

*Universidade Federal da Paraíba*

**Centro de Tecnologia**

**Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica**

**Mestrado – Doutorado**

**UMA FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE  
CONTORNO DIRETO EM PROBLEMAS DE BARRAS REGIDOS POR  
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE COEFICIENTES VARIÁVEIS**

**José Jarbson Salustiano dos Passos**

**Tese de Doutorado apresentada à Universidade Federal da Paraíba para  
obtenção do grau de Doutor.**

**João Pessoa – Paraíba**

**Agosto, 2018**

JOSÉ JARBSON SALUSTIANO DOS PASSOS

UMA FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE  
CONTORNO DIRETO EM PROBLEMAS DE BARRAS REGIDOS POR  
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE COEFICIENTES VARIÁVEIS

Tese submetida ao Programa de  
Pós-graduação em Engenharia  
Mecânica – PPGEM – da  
Universidade Federal da Paraíba  
para obtenção do título de Doutor.

Orientador: Prof. Dr. ÂNGELO VIEIRA MENDONÇA

**João Pessoa – Paraíba**

**Agosto, 2018**





*Universidade Federal da Paraíba*  
*Centro de Tecnologia*  
**Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica**  
*- Mestrado - Doutorado -*

**UMA FORMULAÇÃO DO METODO DOS ELEMENTOS  
DE CONTORNO DIRETO EM PROBLEMAS DE BARRAS  
REGIDOS POR EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE  
COEFICIENTES VARIÁVEIS**  
*por*

*José Jarbson Salustiano dos Passos*

*Tese de Doutorado apresentada à Universidade Federal da Paraíba  
para obtenção do grau de Doutor*

**Catálogo na publicação**  
**Seção de Catalogação e Classificação**

P289f PASSOS, JOSÉ JARBSON SALUSTIANO DOS.

UMA FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTOURNO  
DIRETO EM PROBLEMAS DE BARRAS REGIDOS POR EQUAÇÕES  
DIFERENCIAIS DE COEFICIENTES VARIÁVEIS / JOSÉ JARBSON  
SALUSTIANO DOS PASSOS. - João Pessoa, 2018.  
277 f. : il.

Orientação: ÂNGELO VIEIRA MENDONÇA.  
Tese (Doutorado) - UFPB/CT.

1. MEC. 2. Vigas Não-Prismáticas. 3. Arcos Abatidos. 4.  
Soluções Fundamentais. 5. Equações Integrais. I.  
MENDONÇA, ÂNGELO VIEIRA. II. Título.

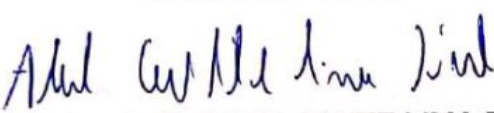
UFPB/BC

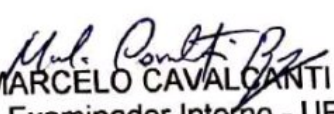
UMA FORMULAÇÃO DO METODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO  
DIRETO EM PROBLEMAS DE BARRAS REGIDOS POR EQUAÇÕES  
DIFERENCIAIS DE COEFICIENTES VARIÁVEIS  
*por*

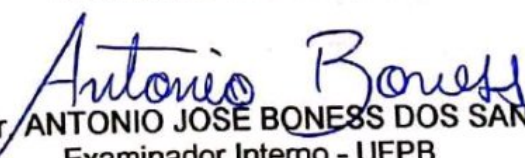
**JOSÉ JARBSON SALUSTIANO DOS PASSOS**

*Tese aprovada em 28 de agosto de 2018*

  
Prof. Dr. ÂNGELO VIEIRA MENDONÇA  
Orientador - UFPB

  
Prof. Dr. ABEL CAVALCANTE LIMA FILHO  
Examinador Interno - UFPB

  
Prof. Dr. MARCELO CAVALCANTI RODRIGUES  
Examinador Interno - UFPB

  
Prof. Dr. ANTONIO JOSÉ BONESS DOS SANTOS  
Examinador Interno - UFPB

  
Profa. Dra. SELMA SHIMURA HISSAE DA NÓBREGA  
Examinador Externo - UFRN

## AGRADECIMENTOS

Desafio tão grande quanto escrever esta Tese, foi descrever em tão pouco espaço os devidos agradecimentos às pessoas que fizeram parte desta minha trajetória.

Primeiramente agradeço à Deus por dar-me a condição de perseguir os meus sonhos com convicção e coragem durante toda esta longa caminhada.

Agradeço à minha família. Meus amados pais, Edilson José dos Passos e Maria José Salustiano dos Passos que sempre primaram pela minha educação, que não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa da minha vida. Agradeço, também, à minha maravilhosa, apaixonante e encantadora noiva, Elize de Castro Corrêa de Oliveira(meu docinho de coco com cravinho), que me conforta com sua candura, companherismo e amor.

Aos meus irmãos Edilson Júnior Salustiano dos Passos, Rafael Salustiano dos Passos e Rafaela Salustiano Passos de Souza, as lembranças das nossas brincadeiras quando crianças sempre foram uma energia vital nesta caminhada, vocês são verdadeiros presentes de Deus.

À minha sobrinha mais velha, Maria Rebeca Salustiano Passos de Souza, seu sorriso de todas as manhãs renovaram as minhas forças a cada dia. Aos meus sobrinhos mais novos, Raquel, Ana Luiza e Pedrinho, verdadeiras pedras preciosas a enriquecer minha vida.

Agradeço a todos os professores que fizeram parte da minha formação pelas contribuições formais e informais, incentivos e exemplos. Agradeço em especial, ao professor Ângelo Viera Mendonça, que me mais uma vez me confiou a tarefa de lidar com um tema de Tese de fato interessante e desafiador. Agradeço também por sua dedicação e disposição durante a construção deste trabalho. Sua generosidade, ética e intensidade me servirão de guias para meus passos futuros.

Agradeço também aos meus dois pais em Cristo Jesus, Professor José Márcilio Filgueiras Cruz e Professor Emerson Freitas Jaguaribe a quem só tenho a agradecer por todo apoio e exemplo.

## RESUMO

Neste trabalho, uma formulação direta do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para alguns problemas de engenharia governados por equações diferenciais lineares com coeficientes variáveis é estabelecida. Mais especificamente, os problemas de interesse estão associados a análise de dezesseis problemas envolvendo barras não-prismáticas. Os dois primeiros são referentes aos problemas independentes de tração/compressão direta e flexão nos casos de barras retas e variação simétrica da seção transversal ao longo do comprimento. Os três problemas remanescentes são aqueles em que há acoplamento entre os efeitos de flexão e tração/compressão representados por vigas não-prismáticas e não-simétricas, arcos abatidos não-prismáticos simétricos e arcos abatidos não-prismáticos e não-simétricos.

As soluções propostas do MEC aqui discutidas incorporam: a) teorias de Euler-Bernoulli e Timoshenko para os efeitos de flexão nas barras retas e nos arcos abatidos; b) deduções das equações integrais, usando o Método dos Resíduos Ponderados e/ou Teorema da Reciprocidade de Betti, são descritas em detalhe; c) identidades matemáticas apropriadas são propostas e utilizadas para dedução de soluções fundamentais de vigas e arcos abatidos não prismáticos com variação genérica da seção transversal ao longo do eixo da barra; d) integrais de domínio associadas a cargas externas distribuídas no domínio da barra são transformadas em valores definidos no contorno; e) incorporação no sistema algébrico do MEC a presença de descontinuidade de domínio tais como (apoios no domínio, mudança de lei de variação da seção transversal, duas mais barras não colineares concorrentes em um nó, mudança brusca de material). Resultados do MEC são apresentados e comparados com soluções analíticas e numéricas de acordo com suas disponibilidades para diferentes casos de carregamentos, de condições de contorno, de leis de variação das seções transversais e descontinuidades de domínio.

Palavras-Chave: MEC, Vigas Não-prismáticas, Arcos Abatidos, Soluções Fundamentais, Equações Integrais

## ABSTRACT

In this work, a direct Boundary Element Method (BEM) formulation for some engineering problems governed by linear differential equation with variable coefficients is established. More specifically, the problems of interest are associated with analysis of five problems of tapered structures. The first two problems are referred to as independent tension/compressive problems of straight beams having symmetrical tapering. The remaining problems are associated with axial-bending coupling found in nonsymmetrical tapered beams, symmetric tapered shallow arches, and unsymmetrical tapered shallow arches.

The BEM solutions here discussed incorporate: a) Euler-Bernoulli and Timoshenko theories for bending effects in beam and shallow arches; b) derivation of the integral equations using Residual Weighted Method and/or Betti's Reciprocal Theorem; c) appropriate mathematical identities are proposed and used to derive the fundamental solutions for tapered beams and shallow arches having generic taper variation; d) domain integrals associated with external distributed loading are transformed into boundary values; e) incorporation into the BEM algebraic equations the domain discontinuities such as ( intermediate supports, change of the taper law of cross-section, two or more inclined beams concurrent at a node, change of material). BEM results are presented and compared with analytical and numerical solutions according to their availabilities for different cases of loading, boundary conditions, tapering laws, and domain discontinuities.

Key words: BEM, Tapered Beams, Shallow Arches, Fundamental Solutions, Integral Equations



## SUMÁRIO

### CAPÍTULO I

|                                    |   |
|------------------------------------|---|
| 1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....    | 1 |
| 1.2 MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA..... | 2 |
| 1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....     | 3 |
| 1.4 OBJETIVOS DO TRABALHO.....     | 7 |
| 1.5 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....   | 7 |

### CAPÍTULO II

#### BARRAS RETAS NÃO-PRISMÁTICAS COM VARIAÇÃO SIMÉTRICA : EFEITO

|                                                                 |    |
|-----------------------------------------------------------------|----|
| AXIAL.....                                                      | 9  |
| 2.1 INTRODUÇÃO.....                                             | 9  |
| 2.2 RELAÇÕES MECÂNICAS E CINEMÁTICAS: CORPO ELÁSTICO EM 3D..... | 10 |
| 2.3 PROBLEMA REAL: EFEITO AXIAL.....                            | 12 |
| 2.3.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS.....                                 | 12 |
| 2.3.2 FUNCIONAL DE ENERGIA.....                                 | 13 |
| 2.3.3 ENERGIA POTENCIAL DA BARRA.....                           | 13 |
| 2.3.4 TRABALHO DA FORÇA EXTERNA.....                            | 14 |
| 2.3.5 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO.....                               | 14 |
| 2.4 PROBLEMA FUNDAMENTAL.....                                   | 16 |
| 2.5 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL.....                                 | 17 |
| 2.6 REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA.....                                | 19 |
| 2.6.1 SISTEMA ALGÉBRICO NO CONTORNO.....                        | 19 |
| 2.6.2 TRANSFORMAÇÕES NO SISTEMA PARA SUA SOLUÇÃO.....           | 27 |
| 2.6.3 DETERMINAÇÃO DOS CAMPOS NO DOMÍNIO.....                   | 28 |

### CAPÍTULO III

#### FLEXÃO DE VIGAS NÃO-PRISMÁTICAS COM VARIAÇÃO SIMÉTRICA.....

|                                                       |    |
|-------------------------------------------------------|----|
| 3.1 INTRODUÇÃO.....                                   | 30 |
| 3.2 PROBLEMA REAL: EULER-BERNOULLI.....               | 30 |
| 3.2.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS.....                       | 31 |
| 3.2.2 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO.....                     | 32 |
| 3.3 PROBLEMA FUNDAMENTAL: EULER-BERNOULLI.....        | 35 |
| 3.4 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL.....                       | 38 |
| 3.5 REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA.....                      | 40 |
| 3.5.1 TRANSFORMAÇÕES NO SISTEMA PARA SUA SOLUÇÃO..... | 48 |
| 3.5.2 DETERMINAÇÃO DOS CAMPOS NO DOMÍNIO.....         | 49 |
| 3.6 PROBLEMA REAL: TIMOSHENKO.....                    | 50 |
| 3.7 PROBLEMA FUNDAMENTAL: TIMOSHENKO.....             | 53 |
| 3.8 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL.....                       | 55 |
| 3.8.1 REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA.....                    | 58 |

### CAPÍTULO IV

|                                                              |    |
|--------------------------------------------------------------|----|
| BARRAS RETAS NÃO-PRISMÁTICAS COM VARIAÇÃO NÃO SIMÉTRICA..... | 66 |
|--------------------------------------------------------------|----|

|                                                                |     |
|----------------------------------------------------------------|-----|
| 4.1 INTRODUÇÃO.....                                            | 66  |
| 4.2 CONSIDERAÇÕES GERAIS.....                                  | 67  |
| 4.2.1 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO.....                              | 67  |
| 4.3 PROBLEMA FUNDAMENTAL: EULER-BERMOULLI.....                 | 72  |
| 4.4 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL.....                                | 79  |
| 4.5 REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA.....                               | 82  |
| 4.6 PROBLEMA REAL: TIMOSHENKO.....                             | 97  |
| 4.6.1 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO.....                              | 97  |
| 4.7 PROBLEMA FUNDAMENTAL: TIMOSHENKO.....                      | 100 |
| 4.8 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL.....                                | 106 |
| 4.9 REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA.....                               | 109 |
| <b>CAPÍTULO V</b>                                              |     |
| ARCOS ABATIDOS NÃO-PRISMÁTICOS COM VARIAÇÃO SIMÉTRICA.....     | 119 |
| 5.1 INTRODUÇÃO.....                                            | 119 |
| 5.2 CONSIDERAÇÕES GERAIS.....                                  | 120 |
| 5.2.1 PROBLEMA REAL DO ARCO: EULER-BERNOULLI.....              | 121 |
| 5.3 PROBLEMA FUNDAMENTAL DO ARCO: EULER-BERNOULLI.....         | 124 |
| 5.4 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL.....                                | 129 |
| 5.5 REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA.....                               | 131 |
| 5.6 PROBLEMA REAL DO ARCO: TIMOSHENKO.....                     | 139 |
| 5.7 PROBLEMA FUNDAMENTAL DO ARCO: TIMOSHENKO.....              | 142 |
| 5.8 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL.....                                | 149 |
| 5.9 REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA.....                               | 151 |
| <b>CAPÍTULO VI</b>                                             |     |
| ARCOS ABATIDOS NÃO-PRISMÁTICOS COM VARIAÇÃO NÃO SIMÉTRICA..... | 157 |
| 6.1 INTRODUÇÃO.....                                            | 157 |
| 6.2 CONSIDERAÇÕES GERAIS.....                                  | 158 |
| 6.2.1 PROBLEMA REAL DO ARCO: EULER-BERNOULLI.....              | 158 |
| 6.3 PROBLEMA FUNDAMENTAL DO ARCO: EULER-BERNOULLI.....         | 160 |
| 6.4 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL.....                                | 168 |
| 6.5 REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA.....                               | 170 |
| 6.6 PROBLEMA REAL DO ARCO: TIMOSHENKO.....                     | 173 |
| 6.7 PROBLEMA FUNDAMENTAL DO ARCO: TIMOSHENKO.....              | 175 |
| 6.8 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL.....                                | 184 |
| 6.9 REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA.....                               | 185 |
| <b>CAPÍTULO VII</b>                                            |     |
| DESCONTINUIDADES DE DOMÍNIO.....                               | 190 |
| 7.1 INTRODUÇÃO.....                                            | 190 |
| 7.2 SISTEMA LOCAL UNIFICADO DA BARRA.....                      | 191 |
| 7.3 SISTEMA LOCAL UNIFICADO EXCÊNTRICO DA BARRA.....           | 196 |



|                                                                                           |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 7.4 SISTEMA GLOBAL DA BARRA.....                                                          | 197 |
| 7.5 SISTEMA ALGÉBRICO DA ESTRUTURA.....                                                   | 199 |
| <b>CAPÍTULO VIII</b>                                                                      |     |
| EXEMPLOS NUMÉRICOS.....                                                                   | 202 |
| 8.1 COLUNAS NÃO-PRISMÁRICAS SOB CARGA DE COMPRESSÃO.....                                  | 202 |
| 8.2 COLUNAS SUBMETIDAS A CARREGAMENTOS AXIAIS DISTRIBUIDO.....                            | 203 |
| 8.3 FLEXÃO DE TRONCO DE CONE SOB CARGA CONCENTRADA.....                                   | 205 |
| 8.4 VIGAS RETANGULARES EM BALANÇO SOB CARGA CONCENTRADA.....                              | 207 |
| 8.5 FLEXÃO DE TRONCO DE CONE SOB CARREGAMENTO UNIFORME.....                               | 208 |
| 8.6 FLEXÃO DE TRONCO DE CONE SOB CARGA TRAPEZOIDAL.....                                   | 210 |
| 8.7 ARCO ESBELTO SOB CARREGAMENTO DISTRIBUIDO UNIFORME.....                               | 211 |
| 8.8 ARCO COMPACTO SOB CARREGAMENTO DISTRIBUIDO UNIFORME.....                              | 213 |
| 8.9 PÓRTICO PLANO BI-ENGASTADO COM VARIAÇÃO SIMÉTRICA.....                                | 215 |
| 8.10 VIGA RETANGULAR EM BALANÇO SOB CARGA CONCENTRADA.....                                | 218 |
| 8.11 PÓRTICO PLANO ENGASTADO.....                                                         | 219 |
| 8.12 VIGA COM VARIAÇÃO DA ALTURA NÃO-SIMÉTRICA EM BALANÇO SOB<br>CARGA CONCENTRADA.....   | 220 |
| 8.13 FLEXÃO EM VIGA RETANGULAR NÃO-SIMÉTRICA COM VARIAÇÃO DA<br>ALTURA NÃO-SIMÉTRICA..... | 221 |
| 8.14 VIGA BI-ENGASTADA COM VARIAÇÃO DA ALTURA PARABÓLICA, SOB<br>CARGA DISTRIBUIDA.....   | 222 |
| 8.15 VIGA CONTÍNUA COM VARIAÇÃO DA ALTURA PARABÓLICA, SOB CARGA<br>NODAL.....             | 224 |
| 8.16 VIGA BI-APOIADA COM VARIAÇÃO DE ALTURA PARABÓLICA.....                               | 227 |
| CONCLUSÕES.....                                                                           | 228 |
| SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....                                                     | 229 |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....                                                           | 230 |
| APÊNDICE 1.....                                                                           | 235 |
| APÊNDICE 2.....                                                                           | 236 |
| APÊNDICE 3.....                                                                           | 239 |
| APÊNDICE 4.....                                                                           | 242 |
| APÊNDICE 5.....                                                                           | 254 |
| APÊNDICE 6.....                                                                           | 257 |

## LISTA DE FIGURAS

|                                                                                        |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| FIGURA 1.1 BARRA NÃO-PRISMÁTICA.....                                                   | 1   |
| FIGURA 1.2 ESTRUTURAS NATURAIS.....                                                    | 1   |
| FIGURA 1.3 ESTRUTURAS CIVIS.....                                                       | 2   |
| FIGURA 1.4 ESTRUTURAS MECÂNICAS.....                                                   | 2   |
| FIGURA 2.1 BARRA NÃO PRISMÁTICA SOB CARGA AXIAL.....                                   | 9   |
| FIGURA 2.1a ELEMENTO INFINITESIMAL DE UM CORPO EM EQUILÍBRIO .....                     | 10  |
| FIGURA 2.2 GRAUS DE LIBERDADE NO CONTORNO: (a) ESFORÇOS; (b) DESLOCAMENTOS.....        | 20  |
| FIGURA 2.3 CARREGAMENTOS AXIAIS NA BARRA (a)TRAPEZOIL; (b) CONCENTRADO.....            | 21  |
| FIGURA 3.1 VIGA NÃO PRISMÁTICA SIMÉTRICA.....                                          | 30  |
| FIGURA 3.1a BARRA NÃO PRISMÁTICA, COM CARREGAMENTO NO PLANO XZ.....                    | 32  |
| FIGURA 3.2 GRAUS DE LIBERDADE NO CONTORNO: (a) ESFORÇOS; (b) DESLOCAMENTOS.....        | 42  |
| FIGURA 3.3 CARREGAMENTOS TRANSVERSAIS NA VIGA (a) TRAPEZOIDAL; (b) CONCENTRADO.....    | 48  |
| FIGURA 3.3a-b GRAUS DE LIBERDADE NO CONTORNO.....                                      | 58  |
| FIGURA 3.4 CARREGAMENTO TRANSVERSAL CONCENTRADO.....                                   | 63  |
| FIGURA 4.1 FLEXÃO DE VIGAS NÃO-PRISMÁTICAS ASSIMÉTRICAS.....                           | 66  |
| FIGURA 4.1a BARRA NÃO PRISMÁTICA SUBMETIDA À FLEXÃO, COM CARREGAMENTO NO PLANO XZ..... | 68  |
| FIGURA 4.2 EQUILÍBRIO FUNDAMENTAL : $PX^*$ ATIVADA.....                                | 72  |
| FIGURA 4.3 EQUILÍBRIO FUNDAMENTAL : $PZ^*$ ATIVADA.....                                | 73  |
| FIGURA 4.4 (a) ESFORÇOS REAIS; (b) DESLOCAMENTOS REAIS.....                            | 85  |
| FIGURA 5.1 (a) ARCO PROFUNDO NÃO PRISMÁTICO; (b) ARCO ABATIDO NÃO PRISMÁTICO.....      | 119 |
| FIGURA 5.1c ARCO.....                                                                  | 120 |
| FIGURA 5.2 GRAUS DE LIBERDADE NO CONTORNO.....                                         | 132 |
| FIGURA 5.3 a-b GRAUS DE LIBERDADE NO CONTORNO.....                                     | 152 |
| FIGURA 6.1 ARCO ABATIDO NÃO PRISMÁTICO COM VARIAÇÃO DA ALTURA NÃO SIMÉTRICA.....       | 157 |
| FIGURA 6.2 GRAUS DE LIBERDADE NO CONTORNO.....                                         | 171 |
| FIGURA 6.3 a-b GRAUS DE LIBERDADE NO CONTORNO.....                                     | 186 |

|                                                                                                                                                                                                           |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| FIGURA 7.1 DESCONTINUIDADES DE DOMÍNIO NO ARCO: (a) APOIO INTERMEDIÁRIO (b) MUDANÇA NA LEI DE VARIAÇÃO DA SEÇÃO TRANSVERSAL (c) MATERIAIS DIFERENTES (d) DUAS OU MAIS BARRAS NÃO COLINEARES EM UM NÓ..... | 190 |
| FIGURA 7.2 SISTEMA LOCAL NO ARCO DE EULER-BERNOULLI: (a) DESLOCAMENTOS (b) ESFORÇOS.....                                                                                                                  | 192 |
| FIGURA 7.3 SISTEMA LOCAL NO ARCO DE TIMOSHENKO: (a) DESLOCAMENTOS (b) ESFORÇOS.....                                                                                                                       | 192 |
| FIGURA 7.4 SISTEMA LOCAL UNIFICADO: (a) DESLOCAMENTOS (b) ESFORÇOS.....                                                                                                                                   | 192 |
| FIGURA 7.5 APOIOS NÃO ALINHADOS (COM EXCENTRICIDADE $d$ ) COM O EIXO DA BARRA.....                                                                                                                        | 196 |
| FIGURA 7.6 GRAUS DE LIBERDADE NO EIXO E NA POSIÇÃO EXCÊNTRICA.....                                                                                                                                        | 196 |
| FIGURA 7.7 COORDENADAS GLOBAIS( $x,y$ ) E COORDENADAS LOCAIS( $n,s$ ).....                                                                                                                                | 198 |
| FIGURA 7.8 BARRA DE PÓRTICO CONVERGINDO.....                                                                                                                                                              | 199 |
| FIGURA 7.9 CONDIÇÕES DE COMPATIBILIDADE E DE EQUILÍBRIO NO NÓ.....                                                                                                                                        | 201 |
| FIGURA 8.1 BARRA RETANGULAR NÃO PRISMÁTICA SOB CARGA AXIAL $P$ .....                                                                                                                                      | 202 |
| FIGURA 8.2 BARRA TRONCO DE CONE SOB CARGA AXIAL $P$ .....                                                                                                                                                 | 202 |
| FIGURA 8.3 BARRA RETANGULAR NÃO-PRISMÁTICA, ENGASTADA LIVRE, SUBMETIDA A UM CARREGAMENTO: (a) UNIFORME DISTRIBUÍDO (b) TRIANGULAR (c) TRAPEZOIDAL .....                                                   | 204 |
| FIGURA 8.4 BARRA CIRCULAR NÃO-PRISMÁTICA, ENGASTADA LIVRE, SUBMETIDA A UM CARREGAMENTO CONCENTRADO.....                                                                                                   | 205 |
| FIGURA 8.5 DESLOCAMENTOS TRANSVERSAIS E INCLINAÇÃO DA ELÁSTICA AO LONGO DO DOMÍNIO.....                                                                                                                   | 206 |
| FIGURA 8.6 VIGA RETANGULAR NÃO PRISMÁTICA, ENGASTADA SUBMETIDA A CARGA CONCENTRADA.....                                                                                                                   | 207 |
| FIGURA 8.7 VIGA CIRCULAR NÃO PRISMÁTICA, SIMPLEMENTE APOIADA, SUBMETIDA A UMA CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA.....                                                                                        | 208 |
| FIGURA 8.8 VIGA CIRCULAR NÃO PRISMÁTICA, SIMPLEMENTE APOIADA, SOB CARGA TRAPEZOIDAL.....                                                                                                                  | 210 |
| FIGURA 8.9 DESLOCAMENTOS TRANSVERSAIS E INCLINAÇÃO DA ELÁSTICA NO DOMÍNIO DA BARRA.....                                                                                                                   | 211 |
| FIGURA 8.10 DESLOCAMENTOS TRANSVERSAIS E INCLINAÇÃO DA ELÁSTICA AO LONGO DO DOMÍNIO.....                                                                                                                  | 211 |
| FIGURA 8.11 ARCO SOB CARREGAMENTOS CONCENTRADOS.....                                                                                                                                                      | 213 |
| FIGURA 8.12a PÓRTICO PLANO BI-ENGASTADO.....                                                                                                                                                              | 216 |

|                                                                                                                                                            |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| FIGURA 8.12b-c (b)DISCRETIZAÇÃO DO ELEMENTO NÃO PRISMÁTICO EM 4 ELEMENTOS FINITOS (c) DISCRETIZAÇÃO DO ELEMENTO NÃO PRISMÁTICO EM 8 ELEMENTOS FINITOS..... | 216 |
| FIGURA 8.13 VIGA RETANGULAR NÃO PRISMÁTICA, ENGASTADA SUBMETIDA A CARGA CONCENTRADA.....                                                                   | 218 |
| FIGURA 8.14 VIGA CIRCULAR NÃO PRISMÁTICA, ENGASTADA SUBMETIDA A MOMENTO NODAL.....                                                                         | 219 |
| FIGURA 8.15 VIGA RETANGULAR NÃO PRISMÁTICA, ENGASTADA SUBMETIDA A CARGA CONCENTRADA.....                                                                   | 220 |
| FIGURA 8.16 VIGA RETANGULAR NÃO PRISMÁTICA, SUBMETIDA A CARGA CONCENTRADA.....                                                                             | 222 |
| FIGURA 8.17 VIGA BI-ENGASTADA COM VARIAÇÃO DA ALTURA PARABÓLICA.....                                                                                       | 223 |
| FIGURA 8.18 VIGA CONTÍNUA COM VARIAÇÃO DA ALTURA PARABÓLICA.....                                                                                           | 224 |
| FIGURA 8.19 VIGA CONTÍNUA COM VARIAÇÃO DA ALTURA PARABÓLICA(MODELO ADOTADO NO MEF MEC) EXCENTRICIDADE DE EIXO É NULA.....                                  | 225 |
| FIGURA 8.20- VIGA BI-ENGASTADA COM VARIAÇÃO NA ALTURA PARABÓLICA.....                                                                                      | 227 |

## LISTA DE TABELAS

|                                                                                                    |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| TABELA 5.1 CLASSIFICAÇÃO DE ARCOS.....                                                             | 119 |
| TABELA 8.1 DESLOCAMENTO $U_0(\text{mm})$ NA EXTREMIDADE LIVRE DA BARRA( $P=200\text{N}$ )<br>..... | 203 |
| TABELA 8.2 DESLOCAMENTO $U_0(\text{mm})$ NA EXTREMIDADE LIVRE DA BARRA.....                        | 204 |
| TABELA 8.3 DESLOCAMENTO TRANSVERSAL NO BALANÇO E ESFORÇOS NO<br>ENGASTE.....                       | 205 |
| TABELA 8.4 DESLOCAMENTO TRANSVERSAL $W(10^{-4}\text{m})$ EM FUNÇÃO DA RAZÃO DE<br>ASPECTO.....     | 207 |
| TABELA 8.5 DESLOCAMENTO TRANSVERSAL $W(\text{m})$ AO LONGO DO DOMÍNIO DA<br>VIGA.....              | 208 |
| TABELA 8.6 INCLINAÇÕES DA ELÁSTICA $dW/dx(\text{rad})$ AO LONGO DO DOMÍNIO DA<br>VIGA.....         | 209 |
| TABELA 8.7 DESLOCAMENTOS (AXIAIS E RADIAIS) E ROTAÇÃO PARA O ARCO SOB<br>CARGA DISTRIBUIDA.....    | 213 |
| TABELA 8.8 DESLOCAMENTOS AXIAIS E RADIAIS PARA O ARCO SOB CARGA RADIAL<br>CONCENTRADA $F_z$ .....  | 214 |
| TABELA 8.9 DESLOCAMENTOS AXIAIS E RADIAIS PARA O ARCO SOB MOMENTO $M$ NO<br>BALANÇO.....           | 215 |
| TABELA 8.10 DESLOCAMENTOS E REAÇÕES SEGUNDO TEORIA DE EULER-<br>BERNOULLI.....                     | 217 |
| TABELA 8.11 DESLOCAMENTOS E REAÇÕES SEGUNDO TEORIA DE<br>TIMOSHENKO.....                           | 217 |
| TABELA 8.12 DESLOCAMENTO TRANSVERSAL NO BALANÇO<br>$W(\text{m})$ .....                             | 218 |
| TABELA 8.13 DESLOCAMENTOS E ESFORÇOS SEGUNDO A TEORIA DE EULER-<br>BERNOULLI.....                  | 219 |
| TABELA 8.14 DESLOCAMENTOS E ESFORÇOS SEGUNDO A TEORIA DE<br>TIMOSHENKO.....                        | 220 |
| TABELA 8.15 DESLOCAMENTO TRANSVERSAL NO BALANÇO<br>$W(\text{m})$ .....                             | 221 |
| TABELA 8.16 DESLOCAMENTOS NORMALIZADOS PONTO<br>$A(W(\text{m}))$ .....                             | 222 |
| TABELA 8.17 REAÇÕES EM VIGA BI-ENGASTADA SOB CARGA<br>DISTRIBUIDA.....                             | 223 |

|                                                                                   |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| TABELA 8.18 DESLOCAMENTOS E ESFORÇOS SEGUNDO A TEORIA DE EULER-<br>BERNOULLI..... | 225 |
| TABELA 8.19 DESLOCAMENTOS E ESFORÇOS SEGUNDO A TEORIA DE<br>TIMOSHENKO.....       | 226 |
| TABELA 8.20 DESLOCAMENTOS E ESFORÇOS SEGUNDO A TEORIA DE EULER-<br>BERNOULLI..... | 227 |

## **LISTA DE ABREVIATURAS**

|     |                                    |
|-----|------------------------------------|
| MEC | - Método dos Elementos de Contorno |
| MEF | - Método dos Elementos Finitos     |
| sgn | - Função sinal                     |
| TRP | - Técnica dos Resíduos Ponderados  |
| EDP | - Equações Diferenciais Parciais   |
| MDF | - Método das Diferenças Finitas    |
| PTV | - Princípio dos Trabalhos Virtuais |
| MRP | - Método dos Resíduos Ponderados   |



## LISTA DE SÍMBOLOS

|                                |                                                                         |
|--------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| $b$                            | - Espessura                                                             |
| $f_i$                          | - Elementos do vetor carregamento                                       |
| $h$                            | - Altura da seção                                                       |
| $m_y$                          | - Momento distribuído externo em y                                      |
| $p_x, p_z$                     | - Forças nas coordenadas indicadas                                      |
| $p_x$                          | - Carregamento harmônico axial distribuído para coordenada x            |
| $p_z$                          | - Carregamento harmônico axial distribuído para coordenada z            |
| $r$                            | - Módulo da distância entre o ponto fonte e o ponto campo               |
| $u_i$                          | - Componente de deslocamento na direção $i$                             |
| $u$                            | - Deslocamento harmônico na direção x                                   |
| $u, w, \phi$                   | - Deslocamentos segundo as direções x, z e rotação da seção transversal |
| $x$                            | - Ponto campo, incógnita                                                |
| $\hat{x}$                      | - Coordenada do ponto fonte                                             |
| $x, y, z$                      | - Coordenadas do sistema generalizado                                   |
| $z$                            | - Profundidade da linha de interesse em relação a linha neutra          |
| $w_F^*, w_P^*, w_m^*$          | - Solução fundamental em deslocamentos                                  |
| $y_1, y_2, y_3$                | - Raízes do polinômio característico                                    |
| $L$                            | - Comprimento                                                           |
| $M_y$                          | - Momento fletor                                                        |
| $M_{yF}^*, M_{ym}^*, M_{yP}^*$ | - Momentos fletores fundamentais                                        |
| $N_{yP,\hat{x}}^*$             | - Derivada em $\hat{x}$ (ponto fonte) da força normal fundamental       |
| $M_{yP,\hat{x}}^*$             | - Derivada em $\hat{x}$ (ponto fonte) do momento fletor fundamental     |
| $V_z$                          | - Força cortante na direção z                                           |
| $V_{zF}^*, V_{zP}^*, V_{zm}^*$ | - Forças cortantes fundamentais                                         |
| $V_{zP,\hat{x}}^*$             | - Derivada em $\hat{x}$ (ponto fonte) do esforço cortante fundamental   |
| $\delta(x, \hat{x})$           | - Delta de Dirac                                                        |

|                                               |                                                                       |
|-----------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| $\varepsilon_i$                               | - Componentes de deformação do vetor deformação                       |
| $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ | - Deformação no eixo x, deformação no eixo y, deformação no eixo z    |
| $E_{ij}$                                      | - Módulo de elasticidade transversal                                  |
| $G_{ij}$                                      | - Módulo de cisalhamento                                              |
| $\nu_{ij}$                                    | - Coeficiente de Poisson                                              |
| $\sigma_i$                                    | - Componentes de tensão                                               |
| $\sigma_x$                                    | - Tensão normal à direção x                                           |
| $\sigma_y$                                    | - Tensão normal na direção y                                          |
| $\sigma_z$                                    | - Tensão normal na direção z                                          |
| $\tau_{yz}$                                   | - Tensão de cisalhamento no plano yz                                  |
| $\tau_{xz}$                                   | - Tensão de cisalhamento no plano xz                                  |
| $\tau_{xy}$                                   | - Tensão de cisalhamento no plano xy                                  |
| $\xi$                                         | - Valor infinitesimal                                                 |
| $\gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}$       | - Distorção no plano yz, distorção no plano xz, distorção no plano xy |
| $\kappa$                                      | - Coeficiente de cisalhamento (fator de forma)                        |
| $\{f\}$                                       | - Vetor dos carregamentos                                             |
| $[G]$                                         | - Matriz dos coeficientes de influencia                               |
| $[I]$                                         | - Matriz identidade                                                   |

# CAPÍTULO I

## 1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

As equações diferenciais com coeficientes variáveis estão associadas a diversos problemas de engenharia. Os casos mais típicos são representados por estruturas compostas por barras não prismáticas. Essas são componentes estruturais que apresentam variações quantitativas nas propriedades geométricas das seções transversais ao longo do eixo longitudinal, vide Fig.1.1

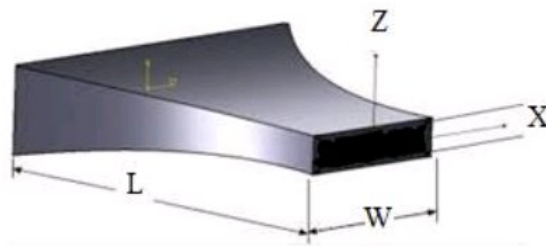


Figura 1.1-Barra não-prismática

O estudo das barras não prismáticas recebe significativa relevância pelo fato de terem ampla ocorrência no cotidiano, como por exemplo: estruturas naturais (Fig.1.2), estruturas civis (vide Fig.1.3), estruturas mecânicas (Fig.1.4).



Figura 1.2- Estruturas naturais.



Figura 1.3- Estruturas civis. MACEDO (2016)



Figura 1.4- Estruturas mecânicas.

## 1.2 MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA

As barras não prismáticas representam uma opção de projeto de muita utilidade nas engenharias já que são capazes de fornecer uma resistência adequada à estrutura, por poder variar a seção transversal de acordo com a resistência requerida exercendo, assim, um papel fundamental na otimização do desempenho estrutural.

Para a representação matemática do problema de barras não-prismáticas, simplificações são introduzidas no problema real, criando-se os modelos para representar os comportamentos dos campos de interesse, por exemplo: deslocamentos, tensões, esforços, etc. Em seguida, procede-se a representação matemática, com a obtenção das relações governantes do problema, escritas em termos de equações diferenciais parciais (EDP) ou como equações integrais (EI). A solução do problema



requer ferramentas para resolução das equações diferenciais e/ou das equações integrais dependendo da técnica matemática a ser usada, onde as mais comuns são método das diferenças finitas, método dos elementos finitos e método dos elementos de contorno.

Em barras não-prismáticas, do ponto de vista de análise de tensão, diversos trabalhos já foram publicados mostrando um grande avanço para prover soluções numéricas baseadas na filosofia do método dos elementos finitos para este tipo de problema. Devido a sua característica de redução da dimensionalidade em um (por exemplo, um problema 3D é reduzido a uma análise 2D), soluções em elementos de contorno foram estabelecidas como uma alternativa às soluções de elementos finitos em muitos problemas de engenharia. No entanto, o número de trabalhos publicados envolvendo elementos de contorno em problemas de vigas não-prismáticas é inexpressivo, no caso de arcos abatidos não prismáticos, inexistentes. Assim, a viabilização do método dos elementos de contorno para o estudo desse problema ainda requer aprofundamento.

### **1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

Algumas soluções analíticas para flexão de barras não prismáticas podem ser encontradas em KUMAR e SUJITH (1987), LI (2001), QIUSHENG et al.(1996), GAINES e VOLTERRA (1966), ABRATE (1995) e MCCUTCHEON (1983). No entanto, em casos mais gerais, soluções analíticas não estão disponíveis, daí como alternativa, faz-se a discretização do meio contínuo e a sistematização do problema discreto, obtendo-se soluções aproximadas via análises numéricas a partir da utilização do método das diferenças finitas (MDF), método dos elementos finitos (MEF), método dos elementos de contorno (MEC) e outros.

O método dos elementos finitos (MEF) é introduzido então na chamada era do advento dos computadores. Com a facilidade existente e a simplicidade e elegância da sua formulação, o método teve um crescimento extremamente rápido, atingindo praticamente todos os campos da engenharia. O MEF assim como o método das diferenças finitas (MDF), seu antecessor, aproxima a solução da equação diferencial que rege o problema físico utilizando valores do domínio de validade, isto é, valores das variáveis básicas do problema em pontos internos e do contorno do espaço em análise decorrendo, daí, a denominação “métodos de domínio” muitas vezes atribuída a essas ferramentas de cálculo (ALEXANDER, CHENG a, CHENG b; 2005). Para os

problemas de flexão e vibração de barras não-prismáticas, algumas soluções baseadas no MEF foram desenvolvidas BAZOUNE (1992) e TO (1981). Já em EISENBERGER (1985) são deduzidas matrizes de rigidez exatas incorporando o modelo de Euler-Bernoulli a partir da flexibilidade do elemento envolvendo barras não prismáticas desde variação linear até quadráticas. KARABABALIS e BESKOS (1983) apresentaram as matrizes de rigidez exatas para variações de altura linear e largura constantes. EISENBERGER (1991a) incorpora, na sua formulação de 1985, o modelo de Timoshenko. Já em EISENBERGER (1991b) é apresentada uma técnica numérica para solução exata de barras de secção transversais variáveis onde a matriz de rigidez e o vetor de carga são calculados exatamente para qualquer variação polinomial da secção transversal em relação ao comprimento da barra. Apesar da potencial aplicabilidade da técnica de EISENBERGER (1991b) para diversos problemas de barras não-prismáticas, os exemplos apresentados para sua validação foram muito simples, não mostrando casos de vigas contínuas, pórticos, estruturas com apoios excêntricos, etc. Existem diversos pacotes de elementos finitos voltados para análise de sólidos e estruturas, tais como Ansys, SAP2000 e outros. No manual de referência do ANSYS(1994), constam os elementos Beam 44 e Beam 54 que disponibilizam a análise de vigas não prismáticas com variação gradual (linear) da área transversal. Já no manual de referência do SAP 2000(2009) encontra-se a possibilidade de aplicação da variação de inércia ao longo do comprimento até um polinômio cúbico, isto implica no caso de uma barra com variação linear da altura com base constante. Em problemas de arcos não-prismáticos o número de trabalhos é bem inferior aos de vigas, até mesmo nos casos de arcos com secção transversal variando simetricamente. Por exemplo, tem-se o trabalho de SHAHBA et al. (2012), FRIEDMAN e KOSMATKA (1998), ZHU e MEGUID (2008) em que matrizes de rigidez para vigas curvas profundas não-prismáticas simétricas são apresentadas.

As técnicas de resolução das equações integrais de contorno surgem, posteriormente, como procedimentos numéricos alternativos promissores para a resolução dos diversos problemas físicos usuais da engenharia. Mais particularmente, o método dos elementos de contorno (MEC) ganhou espaço na comunidade científica e se estabelece como uma importante técnica de análise de problemas da mecânica do contínuo. No MEC, como nos demais métodos numéricos, a solução obtida será calculada em pontos discretos utilizando-se equações integrais governantes do problema usualmente definidas apenas sobre o contorno. Essa característica do método leva, geralmente, a uma redução das dimensões dos problemas examinados, significando

menor quantidade de dados de entrada, diminuição do tempo de processamento e menor área auxiliar para armazenamento das informações necessárias no processamento. Convém notar que o MEC possui duas grandes famílias de formulações: o MEC direto e o MEC indireto. No primeiro caso as soluções fundamentais são obtidas utilizando-se relações análogas às equações governantes do problema real aliado com a descrição completa das variáveis no contorno em esforços e deslocamentos. Na segunda família, as soluções fundamentais podem não ter nenhuma relação com o problema real aliada com distribuição de densidades fictícias no contorno, de tal forma que a equação integral resultante não traduz as relações de reciprocidade física que o método direto produz.

Para obter-se a equação integral de contorno procede-se à transformação da equação diferencial governante do fenômeno estudado em uma equação integral equivalente. Esta relaciona somente valores de contorno e possibilita a análise do problema. A aplicação do MEC está condicionada a uma solução fundamental. Esta representa a resposta em um ponto do domínio infinito do problema congênere devido à aplicação de força unitária em um ponto chamado de ponto-fonte e da observação de seus efeitos em outro ponto chamado de ponto-campo desse mesmo domínio. Um das características das soluções fundamentais é ter natureza singular quando o ponto-fonte é colocado sobre o campo (isto é, aplicação e leitura dos efeitos na vizinhança do ponto).

Desde as primeiras investigações através do MEC, o principal foco na mecânica dos sólidos tem sido dirigido para os problemas bi e tridimensionais BECKER(1992), DOMINGUEZ(1993), ALIABADI(2002), KATSIKADELIS(2002). Só a partir da década de 1980 soluções numéricas baseadas na filosofia do MEC foram apresentadas no estudo de barras (vigas e de pórticos) homogêneas de seções transversais uniformes. As primeiras aplicações do MEC à viga de Euler-Bernoulli nos problemas estáticos foi apresentada por BANERJEE e BUTTERFIELD (1981), nos dinâmicos por PROVIDAKIS e BESKOS(1986) e nos problemas de estabilidade à flambagem por MANOLIS et al.(1986) . Apenas, mais recentemente no início dos anos 2000 a formulação relativa à análise estática da viga de Timoshenko foi desenvolvida. ANTES(2003) obteve o sistema completo de equações integrais para a teoria de Timoshenko. Através de exemplos demonstrou-se a precisão da solução e, como esperado nos problemas estáticos, que as diferenças entre os valores das reações obtidas por essas teorias são, em geral, muito pequenas e dependem da geometria atual da estrutura. De acordo com o autor, o trabalho pode ser considerado como o primeiro

passo para a importante análise dinâmica de vigas de Timoshenko prismáticas. De fato, em ANTES et al.(2004), a formulação para análise harmônica das chamadas vigas de Timoshenko foi publicada e utilizada na análise de pórticos planos. Já CRUZ(2012), desenvolveu a análise estática e dinâmica de estruturas aporticadas planas e espaciais prismáticas pelo MEC levando-se em conta as hipóteses das teorias (clássica e de primeira ordem). Já PASSOS(2014) desenvolveu uma formulação do MEC (estabelecendo todas as etapas do método, desde as equações integrais, soluções fundamentais e equações algébricas) para o estudo da estabilidade estática e dinâmica de vigas de Timoshenko prismáticas submetida a cargas axiais apoiadas ou não em bases elásticas do tipo de Winkler ou Pasternak. Já MAIA (2016) analisou pelo MEC a flexão e a flambagem em barras prismáticas utilizando uma teoria de terceira ordem (modelo de Bickford-Reddy). NASCIMENTO JR (2017) desenvolveu uma formulação do MEC para o estudo da flexão e vibração de vigas e arcos abatidos prismáticos feitos de materiais compósitos laminados.

Conforme discutido anteriormente, algumas soluções numéricas do MEF podem ser encontradas para flexão de vigas não prismáticas. No entanto, este cenário é muito mais restrito quando se discute soluções do MEC. Em KHAN(1995), uma formulação do MEC direto para flexão de vigas não-prismáticas de Euler-Bernoulli é discutida onde são apresentadas as equações integrais e as respectivas soluções fundamentais para variações lineares e parabólicas das seções transversais em relação ao comprimento da barra. No entanto, na formulação do MEC dada em KHAN(1995), as equações de equilíbrio da barra não-prismática não-simétrica não levam em conta o acoplamento do regime de flexão com o regime de tração direta. Este efeito cruzado pode ser relevante principalmente em estruturas não-prismáticas não-simétricas com grande gradiente de variação da seção transversal. Além disso, convém notar que as soluções fundamentais dadas em KHAN(1995) estão restritas a seções retangulares com variação unidirecional (ao longo altura da seção transversal), o que impede uma solução pura do MEC (sem termos de domínio) em problemas usuais de barras contendo domínio de geometria de tronco de pirâmide, tronco de cone e outros casos.

Na presente tese, o problema da análise estática de barras não-prismáticas é resolvido pelo MEC direto para problemas não só para barras não-prismáticas de eixo reto, mas também para arcos não-prismáticos abatidos com variação não-simétrica da seção transversal ao longo do comprimento. Além disso, as soluções fundamentais são



deduzidas para acomodar seções transversais com formas genéricas com variação longitudinal arbitrária. A presente solução do MEC também incorpora as teorias de flexão de Euler-Bernoulli e Timoshenko nos problemas.

#### **1.4 OBJETIVOS DO TRABALHO**

O presente trabalho tem como objetivo o estudo de alguns problemas de barras com equações diferenciais governantes contendo coeficientes variáveis pelo método dos elementos de contorno (MEC direto).

De uma forma mais específica, os objetivos são:

- a) Estabelecimento das equações integrais, soluções fundamentais, sistema algébrico (desenvolvimento do MEC direto) para flexão de vigas e arcos abatidos não prismáticos com seções transversais simétricas utilizando os modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko.
- b) Estabelecimento das equações integrais, soluções fundamentais, sistema algébrico (desenvolvimento do MEC direto) para flexão de vigas e arcos abatidos não prismáticos com seções transversais não simétricas utilizando os modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko.

#### **1.5 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO**

No capítulo 2 são tratados assuntos referentes às relações mecânicas e cinemáticas para um corpo elástico em 3D, além do problema axial para vigas não prismáticas com variação da área ao longo do eixo longitudinal, simétrica. Ainda neste capítulo, são obtidas as equações de equilíbrio, problema fundamental, equação integral e equação algébrica. Já no capítulo 3 se inicia a análise da flexão para vigas não prismáticas com variação simétrica segundo as teorias de Euler-Bernoulli e Timoshenko pelo MEC direto, culminando na obtenção do problema fundamental, equação integral e equação algébrica.

No capítulo 4 são tratados os problemas de vigas não prismáticas com variação não-simétrica da área ao longo do eixo longitudinal, segundo a teoria de Euler-Bernoulli

e Timoshenko. Aqui também são obtidos o problema fundamental, a equação integral e a equação algébrica. Continuando, no capítulo 5 são abordados os arcos abatidos de Euler -Bernoulli e Timoshenko, não prismáticos com variação simétrica da área ao longo do eixo longitudinal. Já no capítulo 6 o problema de arco é estendido para os arcos abatidos de Euler -Bernoulli e Timoshenko, não prismáticos com variação não-simétrica da área ao longo do eixo longitudinal. No capítulo 7 são tratadas as ocorrências de descontinuidades em barras não-prismáticas cuja estratégia de solução é baseada na técnica de sub-região para o MEC. Por fim, no capítulo 8 são apresentados exemplos para a validação numérica das soluções propostas pelo MEC direto.

## CAPÍTULO II

### BARRAS RETAS NÃO-PRISMÁTICAS COM VARIAÇÃO SIMÉTRICA: EFEITO AXIAL

#### 2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão estudadas as barras não-prismáticas submetidas a ação axial, vide Fig. 2.1.



(a)



(b)

Figura 2.1 Barra não prismática sob carga axial

Inicialmente, são abordadas de forma sucinta, apenas as relações de elasticidade de interesse para o desenvolvimento deste trabalho. Em seguida será apresentado o princípio dos trabalhos virtuais (PTV) de barras visando as deduções das equações reais que regem o problema axial em vigas não prismáticas com variação simétrica ao longo do eixo longitudinal. Por fim, serão discutidos o problema fundamental, equações integrais e algébricas.

## 2.2 RELAÇÕES MECÂNICAS E CINEMÁTICAS: CORPO ELÁSTICO EM 3D

As componentes de tensão no espaço tridimensional seguindo um sistema de eixos cartesianos ortogonais coordenados  $(x, y, z)$ , que passa na origem de um elemento infinitesimal, podem ser representadas conforme indicado na Fig. 2.1a.

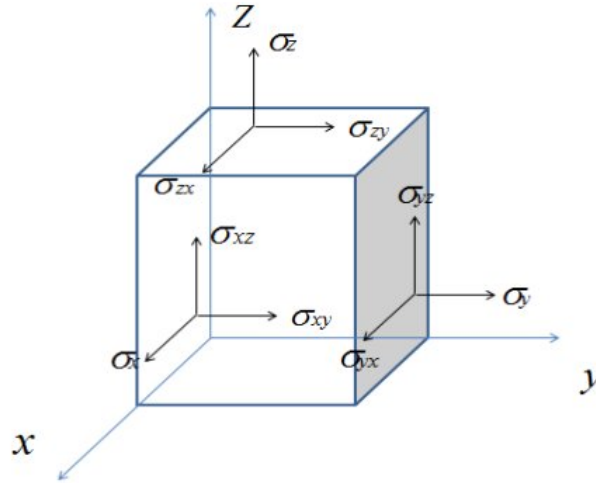


Figura 2.1a - Elemento infinitesimal de um corpo em equilíbrio

As componentes de tensão indicadas na Fig. 2.1a podem ser dadas em função do tensor das tensões dado por:

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

As componentes de deformação em um ponto do corpo estudado podem ser escritas a partir da diferenciação das componentes de deslocamento  $u$ ,  $v$  e  $w$  segundo

os eixos x, y e z, respectivamente. Se ambos os campos são suaves (pequenos), então as relações deformação-deslocamento podem ser escritas como:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.4)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.5)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.6)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.7)$$

Onde:

$\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\varepsilon_z$  representam as componentes deformações lineares e  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{xz}$ ,  $\gamma_{yz}$  são as deformações angulares(distorções).

Para o caso de um corpo formado por um material homogêneo, isotrópico e elástico-linear, as relações tensão-deformação podem ser dadas pela Lei de Hooke:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}; \quad (2.8)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (2.9)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}; \quad (2.10)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad (2.11)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E}; \quad (2.12)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \quad (2.13)$$

Onde:

$E$  é o módulo de elasticidade longitudinal,  $G$  é o módulo de elasticidade transversal e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson.

Cabe ressaltar que a relação entre os módulos de elasticidade é dado por:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.14)$$

Em problemas elásticos lineares 3D, a energia potencial de deformação do corpo, aqui denotado por  $\pi_{pe}$ , é dada por:

$$\pi_{pe} = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dV \quad (2.15)$$

## 2.3 PROBLEMA REAL: EFEITO AXIAL

Aqui serão estudadas as barras não prismáticas submetidas a ação axial.

### 2.3.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

Para a análise do problema de barra são assumidas as seguintes hipóteses:

a) O problema tridimensional pode ser reduzido ao espaço unidimensional, 1D, desde que o comprimento  $L$ , seja suficientemente maior que as outras duas, as dimensões  $b$  e  $h$  da seção transversal.

b) A barra pode ter seção transversal não uniforme, ou seja, não prismática;

c) Quando no regime estático, as cargas devem ser aplicadas de modo que os efeitos da energia cinética sejam desprezíveis;

d) O material admitido como homogêneo e isotrópico; enquanto a homogeneidade implica que as propriedades e os fenômenos do todo são representados em qualquer região do corpo, a isotropia implica em mesmas propriedades em todas as direções;

e) O material admitido como elástico linear: a elasticidade implica que em um ciclo de carga descarga, não haverá deformação residual. Já a linearidade exige uma proporcionalidade direta entre tensão e deformação;



f) A planicidade das seções transversais assumida se manter durante o processo de deformação;

g) O efeito de Poisson é desprezado, ou seja, as deformações transversais da seção são desconsideradas;

h) Os campos de deslocamentos e deformações são assumidos pequenos (suaves) para a barra reta.

### 2.3.2 FUNCIONAL DE ENERGIA

A equação governante do problema axial pode ser obtida pelo balanço das forças ou alternativamente pela condição estacionária do funcional de energia ( $\pi$ ). Esse problema estático pode ser dividido em duas parcelas:

$$\pi = \pi_{pv} - W \quad (2.16)$$

Ou ainda na forma:

$$\pi = \pi_{pv} - W_{ca} \quad (2.17)$$

Onde:

$\pi_{pv}$  representa a energia potencial de deformação da viga;  $W_{ca}$ , o trabalho da força axial externa.

### 2.3.3 ENERGIA POTENCIAL DA BARRA

O funcional de energia potencial da barra axialmente carregada é dado por:

$$\pi_{pv} = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x) dV \quad (2.18)$$

Onde, V é o volume.

Admitindo-se o coeficiente de Poisson nulo, a relação constitutiva Eq.(2.8) fica:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad (2.19)$$

Substituindo-se Eq. (2.2) e Eq. (2.19) em Eq. (2.18), o funcional de energia potencial fica:

$$\pi_{pv} = \frac{1}{2} \int_v (\sigma_x \varepsilon_x) dV = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A E \left( \frac{du(x)}{dx} \right)^2 dA dx = \frac{1}{2} \int_0^L EA(x) \left( \frac{du(x)}{dx} \right)^2 dx \quad (2.20)$$

Onde:

$u(x)$  é o deslocamento axial

$A(x)$  é a área da seção transversal

$L$  é o comprimento da barra

### 2.3.4 TRABALHO DA FORÇA EXTERNA

De acordo com a definição, o trabalho é dado pelo produto da força pelo deslocamento. Assim, para o caso da força axial  $p(x)$  provocando o deslocamento  $u(x)$  na barra, tem-se que o trabalho realizado fica:

$$W_{ca} = \int_0^L p(x)u(x)dx \quad (2.21)$$

Por fim, a energia total do sistema pode ser escrita em função das contribuições da energia potencial de deformação da barra e do trabalho das forças externas, resultando em:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^L EA(x) \left( \frac{du(x)}{dx} \right)^2 dx - \int_0^L p(x)u(x)dx \quad (2.22)$$

### 2.3.5 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Um dos lemas do cálculo variacional diz que a extremização de um funcional é obtida impondo-se a condição que sua primeira variação é nula. Então, efetuando-se a primeira variação na Eq. (2.22), tem-se:

$$\delta\pi = \delta \left[ \frac{1}{2} \int_0^L EA(x) \left( \frac{du(x)}{dx} \right)^2 dx \right] + \delta \left[ - \int_0^L p(x)u(x)dx \right] \quad (2.23)$$

Aplicando-se as propriedades do cálculo variacional  $\delta(u^n) = nu^{n-1}\delta u$ ,  
 $\delta \int g(x)dx = \int \delta[g(x)]dx$  e integrando-se por partes da Eq. (2.23), tem-se:

$$\delta\pi = \left[ \frac{du(x)}{dx} EA(x) \delta u(x) \right]_0^L - \int_0^L \left( \frac{d}{dx} \left( \frac{du(x)}{dx} EA(x) \right) \right) \delta u(x) dx - \int_0^L p(x) \delta u(x) dx \quad (2.24)$$

Como a variação dos campos no contorno é nula,  $\left[ \delta \frac{du(x)}{dx} \right]_0^L = [\delta u(x)]_0^L = 0$ , a

Eq. (2.24) fica:

$$\delta\pi = \int_0^L - \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{du(x)}{dx} EA(x) \right) + p(x) \right] \delta u(x) dx \quad (2.25)$$

Levando-se em consideração que a variação de  $\delta w(x)$  é arbitrária, a nulidade da Eq. (2.25) será sempre garantida se a seguinte relação for verdadeira:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{du(x)}{dx} EA(x) \right) + p(x) = 0 \quad (2.26)$$

A força normal é definida como uma resultante de tensões dada por:

$$N(x) = \int_A \sigma_x dA \quad (2.27)$$

A força normal pode ainda ser expressa em função dos deslocamentos se Eqs. (2.19) e (2.2) forem inseridas na Eq. (2.27), resultando em:

$$N(x) = \int_A \sigma_x dA = EA(x) \frac{du}{dx} \quad (2.28)$$

## 2.4 PROBLEMA FUNDAMENTAL

Aqui serão deduzidas as soluções fundamentais para os problemas de barras não-prismáticas sob efeito de cargas axiais.

O problema fundamental de barras não prismáticas é representado por um corpo de comprimento infinito submetido a fontes pontuais  $\delta(x, \hat{x})$ . Assim, por analogia à equação governante do problema real Eq.(2.26), a equação que governa o problema fundamental é:

$$E \frac{d}{dx} [A(x) \frac{du^*(x, \hat{x})}{dx}] = -\delta(x, \hat{x}) \quad (2.29)$$

Onde:  $\delta(x, \hat{x})$ ,  $x$  e  $\hat{x}$  são, respectivamente, a função delta de Dirac, as coordenadas dos ponto-campo e ponto-fonte.

Por analogia a Eq. (2.28), a força normal fundamental fica:

$$N^*(x, \hat{x}) = EA(x) \frac{du^*(x, \hat{x})}{dx} \quad (2.30)$$

Convém notar que a equação de equilíbrio fundamental pode ainda ser expressa em função dos esforços quando a Eq. (2.30) for substituída em (2.29), resultando em:

$$\frac{dN^*(x, \hat{x})}{dx} = -\delta(x, \hat{x}) \quad (2.31)$$

A fim de se obter a solução fundamental do problema em deslocamentos, integra-se a Eq.(2.29) resultando em

$$\int \{E \frac{d}{dx} [A(x) \frac{du^*(x, \hat{x})}{dx}] + \delta(x, \hat{x})\} dx = 0 \quad (2.32)$$

Integrando-se a Eq.(2.32), tem-se:

$$\frac{du^*(x, \hat{x})}{dx} = -\frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2EA(x)} \quad (2.33)$$

Neste trabalho, a solução da Eq. (2.33) é viabilizada propondo-se a seguinte identidade:

$$\frac{d}{dx} [\text{sgn}(x - \hat{x}) [\hat{G}(x) - \hat{G}(\hat{x})]] = 2\delta(x, \hat{x}) [\hat{G}(x) - \hat{G}(\hat{x})] + \text{sgn}(x - \hat{x}) \hat{F}(x) \quad (2.34)$$

Onde:

$$\hat{F}(x) = \frac{1}{A(x)} \quad (2.35)$$

$$\hat{G}(x) = \int \hat{F}(x) dx \quad (2.36)$$

$$\hat{H}(x) = \int \hat{G}(x) dx \quad (2.37)$$

$$\hat{K}(x) = \int \hat{H}(x) dx \quad (2.38)$$

Integrando-se a Eq. (2.34), tem-se:

$$\int \left[ \frac{d}{dx} \left[ \text{sgn}(x - \hat{x}) [\hat{G}(x) - \hat{G}(\hat{x})] \right] \right] dx = \int [\text{sgn}(x - \hat{x}) \hat{F}(x)] dx \quad (2.39)$$

De onde conclui-se que:

$$\int [\text{sgn}(x - \hat{x}) \hat{F}(x)] dx = \text{sgn}(x - \hat{x}) [\hat{G}(x) - \hat{G}(\hat{x})] \quad (2.40)$$

Da substituição da Eq.(2.40) na Eq.(2.33), tem-se:

$$u^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2E} [\text{sgn}(x - \hat{x}) [\hat{G}(x) - \hat{G}(\hat{x})]] \quad (2.41)$$

Convém notar que a força normal fundamental é dada por:

$$N^*(x, \hat{x}) = EA(x) \frac{du^*(x, \hat{x})}{dx} \quad (2.42)$$

Da substituição da Eq. (2.33) na Eq. (2.42), tem-se:

$$N^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2} \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (2.43)$$

## 2.5 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL

O MEC requer a representação matemática do problema em equações integrais, isto é, exige que as equações diferenciais do problema real sejam transformadas em equações integrais equivalentes. Uma das maneiras para se estabelecer essa transição é pela utilização do Método dos Resíduos Ponderados (MRP), em que a equação diferencial governante do problema real é ponderada pelos respectivos deslocamentos

fundamentais. Assim, utilizando a equação governante real Eq. (2.26) e a ponderadora Eq.(2.41), o MRP permite a escrita de uma relação dada por:

$$\int_0^L \left[ E \frac{d}{dx} \left( \frac{du(x)}{dx} A(x) \right) + p(x) \right] u^*(x, \hat{x}) dx = 0 \quad (2.44)$$

Onde:  $u^*(x, \hat{x})$  é a solução do problema fundamental dada na Eq.(2.41).

Integrando-se Eq. (2.44) por partes, vem que:

$$\left[ EA(x) \frac{du}{dx}(x) u^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \int_0^L \left( \frac{du}{dx} EA(x) \frac{du^*(x, \hat{x})}{dx} - p(x) \right) u^*(x, \hat{x}) dx = 0 \quad (2.45)$$

Ou se forem substituídas (2.28) e (2.30) na Eq. (2.45) fica:

$$\left[ N(x) u^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \int_0^L \left[ \frac{du(x)}{dx} N^*(x, \hat{x}) - p(x) u^*(x, \hat{x}) \right] dx = 0 \quad (2.46)$$

Fazendo nova integração por partes, agora da Eq. (2.46), obtém-se

$$\left[ N(x) u^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[ u(x) N^*(x, \hat{x}) \right]_0^L + \int_0^L \left[ \frac{dN^*(x, \hat{x})}{dx} u(x) + p(x) u^*(x, \hat{x}) \right] dx = 0 \quad (2.47)$$

Substituindo-se a Eq. (2.31) na Eq. (2.47), fica:

$$\left[ N(x) u^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[ u(x) N^*(x, \hat{x}) \right]_0^L + \int_0^L \left[ -\delta(x, \hat{x}) u(x) + p(x) u^*(x, \hat{x}) \right] dx = 0 \quad (2.48)$$

Aplicando a propriedade de filtro do delta  $\int u(x) \delta(x, \hat{x}) dx = u(\hat{x})$  na Eq. (2.48), obtém-se a equação integral dos deslocamentos axiais:

$$u(\hat{x}) - \left[ N(x) u^*(x, \hat{x}) \right]_0^L + \left[ u(x) N^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \int_0^L \left[ p(x) u^*(x, \hat{x}) \right] dx = 0 \quad (2.49)$$

Ao substituir os limites de x no contorno (  $x=0$  e  $x=L$ ), a Eq. (2.49) pode ser escrita em uma forma expandida como:

$$\begin{aligned} & u(\hat{x}) - u(0) N^*(0, \hat{x}) + u(L) N^*(L, \hat{x}) + N(0) u^*(0, \hat{x}) - N(L) u^*(L, \hat{x}) \\ & - \int_0^L \left[ p(x) u^*(x, \hat{x}) \right] dx = 0 \end{aligned} \quad (2.50)$$



## 2.6 REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA

Antes da solução propriamente dita do problema, é necessário que as equações integrais sejam convertidas em equações algébricas.

### 2.6.1 SISTEMA ALGÉBRICO NO CONTORNO

Inicialmente, o sistema algébrico deve ser formado no contorno para viabilizar a determinação das incógnitas. Isto é feito colocando o ponto-fonte nas extremidades da barra. Isto é,  $\hat{x} \rightarrow 0 = \lim_{\xi \rightarrow 0} (0 + \xi)$  e  $\hat{x} \rightarrow L = \lim_{\xi \rightarrow 0} (L - \xi)$ , na Eq. (2.50), e calculando-se as devidas integrais de domínio devidas ao carregamento. Assim, aplicando esse procedimento tem-se:

Para  $\hat{x} \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} & u(0) - u(0)N^*(0, 0 + \xi) + u(L)N^*(L, 0 + \xi) + \\ & N(0)u^*(0, 0 + \xi) - N(L)u^*(L, 0 + \xi) = \int_0^L [p_x(x)u^*(x, 0)]dx \end{aligned} \quad (2.51)$$

Para  $\hat{x} \rightarrow L$ :

$$\begin{aligned} & u(L) - u(0)N^*(0, L - \xi) + u(L)N^*(L, L - \xi) + \\ & N(0)u^*(0, L - \xi) - N(L)u^*(L, L - \xi) = \int_0^L [p_x(x)u^*(x, L)]dx \end{aligned} \quad (2.52)$$

Reescrevendo a Eq. (2.51) e a Eq. (2.52) com notação matricial, tem-se:

$$\{u\} + [H]\{u\} = [G]\{p\} + \{f\} \quad (2.53)$$

Onde as matrizes de influência são dadas por:

$$[H] = \begin{bmatrix} -N^*(0, 0 + \xi) & N^*(L, 0 + \xi) \\ -N^*(0, L - \xi) & N^*(L, L - \xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$[G] = \begin{bmatrix} -\beta_1 & \beta_2 \\ -\beta_3 & \beta_4 \end{bmatrix}$$

Onde:

$$\beta_1 = \frac{G(0)}{2}, \beta_2 = -\frac{G(L)}{2}, \beta_3 = \beta_2, \beta_4 = -\frac{G(0)}{2}$$

Já as variáveis no contorno da Eq. (2.53), indicadas na Fig. 2.2a-b, são:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u(0) \\ u(L) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}, \{p\} = \begin{Bmatrix} N(0) \\ N(L) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \end{Bmatrix}$$

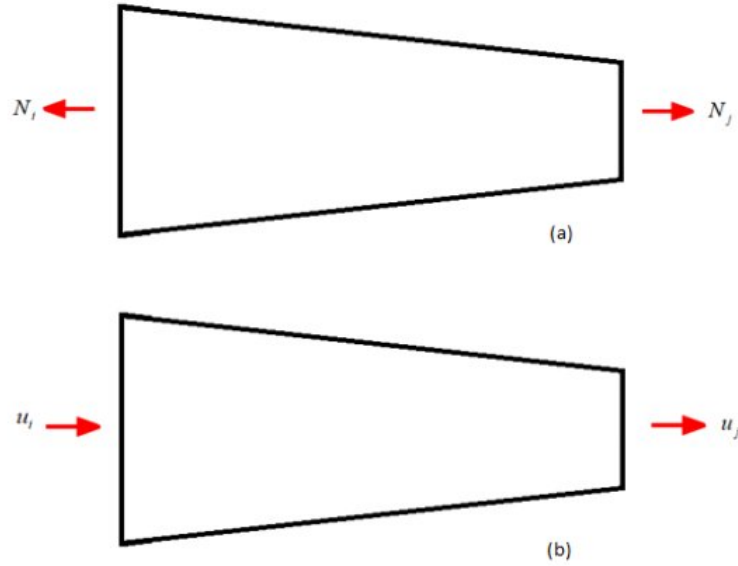


Figura2.2. Graus de liberdade no contorno: a) esforços, b) deslocamentos

Já o vetor da carga  $\{f\}$  na Eq.(2.53) depende da função que rege o carregamento axial podendo ser escrito de uma forma genérica como :

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_{xi} \\ f_{xj} \end{Bmatrix} \quad (2.54)$$

Onde:

$$f_{xi} = f_x(0) = \int_0^L p_x(x)u^*(x,0)dx \quad (2.55)$$

$$f_{xj} = f_x(L) = \int_0^L p_x(x)u^*(x,L)dx \quad (2.56)$$

Em princípio, a carga distribuída  $p(x)$  em Eq.(2.54) pode ser representada por uma função qualquer. O vetor de carga pode ser obtido basicamente por dois caminhos: a) cálculo direto da integral de domínio indicada na Eq. (2.54) e b) transformação dessa integral de domínio em valores de contorno.

Para o caso da distribuição trapezoidal da carga ao longo da barra  $p(x) = p_{xi} + \frac{p_{xj} - p_{xi}}{L}x$ , vide Fig. 2.3a, a obtenção do vetor de carga pelo cálculo direto da integral de domínio pode ser escrita como:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_{xi} \\ f_{xj} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_0^L (ax+b)u^*(x,0)dx \\ \int_0^L (ax+b)u^*(x,L)dx \end{Bmatrix} = \frac{1}{2E} \begin{Bmatrix} \int_0^L -(p_{xi} + \frac{p_{xj} - p_{xi}}{L}x)(\frac{1}{A(x)} - \frac{1}{A(0)})dx \\ \int_0^L (p_{xi} + \frac{p_{xj} - p_{xi}}{L}x)(\frac{1}{A(x)} - \frac{1}{A(L)})dx \end{Bmatrix} \quad (2.56a)$$

Utilizando-se a identidade Eq.(2.40) na Eq.(2.55), obtém-se:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_{xi} \\ f_{xj} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2E} \begin{Bmatrix} -p_{xi}[\hat{H}(L) - \hat{H}(0) - L\hat{G}(0)] - \left(\frac{p_{xj} - p_{xi}}{L}\right)[L\hat{H}(L) - \hat{K}(L) + \hat{K}(0) - \hat{G}(0)]\frac{L^2}{2} \\ p_{xi}[\hat{H}(L) - \hat{H}(0) - L\hat{G}(L)] + \left(\frac{p_{xj} - p_{xi}}{L}\right)[L\hat{H}(L) - \hat{K}(L) + \hat{K}(0) - \hat{G}(L)]\frac{L^2}{2} \end{Bmatrix}$$

Onde;  $\hat{G}(x)$ ,  $\hat{H}(x)$  e  $\hat{K}(x)$  são definidas nas Eqs.(2.35-38)

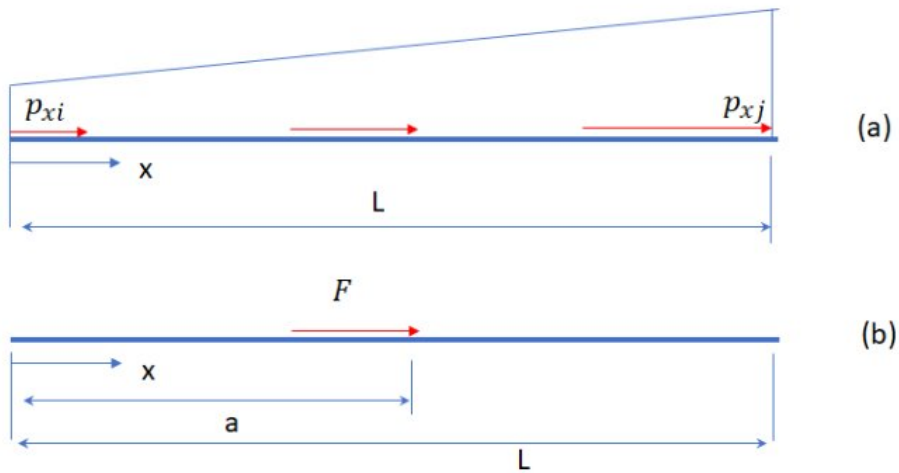


Figura2.3. Carregamentos axiais na barra: a) trapezoidal, b) concentrado

Em barras prismáticas, os casos práticos mais usualmente considerados em problemas de engenharia são os uniformemente distribuídos  $p(x) = p$  e os linearmente distribuídos  $p(x) = ax + b$ . Um cenário diferente deve ser analisado até mesmo em problemas práticos de engenharia envolvendo barras não-prismáticas, se as cargas

externas forem associadas ao peso próprio da estrutura. Nesses casos, as cargas não só dependem do peso específico  $\gamma$  do material, mas também da concepção arquitetônica da barra, já que a carga distribuída externa é obtida pelo produto de  $\gamma$  pela função  $A(x)$  que rege a mudança da área da seção transversal ao longo do comprimento da barra:

$$p_x(x) = \gamma A(x) \quad (2.57)$$

Onde  $\gamma = \rho g$ , sendo  $\rho$  a densidade e  $g$  o valor da aceleração da gravidade.

Aqui será explorada a técnica de transformação das integrais de domínio dos termos de cargas em valores de contorno nas extremidades da barra.

Seja a área da seção transversal dada por um polinômio de grau ímpar  $n$ ,  $A(x) = A_0 + A_1x + \dots + A_nx^n$ , então a força externa é dada por:

$$p_x(x) = \gamma(A_0 + A_1x + \dots + A_nx^n) \quad (2.58)$$

Seja  $g(x)$  um polinômio de grau  $n+1$  e  $v^*$  uma solução fundamental definida

$$\text{como } v^* = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} u^*, \text{ com } u^* \text{ dado na Eq.(2.41)} \quad (2.59)$$

A partir da regra de integração por partes, a seguinte relação pode ser estabelecida:

$$\int_0^L \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} g(x) v^* dx = \left[ v^* \frac{d^n}{dx^n} g(x) \right]_0^L - \int_0^L \frac{d^n}{dx^n} g(x) \frac{d}{dx} v^* dx \quad (2.60)$$

Aplicando-se integração por partes na segunda parcela da Eq. (2.60), o resultado da Eq. (2.60) fica:

$$\int_0^L \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} g(x) v^* dx = \left[ v^* \frac{d^n}{dx^n} g(x) \right]_0^L - \left[ \frac{d}{dx} v^* \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} g(x) \right]_0^L + \int_0^L \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} g(x) \frac{d^2}{dx^2} v^* dx \quad (2.61)$$

Após a aplicação conveniente de sucessivas integrações na Eq. (2.61), obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} g(x) v^* dx = & \left[ v^* \frac{d^n}{dx^n} g(x) \right]_0^L - \left[ \frac{d}{dx} v^* \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} g(x) \right]_0^L + \left[ \frac{d^2}{dx^2} v^* \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} g(x) \right]_0^L \\ & - \left[ \frac{d^3}{dx^3} v^* \frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}} g(x) \right]_0^L + \dots + \left[ \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} v^* \frac{d^2}{dx^2} g(x) \right]_0^L - \left[ \frac{d^n}{dx^n} v^* \frac{d}{dx} g(x) \right]_0^L + \int_0^L g(x) \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} v^* dx \end{aligned} \quad (2.62)$$

Se  $p(x)$  de grau  $n$  for inserida na Eq. (2.62) implica em  $\int_0^L \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} g(x) v_p^* dx =$

0. Além disso, utilizando-se da Eq.(2.59), a integral de domínio remanescente na Eq.

(2.62) fica escrita apenas em função de termos de valores no contorno:

$$\begin{aligned} \int_0^L p(x) u^* dx &= \int_0^L p(x) \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} v^* dx = - \left[ v^* \frac{d^n}{dx^n} p(x) \right]_0^L + \left[ \frac{d}{dx} v^* \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} p(x) \right]_0^L - \left[ \frac{d^2}{dx^2} v^* \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} p(x) \right]_0^L \\ &+ \left[ \frac{d^3}{dx^3} v^* \frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}} p(x) \right]_0^L - \dots + \left[ \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} v^* \frac{d^2}{dx^2} p(x) \right]_0^L + \left[ \frac{d^n}{dx^n} v^* \frac{d}{dx} p(x) \right]_0^L \end{aligned} \quad (2.63)$$

Por exemplo, se a carga for linear, então  $n=1$  substituído na Eq. (2.63), resulta em:

$$\int_0^L p(x) u^* dx = \int_0^L p(x) \frac{d^2 v^*}{dx^2} dx = - \left[ v^* \frac{dp(x)}{dx} \right]_0^L + \left[ \frac{dv^*}{dx} p(x) \right]_0^L \quad (2.64)$$

Onde as soluções fundamentais  $v^*$  e suas derivadas de interesse estão escritas no

Apêndice 6.

