Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Uma Versão Bilinear do Clássico Teorema de Orlicz-Pettis

Renato Burity Croccia Macedo

João Pessoa – PB
Fevereiro de 2020

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Uma Versão Bilinear do Clássico Teorema de Orlicz-Pettis

por

Renato Burity Croccia Macedo

sob a orientação do

Prof. Dr. Joedson Silva dos Santos

João Pessoa – PB
Janeiro de 2020

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

M141v Macedo, Renato Burity Croccia.
Uma Versão Bilinear do Clássico Teorema de Orlicz-Pettis / Renato Burity Croccia Macedo. - João Pessoa, 2020.
78 f.

Orientação: Joedson Silva dos Santos.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. espaços de sequências. 2. espaços de Banach. 3. sequências absolutamente somáveis. 4. teorema de Orlicz-Pettis. I. dos Santos, Joedson Silva. II. Título.

UFPB/BC

Uma Versão Bilinear do Clássico Teorema de Orlicz-Pettis

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Joedson Silva dos Santos

Área de Concentração: Análise.

Aprovado em: 21 / 02 / 2020

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr. Joedson Silva dos Santos - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos - UFPB (Interno)

Prof. Dr. Diego Araújo de Souza - UFPE (Externo)

Profª. Drª. Mariana de Brito Maia - UFERSA (Externo)

Prof. Dr. Tony Kleverson Nogueira - UFERSA (Externo)

O sucesso é ir de fracasso em fracasso sem perder o entusiasmo. (Winston Churchill).

Agradecimentos

A Deus, por sempre me abençoar e por colocar pessoas excelentes em minha vida, que me ajudaram nesta conquista.

Aos meus pais e irmãos, que sempre apoiaram minhas escolhas.

À Thayane Bezerra Lyra Ferreira, pelo companheirismo.

Ao meu orientador professor Dr. Joedson Silva dos Santos, por sempre se disponibilizar em me ajudar, pelos incentivos e importantes concelhos. Agradeço também pelas oportunidades e pela confiança depositada em mim.

A todos os professores do Departamento de Matemática da UFPB que contribuíram na minha graduação.

Aos professores da banca examinadora pela análise final do trabalho.

Aos amigos, por todos os bons momentos e conhecimentos compartilhados, em especial a Raoni, Ranieri, Ramon e Raiza.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo principal estudar a teoria dos espaços de sequências. Para isso elencamos alguns dos resultados fundamentais neste contexto. Estudamos também o espaço das sequências $\mathcal{B}$-absolutamente somáveis e por fim abordamos uma versão bilinear do teorema de Orlicz-Pettis.

Palavras-chave: espaços de sequências, espaços de Banach, sequências absolutamente somáveis, teorema de Orlicz-Pettis.

Abstract

This work has as main objective to study the theory of sequence spaces. For that, we list some of the fundamental results in this context. We also studied the space of the $\mathcal{B}$ - absolutely summing sequences and finally we approach a bilinear version of the Orlicz-Pettis theorem.

Keywords: sequence spaces, Banach spaces, absolutely summing sequences, Orlicz-Pettis theorem.

Sumário

Introdução **2**

1 Conceitos Preliminares **4**

1.1 Definições e resultados 4

2 Sequências $\mathcal{B}$-absolutamente somáveis **26**

2.1 Somabilidade absoluta com respeito a funções bilineares 26

2.2 Relação entre os espaços $\ell^1_{\mathcal{B}}(X)$, $\ell^1_w(X)$ e $\ell^1(X)$ 43

3 Versão Bilinear do Teorema de Orlicz-Pettis e Aplicações **57**

Referências Bibliográficas **69**

Notações

Neste trabalho X, Y e Z denotam, à menos de menção contrária, espaços de Banach e $\mathcal{B} : X \times Y \to Z$ uma aplicação bilinear limitada. A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- $\mathbb{K}$ denota o corpo dos reais ou complexos;
- B_X denota a bola unitária fechada de X;
- $\mathcal{L}(X, Y)$ denota o espaço dos operadores lineares limitados de X em Y;
- $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ denota o dual topológico de X;
- X^{**} denota o dual topológico de X^*, o qual chamamos de bidual;
- ℓ^1 denota o espaço das sequências absolutamente somáveis a valores em $\mathbb{K}$;
- ℓ^∞ denota o espaço das sequências limitadas tomando valores em $\mathbb{K}$;
- c_0 denota o espaço das sequências que convergem para zero tomando valores $\mathbb{K}$;
- $\ell^1(X)$ denota o espaço das sequências absolutamente somáveis de X;
- $\ell^1_w(X)$ denota o espaço das sequências fracamente absolutamente somáveis de X;
- $UC(X)$ denota o espaço das sequências incondicionalmente somáveis de X;
- $wUC(X)$ denota o espaço das sequências fracamente incondicionalmente somáveis de X;
- $\overline{X}$ denota o fecho do conjunto X;

- $\overline{X}^w$ denota o fecho na topologia fraca do conjunto X;

- $\ell^1_{\mathcal{B}}(X)$ denota o espaço das sequências $\mathcal{B}$-absolutamente somáveis de X;

- $\mathcal{B}$-$UC(X)$ denota o espaço das sequências $\mathcal{B}$-incondicionalmente somáveis de X;

- $\mathcal{W}^*(X^*, Y)$ denota o espaço das funções lineares limitadas de X^* em Y que são fraca estrela norma contínuas;

- $\mathcal{W}(X, Y)$ denota o espaço de todas as aplicações completamente contínuas de X em Y;

- $\phi_{\mathcal{B}}$ denota a aplicação de X em $\mathcal{L}(Y, Z)$, dada por $\phi_{\mathcal{B}}(x) = \mathcal{B}(x, \cdot)$;

- $\psi_{\mathcal{B}}$ denota a aplicação de Y em $\mathcal{L}(X, Z)$, dada por $\phi_{\mathcal{B}}(y) = \mathcal{B}(\cdot, y)$;

- $\mathcal{B}^*$ denota a aplicação de $X \times Z^*$ em Y^*, dada por $\mathcal{B}^*(x, z^*)(y) = z^*(\mathcal{B}(x, y))$;

- $\Pi(X, Y)$ denota o espaço das aplicações absolutamente somantes de X em Y ;

- $span\{X\}$ denota o espaço das combinações lineares finitas de elementos de X;

- $P^p(\mu, X)$ denota o espaço das funções simples mensuráveis Pettis p-integráveis;

- $m : \Sigma \to X$ representa um vetor mensurável aditivo em uma σ-álgebra Σ de subespaços não vazios de Ω, com (Ω, Σ, μ) um espaço mensurável finito;

- $L^1_w(m)$ denota o espaço das funções fracamente integráveis com respeito a m;

- $L^1(m)$ denota o espaço das funções integráveis com respeito a m;

- $I^1_w(m)$ denota o operador integral de $L^1(m)$ em X, dado por $I^1_m(f) = \int_\Omega f \, dm$.

Introdução

Abordaremos neste trabalho alguns conceitos e resultados sobre a teoria dos espaços de sequências, que é um ramo de estudo da análise funcional. É sabido de [2] que uma sequência numérica é absolutamente somável se, e somente se, é incondicionalmente somável. Esse resultado se estende para qualquer espaço de dimensão finita. Entretanto, apenas em 1950, A. Dvoretzky e C. A. Rogers mostraram que esse comportamento não se verificava nos espaços de Banach de dimensão infinita. Eles provaram que em todo espaço de Banach de dimensão infinita, existem sequências incondicionalmente somáveis que não são absolutamente somáveis. Essas sequências tem seu papel de destaque na teoria dos espaços de Banach, pois elas caracterizam os espaços normados completos, a saber, um espaço normado é completo se, e somente se, toda sequência absolutamente somável é incondicionalmente somável. Um outro resultado clássico da teoria dos espaços de sequências encontrado em [5] é o teorema de Orlicz-Pettis, que afirma: em qualquer espaço de Banach, uma sequência ser fracamente incondicionalmente somável é equivalente a ser incondicionalmente somável.

No primeiro capítulo, vamos apresentar os espaços das sequências somáveis: absolutamente, fracamente absolutamente, incondicionalmente e fracamente incondicionalmente; denotados respectivamente por $\ell^1(X)$, $\ell^1_w(X)$, $UC(X)$ e $wUC(X)$. Mostraremos alguns resultados sobre esses espaços com o intuito de fornecer base para podermos estudar o espaço das sequências $\mathcal{B}$-absolutamente somáveis. Iremos estabelecer que $\ell^1(X) \subseteq UC(X) \subseteq wUC(X) \subseteq \ell^1_w(X)$ e isso nos leva a refletir sobre quais situações poderemos ter igualdade entre esses espaços. Com o auxílio da versão fraca do teorema de Dvoretzky-Rogers, provaremos que sendo X um espaço de Banach, então X tem dimensão finita se, e somente se, $\ell^1(X) = \ell^1_w(X)$. Já o teorema de Bessaga e Pełczyński assegura que $\ell^1_w(X) = UC(X)$ se, e somente se, X não contém uma imersão do c_0.

No capítulo 2, tendo como base [9] e considerando X, Y e Z espaços de Banach e $\mathcal{B} : X \times Y \longrightarrow Z$ uma aplicação bilinear limitada, vamos definir o espaço das sequências $\mathcal{B}$-absolutamente somáveis, denotado por $\ell^1_{\mathcal{B}}(X)$, introduzir uma norma neste espaço e observar que, em geral, $\ell^1_{\mathcal{B}}(X)$ não é completo mesmo X sendo um espaço de Banach. Para o desenvolvimento da teoria, apresentaremos um novo conceito sobre o espaço

de Banach X com o objetivo de tornar $\ell^1_{\mathcal{B}}(X)$ completo. Além disso, iremos tratar também das sequências $\mathcal{B}$-incondicionalmente somáveis.

No terceiro e último capítulo, demonstraremos o principal resultado do trabalho, sendo ele uma versão bilinear do teorema de Orlicz-Pettis, que estudamos em [9]. Uma das utilidades desta versão é usar aplicações bilineares, satisfazendo certas condições, para mostrar que algumas sequências são incondicionalmente somáveis. Apresentaremos também algumas aplicações na teoria de medida.

Capítulo 1

Conceitos Preliminares

Neste capítulo apresentaremos alguns conceitos e resultados no âmbito da teoria dos espaços de sequências, que nos darão base para que possamos abordar os temas dos capítulos subsequentes. A menos de menção contrária, os resultados obtidos nesta seção foram estudados em [2] e [5]. Sempre consideraremos X, Y e Z espaços de Banach sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Definições e resultados

Definição 1.1. Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é **absolutamente somável** em X se a série $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_n\|$ é convergente. Denotaremos por $\ell^1(X)$ o espaço de todas as sequências absolutamente somáveis de X.

Note que, com as operações usuais de sequência, $\ell^1(X)$ é um espaço vetorial. Além disso, sendo $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e usando as propriedades de séries, sabemos que $\|\mathbf{x}\|_{\ell^1(X)} = \sum_{i=1}^{\infty} \|x_n\|$ define uma norma sobre $\ell^1(X)$.

Proposição 1.1. *O espaço das sequências absolutamente somáveis é um espaço de Banach com a norma* $\|.\|_{\ell^1(X)}$.

Demonstração: Seja $(x^r)_{r\in\mathbb{N}}$ uma sequência Cauchy em $\ell^1(X)$. Daí, dado $\epsilon > 0$, existe $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j^k - x_j^r\| = \|(x_j^k - x_j^r)_{j\in\mathbb{N}}\|_{\ell^1(X)} = \|x^k - x^r\|_{\ell^1(X)} < \epsilon, \text{ sempre que } k, r \geq r_0.$$

Em particular, para cada $j \in \mathbb{N}$, temos

$$\|x_j^k - x_j^r\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j^k - x_j^r\| < \epsilon, \text{ sempre que } k, r \geq r_0.$$

Com isso, para cada $j \in \mathbb{N}$, a sequência $(x_j^r)_{r\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em X e como X é Banach, $(x_j^r)_{r\in\mathbb{N}}$ converge para um certo x_j em X. Deste modo, sendo $y = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ e fazendo $k \to \infty$ na última desigualdade, temos

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j - x_j^r\| = \|y - x^r\|_{\ell^1(X)} < \epsilon, \text{ sempre que } r \geq r_0.$$

Logo, $x^r \xrightarrow{\text{r}} y$ e $(x_j - x_j^r)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência absolutamente somável, sempre que $r \geq r_0$. Mas note que

$$x_j = (x_j - x_j^{r_0}) + x_j^{r_0}, \ \forall j \in \mathbb{N},$$

e assim,

$$y = (x_j^{r_0} - x_j)_{j\in\mathbb{N}} + (x_j^{r_0})_{j\in\mathbb{N}},$$

o que implica em, $y \in \ell^1(X)$, pois $(x_j^{r_0})_{j\in\mathbb{N}}, (x_j^{r_0} - x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^1(X)$ e $\ell^1(X)$ é um espaço vetorial. Portanto, o espaço é de Banach pois $x^r \xrightarrow{\text{r}} y \in \ell^1(X)$.

■

Definição 1.2. Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dita **fracamente absolutamente somável** se a série $\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|$ é convergente para todo $\varphi \in X^*$. Denotaremos por $\ell_w^1(X)$ o espaço de todas as sequências fracamente absolutamente somáveis de X.

Note que, com as operações usuais de sequência, $\ell_w^1(X)$ é um espaço vetorial. Enunciaremos o Teorema do Gráfico fechado, cuja prova pode ser encontrada em [2, Teorema 2.5.1], para que possamos demonstrar o próximo lema, que nos dará base para definirmos uma norma sobre $\ell_w^1(X)$.

Teorema 1.2. *(Teorema do Gráfico fechado) Sejam X e Y espaços de Banach, $T : X \to Y$ um operador linear e $Graf(T) = \{(x, T(x)) \ ; \ x \in X)\}$. Então,*

$$T \text{ é contínuo} \Leftrightarrow Graf(T) \text{ é fechado em } E \times F.$$

Lema 1.3. *Para cada $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_w^1(X)$, tem-se*

$$\sup_{\varphi\in B_{X^*}} \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(x_i)| < \infty.$$

Demonstração: Seja $T_{\mathbf{x}} : X^* \longrightarrow \ell^1(X)$, dado por $T_{\mathbf{x}}(\varphi) = (\varphi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Pela definição de $\ell^1_w(X)$, temos que $T_{\mathbf{x}}$ está bem definido. Com isso, é suficiente provar que $T_{\mathbf{x}}$ é linear e contínuo para acabar a demonstração do lema, pois assim teremos

$$\sup_{\varphi\in B_{X^*}} \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(x_i)| = \sup_{\varphi\in B_{X^*}} \|(\varphi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^1(X)} = \sup_{\varphi\in B_{X^*}} \|T_{\mathbf{x}}(\varphi)\|_{\ell^1(X)} = \|T_{\mathbf{x}}\| < \infty.$$

A linearidade de $T_{\mathbf{x}}$ é clara, pois dados $\varphi, \psi \in X'$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$T_{\mathbf{x}}(\lambda\varphi + \psi) = ((\lambda\varphi + \psi)((x_n)_{n\in\mathbb{N}})) = \lambda\varphi((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) + \psi((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lambda T_{\mathbf{x}}(\varphi) + T_{\mathbf{x}}(\psi).$$

Para a continuidade, usaremos o Teorema do Gráfico Fechado. Já sabemos que X^* e ℓ^1 são espaços de Banach. Com isso, para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $(\varphi_k, T_{\mathbf{x}}(\varphi_k)) \in Graf(T_{\mathbf{x}})$ tal que $(\varphi_k, T_{\mathbf{x}}(\varphi_k)) \longrightarrow (\varphi, y) \in X^* \times \ell^1$. Logo,

$$T_{\mathbf{x}}(\varphi_k) = (\varphi_k(x_j))_{j\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\text{k}} y = (y_j)_{j\in\mathbb{N}} \text{ em } \ell^1.$$

Ou seja, dado $\epsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$k > k_0 \Rightarrow \|T_{\mathbf{x}}(\varphi_k) - y\|_{l^1} < \epsilon \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_k(x_j) - y_j| < \epsilon.$$

Com isso, para qualquer $j \in \mathbb{N}$,

$$k > k_0 \Rightarrow |\varphi_k(x_j) - y_j| < \epsilon$$

Sendo assim, $\varphi_k(x_j) \xrightarrow{\text{k}} y_j$ em $\mathbb{K}$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Por outro lado, como φ_k converge uniformemente para φ em X^*, então temos a convergência pontual, isto é,

$$\varphi_k(x_j) \xrightarrow{\text{k}} \varphi(x_j) \text{ em } \mathbb{K}, \text{ para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Mas pela unicidade do limite, $\varphi(x_j) = y_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo,

$$y = (y_j)_{j\in\mathbb{N}} = (\varphi(x_j))_{j\in\mathbb{N}} = T_{\mathbf{x}}(\varphi).$$

Portanto, $Graf(T_{\mathbf{x}})$ é fechado em $X^* \times \ell^1$ e pelo Teorema do Gráfico Fechado, $T_{\mathbf{x}}$ é contínuo.

■

Desta forma, mediante ao lema anterior, se $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência fracamente absolutamente somável em X, então $\sup_{\varphi\in B_{X^*}} \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|$ é finito. Com isso, $\|\cdot\|_{\ell^1_w(X)}$

está bem definido e, devido as propriedades de séries, é possível provar que define uma norma sobre $\ell_w^1(X)$.

Proposição 1.4. *O espaço das sequências fracamente absolutamente somáveis é um espaço de Banach com a norma* $\|\cdot\|_{\ell_w^1(X)}$.

Demonstração: Seja $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $\ell_w^1(X)$. Daí, dado $\epsilon > 0$, existe um $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k, r \geq k_0 \Rightarrow \sup_{\varphi\in B_{X^*}} \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(x_j^k - y_j^r)| = \|(x_j^k - y_j^r)_{j\in\mathbb{N}}\|_{\ell_w^1(X)} = \|x^k - y^r\|_{\ell_w^1(X)} < \epsilon.$$

Para $j \in \mathbb{N}$ e qualquer $\varphi \in B_{X^*}$, temos

$$|\varphi(x_j^k - y_j^r)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(x_j^k - y_j^r)| \leq \sup_{\varphi\in B_{X^*}} \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(x_j^k - y_j^r)| < \epsilon, \text{ sempre que } k, r \geq k_0$$

e com isso,

$$|\varphi(x_j^k - y_j^r)| < \epsilon, \text{ sempre que } k, r \geq k_0.$$

Implicando em,

$$\sup_{\varphi\in B_{X^*}} |\varphi(x_j^k - x_j^r)| < \epsilon, \text{ sempre que } k, r \geq k_0.$$

Mas pelo Teorema de Hahn-Banach, temos para todo $j \in \mathbb{N}$,

$$\|x_j^k - x_j^r\| = \sup_{\varphi\in B_{X^*}} |\varphi(x_j^k - x_j^r)| < \epsilon, \text{ sempre que } k, r \geq k_0.$$

Com isso, podemos concluir que a sequência $(x_j^k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em X, para cada $j \in \mathbb{N}$ fixado. Como X é um espaço de Banach, segue que existe $y_j \in X$ tal que $x_j^k \xrightarrow{\text{k}} y_j$ em X para cada $j \in \mathbb{N}$. Deste modo, podemos considerar a sequência $y = (y_j)_{j\in\mathbb{N}}$.

Afirmação 1.1. $y \in \ell_w^1(X)$ e $x^k \longrightarrow y$ em $\ell_w^1(X)$.

Com efeito, notemos que para cada $m \in \mathbb{N}$ fixado, tem-se

$$\sum_{i=1}^{m} |\varphi(x_i^k - x_i^r)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(x_i^k - x_i^r)| \leq \|x_i^k - x_i^r\|_{\ell_w^1(X)} < \epsilon, \text{ sempre que } k, r \geq k_0.$$

Fazendo $r \longrightarrow \infty$, obtemos

$$\sum_{i=1}^{m} |\varphi(x_i^k - y_i)| \leq \epsilon, \text{ sempre que } k, r \geq k_0 \text{ e para todo } m \in \mathbb{N}$$

e fazendo $m \longrightarrow \infty$, obtemos

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(x_i^k - y_i)| \leq \epsilon, \text{ sempre que } k, r \geq k_0. \tag{1.1}$$

Daí, sendo $\psi \in X^*$ com $\psi \neq 0$, sabemos que $\frac{\psi}{||\psi||} \in B_{X^*}$ e, consequentemente, se $k \geq k_0$, temos

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{\psi}{||\psi||}(x_i^k - y_i) \right| \leq \epsilon$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\psi(x_i^k - y_i)| \leq ||\psi||\epsilon$$

concluindo assim que, para $k \geq k_0$, a sequência $(x^k - y)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_w^1(X)$. Em particular, para $k = k_0$ tem-se $(x^{k_0} - y) \in \ell_w^1(E)$, e como $\ell_w^1(E)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, temos que $y = x^{k_0} - (x^{k_0} - y) \in \ell_w^1(E)$. Além disso, por (1.1) temos

$$||x^k - y||_{\ell_w^1(X)} = \sup_{\varphi\in B_{X^*}} \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(x_i^k - y_i)| < \epsilon, \text{ sempre que } k \geq k_0,$$

mostrando que $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge para $y \in \ell_w^1(X)$.

■

Usaremos a notação $\ell_{w^*}^1(X^*)$ para denotar o espaço de todas as sequências $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X^* tal que a série $\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_n(x)|$ é convergente para todo $x \in X$. Analogamente aos espaços anteriores, com as operações usuais de sequência $\ell_{w^*}^1(X^*)$ é um espaço vetorial.

Lema 1.5. *Sendo $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_{w^*}^1(X^*)$, temos que*

$$\sup_{x\in B_X} \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_n(x)| < \infty.$$

Demonstração: Seja $\varphi = (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_{w^*}^1(X^*)$ e defina a seguinte função

$$T_\varphi : X \longrightarrow \ell^1, \text{ com } T(x) = (\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}.$$

É fato que T_φ está bem definida, pois $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_{w^*}^1(X^*)$. Além disso, dado $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$T_\varphi(\lambda x + y) = (\varphi_n(\lambda x + y))_{n\in\mathbb{N}} = \lambda(\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}} + (\varphi_n(y))_{n\in\mathbb{N}} = \lambda T_\varphi(x) + T_\varphi(y)$$

Afirmação 1.2. T_φ é contínua.

De fato, considere $(x_n, T_\varphi(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \in Graf(T_\varphi)$ uma sequência convergente. Logo, existe $x \in X$ e $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(X)$ tal que $x_n \to x$ e $T_\varphi(x_n) \to y$. Deste modo, pela definição de T_φ e sabendo que $T_\varphi(x_n) \to y$, dado $\epsilon > 0$, para n suficientemente grande, temos

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k(x_n) - y_k| < \epsilon.$$

Logo, para todo $k \in \mathbb{N}$, segue que

$$|\varphi_k(x_n) - y_k| < \epsilon,$$

e assim,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_k(x_n) = y_k.$$

Por outro lado, sabemos que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ e como φ_k é contínua para todo $k \in \mathbb{N}$, segue que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_k(x_n) = \varphi_k(x).$$

Assim, pela unicidade do limite, para cada $k \in \mathbb{N}$, temos $\varphi_k(x) = y_k$ e podemos concluir que

$$y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}} = (\varphi_k(x))_{k\in\mathbb{N}} = T_\varphi(x).$$

Logo, o gráfico de T_φ é fechado e pelo Teorema do gráfico fechado segue que T_φ é contínuo. Daí,

$$||T_\varphi|| < \infty \Rightarrow \sup_{x\in B_X} ||T_\varphi(x)||_{\ell^1(X)} < \infty \Rightarrow \sup_{x\in B_X} \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_n(x)| < \infty.$$

■

O lema anterior nos garante que para $||\cdot||_{\ell^1_{w^*}(X^*)}$ está bem definida. Além disso, usando os propriedades de séries é possível demonstrar que $||.||_{\ell^1_{w^*}(X^*)}$ define uma norma em $\ell^1_{w^*}(X^*)$.

