1,72500

Fonte: O Autor (2019)

**Tabela 5.10. Validação numérica da rotação  $\phi$  e do bimomento  $B$  para o cenário 1**

$x$ (m)	Rotação $\phi (x 10^{-2} rad)$			Bimomento $B (x 10^5 kN.m^2)$			
	O Autor (2019)		Smith e Taranath (1972)	O Autor (2019)			Smith e Taranath (1972)
	flexo – torção	painéis – parede		flexo – torção	painéis – parede	MEF	
0	0	-----	0	-5,63078	-----	-5,24329	-5,63078
50	-13,54697	-----	-13,54697	-0,20948	-----	-----	-0,20948
100	-32,29933	-34,46433	-32,29933	0	0	0	0

Fonte: O Autor (2019)

**Tabela 5.11. Validação numérica da rotação  $\phi$  e do bimomento  $B$  para os cenários de carregamentos 2 e 3**

$x$ (m)	bimomento $B (x 10^3 kN.m^2)$	Rotação $\phi (x 10^{-3} rad)$		bimomento $B (x 10^4 kN.m^2)$		
	O Autor (2019)	O Autor (2019)	Smith e Taranath (1972)	O Autor (2019)		Smith e Taranath (1972)
	flexo – torção	flexo – torção		flexo – torção	MEF	
0	-7,34105	0	0	-7,96886	-8,58469	-7,96886
50	-2,43798	-4,14029	-4,14029	0,37608	-----	0,37608
100	0	-5,73446	-5,73446	0	0	0

Fonte: O Autor (2019)

Valendo ressaltar que a validação numérica do Cenário 1, mediante a teoria dos painéis – parede, é realizada por imposição da distância  $h$  de eixo a eixo dos lintéis igual a altura total do pilar. Quanto às discrepâncias de sinal no bimomento, obtido via artigo de Smith e Taranath (1972), percebe-se que é mera discordância de convenção de sinais nas respectivas formulações. No mais, observa-se a coerência da rotação nula na base ( $x = 0$ ), para todas as teorias e cenários utilizados, tanto quanto bimomento nulo no topo do pilar ( $x = H = 100 m$ ).

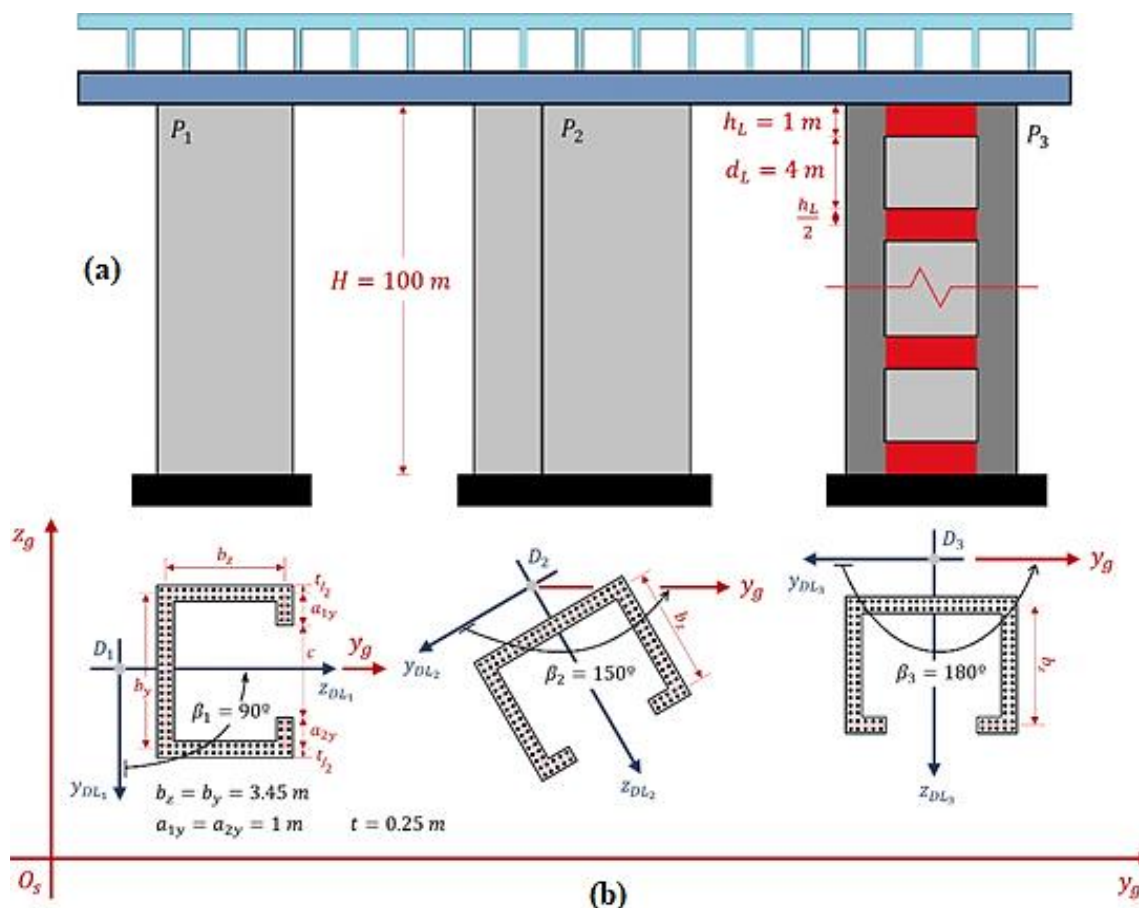
No presente exemplo são abordadas duas teorias de análise estrutural para os pilares de pontes, sendo elas: a teoria da flexo – torção (TFT) e a dos painéis – parede (TPP). Procede-se também a aplicação numérica num pilar de ponte submetido a três cenários de carregamento,

com a possibilidade ou não de contraventamento por lintéis ao longo da altura (esses espaçados relativamente da altura  $h$ ). Na aplicação numérica é empregado o MEF com elementos finitos de barra (grandes e de altura  $h$ ) e formulados pelas equações constitutivas à flexão e à flexo – torção. O que valida de forma satisfatória os resultados obtidos via correspondência de rotação  $\phi$  e de bimomento  $B$  por entre as teorias abordadas, bem como pela proximidade com o elemento finito na ordem de 1‰ (bimomento na base do pilar e Cenário 1 de carregamento, ver página D34).

### **EXEMPLOS 5.9 e 5.10:**

Nesta seção será analisada uma ponte com tabuleiro apoiado sobre três pilares, cada um com seção transversal composta por paredes finas, vide Fig. 5.50. Tudo em conformidade com as normas NBR 7188 (ABNT, 2013) e DIN 1055 (pr FR 2005-03). Nestes exemplos serão adotados pilares rotacionados entre si, isso a fim de exercitar a formulação desenvolvida, mesmo que o comum em pontes seja o arranjo simétrico e repetido por blocos.

**Figura 5.50: Ponte apoiada sobre três pilares de paredes finas: (a) vista lateral, (b) configuração em planta dos pilares**

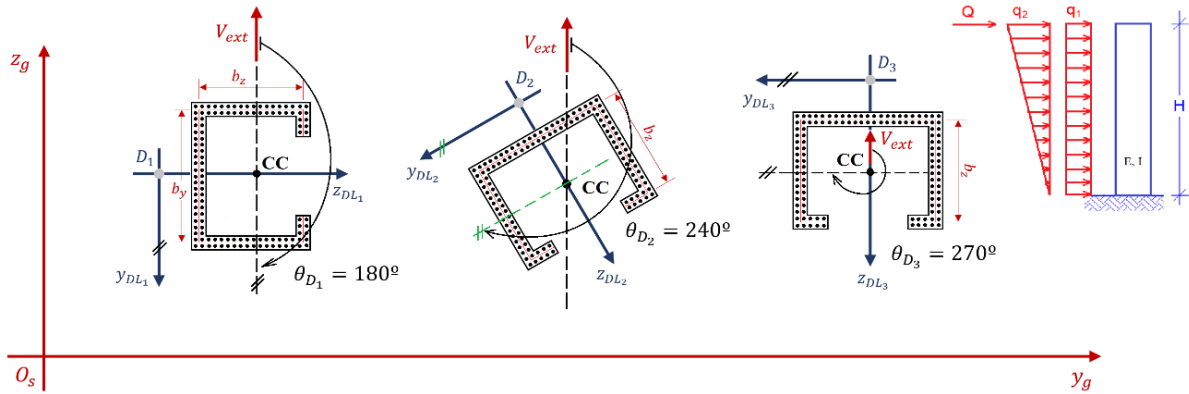


Fonte: O Autor (2019)

o material empregado é concreto armado de classe de resistência C – 40, de acordo com a NBR 6118 (ABNT, 2014). Portanto, o módulo de elasticidade longitudinal vale  $E = 3,54175 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$  e módulo transversal  $G = 1,47573 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ , bem como coeficiente de Poisson  $\nu = 0.20$ . Em função dos estados de carregamento da ponte, faz-se a análise de dois cenários: no primeiro cenário a atuação unicamente do vento na estrutura (Ver ex. 5.9) e no segundo cenário a atuação do tráfego com enfoque na frenagem (ver ex. 5.10).

**EXEMPLO 5.9:** Nesta nona análise, a ponte é submetida à ação unicamente do vento lateral sob o formato de três carregamentos ao longo da altura do pilar, sendo esses:  $q_1 = 20 \text{ kN/m}$ ,  $q_2 = 30 \text{ kN/m}$  e  $Q = 10 \text{ kN}$ . Vide figura 5.51 e apêndice D no item D.2.

**Figura 5.51:** Ângulos entre os esforços cortantes externos  $\mathcal{V}_{ext_{p_1}}$ ,  $\mathcal{V}_{ext_{p_2}}$ ,  $\mathcal{V}_{ext_{p_3}}$  e os eixos  $y_{DL}$  definidos nos centros de torção de cada um dos três pilares



Fonte: O Autor (2019)

$$\mathcal{V}_{ext_y} = -\frac{q_{2y}}{2.H} \cdot x^2 - q_{1y} \cdot x + (Q_y + q_{1y} \cdot H); \quad \mathcal{V}_{ext_z} = -\frac{q_{2z}}{2.H} \cdot x^2 - q_{1z} \cdot x + (Q_z + q_{1z} \cdot H);$$

$$q_{1y} = q_1 \cdot \cos(\theta_D); \quad q_{2y} = q_2 \cdot \cos(\theta_D); \quad Q_y = Q \cdot \cos(\theta_D);$$

$$q_{1z} = q_1 \cdot \sin(\theta_D); \quad q_{2z} = q_2 \cdot \sin(\theta_D) \quad \text{e} \quad Q_z = Q \cdot \sin(\theta_D).$$

O Esforço cortante ao longo do tempo será regido por uma função harmônica de senos  $\mathcal{V}_g(t) = \sin(\bar{\omega} \cdot t)$ , com frequência  $\bar{\omega} = 3 \text{ rad/s}$ . Além disso, o sistema de EDP's da equação (5.36) fica expresso para os pilares e referenciado no centro de gravidade, como:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 7870,65 & 0 & 387,78 \\ 0 & 7870,65 & 1506,08 \\ 387,78 & 1506,08 & 319,73 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{v} \\ \ddot{\omega} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 120073 & 0 & -18909 \\ 0 & 99853 & 5459 \\ -22378 & 0 & 174899 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{v}''' \\ \dot{\omega}''' \\ \dot{\phi}''' \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6939 \\ 0 & 0 & 10919 \\ 0 & 0 & -12427 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v'' \\ \omega'' \\ \phi'' \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 240146 & 0 & -44757 \\ 0 & 199706 & 0 \\ -44757 & 0 & 336224 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v'''' \\ \omega'''' \\ \phi'''' \end{Bmatrix} = \{ \mathcal{V}_f \} \end{aligned} \quad (5.59)$$

Os coeficientes de proporcionalidade das matrizes  $[\bar{M}]$ ,  $[J]$  e  $[S]$ , para compor a matriz de amortecimento  $[C]$  viscoso, são expressos por:

$$\alpha_M = 0; \alpha_S = -3,80 \times 10^{16}; \alpha_J = -3,80 \times 10^{16}; \mu_M = 0; \mu_S = 0,5; \mu_J = 0,5.$$

E o conjunto de EDP's desacopladas é apresentado na equação (5.36), como:

$$-q_1''''(x, t) + 0,03385 \cdot \ddot{q}_1(x, t) + 0,49519 \cdot \dot{q}_1''''(x, t) - 0,00962 \cdot q_1''(x, t) = \gamma_{f_1}^0(x, t) \quad (5.60 \text{ a})$$

$$-q_2''''(x, t) + 0,04038 \cdot \ddot{q}_2(x, t) - 0,13363 \cdot \dot{q}_2''''(x, t) - 1,26726 \cdot q_2''(x, t) = \gamma_{f_2}^0(x, t) \quad (5.60 \text{ b})$$

$$-q_3''''(x, t) + 0,00003 \cdot \ddot{q}_3(x, t) + 0,50243 \cdot \dot{q}_3''''(x, t) + 0,00498 \cdot q_3''(x, t) = \gamma_{f_3}^0(x, t) \quad (5.60 \text{ c})$$

No conjunto de EDP's apresentado nas equações (5.60), procede-se a verificação do primeiro modo de vibração (mobilizando os lintéis) através do cruzamento da equação (5.41 b) e da figura (5.40 a). Assim, com os parâmetros  $s_j = -0,00962$  e  $j_j = -1$  e mediante eq. (5.41

b) determina-se o parâmetro  $\lambda = H \cdot \sqrt{s_j/j_j} = 100 [m] \cdot \sqrt{-0,00962/-1} = 9,81$ , utilizando a

tabela 5.3 com o valor imediatamente superior de  $\lambda$ , logo:  $\omega_1^* = 2,54634 \text{ rad/s}$  (para  $\lambda = 10$ ). Por fim, na figura (5.40 a) é apresentado o 1º modo de vibração de um único pilar em formato de C e contraventado com lintéis sob a mesma distribuição desse exemplo, daí a motivação de comparação, constatando-se uma aproximação de 2,24 %. Utiliza-se o ajuste da frequência determinada via TMC pelo coeficiente  $\alpha = 1/_{1,3}$ , cuja funcionalidade é explicada na página 222 desta tese e baseada em Diziewolski (1964).

$$\Delta(\%) = \frac{|\omega_{ANSYS}^* - \omega_{TMC}^*|}{\omega_{TMC}^*} \cdot 100 \% = \frac{|1,91493 - 1,95872| \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{1,95872 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} \cdot 100 \% = 2,24 \%$$

Na tabela 5.12 são apresentadas as funções do esforço cortante  $\gamma_f$  no referencial inicial e  $\gamma_f^0$  no referencial generalizado e ambas para os pilares  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ .

**Tabela 5.12 – Funções do esforço cortante por pilar**

	<b>Pilar <math>P_1</math></b>	<b>Pilar <math>P_2</math></b>	<b>Pilar <math>P_3</math></b>
$V_{f_1}$	$89,77 \cdot x^2 + 11969,20 \cdot x - 1196926,12$	$-48,87 \cdot x^2 - 6515,63 \cdot x + 651565,87$	$-147,66 \cdot x^2 - 19687,64 \cdot x + 1968773,75$
$V_{f_2}$	$120,17 \cdot x^2 + 16023,05 \cdot x - 1602313,28$	$-141,82 \cdot x^2 - 18908,90 \cdot x + 1809899,76$	$26,41 \cdot x^2 + 3520,92 \cdot x - 352093,65$
$V_{f_3}$	$332,19 \cdot x^2 + 44291,71 \cdot x - 4429193,40$	$-180,83 \cdot x^2 - 24110,90 \cdot x + 2411102,23$	$-546,40 \cdot x^2 - 72853,59 \cdot x + 7285395,07$
$V_{f_1}^0$	$0,18 \cdot x^2 + 24,43 \cdot x - 2442,55$	$-0,10 \cdot x^2 - 13,30 \cdot x + 1329,69$	$-0,30 \cdot x^2 - 40,17 \cdot x + 401750,64$
$V_{f_2}^0$	$0,27 \cdot x^2 + 35,85 \cdot x - 3585,47$	$-0,32 \cdot x^2 - 42,31 \cdot x + 4231,26$	$0,06 \cdot x^2 + 7,88 \cdot x - 787,97$
$V_{f_3}^0$	$0,59 \cdot x^2 + 78,21 \cdot x - 7820,51$	$-0,32 \cdot x^2 - 42,57 \cdot x + 4257,22$	$-0,96 \cdot x^2 - 128,64 \cdot x + 12863,63$

**Fonte: O Autor (2019)**

Para o primeiro modo de vibração, a função de deslocamento  $u(x)$  e  $g(t)$  no referencial generalizado e no inicial, respectivamente, são expressas por:

$$\begin{aligned}
 u_1(x) &= 0,36275 \cdot \{ \cosh(0,01983 \cdot x) - \cos(0,01713 \cdot x) \\
 &\quad + 0,92535 \cdot [ -\sinh(0,01983 \cdot x) + 2,41421 \cdot \sin(0,01713 \cdot x) ] \} \\
 g_1(t) &= 4,543 \cdot 10^{10} \cdot \sin(3,476 \cdot 10^{-3} \cdot t) - 8,928 \cdot 10^8 \cdot \sin(3 \cdot t) \\
 u_1(x) &= 6,098 \cdot 10^{-4} \cdot \{ \cosh(1,847 \cdot 10^{-3} \cdot x) - \cos(7,65 \cdot 10^{-4} \cdot x) \\
 &\quad + 1,556 \cdot 10^{-3} \cdot [ -\sinh(1,847 \cdot 10^{-3} \cdot x) \\
 &\quad + 4,048 \cdot 10^{-3} \cdot \sin(7,65 \cdot 10^{-4} \cdot x) ] \} \\
 g_1(t) &= 7,637 \cdot 10^7 \cdot \sin(5,843 \cdot 10^{-6} \cdot t) - 1,501 \cdot 10^6 \cdot \sin(3 \cdot t)
 \end{aligned}$$

Em seguida, mediante retorno ao referencial inicial, escreve-se o vetor de deslocamentos  $\{v_{CG}\}$  para o modo de maiores deformações, como:

$$\{v_{CG}\}_1 = [\Phi_R] \cdot \{q\} = [\Phi_R] \cdot \{u_1(x) \cdot g_1(t)\}$$

$$\text{onde: } [\Phi_R] = [Re] \cdot [J^*]^{-\frac{1}{2}} \cdot [\varphi_1] \cdot [\varphi_2] \cdot [\varphi_3] \cdot (\dots) \cdot [\varphi_{n-1}] \cdot [\varphi_n];$$

E por fim, exprime-se a função da rotação  $\phi_{CG}(x)$  como:

$$\phi_{CG}(x) = u_1(x) \cdot g_1(t) + u_2(x) \cdot g_2(t) + u_3(x) \cdot g_3(t)$$

Devido à relação entre a rotação  $\phi_{CG}(x)$  e o bimomento  $B(x)$ , oriunda da teoria de flexo – torção (ver eq. 2.96 c), escreve-se:

$$B(x) = E \cdot I_\omega \cdot \phi_{CG}''(x) = E \cdot I_\omega \cdot \frac{d^2[\phi_{CG}(x)]}{dx^2}$$

Após aplicar as transformações de referencial, tem-se o bimomento (na base e no topo) para o CG, D e  $O_s$ . Ver tabela 5.13, bem como a rotação na tabela 5.14.

**Tabela 5.13 – Valores de bimomento por pilar no CG e D, e do conjunto de pilares em  $O_s$**

$(x \cdot 10^7)$ $kN \cdot m^2$	No Centro de Gravidade			No Centro de Torção			$O_s$
	$CG_1$	$CG_2$	$CG_3$	$D_1$	$D_2$	$D_3$	
$B(x = 0)$	-3,99422	2,17432	6,56993	-3,99422	2,17432	6,56993	Idem por Pilar.
$B(x = 50m)$	-4,00790	2,18176	6,59242	-4,00790	2,18176	6,59242	
$B(x = H)$	-4,04993	2,20464	6,66156	-4,04993	2,20464	6,66156	

Fonte: O Autor (2019)

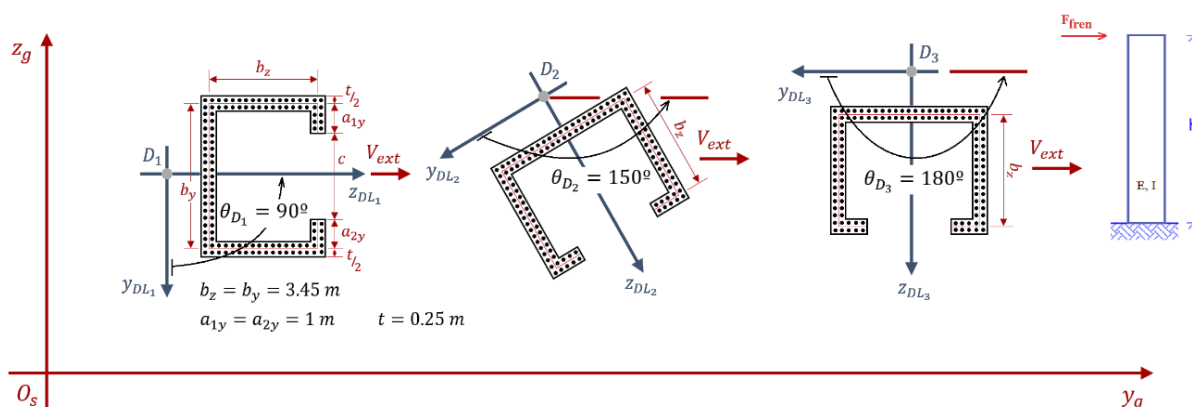
**Tabela 5.14 – Valores de rotação por pilar no CG e do conjunto de pilares em  $O_s$** 

<i>rad</i>	No Centro de Gravidade			$O_s$
	$CG_1$	$CG_2$	$CG_3$	
$\phi(x = 0)$	0	0	0	Idem por Pilar.
$\phi(x = 50m)$	- 57,42669	31,26114	94,45877	
$\phi(x = H)$	- 233,82458	127,28615	384,60827	

Fonte: O Autor (2019)

**EXEMPLO 5.10:** Nesta décima análise, tem-se o esforço de frenagem do tráfego e conseguinte carga lateral no topo. Assim, o esforço cortante é expresso sob a configuração mostrada na figura 5.52 apresenta-se assim:

**Figura 5.52: Ângulos formados entre os esforços cortantes externos ativados pela frenagem em cada pilar e os eixos  $y_{DL}$  em cada um dos três pilares**



Fonte: O Autor (2019)

Adotando-se a mesma frequência  $\bar{\omega} = 3 \text{ rad/s}$  para o esforço cortante, exprime-se na tabela 5.15 os valores de bimomento no topo e na base.

**Tabela 5.15 – Valores de bimomento para a atuação do esforço de frenagem dos veículos**

$(x \cdot 10^5)$ $kN \cdot m^2$	No Centro de Gravidade			No Centro de Torção		
	$CG_1$	$CG_2$	$CG_3$	$D_1$	$D_2$	$D_3$
$B(x = 0)$	- 4,96373	2,70209	8,16464	- 4,96373	2,70209	8,16464
$B(x = 50 \text{ m})$	- 4,98075	2,71135	8,19264	- 4,98075	2,71135	8,19264
$B(x = H)$	- 5,03302	2,73980	8,27860	- 5,03302	2,73980	8,27860

Fonte: O Autor (2019)

Sendo os carregamentos:  $q_1 = q_2 = 0 \text{ kN/m}$ ,  $Q = 10 \text{ kN}$ , o bimomento no topo  $B_H = 10 \text{ kN} \cdot m^2$  e o momento de torção nulo ( $M_{tH} = 0 \text{ kN} \cdot m$ ) no topo.

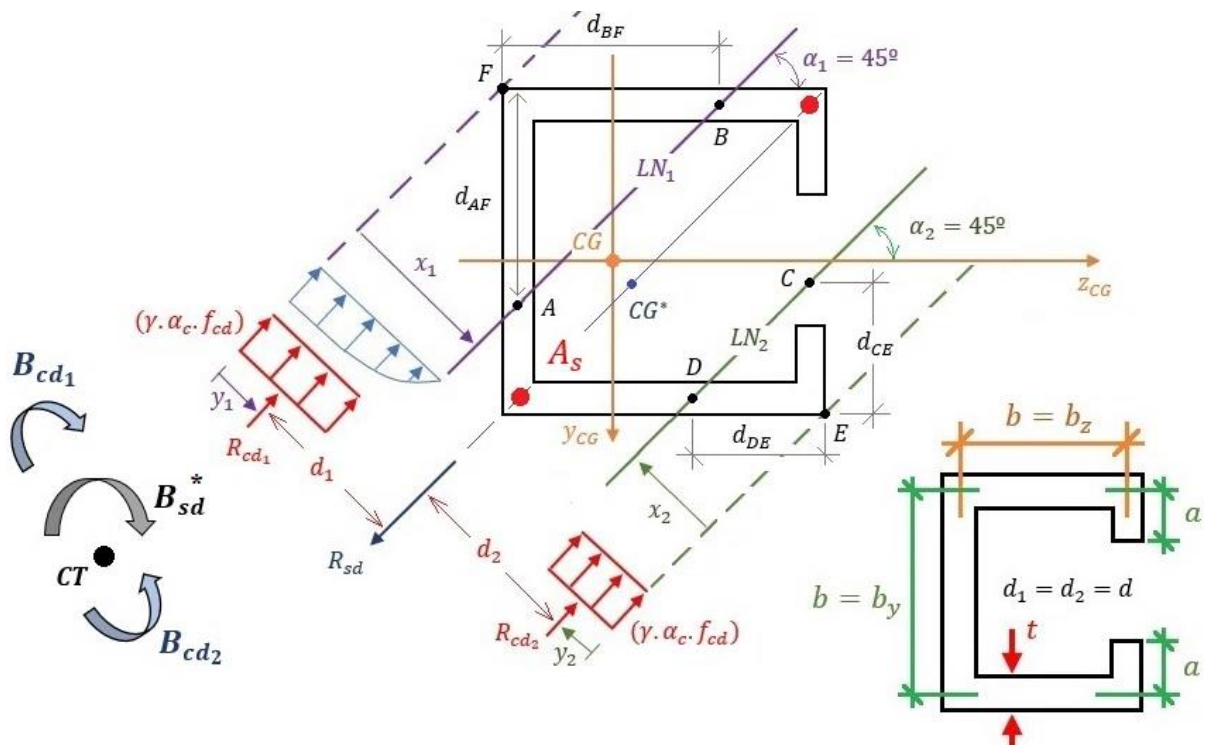


## DIMENSIONAMENTO DE SEÇÕES DE PAREDES FINAS DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDAS AO BIMOMENTO

### 6.1. INTRODUÇÃO

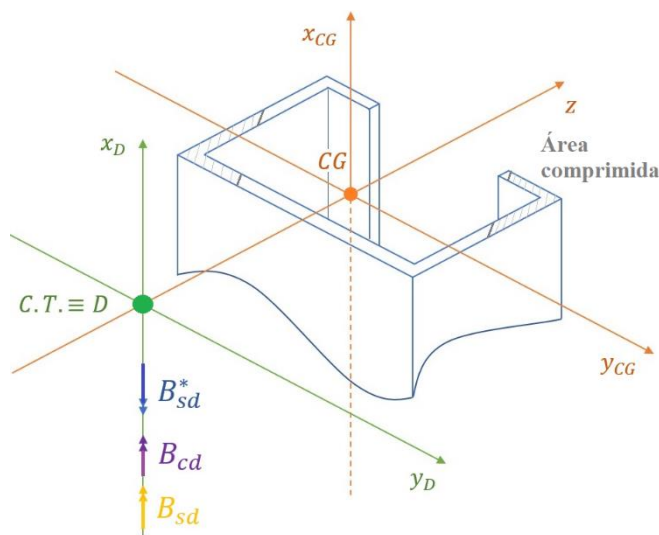
Na análise estrutural e no dimensionamento de seções de paredes finas citam-se Pilarski (1952) e Rekach (1978), porém limitando-se a abóbodas finas. Assim, para o dimensionamento de seções em formato de painéis – parede (ver figura 6.1) não se observa registro na literatura, mediante equilíbrio em bimomentos.

**Figura 6.1: Resultantes  $R_{cd1}$ ,  $R_{cd2}$  e  $R_{sd}$  para seção com simetria nas abas e paredes**



Procedendo-se neste capítulo, o dimensionamento mediante substituição do bimomento por duas linhas neutras, paralelas entre si e com inclinação de  $45^\circ$ . Adota-se também, núcleo com abas e paredes simétricas quanto as dimensões. O balanço de esforços solicitantes para a seção transversal de paredes finas submetida ao bimomento é procedido via equilíbrio entre bimomentos resistentes no concreto comprimido ( $B_{cd}$ ), o bimomento na zona tracionada ( $B_{sd}^*$ ) e o bimomento solicitante de cálculo. Tal equilíbrio é processado através da convenção de sinais indicado na figura 6.2, sob consonância ao apresentado na figura 6.1. A inclinação das resultantes de compressão ( $R_{cd1}$  e  $R_{cd2}$ ), bem como da resultante de tração  $R_{sd}$  e os decorrentes bimomentos gerados no centro de torção (C.T. ou simplesmente D) são calculados mediante o diagrama de ordenadas setoriais.

**Figura 6.2: Bimomentos resistentes de cálculo e solicitante de cálculo sob a convenção do parafuso direito com observador direcionado ao infinito positivo do eixo axial do pilar**

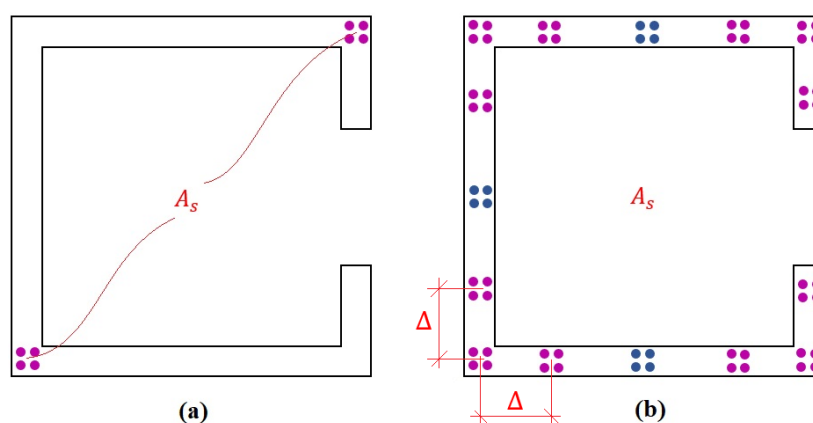


Fonte: O Autor (2019)

O dimensionamento de painéis-parede é comumente procedido por treliças espaciais de Mörsch, conforme observa-se em Wight e MacGregor (2009, p. 300 – 327) e em Sánchez Filho (1988). Ainda podendo-se dimensionar o núcleo estrutural via tensão admissível (que em separado do MEF vigorou até os anos 60 do século XX), porém segue vigente ao associar-se com a análise de tensões por modelagem em elementos finitos. De quais procedimentos citam-se os autores: Orlor e Donini (2011, p. 89 – 91), Belluzzi (1973, v. 1, p. 217 – 220 e 244 – 246), Belluzzi (1971, v. 2, p. 641 – 643) e Andrade e Vellasco (2016). Nesse capítulo propõe-se o método de projeto a solicitação pelo bimomento em seção de painéis-parede com paredes e abas simétricas (quanto as dimensões), bem como gerar tabelas adimensionais. O equacionamento da seção transversal foi procedido com base em duas linhas neutras e mediante equilíbrio das

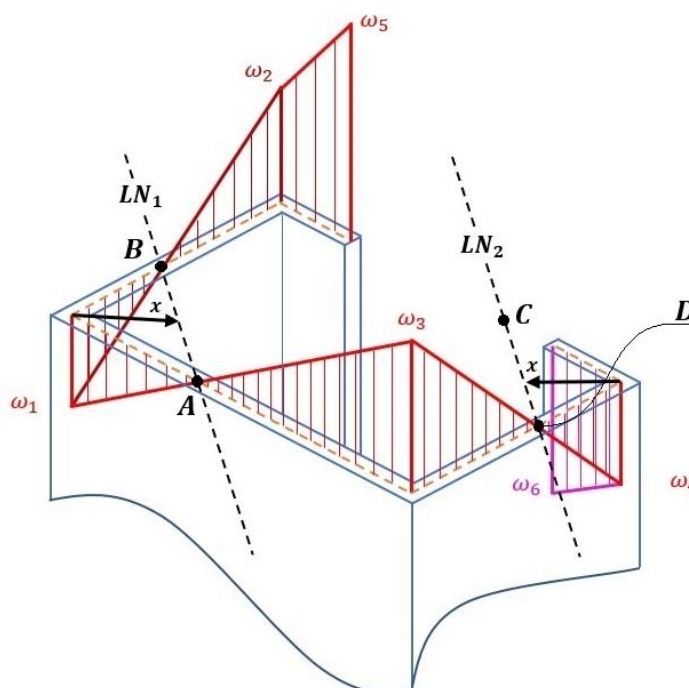
resultantes de tração e de compressão. Além do mais, serão analisadas duas configurações de distribuição das armaduras: a primeira com  $A_s$  concentrado nas quinas tracionadas (ver figura 6.3 a) e a segunda com armadura distribuída ao longo da seção transversal (com reforço nas quinas com feixes de quatro bitolas distantes de  $\Delta$  do CG da armadura em relação as interseções das paredes), ver figura 6.3 b. Na Figura 6.4 é apresentado o posicionamento das duas linhas neutras sob visão tridimensional da seção em núcleo estrutural C, isso em função do diagrama de ordenadas setoriais principais  $\omega_{pc}$ .

**Figura 6.3: Modelagem da armadura ao bimomento: (a) com armadura concentrada nas quinas tracionadas e (b) armadura distribuída e reforço nas interseções das paredes**



Fonte: O Autor (2019)

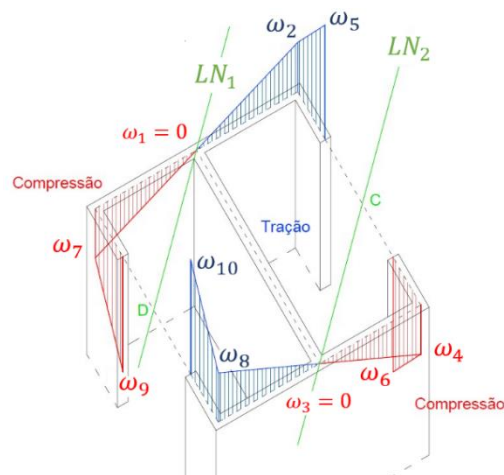
**Figura 6.4: Posicionamento das linhas neutras na seção de paredes finas**



Fonte: O Autor (2019)

Na figura 6.5 é apresentado o diagrama de ordenadas setoriais principais  $\omega_{pc}$  para a seção em formato de duplo T, indicando assim o posicionamento das linhas neutras  $LN_1$  e  $LN_2$ . Devido a dupla simetria, inerente a seção em duplo T, verifica-se compressão e tração por pares opostos entre as abas de reforço. Lembrando que tal condição é válida para paredes e abas com comprimentos simétricos.

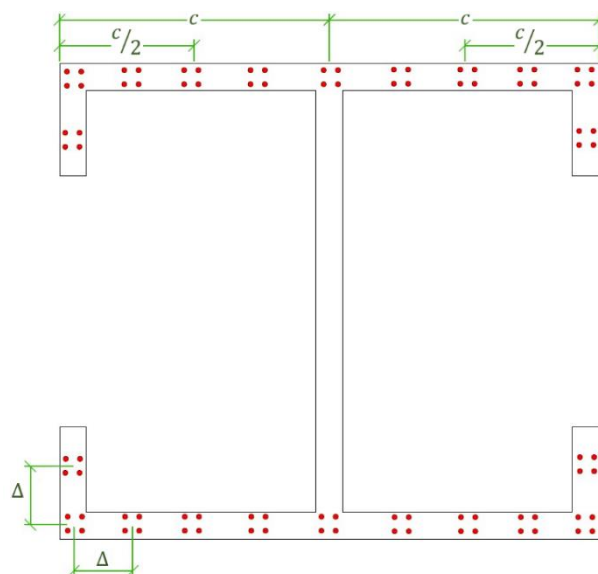
**Figura 6.5: Posicionamento das linhas neutras na seção em duplo T**



Fonte: O Autor (2019)

A distribuição das armaduras para a configuração de seção em duplo T será a apresentada na figura 6.6, sendo indicada apenas o posicionamento da armadura calculada. Porém, além desta armadura deve-se impor também as armaduras construtivas, ou seja, colocar armaduras longitudinais no trecho de diagrama  $\omega_{pc}$  nulo (painel – parede central).

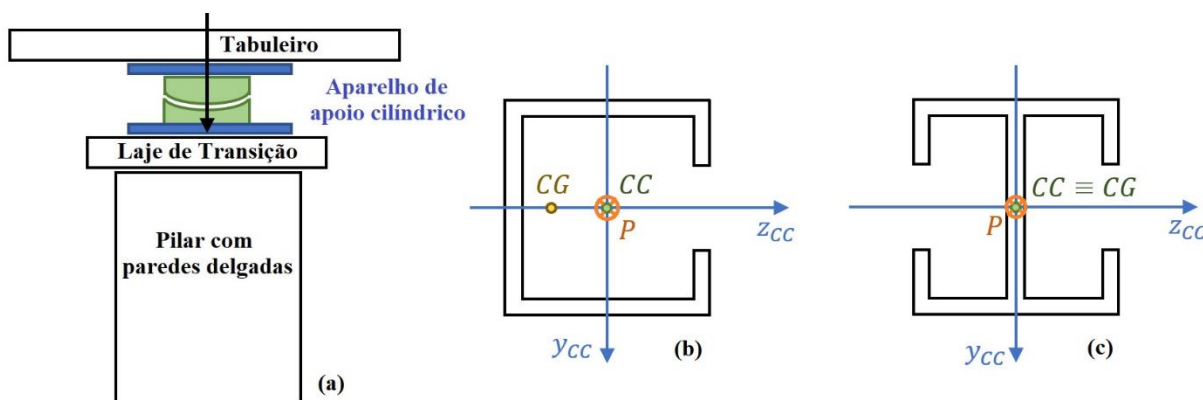
**Figura 6.6: Distribuição da armadura calculada para a seção em duplo T**



Fonte: O Autor (2019)

A consideração de pilares com seção transversal de paredes finas é realizada mediante imposição da carga compressiva  $P$  no topo e o carregamento distribuído  $p$  devido ao peso – próprio. Desta forma, mediante definições apresentada em Vlassov (1962, p. 159 e p. 181) acrescenta-se o efeito de bimomento produzido pelas cargas compressivas através das ordenadas setoriais nos respectivos pontos de contato. Quanto ao peso – próprio do pilar pode-se promover sua concentração na base e computar tal efeito em bimomento, mediante diagrama  $\omega_{pc}$ . A carga reativa do tabuleiro da ponte é transmitida ao centro de carga da seção transversal do pilar, via aparelho de apoio (Neoprene para pequenas pontes e esféricos ou cilíndricos para pontes de grande porte), sobre laje de transição quando do lançamento de pilares de paredes delgadas. Tal configuração é apresentada na figura 6.7.

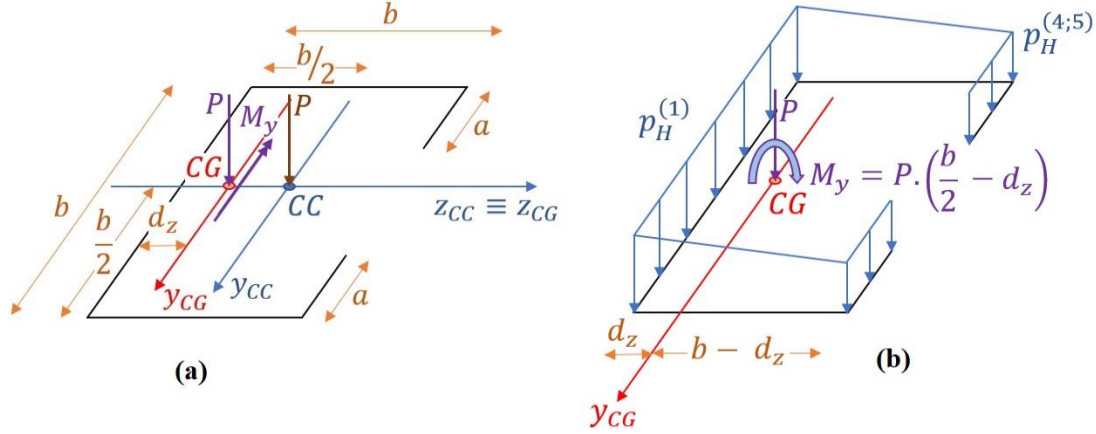
**Figura 6.7: Aplicação da carga reativa  $P$  no topo do pilar: (a) corte, (b) configuração dos centros geométricos para seção em núcleo C e (c) posicionamento da carga  $P$  na seção em duplo T**



Fonte: O Autor (2019)

A fim de computar o efeito em bimomento da carga reativa  $P$  no topo do pilar em formato de núcleo C, ver figura 6.7 b, procede-se o translade de tal carregamento do centro de carga (CC) para o centro de gravidade (CG) da seção transversal em questão. Bem como, procede-se a transformação em sistema equivalente com cargas verticais aplicadas ao longo da paredes finas. Vide figura 6.8.

**Figura 6.8: Aplicação da carga  $P$  no topo do núcleo C: (a) translação do CC para o CG e (b) sistema equivalente de cargas verticais ao longo das paredes delgadas**



Fonte: O Autor (2019)

A quantificação das cargas  $p_H^{(1)}$  e  $p_H^{(4;5)}$  é realizada mediante balanço de forças verticais e de momento de flexão em torno do eixo centroidal  $y_{CG}$ , assim:

$$p_H^{(1)} \cdot b + p_H^{(4;5)} \cdot 2 \cdot a + 2 \cdot \left[ \frac{p_H^{(1)} + p_H^{(4;5)}}{2} \cdot b \right] = P \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} -[p_H^{(1)} \cdot b] \cdot d_z + [p_H^{(4;5)} \cdot 2 \cdot a] \cdot (b - d_z) \\ + 2 \cdot \left\{ [p_H^{(4;5)} \cdot b] \cdot \left( \frac{b}{2} - d_z \right) + \left[ \frac{p_H^{(1)} - p_H^{(4;5)}}{2} \cdot b \right] \cdot \left( \frac{b}{3} - d_z \right) \right\} = P \cdot \left( \frac{b}{2} - d_z \right) \end{aligned} \quad (6.2)$$

em formato matricial, agrupam-se as eq.'s (6.1) e (6.2), como:

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot b & 2 \cdot a + b \\ -b \cdot d_z + b \cdot \left( \frac{b}{3} - d_z \right) & 2 \cdot a \cdot (b - d_z) + 2 \cdot b \cdot \left( \frac{b}{2} - d_z \right) - b \cdot \left( \frac{b}{3} - d_z \right) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} p_H^{(1)} \\ p_H^{(4;5)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ P \cdot \left( \frac{b}{2} - d_z \right) \end{Bmatrix} \quad (6.3 a)$$

ao resolver o sistema apresentado na eq. (6.3 a), conclui-se:

$$p_H^{(1)} = \frac{P}{2 \cdot b} \cdot \frac{(6 \cdot a + b)}{(10 \cdot a + 3 \cdot b)} \quad (6.3 b)$$

$$p_H^{(4;5)} = \frac{2 \cdot P}{(10 \cdot a + 3 \cdot b)} \quad (6.3 c)$$

A contribuição em bimomento para a carga  $P$  do topo do pilar é quantificada via cruzamento das figuras 2.101 e 6.8 (b), obtendo-se:

$$B_H = -P \cdot \omega_{pc} \equiv -p_H^{(1)} \cdot \left[ \frac{(-\omega_1 + \omega_3)}{2} \cdot b \right] - p_H^{(4;5)} \cdot \left[ \frac{(\omega_2 + \omega_5) + (-\omega_4 - \omega_6)}{2} \cdot a \right] - \frac{p_H^{(1)}}{6} \cdot [(-2 \cdot \omega_1 + \omega_2) + (2 \cdot \omega_3 - \omega_4)] - \frac{p_H^{(4;5)}}{6} \cdot [(-\omega_1 + 2 \cdot \omega_2) + (\omega_3 - 2 \cdot \omega_4)] \quad (6.4)$$

onde:  $B_H$  é o bimomento no topo do pilar em núcleo C;

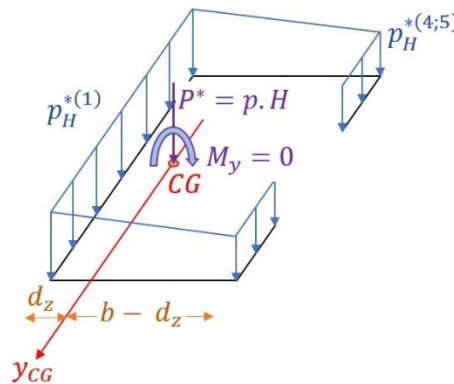
$p_H^{(1)}$  é a carga vertical distribuída na parede (1);

$p_H^{(4;5)}$  é a carga vertical distribuída nas paredes (4) e (5) e

$$d_z = \frac{-b \cdot (8 \cdot a^3 - 6 \cdot a \cdot b^2 - 3 \cdot b^3)}{8 \cdot a^3 - 12 \cdot a^2 \cdot b + 6 \cdot a \cdot b^2 + 7 \cdot b^3 + 2 \cdot b \cdot t^2}$$

Por fim, para o pilar em formato de duplo T (figura 6.7 c) verifica-se bimomento nulo no topo ( $B_H = 0$ ), isso devido ao diagrama  $\omega_{pc}$  (ver figura 6.5) para a respectiva seção ter ordenada nula no ponto de aplicação da carga  $P$ . Já, para o caso da carga distribuída  $p$ , computa-se o incremento de bimomento na base  $\Delta B_0$ , semelhante ao procedido na figura 6.8 (b), porém com nulidade do momento de translação  $M_y$ . Esse último sistema é apresentado na figura 6.9.

**Figura 6.9: Sistema equivalente de cargas verticais nas paredes finas para a atuação do peso – próprio do pilar na seção da base**



Fonte: O Autor (2019)

o equilíbrio da seção apresentada na figura 6.9 é expresso sob a forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot b & 2 \cdot a + b \\ -b \cdot d_z + b \cdot \left(\frac{b}{3} - d_z\right) & 2 \cdot a \cdot (b - d_z) + 2 \cdot b \cdot \left(\frac{b}{2} - d_z\right) - b \cdot \left(\frac{b}{3} - d_z\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} p_H^{*(1)} \\ p_H^{*(4;5)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p \cdot H \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.5 a)$$

resolvendo a eq. (6.5 a) tem-se as cargas verticais, por parede delgada, definidas por:

$$p_H^{*(1)} = p \cdot H \cdot \frac{[2 \cdot b^2 + 6 \cdot a \cdot b - 3 \cdot d_z \cdot (2 \cdot a + b)]}{b^2 \cdot (10 \cdot a + 3 \cdot b)} \quad (6.5 b)$$

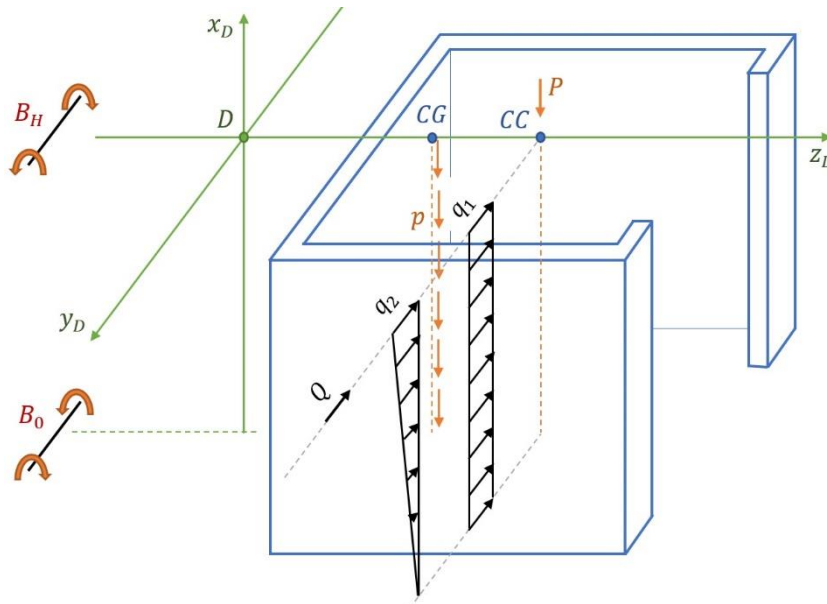
$$p_H^{*(4;5)} = -p \cdot H \cdot \frac{(b - 6 \cdot d_z)}{b \cdot (10 \cdot a + 3 \cdot b)} \quad (6.5 c)$$

e por último, o incremento de bimomento na base, em decorrência do peso-próprio do pilar, é expresso por:

$$\begin{aligned} \Delta B_0 &= -P^* \cdot \omega_{pc} \\ &\equiv -p_H^{*(1)} \cdot \left[ \frac{(-\omega_1 + \omega_3)}{2} \cdot b \right] - p_H^{*(4;5)} \cdot \left[ \frac{(\omega_2 + \omega_5) + (-\omega_4 - \omega_6)}{2} \cdot a \right] \\ &\quad - \frac{p_H^{*(1)}}{6} \cdot [(-2 \cdot \omega_1 + \omega_2) + (2 \cdot \omega_3 - \omega_4)] - \frac{p_H^{*(4;5)}}{6} \cdot [(-\omega_1 + 2 \cdot \omega_2) + (\omega_3 - 2 \cdot \omega_4)] \end{aligned} \quad (6.6)$$

A configuração das cargas atuantes no pilar de ponte com seção transversal em paredes finas é apresentada na figura 6.10, explicitando-se os bimomentos no topo  $B_H$  e na base  $B_0$ . Por último, as cargas laterais  $q_1, q_2$  e  $Q$  são oriundas da ação do vento e as cargas verticais  $P$  e  $p$  são devidas a reação do tabuleiro (já considerada a ação do vento sobre tal) e do peso – próprio, respectivamente.

