



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

*Sobre Estados Não-Clássicos do Campo
Eletromagnético Quantizado*

Cristino José dos Santos Ferreira

João Pessoa-PB
Fevereiro de 2020

Cristino José dos Santos Ferreira

***Sobre Estados Não-Clássicos do Campo
Eletromagnético Quantizado***

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, do Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de **Doutor** em Física.

Orientador:
Prof. Dr. Basílio Baseia

João Pessoa-PB
Fevereiro de 2020

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

F383s Ferreira, Cristino José Dos Santos.

Sobre estados não-clássicos do campo eletromagnético
quantizado / Cristino José Dos Santos Ferreira. - João
Pessoa, 2020.

108f. : il.

Orientação: Basílio Baseia.

Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Estado coerente. 2. Função de Wigner. 3. Squeezing.
4. Efeito sub-Poissoniano. I. Baseia, Basílio. II.
Título.

UFPB/BC

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de
Doutorado do aluno **Cristino José dos Santos
Ferreira**, candidato ao Título de Doutor em
Física na Área de Concentração Óptica.

1 Aos vinte dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e vinte, às 14:00, no Auditório da
2 Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade
3 Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para
4 examinar o candidato ao grau de Doutor em Física na área de Óptica, **Cristino José dos
5 Santos Ferreira**. A comissão examinadora foi composta pelos professores doutores:
6 *Basílio Baseia* (UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, *Bertúlio de Lima
7 Bernardo* (UFPB), *Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos* (UFPB), *Aércio Ferreira de
8 Lima* (UFCG) e *Douglas Vitoreti da Silva* (UFCG). Dando início aos trabalhos, o Prof.
9 Basílio Baseia comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a
10 palavra para que o candidato fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de tese intitulado
11 “*Sobre estados não-clássicos do campo eletromagnético quantizado*”. Concluída a
12 exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o seguinte
13 parecer: “**aprovado**”. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o
14 respectivo diploma de Doutor em Física na forma da lei. E para constar, eu, Danilo Wilson
15 Lemos Menezes, redigi esta ata que vai assinada por mim e pelos membros da Banca
16 Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **20 de fevereiro de 2020**.

17

Prof. Dr. Basílio Baseia
Orientador – PPGF/UFPB
Prof. Dr. Bertúlio de Lima Bernardo
PPGF/UFPB
Prof. Dr. Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos
PPGF/UFPB
Prof. Dr. Aércio Ferreira de Lima
UFCG
Prof. Dr. Douglas Vitoreti da Silva
UFCG

Basílio Baseia
Bertúlio de Lima Bernardo
Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos
Aércio Ferreira de Lima
Douglas Vitoreti da Silva

À minha mãe Maria Pureza dos Santos Ferreira, por tudo.

“ A natureza não faz milagres; faz revelações. ”

Carlos Drummond de Andrade

Agradecimentos

Aos meus pais, Francisco das Chagas Ferreira e Maria Pureza dos Santos Ferreira e aos meus irmãos.

Ao professor Basílio Baseia que, com bastante dedicação, orientou-me na realização desse trabalho de pesquisa assegurando sua realização, bem como na produção de alguns artigos científicos publicados. Agradeço também aos professores Clodoaldo Valverde (UEG/Anapólis-GO) e Jorge M.C. Malbouisson (UFBA/Salvador-BA), com os quais publiquei alguns trabalhos.

Ao professor Valdir Barbosa Bezerra, representando a Pós-Graduação em Física, pela solicitude para com os alunos.

Aos amigos que fiz durante os anos em João Pessoa, pelas discussões sobre Física e pelos bons momentos juntos.

Resumo

Estudamos um novo estado do campo eletromagnético quantizado, em modo único, obtido pela superposição de estados coerentes sobre uma semi-reta no espaço de fase. Avaliamos sua não-classicalidade através de alguns indicadores, por exemplo, a Função de Wigner, $W(x, p)$, pelo efeito *squeezing* e/ou pela estatística sub-Poissoniana que essa superposição possa exibir. Na Função de Wigner o caráter não clássico do estado costuma se revelar quando ela assume valores negativos em certas regiões do espaço de fase, caso em que ela se comporta mais como uma ‘quase-distribuição’ de probabilidades. A negatividade dessa função indica o caráter quântico do estado que ela representa. Esta função é determinada inicialmente em termos do número de estados coerentes superpostos alinhados na semi-reta, o conjunto todo expandido em componentes de Fock. Em seguida, incluímos no sistema a influência de reservatórios de ganho e/ou perda, na aproximação Markoviana. Também estudamos a evolução temporal do sistema, para obter uma equação mestra envolvendo a função de Wigner, $W(x, p, t)$, a partir da qual obtemos a evolução temporal das propriedades não-clássicas mencionadas. Ilustramos possíveis esquemas de geração da mencionada superposição, tanto no caso de campos em cavidades microondas quanto de campos viajantes em guias de onda.

Palavras-chave: Estado coerente, Função de Wigner, *Squeezing*, Efeito sub-Poissoniano.

Abstract

We study a new state of a (single mode) quantized electromagnetic field, obtained from the superposition of coherent states over a semi-straight line in phase space. We evaluate its non-classicality through some indicators, for example, by the Wigner Function, $W(x, p)$, the squeezing effect, and/or the sub-Poissonian statistic that this superposition may exhibit. In Wigner's function the nonclassical character of the state usually reveals itself when it assumes less than zero values in certain regions of phase space, in which case it behaves more like a quasi-distribution of probabilities. The negativity of this function indicates the quantum character of the state it represents. This function is determined initially in terms of the number of superimposed coherent states aligned in the semi-straight line, the whole set expanded in Fock components. Then we include in the system the influence of gain and/or loss reservoirs in the Markovian approximation. Following, we study the evolution in time of the system to obtain a master equation involving the Wigner function, $W(x, p, t)$, from which we obtain the temporal evolution of the mentioned non-classical properties. We illustrate possible schemes for the generation of such superposition, both in the case of trapped fields in microwave cavities and fields in traveling waveguides.

Keywords: Coherent State, Wigner Function, Squeezing, sub-Poissonian effect.

Lista de Siglas e Abreviações

$\Im$ Parte imaginária.

$\Re$ Parte real.

BEC Condensado de Bose-Einstein, do inglês *Bose-Einstein Condensate*.

CQED Cavity Quantum Electrodynamics.

ENC Estado não-clássico.

ESP Estatística sub-poissoniana.

FW Função de Wigner.

MJC Modelo de Jaynes-Cummings.

MZI Interferômetro de Mach-Zehnder, do inglês *Mack-Zehnder interferometer*.

QDP *Quasi* distribuição de probabilidade.

SECR Superposição de estados coerentes em uma reta.

PM Parâmetro de Mandel.

Sumário

Lista de Figuras

1	Introdução	p. 16
2	Propriedades gerais do estado coerente do oscilador harmônico quantizado	p. 21
2.1	O oscilador harmônico simples	p. 21
2.2	Estados coerentes: definição	p. 22
2.3	Expansão na base de Fock	p. 26
2.4	Estatística de fótons	p. 28
2.5	Não-ortogonalidade	p. 29
2.6	Base super completa	p. 31
2.7	Operadores na forma normal ordenada	p. 33
3	Superposição de estados coerentes sobre uma semirreta	p. 34
3.1	Obtendo um estado de fase otimizado	p. 34
3.2	MJC: caso dispersivo e ressonante	p. 39
3.2.1	Exemplificando o MJC ressonante	p. 40
3.3	Criação da SECR em cavidades	p. 43
3.4	Propriedades não-clássicas do estado SECR	p. 47
3.4.1	Estatística de fótons da SECR	p. 47
3.4.2	Compressão do ruído quântico	p. 49

3.4.3	Representação de Wigner	p. 51
4	Equação de Fokker-Planck e FW dependente do tempo	p. 56
4.1	Indicadores de não-classicalidade:	
	Evolução temporal	p. 59
4.1.1	Efeito de compressão	p. 60
4.2	Parâmetro de Mandel (PM): Evolução temporal	p. 63
4.2.1	Negatividade da FW	p. 65
5	Conclusões	p. 73
	Apêndice A – Evolução temporal	p. 76
A.1	Cálculo explícito da evolução temporal da Função de Wigner com $N = 2$	p. 76
	Apêndice B – Produção científica	p. 98
B.1	Artigos publicados	p. 98
B.2	Apresentação de trabalho	p. 99
	Referências Bibliográficas	p. 100

Lista de Figuras

- 2.1 Espaço de fase bidimensional (diagrama de Argand) representando um estado coerente $|\alpha\rangle$ em termos do autovalor α do operador de aniquilação $\hat{a}$. A figura mostra o efeito de um *deslocamento* $\hat{\mathcal{D}}_\beta$ e uma *rotação* $\hat{R}_\lambda$ sobre o estado coerente $|\alpha\rangle$ p. 25
- 2.2 Estrutura em forma de estrela que contém todas as células de Planck. Três delas são desenhadas na estrutura. A célula de Planck central é desenhada em vermelho. p. 30
- 3.1 Representação pictórica da superposição de estados coerentes $|\phi^3\rangle$ sobre uma reta no espaço de fase. p. 36
- 3.2 Distribuição de fase $P_N(\theta) = P_N(\theta; \phi = 0)$ para (a) $N = 3, 4, 5$ e (b) $N = 6, 7$, tomando $|\alpha| = 0.5$. Para $N = 7$ a SECR é uma boa aproximação do estado de fase ideal. p. 37
- 3.3 Distribuição de fase adaptada de Aragão e coautores [94]. p. 38
- 3.4 Evolução temporal da inversão de população atômica com diferentes coeficientes de decaimento γ para $\langle \hat{n} \rangle = 49$, $\omega = \omega_0 = 8\lambda$. (a) $\gamma = 0.01\lambda$; (b) $\gamma = 0.03\lambda$; (c) $\gamma = 0.05\lambda$ p. 42
- 3.5 Representação do esquema de uma cavidade QED para produção de estados $|\phi^N\rangle$. Na sequência temos uma fonte de átomos (S), uma zona de Ramsey (R), uma cavidade geradora de microondas (MG), uma segunda zona de Ramsey (R) e dois detectores dos níveis excitado $|e\rangle$ e fundamental $|g\rangle$, nessa ordem. p. 44
- 3.6 Probabilidade de sucesso de criar a superposição de estados coerentes com uma distribuição de fase bastante concentrada. A chance de obter o estado é inversamente proporcional à N e $r = |\alpha|$ p. 46

3.7	Esquema para o método proposto de geração do estado SECR usando um interferômetro de Mach-Zehnder com um meio Kerr em um braço. <i>BS1</i> e <i>BS2</i> são divisores de feixe. O caminho no sentido horário do interferômetro contém um atraso dando origem a uma mudança de fase indicada como θ . O modo <i>a</i> é o braço do interferômetro que contém o meio Kerr, enquanto o modo <i>b</i> , também passando pelo meio Kerr, contém inicialmente um estado coerente. <i>D1</i> e <i>D2</i> são os detectores de fótons nas portas de saída do interferômetro.	p. 47
3.8	Comparação da estatística de fótons da luz com distribuição de Poisson com a luz sub-poissoniana e a luz super-poissoniana. As distribuições foram tomadas para o mesmo número médio de fótons $\bar{n} = \alpha ^2 = 100$	p. 48
3.9	Parâmetro de Mandel da mesma superposição de estados coerentes com uma distribuição de fase bastante concentrada.	p. 49
3.10	Na figura (a) são mostradas as variâncias nas quadraturas, $(\Delta\hat{x})^2$ e $(\Delta\hat{p})^2$ (nas linhas tracejadas e sólidas, respectivamente), do mesmo SECR com $\alpha = x_0/2 > 0$, isto é, $\phi = 0$, como uma função de $r = \alpha $; onde a linha horizontal pontilhada é o limite mínimo. A figura (b) mostra o produto das variâncias das quadraturas x e p , onde a linha horizontal pontilhada indica o limite de incerteza mínima.	p. 52
3.11	Curvas de nível da função de Wigner mostrando os pontos de mínimo (regiões claras) e de máximo (regiões azuis) para $x_0 = 3.57$ ($\alpha \sim 2.5$), fazendo $p_0 = 0$: Na figura (a) para $N = 2$; Na figura (b) para $N = 3$	p. 54
3.12	Função de Wigner do SECR $ \phi^N\rangle$, para $N = 3$ e fazendo $p_0 = 0$: (a) $x_0 = 0.3$ e (b) $x_0 = 3.0$	p. 55
4.1	Grau de impureza da SECR $ \phi^N(\alpha)\rangle$ como função do tempo, para $N = 3$, $x_0 = \sqrt{2}/2$, $\chi = 0.5$, $\beta = 0.0$ e: a) $\sigma = -0.09$, $\kappa = -0.5$ (linha pontilhada); b) $\sigma = 0.2$, $\kappa = 0.1$ (linha tracejada); c) $\sigma = 0.9$, $\kappa = 0.7$ (linha sólida). Aqui e nas figuras que seguem a escala de tempo é dada em <i>ms</i>	p. 60