Quando o ponto fonte for aplicado nas extremidades da barra na Eq. (2.64), o vetor de carga pode ser escrito como:

$$\begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_0^L p(x) u^*(x,0) dx \\ \int_0^L p(x) u^*(x,L) dx \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} - \left[ v^*(x,0) \frac{dp(x)}{dx} \right]_0^L + \left[ \frac{dv^*(x,0)}{dx} p(x) \right]_0^L \\ - \left[ v^*(x,L) \frac{dp(x)}{dx} \right]_0^L + \left[ \frac{dv^*(x,L)}{dx} p(x) \right]_0^L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_1 - \beta_2 \\ \beta_3 - \beta_4 \end{Bmatrix} \quad (2.65)$$

Onde:

$$\beta_1 = -v^*(L,0) \frac{dp(L)}{dx} + \frac{dv^*(L,0)}{dx} p(L)$$

$$\beta_2 = -v^*(0,0) \frac{dp(0)}{dx} + \frac{dv^*(0,0)}{dx} p(0) = 0$$

$$\beta_3 = -v^*(L,L) \frac{dp(L)}{dx} + \frac{dv^*(L,L)}{dx} p(L) = 0$$

$$\beta_4 = -v^*(0,L) \frac{dp(0)}{dx} + \frac{dv^*(0,L)}{dx} p(0) \quad (2.65-69)$$

Por outro lado, se a carga for quadrática, então o número ímpar superior mais próximo é  $n=3$ , que se substituindo-se na Eq. (2.63), resulta em:

$$\begin{aligned} \int_0^L p(x)u^* dx &= \int_0^L p(x) \frac{d^4}{dx^4} v^* dx = - \left[ v^* \frac{d^3}{dx^3} p(x) \right]_0^L + \left[ \frac{d}{dx} v^* \frac{d^2}{dx^2} p(x) \right]_0^L - \left[ \frac{d^2}{dx^2} v^* \frac{d}{dx} p(x) \right]_0^L \\ &+ \left[ \frac{d^3}{dx^3} v^* p(x) \right]_0^L \end{aligned} \quad (2.70)$$

Como o  $p(x)$  é quadrático, a relação na Eq.(2.70) fica:

$$\int_0^L p(x)u^* dx = \left[ \frac{dv^*}{dx} \frac{d^2 p(x)}{dx^2} \right]_0^L - \left[ \frac{d^2 v^*}{dx^2} \frac{dp(x)}{dx} \right]_0^L + \left[ \frac{d^3 v^*}{dx^3} p(x) \right]_0^L \quad (2.71)$$

Onde:

$$\int u^*(x, \hat{x}) dx = \frac{d^3 v^*}{dx^3} \quad (2.72)$$

$$\iint u^*(x, \hat{x}) dx dx = \frac{d^2 v^*}{dx^2} \quad (2.73)$$

$$\iiint u^*(x, \hat{x}) dx dx dx = \frac{dv^*}{dx} \quad (2.74)$$

Da substituição das Eqs.(2.72), (2.73), (2.74) na Eq.(2.71), esta pode ainda ser escrita de forma simplificada como:

$$\int_0^L p(x)u^*(x, \hat{x}) dx = \left[ IIIu^*(x, \hat{x}) \frac{d^2 p(x)}{dx^2} \right]_0^L - \left[ IIu^*(x, \hat{x}) \frac{dp(x)}{dx} \right]_0^L + \left[ Iu^*(x, \hat{x}) p(x) \right]_0^L \quad (2.75)$$

Quando o ponto fonte for aplicado nas extremidades da barra em (2.75), o vetor de carga pode ser escrito como:

$$\begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left[ IIIu^*(x, 0) \frac{d^2 p(x)}{dx^2} \right]_0^L - \left[ IIu^*(x, 0) \frac{dp(x)}{dx} \right]_0^L + \left[ Iu^*(x, 0) p(x) \right]_0^L \\ \left[ IIIu^*(x, L) \frac{d^2 p(x)}{dx^2} \right]_0^L - \left[ IIu^*(x, L) \frac{dp(x)}{dx} \right]_0^L + \left[ Iu^*(x, L) p(x) \right]_0^L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_1 - \beta_2 \\ \beta_3 - \beta_4 \end{Bmatrix}$$

Onde:

$$\int u^*(x, \hat{x}) dx = Iu^* \quad (2.76)$$

$$\iint u^*(x, \hat{x}) dx dx = IIu^* \quad (2.77)$$

$$\iiint u^*(x, \hat{x}) dx dx dx = IIIu^* \quad (2.78)$$

$$\beta_1 = IIIu^*(L, 0) \frac{d^2 p(L)}{dx^2} - IIu^*(L, 0) \frac{dp(L)}{dx} - Iu^*(L, 0) p(L) \quad (2.79)$$

$$\beta_2 = IIIu^*(0, 0) \frac{d^2 p(0)}{dx^2} - IIu^*(0, 0) \frac{dp(0)}{dx} - Iu^*(0, 0) p(0) = 0 \quad (2.80)$$

$$\beta_3 = IIIu^*(L, L) \frac{d^2 p(L)}{dx^2} - IIu^*(L, L) \frac{dp(L)}{dx} - Iu^*(L, L) p(L) = 0 \quad (2.81)$$

$$\beta_4 = IIIu^*(0, L) \frac{d^2 p(0)}{dx^2} - IIu^*(0, L) \frac{dp(0)}{dx} - Iu^*(0, L) p(0) \quad (2.82)$$

Por fim, se a carga for quártica, então o número ímpar superior mais próximo é  $n=5$  o que leva a Eq. (2.63) a:

$$\begin{aligned} \int_0^L g(x) u^* dx &= \int_0^L g(x) \frac{d^6 v^*}{dx^6} dx = - \left[ v^* \frac{d^5 g(x)}{dx^5} \right]_0^L + \left[ \frac{dv^*}{dx} \frac{d^4 g(x)}{dx^4} \right]_0^L - \left[ \frac{d^2 v^*}{dx^2} \frac{d^3 g(x)}{dx^3} \right]_0^L \\ &+ \left[ \frac{d^3 v^*}{dx^3} \frac{d^2 g(x)}{dx^2} \right]_0^L - \left[ \frac{d^4 v^*}{dx^4} \frac{dg(x)}{dx} \right]_0^L + \left[ \frac{d^5 v^*}{dx^5} g(x) \right]_0^L \end{aligned} \quad (2.83)$$

Como o  $p(x)$  é quártica, a relação na Eq.(2.89) fica:

$$\begin{aligned} \int_0^L p(x) u^* dx &= \int_0^L p(x) \frac{d^6 v^*}{dx^6} dx = \left[ \frac{dv^*}{dx} \frac{d^4 p(x)}{dx^4} \right]_0^L - \left[ \frac{d^2 v^*}{dx^2} \frac{d^3 p(x)}{dx^3} \right]_0^L \\ &+ \left[ \frac{d^3 v^*}{dx^3} \frac{d^2 p(x)}{dx^2} \right]_0^L - \left[ \frac{d^4 v^*}{dx^4} \frac{dp(x)}{dx} \right]_0^L + \left[ \frac{d^5 v^*}{dx^5} p(x) \right]_0^L \end{aligned} \quad (2.84)$$

Onde:

$$\int u^*(x, \hat{x}) dx = \frac{d^5 v^*}{dx^5} \quad (2.85)$$

$$\iint u^*(x, \hat{x}) dx dx = \frac{d^4 v^*}{dx^4} \quad (2.86)$$



$$\iiint u^*(x, \hat{x}) dx dx dx = \frac{d^3 v^*}{dx^3} \quad (2.87)$$

$$\iiint \int u^*(x, \hat{x}) dx dx dx dx = \frac{d^2 v^*}{dx^2} \quad (2.88)$$

$$\iiint \int \int u^*(x, \hat{x}) dx dx dx dx dx = \frac{dv^*}{dx} \quad (2.89)$$

Da substituição das Eqs.(2.85-89), na Eq.(2.84), esta pode ainda ser escrita de forma simplificada como:

$$\begin{aligned} \int_0^L p(x) u^* dx = & \left[ \text{IIII} u^*(x, \hat{x}) \frac{d^4 p(x)}{dx^4} \right]_0^L - \left[ \text{IIII} u^*(x, \hat{x}) \frac{d^3 p(x)}{dx^3} \right]_0^L \\ & + \left[ \text{III} u^*(x, \hat{x}) \frac{d^2 p(x)}{dx^2} \right]_0^L - \left[ \text{II} u^*(x, \hat{x}) \frac{dp(x)}{dx} \right]_0^L + \left[ \text{I} u^*(x, \hat{x}) p(x) \right]_0^L \end{aligned} \quad (2.90)$$

Onde:

$$\int u^*(x, \hat{x}) dx = \text{I} u^*(x, \hat{x}) \quad (2.91)$$

$$\iint u^*(x, \hat{x}) dx dx = \text{II} u^*(x, \hat{x}) \quad (2.92)$$

$$\iiint u^*(x, \hat{x}) dx dx dx = \text{III} u^*(x, \hat{x}) \quad (2.93)$$

$$\iiint \int u^*(x, \hat{x}) dx dx dx dx = \text{IIII} u^*(x, \hat{x}) \quad (2.94)$$

$$\iiint \int \int u^*(x, \hat{x}) dx dx dx dx dx = \text{IIIII} u^*(x, \hat{x}) \quad (2.95)$$

Quando o ponto fonte é aplicado nas extremidades da barra em (2.75), o vetor de carga pode ser escrito como:

$$\begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left[ \text{IIII} u^*(x, 0) \frac{d^4 p(x)}{dx^4} \right]_0^L - \left[ \text{IIII} u^*(x, 0) \frac{d^3 p(x)}{dx^3} \right]_0^L \\ + \left[ \text{III} u^*(x, 0) \frac{d^2 p(x)}{dx^2} \right]_0^L - \left[ \text{II} u^*(x, 0) \frac{dp(x)}{dx} \right]_0^L + \left[ \text{I} u^*(x, 0) p(x) \right]_0^L \\ \left[ \text{IIII} u^*(x, L) \frac{d^4 p(x)}{dx^4} \right]_0^L - \left[ \text{IIII} u^*(x, L) \frac{d^3 p(x)}{dx^3} \right]_0^L \\ + \left[ \text{III} u^*(x, L) \frac{d^2 p(x)}{dx^2} \right]_0^L - \left[ \text{II} u^*(x, L) \frac{dp(x)}{dx} \right]_0^L + \left[ \text{I} u^*(x, L) p(x) \right]_0^L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_1 - \beta_2 \\ \beta_3 - \beta_4 \end{Bmatrix}$$

$$\beta_1 = IIIIu^*(L,0) \frac{d^4 p(L)}{dx^4} - IIIu^*(L,0) \frac{d^3 p(L)}{dx^3} + IIIu^*(L,0) \frac{d^2 p(L)}{d^2 x} - IIu^*(L,0) \frac{dp(L)}{dx} + Iu^*(L,0) p(L) \quad (2.96)$$

$$\beta_2 = IIIIu^*(0,0) \frac{d^4 p(0)}{dx^4} - IIIu^*(0,0) \frac{d^3 p(0)}{dx^3} + IIIu^*(0,0) \frac{d^2 p(0)}{d^2 x} - IIu^*(0,0) \frac{dp(0)}{dx} + Iu^*(0,0) p(0) = 0 \quad (2.97)$$

$$\beta_3 = IIIIu^*(L,L) \frac{d^4 p(L)}{dx^4} - IIIu^*(L,L) \frac{d^3 p(L)}{dx^3} + IIIu^*(L,L) \frac{d^2 p(L)}{d^2 x} - IIu^*(L,L) \frac{dp(L)}{dx} + Iu^*(L,L) p(L) = 0 \quad (2.98)$$

$$\beta_4 = IIIIu^*(0,L) \frac{d^4 p(0)}{dx^4} - IIIu^*(0,L) \frac{d^3 p(0)}{dx^3} + IIIu^*(0,L) \frac{d^2 p(0)}{d^2 x} - IIu^*(0,L) \frac{dp(0)}{dx} + Iu^*(0,L) p(0) \quad (2.99)$$

Ao passo que se for aplicada uma carga concentrada  $F$  a uma distância “a” da extremidade esquerda conforme mostrada na Figura 2.3b, o vetor de carga fica:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_{xi} \\ f_{xj} \end{Bmatrix} = -\frac{F}{2E} \begin{Bmatrix} G(a) - G(0) \\ G(L) - G(a) \end{Bmatrix}$$

### 2.6.2 TRANSFORMAÇÕES NO SISTEMA PARA SUA SOLUÇÃO

Para a solução das incógnitas do problema, é necessário a formação da matriz de influência das incógnitas e do vetor independente. Isto é feito mediante a aplicação das condições de contorno e manipulação algébrica adicional no sistema dado na Eq. (2.53), que pode ser expresso de uma forma genérica como:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_i \\ p_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix} \quad (2.100)$$

Admitindo-se que o grau de liberdade 1 esteja prescrito em deslocamento  $\bar{u}_i$  (o que implica que as forças nos demais graus de liberdades estão todas prescritas), então o sistema final é obtido substituindo a matriz de influência  $[H]$  na coluna 1 pelos valores da matriz  $[G]$  na Eq.(2.100). Da mesma forma a matriz  $[G]$  é alterada na mesma coluna

com os valores da matriz [H] antes da atualização. Resumindo, o processo de imposição de condições de contorno implica em uma permuta de coluna entre as matrizes [H] e [G] na posição do grau de liberdade prescrito em deslocamento, resultando em:

$$\begin{bmatrix} -G_{11} & H_{12} \\ -G_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -H_{11} & G_{12} \\ -H_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ p_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix} \quad (2.101)$$

Então, a matriz de influência das incógnitas, o vetor independente e vetor das incógnitas na Eq. (2.101) são dados por:

$$\begin{aligned} [A] &= \begin{bmatrix} -G_{11} & H_{12} \\ -G_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \\ \{B\} &= \begin{bmatrix} -H_{11} & G_{12} \\ -H_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ p_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix} \\ \{x\} &= \begin{Bmatrix} p_i \\ u_j \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Com o sistema a ser resolvido fica:

$$[A]\{x\} = \{B\}$$

Aplicando um método de solução de sistema, por exemplo um método direto, fica:

$$\{x\} = [A]^{-1} \{B\}$$

### 2.6.3 DETERMINAÇÃO DOS CAMPOS NO DOMÍNIO

Os campos em deslocamentos no domínio da barra podem ser obtidos após a determinação das variáveis do contorno utilizando a Equação (2.41) com colocação do ponto fonte é “a” resultando em:

$$u(a) + [H(a)]\{u\} = [G(a)]\{p\} + f(a)$$

Onde:

$$[H(a)] = -[1/2 \quad 1/2], [G(a)] = [-\beta_1(a) \quad \beta_2(a)]$$

Com:

$$\beta_1(a) = \frac{1}{2E} [\hat{G}(0) - \hat{G}(a)]$$

$$\beta_2(a) = -\frac{1}{2E} [\hat{G}(L) - \hat{G}(a)]$$

Já o carregamento  $f(a)$ , após o cálculo das integrais de domínio quando este é trapezoidal fica:

$$f(a) = \left( \frac{p_{xj}}{2E} \right) \left\{ \hat{H}(a) - \hat{H}(L) + \hat{G}(a)(L - 2a) \right\} +$$

$$\left( \frac{p_{xj} - p_{xi}}{2EL} \right) \left\{ 2a\hat{H}(a) + \hat{K}(0) + \hat{K}(L) - 2\hat{K}(a) - L\hat{H}(L) - \frac{a^2}{2}\hat{G}(a) \right\}$$

## CAPÍTULO III

### FLEXÃO DE VIGAS NÃO-PRISMÁTICAS COM VARIAÇÃO SIMÉTRICA

#### 3.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo é tratada a flexão segundo as teorias de Euler-Bernoulli e Timoshenko. Inicialmente são desenvolvidas as deduções das equações reais que regem o fenômeno em vigas não-prismáticas com variação simétrica ao longo do eixo longitudinal, como se apresenta na Fig 3.1. Ainda serão discutidos o problema fundamental, as equações integrais e algébricas.



Figura 3.1 – Viga Não-Prismática Simétrica

#### 3.2 PROBLEMA REAL: EULER -BERNOULLI

Nesta seção será discutido o desenvolvimento do problema real da viga de Euler-Bernoulli estático sob carga transversal.

### 3.2.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

Para o estudo da flexão de barras de Euler-Bernoulli mostrada na Fig.3.1a são admitidas as seguintes hipóteses:

a) O problema tridimensional pode ser reduzido ao espaço unidimensional, 1D, desde que o comprimento  $L$ , seja suficientemente maior que as dimensões  $b$  e  $h$  da seção transversal;

b) A barra pode ter seção transversal não uniforme, ou seja, deve ser não prismática;

c) Quando no regime estático, as cargas devem ser aplicadas de modo que os efeitos da energia cinética sejam desprezíveis;

d) O material admitido como homogêneo e isotrópico; enquanto a homogeneidade implica que as propriedades e os fenômenos do todo são representados em qualquer região do corpo, a isotropia implica em mesmas propriedades em todas as direções;

e) O material admitido como elástico linear: a elasticidade implica que em um ciclo de carga descarga, não haverá deformação residual. Já a linearidade exige uma proporcionalidade direta entre tensão e deformação;

f) A planicidade das seções transversais é mantida durante o processo de deformação;

g) A ortogonalidade entre o eixo longitudinal e a seção plana é conservada durante o processo de deformação, implicando na desconsideração da distorção transversa.

h) O efeito de Poisson é desprezado, ou seja, as deformações transversais da seção são desconsideradas;

i) Os campos de deslocamentos e deformações são assumidos pequenos (suaves) para a viga e base elástica (quando presente) .

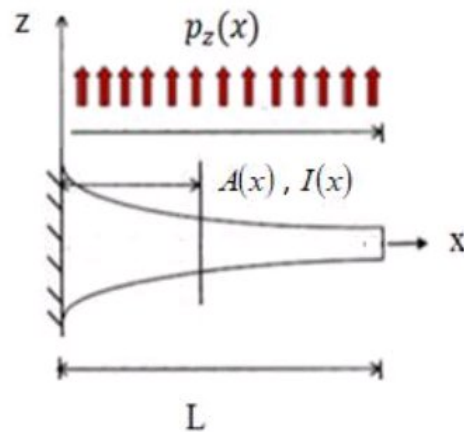


Figura 3.1a- Barra não-prismática com carregamento no plano xz

### 3.2.2 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Os deslocamentos axiais da barra podem ser escritos levando-se em conta as hipóteses (f),(h), resultando em:

$$u(x) = -z(-\phi(x)) \quad (3.1)$$

Onde:

$z$  representa a profundidade da fibra e  $\phi$  representa a rotação da seção.

No modelo de Euler-Bernoulli, conforme descrito na hipótese (g), a distorção transversa é admitida nula. Assim, a Eq. (2.6) fica:

$$\gamma_{xz} = \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} = 0 \quad (3.2)$$

Substituindo-se a Eq. (3.0) na Eq. (3.1), resulta em:

$$\frac{dw}{dx} = -\phi \quad (3.3)$$



Aqui, pode-se notar que no modelo de Euler-Bernoulli, a rotação da seção  $\phi$  tem um sinal contrário ao da inclinação da elástica  $\frac{dw}{dx}$ . Além disso, a deformação axial em conformidade com a Eq. (2.2), Eq. (3.1) e a Eq. (3.2) pode ser dada por:

$$\varepsilon_x = \frac{du(x)}{dx} = -z \frac{d^2w(x)}{dx^2} \quad (3.4)$$

Levando em conta que as únicas tensões normais que atuam na viga são as axiais e ainda a hipótese (h) de supressão do coeficiente de Poisson na Eq. (2.8), as tensões axiais podem ser escritas como:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad (3.5)$$

A energia total do sistema pode ser escrita em função das contribuições da energia potencial de deformação da viga e do trabalho das forças externas, resultando em:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) \left( \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^L p_z(x) w(x) dx \quad (3.6)$$

Uma das maneiras de se obter as equações de equilíbrio desse problema é aplicando os conceitos dos princípios variacionais. Um dos lemas do cálculo variacional diz que a extremização de um funcional é obtida impondo-se a condição que sua primeira variação é nula. Assim, efetuando-se a primeira variação na Eq. (3.6), tem-se:

$$\delta\pi = \delta \left[ \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) \left( \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right)^2 dx \right] + \delta \left[ - \int_0^L p_z(x) w(x) dx \right] \quad (3.7)$$

Aplicando-se as propriedades do cálculo variacional  $\delta(u^n) = nu^{n-1}\delta u$ ,  $\delta \int g(x) dx = \int \delta[g(x)] dx$  e após duas integrações por partes da Eq. (3.7), tem-se:

$$\begin{aligned}\delta\pi = & \left[ \frac{d^2 w(x)}{dx^2} EI(x) \delta \frac{dw(x)}{dx} \right]_0^L - \left[ \frac{d}{dx} \left\{ \frac{d^2 w(x)}{dx^2} EI(x) \right\} \delta w(x) \right]_0^L + \int_0^L \frac{d^2}{dx^2} \left\{ \frac{d^2 w(x)}{dx^2} EI(x) \right\} \delta w(x) dx \\ & - \int_0^L p_z(x) \delta w(x) dx\end{aligned}\quad (3.8)$$

Como a variação dos campos no contorno é nula,  $\left[ \delta \frac{dw(x)}{dx} \right]_0^L = [\delta w(x)]_0^L = 0$ , a Eq.

(3.8) fica:

$$\delta\pi = \int_0^L E \frac{d^2}{dx^2} \left( I(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right) \delta w(x) dx - \int_0^L p_z(x) \delta w(x) dx \quad (3.9)$$

Simplificando a Eq. (3.9), tem-se:

$$\delta\pi = \int_0^L \left[ E \frac{d^2}{dx^2} \left( I(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right) - p_z(x) \right] \delta w(x) dx \quad (3.10)$$

Levando-se em consideração que a variação de  $\delta w(x)$  é arbitrária, a nulidade da Eq. (3.10) será sempre garantida se a seguinte relação for verdadeira:

$$E \frac{d^2}{dx^2} \left( I(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right) - p_z(x) = 0 \quad (3.11)$$

Ou ainda:

$$E \frac{d^2}{dx^2} \left( I(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right) = p_z(x) \quad (3.12)$$

Os esforços da viga no modelo de Euler-Bernoulli são dados por:

$$M(x) = -EI(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad (3.13)$$

$$V(x) = -E \frac{d}{dx} \left( I(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right) \quad (3.14)$$

Onde:

$M(x)$  representa o momento fletor e  $V(x)$ , o esforço cortante.

Se a Eq.(3.13) e Eq.(3.12) forem comparadas, as equações governantes da viga de Euler-Bernoulli podem ser escritas em função dos momentos fletores como:

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = p_z(x) \quad (3.15)$$

### 3.3 PROBLEMA FUNDAMENTAL:EULER-BERNOULLI

Já que o interesse neste trabalho é o desenvolvimento do MEC direto, o problema fundamental a ser utilizado deve herdar grande parte das propriedades físicas e de geometria do problema real. A única diferença, de fato, é que enquanto o problema real possui geralmente o domínio finito, o problema fundamental tem seu domínio infinito submetido a fontes pontuais. Dessa forma, a equação governante do problema fundamental fica:

$$E \frac{d^2}{dx^2} \left[ I(x) \frac{d^2}{dx^2} (w^*(x, \hat{x})) \right] - p_z^*(x, \hat{x}) = 0 \quad (3.16)$$

Por outro lado, as demais relações envolvendo as grandezas de interesse, que também podem ser escritas por analogia às correspondentes do problema real, são indicadas a seguir:

$$V^*(x, \hat{x}) = -E \frac{d}{dx} \left[ I(x) \frac{d^2 w^*(x, \hat{x})}{dx^2} \right] \quad (3.17)$$

$$M^*(x, \hat{x}) = -EI(x) \frac{d^2 w^*(x, \hat{x})}{dx^2} \quad (3.18)$$

Além disso, por analogia a Eq. (3.15), a equação governante do problema fundamental pode ser escrita em função dos momentos fletores como:

$$\frac{d^2 M^*(x, \hat{x})}{dx^2} = p_z^*(x, \hat{x}) \quad (3.19)$$

Com o objetivo, de se obter a solução da equação fundamental, utiliza-se a propriedade do delta de Dirac na integral da Eq. (3.16). Assim:

$$\int_0^L \left[ E \frac{d^2}{dx^2} \left[ I(x) \frac{d^2}{dx^2} (w^*(x, \hat{x})) \right] - p_z^*(x, \hat{x}) \right] dx = 0 \quad (3.20)$$

Integrando-se duas vezes consecutivas a Eq. (3.20), fica:

$$w^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{2E} \iint \left[ \frac{r}{I(x)} \right] dx dx \quad (3.21)$$

Onde:

$$r = |x - \hat{x}|$$

Integrando-se a Eq. (3.21) uma vez por partes, tem-se:

$$w^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{2E} \int [rG(x) - \int \text{sgn}(x - \hat{x})G(x)] dx \quad (3.22)$$

Onde:

$$G(x) = \int \frac{1}{I(x)} dx \quad (3.23)$$

A fim de se resolver a Eq. (3.22), nesse trabalho é proposta a seguinte identidade:

$$\frac{d}{dx} [\text{sgn}(x - \hat{x}) [H(x) - H(\hat{x})]] = 2\delta(x, \hat{x}) [H(x) - H(\hat{x})] + \text{sgn}(x - \hat{x}) \frac{dH(x)}{dx} \quad (3.24)$$

com:

$$H(x) = \int G(x) dx \quad (3.25)$$

Integrando-se a Eq. (3.24), tem-se:

$$\text{sgn}(x - \hat{x}) [H(x) - H(\hat{x})] = \int [\text{sgn}(x - \hat{x}) G(x)] dx \quad (3.26)$$

Da substituição da Eq. (3.26) na Eq. (3.22) a solução fundamental assume a forma:

$$w^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{2E} \int [rG(x) - \text{sgn}(x - \hat{x}) [H(x) - H(\hat{x})]] dx \quad (3.27)$$

Por fim, integrando-se a primeira parcela da Eq. (3.27) e fazendo-se uso da identidade Eq. (3.26), a solução proposta neste trabalho para a Eq. (3.16) é:

$$w^*(x, \hat{x}) = \frac{r}{2E} \left[ [H(x) + H(\hat{x})] - 2 \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) [K(x) - K(\hat{x})] \right] \quad (3.28)$$

Onde:

$$K(x) = \int H(x) dx \quad (3.29)$$

Já  $\frac{dw^*(x, \hat{x})}{dx}$  é obtida a partir da derivação da Eq. (3.28), que fica:

$$\frac{dw^*(x, \hat{x})}{dx} = \frac{1}{2E} \left[ -[H(x) - H(\hat{x})] \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) + rG(x) \right] \quad (3.30)$$

Já para determinação dos esforços (força cortante e momento fletor) fundamentais, as seguintes relações devem ser usadas:

$$V^*(x, \hat{x}) = -E \frac{d}{dx} \left[ I(x) \frac{d^2 w^*(x, \hat{x})}{dx^2} \right] = -\frac{\operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{2} \quad (3.31)$$

$$M^*(x, \hat{x}) = -EI(x) \frac{d^2 w^*(x, \hat{x})}{dx^2} = -\frac{r}{2} \quad (3.32)$$

Além das soluções fundamentais apresentadas nas Eq. (3.28) e Eq. (3.30), serão deduzidas soluções fundamentais adicionais com derivadas em relação ao ponto fonte, já que essas serão necessárias nas equações integrais que serão desenvolvidas no item subsequente. Assim, as derivadas dos deslocamentos e esforços derivados no ponto fonte podem ser escritas como:

$$w_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{2E} \left[ -[H(x) - H(\hat{x})] \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) + rG(\hat{x}) \right] \quad (3.33)$$

$$\frac{dw_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x})}{dx} = \frac{1}{2E} \left[ -[H(x) - H(\hat{x})] \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) + rG(x) \right] \quad (3.34)$$

$$V_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = \delta(x - \hat{x}) \quad (3.35)$$

$$M_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2} \quad (3.36)$$

Onde:

$$G(x) = \int \frac{1}{I(x)} dx \quad (3.37)$$

$$H(x) = \int G(x) dx \quad (3.38)$$

$$K(x) = \int H(x) dx \quad (3.39)$$

### 3.4 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL

Uma das maneira de estabelecer as equações integrais para o MEC é pela aplicação do Método dos Resíduos Ponderados (MRP). Conforme discutido na capítulo 2, Resíduos Ponderados é uma técnica que consiste em multiplicar as equações de equilíbrio reais por funções ponderadoras associadas ao problema fundamental. Assim, ponderando a equação governante real Eq. (3.16), pelos deslocamentos fundamentais (3.28), o MRP viabiliza a escrita da relação:

$$\int_0^L \left[ E \frac{d^2}{dx^2} \left[ I(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] + p_z^*(x, \hat{x}) \right] w^*(x, \hat{x}) dx = 0 \quad (3.40)$$

Da integração por partes da Eq. (3.40), resulta:

$$\begin{aligned} & \left[ E \frac{d}{dx} \left[ I(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] w^*(x, \hat{x}) \right]_0^L \\ & - \int_0^L E \frac{d}{dx} \left[ I(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] \frac{dw^*(x, \hat{x})}{dx} dx - \int_0^L p_z(x) w^*(x, \hat{x}) dx = 0 \end{aligned} \quad (3.41)$$

Substituindo-se Eq.(3.14) na Eq.(3.41), fica:

$$- \left[ V(x) w^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \int_0^L E \frac{d}{dx} \left[ I(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] \frac{dw^*(x, \hat{x})}{dx} dx - \int_0^L p_z(x) w^*(x, \hat{x}) dx = 0 \quad (3.42)$$

Integrando por partes a segunda parcela da Eq.(3.42) , tem-se:

$$\begin{aligned}
& -\left[V(x)w^*(x, \hat{x})\right]_0^L - \left[EI(x)\frac{d^2w(x)}{dx^2}\frac{dw^*(x, \hat{x})}{dx}\right]_0^L + \\
& + \int_0^L EI(x)\frac{d^2w(x)}{dx^2}\frac{d^2w^*(x, \hat{x})}{dx^2}dx - \int_0^L p_z(x)w^*(x, \hat{x})dx = 0
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Com a substituição das Eqs.(3.13) e (3.18) na Eq. (3.43), obtém-se:

$$-\left[V(x)w^*(x, \hat{x})\right]_0^L + \left[M(x)\frac{dw^*(x, \hat{x})}{dx}\right]_0^L - \int_0^L \frac{d^2w(x)}{dx^2}M^*dx - \int_0^L p_z(x)w^*(x, \hat{x})dx = 0 \tag{3.44}$$

Integrando por partes a terceira parcela da Eq.(3.44) , tem-se:

$$\begin{aligned}
& -\left[V(x)w^*(x, \hat{x})\right]_0^L + \left[M(x)\frac{dw^*(x, \hat{x})}{dx}\right]_0^L - \left[M^*(x, \hat{x})\frac{dw(x)}{dx}\right]_0^L \\
& + \int_0^L \frac{dw(x)}{dx}\frac{dM^*(x, \hat{x})}{dx}dx - \int_0^L p_z(x)w^*(x, \hat{x})dx = 0
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Finalmente, integrando por partes a quarta parcela da Eq.(3.45), resulta:

$$\begin{aligned}
& -\left[V(x)w^*(x, \hat{x})\right]_0^L + \left[M(x)\frac{dw^*(x, \hat{x})}{dx}\right]_0^L - \left[M^*(x, \hat{x})\frac{dw(x)}{dx}\right]_0^L + \\
& + \left[V^*(x, \hat{x})w(x)\right]_0^L - \int_0^L w(x)\frac{d^2M^*(x, \hat{x})}{dx^2}dx - \int_0^L p_z(x)w^*(x, \hat{x})dx = 0
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Substituindo-se a Eq. (3.19) na Eq. (3.46) e utilizando-se a propriedade de filtro do delta de Dirac, obtém-se a equação integral dos deslocamentos transversais

$$\begin{aligned}
& w(\hat{x}) - \left[V(x)w^*(x, \hat{x})\right]_0^L + \left[M(x)\frac{dw^*(x, \hat{x})}{dx}\right]_0^L + \\
& - \left[M^*(x, \hat{x})\frac{dw(x)}{dx}\right]_0^L + \left[V^*(x, \hat{x})w(x)\right]_0^L - \int_0^L p_z(x)w^*(x, \hat{x})dx = 0
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Para o completo equacionamento do problema da barra sob flexão no modelo de Euler-Bernoulli, se faz necessária a obtenção de mais uma equação integral, pois são duas as condições de contorno desconhecidas e apenas uma equação integral até então deduzida. Assim, uma equação integral que pode ser utilizada é a da inclinação da elástica no ponto-fonte,  $\frac{dw(\hat{x})}{d\hat{x}}$ , que é gerada pela derivação da Eq.(3.47) em relação a  $\hat{x}$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{dw(\hat{x})}{d\hat{x}} - \left[ V(x)w_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) \right] + \left[ M(x) \frac{dw_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x})}{dx} \right] + \\
& - \left[ M_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) \frac{dw(x)}{dx} \right] + \left[ V_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x})w(x) \right] - \int_0^L p_z(x)w^*(x, \hat{x})dx = 0
\end{aligned} \tag{3.48}$$

### 3.5 REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA

Conforme já foi dito no capítulo 2, a transição das equações integrais para a representação algébrica é necessário fazer a colocação da fonte nas extremidades da viga, isto é,  $\hat{x} = 0 + \zeta$  e  $\hat{x} = L - \zeta$  com  $\zeta \rightarrow 0$ . Assim, aplicando-se as fontes convenientemente no contorno nas equações integrais Eq. (3.47), Eq. (3.48) as equações algébricas ficam:

$$\begin{aligned}
& w(0) - \left[ V(x)w^*(x, 0) \right]_0^L + \left[ V^*(x, 0)w(x) \right]_0^L + \left[ M(x) \frac{dw^*(x, 0)}{dx} \right]_0^L + \\
& - \left[ M^*(x, 0) \frac{dw(x)}{dx} \right]_0^L - \int_0^L p_z(x)w^*(x, 0)dx = 0
\end{aligned} \tag{3.49}$$

$$\begin{aligned}
& w(L) - \left[ V(x)w^*(x, L) \right]_0^L + \left[ V^*(x, L)w(x) \right]_0^L + \left[ M(x) \frac{dw^*(x, L)}{dx} \right]_0^L + \\
& - \left[ M^*(x, L) \frac{dw(x)}{dx} \right]_0^L - \int_0^L p_z(x)w^*(x, L)dx = 0
\end{aligned} \tag{3.50}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{dw(0)}{dx} - \left[ V(x)w_{,\hat{x}}^*(x, 0) \right]_0^L + \left[ V_{,\hat{x}}^*(x, 0)w(x) \right]_0^L + \left[ M(x) \frac{dw_{,\hat{x}}^*(x, 0)}{dx} \right]_0^L \\
& - \left[ M_{,\hat{x}}^*(x, 0) \frac{dw(x)}{dx} \right]_0^L - \int_0^L p_z(x)w_{,\hat{x}}^*(x, 0)dx = 0
\end{aligned} \tag{3.51}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{dw(L)}{dx} - \left[ V(x)w_{,\hat{x}}^*(x, L) \right]_0^L + \left[ V_{,\hat{x}}^*(x, L)w(x) \right]_0^L + \left[ M(x) \frac{dw_{,\hat{x}}^*(x, L)}{dx} \right]_0^L + \\
& - \left[ M_{,\hat{x}}^*(x, L) \frac{dw(x)}{dx} \right]_0^L - \int_0^L p_z(x)w_{,\hat{x}}^*(x, L)dx = 0
\end{aligned} \tag{3.52}$$



Reescrevendo-se as Eqs.(3.49), (3.50), (3.51) e a Eq. (3.52) com notação matricial, obtém-se:

$$\{u\} + [H]\{u\} = [G]\{p\} + \{f\} \quad (3.53)$$

Onde  $[H]$ ,  $[G]$  são as matrizes de influência e  $\{f\}$  é o vetor de ações externas.  $\{u\}$  e  $\{p\}$  são os vetores de deslocamentos e solicitações internas, cujas formas explícitas são dadas por:

$$\{u\} = \begin{bmatrix} w_i & \frac{dw_i}{dx} & w_j & \frac{dw_j}{dx} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} w(0) & \frac{dw(0)}{dx} & w(L) & \frac{dw(L)}{dx} \end{bmatrix}^T$$

$$\{p\} = \begin{bmatrix} V_i & M_i & V_j & M_j \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} V(0) & M(0) & V(L) & M(L) \end{bmatrix}^T$$

$$[H] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{L}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{L}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & 0 & \beta_3 & \beta_4 \\ \beta_5 & \beta_6 & 0 & 0 \\ \beta_7 & \beta_8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Com:

$$\beta_1 = \frac{1}{2E} \{L(H(L) + H(0)) - 2(K(L) - K(0))\}$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2E} \{(H(L) - H(0)) - LG(L)\}$$

$$\beta_3 = \frac{1}{2E} \{-(H(L) - H(0)) + LG(0)\}$$

$$\beta_4 = \frac{1}{2E} (G(L) - G(0))$$

$$\beta_5 = \frac{1}{2E} \{ -L(H(L) + H(0)) - 2(K(0) - K(L)) \}$$

$$\beta_6 = \frac{1}{2E} \{ (H(0) - H(L)) + LG(0) \}$$

$$\beta_7 = \frac{1}{2E} \{ -(H(0) - H(L)) - LG(L) \}$$

$$\beta_8 = \frac{1}{2E} (G(0) - G(L))$$

Os graus de liberdade no contorno estão indicados na Fig. 3.2a-b.

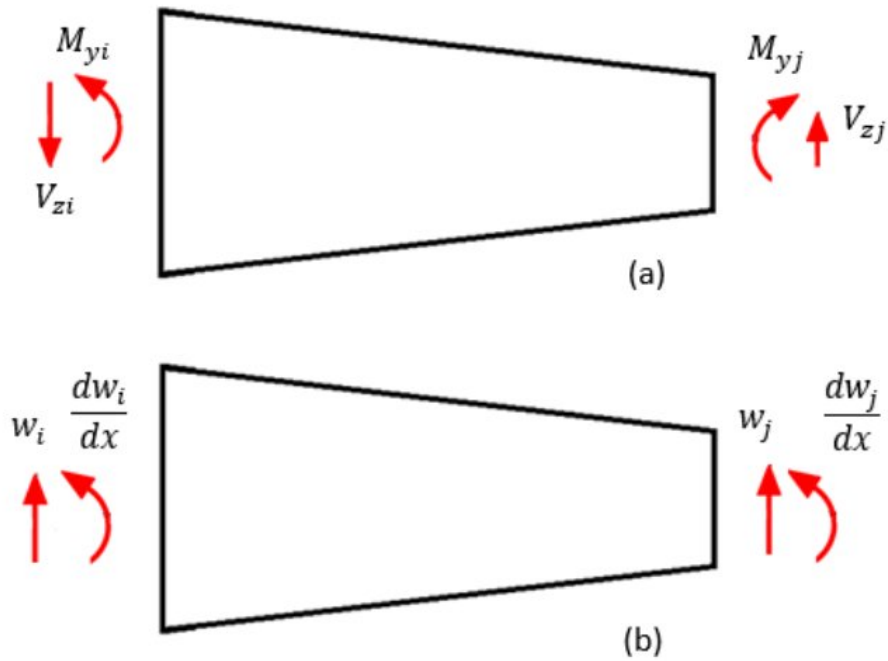


Figura 3.2 Graus de liberdade no contorno: a) esforços; b) deslocamentos

Já o vetor das cargas na Eq.(3.53) depende das funções que regem os carregamentos distribuídos em força e momento, podendo ser apresentado de uma forma genérica como:

$$\{f\} = \int_0^L \begin{bmatrix} w^*(x,0) & \frac{dw^*}{dx}(x,0) \\ w_{,\hat{x}}^*(x,0) & \frac{dw_{P,\hat{x}}^*}{dx}(x,0) \\ w^*(x,L) & \frac{dw^*}{dx}(x,L) \\ w_{,\hat{x}}^*(x,L) & \frac{dw_{P,\hat{x}}^*}{dx}(x,L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_z(x) \\ m_y(x) \end{Bmatrix} dx = \frac{1}{2E} \begin{Bmatrix} \int_0^L \left( w^*(x,0) p_z(x) + \frac{dw^*}{dx}(x,0) m_y(x) \right) dx \\ \int_0^L \left( w_{,\hat{x}}^*(x,0) p_z(x) + \frac{dw_{P,\hat{x}}^*}{dx}(x,0) m_y(x) \right) dx \\ \int_0^L \left( w^*(x,L) p_z(x) + \frac{dw^*}{dx}(x,L) m_y(x) \right) dx \\ \int_0^L \left( w_{,\hat{x}}^*(x,L) p_z(x) + \frac{dw_{P,\hat{x}}^*}{dx}(x,L) m_y(x) \right) dx \end{Bmatrix} \quad (3.55a)$$

Da substituição das soluções fundamentais Eqs.(3.28), (3.33) na Eq.(3.55a), o vetor carregamento quando submetido a carga transversal ,  $p_z(x)$  fica:

$$\{f\} = \frac{p_{zi}}{2E} \begin{Bmatrix} \int_0^L \left( [x[H(x) + H(0)]] - 2[K(x) - K(0)] \right) dx \\ \int_0^L \left( -[H(x) - H(0)] + xG(0) \right) dx \\ \int_0^L \left( [x - L][H(x) + H(L)] + 2[K(x) - K(L)] \right) dx \\ \int_0^L \left( [H(x) - H(L)] + |x - L|G(L) \right) dx \end{Bmatrix} + \frac{(p_{zj} - p_{zi})}{2EL} \begin{Bmatrix} \int_0^L x \left( [x[H(x) + H(0)]] - 2[K(x) - K(0)] \right) dx \\ \int_0^L x \left( -[H(x) - H(0)] + xG(0) \right) dx \\ \int_0^L x \left( [x - L][H(x) + H(L)] + 2[K(x) - K(L)] \right) dx \\ \int_0^L x \left( [H(x) - H(L)] + |x - L|G(L) \right) dx \end{Bmatrix} \quad (3.55b)$$

Para o caso da distribuição trapezoidal da carga ao longo da viga, vide Fig. (3.3a), o cálculo direto das integrais de domínio resulta em um vetor de carga igual a:

$$\{f\} = \frac{p_{ji}}{2E} \left[ \begin{array}{c} \left[ LK(L) + H(0) \frac{L^2}{2} + 2K(0)L - 3(W(L) - W(0)) \right] \\ \left[ -(K(L) - K(0)) + LH(0) + G(0) \frac{L^2}{2} \right] \\ L(K(L) - K(0)) + H(L) \frac{L^2}{2} - 3K(L)L + 3(W(L) - W(0)) \\ \left[ (K(L) - K(0)) - LH(L) + G(L) \frac{L^2}{2} \right] \end{array} \right] +$$

$$\frac{(p_{ji} - p_{ji})}{2EL} \left[ \begin{array}{c} \left[ L^2 K(L) + H(0) \frac{L^3}{3} + K(0)L^2 - 4(W(L) - M(L) + M(0)) \right] \\ \left[ W(L) - W(0) - LK(L) + H(0) \frac{L^2}{2} + G(0) \frac{L^3}{3} \right] \\ \left[ -L^2 K(L) + H(L) \frac{L^3}{6} + L(W(L) - W(0)) + 4(LW(L) - M(L) + M(0)) \right] \\ \left[ -W(L) + W(0) + LK(L) - H(L) \frac{L^2}{2} + G(L) \frac{L^3}{6} \right] \end{array} \right]$$

Para o caso da transformação de integral de domínio das cargas transversais em valores de contorno, o procedimento adotado aqui é semelhante ao desenvolvido no capítulo 2.

Se a carga transversal for linear, então suas equações de domínio, em termos dos valores de contorno, ficam:

$$\int_0^L p_z(x) w^*(x, \hat{x}) dx = - \left[ I w^*(x, \hat{x}) \frac{dp_z(x)}{dx} \right]_0^L + \left[ I w^*(x, \hat{x}) p_z(x) \right]_0^L$$

$$\int_0^L p_z(x) w_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) dx = - \left[ I w_{,\hat{x}}^* \frac{dp_z(x)}{dx} \right]_0^L + \left[ I w_{,\hat{x}}^* p_z(x) \right]_0^L$$

(3.55c)

Onde as integrais superiores das soluções fundamentais,  $\int w_z^* dx = I w_z^*$ ,

$\iint w_z^* dx dx = I w_z^*$ ,  $\int w_{,\hat{x}}^* dx = I w_{,\hat{x}}^*$  e  $\iint w_{,\hat{x}}^* = I w_{,\hat{x}}^*$ , podem ser encontrados no Apêndice

6.

O vetor de carga  $\{f\}$  requer a colocação do ponto-fonte nas extremidades da barra

$$\{f\} = \int_0^L \begin{bmatrix} w^*(x, 0) \\ w_{,\dot{x}}^*(x, 0) \\ w^*(x, L) \\ w_{,\dot{x}}^*(x, L) \end{bmatrix} p_z(x) dx = \begin{Bmatrix} \beta_1 - \beta_2 \\ \beta_3 - \beta_4 \\ \beta_5 - \beta_6 \\ \beta_7 - \beta_8 \end{Bmatrix} \quad (3.55d)$$

Onde:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -Iw_z^*(L, 0) \frac{dp_z(L)}{dx} + Iw_z^*(L, 0)p_z(L) \\ \beta_2 &= -Iw_z^*(0, 0) \frac{dp_z(0)}{dx} + Iw_z^*(0, 0)p_z(0) = 0 \\ \beta_3 &= -Iw_{,\dot{x}}^*(L, 0) \frac{dp_z(L)}{dx} + Iw_{,\dot{x}}^*(L, 0)p_z(L) \\ \beta_4 &= -Iw_{,\dot{x}}^*(0, 0) \frac{dp_z(0)}{dx} + Iw_{,\dot{x}}^*(0, 0)p_z(0) = 0 \\ \beta_5 &= -Iw_z^*(L, L) \frac{dp_z(L)}{dx} + Iw_z^*(L, L)p_z(L) = 0 \\ \beta_6 &= -Iw_z^*(0, L) \frac{dp_z(0)}{dx} + Iw_z^*(0, L)p_z(0) \\ \beta_7 &= -Iw_{,\dot{x}}^*(L, L) \frac{dp_z(L)}{dx} + Iw_{,\dot{x}}^*(L, L)p_z(L) = 0 \\ \beta_8 &= -Iw_{,\dot{x}}^*(0, L) \frac{dp_z(0)}{dx} + Iw_{,\dot{x}}^*(0, L)p_z(0) \end{aligned} \quad (3.55e-m)$$

Por outro lado, quando a carga for quadrática, então o número ímpar superior mais próximo é  $n=3$ , de forma que os elementos da Eq.(3.55d), ficam:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \left[ IIIw_z^*(L, 0) \frac{d^2 p_z(L)}{dx^2} \right] - \left[ IIw_z^*(L, 0) \frac{dp_z(L)}{dx} \right] + \left[ Iw_z^*(L, 0)p_z(L) \right] \\ \beta_2 &= \left[ IIIw_z^*(0, 0) \frac{d^2 p_z(0)}{dx^2} \right] - \left[ IIw_z^*(0, 0) \frac{dp_z(0)}{dx} \right] + \left[ Iw_z^*(0, 0)p_z(0) \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_3 &= \left[ IIIw_{,\dot{xy}}^*(L,0) \frac{d^2 p_z(L)}{dx^2} \right] - \left[ IIw_{,\dot{xy}}^*(L,0) \frac{dp_z(L)}{dx} \right] + \left[ Iw_{,\dot{xy}}^*(L,0) p_z(L) \right] \\
\beta_4 &= \left[ IIIw_{,\dot{xy}}^*(0,0) \frac{d^2 p_z(0)}{dx^2} \right] - \left[ IIw_{,\dot{xy}}^*(0,0) \frac{dp_z(0)}{dx} \right] + \left[ Iw_{,\dot{xy}}^*(0,0) p_z(0) \right] = 0 \\
\beta_5 &= \left[ IIIw_z^*(L,L) \frac{d^2 p_z(L)}{dx^2} \right] - \left[ IIw_z^*(L,L) \frac{dp_z(L)}{dx} \right] + \left[ Iw_z^*(L,L) p_z(L) \right] = 0 \\
\beta_6 &= \left[ IIIw_z^*(0,L) \frac{d^2 p_z(0)}{dx^2} \right] - \left[ IIw_z^*(0,L) \frac{dp_z(0)}{dx} \right] + \left[ Iw_z^*(0,L) p_z(0) \right] \\
\beta_7 &= \left[ IIIw_{,\dot{xy}}^*(L,L) \frac{d^2 p_z(L)}{dx^2} \right] - \left[ IIw_{,\dot{xy}}^*(L,L) \frac{dp_z(L)}{dx} \right] + \left[ Iw_{,\dot{xy}}^*(L,L) p_z(L) \right] = 0 \\
\beta_8 &= \left[ IIIw_{,\dot{xy}}^*(0,L) \frac{d^2 p_z(0)}{dx^2} \right]_0^L - \left[ IIw_{,\dot{xy}}^*(0,L) \frac{dp_z(0)}{dx} \right]_0^L + \left[ Iw_{,\dot{xy}}^*(0,L) p_z(0) \right]_0^L
\end{aligned}$$

(3.55n-u)

Por fim, para  $p(x)$  quártica, tem-se:

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \left[ IIIIw_p^*(L,0) \frac{d^4 p_z(L)}{dx^4} \right] - \left[ IIIIw_p^*(L,0) \frac{d^3 p_z(L)}{dx^3} \right] \\
&+ \left[ IIIw_p^*(L,0) \frac{d^2 p_z(L)}{dx^2} \right] - \left[ IIw_p^*(L,0) \frac{dp_z(L)}{dx} \right] + \left[ Iw_p^*(L,0) p_z(L) \right] \\
\beta_2 &= \left[ IIIIw_z^*(0,0) \frac{d^4 p_z(0)}{dx^4} \right] - \left[ IIIIw_z^*(0,0) \frac{d^3 p_z(0)}{dx^3} \right] \\
&+ \left[ IIIw_z^*(0,0) \frac{d^2 p_z(0)}{dx^2} \right] - \left[ IIw_z^*(0,0) \frac{dp_z(0)}{dx} \right] + \left[ Iw_z^*(0,0) p_z(0) \right] = 0 \\
\beta_3 &= \left[ IIIIw_{,\dot{xy}}^*(L,0) \frac{d^4 p_z(L)}{dx^4} \right] - \left[ IIIIw_{,\dot{xy}}^*(L,0) \frac{d^3 p_z(L)}{dx^3} \right] \\
&+ \left[ IIIw_{,\dot{xy}}^*(L,0) \frac{d^2 p_z(L)}{dx^2} \right] - \left[ IIw_{,\dot{xy}}^*(L,0) \frac{dp_z(L)}{dx} \right] + \left[ Iw_{,\dot{xy}}^*(L,0) p_z(L) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_4 &= \left[ IIIIw_{,xy}^*(0,0) \frac{d^4 p_z(0)}{dx^4} \right] - \left[ IIIw_{,xy}^*(0,0) \frac{d^3 p_z(0)}{dx^3} \right] \\
&+ \left[ IIw_{,xy}^*(0,0) \frac{d^2 p_z(0)}{d^2 x} \right] - \left[ Iw_{,xy}^*(L,0) \frac{dp_z(0)}{dx} \right] + \left[ Iw_{,xy}^*(0,0) p_z(0) \right] = 0 \\
\\
\beta_5 &= \left[ IIIIw_z^*(L,L) \frac{d^4 p_z(L)}{dx^4} \right] - \left[ IIIw_z^*(L,L) \frac{d^3 p_z(L)}{dx^3} \right] \\
&+ \left[ IIw_z^*(L,L) \frac{d^2 p_z(L)}{d^2 x} \right] - \left[ Iw_z^*(L,L) \frac{dp_z(L)}{dx} \right] + \left[ Iw_z^*(L,L) p_z(L) \right] = 0 \\
\\
\beta_6 &= \left[ IIIIw_z^*(0,L) \frac{d^4 p_z(0)}{dx^4} \right] - \left[ IIIw_z^*(0,L) \frac{d^3 p_z(0)}{dx^3} \right] \\
&+ \left[ IIw_z^*(0,L) \frac{d^2 p_z(0)}{d^2 x} \right] - \left[ Iw_z^*(0,L) \frac{dp_z(0)}{dx} \right] + \left[ Iw_z^*(0,L) p_z(0) \right] \\
\\
\beta_7 &= \left[ IIIIw_{,xy}^*(L,L) \frac{d^4 p_z(L)}{dx^4} \right] - \left[ IIIw_{,xy}^*(L,L) \frac{d^3 p_z(L)}{dx^3} \right] \\
&+ \left[ IIw_{,xy}^*(L,L) \frac{d^2 p_z(L)}{d^2 x} \right] - \left[ Iw_{,xy}^*(L,L) \frac{dp_z(L)}{dx} \right] + \left[ Iw_{,xy}^*(L,L) p_z(L) \right] = 0 \\
\\
\beta_8 &= \left[ IIIIw_{,xy}^*(0,L) \frac{d^4 p_z(0)}{dx^4} \right] - \left[ IIIw_{,xy}^*(0,L) \frac{d^3 p_z(0)}{dx^3} \right] \\
&+ \left[ IIw_{,xy}^*(0,L) \frac{d^2 p_z(0)}{d^2 x} \right] - \left[ Iw_{,xy}^*(0,L) \frac{dp_z(0)}{dx} \right] + \left[ Iw_{,xy}^*(0,L) p_z(0) \right]
\end{aligned} \tag{3.55k-r}$$

Já, para o caso em que for aplicada uma carga concentrada  $F_z$  a uma distância “ $\bar{a}$ ” da extremidade esquerda como mostrado na Fig. (3.3b), o vetor de carga fica:

$$\{f\} = \frac{F_z}{2E} \begin{bmatrix} [a(H(a) + H(0)) - 2(K(a) - K(0))] \\ [- (H(a) - H(0)) + aG(0)] \\ [L - a|(H(a) + H(L)) + 2(K(a) - K(L))|] \\ [(H(a) - H(L)) + |L - a|G(L)] \end{bmatrix}$$

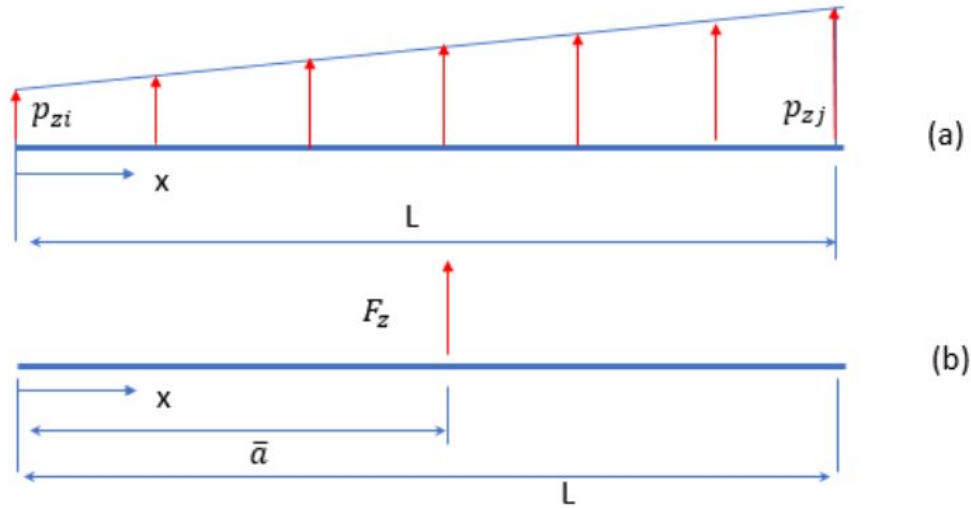


Figura3.3. Carregamentos transversais na viga: a) trapezoidal, b) concentrado

### 3.5.1 TRANSFORMAÇÕES NO SISTEMA PARA SUA SOLUÇÃO

Para solução das incógnitas do problema, é necessária a formação da matriz de influência das incógnitas e do vetor independente. Essa formação é obtida a partir da imposição das condições de contorno. Por exemplo, se for prescrita a rotação apenas no nó inicial as matrizes de influência das incógnitas e vetor das incógnitas são dados por:

$$[A] = \begin{bmatrix} H_{11} & -G_{12} & H_{13} & H_{14} \\ H_{21} & -G_{22} & H_{23} & H_{24} \\ H_{31} & -G_{32} & H_{33} & H_{34} \\ H_{41} & -G_{42} & H_{43} & H_{44} \end{bmatrix}$$

$$\{B\} = \begin{bmatrix} G_{11} & -H_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & -H_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & -H_{32} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & -H_{42} & G_{43} & G_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ u_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix}$$

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ p_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

Para prescrição de outros graus de liberdade, alterações similares devem ser feitas no sistema algébrico, resultando no sistema final a ser resolvido:



$$[A]\{x\} = \{B\}$$

Aplicando um método de solução de sistema, por exemplo um método direto, fica:

$$\{x\} = [A]^{-1} \{B\}$$

### 3.5.2 DETERMINAÇÃO DOS CAMPOS NO DOMÍNIO

Os campos em deslocamentos no domínio da barra podem ser obtidos após a determinação das variáveis do contorno utilizando a Eq. (3.53) com colocação do ponto fonte e “a” resultando em:

$$\{u(a)\} + [H(a)]\{u\} = [G(a)]\{p\} + \{f(a)\}$$

Onde:

$$[H(a)] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{a}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{|L-a|}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{L}{2} \end{bmatrix}$$

$$[G(a)] = \begin{bmatrix} \beta_1(a) & \beta_2(a) & \beta_3(a) & \beta_4(a) \\ \beta_5(a) & \beta_6(a) & \beta_7(a) & \beta_8(a) \end{bmatrix}$$

com

$$\beta_1(a) = \frac{1}{2E} \{[H(0) + H(a)] + 2[K(0) - K(a)]\}$$

$$\beta_2(a) = \frac{1}{2E} \{[H(0) - H(a)] + aG(0)\}$$

$$\beta_3(a) = \frac{1}{2E} \{L - a[H(L) + H(a)] - 2[K(L) - K(a)]\}$$

$$\beta_4(a) = \frac{1}{2E} \{-[H(L) - H(a)] + |L - a|G(L)\}$$

$$\beta_5(a) = \frac{1}{2E} \{[H(0) - H(a)] + aG(a)\}$$

$$\beta_6(a) = \frac{1}{2E} \{[G(0) - G(a)]\}$$

$$\beta_7(a) = \frac{1}{2E} \{-[H(L) - H(a)] + |L - a|G(a)\}$$

$$\beta_8(a) = \frac{1}{2E} \{-[G(L) - G(a)]\}$$

Quando a carga tem distribuição linear, após o cálculo das integrais de domínio na Eq. (3.55d), o vetor de carga fica:

$$\begin{aligned} \{f(a)\} = & \frac{p_{zi}}{2E} \left[ \begin{aligned} & 6W(a) - 3W(L) - 3W(0) + H(a)a^2 + K(L)L + 2K(a)L - K(0)a \\ & \frac{G(a)L^2}{2} - G(a)La + H(a)L \end{aligned} \right] + \\ & \frac{p_{zi}}{2E} \left[ \begin{aligned} & -K(L)a - 4K(a)a + \frac{H(a)L^2}{2} - H(a)La \\ & G(a)a^2 - 2H(a)a - K(0) - K(L) + 2K(a) \end{aligned} \right] + \\ & \frac{(p_{zj} - p_{zi})}{2EL} \left[ \begin{aligned} & 4M(0) + 4M(L) - 8M(a) + \frac{H(a)a^3}{3} - 2K(a)a^2 - 4LW(L) + W(0)a \\ & \frac{G(a)L^3}{3} - \frac{G(a)L^2a}{2} + \frac{H(a)L^2}{2} - K(L)L \end{aligned} \right] + \\ & \frac{(p_{zj} - p_{zi})}{2EL} \left[ \begin{aligned} & W(L)a + 6W(a)a + \frac{H(a)L^3}{3} + K(L)L^2 + K(a)L - \frac{H(a)L^2a}{2} - K(L)La \\ & \frac{G(a)a^3}{3} - H(a)a^2 + 2K(a)a + W(0) + W(L) - 2W(a) \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

### 3.6 PROBLEMA REAL: TIMOSHENKO

Uma hipótese adicional para o desenvolvimento da teoria de vigas de Timoshenko àquelas apresentadas na seção 2.1, é que a normal não necessita ser obrigatoriamente ortogonal à seção transversal, de forma que a deformação por cortante é levada em consideração.

Considera-se uma barra não prismática de seção transversal de área  $A(x)$ , de inércia  $I(x)$ , material com módulo de Young  $E$ , sob a ação do carregamento distribuído  $p_z(x)$  e  $m_y(x)$ .

Como na teoria de Timoshenko a distorção devido ao cisalhamento  $\gamma_{xz}$  é levada em consideração, a rotação da seção transversal dependerá da inclinação da linha elástica da viga bem como da distorção devido ao cisalhamento. O deslocamento axial pode ser escrito em função da profundidade da fibra  $z$  e do ângulo de rotação  $\phi$  resultando em:

$$u(x) = -z(-\phi(x)) \quad (3.56)$$

Além disso, a deformação axial e a distorção no plano xz dadas por:

$$\varepsilon_x = \frac{du(x)}{dx} = -z \frac{d\phi(x)}{dx} \quad (3.57)$$

$$\gamma_{xz} = \left( \frac{du(x)}{dz} + \frac{dw(x)}{dx} \right) \quad (3.58)$$

Assim, após a substituição da Eq. (3.56) na Eq.(3.57), a distorção  $\gamma_{xz}(x)$  pode ser reescrita como:

$$\gamma_{xz} = \phi(x) + \frac{dw(x)}{dx} \quad (3.59)$$

As relações tensão-deformação da barra, desprezando o coeficiente de Poisson  $\nu = 0$ , pode ser dada por:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = Ez \frac{d\phi(x)}{dx} \quad (3.60)$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} = G\left[\frac{dw(x)}{dx} + \phi(x)\right] \quad (3.61)$$

Já os esforços são:

$$M(x) = \int_A \sigma_x z dA = EI(x) \frac{d\phi(x)}{dx} \quad (3.62)$$

$$V(x) = \int_A \kappa \tau_{xz} dA = \kappa GA(x) \left[ \frac{dw(x)}{dx} + \phi(x) \right] \quad (3.63)$$

Onde:

$$I(x) = \int_{-b\inf(x)}^{+b\sup(x)} \int_{-z\inf(x)}^{+z\sup(x)} z^2 dz dy$$

$$A(x) = \int_{-b\inf(x)}^{+b\sup(x)} \int_{-z\inf(x)}^{+z\sup(x)} dz dy$$

Sendo  $\kappa$  o fator de forma da seção transversal, que segundo HUTCHINSON(2001), esse fator para as seções retangulares e circulares valem respectivamente  $k = 5(1 + \nu)/(6 + 5\nu)$  e  $k = 6(1 + \nu)^2/(7 + 12\nu + 4\nu^2)$ .

A obtenção da equação governante do problema real de viga de Timoshenko pode ser obtida pela condição estacionária do funcional de energia, desta forma tem-se:

$$\delta\pi = \int_V (\sigma_x \delta\epsilon_x + \tau_{xz} \delta\gamma_{xz}) dV - \int_0^L (p_x \delta u + p_z \delta w + m \delta \gamma) dx = 0 \quad (3.64)$$

Substituindo-se (3.4) e (3.5) em (3.64), seguida da integração na área transversal, o funcional de energia total da viga de Timoshenko é dada por:

$$\begin{aligned} \delta\pi = & \int_0^L \left( \frac{d\phi(x)}{dx} \right) EI(x) \delta \left( \frac{d\phi(x)}{dx} \right) dx + \int_0^L \left( \frac{dw(x)}{dx} + \phi(x) \right) \kappa GA(x) \delta \left( \frac{dw(x)}{dx} + \phi(x) \right) dx \\ & - \int_0^L p_x(x) \delta u(x) dx - \int_0^L p_z(x) \delta w(x) dx - \int_0^L m_y(x) \delta \phi(x) dx = 0 \end{aligned} \quad (3.65)$$

Integrando convenientemente por partes a Eq.(3.65), obtém-se:

$$\begin{aligned} \delta\pi = & \left[ \frac{d\phi(x)}{dx} EI(x) \delta \phi(x) \right]_0^L - \int_0^L \frac{d}{dx} \left\{ \frac{d\phi(x)}{dx} EI(x) \right\} \delta \phi(x) dx + \left[ \left( \frac{dw(x)}{dx} + \phi(x) \right) \kappa GA(x) \delta w(x) \right]_0^L \\ & - \int_0^L \frac{d}{dx} \left\{ \left( \frac{dw(x)}{dx} + \phi(x) \right) \kappa GA(x) \right\} \delta w(x) dx + \int_0^L \left( \frac{dw(x)}{dx} + \phi(x) \right) \kappa GA(x) \delta \phi(x) dx \\ & - \int_0^L p_x(x) \delta u(x) dx - \int_0^L p_z(x) \delta w(x) dx - \int_0^L m_y(x) \delta \phi(x) dx = 0 \end{aligned} \quad (3.66)$$

Como a variação dos campos no contorno é nula  $[\delta \phi(x)]_0^L = [\delta w(x)]_0^L = 0$ , então a Eq. (3.66) fica reduzida a:

$$\begin{aligned}\delta\pi = & -\int_0^L \left[ \frac{d}{dx} \left\{ \left( \frac{dw(x)}{dx} + \phi(x) \right) \kappa GA(x) \right\} + p_z(x) \right] \delta w(x) dx \\ & - \int_0^L \left[ \frac{d}{dx} \left\{ \frac{d\phi(x)}{dx} EI(x) \right\} - \left( \frac{dw(x)}{dx} + \phi(x) \right) \kappa GA(x) + m_y(x) \right] \delta \phi(x) dx = 0\end{aligned}\quad (3.67)$$

Aplicando-se a condição estacionária  $\delta\pi=0$  na Eq.(3.67) e levando em consideração que ambas as variações de  $\delta w(x)$  e  $\delta \phi(x)$  são arbitrárias, a nulidade será sempre garantida se:

$$\frac{d}{dx} \left\{ \kappa GA(x) \left( \frac{dw(x)}{dx} + \phi(x) \right) \right\} + p_z(x) = 0 \quad (3.68)$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ EI(x) \frac{d\phi(x)}{dx} \right\} - \kappa GA(x) \left( \frac{dw(x)}{dx} + \phi(x) \right) + m_y(x) = 0 \quad (3.69)$$

As equações de equilíbrio em termos dos esforços podem ser escritas comparando-se as Eqs. (3.68), (3.69), (3.62) e (3.63), resultando em:

$$\frac{dV}{dx} + p = 0 \quad (3.70)$$

$$-V + \frac{dM}{dx} + m_y = 0 \quad (3.71)$$

### 3.7 PROBLEMA FUNDAMENTAL: TIMOSHENKO

No caso do MEC direto, o problema fundamental da viga de Timoshenko será caracterizado por uma barra de comprimento infinito submetida a fontes pontuais convenientes com propriedades mecânicas e geométricas similares ao do problema real. Quando for ativada apenas a fonte em força na direção  $z$ ,  $p_z^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$  e  $m_y^*(x, \hat{x}) = 0$ , as equações que regem o problema fundamental são análogas às do problemas dadas nas Eqs.(3.68) e (3.69), resultando em:

$$\frac{d}{dx}\{\kappa GA(x)\left[\frac{dw_p^*(x, \hat{x})}{dx} + \phi_p^*(x, \hat{x})\right]\} = -p_z^*(x, \hat{x}) = -\delta(x, \hat{x}) \quad (3.72)$$

$$\frac{d}{dx}\{EI(x)\frac{d\phi_p^*(x, \hat{x})}{dx}\} - \kappa GA(x)\left[\frac{dw_p^*(x, \hat{x})}{dx}(\kappa GA(x)) + \phi_p^*(x, \hat{x})\right] = 0 \quad (3.73)$$

Ou

$$\frac{dV_p^*}{dx} + \delta(x, \hat{x}) = 0 \quad (3.74)$$

$$-V_p^* + \frac{dM_p^*}{dx} = 0 \quad (3.75)$$

As soluções propostas neste trabalho para as Eqs. (3.72-73) foram obtidas utilizando identidades análogas àquelas dadas nas Eqs. (3.27), (3.30). Assim, as soluções para os deslocamentos transversais e rotações da seção ficam:

$$w_p^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2\kappa G} \text{sgn}(x - \hat{x}) [\hat{F}(x) - \hat{F}(\hat{x})] + \frac{1}{2E} [r(H(x) + H(\hat{x})) - 2 \text{sgn}(x - \hat{x})(K(x) - K(\hat{x}))] \quad (3.76)$$

$$\phi_p^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2E} [rG(x) - \text{sgn}(x, \hat{x})(H(x) - H(\hat{x}))] \quad (3.77)$$

Já os esforços fundamentais podem ser obtidos substituindo-se convenientemente (3.76) e (3.77) em (3.63) e (3.62):

$$V_p^*(x, \hat{x}) = \kappa GA(x) \left[ \frac{dw_p^*(x, \hat{x})}{dx} + \phi_p^*(x, \hat{x}) \right] = -\frac{\text{sgn}(x, \hat{x})}{2} \quad (3.78)$$

$$M_p^*(x, \hat{x}) = EI(x) \frac{d\phi_p^*(x, \hat{x})}{dx} = -\frac{r}{2} \quad (3.79)$$

Por outro lado, quando a ativação da fonte for  $m = \delta(x, \hat{x})$  e  $p_z^*(x, \hat{x}) = 0$ , as equações governantes ficam:

$$\frac{d}{dx}\{\kappa GA(x)\left[\frac{dw_m^*(x, \hat{x})}{dx} + \phi_m^*(x, \hat{x})\right]\} = 0 \quad (3.80)$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ EI(x) \frac{d\phi_m^*(x, \hat{x})}{dx} \right\} - \kappa GA(x) \left[ \frac{dw_m^*(x, \hat{x})}{dx} (\kappa GA(x)) + \phi_m^*(x, \hat{x}) \right] = -\delta(x, \hat{x}) \quad (3.81)$$

Ou

$$\frac{dV_m^*}{dx} = 0 \quad (3.82)$$

$$-V_m^* + \frac{dM_m^*}{dx} + \delta(x, \hat{x}) = 0 \quad (3.83)$$

Aqui também faz-se uso de identidades análogas a (3.27), (3.30) para solução de (3.80) e (3.81). Assim, os deslocamentos e rotações fundamentais ficam:

$$w_m^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{2E} \{ \text{sgn}(x, \hat{x}) [H(x) - H(\hat{x}) - rG(\hat{x})] \} \quad (3.84)$$

$$\phi_m^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2E} [ \text{sgn}(x, \hat{x}) (G(x) - G(\hat{x})) ] \quad (3.85)$$

Já os esforços fundamentais (cortante e momento fletor) podem ser obtidos substituindo-se convenientemente (3.84) e (3.85) em (3.63) e (3.62):

$$V_m^*(x, \hat{x}) = \kappa GA(x) \left[ \frac{dw_m^*(x, \hat{x})}{dx} + \phi_m^*(x, \hat{x}) \right] = 0 \quad (3.86)$$

$$M_m^*(x, \hat{x}) = EI(x) \frac{d\phi_m^*(x, \hat{x})}{dx} = -\frac{\text{sgn}(x, \hat{x})}{2} \quad (3.87)$$

### 3.8 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL

Uma das maneiras de obtenção das Equações integrais do problema é via método dos Resíduos Ponderados. Neste caso, se as equações governantes, Eq. (3.68-69), forem ponderadas por soluções fundamentais oriundas da ativação da fonte em força na direção transversal, uma relação pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \left\{ \frac{d}{dx} [\kappa GA(x) \left( \frac{dw(x)}{dx} + \phi(x) \right)] + p_z(x) \right\} w_p^*(x, \hat{x}) dx + \\
& \int_0^L \left\{ \frac{d}{dx} [EI(x) \frac{d\phi(x)}{dx}] - \kappa GA(x) \left( \frac{dw(x)}{dx} + \phi(x) \right) + m_y(x) \right\} \phi_p^*(x, \hat{x}) dx = 0
\end{aligned} \tag{3.88}$$

Fazendo integrações por partes na Eq. (3.88) e a conveniente substituição dos esforços dados nas Eqs. (3.62) e (3.63), obtém-se:

$$\begin{aligned}
& [V w_p^*]_0^L + [M \phi_p^*]_0^L - \int_0^L [\kappa GA(x) \left( \frac{dw(x)}{dx} + \phi(x) \right) \frac{dw_p^*}{dx} - p_z(x) w_p^*] dx - \\
& \int_0^L \left\{ [EI(x) \frac{d\phi(x)}{dx}] \frac{d\phi_p^*}{dx} + \kappa GA(x) \left( \frac{dw(x)}{dx} + \phi(x) \right) \phi_p^* + m_y(x) \phi_p^* \right\} dx = 0
\end{aligned} \tag{3.89}$$

A Eq.(3.89) pode ser reagrupada como:

$$\begin{aligned}
& [V w_p^*]_0^L + [M \phi_p^*]_0^L - \int_0^L [\kappa GA(x) \left( \frac{dw_p^*}{dx} + \phi_p^* \right) \frac{dw(x)}{dx} - p_z(x) w_p^*] dx - \\
& \int_0^L \left\{ [EI(x) \frac{d\phi_p^*}{dx}] \frac{d\phi(x)}{dx} + \kappa GA(x) \left( \frac{dw_p^*}{dx} + \phi_p^* \right) \phi(x) + m_y(x) \phi_p^* \right\} dx = 0
\end{aligned} \tag{3.90}$$

Ao substituir os esforços fundamentais na Eq.(3.90) fica:

$$\begin{aligned}
& [V(x) w_p^*(x, \hat{x})]_0^L + [M \phi_p^*(x, \hat{x})]_0^L - \int_0^L [V_p^*(x, \hat{x}) \frac{dw(x)}{dx} - p_z(x) w_p^*(x, \hat{x})] dx - \\
& \int_0^L \left\{ M_p^*(x, \hat{x}) \frac{d\phi(x)}{dx} + V_p^*(x, \hat{x}) \phi(x) + m_y(x) \phi_p^*(x, \hat{x}) \right\} dx = 0
\end{aligned} \tag{3.91}$$

Ao efetuar integrações por partes convenientes em (3.91) resulta em:

$$\begin{aligned}
& [V(x) w_p^*(x, \hat{x})]_0^L + [M \phi_p^*(x, \hat{x})]_0^L - [V_p^*(x, \hat{x}) w(x)]_0^L - [M_p^*(x, \hat{x}) \phi(x)]_0^L \\
& - \int_0^L \left[ \frac{dV_p^*(x, \hat{x})}{dx} w(x) \right] dx + \int_0^L \left\{ \frac{dM_p^*(x, \hat{x})}{dx} - V_p^*(x, \hat{x}) \right\} \phi(x) dx \\
& - \int_0^L [p_z(x) w_p^*(x, \hat{x}) + m_y(x) \phi_p^*(x, \hat{x})] dx = 0
\end{aligned} \tag{3.92}$$

Utilizando-se as Eqs. (3.74) e (3.75) em (3.92), seguida da propriedade de translação do delta de Dirac, resulta na equação integral dos deslocamentos transversais:



$$\begin{aligned}
& w(\hat{x}) + \left[ -V(x)w_p^*(x, \hat{x}) + V_p^*(x, \hat{x})w(x) \right]_0^L + \left[ -M(x)\phi_p^*(x, \hat{x}) + M_p^*(x, \hat{x})\phi(x) \right]_0^L = \\
& = \int_0^L \left( p_z(x)w_p^*(x, \hat{x}) + m_y(x)\phi_p^*(x, \hat{x}) \right) dx
\end{aligned} \tag{3.93}$$

Convém notar se a ativação da fonte for em momento no problema fundamental, a relação do resíduo ponderado das Eqs. (3.68-69) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \left\{ \frac{d}{dx} [\kappa GA(x) \left( \frac{dw(x)}{dx} + \phi(x) \right)] + p_z(x) \right\} w_m^*(x, \hat{x}) dx + \\
& \int_0^L \left\{ \frac{d}{dx} [EI(x) \frac{d\phi(x)}{dx}] - \kappa GA(x) \left( \frac{dw(x)}{dx} + \phi(x) \right) + m_y(x) \right\} \phi_m^*(x, \hat{x}) dx = 0
\end{aligned} \tag{3.94}$$

Se a Eq. (3.94) for submetida a um procedimento análogo ao aplicado à Eq. (3.88), uma relação pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
& \left[ V(x)w_m^*(x, \hat{x}) \right]_0^L + \left[ M\phi_m^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[ V_m^*(x, \hat{x})w(x) \right]_0^L - \left[ M_m^*(x, \hat{x})\phi(x) \right]_0^L - \int_0^L \frac{dV_m^*(x, \hat{x})}{dx} w(x) dx \\
& + \int_0^L \left\{ \frac{dM_m^*(x, \hat{x})}{dx} - V_m^*(x, \hat{x}) \right\} \phi(x) dx - \int_0^L [p_z(x)w_m^*(x, \hat{x}) + m_y(x)\phi_m^*(x, \hat{x})] dx = 0
\end{aligned} \tag{3.95}$$

Utilizando-se (3.82) e (3.83) em (3.95), seguida da propriedade de translação do delta de Dirac, resulta na equação integral das rotações das seções

$$\begin{aligned}
& \phi(\hat{x}) + \left[ -V(x)w_m^*(x, \hat{x}) + V_m^*(x, \hat{x})w(x) \right]_0^L + \left[ -M(x)\phi_m^*(x, \hat{x}) + M_m^*(x, \hat{x})\phi(x) \right]_0^L \\
& = \int_0^L \left( p_z(x)w_m^*(x, \hat{x}) + m_y(x)\phi_m^*(x, \hat{x}) \right) dx
\end{aligned} \tag{3.96}$$

Escrevendo com notação matricial a Eq. (3.93) e a Eq. (3.96), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} w(\hat{x}) \\ \phi(\hat{x}) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} V_p^*(x, \hat{x}) & M_p^*(x, \hat{x}) \\ V_m^*(x, \hat{x}) & M_m^*(x, \hat{x}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w(x) \\ \phi(x) \end{Bmatrix}_0^L = \tag{3.97}$$

$$\begin{bmatrix} w_p^*(x, \hat{x}) & \phi_p^*(x, \hat{x}) \\ w_m^*(x, \hat{x}) & \phi_m^*(x, \hat{x}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_z(x) \\ M_y(x) \end{Bmatrix}_0^L + \int_0^L \begin{bmatrix} w_p^*(x, \hat{x}) & \phi_p^*(x, \hat{x}) \\ w_m^*(x, \hat{x}) & \phi_m^*(x, \hat{x}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_z(x) \\ m_y(x) \end{Bmatrix} dx$$

### 3.8.1 REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA

Após a efetivação das integrações indicadas na Eq. (3.97) faz-se a colocação da fonte de força e de momento, uma de cada vez, nas extremidades da barra, ou seja, na extremidade inicial quando  $\hat{x}$  tende a zero e na extremidade final, para a qual  $\hat{x}$  tende a  $L$ , obtendo-se a expressão geral da representação algébrica do efeito de flexão que na forma matricial fica:

$$\{u\} + [H]\{u\} = [G]\{p\} + \{f\} \quad (3.98)$$

Onde  $\{u\}$  e  $\{p\}$  são os vetores de deslocamentos e solicitações internas, cujas formas explícitas são dadas por:

$$\{u\} = [w_i \quad \phi_i \quad w_j \quad \phi_j]^T = [w(0) \quad \phi(0) \quad w(L) \quad \phi(L)]^T$$

$$\{p\} = [V_i \quad M_i \quad V_j \quad M_j]^T = [V(0) \quad M(0) \quad V(L) \quad M(L)]^T$$

Os graus de liberdade no contorno estão indicados na Fig. 3.3a-b.

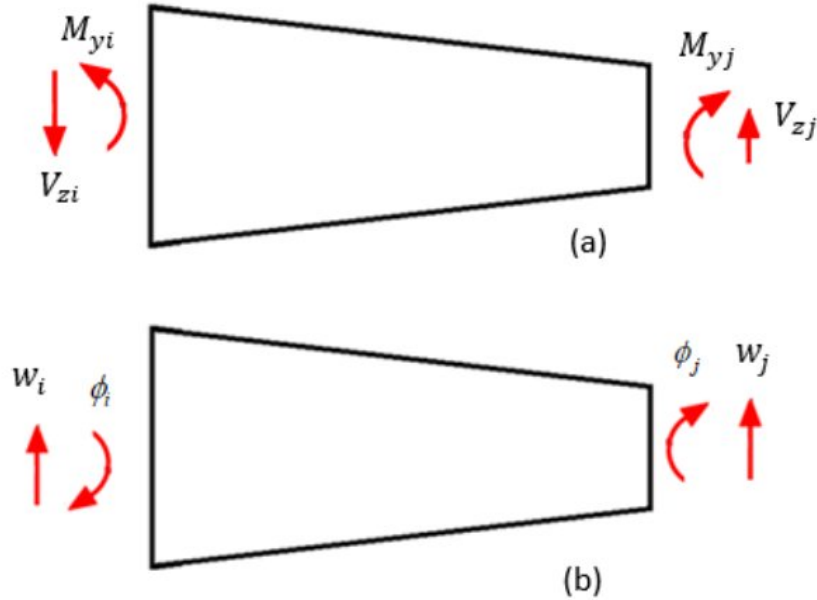


Figura 3.3a-b Graus de liberdade no contorno

Já  $[H]$ ,  $[G]$  são as matrizes de influência.

$$[H] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{L}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{L}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad [G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & 0 & \beta_3 & \beta_4 \\ \beta_5 & \beta_6 & 0 & 0 \\ \beta_7 & \beta_8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Com:

$$\beta_1 = -\frac{1}{2\kappa G} [\hat{F}(L) - \hat{F}(0)] + \frac{1}{2E} \{L(H(L) + H(0)) - 2(K(L) - K(0))\}$$

$$\beta_2 = -\frac{1}{2E} \{-(H(L) - H(0)) + LG(L)\}$$

$$\beta_3 = \frac{1}{2E} \{(K(L) - K(0)) - LH(0)\}$$

$$\beta_4 = -\frac{1}{2E} (H(L) - H(0))$$

$$\beta_5 = -\frac{1}{2\kappa G} [\hat{F}(0) - \hat{F}(L)] - \frac{1}{2E} \{L(H(L) + H(0)) + 2(K(0) - K(L))\}$$

$$\beta_6 = \frac{1}{2E} \{(H(0) - H(L)) + LG(0)\}$$

$$\beta_7 = -\frac{1}{2E} \{(K(L) - K(0)) + LH(L)\}$$

$$\beta_8 = -\frac{1}{2E} (H(0) - H(L))$$

Já o vetor das cargas  $\{f\}$  na Eq. (3.98) depende das funções que regem os carregamentos, podendo ser apresentado de uma forma genérica como:

$$\{f\} = \int_0^L \begin{bmatrix} w_p^*(x, 0) & \phi_p^*(x, 0) \\ w_m^*(x, 0) & \phi_m^*(x, 0) \\ w_p^*(x, L) & \phi_p^*(x, L) \\ w_m^*(x, L) & \phi_m^*(x, L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_z(x) \\ m_y(x) \end{Bmatrix} dx = \begin{Bmatrix} \int_0^L (w_p^*(x, 0) p_z(x) + \phi_p^*(x, 0) m_y(x)) dx \\ \int_0^L (w_m^*(x, 0) p_z(x) + \phi_m^*(x, 0) m_y(x)) dx \\ \int_0^L (w_p^*(x, L) p_z(x) + \phi_p^*(x, L) m_y(x)) dx \\ \int_0^L (w_m^*(x, L) p_z(x) + \phi_m^*(x, L) m_y(x)) dx \end{Bmatrix} \quad (3.98a)$$

Da substituição das soluções fundamentais Eq.(3.76) e Eq.(3.84) na Eq.(3.98a), o vetor carregamento quando submetido ao carregamento transversal  $p_z(x)$ , fica:

$$\{f\} = p_{zi} \left\{ \begin{array}{c} \int_0^L \left( -\frac{1}{2\kappa G} [\hat{F}(x) - \hat{F}(0)] + \frac{1}{2E} [x(H(x) + H(0)) - 2(K(x) - K(0))] \right) dx \\ \int_0^L \left( \frac{1}{2E} \{ [H(x) - H(0) - xG(0)] \} \right) dx \\ \int_0^L \left( \frac{1}{2\kappa G} [\hat{F}(x) - \hat{F}(L)] + \frac{1}{2E} [|x-L|(H(x) + H(L)) + 2(K(x) - K(L))] \right) dx \\ \int_0^L \left( \frac{1}{2E} \{ -[H(x) - H(L) - |x-L|G(L)] \} \right) dx \end{array} \right\} + (p_{zj} - p_{zi}) \left\{ \begin{array}{c} \int_0^L x \left( -\frac{1}{2\kappa G} [\hat{F}(x) - \hat{F}(0)] + \frac{1}{2E} [x(H(x) + H(0)) - 2(K(x) - K(0))] \right) dx \\ \int_0^L x \left( \frac{1}{2E} \{ [H(x) - H(0) - xG(0)] \} \right) dx \\ \int_0^L x \left( \frac{1}{2\kappa G} [\hat{F}(x) - \hat{F}(L)] + \frac{1}{2E} [|x-L|(H(x) + H(L)) + 2(K(x) - K(L))] \right) dx \\ \int_0^L x \left( \frac{1}{2E} \{ -[H(x) - H(L) - |x-L|G(L)] \} \right) dx \end{array} \right\} \quad (3.98b)$$

Para o caso da distribuição trapezoidal da carga ao longo da viga, o vetor de carga fica:

$$\{f\} = \frac{p_{zi}}{2\kappa G} \begin{bmatrix} [\hat{G}(L) - \hat{G}(0) - L\hat{F}(0)] \\ 0 \\ [\hat{G}(L) - \hat{G}(0) - \hat{F}(L)L] \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{p_{zi}}{2E} \begin{bmatrix} \left\{ [L[K(L) + K(0)] + 2(W(0) - W(L)) + H(0) \frac{L^2}{2} \right\} \\ \left\{ K(L) - K(0) - LH(0) + G(0) \frac{L^2}{2} \right\} \\ \left\{ \left( L - \frac{L^2}{2} \right) H(L) - LH(0) - 3LK(L) + 3(W(L) - W(0)) \right\} \\ \left\{ K(0) - K(L) + LH(L) - G(L) \frac{L^3}{2} \right\} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(p_{zj} - p_{zi})}{2\kappa GL} \left[ \begin{array}{c} \left\{ L^2 K(L) + H(0) \frac{L^3}{3} + K(0)L^2 - 4(W(L) - M(L) + M(0)) \right\} \\ 0 \\ \left\{ L\hat{G}(L) - \hat{H}(L) + \hat{H}(0) - \hat{F}(L) \frac{L^2}{2} \right\} \\ 0 \end{array} \right] + \\
& \frac{(p_{zj} - p_{zi})}{2EL} \left[ \begin{array}{c} \left\{ L^2 K(L) + H(0) \frac{L^3}{3} + 4[M(L) - M(0) - LW(0)] \right\} \\ \left\{ LK(L) - W(L) + W(0) - H(0) \frac{L^2}{2} - G(0) \frac{L^3}{3} \right\} \\ \left\{ L[3W(L) + W(0)] + 4[M(0) - M(L)] + H(L) \frac{L^3}{6} - K(L)L^2 \right\} \\ \left\{ W(L) - W(0) - LK(L) + H(0) \frac{L^2}{2} - G(0) \frac{L^3}{6} \right\} \end{array} \right]
\end{aligned}$$

Para o caso da transformação de integral de domínio das cargas transversais em valores de contorno, o procedimento adotado aqui é semelhante ao desenvolvido no capítulo 2.