**Figura 6.10: Cargas atuantes no pilar de ponte em paredes finas com ações verticais e ação lateral do vento**



Fonte: O Autor (2019)



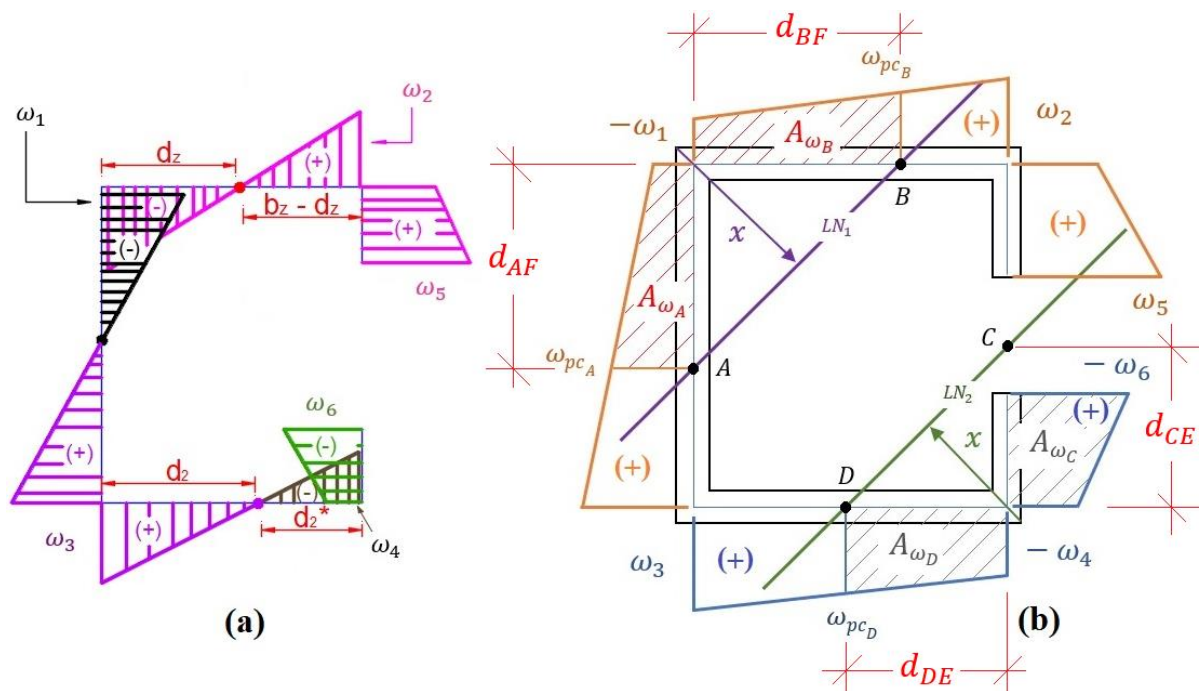
## 6.2. PILAR EM FORMATO DE C COM REFORÇO DE ABAS

### 6.2.1. Equacionamento ao bimomento utilizando a armadura concentrada nas quinas tracionadas

#### a) Posicionamento das linhas neutras

Procede-se a correlação entre as distâncias ( $d_{AF}$ ,  $d_{BF}$ ,  $d_{CE}$  e  $d_{DE}$ ) com as profundidades  $x_1$  e  $x_2$  das linhas neutras  $LN_1$  e  $LN_2$  (respectivamente), em consonância com as figuras 6.1 e 6.4. Na figura 6.11 é apresentado o diagrama de área setorial principal  $\omega_{pc}$ , evidenciando-se nulidade nas ordenadas dos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  (posicionamento das linhas neutras). Na figura 6.11 (b) é apresentado o traçado positivo de  $\omega_{pc}$ , a fim de facilitar o equacionamento matemático.

**Figura 6.11: Ordenadas e cotas no diagrama de área setorial principal: (a) notação da flexo - torção e (b) definidas para o dimensionamento ao bimomento**



Fonte: O Autor (2019)

Mediante imposição da dupla simetria no cálculo do diagrama  $\omega_{pc}$  (ver figura 2.101), exprimem-se as ordenadas setoriais como:

$$\omega_1 = \omega_3 = -\frac{b^2 \cdot (8 \cdot a^3 - 6 \cdot a \cdot b^2 - 3 \cdot b^3)}{2 \cdot (8 \cdot a^3 - 12 \cdot a^2 \cdot b + 6 \cdot a \cdot b^2 + 7 \cdot b^3 + 2 \cdot b \cdot t^2)} \quad (6.7 a)$$

$$\omega_2 = \omega_4 = \frac{b^2 \cdot (8 \cdot a^3 - 6 \cdot a \cdot b^2 + 2 \cdot b^3 + b \cdot t^2)}{8 \cdot a^3 - 12 \cdot a^2 \cdot b + 6 \cdot a \cdot b^2 + 7 \cdot b^3 + 2 \cdot b \cdot t^2} \quad (6.7 b)$$

$$\omega_5 = \omega_6 = -\frac{b^2 \cdot (4 \cdot a^3 - 6 \cdot a \cdot b^2 - 10 \cdot a \cdot b^3 - 2 \cdot a \cdot t^2 - 2 \cdot b^3 - b \cdot t^2)}{8 \cdot a^3 - 12 \cdot a^2 \cdot b + 6 \cdot a \cdot b^2 + 7 \cdot b^3 + 2 \cdot b \cdot t^2} \quad (6.7 c)$$

As ordenadas setoriais nos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  do diagrama  $\omega_{pc}$  (vide figura 6.11 b) são expressas, em termos das equações (6.7), como:

$$\omega_{pcA} = \left(2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\omega_1}{b}\right) \cdot x_1 - \omega_1 \quad (6.8 a)$$

$$\omega_{pcB} = \left[\sqrt{2} \cdot \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{b}\right] \cdot x_1 - \omega_1 \quad (6.8 b)$$

$$\omega_{pcC} = \left[\sqrt{2} \cdot \frac{(\omega_2 - \omega_5)}{a}\right] \cdot x_2 - \left[\omega_2 + \frac{(\omega_2 - \omega_5)}{a} \cdot \eta_{CE}\right] \quad (6.8 c)$$

$$\omega_{pcD} = \left[\sqrt{2} \cdot \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{b}\right] \cdot x_2 - \omega_2 \quad (6.8 d)$$

$$\text{com: } \eta_{CE} = \begin{cases} 0 & ; \text{se } d_{CE} \leq a \\ d_{CE} - a & ; \text{se } d_{CE} > a \end{cases}$$

As áreas comprimidas no diagrama  $\omega_{pc}$  ( $A_{\omega_A}$ ,  $A_{\omega_B}$ ,  $A_{\omega_C}$  e  $A_{\omega_D}$ ), ilustradas na figura 6.11 (b), são expressas por:

$$A_{\omega_A} = \frac{(-\omega_1 + \omega_{pcA})}{2} \cdot d_{AF} \quad (6.9 a)$$

$$A_{\omega_B} = \frac{(-\omega_1 + \omega_{pcB})}{2} \cdot d_{BF} \quad (6.9 b)$$

$$A_{\omega_C} = \frac{(-\omega_2 + \omega_{pcC})}{2} \cdot d_{CE} \quad (6.9 c)$$

$$A_{\omega_D} = \frac{(-\omega_2 + \omega_{pcD})}{2} \cdot d_{DE} \quad (6.9 d)$$

Aplicam-se as equações (6.8) em (6.9), ressaltando que na área  $A_{\omega_C}$  será admitido como máximo valor de  $d_{CE}$  o comprimento  $a$  da aba. Resulta então as áreas  $A_{\omega}$ , expressas por:

$$A_{\omega_A} = (-\omega_1 \cdot \sqrt{2}) \cdot x + \frac{2 \cdot \omega_1}{b} \cdot x^2 \quad (6.10 a)$$

$$A_{\omega_B} = (-\omega_1 \cdot \sqrt{2}) \cdot x + \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{b} \cdot x^2 \quad (6.10 b)$$

$$A_{\omega_C} = -\frac{(\omega_2 + \omega_5)}{2} \cdot a \quad (6.10 c)$$

$$A_{\omega_D} = (-\omega_2 \cdot \sqrt{2}) \cdot x + \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{b} \cdot x^2 \quad (6.10 d)$$

Conforme definição de bimomento, via carregamento distribuído, apresentado por Vlassov (1962), escreve-se a resultante de compressão para toda a seção transversal (vide figura 6.1), como:

$$B_{cd} = B_{cd_2} - B_{cd_1} = \sigma_{cd} \cdot t \cdot A_{\omega}^* \quad (6.11)$$

onde:  $\sigma_{cd}$  é a tensão de compressão no concreto;  $A_{\omega}$  é a área do diagrama  $\omega_{pc}$  em contato com a tensão de compressão ( $A_{\omega} = -A_{\omega_A} - A_{\omega_B} + A_{\omega_C} + A_{\omega_D}$ );  $A_{\omega}^*$  é a área diminuída de  $A_{\omega}$ ;  $A_{\omega}^* = \lambda \cdot A_{\omega}$ ;  $y_1 = \lambda \cdot x_1 = y_2 = \lambda \cdot x_2 \equiv \lambda \cdot x$ ; e  $\sigma_{cd} = \gamma \cdot \lambda \cdot \alpha_c \cdot f_{cd}$ .

Por fim, a profundidade da linha neutra  $x$  é obtida via equilíbrio de bimomento na seção transversal, ficando a eq. (6.11) reescrita como:

$$k_{B_1} \cdot x^2 + k_{B_2} \cdot x + k_{B_3} = 0 \quad (6.12)$$

sendo:  $k_{B_1} = -\gamma \cdot \lambda \cdot \alpha_c \cdot t \cdot b^{-1} \cdot f_{cd} \cdot (2 \cdot \omega_1)$ ;  $k_{B_2} = \gamma \cdot \lambda \cdot \alpha_c \cdot t \cdot f_{cd} \cdot [\sqrt{2} \cdot (2 \cdot \omega_1 - \omega_2)]$  e

$$k_{B_3} = B_{sd} - \gamma \cdot \lambda \cdot \alpha_c \cdot t \cdot f_{cd} \cdot \left[ \frac{(\omega_2 + \omega_5)}{2} \cdot a \right].$$

A solução da equação de 2º grau (eq. 6.12) expressa a profundidade da linha neutra  $x$ , e para tal, exprime-se:

$$x = \frac{-k_{B_2} - \sqrt{(k_{B_2})^2 - 4 \cdot k_{B_1} \cdot k_{B_3}}}{2 \cdot k_{B_1}} \quad (6.12 a)$$

Procede-se também a adimensionalização da equação (6.12) através do divisor comum  $(\omega_1 \cdot t^2 \cdot f_{cd})$ , de forma análoga a adimensionalização realizada na resolução clássica da flexão simples, ficando reescrita como:

$$k_{\beta_1} \cdot \bar{\xi}^2 + k_{\beta_2} \cdot \bar{\xi} + k_{\beta_3} = 0 \quad (6.13)$$

onde:  $\bar{\xi}$  é a profundidade relativa da linha neutra;  $\beta_{sd}$  é o bimomento adimensional solicitante de cálculo;  $d$  é o braço de alavanca entre as resultantes  $R_{cd_1}$  e  $R_{sd}$  (idem para  $R_{cd_2}$  e  $R_{sd}$ ). com:

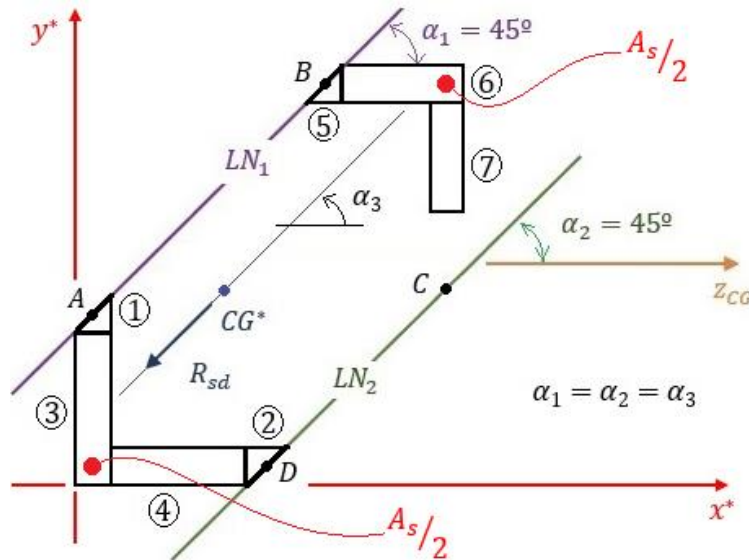
$$\bar{\xi} = \frac{x}{t}; \quad k_{\beta_1} = \frac{k_{B_1}}{\omega_1 \cdot f_{cd}}; \quad k_{\beta_2} = \frac{k_{B_2}}{\omega_1 \cdot t \cdot f_{cd}}; \quad k_{\beta_3} = \frac{k_{B_3}}{\omega_1 \cdot t^2 \cdot f_{cd}} \quad e \quad \beta_{sd} = \frac{B_{sd}}{\omega_1 \cdot t^2 \cdot f_{cd}}.$$

e por solução da eq. (6.13), expressa-se:  $\bar{\xi} = \frac{-k_{\beta_2} - \sqrt{(k_{\beta_2})^2 - 4 \cdot k_{\beta_1} \cdot k_{\beta_3}}}{2 \cdot k_{\beta_1}} \quad (6.13 a)$

### b) Armadura resistente ao bimomento

Considerando a armadura  $A_s$  aplicada de forma equidistante nas quinas mais tracionadas, na figura 6.12 é posicionado o centro de gravidade da armadura  $CG^*$ . Isso mediante cálculo de centroide de área bruta de concreto compreendida entre as linhas neutras.

**Figura 6.12: Posicionamento da resultante de tração  $R_{sd}$**



Fonte: O Autor (2019)

Resultando nas coordenadas  $(x_{CG}^*, y_{CG}^*)$  do  $CG^*$ , para a armadura tracionada, sob as seguintes expressões:

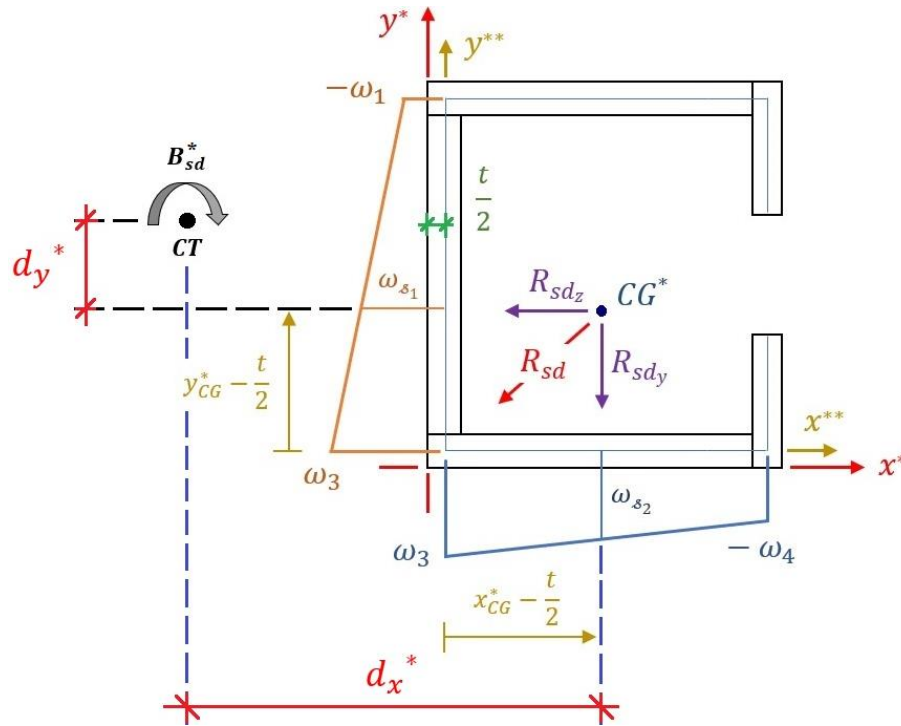
$$x_{CG}^* = \sum_{i=1}^7 \frac{x_{CGi}^* \cdot A_i}{A_i} \quad (6.14 a)$$

$$y_{CG}^* = \sum_{j=1}^7 \frac{y_{CGj}^* \cdot A_j}{A_j} \quad (6.14 b)$$

e:  $x_{CG_1}^* = y_{CG_2}^* = \frac{2}{3} \cdot t$ ;  $y_{CG_1}^* = (b - \sqrt{2} \cdot x) + \frac{t}{3}$ ;  $x_{CG_2}^* = (b - \sqrt{2} \cdot x) + \frac{4}{3} \cdot t$ ;  $x_{CG_3}^* = y_{CG_4}^* = \frac{t}{2}$ ;  
 $y_{CG_3}^* = \frac{b + t - \sqrt{2} \cdot x}{2}$ ;  $x_{CG_4}^* = \frac{(b - \sqrt{2} \cdot x)}{2} + t$ ;  $x_{CG_5}^* = \sqrt{2} \cdot x - \frac{t}{3}$ ;  $y_{CG_5}^* = b + \frac{t}{3}$ ;  
 $x_{CG_6}^* = \frac{b + t + \sqrt{2} \cdot x}{2}$ ;  $y_{CG_6}^* = x_{CG_7}^* = b + \frac{t}{2}$ ;  $y_{CG_7}^* = b - \frac{1}{2} \cdot (a - \frac{t}{2})$ ;  $A_1 = A_2 = A_5 = \frac{t^2}{2}$ ;  
 $A_3 = A_6 = (b + t - \sqrt{2} \cdot x) \cdot t$ ;  $A_4 = (b - \sqrt{2} \cdot x) \cdot t$ ;  $A_7 = t \cdot (a - \frac{t}{2})$ .

Na figura 6.13 são destacadas as projeções da resultante  $R_{sd}$  nos eixos  $z$  e  $y$ , bem como as ordenadas setoriais  $\omega_{s_1}$  e  $\omega_{s_2}$  no diagrama principal  $\omega_{pc}$ .

**Figura 6.13: Ordenadas setoriais do diagrama  $\omega_{pc}$  sob atuação da resultante  $R_{sd}$**



Fonte: O Autor (2019)

O bimomento  $B_{sd}$  gerado pela tração  $R_{sd}$  é definido mediante definição de Vlassov (1962), por:

$$B_{sd}^* = R_{sd} \cdot [\cos(\alpha_3) \cdot \omega_{s_1} + \sin(\alpha_3) \cdot \omega_{s_2}] \quad (6.15)$$

sendo:  $\cos(\alpha_3) = \sin(\alpha_3) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;

$$\omega_{s_1} = -\frac{2 \cdot \omega_1}{b} \cdot \left(y_{CG}^* - \frac{t}{2}\right) \quad \text{e} \quad \omega_{s_2} = -\frac{(\omega_1 + \omega_2)}{b} \cdot \left(x_{CG}^* - \frac{t}{2}\right) + \omega_1.$$

Através do equilíbrio em bimomento (ver figura 6.2) associado a equação (6.15), exprime-se o balanço de tal esforço solicitante, como:

$$B_{sd}^* - B_{cd} = B_{sd} \quad \therefore \quad R_{sd} \cdot k^* - B_{cd} = B_{sd} \quad (6.16)$$

com:  $k^* = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\omega_{s_1} + \omega_{s_2})$  e  $B_{cd}$  apresentado na eq. (6.11).

A área de aço  $A_s$  é determinada via imposição da tensão de escoamento do aço  $f_{yd}$ , ficando expressa por:

$$A_s = \frac{B_{sd}}{k^{**} \cdot f_{yd}} \quad (6.17)$$

$$\text{com: } k^{**} = -\frac{\omega_1 \cdot \sqrt{2}}{b} \cdot \left(y_{CG}^* - \frac{t}{2} - b\right) - \left[ \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2 \cdot b} \cdot \sqrt{2} \cdot \left(x_{CG}^* - \frac{t}{2}\right) \right]$$

Por fim, por questões de ductilidade, limita-se a profundidade relativa da linha neutra  $\bar{\xi}$  para o limite entre os domínios de deformação 3 e 4. Resultando em  $\xi_{lim}$  expressa por:

$$\xi_{lim} = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd} + \varepsilon_{cu}} \quad (6.18 a)$$

e o bimomento adimensional limite  $\beta_{sd_{lim}}$  será obtida mediante  $k_{\beta_{3_{lim}}}$  (ver eq.'s 6.12 e 6.13), valendo:

$$k_{\beta_{3_{lim}}} = -k_{\beta_1} \cdot (\xi_{lim})^2 - k_{\beta_2} \cdot \xi_{lim} \quad (6.18 b)$$

$$\beta_{sd_{lim}} = k_{\beta_{3_{lim}}} + \frac{\gamma \cdot \lambda \cdot \alpha_c \cdot t}{t^2} \cdot \left[ \frac{(\omega_2 + \omega_5)}{2 \cdot \omega_1} \cdot a \right] \quad (6.18 c)$$

onde:  $\varepsilon_{yd}$  vale 2,07 ‰ para aço CA – 50 e  $\varepsilon_{cu}$  vale 3,5 ‰ para concretos do grupo I de resistência, conforme observa-se nas normas: NBR 8953 (ABNT, 2015) e NBR 6118 (ABNT, 2014).

### c) Marcha de cálculo Nº 4

Para a seção transversal aberta em formato de C e composta por paredes finas, sob a distribuição das armaduras apresentada na figura 6.3 (a), postula-se a seguinte marcha de cálculo:

#### 1ª Etapa: Dados de entrada

$b(m)$ ;  $a(m)$ ;  $t(m)$ ;  $B_{sd}(kN.m^2)$ ;  $\omega_1(m^2)$ ;  $\omega_2(m^2)$ ;  $\omega_5(m^2)$ ;  $f_{cd}(kN/cm^2)$ ;  $\varepsilon_{cu}(\%)$ ;

$f_{cd}(kN/cm^2)$ ;  $f_{yd}(kN/cm^2)$ ;  $\varepsilon_{yd}(\%)$ ;  $\gamma = 0,9$ ;  $\lambda$ ;  $\alpha_c$ ; admitir o braço " $d(m)$ ";

sugestão:  $d \cong \frac{0,707 \cdot b}{2}$ .

#### 2ª Etapa: Parâmetros

$$\beta_{sd}(ADM) = \frac{B_{sd}(kN.m^2)}{\omega_1(m^2) \cdot t^2(cm)^2 \cdot f_{cd}(kN/cm^2)}; \quad \xi_{lim}(ADM) = \frac{\varepsilon_{cu}(\%)}{\varepsilon_{yd}(\%) + \varepsilon_{cu}(\%)}$$

$$k_{B_1} \left( \frac{kN.m^2}{cm^2} \right) = -\gamma \cdot \lambda \cdot \alpha_c \cdot t(m) \cdot f_{cd}(kN/cm^2) \cdot \frac{(2 \cdot \omega_1(m^2))}{b(m)}$$

$$k_{B_2} \left( \frac{kN.m^3}{cm^2} \right) = \gamma \cdot \lambda \cdot \alpha_c \cdot t(m) \cdot f_{cd}(kN/cm^2) \cdot [\sqrt{2} \cdot (2 \cdot \omega_1 - \omega_2)(m^2)]$$

$$k_{B_3} \left( \frac{kN.m^4}{cm^2} \right) = B_{sd} - \gamma \cdot \lambda \cdot \alpha_c \cdot t(m) \cdot f_{cd}(kN/cm^2) \cdot \left[ \frac{(\omega_2 + \omega_5)(m^2)}{2} \cdot a(m) \right]$$

$$k_{\beta_1}(ADM) = \frac{k_{B_1} \left( \frac{kN.m^2}{cm^2} \right)}{\omega_1(m^2) \cdot f_{cd} \left( \frac{kN}{cm^2} \right)}; \quad k_{\beta_2}(ADM) = \frac{k_{B_2} \left( \frac{kN.m^3}{cm^2} \right)}{\omega_1(m^2) \cdot t(m) \cdot f_{cd} \left( \frac{kN}{cm^2} \right)};$$

$$k_{\beta_3}(ADM) = \frac{k_{B_3} \left( \frac{kN.m^4}{cm^2} \right)}{\omega_1(m^2) \cdot t^2(m)^2 \cdot f_{cd}(kN/cm^2)};$$

$$\beta_{sdlim}(ADM) = k_{\beta_3lim}(ADM) + \frac{\gamma \cdot \lambda \cdot \alpha_c}{t(m)} \cdot \left[ \frac{(\omega_2 + \omega_5)(m^2)}{2 \cdot \omega_1(m^2)} \cdot a(m) \right]$$

#### 3ª Etapa: Dimensionamento

a) Se  $\beta_{sd} > \beta_{sdlim}$ : aumentar a dimensão  $b$  do pilar em núcleo C.

b) Se  $\beta_{sd} \leq \beta_{sdlim}$ :

$$x(m) = \frac{-k_{B_2} \left( \frac{kN \cdot m^3}{cm^2} \right) - \sqrt{(k_{B_2})^2 \left( \frac{kN \cdot m^3}{cm^2} \right)^2 - 4 \cdot k_{B_1} \left( \frac{kN \cdot m^2}{cm^2} \right) \cdot k_{B_3} \left( \frac{kN \cdot m^4}{cm^2} \right)}}{2 \cdot k_{B_1} \left( \frac{kN \cdot m^2}{cm^2} \right)}$$

ou então:  $x_{CG}^*$ ;  $y_{CG}^*$  ver equação (6.14)

$$k^{**}(m^2) = -\frac{\omega_1(m^2) \cdot \sqrt{2}}{b(m)} \cdot \left( y_{CG}^* - \frac{t}{2} - b \right) (m) - \left[ \frac{(\omega_1 + \omega_2)(m^2)}{2 \cdot b(m)} \cdot \sqrt{2} \cdot \left( x_{CG}^* - \frac{t}{2} \right) (m) \right]$$

$$A_s(cm^2) = \frac{B_{sd} (kN \cdot m^2)}{k^{**}(m^2) \cdot f_{yd} (kN/cm^2)}$$

**Observação:** para a notação adimensional, utiliza-se:

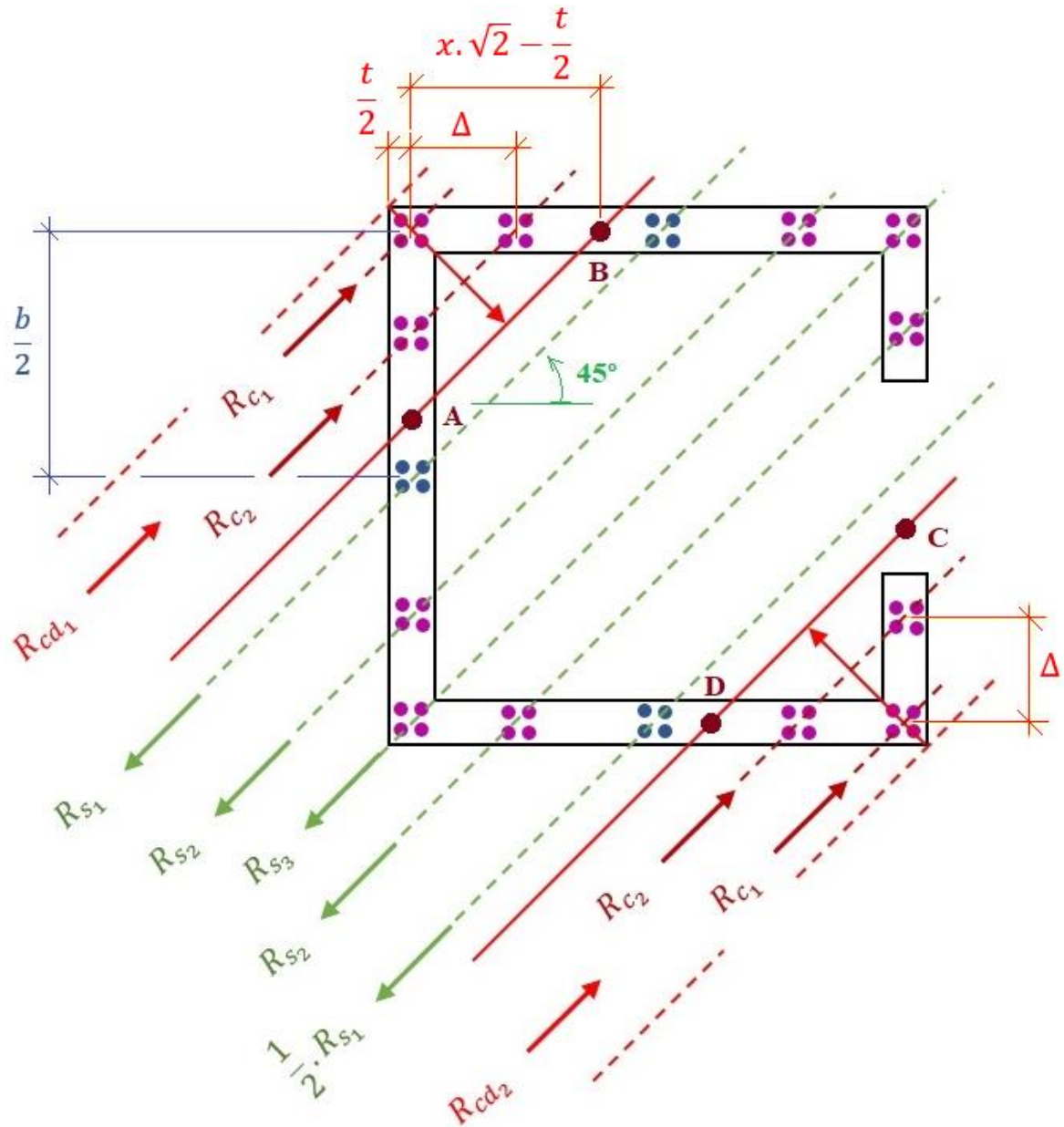
$$\bar{\xi}(ADM) = \frac{-k_{\beta_2} - \sqrt{(k_{\beta_2})^2 - 4 \cdot k_{\beta_1} \cdot k_{\beta_3}}}{2 \cdot k_{\beta_1}}; \quad x(m) = \bar{\xi}(ADM) \cdot t(m)$$

### 6.2.2. Equacionamento ao bimomento com armadura distribuída

#### a) Posicionamento das linhas neutras

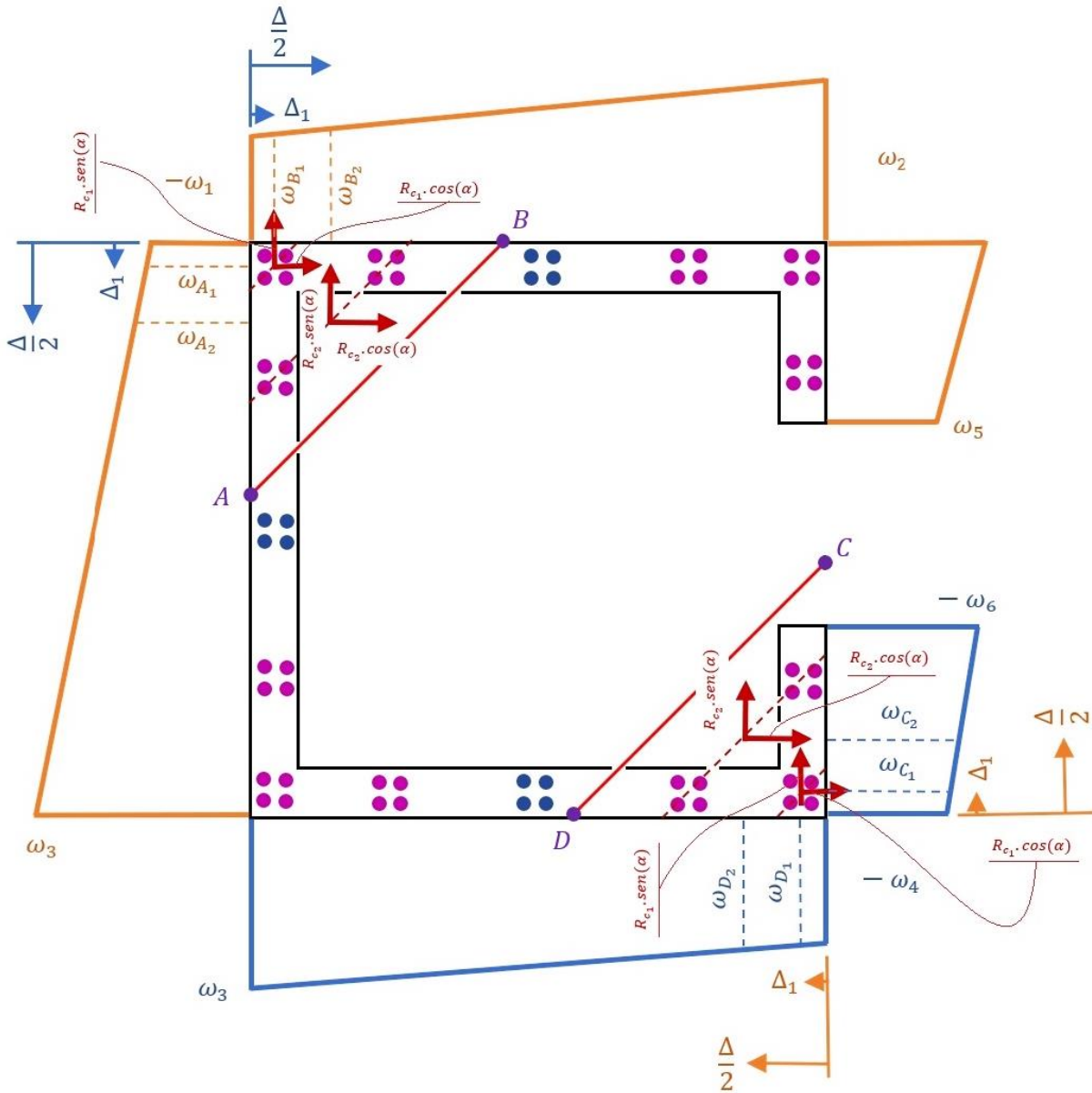
Através do diagrama de ordenadas principal  $\omega_{pc}$ , apresentado nas figuras 6.4 e 6.11, pode-se determinar o bimomento gerado por cada uma das fontes de tensão, sendo elas: as resultantes da área de concreto comprimido ( $R_{cd_1}$  e  $R_{cd_2}$ ), as resultantes nas armaduras comprimidas ( $R_{c_1}$  e  $R_{c_2}$ ), e as resultantes nas armaduras tracionadas ( $R_{s_1}$ ,  $R_{s_2}$  e  $R_{s_3}$ ). Ver na figura 6.1 a obtenção das resultantes da área comprimida do concreto e processada pela transformação do diagrama parábola – retângulo de tensão x deformação do concreto pelo diagrama triangular, ver item 17.2.2 (e) da NBR 6118 (ABNT, 2014). Já na figura 6.14 é exposto o posicionamento das resultantes supracitadas com a configuração apresentada na figura 6.3 (b).



**Figura 6.14: Resultantes para a seção de paredes finas com armadura distribuída**

Fonte: O Autor (2019)

Na equação (6.11) já é apresentada a formulação do bimomento de compressão  $B_{cd}$ , o qual já engloba a ação das resultantes de compressão no concreto (expressas por  $B_{cd1}$  e  $B_{cd2}$ ). Daí, somando-se a atuação das ordenadas setoriais do conjunto de resultantes nas armaduras comprimidas (ver figura 6.15), computa-se o efeito total de bimomento de compressão para toda a seção transversal.

**Figura 6.15: Ordenadas setoriais sob a ação das resultantes nas armaduras comprimidas**

Fonte: O Autor (2019)

resultando no bimomento  $B_{cd}$ , com a contribuição da eq. (6.11) e dos bimomento oriundos da figura 6.15, expresso por:

$$\begin{aligned}
 B_{cd} = & \gamma \cdot \lambda \cdot \alpha_c \cdot t \cdot f_{cd} \cdot (A_{\omega_c} + A_{\omega_D} - A_{\omega_A} - A_{\omega_B}) + R_{c1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\omega_{C1} + \omega_{D1} - \omega_{A1} - \omega_{B1}) \\
 & + R_{c2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\omega_{C2} + \omega_{D2} - \omega_{A2} - \omega_{B2})
 \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$\text{onde: } \omega_{A1} = \left( 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\omega_1}{b} \right) \cdot \Delta_1 - \omega_1 \quad (6.19 a)$$

$$\omega_{B_1} = \left[ \sqrt{2} \cdot \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{b} \right] \cdot \Delta_1 - \omega_1 \quad (6.19 b)$$

$$\omega_{C_1} = \left[ \sqrt{2} \cdot \frac{(\omega_2 - \omega_5)}{a} \right] \cdot \Delta_1 - \omega_2 \quad (6.19 c)$$

$$\omega_{D_1} = \left[ \sqrt{2} \cdot \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{b} \right] \cdot \Delta_1 - \omega_2 \quad (6.19 d)$$

$$\omega_{A_2} = \left( 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\omega_1}{b} \right) \cdot \frac{\Delta}{2} - \omega_1 \quad (6.19 e)$$

$$\omega_{B_2} = \left[ \sqrt{2} \cdot \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{b} \right] \cdot \frac{\Delta}{2} - \omega_1 \quad (6.19 f)$$

$$\omega_{C_2} = \left[ \sqrt{2} \cdot \frac{(\omega_2 - \omega_5)}{a} \right] \cdot \frac{\Delta}{2} - \omega_2 \quad (6.19 g)$$

$$\omega_{D_2} = \left[ \sqrt{2} \cdot \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{b} \right] \cdot \frac{\Delta}{2} - \omega_2 \quad (6.19 h)$$

$$\text{com: } \Delta = \frac{b}{4} \quad (6.19 i)$$

semelhante as substituições realizadas na equação (6.11) e empregando-se as eq.'s (6.19 a) a (6.19 i) na equação (6.19), reescreve-se o bimomento de compressão  $B_{cd}$  como:

$$B_{cd} = k_c + k_{c_1} \cdot R_{c_1} + k_{c_2} \cdot R_{c_2} \quad (6.20)$$

$$\text{onde: } k_c = \gamma \cdot \lambda \cdot \alpha_c \cdot t \cdot f_{cd} \cdot (A_{\omega_c} + A_{\omega_D} - A_{\omega_A} - A_{\omega_B}) \equiv k_{B_1} \cdot x^2 + k_{B_2} \cdot x + k_{B_3}^* \quad (6.20 a)$$

$$k_{B_1} = -\gamma \cdot \lambda \cdot \alpha_c \cdot t \cdot f_{cd} \cdot \frac{(2 \cdot \omega_1)}{b} \quad (6.20 b)$$

$$k_{B_2} = \gamma \cdot \lambda \cdot \alpha_c \cdot t \cdot f_{cd} \cdot [\sqrt{2} \cdot (2 \cdot \omega_1 - \omega_2)] \quad (6.20 c)$$

$$k_{B_3}^* = -\gamma \cdot \lambda \cdot \alpha_c \cdot t \cdot f_{cd} \cdot \left[ \frac{(\omega_2 + \omega_5)}{2} \cdot a \right] \quad (6.20 d)$$

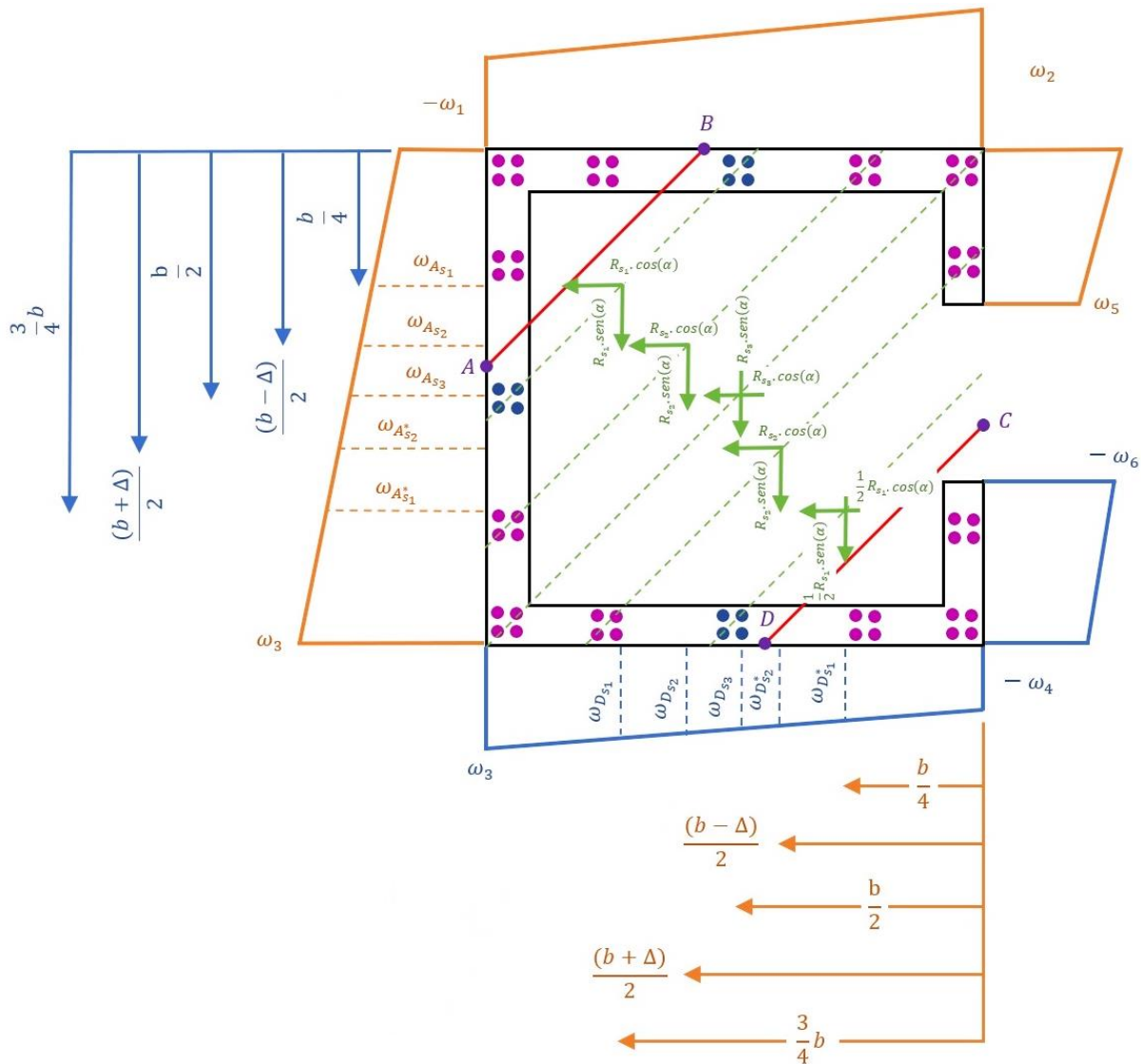
$$k_{c_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\omega_{C_1} + \omega_{D_1} - \omega_{A_1} - \omega_{B_1}) \quad (6.20 e)$$

$$k_{c_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\omega_{C_2} + \omega_{D_2} - \omega_{A_2} - \omega_{B_2}) \quad (6.20 f)$$

### b) Armadura resistente ao bimomento

Na figura 6.16 é apresentada a atuação das resultantes nas armaduras tracionadas, bem como ilustradas as correspondentes ordenadas setoriais no diagrama  $\omega_{pc}$ .

**Figura 6.16: Ordenadas setoriais sob a ação das resultantes nas armaduras tracionadas**



Fonte: O Autor (2019)

Escreve-se as ordenadas setoriais, nos pontos destacados na figura 6.16, como:

$$\omega_{As_1} = \left( 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\omega_1}{b} \right) \cdot \frac{b}{4} - \omega_1 \quad (6.21 a)$$

$$\omega_{A_{s_2}} = \left(2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\omega_1}{b}\right) \cdot \frac{(b - \Delta)}{2} - \omega_1 \quad (6.21 b)$$

$$\omega_{A_{s_3}} = \left(2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\omega_1}{b}\right) \cdot \frac{b}{2} - \omega_1 \quad (6.21 c)$$

$$\omega_{A_{s_2}}^* = \left(2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\omega_1}{b}\right) \cdot \frac{(b + \Delta)}{2} - \omega_1 \quad (6.21 d)$$

$$\omega_{A_{s_1}}^* = \left(2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\omega_1}{b}\right) \cdot \frac{3}{4}b - \omega_1 \quad (6.21 e)$$

$$\omega_{D_{s_1}} = \left[\sqrt{2} \cdot \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{b}\right] \cdot \frac{3}{4}b - \omega_2 \quad (6.21 f)$$

$$\omega_{D_{s_2}} = \left[\sqrt{2} \cdot \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{b}\right] \cdot \frac{(b + \Delta)}{2} - \omega_2 \quad (6.21 g)$$

$$\omega_{D_{s_3}} = \left[\sqrt{2} \cdot \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{b}\right] \cdot \frac{b}{2} - \omega_2 \quad (6.21 h)$$

$$\omega_{D_{s_2}}^* = \left[\sqrt{2} \cdot \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{b}\right] \cdot \frac{(b - \Delta)}{2} - \omega_2 \quad (6.21 i)$$

$$\omega_{D_{s_1}}^* = \left[\sqrt{2} \cdot \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{b}\right] \cdot \frac{b}{4} - \omega_2 \quad (6.21 j)$$

Por fim, o bimomento gerado pelas resultantes nas armaduras tracionadas  $B_{sd}^*$  fica expresso por:

$$B_{sd}^* = k_{s_1} \cdot R_{s_1} + k_{s_2} \cdot R_{s_2} + k_{s_3} \cdot R_{s_3} \quad (6.22)$$

$$\text{onde: } k_{s_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left[ \left( \omega_{A_{s_1}} + \omega_{D_{s_1}} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left( \omega_{A_{s_1}}^* + \omega_{D_{s_1}}^* \right) \right] \quad (6.22 a)$$

$$k_{s_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left[ \left( \omega_{A_{s_2}} + \omega_{D_{s_2}} \right) + \left( \omega_{A_{s_2}}^* + \omega_{D_{s_2}}^* \right) \right] \quad (6.22 b)$$

$$k_{s_3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left( \omega_{A_{s_3}} + \omega_{D_{s_3}} \right) \quad (6.22 c)$$

Mediante equilíbrio em bimomentos, baseado na figura 6.2 e sob notação do parafuso direito, escreve-se:

$$B_{cd} = B_{sd}^* - B_{sd} \quad (6.23)$$

Ao aplicar as equações (6.20) e (6.22) na equação (6.23), escreve-se a equação iterativa entre a profundidade  $x$  das linhas neutras e a área  $A_\phi$  por bitola utilizada nos feixes, como:

$$\begin{aligned} & -\frac{2 \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \alpha_c \cdot f_{cd} \cdot \omega_1}{b} \cdot x^2 + \sqrt{2} \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \alpha_c \cdot f_{cd} \cdot t \cdot (2 \cdot \omega_1 - \omega_2) \cdot x - \frac{\gamma \cdot \lambda \cdot \alpha_c \cdot f_{cd} \cdot t \cdot a}{2} \cdot (\omega_2 + \omega_5) \\ & + B_{sd} \\ & = A_\phi \cdot f_{yd} \cdot \left[ \omega_1 \cdot (55 - 30 \cdot \sqrt{2}) + \omega_2 \cdot (19 - 6 \cdot \sqrt{2}) + \frac{(b + 2 \cdot t)}{a} \cdot (\omega_5 - \omega_2) \right. \\ & \left. + \frac{4 \cdot t}{b} \cdot \omega_1 \right] \end{aligned} \quad (6.24)$$

A adimensionalização da equação (6.24) é realizada através do divisor comum  $(\omega_1 \cdot t^2 \cdot f_{cd})$ , ficando a equação iterativa e adimensional, expressa por:

$$\begin{aligned} & -(2 \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \alpha_c \cdot \eta_3) \cdot \bar{\xi}^2 + [\sqrt{2} \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \alpha_c \cdot (2 - \eta_1)] \cdot \bar{\xi} - \frac{\gamma \cdot \lambda \cdot \alpha_c}{2} \cdot \eta_4 \cdot (\eta_1 + \eta_2) + \beta_{sd} \\ & = \omega_\phi \cdot \left[ (55 - 30 \cdot \sqrt{2}) + \eta_1 \cdot (19 - 6 \cdot \sqrt{2}) + \frac{(1 + 2 \cdot \eta_3)}{\eta_3 \cdot \eta_4} \cdot (\eta_2 - \eta_1) + 4 \cdot \eta_3 \right] \end{aligned} \quad (6.25)$$

$$\text{com: } \eta_1 = \frac{\omega_2}{\omega_1}; \quad \eta_2 = \frac{\omega_5}{\omega_1}; \quad \eta_3 = \frac{t}{b}; \quad \eta_4 = \frac{a}{t} \quad \text{e} \quad A_\phi = \frac{\omega_\phi}{(10^3)} \cdot \frac{f_{cd}}{f_{yd}} \cdot t^2.$$

observa-se que as razões  $\eta_1$  e  $\eta_2$  podem ser expressas em termos das razões  $\eta_3$  e  $\eta_4$ , assim mediante as equações (6.7), escreve-se:

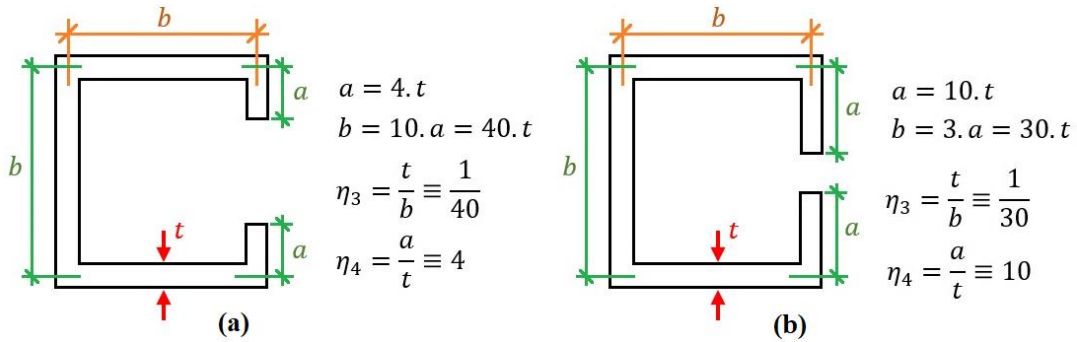
$$\eta_1 = \frac{2 - 2 \cdot \eta_3^2}{8 \cdot \eta_3^3 \cdot \eta_4^3 - 6 \cdot \eta_3 \cdot \eta_4 + 3} - 2 \quad (6.26 a)$$

$$\eta_2 = -\frac{(4 \cdot \eta_4 - 8 \cdot \eta_4^3) \cdot \eta_3^3 + 2 \cdot \eta_3^2 + 12 \cdot \eta_3 \cdot \eta_4 + 20 \cdot \eta_4 \cdot t + 4}{8 \cdot \eta_3^3 \cdot \eta_4^3 - 6 \cdot \eta_3 \cdot \eta_4 + 3} \quad (6.26 b)$$

### 6.2.3. Tabelas adimensionais para armadura concentrada

A adimensionalização da equação em bimomento (eq. 6.12) é procedida via divisão por  $(\omega_1 \cdot t^2 \cdot f_{cd})$ , conduzindo a equação (6.13). Além disso, faz-se necessário adimensionalizar as equações (6.14) e (6.17), partindo do pressuposto das razões  $\eta_3$  e  $\eta_4$  entre as dimensões da seção transversal. Na figura 6.17 são apresentadas duas configurações de relação entre as dimensões ( $b$ ,  $a$  e  $t$ ) para a seção transversal em paredes finas.