Proposição 1.6. *$\ell^1_{w^*}(X^*)$ é uma espaço de Banach com a norma $||.||_{\ell^1_{w^*}(X^*)}$.*

Demonstração: Seja $(\varphi^k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $\ell^1_{w^*}(X^*)$. Daí, dado $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k, r > k_0 \Rightarrow \sup_{x\in B_X} \sum_{i=1}^{\infty} |(\varphi_i^k - \varphi_i^r)(x)| = ||\varphi^k - \varphi^r||_{\ell^1_{w^*}(X^*)} < \epsilon$$

e, por maior razão, para qualquer $i \in \mathbb{N}$, temos

$$k, r > k_0 \Rightarrow |(\varphi_i^k - \varphi_i^r)(x)| \leq \sup_{x \in B_X} \sum_{i=1}^{\infty} |(\varphi_i^k - \varphi_i^r)(x)| < \epsilon.$$

Daí,

$$k, r > k_0 \Rightarrow \|\varphi_i^k - \varphi_i^r\| = \sup_{x \in B_X} |(\varphi_i^k - \varphi_i^r)(x)| < \epsilon$$

e para cada $i \in \mathbb{N}$, $(\varphi_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em X^*. Logo, existe $\varphi_i \in X^*$ tal que $\lim_{n\to\infty} \varphi_i^n = \varphi_i$. Tome $\varphi = (\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Afirmação 1.3. $\varphi \in \ell^1_{w^*}(X^*)$ e $(\varphi^k)_{k\in\mathbb{N}} \to \varphi$ em $\ell^1_{w^*}(X^*)$

De fato, sabemos que

$$k, r > k_0 \Rightarrow \sup_{x \in B_X} \sum_{i=1}^{\infty} |(\varphi_i^k - \varphi_i^r)(x)| < \epsilon.$$

Fazendo o trucamento na série como na Proposição 1.4 e $r \to \infty$, segue

$$k, r > k_0 \Rightarrow \sup_{x \in B_X} \sum_{i=1}^{\infty} |(\varphi_i^k - \varphi_i)(x)| < \epsilon.$$

Ou seja, $(\varphi^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge para φ. Além disso, de maneira análoga a Proposição 1.4, podemos concluir que $(\varphi_i^k - \varphi_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^1_{w^*}(X^*)$. Todavia, como $(\varphi_i)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1_{w^*}(X^*)$ e $\ell^1_{w^*}(X^*)$ é um espaço vetorial, segue que $\varphi \in \ell^1_{w^*}(X^*)$. Logo, $\ell^1_{w^*}(X^*)$ é um espaço de Banach.

■

Definição 1.3. Dizemos que uma sequência $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é **incondicionalmente somável** se a série $\sum_{i=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ é convergente para qualquer permutação $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. O conjunto formado por todas as sequências incondicionalmente somáveis de X será denotado por $UC(X)$.

Observe que mediante as propriedades de sequências e séries, podemos dizer que $UC(X)$ define um espaço vetorial. A seguir iremos mostrar alguns resultados que caracterizam este espaço, com o intuito de estabelecer uma cadeia crescente de espaços de sequências que nos dará motivação para estudarmos o Clássico Teorema de Orlicz-Pettis.

Proposição 1.7. *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X. Então as seguintes sentenças são equivalentes:*

1. *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência incondicionalmente somável;*
2. *Para cada $\epsilon > 0$, existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que, quando M é um subconjunto finito de $\mathbb{N}$ com $\min M > n_\epsilon$, tem-se $\left\|\sum_{n\in M} x_n\right\| < \epsilon$;*
3. *$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}\right\|$ é convergente para qualquer $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$;*
4. *A série $\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_n x_n$ é convergente com $\epsilon_n \in \{-1, 1\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: (*1* $\Rightarrow$ *2*) Suponhamos por absurdo que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência incondicionalmente somável mas podemos encontrar $\delta > 0$ de modo que, para todo $m \in \mathbb{N}$, existe $M \subset \mathbb{N}$ finito tal que

$$\min M > m \text{ e } \left\|\sum_{n\in M} x_n\right\| \geq \delta.$$

Sendo $m = 1$, existirá $M_1 \subset \mathbb{N}$ finito tal que

$$\min M_1 > 1 \text{ e } \left\|\sum_{n\in M_1} x_n\right\| \geq \delta.$$

Para $m = \max M_1$, existirá $M_2 \subset \mathbb{N}$ finito tal que

$$\min M_2 > \max M_1 \text{ e } \left\|\sum_{n\in M_2} x_n\right\| \geq \delta.$$

Analogamente, sendo $m = \max M_{i-1}$, existirá $M_i \subset \mathbb{N}$ finito tal que

$$\min M_i > \max M_{i-1} \text{ e } \left\|\sum_{n\in M_i} x_n\right\| \geq \delta.$$

Desta forma, podemos considerar $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma sequência de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ de modo que

$$\min M_i > \max M_{i-1} \text{ e } \left\|\sum_{n\in M_i} x_n\right\| \geq \delta.$$

Assim, defina uma permutação $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ que leva elemento inteiros positivos de intervalos da forma $[\min M_i, \min M_i + |M_i|]$ em M_i, cujo $|M_i|$ representa a quantidade de

elementos do conjunto M_i. Veja que a quantidade de elementos em $[\min M_i, \min M_i + |M_i|]$ é dada por

$$\min M_i + |M_i| - \min M_i = |M_i|$$

Além disso, sabemos por construção que $M_i \cap M_{i+1} = \varnothing$ e que $|M_i| \leq \max M_i - \min M_i$, para qualquer $i \in \mathbb{N}$. Logo, $|M_i| + \min M_i < \max M_i + 1$. Mas por hipótese, $\max M_i < \min M_{i+1}$, logo $\max M_i + 1 \leq \min M_{i+1}$. Portanto, $|M_i| + \min M_i < \min M_{i+1}$. Concluindo assim que os intervalos $[\min M_i, \min M_i + |M_i|]$ são disjuntos para todo $i \in \mathbb{N}$. Portanto, temos que σ está bem definida.

Afirmação 1.4. $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_{\sigma(k)}$ não é de Cauchy.

De fato, tome $\epsilon = \delta > 0$. Então, pelo que provamos, para todo $m \in \mathbb{N}$, existe um M_n elemento da sequência $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de modo que

$$\min M_n > m \text{ e } \left\| \sum_{n\in M_i} x_n \right\| \geq \delta.$$

Daí, tomando $p = \min M_n - 1$ e $q = \min M_n + |M_n|$, teremos que $q \geq p + 1 > m$ com

$$q \geq p+1 > m \text{ e } \|S_q - S_p\| = \left\| \sum_{k=p+1}^{q} x_{\sigma(k)} \right\| = \left\| \sum_{k\in M_n} x_k \right\| \geq \delta = \epsilon.$$

Logo, $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ não é somável, o que é um absurdo, pois $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é incondicionalmente somável.

(2 ⇒ 1) Seja $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ permutação e considere S_n como a soma parcial com relação a sequência $(x_{\sigma(i)})_{i\in\mathbb{N}}$, isto é, $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)}$. Dado $\epsilon > 0$, por hipótese, existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ satisfazendo as condições de *2*. Deste modo, existe $m_\epsilon \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de forma que $\{1, ..., n_\epsilon\} \subset \{\sigma(1), ..., \sigma(n_\epsilon)\}$. Com isso, segue que para $p, q \in \mathbb{N}$ com $q \geq p + 1 \geq m_\epsilon$, temos que $\sigma(p+1), \sigma(q) > n_\epsilon$, e assim

$$\|S_q - S_p\| = \left\| \sum_{k=p+1}^{q} x_{\sigma(k)} \right\| = \left\| \sum_{k\in\{\sigma(p+1),...,\sigma(q)\}} x_k \right\| < \epsilon.$$

Logo, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy e portanto é convergente.

(2 ⇒ 3) Dado $\epsilon > 0$, podemos escolher $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ de forma que $\left\| \sum_{n\in M} x_n \right\| < \epsilon$ para todo qualquer subconjunto de finito $M \subset \mathbb{N}$ de modo que $\min M > n_\epsilon$. Com isso, seja $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de crescente. Logo $k_n \geq n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Para $p, q \in \mathbb{N}$ com $q \geq p + 1 \geq n_\epsilon$, temos que $k_q \geq q > n_\epsilon$ e $k_{p+1} \geq p + 1 > n_\epsilon$ e assim, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

com $T_n = \sum_{j=1}^{n} x_{k_j}$, é uma sequência de Cauchy. Com efeito, sendo $M_0 = \{k_{p+1}, ..., k_q\}$, segue que

$$\|T_q - T_p\| = \left\| \sum_{j=p+1}^{q} x_{k_j} \right\| = \left\| \sum_{n \in M_0} x_n \right\| < \epsilon.$$

Sendo assim, $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ é somável.

(3 ⇒ 4) Considere a sequência $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $\epsilon_n \in \{-1, 1\}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência se satisfaz *3*. Considerando $S^+ = \{n \in \mathbb{N}; \epsilon_n = 1\}$ e $S^- = \{n \in \mathbb{N}; \epsilon_n = -1\}$ com a ordem natural de $\mathbb{N}$, temos por hipótese que $\sum_{n\in S^+} x_n$ e $\sum_{n\in S^-} x_n$ são convergentes. Tome $R_n = \sum_{\substack{k=1 \\ k\in S^+}}^{n} x_k$ e $V_n = \sum_{\substack{k=1 \\ k\in S^-}}^{n} x_k$. Logo, dado $\epsilon > 0$, como as séries $\sum_{n\in S^+} x_n$ e $\sum_{n\in S^-} x_n$ são convergentes, existe $m_\epsilon^+ \in \mathbb{N}$ de modo que

$$q > p > m_\epsilon^+ \Rightarrow \|R_q - R_p\| = \left\| \sum_{\substack{k=p+1 \\ k\in S^+}}^{q} x_k \right\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Analogamente, existe $m_\epsilon^- \in \mathbb{N}$ de modo que

$$q > p > m_\epsilon^- \Rightarrow \|V_q - V_p\| = \left\| \sum_{\substack{k=p+1 \\ k\in S^-}}^{q} x_k \right\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Escolhendo $m_\epsilon = \max\{m_\epsilon^+, m_\epsilon^-\}$, temos que, para $q > p > m_\epsilon$, a sequência dada por $S_n = \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k x_k$ satisfaz

$$\begin{aligned} \|S_q - S_p\| &= \left\| \sum_{k=p+1}^{q} \epsilon_k x_k \right\| = \left\| \sum_{\substack{k=p+1 \\ k\in S^+}}^{q} x_k - \sum_{\substack{k=p+1 \\ k\in S^-}}^{q} x_k \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{\substack{k=p+1 \\ k\in S^+}}^{q} x_k \right\| + \left\| \sum_{\substack{k=p+1 \\ k\in S^-}}^{q} x_k \right\| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Assim, a sequência $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, logo é convergente.

(4 ⇒ 2) Suponhamos por absurdo que *2* não é válida, isto é, existe $\delta > 0$, uma sequência $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ com $M_k \subset \mathbb{N}$ finito para todo $k \in \mathbb{N}$, $\max M_k < \min M_{k+1}$ e $\left\| \sum_{n\in M_k} x_n \right\| \geq \delta$ para todo k. Daí, defina

$$\epsilon_n = \begin{cases} 1, \text{ se } n \in \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k \\ -1, \text{ se } n \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k \end{cases}$$

Agora considere a sequência $S_n = \sum_{k=1}^{n}(1+\epsilon_k)x_k$. Sendo m um número natural qualquer, podemos escolher um $k > 0$ de modo que $m < \min M_k$. Com isso,

$$S_n = \left\| \sum_{n=\min M_k}^{\max M_k} (1+\epsilon_n)x_n \right\| = \left\| \sum_{n \in M_k} 2x_n \right\| \geq 2\delta$$

Sendo assim, a sequência $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é de Cauchy, logo não é convergente, o que é uma contradição pois $\sum_{k=1}^{\infty} x_n$ ou $\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_n x_n$ não será convergente.

■

Proposição 1.8. *As afirmações abaixo são todas equivalentes:*

1. *Toda série absolutamente convergente em X é incondicionalmente convergente.*
2. *Toda série absolutamente convergente em X é convergente.*
3. *X é um espaço de Banach.*

Demonstração:

(*1* $\Rightarrow$ *2*) Segue direto da hipótese.

(*2* $\Rightarrow$ *3*) Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em E. Assim, dado $k \in \mathbb{N}$, existe $n_0^{(k)} \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\| < 2^{-k}$, sempre que $n, m > n_0^{(k)}$. Logo, existem $n_1 < n_2 < \cdots$, tais que

$$\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\| < 2^{-k}, \text{ para todo } k \in \mathbb{N},$$

e deste modo,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1.$$

Assim, a série $\sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_k} - x_{n_{k+1}})$ é absolutamente convergente e, por hipótese, é convergente. Por outro lado, observe que

$$x_{n_{k+1}} = x_{n_1} + \sum_{j=1}^{k}(x_{n_{j+1}} - x_{n_j}), \text{ para todo } k \in \mathbb{N},$$

e daí, fazendo $k \to \infty$, segue que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, pois mostramos uma subsequência convergente de uma sequência de Cauchy.

(3 ⇒ 1) Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência absolutamente convergente em E. Sabemos que, para séries de números reais, convergência absoluta e incondicional coincidem. Deste modo, para qualquer bijeção σ dos naturais, a série $\sum_{k=1}^{\infty}\|x_{\sigma(n)}\|$ converge. Logo, dado $\epsilon>0$, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}x_{\sigma(k)}-\sum_{k=1}^{m}x_{\sigma(k)}\right\| \;=\; \left\|\sum_{k=m+1}^{n}x_{\sigma(k)}\right\| \;\leq\; \sum_{k=m+1}^{n}\|x_{\sigma(k)}\| \;<\; \sum_{k=n_0}^{\infty}\|x_{\sigma(k)}\| \;<\; \epsilon.$$

Isso sempre que $n>m>n_0$. Daí, temos que a série $\sum_{k=1}^{\infty}x_{\sigma(n)}$ é convergente pelo critério de Cauchy, o qual pode ser encontrado em livros de Cálculo.

■

Definição 1.4. Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X é chamada de **fracamente incondicionalmente somável** se a série $\sum_{n=1}^{\infty}x_{\sigma(n)}$ é fracamente convergente, com $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ uma permutação qualquer, ou seja, se $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(x_{\sigma(n)})$ é convergente para qualquer $\varphi\in X^*$ e qualquer permutação $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$. Denotaremos o conjunto de todas as sequências fracamente incondicionalmente somáveis de X por $wUC(X)$.

Proposição 1.9. *Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in wUC(X)$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell_w^1(X)$ e dado $M\subset\mathbb{N}$, existe $x_M\in X$ tal que*

$$\sum_{n\in M}\varphi(x_n)=\varphi(x_M),\ \textit{para todo}\ \varphi\in X^*.$$

Demonstração: Sendo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in wUC(X)$, temos que $\sum_{n=1}^{\infty}x_{\sigma(n)}$ é fracamente convergente, com $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ uma permutação qualquer. Deste modo, $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(x_{\sigma(n)})$ é convergente para todo $\varphi\in X^*$ e qualquer permutação $\sigma:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$. Em particular, tomando $\sigma(n)=n$, temos que $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(x_n)$ é convergente para todo $\varphi\in X^*$. Portanto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell_w^1(X)$. Agora considere $M=\{n_1<n_2<n_3<\cdots\}$. Se M for finito, então

$$\sum_{n\in M}\varphi(x_n)=\varphi\left(\sum_{n\in M}x_n\right).$$

Mas como φ é sobrejetivo, podemos dizer que $\sum_{n\in M}x_n=x_M\in X$, como queríamos demostrar. Por outro lado, sendo M infinito, como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in wUC(X)$, dado $\varphi\in X^*$

e uma permutação $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x_{\sigma(n)}) < \infty,$$

e assim, a sequência $(\varphi(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \in UC(\mathbb{K})$. Pela Proposição 1.7, temos que

$$\sum_{n\in M} \varphi(x_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(x_{n_i}) < \infty,$$

e deste modo

$$\infty > \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(x_{n_i}) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \varphi(x_{n_i}) = \lim_{k\to\infty} \varphi\left(\sum_{i=1}^{k} x_{n_i}\right) = \varphi\left(\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} x_{n_i}\right).$$

Como $\sum_{n\in M} x_n$ é convergente, segue que $\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} x_{n_i} = x_M$, e com isso

$$\sum_{n\in M} \varphi(x_n) = \varphi(x_M).$$

■

Lema 1.10. *Sendo X um espaço de Banach, temos que*

$$\ell^1(X) \subseteq UC(X) \subseteq wUC(X).$$

Demonstração: Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(X)$. Com isso, dada uma sequência $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $\epsilon_n \in \{-1, 1\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n x_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty.$$

Portanto, pela Proposição 1.7, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in UC(X)$. Agora dado $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in UC(X)$, temos que $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ é convergente para qualquer permutação $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Daí, dado $\varphi \in X^*$, temos

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi(x_{\sigma(n)}) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \varphi(x_{\sigma(i)}) = \varphi\left(\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} x_{\sigma(i)}\right) = \varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}\right) < \infty$$

Logo, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in wUC(X)$

■

Mediante ao Lema 1.10 e a Proposição 1.9, podemos estabelecer a seguinte cadeia:

$$\ell^1(X) \subseteq UC(X) \subseteq wUC(X) \subseteq \ell^1_w(X).$$

A seguir, iremos enunciar dois teoremas importantes no estudo de espaços de sequências que nos ajudarão a relacionar alguns espaços envolvidos na cadeia anterior. As demonstrações destes resultados podem ser encontradas em [5, Theorem 1.2 e 2.18].

Teorema 1.11. *(Dvoretzky-Rogers) Se X é Banach com dimensão infinita e $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, então existe uma sequência incondicionalmente somável $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X, com $\|x_n\| = |\lambda_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Teorema 1.12. *(Versão fraca do Teorema de Dvoretzky-Rogers) Seja X Banach com dimensão infinita. Então X contém uma sequência fracamente somável que não é absolutamente somável.*

Observação 1.1. Em geral, $\ell^1(X) = \ell^1_w(X)$ não ocorre. Na verdade, a versão fraca do Teorema de Dvoretzky-Rogers nos dará auxílio para garantir a seguinte caracterização:

$$\dim(X) < \infty \Leftrightarrow \ell^1(X) = \ell^1_w(X).$$

Com efeito, suponhamos que $dim(X) = m < \infty$. Com isso, sabemos que X será isomorfo a $E = \mathbb{K}^m$ munido com a norma $p = 1$, pois, como E tem dimensão finita, as normas são todas equivalentes. Sendo assim, dado $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1_w(X)$, podemos dizer que $x_n = (x_{n,1}, \cdots, x_{n,m})$ e que π_j denota a projeção na j-ésima entrada sobre $\mathbb{K}^m$. Note que $|\pi_j(x_n)| \leq \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{1,w}$, para qualquer $j \in \mathbb{N}$, pois π_j é um funcional linear limitado de norma igual a 1. Deste modo, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m} \|x_{n,j}\| = \sum_{j=1}^{m}\sum_{n=1}^{\infty} \|\pi_j(x_n)\| \leq \sum_{j=1}^{m} \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{1,w} < \infty.$$

Logo, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(X)$. Mas já sabemos que $\ell^1(X) \subseteq \ell^1_w(X)$. Portanto, $\ell^1(X) = \ell^1_w(X)$ como queríamos demonstrar. Por outro lado, o Teorema 1.12 nos garante que se X é Banach com dimensão infinita, então $\ell^1(X) \subsetneq \ell^1_w(X)$. Logo, como $\ell^1(X) = \ell^1_w(X)$, segue que X tem dimensão finita.

Com isso, podemos verificar resultado a seguir.

Proposição 1.13. *X tem dimensão finita se, e somente se, $\ell^1(X) = UC(X)$.*

Demonstração: Se a dimensão de X é finita, então pela observação anterior $\ell^1(X) = \ell^1_w(X)$. Daí, como $\ell^1(X) \subseteq UC(X) \subseteq \ell^1_w(X)$, segue que $\ell^1(X) = UC(X)$. Agora vamos

provar a recíproca. Por contrapositiva, é suficiente mostrarmos que

$$\dim(X) = \infty \Rightarrow \ell^1(X) \subsetneq UC(X).$$

Daí, seja $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2 - \ell^1$. Pelo Teorema 1.11, existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in UC(X)$ tal que $\|x_n\| = |\lambda_n|$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|.$$

Mas como $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin \ell^1$, segue que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ é divergente, ou seja, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin \ell^1(X)$. Logo, $\ell^1(X) \subsetneq UC(X)$.

■

O exemplo a seguir nos mostrará que a inclusão $\ell^1_w(X) \subseteq UC(X)$ é estrita em geral.

Exemplo 1.1. Seja $X = c_0$ e $\mathbf{x} = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cujo e_n é a sequência com o n-ésimo termo igual a 1 e os restantes iguais a zero. Então, $\mathbf{x} \in \ell^1_w(c_0) - UC(c_0)$.

Com efeito, dado $\varphi \in (c_0)^*$, queremos mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi(e_n)\| < \infty.$$

Mas sabemos que $(c_0)^*$ é isomorfo a ℓ^1 pela aplicação

$$\begin{array}{rccc} \psi & : & c_0^* & \longrightarrow & \ell^1 \\ & & \varphi & \longmapsto & (\varphi(e_n))_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

Desta forma $(\varphi(e_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$, portanto a série e convergente. Agora veja que se $\boldsymbol{x} \in UC(c_0)$ então, pela Proposição 1.7, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ é convergente em c_0. Mas $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e_n = (1, \cdots, 1, \cdots) \notin c_0$, o que é um contradição. Logo, $\boldsymbol{x} \in \ell^1_w(c_0) - UC(c_0)$.

Embora a inclusão $UC(X) \subseteq \ell^1_w(X)$ seja estrita em geral, C. Bessaga e A. Pełczyński mostram que

$$UC(X) = \ell^1_w(X) \Leftrightarrow X \text{ não contém cópia de } c_0.$$

A demostração desse resultado pode ser visto em [5, pag. 22].

Enunciaremos importantes teoremas da análise funcional, cuja demonstrações podem ser encontradas em [2, Teoremas 6.2.11, 6.2.12 e 6.3.9], que irão nos auxiliar na demonstração do clássico teorema de Orlicz-Pettis e na versão bilinear.

Teorema 1.14. *(Teorema de Mazur) Sejam E um espaço normado e K um subconjunto convexo de E. Então o fecho de K na topologia da norma coincide com o fecho de K na topologia fraca. Em particular, um conjunto convexo é fechado na topologia fraca se, e somente se, é fechado na topologia da norma.*

Teorema 1.15. *(Teorema de Schur) Em ℓ^1 uma sequência converge fracamente se, e somente se, converge na topologia da norma.*

Teorema 1.16. *(Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki) Para todo espaço normado X, a bola B_{X^*} é compacta na topologia fraca estrela de X^*.*

O **clássico teorema de Orlicz-Pettis** garante que os conceitos de sequência fracamente incondicionalmente somável e incondicionalmente somável são equivalentes em espaços de Banach, ou seja, para qualquer espaço de Banach X, segue que

$$wUC(X) = UC(X).$$

Esse teorema é um famoso resultado na teoria de espaços de sequências e é usado em diversas situações na análise funcional. O objetivo deste trabalho é conseguir uma versão mais generalizada do teorema de Orlicz-Pettis usando aplicações bilineares limitadas. Com isso, no próximo capítulo iremos estabelecer algumas notações para a somabilidade de funções bilineares limitadas $\mathcal{B} : X \times Y \longrightarrow Z$, onde X, Y e Z são espaços de Banach. Mas antes, vamos apresentar conceitos que irão nos auxiliar na demonstração do Teorema de Orlicz-Pettis.