- 4.2 Variância da quadratura $\hat{p}$ do estado $|\phi^N(\alpha)\rangle$, em função do tempo, para $N = 3$ e $x_0 = \sqrt{2}/2 \approx 0.70711$ ($\phi = 0$): (a) $\kappa = 1.0$, $\chi = 0.0$, e $\sigma = -0.2, 0.1, 0.3$ (linhas pontilhada, tracejada, e sólida, respectivamente); (b) $\sigma = -0.2$, $\chi = 0.0$, e $\kappa = 0.5, 0.7, 1.2$ (linhas pontilhada, tracejada e sólida, respectivamente); (c) $\sigma = -0.2$, $\kappa = 0.5$, $\beta = 0.0$, e $\chi = 0.1, 0.2, 0.4$ (linhas pontilhada, tracejada e sólida, respectivamente); (d) $\sigma = -0.2$, $\kappa = 0.5$, $\chi = 0.4$, e $\beta = 0.5, 1.0, 1.571$ (linhas pontilhada, tracejada e sólida, respectivamente). A linha pontilhada horizontal corresponde ao valor limite estabelecido pela relação de incerteza. p. 62
- 4.3 Dependência temporal da variância da quadratura $\hat{p}$ no estado $|\phi^3(\alpha)\rangle$, com $x_0 = \sqrt{2}/2$ e $\phi = 0$ tomando $\sigma = 0.9$ e $\chi = 0$. Os valores de $|\kappa|$ são 4.0 (linhas pontilhadas), 7.0 (linhas tracejadas) e 15.0 (linhas sólidas). A curvas inferiores são para os valores $\kappa > 0$ enquanto as curvas superiores correspondem aos valores $\kappa < 0$ p. 63
- 4.4 PM do estado $|\phi^N(\alpha)\rangle$ como função do tempo, para $\chi = \beta = 0.0$, $N = 3$ e: (a) $x_0 = 0.2$, $\kappa = -0.8$ e $\sigma = -1.0, -0.9, -0.7$ (nas linhas pontilhada, tracejada e sólida, respectivamente); (b) $x_0 = 0.2$, $\sigma = -1.0$ e $\kappa = -0.6, 0.0, 0.05$ (nas linhas pontilhada, tracejada e sólida, respectivamente); (c) $\sigma = -1.0$, $\kappa = -0.9$ e $x_0 = 0.3, 0.4, 0.5$ (nas linhas pontilhada, tracejada e sólida, respectivamente); e (d) $x_0 = 0.3$, $\sigma = -1.0$, $\kappa = -0.8$ para $N = 3, 4, 5$, nas linhas pontilhada, tracejada e sólida, respectivamente. p. 65
- 4.5 Perfis da FW (W_2), em $t = 0$, para $x_0 = 3.57$ e $p_0 = 0$. Em (a), o perfil- x corresponde aos valores $p = 0.44; 0.0; 1.0$. Em (b) tem-se o perfil- p para $x = 14.28; 10.0$ p. 67
- 4.6 FW W_2 , no ponto $(x_{min}, p_{min}) \simeq (14.28, 0.44)$, como função do tempo para o reservatório amplificador sensível à fase com $\chi = 0.5$: no quadro (a) $\sigma = 0.01$, enquanto o quadro (b) é para $\sigma = 0.9$. Quando $|\kappa|$ é pequeno o tempo de posituação é maior. p. 68
- 4.7 FW $W_2(14.28, 0.44; t)$ para o caso de um reservatório insensível à fase ($\chi = 0$). p. 69

4.8	Tempo de positivação de W_2 (para $x_0 = 3.57$, $p_0 = 0$) na presença de um reservatório sensível à fase, com $\chi = 0.5$: No quadro (a) $\beta = \pi$, enquanto em (b) mostra a dependência do tempo de positivação com σ , para alguns valores de β e κ	p. 70
4.9	Tempo de positivação de W_2 (para $x_0 = 3.57$, $p_0 = 0$) na presença de um reservatório insensível à fase, $\chi = 0$. Os quadros (a) e (b) exibem a dependência do tempo de positivação com os parâmetros κ e σ , tomando um deles como variável independente em cada caso.	p. 71
4.10	Gráfico Log–Log de $t(\kappa) \times \kappa$	p. 72

1 *Introdução*

Desde o advento da sua invenção, o *laser* ganhou inúmeras aplicações tanto na indústria tecnológica como no meio acadêmico-científico. Uma das principais aplicações do *laser* no meio científico é a capacidade de excitar átomos entre níveis especificados, bem como a capacidade de manipular átomos e moléculas por meio de pinças ópticas, inventadas por Arthur Ashkin [1]. O resfriamento a *laser*, usado para gerar e aprisionar átomos ultra-frios ($\sim 10^{-9}K$), garantiu aos físicos Steven Chu, Claude Cohen-Tannoudji e William D. Phillips o Prêmio Nobel de Física no ano de 1997 [2]. Essa mesma técnica permitiu a observação do condensado de Bose-Einstein (BEC), em 1995, por Eric Cornell, Carl Wieman e Wolfgang Ketterle, laureados com o Prêmio Nobel de Física no ano de 2001 [3]. Mais recentemente, em 2018, os físicos Arthur Ashkin, Gérard Mourou e Donna Strickland receberam o Prêmio Nobel de Física por suas “invenções inovadoras no campo da física do *laser*” [4]¹. Em todos esses casos de aplicações do *laser*, e até mesmo em seu princípio de funcionamento, é necessário que sejam considerados os vários tipos de interação radiação-matéria (campo-átomo, por exemplo).

Historicamente, o tratamento dessa interação passou por vários estágios, acompanhando a transição entre a Física Clássica e a Física Quântica. Transição essa que teve início nos primeiros anos do século XX com as contribuições de Max Planck e de Albert Einstein. Assim como na hipótese de Planck para explicar a radiação do corpo negro (1901), na explicação de Einstein para o efeito fotoelétrico (1905) é sugerido que algo é quantizado (a troca de energia), estabelecendo que a luz apresentava em certas situações seu aspecto corpuscular, quantizado [5]. Mesmo assim, começa-se a traçar o caminho para uma teoria completa para o campo luminoso, o que se tornou imprescindível após a produção da luz *laser*. Apenas por volta de 1925 é que o termo quantização adquire seu

¹Metade do prêmio foi concedido a Arthur Ashkin pela invenção das pinças ópticas e sua aplicação em Biologia. A outra metade foi concedida a Claude Cohen-Tannoudji e Steven Chu por métodos para gerar pulsos ópticos ultra-curtos e de alta intensidade, subjacentes a aplicações como cirurgia ocular a *laser*, fusão a *laser* e aceleração de partículas a *laser*.

real significado, já que quantização também se estendia ao espectro contínuo, não apenas ao espectro discreto, onde ocorria a troca de fótons. O termo fóton (excitação elementar do campo eletromagnético quantizado) foi usado pela primeira vez em 1926 pelo químico Gilbert Lewis. Neste ano estava completa a teoria que quantizava a matéria (átomos, moléculas), devido a Erwin Schrödinger e Werner Heisenberg. No ano seguinte Werner Heisenberg, Max Born e Pascual Jordan quantizaram também o campo de radiação eletromagnético e, em 1928, Paul M. Dirac foi o precursor no uso da quantização do campo para desenvolver uma teoria quântica dos processos de emissão e absorção de radiação atômica [6]. Ele usou a estatística quântica de Bose- Einstein para um *ensemble*² de átomos fluando entre dois níveis de energia.

Antes disso, mesmo em meados do século XX, a interação radiação-matéria ainda era considerada via tratamento clássico, tanto para o átomo como para o campo. Tal interação era usualmente entendida em termos de dipolo-dipolo. Em seguida, passaram a usar o formalismo semiclássico (veja, por exemplo, a referência [7]), onde o campo era tratado de forma clássica e o átomo era tratado de forma quantizada. No entanto, esses formalismos não explicavam a emissão espontânea e, futuramente, outros efeitos não-clássicos que surgiram a partir de 1977, tais como o efeito *photon antibunching* (anti-agrupamento de fótons) [8, 9]³. Esses eram dois fenômenos ópticos sem explicação clássica que acabaram por criar uma nova área de pesquisa, a Óptica Quântica. Posteriormente, outros novos fenômenos quânticos foram observados: por exemplo, superposições de estados quânticos (exemplo, caso do “gato” de Schrödinger, emaranhamento de estados quânticos, o efeito *squeezing*, etc.) Em resumo, os fenômenos ópticos que são explicados de forma adequada apenas quando a luz for tratada como sendo composta por fótons, em vez de ondas eletromagnéticas (clássicas), compõem os objetos de estudo da Óptica Quântica.

Após a produção do primeiro raio *laser* em 1960, por Theodore H. Maiman [11], surgiu a proposta de dar um tratamento completo ao campo luminoso, que levasse em consideração a não-classicalidade do campo. O conceito de estado não- clássico (ENC) do campo luminoso foi apresentado por R. Glauber em 1963 [12, 13]⁴, bem como um

²É um conjunto estatístico, isto é, é uma distribuição de probabilidade para o estado do sistema. Trata-se de uma idealização que consiste em considerar um grande número de cópias virtuais do sistema, cada uma representando um estado físico possível em que o sistema pode estar.

³Esse efeito foi previsto por Carmichael e Walls em 1976 [10].

⁴Para mais detalhes veja por exemplo o excelente trabalho de revisão desenvolvido por R. Loudon (1980) [14].

trabalho sobre a “teoria quântica da coerência óptica” [15]. Por suas contribuições, Glauber recebeu o Prêmio Nobel de Física no ano de 2005 [16] e é considerado por muitos o “pai” da Óptica Quântica. Os ENC do campo luminoso possuem uma distribuição de Glauber-Sudarshan $P(\alpha)$ negativa e/ou bastante concentrada (mais singular que a função delta de Dirac- δ) [13, 17]⁵.

Assim como ocorre com a distribuição $P(\alpha)$, quando a função de Wigner (FW) [19] representando um dado estado do campo luminoso assume valores negativos, esse estado é um caso de ENC [20–22]). Entretanto a recíproca nem sempre é verdadeira. Um estado pode apresentar características não-clássicas e mesmo assim possuir uma FW não negativa em alguma região do espaço de fase. Esse é o caso do estado comprimido, abaixo mencionado, que ocorre em distribuições gaussianas com certas assimetrias. Nesse sentido, é conveniente investigarmos também outros indicadores de não-classicalidade, tais como: o parâmetro de Mandel (PM) [23, 24], cujo valor negativo no intervalo $[-1, 0)$ indica que o sistema possui uma distribuição de probabilidade sub-poissoniana (ESP) caracterizada pela distribuição de probabilidade mais estreita que uma distribuição de Poisson. A distribuição poissoniana ocorre quando não há correlação entre as partículas do sistema. Por outro lado, o desvio da estatística poissoniana ocorre quando o sistema possui correlação quântica, como indica o efeito Hanbury-Brown-Twiss⁶ [12, 25–27]; e o efeito *squeezing*, isto é, o efeito de compressão de estados nas componentes de quadratura $(\hat{X}_1, \hat{X}_2)$ ou, igualmente, nas componentes $(\hat{x}, \hat{p})$ do espaço de fase [28, 29]. Uma ESP não implica o efeito *antibunching*, mas há uma relação entre eles que foi estabelecida por Mandel [30, 31], obtida via transformada de Poisson. Neste trabalho, nos restringimos à investigação do PM bem como da ESP.

Pelo fato das funções de Glauber-Sudarshan e de Wigner poderem assumir valores negativos elas são chamadas pseudo ou *quasi* distribuições de probabilidade (QDP) [32] que, definidas a partir do operador densidade de estados, podem descrever o sistema completamente, permitindo o cálculo das funções de correlação dos operadores como integrais do tipo clássicas, sendo úteis na análise da conexão entre os domínios clássico e quântico, pela representação da dinâmica de um sistema quântico no espaço de fase [33]. Dessa forma, a FW consegue exibir efeitos de interferência associados à natureza quântica de

⁵Essa representação foi introduzida de forma independente por Sudarshan [18].

⁶Na física, o efeito Hanbury Brown e Twiss é um dos vários efeitos de correlação e anti-correlação nas intensidades recebidas por dois detectores de um feixe de partículas.

um estado [34]. Neste trabalho, optamos por investigar a não-classicalidade do novo estado por meio da FW, dado o enorme número de resultados teóricos [35–42] e de suas possibilidades de observação experimental [43–49] que lhe garantem o *status* de ferramenta bastante apropriada.

O formalismo quântico pioneiro para descrever a interação átomo-campo, proposto por E.T. Jaynes e F.W. Cummings [50] e suas variedades [51], considera o átomo como um sistema quântico de dois níveis e o campo eletromagnético quantizado onde um único modo participa da interação com o átomo. Os componentes átomo e campo podem estar ressonantes, ou próximo da ressonância ou ainda mesmo relativamente longe dela. Nesse último se diz que a interação é “dispersiva”. Adaptações matemáticas conseguem tratar os três casos. O modelo de Jaynes-Cummings (MJC) baseia-se no caráter discreto do fóton e, portanto, não possui análogo clássico. Esse modelo de interação é capaz de gerar diversos ENC do campo luminoso, tanto através da interação átomo-campo na faixa da luz visível, quanto na interação que substitui o átomo por átomos gigantes de Rydberg [52], o caso de campos na banda microondas em CQED. O par átomo-campo pode também ser substituído pelo conjunto par de Cooper interagindo com membrana vibrante (nanoressonador [53]), com zonas Ramsey e detectores atômicos [54].