**Figura 6.17: Razões entre as dimensões  $a$ ,  $b$  e  $t$  da seção: (a) configuração 1 e (b) configuração 2**



Fonte: O Autor (2019)

Expressam-se as equações (6.12), (6.14) e (6.17), após adimensionalização, por:

$$k_{\beta_1} \cdot \bar{\xi}^2 + k_{\beta_2} \cdot \bar{\xi} + k_{\beta_3} = 0 \quad (6.27 \text{ a})$$

$$X_{CG}^* = \frac{x_{CG}^*}{t} = \frac{12 \cdot b^2 + 19 \cdot t^2 + 6 \cdot a \cdot (2 \cdot b + t) + 30 \cdot b \cdot t - \sqrt{2} \cdot \bar{\xi} \cdot (18 \cdot t^2 + 12 \cdot b \cdot t)}{12 \cdot t \cdot (a + 3 \cdot b + 3 \cdot t - 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \bar{\xi} \cdot t)} \quad (6.27 \text{ b})$$

$$Y_{CG}^* = \frac{y_{CG}^*}{t} = \frac{12 \cdot a \cdot (2 \cdot b - a) + 12 \cdot t \cdot (a + 7 \cdot b) + 36 \cdot b^2 + 37 \cdot t^2 + 24 \cdot \bar{\xi}^2 \cdot t^2 + \sqrt{2} \cdot \bar{\xi} \cdot t \cdot (60 \cdot t - 48 \cdot b)}{24 \cdot t \cdot (a + 3 \cdot b + 3 \cdot t - 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \bar{\xi} \cdot t)} \quad (6.27 \text{ c})$$

$$\varphi = k^{***} \cdot b \cdot t \equiv \frac{k^{**}}{\omega_1 \cdot t^2} \cdot b \cdot t \equiv - \left\{ \sqrt{2} \cdot \left( Y_{CG}^* - \frac{1}{2} - \frac{1}{\eta_3} \right) + \left[ (1 + \eta_1) \cdot \left( X_{CG}^* - \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \quad (6.27 \text{ d})$$

$$A_s = \frac{\beta_{sd}}{\frac{f_{yd}}{f_{cd}} \cdot \frac{\varphi}{b \cdot t}} \equiv \frac{f_{cd}}{f_{yd}} \cdot \frac{\beta_{sd} \cdot t^2}{\varphi \cdot (\eta_3 \cdot \alpha_a)} \equiv \frac{f_{cd}}{f_{yd}} \cdot \frac{\beta_{sd} \cdot t^2}{\varphi \cdot (10^3)} \quad (6.27 \text{ e})$$

onde:  $\alpha_a$  é o coeficiente de ajuste de ordem de grandeza e  $\varphi$  é o fator adimensional para impor a profundidade relativa  $\bar{\xi}$  na área de aço  $A_s$ .

sendo:  $\eta_1 = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ ;  $\eta_2 = \frac{\omega_5}{\omega_1}$ ;  $\eta_3 = \frac{t}{b}$ ;  $\eta_4 = \frac{a}{t}$ ;  $k_{\beta_1} = -2 \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \alpha_c \cdot \eta_3$ ;  $\beta_{sd} = \frac{B_{sd}}{\omega_1 \cdot t^2 \cdot f_{cd}}$ ;

$$k_{\beta_2} = \gamma \cdot \lambda \cdot \alpha_c \cdot [\sqrt{2} \cdot (2 + \eta_1)]; \quad k_{\beta_3} = \beta_{sd} - k_{\beta_{3a}} \quad \text{e} \quad k_{\beta_{3a}} = \gamma \cdot \lambda \cdot \alpha_c \cdot \eta_4 \cdot \left[ \frac{(\eta_1 + \eta_2)}{2} \right].$$

Na tabela 6.1 é apresentada a variação do parâmetro  $\varphi$  em termos do bimomento adimensional  $\beta_{sd}$ , isto para o grupo I de resistência do concreto.

**Tabela 6.1: Tabela para obtenção da armadura na seção de paredes finas sob configuração 1 (ver figura 6.17 a) e grupo I de resistência do concreto via NBR 8953 (ABNT, 2015)**

$\beta_{sd}$	$C \leq C - 50$				
	$k_{\beta_3}$	$\bar{\xi}$	$X_{CG}^*$	$Y_{CG}^*$	$\varphi$
5000,00	4996,59	450,06472	13,77344	-85,69242	150,7881639
15000,00	14996,59	745,04679	13,79815	-155,19743	249,0315805
25000,00	24996,59	948,49583	13,80594	-203,14360	316,8214483
35000,00	34996,59	1113,94723	13,81012	-242,13698	371,957708
45000,00	44996,59	1257,04495	13,81283	-275,86293	419,647752
55000,00	54996,59	1384,96246	13,81476	-306,01158	462,2803451
65000,00	64996,59	1501,70055	13,81624	-333,52564	501,1880382
75000,00	74996,59	1609,76114	13,81741	-358,99468	537,2042595
85000,00	84996,59	1710,83238	13,81836	-382,81651	570,8914186
95000,00	94996,59	1806,11711	13,81917	-405,27459	602,6502676
105000,00	104996,59	1896,50827	0,53332	-426,57935	660,4804797
115000,00	114996,59	1982,69033	0,49999	-446,89211	689,2765503
125000,00	124996,59	2065,20167	13,82097	-466,33973	689,0056626
135000,00	134996,59	2144,47486	0,53332	-485,02417	743,1339344
145000,00	144996,59	2220,86362	0,49999	-503,02879	768,6658085
155000,00	154996,59	2294,66162	13,82222	-520,42280	765,4880564
165000,00	164996,59	2366,11585	13,82256	-537,26441	789,3049756
175000,00	174996,59	2435,43636	13,82287	-553,60312	812,4107576
185000,00	184996,59	2502,80360	13,82316	-569,48147	834,865537
195000,00	194996,59	2568,37394	13,82342	-584,93630	856,7214229
205000,00	204996,59	2632,28392	13,82366	-599,99980	878,0239226
215000,00	214996,59	2694,65362	13,82389	-614,70027	898,8130567
225000,00	224996,59	2755,58933	13,82410	-629,06276	919,1242423
235000,00	234996,59	2815,18563	13,82430	-643,10956	938,9890027
245000,00	244996,59	2873,52713	13,82448	-656,86061	958,4355408
255000,00	254996,59	2930,68992	13,82466	-670,33385	977,4892097
265000,00	264996,59	2986,74266	13,82482	-683,54545	996,1728998
275000,00	274996,59	3041,74763	13,82498	-696,51010	1014,507361
285000,00	284996,59	3095,76147	13,82513	-709,24115	1032,511475
295000,00	294996,59	3148,83591	13,82527	-721,75079	1050,202478
305000,00	304996,59	3201,01831	13,82540	-734,05017	1067,596161
315000,00	314996,59	3252,35219	13,82553	-746,14957	1084,707027

Fonte: O Autor (2019)

Na tabela 6.2 consta o parâmetro  $\varphi$  para o grupo II do concreto e na configuração 1 da seção transversal (ver fig. 6.17).

$$\beta_{sd}(ADM) = \frac{B_{sd} (kN.m^2)}{\omega_1 (m^2) \cdot t^2 (cm)^2 \cdot f_{cd} \left( \frac{kN}{cm^2} \right)}$$

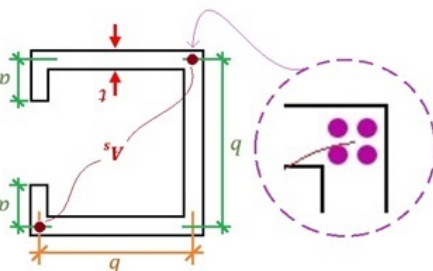
$$A_s (cm^2) = \frac{f_{cd} (kN/cm^2) \cdot \beta_{sd}(ADM) \cdot t^2 (cm)^2}{f_{yd} (kN/cm^2) \cdot \varphi (ADM) \cdot (10^3)}$$

$a = 4 \cdot t$   
 $b = 10 \cdot a = 40 \cdot t$   
 $\eta_3 = \frac{t}{b} = \frac{1}{40}$   
 $\eta_4 = \frac{a}{t} = 4$



Tabela 6.2: Tabela para obtenção da armadura na seção de paredes finas sob configuração 1 (ver figura 6.17 a) e grupo II de resistência do concreto via NBR 8953 (ABNT, 2015)

$\beta_{sd}$	GRUPO II - NBR 6118 (ABNT 2014)											
	C – 60			C – 70			C – 80			C – 90		
	$k_{\beta_x}$	$\xi$	$\varphi$	$k_{\beta_x}$	$\xi$	$\varphi$	$k_{\beta_x}$	$\xi$	$\varphi$	$k_{\beta_x}$	$\xi$	$\varphi$
5000,00	4996,86	467,11	156,46	4997,12	485,73	162,66	4997,37	506,13	169,45	4997,61	528,62	176,94
15000,00	14996,86	774,68	258,90	14997,12	807,02	269,68	14997,37	842,47	281,49	14997,61	881,53	294,51
25000,00	24996,86	986,78	329,58	24997,12	1028,55	343,50	24997,37	1074,35	358,76	24997,61	1124,80	375,57
35000,00	34996,86	1159,25	387,06	34997,12	1208,70	403,54	34997,37	1262,90	421,60	34997,61	1322,60	441,50
45000,00	44996,86	1308,43	436,77	44997,12	1364,50	455,46	44997,37	1425,97	475,95	44997,61	1493,67	498,51
55000,00	54996,86	1441,77	481,21	54997,12	1503,77	501,88	54997,37	1571,74	524,53	54997,61	1646,59	549,48
65000,00	64996,86	1563,46	521,77	64997,12	1630,87	544,24	64997,37	1704,76	568,87	64997,61	1786,14	595,99
75000,00	74996,86	1676,11	559,32	74997,12	1748,52	583,45	74997,37	1827,89	609,91	74997,61	1915,31	639,05
85000,00	84996,86	1781,47	594,43	84997,12	1858,56	620,13	84997,37	1943,06	648,29	84997,61	2036,13	679,31
95000,00	94996,86	1880,80	627,54	94997,12	1962,30	654,71	94997,37	2051,63	684,48	94997,61	2150,02	717,28
105000,00	104996,86	1975,02	658,95	104997,12	2060,71	687,51	104997,37	2154,63	718,81	104997,61	2258,07	753,29
115000,00	114996,86	2064,86	688,89	114997,12	2154,53	718,78	114997,37	2252,83	751,54	114997,61	2361,09	787,63
125000,00	124996,86	2150,87	717,56	124997,12	2244,36	748,72	124997,37	2346,84	782,88	124997,61	2459,71	820,50
135000,00	134996,86	2233,50	745,10	134997,12	2330,67	777,49	134997,37	2437,17	812,99	134997,61	2554,47	852,09
145000,00	144996,86	2313,13	771,65	144997,12	2413,83	805,21	144997,37	2524,21	842,00	144997,61	2645,77	882,52
155000,00	154996,86	2390,06	797,29	154997,12	2494,18	831,99	154997,37	2608,29	870,03	154997,61	2733,99	911,92
165000,00	164996,86	2464,55	822,11	164997,12	2571,97	857,92	164997,37	2689,71	897,17	164997,61	2819,39	940,39
175000,00	174996,86	2536,81	846,20	174997,12	2647,44	883,07	174997,37	2768,70	923,49	174997,61	2902,25	968,01
185000,00	184996,86	2607,03	869,61	184997,12	2720,78	907,52	184997,37	2845,45	949,08	184997,61	2982,77	994,85
195000,00	194996,86	2675,38	892,39	194997,12	2792,16	931,31	194997,37	2920,17	973,98	194997,61	3061,15	1020,97
205000,00	204996,86	2742,00	914,60	204997,12	2861,74	954,51	204997,37	2992,99	998,25	204997,61	3137,54	1046,44
215000,00	214996,86	2807,02	936,27	214997,12	2929,64	977,14	214997,37	3064,05	1021,94	214997,61	3212,09	1071,29
225000,00	224996,86	2870,54	957,44	224997,12	2995,98	999,25	224997,37	3133,48	1045,08	224997,61	3284,92	1095,56
235000,00	234996,86	2932,66	978,15	234997,12	3060,86	1020,88	234997,37	3201,39	1067,72	234997,61	3356,16	1119,31
245000,00	244996,86	2993,47	998,42	244997,12	3124,38	1042,05	244997,37	3267,86	1089,88	244997,61	3425,89	1142,55
255000,00	254996,86	3053,06	1018,28	254997,12	3186,61	1062,79	254997,37	3332,99	1111,59	254997,61	3494,22	1165,33
265000,00	264996,86	3111,49	1037,75	264997,12	3247,63	1083,13	264997,37	3396,86	1132,87	264997,61	3561,21	1187,66
275000,00	274996,86	3168,83	1056,87	274997,12	3307,52	1103,09	274997,37	3459,53	1153,77	274997,61	3626,96	1209,57
285000,00	284996,86	3225,13	1075,63	284997,12	3366,32	1122,70	284997,37	3521,07	1174,28	284997,61	3691,52	1231,09
295000,00	294996,86	3280,46	1094,08	294997,12	3424,10	1141,96	294997,37	3581,55	1194,44	294997,61	3754,96	1252,24
305000,00	304996,86	3334,85	1112,21	304997,12	3480,91	1160,89	304997,37	3641,00	1214,25	304997,61	3817,33	1273,03
315000,00	314996,86	3388,36	1130,04	314997,12	3536,80	1179,52	314997,37	3699,49	1233,75	314997,61	3878,69	1293,48



$a = 4,1$   
 $b = 10, a = 40,1$

$$\beta_{sd}(ADM) = \frac{B_{sd}(kN.m^2)}{\omega_1(m^2) \cdot t^2(cm^2) \cdot f_{cd}(kN/cm^2)} = \frac{f_{cd}(kN/cm^2) \cdot \beta_{sd}(ADM) \cdot t^2(cm^2)}{\omega_1(m^2) \cdot t^2(cm^2) \cdot f_{cd}(kN/cm^2)} = \frac{f_{yd}(kN/cm^2)}{\varphi(ADM) \cdot (10^3)}$$

Fonte: O Autor (2019)

Por fim, nas tabelas 6.3 e 6.4 são apresentadas a variação de  $\varphi$  para a configuração 2 apresentada na figura 6.17 (b).

**Tabela 6.3: Tabela para obtenção da armadura na seção de paredes finas sob configuração 2 (ver figura 6.17 b) e grupo I de resistência do concreto via NBR 8953 (ABNT, 2015)**

$\beta_{sd}$	GRUPO I				
	C ≤ C - 50				
	$k_{\beta_3}$	$\bar{\xi}$	$X_{CG}^*$	$Y_{CG}^*$	$\varphi$
5000,00	4990,26	379,46146	10,36722	-74,43174	131,6868693
15000,00	14990,26	635,38271	10,42283	-134,70985	216,8388351
25000,00	24990,26	811,71678	10,44011	-176,25879	275,5686505
35000,00	34990,26	955,07756	10,44933	-210,04210	323,3298432
45000,00	44990,26	1079,05261	10,45529	-239,25869	364,6382483
55000,00	54990,26	1189,86722	10,45954	-265,37465	401,5645941
65000,00	64990,26	1290,99180	10,46277	-289,20743	435,2637768
75000,00	74990,26	1384,59596	10,46533	-311,26816	466,4580168
85000,00	84990,26	1472,14336	10,46743	-331,90165	495,6346344
95000,00	94990,26	1554,67671	10,46918	-351,35359	523,140852
105000,00	104990,26	1632,97000	0,61110	-369,80633	565,9305137
115000,00	114990,26	1707,61647	0,49999	-387,39967	590,9993986
125000,00	124990,26	1779,08272	10,47313	-404,24354	597,9318601
135000,00	134990,26	1847,74357	0,61110	-420,42627	637,5179159
145000,00	144990,26	1913,90557	0,49999	-436,02010	659,7590763
155000,00	154990,26	1977,82318	10,47586	-451,08500	664,1710545
165000,00	164990,26	2039,71040	10,47660	-465,67138	684,7980601
175000,00	174990,26	2099,74925	10,47728	-479,82215	704,8091204
185000,00	184990,26	2158,09606	10,47790	-493,57414	724,2563248
195000,00	194990,26	2214,88631	10,47847	-506,95929	743,1848104
205000,00	204990,26	2270,23831	10,47900	-520,00547	761,6339952
215000,00	214990,26	2324,25608	10,47950	-532,73720	779,6385444
225000,00	224990,26	2377,03170	10,47996	-545,17617	797,2291357
235000,00	234990,26	2428,64712	10,48039	-557,34171	814,4330734
245000,00	244990,26	2479,17564	10,48079	-569,25108	831,274786
255000,00	254990,26	2528,68315	10,48117	-580,91982	847,7762333
265000,00	264990,26	2577,22918	10,48153	-592,36195	863,9572417
275000,00	274990,26	2624,86764	10,48187	-603,59018	879,8357842
285000,00	284990,26	2671,64761	10,48219	-614,61608	895,428214
295000,00	294990,26	2717,61389	10,48249	-625,45020	910,7494614
305000,00	304990,26	2762,80753	10,48278	-636,10222	925,8132019
315000,00	314990,26	2807,26623	10,48305	-646,58102	940,631999

Fonte: O Autor (2019)

$$\beta_{sd}(ADM) = \frac{B_{sd} (kN \cdot m^2)}{\omega_1 (m^2) \cdot t^2 (cm)^2 \cdot f_{cd} \left( \frac{kN}{cm^2} \right)}$$

$$A_s (cm^2) = \frac{f_{cd} (kN/cm^2) \cdot \beta_{sd}(ADM) \cdot t^2 (cm)^2}{f_{yd} (kN/cm^2) \cdot \varphi(ADM) \cdot (10^3)}$$

$a = 10 \cdot t$   
 $b = 3 \cdot a = 30 \cdot t$   
 $\eta_3 = \frac{t}{b} \equiv \frac{1}{30}$   
 $\eta_4 = \frac{a}{t} \equiv 10$

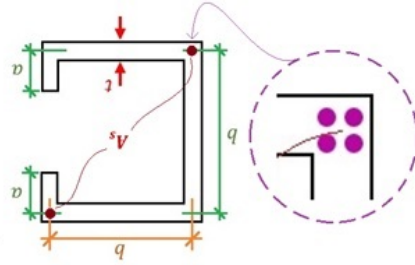


Tabela 6.4: Tabela para obtenção da armadura na seção de paredes finas sob configuração 2 (ver figura 6.17 b) e grupo II de resistência do concreto via NBR 8953 (ABNT, 2015)

$\beta_{sd}$	GRUPO II - NBR 6118 (ABNT 2014)									
	C – 60					C – 70				
	$k_{\beta_3}$	$\xi$	$\varphi$	$k_{\beta_3}$	$\xi$	$\varphi$	$k_{\beta_3}$	$\xi$	$\varphi$	C – 90
5000,00	4991,04	394,27	136,61	4991,78	410,43	141,98	4992,50	428,15	147,87	4993,18
15000,00	14991,04	661,07	225,39	14991,78	689,10	234,73	14992,50	719,83	244,96	14993,18
25000,00	24991,04	844,89	286,62	24991,78	881,09	298,68	24992,50	920,77	311,90	24993,18
35000,00	34991,04	994,33	336,41	34991,78	1037,17	350,68	34992,50	1084,13	366,33	34993,18
45000,00	44991,04	1123,57	379,47	44991,78	1172,14	395,66	44992,50	1225,39	413,40	44993,18
55000,00	54991,04	1239,08	417,96	54991,78	1292,79	435,86	54992,50	1351,66	455,48	54993,18
65000,00	64991,04	1344,49	453,09	64991,78	1402,88	472,55	64992,50	1466,88	493,88	64993,18
75000,00	74991,04	1442,07	485,61	74991,78	1504,79	506,51	74992,50	1573,54	529,43	74993,18
85000,00	84991,04	1533,33	516,03	84991,78	1600,10	538,28	84992,50	1673,29	562,67	84993,18
95000,00	94991,04	1619,36	544,70	94991,78	1689,95	568,23	94992,50	1767,33	594,01	94993,18
105000,00	104991,04	1700,97	571,90	104991,78	1775,19	596,63	104992,50	1856,54	623,75	104993,18
115000,00	114991,04	1778,79	597,83	114991,78	1856,46	623,72	114992,50	1941,59	652,09	114993,18
125000,00	124991,04	1853,28	622,66	124991,78	1934,26	649,65	124992,50	2023,02	679,23	124993,18
135000,00	134991,04	1924,85	646,52	134991,78	2009,01	674,57	134992,50	2101,25	705,31	134993,18
145000,00	144991,04	1993,82	669,50	144991,78	2081,04	698,57	144992,50	2176,63	730,44	144993,18
155000,00	154991,04	2060,45	691,71	154991,78	2150,62	721,77	154992,50	2249,46	754,71	154993,18
165000,00	164991,04	2124,96	713,21	164991,78	2218,00	744,22	164992,50	2319,98	778,21	164993,18
175000,00	174991,04	2187,55	734,07	174991,78	2283,36	766,01	174992,50	2388,38	801,01	174993,18
185000,00	184991,04	2248,37	754,34	184991,78	2346,88	787,18	184992,50	2454,86	823,17	184993,18
195000,00	194991,04	2307,56	774,08	194991,78	2408,71	807,79	194992,50	2519,57	844,74	194993,18
205000,00	204991,04	2365,26	793,31	204991,78	2468,97	827,87	204992,50	2582,64	865,76	204993,18
215000,00	214991,04	2421,57	812,07	214991,78	2527,78	847,47	214992,50	2644,18	886,27	214993,18
225000,00	224991,04	2476,58	830,41	224991,78	2585,23	866,62	224992,50	2704,32	906,32	224993,18
235000,00	234991,04	2530,39	848,34	234991,78	2641,42	885,35	234992,50	2763,13	925,92	234993,18
245000,00	244991,04	2583,06	865,90	244991,78	2696,43	903,69	244992,50	2820,70	945,11	244993,18
255000,00	254991,04	2634,67	883,10	254991,78	2750,33	921,65	254992,50	2877,11	963,91	254993,18
265000,00	264991,04	2685,27	899,97	264991,78	2803,18	939,27	264992,50	2932,42	982,35	264993,18
275000,00	274991,04	2734,93	916,52	274991,78	2855,04	956,56	274992,50	2986,70	1000,44	274993,18
285000,00	284991,04	2783,69	932,77	284991,78	2905,97	973,53	284992,50	3040,00	1018,21	284993,18
295000,00	294991,04	2831,61	948,75	294991,78	2956,01	990,21	294992,50	3092,37	1035,66	294993,18
305000,00	304991,04	2878,72	964,45	304991,78	3005,21	1006,61	304992,50	3143,86	1052,83	304993,18
315000,00	314991,04	2925,06	979,89	314991,78	3053,61	1022,74	314992,50	3194,52	1069,71	314993,18

Fonte: O Autor (2019)

$$\beta_{sd(ADM)} = \frac{B_{sd} (kN.m^2)}{\omega_1 (m^2) \cdot t_2 (cm) \cdot f_{cd} \left( \frac{kN}{cm^2} \right)} = \frac{f_{cd} (kN/cm^2) \cdot \beta_{sd(ADM)} \cdot t_2^2 (cm^2)}{f_{yd} (kN/cm^2) \cdot \varphi (ADM) \cdot (10^3)}$$



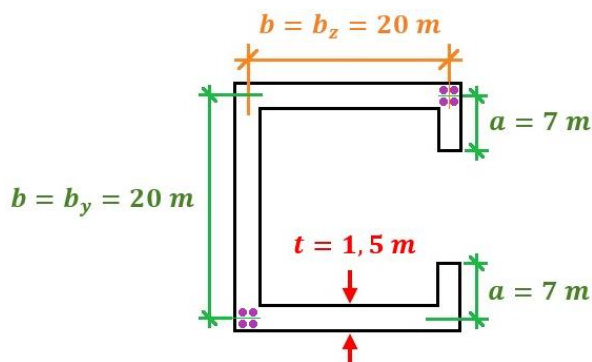
#### 6.2.4. Inviabilidade das tabelas adimensionais para armadura distribuída

Devido a impossibilidade em adimensionar a razão  $\eta_2$  apresentada na equação (6.26 b), fica dependente da espessura  $t$  da parede fina do núcleo estrutural, não será possível gerar tabelas adimensionais para esta distribuição da armadura  $A_s$ . Resta então, a obtenção da armadura  $A_s$  via resolução da equação iterativa (eq. 6.25). Nesta tese, tal resolução da equação iterativa (para o exemplo 6.3) foi processada via método de Newton e utilizado o software Cálculo Numérico V5 (versão livre).

#### 6.2.5. Exemplos de aplicação

**EXEMPLO 6.1:** A fim de exemplificar a marcha de cálculo N° 4 (proposta para o dimensionamento de seções em formato de C com abas), adota-se a seção transversal apresentada na figura 6.18. Escolhe-se para este exemplo a armadura concentrada nas quinas mais tracionadas, sendo utilizados: concreto C – 90 ( $f_{cd} = 6,42857 \text{ kN/cm}^2$ ;  $\gamma = 0,9$ ;  $\lambda = 0,7$ ;  $\alpha_c = 0,68$ ;  $\varepsilon_{cu} = 2,6\%$ ) e aço CA – 50 ( $f_{yd} = 43,47826 \text{ kN/cm}^2$ ;  $\varepsilon_{yd} = 2,07\%$ ).

**Figura 6.18:** Dimensões, em planta, da seção transversal aberta e composta por paredes finas



Fonte: O Autor (2019)

Nas tabelas 6.5 e 6.6 são apresentadas as propriedades geométricas, posicionamento das linhas neutras e a área de aço ( $A_s$ ) via dimensionamento ao bimomento para o pilar de concreto armado.

**Tabela 6.5 – Valores de dimensionamento para a seção apresentada na figura 6.18 e bimomento no módulo de  $1500 \text{ kN.m}^2$  (valor característico)**

Seção do pilar em Núcleo	Resultados	Diagrama de Área Setorial	Resultados
$\ \omega_1\  (\text{m}^2)$	119,15960	$k_{B_1} (\text{kN})$	- 49,22483
$\ \omega_2\  (\text{m}^2)$	80,84040	$k_{B_2} (\text{kN.m}) \times 10^3$	0,92001
$\ \omega_5\  (\text{m}^2)$	304,25212	$k_{B_3} (\text{kN.m}^2) \times 10^3$	- 3,46786
$d (\text{m})$	7,07000	$x (\text{m})$	13,45339
$x_{CG}^* (\text{m})$	9,59354	$k^{**} (\text{m}^2)$	22,42293
$y_{CG}^* (\text{m})$	10,66720	$A_s (\text{cm}^2)$	2,15405

Fonte: O Autor (2019)

**Tabela 6.6 – Áreas de aço  $A_s$ , seção da fig. 6.18, em detrimento da variação do bimomento**

Bimomento ( $\text{kN.m}^2$ )	$A_s (\text{cm}^2)$	Bimomento ( $\text{kN.m}^2$ )	$A_s (\text{cm}^2)$
2500	2,15	7500	42,53
5000	10,98	7750	54,69
7000	28,98	8000	75,77

Fonte: O Autor (2019)

**EXEMPLO 6.2:** A fim de validar e exemplificar a utilização das tabelas adimensionais (item 6.2.3), resolve-se a seção de paredes finas submetida a  $B_k = 1,45608 \times 10^6 \text{ kN.m}^2$ . Para tal seção transversal adota-se a relação apresentada na figura 6.17 (a). Por dimensões, utilizam-se:  $t = 0,75 \text{ m}$ ;  $a = 3,00 \text{ m}$  e  $b = 30,00 \text{ m}$ . Na tabela 6.7 são apresentados parâmetros de dimensionamento e a armadura  $A_s$  concentrada nas quinas mais tracionadas, via marcha de cálculo N° 4 (letra c do item 6.2.1). Foram utilizados aço CA – 50 e concreto C – 50.

**Tabela 6.7 – Valores de dimensionamento para a seção de paredes finas, no ex. 6.2, via marcha de cálculo N° 4**

Seção do pilar em Núcleo	Resultados	Diagrama de Área Setorial	Resultados
$\ \omega_1\  (\text{m}^2)$	215,82936	$k_{B_1} (\text{kN})$	- 23,58706
$\ \omega_2\  (\text{m}^2)$	234,17064	$k_{B_2} (\text{kN.m})$	457,83660
$\ \omega_5\  (\text{m}^2)$	367,33652	$k_{B_3} (\text{kN.m}^2) \times 10^6$	2,03700
$\eta_1; \eta_2$	1,08; 1,70	$x (\text{m})$	151,87004
$x_{CG}^* (\text{m})$	10,26564	$k^{**} (\text{m}^2)$	413,36526
$y_{CG}^* (\text{m})$	- 20,56430	$A_s (\text{cm}^2)$	113,42500

Fonte: O Autor (2019)

Utilizando a tabela 6.1 com bimomento adimensional  $\beta_{sd} = 2,0351 \times 10^5$ , define-se o parâmetro ( $\varphi = 939,18549$ ), chegando-se na área de aço:

$$A_s = \frac{f_{cd}}{f_{yd}} \cdot \frac{\beta_{sd} \cdot t^2}{\varphi \cdot (10^3)} \equiv \frac{3,57143 \left( \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \right)}{43,47826 \left( \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \right)} \cdot \frac{(2,0351 \times 10^5) (\text{ADM}) \cdot (75)^2 (\text{cm}^2)}{939,1854 \times 10^3} = 115,663 \text{ cm}^2 \quad (6.28)$$

Por fim, ao comparar as áreas de aço  $A_s$  obtidas via tabela 6.7 e pela equação (6.28), verifica-se a aproximação de 1,97% a favor da segurança.

**EXEMPLO 6.3:** Utilizando os dados do exemplo 6.1 com o equacionamento procedido para armadura distribuída ao longo da seção transversal, ver figura 6.3 (b), tem-se a equação iterativa (6.25) escrita para o problema em questão, como:

$$\omega_\phi = -2,45573 \times 10^{-3} \cdot \bar{\xi}^2 + 0,0306 \cdot \bar{\xi} + 1,2184 \times 10^4 \quad (6.29)$$

$$\text{com: } \eta_3 = \frac{t}{b} = 0,075; \quad \eta_4 = \frac{14}{3}; \quad \eta_1 = \frac{\omega_2}{\omega_1} = 0,67842; \quad \eta_2 = \frac{\omega_5}{\omega_1} = 2,55332;$$

$$B_k = 1500 \text{ kN.m}^2; \quad B_{sd} = 2100 \text{ kN.m}^2 \quad \text{e} \quad \beta_{sd} = \frac{B_{sd}}{\omega_1 \cdot t^2 \cdot f_{cd}} = 1,21841 \times 10^4.$$

Usando o software Cálculo Numérico V5, versão livre, via aplicação do método de Newton para determinação de raízes na equação (6.29), conclui-se:

$$\bar{\xi} = -697,080926 \text{ m} \quad (6.29 \text{ a})$$

aplicando a equação (6.29 a) na eq. (6.29), tem-se como taxa de armadura da bitola, a seguinte:

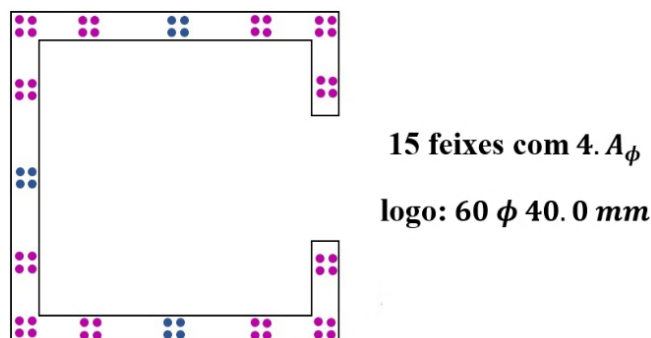
$$\omega_\phi = 3,774 \quad (6.29 \text{ b})$$

Por fim, a área de aço  $A_\phi$  da bitola do feixe, vale:

$$A_\phi = \frac{\omega_\phi}{(10^3)} \cdot \frac{f_{cd}}{f_{yd}} \cdot t^2 \equiv \frac{3,774}{10^3} \cdot \frac{6,43 \text{ kN/cm}^2}{43,48 \text{ kN/cm}^2} \cdot (150 \text{ cm})^2 = 12,556 \text{ cm}^2 \quad (6.30)$$

Resultando em bitola de 40.0 mm para atender tal área  $A_\phi$ , ver distribuição na Fig. 6.19.

**Figura 6.19: Distribuição da armadura  $A_s$  ao longo das paredes finas, no exemplo 6.3**




Fonte: O Autor (2019)

### 6.2.6. Programação em visual basic para armadura nas quinas

Na figura 6.20 é apresentado o formulário do programa de cálculo da armadura resistente ao bimomento em seções de núcleo C, e conforme marcha de cálculo Nº 4 (postulada na letra c do item 6.2.1). A programação foi realizada em Visual Studio 2019 – versão Community. Os resultados das simulações numéricas constam nos exemplos 6.1 e 6.2.

**Figura 6.20: Formulário de programa em Visual Basic para dimensionamento ao bimomento, sob armadura concentrada nas quinas tracionadas**

 Bimomento — □ ×

**Características do pilar**

a (m)

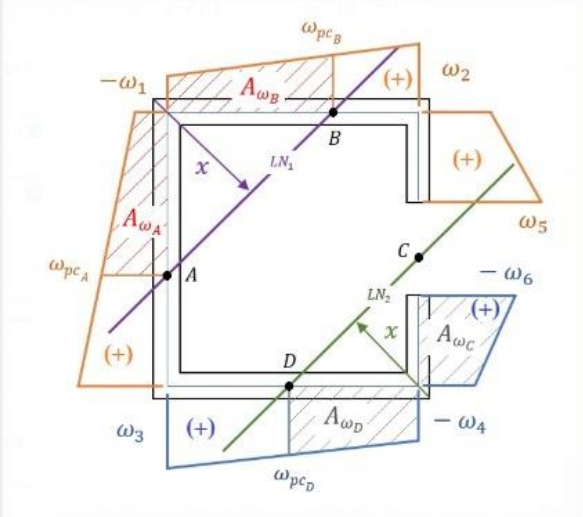
b (m)

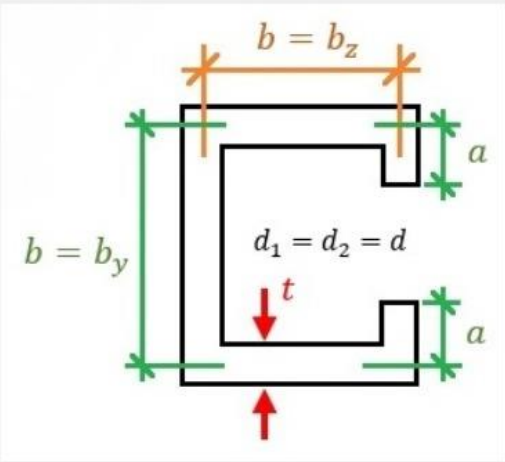
t (m)

Bk (KN.m<sup>2</sup>)

**Classificação do concreto - Aço CA-50**

C-20	C-25	C-30	C-35
C-40	C-45	C-50	C-55
C-60	C-70	C-80	C-90





**Diagrama de Área Setorial**

Kb1 (KN)

Kb2 (KN.m)

Kb3 (KN.m<sup>2</sup>)

x (m)

k\* (m<sup>2</sup>)

As (cm<sup>2</sup>)

b (m)

Fonte: O Autor (2019)

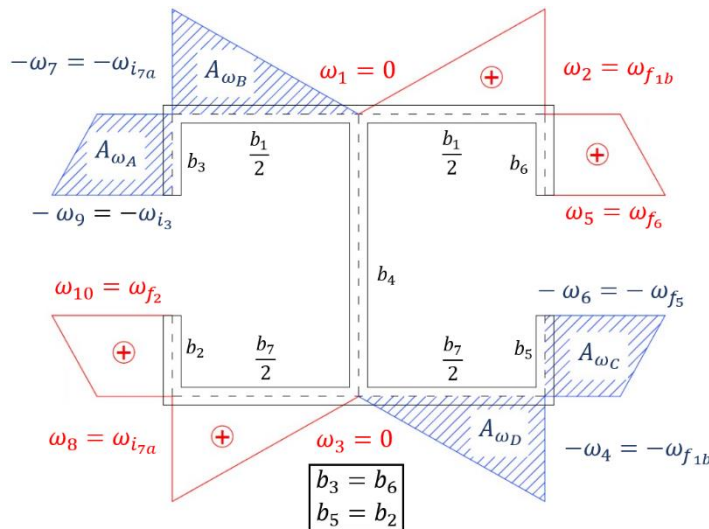


### 6.3. PILAR EM FORMATO DE DUPLO T

#### a) Posicionamento das linhas neutras

O diagrama de ordenadas setoriais com notação adaptada para o equacionamento das armaduras resistentes ao bimomento é apresentado na figura 6.21, sendo essa notação embasada no que foi procedido para a seção em C e apresentado na figura 6.11.

**Figura 6.21: Diagrama de ordenadas setoriais principais  $\omega_{pc}$ , sob notação adaptada, no duplo T**



Fonte: O Autor (2019)

O bimomento resistido pelas duas áreas comprimidas do concreto, vale:

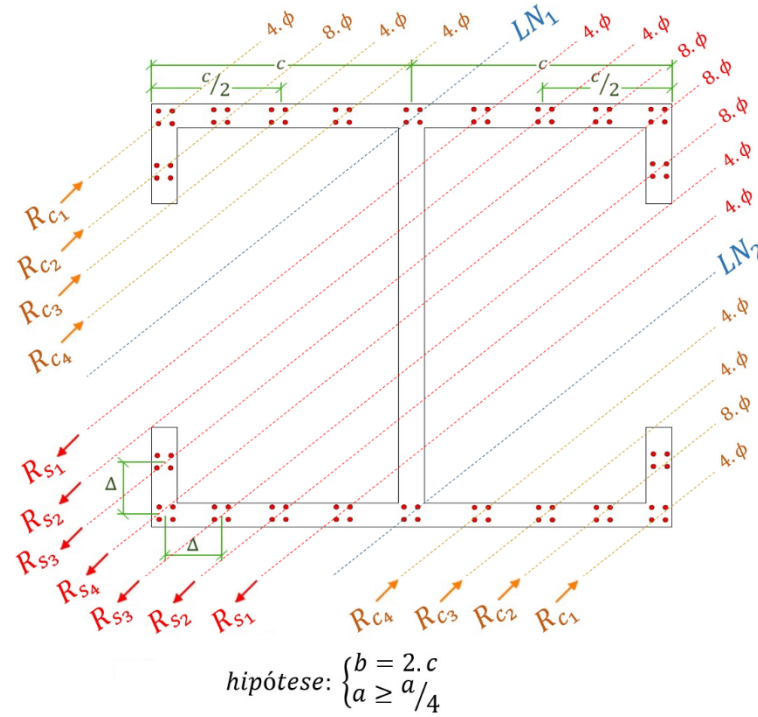
$$B_{cd} = \gamma \cdot \lambda \cdot \alpha_c \cdot t \cdot f_{cd} \cdot (A_{\omega_C} + A_{\omega_D} - A_{\omega_A} - A_{\omega_B}) \quad (6.31)$$

$$\text{onde: } A_{\omega_A} = \frac{(-\omega_7 - \omega_9)}{2} \cdot a; \quad A_{\omega_B} = -\frac{\omega_7 \cdot c}{2}; \quad A_{\omega_C} = \frac{(-\omega_4 - \omega_6)}{2} \cdot a; \quad A_{\omega_D} = -\frac{\omega_4 \cdot c}{2};$$

$$\omega_1 = \omega_3 = 0; \quad \omega_2 = \omega_8 = -\omega_4 = -\omega_7 = \frac{b \cdot c}{2} \quad \text{e} \quad \omega_5 = \omega_{10} = -\omega_6 = -\omega_9 = c \cdot \left( \frac{b}{2} + a \right).$$

Na figura 6.22 são apresentadas as resultantes nas armaduras comprimidas, sob notação  $R_{c_i}$  para a resultante na  $i$ -ésima armadura distribuída em quatro bitolas. Bem como as resultantes  $R_{s_i}$  sob a  $i$ -ésima armadura tracionada, além da consideração das linhas de ação de tais resultantes a 45° e paralelas as linhas neutras.



**Figura 6.22: Resultantes nas armaduras, comprimidas e tracionadas, distribuídas no duplo T**

Fonte: O Autor (2019)

Resultando no bimomento resistido pelas áreas comprimidas do concreto em conjunto com as armaduras sob compressão, expresso por:

$$B_{cd} = \gamma \cdot \lambda \cdot \alpha_c \cdot t \cdot f_{cd} \cdot (A_{\omega_c} + A_{\omega_D} - A_{\omega_A} - A_{\omega_B}) + B_1 \quad (6.32)$$

$$e: B_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sum_{i=1}^4 R_{c_i} \cdot (\omega_{c_i} + \omega_{D_i} - \omega_{A_i} - \omega_{B_i}); \quad \omega_{A_i} = \frac{(-\omega_7 - \omega_9)}{a} \cdot x_i - \omega_7; \quad \Delta_1 = \frac{t}{2};$$

$$\omega_{B_i} = \frac{\omega_7}{c} \cdot x_i - \omega_7; \quad \omega_{c_i} = \frac{(-\omega_4 - \omega_6)}{a} \cdot x_i - \omega_4; \quad \omega_{D_i} = \frac{\omega_4}{c} \cdot x_i - \omega_4; \quad \Delta = \frac{b}{4};$$

$$x_1 = \Delta_1; \quad x_2 = \frac{\Delta}{2}; \quad x_3 = \frac{c}{4} \quad e \quad x_4 = \frac{(c - \Delta)}{2}.$$

### b) Armadura resistente ao bimomento

A atuação das resultantes nas armaduras são evidenciadas na figura 6.23. Porém, quanto as armaduras tracionadas verifica-se que as componentes horizontais não interagem com o diagrama  $\omega_{pc}$  (apresentado na figura 6.21).



Agora, procede-se a ponderação das resultantes  $R_{c_i}$  e  $R_{s_i}$ , por número de bitolas com áreas de aço  $A_\phi$ , mediante as seguintes equações por tensão normal:

$$R_{c_1} = R_{c_3} = R_{c_4} = 4 \cdot f_{yd} \cdot A_\phi \quad (6.34 \ a)$$

$$R_{c_2} = 8 \cdot f_{yd} \cdot A_\phi \quad (6.34 \ b)$$

$$R_{s_1} = R_{s_2} = 4 \cdot f_{yd} \cdot A_\phi \quad (6.34 \ c)$$

$$R_{s_3} = R_{s_4} = 8 \cdot f_{yd} \cdot A_\phi \quad (6.34 \ d)$$

Aplicam-se as equações (6.34) nas equações (6.32) e (6.33), bem como é adotada a convenção do equilíbrio em bimomentos (ver figura 6.2). Rescreve-se a equação (6.23) com as devidas substituições dos bimomentos resistidos pelo concreto e pelas armaduras comprimidas  $B_{cd}$  e tracionadas  $B_{sd}^*$ , como:

$$\gamma \cdot \lambda \cdot \alpha_c \cdot t \cdot f_{cd} \cdot (A_{\omega_C} + A_{\omega_D} - A_{\omega_A} - A_{\omega_B}) + B_{sd} = A_\phi \cdot f_{yd} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \omega_{CS} \quad (6.35)$$

$$\text{com: } \omega_{CS} = \omega_{CS_1} + \omega_{CS_2} + \omega_{CS_3} + \omega_{CS_4}; \quad \omega_{CS_4} = (\omega_{C_4} + \omega_{D_4} - \omega_{A_4} - \omega_{B_4});$$

$$\omega_{CS_1} = (\omega_{D_{S_1}} + \omega_{D_{S_1}}^*) - (\omega_{C_1} + \omega_{D_1} - \omega_{A_1} - \omega_{B_1});$$

$$\omega_{CS_2} = (\omega_{D_{S_2}} + \omega_{D_{S_2}}^*) - 2 \cdot (\omega_{C_2} + \omega_{D_2} - \omega_{A_2} - \omega_{B_2}) \quad \text{e}$$

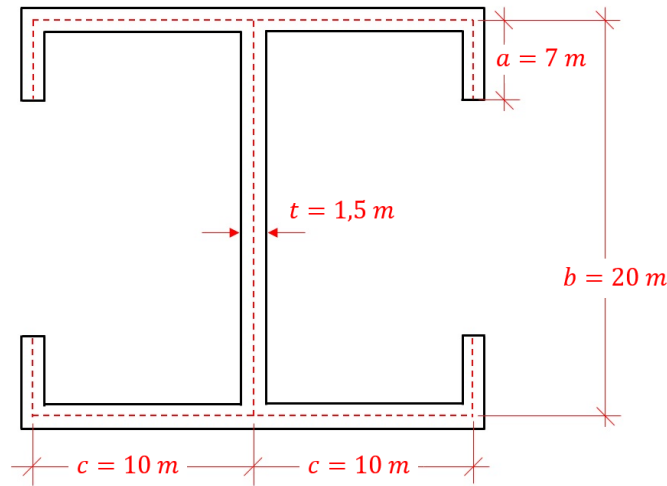
$$\omega_{CS_3} = 2 \cdot (\omega_{D_{S_3}} + \omega_{D_{S_3}}^*) - (\omega_{C_3} + \omega_{D_3} - \omega_{A_3} - \omega_{B_3}).$$

Isolando a área de aço  $A_\phi$  da equação (6.35), pode-se quantificar facilmente a área de cada bitola a ser empregada na distribuição apresentada na figura 6.6, como:

$$A_\phi = \frac{k_c + B_{sd}}{k_s} \quad (6.36)$$

$$\text{onde: } k_c = \gamma \cdot \lambda \cdot \alpha_c \cdot t \cdot f_{cd} \cdot (A_{\omega_C} + A_{\omega_D} - A_{\omega_A} - A_{\omega_B}) \quad \text{e} \quad k_s = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot f_{yd} \cdot \omega_{CS}.$$

**EXEMPLO 6.4:** Para exemplificar a aplicação do pilar em formato de duplo T, ver item 6.3 (a) e (b), utilizam-se as dimensões indicadas na figura 6.24. Já, o bimomento característico  $B_k$  será de  $1.500 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$  (analogamente ao procedido no exemplo 6.2), sendo utilizados: concreto C – 50 ( $f_{cd} = 3,57143 \text{ kN}/\text{cm}^2$ ;  $\gamma = 0,9$ ;  $\lambda = 0,8$ ;  $\alpha_c = 0,85$ ;  $\varepsilon_{cu} = 3,5\%$ ) e aço CA – 50 ( $f_{yd} = 43,47826 \text{ kN}/\text{cm}^2$ ;  $\varepsilon_{yd} = 2,07\%$ ).

**Figura 6.24: Dimensões da seção transversal em duplo T e submetida ao bimomento do ex. 6.2****Fonte: O Autor (2019)**

Ficando as ordenadas setoriais indicadas na figura 6.23 e as áreas do referido diagrama  $\omega_{pc}$ , ambas destacadas na equação (6.31), expressas por:

$$\omega_1 = \omega_3 = 0; \quad \omega_2 = \omega_8 = -\omega_4 = -\omega_7 = 100 \, m^2; \quad \omega_5 = \omega_{10} = -\omega_6 = -\omega_9 = 170 \, m^2;$$

$$A_{\omega_A} = A_{\omega_C} = 945 \, m^3 \quad \text{e} \quad A_{\omega_B} = A_{\omega_D} = 500 \, m^3.$$

As ordenadas setoriais em contato com as resultantes nas armaduras, tracionadas e comprimidas, assumem nesse problema, os seguintes valores:

$$\omega_{A_1} = \omega_{C_1} = 107,5 \, m^2; \quad \omega_{B_1} = \omega_{B_1} = 92,5 \, m^2; \quad \omega_{A_i} = \omega_{C_i} = 125 \, m^2 \text{ com } i = 2, 3 \text{ e } 4;$$

$$\omega_{B_i} = \omega_{D_i} = 75 \, m^2 \text{ com } i = 2, 3 \text{ e } 4 \quad \text{e} \quad \omega_{D_{s_i}} = \omega_{D_{s_i}}^* = 25 \, m^2 \text{ com } i = 1, 2, 3 \text{ e } 4.$$

A constante  $k_c$  é nula, isso devido a dupla simetria inerente a seção, em decorrência das áreas comprimidas do concreto estarem opostas e acarretarem bimomento de mesmo módulo, porém com sinais opostos. Já a constante  $k_s$  vale  $2,45 \times 10^4$ , acarretando assim em área de bitola de:  $A_\phi = 0,085 \, cm^2$ . Equivalendo a utilização de diâmetro de aço:  $\phi 5.0 \, mm$ . Ficando 22 feixes com  $4 \cdot A_\phi$  de  $\phi 5.0 \, mm$ , totalizando assim  $88 \, \phi 5.0 \, mm$ .

De tal dimensionamento, exemplo 6.4, verifica-se que a armadura resistente ao bimomento é irrelevante para seções em duplo T. Já, no exemplo 6.3 fica evidente a relevância de tal estado de carga. Neste capítulo da tese foi procedido apenas o equacionamento da armadura resistente ao bimomento, fazendo-se necessário superpor os dimensionamentos ao momento fletor e esforço cortante.