Lema 1.17. *Sejam X um espaço de Banach, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em X e A um conjunto denso em X^*. Se $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$, para todo $\varphi \in A$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fraco para $x \in X$.*

Demonstração: Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, existe $c > 0$ tal que $\|x_n\| + \|x\| \leq c$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, dado $\varphi \in X^*$, existe $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em A tal que $\varphi_n \to \varphi$. Deste modo, dado $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ de forma que

$$\|\varphi_{k_0} - \varphi\| < \frac{\epsilon}{2c}.$$

Mas como $\varphi_{k_0} \in A$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$n > n_0 \Rightarrow |\varphi_{k_0}(x_n) - \varphi_{k_0}(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} |\varphi(x_n) - \varphi(x)| &\leq |\varphi(x_n) - \varphi_{k_0}(x_n)| + |\varphi_{k_0}(x_n) - \varphi_{k_0}(x)| + |\varphi_{k_0}(x) - \varphi(x)| \\ &\leq \|\varphi - \varphi_{k_0}\|\|(x_n)\| + |\varphi_{k_0}(x_n) - \varphi_{k_0}(x)| + \|\varphi_{k_0} - \varphi\|\|x\| \\ &= \|\varphi - \varphi_{k_0}\|(\|(x_n)\| + \|x\|) + |\varphi_{k_0}(x_n) - \varphi_{k_0}(x)| \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$, ou seja, $(x_n)_{n\mathbb{N}}$ converge fraco para x.

■

Definição 1.5. Um elemento $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que pertence a ℓ^∞ é chamado de **função simples** quando o conjunto $\{x_n \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$ é finito.

Lema 1.18. *O conjunto das funções simples é denso em ℓ^∞.*

Demonstração: Seja $f \in \ell^\infty$. Sabemos que as sequências são funções dos naturais no corpo, logo podemos dizer que $f : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$. Como $f \in \ell^\infty$, segue que $f(\mathbb{N})$ é limitada. Sendo assim, $\overline{f(\mathbb{N})}$ é limitado e fechado em $\mathbb{K}$ e daí como a dimensão de $\mathbb{K}$ é finita, segue que $\overline{f(\mathbb{N})}$ é compacto. Por outro lado, dado $\epsilon > 0$, temos

$$\overline{f(\mathbb{N})} \subset \bigcup_{a\in\overline{f(\mathbb{N})}} B(a, \epsilon).$$

Daí, pela compacidade de $\overline{f(\mathbb{N})}$, existem $a^1, \cdots, a^n \in \overline{f(\mathbb{N})}$ tais que

$$\overline{f(\mathbb{N})} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(a^i, \epsilon)$$

e deste modo,

$$\begin{cases} f(1) \in B(a^{j_1}, \epsilon) \\ f(2) \in B(a^{j_2}, \epsilon) \\ f(3) \in B(a^{j_3}, \epsilon) \\ \quad\quad : \\ \quad\quad : \end{cases}$$

com $j_k \in \{a^1, \cdots, a^n\}$, para todo $k \in \mathbb{K}$. Com isso, podemos definir a seguinte função:

$$\overline{f} : \mathbb{N} \to \mathbb{K}, \text{ tal que } \overline{f}(k) = a^{j_k}, \text{com } j_k \in \{j_1, \cdots, j_n\}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

É claro que $\overline{f}$ é uma função simples. Além disso,

$$\|f - \overline{f}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f(n) - \overline{f}(n)| < \epsilon.$$

Portanto, o conjunto das funções simples é denso em ℓ^∞. ■

Definição 1.6. Um conjunto X é dito pré-compacto, se $\overline{X}$ é compacto.

Definição 1.7. Sendo X e Y espaços de Banach. Dizemos que $T : X \longrightarrow Y$ é um **operador compacto** se dado $A \subset X$ limitado, então $T(A)$ é pré-compacto.

Observação 1.2. Sendo X e Y espaços de Banach. Dizemos que $T : X \longrightarrow Y$ é um **operador sequêncialmente compacto** se para toda sequência limitada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X, a sequência $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tem subsequência convergente em Y. Mediante a [2, Proposição 7.2.3], temos que os conceitos de operadores compactos e sequêncialmente compactos são equivalentes.

Lema 1.19. *Seja $K \subset \ell^1$. Se K é pré-compacto, então K é limitado e para qualquer $\epsilon > 0$, existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\sup_{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in K} \left(\sum_{n>n_\epsilon} |x_n| \right) \leq \epsilon.$$

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$, temos

$$K \subset \overline{K} \subset \bigcup_{b\in\overline{K}} B\left(b, \frac{\epsilon}{2}\right).$$

Mas por hipótese, K é pré-compacto, ou seja, $\overline{K}$ é compacto. Logo, existem $b^1, \cdots, b^m \in \overline{K}$ tais que

$$K \subset \overline{K} \subset \bigcup_{i=1}^{m} B\left(b^i, \frac{\epsilon}{2}\right).$$

Assim, K é limitado. Por outro lado, seja $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K$. Então $\mathbf{x} \in \bigcup_{i=1}^{m} B\left(b^i, \frac{\epsilon}{2}\right)$. Logo, existe $j_0 \in \{1, \cdots, m\}$ de modo que

$$\mathbf{x} \in B\left(b^{j_0}, \frac{\epsilon}{2}\right)$$

e assim,

$$\|\mathbf{x} - b^{j_0}\|_{\ell^1} < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - b_n^{j_0}| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por outro lado, $b^{j_0} \in \overline{K} \subset \ell^1$. Então existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\sum_{n>n_\epsilon} |b_n^{j_0}| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Portanto,

$$\sum_{n\geq n_\epsilon}|x_n| = \sum_{n\geq n_\epsilon}|x_n - b_n^{j_0} + b_n^{j_0}| \leq \sum_{n\geq n_\epsilon}|x_n - b_n^{j_0}| + \sum_{n\geq n_\epsilon}|b_n^{j_0}| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

e consequentemente,

$$\sup_{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in K}\left(\sum_{n>n_\epsilon}|x_n|\right) \leq \epsilon.$$

■

Teorema 1.20. *(Teorema de Orlicz-Pettis) Se X é um espaço de Banach, então uma sequência é fracamente incondicionalmente somável se, e somente se, ela é incondicionalmente somável.*

Demonstração: Seja $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X. É claro que se uma sequência $\mathbf{x} \in UC(X)$, então $\mathbf{x} \in wUC(X)$, pois convergência forte implica em convergência fraca. Reciprocamente, suponhamos que $\mathbf{x}$ é fracamente incondicionalmente somável. Com isso, considere $X_0 = \overline{< x_1, \cdots, x_n, \cdots >}^w$. Note que X_0 é, por definição, um subespaço convexo de X. Além disso, sabemos por [2, Lema,1.6.3] que X_0 também é separável, pois possui um subconjunto enumerável e denso. Sendo assim, pelo Teorema de Mazur, $X_0 = \overline{< x_1, \cdots, x_n, \cdots >}$. Deste modo, defina o aplicação

$$\begin{array}{rccc} v & : & X_0^* & \longrightarrow & \ell^1 \\ & & g & \longmapsto & (g(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

Veja que a aplicação está bem definida pois como $\mathbf{x}$ é fracamente incondicionalmente somável, temos que $\sum_n^\infty g(x_{\sigma(n)})$ é convergente para qualquer permutação $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Logo, $(g(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \in UC(\mathbb{K})$, o que implica em $(g(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$, pois o corpo $\mathbb{K}$ tem dimensão finita. Além disso, note que v é linear, pois

$$(\lambda g + g_1)(x_n) = \lambda g(x_n) + g_1(x_n),$$

para qualquer $\lambda \in \mathbb{K}$ e $g, g_1 \in X_0^*$.

Afirmação 1.5. v é limitado.

Usaremos o Teorema do Gráfico Fechado para mostrarmos esta afirmação. Com efeito, sejam $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ em X_0^* e $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em ℓ^1, de modo que

$$g_i \to g \ \text{ e } \ v(g_i) \to y.$$

Note que

$$v(g_i) = (g_i(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{i} (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

logo, dado $\epsilon > 0$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$i \geq i_0 \Rightarrow \|(g_i(x_n))_{n\in\mathbb{N}} - (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^1} < \epsilon,$$

isto é,

$$i \geq i_0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \|g_i(x_n) - y_n\| < \epsilon.$$

Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$i \geq i_0 \Rightarrow \|g_i(x_n) - y_n\| < \epsilon,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, o que implica em

$$g_i(x_n) \xrightarrow{i} y_n. \tag{1.2}$$

Por outro lado, como $g_i \to g$ em X_0^*, então para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$g_i(x_n) \xrightarrow{i} g(x_n). \tag{1.3}$$

Assim, por (1.2), (1.3) e pela unicidade do limite, segue que $g(x_n) = y_n$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$v(g) = (g(x_n))_{n\in\mathbb{N}} = (y_n)_{n\mathbb{N}} = y.$$

Com isso, o gráfico de v é fechado, e portanto, v é limitado.

Afirmação 1.6. v é compacto.

Devido a Observação 1.2, é suficiente mostrarmos que v é sequêncialmente compacto. Com efeito, seja $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ em $B_{X_0^*}$. Pelo Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki, $B_{X_0^*}$ é compacto na topologia fraca estrela. Logo, existe uma subsequência $(x_{n_k}^*)_{k\in\mathbb{N}}$ convergente para um certo $x_0^* \in B_{X_0^*}$ na topologia fraca estrela. Para garantirmos que v é sequêncialmente compacto é suficiente mostrarmos que, na topologia forte tem-se

$$v(x_{n_k}^*) \xrightarrow{k} v(x_0^*).$$

Mas pelo Teorema de Schur, basta mostrarmos que $(v(x_{n_k}^*))_{k\in\mathbb{N}}$ converge fracamente para $v(x_0^*)$, ou seja,

$$\varphi(v(x_{n_k}^*)) \xrightarrow{k} \varphi(v(x_0^*)),$$

para qualquer $\varphi \in \ell^\infty$. Mais ainda, da convergência fraca juntamente com os Lemas 1.17 e 1.18, é suficiente mostrarmos que para todo $\varphi \in A$, temos

$$\varphi(v(x^*_{n_k})) \to \varphi(v(x^*_0)), \tag{1.4}$$

onde A é o conjunto de todas as funções simples. Mas a linearidade nos permite restringir as funções características sobre os subconjuntos M de $\mathbb{N}$, isto é, devemos mostrar que dado $M \subset \mathbb{N}$,

$$1_M(v(x^*_{n_k})) \to 1_M(v(x^*_0)),$$

onde 1_M são as sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n = 1$ quando $n \in M$ e $x_n = 0$ se $n \in \mathbb{N} - M$. Mas da relação de dualidade, a qual pode ser verificada em [2, 4.2], temos que

$$1_M(v(x^*_0)) = \sum_{n\in M} x^*_0(x_n).$$

Daí, para algum finito $M \subset \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} 1_M(v(x^*_0)) &= \sum_{n\in M} x^*_0(x_n) = x^*_0\left(\sum_{n\in M} x_n\right) = \lim_{k\to\infty} x^*_{n_k}\left(\sum_{n\in M} x_n\right) \\ &= \lim_{k\to\infty} \sum_{n\in M} x^*_{n_k}(x_n) = \lim_{k\to\infty} 1_M(v(x^*_{n_k})). \end{aligned}$$

Agora se M for infinito, temos

$$\begin{aligned} 1_M(v(x^*_0)) &= \sum_{n\in M} x^*_0(x_n) = \lim_{r\to\infty} \sum_{\substack{i=1 \\ n_i\in M}}^{r} x^*_0(x_{n_i}) = \lim_{r\to\infty} x^*_0\left(\sum_{\substack{i=1 \\ n_i\in M}}^{r} x_{n_i}\right) \\ &= x^*_0\left(\lim_{r\to\infty}\left(\sum_{\substack{i=1 \\ n_i\in M}}^{r} x_{n_i}\right)\right) = \lim_{k\to\infty} x^*_{n_k}\left(\lim_{r\to\infty}\left(\sum_{\substack{i=1 \\ n_i\in M}}^{r} x_{n_i}\right)\right) \\ &= \lim_{k\to\infty}\left(\lim_{r\to\infty} x^*_{n_k}\left(\sum_{\substack{i=1 \\ n_i\in M}}^{r} x_{n_i}\right)\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{n\in M} x^*_{n_k}(x_n)\right) \\ &= \lim_{k\to\infty} 1_M(v(x^*_{n_k})). \end{aligned}$$

Com isso, concluímos que v é compacto. Deste modo, como $B_{X^*_0}$ é limitado e v é um operador compacto, segue que $v(B_{X^*_0})$ é pré-compacto em ℓ^1. Assim, pelo Lema 1.19, dado $\epsilon > 0$, existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ de modo que, para qualquer M finito de $\mathbb{N}$ com $\min M > n_\epsilon$,

temos

$$\left\|\sum_{n\in M} x_n\right\| \overset{\text{Hahn-Banach}}{=} \sup_{\|g\|\leq 1}\left|g\left(\sum_{n\in M} x_n\right)\right| \leq \sup_{\|g\|\leq 1}\left(\sum_{n\in M}|g(x_n)|\right) \leq \epsilon.$$

Com isso, pela Proposição 1.7, segue que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é incondicionalmente somável.

■

Capítulo 2

Sequências $\mathcal{B}$-absolutamente somáveis

Agora iremos estudar o espaço das sequências $\mathcal{B}$-absolutamente somáveis. Inicialmente abordaremos definições e exemplos com aplicações bilineares particulares para que posteriormente possamos analisar em quais condições podemos relacionar este espaço com espaços estudados no capítulo 1. Todo este capítulo está baseado em [9].

2.1 Somabilidade absoluta com respeito a funções bilineares

Definição 2.1. Sejam X, Y, Z espaços de Banach e $\mathcal{B} : X \times Y \longrightarrow Z$ uma aplicação bilinear limitada. Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é **$\mathcal{B}$-absolutamente somável** se a sequência $(\mathcal{B}(x_n, y))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(Z)$, para todo $y \in Y$, isto é,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{B}(x_n, y)\| < \infty, \ \forall y \in Y.$$

Denotaremos o espaço de todas as sequências $\mathcal{B}$-absolutamente somáveis de X por $\ell^1_{\mathcal{B}}(X)$.

Analogamente, poderíamos pensar em definir $\ell^1_{\mathcal{B},w}(X)$ que seria o espaço de todas as sequências fracamente $\mathcal{B}$-absolutamente somáveis de X, ou seja, seriam as sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de modo que $(\mathcal{B}(x_n, y))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1_w(Z)$ para todo $y \in Y$, isto é,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z^*(\mathcal{B}(x_n, y))| < \infty, \forall y \in Y.$$

Porém, esta noção é na verdade um caso particular das sequências $\mathcal{B}$-absolutamente somáveis. Com efeito, dada $\mathcal{B} : X \times Y \longrightarrow Z$ bilinear e limitada, podemos definir

$$\widetilde{\mathcal{B}} : X \times (Y \widehat{\otimes}_\pi Z^*) \to \mathbb{K}, \text{ com } \widetilde{\mathcal{B}}(x, y \otimes z^*) = z^*(\mathcal{B}(x, y)),$$

onde $Y \widehat{\otimes}_\pi Z^*$ representa o produto tensorial projetivo. É possível mostrar que $\widetilde{\mathcal{B}}$ é bilinear. Além disso, é limitada pois

$$\|\widetilde{\mathcal{B}}(x, y \otimes z^*)\| = \|z^*(\mathcal{B}(x, y))\| \leq \|\mathcal{B}\|\|z^*\|\|x\|\|y\| = \|\mathcal{B}\|\|x\|\|y \otimes z^*\|.$$

Caso o leitor queira verificar a bilinearidade da aplicação ou se aprofundar no tensorial projetivo, consulte [8]. Com isso, sendo $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e para qualquer $z^* \in Z^*$, temos

$$\mathbf{x} \in \ell^1_{\mathcal{B},w}(X) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |z^*(\mathcal{B}(x_n, y))| < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |\widetilde{\mathcal{B}}(x, y \otimes z^*)| < \infty \Leftrightarrow \mathbf{x} \in \ell^1_{\widetilde{\mathcal{B}}}(X).$$

Portanto, podemos concluir que $\ell^1_{\mathcal{B},w}(X) = \ell^1_{\widetilde{\mathcal{B}}}(X)$.

Agora, para que possamos desenvolver a teoria, iremos impor algumas condições para as funções bilineares limitadas $\mathcal{B} : X \times Y \longrightarrow Z$. Com isso, considere a seguinte função

$$\phi_{\mathcal{B}} : X \to \mathcal{L}(Y, Z), \text{ com } \phi_{\mathcal{B}}(x) = \mathcal{B}(x, \cdot) = \mathcal{B}_x.$$

Vamos dizer que $\mathcal{B}$ é **admissível** se a função $\phi_{\mathcal{B}}$ for injetiva, isto é,

$$\mathcal{B}(x, y) = 0, \forall y \in Y \Rightarrow x = 0.$$

Assumindo isto, poderemos provar mais adiante que, para $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell^1_{\mathcal{B}}(X)} = \sup_{y\in B_Y} \|(\mathcal{B}(x_n, y))_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^1(Z)}$$

define uma norma sobre $\ell^1_{\mathcal{B}}(X)$.

Outra importante definição é a de espaços $(Y, Z, \mathcal{B})-$normados. Dizemos que X é $(Y, Z, \mathcal{B})-$**normado** com relação a uma função bilinear limitada $\mathcal{B} : X \times Y \longrightarrow Z$ ou simplesmente $\mathcal{B}$**-normado**, se existir uma constante $k > 0$ tal que

$$\|x\|_X \ \leq \ k\|\mathcal{B}_x\|_{\mathcal{L}(Y,Z)}, \text{ para todo } x \in X.$$

O conceito de espaço $\mathcal{B}$-normado nos ajudará provar que $\ell^1_{\mathcal{B}}(X)$ é completo com relação a norma $\|\cdot\|_{\ell^1_{\mathcal{B}}(X)}$. Essas notações foram recentemente consideradas em problemas de integração com relação a funções bilineares limitadas, desenvolvendo a Teoria

da Análise de Fourier com respeito a funções bilineares limitadas.

Definição 2.2. Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X é dita **$\mathcal{B}$-incondicionalmente somável** se $(\varphi(\mathcal{B}(x_n,y)))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ para todo $y \in Y$, $\varphi \in Z^*$, e para qualquer $M \subset \mathbb{N}$, existir $x_M \in X$ tal que

$$\sum_{n\in M} \varphi(\mathcal{B}(x_n,y)) = \varphi(\mathcal{B}(x_M,y)), \text{ para todo } y \in Y \text{ e } \varphi \in Z^*.$$

Usaremos a notação $\mathcal{B}$-$UC(X)$ para indicar o espaço de todas as sequências $\mathcal{B}$-incondicionalmente somáveis de X.

Proposição 2.1. *Defina as seguintes aplicações bilineares:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}: &\quad X\times\mathbb{K}\to X, \text{ com } \mathcal{Z}(x,\alpha)=x\alpha,\\
\mathcal{D}: &\quad X\times X^*\to\mathbb{K}, \text{ com } \mathcal{D}(x,\varphi)=\varphi(x),\\
\mathcal{D}_1: &\quad X^*\times X\to\mathbb{K}, \text{ com } \mathcal{D}_1(\varphi,x)=\varphi(x).
\end{aligned}$$

Com isso, temos

$$\ell^1_{\mathcal{Z}}(X)=\ell^1(X), \quad \ell^1_{\mathcal{D}}(X)=\ell^1_w(X) \quad e \quad \ell^1_{\mathcal{D}_1}(X^*)=\ell^1_{w^*}(X^*).$$

Demonstração: Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$. Então, para todo $\alpha \in \mathbb{K}$, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|\alpha x_n\| = |\alpha|\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\| < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\| < \infty.$$

Logo,

$$(\mathcal{Z}(x_n,\alpha))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(X) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\| < \infty.$$

Portando, $\ell^1_{\mathcal{Z}}(X)=\ell^1(X)$.

Agora, veja que para todo $\varphi \in X^*$, temos

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1_{\mathcal{D}}(X) \Leftrightarrow (\mathcal{D}(x_n,\varphi))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|\varphi(x_n)| < \infty.$$

Logo, $\ell^1_{\mathcal{D}}(X)=\ell^1_w(X)$.

Por fim, observe que para qualquer $x \in X$ temos

$$(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1_{\mathcal{D}_1}(X^*) \Leftrightarrow (\mathcal{D}_1(\varphi_n,x))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n(x)| < \infty.$$

Daí, $\ell^1_{\mathcal{D}_1}(X^*) = \ell^1_{w^*}(X^*)$. ■

Proposição 2.2. *As sequências em $\ell^1_{\mathcal{D}_1}(X^*)$ são sempre equivalentes as sequências $\mathcal{D}_1$-incondicionalmente somáveis, isto é, $\ell^1_{\mathcal{D}_1}(X^*) = \mathcal{D}_1\text{-}UC(X^*)$.*

Demonstração: Sabemos que, para qualquer $x \in X$, tem-se

$$(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1_{\mathcal{D}_1}(X^*) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x)| < \infty,$$

e $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}_1\text{-}UC(X^*)$ se, e somente se, para qualquer $\psi \in \mathbb{K}^*$ e todo $x \in X$, tem-se

$$(\psi(\mathcal{D}_1(\varphi_n, x)))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1,$$

e para todo $M \subset \mathbb{N}$, existe $\varphi_M \in X^*$ tal que para qualquer $\psi \in \mathbb{K}^*$ e todo $x \in X$, tem-se

$$\sum_{n\in M} \psi(\mathcal{D}_1(\varphi_n, x)) = \psi(\mathcal{D}_1(\varphi_M, x)).$$

Mas como $\mathbb{K}^* = \mathbb{K}$, temos que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}_1\text{-}UC(X^*)$ se, e somente se, para qualquer $\lambda \in \mathbb{K}$ e todo $x \in X$, tem-se

$$(\lambda\mathcal{D}_1(\varphi_n, x))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1 \Leftrightarrow \lambda\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x)| < \infty,$$

e para todo $M \subset \mathbb{N}$, existe $\varphi_M \in X^*$ tal que para qualquer $\lambda \in \mathbb{K}$ e todo $x \in X$, tem-se

$$\sum_{n\in M} \lambda\mathcal{D}_1(\varphi_n, x) = \lambda\mathcal{D}_1(\varphi_M, x) \Leftrightarrow \sum_{n\in M} \varphi_n(x) = \varphi_M(x).$$

Com isso, é claro que $\mathcal{D}_1\text{-}UC(X^*) \subseteq \ell^1_{\mathcal{D}_1}(X^*)$. Agora seja $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1_{\mathcal{D}_1}(X^*)$. Assim, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x)| < \infty \Rightarrow \lambda\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x)| < \infty.$$

Por outro lado,

$$(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1_{\mathcal{D}_1}(X^*) \Rightarrow (\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1,$$

e como a dimensão de $\mathbb{K}$ é finita, pela Proposição 1.13, segue que

$$(\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1 \Rightarrow (\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \in UC(\mathbb{K}).$$

Como $\mathbb{K}$ é Banach,

$$(\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \in UC(\mathbb{K}) \Rightarrow (\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \in wUC(\mathbb{K}).$$

Assim, pela Proposição 1.9, para cada $x \in X$, existe $\alpha_{M,x} \in \mathbb{K}$ tal que

$$\sum_{n\in M} \varphi_n(x) = \alpha_{M,x}.$$

Assim, tome$\varphi_M : X \longrightarrow \mathbb{K}$ dado por $\varphi_M(x) = \alpha_{M,x}$. Com isso, temos que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}_1$-$UC(X^*)$.