Se a carga transversal for quártica, então suas equações de domínio em termos dos valores de contorno ficam:

$$\begin{aligned}
\int_0^L p_z(x) w_p^*(x, \hat{x}) dx &= \left[ IIII w_p^*(x, \hat{x}) \frac{d^4 p_z(x)}{dx^4} \right]_0^L - \left[ III w_p^*(x, \hat{x}) \frac{d^3 p_z(x)}{dx^3} \right]_0^L \\
&+ \left[ II w_p^*(x, \hat{x}) \frac{d^2 p_z(x)}{dx^2} \right]_0^L - \left[ I w_p^*(x, \hat{x}) \frac{dp_z(x)}{dx} \right]_0^L + \left[ I w_p^*(x, \hat{x}) p_z(x) \right]_0^L \\
\int_0^L p_z(x) w_m^*(x, \hat{x}) dx &= \left[ IIII w_m^*(x, \hat{x}) \frac{d^4 p_z(x)}{dx^4} \right]_0^L - \left[ III w_m^*(x, \hat{x}) \frac{d^3 p_z(x)}{dx^3} \right]_0^L \\
&+ \left[ II w_m^*(x, \hat{x}) \frac{d^2 p_z(x)}{dx^2} \right]_0^L - \left[ I w_m^*(x, \hat{x}) \frac{dp_z(x)}{dx} \right]_0^L + \left[ I w_m^*(x, \hat{x}) p_z(x) \right]_0^L
\end{aligned} \tag{3.99-100}$$

Onde as integrais superiores das soluções fundamenatais,

$$\begin{aligned}
\int \int \int \int w_p^*(x, \hat{x}) dx dx dx dx &= IIII w_p^*(x, \hat{x}), \int \int \int \int w_p^*(x, \hat{x}) dx dx dx dx = IIII w_p^*(x, \hat{x}), \\
\int \int \int w_p^*(x, \hat{x}) dx dx dx &= III w_p^*(x, \hat{x}), \int \int w_p^*(x, \hat{x}) dx dx = II w_p^*(x, \hat{x}), \\
\int w_p^*(x, \hat{x}) dx &= I w_p^*(x, \hat{x}), \int \int \int \int w_m^*(x, \hat{x}) dx dx dx dx = IIII w_m^*(x, \hat{x}), \\
\int \int \int \int w_m^*(x, \hat{x}) dx dx dx dx &= IIII w_m^*(x, \hat{x}), \int \int \int w_m^*(x, \hat{x}) dx dx dx = III w_m^*(x, \hat{x}), \\
\int \int w_m^*(x, \hat{x}) dx dx &= II w_m^*(x, \hat{x}), \int w_m^*(x, \hat{x}) dx = I w_m^*(x, \hat{x}).
\end{aligned}$$

$\int \int w_m^*(x, \hat{x}) dx dx = I w_m^*(x, \hat{x}), \int w_m^*(x, \hat{x}) dx = I w_m^*(x, \hat{x})$ , podem ser encontradas no Apêndice 6.

O vetor de carga  $\{f\}$  pode ainda ser escrito pela colocação do ponto-fonte nas extremidades da barra

$$\{f\} = \int_0^L \begin{bmatrix} w_p^*(x, 0) \\ w_m^*(x, 0) \\ w_p^*(x, L) \\ w_m^*(x, L) \end{bmatrix} p_z(x) dx = \begin{bmatrix} \beta_1 - \beta_2 \\ \beta_3 - \beta_4 \\ \beta_5 - \beta_6 \\ \beta_7 - \beta_8 \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

Onde:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= (fat_1) IIII w_p^*(L, 0) \frac{d^4 p_z(L)}{dx^4} - (fat_1) IIII w_p^*(L, 0) \frac{d^3 p_z(L)}{dx^3} \\ &+ (fat_2) III w_p^*(L, 0) \frac{d^2 p_z(L)}{d^2 x} - II w_p^*(L, 0) \frac{dp_z(L)}{dx} + I w_p^*(L, 0) p_z(L) \\ \beta_2 &= (fat_1) IIII w_p^*(0, 0) \frac{d^4 p_z(0)}{dx^4} - (fat_1) IIII w_p^*(0, 0) \frac{d^3 p_z(0)}{dx^3} \\ &+ (fat_2) III w_p^*(0, 0) \frac{d^2 p_z(0)}{d^2 x} - II w_p^*(0, 0) \frac{dp_z(0)}{dx} + I w_p^*(0, 0) p_z(0) = 0 \\ \beta_3 &= (fat_1) IIII w_m^*(L, 0) \frac{d^4 p_z(L)}{dx^4} - (fat_1) IIII w_m^*(L, 0) \frac{d^3 p_z(L)}{dx^3} \\ &+ (fat_2) III w_m^*(L, 0) \frac{d^2 p_z(L)}{d^2 x} - II w_m^*(L, 0) \frac{dp_z(L)}{dx} + I w_m^*(L, 0) p_z(L) \\ \beta_4 &= (fat_1) IIII w_m^*(0, 0) \frac{d^4 p_z(0)}{dx^4} - (fat_1) IIII w_m^*(0, 0) \frac{d^3 p_z(0)}{dx^3} \\ &+ (fat_2) III w_m^*(0, 0) \frac{d^2 p_z(0)}{d^2 x} - II w_m^*(0, 0) \frac{dp_z(0)}{dx} + I w_m^*(0, 0) p_z(0) = 0 \\ \beta_5 &= (fat_1) IIII w_p^*(L, L) \frac{d^4 p_z(L)}{dx^4} - (fat_1) IIII w_p^*(L, L) \frac{d^3 p_z(L)}{dx^3} \\ &+ (fat_2) III w_p^*(L, L) \frac{d^2 p_z(L)}{d^2 x} - II w_p^*(L, L) \frac{dp_z(L)}{dx} + I w_p^*(L, L) p_z(L) = 0 \\ \beta_6 &= (fat_1) IIII w_p^*(0, L) \frac{d^4 p_z(0)}{dx^4} - (fat_1) IIII w_p^*(0, L) \frac{d^3 p_z(0)}{dx^3} \\ &+ (fat_2) III w_p^*(0, L) \frac{d^2 p_z(0)}{d^2 x} - II w_p^*(0, L) \frac{dp_z(0)}{dx} + I w_p^*(0, L) p_z(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_7 &= (fat_1) IIIIw_m^*(L, L) \frac{d^4 p_z(L)}{dx^4} - (fat_1) IIIIw_m^*(L, L) \frac{d^3 p_z(L)}{dx^3} \\
&+ (fat_2) IIIw_m^*(L, L) \frac{d^2 p_z(L)}{dx^2} - IIw_m^*(L, L) \frac{dp_z(L)}{dx} + Iw_m^*(L, L) p_z(L) = 0 \\
\beta_8 &= (fat_1) IIIIw_m^*(0, L) \frac{d^4 p_z(0)}{dx^4} - (fat_1) IIIIw_m^*(0, L) \frac{d^3 p_z(0)}{dx^3} \\
&+ (fat_2) IIIw_m^*(0, L) \frac{d^2 p_z(0)}{dx^2} - IIw_m^*(0, L) \frac{dp_z(0)}{dx} + Iw_m^*(0, L) p_z(0)
\end{aligned}$$

Vale observar que este caso engloba de forma direta os casos quarticos, quadráticos e lineares. Para o quartico, quadrático e linear respectivamente, tem-se:

$$fat_1 = 1 \text{ e } fat_2 = 1$$

$$fat_1 = 0 \text{ e } fat_2 = 1$$

$$fat_1 = 0 \text{ e } fat_2 = 0$$

Já, para o caso em que for aplicada uma carga concentrada  $F_z$  a uma distância “ $\bar{a}$ ” da extremidade esquerda como mostrado na Fig. (3.4), o vetor de carga fica:

$$\begin{aligned}
\{f\} &= \frac{F_z}{2E} \left\{ \begin{array}{c} a[H(a) - H(0)] - 2K(a) + 2LK(0) \\ -aG(a) + H(a) - H(0)L \\ |a - L|[H(a) + LH(L)] + 2[K(a) - LK(L)] \\ |a - L|G(a) + [H(a) - LH(L)] \end{array} \right\} + \\
&\frac{F_z}{2\kappa G} \left\{ \begin{array}{c} -[\hat{F}(a) - L\hat{F}(0)] \\ 0 \\ [\hat{F}(a) - L\hat{F}(L)] \\ 0 \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

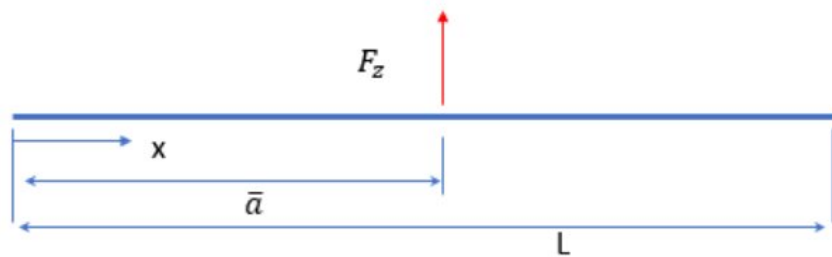


Figura 3.4. Carregamento transversal concentrado

Como a solução do sistema algébrico apresentado na Eq. (3.98) é dada apenas para o contorno da barra, logo, para se obter a solução algébrica para todo domínio é necessário redefinir as Eq. (3.98) em função de um ponto genérico do domínio. Portanto, fazendo a substituição  $\hat{x} = a$  e também da solução do sistema algébrico  $\{u\}$  nas Eq. (3.93), Eq. (3.96), tem-se então a solução em todo domínio da barra dada por:

$$\{u(a)\} + [H(a)]\{u\} = [G(a)]\{p\} + \{f(a)\}$$

Onde:

$$[H(a)] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{a}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{|L-a|}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{L}{2} \end{bmatrix}$$

$$[G(a)] = \begin{bmatrix} \beta_1(a) & \beta_2(a) & \beta_3(a) & \beta_4(a) \\ \beta_5(a) & \beta_6(a) & \beta_7(a) & \beta_8(a) \end{bmatrix}$$

Com:

$$\beta_1(a) = -\frac{1}{2\kappa G} (\hat{F}(0) - \hat{F}(a)) - \frac{1}{2E} \{a[H(0) + H(a)] + 2[K(0) - K(a)]\}$$

$$\beta_2(a) = \frac{1}{2E} \{[H(0) - H(a)] + aG(0)\}$$

$$\beta_3(a) = -\frac{1}{2\kappa G} (\hat{F}(L) - \hat{F}(a)) + \frac{1}{2E} \{L - a[H(L) + H(a)] - 2[K(L) - K(a)]\}$$

$$\beta_4(a) = -\frac{1}{2E} \{-[H(L) - H(a)] + |L - a|G(L)\}$$

$$\beta_5(a) = -\frac{1}{2E} \{[G(a) - G(0)] - aG(a)\}$$

$$\beta_6(a) = \frac{1}{2E} \{[G(0) - G(a)]\}$$

$$\beta_7(a) = \frac{1}{2E} \{[H(L) - H(a)] - |L - a|G(a)\}$$

$$\begin{aligned} \beta_8(a) = & \frac{1}{2E} \left\{ -G(L) + 2aK(a) - 2W(a) - a^2H(a) - 2a^2G(a) + a^2 \frac{G(a)}{L} - LK(L) \right\} \\ & + \frac{1}{2E} \left\{ W(L) + \frac{L^2}{2} H(a) + aLG(a) - LG(a) + W(0) \right\} \end{aligned}$$



Já o carregamento distribuído constante no domínio resulta em um vetor de carga de  $\{f(a)\}$  que fica:

$$\begin{aligned} \{f(a)\} = & \frac{-p_z}{2\kappa G} \begin{bmatrix} \hat{F}(a)(2a-L) - 2\hat{G}(a) + \hat{G}(0) + \hat{G}(L) \\ 0 \end{bmatrix} \\ & + \frac{p_z}{2E} \begin{bmatrix} -W(0) - a(K(0) + K(L)) + a^2 H(a) + LK(L) - W(L) \\ K(a)a - K(0) - K(L) - 2H(a)a \end{bmatrix} \\ & \frac{p_z}{2E} \begin{bmatrix} H(a) \left( \frac{L^2}{2} - aL \right) - 2 \left( K(a)(2a-L) - W(a) + W(L) \right) \\ G(a) \left( \frac{L^2}{2} - aL + a^2 \right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## CAPÍTULO IV

# **BARRAS RETAS NÃO-PRISMÁTICAS COM VARIAÇÃO NÃO SIMÉTRICA**

## **4.1 INTRODUÇÃO**

Neste capítulo, serão estudadas a flexão de barras não-prismáticas com variação não-simétrica de seção transversal ao longo do eixo longitudinal (vide Fig. 4.1) segundo a teoria de Euler-Bernoulli. Aqui são desenvolvidas as deduções das equações do problema real, das soluções fundamentais, das equações integrais e algébricas dessas estruturas.



Figura 4.1 Flexão de vigas não-prismáticas assimétricas

## **4.2 CONSIDERAÇÕES GERAIS**

Para a análise da viga são assumidas as seguintes hipóteses:

- a) O problema tridimensional pode ser reduzido ao espaço unidimensional, 1D, desde que o comprimento  $L$ , seja suficientemente maior que as dimensões  $b$  e  $h$  da seção transversal.
- b) A barra pode ter seção transversal não uniforme, ou seja, não prismática;
- c) Quando no regime estático, as cargas são aplicadas de modo que os efeitos da energia cinética sejam desprezíveis;
- d) O material admitido como homogêneo e isotrópico; enquanto a homogeneidade implica que as propriedades e os fenômenos do todo são representados em qualquer região do corpo, a isotropia implica em mesmas propriedades em todas as direções;
- e) O material admitido como elástico linear: a elasticidade implica que em um ciclo de carga descarga, não haverá deformação residual. Já a linearidade exige uma proporcionalidade direta entre tensão e deformação;
- f) A planicidade das seções transversais é mantida durante o processo de deformação;
- g) A ortogonalidade entre o eixo longitudinal e a seção plana é conservada durante o processo de deformação, implicando na desconsideração da distorção transversa.
- h) O efeito de Poisson é desprezado, ou seja, as deformações transversais da seção são desconsideradas;
- i) Os campos de deslocamentos e deformações são assumidos pequenos (suaves) para a viga

#### **4.2.1 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO**

Para a obtenção das relações entre as componentes de deformação, toma-se inicialmente uma parte infinitesimal da viga, tal qual apresentada na Fig. 4.1a. Será adotado um sistema de coordenadas onde  $y$  e  $z$  são os eixos principais de inércia de uma barra não-prismática de comprimento  $L$  submetida aos carregamentos  $p_x$  e  $p_z$ . Fazendo o equilíbrio de forças e do momento em vigas, a partir do diagrama de corpo livre do elemento infinitesimal da Fig.4.1a tem-se:

$$\frac{dN}{dx} + p_x = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{dV}{dx} + p_z = 0 \quad (4.2)$$

$$V - \frac{dM}{dx} = 0 \quad (4.3)$$

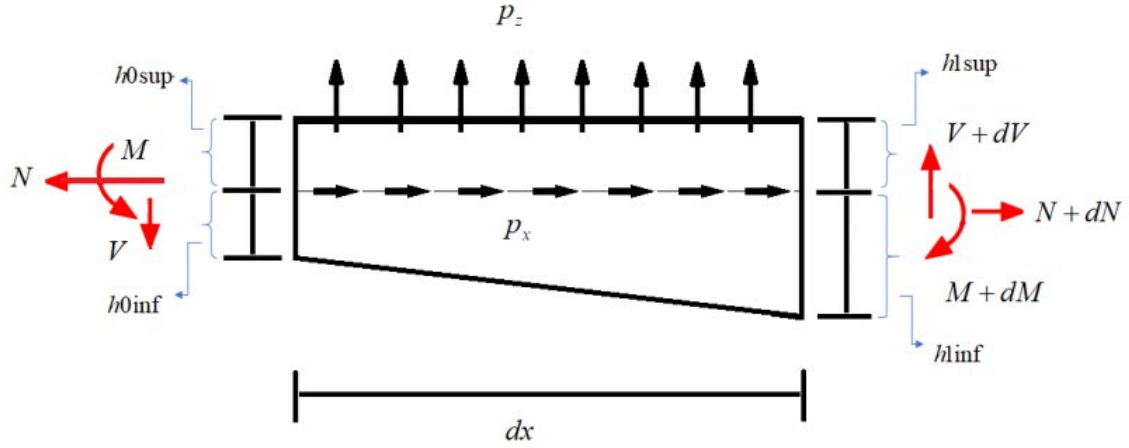


Figura 4.1a- Barra não-prismática submetida à flexão, com carregamento no plano xz

Portanto, substituindo a Eq.(4.3) na Eq.(4.2) tem-se:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + p_z = 0 \quad (4.4)$$

Como as hipóteses da cinemática da viga clássica (Euler-Bernoulli) admitem a ortogonalidade entre a seção transversal e o eixo longitudinal da barra na flexão, isto implica que a deformação por cortante é nula  $\gamma_{xz} = 0$ . Além disso, devido a conservação da planicidade da seção transversal, os deslocamentos axial e transversal,  $\bar{u}(x, z)$  e  $\bar{w}(x, z)$ , respectivamente, são dados por:

$$\bar{u}(x, z) = u(x) - z \frac{dw(x)}{dx} \quad (4.5)$$

$$\bar{w}(x, z) = w(x) \quad (4.6)$$

Onde:  $u(x)$  e  $w(x)$  são os deslocamentos axial e transversal no eixo da barra. Já a deformação axial é dada por:

$$\varepsilon_x = \frac{d\bar{u}(x, z)}{dx} \quad (4.7)$$

Substituindo a Eq.(4.5) na Eq.(4.7), a deformação fica:

$$\varepsilon_x = \frac{du(x)}{dx} - z \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad (4.8)$$

Onde:  $z$  é a profundidade da fibra de interesse em relação ao eixo longitudinal da barra.

Se  $\nu = 0$  (coeficiente de Poisson), então:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (4.9)$$

A força normal e o momento fletor são dados respectivamente por:

$$N(x) = \int_A \sigma_x dA \quad (4.10)$$

$$M(x) = \int_A \sigma_x z dA \quad (4.11)$$

Para o cálculo da força normal, substitui-se a Eq.(4.8) e Eq.(4.9) na Eq.(4.10):

$$N(x) = \int_{-b\inf(x)}^{+b\sup(x)} \int_{-z\inf(x)}^{+z\sup(x)} \left[ E \left[ \frac{du(x)}{dx} - z \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] \right] dz dy \quad (4.12)$$

Por exemplo, no caso de barra com largura constante e altura variando linearmente as funções  $b\sup(x)$ ,  $-b\inf(x)$ ,  $z\inf(x)$  e  $z\sup(x)$  são:

$$b \sup(x) = -b_{\inf}(x) = \frac{b}{2} \quad (4.13)$$

$$z \inf(x) = a_{\inf} + b_{\inf} x \quad (4.14a)$$

$$z \sup(x) = a_{\sup} + b_{\sup} x \quad (4.14b)$$

Onde  $a_{\inf}$ ,  $a_{\sup}$  são, respectivamente, os coeficientes lineares inferiores e superiores. Já  $b_{\inf}$ ,  $b_{\sup}$  são, respectivamente, os coeficientes angulares inferiores e superiores.

Por outro lado, se a variação da altura for quadrática as funções,  $z \inf(x)$  e  $z \sup(x)$  devem ser readequadas para:

$$z \inf(x) = a_{2\inf} + b_{2\inf} x + c_{2\inf} x^2 \quad (4.15a)$$

$$z \sup(x) = a_{2\sup} + b_{2\sup} x + c_{2\sup} x^2 \quad (4.15b)$$

Vale ressaltar que alguns casos em que a variação da área transversal ao longo do eixo longitudinal não se der linearmente, estes serão discutidos em capítulos posteriores.

Para o cálculo de  $N$  integra-se a Eq.(4.12), resultando em:

$$\begin{aligned} N(x) = & [b \sup(x) + b \inf(x)] [z \sup(x) + z \inf(x)] E \frac{du(x)}{dx} \\ & - [b \sup(x) + b \inf(x)] [z \sup(x)^2 - z \inf(x)^2] \frac{E}{2} \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Que resulta em:

$$N(x) = EA_{11}(x) \frac{du(x)}{dx} - EB_{11}(x) \frac{d^2w(x)}{dx^2} \quad (4.17)$$

Onde:

$$A_{11}(x) = \int_{-b \inf(x)}^{b \sup(x)} \int_{-z \inf(x)}^{z \sup(x)} dz dy \quad (4.18)$$

$$B_{11}(x) = \int_{-b \inf(x)}^{b \sup(x)} \int_{-z \inf(x)}^{z \sup(x)} z dz dy \quad (4.19)$$

Já o cálculo do momento fletor é feito substituindo-se a Eq. (4.8) e Eq. (4.8) na Eq. (4.11), que resulta em:

$$M(x) = \int_{-b \inf(x)}^{+b \sup(x)} \int_{-z \inf(x)}^{+z \sup(x)} \left[ E \left[ z \frac{du(x)}{dx} - z^2 \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right] \right] dz dy \quad (4.20)$$

Integrando-se a Eq.(4.20), o momento fletor, fica:

$$M(x) = EB_{11}(x) \frac{du(x)}{dx} - ED_{11}(x) \frac{d^2w(x)}{dx^2} \quad (4.21)$$

Onde:

$$D_{11}(x) = \int_{-b \inf(x)}^{+b \sup(x)} \int_{-z \inf(x)}^{+z \sup(x)} z^2 dz dy \quad (4.22)$$

Por fim, para o cálculo da força cortante, substitui-se a Eq. (4.21) na Eq. (4.3), resultando em:

$$V(x) = EB_{11}(x) \frac{d^2u(x)}{dx^2} - ED_{11}(x) \frac{d^3w(x)}{dx^3} \quad (4.23)$$

Substituindo-se convenientemente as Eqs.(4.17) e (4.21) nas Eqs.(4.1) e (4.4), resulta:

$$\frac{d}{dx} E \left[ A_{11}(x) \frac{du(x)}{dx} - B_{11}(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] = -p_x \quad (4.24)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} E \left[ B_{11}(x) \frac{du(x)}{dx} - D_{11}(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] = -p_z \quad (4.25)$$

### 4.3 PROBLEMA FUNDAMENTAL: EULER-BERNOULLI

Como a filosofia que é desenvolvida para o MEC neste trabalho é a direta, então a solução fundamental será tomada em uma viga de comprimento infinito, com seção transversal e sua variação ao longo do eixo longitudinal idênticas as do problema real, submetida à ação de fontes pontuais (no caso forças pontuais). No caso da ativação da carga axial, os esforços fundamentais e suas variações diferenciais são mostrados na Fig. 4.2

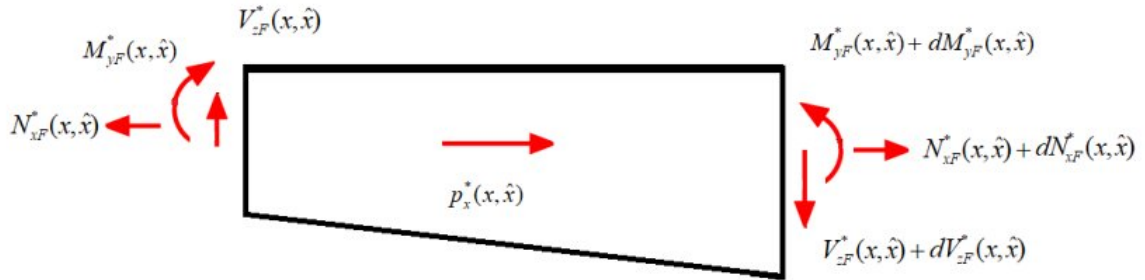


Figura 4.2 Equilíbrio Fundamental:  $p_x^*$  ativada

Ao se fazer o equilíbrio de forças e momentos fundamentais mostrados na Fig. (4.2), as equações governantes em termos de esforços devido à fonte pontual axial ficam:

$$\frac{dN_F^*(x, \hat{x})}{dx} + p_x^*(x, \hat{x}) = 0 \quad (4.26)$$

$$\frac{dV_F^*(x, \hat{x})}{dx} = 0 \quad (4.27)$$

$$\frac{dM_F^*(x, \hat{x})}{dx} - V_F^*(x, \hat{x}) = 0 \quad (4.28)$$



Por analogia ao problema real, os esforços fundamentais podem ser escritos a partir da Eqs. (4.17), (4.21) e (4.23), resultando em:

$$N_F^*(x, \hat{x}) = EA_{11}(x) \frac{du_F^*(x, \hat{x})}{dx} - EB_{11}(x) \frac{d^2 w_F^*(x, \hat{x})}{dx^2} \quad (4.29)$$

$$M_F^*(x, \hat{x}) = EB_{11}(x) \frac{du_F^*(x, \hat{x})}{dx} - ED_{11}(x) \frac{d^2 w_F^*(x, \hat{x})}{dx^2} \quad (4.30)$$

$$V_F^*(x, \hat{x}) = EB_{11}(x) \frac{d^2 u_F^*(x, \hat{x})}{dx^2} - ED_{11}(x) \frac{d^3 w_F^*(x, \hat{x})}{dx^3} \quad (4.31)$$

No caso da ativação da fonte puntual em força transversal, os esforços fundamentais e suas variações diferenciais são mostrados na Fig. 4.3

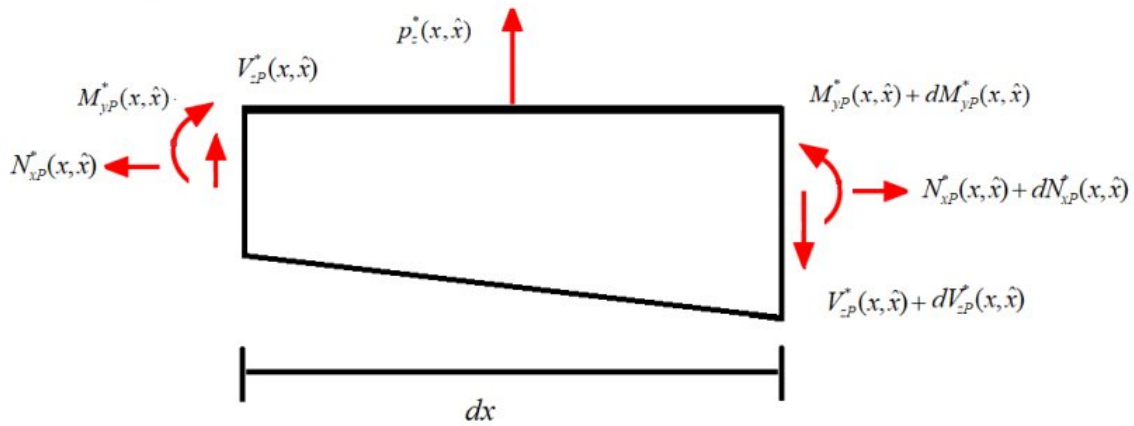


Figura 4.3 Equilíbrio Fundamental:  $p_z^*$  ativada

Fazendo também o equilíbrio de forças e momentos fundamentais indicadas na Fig.4.3, as equações governantes em termos de esforços devido à ativação de  $p_z^*$  ficam:

$$\frac{dN_p^*(x, \hat{x})}{dx} = 0 \quad (4.32)$$

$$\frac{dV_p^*(x, \hat{x})}{dx} + p_z^*(x, \hat{x}) = 0 \quad (4.33)$$

$$\frac{dM_p^*(x, \hat{x})}{dx} - V_p^*(x, \hat{x}) = 0 \quad (4.34)$$

Por analogia ao problema real, os esforços fundamentais dados podem ser escritos a partir das Eqs.(4.17), (4.21) e (4.23), resultando em:

$$N_p^*(x, \hat{x}) = EA_{11}(x) \frac{du_p^*(x, \hat{x})}{dx} - EB_{11}(x) \frac{d^2 w_p^*(x, \hat{x})}{dx^2} \quad (4.35)$$

$$M_p^*(x, \hat{x}) = EB_{11}(x) \frac{du_p^*(x, \hat{x})}{dx} - ED_{11}(x) \frac{d^2 w_p^*(x, \hat{x})}{dx^2} \quad (4.36)$$

$$V_p^*(x, \hat{x}) = EB_{11}(x) \frac{d^2 u_p^*(x, \hat{x})}{dx^2} - ED_{11}(x) \frac{d^3 w_p^*(x, \hat{x})}{dx^3} \quad (4.37)$$

Fazendo a substituição dos esforços fundamentais das Eqs. (4.29-31) nas equações de equilíbrio fundamental nas Eqs.(4.26-28), as equações governantes em deslocamentos do problema fundamental com ativação de  $p_x^* = \delta(x, \hat{x})$  dadas por:

$$\frac{d}{dx} E \left[ A_{11}(x) \frac{du_F^*(x, \hat{x})}{dx} - B_{11}(x) \frac{d^2 w_F^*(x, \hat{x})}{dx^2} \right] = -\delta(x, \hat{x}) \quad (4.38)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} E \left[ B_{11}(x) \frac{du_F^*(x, \hat{x})}{dx} - D_{11}(x) \frac{d^2 w_F^*(x, \hat{x})}{dx^2} \right] = 0 \quad (4.39)$$

Da integração da Eq. (4.39), tem-se:

$$\frac{d^2 w_F^*(x, \hat{x})}{dx^2} = \frac{B_{11}(x)}{D_{11}(x)} \frac{du_F^*(x, \hat{x})}{dx} \quad (4.40)$$

Da substituição da Eq. (4.40) na Eq. (4.38), tem-se:

$$\frac{d}{dx} \left[ A_{11}(x) \frac{du_F^*(x, \hat{x})}{dx} - \left[ \frac{B_{11}(x)^2}{D_{11}(x)} \right] \frac{d^2 u_F^*(x, \hat{x})}{dx^2} \right] = -\delta(x, \hat{x}) \quad (4.41)$$

Integrando-se a Eq. (4.41), tem-se:

$$A_{11}(x) \frac{du_F^*(x, \hat{x})}{dx} - \frac{[B_{11}(x)]^2}{D_{11}(x)} \frac{du_F^*(x, \hat{x})}{dx} = \frac{-\text{sgn}(x - \hat{x})}{2E} \quad (4.42)$$

De forma simplificada, a Eq. (4.42) pode ser reduzida a:

$$A^*(x) \frac{du_F^*(x, \hat{x})}{dx} = \frac{-\text{sgn}(x - \hat{x})}{2E} \quad (4.43)$$

Onde:

$$A^*(x) = \frac{A_{11}(x)D_{11}(x) - B_{11}(x)^2}{D_{11}(x)} \quad (4.44)$$

Para obtenção da solução fundamental  $u_F^*(x, \hat{x})$ , faz-se uso da identidade análogas às Eq. (3.24) (3.26) que fica:

$$u_F^*(x, \hat{x}) = \frac{-\text{sgn}(x - \hat{x})}{2E} [\hat{F}(x) - \hat{F}(\hat{x})] \quad (4.45)$$

Onde:

$$\frac{d\hat{F}(x)}{dx} = \frac{1}{A^*(x)} \quad (4.46)$$

A obtenção da função  $\frac{d^2 w_F^*(x, \hat{x})}{dx^2}$  pode ser feita a partir da substituição da Eq.(4.45) na Eq. (4.40), onde tem-se:

$$\frac{d^2 w_F^*(x, \hat{x})}{dx^2} = -\frac{1}{2EB^*(x)} \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (4.47)$$

Fazendo-se uso de identidades análogas as Eqs. (3.20), (3.26) na Eq. (4.47), tem-se:

$$\frac{dw_F^*(x, \hat{x})}{dx} = -\frac{1}{2E} \text{sgn}(x - \hat{x}) [T(x) - T(\hat{x})] \quad (4.48)$$

Onde:

$$B^*(x) = \frac{A_{11}(x)D_{11}(x) - B_{11}(x)^2}{B_{11}(x)} \quad (4.49)$$

$$\frac{dT(x)}{dx} = \frac{1}{B^*(x)} \quad (4.50)$$

Já a  $w_F^*(x, \hat{x})$  é obtida da integração da Eq.(4.48) que fica:

$$w_F^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2E} \text{sgn}(x - \hat{x}) [R(x) - R(\hat{x})] - \frac{r}{2E} T(\hat{x}) \quad (4.51)$$

Onde:

$$\frac{dR(x)}{dx} = T(x) \quad (4.52)$$

Os esforços podem ser obtidos diretamente das Eqs. (4.29), (4.30), (4.31), (4.45) e (4.51):

$$N_F^*(x, \hat{x}) = EA_{11}(x) \frac{du_F^*(x, \hat{x})}{dx} - EB_{11}(x) \frac{d^2 w_F^*(x, \hat{x})}{dx^2} = -\frac{1}{2} \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (4.53)$$

$$M_F^*(x, \hat{x}) = EB_{11}(x) \frac{du_F^*(x, \hat{x})}{dx} - ED_{11}(x) \frac{d^2 w_F^*(x, \hat{x})}{dx^2} = 0 \quad (4.54)$$

$$V_F^*(x, \hat{x}) = EB_{11}(x) \frac{d^2 u_F^*(x, \hat{x})}{dx^2} - ED_{11}(x) \frac{d^3 w_F^*(x, \hat{x})}{dx^3} = 0 \quad (4.55)$$

Agora, fazendo a substituição dos esforços fundamentais das Eqs. (4.35-36) nas equações de equilíbrio fundamentais nas Eqs.(4.32-4.34), as equações governantes em deslocamentos do problema fundamental com ativação de  $p_z^* = \delta(x, \hat{x})$  dadas por:

$$\frac{d}{dx} E \left[ A_{11}(x) \frac{du_p^*(x, \hat{x})}{dx} - B_{11}(x) \frac{d^2 w_p^*(x, \hat{x})}{dx^2} \right] = 0 \quad (4.56)$$

Da integração da Eq. (4.56), tem-se:

$$\frac{du_p^*(x, \hat{x})}{dx} = \frac{B_{11}(x)}{A_{11}(x)} \frac{d^2 w_p^*(x, \hat{x})}{dx^2} \quad (4.57)$$

Por outro lado, da Eq. (4.33), tem-se:

$$\frac{d^2}{dx^2} E \left[ B_{11}(x) \frac{du_p^*(x, \hat{x})}{dx} - D_{11}(x) \frac{d^2 w_p^*(x, \hat{x})}{dx^2} \right] = -\delta(x, \hat{x}) \quad (4.58)$$

Substituindo-se a Eq. (4.57) na Eq. (4.58) e integrando-se, fica:

$$\frac{d^2 w_p^*(x, \hat{x})}{dx^2} = -\frac{r}{2EC^*(x)} \quad (4.59)$$

Onde:

$$C^*(x) = \frac{[B_{11}^2(x) - A_{11}(x)D_{11}(x)]}{A_{11}(x)} \quad (4.60)$$

Fazendo-se uso de identidades análogas as Eqs. (3.24), (3.26) na Eq. (4.59), tem-se:

$$\frac{dw_p^*(x, \hat{x})}{dx} = -\frac{1}{2E} [rQ(x) - \text{sgn}(x - \hat{x})[Y(x) - Y(\hat{x})]] \quad (4.61)$$

$$w_p^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2E} \{r[Y(x) + Y(\hat{x})] - 2\operatorname{sgn}(x - \hat{x})[K(x) - K(\hat{x})]\} \quad (4.62)$$

Onde:

$$\frac{dV(x)}{dx} = \frac{1}{C^*(x)} \quad (4.63)$$

$$\frac{dY(x)}{dx} = Q(x) \quad (4.64)$$

$$\frac{dK(x)}{dx} = Y(x) \quad (4.65)$$

Finalmente, para obtenção da função da função  $\frac{du_p^*(x, \hat{x})}{dx}$ , substituindo-se a

Eq.(4.59) na Eq.(4.57), tem-se:

$$\frac{du_p^*(x, \hat{x})}{dx} = -\frac{r}{2ED^*(x)} \quad (4.66)$$

$$u_p^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2E} \{rJ(x) - \operatorname{sgn}(x - \hat{x})[P(x) - P(\hat{x})]\} \quad (4.67)$$

Onde:

$$D^*(x) = \frac{A_{11}(x)C^*(x)}{B_{11}(x)} \quad (4.68)$$

$$\frac{dJ(x)}{dx} = \frac{1}{D^*(x)} \quad (4.69)$$

$$\frac{dP(x)}{dx} = J(x) \quad (4.70)$$

As soluções para os esforços fundamentais são geradas diretamente substituindo adequadamente as Eqs. (4.62) e (4.67) nas Eqs. (4.35), (4.36), (4.37), resultando em:

$$N_p^*(x, \hat{x}) = EA_{11}(x) \frac{du_p^*(x, \hat{x})}{dx} - EB_{11}(x) \frac{d^2w_p^*(x, \hat{x})}{dx^2} = 0 \quad (4.71)$$

$$M_p^*(x, \hat{x}) = EB_{11}(x) \frac{du_p^*(x, \hat{x})}{dx} - ED_{11}(x) \frac{d^2w_p^*(x, \hat{x})}{dx^2} = -\frac{r}{2} \quad (4.72)$$

$$V_p^*(x, \hat{x}) = EB_{11}(x) \frac{d^2u_p^*(x, \hat{x})}{dx^2} - ED_{11}(x) \frac{d^3w_p^*(x, \hat{x})}{dx^3} = -\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(x - \hat{x}) \quad (4.73)$$

Outras soluções fundamentais de interesse serão apresentadas a seguir e suas respectivas derivadas em relação ao ponto fonte, já que essas serão necessárias nas equações integrais que serão desenvolvidas na seção 4.2.3. Assim, as derivadas dos deslocamentos e esforços em relação ao ponto fonte ficam:

$$\begin{aligned}
 u_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) &= \frac{du_F^*(x, \hat{x})}{d\hat{x}} = \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2E} [J(x) - J(\hat{x})] \\
 w_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) &= \frac{dw_p^*(x, \hat{x})}{d\hat{x}} = -\frac{1}{2E} \{ \text{sgn}(x - \hat{x}) [Y(\hat{x}) - Y(x)] + rQ(\hat{x}) \} \\
 \frac{dw_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x})}{dx} &= \left( \frac{A_{11}(x)}{B_{11}(x)} \right) \frac{dw_F^*(x, \hat{x})}{dx} = -\frac{1}{2E} [\text{sgn}(x - \hat{x}) [Q(\hat{x}) - Q(x)]] \\
 N_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) &= 0 \\
 V_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) &= \delta(x, \hat{x}) \\
 M_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) &= \frac{1}{2} \text{sgn}(x - \hat{x})
 \end{aligned} \tag{4.74-80}$$

#### 4.4 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL

A aplicação do MEC consiste em transformar as equações diferenciais em equações integrais equivalentes. Ativando-se a fonte em força na direção x no problema fundamental, a ponderação das Eqs. (4.24-25) via Método dos Resíduos Ponderados permite a escrita da seguinte relação:

$$\begin{aligned}
 \int_0^L \left\{ \frac{d}{dx} E \left[ A_{11}(x) \frac{du(x)}{dx} - B_{11}(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] + p_x \right\} u_F^*(x, \hat{x}) dx + \\
 \int_0^L \left\{ \frac{d^2}{dx^2} E \left[ B_{11}(x) \frac{du(x)}{dx} - D_{11}(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] + p_z \right\} w_F^*(x, \hat{x}) dx = 0
 \end{aligned} \tag{4.81}$$

Fazendo integrações por partes na Eq. (4.81) e a conveniente substituição dos esforços dados nas Eqs. (4.17) e (4.21), obtém-se:

$$\left[ Nu_F^* \right]_0^L + \left[ Vw_F^* \right]_0^L - \int_0^L \left[ A_{11}(x) E \frac{du(x)}{dx} - B_{11}(x) E \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] \frac{du_F^*}{dx} dx -$$

$$\int_0^L \frac{d}{dx} \left[ B_{11}(x) E \frac{du(x)}{dx} - D_{11}(x) E \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] \frac{dw_F^*}{dx} dx + \int_0^L (p_x u_F^* + p_z w_F^*) dx = 0 \quad (4.82)$$

Aplicando convenientemente integração por partes na Eq.(4.82), seguida de sua reorganização fica:

$$\begin{aligned} & \left[ N u_F^* \right]_0^L + \left[ V w_F^* \right]_0^L - \left[ M \frac{dw_F^*}{dx} \right]_0^L - \int_0^L \left[ A_{11}(x) E \frac{du_F^*}{dx} - B_{11}(x) E \frac{d^2 w_F^*}{dx^2} \right] \frac{du(x)}{dx} dx + \\ & \int_0^L \left[ B_{11}(x) E \frac{du_F^*}{dx} - D_{11}(x) E \frac{d^2 w_F^*}{dx^2} \right] \frac{d^2 w(x)}{dx^2} dx + \int_0^L (p_x u_F^* + p_z w_F^*) dx = 0 \end{aligned} \quad (4.83)$$

Substituindo-se (4.29) em (4.83) fica:

$$\begin{aligned} & \left[ N(x) u_F^*(x, \hat{x}) \right]_0^L + \left[ V(x) w_F^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[ M(x) \frac{dw_F^*}{dx}(x, \hat{x}) \right]_0^L - \int_0^L N_F^*(x, \hat{x}) \frac{du(x)}{dx} dx + \\ & \int_0^L M_F^*(x, \hat{x}) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} dx + \int_0^L [p_x(x) u_F^*(x, \hat{x}) + p_z(x) w_F^*(x, \hat{x})] dx = 0 \end{aligned} \quad (4.84)$$

Fazendo-se uma integração por partes em (4.84) resulta:

$$\begin{aligned} & \left[ N(x) u_F^*(x, \hat{x}) \right]_0^L + \left[ V(x) w_F^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[ M(x) \frac{dw_F^*}{dx}(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[ N_F^*(x, \hat{x}) u(x) \right]_0^L + \\ & \left[ M_F^*(x, \hat{x}) \frac{dw}{dx}(x) \right]_0^L - \left[ V_F^*(x, \hat{x}) w(x) \right]_0^L + \int_0^L \left[ \frac{dN_F^*(x, \hat{x})}{dx} u(x) + \frac{dV_F^*(x, \hat{x})}{dx} w(x) \right] dx + \\ & \int_0^L [p_x(x) u_F^*(x, \hat{x}) + p_z(x) w_F^*(x, \hat{x})] dx = 0 \end{aligned} \quad (4.85)$$

Utilizando-se as Eqs.(4.26) e (4.27) em (4.85), seguida da aplicação da propriedade de translação do delta de Dirac, a equação integral para o deslocamento axial fica:

$$\begin{aligned} & u(\hat{x}) + \left[ N_F^*(x, \hat{x}) u(x) \right]_0^L + \left[ V_F^*(x, \hat{x}) w(x) \right]_0^L - \left[ M_F^*(x, \hat{x}) \frac{dw(x)}{dx} \right]_0^L = \left[ N(x) u_F^*(x, \hat{x}) \right]_0^L + \\ & + \left[ V(x) w_F^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[ M(x) \frac{dw_F^*}{dx}(x, \hat{x}) \right]_0^L + \int_0^L [p_x u_F^*(x, \hat{x}) + p_z w_F^*(x, \hat{x})] dx \end{aligned} \quad (4.86)$$



Agora, ativando a função puntual  $p_z^*$  (que gera os deslocamentos fundamentais  $u_p^*$  e  $w_p^*$ ) a equação resultante do MRP fica:

$$\begin{aligned} \int_0^L \left\{ \frac{d}{dx} \left[ A_{11}(x) E \frac{du(x)}{dx} - B_{11}(x) E \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] + p_x \right\} u_p^*(x, \hat{x}) dx + \\ \int_0^L \left\{ \frac{d^2}{dx^2} \left[ B_{11}(x) E \frac{du(x)}{dx} - D_{11}(x) E \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] + p_z \right\} w_p^*(x, \hat{x}) dx = 0 \end{aligned} \quad (4.87)$$

Se a Eq. (4.87) for submetida a um procedimento análogo ao aplicado à Eq. (4.81), uma relação pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \left[ N(x) u_p^*(x, \hat{x}) \right]_0^L + \left[ V(x) w_p^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[ M(x) \frac{dw_p^*}{dx}(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[ N_p^*(x, \hat{x}) u(x) \right]_0^L + \\ \left[ M_p^*(x, \hat{x}) \frac{dw}{dx}(x) \right]_0^L - \left[ V_p^*(x, \hat{x}) w(x) \right]_0^L + \int_0^L \left[ \frac{dN_p^*(x, \hat{x})}{dx} u(x) + \frac{dV_p^*(x, \hat{x})}{dx} w(x) \right] dx + \\ \int_0^L [p_x(x) u_p^*(x, \hat{x}) + p_z(x) w_p^*(x, \hat{x})] dx = 0 \end{aligned} \quad (4.88)$$

Utilizando-se as Eqs.(4.32) e (4.33) em (4.88), seguida da aplicação da propriedade de translação do delta de Dirac, a equação integral para o deslocamento transversal fica:

$$\begin{aligned} w(\hat{x}) + \left[ N_p^*(x, \hat{x}) u(x) \right]_0^L + \left[ V_p^*(x, \hat{x}) w(x) \right]_0^L - \left[ M_p^*(x, \hat{x}) \frac{dw(x)}{dx} \right]_0^L = \\ \left[ N(x) u_p^*(x, \hat{x}) \right]_0^L + \left[ V(x) w_p^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[ M(x) \frac{dw_p^*}{dx}(x, \hat{x}) \right]_0^L + \int_0^L [p_x u_p^*(x, \hat{x}) + p_z w_p^*(x, \hat{x})] dx \end{aligned} \quad (4.89)$$

Os problemas de vigas clássicas não-prismáticas e não-simétricas requerem três incógnitas a determinar no contorno para um completo equacionamento. Assim, uma equação adicional é necessária a fim de obter o problema solucionável, já que apenas duas equações integrais foram deduzidas até então. Portanto, esta equação adicional é desenvolvida derivando a Eq.(4.89), cedendo assim à equação integral da

inclinação da elástica transversal no ponto de fonte  $\frac{dw(\hat{x})}{d\hat{x}}$ , logo essa equação pode ser expressa como:

$$\begin{aligned}
& \frac{dw(\hat{x})}{d\hat{x}} + \left[ N_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) u(x) \right]_0^L + \left[ V_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) w(x) \right]_0^L - \left[ M_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) \frac{dw(x)}{dx} \right]_0^L = \\
& = \left[ N(x) u_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) \right]_0^L + \left[ V(x) w_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[ M(x) \frac{dw_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x})}{dx} \right]_0^L + \\
& + \int_0^L \left[ p_x u_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) + p_z w_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) \right] dx
\end{aligned} \tag{4.90}$$

#### 4.5 REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA

Para a determinação das equações algébricas do MEC, o ponto fonte é colocado nas extremidades da barra. Assim, quando a colocação ocorrer na extremidade esquerda da barra é equivalente a  $\hat{x} = \lim_{\xi \rightarrow 0} (0 + \xi)$ , em contrapartida se o ponto for colocado na extremidade direita da barra  $\hat{x} = \lim_{\xi \rightarrow 0} (L - \xi)$ . Portanto, fazendo a substituição dos limites de integração e a colocação da fonte na extremidade esquerda da barra nas Eq. (4.86), Eq. (4.89) e Eq. (4.90), tem-se:

Neste caso, a equação do deslocamento axial fica:

$$\begin{aligned}
& u(0) + N_F^*(L, 0 + \xi) u(L) + V_F^*(L, 0 + \xi) w(L) - M_F^*(L, 0 + \xi) \frac{dw(L)}{dx} \\
& - N_F^*(0, 0) u(0) - V_F^*(0, 0 + \xi) w(0) + M_F^*(0, 0 + \xi) = N(L) u_F^*(L, 0 + \xi) + \\
& + V(L) w_F^*(L, 0 + \xi) - M(L) \frac{dw_F^*(L, 0 + \xi)}{dx} - N(0) u_F^*(0, 0 + \xi) - V(0) w_F^*(0, 0 + \xi) + \\
& M(0) \frac{dw_F^*(0, 0 + \xi)}{dx} + \int_0^L \left[ p_x u_F^*(x, 0) + p_z w_F^*(x, 0) \right] dx
\end{aligned} \tag{4.91}$$

Já a equação do deslocamento transversal com ponto fonte à esquerda, resulta:

$$\begin{aligned}
& w(0) + N_P^*(L, 0 + \xi) u(L) + V_P^*(L, 0 + \xi) w(L) - M_P^*(L, 0 + \xi) \frac{dw(L)}{dx} \\
& - N_P^*(0, 0 + \xi) u(0) - V_P^*(0, 0 + \xi) w(0) + M_P^*(0, 0 + \xi) \frac{dw(0)}{dx} = N(L) u_P^*(L, 0 + \xi) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +V(L)w_p^*(L,0+\xi) - M(L)\frac{dw_p^*(L,0+\xi)}{dx} - N(0)u_p^*(0,0+\xi) - V(0)w_p^*(0,0+\xi) + \\
& +M(0)\frac{dw_p^*(0,0+\xi)}{dx} + \int_0^L [p_x u_p^*(x,0) + p_z w_p^*(x,0)] dx
\end{aligned} \tag{4.92}$$

E, finalmente, a equação da inclinação da elástica transversal com ponto fonte à esquerda fica:

$$\begin{aligned}
& \frac{dw(0)}{d\hat{x}} + N_{p,\hat{x}}^*(L,0+\xi)u(L) + V_{p,\hat{x}}^*(L,0+\xi)w(L) - M_{p,\hat{x}}^*(L,0+\xi)\frac{dw(L)}{dx} \\
& - N_{p,\hat{x}}^*(0,0+\xi)u(0) - V_{p,\hat{x}}^*(0,0+\xi)w(0) + M_{p,\hat{x}}^*(0,0+\xi)\frac{dw(0)}{dx} \\
& = N(L)u_{p,\hat{x}}^*(L,0+\xi) + V(L)w_{p,\hat{x}}^*(L,0+\xi) - M(L)\frac{dw_{p,\hat{x}}^*(L,0+\xi)}{dx} \\
& - N(L)u_{p,\hat{x}}^*(L,0+\xi) - V(L)w_{p,\hat{x}}^*(L,0+\xi) + M(L)\frac{dw_{p,\hat{x}}^*(L,0+\xi)}{dx} \\
& + \int_0^L [p_x u_{p,\hat{x}}^*(x,0) + p_z w_{p,\hat{x}}^*(x,0)] dx
\end{aligned} \tag{4.93}$$

Agora, fazendo a colocação do ponto fonte no extremo direito da barra tem-se:

$$\begin{aligned}
& u(L) + N_F^*(L,L-\xi)u(L) + V_F^*(L,L-\xi)w(L) - M_F^*(L,L-\xi)\frac{dw(L)}{dx} \\
& - N_F^*(0,L-\xi)u(0) - V_F^*(0,L-\xi)w(0) + M_F^*(0,L-\xi) = N(L)u_F^*(L,L-\xi) + \\
& +V(L)w_F^*(L,L-\xi) - M(L)\frac{dw_F^*(L,L-\xi)}{dx} - N(0)u_F^*(0,L-\xi) - V(0)w_F^*(0,L-\xi) + \\
& M(0)\frac{dw_F^*(0,L-\xi)}{dx} + \int_0^L [p_x u_F^*(x,L) + p_z w_F^*(x,L)] dx
\end{aligned} \tag{4.94}$$

$$\begin{aligned}
& w(L) + N_p^*(L,L-\xi)u(L) + V_p^*(L,L-\xi)w(L) - M_p^*(L,L-\xi)\frac{dw(L)}{dx} \\
& - N_p^*(0,L-\xi)u(0) - V_p^*(0,L-\xi)w(0) + M_p^*(0,L-\xi)\frac{dw(0)}{dx} = N(L)u_p^*(L,L-\xi) + \\
& +V(L)w_p^*(L,L-\xi) - M(L)\frac{dw_p^*(L,L-\xi)}{dx} - N(0)u_p^*(0,L-\xi) - V(0)w_p^*(0,L-\xi) +
\end{aligned}$$

$$+M(0)\frac{dw_p^*(0,L-\xi)}{dx} + \int_0^L [p_x u_p^*(x,L) + p_z w_p^*(x,L)] dx \quad (4.95)$$

$$\begin{aligned} & \frac{dw(L)}{d\hat{x}} + N_{p,\hat{x}}^*(L,L-\xi)u(L) + V_{p,\hat{x}}^*(L,0+\xi)w(L) - M_{p,\hat{x}}^*(L,0+\xi)\frac{dw(L)}{dx} \\ & - N_{p,\hat{x}}^*(0,L-\xi)u(0) - V_{p,\hat{x}}^*(0,L-\xi)w(0) + M_{p,\hat{x}}^*(0,L-\xi)\frac{dw(0)}{dx} \\ & = N(L)u_{p,\hat{x}}^*(L,L-\xi) + V(L)w_{p,\hat{x}}^*(L,L-\xi) - M(L)\frac{dw_{p,\hat{x}}^*(L,L-\xi)}{dx} \\ & - N(L)u_{p,\hat{x}}^*(L,L-\xi) - V(L)w_{p,\hat{x}}^*(L,L-\xi) + M(L)\frac{dw_{p,\hat{x}}^*(L,L-\xi)}{dx} \\ & + \int_0^L [p_x u_{p,\hat{x}}^*(x,L) + p_z w_{p,\hat{x}}^*(x,L)] dx \end{aligned} \quad (4.96)$$

Uma representação algébrica para Eq. (4.23), Eq. (4.26), Eq. (4.27), Eq. (4.28), Eq. (4.29), Eq. (4.30), em termos das variáveis de contorno (ver Fig. (4.2b)) pode ser escrita como segue:

$$\{u\} + [H]\{u\} = [G]\{p\} + \{f\} \quad (4.97)$$

Onde  $[H]$ ,  $[G]$  são as matrizes de influência e  $\{f\}$  é o vetor de ações externas.  $\{u\}$  e  $\{p\}$  são os vetores de deslocamentos e solicitações internas, cujas formas explícitas são dadas por:

$$\begin{aligned} \{u\} &= \left[ u_i \quad w_i \quad \frac{dw_i}{dx} \quad u_j \quad w_j \quad \frac{dw_j}{dx} \right]^T = \\ &= \left[ u(0) \quad w(0) \quad \frac{dw(0)}{dx} \quad u(L) \quad w(L) \quad \frac{dw(L)}{dx} \right]^T \\ \{p\} &= [N_i \quad V_i \quad M_i \quad N_j \quad V_j \quad M_j]^T = \\ &= [N(0) \quad V(0) \quad M(0) \quad N(L) \quad V(L) \quad M(L)]^T \end{aligned}$$

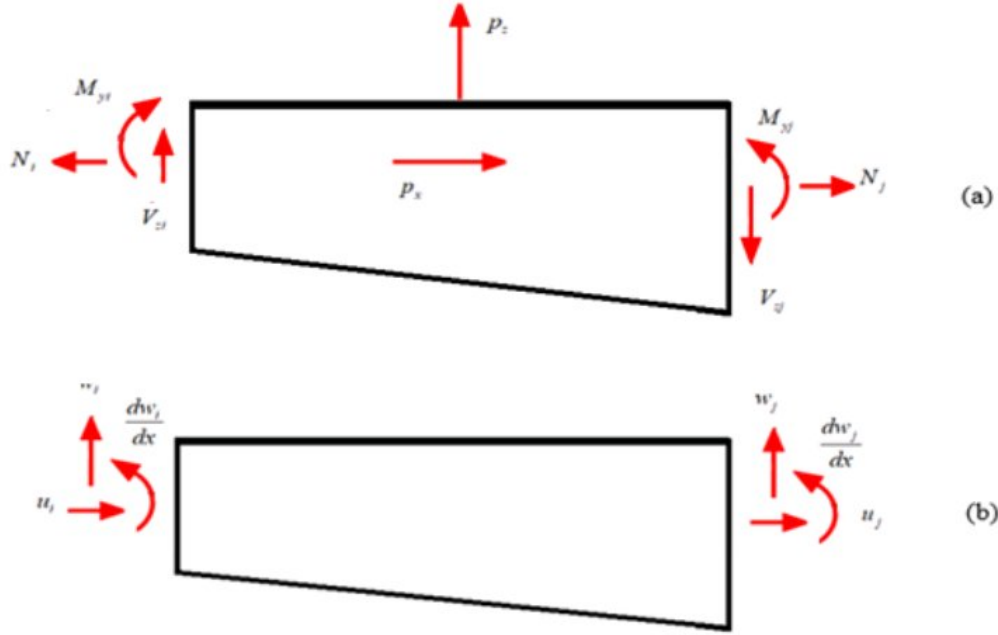


Figura 4.4 (a) Esforços reais; (b) Deslocamentos reais

A forma explícita das matrizes de influência na Eq. (4.97) são:

$$[H] = \begin{bmatrix} -N_F^*(0, 0+\varepsilon) & -V_F^*(0, 0+\varepsilon) & M_F^*(0, 0+\varepsilon) & N_F^*(L, 0+\varepsilon) & V_F^*(L, 0+\varepsilon) & -M_F^*(L, 0+\varepsilon) \\ -N_P^*(0, 0+\varepsilon) & -V_P^*(0, 0+\varepsilon) & M_P^*(0, 0+\varepsilon) & N_P^*(L, 0+\varepsilon) & V_P^*(L, 0+\varepsilon) & -M_P^*(L, 0+\varepsilon) \\ -N_{P,\dot{x}}^*(0, 0+\varepsilon) & -V_{P,\dot{x}}^*(0, 0+\varepsilon) & M_{P,\dot{x}}^*(0, 0+\varepsilon) & N_{P,\dot{x}}^*(L, 0+\varepsilon) & V_{P,\dot{x}}^*(L, 0+\varepsilon) & -M_{P,\dot{x}}^*(L, 0+\varepsilon) \\ -N_F^*(0, L-\varepsilon) & -V_F^*(0, L-\varepsilon) & M_F^*(0, L-\varepsilon) & N_F^*(L, L-\varepsilon) & V_F^*(L, L-\varepsilon) & -M_F^*(L, L-\varepsilon) \\ -N_P^*(0, L-\varepsilon) & -V_P^*(0, L-\varepsilon) & M_P^*(0, L-\varepsilon) & N_P^*(L, L-\varepsilon) & V_P^*(L, L-\varepsilon) & -M_P^*(L, L-\varepsilon) \\ -N_{P,\dot{x}}^*(0, L-\varepsilon) & -V_{P,\dot{x}}^*(0, L-\varepsilon) & M_{P,\dot{x}}^*(0, L-\varepsilon) & N_{P,\dot{x}}^*(L, L-\varepsilon) & V_{P,\dot{x}}^*(L, L-\varepsilon) & -M_{P,\dot{x}}^*(L, L-\varepsilon) \end{bmatrix}$$

$$[H] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{L}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{L}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$[G] = \begin{bmatrix} -u_F^*(0,0+\xi) & -w_F^*(0,0+\xi) & \frac{dw_F^*}{dx}(0,0+\xi) & u_F^*(L,0+\xi) & w_F^*(L,0+\xi) & -\frac{dw_F^*}{dx}(L,0+\xi) \\ -u_P^*(0,0+\xi) & -w_P^*(0,0+\xi) & \frac{dw_P^*}{dx}(0,0+\xi) & u_P^*(L,0+\xi) & w_P^*(L,0+\xi) & -\frac{dw_P^*}{dx}(L,0+\xi) \\ -u_{P,\hat{x}}^*(0,0+\xi) & -w_{P,\hat{x}}^*(0,0+\xi) & \frac{dw_{P,\hat{x}}^*}{dx}(0,0+\xi) & u_{P,\hat{x}}^*(L,0+\xi) & w_{P,\hat{x}}^*(L,0+\xi) & -\frac{dw_{P,\hat{x}}^*}{dx}(L,0+\xi) \\ -u_F^*(0,L-\xi) & -w_F^*(0,L-\xi) & \frac{dw_F^*}{dx}(0,L-\xi) & u_F^*(L,L-\xi) & w_F^*(L,L-\xi) & -\frac{dw_F^*}{dx}(L,L-\xi) \\ -u_P^*(0,L-\xi) & -w_P^*(0,L-\xi) & \frac{dw_P^*}{dx}(0,L-\xi) & u_P^*(L,L-\xi) & w_P^*(L,L-\xi) & -\frac{dw_P^*}{dx}(L,L-\xi) \\ -u_{P,\hat{x}}^*(0,L-\xi) & -w_{P,\hat{x}}^*(0,L-\xi) & \frac{dw_{P,\hat{x}}^*}{dx}(0,L-\xi) & u_{P,\hat{x}}^*(L,L-\xi) & w_{P,\hat{x}}^*(L,L-\xi) & -\frac{dw_{P,\hat{x}}^*}{dx}(L,L-\xi) \end{bmatrix}$$

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_7 & \beta_8 & \beta_9 \\ \beta_{10} & \beta_{11} & \beta_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{13} & \beta_{14} & \beta_{15} & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{16} & \beta_{17} & \beta_{18} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(4.98- 99)

Onde:

$$\beta_1 = -\frac{1}{2E} [\hat{F}(L) - \hat{F}(0)]$$

$$\beta_2 = -\frac{1}{2E} \left\{ (R(L) - R(0)) + \frac{L}{2} T(0) \right\}$$

$$\beta_3 = \frac{-1}{2E} \{ (T(L) - T(0)) \}$$

$$\beta_4 = -\frac{1}{2E} [LJ(L) - (P(L) - P(0))]$$

$$\beta_5 = -\frac{1}{2E} \{ L(Y(L) + Y(0)) + 2(K(L) - K(0)) \}$$

$$\beta_6 = \frac{-1}{2E} \{ -(Y(L) - Y(0)) + LQ(L) \}$$

$$\beta_7 = \frac{1}{2E} \{ (J(L) - J(0)) \}$$

$$\beta_8 = -\frac{1}{2E} [-(Y(L) + Y(0)) + LQ(0) + 2Y(0)]$$

$$\beta_9 = \frac{-1}{2E} [-Q(L) + Q(0)]$$

$$\beta_{10} = \frac{1}{2E} [\hat{F}(0) - \hat{F}(L)]$$

$$\beta_{11} = \frac{1}{2E} [(R(0) - R(L)) + LT(L)]$$

$$\beta_{12} = \frac{1}{2E} [T(0) - T(L)]$$

$$\beta_{13} = \frac{-1}{2E} [LJ(0) + (P(0) - P(L))]$$

$$\beta_{14} = \frac{-1}{2E} [L(Y(L) + Y(0)) + 2(K(0) - K(L))]$$

$$\beta_{15} = -\frac{1}{2E} [LQ(0) + (Y(0) - Y(L))]$$

$$\beta_{16} = \frac{1}{2E} [-(J(0) - J(L))]$$

$$\beta_{17} = \frac{1}{2E} [(Y(L) + Y(0)) + LQ(L)]$$

$$\beta_{18} = -\frac{1}{2E} [Q(0) - Q(L)]$$

O vetor de carga fica:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} \int_0^L [p_x u_F^*(x, 0) + p_z w_F^*(x, 0)] dx \\ \int_0^L [p_x u_P^*(x, 0) + p_z w_P^*(x, 0)] dx \\ \int_0^L [p_x u_{P,\hat{x}}^*(x, 0) + p_z w_{P,\hat{x}}^*(x, 0)] dx \\ \int_0^L [p_x u_F^*(x, L) + p_z w_F^*(x, L)] dx \\ \int_0^L [p_x u_P^*(x, L) + p_z w_P^*(x, L)] dx \\ \int_0^L [p_x u_{P,\hat{x}}^*(x, L) + p_z w_{P,\hat{x}}^*(x, L)] dx \end{Bmatrix} \quad (4.99a)$$

Da substituição das Eqs. (4.45), (4.51), (4.62), (4.67), (4.74), (4.75) no vetor carregamento Eq.(4.99a), tem-se:

$$\begin{aligned}
\{f\} = & \left\{ \begin{aligned} & \int_0^L p_x(x) \left( \frac{-1}{2E} [\hat{F}(x) - \hat{F}(0)] \right) dx \\ & \int_0^L p_x(x) \left( -\frac{1}{2E} \{xJ(x) - [P(x) - P(0)]\} \right) dx \\ & \int_0^L p_x(x) \left( \frac{1}{2E} [J(x) - J(0)] \right) dx \\ & \int_0^L p_x(x) \left( \frac{1}{2E} [\hat{F}(x) - \hat{F}(L)] \right) dx \\ & \int_0^L p_x(x) \left( -\frac{1}{2E} \{|L-x|J(x) + [P(x) - P(L)]\} \right) dx \\ & \int_0^L p_x(x) \left( \frac{-1}{2E} [J(x) - J(L)] \right) dx \end{aligned} \right\} \\
+ & \left\{ \begin{aligned} & \int_0^L p_z(x) \left( -\frac{1}{2E} [R(x) - R(0)] - \frac{x}{2E} T(0) \right) dx \\ & \int_0^L p_z(x) \left( -\frac{1}{2E} \{x[Y(x) + Y(0)] - 2[K(x) - K(0)]\} \right) dx \\ & \int_0^L p_z(x) \left( -\frac{1}{2E} \{[Y(0) - Y(x)] + xQ(0)\} \right) dx \\ & \int_0^L p_z(x) \left( -\frac{1}{2E} \{|x-L|J(x) + [P(x) - P(L)]\} \right) dx \\ & \int_0^L p_z(x) \left( -\frac{1}{2E} \{|x-L|[Y(x) + Y(L)] + 2[K(x) - K(L)]\} \right) dx \\ & \int_0^L p_z(x) \left( -\frac{1}{2E} \{-[Y(L) - Y(x)] + |x-L|Q(L)\} \right) dx \end{aligned} \right\}
\end{aligned}
\tag{4.99b}$$

Se  $p_x(x)$  for admitido linear, após o cálculo direto da integral de domínio, o vetor de carga fica:

$$\{f\} = -\frac{p_{xi}}{2E} \begin{bmatrix} \{\hat{G}(L) - \hat{G}(0) - L\hat{F}(0)\} \\ \{LP(L) - 2V(L) + 2V(0) + LP(0)\} \\ \{P(L) - P(0) - LJ(0)\} \\ \{\hat{G}(L) - \hat{G}(0) - L\hat{F}(L)\} \\ \{-LP(0) + 2V(L) - 2V(0) - LP(L)\} \\ \{P(L) - P(0) - LJ(L)\} \end{bmatrix} +$$



$$\frac{P_{zi}}{2E} \begin{bmatrix} \left\{ -(S(L) - S(0) - LR(0)) - \frac{L^2}{4} T(0) \right\} \\ \left\{ LK(L) - 3L(L) + 3L(0) + Y(0) \frac{L^2}{2} + 2LK(0) \right\} \\ \left\{ (K(L) - K(0) + LY(0)) - LQ(0) - 2Y(0) \right\} \\ \left\{ (S(L) - S(0) - LR(L)) - \frac{L^2}{4} T(L) \right\} \\ \left\{ LK(0) - 3L(L) + 3L(0) - Y(L) \frac{L^2}{2} + 2LK(L) \right\} \\ \left\{ (K(L) - K(0) + LY(L)) + \frac{L^2}{2} Q(L) - 2LY(L) \right\} \end{bmatrix}$$

Aqui, apesar da semelhança da transformação de integral de domínio das cargas transversais e axiais em valores de contorno descrita nos capítulos anteriores, optou-se por mostrar diretamente a dedução do caso quintico, caso que engloba de forma direta os casos quarticos, quadráticos e lineares necessitando para isso, apenas de condições impostas sobre as equações que regem o problema.

Se as cargas transversal e axial forem quinticas (polinômio de quinto grau), então suas equações de domínio em termos dos valores de contorno ficam:

$$\begin{aligned} \int_0^L p_x(x) u_F^*(x, \hat{x}) dx + \int_0^L p_z(x) w_F^*(x, \hat{x}) dx &= \left[ IIIIu_F^*(x, \hat{x}) \frac{d^4 p_x(x)}{dx^4} \right]_0^L - \left[ IIIu_F^*(x, \hat{x}) \frac{d^3 p_x(x)}{dx^3} \right]_0^L \\ &+ \left[ IIu_F^*(x, \hat{x}) \frac{d^2 p_x(x)}{dx^2} \right]_0^L - \left[ Iu_F^*(x, \hat{x}) \frac{dp_x(x)}{dx} \right]_0^L + \left[ Iu_F^*(x, \hat{x}) p_x(x) \right]_0^L \\ &\left[ IIIIw_F^*(x, \hat{x}) \frac{d^4 p_z(x)}{dx^4} \right]_0^L - \left[ IIIw_F^*(x, \hat{x}) \frac{d^3 p_z(x)}{dx^3} \right]_0^L \\ &+ \left[ IIw_F^*(x, \hat{x}) \frac{d^2 p_z(x)}{dx^2} \right]_0^L - \left[ Iw_F^*(x, \hat{x}) \frac{dp_z(x)}{dx} \right]_0^L + \left[ Iw_F^*(x, \hat{x}) p_z(x) \right]_0^L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^L p_x(x) u_p^*(x, \hat{x}) dx + \int_0^L p_z(x) w_p^*(x, \hat{x}) dx = \left[ IIII u_p^*(x, \hat{x}) \frac{d^4 p_x(x)}{dx^4} \right]_0^L - \left[ III u_p^*(x, \hat{x}) \frac{d^3 p_x(x)}{dx^3} \right]_0^L \\
& + \left[ II u_p^*(x, \hat{x}) \frac{d^2 p_x(x)}{dx^2} \right]_0^L - \left[ I u_p^*(x, \hat{x}) \frac{dp_x(x)}{dx} \right]_0^L + \left[ I u_p^*(x, \hat{x}) p_x(x) \right]_0^L \\
& \left[ IIII w_p^*(x, \hat{x}) \frac{d^4 p_z(x)}{dx^4} \right]_0^L - \left[ III w_p^*(x, \hat{x}) \frac{d^3 p_z(x)}{dx^3} \right]_0^L \\
& + \left[ II w_p^*(x, \hat{x}) \frac{d^2 p_z(x)}{dx^2} \right]_0^L - \left[ I w_p^*(x, \hat{x}) \frac{dp_z(x)}{dx} \right]_0^L + \left[ I w_p^*(x, \hat{x}) p_z(x) \right]_0^L \\
\\
& \int_0^L p_x(x) u_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) dx + \int_0^L p_z(x) w_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) dx = \left[ IIII u_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) \frac{d^4 p_x(x)}{dx^4} \right]_0^L - \left[ III u_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) \frac{d^3 p_x(x)}{dx^3} \right]_0^L \\
& + \left[ II u_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) \frac{d^2 p_x(x)}{dx^2} \right]_0^L - \left[ I u_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) \frac{dp_x(x)}{dx} \right]_0^L + \left[ I u_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) p_x(x) \right]_0^L \\
& \left[ IIII w_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) \frac{d^4 p_z(x)}{dx^4} \right]_0^L - \left[ III w_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) \frac{d^3 p_z(x)}{dx^3} \right]_0^L \\
& + \left[ II w_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) \frac{d^2 p_z(x)}{dx^2} \right]_0^L - \left[ I w_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) \frac{dp_z(x)}{dx} \right]_0^L + \left[ I w_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) p_z(x) \right]_0^L
\end{aligned} \tag{4.99c-e}$$

Onde as integrais superiores das soluções fundamenatais,

$$\begin{aligned}
& \int \int \int \int w_F^*(x, \hat{x}) dx dx dx dx = IIII w_F^*(x, \hat{x}), \quad \int \int \int \int w_F^*(x, \hat{x}) dx dx dx dx = IIII w_F^*(x, \hat{x}), \\
& \int \int \int w_F^*(x, \hat{x}) dx dx dx = III w_F^*(x, \hat{x}), \quad \int \int w_F^*(x, \hat{x}) dx dx = II w_F^*(x, \hat{x}), \\
& \int w_F^*(x, \hat{x}) dx = I w_F^*(x, \hat{x}), \quad \int \int \int \int w_P^*(x, \hat{x}) dx dx dx dx = IIII w_P^*(x, \hat{x}), \\
& \int \int \int \int w_P^*(x, \hat{x}) dx dx dx dx = IIII w_P^*(x, \hat{x}), \quad \int \int \int w_P^*(x, \hat{x}) dx dx dx = III w_P^*(x, \hat{x}), \\
& \int \int w_P^*(x, \hat{x}) dx dx = II w_P^*(x, \hat{x}), \quad \int w_P^*(x, \hat{x}) dx = I w_P^*(x, \hat{x}), \\
& \int \int \int \int w_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) dx dx dx dx = IIII w_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x}), \quad \int \int \int \int w_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) dx dx dx dx = IIII w_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x}), \\
& \int \int \int w_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) dx dx dx = III w_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x}), \quad \int \int w_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) dx dx = II w_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x}), \\
& \int w_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) dx = I w_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) \text{ podem ser encontradas no Apêndice 6.}
\end{aligned}$$

O vetor de carga  $\{f\}$  pode ainda ser escrito pela colocação do ponto-fonte nas extremidades da barra

$$\{f\} = \int_0^L \begin{bmatrix} u_F^*(x,0) & w_F^*(x,0) \\ u_P^*(x,0) & w_P^*(x,0) \\ u_{P,\dot{x}}^*(x,0) & w_{P,\dot{x}}^*(x,0) \\ u_F^*(x,L) & w_F^*(x,L) \\ u_P^*(x,L) & w_P^*(x,L) \\ u_{P,\dot{x}}^*(x,L) & w_{P,\dot{x}}^*(x,L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_x(x) \\ p_z(x) \end{Bmatrix} dx = \begin{Bmatrix} \beta_1 - \beta_2 \\ \beta_3 - \beta_4 \\ \beta_5 - \beta_6 \\ \beta_7 - \beta_8 \\ \beta_9 - \beta_{10} \\ \beta_{11} - \beta_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.99f)$$

Onde:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= (fat_1) IIIIu_F^*(L,0) \frac{d^4 p_x(L)}{dx^4} - (fat_1) IIIIu_F^*(L,0) \frac{d^3 p_x(L)}{dx^3} \\ &+ (fat_2) IIIu_F^*(L,0) \frac{d^2 p_x(L)}{dx^2} - IIu_F^*(L,0) \frac{dp_x(L)}{dx} + Iu_F^*(L,0) p_x(L) \\ &+ (fat_1) IIIIw_F^*(L,0) \frac{d^4 p_z(L)}{dx^4} - (fat_1) IIIIw_F^*(L,0) \frac{d^3 p_z(L)}{dx^3} \\ &+ (fat_2) IIIw_F^*(L,0) \frac{d^2 p_z(L)}{dx^2} - IIw_F^*(L,0) \frac{dp_z(L)}{dx} + Iw_F^*(L,0) p_z(L) \\ \beta_2 &= (fat_1) IIIIu_F^*(0,0) \frac{d^4 p_x(0)}{dx^4} - (fat_1) IIIIu_F^*(0,0) \frac{d^3 p_x(0)}{dx^3} \\ &+ (fat_2) IIIu_F^*(0,0) \frac{d^2 p_x(0)}{dx^2} - IIu_F^*(0,0) \frac{dp_x(0)}{dx} + Iu_F^*(0,0) p_x(0) \\ &+ (fat_1) IIIIw_F^*(0,0) \frac{d^4 p_z(0)}{dx^4} - (fat_1) IIIIw_F^*(0,0) \frac{d^3 p_z(0)}{dx^3} \\ &+ (fat_2) IIIw_F^*(0,0) \frac{d^2 p_z(0)}{dx^2} - IIw_F^*(0,0) \frac{dp_z(0)}{dx} + Iw_F^*(0,0) p_z(0) = 0 \\ \beta_3 &= (fat_1) IIIIu_P^*(L,0) \frac{d^4 p_x(L)}{dx^4} - (fat_1) IIIIu_P^*(L,0) \frac{d^3 p_x(L)}{dx^3} \\ &+ (fat_2) IIIu_P^*(L,0) \frac{d^2 p_x(L)}{dx^2} - IIu_P^*(L,0) \frac{dp_x(L)}{dx} + Iu_P^*(L,0) p_x(L) \\ &+ (fat_1) IIIIw_P^*(L,0) \frac{d^4 p_z(L)}{dx^4} - (fat_1) IIIIw_P^*(L,0) \frac{d^3 p_z(L)}{dx^3} \\ &+ (fat_2) IIIw_P^*(L,0) \frac{d^2 p_z(L)}{dx^2} - IIw_P^*(L,0) \frac{dp_z(L)}{dx} + Iw_P^*(L,0) p_z(L) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_4 = & (fat_1) IIIIu_p^*(0,0) \frac{d^4 p_x(0)}{dx^4} - (fat_1) IIIIu_p^*(0,0) \frac{d^3 p_x(0)}{dx^3} \\
& + (fat_2) IIIu_p^*(0,0) \frac{d^2 p_x(0)}{dx^2} - IIu_p^*(0,0) \frac{dp_x(0)}{dx} + Iu_p^*(0,0) p_x(0) \\
& + (fat_1) IIIIw_p^*(0,0) \frac{d^4 p_z(0)}{dx^4} - (fat_1) IIIIw_p^*(0,0) \frac{d^3 p_z(0)}{dx^3} \\
& + (fat_2) IIIw_p^*(0,0) \frac{d^2 p_z(0)}{dx^2} - IIw_p^*(0,0) \frac{dp_z(0)}{dx} + Iw_p^*(0,0) p_z(0) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_5 = & (fat_1) IIIIu_{p,\hat{x}}^*(L,0) \frac{d^4 p_x(L)}{dx^4} - (fat_1) IIIIu_{p,\hat{x}}^*(L,0) \frac{d^3 p_x(L)}{dx^3} \\
& + (fat_2) IIIu_{p,\hat{x}}^*(L,0) \frac{d^2 p_x(L)}{dx^2} - IIu_{p,\hat{x}}^*(L,0) \frac{dp_x(L)}{dx} + Iu_{p,\hat{x}}^*(L,0) p_x(L) \\
& + (fat_1) IIIIw_{p,\hat{x}}^*(L,0) \frac{d^4 p_z(L)}{dx^4} - (fat_1) IIIIw_{p,\hat{x}}^*(L,0) \frac{d^3 p_z(L)}{dx^3} \\
& + (fat_2) IIIw_{p,\hat{x}}^*(L,0) \frac{d^2 p_z(L)}{dx^2} - IIw_{p,\hat{x}}^*(L,0) \frac{dp_z(L)}{dx} + Iw_{p,\hat{x}}^*(L,0) p_z(L)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_6 = & (fat_1) IIIIu_{p,\hat{x}}^*(0,0) \frac{d^4 p_x(0)}{dx^4} - (fat_1) IIIIu_{p,\hat{x}}^*(0,0) \frac{d^3 p_x(0)}{dx^3} \\
& + (fat_2) IIIu_{p,\hat{x}}^*(0,0) \frac{d^2 p_x(0)}{dx^2} - IIu_{p,\hat{x}}^*(0,0) \frac{dp_x(0)}{dx} + Iu_{p,\hat{x}}^*(0,0) p_x(0) \\
& + (fat_1) IIIIw_{p,\hat{x}}^*(0,0) \frac{d^4 p_z(0)}{dx^4} - (fat_1) IIIIw_{p,\hat{x}}^*(0,0) \frac{d^3 p_z(0)}{dx^3} \\
& + (fat_2) IIIw_{p,\hat{x}}^*(0,0) \frac{d^2 p_z(0)}{dx^2} - IIw_{p,\hat{x}}^*(0,0) \frac{dp_z(0)}{dx} + Iw_{p,\hat{x}}^*(0,0) p_z(0) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_7 = & (fat_1) IIIIu_F^*(L,L) \frac{d^4 p_x(L)}{dx^4} - (fat_1) IIIIu_F^*(L,L) \frac{d^3 p_x(L)}{dx^3} \\
& + (fat_2) IIIu_F^*(L,L) \frac{d^2 p_x(L)}{dx^2} - IIu_F^*(L,L) \frac{dp_x(L)}{dx} + Iu_F^*(L,L) p_x(L) \\
& + (fat_1) IIIIw_F^*(L,L) \frac{d^4 p_z(L)}{dx^4} - (fat_1) IIIIw_F^*(L,L) \frac{d^3 p_z(L)}{dx^3} \\
& + (fat_2) IIIw_F^*(L,L) \frac{d^2 p_z(L)}{dx^2} - IIw_F^*(L,L) \frac{dp_z(L)}{dx} + Iw_F^*(L,L) p_z(L) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_8 &= (fat_1) IIIIu_F^*(0, L) \frac{d^4 p_x(0)}{dx^4} - (fat_1) IIIIu_F^*(0, L) \frac{d^3 p_x(0)}{dx^3} \\
&+ (fat_2) IIIu_F^*(0, L) \frac{d^2 p_x(0)}{dx^2} - IIu_F^*(0, L) \frac{dp_x(0)}{dx} + Iu_F^*(0, L) p_x(0) \\
&+ (fat_1) IIIIw_F^*(0, L) \frac{d^4 p_z(0)}{dx^4} - (fat_1) IIIIw_F^*(0, L) \frac{d^3 p_z(0)}{dx^3} \\
&+ (fat_2) IIIw_F^*(0, L) \frac{d^2 p_z(0)}{dx^2} - IIw_F^*(0, L) \frac{dp_z(0)}{dx} + Iw_F^*(0, L) p_z(0) \\
\\
\beta_9 &= (fat_1) IIIIu_p^*(L, L) \frac{d^4 p_x(L)}{dx^4} - (fat_1) IIIIu_p^*(L, L) \frac{d^3 p_x(L)}{dx^3} \\
&+ (fat_2) IIIu_p^*(L, L) \frac{d^2 p_x(L)}{dx^2} - IIu_p^*(L, L) \frac{dp_x(L)}{dx} + Iu_p^*(L, L) p_x(L) \\
&+ (fat_1) IIIIw_p^*(L, L) \frac{d^4 p_z(L)}{dx^4} - (fat_1) IIIIw_p^*(L, L) \frac{d^3 p_z(L)}{dx^3} \\
&+ (fat_2) IIIw_p^*(L, L) \frac{d^2 p_z(L)}{dx^2} - IIw_p^*(L, L) \frac{dp_z(L)}{dx} + Iw_p^*(L, L) p_z(L) = 0 \\
\\
\beta_{10} &= (fat_1) IIIIu_p^*(0, L) \frac{d^4 p_x(0)}{dx^4} - (fat_1) IIIIu_p^*(0, L) \frac{d^3 p_x(0)}{dx^3} \\
&+ (fat_2) IIIu_p^*(0, L) \frac{d^2 p_x(0)}{dx^2} - IIu_p^*(0, L) \frac{dp_x(0)}{dx} + Iu_p^*(0, L) p_x(0) \\
&+ (fat_1) IIIIw_p^*(0, L) \frac{d^4 p_z(0)}{dx^4} - (fat_1) IIIIw_p^*(0, L) \frac{d^3 p_z(0)}{dx^3} \\
&+ (fat_2) IIIw_p^*(0, L) \frac{d^2 p_z(0)}{dx^2} - IIw_p^*(0, L) \frac{dp_z(0)}{dx} + Iw_p^*(0, L) p_z(0) \\
\\
\beta_{11} &= (fat_1) IIIIu_{p,\hat{x}}^*(L, L) \frac{d^4 p_x(L)}{dx^4} - (fat_1) IIIIu_{p,\hat{x}}^*(L, L) \frac{d^3 p_x(L)}{dx^3} \\
&+ (fat_2) IIIu_{p,\hat{x}}^*(L, L) \frac{d^2 p_x(L)}{dx^2} - IIu_{p,\hat{x}}^*(L, L) \frac{dp_x(L)}{dx} + Iu_{p,\hat{x}}^*(L, L) p_x(L) \\
&+ (fat_1) IIIIw_{p,\hat{x}}^*(L, L) \frac{d^4 p_z(L)}{dx^4} - (fat_1) IIIIw_{p,\hat{x}}^*(L, L) \frac{d^3 p_z(L)}{dx^3} \\
&+ (fat_2) IIIw_{p,\hat{x}}^*(L, L) \frac{d^2 p_z(L)}{dx^2} - IIw_{p,\hat{x}}^*(L, L) \frac{dp_z(L)}{dx} + Iw_{p,\hat{x}}^*(L, L) p_z(L) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{12} = & (fat_1) IIIIu_{P,\dot{x}}^*(0, L) \frac{d^4 p_x(0)}{dx^4} - (fat_1) IIIIu_{P,\dot{x}}^*(0, L) \frac{d^3 p_x(0)}{dx^3} \\
& + (fat_2) IIIu_{P,\dot{x}}^*(0, L) \frac{d^2 p_x(0)}{dx^2} - IIu_{P,\dot{x}}^*(0, L) \frac{dp_x(0)}{dx} + Iu_{P,\dot{x}}^*(0, L) p_x(0) \\
& + (fat_1) IIIIw_{P,\dot{x}}^*(0, L) \frac{d^4 p_z(0)}{dx^4} - (fat_1) IIIIw_{P,\dot{x}}^*(0, L) \frac{d^3 p_z(0)}{dx^3} \\
& + (fat_2) IIIw_{P,\dot{x}}^*(0, L) \frac{d^2 p_z(0)}{dx^2} - IIw_{P,\dot{x}}^*(0, L) \frac{dp_z(0)}{dx} + Iw_{P,\dot{x}}^*(0, L) p_z(0)
\end{aligned}
\tag{4.99g-r}$$

Mais uma vez vale observar que este caso engloba de forma direta variáveis quárticas, cúbicas, lineares e constantes da seção transversal. Para o quártico, quadrático e linear respectivamente, tem-se:

$$fat_1 = 1 \text{ e } fat_2 = 1$$

$$fat_1 = 0 \text{ e } fat_2 = 1$$

$$fat_1 = 0 \text{ e } fat_2 = 0$$

Já, para o caso em que forem aplicadas cargas concentradas ( $F_x$ ,  $F_z$ ) a uma distância “ $\bar{a}$ ” da extremidade esquerda, o vetor de carga fica:

$$\begin{aligned}
\{f\} = & \frac{F_x}{2E} \begin{bmatrix} -\hat{F}(\bar{a}) + \hat{F}(0) \\ -\bar{a}J(\bar{a}) + P(\bar{a}) - P(0) \\ \{J(\bar{a}) - J(0)\} \\ \hat{F}(\bar{a}) - \hat{F}(L) \\ -(L - \bar{a})J(\bar{a}) - P(\bar{a}) + P(L) \\ \{-J(\bar{a}) + J(L)\} \end{bmatrix} + \\
& \frac{F_z}{2E} \begin{bmatrix} -R(\bar{a}) + R(0) - \bar{a}T(0) \\ \{-\bar{a}[Y(\bar{a}) + Y(0)] + 2[K(\bar{a}) - K(0)]\} \\ \{Y(\bar{a}) - Y(0)\} - \bar{a}Q(0) \\ \{R(\bar{a}) - R(L)\} - (L - \bar{a})T(L) \\ \{-(L - \bar{a})[Y(\bar{a}) + Y(L)] - 2[K(\bar{a}) - K(L)]\} \\ \{-(Y(\bar{a}) - Y(L)) - (L - \bar{a})Q(L)\} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Como a solução do sistema algébrico apresentado na Eq. (4.97) é dada apenas para o contorno da barra, logo, para se obter a solução algébrica para todo domínio é necessário redefinir as Eq. (4.97) em função de um ponto genérico do domínio. Portanto, fazendo a substituição  $\hat{x} = a$  e também da solução do sistema algébrico  $\{u\}$ , tem-se, então, a solução em todo domínio da barra dada por:

$$\{u(a)\} + [H(a)]\{u\} = [G(a)]\{p\} + \{f(a)\}$$

Onde:

$$[H(a)] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{a}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{|L-a|}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$[G(a)] = \begin{bmatrix} -\beta_1(a) & -\beta_2(a) & \beta_3(a) & \beta_4(a) & \beta_5(a) & -\beta_6(a) \\ -\beta_7(a) & -\beta_8(a) & \beta_9(a) & \beta_{10}(a) & \beta_{11}(a) & -\beta_{12}(a) \\ -\beta_{13}(a) & -\beta_{14}(a) & \beta_{15}(a) & \beta_{16}(a) & \beta_{17}(a) & -\beta_{18}(a) \end{bmatrix}$$

Com:

$$\beta_1(a) = \frac{1}{2E} (\hat{F}(0) - \hat{F}(a))$$

$$\beta_2(a) = \frac{1}{2E} \{[R(0) - R(a)] + aT(a)\}$$

$$\beta_3(a) = \frac{1}{2E} \{[T(0) - T(a)]\}$$

$$\beta_4(a) = -\frac{1}{2E} \{\hat{F}(L) - \hat{F}(a)\}$$

$$\beta_5(a) = -\frac{1}{2E} \{[R(L) - R(a)] - |L-a|T(a)\}$$

$$\beta_6(a) = -\frac{1}{2E} \{[T(L) - T(a)]\}$$

$$\beta_7(a) = -\frac{1}{2E} \{[P(0) - P(a)] + aJ(0)\}$$

$$\beta_8(a) = -\frac{1}{2E} \{a[Y(0) + Y(a)] + 2[K(0) - K(a)]\}$$

$$\beta_9(a) = -\frac{1}{2E} \{aQ(0) + [Y(0) - Y(a)]\}$$

$$\beta_{10}(a) = -\frac{1}{2E} \{-[P(L) - P(a)] + |L - a|J(L)\}$$

$$\beta_{11}(a) = -\frac{1}{2E} \{-2[K(L) - K(a)] + |L - a|[Y(L) + Y(a)]\}$$

$$\beta_{12}(a) = -\frac{1}{2E} \{-[Y(L) - Y(a)] + |L - a|Q(L)\}$$

$$\beta_{13}(a) = \frac{1}{2E} \{-[J(0) - J(a)]\}$$

$$\beta_{14}(a) = -\frac{1}{2E} \{aQ(a) - 2Y(a) + [Y(0) + Y(a)]\}$$

$$\beta_{15}(a) = -\frac{1}{2E} \{[Q(0) - Q(a)]\}$$

$$\beta_{16}(a) = \frac{1}{2E} \{[J(L) - J(a)]\}$$

$$\beta_{17}(a) = -\frac{1}{2E} \{|L - a|Q(a) + 2Y(a) - [Y(L) + Y(a)]\}$$

$$\beta_{18}(a) = -\frac{1}{2E} \{|-Q(L) + Q(a)|\}$$

Se os carregamentos forem admitidos constantes em  $p_x$  ou em  $p_z$  produz um vetor de carga  $\{f(a)\}$  dado por:

$$\{f(a)\} = \frac{p_x}{2E} \begin{bmatrix} 2N(a) - N(0) - N(L) + L\hat{F}(a) + 2a\hat{F}(a) \\ -aP(0) - LP(L) + 2V(L) - 2V(a) + aP(L) + LP(a) \\ -P(a) + P(0) + aJ(a) + P(L) - P(a) - J(a)(L - a) \end{bmatrix} +$$



$$\frac{P_z}{2E} \left[ \begin{array}{c} \frac{S(a) - S(0) - aR(a)}{2} - \frac{a^2 T(a)}{4} - \frac{[S(L) - S(a) - (L-a)R(a)]}{2} \\ - 6W(a) + 3W(0) + aK(0) - Y(a) \left[ -\frac{L^2}{2} + aL \right] + 2aK(a) \\ \frac{Q(a)L^2}{2} - Q(a)L + 3Y(a)L + Q(a)a^2 \end{array} \right] +$$

$$\frac{P_z}{2E} \left[ \begin{array}{c} \left[ \frac{L^2}{2} + \frac{a^2}{2} - aL \right] \\ - LK(L) + 3W(L) + aK(L) - 2W(a)L + 2aW(a) \\ - 6Y(a)a - K(0) - K(L) + 2K(a) \end{array} \right]$$

Para os carregamentos concentrados  $F_x$  e  $F_z$  aplicados a uma distância  $\bar{a}$  do início da barra, o vetor de carga fica:

$$\{f(a)\} = \frac{F_x}{2E} \left\{ \begin{array}{c} -ss[\hat{F}(\bar{a}) - \hat{F}(a)] \\ -[\bar{a} - a|J(\bar{a}) - ss[P(\bar{a}) - P(a)]] \\ ss[J(\bar{a}) - J(a)] \end{array} \right\} +$$

$$\frac{F_z}{2E} \left\{ \begin{array}{c} -ss[R(\bar{a}) - R(a)] - |\bar{a} - a|T(a) \\ -[\bar{a} - a|[Y(\bar{a}) + Y(a)] + 2ss[K(\bar{a}) - K(a)]] \\ ss[Y(\bar{a}) - Y(a)] - |\bar{a} - a|Q(a) \end{array} \right\}$$

Onde:

$$\left\{ \begin{array}{l} ss = 1, \text{ se } \bar{a} > a \\ ss = -1, \text{ se } \bar{a} < a \end{array} \right.$$

## 4.6 PROBLEMA REAL: TIMOSHENKO

Aqui, para o desenvolvimento do problema de vigas não-prismáticas com variação não-simétrica da seção transversal ao longo do comprimento segundo a teoria de Timoshenko.