---

## **CONSIDERAÇÕES FINAIS E SUGESTÕES**

---

### **7.1. CONSIDERAÇÕES FINAIS**

Nesta tese foi resgatada a utilização da Técnica do Meio Contínuo (TMC) no cálculo dos esforços e deslocamentos em estruturas submetidas à ação do vento, conforme observa-se no capítulo 2 (item 2.1.2) e no capítulo 5. Em tal resgate foram estendidas a teoria da flexo-torção e dos painéis-parede, e aplicadas inicialmente em núcleos estruturais de edifícios altos, para pilares altos de pontes com separação de vinculação entre o tabuleiro e a mesoestrutura. Na abordagem dos pilares de pontes são analisadas seções em formato de núcleo estrutural “C” e sob geometria em duplo T. No capítulo 2, a matriz de rigidez do elemento de barra com seção transversal linearmente variável (e de formato retangular) é obtida mediante inversão da matriz de flexibilidade. No caso da montagem da matriz de flexibilidade são utilizados os sistemas derivados, sendo também analisadas as variações do momento de inércia, da área da seção transversal e do fator de forma. Ressalta-se nesta contribuição a obtenção da matriz de rigidez exata para tal configuração de seção transversal, e procede-se a aplicação de tal matriz no cálculo das frequências de vibração dos pilares de uma ponte com tabuleiro posicionado à 100 metros, isso relativo à base dos mencionados pilares. Para a primeira frequência de vibração, com a subdivisão do pilar em cinco elementos finitos de barra, conclui-se aproximação de 5,20 % (ver pág. 139). Tal aproximação é excelente, isso devido ao número de elementos finitos utilizados na discretização do pilar com 100 metros de altura, sendo a validação decorrente de modelagem em ANSYS Release 11, conforme é apresentado na letra “d” do item 2.10.

Em continuidade, verificou-se a estabilidade elástica dos pilares (capítulo 4), com o estado de carga para atuação conjunta da ação do vento, da reação do tabuleiro e do peso próprio. Ainda no capítulo 2, mais especificamente nas páginas 22 a 30, calcula-se a distribuição das cargas laterais ( $q_1$ ,  $q_2$  e  $Q$ ) e da reação do tabuleiro ( $P$ ) considerando-se a contribuição da ação do vento no tabuleiro da ponte. Para tal, o problema da distribuição das cargas do vento é modelado via TMC com a desconsideração da hipótese das lajes (tabuleiro) funcionando conforme diafragmas. Na determinação da carga crítica são analisados pilares de pontes com altura já mencionada e com seção transversal sob as seguintes configurações: retangular, circular (maciças), tubular e anelar com paredes de espessura  $t$  relativa as demais dimensões. Além das seções transversais constantes ao longo do eixo axial do pilar (as seções anteriormente listadas), procede-se a determinação da carga crítica para seção transversal em formato retangular e linearmente variável na altura. A curva de convergência da carga crítica é obtida mediante discretização da EDO do problema de estabilidade, utilizando-se o método das diferenças finitas (MDF) com polinômio de interpolação quártica. A validação de tal equacionamento é processada via solução exata presente em Timoshenko e Gere (2009), isso para estado de carga particular (com atuação exclusiva da carga  $Q$  concentrada no topo do pilar).

No capítulo 5 foi generalizada a teoria dos painéis – parede apresentada em Barbosa (1980) e fundamentada em Vlassov (1962). Em tal generalização procede-se ao equacionamento das paredes que compõem o núcleo estrutural em formato de “C” via formulação trigonométricas com ângulos genéricos na incidência dos referidos painéis – parede. A motivação de tal análise é fornecer uma ferramenta de projeto de pontes com modelo estrutural em vigas e que o engenheiro estrutural possa agregar economia ao projeto com a mera inclinação das paredes que formam o pilar em formato de núcleo estrutural. Baseado na premissa de impor simetria ao pilar de pontes, buscando-se solicitações simétricas, com a mudança de direção do tráfego e/ou da atuação das rajadas de vento. Procede-se (também no capítulo 5) a formulação generalizada da teoria dos painéis – parede (GTPP) aplicada a seções transversais em formato de duplo T. Tal formulação é validada mediante a teoria da flexo-torção (TFT) apresentada entre as páginas 121 a 124, para a seção em questão.

A análise do pilar com seção transversal de paredes finas foi procedida, no caso estático, com momento de torção sob variação linear ao longo do eixo longitudinal do referido pilar. Já, em face da análise dinâmica dos painéis-parade postulou-se os fluxogramas de desacoplamento do sistema de equações diferenciais para o pilar metálico e de concreto armado. Ao pilar metálico, sob carregamento lateral, verificou-se coincidência do centro de massa

(CM) e do centro de gravidade (CG) e para tal obteve-se a equação transcendental e decorrentes modos de vibração, bem como modelagem no software ANSYS Release 11. No caso do pilar de concreto armado procede-se a transformação de coordenadas da pseudo-força inercial do (CM) para o (CG). Em seguida postulou-se a rotina de desacoplamento do sistema de EDO's, bem como fez-se a postulação do amortecimento proporcional em relação as duas matrizes de rigidez ( $[J]$  para a flexão do pilar e  $[S]$  para rigidez à flexão dos lintéis) e a matriz de massa ( $[M]$  ou  $[\bar{M}]$ ). Em ambas as formulações são modelados pilares com seção transversal sob formato de núcleo estrutural C e em duplo T.

As verificações da modelagem estática dos painéis-parede foram procedidas por artigos técnicos, dissertações e teses, bem como por simulação em elementos finitos (MEF) propostos via método dos deslocamentos acoplado com a teoria da flexo-torção. Quanto à análise dinâmica, as verificações foram conduzidas via modelagem dos modos de vibração no software ANSYS Release 11.

Por fim, foi equacionada a seção de paredes finas (com paredes e abas simétricas, bem como em formato de núcleo estrutural C e em duplo T) em concreto armado e submetida ao bimomento. De tal equacionamento, resultou para a seção C, a marcha de cálculo da armadura resistente e geração de tabelas adimensionais para concretos dos grupos I e II de resistência, e com espessura  $t$  relativa às dimensões das paredes do pilar (isso para o pilar em formato de núcleo estrutural). Já, para o pilar com seção transversal em formato de duplo T verifica-se a equação determinante da área de aço  $A_\phi$  por bitola (ver equação 6.25), isso devido a fixação das linhas neutras ocorrer pelo diagrama de ordenadas setoriais  $\omega_{pc}$  e não ficar flutuando na seção transversal.

Nas diversas análises, processadas nesta tese, foram implementados exemplos de validação e consequentes constatações mencionadas. Por tais resultados obtidos e validados com base na literatura específica e simulações via MEF, chega-se a conclusão que os procedimentos de análise estática e dinâmica dos pilares de pontes, aqui sistematizados, são adequados e forneceram bons e práticos produtos de soluções estruturais.

## 7.2. SUGESTÕES PARA TESES FUTURAS

Após as análises decorridas nos pilares altos, de pontes em vigas, com seção de paredes finas e sob formato de núcleo estrutural C e em duplo T, sugerem-se os seguintes temas para teses futuras:

- Generalizar a análise dinâmica dos painéis-parede para a ocorrência da não linearidade física e geométrica;
- Estender a generalização do núcleo estrutural via teoria dos painéis – parede para diversas configurações (distintas do duplo T) e com número de núcleos associados superior a dois;
- Estender o dimensionamento da seção de paredes finas, em concreto armado, para a configuração assimétrica (quanto às dimensões das abas e paredes);
- Aperfeiçoar a análise da estabilidade elástica, dos pilares altos, englobando a não linearidade física e geométrica e
- Apreciar a estabilidade elástica e dinâmica dos pilares em paredes finas, sob a ótica da não linearidade física e geométrica.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

ABSI, E. Méthode des éléments finis. **Annales de l'institut technique du batimento et des travaux publics**, Paris, N° 262, Annales Octobre, p. 1593 – 1622, 1969.

ALFUTOV, N.A. **Stability of elastic structures**. New York: Springer, 2000.

ALVES FILHO, A. **Elementos finitos: a base da tecnologia CAE**. 5ª ed. São Paulo: Editora Érica Ltda, 2007.

ALVES FILHO, A. **Elementos finitos: análise dinâmica**. São Paulo: Editora Érica Ltda, 2009.

AMARAL, N.A. **Construções de concreto I**. Vol. 2. São Paulo: EPUSP, 1971.

ANASTASSIADIS, K. Analyse statique tridimensionnelle du contreventement des batiments. **Annales de l'institut technique du batimento et des travaux publics**, Paris, N° 452, Annales Février, p. 1 – 29, 1987.

ANDRADE, S.; VELLASCO, P. **Comportamento e projeto de estruturas de aço**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2016.

ANTAR NETO, A. et al. **Trigonometria: noções de matemática**. Vol. 3. São Paulo: Ed. Moderna, 1979.

ARAÚJO, J.M. **Curso de concreto armado**. Vol. 4. Rio Grande: Editora Dunas, 2014.

ARGYRIS, J.; MLEJNEK, H-P. **Dynamics of structures**. Amsterdam: Editorial Board, 1991.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto - procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6123**: Forças devidas ao vento em edificações. Rio de Janeiro, 1988.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 7188**: Carga móvel rodoviária e de pedestre em pontes, viadutos, passarelas e outras estruturas. Rio de Janeiro, 2013.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8800**: Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios. Rio de Janeiro, 2008.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8953**: Concreto para fins estruturais – classificação pela massa específica, por grupos de resistência e consistência. Rio de Janeiro, 2015.

AWRUCH, A.M.; GONZÁLEZ L.A.S. Análisis de estructuras sujetas a la acción del viento según la norma brasileira y com um enfoque estocástico. **XXVI Jornadas sudamericanas de ingeniería estructural**, Montevideo, vol. 3, p. 31 – 42, 1993.

BAILEY, H.R. Dynamic bending of elastic columns. **Journal of the structural Division**, New York, Volume 89, St. 4, p. 95 – 113, 1963.

BARBOSA, J.A. **Edifícios com paredes de secção aberta contraventadas por lintéis, sob carga lateral**. EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1980.

BATHE, K.J. **Finite element formulation for solids and structures**. Lecture 4. Virtual books, 2019. Disponível em: < [https://ocw.mit.edu/courses/mechanical-engineering/2-094-finite-element-analysis-of-solids-and-fluids-ii-spring-2011/lecture-notes/MIT2\\_094S11\\_lec4.pdf](https://ocw.mit.edu/courses/mechanical-engineering/2-094-finite-element-analysis-of-solids-and-fluids-ii-spring-2011/lecture-notes/MIT2_094S11_lec4.pdf) >

Acessado em: 30/11/2019 as 14:34.

BATTISTELLE, R.A.G. **Cálculo dos deslocamentos laterais de painéis planos considerando as deformações axiais dos pilares e o efeito de 2ª ordem**. 1991. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1991.

BAZANT, Z.B.; CEDOLIN, L. **Stability of structures**. New Jersey: World Scientific, 2010.

BELLUZI, O. **Ciencia de la construcción**. Vol. 1. Madrid: Aguilar Ediciones, 1973.

BELLUZI, O. **Ciencia de la construcción**. Vol. 2. Madrid: Aguilar Ediciones, 1971.

BELLUZI, O. **Ciencia de la construcción**. Vol. 4. Madrid: Aguilar Ediciones, 1971.

BEYER, E.; THUL, H. **Carreteras elevadas**. Barcelona: Editorial Blume, 1969.

BLESSMANN, J. **Introdução ao estudo das ações dinâmicas do vento**. Porto Alegre: Editora UFRGS, 1998.

BLESSMANN, J. **Aerodinâmica das construções**. 3ª ed. Fac-similar. Porto Alegre: Editora UFRGS, 2011.

BLODGETT, O.W. **Design of welded structures**. Ohio: The James F. Lincoln Arc Welding Foundation, 1966.

BLUME, J.A. Dynamic characteristics of multistory buildings. **Journal of the structural division**, New York, Volume. 94, st. 2, p. 377 – 402, 1968.

BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 8ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

BRANSON, D.E. Deflections of reinforced concrete flexural members. **Journal of the american concrete institute**, Volume 63, St. 6, p. 637 – 674, 1966.

BREBBIA, C.A.; FERRANTE, A.J. **The finite elemento technique**. Porto Alegre: Editora UFRGS, 1975.

BROWN, C.J. Approximate stiffness matrix for tapered beams. **Journal of structural Engineering**, New York, Volume 110, St. 12, p. 3050 – 3055, 1984.

**Brumadinho**. Disponível em: < [vejasp.abril.com.br/cidades/alarme-buscas-interrompidas-brumadinho/](http://vejasp.abril.com.br/cidades/alarme-buscas-interrompidas-brumadinho/)>. Acessado em: 23/08/2019.

BULJAC, A. et al. Aerodynamic and aeroelastic characteristics of typical bridge decks equipped with wind barriers at the windward bridge-deck edge. **Engineering structures**, Volume 137, p. 310 – 322, 2017.

BUSATTA, F.; MOYO, P. Vibration monitoring of a large scale heavy haul railway viaduct. **MATEC Web of Conferences**, 04007, 2015.

CAMPANARI, F.A. **Teoria das estruturas**. V. 1. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1985.

CAMPANARI, F.A. **Teoria das estruturas**. V. 2. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1985.

CAMPANARI, F.A. **Teoria das estruturas**. V. 3. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1985.

CARVALHO, F.A.C. **Instabilidade de edifícios com paredes de seção aberta contraventadas por lintéis**. 1980. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1980.

CHAJES, A. **Principles of structural stability theory**. New York: Prentice Hall, 1974.

CHARLTON, T.M. **A history of theory of structures in the nineteenth century**. Cambridge: Cambridge University Press, 1982.

CHEN, S. et al. Impact of stochastic traffic on modified cross-section profiles of a slender long-span bridge: wind tunnel experimental investigation. **Journal of engineering mechanics**, Volume 139, St. 3, p. 347 – 358, 2013.

CHITTY, L. On the cantilever composed of a number of parallel beams interconnected by cross bars. **Philosophical Magazine**, Volume 38, p. 685 – 699, 1947.

CHOPRA, A.K. **Dynamics of structures**. Second edition. New Jersey: Prentice Hall, 2001.

CLOUGH, R.W; PIENZIEN, J. **Dynamics of strutures**. Second edition. New York: McGraw-Hill, 1993.

COOK, R.D. et al. **Concepts and applications of finite element analysis**. 4 th ed. United States: John Wiley & Sons, 2002.

COSTA, J.L. **Núcleos estruturais sobre fundações flexíveis**. 1984. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1984.

- COURBON, J. Le pont de la Pyle. **Annales de l'institut technique du batimento et des travaux publics**, Paris, N° 252, Annales Décembre, p. 1865 – 1882, 1968.
- CRAVEIRO, M.V.; GAY NETO, A. Buckling of pipelines due to internal pressure. **Proceedings of XXXVII Iberan latin american congresso on computational methods in engineering – CILAMCE**, 2016.
- CREDE, C.E. **Choque e vibrações nos projetos de engenharia**. Tradução de Edgar Ferreira da Costa e Souza e Renato Texeira. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1972.
- DANAY, A.; GELLERT, M.; GLUCK, J. The axial strain effects on load distribution in nonsymmetric tier buildings. **Building Science**, Volume. 9, p. 29 – 38, 1974.
- DEL NERO, J.A. **Estudo da estabilidade de pilares nas obras de arte**. 1970. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – POLI, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1970.
- DEN HARTOG, J.P. **Vibrações nos sistemas mecânicos**. Tradução de Mauro O. C. Amorelli. Editora Blucher, 1972.
- DHATT, G.; TOUZOT, G.; LEFRANÇOIS, E. **Méthode des éléments finis**. Paris: Lavoisier, 2005.
- DNER. **Ponte presidente Costa e Silva**. Rio de Janeiro: DNER, 1984.
- DZIEWOLSKI, R. Étude théorique et expérimentale d'une poutre em caisson asymétrique avec deux appendices. **IABSE congresso report**, p. 131 – 137, 1964.
- ESTRUTURA EM REVISTA. **Estrutura**, Rio de Janeiro, v.93, p. 7 – 10, 1980.
- FALCONI, R.A. **Análisis matricial de estructuras**. Quito: Escuela Politécnica del Ejército, 2004.
- FERRAZ, J.C.F. Caso particular de estrutura sujeita à ação do vento. **XI Jornadas sul-americanas de engenharia estrutural**, São Paulo, p. 419 – 445, 1966.
- FLEMING, J.F.; ROMUALDI, J.P. Dynamic response of highway bridges. **Journal of the structural division**, New York, Volume 87, St. 7, p. 31 – 61, 1961.
- FONSECA, A. **Vibrações**. Rio de Janeiro: Livro Técnico, 1964.
- FUCHS, M.B. **Structures and their analysis**. Israel: Springer, 2016.
- FUENTES, A. **Béton armé – calcul des ossatures**. Paris: Eyrolles Editeur, 1987.
- GALLAGHER, R.H. **Finite element analysis: Fundamentals**. New Jersey: Prentice Hall, 1975.
- GHIODEL, D.; LUNGU, D. **Wind snow and temperature effects on structures based on probability**. Englad: Abacus Press, p. 165 – 282, 1975.

GLUCK, J. Lateral – load analysis of asymmetric multistory structures. **Journal of the structural division**, New York, Volume 96, st. 2, p. 317 – 333; discussion by Wynhoven et al. In Nov. 1970.

GLUCK, J.; GELLERT, M. Buckling of lateral restrained thin-walled cantilevers of open cross section. **Journal of the structural division**, New York, Volume. 98, st. 9, p. 2031 – 2042, 1972.

GOLDBERG, J.E. Wind stresses by slope deflection and converging approximations. **Transactions of the american society of civil engineers** New York, Volume 99, p. 962 – 984, 1934.

GOTTEMOELLER, F. **Bridgescape – the art of designing bridges**. New York: John Wiley & Sons, 1998.

GRIMM, C.R. **Secondary stresses in bridges trusses**. First edition. New York: John Wiley & Sons, 1908.

GUELFOND, A.O. **Calcul des differences finies**. Paris: Dunod, 1963.

GUTKOWSKI, R.M. **Structures – fundamental theory and behavior**. New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1981.

HART, G.C. Building dynamics due to stochastic wind forces. **Journal of the structural division**, New York, Volume 96, St. 3, p. 535 – 550, 1970.

HE, J.; FU, Z-F. **Modal analysis**. Oxford: Butterworth Heinemann, 2001.

HEIDEBRECHT, A.C.; SMITH, B.S. Approximate analysis of open-section shear walls subject to torsional loading. **Journal of the structural division**, New York, Volume 99, St. 12, p. 2355 – 2373, 1973.

HEIDEBRECHT, A.C.; SWIFH, R.D. Analysis os asymmetrical coupled shear walls. **Journal of structural engineering**, New York, Volume 97, St. 5, p. 1407 – 1422, 1971.

HENIN, M. Calcul statique des systèmes de contreventement tridimensionnels irréguliers par la méthode des matrices-transfert. **Annales de l'institut technique du batimento et des travaux publics**, Paris, N° 357, Annales Janvier, p. 9 – 39, 1978.

ICHINOSE, T.; TAKIGUCHI, K. Shear deformation mode of reinforced concrete beam. **Journal of structural engineering**, New York, Volume 113, St. 4, p. 689 – 703, 1987.

KAPLAN, W. **Calculo Avanzado**. Tradução ao espanhol. Addison-Wesley Publishing Company, 1963.

KASSIMALI, A. **Análise estrutural**. Tradução da 5ª edição norte-americana. São Paulo: Cengage Learning, 2015.

KERMANI, B.; WALDRON, P. Behaviour of concrete box girder bridges of deformable cross-section. **Proceedings of the institution of civil engineers – Structures and Buildings**, Volume 99, p. 109 – 122, 1993.

KHAN, M.A.H.; SMITH, B.S. Restraining action of bracing in thin-walled open section beams. **Proceedings of the institution of Civil Engineers**, Volume 59, Part 2, p. 67 – 78, 1975.

KISELIOV, V.A. **Mecanica de construccion – curso especial**. Tradução ao espanhol. Editorial MIR, 1983.

KISELIOV, V.A. **Mecanica de construccion**. Tomo II. Tradução ao espanhol. Editorial MIR, 1976.

KOLLBRUNNER, C.F.; BASLER, K. **Torsion in structures**. Berlin: Springer-verlag, 1969.

KOLOUŠEK, V. Solution statique et dynamique des pylônes d'antenne haubanés. **IABSE congresso report**, p. 105 – 140, 1947.

KOLOUŠEK, V. Vibrations of bridges with continuous main girders. **IABSE congresso report**, p. 111 – 132, 1959.

KOTEN, H. Wind measurements of high buildings in the netherlands. **International research seminar winds effects on buildings and structures**, Volume I, Ottawa, paper 25, 1967.

KRASNOV, M. et al. **Curso de matemáticas superiores para ingenieros**. Volume 1. Tradução ao espanhol. Editorial MIR, 1990.

KREIDER, D.L. et al. **An Introduction to Linear Analysis**. Addison-Wesley Publishing Company, 1966.

LACERDA, F.S. **Resistência dos materiais**. Volume 1. Rio de Janeiro: Editora Globo, 1964.

LAIER, J.E. **Análise das vibrações livres de edifícios pela técnica do meio contínuo**. 1978. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1978.

LAIER, J.E. **Estudo do comportamento dinâmico de estruturas de edifícios altos pela técnica do meio contínuo**. Tese de Livre – Docência. EESC/USP. São Carlos: 1984.

LAIER, J.E. **Vibrações aleatórias**. EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1989.

LANGENDONCK, T. **Cálculo de concreto armado**. Vol. II. Rio de Janeiro: Editora Científica, 1959.

LANGENDONCK, T. **Resistência dos materiais – deformações**. Vol. I. Rio de Janeiro: Editora Científica, 1960.

LAREDO, M. **Grands batiments: contreventements, dynamique des structures et calcul automatique**. Paris: Editions Eyrolles, 1977.

- LAREDO, M. Théorie générale du comportement des grandes structures spatiales. **Annales de l'institut technique du batimento et des travaux publics**, Paris, N° 254, Annales Février, p. 305 – 378, 1969.
- LAU, S.C.W.; HANCOCK, G.J. Distortional buckling formulas for channel columns. **Journal of structural engineering**, New York, Volume 113, St. 5, p. 1063 – 1078, 1987.
- LEBET, J.P.; HIRT, M.A. **Steel bridges: Conceptual and structural design of steel and steel-concrete composite bridges**. Lausanne: EPFL Press, 2013.
- LUO, Y.; XU, X.; WU, F. Accurate stiffness matrix for nonprismatic members. **Journal of structural engineering**, New York, Volume 133, St. 8, p. 1168 – 1175, 2007.
- MANCINI, E. **Associação contínua tridimensional de pórticos e paredes com engastamento elástico**. 1972. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1972.
- MANCINI, E. **Análise contínua de estruturas de edifícios elevados sujeitas à ação do vento**. 1973. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1973.
- MANEY, G.A. Secondary stresses and other problems in rigid frames: a new Method of solution. **Studies in engineering**. Bulletin 1. Minneapolis: University of Minesota, p. 1 – 17, 1915.
- MARCHETTI, O. **Pontes de concreto armado**. São Paulo: Blucher, 2008.
- MARQUES, J.C.M. **Estruturas tubulares de edifícios altos submetidas à torção**. 1983. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1983.
- MASSONNET, C. Stability considerations in the design of steel columns. **Journal of the structural division**, New York, Volume 85, St. 7, p. 75 – 111, 1959.
- McGUIRE, W.; GALLAGHER, R.H. **Matrix structural analysis**. New York: John Wiley & Sons, 1979.
- MEGSON, T.H.G. **Structural and stress analysis**. Second edition. Amsterdam: Elsevier, 2005.
- MENESES, C.E.R. **Análise do comportamento mecânico de compósitos laminares considerando a viscoelasticidade**. 2015. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil), Universidade de Brasília, Brasília, 2015.
- MESHKAT-DINI, A.; TEHRANIZADEH, M. Torsion analysis of high-rise buildings using quadrilateral panel elements with drilling D.O.F.s. **Amirkabir**, Volume 41, St. 1, p. 59 – 67, 2009.

MORI, D.D.; MUNAIAR NETO, J. **Flexo torção – barras com seção aberta e paredes delgadas**. São Carlos: EESC/USP, 2017.

MURRAY, N.W. **Introduction to the theory of thin-walled structures**. Oxford: Oxford University Press, 1986.

NADJAI, A.; JOHNSON, D. Elastic analysis of spatial shear wall systems with flexible bases. **The structural design of tall buildings**, Volume 5, p. 55 – 72, 1996.

NEMIR, M.T.M. **Finite element stability analysis of thin-walled steel structures**. 1985. Thesis (Doctor of Philosophy) – Department of civil engineering, University of Salford, Salford, 1985.

O'HARA, S.; RAMMING, C.H. **Numerical structural analysis**. New York: Momentum, 2015.

O'ROURKE, M.J.; PARMELEE, R.A.; COROTIS, R.B. Response of structures to random wind forces. **Journal of the structural division**, New York, Volume 101, St. 12, p. 2557 – 2571, 1975.

ORLER, R.; DONINI, H.J. **Introducción al cálculo de hormigón estructural**. Buenos Aires: Nobuko, 2011.

PARCEL, J.I.; MANEY, G.A. **An elementary treatise on statically indeterminate stresses**. New York: John Wiley & Sons, 1944.

PARCEL, J.I.; MOORMAN, R.B.B. **Analysis of statically indeterminate structures**. New York: John Wiley & Sons, 1955.

PAULAY, T.; PRIESTLEY, J.N. Stability of ductile structural walls. **ACI structural journal**, Volume 90, St. 4, p. 385 – 392, 1993.

PAVLOU, D.G. **Essentials of the finite element method for mechanical and structural engineers**. New York: Elsevier, 2015.

PAZ, M. **Dinámica estructural – Teoría y cálculo**. Barcelona: Editorial Reverté, 1992.

PETERKA, J.A.; CERMAK, J.E. Adverse wind loading induced by adjacent buildings. **Journal of the structural division**, volume 102, st. 3, p. 533 – 548, 1976a.

PETERKA, J.A.; CERMAK, J.E. Wind pressures on buildings – probability densities. **Journal of the structural division**, volume 101, st. 6, p. 1255 – 1267, 1976b.

PETTYT, M. **Introduction to finite element vibration analysis**. Cambridge: Cambridge Press, 1998.

PFEIL, W. Viaduto sobre o “vale dos diabos”. **Estrutura**, Rio de Janeiro, v.27, p. 457 – 460, 1960.

PFEIL, W. **Estruturas de aço**. V. 2. 4ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 1986.

PFEIL, W. **Estruturas de aço**. V. 3. 4ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 1986.



PFEIL, W. **Pontes em concreto armado: elementos de projeto, solicitações e dimensionamento**. Rio de Janeiro: LTC, 1979.

**Pilar da ponte de la Pyle**. Disponível em:

<[https://farm4.static.flickr.com/3036/2549091566\\_4caf44c672\\_b.jpg](https://farm4.static.flickr.com/3036/2549091566_4caf44c672_b.jpg)>. Acessado em: 16/09/2019 as 18:10.

PILARSKI, L.I. **Calcul des voiles minces en béton armé**. Paris: Dunod, 1952.

PROENÇA, S.P.B. **Mecânica das estruturas aeronáuticas**. Volume II. São Carlos: EESC/USP, 2009.

QUARTERONI, A. et al. **Méthodes numériques: Algorithmes, analyse et applications**. Milan: Springer, 2007.

RACHID, M. **Instabilidade de barras de secção delgada**. 1975. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1975.

RAHAL, K.N.; COLLINS, M.P. Analysis of sections subjected to combined shear and torsion – A theoretical model. **ACI structural journal**, Volume 92, St. 4, p. 459 – 469, 1995.

RECORDES MUNDIAIS. **Estrutura**, Rio de Janeiro, v.111, p. 24, 1985.

REDDY, J.N. **Energy and variational methods in applied mechanics: with an introduction to the finite element method**. New York: John Wiley & Sons, 1984.

REINHORN, A.; RUTENBERG, A.; GLUCK, J. Dynamic torsional coupling in asymmetric building structures. **Building and environment**, Great, Volume 12, p. 251 – 261, 1977.

REKACH, V.G. **Static theory of thin-walled space structures**. Moscow: Mir publishers, 1978.

RIBEIRO, J.L.D. Correlação das forças e das pressões em um prisma de secção quadrada exposto ao vento. **XXV Jornadas sul-americanas de engenharia estrutural**, Porto Alegre, Volume V, p. 37 – 45, 1991.

RIBEIRO, S.R.S. **Associação tridimensional de pórticos e paredes de secção aberta em estruturas de edifícios altos**. 1987. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1987.

RIZWAN, S.A. **Theory of indeterminate structures**. second edition. Lahore: A-one Publishers, 2003.

ROSMAN, R. Application of variational methods in the theory of tall building structures. **Proceedings of international conference on variational methods in engineering**, England, EDA 006, p. 11/68 – 11/83, 1972.

ROSSITER, J. A critical analysis of the ganter bridge, switzerland (1980). **Proceedings of Bridge engineering 2 conference**, 2008.

RUBINSTEIN, M.F. **Matrix computer analysis of structures**. New Jersey: Prentice Hall, 1966.

RUTENBERG, A.; LEVIATHAN, I.; DECALO, M. Stability of shear-wall structures. **Journal of structural engineering**, New York, Volume 114, St. 3, p. 707 – 716, 1988.

SALIGER, R. **El hormigón armado**. Barcelona: Editorial Labor, 1963.

SALMON, C.G.; JOHNSON, J.E.; MALHAS, F. **Steel structures**. Fifth edition. New Jersey: Pearson Education, 2009.

SÁNCHEZ FILHO, E.S. **Torção de peças abertas com hastes de paredes delgadas de concreto armado**. 1988. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1988.

SAUL, W.E.; JAYACHANDRAN, P.; PEYROT, A.H. Response to stochastic wind of N-degree tall buildings. **Journal of the structural division**, New York, Volume 102, St. 5, p. 1059 – 1075, 1976.

SCHAPERY, R.A. On the characterization of nonlinear viscoelastic materials. **Polymer engineering and science**, Volume 9, St. 4, p. 295 – 310, 1969.

SCHIEL, F. **Introdução à resistência dos materiais**. Fascículo II. São Carlos, 1983.

SEPAHI, O.; FOROUZAN, M.R.; MALEKZADEH, P. Post-buckling analysis of variable cross-section cantilever beams under combined load via differential quadrature method. **KSCE Journal of civil engineering**, Volume 14, St. 2, p. 207 – 214, 2010.

SERRA, J.L.F.A.; YAGUI, T. Análise de núcleos estruturais contraventados ou não por lintéis, considerando a deformação por cortante. **XXVII Jornadas sudamericanas de ingeniería estructural**, Tucumán, vol. 1, p. 265 – 276, 1995.

SILVA, C.W. **Vibration: Fundamentals and practice**. London: CRC Press, 2000.

SILVA, E.G. **Méthodes et analyses numériques**. Engineering school. Institut Polytechnique de Grenoble, pp. 99, 2007.

SILVA, V.D. **Mecânica e resistência dos materiais**. 3ª ed. Coimbra: ZUARI, 2004.

SMITH, B.S.; ABATE, A. The effects of shear deformations on the shear centre of open-section thin-walled beams. **Proceedings of the institution of Civil Engineers**, Volume 77, Part 2, p. 57 – 66, 1984.

SMITH, B.S.; COULL, A. **Tall Building structures: analysis and design**. New York: John Wiley, 1991.

SMITH, B.S.; TARANATH, B.S. The analysis of tall core – supported structures subject to torsion. **Proceedings of civil engineering**, University of Southampton, Chicago, p. 173 – 187, 1972.

SORIANO, H.L. **Introdução à dinâmica das estruturas**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2014.

- SOARE, M. **Application des équations aux differences finies au calcul des conques**. Paris; Éditions Eyrolles, 1962. p. 73 – 82.
- SOLNES, J.; SIGBJORNSSON, R. Along-wind response of large bluff buildings. **Journal of the structural division**, volume 99, st. 3, p. 391 – 397, 1973.
- SPIEGEL, M.R. **Schaum's outline of theory and problems of analysis**. New York: McGRAW-HILL, 1974. p. 101.
- STAMATO, M.C. **Distribuição das cargas do vento entre os painéis de contraventamento**. EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1978.
- STAMATO, M.C. **Associação contínua de painéis de contraventamento**. EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1980.
- STAMATO, M.C. **Deslocamento em estruturas lineares**. EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1983.
- STAMATO, M.C.; MANCINI, E. Three-dimensional interaction of walls and frames. **Journal of the structural division**, volume 99, st. 12, p. 2375 – 2390, 1973.
- STANDERSKI, R. **Ação estática do vento em tabuleiros de pontes – caracterização aerodinâmica em túnel de vento**. 2012. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.
- STASIO, J.; BUREN M.P. Transfer of bending moment between flat plate floor and column. **ACI structural journal**, Volume 32, St. 3, p. 299 – 314, 1960.
- SUSSEKIND, J.C. **Curso de análise estrutural**. Vol. 3. 2ª ed. Porto Alegre: Editora Globo, 1978.
- SUSSEKIND, J.C. **Cuso de concreto**. Vol. II. 4ª ed. São Paulo: Editora Globo, 1991.
- SZERÉMI, L. Stiffening system of multi-storey buildings by the continuum model. **Periodic Civil Politechnica**, Volume 22, p. 205 – 218, 1977.
- TARANATH, B.S. **Structural analysis and design of tall buildings**. New York: CRC Press, 2011.
- TASSIOS, T.P.; MORETTI, M.; BEZAS, A. On the behavior and ductility of reinforced concrete coupling beams of shear walls. **ACI structural journal**, Volume 93, St. 6, p. 711 – 719, 1996.
- TIMOSHENKO, S.P. **History of strength of materials**. New York: McGraw-Hill, 1953.
- TIMOSHENKO, S.P.; GERE, J.M. **Mecânica dos sólidos**. Volume 2. Rio de Janeiro: LTC, 1984.
- TIMOSHENKO, S.P.; GERE, J.M. **Theory of elastic stability**. Second edition. New York: Dover Edition, 2009.

THE EUROPEAN UNION PER REGULATION. **EUROCODE 01**: Actions sur les structures – Part 1-4: Actions générales – actions du vent. ANFOR. 2005.

THE GERMAN INSTITUTE FOR STANDARDIZATION. **DIN 1055**: Actions on structures – Part 6: Design loads for building and loads in silo bins. ANFOR. 2005.

THOMSON, W.T. **Teoria da vibração com aplicações**. Tradução: Cássio Sigaud. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

TSO, W.K. Shear walls coupled by cross wall. **Journal of structural Engineering**, New York, Volume 109, St. 8, p. 2010 – 2016, 1983.

TSO, W.K.; BISWAS, J.K. Analysis of core wall structure subjected to applied torque. **Building Science**, Volume 8, p. 251 – 257, 1973a.

TSO, W.K.; BISWAS, J.K. General analysis of nonplanar coupled shear walls. **Journal of the structural Division**, New York, Volume 99, St. 3, p. 365 – 380, 1973b.

VAICAITIS, R.; SHINOZUKA, M.; TAKENO, M. Response analysis of tall buildings to wind loading. **Journal of the structural Division**, New York, Volume 101, St. 3, p. 585 – 600, 1975.

VAZ, L.E. **Método dos elementos finitos em análise de estruturas**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2011.

**Vibração lateral e torção**. Disponível em: <<https://www.newsteelconstruction.com/wp/ad-428-draft-guidance-lateral-and-torsional-vibration-of-half-through-truss-footbridges/>>.

Acessado em: 02/09/2019 às 07:21.

VICKERS, D.S. Dinámica de las acciones sísmicas sobre estructuras. **Cuarto congreso de ingeniería estructural**, Chile, Nº 5, p. 1 – 35, 1953.

VOLTERRA, E.; ZACHMANOGLU, E.C. **Dynamics of vibrations**. Ohio: Charles e Merrill, 1965.

VLASSOV, B.Z. **Pièces longues en voiles minces**. Deuxième edition. Traduite par G. Smirnoff. Paris: Éditions Eyrolles, 1962.

WAKABAYASHI, N.; YAGUI, T. Núcleos resistentes de edifícios elevados. **Conferência regional sul americana sobre edifícios altos**. Porto Alegre, p. 158 – 170, 1973.

WARBURTON, G.B. **The dynamical behavior of structures**. Second edition. New York: Pergamon Press Ltd, 1976.

WIGHT, J.K.; MACGERGOR, J.G. **Reinforced concrete: Mechanics & Design**. Fifth edition. New Jersey: Pearson Prentice Hall, 2009.

WYNHOVEN, J.H. et al. Discussions of Lateral-load analysis of asymmetric multistory structures. **Journal of structural engineering**, New York, Volume 96, St. 11, p. 2538 – 2544, 1970.

XAVIER, M.A.P. **Análise de efeitos de segunda ordem em estruturas de edifícios altos pela técnica do meio contínuo**. 1987. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1987.

XAVIER, M.A.P.; MELO, W.I.G. Análise de efeitos de segunda ordem em núcleo estrutural de seção aberta sem e com contraventamento. In: **Engenharia civil – temas, técnicas e aplicações**. Volume III. João Pessoa: Unipê, 2018. Capítulo 27, p. 432 – 442.

YAGUI, T.; SERRA, J.L.F.A. The effects of normal forces on the shear center of the sections of tal core-supported strucutres. **XXVII Jornadas sudamericanas de ingeniería estructural**, Tucumán, vol. 1, p. 277 – 287, 1995.

YANG, Y.B.; YAU, J.D.; WU, Y.S. **Vehicle-bridge interaction dynamics: with applications to high-speed railways**. New Jersey: World Scientific, 2004.

YIN, X.; FANG, Z.; CAI, C.S. Lateral vibration of high-pier bridges under moving vehicular loads. **Journal of bridge engineering**, New York, Volume 16, St. 3, p. 400 – 412, 2011.

YING, X. et al. Numerical explorations of the limit cycle flutter characteristics of a bridge deck. **Journal of wind engineering & industrial aerodynamics**, Volume 106, p. 30 – 38, 2017.

YOSHIDA, G.K. **Análise de estruturas de edifícios constituídas de núcleo de concreto armado e pilares ou pendurais de aço**. 1988. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1988.

ZALKA, K.A. **Global structural analysis of buildings**. New York: Taylor & Francis Group, 2000.

ZIENKIEWICZ, O.C.; CHEUNG, Y.K. Buttress dams on complex rox foundations. **Water power**, volume 16, 193, 1964.

ZIENKIEWICZ, O.C.; CHEUNG, Y.K. stresses in butress dams. **Water power**, volume 17, 69, 1965.

ZIENKIEWICZ, O.C.; CHEUNG, Y.K.; STAGG, K.G. Stresses in anisotropic media with particular reference to problems of rock mechanics. **J. Strain Analysis**, volume 1, 172 – 82, 1966.

## SOLUÇÃO DA EDO NO SISTEMA GENERALIZADO

Este apêndice é dedicado a solução da equação diferencial ordinária, ver eq. (2.121 d). E para tal, a fim de facilitar a notação oculta-se os superíndices em asteriscos, ficando a EDO expressa como:

$$-\nu''' + \lambda^2 \cdot \nu' = D_1 \cdot x^2 + D_2 \cdot x + D_3 \quad (A.1)$$

### A.1. Solução homogênea

A equação característica para a EDO expressa em eq. (A.1) é obtida mediante imposição de função exponencial como solução da equação diferencial ordinária homogênea. A solução homogênea e sua derivada terceira, ficam expressas por:

$$\nu_H(x) = e^{m \cdot x} \quad (A.2 a)$$

$$\nu_H'''(x) = m^3 \cdot e^{m \cdot x} \quad (A.2 b)$$

Ao aplicar as equações (A.2) na eq. (A.1), exprime-se a equação característica por:

$$-m^3 \cdot e^{m \cdot x} + \lambda^2 \cdot m \cdot e^{m \cdot x} = 0 \quad (A.3)$$

Conclui-se que a solução homogênea será a combinação linear das três raízes da eq. (A.3), ficando expressa por:

$$\nu_H(x) = A_1 \cdot e^{\lambda \cdot x} + A_2 \cdot e^{-\lambda \cdot x} + A_3 \quad (A.4)$$

## A.2. Solução particular

A solução particularizante da eq. (A.1) é composta por quatro termos, isto para que a solução geral (soma das soluções homogênea e particular) possua seis termos. A quantidade de termos da solução geral é verificada no grau parabólico da função em coeficientes D apresentado na equação (A.1), função essa que integrada por três vezes (grau da EDO) conduz a solução de grau quádruplo. Ressaltando que o coeficiente  $A_3$  apresentado na eq. (A.4) será englobado no coeficiente independente da solução particular, resultando por solução particularizante:

$$v_p(x) = A_3 \cdot x^3 + A_4 \cdot x^2 + A_5 \cdot x + A_6 \quad (A.5)$$

Aplicando a equação (A.5) na EDO expressa na eq. (A.1). Conclui-se como coeficientes ( $A_3$ ,  $A_4$  e  $A_5$ ), com exceção do termo independente  $A_6$ , os seguintes:

$$A_3 = \frac{D_1}{3 \cdot \lambda^2} \quad (A.6 a)$$

$$A_4 = \frac{D_2}{2 \cdot \lambda^2} \quad (A.6 b)$$

$$A_5 = \frac{\lambda^2 \cdot D_3 + 2 \cdot D_1}{\lambda^4} \quad (A.6 c)$$

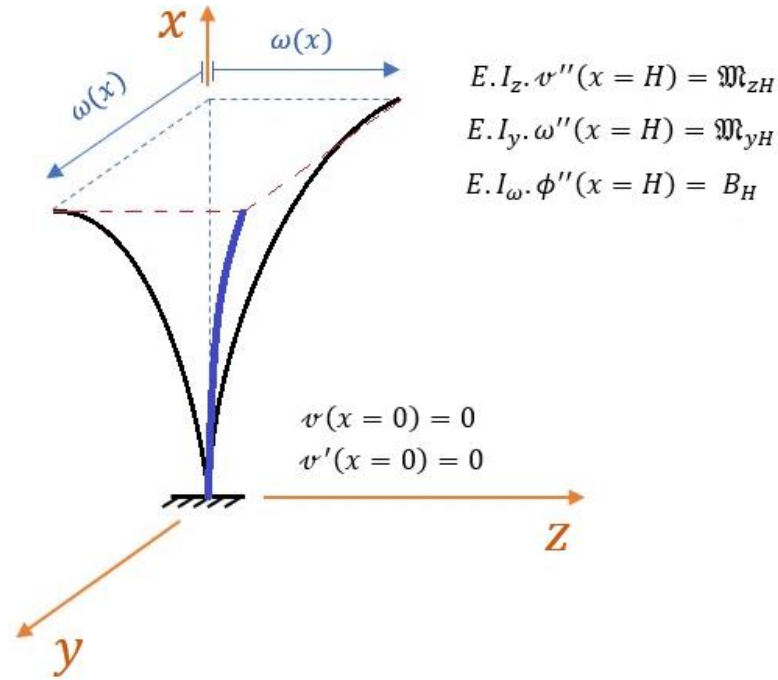
As demais constantes da solução da EDO serão obtidas com a aplicação das condições de contorno.

## A.3. Solução geral e condições de contorno

A solução geral  $v(x)$  será formada pela soma das soluções homogênea, ver eq. (A.4), e particular, conforme eq. (A.5). Sendo expressa por:

$$v(x) = A_1 \cdot e^{\lambda x} + A_2 \cdot e^{-\lambda x} + A_3 \cdot x^3 + A_4 \cdot x^2 + A_5 \cdot x + A_6 \quad (A.7)$$

Na figura A.1 é apresentada a configuração deformada do pilar de ponte e indicadas as correspondentes condições de contorno para o problema de flexo-torção.

**Figura A.1: Deformada do pilar de pontes e condições de contorno para a flexo-torção**

Fonte: O Autor (2019)

Ao aplicar as condições de contorno listadas na figura A.1 na solução  $v(x)$  apresentada na equação (A.7), determinam-se os coeficientes  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_6$  como:

$$A_2 = \frac{d_H \cdot \lambda^4 - 2 \cdot (\lambda^2 \cdot H - 1) \cdot D_1 - \lambda^2 \cdot (D_2 - D_3)}{\lambda^6 \cdot (e^{\lambda H} + e^{-\lambda H})} \quad (A.8 a)$$

$$A_1 = \frac{d_H \cdot \lambda^4 - 2 \cdot [\lambda^2 \cdot H - 1 + d_e] \cdot D_1 - \lambda^2 \cdot D_2 + \lambda^2 \cdot [1 - d_e]}{\lambda^6 \cdot (e^{\lambda H} + e^{-\lambda H})} \quad (A.8 b)$$

$$A_6 = -(A_1 + A_2) \quad (A.8 c)$$

$$\text{onde: } d_H = \begin{cases} \frac{\mathfrak{M}_{zH}}{E \cdot I_z}; \text{ para deslocamento } v \text{ no vetor } \{v\} \\ \frac{\mathfrak{M}_{yH}}{E \cdot I_y}; \text{ para deslocamento } \omega \text{ no vetor } \{v\}; \{v\} = \begin{Bmatrix} v \\ \omega \\ \phi \end{Bmatrix} \text{ vetor da eq. (2.114);} \\ \frac{B_H}{E \cdot I_\omega}; \text{ para rotação } \phi \text{ no vetor } \{v\} \end{cases}$$

onde:  $\mathfrak{M}_{zH}$ ,  $\mathfrak{M}_{yH}$  são os momentos fletores no topo do pilar e em torno das direções  $z$  e  $y$  (respectivamente);  $B_H$  é o bimomento no topo do pilar e  $d_e = \lambda^2 \cdot (e^{\lambda H} + e^{-\lambda H})$ .



