



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
– Mestrado – Doutorado –

**ESTUDO TEÓRICO E COMPARAÇÃO EXPERIMENTAL
DOS ESCOAMENTOS INTERNOS E EXTERNOS
DESCENDENTES DA PELÍCULA DE SOLUÇÃO ÁGUA E
BROMETO DE LÍTIO EM ABSORVEDORES DE TUBOS
HORIZONTAIS E VERTICAIS**

por

JUANICE HELENA DE ANDRADE

*Tese de Doutorado apresentada à Universidade Federal da
Paraíba para obtenção do título de Doutor.*

JUANICE HELENA DE ANDRADE

**ESTUDO TEÓRICO E COMPARAÇÃO EXPERIMENTAL
DOS ESCOAMENTOS INTERNOS E EXTERNOS
DESCENDENTES DA PELÍCULA DE SOLUÇÃO ÁGUA E
BROMETO DE LÍTIO EM ABSORVEDORES DE TUBOS
HORIZONTAIS E VERTICAIS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal da Paraíba, em cumprimento às exigências para o título de doutor.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Antônio Cabral dos Santos

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

A553e Andrade, Juanice Helena de.
ESTUDO TEÓRICO E COMPARAÇÃO EXPERIMENTAL DOS
ESCOAMENTOS INTERNOS E EXTERNOS DESCENDENTES DA
PELÍCULA DE SOLUÇÃO ÁGUA E BROMETO DE LÍTIO EM
ABSORVEDORES DE TUBOS HORIZONTAIS E VERTICAIS / Juanice
Helena de Andrade. - João Pessoa, 2020.
150 f. : il.

Orientação: Carlos Antonio Cabral dos Santos.
Tese (Doutorado) - UFPB/CT.

1. Transferência Simultânea de Calor e Massa. 2.
Refrigeração por Absorção. 3. Película descendente. 4.
Absorvedor. 5. GITT. I. Santos, Carlos Antonio Cabral
dos. II. Título.

UFPB/BC

**ESTUDO TEÓRICO E COMPARAÇÃO EXPERIMENTAL DOS
ESCOAMENTOS INTERNOS E EXTERNOS DESCENDENTES DA
PELÍCULA DE SOLUÇÃO ÁGUA E BROMETO DE LÍTIO EM
ABSORVEDORES DE TUBOS HORIZONTAIS E VERTICAIS**

por

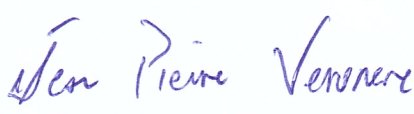
JUANICE HELENA DE ANDRADE

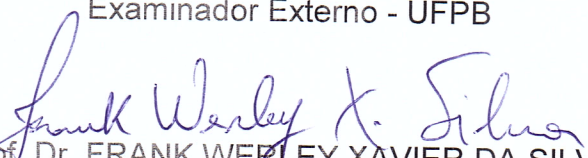
Tese aprovada em 25 de julho de 2018


Prof. Dr. CARLOS ANTONIO CABRAL DOS SANTOS
Orientador - UFPB


Prof. Dr. FRANCISCO ANTONIO BELO
Examinador Interno - UFPB


Prof. Dr. ABEL CAVALCANTE LIMA FILHO
Examinador Interno - UFPB


Eng. Dr. JEAN PIERRE VERONESE
Examinador Externo - UFPB


Prof. Dr. FRANK WERLEY XAVIER DA SILVA
Examinador Externo - IFAL

DEDICATÓRIA

- *Dedico este trabalho ao meu pai, Benedito, e a minha mãe, Luzia, pela dedicação na educação e todo esforço para educar os quatro filhos com carinho e apoio necessário.*
- *Aos meus irmãos, Celma, Joilton, e em especial a minha irmã Josenice que mesmo com todas as suas atividades toda semana me ligava para me dar apoio e me incentivar nesta jornada.*
- *Aos meus queridos e amados filhos, Mariana e Ricardo, pelo incentivo, paciência, por terem suportado a distância durante este longo período longe de casa, por todas as horas ausentes, e pelo grande amor que nos unem, sei que não seria feliz se vocês não existissem ao meu lado.*
- *Ao meu esposo, Mário, pelo apoio, compreensão nessa minha caminhada, por ter me incentivado não só nos momentos difíceis, mas ter compreendido a minha ausência nestes últimos anos, ter ficado sempre ao meu lado dando força para continuar os estudos e pelo amor que construimos ao longo dos anos.*
- *E a todos os meus familiares e amigos.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente quero agradecer a Deus, que nos guia e protege, pela oportunidade a vida, pela infinita bondade, fé, esperança e sabedoria, e por me ajudar a chegar ao final desta etapa.

Ao Professor Carlos Antônio Cabral dos Santos, pelas orientações fornecidas, discussões enriquecedoras, dedicação, confiança depositada em mim, e pela amizade construída desde o mestrado e dando continuidade no doutorado, com certeza sem a sua orientação não teria chegado até o final, quero que saiba que sou muito grata por tudo.

Aos amigos e colegas de doutorado Dhiego Veloso e Thiago Andrade, muito obrigada pela ajuda na conclusão do meu trabalho, fica registrado aqui o meu agradecimento especial aos dois.

Aos Professores e amigos Frank Werley e Jean Pierre, muito obrigado pelo incentivo nas horas difíceis e ajuda na finalização do meu doutorado.

Aos colegas da pós-graduação Wilton Cavalcante, Márcio Rocha, Adriano Marques, Marcos Cezar, Ygor Silveira, hoje posso dizer que encontrei grandes amigos nesta caminhada rumo ao conhecimento.

As amigas Tarciana, Iolanda, Ozelita, Mabel, Rayssa, Patricia, Priscila, que conquistei em João Pessoa, saibam que vou levar maravilhosas lembranças de dias incríveis com cada uma de vocês.

A amiga Monica Rodrigues pela ajuda, dedicação, presteza no seu trabalho durante todos os meus anos de estudo aqui na pós-graduação da UFPB, muito obrigada.

A todos os professores e funcionários do Programa de pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal da Paraíba – UFPB.

Ao colega de trabalho e amigo o Prof. Esly Cezar Marinho por todo apoio e ajuda necessária durante os anos do meu doutorado.

A todos os professores e funcionários do Instituto Federal da Bahia, principalmente aos colegas do Campus Simões Filho, onde trabalho.

A todos os colegas do curso de pós-graduação que tive a oportunidade de conhecer durante a convivência na UFPB, em especial aos que juntos caminhamos nesta trajetória para alcançar o nosso sonho, obrigada pela amizade que se fortaleceu a cada dia em busca deste objetivo em comum.

A CAPES, pelo suporte financeiro concedido.

Enfim, agradeço a cada uma das pessoas que se acharem merecedoras dos meus agradecimentos não vou listar nomes para não esquecer de ninguém.

"Talvez não tenha conseguido fazer o melhor, mas lutei para que o melhor fosse feito. Não sou o que deveria ser, mas graças a deus, não sou o que era antes."

Marthin Luther King

"A gratidão é o único tesouro dos humildes".

William Shakespeare

"A vida é construída nos sonhos e concretizada no amor".

Chico Xavier

ESTUDO TEÓRICO E COMPARAÇÃO EXPERIMENTAL DOS ESCOAMENTOS INTERNOS E EXTERNOS DA PELÍCULA DESCENDENTE DE SOLUÇÃO ÁGUA E BROMETO DE LÍTIO EM ABSORVEDORES DE TUBOS HORIZONTAIS E VERTICAIS

RESUMO

Este trabalho apresenta uma solução híbrida analítica numérica para a transferência simultânea de calor e massa em absorvedores de tubos horizontais e verticais. A Técnica da Transformada Integral Generalizada é aplicada para resolver o sistema de equações diferenciais parciais, de energia e difusão de massa, em regime permanente, no escoamento da película descendente formada pela solução por cima do duto horizontal e no interior do duto vertical dos absorvedores. A técnica permite manipulações analíticas dos sistemas de equações diferenciais parciais e das condições de contorno, mesmo que sejam não lineares, para produzir sistemas de equações diferenciais ordinárias para os potenciais transformados. Os resultados numéricos encontrados com a utilização da subrotina DIVIPAG, do pacote IMSL Powerstation, da Microsoft, em linguagem Fortran, são comparados com resultados disponíveis na literatura obtidos com o uso do programa Mathematica para o absorvedor horizontal e com resultados experimentais do setup experimental existente no CREVER - Centro de Innovación Tecnológica em Revalorización Energética y Refrigeración, da Universitat Rovira i Virgili, na Espanha. Dados experimentais para uma situação de teste são utilizados para a parametrização e o estabelecimento da adimensionalização usada no problema resolvido. Resultados numérico-experimentais da simulação são utilizados para determinar os principais parâmetros de interesses práticos, tais como, temperatura média da película, concentração média, número de Nusselt e número de Sherwood para as condições do escoamento estabelecido experimentalmente. Observações finais são feitas a partir dos resultados, apresentados em tabelas e gráficos, e sugestões serão apontadas para o ajuste e a melhoria do modelo.

Palavras-chave: Transferência Simultânea de Calor e Massa, Refrigeração por absorção, película descendente, absorvedor, GITT.

THEORETICAL STUDY AND EXPERIMENTAL COMPARISON OF INTERNAL AND EXTERNAL FALLING FILM FLOW OF THE WATER SOLUTION AND LITHIUM BROMIDE IN ABSORBERS OF HORIZONTAL AND VERTICAL TUBES

ABSTRACT

This work presents a hybrid numerical analytical solution for the simultaneous transfer of heat and mass in horizontal and vertical tube absorbers. The Generalized Integral Transformation Technique is applied to solve the system of partial differential equations of energy and mass diffusion, in permanent regime, in the flow of the descending film formed by the solution above the horizontal duct and inside the vertical duct of the absorbers. The technique allows analytical manipulations of systems of partial differential equations and boundary conditions, even if they are nonlinear, to produce systems of ordinary differential equations for transformed potentials. The numerical results found using the DIVIPAG subroutine of the Microsoft IMSL Powerstation package in Fortran language are compared with results available in the literature obtained using the Mathematica program for the horizontal absorber and with experimental results from the existing experimental setup in CREVER - Center for Technological Innovation in Energy and Refrigeration Revalorization, Universitat Rovira i Virgili, Spain. Experimental data for a test situation are used for the parameterization and establishment of the dimensionless ness used in the problem solved. Numerical-experimental simulation results are used to determine the main practical interest parameters, such as average film temperature, mean concentration, Nusselt number and Sherwood number for experimentally established flow conditions. Final observations are made from the results, presented in tables and graphs, and suggestions will be pointed to the adjustment and improvement of the model.

Keywords: Simultaneous Heat and Mass Transfer, Absorption Refrigeration, falling film, absorber, GITT.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Sistema de refrigeração por absorção simples efeito.....	27
Figura 2.2 - Linha de cristalização da solução	29
Figura 3.1 - Ilustração do problema proposto.....	45
Figura 3.2 - escoamento do filme líquido: (a) gotejamento (b) filete estável (c) placa.....	45
Figura 4.1 – Desenho esquemático da distribuição dos fluidos de vapor d’água e da solução líquida água – brometo de lítio descendente no duto em estudo.....	55
Figura 4.2 – Diagrama esquemático do set- up para estudo experimental do escoamento de película interna descendente e vapor no processo de absorção. Fonte: (Tese de Medrano, 2000)	57
Figura 4.3 – Escoamento de uma película absorvente em um tubo vertical com espessura constante e regime laminar.....	58
Figura 5.1 – Fluxo de massa adimensional em função do comprimento adimensional, considerando diferentes valores de f_{ac} e $Le = 1000$. Referência: (Xavier 2010).....	88
Figura 5.2 - Número de Nusselt local em função do comprimento adimensional, considerando diferentes valores f_{ac} e $Le = 1000$. Referência: (Xavier 2010).	88
Figura 5.3 – Número de Sherwood local em função do comprimento adimensional, considerando diferentes valores f_{ac} e $Le = 1000$. Referência: Xavier 2010.	89
Figura 5.4 – Campo de temperatura, considerando $f_{ac} = 0,01$ e $Le = 1000$	89
Figura 5.5 – Campo de concentração, considerando $f_{ac} = 0,01$ e $Le = 1000$	90
Figura 5.6 – Campo de temperatura, considerando $f_{ac} = 0,1$ e $Le = 1000$	90

Figura 5.7 – Campo de concentração, considerando $fac = 0,1$ e $Le = 1000$	90
Figura 5.8 – Campo de temperatura, considerando $fac = 1$ e $Le = 1000$	91
Figura 5.9 – Campo de concentração, considerando $fac = 1$ e $Le = 1000$	91
Figura 5.10 – Campo de temperatura, considerando $fac = 0,1$ e $Le = 100$	92
Figura 5.11 – Campo de concentração, considerando $fac = 0,1$ e $Le = 100$	92
Figura 5.12 – Campo de temperatura, considerando $fac = 0,1$ e $Le = 10$	93
Figura 5.13 – Campo de concentração, considerando $fac = 0,1$ e $Le = 10$	93
Figura 5.14 – Temperatura média adimensional em função do comprimento longitudinal do absorvedor	96
Figura 5.15 – Concentração média adimensional em função do comprimento longitudinal do absorvedor	97
Figura 5.16 – Temperatura em função do comprimento vertical	101
Figura 5.17 – Concentração em função do comprimento vertical.....	102
Figura 5.18 – Parâmetros adimensionais em função do comprimento vertical.....	103
Figura 5.19 – Campo de temperatura considerando os dados da Tab. 5.16	104
Figura 5.20 – Campo de concentração considerando os dados da Tab. 5.16	104
Figura 5.21 – Temperatura média em função do comprimento vertical	105
Figura 5.22 – Temperatura média em função do comprimento longitudinal do absorvedor	106
Figura 5.23 – Concentração média em função do comprimento longitudinal do absorvedor	107
Figura 5.24 – Comparação das simulações na condição térmica adiabática e na condição isotérmica.....	108

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 - Resultados dos autovalores e normas do problema auxiliar de temperatura sem e com o perfil de velocidade.	78
Tabela 5.2 - Resultados dos autovalores e normas do problema auxiliar da concentração sem e com o perfil de velocidade.	78
Tabela 5.3 – Dados dos potenciais da temperatura média em função da posição X e determinados valores de tolerância usando 100 termos.	79
Tabela 5.4 – Dados dos potenciais da concentração média em função da posição X e determinados valores de tolerância usando 100 termos.	80
Tabela 5.5 – Comparação das temperaturas adimensionais com $fac = 0,01$ e $Le = 1000$. Xavier 2010 com 200 autovalores e o Presente trabalho com 150 autovalores.	84
Tabela 5.6 – Comparação das concentrações adimensionais com $fac = 0,01$ e $Le = 1000$. Xavier 2010 com 200 autovalores e o Presente trabalho com 150 autovalores.	84
Tabela 5.7 - Comparação da temperatura média adimensional para diferentes comprimentos adimensionais, considerando $fac = 0,01$ e $Le = 1000$	85
Tabela 5.8 - Comparação da concentração média adimensional para diferentes comprimentos adimensionais, considerando $fac = 0,01$ e $Le = 1000$	85
Tabela 5.9 - Comparação da temperatura adimensional na interface para diferentes comprimentos adimensionais, considerando $fac = 0,01$ e $Le = 1000$	85
Tabela 5.10 - Comparação da concentração adimensional na interface para diferentes comprimentos adimensionais, considerando $fac = 0,01$ e $Le = 1000$	85
Tabela 5.11 - Comparação da temperatura adimensional na parede para diferentes comprimentos adimensionais, considerando $fac = 0,01$ e $Le = 1000$	86

Tabela 5.12 - Comparação da concentração adimensional na parede para diferentes comprimentos adimensionais, considerando $fac = 0,01$ e $Le = 1000$	86
Tabela 5.13 – Convergência da temperatura média adimensional na posição $X = 0.9$ para duas formulações, modelagem 1 (com o perfil de velocidade incluído) e modelagem 2 (sem o perfil de velocidade) para diversos números de termos. Dados: $Pe = 100$, $fac = 0.01$, $Le = 1000$ e parede adiabática.....	86
Tabela 5.14 - Resultados dos autovalores e normas do problema auxiliar da temperatura	94
Tabela 5.15 - Resultados dos autovalores e normas do problema auxiliar da concentração	95
Tabela 5.16 - Dados experimentais retirados da análise do absorvedor vertical do trabalho de Medrano (2000).	97

LISTA DE SÍMBOLOS E NOMENCLATURA

C	Concentração
C_p	Calor específico à pressão constante [J/kg.K]
CC	Matrizes dos coeficientes do problema da concentração
$CC1_{ij}$	Coeficiente da transformação integral da equação da concentração (4.24 e)
$CC2_{ij}$	Coeficiente da integral da equação da concentração (3.26 d), (4.24 f) e (4.28 f)
$CC3_{ij}$	Coeficiente da integral da equação da concentração (3.26 e), (4.24 g) e (4.28 g)
$CC4_i$	Coeficiente da transformação integral da equação da concentração (3.26 f) e (4.28 h)
$CC4_{ij}$	Coeficiente da transformação integral da equação da concentração (4.24 h)
$CC5_i$	Coeficiente da transformação integral da equação da concentração (4.24 i)
COP	Coeficiente de desempenho (2.1)
CT	Matrizes dos coeficientes do problema da temperatura
$CT1_{ij}$	Coeficiente da transformação integral da equação da energia (4.24 a)
$CT2_{ij}$	Coeficiente da integral da equação da energia (3.26 c), (4.24 b) e (4.28 e)
$CT3_{ij}$	Coeficiente da transformação integral da equação da energia (4.24 c)
$CT4_{ij}$	Coeficiente da transformação integral da equação da energia (4.24 d)
D	Difusividade mássica cinemática [m ² /s]
g	Aceleração da gravidade [m/s ²]
fac	Fator de acoplamento (3.20 d) e (4.17 c)
H	Calor de absorção [J/kg]
h	Entalpia [J/kg]
k	Condutividade térmica do líquido [W/mK]
l	Comprimento do tubo [m]
Le	Número de Lewis
M	Norma para campo de concentração definida pelas equações (3.23e), (4.20d) e (4.26d)
$\dot{m}$	vazão mássica [kg/m]

N	Norma para campo de energia definida pelas equações (3.22 e), (4.19 d) e (4.25 d)
Nu	Número de Nusselt
p	Pressão [kPa]
Pe	Número de Peclet
Pr	Número de Prantl
r	Raio do tubo dimensional [mm]
R	Raio do tubo [m]
Re	Número de Reynolds
Sh	Número de Sherwood
T	Temperatura [K]
u	Componente de velocidade longitudinal dimensional [m/s] (3.12)
u(y)	Campo de velocidade completamente desenvolvido (3.16)
U	Componente de velocidade longitudinal transformado (3.19 c)
v	Componente de velocidade longitudinal dimensional [m/s] (4.6)
V	Componente de velocidade longitudinal transformado (4.13)
X	Fração mássica
z	Medida da altura do tubo [m]
W	Concentração adimensional

Símbolos Gregos

α	Coeficiente de transferência de calor [W/mK]
β_i	Autovalores associado ao campo mássico
μ_i	Autovalores associados ao campo térmico
δ_{ij}	Delta de Kronecker
ρ	Massa específica do fluido [kg/m ³]
δ	Espessura da película [mm]
μ	Viscosidade dinâmica newtoniana [Pa.s]
ψ_i	Autofunções do problema auxiliar da energia (4.19 c) e (4.25 c)
$\tilde{\psi}_i$	Autofunções da energia normalizada (4.19 e) e (4.25 e)
Φ_i	Autofunções do problema auxiliar para a componente da concentração (3.23 f)
$\tilde{\Phi}_i$	Autofunções da concentração normalizada (3.23 g)
ϕ_i	Autofunções do problema auxiliar da concentração (4.20 c) e (4.26 c)

$\tilde{\Phi}_i$	Autofunções de concentração normalizada (4.20 e) e (4.26 e)
ψ_i	Autofunções do problema auxiliar para a componente da energia (3.22 f)
$\tilde{\psi}_i$	Autofunções da energia normalizada (3.22 g)
θ	Temperatura adimensional
ν	Viscosidade cinemática [m ² /s]

Subscritos

abs	Relativo a absorção
e	Relativo a posição de equilíbrio
o	Relativo a posição de entrada
i,j	Índice da ordem dos autovalores
l	Relativo ao líquido
int	Relativo à superfície de interface
t	Relativo à parede do duto
v	Relativo ao vapor
min	Relativo a posição mínima
med	Relativo a posição média

Superscritos

$\sim$	Relativo à normalização das autofunções
-	Relativo ao termo transformado

SUMÁRIO

DEDICATÓRIA.....	iii
AGRADECIMENTOS	iv
RESUMO.....	vii
ABSTRACT	viii
LISTA DE FIGURAS	ix
LISTA DE TABELAS.....	xi
LISTA DE SÍMBOLOS E NOMENCLATURA	xiii
SUMÁRIO.....	xvi
CAPÍTULO I	16
INTRODUÇÃO.....	16
1. 1 – MOTIVAÇÕES	16
1. 2 – OBJETIVO GERAL	20
1. 2. 1 – OBJETIVOS ESPECIFICOS	20
1. 3 – SÍNTESES DO TRABALHO	21
CAPÍTULO II.....	23
REFRIGERAÇÃO POR ABSORÇÃO.....	23
2.1 – HISTÓRICO SOBRE REFRIGERAÇÃO POR ABSORÇÃO	23
2.2 – SISTEMA DE REFRIGERAÇÃO POR ABSORÇÃO.....	25

2.3 – ESTADO DA ARTE	31
Revisão da literatura	31
2.3.1 - ABSORVEDORES HORIZONTAIS	32
2.3.2 – ABSORVEDORES VERTICAIS.....	34
2.4 – A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA (GITT)	38
CAPÍTULO III	44
3.1 – INTRODUÇÃO.....	44
3.2 – DEFINIÇÃO DO PROBLEMA PROPOSTO.....	44
3. 3 – FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA.....	46
3. 4 – MODELO MATEMÁTICO ADIMENSIONAL ANALISANDO O CASO ADIABÁTICO	50
3.5 – APLICAÇÃO DA TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA NAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS	51
CAPÍTULO IV	55
4.1 – INTRODUÇÃO.....	55
4.2 – DEFINIÇÃO DO PROBLEMA	57
4.3 - FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA	59
4.4 - APLICAÇÃO DA GITT NA MODELAGEM 1 - SEM O PERFIL DE VELOCIDADE	64
4.4.1 - Determinação dos problemas de autovalores	64
4.4.1.1 - Problema auxiliar para o campo térmico.....	64
4.4.1.2 - Determinação dos pares transformada e inversa	66
4.4.1.3 - Problema auxiliar para o campo da concentração:	66

4.5 - TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DO SISTEMA DE EQUAÇÕES.....	68
4.6 – SISTEMA DE EQUAÇÕES	68
4.7 - APLICAÇÃO DA GITT NA MODELAGEM 2 - INCLUINDO O PERFIL DE VELOCIDADE	70
4.7.1 - Determinação dos problemas de autovalores	70
4.7.1.1 - Problema auxiliar para o campo térmico.....	70
4.7.1.2 - Determinação dos pares transformada e inversa	71
4.7.1.3 - Problema auxiliar para o campo da concentração:	72
4.7.1.4 - Determinação dos pares transformada e inversa	72
4.8 - TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DO SISTEMA DE EQUAÇÕES.....	73
4.9 - FLUXOGRAMA DO PROGRAMA - ELPDAV	74
4.9 - FLUXOGRAMA DO PROGRAMA - ELPDAV	75
CAPÍTULO V.....	77
5.1 - RESULTADOS DO MODELO DE UM ABSORVEDOR HORIZONTAL	77
5.1.1 - Validação dos resultados para o absorvedor horizontal	77
5.1.2 - Grandezas de interesse prático	81
5.1.3 - Validação dos resultados	84
5.1.4 - Gráficos adimensionalizados.....	87
5.1.5 - Efeito do fator de acoplamento	89
5.1.6 - Efeito do número de Lewis	92
5. 2 - RESULTADOS DO MODELO DE UM ABSORVEDOR VERTICAL	94
5.2.1 - Validação dos resultados para o absorvedor vertical	94
5.2.2 - Resultados Preliminares	94

5.2.3 – Gráficos adimensionalizados	95
5. 2.4 - Grandezas de interesse prático	98
CAPÍTULO VI	109
REFERÊNCIAS	111
APÊNDICE A.....	116
APÊNDICE B.....	122
APÊNDICE C.....	125
APÊNDICE D.....	128
APÊNDICE E	138

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta as motivações que levaram à execução deste trabalho e os objetivos para situar o problema físico abordado sob o ponto de vista das aplicações na engenharia. O estudo trata da transferência simultânea de calor e massa, no escoamento laminar unidimensional em duas situações, quando a película fina descendente está sobre o duto horizontal e no interior do duto circular vertical. Na primeira situação o sistema de coordenadas usado é o retangular e na segunda situação o sistema está em coordenadas cilíndricas. A formulação dos dois modelos em questão é em variáveis primitivas e a técnica utilizada para a resolução do sistema de equações é a GITT, a Técnica da Transformada Integral Generalizada.

1. 1 – MOTIVAÇÕES

Por mais, que o homem procure soluções para minimizar os diversos problemas de energia, ainda assim o maior deles é o consumo exagerado, desperdício, ou o não aproveitamento desta fonte que é de suma importância para a humanidade. Sabe-se que para se obter conforto térmico, sendo frio ou calor, necessita-se de uma demanda de energia elétrica em grande escala. Por exemplo, quando se trata de refrigerar ambientes, domésticos ou industriais, verifica-se um consumo elevado de eletricidade, principalmente nos meses de verão. Devido, ao período de estiagem que resulta na escassez das chuvas, falta d'água, com isso ocasiona racionamentos, e um custo alto para manutenção e produção da energia elétrica nas hidrelétricas. Em decorrência destes fatores, geram aumento no consumo de energia, conseqüentemente conta de luz mais cara e tarifa diferenciada no período.

Neste contexto, com o desenvolvimento da ciência, os pesquisadores e cientistas tem se preocupado com o aumento na demanda de energia elétrica na atualidade, por este motivo, tem sido um cuidado constante em procurar técnicas, ideias, soluções para um consumo racional bem como, novas tecnologias em pesquisas para o alcance de fontes ecologicamente corretas sem prejuízo ao meio ambiente. A ideia é a utilização de meios eficientes que garantam o aproveitamento desta fonte, e acima de tudo viáveis para um uso correto e ordenado da população em crescimento. Um exemplo de aplicação é utilizar o calor desperdiçado nas indústrias para alimentar os sistemas de refrigeração.

Devido, às crises energéticas e financeiras, e a preocupação com a preservação do meio ambiente e com o aquecimento global observa-se um crescente interesse em substituir as tradicionais máquinas de refrigeração por compressão a vapor, que nos dias atuais dominam o mercado de refrigeração mundial, por sistemas que utilizam outras fontes de calor, o sistema de refrigeração por absorção tem atraído cada vez mais interesse pela sua economia de energia, uma vez que pode aproveitar os resíduos térmicos, como fonte de calor na produção de frio, com isso uma redução no consumo de eletricidade. Uma vantagem dos ciclos de absorção é não utilizar refrigerantes agressivos ao meio ambiente, o brometo de lítio e água está sendo bastante utilizado por ser um fluido de trabalho ecologicamente correto.

Mesmo sabendo, da quantidade de estudos já realizados na análise de refrigeração por absorção, o tema ainda continua despertando interesse de pesquisadores principalmente tratando dos absorvedores, que é considerado o componente mais importante do sistema, uma vez que, além da transferência simultânea de calor e massa, tem também o tratamento da película descendente. Outro atrativo do estudo é a região da interface, pois exige uma análise cuidadosa, por causa das condições de contorno acopladas, representada por formulações complexas e maiores dificuldades matemáticas associadas à obtenção dos campos de temperatura e concentração. A análise do escoamento da película descendente tem fundamental importância no estudo da refrigeração e em diversas áreas da engenharia, sendo que esta recorre aos conhecimentos das ciências exatas e da natureza, tais como a matemática, a física e a engenharia mecânica, para a elaboração dos modelos a serem submetidos a simulações e ensaios. O equacionamento e o desenvolvimento matemático das equações da quantidade de movimento, da energia e da concentração e suas condições de contorno,

possibilitam implementações, simplificações e interpretações das soluções e conclusões obtidas, podem ser entendidos os fenômenos físicos e relacionados ao dia a dia.

De modo geral, na engenharia existem diversos problemas a serem estudados, alguns já trabalhados anteriormente, e mesmo assim ainda continuam atraindo pesquisadores, em particular, quando se trata de processos onde a transferência simultânea de calor e massa é aplicada especialmente para produzir uma mudança de temperatura, por exemplo, as bombas de calor para aquecimento ou resfriamento. Um obstáculo, em se estudar o fenômeno da transferência é devido à análise matemática, por se tratar de equações diferenciais parciais que raramente possuem soluções analíticas e as condições de contorno estão acopladas. Sendo assim, é necessário o uso de métodos numéricos ou analítico-numéricos para a obtenção de resultados dos potenciais desejados.

Com a evolução dos computadores de última geração, o aumento da capacidade, da tecnologia dos processadores disponíveis atualmente no mercado tem facilitado o desenvolvimento, os testes de modelos cada vez mais sofisticados e completos capazes de representar o comportamento real com alto grau de precisão e com o avanço científico-tecnológico alcançado nas últimas décadas, problemas complexos e de grande relevância socioeconômica podem ser simulados sem perdas nem prejuízos. O maior impedimento encontrado nos métodos numéricos se deve ao fato de que eles apresentarem uma perda natural da sensibilidade física do problema proposto, além de proporcionarem um custo computacional elevado, pois em algumas situações, para se conseguir uma precisão necessita-se de uma malha com um número de pontos elevado, inviabilizando assim determinadas soluções.

Além disso, com o avanço das técnicas híbridas numérico-analíticas de solução tem permitido a abertura de novos rumos em pesquisas envolvendo escoamentos (em regimes laminares ou turbulentos) onde as equações governantes para o transporte da quantidade de movimento geralmente não são lineares. Para a solução de problemas complexos na engenharia foi utilizado um método híbrido bastante eficiente para a obtenção dos potenciais, o qual é formado pela combinação de técnicas analíticas associadas a aproximações numéricas que surgiram como alternativa para resolver os métodos puramente numéricos. E tudo isso só foi possível com o desenvolvimento dos computadores digitais com velocidades de processamento cada vez maiores, através dos

quais se tem avançado bastante na simulação de problemas em mecânica dos fluidos e transferência simultânea de calor e massa, possibilitando um menor custo computacional e minimizando o tempo de trabalho.

Portanto, os escoamentos em superfícies é um dos processos mais estudados quando se trata da transferência simultânea de calor e massa nos diversos dispositivos térmicos, e um dos mais pesquisados na literatura. A transferência de calor no escoamento descendente da solução aquosa de $\text{LiBr-H}_2\text{O}$ no processo de absorção de vapor tem sido estudada tanto teoricamente como experimentalmente (Grigor'Eva and Nakoryakov, 1977, Grossman, 1983, Karami and Farhanied, 2011, Giannetti *et al.*, 2017). Dos diversos trabalhos disponíveis na literatura aberta que tratam da transferência simultânea de calor e massa, como referência principal para a análise dos absorvedores horizontais, têm-se o trabalho de Xavier, 2010 e para o caso dos absorvedores verticais o trabalho de Medrano, 2000.

Um aspecto relevante do trabalho foi à cooperação entre as Universidades Federais da Paraíba e a de Pernambuco com a Universidade Rovira i Virgili (URV) da Espanha, com esta parceria foi possível o uso dos dados experimentais da bancada experimental existente no Centro de Innovación Tecnológica em Revalorización Energética y Refrigeración (CREVER), em Tarragona, da Universitat Rovira i Virgili para comparação com os resultados teóricos, o que resultará na possibilidade de construção de parâmetros de projetos ou ajustes necessários aos modelos propostos.

Dessa forma, a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT), utilizada neste trabalho, é considerada como eficiente na resolução de certas classes de problemas difusivos. O objetivo da mesma é transformar um sistema de equações diferenciais parciais originais em um sistema de equações diferenciais ordinárias, através da eliminação de dependências espaciais. Estes sistemas diferenciais podem ser resolvidos de maneira mais simples, com a vantagem de produzir uma solução mais aprimorada e mais econômica, além de permitir um controle pré-estabelecido sobre o erro dos resultados.

No presente estudo pretende inicialmente estender a aplicação da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) para resolver os campos de temperatura e concentração do problema hidrodinâmico do escoamento laminar unidimensional na

direção axial, em dutos horizontais e verticais. A solução binária de trabalho usada é o brometo de lítio e água formando uma película descendente no interior do duto circular vertical e no exterior do duto horizontal. A simulação em questão para o caso de configuração testada em laboratório é de um absorvedor em duto vertical, com formulação em coordenadas cilíndricas, com o objetivo de obter os campos de temperatura e de concentração, e se necessário efetuar correções no modelo para melhor representar os dados experimentais da bancada.

1. 2 – OBJETIVO GERAL

O principal objetivo deste trabalho é desenvolver um modelo matemático através da Técnica da Transformada Integral Generalizada para estudar os efeitos da transferência de calor e massa e da temperatura sobre a película líquida que se forma no exterior de um duto horizontal e interior do duto vertical, bem como analisar a taxa de absorção de vapor neste componente do sistema, comparar com os dados de um modelo experimental e determinar os parâmetros de interesse práticos, tais como, o fluxo de massa na interface e os campos médios de temperatura e concentração, os números de Nusselt, de Sherwood para valores em condições limites, estes são obtidos para serem empregados nos projetos de trocadores de calor e de massa, usados nos absorvedores dos sistemas de refrigeração por absorção.

1. 2. 1 – OBJETIVOS ESPECIFICOS

Os objetivos específicos do presente trabalho são:

- Revisão da literatura tanto na refrigeração por absorção como nas técnicas de solução de problemas de transferência simultânea de calor e massa de uma forma geral.
- Revisão da literatura para absorvedores em dutos horizontais;
- Revisão da literatura para absorvedores verticais em dutos circulares;
- Formulação observando as hipóteses simplificadoras do problema unidimensional de um escoamento laminar sobre dutos horizontais, com formulação em coordenadas cartesianas e utilizando a técnica da transformada integral generalizada.

- Formulação através de hipóteses simplificadoras o problema unidimensional do escoamento em desenvolvimento simultâneo no interior do duto circular, em coordenadas cilíndricas com formulação em variáveis primitivas usando a GITT.
- Análise da teoria da refrigeração por absorção de vapor em escoamento descendente de solução aquosa
- Formulação matemática dos problemas.
- Equação geral da energia e da concentração e as suas condições inicial e de contorno acopladas.
- Discussão da solução, metodologia, aplicação da técnica GITT e uso do recurso do balanço integral.
- Desenvolvimento da solução para os campos de temperatura e de concentração média, na interface e na parede.
- Escrever e obter as expressões teóricas das grandezas de interesse prático para a engenharia, tais como: números de Nusselt, Sherwood e o fluxo de massa na parede.

1.3 – SÍNTESES DO TRABALHO

Este trabalho está subdividido em seis capítulos, incluindo este introdutório, os outros estão divididos da seguinte forma:

O capítulo II apresenta um breve histórico sobre refrigeração por absorção, o sistema de refrigeração, o estado da arte, a revisão da literatura sobre os absorvedores horizontais e verticais, e uma revisão da Técnica Transformada Integral Generalizada (GITT), destacando as etapas básicas e as aplicações da mesma.

O capítulo III trata da formulação matemática do desenvolvimento da solução para o sistema de equações da energia e da concentração, com formulação em variáveis primitivas, do problema unidimensional de um escoamento laminar descendente sobre dutos horizontais. A Técnica Transformada Integral Generalizada foi aplicada na solução do sistema em duas modelagens matemáticas, com o objetivo de dar confiança aos resultados para comparação. A modelagem 1 é sem o perfil de velocidade nos problemas auxiliares e a modelagem 2 é com o perfil de velocidade nos problemas auxiliares da energia e da concentração.

O capítulo IV apresenta a formulação matemática do desenvolvimento da solução para as equações da energia e da concentração, com formulação em variáveis primitivas para o problema unidimensional de um escoamento laminar descendente no interior de um duto circular vertical, em coordenadas cilíndricas, aplicando a GITT em cada termo nas equações e empregando o recurso do balanço integral.

O capítulo V apresenta a discussão e a análise dos resultados.

O capítulo VI apresenta as conclusões do trabalho e as propostas para trabalhos futuros.

Como complemento deste trabalho, temos as referências bibliográficas utilizadas como base para a fundamentação teórica deste estudo e os apêndices A, B, C, D e E, que detalha o desenvolvimento dos cálculos matemáticos do presente trabalho.

CAPÍTULO II

REFRIGERAÇÃO POR ABSORÇÃO

No presente capítulo será apresentada uma descrição sobre o estudo do sistema de refrigeração por absorção, dando ênfase ao absorvedor, o estado da arte, uma análise das principais contribuições da literatura aberta disponível que tratam da transferência simultânea de calor e massa, dos escoamentos em dutos horizontais, verticais, e a técnica da transformada integral generalizada.

2.1 – HISTÓRICO SOBRE REFRIGERAÇÃO POR ABSORÇÃO

Um breve comentário histórico sobre o sistema de refrigeração por absorção segundo Ochoa, 2011.

Em 1777, a refrigeração por absorção foi idealizada por Edward Nairn, realiza os primeiros estudos sobre a absorção de ácido sulfúrico em água na tentativa de produzir gelo artificialmente, muito embora o primeiro refrigerador só tenha sido construído em 1823 por Ferdinand Carré (Costa, 2002).

Em 1810, o escocês John Leslie (1766–1832) descreve o aparato de absorção da água utilizando ácido sulfúrico para a produção de frio e cria a primeira máquina a funcionar de forma intermitente na Inglaterra.

No ano de 1934, Jacob Perkins, nos Estados Unidos, inventa o primeiro sistema mecânico de fabricação de gelo artificial que constitui a base precursora dos atuais sistemas de compressão frigorífica. (Queiroz, 2013)

Após quatro décadas, Edmund Carré (1822-1890) introduz comercialmente a máquina de absorção em restaurantes e hotéis da França, Inglaterra e Austrália, recorrendo ao aparato desenvolvido por Leslie.

Em 1860, Ferdinand Carré requereu nos EUA a patente do sistema de refrigeração por absorção. Foi, provavelmente, a sua primeira aplicação usada pelos Estados Confederados durante a guerra civil americana, já que os Estados do Norte haviam cortado o fornecimento de gelo natural para o sul. (Stoecker e Jones, 1985). Máquinas foram construídas baseadas nesta patente para a produção de gelo e armazenamento de alimentos. Entre 1859 e 1862 foram registradas 14 patentes de sistemas operando por absorção com a tecnologia água-amônia.

Carl Von Linde (1842-1934) em meados de 1880 desenvolve um sistema de refrigeração por compressão de vapor utilizando motores elétricos, deixando os sistemas de refrigeração por absorção, menos atrativos e utilizados apenas para as épocas de custo energético elevado.