O estudo sobre como preparar estados tendo propriedades não clássicas avançou e um grupo de pesquisadores (Áustria, Inglaterra e Austrália) gerou estados tipo “gato” de Schrödinger a partir de um único fóton e um minúsculo cilindro mecânico [55]. Tais estados, assim como o novo estado apresentado neste trabalho, possuem características cada vez mais refinadas no espaço de fase, exibindo propriedades com valores muito menores que a constante de Planck e altos valores de negatividade da FW, tornando-os mais poderosos para aplicações quânticas, tais como explorar propriedades quânticas para medir em escalas muito abaixo do que é classicamente possível, elevando ainda mais a precisão dos sensores quânticos, os mais sensíveis que se conhece.

No **capítulo 2** apresentamos uma breve revisão sobre a teoria do oscilador harmônico quântico unidimensional (adaptável à linha reta da propagação da onda eletromagnética), bem como sobre seu estado predileto em aplicações e teoria: o estado coerente e suas principais propriedades. No **capítulo 3** definimos o novo estado que consiste na superposição de estados coerentes sobre uma semirreta no espaço de fase, onde fizemos uma aproximação

para o estado de fase ideal e discutimos sua criação em cavidades e em modo de onda viajante. Nessa parte fizemos uma breve descrição do MJC. Exploramos então alguns indicadores de não-classicalidade de estados, tanto na forma convencional como via função de Wigner. No **capítulo 4** apresentamos as propriedades e indicadores de não-classicalidade, incluindo suas evoluções temporais frente à variadas situações. No **capítulo 5** apresentamos os comentários e conclusão.

2 *Propriedades gerais do estado coerente do oscilador harmônico quantizado*

Quando nos referimos à coerência, podemos considerá-la de forma espacial ou temporal, sendo casos independentes um do outro. Neste capítulo, focalizamos o conceito formal de estado coerente do oscilador harmônico (OH) quantizado e algumas de suas propriedades gerais. O tópico se estende naturalmente ao caso do campo de radiação eletromagnética quantizada, tanto na banda óptica ($\sim 10^{14}Hz$) quanto na banda de micro-ondas ($\sim 10^9Hz - 10^{12}Hz$) e vizinhanças. Este estado é totalmente coerente, espacial e temporalmente, quando associado à vibrações de modo único, isto é, quando apenas um dos modos do OH, ou do campo eletromagnético participa da operação considerada. A compreensão dessas propriedades é o primeiro passo para a construção de um pano de fundo para o estudo da Óptica Quântica, bem como do *laser*.

2.1 O oscilador harmônico simples

Considerando o OH unidimensional e utilizando a notação de *bra-ket* de Dirac, com as unidades atômicas ($\hbar = \omega = m = 1$) e na base de Fock¹ $\{|n\rangle\}$, podemos diagonalizar o operador hamiltoniano $\hat{H}$ obtendo os seguintes resultados para os níveis de energia desse sistema

$$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle, \quad E_n = n + \frac{1}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

Podemos gerar os autoestados do operador hamiltoniano que descreve esse sistema, representados na base de Fock. Para isso fazemos uso dos operadores “escada”, isto é, dos

¹Também chamada base de número $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, \dots\}$.

operadores de aniquilação e criação², respectivamente $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$, da seguinte forma

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad (2.2)$$

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (2.3)$$

Os operadores escada, no espaço das configurações, são escritos como

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\hat{p}), \quad (2.4)$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} - i\hat{p}). \quad (2.5)$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{1}, \quad \hat{a}^\dagger = (\hat{a})^\dagger, \quad (2.6)$$

$$[\hat{H}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger, \quad [\hat{H}, \hat{a}] = -\hat{a}. \quad (2.7)$$

Então podemos escrever

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2}\{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\} \\ &= \frac{1}{2}(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}) = \hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2} \equiv \hat{n} + \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Essas equações constituem a álgebra de Heisenberg-Weyl e esse método algébrico é comum em muitos livros textos de Mecânica Quântica [56, 57].

2.2 Estados coerentes: definição

O modo do campo está associado a uma função complexa normalizada e de quadrado integrável, juntamente com dois parâmetros livres (reais), ou seja, a uma amplitude complexa A . O modo único de vibrar, qualquer que seja o escolhido, pode fazê-lo em várias frequências (como uma partícula na caixa-1D), mas consideramos apenas uma delas, a que ressoa com o átomo. O campo elétrico clássico corresponderia à parte real dessa função. Pode-se ter o caso de uma única excitação (1 fóton) nesse modo. Em um ex-

²Também chamados operadores de abaixamento e levantamento.

perimento interferométrico que mede A , $x = \Re\{A\}$ e $p = \Im\{A\}$ são variáveis que não comutam. Se este modo único possuir um único fóton, haverá uma distribuição de probabilidade bimodal quando medimos x ou p , assim como a distribuição de probabilidade de um oscilador harmônico no primeiro estado excitado. Quando medimos a energia, a qual é proporcional a $A^2 = x^2 + p^2$, medimos quantos fótons ocupam esse modo. Um detector que cubra esse modo clicará exatamente uma vez (se for 100% eficiente). Por outro lado, no caso da excitação em multimodo, temos um estado onde os fótons podem estar em diferentes modos, alguns modos com maior ou menor probabilidades de ocupação. No presente caso, usando modo único, este possui também uma distribuição de probabilidades, $P(n) = \langle n | \hat{\rho} | n \rangle$, onde $\hat{\rho}$ é o operador densidade do estado quântico [58].

O estado geral de um oscilador harmônico ou de um campo eletromagnético, quantizados, pode ser expresso como superposição de outros estados conhecidos (tal é o caso do “gato” de Schrödinger) e pode também ser expresso como superposição na base de Fock, que é usualmente a base de energia $|n\rangle$. Se o estado é puro, existe uma relação de fase definida entre as componentes da superposição. Uma classe de estados que possui importância particular é formada pelos autoestados do operador de aniquilação $\hat{a}$ (abaixamento), o qual é não hermitiano, logo tendo autovalores complexos α , entre outros reais (veja, por exemplo, [59–63]). A seguir, apresentamos as principais propriedades desses estados, denominados estados coerentes.

Uma das quatro definições equivalentes do estado coerente é de ele ser autoestado do operador aniquilação $\hat{a}$ com autovalor complexo α ,

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (2.9)$$

Uma solução trivial para essa equação é o estado fundamental $|0\rangle$ para $\alpha = 0$. O deslocamento unitário ou, simplesmente, operador *deslocamento* [13, 18]

$$\hat{\mathcal{D}}_\alpha = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}, \quad (2.10)$$

produz um deslocamento no operador $\hat{a}$, o que fisicamente representa a ação de uma corrente clássica no campo. Uma vez que se $[\hat{A}, \hat{B}] = \zeta \hat{\mathbf{I}}$, com $\zeta = \text{constante}$, temos

$$e^{\xi\hat{A}}\hat{B}e^{-\xi\hat{A}} = \hat{B} + \xi\zeta\hat{\mathbf{I}}, \quad (2.11)$$

então vemos que

$$\hat{\mathcal{D}}_\alpha^\dagger \hat{a} \hat{\mathcal{D}}_\alpha = e^{-\alpha \hat{a}^\dagger + \alpha^* \hat{a}} \hat{a} e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}} = \hat{a} + \alpha \hat{\mathbf{1}}, \quad (2.12)$$

para um número complexo arbitrário α . Deduzimos das equações (2.10) e (2.12) que $\hat{\mathcal{D}}_\alpha$ possui as seguintes propriedades

$$\hat{\mathcal{D}}_\alpha^\dagger = \hat{\mathcal{D}}_\alpha^{-1} = \hat{\mathcal{D}}_{-\alpha}, \quad (2.13)$$

$$\hat{a} \hat{\mathcal{D}}_\alpha |0\rangle = \alpha \hat{\mathcal{D}}_\alpha |0\rangle. \quad (2.14)$$

Esse resultado mostra que a solução da equação de autovalores (2.9) possui a forma

$$|\alpha\rangle = \hat{\mathcal{D}}_\alpha |0\rangle, \quad (2.15)$$

e que *todo número complexo* é autovalor do operador $\hat{a}$. Uma vez que $\hat{\mathcal{D}}_\alpha$ é um operador unitário, o autoestado $|\alpha\rangle$ na equação (2.15) é normalizado,

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = \langle 0 | 0 \rangle = 1. \quad (2.16)$$

Usando o fato que $\hat{a}|0\rangle = 0$ e a identidade de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH)

$$e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{\hat{A} + \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}]/2}, \quad (2.17)$$

temos que esses autoestados são dados por

$$|\alpha\rangle = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}} |0\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} |0\rangle. \quad (2.18)$$

Esses autoestados do operador de aniquilação (abaixamento) $\hat{a}$ são os estados coerentes [12]. A função de onda do estado coerente é um pacote de onda Gaussiano de incerteza mínima, o qual propaga-se (oscila) sem sofrer deformação. Esse pacote de ondas oscila para trás e para frente na coordenada espacial com uma frequência clássica e, embora se espalhe e se contraia um pouco com o tempo, no final de cada período, ele tem sua forma e localização iniciais. Para alguns propósitos é instrutivo descrever o autovalor (α) de um estado coerente como um vetor no plano complexo (ver diagrama de Argand, figura (2.1)). É interessante notar que os estados coerentes são normalizados para a unidade, mesmo que o espectro do autovalor do operador $\hat{a}$ seja contínuo [64].

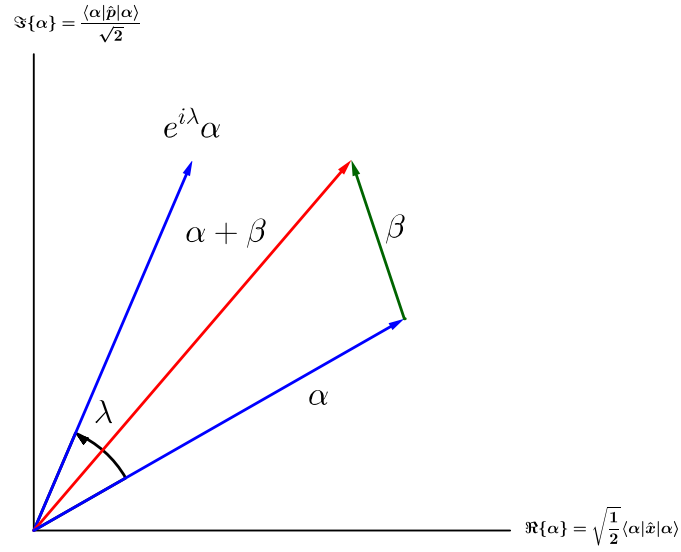


Fig. 2.1: Espaço de fase bidimensional (diagrama de Argand) representando um estado coerente $|\alpha\rangle$ em termos do autovalor α do operador de aniquilação $\hat{a}$. A figura mostra o efeito de um deslocamento $\hat{\mathcal{D}}_\beta$ e uma rotação $\hat{R}_\lambda$ sobre o estado coerente $|\alpha\rangle$.

Como exemplo, usando as propriedades (2.17) e (2.18), podemos mostrar que para qualquer estado coerente $|\alpha\rangle$,

$$\hat{\mathcal{D}}_\beta |\alpha\rangle = C |\alpha + \beta\rangle, \quad (2.19)$$

onde, novamente, $|\alpha + \beta\rangle$ é um estado coerente e C é um fator de fase.

Demonstração:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{D}}_\beta |\alpha\rangle &= e^{\beta \hat{a}^\dagger - \beta^* \hat{a}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}} |0\rangle \\ &= e^{i\Im\{\alpha\beta^*\}} e^{(\alpha+\beta)\hat{a}^\dagger - (\alpha^*+\beta^*)\hat{a}} |0\rangle \\ &= e^{\phi/2} |\alpha + \beta\rangle, \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde,

$$\begin{aligned} \phi &= 2i|\alpha\beta| \sin\left(\arg\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right), \\ C &\equiv e^{\phi/2}. \end{aligned}$$

2.3 Expansão na base de Fock

Utilizando a relação de completeza na base de Fock ($\sum_0^\infty |n\rangle\langle n| = \hat{1}$), podemos escrever que

$$\begin{aligned}
 |\alpha\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n|\alpha\rangle \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \frac{\langle 0|\hat{a}^n|\alpha\rangle}{\sqrt{n!}} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \frac{\langle 0|\alpha^n|\alpha\rangle}{\sqrt{n!}} \\
 &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle 0|e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle \\
 &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle 0|\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha\hat{a}^\dagger)^k}{k!}\right)|0\rangle \\
 &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle,
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

onde,

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle. \tag{2.22}$$

Podemos também fazer o caminho inverso e escrever [12, 13]

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha\hat{a}^\dagger} |0\rangle. \tag{2.23}$$

Agora, utilizando a equação (2.17), reescrevemos

$$|\alpha\rangle = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}} |0\rangle \equiv \hat{\mathcal{D}}_\alpha |0\rangle, \tag{2.24}$$

onde chegamos à equação (2.15), bem como à definição do operador deslocamento mostrado na equação (2.10). A soma sobre a base de Fock na equação (2.21) mostra que o número de fótons no estado coerente não é bem definido.