## CÓDIGO COMPUTACIONAL: Análise dinâmica via elementos finitos de barra e condensação matricial

### B.1. Pilar com seção retangular linearmente variável (Concreto C – 90)

$$l_{bb} := \frac{100}{5} = 20 \quad m$$

$$\alpha E := 1 \quad (\text{Granito como agregado graúdo})$$

$$f_{ck} := 90 \quad MPa$$

$$E_{ci} := 21.5 \cdot 10^3 \cdot \alpha E \cdot \left( \frac{f_{ck}}{10} + 1.25 \right)^{\frac{1}{3}} \quad MPa$$

$$\alpha I := 1 \quad (\text{para concreto C90})$$

$$E_{cs} := \alpha I \cdot E_{ci}$$

$$E := E_{cs} \cdot 10^6 \quad v := 0.2$$

$$k_c := \frac{6}{5} \quad E = 4.67 \times 10^{10} \quad Pa$$

$$GG := \frac{E}{2 \cdot (1 + v)}$$

$$GG = 1.946 \times 10^{10} \quad Pa$$

$$\rho := 2500 \quad \frac{kg}{m^3} \quad \text{concreto armado}$$

$$\begin{aligned} by &:= 12.5 \quad m & hy &:= 5 \quad m \\ bz &:= 25 \quad m & hz &:= 10 \quad m & H_p &:= 100 \quad m \end{aligned}$$

$$by_1 := \frac{hy - by}{5 \cdot l_{bb}} \cdot 20 + by = 11 \quad m$$

$$bz_1 := \frac{hz - bz}{5 \cdot l_{bb}} \cdot 20 + bz = 22 \quad m$$

$$by_2 := \frac{hy - by}{5 \cdot l_{bb}} \cdot 40 + by = 9.5 \quad m$$

$$bz_2 := \frac{hz - bz}{5 \cdot l_{bb}} \cdot 40 + bz = 19 \quad m$$

$$by_3 := \frac{hy - by}{5 \cdot l_{bb}} \cdot 60 + by = 8 \quad m$$

$$bz_3 := \frac{hz - bz}{5 \cdot l_{bb}} \cdot 60 + bz = 16 \quad m$$

$$by_4 := \frac{hy - by}{5 \cdot l_{bb}} \cdot 80 + by = 6.5 \quad m$$

$$bz_4 := \frac{hz - bz}{5 \cdot l_{bb}} \cdot 80 + bz = 13 \quad m$$

$$A1 := \frac{bz1 - bz}{lbb} \quad A2 := \frac{bz2 - bz1}{lbb} \quad A3 := \frac{bz3 - bz2}{lbb} \quad A4 := \frac{bz4 - bz3}{lbb} \quad A5 := \frac{hz - bz4}{lbb}$$

$$B1 := bz \quad B2 := bz1 \quad B3 := bz2 \quad B4 := bz3 \quad B5 := bz4$$

$$C1 := \frac{by1 - by}{lbb} \quad C2 := \frac{by2 - by1}{lbb} \quad C3 := \frac{by3 - by2}{lbb} \quad C4 := \frac{by4 - by3}{lbb} \quad C5 := \frac{hy - by4}{lbb}$$

$$D1 := by \quad D2 := by1 \quad D3 := by2 \quad D4 := by3 \quad D5 := by4$$

$$A1 = -0.15 \quad A2 = -0.15 \quad A3 = -0.15 \quad A4 = -0.15 \quad A5 = -0.15$$

$$B1 = 25 \quad B2 = 22 \quad B3 = 19 \quad B4 = 16 \quad B5 = 13$$

$$C1 = -0.075 \quad C2 = -0.075 \quad C3 = -0.075 \quad C4 = -0.075 \quad C5 = -0.075$$

$$D1 = 12.5 \quad D2 = 11 \quad D3 = 9.5 \quad D4 = 8 \quad D5 = 6.5$$

$$AA := \begin{pmatrix} A1 \\ A2 \\ A3 \\ A4 \\ A5 \end{pmatrix} \quad BB := \begin{pmatrix} B1 \\ B2 \\ B3 \\ B4 \\ B5 \end{pmatrix} \quad CC := \begin{pmatrix} C1 \\ C2 \\ C3 \\ C4 \\ C5 \end{pmatrix} \quad DD := \begin{pmatrix} D1 \\ D2 \\ D3 \\ D4 \\ D5 \end{pmatrix}$$

$$A1 \cdot D1 - B1 \cdot C1 = 0$$

$$A2 \cdot D2 - B2 \cdot C2 = 0$$

$$A3 \cdot D3 - B3 \cdot C3 = 0$$

$$A4 \cdot D4 - B4 \cdot C4 = 0$$

$$A5 \cdot D5 - B5 \cdot C5 = 0$$

$\underline{E}$	
$\underline{lbb}$	
$\underline{AA}$	
$\underline{BB}$	
$\underline{CC}$	
$\underline{DD}$	
$\underline{\rho}$	
$\alpha_i$	
$\beta_i$	
$\alpha f$	
$\beta f$	
$\gamma_i$	$\text{for } i \in 0..4$
$\gamma f$	
$\sigma$	
$\tau_i$	
$\tau f$	
$\lambda$	
$t$	
$bi$	
$bf$	
$a$	
$ki$	
$kf$	
	$k1_i \leftarrow AA_i \cdot (CC_i)^3$ $k2_i \leftarrow (CC_i)^2 \cdot [3 \cdot (AA_i \cdot DD_i) + BB_i \cdot CC_i]$ $k3_i \leftarrow 3 \cdot CC_i \cdot DD_i \cdot (AA_i \cdot DD_i + BB_i \cdot CC_i)$ $k4_i \leftarrow (DD_i)^2 \cdot [AA_i \cdot DD_i + 3 \cdot (BB_i \cdot CC_i \cdot DD_i)]$ $k5_i \leftarrow BB_i \cdot (DD_i)^3$ $k6_i \leftarrow AA_i \cdot CC_i$ $k7_i \leftarrow AA_i \cdot DD_i + BB_i \cdot CC_i$ $k8_i \leftarrow BB_i \cdot DD_i$ $\alpha_i \leftarrow \rho \cdot \left( \frac{234 \cdot lbb^2 \cdot k8_i + 54 \cdot lbb \cdot k7_i + 19 \cdot k6_i}{630 \cdot lbb^2} \right) + \rho \cdot \left( \frac{84 \cdot lbb^4 \cdot k5_i + 42 \cdot lbb^3 \cdot k4_i + 24 \cdot lbb^2 \cdot k3_i + 15 \cdot lbb \cdot k2_i + 10 \cdot k1_i}{70 \cdot lbb^6} \right)$ $\beta_i \leftarrow \rho \cdot \left( \frac{24 \cdot lbb^2 \cdot k8_i + 9 \cdot lbb \cdot k7_i + 4 \cdot k6_i}{2520} \right) + \rho \cdot \left( \frac{588 \cdot lbb^4 \cdot k5_i + 378 \cdot lbb^3 \cdot k4_i + 300 \cdot lbb^2 \cdot k3_i + 249 \cdot lbb \cdot k2_i + 212 \cdot k1_i}{1260 \cdot lbb^4} \right)$ $\alpha f_i \leftarrow \rho \cdot \left( \frac{234 \cdot lbb^2 \cdot k8_i + 180 \cdot lbb \cdot k7_i + 145 \cdot k6_i}{630 \cdot lbb^2} \right) + \rho \cdot \left( \frac{84 \cdot lbb^4 \cdot k5_i + 42 \cdot lbb^3 \cdot k4_i + 24 \cdot lbb^2 \cdot k3_i + 15 \cdot lbb \cdot k2_i + 10 \cdot k1_i}{70 \cdot lbb^6} \right)$ $\beta f_i \leftarrow \rho \cdot \left( \frac{24 \cdot lbb^2 \cdot k8_i + 15 \cdot lbb \cdot k7_i + 10 \cdot k6_i}{2520} \right) + \rho \cdot \left( \frac{112 \cdot lbb^4 \cdot k5_i + 84 \cdot lbb^3 \cdot k4_i + 72 \cdot lbb^2 \cdot k3_i + 65 \cdot lbb \cdot k2_i + 60 \cdot k1_i}{840 \cdot lbb^4} \right)$ $\gamma_i \leftarrow \rho \cdot \left( \frac{132 \cdot lbb^2 \cdot k8_i + 42 \cdot lbb \cdot k7_i + 17 \cdot k6_i}{2520 \cdot lbb} \right) + \rho \cdot \left( \frac{84 \cdot lbb^4 \cdot k5_i + 63 \cdot lbb^3 \cdot k4_i + 45 \cdot lbb^2 \cdot k3_i + 33 \cdot lbb \cdot k2_i + 25 \cdot k1_i}{210 \cdot lbb^5} \right)$ $\gamma f_i \leftarrow \rho \cdot \left( \frac{132 \cdot lbb^2 \cdot k8_i + 90 \cdot lbb \cdot k7_i + 65 \cdot k6_i}{2520 \cdot lbb} \right) - \rho \cdot \left[ \frac{-(14 \cdot lbb^4 \cdot k5_i) + 4 \cdot lbb^2 \cdot k3_i + 5 \cdot lbb \cdot k2_i + 5 \cdot k1_i}{140 \cdot lbb^5} \right]$ $\sigma_i \leftarrow \rho \cdot \left( \frac{162 \cdot lbb^2 \cdot k8_i + 81 \cdot lbb \cdot k7_i + 46 \cdot k6_i}{1260 \cdot lbb^2} \right) - \rho \cdot \left( \frac{84 \cdot lbb^4 \cdot k5_i + 42 \cdot lbb^3 \cdot k4_i + 24 \cdot lbb^2 \cdot k3_i + 15 \cdot lbb \cdot k2_i + 10 \cdot k1_i}{70 \cdot lbb^6} \right)$ $\tau_i \leftarrow \rho \cdot \left( \frac{78 \cdot lbb^2 \cdot k8_i + 36 \cdot lbb \cdot k7_i + 19 \cdot k6_i}{2520 \cdot lbb} \right) + \rho \cdot \left[ \frac{-(14 \cdot lbb^4 \cdot k5_i) + 4 \cdot lbb^2 \cdot k3_i + 5 \cdot lbb \cdot k2_i + 5 \cdot k1_i}{210 \cdot lbb^5} \right]$

$$\begin{aligned}
\tau f_i &\leftarrow \rho \cdot \left( \frac{78 \cdot lbb^2 \cdot k8_i + 42 \cdot lbb \cdot k7_i + 25 \cdot k6_i}{2520 \cdot lbb} \right) - \rho \cdot \left[ \frac{84 \cdot lbb^4 \cdot k5_i + (63 \cdot lbb^3 \cdot k4_i + 45 \cdot lbb^2 \cdot k3_i + 33 \cdot lbb \cdot k2_i + 25 \cdot k1_i)}{140 \cdot lbb^5} \right] \\
\lambda_i &\leftarrow \left[ \rho \cdot \left( \frac{18 \cdot lbb^2 \cdot k8_i + 9 \cdot lbb \cdot k7_i + 5 \cdot k6_i}{2520} \right) + \rho \cdot \left( \frac{56 \cdot lbb^4 \cdot k5_i + 49 \cdot lbb^3 \cdot k4_i + 46 \cdot lbb^2 \cdot k3_i + 43 \cdot lbb \cdot k2_i + 40 \cdot k1_i}{420 \cdot lbb^4} \right) \right] \\
t_i &\leftarrow E \cdot 3 \cdot \left( \frac{140 \cdot lbb^4 \cdot k5_i + 70 \cdot lbb^3 \cdot k4_i + 56 \cdot lbb^2 \cdot k3_i + 49 \cdot lbb \cdot k2_i + 44 \cdot k1_i}{35 \cdot lbb^8} \right) \\
bi_i &\leftarrow E \cdot \left( \frac{210 \cdot lbb^4 \cdot k5_i + 70 \cdot lbb^3 \cdot k4_i + 49 \cdot lbb^2 \cdot k3_i + 42 \cdot lbb \cdot k2_i + 38 \cdot k1_i}{35 \cdot lbb^7} \right) \\
bf_i &\leftarrow E \cdot \left( \frac{210 \cdot lbb^4 \cdot k5_i + 140 \cdot lbb^3 \cdot k4_i + 119 \cdot lbb^2 \cdot k3_i + 105 \cdot lbb \cdot k2_i + 94 \cdot k1_i}{35 \cdot lbb^7} \right) \\
a_i &\leftarrow E \cdot \left( \frac{210 \cdot lbb^4 \cdot k5_i + 105 \cdot lbb^3 \cdot k4_i + 91 \cdot lbb^2 \cdot k3_i + 84 \cdot lbb \cdot k2_i + 78 \cdot k1_i}{105 \cdot lbb^6} \right) \\
ki_i &\leftarrow E \cdot \left( \frac{420 \cdot lbb^4 \cdot k5_i + 105 \cdot lbb^3 \cdot k4_i + 56 \cdot lbb^2 \cdot k3_i + 42 \cdot lbb \cdot k2_i + 36 \cdot k1_i}{105 \cdot lbb^6} \right) \\
kf_i &\leftarrow E \cdot \left( \frac{420 \cdot lbb^4 \cdot k5_i + 315 \cdot lbb^3 \cdot k4_i + 266 \cdot lbb^2 \cdot k3_i + 231 \cdot lbb \cdot k2_i + 204 \cdot k1_i}{105 \cdot lbb^6} \right)
\end{aligned}$$

E  
 lbb  
 AA  
 BB  
 CC  
 DD  
 ρ  
 αi  
 βi  
 αf  
 βf  
 γi  
 γf  
 σ  
 τi  
 τf  
 λ  
 t  
 bi  
 bf  
 a  
 ki  
 kf

$$\begin{aligned}
K_{\theta\theta} &:= \begin{pmatrix} k_{i0} + t_1 & -b_{i1} & 0 & 0 & 0 \\ -b_{i1} & k_{i1} + t_2 & -b_{i2} & 0 & 0 \\ 0 & -b_{i2} & k_{i2} + t_3 & -b_{i3} & 0 \\ 0 & 0 & -b_{i3} & k_{i3} + t_4 & -b_{i4} \\ 0 & 0 & 0 & -b_{i4} & k_{i4} \end{pmatrix} & K_{\theta\delta} &:= \begin{pmatrix} a_0 - t_1 & -b_{f1} & 0 & 0 & 0 \\ b_{i1} & a_1 - t_2 & -b_{f2} & 0 & 0 \\ 0 & b_{i2} & a_2 - t_3 & -b_{f3} & 0 \\ 0 & 0 & b_{i3} & a_3 - t_4 & -b_{f4} \\ 0 & 0 & 0 & b_{i4} & a_4 \end{pmatrix} \\
K_{\delta\theta} &:= \begin{pmatrix} a_0 - t_1 & b_{i1} & 0 & 0 & 0 \\ -b_{f1} & a_1 - t_2 & b_{i2} & 0 & 0 \\ 0 & -b_{f2} & a_2 - t_3 & b_{i3} & 0 \\ 0 & 0 & -b_{f3} & a_3 - t_4 & b_{i4} \\ 0 & 0 & 0 & -b_{f4} & a_4 \end{pmatrix} & K_{\delta\delta} &:= \begin{pmatrix} k_{f0} + t_1 & b_{f1} & 0 & 0 & 0 \\ b_{f1} & k_{f1} + t_2 & b_{f2} & 0 & 0 \\ 0 & b_{f2} & k_{f2} + t_3 & b_{f3} & 0 \\ 0 & 0 & b_{f3} & k_{f3} + t_4 & b_{f4} \\ 0 & 0 & 0 & b_{f4} & k_{f4} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

A matriz de rigidez modificada de 10x10 para 5x5 mediante condensação matricial é:

$$K_e := K_{\delta\delta} - [K_{\delta\theta} \cdot (K_{\theta\theta}^{-1}) \cdot K_{\theta\delta}]$$

$$K_e = \begin{pmatrix} 1.701 \times 10^{13} & 7.634 \times 10^{11} & 3.178 \times 10^{10} & 1.196 \times 10^9 & 3.891 \times 10^7 \\ 7.634 \times 10^{11} & 1.019 \times 10^{13} & 4.241 \times 10^{11} & 1.596 \times 10^{10} & 5.193 \times 10^8 \\ 3.178 \times 10^{10} & 4.241 \times 10^{11} & 5.666 \times 10^{12} & 2.132 \times 10^{11} & 6.939 \times 10^9 \\ 1.196 \times 10^9 & 1.596 \times 10^{10} & 2.132 \times 10^{11} & 2.848 \times 10^{12} & 9.27 \times 10^{10} \\ 3.891 \times 10^7 & 5.193 \times 10^8 & 6.939 \times 10^9 & 9.27 \times 10^{10} & 1.238 \times 10^{12} \end{pmatrix} \frac{N}{m}$$

A matriz de massa:

$$M := \begin{pmatrix} \beta f_0 + \alpha f_1 & \gamma f_1 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma f_1 & \beta f_1 + \alpha f_2 & \gamma f_2 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma f_2 & \beta f_2 + \alpha f_3 & \gamma f_3 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma f_3 & \beta f_3 + \alpha f_4 & \gamma f_4 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma f_4 & \beta f_4 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1.955 \times 10^7 & 9.995 \times 10^5 & 0 & 0 & 0 \\ 9.995 \times 10^5 & 1.227 \times 10^7 & 6.761 \times 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 6.761 \times 10^5 & 7.281 \times 10^6 & 4.374 \times 10^5 & 0 \\ 0 & 0 & 4.374 \times 10^5 & 4.03 \times 10^6 & 2.658 \times 10^5 \\ 0 & 0 & 0 & 2.658 \times 10^5 & 1.984 \times 10^6 \end{pmatrix} \text{ kg}$$



## CÓDIGO COMPUTACIONAL: Estabilidade Elástica via Diferenças Finitas

### C.1. Seção maciça constante na altura do pilar

#### a) Seção retangular

##### 1ª ETAPA: DADOS DE ENTRADA

$$q1 := 0 \quad \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad Q := 290 \quad \text{kN}$$

$$P := 0 \quad \text{kN}$$

$$q2 := 0 \quad \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad p := 112.3318945 \cdot 10^4 \quad \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$n := 100 \quad \text{quantidade de pontos na discretização}$$

$$HH := 100 \quad \text{m}$$

$$E := 210 \cdot 10^6 = 2.1 \times 10^8 \quad \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

$$h := \frac{HH}{n}$$

$$I := \frac{16 \cdot (8^3)}{12} = 682.667 \quad \text{m}^4$$

$$h = 1 \quad \text{m}$$

$$\delta RM := \frac{Q \cdot HH^3}{3 \cdot E \cdot I} = 6.74293 \times 10^{-4} \quad \text{m} \quad \text{válido para } P = 0, \text{ apenas atuação de } Q$$

##### 2ª ETAPA: Rotina de Diferenças Finitas

criando a matriz M nula de ordem (n+3), sendo uma equação com índice "1,j"; a segunda de índice "2,j"; (n) equações e a ultima de índice "n+3,k". TOTALIZANDO n+3 equações

$$M := \text{identity}(n+3) - \text{identity}(n+3)$$

Isso será realizado via subtração da matriz identidade por ela mesma

Zerar o vetor q

Atribuir valor inicial ao deslocamentos v.

$$q := \begin{cases} \text{for } kk \in 0..(n+3) \\ q_{kk} \leftarrow 0 \\ q \end{cases}$$

$$v := \begin{cases} \text{for } kk \in 0..(n+3) \\ v_{kk} \leftarrow 1 \\ v \end{cases}$$

Coefficientes inalterados com a discretização:

$$A1 := \frac{-q2}{2 \cdot HH} \quad B1 := q1$$

$$CC := \left( \frac{q2}{2} - q1 \right) \cdot HH - Q$$

$$T1 := \frac{E \cdot I}{2 \cdot h^3}$$

Equações Dif Finitas abaixo do engaste:

$$M_{0,2} := 1 \quad q_0 := 0 \quad (1^{\text{a}} \text{ condição de contorno})$$

$$M_{1,0} := 1 \quad M_{1,1} := -8 \quad M_{1,3} := 8 \quad M_{1,4} := -1 \quad q_1 := 0 \quad (2^{\text{a}} \text{ cond. de contorno})$$

Equações Dif Finitas do engaste ( $j = 2$ ) até um ponto antes do topo ( $j = n+1$ ):

$$j := 2 \dots n+1$$

$$x_j := (j-2) \cdot h$$

$$T2_j := \frac{[p \cdot (HH - x_j) + P]}{12 \cdot h}$$

$$M_{j,j-2} := -T1 + T2_j \quad M_{j,j-1} := 2 \cdot T1 - 8 \cdot T2_j \quad M_{j,j+1} := -2 \cdot T1 + 8 \cdot T2_j$$

$$M_{j,j+2} := T1 - T2_j \quad q_j := A1 \cdot (x_j)^2 + B1 \cdot x_j + CC$$

Equações Dif Finitas no topo do pilar ( $j = n+2$ ):

$$x_{n+2} := HH$$

$$T2_{n+2} := \frac{[p \cdot (HH - x_{n+2}) + P]}{12 \cdot h}$$

$$M_{n+2,n-1} := T1 - T2_{n+2} \quad M_{n+2,n} := -6 \cdot T1 + 6 \cdot T2_{n+2} \quad M_{n+2,n+1} := 12 \cdot T1 - 18 \cdot T2_{n+2}$$

$$M_{n+2,n+2} := -10 \cdot T1 + 10 \cdot T2_{n+2} \quad M_{n+2,n+3} := 3 \cdot T1 + 3 \cdot T2_{n+2}$$

$$q_{n+2} := A1 \cdot (x_{n+2})^2 + B1 \cdot x_{n+2} + CC$$

3ª Condição de contorno: momento nulo no topo via operador de 2ª derivada via Dif finitas assimétrica à direita

$$M_{n+3,n-1} := -1 \quad M_{n+3,n} := 4 \quad M_{n+3,n+1} := 6 \quad M_{n+3,n+2} := -20 \quad M_{n+3,n+3} := 11$$

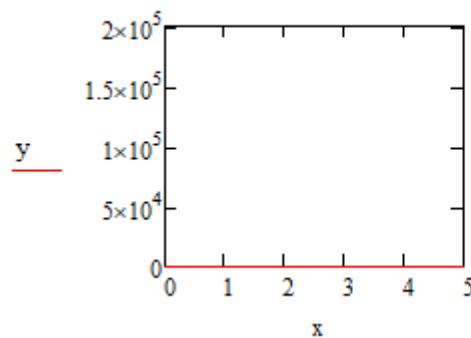
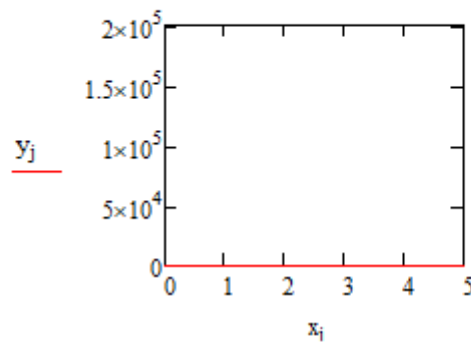
$$q_{n+3} := 0$$



Rotina de solução de sistema de equações algébricas no Mathcad:

$$y := \text{Isolve}(M, q)$$

	0
90	$1.5331382392 \cdot 10^5$
91	$1.5586940474 \cdot 10^5$
92	$1.5842620032 \cdot 10^5$
93	$1.6098400029 \cdot 10^5$
94	$1.6354261426 \cdot 10^5$
95	$1.6610187179 \cdot 10^5$
y = 96	$1.686616225 \cdot 10^5$
97	$1.7122173601 \cdot 10^5$
98	$1.7378210198 \cdot 10^5$
99	$1.7634263014 \cdot 10^5$
100	$1.7890325025 \cdot 10^5$
101	$1.8146391217 \cdot 10^5$
102	$1.8402458579 \cdot 10^5$
103	...



## b) Seção circular

Nesta modelagem; a única mudança, em relação ao item anterior, é a fórmula de cálculo do momento de inércia (na 1ª etapa), ficando:

### 1ª ETAPA: DADOS DE ENTRADA

$$q1 := 2 \quad \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad Q := 290 \quad \text{kN}$$

$$q2 := 3 \quad \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad p := 33.08447395 \cdot 10^4 \quad \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$E := 210 \cdot 10^6 = 2.1 \times 10^8 \quad \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

$$I := \frac{\pi \cdot D^4}{64} = 201.062 \quad \text{m}^4$$

$$P := 0 \quad \text{kN}$$

$$D := 8 \quad \text{m}$$

$$n := 100$$

quantidade de pontos na discretização

$$HH := 100 \quad \text{m}$$

$$h := \frac{HH}{n}$$

$$h = 1 \quad \text{m}$$

via pag: 103 do livro "Theory of Elastic Stability", sobre a carga crítica via Bessel. O Autor é Timoshenko e Gere (2009).

$$P_{cr} := \frac{7.837}{HH} \cdot \frac{E \cdot I}{HH^2} = 330901.692 \quad \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

foi dividido pela altura para sair na unidade correta, e computar a carga crítica pelo incremento na carga distribuída p

## C.2. Seção vazada invariável na altura do pilar

### a) Tubo retangular

#### 1ª ETAPA: DADOS DE ENTRADA

$$\begin{aligned}
 q1 &:= 0 \quad \frac{\text{kN}}{\text{m}} & Q &:= 290 \quad \text{kN} & P &:= 0 \quad \text{kN} & \eta &:= 5 \\
 q2 &:= 0 \quad \frac{\text{kN}}{\text{m}} & p &:= 11.17927018 \cdot 10^5 \quad \frac{\text{kN}}{\text{m}} & n &:= 100 & \text{quantidade de pontos na discretização} \\
 E &:= 210 \cdot 10^6 = 2.1 \times 10^8 \quad \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} & HH &:= 100 \quad \text{m} & \eta 3z &:= \frac{1}{\eta} = 0.2 \\
 I_b &:= \frac{16 \cdot (8^3)}{12} = 682.667 \quad \text{m}^4 & h &:= \frac{HH}{n} & \eta 3y &:= \frac{2}{\eta} = 0.4 \\
 I &:= I_b \cdot \left[ 1 - \left[ (1 - 2 \cdot \eta 3z) \cdot (1 - 2 \cdot \eta 3y)^3 \right] \right] = 679.39 \quad \text{m}^4 & \text{via pag: 103 carga crítica via Bessel} \\
 P_{cr} &:= \frac{7.837}{HH} \cdot \frac{E \cdot I}{HH^2} = 1118119.461 \quad \frac{\text{kN}}{\text{m}}
 \end{aligned}$$

Diferença entre os métodos:

$$\Delta := \frac{P_{cr} - p}{P_{cr}} \cdot 100 = 0.017 \quad \% \text{ a favor da segurança}$$

#### 2ª ETAPA: Rotina de Diferenças Finitas

criando a matriz M nula de ordem (n+3), sendo uma equação com índice "1,j"; a segunda de índice "2,j"; (n) equações e a ultima de índice "n+3,k". TOTALIZANDO n+3 equações

$M := \text{identity}(n+3) - \text{identity}(n+3)$  Isso será realizado via subtração da matriz identidade por ela mesma

Zerar o vetor q

Atribuir valor inicial ao deslocamentos v.

$$\begin{aligned}
 q &:= \left| \begin{array}{l} \text{for } kk \in 0..(n+3) \\ q_{kk} \leftarrow 0 \\ q \end{array} \right. & v &:= \left| \begin{array}{l} \text{for } kk \in 0..(n+3) \\ v_{kk} \leftarrow 1 \\ v \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Coeficientes inalterados com a discretização:

$$\begin{aligned}
 A1 &:= \frac{-q^2}{2 \cdot HH} & B1 &:= q1 \\
 CC &:= \left( \frac{q^2}{2} - q1 \right) \cdot HH - Q & T1 &:= \frac{E \cdot I}{2 \cdot h^3}
 \end{aligned}$$

Equações Dif Finitas abaixo do engaste:

$$M_{0,2} := 1 \quad q_0 := 0 \quad (1^\text{a} \text{ condição de contorno})$$

$$M_{1,0} := 1 \quad M_{1,1} := -8 \quad M_{1,3} := 8 \quad M_{1,4} := -1 \quad q_1 := 0 \quad (2^\text{a} \text{ cond. de contorno})$$

Equações Dif Finitas do engaste ( $j = 2$ ) até um ponto antes do topo ( $j = n+1$ ):

$$j := 2..n + 1$$

$$x_j := (j - 2) \cdot h$$

$$T2_j := \frac{[p \cdot (HH - x_j) + P]}{12 \cdot h}$$

$$M_{j,j-2} := -T1 + T2_j \quad M_{j,j-1} := 2 \cdot T1 - 8 \cdot T2_j \quad M_{j,j+1} := -2 \cdot T1 + 8 \cdot T2_j$$

$$M_{j,j+2} := T1 - T2_j \quad q_j := A1 \cdot (x_j)^2 + B1 \cdot x_j + CC$$

Equações Dif Finitas no topo do pilar ( $j = n+2$ ):

$$x_{n+2} := HH$$

$$T2_{n+2} := \frac{[p \cdot (HH - x_{n+2}) + P]}{12 \cdot h}$$

$$M_{n+2,n-1} := T1 - T2_{n+2} \quad M_{n+2,n} := -6 \cdot T1 + 6 \cdot T2_{n+2} \quad M_{n+2,n+1} := 12 \cdot T1 - 18 \cdot T2_{n+2}$$

$$M_{n+2,n+2} := -10 \cdot T1 + 10 \cdot T2_{n+2} \quad M_{n+2,n+3} := 3 \cdot T1 + 3 \cdot T2_{n+2}$$

$$q_{n+2} := A1 \cdot (x_{n+2})^2 + B1 \cdot x_{n+2} + CC$$

3ª Condição de contorno: momento nulo no topo via operador de 2ª derivada via Dif finitas assimétrica à direita

$$M_{n+3,n-1} := -1 \quad M_{n+3,n} := 4 \quad M_{n+3,n+1} := 6 \quad M_{n+3,n+2} := -20 \quad M_{n+3,n+3} := 11$$

$$q_{n+3} := 0$$

Rotina de solução de sistema de equações algébricas no Mathcad:

$$y := \text{Isolve}(M, q)$$

	0
95	$1.045726811998 \cdot 10^7$
96	$1.061842223095 \cdot 10^7$
97	$1.077959918252 \cdot 10^7$
98	$1.09407920285 \cdot 10^7$
99	$1.110199508509 \cdot 10^7$
100	$1.126320393132 \cdot 10^7$
101	$1.142441540921 \cdot 10^7$
102	$1.158562762397 \cdot 10^7$
103	...



**2ª ETAPA: Rotina de Diferenças Finitas**

criando a matriz M nula de ordem (n+3), sendo uma equação com índice "1,j"; a segunda de índice "2,j"; (n) equações e a última de índice "n+3,k". TOTALIZANDO n+3 equações

$M := \text{identity}(n+3) - \text{identity}(n+3)$  Isso será realizado via subtração da matriz identidade por ela mesma

Zerar o vetor q

Atribuir valor inicial ao deslocamentos v:

$$q := \begin{cases} \text{for } kk \in 0..(n+3) \\ q_{kk} \leftarrow 0 \\ q \end{cases} \quad v := \begin{cases} \text{for } kk \in 0..(n+3) \\ v_{kk} \leftarrow 1 \\ v \end{cases}$$

Coeficientes inalterados com a discretização:  $A1 := \frac{-q^2}{2 \cdot HH}$   $B1 := q1$

$$CC := \left( \frac{q^2}{2} - q1 \right) \cdot HH - Q$$

Equações Dif. Finitas para as duas primeiras condições de contorno:

$$M_{0,2} := 1 \quad q_0 := 0 \quad (1^\text{a} \text{ condição de contorno})$$

$$M_{1,0} := 1 \quad M_{1,1} := -8 \quad M_{1,3} := 8 \quad M_{1,4} := -1 \quad q_1 := 0 \quad (2^\text{a} \text{ cond. de contorno})$$

Equações Dif Finitas Centrais:

$$\begin{aligned} j &:= 2..n+1 & k &:= 0..n+3 & \text{imputar inércia e peso - próprio em todos os} \\ x_j &:= (j-2) \cdot h & x_k &:= (k-2) \cdot h & \text{pontos, mesmo que estejam fora do pilar} \end{aligned}$$

$$I_{z_k} := \frac{1}{12} \cdot \left[ \frac{(hz - bz)}{HH} \cdot x_k + bz \right] \cdot \left[ \frac{(hy - by)}{HH} \cdot x_k + by \right]^3$$

$$p_k := \left[ \frac{(hz - bz)}{HH} \cdot x_k + bz \right] \cdot \left[ \frac{(hy - by)}{HH} \cdot x_k + by \right] \cdot \gamma_{\text{concreto}}$$

Aplicação do engaste ( $j = 2$ ) até um ponto antes do topo ( $j = n+1$ ):

$$T1a_j := \frac{-E \cdot I_{z_{j-2}}}{144 \cdot h^3} + \frac{8 \cdot E \cdot I_{z_{j-1}}}{144 \cdot h^3} - \frac{E \cdot I_{z_j}}{2 \cdot h^3} - \frac{8 \cdot E \cdot I_{z_{j+1}}}{144 \cdot h^3} + \frac{E \cdot I_{z_{j+2}}}{144 \cdot h^3}$$

$$T1b_j := \frac{16 \cdot E \cdot I_{z_{j-2}}}{144 \cdot h^3} - \frac{128 \cdot E \cdot I_{z_{j-1}}}{144 \cdot h^3} + \frac{2 \cdot E \cdot I_{z_j}}{2 \cdot h^3} + \frac{128 \cdot E \cdot I_{z_{j+1}}}{144 \cdot h^3} - \frac{16 \cdot E \cdot I_{z_{j+2}}}{144 \cdot h^3}$$

$$T1c_j := \frac{-30 \cdot E \cdot I_{z_{j-2}}}{144 \cdot h^3} + \frac{240 \cdot E \cdot I_{z_{j-1}}}{144 \cdot h^3} - \frac{240 \cdot E \cdot I_{z_{j+1}}}{144 \cdot h^3} + \frac{30 \cdot E \cdot I_{z_{j+2}}}{144 \cdot h^3}$$

$$T1d_j := \frac{16 \cdot E \cdot I_{z_{j-2}}}{144 \cdot h^3} - \frac{128 \cdot E \cdot I_{z_{j-1}}}{144 \cdot h^3} - \frac{2 \cdot E \cdot I_{z_j}}{2 \cdot h^3} + \frac{128 \cdot E \cdot I_{z_{j+1}}}{144 \cdot h^3} - \frac{16 \cdot E \cdot I_{z_{j+2}}}{144 \cdot h^3}$$

$$T1e_j := \frac{-E \cdot I_{z_{j-2}}}{144 \cdot h^3} + \frac{8 \cdot E \cdot I_{z_{j-1}}}{144 \cdot h^3} + \frac{E \cdot I_{z_j}}{2 \cdot h^3} - \frac{8 \cdot E \cdot I_{z_{j+1}}}{144 \cdot h^3} + \frac{E \cdot I_{z_{j+2}}}{144 \cdot h^3}$$

$$T2_j := \frac{[p_j \cdot (HH - x_j) + P]}{12 \cdot h} \quad pa_j := \frac{(HH - x_j)}{12 \cdot h} \cdot (p_{j-2} - 8 \cdot p_{j-1} + 8 \cdot p_{j+1} - p_{j+2})$$

$$M_{j,j-2} := T1a_j + T2_j \quad M_{j,j-1} := T1b_j - 8 \cdot T2_j \quad M_{j,j} := T1c_j + pa_j$$

$$M_{j,j+1} := T1d_j + 8 \cdot T2_j \quad M_{j,j+2} := T1e_j - T2_j \quad q_j := A1 \cdot (x_j)^2 + B1 \cdot x_j + CC$$

Equações Dif Finitas no topo do pilar ( $j = n+2$ ):

$$x_{n+2} := HH$$

$$T1aa := \frac{E \cdot I_{z_{n-1}}}{144 \cdot h^3} - \frac{6 \cdot E \cdot I_{z_n}}{144 \cdot h^3} + \frac{18 \cdot E \cdot I_{z_{n+1}}}{144 \cdot h^3} + \frac{64 \cdot E \cdot I_{z_{n+2}}}{144 \cdot h^3} - \frac{3 \cdot E \cdot I_{z_{n+3}}}{144 \cdot h^3}$$

$$T1bb := \frac{-4 \cdot E \cdot I_{z_{n-1}}}{144 \cdot h^3} + \frac{24 \cdot E \cdot I_{z_n}}{144 \cdot h^3} - \frac{72 \cdot E \cdot I_{z_{n+1}}}{144 \cdot h^3} - \frac{392 \cdot E \cdot I_{z_{n+2}}}{144 \cdot h^3} + \frac{12 \cdot E \cdot I_{z_{n+3}}}{144 \cdot h^3}$$

$$T1cc := \frac{-6 \cdot E \cdot I_{z_{n-1}}}{144 \cdot h^3} + \frac{36 \cdot E \cdot I_{z_n}}{144 \cdot h^3} - \frac{108 \cdot E \cdot I_{z_{n+1}}}{144 \cdot h^3} + \frac{924 \cdot E \cdot I_{z_{n+2}}}{144 \cdot h^3} + \frac{18 \cdot E \cdot I_{z_{n+3}}}{144 \cdot h^3}$$

$$T1dd := \frac{20 \cdot E \cdot I_{z_{n-1}}}{144 \cdot h^3} - \frac{120 \cdot E \cdot I_{z_n}}{144 \cdot h^3} + \frac{360 \cdot E \cdot I_{z_{n+1}}}{144 \cdot h^3} - \frac{920 \cdot E \cdot I_{z_{n+2}}}{144 \cdot h^3} - \frac{60 \cdot E \cdot I_{z_{n+3}}}{144 \cdot h^3}$$

$$T1ee := \frac{-11 \cdot E \cdot I_{z_{n-1}}}{144 \cdot h^3} + \frac{66 \cdot E \cdot I_{z_n}}{144 \cdot h^3} - \frac{198 \cdot E \cdot I_{z_{n+1}}}{144 \cdot h^3} + \frac{326 \cdot E \cdot I_{z_{n+2}}}{144 \cdot h^3} + \frac{33 \cdot E \cdot I_{z_{n+3}}}{144 \cdot h^3}$$

$$T2_{n+2} := \frac{[p_{n+2} \cdot (HH - x_{n+2}) + P]}{12 \cdot h}$$

$$pa_{n+2} := \frac{(HH - x_{n+2})}{12 \cdot h} \cdot (-p_{n-1} + 6 \cdot p_n - 18 \cdot p_{n+1} + 10 \cdot p_{n+2} + 3 \cdot p_{n+3})$$

$$M_{n+2,n-1} := T1aa - T2_{n+2} \quad M_{n+2,n} := T1bb + 6 \cdot T2_{n+2} \quad M_{n+2,n+1} := T1cc - 18 \cdot T2_{n+2}$$

$$M_{n+2,n+2} := T1dd + pa_{n+2} + 10 \cdot T2_{n+2} \quad M_{n+2,n+3} := T1ee + 3 \cdot T2_{n+2}$$

$$q_{n+2} := A1 \cdot (x_{n+2})^2 + B1 \cdot x_{n+2} + CC$$

E por fim, a ferramenta de “Solver” do Mathcad:  $v := \text{lsolve}(M, q)$ , conforme item anterior.

## CÓDIGO COMPUTACIONAL: Flexo – Torção

### D.1. Rotação e bimomento na análise estática do pilar em núcleo estrutural

#### a) Via Teoria da Flexo – Torção

Centroíde

Verificação mediante  
SMITH / TARANATH (1972)

$$b_y := 3.45 \text{ m}$$

$$a_{1y} := 1 \text{ m}$$

$$t := 0.15 \text{ m}$$

$$b_z := 3.45 \text{ m}$$

$$a_{2y} := 1 \text{ m}$$

posição Xcg

$$\frac{0 \cdot (b_y \cdot t) + \frac{b_z}{2} \cdot (b_z \cdot t) + \frac{b_z}{2} \cdot (b_z \cdot t) + b_z \cdot (a_{1y} \cdot t) + b_z \cdot (a_{2y} \cdot t)}{(b_y \cdot t) + (b_z \cdot t) + (b_z \cdot t) + (a_{1y} \cdot t) + (a_{2y} \cdot t)}$$

$$\text{simplificando, tem-se: } \frac{b_z^2 \cdot t + a_{1y} \cdot b_z \cdot t + a_{2y} \cdot b_z \cdot t}{a_{1y} \cdot t + a_{2y} \cdot t + b_y \cdot t + 2 \cdot b_z \cdot t} \quad \text{e: } \frac{b_z \cdot (a_{1y} + a_{2y} + b_z)}{a_{1y} + a_{2y} + b_y + 2 \cdot b_z}$$

$$X_{cg} := \frac{b_z \cdot (a_{1y} + a_{2y} + b_z)}{a_{1y} + a_{2y} + b_y + 2 \cdot b_z}$$

$$X_{cg} = 1.5224696 \text{ m}$$

posição Ycg

$$Y_{cg} := \frac{2 \cdot a_{1y} \cdot b_y - a_{1y}^2 + a_{2y}^2 + b_y^2 + 2 \cdot b_z \cdot b_y}{2 \cdot (a_{1y} + a_{2y} + b_y + 2 \cdot b_z)}$$

$$Y_{cg} = 1.725 \text{ m}$$

## Momentos de Inércia

$$bcgZ := Xcg$$

$$bcgY := Ycg$$

## Inércia em Z:

$$Iza := bz \cdot bcgY^2 + a1y \cdot \left( \frac{a1y}{2} - by + bcgY \right)^2 + \left( \frac{a1y^3}{12} + \frac{a2y^3}{12} + \frac{by^3}{12} \right)$$

$$Izb := bz \cdot (by - bcgY)^2 + a2y \cdot \left( bcgY - \frac{a2y}{2} \right)^2 + by \cdot \left( bcgY - \frac{by}{2} \right)^2$$

$$Iz := \frac{bz}{6} \cdot t^3 + (Iza + Izb) \cdot t$$

$$Iz = 4.070195$$

$$m^4$$

## Inércia em Y:

$$Iya := by \cdot bcgZ^2 + \frac{bz^3}{6} + a1y \cdot (bz - bcgZ)^2 + a2y \cdot (bz - bcgZ)^2 + 2 \cdot bz \cdot \left( bcgZ - \frac{bz}{2} \right)^2$$

$$Iy := \left( \frac{a1y}{12} + \frac{a2y}{12} + \frac{by}{12} \right) \cdot t^3 + (Iya) \cdot t$$

$$Iy = 3.38471$$

$$m^4$$

## Distância dz:

$$dz1 := \frac{-bz}{2} \cdot (by \cdot bz) \cdot (by - bcgY)$$

$$dz2 := \frac{a1y}{2} \cdot a1y \cdot (by \cdot bz)$$

$$dz2a := \left[ \left[ \frac{-a1y}{2} \cdot bz \cdot a1y \cdot (by - bcgY) \right] + \left[ \frac{a1y}{3} \cdot bz \cdot a1y \cdot (a1y) \right] + [-a1y \cdot (by \cdot bz) \cdot (by - bcgY)] + dz2 \right]$$

$$dz3 := \frac{-a2y}{6} \cdot bz \cdot a2y \cdot [2 \cdot (bcgY - a2y) + bcgY]$$

com retangulos e triangulos

$$dz := \frac{-t \cdot (dz1 + dz2a + dz3)}{Iz}$$

$$dz = 1.977$$

$$m$$



```

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
X  VALIDAÇÃO: Mediante dissertação Xavier (1987)                      X
X                                                                      X
X          III := by - a1y - a2y          Iz = 4.07    m4          X
X                                                                      X
X          III = 1.45    m                                          X
X                                                                      X
X          dyma :=  $\frac{t \cdot bz}{12 \cdot Iz} [3 \cdot by^2 \cdot bz + 2 \cdot by^3 - III^2 \cdot (3 \cdot by - III)]$  X
X                                                                      X
X          dyma = 1.977    m          terá que se o meu dz          X
X                                                                      X
X          ok!                                                       X
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

```

Distância dy:

$$dy1 := \frac{-bcgZ}{6} \cdot (by \cdot bcgZ) \cdot bcgZ$$

$$dy2 := \frac{(bz - bcgZ)}{6} \cdot (bz - bcgZ) \cdot [(by \cdot bcgZ) + 2 \cdot (by \cdot bz)]$$

$$dy3 := \frac{a1y}{2} \cdot (bz - bcgZ) \cdot [(bz \cdot (by + a1y)) + (by \cdot bz)]$$

$$dy4 := \frac{-a2y}{2} \cdot (bz \cdot a2y) \cdot (bz - bcgZ)$$

$$dy := \frac{t \cdot (dy1 + dy2 + dy3 + dy4)}{Iy}$$

$$dy = 1.7242188 \quad m$$

dy e dz são distância, logo é positivo, basta posicionar adequadamente.

bcgY = 1.725 se anulam devido a simetria

Inércia Setorial Iw:

$$\omega1 := dz \cdot (by - bcgY)$$

$$\omega2 := (bz - dz) \cdot (by - bcgY)$$

$$\omega3 := dz \cdot bcgY$$

$$\omega4 := -[(dz - bz) \cdot bcgY]$$

$$\omega5 := \omega2 + (dz + bz) \cdot a1y$$

$$\omega6 := -[dz \cdot (bcgY - a2y) + bz \cdot (-bcgY - a2y)]$$

$\omega1 = 3.411 \quad m^2$	$\omega4 = 2.541 \quad m^2$
$\omega2 = 2.541 \quad m^2$	$\omega5 = 7.968 \quad m^2$
$\omega3 = 3.411 \quad m^2$	$\omega6 = 7.968 \quad m^2$



**CÁLCULO DA FLEXO-TORÇÃO: paredes finas aberta**

$$I_t := \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot b_z \cdot t^3 + b_y \cdot t^3 + a_1 y \cdot t^3 + a_2 y \cdot t^3) = 0.01389 \quad \text{m}^4 \quad E := 210 \cdot 10^6 \quad \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \quad \nu := 0.3$$

$$G1 := \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad HH := 100 \quad \text{m}$$

$$G1 = 8.07692 \times 10^7 \quad \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

$$\alpha := \sqrt{\frac{G1 \cdot I_t}{E \cdot I_{\omega 2}}}$$

$$\alpha = 0.01935$$

$$\alpha \cdot HH = 1.93476 \quad \text{adimensional}$$

**Cenário 1:**

$$BH := 0 \quad \text{kN} \cdot \text{m} \quad MtH := 0 \quad \text{kN} \cdot \text{m} \quad q2 := 0 \quad \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$ea := \frac{bz}{2} - bcgZ \quad Q := 0 \quad \text{kN} \quad \alpha H := \alpha \cdot HH$$

$$ea = 0.20253 \quad \text{m} \quad q1 := 50 \quad \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad \xi := 0, \frac{5}{100} \dots 1$$

$$ez := bcgZ + dz + ea$$

$$mx := q1 \cdot ez$$

$$ez = 3.70215 \quad \text{m}$$

$$mx = 185.1074 \quad \text{kN} \cdot \frac{\text{m}}{\text{m}}$$

$$k1(\xi) := (\alpha H)^2 \cdot \left( \frac{\xi^2}{2} - \xi + \frac{\sinh(\alpha H \cdot \xi)}{\alpha H} \right)$$

$$\beta1(\xi) := \left[ \frac{(1 - \cosh(\alpha H \cdot \xi))}{\cosh(\alpha H)} + (\alpha H) \cdot \tanh(\alpha H) \cdot (1 - \cosh(\alpha H \cdot \xi)) + k1(\xi) \right]$$

$$\beta2(\xi) := -1 + \cosh(\alpha H \cdot \xi)$$

$$\beta3(\xi) := -[\sinh(\alpha H \cdot \xi) - \cosh(\alpha H \cdot \xi) \cdot \tanh(\alpha H) - (\alpha H) \cdot \xi]$$

$$\phi(\xi) := \frac{-mx \cdot HH^4}{E \cdot I_{\omega 2} \cdot \alpha H^4} \cdot \beta1(\xi) + \frac{BH \cdot HH^2}{E \cdot I_{\omega 2} \cdot \alpha H^2} \cdot \beta2(\xi) - \frac{MtH \cdot HH^3}{E \cdot I_{\omega 2} \cdot \alpha H^3} \cdot \beta3(\xi)$$

$$\beta7(\xi) := \frac{\cosh(\alpha H \cdot \xi)}{\cosh(\alpha H)} + (\alpha H) \cdot \tanh(\alpha H) \cdot \cosh(\alpha H \cdot \xi) - 1 - (\alpha H) \cdot \sinh(\alpha H \cdot \xi)$$

$$\beta8(\xi) := \frac{\cosh(\alpha H \cdot \xi)}{\cosh(\alpha H)}$$

$$Xx := 0, 5 \dots 100$$

$$\beta9(\xi) := \cosh(\alpha H \cdot \xi) \cdot \tanh(\alpha H) - \sinh(\alpha H \cdot \xi)$$

$$B(\xi) := \frac{-mx \cdot HH^2}{\alpha H^2} \cdot \beta_7(\xi) + BH \cdot \beta_8(\xi) - \frac{MtH \cdot HH}{\alpha H} \cdot \beta_9(\xi)$$

$\xi =$	$Xx =$	$\beta_1(\xi) =$	$\phi(\xi) =$	$\beta_7(\xi) =$	$B(\xi) =$
0	0	0	0	1.139	$-5.63077947 \cdot 10^5$
0.05	5	0.005	$-2.2225688516 \cdot 10^{-3}$	0.961	$-4.75332229 \cdot 10^5$
0.1	10	0.019	$-8.41536697118 \cdot 10^{-3}$	0.802	$-3.96669538 \cdot 10^5$
0.15	15	0.041	$-1.79218938231 \cdot 10^{-2}$	0.66	$-3.26353157 \cdot 10^5$
0.2	20	0.068	$-3.01553052344 \cdot 10^{-2}$	0.533	$-2.63724537 \cdot 10^5$
0.25	25	0.101	$-4.45929172962 \cdot 10^{-2}$	0.421	$-2.08197128 \cdot 10^5$
0.3	30	0.138	$-6.07713111592 \cdot 10^{-2}$	0.322	$-1.59250888 \cdot 10^5$
0.35	35	0.178	$-7.82819928772 \cdot 10^{-2}$	0.235	$-1.16427409 \cdot 10^5$
0.4	40	0.22	$-9.67675676501 \cdot 10^{-2}$	0.16	$-7.9325628 \cdot 10^4$
0.45	45	0.263	-0.11591839264	0.096	$-4.75980675 \cdot 10^4$
0.5	50	0.307	-0.13546967699	0.042	$-2.09475825 \cdot 10^4$
0.55	55	0.352	-0.15519900196	-0.002	875.42269118
0.6	60	0.397	-0.17492423782	-0.037	$1.80753317 \cdot 10^4$
0.65	65	0.441	-0.19450183812	-0.062	$3.08132304 \cdot 10^4$
0.7	70	0.485	-0.21382549532	-0.079	$3.92084161 \cdot 10^4$
0.75	75	0.528	-0.23282514515	-0.088	$4.33395137 \cdot 10^4$
0.8	80	0.571	-0.25146631043	-0.087	$4.32452133 \cdot 10^4$
0.85	85	0.612	-0.26974977818	-0.079	$3.89246317 \cdot 10^4$
0.9	90	0.653	-0.28771160695	-0.061	$3.03373044 \cdot 10^4$
0.95	95	0.693	-0.30542346459	-0.035	$1.74028065 \cdot 10^4$
1	100	0.733	-0.32299329942	0	0

**Cenário 2:** BH2 := 0 kN·m Q2 := 40 kN

$$MtH2 := Q2 \cdot ez = 148.08592 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$mx2 := 0 \text{ kN} \cdot \frac{\text{m}}{\text{m}}$$

$$\phi_2(\xi) := \frac{-mx2 \cdot HH^4}{E \cdot I \omega^2 \cdot \alpha H^4} \cdot \beta_1(\xi) + \frac{BH2 \cdot HH^2}{E \cdot I \omega^2 \cdot \alpha H^2} \cdot \beta_2(\xi) - \frac{MtH2 \cdot HH^3}{E \cdot I \omega^2 \cdot \alpha H^3} \cdot \beta_3(\xi)$$

$$B_2(\xi) := \frac{-mx2 \cdot HH^2}{\alpha H^2} \cdot \beta_7(\xi) + BH2 \cdot \beta_8(\xi) - \frac{MtH2 \cdot HH}{\alpha H} \cdot \beta_9(\xi)$$

$\xi =$	$\beta_3(\xi) =$	$\phi_2(\xi) =$	$\beta_9(\xi) =$	$B_2(\xi) =$
0	0.959	$-6.54173640544 \cdot 10^{-3}$	0.959	$-7.34105 \cdot 10^3$
0.05	0.963	$-6.57134018638 \cdot 10^{-3}$	0.867	$-6.63385 \cdot 10^3$
0.1	0.976	$-6.65630850606 \cdot 10^{-3}$	0.782	$-5.98877 \cdot 10^3$
0.15	0.996	$-6.79125768334 \cdot 10^{-3}$	0.705	$-5.39978 \cdot 10^3$
0.2	1.022	$-6.97127213364 \cdot 10^{-3}$	0.635	$-4.86136 \cdot 10^3$
0.25	1.054	$-7.19185833189 \cdot 10^{-3}$	0.571	$-4.36847 \cdot 10^3$
0.3	1.092	$-7.44890272839 \cdot 10^{-3}$	0.512	$-3.91649 \cdot 10^3$
0.35	1.135	$-7.73863322328 \cdot 10^{-3}$	0.457	$-3.50119 \cdot 10^3$
0.4	1.181	$-8.05758383888 \cdot 10^{-3}$	0.407	$-3.11868 \cdot 10^3$
0.45	1.232	$-8.40256225902 \cdot 10^{-3}$	0.361	$-2.76538 \cdot 10^3$
0.5	1.286	$-8.77061993134 \cdot 10^{-3}$	0.319	$-2.43798 \cdot 10^3$
0.55	1.343	$-9.15902445261 \cdot 10^{-3}$	0.279	$-2.13342 \cdot 10^3$
0.6	1.402	$-9.56523397831 \cdot 10^{-3}$	0.242	$-1.84883 \cdot 10^3$
0.65	1.464	$-9.986873417 \cdot 10^{-3}$	0.207	$-1.58156 \cdot 10^3$
0.7	1.528	$-0.01042171219$	0.174	$-1.3291 \cdot 10^3$
0.75	1.593	$-0.01086764332$	0.142	$-1.08909 \cdot 10^3$
0.8	1.66	$-0.01132266375$	0.112	$-859.27825$
0.85	1.728	$-0.01178485551$	0.083	$-637.51448$
0.9	1.796	$-0.01225236782$	0.055	$-421.72135$
0.95	1.865	$-0.01272339972$	0.027	$-209.87787$
1	1.935	$-0.01319618321$	0	0