### 4.6.1 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Na teoria de Timoshenko, não necessariamente admite-se a ortogonalidade entre a seção transversal e o eixo longitudinal da barra na flexão, isto implica que a

deformação por cortante é não nula  $\gamma_{xy} \neq 0$ . Além disso, devido a conservação da planicidade da seção transversal, os deslocamentos axial e transversal após a deformação,  $\bar{u}(x, z)$  e  $\bar{w}(x, z)$ , respectivamente, são dados por:

$$\bar{u}(x, z) = u(x) + z\phi(x) \quad (4.100)$$

$$\bar{w}(x, z) = w(x) \quad (4.101)$$

Já as deformações ficam:

$$\varepsilon_x = \frac{d\bar{u}(x, z)}{dx} = \frac{du(x)}{dx} + z \frac{d\phi(x)}{dx} \quad (4.102)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{d\bar{u}(x, z)}{dz} + \frac{d\bar{w}(x, z)}{dx} = \phi(x) + \frac{dw(x)}{dx} \quad (4.103)$$

As relações tensão-deformação de vigas não-prismáticas e não-simétricas, desprezando o coeficiente de Poisson  $\nu = 0$ , pode ser dada por:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E\left[\frac{du(x)}{dx}\right] + Ez \frac{d\phi(x)}{dx} \quad (4.104)$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} = G\left[\frac{dw(x)}{dx} + \phi(x)\right] \quad (4.105)$$

Já os esforços resultantes das tensões são:

$$N(x) = \int_A \sigma_x dA = EA_{11}(x) \frac{du}{dx} + EB_{11}(x) \frac{d\phi(x)}{dx} \quad (4.106)$$

$$M(x) = \int_A \sigma_x z dA = EB_{11}(x) \frac{du}{dx} + ED_{11}(x) \frac{d\phi(x)}{dx} \quad (4.107)$$

Onde:

$$A_{11}(x) = \int_{-b \inf(x)}^{+b \sup(x)} \int_{-z \inf(x)}^{+z \sup(x)} dz dy \quad (4.108)$$

$$B_{11}(x) = \int_{-b\inf(x)}^{+b\sup(x)} \int_{-z\inf(x)}^{+z\sup(x)} z dz dy \quad (4.109)$$

$$D_{11}(x) = \int_{-b\inf(x)}^{+b\sup(x)} \int_{-z\inf(x)}^{+z\sup(x)} z^2 dz dy \quad (4.110)$$

Já o esforço cortante não é mais calculado pela derivada do momento fletor como na teoria de Euler-Bernoulli, e sim pela resultante das tensões cisalhantes transversais na seção transversal.

O esforço cortante é dado por:

$$V(x) = \int_A \kappa \tau_{xz} dA = \kappa GA(x) \left[ \frac{dw(x)}{dx} + \phi(x) \right] \quad (4.111)$$

A obtenção da equação governante do problema real de viga não-prismática com variação não-simétrica de Timoshenko, pode ser obtida pela condição estacionária do funcional de energia, desta forma tem-se:

$$\delta\pi = \int_V (\sigma_x \delta\varepsilon_x + \tau_{xz} \delta\gamma_{xz}) dV - \int_0^L (p_x \delta u + p_z \delta w + m \delta \phi) dx = 0 \quad (4.112)$$

Após as devidas manipulações da Eq. (4.112) e com o auxílio das Eqs. (4.106), (4.107) e (4.111) então, integrando-se na área transversal, tem-se:

$$\begin{aligned} \delta\pi = & \int_0^L \left( N(x) \left[ \frac{d\delta u(x)}{dx} \right] + M(x) \frac{d\delta \phi(x)}{dx} \right) dx \\ & + \int_0^L \left( V(x) \delta \left[ \frac{dw(x)}{dx} + \phi(x) \right] \right) dx - \int_0^L (p_x \delta u + p_z \delta w + m \delta \phi) dx = 0 \end{aligned} \quad (4.113)$$

Integrando-se a Eq.(4.113) e em seguida aplicando-se o fato de que a variação dos campos no contorno é nula,  $\left[ \delta \frac{dw(x)}{dx} \right]_0^L = [\delta w(x)]_0^L = 0$ , a Eq.(4.113) fica:

$$\int_0^L \left( \left( -\frac{dN}{dx} - p_x \right) \delta u + \left( -\left( \frac{dV}{dx} \right) - p_z \right) \delta w \right) dx + \int_0^L \left( \frac{dM}{dx} - (V) + m \right) \delta \phi dx = 0 \quad (4.114)$$

Como as variações  $\delta u$ ,  $\delta w$ ,  $\delta \phi$  podem assumir diferentes valores durante o mapeamento das funções  $u, w, \phi$ , para garantir a condição de nulidade da Eq. (4.115) para todo o domínio, é necessário que:

$$\frac{dN}{dx} + p_x = 0 \quad (4.115)$$

$$\frac{dM}{dx} - (V) + m = 0 \quad (4.116)$$

$$\left( \frac{dV}{dx} \right) + p_z = 0 \quad (4.117)$$

Em termos dos deslocamentos, as equações de equilíbrio ficam:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \{ EA_{11}(x) \frac{du(x)}{dx} + EB_{11}(x) \frac{d\phi(x)}{dx} \} + p_x(x) = 0 \\ \frac{d}{dx} \{ \kappa GA_{55}(x) [\phi(x) + \frac{dw(x)}{dx}] \} + p_z(x) = 0 \\ \frac{d}{dx} \{ EB_{11}(x) \frac{du(x)}{dx} + ED_{11}(x) \frac{d\phi(x)}{dx} \} - \kappa GA_{55}(x) [\phi(x) + \frac{dw(x)}{dx}] + m = 0 \end{array} \right. \quad (4.118-120)$$

#### 4.7 PROBLEMA FUNDAMENTAL: TIMOSHENKO

O problema fundamental de viga não-prismática com variação não-simétrica de Timoshenko é associado um domínio infinito sob cargas pontuais  $(p_x^*, p_z^*, m^*)$  e governado por relações análogas aplicadas ao problema real. Quando a fonte axial  $p_x^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$  for ativada, equações governantes fundamentais análogas ao real Eq. (4.118-120) são dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \left\{ EA_{11}(x) \frac{du_F^*(x, \hat{x})}{dx} + EB_{11}(x) \frac{d\phi_F^*(x, \hat{x})}{dx} \right\} + \delta(x, \hat{x}) = 0 \\ \frac{d}{dx} \left\{ \kappa GA_{55}(x) \left[ \phi_F^*(x, \hat{x}) + \frac{dw_F^*(x, \hat{x})}{dx} \right] \right\} = 0 \\ \frac{d}{dx} \left\{ EB_{11}(x) \frac{du_F^*(x, \hat{x})}{dx} + ED_{11}(x) \frac{d\phi_F^*(x, \hat{x})}{dx} \right\} - \kappa GA_{55}(x) \left[ \phi_F^*(x, \hat{x}) + \frac{dw_F^*(x, \hat{x})}{dx} \right] = 0 \end{array} \right. \quad (4.121-123)$$

Da Eq. (4.121-123), tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du_F^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{B_{11}(x)}{A_{11}(x)} \frac{d\phi_F^*(x, \hat{x})}{dx} = \frac{-\text{sgn}(x - \hat{x})}{2EA_{11}(x)} \\ \frac{du_F^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{D_{11}(x)}{B_{11}(x)} \frac{d\phi_F^*(x, \hat{x})}{dx} = 0 \end{array} \right. \quad (4.124-125)$$

Subtraindo-se a Eq.(4.124) da Eq.(4.125), tem-se:

$$\phi_F^*(x, \hat{x}) = \int \left[ \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2EB_{11}^*(x)} \right] dx \quad (4.126)$$

Onde:

$$B_{11}^*(x) = \frac{A_{11}(x)D_{11}(x) - B_{11}^2(x)}{B_{11}(x)} \quad (4.127)$$

Fazendo-se uso da identidade análoga a Eq. (3.26) na Eq.(4.126), tem-se:

$$\phi_F^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{2E} \text{sgn}(x - \hat{x}) [T(x) - T(\hat{x})] \quad (4.128)$$

Já o deslocamento transversal fundamental é obtido da substituição da Eq.(4.128) na Eq.(4.122) e integração, que fica:

$$w_F^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2E} \left[ \text{sgn}(x - \hat{x}) [R(x) - R(\hat{x})] - rT(\hat{x}) \right] \quad (4.129)$$

Para o cálculo do deslocamento axial relativo à ativação da carga axial Eq. (4.125), substitui-se a Eq. (4.128) nesta última e utiliza-se convenientemente as identidades empregadas anteriormente, assim:

$$u_F^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2E} \left[ \text{sgn}(x - \hat{x}) [F(x) - F(\hat{x})] \right] \quad (4.130)$$

Já, a determinação das relações esforços-deslocamentos fundamentais devido a ativação da fonte axial são obtidos a partir das Eqs. (4.118-120), que ficam:

$$\frac{dN_F^*(x, \hat{x})}{dx} + \delta(x, \hat{x}) = 0 \quad (4.131)$$

$$\frac{dM_F^*(x, \hat{x})}{dx} = 0 \quad (4.132)$$

$$\left( \frac{dV_F^*(x, \hat{x})}{dx} \right) = 0 \quad (4.133)$$

Da integração das Eqs.(4.131-133), tem-se:

$$N_F^*(x, \hat{x}) = -\frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2} \quad (4.134)$$

$$M_F^*(x, \hat{x}) = 0 \quad (4.135)$$

$$V_F^*(x, \hat{x}) = 0 \quad (4.136)$$

Por outro lado, quando a fonte transversal  $p_z^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$  for ativada, tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \left\{ EA_{11}(x) \frac{du_p^*(x, \hat{x})}{dx} + EB_{11}(x) \frac{d\phi_p^*(x, \hat{x})}{dx} \right\} = 0 \\ \frac{d}{dx} \left\{ \kappa GA_{55}(x) \left[ \phi_p^*(x, \hat{x}) + \frac{dw_p^*(x, \hat{x})}{dx} \right] \right\} + \delta(x, \hat{x}) = 0 \\ \frac{d}{dx} \left\{ EB_{11}(x) \frac{du_p^*(x, \hat{x})}{dx} + ED_{11}(x) \frac{d\phi_p^*(x, \hat{x})}{dx} \right\} - \kappa GA_{55}(x) \left[ \phi_p^*(x, \hat{x}) + \frac{dw_p^*(x, \hat{x})}{dx} \right] = 0 \end{array} \right. \quad (4.137-139)$$

Que após manipulações algébricas, (4.137-139) ficam:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \left[ EA_{11}(x) \frac{du_p^*(x, \hat{x})}{dx} + EB_{11}(x) \frac{d\phi_p^*(x, \hat{x})}{dx} \right] = 0 \\ \frac{d}{dx} \kappa GA_{55}(x) \left[ \frac{dw_p^*(x, \hat{x})}{dx} + \phi_p^*(x, \hat{x}) \right] + \delta(x, \hat{x}) = 0 \\ \frac{d}{dx} \left[ EB_{11}(x) \frac{du_p^*(x, \hat{x})}{dx} + ED_{11}(x) \frac{d\phi_p^*(x, \hat{x})}{dx} \right] + \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2} = 0 \end{array} \right. \quad (4.140-142)$$

Da substituição da Eq.(4.141) na Eq.(4.142), e integrando-se esta última, tem-se:

$$\phi_p^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2E} [rQ(x) - \text{sgn}(x - \hat{x})Y(x) - Y(\hat{x})] \quad (4.143)$$

Já o deslocamento transversal da Eq. (4.141), fica:

$$w_p^*(x, \hat{x}) = -\frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2\kappa G} [F5(x) - F5(\hat{x})] + \frac{1}{2E} [r[Y(x) + Y(\hat{x})] - 2\text{sgn}(x - \hat{x})[K(x) - K(\hat{x})]] \quad (4.144)$$

Por outro lado, o deslocamento axial resulta da substituição da Eq.(4.143) na Eq.(4.140), que fica:

$$u_p^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{2E} [rT(x) - \text{sgn}(x, \hat{x})[R(x) - R(\hat{x})]] \quad (4.145)$$

As relações esforços-deslocamentos fundamentais devido a ativação da fonte transversal são obtidos a partir das Eqs.(4.131-133), que ficam:

$$\begin{aligned}\frac{dN_p^*(x, \hat{x})}{dx} &= 0 \\ \frac{dM_p^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2} &= 0 \\ \left( \frac{dV_p^*(x, \hat{x})}{dx} \right) + \delta(x, \hat{x}) &= 0\end{aligned}\tag{4.146-148}$$

Da integração das Eqs. (4.146-148), tem-se:

$$N_p^*(x, \hat{x}) = 0$$

$$M_p^*(x, \hat{x}) = \frac{-r}{2}$$

$$V_p^*(x, \hat{x}) = -\frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2}$$

Por fim, mudando-se a ativação da fonte, para  $m^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$ , tem-se:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dx} \left\{ EA_{11}(x) \frac{du_m^*(x, \hat{x})}{dx} + EB_{11}(x) \frac{d\phi_m^*(x, \hat{x})}{dx} \right\} &= 0 \\ \frac{d}{dx} \left\{ \kappa GA_{55}(x) \left[ \phi_m^*(x, \hat{x}) + \frac{dw_m^*(x, \hat{x})}{dx} \right] \right\} &= 0 \\ \frac{d}{dx} \left\{ EB_{11}(x) \frac{du_m^*(x, \hat{x})}{dx} + ED_{11}(x) \frac{d\phi_m^*(x, \hat{x})}{dx} \right\} - \kappa GA_{55}(x) \left[ \phi_m^*(x, \hat{x}) + \frac{dw_m^*(x, \hat{x})}{dx} \right] + \delta(x, \hat{x}) &= 0 \end{aligned} \right.\tag{4.149-151}$$

Das Eqs. (4.149-151), tem-se:



$$\left\{ \begin{array}{l} EA_{11}(x) \frac{du_m^*(x, \hat{x})}{dx} + EB_{11}(x) \frac{d\phi_m^*(x, \hat{x})}{dx} = 0 \\ EB_{11}(x) \frac{du_m^*(x, \hat{x})}{dx} + ED_{11}(x) \frac{d\phi_m^*(x, \hat{x})}{dx} = -\frac{\text{sgn}(x, \hat{x})}{2} \end{array} \right. \quad (4.152-153)$$

Da substituição da Eq.(4.152) na Eq.(4.153) e em seguida integrando-se esta última, tem-se:

$$\phi_m^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2E} \text{sgn}(x - \hat{x}) [Q(x) - Q(\hat{x})] \quad (4.154)$$

Para se determinar o deslocamento transversal, substitui-se a Eq. (4.154) na Eq. (4.150), que fica:

$$w_m^*(x, \hat{x}) = \frac{\text{sgn}(x, \hat{x})}{2E} [Y(x) - Y(\hat{x})] - \frac{1}{2E} rQ(\hat{x}) \quad (4.155)$$

Por fim, da substituição da Eq. (4.154) na Eq. (4.153) determina-se o descolamento axial, que fica:

$$u_m^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{2E} [\text{sgn}(x - \hat{x}) [T(x) - T(\hat{x})]] \quad (4.156)$$

Já, as relações esforços-deslocamentos fundamentais devido a ativação do momento são:

$$N_m^*(x, \hat{x}) = 0$$

$$M_m^*(x, \hat{x}) = -\frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2}$$

$$V_m^*(x, \hat{x}) = 0 \quad (4.157-159)$$

Onde:

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \frac{d}{dx}(G(x)) \\
 G(x) &= \frac{d}{dx}(H(x)) \\
 H(x) &= \frac{d}{dx}(K(x)) \\
 K(x) &= \frac{d}{dx}(W(x)) \\
 F_5(x) &= \frac{1}{A_{55}(x)} \\
 F_5(x) &= \frac{dG_5(x)}{dx}
 \end{aligned} \tag{4.160-165}$$

#### 4.8 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL

Sejam as tensões  $\sigma_x$  e deformações  $\varepsilon_x$  reais mobilizadas na viga não-prismática de variação não-simétrica devido à força axial, transversal e momento. Se o problema fundamental for submetido a forças pontuais  $p_x^*$ ,  $p_z^*$  ou  $m^*$ , logo serão produzidas tensões  $\sigma_x^*$  e deformações  $\tau_{xz}^*$  fundamentais no problema fundamental. Uma relação entre o problema real e o fundamental pode ser estabelecida usando o Teorema da Reciprocidade de Betti. Se for ativada a fonte axial, a relação recíproca entre o problema real e fundamental é dada por:

$$\int_V [\sigma_{xF}^* \varepsilon_x + \tau_{xzF}^* \gamma_{xz}] dV = \int_V [\sigma_x \varepsilon_{xF}^* + \tau_{xz} \gamma_{xzF}^*] dV \tag{4.166}$$

Onde V é o volume da viga.

Substituindo tensões e deformações reais, Eqs. (4.102-103), (4.104-105), e seus análogos fundamentais na Eq. (4.166) tem-se:

$$\int_0^L \left[ N_F^* \frac{du}{dx} + V_F^* \frac{dw}{dx} + M_F^* \frac{d\phi}{dx} \right] dx = \int_0^L \left[ N \frac{du_F^*}{dx} + V \frac{dw_F^*}{dx} + M \frac{d\phi_F^*}{dx} \right] dx \tag{4.167}$$

Após aplicar convenientemente sucessivas integrais por partes na Eq. (4.167), a equação pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} & -\int_0^L \left[ u(x) \frac{dN_F^*}{dx} + w \frac{dV_F^*}{dx} + \phi \frac{dM_F^*}{dx} \right] dx + \left[ N_F^* u \right]_0^L + \left[ V_F^* w \right]_0^L + \left[ M_F^* \frac{dw}{dx} \right]_0^L = \\ & -\int_0^L \left[ u_F^* \frac{dN}{dx} + w_F^* \frac{dV}{dx} + \phi_F^* \frac{dM}{dx} \right] dx + \left[ Nu_F^* \right]_0^L + \left[ Vw_F^* \right]_0^L + \left[ M \frac{dw_F^*}{dx} \right]_0^L \end{aligned} \quad (4.168)$$

Substituindo (4.115-117) e (4.131-133) em (4.168) fica:

$$\begin{aligned} & \int_0^L u(x) \delta(x, \hat{x}) dx + \left[ N_F^* u \right]_0^L + \left[ V_F^* w \right]_0^L + \left[ M_F^* \frac{dw}{dx} \right]_0^L = \\ & \int_0^L \left[ u_F^* p_x + w_F^* p_z + \phi_F^* m \right] dx + \left[ Nu_F^* \right]_0^L + \left[ Vw_F^* \right]_0^L + \left[ M \frac{dw_F^*}{dx} \right]_0^L \end{aligned} \quad (4.169)$$

Finalmente, substituindo a propriedade do delta de Dirac na Eq. (4.169), obtém-se a equação integral para o deslocamento axial, que pode ser dada por:

$$\begin{aligned} & u(\hat{x}) + \left[ N_F^* u \right]_0^L + \left[ V_F^* w \right]_0^L + \left[ M_F^* \phi \right]_0^L = \\ & \left[ Nu_F^* \right]_0^L + \left[ Vw_F^* \right]_0^L + \left[ M \phi_F^* \right]_0^L + \int_0^L \left[ u_F^* p_x + w_F^* p_z + \phi_F^* m \right] dx \end{aligned} \quad (4.170)$$

Por outro lado, quando a carga fonte transversal  $p_z^*$  for ativada, a relação recíproca é dada por:

$$\int_V \left[ \sigma_{xp}^* \varepsilon_x + \tau_{xzp}^* \gamma_{xz} \right] dV = \int_V \left[ \sigma_x \varepsilon_{xp}^* + \tau_{xz} \gamma_{xzp}^* \right] dV \quad (4.171)$$

Com as Eqs. (4.102-103), (4.104-105), e seus análogos fundamentais na Eq. (4.171) tem-se:

$$\int_0^L \left[ N_p^* \frac{du}{dx} + V_p^* \frac{dw}{dx} + M_p^* \frac{d\phi}{dx} \right] dx = \int_0^L \left[ N \frac{du_p^*}{dx} + V \frac{dw_p^*}{dx} + M \frac{d\phi_p^*}{dx} \right] dx \quad (4.172)$$

Integrando por partes sucessivamente a Eq. (4.172), pode-se então, ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & - \int_0^L \left[ u(x) \frac{dN_p^*}{dx} + w \frac{dV_p^*}{dx} + \phi \frac{dM_p^*}{dx} \right] dx + \left[ N_p^* u \right]_0^L + \left[ V_p^* w \right]_0^L + \left[ M_p^* \frac{dw}{dx} \right]_0^L = \\ & - \int_0^L \left[ u_p^* \frac{dN}{dx} + w_p^* \frac{dV}{dx} + \phi_p^* \frac{dM}{dx} \right] dx + \left[ Nu_p^* \right]_0^L + \left[ Vw_p^* \right]_0^L + \left[ M \frac{dw_p^*}{dx} \right]_0^L \end{aligned} \quad (4.173)$$

Substituindo (4.115-117) e (4.146-148) em (4.173) fica:

$$\begin{aligned} & \int_0^L w(x) \delta(x, \hat{x}) dx + \left[ N_p^* u \right]_0^L + \left[ V_p^* w \right]_0^L + \left[ M_p^* \frac{dw}{dx} \right]_0^L = \\ & \left[ Nu_p^* \right]_0^L + \left[ Vw_p^* \right]_0^L + \left[ M \frac{dw_p^*}{dx} \right]_0^L + \int_0^L \left[ u_p^* p_x + w_p^* p_z + \phi_p^* m \right] dx \end{aligned} \quad (4.174)$$

Assim, aplicando-se a propriedade do delta de Dirac na Eq. (4.174), tem-se a equação integral do deslocamento transversal, dada por:

$$\begin{aligned} & w(\hat{x}) + \left[ N_p^* u \right]_0^L + \left[ V_p^* w \right]_0^L + \left[ M_p^* \phi \right]_0^L = \\ & + \left[ Nu_p^* \right]_0^L + \left[ Vw_p^* \right]_0^L + \left[ M \phi_p^* \right]_0^L + \int_0^L \left[ u_p^* p_x + w_p^* p_z + \phi_p^* m \right] dx \end{aligned} \quad (4.175)$$

Por fim, ativando a fonte momento  $m^*$ , e seguindo um processo análogo ao aplicado quando a carga axial ou a transversal foi ativada, uma representação da equação integral para a rotação da seção pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} & \phi(\hat{x}) + \left[ N_m^* u \right]_0^L + \left[ V_m^* w \right]_0^L + \left[ M_m^* \phi \right]_0^L = \\ & \int_0^L \left[ u_m^* p_x + w_m^* p_z + \phi_m^* m \right] dx + \left[ Nu_m^* \right]_0^L + \left[ Vw_m^* \right]_0^L + \left[ M \phi_m^* \right]_0^L \end{aligned} \quad (4.176)$$

## 4.9 REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA

A transição das equações integrais para as algébricas é feita pela colocação das fontes no contorno, isto é,  $\hat{x} = 0 + \zeta$  e  $\hat{x} = L - \zeta$  com  $\zeta \rightarrow 0$  e pelo cálculo das integrais pertinentes, de forma que gera um sistema que pode ser expresso como:

$$\{u\} + [H]\{u\} = [G]\{p\} + \{f\} \quad (4.177)$$

onde  $\{u\}$  e  $\{p\}$  são os vetores de deslocamentos e solicitações internas, cujas formas explícitas são dadas por:

$$\{u\} = [u_i \quad w_i \quad \phi_i \quad u_j \quad w_j \quad \phi_j]^T = [u(0) \quad w(0) \quad \phi(0) \quad u(L) \quad w(L) \quad \phi(L)]^T$$

$$\{p\} = [N_i \quad V_i \quad M_i \quad N_j \quad V_j \quad M_j]^T = [N(0) \quad V(0) \quad M(0) \quad N(L) \quad V(L) \quad M(L)]^T$$

Já  $[H]$ ,  $[G]$  são as matrizes de influência dadas por:

$$[H] = \begin{bmatrix} -N_F^*(0,0) & -V_F^*(0,0) & -M_F^*(0,0) & N_F^*(L,0) & V_F^*(L,0) & M_F^*(L,0) \\ -N_P^*(0,0) & -V_P^*(0,0) & -M_P^*(0,0) & N_P^*(L,0) & V_P^*(L,0) & M_P^*(L,0) \\ -N_m^*(0,0) & -V_m^*(0,0) & -M_m^*(0,0) & N_m^*(L,0) & V_m^*(L,0) & M_m^*(L,0) \\ -N_F^*(0,L) & -V_F^*(0,L) & -M_F^*(0,L) & N_F^*(L,L) & V_F^*(L,L) & M_F^*(L,L) \\ -N_P^*(0,L) & -V_P^*(0,L) & -M_P^*(0,L) & N_P^*(L,L) & V_P^*(L,L) & M_P^*(L,L) \\ -N_m^*(0,L) & -V_m^*(0,L) & -M_m^*(0,L) & N_m^*(L,L) & V_m^*(L,L) & M_m^*(L,L) \end{bmatrix}$$

$$[H] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{L}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{L}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (4.178)$$

$$[G] = \begin{bmatrix} -u_F^*(0,0) & -w_F^*(0,0) & -\varphi_F^*(0,0) & u_F^*(L,0) & w_F^*(L,0) & \varphi_F^*(L,0) \\ -u_P^*(0,0) & -w_P^*(0,0) & -\varphi_P^*(0,0) & u_P^*(L,0) & w_P^*(L,0) & \varphi_P^*(L,0) \\ -u_m^*(0,0) & -w_m^*(0,0) & -\varphi_m^*(0,0) & u_m^*(L,0) & w_m^*(L,0) & \varphi_m^*(L,0) \\ -u_F^*(0,L) & -w_F^*(0,L) & -\varphi_F^*(0,L) & u_F^*(L,L) & w_F^*(L,L) & \varphi_F^*(L,L) \\ -u_P^*(0,L) & -w_P^*(0,L) & -\varphi_P^*(0,L) & u_P^*(L,L) & w_P^*(L,L) & \varphi_P^*(L,L) \\ -u_m^*(0,L) & -w_m^*(0,L) & -\varphi_m^*(0,L) & u_m^*(L,L) & w_m^*(L,L) & \varphi_m^*(L,L) \end{bmatrix}$$

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_7 & \beta_8 & \beta_9 \\ -\beta_{10} & -\beta_{11} & -\beta_{12} & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_{13} & -\beta_{14} & -\beta_{15} & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_{16} & -\beta_{17} & -\beta_{18} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.179)$$

Onde:

$$\beta_1 = -\frac{1}{2E} [\hat{F}(L) - \hat{F}(0)]$$

$$\beta_2 = -\frac{1}{2E} [R(L) - R(0)] + \frac{1}{2E} T_0$$

$$\beta_3 = \frac{1}{2E} [T(L) - T(0)]$$

$$\beta_4 = \frac{1}{2E} [LT(L) - (R(L) - R(0))]$$

$$\beta_5 = -\frac{1}{2\kappa G} [F5(L) - F5(0)] - \frac{1}{2E} \{L(Y(L) + Y(0)) - 2(K(L) - K(0))\}$$

$$\beta_6 = \frac{1}{2E} \{-(Y(L) - Y(0)) + LQ(L)\}$$

$$\beta_7 = \frac{1}{2E} \{T(L) - T(0)\}$$

$$\beta_8 = \frac{-1}{2E} [Y(L) - Y(0) - LQ(0)]$$

$$\beta_9 = \frac{1}{2E} [Q(L) - Q(0)]$$

$$\beta_{10} = \frac{1}{2E} [\hat{F}(0) - \hat{F}(L)]$$

$$\beta_{11} = \frac{1}{2E} [R(0) - R(L)] + \frac{L}{2E} T(L)$$

$$\beta_{12} = -\frac{1}{2E} \{T(0) - T(L)\}$$

$$\beta_{13} = \frac{1}{2E} [LT(0) + (R(0) - R(L))]$$

$$\beta_{14} = \frac{1}{2\kappa G} [F5(0) - F5(L)] - \frac{1}{2E} \{L(Y(0) + Y(L)) + 2(K(0) - K(L))\}$$

$$\beta_{15} = \frac{1}{2E} \{LQ(0) + (Y(0) - Y(L))\}$$

$$\beta_{16} = \frac{-1}{2E} \{T(0) - T(L)\}$$

$$\beta_{17} = \frac{1}{2E} [Y(0) - Y(L) + LQ(L)]$$

$$\beta_{18} = \frac{-1}{2E} [Q(0) - Q(L)]$$

O vetor das cargas na Eq. (4.177) pode ser apresentado de uma forma genérica como:

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^L [p_x u_F^*(x, 0) + p_z w_F^*(x, 0)] dx \\ \int_0^L [p_x u_P^*(x, 0) + p_z w_P^*(x, 0)] dx \\ \int_0^L [p_x u_m^*(x, 0) + p_z w_m^*(x, 0)] dx \\ \int_0^L [p_x u_F^*(x, L) + p_z w_F^*(x, L)] dx \\ \int_0^L [p_x u_P^*(x, L) + p_z w_P^*(x, L)] dx \\ \int_0^L [p_x u_m^*(x, L) + p_z w_m^*(x, L)] dx \end{pmatrix} \quad (4.180)$$

O vetor das cargas  $\{f\}$  na Eq. (4.180) depende das funções que regem os carregamentos, podendo ser apresentado de uma forma genérica como:

$$\{f\} = \int_0^L \begin{bmatrix} u_F^*(x,0) v_F^*(x,0) \\ u_P^*(x,0) v_P^*(x,0) \\ u_m^*(x,0) v_m^*(x,0) \\ u_F^*(x,L) v_F^*(x,L) \\ u_P^*(x,L) v_P^*(x,L) \\ u_m^*(x,L) v_m^*(x,L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_x(x) \\ p_z(x) \end{Bmatrix} dx = \left\{ \begin{array}{l} \int_0^L (u_P^*(x,0) p_x(x) + v_P^*(x,0) p_z(x)) dx \\ \int_0^L (u_m^*(x,0) p_x(x) + v_m^*(x,0) p_z(x)) dx \\ \int_0^L (u_F^*(x,0) p_x(x) + v_F^*(x,0) p_z(x)) dx \\ \int_0^L (u_F^*(x,L) p_x(x) + v_F^*(x,L) p_z(x)) dx \\ \int_0^L (u_P^*(x,L) p_x(x) + v_P^*(x,L) p_z(x)) dx \\ \int_0^L (u_m^*(x,L) p_x(x) + v_m^*(x,L) p_z(x)) dx \end{array} \right\} \quad (4.181)$$

Da substituição das soluções fundamentais Eq.(4.129),(4.130),(4.144),(4.145),(4.155) e (4.156) na Eq.(4.181), o vetor carregamento associado ao carregamento transversal  $p_z(x)$  e axial  $p_x(x)$  fica:

$$\{f\} = \frac{p_{xi}}{2E} \left\{ \begin{array}{l} \int_0^L (-[F(x) - F(0)]) dx \\ \int_0^L (xT(x) - [R(x) - R(0)]) dx \\ \int_0^L ([T(x) - T(0)]) dx \\ \int_0^L ([F(x) - F(L)]) dx \\ \int_0^L ([x - L]T(x) + [R(x) - R(L)]) dx \\ \int_0^L (-[T(x) - T(L)]) dx \end{array} \right\}$$



$$\begin{aligned}
& + p_{zi} \left\{ \begin{aligned} & \int_0^L \left( -\frac{1}{2E} \left[ [R(x) - R(0)] - \frac{1}{2E} LT(0) \right] \right) dx \\ & \int_0^L \left( -\frac{1}{2\kappa G} [F5(x) - F5(0)] + \frac{1}{2E} [x[Y(x) + Y(0)] - [K(x) - K(0)]] \right) dx \\ & \int_0^L \left( \frac{1}{2E} [Y(x) - Y(0)] - \frac{1}{2E} xQ(0) \right) dx \\ & \int_0^L \left( \frac{1}{2E} [[R(x) - R(L)] - |L - x|T(L)] \right) dx \\ & \int_0^L \left( \frac{1}{2\kappa G} [F5(x) - F5(L)] + \frac{1}{2E} [L - x][Y(x) + Y(L)] + 2[K(x) - K(L)] \right) dx \\ & \int_0^L \left( \frac{-1}{2E} [Y(x) - Y(L)] - \frac{1}{2E} |x - L|Q(L) \right) dx \end{aligned} \right\} \\
& \hspace{15em} (4.182)
\end{aligned}$$

No caso da transformação de integral de domínio das cargas transversais e axiais em valores de contorno, aqui também será feito para a dedução do caso quíntico, que engloba de forma direta os casos quárticos, quadráticos e lineares.

Se a carga transversal e axial for quíntica (polinômio de quinto grau), então suas equações de domínio em termos dos valores de contorno ficam:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L p_x(x) u_F^*(x, \hat{x}) dx + \int_0^L p_z(x) w_F^*(x, \hat{x}) dx = \left[ IIIIu_F^*(x, \hat{x}) \frac{d^4 p_x(x)}{dx^4} \right]_0^L - \left[ IIIu_F^*(x, \hat{x}) \frac{d^3 p_x(x)}{dx^3} \right]_0^L + \\
& + \left[ IIu_F^*(x, \hat{x}) \frac{d^2 p_x(x)}{dx^2} \right]_0^L - \left[ Iu_F^*(x, \hat{x}) \frac{dp_x(x)}{dx} \right]_0^L + [Iu_F^*(x, \hat{x}) p_x(x)]_0^L + \\
& + \left[ IIIIw_F^*(x, \hat{x}) \frac{d^4 p_z(x)}{dx^4} \right]_0^L - \left[ IIIw_F^*(x, \hat{x}) \frac{d^3 p_z(x)}{dx^3} \right]_0^L + \\
& + \left[ IIw_F^*(x, \hat{x}) \frac{d^2 p_z(x)}{dx^2} \right]_0^L - \left[ Iw_F^*(x, \hat{x}) \frac{dp_z(x)}{dx} \right]_0^L + [Iw_F^*(x, \hat{x}) p_z(x)]_0^L
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^L p_x(x) u_p^*(x, \hat{x}) dx + \int_0^L p_z(x) w_p^*(x, \hat{x}) dx = \left[ IIII u_p^*(x, \hat{x}) \frac{d^4 p_x(x)}{dx^4} \right]_0^L - \left[ III u_p^*(x, \hat{x}) \frac{d^3 p_x(x)}{dx^3} \right]_0^L + \\
& + \left[ II u_p^*(x, \hat{x}) \frac{d^2 p_x(x)}{dx^2} \right]_0^L - \left[ I u_p^*(x, \hat{x}) \frac{dp_x(x)}{dx} \right]_0^L + \left[ I u_p^*(x, \hat{x}) p_x(x) \right]_0^L + \\
& - \left[ IIII w_p^*(x, \hat{x}) \frac{d^4 p_z(x)}{dx^4} \right]_0^L - \left[ III w_p^*(x, \hat{x}) \frac{d^3 p_z(x)}{dx^3} \right]_0^L + \\
& + \left[ II w_p^*(x, \hat{x}) \frac{d^2 p_z(x)}{dx^2} \right]_0^L - \left[ I w_p^*(x, \hat{x}) \frac{dp_z(x)}{dx} \right]_0^L + \left[ I w_p^*(x, \hat{x}) p_z(x) \right]_0^L
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^L p_x(x) u_m^*(x, \hat{x}) dx + \int_0^L p_z(x) w_m^*(x, \hat{x}) dx = \left[ IIII u_m^*(x, \hat{x}) \frac{d^4 p_x(x)}{dx^4} \right]_0^L - \left[ III u_m^*(x, \hat{x}) \frac{d^3 p_x(x)}{dx^3} \right]_0^L + \\
& + \left[ II u_m^*(x, \hat{x}) \frac{d^2 p_x(x)}{dx^2} \right]_0^L - \left[ I u_m^*(x, \hat{x}) \frac{dp_x(x)}{dx} \right]_0^L + \left[ I u_m^*(x, \hat{x}) p_x(x) \right]_0^L + \\
& - \left[ IIII w_m^*(x, \hat{x}) \frac{d^4 p_z(x)}{dx^4} \right]_0^L + \left[ III w_m^*(x, \hat{x}) \frac{d^3 p_z(x)}{dx^3} \right]_0^L + \\
& - \left[ II w_m^*(x, \hat{x}) \frac{d^2 p_z(x)}{dx^2} \right]_0^L + \left[ I w_m^*(x, \hat{x}) \frac{dp_z(x)}{dx} \right]_0^L - \left[ I w_m^*(x, \hat{x}) p_z(x) \right]_0^L
\end{aligned}$$

(4.183-185)

Onde as integrais superiores das soluções fundamenatais,

$$\begin{aligned}
& \int \int \int \int w_F^*(x, \hat{x}) dx dx dx dx = IIII w_F^*(x, \hat{x}), \int \int \int \int w_F^*(x, \hat{x}) dx dx dx dx = IIII w_F^*(x, \hat{x}), \\
& \int \int \int w_F^*(x, \hat{x}) dx dx dx = III w_F^*(x, \hat{x}), \int \int w_F^*(x, \hat{x}) dx dx = II w_F^*(x, \hat{x}), \\
& \int w_F^*(x, \hat{x}) dx = I w_F^*(x, \hat{x}), \int \int \int \int w_P^*(x, \hat{x}) dx dx dx dx = IIII w_P^*(x, \hat{x}), \\
& \int \int \int \int w_P^*(x, \hat{x}) dx dx dx dx = IIII w_P^*(x, \hat{x}), \int \int \int w_P^*(x, \hat{x}) dx dx dx = III w_P^*(x, \hat{x}), \\
& \int \int w_P^*(x, \hat{x}) dx dx = II w_P^*(x, \hat{x}), \int w_P^*(x, \hat{x}) dx = I w_P^*(x, \hat{x}), \\
& \int \int \int \int w_m^*(x, \hat{x}) dx dx dx dx = IIII w_m^*(x, \hat{x}), \int \int \int \int w_m^*(x, \hat{x}) dx dx dx dx = IIII w_m^*(x, \hat{x}), \\
& \int \int \int w_m^*(x, \hat{x}) dx dx dx = III w_m^*(x, \hat{x}), \int \int w_m^*(x, \hat{x}) dx dx = II w_m^*(x, \hat{x}), \\
& \int w_m^*(x, \hat{x}) dx = I w_m^*(x, \hat{x}) \text{ podem ser encontradas no Apêndice 6.}
\end{aligned}$$

O vetor de carga  $\{f\}$  pode ainda ser escrito pela colocação do ponto-fonte nas extremidades da barra

$$\{f\} = \int_0^L \begin{bmatrix} u_F^*(x,0) w_F^*(x,0) \\ u_P^*(x,0) w_P^*(x,0) \\ u_m^*(x,0) w_m^*(x,0) \\ u_F^*(x,L) w_F^*(x,L) \\ u_P^*(x,L) w_P^*(x,L) \\ u_m^*(x,L) w_m^*(x,L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_x(x) \\ p_z(x) \end{Bmatrix} dx = \begin{Bmatrix} \beta_1 - \beta_2 \\ \beta_3 - \beta_4 \\ \beta_5 - \beta_6 \\ \beta_7 - \beta_8 \\ \beta_9 - \beta_{10} \\ \beta_{11} - \beta_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.186)$$

Onde:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= (fat_1) IIIIu_F^*(L,0) \frac{d^4 p_x(L)}{dx^4} - (fat_1) IIIIu_F^*(L,0) \frac{d^3 p_x(L)}{dx^3} + \\ &+ (fat_2) IIIu_F^*(L,0) \frac{d^2 p_x(L)}{dx^2} - IIu_F^*(L,0) \frac{dp_x(L)}{dx} + Iu_F^*(L,0) p_x(L) + \\ &+ (fat_1) IIIIw_F^*(L,0) \frac{d^4 p_z(L)}{dx^4} - (fat_1) IIIIw_F^*(L,0) \frac{d^3 p_z(L)}{dx^3} + \\ &+ (fat_2) IIIw_F^*(L,0) \frac{d^2 p_z(L)}{dx^2} - IIw_F^*(L,0) \frac{dp_z(L)}{dx} + Iw_F^*(L,0) p_z(L) \\ \beta_2 &= (fat_1) IIIIu_F^*(0,0) \frac{d^4 p_x(0)}{dx^4} - (fat_1) IIIIu_F^*(0,0) \frac{d^3 p_x(0)}{dx^3} + \\ &+ (fat_2) IIIu_F^*(0,0) \frac{d^2 p_x(0)}{dx^2} - IIu_F^*(0,0) \frac{dp_x(0)}{dx} + Iu_F^*(0,0) p_x(0) + \\ &+ (fat_1) IIIIw_F^*(0,0) \frac{d^4 p_z(0)}{dx^4} - (fat_1) IIIIw_F^*(0,0) \frac{d^3 p_z(0)}{dx^3} + \\ &+ (fat_2) IIIw_F^*(0,0) \frac{d^2 p_z(0)}{dx^2} - IIw_F^*(0,0) \frac{dp_z(0)}{dx} + Iw_F^*(0,0) p_z(0) = 0 \\ \beta_3 &= (fat_1) IIIIu_P^*(L,0) \frac{d^4 p_x(L)}{dx^4} - (fat_1) IIIIu_P^*(L,0) \frac{d^3 p_x(L)}{dx^3} + \\ &+ (fat_2) IIIu_P^*(L,0) \frac{d^2 p_x(L)}{dx^2} - IIu_P^*(L,0) \frac{dp_x(L)}{dx} + Iu_P^*(L,0) p_x(L) + \\ &+ (fat_1) IIIIw_P^*(L,0) \frac{d^4 p_z(L)}{dx^4} - (fat_1) IIIIw_P^*(L,0) \frac{d^3 p_z(L)}{dx^3} + \\ &+ (fat_2) IIIw_P^*(L,0) \frac{d^2 p_z(L)}{dx^2} - IIw_P^*(L,0) \frac{dp_z(L)}{dx} + Iw_P^*(L,0) p_z(L) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_4 = & (fat_1) IIIIu_p^*(0,0) \frac{d^4 p_x(0)}{dx^4} - (fat_1) IIIu_p^*(0,0) \frac{d^3 p_x(0)}{dx^3} + \\
& + (fat_2) IIIu_p^*(0,0) \frac{d^2 p_x(0)}{dx^2} - IIu_p^*(0,0) \frac{dp_x(0)}{dx} + Iu_p^*(0,0) p_x(0) + \\
& + (fat_1) IIIIw_p^*(0,0) \frac{d^4 p_z(0)}{dx^4} - (fat_1) IIIw_p^*(0,0) \frac{d^3 p_z(0)}{dx^3} + \\
& + (fat_2) IIIw_p^*(0,0) \frac{d^2 p_z(0)}{dx^2} - IIw_p^*(0,0) \frac{dp_z(0)}{dx} + Iw_p^*(0,0) p_z(0) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_5 = & (fat_1) IIIIu_m^*(L,0) \frac{d^4 p_x(L)}{dx^4} - (fat_1) IIIu_m^*(L,0) \frac{d^3 p_x(L)}{dx^3} + \\
& + (fat_2) IIIu_m^*(L,0) \frac{d^2 p_x(L)}{dx^2} - IIu_m^*(L,0) \frac{dp_x(L)}{dx} + Iu_m^*(L,0) p_x(L) + \\
& + (fat_1) IIIIw_m^*(L,0) \frac{d^4 p_z(L)}{dx^4} - (fat_1) IIIw_m^*(L,0) \frac{d^3 p_z(L)}{dx^3} + \\
& + (fat_2) IIIw_m^*(L,0) \frac{d^2 p_z(L)}{dx^2} - IIw_m^*(L,0) \frac{dp_z(L)}{dx} + Iw_m^*(L,0) p_z(L) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_6 = & (fat_1) IIIIu_m^*(0,0) \frac{d^4 p_x(0)}{dx^4} - (fat_1) IIIu_m^*(0,0) \frac{d^3 p_x(0)}{dx^3} \\
& + (fat_2) IIIu_m^*(0,0) \frac{d^2 p_x(0)}{dx^2} - IIu_m^*(0,0) \frac{dp_x(0)}{dx} + Iu_m^*(0,0) p_x(0) \\
& + (fat_1) IIIIw_m^*(0,0) \frac{d^4 p_z(0)}{dx^4} - (fat_1) IIIw_m^*(0,0) \frac{d^3 p_z(0)}{dx^3} \\
& + (fat_2) IIIw_m^*(0,0) \frac{d^2 p_z(0)}{dx^2} - IIw_m^*(0,0) \frac{dp_z(0)}{dx} + Iw_m^*(0,0) p_z(0) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_7 = & (fat_1) IIIIu_F^*(L,L) \frac{d^4 p_x(L)}{dx^4} - (fat_1) IIIu_F^*(L,l) \frac{d^3 p_x(L)}{dx^3} + \\
& + (fat_2) IIIu_F^*(L,L) \frac{d^2 p_x(L)}{dx^2} - IIu_F^*(L,L) \frac{dp_x(L)}{dx} + Iu_F^*(L,L) p_x(L) + \\
& + (fat_1) IIIIw_F^*(L,L) \frac{d^4 p_z(L)}{dx^4} - (fat_1) IIIw_F^*(L,L) \frac{d^3 p_z(L)}{dx^3} + \\
& + (fat_2) IIIw_F^*(L,L) \frac{d^2 p_z(L)}{dx^2} - IIw_F^*(L,L) \frac{dp_z(L)}{dx} + Iw_F^*(L,L) p_z(L) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_8 = & (fat_1) IIIIu_F^*(0, L) \frac{d^4 p_x(0)}{dx^4} - (fat_1) IIIIu_F^*(0, L) \frac{d^3 p_x(0)}{dx^3} + \\
& + (fat_2) IIIu_F^*(0, L) \frac{d^2 p_x(0)}{dx^2} - IIu_F^*(0, L) \frac{dp_x(0)}{dx} + Iu_F^*(0, L) p_x(0) + \\
& + (fat_1) IIIIw_F^*(0, L) \frac{d^4 p_z(0)}{dx^4} - (fat_1) IIIIw_F^*(0, L) \frac{d^3 p_z(0)}{dx^3} + \\
& + (fat_2) IIIw_F^*(0, L) \frac{d^2 p_z(0)}{dx^2} - IIw_F^*(0, L) \frac{dp_z(0)}{dx} + Iw_F^*(0, L) p_z(0) \\
\\
\beta_9 = & (fat_1) IIIIu_p^*(L, L) \frac{d^4 p_x(L)}{dx^4} - (fat_1) IIIIu_p^*(L, L) \frac{d^3 p_x(L)}{dx^3} + \\
& + (fat_2) IIIu_p^*(L, L) \frac{d^2 p_x(L)}{dx^2} - IIu_p^*(L, L) \frac{dp_x(L)}{dx} + Iu_p^*(L, L) p_x(L) + \\
& + (fat_1) IIIIw_p^*(L, L) \frac{d^4 p_z(L)}{dx^4} - (fat_1) IIIIw_p^*(L, L) \frac{d^3 p_z(L)}{dx^3} + \\
& + (fat_2) IIIw_p^*(L, L) \frac{d^2 p_z(L)}{dx^2} - IIw_p^*(L, L) \frac{dp_z(L)}{dx} + Iw_p^*(L, L) p_z(L) = 0 \\
\\
\beta_{10} = & (fat_1) IIIIu_p^*(0, L) \frac{d^4 p_x(0)}{dx^4} - (fat_1) IIIIu_p^*(0, L) \frac{d^3 p_x(0)}{dx^3} + \\
& + (fat_2) IIIu_p^*(0, L) \frac{d^2 p_x(0)}{dx^2} - IIu_p^*(0, L) \frac{dp_x(0)}{dx} + Iu_p^*(0, L) p_x(0) + \\
& + (fat_1) IIIIw_p^*(0, L) \frac{d^4 p_z(0)}{dx^4} - (fat_1) IIIIw_p^*(0, L) \frac{d^3 p_z(0)}{dx^3} + \\
& + (fat_2) IIIw_p^*(0, L) \frac{d^2 p_z(0)}{dx^2} - IIw_p^*(0, L) \frac{dp_z(0)}{dx} + Iw_p^*(0, L) p_z(0) \\
\\
\beta_{11} = & (fat_1) IIIIu_m^*(L, L) \frac{d^4 p_x(L)}{dx^4} - (fat_1) IIIIu_m^*(L, L) \frac{d^3 p_x(L)}{dx^3} + \\
& + (fat_2) IIIu_m^*(L, L) \frac{d^2 p_x(L)}{dx^2} - IIu_m^*(L, L) \frac{dp_x(L)}{dx} + Iu_m^*(L, L) p_x(L) + \\
& + (fat_1) IIIIw_m^*(L, L) \frac{d^4 p_z(L)}{dx^4} - (fat_1) IIIIw_m^*(L, L) \frac{d^3 p_z(L)}{dx^3} + \\
& + (fat_2) IIIw_m^*(L, L) \frac{d^2 p_z(L)}{dx^2} - IIw_m^*(L, L) \frac{dp_z(L)}{dx} + Iw_m^*(L, L) p_z(L) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{12} = & (fat_1) IIIIu_m^*(0, L) \frac{d^4 p_x(0)}{dx^4} - (fat_1) IIIIu_m^*(0, L) \frac{d^3 p_x(0)}{dx^3} + \\
& + (fat_2) IIIu_m^*(0, L) \frac{d^2 p_x(0)}{dx^2} - IIu_m^*(0, L) \frac{dp_x(0)}{dx} + Iu_m^*(0, L) p_x(0) + \\
& + (fat_1) IIIIIw_m^*(0, L) \frac{d^4 p_z(0)}{dx^4} - (fat_1) IIIIIw_m^*(0, L) \frac{d^3 p_z(0)}{dx^3} + \\
& + (fat_2) IIIw_m^*(0, L) \frac{d^2 p_z(0)}{dx^2} - IIw_m^*(0, L) \frac{dp_z(0)}{dx} + Iw_m^*(0, L) p_z(0)
\end{aligned}$$

(4.187-198)

Mais uma vez vale observar que este caso engloba de forma direta os casos quárticos, quadráticos e lineares. Para o quártico, quadrático e linear respectivamente, tem-se:

$$fat_1 = 1 \text{ e } fat_2 = 1$$

$$fat_1 = 0 \text{ e } fat_2 = 1$$

$$fat_1 = 0 \text{ e } fat_2 = 0$$

## CAPÍTULO V

### ARCOS ABATIDOS NÃO-PRISMÁTICOS COM VARIAÇÃO SIMÉTRICA

#### 5.1 INTRODUÇÃO

Existem problemas que podem ser associados a casos de arcos profundos não prismáticos (Fig. 5.1a) e arcos abatidos não prismáticos (Fig.5.1b).



(a)



(b)

Figura 5.1 – (a) Arco profundo não prismático JESUS (2013) (b) Arco abatido não prismático

Segundo KRISHNAN e SURESH (1998), os arcos podem ser classificados em função de sua razão de aspecto e ângulo de abertura como mostrados na Tabela 5.1

Tabela 5.1 - Classificação: KRISHNAN e SURESH (1998), MANZI (2001)

| Razão de aspecto |              | Ângulo de abertura |                     |
|------------------|--------------|--------------------|---------------------|
| Tipo de arco     | Esbeltez     | Tipo de arco       | Ângulo              |
| Espesso          | $(r/t) < 40$ | Abatido            | $\alpha < 40$       |
| Moderado         | $(r/t) = 40$ | Pouco abatido      | $\alpha = 40$       |
| Fino             | $(r/t) > 40$ | Profundo           | $40 < \alpha < 180$ |
|                  |              | Muito profundo     | $\alpha > 180$      |

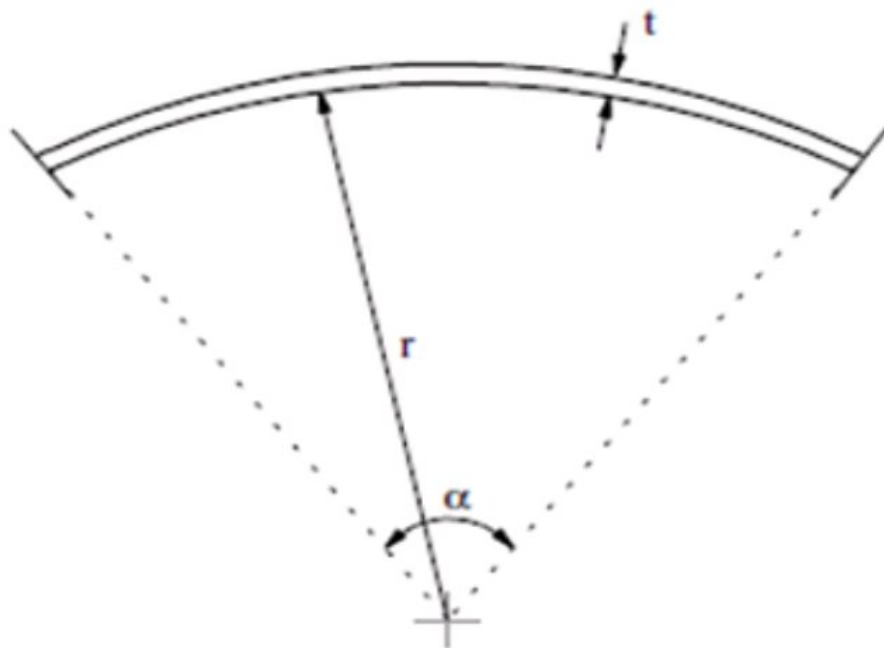


Figura 5.1c - Arco

Neste capítulo, o interesse é o desenvolvimento do MEC direto para arcos abatidos não prismáticos com variação simétrica ao longo do eixo longitudinal. Assim, são desenvolvidas as deduções das equações que regem o problema real, soluções fundamentais, equações integrais e algébricas para os arcos utilizando os modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko.

## 5.2 CONSIDERAÇÕES GERAIS

Para o desenvolvimento do problema real dos Arcos abatidos Euler-Bernoulli sob os modelos de Euler e Timoshenko, algumas hipóteses em relação a carregamentos, cinemática e campos de deslocamentos são assumidas:

- a) A largura do arco é assumida pequena em comparação com as suas dimensões medidas ao longo da sua superfície e seu raio de curvatura.
- b) As deformações e deslocamentos são assumidos relativamente pequenos, de modo que os termos de ordem superior nas relações de deslocamento de deformação podem ser negligenciados.
- c) A tensão normal ortogonal ao plano do arco é negligenciada, isto é,  $\sigma_z = 0$



- d) A planicidade das seções transversais admitida se manter durante o processo de deformação.
- e) As ações externas (axial  $p_x$ , transversal  $p_z$  e momento  $m$ ) são aplicadas no plano do arco, segundo um dos eixos principais de inércia da seção transversal. Além disso, o arco abatido não prismático de comprimento  $L$  é descrito com um sistema triplo de coordenadas, onde  $y$  e  $z$  são os eixos principais de inércia.
- f) Material é assumido homogêneo, isotrópico e elástico-linear.

### 5.2.1 PROBLEMA REAL DO ARCO: EULER-BERNOULLI

No arco de Euler em que é também assumida a conservação da ortogonalidade da seção transversal e do eixo longitudinal, implicando na desconsideração da deformação por cortante. Segundo KHDEIR e REDDY (1997), as componentes dos deslocamentos no plano  $xz$  ( $U(x, z), W(x, z)$ ) do arco abatido no modelo de Euler são dados por:

$$U(x, z) = \left(1 + \frac{z}{R}\right)u(x) - z \frac{dw(x)}{dx} \quad (5.1)$$

$$W(x, z) = w(x) \quad (5.2)$$

Onde:

$R$  é o raio do arco

Já as deformações axiais ficam:

$$\varepsilon_x = \frac{dU(x, z)}{dx} + \frac{w(x)}{R} = \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{du(x)}{dx} + \frac{w(x)}{R} - z \frac{d^2w(x)}{dx^2} \quad (5.3)$$

Convém notar que se o termo  $\frac{z}{R}$  for desprezado, como sugerido em QATU (1992), a deformação axial na Eq.(5.3) fica:

$$\varepsilon_x = \frac{du(x)}{dx} + \frac{w(x)}{R} - z \frac{d^2w(x)}{dx^2} \quad (5.4)$$

Como o material é admitido elástico-linear com supressão do coeficiente de Poisson, a tensão axial pode ser obtida a partir da Eq.(5.4) resultando em:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E \frac{du(x)}{dx} + E \frac{w(x)}{R} - Ez \frac{d^2w(x)}{dx^2} \quad (5.5)$$

Os esforços são resultantes de tensões dados por:

$$N(x) = \int_A \sigma_x dA = EA_{11}(x) \left[ \frac{du(x)}{dx} + \frac{w(x)}{R} \right] \quad (5.6)$$

$$M(x) = \int_A \sigma_x z dA = -ED_{11}(x) \frac{d^2w}{dx^2} \quad (5.7)$$

Onde:

$$A_{11}(x) = \int_{-b\inf(x)}^{+b\sup(x)} \int_{-z\inf(x)}^{+z\sup(x)} dz dy \quad (5.8)$$

$$D_{11}(x) = \int_{-b\inf(x)}^{+b\sup(x)} \int_{-z\inf(x)}^{+z\sup(x)} z^2 dz dy \quad (5.9)$$

Convém notar que o esforço cortante no modelo de Euler é dado por:

$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx} \quad (5.10)$$

As tensões axiais podem ainda serem expressas em função da força normal e do momento fletor se as Eqs.(5.4), (5.6) forem substituídas na Eq.(5.5), resultando em:

$$\sigma_x = \frac{N(x)}{A(x)} + \frac{M(x)}{I(x)} z \quad (5.11)$$

Onde:  $A(x)$  e  $I(x)$  são a área e o momento de inércia da seção transversal.

Além disso, essas propriedades se relacionam com as Eqs.(5.8-9) como:

$$\begin{aligned} A_{11}(x) &= A(x) \\ D_{11}(x) &= I(x) \end{aligned} \quad (5.12-13)$$

A obtenção da equação governante do problema real do arco abatido de Euler-Bernoulli pode ser obtida pela condição estacionária do funcional de energia, desta forma tem-se:

$$\delta\pi = \int_v (\sigma_x \delta\epsilon_x) dV - \int_0^L (p_x \delta u + p_z \delta w) dx = 0 \quad (5.14)$$

Substituindo-se as Eqs. (5.4), (5.5) na Eq. (5.14), seguida da integração na área transversal, fica:

$$\delta\pi = \int_0^L \left( N(x) \left[ \frac{d\delta u(x)}{dx} + \frac{\delta w(x)}{R} \right] - M(x) \frac{d^2 \delta w(x)}{dx^2} \right) dx - \int_0^L (p_x \delta u + p_z \delta w) dx = 0 \quad (5.15)$$

Fazendo as integrações por partes na Eq.(5.15)

$$\begin{aligned} \delta\pi &= \int_0^L \left( \left( -\frac{dN(x)}{dx} - p_x \right) \delta u + \left( -\left( \frac{dV(x)}{dx} \right) + \frac{N(x)}{R} - p_z \right) \delta w \right) dx + \\ &+ \int_0^L \left( \frac{dM(x)}{dx} - (V(x) + m) \right) \delta \left( \frac{dw}{dx}(x) \right) dx + [N(x) \delta u]_0^L + \left[ M(x) \delta \frac{dw}{dx} \right]_0^L + [V(x) \delta w]_0^L = 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

Como a variação dos campos no contorno é nula,  $\left[ \delta \frac{dw(x)}{dx} \right]_0^L = [\delta w(x)]_0^L = 0$ , a Eq. (5.16)

fica:

$$\int_0^L \left( \left( -\frac{dN(x)}{dx} - p_x \right) \delta u + \left( -\frac{d^2 M(x)}{dx^2} + \frac{N(x)}{R} - p_z \right) \delta w \right) dx = 0 \quad (5.17)$$

Como as variações  $\delta u, \delta w$  podem assumir diferentes valores durante o mapeamento das funções  $u, w$ , para garantir a condição de nulidade da Eq. (5.17) para todo o domínio, é necessário que:

$$\frac{dN(x)}{dx} + p_x = 0 \quad (5.18)$$

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} - \frac{N(x)}{R} + p_z = 0 \quad (5.19)$$

Substituindo-se as Eqs.(5.6) em Eq. (5.18) e a Eq.(5.7) na Eq. (5.19), as equações de equilíbrio em termos dos deslocamentos ficam:

$$\frac{d}{dx} \{ EA_{11}(x) \left[ \frac{du(x)}{dx} + \frac{w(x)}{R} \right] \} + p_x(x) = 0 \quad (5.20)$$

$$-\frac{d^2}{dx^2} \{ ED_{11}(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \} - \frac{A_{11}(x)E}{R} \left[ \frac{du(x)}{dx} + \frac{w(x)}{R} \right] + p_z = 0 \quad (5.21)$$

### 5.3 PROBLEMA FUNDAMENTAL DO ARCO: EULER-BERNOULLI

O problema fundamental para teoria de arco abatido de Euler-Bernoulli quando associado ao MEC direto é governado por relações análogas aplicadas ao problema real. Assim, quando a fonte ativada for a axial  $p_x^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$ , então as equações governantes fundamentais são análogas a Eqs.(5.18) e (5.19):

$$\frac{dN_F^*(x, \hat{x})}{dx} + \delta(x, \hat{x}) = 0 \quad (5.22)$$

$$\frac{d^2 M_F^*(x)}{dx^2} - \frac{N_F^*(x)}{R} = 0 \quad (5.23)$$

Ou em função dos deslocamentos analogamente às Eqs. (5.20-21), as equações governantes ficam:

$$\frac{d}{dx} \{ EA_{11}(x) \left[ \frac{du_F^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{A_{11}(x)}{R} w_F^*(x, \hat{x}) \right] \} + \delta(x, \hat{x}) = 0 \quad (5.24)$$

$$-\frac{d^2}{dx^2} \{ ED_{11}(x) \frac{d^2 u_F^*(x, \hat{x})}{dx^2} \} - \frac{EA_{11}(x)}{R} \left[ \frac{du_F^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_F^*(x, \hat{x})}{R} \right] = 0 \quad (5.25)$$

Integrando-se a Eq. (5.24), resulta em:

$$A_{11}(x) \frac{du^*_f(x, \hat{x})}{dx} + \frac{A_{11}(x)}{R} w^*_f(x, \hat{x}) = \frac{-\text{sgn}(x - \hat{x})}{2E} \quad (5.26)$$

Já a Eq. (5.25) pode ser escrita como:

$$-D_{11}(x)E \frac{d^2 w_F(x, \hat{x})}{dx^2} + \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2R} = 0 \quad (5.27)$$

A solução da Eq.(5.27) é:

$$w^*_f(x, \hat{x}) = \int \left[ \frac{r^2 \text{sgn}(x - \hat{x})}{4ERD_{11}(x)} \right] dx \quad (5.28)$$

Para o auxílio no cálculo das soluções fundamentais, são apresentadas algumas identidades. As identidades de interesse são:

$$\text{sgn}(x - \hat{x})[G(x) - G(\hat{x})] = \int [\text{sgn}(x - \hat{x})F(x)] dx \quad (5.29)$$

$$rG(x) - \text{sgn}(x - \hat{x})[H(x) - H(\hat{x})] = \int [rF(x)] dx \quad (5.30)$$

$$r^2 \text{sgn}(x - \hat{x})G(x) - 2[r[H(x) - H(\hat{x})] - \text{sgn}(x - \hat{x})[K(x) - K(\hat{x})] + rH(\hat{x})] = \int [r^2 \text{sgn}(x - \hat{x})F(x)] dx \quad (5.31)$$

Onde:

$$F(x) = \frac{1}{D_{11}(x)}$$

$$G(x) = \int F(x) dx$$

$$H(x) = \int G(x) dx$$

$$K(x) = \int H(x) dx$$

$$W(x) = \int K(x) dx \quad (5.32-36)$$

Usando-se a Identidade Eq. (5.31) na Eq. (5.28), tem-se:

$$w_F^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{4ER} \left[ r^2 \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) H(x) - 4rK(x) - 2rK(\hat{x}) + 6 \left[ \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) [W(x) - W(\hat{x})] \right] \right] \quad (5.37)$$

Já o deslocamento axial, da Eq. (5.26), fica:

$$u_F^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2E} \int \left[ \frac{\operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{A_{11}(x)} \right] dx - \frac{1}{RE} \int [w_F(x, \hat{x})] dx \quad (5.38)$$

Substituindo-se a Eq. (5.37) na Eq.(5.38), tem-se:

$$u_F^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2E} \int \left[ \frac{\operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{A_{11}(x)} \right] dx - \int \frac{1}{4ER^2} \left[ r^2 \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) H(x) - 4rK(x) - 2rK(\hat{x}) + 6 \left[ \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) [W(x) - W(\hat{x})] \right] \right] dx \quad (5.39)$$

Definindo-se:

$$FF(x) = \frac{1}{A_{11}(x)} \quad (5.40)$$

$$GG(x) = \int FF(x) dx \quad (5.41)$$

Ao utilizar convenientemente as identidades Eqs.(5.29-31) na Eq.(5.39), o resultado final para o deslocamento axial fundamental devido a fonte aplicada na direção x, fica:

$$u_F^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2E} \left[ \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) [GG(x) - GG(\hat{x})] \right] + \frac{1}{4ER^2} \left[ r^2 \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) K(x) - 6rW(x) + 12 \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) [(N(x) - N(\hat{x}))] \right] - \frac{1}{4ER^2} \left[ -6rW(\hat{x}) - r^2 K(\hat{x}) \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) \right] \quad (5.42)$$

Já a Equação da elástica devido a ativação da carga axial é obtida a partir da derivação da Eq. (5.37), que fica:

$$\frac{dw_F^*(x, \hat{x})}{dx} = \frac{1}{4ER} \left[ r^2 \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) G(x) - 2 \left[ rH(x) - \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) [K(x) - K(\hat{x})] \right] \right] \quad (5.43)$$

No caso da determinação das relações esforços-deslocamentos fundamentais resultantes da ativação da carga axial, as seguintes relações devem ser usadas:

$$N_F^*(x, \hat{x}) = A_{11}(x) \left[ \frac{du_F^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_F^*(x, \hat{x})}{R} \right] = -\frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2E} \quad (5.44)$$

$$M_F^*(x, \hat{x}) = -D_{11}(x) \frac{d^2 w_F^*(x, \hat{x})}{dx^2} = -\frac{r^2 \text{sgn}(x - \hat{x})}{4ER} \quad (5.45)$$

$$V_F^*(x, \hat{x}) = \frac{dM_F^*(x, \hat{x})}{dx} = -\frac{r}{2ER} \quad (5.46)$$

Por outro lado, se a ativação for alterada para  $p_z^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$ , logo,  $p_x^*(x, \hat{x}) = 0$ , as equações governantes do problema fundamental, análogas a Eqs. (5.18) e (5.19), ficam:

$$\frac{dN_p^*(x, \hat{x})}{dx} = 0 \quad (5.47)$$

$$\frac{d^2 M_F^*(x)}{dx^2} - \frac{N_F^*(x)}{R} + \delta(x, \hat{x}) = 0 \quad (5.48)$$

Ou em função dos deslocamentos, por analogia às Equações:

$$\frac{d}{dx} \left\{ A_{11}(x) E \left[ \frac{du_F^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{A_{11}(x)}{R} w_F^*(x, \hat{x}) \right] \right\} + \delta(x, \hat{x}) = 0 \quad (5.48a)$$

$$-\frac{d^2}{dx^2} \left\{ E D_{11}(x) \frac{d^2 u_F^*(x, \hat{x})}{dx^2} \right\} - \frac{A_{11}(x) E}{R} \left[ \frac{du_F^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_F^*(x, \hat{x})}{R} \right] + \delta(x, \hat{x}) = 0 \quad (5.48b)$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ E A_{11}(x) \left[ \frac{du_p^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{A_{11}(x)}{R} w_p^*(x, \hat{x}) \right] \right\} = 0 \quad (5.49)$$

$$-\frac{d^2}{dx^2} \left\{ E D_{11}(x) \frac{d^2 u_p^*(x, \hat{x})}{dx^2} \right\} - \frac{A_{11}(x) E}{R} \left[ \frac{du_p^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_p^*(x, \hat{x})}{R} \right] + \delta(x, \hat{x}) = 0 \quad (5.50)$$

Integrando-se a Eq.(5.49), tem-se:

$$u_p^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{ER} \int w_p^*(x, \hat{x}) dx \quad (5.51)$$

Por outro lado, integrando-se convenientemente 4 vezes a Eq.(5.50), tem-se:

$$w_p^*(x, \hat{x}) = \iint \left[ \frac{r}{2ED_{11}(x)} \right] dx dx \quad (5.52)$$

Ao utilizar a Identidade Eq.(5.30) na Eq.(5.52), resulta em:

$$w_p^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{2E} [r(H(x) + H(\hat{x})) - 2\text{sgn}(x - \hat{x})[K(x) - K(\hat{x})]] \quad (5.53)$$

Determinando o  $w_p^*(x, \hat{x})$ , pode-se partir para a solução de  $u_p^*(x, \hat{x})$ . Utilizando-se as identidades Eqs.(5.29-30) na Eq.(5.51), tem-se:

$$u_p^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2ER} \left[ r(2K(\hat{x}) + K(x)) + 3\text{sgn}(x - \hat{x})[W(\hat{x}) - W(x)] + \frac{r^2 \text{sgn}(x - \hat{x})H(\hat{x})}{2} \right] \quad (5.54)$$

Já a equação da elástica devido a ativação da carga transversal é resultante da derivação da Eq.(5.53), que fica:

$$\frac{dw_p^*(x, \hat{x})}{dx} = \frac{1}{2ER} [\text{sgn}(x - \hat{x})[H(\hat{x}) - H(x)] + rG(x)] \quad (5.55)$$

Agora, para determinação das relações esforços-deslocamentos fundamentais resultantes da ativação da carga transversal, as seguintes relações devem ser usadas:

$$\begin{aligned} N_p^*(x, \hat{x}) &= A_{11}(x)E \left[ \frac{du_p^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_p^*(x, \hat{x})}{R} \right] = 0 \\ M_p^*(x, \hat{x}) &= -ED_{11}(x) \frac{d^2 w_p^*(x, \hat{x})}{dx^2} = -\frac{r}{2} \\ V_p^*(x, \hat{x}) &= \frac{dM_p^*(x, \hat{x})}{dx} = -\frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2} \end{aligned} \quad (5.56-58)$$