■

Apesar da Proposição 2.2 nos garantir que $\ell^1_{\mathcal{D}_1}(X^*) = \mathcal{D}_1$-$UC(X^*)$, se tomarmos $X^* = \ell^\infty$, ou seja, $X = \ell^1$, e considerar a sequência canônica $\mathbf{x} = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, então $\mathbf{x}$ é $\mathcal{D}_1$-incondicionalmente somável, pois dado $x \in \ell^1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n(x)\|$ é finito. Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n(x)\| < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{D}_1(e_n,(x))\| < \infty \Leftrightarrow (e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1_{\mathcal{D}_1}(\ell^\infty).$$

Daí, pela Proposição 2.2, $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_1$-$UC(\ell^\infty)$. Porém, sabemos que $\mathbf{x}$ não é incondicionalmente somável. Desta forma, concluímos que a versão bilinear do teorema de Orlicz-Pettis não é válido para $\mathcal{B} = \mathcal{D}_1$, isto é, existe X espaço de Banach tal que

$$D_1 - UC(X) \neq UC(X).$$

Proposição 2.3. *Para qualquer espaço de Banach X, temos que*

$$\mathcal{D}\text{-}UC(X) = \mathcal{Z}\text{-}UC(X) = wUC(X).$$

Demonstração: Sendo $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de X, sabemos que dado $\varphi \in X^*$ e $\lambda \in \mathbb{K}^* = \mathbb{K}$, temos

$$\mathbf{x} \in \mathcal{D}\text{-}UC(X) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda\mathcal{D}(x_n,\varphi)| < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda\varphi(x_n)| < \infty,$$

e para qualquer $M \subset \mathbb{N}$ existe $x_M \in X$ tal que

$$\sum_{n\in M} \lambda\mathcal{D}(x_n,\varphi) = \lambda\mathcal{D}(x_M,\varphi).$$

Mas isto é equivalente a

$$\sum_{n\in M}\lambda\varphi(x_n)=\lambda\varphi(x_M),$$

para todo $\varphi\in X^*$ e $\lambda\in\mathbb{K}^*=\mathbb{K}$. Por outro lado,

$$\mathbf{x}\in\mathcal{Z}\text{-}UC(X)\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi(\mathcal{Z}(x_n,\lambda))|<\infty\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi(\lambda x_n)|<\infty\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda\varphi(x_n)|<\infty,$$

e para qualquer $M\subset\mathbb{N}$ existe $x_M\in X$ tal que

$$\sum_{n\in M}\varphi(\mathcal{Z}(x_n,\lambda))=\varphi(\mathcal{Z}(x_M,\lambda))\Leftrightarrow\sum_{n\in M}\lambda\varphi(x_n)=\lambda\varphi(x_M).$$

Sendo assim, podemos concluir que $\mathcal{D}\text{-}UC(X)=\mathcal{Z}\text{-}UC(X)$. Agora, observe que para qualquer permutação $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ e $\varphi\in X^*$, temos

$$\mathbf{x}\in wUC(X)\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi(x_{\sigma(n)})|<\infty\Leftrightarrow(\varphi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}\in UC(X).$$

Com isso, se $\mathbf{x}\in wUC(X)$, usando a permutação identidade, segue que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi(x_n)|$ é convergente para qualquer $\varphi\in X^*$, e portanto, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda\varphi(x_n)|<\infty$ para todo $\varphi\in X^*$ e $\lambda\in\mathbb{K}$. Com isso, juntamente com a Proposição 1.9, concluímos que $\mathbf{x}\in\mathcal{Z}\text{-}UC(X)$. Agora suponhamos que $\mathbf{x}\in\mathcal{Z}\text{-}UC(X)$. Daí, para qualquer $\varphi\in X^*$, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda\varphi(x_n)|<\infty\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi(x_n)|<\infty.$$

Mas sabemos que para qualquer $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $\epsilon_n\in\{1,-1\}$, tem-se

$$\sum_{n=1}^{\infty}\epsilon\varphi(x_n)<\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi(x_n)|<\infty.$$

Logo, $(\varphi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}\in UC(X)$, e pela Proposição 1.7 concluímos que $\mathbf{x}\in wUC(X)$.

■

Com isso, podemos concluir que sequências $\mathcal{Z}$-incondicionalmente somáveis e $\mathcal{D}$-incondicionalmente somáveis corresponde a fracamente incondicionalmente somáveis. Desta forma, podemos reescrever o Teorema de Orlicz-Pettis da seguinte maneira:

$$\mathcal{D}\text{-}UC(X)=UC(X)\text{ ou }\mathcal{Z}\text{-}UC(X)=UC(X),\text{ para todo }X\text{ de Banach.}$$

O que nos leva a pensar na seguinte questão: Em quais condições $\mathcal{B}$-$UC(X) = UC(X)$, sendo $\mathcal{B} : X \times Y \to Z$ uma função bilinear limitada admissível?

Para entender o porquê do teorema de Orlicz-Pettis ser válido para $\mathcal{D}$ e não ser para $\mathcal{D}_1$, podemos notar primeiramente que não só $X \subset X^{**}$, mas na verdade os funcionais de X^*, com relação aos elementos de X são fraco estrela norma contínuos em X^{**}. Tendo isso em mente, precisamos considerar o espaço de Banach $\mathcal{W}^*(X^*, Y)$ que consiste em todas as funções lineares limitadas de X^* em Y que são fraca estrela-norma-contínuas. Caso o leitor queira se aprofundar mais este espaço consulte [6].

Sempre denotaremos X, Y e Z como espaços de Banach e $\mathcal{B} : X \times Y \to Z$ uma aplicação bilinear limitada. Iremos também usar, até o fim do trabalho, as seguintes notações:

$$\psi_{\mathcal{B}} : Y \to \mathcal{L}(X, Z), \text{ com } \psi_{\mathcal{B}}(y) = \mathcal{B}(\cdot, y) = \mathcal{B}^y$$

$$\mathcal{B}^* : X \times Z^* \to Y^*, \text{ com } \mathcal{B}^*(x, z^*)(y) = z^*(\mathcal{B}(x, y)).$$

Em outras palavras, $\mathcal{B}^*_x = (\mathcal{B}_x)^*$. Além disso, usualmente iremos escrever $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, para $1 \leq p \leq \infty$.

Veja no exemplo a seguir que, em geral, $\|\cdot\|_{\ell^1_{\mathcal{B}}(X)}$ não é uma norma sobre X. Porém, a Proposição 2.4 irá nos fornecer uma caracterização para que $\|\cdot\|_{\ell^1_{\mathcal{B}}(X)}$ seja uma norma.

Exemplo 2.1. Seja X um espaço de dimensão infinita e $\varphi_0 \in X^* - \{0\}$ que não é injetiva. Com isso, defina a aplicação

$$\mathcal{B} : X \times X \to \mathbb{K}, \text{ com } \mathcal{B}(x^1, x^2) = \varphi_0(x^1)\varphi_0(x^2).$$

Então $\|\cdot\|_{\ell^1_{\mathcal{B}}(X)}$ não é norma.

Demonstração: Com efeito, como φ_0 não é injetiva, podemos considerar $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Ker(\varphi_0)$, com $\mathbf{x} \neq 0$. Sendo assim, $\mathcal{B}(x_n, x) = 0$, para todo $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$. Logo, $\|\mathbf{x}\|_{\ell^1_{\mathcal{B}}(X)} = 0$. Mas $\mathbf{x} \neq 0$, então $\|\cdot\|_{\ell^1_{\mathcal{B}}(X)}$ não é norma.

■

Proposição 2.4. *O espaço $(\ell^1_{\mathcal{B}}(X), \|\cdot\|_{\ell^1_{\mathcal{B}}(X)})$ é normado se, e somente se, $\mathcal{B}$ é admissível.*

Demonstração: Suponhamos que $(\ell^1_{\mathcal{B}}(X), \|\cdot\|_{\ell^1_{\mathcal{B}}(X)})$ é normado. Daí, seja $x_1, x_2 \in X$ de modo que $\phi_{\mathcal{B}}(x_1) = \phi_{\mathcal{B}}(x_2)$. Porém, observe que

$$\phi_{\mathcal{B}}(x_1) = \phi_{\mathcal{B}}(x_2) \Rightarrow \mathcal{B}(x_1, y) = \mathcal{B}(x_2, y) \Rightarrow \mathcal{B}(x_1 - x_2, y) = 0, \text{ para todo } y \in Y.$$

Com isso, sendo $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $x_n = x_1 - x_2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$, segue que,

$$\mathcal{B}(x_n, y) = 0 \Rightarrow \|\mathbf{x}\|_{\ell^1_{\mathcal{B}}(X)} = 0,$$

para todo $y \in Y$ e $n \in \mathbb{N}$. Mas, por hipótese, $\|\cdot\|_{\ell^1_{\mathcal{B}}(X)}$ é norma, então $\mathbf{x} = 0$, ou seja, $x_1 = x_2$. Portanto $\phi_{\mathcal{B}}$ é injetivo, isto é, $\mathcal{B}$ é admissível.

Reciprocamente, vamos supor que $\mathcal{B}$ é admissível. Logo, sendo $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1_{\mathcal{B}}(X)$, podemos definir o seguinte operador linear:

$$T_{\mathcal{B},\mathbf{x}} : Y \to \ell^1(Z), \text{ com } T_{\mathcal{B},\mathbf{x}}(y) = (\mathcal{B}(x_n, y))_{n\in\mathbb{N}}.$$

Mostraremos que o gráfico de $T_{\mathcal{B},x}$ é fechado para garantir que $\sup\limits_{\|y\|\leq 1} \|(\mathcal{B}(x_n, y))_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^1(X)}$ seja finito. Com efeito, seja $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergente para $y \in Y$ e $(T_{\mathcal{B},\mathbf{x}}(y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ convergente para $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(Z)$. Note que, para cada $k \in \mathbb{N}$, temos

$$T_{\mathcal{B},\mathbf{x}}(y_k) = (\mathcal{B}(x_n, y_k))_{n\in\mathbb{N}}.$$

Logo, fazendo $k \to \infty$, segue que

$$(\mathcal{B}(x_n, y_k))_{n\in\mathbb{N}} \to (\mathcal{B}(x_n, y))_{n\in\mathbb{N}}$$

e então, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\mathcal{B}(x_n, y))_{n\in\mathbb{N}} = T_{\mathcal{B},\mathbf{x}}(y)$. Assim, o gráfico de $T_{\mathcal{B},\mathbf{x}}$ é fechado e $T_{\mathcal{B},\mathbf{x}}$ é contínuo, ou seja,

$$\sup_{\|y\|\leq 1} \|T(y)\| < \infty \Rightarrow \sup_{\|y\|\leq 1} \|(\mathcal{B}(x_n, y))_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^1(X)} < \infty.$$

Agora, dados $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathbf{z} = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências em X, $y \in Y$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned} \|\lambda\mathbf{x} + \mathbf{z}\|_{\ell^1_{\mathcal{B}}(X)} &= \sup_{\|y\|\leq 1} \|(\lambda\mathcal{B}(x_n, y))_{n\in\mathbb{N}} + (\mathcal{B}(z_n, y))_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^1(X)} \\ &\leq \lambda \sup_{\|y\|\leq 1} \|(\mathcal{B}(x_n, y))_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^1(X)} + \lambda \sup_{\|y\|\leq 1} \|(\mathcal{B}(z_n, y))_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^1(X)}, \end{aligned}$$

e assim,

$$\|\lambda\mathbf{x} + \mathbf{z}\|_{\ell^1_{\mathcal{B}}(X)} = \lambda\|\mathbf{x}\|_{\ell^1_{\mathcal{B}}(X)} + \|\mathbf{z}\|_{\ell^1_{\mathcal{B}}(X)}.$$

Por fim, sabemos que se $\mathbf{x} = 0$, então $\|\mathbf{x}\|_{\ell^1_{\mathcal{B}}(X)} = 0$. Agora veja que

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell^1_{\mathcal{B}}(X)} = 0 \Rightarrow \sup_{\|y\|\leq 1} \|(\mathcal{B}(x_n, y))_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^1(X)} = 0 \Rightarrow \|(\mathcal{B}(x_n, y))_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^1(X)} = 0, \text{ para todo } y \in Y.$$

Assim, $(\mathcal{B}(x_n, y))_{n\in\mathbb{N}} = 0$ para todo $y \in Y$ o que implica em $\phi_{\mathcal{B}}(x_n) = 0$ para todo

$n \in \mathbb{N}$ e $y \in Y$. Mas como $\phi_{\mathcal{B}}$ é admissível, isto é, injetiva, temos que $x_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e assim, $\mathbf{x} = 0$.

■

Analisaremos agora a completude do espaço $\ell^1_{\mathcal{B}}(X)$. O exemplo a seguir nos mostrará que, em geral, esse espaço não é completo.

Exemplo 2.2. Seja $T : X \to Z$ uma aplicação linear limitada de modo que $T(X)$ não é um subespaço fechado de Z. Com isso, defina a seguinte aplicação bilinear limitada

$$\mathcal{F} : X \times \mathbb{K} \to Z, \text{ de modo que } \mathcal{F}(x, \alpha) = \alpha T(x).$$

Então $\ell^1_{\mathcal{F}}(X)$ não é completo.

Demonstração: Se $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1_{\mathcal{F}}(X)$, então

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell^1_{\mathcal{F}}(X)} = \sup_{|\alpha|\leq 1} \|\alpha T(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^1(Z)} = \|T(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^1(Z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \|T(x_n)\|_Z.$$

Agora, como $T(X)$ não é fechado em Z, podemos tomar $\mathbf{x}^0 = (x^0_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X de modo que $(T(x^0_n))_{n\in\mathbb{N}}$ seja convergente para $z \in Z - T(X)$. Agora defina, para cada $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x^m} = (\frac{x^0_m}{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$. Mostraremos que $(\mathbf{x^m})_{\mathbf{m}\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy que não é convergente em $\ell^1_{\mathcal{F}}(X)$. Com efeito, note que para todo $\mathbf{m}, \mathbf{k} \in \mathbb{K}$, temos que

$$\left\|\mathbf{x^m} - \mathbf{x^k}\right\|_{\ell^1_{\mathcal{F}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\| T\left(\frac{x^0_m}{2^n} - \frac{x^0_k}{2^n}\right)\right\|_Z = \sum_{n=1}^{\infty} \left\| T\left(\frac{x^0_m - x^0_k}{2^n}\right)\right\|_Z = \|T(x^0_m - x^0_k)\|_Z.$$

Com isso, $(\mathbf{x}^m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy pois $T(x^0_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é convergente em Z. Por outro lado, se $\mathbf{x} \in \ell^1_{\mathcal{F}}(X)$, então

$$\frac{1}{2}\|T(x^0_m) - T(2x_1)\|_Z = \left\| T\left(\frac{x^0_m}{2} - x_1\right)\right\|_Z \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left\| T\left(\frac{x^0_m}{2^2} - x_n\right)\right\|_Z = \|\mathbf{x^m} - \mathbf{x}\|_{\ell^1_{\mathcal{F}}(X)}$$

Com isso, se $(\mathbf{x^m})_{\mathbf{m}\in\mathbb{N}}$ convergir para $\mathbf{x}$, a desigualdade anterior nos diz que $z = T(2x_1) \in T(X)$. Mas isso é uma contradição pois $z \in Z - T(X)$.

■

Todavia, o Teorema 2.5 nos dará condições para que esse espaço seja completo.

Teorema 2.5. *Seja $\mathcal{B} : X \times Y \to Z$ uma aplicação bilinear limitada e admissível, sendo X um espaço $\mathcal{B}$-normado. Então $(\ell^1_{\mathcal{B}}(X), \|\cdot\|_{\ell^1_{\mathcal{B}}(X)})$ é um espaço de Banach.*

Demonstração: Seja $(\mathbf{x^m})_{\mathbf{m}\in\mathbb{N}}$, com $\mathbf{x^m} = (x^m_n)_{n\in\mathbb{N}}$, uma sequência de Cauchy em

$\ell^1_{\mathcal{B}}(X)$. Deste modo, dado $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m, k \geq k_0$ tem-se

$$\|\mathbf{x^m} - \mathbf{x^k}\|_{\ell^1_{\mathcal{B}}(X)} \ \leq \ \epsilon \Rightarrow \sup_{y \in B_Y} \sum_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{B}(x_n^m - x_n^k, y)\|_Z \ \leq \ \epsilon.$$

Em particular, para todo $y \in B_Y$ e $m, k \geq k_0$, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{B}(x_n^m - x_n^k, y)\|_Z \ \leq \ \epsilon$$

e por maior razão, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $m, k \geq k_0$, temos

$$\|\mathcal{B}_{x_n^m - x_n^k}\|_{\mathcal{L}(Y,Z)} \leq \epsilon.$$

Assim, como X é $\mathcal{B}$-normado, existe $c > 0$ tal que

$$\|x_n^m - x_n^k\| \leq c\epsilon.$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $m, k \geq k_0$. Assim, podemos concluir que $(x_n^k)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy no espaço de Banach X e então, $(x_n^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge para algum $x_n \in X$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Com isso, considere $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Deste modo, fazendo $m \to \infty$, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{B}(x_n^m - x_n^k, y)\|_Z \ \leq \ \epsilon \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{B}(x_n - x_n^k, y)\|_Z \ \leq \ \epsilon,$$

para todo $y \in B_Y$ e $k \geq k_0$. Logo, podemos concluir que $\mathbf{x} - \mathbf{x^k} \in \ell^1_{\mathcal{B}}(X)$ e que $\mathbf{x^k} \to \mathbf{x}$ em $\ell^1_{\mathcal{B}}(X)$. Mas veja que $\mathbf{x} = (\mathbf{x} - \mathbf{x^k}) + \mathbf{x^k} \in \ell^1_{\mathcal{B}}(X)$ e portanto a sequência $(\mathbf{x^k})_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}}$ é convergente para $\mathbf{x}$ em $\ell^1_{\mathcal{B}}(X)$.

■

É um fato que podemos identificar $\ell^1_w(X)$ como o espaço $\mathcal{L}(c_0, X)$ ou $\mathcal{L}(X^*, \ell^1)$. Vamos estudar este mesmo tipo de identificação com relação a $\ell^1_{\mathcal{B}}(X)$.

Proposição 2.6. *Seja $\mathcal{B} : X \times Y \to Z$ uma aplicação bilinear admissível e limitada. Então,*

1. *$\ell^1_{\mathcal{B}}(X)$ é isometricamente isomorfo a um subespaço do $\mathcal{L}(Y, \ell^1(Z))$.*
2. *$\ell^1_{\mathcal{B}}(X)$ é isometricamente isomorfo a um subespaço do $\ell^1_\sigma(\mathcal{L}(Y, Z))$, onde definimos $\sigma : (\mathcal{L}(Y, Z)) \times Y \to Z$, com $\sigma(T, y) = T(y)$.*
3. *$\ell^1_{\mathcal{B}}(X)$ é isometricamente isomorfo a um subespaço do $\mathcal{L}(c_0(Z^*), Y^*)$.*
4. *$\ell^1_{\mathcal{B}}(X)$ é isometricamente isomorfo a um subespaço do $\mathcal{L}(\ell^\infty(Z^*), \ell^1_{w^*}(Y^*))$.*

Demonstração:

1. Sendo $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1_{\mathcal{B}}(X)$, $y \in Y$ e $T_{\mathcal{B},\mathbf{x}}(y) = (\mathcal{B}(x_n, y))_{n\in\mathbb{N}}$, podemos definir a aplicação

$$\varphi : \ell^1_{\mathcal{B}}(X) \to \mathcal{L}(Y, \ell^1(Z)), \text{ com } \varphi(\mathbf{x}) = T_{\mathcal{B},\mathbf{x}}.$$

Observe que φ está bem definida e é linear, pois $\mathcal{B}$ é bilinear, e ainda,

$$\|\varphi(\mathbf{x})\|_{\mathcal{L}(Y,\ell^1(Z))} = \sup_{y\in B_Y} \|T_{\mathcal{B},\mathbf{x}}(y)\|_{\ell^1(Z)} = \sup_{y\in B_Y} \|(\mathcal{B}(x_n, y)_{n\in\mathbb{N}})\|_{\ell^1(Z)} = \|\mathbf{x}\|_{\ell^1_{\mathcal{B}}(X)}.$$

Com isso, temos uma aplicação isométrica entre $\ell^1_{\mathcal{B}}(X)$ e $\mathcal{L}(Y, \ell^1(Z))$.

2. Sabemos que $\phi_{\mathcal{B}}(x) = \mathcal{B}(x, \cdot)$, para cada $x \in X$. Assim, podemos definir:

$$\varphi : \ell^1_{\mathcal{B}}(X) \to \ell^1_{\sigma}(\mathcal{L}(Y, Z)), \text{ com } \varphi((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\phi_{\mathcal{B}}(x_n))_{n\in\mathbb{N}}.$$

Observe que φ está bem definida pois $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1_{\mathcal{B}}(X)$, e é linear pelo fato de $\phi_{\mathcal{B}}$ ser linear. Com isso, sendo $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1_{\mathcal{B}}(X)$, temos

$$\begin{aligned} \|\varphi(\mathbf{x})\|_{\ell^1_\sigma(\mathcal{L}(Y,Z))} &= \|(\mathcal{B}(x_n, \cdot))_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^1_\sigma(\mathcal{L}(Y,Z))} = \sup_{y\in B_Y} \|\sigma((\mathcal{B}(x_n, \cdot)_{n\in\mathbb{N}}, y))\|_{\ell^1(Z)} \\ &= \sup_{y\in B_Y} \|(\mathcal{B}(x_n, y)_{n\in\mathbb{N}})\|_{\ell^1(Z)} = \|\mathbf{x}\|_{\ell^1_{\mathcal{B}}(X)}. \end{aligned}$$

Sendo assim, temos uma aplicação isométrica entre $\ell^1_{\mathcal{B}}(X)$ e $\ell^1_{\sigma}(\mathcal{L}(Y, Z))$.