**Cenário 3:**

$$BH_3 := 0 \quad \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$MtH_3 := 0 \quad \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$mx_3 := mx = 185.1074 \quad \text{kN}\cdot\frac{\text{m}}{\text{m}}$$

$$A_{ii} := by \cdot bz$$

do lintel

$$h := 5 \quad \text{m} \quad eL := 0.15 \quad \text{m}$$

$$L_1 := 1.45 \quad \text{m} \quad hL := 0.50 \quad \text{m}$$

$$IL := \frac{eL \cdot hL^3}{12}$$

$$KK := \frac{48 \cdot (E \cdot IL) \cdot A_{ii}^2}{L_1^3}$$

$$IL = 1.5625 \times 10^{-3} \quad \text{m}^4$$

$$A_{ii} = 11.9025 \quad \text{m}^2$$

$$KK = 7.31902 \times 10^8 \quad \text{kN}\cdot\text{m}^3$$

$$\alpha_3 := \sqrt{\frac{(G_1 \cdot I_t) + \frac{KK}{h}}{E \cdot I_{\omega 2}}}$$

$$\alpha_3 = 0.22182$$

$$\alpha_3H := \alpha_3 \cdot HH$$

$$\alpha_3H = 22.18164$$

adimensional

analisando as rótulas sendo formadas no meio do vão

$$k_3(\xi) := (\alpha_3 H)^2 \cdot \left( \frac{\xi^2}{2} - \xi + \frac{\sinh(\alpha_3 H \cdot \xi)}{\alpha_3 H} \right)$$

$$\beta_{13}(\xi) := \left[ \frac{(1 - \cosh(\alpha_3 H \cdot \xi))}{\cosh(\alpha_3 H)} + (\alpha_3 H) \cdot \tanh(\alpha_3 H) \cdot (1 - \cosh(\alpha_3 H \cdot \xi)) + k_3(\xi) \right]$$

$$\beta_{23}(\xi) := -1 + \cosh(\alpha_3 H \cdot \xi)$$

$$\beta_{33}(\xi) := -[\sinh(\alpha_3 H \cdot \xi) - \cosh(\alpha_3 H \cdot \xi) \cdot \tanh(\alpha_3 H) - (\alpha_3 H) \cdot \xi]$$

$$\phi_3(\xi) := \frac{-m_{x3} \cdot H H^4}{E \cdot I_{\omega 2} \cdot \alpha_3 H^4} \cdot \beta_{13}(\xi) + \frac{B H_3 \cdot H H^2}{E \cdot I_{\omega 2} \cdot \alpha_3 H^2} \cdot \beta_{23}(\xi) - \frac{M t H_3 \cdot H H^3}{E \cdot I_{\omega 2} \cdot \alpha_3 H^3} \cdot \beta_{33}(\xi)$$

$$\beta_{73}(\xi) := \frac{\cosh(\alpha_3 H \cdot \xi)}{\cosh(\alpha_3 H)} + (\alpha_3 H) \cdot \tanh(\alpha_3 H) \cdot \cosh(\alpha_3 H \cdot \xi) - 1 - (\alpha_3 H) \cdot \sinh(\alpha_3 H \cdot \xi)$$

$$\beta_{83}(\xi) := \frac{\cosh(\alpha_3 H \cdot \xi)}{\cosh(\alpha_3 H)}$$

$$\beta_{93}(\xi) := \cosh(\alpha_3 H \cdot \xi) \cdot \tanh(\alpha_3 H) - \sinh(\alpha_3 H \cdot \xi)$$

$$B_3(\xi) := \frac{-m_{x3} \cdot H H^2}{\alpha_3 H^2} \cdot \beta_{73}(\xi) + B H_3 \cdot \beta_{83}(\xi) - \frac{M t H_3 \cdot H H}{\alpha_3 H} \cdot \beta_{93}(\xi)$$

$\xi =$	$\beta_{13}(\xi) =$	$\phi_3(\xi) =$	$\beta_{73}(\xi) =$	$B_3(\xi) =$
0	0	0	1.139	-7.96886·10 <sup>4</sup>
0.05	9.121	-2.32649·10 <sup>-4</sup>	0.961	-2.3765·10 <sup>4</sup>
0.1	26.974	-6.87998·10 <sup>-4</sup>	0.802	-5318.01307
0.15	46.883	-1.19578·10 <sup>-3</sup>	0.66	766.95475
0.2	66.645	-1.69984·10 <sup>-3</sup>	0.533	2774.15227
0.25	85.535	-2.18164·10 <sup>-3</sup>	0.421	3436.24964
0.3	103.313	-2.63508·10 <sup>-3</sup>	0.322	3654.64976
0.35	119.9	-3.05813·10 <sup>-3</sup>	0.235	3726.69036
0.4	135.27	-3.45014·10 <sup>-3</sup>	0.16	3750.45006
0.45	149.413	-3.81088·10 <sup>-3</sup>	0.096	3758.27617
0.5	162.328	-4.14029·10 <sup>-3</sup>	0.042	3760.82344
0.55	174.014	-4.43833·10 <sup>-3</sup>	-0.002	3761.55598
0.6	184.469	-4.70501·10 <sup>-3</sup>	-0.037	3761.48776
0.65	193.695	-4.94032·10 <sup>-3</sup>	-0.062	3760.50923
0.7	201.691	-5.14427·10 <sup>-3</sup>	-0.079	3757.29202
0.75	208.459	-5.31689·10 <sup>-3</sup>	-0.088	3747.4561
0.8	214.002	-5.45827·10 <sup>-3</sup>	-0.087	3717.61064
0.85	218.332	-5.56869·10 <sup>-3</sup>	-0.079	3627.12323
0.9	221.48	-5.64899·10 <sup>-3</sup>	-0.061	3352.79923
0.95	223.546	-5.70169·10 <sup>-3</sup>	-0.035	2521.15984
1	224.831	-5.73446·10 <sup>-3</sup>	0	0

## GERANDO OS BIMOMENTOS ABAIXO E ACIMA DOS LINTÉIS

$$\beta_4(\xi) := \frac{\sinh(\alpha_3 H \cdot \xi)}{\cosh(\alpha_3 H)} + (\alpha_3 H) \cdot \tanh(\alpha_3 H) \cdot \sinh(\alpha_3 H \cdot \xi) - (\alpha_3 H) \cdot (\xi - 1 + \cosh(\alpha_3 H \cdot \xi))$$

$$\beta_5(\xi) := \frac{\sinh(\alpha_3 H \cdot \xi)}{\cosh(\alpha_3 H)} \quad \beta_6(\xi) := \sinh(\alpha_3 H \cdot \xi) \cdot \tanh(\alpha_3 H) - \cosh(\alpha_3 H \cdot \xi) + 1$$

$$d\phi_3(\xi) := \frac{-m_{x3} \cdot HH^3}{E \cdot I_{\omega 2} \cdot \alpha_3 H^3} \cdot \beta_4(\xi) + \frac{BH_3 \cdot HH}{E \cdot I_{\omega 2} \cdot \alpha_3 H} \cdot \beta_5(\xi) - \frac{MtH_3 \cdot HH^2}{E \cdot I_{\omega 2} \cdot \alpha_3 H^2} \cdot \beta_6(\xi)$$

$$RL(\xi) := \frac{24 \cdot (E \cdot IL) \cdot A_{ii}}{L^3} \cdot d\phi_3(\xi) \quad BL(\xi) := KK \cdot d\phi_3(\xi)$$

$$Bacima(\xi) := B_3(\xi) - \frac{BL(\xi)}{2} \quad Babaixo(\xi) := B_3(\xi) + \frac{BL(\xi)}{2}$$

$$BabaixoTopo := BL(\xi \leftarrow 1) \quad \text{usar todos menos o do topo}$$

$$BabaixoTopo = -4.141 \times 10^3$$

$\xi =$	$\beta_4(\xi) =$	$RL(\xi) =$	$Babaixo(\xi) =$	$Bacima(\xi) =$
0	0	0	$-7.96886 \cdot 10^4$	$-7.96886 \cdot 10^4$
0.05	13.756	$-2.39275 \cdot 10^3$	$-5.22448 \cdot 10^4$	$4.71467 \cdot 10^3$
0.1	17.55	$-3.05274 \cdot 10^3$	$-4.16533 \cdot 10^4$	$3.10173 \cdot 10^4$
0.15	18.058	$-3.14117 \cdot 10^3$	$-3.66208 \cdot 10^4$	$3.81547 \cdot 10^4$
0.2	17.483	$-3.04105 \cdot 10^3$	$-3.3422 \cdot 10^4$	$3.89703 \cdot 10^4$
0.25	16.55	$-2.87874 \cdot 10^3$	$-3.0828 \cdot 10^4$	$3.77005 \cdot 10^4$
0.3	15.499	$-2.69592 \cdot 10^3$	$-2.84335 \cdot 10^4$	$3.57428 \cdot 10^4$
0.35	14.409	$-2.50633 \cdot 10^3$	$-2.61049 \cdot 10^4$	$3.35583 \cdot 10^4$
0.4	13.306	$-2.31451 \cdot 10^3$	$-2.3798 \cdot 10^4$	$3.12989 \cdot 10^4$
0.45	12.199	$-2.12195 \cdot 10^3$	$-2.14982 \cdot 10^4$	$2.90148 \cdot 10^4$
0.5	11.09	$-1.92915 \cdot 10^3$	$-1.92009 \cdot 10^4$	$2.67225 \cdot 10^4$
0.55	9.982	$-1.73628 \cdot 10^3$	$-1.69045 \cdot 10^4$	$2.44276 \cdot 10^4$
0.6	8.873	$-1.54338 \cdot 10^3$	$-1.46086 \cdot 10^4$	$2.21316 \cdot 10^4$
0.65	7.764	$-1.35052 \cdot 10^3$	$-1.2314 \cdot 10^4$	$1.9835 \cdot 10^4$
0.7	6.656	$-1.15775 \cdot 10^3$	$-1.00228 \cdot 10^4$	$1.75374 \cdot 10^4$
0.75	5.549	$-965.28273$	$-7.74182 \cdot 10^3$	$1.52367 \cdot 10^4$
0.8	4.448	$-773.74226$	$-5.49186 \cdot 10^3$	$1.29271 \cdot 10^4$
0.85	3.363	$-585.00545$	$-3.3359 \cdot 10^3$	$1.05902 \cdot 10^4$
0.9	2.327	$-404.7684$	$-1.46496 \cdot 10^3$	$8.17056 \cdot 10^3$
0.95	1.439	$-250.299$	$-458.02397$	$5.50034 \cdot 10^3$
1	1	$-173.94633$	$-2.0704 \cdot 10^3$	$2.0704 \cdot 10^3$

despreza o ultimo





$\phi_{ST3}(\xi) =$	$B_{ST3}(\xi) =$	$B_3(\xi) =$	$\phi_3(\xi) =$
0	$7.96886 \cdot 10^4$	$-7.969 \cdot 10^4$	0
-0.002222568851602	$2.3765 \cdot 10^4$	$-2.377 \cdot 10^4$	$-2.326 \cdot 10^{-4}$
-0.008415366971184	$5.31801 \cdot 10^3$	$-5.318 \cdot 10^3$	$-6.88 \cdot 10^{-4}$
-0.017921893823101	-766.95475	766.955	$-1.196 \cdot 10^{-3}$
-0.030155305234374	$-2.77415 \cdot 10^3$	$2.774 \cdot 10^3$	$-1.7 \cdot 10^{-3}$
-0.044592917296157	$-3.43625 \cdot 10^3$	$3.436 \cdot 10^3$	$-2.182 \cdot 10^{-3}$
-0.060771311159205	$-3.65465 \cdot 10^3$	$3.655 \cdot 10^3$	$-2.635 \cdot 10^{-3}$
-0.078281992877196	$-3.72669 \cdot 10^3$	$3.727 \cdot 10^3$	$-3.058 \cdot 10^{-3}$
-0.096767567650125	$-3.75045 \cdot 10^3$	$3.75 \cdot 10^3$	$-3.45 \cdot 10^{-3}$
-0.115918392637558	$-3.75828 \cdot 10^3$	$3.758 \cdot 10^3$	$-3.811 \cdot 10^{-3}$
-0.135469676993649	$-3.76082 \cdot 10^3$	$3.761 \cdot 10^3$	$-4.14 \cdot 10^{-3}$
-0.155199001964213	$-3.76156 \cdot 10^3$	$3.762 \cdot 10^3$	$-4.438 \cdot 10^{-3}$
-0.17492423782032	$-3.76149 \cdot 10^3$	$3.761 \cdot 10^3$	$-4.705 \cdot 10^{-3}$
-0.194501838119391	$-3.76051 \cdot 10^3$	$3.761 \cdot 10^3$	$-4.94 \cdot 10^{-3}$
-0.213825495318686	$-3.75729 \cdot 10^3$	$3.757 \cdot 10^3$	$-5.144 \cdot 10^{-3}$
-0.232825145150306	$-3.74746 \cdot 10^3$	$3.747 \cdot 10^3$	$-5.317 \cdot 10^{-3}$
-0.251466310433169	$-3.71761 \cdot 10^3$	$3.718 \cdot 10^3$	$-5.458 \cdot 10^{-3}$
-0.269749778176413	$-3.62712 \cdot 10^3$	$3.627 \cdot 10^3$	$-5.569 \cdot 10^{-3}$
-0.287711606950148	$-3.3528 \cdot 10^3$	$3.353 \cdot 10^3$	$-5.649 \cdot 10^{-3}$
-0.305423464592567	$-2.52116 \cdot 10^3$	$2.521 \cdot 10^3$	$-5.702 \cdot 10^{-3}$
-0.322993299416243	0	0	$-5.734 \cdot 10^{-3}$

$\xi =$	$\phi_{ST11}(X_x) =$	$\phi_{ST1}(\xi) =$	$BST1(\xi) =$
0	0	0	563077.947
0.05	$-2.223 \cdot 10^{-3}$	$-2.222568851602 \cdot 10^{-3}$	475332.229
0.1	$-8.415 \cdot 10^{-3}$	$-8.415366971184 \cdot 10^{-3}$	396669.538
0.15	-0.018	-0.017921893823	326353.157
0.2	-0.03	-0.030155305234	263724.537
0.25	-0.045	-0.044592917296	208197.128
0.3	-0.061	-0.060771311159	159250.888
0.35	-0.078	-0.078281992877	116427.409
0.4	-0.097	-0.09676756765	79325.628
0.45	-0.116	-0.115918392638	47598.068
0.5	-0.135	-0.135469676994	20947.582
0.55	-0.155	-0.155199001964	-875.423
0.6	-0.175	-0.17492423782	-18075.332
0.65	-0.195	-0.194501838119	-30813.23
0.7	-0.214	-0.213825495319	-39208.416
0.75	-0.233	-0.23282514515	-43339.514
0.8	-0.251	-0.251466310433	-43245.213
0.85	-0.27	-0.269749778176	-38924.632
0.9	-0.288	-0.28771160695	-30337.304
0.95	-0.305	-0.305423464593	-17402.807
1	-0.323	-0.322993299416	0

### b) Via Teoria dos Painéis – Parede

#### ESFORÇOS SOLICITANTES NO PILAR EM NÚCLEO - VIA TEORIA DOS PAINÉIS - PAREDE

$$\begin{aligned}
 \underline{b_y} &:= 3.45 \quad \text{m} & \underline{a_{1y}} &:= 1 \quad \text{m} & \underline{t} &:= 0.15 \quad \text{m} \\
 \underline{b_z} &:= 3.45 \quad \text{m} & \underline{a_{2y}} &:= 1 \quad \text{m} & E &:= 2.1 \times 10^8 \quad \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}
 \end{aligned}$$

do lintel

$$\begin{aligned}
 \underline{h} &:= 100 \quad \text{m} & \underline{e_L} &:= 0.15 \quad \text{m} \\
 \underline{l_l} &:= 1.45 \quad \text{m} & \underline{h_L} &:= 0.50 \quad \text{m} \\
 \underline{\Pi} &:= \frac{e_L \cdot h_L^3}{12}
 \end{aligned}$$

das Paredes

$$\begin{aligned}
 LP1 &:= b_y & LP4 &:= a_{1y} \\
 LP2 &:= b_z & LP5 &:= a_{2y} \\
 LP3 &:= b_z & d_i &:= \frac{LP4}{2} & d_f &:= \frac{LP5}{2} \\
 A1 &:= LP1 \cdot t & A4 &:= LP4 \cdot t \\
 A2 &:= LP2 \cdot t & A5 &:= LP5 \cdot t \\
 A3 &:= LP3 \cdot t
 \end{aligned}$$

constantes da eq de MANEY

$$AL := eL \cdot hL \quad kc := \frac{6}{5} \quad \text{para seção retangulares no lintéis}$$

$$\varphi c := \frac{3 \cdot E \cdot IL}{G1 \cdot AL \cdot L1^2} \cdot kc$$

$$aL := 2 \cdot \frac{E \cdot IL}{L1} \cdot \frac{1 - 2 \cdot \varphi c}{1 + 4 \cdot \varphi c} \quad kL := 4 \cdot \frac{E \cdot IL}{L1} \cdot \frac{1 + \varphi c}{1 + 4 \cdot \varphi c}$$

$$bL := \frac{kL + aL}{L1}$$

$$tL := 2 \cdot \frac{bL}{L1} \quad aL = 2.68883 \times 10^5$$

$$kL = 7.21469 \times 10^5$$

$$bL = 6.83001 \times 10^5$$

$$tL = 9.4207 \times 10^5$$

$$ki := kL + \frac{LP4}{2} \cdot \left( bL + \frac{LP4}{2} \cdot tL \right) + bL \cdot \frac{LP4}{2}$$

$$kf := kL + \frac{LP5}{2} \cdot \left( bL + \frac{LP5}{2} \cdot tL \right) + bL \cdot \frac{LP5}{2}$$

$$ai := aL + \frac{LP5}{2} \cdot \left( bL + \frac{LP4}{2} \cdot tL \right) - bL \cdot \frac{LP4}{2}$$

$$af := aL + \frac{LP4}{2} \cdot \left( bL + \frac{LP5}{2} \cdot tL \right) - bL \cdot \frac{LP5}{2}$$

$$bi := bL + \frac{LP4}{2} \cdot tL$$

$$bf := bL + \frac{LP5}{2} \cdot tL$$

$$bfast := bL - \frac{LP5}{2} \cdot tL$$

$$M1 := \begin{pmatrix} A2 + A4 & -A4 & 0 & 0 \\ -A1 & A1 + A2 & -A2 & 0 \\ 0 & -A3 & A1 + A3 & A1 \\ 0 & 0 & A5 & A3 + A5 \end{pmatrix}$$

$$\omega_i := [dz \cdot (bcgY - a2y) + bz \cdot (-bcgY - a2y)]$$

$$\omega_f := (bz - dz) \cdot (by - bcgY) + (dz + bz) \cdot a1y$$

$$\begin{aligned} \omega_i &= -7.96782 & A1 &= 0.5175 & A4 &= 0.15 \\ \omega_f &= 7.96782 & A2 &= 0.517 & A5 &= 0.15 \\ & & A3 &= 0.517 \end{aligned}$$

$$dd1 := \frac{-A2}{h} \cdot \left[ \left( -2 \cdot \frac{bi}{LP4} + tL \right) \cdot \omega_i + \left( 2 \cdot \frac{bfast}{LP5} - tL \right) \cdot \omega_f \right]$$

$$dd2 := \frac{-A3}{h} \cdot \left[ \left( 2 \cdot \frac{bi}{LP4} - tL \right) \cdot \omega_i + \left( 2 \cdot \frac{bf}{LP5} + tL \right) \cdot \omega_f \right]$$

$$dd3 := \frac{-1}{h} \cdot \left[ \left( 2 \cdot \frac{ki}{LP4} - bi \right) \cdot \omega_i + \left( 2 \cdot \frac{ai}{LP5} + bi \right) \cdot \omega_f \right]$$

$$dd4 := \frac{-1}{h} \cdot \left[ \left( 2 \cdot \frac{af}{LP4} - bf \right) \cdot \omega_i + \left( 2 \cdot \frac{kf}{LP5} + bf \right) \cdot \omega_f \right]$$

$$\begin{aligned} dd1 &= -3.49603 \times 10^4 & dd3 &= -2.93995 \times 10^3 \\ dd2 &= -7.76896 \times 10^4 & dd4 &= -3.64866 \times 10^5 \end{aligned}$$

$$M3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & dd1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dd2 \end{pmatrix} \quad M10 := \begin{pmatrix} 0 & -A4 & 0 & A2 & 0 \\ -A2 & A1 & 0 & 0 & 0 \\ A3 & -A1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A5 & 0 & A3 \end{pmatrix}$$

$$M4 := \frac{E}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -LP2 \cdot A2 \cdot A4 & 0 & LP4 \cdot A2 \cdot A4 & 0 \\ -LP1 \cdot A1 \cdot A2 & -LP2 \cdot A1 \cdot A2 & 0 & 0 & 0 \\ -LP1 \cdot A1 \cdot A3 & 0 & LP3 \cdot A1 \cdot A3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -LP3 \cdot A3 \cdot A5 & 0 & -LP5 \cdot A3 \cdot A5 \end{pmatrix}$$

$$M6 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dd3 \\ 0 & 0 & dd4 \end{pmatrix} \quad M7 := \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & LP1 & LP1 & 0 \\ LP2 & LP2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -LP3 & LP3 \\ -LP4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & LP5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \nu1 &:= 0.3 \\ G11 &:= \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \end{aligned}$$

$$M9 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G11 \cdot It \end{pmatrix}$$

$$M5 := E \cdot \begin{pmatrix} -\frac{t \cdot LP1^3}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{t \cdot LP2^3}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{t \cdot LP3^3}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{t \cdot LP4^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{t \cdot LP5^3}{12} \end{pmatrix}$$

$$M8 := \begin{bmatrix} -1 & 0 & -bcgZ \\ 0 & -1 & bcgY \\ 0 & -1 & -(by - bcgY) \\ -1 & 0 & (bz - bcgZ) \\ -1 & 0 & (bz - bcgZ) \end{bmatrix}$$

$$M8 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1.52247 \\ 0 & -1 & 1.725 \\ 0 & -1 & -1.725 \\ -1 & 0 & 1.92753 \\ -1 & 0 & 1.92753 \end{pmatrix}$$

$$M9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.122 \times 10^6 \end{pmatrix}$$

calculando a matriz J

$$ZtCG := dz + bcgZ$$

$$YtCG := -dy + bcgY$$

$$TT := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -ZtCG \\ 0 & 1 & YtCG \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$TT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3.5 \\ 0 & 1 & 7.812 \times 10^{-4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Ja := -TT^T \cdot M8^T \cdot (M5 + M7 \cdot M1^{-1} \cdot M4) \cdot M8 \cdot TT$$

$$Ja = \begin{pmatrix} 8.54333 \times 10^8 & 5.96046 \times 10^{-8} & -3.14906 \times 10^9 \\ -3.72529 \times 10^{-9} & 7.10467 \times 10^8 & 5.5501 \times 10^5 \\ -3.14906 \times 10^9 & 5.5501 \times 10^5 & 1.28664 \times 10^{10} \end{pmatrix}$$

acoplado o sistema

## calculando a matriz S

$$S_a := TT^T \cdot M8^T \cdot (M6 + M7 \cdot M1^{-1} \cdot M3) \cdot TT + TT^T \cdot M9 \cdot TT$$

$$S_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2.66659 \times 10^5 \\ 0 & 0 & 4.19587 \times 10^5 \\ 0 & 0 & -3.24684 \times 10^5 \end{pmatrix}$$

## Calculando o Vetor Vf

## CENÁRIO 1

$$\begin{aligned} \theta G &:= 0 \\ \underline{ea} &:= \frac{bz}{2} - bcgZ \\ \underline{ea} &= 0.203 \quad m \\ \underline{ez} &:= bcgZ + dz + ea \\ \underline{ez} &= 3.702 \quad m \\ \underline{BH} &:= 0 \quad kN \cdot m \\ \underline{MtH} &:= 0 \quad kN \cdot m \\ \underline{q1} &:= 50 \quad \frac{kN}{m} \\ \underline{q2} &:= 0 \quad \frac{kN}{m} \\ \underline{Q} &:= 0 \quad kN \end{aligned}$$

$$D1qq := \frac{-q^2}{2 \cdot HH}$$

$$D2qq := -q1$$

$$D3qq := Q + q1 \cdot HH$$

$$\underline{mm} := q1 \cdot ea$$

$$mm = 10.127 \quad kN \cdot \frac{m}{m}$$

$$qH := \begin{pmatrix} \frac{q1 \cdot \cos(\theta G)}{2} \\ \frac{-q1 \cdot \sin(\theta G)}{2} \\ \frac{-q1 \cdot \sin(\theta G)}{2} \\ \frac{q1 \cdot \cos(\theta G)}{4} \\ \frac{q1 \cdot \cos(\theta G)}{4} \end{pmatrix}$$

$$D1qq = 0$$

$$D2qq = -50$$

$$D3qq = 5000$$

$$M8T := M8^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1.522 & 1.725 & -1.725 & 1.928 & 1.928 \end{pmatrix}$$

$$M11 := M8^T \cdot (M7 \cdot M1^{-1} \cdot M10)$$

$$M11 = \begin{pmatrix} 0 & 0.355 & -0.355 & -1.225 & 1.225 \\ 1.522 & -0.964 & 0.559 & -1.928 & -1.928 \\ 0 & -0.684 & 0.684 & 2.361 & -2.361 \end{pmatrix}$$

$$Aast := \begin{pmatrix} \cos(\theta G) \\ \sin(\theta G) \\ ez \cdot \cos(\theta G) \end{pmatrix}$$

Efeito de p

$$\gamma_{aco} := \frac{7850 \cdot 9.81}{1000} = 77.008 \quad \frac{kN}{m^3}$$

$$p1 := \gamma_{aco} \cdot (LP1 \cdot t) = 39.852 \quad \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$p4 := \gamma_{aco} \cdot (LP4 \cdot t) = 11.551 \quad \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$p2 := \gamma_{aco} \cdot (LP2 \cdot t) = 39.852 \quad \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$p5 := \gamma_{aco} \cdot (LP4 \cdot t) = 11.551 \quad \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$p3 := \gamma_{aco} \cdot (LP3 \cdot t) = 39.852 \quad \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$Pp := \begin{pmatrix} p1 \\ p2 \\ p3 \\ p4 \\ p5 \end{pmatrix} \quad Vff(Xx) := \begin{bmatrix} (A1qq \cdot Xx^2 + B1qq \cdot Xx + C1qq) \\ (A2qq \cdot Xx^2 + B2qq \cdot Xx + C2qq) \\ (A3qq \cdot Xx^2 + B3qq \cdot Xx + C3qq) \end{bmatrix}$$

$$A1q := D1qq \cdot \cos(\theta G)$$

$$B1q := D2qq \cdot \cos(\theta G)$$

$$C1q := D3qq \cdot \cos(\theta G) - (M11_{0,0} \cdot Pp_0 + M11_{0,1} \cdot Pp_1 + M11_{0,2} \cdot Pp_2 + M11_{0,3} \cdot Pp_3 + M11_{0,4} \cdot Pp_4)$$

$$A1q = 0$$

$$B1q = -50$$

$$C1q = 5 \times 10^3$$

$$A2q := D1qq \cdot \sin(\theta G)$$

$$B2q := D2qq \cdot \sin(\theta G)$$

$$C2q := D3qq \cdot \sin(\theta G) - (M11_{1,0} \cdot Pp_0 + M11_{1,1} \cdot Pp_1 + M11_{1,2} \cdot Pp_2 + M11_{1,3} \cdot Pp_3 + M11_{1,4} \cdot Pp_4)$$

$$A2q = 0$$

$$B2q = 0$$

$$C2q = -3.553 \times 10^{-15}$$

$$A3q := D1qq \cdot (ez \cdot \cos(\theta G))$$

$$B3q := D2qq \cdot (ez \cdot \cos(\theta G))$$

$$c3qa := M11_{2,0} \cdot Pp_0 + M11_{2,1} \cdot Pp_1 + M11_{2,2} \cdot Pp_2 + M11_{2,3} \cdot Pp_3 + M11_{2,4} \cdot Pp_4$$

$$C3q := D3qq \cdot (ez \cdot \cos(\theta G)) - (c3qa)$$

$$A3q = 0 \quad B3q = -185.107 \quad C3q = 1.851 \times 10^4$$

$$A1_{qq} := TT_{0,0} \cdot A1_q + TT_{0,1} \cdot A2_q + TT_{0,2} \cdot A3_q$$

$$B1_{qq} := TT_{0,0} \cdot B1_q + TT_{0,1} \cdot B2_q + TT_{0,2} \cdot B3_q$$

$$C1_{qq} := TT_{0,0} \cdot C1_q + TT_{0,1} \cdot C2_q + TT_{0,2} \cdot C3_q$$

$$A2_{qq} := TT_{1,0} \cdot A1_q + TT_{1,1} \cdot A2_q + TT_{1,2} \cdot A3_q$$

$$B2_{qq} := TT_{1,0} \cdot B1_q + TT_{1,1} \cdot B2_q + TT_{1,2} \cdot B3_q$$

$$C2_{qq} := TT_{1,0} \cdot C1_q + TT_{1,1} \cdot C2_q + TT_{1,2} \cdot C3_q$$

$$A3_{qq} := TT_{2,0} \cdot A1_q + TT_{2,1} \cdot A2_q + TT_{2,2} \cdot A3_q$$

$$B3_{qq} := TT_{2,0} \cdot B1_q + TT_{2,1} \cdot B2_q + TT_{2,2} \cdot B3_q$$

$$C3_{qq} := TT_{2,0} \cdot C1_q + TT_{2,1} \cdot C2_q + TT_{2,2} \cdot C3_q$$

### Rotina de Diagonalização

#### ROTINA DE DESACOPLAMENTO DO SISTEMA

**1º Passo: Montar o Sistema** -  $J_a \cdot dddu + S_a \cdot du = V_f$

$$J_a = \begin{pmatrix} 8.543 \times 10^8 & 5.96 \times 10^{-8} & -3.149 \times 10^9 \\ -3.725 \times 10^{-9} & 7.105 \times 10^8 & 5.55 \times 10^5 \\ -3.149 \times 10^9 & 5.55 \times 10^5 & 1.287 \times 10^{10} \end{pmatrix}$$

$$S_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2.667 \times 10^5 \\ 0 & 0 & 4.196 \times 10^5 \\ 0 & 0 & -3.247 \times 10^5 \end{pmatrix}$$

$$Vff(X_x) := \begin{bmatrix} (A1_{qq} \cdot X_x^2 + B1_{qq} \cdot X_x + C1_{qq}) \\ (A2_{qq} \cdot X_x^2 + B2_{qq} \cdot X_x + C2_{qq}) \\ (A3_{qq} \cdot X_x^2 + B3_{qq} \cdot X_x + C3_{qq}) \end{bmatrix}$$

$$A1_{qq} = 0 \quad B1_{qq} = 597.80511 \quad C1_{qq} = -5.97805 \times 10^4$$

$$A2_{qq} = 0 \quad B2_{qq} = -0.1446 \quad C2_{qq} = 14.4604$$

$$A3_{qq} = 0 \quad B3_{qq} = -185.1074 \quad C3_{qq} = 1.85107 \times 10^4$$



**2º Passo: Diagonalizar Ja**

$$dr := Ja_{0,0} \cdot Ja_{1,1} - (Ja_{0,1})^2$$

$$YR := \frac{-Ja_{0,2} \cdot Ja_{0,1} + Ja_{1,2} \cdot Ja_{0,0}}{dr}$$

$$ZR := \frac{-Ja_{0,2} \cdot Ja_{1,1} + Ja_{1,2} \cdot Ja_{0,1}}{dr}$$

$$\phi r := \text{atan}\left(\frac{2 \cdot Ja_{0,1}}{Ja_{0,0} - Ja_{1,1}}\right)$$

$$dr = 6.07 \times 10^{17}$$

$$\phi r = 0$$

$$Rer := \begin{pmatrix} \cos(\phi r) & -\sin(\phi r) & ZR \\ \sin(\phi r) & \cos(\phi r) & -YR \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Rer = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3.686 \\ 0 & 1 & -7.812 \times 10^{-4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$JaBARRA := Rer^T \cdot Ja \cdot Rer$$

$$JaBARRA = \begin{pmatrix} 8.543 \times 10^8 & -5.96 \times 10^{-8} & 0 \\ -1.229 \times 10^{-7} & 7.105 \times 10^8 & -2.334 \times 10^{-7} \\ 0 & -1.695 \times 10^{-7} & 1.259 \times 10^9 \end{pmatrix}$$

**3º Passo: Calcular a matriz Sa asterisco**

$$JaBarraMeio := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{JaBARRA_{0,0}}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{JaBARRA_{1,1}}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{JaBARRA_{1,1}}} \end{pmatrix}$$

$$JaBarraMeio = \begin{pmatrix} 3.421 \times 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 3.752 \times 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 3.752 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

$$SaAst := JaBarraMeio \cdot Rer^T \cdot Sa \cdot Rer \cdot JaBarraMeio$$

**4º Passo: Diagonalizar a matriz Sa Asterisco**

$$SaAst = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3.423 \times 10^{-4} \\ 0 & 0 & 5.906 \times 10^{-4} \\ 0 & 0 & 9.26 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

Como a matriz de massa (SaAst) será diagonalização via Calculo numérico V5

$$Av := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.06846 \\ 0 & 1 & -0.11812 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e a matriz de autovalores será a própria matriz [ SaAst

$$\lambda_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

**5º Passo: Calcular a matriz modal ponderada**

$$\Phi_a := JaBarraMeio \cdot Av$$

$$\Phi_a = \begin{pmatrix} 3.421 \times 10^{-5} & 0 & 2.342 \times 10^{-6} \\ 0 & 3.752 \times 10^{-5} & -4.432 \times 10^{-6} \\ 0 & 0 & 3.752 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

**6º Passo: Calcular o vetor de força no novo referencial**

$$\Phi RerT := \Phi_a^T \cdot Rer^T = \begin{pmatrix} 3.421 \times 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 3.752 \times 10^{-5} & 0 \\ 1.406 \times 10^{-4} & -4.461 \times 10^{-6} & 3.752 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

primeira função

$$DD1v := \Phi RerT_{0,0} \cdot A1qq = 0$$

$$DD2v := \Phi RerT_{0,0} \cdot (B1qq) = 0.02$$

$$DD3v := \Phi RerT_{0,0} \cdot (C1qq) = -2.045$$

segunda função

$$DD1w := \Phi RerT_{1,1} \cdot (A2qq) = 0$$

$$DD2w := \Phi RerT_{1,1} \cdot B2qq = -5.425 \times 10^{-6}$$

$$DD3w := \Phi RerT_{1,1} \cdot C2qq = 5.425 \times 10^{-4}$$

terceira função

$$DD1\phi := \Phi RerT_{0,2} \cdot (A1qq) + \Phi RerT_{2,1} \cdot (A2qq) + \Phi RerT_{2,2} \cdot (A3qq) = 0$$

$$DD2\phi := \Phi RerT_{0,2} \cdot (B1qq) + \Phi RerT_{2,1} \cdot (B2qq) + \Phi RerT_{2,2} \cdot (B3qq) = -6.944 \times 10^{-3}$$

$$DD3\phi := \Phi RerT_{0,2} \cdot (C1qq) + \Phi RerT_{2,1} \cdot (C2qq) + \Phi RerT_{2,2} \cdot (C3qq) = 0.694$$

**7º Passo: reescrever as condições iniciais da EDO no referencial generalizado**

$$\Phi a^{-1} \cdot Rer^{-1} = \begin{pmatrix} 2.923 \times 10^4 & 2.422 \times 10^{-11} & -1.096 \times 10^5 \\ -2.209 \times 10^{-11} & 2.665 \times 10^4 & 3.169 \times 10^3 \\ 0 & 0 & 2.665 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

$$\Phi a^{-1} \cdot Rer^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**8º Passo: resolver as EDO no referencial generalizado**

SOLUÇÃO DE  $\phi^{**}$

$$\lambda_{2,2} = 5 \times 10^{-3}$$

$$\lambda a \phi := \sqrt{\lambda_{2,2}} = 0.071$$

$$AA3\phi := \frac{2 \cdot DD1\phi}{\lambda a \phi^2} = 0$$

$$\lambda a \phi^2 = 5 \times 10^{-3}$$

$$\lambda a \phi^4 = 2.5 \times 10^{-5}$$

$$AA4\phi := \frac{DD2\phi}{\lambda a \phi^2} = -1.389$$

$$(\lambda_{2,2})^2 = 2.5 \times 10^{-5}$$

$$AA5\phi := \frac{\lambda a \phi^2 \cdot DD3\phi + 2 \cdot DD1\phi}{\lambda a \phi^4} = 138.881$$

$$AA8\phi := \frac{-(\lambda a\phi^2 \cdot DD3\phi + 2 \cdot DD1\phi)}{\lambda a\phi^5} = -1.964 \times 10^3$$

$$AA7\phi := \frac{(-2 \cdot DD1\phi \cdot \lambda a\phi \cdot HH - DD2\phi \cdot \lambda a\phi) + (\lambda a\phi^2 \cdot DD3\phi + 2 \cdot DD1\phi) \cdot \sinh(\lambda a\phi \cdot HH)}{\cosh(\lambda a\phi \cdot HH) \cdot \lambda a\phi^5}$$

$$AA6\phi := AA7\phi = 1.965 \times 10^3 \quad AA7\phi = 1.965 \times 10^3$$

**9º Passo: Solução da EDO em  $\phi$  no referencial inicial**

$$R\Phi := Rer \cdot \Phi a = \begin{pmatrix} 3.421 \times 10^{-5} & 0 & 1.406 \times 10^{-4} \\ 0 & 3.752 \times 10^{-5} & -4.461 \times 10^{-6} \\ 0 & 0 & 3.752 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

A função  $\phi(x)$

$$AA3i := R\Phi_{2,2} \cdot AA3\phi = 0 \quad AA6i := R\Phi_{2,2} \cdot AA6\phi = 0.0737$$

$$AA4i := R\Phi_{2,2} \cdot AA4\phi = -5.21038 \times 10^{-5} \quad AA7i := R\Phi_{2,2} \cdot AA7\phi = 0.0737$$

$$AA5i := R\Phi_{2,2} \cdot AA5\phi = 5.21038 \times 10^{-3} \quad AA8i := R\Phi_{2,2} \cdot AA8\phi = -0.07369$$

$$aux(Xx) := AA8i \cdot \sinh(\lambda a\phi \cdot Xx)$$

$$\phi des(Xx) := \frac{AA3i}{6} \cdot Xx^3 + \left( \frac{AA4i}{2} \cdot Xx^2 + AA5i \cdot Xx + AA6i + AA7i \cdot \cosh(\lambda a\phi \cdot Xx) + aux(Xx) \right)$$

$$Bdes(Xx) := E \cdot I \omega^2 \cdot \left( AA3i \cdot Xx + AA4i + AA7i \cdot \lambda a\phi^2 \cdot \cosh(\lambda a\phi \cdot Xx) + AA8i \cdot \lambda a\phi^2 \cdot \sinh(\lambda a\phi \cdot Xx) \right)$$

$Xx =$	$\phi_{des}(Xx) =$	$B_{des}(Xx) =$
0	$147.40699 \cdot 10^{-3}$	$9.4856615 \cdot 10^5$
5	$150.86419 \cdot 10^{-3}$	$6.1964921 \cdot 10^5$
10	$159.55649 \cdot 10^{-3}$	$3.8872789 \cdot 10^5$
15	$171.53803 \cdot 10^{-3}$	$2.2663509 \cdot 10^5$
20	$185.44293 \cdot 10^{-3}$	$1.1289728 \cdot 10^5$
25	$200.31279 \cdot 10^{-3}$	$3.3148518 \cdot 10^4$
30	$215.47559 \cdot 10^{-3}$	$-2.2684071 \cdot 10^4$
35	$230.46088 \cdot 10^{-3}$	$-6.1652561 \cdot 10^4$
40	$244.94027 \cdot 10^{-3}$	$-8.8678964 \cdot 10^4$
45	$258.68604 \cdot 10^{-3}$	$-1.0717692 \cdot 10^5$
50	$271.54231 \cdot 10^{-3}$	$-1.1948286 \cdot 10^5$
55	$283.40538 \cdot 10^{-3}$	$-1.2715111 \cdot 10^5$
60	$294.21064 \cdot 10^{-3}$	$-1.3115023 \cdot 10^5$
65	$303.92439 \cdot 10^{-3}$	$-1.3198535 \cdot 10^5$
70	$312.53959 \cdot 10^{-3}$	$-1.2976194 \cdot 10^5$
75	$320.07498 \cdot 10^{-3}$	$-1.2419918 \cdot 10^5$
80	$326.57743 \cdot 10^{-3}$	$-1.1459443 \cdot 10^5$
85	$332.12787 \cdot 10^{-3}$	$-9.9734554 \cdot 10^4$
90	$336.85153 \cdot 10^{-3}$	$-7.7742634 \cdot 10^4$
95	$340.93372 \cdot 10^{-3}$	$-4.5840924 \cdot 10^4$
100	$344.64325 \cdot 10^{-3}$	$-8.3207528 \cdot 10^{-8}$

### c) Via Método dos Elementos Finitos

Análise Matricial - MEF com flexão e torção da seção aberta contraventada por Lintéis

do lintel

$$h := 5 \quad m \quad eL := 0.15 \quad m$$

$$L1 := 1.45 \quad m \quad hL := 0.50 \quad m$$

$$IL := \frac{eL \cdot hL^3}{12}$$

$$IL = 1.562 \times 10^{-3} \quad m^4$$

das Paredes

$$LP1 := by \quad LP4 := a1y$$

$$LP2 := bz \quad LP5 := a2y$$

$$LP3 := bz \quad di := \frac{LP4}{2} \quad df := \frac{LP5}{2}$$

$$A1 := LP1 \cdot t \quad A4 := LP4 \cdot t$$

$$A2 := LP2 \cdot t \quad A5 := LP5 \cdot t$$

$$A3 := LP3 \cdot t$$

## Matriz de rigidez da parede de seção aberta no centro de gravidade

$$\varphi_{czpar} := 0.114$$

$$\varphi_{cypar} := 0.134$$

$$k_z := \frac{4 \cdot E \cdot I_z}{h} \cdot \frac{1 + \varphi_{czpar}}{1 + 4 \cdot \varphi_{czpar}}$$

$$a_z := \frac{2 \cdot E \cdot I_z}{h} \cdot \frac{1 - 2 \cdot \varphi_{czpar}}{1 + 4 \cdot \varphi_{czpar}}$$

$$k_y := \frac{4 \cdot E \cdot I_y}{h} \cdot \frac{1 + \varphi_{cypar}}{1 + 4 \cdot \varphi_{cypar}}$$

$$a_y := \frac{2 \cdot E \cdot I_y}{h} \cdot \frac{1 - 2 \cdot \varphi_{cypar}}{1 + 4 \cdot \varphi_{cypar}}$$

$$b_{by} := \frac{k_y + a_y}{h}$$

$$b_{bz} := \frac{k_z + a_z}{h}$$

$$A_a := A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$

$$t_y := \frac{2 \cdot b_{bz}}{h}$$

$$t_z := \frac{2 \cdot b_{by}}{h}$$

$$r := \frac{E \cdot A_a}{h}$$

$$KF_{cg11} := \begin{pmatrix} t_z & 0 & 0 & 0 & -b_{by} \\ 0 & t_y & 0 & b_{bz} & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & b_{bz} & 0 & k_z & 0 \\ -b_{by} & 0 & 0 & 0 & k_y \end{pmatrix}$$

$$KF_{cg12} := \begin{pmatrix} -t_z & 0 & 0 & 0 & -b_{by} \\ 0 & -t_y & 0 & b_{bz} & 0 \\ 0 & 0 & -r & 0 & 0 \\ 0 & -b_{bz} & 0 & a_z & 0 \\ b_{by} & 0 & 0 & 0 & a_y \end{pmatrix}$$

$$KF_{cg21} := \begin{pmatrix} -t_z & 0 & 0 & 0 & b_{by} \\ 0 & -t_y & 0 & b_{bz} & 0 \\ 0 & 0 & -r & 0 & 0 \\ 0 & b_{bz} & 0 & a_z & 0 \\ -b_{by} & 0 & 0 & 0 & a_y \end{pmatrix}$$

$$KF_{cg22} := \begin{pmatrix} t_z & 0 & 0 & 0 & b_{by} \\ 0 & t_y & 0 & -b_{by} & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & -b_{bz} & 0 & k_z & 0 \\ b_{by} & 0 & 0 & 0 & k_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} KF_{cg11} \\ KF_{cg12} \\ KF_{cg21} \\ KF_{cg22} \\ KF_{cg} \end{pmatrix} := \begin{array}{l} H_{ii} \leftarrow KF_{cg11} \\ H_{ij} \leftarrow KF_{cg12} \\ H_{ji} \leftarrow KF_{cg21} \\ H_{jj} \leftarrow KF_{cg22} \\ H1 \leftarrow \text{augment}(H_{ii}, H_{ij}) \\ H2 \leftarrow \text{augment}(H_{ji}, H_{jj}) \\ KF_{cg} \leftarrow \text{stack}(H1, H2) \\ \begin{pmatrix} KF_{cg11} \\ KF_{cg12} \\ KF_{cg21} \\ KF_{cg22} \\ KF_{cg} \end{pmatrix} \end{array}$$

## 1ª TRANSFORMAÇÃO: matriz de transformação do CG para o centro de torção D

$$zcg := Xcg$$

$$ycg := Ycg$$

$$Tbarra := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -ycg & zcg \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Tb := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Tbarra \\ Tb \\ TcgD \end{pmatrix} := \begin{cases} Hii \leftarrow Tbarra \\ Hjj \leftarrow Tb \\ Hji \leftarrow Tb \\ Hjj \leftarrow Tbarra \\ H1 \leftarrow \text{augment}(Hii, Hjj) \\ H2 \leftarrow \text{augment}(Hji, Hjj) \\ TcgD \leftarrow \text{stack}(H1, H2) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} Tbarra \\ Tb \\ TcgD \end{pmatrix}$$

## Matriz de rigidez da parede de seção aberta no centro de torção

$$KFdD := TcgD^T \cdot KFcg \cdot TcgD$$

$$\begin{pmatrix} kFT11 \\ kFT12 \\ kFT21 \\ kFT22 \\ KFTdD \end{pmatrix} := \begin{cases} Hii \leftarrow kFT11 \\ Hjj \leftarrow kFT12 \\ Hji \leftarrow kFT21 \\ Hjj \leftarrow kFT22 \\ KFTdD \leftarrow \text{stack}(H1, H2) \end{cases}$$

## Matriz de rigidez devido a Flexão e torção em conjunto

$$h = 5 \quad m$$

$$\alpha h := \alpha \cdot h$$

$$\alpha h = 0.097$$

$$\gamma := \frac{G1 \cdot It}{2 - 2 \cdot \cosh(\alpha h) + \alpha h \cdot \sinh(\alpha h)}$$

$$\gamma = 1.537 \times 10^{11}$$

$$\begin{pmatrix} KFcg11 \\ KFcg12 \\ KFcg21 \\ KFcg22 \\ KFTdD \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{kFT11} &:= \begin{bmatrix} tz & 0 & 0 & 0 & -bby & 0 & 0 \\ 0 & ty & 0 & bby & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & r \cdot ycg & -r \cdot zcg & 0 & 0 \\ 0 & bbz & r \cdot ycg & r \cdot ycg^2 + kz & -r \cdot ycg \cdot zcg & 0 & 0 \\ -bby & 0 & -r \cdot zcg & -r \cdot ycg \cdot zcg & r \cdot zcg^2 + ky & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma \cdot \alpha \cdot \sinh(\alpha \cdot h) & \gamma \cdot (\cosh(\alpha \cdot h) - 1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma \cdot (\cosh(\alpha \cdot h) - 1) & \gamma \cdot \left( h \cdot \cosh(\alpha \cdot h) - \frac{\sinh(\alpha \cdot h)}{\alpha} \right) \end{bmatrix} \\
\mathbf{kFT12} &:= \begin{bmatrix} -tz & 0 & 0 & 0 & -bby & 0 & 0 \\ 0 & -ty & 0 & bbz & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r & -r \cdot ycg & r \cdot zcg & 0 & 0 \\ 0 & -bbz & -r \cdot ycg & az - r \cdot ycg^2 & r \cdot ycg \cdot zcg & 0 & 0 \\ bby & 0 & r \cdot zcg & r \cdot ycg \cdot zcg & ay - r \cdot zcg^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma \cdot \alpha \cdot \sinh(\alpha \cdot h) & \gamma \cdot (\cosh(\alpha \cdot h) - 1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma \cdot (\cosh(\alpha \cdot h) - 1) & \gamma \cdot \left( \frac{\sinh(\alpha \cdot h)}{\alpha} - h \right) \end{bmatrix} \\
\mathbf{kFT21} &:= \begin{bmatrix} -tz & 0 & 0 & 0 & bby & 0 & 0 \\ 0 & -ty & 0 & bbz & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r & -r \cdot ycg & r \cdot zcg & 0 & 0 \\ 0 & bbz & -r \cdot ycg & az - r \cdot ycg^2 & r \cdot ycg \cdot zcg & 0 & 0 \\ -bby & 0 & r \cdot zcg & r \cdot ycg \cdot zcg & ay - r \cdot zcg^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma \cdot \alpha \cdot \sinh(\alpha \cdot h) & -\gamma \cdot (\cosh(\alpha \cdot h) - 1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma \cdot (\cosh(\alpha \cdot h) - 1) & \gamma \cdot \left( \frac{\sinh(\alpha \cdot h)}{\alpha} - h \right) \end{bmatrix} \\
\mathbf{kFT22} &:= \begin{bmatrix} tz & 0 & 0 & 0 & bbz & 0 & 0 \\ 0 & ty & 0 & -bby & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & r \cdot ycg & -r \cdot zcg & 0 & 0 \\ 0 & -bbz & r \cdot ycg & r \cdot ycg^2 + kz & -r \cdot ycg \cdot zcg & 0 & 0 \\ bby & 0 & -r \cdot zcg & -r \cdot ycg \cdot zcg & r \cdot zcg^2 + ky & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma \cdot \alpha \cdot \sinh(\alpha \cdot h) & -\gamma \cdot (\cosh(\alpha \cdot h) - 1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma \cdot (\cosh(\alpha \cdot h) - 1) & \gamma \cdot \left( h \cdot \cosh(\alpha \cdot h) - \frac{\sinh(\alpha \cdot h)}{\alpha} \right) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$





$$\begin{pmatrix} \text{TsSbarra} \\ \text{TsSb} \\ \text{TsS} \end{pmatrix} := \begin{array}{l} \text{Hii} \leftarrow \text{TsSbarra} \\ \text{Hij} \leftarrow \text{TsSb} \\ \text{Hji} \leftarrow \text{TsSb} \\ \text{Hjj} \leftarrow \text{TsSbarra} \\ \text{H1} \leftarrow \text{augment}(\text{Hii}, \text{Hij}) \\ \text{H2} \leftarrow \text{augment}(\text{Hji}, \text{Hjj}) \\ \text{TsS} \leftarrow \text{stack}(\text{H1}, \text{H2}) \\ \begin{pmatrix} \text{TsSbarra} \\ \text{TsSb} \\ \text{TsS} \end{pmatrix} \end{array}$$