Em 1920, o sistema de absorção já era produzido comercialmente e por volta da década de 30, na Suécia, produziu-se o primeiro refrigerador doméstico da marca Electrolux. Sua utilização restringiu-se aos anos cinquenta, quando fora substituído pela refrigeração por compressão. Em 1930, a Arkla construiu uma máquina de absorção de 5 a 20 TR para aplicação em ar condicionado utilizando brometo de lítio e água.

Em 1945, os sistemas de absorção usando a tecnologia água-brometo de lítio ($\text{H}_2\text{O}-\text{LiBr}$) tiveram seu desenvolvimento pela Carrier, sendo amplamente utilizados em condicionamento de ar em grandes edifícios. No mesmo ano, Willis Carrier projeta a primeira máquina de refrigeração para produção em escala de LiBr.

Em 1958, no Japão, a Kawasaki fabrica a primeira máquina de absorção, e em 1959 começa a produção em larga escala. No final da década de 50, J. S. Swearingen, e E. P. Whitlow construíram a primeira máquina com duplo efeito operando com ($\text{H}_2\text{O}-\text{LiBr}$) e em 1985, o ciclo com triplo efeito fora patenteada por Ouchi.

Em 1962, surge a Ebara, sendo o maior fabricante nos últimos anos. Dois anos depois, surge a primeira máquina de duplo efeito fabricada pela Kawasaki. Em 1965, a Ebara é a primeira empresa a ter sistemas combinados, fabricando uma máquina acionada por turbina a vapor e uma de absorção acionada pelos gases de descarga da turbina. No ano seguinte, a Ebara produz uma máquina para baixas temperaturas, menores que -25°C para 25 TR e -5°C para 440 TR. Em 1968, a Kawasaki lança a primeira máquina de duplo efeito e fogo direto.

Em 1970, a Mitsubishi-York instala um sistema de cogeração administrando energia em Tokyo, utilizando uma máquina de refrigeração centrífuga acionada por turbina a gás, e os gases de descarga acionando um boiler de absorção. Um ano depois, a Ebara produz a primeira máquina de simples efeito com bomba de calor acoplado. Em

1974, produz a primeira máquina de duplo efeito usada em bomba de calor. Em 1977, a Hitachi constrói uma máquina de 1500 TR de fogo direto. Em 1978, a Ebara e a Kawasaki num consorcio, chega a 30% de melhoria na eficiência para máquina de fogo direto. Em 1979, a Ebara fabrica em larga escala máquinas de fogo direto de 40 a 75 TR.

Em 1980, a Hitachi projeta uma máquina de 200 TR acionada por energia solar. E no mesmo ano, a Yazaki Sogio e Tokyo Sanyo projetam máquinas de absorção de duplo efeito de 20 a 30 TR. Em 1987, a Tokyo Sanyo e a Ebara iniciam a nova era de equipamentos inteligentes e acionados por micro processamento.

2.2 – SISTEMA DE REFRIGERAÇÃO POR ABSORÇÃO

O sistema de refrigeração por absorção é bem antigo foi inventado e patenteado em 1860, mas durante o século XX, com o desenvolvimento tecnológico dos sistemas de geração e distribuição de energia elétrica a preços baixos, fez com que os sistemas de absorção fossem aos poucos sendo substituídos pelo sistema de refrigeração por compressão. Nos dias atuais, com a preocupação ambiental de redução das emissões dos gases que contribuem para o efeito estufa e com a crise financeira, a necessidade de reduzir o consumo de eletricidade, estes fatores contribuíram para crescimento e retorno das máquinas de refrigeração por absorção, por serem máquinas que utilizam energia térmica, esta fonte de energia utiliza vapor ou água quente, e energia elétrica é usada somente para a bomba, bem diferente da energia mecânica de um compressor, que utiliza basicamente a eletricidade como fonte principal de alimentação.

Sistemas de refrigeração por absorção são máquinas de refrigeração que usam calor recuperado ou energia solar (calor residual de usinas de energia ou processos industriais) ou insumo energético (caldeiras, rejeitos térmicos de processos industriais) ou calor de queima direta (vapor de escapes) para gerar frio. Estes sistemas tem a possibilidade de serem acoplados em centrais de cogeração, por exemplo, usando os gases de exaustão de uma microturbina para a produção do efeito refrigerante em vez da energia mecânica de um compressor.

Ainda sobre o fenômeno da refrigeração por absorção pode ser dizer que:

“O importante é compreender como se obter o fenômeno da refrigeração por absorção, ou seja, transferir uma quantidade de calor de um recinto com temperatura menor para outro com temperatura maior, deve existir um processo compensatório associado de forma que a entropia dos materiais envolvidos não diminua”. (Xavier, 2010).

Máquinas de absorção são classificadas tanto pelo número de efeitos ou pelo número de estágios. Classificação do sistema de absorção quanto ao número de efeitos, pode ser simples, duplo ou triplo efeito, os de duplo ou triplo ainda podem ser subdivididos devido ao fluxo da solução, podendo ser em paralelo ou em série.

Um efeito significa o número de vezes que o calor de entrada é utilizado pelo equipamento de absorção, quer diretamente ou indiretamente. Num sistema de único efeito, o calor de entrada é usado apenas uma vez. Em um sistema de duplo efeito, a entrada de calor é usada duas vezes, e, um sistema de triplo efeito do calor de entrada é usado três vezes. O estágio significa o número de pares de evaporador /absorvedor a temperaturas diferentes em uma máquina de absorção. Um sistema de fase única tem um único evaporador/absorvedor operando a uma temperatura constante ou primária. Um sistema de dois estágios tem dois pares evaporador/absorvedor, cada um operando em temperatura diferente.

O sistema de refrigeração por absorção utiliza uma fonte de calor para produzir o efeito de refrigeração. Consiste, basicamente, de trocadores de calor trabalhando com duas pressões efetivas. A diferença de pressão é fornecida por uma bomba de líquido e por válvula de expansão. Os trocadores de calor que compõem o sistema são, em resumo, gerador de vapor, evaporador, absorvedor e condensador; além de uma bomba que já foi mencionada.

Gerador – representa o lado de descarga do sistema de compressão. O refrigerante (água) evapora da solução a uma pressão maior e temperatura alta.

Condensador – o vapor refrigerante (vapor d’água) é condensado sob a pressão do gerador. O líquido é direcionado para o evaporador.

Evaporador – onde o refrigerante absorve o calor a uma baixa temperatura e pressão durante a evaporação.

Absorvedor – representa o lado de sucção do sistema de compressão. O vapor refrigerante é absorvido pela solução forte e é levado de volta ao evaporador por uma pequena bomba.

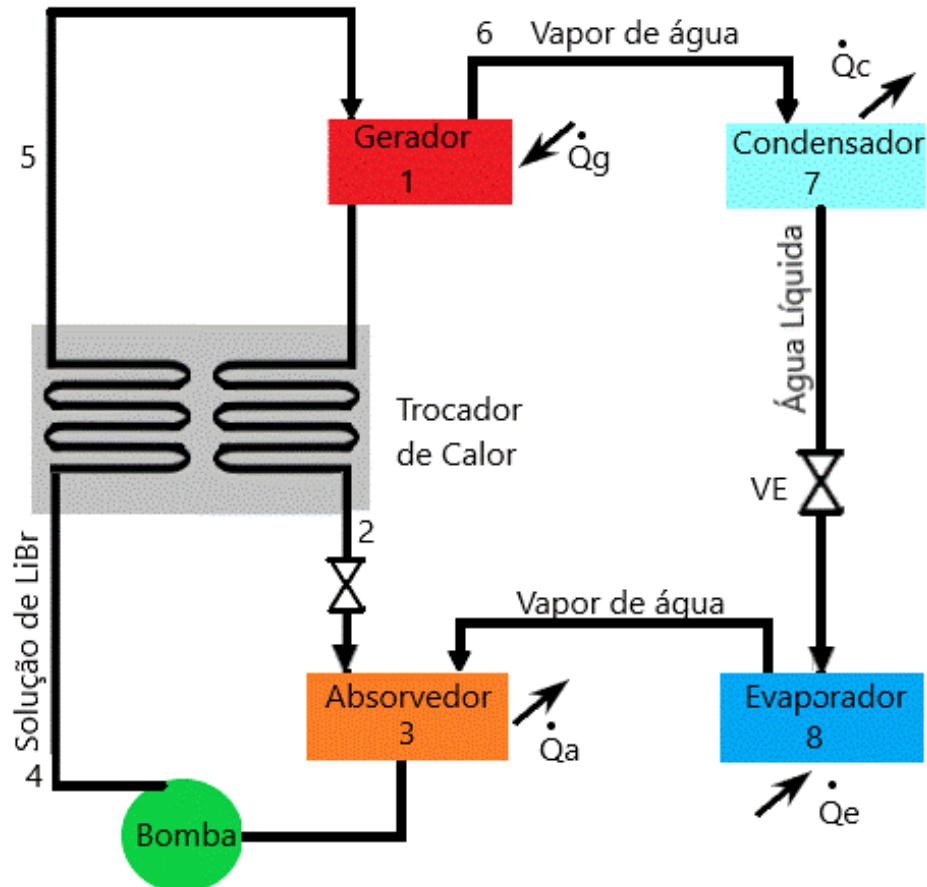


Figura 2.1 Sistema de refrigeração por absorção simples efeito.

Fonte: (Adaptado de DORGAN et al 1995)

2.2.1 - Vantagens e desvantagens do sistema de refrigeração por absorção:

As vantagens do sistema de absorção, contudo, continuam as mesmas ao longo dos anos e incluem as seguintes segundo DORGAN *et al* (1995).

- Sistemas de absorção necessitam de menor consumo de energia elétrica quando comparados com os sistemas de compressão de vapor;
- Unidades de absorção são silenciosas e livres de vibração;
- Calor recuperado pode ser utilizado como insumo energético (em substituição ao trabalho mecânico) em ciclos de refrigeração por absorção;

- Unidades de absorção não causam dano à camada de ozônio e podem ter menor impacto no aquecimento global do que outras opções;
- Longo tempo de vida útil (entre 20 a 25 anos);
- Unidades de absorção são economicamente atrativas quando os custos dos combustíveis são substancialmente menores que os de energia elétrica, com o custo do combustível de 12 a 20 % do custo da energia elétrica.

As desvantagens do sistema de absorção comparado aos sistemas de compressão de vapor são: (ÇENGEL, BOLES, 2006)

- São mais caros;
- As máquinas são maiores e mais pesadas;
- São mais complexos e manutenção mais difícil;
- São menos eficientes exigindo assim torres de arrefecimentos muito maiores.

O funcionamento do sistema de refrigeração por absorção se baseia no fato de que os vapores de alguns dos fluidos frigorigênicos conhecidos são absorvidos a frio, em grandes quantidades, por certos líquidos ou soluções salinas. Costa, 2002. O que implica dizer que calor e massa são transferidos por meio das fases de líquido e vapor, bem como entre elas. Em outras palavras, significa que no sistema em estudo, um dos componentes da mistura atua como refrigerante e o outro como absorvente. Os sistemas de absorção disponíveis no mercado, nos dias atuais, são os que usam duas misturas, de água-amônia ($\text{H}_2\text{O}-\text{NH}_3$) ou brometo de lítio e água ($\text{LiBr}-\text{H}_2\text{O}$). Atualmente, os sistemas de absorção, sobretudo nas instalações de ar condicionado adota preferencialmente a solução binária, constituída de água, que faz o papel do refrigerante e brometo de lítio o absorvente, que é responsável por absorver o vapor d'água. Outra vantagem é que a solução $\text{LiBr}-\text{H}_2\text{O}$ é menos perigosa que a solução $\text{H}_2\text{O}-\text{NH}_3$. (Costa, 2002).

Para o fluido de trabalho são necessários dois meios:

- o refrigerante – água destilada
- o solvente – solução altamente concentrada de brometo de lítio (LiBr), o qual é não-tóxico e similar a cloreto de sódio (NaCl), mas com solubilidade muito maior considerada a outros sais.

Desde 1942, o fluido de trabalho mais usado para todos os processos de refrigeração acima do ponto de congelamento da água é o par, LiBr-H₂O, uma vez que, o brometo de lítio é um sal estável e não tóxico, de cor branca e quando puro é sólido. As soluções aquosas de LiBr são corrosivas, desta forma inibidores de corrosão e outros aditivos são usados para reduzir a corrosividade da solução. O brometo de lítio tem uma solubilidade limitada que pode causar problemas de cristalização, além de não poder operar abaixo de 5°C por causa da temperatura de solidificação da água.

A cristalização, uma preocupação com os sistemas de absorção, pode ocorrer quando a concentração da solução é muito alta ou quando a temperatura é muito baixa. Em outras palavras, cristalização é o fenômeno que acontece quando a solução LiBr-H₂O fica excessivamente quente. Uma medida para evitar a cristalização é fazer o controle da concentração, não deixando ultrapassar o limite de solubilidade, pois caso aconteça o sal precipita. Para que não haja risco de cristalização, calcula-se uma entalpia mínima em função da concentração. A entalpia da solução não pode ser inferior à mínima estimada, ou ocorrerá a cristalização. (ASHRAE, 1993)

$$h_{min} = -1397 + 24X$$

Onde X é a fração mássica e h_{min} é a entalpia mínima.

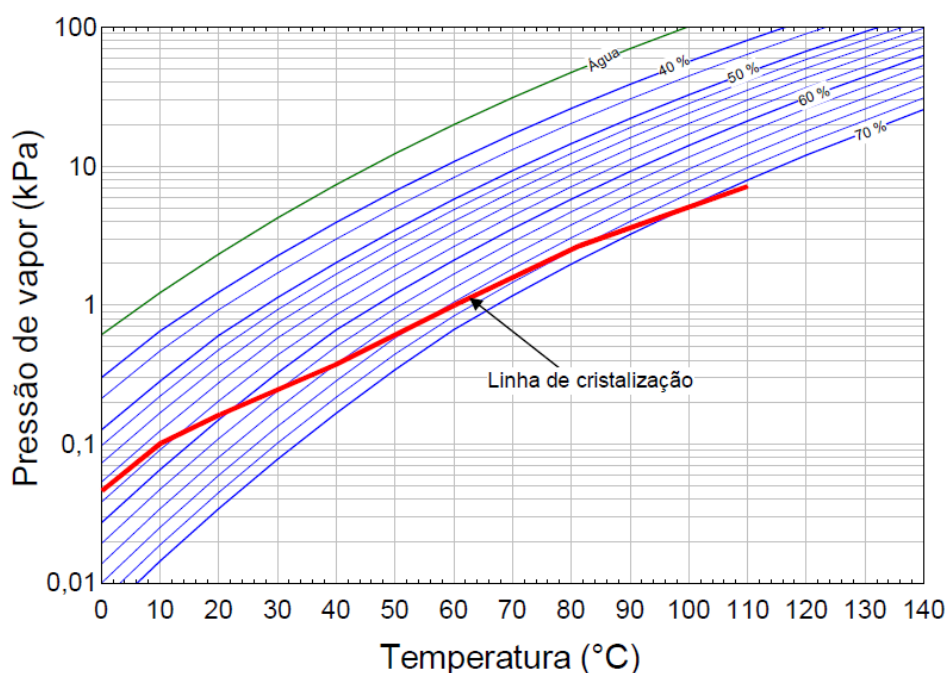


Figura 2.2 - Linha de cristalização da solução

O coeficiente de desempenho (COP) de uma máquina de absorção é a razão usada para taxar a efetividade de transferência de energia da máquina e, para refrigeração, o COP é a quantidade de frio produzido pela máquina, dividida pela quantidade de energia fornecida necessária à produção do frio, não incluindo a eletricidade auxiliar necessária para a operação das bombas e ventiladores. (XAVIER, 2010)

$$COP = \frac{\text{capacidade de resfriamento}}{\text{calor de entrada}} < 1 \quad (2.1)$$

Em relação ao aumento do desempenho da máquina de absorção duas características devem ser analisadas. A primeira está diretamente ligada ao fluido de trabalho, que já foi tratado anteriormente e a segunda em relação à geometria de superfícies de transferência e no formato do absorvedor. Para tanto, no nosso trabalho iremos tratar de dois tipos de absorvedores, o horizontal e o vertical.

O presente trabalho se concentra no estudo dos fenômenos de absorção usando como fluido de trabalho a solução aquosa de LiBr, que forma uma película descendente que cai sobre o duto horizontal ou no interior do tubo vertical. O problema está em regime permanente, escoamento é laminar, com a espessura média da película do filme constante. As equações da energia e da transferência de massa se apresentam acopladas pelas condições de contorno impossibilitando o uso de técnicas matemáticas tradicionais para resolução do problema. Para a solução dos sistemas de equações da energia e da concentração nas duas formulações foi utilizada a Técnica da Transformada Integral Generalizada e na análise dos problemas auxiliares. A inclusão do perfil de velocidade é uma tentativa de conter o maior número de informação do problema principal. O método de contagem de sinal é empregado para a obtenção dos autovalores, das autofunções e as normas dos campos de térmico e mássico. Na condição de contorno da interface, que está acoplada, é feita uma aproximação para facilitar na solução através da aplicação do recurso do balanço integral com o objetivo de melhorar o desempenho.

2.3 – ESTADO DA ARTE

Revisão da literatura

A transferência simultânea de calor e massa vem sendo estudada nos últimos anos na tentativa de se obter modelos matemáticos que se aproxime cada vez mais de forma realista. A evolução ao longo dos anos, as aplicações, o desenvolvimento técnico científico de algumas referências bibliográficas que tratam sobre a transferência simultânea de calor e massa, os processos de refrigeração por absorção, de modo particular os absorvedores horizontais e verticais, e a técnica da transformada integral generalizada são apresentadas a seguir.

Em 1977, GRIGOR'EVA & NAKORYAKOV apresentam a primeira solução analítica para a transferência simultânea de calor e massa na absorção de filmes laminares com velocidade constante, o método de Fourier foi utilizado para resolver o sistema de equações diferenciais. GROSSMAN, 1983 estende o estudo de GRIGOR'EVA & NAKORYAKOV, por meio do método de Fourier e obteve o sistema de equações diferenciais ordinárias com coeficientes não constantes e resolve-o usando as fórmulas em séries de potência infinita. Em 1994, WASSENAAR resolve o problema da transferência de calor e massa pelo método de elementos finitos.

Quarenta anos depois, em 2017, BARTASHEVICH participa de uma conferência com o título: solução analítica e numérica da transferência simultânea de calor e massa no processo de absorção de filmes em queda, mesmo com o passar dos anos o assunto ainda interessa muitos pesquisadores.

Um trabalho bem interessante é o de KILLION e GARIMELLA 2001, que apresenta uma revisão bibliográfica abrangente e detalhada dos vários modelos e métodos de resolução para o problema combinado de transferência de calor e massa as várias técnicas de modelagem, em diferentes geometrias.

MEYER 2014 utiliza a transformada de Laplace para resolver o problema de transferência simultânea de calor e massa, na absorção de películas laminares caindo com velocidade de película constante, para uma condição de fronteira de parede isotérmica bem como adiabática. Em 2015, MEYER aplica a transformada

de Laplace aplicada para resolver as equações diferenciais parciais analiticamente. BELHOCINE *et al*, 2015 estudam numericamente a transferência de calor e massa por convecção em um escoamento laminar totalmente desenvolvido com temperatura constante na parede, resolvido pelo método de diferenças finitas.

Em 2017, NARVÁEZ-ROMO *et al*, escreveram uma revisão crítica das correlações de transferência de calor e massa para as máquinas de refrigeração por absorção usando as soluções aquosas de LiBr-H₂O e NH₃-H₂O analisando a tecnologia do filme líquido em queda.

2.3.1 - ABSORVEDORES HORIZONTAIS

BANASIAK *et al*, 2009, estudam a análise teórica do modelamento matemático da refrigeração por absorção usando a solução de LiBr – H₂O em um sistema bidimensional dos campos de temperatura e concentração nos trocadores de calor.

CASTRO *et al*, 2008 estudam modelos gerais para a concepção de trocadores de calor (absorvedor, gerador, condensador e evaporador) desenvolvendo um protótipo de um chiller de absorção refrigerado a ar com capacidade de 2kW para ar condicionado usando a solução o par de brometo de lítio e água. Tais características foram usadas na construção e instalação de uma máquina de absorção e foram feitos testes para validar os resultados obtidos a partir dos modelos matemáticos desenvolvidos. As discrepâncias consideradas nos trocadores de calor entre os resultados experimentais e numéricos são menores que 15% na maioria dos casos e em todos estes componentes, exceto no condensador, onde as discrepâncias são maiores. Nas conclusões relatadas observa-se que precisam de: (i) melhorias futuras dos modelos de simulação matemática e (ii) a melhoria da infraestrutura experimental.

DONNELLAN *et al*, 2014, estudam o desenvolvido de um modelo simples que é capaz de prever o movimento hidrodinâmico e também o colapso de uma bolha de vapor em uma solução aquosa de LiBr-H₂O. Baseia-se em equações diferenciais ordinárias e não requer o uso de métodos como o CFD para se encontrar uma solução.

GROSSMAN, 1983 descreve teoricamente a transferência simultânea de calor e massa do processo de absorção de gases ou vapor de um filme líquido em um escoamento laminar sobre uma placa horizontal. Resolve o problema por dois métodos, primeiro o método de Fourier como GRIGOR'EVA e NAKORYAKOV, a segunda maneira foi o uso da técnica numérica baseada no método das diferenças finitas.

ISLAM, 2008 descreve uma análise experimental e teórica dos processos de transferência de calor e massa que ocorrem nos absorvedores de sistemas de refrigeração por absorção. Os efeitos das principais variáveis operacionais e seu desempenho são investigados experimentalmente. Um modelo matemático que leva em conta os detalhes geométricos do fluxo da solução e do refrigerante é desenvolvido seguindo a análise tradicional dos trocadores de calor para obter informações adicionais sobre o desempenho do absorvedor. As equações governantes são resolvidas analiticamente usando a técnica da transformada de Laplace.

KARAMI e FARHANIED, 2011, estudam a transferência de calor e massa no sistema de refrigeração por absorção em um absorvedor de placa inclinada usando a solução aquosa de LiBr e água. O método numérico das diferenças finitas é empregado na solução das equações da energia e da transferência de massa. A dependência das propriedades da solução de brometo de lítio e água para a temperatura e a concentração é empregada, bem como a dependência da espessura do filme para absorção do vapor. Os principais parâmetros de desempenho do absorvedor, ou seja, os números de Nusselt e Sherwood são correlacionados em função do número de Reynolds e do ângulo da placa.

KYUNG et al, 2007, modelaram o processo de absorção usando a solução de LiBr - H₂O sobre um tubo liso horizontal considerando o escoamento dividido em três regimes: contato com o tubo, formação da gota na parte inferior do tubo e queda entre os tubos.

GIANNETTI *et al*, 2017, apresentam uma solução analítica bidimensional da equação diferencial governante para absorção de vapor de filme caindo em torno de um tubo plano horizontal. A solução da equação de transporte de espécies dá a distribuição da fração de massa de LiBr dentro da película de absorção líquida fluindo ao longo da superfície do tubo e pode ser usada para caracterizar o desempenho de transferência de

massa de absorventes ou geradores de filme caindo. Este estudo obtém uma expressão analítica do coeficiente de transferência de massa destes dispositivos aplicável em uma ampla gama de condições operacionais. O método de Fourier é usado para resolver o problema e os autovalores obtidos a partir da equação característica que dependem do número de Lewis, do número de Biot e do calor de absorção adimensional. Dada a condição limite na parede, o campo de fração de massa bidimensional de uma película laminar, pode ser expresso analiticamente como função de Schmidt, números Reynolds, o diâmetro adimensional do tubo e a proporção da área molhada para a superfície de troca total. Finalmente, o coeficiente de transferência de massa e o fluxo de massa absorvido são investigados local e globalmente como funções dos grupos adimensionais influentes para esclarecer seus efeitos no processo físico e visualizar a potencialidade do modelo. Os resultados mostram um acordo qualitativo e quantitativo notável com soluções numéricas anteriores e resultados experimentais da literatura aberta disponível. Este modelo constitui uma ferramenta amplamente aplicável e que economiza tempo para simulações, design e controle de sistemas reais.

YOON *et al*, 2008, estudam as características da transferência de calor e massa de um absorvedor de película descendente de tubo horizontal com tubos de pequeno diâmetro.

WASSENAAR, 1994, em sua tese de doutorado estuda a transferência de calor e massa em absorvedores horizontais. Os sistemas de equações foram resolvidos pelo método de elementos finitos e os resultados são apresentados em gráficos.

2.3.2 – ABSORVEDORES VERTICAIS

MEYER, 2014 estuda uma solução analítica para a transferência simultânea de calor e massa em absorvedores verticais. O método usado para resolver as equações diferenciais parciais é a Transformada de Laplace. O problema estudado de transferência de calor e massa em escoamento laminar com perfil de velocidade uniforme e com duas condições de contorno na parede: isotérmica e adiabática.

HOSSEINNIA *et al*, 2017, estudam numericamente o problema da absorção da solução aquosa de LiBr-H₂O dentro do absorvedor de tubo vertical. As equações

governantes da energia e da concentração foram derivadas em formas gerais, incluindo os efeitos da interdifusão, Soret e Dufour das espécies devido à concentração combinação e gradientes de temperatura durante o processo de absorção. Para resolver as equações foi usado um código CFD. Os resultados da simulação obtidos foram validados com dados experimentais disponíveis e revelam que o termo da interdifusão tem um papel importante. Entretanto, os efeitos Soret e Dufour resultam em um aumento relativamente pequeno nos fluxos médios de calor e massa na interface.

BO *et al*, 2010, simulam numericamente o processo de transferência de calor e massa através da absorção no filme descendente com a solução líquida aquosa de brometo de lítio e água para um tubo vertical usando o pacote Fluent do software CFD (Dinâmica dos fluidos computacionais). A condição de contorno convectiva no lado de água de refrigeração foi considerada. O coeficiente de transferência de calor é assumido constante, e a temperatura do líquido de arrefecimento varia linearmente ao longo da trajetória do fluxo. Os resultados numéricos obtidos indicam que o perfil de temperatura é exponencial e seus gradientes são elevados devido aos efeitos do calor da absorção na interface. À medida que a distância aumenta o perfil de temperatura torna-se quase linear. Quando se considera a variação das propriedades físicas no processo de absorção nota-se que a taxa total de transferência de massa é 6,5% maior do que quando assumimos as propriedades físicas como constantes.

BOUROUIS *et al*, 2005, apresentam um estudo experimental sobre a absorção de vapor de água sobre um filme descendente laminar ondulado com a solução aquosa do sistema de sal quaternário ($\text{LiBr} + \text{LiI} + \text{LiNO}_3 + \text{LiCl}$) na parede interna de um tubo vertical liso arrefecido a água com temperatura na faixa entre 35 a 40°C. Uma forma de melhorar a solubilidade das soluções aquosas LiBr é adicionar outros sais para criar soluções salinas com vários componentes. Para desenvolver esta tecnologia, dois problemas principais a serem abordados são: a disponibilidade de novas misturas de sal com mais ampla gama de solubilidade do que a LiBr-água, e configurações avançadas que permita absorver simultaneamente e de forma adequada o processo de absorção e de resfriamento a ar eficaz.

CONLISK, 1992 apresenta o desenvolvimento de uma solução para o problema da refrigeração por absorção de um filme laminar, vertical empregando a técnica da transformada de Laplace.

ISLAM, 2004 desenvolve modelos linearizados acoplados e não linearizados para estudar a transferência de calor e massa em absorvedores tubulares horizontais e verticais de filmes em queda. O modelo linearizado produz expressões analíticas e é resolvido pela transformada de Laplace e o modelo não linearizado é resolvido pelo método Runge-Kutta. Os coeficientes de transferência de calor e massa são calculados com os dados experimentais e observa-se uma diferença de 10 % entre o modelo linearizado e o não linearizado.

KARAMI e FARHANIED, 2009, estudam a transferência de calor e massa no sistema de refrigeração por absorção em um absorvedor de placa vertical formando a película descendente com a solução aquosa de LiBr e água. O método numérico utilizado para resolver o sistema de equações diferenciais parciais parabólicas é o método empírico das diferenças finitas.

KIM *et al*, 1995, estudam os experimentos realizados para um sistema de refrigeração por a absorção de vapor, de filmes descendentes em superfície vertical usando a solução aquosa de brometo de lítio e água, e concentração de massa de 50 e 60%. Para investigar os efeitos dos valores da difusividade de líquidos, propriedades moleculares das soluções concentradas e a presença de gases não absorvíveis.

LIN e SHIGANG, 2011, desenvolvem um estudo experimental de absorção de vapores em solução aquosa de LiBr com e sem o uso de aditivos. Uma série de experimentos foram executados para comparar a absorção de vapor da solução de LiBr com e sem 2EH ao filme descendente vertical fora do tubo. O resultado mostra que com a adição de uma pequena quantidade de aditivos, tais como 2-etil-1-hexanol (2EH), 1-octanol, à solução aquosa de LiBr aumenta significativamente a transferência de calor e massa na absorção de vapor.

MATSUDA *et al* 1994, estudam os experimentos de uma máquina de refrigeração por absorção composta por absorvedor e gerador, numa coluna vertical em aço inoxidável por onde desce uma película fina formada pela solução aquosa de brometo de lítio e água e o vapor d'água.

MEDRANO *et al*, 2002, realizam um estudo experimental da absorção de vapor de água sobre um escoamento em filme laminar ondulado caindo com a solução de brometo de lítio e água sobre a parede interna de um tubo liso vertical.

MEDRANO *et al*, 2003, descrevem a preocupação em remover os gases não absorvíveis que provocam uma redução na capacidade de arrefecimento. O modelo de refrigeração por absorção é um filme descendente no interior do tubo vertical com a solução de brometo de lítio e água e o método usado na solução do problema foi o Runge-Kutta-Verner de quinta ordem.

MORTAZAVI e MOGHADDAM, 2016, estudam o processo da transferência simultânea de calor e massa que ocorre durante a absorção do vapor refrigerante em uma película líquida descendente usando o método da transformada de Laplace. O método foi previamente utilizado para modelar o processo em duas suposições, primeiro com perfil de velocidade uniforme e em seguida com perfil de velocidade linear. O resultado mostrou que a suposição de velocidade uniforme pode resultar em um erro de até 30 % no cálculo da taxa de absorção. Usando o perfil mais realista, o da velocidade linear observa-se a eficácia do modelo através da comparação com vários resultados experimentais e numéricos da literatura aberta disponível. A solução analítica desenvolvida no presente estudo fornece uma abordagem simples, rápida e precisa para calcular a taxa de absorção em diferentes condições operacionais e propriedades de fluidos.

PINTO *et al* 2003, simulam teoricamente a transferência de calor e massa de uma película líquida descendente ao longo da parede vertical interna de um tubo cilíndrico. Para a solução numérica do modelo matemático foi usado à técnica das Transformadas de Landau com o objetivo de contornar o problema do domínio irregular da espessura da película. O sistema de equações é discretizado pela técnica das diferenças finitas e o sistema de equações algébricas não linear resultante é resolvido de maneira iterativa.

ROGDAKIS *et al*, 2003, estudam numericamente uma abordagem realista do processo de absorção do vapor d'água em uma solução aquosa de LiBr, formando a película descendente caindo sobre um tubo vertical. A formulação matemática bidimensional é adotada para resolver o sistema de equações da energia e da

concentração em regime laminar. O método das diferenças finitas implícitas é baseado na fórmula de Crank-Nicolson e utilizado para resolver as equações diferenciais parabólicas.

TAKAMATSU *et al*, 2003, estudam experimentalmente a transferência de calor e massa da película descendente num absorvedor em duto vertical usando a solução aquosa de LiBr - água.

YANG e WOOD, 1992 estudam um modelo numérico simples e promissor no desenvolvimento da transferência simultânea de calor e massa na absorção da película lisa descendente. O método utilizado na solução do sistema formulado do problema é o de diferenças finitas. Os resultados estão em boa concordância com as formulações da literatura e com os dados experimentais

YIGIT A., 1999, descreve o modelo do processo de absorção de uma película descendente laminar em um absorvedor de tubo vertical usando a solução de brometo de lítio e água. As equações diferenciais parciais que representam o problema foram resolvidas pelo método Crank-Nichelson.

YOON *et al*, 2005, estudam numericamente o processo simultâneo de calor e massa na absorção de vapor da solução aquosa de LiBr em um absorvedor vertical de placas planas refrigerado a água. O sistema de equações foi resolvido pelo método de volumes finitos. Os resultados obtidos dos coeficientes, dos fluxos e das taxas de transferência de calor e massa foram analisados e comparados na entrada e na interface.

2.4 – A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA (GITT)

A Técnica da Transformada Integral Generalizada (G.I.T.T.) surgiu a mais de três décadas por Mikhailov & Özisik (1984), destacando-se como uma ferramenta poderosa e completa que permite a solução dos diversos e complexos problemas, inicialmente com o trabalho de Özisik & Murray (1974) e de Mikhailov (1975), a partir das ideias da Técnica da Transformada Integral Clássica, que é uma extensão do método da separação de variáveis. A G.I.T.T. proporciona soluções híbridas numérico-analíticas

para problemas de difusão e de convecção-difusão cuja transformação integral resulta em sistemas de equações diferenciais ordinárias acopladas. Desde então a aplicação da G.I.T.T. vem se destacando, pois é uma técnica que associa a precisão das técnicas analíticas a um custo computacional competitivo com grande versatilidade das técnicas numéricas. O uso da GITT tem solucionado problemas de classes mais gerais, tanto lineares, quanto não lineares. Um aspecto importante é que a maioria dos problemas existentes na engenharia é de natureza não linear, e a técnica por possui característica híbrida consegue resolver. A dificuldade aumenta na resolução de sistemas acoplados que precisam ser desacoplados para serem solucionados. O estudo mais detalhado e completo sobre GITT foi feito por COTTA (1993).

O principal objetivo é transformar um sistema de equações diferenciais parciais originais em um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias através da expansão em autofunções, que é truncado em um número de termos necessários para garantir a convergência. A solução é obtida analiticamente para problemas que possam ser transformados em sistemas desacoplados para que possa ser resolvido de forma simples, ou numericamente para problemas mais complexos.

Do ponto de vista computacional, o principal problema dos trabalhos é a escolha da ferramenta numérica conveniente para a solução do problema físico através das equações que governam tal estudo. Sabe-se que na literatura existem vários métodos numéricos e suas diversas técnicas para resolver tais problemas. Dentre estas ferramentas, vamos utilizar a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT), que tem o reconhecimento da comunidade internacional como uma ferramenta importante para a construção de resultados *benchmark*, ou seja, é um método apropriado para fins de validação de códigos numéricos devido à sua exclusiva característica de controle automático de erro, restando neste aspecto as mesmas propriedades de uma solução puramente analítica, em problemas de transferência de calor e massa e em mecânica dos fluidos.

Com a GITT podemos resolver problemas das cinco classes diferentes: difusão, convecção-difusão, autovalores, equações da camada limite e equações de Navier-Stokes.

Algumas situações problemas que a GITT foi utilizada com êxito:

- Problemas que possuem coeficientes variáveis nas equações governantes;
- Problemas com coeficientes variáveis em suas condições de contorno;
- Problemas que apresentam contornos geométricos variáveis;
- Problemas auxiliares de autovalor de difícil solução;
- Problemas não lineares caracterizados pela presença de equações cujos termos fonte e/ou condições de contorno dependem do potencial a ser obtido.

Para a solução de um determinado problema através da GITT devem-se seguir as seguintes etapas:

- Escolha de um problema de autovalor auxiliar apropriado, que contenha o maior número de informações possíveis a respeito do problema original, com relação à geometria e operadores nas coordenadas a ser eliminado através da transformação integral;
- Solução do problema auxiliar, obtenção das autofunções, dos autovalores, e das normas usando a propriedade de ortogonalidade;
- Escrevendo o potencial original como uma expansão das autofunções oriundas do problema auxiliar e da propriedade de ortogonalidade, determina-se o par das fórmulas da Transformada Integral e da Inversa;
- Transformação de um sistema de equações diferenciais parciais num sistema de equações diferenciais ordinárias infinitas, através do operador integral que contenha a autofunção do problema auxiliar que possibilite a eliminação de uma ou mais variáveis espaciais;
- Resolução numérica do sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas, através do truncamento da série em uma ordem suficientemente grande para a precisão desejada, utilizando as subrotinas numéricas disponíveis e obtendo-se os potenciais transformados. Estas subrotinas são encontradas em pacotes comerciais de bibliotecas científicas, tais como a IVPAG para problemas de valor inicial (parabólicos) e BVPFD para problemas de valor de contorno (elípticos), ambas da biblioteca do IMSL (1990).
- Utilizar a fórmula inversa definida anteriormente, a fim de recuperar o potencial original.

Recentemente alguns passos intermediários são utilizados com o objetivo de melhorar o desempenho da técnica, como a utilização de filtros ou o uso do recurso do balanço integral, com o objetivo de homogeneizar as condições de contorno, e aceleração da convergência, reordenamento de autovalores e potenciais.

A aplicação da técnica da transformada integral generalizada (G.I.T.T.) na solução de escoamentos unidimensionais ou bidimensionais, laminares ou turbulentos de fluidos é estudada, tanto para determinação das equações de Navier-Stokes, como para as equações da camada limite com a formulação em função corrente, podemos citar: PAZ *et al* (2007), SILVA *et al* (2009), SILVA *et al* (2004), PEREIRA *et al* (1998), dentre muitos outros. Vale destacar também o livro de SANTOS *et al* (2002), que apresenta uma análise de diversos problemas convectivos em dutos com desenvolvimento térmico e hidrodinâmico simultâneo para escoamento laminar e turbulento. Um trabalho interessante é o de SPHAIER *et al*, 2004, que traz um estudo sobre o algoritmo UNIT que resolve problemas convectivos-difusivos usando o programa MATHEMATICA.

O método da GITT na solução dos sistemas de equações utilizando a formulação em variáveis primitivas, ainda é pequeno, ou seja, existem poucos trabalhos desenvolvidos nesta área, dentre os quais podemos citar alguns envolvendo equações da camada limite ou de Navier-Stokes para o campo de velocidade e a equação de Poisson para o campo de pressão em escoamentos laminares em placas planas paralelas e em dutos circulares por SILVA (2003), LIMA (2000), LIMA (2002), LIMA *et al* (2007), VERONESE (2008).

Em relação às aplicações práticas de engenharia, pode-se citar o sucesso da utilização da GITT na análise de equipamentos termo hidráulica, migração de rejeitos radiativos em solos, poluição ambiental, secagem de alimentos, aerodinâmica de veículos espaciais, resfriamento de equipamentos eletrônicos, reservatórios de petróleo, entre outros.

Os problemas de escoamento laminar entre placas planas ou em dutos são considerados problemas clássicos na literatura de métodos de solução de problemas convectivos, pois sua geometria permite um tratamento matemático mais simples.

XAVIER, 2010, em sua tese estuda o fenômeno da transferência simultânea de calor e massa em absorvedores das máquinas de refrigeração por absorção utilizando a Técnica da Transformada Integral Generalizada, para três casos de interesse prático com crescente grau de dificuldade em sua formulação matemática. Nos dois primeiros casos se referem a uma placa plana inclinada com a espessura da película constante ao longo do escoamento e o terceiro caso sobre um tubo, onde a espessura varia ao longo do perímetro.