Compostas pela derivada do deslocamento axial, transversal e inclinação da elástica em relação ao ponto fonte. Derivando-se as Eqs.(5.53),(5.54),(5.55), tem-se:

$$\begin{aligned}
 u_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) &= -\frac{1}{2ER} \left[ \text{sgn}(x - \hat{x}) [K(\hat{x}) - K(x)] + rH(\hat{x}) + \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})r^2G(\hat{x})}{2} \right] \\
 w_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) &= \frac{1}{2E} [\text{sgn}(x - \hat{x}) [H(\hat{x}) - H(x)] + rG(\hat{x})] \\
 \frac{dw_{P,\hat{x}}^*}{dx} &= \frac{1}{2E} [\text{sgn}(x - \hat{x}) [G(\hat{x}) - G(x)]]
 \end{aligned} \tag{5.59-61}$$

Já, a determinação das relações esforços-deslocamentos fundamentais em relação ao ponto fonte são obtidas a partir da derivação das Eqs. (5.56-58) em relação ao ponto fonte, assim:

$$\begin{aligned}
 N_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) &= 0 \\
 M_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) &= \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2} \\
 V_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) &= \delta(x, \hat{x})
 \end{aligned} \tag{5.62-64}$$

## 5.4 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL

Conforme já discutido nos capítulos anteriores, equações integrais a serem utilizadas no MEC podem ser obtidas via Resíduos Ponderados. Se for ativada a carga axial  $p_x^* = \delta(x, \hat{x})$  no problema fundamental, as equações governantes do problema real (5.22-24) serão ponderadas pelas soluções fundamentais,  $(u_F^*(x, \hat{x}), w_F^*(x, \hat{x}))$ , resultando em:

$$\begin{aligned}
 \int_0^L \left[ \frac{d}{dx} \{ A_{11}(x) E \left[ \frac{du(x)}{dx} + \frac{w(x)}{R} \right] \} + p_z \right] u_F^* dx + \\
 \int_0^L \left\{ -\frac{d^2}{dx^2} E [D_{11}(x) \frac{d^2 w}{dx^2}] - \frac{A_{11}(x) E}{R} \left[ \frac{du(x)}{dx} + \frac{w(x)}{R} \right] + p_z \right\} w_F^* dx = 0
 \end{aligned} \tag{5.65}$$

Procedendo-se analogamente ao discutido com a Eq. (4.81), uma relação associada à Eq. (5.65) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
& \left[ N(x)u_F^*(x, \hat{x}) \right]_0^L + \left[ V(x)w_F^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[ M(x) \frac{dw_F^*}{dx}(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[ N_F^*(x, \hat{x})u(x) \right]_0^L + \\
& \left[ M_F^*(x, \hat{x}) \frac{dw}{dx}(x) \right]_0^L - \left[ V_F^*(x, \hat{x})w(x) \right]_0^L + \int_0^L \left[ \frac{dN_F^*(x, \hat{x})}{dx} u(x) + \left\{ \frac{d^2 M_F^*(x, \hat{x})}{dx^2} - \frac{N_F^*(x, \hat{x})}{R} \right\} w(x) \right] dx \\
& + \int_0^L [p_x(x)u_F^*(x, \hat{x}) + p_z(x)w_F^*(x, \hat{x})] dx = 0
\end{aligned} \tag{5.66}$$

Utilizando-se as Eqs. (5.22-23) na Eq. (5.66), seguida da aplicação da propriedade de translação do delta de Dirac, a equação integral para o deslocamento axial fica:

$$\begin{aligned}
& u(\hat{x}) + \left[ N_F^*(x, \hat{x})u(x) \right]_0^L + \left[ V_F^*(x, \hat{x})w(x) \right]_0^L - \left[ M_F^*(x, \hat{x}) \frac{dw(x)}{dx} \right]_0^L = \\
& \left[ u_F^*(x, \hat{x})N(x) \right]_0^L + \left[ w_F^*(x, \hat{x})V(x) \right]_0^L - \left[ M(x) \frac{dw_F^*(x, \hat{x})}{dx} \right]_0^L \\
& + \int_0^L [p_x u_F^*(x, \hat{x}) + p_z w_F^*(x, \hat{x})] dx
\end{aligned} \tag{5.67}$$

Por outro lado, ativando a função puntual  $p_z^* = \delta(x, \hat{x})$ , a ponderação das Eqs.(5.22-24) fica:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \left[ \frac{d}{dx} \left\{ EA_{11}(x) \left[ \frac{du(x)}{dx} + \frac{w(x)}{R} \right] \right\} + p_z \right] u_p^* dx \\
& + \int_0^L \left\{ -\frac{d^2}{dx^2} E[D_{11}(x) \frac{d^2 w}{dx^2}] - \frac{A_{11}(x)E}{R} \left[ \frac{du(x)}{dx} + \frac{w(x)}{R} \right] + p_z \right\} w_p^* dx = 0
\end{aligned} \tag{5.68}$$

Que por sua vez, analogamente a (5.26), a Eq.(5.29) pode ser desdobrada em:

$$\begin{aligned}
& \left[ N(x)u_p^*(x, \hat{x}) \right]_0^L + \left[ V(x)w_p^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[ M(x) \frac{dw_p^*}{dx}(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[ N_p^*(x, \hat{x})u(x) \right]_0^L + \\
& \left[ M_p^*(x, \hat{x}) \frac{dw}{dx}(x) \right]_0^L - \left[ V_p^*(x, \hat{x})w(x) \right]_0^L + \int_0^L \left[ \frac{dN_p^*(x, \hat{x})}{dx} u(x) + \left\{ \frac{d^2 M_p^*(x, \hat{x})}{dx^2} - \frac{N_p^*(x, \hat{x})}{R} \right\} w(x) \right] dx \\
& + \int_0^L [p_x(x)u_p^*(x, \hat{x}) + p_z(x)w_p^*(x, \hat{x})] dx = 0
\end{aligned} \tag{5.69}$$

Com o auxílio das equações governantes do problema fundamental (5.47-48) e das propriedades do delta de Dirac, a equação integral dos deslocamentos transversais fica:

$$\begin{aligned}
 w(\hat{x}) + [N_p^*(x, \hat{x})u(x)]_0^L + [V_p^*(x, \hat{x})w(x)]_0^L - \left[ M_p^*(x, \hat{x}) \frac{dw(x)}{dx} \right]_0^L = \\
 [u_p^*(x, \hat{x})N(x)]_0^L + [w_p^*(x, \hat{x})V(x)]_0^L - \left[ M(x) \frac{dw_p^*(x, \hat{x})}{dx} \right]_0^L \\
 + \int_0^L [p_x u_p^*(x, \hat{x}) + p_z w_p^*(x, \hat{x})] dx
 \end{aligned} \tag{5.70}$$

A teoria de Euler no arco possui três incógnitas no contorno. No entanto, apenas duas equações integrais foram deduzidas até aqui. Assim, requer uma equação integral complementar para viabilizar a solução do problema. Esta equação adicional é a inclinação da elástica que pode ser determinada derivando em função do ponto-fonte a Eq. (5.69), ficando então:

$$\begin{aligned}
 \frac{dw(\hat{x})}{d\hat{x}} + [N_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x})u(x)]_0^L + [V_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x})w(x)]_0^L - \left[ M_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) \frac{dw(x)}{dx} \right]_0^L = \\
 [u_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x})N(x)]_0^L + [w_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x})V(x)]_0^L - \left[ M(x) \frac{dw_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x})}{dx} \right]_0^L \\
 + \int_0^L [p_x u_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) + p_z w_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x})] dx
 \end{aligned} \tag{5.71}$$

## 5.5 REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA

A equação governante do arco de Euler-Bernoulli, Eq. (5.24-25), é definida no domínio unidimensional (1-D). Depois da aplicação da integral por partes e de fazer uso das soluções fundamental, a equação passa do contínuo para o discreto podendo ser escrita apenas em termos de variável de contorno, conforme foi descrito na seção anterior. Agora gerar as equações algébricas pela colocação do ponto fonte nas extremidades do arco, isto é,  $\hat{x} = 0 + \zeta$  e  $\hat{x} = L - \zeta$  com  $\zeta \rightarrow 0$ . Assim:

$$\{u\} + [H]\{u\} = [G]\{p\} + \{f\} \tag{5.72}$$

Onde  $\{u\}$  e  $\{p\}$  são os vetores de deslocamentos e solicitações internas, cujas formas explícitas são dadas por:

$$\{u\} = \begin{bmatrix} u_i & w_i & \frac{dw_i}{dx} & u_j & w_j & \frac{dw_j}{dx} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} u(0) & w(0) & \frac{dw(0)}{dx} & u(L) & w(L) & \frac{dw(L)}{dx} \end{bmatrix}^T$$

$$\{p\} = \begin{bmatrix} N_i & V_i & M_i & N_j & V_j & M_j \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} N(0) & V(0) & M(0) & N(L) & V(L) & M(L) \end{bmatrix}^T$$

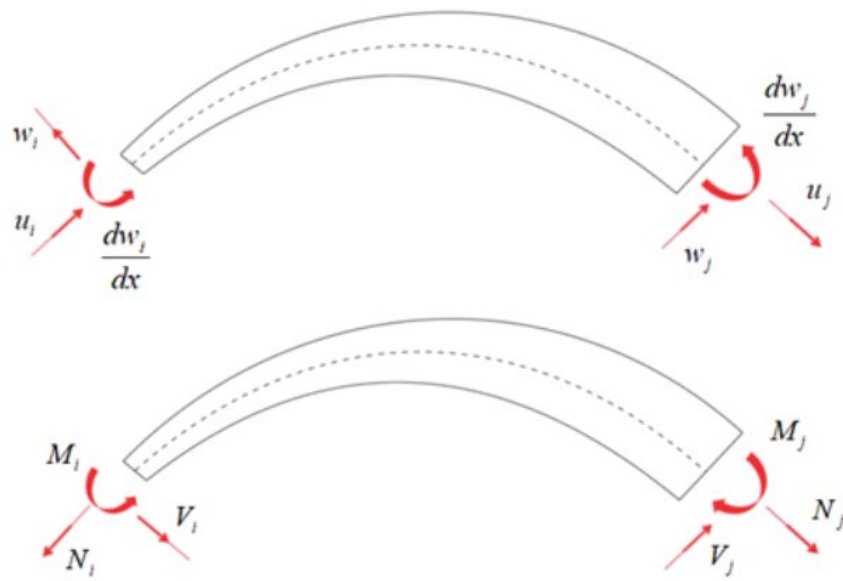


Fig. 5.2 Graus de Liberdade no contorno

Na Eq.(5.72), as matrizes de influencia  $[H]$ ,  $[G]$  são dadas por

$$[H] = \begin{bmatrix} -N_F^*(0,0) & -V_F^*(0,0) & M_F^*(0,0) & N_F^*(L,0) & V_F^*(L,0) & -M_F^*(L,0) \\ -N_P^*(0,0) & -V_P^*(0,0) & M_P^*(0,0) & N_P^*(L,0) & V_P^*(L,0) & -M_P^*(L,0) \\ -N_{P,\hat{x}}^*(0,0) & -V_{P,\hat{x}}^*(0,0) & M_{P,\hat{x}}^*(0,0) & N_{P,\hat{x}}^*(L,0) & V_{P,\hat{x}}^*(L,0) & -M_{P,\hat{x}}^*(L,0) \\ -N_F^*(0,L) & -V_F^*(0,L) & M_F^*(0,L) & N_F^*(L,L) & V_F^*(L,L) & -M_F^*(L,L) \\ -N_P^*(0,L) & -V_P^*(0,L) & M_P^*(0,L) & N_P^*(L,L) & V_P^*(L,L) & -M_P^*(L,L) \\ -N_{P,\hat{x}}^*(0,L) & -V_{P,\hat{x}}^*(0,L) & M_{P,\hat{x}}^*(0,L) & N_{P,\hat{x}}^*(L,L) & V_{P,\hat{x}}^*(L,L) & -M_{P,\hat{x}}^*(L,L) \end{bmatrix}$$

$$[H] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{L}{2R} & \frac{L^2}{4R} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{L}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{L}{2R} & \frac{L^2}{4R} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{L}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$[G] = \begin{bmatrix} -u_F^*(0,0) & -w_F^*(0,0) & \frac{dw_F^*(0,0)}{dx} & u_F^*(L,0) & w_F^*(L,0) & -\frac{dw_F^*(L,0)}{dx} \\ -u_P^*(0,0) & -w_P^*(0,0) & \frac{dw_P^*(0,0)}{dx} & u_P^*(L,0) & w_P^*(L,0) & -\frac{dw_P^*(L,0)}{dx} \\ -u_{P,\hat{x}}^*(0,0) & -w_{P,\hat{x}}^*(0,0) & \frac{dw_{P,\hat{x}}^*(0,0)}{dx} & u_{P,\hat{x}}^*(L,0) & w_{P,\hat{x}}^*(L,0) & -\frac{dw_{P,\hat{x}}^*(L,0)}{dx} \\ -u_F^*(0,L) & -w_F^*(0,L) & \frac{dw_F^*(0,L)}{dx} & u_F^*(L,L) & w_F^*(L,L) & -\frac{dw_F^*(L,L)}{dx} \\ -u_P^*(0,L) & -w_P^*(0,L) & \frac{dw_P^*(0,L)}{dx} & u_P^*(L,L) & w_P^*(L,L) & -\frac{dw_P^*(L,L)}{dx} \\ -u_{P,\hat{x}}^*(0,L) & -w_{P,\hat{x}}^*(0,L) & \frac{dw_{P,\hat{x}}^*(0,L)}{dx} & u_{P,\hat{x}}^*(L,L) & w_{P,\hat{x}}^*(L,L) & -\frac{dw_{P,\hat{x}}^*(L,L)}{dx} \end{bmatrix}$$

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \beta_1 & \beta_2 & -\beta_3 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_4 & \beta_5 & -\beta_6 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_7 & \beta_8 & -\beta_9 \\ -\beta_{10} & -\beta_{11} & \beta_{12} & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_{13} & -\beta_{14} & \beta_{15} & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_{16} & -\beta_{17} & \beta_{18} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Onde:

$$\beta_1 = -\frac{1}{2E} [\hat{F}(L) - \hat{F}(0)] - \frac{1}{4ER^2} [L^2 K(L) - 6LW(L) - 6LW(0) - L^2 K(0) + 12[M(L) - M(0)]]$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2ER} \{L^2 H(L) - 4LK(L) - 2LK(0) + 6(W(L) - W(0))\}$$

$$\beta_3 = \frac{1}{4ER} \{L^2 G(L) - 2(LH(L) - K(L) + K(0))\}$$

$$\beta_4 = -\frac{1}{2ER} \left[ L(2K(0) + K(L)) + 3(W(0) - W(L)) + \frac{L^2}{2} H(0) \right]$$

$$\beta_5 = \frac{1}{2E} \{L(H(L) + H(0)) - 2(K(L) - K(0))\}$$

$$\beta_6 = \frac{1}{2E} \{-(H(L) - H(0)) + LG(L)\}$$

$$\beta_7 = -\frac{1}{2ER} \left\{ K(0) - K(L) + LH(0) + \frac{L^2}{2} G(0) \right\}$$

$$\beta_8 = \frac{1}{2E} [H(0) - H(L) + LG(0)]$$

$$\beta_9 = \frac{1}{2E} [-G(L) + G(0)]$$

$$\beta_{10} = \frac{1}{2E} [\hat{F}(0) - \hat{F}(L)] - \frac{1}{4ER^2} [-L^2 K(0) - 6LW(0) - 6LW(L) + L^2 K(L) - 12[M(0) - M(L)]]$$

$$\beta_{11} = \frac{1}{4ER} \{-L^2 H(0) - 4LK(0) - 2LK(L) - 6(W(0) - W(L))\}$$

$$\beta_{12} = \frac{1}{4ER} \{-L^2 G(0) - 2(LH(0) + K(0) - K(L))\}$$

$$\beta_{13} = -\frac{1}{2ER} \left[ L(2K(L) + K(0)) - 3(W(L) - W(0)) - \frac{L^2}{2} H(L) \right]$$

$$\beta_{14} = \frac{1}{2E} \{L(H(L) + H(0)) + 2(K(0) - K(L))\}$$

$$\beta_{15} = \frac{1}{2E} \{-(H(L) - H(0)) + LG(0)\}$$

$$\beta_{16} = -\frac{1}{2ER} \left\{ K(0) - K(L) + LH(L) - \frac{L^2}{2} G(L) \right\}$$

$$\beta_{17} = \frac{1}{2E} [H(0) - H(L) + LG(L)]$$

$$\beta_{18} = \frac{1}{2E} [-G(L) + G(0)]$$

Já o vetor das cargas na Eq.(5.72) pode ser apresentado de uma forma genérica como:

$$\begin{Bmatrix} f_1(0) \\ f_2(0) \\ f_3(0) \\ f_1(L) \\ f_2(L) \\ f_3(L) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_0^L [p_x u_F^*(x, 0) + p_z w_F^*(x, 0)] dx \\ \int_0^L [p_x u_P^*(x, 0) + p_z w_P^*(x, 0)] dx \\ \int_0^L [p_x u_{P,\hat{x}}^*(x, 0) + p_z w_{P,\hat{x}}^*(x, 0)] dx \\ \int_0^L [p_x u_F^*(x, L) + p_z w_F^*(x, L)] dx \\ \int_0^L [p_x u_P^*(x, L) + p_z w_P^*(x, L)] dx \\ \int_0^L [p_x u_{P,\hat{x}}^*(x, L) + p_z w_{P,\hat{x}}^*(x, L)] dx \end{Bmatrix} \quad (5.73)$$

Para o caso da distribuição trapezoidal da carga transversal ao longo do arco, o vetor de carga fica:

$$\{f\} = \frac{P_{zi}}{2E} \begin{bmatrix} \frac{1}{2R} \{6W(L) - 6W(0) + L^2 H(L) - 2LK(0) - 4LK(L)\} \\ \left\{ LK(L) - W(L) + W(0) + H(0) \frac{L^2}{2} - 2W(L) + 2W(0) + 2K(0)L \right\} \\ \left\{ H(0)L - K(L) + K(0) + G(0) \frac{L^2}{2} \right\} \\ \frac{1}{2R} \{2[M(0) - M(L)] - 4[W(L) - W(0)] + L^2 K(L) + 5LK(0) - 2LK(L) + 2LW(0) + L^2 H(0)\} \\ \left\{ 3W(L) - 3W(0) + H(L) \frac{L^2}{2} - LK(0) - 2LK(L) \right\} \\ \left\{ -H(L)L - K(0) + K(L) + \frac{L^2}{2} G(L) \right\} \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{P_{zj} - P_{zi}}{2EL} \begin{bmatrix} \frac{1}{2R} \{12M(0) - 12M(L) + L^3 H(L) - 5L^2 K(L) + 12LW(L) - L^2 K(0)\} \\ \left\{ L^2 K(L) - 2[LW(L) - M(L) + M(0)] + H(0) \frac{L^3}{3} - 2[LW(L) - M(L) + M(0)] + K(0)L^2 \right\} \\ \left\{ W(L) - W(0) + LK(L) + G(0) \frac{L^3}{3} + H(0) \frac{L^2}{2} \right\} \\ \frac{1}{2R} \left\{ 12M(L) - 12M(0) - 6LW(0) - 6LW(L) - \frac{L^2 K(0)}{2} \right\} \\ \left\{ 4M(0) - 3M(L) + H(L) \frac{L^3}{6} - L^2 K(L) + LW(0) + 3LW(L) \right\} \\ \left\{ W(L) - W(0) - LK(L) + \frac{L^3}{6} G(L) \right\} \end{bmatrix}$$

Já, para o caso em que for aplicada uma carga concentrada transversal ,  $F_z$  a uma distância “  $\bar{a}$  ” da extremidade esquerda , o vetor de carga fica:

$$\{f\} = \frac{F_z}{2E} \begin{bmatrix} \frac{1}{2R} \{ -\bar{a}H(\bar{a}) - 4\bar{a}K(\bar{a}) - 2\bar{a}K(0) - 6[W(\bar{a}) - W(0)] \} \\ \{ \bar{a}[H(\bar{a}) + H(0)] - 2[K(\bar{a}) - K(0)] \} \\ \{ H(0) - H(\bar{a}) + \bar{a}G(0) \} \\ \frac{1}{2R} \{ (\bar{a} - L)^2 - 4|\bar{a} - L|K(\bar{a}) - 2|\bar{a} - L|K(L) + 6[W(\bar{a}) - W(L)] \} \\ \{ (L - \bar{a})[H(\bar{a}) + H(L)] + 2[K(\bar{a}) - K(L)] \} \\ \{ (L - \bar{a})G(L) + H(\bar{a}) - H(L) \} \end{bmatrix}$$

Como a solução do sistema algébrico apresentado na Eq. (5.72) é dada apenas para o contorno da barra, logo, para se obter a solução algébrica para todo domínio é necessário redefinir as Eq. (5.72) em função de um ponto genérico do domínio. Portanto, fazendo a substituição  $\hat{x} = a$  e também da solução do sistema algébrico  $\{u\}$ , tem-se então a solução em todo domínio da barra dada por:

$$\{u(a)\} + [H(a)]\{u\} = [G(a)]\{p\} + \{f(a)\} \quad (5.74)$$

Onde:



$$[H(a)] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{a}{2R} & \frac{a^2}{4R} & -\frac{1}{2} & -\frac{|L-a|}{2R} & -\frac{(L-a)^2}{4R} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{a}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{|L-a|}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$[G(a)] = \begin{bmatrix} \beta_1(a) & \beta_2(a) & \beta_3(a) & \beta_4(a) & \beta_5(a) & \beta_6(a) \\ \beta_7(a) & \beta_8(a) & \beta_9(a) & \beta_{10}(a) & \beta_{11}(a) & \beta_{12}(a) \\ \beta_{13}(a) & \beta_{14}(a) & \beta_{15}(a) & \beta_{16}(a) & \beta_{17}(a) & \beta_{18}(a) \end{bmatrix} \quad (5.75-76)$$

Com:

$$\beta_1(a) = \frac{1}{2E} (\hat{F}(0) - \hat{F}(a)) + \frac{1}{4ER^2} \{ -a^2 K(0) - 6aW(0) - 12[M(0) - M(a)] - 6aW(a) + a^2 K(a) \}$$

$$\beta_2(a) = -\frac{1}{4ER} \{ [-a^2 H(0) - 4aK(0) - 2aK(a) - 6[W(0) - W(a)]] \}$$

$$\beta_3(a) = \frac{1}{4ER} \{ -a^2 G(0) - 2[aH(0) + (K(0) - K(a))] \}$$

$$\beta_4(a) = -\frac{1}{2E} \{ \hat{F}(L) - \hat{F}(a) \} - \frac{1}{4ER^2} \{ (L-a)^2 K(L) - 6(L-a)W(L) - 12[M(L) - M(a)] \}$$

$$- \frac{1}{4ER^2} \{ -6(L-a)W(a) - (L-a)^2 K(a) \}$$

$$\beta_5(a) = \frac{1}{4ER} \{ [(L-a)^2 H(L) - 4(L-a)K(L) - 2(L-a)K(a) + 6[W(L) - W(a)]] \}$$

$$\beta_6(a) = -\frac{1}{4ER} \{ (L-a)^2 G(L) - 2[(L-a)H(L) - (K(L) - K(a))] \}$$

$$\beta_7(a) = \frac{1}{2RE} \left\{ a[2(K(a) + K(0))] - 3(W(a) - W(0)) - \frac{a^2 H(a)}{2} \right\}$$

$$\beta_8(a) = -\frac{1}{2E} \{ a[H(0) + H(a)] + 2[K(0) - K(a)] \}$$

$$\beta_9(a) = \frac{1}{2E} \{ aG(0) - [H(a) - Y(0)] \}$$

$$\beta_{10}(a) = -\frac{1}{2ER} \left\{ -[P(L) - P(a)] + |L - a|[2K(a) + K(L)] + 3[W(a) - W(L)] + \frac{(L - a)^2 H(a)}{2} \right\}$$

$$\beta_{11}(a) = \frac{1}{2E} \left\{ -2[K(L) - K(a)] + |L - a|[H(L) + H(a)] \right\}$$

$$\beta_{12}(a) = -\frac{1}{2E} \left\{ -[H(a) - H(L)] + |L - a|[G(L)] \right\}$$

$$\beta_{13}(a) = \frac{1}{2ER} \left\{ -[K(a) - K(0)] + aH(a) - \frac{a^2 G(a)}{2} \right\}$$

$$\beta_{14}(a) = -\frac{1}{2E} \left\{ a[H(0) + H(a)] + 2[K(0) - K(a)] \right\}$$

$$\beta_{15}(a) = -\frac{1}{2E} \left\{ [G(a) - G(0)] \right\}$$

$$\beta_{16}(a) = -\frac{1}{2ER} \left\{ [K(a) - K(L)] + (L - a)H(a) + \frac{(L - a)^2 G(a)}{2} \right\}$$

$$\beta_{17}(a) = \frac{1}{2E} \left\{ |L - a|[G(a) + H(a) - H(L)] \right\}$$

$$\beta_{18}(a) = \frac{1}{2E} \left\{ [-G(L) + G(a)] \right\}$$

Já o carregamento  $\{f(a)\}$  trapezoidal transversal no domínio, fica:

$$\begin{aligned} \{f(a)\} = & \frac{P_{zi}}{2ER} \left[ \begin{array}{c} 4M(L) - 8M(a) + 4M(0) + 6aW(a) - \frac{2L^2 H(a)}{3} - L^2 K(a) + a^3 H(a) - 2a^2 K(a) \\ 6W(a) - 3W(L) - 3W(0) + \frac{L^2 H(a)}{2} + a^2 H(a) - aH(0) + LK(L) \\ 4K(a) - K(L) - 2K(0) - aH(0) \end{array} \right] \\ & + \frac{P_{zj} - P_{zi}}{2ER} \left[ \begin{array}{c} aW(0) - LW(L) - 3LW(a) + aW(L) + 2LaK(a) - 2La^2 H(a) + \frac{L^2 aH(a)}{2} \\ 2LK(a) - aK(L) + aH(a) - 5aK(a) - LaH(a) \\ LH(L) - LK(L) + LH(a) - aH(L) - 2aH(a) \end{array} \right] \end{aligned}$$

## 5.6 PROBLEMA REAL DO ARCO: TIMOSHENKO

Para o desenvolvimento da teoria de arcos abatidos de Timoshenko serão assumidas as mesmas hipóteses na seção 5.1. Os deslocamentos definidos nos eixos longitudinais são: (deslocamento axial  $u(x)$  e transversal  $w(x)$ , e rotação da seção  $\phi(x)$ ) as componentes dos deslocamentos no plano xz ( $U(x, z), W(x, z)$ ) dados por:

$$U(x, z) = \left(1 + \frac{z}{R}\right)u(x) + z\phi(x) \quad (5.77)$$

$$W(x, z) = w(x) \quad (5.78)$$

Já as deformações ficam:

$$\varepsilon_x = \frac{dU(x, z)}{dx} + \frac{w(x)}{R} = \varepsilon_0 + z\varepsilon_1 \quad (5.79)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{dU(x, z)}{dz} + \frac{dW(x, z)}{dx} = \frac{1}{R}u(x) + \phi(x) + \frac{dw(x)}{dx} = \gamma_0 \quad (5.80)$$

Onde:

$$\varepsilon_0 = \left(1 + \frac{z}{R}\right)\frac{du(x)}{dx} + \frac{w(x)}{R} \quad (5.81)$$

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{d\phi(x)}{dx}\right) \quad (5.82)$$

$$\gamma_0 = \frac{dw(x)}{dx} + \phi(x) \quad (5.83)$$

Semelhantemente ao caso de Euler-Bernoulli, se o termo  $\frac{z}{R}$  for desprezado, como sugerido em QATU (1992), a deformação axial na Eq.(5.81) fica:

$$\varepsilon_0 = \frac{du(x)}{dx} + \frac{w(x)}{R} \quad (5.84)$$

As relações tensão-deformação do arco abatido, desprezando o coeficiente de Poisson  $\nu = 0$ , pode ser dada por:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E\left[\frac{du(x)}{dx} + \frac{w(x)}{R}\right] + Ez\frac{d\phi(x)}{dx} \quad (5.85)$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} = G\left[\frac{dw(x)}{dx} + \phi(x)\right] \quad (5.86)$$

Já os esforços resultantes das tensões são:

$$N(x) = \int_A \sigma_x dA = EA_{11}(x) \left[ \frac{du}{dx} + \frac{w}{R} \right] \quad (5.87)$$

$$M(x) = \int_A \sigma_x z dA = EB_{11}(x) \left[ \frac{du}{dx} + \frac{w}{R} \right] \quad (5.88)$$

Onde:

$$A_{11}(x) = \int_{-b\inf(x)}^{+b\sup(x)} \int_{-z\inf(x)}^{+z\sup(x)} dz dy \quad (5.89)$$

$$B_{11}(x) = \int_{-b\inf(x)}^{+b\sup(x)} \int_{-z\inf(x)}^{+z\sup(x)} z dz dy \quad (5.90)$$

$$D_{11}(x) = \int_{-b\inf(x)}^{+b\sup(x)} \int_{-z\inf(x)}^{+z\sup(x)} z^2 dz dy \quad (5.91)$$

Para o caso de Timoshenko o esforço cortante é dado por:

$$V(x) = \int_A \kappa \tau_{xz} dA = \kappa GA(x) \left[ \frac{dw(x)}{dx} + \phi(x) \right] \quad (5.92)$$

Onde  $\kappa$  é o fator de forma da seção transversal.

A obtenção da equação governante do problema real do arco abatido de Timoshenko pode ser obtida pela condição estacionária do funcional de energia, desta forma tem-se:

$$\delta\pi = \int_v (\sigma_x \delta\epsilon_x + \tau_{xz} \delta\gamma_{xz}) dV - \int_0^L (p_x \delta u + p_z \delta w + m \delta\phi) dx = 0 \quad (5.93)$$

Da substituição das Eq. (5.85), (5.86) em (5.93), e então, integrando-se na área transversal, tem-se:

$$\begin{aligned} \delta\pi = & \int_0^L \left( N(x) \left[ \frac{d\delta u(x)}{dx} + \frac{\delta w(x)}{R} \right] + M(x) \frac{d\delta\phi(x)}{dx} \right) dx \\ & + \int_0^L \left( V(x) \delta \left[ \frac{dw(x)}{dx} + \phi(x) \right] \right) dx - \int_0^L (p_x \delta u + p_z \delta w + m \delta\phi) dx = 0 \end{aligned} \quad (5.94)$$

Integrando-se a Eq.(5.94) por partes, tem-se:

$$\begin{aligned} \delta\pi = & \int_0^L \left( \left( -\frac{dN}{dx} - p_x \right) \delta u + \left( -\left( \frac{dV}{dx} \right) + \frac{N}{R} - p_z \right) \delta w \right) dx - \int_0^L \left( \frac{dM}{dx} - (V) + m \right) \delta(\phi(x)) dx \\ & + [N\delta u]_0^L + [M\delta\phi]_0^L + [V\delta w]_0^L = 0 \end{aligned} \quad (5.95)$$

Como a variação dos campos no contorno é nula,  $\left[ \delta \frac{dw(x)}{dx} \right]_0^L = [\delta w(x)]_0^L = 0$ , a

Eq.(5.95) fica:

$$\int_0^L \left( \left( -\frac{dN}{dx} - p_x \right) \delta u + \left( -\left( \frac{dV}{dx} \right) + \frac{N}{R} - p_z \right) \delta w \right) dx + \int_0^L \left( \frac{dM}{dx} - (V) + m \right) \delta\phi dx = 0 \quad (5.96)$$

Como as variações  $\delta u$ ,  $\delta w$  e  $\delta\phi$  podem assumir diferentes valores durante o mapeamento das funções  $u, w, \phi$ , para garantir a condição de nulidade da Eq. (5.96) para todo o domínio, é necessário que:

$$\frac{dN}{dx} + p_x = 0 \quad (5.97)$$

$$\frac{dM}{dx} - (V) + m = 0 \quad (5.98)$$

$$\left( \frac{dV}{dx} \right) - \frac{N}{R} + p_z = 0 \quad (5.99)$$

Em termos dos deslocamentos, as equações de equilíbrio ficam:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \left\{ A_{11}(x) E \left[ \frac{du(x)}{dx} + \frac{w(x)}{R} \right] \right\} + p_x(x) = 0 \\ \frac{d}{dx} \left\{ A_{55}(x) \kappa G \left[ \phi(x) + \frac{dw(x)}{dx} \right] \right\} - \frac{A_{11}(x) E}{R} \left[ \frac{du(x)}{dx} + \frac{w(x)}{R} \right] + p_z(x) = 0 \\ \frac{d}{dx} \left\{ D_{11}(x) E \frac{d\phi(x)}{dx} \right\} - A_{55}(x) \kappa G \left[ \phi(x) + \frac{dw(x)}{dx} \right] + m = 0 \end{array} \right. \quad (5.100-102)$$

## 5.7 PROBLEMA FUNDAMENTAL: TIMOSHENKO

Tal qual o problema fundamental do arco abatido de Euler-Bernoulli, o problema fundamental de para o arco abatido de Timoshenko é associado um domínio infinito sob cargas puntuais  $(p_x^*, p_z^*, m^*)$  e governado por relações análogas aplicadas ao problema real. Quando a fonte axial  $p_x^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$  for ativada, equações governantes fundamentais análogas ao real Eq. (5.48a-c) são dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \left\{ A_{11}(x) E \left[ \frac{du_f^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_f^*(x, \hat{x})}{R} \right] \right\} + \delta(x, \hat{x}) = 0 \\ \frac{d}{dx} \left\{ A_{55}(x) \kappa G \left[ \phi_f^*(x, \hat{x}) + \frac{dw_f^*(x, \hat{x})}{dx} \right] \right\} - \frac{A_{11}(x) E}{R} \left[ \frac{du_f^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_f^*(x, \hat{x})}{R} \right] = 0 \\ \frac{d}{dx} \left\{ D_{11}(x) E \frac{d\phi_f^*(x, \hat{x})}{dx} \right\} - A_{55}(x) \kappa G \left[ \phi_f^*(x, \hat{x}) + \frac{dw_f^*(x, \hat{x})}{dx} \right] = 0 \end{array} \right. \quad (5.103-105)$$

Após a manipulação e integrações apropriadas das Eqs.(5.103-105), resulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{11}(x) \frac{du_f^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{A_{11}(x)}{R} w_f^*(x, \hat{x}) = \frac{-\text{sgn}(x - \hat{x})}{2E} \\ A_{55}(x) \left[ \frac{dw_f^*(x, \hat{x})}{dx} + \phi_f^*(x, \hat{x}) \right] = -\frac{r}{2\kappa GR} \\ \frac{d}{dx} \left[ D_{11}(x) \frac{d\phi_f^*(x, \hat{x})}{dx} \right] = -\frac{r}{2ER} \end{array} \right. \quad (5.106-108)$$

Integrando-se a Eq.(5.108), tem-se:

$$\phi_F^*(x, \hat{x}) = -\frac{r}{4ER} \int \left[ \frac{r^2 \operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{D_{11}(x)} \right] dx \quad (5.109)$$

Após o uso da Identidade Eq.(5.31) na Eq.(5.109), tem-se:

$$\phi_F^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{4ER} \left[ r^2 \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) G(x) - 2 \left[ r(H(x)) - \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) [K(x) - K(\hat{x})] \right] \right] \quad (5.110)$$

Já o deslocamento transversal fundamental é obtido da substituição da Eq.(5.110) na Eq.(5.107) e integração, que fica:

$$w_F^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2\kappa GR} \int \left[ \frac{r}{A_{55}(x)} \right] dx + \frac{1}{4ER} \int \left[ r^2 \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) - 2[rH(x)] \right] dx + \frac{1}{4ER} \int \left[ -\operatorname{sgn}(x - \hat{x}) [K(x) - K(\hat{x})] \right] dx \quad (5.111)$$

Usando-se convenientemente as Identidades Eqs.(5.29-31) na Eq.(5.111), tem-se:

$$w_F^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2ER} \left[ rG_5(x) - \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) [H_5(x) - H_5(\hat{x})] \right] + \frac{1}{4ER} \left[ r^2 \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) - 2 \left[ 2rK(x) - 3\operatorname{sgn}(x - \hat{x}) [W(x) - W(\hat{x})] + rK(\hat{x}) \right] \right] \quad (5.112)$$

Por fim, da substituição do deslocamento transversal Eq.(5.112) na Eq. (5.106), o deslocamento axial fica:

$$u_F^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2E} \int \left[ \frac{\operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{A_{11}(x)} \right] dx - \frac{1}{R} \int w_F^*(x, \hat{x}) dx \quad (5.113)$$

Para o cálculo do deslocamento axial relativo a ativação da carga axial Eq.(5.113), substitui-se a Eq.(5.112) nesta última e utiliza-se convenientemente as identidades Eqs.(5.29-31), assim:

$$\begin{aligned}
 u_F^*(x, \hat{x}) = & -\frac{1}{2E} \left[ \text{sgn}(x - \hat{x}) [GG(x) - GG(\hat{x})] \right] + \\
 & + \frac{1}{ER^2} \left[ r [H_5(x) - H_5(\hat{x})] - 2 \text{sgn}(x - \hat{x}) [K_5(x) - K_5(\hat{x})] \right] \\
 & - \frac{1}{4ER^2} \left[ r^2 \text{sgn}(x - \hat{x}) [K(x) - K(\hat{x})] - 6r [W(x) - W(\hat{x})] + 12 \text{sgn}(x - \hat{x}) [M(x) - M(\hat{x})] \right]
 \end{aligned} \tag{5.114}$$

Já, a determinação das relações esforços-deslocamentos fundamentais devido à ativação da fonte axial são obtidos a partir das Eqs.(5.97-99), que ficam:

$$\frac{dN_F^*(x, \hat{x})}{dx} + \delta(x, \hat{x}) = 0 \tag{5.115}$$

$$\frac{dM_F^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{r}{2R} = 0 \tag{5.116}$$

$$\left( \frac{dV_F^*(x, \hat{x})}{dx} \right) + \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2R} = 0 \tag{5.117}$$

Da integração das Eqs.(5.115-117), tem-se:

$$N_F^*(x, \hat{x}) = -\frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2} \tag{5.118}$$

$$M_F^*(x, \hat{x}) = -\frac{r^2 \text{sgn}(x - \hat{x})}{4R} \tag{5.119}$$

$$V_F^*(x, \hat{x}) = -\frac{r}{2R} \tag{5.120}$$



Por outro lado, quando a fonte transversal  $p_z^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$  for ativada, tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \left\{ A_{11}(x) E \left[ \frac{du_p^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_p^*(x, \hat{x})}{R} \right] \right\} = 0 \\ \frac{d}{dx} \left\{ A_{55}(x) \kappa G \left[ \phi_p^*(x, \hat{x}) + \frac{dw_p^*(x, \hat{x})}{dx} \right] \right\} - \frac{A_{11}(x)}{R} E \left[ \frac{du_p^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_p^*(x, \hat{x})}{R} \right] + \delta(x, \hat{x}) = 0 \\ \frac{d}{dx} \left\{ D_{11}(x) E \frac{d\phi_p^*(x, \hat{x})}{dx} \right\} - A_{55}(x) \kappa G \left[ \phi_p^*(x, \hat{x}) + \frac{dw_p^*(x, \hat{x})}{dx} \right] = 0 \end{array} \right. \quad (5.121-123)$$

Que após manipulações algébricas, (5.121-123) ficam:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} E \left[ A_{11}(x) \frac{du_p^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{A_{11}(x)}{R} w_p^*(x, \hat{x}) \right] = 0 \\ \frac{d}{dx} A_{55}(x) \kappa G \left[ \frac{dw_p^*(x, \hat{x})}{dx} + \phi_p^*(x, \hat{x}) \right] + \delta(x, \hat{x}) = 0 \\ \frac{d}{dx} E \left[ D_{11}(x) \frac{d\phi_p^*(x, \hat{x})}{dx} \right] + \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2} = 0 \end{array} \right. \quad (5.124-126)$$

Da Eq.(5.123), tem-se:

$$\phi_p^*(x, \hat{x}) = -\frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2E} [G(x) - G(\hat{x})] \quad (5.127)$$

Já o descolamento transversal da Eq.(5.122), fica:

$$w_p^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2\kappa G} \int \left[ \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{A_{55}(x)} \right] dx - \int \phi_p^*(x, \hat{x}) dx \quad (5.128)$$

Da substituição da Eq.(5.124) na Eq.(5.125) e utilizando-se convenientemente as identidades Eqs.(5.29-31), tem-se:

$$w_p^*(x, \hat{x}) = -\frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2\kappa G} [G_5(x) - G_5(\hat{x})] + \frac{1}{2E} [\text{sgn}(x - \hat{x}) [H(x) - H(\hat{x})] - rG(\hat{x})] \quad (5.129)$$

Por outro lado, o deslocamento axial resulta da substituição da Eq.(5.126) na Eq.(5.115), combinada com a utilização das identidades Eqs. (5.29-31), tem-se:

$$u_p^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2\kappa GR} \left[ \text{sgn}(x - \hat{x}) [H_5(x) - H_5(\hat{x})] + rG_5(\hat{x}) \right] - \frac{1}{2ER} \left[ 2\text{sgn}(x - \hat{x}) [K(x) - K(\hat{x})] - r[H(x) - H(\hat{x})] \right] \quad (5.130)$$

As relações esforços-deslocamentos fundamentais devido a ativação da fonte transversal são obtidos a partir das Eqs.(5.97-99), que ficam:

$$\begin{aligned} \frac{dN_p^*(x, \hat{x})}{dx} &= 0 \\ \frac{dM_p^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2} &= 0 \\ \left( \frac{dV_p^*(x, \hat{x})}{dx} \right) + \delta(x, \hat{x}) &= 0 \end{aligned} \quad (5.131-133)$$

Da integração das Eqs. (5.131-133), tem-se:

$$N_p^*(x, \hat{x}) = 0$$

$$M_p^*(x, \hat{x}) = \frac{-r}{2}$$

$$V_p^*(x, \hat{x}) = -\frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2}$$

Por fim, mudando-se a ativação da fonte, para  $m^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$ , tem-se:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dx} \{ A_{11}(x) E \left[ \frac{du_m^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_m^*(x, \hat{x})}{R} \right] \} &= 0 \\ \frac{d}{dx} \{ A_{55}(x) \kappa G \left[ \phi_m^*(x, \hat{x}) + \frac{dw_m^*(x, \hat{x})}{dx} \right] \} - \frac{A_{11}(x) E}{R} \left[ \frac{du_m^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_m^*(x, \hat{x})}{R} \right] &= 0 \\ \frac{d}{dx} \{ D_{11}(x) E \frac{d\phi_m^*(x, \hat{x})}{dx} \} - A_{55}(x) \kappa G \left[ \phi_m^*(x, \hat{x}) + \frac{dw_m^*(x, \hat{x})}{dx} \right] + \delta(x, \hat{x}) &= 0 \end{aligned} \right. \quad (5.134-136)$$

Da substituição da Eq.(5.136) na Eq.(5.135) e em seguida integrando-se, tem-se:

$$\phi_m^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{E} \int \left[ \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{D_{11}(x)} \right] dx \quad (5.137)$$

Utilizando-se a identidade Eq.(5.29) na Eq.(5.137), tem-se:

$$\phi_m^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2E} \text{sgn}(x - \hat{x}) [G(x) - G(\hat{x})] \quad (5.138)$$

Para se determinar o deslocamento transversal, substitui-se a Eq.(5.138) na Eq.(5.136), que fica:

$$w_m^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{2E} \int [\text{sgn}(x - \hat{x}) [G(x) - G(\hat{x})]] dx \quad (5.139)$$

Da aplicação da Identidade Eq.(5.29) na Eq.(5.139), resulta em:

$$w_m^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{2E} [\text{sgn}(x - \hat{x}) [H(x) - H(\hat{x})] - rG(\hat{x})] \quad (5.140)$$

Por fim, da substituição da Eq.(5.140) na Eq.(5.134) determina-se o descolamento axial, que após a utilização da Identidade Eq.(5.29) que fica:

$$u_m^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2ER} \int [[\text{sgn}(x - \hat{x}) [H(x) - H(\hat{x})] - rG(\hat{x})]] dx \quad (5.141)$$

Para a determinação do deslocamento axial, semelhante ao efetuado anteriormente no deslocamento transversal, faz-se uso das identidades Eq.(5.29-31), que resulta em:

$$u_m^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2ER} \left[ \left[ \text{sgn}(x - \hat{x}) [K(x) - H(\hat{x})] - rH(x) - \frac{r^2 G(x)}{2} \right] \right] \quad (5.142)$$

Já, as relações esforços-deslocamentos fundamentais devido a ativação do momento são:

$$N_m^*(x, \hat{x}) = 0$$

$$M_m^*(x, \hat{x}) = -\frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2}$$

$$V_m^*(x, \hat{x}) = 0 \quad (5.143-145)$$

Onde:

$$F(x) = \frac{d}{dx}(G(x))$$

$$G(x) = \frac{d}{dx}(H(x))$$

$$H(x) = \frac{d}{dx}(K(x))$$

$$K(x) = \frac{d}{dx}(W(x))$$

$$W(x) = \frac{d}{dx}(M(x))$$

$$F(x) = \frac{1}{D_{11}(x)}$$

$$FF(x) = \frac{1}{A_{11}(x)}$$

$$FF(x) = \frac{dGG(x)}{dx}$$

$$F_5(x) = \frac{1}{A_{55}(x)}$$

$$F_5(x) = \frac{dG_5(x)}{dx}$$

$$G_5(x) = \frac{dH_5(x)}{dx} \quad (5.146-155)$$

## 5.8 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL

As equações integrais para Timoshenko serão determinadas pelo Teorema da Reciprocidade de Betti, conforme já discutido no capítulo 4, uma correlação entre os campos de tensões, uma relação entre o problema real e o fundamental pode ser estabelecida usando o Teorema da Reciprocidade de Betti. Se for ativada a fonte axial, a relação recíproca entre o problema real e fundamental é dada por:

$$\int_V [\sigma_{xF}^* \varepsilon_x + \tau_{xzF}^* \gamma_{xz}] dV = \int_V [\sigma_x \varepsilon_{xF}^* + \tau_{xz} \gamma_{xzF}^*] dV \quad (5.156)$$

Onde V é o volume do arco.

Substituindo tensões e deformações reais, Eqs. (5.85-86), (5.79-83), e seus análogos fundamentais na Eq. (5.156) tem-se:

$$\int_0^L \left[ N_F^* \left( \frac{du}{dx} + \frac{w}{R} \right) + V_F^* \frac{dw}{dx} + M_F^* \frac{d\phi}{dx} \right] dx = \int_0^L \left[ N \left( \frac{du_F^*}{dx} + \frac{w_F^*}{R} \right) + V \frac{dw_F^*}{dx} + M \frac{d\phi_F^*}{dx} \right] dx \quad (5.157)$$

Após aplicar convenientemente sucessivas integrais por partes na Eq. (5.157), a equação pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} & - \int_0^L \left[ u(x) \frac{dN_F^*}{dx} + N_F^* \frac{w}{R} + w \frac{dV_F^*}{dx} + \phi \frac{dM_F^*}{dx} \right] dx + [N_F^* u]_0^L + [V_F^* w]_0^L + \left[ M_F^* \frac{dw}{dx} \right]_0^L = \\ & - \int_0^L \left[ u_F^* \frac{dN}{dx} + w_F^* \frac{N}{R} + w_F^* \frac{dV}{dx} + \phi_F^* \frac{dM}{dx} \right] dx + [Nu_F^*]_0^L + [Vw_F^*]_0^L + \left[ M \frac{dw_F^*}{dx} \right]_0^L \end{aligned} \quad (5.158)$$

Substituindo (5.100-102) e (5.104-105) em (5.158) fica:

$$\begin{aligned} & - \int_0^L u(x) \delta(x, \hat{x}) dx + [N_F^* u]_0^L + [V_F^* w]_0^L + \left[ M_F^* \frac{dw}{dx} \right]_0^L = \\ & \int_0^L [u_F^* p_x + w_F^* p_z + \phi_F^* m] dx + [Nu_F^*]_0^L + [Vw_F^*]_0^L + \left[ M \frac{dw_F^*}{dx} \right]_0^L \end{aligned} \quad (5.159)$$

Finalmente, substituindo a propriedade do delta de Dirac na Eq. (5.159), obtém-se a equação integral para o deslocamento axial, que pode ser dada por:

$$u(\hat{x}) + \left[ N_F^* u \right]_0^L + \left[ V_F^* w \right]_0^L + \left[ M_F^* \phi \right]_0^L = \left[ N u_F^* \right]_0^L + \left[ V w_F^* \right]_0^L + \left[ M \phi_F^* \right]_0^L + \int_0^L \left[ u_F^* p_x + w_F^* p_z + \phi_F^* m \right] dx \quad (5.160)$$

Por outro lado, quando a carga fonte transversal  $p_z^*$  for ativada, a relação recíproca é dada por:

$$\int_V \left[ \sigma_{xp}^* \varepsilon_x + \tau_{xzp}^* \gamma_{xz} \right] dV = \int_V \left[ \sigma_x \varepsilon_{xp}^* + \tau_{xz} \gamma_{xzp}^* \right] dV \quad (5.161)$$

Se as Eqs. (5.79-83) e (5.85-86) forem substituídas na Eq. (5.161) obtém-se:

$$\int_0^L \left[ N_p^* \frac{du}{dx} + N_p^* \frac{w}{R} + V_p^* \frac{dw}{dx} + M_p^* \frac{d\phi}{dx} \right] dx = \int_0^L \left[ N \frac{du_p^*}{dx} + N \frac{w_p^*}{R} + V \frac{dw_p^*}{dx} + M \frac{d\phi_p^*}{dx} \right] dx \quad (5.162)$$

Integrando por partes sucessivamente a Eq. (5.162), pode-se então, ser escrita da seguinte forma:

$$-\int_0^L \left[ u(x) \frac{dN_p^*}{dx} + N_p^* \frac{w}{R} + w \frac{dV_p^*}{dx} + \phi \frac{dM_p^*}{dx} \right] dx + \left[ N_p^* u \right]_0^L + \left[ V_p^* w \right]_0^L + \left[ M_p^* \frac{dw}{dx} \right]_0^L = -\int_0^L \left[ u_p^* \frac{dN}{dx} + w_p^* \frac{N}{R} + w_p^* \frac{dV}{dx} + \phi_p^* \frac{dM}{dx} \right] dx + \left[ N u_p^* \right]_0^L + \left[ V w_p^* \right]_0^L + \left[ M \frac{dw_p^*}{dx} \right]_0^L \quad (5.163)$$

Substituindo (5.100-102) e (5.119-120) em (5.163) fica:

$$-\int_0^L u(x) \delta(x, \hat{x}) dx + \left[ N_p^* u \right]_0^L + \left[ V_p^* w \right]_0^L + \left[ M_p^* \frac{dw}{dx} \right]_0^L = \left[ N u_p^* \right]_0^L + \left[ V w_p^* \right]_0^L + \left[ M \frac{dw_p^*}{dx} \right]_0^L + \int_0^L \left[ u_p^* p_x + w_p^* p_z + \phi_p^* m \right] dx \quad (5.164)$$

Assim, substituindo-a em conjunto com a Eq. (5.39) e a propriedade do delta de Dirac na Eq. (5.164), tem-se a equação integral do deslocamento transversal, dada por:

$$\begin{aligned}
w(\hat{x}) + [N_p^* u]_0^L + [V_p^* w]_0^L + [M_p^* \phi]_0^L = \\
+ [Nu_p^*]_0^L + [Vw_p^*]_0^L + [M\phi_p^*]_0^L + \int_0^L [u_p^* p_x + w_p^* p_z + \phi_p^* m] dx
\end{aligned} \tag{5.165}$$

Por fim, ativando a fonte momento  $m^*$ , e seguindo um processo análogo ao aplicado quando a carga axial ou a transversal foi ativada, uma representação da equação integral para a rotação da seção pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
\phi(\hat{x}) + [N_m^* u]_0^L + [V_m^* w]_0^L + [M_m^* \phi]_0^L = \\
\int_0^L [u_m^* p_x + w_m^* p_z + \phi_m^* m] dx + [Nu_m^*]_0^L + [Vw_m^*]_0^L + [M\phi_m^*]_0^L
\end{aligned} \tag{5.166}$$

## 5.9 REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA

A transição das equações integrais para as algébricas é feita pela colocação das fontes no contorno, isto é,  $\hat{x} = 0 + \zeta$  e  $\hat{x} = L - \zeta$  com  $\zeta \rightarrow 0$  e pelo cálculo das integrais pertinentes, de forma que gera um sistema que pode ser expresso como:

$$\{u\} + [H]\{u\} = [G]\{p\} + \{f\} \tag{5.167}$$

onde  $\{u\}$  e  $\{p\}$  são os vetores de deslocamentos e solicitações internas, cujas formas explícitas são dadas por:

$$\{u\} = [u_i \quad w_i \quad \phi_i \quad u_j \quad w_j \quad \phi_j]^T = [u(0) \quad w(0) \quad \phi(0) \quad u(L) \quad w(L) \quad \phi(L)]^T$$

$$\{p\} = [N_i \quad V_i \quad M_i \quad N_j \quad V_j \quad M_j]^T = [N(0) \quad V(0) \quad M(0) \quad N(L) \quad V(L) \quad M(L)]^T$$

Onde os graus de liberdade no contorno estão indicados na Fig. 5.3a-b.

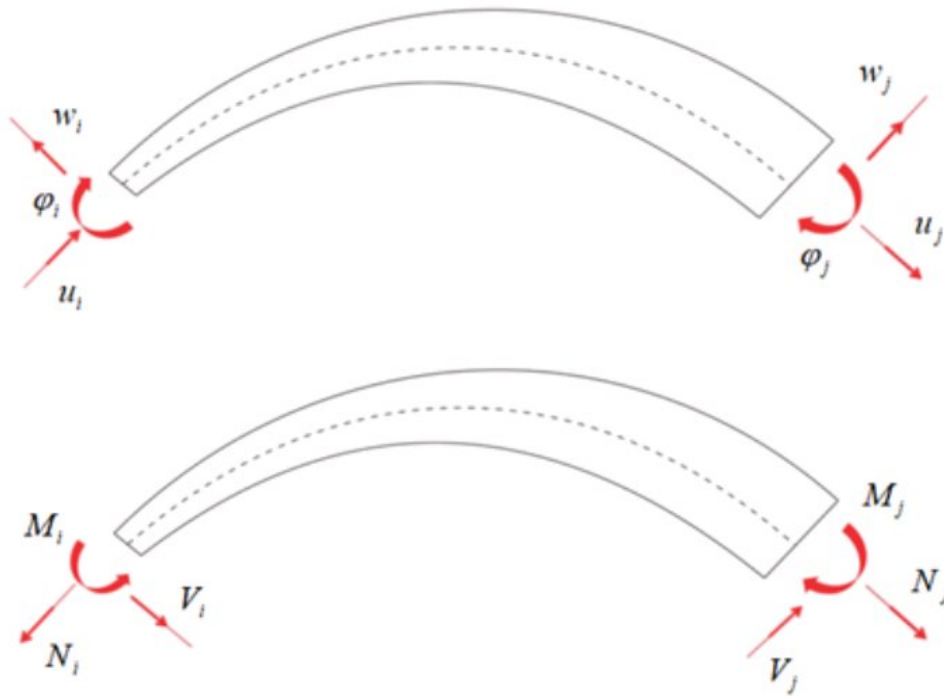


Figura 5.3a-b Graus de liberdade no contorno

Já  $[H]$ ,  $[G]$  são as matrizes de influência dadas por:

$$\begin{aligned}
 [\hat{H}] &= \begin{bmatrix} -N_F^*(0,0) & -V_F^*(0,0) & -M_F^*(0,0) & N_F^*(L,0) & V_F^*(L,0) & M_F^*(L,0) \\ -N_P^*(0,0) & -V_P^*(0,0) & -M_P^*(0,0) & N_P^*(L,0) & V_P^*(L,0) & M_P^*(L,0) \\ -N_m^*(0,0) & -V_m^*(0,0) & -M_m^*(0,0) & N_m^*(L,0) & V_m^*(L,0) & M_m^*(L,0) \\ -N_F^*(0,L) & -V_F^*(0,L) & -M_F^*(0,L) & N_F^*(L,L) & V_F^*(L,L) & M_F^*(L,L) \\ -N_P^*(0,L) & -V_P^*(0,L) & -M_P^*(0,L) & N_P^*(L,L) & V_P^*(L,L) & M_P^*(L,L) \\ -N_m^*(0,L) & -V_m^*(0,L) & -M_m^*(0,L) & N_m^*(L,L) & V_m^*(L,L) & M_m^*(L,L) \end{bmatrix} = \\
 &\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{L}{2R} & -\frac{L^2}{4R} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{L}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{L}{2R} & -\frac{L^2}{4R} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{L}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{5.80}$$



$$[G] = \begin{bmatrix} -u_F^*(0,0) & -w_F^*(0,0) & -\varphi_F^*(0,0) & u_F^*(L,0) & w_F^*(L,0) & \varphi_F^*(L,0) \\ -u_P^*(0,0) & -w_P^*(0,0) & -\varphi_P^*(0,0) & u_P^*(L,0) & w_P^*(L,0) & \varphi_P^*(L,0) \\ -u_m^*(0,0) & -w_m^*(0,0) & -\varphi_m^*(0,0) & u_m^*(L,0) & w_m^*(L,0) & \varphi_m^*(L,0) \\ -u_F^*(0,L) & -w_F^*(0,L) & -\varphi_F^*(0,L) & u_F^*(L,L) & w_F^*(L,L) & \varphi_F^*(L,L) \\ -u_P^*(0,L) & -w_P^*(0,L) & -\varphi_P^*(0,L) & u_P^*(L,L) & w_P^*(L,L) & \varphi_P^*(L,L) \\ -u_m^*(0,L) & -w_m^*(0,L) & -\varphi_m^*(0,L) & u_m^*(L,L) & w_m^*(L,L) & \varphi_m^*(L,L) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_7 & \beta_8 & \beta_9 \\ -\beta_{10} & -\beta_{11} & -\beta_{12} & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_{13} & -\beta_{14} & -\beta_{15} & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_{16} & -\beta_{17} & -\beta_{18} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.158)$$

Onde:

$$\beta_1 = -\frac{1}{2E} [\hat{F}(L) - \hat{F}(0)] + \frac{1}{2R^2\kappa G} [L(\hat{G}(L) + \hat{G}(0)) - 2(\hat{H}(L) - \hat{H}(0))] \\ - \frac{1}{4ER^2} [L^2(K(L) - K(0) - 6LW(L) - 6LW(0)) + 12(M(L) - M(0))]$$

$$\beta_2 = -\frac{1}{2\kappa GR} [L\hat{F}(L) - \hat{G}(L) + \hat{G}(0)] + \frac{1}{4ER} \{L^2H(L) - 2L(2K(L) + K(0)) + 6(W(L) - W(0))\}$$

$$\beta_3 = -\frac{1}{4ER} \{L^2G(L) - 2(LH(L) - K(L) + K(0))\}$$

$$\beta_4 = \frac{1}{2\kappa GR} [\hat{G}(L) - \hat{G}(0) - L\hat{F}(0)] - \frac{1}{2ER} \left[ L(2K(0) + K(L)) + 3(W(0) - W(L)) + \frac{L^2}{2}H(0) \right]$$

$$\beta_5 = -\frac{1}{2\kappa G} [\hat{F}(L) - \hat{F}(0)] + \frac{1}{2E} \{L(H(L) + H(0)) - 2(K(L) - K(0))\}$$

$$\beta_6 = -\frac{1}{2E} \{-(H(L) - H(0)) + LG(L)\}$$

$$\beta_7 = -\frac{1}{2ER} \left\{ K(L) - K(0) - LH(0) - \frac{L^2}{2}G(0) \right\}$$

$$\beta_8 = \frac{1}{2E} [H(L) - H(0) - LG(0)]$$

$$\beta_9 = -\frac{1}{2E}[G(L) - G(0)]$$

$$\beta_{10} = -\frac{1}{2E}[\hat{F}(L) - \hat{F}(0)] + \frac{1}{2\kappa GR^2}\left[L(\hat{G}(0) + \hat{G}(L)) + 2(\hat{H}(0) - \hat{H}(L))\right] \\ - \frac{1}{4ER^2}\left[-L^2(K(0) - K(L) - 6LW(L) - 6LW(0)) + 12[M(L) - M(0)]\right]$$

$$\beta_{11} = -\frac{1}{2\kappa GR}[\hat{L}\hat{F}(0) - \hat{G}(L) + \hat{G}(0)] + \frac{1}{4ER}\{L^2H(0) - 2L(2K(0) + K(L)) - 6(W(0) - W(L))\}$$

$$\beta_{12} = -\frac{1}{4RE}\{L^2G(0) - 2(LH(0) - K(L) + K(0))\}$$

$$\beta_{13} = \frac{1}{2\kappa GR}[\hat{G}(L) - \hat{G}(0) - L\hat{F}(L)] - \frac{1}{2ER}\left[L(2K(0) + K(L)) - 3(W(L) - W(0)) - \frac{L}{2}H(L)\right]$$

$$\beta_{14} = \frac{1}{2\kappa G}[\hat{F}(0) - \hat{F}(L)] + \frac{1}{2E}\{L(H(L) + H(0)) + 2(K(0) - K(L))\}$$

$$\beta_{15} = -\frac{1}{2E}\{-(H(L) - H(0)) + LG(0)\}$$

$$\beta_{16} = \frac{1}{2E}\left\{K(L) - K(0) - LH(L) + \frac{L^2}{2}G(L)\right\}$$

$$\beta_{17} = \frac{1}{2E}[H(L) - H(0) - LG(0)]$$

$$\beta_{18} = \frac{1}{2E}[G(0) - G(L)]$$

Já o vetor das cargas na Eq.(5.157) pode ser apresentado de uma forma genérica como:

$$\begin{Bmatrix} f_1(0) \\ f_2(0) \\ f_3(0) \\ f_1(L) \\ f_2(L) \\ f_3(L) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_0^L [p_x u_F^*(x, 0) + p_z w_F^*(x, 0) + m\varphi_F^*(x, 0)] dx \\ \int_0^L [p_x u_P^*(x, 0) + p_z w_P^*(x, 0) + m\varphi_P^*(x, 0)] dx \\ \int_0^L [p_x u_{P,\hat{x}}^*(x, 0) + p_z w_{P,\hat{x}}^*(x, 0) + m\varphi_m^*(x, 0)] dx \\ \int_0^L [p_x u_F^*(x, L) + p_z w_F^*(x, L) + m\varphi_F^*(x, L)] dx \\ \int_0^L [p_x u_P^*(x, L) + p_z w_P^*(x, L) + m\varphi_P^*(x, L)] dx \\ \int_0^L [p_x u_{P,\hat{x}}^*(x, L) + p_z w_{P,\hat{x}}^*(x, L) + m\varphi_m^*(x, L)] dx \end{Bmatrix} \quad (5.159)$$

Para o caso da distribuição constante da carga transversal ao longo da viga, o vetor de carga fica:

$$\begin{aligned}
 f_1(0) &= -\frac{px}{2\kappa G} \left\{ \hat{G}(L) - \hat{G}(0) - L\hat{F}(0) \right\} + \frac{pz}{2E} \left\{ -\left( S(L) - S(0) - LR(0) \right) - \frac{L^2}{4} T(0) \right\} \\
 f_2(0) &= -\frac{px}{2E} \left\{ LP(L) - 2V(L) + 2V(0) + LP(0) \right\} + \frac{pz}{2E} \left\{ LK(L) - 3L(L) + 3L(0) + Y(0) \frac{L^2}{2} + 2LK(0) \right\} \\
 f_3(0) &= -\frac{px}{2E} \left\{ P(L) - P(0) - LJ(0) \right\} - \frac{pz}{2E} \left\{ -\left( K(L) - K(0) + LY(0) \right) + LQ(0) + 2Y(0) \right\} \\
 f_1(L) &= -\frac{px}{2\kappa G} \left\{ \hat{G}(L) - \hat{G}(0) - L\hat{F}(L) \right\} + \frac{pz}{2E} \left\{ \left( S(L) - S(0) - LR(L) \right) - \frac{L^2}{4} T(L) \right\} \\
 f_2(L) &= -\frac{px}{2E} \left\{ -LP(0) + 2V(L) - 2V(0) - LP(L) \right\} - \frac{pz}{2E} \left\{ -LK(0) + 3L(L) - 3L(0) + Y(L) \frac{L^2}{2} - 2LK(L) \right\} \\
 f_3(L) &= -\frac{px}{2E} \left\{ P(L) - P(0) - LJ(L) \right\} - \frac{pz}{2E} \left\{ \left( K(L) - K(0) + LY(L) \right) + \frac{L^2}{2} Q(L) - 2LY(L) \right\}
 \end{aligned}$$

Para os carregamentos concentrados  $F_x$  e  $F_z$  aplicados a uma distância  $\bar{a}$  do início da barra, o vetor de carga no domínio fica:

$$\{f(a)\} = F_x \begin{Bmatrix} F11 + F12 + F13 \\ F21 + F22 \\ F31 \end{Bmatrix} + F_z \begin{Bmatrix} F41 + F42 \\ F51 \\ F61 \end{Bmatrix}$$

Onde:

$$\begin{aligned}
 F11 &= \frac{-ss}{2E} \left[ \hat{G}(\bar{a}) - \hat{G}(a) \right] \\
 F12 &= \frac{1}{2\kappa GR^2} \left\{ |\bar{a} - a| \left[ \hat{H}(\bar{a}) + \hat{H}(a) \right] + 2(ss) \left\| \hat{K}(a) - \hat{K}(\hat{a}) \right\| \right\} \\
 F13 &= -\frac{1}{4ER^2} \left\{ |\bar{a} - a|^2 \left[ K(a) - K(\bar{a}) \right] - 6|\bar{a} - a| \left[ W(\bar{a}) + W(a) \right] + 12(ss) \left[ M(\bar{a}) - M(a) \right] \right\} \\
 F21 &= \frac{1}{2\kappa GR} \left\{ (ss) \left[ \hat{H}(\bar{a}) - \hat{H}(a) \right] - |\bar{a} - a| \hat{G}(a) \right\} \\
 F22 &= -\frac{1}{2ER} \left\{ |\bar{a} - a| \left[ 2K(a) + K(\bar{a}) \right] + 3(ss) \left[ W(a) - W(\bar{a}) \right] + \frac{|\bar{a} - a|^2 (ss) H(a)}{2} \right\}
 \end{aligned}$$

$$F31 = -\frac{1}{2ER} \left\{ (ss) [K(a) - K(\bar{a})] - |\bar{a} - a| H(a) - \frac{|\bar{a} - a|^2 G(a)(ss)}{2} \right\}$$

$$F41 = \frac{1}{2\kappa GR^2} \left\{ |\bar{a} - a| \hat{G}(\bar{a}) + (ss) [\hat{H}(a) - \hat{H}(\bar{a})] \right\}$$

$$F42 = \frac{1}{4ER} \left\{ |\bar{a} - a|^2 (ss) \hat{H}(\bar{a}) - 2|\bar{a} - a| [2K(\bar{a}) + K(a)] + 6(ss) [W(\bar{a}) - W(a)] \right\}$$

$$F51 = -\frac{1}{2E} \left\{ (ss) [\hat{G}(\bar{a}) - \hat{G}(a)] + |\bar{a} - a| [H(\bar{a}) + H(a)] \right\}$$

$$F61 = -\frac{1}{2E} \left\{ (ss) [H(\bar{a}) - H(a)] - |\bar{a} - a| G(a) \right\}$$

## CAPÍTULO VI

# ARCOS ABATIDOS NÃO-PRISMÁTICOS COM VARIAÇÃO NÃO SIMÉTRICA

## 6.1 INTRODUÇÃO

Existem problemas que podem ser associados a casos de arcos abatidos não prismáticos com variação não simétrica ao longo do eixo longitudinal Fig. 6.1.



Figura 6.1 – Arco abatido não prismático com variação da altura não simétrica

Neste capítulo, o interesse é o desenvolvimento do MEC direto para arcos abatidos não prismáticos com variação não simétrica ao longo do eixo longitudinal. Tal qual o capítulo anterior, aqui são desenvolvidas as deduções das equações que regem o problema real, soluções fundamentais, equações integrais e algébricas para os arcos utilizando os modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko.

## 6.2 CONSIDERAÇÕES GERAIS

Para o desenvolvimento do problema real dos Arcos abatidos não prismáticos com variação da altura não simétrica, sob os modelos de Euler e Timoshenko, as hipóteses em relação a carregamentos, cinemática da seção transversal e campos de deslocamentos são as mesmas assumidas no capítulo cinco.

### 6.2.1 PROBLEMA REAL DO ARCO:EULER-BERLOULLI

Os deslocamentos, deformações do arco abatidos não simétrico são idênticos ao dos arcos simétricos, de forma que suas relações podem ser encontradas no capítulo 5.

Como o material é admitido elástico-linear com supressão do coeficiente de Poisson, a tensão axial pode ser obtida a partir da Eq. (5.4) resultando em:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E \frac{du(x)}{dx} + E \frac{w(x)}{R} - Ez \frac{d^2w(x)}{dx^2} \quad (6.1)$$

Os esforços são resultantes de tensões dados por:

$$N(x) = \int_A \sigma_x dA = EA_{11}(x) \left[ \frac{du(x)}{dx} + \frac{w(x)}{R} \right] - EB_{11}(x) \frac{d^2w(x)}{dx^2} \quad (6.2)$$

$$M(x) = \int_A \sigma_x z dA = EB_{11}(x) \left[ \frac{du(x)}{dx} + \frac{w(x)}{R} \right] - ED_{11}(x) \frac{d^2w}{dx^2} \quad (6.3)$$

Onde:

$$A_{11}(x) = \int_{-b\inf(x)}^{+b\sup(x)} \int_{-z\inf(x)}^{+z\sup(x)} dz dy \quad (6.4)$$

$$B_{11}(x) = \int_{-b\inf(x)}^{+b\sup(x)} \int_{-z\inf(x)}^{+z\sup(x)} z dz dy \quad (6.5)$$

$$D_{11}(x) = \int_{-b\inf(x)}^{+b\sup(x)} \int_{-z\inf(x)}^{+z\sup(x)} z^2 dz dy \quad (6.6)$$

Convém notar que o esforço cortante no modelo de Euler é dado por:

$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx} \quad (6.7)$$

As tensões axiais podem ainda serem expressas em função da força normal e do momento fletor, se as Eqs. (5.4), (6.2), (6.3) forem substituídas na Eq. (6.1), resultando em:

$$\sigma_x = N(x) \left( \frac{D_{11}(x)}{B_{11}^2(x) - A_{11}(x)D_{11}(x)} \right) + M(x) \left( \frac{A_{11}(x)}{B_{11}^2(x) - A_{11}(x)D_{11}(x)} \right) z \quad (6.8)$$

A obtenção da equação governante do problema real do arco abatido de Euler-Bernoulli pode ser feita pela condição estacionária do funcional de energia, desta forma tem-se:

$$\delta\pi = \int_v (\sigma_x \delta\epsilon_x) dV - \int_0^L (p_x \delta u + p_z \delta w) dx = 0 \quad (6.9)$$

Substituindo-se a Eq. (5.4), (6.8) na Eq.(6.9), seguida da integração na área transversal, fica:

$$\begin{aligned} \delta\pi = & \int_v \left( \left( N(x) \left( \frac{D_{11}(x)}{B_{11}^2(x) - A_{11}(x)D_{11}(x)} \right) \right) z E \left[ \frac{d\delta u(x)}{dx} + \frac{\delta w(x)}{R} - z \frac{d^2 \delta w(x)}{dx^2} \right] \right) dV \\ & + \int_v \left( \left( M(x) \left( \frac{A_{11}(x)}{B_{11}^2(x) - A_{11}(x)D_{11}(x)} \right) \right) z E \left[ \frac{d\delta u(x)}{dx} + \frac{\delta w(x)}{R} - z \frac{d^2 \delta w(x)}{dx^2} \right] \right) dV \\ & - \int_0^L (p_x \delta u + p_z \delta w) dx = 0 \end{aligned} \quad (6.10)$$

Da integração na área transversal, a Eq. (6.10) fica:

$$\delta\pi = \int_0^L \left( N(x) \left[ \frac{d\delta u(x)}{dx} + \frac{\delta w(x)}{R} - z \frac{d^2 \delta w(x)}{dx^2} \right] - M(x) \frac{d^2 \delta w(x)}{dx^2} \right) dx - \int_0^L (p_x \delta u + p_z \delta w) dx = 0 \quad (6.11)$$

Fazendo as integrações por partes na Eq. (6.12), tem-se:

$$\begin{aligned} \delta\pi = & \int_0^L \left( \left( -\frac{dN(x)}{dx} - p_x \right) \delta u + \left( -\left( \frac{dV(x)}{dx} \right) + \frac{N(x)}{R} - p_z \right) \delta w \right) dx + \\ & + \int_0^L \left( -\left( \frac{dM(x)}{dx} - (V(x) + m) \right) \delta \left( \frac{dw}{dx}(x) \right) + [N(x)\delta u]_0^L + \left[ M(x)\delta \frac{dw}{dx} \right]_0^L + [V(x)\delta w]_0^L \right) dx = 0 \end{aligned} \quad (6.12)$$

Como a variação dos campos no contorno é nula,  $\left[ \delta \frac{dw(x)}{dx} \right]_0^L = [\delta w(x)]_0^L = 0$ , a

Eq. (6.12) fica:

$$\int_0^L \left( \left( -\frac{dN(x)}{dx} - p_x \right) \delta u + \left( -\frac{d^2 M(x)}{dx^2} + \frac{N(x)}{R} - p_z \right) \delta w \right) dx = 0 \quad (6.13)$$

Como as variações  $\delta u$  e  $\delta w$  podem assumir diferentes valores durante o mapeamento das funções  $u, w$ , para garantir a condição de nulidade da Eq. (6.13) para todo o domínio, é necessário que:

$$\frac{dN(x)}{dx} + p_x = 0 \quad (6.14)$$

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} - \frac{N(x)}{R} + p_z = 0 \quad (6.15)$$

Substituindo-se a Eq. (6.2) na Eq. (6.14) e a Eq. (6.3) na Eq. (6.15), as equações de equilíbrio em termos dos deslocamentos ficam:

$$\frac{d}{dx} \left\{ A_{11}(x) E \left[ \frac{du(x)}{dx} + \frac{w(x)}{R} \right] - B_{11}(x) E \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right\} + p_x(x) = 0 \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dx^2} \left\{ E B_{11}(x) \left[ \frac{du(x)}{dx} + \frac{w(x)}{R} \right] - E D_{11}(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right\} + \\ & - \frac{A_{11}(x) E}{R} \left[ \frac{du(x)}{dx} + \frac{w(x)}{R} \right] - \frac{B_{11}(x) E}{R} \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + p_z = 0 \end{aligned} \quad (6.17)$$

### 6.3 PROBLEMA FUNDAMENTAL DO ARCO: EULER-BERNOULLI

O problema fundamental para teoria de arco abatido de Euler-Bernoulli quando associado ao MEC direto é governado por relações análogas aplicadas ao problema real. Assim, quando a fonte ativada for a axial  $p_x^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$ , então as equações governantes fundamentais são análogas a Eqs.(6.14) e (6.15):



$$\frac{dN_F^*(x, \hat{x})}{dx} + \delta(x, \hat{x}) = 0 \quad (6.18)$$

$$\frac{d^2 M_F^*(x)}{dx^2} - \frac{N_F^*(x)}{R} = 0 \quad (6.19)$$

Ou em função dos deslocamentos analogamente às Eqs. (6.16-17), as equações governantes ficam:

$$\frac{d}{dx} \left\{ A_{11}(x) E \left[ \frac{du_F^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_F^*(x, \hat{x})}{R} \right] - B_{11}(x) E \frac{d^2 w_F^*(x, \hat{x})}{dx^2} \right\} + \delta(x, \hat{x}) = 0 \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left\{ -ED_{11}(x) \frac{d^2 w_F^*(x, \hat{x})}{dx^2} + EB_{11}(x) \left[ \frac{du_F^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_F^*(x, \hat{x})}{R} \right] \right\} \\ - \frac{A_{11}(x) E}{R} \left[ \frac{du_F^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_F^*(x, \hat{x})}{R} \right] - B_{11}(x) E \frac{d^2 w_F^*(x, \hat{x})}{dx^2} = 0 \end{aligned} \quad (6.21)$$

Substituindo-se a Eq. (6.20) na Eq. (6.21), obtém-se:

$$\frac{d^2}{dx^2} E \left\{ -D_{11}(x) \frac{d^2 w_F^*(x, \hat{x})}{dx^2} + B_{11}(x) \left[ \frac{du_F^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_F^*(x, \hat{x})}{R} \right] \right\} = \frac{-\text{sgn}(x, \hat{x})}{2R} \quad (6.22)$$

Após dupla integração da Eq. (6.22), obtém-se:

$$-D_{11}(x) E \frac{d^2 w_F^*(x, \hat{x})}{dx^2} + B_{11}(x) E \left[ \frac{du_F^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_F^*(x, \hat{x})}{R} \right] = \frac{-\text{sgn}(x, \hat{x}) r^2}{4R} \quad (6.23)$$

Reunindo as Eqs. (6.20), (6.23), obtém-se:

$$A_{11}(x) \left[ \frac{du_F^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_F^*(x, \hat{x})}{R} \right] - B_{11}(x) \frac{d^2 w_F^*(x, \hat{x})}{dx^2} = \frac{-\text{sgn}(x, \hat{x})}{2E} \quad (6.24)$$

$$-D_{11}(x) \frac{d^2 w_F^*(x, \hat{x})}{dx^2} + B_{11}(x) \left[ \frac{du_F^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_F^*(x, \hat{x})}{R} \right] = \frac{-\text{sgn}(x, \hat{x}) r^2}{4ER} \quad (6.25)$$

Da subtração da Eq. (6.24) da Eq. (6.25) obtém-se:

$$\left( \frac{-D_{11}(x)}{B_{11}(x)} + \frac{B_{11}(x)}{A_{11}(x)} \right) \frac{d^2 w_F^*(x, \hat{x})}{dx^2} = \frac{-\text{sgn}(x - \hat{x}) r^2}{2ERB_{11}(x)} + \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2EA_{11}(x)} \quad (6.26)$$

Ou ainda na forma:

$$\frac{d^2 w_F^*(x, \hat{x})}{dx^2} = \frac{A_{11}(x)B_{11}(x)}{B_{11}(x)^2 - A_{11}(x)D_{11}(x)} \left( \frac{-\text{sgn}(x - \hat{x})r^2}{2ERB_{11}(x)} + \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2EA_{11}(x)} \right) \quad (6.27)$$

Com o intuito de simplificação dos cálculos para obtenção da inclinação da elástica e demais soluções fundamentais, reescreve-se a Eq.(6.27) como:

$$\frac{d^2 w_F^*(x, \hat{x})}{dx^2} = \frac{-\text{sgn}(x - \hat{x})}{2E} \left( \frac{1}{B(x)} + \frac{r^2}{2RC(x)} \right) \quad (6.28)$$

Onde:

$$\frac{1}{B(x)} = \frac{-B_{11}(x)}{B_{11}^2(x) - A_{11}(x)D_{11}(x)} \quad (6.29)$$

$$\frac{1}{C(x)} = \frac{A_{11}(x)}{B_{11}^2(x) - A_{11}(x)D_{11}(x)} \quad (6.30)$$

Para o auxílio no cálculo das soluções fundamentais, são apresentadas algumas identidades. As identidades de interesse são:

$$\text{sgn}(x - \hat{x})[G(x) - G(\hat{x})] = \int [\text{sgn}(x - \hat{x})F(x)]dx \quad (6.31)$$

$$rG(x) - \text{sgn}(x - \hat{x})[H(x) - H(\hat{x})] = \int [rF(x)]dx \quad (6.32)$$

$$r^2 \text{sgn}(x - \hat{x})G(x) - 2[r[H(x) - H(\hat{x})] - \text{sgn}(x - \hat{x})[K(x) - K(\hat{x})] + rH(\hat{x})] = \int [r^2 \text{sgn}(x - \hat{x})F(x)]dx \quad (6.33)$$

Utilizando-se as identidades Eqs. (6.32), (6.33) na Eq. (6.28), obtém-se a equação da inclinação da elástica devido a ativação da carga axial, que fica:

$$\begin{aligned} \frac{dw_F^*(x, \hat{x})}{dx} = & \frac{1}{4ER} \left[ r^2 \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) Q(x) - 2 \left[ rY(x) - \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) [K(x) - K(\hat{x})] \right] \right] \\ & - \frac{\operatorname{sgn}(x - \hat{x}) [T(x) - T(\hat{x})]}{2E} \end{aligned} \quad (6.34)$$

Já, os deslocamentos transversais resultam da integração da Eq. (6.26), que fica:

$$\begin{aligned} w_F^*(x, \hat{x}) = & \frac{1}{2RE} \left[ 2rK(x) + rK(\hat{x}) - 3 \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) (L(x) - L(\hat{x})) - \frac{r^2}{2} \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) Y(x) \right] \\ & - \left[ \frac{\operatorname{sgn}(x - \hat{x}) (R(x) - R(\hat{x})) - rT(\hat{x})}{2} \right] \end{aligned} \quad (6.35)$$

Afim de se obter os deslocamentos axiais devido ativação carga axial,

inicialmente, isola-se os termos  $\left[ \frac{du_F^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_F^*(x, \hat{x})}{R} \right]$  e subtraindo-se nas Eqs.(6.25)

da Eq. (6.24), que ficam:

$$\frac{du_F^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_F^*(x, \hat{x})}{R} = \left( \frac{\operatorname{sgn}(x, \hat{x})}{2EA(x)} + \frac{\operatorname{sgn}(x, \hat{x}) r^2}{4ERB(x)} \right) \quad (6.36)$$

Onde:

$$\frac{1}{A(x)} = \frac{D_{11}(x)}{A_{11}(x)D_{11}(x) - B_{11}^2(x)} \quad (6.37)$$

$$\frac{du_F^*(x, \hat{x})}{dx} = \left( \frac{\operatorname{sgn}(x, \hat{x})}{2EA(x)} + \frac{\operatorname{sgn}(x, \hat{x}) r^2}{4ERB(x)} \right) - \frac{w_F^*(x, \hat{x})}{R} \quad (6.38)$$