Matriz de rigidez devido a Flexão e torção em conjunto no sistema global

$$\text{KFTdDg} := \text{TsS}^T \cdot \text{KFTdD} \cdot \text{TsS}$$

Matriz de rigidez dos Lintéis no CG

constantes da eq de MANEY  $\text{kcL} := \frac{6}{5}$  para seção retangulares, e aplicadas nos lintéis

$$\text{AL} := \text{eL} \cdot \text{hL} \quad \text{IzL} := \frac{\text{hL} \cdot \text{eL}^3}{12} \quad \text{IyL} := \frac{\text{eL} \cdot \text{hL}^3}{12}$$

$$\varphi_{\text{czL}} := \frac{3 \cdot \text{E} \cdot \text{IzL}}{\text{G1} \cdot \text{AL} \cdot \text{L1}^2} \cdot \text{kcL} \quad \varphi_{\text{cyL}} := \frac{3 \cdot \text{E} \cdot \text{IyL}}{\text{G1} \cdot \text{AL} \cdot \text{L1}^2} \cdot \text{kcL}$$

$$\text{kzL} := 4 \cdot \frac{\text{E} \cdot \text{IzL}}{\text{L1}} \cdot \frac{1 + \varphi_{\text{czL}}}{1 + 4 \cdot \varphi_{\text{czL}}} \quad \text{kyL} := 4 \cdot \frac{\text{E} \cdot \text{IyL}}{\text{L1}} \cdot \frac{1 + \varphi_{\text{cyL}}}{1 + 4 \cdot \varphi_{\text{cyL}}}$$

$$\text{azL} := 2 \cdot \frac{\text{E} \cdot \text{IzL}}{\text{L1}} \cdot \frac{1 - 2 \cdot \varphi_{\text{czL}}}{1 + 4 \cdot \varphi_{\text{czL}}} \quad \text{ayL} := 2 \cdot \frac{\text{E} \cdot \text{IyL}}{\text{L1}} \cdot \frac{1 - 2 \cdot \varphi_{\text{cyL}}}{1 + 4 \cdot \varphi_{\text{cyL}}}$$

$$\text{bzL} := \frac{\text{kzL} + \text{azL}}{\text{L1}} \quad \text{byL} := \frac{\text{kyL} + \text{ayL}}{\text{L1}}$$

$$\text{tzL} := 2 \cdot \frac{\text{byL}}{\text{L1}} \quad \text{tyL} := 2 \cdot \frac{\text{bzL}}{\text{L1}}$$

$$\text{rL} := \frac{\text{E} \cdot \text{AL}}{\text{L1}} \quad \text{ItL} := \text{IzL} + \text{IyL} \quad \text{por se tratar de seção retangular}$$

$$\text{sL} := \frac{\text{G1} \cdot \text{ItL}}{\text{L1}}$$

$$\text{KLcg11} := \begin{pmatrix} \text{tyL} & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{bzL} \\ 0 & \text{rL} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{tzL} & -\text{byL} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{byL} & \text{kyL} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \text{sL} & 0 \\ \text{bzL} & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{kzL} \end{pmatrix} \quad \text{KLcg12} := \begin{pmatrix} -\text{tyL} & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{bzL} \\ 0 & -\text{rL} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\text{tzL} & -\text{byL} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{byL} & \text{ayL} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{sL} & 0 \\ -\text{bzL} & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{azL} \end{pmatrix}$$

$$\text{KLcg21} := \begin{pmatrix} -\text{tyL} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{bzL} \\ 0 & -\text{rL} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\text{tzL} & \text{byL} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\text{byL} & \text{ayL} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{sL} & 0 \\ \text{bzL} & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{azL} \end{pmatrix} \quad \text{KLcg22} := \begin{pmatrix} \text{tyL} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{bzL} \\ 0 & \text{rL} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{tzL} & \text{byL} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{byL} & \text{kyL} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \text{sL} & 0 \\ -\text{bzL} & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{kzL} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{KLcg11} \\ \text{KLcg12} \\ \text{KLcg21} \\ \text{KLcg22} \\ \text{KLcg} \end{pmatrix} := \begin{cases} \text{Hii} \leftarrow \text{KLcg11} \\ \text{Hij} \leftarrow \text{KLcg12} \\ \text{Hji} \leftarrow \text{KLcg21} \\ \text{Hjj} \leftarrow \text{KLcg22} \\ \text{H1} \leftarrow \text{augment}(\text{Hii}, \text{Hij}) \\ \text{H2} \leftarrow \text{augment}(\text{Hji}, \text{Hjj}) \\ \text{KLcg} \leftarrow \text{stack}(\text{H1}, \text{H2}) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \text{KLcg11} \\ \text{KLcg12} \\ \text{KLcg21} \\ \text{KLcg22} \\ \text{KLcg} \end{pmatrix}$$

1ª TRANSFORMAÇÃO: do sistema de coordenadas centro de gravidade CG no Lintel para o centro de torção D do Pilar em Núcleo

$$\text{TLbarra} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{TLb} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{TLbarra} \\ \text{TLb} \\ \text{TLbarra2} \end{pmatrix} := \begin{array}{l} \text{Hii} \leftarrow \text{TLbarra} \\ \text{Hij} \leftarrow \text{TLb} \\ \text{Hji} \leftarrow \text{TLb} \\ \text{Hjj} \leftarrow \text{TLbarra} \\ \text{H1} \leftarrow \text{augment}(\text{Hii}, \text{Hij}) \\ \text{H2} \leftarrow \text{augment}(\text{Hji}, \text{Hjj}) \\ \text{TLbarra2} \leftarrow \text{stack}(\text{H1}, \text{H2}) \\ \begin{pmatrix} \text{TLbarra} \\ \text{TLb} \\ \text{TLbarra2} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\text{TLbarra2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{TLb2} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{TLbarra2} \\ \text{TLb2} \\ \text{TL} \end{pmatrix} := \begin{array}{l} \text{Hii} \leftarrow \text{TLbarra2} \\ \text{Hij} \leftarrow \text{TLb2} \\ \text{Hji} \leftarrow \text{TLb2} \\ \text{Hjj} \leftarrow \text{TLbarra2} \\ \text{H1} \leftarrow \text{augment}(\text{Hii}, \text{Hij}) \\ \text{H2} \leftarrow \text{augment}(\text{Hji}, \text{Hjj}) \\ \text{TL} \leftarrow \text{stack}(\text{H1}, \text{H2}) \\ \begin{pmatrix} \text{TLbarra2} \\ \text{TLb2} \\ \text{TL} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\text{KLdD} := \text{TL}^T \cdot \text{KLcg} \cdot \text{TL}$$

## 2ª TRANSFORMAÇÃO: do sistema de eixos locais em D para os Globais

como temos um único pilar, assim o sistema de eixos principais globais coincidirá com o eixo local no centro de torção D. Assim:

	para o ponto 1 do Lintel	para o ponto 2 do Lintel
$y_D := 0$	$y_{L1} := -(b_y - b_{cgY} - a_1 y)$	$y_{L2} := b_{cgY} - a_2 y$
$z_D := 0$	$z_{L1} := b_z + dz$	$z_{L2} := b_z + dz$

As matrizes de rotação de sistemas de referências

$$\omega L1 := (bz - dz) \cdot (by - bcgY) + (dz + bz) \cdot a1y$$

$$RL1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & (zD - zL1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (yD - yL1) & -(zD - zL1) & 0 & -\omega L1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & (yD - yL1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & (yD - yL1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & (zD - zL1) \end{bmatrix}$$

$$\omega L2 := [dz \cdot (bcgY - a2y) + bz \cdot (-bcgY - a2y)]$$

$$\omega L1 = 7.968$$

$$\omega L2 = -7.968$$

$$RL2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & (zD - zL2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (yD - yL2) & -(zD - zL2) & 0 & -\omega L2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & (yD - yL2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & (yD - yL2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & (zD - zL2) \end{bmatrix}$$

$$RLzero := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} RL1 \\ RL2 \\ RLzero \\ RL \end{pmatrix} := \begin{array}{l} H_{ii} \leftarrow RL1 \\ H_{ij} \leftarrow RLzero \\ H_{ji} \leftarrow RLzero \\ H_{jj} \leftarrow RL2 \\ H1 \leftarrow \text{augment}(H_{ii}, H_{ij}) \\ H2 \leftarrow \text{augment}(H_{ji}, H_{jj}) \\ RL \leftarrow \text{stack}(H1, H2) \end{array}$$

$$KLdDg := RL^T \cdot KLdD \cdot RL$$

## MATRIZ DE RIGIDEZ UNIFICADA Pilar e Lintel (termos de empenamento para os lintéis)

$$\begin{pmatrix} \text{KFTdDg} \\ \text{KD} \end{pmatrix} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..13 \\ \quad \text{for } j \in 0..13 \\ \quad \quad \text{KD}_{i,j} \leftarrow \text{KFTdDg}_{i,j} \end{cases} \begin{pmatrix} \text{KFTdDg} \\ \text{KD} \end{pmatrix}$$

## MATRIZ DE RIGIDEZ DO ANDAR

$$\text{KN} := \text{KD}$$

separar as submatrizes KN11, KN12, KN21 e KN22 para superpor na formação da matriz  $K^*$  (da estrutura), como o segmento tem mesmas propriedades, logo as submatrizes por trecho são igual, isto em cada posição adequada.

$$\begin{pmatrix} \text{KN} \\ \text{KN11} \end{pmatrix} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..6 \\ \quad \text{for } j \in 0..6 \\ \quad \quad \text{KN11}_{i,j} \leftarrow \text{KN}_{i,j} \end{cases} \begin{pmatrix} \text{KN} \\ \text{KN11} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{KN} \\ \text{KN12} \end{pmatrix} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..6 \\ \quad \text{for } j \in 0..6 \\ \quad \quad \text{KN12}_{i,j} \leftarrow \text{KN}_{i+7,j} \end{cases} \begin{pmatrix} \text{KN} \\ \text{KN12} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{KN} \\ \text{KN21} \end{pmatrix} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..6 \\ \quad \text{for } j \in 0..6 \\ \quad \quad \text{KN21}_{i,j} \leftarrow \text{KN}_{i,j+7} \end{cases} \begin{pmatrix} \text{KN} \\ \text{KN21} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{KN} \\ \text{KN22} \end{pmatrix} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..6 \\ \quad \text{for } j \in 0..6 \\ \quad \quad \text{KN22}_{i,j} \leftarrow \text{KN}_{i+7,j+7} \end{cases} \begin{pmatrix} \text{KN} \\ \text{KN22} \end{pmatrix}$$

## Montagem do Sistema de equações, com os graus prescritos já eliminados

via condensação matricial, para empenamentos  $\phi$ :

$$\text{KN}\phi_{\text{linha}} := \begin{pmatrix} \text{KN}_{6,6} & \text{KN}_{6,13} \\ \text{KN}_{13,6} & \text{KN}_{13,13} \end{pmatrix}$$

$$\text{KN}\phi_{\text{linha}} = \begin{pmatrix} 3.091 \times 10^9 & 1.199 \times 10^9 \\ 1.199 \times 10^9 & 2.399 \times 10^9 \end{pmatrix}$$

Matrizes de Incidência:

$$\beta_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(...)

$$\beta_{19} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta_{20} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Analizando os empenamentos  $\phi^*$ :

matrizes de rigidez para a rotação:

$$KN\phi_{linha1} := \beta_1^T \cdot KN\phi_{linha} \cdot \beta_1 \quad KN\phi_{linha11} := \beta_{11}^T \cdot KN\phi_{linha} \cdot \beta_{11}$$

$$KN\phi_{linha2} := \beta_2^T \cdot KN\phi_{linha} \cdot \beta_2 \quad KN\phi_{linha12} := \beta_{12}^T \cdot KN\phi_{linha} \cdot \beta_{12}$$

$$KN\phi_{linha3} := \beta_3^T \cdot KN\phi_{linha} \cdot \beta_3 \quad KN\phi_{linha13} := \beta_{13}^T \cdot KN\phi_{linha} \cdot \beta_{13}$$

$$KN\phi_{linha4} := \beta_4^T \cdot KN\phi_{linha} \cdot \beta_4 \quad KN\phi_{linha14} := \beta_{14}^T \cdot KN\phi_{linha} \cdot \beta_{14}$$

$$KN\phi_{linha5} := \beta_5^T \cdot KN\phi_{linha} \cdot \beta_5 \quad KN\phi_{linha15} := \beta_{15}^T \cdot KN\phi_{linha} \cdot \beta_{15}$$

$$KN\phi_{linha6} := \beta_6^T \cdot KN\phi_{linha} \cdot \beta_6 \quad KN\phi_{linha16} := \beta_{16}^T \cdot KN\phi_{linha} \cdot \beta_{16}$$

$$KN\phi_{linha7} := \beta_7^T \cdot KN\phi_{linha} \cdot \beta_7 \quad KN\phi_{linha17} := \beta_{17}^T \cdot KN\phi_{linha} \cdot \beta_{17}$$

$$KN\phi_{linha8} := \beta_8^T \cdot KN\phi_{linha} \cdot \beta_8 \quad KN\phi_{linha18} := \beta_{18}^T \cdot KN\phi_{linha} \cdot \beta_{18}$$

$$KN\phi_{linha9} := \beta_9^T \cdot KN\phi_{linha} \cdot \beta_9 \quad KN\phi_{linha19} := \beta_{19}^T \cdot KN\phi_{linha} \cdot \beta_{19}$$

$$KN\phi_{linha10} := \beta_{10}^T \cdot KN\phi_{linha} \cdot \beta_{10} \quad KN\phi_{linha20} := \beta_{20}^T \cdot KN\phi_{linha} \cdot \beta_{20}$$

$$\begin{aligned} \underline{KN\phi_{linhaast}} &:= KN\phi_{linha1} + KN\phi_{linha2} + KN\phi_{linha3} + KN\phi_{linha4} + KN\phi_{linha5} \\ &\quad + KN\phi_{linha6} + KN\phi_{linha7} + KN\phi_{linha8} + KN\phi_{linha9} + KN\phi_{linha10} \\ &\quad + KN\phi_{linha11} + KN\phi_{linha12} + KN\phi_{linha13} + KN\phi_{linha14} + KN\phi_{linha15} \\ &\quad + KN\phi_{linha16} + KN\phi_{linha17} + KN\phi_{linha18} + KN\phi_{linha19} + KN\phi_{linha20} \end{aligned}$$

o bimomento é adotado nulo ao longo da barra, assim concentra-se metade em cada nó, ficando:

$$d\omega_1 := dz \cdot (by - bcgY)$$

$$d\omega_2 := (bz - dz) \cdot (by - bcgY)$$

$$d\omega_3 := dz \cdot bcgY$$

$$d\omega_4 := -[(dz - bz) \cdot bcgY]$$

$$d\omega_5 := dz + (dz + bz) \cdot a1y$$

$$d\omega_6 := -[dz \cdot (bcgY - a2y) + bz \cdot (-bcgY - a2y)] \quad m^2$$

$$A\omega := \frac{(-d\omega_1 + d\omega_2)}{2} \cdot bz + \frac{(-d\omega_1 + d\omega_3)}{2} \cdot by + \frac{(-d\omega_4 + d\omega_3)}{2} \cdot bz + \frac{(d\omega_2 + d\omega_5)}{2} \cdot a1y + \frac{(-d\omega_4 - d\omega_6)}{2} \cdot a2y$$

$$A\omega = -0.00000000000000089 \quad m^3$$

$$\gamma_{aco} := \frac{7850 \cdot 9.81}{1000}$$

$$\gamma_{aco} = 77.008 \quad \frac{kN}{m^3}$$

$$B_{nodal} := [2 \cdot (bz \cdot t) + (by \cdot t) + (a1y \cdot t) + (a2y \cdot t)] \cdot \gamma_{aco} \cdot A\omega$$

$$B_{nodal} = -1.267 \times 10^{-13} \quad kN \cdot m^2$$

Bimomento ao longo da altura

$$\begin{pmatrix} h \\ HH \\ ez \\ B_{nodal} \\ B_{nodalVet} \end{pmatrix} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..20 \\ | \quad xh \leftarrow i \cdot h \\ | \quad B_{nodalVet}_i \leftarrow \frac{\frac{q1}{bcgZ}}{\frac{bz}{1.86239}} \cdot \frac{q1}{2} \cdot (xh - HH) \cdot ez + B_{nodal} \end{cases}$$

Para o caso de elementos estruturais com carregamento transversal (a exemplo da carga  $q1$ ) e com seção de paredes finas, percebe-se em Mori e Munaier Neto (2017; p. 243 - 253) a presença de cálculo iterativo, daí o coeficiente de ajuste (fcorreção).

$$fcorreção := \frac{\frac{q1}{bcgZ}}{\frac{bz}{1.86239}} = 60.837$$

$$\phi_{linhaNODAL} := KN \phi_{linhaast}^{-1} \cdot B_{nodalVet}$$



	0
0	$-5.63072 \cdot 10^5$
1	$-5.34918 \cdot 10^5$
2	$-5.06764 \cdot 10^5$
3	$-4.78611 \cdot 10^5$
4	$-4.50457 \cdot 10^5$
5	$-4.22304 \cdot 10^5$
6	$-3.9415 \cdot 10^5$
7	$-3.65997 \cdot 10^5$
8	$-3.37843 \cdot 10^5$
9	$-3.09689 \cdot 10^5$
10	$-2.81536 \cdot 10^5$
11	$-2.53382 \cdot 10^5$
12	$-2.25229 \cdot 10^5$
13	$-1.97075 \cdot 10^5$
14	$-1.68921 \cdot 10^5$
15	$-1.40768 \cdot 10^5$
16	$-1.12614 \cdot 10^5$
17	$-8.44607 \cdot 10^4$
18	$-5.63072 \cdot 10^4$
19	$-2.81536 \cdot 10^4$
20	$-1.26706 \cdot 10^{-13}$

BnodalVet =

$$\%erro := \frac{5.63078 - 5.63072}{5.63078} \cdot 100$$

$$\%erro = 1.066 \times 10^{-3}$$

Aproximadamente 1‰

**Observação:** A comparação é realizada mediante bimomento na base do pilar e valores das páginas D6 e D34.

#### Analizando as rotações:

matrizes de rigidez para a rotação:

$$KN\phi 1 := \beta 1^T \cdot KN\phi \cdot \beta 1$$

$$KN\phi 11 := \beta 11^T \cdot KN\phi \cdot \beta 11$$

$$KN\phi 2 := \beta 2^T \cdot KN\phi \cdot \beta 2$$

$$KN\phi 12 := \beta 12^T \cdot KN\phi \cdot \beta 12$$

$$KN\phi 3 := \beta 3^T \cdot KN\phi \cdot \beta 3$$

$$KN\phi 13 := \beta 13^T \cdot KN\phi \cdot \beta 13$$

$$KN\phi 4 := \beta 4^T \cdot KN\phi \cdot \beta 4$$

$$KN\phi 14 := \beta 14^T \cdot KN\phi \cdot \beta 14$$

$$KN\phi 5 := \beta 5^T \cdot KN\phi \cdot \beta 5$$

$$KN\phi 15 := \beta 15^T \cdot KN\phi \cdot \beta 15$$

$$KN\phi 6 := \beta 6^T \cdot KN\phi \cdot \beta 6$$

$$KN\phi 16 := \beta 16^T \cdot KN\phi \cdot \beta 16$$

$$KN\phi 7 := \beta 7^T \cdot KN\phi \cdot \beta 7$$

$$KN\phi 17 := \beta 17^T \cdot KN\phi \cdot \beta 17$$

$$KN\phi 8 := \beta 8^T \cdot KN\phi \cdot \beta 8$$

$$KN\phi 18 := \beta 18^T \cdot KN\phi \cdot \beta 18$$

$$KN\phi 9 := \beta 9^T \cdot KN\phi \cdot \beta 9$$

$$KN\phi 19 := \beta 19^T \cdot KN\phi \cdot \beta 19$$

$$KN\phi 10 := \beta 10^T \cdot KN\phi \cdot \beta 10$$

$$KN\phi 20 := \beta 20^T \cdot KN\phi \cdot \beta 20$$

Eliminando o grau prescrito, faz-se:

$$\begin{pmatrix} \text{KN}\phi_{\text{ast}} \\ \text{KN}\phi_{\text{ModificadaAst}} \end{pmatrix} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..19 \\ \quad \text{for } j \in 0..19 \\ \quad \quad \text{KN}\phi_{\text{ModificadaAst}}_{i,j} \leftarrow \text{KN}\phi_{\text{ast}}_{i+1,j+1} \\ \quad \begin{pmatrix} \text{KN}\phi_{\text{ast}} \\ \text{KN}\phi_{\text{ModificadaAst}} \end{pmatrix} \end{cases}$$

solução do sistema para rotações, via diagonalização de Jacobi

$$D := \text{KN}\phi_{\text{ModificadaAst}}$$

(ver Rotina de Jacobi no apêndice B, na página B6, e aplicar  $n = 20$ )

zerando os termos fora da diagonal principal para d

$$\begin{pmatrix} D \\ D1 \end{pmatrix} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..19 \\ \quad \text{for } j \in 0..19 \\ \quad \quad \begin{cases} D1_{i,j} \leftarrow 0 & \text{if } i \neq j \\ D1_{i,j} \leftarrow D_{i,j} & \text{if } i = j \end{cases} \\ \quad \begin{pmatrix} D \\ D1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

o momento de torção é adotado distribuído uniformemente ao longo da barra, assim concentra-se metade em cada nó, ficando:

$$M_{\text{nodal}} := \frac{m \cdot h}{2}$$

$$M_{\text{nodal}} = 462.768 \quad \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$\begin{pmatrix} M_{\text{nodal}} \\ M_{\text{nodalVet}} \end{pmatrix} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..19 \\ \quad M_{\text{nodalVet}}_i \leftarrow M_{\text{nodal}} \\ \quad \begin{pmatrix} M_{\text{nodal}} \\ M_{\text{nodalVet}} \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$M_{\text{nodalGEN}} := \psi \cdot M_{\text{nodalVet}}$$

$$\begin{pmatrix} D1 \\ \text{MnodalGEN} \\ \phi\text{RefGen} \end{pmatrix} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..19 \\ \phi\text{RefGen}_i \leftarrow \frac{\text{MnodalGEN}_i}{D1_{i,i}} \\ \begin{pmatrix} D1 \\ \text{MnodalGEN} \\ \phi\text{RefGen} \end{pmatrix} \end{cases}$$

retornando ao sistema inicial

como a matriz de transformação do sistema de coordenadas generalizado para o inicial é a própria matriz diagonalizada. Logo, teremos equivalência, sem a necessidade do retorno ao referencial inicial, quando se faz a análise dinâmica.

$$\phi\text{RefInicial} := \phi\text{RefGen}$$

$$\phi\text{RefGen} =$$

	0
0	$-2.08 \cdot 10^{-4}$
1	$-3.94 \cdot 10^{-7}$
2	$8.095 \cdot 10^{-7}$
3	$3.288 \cdot 10^{-7}$
4	$-5.336 \cdot 10^{-6}$
5	$3.141 \cdot 10^{-7}$
6	$1.769 \cdot 10^{-8}$
7	$8.542 \cdot 10^{-8}$
8	$-2.031 \cdot 10^{-5}$
9	$-4.42 \cdot 10^{-7}$
10	$5.316 \cdot 10^{-7}$
11	$1.205 \cdot 10^{-6}$
12	$-3.563 \cdot 10^{-6}$
13	$3.056 \cdot 10^{-7}$
14	$-8.533 \cdot 10^{-7}$
15	$-1.55 \cdot 10^{-6}$
16	$7.028 \cdot 10^{-7}$
17	$1.167 \cdot 10^{-6}$
18	$-2.733 \cdot 10^{-8}$
19	$1.667 \cdot 10^{-6}$

$$\phi\text{RefInicial} =$$

	0
0	$-2.08 \cdot 10^{-4}$
1	$-3.94 \cdot 10^{-7}$
2	$8.095 \cdot 10^{-7}$
3	$3.288 \cdot 10^{-7}$
4	$-5.336 \cdot 10^{-6}$
5	$3.141 \cdot 10^{-7}$
6	$1.769 \cdot 10^{-8}$
7	$8.542 \cdot 10^{-8}$
8	$-2.031 \cdot 10^{-5}$
9	$-4.42 \cdot 10^{-7}$
10	$5.316 \cdot 10^{-7}$
11	$1.205 \cdot 10^{-6}$
12	$-3.563 \cdot 10^{-6}$
13	$3.056 \cdot 10^{-7}$
14	$-8.533 \cdot 10^{-7}$
15	$-1.55 \cdot 10^{-6}$
16	$7.028 \cdot 10^{-7}$
17	$1.167 \cdot 10^{-6}$
18	$-2.733 \cdot 10^{-8}$
19	$1.667 \cdot 10^{-6}$

## D.2. Análise dinâmica dos painéis – parede

Ao procedido no item D.1, na análise estática, segue-se:

calculando a matriz J no CG

$$J_a := \frac{-M8^T \cdot (M5 + M7 \cdot M1^{-1} \cdot M4) \cdot M8}{1000} \quad \begin{array}{l} \text{a constante 1000 transforma de kN.m}^4 \\ \text{para N.m}^4 \end{array}$$

$$J_a = \begin{pmatrix} 2.40146 \times 10^5 & 0 & -4.47565 \times 10^4 \\ 0 & 1.99706 \times 10^5 & 2.98023 \times 10^{-11} \\ -4.47565 \times 10^4 & 5.96046 \times 10^{-11} & 3.62224 \times 10^5 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{N} \cdot \text{m}^4 \\ \text{acoplado o sistema} \end{array}$$

calculando a matriz S no CG

$$S_a := \frac{M8^T \cdot (M6 + M7 \cdot M1^{-1} \cdot M3) + M9}{1000} \quad \begin{array}{l} \text{a constante 1000 transforma de kN.m}^2 \\ \text{para N.m}^2 \end{array}$$

$$S_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6.93925 \times 10^3 \\ 0 & 0 & 1.09189 \times 10^4 \\ 0 & 0 & -1.24264 \times 10^4 \end{pmatrix} \quad \text{N} \cdot \text{m}^2$$

Calculando o Vetor Vt

CENÁRIO 3

$$Q := 10000 \quad \text{N}$$

Para o pilar P1

$$BH := 0 \quad \text{kN} \cdot \text{m}$$

$$q1 := 20000 \quad \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$\theta G := 180 \quad (\text{Equivalente a } \theta_{D1})$$

$$MtH := 0 \quad \text{kN} \cdot \text{m}$$

$$q2 := 30000 \quad \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$ea := \frac{bz}{2} - bcgZ$$

$$ez := bcgZ + dz + ea$$

$$\xi := 0, \frac{5}{100} \dots 1$$

$$ez = 3.700473 \quad \text{m}$$

Efeito de p:

$$\gamma_{CA} := 25 \cdot 10^3 \quad \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$$

$$p1 := \gamma_{CA} \cdot (LP1 - t) = 2.156 \times 10^4 \quad \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$p4 := \gamma_{CA} \cdot (LP4 - t) = 6.25 \times 10^3 \quad \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$p2 := \gamma_{CA} \cdot (LP2 - t) = 2.156 \times 10^4 \quad \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$p5 := \gamma_{CA} \cdot (LP4 - t) = 6.25 \times 10^3 \quad \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$p3 := \gamma_{CA} \cdot (LP3 - t) = 2.156 \times 10^4 \quad \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$p := \begin{pmatrix} p1 \\ p2 \\ p3 \\ p4 \\ p5 \end{pmatrix}$$

## Matriz M11

$$M8T := M8^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1.522 & 1.725 & -1.725 & 1.928 & 1.928 \end{pmatrix}$$

$$M11 := M8^T \cdot (M7 \cdot M1^{-1} \cdot M10)$$

$$M11 = \begin{pmatrix} 0 & 0.355 & -0.355 & -1.225 & 1.225 \\ 1.522 & -0.964 & 0.559 & -1.928 & -1.928 \\ 0 & -0.684 & 0.684 & 2.361 & -2.361 \end{pmatrix}$$

## Montando a Matriz de Massa: M

$$\begin{aligned} \underline{A1} &:= LP1 \cdot t & \underline{A4} &:= LP4 \cdot t & \underline{\gamma_{CA}} &:= 25 \cdot 10^3 \frac{N}{m^3} & \text{grav} &:= 9.807 \frac{m}{s^2} \\ \underline{A2} &:= LP2 \cdot t & \underline{A5} &:= LP5 \cdot t \\ \underline{A3} &:= LP3 \cdot t \end{aligned}$$

$$MM := \frac{(A1 + A2 + A3 + A4 + A5) \cdot HH \cdot \gamma_{CA}}{\text{grav}} = 7.87065 \times 10^5 \text{ kg} \quad \text{Massa total do pilar}$$

$$mMm := \frac{MM}{HH} = 7.87065 \times 10^3 \text{ kg} \quad \text{massa distribuída do pilar}$$

$$Ip := Iy + Iz = 12.435 \text{ m}^4 \quad \text{A soma dos momentos de inércia da seção transversal após a devida utilização do teorema de Steiner.}$$

$$M := \begin{pmatrix} mMm & 0 & 0 \\ 0 & mMm & 0 \\ 0 & 0 & Ip \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 7.871 \times 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 7.871 \times 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 12.435 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{kg} \\ \text{kg} \\ \text{m}^4 \end{matrix}$$

## Posicionamento do CM

$$\text{esp} := 1 \text{ m} \quad \rho_{CA} := 2400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \quad \rho_{ACO} := 7860 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$$

$$X_{cm1} := \frac{bz + t}{2}$$

$$X_{cm2} := \frac{bz + t}{2}$$

$$X_{cm3} := bz + \frac{t}{2}$$

$$Y_{cm1} := \frac{by + t}{2}$$

$$Y_{cm2} := \frac{by + t}{2}$$

$$Y_{cm3} := \frac{by + a2y - a1y + t}{2}$$

$$m1 := [(bz + t) \cdot (by + t)] \cdot \frac{\rho_{CA}}{\text{grav}}$$

$$m2 := (bz \cdot by) \cdot \frac{\rho_{CA}}{\text{grav}}$$

$$m3 := [(by - a2y - a1y) \cdot t] \cdot \frac{\rho_{CA}}{\text{grav}}$$

$$\text{cobr} := 0.03 \text{ m} \quad \text{espx} := 0.02 \text{ m}$$

$$\phi := 0.0125 \text{ m} \quad \text{espy} := 0.02 \text{ m}$$

$$n1 := \frac{by + t - 2 \cdot \text{cobr} + \text{espy}}{\phi + \text{espy}}$$

$$n2 := \frac{bz - t + \text{espx}}{\phi + \text{espx}}$$

$$n3 := n2$$

$$n4 := \frac{a2y + \frac{t}{2} - 2 \cdot \text{cobr} + \text{espy}}{\phi + \text{espy}}$$

$$n5 := \frac{a1y + \frac{t}{2} - 2 \cdot \text{cobr} + \text{espy}}{\phi + \text{espy}}$$

$$NN := n1 + n2 + n3 + n4 + n5$$

$$n1 = 112.615$$

$$n2 = 99.077$$

$$n4 = 33.385$$

$$n5 = 33.385$$

$$ccc := by - a1y - a2y$$

$$f := \frac{t}{2} + a2y + ccc$$

$$X_{cm4} := \frac{1}{NN} \left[ n1 \cdot \left( \text{cobr} + \frac{\phi}{2} \right) + n1 \cdot (t - \text{cobr}) + 2 \cdot \sum_{k=0}^{98} \left[ t + k \cdot (\phi + \text{espx}) + \frac{\phi}{2} \right] + \right. \\ \left. 2 \cdot n4 \cdot \left[ \left( bz + \text{cobr} + \frac{\phi}{2} \right) + (bz + t - \text{cobr}) \right] \right]$$

$$Y_{cm4} := \frac{1}{NN} \left[ \sum_{k=0}^{111} \left[ \text{cobr} + k \cdot (\phi + \text{espy}) + \frac{\phi}{2} \right] + \sum_{k=0}^{32} \left[ \text{cobr} + k \cdot (\phi + \text{espy}) + \frac{\phi}{2} \right] + \right. \\ \left. \sum_{k=0}^{32} \left[ f + \text{cobr} + k \cdot (\phi + \text{espy}) + \frac{\phi}{2} \right] + n2 \cdot \left[ \left( \text{cobr} + \frac{\phi}{2} \right) + (t - \text{cobr}) \right] + n3 \cdot \left[ \left( by + \text{cobr} + \frac{\phi}{2} \right) + (by + t - \text{cobr}) \right] \right]$$

$$m4 := \frac{\pi \cdot \phi^2}{4} \cdot \frac{\rho_{CA}}{\text{grav}}$$

$$X_{cm5} := X_{cm4}$$

$$m5 := \frac{\pi \cdot \phi^2}{4} \cdot \frac{\rho_{ACO}}{\text{grav}}$$

$$Y_{cm5} := Y_{cm4}$$

$$MM4 := m4 \cdot NN$$

$$MM5 := m5 \cdot NN$$

$$X_{cm} := \frac{X_{cm1} \cdot m1 - X_{cm2} \cdot m2 - X_{cm3} \cdot m3 - X_{cm4} \cdot MM4 + X_{cm5} \cdot MM5}{m1 - m2 - m3 - MM4 + MM5}$$

$$Y_{cm} := \frac{Y_{cm1} \cdot m1 - Y_{cm2} \cdot m2 - Y_{cm3} \cdot m3 - Y_{cm4} \cdot MM4 + Y_{cm5} \cdot MM5}{m1 - m2 - m3 - MM4 + MM5}$$

$$X_{cm} = 1.473 \quad m$$

$$Y_{cm} = 1.916 \quad m$$

A distância entre o CM e o CG:

$$dy_{cmcg} := Y_{cm} - Y_{cg} = 0.191 \quad m$$

$$dz_{cmcg} := X_{cm} - X_{cg} = -0.049 \quad m$$

### Transformação da matriz de massa M do CM para o CG na forma de Ma:

$$TM := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -dzCmCg \\ 0 & 1 & dyCmCg \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Ma := TM^T \cdot M \cdot TM$$

$$Ma = \begin{pmatrix} 7.871 \times 10^3 & 0 & 387.784 \\ 0 & 7.871 \times 10^3 & 1.506 \times 10^3 \\ 387.784 & 1.506 \times 10^3 & 319.734 \end{pmatrix}$$

### Realizar a composição da Matriz de Amortecimento C

usando a rigidez proporcional

as três primeiras frequências de vibração da estrutura para  $\lambda$  diferente de zero:  $\lambda^2 = 1$

$$\lambda_{1_1} := 1.98334 \quad \lambda_{1_2} := 4.67319 \quad \lambda_{1_3} := 7.89001 \quad \lambda := 1$$

$$\lambda_{2_1} := 1.71279 \quad \lambda_{2_2} := 4.56494 \quad \lambda_{2_3} := 7.82638$$

$$\omega_1 := 3.39704 \quad \text{rad} \quad \omega_2 := 21.33285 \quad \text{rad} \quad \omega_3 := 61.75023 \quad \text{rad}$$

$$j1 := \frac{\omega_1^2}{(\lambda_{1_1})^4 - (\lambda_{1_1})^2 \cdot \lambda}$$

$$s1 := \lambda^2 \cdot j1$$

$$j2 := \frac{\omega_2^2}{(\lambda_{1_2})^4 - (\lambda_{1_2})^2 \cdot \lambda}$$

$$s2 := \lambda^2 \cdot j2$$

$$j3 := \frac{\omega_3^2}{(\lambda_{1_3})^4 - (\lambda_{1_3})^2 \cdot \lambda}$$

$$s3 := \lambda^2 \cdot j3$$

$$j1 = 1.0000012$$

$$s1 = 1.000001$$

$$j2 = 1.000000368$$

$$s2 = 1.0000004$$

$$j3 = 0.999999885$$

$$s3 = 1$$

usar a razão de amortecimento de:

$$\xi_{\xi 1} := 0.08 \quad \xi_{\xi 2} := 0.08 \quad \xi_{\xi 3} := 0.08$$

os coeficientes de proporcionalidade de J, S e M:

$$\alpha_M := \frac{2 \cdot [\omega_1 \cdot \xi \xi_1 \cdot (j_2 \cdot s_3 - j_3 \cdot s_2) + \omega_2 \cdot \xi \xi_2 \cdot (j_3 \cdot s_1 - j_1 \cdot s_3) + \omega_3 \cdot \xi \xi_3 \cdot (j_1 \cdot s_2 - j_2 \cdot s_1)]}{j_1 \cdot (s_2 - s_3) + j_2 \cdot (s_3 - s_1) + j_3 \cdot (s_1 - s_2)} = 0$$

$$\alpha_S := \frac{2 \cdot [\omega_1 \cdot \xi \xi_1 \cdot (j_3 - j_2) + \omega_2 \cdot \xi \xi_2 \cdot (j_1 - j_3) + \omega_3 \cdot \xi \xi_3 \cdot (j_2 - j_1)]}{j_1 \cdot (s_2 - s_3) + j_2 \cdot (s_3 - s_1) + j_3 \cdot (s_1 - s_2)} = -3.79687 \times 10^{16}$$

$$\alpha_J := \frac{2 \cdot [\omega_1 \cdot \xi \xi_1 \cdot (s_3 - s_2) + \omega_2 \cdot \xi \xi_2 \cdot (s_1 - s_3) + \omega_3 \cdot \xi \xi_3 \cdot (s_2 - s_1)]}{j_1 \cdot (s_2 - s_3) + j_2 \cdot (s_3 - s_1) + j_3 \cdot (s_1 - s_2)} = -3.79687 \times 10^{16}$$

$$\alpha_{JJ} := \frac{\alpha_J}{\alpha_J + \alpha_S + \alpha_M}$$

$$\alpha_{SS} := \frac{\alpha_S}{\alpha_J + \alpha_S + \alpha_M}$$

$$\alpha_{MM} := \frac{\alpha_M}{(\alpha_J + \alpha_S + \alpha_M)}$$

$$\alpha_{MM} = 0$$

$$Ca := \alpha_{JJ} \cdot Ja + \alpha_{SS} \cdot Sa + \alpha_{MM} \cdot Ma$$

$$\alpha_{SS} = 0.5$$

$$\alpha_{JJ} = 0.5$$

$$Ca = \begin{pmatrix} 1.201 \times 10^5 & 0 & -1.891 \times 10^4 \\ 0 & 9.985 \times 10^4 & 5.459 \times 10^3 \\ -2.238 \times 10^4 & 2.98 \times 10^{-11} & 1.749 \times 10^5 \end{pmatrix}$$

### Rotina de Diagonalização na Análise Dinâmica

**1º Passo: Montar o Sistema** -  $Ja * ddddu + Ca * ddddtu + Sa * ddu + Ma * ttu = dVf$

$$Ja = \begin{pmatrix} 2.40146 \times 10^5 & 0 & -4.47565 \times 10^4 \\ 0 & 1.99706 \times 10^5 & 2.98023 \times 10^{-11} \\ -4.47565 \times 10^4 & 5.96046 \times 10^{-11} & 3.62224 \times 10^5 \end{pmatrix} \quad \frac{N}{m^4}$$

$$Ma = \begin{pmatrix} 7.87065 \times 10^3 & 0 & 387.78445 \\ 0 & 7.87065 \times 10^3 & 1.50608 \times 10^3 \\ 387.78445 & 1.50608 \times 10^3 & 319.73412 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} kg \\ kg \\ m^4 \end{matrix} \quad Sa = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6.93925 \times 10^3 \\ 0 & 0 & 1.09189 \times 10^4 \\ 0 & 0 & -1.24264 \times 10^4 \end{pmatrix} \quad \frac{N}{m^2}$$

$$Ca = \begin{pmatrix} 1.20073 \times 10^5 & 0 & -1.89086 \times 10^4 \\ 0 & 9.98531 \times 10^4 & 5.45943 \times 10^3 \\ -2.23782 \times 10^4 & 2.98023 \times 10^{-11} & 1.74899 \times 10^5 \end{pmatrix} \quad \frac{N}{m^5}$$

$$Vff(Xx) := \begin{bmatrix} A1qq \cdot Xx^2 + B1qq \cdot Xx + C1qq \\ A2qq \cdot Xx^2 + B2qq \cdot Xx + C2qq \\ A3qq \cdot Xx^2 + B3qq \cdot Xx + C3qq \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} A1qq = 89.76901 & B1qq = 1.196920138 \times 10^4 \\ A2qq = 120.1729 & B2qq = 1.602305271 \times 10^4 \\ A3qq = 332.18784 & B3qq = 4.429171252 \times 10^4 \end{matrix}$$

**Condições de contorno:**

$$ddv0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ddddv0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad dttdtv0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} C1qq = -1.20290473881 \times 10^6 \\ C2qq = -1.61031679782 \times 10^6 \\ C3qq = -4.45131710783 \times 10^6 \end{matrix}$$



**2º Passo: Diagonalizar Ja - 1ª Transformação**

$$dr := Ja_{0,0} \cdot Ja_{1,1} - (Ja_{0,1})^2$$

$$YR := \frac{-Ja_{0,2} \cdot Ja_{0,1} + Ja_{1,2} \cdot Ja_{0,0}}{dr}$$

$$ZR := \frac{-Ja_{0,2} \cdot Ja_{1,1} + Ja_{1,2} \cdot Ja_{0,1}}{dr}$$

$$\phi r := \frac{1}{2} \cdot \text{atan} \left( \frac{2 \cdot Ja_{0,1}}{Ja_{0,0} - Ja_{1,1}} \right)$$

$$dr = 4.796 \times 10^{10}$$

$$\phi r = 0$$

$$Rer := \begin{pmatrix} \cos(\phi r) & -\sin(\phi r) & ZR \\ \sin(\phi r) & \cos(\phi r) & -YR \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Rer = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.186 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$JaBARRA := Rer^T \cdot Ja \cdot Rer$$

$$SaBARRA := Rer^T \cdot Sa \cdot Rer$$

$$CaBARRA := Rer^T \cdot Ca \cdot Rer$$

$$MaBARRA := Rer^T \cdot Ma \cdot Rer$$

$$JaBARRA = \begin{pmatrix} 2.401 \times 10^5 & 0 & -7.276 \times 10^{-12} \\ 0 & 1.997 \times 10^5 & 0 \\ -1.601 \times 10^{-10} & 2.98 \times 10^{-11} & 3.539 \times 10^5 \end{pmatrix} \quad SaBARRA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6.939 \times 10^3 \\ 0 & 0 & 1.092 \times 10^4 \\ 0 & 0 & -1.113 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

obs: os termos fora da diagonal de Ja principal são considerados nulos.

$$CaBARRA = \begin{pmatrix} 1.201 \times 10^5 & 0 & 3.47 \times 10^3 \\ 0 & 9.985 \times 10^4 & 5.459 \times 10^3 \\ -8.004 \times 10^{-11} & 1.49 \times 10^{-11} & 1.714 \times 10^5 \end{pmatrix}$$

$$MaBARRA = \begin{pmatrix} 7.871 \times 10^3 & 0 & 1.855 \times 10^3 \\ 0 & 7.871 \times 10^3 & 1.506 \times 10^3 \\ 1.855 \times 10^3 & 1.506 \times 10^3 & 737.662 \end{pmatrix}$$

As condições de contorno:

$$ddq0 := Rer^T \cdot ddv0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$ddddq0 := Rer^T \cdot ddddv0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$dtdtq0 := Rer^T \cdot dtdtv0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### 3º Passo: 2ª Transformação, transformando Ja em matriz identidade

$$JaBarraMeio := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{JaBARRA_{0,0}}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{JaBARRA_{1,1}}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{JaBARRA_{2,2}}} \end{pmatrix}$$

$$JaBarraMeio = \begin{pmatrix} 2.041 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 2.238 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 1.681 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$JaAst := JaBarraMeio \cdot Rer^T \cdot Ja \cdot Rer \cdot JaBarraMeio$$

$$SaAst := JaBarraMeio \cdot Rer^T \cdot Sa \cdot Rer \cdot JaBarraMeio$$

$$CaAst := JaBarraMeio \cdot Rer^T \cdot Ca \cdot Rer \cdot JaBarraMeio$$

$$MaAst := JaBarraMeio \cdot Rer^T \cdot Ma \cdot Rer \cdot JaBarraMeio$$

$$JaAst = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad CaAst = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.012 \\ 0 & 0.5 & 0.021 \\ 0 & 0 & 0.484 \end{pmatrix}$$

$$SaAst = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.024 \\ 0 & 0 & 0.041 \\ 0 & 0 & -0.031 \end{pmatrix} \quad MaAst = \begin{pmatrix} 0.033 & 0 & 6.362 \times 10^{-3} \\ 0 & 0.039 & 5.665 \times 10^{-3} \\ 6.362 \times 10^{-3} & 5.665 \times 10^{-3} & 2.084 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

As condições de contorno:

$$ddq0 := JaBarraMeio \cdot Rer^T \cdot ddv0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ddddq0 := JaBarraMeio \cdot Rer^T \cdot ddddv0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$dtdtq0 := JaBarraMeio \cdot Rer^T \cdot dtdtv0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### 4º Passo: Reescrever a matriz SaAst como tridiagonal simétrica via Método de Lanczos

após tal transformação, pode-se aplicar o Método de Jacobi para diagonalização de S

$$U := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{mod}U := \sqrt{(U_0)^2 + (U_1)^2 + (U_2)^2}$$

$$\text{mod}U = 4.583$$

$$U0 := \frac{U}{\text{mod}U}$$

$$U0 = \begin{pmatrix} 0.218 \\ 0.436 \\ 0.873 \end{pmatrix}$$

$$\alpha1 := U0^T \cdot \text{SaAst} \cdot U0 = -3.789 \times 10^{-3}$$

$$\beta2 := \sqrt{U0^T \cdot \text{SaAst} \cdot \text{SaAst} \cdot U0 - \alpha1^2} = 0.01$$

$$U1 := \frac{1}{\beta2} \cdot (\text{SaAst} \cdot U0) - \frac{\alpha1}{\beta2} \cdot U0$$

$$U1 = \begin{pmatrix} 2.11 \\ 3.663 \\ -2.359 \end{pmatrix}$$

$$\alpha2 := U1^T \cdot \text{SaAst} \cdot U1 = -0.648$$

$$\beta3a := \sqrt{U1^T \cdot \text{SaAst} \cdot \text{SaAst} \cdot U1 - \alpha2^2} = 0.633i$$

$$\beta3 := \sqrt{0^2 + 0.633^2}$$

usando o módulo do número imaginário

$$U2 := \frac{1}{\beta3} \cdot (\text{SaAst} \cdot U1) - \frac{\alpha2}{\beta3} \cdot U1$$

$$U2 = \begin{pmatrix} 2.073 \\ 3.599 \\ -2.299 \end{pmatrix}$$

$$\alpha3 := U2^T \cdot \text{SaAst} \cdot U2 = -0.62$$

$$\text{SaT} := \begin{pmatrix} \alpha1 & \beta2 & 0 \\ \beta2 & \alpha2 & \beta3 \\ 0 & \beta3 & \alpha3 \end{pmatrix}$$

$$\text{SaT} = \begin{pmatrix} -3.789 \times 10^{-3} & 0.01 & 0 \\ 0.01 & -0.648 & 0.633 \\ 0 & 0.633 & -0.62 \end{pmatrix}$$

**5º Passo: Cálculo Iterativo para diagonalizar ao mesmo tempo CaAst e SaAst**

$$Md := MaAst$$

$$Sd := SaT$$

$\begin{pmatrix} \underline{\text{Md}} \\ \text{Sd} \\ \psi\text{M} \\ \psi\text{S} \\ \text{RRM} \\ \text{RRS} \\ \theta\text{M} \\ \theta\text{S} \\ \text{ddq0} \\ \text{ddddq0} \\ \text{dtdtq0} \end{pmatrix}$	$\begin{array}{l} := \\ \text{RRS} \leftarrow \text{identity}(n) \\ \theta\text{M} \leftarrow \text{identity}(n) \\ \theta\text{S} \leftarrow \text{identity}(n) \\ \text{ddq0} \leftarrow 1 \\ \text{ddddq0} \leftarrow 0 \\ \text{dtdtq0} \leftarrow 0 \end{array}$	$\begin{array}{l} n \leftarrow 3 \\ \psi\text{M} \leftarrow \text{identity}(n) \\ \psi\text{S} \leftarrow \text{identity}(n) \\ \text{kk} \leftarrow 1 \\ \text{while } \text{kk} \neq 0 \\ \quad \text{for } ii \in 0..n-1 \\ \quad \quad \text{mm}_{ii} \leftarrow \text{Md}_{ii,ii} \\ \quad \quad \text{ss}_{ii} \leftarrow \text{Sd}_{ii,ii} \\ \quad \quad \varepsilon\text{m} \leftarrow \min(\text{mm}) \cdot 10^{-5} \\ \quad \quad \varepsilon\text{s} \leftarrow \min(\text{ss}) \cdot 10^{-5} \\ \quad \quad \text{kk} \leftarrow 0 \\ \quad \quad \text{for } i \in 0..(n-2) \\ \quad \quad \quad \text{for } j \in (i+1)..(n-1) \\ \quad \quad \quad \quad \text{if } ( \text{Md}_{i,j}  > \varepsilon\text{m}) \wedge ( \text{Sd}_{i,j}  > \varepsilon\text{s}) \\ \quad \quad \quad \quad \quad \text{RRM} \leftarrow \text{identity}(n) \\ \quad \quad \quad \quad \quad \text{RRS} \leftarrow \text{identity}(n) \\ \quad \quad \quad \quad \quad \text{kk} \leftarrow \text{kk} + 1 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \theta\text{M} \leftarrow \frac{\pi}{4} \text{ if } \text{Md}_{i,i} = \text{Md}_{j,j} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \theta\text{S} \leftarrow \frac{\pi}{4} \text{ if } \text{Sd}_{i,i} = \text{Sd}_{j,j} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \theta\text{M} \leftarrow \frac{1}{2} \cdot \text{atan} \left( \frac{2 \cdot \text{Md}_{i,j}}{\text{Md}_{i,i} - \text{Md}_{j,j}} \right) \text{ if } \text{Md}_{i,i} \neq \text{Md}_{j,j} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \theta\text{S} \leftarrow \frac{1}{2} \cdot \text{atan} \left( \frac{2 \cdot \text{Sd}_{i,j}}{\text{Sd}_{i,i} - \text{Sd}_{j,j}} \right) \text{ if } \text{Sd}_{i,i} \neq \text{Sd}_{j,j} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \text{RRM}_{i,i} \leftarrow \cos(\theta\text{M}) \\ \quad \quad \quad \quad \quad \text{RRS}_{i,i} \leftarrow \cos(\theta\text{S}) \\ \quad \quad \quad \quad \quad \text{RRM}_{j,j} \leftarrow \cos(\theta\text{M}) \\ \quad \quad \quad \quad \quad \text{RRS}_{j,j} \leftarrow \cos(\theta\text{S}) \\ \quad \quad \quad \quad \quad \text{RRM}_{i,j} \leftarrow -\sin(\theta\text{M}) \\ \quad \quad \quad \quad \quad \text{RRS}_{i,j} \leftarrow -\sin(\theta\text{S}) \\ \quad \quad \quad \quad \quad \text{RRM}_{j,i} \leftarrow \sin(\theta\text{M}) \\ \quad \quad \quad \quad \quad \text{RRS}_{j,i} \leftarrow \sin(\theta\text{S}) \\ \quad \quad \quad \quad \quad \psi\text{M} \leftarrow \psi\text{M} \cdot \text{RRM} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \psi\text{S} \leftarrow \psi\text{S} \cdot \text{RRS} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \text{Md} \leftarrow \text{RRM}^T \cdot \text{Md} \cdot \text{RRM} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \text{Sd} \leftarrow \text{RRS}^T \cdot \text{Sd} \cdot \text{RRS} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \text{ddq0} \leftarrow \text{RRM}^T \cdot \text{ddq0} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \text{ddddq0} \leftarrow \text{RRM}^T \cdot \text{ddddq0} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \text{dtdtq0} \leftarrow \text{RRM}^T \cdot \text{dtdtq0} \end{array}$
---	---	--