MEDEIROS, 1998 estuda a convecção forçada em regime permanente e transiente no escoamento em desenvolvimento simultâneo com variação senoidal do perfil de temperatura de entrada em canais de placas planas e dutos circulares. A G.I.T.T. foi usada para fornecer uma solução híbrida semi-analítica da equação da energia que está sujeita a uma condição de contorno do 5º tipo, considerando os efeitos da capacitância térmica da parede, como também para resolver as equações da camada limite com formulação em variáveis primitivas e em função corrente para placas planas, e para dutos circulares com formulação em variáveis primitivas.

LIMA 2000 estuda em sua tese, o escoamento incompressível turbulento, em desenvolvimento térmico e hidrodinâmico no interior de um canal de placas planas paralelas, utilizando as equações da camada limite com formulações em variáveis primitivas e em função corrente, utilizando o método da GITT.

LIMA 2002, em sua tese, estuda a modelagem de um escoamento laminar de um fluido incompressível em desenvolvimento hidrodinâmico, no interior de reator fotocatalítico, em placas planas paralelas em regime permanente, para resolver as equações de Navier-Stokes, Poisson e a equação da transferência de massa com formulação de variáveis primitivas, utilizando a técnica da G.I.T.T., para determinar os perfis hidrodinâmico e de concentração.

NASCIMENTO *et al* 2006, analisam a aplicação da técnica GITT na solução da equação do momento para um escoamento laminar hidrodinâmico de um fluido não-newtoniano em duto circular, utilizando a equação da camada limite com formulação em variáveis primitivas.

SILVA, 2003 estuda o escoamento laminar de um fluido newtoniano incompressível no desenvolvimento simultâneo em dutos de geometrias regulares com formulação em variáveis primitivas e no desenvolvimento hidrodinâmico em dutos irregulares com formulação em termos de função corrente, aplicando o método G.I.T.T. na solução das equações de Navier-Stokes e da Energia para a determinação dos campos de velocidades e temperaturas.

VERONESE 2008, em sua tese, estuda as equações da camada limite em um canal de placas planas e em duto circular. As equações de Navier-Stokes em placas planas para o escoamento em desenvolvimento de um fluido não newtoniano do tipo lei-de-potência. A técnica G.I.T.T. é empregada para fornecer uma solução híbrida-analítica numérica para o sistema de equações da quantidade de movimento e de Poisson com formulação em variáveis primitivas.

CAPÍTULO III

ANÁLISE DO ESCOAMENTO EXTERNO DE PELÍCULA DESCENDENTE DE SOLUÇÃO AQUOSA SOBRE TUBOS HORIZONTAIS

3.1 – INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é resolver um problema de transferência simultânea de calor e massa com formulação em variáveis primitivas, unidimensional de um escoamento laminar em película sobre um tubo de um absorvedor horizontal, em coordenadas cartesianas com perfil de velocidade conhecido. Este problema é resolvido por XAVIER (2010), aplicando a técnica da transformada integral generalizada (GITT), obteve solução para o sistema de equações diferenciais acoplados nas fronteiras, e o programa utilizado foi o MATHEMATICA. A proposta deste capítulo é resolver o mesmo problema usando a mesma técnica da transformada integral generalizada, só que com uma nova modelagem, que inclui o perfil de velocidade nos problemas auxiliares da energia e da concentração usando a linguagem de programação FORTRAN.

3.2 – DEFINIÇÃO DO PROBLEMA PROPOSTO

Considere inicialmente um tubo horizontal no qual uma solução absorvente não volátil (LiBr), o brometo de Lítio, escoa sobre um tubo com perfis de velocidade, temperatura e concentração constantes. Com o objetivo de determinar as características térmicas e de concentração deste escoamento em uma região na qual a velocidade seja completamente desenvolvida. Uma representação esquemática da distribuição dos

fluidos de vapor d'água e da solução líquida água-brometo de lítio descendente sobre tubos horizontais é fornecida pela Fig. 3.1 para o problema analisado.

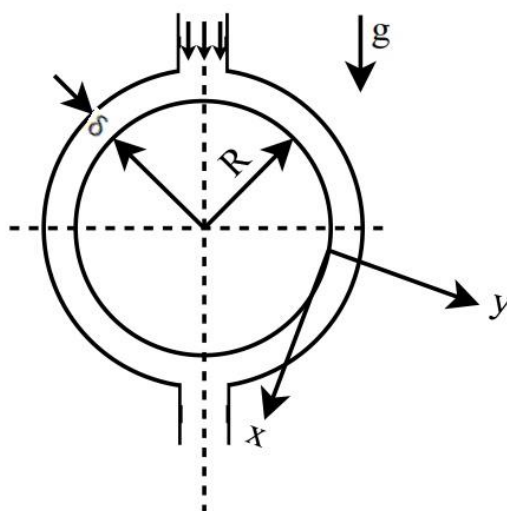


Figura 3.1 - Ilustração do problema proposto

A Fig. 3.2 mostra o processo de absorção entre tubos e como o escoamento do filme pode ser visto, na forma de gotejamento, em filete estável ou em placa.

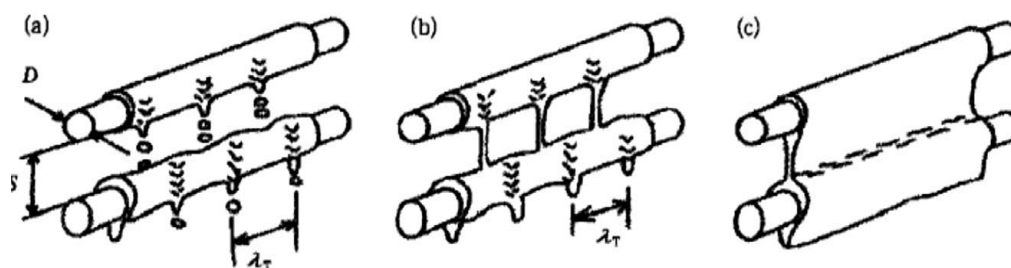


Figura 3.2 - Escoamento do filme líquido: (a) gotejamento (b) filete estável (c) placa

Fonte: (Xavier, 2010)

Para a modelagem do problema físico proposto, foram assumidas as seguintes considerações:

- O sistema está em regime permanente
- O líquido é newtoniano e tem propriedades físicas constantes. O valor das propriedades depende das condições de entrada do líquido.
- Escoamento unidimensional na direção longitudinal
- Perfil de velocidade completamente desenvolvido

- Escoamento incompressível
- A temperatura na parede e na superfície livre é imposta para obtenção dos resultados.
- O movimento do líquido é afetado só pela gravidade e atrito na parede do tubo.
- O aumento no fluxo de massa da mistura ao longo do tubo devido à absorção de vapor é desprezível.
- Na interface o vapor e o líquido estão em estado de equilíbrio. A relação entre temperatura da interface e a concentração é linear com coeficientes constantes.
- Todo calor de absorção é liberado na interface
- O líquido é uma mistura binária e só um componente está presente na fase vapor.
- Não existe transferência de calor do líquido para o vapor, nem transferência de calor por radiação, dissipação viscosa, gradientes de pressão, gradientes de concentração (efeito Dufour), ou efeitos gravitacionais.
- Não existe difusão por causa de gradientes de pressão, gradientes de temperatura (efeito Soret), ou reações químicas. A difusão de calor e massa na direção do escoamento é desprezível em relação à difusão perpendicular a direção do escoamento.
- A espessura do filme é extremamente pequena em relação ao raio do tubo. Isto permite a formulação do problema em coordenadas retangulares.

3.3 – FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA

Levando-se em conta as hipóteses simplificadoras apresentadas, as equações governantes que descrevem o problema físico podem ser assumidas da seguinte forma:

Da equação da quantidade de movimento na direção longitudinal tem-se:

$$\rho \left[u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial x} \right] = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho g \quad (3.1)$$

Observando as hipóteses do problema e eliminando os termos desprezados na equação (3.1) na nova equação fica simplificada:

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\rho g \quad (3.2)$$

Para determinar o perfil de velocidade, primeiro passo é integrar em y :

$$\int \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = - \int \frac{\rho g}{\mu} dy \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\rho g}{\mu} y + C_1 \quad (3.4)$$

Usando a condição de contorno na interface da película determina o valor da constante C_1

$$y = \delta \text{ e } \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{\rho g}{\mu} \delta + C_1 = 0 \quad (3.5)$$

$$C_1 = \frac{\rho g}{\mu} \delta \quad (3.6)$$

Então substituindo a constante, tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\rho g}{\mu} (\delta - y) \quad (3.7)$$

Integrando novamente a equação anterior em y tem-se:

$$\int \frac{\partial u}{\partial y} dy = \int \frac{\rho g}{\mu} (\delta - y) dy \quad (3.8)$$

$$u = \frac{\rho g}{\mu} \left[\delta y - \frac{y^2}{2} \right] + C_2 \quad (3.9)$$

Usando a condição sobre a parede:

$$y = 0 \text{ e } u = 0 \quad \rightarrow \quad C_2 = 0 \quad (3.10)$$

Substituindo os valores na equação, o perfil da velocidade na direção do escoamento é:

$$u(y) = \frac{\rho g}{\mu} \left[\delta y - \frac{y^2}{2} \right] \quad (3.11)$$

Organizando os termos, temos:

$$u(y) = \frac{\rho g \delta^2}{2\mu} \left[2 \left(\frac{y}{\delta} \right) - \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right] \quad (3.12)$$

O cálculo da velocidade média u_{med} na direção do escoamento é determinado integrando o perfil de velocidade $u(y)$ no intervalo $0 < y < \delta$ é igual a:

$$u_{med} = \frac{\int_0^\delta u(y) dy}{\int_0^\delta dy} = \frac{\int_0^\delta \frac{\rho g \delta^2}{2\mu} \left[2 \left(\frac{y}{\delta} \right) - \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right] dy}{y \Big|_0^\delta} \quad (3.13)$$

$$u_{med} = \frac{\frac{\rho g \delta^2}{2\mu} \int_0^\delta \left[2 \left(\frac{y}{\delta} \right) - \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right] dy}{\delta} = \frac{\rho g \delta^2}{2\mu \delta} \left[\frac{2}{\delta} \left(\frac{y^2}{2} \right) - \frac{1}{\delta^2} \frac{y^3}{3} \right]_0^\delta \quad (3.14)$$

O resultado final da velocidade média é:

$$u_{med} = \frac{\rho g \delta^2}{3\mu} \quad (3.15)$$

Substituindo a equação (3.12) na equação (3.15), tem-se:

$$u(y) = \frac{3}{2} u_{med} \left[2 \left(\frac{y}{\delta} \right) - \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right] \quad (3.16)$$

Onde $u(y)$ representa o campo de velocidade completamente desenvolvido.

3.3.1 - Equação da energia

$$u(y) \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2}; \quad 0 < y < \delta; \quad x > 0 \quad (3.17)$$

onde α representa o coeficiente de transferência de calor

Condição inicial e de contorno

$$x = 0 \rightarrow T(x, y) = T_0 \quad (3.17 \text{ a})$$

Na parede

$$y = 0 \rightarrow \begin{cases} T(x, y) = T_0 \\ \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (3.17 \text{ b}) \\ (3.17 \text{ c}) \end{matrix}$$

Na interface

$$y = \delta \rightarrow -k \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=\delta} = H_{abs} \rho \frac{D}{C_p} \frac{\partial C(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=\delta} \quad (3.17 \text{ d})$$

Onde k , H_{abs} , ρ , C_p , D , representam, respectivamente, a condutividade térmica, o calor de absorção, massa específica do fluido, calor específico à pressão constante e a difusividade mássica cinemática.

3.3.2 - Equação da Concentração

$$u(y) \frac{\partial C(x, y)}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C(x, y)}{\partial y^2}; \quad 0 < y < \delta; \quad x > 0 \quad (3.18)$$

Onde D representa o coeficiente de difusividade mássica cinemática

Condição inicial e de contorno

$$x = 0 \rightarrow C(x, y) = C_0 \quad (3.18 \text{ a})$$

Na parede

$$y = 0 \rightarrow \frac{\partial C(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \quad (3.18 \text{ b})$$

Na interface

$$y = \delta \rightarrow T(x, y) = A \cdot C(x, y) + B \quad (3.18 \text{ c})$$

3.3.3 - Os grupos adimensionais utilizados:

$$X = \frac{1}{Pe} \frac{x}{\delta}, \quad Y = \frac{y}{\delta}, \quad U(Y) = \frac{u(y)}{u_{med}} = \frac{3}{2}(2Y - Y^2), \quad Re = \frac{u_{med} \cdot \delta}{\nu}$$

$$\theta(X, Y) = \frac{T(x, y) - T_0}{T_e - T_0}, \quad W(X, Y) = \frac{C(x, y) - C_0}{C_e - C_0}, \quad Le = \frac{\alpha}{D}$$

$$T_e = AC_0 + B, \quad T_0 = AC_e + B \quad (3.19 \text{ a-i})$$

Onde,

T_e é a temperatura de uma solução de fração de massa C_0 de equilíbrio com o vapor.

C_e é a fração de massa de uma solução de temperatura T_0 , em equilíbrio com o vapor.

3. 4 – MODELO MATEMÁTICO ADIMENSIONAL ANALISANDO O CASO ADIABÁTICO

3.4.1 - Equação da energia

$$U(Y) \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial X} = \frac{\partial^2 \theta(X, Y)}{\partial Y^2}; \quad 0 < Y < 1; \quad X > 0 \quad (3.20)$$

A condição inicial e de contorno:

$$X = 0 \rightarrow \theta(0, Y) = 0 \quad (3.20 \text{ a})$$

$$Y = 0 \rightarrow \left. \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial Y} \right|_{Y=0} = 0 \quad (3.20 \text{ b})$$

$$Y = 1 \rightarrow \left. \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial Y} \right|_{Y=1} = f_{ac} \left. \frac{\partial W(X, Y)}{\partial Y} \right|_{Y=1} \quad (3.20 \text{ c})$$

Onde $f_{ac} \rightarrow$ é um fator de acoplamento na interface líquido-vapor determinado pela expressão:

$$f_{ac} = -\frac{H_{abs}}{C_p} \frac{D}{\alpha} \frac{C_e - C_0}{T_e - T_0} \quad (3.20 \text{ d})$$

3.4.2 - Equação da concentração

$$U(Y) \frac{\partial W(X, Y)}{\partial X} = \frac{1}{Le} \frac{\partial^2 W(X, Y)}{\partial Y^2}; \quad 0 < Y < 1; \quad X > 0 \quad (3.21)$$

As condições de entrada e de contorno:

$$X = 0 \rightarrow W(0, Y) = 0 \quad (3.21 \text{ a})$$

$$Y = 0 \rightarrow \left. \frac{\partial W(X, Y)}{\partial Y} \right|_{Y=0} = 0 \quad (3.21 \text{ b})$$

$$Y = 1 \rightarrow \theta(X, 1) + W(X, 1) = 1 \quad (3.21 \text{ c})$$

3.5 – APLICAÇÃO DA TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA NAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

3.5.1 - Problema auxiliar de autovalor da energia

Para a análise analítica do problema de transferência de calor e massa, pela GITT é necessária a solução de um problema auxiliar de autovalor para o campo térmico, e este recai sobre o problema típico de Sturm-Liouville. A escolha do problema auxiliar nesta formulação inclui o perfil de velocidade que está escrito da seguinte forma:

$$\frac{d^2 \psi_i(Y)}{dY^2} + \mu_i^2 U(Y) \psi_i(Y) = 0; \quad 0 < Y < 1; \quad X > 0 \quad (3.22)$$

$$\frac{d\psi_i(Y)}{dY} = 0 \quad \rightarrow \quad Y = 0 \quad (3.22 \text{ a})$$

$$\frac{d\psi_i(Y)}{dY} = 0 \quad \rightarrow \quad Y = 1 \quad (3.22 \text{ b})$$

3.5.2 - O par transformada e inversa

Fórmula da inversa $\theta(X, Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_i(Y) \bar{\theta}_i(X)$ (3.22 c)

Potencial transformado $\bar{\theta}_i(X) = \int_0^1 U(Y) \tilde{\psi}_i(Y) \theta(X, Y) dY$ (3.22 d)

Norma $N_i = \int_0^1 U(Y) \psi_i^2(Y) dY$ (3.22 e)

Autofunção $\psi_i(Y)$ (3.22 f)

Autofunção normalizada $\tilde{\psi}_i(Y) = \frac{\psi_i(Y)}{N_i^{1/2}}$ (3.22 g)

3.5.3 - Problema auxiliar do campo mássico é expresso através da equação da concentração

$$\frac{d^2 \Phi_i(Y)}{dY^2} + \beta_i^2 U(Y) \Phi_i(Y) = 0; \quad 0 < Y < 1; \quad X > 0 \quad (3.23)$$

$$\frac{d\Phi_i(Y)}{dY} = 0 \quad Y = 0 \quad (3.23 \text{ a})$$

$$\Phi_i(Y) = 0 \quad Y = 1 \quad (3.23 \text{ b})$$

3.5.4 - Par transformada e inversa

Fórmula da inversa $W(X, Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Phi}_i(Y) \bar{W}_i(X)$ (3.23 c)

Potencial transformado $\bar{W}_i(X) = \int_0^1 U(Y) \tilde{\Phi}_i(Y) W(X, Y) dY$ (3.23 d)

Norma $M_i = \int_0^1 U(Y) \Phi_i^2(Y) dY$ (3.23 e)

$$\text{Autofunção} \quad \Phi_i(Y) \quad (3.23 \text{ f})$$

$$\text{Autofunção normalizada} \quad \tilde{\Phi}_i(Y) = \frac{\Phi_i(Y)}{M_i^{1/2}} \quad (3.23 \text{ g})$$

Próximo passo é determinar os operadores integrais que são definidos a partir da expressão das transformadas:

$$\int_0^1 \tilde{\psi}_i(Y) dY \quad (3.24 \text{ a})$$

$$\frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \theta(X, Y) dY \quad (3.24 \text{ b})$$

$$\int_0^1 \tilde{\Phi}_i(Y) dY \quad (3.24 \text{ c})$$

$$\frac{1}{Le} \frac{1}{M_i^{1/2}} \int_0^1 W(X, Y) dY \quad (3.24 \text{ d})$$

3.6 - TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

O processo de transformação integral do sistema de equações diferenciais parciais formados pelas equações da energia e da concentração em um sistema diferencial ordinário é feito utilizando os operadores nos potenciais. A parte do desenvolvimento da transformação integral do sistema de equações está no Apêndice D.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{\theta}_i(X)}{dX} + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(X) - \tilde{\psi}_i(1) f_{ac} \frac{\partial W(X, 1)}{\partial Y} = 0 \\ \frac{d\bar{W}_i(X)}{dX} + \frac{\beta_i^2}{Le} \bar{W}_i(X) + \frac{1}{Le} \frac{d\tilde{\Phi}_i(1)}{dY} - \frac{\theta(X, 1)}{Le} \frac{d\tilde{\Phi}_i(1)}{dY} = 0 \end{array} \right. \quad (3.25 \text{ a-b})$$

$$\bar{\theta}_i(0) = 0 \quad e \quad \bar{W}_i(0) = 0 \quad (3.25 \text{ c-d})$$

Na resolução do sistema de equações da energia e da concentração, foi usado o recurso do balanço integral sugerido por COTTA (1993) e utilizado na tese de XAVIER

(2010). A demonstração do desenvolvimento do balanço integral nas equações da energia e da concentração está no Apêndice B.

Aplicando do balanço integral e algumas manipulações matemáticas o sistema de equações transformado:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{\theta}_i(X)}{dX} + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(X) - \sum_{j=1}^{\infty} CT2_{ij} \frac{d\bar{W}_j(X)}{dX} = 0 \\ \frac{d\bar{W}_i(X)}{dX} + \frac{\beta_i^2}{Le} \bar{W}_i(X) - \sum_{j=1}^{\infty} CC2_{ij} \bar{\theta}_j(X) - \sum_{j=1}^{\infty} CC3_{ij} \frac{d\bar{\theta}_j(X)}{dX} + CC4_i = 0 \end{array} \right. \quad (3.26 \text{ a-b})$$

Sendo os coeficientes:

$$CT2_{ij} = f_{ac} Le \cdot \tilde{\psi}_i(1) \int_0^1 U(Y) \tilde{\Phi}_j(Y) dY \quad (3.26 \text{ c})$$

$$CC2_{ij} = \frac{1}{Le} \frac{d\tilde{\Phi}_i(1)}{dY} \tilde{\psi}_j(0) \quad (3.26 \text{ d})$$

$$CC3_{ij} = \frac{1}{Le} \frac{d\tilde{\Phi}_i(1)}{dY} \int_0^1 \left[\int_0^{Y'} U(Y') \tilde{\psi}_j(Y') dY' \right] dY \quad (3.26 \text{ e})$$

$$CC4_i = \frac{1}{Le} \frac{d\tilde{\Phi}_i(1)}{dY} \quad (3.26 \text{ f})$$

CAPÍTULO IV

SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA DO ESCOAMENTO INTERNO EM ABSORVEDOR CIRCULAR VERTICAL APLICANDO A GITT

4.1 – INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é desenvolver uma solução para a transferência simultânea de calor e massa com formulação em variáveis primitivas para o problema unidimensional de um escoamento laminar com película descendente que cai no interior do duto de um absorvedor vertical no formato circular com perfil de velocidade conhecido. Para construção da solução é feito uso da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) para fornecer uma solução híbrida, ou seja, uma solução analítico-numérica das equações da conservação da quantidade de movimento, da Energia e da Concentração, com o conhecimento dos campos térmicos, e mássico ao longo do duto analisado. A seguir é apresentado, de forma esquemática, as figuras 4.1 e 4.2, que servem de base para o desenvolvimento da análise e busca da solução do problema. Para validar vamos comparar com os dados experimentais da tese de Medrano (2000) e de outros trabalhos teóricos que utilizaram as mesmas condições.

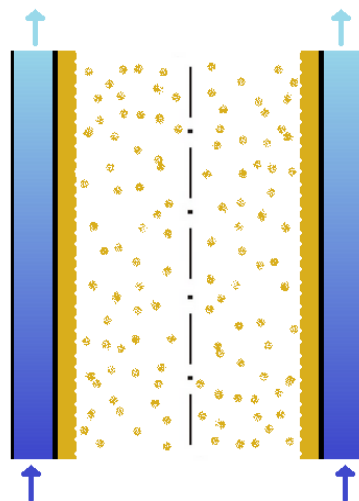


Figura 4.1 – Desenho esquemático da distribuição dos fluidos de vapor d'água e da solução líquida água – brometo de lítio descendente no duto em estudo.

LEGENDA:

	Entrada da água de resfriamento		Solução aquosa de Libr
	Saída da água de resfriamento		Libr em forma de vapor

A Fig 4.1 mostra o diagrama esquemático do processo de absorção modelado com o *falling film* (película descendente), vapor d'água e a mistura de trabalho, a solução aquosa de brometo de lítio que entra pela parte superior do duto. A solução flui para baixo como um filme que cai sobre a parede interna do tubo e absorve o vapor d'água formando uma película fina descendente. A solução é arrefecida por meio de um fluxo de água que flui em contracorrente através do espaço anular como mostrado no desenho.

A Fig. 4.2 mostra o aparato experimental projetado e construído para simular as condições de trabalho presentes num sistema de refrigeração por absorção que foi usado na tese de Medrano (2000) e todos os componentes que formam o sistema em análise, como absorvedor, gerador, as bombas e os tanques. A parte que nos interessa para o trabalho em especial é o absorvedor, que muitos autores denominam de coração do sistema de refrigeração por absorção. Este dispositivo foi construído em aço inoxidável, material recomendado para construção deste equipamento, por causa do uso da solução de brometo de lítio e água ser corrosiva, e no formato de dois tubos verticais concêntricos. No interior do tubo interno circulam o vapor d'água e a solução aquosa, entre os tubos a água de arrefecimento. Na entrada é distribuída a solução aquosa na parte superior do tubo interno, que quando cai forma uma película fina que é absorvida pelo vapor d'água, e através da parte anular entre os dois tubos concêntricos circula água de arrefecimento em contracorrente.

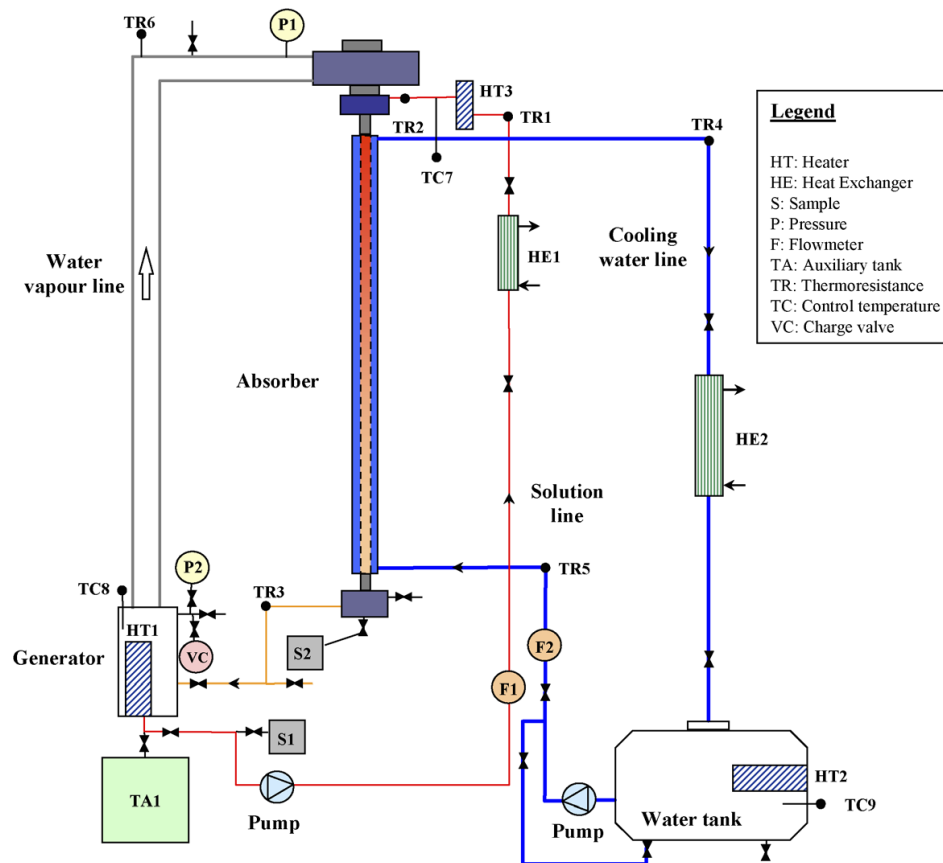


Figura 4.2 – Diagrama esquemático do set- up para estudo experimental do escoamento de película interna descendente e vapor no processo de absorção. Fonte: (Tese de Medrano, 2000)

4.2 – DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Considere o escoamento de um filme formado por uma solução líquida e vapor escoando em um tubo vertical. A espessura da película do líquido é muito fina comparada com o raio do espaço ocupado pelo vapor e o escoamento é unidimensional na direção longitudinal do tubo. Com objetivo de resolver as equações da continuidade, da quantidade de movimento na direção longitudinal, da energia e da concentração, observando que estas apresentam desafios sob o ponto de vista numérico principalmente pelo fato do acoplamento das condições de contorno.

A Fig. 4.3 traz a ilustração do escoamento de uma película aquosa descendente no interior de um tubo circular.

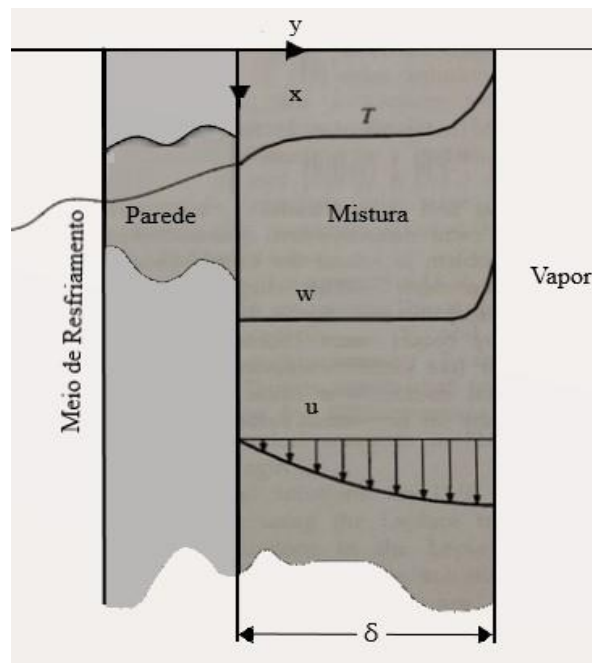


Figura 4.3 – Escoamento de uma película absorvente em um tubo vertical com espessura constante e regime laminar.

A formulação matemática do problema físico é obtida a partir das seguintes hipóteses simplificadoras:

- O sistema está em regime permanente;
- Fluido newtoniano;
- As propriedades termo físicas são constantes;
- Problema unidimensional, com variação das variáveis só na direção axial.
- Escoamento laminar incompressível em duto cilíndrico vertical descendente;
- Análise da região líquida, o vapor interage na interface, onde ocorre a reação e a liberação de calor;
- Escoamento unidimensional na direção longitudinal do duto vertical, afetado pela gravidade, perfil completamente desenvolvido, $v(r)$;
- O aumento no fluxo de massa da solução líquida devido à absorção do vapor é desprezível;
- A solução binária com um único componente presente na fase vapor;
- Não existe transferência de calor do líquido para o vapor, nem transferência de calor por radiação, dissipação viscosa, gradientes de concentração (efeito Dufour), ou efeitos gravitacionais;

- Não existe difusão por causa de gradientes de pressão, gradientes de temperatura (efeito Soret), ou reações químicas;
- A difusão de calor e massa na direção do escoamento é desprezível em relação à difusão perpendicular a direção do escoamento;
- Não existe tensão de cisalhamento entre as fases líquido e vapor na interface;
- A espessura média da película é suposta constante e o raio do tubo é muito maior que a espessura da película.

4.3 - FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA

As equações governantes na região da solução e do vapor são descritas em coordenadas cilíndricas, nos seguintes intervalos $R_{int} < r < R_t$ e $z > 0$:

4.3.1 - Equação da continuidade

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (4.1)$$

4.3.2 - Equação da quantidade de movimento na direção longitudinal

$$\rho_l \left[u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right] = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu_l \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right] + \rho_l g \quad (4.2)$$

Desprezando os efeitos das forças de inércia, que é o equivalente a considerar o escoamento completamente desenvolvido.

Onde,

$\rho_l \rightarrow$ massa específica do líquido da solução

$\rho_v \rightarrow$ massa específica do vapor saturado na saturação para a temperatura e pressão da solução líquida.

Assim, podemos reescrever a equação (4.2) como:

$$0 = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu_l \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right] + \rho_l g \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu_l \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right] + \rho_l g \quad (4.4)$$

Com gradiente de pressão imposto sobre a película

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho_v g \quad (4.5)$$

Fazendo algumas manipulações matemáticas, como integrais, derivadas e determinando o valor das constantes. Todos os passos detalhados para a determinação do perfil de velocidade, a Eq. (A.22) estão demonstrados no apêndice A.

O perfil da velocidade na direção do escoamento é:

$$v(r) = \frac{g(\rho_l - \rho_v)R_t^2}{4\mu_l} \left[1 - \left(\frac{r}{R_t} \right)^2 + 2 \left(\frac{R_{int}}{R_t} \right)^2 \cdot \ln \left(\frac{r}{R_t} \right) \right] \quad (4.6)$$

4.3.3 - Equação da energia

$$v(r) \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha_l \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] \quad (4.7)$$

Condições de entrada e de contorno:

$$z = 0 \rightarrow T(0, r) = T_0 \quad (4.7 \text{ a})$$

$$r = R_{int} \rightarrow -k \frac{\partial T(z, r)}{\partial r} = H_{abs} \rho D \frac{\partial C(z, r)}{\partial r} \quad (4.7 \text{ b})$$

$$r = R_t \rightarrow -k \frac{\partial T(z, r)}{\partial r} = \bar{h}(T - T_c) \quad (4.7 \text{ c})$$

Sendo T_c a temperatura da água de arrefecimento.

Está condição de contorno pode apresentar duas situações diferentes a depender do valor da constante $\bar{h}$ e da temperatura da água de arrefecimento, como se pode observar logo a baixo.

$$\text{Se } \bar{h} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad \text{Adiabática} \quad (4.7 \text{ a})$$

$$\text{Se } \bar{h} \rightarrow \infty \Rightarrow T = T_c \text{ e } T_c = T_0 \rightarrow T = T_0 \quad \text{Isotérmica} \quad (4.7 \text{ b})$$

4.3.4 - Equação da concentração de massa

$$v(r) \frac{\partial C}{\partial z} = D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C}{\partial r} \right) \right] \quad (4.8)$$

Com as seguintes condições de entrada e de contorno:

$$z = 0 \rightarrow C(0, r) = C_0 \quad (4.8 \text{ a})$$

$$r = R_{int} \rightarrow T(z, r) = A \cdot C(z, r) + B \quad (4.8 \text{ b})$$

$$r = R_t \rightarrow \frac{\partial C(z, r)}{\partial r} = 0 \quad (4.8 \text{ c})$$

A condição (4.8 c) representa que não existe fluxo de massa atravessando a parede, o que indica que a parede é impermeável.

4.3.5 - Os grupos adimensionais utilizados:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{z}{Pe \cdot R_t}, \quad \eta = \frac{r}{R_t}, \quad V(\eta) = \frac{v(r)}{v_{med}}, \quad Re = \frac{v_{med} \cdot R_t}{\nu} \\ \theta &= \frac{T - T_0}{T_e - T_0}, \quad W = \frac{C - C_0}{C_e - C_0}, \quad Le = \frac{\alpha}{D} \\ T_e &= AC_0 + B \text{ e } T_0 = AC_e + B \end{aligned} \quad (4.9 \text{ a-i})$$

As condições (4.9 h-i) foram utilizadas nas teses de WASSENAAR (1994) e XAVIER (2010), que relacionam temperatura e concentração em equilíbrio com as frações de massa, sendo T_e a temperatura de uma solução de fração de massa C_0 em equilíbrio com o vapor, C_e a fração de massa de uma solução de temperatura T_0 em equilíbrio com o vapor.

O cálculo da velocidade média v_{med} na direção do escoamento estar detalhado no apêndice A, uma amostra do que foi feito é integrar o perfil de velocidade $v(r)$ no intervalo $R_{int} < r < R_t$ é igual a:

$$v_{med} = \frac{\int_{R_{int}}^{R_t} v(r).rdr}{\int_{R_{int}}^{R_t} rdr} \quad (4.10)$$

4.3.5.1 Substituindo os seguintes grupos adimensionais:

$$\eta = \frac{r}{R_t}, \quad \eta_{int} = \frac{R_{int}}{R_t} \quad e \quad \eta_t = \frac{R_t}{R_t} = 1 \quad (4.11 \text{ a-c})$$

4.3.5.2 O resultado final da velocidade média é:

$$v_{med} = \frac{g(\rho_l - \rho_v)R_t^2}{8\mu_l} \left[\frac{1 - 4\eta_{int}^2 + 3\eta_{int}^4 - 4\eta_{int}^4 \ln(\eta_{int})}{1 - \eta_{int}^2} \right] \quad (4.12)$$

Para determinar o perfil de velocidade adimensionalizado aplica-se o grupo adimensional de equação (4.9 c).

Logo, o perfil de velocidade adimensionalizado é:

$$V(\eta) = \frac{2(1 - \eta_{int}^2)}{(1 - 4\eta_{int}^2 + 3\eta_{int}^4 - 4\eta_{int}^4 \ln(\eta_{int}))} [1 - \eta^2 + 2\eta_{int}^2 \ln(\eta)] \quad (4.13)$$

4.3.5.3 O perfil da velocidade simplificado em função da constante ς é:

$$V(\eta) = \varsigma. [1 - \eta^2 + 2\eta_{int}^2 \ln(\eta)] \quad (4.14)$$

Sabendo que a constante ς é:

$$\varsigma = \frac{2(1 - \eta_{int}^2)}{(1 - 4\eta_{int}^2 + 3\eta_{int}^4 - 4\eta_{int}^4 \ln(\eta_{int}))} \quad (4.15)$$

Aplicando os seguintes grupos adimensionais formados pelas Equações (4.9 a-i) nas equações da continuidade, da energia e da concentração, e nas respectivas condições de entrada e de contorno, obtém-se o sistema de equações adimensionalizadas no domínio $\eta_{int} < \eta < 1$ e $\xi > 0$

4.3.6 - EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

$$\frac{\partial V(\eta)}{\partial \xi} = 0 \quad (4.16)$$

4.3.7 - EQUAÇÃO DA ENERGIA

$$V(\eta) \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{1}{\eta} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) \right] \quad (4.17)$$

Condição inicial adimensionalizada:

$$\xi = 0, \quad T = T_0 \rightarrow \theta(0, \eta) = 0 \quad (4.17 \text{ a})$$

Condições de contorno adimensionalizadas:

Na interface:

$$\eta = \eta_{int} \rightarrow \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \eta} = f_{ac} \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \eta} \quad (4.17 \text{ b})$$

Onde $f_{ac} \rightarrow$ é um fator de acoplamento na interface líquido-vapor determinado pela expressão:

$$f_{ac} = \frac{H_{abs}}{C_p} \frac{D}{\alpha} \frac{C_e - C_0}{T_e - T_0} \quad (4.17 \text{ c})$$

Na parede: a condição adiabática:

$$\eta = 1 \rightarrow \frac{\partial \theta(\xi, 1)}{\partial \eta} = 0 \quad (4.17 \text{ d})$$

4.3.8 - EQUAÇÃO DA CONCENTRAÇÃO

$$V(\eta) \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{1}{\eta} \left[\frac{1}{Le} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) \right] \right] \quad (4.18)$$

Com as seguintes condições de entrada e de contorno adimensionalizadas:

$$\xi = 0, \quad C = C_0 \rightarrow W(0, \eta) = 0 \quad (4.18 \text{ a})$$

Na interface:

$$\eta = \eta_{int} \rightarrow W(\xi, \eta) + \theta(\xi, \eta) = 1 \quad (4.18 \text{ b})$$

Na parede:

$$\eta = 1 \rightarrow \left. \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = 0 \quad (4.18 \text{ c})$$

Para resolver o problema da transferência simultânea de calor e massa, com formulação em variáveis primitivas, do problema unidimensional de um escoamento laminar com película descendente que cai no interior do duto de um absorvedor vertical no formato circular com perfil de velocidade conhecido. A Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) será aplicada em duas modelagens diferentes para no final comparar e analisar os resultados.

4.4 - APLICAÇÃO DA GITT NA MODELAGEM 1 - SEM O PERFIL DE VELOCIDADE

4.4.1 - Determinação dos problemas de autovalores

Para o tratamento analítico dos problemas de transferência de calor e massa, geralmente faz-se necessário à solução de um problema de autovalor. O método da contagem de sinal permite calcular quantos autovalores sejam necessários para a convergência da solução do problema. Os problemas auxiliares de autovalores propostos neste trabalho é um problema de Sturm–Liouville, dado por (Ozisik, 1993) e por (Mikhailov e Ozisik, 1984).