3. Sendo $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X, $y \in Y$ e $N, M \in \mathbb{N}$, temos pelo Teorema de Hahn-Banach que

$$\sum_{n=N}^{M} \|\mathcal{B}(x_n, y)\| = \sup_{\varphi_n\in B_{Z^*}} \sum_{n=N}^{M} |\varphi_n(\mathcal{B}(x_n, y))|.$$

Por outro lado, usando as mesmas notações e sendo $\epsilon_n \in B_{\mathbb{K}}$, temos

$$\begin{aligned} \left|\sum_{n=N}^{M} \mathcal{B}^*(x_n, \epsilon_n\varphi_n)(y)\right| &\leq \sum_{n=N}^{M} |\mathcal{B}^*(x_n, \epsilon_n\varphi_n)(y)| = \sum_{n=N}^{M} |\epsilon_n||\mathcal{B}^*(x_n, \varphi_n)(y)| \\ &= \sum_{n=N}^{M} |\mathcal{B}^*(x_n, \varphi_n)(y)| = \sum_{n=N}^{M} |\varphi_n(\mathcal{B}(x_n, y))|. \end{aligned}$$

Com isso, temos

$$\sup_{\substack{\varphi_n\in B_{Z^*}\\ \epsilon_n\in B_{\mathbb{K}}}} \left|\sum_{n=N}^{M} \mathcal{B}^*(x_n, \epsilon_n\varphi_n)(y)\right| \leq \sup_{\varphi_n\in B_{Z^*}} \sum_{n=N}^{M} |\varphi_n(\mathcal{B}(x_n, y))|.$$

Em particular, para o caso real, podemos tomar $\epsilon_n \in \{-1, 1\}$ de modo que

$$\mathcal{B}^*(x_n, \epsilon_n\varphi_n)(y) = |\mathcal{B}^*(x_n, \epsilon_n\varphi_n)(y)|.$$

De modo análogo pode-se fazer para o caso complexo. Sendo assim,

$$\sup_{\varphi_n \in B_{Z^*}} \left| \sum_{n=N}^{M} \mathcal{B}^*(x_n, \epsilon_n\varphi_n)(y) \right| = \sup_{\varphi_n \in B_{Z^*}} \sum_{n=N}^{M} |\mathcal{B}^*(x_n, \epsilon_n\varphi_n)(y)| = \sup_{\varphi_n \in B_{Z^*}} \sum_{n=N}^{M} |\mathcal{B}^*(x_n, \varphi_n)(y)|.$$

Logo,

$$\sup_{\varphi_n \in B_{Z^*}} \left| \sum_{n=N}^{M} \mathcal{B}^*(x_n, \epsilon_n\varphi_n)(y) \right| = \sup_{\varphi_n \in B_{Z^*}} \sum_{n=N}^{M} |\varphi_n(\mathcal{B}(x_n, y))|.$$

Assim, pela propriedade de supremo segue que

$$\sup_{\substack{\varphi_n \in B_{Z^*} \\ \epsilon_n \in B_{\mathbb{K}}}} \left| \sum_{n=N}^{M} \mathcal{B}^*(x_n, \epsilon_n\varphi_n)(y) \right| = \sup_{\varphi_n \in B_{Z^*}} \sum_{n=N}^{M} |\varphi_n(\mathcal{B}(x_n, y))|.$$

De modo análogo,

$$\sup_{\substack{\varphi_n \in B_{Z^*} \\ \epsilon_n \in B_{\mathbb{K}}}} \left| \sum_{n=N}^{M} \mathcal{B}^*(x_n, \epsilon_n\varphi_n)(y) \right| = \sup_{\substack{\varphi_n \in B_{Z^*} \\ \epsilon_n \in B_{\mathbb{K}}}} |\epsilon_n| \left| \sum_{n=N}^{M} \mathcal{B}^*(x_n, \epsilon_n\varphi_n)(y) \right| \leq \sup_{\varphi_n \in B_{Z^*}} \left| \sum_{n=N}^{M} \mathcal{B}^*(x_n, \varphi_n)(y) \right|.$$

Em particular, se tomarmos $\epsilon_n = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\sup_{\varphi_n \in B_{Z^*}} \left| \sum_{n=N}^{M} \mathcal{B}^*(x_n, \epsilon_n\varphi_n)(y) \right| = \sup_{\varphi_n \in B_{Z^*}} \left| \sum_{n=N}^{M} \mathcal{B}^*(x_n, \varphi_n)(y) \right|.$$

Com isso,

$$\sup_{\substack{\varphi_n \in B_{Z^*} \\ \epsilon_n \in B_{\mathbb{K}}}} \left| \sum_{n=N}^{M} \mathcal{B}^*(x_n, \epsilon_n\varphi_n)(y) \right| = \sup_{\varphi_n \in B_{Z^*}} \left| \sum_{n=N}^{M} \mathcal{B}^*(x_n, \varphi_n)(y) \right|.$$

Deste modo, podemos concluir que

$$\sum_{n=N}^{M} \|\mathcal{B}(x_n, y)\| = \sup_{\varphi_n \in B_{Z^*}} \left| \sum_{n=N}^{M} \mathcal{B}^*(x_n, \varphi_n)(y) \right|.$$

Daí, como a igualdade anterior é válida para qualquer $N, M \in \mathbb{N}$, podemos concluir que

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell^1_{\mathcal{B}}(X)} = \sup_{\substack{\varphi_n \in B_{Z^*} \\ M \in \mathbb{N}}} \left\| \sum_{n=1}^{M} \mathcal{B}^*(x_n, \varphi_n)(y) \right\|_{Y^*}.$$

Deste modo, sendo $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1_{\mathcal{B}}(X)$, podemos definir

$$\psi : \ell^1_{\mathcal{B}}(X) \to \mathcal{L}(c_0(Z^*), Y^*), \text{ com } \psi(\mathbf{x}) = \xi_{\mathbf{x}},$$

onde $\xi_{\mathbf{x}} : c_0(Z^*) \to Y^*$, com $\xi_{\mathbf{x}}((\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}^*(x_n, \varphi_n) \in Y^*$. Note que ψ é linear, pois $\mathcal{B}^*$ é bilinear. Com isso, temos

$$\|\psi(\mathbf{x})\|_{\mathcal{L}(c_0(Z^*,Y^*))} = \|\xi_{\mathbf{x}}(\cdot)\|_{\mathcal{L}(c_0(Z^*,Y^*))} = \sup_{\varphi_n\in B_{Z^*}} \|\xi_{\mathbf{x}}((\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}})\|$$

$$= \sup_{\varphi_n\in B_{Z^*}} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}^*(x_n, \varphi_n) \right\|_{Y^*} = \|\mathbf{x}\|_{\ell^1_{\mathcal{B}}(X)}.$$

Portanto, temos uma aplicação isométrica entre $\ell^1_{\mathcal{B}}(X)$ e $\mathcal{L}(c_0(Z^*), Y^*)$.

4. Seja $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1_{\mathcal{B}}(X)$ e defina a seguinte aplicação:

$$\xi : \ell^1_{\mathcal{B}}(X) \to \mathcal{L}(\ell^\infty(Z^*), \ell^1_{w^*}(Y^*)), \text{ com } \xi(\mathbf{x}) = \psi_{\mathbf{x}}$$

onde $\psi_{\mathbf{x}}((\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \mathcal{B}^*(x_n, \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(Z^*)$. Daí, usando argumentos análogos aos do item anteiros e sabendo que $(\ell^1(Z))^* = \ell^\infty(Z^*)$, temos que

$$\begin{aligned}
\|\xi(\mathbf{x})\|_{\mathcal{L}(\ell^\infty(Z^*),\ell^1_{w^*}(Y^*))} &= \|\psi_{\mathbf{x}}\| = \sup_{\substack{(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}\in B_{\ell^\infty(Z^*)} \\ y\in B_y}} \sum_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{B}^*(x_n, \varphi_n)(y)\| \\
&= \sup_{\substack{(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}\in B_{\ell^\infty(Z^*)} \\ y\in B_y}} \sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n(\mathcal{B}(x_n, y))\| \\
&= \sup_{\substack{(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}\in B_{\ell^\infty(Z^*)} \\ y\in B_y, |\epsilon_n|=1}} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n \varphi_n(\mathcal{B}(x_n, y)) \right\| \\
&= \sup_{y\in B_y} \sum_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{B}(x_n, y)\|_Z = \|\mathbf{x}\|_{\ell^1_{\mathcal{B}}(X)}
\end{aligned}$$

Com isso, temos uma aplicação isométrica entre $\ell^1_{\mathcal{B}}(X)$ e $\mathcal{L}(\ell^\infty(Z^*), \ell^1_{w^*}(Y^*))$.

■

Iremos agora expor algumas aplicações bilineares limitadas e admissíveis definidas em um espaço de Banach X.

Exemplo 2.3. Defina a aplicação

$$\pi : X \times Y \to X \widehat{\otimes}_\pi Y, \text{ com } \pi_Y(x, y) = x \otimes y,$$

onde $X\widehat{\otimes}_{\pi}Y$ é a produto tensorial projetivo. Veja que π_Y é bilinear, pois o tensor é uma aplicação bilinear. Além disso, é limitada, pois

$$\|\pi_Y(x,y)\| = \|x\otimes y\| = \|x\|\|y\|.$$

Por fim, é admissível. Com efeito, suponhamos que $\phi_{\pi_Y}(x_1) = \phi_{\pi_Y}(x_2)$, com $x_1, x_2 \in X$. Daí, para todo $y \in Y$, temos

$$\phi_{\pi_Y}(x_1) = \phi_{\pi_Y}(x_2) \Rightarrow \pi_Y(x_1,y) = \pi_Y(x_2,y) \Rightarrow x_1\otimes y = x_2\otimes y$$

$$\Rightarrow (x_1-x_2)\otimes y = 0 \Rightarrow \|(x_1-x_2)\otimes y\| = 0 \Rightarrow \|x_1-x_2\|\|y\| = 0 \Rightarrow \|x_1-x_2\| = 0.$$

Logo, $x_1 = x_2$.

Lema 2.7. *Sejam X e Y espaços de Banach. Deste modo, se $T(x_0) = 0$ para qualquer $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, então $x_0 = 0$.*

Demonstração: Defina a aplicação

$$S : [x_0] \to \mathbb{K}, \text{ com } S(\lambda x_0) = \lambda\|x_0\|.$$

É fato que S é um funcional linear. Daí, pelo Teorema de Hahn-Banach, existe

$$\widetilde{S} : X \to \mathbb{K}, \text{ com } \widetilde{S}|_{[x_0]} = S.$$

Assim, dado $y_0 \neq 0$ em Y, podemos definir

$$R : X \to Y, \text{ com } R(x) = \widetilde{S}(x)y_0.$$

É fácil notar que $R \in \mathcal{L}(X,Y)$ e temos

$$R(x_0) = 0 \Leftrightarrow \widetilde{S}(x_0)y_0 = 0 \Leftrightarrow \|x_0\|y_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0.$$

■

Exemplo 2.4. Considere a aplicação

$$\widetilde{\sigma}_Y : X\times\mathcal{L}(X,Y) \to Y, \text{ com } \widetilde{\sigma}_Y(x,T) = T(x).$$

Note que $\widetilde{\sigma}_Y$ é bilinear porque T é uma aplicação linear e é também limitada, pois para qualquer $x \in X$ e $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ temos,

$$\|\widetilde{\sigma}_Y(x,T)\| = \|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|.$$

Além disso, $\widetilde{\sigma}_Y$ é admissível. Com efeito, sejam $x_1, x_2 \in X$ de modo que

$$\phi_{\widetilde{\sigma}_Y}(x_1) = \phi_{\widetilde{\sigma}_Y}(x_2).$$

Logo, para qualquer $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, temos

$$T(x_1) = T(x_2) \Rightarrow T(x_1 - x_2) = 0$$

Assim, pelo Lema 2.7, segue que $x_1 = x_2$. Veja que se tomarmos $Y = \mathbb{K}$, temos $\widetilde{\sigma}_{\mathbb{K}} = \mathcal{D}$.

Proposição 2.8. *Seja X um espaço de Banach. Então, $\ell^1_{\widetilde{\sigma}_Y}(X) \subset \ell^1_w(X)$.*

Demonstração: Seja $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1_{\widetilde{\sigma}_Y}(X)$. Podemos fixar $y \in Y$ e $x^* \in X^*$ de modo que $\|y\| = \|x^*\| = 1$ e definir a aplicação linear limitada

$$y \otimes x^* : X \to Y, \text{ com } y \otimes x^*(x) = x^*(x)y.$$

Daí,

$$\sup_{\substack{x^*\in B_{X^*}\\ y\in B_Y}} \|(y\otimes x^*(x_n))_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^1(Y)} = \sup_{\substack{x^*\in B_{X^*}\\ y\in B_Y}} \|y(x^*(x_n))_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^1(Y)} \leq \sup_{x^*\in B_{X^*}} \|(x^*(x_n))_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^1(Y)}.$$

Mas,

$$\sup_{x^*\in B_{X^*}} \|(x^*(x_n))_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^1(Y)} = \sup_{x^*\in B_{X^*}} \sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| = \|\mathbf{x}\|_{\ell^1_w(X)}.$$

Por outro lado, para $y \in Y$ e $x^* \in X^*$ com $\|y\| = \|x^*\| = 1$, temos

$$\|(y \otimes x^*(x_n))_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^1(Y)} = \|y(x^*(x_n))_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^1(Y)} = \|(x^*(x_n))_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^1(Y)}.$$

Com isso,

$$\sup_{\substack{x^*\in B_{X^*}\\ y\in B_Y}} \|(y \otimes x^*(x_n))_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^1(Y)} = \|\mathbf{x}\|_{\ell^1_w(X)}.$$

Porém, como $y \otimes x^* \in \mathcal{L}(X,Y)$, temos

$$\sup_{\substack{x^*\in B_{X^*}\\ y\in B_Y}} \|(y \otimes x^*(x_n))_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^1(Y)} \leq \sup_{T\in B_{\mathcal{L}(X,Y)}} \|(T(x_n)_{n\in\mathbb{N}})\|_{\ell^1(Y)} = \|\mathbf{x}\|_{\ell^1_{\widetilde{\sigma}_Y}(X)}$$

Assim, $\|\mathbf{x}\|_{\ell^1_w(X)} \leq \|\mathbf{x}\|_{\ell^1_{\widetilde{\sigma}_Y}(X)}$, isto é, $\ell^1_{\widetilde{\sigma}_Y}(X) \subset \ell^1_w(X)$.

■

Exemplo 2.5. Com relação ao espaços de operadores, podemos considerar a seguinte aplicação:

$$\sigma : \mathcal{L}(X,Y) \times X \to Y, \text{ com } \sigma(T,x) = T(x).$$

É fato que σ é linear e limitada, pois $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ e $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$, para qualquer $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ e $x \in X$. Além disso, σ é admissível. Com efeito, dado $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(X,Y)$. Daí,

$$\phi_\sigma(T_1) = \phi_\sigma(T_2) \Rightarrow T_1(x) = T_2(x), \text{ para todo } x \in X$$

Assim, $T_1 = T_2$. Note também que se tomarmos $Y = \mathbb{K}$, temos $\sigma = \mathcal{D}_1$ e

$$\ell^1_\sigma(\mathcal{L}(X,Y)) = \left\{ \mathbf{T} = (T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X,Y);\ \sup_{x\in B_X} \sum_{n=1}^{\infty} \|T_n(x)\| < \infty \right\}$$

Este espaço foi estudado em [7] e lá é denotado por $\ell^1_S(X,Y)$. Neste mesmo trabalho é apresentado a seguinte relação:

$$\ell^1(\mathcal{L}(X,Y)) \subsetneq \ell^1_\sigma(\mathcal{L}(X,Y)) \subsetneq \ell^1_w(\mathcal{L}(X,Y)).$$

Proposição 2.9. *Seja $\mathcal{B} : X \times Y \to Z$ uma aplicação bilinear limitada, Y_1, Z_1 espaços de Banach e $R : Z \to Z_1$, $S : Y_1 \to Y$, duas aplicações lineares e limitadas. Considere*

$$\mathcal{B}_{R,S} : X \times Y_1 \to Z_1, \text{ com } \mathcal{B}_{R,S}(x,y_1) = R(\mathcal{B}(x,S(y_1))).$$

Então, $\ell^1_{\mathcal{B}}(X)$ está continuamente incluso em $\ell^1_{\mathcal{B}_{R,S}}(X)$ e sendo $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1_{\mathcal{B}}(X)$, temos

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\ell^1_{\mathcal{B}_{R,S}}(X)} \leq \|R\|\|S\|\|\boldsymbol{x}\|_{\ell^1_{\mathcal{B}}(X)}$$

Demonstração: Sendo $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1_{\mathcal{B}}(X)$, para que $\ell^1_{\mathcal{B}}(X)$ esteja continuamente incluso em $\ell^1_{\mathcal{B}_{R,S}}(X)$, devemos mostrar que a aplicação identidade, dada por

$$Id : \ell^1_{\mathcal{B}}(X) \to \ell^1_{\mathcal{B}_{R,S}}(X) \text{ com } Id(\mathbf{x}) = \mathbf{x},$$

é contínua, isto é, deve existir $c > 0$ de modo que, para todo $\mathbf{x} \in \ell^1_{\mathcal{B}}(X)$, tem-se

$$\|Id(\mathbf{x})\|_{\ell^1_{\mathcal{B}_{R,S}}(X)} \leq c\|\mathbf{x}\|_{\ell^1_{\mathcal{B}}(X)}.$$

Com efeito, sendo $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1_{\mathcal{B}}(X)$, temos

$$\|Id(\mathbf{x})\|_{\ell^1_{\mathcal{B}_{R,S}}(X)} = \sup_{y_1\in B_{Y_1}} \|\mathcal{B}_{R,S}(\mathbf{x},y_1)\|_{\ell^1(Z_1)} = \sup_{y_1\in B_{Y_1}} \|R(\mathcal{B}(\mathbf{x},S(y_1)))\|_{\ell^1(Z_1)}.$$

Mas como R é limitada, temos que

$$\sup_{y_1\in B_{Y_1}} \|R(\mathcal{B}(\mathbf{x},S(y_1)))\|_{\ell^1(Z_1)} \leq \sup_{y_1\in B_{Y_1}} \|R\|\|\mathcal{B}(\mathbf{x},S(y_1))\|_{\ell^1(Z_1)}.$$

Por outro lado, para qualquer $y_1 \in Y_1$, veja que

$$\frac{S(y_1)}{\|S\|} \leq \|y_1\| \leq 1.$$

Logo,

$$y_1 \in B_{Y_1} \Rightarrow \frac{S(y_1)}{\|S\|} \in B_Y.$$

Daí, considere o seguinte conjunto

$$H = \left\{ y \in B_Y;\ y = \frac{S(y_1)}{\|S\|},\ \text{com } y_1 \in B_{Y_1} \right\}.$$

Logo, $H \subset B_Y$. Sendo assim,

$$\sup_{y\in H} \|\mathcal{B}(\mathbf{x},y)\|_{\ell^1(Z)} \leq \sup_{y\in B_Y} \|\mathcal{B}(\mathbf{x},y)\|_{\ell^1(Z)}.$$

Com isso,

$$\sup_{y_1\in B_{Y_1}} \left\| \mathcal{B}\left(\mathbf{x}, \frac{S(y_1)}{\|S\|}\right)\right\|_{\ell^1(Z)} \leq \sup_{y\in B_Y} \|\mathcal{B}(\mathbf{x},y)\|_{\ell^1(Z)}.$$

O que implica em

$$\sup_{y_1\in B_{Y_1}} \|\mathcal{B}\left(\mathbf{x},S(y_1)\right)\|_{\ell^1(Z)} \ \leq\ \|S\| \sup_{y\in B_Y} \|\mathcal{B}(\mathbf{x},y)\|_{\ell^1(Z)}.$$

Multiplicando ambos os lados por $\|R\|$, temos

$$\|R\| \sup_{y_1\in B_{Y_1}} \|\mathcal{B}\left(\mathbf{x},S(y_1)\right)\|_{\ell^1(Z)} \ \leq\ \|R\|\|S\| \sup_{y\in B_Y} \|\mathcal{B}(\mathbf{x},y)\|_{\ell^1(Z)}.$$

Assim, concluímos que

$$\sup_{y_1\in B_{Y_1}} \|R(\mathcal{B}(\mathbf{x},S(y_1)))\|_{\ell^1(Z_1)} \leq \sup_{y_1\in B_{Y_1}} \|R\|\|\mathcal{B}(\mathbf{x},S(y_1))\|_{\ell^1(Z_1)} \ \leq\ \|R\|\|S\| \sup_{y\in B_Y} \|\mathcal{B}(\mathbf{x},y)\|_{\ell^1(Z)}.$$

Portanto,

$$\|Id(\mathbf{x})\|_{\ell^1_{\mathcal{B}_{R,S}}(X)} = \|\mathbf{x}\|_{\ell^1_{\mathcal{B}_{R,S}}(X)} \leq \|R\|\|S\|\|\mathbf{x}\|_{\ell^1_{\mathcal{B}}(X)}.$$

■

Se $\mathcal{B}_1 : X \times Y_1 \to Z_1$ e $\mathcal{B}_2 : X \times Y_2 \to Z_2$ são aplicações bilineares limitadas, nós dizemos que $\mathcal{B}_1 < \mathcal{B}_2$ se existem uma aplicações lineares limitadas $R : Z_2 \to Z_1$ e $S : Y_1 \to Y_2$ tais que $\mathcal{B}_1(x, y_1) = R(\mathcal{B}_2(x, S(y_1)))$, ou seja, $(\mathcal{B}_2)_{R,S} = \mathcal{B}_1$. Note que a Proposição 2.9 nos diz que $\mathcal{B}_1 < \mathcal{B}_2$ implica em $\ell^1_{\mathcal{B}_2}(X) \subset \ell^1_{\mathcal{B}_1}(X)$ e que existe $C > 0$ tal que $\|\mathbf{x}\|_{\ell^1_{\mathcal{B}_1}(X)} \leq C\|\mathbf{x}\|_{\ell^1_{\mathcal{B}_2}(X)}$, para qualquer $\mathbf{x} \in \ell^1_{\mathcal{B}_2}(X)$.

2.2 Relação entre os espaços $\ell^1_{\mathcal{B}}(X)$, $\ell^1_w(X)$ e $\ell^1(X)$

Inicialmente vamos observar que $\ell^1(X) \subseteq \ell^1_{\mathcal{B}}(X)$ para qualquer aplicação bilinear $\mathcal{B} : X \times Y \to Z$. Com efeito, considere $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(X)$, assim

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{B}(x_n, y)\| \leq \|\mathcal{B}\|\|y\| \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|.$$

Daí, aplicando o supremo com relação a $y \in B_Y$, temos

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell^1_{\mathcal{B}}(X)} \leq \|\mathcal{B}\|\|\mathbf{x}\|_{\ell^1(X)}.$$

Em geral a inclusão é própria. De fato, podemos usar como exemplo a aplicação bilinear limitada $\mathcal{D}$, que já definimos na seção anterior. Se tomarmos X de dimensão infinita, então pela versão fraca do Teorema de Dvoretzky-Rogers, temos $\ell^1(X) \subsetneq \ell^1_w(X)$. Por outro lado, vimos na Proposição 2.1 que $\ell^1_{\mathcal{D}}(X) = \ell^1_w(X)$. Com isso, concluímos que $\ell^1(X) \subsetneq \ell^1_{\mathcal{D}}(X)$.

Antes de abordarmos a relação entre $\ell^1_{\mathcal{B}}(X)$ e $\ell^1_w(X)$, vamos analisar alguns casos particulares.

Exemplo 2.6. As aplicações $\mathcal{Z}, \mathcal{D}$ e $\mathcal{D}_1$, definidas na Proposição 2.1, são exemplos de aplicações bilineares com o operador inclusão $id : \ell^1_{\mathcal{B}}(X) \to \ell^1_w(X)$ contínuo.