$\begin{pmatrix} \text{Md} \\ \text{Sd} \\ \psi\text{M} \\ \psi\text{S} \\ \text{RRM} \\ \text{RRS} \\ \theta\text{M} \\ \theta\text{S} \\ \text{ddq0} \\ \text{ddddq0} \\ \text{dtdtq0} \end{pmatrix}$	$\begin{array}{l} \text{Md} \\ \text{Sd} \\ \psi\text{M} \\ \psi\text{S} \\ \text{RRM} \\ \text{RRS} \\ \theta\text{M} \\ \theta\text{S} \\ \text{ddq0} \\ \text{ddddq0} \\ \text{dtdtq0} \end{array}$
---	--

$$\text{RRM} = \begin{pmatrix} 1 & 1.813 \times 10^{-5} & 0 \\ -1.813 \times 10^{-5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Md} = \begin{pmatrix} 0.03385 & 0 & 7.71806 \times 10^{-11} \\ 0 & 0.04038 & 1.39938 \times 10^{-15} \\ 7.71806 \times 10^{-11} & 1.40047 \times 10^{-15} & 3.32003 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

$$\text{RRS} = \begin{pmatrix} 1 & -2.091 \times 10^{-5} & 0 \\ 2.091 \times 10^{-5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Sd} = \begin{pmatrix} -9.6152 \times 10^{-3} & 0 & -6.62993 \times 10^{-10} \\ 0 & -1.26726 & 1.38644 \times 10^{-14} \\ -6.62993 \times 10^{-10} & 1.39325 \times 10^{-14} & 4.98197 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Autovetores

Autovalores

$$\text{Ji} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Cd} := \alpha \text{JJ} \cdot \text{Ji} + \alpha \text{SS} \cdot \text{Sd} + \alpha \text{MM} \cdot \text{Md}$$

$$\text{Cd} = \begin{pmatrix} 0.49519 & 0 & -3.31497 \times 10^{-10} \\ 0 & -0.13363 & 6.93218 \times 10^{-15} \\ -3.31497 \times 10^{-10} & 6.96627 \times 10^{-15} & 0.50249 \end{pmatrix}$$

**6º Passo: Calcular a matriz modal ponderada**

$$\Phi_a := \text{JaBarraMeio} \cdot \text{RRS}$$

$$\Phi_a = \begin{pmatrix} 2.041 \times 10^{-3} & -4.267 \times 10^{-8} & 0 \\ 4.679 \times 10^{-8} & 2.238 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 1.681 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

**7º Passo: Calcular o vetor de força no novo referencial**

Vfzero

$$\Phi \text{RerT} := \Phi_a^T \cdot \text{Rer}^T = \begin{pmatrix} 2.041 \times 10^{-3} & 4.679 \times 10^{-8} & 0 \\ -4.267 \times 10^{-8} & 2.238 \times 10^{-3} & 0 \\ 3.133 \times 10^{-4} & 0 & 1.681 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

primeira função

$$\text{DD1v} := \Phi \text{RerT}_{0,0} \cdot (\text{A1qq}) + \Phi \text{RerT}_{0,1} \cdot (\text{A2qq}) + \Phi \text{RerT}_{0,2} \cdot (\text{A3qq}) = 0.18319$$

$$\text{DD2v} := \Phi \text{RerT}_{0,0} \cdot (\text{B1qq}) + \Phi \text{RerT}_{0,1} \cdot (\text{B2qq}) + \Phi \text{RerT}_{0,2} \cdot (\text{B3qq}) = 24.42536$$

$$\text{DD3v} := \Phi \text{RerT}_{0,0} \cdot (\text{C1qq}) + \Phi \text{RerT}_{0,1} \cdot (\text{C2qq}) + \Phi \text{RerT}_{0,2} \cdot (\text{C3qq}) = -2.45474913 \times 10^3$$

segunda função

$$DD1w := \Phi RerT_{1,0} \cdot (A1qq) + \Phi RerT_{1,1} \cdot (A2qq) + \Phi RerT_{1,2} \cdot (A3qq) = 0.26891$$

$$DD2w := \Phi RerT_{1,0} \cdot (B1qq) + \Phi RerT_{1,1} \cdot (B2qq) + \Phi RerT_{1,2} \cdot (B3qq) = 35.85447$$

$$DD3w := \Phi RerT_{1,0} \cdot (C1qq) + \Phi RerT_{1,1} \cdot (C2qq) + \Phi RerT_{1,2} \cdot (C3qq) = -3.60337431 \times 10^3$$

terceira função

$$DD1\phi := \Phi RerT_{2,0} \cdot (A1qq) + \Phi RerT_{2,1} \cdot (A2qq) + \Phi RerT_{2,2} \cdot (A3qq) = 0.58654$$

$$DD2\phi := \Phi RerT_{2,0} \cdot (B1qq) + \Phi RerT_{2,1} \cdot (B2qq) + \Phi RerT_{2,2} \cdot (B3qq) = 78.20473$$

$$DD3\phi := \Phi RerT_{2,0} \cdot (C1qq) + \Phi RerT_{2,1} \cdot (C2qq) + \Phi RerT_{2,2} \cdot (C3qq) = -7.85957512 \times 10^3$$

**8º Passo: reescrever as condições iniciais da EDO no referencial generalizado**

$$\Phi a^{-1} \cdot Rer^{-1} = \begin{pmatrix} 490.047 & 9.345 \times 10^{-3} & -91.331 \\ -0.01 & 446.885 & 1.91 \times 10^{-3} \\ 0 & 0 & 594.88 \end{pmatrix}$$

$$\Phi a^{-1} \cdot Rer^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**9º Passo: Escrever as funções u1(x) e g1(t), logo o primeiro modo de vibração**

$\lambda\lambda := 1$	$\lambda1a := 1.98334$	$\lambda1b := 4.67319$	$\lambda1c := 7.89001$
	$\lambda2a := 1.71279$	$\lambda2b := 4.56494$	$\lambda2c := 7.82638$
	$\alpha1a := \frac{\lambda1a}{HH} = 0.01983$	$\alpha1b := \frac{\lambda1b}{HH} = 0.04673$	$\alpha1c := \frac{\lambda1c}{HH} = 0.0789$
	$\alpha2a := \frac{\lambda2a}{HH} = 0.01713$	$\alpha2b := \frac{\lambda2b}{HH} = 0.04565$	$\alpha2c := \frac{\lambda2c}{HH} = 0.07826$
	$\omega11 := \frac{\lambda1a \cdot \lambda2a}{HH^2} = 3.397044919 \times 10^{-4}$	a - 1º MODO de vibração	
	$\omega22 := \frac{\lambda1b \cdot \lambda2b}{HH^2} = 2.133283196 \times 10^{-3}$	b - 2º MODO de vibração	
	$\omega33 := \frac{\lambda1c \cdot \lambda2c}{HH^2} = 6.175021646 \times 10^{-3}$	c - 3º MODO de vibração	

$$\begin{aligned}
\alpha_{11a} &:= \sqrt{\frac{\lambda\lambda^2}{2} + \sqrt{\frac{\lambda\lambda^2}{2} + \omega_{11}^2}} = 1.09868 & \alpha_{11b} &:= \sqrt{\frac{\lambda\lambda^2}{2} + \sqrt{\frac{\lambda\lambda^2}{2} + \omega_{22}^2}} = 1.09869 \\
\alpha_{22a} &:= \sqrt{-\frac{\lambda\lambda^2}{2} + \sqrt{\frac{\lambda\lambda^2}{2} + \omega_{11}^2}} = 0.45509 & \alpha_{22b} &:= \sqrt{-\frac{\lambda\lambda^2}{2} + \sqrt{\frac{\lambda\lambda^2}{2} + \omega_{22}^2}} = 0.45509 \\
\alpha_{11c} &:= \sqrt{\frac{\lambda\lambda^2}{2} + \sqrt{\frac{\lambda\lambda^2}{2} + \omega_{33}^2}} = 1.0987 & \alpha_{22c} &:= \sqrt{-\frac{\lambda\lambda^2}{2} + \sqrt{\frac{\lambda\lambda^2}{2} + \omega_{33}^2}} = 0.45512
\end{aligned}$$

$$B5a := \left( \alpha_{11a} \cdot \alpha_{22a} + \frac{\alpha_{11a}^3}{\alpha_{22a}} \right) \cdot \cosh(\alpha_{1a} \cdot HH) \cdot \sin(\alpha_{2a} \cdot HH) - (\alpha_{11a}^2 + \alpha_{22a}^2) \cdot \sinh(\alpha_{1a} \cdot HH) \cdot \cos(\alpha_{2a} \cdot HH) = 13.22662$$

$$B5b := \left( \alpha_{11b} \cdot \alpha_{22b} + \frac{\alpha_{11b}^3}{\alpha_{22b}} \right) \cdot \cosh(\alpha_{1b} \cdot HH) \cdot \sin(\alpha_{2b} \cdot HH) - (\alpha_{11b}^2 + \alpha_{22b}^2) \cdot \sinh(\alpha_{1b} \cdot HH) \cdot \cos(\alpha_{2b} \cdot HH) = -169.64033$$

$$B5c := \left( \alpha_{11c} \cdot \alpha_{22c} + \frac{\alpha_{11c}^3}{\alpha_{22c}} \right) \cdot \cosh(\alpha_{1c} \cdot HH) \cdot \sin(\alpha_{2c} \cdot HH) - (\alpha_{11c}^2 + \alpha_{22c}^2) \cdot \sinh(\alpha_{1c} \cdot HH) \cdot \cos(\alpha_{2c} \cdot HH) = 4.50486 \times 10^3$$

$$B1a := \frac{\alpha_{11a}^2 \cdot \sinh(\alpha_{1a} \cdot HH) + \alpha_{11a} \cdot \alpha_{22a} \cdot \sin(\alpha_{2a} \cdot HH)}{B5a} = 0.36275 \quad \frac{\alpha_{11a}}{\alpha_{22a}} = 2.41421$$

$$B1b := \frac{\alpha_{11b}^2 \cdot \sinh(\alpha_{1b} \cdot HH) + \alpha_{11b} \cdot \alpha_{22b} \cdot \sin(\alpha_{2b} \cdot HH)}{B5b} = -0.37788 \quad \frac{\alpha_{11b}}{\alpha_{22b}} = 2.4142$$

$$B1c := \frac{\alpha_{11c}^2 \cdot \sinh(\alpha_{1c} \cdot HH) + \alpha_{11c} \cdot \alpha_{22c} \cdot \sin(\alpha_{2c} \cdot HH)}{B5c} = 0.3579 \quad \frac{\alpha_{11c}}{\alpha_{22c}} = 2.41408$$

$$k_{ua} := \frac{(\alpha_{11a}^2 \cdot \cosh(\alpha_{1a} \cdot HH) + \alpha_{22a}^2 \cdot \cos(\alpha_{2a} \cdot HH))}{(\alpha_{11a}^2 \cdot \sinh(\alpha_{1a} \cdot HH) + \alpha_{11a} \cdot \alpha_{22a} \cdot \sin(\alpha_{2a} \cdot HH))} = 0.92535$$

$$k_{ub} := \frac{(\alpha_{11b}^2 \cdot \cosh(\alpha_{1b} \cdot HH) + \alpha_{22b}^2 \cdot \cos(\alpha_{2b} \cdot HH))}{(\alpha_{11b}^2 \cdot \sinh(\alpha_{1b} \cdot HH) + \alpha_{11b} \cdot \alpha_{22b} \cdot \sin(\alpha_{2b} \cdot HH))} = 1.00742$$

$$k_{uc} := \frac{(\alpha_{11c}^2 \cdot \cosh(\alpha_{1c} \cdot HH) + \alpha_{22c}^2 \cdot \cos(\alpha_{2c} \cdot HH))}{(\alpha_{11c}^2 \cdot \sinh(\alpha_{1c} \cdot HH) + \alpha_{11c} \cdot \alpha_{22c} \cdot \sin(\alpha_{2c} \cdot HH))} = 0.99969$$

$$M11a := M11 \cdot p = \begin{pmatrix} 9.095 \times 10^{-13} \\ 0 \\ 7.276 \times 10^{-12} \end{pmatrix}$$

integrando Qk

$$Q31 := \int_0^{HH} \left[ \left[ \frac{-q^2}{2 \cdot HH} \cdot x^2 - q1 \cdot x + (Q + q1 \cdot HH) \right] \cdot (ez \cdot \cos(\theta G)) - M11a_2 \right] \cdot B1a \left[ \cosh(\alpha1a \cdot x) - \cos(\alpha2a \cdot x) + kua \cdot \left( -\sinh(\alpha1a \cdot x) + \frac{\alpha11a}{\alpha22a} \cdot \sin(\alpha2a \cdot x) \right) \right] dx$$

$$Q31 = 9.943255204 \times 10^6$$

$$Q32 := \int_0^{HH} \left[ \left[ \frac{-q^2}{2 \cdot HH} \cdot x^2 - q1 \cdot x + (Q + q1 \cdot HH) \right] \cdot (ez \cdot \cos(\theta G)) - M11a_2 \right] \cdot B1b \left[ \cosh(\alpha1b \cdot x) - \cos(\alpha2b \cdot x) + kub \cdot \left( -\sinh(\alpha1b \cdot x) + \frac{\alpha11b}{\alpha22b} \cdot \sin(\alpha2b \cdot x) \right) \right] dx$$

$$Q32 = 1.306673592 \times 10^8$$

$$Q33 := \int_0^{HH} \left[ \left[ \frac{-q^2}{2 \cdot HH} \cdot x^2 - q1 \cdot x + (Q + q1 \cdot HH) \right] \cdot (ez \cdot \cos(\theta G)) - M11a_2 \right] \cdot B1c \left[ \cosh(\alpha1c \cdot x) - \cos(\alpha2c \cdot x) + kuc \cdot \left( -\sinh(\alpha1c \cdot x) + \frac{\alpha11c}{\alpha22c} \cdot \sin(\alpha2c \cdot x) \right) \right] dx$$

$$Q33 = -6.131436193 \times 10^7$$

$$m11 := Md_{0,0} = 0.03385 \quad s11 := Sd_{0,0} = -9.6152 \times 10^{-3} \quad c11 := Cd_{0,0} = 0.49519$$

$$m22 := Md_{1,1} = 0.04038 \quad s22 := Sd_{1,1} = -1.26726 \quad c22 := Cd_{1,1} = -0.13363$$

$$m33 := Md_{2,2} = 3.32003 \times 10^{-5} \quad s33 := Sd_{2,2} = 4.98197 \times 10^{-3} \quad c33 := Cd_{2,2} = 0.50249$$

$$\gamma_{31} := \frac{\omega_{11}^2 - c_{33} \cdot \omega_{11}^4}{m_{33}} = 3.47585 \times 10^{-3}$$

$$\gamma_{32} := \frac{\omega_{22}^2 - c_{33} \cdot \omega_{22}^4}{m_{33}} = 0.13707$$

$$\gamma_{33} := \frac{\omega_{33}^2 - c_{33} \cdot \omega_{33}^4}{m_{33}} = 1.14849$$

$$k11_3 := \frac{\omega_{11}^2 - \gamma_{31} \cdot m_{33}}{c_{33} \cdot m_{33}} = 4.0111 \times 10^{-10}$$

$$k21_3 := \frac{\gamma_{31} \cdot m_{33} - c_{33} \cdot \omega_{11}^4}{m_{33}} = 3.47585 \times 10^{-3}$$

$$k12_3 := \frac{\omega_{22}^2 - \gamma_{32} \cdot m_{33}}{c_{33} \cdot m_{33}} = 6.2381 \times 10^{-7}$$

$$k22_3 := \frac{\gamma_{32} \cdot m_{33} - c_{33} \cdot \omega_{22}^4}{m_{33}} = 0.13707$$

$$k13_3 := \frac{\omega_{33}^2 - \gamma_{33} \cdot m_{33}}{c_{33} \cdot m_{33}} = 4.37938 \times 10^{-5}$$

$$k23_3 := \frac{\gamma_{33} \cdot m_{33} - c_{33} \cdot \omega_{33}^4}{m_{33}} = 1.14847$$

$$k31_3 := s33 \cdot k21_3 - k11_3 = 1.732 \times 10^{-5}$$

$$k32_3 := s33 \cdot k22_3 - k12_3 = 6.823 \times 10^{-4}$$

$$k33_3 := s33 \cdot k23_3 - k13_3 = 5.678 \times 10^{-3}$$

calculando as massas generalizadas:

$$Mk13 := \int_0^{HH} \left[ m_{33} \cdot \left[ B1a \left[ \cosh(\alpha1a \cdot x) - \cos(\alpha2a \cdot x) + kua \cdot \left( -\sinh(\alpha1a \cdot x) + \frac{\alpha11a}{\alpha22a} \cdot \sin(\alpha2a \cdot x) \right) \right] \right]^2 \right] dx$$

$$Mk13 = 1.2374 \times 10^{-3}$$



$$Mk23 := \int_0^{HH} \left[ m33 \cdot B1b \cdot \left[ \cosh(\alpha1b \cdot x) - \cos(\alpha2b \cdot x) + kub \cdot \left( -\sinh(\alpha1b \cdot x) + \frac{\alpha11b}{\alpha22b} \cdot \sin(\alpha2b \cdot x) \right) \right] \right] dx$$

$$Mk23 = 1.59491 \times 10^{-3}$$

$$Mk33 := \int_0^{HH} \left[ m33 \cdot B1c \cdot \left[ \cosh(\alpha1c \cdot x) - \cos(\alpha2c \cdot x) + kuc \cdot \left( -\sinh(\alpha1c \cdot x) + \frac{\alpha11c}{\alpha22c} \cdot \sin(\alpha2c \cdot x) \right) \right] \right] dx$$

$$Mk33 = 1.4532 \times 10^{-3}$$

$$\omega b := 3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$G31_3 := \frac{Q31}{(k31_3 - c33 \cdot k11_3 \cdot \omega b - \omega b^2) \cdot Mk13} = -8.92843 \times 10^8$$

$$G32_3 := \frac{Q32}{(k32_3 - c33 \cdot k12_3 \cdot \omega b - \omega b^2) \cdot Mk23} = -9.10374 \times 10^9$$

$$G33_3 := \frac{Q33}{(k33_3 - c33 \cdot k13_3 \cdot \omega b - \omega b^2) \cdot Mk33} = 4.691 \times 10^9$$

$$G11_3 := -G31_3 \cdot \frac{\omega b}{\sqrt{\gamma31}} = 4.543 \times 10^{10}$$

$$G12_3 := -G32_3 \cdot \frac{\omega b}{\sqrt{\gamma32}} = 7.377 \times 10^{10}$$

$$G13_3 := -G33_3 \cdot \frac{\omega b}{\sqrt{\gamma33}} = -1.313 \times 10^{10}$$

**10º Passo: resolver as EDO no referencial generalizado**

$B1a = 0.36275$	$B1b = -0.37788$	$B1c = 0.3579$	$G11_3 = 4.543 \times 10^{10}$
$kua = 0.92535$	$kub = 1.00742$	$kuc = 0.99969$	$G31_3 = -8.928 \times 10^8$
$\alpha11a = 1.09868$	$\alpha11b = 1.09869$	$\alpha11c = 1.0987$	$G12_3 = 7.377 \times 10^{10}$
$\alpha22a = 0.45509$	$\alpha22b = 0.45509$	$\alpha22c = 0.45512$	$G32_3 = -9.104 \times 10^9$
$\frac{\alpha11a}{\alpha22a} = 2.41421$	$\frac{\alpha11b}{\alpha22b} = 2.4142$	$\frac{\alpha11c}{\alpha22c} = 2.41408$	$G13_3 = -1.313 \times 10^{10}$
			$G33_3 = 4.691 \times 10^9$

$$u1(x) := B1a \cdot \left[ \cosh(\alpha1a \cdot x) - \cos(\alpha2a \cdot x) + kua \cdot \left( -\sinh(\alpha1a \cdot x) + \frac{\alpha11a}{\alpha22a} \cdot \sin(\alpha2a \cdot x) \right) \right]$$

$$u2(x) := B1b \cdot \left[ \cosh(\alpha1b \cdot x) - \cos(\alpha2b \cdot x) + kub \cdot \left( -\sinh(\alpha1b \cdot x) + \frac{\alpha11b}{\alpha22b} \cdot \sin(\alpha2b \cdot x) \right) \right]$$

$$u3(x) := B1c \cdot \left[ \cosh(\alpha1c \cdot x) - \cos(\alpha2c \cdot x) + kuc \cdot \left( -\sinh(\alpha1c \cdot x) + \frac{\alpha11c}{\alpha22c} \cdot \sin(\alpha2c \cdot x) \right) \right]$$

montando  $q_3(x,t)$  pois será apenas este necessário na composição de  $\phi(x)$  no CG

$$q_3(x,t) := u_1(x) \cdot (G_{11_3} \cdot \sin(\gamma_{31} \cdot t) + G_{31_3} \cdot \sin(\omega b \cdot t)) + u_2(x) \cdot (G_{12_3} \cdot \sin(\gamma_{32} \cdot t) + G_{32_3} \cdot \sin(\omega b \cdot t)) + \\ u_3(x) \cdot (G_{13_3} \cdot \sin(\gamma_{33} \cdot t) + G_{33_3} \cdot \sin(\omega b \cdot t))$$

**10º Passo: Solução da EDP em  $\phi(x,t)$  no referencial inicial**

$$R\Phi := R_{er} \cdot \Phi_a = \begin{pmatrix} 2.041 \times 10^{-3} & -4.267 \times 10^{-8} & 3.133 \times 10^{-4} \\ 4.679 \times 10^{-8} & 2.238 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 1.681 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

A função  $\phi(x)$

funções  $u(x)$

$$\begin{aligned} B_{1REFa} &:= R\Phi_{2,2} \cdot B_{1a} & B_{1REFb} &:= R\Phi_{2,2} \cdot B_{1b} & B_{1REFc} &:= R\Phi_{2,2} \cdot B_{1c} \\ k_{uREFa} &:= R\Phi_{2,2} \cdot k_{ua} & k_{uREFb} &:= R\Phi_{2,2} \cdot k_{ub} & k_{uREFc} &:= R\Phi_{2,2} \cdot k_{uc} \\ \alpha_{11REFa} &:= R\Phi_{2,2} \cdot \alpha_{11a} & \alpha_{11REFb} &:= R\Phi_{2,2} \cdot \alpha_{11b} & \alpha_{11REFc} &:= R\Phi_{2,2} \cdot \alpha_{11c} \\ \alpha_{22REFa} &:= R\Phi_{2,2} \cdot \alpha_{22a} & \alpha_{22REFb} &:= R\Phi_{2,2} \cdot \alpha_{22b} & \alpha_{22REFc} &:= R\Phi_{2,2} \cdot \alpha_{22c} \\ Raz_{REFa} &:= R\Phi_{2,2} \cdot \frac{\alpha_{11a}}{\alpha_{22a}} & Raz_{REFb} &:= R\Phi_{2,2} \cdot \frac{\alpha_{11b}}{\alpha_{22b}} & Raz_{REFc} &:= R\Phi_{2,2} \cdot \frac{\alpha_{11c}}{\alpha_{22c}} \end{aligned}$$

$$u_{1REF}(x) := B_{1REFa} \cdot [\cosh(\alpha_{11REFa} \cdot x) - \cos(\alpha_{22REFa} \cdot x) + k_{uREFa} \cdot (-\sinh(\alpha_{11REFa} \cdot x) + Raz_{REFa} \cdot \sin(\alpha_{22REFa} \cdot x))] +$$

$$u_{2REF}(x) := B_{1REFb} \cdot [\cosh(\alpha_{11REFb} \cdot x) - \cos(\alpha_{22REFb} \cdot x) + k_{uREFb} \cdot (-\sinh(\alpha_{11REFb} \cdot x) + Raz_{REFb} \cdot \sin(\alpha_{22REFb} \cdot x))] +$$

$$u_{3REF}(x) := B_{1REFc} \cdot [\cosh(\alpha_{11REFc} \cdot x) - \cos(\alpha_{22REFc} \cdot x) + k_{uREFc} \cdot (-\sinh(\alpha_{11REFc} \cdot x) + Raz_{REFc} \cdot \sin(\alpha_{22REFc} \cdot x))] +$$

funções  $g(t)$

$$\begin{aligned} G_{11REF_3} &:= R\Phi_{2,2} \cdot G_{11_3} & G_{13REF_3} &:= R\Phi_{2,2} \cdot G_{13_3} \\ G_{31REF_3} &:= R\Phi_{2,2} \cdot G_{31_3} & G_{33REF_3} &:= R\Phi_{2,2} \cdot G_{33_3} \\ G_{12REF_3} &:= R\Phi_{2,2} \cdot G_{12_3} & \gamma_{REF31} &:= R\Phi_{2,2} \cdot \gamma_{31} \\ G_{32REF_3} &:= R\Phi_{2,2} \cdot G_{32_3} & \gamma_{REF32} &:= R\Phi_{2,2} \cdot \gamma_{32} \\ & & \gamma_{REF33} &:= R\Phi_{2,2} \cdot \gamma_{33} \end{aligned}$$

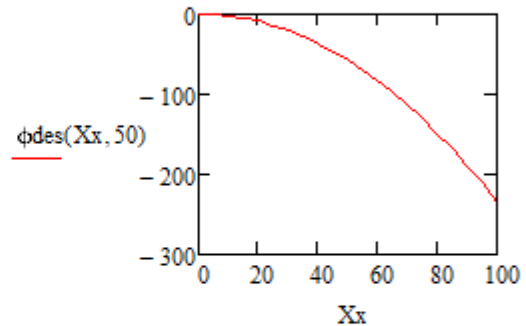
$$\phi_{des}(X_x, T_t) := u_{1REF}(X_x) \cdot (G_{11REF_3} \cdot \sin(\gamma_{REF31} \cdot T_t) + G_{31REF_3} \cdot \sin(\omega b \cdot T_t)) + \\ + u_{2REF}(X_x) \cdot (G_{12REF_3} \cdot \sin(\gamma_{REF32} \cdot T_t) + G_{32REF_3} \cdot \sin(\omega b \cdot T_t)) + \\ + u_{3REF}(X_x) \cdot (G_{13REF_3} \cdot \sin(\gamma_{REF33} \cdot T_t) + G_{33REF_3} \cdot \sin(\omega b \cdot T_t))$$

$$B_{des}(X_x, T_t) := E \cdot I \cdot \omega^2 \cdot \left[ B_{1REFa} \cdot [\alpha_{11REFa}^2 \cdot \cosh(\alpha_{11REFa} \cdot X_x) + \alpha_{22REFa}^2 \cdot \cos(\alpha_{22REFa} \cdot X_x) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + kuREFa \cdot \left( -\alpha_{11}REFa^2 \cdot \sinh(\alpha_{11}REFa \cdot Xx) + \alpha_{11}REFa \cdot \alpha_{22}REFa \cdot \sin(\alpha_{22}REFa \cdot Xx) \right) \Big] \cdot \\
& \cdot \left( G_{11}REF_3 \cdot \sin(\gamma_{REF31} \cdot Tt) + G_{31}REF_3 \cdot \sin(\omega b \cdot Tt) \right) + \\
& + \left[ B_{1}REFb \cdot \left[ \alpha_{11}REFb^2 \cdot \cosh(\alpha_{11}REFb \cdot Xx) + \alpha_{22}REFb^2 \cdot \cos(\alpha_{22}REFb \cdot Xx) + \right. \right. \\
& + kuREFb \cdot \left( -\alpha_{11}REFb^2 \cdot \sinh(\alpha_{11}REFb \cdot Xx) + \alpha_{11}REFb \cdot \alpha_{22}REFb \cdot \sin(\alpha_{22}REFb \cdot Xx) \right) \Big] \cdot \left( \right. \\
& \cdot \left( G_{12}REF_3 \cdot \sin(\gamma_{REF32} \cdot Tt) + G_{32}REF_3 \cdot \sin(\omega b \cdot Tt) \right) + \left[ B_{1}REFc \cdot \left[ \alpha_{11}REFc^2 \cdot \cosh(\alpha_{11}REFc \cdot Xx) \cdot \right. \right. \\
& + \alpha_{22}REFc^2 \cdot \cos(\alpha_{22}REFc \cdot Xx) + kuREFc \cdot \left( -\alpha_{11}REFc^2 \cdot \sinh(\alpha_{11}REFc \cdot Xx) + \right. \\
& + \alpha_{11}REFc \cdot \alpha_{22}REFc \cdot \sin(\alpha_{22}REFc \cdot Xx) \Big] \Big] \cdot \left. \right) \cdot \\
& \cdot \left( G_{13}REF_3 \cdot \sin(\gamma_{REF33} \cdot Tt) + G_{33}REF_3 \cdot \sin(\omega b \cdot Tt) \right) \Big]
\end{aligned}$$

$$Tt := 50 \quad s \quad E \cdot I \omega^2 = 8.427 \times 10^8$$

Xx =	$\phi_{des}(Xx, Tt) =$	$B_{des}(Xx, Tt) =$
0	0	$-3.9942202 \cdot 10^7$
5	$-407.03045 \cdot 10^{-3}$	$-3.9943171 \cdot 10^7$
10	-1.99907	$-3.9946961 \cdot 10^7$
15	-4.77624	$-3.9953573 \cdot 10^7$
20	-8.73873	$-3.9963009 \cdot 10^7$
25	-13.88681	$-3.9975267 \cdot 10^7$
30	-20.22084	$-3.9990351 \cdot 10^7$
35	-27.74128	$-4.000826 \cdot 10^7$
40	-36.44864	$-4.0028997 \cdot 10^7$
45	-46.34355	$-4.0052563 \cdot 10^7$
50	-57.42669	$-4.007896 \cdot 10^7$
55	-69.69885	$-4.0108191 \cdot 10^7$
60	-83.1609	$-4.0140259 \cdot 10^7$
65	-97.81377	$-4.0175166 \cdot 10^7$
70	-113.65851	$-4.0212915 \cdot 10^7$
75	-130.69623	$-4.0253509 \cdot 10^7$
80	-148.92814	$-4.0296953 \cdot 10^7$
85	-168.35551	$-4.0343249 \cdot 10^7$
90	-188.97972	$-4.0392403 \cdot 10^7$
95	-210.80223	$-4.0444417 \cdot 10^7$
100	-233.82458	$-4.0499298 \cdot 10^7$



## TUTORIAL DE SIMULAÇÃO DOS MODOS DE VIBRAÇÃO NO ANSYS

Este apêndice é destinado a apresentar as decisões implementadas na simulação dos modos de vibração através do software ANSYS. Sendo estas listadas como:

**1ª ETAPA:** Desenhar a geometria do pilar de ponte destinado a ser procedida a análise modal, no AutoCAD 3D e salvar o arquivo da geometria na extensão “sat”.

**2ª ETAPA:** Modelar no ANSYS o pilar com geometria desenhado no AutoCAD, através da calculadora “MODAL”.

a) Ativar a função MODAL com clique duplo

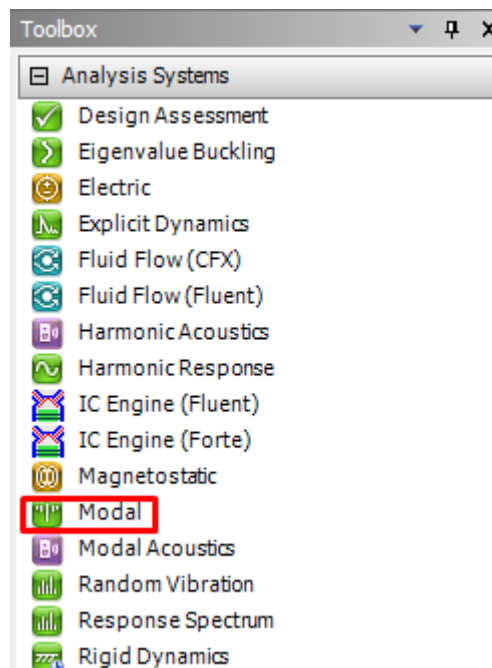
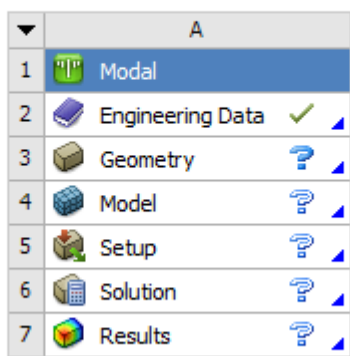


Fig. E.1

obtendo-se:

## Project Schematic



Análise Modal do Pilar metálico, em Duplo T e com lintéis

Fig. E.2

- b) Clicar duplamente na opção “Engineering Data” apresentado na figura E.2. Abrindo-se a tela de definição dos materiais.

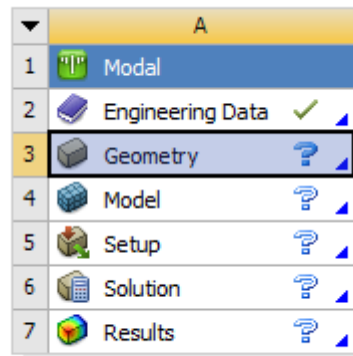
Outline of Schematic A2: Engineering Data					
	A	B	C	D	E
1	Contents of Engineering Data			Source	Description
2	Material				
3	Structural Steel				Fatigue Data at zero mean stress comes from 1998 ASME BPV Code, Section 8, Div 2, Table 5-110.1
*	Click here to add a new material				

Properties of Outline Row 3: Structural Steel					
	A	B	C	D	E
1	Property	Value	Unit		
2	Material Field Variables	Table			
3	Density	7850	kg m <sup>-3</sup>		
4	Isotropic Secant Coefficient of Thermal Expansion				
6	Isotropic Elasticity				
7	Derive from	Young'...			
8	Young's Modulus	2E+11	Pa		
9	Poisson's Ratio	0,3			
10	Bulk Modulus	1,6667E+11	Pa		
11	Shear Modulus	7,6923E+10	Pa		

Fig. E.3

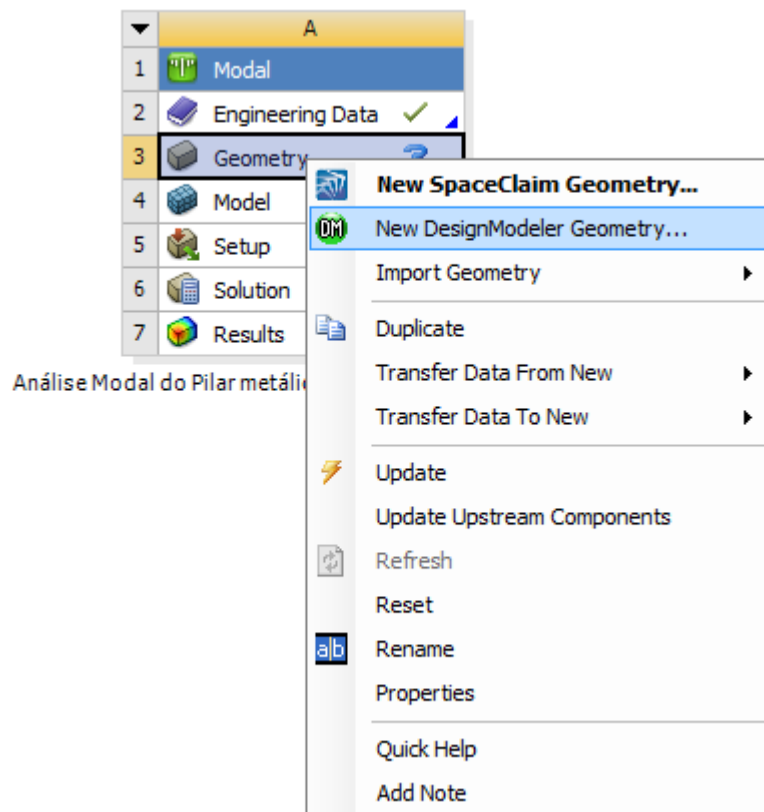
c) Clicar na opção “Geometry” apresentado na figura E.4:



Análise Modal do Pilar metálico, em Duplo T e com lintéis

**Fig. E.4**

**1ª opção de criar geometria:** selecionar agora a opção “New DesignModeler Geometry...” na figura E.5.



**Fig. E.5**

será aberta uma janela de desenho no próprio ANSYS, ver figura E.6.

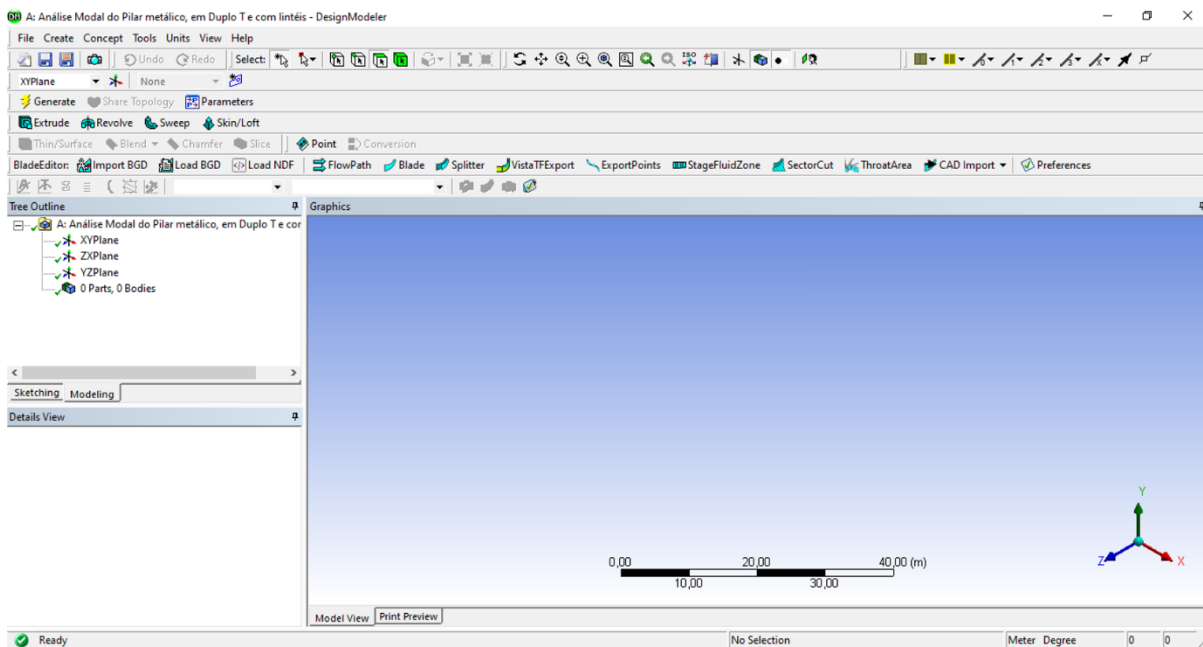


Fig. E.6

**2ª opção de criar geometria:** será gerar a geometria do pilar no AutoCAD (1ª etapa deste tutorial), processando isso através do comando: “File” → “Import External Geometry File...” na janela apresentada na figura E.6, conforme observa-se na figura E.7.

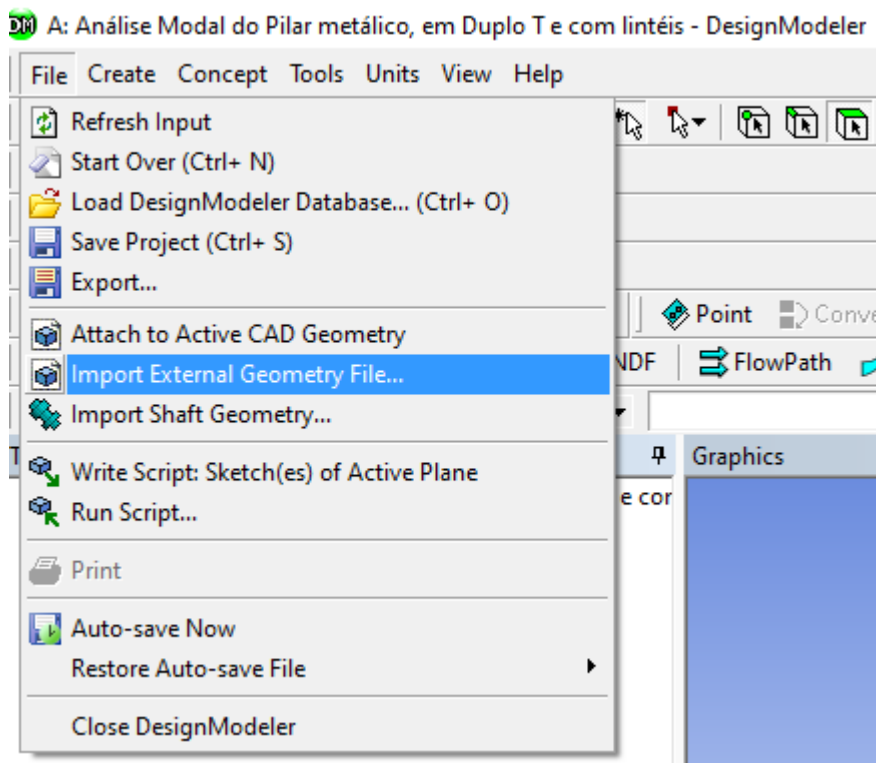


Fig. E.7

navega-se no computador a fim de importar o arquivo da geometria do pilar (1ª etapa em “sat”, conforme é apresentado na figura E.8.

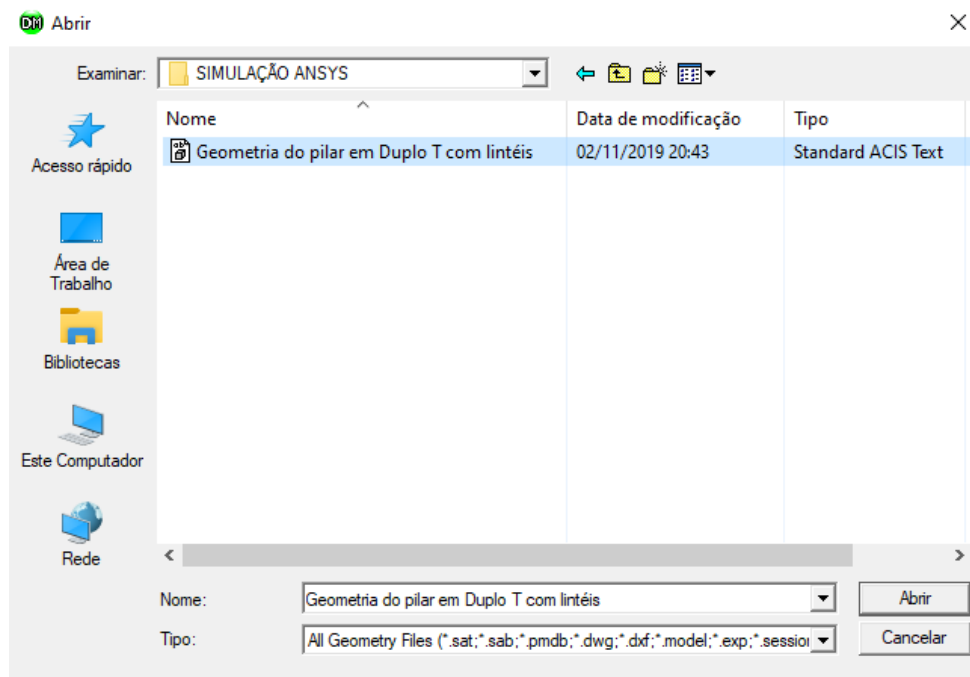
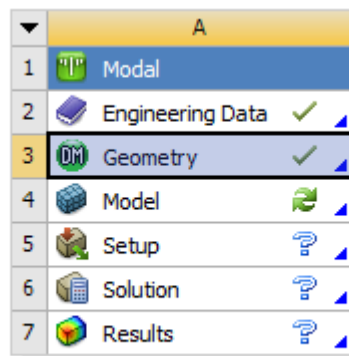


Fig. E.8

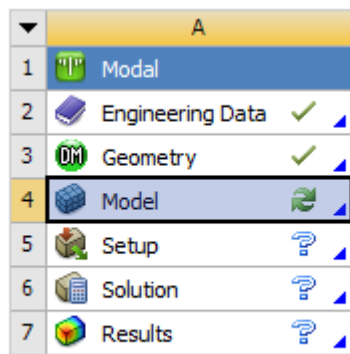
clicar no comando “Generate” e em seguida “Import2” e em seguida o arquivo já foi gerado, e daí pode-se fechar a janela “Design Modeler”. Por fim, observa-se na figura E.9 que o item “Geometry” está atendida.



Análise Modal do Pilar metálico, em Duplo T e com lintéis

Fig. E.9

proceder com clique duplo no item “Model” apresentado na figura E.10.

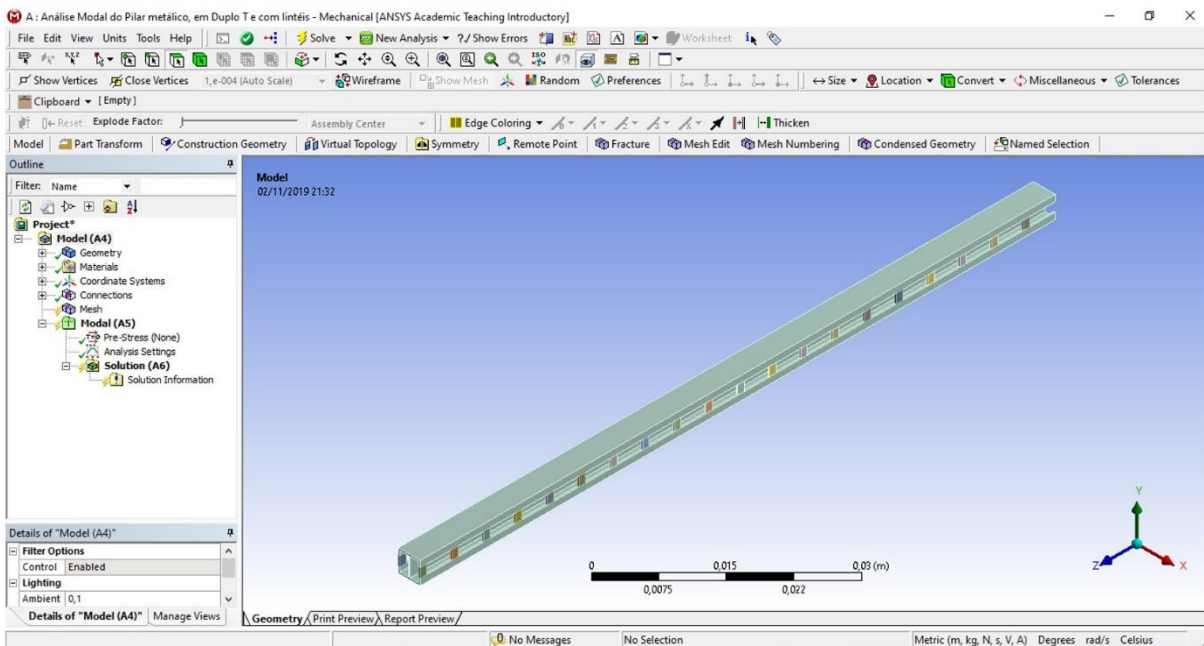


Análise Modal do Pilar metálico, em Duplo T e com lintéis

Fig. E.10

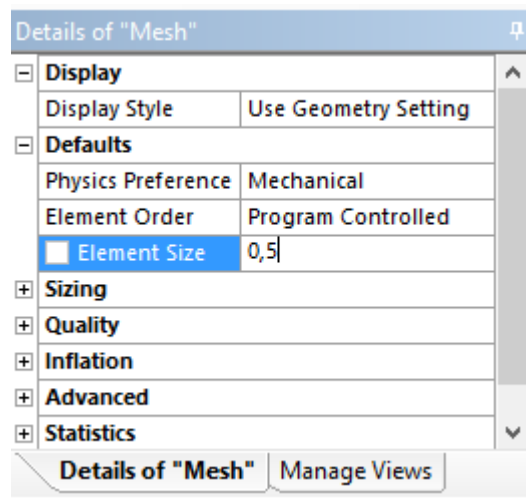


será aberta a janela “Model”, conforme consta na figura E.11.



**Fig. E.11**

selecionar na aba “Outline” → “Mesh” e em “Details of Mesh” vai-se até a opção de definição da malha de elementos finitos “Element Size” e preenche-se por decrementos até que o número total de nós da modelagem caiba dentro da licença do ANSYS que se possua.



**Fig. E.12**

a quantidade de nós é observada ao clicar em “Mesh” com o botão direito e clicar em “Generate Mesh”, e em seguida na aba “Details of Mesh” observa-se “Statistics” a quantificação dos Nós (Nodes) e dos elementos finitos (Elements).