4.4.1.1 - Problema auxiliar para o campo térmico

Para o intervalo: $\eta_{int} < \eta < 1$

$$\frac{d}{d\eta} \left[\eta \frac{d\psi_i(\eta)}{d\eta} \right] + \mu_i^2 \eta \psi_i(\eta) = 0 \quad (4.19)$$

Condições de contorno para o problema:

$$\frac{d\psi_i(\eta_{int})}{d\eta} = 0 \quad (4.19 \text{ a})$$

$$\frac{d\psi_i(1)}{d\eta} = 0 \quad (4.19 \text{ b})$$

O problema auxiliar para o campo de temperatura é um problema de Sturm-Liouville e tem solução analítica dada por (Ozisik, 1993).

Autofunção:

$$\psi_i(\eta) = \mu_i [J_1(\mu_i)Y_0(\mu_i\eta) - J_0(\mu_i\eta)Y_1(\mu_i)] \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.19 \text{ c})$$

Norma:

$$N_i = \int_{\eta_{int}}^1 \eta \psi_i^2(\eta) d\eta \quad (4.19 \text{ d})$$

O resultado encontrado para a norma:

$$N_i = \frac{2[J_0'^2(\mu_i\eta_{int}) - J_0'^2(\mu_i)]}{\pi^2 \cdot \mu_i^2 J_0'^2(\mu_i\eta_{int})} = \frac{2[J_1^2(\mu_i\eta_{int}) - J_1^2(\mu_i)]}{\pi^2 \mu_i^2 J_1^2(\mu_i\eta_{int})}$$

Autofunções normalizadas:

$$\tilde{\psi}_i(\eta) = \frac{\psi_i(\eta)}{N_i^{1/2}} \quad (4.19 \text{ e})$$

Os autovalores, μ_i' s, são as raízes das equações transcendentais para o campo térmico.

As autofunções, $\tilde{\psi}_i(\eta)$, tem a seguinte propriedade de ortogonalidade:

$$\int_{\eta_{int}}^1 \eta \tilde{\psi}_i(\eta) \tilde{\psi}_j(\eta) d\eta = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (4.19 \text{ f})$$

4.4.1.2 - Determinação dos pares transformada e inversa

O par transformada-inversa consiste de uma integral e uma fórmula da inversa que tem como objetivo recuperar o potencial desejado. Para encontrar o par transformada - inversa é necessário utilizar o problema auxiliar escolhido.

CAMPO TÉRMICO

$$\text{Fórmula da inversa} \quad \theta(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_i(\eta) \bar{\theta}_i(\xi) \quad (4.19 \text{ g})$$

$$\text{Potencial transformado} \quad \bar{\theta}_i(\xi) = \int_{\eta_{int}}^1 \eta \tilde{\psi}_i(\eta) \theta(\xi, \eta) d\eta \quad (4.19 \text{ h})$$

4.4.1.3 - Problema auxiliar para o campo da concentração:

Para o intervalo: $\eta_{int} < \eta < 1$

$$\frac{d}{d\eta} \left[\eta \frac{d\phi_i(\eta)}{d\eta} \right] + \beta_i^2 \eta \phi_i(\eta) = 0 \quad (4.20)$$

Condições de contorno para o problema:

$$\phi_i(\eta_{int}) = 0 \quad (4.20 \text{ a})$$

$$\frac{d\phi_i(1)}{d\eta} = 0 \quad (4.20 \text{ b})$$

Este problema, como o problema da temperatura tem soluções analíticas, dada por (OZISIK, 1993).

Autofunção:

$$\phi_i(\eta) = \beta_i [J_1(\beta_i) Y_0(\beta_i \eta) - J_0(\beta_i \eta) Y_1(\beta_i)] \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.20 \text{ c})$$

Norma:

$$M_i = \int_{\eta_{int}}^1 \eta \phi_i^2(\eta) d\eta \quad (4.20 d)$$

$$M_i = \frac{2[J_0^2(\beta_i \eta_{int}) - J_0'^2(\beta_i)]}{\pi^2 \cdot \beta_i^2 J_0^2(\beta_i \eta_{int})} = \frac{2[J_0^2(\beta_i \eta_{int}) - \beta_i^2 J_1^2(\beta_i)]}{\pi^2 \beta_i^2 J_0^2(\beta_i \eta_{int})}$$

Autofunções normalizadas:

$$\tilde{\phi}_i(\eta) = \frac{\phi_i(\eta)}{M_i^{1/2}} \quad (4.20 e)$$

Os autovalores, β_i 's, são as raízes das equações transcendentais para o campo mássico.

As autofunções, $\phi_i(\eta)$, têm a seguinte propriedade de ortogonalidade para a concentração:

$$\int_{\eta_{int}}^1 \eta \tilde{\phi}_i(\eta) \tilde{\phi}_j(\eta) d\eta = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (4.20 f)$$

CAMPO MÁSSICO

$$\text{Fórmula da inversa} \quad W(\eta, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\phi}_i(\eta) \bar{W}_i(\xi) \quad (4.20 g)$$

$$\text{Potencial transformado} \quad \bar{W}_i(\xi) = \int_{\eta_{int}}^1 \eta \tilde{\phi}_i(\eta) W(\xi, \eta) d\eta \quad (4.20 h)$$

Próximo passo é determinar os operadores integrais que são definidos a partir da expressão das transformadas:

$$\int_{\eta_{int}}^1 \tilde{\psi}_i(\eta) d\eta \quad e \quad \int_{\eta_{int}}^1 \theta(\xi, \eta) d\eta \quad (4.21 a-b)$$

$$\int_{\eta_{int}}^1 \tilde{\phi}_i(\eta) d\eta \quad e \quad \frac{1}{Le} \int_{\eta_{int}}^1 W(\xi, \eta) d\eta \quad (4.21 c-d)$$

4.5 - TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

O processo de transformação integral do sistema de equações diferenciais parciais formados pela equação da energia e pela equação da concentração em um sistema diferencial ordinário é feito utilizando os operadores nos potenciais. A parte do desenvolvimento da transformação integral do sistema de equação está no Apêndice E.

Com o objetivo de melhorar a eficiência e resolver o problema da não homogeneização das condições de contorno acopladas na interface vamos aplicar o balanço integral nas equações da energia e da concentração. A aplicação do balanço integral está detalhada no Apêndice C mostrando todos os passos e as equações encontradas são:

4.6 – SISTEMA DE EQUAÇÕES

4.6.1 - Energia

$$\bar{\theta}_i(0) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left[\int_{\eta_{int}}^1 \eta V(\eta) \tilde{\psi}_i(\eta) \tilde{\psi}_j(\eta) d\eta \frac{d\bar{\theta}_j(\xi)}{d\xi} - Le \cdot f_{ac} \tilde{\psi}_i(\eta_{int}) \int_{\eta_{int}}^1 \eta V(\eta) \tilde{\phi}_j(\eta) d\eta \frac{d\bar{W}_j(\xi)}{d\xi} \right] + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(\xi) = 0 \quad (4.22)$$

4.6.2 – Concentração

$$\bar{W}_i(0) = 0$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \int_{\eta_{int}}^1 \eta V(\eta) \tilde{\phi}_i(\eta) \tilde{\phi}_j(\eta) d\eta \frac{d\bar{W}_j(\xi)}{d\xi} + \frac{\eta_{int}}{Le} \frac{d\phi_i(\eta_{int})}{d\eta} \tilde{\psi}_j(1) \bar{\theta}_j(\xi) \right. \\ \left. + \frac{\eta_{int}}{Le} \frac{d\phi_i(\eta_{int})}{d\eta} \int_{\eta_{int}}^1 \left[\frac{1}{\eta'} \int_{\eta'}^1 \eta' V(\eta') \tilde{\psi}_j(\eta') d\eta' \right] d\eta \frac{d\bar{\theta}_j(\xi)}{d\xi} \right\} \\ + \frac{\beta_i^2}{Le} \bar{W}_i(\xi) - \frac{\eta_{int}}{Le} \frac{d\phi_i(\eta_{int})}{d\eta} = 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

4.6.3 – Substituindo o termo da velocidade no sistema de equações:

$$V(\eta) = \varsigma \cdot [1 - \eta^2 + 2\eta_{int}^2 \ln(\eta)]$$

Reorganizando as equações e substituindo o valor $V(\eta)$, o sistema de equações a ser resolvido é:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\theta}_j(\xi)}{d\xi} &= \sum_{j=1}^{\infty} [CT1_{ij} - CT2_{ij}]^{-1} \cdot \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} [CT3_{ij} - CT4_{ij}] \frac{d\bar{W}_j(\xi)}{d\xi} - \mu_i^2 \bar{\theta}_i(\xi) \right\} \\ \frac{d\bar{W}_j(\xi)}{d\xi} &= \sum_{j=1}^{\infty} [CC1_{ij} - CC2_{ij}]^{-1} \cdot \left\{ - \sum_{j=1}^{\infty} \left[CC3_{ij} \bar{\theta}_j(\xi) + CC4_{ij} \frac{d\bar{\theta}_j(\xi)}{d\xi} \right] - \frac{\beta_i^2}{Le} \bar{W}_i(\xi) \right. \\ &\quad \left. + CC5_i \right\} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Os coeficientes da equação da energia são:

$$CT1_{ij} = \int_{\eta_{int}}^1 \varsigma \eta \tilde{\psi}_i(\eta) \tilde{\psi}_j(\eta) d\eta \quad (4.24 \text{ a})$$

$$CT2_{ij} = \int_{\eta_{int}}^1 \varsigma \eta^3 \tilde{\psi}_i(\eta) \tilde{\psi}_j(\eta) d\eta \quad (4.24 \text{ b})$$

$$CT3_{ij} = Le \cdot f_{ac} \tilde{\psi}_i(\eta_{int}) \int_{\eta_{int}}^1 \varsigma \eta \tilde{\phi}_j(\eta) d\eta \quad (4.24 \text{ c})$$

$$CT4_{ij} = Le \cdot f_{ac} \tilde{\psi}_i(\eta_{int}) \int_{\eta_{int}}^1 \varsigma \eta^3 \tilde{\phi}_j(\eta) d\eta \quad (4.24 \text{ d})$$

Os coeficientes da equação da concentração são:

$$CC1_{ij} = \int_{\eta_{int}}^1 \varsigma \eta \tilde{\phi}_i(\eta) \tilde{\phi}_j(\eta) d\eta \quad (4.24 \text{ e})$$

$$CC2_{ij} = \int_{\eta_{int}}^1 \varsigma \eta^3 \tilde{\phi}_i(\eta) \tilde{\phi}_j(\eta) d\eta \quad (4.24 f)$$

$$CC3_{ij} = \frac{\eta_{int}}{Le} \frac{d\phi_i(\eta_{int})}{d\eta} \tilde{\psi}_j(1) \quad (4.24 g)$$

$$CC4_{ij} = \frac{\eta_{int}}{Le} \frac{d\phi_i(\eta_{int})}{d\eta} \int_{\eta_{int}}^1 \left[\frac{1}{\eta'} \int_{\eta'}^1 \varsigma \eta' \tilde{\psi}_j(\eta') d\eta' - \frac{1}{\eta'} \int_{\eta'}^1 \varsigma (\eta')^3 \tilde{\psi}_j(\eta') d\eta' \right] d\eta \quad (4.24 h)$$

$$CC5_i = \frac{\eta_{int}}{Le} \frac{d\phi_i(\eta_{int})}{d\eta} \quad (4.24 i)$$

4.7 - APLICAÇÃO DA GITT NA MODELAGEM 2 - INCLUINDO O PERFIL DE VELOCIDADE

4.7.1 - Determinação dos problemas de autovalores

Para o tratamento analítico da modelagem 2, que traz a inclusão do perfil de velocidade $V(\eta)$ nos problemas auxiliares dos campos térmico e mássico não tem solução analítica e será determinado utilizando a contagem de sinais no programa FORTRAN.

4.7.1.1 - Problema auxiliar para o campo térmico

Para o intervalo: $\eta_{int} < \eta < 1$

$$\frac{d}{d\eta} \left[\eta \frac{d\psi_i(\eta)}{d\eta} \right] + \mu_i^2 \eta V(\eta) \psi_i(\eta) = 0 \quad (4.25)$$

Condições de contorno para o problema:

$$\frac{d\psi_i(\eta_{int})}{d\eta} = 0 \quad (4.25 \text{ a})$$

$$\frac{d\psi_i(1)}{d\eta} = 0 \quad (4.25 \text{ b})$$

$$\text{Autofunção} \quad \psi_i(\eta) \quad (4.25 \text{ c})$$

$$\text{Norma} \quad N_i = \int_{\eta_{int}}^1 \eta V(\eta) \psi_i^2(\eta) d\eta \quad (4.25 \text{ d})$$

$$\text{Autofunções normalizadas} \quad \tilde{\psi}_i(\eta) = \frac{\psi_i(\eta)}{N_i^{1/2}} \quad (4.25 \text{ e})$$

As autofunções, $\tilde{\psi}_i(\eta)$, tem a seguinte propriedade de ortogonalidade:

$$\int_{\eta_{int}}^1 \eta \tilde{\psi}_i(\eta) \tilde{\psi}_j(\eta) d\eta = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (4.25 \text{ f})$$

4.7.1.2 - Determinação dos pares transformada e inversa

O par transformada-inversa consiste de uma integral e uma fórmula da inversa que tem como objetivo recuperar o potencial desejado. Para encontrar o par transformada - inversa é necessário utilizar o problema auxiliar escolhido.

CAMPO TÉRMICO:

$$\text{Fórmula da inversa} \quad \theta(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_i(\eta) \bar{\theta}_i(\xi) \quad (4.25 \text{ g})$$

$$\text{Potencial transformado} \quad \bar{\theta}_i(\xi) = \int_{\eta_{int}}^1 \eta V(\eta) \tilde{\psi}_i(\eta) \theta(\xi, \eta) d\eta \quad (4.25 \text{ h})$$

4.7.1.3 - Problema auxiliar para o campo da concentração:

Para o intervalo: $\eta_{int} < \eta < 1$

$$\frac{d}{d\eta} \left[\eta \frac{d\phi_i(\eta)}{d\eta} \right] + \beta_i^2 \eta V(\eta) \phi_i(\eta) = 0 \quad (4.26)$$

Condições de contorno para o problema:

$$\phi_i(\eta_{int}) = 0 \quad (4.26 \text{ a})$$

$$\frac{d\phi_i(1)}{d\eta} = 0 \quad (4.26 \text{ b})$$

$$\text{Autofunção} \quad \phi_i(\eta) \quad (4.26 \text{ c})$$

$$\text{Norma} \quad M_i = \int_{\eta_{int}}^1 \eta V(\eta) \phi_i^2(\eta) d\eta \quad (4.26 \text{ d})$$

$$\text{Autofunções normalizadas} \quad \tilde{\phi}_i(\eta) = \frac{\phi_i(\eta)}{M_i^{1/2}} \quad (4.26 \text{ e})$$

Os autovalores, β_i' s, são as raízes das equações transcendentais para o campo mássico.

As autofunções, $\phi_i(\eta)$, têm a seguinte propriedade de ortogonalidade para a concentração:

$$\int_{\eta_{int}}^1 \eta \tilde{\phi}_i(\eta) \tilde{\phi}_j(\eta) d\eta = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (4.26 \text{ f})$$

4.7.1.4 - Determinação dos pares transformada e inversa

O par transformada-inversa consiste de uma integral e uma fórmula da inversa que tem como objetivo recuperar o potencial desejado. Para encontrar o par transformada - inversa é necessário utilizar o problema auxiliar escolhido.

CAMPO MÁSSICO:

$$\text{Fórmula da inversa} \quad W(\eta, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\phi}_i(\eta) \bar{W}_i(\xi) \quad (4.26 \text{ g})$$

$$\text{Potencial transformado} \quad \bar{W}_i(\xi) = \int_{\eta_{int}}^1 \eta V(\eta) \tilde{\phi}_i(\eta) W(\xi, \eta) d\eta \quad (4.26 \text{ h})$$

Próximo passo é determinar os operadores integrais que são definidos a partir da expressão das transformadas:

$$\int_{\eta_{int}}^1 \eta \tilde{\psi}_i(\eta) d\eta \quad e \quad \int_{\eta_{int}}^1 \theta(\xi, \eta) d\eta \quad (4.27 \text{ a-b})$$

$$\int_{\eta_{int}}^1 \eta \tilde{\phi}_i(\eta) d\eta \quad e \quad \frac{1}{Le} \int_{\eta_{int}}^1 W(\xi, \eta) d\eta \quad (4.27 \text{ c-d})$$

4.8 - TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

Fazendo de forma sucinta a transformação integral para não ficar muito repetitivo o capítulo. Aplicando o operador de Eq. (4.27 a) na equação da Energia de Eq. (4.17), e o operador de Eq. (4.27 b) na equação do problema auxiliar térmico de Eq. (4.25), em seguida o operador de Eq. (4.27 c) na equação da Concentração de Eq. (4.18), e o operador de Eq. (4.27 d) na equação do problema auxiliar mássico de Eq. (4.26), e substituindo as expressões encontradas pelo balanço integral de Eqs. (C.10) e (C.16), o resultado encontrado é o sistema de equações (4.28 a-d) que será resolvido utilizando a subrotina DIVPAG, da biblioteca IMSL do programa Fortran.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{\theta}_i(\xi)}{d\xi} = \sum_{j=1}^{\infty} CT2_{ij} \frac{d\bar{W}_j(\xi)}{d\xi} - \mu_i^2 \bar{\theta}_i(\xi) \\ \frac{d\bar{W}_i(\xi)}{d\xi} = - \sum_{j=1}^{\infty} \left[CC2_{ij} \bar{\theta}_j(\xi) + CC3_{ij} \frac{d\bar{\theta}_j(\xi)}{d\xi} \right] - \frac{\beta_i^2}{Le} \bar{W}_i(\xi) + CC4_i \\ \bar{\theta}_i(0) = 0 \quad e \quad \bar{W}_i(0) = 0 \end{array} \right. \quad (4.28 \text{ a-d})$$

Sendo os coeficientes:

$$CT2_{ij} = Le \cdot f_{ac} \tilde{\psi}_i(\eta_{int}) \int_{\eta_{int}}^1 \eta V(\eta) \tilde{\phi}_j(\eta) d\eta \quad (4.28 e)$$

$$CC2_{ij} = \frac{\eta_{int}}{Le} \frac{d\phi_i(\eta_{int})}{d\eta} \tilde{\psi}_j(1) \quad (4.28 f)$$

$$CC3_{ij} = \frac{\eta_{int}}{Le} \frac{d\phi_i(\eta_{int})}{d\eta} \int_{\eta_{int}}^1 \left[\frac{1}{\eta'} \int_{\eta'}^1 \eta' V(\eta') \tilde{\psi}_j(\eta') d\eta' \right] d\eta \quad (4.28 g)$$

$$CC4_i = \frac{\eta_{int}}{Le} \frac{d\phi_i(\eta_{int})}{d\eta} \quad (4.28 h)$$

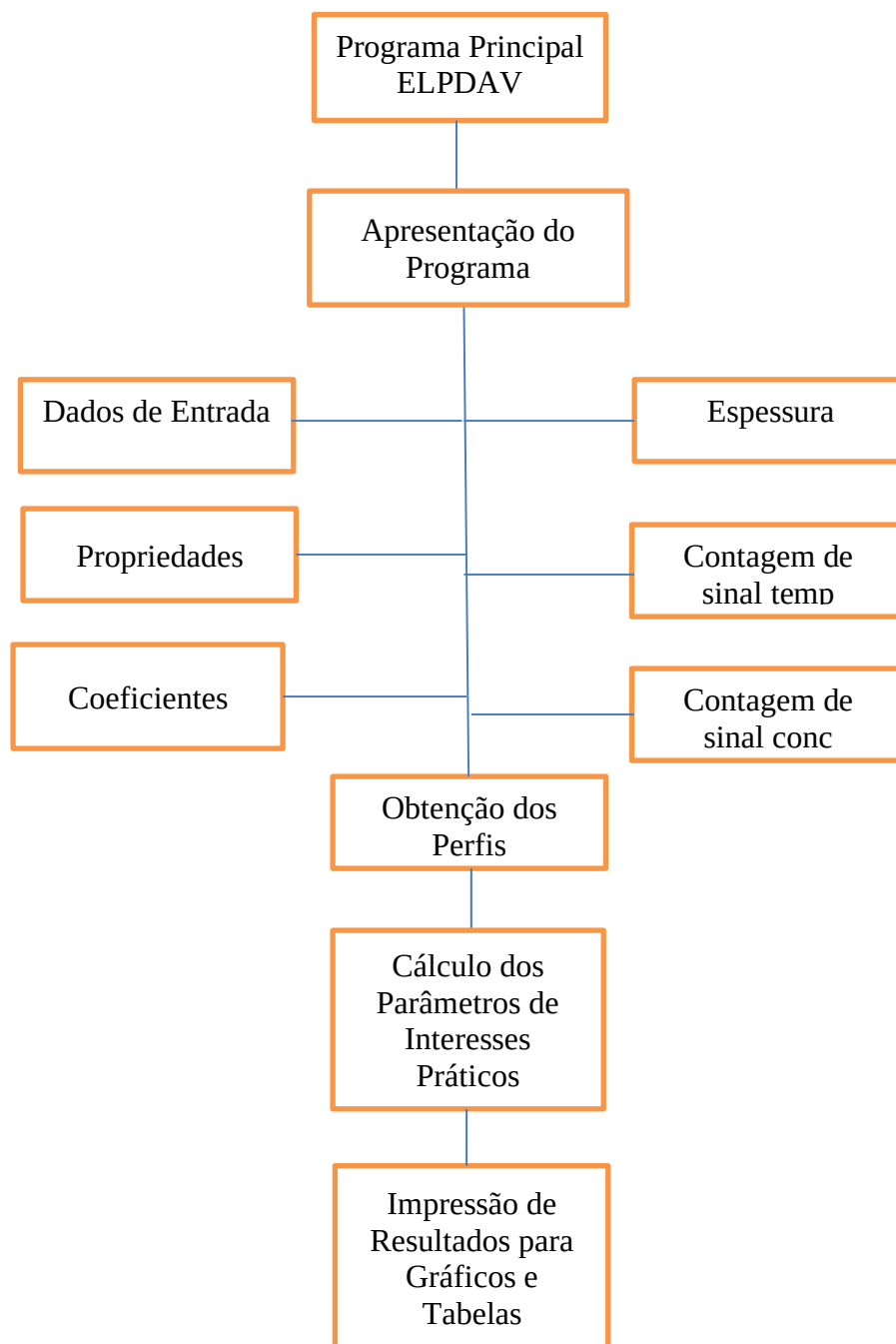
4.9 - FLUXOGRAMA DO PROGRAMA - ELPDAV

Escoamento Laminar de Película Descendente em Absorvedores Verticais – ELPDAV

Este fluxograma serviu como base para a construção do programa em linguagem FORTRAN, de início a apresentação do programa, do lado esquerdo estão os dados de entrada, as propriedades físicas e os coeficientes, do lado direito mostra o que vai ser calculado pelo programa, chamado de module (ou módulos), o primeiro calcula o valor da espessura da película, o segundo calcula os autovalores da temperatura e o terceiro os autovalores da concentração, usando a contagem de sinal, para finalizar os cálculos do fluxograma temos a obtenção dos perfis, a determinação dos parâmetros de interesse prático, tais como os números de Nusselt e de Sherwood, a construção dos gráficos e das tabelas.

4.9 - FLUXOGRAMA DO PROGRAMA - ELPDAV

Escoamento Laminar de Película Descendente em Absorvedores Verticais – ELPDAV



Programa Principal ELPDAV foi desenvolvido com o objetivo de obtenção dos perfis de temperatura e concentração, cálculo dos parâmetros de interesses práticos e impressão de resultados para gráficos e tabelas. Seguindo as seguintes etapas:

- Apresentação do Programa
- Cálculo das propriedades físicas da solução aquosa de LiBr
- Cálculo do comprimento Adimensional

Os modules:

- Dados de Entrada – leva as informações iniciais para a entrada dos dados
- Determinação da espessura – esta subrotina calcula a espessura da película usando um processo iterativo de bissecção.
- Contagem de sinal da temperatura determina os autovalores, as autofunções e normas.
- Contagem de sinal da concentração determina os autovalores, as autofunções e normas.

Para o cálculo dos coeficientes do sistema de equações foi necessário o uso das subrotinas citadas abaixo, encontradas na biblioteca do IMSL, tais como:

- Call DIVPAG
- Subroutine: FCN
- Subroutine: FCNJ

CAPÍTULO V

ANÁLISE DOS RESULTADOS

Este capítulo é destinado à análise dos resultados do modelo unidimensional desenvolvido nos capítulos III e IV. O problema transformado foi resolvido por meio de código computacional escrito em linguagem de programação Fortran, utilizando o software **Fortran Powerstation 4.0**. O código foi implementado através da subrotina DIVPAG, da biblioteca do IMSL, usando uma tolerância de 10^{-10} para determinar o erro automático na avaliação dos campos de temperatura e concentração. Os resultados estão apresentados na forma de gráficos e tabelas. A análise da solução é feita levando-se em conta a influência que o fator de acoplamento e o número de Lewis exercem sobre o campo de temperatura e o campo de concentração.

5.1 - RESULTADOS DO MODELO DE UM ABSORVEDOR HORIZONTAL

5.1.1 - Validação dos resultados para o absorvedor horizontal

Para fins de *benchmarking* os resultados do presente trabalho foram confrontados com resultados encontrados na literatura especializada. As tabelas 5.1 e 5.2 mostram os autovalores e as normas dos dez primeiros termos, para os campos de térmicos e mássicos da modelagem que inclui o perfil de velocidade nos problemas auxiliares da temperatura e da concentração. A determinação dos autovalores e das normas do presente trabalho foi calculada pela contagem de sinais no programa Fortran, e são comparados com os resultados de Xavier (2010), que na sua formulação não utiliza o perfil de velocidade incluído nos problemas auxiliares, a referência citada encontrou os resultados usando o programa MATHEMATICA 9.0.

Tabela 5.1 - Resultados dos autovalores e normas do problema auxiliar de temperatura sem e com o perfil de velocidade.

Problema auxiliar para o campo térmico Utilizando o software Fortran PS				
NT	Sem perfil de velocidade		Com perfil de velocidade	
	Autovalor	Norma	Autovalor	Norma
1	0,0000	1,0	0,0000	1,00000
2	3,1416	0,5	3,5005	0,36723
3	6,2832	0,5	6,7800	0,29993
4	9,4248	0,5	10,0520	0,26487
5	12,5664	0,5	13,3210	0,24206
6	15,7079	0,5	16,5890	0,22554
7	18,8496	0,5	19,8560	0,21280
8	21,9911	0,5	23,1230	0,20253
9	25,1327	0,5	26,3900	0,19400
10	28,2743	0,5	29,6570	0,18675

Tabela 5.2 - Resultados dos autovalores e normas do problema auxiliar da concentração sem e com o perfil de velocidade.

Problema auxiliar do campo mássico Utilizando o software Fortran PS				
NC	Sem perfil de velocidade		Com perfil de velocidade	
	Autovalor	Norma	Autovalor	Norma
1	1,5708	0,5	1,8478	0,44099
2	4,71240	0,5	5,1420	0,32681
3	7,8540	0,5	8,4162	0,28021

4	10,9956	0,5	11,6860	0,25243
5	14,1372	0,5	14,9550	0,23322
6	17,2788	0,5	18,2230	0,21880
7	20,4204	0,5	21,4900	0,20741
8	23,5619	0,5	24,7570	0,19808
9	26,7035	0,5	28,0240	0,19024
10	29,8451	0,5	31,2900	0,18351

Pelas Tabelas 5.1 e 5.2 notamos que os resultados dos dez primeiros autovalores das duas formulações estão em boa concordância, porém os resultados das normas dos campos térmico e mássico têm o primeiro valor bem próximo e os valores seguintes sempre menores como podemos observar nas tabelas.

Tabela 5.3 – Dados dos potenciais da temperatura média em função da posição X e determinados valores de tolerância usando 100 termos.

X	Xavier 2010	Tol= 10^{-12}	Tol= 10^{-10}	Tol = 10^{-9}	Tol = 10^{-8}	Tol= 10^{-7}	Tol= 10^{-6}
0,10	0,0867	0,0867	0,0867	0,0863	0,1067	0,0812	0,0404
0,20	0,1299	0,1299	0,1299	0,1303	0,1333	6,6220	0,1376
0,30	0,1623	0,1623	0,1625	0,1573	0,1666	6,5469	0,2689
0,40	0,1889	0,1889	0,1891	0,1839	0,1862	6,3649	0,4253
0,50	0,2116	0,2116	0,2117	0,2063	0,2073	5,7350	0,6067
0,60	0,2313	0,2313	0,2315	0,2261	0,2302	4,3036	0,8211
0,70	0,2489	0,2489	0,2490	0,2433	0,2640	4,4375	1,0851
0,80	0,2647	0,2647	0,2648	0,2585	0,3112	4,2763	1,4235
0,90	0,2790	0,2790	0,2792	0,2732	0,3288	4,2258	1,8691

1,00	0,2922	0,2922	0,2923	0,2863	0,3386	4,1959	2,4632
------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

Tabela 5.4 – Dados dos potenciais da concentração média em função da posição X e determinados valores de tolerância usando 100 termos.

X	Xavier 2010	Tol= 10^{-12}	Tol= 10^{-10}	Tol= 10^{-9}	Tol= 10^{-8}	Tol= 10^{-7}	Tol= 10^{-6}
0,10	0,0087	0,0087	0,0087	0,0087	0,0081	0,0092	0,0099
0,20	0,0130	0,0130	0,0130	0,0130	0,0128	-0,1622	0,0132
0,30	0,0162	0,0162	0,0162	0,0164	0,0160	-0,1701	0,0139
0,40	0,0189	0,0189	0,0189	0,0190	0,0188	-0,1749	0,0130
0,50	0,0212	0,0212	0,0212	0,0213	0,0212	-0,1718	0,0107
0,60	0,0231	0,0231	0,0231	0,0233	0,0231	-0,1406	0,0068
0,70	0,0249	0,0249	0,0249	0,0251	0,0245	-0,1494	-0,0011
0,80	0,0265	0,0265	0,0265	0,0267	0,0252	-0,1527	-0,0073
0,90	0,0279	0,0279	0,0279	0,0281	0,0264	-0,1579	-0,0193
1,00	0,0292	0,0292	0,0292	0,0295	0,0277	-0,1630	-0,0360

Uma das maiores dificuldades do trabalho foi sem dúvida obter confiança nos resultados e para resolver o problema fizemos várias tentativas, a que deu certo foi a mudança no parâmetro tolerância, como pode ser observado nas Tabelas 5.3 e 5.4. Quando o valor da tolerância era de 10^{-6} os resultados não faziam sentido, por exemplo, concentração média negativa, diminuindo para 10^{-7} ainda continuava incoerente, passando de 10^{-8} os dados já estavam bem próximos da referência. Nota-se que a partir da tolerância 10^{-9} existe uma congruência até a terceira casa decimal. Com Tol = 10^{-12} ou Tol = 10^{-10} o resultado é idêntico ao de Xavier (2010).

5.1.2 - Grandezas de interesse prático

Para o cálculo das grandezas, como temperatura e concentração média é necessário o conhecimento prévio dos números adimensionais: Lewis, Péclet, fator de acoplamento, Biot, temperatura de referência e das seguintes expressões.

Sabendo que o perfil de velocidade adimensional para o escoamento externo sobre absorvedores horizontais é $U(Y) = \frac{3}{2}(2Y - Y^2)$. Para a determinação da temperatura e concentração média, primeiro calcula a integral do campo da velocidade e em seguida aplica.

$$\int_0^1 U(Y) dY = \frac{3}{2} \int_0^1 (2Y - Y^2) dY = \frac{3}{2} \left[\frac{2Y^2}{2} - \frac{Y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{3}{2} \left[1 - \frac{1}{3} \right] = 1$$

Temperatura média adimensional

$$\theta_{med} = \frac{\int_0^1 U(Y) \theta(X, Y) dY}{\int_0^1 U(Y) dY} = \frac{\int_0^1 U(Y) \theta(X, Y) dY}{1} = \int_0^1 U(Y) \theta(X, Y) dY \quad (5.1 \text{ a})$$

Substituindo a fórmula da inversa para o campo térmico, a Eq. (3.22 c) na equação anterior:

$$\theta_{med} = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^1 U(Y) \tilde{\psi}_i(Y) dY \bar{\theta}_i(X) = \sum_{i=1}^{\infty} CTM_i \bar{\theta}_i(X) \quad (5.1 \text{ b})$$

$$CTM_i = \int_0^1 U(Y) \tilde{\psi}_i(Y) dY \quad (5.1 \text{ c})$$

Concentração média adimensional

$$W_{med} = \frac{\int_0^1 U(Y) W(X, Y) dY}{\int_0^1 U(Y) dY} = \int_0^1 U(Y) W(X, Y) dY \quad (5.2 \text{ a})$$

Substituindo a fórmula da inversa para o campo mássico, a Eq. (3.23 c) na equação anterior:

$$W_{med} = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^1 U(Y) \tilde{\Phi}_i(Y) dY \bar{W}_i(X) = \sum_{i=1}^{\infty} CCM_i \bar{W}_i(X) \quad (5.2 \text{ b})$$

$$CCM_i = \int_0^1 U(Y) \tilde{\Phi}_i(Y) dY \quad (5.2 \text{ c})$$

Para determinar os coeficientes de transferência de calor, o número de Nusselt, Nu , e de transferência de massa, o número de Sherwood, Sh , da interface para o interior do filme são utilizadas as seguintes expressões:

Número de Nusselt:

$$Nu_{int} = \frac{h_{int} \delta}{k} = \frac{1}{\theta_{int} - \theta_{med}} \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial Y} \Big|_{Y=1} \quad (5.3 \text{ a})$$

Usando a condição de contorno da energia de equação (3.20 c), tem-se:

$$Nu_{int} = \frac{1}{\theta_{int} - \theta_{med}} f_{ac} \frac{\partial W(X, Y)}{\partial Y} \Big|_{Y=1} \quad (5.3 \text{ b})$$

Utilizando a Equação (B.14) do balanço integral na equação anterior.

$$Nu_{int} = \frac{f_{ac} Le}{\theta_{int} - \theta_{med}} \int_0^1 U(Y) \frac{\partial W(X, Y)}{\partial X} dY \quad (5.3 \text{ c})$$

Substituindo a fórmula da inversa do campo mássico, a Eq. (3.23 c) na equação anterior e organizando os termos:

$$\begin{aligned}
Nu_{int} &= \frac{f_{ac}Le}{\theta_{int} - \theta_{med}} \frac{d}{dX} \left[\int_0^1 U(Y) \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Phi}_i(Y) \bar{W}_i(X) dY \right] \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_{ac}Le}{\theta_{int} - \theta_{med}} \int_0^1 U(Y) \tilde{\Phi}_i(Y) dY \frac{d\bar{W}_i(X)}{dX}
\end{aligned} \tag{5.3 d}$$

$$CNu_{int,i} = \frac{f_{ac}Le}{\theta_{int} - \theta_{med}} \int_0^1 U(Y) \tilde{\Phi}_i(Y) dY \tag{5.3 e}$$

$$Nu_{int} = \sum_{i=1}^{\infty} CNu_{int,i} \frac{d\bar{W}_i(X)}{dX} \tag{5.3 f}$$

Número de Sherwood:

$$Sh_{int} = \frac{k\delta}{D} = \frac{1}{W_{int} - W_{med}} \left. \frac{\partial W(X, Y)}{\partial Y} \right|_{Y=1} \tag{5.4 a}$$

Utilizando a Equação (B.14) do balanço integral na equação (5.4 a).

$$Sh_{int} = \frac{Le}{W_{int} - W_{med}} \int_0^1 U(Y) \frac{\partial W(X, Y)}{\partial X} dY \tag{5.4 b}$$

Substituindo a fórmula da inversa, a Eq. (3.23 c) na equação anterior e organizando os termos:

$$\begin{aligned}
Sh_{int} &= \frac{Le}{W_{int} - W_{med}} \frac{d}{dX} \left[\int_0^1 U(Y) \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Phi}_i(Y) \bar{W}_i(X) dY \right] \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{Le}{W_{int} - W_{med}} \int_0^1 U(Y) \tilde{\Phi}_i(Y) dY \frac{d\bar{W}_i(X)}{dX}
\end{aligned} \tag{5.4 c}$$

$$CSh_{int,i} = \frac{Le}{W_{int} - W_{med}} \int_0^1 U(Y) \tilde{\Phi}_i(Y) dY \tag{5.4 d}$$

$$Sh_{int} = \sum_{i=1}^{\infty} CSh_{int,i} \frac{d\bar{W}_i(X)}{dX} \quad (5.4 \text{ e})$$

5.1.3 - Validação dos resultados

Nas tabelas (5.5–5.12) comparam-se, respectivamente, as distribuições de temperaturas e concentrações adimensionais, temperatura média e concentração média adimensional, temperatura e concentração adimensional na interface, temperatura e concentração adimensional na parede. A comparação é feita para o caso em que $Le = 1000$ e que o fator de acoplamento $fac = 0.01$. Em todos os casos analisados pode-se verificar uma boa concordância entre os resultados. Outra observação importante e verificada é que quanto mais informação for adicionada à modelagem da técnica da transformada integral generalizada, mais barato fica computacionalmente, como exemplo, a formulação incluindo o perfil de velocidade nos problemas auxiliares foi analisada com a formulação sem o perfil de Xavier 2010. O resultado comparado entre 150 autovalores no presente estudo e 200 autovalores na referência Xavier 2010, verifica-se que os dados encontrados satisfazem perfeitamente com 50 autovalores a menos.

Tabela 5.5 – Comparação das temperaturas adimensionais com $fac = 0,01$ e $Le = 1000$. Xavier 2010 com 200 autovalores e o Presente trabalho com 150 autovalores.

$X = \frac{1}{Pe} \frac{x}{\delta}$	Média		Interface		Parede	
	Xavier 2010	Presente Trabalho	Xavier 2010	Presente Trabalho	Xavier 2010	Presente Trabalho
0.004	0.012	0.01162	0.160	0.15631	0.000	-3E-005
0.017	0.034	0.03367	0.207	0.20518	0.000	-2E-005
0.400	0.197	0.19672	0.261	0.26017	0.156	0.15538
1.000	0.299	0.29874	0.330	0.32974	0.280	0.27975

Tabela 5.6 – Comparação das concentrações adimensionais com $fac = 0,01$ e $Le = 1000$. Xavier 2010 com 200 autovalores e o Presente trabalho com 150 autovalores.

$X = \frac{1}{Pe} \frac{x}{\delta}$	Média		Interface		Parede	
	Xavier 2010	Presente Trabalho	Xavier 2010	Presente Trabalho	Xavier 2010	Presente Trabalho
0.004	0.001	0.00117	0.840	0.84109	0.000	-3.23E-003

0.017	0.003	0.00337	0.793	0.79349	0.000	-4.72E-003
0.400	0.020	0.0197	0.739	0.73954	0.000	-4.43E-003
1.000	0.030	0.02987	0.670	0.67013	0.000	-4.02E-003

Tabela 5.7 - Comparação da temperatura média adimensional para diferentes comprimentos adimensionais, considerando $fac = 0,01$ e $Le = 1000$.