Demonstração: Para que a inclusão $id : \ell^1_{\mathcal{B}}(X) \to \ell^1_w(X)$ seja contínua, é suficiente mostrar para qualquer $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1_{\mathcal{B}}(X)$, que

$$\|id(\mathbf{x})\|_{\ell^1_w(X)} = \|\mathbf{x}\|_{\ell^1_w(X)} \leq \|\mathbf{x}\|_{\ell^1_{\mathcal{B}}(X)}.$$

Sendo assim, para a aplicação $\mathcal{Z}$, sendo $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1_{\mathcal{Z}(X)}$, temos

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell^1_w(X)} = \sup_{\varphi\in B_{X^*}} \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)| \leq \sup_{\varphi\in B_{X^*}} \sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi\|\|(x_n)\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|(x_n)\|$$

e

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell^1_{\mathcal{Z}(X)}} = \sup_{\alpha\in B_{\mathbb{K}}} \sum_{n=1}^{\infty} \|Z(x_n,\alpha)\| = \sup_{\alpha\in B_{\mathbb{K}}} \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\alpha\| = \sup_{\alpha\in B_{\mathbb{K}}} |\alpha| \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|.$$

Logo,

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell^1_w(X)} \leq \|\mathbf{x}\|_{\ell^1_{\mathcal{Z}(X)}}.$$

De modo análogo, para $\mathcal{D}$, sendo $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1_{\mathcal{D}(X)}$, temos

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell^1_w(X)} = \sup_{\varphi\in B_{X^*}} \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|$$

e

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell^1_{\mathcal{D}(X)}} = \sup_{\varphi\in B_{X^*}} \sum_{n=1}^{\infty} \|D(x_n,\varphi)\| = \sup_{\varphi\in B_{X^*}} \sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi(x_n)\|.$$

Em particular,

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell^1_w(X)} \leq \|\mathbf{x}\|_{\ell^1_{\mathcal{D}(X)}}.$$

Por fim, para $\mathcal{D}_1$, seja $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1_{\mathcal{D}}(X^*)$. Daí,

$$\|(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^1_w(X^*)} = \sup_{x^{**}\in B_{X^{**}}} \sum_{n=1}^{\infty} \|x^{**}(\varphi_n)\| \leq \sup_{x^{**}\in B_{X^{**}}} \|x^{**}\| \sum_{n=1}^{\infty} \|(\varphi_n)\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n\|$$

e

$$\|(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^1_{\mathcal{D}_1}(X^*)} = \sup_{x\in B_X} \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x)|.$$

Mas pela norma do espaço,

$$\sup_{x\in B_X} \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x)| = \sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n\|.$$

Logo,

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell^1_w(X)} \leq \|\mathbf{x}\|_{\ell^1_{\mathcal{D}(X)}}.$$

■

Proposição 2.10. *Sejam $T \in \mathcal{L}(Y, X^*)$ e $\mathcal{B}_{\mathcal{T}} : X \times Y \to \mathbb{K}$ uma aplicação bilinear limitada dada por $\mathcal{B}_T(x,y) = T(y)(x)$. Então $\ell^1_w(X) \subseteq \ell^1_{\mathcal{B}_{\mathcal{T}}}(X)$.*

Demonstração: Seja $T \in \mathcal{L}(Y, X^*)$. Temos,

$$\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1_{\mathcal{B}_T}(X) \Leftrightarrow \sup_{y\in B_Y} \sum_{n=1}^{\infty} |T(y)(x)| < \infty$$

e

$$\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_w^1(X) \Leftrightarrow \sup_{\varphi\in B_{X^*}} \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)| < \infty.$$

Com isso, sendo $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X e $y \in Y$, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |T(y)(x_n)| = \|T(y)\| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|T(y)(x_n)|}{\|T(y)\|} \right) \leq \|T\|\|y\| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|T(y)(x_n)|}{\|T(y)\|} \right).$$

Aplicando o supremo com relação a $y \in B_Y$, temos

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell^1_{\mathcal{B}_T}} \leq \sup_{y\in B_Y} \|T\|\|y\| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|T(y)(x_n)|}{\|T(y)\|} \right) \leq \|T\| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|T(y)(x_n)|}{\|T(y)\|} \right).$$

Mas como $\frac{T(y)}{\|T(y)\|} \in B_{X^*}$ para qualquer $y \in Y$, segue que

$$\|T\| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|T(y)(x_n)|}{\|T(y)\|} \right) \leq \|T\| \sup_{\varphi\in B_{X^*}} \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)| = \|T\|\|\mathbf{x}\|_{\ell_w^1(X)}.$$

Assim, podemos concluir que $\|\mathbf{x}\|_{\ell^1_{\mathcal{B}_T}(X)} \leq \|T\|\|\mathbf{x}\|_{\ell_w^1(X)}$ e que $\ell_w^1(X) \subseteq \ell^1_{\mathcal{B}_T}(X)$.

■

Exemplo 2.7. Sendo $T : \ell^2 \to \ell^2$ com $T(\mathbf{x}) = (\frac{1}{n}x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\mathbf{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, podemos definir

$$\mathcal{A}_2 : \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{R}, \text{ com } \mathcal{A}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x_n y_n,$$

que é uma aplicação bilinear limitada admissível e $\ell_w^1(\ell^2) \subsetneq \ell^1_{\mathcal{A}_2}(\ell^2)$.

Demonstração: De fato, usando a desigualdade de Holder para sequências, temos que a aplicação $\mathcal{A}_2$ está bem definida. Além disso, sua limitação e bilinearidade seguem mediante as propriedades de sequências e séries. Agora iremos mostrar que ela é admissível. Com efeito, suponhamos que $\mathcal{A}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, para qualquer $\mathbf{y} \in \ell^2$. Assim, tomando $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, temos

$$\mathcal{A}_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x_n^2 = 0 \Rightarrow x_n = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Logo, $\mathbf{x} = 0$. Com isso, $\mathcal{A}_2$ é admissível. Por fim, seja $\mathbf{x} = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência dos vetores canônicos no ℓ^2 e $\mathbf{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$. Deste modo, temos

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell^1_{\mathcal{A}_2}(\ell^2)} = \sup_{\mathbf{y}\in B_{\ell^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{A}(e_n, y)\| = \sup_{\mathbf{y}\in B_{\ell^2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} e_j^k y_j \right\| \right) = \sup_{y\in B_{\ell^2}} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{k} y_k \right|.$$

Usando novamente a desigualdade de Holder, obtermos

$$\sup_{y\in B_{\ell^2}}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{k}y_k\right| \leq \sup_{y\in B_{\ell^2}}\left\{\left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\} = \sup_{y\in B_{\ell^2}}\|y\|_{\ell^2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Mas veja que

$$\sup_{y\in B_{\ell^2}}\|y\|_{\ell^2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6}.$$

Logo, $\mathbf{x}\in\ell^1_{\mathcal{A}_2}(\ell^2)$. Por outro lado, seja $\varphi=(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}\in(\ell^2)^*-\ell^1=\ell^2-\ell^1$. Observe que

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi(e_n)| = \sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_n(e_n^k)\right| = \sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_n|$$

e como $\varphi\in\ell^2-\ell^1$, segue que $\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_n|=\infty$. Portanto, $\mathbf{x}\notin\ell^1_w(\ell^2)$ e concluímos que $\ell^1_w(\ell^2)\subsetneq\ell^1_{\mathcal{A}_2}(\ell^2)$.

■

Observação 2.1. Veja que o Exemplo 2.7 nos diz que, em geral, $\ell^1_{\mathcal{B}}(X)$ não está continuamente condido em $\ell^1_w(X)$.

Proposição 2.11. *Dados X,Y espaços de Banach, sempre teremos que $\ell^1_{\mathcal{B}}(X)\subset\ell^1_w(\mathcal{L}(Y,Z))$.*

Demonstração: Usando o fato de que $\ell^1_w(\mathcal{L}(Y,Z))=\mathcal{L}(c_0,\mathcal{L}(Y,Z))$, para cada $\mathbf{x}=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^1_{\mathcal{B}}(X)$, podemos considerar a aplicação linear

$$S_{\mathcal{B},\mathbf{x}}:c_0\to\mathcal{L}(Y,Z),\ \text{com}\ S_{\mathcal{B},\mathbf{x}}(\alpha)(y)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{B}(x_n,y)\alpha_n,$$

onde $\alpha=(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\in c_0$. Portanto,

$$\begin{aligned}\|S_{\mathcal{B},\mathbf{x}}\| &= \sup_{\alpha\in B_{c_0}}\|S_{\mathcal{B},\mathbf{x}}(\alpha)\| = \sup_{\alpha\in B_{c_0}}\left(\sup_{y\in B_Y}\|S_{\mathcal{B},\mathbf{x}}(\alpha)(y)\|\right)\\ &= \sup_{\alpha\in B_{c_0}}\left(\sup_{y\in B_Y}\|\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{B}(x_n,y)\alpha_n\|\right) \leq \sup_{\alpha\in B_{c_0}}\left(\sup_{y\in B_Y}\sum_{n=1}^{\infty}\|\mathcal{B}(x_n,y)\||\alpha_n|\right)\\ &\leq \sup_{y\in B_Y}\sum_{n=1}^{\infty}\|\mathcal{B}(x_n,y)\| = \|\mathbf{x}\|_{\ell^1_{\mathcal{B}}(X)}.\end{aligned}$$

Sendo assim, podemos concluir que $\ell^1_{\mathcal{B}}(X)\subset\ell^1_w(\mathcal{L}(Y,Z))$.

■

Observação 2.2. Note que a Proposição 2.10 nos proporciona uma inclusão geral dada por $\ell^1_{\mathcal{B}}(X) \subset \ell^1_{\mathcal{B}_{z^*}}(X)$ para qualquer $z^* \in Z^*$, onde

$$\mathcal{B}_{z^*} : X \times Y \to \mathbb{K}, \text{ com } \mathcal{B}_{z^*}(x,y) = z^*(\mathcal{B}(x,y)).$$

Além disso, sendo $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\ell^1_{\mathcal{B}}(X)$, observe que

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell^1_{\mathcal{B}_{z^*}}(X)} = \sup_{y\in B_Y} \sum_{n=1}^{\infty} |z^*(\mathcal{B}(x_n,y))| \leq \|z^*\| \sup_{y\in B_Y} \sum_{n=1}^{\infty} |\mathcal{B}(x_n,y)|$$

e assim,

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell^1_{\mathcal{B}_{z^*}}(X)} \leq \|z^*\| \|\mathbf{x}\|_{\ell^1_{\mathcal{B}(X)}}$$

Portanto, mediante a todos essas análises podemos nos perguntar em que condições os espaços $\ell^1_{\mathcal{B}}(X)$ estão continuamente contidos em $\ell^1_w(X)$? A resposta desta pergunta está na propriedade de X ser $\mathcal{B}$-normado.

Teorema 2.12. *Seja $\mathcal{B} : X \times Y \to Z$ uma aplicação bilinear limitada admissível. Então, as seguintes sentenças são equivalentes:*

1. *$\ell^1_{\mathcal{B}}(X) \subseteq \ell^1_w(X)$ de modo contínuo;*
2. *X é $\mathcal{B}$-normado;*
3. *Existe uma constante $k > 0$ tal que para qualquer $x^* \in X^*$, existe um funcional $\varphi_{x^*} \in \mathcal{L}(Y,Z)^*$, com $\|\varphi_{x^*}\| \leq k\|x^*\|$, que satisfaz*

$$x^*(x) = \varphi_{x^*}(\mathcal{B}_x), \text{ para todo } x \in X.$$

Demonstração: (*1* $\Rightarrow$ *2*) Dado $\mathbf{x} \in \ell^1_{\mathcal{B}}(X)$, por hipótese, existe $c > 0$ tal que

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell^1_w(X)} = \|Id(\mathbf{x})\|_{\ell^1_w(X)} \leq c\|\mathbf{x}\|_{\ell^1_{\mathcal{B}}(X)}.$$

Com isso, tome $\mathbf{x} = (x, 0, 0, \cdots)$. Assim,

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell^1_w(X)} = \sup_{\varphi\in B_{X^*}} \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)| = \sup_{\varphi\in B_{X^*}} |\varphi(x)| = \|x\|_X.$$

Por outro lado,

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell^1_{\mathcal{B}}(X)} = \sup_{y\in B_Y} \sum_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{B}(x_n,y)\| = \sup_{y\in B_Y} \|\mathcal{B}(x,y)\| = \|\mathcal{B}_x\|_{\mathcal{L}(Y,Z)}.$$

Sendo assim, para todo $x \in X$, temos

$$\|x\|_X \leq c\|\mathcal{B}_x\|_{\mathcal{L}(Y,Z)}.$$

(*2* $\Rightarrow$ *3*) Defina o seguinte espaço:

$$\widehat{X} = \{\mathcal{B}_x;\ x \in X\} \subseteq \mathcal{L}(Y,Z).$$

Usando um argumente de sequências, podemos observar que $\widehat{X}$ é um subespaço fechado de $\mathcal{L}(Y,Z)$. Por outro lado, como X é $\mathcal{B}$-normado, para qualquer $x \in X$, temos

$$\|x^*(x)\| \leq \|x^*\|\|x\| \leq k\|x^*\|\|\mathcal{B}_x\|.$$

Com isso, defina

$$\widehat{x^*} : \widehat{X} \to \mathbb{K},\ \text{com}\ \widehat{x^*}(\mathcal{B}_x) = x^*(x).$$

Logo, $\widehat{x^*}$ é linear pelo fato de x^* ser linear, e é limitada pois

$$\|x^*(x)\| \leq k\|x^*\|\|\mathcal{B}_x\| \Rightarrow \|\widehat{x^*}\| \leq k\|x^*\|.$$

Deste modo, pelo Teorema de Hahn-Banach, existe uma extensão $\varphi_{x^*} \in \mathcal{L}(Y,Z)^*$ de $\widehat{x^*}$ com $\|\varphi_{x^*}\| \leq k\|x^*\|$ que satisfaz $x^*(x) = \varphi_{x^*}(\mathcal{B}_x)\ \forall x \in X$.

(*3* $\Rightarrow$ *1*) Para cada $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1_{\mathcal{B}}(X)$, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} = \alpha$ e usando o argumento análogo ao que fizermos no item *3* da Proposição 2.6, temos

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell^1_w(X)} = \sup_{\substack{x^*\in B_{X^*}\\ N\in\mathbb{N}}} \sum_{n=1}^{N} |x^*(x)| = \sup_{\substack{\alpha\in B_{\ell^\infty(N)}\\ x^*\in B_{X^*}, N\in\mathbb{N}}} \left|\sum_{n=1}^{N} x^*(x)\alpha_n\right|.$$

Mas por hipótese,

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{\alpha\in B_{\ell^\infty(N)}\\ x^*\in B_{X^*}, N\in\mathbb{N}}} \left|\sum_{n=1}^{N} x^*(x)\alpha_n\right| &= \sup_{\substack{\alpha\in B_{\ell^\infty(N)}\\ x^*\in B_{X^*}, N\in\mathbb{N}}} \left|\varphi_{x^*}\left(\mathcal{B}_{\sum_{n=1}^N \alpha_n x_n}\right)\right| \leq k \sup_{\substack{\alpha\in B_{\ell^\infty(N)}\\ y\in B_Y, N\in\mathbb{N}}} \|\mathcal{B}_{\sum_{n=1}^N \alpha_n x_n}(y)\|_Z \\
&\leq k \sup_{\substack{\alpha\in B_{\ell^\infty(N)}\\ y\in B_Y, N\in\mathbb{N}}} \sum_{n=1}^{N} |\alpha_n|\|\mathcal{B}(x_n,y)\|_Z \leq k \sup_{\substack{y\in B_Y\\ N\in\mathbb{N}}} \sum_{n=1}^{N} \|\mathcal{B}(x_n,y)\|_Z \\
&= k\|\mathbf{x}\|_{\ell^1_{\mathcal{B}}(X)}
\end{aligned}$$

Portanto, $\ell^1_{\mathcal{B}}(X)$ está contido continuamente em $\ell^1_w(X)$.

■

Corolário 2.13. *Se X é um espaço $\mathcal{B}$-normado, então $\|\cdot\|_X$ e $\|\mathcal{B}_\cdot\|_{\mathcal{L}(Y,Z)}$ são equivalente.*

Demonstração: Dado $x \in X$, temos

$$\|\mathcal{B}_x\|_{\mathcal{L}(Y,Z)} = \sup_{y\in B_Y} \|\mathcal{B}_x(y)\| = \sup_{y\in B_Y} \|\mathcal{B}(x,y)\| \leq \sup_{y\in B_Y} \|\mathcal{B}\|\|x\|\|y\| \leq \|\mathcal{B}\|\|x\|_X.$$

Por outro lado, por Hahn-Banach, temos

$$\|x\|_X = \sup_{x^*\in B_{X^*}} |x^*(x)|$$

e pelo Teorema 2.12, item 3, segue que,

$$\sup_{x^*\in B_{X^*}} |x^*(x)| = \sup_{x^*\in B_{X^*}} |\varphi_{x^*}(\mathcal{B}_x)| \leq \sup_{x^*\in B_{X^*}} \|\varphi_{x^*}\|\|\mathcal{B}_x\| \leq \sup_{x^*\in B_{X^*}} k\|x^*\|\|\mathcal{B}_x\| \leq k|\mathcal{B}_x\|.$$

Portanto as normas são equivalentes.

■

Corolário 2.14. *Seja $\mathcal{B} : X \times Y \to \mathbb{K}$ uma aplicação bilinear limitada em X. Então, as seguintes sentenças são equivalentes:*

1. *X é $(Y, \mathbb{K}, \mathcal{B})-$normado;*
2. *Existe uma constate $C_1 > 0$ tal que $C_1\|x\| \leq \|\phi_{\mathcal{B}}(x)\| \leq \|\mathcal{B}\|\|x\|$ para todo $x \in X$;*
3. *$\ell^1_w(X) = \ell^1_{\mathcal{B}}(X)$ e as normas $\|\cdot\|_{\ell^1_w(X)}$ e $\|\cdot\|_{\ell^1_{\mathcal{B}}(X)}$ são equivalentes.*

Demonstração:

(*1 $\Rightarrow$ 2*) Pelo Teorema de Hahn-Banach, dado $x \in X$,

$$\|x\| = \sup_{x^*\in B_{X^*}} |x^*(x)|$$

e por hipótese, X é $(Y, \mathbb{K}, \mathcal{B})-$normado, logo, pelo Teorema 2.12, existe uma constante $k > 0$ tal que para qualquer $x^* \in X^*$, existe um funcional $\varphi_{x^*} \in \mathcal{L}(Y, Z)^*$ com

$$\|\varphi_{x^*}\| \leq k\|x^*\| \text{ e } x^*(x) = \varphi_{x^*}(\mathcal{B}_x), \text{ para todo } x \in X.$$

Sendo assim,

$$\sup_{x^*\in B_{X^*}} |x^*(x)| = \sup_{x^*\in B_{X^*}} |\varphi_{x^*}(\mathcal{B}_x)| \leq \sup_{x^*\in B_{X^*}} \|\varphi_{x^*}\|\|\mathcal{B}_x\| \leq \sup_{x^*\in B_{X^*}} k\|x^*\|\|\mathcal{B}_x\| \leq k\|\phi_{\mathcal{B}}(x)\|.$$

Logo, basta tomar $C_1 = \frac{1}{k}$. Por outro lado,

$$\|\phi_{\mathcal{B}}(x)\| = \|\mathcal{B}_x\| = \sup_{y\in B_Y} \|\mathcal{B}(x,y)\| \leq \sup_{y\in B_Y} \|\mathcal{B}\|\|x\|\|y\| \leq \|\mathcal{B}\|\|x\|,$$

como queríamos demonstrar.

(*2* $\Rightarrow$ *3*) Sendo $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ temos

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell^1_{\mathcal{B}}(X)} = \sup_{y\in B_Y} \sum_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{B}(x_n,y)\| \leq \sup_{y\in B_Y} \sum_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{B}\|\|x_n\|\|y\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{B}\|\|x_n\|.$$

Mas, pelo Teorema de Hahn-Banach, podemos concluir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{B}\|\|x_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{B}\| \sup_{x^*\in B_{X^*}} |x^*(x_n)|.$$

Logo, se $\mathbf{x} \in \ell^1_w(X)$, então

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell^1_{\mathcal{B}}(X)} = \sup_{y\in B_Y} \sum_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{B}(x_n,y)\| \leq \|\mathcal{B}\| \sup_{x^*\in B_{X^*}} \sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| = \|\mathcal{B}\|\|\mathbf{x}\|_{\ell^1_w(X)}.$$

Por outro lado,

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell^1_w(X)} = \sup_{x^*\in B_{X^*}} \sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| \leq \sup_{x^*\in B_{X^*}} \sum_{n=1}^{\infty} \|x^*\|\|x_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|.$$

Mas por hipótese, segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{C_1}\|\phi_{\mathcal{B}}(x_n)\| = \frac{1}{C_1} \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{y\in B_Y} \|\mathcal{B}(x_n,y)\| \leq \frac{1}{C_1} \sup_{y\in B_Y} \sum_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{B}(x_n,y)\|.$$

Logo, podemos concluir que $\ell^1_w(X) = \ell^1_{\mathcal{B}}(X)$. Como também,

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell^1_w(X)} \leq \frac{1}{C_1}\|\mathbf{x}\|_{\ell^1_{\mathcal{B}}(X)} \text{ e } \|\mathbf{x}\|_{\ell^1_{\mathcal{B}}(X)} \leq \|\mathcal{B}\|\|\mathbf{x}\|_{\ell^1_w(X)}.$$

(*3* $\Rightarrow$ *1*) Por hipótese, $\ell^1_w(X) = \ell^1_{\mathcal{B}}(X)$ e as normas $\|\cdot\|_{\ell^1_w(X)}$ e $\|\cdot\|_{\ell^1_{\mathcal{B}}(X)}$ são equivalentes. Logo, $\ell^1_{\mathcal{B}}(X) \subseteq \ell^1_w(X)$ e a inclusão é contínua. Sendo assim, pelo Teorema 2.12, X é $(Y,\mathbb{K},\mathcal{B})-$normado.

■

Agora iremos exibir alguns exemplos em que podemos identificar o funcional φ_{x^*} definido no item 3 do Teorema 2.12.

Exemplo 2.8. Para $\mathcal{Z} : X \times \mathbb{K} \to X$, definida na Proposição 2.1, e $x^* \in X^*$. Podemos definir

$$\varphi_{x^*} : \mathcal{L}(\mathbb{K}, X) \to \mathbb{K}, \text{ com } \varphi_{x^*}(T) = x^*(T(1)).$$

Com isso, X é $(\mathbb{K}, X, \mathcal{Z})-$normado, pois

$$\|\varphi_{x^*}(T)\| = \|x^*(T(1))\| \leq \|x^*\|\|T(1)\|,$$

sendo $k = \|T(1)\|$, e temos

$$\|\varphi_{x^*}\| \leq k\|x^*\|.$$

Exemplo 2.9. Para $\mathcal{D}$ definida no Proposição 2.1 e sendo $x^* \in X^*$, podemos definir

$$\varphi_{x^*} : \mathcal{L}(X^*, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}, \text{ com } \varphi_{x^*}(x^{**}) = x^{**}(x^*).$$

Logo, X é um espaço $(X^*, \mathbb{K}, \mathcal{D})-$normado, pois

$$\|\varphi_{x^*}(x^{**})\| = \|x^{**}(x^*)\| \leq \|x^{**}\|\|x^*\|.$$

Aplicando o supremo com relação a $x^{**} \in B_{X^{**}}$, temos

$$\|\varphi_{x^*}\| \leq \|x^*\|.$$

Exemplo 2.10. Para $\mathcal{D}_1$ definida no Proposição 2.1 e sendo $x^{**} \in X^{**}$, podemos definir

$$\varphi_{x^{**}} : \mathcal{L}(X, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}, \text{ com } \varphi_{x^{**}}(x^*) = x^{**}(x^*).$$

Logo, X é um espaço $(X, \mathbb{K}, \mathcal{D}_1)-$normado, pois

$$\|\varphi_{x^{**}}(x^*)\| = \|x^*(x^{**})\| \leq \|x^*\|\|x^{**}\|.$$

Aplicando o supremo com relação a $x^* \in B_{X^*}$, temos

$$\|\varphi_{x^{**}}\| \leq \|x^{**}\|.$$

Agora podemos nos questionar: Em quais condições o $\ell_w^1(X)$ está incluso continuamente em $\ell_{\mathcal{B}}^1(X)$? Para responder a esta pergunta precisaremos definir alguns conceitos. Vamos dizer que uma aplicação linear limitada $T : X \to Y$ é **absolutamente somante** se existir uma contaste $k > 0$ de modo que, para quaisquer $x_1, \cdots, x_n$ em

X, temos

$$\sum_{i=1}^{n} \|T(x_i)\|_X \leq k \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sum_{i=1}^{n} |x^*(x_i)|.$$

O espaço de todas essas aplicações será denotado por $\Pi(X,Y)$ ou $\Pi_1(X,Y)$. O lema a seguir nos fornecerá uma norma para o espaço $\Pi(X,Y)$ mediante a constante $k > 0$ da definição.