Um outro operador unitário bastante usual é o operador desvio de fase

$$\hat{R}_\lambda = e^{i\lambda\hat{a}^\dagger\hat{a}}, \tag{2.25}$$

com um parâmetro real λ . Uma vez que $[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}] = -\hat{a}$ e usando a identidade a seguir,

$$e^{\xi \hat{A}} \hat{B} e^{-\xi \hat{A}} = e^{\xi \zeta} \hat{B}, \quad (2.26)$$

se $[\hat{A}, \hat{B}] = \zeta \hat{B}$, com $\zeta = \text{constante}$, então encontramos

$$\hat{R}_\lambda^\dagger \hat{a} \hat{R}_\lambda = e^{-i\lambda \hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{a} e^{i\lambda \hat{a}^\dagger \hat{a}} = e^{i\lambda} \hat{a}. \quad (2.27)$$

Agora podemos ver então que $\hat{R}_\lambda |\alpha\rangle = C' |e^{i\lambda} \alpha\rangle$, onde $|e^{i\lambda} \alpha\rangle$ é novamente um estado coerente e C' é apenas um fator de fase.

Demonstração:

Fazendo uso das equações (2.21) e (2.22), temos

$$\begin{aligned} \hat{R}_\lambda |\alpha\rangle &= e^{i\lambda \hat{a}^\dagger \hat{a}} \left(e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \right) \\ &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)^n}{\sqrt{n!}} e^{i\lambda \hat{n}} |n\rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{i\lambda} \alpha \hat{a}^\dagger)^n}{n!} |0\rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2/2} e^{e^{i\lambda} \alpha \hat{a}^\dagger} |0\rangle \\ &= |e^{i\lambda} \alpha\rangle. \end{aligned} \quad (2.28)$$

A partir do que foi mostrado acima podemos ver que a evolução temporal do estado coerente é dada por

$$e^{-i\hat{H}t} |\alpha\rangle = e^{-it/2} |\alpha e^{-it}\rangle, \quad (2.29)$$

onde $\hat{H}$ é o operador hamiltoniano do oscilador harmônico. Esse resultado corresponde à estabilidade temporal dos estados coerentes [65–69], o que significa que uma evolução temporal preserva a sua amplitude acrescentando apenas um fator de fase, ou seja, o estado coerente permanece coerente e a dependência das partes real e imaginária de α com o tempo obedecem às equações de Hamilton para um oscilador clássico (veja, por exemplo, a referência [70]).

2.4 Estatística de fótons

No *laser*, atuando acima do limiar³, apesar de serem bósons, os fótons não seguem a estatística de Bose-Einstein. Isso ocorre porque o *laser* não é um sistema em equilíbrio térmico (veja, por exemplo, [58, 71]). Se o estado do campo quantizado for coerente, sua estatística será poissoniana. Por outro lado, quando o estado do campo apresentar uma estatística super-poissoniana, o *laser* estará funcionando abaixo do limiar de operação (*threshold*) e essa estatística é de Bose-Einstein. Acontece que, quando o *laser* ultrapassa o limiar de operação, sua estatística vai mudando até que, muito acima do limiar, esta vai se tornando poissoniana, correspondendo ao estado coerente.

Uma das características necessárias para o funcionamento de um *laser* é a ocorrência de inversão de população atômica. Isso ocorre quando se tem um nível superior mais populado por átomos no estado excitado que no nível inferior⁴. Denomina-se “inversão” pelo fato de, nos sistemas físicos comumente encontrados, o contrário acontece naturalmente. Em um sistema em banho térmico, quanto mais a temperatura aumenta, mais excitados ficam os dois níveis atômicos que interagem com o campo, N_1 e N_2 . Entretanto, N_2 nunca excede N_1 . Em vez disso, em uma temperatura infinita, a população N_2 e N_1 tornam-se iguais. Em outras palavras, não ocorre inversão de população ($N_2/N_1 > 1$) em um sistema em equilíbrio térmico. Para atingir a inversão de população, portanto, é necessário conduzir o sistema ao mencionado estado de não-equilíbrio.

A probabilidade $P_n(\alpha)$ de se obter um particular nível de energia n quando o sistema está em um estado coerente $|\alpha\rangle$ é dada por [13]

$$P_n(\alpha) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}. \quad (2.30)$$

Essa é uma distribuição de Poisson centrada na média $|\alpha|^2$, que é também o número médio de fótons $\langle \hat{n} \rangle = \bar{n}$. Tem-se também que $(\Delta \hat{n})^2 = |\alpha|^2$. Quando fora do equilíbrio térmico, os fótons podem exibir diferentes distribuições de probabilidade [24]. Para detalhes sobre contagem e estatística de fótons veja o capítulo 5 da referência [5]. Sempre que o PM assume valores negativos⁵, tem-se então um ENC do campo fotônico. A distribuição do número de fótons de um estado coerente é uma poissoniana, logo o seu PM é zero.

³O limiar do *laser* é o menor nível de excitação no qual a produção de um *laser* é dominada por emissão estimulada e não por emissão espontânea. Abaixo do limite, a potência de saída do *laser* aumenta lentamente com o aumento da excitação.

⁴Considerando um sistema com apenas dois níveis.

⁵O PM é definido na seção 3.4.

Portanto, os estados coerentes podem ser considerados como a fronteira entre os estados clássicos e os ENC do campo (cf. seção 2.2).

Nós podemos representar qualquer operador densidade $\hat{\rho}$ na base coerente da seguinte forma

$$\hat{\rho} = \int P(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha, \quad (2.31)$$

onde $\int P(\alpha) d^2\alpha = 1$. A função de Glauber-Sudarshan para um estado coerente é apenas uma função δ de Dirac, ou seja, $P(\alpha) = \delta^{(2)}(\alpha - \alpha_0)$, o que o qualifica como o estado quântico mais clássico de todos, estando na interface separando os domínios quântico e clássico [13, 18]. Por outro lado, foi mostrado por M. Hillery [72] que a função $P(\alpha)$ de qualquer outro estado puro possui um pico ainda maior que a função δ . Por sua vez, para o estado de Fock a função de Glauber-Sudarshan é dada por

$$P(\alpha) = \frac{e^{|\alpha|^2}}{n!} \frac{\partial^{2n}}{\partial \alpha^n \partial \alpha^{*n}} \delta^{(2)}(\alpha). \quad (2.32)$$

Essa categoria de função é chamada de distribuição temperada, sendo ainda mais concentrada que a função δ de Dirac.

2.5 Não-ortogonalidade

O produto interno entre dois estados coerentes $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$ é dado por

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \beta \rangle &= e^{-|\alpha|^2/2 - |\beta|^2/2} \langle 0 | e^{\alpha^* \hat{a}} e^{\beta \hat{a}^\dagger} | 0 \rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2/2 - |\beta|^2/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}} \langle n | \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\beta)^m}{\sqrt{m!}} | m \rangle \right) \\ &= e^{-|\alpha|^2/2 - |\beta|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^* \beta)^n}{n!} \\ &= e^{-|\alpha|^2/2 - |\beta|^2/2 + \alpha^* \beta}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

e similarmente

$$\langle \beta | \alpha \rangle = e^{-|\alpha|^2/2 - |\beta|^2/2 + \alpha \beta^*}. \quad (2.34)$$

Portanto, podemos escrever

$$|\langle \alpha | \beta \rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2 - |\beta|^2 + \alpha\beta^* + \alpha^*\beta} = e^{-|\alpha - \beta|^2}. \quad (2.35)$$

Os estados coerentes também possuem incerteza mínima, ou seja, a relação de incerteza de Heisenberg é satisfeita com a igualdade

$$(\Delta \hat{x})(\Delta \hat{p}) = \frac{1}{2}, \quad (2.36)$$

e é também uma variável de ação, isto é, está relacionado diretamente com a energia do sistema

$$\langle \alpha | \hat{H} | \alpha \rangle = \langle \alpha | (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}) | \alpha \rangle = |\alpha|^2 + \frac{1}{2}, \quad (2.37)$$

onde o primeiro termo do lado direito representa a intensidade da onda clássica e o segundo termo representa a energia do estado de vácuo.

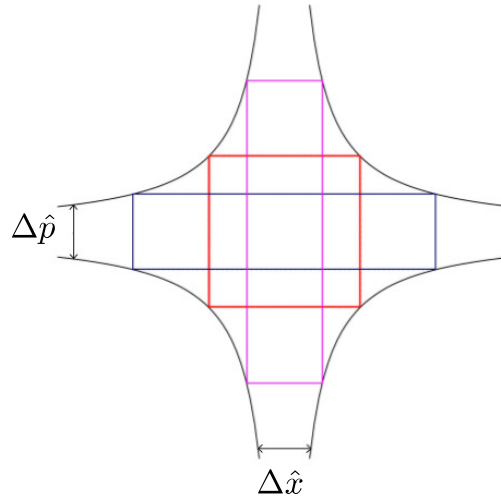


Fig. 2.2: Estrutura em forma de estrela que contém todas as células de Planck. Três delas são desenhadas na estrutura. A célula de Planck central é desenhada em vermelho.

É possível determinar uma partição do espaço de fase em células de tamanho $1/2$, onde a incerteza em $\hat{x}$ vezes a incerteza em $\hat{p}$ seja mínima [73]. Considere o caso em que se queira indicar a posição x e o momento p de uma partícula no plano $x - p$. Suponha que a incerteza na posição seja conhecida, por exemplo, $\Delta \hat{x} = 1$. Portanto, $\Delta \hat{p}$ deve ser $1/2$. Desse modo, podemos desenhar um retângulo no plano $x - p$ com lados $\Delta \hat{x} = 1$ e $\Delta \hat{p} = 1/2$. Como não conhecemos a incerteza precisa da posição ou do momento,

obtemos uma coleção de retângulos para cada combinação de incertezas em $\hat{x}$ e $\hat{p}$. Todas as células obtidas possuem área $1/2$ e estarão em uma estrutura em forma de estrela, como ilustrado na figura (2.2). Os retângulos são chamados células de Planck. A célula com a mesma incerteza na posição e no momento é chamada célula de Planck central, a qual é desenhada em vermelho na figura (2.2). Uma célula de Planck central possui lados: $\Delta\hat{x} = \Delta\hat{p} = 1/\sqrt{2}$. Existem infinitas células de Planck, mas há apenas uma célula de Planck central. Para criar a partição do plano $x - p$ pelas células de Planck, é necessário usar funções de onda de incerteza mínimas. Dessa forma, os estados coerentes caracterizam matematicamente as células de Planck.

2.6 Base super completa

Diferentemente da base de Fock, a base coerente é super completa. Isso permite diagonalizar, na mesma base, operadores que não comutam entre si. Vemos na equação (2.35) que se um sistema está em um estado $|\alpha\rangle$, a possibilidade de que o sistema esteja no estado $|\beta\rangle$ é diferente de zero porque $|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 \neq 0$ para $\alpha \neq \beta$. Há, portanto, um *overlap* entre as componentes da base coerente. Em outras palavras, o conjunto de todos os estados coerentes não é linearmente independente. Portanto, uma vez que $\langle\alpha|\beta\rangle \neq 0$ para $\alpha \neq \beta$, diz-se que os estados coerentes formam uma base super completa. Isso pode ser demonstrado como segue.

$$\int_{all} |\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha = \int_{all} \sum_{n,n'} e^{-|\alpha|^2} \frac{\alpha^n \alpha^{*n'}}{\sqrt{n!n'!}} |n\rangle\langle n'| d^2\alpha,$$

onde $\alpha = re^{i\theta}$ e $d^2\alpha = r dr d\theta$. Então temos

$$\begin{aligned} \int_{all} |\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha &= \sum_{n,n'} \frac{|n\rangle\langle n'|}{\sqrt{n!n'!}} \int_0^\infty r^{n+n'+1} e^{-r^2} dr \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i\theta(n-n')} d\theta}_{2\pi\delta_{n,n'}} \\ &= 2\pi \sum_n \frac{|n\rangle\langle n|}{n!} \underbrace{\int_0^\infty r^{2n+1} e^{-r^2} dr}_I. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $r^2 = x$ (com $dr = dx/2r$), temos

$$I = \int_0^\infty (r^2)^n e^{-r^2} r dr = \frac{1}{2} \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = \frac{\Gamma(n+1)}{2} = \frac{n!}{2}.$$

Segue então que

$$\int_{all} |\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha = \pi \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n|}_{\hat{\mathbf{I}}}.$$

Portanto, temos

$$\frac{1}{\pi} \int_{all} |\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha = \hat{\mathbf{I}},$$

onde a integração deve ser feita em todo o espaço de fase [12, 13].

Para um estado arbitrário $|\psi\rangle$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \langle\alpha|\psi\rangle &= \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}} \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \psi(\alpha^*)^n \end{aligned}$$

onde $\psi_n = \langle n|\psi\rangle$ e

$$\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \quad (2.38)$$

é sempre convergente sobre todo o plano complexo z , ou seja, $\psi(z)$ é uma função completa, uma vez que $\langle\psi|\psi\rangle = \sum n |\langle n|\psi\rangle|^2 = 1$. As funções $\psi(z)$ constituem o espaço Segal–Bargmann [74, 75] de funções completas. Se $|\psi\rangle$ é um estado de número, então $\psi(z) = \psi_n \frac{z^n}{\sqrt{n!}}$. Essas funções formam uma base ortonormal no espaço de Segal-Bargmann.

Se quisermos transformar uma equação contendo operadores (digamos $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$) em uma equação equivalente contendo funções clássicas isso é possível porque, na base coerente, embora $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ não comutem, eles podem ser diagonalizados simultaneamente. Essa façanha não é possível na base de Fock, pois nesta base os operadores que não comutam não podem ser simultaneamente diagonalizados (veja, por exemplo, [76]). Para mais detalhes sobre essas e outras propriedades notáveis dos estados coerentes veja, por exemplo, [77, 78].