Comparação da Temperatura Média Adimensional ($fac = 0,01$ e $Le = 1000$)		
$X = \frac{1}{Pe} \frac{x}{\delta}$	Xavier 2010 (200 autovalores)	Presente Trabalho (150 autovalores)
0.004	0.012	0.01162
0.017	0.034	0.03367
0.400	0.197	0.19672
1	0.299	0.29874

Tabela 5.8 - Comparação da concentração média adimensional para diferentes comprimentos adimensionais, considerando $fac = 0,01$ e $Le = 1000$.

Comparação da Concentração Média Adimensional ($fac = 0,01$ e $Le = 1000$)		
$X = \frac{1}{Pe} \frac{x}{\delta}$	Xavier 2010 (200 autovalores)	Presente Trabalho (150 autovalores)
0.004	0.001	0.00117
0.017	0.003	0.00337
0.400	0.020	0.0197
1	0.030	0.02987

Tabela 5.9 - Comparação da temperatura adimensional na interface para diferentes comprimentos adimensionais, considerando $fac = 0,01$ e $Le = 1000$.

Comparação da Temperatura Adimensional na Interface ($fac = 0,01$ e $Le = 1000$)		
$X = \frac{1}{Pe} \frac{x}{\delta}$	Xavier 2010 (200 autovalores)	Presente Trabalho (150 autovalores)
0.004	0.160	0.15631
0.017	0.207	0.20518
0.400	0.261	0.26017
1	0.330	0.32974

Tabela 5.10 - Comparação da concentração adimensional na interface para diferentes comprimentos adimensionais, considerando $fac = 0,01$ e $Le = 1000$.

Comparação da Concentração Adimensional na Interface ($fac = 0,01$ e $Le = 1000$)		
$X = \frac{1}{Pe} \frac{x}{\delta}$	Xavier 2010 (200 autovalores)	Presente Trabalho (150 autovalores)

0.004	0.840	0.84109
0.017	0.793	0.79349
0.400	0.739	0.73954
1	0.670	0.67013

Tabela 5.11 - Comparação da temperatura adimensional na parede para diferentes comprimentos adimensionais, considerando $fac = 0,01$ e $Le = 1000$.

Comparação da Temperatura Adimensional na Parede ($fac = 0,01$ e $Le = 1000$)		
$X = \frac{1}{Pe} \frac{x}{\delta}$	Xavier 2010 (200 autovalores)	Presente Trabalho (150 autovalores)
0.004	0.000	-3E-005
0.017	0.000	-2E-005
0.400	0.156	0.15538
1	0.280	0.27975

Tabela 5.12 - Comparação da concentração adimensional na parede para diferentes comprimentos adimensionais, considerando $fac = 0,01$ e $Le = 1000$.

Comparação da Concentração Adimensional na Parede ($fac = 0,01$ e $Le = 1000$)		
$X = \frac{1}{Pe} \frac{x}{\delta}$	Xavier 2010 (200 autovalores)	Presente Trabalho (150 autovalores)
0.004	0.000	-3.23E-003
0.017	0.000	-4.72E-003
0.400	0.000	-4.43E-003
1	0.000	-4.02E-003

Tabela 5.13 – Convergência da temperatura média adimensional na posição $X = 0.9$ para duas formulações, modelagem 1 (com o perfil de velocidade incluído) e modelagem 2 (sem o perfil de velocidade) para diversos números de termos. Dados: $Pe = 100$, $fac = 0.01$, $Le = 1000$ e parede adiabática

Convergência da Temperatura Média Adimensional na Posição $X = 0.9$ ($fac = 0,01$ e $Le = 1000$)		
NT	Presente Trabalho Modelagem 1	Presente Trabalho Modelagem 2
10	0,17180	0,14646
20	0,23394	0,21542
30	0,25531	0,24360
40	0,26521	0,25684
50	0,27069	0,26440
60	0,27474	0,26950
70	0,27730	0,27390
80	0,27900	0,27545
90	0,28082	0,27754
100	0,28204	0,27910

110	0,28312	0,28055
120	0,28398	0,28182
130	0,28443	0,28228
140	0,28506	0,28331
150	0,28568	0,28435

Referência Xavier 2010

100	0,2790
110	0,2803
120	0,2814
130	0,2823
200	0,2860

A Tabela 5.13 mostra a convergência da temperatura média adimensional para diversos números de termos nas duas formulações e observa-se que usando o perfil os resultados se aproximam mais rápido da convergência. Os resultados encontrados no presente trabalho apresentam conformidade com os dados da referência de Xavier (2010).

5.1.4 - Gráficos adimensionalizados

Nas figuras (5.1-5.3) compara-se, respectivamente, o fluxo de massa adimensional, o número de Nusselt e o número de Sherwood em função do comprimento adimensional. A comparação é feita para o caso de $Le = 1000$ e que o fator de acoplamento assume os valores de 0.01 e 0.1. Em todos os casos comparados pode-se verificar uma boa concordância entre os resultados.

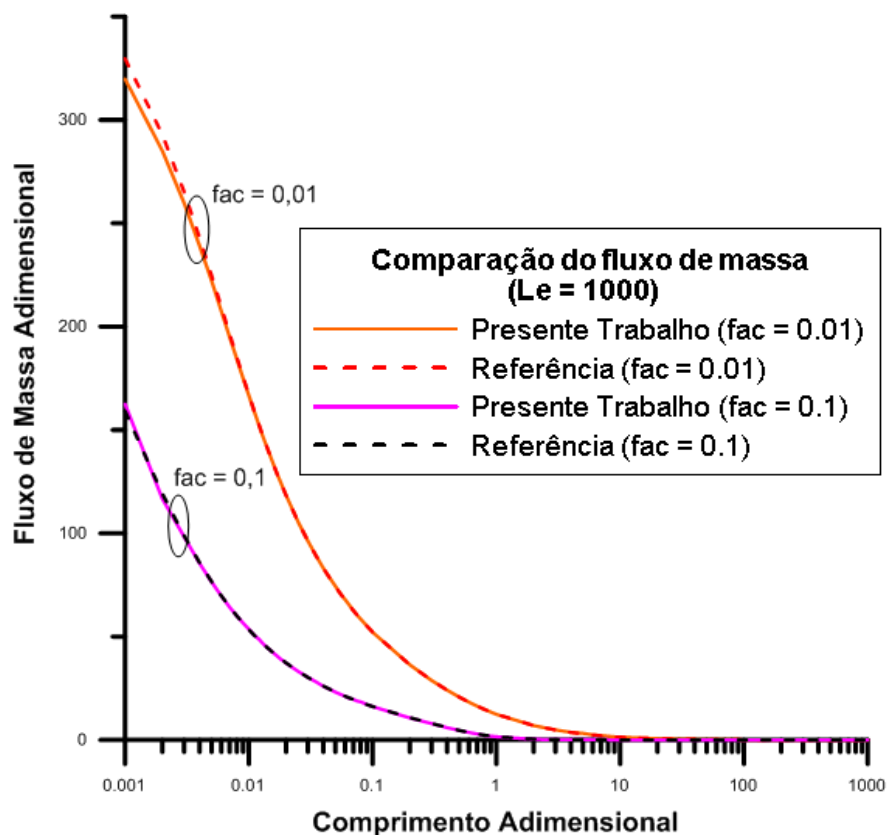


Figura 5.1 – Fluxo de massa adimensional em função do comprimento adimensional, considerando diferentes valores de fac e $Le = 1000$. Referência: (Xavier 2010).

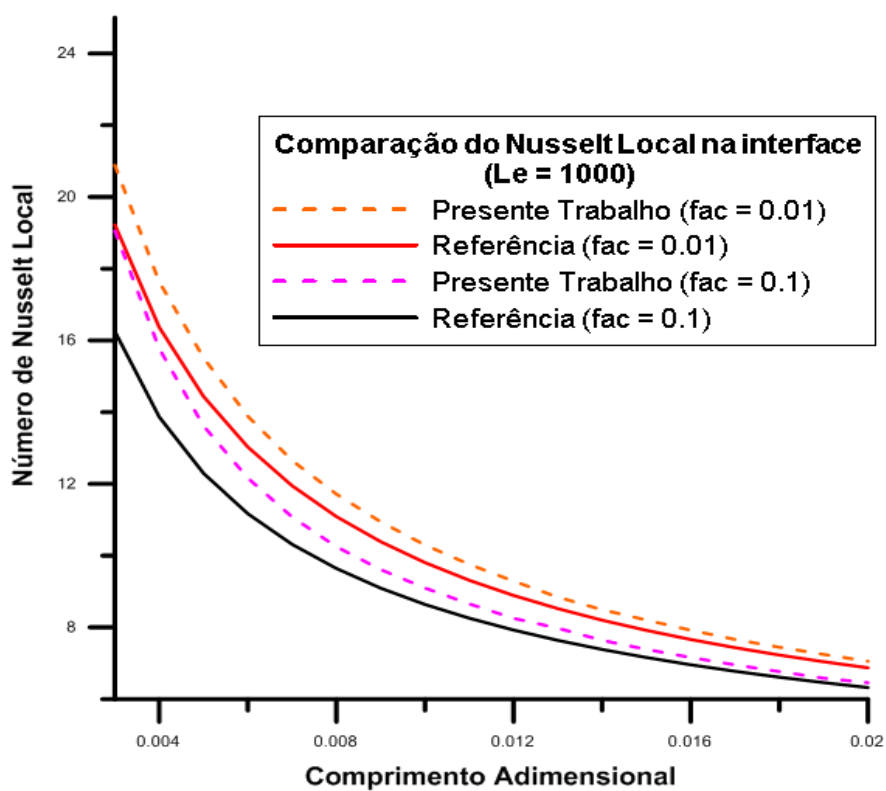


Figura 5.2 - Número de Nusselt local em função do comprimento adimensional, considerando diferentes valores fac e $Le = 1000$. Referência: (Xavier 2010).

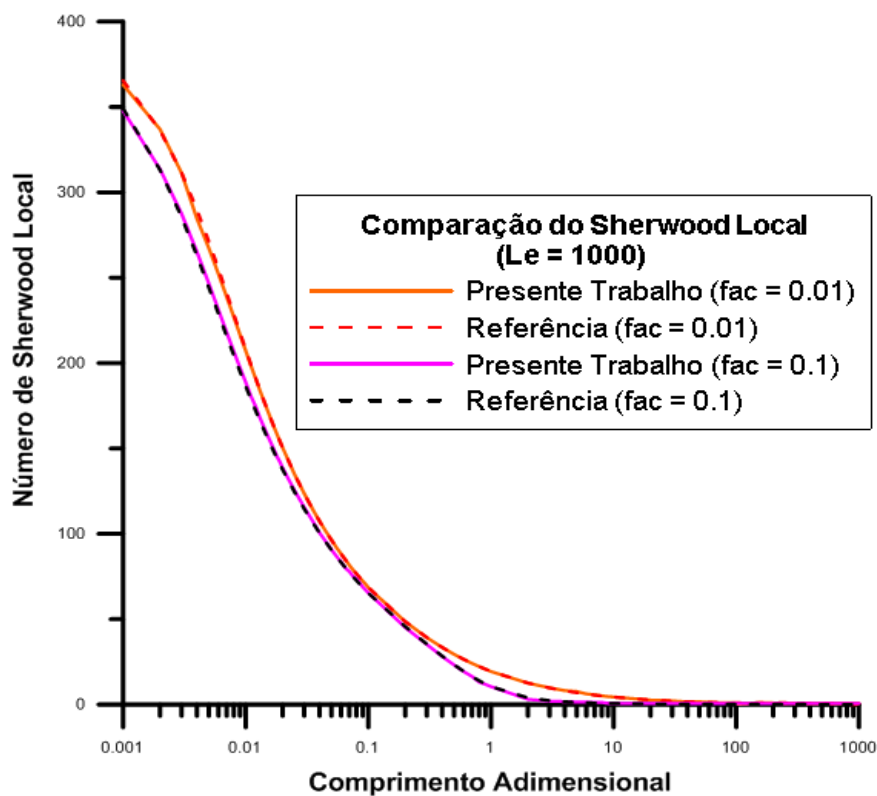


Figura 5.3 – Número de Sherwood local em função do comprimento adimensional, considerando diferentes valores fac e $Le = 1000$. Referência: Xavier 2010.

5.1.5 - Efeito do fator de acoplamento

Avalia-se a influência do fator de acoplamento fac sobre os campos de temperatura e concentração. Adotam-se diferentes valores para o fator de acoplamento e um número de Lewis especificado.

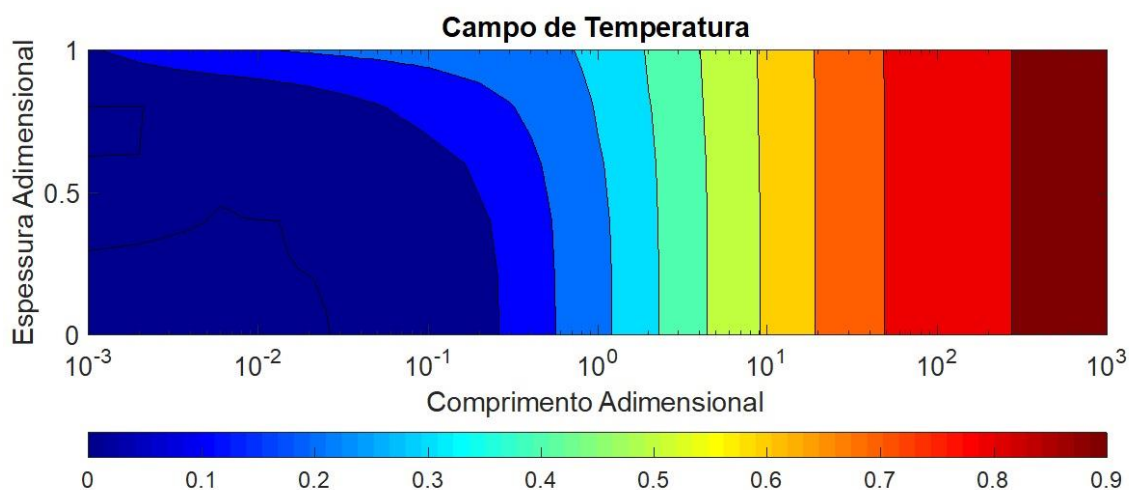


Figura 5.4 – Campo de temperatura, considerando $fac = 0,01$ e $Le = 1000$.

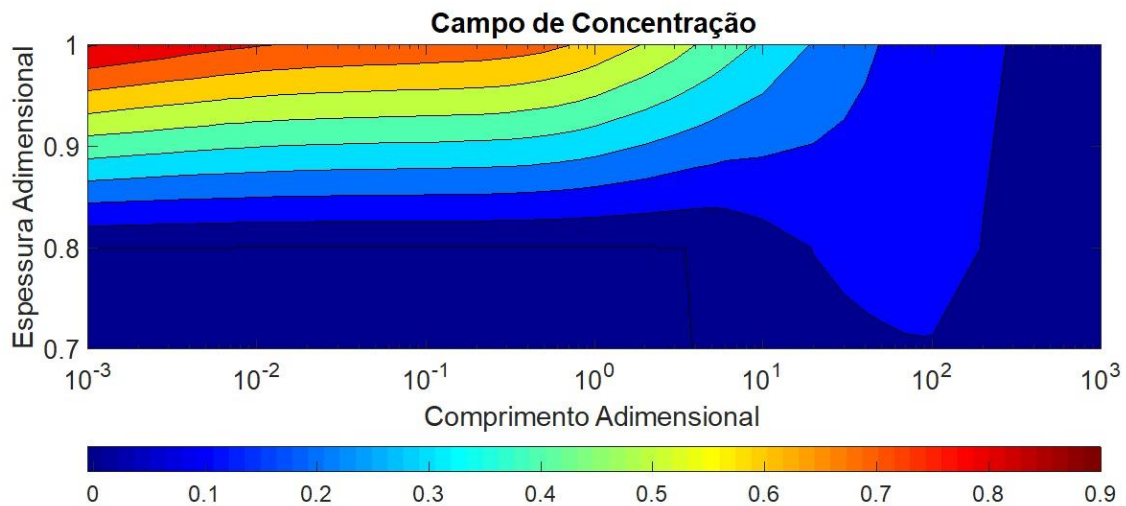


Figura 5.5 – Campo de concentração, considerando $fac = 0,01$ e $Le = 1000$.

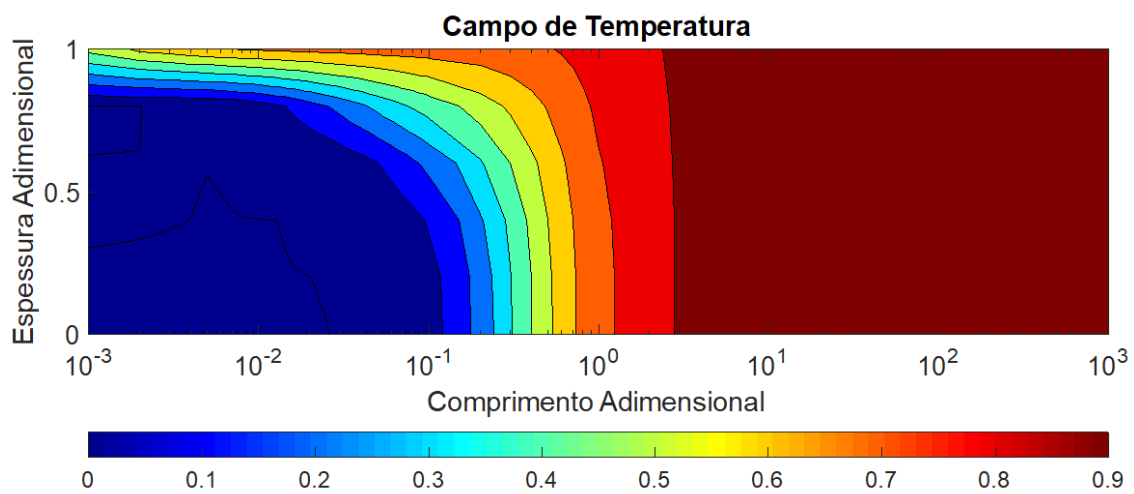


Figura 5.6 – Campo de temperatura, considerando $fac = 0,1$ e $Le = 1000$.

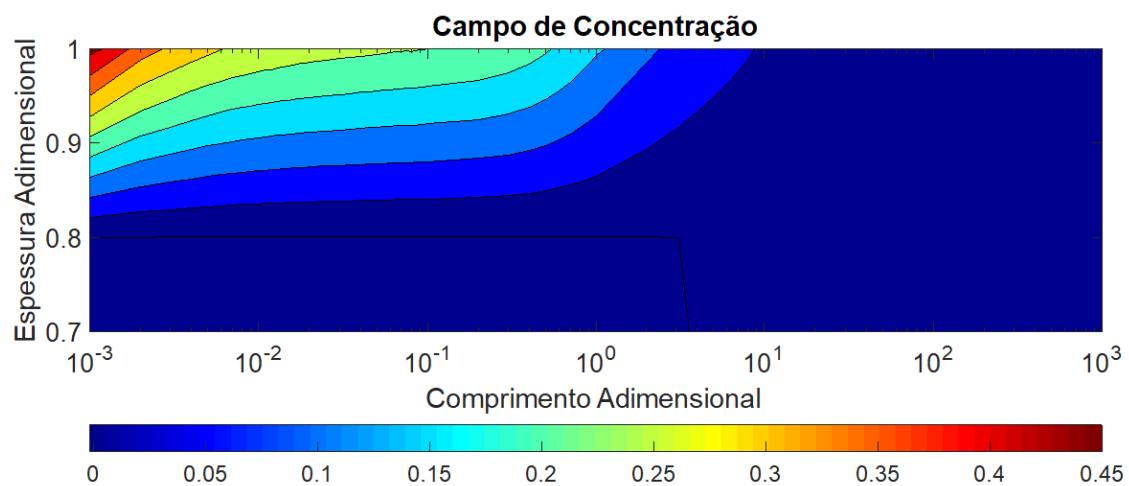


Figura 5.7 – Campo de concentração, considerando $fac = 0,1$ e $Le = 1000$.

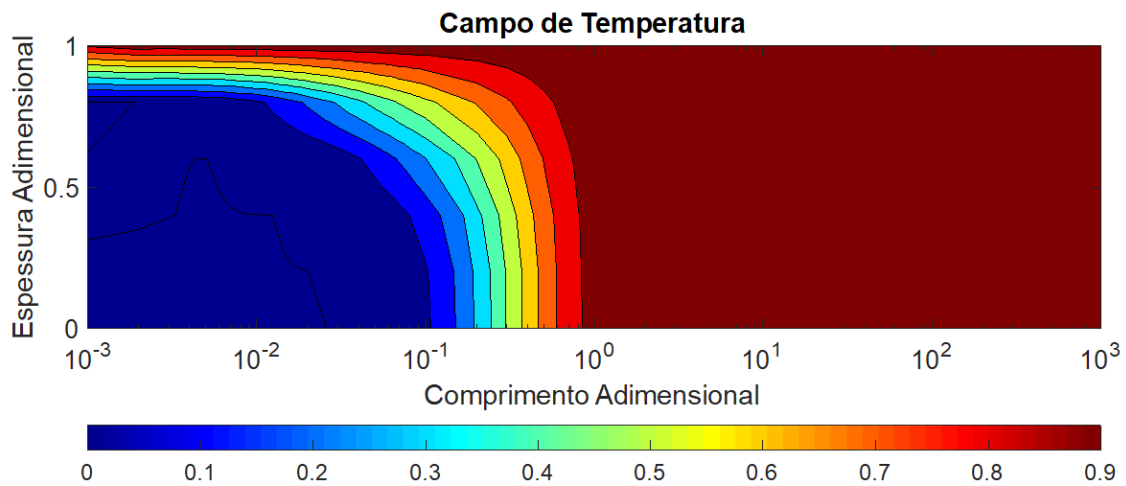


Figura 5.8 – Campo de temperatura, considerando $fac = 1$ e $Le = 1000$.

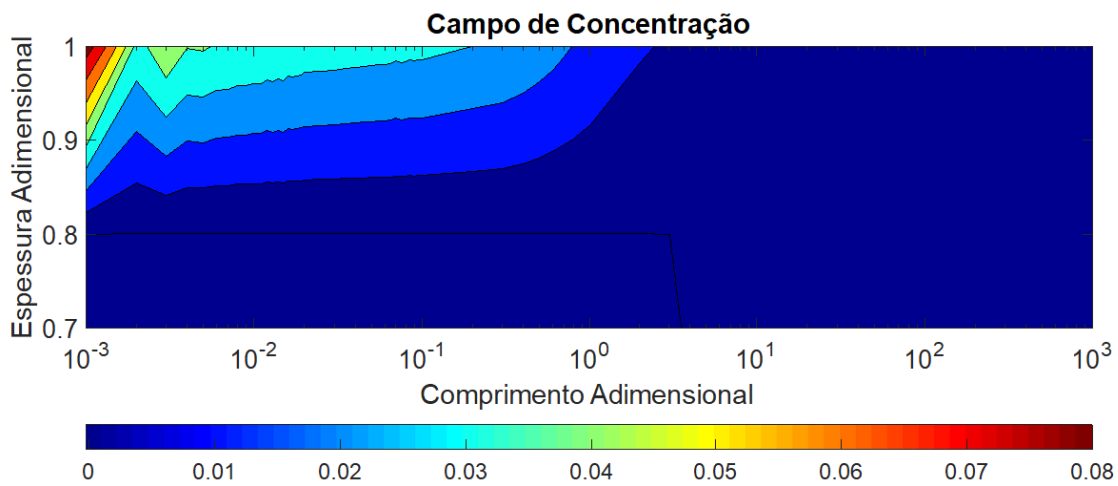


Figura 5.9 – Campo de concentração, considerando $fac = 1$ e $Le = 1000$.

Por meio das figuras (5.4–5.9) percebe-se que o valor do fator de acoplamento influencia diretamente na distribuição dos campos de temperatura e concentração. É possível verificar que o aumento no valor do fac produz uma mudança no campo de temperatura, de modo que ele tende a se desenvolver completamente para menores valores do comprimento adimensional. Através destas figuras também pode se concluir que o aumento no valor do fac faz com que o campo de concentração tenha pequenas variações, de modo há modificar muito pouco apenas na região próxima a interface.

5.1.6 - Efeito do número de Lewis

Avalia-se a influência do número de Lewis sobre os campos de temperatura e concentração. Adotam-se, para um fac especificado, diferentes valores para o número de Lewis.

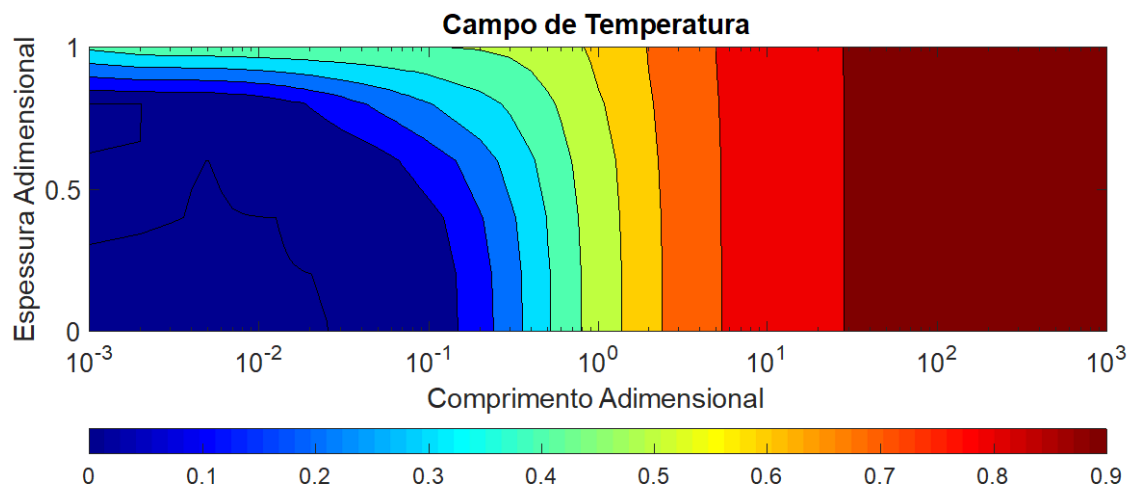


Figura 5.10 – Campo de temperatura, considerando $fac = 0,1$ e $Le = 100$.

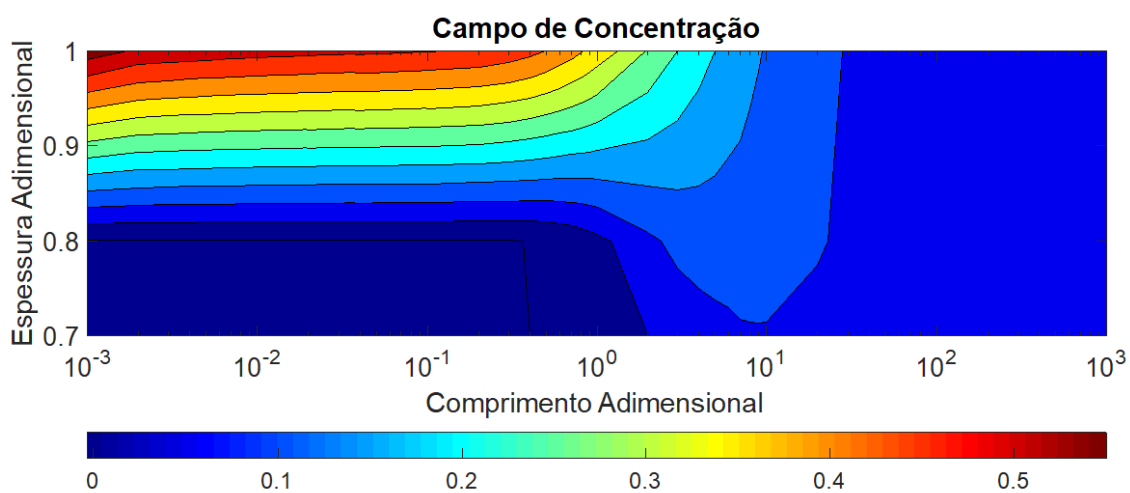


Figura 5.11 – Campo de concentração, considerando $fac = 0,1$ e $Le = 100$.

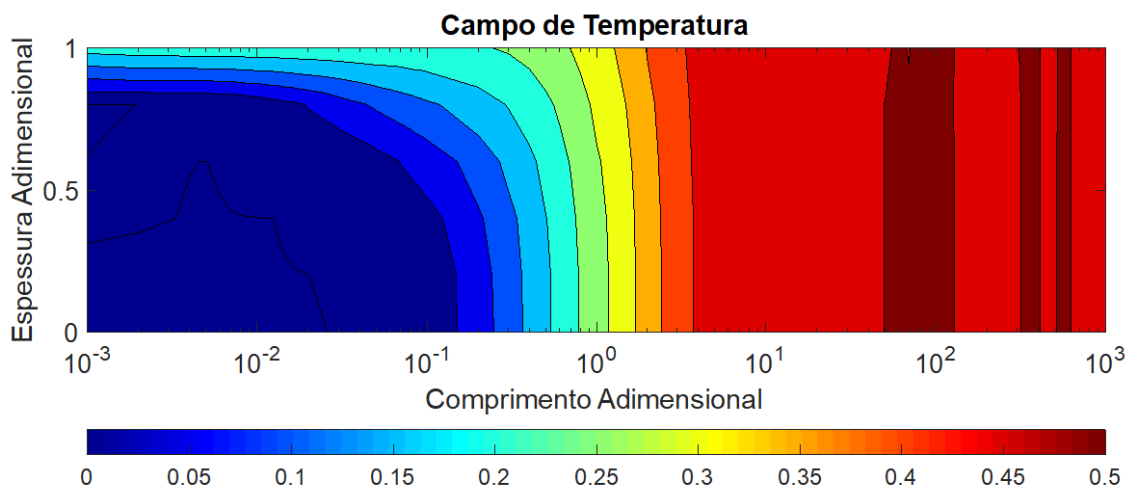


Figura 5.12 – Campo de temperatura, considerando $fac = 0,1$ e $Le = 10$.

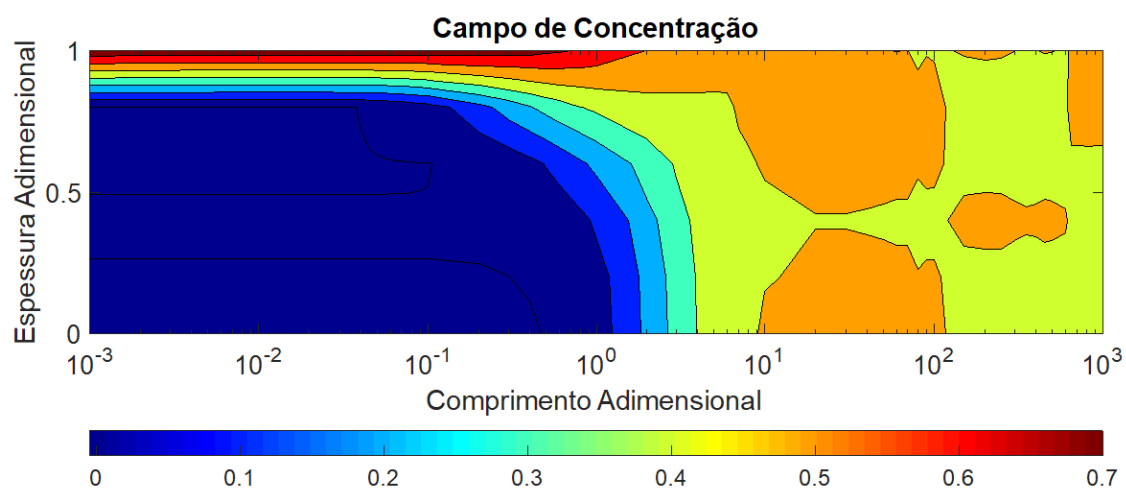


Figura 5.13 – Campo de concentração, considerando $fac = 0,1$ e $Le = 10$.

Por meio das Figuras (5.10–5.13) pode-se verificar a influência do número de Lewis sobre os campos térmico e mássico. Para o caso em que $Le = 10$ pode-se verificar que os campos de temperatura e concentração desenvolvem completamente convergindo para o valor em torno de 0.5, e de forma diferente aos casos em que $Le = 100$ e $Le = 1000$.

5.2 - RESULTADOS DO MODELO DE UM ABSORVEDOR VERTICAL

5.2.1 - Validação dos resultados para o absorvedor vertical

Para fins de validação dos resultados do capítulo IV do presente trabalho foram confrontados com os dados do trabalho de tese de Medrano, 2000, que utilizou uma bancada experimental existente no CREVER da Universitat Rovira i Virgili, na Espanha. A pesquisa é o desenvolvimento experimental de um absorvedor tubular vertical de um sistema de refrigeração por absorção usando a solução binária de brometo de lítio e água, utilizando os dados experimentais desta bancada para comparar com os dados na resolução dos cálculos numéricos e analíticos encontrados com a aplicação da GITT e a construção de um código computacional em FORTRAN, e com o Software MATHEMATICA 9.0 para determinação dos coeficientes. Os resultados obtidos serão comparados também com os dados experimentais disponíveis na literatura aberta para validação e ajustes do modelo.

5.2.2 - Resultados Preliminares

As tabelas seguintes mostram os autovalores, as autofunções normalizadas e as normas dos dez primeiros termos para os campos de temperatura e de concentração calculados pela contagem de sinais no programa FORTRAN.

Resultados dos autovalores e normas do problema auxiliar de temperatura

Tabela 5.14 - Resultados dos autovalores e normas do problema auxiliar da temperatura

Resultado do Problema Auxiliar da Temperatura			
NT	AUTOVALOR_T	AUTFUN NORMA_T	NORMA_T
1	0.0000E+00	4.53E-01	1.9509E-03
2	9.5793E+01	1.04E-10	3.2442E-03
3	1.7539E+02	4.41E-11	1.8013E-03
4	2.5434E+02	-2.67E-10	1.2469E-03
5	3.3309E+02	2.83E-10	9.5341E-04
6	4.1176E+02	-1.60E-10	7.7173E-04
7	4.9039E+02	-2.07E-10	6.4818E-04

8	5.6900E+02	1.82E-10	5.5871E-04
9	6.4759E+02	-1.43E-11	4.9092E-04
10	7.2617E+02	-1.02E-10	4.3778E-04

Tabela 5.15 - Resultados dos autovalores e normas do problema auxiliar da concentração

Resultado do Problema Auxiliar da Concentração			
NC	AUTOVALOR_C	AUTFUN NORMA_C	NORMA_C
1	1.2273E+01	1.22E-01	7.3633E-04
2	1.0091E+02	4.75E-03	1.0230E-04
3	1.8082E+02	2.20E-03	4.9980E-05
4	2.6003E+02	1.23E-03	3.1620E-05
5	3.3900E+02	9.58E-04	2.2537E-05
6	4.1785E+02	6.10E-04	1.7212E-05
7	4.9665E+02	5.91E-04	1.3755E-05
8	5.7540E+02	3.71E-04	1.1350E-05
9	6.5412E+02	4.24E-04	9.5923E-06
10	7.3282E+02	2.49E-04	8.2578E-06

5.2.3 – Gráficos adimensionalizados

Nas Figuras (5.14-5.15) compara-se, respectivamente, a temperatura média adimensional e a concentração média adimensional em função do comprimento longitudinal do absorvedor. Nos dois gráficos comparados pode-se verificar uma boa concordância entre os resultados.

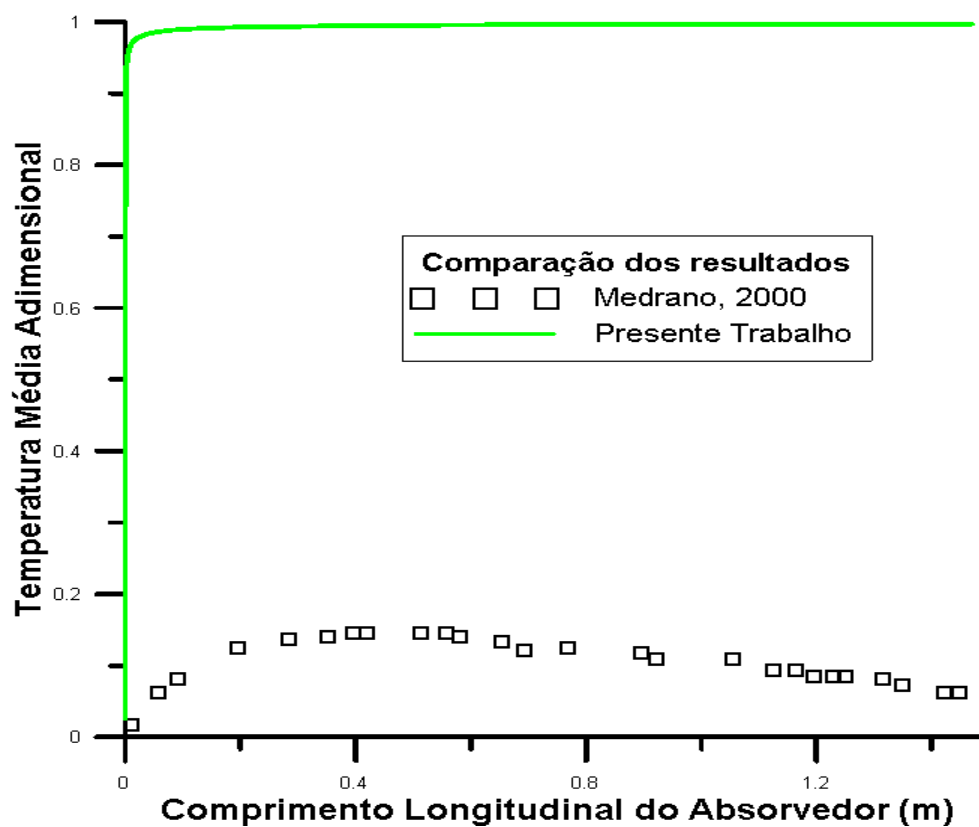


Figura 5.14 – Temperatura média adimensional em função do comprimento longitudinal do absorvedor

Conforme pode se ver na Figura 5.14 a diferença na solução aumentou. Devido à redução na escala, proveniente da adimensionalização, a discrepância entre os resultados se acentuou. Já o campo de temperatura, que segundo Medrano (2000) deveria ter uma pequena variação, no nosso trabalho tem grandes variações de modo a atingir o valor 1 ainda na entrada térmica.