Proposição 2.15. *Seja $T \in \Pi(X,Y)$. Então, existe uma contaste $k > 0$ de modo que, para quaisquer $x_1, \cdots, x_n$ em X, tem-se*

$$\sum_{i=1}^{n} \|T(x_i)\|_X \leq k \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sum_{i=1}^{n} |x^*(x_i)|.$$

Assim, tome $\pi(T)$, como o ínfimo sobre os k que satisfazem a desigualdade anterior. Com isso, $\pi(\cdot)$ define uma norma em $\Pi(X,Y)$.

Demonstração: Seja $T, H \in \Pi(X,Y)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Daí , temos

$$\pi(T) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \|T(x_i)\| \leq 0, \text{ para quaisquer } x_1, \cdots, x_n \in X$$

$$\Leftrightarrow \|T(x)\| = 0 \text{ para todo } x \in X \Leftrightarrow T = 0.$$

Note também que para o operador λT, temos

$$\sum_{i=1}^{n} \|\lambda T(x_i)\|_X \leq \pi(\lambda T) \cdot \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sum_{i=1}^{n} |x^*(x_i)|$$

mas multiplicando por $|\lambda|$ a propriedade que torna T absolutamente somante, segue que

$$|\lambda| \sum_{i=1}^{n} \|T(x_i)\|_X = \sum_{i=1}^{n} \|\lambda T(x_i)\|_X \leq |\lambda| \pi(T) \cdot \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sum_{i=1}^{n} |x^*(x_i)|.$$

Daí, por propriedade de ínfimo concluímos que $\pi(\lambda T) \leq |\lambda| \pi(T)$. Por outro lado,

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| T\left(\frac{\lambda x_i}{\lambda}\right) \right\|_X \leq \pi(T) \cdot \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sum_{i=1}^{n} |x^*(x_i)|.$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^{n} \|T(\lambda x_i)\|_X \leq |\lambda| \pi(T) \cdot \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sum_{i=1}^{n} |x^*(x_i)|.$$

Novamente pela propriedade de ínfimo temos que $|\lambda| \pi(T) \leq \pi(\lambda T)$. Portanto,

$$\|\lambda\| \pi(T) = \pi(\lambda T).$$

Por fim, observe que

$$\sum_{i=1}^{n}\|T+H(x_i)\|_X \leq \sum_{i=1}^{n}\|T(x_i)\|_X+\sum_{i=1}^{n}\|H(x_i)\|_X \ \leq (\pi(T)+\pi(H))\cdot \sup_{x^*\in B_{X^*}}\sum_{i=1}^{n}|x^*(x_i)|.$$

Logo, $\pi(H+T)\leq \pi(H)+\pi(T)$.

■

Proposição 2.16. $\Pi(X,Y)$ *é um subespaço de Banach de* $\mathcal{L}(X,Y)$.

Demonstração: Seja $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\Pi(X,Y)$ que converge para $T\in\mathcal{L}(X,Y)$. Inicialmente veja que se $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge na norma $\pi(T)$, então converge na norma do $\mathcal{L}(X,Y)$. Com efeito, sabemos que

$$\|T_n(x)\|\leq \pi(T_n)\cdot \sup_{x^*\in B_{X^*}}|x^*(x)| \overset{\text{Hahn-Banach}}{=} \pi(T_n)\cdot\|x\|.$$

Com isso, temos que

$$\|(T_n-T)(x)\|\leq \pi(T_n-T)\cdot\|x\|.$$

Aplicando o supremo com relação a $x\in B_X$, temos

$$\|T_n-T\|\leq \pi(T_n-T),$$

como queríamos demonstrar. Agora é suficiente mostrarmos que $T\in\Pi(X,Y)$, pois assim $\Pi(X,Y)$ será fechado e, como $\mathcal{L}(X,Y)$ é Banach, podemos concluir que $\Pi(X,Y)$ também é Banach. Note que, como $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente, segue que $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para todo $x\in X$. Além disso, como $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está em $\Pi(X,Y)$, podemos dizer que

$$|(T_n-T_m)(x)|\leq \pi(T_n-T_m)\cdot\|x\|.$$

Mas como $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, então é de Cauchy. Com isso, pela propriedade do ínfimo, $(\pi(T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ também será de Cauchy. Daí, segue que $(\pi(T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para um certo $k>0$. Sendo assim, dados $x_1,\cdots,x_m$ em X, temos que

$$\sum_{i=1}^{m}\|T(x_i)\|\leq \sum_{i=1}^{m}\|T(x_i)-T_n(x_i)\|+\sum_{i=1}^{m}\|T_n(x_i)\|.$$

Mas como $T_n\in\Pi(X,Y)$, segue

$$\sum_{i=1}^{m}\|T_n(x_i)\|\leq \pi(T_n)\sup_{x^*\in B_{X^*}}\sum_{i=1}^{m}|x^*(x_i)|.$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^{m}\|T(x_i)\| \leq \sum_{i=1}^{m}\|T(x_i)-T_n(x_i)\| + \pi(T_n)\sup_{x^*\in B_{X^*}}\sum_{i=1}^{m}|x^*(x_i)|.$$

Com isso, fazendo $n\to\infty$, temos que $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\|T(x_i)-T_n(x_i)\|$ converge para zero, pois

$$T_n \to T \text{ na topologia de } \mathcal{L}(X,Y)$$

e

$$\left(\pi(T_n)\sup_{x^*\in B_{X^*}}\sum_{i=1}^{m}|x^*(x_i)|\right) \text{ converge para } \left(k\sup_{x^*\in B_{X^*}}\sum_{i=1}^{m}|x^*(x_i)|\right).$$

Sendo assim,

$$\sum_{i=1}^{m}\|T(x_i)\| \leq k\sup_{x^*\in B_{X^*}}\sum_{i=1}^{m}|x^*(x_i)|.$$

Logo, $T\in\Pi(X,Y)$, como queríamos demonstrar.

■

Em [5, pág. 15] temos a garantia que, pelo Teorema de Grothendieck, qualquer operador linear limitado de $L^1(\mu)$ em um espaço H de Hilbert é absolutamente somante, isto é,

$$\mathcal{L}(L^1(\mu),H) = \Pi(L^1(\mu),H).$$

Sendo assim, dizemos que X é um **GT-espaço** se $\mathcal{L}(X,H)=\Pi(X,H)$, para qualquer espaço de Hilbert H. O leitor pode encontrar mais informações em [5] sobre GT-espaços e propriedades relativas e eles.

O próximo resultado nos dará condições para garantir a inclusão contínua entre $\ell_w^1(X)\subseteq\ell_{\mathcal{B}}^1(X)$.

Proposição 2.17. *Seja $\mathcal{B}: X\times Y\to Z$ uma aplicação bilinear limitada e admissível. Então são equivalentes:*

1. *$\ell_w^1(X)$ está continuamente contido em $\ell_{\mathcal{B}}^1(X)$;*
2. *$\psi_{\mathcal{B}}(Y)\subseteq\Pi(X,Z)$ e existe uma constante $C>0$ tal que $\pi(\mathcal{B}^y)\leq C\|y\|$ para todo $y\in Y$.*

Demonstração: ($1\Rightarrow 2$) Sabemos que $\{\mathcal{B}^y\ ;\ y\in Y\}\subseteq\mathcal{L}(X,Z)$. Com isso, para cada $y\in Y$ e $\mathbf{x}=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell_w^1(X)$, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|\mathcal{B}^y(x_n)\|_Z = \sum_{n=1}^{\infty}\|\mathcal{B}(x_n,y)\|_Z = \|y\|\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\mathcal{B}\left(x_n,\frac{y}{\|y\|}\right)\right\|_Z \leq \|y\|\|\mathbf{x}\|_{\ell_{\mathcal{B}}^1(X)}.$$

Mas por hipótese, existe $C > 0$ tal que

$$\|y\|\|\mathbf{x}\|_{\ell^1_{\mathcal{B}}(X)} \leq C\|y\|\|\mathbf{x}\|_{\ell^1_w(X)}.$$

Assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{B}^y(x_n)\|_Z \leq C\|y\|\|\mathbf{x}\|_{\ell^1_w(X)}.$$

Com isso, aplicando somas finitas segue que $\mathcal{B}^y \in \Pi(X, Z)$ e $\pi(\mathcal{B}^y) \leq C\|y\|$ para qualquer $y \in Y$.

(2 ⇒ 1) Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1_w(X)$. Como por hipótese $\mathcal{B}^y \in \Pi(X, Y)$, temos

$$\sup_{y\in B_Y} \sum_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{B}^y(x_n)\|_Z \leq \sup_{y\in B_Y} \pi(\mathcal{B}^y)\|\mathbf{x}\|_{\ell^1_w(X)} \leq C\|\mathbf{x}\|_{\ell^1_w(X)}$$

Portanto,

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell^1_{\mathcal{B}}(X)} \leq C\|\mathbf{x}\|_{\ell^1_w(X)}.$$

■

Corolário 2.18. *Seja X um espaço de Banach. Então*

$$\ell^1_{\widetilde{\sigma}_Y}(X) = \ell^1_w(X) \Leftrightarrow \mathcal{L}(X, Y) = \Pi(X, Y).$$

Em particular, $\ell^1_{\widetilde{\sigma}_{\ell^2}}(X) = \ell^1_w(X)$ se, e somente se, X é um GT-espaço.

Demonstração: Sabemos que $\widetilde{\sigma}_Y : X \times \mathcal{L}(X, Y) \to Y$, com $\widetilde{\sigma}_Y(x, T) = T(x)$ é uma aplicação bilinear limitada e admissível. Com isso, suponhamos que $\ell^1_{\widetilde{\sigma}_Y}(X) = \ell^1_w(X)$. Assim, pelo Proposição 2.17, segue que

$$\psi_{\widetilde{\sigma}_Y}(\mathcal{L}(X, Y)) \subseteq \Pi(X, Y).$$

Por outro lado,

$$\psi_{\widetilde{\sigma}_Y}(\mathcal{L}(X, Y)) = \{\psi_{\widetilde{\sigma}_Y}(T)\,;\, T \in \mathcal{L}(X, Y)\} = \{\widetilde{\sigma}_Y(\cdot, T)\,;\, T \in \mathcal{L}(X, Y)\} = \{T\,;\, T \in \mathcal{L}(X, Y)\}$$

e assim,

$$\psi_{\widetilde{\sigma}_Y}(\mathcal{L}(X, Y)) = \mathcal{L}(X, Y).$$

Com isso, temos

$$\mathcal{L}(X, Y) \subset \Pi(X, Y)$$

e $\mathcal{L}(X, Y) = \Pi(X, Y)$, pois a outra inclusão é sempre válida.

Reciprocamente, vamos supor que $\mathcal{L}(X,Y) = \Pi(X,Y)$. Sabemos que

$$\widetilde{\sigma}_Y^T = \widetilde{\sigma}_Y(\cdot, T) = T,$$

para qualquer $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Com isso,

$$\sum_{i=1}^{n} \|\widetilde{\sigma}_Y^T(x_i)\| = \sum_{i=1}^{n} \|T(x_i)\| \leq \|T\| \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$$

e pelo Teorema de Hahn-Banach, temos

$$\sum_{i=1}^{n} \|\widetilde{\sigma}_Y^T(x_i)\| \leq \|T\| \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sum_{i=1}^{n} \|x^*(x_i)\|.$$

Disso podemos concluir que

$$\pi(\widetilde{\sigma}_Y^T) \leq \|T\|$$

e pela Proposição 2.17, temos

$$\ell_w^1(X) \subseteq \ell_{\widetilde{\sigma}_Y}^1(X).$$

A Proposição 2.8, nos diz que $\ell_{\widetilde{\sigma}_Y}^1(X) = \ell_w^1(X)$.

Por fim, como ℓ^2 é um espaço de Hilbert temos que $\ell_{\widetilde{\sigma}_{\ell^2}}^1(X) = \ell_w^1(X)$ se, e somente se, X é um GT-espaço.

■

Capítulo 3

Versão Bilinear do Teorema de Orlicz-Pettis e Aplicações

Para deixarmos este capítulo mais autossuficiente, optamos por citar alguns fatos já mencionados. Sendo $\mathcal{B} : X \times Y \longrightarrow Z$ uma aplicação bilinear limitada, pela Definição 2.2, sabemos que uma sequência $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X é dita $\mathcal{B}$-incondicionalmente somável se $(z^*(\mathcal{B}(x_n, y)))_n \in \ell^1$, para todo $y \in Y$ e $z^* \in Z^*$ e para qualquer $M \subset \mathbb{N}$ existe $x_M \in X$ tal que

$$\sum_{n\in M} z^*(\mathcal{B}(x_n, y)) = z^*(\mathcal{B}(x_M, y)), \text{ para todo } y \in Y \text{ e } z^* \in Z^*.$$

Assim, podemos dizer que $(\mathcal{B}(x_n, y))_{n\in\mathbb{N}}$ é fracamente incondicionalmente somável para qualquer $y \in Y$ e, pelo Teorema de Orlicz-Pettis, $(\mathcal{B}(x_n, y))_{n\in\mathbb{N}}$ é incondicionalmente somável para qualquer $y \in Y$. Com isso, dado $M = \{n_1 < \cdots < n_k < \cdots\} \subset \mathbb{N}$,

$$\sum_{n\in M} \mathcal{B}(x_n, y) < \infty$$

e assim,

$$\infty > \sum_{n\in M} \mathcal{B}(x_n, y) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \mathcal{B}(x_{n_i}, y) = \mathcal{B}\left(\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} x_{n_i}, y\right)$$

o que implica em, $\sum_{i=1}^{k} x_{n_i}$ ser convergente. Logo, existe $x_M \in X$ tal que

$$\sum_{n\in M} \mathcal{B}(x_n, y) = \sum_{n\in M} \mathcal{B}(x_M, y).$$

Apresentemos agora o principal resultado do trabalho.

Teorema Bilinear de Orlicz-Pettis 3.1. *[9, Theorem 24] Seja $\mathcal{B} : X \times Y^* \to Z$ uma aplicação bilinear limitada tal que*

1. *X é $\mathcal{B}$-normado;*
2. *Y é w^*-sqcu, isto é, B_{Y^*} é fraco estrela sequencialmente compacto;*
3. *$\phi_{\mathcal{B}}(X) \subseteq \mathcal{W}^*(Y^*, Z)$.*

Então, toda sequência $\mathcal{B}$-incondicionalmente somável em X é incondicionalmente somável.

Demonstração: Seja $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X uma sequência $\mathcal{B}$-incondicionalmente somável. Com isso, defina a aplicação:

$$\Omega_{\mathcal{B},\mathbf{x}} : Y^* \times Z^* \to \ell^1, \text{ com } \Omega_{\mathcal{B},\mathbf{x}}(y^*, z^*) = (z^*(\mathcal{B}(x_n, y^*)))_{n\in\mathbb{N}}.$$

Afirmação 3.1. $\Omega_{\mathcal{B},\mathbf{x}}$ está bem definido e é contínuo.

De fato, como $\mathbf{x} \in \mathcal{B}\text{-}UC(X)$, então para todo $y^* \in Y^*$ e $z^* \in Z^*$, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z^*(\mathcal{B}(x_n, y^*))| < \infty.$$

Sendo assim, $\Omega_{\mathcal{B},\mathbf{x}}$ está bem definida. Por outro lado, para cada $y^* \in Y^*$ e $z^* \in Z^*$, podemos definir as seguintes aplicações:

$$\Omega^{y^*} : Z^* \to \ell^1, \text{ com } \Omega^{y^*}(z^*) = \Omega_{\mathcal{B},\mathbf{x}}(y^*, z^*),$$

$$\Omega^{z^*} : Y^* \to \ell^1, \text{ com } \Omega^{z^*}(y^*) = \Omega_{\mathcal{B},\mathbf{x}}(y^*, z^*).$$

Veja que Ω^{y^*} é limitada. Com efeito, suponhamos que $(z_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ converge para z^* em Z^* e que $(\Omega^{y^*}(z_k^*))_{k\in\mathbb{N}}$ converge para h em ℓ^1. Mas sabemos que

$$z_k^* \longrightarrow z^* \Rightarrow z_k^*(p) \longrightarrow z^*(p), \text{ para todo } p \in Z.$$

Em particular, como $\mathcal{B}(x_n, y^*) \in Z$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $y^* \in Y^*$, temos

$$z_k^*(\mathcal{B}(x_n, y^*)) \longrightarrow z^*(\mathcal{B}(x_n, y^*)), \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } y^* \in Y^*.$$

Mas,

$$\|\Omega^{y^*}(z_k^*) - \Omega^{y^*}(z^*)\|_{\ell^1} = \sum_{n=1}^{\infty} |z_k^*(\mathcal{B}(x_n, y^*)) - z^*(\mathcal{B}(x_n, y^*))|.$$

Daí, se fizermos $k \to \infty$, segue que $\Omega^{y^*}(z_k^*) \longrightarrow \Omega^{y^*}(z^*)$. Assim, pela unicidade do limite, $\Omega^{y^*}(z^*) = h$. Deste modo, concluímos que o gráfico de Ω^{y^*} é fechado, ou seja,

Ω^{y^*} é limitada. Analogamente podemos concluir que Ω^{z^*} também é limitado. Logo, $\Omega_{\mathcal{B},\mathbf{x}}$ é separadamente limitada. Mas como Y^* e Z^* são espaços de Banach, segue que $\Omega_{\mathcal{B},\mathbf{x}}$ é limitada.

Afirmação 3.2. $\Omega_{\mathcal{B},\mathbf{x}}$ é um operador compacto.

Iremos mostrar que $\Omega_{\mathcal{B},\mathbf{x}}$ é um operador compacto via caracterização por sequências, isto é, dada uma sequência $((y_n^*, z_n^*))_{n\in N} \in B_{Y^*} \times B_{Z^*}$, mostremos a existência de uma subsequência $((y_{n_k}^*, z_{n_k}^*))_{k\in N}$ tal que $(\Omega_{\mathcal{B},\mathbf{x}}(y_{n_k}^*, z_{n_k}^*))_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente em ℓ^1. Veja que $(y_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ está em B_{Y^*} mas por hipótese B_{Y^*} é fraco estrela sequencialmente compacto, logo, existe $(y_{n_k}^*)_{k\in\mathbb{N}}$ convergente para um certo y_0^* na topologia fraca estrela em Y^*. Ou seja,

$$y_{n_k}^*(y) \to y_0^*(y), \text{ para todo } y \in Y.$$

Como, por hipótese, $\phi_{\mathcal{B}}(X) \subseteq \mathcal{W}^*(Y^*, Z)$ temos que, para cada $x \in X$, $\phi_{\mathcal{B}}(x) = \mathcal{B}(x, \cdot)$ é fraco estrela norma contínuo. Logo, para cada $x \in X$,

$$y_{n_k}^* \overset{*}{\rightharpoonup} y_0^* \;\Rightarrow\; \mathcal{B}(x, y_{n_k}^*) \to B(x, y_0^*). \tag{3.1}$$

Por outro lado, considere o espaço separável D em Z dado por

$$D = \overline{span\{\mathcal{B}(x_1, y_0^*), \mathcal{B}(x_2, y_0^*), \cdots, \mathcal{B}(x_n, y_0^*), \cdots\}}.$$

Pelo Teorema de Alaoglu, B_{D^*} é compacto na topologia fraco estrela. Assim, para cada $k \in \mathbb{N}$, tome $\overline{z_{n_k}^*}$ como a restrição de $z_{n_k}^*$ sobre D. Como $\|z_{n_k}^*\| \leq 1$, segue que $\overline{z_{n_k}^*} \in B_{D^*}$. Logo, existe uma subsequência de $\overline{z_{n_k}^*}$ que é convergente. Para simplificar a notação, digamos que $\overline{z_{n_k}^*}$ converge para $\overline{z_0^*} \in D^*$ na topologia fraca estrela. Daí, para qualquer $z \in D$,

$$\overline{z_{n_k}^*}(z) \to \overline{z_0^*}(z). \tag{3.2}$$

Mas como $\overline{z_0^*} \in D^*$, usando o Teorema de Hahn-Banach, existe z_0^* extensão contínua de $\overline{z_0^*}$ para Z^*. Mas veja também que, como $\mathbf{x}$ é $\mathcal{B}$-incondicionalmente somável, existe $x_0 \in X$ de modo que, para qualquer $z^* \in Z^*$, tem-se

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} z^*(\mathcal{B}(x_n, y_0^*)) = \sum_{n=1}^{\infty} z^*(\mathcal{B}(x_n, y_0^*)) = z^*(\mathcal{B}(x_0, y_0^*)).$$

Isto significa que $\mathcal{B}(x_0, y_0^*) \in \overline{D}^w$, pois a sequência $\left(\sum_{n=1}^{N} \mathcal{B}(x_n, y_0^*)\right)_{N\in\mathbb{N}}$ está em D. Como D é convexo, pelo Teorema de Mazur, $\overline{D}^w = \overline{D}$, e como D é fechado, segue que

$\mathcal{B}(x_0, y_0^*) \in D$. Por esse motivo, podemos trocar z por $\mathcal{B}(x_0, y_0^*)$ em (3.2), logo

$$\overline{z_{n_k}^*}(\mathcal{B}(x_0, y_0^*)) \to \overline{z_0^*}(\mathcal{B}(x_0, y_0^*)). \tag{3.3}$$

Agora queremos mostrar que $(\Omega_{\mathcal{B},\mathbf{x}}(y_{n_k}^*, z_{n_k}^*))_{k\in\mathbb{N}}$ converge para $\Omega_{\mathcal{B},\mathbf{x}}(y_0^*, z_0^*)$ em ℓ^1. Pelo Teorema de Schur, é suficiente mostrarmos que $(\Omega_{\mathcal{B},\mathbf{x}}(y_{n_k}^*, z_{n_k}^*))_{k\in\mathbb{N}}$ é fracamente convergente em ℓ^1, ou seja, para qualquer $\alpha \in \ell^\infty$, temos

$$\alpha(\Omega_{\mathcal{B},\mathbf{x}}(y_{n_k}^*, z_{n_k}^*)) \longrightarrow \alpha(\Omega_{\mathcal{B},\mathbf{x}}(y_0^*, z_0^*)).$$

Mas note que, pela continuidade de $\Omega_{\mathcal{B},\mathbf{x}}$, é suficiente mostrarmos essa convergência para um subconjunto denso de ℓ^∞. Com efeito, digamos que $\overline{F} = \ell^\infty$. Daí, suponhamos que para todo $\lambda \in F$, tem-se

$$\lambda(\Omega_{\mathcal{B},\mathbf{x}}(y_{n_k}^*, z_{n_k}^*)) \longrightarrow \lambda(\Omega_{\mathcal{B},\mathbf{x}}(y_0^*, z_0^*)). \tag{3.4}$$

Com isso, seja $\alpha \in \ell^\infty$. Daí, existe $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}}$ convergindo para α. Logo,

$$\alpha(\Omega_{\mathcal{B},\mathbf{x}}(y_0^*, z_0^*)) = \lim_{m\to\infty} \alpha_m(\Omega_{\mathcal{B},\mathbf{x}}(y_0^*, z_0^*)) = \lim_{m\to\infty} \left(\lim_{k\to\infty} \alpha_m(\Omega_{\mathcal{B},\mathbf{x}}(y_{n_k}^*, z_{n_k}^*))\right).$$

Ainda temos,

$$\lim_{m\to\infty} \left(\lim_{k\to\infty} \alpha_m(\Omega_{\mathcal{B},\mathbf{x}}(y_{n_k}^*, z_{n_k}^*))\right) = \lim_{k\to\infty} \left(\lim_{m\to\infty} \alpha_m(\Omega_{\mathcal{B},\mathbf{x}}(y_{n_k}^*, z_{n_k}^*))\right) = \lim_{k\to\infty} \alpha(\Omega_{\mathcal{B},\mathbf{x}}(y_{n_k}^*, z_{n_k}^*)).$$

Tome F como o conjunto das funções simples de ℓ^∞ e pelo Lema 1.18, temos que F é denso em ℓ^∞. Assim, para qualquer $M \subseteq \mathbb{N}$, fixando $k \in \mathbb{N}$ e pela dualidade do ℓ^1 , tem-se

$$1_M(\Omega_{\mathcal{B},\mathbf{x}}(y_{n_k}^*, z_{n_k}^*)) = \sum_{n\in M} z_{n_k}^*(\mathcal{B}(x_n, y_{n_k}^*)) = z_{n_k}^*(\mathcal{B}(x_M, y_{n_k}^*)). \tag{3.5}$$

Por outro lado,

$$1_M(\Omega_{\mathcal{B},\mathbf{x}}(y_0^*, z_0^*)) = \sum_{n\in M} z_0^*(\mathcal{B}(x_n, y_0^*)) = z_0^*(\mathcal{B}(x_M, y_0^*)). \tag{3.6}$$

Sendo assim, por (3.5), (3.6) e (3.4), para provamos a afirmação é suficiente que para qualquer $M \subset \mathbb{N}$, tem-se

$$z_{n_k}^*(\mathcal{B}(x_M, y_{n_k}^*)) \to z_0^*(\mathcal{B}(x_M, y_0^*)).$$

Mas veja que, para cada $k \in \mathbb{N}$ e $M \subset \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}|z^*_{n_k}(\mathcal{B}(x_M, y^*_{n_k})) - z^*_0(\mathcal{B}(x_M, y^*_0))| &\leq |z^*_{n_k}(\mathcal{B}(x_M, y^*_{n_k}) - z^*_{n_k}(\mathcal{B}(x_M, y^*_0)))| \\ &\quad + |z^*_{n_k}(\mathcal{B}(x_M, y^*_0)) - z^*_0(\mathcal{B}(x_M, y^*_0))| \\ &\leq \|\mathcal{B}(x_M, y^*_{n_k}) - \mathcal{B}(x_M, y^*_0)\|\|z^*_{n_k}\| \\ &\quad + |\overline{z^*_{n_k}}(\mathcal{B}(x_M, y^*_0)) - \overline{z^*_0}(\mathcal{B}(x_M, y^*_0))|.\end{aligned}$$

Assim, usando (3.1) e (3.3), temos o $(\Omega_{\mathcal{B},\mathbf{x}}(y^*_{n_k}, z^*_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ é fracamente convergente em ℓ^1 e pelo Teorema de Schur temos a convergência em ℓ^1. Portanto, $\Omega_{\mathcal{B},\mathbf{x}}$ é compacto.