2.7 Operadores na forma normal ordenada

Não se trata exatamente de uma propriedade dos estados coerentes, mas por vezes é conveniente escrevermos os operadores de forma que todos os operadores de aniquilação fiquem à direita e os operadores de criação fiquem à esquerda dos de aniquilação. Por exemplo,

$$\hat{A} = \hat{a}^2 \hat{a}^\dagger = \hat{a}(\hat{a} \hat{a}^\dagger) = \hat{a}(1 + \hat{a}^\dagger \hat{a}) = \hat{a} + (1 + \hat{a}^\dagger \hat{a})\hat{a} = 2\hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a}^2. \quad (2.39)$$

Assim, o valor esperado de um operador normal ordenado é obtido na forma

$$\langle \alpha | \hat{A}(\hat{a}^\dagger, \hat{a}) | \alpha \rangle = \hat{A}(\alpha^*, \alpha) = \hat{A}(\langle \hat{a}^\dagger \rangle, \langle \hat{a} \rangle). \quad (2.40)$$

Como exemplo temos,

$$\langle \alpha | (\hat{a}^\dagger)^n \hat{a}^m | \alpha \rangle = \alpha^{*n} \alpha^m = \langle \alpha | \hat{a}^\dagger | \alpha \rangle^n \langle \alpha | \hat{a} | \alpha \rangle^m. \quad (2.41)$$

A expansão normal-ordenada de uma potência do operador de número $\hat{n}$ em termos dos operadores $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$, que satisfazem a relação de comutação (2.6), pode ser escrita na forma [79–81]

$$(\hat{a}^\dagger \hat{a})^m = \sum_{l=0}^m \mathfrak{S}_l^m (\hat{a}^\dagger)^l \hat{a}^l, \quad (2.42)$$

onde $\mathfrak{S}_l^m$ é o número de Stirling do segundo tipo (veja, por exemplo, [82]).

3 *Superposição de estados coerentes sobre uma semirreta*

Superposições exibem propriedades distintas das mostradas por suas componentes, por exemplo, enquanto os estados coerentes sempre mostram estatística poissoniana, suas superposições podem mostrar estatísticas sub-poissonianas ou super-poissonianas [83–85]. Um estado sub-poissoniano refere-se ao campo eletromagnético quantizado onde a forma de linha da distribuição de fótons é mais estreita que aquela do estado coerente. O inverso ocorre para a estatística super-poissoniana.

3.1 Obtendo um estado de fase otimizado

Dentre os vários estados de interesse a serem gerados está o estado de fase. Contudo, sua obtenção experimental permanece um problema em aberto, uma vez que se trata de um estado ideal, não-normalizável e tendo valor esperado do número de fótons infinito, o mesmo valendo para a incerteza de número [86–89]. Podemos obter apenas aproximações do estado de fase ideal. Dai surge a questão: como gerar um estado de fase melhor otimizado? Por exemplo, podemos dizer que um estado $|\psi\rangle$ tende para um estado de Fock $|N\rangle$ se a sua distribuição de número P_n tende para uma delta de Kronecker, $P_n \rightarrow \delta(n, N)$. Semelhantemente, um requisito estabelecido na literatura afirma que um estado $|\psi\rangle$ tende para um estado de fase otimizado $|\varphi\rangle$ quando sua distribuição de fase $P(\theta)$ tende para uma delta de Dirac, $P(\theta) \rightarrow \delta(\theta - \varphi)$.

A distribuição de fase de um dado estado $|\psi\rangle$ do campo eletromagnético de modo único pode ser obtida pelas definições de Susskind-Glogover [90] e Pegg-Barnett [91], como $P_{|\psi\rangle}(\theta) = |\langle\theta|\psi\rangle|^2$, onde $|\theta\rangle$ é o estado de fase ideal definida por Pegg-Vaccaro-

Barnett [92]

$$|\theta\rangle = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=0}^M e^{im\theta} |m\rangle. \quad (3.1)$$

O estado $|\theta\rangle$ é dito ideal no sentido que esse não pode ser alcançado experimentalmente, uma vez que deveria ter um número médio de fótons $\langle \theta | \hat{n} | \theta \rangle \sim \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^M m$ e isso despenderia uma energia infinita. Tendo em vista que a distribuição $P_{|\psi\rangle}$ é correta [93], torna-se importante a obtenção de estados que possam ser implementados experimentalmente e que se aproximam do estado de fase ideal $|\phi\rangle$, este que tem distribuição de fase dada por $P_{|\phi\rangle}(\theta) = \delta(\theta - \phi)$. Uma tentativa para aproximar um estado de fase para um estado de fase ideal $|\phi\rangle$ foi construída usando um estado fortemente comprimido, para o qual a elipse de erro no espaço de fase toca a origem e possui um eixo muito longo na direção de ϕ [94].

Estados de número em modo único munidos de 2^N fótons ($|2^N\rangle$) podem ser escritos, em uma boa aproximação, como uma superposição de 2^N estados coerentes, simetricamente distribuídos sobre um círculo centrado na origem do espaço de fase, através do ajuste em suas intensidades. Uma proposta para sua produção experimental foi apresentada por Malbouisson e Baseia [95] e Maia e coautores [96]. Uma vez que os estados de número e de fase são estados conjugados, isso sugere a aproximação do estado de fase pela superposição de estados coerentes dispostos sobre uma linha semirreta (SECR), com uma das extremidades na origem do espaço de fase. Consideramos a superposição de estados coerentes sobre uma reta, a partir de 2^N estados coerentes, para aproximar para o estado de fase $|\phi\rangle$, na forma

$$|\phi^N(\alpha)\rangle = \frac{1}{\mathcal{N}_N} \sum_{j=1}^{2^N} |(2j-1)\alpha\rangle, \quad (3.2)$$

onde a constante de normalização é dada por

$$\mathcal{N}_N^2(\alpha) = 2^N + \sum_{j=1}^{2^N-1} 2(2^N - j) e^{-2|\alpha|^2 j^2}. \quad (3.3)$$

Tem-se que, para $\alpha = r \exp(i\phi)$, a constante de normalização dependerá apenas de $r^2 = |\alpha|^2$. Esse estado pode ser representado no espaço de fase como mostrado na figura (3.1).

O estado de fase $|\phi^N(\alpha)\rangle$ pode ser expandido na base de Fock. Aqui ele resulta na

seguinte forma

$$|\phi^N(\alpha)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|\phi^N\rangle |n\rangle = \frac{1}{\mathcal{N}_N} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^N} e^{-\frac{1}{2}(2j-1)^2|\alpha|^2} \frac{(2j-1)^n |\alpha|^n}{\sqrt{n!}} e^{in\phi} |n\rangle, \quad (3.4)$$

enquanto o número médio de fótons é dado por

$$\langle \phi^N | \hat{n} | \phi^N \rangle = \frac{|\alpha|^2}{\mathcal{N}_N^2} \sum_{j,l=1}^{2^N} (2j-1)(2l-1) e^{-2|\alpha|^2(j-l)^2}, \quad (3.5)$$

o qual aumenta infinitamente quando $N \rightarrow \infty$. Por outro lado, a distribuição de fase associada ao estado $|\phi^N\rangle$, $P(\theta) = P_N(\theta; \phi)$, é dada por

$$\begin{aligned} P_N(\theta; \phi) &= |\langle \theta | \phi^N \rangle|^2 = \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \phi^N \rangle e^{-in\theta} \right|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi \mathcal{N}_N^2} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^N} e^{-\frac{1}{2}(2j-1)^2|\alpha|^2} \frac{(2j-1)^n |\alpha|^n}{\sqrt{n!}} e^{in(\phi-\theta)} \right|^2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

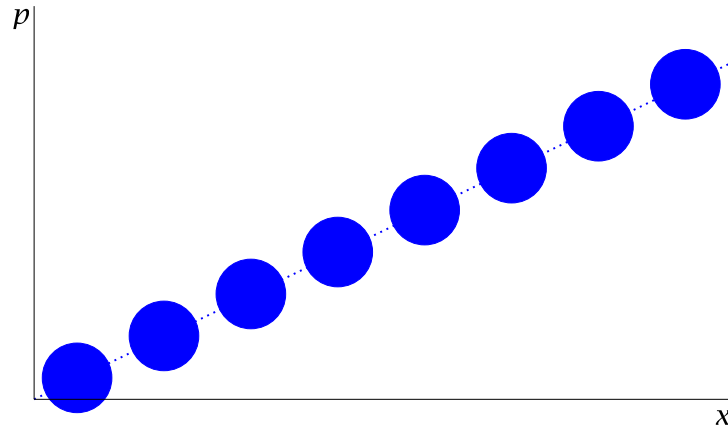
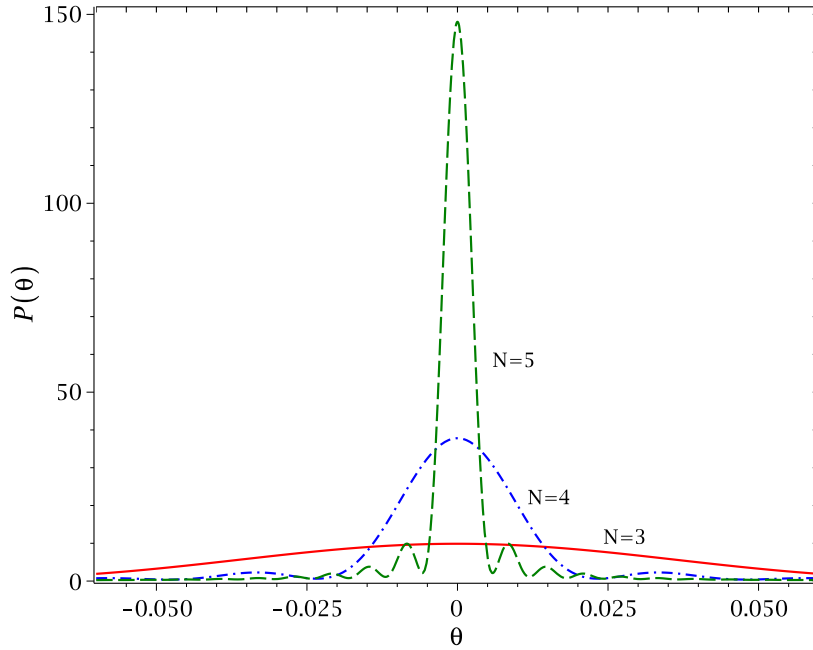


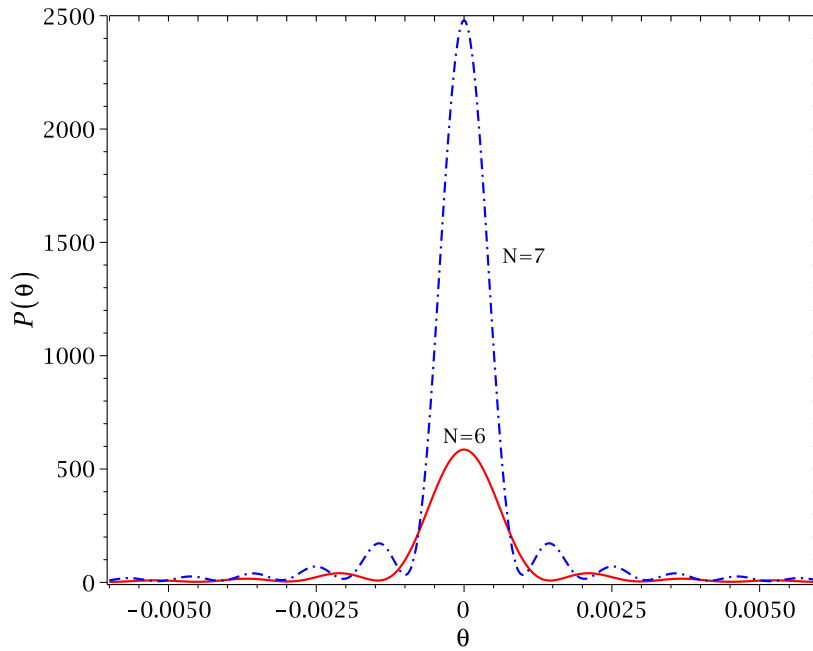
Fig. 3.1: Representação pictórica da superposição de estados coerentes $|\phi^3\rangle$ sobre uma reta no espaço de fase.