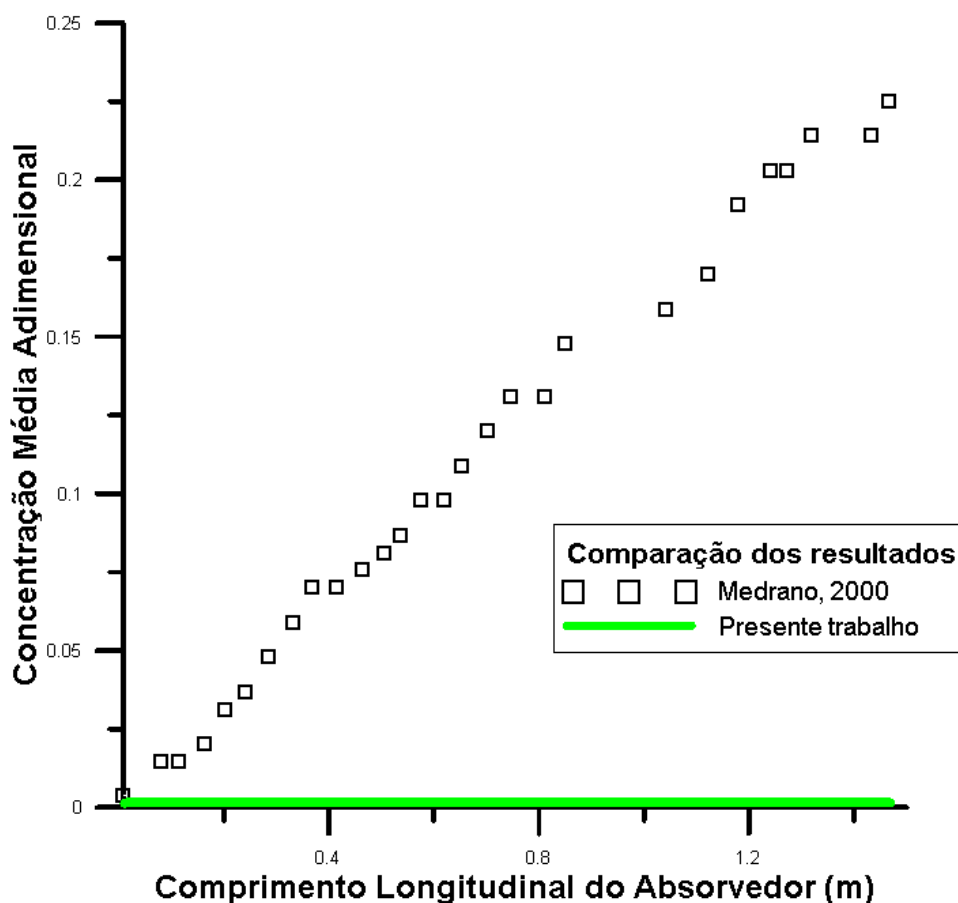


Figura 5.15 – Concentração média adimensional em função do comprimento longitudinal do absorvedor

A concentração média, que segundo Medrano (2000) aumenta quase que linearmente, no nosso trabalho tem aumentos tão pequenos que o gráfico se mantém constante nas proximidades do zero.

Para todos os gráficos gerados utilizou-se as condições experimentais propostas em Medrano (2000). Com o auxílio do EES e um programa codificado em linguagem de programação Fortran foi possível calcular a espessura da película, bem como as propriedades necessárias para a análise do problema físico proposto, que são apresentadas na tabela que segue:

Tabela 5.16 - Dados experimentais retirados da análise do absorvedor vertical do trabalho de Medrano (2000).

Propriedades físicas da solução Água – Brometo de Lítio para análise do problema proposto	
Vazão mássica	$\dot{m} = 33 \text{ Kg/h}$
Raio do tubo	$R = 11,05 \text{ mm}$

Comprimento do tubo	$L = 1,5 \text{ m}$
Concentração inicial	$C_o = 60 \%$
Temperatura inicial	$T_o = 40 \text{ }^\circ\text{C}$
Concentração de equilíbrio	$C_e = 54,82\%$
Temperatura de equilíbrio	$T_e = 50,14^\circ\text{C}$
Espessura da película	$\delta = 0,365 \text{ mm}$
Número de Lewis	$Le = 102,31$
Fator de acoplamento	$f_{ac} = 0,006506$
Número de Prandtl	$Pr = 23,42$
Número de Reynolds	$Re = 758$
Massa específica	$\rho = 1\,679 \text{ kg/m}^3$
Difusividade mássica cinemática	$D = 1,30 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$
Coeficiente de transferência de calor	$\alpha = 1,33 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$
Viscosidade cinemática	$\nu = 3,115 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$
Pressão	$P = 1,3 \text{ kPa}$
Viscosidade dinâmica newtoniana	$\mu = 5,23 \cdot 10^{-3} \text{ Pa.s}$
Calor específico à pressão constante	$C_p = 1,845 \cdot 10^3 \text{ J/kg.K}$

5. 2.4 - Grandezas de interesse prático

Para o cálculo das grandezas de interesse prático, como temperatura e concentração média, fluxo de massa, número de Nusselt e número de Sherwood são necessários o uso dos dados da Tabela 5.16 e as seguintes expressões.

Sabendo que o perfil de velocidade $V(\eta)$ para o absorvedor vertical é dado pela Equação (4.13).

O valor da integral do campo da velocidade é determinado por:

$$\int_{\eta_{int}}^1 V(\eta) d\eta$$

Temperatura média adimensional:

$$\theta_{med} = \frac{\int_{\eta_{int}}^1 V(\eta) \theta(\xi, \eta) d\eta}{\int_{\eta_{int}}^1 V(\eta) d\eta} \quad (5.5 \text{ a})$$

Substituindo a fórmula da inversa para o campo térmico a Equação (4.19 g):

$$\theta_{med} = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\eta_{int}}^1 V(\eta) \tilde{\psi}_i(\eta) d\eta \bar{\theta}_i(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} CTM_i \bar{\theta}_i(\xi) \quad (5.5 \text{ b})$$

$$CTM_i = \int_{\eta_{int}}^1 V(\eta) \tilde{\psi}_i(\eta) d\eta \quad (5.5 \text{ c})$$

Concentração média adimensional

$$W_{med} = \frac{\int_{\eta_{int}}^1 V(\eta) W(\xi, \eta) d\eta}{\int_{\eta_{int}}^1 V(\eta) d\eta} \quad (5.6 \text{ a})$$

Substituindo a fórmula da inversa para o campo mássico, a Equação (4.20 g):

$$W_{med} = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\eta_{int}}^1 V(\eta) \tilde{\Phi}_i(\eta) d\eta \bar{W}_i(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} CCM_i \bar{W}_i(\xi) \quad (5.6 \text{ b})$$

$$CCM_i = \int_{\eta_{int}}^1 V(\eta) \tilde{\Phi}_i(\eta) d\eta \quad (5.6 \text{ c})$$

Para determinar os coeficientes de transferência de calor, o número de Nusselt, Nu, e de transferência de massa, o número de Sherwood, Sh, da interface para o interior do filme são utilizadas as seguintes expressões:

Número de Nusselt:

$$Nu_{int} = \frac{h_{int} \delta}{k} = \frac{1}{\theta_{int} - \theta_{med}} \left. \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=\eta_{int}} \quad (5.7 \text{ a})$$

Usando a condição de contorno da energia de Equação (4.17 b), tem-se:

$$Nu_{int} = \frac{1}{\theta_{int} - \theta_{med}} f_{ac} \left. \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=\eta_{int}} \quad (5.7 \text{ b})$$

Utilizando a equação (C.16) do balanço integral apresentada no Apêndice C.

$$Nu_{int} = \frac{f_{ac}Le}{\theta_{int} - \theta_{med}} \int_{\eta_{int}}^1 V(\eta) \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \xi} d\eta \quad (5.7 \text{ c})$$

Substituindo a fórmula da inversa para o campo mássico a equação (4.20 g):

$$Nu_{int} = \frac{f_{ac}Le}{\theta_{int} - \theta_{med}} \int_{\eta_{int}}^1 V(\eta) \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \xi} d\eta \quad (5.7 \text{ d})$$

$$\begin{aligned} Nu_{int} &= \frac{f_{ac}Le}{\theta_{int} - \theta_{med}} \frac{d}{d\xi} \left[\int_{\eta_{int}}^1 V(\eta) \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Phi}_i(\eta) \bar{W}_i(\xi) d\eta \right] \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_{ac}Le}{\theta_{int} - \theta_{med}} \int_{\eta_{int}}^1 V(\eta) \tilde{\Phi}_i(\eta) d\eta \frac{d\bar{W}_i(\xi)}{d\xi} \end{aligned} \quad (5.7 \text{ e})$$

$$C Nu_{int,i} = \frac{f_{ac}Le}{\theta_{int} - \theta_{med}} \int_{\eta_{int}}^1 V(\eta) \tilde{\Phi}_i(\eta) d\eta \quad (5.7 \text{ f})$$

$$Nu_{int} = \sum_{i=1}^{\infty} C Nu_{int,i} \frac{d\bar{W}_i(\xi)}{d\xi} \quad (5.7 \text{ g})$$

Número de Sherwood:

$$Sh_{int} = \frac{k\delta}{D} = \frac{1}{W_{int} - W_{med}} \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_{int}} \quad (5.8 \text{ a})$$

Utilizando a equação (C.16) do balanço integral apresentada no Apêndice C.

$$Sh_{int} = \frac{Le}{W_{int} - W_{med}} \int_{\eta_{int}}^1 V(\eta) \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \xi} d\eta \quad (5.8 \text{ b})$$

Substituindo a fórmula da inversa para o campo mássico a equação (4.20 g):

$$Sh_{int} = \frac{Le}{W_{int} - W_{med}} \frac{d}{d\xi} \left[\int_{\eta_{int}}^1 V(\eta) \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Phi}_i(\eta) \bar{W}_i(\xi) d\eta \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{Le}{W_{int} - W_{med}} \int_{\eta_{int}}^1 V(\eta) \tilde{\Phi}_i(\eta) d\eta \frac{d\bar{W}_i(\xi)}{d\xi} \quad (5.8 \text{ c})$$

$$CSh_{int,i} = \frac{Le}{W_{int} - W_{med}} \int_{\eta_{int}}^1 V(\eta) \tilde{\Phi}_i(\eta) d\eta \quad (5.8 \text{ d})$$

$$Sh_{int} = \sum_{i=1}^{\infty} CSh_{int,i} \frac{d\bar{W}_i(\xi)}{d\xi} \quad (5.8 \text{ e})$$

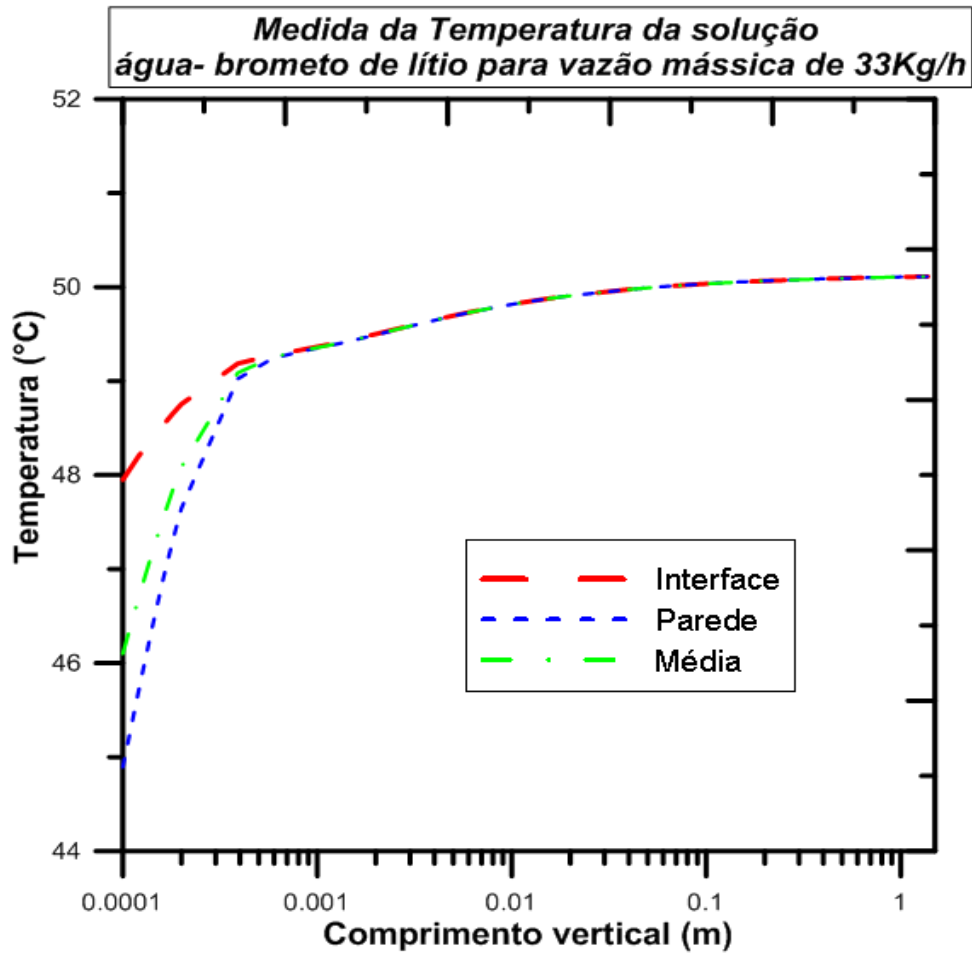


Figura 5.16 – Temperatura em função do comprimento vertical

A Figura 5.16 apresenta a evolução da temperatura média, na parede e na interface à medida que a película descendente da solução água-brometo de lítio percorre o comprimento vertical do tubo. Pode-se verificar que na entrada térmica existe uma diferença entre os valores da temperatura na interface e na parede, que tende a se uniformizar conforme a solução escorre no interior do tubo vertical, alcançando um estágio completamente desenvolvido para um comprimento na ordem dos milímetros (10^{-3}).

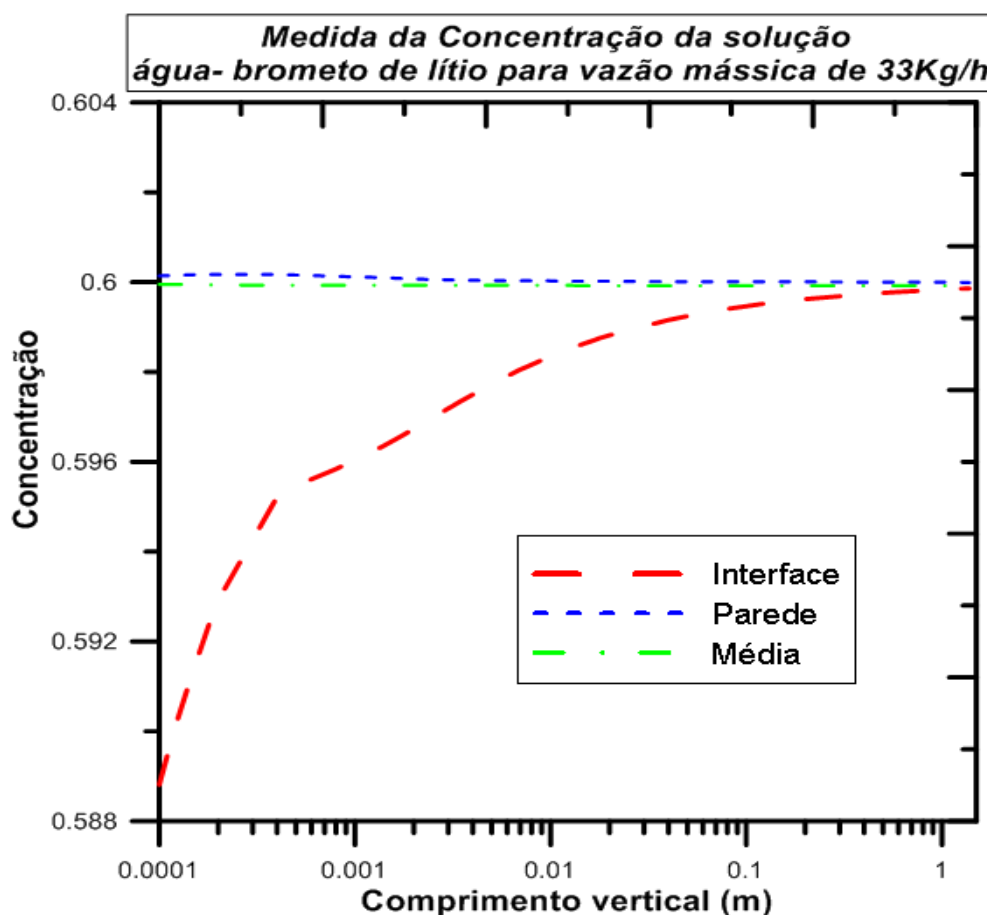


Figura 5.17 – Concentração em função do comprimento vertical

A Figura 5.17 analisa o comportamento da concentração da solução à medida que a película descendente escoia no interior do tubo. É possível perceber que apenas a região da interface apresenta uma maior variação, em decorrência da evaporação de parte da água contida na solução fazendo com que a concentração de brometo de lítio seja aumentada em relação a uma situação anterior.

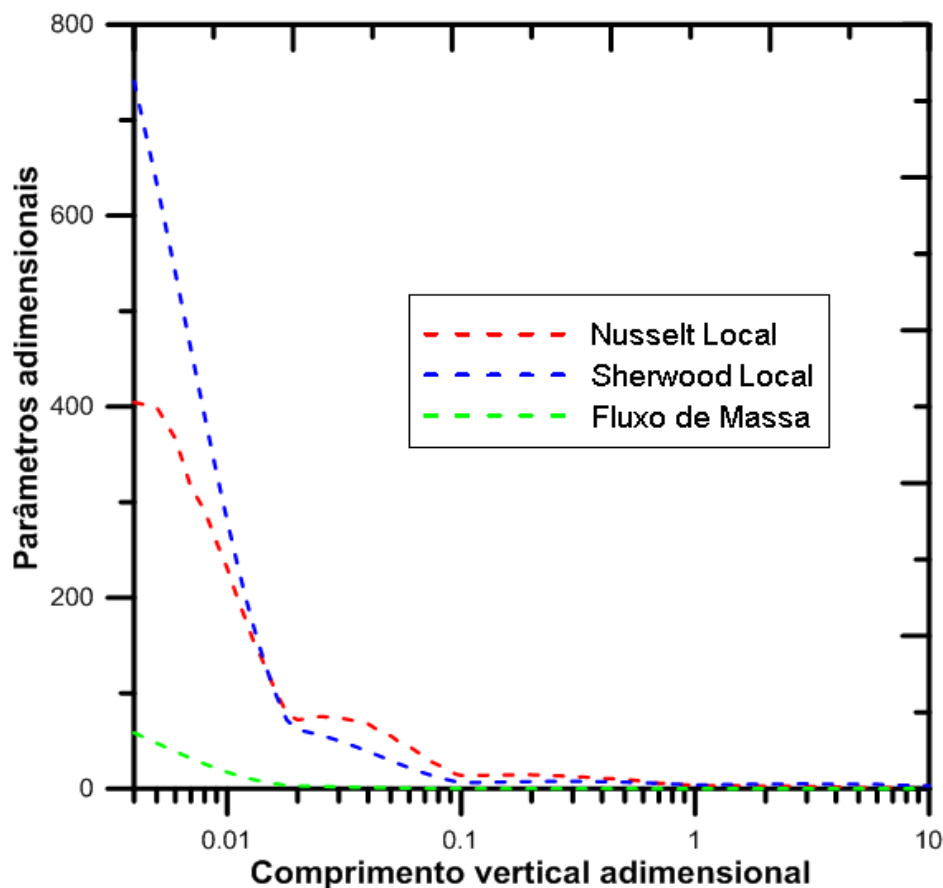


Figura 5.18 – Parâmetros adimensionais em função do comprimento vertical

Na Figura 5.18 analisa-se a variação dos parâmetros adimensionais de interesse prático ao longo do comprimento vertical do tubo. Avaliam-se os números de Nusselt, Sherwood e o fluxo de massa adimensional. As avaliações destes parâmetros permitem a determinação dos coeficientes de transferência de calor e massa, que possibilitam expressar o efeito global da transferência de calor e massa numa forma simplificada.

Avalia-se a influência do comprimento vertical e a distância radial no campo de temperatura e no campo de concentração usando as mesmas considerações da Tab. 5.16.

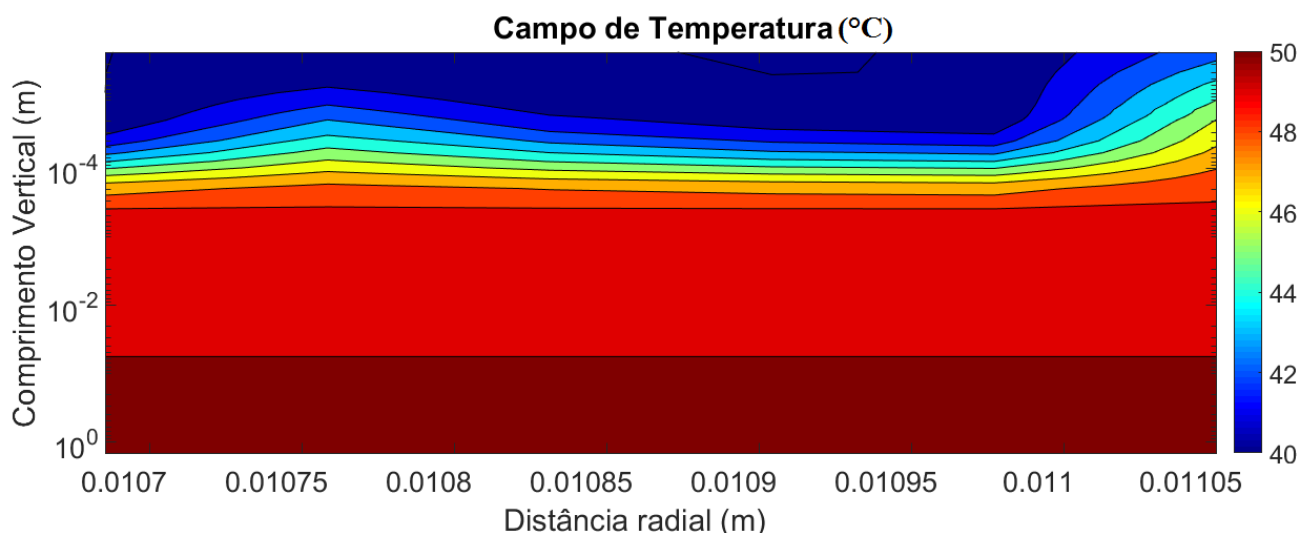


Figura 5.19 – Campo de temperatura considerando os dados da Tab. 5.16

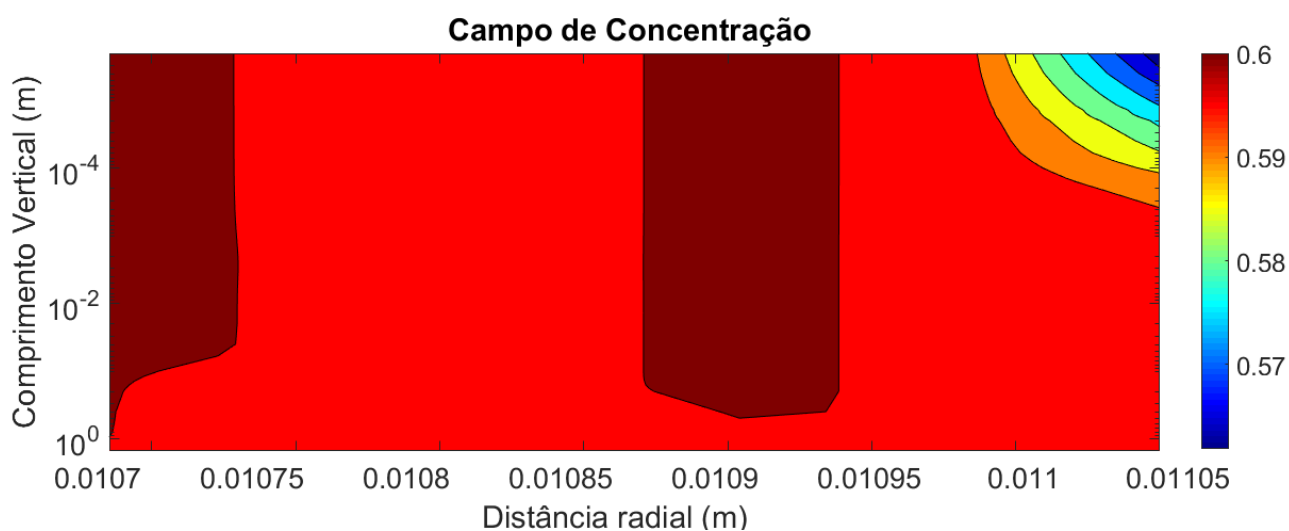


Figura 5.20 – Campo de concentração considerando os dados da Tab. 5.16

Na Figura 5.19 é possível verificar a evolução do campo de temperatura no escoamento descendente da película formada pela solução água-brometo de lítio em torno da parede interna do tubo absorvedor. Através do gráfico do campo de temperatura verifica-se que o comprimento de entrada térmica é muito pequeno, de modo que a solução atinge o estágio de 50 °C quando o comprimento vertical ainda está na ordem dos centímetros. Este fato pode ser justificado pelo alto valor da difusividade térmica da solução água-brometo de lítio que faz com que a transferência de calor ocorra rapidamente. Em certo sentido, a difusividade térmica é a medida da inércia térmica.

Na Figura 5.20 analisa-se o desenvolvimento do campo de concentração da solução durante o escoamento descendente. Por meio deste gráfico pode-se concluir, para o caso analisado, que a concentração da mistura não apresenta mudanças relevantes, mudando suavemente apenas na região de entrada mássica nas proximidades da parede do tubo.

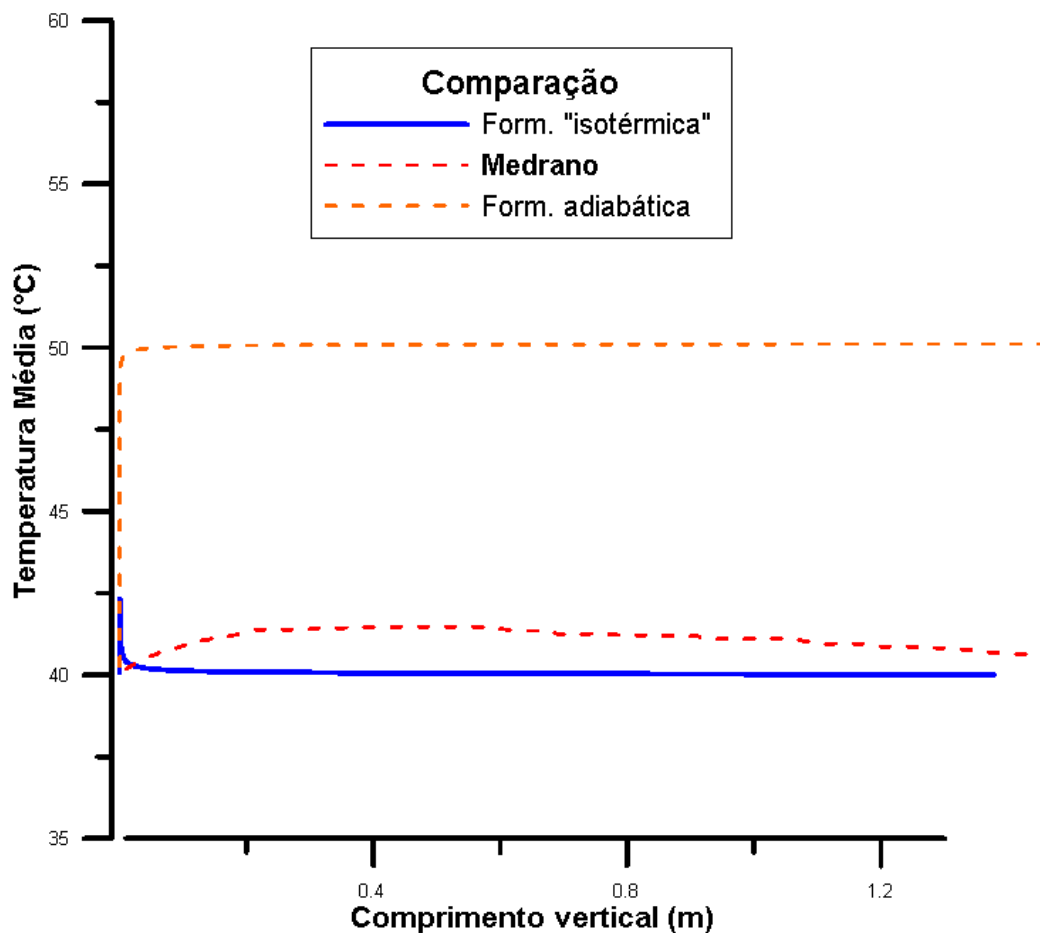


Figura 5.21 – Temperatura média em função do comprimento vertical

Na Figura 5.21 comparam-se os resultados obtidos no presente trabalho com os resultados encontrados no trabalho do Medrano, (2000). Conforme a legenda, a curva vermelha representa o resultado obtido experimentalmente por Medrano, enquanto que as curvas laranja e azul representam os resultados do presente estudo para as formulações adiabática e “isotérmica”, respectivamente. Pode-se verificar que os resultados encontrados por Medrano, estão mais próximos da formulação isotérmica do que o da formulação adiabática. A superposição perfeita das curvas seria possível se

fosse conhecido o coeficiente de transferência de calor na parede, expresso na formulação do problema, no número de Biot.

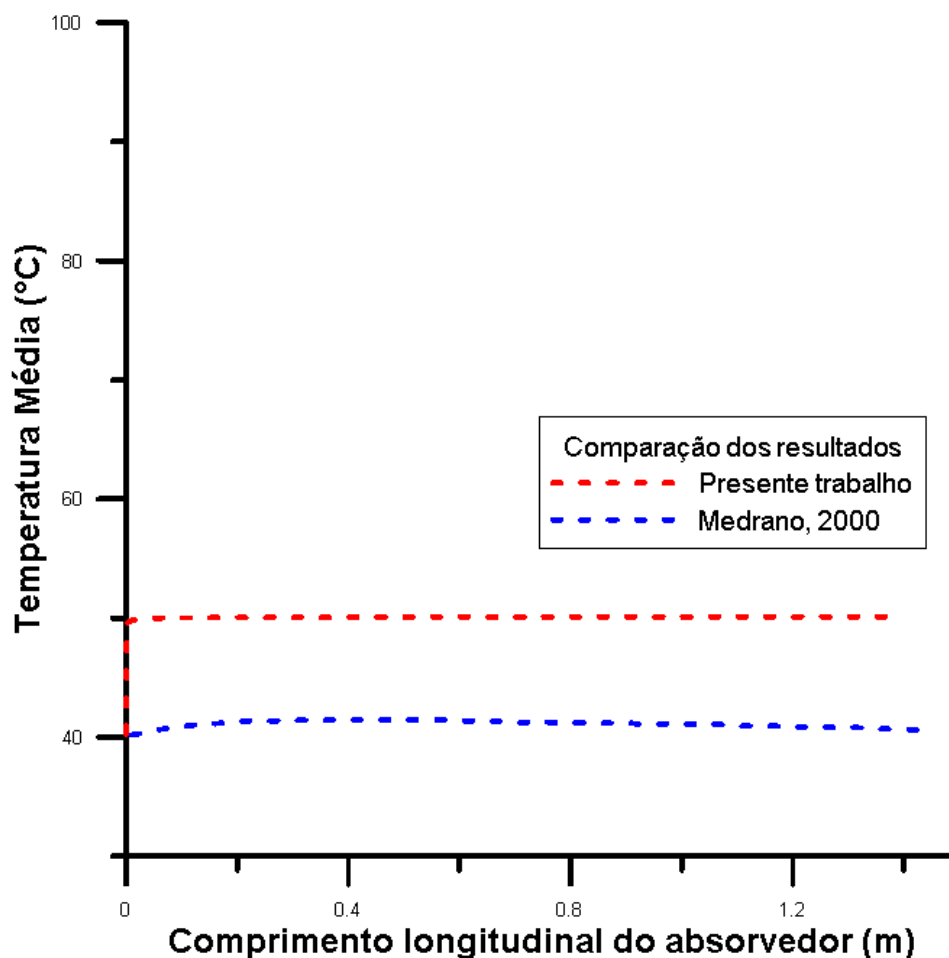


Figura 5.22 – Temperatura média em função do comprimento longitudinal do absorvedor

Na Figura 5.22 é possível verificar que o gráfico do campo de temperatura média em relação ao comprimento longitudinal do absorvedor nota-se que o comprimento de entrada térmica é muito pequeno, de modo que a solução atinge a temperatura de 50°C quando o comprimento vertical ainda está na ordem dos centímetros.

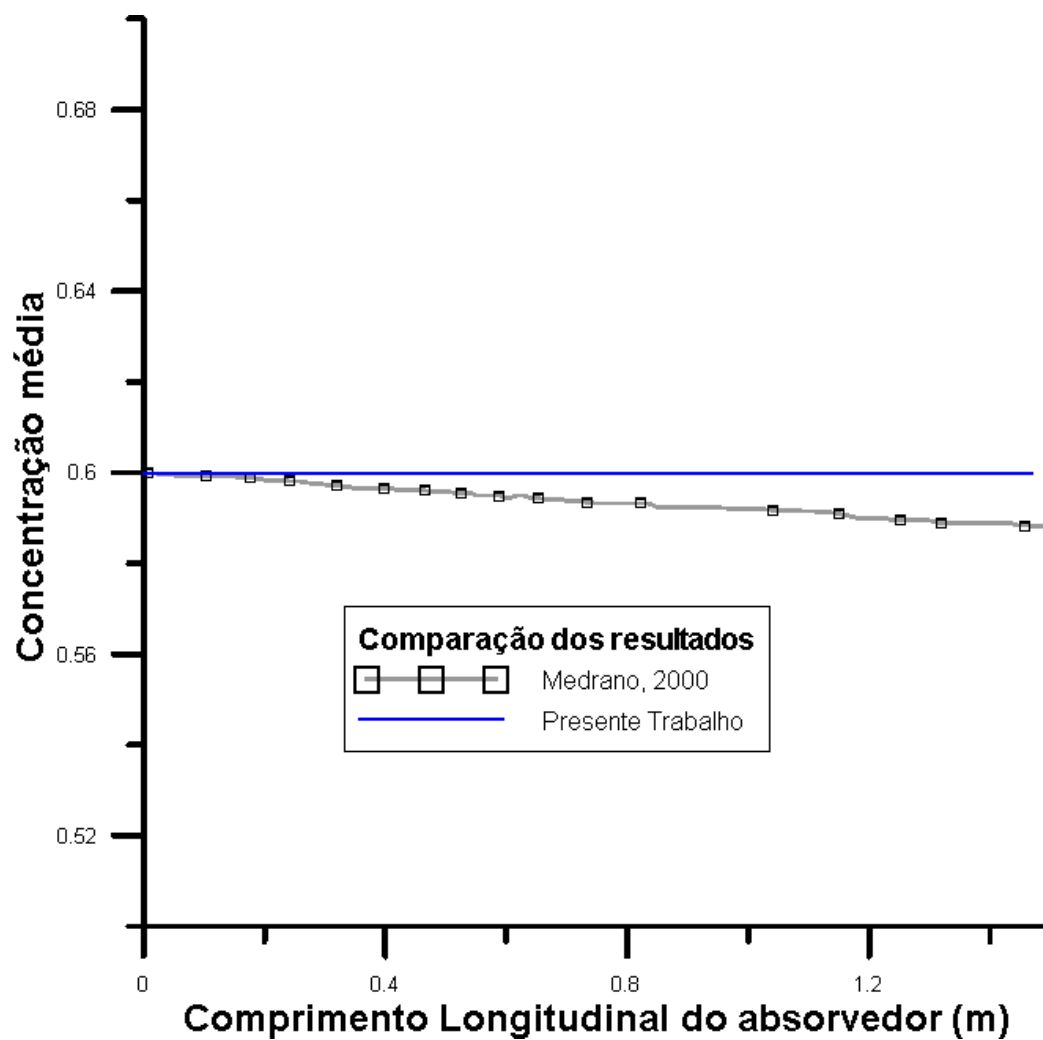


Figura 5.23 – Concentração média em função do comprimento longitudinal do absorvedor

Na Figura 5.23 mostra que no presente trabalho a concentração média ficou constante em torno de 60 % e no trabalho de Medrano, na entrada a concentração média é de 60 % e diminuiu um pouco em função do comprimento longitudinal do absorvedor.

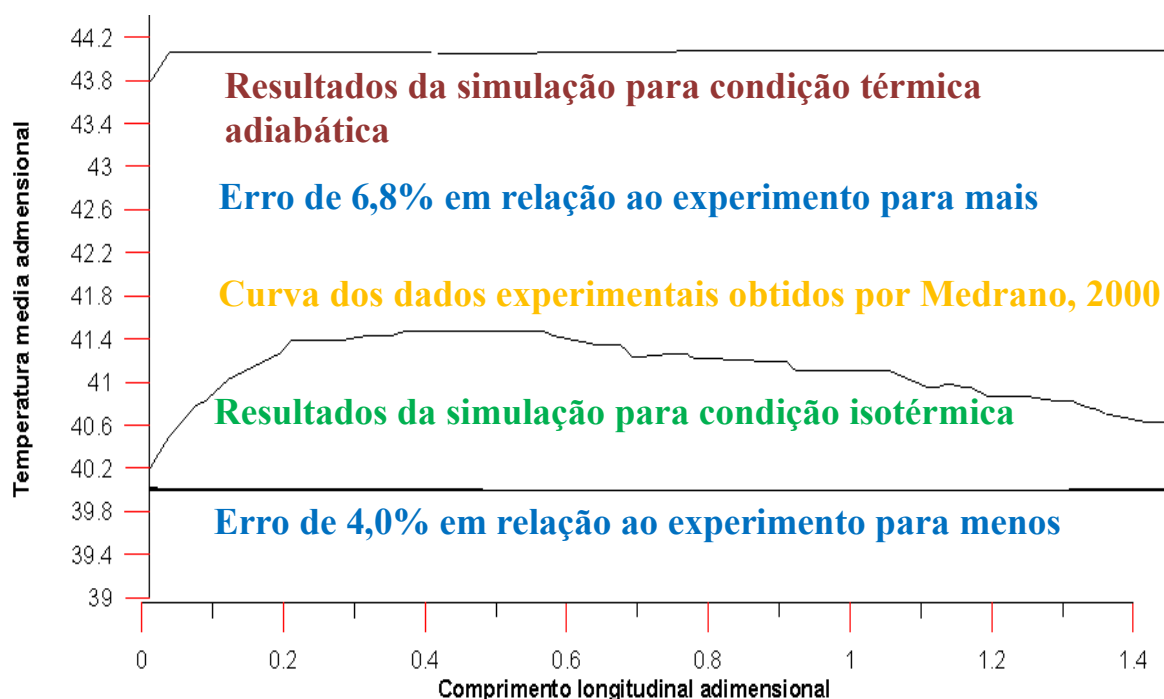


Figura 5.24 – Comparação das simulações na condição térmica adiabática e na condição isotérmica

A Figura 5.24 apresenta resultados das duas condições de contorno usado na simulação. A curva superior é relativa consideração de condição adiabática e apresenta valores superiores aos resultados experimentais obtidos por Medrano (2000), e que nos limites estes resultados diferem de 6,8%. A curva inferior mostra os resultados para a condição isotérmica, estes representam melhor concordância, diferindo de apenas 4%. Estes resultados podem ainda ser melhorados ajustando o número de Biot para a condição de contorno na simulação. Isto pode ser calculado com a condição estabelecida pelo escoamento no tubo de arrefecimento do absorvedor. Mostrando a qualidade da simulação e a força da metodologia aplicada através da técnica de transformada integral generalizada para a condição do experimento.