Afirmação 3.3. $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é incondicionalmente somável.

De fato, do Lema 1.19 sabemos que se K é pré-compacto em ℓ^1 então,

$$\lim_{n\to\infty} \sup\left\{\sum_{k\geq n} |a_k| \ ; \ (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq K\right\} = 0.$$

Em particular, como o operador $\Omega_{\mathcal{B},\mathbf{x}}$ é compacto, tem-se $\Omega_{\mathcal{B},\mathbf{x}}(B_{Y^*} \times B_{Z^*})$ é relativamente compacto em ℓ^1. Então,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\substack{y^*\in B_{Y^*}\\ z^*\in B_{Z^*}}} \sum_{k=n}^{\infty} |z^*(\mathcal{B}(x_k, y^*))| = 0. \tag{3.7}$$

Considere $\mathbf{y} = (x_{n_s})_{s\in\mathbb{N}}$ uma subsequência de $\mathbf{x}$. Usando o fato de que X é $\mathcal{B}$-normado e $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$-UC(X), existe uma constate $k > 0$ e $x_{M,\mathbf{y}}$ tal que, para todo $N \in \mathbb{N}$,

$$\left\|\sum_{s=1}^{N-1} x_{n_s} - x_{M,\mathbf{y}}\right\| \leq k\|\mathcal{B}_{\sum_{s=1}^{N-1} x_{n_s} - x_{M,\mathbf{y}}}\|_{\mathcal{L}(Y^*,Z)}.$$

Mas note que,

$$\|\mathcal{B}_{\sum_{s=1}^{N-1} x_{n_s} - x_{M,\mathbf{y}}}\|_{\mathcal{L}(Y^*,Z)} = \sup_{y^*\in B_{Y^*}} \left\|\mathcal{B}\left(\sum_{s=1}^{N-1} x_{n_s} - x_{M,\mathbf{y}}, y^*\right)\right\|.$$

Por Hahn-Banach e $\mathcal{B}$ ser bilinear,

$$\sup_{y^*\in B_{Y^*}} \left\|\mathcal{B}\left(\sum_{s=1}^{N-1} x_{n_s} - x_{M,\mathbf{y}}, y^*\right)\right\| = \sup_{\substack{y^*\in B_{Y^*}\\ z^*\in B_{Z^*}}} \left\|z^*\left(\sum_{s=1}^{N-1} \mathcal{B}\left(x_{n_s} - x_{M,\mathbf{y}}, y^*\right)\right)\right\|.$$

Assim,

$$\sup_{\substack{y^*\in B_{Y^*}\\ z^*\in B_{Z^*}}}\left\|z^*\left(\sum_{s=1}^{N-1}\mathcal{B}\left(x_{n_s}-x_{M,\mathbf{y}},y^*\right)\right)\right\|=\sup_{\substack{y^*\in B_{Y^*}\\ z^*\in B_{Z^*}}}\left\|z^*\left(\left[\sum_{s=1}^{N-1}\mathcal{B}\left(x_{n_s},y^*\right)\right]-\mathcal{B}(x_{M,\mathbf{y}},y^*)\right)\right\|.$$

Daí,

$$\sup_{\substack{y^*\in B_{Y^*}\\ z^*\in B_{Z^*}}}\left\|z^*\left(\left[\sum_{s=1}^{N-1}\mathcal{B}\left(x_{n_s},y^*\right)\right]-\mathcal{B}(x_{M,\mathbf{y}},y^*)\right)\right\|=\sup_{\substack{y^*\in B_{Y^*}\\ z^*\in B_{Z^*}}}\sum_{s=N}^{\infty}|z^*(\mathcal{B}(x_{n_s},y^*))|.$$

Com isso, podemos concluir que

$$\left\|\sum_{s=1}^{N-1}x_{n_s}-x_{M,\mathbf{y}}\right\|\leq k\sup_{\substack{y^*\in B_{Y^*}\\ z^*\in B_{Z^*}}}\sum_{s=N}^{\infty}|z^*(\mathcal{B}(x_{n_s},y^*))|.$$

Logo, fazendo $N\longrightarrow\infty$, usando (3.7) e a Proposição 1.7, concluímos que $\mathbf{x}$ é incondicionalmente somável.

■

Observação 3.1. Sendo X e Y espaços de Banach, um operador $T:X\longrightarrow Y$ é dito **completamente contínuo** se ele leva sequências fracamente convergentes de X em sequências convergentes na norma de Y. Considere $\mathcal{W}(X,Y)$ o espaço de todas as aplicações completamente contínuas de X em Y. A seguir, iremos apresentar uma outra versão bilinear Orliz-Pettis que envolve o conceito de operadores completamente contínuos.

(Bilinear Orliz-Pettis) Seja $\mathcal{B}:X\times Y\to Z$ uma aplicação bilinear limitada tal que

1. X é $\mathcal{B}$-normado;
2. Y é reflexivo;
3. $\phi_{\mathcal{B}}(X)\subseteq\mathcal{W}(Y,Z)$.

Então, toda sequência $\mathcal{B}$-incondicionalmente somável em X é incondicionalmente somável.

A prova é uma adaptação do que já fizemos no Teorema 3.1 e pode ser encontrada em [1, Teoremas 2.5.1 e 2.5.2, Corolario 2.5.1].

Mediante a Observação 3.1 e sabendo que $B_x:Y\longrightarrow Z$ são aplicações completamente contínuas para qualquer $x\in X$, seque que a próxima proposição já está demonstrada.

Proposição 3.1. *Seja $\mathcal{B} : X \times Y \longrightarrow \ell^1$ uma aplicação bilinear limitada com X $\mathcal{B}$-normado e Y reflexivo. Então, toda sequência $\mathcal{B}$-incondicionalmente somável é uma sequência incondicionalmente somável.*

Seja X um espaço de Banach e (Ω, Σ, μ) um espaço mensurável finito. Denotemos por $P^p(\mu, X)$ a coleção de todas as **funções simples mensuráveis Pettis p-integráveis**, isto é, o espaço de todas as funções fortemente mensuráveis $f : \Omega \to X$ de modo que $x^*(f) \in L^p(\mu)$ para todo $x^* \in X^*$ e para qualquer $E \in \Sigma$, existe $x_E \in X$ tal que

$$\int_E x^*(f)d\mu = x^*(x_E), \text{ para todo } x^* \in X^*.$$

Assim, podemos definir a seguinte norma:

$$\|f\|_{P^p(\mu,X)} = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\int_\Omega |x^*(f)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Corolário 3.2. *Sejam X um espaço reflexivo, $1 \leq p < \infty$, (Ω, Σ, μ) um espaço mensurável de medida finita e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $P^p(\mu, X)$. Vamos assumir também que para qualquer $x^* \in X^*$, $\phi \in L^{p'}(\mu)$ tem-se*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega |x^*(f_n)\phi| \, d\mu < \infty,$$

e que existe $f \in P^p(\mu, X)$ de modo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega x^*(f_n)\phi \, d\mu = \int_\Omega x^*(f)\phi \, d\mu,$$

para qualquer $x^* \in X^*$, $\phi \in L^{p'}(\mu)$. Então, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge incondicionalmente em $P^p(\mu, X)$.

Demonstração: Defina $X_0 = \overline{< f_1, \cdots, f_n, \cdots >}$. Sabemos que X_0 é separável e que também é reflexivo, pois X é reflexivo. Com isso, defina uma aplicação bilinear da seguinte forma:

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{B} & : & P^p(\mu, X_0) \times X_0 & \longrightarrow & L^p(\mu) \\ & & (f, x^*) & \longmapsto & x^*(f) \end{array}$$

Veja que X é $\mathcal{B}$-normado pois,

$$\|\mathcal{B}(f, \cdot)\| = \sup_{\|x^*\| \leq 1} \|\mathcal{B}(f, x^*)\| = \sup_{\|x^*\| \leq 1} \left(\int_\Omega |\mathcal{B}(f, x^*)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{\|x^*\|\leq 1} \left(\int_\Omega |x^*(f)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{P^p(\mu,X)}.$$

Além disso, $P^p(\mu, X_0) \subset \mathcal{K}(X_0^*, L^p(\mu))$, onde $\mathcal{K}(X_0^*, L^p(\mu))$ é o conjunto dos operadores compactos de X_0^* em $L^p(\mu)$. De fato, defina a aplicação:

$$\begin{array}{rccc} \Gamma & : & P^p(\mu, X_0) & \longrightarrow & \mathcal{K}(X_0^*, L^p(\mu)) \\ & & f & \longmapsto & \Gamma(f) = g_f \end{array}$$

onde $g_f(x^*) = x^*(f) \in L^p(\mu)$. Observe que a aplicação está bem definida, pois digamos que $x_n^* \xrightarrow{\text{w}} x^*$ em X_0^*, isto é, $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fraco para x^* em X_0^*, então

$$x_n^*(a) \to x^*(a), \ \forall a \in X_0$$

e em particular, para cada $f \in X_0$, temos

$$x_n^*(f) \to x^*(f) \Rightarrow g_f(x_n^*) \to g_f(x^*).$$

Assim, por [2, Proposição 7.2.8], segue que g_f é compacto. Note também que a aplicação é injetiva, porque sendo $f, g \in P^p(\mu, X_0)$, temos

$$\Gamma(f) = \Gamma(g) \Rightarrow x^*(f) = x^*(g), \ \forall x^* \in X_0^* \Rightarrow x^*(f-g) = 0, \ \forall x^* \in X_0^* \overset{\text{Hahn-Banach}}{\Rightarrow} \|f-g\| = 0.$$

Logo, $f = g$, ou seja, a inclusão está provada. Por outro lado, ainda pela [2, Proposição 7.2.8], temos que

$$\mathcal{K}(X_0^*, L^p(\mu)) \subseteq \mathcal{W}^*(X_0^*, L^p(\mu)).$$

Mas, por hipótese, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é $\mathcal{B}$-incondicionalmente somável e pelo Teorema bilinear de Orlicz-Pettis segue que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é incondicionalmente somável.

■

Seja $m : \Sigma \to X$ um vetor mensurável aditivo (contável) definido em uma σ-álgebra Σ de subespaços não vazios de Ω. Dizemos que um funcional $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é **fracamente integrável (com respeito a m)** se $f \in L^1(|x^*(m)|)$ para qualquer $x^* \in X^*$. Denotaremos por $L_w^1(m)$ o espaço de todas as funções fracamente integráveis (com respeito a m), que se tornará um espaço de Banach quando agregado a seguinte norma:

$$\|f\|_{1,m} = \sup_{x^*\in X^*} \int_\Omega \|f\| \ d|x^*(m)|.$$

Além disso, vamos dizer que um funcional fracamente integrável (com respeito a m) é

integrável (com respeito a m) se para qualquer $E \in \Sigma$ existir $x_E \in X$ de modo que

$$\int_E f \; d(x^*(m)) = x^*(x_E), \; \forall x^* \in X^*.$$

Vamos denotar por $L^1(m)$ o espaço de todas as funções integráveis (com respeito a m). Note que o vetor x_E é único, pois se existir $y_E \in X$ satisfazendo as mesmas condições de x_E, então

$$|x^*(x_E)| = |x^*(y_E)|, \forall x^* \in X^* \Rightarrow |x^*(x_E - y_E)| = 0, \forall x^* \in X^*.$$

Daí, por Hahn-Banach,

$$\|x_E - y_E\| = 0 \Rightarrow x_E = y_E.$$

Proposição 3.3. *$L^1(m)$ é um subespaço fechado de $L^1_w(m)$.*

Demonstração: Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $L^1(m)$, de modo que $f_n \to f$ em $L^1_w(m)$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f\|_{1,m} < \epsilon, \; \forall n \geq n_0,$$

ou seja,

$$n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{x^* \in X^*} \int_\Omega \|f_n - f\| \; d|x^*(m)|.$$

Porém, sabemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in L^1(m)$, isto é, dado $E \in \Sigma$, existe $x^n_E \in X$ de modo que

$$\int_E f_n d(x^*(m)) = x^*(x^n_E), \; \forall x^* \in X^* \tag{3.8}$$

Por outro lado,

$$\|x^n_E - x^m_E\| \overset{\text{Hahn-Banach}}{=} \sup_{x^* \in B_{X^*}} |x^*(x^n_E - x^n_E)| \leq \sup_{x^* \in B_{X^*}} \int_E \|f_n - f_m\| d(x^*(m)) \leq \|f_n - f_m\|_{L_{1,w}}.$$

Daí, como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, então é de Cauchy e então, $(x^n_E)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em X. Como X é Banach, segue que existe $x \in X$ de modo que $x^n_E \to x$ e fazendo $n \to \infty$ em (3.8), podemos concluir que $f \in L^1(m)$. Portanto, $L^1(m)$ é um subespaço fechado de $L^1_w(m)$. ∎

Definição 3.1. Sendo X um espaço de Banach, definiremos o **operador integral** da seguinte forma:

$$I^1_m : L^1(m) \to X, \text{ com } I^1_m(f) = \int_\Omega f \; dm.$$

Veja que I_m^1 é um operador limitado, pois se $f \in B_{X^*}$, temos

$$\|I_m^1(f)\| = \left\| \int_\Omega f \, dm \right\| \leq \int_\Omega \|f\| \, dm \leq m(\Omega)$$

e assim,

$$\left\| I_m^1 \left(\frac{f}{\|f\|} \right) \right\| \leq \Omega \Rightarrow \|I_m^1(f)\| \leq \Omega \|f\|.$$

Seja $1 \leq p < \infty$. Um funcional f é dito **p-integrável** com respeito a m, se $\|f\|^p \in L^1(m)$. Denotaremos o espaço de todos os funcionais p-integráveis por $L^p(m)$. Analogamente, um funcional f é dito **fracamente p-integrável** com respeito a m se $\|f\|^p \in L_w^1(m)$. O espaço dos funcionais fracamente p-integráveis será denotado por $L_w^p(m)$. Estes espaços são de Banach quando munidos da seguinte norma:

$$\|f\|_{p,m} = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\int_\Omega \|f\|^p \, d|x^*(m)| \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Corolário 3.4. *Sejam X um espaço de Banach sequêncialmente completo e $m : \Sigma \to X$ uma vetor aditivo mensurável (contável) de modo que a aplicação integração $I_m^{(1)} : L^1(m) \to X$ é completamente contínua. Sendo $1 \leq p < \infty$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $L^p(m)$, assumindo*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \int_\Omega f_n g \, dm \right\| < \infty, \text{ para todo } g \in L^{p'}(m)$$

e que existe algum funcional $f \in L^p(m)$ de modo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega f_n g \, dm = \int_\Omega f g \, dm, \text{ para todo } g \in L^{p'}(m),$$

segue que, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge incondicionalmente em $L^p(m)$.

Demonstração: Sendo p' o conjugado de p, vamos considerar a seguinte aplicação

$$\mathcal{M}_m^p : L^p(m) \times L^{p'}(m) \to X, \text{ com } \mathcal{M}_m^p(f,g) = \int_\Omega f g \, dm.$$

Pelas propriedades da integral, é fato que $\mathcal{M}_m^p$ é uma aplicação bilinear. Além disso, do mesmo modo que o operador integral é limitado, temos que $\mathcal{M}_m^p$ também será.

Afirmação 3.4. $\|f\|_{p,m} = \sup_{g \in L^{p'}(m)} \left\| \int_\Omega f g \, dm \right\|_X$

Com efeito, por Hahn-Banach,

$$\left\| \int_\Omega f g \, dm \right\|_X = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left| \int_\Omega f g \, d|x^*(m)| \right|. \tag{3.9}$$

Mas pela desigualdade de Holder, temos

$$\sup_{x^*\in B_{X^*}}\left|\int_\Omega fg\ d|x^*(m)|\right| \leq \left(\sup_{x^*\in B_{X^*}}\left|\int_\Omega \|f\|^p\ d|x^*(m)|\right|^{\frac{1}{p}}\right)\cdot\left(\sup_{x^*\in B_{X^*}}\left|\int_\Omega \|g\|^{p'}\ d|x^*(m)|\right|^{\frac{1}{p'}}\right)$$

e daí, aplicando supremo com relação a $g \in B_{L^{p'}(m)}$ em (3.9) e usando a desigualdade anterior, segue que

$$\sup_{g\in B_{L^{p'}(m)}}\left\|\int_\Omega fg\ dm\right\|_X \leq \|f\|_{p,m}.$$

Por outro lado, considere

$$g = \frac{f^{p-1}}{(\|f\|_{p,m})^{p/p'}}.$$

Como $p-1=\frac{p}{p'}$, segue que

$$\|g\|_{p',m} = \frac{\sup\limits_{x^*\in B_{X^*}}\left(\int_\Omega |f|^{(p-1)p'}\ d|x^*(m)|\right)^{\frac{1}{p'}}}{\sup\limits_{x^*\in B_{X^*}}\left(\int_\Omega |f|^p\ d|x^*(m)|\right)^{\frac{1}{p'}}} = 1.$$

Mas veja que

$$\begin{aligned}
\sup_{h\in L^{p'}(m)}\left\|\int_\Omega fh\ dm\right\| &\geq \left\|\int_\Omega fg\ dm\right\| = \sup_{x^*\in B_{X^*}}\left(\int_\Omega |f|\frac{|f|^{p-1}}{(\|f\|_{p,m})^{p/p'}}\ d|x^*(m)|\right)\\
&= \sup_{x^*\in B_{X^*}}\left(\int_\Omega |f|\frac{|f|^{p-1}}{\left(\sup\limits_{x^*\in B_{X^*}}\left(\int_\Omega |f|^p\ d|x^*(m)|\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{p/p'}}\ d|x^*(m)|\right)\\
&= \sup_{x^*\in B_{X^*}}\left(\int_\Omega |f|\frac{|f|^{p-1}}{\sup\limits_{x^*\in B_{X^*}}\left(\int_\Omega |f|^p\ d|x^*(m)|\right)^{\frac{1}{p'}}}\ d|x^*(m)|\right)\\
&= \sup_{x^*\in B_{X^*}}\left(\int_\Omega \frac{|f|^{p}}{\sup\limits_{x^*\in B_{X^*}}\left(\int_\Omega |f|^p\ d|x^*(m)|\right)^{\frac{1}{p'}}}\ d|x^*(m)|\right)\\
&= \sup_{x^*\in B_{X^*}}\left(\int_\Omega |f|^p d|x^*(m)|\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{p,m}.
\end{aligned}$$

Logo, temos a igualdade desejada e consequentemente que $L^p(m)$ é $\mathcal{M}_m^p$-normado. Além disso, pelo [3, Corollary 3.10], se X é fracamente sequêncialmente completo, então $L^p(m)$ é reflexivo. Fixando $f \in L^p(m)$, podemos definir o seguinte operador

$$(M_m^{p'})_f : L^{p'}(m) \to L^1(m), \text{ com } (M_m^{p'})_f(g) = fg$$

e por [4, Theorem 7], $(M_m^{p'})_f$ é fracamente compacto. Mas sabemos que o operador integral $I_m^1 : L^1(m) \to X$ é completamente contínuo e que

$$(\mathcal{M}_m^p)(f) = I_m^1 \circ (M_m^{p'})_f,$$

ou seja, $\phi_{\mathcal{M}_m^p}(f)$ é compacto para qualquer $f \in L^p(m)$. Portanto,

$$\phi_{\mathcal{M}_m^p}(L^p(m)) \subset \mathcal{K}(L^{p'}(m), X) \subset \mathcal{W}(L^{p'}(m), X)$$

e o resultado é consequência do Teorema Bilinear de Orliz-Pettis.

■

Referências Bibliográficas

[1] J. M. C. Rodríguez, *Integración bilineal*, Tese de Doutorado, Universidade de Valencia, 2004.

[2] G. Botelho, D. Pellegrino, E. Teixeira, *Fundamentos da Análise Funcional*, SBM, 2015.

[3] A. Fernández, F. Mayoral, F. Naranjo, C.Sáez, E. A. Sánchez Pérez, *Spaces of p-integrable functions with respect to a vector measure*, Positivity 10 (1), (2006) 1-16.

[4] R. Del Campo, A. Fernández, I. Ferrando, I. Mayoral, F. Naranjo, *Multiplication operators on spaces of integrable functions with respect to a vector measure*, J. Math. Anal. Appl. 343 (1) (2008) 514-524.

[5] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, *Absolutely Summing operators*, Cambridge Stud. Adv. Math., vol. 43, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1995).

[6] A. Mohsen, *Weak*-norm sequentially continuos operators*, Math. Slovaca 50 (3) (2000) 357-363.

[7] O. Blasco, T. Signes, *Some classes of p-summing type operators*, Bol. Soc. Math. Mexicana (3) 9 (1) (2003) 119-133.

[8] A. Rayn, *Introduction to Tensor Products of Banach Spaces*, Springer; Edição: 1 (10 de dezembro de 2010).

[9] O. Blasco, J. M. Calabuig, T. Signes, *A bilinear version of Orlicz-Pettis theorem*, J. Math. Anal. Appl. 348 (2008) 150-164.