Integrando-se a Eq. (6.38) com o auxílio das identidades Eqs. (6.32), (6.33), obtém-se:

$$\begin{aligned}
u_F^*(x, \hat{x}) = & -\frac{\text{sgn}(x - \hat{x}) [\hat{F}(x) - \hat{F}(\hat{x})]}{2E} - \frac{r^2 \text{sgn}(x - \hat{x}) T(x) - 2 [rR(x) - \text{sgn}(x - \hat{x}) [S(x) - S(\hat{x})]]}{4ER} \\
& - \frac{1}{2ER^2} \left[ 3r(L(x) + L(\hat{x})) - 6\text{sgn}(x - \hat{x}) (M(x) - M(\hat{x})) - \frac{r^2 \text{sgn}(x - \hat{x}) [K(x) - K(\hat{x})]}{2} \right] \\
& + \frac{1}{2ER} \left[ \text{sgn}(x - \hat{x}) (S(x) - S(\hat{x})) - rR(\hat{x}) - \frac{r^2}{2} T(\hat{x}) \right]
\end{aligned}
\tag{6.39}$$

Onde:

$$\begin{aligned}
\hat{F}(x) &= \int \frac{1}{A(x)} dx \\
\hat{G}(x) &= \int \hat{F}(x) dx \\
T(x) &= \int \frac{1}{B(x)} dx \\
R(x) &= \int T(x) dx \\
S(x) &= \int R(x) dx \\
Q(x) &= \int \frac{1}{C(x)} dx \\
Y(x) &= \int Q(x) dx \\
K(x) &= \int Y(x) dx \\
L(x) &= \int K(x) dx \\
M(x) &= \int L(x) dx
\end{aligned}
\tag{6.40-49}$$

No caso da determinação das relações esforços-deslocamentos fundamentais resultantes da ativação da carga axial, as seguintes relações devem ser usadas:

$$\begin{aligned}
N_F^*(x, \hat{x}) &= A_{11}(x) E \left[ \frac{du_F^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_F^*(x, \hat{x})}{R} \right] - B_{11}(x) E \frac{d^2 w_F^*(x, \hat{x})}{dx^2} \\
&= -\frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2}
\end{aligned}
\tag{6.50}$$

$$M_F^*(x, \hat{x}) = B_{11}(x)E \left[ \frac{du_F^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_F^*(x, \hat{x})}{R} \right] - D_{11}(x)E \frac{d^2 w_F^*(x, \hat{x})}{dx^2} \quad (6.51)$$

$$= -\frac{r^2 \operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{4R}$$

$$V_F^*(x, \hat{x}) = \frac{dM_F^*(x, \hat{x})}{dx} = -\frac{r}{2R} \quad (6.52)$$

Por outro lado, se a ativação for alterada para  $p_z^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$ , logo,  $p_x^*(x, \hat{x}) = 0$ , as equações governantes do problema fundamental, análogas a Eqs. (6.14) e (6.15), ficam:

$$\frac{dN_p^*(x, \hat{x})}{dx} = 0 \quad (6.53)$$

$$\frac{d^2 M_{yp}^*(x)}{dx^2} - \frac{N_p^*(x)}{R} + \delta(x, \hat{x}) = 0 \quad (6.54)$$

Ou em função dos deslocamentos, por analogia às equações:

$$\frac{d}{dx} E \left\{ A_{11}(x) \left[ \frac{du_p^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_p^*(x, \hat{x})}{R} \right] - B_{11}(x) \frac{d^2 w_p^*(x, \hat{x})}{dx^2} \right\} = 0 \quad (6.55)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dx^2} E \left\{ -D_{11}(x) \frac{d^2 w_p^*(x, \hat{x})}{dx^2} + B_{11}(x) \left[ \frac{du_p^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_p^*(x, \hat{x})}{R} \right] \right\} \\ & - \frac{A_{11}(x)E}{R} \left[ \frac{du_p^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_p^*(x, \hat{x})}{R} \right] - B_{11}(x)E \frac{d^2 w_p^*(x, \hat{x})}{dx^2} + \delta(x, \hat{x}) = 0 \end{aligned} \quad (6.56)$$

Simplificando-se as Eqs. (6.55) e (6.56), tem-se:

$$\frac{-B_{11}(x)}{A_{11}(x)} \frac{d^2 w_p^*(x, \hat{x})}{dx^2} + \left( \frac{du_p^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_p^*(x, \hat{x})}{R} \right) = 0 \quad (6.57)$$

$$\frac{-D_{11}(x)}{B_{11}(x)} \frac{d^2 w_p^*(x, \hat{x})}{dx^2} + \left( \frac{du_p^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_p^*(x, \hat{x})}{R} \right) = \frac{-r}{2EB_{11}(x)} \quad (6.58)$$

Subtraindo-se a Eq. (6.57) da Eq. (6.58), tem-se:

$$\left( \frac{-D_{11}(x)}{B_{11}(x)} + \frac{B_{11}(x)}{A_{11}(x)} \right) \frac{d^2 w_p^*(x, \hat{x})}{dx^2} = \frac{-r}{2EB_{11}(x)} \quad (6.59)$$

Ou ainda de forma simplificada a Eq. (6.59), fica:

$$\frac{d^2 w_p^*(x, \hat{x})}{dx^2} = \frac{-r}{2EC(x)} \quad (6.60)$$

Da integração da Eq. (6.60) com auxílio da identidade Eq. (6.31), obtém-se a equação da elástica devido a ativação da carga transversal, que fica:

$$\frac{dw_p^*(x, \hat{x})}{dx} = \frac{-1}{2E} \left[ rQ(x) - \text{sgn}(x - \hat{x}) [Y(x) - Y(\hat{x})] \right] \quad (6.61)$$

Já a equação do deslocamento transversal devido ativação da carga transversal é obtida, integrando-se a Eq. (6.61), que fica:

$$w_p^*(x, \hat{x}) = \frac{-1}{2E} \left[ rY(x) + rY(\hat{x}) - 2\text{sgn}(x - \hat{x}) [K(x) - K(\hat{x})] \right] \quad (6.62)$$

Determinando o  $w_p^*(x, \hat{x})$ , pode-se partir para a solução de  $u_p^*(x, \hat{x})$ . Da Eq. (6.57), tem-se:

$$\frac{du_p^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_p^*(x, \hat{x})}{R} = \frac{r}{-2E} \frac{B_{11}(x)}{(B_{11}^2(x) - D_{11}(x)A_{11}(x))} \quad (6.63)$$

Simplificando-se a Eq. (6.63), esta pode ser reescrita ainda como:

$$\frac{du_p^*(x, \hat{x})}{dx} = \frac{r}{2EB_{11}(x)} - \frac{w_p^*(x, \hat{x})}{R} \quad (6.64)$$

Da integração da Eq. (6.64), com o auxílio das identidades Eqs. (6.32), (6.33), tem-se:

$$\begin{aligned}
u_p^*(x, \hat{x}) = & \frac{1}{2E} \left[ rT(x) - \text{sgn}(x - \hat{x}) (R(x) - R(\hat{x})) \right] \\
& + \frac{1}{2ER} \left[ rK(x) + 2rK(\hat{x}) - 3\text{sgn}(x - \hat{x}) (L(x) - L(\hat{x})) + \frac{r^2}{2} \text{sgn}(x - \hat{x}) Y(\hat{x}) \right]
\end{aligned} \tag{6.65}$$

Agora, para determinação das relações esforços-deslocamentos fundamentais resultantes da ativação da carga transversal, as seguintes relações devem ser usadas:

$$\begin{aligned}
N_p^*(x, \hat{x}) = & A_{11}(x)E \left[ \frac{du_p^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_p^*(x, \hat{x})}{R} \right] - B_{11}(x)E \frac{d^2 w_p^*(x, \hat{x})}{dx^2} = 0 \\
M_p^*(x, \hat{x}) = & B_{11}(x)E \left[ \frac{du_p^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_p^*(x, \hat{x})}{R} \right] - D_{11}(x)E \frac{d^2 w_p^*(x, \hat{x})}{dx^2} = -\frac{r}{2} \\
V_p^*(x, \hat{x}) = & \frac{dM_p^*(x, \hat{x})}{dx} = -\frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2}
\end{aligned} \tag{6.66-68}$$

Com isso, são calculadas soluções fundamentais adicionais, compostas pela derivada do deslocamento axial, transversal e inclinação da elástica em relação ao ponto fonte. Derivando-se as Eqs. (6.61), (6.62), (6.65), tem-se:

$$\begin{aligned}
u_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = & -\frac{\text{sgn}(x - \hat{x}) [T(\hat{x}) - T(x)]}{2E} \\
& + \frac{1}{2ER} \left[ -\text{sgn}(x - \hat{x}) [K(\hat{x}) - K(x)] + rH(\hat{x}) + \frac{\text{sgn}(x - \hat{x}) r^2 Q(\hat{x})}{2} \right]
\end{aligned} \tag{6.69}$$

$$w_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = \frac{\text{sgn}(x - \hat{x}) [Y(x) - Y(\hat{x})]}{2E} - \frac{rQ(\hat{x})}{2E} \tag{6.70}$$

$$\frac{dw_{p,\hat{x}}^*}{dx} = \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2E} [Q(x) - Q(\hat{x})] \tag{6.71}$$

Já, a determinação das relações esforços-deslocamentos fundamentais em relação as derivadas no ponto fonte são obtidas a partir da derivação das Eqs. (6.66-68) em relação ao ponto forte, assim:

$$N_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = 0$$

$$M_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2}$$

$$V_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x}) \quad (6.72-74)$$

#### 6.4 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL

Conforme já discutido nos capítulos anteriores, equações integrais a serem utilizadas no MEC podem ser obtidas via Resíduos Ponderados. Se for ativada a carga axial  $p_x^* = \delta(x, \hat{x})$  no problema fundamental, as equações governantes do problema real (6.18-20) serão ponderadas pelas soluções fundamentais,  $(u_F^*(x, \hat{x}), w_F^*(x, \hat{x}))$ , resultando em:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left[ \frac{d}{dx} E \left\{ A_{11}(x) \left[ \frac{du(x)}{dx} + \frac{w(x)}{R} \right] - B_{11}(x) \frac{d^2 w_F^*(x, \hat{x})}{dx^2} \right\} + p_z \right] u_F^* dx \\ & + \int_0^L \left\{ \frac{d^2}{dx^2} E \left[ B_{11}(x) \left[ \frac{du(x)}{dx} + \frac{w(x)}{R} \right] - D_{11}(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right] \right\} w_F^* dx \\ & + \int_0^L \left\{ -\frac{A_{11}(x)}{R} E \left[ \frac{du(x)}{dx} + \frac{w(x)}{R} \right] - \frac{B_{11}(x)}{R} E \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + p_z \right\} w_F^* dx = 0 \end{aligned} \quad (6.75)$$

Procedendo-se analogamente ao discutido com a Eq. (4.81), uma relação associada à Eq. (6.75) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} & \left[ N(x) u_F^*(x, \hat{x}) \right]_0^L + \left[ V(x) w_F^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[ M(x) \frac{dw_F^*(x, \hat{x})}{dx} \right]_0^L - \left[ N_F^*(x, \hat{x}) u(x) \right]_0^L + \\ & \left[ M_F^*(x, \hat{x}) \frac{dw}{dx}(x) \right]_0^L - \left[ V_F^*(x, \hat{x}) w(x) \right]_0^L + \int_0^L \left[ \frac{dN_F^*(x, \hat{x})}{dx} u(x) + \left\{ \frac{d^2 M_F^*(x, \hat{x})}{dx^2} - \frac{N_F^*(x, \hat{x})}{R} \right\} w(x) \right] dx \\ & + \int_0^L [p_x(x) u_F^*(x, \hat{x}) + p_z(x) w_F^*(x, \hat{x})] dx = 0 \end{aligned} \quad (6.76)$$

Utilizando-se as Eqs. (6.18-19) na Eq. (6.76), seguida da aplicação da propriedade de translação do delta de Dirac, a equação integral para o deslocamento axial fica:



$$\begin{aligned}
& u(\hat{x}) + \left[ N_F^*(x, \hat{x}) u(x) \right]_0^L + \left[ V_F^*(x, \hat{x}) w(x) \right]_0^L - \left[ M_F^*(x, \hat{x}) \frac{dw(x)}{dx} \right]_0^L = \\
& \left[ u_F^*(x, \hat{x}) N(x) \right]_0^L + \left[ w_F^*(x, \hat{x}) V(x) \right]_0^L - \left[ M(x) \frac{dw_F^*(x, \hat{x})}{dx} \right]_0^L \\
& + \int_0^L \left[ p_x u_F^*(x, \hat{x}) + p_z w_F^*(x, \hat{x}) \right] dx
\end{aligned} \tag{6.77}$$

Por outro lado, ativando a função puntual  $p_z^* = \delta(x, \hat{x})$ , a ponderação das Eqs.(6.18-20) fica:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \left[ \frac{d}{dx} E \{ A_{11}(x) \left[ \frac{du(x)}{dx} + \frac{w(x)}{R} \right] - B_{11}(x) \frac{d^2 w_F^*(x, \hat{x})}{dx^2} \} + p_z \right] u_p^* dx + \\
& \int_0^L \left\{ \frac{d^2}{dx^2} E [ B_{11}(x) \left[ \frac{du(x)}{dx} + \frac{w(x)}{R} \right] - D_{11}(x) \frac{d^2 w}{dx^2} ] \right\} w_p^* dx + \\
& \int_0^L \left\{ - \frac{A_{11}(x) E}{R} \left[ \frac{du(x)}{dx} + \frac{w(x)}{R} \right] - \frac{B_{11}(x) E}{R} \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + p_z \right\} w_p^* dx = 0
\end{aligned} \tag{6.78}$$

Que por sua vez, analogamente a Eq. (6.22), a Eq. (6.25) pode ser desdobrada em:

$$\begin{aligned}
& \left[ N(x) u_p^*(x, \hat{x}) \right]_0^L + \left[ V(x) w_p^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[ M(x) \frac{dw_p^*(x, \hat{x})}{dx} \right]_0^L - \left[ N_p^*(x, \hat{x}) u(x) \right]_0^L + \\
& \left[ M_p^*(x, \hat{x}) \frac{dw}{dx}(x) \right]_0^L - \left[ V_p^*(x, \hat{x}) w(x) \right]_0^L + \int_0^L \left[ \frac{dN_p^*(x, \hat{x})}{dx} u(x) + \left\{ \frac{d^2 M_p^*(x, \hat{x})}{dx^2} - \frac{N_p^*(x, \hat{x})}{R} \right\} w(x) \right] dx \\
& + \int_0^L \left[ p_x(x) u_p^*(x, \hat{x}) + p_z(x) w_p^*(x, \hat{x}) \right] dx = 0
\end{aligned} \tag{6.79}$$

Com o auxílio das equações governantes do problema fundamental nas Eqs. (6.53-54) e das propriedades do delta de Dirac, a equação integral dos deslocamentos transversais fica:

$$\begin{aligned}
& w(\hat{x}) + \left[ N_p^*(x, \hat{x}) u(x) \right]_0^L + \left[ V_p^*(x, \hat{x}) w(x) \right]_0^L - \left[ M_p^*(x, \hat{x}) \frac{dw(x)}{dx} \right]_0^L = \\
& \left[ u_p^*(x, \hat{x}) N(x) \right]_0^L + \left[ w_p^*(x, \hat{x}) V(x) \right]_0^L - \left[ M(x) \frac{dw_p^*(x, \hat{x})}{dx} \right]_0^L \\
& + \int_0^L \left[ p_x u_p^*(x, \hat{x}) + p_z w_p^*(x, \hat{x}) \right] dx
\end{aligned} \tag{6.80}$$

A teoria de Euler no arco possui três incógnitas no contorno. No entanto, apenas duas equações integrais foram deduzidas até aqui. Assim requer uma equação integral complementar para viabilizar a solução do problema. Esta equação adicional é a inclinação da elástica que pode ser determinada derivando em função do ponto-fonte a Eq. (6.79), ficando então:

$$\begin{aligned}
& \frac{dw(\hat{x})}{d\hat{x}} + \left[ N_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) u(x) \right]_0^L + \left[ V_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) w(x) \right]_0^L - \left[ M_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) \frac{dw(x)}{dx} \right]_0^L = \\
& \left[ u_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) N(x) \right]_0^L + \left[ w_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) V(x) \right]_0^L - \left[ M(x) \frac{dw_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x})}{dx} \right]_0^L \\
& + \int_0^L \left[ p_x u_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) + p_z w_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) \right] dx
\end{aligned} \tag{6.81}$$

## 6.5 REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA

Semelhante a obtenção das equações algébricas feita no capítulo cinco, aqui a dedução destas é efetuada a partir da colocação dos pontos fontes no contorno, isto é,  $\hat{x} = 0 + \zeta$  e  $\hat{x} = L - \zeta$  com  $\zeta \rightarrow 0$ . Assim:

$$\{u\} + [H]\{u\} = [G]\{p\} + \{f\} \tag{6.82}$$

Onde  $\{u\}$  e  $\{p\}$  são os vetores de deslocamentos e solicitações internas, cujas formas explícitas são dadas por:

$$\{u\} = \begin{bmatrix} u_i & w_i & \frac{dw_i}{dx} & u_j & w_j & \frac{dw_j}{dx} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} u(0) & w(0) & \frac{dw(0)}{dx} & u(L) & w(L) & \frac{dw(L)}{dx} \end{bmatrix}^T$$

$$\{p\} = [N_i \quad V_i \quad M_i \quad N_j \quad V_j \quad M_j]^T = [N(0) \quad V(0) \quad M(0) \quad N(L) \quad V(L) \quad M(L)]^T$$

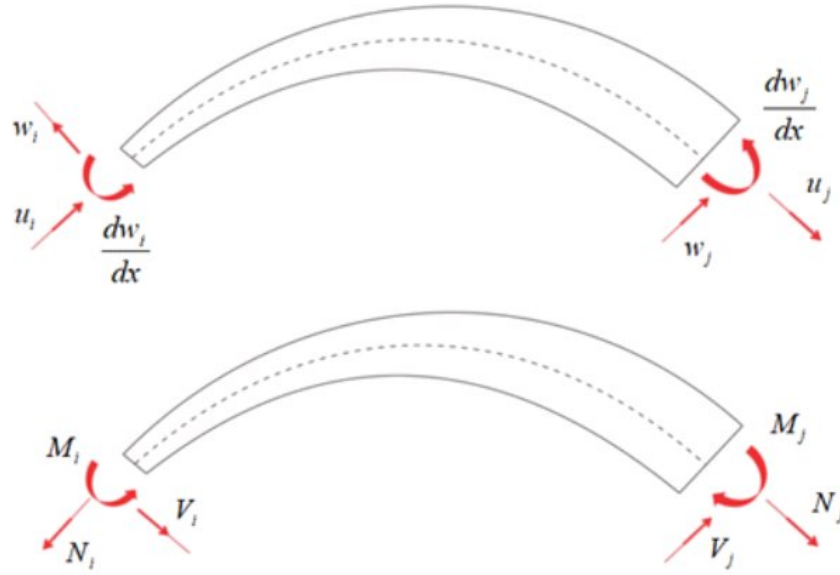


Fig. 6.2 Graus de Liberdade no contorno

Na Eq.(6.82), as matrizes de influencia  $[H]$ ,  $[G]$  são dadas por

$$[H] = \begin{bmatrix} -N_F^*(0,0) & -V_F^*(0,0) & M_F^*(0,0) & N_F^*(L,0) & V_F^*(L,0) & -M_F^*(L,0) \\ -N_P^*(0,0) & -V_P^*(0,0) & M_P^*(0,0) & N_P^*(L,0) & V_P^*(L,0) & -M_P^*(L,0) \\ -N_{P,\hat{x}}^*(0,0) & -V_{P,\hat{x}}^*(0,0) & M_{P,\hat{x}}^*(0,0) & N_{P,\hat{x}}^*(L,0) & V_{P,\hat{x}}^*(L,0) & -M_{P,\hat{x}}^*(L,0) \\ -N_F^*(0,L) & -V_F^*(0,L) & M_F^*(0,L) & N_F^*(L,L) & V_F^*(L,L) & -M_F^*(L,L) \\ -N_P^*(0,L) & -V_P^*(0,L) & M_P^*(0,L) & N_P^*(L,L) & V_P^*(L,L) & -M_P^*(L,L) \\ -N_{P,\hat{x}}^*(0,L) & -V_{P,\hat{x}}^*(0,L) & M_{P,\hat{x}}^*(0,L) & N_{P,\hat{x}}^*(L,L) & V_{P,\hat{x}}^*(L,L) & -M_{P,\hat{x}}^*(L,L) \end{bmatrix}$$

$$[H] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{L}{2R} & \frac{L^2}{4R} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{L}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{L}{2R} & \frac{L^2}{4R} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{L}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (6.83)$$

$$\begin{aligned}
[G] &= \begin{bmatrix} -u_F^*(0,0) & -w_F^*(0,0) & \frac{dw_F^*(0,0)}{dx} & u_F^*(L,0) & w_F^*(L,0) & -\frac{dw_F^*(L,0)}{dx} \\ -u_P^*(0,0) & -w_P^*(0,0) & \frac{dw_P^*(0,0)}{dx} & u_P^*(L,0) & w_P^*(L,0) & -\frac{dw_P^*(L,0)}{dx} \\ -u_{P,\hat{x}}^*(0,0) & -w_{P,\hat{x}}^*(0,0) & \frac{dw_{P,\hat{x}}^*(0,0)}{dx} & u_{P,\hat{x}}^*(L,0) & w_{P,\hat{x}}^*(L,0) & -\frac{dw_{P,\hat{x}}^*(L,0)}{dx} \\ -u_F^*(0,L) & -w_F^*(0,L) & \frac{dw_F^*(0,L)}{dx} & u_F^*(L,L) & w_F^*(L,L) & -\frac{dw_F^*(L,L)}{dx} \\ -u_P^*(0,L) & -w_P^*(0,L) & \frac{dw_P^*(0,L)}{dx} & u_P^*(L,L) & w_P^*(L,L) & -\frac{dw_P^*(L,L)}{dx} \\ -u_{P,\hat{x}}^*(0,L) & -w_{P,\hat{x}}^*(0,L) & \frac{dw_{P,\hat{x}}^*(0,L)}{dx} & u_{P,\hat{x}}^*(L,L) & w_{P,\hat{x}}^*(L,L) & -\frac{dw_{P,\hat{x}}^*(L,L)}{dx} \end{bmatrix} \\
[G] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \beta_1 & \beta_2 & -\beta_3 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_4 & \beta_5 & -\beta_6 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_7 & \beta_8 & -\beta_9 \\ -\beta_{10} & -\beta_{11} & \beta_{12} & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_{13} & -\beta_{14} & \beta_{15} & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_{16} & -\beta_{17} & \beta_{18} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.84}
\end{aligned}$$

Onde:

$$\beta_1 = -\frac{1}{2E} [\hat{F}(L) - \hat{F}(0)] - \frac{1}{4ER^2} [L^2 K(L) - 6LW(L) - 6LW(0) - L^2 K(0) + 12[M(L) - M(0)]]$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2ER} \{L^2 H(L) - 4LK(L) - 2LK(0) + 6(W(L) - W(0))\}$$

$$\beta_3 = \frac{1}{4ER} \{L^2 G(L) - 2(LH(L) - K(L) + K(0))\}$$

$$\beta_4 = -\frac{1}{2ER} \left[ L(2K(0) + K(L)) + 3(W(0) - W(L)) + \frac{L^2}{2} H(0) \right]$$

$$\beta_5 = \frac{1}{2E} \{L(H(L) + H(0)) - 2(K(L) - K(0))\}$$

$$\beta_6 = \frac{1}{2E} \{-(H(L) - H(0)) + LG(L)\}$$

$$\beta_7 = -\frac{1}{2ER} \left\{ K(0) - K(L) + LH(0) + \frac{L^2}{2} G(0) \right\}$$

$$\beta_8 = \frac{1}{2E} [H(0) - H(L) + LG(0)]$$

$$\beta_9 = \frac{1}{2E} [-G(L) + G(0)]$$

$$\beta_{10} = \frac{1}{2E} [\hat{F}(0) - \hat{F}(L)] - \frac{1}{4ER^2} [-L^2 K(0) - 6LW(0) - 6LW(L) + L^2 K(L) - 12[M(0) - M(L)]]$$

$$\beta_{11} = \frac{1}{4ER} \{-L^2 H(0) - 4LK(0) - 2LK(L) - 6(W(0) - W(L))\}$$

$$\beta_{12} = \frac{1}{4ER} \{-L^2 G(0) - 2(LH(0) + K(0) - K(L))\}$$

$$\beta_{13} = -\frac{1}{2ER} \left[ L(2K(L) + K(0)) - 3(W(L) - W(0)) - \frac{L^2}{2} H(L) \right]$$

$$\beta_{14} = \frac{1}{2E} \{L(H(L) + H(0)) + 2(K(0) - K(L))\}$$

$$\beta_{15} = \frac{1}{2E} \{- (H(L) - H(0)) + LG(0)\}$$

$$\beta_{16} = -\frac{1}{2ER} \left\{ K(0) - K(L) + LH(L) - \frac{L^2}{2} G(L) \right\}$$

$$\beta_{17} = \frac{1}{2E} [H(0) - H(L) + LG(L)]$$

$$\beta_{18} = \frac{1}{2E} [-G(L) + G(0)]$$

## 6.6 PROBLEMA REAL DO ARCO: TIMOSHENKO

As expressões para os deslocamentos, deformações para arco de Timoshenko não simétrico são as mesmas do arco de Timoshenko simétrico discutido no capítulo 5. Para o desenvolvimento da teoria de arcos abatidos de Timoshenko serão assumidas as mesmas hipóteses na seção 5.1.

As relações tensão-deslocamento do arco abatido, desprezando o coeficiente de Poisson  $\nu = 0$ , pode ser dada por:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E\left[\frac{du(x)}{dx} + \frac{w(x)}{R}\right] + Ez\frac{d\phi(x)}{dx} \quad (6.85)$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} = G\left[\frac{dw(x)}{dx} + \phi(x)\right] \quad (6.86)$$

Já os esforços resultantes das tensões são:

$$N(x) = \int_A \sigma_x dA = A_{11}(x)E \left[ \frac{du}{dx} + \frac{w}{R} \right] + B_{11}(x)E \frac{d\phi}{dx} \quad (6.87)$$

$$M(x) = \int_A \sigma_x z dA = B_{11}(x)E \left[ \frac{du}{dx} + \frac{w}{R} \right] + D_{11}(x)E \frac{d\phi}{dx} \quad (6.88)$$

Onde:

$$A_{11}(x) = \int_{-b\inf(x)}^{+b\sup(x)} \int_{-z\inf(x)}^{+z\sup(x)} dz dy \quad (6.89)$$

$$B_{11}(x) = \int_{-b\inf(x)}^{+b\sup(x)} \int_{-z\inf(x)}^{+z\sup(x)} z dz dy \quad (6.90)$$

$$D_{11}(x) = \int_{-b\inf(x)}^{+b\sup(x)} \int_{-z\inf(x)}^{+z\sup(x)} z^2 dz dy \quad (6.91)$$

O esforço cortante é dado por:

$$V(x) = \int_A \kappa \tau_{xz} dA = \kappa GA(x) \left[ \frac{dw(x)}{dx} + \phi(x) \right] \quad (6.92)$$

Onde  $\kappa$  é o fator de forma da seção transversal.

A obtenção da equação governante do problema real do arco abatido de Timoshenko pode ser feita pela condição estacionária do funcional de energia, desta forma tem-se:

$$\delta\pi = \int_V (\sigma_x \delta\varepsilon_x + \tau_{xz} \delta\gamma_{xz}) dV - \int_0^L (p_x \delta u + p_z \delta w + m \delta \phi) dx = 0 \quad (6.93)$$

Da substituição da Eq.(6.92) em (6.93), e então, integrando-se na área transversal, tem-se:

$$\begin{aligned} \delta\pi = & \int_0^L \left( N(x) \left[ \frac{d\delta u(x)}{dx} + \frac{\delta w(x)}{R} + \frac{d\delta\phi(x)}{dx} \right] + M(x) \frac{d\delta\phi(x)}{dx} \right) dx \\ & + \int_0^L \left( V(x) \delta \left[ \frac{dw(x)}{dx} + \phi(x) \right] \right) dx - \int_0^L (p_x \delta u + p_z \delta w + m \delta\phi) dx = 0 \end{aligned} \quad (6.94)$$

Utilizando-se um desenvolvimento análogo ao descrito no capítulo 5, chega-se nas equações de equilíbrio dadas por:

$$\frac{dN}{dx} + p_x = 0 \quad (6.95)$$

$$\frac{dM}{dx} - (V) + m = 0 \quad (6.96)$$

$$\left( \frac{dV}{dx} \right) - \frac{N}{R} + p_z = 0 \quad (6.97)$$

Em termos dos deslocamentos, as equações de equilíbrio ficam:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} E \{ A_{11}(x) \left[ \frac{du(x)}{dx} + \frac{w(x)}{R} \right] + B_{11}(x) \frac{d\phi(x)}{dx} \} + p_x(x) = 0 \\ \frac{d}{dx} \{ A_{55}(x) \kappa G [\phi(x) + \frac{dw(x)}{dx}] \} - \frac{1}{R} [A_{11}(x) E \left( \frac{du(x)}{dx} + \frac{w(x)}{R} \right) + B_{11}(x) E \frac{d\phi(x)}{dx}] + p_z(x) = 0 \\ \frac{d}{dx} E \{ B_{11}(x) \left( \frac{du(x)}{dx} + \frac{w(x)}{R} \right) + D_{11}(x) \frac{d\phi(x)}{dx} \} - A_{55}(x) \kappa G [\phi(x) + \frac{dw(x)}{dx}] + m = 0 \end{cases} \quad (6.98-100)$$

## 6.7 PROBLEMA FUNDAMENTAL DO ARCO: TIMOSHENKO

Tal qual o problema fundamental do arco abatido de Euler-Bernoulli, o problema fundamental de para o arco abatido de Timoshenko é associado um domínio infinito sob cargas puntuais  $(p_x^*, p_z^*, m^*)$  e governado por relações análogas aplicadas ao

problema real. Quando a fonte axial  $p_x^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$  for ativada, equações governantes fundamentais análogas ao real Eq. (6.98-100) são dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \left\{ A_{11}(x) E \left[ \frac{du_f^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_f^*(x, \hat{x})}{R} \right] + B_{11}(x) E \frac{d\phi_f(x)}{dx} \right\} + \delta(x, \hat{x}) = 0 \\ \frac{d}{dx} \left\{ A_{55}(x) \kappa G [\phi_f^*(x, \hat{x}) + \frac{dw_f^*(x, \hat{x})}{dx}] \right\} - \frac{E}{R} \left( \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2} \right) = 0 \\ \frac{d}{dx} E \left\{ B_{11}(x) \left( \frac{du_f^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_f^*(x, \hat{x})}{R} \right) + D_{11}(x) \frac{d\phi_f^*(x, \hat{x})}{dx} \right\} = -\frac{r}{2R} \end{array} \right. \quad (6.101-103)$$

De forma simplificada as Eqs. (6.101-103) podem ainda ser apresentada como:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{11}(x) E \left[ \frac{du_f^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_f^*(x, \hat{x})}{R} \right] + B_{11}(x) E \frac{d\phi_f(x)}{dx} = -\frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2} \\ A_{55}(x) \kappa G [\phi_f^*(x, \hat{x}) + \frac{dw_f^*(x, \hat{x})}{dx}] = -\frac{r}{2R} \\ B_{11}(x) E \left( \frac{du_f^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_f^*(x, \hat{x})}{R} \right) + D_{11}(x) E \frac{d\phi_f^*(x, \hat{x})}{dx} = \frac{r^2 \text{sgn}(x - \hat{x})}{4R} \end{array} \right. \quad (6.104-106)$$

Já a equação do deslocamento transversal devido ativação da carga axial é obtida, subtraindo-se a Eq. (6.104) da Eq. (6.106) que fica:

$$\frac{d\phi_f^*(x, \hat{x})}{dx} = \text{sgn}(x - \hat{x}) \left[ -\frac{1}{2EA_{11}(x)} + \frac{r^2}{4ERB_{11}(x)} \right] \frac{(A_{11}(x)B_{11}(x))}{B_{11}^2(x) - A_{11}(x)D_{11}(x)} \quad (6.107)$$

Reescrevendo-se a equação Eq. (6.107) de forma mais simplificada, pode-se ainda obter-se:

$$\frac{d\phi_f^*(x, \hat{x})}{dx} = \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2E} \left[ \frac{1}{B(x)} + \frac{r^2}{2RC(x)} \right] \quad (6.108)$$



Onde:

$$\frac{1}{B(x)} = \frac{-B_{11}(x)}{B_{11}^2(x) - A_{11}(x)D_{11}(x)} \quad (6.109)$$

$$\frac{1}{C(x)} = \frac{A_{11}(x)}{B_{11}^2(x) - A_{11}(x)D_{11}(x)} \quad (6.110)$$

Por fim, da integração da Eq. (6.108) com o auxílio das identidades Eqs. (6.31), (6.33), tem-se:

$$\begin{aligned} \phi_f^*(x, \hat{x}) = & \frac{r^2 \operatorname{sgn}(x - \hat{x})Q(x) - 2[rY(x) - \operatorname{sgn}(x - \hat{x})[K(x) - K(\hat{x})]]}{4ER} \\ & + \frac{\operatorname{sgn}(x, \hat{x})[T(x) - T(\hat{x})]}{2E} \end{aligned} \quad (6.111)$$

Já o deslocamento transversal fundamental é obtido da Eq. (6.105), que fica:

$$\frac{dw_f^*(x, \hat{x})}{dx} = -\frac{r}{2\kappa GRA_{55}(x)} - \phi_f^*(x, \hat{x}) \quad (6.112)$$

Integrando-se a Eq. (6.112) com o auxílio das identidades Eqs. (6.31), (6.33), tem-se:

$$\begin{aligned} w_f^*(x, \hat{x}) = & -\frac{1}{2\kappa G} [rF5(x) - \operatorname{sgn}(x - \hat{x})[G5(x) - G5(\hat{x})]] + \\ & + \frac{1}{2ER} \left[ 2rK(x) + rK(\hat{x}) - 3\operatorname{sgn}(x - \hat{x})[L(x) - L(\hat{x})] - \frac{r^2}{2}\operatorname{sgn}(x - \hat{x})Y(x) \right] \\ & - \frac{1}{2E} [\operatorname{sgn}(x - \hat{x})(R(x) - R(\hat{x})) - rT(\hat{x})] \end{aligned} \quad (6.113)$$

Por fim, da subtração da Eq. (6.104) da Eq. (6.106), tem-se:

$$\left( \frac{A_{11}(x)}{B_{11}(x)} - \frac{B_{11}(x)}{D_{11}(x)} \right) \left( \frac{du_f^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_f^*(x, \hat{x})}{R} \right) = - \left( \frac{\operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{2EB_{11}(x)} + \frac{r^2 \operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{4ERD_{11}(x)} \right) \quad (6.114)$$

Reescrevendo-se a Eq. (6.114) de forma reduzida, simplificada, fica:

$$\frac{du_F^*(x, \hat{x})}{dx} = - \left( \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2EA(x)} + \frac{r^2 \text{sgn}(x - \hat{x})}{4ERB(x)} \right) - \frac{w_F^*(x, \hat{x})}{R} \quad (6.115)$$

Para o cálculo do deslocamento axial relativo a ativação da carga axial, integra-se a Eq. (6.115) com o auxílio das Eqs. (6.31), (6.32), (6.33), assim:

$$\begin{aligned} u_F^*(x, \hat{x}) = & - \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2E} \left[ \hat{F}(x) - \hat{F}(\hat{x}) \right] - \frac{1}{4ER} \left[ r^2 \text{sgn}(x - \hat{x}) T(x) \right] \\ & - \frac{1}{4ER} \left[ -2 \left[ rR(x) - \text{sgn}(x - \hat{x}) [S(x) - S(\hat{x})] \right] \right] \\ & + \frac{1}{2\kappa GR^2} \left[ r \left[ G5(x) + G5(\hat{x}) \right] - 2 \text{sgn}(x - \hat{x}) [H5(x) - H5(\hat{x})] \right] \\ & - \frac{1}{4ER^2} \left[ 3r \left[ L(x) - L(\hat{x}) \right] - 6 \text{sgn}(x - \hat{x}) [M(x) - M(\hat{x})] \right] \\ & \left[ - \frac{r^2}{2} \text{sgn}(x - \hat{x}) [K(x) - K(\hat{x})] \right] \\ & + \frac{1}{2ER} \left[ \text{sgn}(x - \hat{x}) [S(x) - S(\hat{x})] - rR(\hat{x}) - \frac{r^2}{2} \text{sgn}(x - \hat{x}) T(\hat{x}) \right] \end{aligned} \quad (6.116)$$

Já, as determinações das relações esforços-deslocamentos fundamentais devido a ativação da fonte axial são obtidas a partir das Eqs. (6.95-97), que ficam:

$$\frac{dN_F^*(x, \hat{x})}{dx} + \delta(x, \hat{x}) = 0 \quad (6.117)$$

$$\frac{dM_F^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{r}{2R} = 0 \quad (6.118)$$

$$\left( \frac{dV_F^*(x, \hat{x})}{dx} \right) + \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2R} = 0 \quad (6.119)$$

Da integração das Eqs. (6.117-119), tem-se:

$$N_F^*(x, \hat{x}) = - \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2} \quad (6.120)$$

$$M_F^*(x, \hat{x}) = -\frac{r^2 \operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{4R} \quad (6.121)$$

$$V_F^*(x, \hat{x}) = -\frac{r}{2R} \quad (6.122)$$

Por outro lado, quando a fonte transversal  $p_z^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$  for ativada, tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} E \{ A_{11}(x) \left[ \frac{du_p^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_p^*(x, \hat{x})}{R} \right] + B_{11}(x) \frac{d\phi_p^*(x, \hat{x})}{dx} \} = 0 \\ \frac{d}{dx} \{ A_{55}(x) \kappa G [\phi_p^*(x, \hat{x}) + \frac{dw_p^*(x, \hat{x})}{dx}] \} - \frac{E}{R} [A_{11}(x) \left( \frac{du_p^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_p^*(x, \hat{x})}{R} \right) + B_{11}(x) \frac{d\phi_p^*(x, \hat{x})}{dx}] \\ + \delta(x, \hat{x}) = 0 \\ \frac{d}{dx} E \{ B_{11}(x) \left( \frac{du_p^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_p^*(x, \hat{x})}{R} \right) + D_{11}(x) \frac{d\phi_p^*(x, \hat{x})}{dx} \} - A_{55}(x) \kappa G [\phi_p^*(x, \hat{x}) + \frac{dw_p^*(x, \hat{x})}{dx}] = 0 \end{array} \right. \quad (6.123-125)$$

Da integração das Eqs. (6.123-125) as equações podem ser agrupadas, como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du_p^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_p^*(x, \hat{x})}{R} + \frac{B_{11}(x)}{A_{11}(x)} \frac{d\phi_p^*(x, \hat{x})}{dx} = 0 \\ A_{55}(x) [\phi_p^*(x, \hat{x}) + \frac{dw_p^*(x, \hat{x})}{dx}] = \frac{-\operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{2\kappa G} \\ \frac{du_p^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_p^*(x, \hat{x})}{R} + \frac{D_{11}(x)}{B_{11}(x)} \frac{d\phi_p^*(x, \hat{x})}{dx} = \frac{-r}{2EB_{11}(x)} \end{array} \right. \quad (6.126-128)$$

Subtraindo-se a Eq. (6.126) da Eq. (6.138), tem-se:

$$\frac{d\phi_p^*(x, \hat{x})}{dx} = \frac{r}{2EB_{11}(x)} \left[ \frac{A_{11}(x)B_{11}(x)}{B_{11}^2(x) - A_{11}(x)D_{11}(x)} \right] \quad (6.129)$$

De modo a simplificar os cálculos, a Eq. (6.129) pode ser escrita de forma simplificada, como:

$$\frac{d\phi_p^*(x, \hat{x})}{dx} = \frac{r}{2EC(x)} \quad (6.130)$$

Integrando-se a Eq. (6.130) com o auxílio da identidade Eq. (6.31), tem-se:

$$\phi_p^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2E} \left[ rQ(x) - \text{sgn}(x - \hat{x}) (Y(x) - Y(\hat{x})) \right] \quad (6.131)$$

Já o deslocamento transversal devido ativação da carga transversal, é obtido a partir da substituição da Eq.(6.131) na Eq.(6.127), de forma que obtém-se:

$$\frac{dw_p^*(x, \hat{x})}{dx} = -\frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2\kappa GA_{55}(x)} - \phi_p^*(x, \hat{x}) \quad (6.132)$$

Por fim, da Integração da Eq.(6.132), obtém-se:

$$\begin{aligned} w_p^*(x, \hat{x}) = & -\frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2\kappa G} [F_5(x) - F_5(\hat{x})] - \frac{1}{2E} [r(Y(x) + Y(\hat{x}))] \\ & - \frac{1}{2E} [-2\text{sgn}(x - \hat{x}) (K(x) + K(\hat{x}))] \end{aligned} \quad (6.133)$$

Afim de se obter a solução para o deslocamento axial devido ativação da carga transversal, agrupa-se as Eqs.(6.126),(6.132), que de forma simplificada, ficam:

$$\begin{aligned} \frac{A_{11}(x)}{B_{11}(x)} \left( \frac{du_p^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_p^*(x, \hat{x})}{R} \right) + \frac{d\phi_p^*(x, \hat{x})}{dx} &= 0 \\ \frac{B_{11}(x)}{D_{11}(x)} \left( \frac{du_p^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_p^*(x, \hat{x})}{R} \right) + \frac{d\phi_p^*(x, \hat{x})}{dx} &= \frac{-r}{2ED_{11}(x)} \end{aligned} \quad (6.134-135)$$

Subtraindo-se a Eq.(6.135) da Eq.(6.136), tem-se:

$$\frac{du_p^*(x, \hat{x})}{dx} = \frac{r}{2EB(x)} - \frac{w_p^*(x, \hat{x})}{R} \quad (6.136)$$

Onde:

$$\frac{1}{B(x)} = \frac{B_{11}(x)}{A_{11}(x)D_{11}(x) - B_{11}^2(x)} \quad (6.137)$$

Da integração da Eq.(6.136), obtém-se:

$$\begin{aligned} u_p^*(x, \hat{x}) = & \frac{1}{2E} [rT(x) - \text{sgn}(x - \hat{x})] + \frac{1}{2ER} [\text{sgn}(x - \hat{x}) [G_s(x) - G_s(\hat{x})] - rF_s(x)] \\ & + \frac{1}{2ER} \left[ rK(x) + 2rK(\hat{x}) - 3\text{sgn}(x - \hat{x}) [L(x) - L(\hat{x})] + \frac{r^2}{2} \text{sgn}(x - \hat{x}) Y(\hat{x}) \right] \end{aligned} \quad (6.138)$$

As relações esforços-deslocamentos fundamentais devido a ativação da fonte transversal são obtidos a partir das Eqs.(6.95-97), que ficam:

$$\begin{aligned} \frac{dN_p^*(x, \hat{x})}{dx} &= 0 \\ \frac{dM_p^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2} &= 0 \\ \left( \frac{dV_p^*(x, \hat{x})}{dx} \right) + \delta(x, \hat{x}) &= 0 \end{aligned} \quad (6.139-141)$$

Da integração das Eqs.(6.139-141), tem-se:

$$N_p^*(x, \hat{x}) = 0$$

$$M_p^*(x, \hat{x}) = \frac{-r}{2}$$

$$V_p^*(x, \hat{x}) = -\frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2} \quad (6.142-144)$$

Por fim, mudando-se a ativação da fonte, para  $m^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$ , tem-se:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{d}{dx} E \{ A_{11}(x) \left[ \frac{du_m^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_m^*(x, \hat{x})}{R} \right] + B_{11}(x) \frac{d\phi_m^*(x, \hat{x})}{dx} \} = 0 \\ & \frac{d}{dx} \{ A_{55}(x) \kappa G [\phi_m^*(x, \hat{x}) + \frac{dw_m^*(x, \hat{x})}{dx}] \} - \frac{E}{R} [A_{11}(x) \left( \frac{du_m^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_m^*(x, \hat{x})}{R} \right) \\ & + B_{11}(x) \frac{d\phi_m^*(x, \hat{x})}{dx}] = 0 \\ & \frac{d}{dx} E \{ B_{11}(x) \left( \frac{du_m^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_m^*(x, \hat{x})}{R} \right) + D_{11}(x) \frac{d\phi_m^*(x, \hat{x})}{dx} \} - A_{55}(x) \kappa G [\phi_m^*(x, \hat{x}) + \frac{dw_m^*(x, \hat{x})}{dx}] \\ & + \delta(x, \hat{x}) = 0 \end{aligned} \right. \quad (6.145-147)$$

Das Eqs. (6.145), (6.147), tem-se:

$$\begin{aligned} A_{11}(x) E \left[ \frac{du_m^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_m^*(x, \hat{x})}{R} \right] + B_{11}(x) E \frac{d\phi_m^*(x, \hat{x})}{dx} &= 0 \\ B_{11}(x) \left( \frac{du_m^*(x, \hat{x})}{dx} + \frac{w_m^*(x, \hat{x})}{R} \right) + D_{11}(x) \frac{d\phi_m^*(x, \hat{x})}{dx} &= \frac{-\text{sgn}(x - \hat{x})}{2E} \end{aligned} \quad (6.148-149)$$

Procedendo-se de forma semelhante aos casos anteriores, subtrai-se a Eq. (6.149) da Eq. (6.148) e em seguida integrando a diferença com o auxílio da identidade Eq. (6.32), obtendo-se com isso:

$$\phi_m^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2E} \text{sgn}(x - \hat{x}) [Q(x) - Q(\hat{x})] \quad (6.150)$$

Já o deslocamento transversal devido ativação do momento é calculado como:

$$w_m^*(x, \hat{x}) = -\int \phi_m^*(x, \hat{x}) dx \quad (6.151)$$

Que por sua vez, fica:

$$w_m^*(x, \hat{x}) = -\frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2E} [Y(x) - Y(\hat{x})] + \frac{1}{2E} rQ(\hat{x}) \quad (6.152)$$

Por fim, o descolamento axial pode ser escrito como:

$$\frac{du_m^*(x, \hat{x})}{dx} = \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2B(x)} - \frac{w_m^*(x, \hat{x})}{R} \quad (6.153)$$

Integrando-se a Eq. (6.153), obtém-se:

$$\begin{aligned} u_m^*(x, \hat{x}) = & \frac{1}{2E} [\text{sgn}(x - \hat{x}) [T(x) - T(\hat{x})]] + \frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2ER} [K(x) - K(\hat{x})] \\ & - \frac{1}{4ER} Y(\hat{x}) - \frac{1}{4ER} r^2 \text{sgn}(x - \hat{x}) Q(\hat{x}) \end{aligned} \quad (6.154)$$

Já, as relações esforços-deslocamentos fundamentais devido a ativação do momento são:

$$N_m^*(x, \hat{x}) = 0$$

$$M_m^*(x, \hat{x}) = -\frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2}$$

$$V_m^*(x, \hat{x}) = 0 \quad (6.155-157)$$

Onde:

Onde:

$$\hat{F}(x) = \int \frac{1}{A(x)} dx$$

$$\hat{G}(x) = \int \hat{F}(x) dx$$

$$T(x) = \int \frac{1}{B(x)} dx$$

$$R(x) = \int T(x) dx$$

$$S(x) = \int R(x)dx$$

$$Q(x) = \int \frac{1}{C(x)} dx$$

$$Y(x) = \int Q(x)dx$$

$$K(x) = \int Y(x)dx$$

$$L(x) = \int K(x)dx$$

$$M(x) = \int L(x)dx \quad (6.158-167)$$

## 6.8 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL

As equações integrais para Timoshenko serão determinadas pelo Teorema da Reciprocidade de Betti. Utilizando-se um procedimento análogo ao descrito no capítulo 5, tem-se que quando a fonte for ativada em força axial, o teorema de reciprocidade permite escrever que:

$$\int_V [\sigma_{xF}^* \varepsilon_x + \tau_{xzF}^* \gamma_{xz}] dV = \int_V [\sigma_x \varepsilon_{xF}^* + \tau_{xz} \gamma_{xF}^*] dV \quad (6.168)$$

Onde V é o volume do arco.

Conforme foram mostrados no capítulo 5, após um sequenciamento de desenvolvimento matemático, a Eq. (6.168) pode ser transformada na equação integral dos deslocamentos axiais dada por:

$$u(\hat{x}) + [N_F^* u]_0^L + [V_F^* w]_0^L + [M_F^* \phi]_0^L = \int_0^L [Nu_F^*]_0^L + [Vw_F^*]_0^L + [M\phi_F^*]_0^L + [u_F^* p_x + w_F^* p_z + \phi_F^* m] dx \quad (6.169)$$

Por outro lado, quando a carga fonte transversal  $p_z^*$  for ativada, a relação recíproca é dada por:

$$\int_V [\sigma_{xp}^* \varepsilon_x + \tau_{xzp}^* \gamma_{xz}] dV = \int_V [\sigma_x \varepsilon_{xp}^* + \tau_{xz} \gamma_{xp}^*] dV \quad (6.170)$$



Que após manipulações algébricas (vide capítulo 5), resulta na equação integral dos deslocamentos transversais.

$$w(\hat{x}) + \left[ N_p^* u \right]_0^L + \left[ V_p^* w \right]_0^L + \left[ M_p^* \phi \right]_0^L = \\ + \left[ N u_p^* \right]_0^L + \left[ V w_p^* \right]_0^L + \left[ M \phi_p^* \right]_0^L + \int_0^L \left[ u_p^* p_x + w_p^* p_z + \phi_p^* m \right] dx \quad (6.171)$$

Por fim, ativando a fonte momento  $m^*$ , e seguindo um processo análogo ao aplicado quando a carga axial ou a transversal foi ativada, uma representação da equação integral para a rotação da seção pode ser escrita como:

$$\phi(\hat{x}) + \left[ N_m^* u \right]_0^L + \left[ V_m^* w \right]_0^L + \left[ M_m^* \phi \right]_0^L = \\ \int_0^L \left[ u_m^* p_x + w_m^* p_z + \phi_m^* m \right] dx + \left[ N u_m^* \right]_0^L + \left[ V w_m^* \right]_0^L + \left[ M \phi_m^* \right]_0^L \quad (6.172)$$

## 6.9 REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA

A transição das equações integrais para as algébricas é feita pela colocação das fontes no contorno, isto é,  $\hat{x} = 0 + \zeta$  e  $\hat{x} = L - \zeta$  com  $\zeta \rightarrow 0$  e pelo cálculo das integrais pertinentes, de forma que gera um sistema que pode ser expresso como:

$$\{u\} + [H]\{u\} = [G]\{p\} + \{f\} \quad (6.173)$$

onde  $\{u\}$  e  $\{p\}$  são os vetores de deslocamentos e solicitações internas, cujas formas explícitas são dadas por:

$$\{u\} = \begin{bmatrix} u_i & w_i & \phi_i & u_j & w_j & \phi_j \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} u(0) & w(0) & \phi(0) & u(L) & w(L) & \phi(L) \end{bmatrix}^T$$

$$\{p\} = \begin{bmatrix} N_i & V_i & M_i & N_j & V_j & M_j \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} N(0) & V(0) & M(0) & N(L) & V(L) & M(L) \end{bmatrix}^T$$

Onde os graus de liberdade no contorno estão indicados na Fig. 6.3a-b.

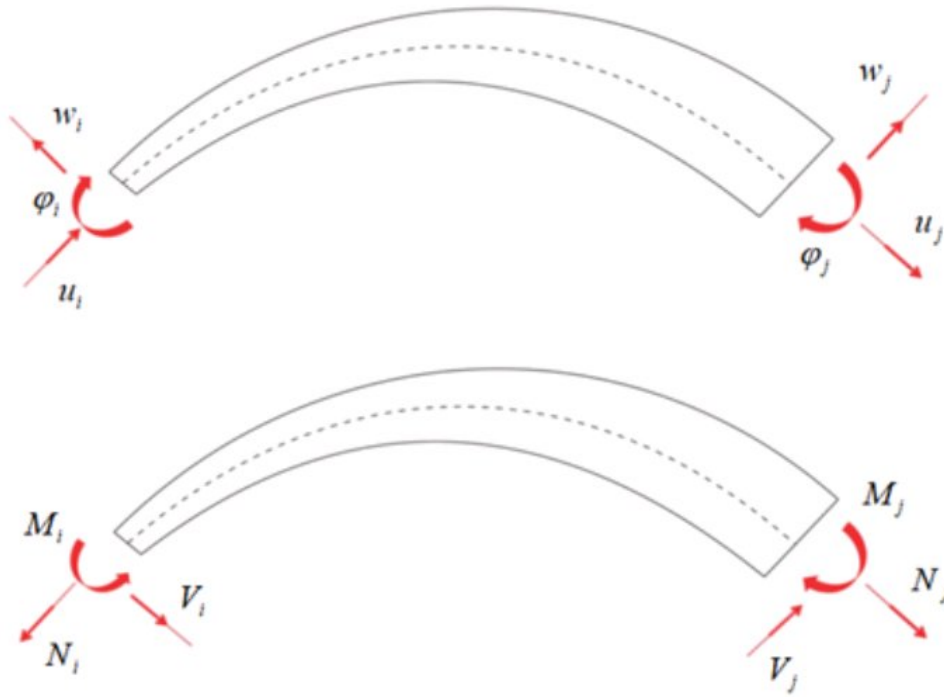


Figura 6.3a-b Graus de liberdade no contorno

Já  $[H]$ ,  $[G]$  são as matrizes de influência dadas por:

$$[H] = \begin{bmatrix} -N_F^*(0,0) & -V_F^*(0,0) & -M_F^*(0,0) & N_F^*(L,0) & V_F^*(L,0) & M_F^*(L,0) \\ -N_P^*(0,0) & -V_P^*(0,0) & -M_P^*(0,0) & N_P^*(L,0) & V_P^*(L,0) & M_P^*(L,0) \\ -N_m^*(0,0) & -V_m^*(0,0) & -M_m^*(0,0) & N_m^*(L,0) & V_m^*(L,0) & M_m^*(L,0) \\ -N_F^*(0,L) & -V_F^*(0,L) & -M_F^*(0,L) & N_F^*(L,L) & V_F^*(L,L) & M_F^*(L,L) \\ -N_P^*(0,L) & -V_P^*(0,L) & -M_P^*(0,L) & N_P^*(L,L) & V_P^*(L,L) & M_P^*(L,L) \\ -N_m^*(0,L) & -V_m^*(0,L) & -M_m^*(0,L) & N_m^*(L,L) & V_m^*(L,L) & M_m^*(L,L) \end{bmatrix}$$

$$[H] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{L}{2R} & -\frac{L^2}{4R} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{L}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{L}{2R} & -\frac{L^2}{4R} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{L}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(6.174)

$$[G] = \begin{bmatrix} -u_F^*(0,0) & -w_F^*(0,0) & -\varphi_F^*(0,0) & u_F^*(L,0) & w_F^*(L,0) & \varphi_F^*(L,0) \\ -u_P^*(0,0) & -w_P^*(0,0) & -\varphi_P^*(0,0) & u_P^*(L,0) & w_P^*(L,0) & \varphi_P^*(L,0) \\ -u_m^*(0,0) & -w_m^*(0,0) & -\varphi_m^*(0,0) & u_m^*(L,0) & w_m^*(L,0) & \varphi_m^*(L,0) \\ -u_F^*(0,L) & -w_F^*(0,L) & -\varphi_F^*(0,L) & u_F^*(L,L) & w_F^*(L,L) & \varphi_F^*(L,L) \\ -u_P^*(0,L) & -w_P^*(0,L) & -\varphi_P^*(0,L) & u_P^*(L,L) & w_P^*(L,L) & \varphi_P^*(L,L) \\ -u_m^*(0,L) & -w_m^*(0,L) & -\varphi_m^*(0,L) & u_m^*(L,L) & w_m^*(L,L) & \varphi_m^*(L,L) \end{bmatrix}$$

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_7 & \beta_8 & \beta_9 \\ -\beta_{10} & -\beta_{11} & -\beta_{12} & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_{13} & -\beta_{14} & -\beta_{15} & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_{16} & -\beta_{17} & -\beta_{18} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.175)$$

Onde:

$$\beta_1 = -\frac{1}{2E} [\hat{F}(L) - \hat{F}(0)] + \frac{1}{2\kappa GR^2} [L(\hat{G}(L) + \hat{G}(0)) - 2(\hat{H}(L) - \hat{H}(0))] \\ - \frac{1}{4ER^2} [L^2(K(L) - K(0) - 6LW(L) - 6LW(0)) + 12(M(L) - M(0))]$$

$$\beta_2 = -\frac{1}{2\kappa GR} [L\hat{F}(L) - \hat{G}(L) + \hat{G}(0)] + \frac{1}{4ER} \{L^2H(L) - 2L(2K(L) + K(0)) + 6(W(L) - W(0))\}$$

$$\beta_3 = -\frac{1}{4ER} \{L^2G(L) - 2(LH(L) - K(L) + K(0))\}$$

$$\beta_4 = \frac{1}{2\kappa GR} [\hat{G}(L) - \hat{G}(0) - L\hat{F}(0)] - \frac{1}{2ER} [L(2K(0) + K(L)) + 3(W(0) - W(L)) + \frac{L^2}{2}H(0)]$$

$$\beta_5 = -\frac{1}{2\kappa G} [\hat{F}(L) - \hat{F}(0)] + \frac{1}{2E} \{L(H(L) + H(0)) - 2(K(L) - K(0))\}$$

$$\beta_6 = -\frac{1}{2E} \{-(H(L) - H(0)) + LG(L)\}$$

$$\beta_7 = -\frac{1}{2ER} \left\{ K(L) - K(0) - LH(0) - \frac{L^2}{2}G(0) \right\}$$

$$\beta_8 = \frac{1}{2E} [H(L) - H(0) - LG(0)]$$

$$\beta_9 = -\frac{1}{2E} [G(L) - G(0)]$$

$$\begin{aligned} \beta_{10} = & -\frac{1}{2E} [\hat{F}(L) - \hat{F}(0)] + \frac{1}{2\kappa GR^2} [L(\hat{G}(0) + \hat{G}(L)) + 2(\hat{H}(0) - \hat{H}(L))] \\ & - \frac{1}{4ER^2} [-L^2(K(0) - K(L) - 6LW(L) - 6LW(0)) + 12[M(L) - M(0)]] \end{aligned}$$

$$\beta_{11} = -\frac{1}{2\kappa GR} [L\hat{F}(0) - \hat{G}(L) + \hat{G}(0)] + \frac{1}{4ER} \{L^2H(0) - 2L(2K(0) + K(L)) - 6(W(0) - W(L))\}$$

$$\beta_{12} = -\frac{1}{4ER} \{L^2G(0) - 2(LH(0) - K(L) + K(0))\}$$

$$\beta_{13} = \frac{1}{2\kappa GR} [\hat{G}(L) - \hat{G}(0) - L\hat{F}(L)] - \frac{1}{2ER} \left[ L(2K(0) + K(L)) - 3(W(L) - W(0)) - \frac{L}{2}H(L) \right]$$

$$\beta_{14} = \frac{1}{2\kappa G} [\hat{F}(0) - \hat{F}(L)] + \frac{1}{2E} \{L(H(L) + H(0)) + 2(K(0) - K(L))\}$$

$$\beta_{15} = -\frac{1}{2E} \{-(H(L) - H(0)) + LG(0)\}$$

$$\beta_{16} = \frac{1}{2E} \left\{ K(L) - K(0) - LH(L) + \frac{L^2}{2}G(L) \right\}$$

$$\beta_{17} = \frac{1}{2E} [H(L) - H(0) - LG(0)]$$

$$\beta_{18} = \frac{1}{2E} [G(0) - G(L)]$$

Já o vetor das cargas na Eq.(6.172) pode ser apresentado de uma forma genérica como:

$$\begin{pmatrix} f_1(0) \\ f_2(0) \\ f_3(0) \\ f_1(L) \\ f_2(L) \\ f_3(L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^L [p_x u_F^*(x, 0) + p_z w_F^*(x, 0) + m\varphi_F^*(x, 0)] dx \\ \int_0^L [p_x u_P^*(x, 0) + p_z w_P^*(x, 0) + m\varphi_P^*(x, 0)] dx \\ \int_0^L [p_x u_{P,\hat{x}}^*(x, 0) + p_z w_{P,\hat{x}}^*(x, 0) + m\varphi_m^*(x, 0)] dx \\ \int_0^L [p_x u_F^*(x, L) + p_z w_F^*(x, L) + m\varphi_F^*(x, L)] dx \\ \int_0^L [p_x u_P^*(x, L) + p_z w_P^*(x, L) + m\varphi_P^*(x, L)] dx \\ \int_0^L [p_x u_{P,\hat{x}}^*(x, L) + p_z w_{P,\hat{x}}^*(x, L) + m\varphi_m^*(x, L)] dx \end{pmatrix} \quad (6.175)$$

Para o caso da distribuição constante da carga transversal ao longo da viga, o vetor de carga fica:

$$f_1(0) = -\frac{px}{2\kappa G} \left\{ \hat{G}(L) - \hat{G}(0) - L\hat{F}(0) \right\} + \frac{pz}{2E} \left\{ -\left( S(L) - S(0) - LR(0) \right) - \frac{L^2}{4} T(0) \right\}$$

$$f_2(0) = -\frac{px}{2E} \left\{ LP(L) - 2V(L) + 2V(0) + LP(0) \right\} + \frac{pz}{2E} \left\{ LK(L) - 3L(L) + 3L(0) + Y(0) \frac{L^2}{2} + 2LK(0) \right\}$$

$$f_3(0) = -\frac{px}{2E} \left\{ P(L) - P(0) - LJ(0) \right\} - \frac{pz}{2E} \left\{ -\left( K(L) - K(0) + LY(0) \right) + LQ(0) + 2Y(0) \right\}$$

$$f_1(L) = -\frac{px}{2\kappa G} \left\{ \hat{G}(L) - \hat{G}(0) - L\hat{F}(L) \right\} + \frac{pz}{2E} \left\{ \left( S(L) - S(0) - LR(L) \right) - \frac{L^2}{4} T(L) \right\}$$

$$f_2(L) = -\frac{px}{2E} \left\{ -LP(0) + 2V(L) - 2V(0) - LP(L) \right\} - \frac{pz}{2E} \left\{ -LK(0) + 3L(L) - 3L(0) + Y(L) \frac{L^2}{2} - 2LK(L) \right\}$$

$$f_3(L) = -\frac{px}{2E} \left\{ P(L) - P(0) - LJ(L) \right\} - \frac{pz}{2E} \left\{ \left( K(L) - K(0) + LY(L) \right) + \frac{L^2}{2} Q(L) - 2LY(L) \right\}$$

## CAPÍTULO VII

### DESCONTINUIDADES DE DOMÍNIO

#### 7.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são tratadas as ocorrências de descontinuidades em barras não prismáticas, a estratégia de solução é baseada na técnica de sub-região para o MEC. Existem diversas maneiras de surgimento de descontinuidades no domínio, tais como: a) ocorrência de apoios b) mudança na lei de variação da seção transversal c) mudança abrupta de propriedades físicas d) ocorrência de duas ou mais barras não colineares concorrentes a um nó da estrutura, vide Fig. 7.1.

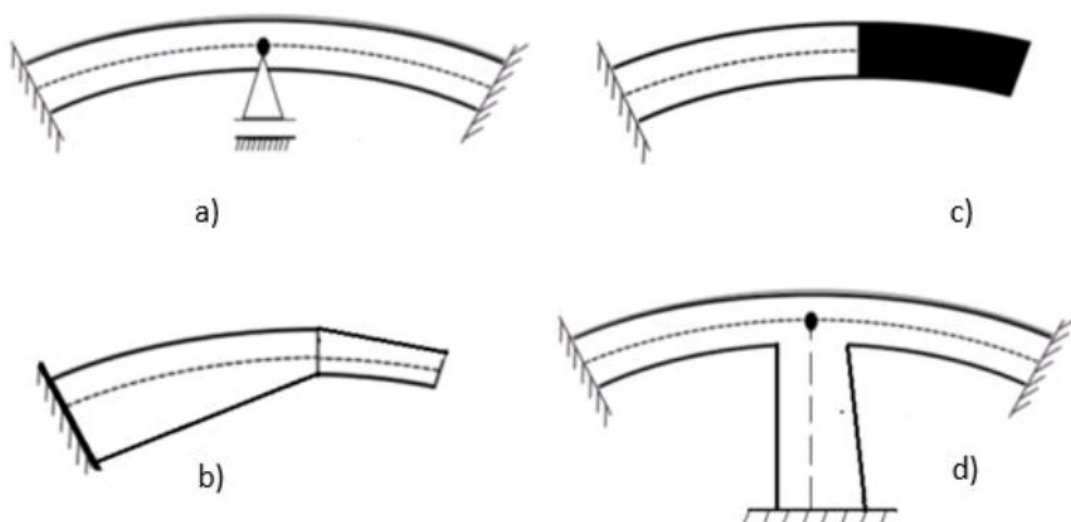


Figura 7.1. Descontinuidades de domínio no arco: a) apoio intermediário b) mudança na lei de variação da seção transversal c) materiais diferentes d) duas ou mais barras não colineares em um nó.

Problemas com descontinuidades de domínio no MEC já foram abordados em estruturas formadas por barras prismáticas e constituídas por materiais homogêneos e isotrópicos. Por exemplo, CRUZ (2012) analisou estaticamente e dinamicamente pórticos planos e espaciais, PASSOS (2014) estudou cargas críticas em barras utilizando as teorias de Euler-Bernoulli e Timoshenko. Já MAIA (2016) aplicou a técnica de sub-

região para o estudo de flexão e flambagem em barras utilizando uma teoria de terceira ordem (modelo de Bickford-Reddy). NASCIMENTO JR (2017) também aplicou a técnica de sub-região para barras retas e arcos abatidos prismáticos não homogêneos utilizando as teorias clássica, de primeira ordem e de terceira ordem de vigas/arcs de compósitos laminados.

A unificação dos sistemas de coordenadas locais de cada barra não prismática que aqui é desenvolvida tem por objetivo principal possibilitar a adequação rápida e segura das equações advindas de cada barra para formação do sistema algébrico de toda estrutura. Inicialmente será descrita a transformação dos sistemas locais de deslocamentos e de esforços nos modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko para um outro chamado de sistema local unificado. Só então, superpondo convenientemente as representações algébricas dos efeitos referidos ao sistema de coordenadas globais, obtém-se a representação algébrica da estrutura.

## **7.2 SISTEMA LOCAL UNIFICADO DA BARRA**

Aqui, as grandezas assinaladas com uma barra superior estão referidas ao sistema de coordenadas locais, e com duas barras superiores, ao sistema de coordenadas locais unificado.

Na Fig. 7.2a-b estão descritos os graus de liberdade em deslocamentos e esforços no sistema local do modelo de Euler-Bernoulli, respectivamente. Por outro lado, na Fig. 7.3a-b estão indicados os correspondentes graus de liberdade no sistema local do modelo de Timoshenko. Convém notar que será adotado como Sistema Local Unificado (SLU) aquele associado às coordenadas dos graus de liberdade dos deslocamentos do modelo de Timoshenko, de forma que as orientações do Sistema Local Unificado (SLU) para deslocamentos e esforços são dadas na figura 7.4a-b.

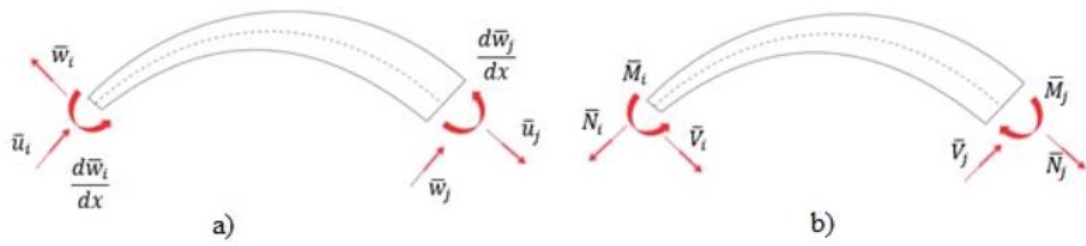


Figura 7.2. Sistema local no arco de Euler-Bernoulli: a) deslocamentos b) esforços.

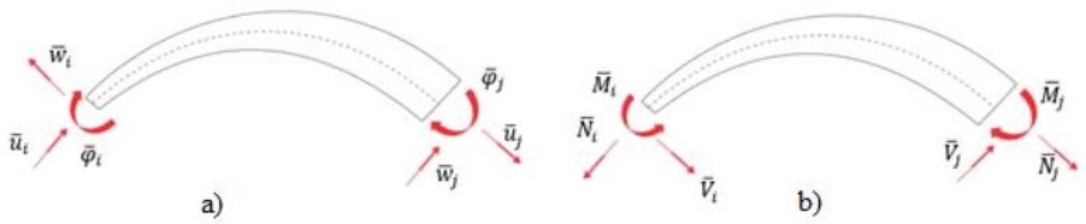


Figura 7.3. Sistema local no arco de Timoshenko: a) deslocamentos b) esforços.

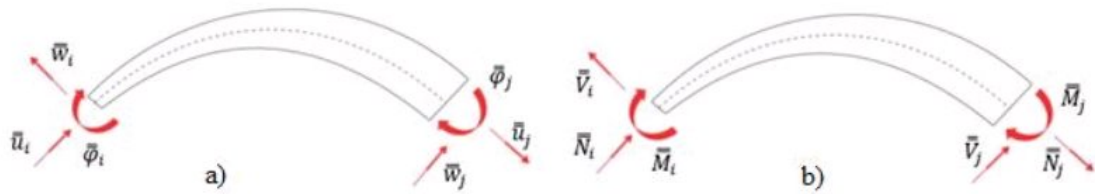


Figura 7.4. Sistema local unificado a) deslocamentos b) esforços.

Então, as transformações das contribuições de deslocamentos e esforços do sistema de local de Euler para o sistema local unificado podem ser escritas como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_i \\ \bar{w}_i \\ \frac{d\bar{w}_i}{dx} \\ \bar{u}_j \\ \bar{w}_j \\ \frac{d\bar{w}_j}{dx} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \bar{\bar{u}}_i \\ \bar{\bar{w}}_i \\ \bar{\bar{\phi}}_i \\ \bar{\bar{u}}_j \\ \bar{\bar{w}}_j \\ \bar{\bar{\phi}}_j \end{array} \right\} \quad (7.1)$$



Ou

$$\{\bar{u}\} = [\eta_{hE}] \{\bar{\bar{u}}\} \quad (7.2)$$

Onde:

$$[\eta_{hE}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{Bmatrix} \bar{N}_i \\ \bar{V}_i \\ \bar{M}_i \\ \bar{N}_j \\ \bar{V}_j \\ \bar{M}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\bar{u}}_i \\ \bar{\bar{w}}_i \\ \bar{\bar{\phi}}_i \\ \bar{\bar{u}}_j \\ \bar{\bar{w}}_j \\ \bar{\bar{\phi}}_j \end{Bmatrix} \quad (7.3)$$

Ou

$$\{\bar{p}\} = [\eta_{gE}] \{\bar{\bar{p}}\} \quad (7.4)$$

Onde:

$$[\eta_{gE}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

No sistema local de Timoshenko, as relações de transformação para os deslocamentos e esforços ficam:

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{w}_i \\ \bar{\phi}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{w}_j \\ \bar{\phi}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\bar{u}}_i \\ \bar{\bar{w}}_i \\ \bar{\bar{\phi}}_i \\ \bar{\bar{u}}_j \\ \bar{\bar{w}}_j \\ \bar{\bar{\phi}}_j \end{Bmatrix} \quad (7.5)$$

Ou

$$\{\bar{u}\} = [\eta_{hT}] \{\bar{\bar{u}}\} \quad (7.6)$$

Onde:

$$[\eta_{hT}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{Bmatrix} \bar{N}_i \\ \bar{V}_i \\ \bar{M}_i \\ \bar{N}_j \\ \bar{V}_j \\ \bar{M}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\bar{u}}_i \\ \bar{\bar{w}}_i \\ \bar{\bar{\phi}}_i \\ \bar{\bar{u}}_j \\ \bar{\bar{w}}_j \\ \bar{\bar{\phi}}_j \end{Bmatrix} \quad (7.7)$$

Ou

$$\{\bar{p}\} = [\eta_{gT}] \{\bar{\bar{p}}\} \quad (7.8)$$

Onde:

$$[\eta_{sT}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Desde o capítulo 3, vem sendo apresentado o sistema algébrico para soluções no contorno no sistema local de coordenadas para barras envolvendo os modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko. Essa representação algébrica pode ser escrita de forma genérica como:

$$\{\bar{u}\} + [\hat{\bar{h}}] \{\bar{u}\} = [\bar{g}] \{\bar{p}\} + \{\bar{f}\} \quad (7.9)$$

Quando as relações de transformação, dadas nas Eqs. (7.2), (7.4) para barra de Euler, ou Eqs. (7.6), (7.8) para barra de Timoshenko, forem inseridas na Eq. (7.9), o sistema algébrico da barra no SLU pode ser escrito como:

$$\{\bar{\bar{u}}\} + [\hat{\bar{\bar{h}}}] \{\bar{\bar{u}}\} = [\bar{\bar{g}}] \{\bar{\bar{p}}\} + \{\bar{\bar{f}}\} \quad (7.10)$$

Onde, para a barra de Euler-Bernoulli, fica:

$$\begin{aligned} [\hat{\bar{\bar{h}}}] &= [\eta_{hE}]^{-1} [\hat{\bar{h}}] [\eta_{hE}] \\ [\bar{\bar{g}}] &= [\eta_{sE}]^{-1} [\bar{g}] [\eta_{sE}] \\ [\bar{\bar{f}}] &= [\eta_{hE}]^{-1} [\bar{f}] \end{aligned} \quad (7.11-13)$$

Já para a barra de Timoshenko, tem-se as relações:

$$\begin{aligned} [\hat{\bar{\bar{h}}}] &= [\eta_{hT}]^{-1} [\hat{\bar{h}}] [\eta_{hT}] \\ [\bar{\bar{g}}] &= [\eta_{sT}]^{-1} [\bar{g}] [\eta_{sT}] \\ [\bar{\bar{f}}] &= [\eta_{hT}]^{-1} [\bar{f}] \end{aligned} \quad (7.14-15)$$

### 7.3 SISTEMA LOCAL UNIFICADO EXCÊNTRICO DA BARRA

Um caso corrente em barras não prismáticas é a presença de apoios excêntricos ao eixo longitudinal da estrutura conforme indicado na Fig. 7.5.

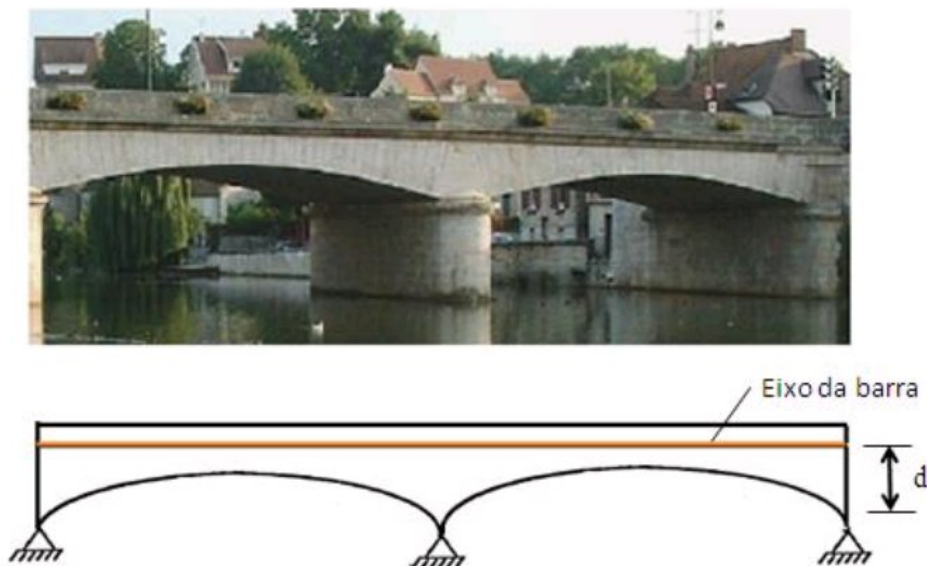


Figura 7.5- Apoios não alinhados (com excentricidade  $d$ ) com o eixo da barra

Convém notar que os graus de liberdade no sistema local unificado descritos em Eq. (7.10) são posicionados no eixo longitudinal, de forma que uma transformação adicional nesse sistema é necessária para transferir os graus de liberdade para as posições reais dos apoios, vide Fig. 7.6.

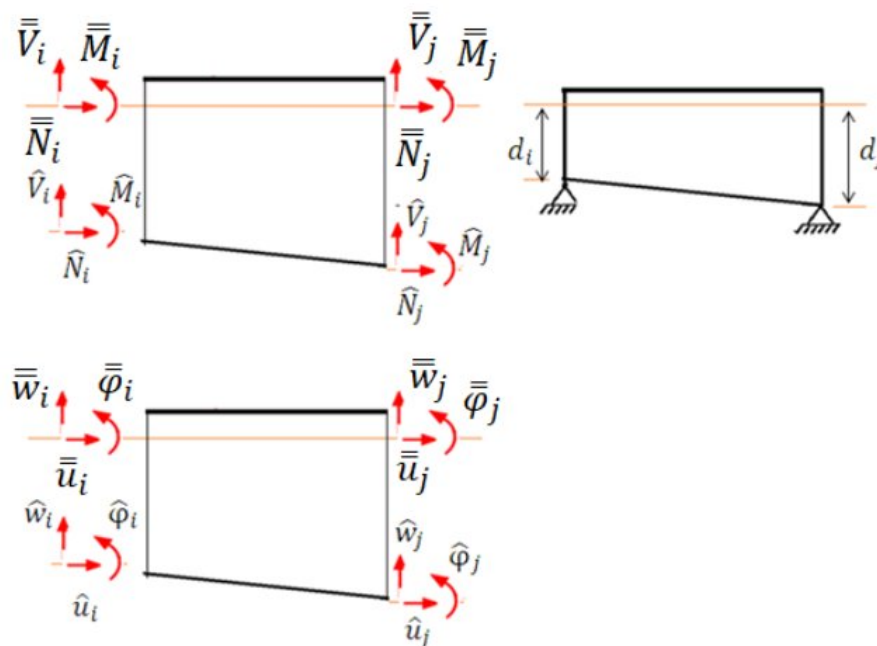


Figura 7.6- Graus de liberdade no eixo e na posição excêntrica

Assim, os deslocamentos e os esforços no sistema unificado excêntrico podem ser correlacionados com o sistema unificado como:

$$\begin{aligned}\{\bar{u}\} &= \begin{Bmatrix} \{u\}_i \\ \{u\}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [r_i] & [0] \\ [0] & [r_j] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\hat{u}\}_i \\ \{\hat{u}\}_j \end{Bmatrix} = [r] \{\hat{u}\}, \\ \{\bar{p}\} &= \begin{Bmatrix} \{p\}_i \\ \{p\}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [r_i]^T & [0] \\ [0] & [r_j]^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\hat{p}\}_i \\ \{\hat{p}\}_j \end{Bmatrix} = [r]^T \{\hat{p}\}\end{aligned}\quad (7.17-18)$$

Onde:

$$[r_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [r_j] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_j \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então, a representação algébrica no sistema local excêntrico pode ser obtida substituindo-se as Eqs. (7.17-18) na Eq. (7.10):

$$\{\hat{u}\} + [r]^{-1} [\hat{h}] [r] \{\hat{u}\} = [r]^{-1} [g] [r]^T \{\hat{p}\} + [r]^{-1} \{f\} \quad (7.19)$$

Ou

$$\{\hat{u}\} + [\hat{H}] \{\hat{u}\} = [\hat{H}] \{\hat{p}\} + \{\hat{p}\} \quad (7.20)$$

Onde:

$$[\hat{H}] = [r]^{-1} [\hat{h}] [r], [\hat{G}] = [r]^{-1} [g] [r]^T,$$

$$\{\hat{p}\} = [r]^{-1} \{f\}$$

## 7.4 SISTEMA GLOBAL DA BARRA

A representação algébrica do pórtico plano requer que as contribuições advindas das barras sejam convenientemente adaptadas de forma a descrever o comportamento de toda estrutura. Para isso, transformações nos sistemas algébricos locais unificados excêntricos devem ser efetuadas, obtendo-se assim os sistemas algébricos globais da barra.

Assim, os deslocamentos, os esforços e as forças de corpo no sistema global de coordenadas unificadas (excêntricas) são correlacionados com suas respectivas contrapartes globais como:

$$\{\hat{u}\} = [R] \{U\}, \{\hat{p}\} = [R] \{P\}, \text{ e } \{\hat{p}\} = [R] \{f\} \quad (7.21-23)$$

Define-se, então, uma relação entre as matrizes de influência locais unificadas e as de influência globais, a partir da matriz de transformação [R], como mostrado na Fig.7.7, são dadas por:

A matriz de transformação para o pórtico plano é:

$$[R] = \begin{bmatrix} [C_i] & [0] \\ [0] & [C_j] \end{bmatrix} \quad (7.24)$$

Onde,  $[C_i] = \begin{bmatrix} C_{xi} & C_{yi} & 0 \\ -C_{yi} & C_{xi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $[C_j] = \begin{bmatrix} C_{xj} & C_{yj} & 0 \\ -C_{yj} & C_{xj} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  e  $[0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $C_x$  e  $C_y$  são os cossenos diretores da barra em relação ao sistema de coordenadas global. Vale ressaltar que quando a barra é de eixo reto  $[C_i] = [C_j]$ .