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

O estudo teórico realizado para a transferência simultânea de calor e massa, utilizando a solução binária de água - brometo de lítio se mostrou bastante complexo tanto do ponto de vista da compreensão do fenômeno físico como do processo de simulação.

O fenômeno físico associado à absorção é, extremamente, importante para o ciclo de absorção e dependente da afinidade química do absorvente para a recuperação do refrigerante. E, em muitos casos pode necessitar de ações externa de implementação para as trocas térmicas e de massa para acelerar o processo. As propriedades termo físicas de difusão, tanto do calor, quanto de massa são os responsáveis pelo processo de absorção e dependem das substâncias utilizadas.

A simulação do processo de absorção utilizou a integração de equações que são acopladas, tanto nas próprias equações de conservação, como nas suas condições de contornos, adicionando dificuldades de convergências no processo de solução numérica. O uso de programação em Fortran e bibliotecas do IMSL se mostraram extremamente exigente quanto ao controle de erro associado e utilizado pela sub-rotina DIVIPAG, representado pelo parâmetro tolerância (Tol). Este parâmetro exigiu uma precisão da ordem 10^{-10} , para alcance resultados satisfatórios no perfil de temperatura e concentração, e isto demandou bastante tempo para identificação da necessidade.

A aplicação da metodologia associada à Técnica de Transformada Integral Generalizada se mostrou adequada e possível para transformar o problema original em sistemas diferenciais ordinários acoplados que foram solucionados tanto em FORTRAN, através do uso da subrotina DIVIPAG, da biblioteca do IMSL, como pelo programa construído na linguagem MATHEMATICA 9.0, para produzirem resultados iguais na oitava casa decimal.

Os resultados obtidos foram apresentados e analisados no capítulo V, em forma de tabelas e gráficos para o comportamento do fenômeno da transferência simultânea de calor e massa sob a ótica das variações e dos efeitos associados ao número de Lewis e do fator de acoplamento.

Assim, pode ser afirmado que os objetivos foram alcançados de forma satisfatória, para a faixa de interesse estabelecido pela comparação com dados experimental. Foi, também, analisada a influência do fator de acoplamento e do número de Lewis sobre o desenvolvimento dos campos térmico e mássico. A partir do estudo teórico realizado pode-se otimizar a performance e o dimensionamento de absorvedores de vapor em sistemas de refrigeração por absorção.

Dois modelos foram desenvolvidos para a análise dos processos de transferência de calor e massa em filmes líquidos laminares, um para absorvedores horizontais e outro para verticais. As equações da energia e da concentração nas duas formulações estão detalhadas nos capítulos III e IV, e foram resolvidas utilizando a técnica da transformada integral generalizadas.

Verifica-se através dos resultados encontrados com a aplicação da GITT no capítulo IV, se mostrou eficaz na resolução do problema proposto, uma vez que a formulação apresentada foi validada com os resultados experimentais de Medrano (2000). Desta forma, os objetivos foram alcançados satisfatoriamente, onde foi comparado com os dados experimentais no desenvolvimento dos campos térmico e mássico.

Valores de interesse práticos, tais como número de Nusselt local, número de Sherwood local e fluxo de massa foram calculados e os resultados encontrados foram bem próximos, o que significa que existe convergência com as referências.

Como sugestões para os trabalhos futuros:

- Resolver o problema de transferência simultânea de calor e massa para o caso de escoamento bidimensional, mesmo considerando ainda a espessura constante.
- Desenvolver um código Fortran que possibilite a validação do modelo 2D.
- Desenvolver um modelo que considere a espessura da película variável.
- Escoamento sobre um tubo e no interior de um tubo vertical.

REFERÊNCIAS

- BANASIAK, K., KOZIOF, J., 2009. *Mathematical modelling of a LiBr-H₂O absorption chiller including two-dimensional distributions of temperature and concentration fields for heat and mass exchangers*. **International Journal of Thermal Sciences**, v. 48, pp. 1755-1764.
- BELHOCINE, A., WAN OMAR, W. Z., 2015. *Numerical study of heat convective mass transfer in a fully developed laminar flow with constant wall temperature*. **Case Studies in Thermal Engineering**, v. 6, pp. 116-127.
- BO, S., MA, X., LAN, Z., CHEN, J., CHEN, H., 2010, *Numerical Simulation on the Falling Film Absorption Process in a Counter-Flow Absorber*, v. 156, pp. 607-612.
- BOUROUIS, M., VALLÈS, M., MEDRANO, M., and CORONAS, A., 2005, *Absorption of water vapour in the falling film of water - (LiBr + LiI + LiNO₃ + LiCl) in a vertical tube at air-cooling thermal conditions*. **International Journal of Sciences**, v. 44, pp 491-498.
- CASTRO, J., OLIVA, A., PEREZ-SEGARRA, C. D., OLIET, C., 2008. *Modelling of the heat exchangers of a small capacity, hot water driven, air-cooled H₂O-LiBr absorption cooling machine*. **International Journal of Refrigeration**. V. 31, pp 75-86.
- ÇENGEL, A.Y. e BOLES, M. A., 2006, *Thermodynamics: an Engineering Approach*, Mc Graw Hill Editora. 6ª edição, São Paulo.
- CONLISK, A. T., 1992, "Falling Film Absorption on a Cylindrical Tube", *AIChE Journal*, v. 38, n. 11 (November), pp. 1716-1728.
- COSTA, E. da C., *Refrigeração*, 2002. Editora Edgard Blucher Ltda, 3ª edição, São Paulo.
- COTTA, R. M., 1993. *Integral Transform in. Computational Heat and Fluid Flow*. CRC Press, Boca Raton, FL.
- DONNELLAN, P., CRONIN, K., LEE, W., DUGGAN, S., BYRNE, E., 2014, *Absorption of steam bubbles in lithium bromide solution*, **Chemical Engineering Science**, v. 119, pp. 10-21.
- DORGAN, C. B, LEIGHT, S. P. E DORGAN, C. E., 1995, *Application Guide For Absorption Cooling/Refrigeration Using Recovered Heat*, Atlanta, American Society of Heating, Refrigerating and Air-Conditioning Engineers, Inc..

- FORTTRAN POWERSTATION, 1990. Version 4.0; Microsoft Corporation.
- GIANNETTI, N., ROCCHETTI, A., YAMAGUCHI, S., SAITO, K., 2017. *Analytical solution of film mass-transfer on a partially wetted absorber tube*. **International Journal of Thermal Sciences**, v. 118, pp. 176-186.
- GRIGOR'EVA, N.I. and NAKORYAKOV, V.E., 1977. *Exact solution of combined heat and mass transfer problem during film absorption*. **Inzhenerno-Fizicheskii Zhurnal**, v. 33, n° 5, pp. 893-898.
- GROSSMAN, G., 1983, "Simultaneous Heat and Mass Transfer in Film Absorption under Laminar Flow", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 26, n. 3 (March), pp. 357-371.
- HOSSEINNIA, S. M., NAGHASHZADEGAN, M., KOUHIKAMALI, R., 2017. *Numerical study of falling film absorption process in a vertical tube absorber including Soret and Dufour effects*. **International Journal of Thermal Sciences**, v 114, pp 123-138.
- ISLAM, Md. R, WIJEYSUNDERA, N.E., HO, J.C., 2004. *Simplified models for coupled heat and mass transfer in falling-film absorbers*. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 47, pp. 395-406.
- ISLAM, M. R., 2008, *Absorption process of a falling film on a tubular absorber: An experimental and numerical study*. **Applied Thermal Engineering**, v. 28, pp. 1386-1394.
- KARAMI, S., and FARHANIEH, B., 2009. *A Numerical Study on the absorption of water vapor into film of aqueous LiBr falling along a Vertical plate*, **Heat Mass Transfer**, v 46, pp. 197-207.
- KARAMI, S., and FARHANIEH, B., 2011. *Numerical Modeling of Incline Plate LiBr Absorber*, **Heat Mass Transfer**, v 47, pp. 259-267.
- KILLION, J.D., GARIMELLA, S., 2001. *A critical review of models of coupled heat and mass transfer in falling-film absorption*, **International Journal of Refrigeration**, v 24, pp. 755-979.
- KIM, K. J., BERMAN, N. S., CHAU, D. S. C., WOOD, B. D., 1995, *Absorption of water vapour into falling films of aqueous lithium bromide*, **International Journal of Refrigeration**, v 18, n°. 7, pp 486-494.
- KYUNG, I., HEROLD, K. E., 2007. *Model for absorption of water vapor into aqueous LiBr flowing over a horizontal smooth tube*, **International Journal of Refrigeration**, v. 30, pp. 591-600.
- LIMA, J. A., 2000. *Escoamento Turbulento em Canais de Placas Planas e Paralelas: Análise via Transformação Integral e Modelos Algébricos e K-L de Turbulência*. Tese de D. Sc. UFPB, Agosto.

- LIMA, C. G. G., 2002. *Análise Teórica de Fotoreatores Utilizando a Técnica da Transformada Integral Generalizada*. Tese de Doutorado. UFPB, Março.
- LIMA, C. G. G., SANTOS, C. A. C., COTTA, R. M. et al, 2007. *Integral Transform Solution of Internal Flow Problems based on Navier-Stokes Equations and Primitive Variables Formulation*. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 69, pp 544-561.
- LIN, S.J.F., SHIGANG, Z. 2011. *Experimental study on vertical vapor absorption into LiBr solution with and without additive*. **Applied Thermal Engineering**, v. 31, pp. 2850-2854.
- MATHEMATICA 9.0. Version 9.0. Wolfram Research, Inc, 2012.
- MATSUDA, A., CHOI, K. H., HADA, K. e KAWAMURA, T., 1994, *Effect of Pressure and Concentration on Performance of a Vertical Falling-film type of Absorber and Generator using Lithium Bromide Aqueous Solutions*. **Int. Journal Refrigeration**, v. 17, n° 8, pp. 538-542.
- MEDRANO, M., 2000, *Desarrollo de un Absorbedor Tubular Vertical Enfriado por aire para un Climatizador de Absorción de Agua-Bromuro de Litio*. Tesis Doctoral. URV, Tarragona, Diciembre.
- MEDRANO, M., BOUROUIS, M., CORONAS, A., 2002, *Absorption of water vapour in the falling film of water-lithium bromide inside a vertical tube at air-cooling thermal conditions*. **International Journal of Thermal Sciences**, v. 41, pp. 891-898.
- MEDRANO, M., BOUROUIS, M., PEREZ-BLANCO, H., CORONAS, A., 2003, *A simple model for falling film absorption on vertical tubes in the presence of non-absorbables*. **International Journal of Refrigeration**, v. 26, pp 108-116.
- MEDEIROS, J. M., 1998. *Análise Teórica da Convecção Forçada Laminar Transiente em Desenvolvimento Simultâneo em Dutos*. Dissertação de Msc. UFPB, Janeiro.
- MEYER, T., 2014, *Analytical solution for combined heat and mass transfer in laminar falling film absorption with uniform film velocity – isothermal and adiabatic wall*. **International Journal of Refrigeration**. v. 48, pp 74-86.
- MEYER, T., 2015, *Analytical solution for combined heat and mass transfer in laminar falling film absorption with uniform film velocity - adiabatic wall boundary*. **International Journal of Heat and Mass Transfer**. v. 80, pp 802-811.
- MIKHAILOV, M. D. e ÖZISIK, M. N., 1984. *Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion*, John Wiley, New York.
- MIKHAILOV, M. D. and VULCHANOV, N. L., 1983. “Computational procedure for Sturm-Liouville problems”, **Journal of computational Physics**, v. 5, pp. 323-336
- MORTAZAVI, M., MOGHADDAM, S., 2016. *Laplace transform solution of conjugate heat and mass transfer in falling film absorption process*. **International Journal of Refrigeration**, v. 66, pp. 93-104.

- NAKORYAKOV, V.E. and GRIGOR'EVA, N.I., 1977. *Combined heat and mass transfer during absorption in drops and films*. **Inzhenerno-Fizicheskii Zhurnal**, v. 32, n° 3, pp. 399-405.
- NAKORYAKOV, V.E. and BARTASHEVICH, M.V., 2017. *Analytical and Numerical solution of conjugate heat and mass transfer in falling film absorption process*, **AMCSE 2016**. Conference 9, 01011.
- NARVÁEZ-ROMO, B., CHHAY, M., ZAVALETA-AGUIAR, E. W. e SIMÕES-MOREIRA, J. R., 2017. *A critical review of heat and mass transfer correlations for LiBr-H₂O and NH₃-H₂O absorption refrigeration machines using falling liquid film technology*, **Applied Thermal Engineering**, v. 123, pp. 1079-1095.
- NASCIMENTO, S. C. C., MACÊDO, E. N. e QUARESMA, J. N. N., 2006. *Generalized Integral Transform Solution for Hidrodynamically Developing Non – Newtonian Flows in Circular Tubes*, *J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Eng.*, v. 28, pp 125-130.
- OCHOA, A. A. V., CHARAMBA, J. C. D. e GUERRERO, J. R. H. 2011. *Introdução a Análise de Sistemas de Refrigeração por Absorção*. Editora Universitária – UFPE, 1ª edição, Pernambuco.
- OZISIK, M. N, 1993. *Heat Conduction.*, John Wiley, 2ª edição, New York.
- PAZ, S.P.A., MACÊDO, E.N. e QUARESMA, J.N.N. 2007. *Eigenfunction Expansion Solution for Boundary – Layer Equations in Cylindrical Coordinates: Simultaneously developing Flow in Circular Tubes*, **Numerical Heat Transfer**, parte A, v. 52, pp. 1123-1149.
- PAPAEFTHIMIOU, V.D., KARAMPINOS, D.C., ROGDAKIS, E.D., 2006. *A detailed analysis of water-vapour absorption in LiBr-H₂O solution on a cooled horizontal tube*. **Applied Thermal Engineering**, v. 26, pp. 2095-2102.
- PEREIRA, L. M., PEREZ GERRERO, J.S. e COTTA, R.M., 1998. *Integral Transform of the Navier-Stokes Equations in Cylindrical Geometry*. *Computational Mechanics*, v.21, pp 60-70.
- PINTO, J. C. P., PADIHA, A. e SCALON, V. L., 2003, *Simulação Teórica de Transferência de Calor e Massa de uma Película Líquida Descendente ao longo da Parede Vertical Interna de um Tubo Cilíndrico*. **Mecânica Computacional**, v. XXII, pp. 1736-1746.
- ROGDAKIS, E. D., PAPAEFTHIMIOU, V. D., KARAMPINOS, D. C., 2003. *A realistic approach to model LiBr-H₂O smooth falling film absorption on a vertical tube*. **Applied Thermal Engineering**, v. 23, pp. 2269-2283.
- SANTOS, C. A. C., QUARESMA, J. N. M., LIMA, J. A., 2002. *Convective heat transfer in ducts: the integral transform approach*. Rio de Janeiro: Mechanical Sciences Series, Brazilian Society of Mechanical Sciences, 345 p.
- SPHAIER, L. A., COTTA, R. M., NAVIEIRA-COTTA, C. P., QUARESMA, J.N.N., 2004. *The UNIT algorithm for solving one-dimensional convection-diffusion*

problems via integral transforms. International Communications in Heat and Mass Transfer, v. 38, pp 565-571.

SILVA, R. L., 2003. A Técnica da Transformada Integral Generalizada no Escoamento e na Transferência de calor em dutos. Tese de Doutorado. UFPB, Abril.

SILVA, R. L., QUARESMA, J.N.N. e SANTOS C.A.C. 2004. *Integral Transform Analysis of Flow Development in Parallel – Plates Ducts*. 10th **Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering** – ENCIT, Rio de Janeiro, Brasil.

SILVA, C. A. M., COTTA, R. M. e QUARESMA, J. N. N., 2009. *Integral Transform Solution of the Navier – Stokes Equations in Full Cylindrical Regions with Streamfunction Formulation. Communications in Numerical Methods in Engineering*. Published online in Wiley InterScience (www.interscience.wiley.com)

TAKAMATSU, H., YAMASHIRO, H., TAKATA, N., HONDA H., 2003. *Vapor absorption by LiBr aqueous solution in vertical smooth tubes*, **International Journal of Refrigeration**, v. 26, pp 659–666.

VERONESE, J. P. *Análise do Escoamento Bidimensional de Fluidos Não Newtonianos com Formulação em Variáveis Primitivas Via GITT*. Tese de Doutorado. UFPB, Abril, 2008.

WASSENAAR, R. H., 1994, *Simultaneous Heat and Mass Transfer in a Horizontal Tube Absorber – numerical tools for present and future absorber designs*, Delft University of Technology, Faculty of Mechanical Engineering and Marine Technology.

XAVIER, F. W. da S., 2010. *Análise da Transferência Simultânea de Calor e Massa nos Processos de Absorção de Vapor em Soluções Binárias via GITT*. Tese de Doutorado. UFPB, Julho.

YANG, R. and WOOD, B. D., 1992, *A Numerical Modeling of an Absorption Process on a Liquid Falling Film*. **Solar Energy**, v. 48, nº 3, pp. 195–198.

YIGIT, A., 1999, “A Numerical Study of Heat and Mass Transfer in Falling Film Absorber”, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, v. 26, n. 2 (February), pp. 269-278.

YOON, J.-I., PHAN, T. T, MOON, C.-G., BANSAL, P., 2005, *Numerical study on heat and mass transfer characteristic of plate absorber*. **Applied Thermal Engineering**, v. 25, pp. 2219-2235.

YOON, J.-I., PHAN, T. T, MOON, C.-G., LEE, H.-S., JEONG, S.-K. 2008, *Heat and mass transfer characteristics of a horizontal tube falling film absorber with small diameter tubes*. **Heat Mass Transfer**, v. 44, pp. 437-444.

APÊNDICE A

DETERMINAÇÃO DO PERFIL DE VELOCIDADE PARA O ESCOAMENTO VERTICAL

O objetivo deste apêndice é demonstrar como foi determinado o perfil de velocidade, a velocidade média e o perfil adimensionalizado da velocidade utilizado no Capítulo IV:

Seja a Equação da Quantidade de Movimento na direção Longitudinal:

$$\rho_l \left[u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right] = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu_l \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right] + \rho_l g \quad (\text{A.1})$$

Com gradiente de pressão imposto sobre a película, tem-se:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho_v g \quad (\text{A.2})$$

Substituindo a equação (A.2) na equação (A.1) tem-se:

$$\rho_l \left[u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right] = - \rho_v g + \mu_l \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right] + \rho_l g \quad (\text{A.3})$$

Organizando os termos:

$$\rho_l \left[u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right] = g(\rho_l - \rho_v) + \mu_l \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right] \quad (\text{A.4})$$

Desprezando os efeitos das forças de inercia, que equivale a considerar o escoamento completamente desenvolvido.

$$0 = g(\rho_l - \rho_v) + \mu_l \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right] \quad (\text{A.5})$$

Assim, podemos reescrever a equação como:

$$\mu_l \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right] = -g(\rho_l - \rho_v) \quad (\text{A.6})$$

Onde,

$\rho_l \rightarrow$ representa a massa específica da solução

$\rho_v \rightarrow$ representa a massa específica do vapor saturado para a temperatura e pressão da solução líquida.

O desenvolvimento do perfil da velocidade é determinado fazendo algumas manipulações matemáticas na equação (A.6):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) = -\frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\mu_l} \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) = -\frac{g(\rho_l - \rho_v)r}{\mu_l} \quad (\text{A.8})$$

Integrando a equação (A.8) em função de r:

$$\int \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) dr = -\frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\mu_l} \int r dr \quad (\text{A.9})$$

$$r \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\mu_l} \frac{r^2}{2} + C_1 \quad (\text{A.10})$$

Organizando os termos:

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\mu_l} \frac{r}{2} + \frac{C_1}{r} \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\mu_l} \frac{r}{2} + \frac{C_1}{r} \quad (\text{A.12})$$

Integrando a equação (A.12) novamente em função de r :

$$\int \frac{\partial v}{\partial r} dr = -\frac{g(\rho_l - \rho_v)}{2\mu_l} \int r dr + \int \frac{C_1}{r} dr \quad (\text{A.13})$$

$$v(r) = -\frac{g(\rho_l - \rho_v)}{2\mu_l} \frac{r^2}{2} + C_1 \ln(r) + C_2 \quad (\text{A.14})$$

Próximo passo é substituir as seguintes condições de contorno com o objetivo de determinar o valor das constantes C_1 e C_2 :

$$1) \text{ Para } r = R_{int} \rightarrow \frac{\partial v}{\partial r} = 0$$

$$0 = -\frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\mu_l} \frac{R_{int}}{2} + \frac{C_1}{R_{int}} \quad (\text{A.15})$$

$$C_1 = \frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\mu_l} \frac{R_{int}^2}{2} \quad (\text{A.16})$$

$$2) \text{ Para } r = R_t \rightarrow v(R_t) = 0$$

$$0 = -\frac{g(\rho_l - \rho_v)}{2\mu_l} \frac{R_t^2}{2} + \frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\mu_l} \frac{R_{int}^2}{2} \ln(R_t) + C_2 \quad (\text{A.17})$$

$$C_2 = \frac{g(\rho_l - \rho_v)}{2\mu_l} \frac{R_t^2}{2} - \frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\mu_l} \frac{R_{int}^2}{2} \ln(R_t) \quad (\text{A.18})$$

Substituindo as constantes C_1 e C_2 e reorganizando os termos tem-se:

$$v(r) = -\frac{g(\rho_l - \rho_v)}{2\mu_l} \frac{r^2}{2} + \frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\mu_l} \frac{R_{int}^2}{2} \cdot \ln(r) + \frac{g(\rho_l - \rho_v)}{2\mu_l} \frac{R_t^2}{2} - \frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\mu_l} \frac{R_{int}^2}{2} \ln(R_t) \quad (\text{A.19})$$

$$v(r) = \frac{g(\rho_l - \rho_v)}{4\mu_l} [-r^2 + 2R_{int}^2 \cdot \ln(r) + R_t^2 - 2R_{int}^2 \ln(R_t)] \quad (\text{A.20})$$

$$v(r) = \frac{g(\rho_l - \rho_v)R_t^2}{4\mu_l} \left[1 - \left(\frac{r}{R_t} \right)^2 + 2 \left(\frac{R_{int}}{R_t} \right)^2 \cdot \ln(r) - 2 \left(\frac{R_{int}}{R_t} \right)^2 \cdot \ln(R_t) \right] \quad (A.21)$$

O perfil da velocidade $v(r)$ na direção do escoamento é:

$$v(r) = \frac{g(\rho_l - \rho_v)R_t^2}{4\mu_l} \left[1 - \left(\frac{r}{R_t} \right)^2 + 2 \left(\frac{R_{int}}{R_t} \right)^2 \cdot \ln \left(\frac{r}{R_t} \right) \right] \quad (A.22)$$

A velocidade média v_{med} na direção do escoamento é calculada integrando o perfil de velocidade $v(r)$ no intervalo $R_{int} < r < R_t$:

$$\begin{aligned} v_{med} &= \frac{\int_{R_{int}}^{R_t} v(r) \cdot r dr}{\int_{R_{int}}^{R_t} r dr} \\ &= \frac{\int_{R_{int}}^{R_t} \frac{g(\rho_l - \rho_v)R_t^2}{4\mu_l} \left[1 - \left(\frac{r}{R_t} \right)^2 + 2 \left(\frac{R_{int}}{R_t} \right)^2 \cdot \ln \left(\frac{r}{R_t} \right) \right] r dr}{\int_{R_{int}}^{R_t} r dr} \\ &= \frac{\frac{g(\rho_l - \rho_v)R_t^2}{4\mu_l} \int_{R_{int}}^{R_t} \left[r - r \left(\frac{r}{R_t} \right)^2 + 2 \left(\frac{R_{int}}{R_t} \right)^2 r \ln \left(\frac{r}{R_t} \right) \right] dr}{\left. \frac{r^2}{2} \right|_{R_{int}}^{R_t}} \end{aligned} \quad (A.23)$$

$$\begin{aligned} v_{med} &= \frac{g(\rho_l - \rho_v)R_t^2}{4\mu_l} \left[\int_{R_{int}}^{R_t} r dr - \frac{1}{R_t^2} \int_{R_{int}}^{R_t} r^3 dr \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\frac{R_{int}}{R_t} \right)^2 \int_{R_{int}}^{R_t} r \ln \left(\frac{r}{R_t} \right) dr \right] / \left. \frac{r^2}{2} \right|_{R_{int}}^{R_t} \end{aligned} \quad (A.24)$$

$$\begin{aligned} v_{med} &= \frac{g(\rho_l - \rho_v)R_t^2}{4\mu_l} \left[\left. \frac{r^2}{2} \right|_{R_{int}}^{R_t} - \frac{1}{R_t^2} \left. \frac{r^4}{4} \right|_{R_{int}}^{R_t} \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\frac{R_{int}}{R_t} \right)^2 R_t^2 \left(\frac{u^2}{2} \ln u - \frac{u^2}{4} \left. \frac{1}{R_t} \right|_{R_{int}}^{R_t} \right) \right] \end{aligned} \quad (A.25)$$

$$v_{med} = \frac{g(\rho_l - \rho_v)R_t^2}{4\mu_l} \left[\frac{R_t^2}{2} - \frac{R_{int}^2}{2} - \frac{1}{R_t^2} \frac{R_t^4}{4} + \frac{1}{R_t^2} \frac{R_{int}^4}{4} \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{R_{int}}{R_t} \right)^2 R_t^2 \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{R_{int}}{R_t} \right)^2 \ln \left(\frac{R_{int}}{R_t} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{R_{int}}{R_t} \right)^2 \right) \right] \\ / \left(\frac{R_t^2}{2} - \frac{R_{int}^2}{2} \right) \quad (A.26)$$

Substituindo os seguintes grupos adimensionais:

$$\eta = \frac{r}{R_t}, \quad \eta_{int} = \frac{R_{int}}{R_t} \quad e \quad \eta_t = \frac{R_t}{R_t} = 1$$

Determina-se a velocidade média:

$$v_{med} = \frac{g(\rho_l - \rho_v)R_t^2}{8\mu_l} \left[\frac{1 - 4\eta_{int}^2 + 3\eta_{int}^4 - 4\eta_{int}^4 \ln(\eta_{int})}{1 - \eta_{int}^2} \right] \quad (A.27)$$

Substituindo os grupos adimensionais em $v(r)$, temos:

$$v(r) = \frac{g(\rho_l - \rho_v)R_t^2}{4\mu_l} \left[1 - \left(\frac{r}{R_t} \right)^2 + 2 \left(\frac{R_{int}}{R_t} \right)^2 \cdot \ln \left(\frac{r}{R_t} \right) \right] \quad (A.28)$$

$$v(r) = \frac{g(\rho_l - \rho_v)R_t^2}{4\mu_l} [1 - \eta^2 + 2(\eta_{int})^2 \cdot \ln(\eta)] \quad (A.29)$$

Para determinar a adimensionalização do perfil de velocidade é necessário fazer a divisão entre o perfil de $v(r)$ e a velocidade média v_{med} .

$$V(\eta) = \frac{v(r)}{v_{med}} = \frac{\frac{g(\rho_l - \rho_v)R_t^2}{4\mu_l} [1 - \eta^2 + 2(\eta_{int})^2 \cdot \ln(\eta)]}{\frac{g(\rho_l - \rho_v)R_t^2}{8\mu_l} \left[\frac{1 - 4\eta_{int}^2 + 3\eta_{int}^4 - 4\eta_{int}^4 \ln(\eta_{int})}{1 - \eta_{int}^2} \right]} \quad (A.30)$$

Simplificando os termos em comuns:

$$V(\eta) = \frac{2(1 - \eta_{int}^2)}{1 - 4\eta_{int}^2 + 3\eta_{int}^4 - 4\eta_{int}^4 \ln(\eta_{int})} [1 - \eta^2 + 2(\eta_{int})^2 \cdot \ln(\eta)] \quad (A.31)$$

Reescrevendo o perfil determinado:

$$V(\eta) = \varsigma \cdot [1 - \eta^2 + 2\eta_{int}^2 \ln(\eta)] \quad (\text{A.32})$$

Sabendo que ς é uma constante determinada após a adimensionalização:

$$\varsigma = \frac{2(1 - \eta_{int}^2)}{1 - 4\eta_{int}^2 + 3\eta_{int}^4 - 4\eta_{int}^4 \ln(\eta_{int})} \quad (\text{A.33})$$

APÊNDICE B

BALANÇO INTEGRAL PARA OS POTENCIAIS NA INTERFACE DE UM ABSORVEDOR HORIZONTAL

Neste apêndice vamos mostrar as operações matemáticas feitas com a aplicação do balanço integral nas equações da energia e da concentração, para o escoamento externo de película descendente sobre tubos horizontais, tratado no capítulo III, com o objetivo de melhorar a eficiência e resolver o problema da não homogeneização das condições de contorno acopladas na interface.

Energia

Seja a equação da energia a Eq. (3.20):

$$U(Y) \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial X} = \frac{\partial^2 \theta(X, Y)}{\partial Y^2} \quad (\text{B.1})$$

Fazendo a integração para os limites de integração 0 e Y, temos:

$$\int_0^Y U(Y) \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial X} dY = \int_0^Y \frac{\partial^2 \theta(X, Y)}{\partial Y^2} dY \quad (\text{B.2})$$

$$\int_0^Y U(Y) \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial X} dY = \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial Y} \Big|_0^Y \quad (\text{B.3})$$

$$\int_0^Y \left(U(Y) \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial X} \right) dY = \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial Y} - \frac{\partial \theta(X, 0)}{\partial Y} \quad (\text{B.4})$$

Aplicando a condição de contorno na parede (3.20 b), que é adiabática na equação (B.4) resulta em:

$$\int_0^Y \left(U(Y) \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial X} \right) dY = \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial Y} \quad (\text{B.5})$$

Integrando novamente a Equação (B.5) para os limites 0 e 1.

$$\int_0^1 \left[\int_0^{Y'} \left(U(Y') \frac{\partial \theta(X, Y')}{\partial X} \right) dY' \right] dY = \int_0^1 \frac{\partial \theta(X, Y')}{\partial Y} dY = [\theta(X, Y')]_0^1 \quad (\text{B.6})$$

$$\int_0^1 \left[\int_0^{Y'} \left(U(Y') \frac{\partial \theta(X, Y')}{\partial X} \right) dY' \right] dY = \theta(X, 1) - \theta(X, 0) \quad (\text{B.7})$$

Organizando a Equação (B.7) o potencial da energia na interface é representado como mostra a Equação (B.8)

$$\theta(X, 1) = \theta(X, 0) + \int_0^1 \left[\int_0^{Y'} \left(U(Y') \frac{\partial \theta(X, Y')}{\partial X} \right) dY' \right] dY \quad (\text{B.8})$$

Concentração

Seja a equação da concentração a Eq. (3.21)

$$U(Y) \frac{\partial W(X, Y)}{\partial X} = \frac{1}{Le} \left[\frac{\partial^2 W(X, Y)}{\partial Y^2} \right] \quad (\text{B.9})$$

Fazendo a integração para os limites 0 e 1, temos:

$$\int_0^1 U(Y) \frac{\partial W(X, Y)}{\partial X} dY = \frac{1}{Le} \int_0^1 \left[\frac{\partial^2 W(X, Y)}{\partial Y^2} \right] dY \quad (\text{B.10})$$

$$\int_0^1 U(Y) \frac{\partial W(X, Y)}{\partial X} dY = \frac{1}{Le} \frac{\partial W(X, Y)}{\partial Y} \Big|_0^1 \quad (\text{B.11})$$

$$Le \int_0^1 U(Y) \frac{\partial W(X, Y)}{\partial X} dY = \frac{\partial W(X, Y)}{\partial Y} \Big|_0^1 \quad (\text{B.12})$$

$$Le \int_0^1 U(Y) \frac{\partial W(X, Y)}{\partial X} dY = \frac{\partial W(X, 1)}{\partial Y} - \frac{\partial W(X, 0)}{\partial Y} \quad (\text{B.13})$$

Aplicando a condição de contorno (3.21 b), a Equação (B.13) assume a seguinte forma:

$$\frac{\partial W(X, 1)}{\partial Y} = Le \int_0^1 \left(U(Y) \frac{\partial W(X, Y)}{\partial X} \right) dY \quad (\text{B.14})$$

As Equações (B.8) e (B.14) formam o sistema representado pelas equações do balanço integral dos potenciais da energia e do fluxo de concentração na interface, de um escoamento externo em absorvedor horizontal.

APÊNDICE C

BALANÇO INTEGRAL PARA OS POTENCIAIS NO ESCOAMENTO INTERNO EM UM ABSORVEDOR VERTICAL

Neste apêndice traz as operações matemáticas feitas com a aplicação do balanço integral nas equações da energia e da concentração, no escoamento interno em um absorvedor circular vertical, tratado no capítulo IV, este recurso é realizado com o objetivo de melhorar a eficiência e resolver o problema da não homogeneização das condições de contorno acopladas na interface.

Energia

Seja a equação da energia a Eq. (4.17):

$$\eta V(\eta) \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) \quad (\text{C.1})$$

Fazendo a integração para os limites de integração η e 1, temos:

$$\int_{\eta}^1 \eta V(\eta) \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \xi} d\eta = \int_{\eta}^1 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) d\eta \quad (\text{C.2})$$

$$\int_{\eta}^1 \eta V(\eta) \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \xi} d\eta = \eta \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta}^1 \quad (\text{C.3})$$

$$\int_{\eta}^1 \eta V(\eta) \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \xi} d\eta = 1 \frac{\partial \theta(\xi, 1)}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \eta} \quad (\text{C.4})$$

Aplicando a condição de contorno na parede (4.17 d), que é adiabática substituindo na equação (C.4) resulta em:

$$\int_{\eta}^1 \eta V(\eta) \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \xi} d\eta = -\eta \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \eta} \quad (C.5)$$

Organizando os termos temos:

$$-\frac{1}{\eta} \int_{\eta}^1 \eta V(\eta) \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \xi} d\eta = \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \eta} \quad (C.6)$$

Integrando novamente a equação anterior para os limites η_{int} e 1.

$$\int_{\eta_{int}}^1 \left[-\frac{1}{\eta'} \int_{\eta'}^1 \eta' V(\eta') \frac{\partial \theta(\xi, \eta')}{\partial \xi} d\eta' \right] d\eta = \int_{\eta_{int}}^1 \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \eta} d\eta \quad (C.7)$$

$$\int_{\eta_{int}}^1 \left[-\frac{1}{\eta'} \int_{\eta'}^1 \eta' V(\eta') \frac{\partial \theta(\xi, \eta')}{\partial \xi} d\eta' \right] d\eta = [\theta(\xi, \eta)]_{\eta_{int}}^1 \quad (C.8)$$

$$\int_{\eta_{int}}^1 \left[-\frac{1}{\eta'} \int_{\eta'}^1 \eta' V(\eta') \frac{\partial \theta(\xi, \eta')}{\partial \xi} d\eta' \right] d\eta = \theta(\xi, 1) - \theta(\xi, \eta_{int}) \quad (C.9)$$

$$\theta(\xi, \eta_{int}) = \theta(\xi, 1) + \int_{\eta_{int}}^1 \left[\frac{1}{\eta'} \int_{\eta'}^1 V(\eta') \eta' \frac{\partial \theta(\xi, \eta')}{\partial \xi} d\eta' \right] d\eta \quad (C.10)$$

Concentração

Seja a equação da concentração a Eq. (4.18)

$$\eta V(\eta) \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{1}{Le} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) \right] \quad (C.11)$$

Fazendo a integração para os limites de integração η_{int} e 1, temos:

$$\int_{\eta_{int}}^1 \eta V(\eta) \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \xi} d\eta = \frac{1}{Le} \int_{\eta_{int}}^1 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) d\eta \quad (C.12)$$

$$\int_{\eta_{int}}^1 \eta V(\eta) \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \xi} d\eta = \frac{1}{Le} \eta \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta_{int}}^1 \quad (C.13)$$

$$Le \int_{\eta_{int}}^1 \eta V(\eta) \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \xi} d\eta = \eta \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta_{int}}^1 \quad (C.14)$$

$$Le \int_{\eta_{int}}^1 \eta V(\eta) \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \xi} d\eta = 1 \frac{\partial W(\xi, 1)}{\partial \eta} - \eta_{int} \frac{\partial W(\xi, \eta_{int})}{\partial \eta} \quad (C.15)$$

Aplicando a condição de contorno (4.18 c), que se refere à parede impermeável, na equação (C.15) esta assume a seguinte forma:

$$\frac{\partial W(\xi, \eta_{int})}{\partial \eta} = -\frac{Le}{\eta_{int}} \int_{\eta_{int}}^1 \eta V(\eta) \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \xi} d\eta \quad (C.16)$$

As Equações (C.10) e (C.16) formam o sistema representado pelas equações do balanço integral dos potenciais da energia e do fluxo de concentração na interface, de um escoamento interno em um absorvedor vertical circular.