Essa distribuição de fase é simétrica em torno de ϕ , dependendo unicamente da diferença $\theta - \phi$. Dessa forma, para simplificar e sem perder a generalidade, nós assumimos $\phi = 0$ daqui em diante. A figura (3.2) apresenta o perfil de $P_N(\theta) = P_N(\theta; \phi = 0)$ em função de θ , para diversos valores de N . A distribuição $P_N(\theta)$ torna-se um pico muito alto e muito estreito em torno de $\phi = 0$ quando aumentamos o valor de N . Verificamos então que o estado $|\phi^N\rangle$ tem alcançado o estado de fase ideal $|\phi\rangle$ no limite $N \rightarrow \infty$. Porém,

reiteramos que alcançar esse limite não é possível, pois requer energia infinita. Para saber-



(a)



(b)

Fig. 3.2: Distribuição de fase $P_N(\theta) = P_N(\theta; \phi = 0)$ para (a) $N = 3, 4, 5$ e (b) $N = 6, 7$, tomando $|\alpha| = 0.5$. Para $N = 7$ a SECR é uma boa aproximação do estado de fase ideal.

mos quão perto um dado estado $|\psi\rangle$ está de um outro estado $|\xi\rangle$ é necessário e suficiente determinarmos a fidelidade entre eles, $F = |\langle \xi | \psi \rangle|^2$. Por exemplo, se $|\xi\rangle = |n\rangle$ é um es-

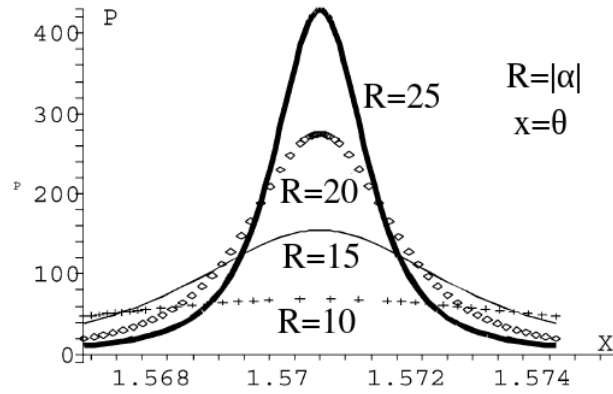


Fig. 3.3: Distribuição de fase adaptada de Aragão e coautores [94].

tado de número qualquer, a fidelidade entre $|\psi\rangle$ e $|n\rangle$ nos dá a distribuição do número de fótons do estado $|\psi\rangle$, $P_{|\psi\rangle} = |\langle n|\psi\rangle|^2$. Entretanto, o conceito de fidelidade atribui-se apenas a estados normalizados, com $0 \leq F \leq 1$, e portanto não pode ser usado para o estado de fase ideal, que é não-normalizado. A quantidade $P(\theta) = |\langle \theta|\psi\rangle|^2$ nos dá a distribuição de fase do estado $|\psi\rangle$, mas essa quantidade é não-limitada (seu valor máximo pode ser muito grande).

Podemos então comparar o estado SECR com outro estado que é uma boa aproximação do estado de fase ideal. Trata-se do estado fortemente comprimido, $|\beta, z\rangle = \hat{\mathcal{D}}_\beta \hat{S}_z |0\rangle$, onde $\hat{\mathcal{D}}_\beta$ é o operador deslocamento (cf. seção 2.2) e $\hat{S}_z = \exp[(z^* \hat{a}^2 - z \hat{a}^{\dagger 2})/2]$ é o operador *squeezing*, com $\beta = R \exp(i\theta)$ e $z = s \exp(i\phi)$. Fixando $\phi = 2\theta - \pi$ e $s = \ln(R)$, a elipse de erro iniciando na origem do espaço de fase e o eixo maior estando na direção ϕ , como mostrado por Aragão e coautores [94]. Na figura (3.2), escolhemos parâmetros tais que a distribuição de fase do estado $|\phi^N(\alpha)\rangle$, para $|\alpha| = 0.5$ e $N = 5$, relembra a distribuição de fase do estado apresentada na figura (3.3), com $R = 15$. Ambos os estados possuem excitações similares, $\langle n \rangle \simeq 300$, e possuem o mesmo valor máximo da distribuição de fase $P_{\max}(\theta) \simeq 150$. Uma vez que o tempo de descoerência depende da intensidade do campo, $\tau_d \sim 1/\langle n \rangle$, uma comparação relevante entre esses estados é a eficiência de prepará-los em laboratório. Essa não é a intenção aqui. A proposta mostra na seção 3.3 como o estado SECR pode ser produzido usando uma CQED padrão.

3.2 MJC: caso dispersivo e ressonante

Como mencionado anteriormente (cf. Cap.1), o MJC [50] possui grande importância na literatura, com aplicações em Óptica Quântica, em nanocircuitos quânticos híbridos, em pontos quânticos (*quantum dots*), etc. A evolução temporal do sistema total (átomo+campo) é descrita pela equação de Schrödinger (com $\hbar = 1$), com hamiltoniano

$$\hat{H} = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \omega_0 \hat{\sigma}_z + \lambda (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (3.7)$$

A interpretação dos termos da interação acima é a seguinte:

$\hat{\sigma}_+ \hat{a}$: um fóton é absorvido e o átomo é excitado, $g \rightarrow e$;

$\hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger$: um fóton é emitido e o átomo decai, $e \rightarrow g$;

$\hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger$: um fóton é emitido e o átomo é excitado, $g \rightarrow e$;

$\hat{\sigma}_- \hat{a}$: um fóton é absorvido e o átomo decai, $e \rightarrow g$.

Notemos que os dois últimos casos são processos que não obedecem às leis de conservação de energia. Isso pode ser contornado fazendo uso da aproximação de onda girante. A aproximação de onda girante (RWA) consiste basicamente em desprezar os termos que oscilam rapidamente com o tempo. Então, obtemos

$$\hat{H}_{JC} = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \omega_0 \hat{\sigma}_z + \lambda (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger), \quad (3.8)$$

com os operadores $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ definidos na seção 2.1, $\hat{\sigma}_- = |g\rangle\langle e|$ ($\hat{\sigma}_+ = |e\rangle\langle g|$) é o operador abaixamento (levantamento) do elétron entre os níveis atômicos inferior e superior, o operador inversão de população atômica $\hat{\sigma}_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$ é uma das matrizes de Pauli ($\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$, $\hat{\sigma}_z$, $\hat{\mathbf{1}}$), ω (ω_0) é a frequência do campo (átomo), e λ define o acoplamento átomo-campo. Identificamos $\hat{H}_0 = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \omega_0 \hat{\sigma}_z$ como o “hamiltoniano livre”, enquanto $\hat{V} = \lambda (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger)$ é a interação de Jaynes-Cummings no caso ressonante. Quando $\omega = \omega_0$, o átomo e o campo estão em ressonância e temos então $[\hat{H}_0, \hat{V}] = 0$. Como consequência, o hamiltoniano total torna-se facilmente solucionável, na forma exata. Quando os subsistemas (digamos átomo e campo) estão defasados, com $\Delta\omega = \omega_0 - \omega \neq 0$, podem ocorrer duas possibilidades: eles podem estar próximos da ressonância, o que significa $\frac{\Delta\omega}{\lambda} \approx 1$, ou distante da ressonância, quando $\frac{\Delta\omega}{\lambda} \gg 1$. No primeiro caso, pela adição e subtração do termo $\frac{1}{2} \omega \hat{\sigma}_z$ na equação (3.8), o hamiltoniano descrevendo a evolução da partícula assume a forma $\hat{H}' = \omega (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}_z) + \frac{1}{2} \Delta\omega \hat{\sigma}_z + \lambda (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger)$, onde $\hat{H}'_0 = \omega (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}_z)$ é o novo “hamiltoniano livre” e $\hat{V}' = \frac{1}{2} \Delta\omega \hat{\sigma}_z + \lambda (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger)$ é o novo hamiltoniano de interação. Dessa forma temos $[\hat{H}'_0, \hat{V}'] = 0$, e o sistema átomo-campo torna-se facilmente

solucionável de forma exata.

Por outro lado, se a defasagem $\Delta\omega$ é grande ($\frac{\Delta\omega}{\lambda} \gg 1$), a solução do problema torna-se mais complicada. Nesse caso uma boa aproximação é obtida a partir do hamiltoniano efetivo de interação $\hat{V}''$ [97, 98]. Nesse procedimento os átomos devem ser gerados de tal forma que o nível excitado $|e\rangle$ esteja acoplado a um terceiro estado mais excitado $|i\rangle$ pela frequência de transição $\omega_o = \omega_c + \delta$, onde ω_c define a frequência da cavidade e δ representa a defasagem entre os estados $|e\rangle$ e $|i\rangle$. Essa deve ser apropriadamente ajustada de modo que apenas a transição virtual ocorra entre esses níveis. Esse tratamento foi usado por Ferreira e coautores [99] para calibrar as velocidades de átomos a fim de obter uma lista de estados do campo tendo propriedades pré-selecionadas. O hamiltoniano de interação modificado é escrito na forma,

$$\hat{H}_{ef} = w_{eff} \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\sigma}_3 = w_{eff} \hat{a}^\dagger \hat{a} (|i\rangle\langle i| - |e\rangle\langle e|), \quad (3.9)$$

onde $w_{eff} = \frac{2\mathbf{d}^2}{\delta}$ e $\mathbf{d}$ é momento de dipolo atômico (ge) [100]. O termo de interação da equação (3.9) é válido assumindo que $\mathbf{d}^2 n \gg \delta^2 + \gamma$ onde n é o número de fótons e γ é a taxa de emissão espontânea [101]. Por sua vez, um átomo excitado colocado numa cavidade no estado de vácuo do campo ($n = 0$) sofre, periodicamente, decaimentos espontâneos reversíveis. Através da evolução temporal do estado do sistema é possível explicar, sob a luz do MJC, a emissão espontânea.

3.2.1 Exemplificando o MJC ressonante

Considerando um cenário mais realístico, onde o sistema sofre perdas e portanto perde coerência, nós escrevemos um hamiltoniano mais geral dado por,

$$\hat{H}'_{JC} = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \omega_0 \hat{\sigma}_z + \lambda (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger) - i \frac{\gamma}{2} |e\rangle\langle e|. \quad (3.10)$$

A expressão acima difere da equação (3.8) pela adição de um quarto termo correspondendo às perdas, onde γ é a taxa de decaimento do estado excitado $|e\rangle$ para o estado fundamental $|g\rangle$.

Nós usamos uma abordagem fenomenológica via uso de um hamiltoniano não-hermitiano, muito em voga ultimamente, por exemplo, como o usado por Baker e Singleton [102] para determinar os valores esperados de observáveis arbitrários. Lee e I'Yi [103] usaram um

hamiltoniano similar para estudar transformações canônicas em mecânica quântica. O mesmo foi feito por Longhi [104] para mostrar uma técnica laboratorial que visualiza propriedades espectrais em óptica. A função de onda que descreve a evolução temporal do hamiltoniano do sistema descrito na equação (3.10) pode ser escrita como

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n [C_{g,n}(t)|g, n\rangle + C_{e,n}(t)|e, n\rangle], \quad (3.11)$$

onde $C_{e,n}(t)$ e $C_{g,n}(t)$ são, respectivamente, as amplitudes de probabilidade para $|e, n\rangle$ e $|g, n\rangle$. Esse é um estado do átomo vestido pelo estado do campo.

Assumimos o átomo inicialmente preparado no nível excitado $|e\rangle$ e o campo no estado coerente

$$|\alpha\rangle = \sum_n C_n |n\rangle = \sum_n \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (3.12)$$

Consideramos também a seguinte condição inicial: $C_{g,n}(0) = 0$ e $\sum_n |C_{e,n}(0)|^2 = 1$. Assumindo que os sub-sistemas estão inicialmente desacoplados ($t = 0$), isto é, ainda não interagindo, então o estado inicial do sistema pode ser escrito como,

$$|\Psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |e, n\rangle. \quad (3.13)$$

A evolução do sistema (equação de Schrödinger) $|\Psi(t)\rangle$ é dada por (com $\hbar = 1$),

$$i \frac{d|\Psi(t)\rangle}{dt} = \hat{H}|\Psi(t)\rangle, \quad (3.14)$$

onde, para este caso em particular, $\hat{H}$ é o hamiltoniano dado na equação (3.10). Podemos encontrar um conjunto de equações de movimento na forma,

$$\frac{\partial C_{e,n}(t)}{\partial t} = -in\omega C_{e,n}(t) - \frac{i}{2}\omega_0 C_{e,n}(t) - i\lambda\sqrt{n+1}C_{g,n+1} - \frac{\gamma}{2}C_{e,n}(t), \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial C_{g,n+1}(t)}{\partial t} = -i(n+1)\omega C_{g,n+1}(t) + \frac{i}{2}\omega_0 C_{g,n+1}(t) - i\lambda\sqrt{n+1}C_{e,n}(t). \quad (3.16)$$

A solução desse sistema de equações fornece $C_{e,n}(t)$ e $C_{g,n+1}(t)$. Nós obtivemos a

solução numericamente usando o método de Runge-Kutta-Fehlberg (rk45). A inversão de população atômica, responsável pela ocorrência do *laser*, também pode ser escrita em termos dos coeficientes acima como,

$$I(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[|C_{e,n}(t)|^2 - |C_{g,n+1}(t)|^2 \right]. \quad (3.17)$$

Os resultados encontrados são mostrados nas figuras 3.4(a), 3.4(b), e 3.4(c)). A figura 3.4(a) apresenta decaimento lento e reproduz os dados encontrados por Banacloche [105]. As figuras 3.4(b) e 3.4 (c) mostram decaimento. O efeito de decaimento no átomo leva à redução da amplitude de oscilação da inversão de população. Quanto maior a taxa de decaimento, maior a redução da amplitude de oscilação, como esperado. O decaimento na cavidade afeta a transição de fótons entre os níveis $|e\rangle$ e $|g\rangle$.