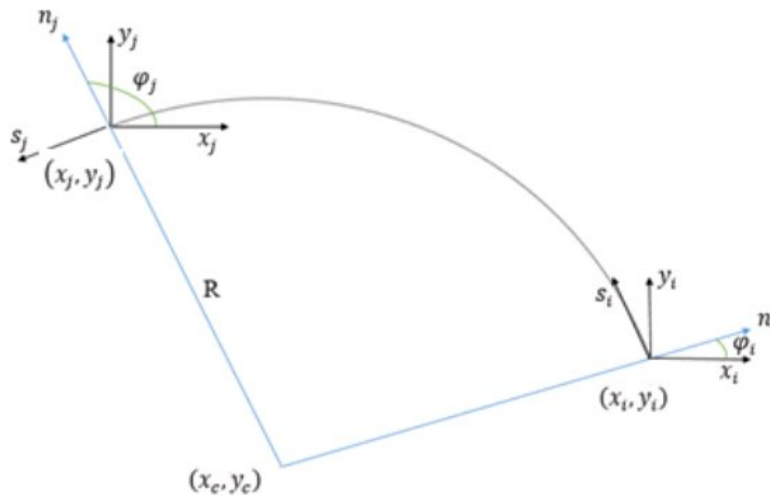


Figura 7.7- Coordenadas globais (x,y) e coordenadas locais (n,s)

Onde:

$$C_{xi} = \cos \varphi_i = \frac{x_i - x_c}{R}$$

$$C_{yi} = \sin \varphi_i = \frac{y_i - y_c}{R}$$

$$C_{xj} = \cos \varphi_j = \frac{x_j - x_c}{R}$$

$$C_{yj} = \sin \varphi_j = \frac{y_j - y_c}{R} \quad (7.24a-d)$$

Da substituição Das Eqs. (7.21-23) na Eq. (7.20), tem-se:

$$\{U\} + [R]^T [\hat{H}] [R] \{U\} = [R]^T [\hat{G}] [R] \{P\} + [R]^T \{f\} \quad (7.25)$$

Ou ainda a Eq. (7.24) pode ser escrita como:

$$\{U\} + [H] \{U\} = [G] \{P\} + \{F\} \quad (7.26)$$

Onde:

$$[H] = [R]^T [\hat{H}] [R],$$

$$[G] = [R]^T [\hat{G}] [R], \{F\} = [R]^T \{f\},$$

$$\{F\} = [R]^T \{f\}$$

## 7.5 SISTEMA ALGÉBRICO DA ESTRUTURA

Quando duas ou mais barras incidem para um mesmo nó da estrutura deve ser levada em conta a continuidade dos deslocamentos e as condições de equilíbrio. No caso do pórtico plano, a definição de um nó virtual nas extremidades dessas barras é suficiente para a verificação do equilíbrio nó a nó da estrutura.

Neste capítulo, para a discussão sobre a montagem do sistema global dos pórticos serão consideradas duas barras convergentes. Neste caso isola-se o nó 2 e indica-se as barras (1) e (2) que convergem para ele, conforme ilustrado na Fig. 7.8.

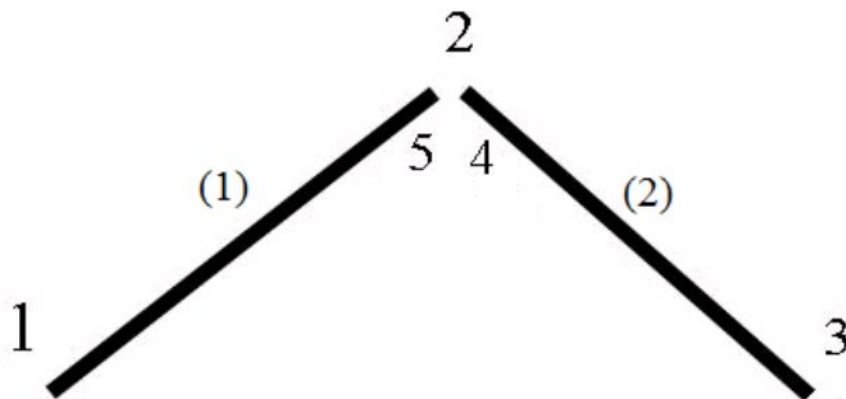


Figura 7.8 - Barras de pórtico convergindo. CRUZ (2012)

A representação algébrica dada pela Eq.(7.16) pode ser escrita genericamente para o segmento 1 como:

$$\begin{cases} [H_{11}]\{U_1\} + [H_{12}]\{U_5\} = [G_{11}]\{P_1\} + [G_{12}]\{P_5\} \\ [H_{21}]\{U_1\} + [H_{22}]\{U_5\} = [G_{21}]\{P_1\} + [G_{22}]\{P_5\} \end{cases} \quad (7.27-28)$$

Onde:

$$\begin{aligned} \{U_1\}^T &= [u_i \quad w_i \quad \phi_i], \quad \{U_5\}^T = [u_j \quad w_j \quad \phi_j], \\ \{P_1\}^T &= [N_i \quad V_i \quad M_i], \quad \{P_5\}^T = [N_j \quad V_j \quad M_j] \end{aligned}$$

Já para o segmento 2, as representações algébricas apresentadas nas Eq.(7.16), pode ser escrita genericamente como:

$$\begin{cases} [\hat{H}_{22}]\{U_4\} + [\hat{H}_{23}]\{U_3\} = [\hat{G}_{22}]\{P_4\} + [\hat{G}_{23}]\{P_3\} \\ [H_{32}]\{U_4\} + [H_{33}]\{U_3\} = [G_{32}]\{P_4\} + [G_{33}]\{P_3\} \end{cases} \quad (7.29-30)$$

Onde:

$$\begin{aligned} \{U_3\}^T &= [u_m \quad w_m \quad \phi_m], \quad \{U_4\}^T = [u_k \quad w_k \quad \phi_k], \\ \{P_3\}^T &= [N_m \quad V_m \quad M_m], \quad \{P_4\}^T = [N_k \quad V_k \quad M_k] \end{aligned}$$

Aplicando as condições de compatibilidade de deslocamentos para os segmentos 1 e 2 na seção transversal do nó como mostrado na Fig.7.8, tem-se:

$$\{U_2\} = \{U_4\} = \{U_5\} \quad (7.31)$$

Além disso, aplicando-se as equações de equilíbrio nas forças que atuam no nó como mostrado na Fig.7.9, resulta matricialmente em:

$$\{P_5\} + \{P_4\} + \{F\} = \{0\} \quad (7.32)$$



onde:  $\{F\}$  é o vetor que contém as forças e momentos diretamente aplicados no nó 2;  $\{P_5\}$  e  $\{P_4\}$  são os vetores que contém os esforços à esquerda e à direita desse nó, respectivamente.

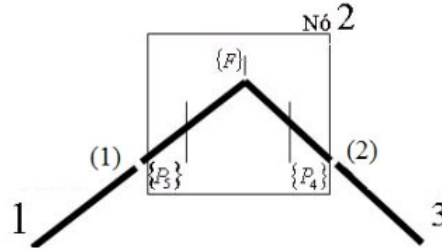


Figura 7.9 - Condição Compatibilidade e de Equilíbrio no nó. CRUZ (2012)

Substituindo-se as condições de compatibilidade de deslocamento, de acordo com a Eq. (7.31), e as condições de equilíbrio, conforme a Eq. (7.32), nas representações algébricas indicadas nas Eq. (7.27-28) e Eq. (7.29-30), o sistema algébrico da estrutura pode ser reagrupado como:

$$\begin{bmatrix} [H_{11}] & [H_{12}] & [0] & [0] & -[G_{12}] \\ [H_{21}] & [H_{22}] & [0] & [0] & -[G_{22}] \\ [0] & [H_{32}] & [H_{33}] & -[G_{32}] & [0] \\ [0] & [\hat{H}_{22}] & [\hat{H}_{23}] & -[\hat{G}_{22}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [I] & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_1\} \\ \{U_4\} \\ \{U_3\} \\ \{P_4\} \\ \{P_5\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G_{11}] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [G_{21}] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [G_{33}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [\hat{G}_{23}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \{0\} \\ \{P_3\} \\ \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (7.33)$$

## CAPÍTULO VIII

### EXEMPLOS NUMÉRICOS

Neste capítulo são apresentados os resultados das análises estáticas de estruturas formadas por barras com diferentes formas da seção transversal e sua variação, diferentes condições de contorno e carregamentos, e diferentes descontinuidades de domínio segundo a teoria de Euler-Bernoulli e Timoshenko. Os resultados do MEC são comparados com soluções analíticas e soluções numéricas conforme sua disponibilidade

#### 8.1 COLUNAS NÃO PRISMÁTICAS SOB CARGA DE COMPRESSÃO.

Sejam colunas de comprimento  $L=4\text{m}$ , engastadas na base, e módulo de elasticidade  $E=2.10^7\text{Pa}$  submetidas a uma carga de compressão  $P=200\text{ N}$  na extremidade livre. Na Fig 8.1 é mostrada uma coluna de seção retangular com variação apenas na altura  $h$ , sendo a área da extremidade livre com  $A_0 = bh_0 = 2,5 \times 10^{-3}\text{m}^2$  e a área do engaste  $A_L = bh_L = 40 \times 10^{-3}\text{m}^2$ . Já na Fig. 8.2 está indicada a coluna associada a um tronco de cone com diâmetro na seção livre de  $d_0 = 5 \times 10^{-2}\text{m}$  e no engaste de  $d_L = 2 \times 10^{-1}\text{m}$ . Na Tab. 8.1 são mostrados os resultados do MEC e das soluções analíticas para os deslocamentos axiais na extremidade livre.

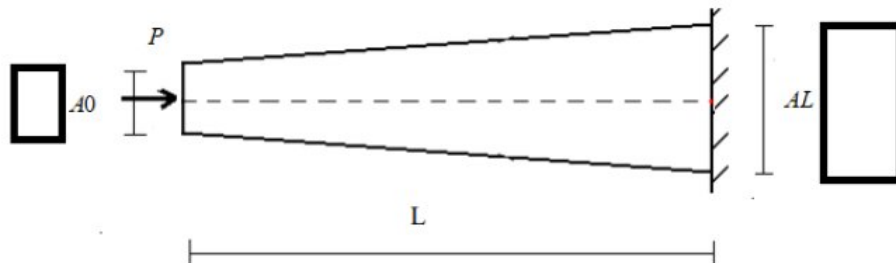


Figura 8.1- Barra retangular não prismática sob carga axial  $P$ .

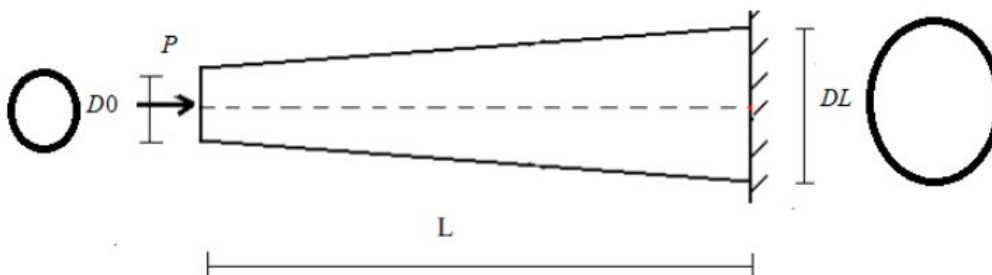


Figura 8.2- Barra tronco de cone sob carga axial  $P$ .

Tabela 8.1 Deslocamento  $u_0$  (mm) na extremidade livre da barra (P=200N)

| Tipo                          | MEC  | Exato |
|-------------------------------|------|-------|
| Tronco de cunha<br>retangular | 2,96 | 2,96  |
| Tronco de Cone                | 5,09 | 5,09  |

Convém notar que há boa concordância entre as respostas do MEC e a exata conforme indicado na Tab. 8.1

Os deslocamentos analíticos da extremidade livre para as colunas não-prismática retangular e tronco de cone são dadas, respectivamente, por:

$$u_0 = \frac{P}{E\alpha} \ln \left[ \frac{A_L}{A_0} \right] \quad (8.1)$$

$$u_0 = \frac{-P}{E\pi} \left[ \frac{L}{R_L - R_0} \right] \left[ \frac{1}{R_L} - \frac{1}{R_0} \right] \quad (8.2)$$

$$\text{Onde: } \alpha = \frac{A_L - A_0}{L}, R_L = \frac{d_L}{2} \text{ e } R_0 = \frac{d_o}{2}.$$

## 8.2 COLUNAS SUBMETIDAS A CARREGAMENTOS AXIAIS DISTRIBUIDOS

Seja uma coluna de comprimento  $L=4\text{m}$ , engastada na base, e módulo de elasticidade  $E=2.10^7$  Pa submetidas a carregamentos axiais distribuídos: a) uniforme  $P_1=P_2=5\text{N}$  b) triangular  $P_1=0\text{N}$  e  $P_2=5\text{N}$  e c) trapezoidal  $P_1=5\text{N}$  e  $P_2=10\text{N}$ . Na Fig 8.3 representa-se uma coluna de seção retangular com variação apenas na altura  $h$ , sendo a área da extremidade livre com  $A_0 = bh_0 = 2,5 \times 10^{-3} \text{m}^2$  e a área do engaste  $A_L = bh_L = 40 \times 10^{-3} \text{m}^2$ . Na Tab. 8.2 são mostrados os resultados do MEC e das soluções analíticas para os deslocamentos axiais na extremidade livre.

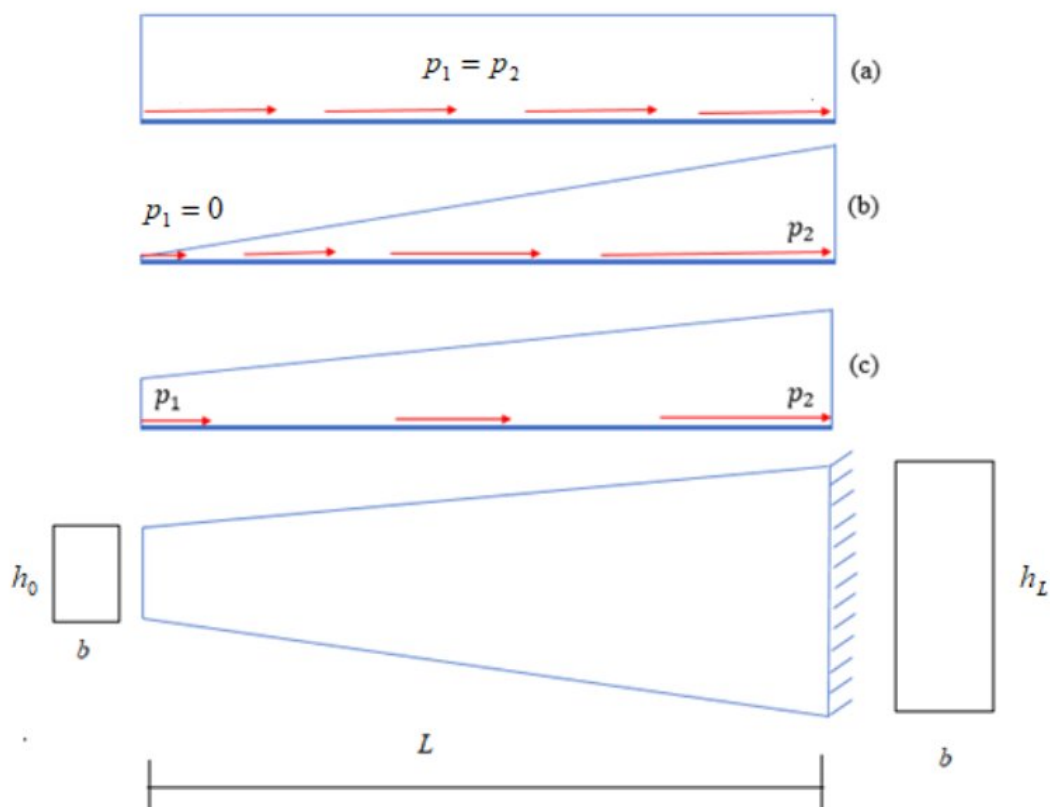


Figura 8.3- Barra retangular não prismática, engastada livre, submetida a um carregamento uniformemente distribuído (a) Triangular (b) e trapezoidal (c).

Tabela 8.2 Deslocamento  $u_0$  (mm) na extremidade livre da barra

| Carregamento         | MEC                     | Eq. (8.3)               |
|----------------------|-------------------------|-------------------------|
| Caso a-(Uniforme)    | $8,695 \times 10^{-2}$  | $8,695 \times 10^{-2}$  |
| Caso b-(Triangular)  | $2,3768 \times 10^{-2}$ | $2,3768 \times 10^{-2}$ |
| Caso c-(Trapezoidal) | $1,1071 \times 10^{-1}$ | $1,1071 \times 10^{-1}$ |

O resultado analítico para o deslocamento axial na extremidade livre é:

$$u(x) = \frac{1}{E} \int_0^L \left[ \frac{0,5 \left[ \frac{p_2 - p_1}{L} \right] x^2 + p_1 x}{\left[ \frac{A_L - A_0}{L} \right] x + A_0} \right] dx \quad (8.3)$$

A partir da Tab. 8.2 é possível notar que os resultados obtidos no MEC recuperam com sucesso as respostas exatas.

### 8.3 FLEXÃO DE TRONCO DE CONE SOB CARGA CONCENTRADA

Neste exemplo é adotada uma viga circular não prismática e simétrica, engastada de comprimento  $L=4\text{m}$ , diâmetro inicial  $D_0=0,6\text{m}$ , diâmetro final  $D_L=1,2\text{m}$ , módulo de elasticidade  $E=2 \times 10^7 \text{Pa}$ , submetida a uma carga transversal concentrada de  $P=15\text{N}$ , como mostrada na Fig 8.4. Na Tab 8.3 são mostradas, respectivamente, o deslocamento transversal na extremidade livre e as reações de apoio no engaste. Além disso, na Fig 8.5 são apresentados os deslocamentos transversais e inclinação da elástica ao longo do domínio da barra.

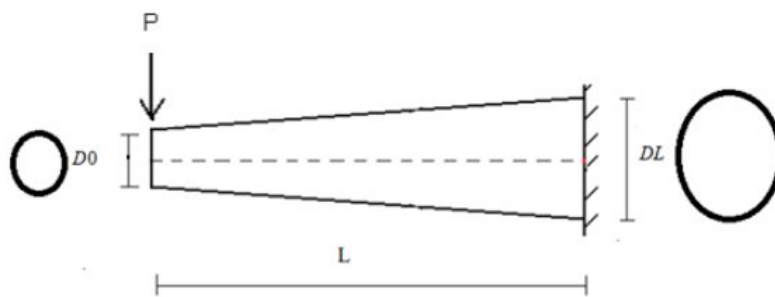


Figura 8.4- Barra circular não prismática, engastada livre, submetida a um carregamento concentrado.

Tabela 8.3 Deslocamento transversal no balanço e esforços no engaste

| <b>Campos</b>  | <b>MEC</b> | <b>Eq.(8.4)</b> |
|----------------|------------|-----------------|
| $w(\text{mm})$ | 0,09315    | 0,09315         |
| $V_L (N)$      | -15        | -15             |
| $M_L (Nm)$     | 60         | 60              |

Segundo MCCUTCHEON(1983), o momento fletor é dado por  $M = PL\xi$  e os deslocamentos transversais podem ser obtidos pela seguinte integração:

$$w(x) = \frac{pL^3}{EI_0} \int_0^{\xi_A} \left[ \frac{\xi^2}{[1 + (r-1)\xi]^4} \right] d\xi \quad (8.4)$$

Onde:  $I_0 = \frac{\pi}{64} [D_0]^4$ ,  $r = \frac{D_L}{D_0}$  e  $x = \xi L$

A solução analítica de Eq. (8.4) é dada por:

$$w(x) = \frac{1}{EI_a} \left[ \frac{L^2 p(3r-2)x}{6r^3(r-1)^2} - \frac{L^3 p(3r^2-3r+1)}{3r^3(r-1)^3} \right] + \frac{1}{EI_a} \left[ -\frac{pL^5}{6(r-1)^3 [L + (r-1)x]^2} + \frac{pL^4}{2(r-1)^3 [L + (r-1)x]} \right] \quad (8.5)$$

Quando é setado  $\xi_A = 1$  em Eq.(8.4), obtém-se o valor  $w = \frac{pL^3}{3EI_A} \frac{1}{r^3}$  dado por

MCCUTCHEON (1983). O esforço cortante é dado por  $V = -P$ . A inclinação da elástica pode ser obtida pela derivação da Eq. (8.5), cuja solução analítica é:

$$\frac{dw(x)}{dx} = \frac{1}{EI_a} \left[ \frac{L^2 p(3r-2)}{6r^3(r-1)^2} - \frac{L^4 p[L + 3(r-1)x]}{6(r-1)^2 [L + (r-1)x]^3} \right] \quad (8.6)$$

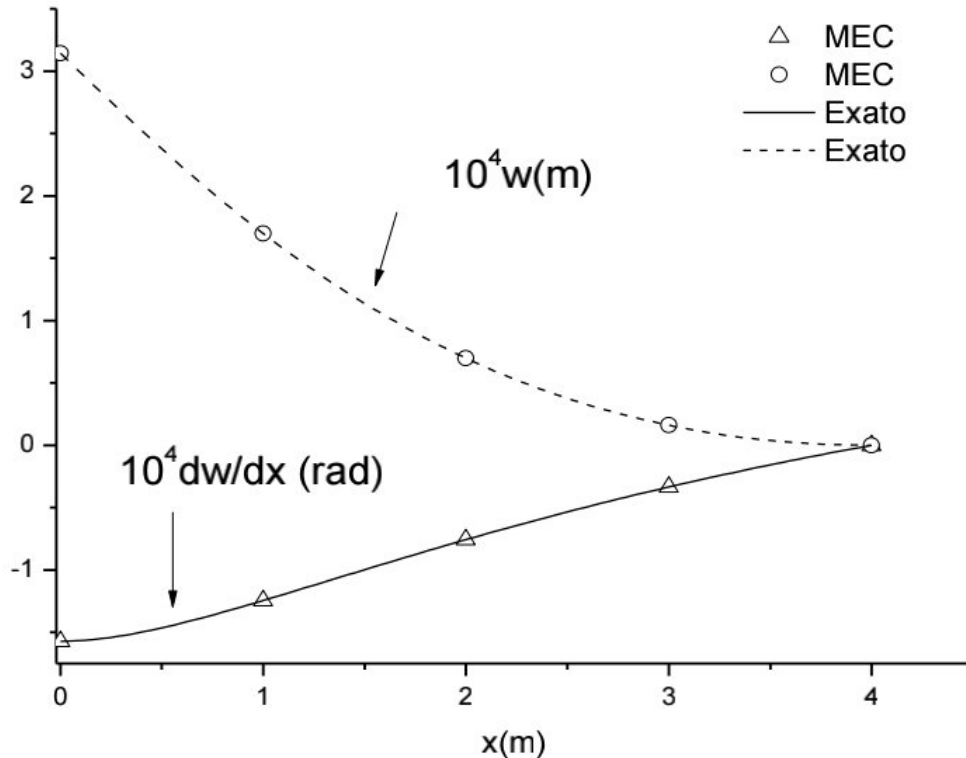


Figura 8.5- Deslocamentos transversais e inclinação da elástica ao longo do domínio

A partir da Fig.8.5, pode-se observar um excelente desempenho das soluções do MEC frente as respostas analíticas dadas nas Eqs.(8.5) e (8.6).



## 8.4 VIGAS RETANGULARES EM BALANÇO SOB CARGA CONCENTRADA

Aqui é admitida que uma viga de largura  $b=1\text{m}$ , altura inicial  $h_1=1\text{m}$ , submetida a uma carga  $P=10\text{N}$  na extremidade livre como mostrado na Fig 8.6. As propriedades do material são  $E=2.10^7\text{Pa}$ ,  $G=10^7\text{Pa}$  e  $k=5/6$ . Na Tab. 8.4 são mostrados os deslocamentos transversais para 4 diferentes razões de aspecto  $L/h_2$  e o erro relativo  $e = \frac{100(w_T - w_E)}{w_T}$  da utilização dos modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko.

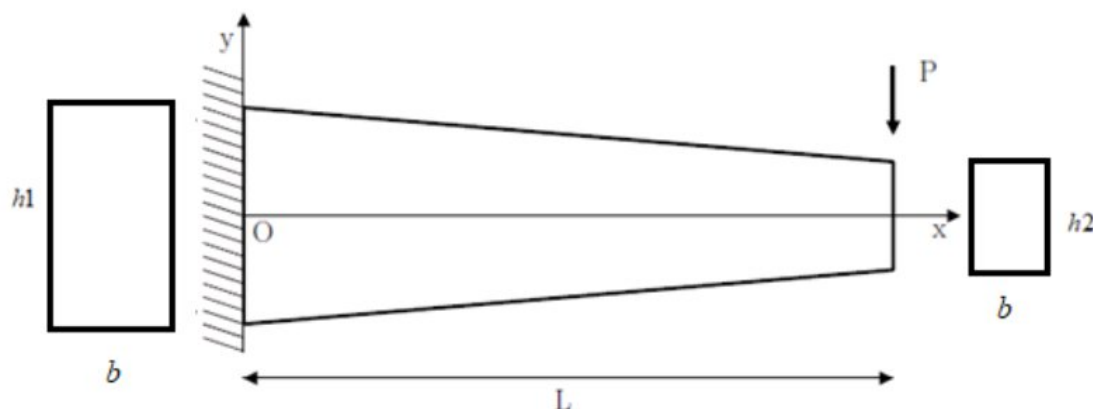


Figura 8.6- Viga retangular não prismática, engastada submetida a carga concentrada.

Tabela 8.4 Deslocamento transversal  $w(x10^{-4}m)$  em função da razão de aspecto

| L/h2 | Euler-Bernoulli<br>$w_E(x10^{-4}m)$ |        | Timoshenko<br>$w_E(x10^{-4}m)$ |        | Erro entre<br>modelos<br>$e(\%)$ |
|------|-------------------------------------|--------|--------------------------------|--------|----------------------------------|
|      | MEC                                 | Exata  | MEC                            | Exata  |                                  |
| 3    | 0,1104                              | 0,1104 | 0,1354                         | 0,1354 | 18,464                           |
| 5    | 0,5111                              | 0,5111 | 0,5527                         | 0,5527 | 7,527                            |
| 7    | 1,4025                              | 1,4025 | 1,4607                         | 1,4607 | 3,984                            |
| 10   | 4,0888                              | 4,0888 | 4,172                          | 4,172  | 1,994                            |

Os resultados do MEC recuperam com sucesso as respostas analíticas dos modelos clássico (Euler) e de Timoshenko dados por BELTEMPO (2013). À medida que a razão de aspecto  $L/h_2$  aumenta, os efeitos da deformação por cortante vão sendo reduzidos, de forma que para razões superiores a 7 os resultados de Timoshenko já se aproximam dos de Euler.

### 8.5 FLEXÃO DE TRONCO DE CONE SOB CARREGAMENTO UNIFORME

Seja uma barra tronco de cone em flexão, simplesmente apoiada e submetida a um carregamento uniformemente distribuído  $p_z=10\text{N/m}$ , conforme indicado na Fig. 8.7. As propriedades geométricas são comprimento  $L= 4\text{m}$ , diâmetro inicial  $D_0=0,6\text{m}$ , diâmetro final  $D_L=1,2\text{m}$  e o módulo de elasticidade  $E=2.10^7\text{Pa}$ .

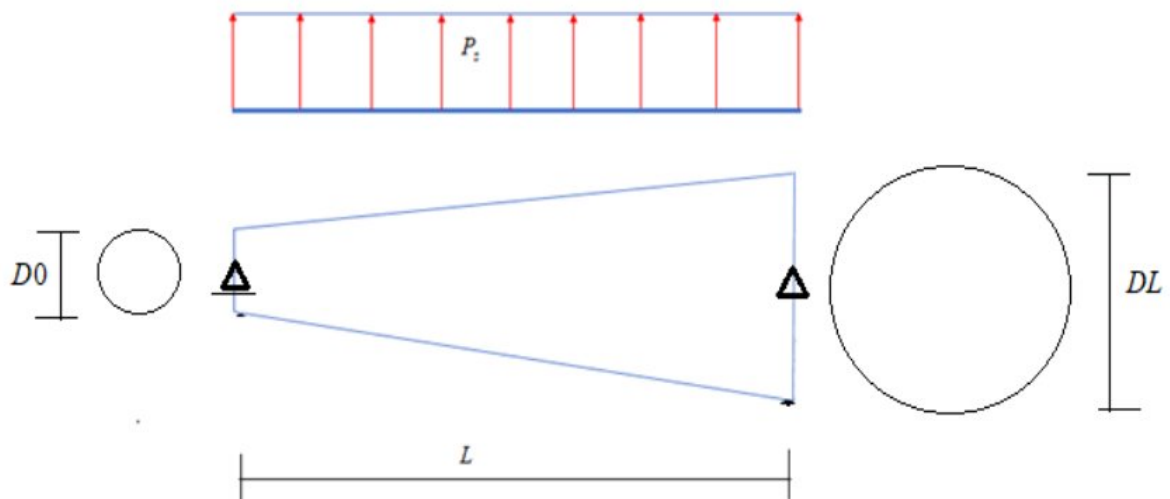


Figura 8.7- Viga circular não prismática, simplesmente apoiada, submetida a uma carga uniformemente distribuída.

Já nas Tabs. 8.5 e 8.6 estão os mostrados os resultados do MEC e os analíticos para deslocamentos transversais e as inclinações da elástica.

Tabela 8.5 Deslocamento transversal  $w(m)$  ao longo do domínio da viga.

| x    | Euler-Bernoulli |          |
|------|-----------------|----------|
|      | MEC             | Eq.(7.7) |
| 0    | 0               | 0        |
| L/4  | 0,05174         | 0,05174  |
| L/2  | 0,05959         | 0,05959  |
| 3L/4 | 0,03634         | 0,03634  |
| L    | 0               | 0        |



Tabela 8.6 Inclinações da elástica  $dw/dx(rad)$  ao longo do domínio da viga.

| x    | Euler-Bernoulli |          |
|------|-----------------|----------|
|      | MEC             | Exata    |
| 0    | 0,0666          | 0,0666   |
| L/4  | 0,02971         | 0,02971  |
| L/2  | -0,01103        | -0,01103 |
| 3L/4 | -0,03239        | -0,03239 |
| L    | -0,03819        | -0,03819 |

Os resultados analíticos para o modelo de Euler-Bernoulli são dados por MCCUTCHEON (1983) são:

$$w(x) = \frac{pL^4}{2EI_a(r-1)^4} \left[ -\ln\left(1 + (r-1)\frac{x}{L}\right) - \frac{(r+1)}{2\left[1 + (r-1)\frac{x}{L}\right]} \right] + \frac{pL^4}{2EI_a(r-1)^4} \left[ \frac{r}{6\left[1 + (r-1)\frac{x}{L}\right]^2} + \left[ \ln(r) - \frac{(r^2-1)}{3r} \right] \frac{x}{L} + \frac{(2r+3)}{6} \right] \quad (8.7)$$

$$\frac{dw(x)}{dx} = \frac{pL^3}{2EI_a(r-1)^3} \left[ -\frac{1}{1 + (r-1)\frac{x}{L}} + \frac{(r+1)}{2\left[1 + (r-1)\frac{x}{L}\right]^2} - \frac{r}{3\left[1 + (r-1)\frac{x}{L}\right]^3} \right] + \frac{pL^3}{2EI_a(r-1)^3} \left[ \frac{\ln(r) - \frac{(r^2-1)}{3r}}{r-1} \right] \quad (8.8)$$

Onde  $r = DL/D0$

Os resultados mostrados nas Tabs. 8.5 e 8.6 mostram uma excelente concordância as respostas do MEC com os analíticos.

## 8.6 FLEXAO DE TRONCO DE CONE SOB CARGA TRAPEZOIDAL

Seja um tronco de cone, simplesmente apoiada e submetida a um carregamento trapezoidal  $p_{1z}(x) = 5N/m$ ,  $p_{2z}(x) = 10N/m$ , conforme indicado na Fig. 8.8. As propriedades geométricas são comprimento  $L = 4m$ , diâmetro inicial  $D0 = 0.6m$ , diâmetro final  $DL = 1.2m$  e o módulo de elasticidade  $E = 2.10^7 Pa$ . Na Fig.8.9 são mostradas as respostas do MEC e as soluções analíticas para os deslocamentos transversais e inclinações da elástica ao longo do domínio da barra. Pode-se notar uma excelente concordância de resultados do MEC e analíticos na Fig.8.9.

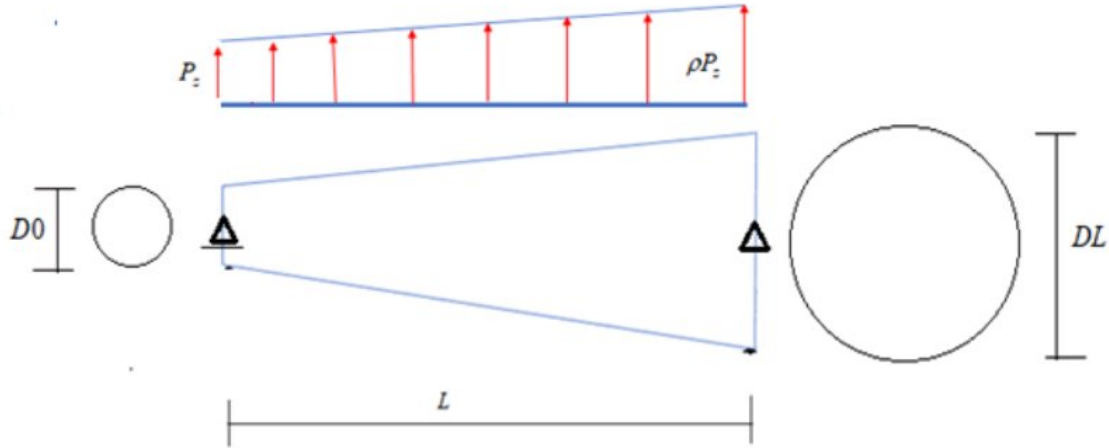


Figura 8.8- Viga circular não prismática, simplesmente apoiada, sob carga trapezoidal.

Segundo MCCUTCHEON (1983), as soluções analíticas os deslocamentos transversais e inclinações da elástica para o modelo de Euler-Bernoulli são dadas por:

$$w(x) = \frac{5p_{1z}(x)L^4}{384EI_a} \frac{6.4}{(r-1)^4} \left[ 2K \ln(K-1) - \frac{(r^2+r+1)}{K} + \frac{(r^2+r)}{3K^2} \right] + \frac{(2r^2+2r+9)}{3} - \frac{5p_{1z}(x)L^4}{384EI_a} \frac{6.4}{(r-1)^4} \left[ 2r \ln r + \frac{(r-1)(2r^2-5r+2)}{3r} + \frac{(r^2+r)}{3K^2} \right] \frac{x}{L} \quad (8.9)$$

$$\frac{dw(x)}{dx} = \frac{pL^3}{2EI_a(r-1)^3} \left[ -\frac{1}{1+(r-1)\frac{x}{L}} + \frac{(r+1)}{2\left[1+(r-1)\frac{x}{L}\right]^2} - \frac{r}{3\left[1+(r-1)\frac{x}{L}\right]^3} \right] + \frac{pL^3}{2EI_a(r-1)^3} \left[ \frac{\ln(r) - \frac{(r^2-1)}{3r}}{r-1} \right] \quad (8.10)$$

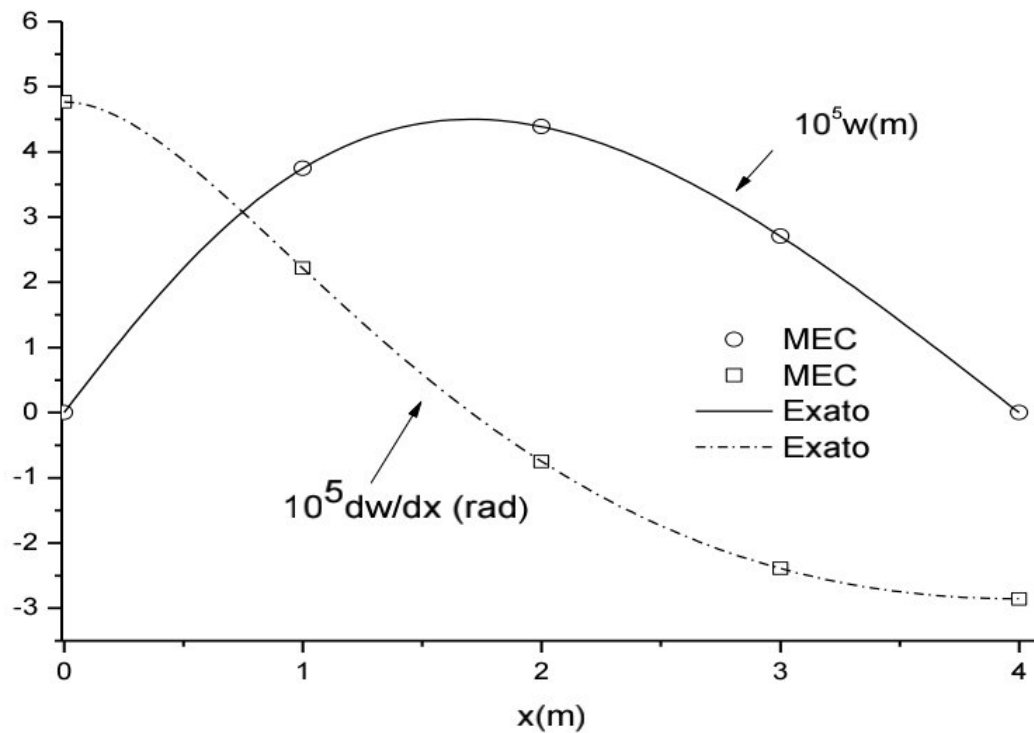


Figura 8.9- Deslocamentos transversais e inclinação da elástica no domínio da barra.

## 8.7 ARCO ESBELTO SOB CARREGAMENTO DISTRIBUIDO UNIFORME

Seja um o arco submetido a um carregamento transversal  $p_z(x) = 100 \text{ N/m}$  conforme indicado na Fig.8.10. A seção retangular tem  $b = 0,4 \text{ m}$ ,  $h_1 = 0,4 \text{ m}$  e  $h_2$  com três valores diferentes. Além disso, o comprimento  $L = 6 \text{ m}$  e  $R = 12 \text{ m}$ . Já o módulo da elasticidade longitudinal é  $30 \text{ GPa}$  e com coeficiente de Poisson  $\nu = 0$ .

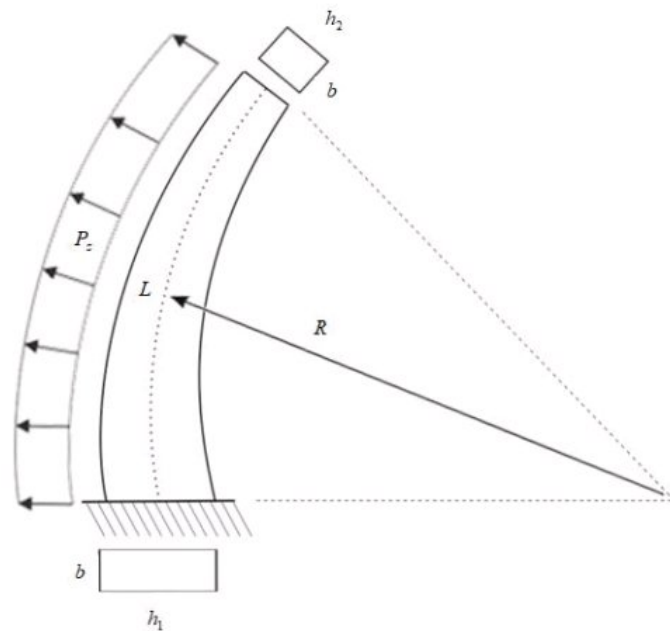


Figura 8.10- Deslocamentos transversais e inclinação da elástica ao longo do domínio.

Os resultados do MEC para os deslocamentos (radial e axial) e rotação da extremidade livre são mostrados para diferentes valores da altura final  $h_2$  na Tab. 8.7 para teoria de Euler-Bernoulli. Além disso, as respostas analíticas para o modelo de Timoshenko quando o arco é prismático são dadas por NASCIMENTO JUNIOR (2017) como:

$$u = u_h + u_p, \quad (8.11)$$

$$w = w_h + w_p, \quad (8.12)$$

$$\varphi = \varphi_h + \varphi_p. \quad (8.13)$$

Onde as parcelas associadas com a soluções homogêneas são dadas por:

$$\varphi_h = \frac{A_1 x^3}{6} + \frac{A_2 x^2}{2} + A_3 x + A_4, \quad (8.14)$$

$$w_h = \frac{B_1 x^4}{24} + \frac{B_2 x^3}{6} + \frac{B_3 x^2}{2} + B_4 x + B_5, \quad (8.15)$$

$$u_h = \frac{C_1 x^5}{120} + \frac{C_2 x^4}{24} + \frac{C_3 x^3}{6} + \frac{C_4 x^2}{2} + C_5 x + C_5. \quad (8.16)$$

Onde as constantes  $A_i, B_i, C_i$  para o arco engastado-livre são

$$B_1 = -A_1, B_2 = -A_2, B_3 = -A_3 + \frac{A_1}{\chi A_{11} A_{55}},$$

$$B_4 = -A_4 + \frac{A_2}{\chi A_{11} A_{55}}, \quad C_1 = -\frac{A_1}{R}, C_2 = -\frac{A_2}{R},$$

$$C_3 = \left\{ \left( A_3 - \frac{A_1 D_{11}}{A_{55}} \right) \frac{1}{R} + \frac{(A_1 B_{11})}{A_{11}} \left[ \frac{B_{11}}{A_{55} R} - 1 \right] \right\},$$

$$C_4 = \left\{ \left( A_4 - \frac{A_2 D_{11}}{A_{55}} \right) \frac{1}{R} + \frac{(A_2 B_{11})}{A_{11}} \left[ \frac{B_{11}}{A_{55} R} - 1 \right] \right\},$$

$$C_5 = \frac{A_1 D_{11} R}{A_{11}} - \frac{A_3 B_{11}}{A_{11}} - \frac{B_5}{R} - \frac{A_1 B_{11}^2 R}{A_{11}^2}, \quad \chi = -\frac{1}{A_{11} D_{11}} \text{ e } B_{11} = 0.$$

E as parcelas associadas às soluções particulares do carregamento transversal uniforme são dadas por:

$$\varphi_p = A_{11} [p_z x^3 / 6], \quad (8.17)$$

$$w_p = -[p_z x^2 / 2] / A_{55} - [p_z x^3 / 6] / (A_{55} R) - \chi \{ A_{11} [p_z x^4 / 24], \quad (8.18)$$

$$u_p = [p_z x^3 / 6] / (R / A_{55}) + (\chi / R) \{ A_{11} [p_z x^5 / 120] \} - (\chi B_{11} / A_{11}) \{ A_{11} p_z x \}. \quad (8.19)$$

Tabela 8.7- Deslocamentos (axiais e radiais) e rotação para o arco sob carga distribuída

| $h_2$ (m)          | $u$ (m)                 | $w$ (m)               | $dw/dx$ (rad)         |
|--------------------|-------------------------|-----------------------|-----------------------|
| 0,200              | $-6,86 \times 10^{-5}$  | $3,69 \times 10^{-4}$ | $9,19 \times 10^{-5}$ |
| 0,300              | $-5,80 \times 10^{-5}$  | $2,98 \times 10^{-4}$ | $6,94 \times 10^{-5}$ |
| 0,395              | $-5,09 \times 10^{-5}$  | $2,55 \times 10^{-4}$ | $5,67 \times 10^{-5}$ |
| 0,400 ( analítico) | $-5,092 \times 10^{-5}$ | $2,54 \times 10^{-4}$ | $5,62 \times 10^{-5}$ |

Convém notar que a solução do MEC para arcos não prismáticos é capaz recuperar valores para casos em que as estruturas já tendem a ser prismáticas.

## 8.8 ARCO COMPACTO SOB CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO UNIFORME

Seja um arco não prismático de seção retangular em balanço conforme indicado na Fig.8.11. A estrutura está submetida a dois casos de carregamentos concentrados na extremidade livre. O primeiro está associado a uma força transversal de  $F_z=5000\text{N}$  e o segundo é um momento de  $M=300\text{Nm}$ . A seção transversal é retangular com largura constante  $b=0,4\text{m}$  e com altura inicial de  $h_1=1,2\text{m}$ . Além disso, o arco possui comprimento  $L=6\text{m}$ . O módulo da elasticidade longitudinal é  $30\text{GPa}$  e com coeficiente de Poisson  $\nu=0$ .

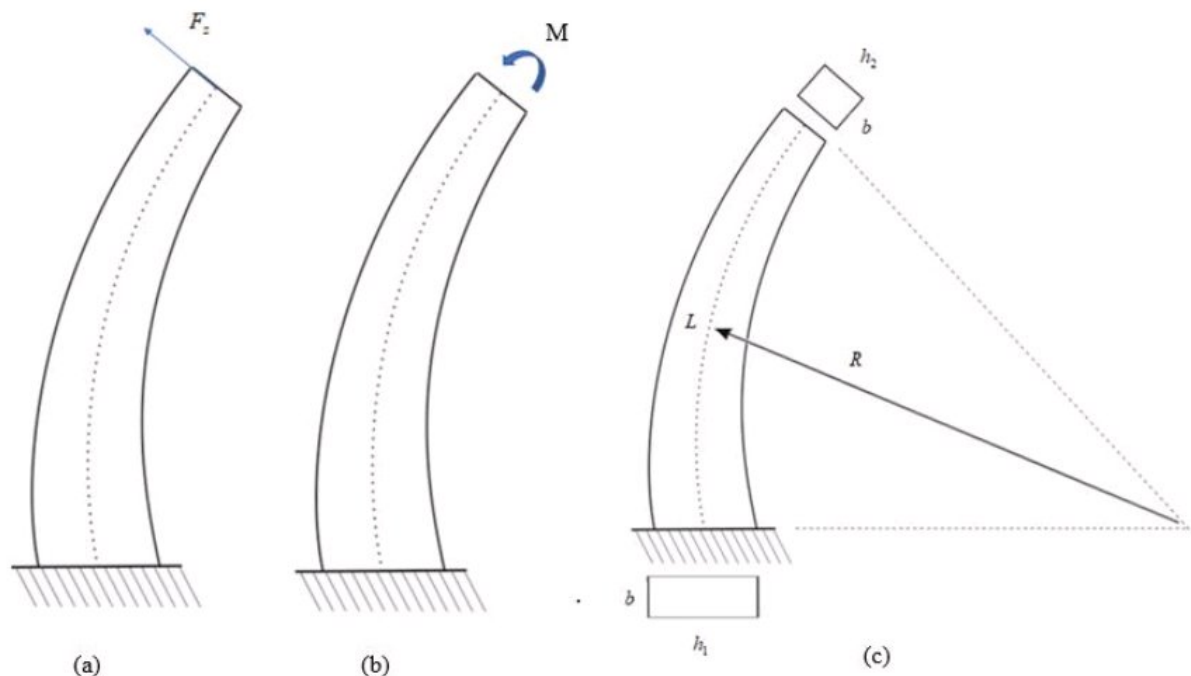


Figura 8.11- Arco sob carregamentos concentrados.

Assumindo  $\beta = L/h_1 = 5$  e  $L/R = 0.5$ , os deslocamentos radiais e axiais da extremidade livre são mostrados para diferentes valores da altura final  $h_2$  nas Tabs. 8.8 e 8.19. considerando, respectivamente, a aplicação independente das forças  $F_x$ ,  $F_z$  e do momento  $M$ . Os resultados do MEC são mostrados para as teorias de Timoshenko e Euler-Bernoulli. Além disso, as respostas analíticas nas Tabs. 8.8 e 8.9 são associadas ao arco prismático e são dadas nas Eqs.(8.11), (8.12), (8.13). As parcelas homogêneas para o arco engastado-livre são as mesmas descritas nas Eq.(8.14), (8.15) e (8.15). Já os efeitos das soluções particulares devem, agora, levar em conta o fato das forças externas serem concentradas. Segundo NASCIMENTO JUNIOR (2017) as soluções particulares ficam:

$$\varphi_p = \chi \{ [A_{11}M\langle x - \hat{x} \rangle^0 - B_{11}F_x\langle x - \hat{x} \rangle^0] + A_{11}F_z\langle x - \hat{x} \rangle + (A_{11}/R) \left[ \frac{F_x\langle x - \hat{x} \rangle^2}{2} \right] \},$$

$$w_p = -F_z\langle x - \hat{x} \rangle^0/(A_{55}) - F_x\langle x - \hat{x} \rangle/(A_{55}R) +$$

$$-\chi \{ A_{11}M\langle x - \hat{x} \rangle - B_{11}F_x\langle x - \hat{x} \rangle + A_{11} \left[ \frac{F_z\langle x - \hat{x} \rangle^2}{2} \right] + A_{11} \left[ \frac{F_x\langle x - \hat{x} \rangle^3}{6} \right] \},$$

$$u_p = -F_x\langle x - \hat{x} \rangle^0/(A_{11}) + F_x\langle x - \hat{x} \rangle^2/(2R^2A_{55}) + F_z\langle x - \hat{x} \rangle/(RA_{55}) + \left( \frac{\chi}{R} \right) \{ A_{11} \left[ \frac{M\langle x - \hat{x} \rangle^2}{2} \right] - B_{11} \left[ \frac{F_x\langle x - \hat{x} \rangle^2}{2} \right] + A_{11} \left[ \frac{F_z\langle x - \hat{x} \rangle^3}{6} \right] - (\chi B_{11}/A_{11}) \{ A_{11}M\langle x - \hat{x} \rangle^0 - B_{11}F_x\langle x - \hat{x} \rangle^0 + A_{11}F_z\langle x - \hat{x} \rangle + (A_{11}/R) \left[ \frac{F_x\langle x - \hat{x} \rangle^2}{2} \right] \},$$

Onde:

$$\langle x - \hat{x} \rangle^n = \begin{cases} (x - \hat{x})^n, & \text{se } x \geq \hat{x} \\ 0, & \text{se } x < \hat{x} \end{cases}$$

Tabela 8.8- Deslocamentos axiais e radiais para o arco sob carga radial concentrada  $F_z$

| $h_2$ (m)           | u(m)                      |                           | w(m)                      |                           |
|---------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
|                     | MEC Euler                 | MEC Timo                  | MEC Euler                 | MEC Timo                  |
| 0,2                 | $-8,84849 \times 10^{-5}$ | $-9,04099 \times 10^{-5}$ | $6,60100 \times 10^{-4}$  | $6,70850 \times 10^{-4}$  |
| 0,4                 | $-6,84805 \times 10^{-5}$ | $-7,01706 \times 10^{-5}$ | $4,423853 \times 10^{-4}$ | $4,506249 \times 10^{-4}$ |
| 0,8                 | $-4,91644 \times 10^{-5}$ | $-5,05824 \times 10^{-5}$ | $2,797237 \times 10^{-4}$ | $2,85805 \times 10^{-4}$  |
| 1,19                | $-3,92589 \times 10^{-5}$ | $-4,05124 \times 10^{-5}$ | $2,09644 \times 10^{-4}$  | $2,146651 \times 10^{-4}$ |
| 1,20<br>(Analítico) | -----                     | $-4,031 \times 10^{-5}$   | -----                     | $2,133 \times 10^{-4}$    |

Tabela 8.9- Deslocamentos axiais e radiais para o arco sob momento M no balanço

| $h_2$ (m)           | u(m)                    |                         | w(m)                     |                          |
|---------------------|-------------------------|-------------------------|--------------------------|--------------------------|
|                     | ME Euler                | MEC Timo                | MEC Euler                | MEC Timo                 |
| 0,2                 | $1,1650 \times 10^{-6}$ | $1,6050 \times 10^{-6}$ | $-1,8750 \times 10^{-5}$ | $-1,8750 \times 10^{-5}$ |
| 0,4                 | $1,1059 \times 10^{-6}$ | $1,1059 \times 10^{-6}$ | $-9,3750 \times 10^{-6}$ | $-9,3750 \times 10^{-6}$ |
| 0,8                 | $6,9930 \times 10^{-7}$ | $6,9930 \times 10^{-7}$ | $-4,6875 \times 10^{-6}$ | $-4,6875 \times 10^{-6}$ |
| 1,19                | $5,2411 \times 10^{-7}$ | $5,2411 \times 10^{-7}$ | $-3,1512 \times 10^{-6}$ | $-3,1512 \times 10^{-6}$ |
| 1,20<br>(Analítico) | -----                   | $5,207 \times 10^{-7}$  | -----                    | $-3,125 \times 10^{-6}$  |

Nas Tabs 8.8 e 8.9 pode ser observada que a formulação não prismática do MEC pode ser aplicada para casos em que o arco se aproxima de uma configuração prismática. Por outro lado, se for atribuído o valor exato  $h_2 = 1,2m$  de arco prismático ocorrem instabilidades numéricas nas soluções fundamentais propostas.

## 8.9 PÓRTICO PLANO BI-ENGASTADO COM VARIAÇÃO SIMÉTRICA

Seja um pórtico plano bi-engastado formado por sete barras conectadas como mostrado na Fig.8.12a, submetido a carregamentos nodais horizontais no centro da barra superior. Na Fig. 8.12b-c é mostrada a discretização do pórtico utilizado no software Ftool, desenvolvido por MARTHA(1999) e pelo software SAP2000(2009). Todas as barras são do mesmo material, e as verticais são não prismáticas. As propriedades geométricas são o módulo de elasticidade  $E=2.10^7 Pa$ ,  $\nu=0.3$  e  $\kappa=\frac{5}{6}$ . Nas Tabs. 8.10 e 8.11 os valores dos deslocamentos( $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_4$  e  $\phi_3$ ), onde  $U_1$ ,  $U_2$  e  $\phi_3$  são o deslocamento horizontal, vertical e rotação no topo superior direito do pórtico,  $U_4$  deslocamento horizontal a 1,5m do engaste inferior esquerdo do pórtico; as reações( $R_5$ ,  $R_6$  e  $M_7$ ), onde  $R_5$ ,  $R_6$  e  $M_7$  são, respectivamente, a reação vertical, horizontal e momento no engaste inferior esquerdo, aqui obtidos via MEC são comparados com resultados via Ftool e SAP2000, segundo as teorias de Euler-Bernoulli e Timoshenko, respectivamente, em função do número de Elementos Finitos(E.F) e do número de Elementos de Contorno(E.C).



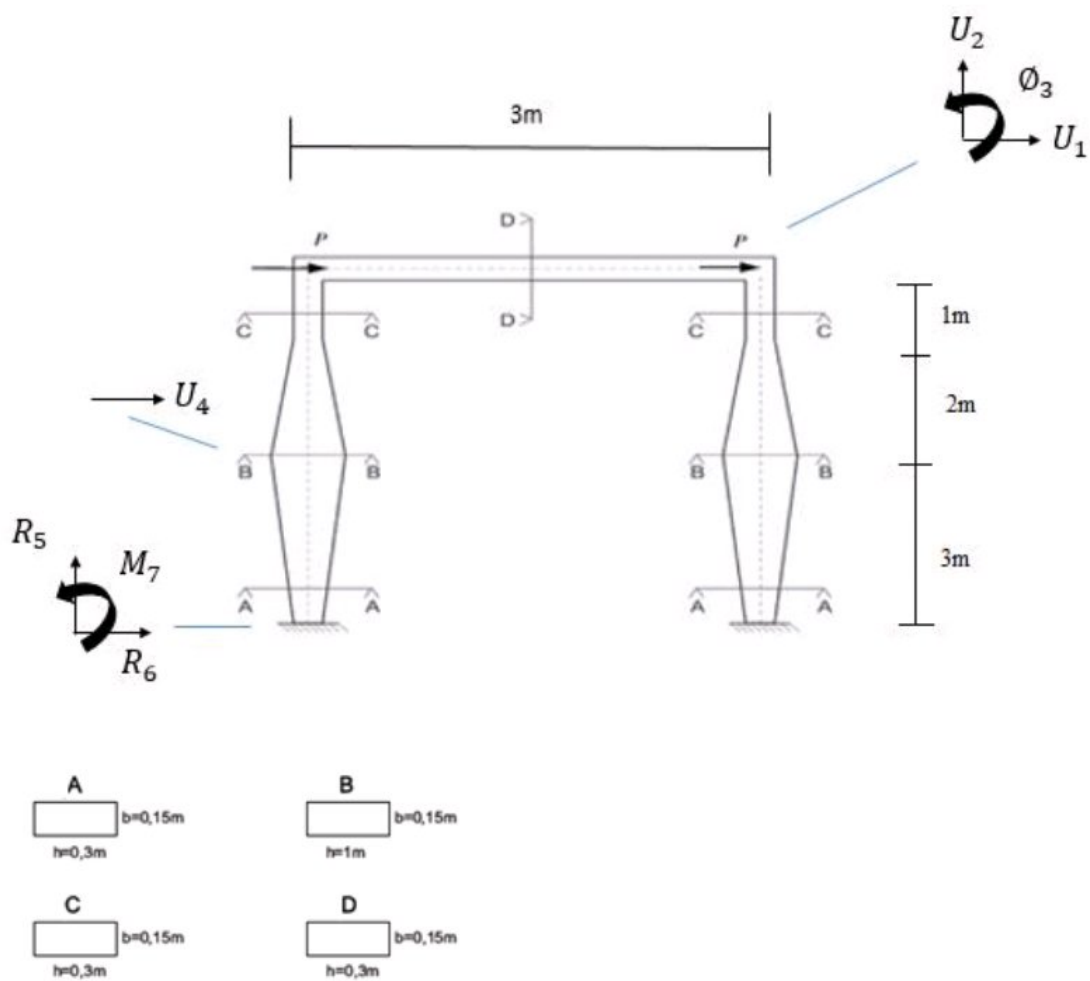


Figura 8.12a- Pórtico plano bi-engastado

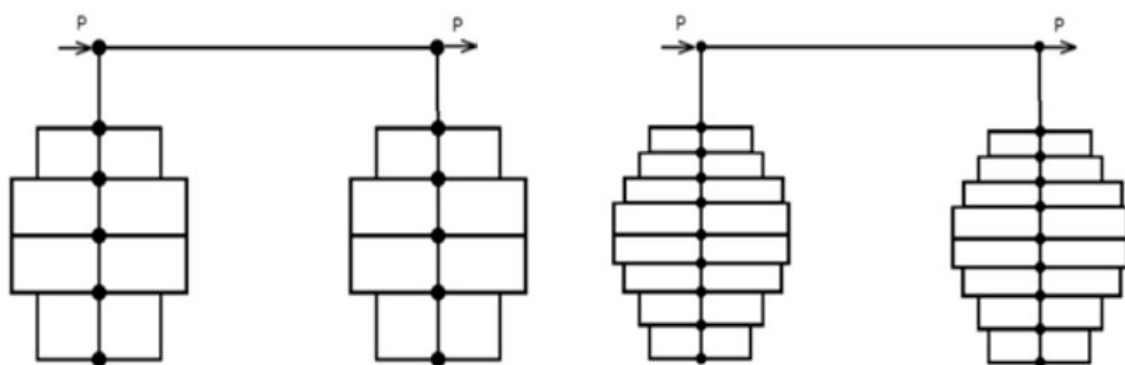


Figura 8.12.b-c – b) discretização do elemento não prismático em 4, c) discretização do elemento não prismático em 8.



Tabela 8.10- Deslocamentos e reações segundo teoria de Euler-Bernoulli

|                | 19<br>Elementos<br>Ftool | 35<br>Elementos<br>Ftool | 7 E.F.<br>SAP2000       | 7 E.C.<br>MEC           |
|----------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------|-------------------------|
| $U_1$ (m)      | 0,019                    | 0,016                    | 0,016                   | 0,016                   |
| $U_2$ (m)      | $3,686 \times 10^{-5}$   | $3,116 \times 10^{-5}$   | $-3,135 \times 10^{-5}$ | $3,135 \times 10^{-5}$  |
| $\phi_3$ (rad) | $-1,763 \times 10^{-3}$  | $-1,563 \times 10^{-3}$  | $-1,570 \times 10^{-3}$ | $-1,572 \times 10^{-3}$ |
| $U_4$ (m)      | $9,222 \times 10^{-3}$   | $7,710 \times 10^{-3}$   | $7,860 \times 10^{-3}$  | $7,863 \times 10^{-3}$  |
| $R_5$ (N)      | 8,800                    | 7,800                    | -7,882                  | 7,882                   |
| $R_6$ (N)      | -10                      | -10                      | -10                     | -10                     |
| $M_7$ (Nm)     | -42,300                  | -44,300                  | -44,236                 | 44,236                  |

Tabela 8.11- Deslocamentos e reações segundo teoria de Timoshenko

|                | 19<br>Elementos<br>Ftool | 35<br>Elementos<br>Ftool | 7 E.F.<br>SAP2000       | 7 E.C.<br>MEC          |
|----------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------|------------------------|
| $U_1$ (m)      | 0,019                    | 0,016                    | 0,017                   | 0,017                  |
| $U_2$ (m)      | $3,671 \times 10^{-5}$   | $3,103 \times 10^{-5}$   | $-3,122 \times 10^{-5}$ | $3,121 \times 10^{-5}$ |
| $\phi_3$ (rad) | $1,787 \times 10^{-3}$   | $1,563 \times 10^{-3}$   | $1,59 \times 10^{-3}$   | $1,592 \times 10^{-3}$ |
| $U_4$ (m)      | $9,297 \times 10^{-3}$   | $7,777 \times 10^{-3}$   | $7,930 \times 10^{-3}$  | $7,930 \times 10^{-3}$ |
| $R_5$ (N)      | 8,8                      | 7,8                      | -7,848                  | 7,847                  |
| $R_6$ (N)      | -10                      | -10                      | -10                     | -10                    |
| $M_7$ (Nm)     | -42,4                    | -44,396                  | -44,305                 | -44,305                |

A partir das Tabs. 8.10 e 8.11, nota-se que à medida que o número de barras do Ftool é aumentado, suas respostas tentem para os resultados de elementos de contorno. No entanto, quando análise é feita pelo SAP2000 os resultados recuperam com sucesso os de elemento de contorno. Além disso, convém notar que a discretização de contorno em mais de um elemento foi necessária apenas para lidar com as descontinuidades de domínio, isto é, quatro mudanças na lei que rege a variação da seção transversal, e dois nós com barras concorrentes não lineares. Convém notar que o SAP2000 possui uma matriz de rigidez exata para variação de inércia até polinômios de terceiro grau, que é o caso desse exemplo.

## 8.10 VIGA RETANGULAR EM BALANÇO SOB CARGA CONCENTRADA

Aqui é admitida que uma viga não prismática com variação na altura não simétrica de comprimento  $L=10\text{m}$ , largura  $b=1\text{m}$ ,  $h_{0\text{inf}}=0,75\text{m}$ ,  $h_{0\text{sup}}=0,25\text{m}$ ,  $h_{1\text{inf}}=0,25\text{m}$ ,  $h_{1\text{sup}}=0,25\text{m}$  submetida a uma carga  $P = -100\text{ KN}$  na extremidade livre como mostrado na Fig 8.13. As propriedades do material são  $E=10.10^7\text{Pa}$ ,  $G=E/2(1+\nu)\text{Pa}$ ,  $k=5/6$ ,  $\nu=0,3$ . Na Tab. 8.12 são mostrados os deslocamentos transversais segundo o modelo de Euler-Bernoulli e Timoshenko. Os resultados do MEC são comparados com soluções analíticas dadas por BELTEMPO(2013).

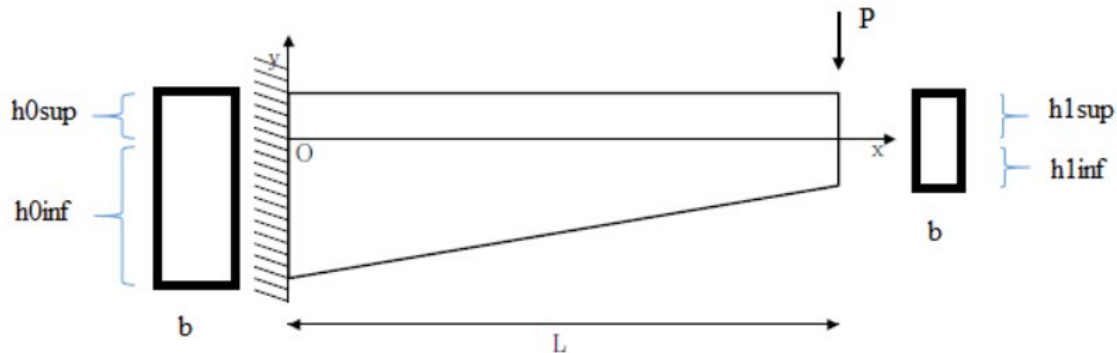


Figura 8.13- Viga retangular não prismática, engastada submetida a carga concentrada

Tabela 8.12 Deslocamento transversal no balanço  $w$  (m)

| Teoria          | MEC                     | Analítico               |
|-----------------|-------------------------|-------------------------|
| Euler-Bernoulli | $-6,542 \times 10^{-3}$ | $-6,542 \times 10^{-3}$ |
| Timoshenko      | $-6,585 \times 10^{-3}$ | $-6,585 \times 10^{-3}$ |

Segundo BELTEMPO(2013), o deslocamento transversal para a teoria de Euler-Bernoulli pode ser obtido pela Eq.(8.20):

$$w(x) = \frac{3PL^3(-5 + \ln(256))}{16Eh_{0\text{sup}}^3} \quad (8.20)$$

Já para a Teoria de Timoshenko o deslocamento, segundo BELTEMPO(2013), fica:

$$w(x) = \frac{3PL^3(-5 + \ln(256))}{16Eh_{0\text{sup}}^3} + \frac{3PL \ln(2)}{5Gh_{0\text{sup}}} \quad (8.21)$$

A partir da Tab. 8.12 pode-se notar um excelente desempenho do MEC

## 8.11 PÓRTICO PLANO ENGASTADO

Seja um pórtico plano engastado formado por 2 barras conectadas como mostrado na fig.8.14, submetido a carregamento nodal  $M_1=10\text{KNm}$  e dele procuram-se os deslocamentos  $U_3$ ,  $U_6$ ,  $\phi_2$  e os esforços  $R_3$ ,  $R_4$  e  $M_5$ . Todas as barras são do mesmo material, sendo a barra vertical não prismática circular e a horizontal retangular e prismática. As propriedades são:  $E=2.10^7\text{Pa}$ ,  $G=E/2(1+\nu)$ ,  $\nu=0.3$ ,  $\kappa=\frac{5}{6}$ . Já as dimensões são:  $b=0.15\text{m}$ ,  $h=0.4\text{m}$ ,  $R_1=0.3\text{m}$  e  $R_2=0.15\text{m}$ . Nas Tabs. 8.13 e 8.14 os valores dos deslocamentos e reações aqui obtidos via MEC são comparados com resultados via Ftool segundo as teorias de Euler-Bernoulli e Timoshenko respectivamente.

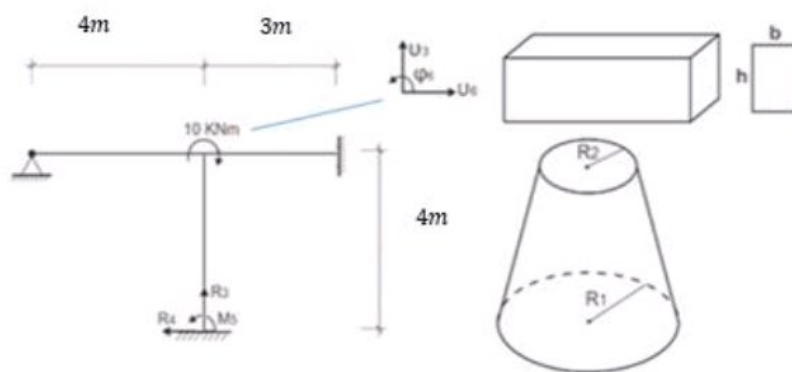


Figura 8.14- Viga circular não prismática, engastada submetida a carga ,momento nodal.

Tabela 8.13- Deslocamentos e esforços segundo teoria de Euler-Bernoulli

|                | 4 Elementos<br>Ftool    | 8 Elementos<br>Ftool    | 3 E.C.<br>MEC           |
|----------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| $U_3$ (m)      | $-2,077 \times 10^{-6}$ | $-2,155 \times 10^{-6}$ | $-2,184 \times 10^{-6}$ |
| $U_6$ (m)      | $-2,460 \times 10^{-6}$ | $-2,339 \times 10^{-6}$ | $-2,304 \times 10^{-6}$ |
| $\phi_6$ (rad) | $-1,959 \times 10^{-4}$ | $-2,016 \times 10^{-4}$ | $-2,045 \times 10^{-4}$ |
| $R_3$ (N)      | 1,490                   | 1,530                   | 1,540                   |
| $R_4$ (N)      | 1,720                   | 1,640                   | 1,611                   |
| $M_5$ (Nm)     | 3,400                   | 3,250                   | 3,208                   |

Tabela 8.14- Deslocamentos e Esforços segundo teoria de Timoshenko

|                | 4 Elementos<br>Ftool    | 8 Elementos<br>Ftool    | 2 E.C.<br>MEC            |
|----------------|-------------------------|-------------------------|--------------------------|
| $U_3$ (m)      | $-1,989 \times 10^{-6}$ | $-2,062 \times 10^{-6}$ | $-2,1056 \times 10^{-6}$ |
| $U_6$ (m)      | $-2,406 \times 10^{-6}$ | $-2,289 \times 10^{-6}$ | $-2,291 \times 10^{-6}$  |
| $\phi_6$ (rad) | $-2,017 \times 10^{-4}$ | $-2,073 \times 10^{-4}$ | $-2,096 \times 10^{-4}$  |
| $R_3$ (N)      | 1,42                    | 1,46                    | 1,472                    |
| $R_4$ (N)      | 1,68                    | 1,60                    | 1,602                    |
| $M_5$ (Nm)     | 3,26                    | 3,11                    | 3,148                    |

Examinando-se as Tabs. 8.13 e 8.14 é possível constatar a tendência dos resultados do Ftool em recuperar as respostas do MEC, quando discretizações mais ricas do Ftool são utilizadas

## 8.12 VIGA COM VARIAÇÃO DA ALTURA NÃO-SIMÉTRICA EM BALANÇO SOB CARGA CONCENTRADA

Aqui é admitida que uma viga não prismática com variação quadrática na altura, não simétrica, de comprimento  $L = 10\text{m}$ , largura  $b = 1\text{m}$ ,  $h_{0\text{inf}} = 0,75\text{m}$ ,  $h_{0\text{sup}} = 0,25\text{m}$ ,  $h_{1\text{inf}} = 0,25\text{m}$ ,  $h_{1\text{sup}} = 0,25\text{m}$  submetida a uma carga  $P = -100\text{ KN}$  na extremidade livre como mostrado na Fig 8.15. As propriedades do material são  $E = 10 \cdot 10^7\text{Pa}$ ,  $G = E/2(1 + \nu)\text{Pa}$ ,  $k = 5/6$ ,  $\nu = 0,3$ . Na Tab. 8.15 são mostrados os deslocamentos transversais segundo o modelo de Euler-Bernoulli e Timoshenko. Os resultados do MEC são comparados com as respostas dadas por BELTEMPO(2013)

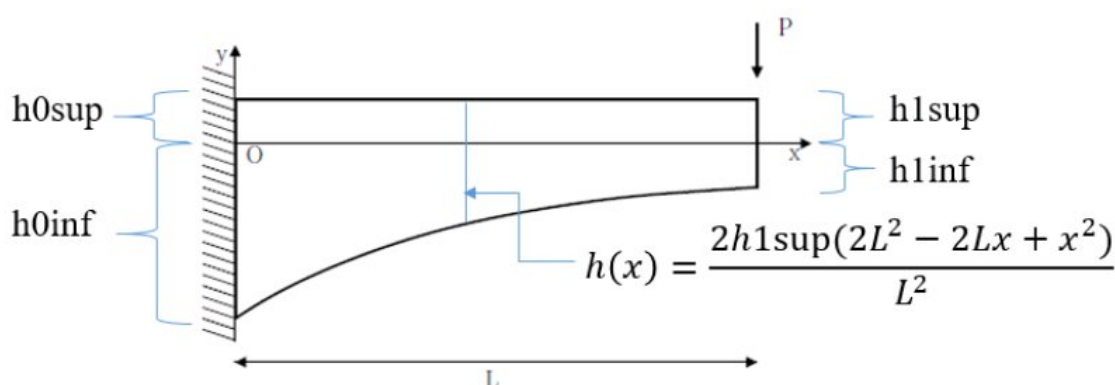


Figura 8.15- Viga retangular não prismática, engastada submetida a carga concentrada.

Tabela 8.15 Deslocamento transversal no balanço (w(m))

| Teoria          | MEC                     | BELTEMPO(2013)          |
|-----------------|-------------------------|-------------------------|
| Euler-Bernoulli | $-9,425 \times 10^{-3}$ | $-9,425 \times 10^{-3}$ |
| Timoshenko      | $-9,474 \times 10^{-3}$ | $-9,474 \times 10^{-3}$ |

Segundo BELTEMPO(2013), o deslocamento transversal para a teoria de Euler-Bernoulli pode ser obtido pela Eq.(8.22):

$$w(x) = \frac{3\pi PL^3}{64Eh_0 \sup^3} \quad (8.22)$$

Já para a Teoria de Timoshenko o deslocamento, segundo BELTEMPO(2013), fica:

$$w(x) = \frac{3\pi PL^3}{64Eh_0 \sup^3} + \frac{3PL\pi}{20Gh_0 \sup} \quad (8.23)$$

Convém notar que as respostas do MEC recuperam com sucesso os resultados de BELTEMPO (2013) para o caso de uma viga não-simétrica com variação quadrática da altura.

### 8.13 FLEXÃO EM VIGA RETANGULAR NÃO-SIMÉTRICA COM VARIAÇÃO DA ALTURA NÃO SIMÉTRICA

Aqui é admitida que uma viga não prismática com variação linear na altura, não simétrica, de comprimento  $L=10\text{m}$ , largura  $b=0.4\text{m}$ ,  $h_0=1\text{m}$ , submetida a uma carga  $P = 1000 \text{ KN}$  nos pontos A e B como mostrado na Fig 8.16. As propriedades do material são  $E= 2.10^7\text{Pa}$ ,  $G=E/2(1+ \nu)$ ,  $\nu=0.3$  e  $k=5/6$ . Na Tab. 8.16 é mostrado o deslocamento transversal segundo o modelo de Euler-Bernoulli. VEISKARAMI e POURZEYNALI (2012) apresenta os resultados analíticos para este problema apenas para o modelo de Euler-Bernoulli, de forma que feita uma comparação com as respostas na Tab. 8.16.



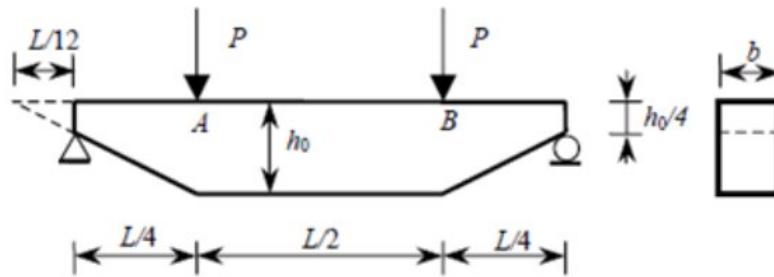


Figura 8.16- Viga retangular não prismática, submetida a carga concentrada.

Tabela 8.16 Deslocamentos normalizados ponto A (  $\bar{w}(m)$  )

| Teoria          | MEC     | Analítico    |
|-----------------|---------|--------------|
| Euler-Bernoulli | 0,02878 | 0,0289       |
| Timoshenko      | 0,02971 | indisponível |

Segundo VEISKARAMI e POURZEYNALI (2012), o deslocamento transversal normalizado é dado pela Eq.(8.22):

$$\bar{w}(x) = \frac{w(x)}{\left( \frac{PL^3}{EI_0} \right)} \quad (8.22)$$

Onde:  $I_0$  é o momento de inércia em  $h_0$

Os resultados do MEC na Tab. 8.16 tem excelente desempenho frente as respostas de VEISKARAMI e POURZEYNALI (2012) para a viga de Euler-Bernoulli. Além disso, é apresentado o resultado do MEC para viga de Timoshenko, que nesse exemplo produz uma pequena variação no resultado de Euler-Bernoulli.

#### 8.14 VIGA BI-ENGASTADA COM VARIAÇÃO DA ALTURA PARABÓLICA SOB CARGA DISTRIBUIDA

Aqui é admitida que uma viga não prismática com variação na altura parabólica de comprimento  $L= 10$ , largura  $b=1$ ,  $h_2=2$ ,  $h_1=1$ , submetida a uma carga unitária  $q(x) = 1$  distribuída como mostrado na Fig 8.17. É admitido que o módulo de elasticidade é  $E= 1$ . Na Tab. 8.17 são mostrados o momento central  $M_{\text{Central}}$ , reação horizontal  $N1$ , reação vertical  $R1$  e momento na extremidade  $M1$ . Os resultados obtidos segundo o modelo de Euler-Bernoulli no MEC são comparados com os resultados via SAP 2000 (2009) e

KHAN(1995). Convém notar que foram adotados parâmetros unitários para as propriedades geométricas e físicas. Além disso, para análise de elementos finitos foi utilizado o software SAP 2000(2009), onde foi selecionado um elemento que permite a análise com inércias variando até polinômios de terceiro grau. No exemplo aqui estudado, isso implica em uma variação da altura no máximo, linear. Tal qual o MEC, o SAP 2000 também permite a definição do eixo da barra em qualquer profundidade da altura. Na solução do MEC foi utilizado um único elemento de contorno. Já KHAN (1995) apresenta uma solução em elementos de contorno para vigas não-prismáticas não simétrica com seções retangulares e variações lineares e quadráticas da altura ao longo do comprimento. Na Tab. 8.16, são apresentadas as reações apoios e momento fletor no domínio (no meio do vão) para a solução de KHAN (1995), SAP 2000(2009) e soluções do MEC proposta.

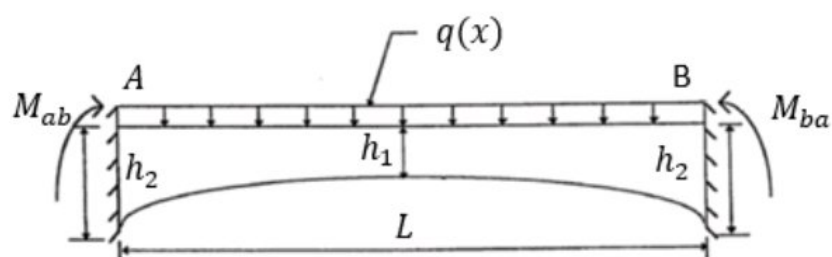


Figura 8.17- Viga bi-engastada com variação da altura parabolica KHAN(1995)

Tabela 8.17 Reações em viga bi-engastada sob carga distribuida

| Reações       | 1 E.C.<br>KHAN(1995) | 8 E.F.<br>SAP2000 | 16 E.F.<br>SAP2000 | 1 E.C.<br>MEC<br>PROPOSTO |
|---------------|----------------------|-------------------|--------------------|---------------------------|
| $M_{Central}$ | 2,74                 | 2,02481           | 2,02917            | 2,04423                   |
| N1            | Não disponível       | 2,616             | 2,639              | 2,323                     |
| R1            | Não disponível       | 5,033             | 5,033              | 5                         |
| M1            | 10,253               | 10,514            | 10,513             | 10,455                    |

A partir da Tab. 8.17, pode-se notar uma coerência maior entre os resultados do SAP2000 com os do MEC propostos nesta tese. A maior discrepância com os resultados da formulação do MEC dada por KHAN (1995) é justificada por aquela formulação não levar em conta o acoplamento entre os regimes de flexão e tração simples no problema da viga não-prismática não-simétrica. A resposta dada por KHAN (1995) não faz nenhuma menção ao desenvolvimento do esforço normal neste exemplo da viga bi-engastada.

### 8.15 VIGA CONTÍNUA COM VARIAÇÃO DA ALTURA PARABOLICA, SOB CARGA NODAL

Neste exemplo é proposta análise dos esforços e deslocamentos em uma viga não prismática com variação na altura parabólica de largura  $b = 1$ ,  $h_1 = 2.5$ ,  $h_2 = 7.5$ , submetida a uma carga nodal,  $M = 100$  como mostrado na Fig 8.18. Nas Figs. 8.18-8.19 são mostradas, respectivamente, as vigas adotadas para elaboração deste exemplo com excentricidade nula e uma viga continua de excentricidade  $d$ , diferente de zero. Aqui é admitido que o módulo de elasticidade é  $E = 1 \text{ KPa}$ . Nas Tabs. 8.18-8.19. são mostrados  $\phi_a$ ,  $U_a$ ,  $V_a$  que são, respectivamente, a rotação, normal e cortante no engaste 1,  $\phi_d$ ,  $U_d$ ,  $V_d$  que são, respectivamente, a rotação, normal e cortante no engaste 4 e por fim,  $M_{DB}$  que é momento a direita do engaste 2,  $M_{EB}$  que é momento a esquerda do engaste 2 e  $M_{DC}$  momento a direita do engaste 3, segundo as teorias de Euler-Bernoulli e Timoshenko, respectivamente. Os resultados obtidos são comparados com os resultados via SAP2000(2009). Convém notar que todas unidades do comprimento e do material são apresentadas em unidades compatíveis. A discretização do MEF do vão central tem o dobro de elementos que os vãos externos.