APÊNDICE D

TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DO SISTEMA DE EQUAÇÕES MODELAGEM 2 - PARA UM ABSORVEDOR HORIZONTAL

Neste apêndice detalha as operações matemáticas feitas na transformação integral do sistema de equações diferenciais parciais formados pela equação da energia e pela equação da concentração, em um sistema de equação diferencial ordinário, feito utilizando os operadores nos potenciais, dados a seguir:

Usando o operador de Eq. (3.24 a) na equação da energia, de Eq. (3.20), tem-se:

$$\int_0^1 \tilde{\psi}_i(Y) U(Y) \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial X} dY = \int_0^1 \tilde{\psi}_i(Y) \frac{\partial^2 \theta(X, Y)}{\partial Y^2} dY \quad (D.1)$$

$$\frac{d}{dX} \left[\frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \psi_i(Y) U(Y) \theta(X, Y) dY \right] = \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \psi_i(Y) \frac{\partial^2 \theta(X, Y)}{\partial Y^2} dY \quad (D.2)$$

$$\frac{d\bar{\theta}_i(X)}{dX} = \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \psi_i(Y) \frac{\partial^2 \theta(X, Y)}{\partial Y^2} dY \quad (D.3)$$

Operando com o operador de Eq. (3.24 b) no problema auxiliar térmico de Equação (3.22).

$$\frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \theta(X, Y) \frac{d^2 \psi_i(Y)}{dY^2} dY + \frac{\mu_i^2}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \theta(X, Y) U(Y) \psi_i(Y) dY = 0 \quad (D.4)$$

$$\frac{\mu_i^2}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \theta(X, Y) U(Y) \psi_i(Y) dY = - \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \theta(X, Y) \frac{d^2 \psi_i(Y)}{dY^2} dY \quad (D.5)$$

$$\mu_i^2 \bar{\theta}_i(X) = -\frac{1}{N_i^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \theta(X, Y) \frac{d^2 \psi_i(Y)}{dY^2} dY \quad (D.6)$$

Somando as Equações (D.3) e (D.6) temos:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\theta}_i(X)}{dX} + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(X) &= \frac{1}{N_i^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \psi_i(Y) \frac{\partial^2 \theta(X, Y)}{\partial Y^2} dY - \frac{1}{N_i^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \theta(X, Y) \frac{d^2 \psi_i(Y)}{dY^2} dY \end{aligned} \quad (D.7)$$

$$\frac{d\bar{\theta}_i(X)}{dX} + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(X) = \frac{1}{N_i^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \left[\psi_i(Y) \frac{\partial^2 \theta(X, Y)}{\partial Y^2} - \theta(X, Y) \frac{d^2 \psi_i(Y)}{dY^2} \right] dY \quad (D.8)$$

Reorganizando os termos da equação tem-se:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{\theta}_i(X)}{dX} + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(X) = \bar{g}_i(X) \\ \bar{\theta}_i(0) = 0 \end{cases} \quad (D.9 \text{ a-b})$$

Resolvendo por partes:

$$\bar{g}_i(X) = \frac{1}{N_i^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \left[\psi_i(Y) \frac{\partial^2 \theta(X, Y)}{\partial Y^2} - \theta(X, Y) \frac{d^2 \psi_i(Y)}{dY^2} \right] dY \quad (D.10)$$

Aplicando o 2º Teorema de Green na Equação (D.10) para reduzir a ordem do integrando.

$$\bar{g}_i(X) = \frac{1}{N_i^{\frac{1}{2}}} \left[\psi_i(Y) \frac{d\theta(X, Y)}{dY} - \theta(X, Y) \frac{d\psi_i(Y)}{dY} \right]_{Y=0}^{Y=1} \quad (D.11)$$

Funções definidas (ou válidas) apenas nos contornos e, portanto, a expressão pode ser reduzida, como:

$$\begin{aligned} & \left(\psi_i(1) \frac{d\theta(X, Y)}{dY} \Big|_{Y=1} - \theta(X, 1) \frac{d\psi_i(Y)}{dY} \Big|_{Y=1} \right) \\ & - \left(\psi_i(0) \frac{d\theta(X, Y)}{dY} \Big|_{Y=0} - \theta(X, 0) \frac{d\psi_i(Y)}{dY} \Big|_{Y=0} \right) \end{aligned} \quad (D.12)$$

Substituindo as condições de contornos, as Equações (3.20 b-c) e (3.22 a-b), temos:

$$\bar{g}_i(X) = \frac{1}{N_i^{1/2}} \left[\psi_i(1) \frac{d\theta(X, Y)}{dY} \Big|_{Y=1} \right] = \tilde{\psi}_i(1) f_{ac} \frac{\partial W(X, Y)}{\partial Y} \Big|_{Y=1} \quad (D.13)$$

$$\frac{d\bar{\theta}_i(X)}{dX} + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(X) = \tilde{\psi}_i(1) f_{ac} \frac{\partial W(X, Y)}{\partial Y} \Big|_{Y=1} \quad (D.14)$$

A equação resultante é:

$$\frac{d\bar{\theta}_i(X)}{dX} - \tilde{\psi}_i(1) f_{ac} \frac{\partial W(X, 1)}{\partial Y} + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(X) = 0 \quad (D.15)$$

Operando no problema de concentração de Eq. (3.21) com o operador de Equação (3.24 c), tem-se:

$$\int_0^1 \tilde{\Phi}_i(Y) U(Y) \frac{\partial W(X, Y)}{\partial X} dY = \frac{1}{Le} \int_0^1 \tilde{\Phi}_i(Y) \frac{\partial^2 W(X, Y)}{\partial Y^2} dY \quad (D.16)$$

$$\frac{1}{M_i^{1/2}} \int_0^1 \Phi_i(Y) U(Y) \frac{\partial W(X, Y)}{\partial X} dY = \frac{1}{Le} \frac{1}{M_i^{1/2}} \int_0^1 \Phi_i(Y) \frac{\partial^2 W(X, Y)}{\partial Y^2} dY \quad (D.17)$$

$$\frac{d}{dX} \left[\frac{1}{M_i^{1/2}} \int_0^1 U(Y) \Phi_i(Y) W(X, Y) dY \right] = \frac{1}{Le} \frac{1}{M_i^{1/2}} \int_0^1 \Phi_i(Y) \frac{\partial^2 W(X, Y)}{\partial Y^2} dY \quad (D.18)$$

$$\frac{d\bar{W}_i(X)}{dX} = \frac{1}{Le} \frac{1}{M_i^{1/2}} \int_0^1 \Phi_i(Y) \frac{\partial^2 W(X, Y)}{\partial Y^2} dY \quad (D.19)$$

Operando no problema auxiliar mássico de Eq. (3.23) com o operador de eq. (3.24 d), temos:

$$\frac{1}{Le} \frac{1}{M_i^{1/2}} \int_0^1 W(X, Y) \frac{d^2 \Phi_i(Y)}{dY^2} dY + \frac{1}{Le} \frac{\beta_i^2}{M_i^{1/2}} \int_0^1 W(X, Y) U(Y) \Phi_i(Y) dY = 0 \quad (D.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\beta_i^2}{Le} \left[\frac{1}{M_i^{1/2}} \int_0^1 W(X, Y) U(Y) \Phi_i(Y) dY \right] \\ = - \frac{1}{Le} \left[\frac{1}{M_i^{1/2}} \int_0^1 W(X, Y) \frac{d^2 \Phi_i(Y)}{dY^2} dY \right] \end{aligned} \quad (D.21)$$

$$\frac{\beta_i^2}{Le} \bar{W}_i(X) = - \frac{1}{Le} \left[\frac{1}{M_i^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 W(X, Y) \frac{d^2 \Phi_i(Y)}{dY^2} dY \right] \quad (D.22)$$

Somando as Equações (D.19) e (D.22), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{W}_i(X)}{dX} + \frac{\beta_i^2}{Le} \bar{W}_i(X) \\ = \frac{1}{Le} \frac{1}{M_i^{1/2}} \int_0^1 \Phi_i(Y) \frac{\partial^2 W(X, Y)}{\partial Y^2} dY \\ - \frac{1}{Le} \left[\frac{1}{M_i^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 W(X, Y) \frac{d^2 \Phi_i(Y)}{dY^2} dY \right] \end{aligned} \quad (D.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{W}_i(X)}{dX} + \frac{\beta_i^2}{Le} \bar{W}_i(X) \\ = \frac{1}{Le} \left[\frac{1}{M_i^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \left(\Phi_i(Y) \frac{\partial^2 W(X, Y)}{\partial Y^2} - W(X, Y) \frac{d^2 \Phi_i(Y)}{dY^2} \right) dY \right] \end{aligned} \quad (D.24)$$

$$\frac{d\bar{W}_i(X)}{dX} + \frac{\beta_i^2}{Le} \bar{W}_i(X) = \frac{1}{Le} \bar{h}_i(X) \quad (D.25)$$

Ou escrevendo em forma de sistema:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{W}_i(X)}{dX} + \frac{\beta_i^2}{Le} \bar{W}_i(X) = \frac{1}{Le} \bar{h}_i(X) \\ \bar{W}_i(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{D.26 a-b})$$

A função $\bar{h}_i(X)$ torna o sistema de equações não homogêneo e pode ser ainda, manipulado matematicamente de forma conveniente, usando as condições de contorno, definidas tanto no problema principal como no problema auxiliar. Por definição a integral apresentada é válida para toda região, e aplicando o 2º Teorema de Green podemos reduzir a ordem do integrando, tal como:

$$\begin{aligned} \bar{h}_i(X) &= \frac{1}{M_i^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \left[\Phi_i(Y) \frac{\partial^2 W(X, Y)}{\partial Y^2} - W(X, Y) \frac{d^2 \Phi_i(Y)}{dY^2} \right] dY \\ \bar{h}_i(X) &= \frac{1}{M_i^{\frac{1}{2}}} \left[\Phi_i(Y) \frac{\partial W(X, Y)}{\partial Y} - W(X, Y) \frac{d\Phi_i(Y)}{dY} \right]_{Y=0}^{Y=1} \end{aligned} \quad (\text{D.27 a-b})$$

Aplicando os intervalos da integração na Equação (D.27 b):

$$\begin{aligned} &\left[\Phi_i(1) \frac{\partial W(X, 1)}{\partial Y} - W(X, 1) \frac{d\Phi_i(1)}{dY} \right] \\ &\quad - \left[\Phi_i(0) \frac{\partial W(X, 0)}{\partial Y} - W(X, 0) \frac{d\Phi_i(0)}{dY} \right] \end{aligned} \quad (\text{D.28})$$

Substituindo as condições de contornos do problema principal e do auxiliar da concentração, as Equações (3.21 b-c) e (3.23 a-b), temos:

$$\bar{h}_i(X) = \frac{1}{M_i^{\frac{1}{2}}} \left(-W(X, 1) \frac{d\Phi_i(1)}{dY} \right) = -[1 - \theta(X, 1)] \frac{d\tilde{\Phi}_i(1)}{dY} \quad (\text{D.29})$$

Substituindo na Equação (D.26 a) o valor encontrado de $\bar{h}_i(X)$.

$$\frac{d\bar{W}_i(X)}{dX} + \frac{\beta_i^2}{Le} \bar{W}_i(X) = -\frac{1}{Le} [1 - \theta(X, 1)] \frac{d\tilde{\Phi}_i(1)}{dY} \quad (D.30)$$

$$\frac{d\bar{W}_i(X)}{dX} + \frac{\beta_i^2}{Le} \bar{W}_i(X) + \frac{1}{Le} [1 - \theta(X, 1)] \frac{d\tilde{\Phi}_i(1)}{dY} = 0 \quad (D.31)$$

$$\frac{d\bar{W}_i(X)}{dX} + \frac{\beta_i^2}{Le} \bar{W}_i(X) + \frac{1}{Le} \frac{d\tilde{\Phi}_i(1)}{dY} - \frac{\theta(X, 1)}{Le} \frac{d\tilde{\Phi}_i(1)}{dY} = 0 \quad (D.32)$$

O sistema de equações da energia e da concentração encontrado é:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{\theta}_i(X)}{dX} + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(X) - \tilde{\psi}_i(1) f_{ac} \frac{\partial W(X, 1)}{\partial Y} = 0 \\ \frac{d\bar{W}_i(X)}{dX} + \frac{\beta_i^2}{Le} \bar{W}_i(X) + \frac{1}{Le} \frac{d\tilde{\Phi}_i(1)}{dY} - \frac{\theta(X, 1)}{Le} \frac{d\tilde{\Phi}_i(1)}{dY} = 0 \end{array} \right. \quad (D.33 \text{ a-b})$$

Fazendo a substituição direta das fórmulas das inversas no sistema de Equações (D.33 a-b). Primeiro, a fórmula da inversa do campo mássico, de Eq. (3.23 c) na equação da energia, a Eq. (D.33 a):

$$\frac{d\bar{\theta}_i(X)}{dX} + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(X) - \tilde{\psi}_i(1) f_{ac} \frac{\partial W(X, 1)}{\partial Y} = 0 \quad (D.34)$$

$$\frac{d\bar{\theta}_i(X)}{dX} + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(X) - \tilde{\psi}_i(1) f_{ac} \frac{\partial}{\partial Y} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\Phi}_j(1) \bar{W}_j(X) \right] = 0 \quad (D.35)$$

$$\frac{d\bar{\theta}_i(X)}{dX} + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(X) - \tilde{\psi}_i(1) f_{ac} \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\Phi}_j'(1) \bar{W}_j(X) = 0 \quad (D.36)$$

$$\frac{d\bar{\theta}_i(X)}{dX} - \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\psi}_i(1) \tilde{\Phi}_j'(1) f_{ac} \bar{W}_j(X) + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(X) = 0 \quad (D.37)$$

$$\frac{d\bar{\theta}_i(X)}{dX} - \sum_{j=1}^{\infty} CT_{2ij} \bar{W}_j(X) + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(X) = 0 \quad (D.38)$$

$$CT2_{ij} = \tilde{\psi}_i(1)\tilde{\Phi}_j'(1) \cdot f_{ac} \quad (D.38 \text{ a})$$

Em seguida, a fórmula da inversa do campo térmico, de Eq. (3.22 c) na equação da concentração, de Eq. (D.33 b):

$$\frac{d\bar{W}_i(X)}{dX} + \frac{\beta_i^2}{Le} \bar{W}_i(X) + \frac{1}{Le} \frac{d\tilde{\Phi}_i(1)}{dY} - \frac{\theta(X, 1)}{Le} \frac{d\tilde{\Phi}_i(1)}{dY} = 0 \quad (D.39)$$

$$\frac{d\bar{W}_i(X)}{dX} + \frac{\beta_i^2}{Le} \bar{W}_i(X) + \frac{1}{Le} \frac{d\tilde{\Phi}_i(1)}{dY} - \frac{1}{Le} \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\psi}_j(1) \frac{d\tilde{\Phi}_i(1)}{dY} \bar{\theta}_j(X) = 0 \quad (D.40)$$

$$\frac{d\bar{W}_i(X)}{dX} + \frac{\beta_i^2}{Le} \bar{W}_i(X) + \frac{1}{Le} \frac{d\tilde{\Phi}_i(1)}{dY} - \frac{1}{Le} \sum_{j=1}^{\infty} CC2_{ij} \bar{\theta}_j(X) = 0 \quad (D.41)$$

$$CC2_{ij} = \tilde{\psi}_j(1) \frac{d\tilde{\Phi}_i(1)}{dY} \quad (D.41 \text{ a})$$

O sistema de equações resultante usando o valor das fórmulas inversas é:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{\theta}_i(X)}{dX} - \sum_{j=1}^{\infty} CT2_{ij} \bar{W}_j(X) + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(X) = 0 \\ \frac{d\bar{W}_i(X)}{dX} + \frac{\beta_i^2}{Le} \bar{W}_i(X) + \frac{1}{Le} \frac{d\tilde{\Phi}_i(1)}{dY} - \frac{1}{Le} \sum_{j=1}^{\infty} CC2_{ij} \bar{\theta}_j(X) = 0 \end{array} \right. \quad (D.38-41)$$

Sendo os coeficientes:

$$CT2_{ij} = \tilde{\psi}_i(1)\tilde{\Phi}_j'(1) \cdot f_{ac} \quad (D.38 \text{ a})$$

$$CC2_{ij} = \tilde{\psi}_j(1) \frac{d\tilde{\Phi}_i(1)}{dY} \quad (D.41 \text{ a})$$

As condições iniciais do sistema:

$$\bar{\theta}_i(0) = 0 \quad e \quad \bar{W}_i(0) = 0 \quad (\text{D.42 a-b})$$

$$\begin{cases} \frac{d\bar{\theta}_i(X)}{dX} + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(X) - \tilde{\psi}_i(1) f_{ac} \frac{\partial W(X, 1)}{\partial Y} = 0 \\ \frac{d\bar{W}_i(X)}{dX} + \frac{\beta_i^2}{Le} \bar{W}_i(X) + \frac{1}{Le} \frac{d\tilde{\Phi}_i(1)}{dY} - \frac{\theta(X, 1)}{Le} \frac{d\tilde{\Phi}_i(1)}{dY} = 0 \end{cases} \quad (\text{D.42 c-d})$$

Resolvendo o sistema resultante de equações da energia e da concentração, porém usando o recurso do balanço integral que foi sugerido por COTTA (1993) e utilizado na tese de XAVIER (2010). A demonstração do desenvolvimento do balanço integral nas equações da energia e da concentração está no apêndice B.

Aplicando a equação do balanço integral Eq. (B.14) na Eq. (D.42 c).

$$\frac{\partial W(X, 1)}{\partial Y} = Le \int_0^1 U(Y) \frac{\partial W(X, Y)}{\partial X} dY \quad (\text{B.14})$$

Temos:

$$\frac{d\bar{\theta}_i(X)}{dX} + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(X) - \tilde{\psi}_i(1) f_{ac} Le \int_0^1 U(Y) \frac{\partial W(X, Y)}{\partial X} dY = 0 \quad (\text{D.43})$$

Aplicando a fórmula da inversa do campo mássico, de Eq. (3.23 c) na Equação (D.43), temos:

$$\frac{d\bar{\theta}_i(X)}{dX} + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(X) - \tilde{\psi}_i(1) f_{ac} Le \int_0^1 U(Y) \frac{\partial}{\partial X} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\Phi}_j(Y) \bar{W}_j(X) \right] dY = 0 \quad (\text{D.44})$$

$$\frac{d\bar{\theta}_i(X)}{dX} + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(X) - f_{ac} Le \cdot \tilde{\psi}_i(1) \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^1 U(Y) \tilde{\Phi}_j(Y) dY \frac{d\bar{W}_j(X)}{dX} = 0 \quad (\text{D.45})$$

$$\frac{d\bar{\theta}_i(X)}{dX} + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(X) - \sum_{j=1}^{\infty} CT2_{ij} \frac{d\bar{W}_j(X)}{dX} = 0 \quad (\text{D.46})$$

Onde:

$$CT2_{ij} = f_{ac} Le \cdot \tilde{\psi}_i(1) \int_0^1 U(Y) \tilde{\Phi}_j(Y) dY \quad (\text{D.46 a})$$

Inserindo a equação do balanço integral a Eq. (B.8) na equação da concentração, a Eq. (D.42 d):

$$\theta(X, 1) = \theta(X, 0) + \int_0^1 \left[\int_0^{Y'} U(Y') \frac{\partial \theta(X, Y')}{\partial X} dY' \right] dY \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{W}_i(X)}{dX} + \frac{\beta_i^2}{Le} \bar{W}_i(X) + \frac{1}{Le} \frac{d\tilde{\Phi}_i(1)}{dY} \\ - \frac{1}{Le} \frac{d\tilde{\Phi}_i(1)}{dY} \left\{ \theta(X, 0) + \int_0^1 \left[\int_0^{Y'} U(Y') \frac{\partial \theta(X, Y')}{\partial X} dY' \right] dY \right\} \\ = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.47})$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{W}_i(X)}{dX} + \frac{\beta_i^2}{Le} \bar{W}_i(X) + \frac{1}{Le} \frac{d\tilde{\Phi}_i(1)}{dY} - \frac{1}{Le} \frac{d\tilde{\Phi}_i(1)}{dY} \theta(X, 0) \\ - \frac{1}{Le} \frac{d\tilde{\Phi}_i(1)}{dY} \int_0^1 \left[\int_0^{Y'} U(Y') \frac{\partial \theta(X, Y')}{\partial X} dY' \right] dY = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.48})$$

Substituindo a fórmula da inversa do campo térmico, de Eq. (3.22 c).

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{W}_i(X)}{dX} + \frac{\beta_i^2}{Le} \bar{W}_i(X) + \frac{1}{Le} \frac{d\tilde{\Phi}_i(1)}{dY} - \frac{1}{Le} \frac{d\tilde{\Phi}_i(1)}{dY} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\psi}_j(0) \bar{\theta}_j(X) \right] \\ - \frac{1}{Le} \frac{d\tilde{\Phi}_i(1)}{dY} \int_0^1 \left\{ \int_0^{Y'} U(Y') \frac{\partial}{\partial X} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\psi}_j(Y') \bar{\theta}_j(X) \right] dY' \right\} dY \\ = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.49})$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d\bar{W}_i(X)}{dX} + \frac{\beta_i^2}{Le} \bar{W}_i(X) - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{Le} \frac{d\tilde{\Phi}_i(1)}{dY} \tilde{\psi}_j(0) \bar{\theta}_j(X) \\
& - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{Le} \frac{d\tilde{\Phi}_i(1)}{dY} \int_0^1 \left[\int_0^{Y'} U(Y') \tilde{\psi}_j(Y') dY' \right] dY \frac{d\bar{\theta}_j(X)}{dX} \\
& + \frac{1}{Le} \frac{d\tilde{\Phi}_i(1)}{dY} = 0
\end{aligned} \tag{D.50}$$

$$\frac{d\bar{W}_i(X)}{dX} + \frac{\beta_i^2}{Le} \bar{W}_i(X) - \sum_{j=1}^{\infty} CC2_{ij} \bar{\theta}_j(X) - \sum_{j=1}^{\infty} CC3_{ij} \frac{d\bar{\theta}_j(X)}{dX} + CC4_i = 0 \tag{D.51}$$

Sendo os coeficientes:

$$CC2_{ij} = \frac{1}{Le} \frac{d\tilde{\Phi}_i(1)}{dY} \tilde{\psi}_j(0) \tag{D.51 a}$$

$$CC3_{ij} = \frac{1}{Le} \frac{d\tilde{\Phi}_i(1)}{dY} \int_0^1 \left[\int_0^{Y'} U(Y') \tilde{\psi}_j(Y') dY' \right] dY \tag{D.51 b}$$

$$CC4_i = \frac{1}{Le} \frac{d\tilde{\Phi}_i(1)}{dY} \tag{D.51 c}$$

O sistema transformado é:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{d\bar{\theta}_i(X)}{dX} + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(X) - \sum_{j=1}^{\infty} CT2_{ij} \frac{d\bar{W}_j(X)}{dX} = 0 \\ & \frac{d\bar{W}_i(X)}{dX} + \frac{\beta_i^2}{Le} \bar{W}_i(X) - \sum_{j=1}^{\infty} CC2_{ij} \bar{\theta}_j(X) - \sum_{j=1}^{\infty} CC3_{ij} \frac{d\bar{\theta}_j(X)}{dX} + CC4_i = 0 \end{aligned} \right. \tag{D.46-51}$$

APÊNDICE E

TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DO SISTEMA DE EQUAÇÕES MODELAGEM 1 - PARA UM ABSORVEDOR VERTICAL

No capítulo IV a transformada integral generalizada foi aplicada no sistema de equações em duas modelagens e neste apêndice mostra as operações matemáticas feitas no sistema de equações diferenciais parciais, usando a modelagem 1, todos os detalhes são mostrados a seguir:

Aplica-se o operador de Eq. (4.21 a) na equação da energia de Eq. (4.17) e o operador de Eq. (4.21 b) no problema auxiliar da energia de Eq. (4.19), em seguida organiza os termos e resolve algumas operações matemáticas.

$$\int_{\eta_{int}}^1 \eta \tilde{\psi}_i(\eta) V(\eta) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} d\eta = \int_{\eta_{int}}^1 \tilde{\psi}_i(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) d\eta \quad (\text{E.1})$$

$$\int_{\eta_{int}}^1 \theta(\xi, \eta) \frac{d}{d\eta} \left[\eta \frac{d\psi_i(\eta)}{d\eta} \right] d\eta = -\mu_i^2 \int_{\eta_{int}}^1 \eta \theta(\xi, \eta) \psi_i(\eta) d\eta \quad (\text{E.2})$$

Somando as equações (E.1) e (E.2), fazendo as manipulações necessárias, em seguida na parte entre as chaves aplica-se o 2º Teorema de Green, que transforma uma integral de volume numa integral de superfície, a equação torna-se:

$$\begin{aligned}
& \int_{\eta_{int}}^1 \eta \tilde{\psi}_i(\eta) V(\eta) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} d\eta + \mu_i^2 \int_{\eta_{int}}^1 \eta \theta(\xi, \eta) \psi_i(\eta) d\eta \\
&= \left\{ \int_{\eta_{int}}^1 \tilde{\psi}_i(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) d\eta \right. \\
&\quad \left. - \int_{\eta_{int}}^1 \theta(\xi, \eta) \frac{d}{d\eta} \left[\eta \frac{d\psi_i(\eta)}{d\eta} \right] d\eta \right\}
\end{aligned} \tag{E.3}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\eta_{int}}^1 \eta \tilde{\psi}_i(\eta) V(\eta) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} d\eta + \mu_i^2 \int_{\eta_{int}}^1 \eta \theta(\xi, \eta) \psi_i(\eta) d\eta \\
&= \left[\tilde{\psi}_i(\eta) \eta \frac{\partial \theta(\xi, 1)}{\partial \eta} - \theta(\xi, \eta) \eta \frac{d\psi_i(\eta)}{d\eta} \right]_{\eta_{int}}^1
\end{aligned} \tag{E.4}$$

Substituindo os limites de integração e aplicando as condições de contorno de Eqs (4.17 b-d) e (4.19 a-b), encontramos:

$$\int_{\eta_{int}}^1 \eta \tilde{\psi}_i(\eta) V(\eta) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} d\eta + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(\xi) + \eta_{int} \cdot f_{ac} \tilde{\psi}_i(\eta_{int}) \frac{\partial W(\xi, \eta_{int})}{\partial \eta} = 0 \tag{E.5}$$

Aplica-se o operador de Eq. (4.21 c) na equação da concentração de Eq. (4.18) e o operador de Eq. (4.21 d) no problema auxiliar da concentração de Eq. (4.20), em seguida organiza os termos e resolve algumas operações matemáticas.

$$\int_{\eta_{int}}^1 \eta \tilde{\phi}_i(\eta) V(\eta) \frac{\partial W}{\partial \xi} d\eta = \frac{1}{Le} \int_{\eta_{int}}^1 \tilde{\phi}_i(\eta) \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial W}{\partial \eta} \right) \right] d\eta \tag{E.6}$$

$$\frac{1}{Le} \int_{\eta_{int}}^1 W(\xi, \eta) \frac{d}{d\eta} \left[\eta \frac{d\phi_i(\eta)}{d\eta} \right] d\eta = -\frac{\beta_i^2}{Le} \int_{\eta_{int}}^1 \eta W(\xi, \eta) \phi_i(\eta) d\eta \tag{E.7}$$

Somando as equações (E.6) e (E.7) e fazendo as manipulações necessárias, em seguida na parte entre as chaves aplica-se o 2º Teorema de Green, a equação torna-se:

$$\begin{aligned}
& \int_{\eta_{int}}^1 \eta \tilde{\phi}_i(\eta) V(\eta) \frac{\partial W}{\partial \xi} d\eta + \frac{\beta_i^2}{Le} \int_{\eta_{int}}^1 \eta W(\xi, \eta) V(\eta) \phi_i(\eta) d\eta \\
&= \frac{1}{Le} \left\{ \int_{\eta_{int}}^1 \tilde{\phi}_i(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial W}{\partial \eta} \right) d\eta \right. \\
&\quad \left. - \int_{\eta_{int}}^1 W(\xi, \eta) \frac{d}{d\eta} \left[\eta \frac{d\phi_i(\eta)}{d\eta} \right] d\eta \right\}
\end{aligned} \tag{E.8}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\eta_{int}}^1 \eta \tilde{\phi}_i(\eta) V(\eta) \frac{\partial W}{\partial \xi} d\eta + \frac{\beta_i^2}{Le} \int_{\eta_{int}}^1 \eta W(\xi, \eta) V(\eta) \phi_i(\eta) d\eta \\
&= \frac{1}{Le} \left[\tilde{\phi}_i(\eta) \eta \frac{\partial W}{\partial \eta} - W(\xi, \eta) \eta \frac{d\phi_i(\eta)}{d\eta} \right]_{\eta_{int}}^1
\end{aligned} \tag{E.9}$$

Substituindo os limites de integração e aplicando as condições de contorno de Equações (4.18 b-c) e (4.20 a-b), encontramos:

$$\begin{aligned}
& \int_{\eta_{int}}^1 \eta \tilde{\phi}_i(\eta) V(\eta) \frac{\partial W}{\partial \xi} d\eta + \frac{\beta_i^2}{Le} \bar{W}_i(\xi) - \frac{\eta_{int}}{Le} \frac{d\phi_i(\eta_{int})}{d\eta} \\
&+ \frac{\eta_{int}}{Le} \theta(\xi, \eta_{int}) \frac{d\phi_i(\eta_{int})}{d\eta} = 0
\end{aligned} \tag{E.10}$$

Aplicando o balanço integral nas equações da energia e da concentração

Com o objetivo de melhorar a eficiência e resolver o problema da não homogeneização das condições de contorno acopladas na interface vamos aplicar o balanço integral nas equações da energia e da concentração. A demonstração da aplicação do balanço integral está detalhada no apêndice C, e as equações encontradas são estas:

$$\theta(\xi, \eta_{int}) = \theta(\xi, 1) + \int_{\eta_{int}}^1 \left[\frac{1}{\eta'} \int_{\eta'}^1 V(\eta') \eta' \frac{\partial \theta(\xi, \eta')}{\partial \xi} d\eta' \right] d\eta \tag{C.10}$$

$$\frac{\partial W(\xi, \eta_{int})}{\partial \eta} = - \frac{Le}{\eta_{int}} \int_{\eta_{int}}^1 \eta V(\eta) \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \xi} d\eta \tag{C.16}$$

Substituindo a Equação (C.10) na equação da concentração (E.10) e a Equação (C.16) na equação da energia (E.5), temos:

$$\begin{aligned} \int_{\eta_{int}}^1 \eta \tilde{\phi}_i(\eta) V(\eta) \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \xi} d\eta + \frac{\beta_i^2}{Le} \bar{W}_i(\xi) - \frac{\eta_{int}}{Le} \frac{d\phi_i(\eta_{int})}{d\eta} \\ + \frac{\theta(\xi, 1)\eta_{int}}{Le} \frac{d\phi_i(\eta_{int})}{d\eta} \\ + \frac{\eta_{int}}{Le} \int_{\eta_{int}}^1 \left[\frac{1}{\eta'} \int_{\eta'}^1 V(\eta') \eta' \frac{\partial \theta(\xi, \eta')}{\partial \xi} d\eta' \right] d\eta \frac{d\phi_i(\eta_{int})}{d\eta} = 0 \end{aligned} \quad (E.11)$$

$$\begin{aligned} \int_{\eta_{int}}^1 \eta \tilde{\psi}_i(\eta) V(\eta) \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \xi} d\eta + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(\xi) \\ - Le \cdot f_{ac} \tilde{\psi}_i(\eta_{int}) \int_{\eta_{int}}^1 \eta V(\eta) \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \xi} d\eta = 0 \end{aligned} \quad (E.12)$$

Em seguida substitui as funções inversas de Eqs. (4.19 g) e (4.20 g) no sistema de equações (E.11) e (E.12):

SISTEMA DE EQUAÇÕES

Energia

$$\bar{\theta}_i(0) = 0$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\int_{\eta_{int}}^1 \eta V(\eta) \tilde{\psi}_i(\eta) \tilde{\psi}_j(\eta) d\eta \frac{d\bar{\theta}_j(\xi)}{d\xi} \right. \\ \left. - Le \cdot f_{ac} \tilde{\psi}_i(\eta_{int}) \int_{\eta_{int}}^1 \eta V(\eta) \tilde{\phi}_j(\eta) d\eta \frac{d\bar{W}_j(\xi)}{d\xi} \right] + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(\xi) \\ = 0 \end{aligned} \quad (E.13 \text{ a-b})$$

Escrevendo a equação na forma compacta a equação da energia:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left[CT1_{ij} \frac{d\bar{\theta}_j(\xi)}{d\xi} - CT2_{ij} \frac{d\bar{W}_j(\xi)}{d\xi} \right] + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(\xi) = 0 \quad (E.14)$$

Os coeficientes são as matrizes:

$$CT1_{ij} = \int_{\eta_{int}}^1 \eta V(\eta) \tilde{\psi}_i(\eta) \tilde{\psi}_j(\eta) d\eta \quad (E.14 a)$$

$$CT2_{ij} = Le \cdot f_{ac} \tilde{\psi}_i(\eta_{int}) \int_{\eta_{int}}^1 \eta V(\eta) \tilde{\phi}_j(\eta) d\eta \quad (E.14 b)$$

Concentração

$$\begin{aligned} \bar{W}_i(0) &= 0 \\ \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \int_{\eta_{int}}^1 \eta V(\eta) \tilde{\phi}_i(\eta) \tilde{\phi}_j(\eta) d\eta \frac{d\bar{W}_j(\xi)}{d\xi} + \frac{\eta_{int}}{Le} \frac{d\phi_i(\eta_{int})}{d\eta} \tilde{\psi}_j(1) \bar{\theta}_j(\xi) \right. \\ &+ \frac{\eta_{int}}{Le} \frac{d\phi_i(\eta_{int})}{d\eta} \int_{\eta_{int}}^1 \left[\frac{1}{\eta'} \int_{\eta'}^1 \eta' V(\eta') \tilde{\psi}_j(\eta') d\eta' \right] d\eta \frac{d\bar{\theta}_j(\xi)}{d\xi} \left. \right\} + \frac{\beta_i^2}{Le} \bar{W}_i(\xi) \\ &- \frac{\eta_{int}}{Le} \frac{d\phi_i(\eta_{int})}{d\eta} = 0 \end{aligned} \quad (E.15 a-b)$$

Escrevendo a equação na forma compacta:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\{ CC1_{ij} \frac{d\bar{W}_j(\xi)}{d\xi} + CC2_{ij} \bar{\theta}_j(\xi) + CC3_{ij} \frac{d\bar{\theta}_j(\xi)}{d\xi} \right\} + \frac{\beta_i^2}{Le} \bar{W}_i(\xi) - CC4_i = 0 \quad (E.16)$$

Os coeficientes são as matrizes:

$$CC1_{ij} = \int_{\eta_{int}}^1 \eta V(\eta) \tilde{\phi}_i(\eta) \tilde{\phi}_j(\eta) d\eta \quad (E.16 a)$$

$$CC2_{ij} = \frac{\eta_{int}}{Le} \frac{d\phi_i(\eta_{int})}{d\eta} \tilde{\psi}_j(1) \quad (E.16 b)$$

$$CC3_{ij} = \frac{\eta_{int}}{Le} \frac{d\phi_i(\eta_{int})}{d\eta} \int_{\eta_{int}}^1 \left[\frac{1}{\eta'} \int_{\eta'}^1 \eta' V(\eta') \tilde{\psi}_j(\eta') d\eta' \right] d\eta \quad (E.16 c)$$

$$CC4_i = \frac{\eta_{int}}{Le} \frac{d\phi_i(\eta_{int})}{d\eta} \quad (\text{E.16 d})$$

O sistema de equações será resolvido usando um código computacional na linguagem Fortran.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \left[CT1_{ij} \frac{d\bar{\theta}_j(\xi)}{d\xi} - CT2_{ij} \frac{d\bar{W}_j(\xi)}{d\xi} \right] + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(\xi) &= 0 \\ \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ CC1_{ij} \frac{d\bar{W}_j(\xi)}{d\xi} + CC2_{ij} \bar{\theta}_j(\xi) + CC3_{ij} \frac{d\bar{\theta}_j(\xi)}{d\xi} \right\} + \frac{\beta_i^2}{Le} \bar{W}_i(\xi) - CC4_i &= 0 \end{aligned} \quad (\text{E.17 a-b})$$

Isolando as derivadas dos potenciais o sistema torna-se:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\theta}_j(\xi)}{d\xi} &= \left[\sum_{j=1}^{\infty} CT1_{ij} \right]^{-1} \cdot \left[\sum_{j=1}^{\infty} CT2_{ij} \frac{d\bar{W}_j(\xi)}{d\xi} - \mu_i^2 \bar{\theta}_i(\xi) \right] \\ \frac{d\bar{W}_j(\xi)}{d\xi} &= \left[\sum_{j=1}^{\infty} CC1_{ij} \right]^{-1} \cdot \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left(-CC2_{ij} \bar{\theta}_j(\xi) - CC3_{ij} \frac{d\bar{\theta}_j(\xi)}{d\xi} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta_i^2}{Le} \bar{W}_i(\xi) + CC4_i \right] \end{aligned} \quad (\text{E.18 a-b})$$

Substituindo o termo da velocidade adimensional a Eq. (A.32) no sistema de equações:

$$V(\eta) = \varsigma \cdot [1 - \eta^2 + 2\eta_{int}^2 \ln(\eta)] \quad (\text{A.32})$$

A equação da Energia

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\{ [CT_{1j} - CT_{2ij}] \frac{d\bar{\theta}_j(\xi)}{d\xi} - [CT_{3ij} - CT_{4ij}] \frac{d\bar{W}_j(\xi)}{d\xi} \right\} + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(\xi) = 0 \quad (\text{E.19})$$

Os coeficientes são:

$$CT_{1ij} = \int_{\eta_{int}}^1 \varsigma \eta \tilde{\psi}_i(\eta) \tilde{\psi}_j(\eta) d\eta \quad (\text{E.19 a})$$

$$CT_{2ij} = \int_{\eta_{int}}^1 \varsigma \eta^3 \tilde{\psi}_i(\eta) \tilde{\psi}_j(\eta) d\eta \quad (\text{E.19 b})$$

$$CT_{3ij} = Le \cdot f_{ac} \tilde{\psi}_i(\eta_{int}) \int_{\eta_{int}}^1 \varsigma \eta \tilde{\phi}_j(\eta) d\eta \quad (\text{E.19 c})$$

$$CT_{4ij} = Le \cdot f_{ac} \tilde{\psi}_i(\eta_{int}) \int_{\eta_{int}}^1 \varsigma \eta^3 \tilde{\phi}_j(\eta) d\eta \quad (\text{E.19 d})$$

A equação da Concentração

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ (CC_{1ij} - CC_{2ij}) \frac{d\bar{W}_j(\xi)}{d\xi} + CC_{3ij} \bar{\theta}_j(\xi) + CC_{4ij} \frac{d\bar{\theta}_j(\xi)}{d\xi} \right\} \\ + \frac{\beta_i^2}{Le} \bar{W}_i(\xi) - CC_{5i} = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.20})$$

Os coeficientes são:

$$CC_{1ij} = \int_{\eta_{int}}^1 \varsigma \eta \tilde{\phi}_i(\eta) \tilde{\phi}_j(\eta) d\eta \quad (\text{E.20 a})$$

$$CC_{2ij} = \int_{\eta_{int}}^1 \varsigma \eta^3 \tilde{\phi}_i(\eta) \tilde{\phi}_j(\eta) d\eta \quad (\text{E.20 b})$$

$$CC_{3ij} = \frac{\eta_{int}}{Le} \frac{d\phi_i(\eta_{int})}{d\eta} \tilde{\psi}_j(1) \quad (\text{E.20 c})$$

$$CC4_{ij} = \frac{\eta_{int}}{Le} \frac{d\phi_i(\eta_{int})}{d\eta} \int_{\eta_{int}}^1 \left[\frac{1}{\eta'} \int_{\eta'}^1 \varsigma \eta' \tilde{\psi}_j(\eta') d\eta' - \frac{1}{\eta'} \int_{\eta'}^1 \varsigma(\eta')^3 \tilde{\psi}_j(\eta') d\eta' \right] d\eta \quad (\text{E.20 d})$$

$$CC5_i = \frac{\eta_{int}}{Le} \frac{d\phi_i(\eta_{int})}{d\eta} \quad (\text{E.20 e})$$

Reorganizando as equações temos o sistema de equações a ser resolvido:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\theta}_j(\xi)}{d\xi} &= \sum_{j=1}^{\infty} [CT1_{ij} - CT2_{ij}]^{-1} \cdot \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} [CT3_{ij} - CT4_{ij}] \frac{d\bar{W}_j(\xi)}{d\xi} - \mu_i^2 \bar{\theta}_i(\xi) \right\} \\ \frac{d\bar{W}_j(\xi)}{d\xi} &= \sum_{j=1}^{\infty} [CC1_{ij} - CC2_{ij}]^{-1} \cdot \left\{ - \sum_{j=1}^{\infty} \left[CC3_{ij} \bar{\theta}_j(\xi) + CC4_{ij} \frac{d\bar{\theta}_j(\xi)}{d\xi} \right] - \frac{\beta_i^2}{Le} \bar{W}_i(\xi) + CC5_i \right\} \end{aligned} \quad (\text{E.21-22})$$