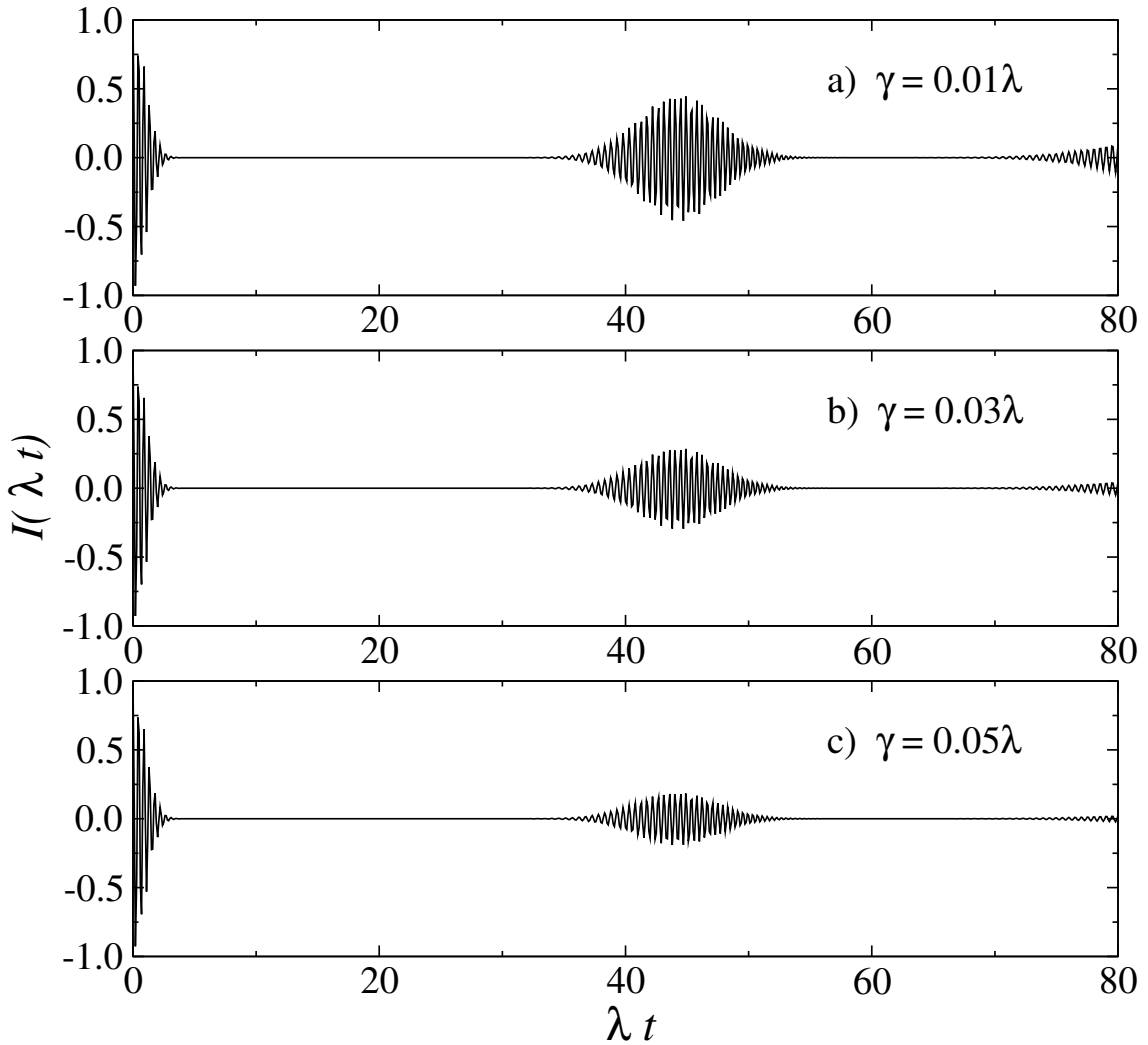


Fig. 3.4: Evolução temporal da inversão de população atômica com diferentes coeficientes de decaimento γ para $\langle \hat{n} \rangle = 49$, $\omega = \omega_0 = 8\lambda$. (a) $\gamma = 0.01\lambda$; (b) $\gamma = 0.03\lambda$; (c) $\gamma = 0.05\lambda$.

A ocorrência de “colapso de Cummings” e resurgimento das oscilações da inversão da população atômica ocorre quando o átomo interage com certos tipos de estados do campo luminoso quantizado. O efeito é atribuído à granularidade do campo (fótons). A região de colapso sendo onde ocorre interferência destrutiva, enquanto o “revival” das oscilações sendo atribuído a interferência construtiva. Uma surpreendente observação inicial do efeito foi que ele não ocorria se o campo inicial fosse um estado de número $|n\rangle$, arbitrário, o mais quântico de todos, mas ocorria se o campo inicial fosse um estado coerente, o mais clássico dentre os campos quantizados. O efeito ocorre no átomo mas exige que o campo de radiação esteja quantizado. Para mais detalhes sobre essa discussão, veja Ferreira e coautores [106].

3.3 Criação da SECR em cavidades

Para produzir o estado SECR que se aproxima do estado de fase ideal em cavidade microonda seguimos um protocolo que é uma generalização do procedimento utilizado para criar superposições de estados coerentes, tais como o “gato” de Schrödinger [107, 108]. Um esquema similar foi proposto como mecanismo para gerar estado de número como superposição de estados coerentes sobre um círculo [95, 96] e para produzir estados comprimidos como superposição de estados coerentes sobre uma semirreta no espaço de fase [109].

A figura 3.5 ilustra o aparato esquematicamente. Um forno produz átomos altamente excitados (átomos de Rydberg) com níveis atômicos $|g\rangle$, $|e\rangle$ e $|i\rangle$ (com os números quânticos principais $N = 49, 50, 51$, respectivamente). Os átomos, previamente excitados, passam através de um seletor de velocidades para o nível $|e\rangle$. Então cada átomo atravessa sequencialmente, um por vez, uma primeira zona de Ramsey, depois uma cavidade microonda de alta qualidade—baixa perda—, contendo campo de radiação com o qual o átomo vai interagir, e depois uma segunda zona de Ramsey sendo finalmente detectado. As duas zonas Ramsey são cavidades de baixa qualidade alimentadas pelo gerador de microonda. Essas duas zonas de Ramsey têm funções diferentes: a primeira prepara o estado do campo, a segunda torna o estado átomo-campo uma superposição. O campo interage de forma ressonante com a transição entre os níveis atômicos $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ e possui intensidade ajustada para produzir uma rotação $\pi/2$ no espaço atômico: $|g\rangle \rightarrow (|g\rangle - |e\rangle)/\sqrt{2}$ e $|e\rangle \rightarrow (|g\rangle + |e\rangle)/\sqrt{2}$.

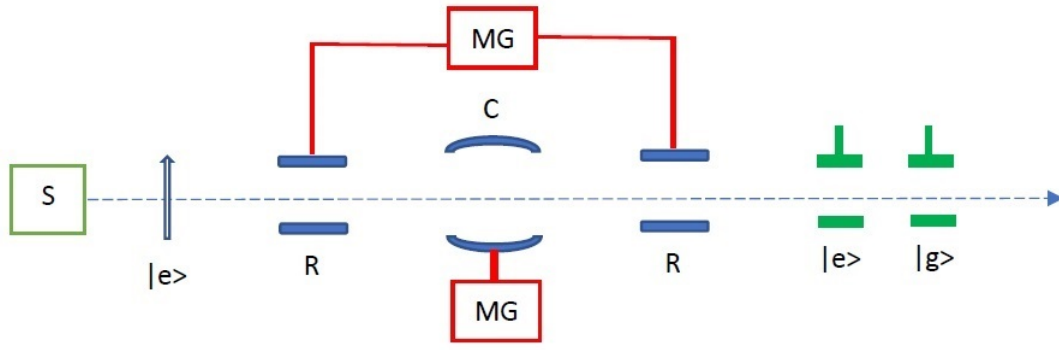


Fig. 3.5: Representação do esquema de uma cavidade QED para produção de estados $|\phi^N\rangle$. Na sequência temos uma fonte de átomos (S), uma zona de Ramsey (R), uma cavidade geradora de microondas (MG), uma segunda zona de Ramsey (R) e dois detectores dos níveis excitado $|e\rangle$ e fundamental $|g\rangle$, nessa ordem.

Por outro lado, a frequência da radiação na cavidade de alta qualidade- Q é ajustada próximo da ressonância da transição $|g\rangle \rightarrow |i\rangle$, com uma pequena defasagem δ , mas para longe da transição $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$. A interação átomo-campo de forma dispersiva pode ser descrita pelo hamiltoniano efetivo dado na equação (3.9). A interação dispersiva produz um desvio de fase $\theta = w_{eff}t_c$ no campo da cavidade, t_c sendo o tempo que o átomo leva para atravessar a cavidade, caso o átomo passe no estado $|e\rangle$ mas não sofre esse efeito quando o estado atômico é $|g\rangle$. Fixamos a velocidade atômica de tal modo que o desvio de fase seja $\theta = \pi$. Além disso, esses são também detectores atômicos que identificam o estado do átomo de prova.

Inicialmente um modo único pode ser preparado em um estado coerente $|\alpha\rangle$ na cavidade de alta qualidade- Q deslocando o estado de vácuo com uma corrente clássica. Dessa forma, um primeiro átomo é enviado através da cavidade, com uma velocidade pré-selecionada e no nível excitado $|e\rangle$. Dessa forma, o estado emaranhado átomo-campo evolui seguindo a sequência: para a primeira zona de Ramsey, para a cavidade de alta qualidade- Q e para a segunda zona de Ramsey (estado ainda não-normalizado), ou seja $|\psi_0\rangle = |e\rangle|\alpha\rangle \rightarrow |\psi_{R_1}^1\rangle = (|g\rangle + |e\rangle)|\alpha\rangle \rightarrow |\psi_C^1\rangle = (|g\rangle|\alpha\rangle + |e\rangle|-\alpha\rangle) \rightarrow |\psi_{R_2}^1\rangle = |g\rangle(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle) + |e\rangle(|-\alpha\rangle - |\alpha\rangle)$. Se o átomo for detectado no estado $|g\rangle$ então o campo na cavidade é projetado no estado $(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)$. Agora, imediatamente após à detecção, liga-se o gerador de microonda alimentando a cavidade com uma corrente clássica com o dobro de intensidade para produzir um deslocamento 2α , e o estado na

cavidade resulta na forma

$$|\phi^1(\alpha)\rangle = \frac{1}{\mathcal{N}_1} \hat{D}(2\alpha) (|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle) = \frac{1}{\mathcal{N}_1} (|\alpha\rangle + |3\alpha\rangle). \quad (3.18)$$

A interação dispersiva entre átomo-campo na cavidade de alta qualidade- Q produz um emaranhamento entre o átomo e o campo quando o átomo atravessa a cavidade.

Agora, se um segundo átomo é enviado através do aparato com a mesma velocidade, quando o estado do campo na cavidade é $|\phi^1(\alpha)\rangle$, o estado átomo-campo evolui seguindo os mesmos passos com o antes mas com $|\alpha\rangle$ substituído por $|\phi^1(\alpha)\rangle$. Então, se o átomo for detectado no estado $|g\rangle$ e um deslocamento de 4α for aplicado na cavidade, o campo na cavidade torna-se

$$|\phi^2(\alpha)\rangle = \frac{1}{\mathcal{N}_2} \hat{D}(4\alpha) (|\alpha\rangle + |3\alpha\rangle + |-\alpha\rangle + |-3\alpha\rangle) = \frac{1}{\mathcal{N}_2} (|\alpha\rangle + |3\alpha\rangle + |5\alpha\rangle + |7\alpha\rangle). \quad (3.19)$$

Prosseguindo com esse procedimento, vê-se que a passagem do k -ésimo átomo, com o campo na cavidade no estado $|\phi^{k-1}(\alpha)\rangle \sim \sum_{j=1}^{2^{k-1}} |(2j-1)\alpha\rangle$, a detecção do átomo no estado $|g\rangle$ seguido por um deslocamento $2^k\alpha$ do campo na cavidade, leva ao estado

$$|\phi^k(\alpha)\rangle = \frac{1}{\mathcal{N}_k} \hat{D}(2^k\alpha) \left(\sum_{j=1}^{2^{k-1}} |(2j-1)\alpha\rangle + \sum_{j=1}^{2^{k-1}} |-(2j-1)\alpha\rangle \right) = \frac{1}{\mathcal{N}_k} \sum_{j=1}^{2^k} |(2j-1)\alpha\rangle. \quad (3.20)$$

Dessa forma, o estado SECR da equação (3.2) pode ser produzido na cavidade de alta qualidade- Q pela passagem de N átomos de Rydberg, todos eles detectados no estado fundamental $|g\rangle$, com o campo na cavidade sendo deslocado $2^k\alpha$ apenas após a detecção do k -th átomo. Para mais detalhes sobre esse processo, veja Ferreira e coautores [110].

A viabilidade da geração do estado $|\phi^N(\alpha)\rangle$ depende naturalmente da eficiência dos vários componentes do arranjo experimental, mas também da probabilidade de sucesso de detectar todos os N átomos no estado fundamental $|g\rangle$. Esse critério é dado por [109]

$$p_N(\alpha) = \prod_{k=1}^N |\langle g | \psi_{R_2}^k \rangle|^2 = \left(\frac{1}{4} \right)^N \mathcal{N}_N^2(\alpha). \quad (3.21)$$

A figura (3.6) mostra que o arranjo é viável experimentalmente para pequenos e moderados valores de N , o número de átomos envolvidos no processo de geração, mas não para grandes valores de $r = |\alpha|$. Isso ocorre devido aos inevitáveis efeitos de descoerência,

que consiste na deteriorização do estado quântico com o passar do tempo: a causa vem do sistema considerado interagir com o reservatório (as paredes da cavidade, por exemplo). Número grande de partículas (fótons) piora a situação, aumenta o estrago do estado que foi preparado.