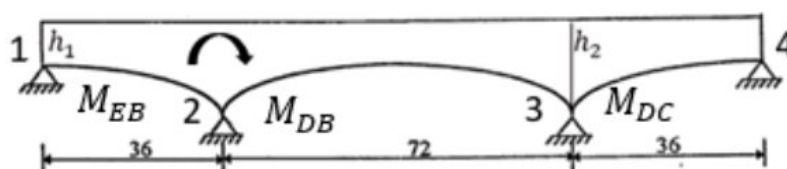


Figura 8.18- Viga contínua com variação da altura parabólica(Modelo viga real)



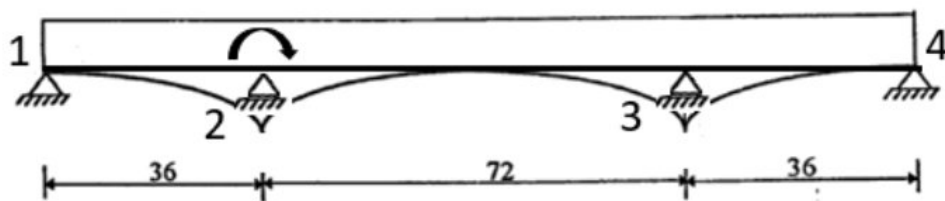


Figura 8.19- Viga contínua com variação da altura parabólica(Modelo adotado no MEF MEC) excentricidade do eixo é nula

Tabela 8.18- Deslocamentos e esforços segundo teoria de Euler-Bernoulli

|          | 16<br>Elementos        | 32<br>Elementos        | 3 E.C.<br>MEC            |
|----------|------------------------|------------------------|--------------------------|
| $\phi_a$ | $6,478 \times 10^{-7}$ | $6,479 \times 10^{-7}$ | $-6,4964 \times 10^{-7}$ |
| $R_{xa}$ | -5,7993                | -5,9828                | -5,99539                 |
| $R_{ya}$ | -2,0014                | -1,9534                | -1,90118                 |
| $\phi_d$ | $1,458 \times 10^{-7}$ | $1,437 \times 10^{-7}$ | $1,4375 \times 10^{-7}$  |
| $R_{xd}$ | -1,3050                | -1,3274                | -1,32667                 |
| $R_{yd}$ | 0,4504                 | 0,4334                 | 0,4207                   |
| $M_{DB}$ | -36,39214              | -36,49033              | -31,55762                |
| $M_{EB}$ | 75,70830               | 75,95081               | 68,44238                 |
| $M_{DC}$ | 17,03602               | 16,85063               | 15,14507                 |

Tabela 8.19- Deslocamentos e Esforços segundo teoria de Timoshenko

|          | 16 E.F.<br>SAP2000     | 32 E.F.<br>SAP2000     | 3 E.C.<br>MEC            |
|----------|------------------------|------------------------|--------------------------|
| $\phi_a$ | $6,438 \times 10^{-7}$ | $6,439 \times 10^{-7}$ | $-6,3613 \times 10^{-7}$ |
| $U_a$    | -5,6313                | -5,8197                | -5,9843                  |
| $V_a$    | -1,9927                | -1,9461                | -1,8976                  |
| $\phi_d$ | $1,451 \times 10^{-7}$ | $1,431 \times 10^{-7}$ | $1,4027 \times 10^{-7}$  |
| $U_d$    | -1,2693                | -1,2935                | -1,3196                  |
| $V_d$    | 0,4491                 | 0,4326                 | 0,4184                   |
| $M_{DB}$ | -36,64532              | -36,74695              | -31,6840                 |
| $M_{EB}$ | 75,28865               | 75,53528               | 68,3159                  |
| $M_{DC}$ | 16,96949               | 16,78906               | 15,0645                  |

Convém notar uma tendência dos resultados do SAP2000 para as respostas do MEC à medida que discretizações mais ricas de elementos finitos são utilizadas. Esta situação é decorrente da limitação da matriz de rigidez do elemento finito de barra não-prismática resolver exatamente variações da inércia até cubicamente. No exemplo desta viga a variação de inércia é de sexta ordem. Além disso, vale ressaltar que os três elementos de contorno utilizados são decorrentes de duas descontinuidades de domínio.

### 8.16 VIGA BI-APOIADA COM VARIAÇÃO DE ALTURA PARABÓLICA

Neste exemplo é proposta análise das reações em viga bi-engastada sob peso próprio. Na fig. 8.20 é mostrada a viga não prismática com variação na altura parabólica de comprimento:  $L=10m$ ; largura:  $b=1m$ ; Alturas:  $h_1=1m$ ,  $h_2=2m$ ; Módulo de elasticidade:  $E=1KPa$ ; Peso específico:  $\gamma=10$  e Peso total  $P=113,333$ . Na Tab. 8.20. são mostrados as reações  $N_1$ ,  $R_1$ ,  $M_1$  sob o peso próprio.

Figura 8.20- Viga bi-engastada com variação da altura parabólica.

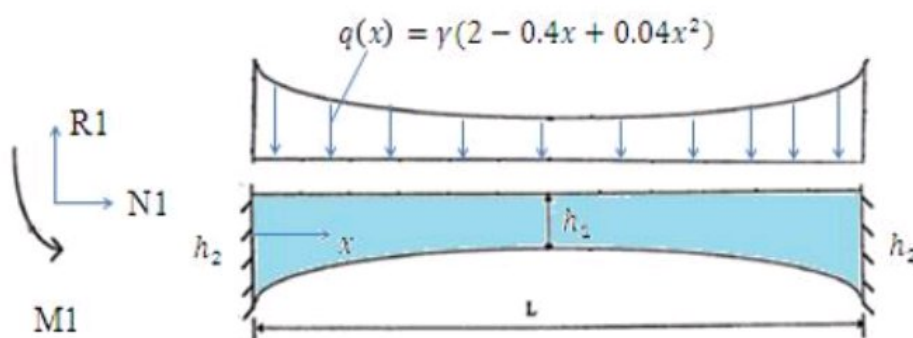


Tabela 8.20- Reações em viga bi-engastada sob Peso Próprio

|       | 8<br>Elementos<br>SAP2000 | 16<br>Elementos<br>SAP2000 | 1 E.C.<br>MEC |
|-------|---------------------------|----------------------------|---------------|
| $N_1$ | 29,805                    | 29,861                     | 26,028        |
| $R_1$ | 67,707                    | 67,324                     | 66,667        |
| $M_1$ | 125,829                   | 124,984                    | 123,939       |

Convém notar uma tendência dos resultados do SAP2000 para as respostas do MEC à medida que discretizações mais ricas de elementos finitos são utilizadas

## CONCLUSÕES

Neste trabalho foi estabelecida uma abordagem dos elementos de contorno direto para certos problemas regidos por equações diferenciais lineares com coeficientes variáveis. O foco do estudo foi direcionado para análise estática de problemas envolvendo barras não-prismáticas levando-se em conta as teorias de Euler-Bernoulli e Timoshenko. Um primeiro grupo de problemas são referentes aos problemas em que não há acoplamento dos problemas de tração/compressão direta e flexão, que são representados pelos casos de barras retas e variação simétrica da seção transversal ao longo do comprimento. Outro grupo de problemas requer a solução acoplada dos problemas de flexão e de tração/compressão direta, recaindo em problemas de vigas não-prismáticas e não-simétricas, arcos abatidos não-prismáticos simétricos e arcos abatidos não-prismáticos e não-simétricos. Para viabilização de soluções estáticas do MEC para os problemas supracitados, foram necessárias ao desenvolvimento das seguintes contribuições originais:

- a) Dedução das equações integrais para vigas e arcos abatidos com variação simétrica e não-simétrica da seção transversal;
- b) Dedução de soluções fundamentais para seções transversais com variações genéricas a partir do estabelecimento de identidades de interesse;
- c) Transformação de integrais de domínio associadas aos carregamentos externos em valores de contorno;
- d) A partir do uso da conhecida técnica de sub-região, problemas com descontinuidades de domínio puderam ser resolvidos.

Os resultados apresentados demonstram a eficiência da solução da formulação proposta frente a soluções analíticas e numéricas.

## **SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS**

- a) Solução do MEC para vibração de vigas não-prismáticas;
- b) Solução do MEC em problemas de flambagem de barras não-prismáticas;
- c) Solução do MEC para vibração de arcos abatidos não-prismáticos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABRATE, S. (1995). Vibration of non-uniform rods and beams, *Journal of sound and vibration*, 703-716;
- ALEXANDER H. D. CHENG, DAYSE T. CHENG, (2005), “Heritage and early history of the boundary element method”, *Elseved LTD. Engineering Analysis with Boundary Elements* 29 (2005) 268–302
- ALIABADI, M.H.(2002) *The Boundary Element Method, Applications in Solids and Structures*. Wiley.
- ANTES, H.(2003), Fundamental solution and integral equations for Timoshenko beams, *Computers and Structures* 81, 383–396;
- ANTES, H. SHANZ, M. ALVERMANN, S.(2004), Dynamic analyses of plane frames by integral equations for bars and Timoshenko beams, *Journal of sound and vibration*, 807-836;
- ANSYS , ANSYS User’s Manual: Theory, Vol.IV. Swanson Analysis Systems, Inc, (1994).
- BANERJEE, P.K., BUTTERFIELD, R.(1981) *Boundary Element Methods in Engineering*. Science, McGraw-Hill, London;
- BAZOUNE, A., KHULIEF, Y.A., (1992). A finite beam element for vibration analysis of rotating tapered Timoshenko beams, *Journal of sound and vibration*, Vol. 156, N. 1, pp. 141-164;
- BECKER A. A.(1992) *The boundary element method in engineering: a complete course*. McGraw-Hill;
- BELTEMPO, A.(2013), *Derivation of non-prismatic beam models by a mixed variational method*; Dissertação (Mestrado). Università degli Studi di Pavia, Italia.
- CRUZ, J.M.F.(2012) *Contribuição à análise estática e dinâmica de pórticos pelo método dos elementos de contorno*. Tese (doutorado). Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. Universidade Federal da Paraíba;
- DOMÍNGUEZ, J., (1993), “*Boundary elements in dynamics*”. *Computational mechanics publications*.

- EISENBERGER, M.,(1985). Explicit stiffness matrices for non-prismatic members, *Computers & Structures*, Vol. 20, N. 4, pp. 715-720;
- EISENBERGER, M.,(1991a). Stiffness matrices for non-prismatic members including transverse shear, *Computers & Structures* ,Vol. 40, N. 4, pp. 831-835;
- EISENBERGER, M.,(1991b). Exact solution for general variable cross-section members, *Computers & Structures* ,Vol. 41, N. 4, pp. 765-772;
- GAINES, J.K., VOLTERRA, E., (1966). Transverse vibrations of cantilever bars of variable cross section, *The journal of the acoustics*, 674-679;
- GIURGIUTIU, V., STAFFORD, R.O., (1977). Semi-analytic methods for frequencies and mode shapes of rotor blades, *Pergamon press*, Vol. 1, pp. 291-306;
- HUANG, C.L., LIN, W.Y., HSIAO, K.M., (2010). Free vibration of rotating Euler beams at high angular velocity, *Computers and structures*, 991-1001;
- JESUS, J.J.C.(2013), Caracterização geométrica-estrutural de pontes em arcos de alvenaria na região de Bragança. Dissertação (Mestrado). Escola Superior de tecnologia e gestão instituto politécnico de Bragança, Portugal;
- KATSIKADELIS, J.T.,(2002), *Boundary Elements: Theory and applications. Elsevier, 1<sup>st</sup> edition.*
- KARABALIS D. L., AND BESKOS D. E, Static, dynamic, and stability analysis of structures composed of tapered beams. *CornDut. Struct. 16*, 731-748 (1983).
- KAYA, M.O., (2006). Free vibration analysis of a rotating Timoshenko beam by differential transform method, *Aircraft engineering and aerospace technology*, 194-203;
- KHAN, M. S. – “Boundary Element Analysis of Non-Prismatic Beams and Plates” (1995) – Thesis, Faculty of the College of Graduate Studies King Fahd University of Petroleum & Minerals, Saudi Arabia.
- A. A. KHDEIR, A. A., AND REDDY J.(1997), “An Exact Solution for the Bending of Thin and Thick Cross-Ply Laminated Beams,” *Computers and Structures*, Vol. 37, 1997, pp. 195-203. doi:10.1016/S0263-8223(97)80012-8
- KIM, Y.Y. – “Flexural-torsional coupled vibration of rotating beams using orthogonal polynomials” (2000) – Thesis, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute, Virginia.
- KRISHANAN, A., SURESH, Y. J. (1998). A simple cubic linear element for static and free vibration analyses of curved beams. *Computers & Structures*, 68, 473-489.



- KUMAR, B.M., SUJITH, R.I., (1997). Exact solutions for the longitudinal vibration of non-uniform rods, *Journal of sound and vibration*, 721-729;
- HUTCHINSON, J. R. Shear coefficients for Timoshenko beam theory, (2001) . *J Appl Mech* Vol.68, 87-92.
- LEE, S., SHEU, J., LIN, S., (2008). In-plane vibration analysis of rotating curved beam with elastically restrained root, *Journal of sound and vibration*, Vol. 305, pp. 1086-1102;
- LI, Q. S.(2001) Exact solutions for free vibration of shear-type structures with arbitrary distribution of mass or stiffness, doi: 10.1121/1.1372225;
- LI, Q. S., (2000). Exact solutions for free longitudinal vibration of stepped non-uniform rods, *Applied acoustics*, 13-28;
- MAIA, C.D,(2016) Flexão e estabilidade de barras usando o modelo de Bickford-Reddy: Uma abordagem pelo método dos elementos de contorno. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Universidade Federal da Paraíba;
- MANOLIS G. D., BESKOS, D. E.(1988), *Boundary element methods in elastodynamics*, Unwin-Hyman, London. ISBN 044-6200 19-3;
- MANOLIS, G. D.; BESKOS, D.E.; PINEROS, M.F.(1986) Beam and plate stability by boundary elements. *Computers & Structures* 22, 917-923.
- MANZI, E. N. (2001). Formulações de elementos finitos curvos para análise de arcos. Dissertação de mestrado. Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil. Escola de Minas. Universidade Federal de Ouro Preto.
- MACEDO, D.M.(2016). Contribuições de Joaquim Cardozo à arquitetura de Oscar Niemeyer. In: 11<sup>o</sup> Seminário DOCOMONO\_BR, Recife-PE.
- MCCUTCHEON, W. J. (1983). Deflections and stresses in circular tapered beams and poles. *Civil Eng. Pract. Des, Eng. 2*: 207-233; 1983.
- MARTHA, L.F.(1999),“Ftool: A Structural Analysis Educational Interactive Tool”, *Proceedings of Workshop in Multimedia Computer Techniques in Engineering Education*, Technical University of Graz, Austria, 51-65.
- NASCIMENTO JUNIOR, P.C.(2017) Análise estática e dinâmica de arcos abatidos de compósitos laminados: uma abordagem pelo método dos elementos de contorno. Tese (doutorado). Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. Universidade Federal da Paraíba;



- PASSOS, J.J.S.(2014) Análise da estabilidade estática e dinâmica de vigas pelo método dos elementos de contorno. Dissertação (mestrado). Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. Universidade Federal da Paraíba;
- PETTYT, M., (1990), Introduction to finite element vibration analysis. Cambridge University Press.
- PROVIDASKIS, C.P., BESKOS, D.E., (1986), “Dynamic analysis of beams by the boundary element method”. Computers and Structures, v.22, n. 6, pp.957-964.
- QATU, M.S., (1992). In-plane vibration of slightly curved laminated composite beams . Journal of sound and vibration. Vol. 159, p. 327-338.
- QIUSHENG, L., HONG, K., GUIQING, L., (1996). Static and dynamic analysis of straight bars with variable cross-section, Computers e structures, 1185-1191;
- REDDY, J.N., (1997). Mechanics of Composite Materials Plates and Shells Theory and Analysis. CRC press, Boca Raton, 2<sup>nd</sup> edition.
- SAP 2000 (2009) CSI Analysis Reference Manual For SAP 2000, ETABS, and SAFE. Computers and Structures Inc. Berkeley, California, USA. Abril.
- SHAHBA, AHMAD.; ATTARNEJAD, REZA.; ESLAMINIA, MEHRAN (2012). Derivation of an efficient non-prismatic thin curved beam element using basic displacement functions Shock and Vibration. Vol. 19, pp 187-204, DOI:10.3233/SAV-2011-0623;
- STAFFORD, R.O., GIURGIUTIU, V., (1975). Semi-analytic methods for rotating Timoshenko beams, Pergamon press, Vol. 17, pp. 719-727;
- TO, C.W.S., (1981). A linearly tapered beam finite element incorporating shear deformation and rotary inertia for vibration analysis, Journal of sound and vibration, 475-484;
- YOKOYAMA, K., (1988). Free vibration characteristics of rotating Timoshenko beams, Pergamon press, Vol. 30, N. 10, pp. 743-755;
- YOO, H.H., SHIN, S.H., (1998). Vibration analysis of rotating cantilever beams, Journal of sound and vibration, Vol. 212, N. 5, pp. 807-828;
- VEISKARAMI, M.; POURZEYNALI, S. (2012). Green’s function for the deflection of non-prismatic simply supported beams by an analytical approach. Estorian Journal of Engineering, Vol. 18, N.4, pp 336-351;

FRIEDMAN, Z.; KOSMATKA, J.B.,(1998). An accurate two-node finite element for shear deformable curved beams, *International Journal of Numerical Methods in Engineering* Vol.41, pp 473–498.

ZHU, Z.H; MEGUID,S.A.(2008), Vibration analysis of a new curved beam element, *Journal of Sound and Vibration* Vol **309** ,pp 86–95.

## APÊNDICE 1

### APRESENTAÇÃO DAS FUNÇÕES QUE COMPÕEM A SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DO PROBLEMA DE BARRAS SOB AÇÃO AXIAL.

Do problema fundamental de barras sob ação axial, tem-se:

$$\hat{F}(x) = \frac{1}{A(x)} \quad (\text{A1.a})$$

$$\hat{G}(x) = \int F(x) dx \quad (\text{A1.b})$$

$$A(x) = [\alpha x + \beta] \quad (\text{A1.c})$$

Para o caso em que  $A(x)$  varia linearmente, tem-se:

$$A(x) = \alpha_1 x + \beta_1$$

$$\hat{G}(x) = \frac{1}{\alpha_1} \ln \left[ \frac{\alpha_1 x + \beta_1}{\alpha_1 \hat{x} + \beta_1} \right] \quad (\text{A1.d-e})$$

$$\text{Onde: } \alpha_1 = \frac{h_2 - h_1}{L} \text{ e } \beta_1 = h_1$$

Já, para o caso em que a viga é um tronco de cone, tem-se:

$$A(x) = [\alpha_3 x + \beta_3]^2 \pi$$

$$\hat{G}(x) = \frac{1}{\alpha_3} \left[ \frac{1}{\alpha_3 x + \beta_3} - \frac{1}{\alpha_3 \hat{x} + \beta_3} \right] \quad (\text{A1.f-g})$$

$$\text{Onde : } \alpha_3 = \frac{r_2 - r_1}{L} \text{ e } \beta_3 = r_1$$

## APÊNDICE 2

### APRESENTAÇÃO DAS FUNÇÕES QUE COMPÕEM AS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS DO PROBLEMA DE VIGAS NÃO PRISMÁTICAS COM VARIAÇÃO SIMÉTRICA (AÇÃO CARGA TRANSVERSAL).

Do problema de flexão, sabe-se que:

$$G(x) = \int \frac{1}{I(x)} dx$$

$$H(x) = \int G(x) dx$$

$$K(x) = \int H(x) dx$$

$$\hat{F}(x) = \int \frac{1}{A(x)} dx \quad (\text{A.2a-d})$$

Para o caso de viga tronco de pirâmide (Variação apenas na altura),  $A(x)$  varia linearmente e largura  $b$  constante, tem-se:

$$A(x) = [\alpha_1 x + \beta_1] b$$

$$I(x) = b \frac{[\alpha_1 x + \beta_1]^3}{12} \quad (\text{A2.e-f})$$

Desta forma, tem-se:

$$G(x) = -\frac{6}{b\alpha_1(\alpha_1 x + \beta_1)^2}$$

$$H(x) = \frac{6}{b\alpha_1^2(\alpha_1 x + \beta_1)}$$

$$K(x) = \frac{6 \ln(\alpha_1 x + \beta_1)}{b\alpha_1^3}$$

$$\hat{F}(x) = \frac{\ln(\alpha_1 x + \beta_1)}{b\alpha_1} \quad (\text{A2.g-j})$$

Onde:  $\alpha_1 = \frac{h_2 - h_1}{L}$  e  $\beta_1 = h_1$

Já, para o caso em que a viga sofre variação tanto na altura quanto na largura, tem-se:

$$A(x) = [\alpha_1 x + \beta_1][\alpha_2 x + \beta_2]$$

$$I(x) = \frac{[\alpha_2 x + \beta_2][\alpha_1 x + \beta_1]^3}{12} \quad (\text{A2.1a-b})$$

Para este caso, tem-se:

$$G(x) = \frac{a_{11} \ln(\alpha_2 x + \beta_2)}{\alpha_2} + \frac{b_{11}}{\alpha_1(\alpha_1 x + \beta_1)} - \frac{c_{11}}{2\alpha_1(\alpha_1 x + \beta_1)^2} - \frac{d_{11} \ln(\alpha_1 x + \beta_1)}{\alpha_1}$$

$$H(x) = \frac{a_{11}(\alpha_2 x + \beta_2)[\ln(\alpha_2 x + \beta_2) - 1]}{\alpha_2^2} + \frac{b_{11} \ln(\alpha_1 x + \beta_1)}{\alpha_1^2} + \frac{c_{11}}{2\alpha_1^2(\alpha_1 x + \beta_1)} - \frac{d_{11}(\alpha_1 x + \beta_1)[\ln(\alpha_1 x + \beta_1) - 1]}{\alpha_1^2}$$

$$K(x) = \frac{a_{11}(\alpha_2 x + \beta_2)^2 \left[ \ln(\alpha_2 x + \beta_2) - \frac{3}{2} \right]}{2\alpha_2^3} + \frac{b_{11}(\alpha_1 x + \beta_1)[\ln(\alpha_1 x + \beta_1) - 1]}{\alpha_1^3} + \frac{c_{11} \ln(\alpha_1 x + \beta_1)}{2\alpha_1^3} - \frac{d_{11}(\alpha_1 x + \beta_1)^2 \left[ \ln(\alpha_1 x + \beta_1) - \frac{3}{2} \right]}{2\alpha_1^3}$$

$$\hat{F}(x) = \frac{\ln\left(\frac{\alpha_2 x + \beta_2}{\alpha_1 x + \beta_1}\right)}{\beta_1 \alpha_2 - \beta_2 \alpha_1} \quad (\text{A2.1c-f})$$

Onde:  $\beta_2 = \frac{b_2 - b_1}{L}$  e  $\alpha_2 = b_1$

Já, as constantes  $a_{11}$ ,  $b_{11}$ ,  $c_{11}$  e  $d_{11}$  ficam:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \frac{12\alpha_2^3}{(\beta_1\alpha_2 - \beta_2\alpha_1)} \\
 b_{11} &= \frac{12\alpha_1\alpha_2}{(\beta_1\alpha_2 - \beta_2\alpha_1)^2} \\
 c_{11} &= \frac{12\alpha_1}{-(\beta_1\alpha_2 - \beta_2\alpha_1)} \\
 d_{11} &= \frac{12\alpha_1\alpha_2^3}{\alpha_2(\beta_1\alpha_2 - \beta_2\alpha_1)^3}
 \end{aligned} \tag{A2.1g-j}$$

Por fim, para o caso de viga tronco de cone, a área da seção transversal e a inércia são dados por:

$$\begin{aligned}
 A(x) &= \pi[\alpha_3x + \beta_3]^2 \\
 I(x) &= \frac{\pi[\alpha_3x + \beta_3]^4}{4}
 \end{aligned} \tag{A2.2a-b}$$

As funções  $G(x)$ ,  $H(x)$ ,  $K(x)$  e  $\hat{F}(x)$ , para este caso são:

$$\begin{aligned}
 G(x) &= -\frac{4}{3\pi\alpha_3(\alpha_3x + \beta_3)^3} \\
 H(x) &= \frac{2}{3\pi\alpha_3^2(\alpha_3x + \beta_3)^2} \\
 K(x) &= -\frac{2}{3\pi\alpha_3^3(\alpha_3x + \beta_3)} \\
 \hat{F}(x) &= -\frac{1}{\pi\alpha_3(\alpha_3x + \beta_3)}
 \end{aligned} \tag{A2.2c-f}$$

### APÊNDICE 3

#### APRESENTAÇÃO DAS FUNÇÕES QUE COMPÕEM AS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS DO PROBLEMA DE VIGAS NÃO PRISMÁTICAS COM VARIAÇÃO NÃO SIMÉTRICA (EFEITO AXIAL E EFEITO TRANSVERSAL).

Do problema fundamental, tem-se:

$$\hat{F}(x) = \frac{4}{b} \left[ \frac{(r_2 - r_1) \alpha_{11}^3}{(\alpha_{11} + \alpha_{22})^4} \frac{(2r_2^2 + 5r_2 r_1 - 9r_2 x + 11r_1^2 - 27r_1 x + 18x^2)}{6(x - r_1)^3} + \frac{\alpha_{11}^3 \ln(x - r_1)}{(\alpha_{11} + \alpha_{22})^4} + \frac{(r_3 - r_1) \alpha_{22}^3}{(\alpha_{11} + \alpha_{22})^4} \frac{(2r_3^2 + 5r_3 r_1 - 9r_3 x + 11r_1^2 - 27r_1 x + 18x^2)}{6(x - r_1)^3} + \frac{\alpha_{22}^3 \ln(x - r_1)}{(\alpha_{11} + \alpha_{22})^4} \right]$$

$$T(x) = -\frac{6}{b} \left[ \frac{\alpha_{11}^2}{(\alpha_{11} + \alpha_{22})^4} \frac{[r_2^2 + r_2(r_1 - 3x) + r_1^2 - 3r_1 x + 3x^2]}{3(r_1 - x)^3} - \frac{\alpha_{22}^2}{(\alpha_{11} + \alpha_{22})^4} \frac{[r_3^2 + r_3(r_1 - 3x) + r_1^2 - 3r_1 x + 3x^2]}{3(r_1 - x)^3} \right]$$

$$Q(x) = \frac{-12}{b(\alpha_{11} + \alpha_{22})^3} \left[ -\frac{1}{2(r_1 - x)^2} \right]$$

$$J(x) = -T(x)$$

$$R(x) = \frac{-6}{b} \left[ \frac{\alpha_{11}^2}{(\alpha_{11} + \alpha_{22})^4} \left[ \frac{(r_2 - r_1)^2}{6(r_1 - x)^2} + \frac{r_2 - r_1}{r_2 - x} - \ln|x - r_1| \right] - \frac{\alpha_{22}^2}{(\alpha_{11} + \alpha_{22})^4} \left[ \frac{(r_3 - r_1)^2}{6(r_1 - x)^2} + \frac{r_3 - r_1}{r_2 - x} - \ln|x - r_1| \right] \right]$$

$$Y(x) = \frac{-12}{b(\alpha_{11} + \alpha_{22})^3} \left[ -\frac{1}{2(r_1 - x)} \right]$$

$$K(x) = \frac{-12}{b(\alpha_{11} + \alpha_{22})^3} \left[ \frac{\ln(r_1 - x)}{2} \right]$$

$$P(x) = -R(x) \quad (\text{A3.1.a-h})$$

Onde:

$$\hat{F}(x) = \int \frac{1}{A^*(x)} dx$$

$$T(x) = \int \frac{1}{B^*(x)} dx$$

$$Q(x) = \int \frac{1}{C^*(x)} dx$$

$$J(x) = \int \frac{1}{D^*(x)} dx$$

$$R(x) = \int T(x) dx$$

$$Y(x) = \int Q(x) dx$$

$$K(x) = \int Y(x) dx$$

$$P(x) = \int J(x) dx$$

$$F_5(x) = \frac{1}{A_{55}(x)}$$

$$F_5(x) = \frac{dG_5(x)}{dx}$$

$$A^*(x) = \frac{A_{11}(x)D_{11}(x) - B_{11}(x)^2}{D_{11}(x)}$$

$$B^*(x) = \frac{A_{11}(x)D_{11}(x) - B_{11}(x)^2}{B_{11}(x)}$$

$$C^*(x) = \frac{[B_{11}^2(x) - A_{11}(x)D_{11}(x)]}{A_{11}(x)}$$

$$A_{55}(x) = \kappa GA(x)$$

$$D^*(x) = -B^*(x) \quad (\text{A.3.2a-o})$$



Já as constantes que definem as funções (A3.1.a-h), são:

$$\begin{aligned}
 r_1 &= -\frac{(h_{0\text{inf}} + h_{0\text{sup}})}{\alpha_{11} + \alpha_{22}} \\
 r_2 &= \frac{-h_{0\text{inf}}}{\alpha_{11}} \\
 r_3 &= \frac{-h_{0\text{sup}}}{\alpha_{22}}
 \end{aligned}
 \tag{A.3.3a-c}$$

Por fim, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{11} &= \frac{h_{1\text{inf}} - h_{0\text{inf}}}{L} \\
 \alpha_{22} &= \frac{h_{1\text{sup}} - h_{0\text{sup}}}{L}
 \end{aligned}
 \tag{A.3.4a-b}$$

## APÊNDICE 4

### APRESENTAÇÃO DAS FUNÇÕES QUE COMPÕEM AS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS DO PROBLEMA DE VIGAS NÃO PRISMÁTICAS COM VARIAÇÃO QUADRÁTICA NA ALTURA.

Neste anexo, são apresentadas as funções que compõem as soluções fundamentais do problema de vigas não prismáticas com variação quadrática na altura. Vale observar que, para o caso quadrático todas as funções genéricas usadas nas análises segundo as teorias de Euler-Bernoulli e Timoshenko apesar de terem a natureza distinta das funções do caso linear, herdaram ligeira semelhança com as demais funções no quesito notação.

$$\hat{F}(x) = 4 \left[ -3h \sup Gq2(x) + Gq1(x) + 3h \sup^2 Gq3(x) \right]$$

$$T(x) = 6 \left[ -Gq2(x) + 2h \sup Gq3(x) \right]$$

$$R(x) = 6 \left[ -Hq2(x) + 2h \sup Hq3(x) \right]$$

$$S(x) = 6 \left[ -Kq2(x) + 2h \sup Kq3(x) \right]$$

$$Q(x) = -12Gq3(x)$$

$$J(x) = -T(x)$$

$$Y(x) = -12Hq3(x)$$

$$P(x) = -R(x)$$

Onde:

$$Gq1(x) = \frac{2 \arctg \left( \frac{\beta_1 + 2\gamma_1 x}{\sqrt{4\alpha_1 \gamma_1 - \beta_1^2}} \right)}{\alpha_2 \sqrt{4\alpha_1 \gamma_1 - \beta_1^2}}$$

$$Hq1(x) = \frac{1}{\alpha_2} \left[ \frac{\arctg\left(\frac{\beta_1 + 2\gamma_1 x}{\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}}\right)}{\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}} \left(2x + \frac{\beta_1}{\gamma_1}\right) - \frac{1}{2\gamma_1} \ln \left[ \left(\frac{\beta_1 + 2\gamma_1 x}{\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}}\right)^2 + 1 \right] \right]$$

$$Kq1(x) = \frac{(A_1 + A_2 + A_3)}{\alpha_2}$$

Onde:

$$A_1 = \left[ \frac{\arctg\left(\frac{\beta_1 + 2\gamma_1 x}{\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}}\right)}{\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}} \left(\frac{\beta_1}{\gamma_1} x + \frac{\beta_1^2}{4\gamma_1^2} + x^2 - 2\frac{\alpha_1}{\gamma_1} + \frac{1}{2} \frac{\beta_1^2}{\gamma_1^2}\right) + \frac{1}{4} \frac{\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}}{\gamma_1^2} \arctg\left(\frac{\beta_1 + 2\gamma_1 x}{\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}}\right) \right]$$

$$A_2 = \frac{-1}{2\gamma_1} x \ln \left[ \gamma_1 \frac{(\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2)}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)} \right] - \frac{1}{4} \frac{\beta_1}{\gamma_1^2} \ln(\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2)$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \frac{x}{\gamma_1} - \frac{1}{4} \frac{\beta_1}{\gamma_1^2} - x \frac{\ln[2]}{\gamma_1}$$

$$Wq1(x) = \frac{(B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5 + B_6 + B_7)}{\alpha_2}$$

Onde:

$$B_1 = \frac{\arctg\left(\frac{\beta_1 + 2\gamma_1 x}{\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}}\right)}{[4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2] \sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}} \left( \frac{-1}{6} \frac{\beta_1^5}{\gamma_1^3} - \frac{1}{3} \beta_1^2 x^3 + \frac{7}{6} \alpha_1 \frac{\beta_1^3}{\gamma_1^2} - 2\alpha_1^2 \frac{\beta_1}{\gamma_1} + \frac{4}{3} \gamma_1 \alpha_1 x^3 \right)$$

$$B_2 = \frac{\arctg\left(\frac{\beta_1 + 2\gamma_1 x}{\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}}\right)}{\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}} \left( \frac{1}{8} \frac{\beta_1^3}{\gamma_1^3} + \frac{1}{2} \frac{\beta_1^2}{\gamma_1^2} x + \frac{\alpha_1}{\gamma_1} x - \frac{1}{2} \alpha_1 \frac{\beta_1}{\gamma_1^2} + \frac{1}{2} \frac{\beta_1}{\gamma_1} x^2 \right)$$

$$B_3 = \frac{1}{8} \frac{\beta_1}{\gamma_1^3} \sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2} \arctg \left( \frac{\beta_1 + 2\gamma_1 x}{\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}} \right) + \left( \frac{-1}{4} \frac{\alpha_1}{\gamma_1^2} - \frac{1}{4} \frac{\beta_1}{\gamma_1^2} \right) \ln [\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2]$$

$$B_4 = \frac{1}{4} \frac{x^2}{\gamma_1} \ln \left[ \frac{\gamma_1 (\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2)}{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2} \right] + \left( \frac{-1}{48} \frac{\beta_1^2}{\gamma_1^3} + \frac{1}{3} \frac{\alpha_1}{\gamma_1^2} + \frac{1}{16} \frac{\beta_1^4}{\gamma_1^3} - \frac{1}{4} \alpha_1 \frac{\beta_1^2}{\gamma_1^2} \right) \ln \left[ \left( \frac{\beta_1 + 2\gamma_1 x}{\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}} \right)^2 + 1 \right]$$

$$B_5 = \frac{1}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)} \left( \frac{-1}{3} \alpha_1^2 x + \frac{1}{48} \frac{\beta_1^4}{\gamma_1^3} + \frac{1}{12} \frac{\beta_1^2}{\gamma_1} x^2 + \frac{1}{12} \frac{\beta_1^3}{\gamma_1^2} x - \frac{1}{12} \alpha_1 \frac{\beta_1^2}{\gamma_1^2} - \frac{1}{3} \alpha_1 \frac{\beta_1}{\gamma_1} x \right)$$

$$B_6 = \frac{1}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)^2} \left( \frac{1}{8} \frac{\beta_1^6}{\gamma_1^3} + \frac{1}{4} \frac{\beta_1^5}{\gamma_1^2} x + 4\alpha_1^2 \beta_1 x + 2\alpha_1^2 \frac{\beta_1^2}{\gamma_1} - \alpha_1 \frac{\beta_1^4}{\gamma_1^2} - 2\alpha_1 \frac{\beta_1^3}{\gamma_1} x \right)$$

$$B_7 = -\frac{1}{4} \frac{\beta_1}{\gamma_1^2} x - \frac{1}{2} \frac{\ln[2]}{\gamma_1} x^2 + \frac{1}{2} \frac{x^2}{\gamma_1} - \frac{1}{8} \frac{\beta_1^2}{\gamma_1^3}$$

$$Mq1(x) = \frac{(C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 + C_6 + C_7 + C_8 + C_9 + C_{10} + C_{11} + C_{12} + C_{13})}{\alpha_2}$$

Onde:

$$C_1 = \frac{\arctg \left( \frac{\beta_1 + 2\gamma_1 x}{\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}} \right)}{[4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2] \sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}} \left( \frac{-1}{12} \beta_1^2 x^4 - \frac{1}{3} \frac{\alpha_1^3}{\gamma_1} - \frac{1}{16} \frac{\beta_1^6}{\gamma_1^4} - \frac{1}{8} \frac{\beta_1^6}{\gamma_1^4} - \frac{1}{6} \frac{\beta_1^3}{\gamma_1} x^3 + \frac{2}{3} \beta_1 \alpha_1 x^3 + \frac{1}{3} \alpha_1 \gamma_1 x^4 \right)$$

$$C_2 = \frac{\arctg \left( \frac{\beta_1 + 2\gamma_1 x}{\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}} \right)}{[4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2] \sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}} \left( \frac{7}{6} \frac{\beta_1^3}{\gamma_1^2} \alpha_1 x - 2 \frac{\alpha_1^2}{\gamma_1} \beta_1 x - \frac{5}{4} \frac{\beta_1^2}{\gamma_1^2} \alpha_1^2 + \frac{5}{6} \frac{\beta_1^4}{\gamma_1^3} \alpha_1 - \alpha_1^2 \frac{\beta_1^2}{\gamma_1^2} - \frac{1}{6} \frac{\beta_1^5}{\gamma_1^3} x + \frac{1}{2} \frac{\beta_1^4}{\gamma_1^3} \alpha_1 \right)$$

$$C_3 = \frac{\arctg\left(\frac{\beta_1 + 2\gamma_1 x}{\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}}\right)}{\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}} \left( \frac{-1}{16} \frac{\beta_1^4}{\gamma_1^4} + \frac{1}{4} \frac{\beta_1^2}{\gamma_1^2} x^2 - \frac{1}{2} \frac{\alpha_1}{\gamma_1} x^2 - \frac{1}{12} \frac{\beta_1^2}{\gamma_1^3} \alpha_1 + \frac{1}{8} \frac{\beta_1^2}{\gamma_1^3} \alpha_1 + \frac{2}{3} \frac{\alpha_1^2}{\gamma_1^2} - \frac{1}{48} \frac{\beta_1^4}{\gamma_1^4} \right)$$

$$C_4 = \arctg\left(\frac{\beta_1 + 2\gamma_1 x}{\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}}\right) \sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2} \left( \frac{1}{16} \frac{\beta_1^2}{\gamma_1^4} - \frac{1}{8} \frac{\alpha_1}{\gamma_1^3} \right)$$

$$C_5 = \left( \frac{1}{96} \frac{\beta_1^3}{\gamma_1^4} + \frac{1}{24} \alpha_1 \frac{\beta_1}{\gamma_1^3} - \frac{1}{8} \frac{\beta_1^4}{\gamma_1^3} - \frac{1}{4} \alpha_1 \frac{\beta_1^2}{\gamma_1^2} \right) \ln\left[(\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2)\right] \\ + \left( \frac{1}{32} \frac{\beta_1^5}{\gamma_1^4} - \frac{1}{8} \frac{\beta_1^3 \alpha_1}{\gamma_1^3} \right) \frac{\ln\left[(\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2)\right]}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)}$$

$$C_6 = - \left( \frac{1}{12} \frac{x^3}{\gamma_1} + \frac{1}{48} \frac{\beta_1^2}{\gamma_1^3} x - \frac{1}{3} \frac{\alpha_1}{\gamma_1^2} x \right) \ln\left[ \frac{(\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2)}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)} \right]$$

$$C_7 = \left( \frac{1}{16} \frac{\beta_1^3}{\gamma_1^4} - \frac{1}{8} \beta_1 \frac{\alpha_1}{\gamma_1^3} + \frac{1}{16} \frac{\beta_1^5}{\gamma_1^4 (4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)} + \frac{1}{2} \alpha_1^2 \frac{\beta_1}{\gamma_1^2 (4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)} - \frac{3}{8} \beta_1^3 \frac{\alpha_1}{\gamma_1^3 (4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)} \right) \\ \ln\left[ \left( \frac{\beta_1 + 2\gamma_1 x}{\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}} \right)^2 + 1 \right]$$

$$C_8 = \left( -\frac{1}{48} \frac{\beta_1^4}{\gamma_1^4} + \frac{1}{16} \frac{\beta_1^4}{\gamma_1^3} x \right) \frac{\ln\left[ \frac{\gamma_1 (\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2)}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)} \right]}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)} - \frac{1}{4} \beta_1^2 \frac{\alpha_1}{\gamma_1^2} x \frac{\ln\left[ \frac{\gamma_1 (\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2)}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)} \right]}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)}$$

$$C_9 = \frac{1}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)} \left( \frac{-1}{9} \alpha_1 x^3 + \frac{1}{36} \frac{\beta_1^2}{\gamma_1} x^3 + \frac{1}{24} \frac{\beta_1^3}{\gamma_1^2} x^2 - \frac{5}{48} \frac{\beta_1^4}{\gamma_1^3} x + \frac{1}{8} \frac{\beta_1^4}{\gamma_1^3} \ln[2] x \right) \\ + \frac{5}{12} \alpha_1 \frac{\beta_1^2}{\gamma_1^2} x - \frac{1}{2} \frac{\beta_1^2}{\gamma_1^2} \alpha_1 \ln[2] x - \frac{1}{6} \frac{\alpha_1}{\gamma_1} \beta_1 x^2$$

$$C_{10} = \frac{1}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)^2} \left( \frac{2}{3} \alpha_1^3 x + 2\alpha_1^2 \beta_1 x^2 + \frac{17}{96} \frac{\beta_1^6}{\gamma_1^3} x + \frac{1}{3} \frac{\alpha_1^3}{\gamma_1} \beta_1 + \frac{1}{4} \alpha_1^2 \frac{\beta_1^3}{\gamma_1^2} - \frac{3}{16} \frac{\beta_1^5 \alpha_1}{\gamma_1^3} \right) \\ - \alpha_1 \frac{\beta_1^3}{\gamma_1} x^2 + \frac{5}{192} \frac{\beta_1^7}{\gamma_1^4} - \frac{11}{8} \alpha_1 \frac{\beta_1^4}{\gamma_1^2} x + \frac{5}{2} \frac{\alpha_1^2}{\gamma_1} \beta_1^2 x + \frac{1}{8} \frac{\beta_1^5}{\gamma_1^2} x^2$$

$$C_{11} = \frac{1}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)^3} \left( \alpha_1^2\beta_1^3x^2 - \frac{1}{6}\alpha_1\beta_1^4x^3 + \frac{1}{72}\frac{\beta_1^6}{\gamma_1}x^3 + \frac{1}{48}\frac{\beta_1^7}{\gamma_1^2}x^2 + \frac{1}{96}\frac{\beta_1^8}{\gamma_1^3}x - \frac{1}{9}\alpha_1^3\frac{\beta_1^3}{\gamma_1} \right. \\ \left. - \frac{2}{3}\alpha_1^3\beta_1^2x - \frac{8}{9}\alpha_1^3\gamma_1^2x^3 + \frac{1}{12}\frac{\beta_1^5\alpha_1^2}{\gamma_1^2} \right)$$

$$C_{12} = \frac{1}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)^3} \left( -\frac{1}{48}\frac{\beta_1^7}{\gamma_1^3}\alpha_1 - \frac{4}{3}\alpha_1^3\beta_1\gamma_1x^2 - \frac{1}{4}\beta_1^5\frac{\alpha_1}{\gamma_1}x^2 + \frac{1}{2}\beta_1^4\frac{\alpha_1^2}{\gamma_1}x - \frac{1}{8}\frac{\beta_1^6}{\gamma_1^2}x \right. \\ \left. + \frac{2}{3}\beta_1^2\alpha_1^2\gamma_1x^3 + \frac{1}{576}\frac{\beta_1^9}{\gamma_1^4} \right)$$

$$C_{13} = \left( -\frac{1}{4}\frac{\beta_1^2}{\gamma_1^3}x - \frac{1}{12}\frac{\alpha_1}{\gamma_1^2}x - \frac{1}{24}\frac{\beta_1}{\gamma_1^2}x^2 - \frac{1}{6}\frac{\ln[2]}{\gamma_1}x^3 + \frac{2}{3}\frac{\alpha_1}{\gamma_1^2}\ln[2]x - \frac{1}{24}\frac{\beta_1^2}{\gamma_1^3}\ln[2]x \right. \\ \left. + \frac{1}{8}\alpha_1\frac{\beta_1}{\gamma_1^3} + \frac{2}{9}\frac{x^2}{\gamma_1} - \frac{1}{16}\frac{\beta_1^3}{\gamma_1^4} \right)$$

$$Gq2(x) = \frac{1}{\alpha_2} \left[ \frac{\beta_1 + 2\gamma_1x}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)(\alpha_1 + \beta_1x + \gamma_1x^2)} + \frac{4\gamma_1 \arctg\left(\frac{\beta_1 + 2\gamma_1x}{\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}}\right)}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}} \right]$$

$$Gq3(x) = \frac{1}{12\alpha_2} \left[ 12 \frac{\frac{\beta_1}{12} + \gamma_1x}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)(\alpha_1 + \beta_1x + \gamma_1x^2)^2} + 72 \frac{\frac{\beta_1\gamma_1}{2} + \gamma_1^2x}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)^2(\alpha_1 + \beta_1x + \gamma_1x^2)} \right. \\ \left. + \frac{144\gamma_1^2 \arctg\left(\frac{\beta_1 + 2\gamma_1x}{\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}}\right)}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)^2\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}} \right]$$

$$Hq2(x) = \frac{1}{\alpha_2} \left[ \frac{\arctg\left(\frac{\beta_1 + 2\gamma_1 x}{\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}}\right)}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}} (4\gamma_1 x + 2\beta_1) + \frac{\ln[\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2]}{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2} \right. \\ \left. - \frac{\ln\left[\left(\frac{\beta_1 + 2\gamma_1 x}{\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}}\right)^2 + 1\right]}{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2} \right]$$

$$Hq3(x) = \frac{(d_1 + d_2 + d_3)}{12\alpha_2}$$

Onde:

$$d_1 = \frac{144\gamma_1^2 x \arctg\left(\frac{\beta_1 + 2\gamma_1 x}{\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}}\right)}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)^2 \sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}} + \frac{72\gamma_1\beta_1 \arctg\left(\frac{\beta_1 + 2\gamma_1 x}{\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}}\right)}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)^2 \sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}}$$

$$d_2 = -36\gamma_1 \frac{\ln\left[\left(\frac{\beta_1 + 2\gamma_1 x}{\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}}\right)^2 + 1\right]}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)^2} + 36\gamma_1 \frac{\ln[\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2]}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)^2}$$

$$d_3 = \frac{-6}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)(\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2)}$$

$$Kq2(x) = \frac{(e_1 + e_2 + e_3)}{\alpha_2}$$

Onde:

$$e_1 = \frac{\arctg\left(\frac{\beta_1 + 2\gamma_1 x}{\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}}\right)}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}} \left(2\beta_1 x + \frac{\beta_1^2}{2\gamma_1} + 2\gamma_1 x^2\right) + \frac{\arctg\left(\frac{\beta_1 + 2\gamma_1 x}{\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}}\right)}{\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}} \left(\frac{1}{2\gamma_1}\right)$$

$$e_2 = x \frac{\ln\left[\frac{\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)}\right]}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)} - x \frac{\ln\left[\frac{\gamma_1(\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2)}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)}\right]}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)}$$

$$e_3 = \frac{-1}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)} \left(x + 2\ln[2]x + \frac{\beta_1}{2\gamma_1}\right)$$

$$Kq3(x) = \frac{(f_1 + f_2 + f_3)}{12\alpha_2}$$

Onde:

$$f_1 = \frac{48\left(-\gamma_1\alpha_1 + \frac{\beta_1^2}{4} + \frac{6}{4}\gamma_1 x^2 + \frac{3}{8}\beta_1^2 + \frac{6}{4}\beta_1\gamma_1 x\right)\arctg\left(\frac{\beta_1 + 2\gamma_1 x}{\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}}\right)}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}} + \frac{18\arctg\left(\frac{\beta_1 + 2\gamma_1 x}{\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}}\right)}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}}$$

$$f_2 = (36\gamma_1 x) \frac{\ln\left[\frac{\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)}\right] - \ln\left[\frac{\gamma_1(\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2)}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)}\right]}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)^2}$$



$$f_3 = -\frac{36\gamma_1 x + 18\beta_1 + 72\gamma_1 \ln[2]x}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)^2}$$

$$Wq2(x) = \frac{(g_1 + g_2 + g_3)}{\alpha_2}$$

Onde:

$$g_1 = \frac{\arctg\left(\frac{\beta_1 + 2\gamma_1 x}{\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}}\right)}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}} \left(\frac{2}{3}\gamma_1 x^3 + \frac{\beta_1^3}{3\gamma_1^2} + \beta_1 x^2 + \frac{1}{2}\frac{\beta_1^2}{\gamma_1}x - \frac{\alpha_1\beta_1}{\gamma_1}\right) \\ + \frac{\arctg\left(\frac{\beta_1 + 2\gamma_1 x}{\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}}\right)}{\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}} \left(\frac{1}{2\gamma_1} + \frac{\beta_1}{2\gamma_1^2}\right)$$

$$g_2 = \frac{x^2 \ln[\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2]}{2(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)} - \frac{x^2 \ln\left[\frac{\gamma_1(\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2)}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)}\right]}{2(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)} - \frac{1}{12\gamma_1^2} \ln\left[\left(\frac{\beta_1 + 2\gamma_1 x}{\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}}\right)^2 + 1\right]$$

$$g_3 = \frac{1}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)} \left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{7}{6}\frac{\beta_1}{\gamma_1}x + \frac{7}{24}\frac{\beta_1^2}{\gamma_1^2} + \ln[2]x^2\right) \\ + \frac{1}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)^2} \left(2\alpha_1\beta_1 x - \frac{1}{4}\frac{\beta_1^4}{\gamma_1^2} + \alpha_1\frac{\beta_1^2}{\gamma_1} - \frac{\beta_1^3}{2\gamma_1}x\right)$$

$$Mq2(x) = \frac{(h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + h_6 + h_7)}{\alpha_2}$$

Onde:

$$h_1 = \frac{\arctg\left(\frac{\beta_1 + 2\gamma_1 x}{\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}}\right)}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}} \left( \begin{aligned} & \left( \frac{-1}{6} \frac{\alpha_1^2}{\gamma_1} + \frac{3}{16} \frac{\beta_1^4}{\gamma_1^3} + \frac{1}{6} \gamma_1 x^4 + \frac{1}{3} \beta_1 x^3 \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \frac{\beta_1^2}{\gamma_1} x^2 + \frac{1}{3} \frac{\beta_1^3}{\gamma_1^2} x - \frac{2}{3} \alpha_1 \frac{\beta_1^2}{\gamma_1^2} - \alpha_1 \frac{\beta_1}{\gamma_1} x \right) \end{aligned} \right)$$

$$h_2 = \frac{\arctg\left(\frac{\beta_1 + 2\gamma_1 x}{\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}}\right)}{\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}} \left( \frac{1}{4} \frac{x^2}{\gamma_1} + \frac{1}{4} \frac{\beta_1^2}{\gamma_1^3} - \frac{1}{3} \frac{\alpha_1}{\gamma_1^2} + \frac{1}{12} \frac{\beta_1^2}{\gamma_1^3} + \frac{1}{2} \frac{\beta_1}{\gamma_1^2} x \right) \\ - \arctg\left(\frac{\beta_1 + 2\gamma_1 x}{\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}}\right) \left( -\frac{1}{16} \frac{\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}}{\gamma_1^3} \right)$$

$$h_3 = \left( \frac{1}{6} x^3 \right) \frac{\ln\left[\left(\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2\right)\right]}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)} - \frac{1}{24} \frac{\beta_1}{\gamma_1^3} \ln\left[\left(\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2\right)\right] \\ - \left( \frac{1}{6} x^3 \right) \frac{\ln\left[\frac{\gamma_1(\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2)}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)}\right]}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)} - \left( \frac{1}{16} \frac{\beta_1^3}{\gamma_1^3} - \frac{1}{4} \alpha_1 \frac{\beta_1}{\gamma_1^2} + \frac{1}{16} \frac{\beta_1}{\gamma_1^3} \right) \ln\left[\left(\frac{\beta_1 + 2\gamma_1 x}{\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}}\right)^2 + 1\right]$$

$$h_4 = \left( \frac{-1}{12} \frac{x}{\gamma_1^2} \right) \ln\left[\frac{\gamma_1(\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2)}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)}\right] - \frac{1}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)} \left( \begin{aligned} & \left( \frac{7}{12} \frac{\beta_1}{\gamma_1} x^2 + \frac{5}{12} \frac{\beta_1^2}{\gamma_1^2} x \right. \\ & \left. + \frac{2}{9} x^3 + \frac{1}{3} \ln[2] x^3 - \frac{1}{16} \frac{\beta_1^3}{\gamma_1^3} \right) \end{aligned} \right)$$

$$h_5 = \frac{1}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)^2} \left( \begin{aligned} & \left( \frac{-1}{4} \frac{\beta_1^3}{\gamma_1} x^2 + \alpha_1 \beta_1 x^2 - \frac{17}{48} \frac{\beta_1^4}{\gamma_1^2} x + \frac{1}{6} \alpha_1^2 \frac{\beta_1}{\gamma_1} + \frac{1}{6} \alpha_1 \frac{\beta_1^3}{\gamma_1^2} \right. \\ & \left. + \frac{4}{3} \alpha_1 \frac{\beta_1^2}{\gamma_1} x + \frac{1}{3} \alpha_1^2 x - \frac{5}{96} \frac{\beta_1^5}{\gamma_1^3} \right) \end{aligned} \right)$$

$$h_6 = \frac{1}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)^3} \left( \begin{aligned} & \left( \frac{1}{3} \alpha_1 \beta_1^3 x^2 - \frac{1}{3} \alpha_1^2 \beta_1^2 x - \frac{1}{48} \frac{\beta_1^6}{\gamma_1^2} x - \frac{1}{24} \frac{\beta_1^5}{\gamma_1} x^2 - \frac{4}{9} \alpha_1^2 \gamma_1^2 x^3 - \frac{1}{18} \alpha_1^2 \frac{\beta_1^3}{\gamma_1} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{36} \alpha_1 \frac{\beta_1^5}{\gamma_1^2} - \frac{2}{3} \alpha_1^2 \beta_1 \gamma_1 x^2 + \frac{1}{6} \alpha_1 \frac{\beta_1^4}{\gamma_1} x + \frac{2}{9} \alpha_1 \beta_1^2 \gamma_1 x^3 - \frac{1}{36} \beta_1^4 x^3 - \frac{1}{288} \frac{\beta_1^7}{\gamma_1^3} \right) \end{aligned} \right)$$

$$h_7 = \frac{1}{24} \frac{x}{\gamma_1^2} - \frac{1}{6} \frac{\ln[2]}{\gamma_1^2} x - \frac{1}{16} \frac{\beta_1}{\gamma_1^3}$$

$$Wq3(x) = \frac{(i_1 + i_2 + i_3)}{12\alpha_2}$$

Onde:

$$i_1 = \frac{36 \arctg \left( \frac{\beta_1 + 2\gamma_1 x}{\sqrt{4\alpha_1 \gamma_1 - \beta_1^2}} \right)}{(4\alpha_1 \gamma_1 - \beta_1^2)^2 \sqrt{4\alpha_1 \gamma_1 - \beta_1^2}} \left( \beta_1 \gamma_1 x^2 - \frac{8}{6} \alpha_1 \gamma_1 x - \frac{10}{6} \alpha_1 \beta_1 + \frac{5}{6} \beta_1^2 x + \frac{\beta_1^3}{2\gamma_1} + \frac{4}{6} \gamma_1^2 x^3 \right) \\ + \frac{18 \arctg \left( \frac{\beta_1 + 2\gamma_1 x}{\sqrt{4\alpha_1 \gamma_1 - \beta_1^2}} \right)}{(4\alpha_1 \gamma_1 - \beta_1^2) \sqrt{4\alpha_1 \gamma_1 - \beta_1^2}} \left( \frac{\beta_1}{\gamma_1} + x \right)$$

$$i_2 = -18\gamma_1 x^2 \frac{\ln \left[ \frac{\gamma_1 (\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2)}{(4\alpha_1 \gamma_1 - \beta_1^2)} \right]}{(4\alpha_1 \gamma_1 - \beta_1^2)^2} + 18\gamma_1 x^2 \frac{\ln \left[ |(\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2)| \right]}{(4\alpha_1 \gamma_1 - \beta_1^2)^2} \\ - 3 \left( \frac{\beta_1^2}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_1} - 4\alpha_1 \right) \frac{\ln \left[ \left( \frac{\beta_1 + 2\gamma_1 x}{\sqrt{4\alpha_1 \gamma_1 - \beta_1^2}} \right)^2 + 1 \right]}{(4\alpha_1 \gamma_1 - \beta_1^2)^2}$$

$$i_3 = \frac{-36}{(4\alpha_1 \gamma_1 - \beta_1^2)^2} \left[ \gamma_1 x^2 \left[ \ln[2] + \frac{4}{6} \right] + \frac{21}{72} \frac{\beta_1^2}{\gamma_1} + \frac{7\beta_1}{6} x \right] \\ + \frac{36}{(4\alpha_1 \gamma_1 - \beta_1^2)^3} \left[ \alpha_1 \beta_1^2 - \frac{\beta_1^4}{4\gamma_1} + \left( 2\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 - \frac{\beta_1^3}{2} \right) x \right]$$

$$Mq3(x) = \frac{(j_1 + j_2 + j_3 + j_4 + j_5 + j_6 + j_7 + j_8)}{\alpha_2}$$

Onde:

$$\begin{aligned}
j_1 &= \frac{6 \operatorname{arctg} \left( \frac{\beta_1 + 2\gamma_1 x}{\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}} \right)}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)^2 \sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}} \left( 7\alpha_1^2 - 10\alpha_1\beta_1x - 4\frac{\alpha_1}{\gamma_1}\beta_1^2 + \frac{1}{2}\frac{\beta_1^4}{\gamma_1^2} + \gamma_1^2x^4 \right. \\
&\quad \left. + \frac{33}{24}\frac{\beta_1^4}{\gamma_1^2} + \frac{15}{6}\beta_1^2x^2 - 4\alpha_1\gamma_1x^2 + 2\gamma_1\beta_1x^3 - 5\frac{\alpha_1}{\gamma_1}\beta_1^2 + 3\frac{\beta_1^3}{\gamma_1}x \right) \\
j_2 &= \frac{3 \operatorname{arctg} \left( \frac{\beta_1 + 2\gamma_1 x}{\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}} \right)}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2) \sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}} \left( 3x^2 + \frac{7}{2}\frac{\beta_1^2}{\gamma_1^2} - 2\frac{\alpha_1}{\gamma_1} + 6\frac{\beta_1}{\gamma_1} - 4\frac{\alpha_1}{\gamma_1} + \frac{\beta_1^2}{\gamma_1^2} \right) + \frac{9}{4\gamma_1^2} \frac{\operatorname{arctg} \left( \frac{\beta_1 + 2\gamma_1 x}{\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}} \right)}{\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}} \\
j_3 &= -3 \left( -4\alpha_1x + 2\gamma_1x^3 + \frac{\beta_1^2}{\gamma_1}x \right) \frac{\ln \left[ \frac{\gamma_1(\alpha_1 + \beta_1x + \gamma_1x^2)}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)} \right]}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)^2} - 3 \frac{x}{\gamma_1} \frac{\ln \left[ \frac{\gamma_1(\alpha_1 + \beta_1x + \gamma_1x^2)}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)} \right]}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)} \\
&\quad + 3 \left( 2\frac{\alpha_1}{\gamma_1}\beta_1 - \frac{1}{2}\frac{\beta_1^3}{\gamma_1^2} + 2\gamma_1x^3 \right) \frac{\ln \left[ (\alpha_1 + \beta_1x + \gamma_1x^2) \right]}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)^2} \\
j_4 &= -\frac{3\beta_1}{2\gamma_1^2} \frac{\ln \left[ \alpha_1 + \beta_1x + \gamma_1x^2 \right]}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)} - \frac{9}{4} \left( \frac{\beta_1^3}{\gamma_1^2} - 4\frac{\alpha_1\beta_1}{\gamma_1} \right) \frac{\ln \left[ \left( \frac{\beta_1 + 2\gamma_1x}{\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}} \right)^2 + 1 \right]}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)^2} \\
&\quad - \frac{9}{4} \frac{\beta_1}{\gamma_1^2} \frac{\ln \left[ \left( \frac{\beta_1 + 2\gamma_1x}{\sqrt{4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2}} \right)^2 + 1 \right]}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)} \\
j_5 &= \frac{-3}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)^2} \left( \frac{8}{3}\gamma_1x^3 + 7\beta_1x^2 + 4\alpha_1x + 4\frac{\beta_1^2}{\gamma_1}x - 8\alpha_1 \ln[2]x \right. \\
&\quad \left. + 4\gamma_1 \ln[2]x^3 + \frac{5}{4}\frac{\beta_1^3}{\gamma_1^2} + 2\frac{\beta_1^2}{\gamma_1} \ln[2]x - 2\alpha_1 \frac{\beta_1}{\gamma_1} \right)
\end{aligned}$$

$$j_6 = \frac{6}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)^3} \left[ \left( 6\alpha_1\beta_1\gamma_1x^3 - \frac{9}{6}\beta_1^3 \right)x^2 + \left( 8\alpha_1\beta_1^2 - \frac{51\beta_1^4}{24\gamma_1} + 2\alpha_1^2\gamma_1 \right)x \right. \\ \left. + \alpha_1^2\beta_1 - \frac{15}{48}\frac{\beta_1^5}{\gamma_1^2} + \alpha_1\frac{\beta_1^3}{\gamma_1} \right]$$

$$j_7 = \frac{6}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)^4} \left[ \left( \alpha_1\beta_1^4 - \frac{3}{24}\frac{\beta_1^6}{\gamma_1} - 2\alpha_1^2\beta_1^2\gamma_1 \right)x + \left( \frac{16}{6}\alpha_1^2\gamma_1^3 + \frac{\beta_1^4}{6}\gamma_1 - \frac{8}{6}\alpha_1\beta_1^2\gamma_1^2 \right)x^3 \right. \\ \left. - \left( \frac{1}{4}\beta_1^5 - 2\alpha_1\beta_1^3\gamma_1 + 4\alpha_1^2\beta_1\gamma_1^2 \right)x^2 + \frac{\alpha_1}{6\gamma_1}\beta_1^5 - \frac{\alpha_1^2}{3}\beta_1^3 - \frac{1}{48}\frac{\beta_1^8}{\gamma_1^2} \right]$$

$$j_8 = \frac{3}{(4\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)} \left[ \left( \frac{1}{2} - 2\ln[2] \right) \frac{x}{\gamma_1} - \frac{3}{4}\frac{\beta_1}{\gamma_1^2} \right]$$

Por fim, tem-se:

$$\alpha_1 = h_{1i}$$

$$\beta_1 = \frac{4h_{2i}}{L} - \frac{3h_{1i}}{L} - \frac{h_{3i}}{L}$$

$$\gamma_1 = \frac{2h_{1i}}{L^2} - \frac{4h_{2i}}{L^2} + \frac{2h_{3i}}{L^2}$$

## APÊNDICE 5

### APRESENTAÇÃO DAS FUNÇÕES QUE COMPÕEM AS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS DO PROBLEMA DE ARCOS ABATIDOS NÃO PRISMÁTICOS COM VARIAÇÕES SIMÉTRICAS.

Neste anexo, são apresentadas as funções que compõem as soluções fundamentais do problema de arcos abatidos não prismáticos com variações simétricas. Vale observar que,  $GG(x) = \hat{F}(x)$  e que as funções  $G(x)$ ,  $H(x)$ ,  $K(x)$  presentes no Capítulo VI, são as mesmas apresentadas no anexo II, por este motivo, aqui serão apresentadas apenas as funções adicionais, que são:

$$H_5(x) = \int \hat{F}(x) dx$$

$$W(x) = \int K(x) dx \quad (\text{A.5.a-b})$$

Para o caso de arco tronco de pirâmide (Variação apenas na altura),  $A(x)$  varia linearmente e largura  $b$  constante, tem-se:

$$A(x) = [\alpha_1 x + \beta_1] b$$

$$I(x) = b \frac{[\alpha_1 x + \beta_1]^3}{12} \quad (\text{A.5.c-d})$$

Desta forma, tem-se:

$$H_5(x) = \frac{(\alpha_1 x + \beta_1)^2 \left[ \ln(|\alpha_1 x + \beta_1|) - \frac{3}{2} \right]}{2\beta_2 \alpha_1^3}$$

$$W(x) = \frac{6(\alpha_1 x + \beta_1) [\ln(|\alpha_1 x + \beta_1|) - 1]}{\beta_2 \alpha_1^4} \quad (\text{A.5.e-f})$$

$$\text{Onde: } \alpha_1 = \frac{h_2 - h_1}{L} \text{ e } \beta_1 = h_1$$

Já, para o caso em que o arco sofre variação tanto na altura quanto na largura, tem-se:

$$A(x) = [\alpha_1 x + \beta_1][\alpha_2 x + \beta_2]$$

$$I(x) = \frac{[\alpha_2 x + \beta_2][\alpha_1 x + \beta_1]^3}{12} \quad (\text{A.5.g-h})$$

Para este caso, tem-se:

$$H_5(x) = \frac{1}{(\beta_1 \alpha_2 - \beta_2 \alpha_1)} \left[ \frac{(\alpha_2 x + \beta_2)^2 \left[ \ln(|\alpha_2 x + \beta_2|) - \frac{3}{2} \right]}{2\alpha_2^2} - \frac{(\alpha_1 x + \beta_1)^2 \left[ \ln(|\alpha_1 x + \beta_1|) - \frac{3}{2} \right]}{2\alpha_1^3} \right]$$

$$\begin{aligned} W(x) = & \frac{a_{11}(\alpha_2 x + \beta_2)^3 \left[ \ln(|\alpha_2 x + \beta_2|) - \frac{11}{6} \right]}{6\alpha_2^4} + \frac{b_{11}(\alpha_1 x + \beta_1)^2 \left[ \ln(|\alpha_1 x + \beta_1|) - \frac{3}{2} \right]}{2\alpha_1^4} \\ & + \frac{c_{11}(\alpha_1 x + \beta_1) \left[ \ln(|\alpha_1 x + \beta_1|) - 1 \right]}{2\alpha_1^4} - \frac{d_{11}(\alpha_1 x + \beta_1)^3 \left[ \ln(|\alpha_1 x + \beta_1|) - \frac{11}{6} \right]}{6\alpha_1^4} \end{aligned} \quad (\text{A.5.i-j})$$

$$\text{Onde: } \beta_2 = \frac{b_2 - b_1}{L} \text{ e } \alpha_2 = b_1$$

Já, as constantes  $a_{11}$ ,  $b_{11}$ ,  $c_{11}$  e  $d_{11}$  ficam:

$$a_{11} = \frac{12\alpha_2^3}{(\beta_1 \alpha_2 - \beta_2 \alpha_1)}$$

$$b_{11} = \frac{12\alpha_1 \alpha_2}{(\beta_1 \alpha_2 - \beta_2 \alpha_1)^2}$$

$$c_{11} = \frac{12\alpha_1}{-(\beta_1 \alpha_2 - \beta_2 \alpha_1)}$$

$$d_{11} = \frac{12\alpha_1 \alpha_2^3}{\alpha_2 (\beta_1 \alpha_2 - \beta_2 \alpha_1)^3} \quad (\text{A.5.k-n})$$

Por fim, para o caso do arco tronco de cone, a área da seção transversal e a inércia são dados por:

$$A(x) = \pi [\alpha_3 x + \beta_3]^2$$

$$I(x) = \frac{\pi [\alpha_3 x + \beta_3]^4}{4} \quad (\text{A.5.o-p})$$

Para este caso, tem-se:

$$H_5(x) = -\frac{(\alpha_3 x + \beta_3) [\ln |\alpha_3 x + \beta_3| - 1]}{\pi \alpha_3^3}$$

$$W(x) = -\frac{2 \ln |\alpha_3 x + \beta_3|}{3 \pi \alpha_3^4} \quad (\text{A.5.q-r})$$



## APÊNDICE 6

### APRESENTAÇÃO DAS FUNÇÕES QUE COMPÕEM AS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS NO VETOR DE CARGA.

Nas integrais superiores dos deslocamentos para o cálculo do vetor de carga do problema axial, Euler e Timoshenko, tem-se:

$$p(x) = \gamma A(x)$$

Onde, para o caso da área linear, quadrática e quartica, tem-se:

$$A(x) = b(\alpha_1 + \beta_1 x)$$

$$A(x) = b(\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2)$$

$$A(x) = b(\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2 + \delta x^3 + \varepsilon_1 x^4)$$

$$\int u_F^*(x, \hat{x}) dx = \frac{-\text{sgn}(x - \hat{x})}{2E} [\hat{G}(x) - \hat{G}(\hat{x})] + \frac{r^2}{4E} \text{sgn}(x - \hat{x}) \hat{F}(\hat{x})$$

$$\iint u_F^*(x, \hat{x}) dx dx = \frac{-\text{sgn}(x - \hat{x})}{2E} [\hat{H}(x) - \hat{H}(\hat{x})] + \frac{r}{2E} \hat{G}(\hat{x}) + \frac{r^2}{4E} \text{sgn}(x - \hat{x}) \hat{F}(\hat{x}) \sim$$

$$\iiint u_F^*(x, \hat{x}) dx dx dx = \frac{-\text{sgn}(x - \hat{x})}{2E} [\hat{K}(x) - \hat{K}(\hat{x})] + \frac{r}{2E} \hat{H}(\hat{x}) + \frac{r^2}{4E} \text{sgn}(x - \hat{x}) \hat{G}(\hat{x}) + \frac{r^3}{12E} \text{sgn}(x - \hat{x}) \hat{F}(\hat{x})$$

$$\iiint \int u_F^*(x, \hat{x}) dx dx dx dx = \frac{-\text{sgn}(x - \hat{x})}{2E} [\hat{L}(x) - \hat{L}(\hat{x})] + \frac{r}{2E} \hat{K}(\hat{x}) + \frac{r^2}{4E} \text{sgn}(x - \hat{x}) \hat{H}(\hat{x}) + \frac{r^3}{12E} \hat{G}(\hat{x}) + \frac{r^4}{48E} \hat{F}(\hat{x})$$

$$\iiint \int \int u_F^*(x, \hat{x}) dx dx dx dx dx = \frac{-\text{sgn}(x - \hat{x})}{2E} [\hat{N}(x) - \hat{N}(\hat{x})] + \frac{r}{2E} \hat{L}(\hat{x}) + \frac{r^2}{4E} \text{sgn}(x - \hat{x}) \hat{K}(\hat{x}) + \frac{r^3}{12E} \text{sgn}(x - \hat{x}) \hat{H}(\hat{x}) + \frac{r^4}{48E} \hat{G}(\hat{x}) + \frac{r^5}{240E} \text{sgn}(x - \hat{x}) \hat{F}(\hat{x})$$

Já os  $w_F^*(x, \hat{x})$  aqui, servem tanto para vigas de Euler-Bernoulli quanto para Timoshenko, para viga não prismática de variação simétrica  $w_F^*(x, \hat{x}) = 0$ .

$$\begin{aligned}
\int w_F^*(x, \hat{x}) dx &= \frac{-\operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{2E} [S(x) - S(\hat{x})] + \frac{r}{2E} \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) R(\hat{x}) + \frac{r^2}{4E} \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) T(\hat{x}) \\
\iint w_F^*(x, \hat{x}) dx dx &= \frac{-\operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{2E} [SS(x) - SS(\hat{x})] + \frac{r}{2E} S(\hat{x}) + \frac{r^2}{4E} \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) R(\hat{x}) + \frac{r^3}{12E} T(\hat{x}) \\
\iiint w_F^*(x, \hat{x}) dx dx dx &= \frac{-\operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{2E} [TS(x) - TS(\hat{x})] + \frac{r}{2E} SS(\hat{x}) + \frac{r^2}{4E} \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) S(\hat{x}) + \frac{r^3}{12E} \hat{F}(\hat{x}) \\
&\quad + \frac{r^4}{48E} \operatorname{sgn}(x, \hat{x}) T(\hat{x}) \\
\iiint w_F^*(x, \hat{x}) dx dx dx dx &= \frac{-\operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{2E} [RS(x) - RS(\hat{x})] + \frac{r}{2E} TS(\hat{x}) + \frac{r^2}{4E} \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) SS(\hat{x}) \\
&\quad + \frac{r^3}{12E} S(\hat{x}) + \frac{r^4}{48E} R(\hat{x}) + \frac{r^5}{120E} T(\hat{x}) \\
\iiint w_F^*(x, \hat{x}) dx dx dx dx dx &= \frac{-\operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{2E} [BS(x) - BS(\hat{x})] + \frac{r}{2E} RS(\hat{x}) + \frac{r^2}{4E} \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) TS(\hat{x}) \\
&\quad + \frac{r^3}{12E} \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) SS(\hat{x}) + \frac{r^4}{48E} S(\hat{x}) + \frac{r^5}{240E} \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) R(\hat{x}) + \frac{r^6}{120E} \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) T(\hat{x})
\end{aligned}$$

Aqui são exibidos os  $w_p^*(x, \hat{x})$ , são válidos tanto para vigas de Euler-Bernoulli quanto para Timoshenko.

Para o caso de Euler, tem-se:

$$\begin{aligned}
\int w_p^*(x, \hat{x}) dx &= \frac{-1}{2E} [rK(x) + 2rK(\hat{x}) - 3\operatorname{sgn}(x - \hat{x})L(x) - L(\hat{x})] + \frac{r^2}{2E} \operatorname{sgn}(x - \hat{x})Y(\hat{x}) \\
\iint w_p^*(x, \hat{x}) dx dx &= \frac{-\operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{2E} [rL(x) + 3rL(\hat{x})] + \frac{r^3}{6E} Y(\hat{x}) + r^2 \operatorname{sgn}(x - \hat{x})K(\hat{x}) \\
&\quad - 4\operatorname{sgn}(x - \hat{x})[M(x) - M(\hat{x})] \\
\iiint w_p^*(x, \hat{x}) dx dx dx &= \frac{-\operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{2E} \left[ rM(x) + 4rM(\hat{x}) + \frac{3}{2} r^2 \operatorname{sgn}(x - \hat{x})L(\hat{x}) + \frac{r^4}{24} Y(\hat{x}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{r^3}{3} \operatorname{sgn}(x - \hat{x})K(\hat{x}) - 5\operatorname{sgn}(x - \hat{x})[N(x) - N(\hat{x})] \right]
\end{aligned}$$

$$\iiint w_p^*(x, \hat{x}) dx dx dx = \frac{-\operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{2E} \left[ \begin{aligned} & rN(x) + 5rN(\hat{x}) + \frac{4}{2} r^2 \operatorname{sgn}(x - \hat{x})M(\hat{x}) + \frac{3r^3}{6} L(\hat{x}) \\ & + \frac{r^5}{120} \operatorname{sgn}(x - \hat{x})Y(\hat{x}) + \frac{r^4}{12} K(\hat{x}) \\ & - 6\operatorname{sgn}(x, \hat{x})[NN(x) - NN(\hat{x})] \end{aligned} \right]$$

Para o caso de Timoshenko, tem-se:

$$\int w_p^*(x, \hat{x}) dx = \frac{-1}{2E} [rK(x) + 2rK(\hat{x}) - 3\operatorname{sgn}(x - \hat{x})L(x) - L(\hat{x})] + \frac{r^2}{2E} \operatorname{sgn}(x - \hat{x})Y(\hat{x}) - \frac{1}{2\kappa G} [G5(x) - G5(\hat{x}) - rF5(\hat{x})]$$

$$\iint w_p^*(x, \hat{x}) dx dx = \frac{-\operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{2E} [rL(x) + 3rL(\hat{x})] + \frac{r^3}{6} Y(\hat{x}) + r^2 \operatorname{sgn}(x - \hat{x})K(\hat{x}) - 4\operatorname{sgn}(x - \hat{x})[M(x) - M(\hat{x})] - \frac{1}{2\kappa G} \left[ \begin{aligned} & \operatorname{sgn}(x - \hat{x})[H5(x) - H5(\hat{x})] - rG5(\hat{x}) \\ & - \frac{r^2}{2} \operatorname{sgn}(x - \hat{x})F5(\hat{x}) \end{aligned} \right]$$

$$\iiint w_p^*(x, \hat{x}) dx dx dx = \frac{-\operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{2E} \left[ \begin{aligned} & rM(x) + 4rM(\hat{x}) + \frac{3}{2} r^2 \operatorname{sgn}(x - \hat{x})L(\hat{x}) + \frac{r^4}{24} Y(\hat{x}) \\ & + \frac{r^3}{3} \operatorname{sgn}(x - \hat{x})K(\hat{x}) - 5\operatorname{sgn}(x - \hat{x})[N(x) - N(\hat{x})] \end{aligned} \right] - \frac{1}{2\kappa G} \left[ \begin{aligned} & \operatorname{sgn}(x, \hat{x})[K5(x) - K5(\hat{x})] - rH5(x) - \frac{r^2}{2} \operatorname{sgn}(x, \hat{x})G5(\hat{x}) - \frac{r^3}{6} F5(\hat{x}) \end{aligned} \right]$$

$$\iiint \int w_p^*(x, \hat{x}) dx dx dx dx = \frac{-\operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{2E} \left[ \begin{aligned} & rN(x) + 5rN(\hat{x}) + \frac{4}{2} r^2 \operatorname{sgn}(x - \hat{x})M(\hat{x}) + \frac{3r^3}{6} L(\hat{x}) \\ & + \frac{r^5}{120} \operatorname{sgn}(x - \hat{x})Y(\hat{x}) + \frac{r^4}{12} K(\hat{x}) \\ & - 6\operatorname{sgn}(x, \hat{x})[NN(x) - NN(\hat{x})] \end{aligned} \right] - \frac{1}{2\kappa G} \left[ \begin{aligned} & \operatorname{sgn}(x, \hat{x})[L5(x) - L5(\hat{x})] - rK5(x) - \frac{r^2}{2} \operatorname{sgn}(x, \hat{x})H5(\hat{x}) \\ & - \frac{r^3}{6} G5(\hat{x}) - \frac{r^4}{24} \operatorname{sgn}(x, \hat{x})F5(\hat{x}) \end{aligned} \right]$$

Agora, são exibidos os  $u_p^*(x, \hat{x})$ , tanto para são válidos tanto para vigas de Euler-Bernoulli e Timoshenko não prismáticas com variação não simétricos. Para o caso simétrico  $u_p^*(x, \hat{x}) = 0$

$$\int u_p^*(x, \hat{x}) dx = \frac{1}{2E} [rR(x) + rR(\hat{x}) - 2 \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) [S(x) - S(\hat{x})]]$$

$$\iint u_p^*(x, \hat{x}) dx dx = \frac{1}{2E} \left[ rS(x) + \frac{r^2}{2} \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) R(\hat{x}) - 3 \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) [SS(x) - SS(\hat{x})] + 2rS(\hat{x}) \right]$$

$$\iiint u_p^*(x, \hat{x}) dx dx dx = \frac{1}{2E} \left[ rSS(x) + \frac{r^3}{6} R(\hat{x}) - 4 \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) [TS(x) - TS(\hat{x})] + 3rSS(\hat{x}) + r^2 \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) S(\hat{x}) \right]$$

$$\iiint \int u_p^*(x, \hat{x}) dx dx dx dx = \frac{1}{2E} \left[ rTS(x) - \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) [RS(x) - RS(\hat{x})] + \frac{r^4}{24} \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) R(\hat{x}) - 4 \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) [RS(x) - RS(\hat{x})] + 4rTS(\hat{x}) + \frac{3r^2}{2} \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) SS(\hat{x}) + \frac{r^3}{3} S(\hat{x}) \right]$$

Aqui, são exibidos as integrais de  $w_m^*(x, \hat{x})$ , válidos para vigas de Timoshenko não prismáticas com variação não simétricos.

$$\int w_m^*(x, \hat{x}) dx = \frac{-\operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{2E} [K(x) - K(\hat{x})] + \frac{r}{2E} [Y(\hat{x}) + rQ(\hat{x})]$$

$$\iint w_m^*(x, \hat{x}) dx dx = \frac{-\operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{2E} [L(x) - L(\hat{x})] + \frac{r}{2E} K(\hat{x}) + \frac{r^2 \operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{4E} [Y(\hat{x}) + rQ(\hat{x})]$$

$$\iiint w_m^*(x, \hat{x}) dx dx dx = \frac{-\operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{2E} [L(x) - L(\hat{x})] + \frac{r}{2E} L(\hat{x}) + \frac{r^2 \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) K(\hat{x})}{4E} + \frac{r^3 \operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{12E} [Y(\hat{x}) + rQ(\hat{x})]$$

$$\begin{aligned} \int \int \int \int w_p^*(x, \hat{x}) dx dx dx dx &= \frac{-\operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{2E} [M(x) - M(\hat{x})] + \frac{r}{2E} L(\hat{x}) \\ &+ \frac{r^2 \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) L(\hat{x})}{4E} + \frac{r^3 K(\hat{x})}{12E} + \frac{r^4 \operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{48E} [Y(\hat{x}) + rQ(\hat{x})] \end{aligned}$$

Por fim, são exibidos as integrais de  $u_m^*(x, \hat{x})$ , válidos para vigas de Timoshenko não prismáticas com variação não simétricos, para o caso simétrico  $u_m^*(x, \hat{x}) = 0$ .

$$\int u_m^*(x, \hat{x}) dx = \frac{\operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{2E} [R(x) - R(\hat{x})] - \frac{r}{2E} rT(\hat{x})$$

$$\int \int u_m^*(x, \hat{x}) dx dx = \frac{\operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{2E} [S(x) - S(\hat{x})] - \frac{r^2 \operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{4E} R(\hat{x}) - \frac{r^2 \operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{4E} T(\hat{x})$$

$$\int \int \int u_m^*(x, \hat{x}) dx dx dx = \frac{\operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{2E} [SS(x) - SS(\hat{x})] - \frac{rS(x)}{2E} - \frac{r^3 R(x)}{12E} - \frac{r^3}{12E} T(\hat{x})$$

$$\begin{aligned} \int \int \int \int u_m^*(x, \hat{x}) dx dx dx dx &= \frac{\operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{2E} [SSS(x) - SSS(\hat{x})] - \frac{rSS(\hat{x})}{2E} - \frac{r^2 \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) S(\hat{x})}{4E} \\ &- \frac{r^4 \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) R(\hat{x})}{48E} - \frac{r^4 \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) T(\hat{x})}{48E} T(\hat{x}) \end{aligned}$$