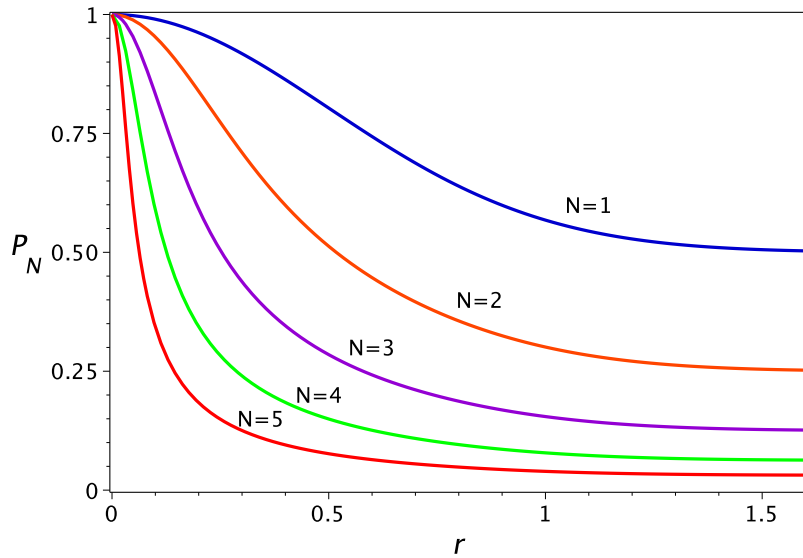


Fig. 3.6: Probabilidade de sucesso de criar a superposição de estados coerentes com uma distribuição de fase bastante concentrada. A chance de obter o estado é inversamente proporcional à N e $r = |\alpha|$.

O procedimento utilizado para gerar o estado $|\phi^N(\alpha)\rangle$ em uma cavidade é similar ao que foi descrito nas referências [95, 109], mas difere da proposta anterior apresentada na referência [111], a qual também utiliza a interação átomo-campo dispersiva. Nessa abordagem, o número de estados coerentes na superposição aumenta linearmente com o número de átomos detectados, N . A vantagem do nosso esquema é que o número de estados coerentes compondo a superposição cresce exponencialmente com o número de átomos detectados.

O procedimento descrito acima pode ser mapeado em um esquema para gerar o estado SECR em modo de onda viajante. Para tal finalidade, o arranjo na figura (3.5) é mapeado em um interferômetro de Mach-Zehnder (MZI), como mostra a figura (3.7), alimentado com estados de Fock $|1\rangle$ e $|0\rangle$ nos modos internos, contendo um meio Kerr não-linear que acopla dispersivamente um dos modos internos com um campo externo em um estado coerente $|\alpha\rangle$, incluindo dois divisores de feixe 50/50 fazendo o papel das zonas de Ramsey [112] do arranjo na figura (3.5). Um conjunto de MZI bem alinhados irá corresponder à sequência de átomos atravessando o arranjo que usa a cavidade [113].

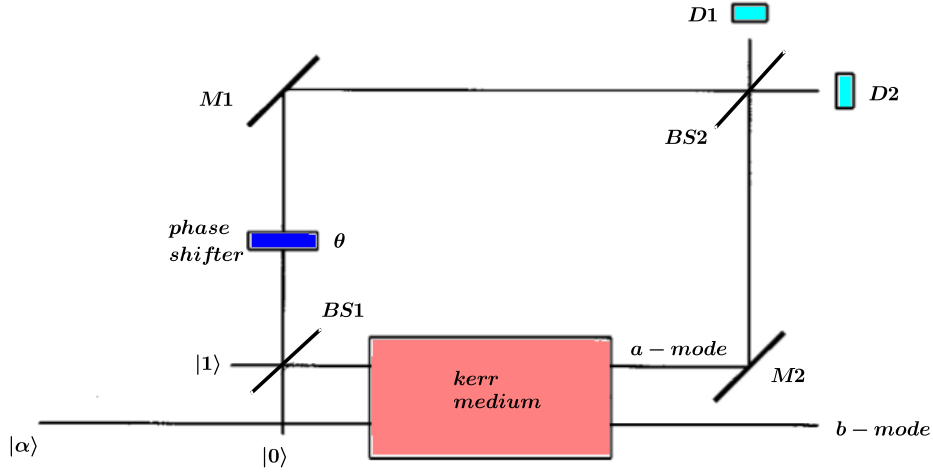


Fig. 3.7: Esquema para o método proposto de geração do estado SECR usando um interferômetro de Mach-Zehnder com um meio Kerr em um braço. $BS1$ e $BS2$ são divisores de feixe. O caminho no sentido horário do interferômetro contém um atraso dando origem a uma mudança de fase indicada como θ . O modo a é o braço do interferômetro que contém o meio Kerr, enquanto o modo b , também passando pelo meio Kerr, contém inicialmente um estado coerente. $D1$ e $D2$ são os detectores de fótons nas portas de saída do interferômetro.

3.4 Propriedades não-clássicas do estado SECR

Aqui investigamos a ocorrência de propriedades não-clássicas do estado $|\phi^N\rangle$, tratando inicialmente a natureza da estatística de fótons e depois avaliando o efeito de compressão de quadratura (*squeezing*), antes mencionado.

3.4.1 Estatística de fótons da SECR

Para avaliarmos a natureza da distribuição estatística do número de fótons do estado $|\phi^N(\alpha)\rangle$, devemos comparar a variância do operador número de fótons, $\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle = \langle\hat{n}^2\rangle - \langle\hat{n}\rangle^2$ com o número médio de fótons. Para esse fim, calculamos o PM definido por [77]

$$Q = \frac{\langle\hat{n}^2\rangle - \langle\hat{n}\rangle^2}{\langle\hat{n}\rangle} - 1. \quad (3.22)$$

O estado do campo da radiação é dito super-poissoniano, poissoniano e sub-poissoniano quando $Q > 0$, $Q = 0$ e $Q < 0$, respectivamente. A diferença entre os três tipos de estatística é ilustrada na figura (3.8), onde compara-se uma distribuição super-poissoniana do número de fótons e uma sub-poissoniana a uma distribuição de Poisson com o mesmo número médio de fótons. Vemos que as distribuições super-poissoniana e sub-poissoniana são, respectivamente, mais larga e mais estreita que a distribuição de Poisson. A ocorrência de estatística sub-poissoniana garante que o estado é não-clássico. Isso ocorre quando a distribuição do número de fótons possui variância menor que a média. A distribuição do número de fótons de um estado coerente é uma poissoniana, logo o seu PM é zero. Entretanto, alguns estados quânticos do campo podem exibir um PM positivo e a sua não-classicalidade pode aparecer na forma de outros efeitos quânticos.

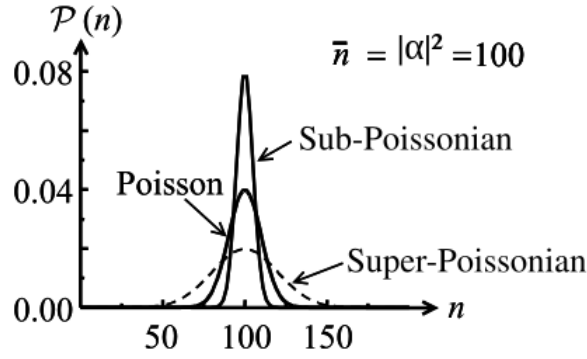


Fig. 3.8: Comparação da estatística de fótons da luz com distribuição de Poisson com a luz sub-poissoniana e a luz super-poissoniana. As distribuições foram tomadas para o mesmo número médio de fótons $\bar{n} = |\alpha|^2 = 100$.

Uma vez que o estado $|\phi^N(\alpha)\rangle$ é uma superposição de estados coerentes, o cálculo de médias de potências do operador número torna-se fácil ao expressarmos $\hat{n}^v$ na forma normal ordenada (cf. seção 2.7), que é escrever $\hat{n}^v = (\hat{a}^\dagger \hat{a})^v = \sum_{\mu=1}^v \mathfrak{S}_v^{(\mu)} (\hat{a}^{\dagger\mu} \hat{a}^\mu)$, onde $\mathfrak{S}_v^{(\mu)}$ é o número de Stirling de segundo tipo [82]. Dessa modo, temos

$$\langle \phi^N | \hat{n}^v | \phi^N \rangle = \frac{1}{\mathcal{N}_N^2} \sum_{\mu=1}^v \mathfrak{S}_v^{(\mu)} |\alpha|^{2\mu} \sum_{j,l=1}^{2^N} (2j-1)^\mu (2l-1)^\mu e^{-2|\alpha|^2(j-l)^2}. \quad (3.23)$$

Para calcularmos Q , tomamos $v = 1, 2$ e usamos o fato que $\mathfrak{S}_1^{(1)} = \mathfrak{S}_2^{(1)} = \mathfrak{S}_2^{(2)} = 1$. O PM do estado SECR com distribuição de fase altamente concentrada é mostrado na figura (3.9) a seguir. Os cálculos mostraram que o estado SECR, na forma $|\phi^N(\alpha)\rangle$, é super-poissoniano, com $Q > 0$, para todos $r = |\alpha|$. Por sua vez, a função de Glauber-

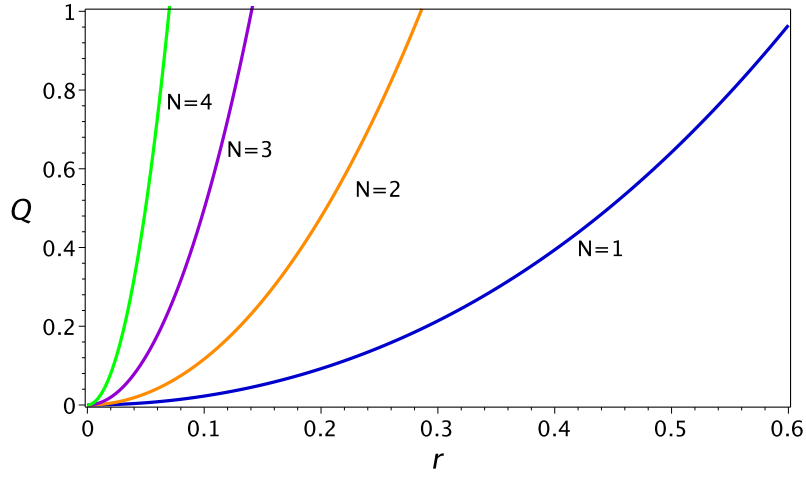


Fig. 3.9: Parâmetro de Mandel da mesma superposição de estados coerentes com uma distribuição de fase bastante concentrada.

Sudarshan do estado SECR é dado por

$$P(\alpha) = \frac{e^{|\alpha|^2}}{\pi^2 \mathcal{N}_N^2} \sum_{j,l=1}^{2^N} e^{-|\alpha'|^2 [2j(j-1) + 2l(l-1) + 1]} \int e^{u^* [\alpha - (2l-1)\alpha'] - u [\alpha^* - (2j-1)\alpha'^*]} d^2 u. \quad (3.24)$$

A equação acima não pode ser resolvida nessa forma, mas podemos avaliá-la através de algumas considerações. Para o caso de $j = l$ podemos reescrevê-la como

$$P(\alpha) = \frac{e^{|\alpha|^2}}{\pi^2 \mathcal{N}_N^2} \sum_{j=1}^{2^N} e^{-|\alpha'|^2 [4j(j-1) + 1]} \int e^{u^* [\alpha - (2j-1)\alpha'] - u [\alpha^* - (2j-1)\alpha'^*]} d^2 u, \quad (3.25)$$

então obtemos

$$P(\alpha) = \frac{e^{|\alpha|^2}}{\mathcal{N}_N^2} \sum_{j=1}^{2^N} e^{-|\alpha'|^2 [4j(j-1) + 1]} \delta(\alpha - (2j-1)\alpha'). \quad (3.26)$$

3.4.2 Compressão do ruído quântico

Conforme já mencionado, uma outra característica não-clássica importante do campo eletromagnético quantizado de modo único é a ocorrência de compressão em uma das componentes de quadratura no espaço de fase. Os operadores de quadratura do campo, que correspondem aos operadores posição e momento no caso de partículas, são definidos

como

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad \hat{p} = \frac{-i}{\sqrt{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger). \quad (3.27)$$

Considerando a relação dada em (2.6), temos $[\hat{x}, \hat{p}] = i$. Isso implica que as variâncias nas quadraturas satisfazem a relação de incerteza de Heisenberg, $(\Delta\hat{x})^2(\Delta\hat{p})^2 \geq \frac{1}{4}$, onde $(\Delta\hat{\mathcal{O}})^2 = \langle \hat{\mathcal{O}}^2 \rangle - \langle \hat{\mathcal{O}} \rangle^2$ é o desvio quadrático médio do operador $\hat{\mathcal{O}}$. Os estados com incerteza mínima (como o coerente), assim como o estado comprimido, satisfazem a igualdade na relação de incerteza, sendo os estados coerentes (incluindo o estado de vácuo) aqueles que possuem a mesma variância em ambas as quadraturas, $(\Delta\hat{x})^2 = (\Delta\hat{p})^2 = 1/2$. Por outro lado, superposições de estados coerentes não são estados de incerteza mínima, mas o efeito de compressão ocorre sempre que o quadrado de uma das variâncias, $(\Delta\hat{x})^2$ ou $(\Delta\hat{p})^2$, torna-se menor que o limite mínimo $1/2$, com o quadrado da variância da outra quadratura aumentando, garantindo assim que a relação de incerteza de Heisenberg está sendo obedecida [15, 21, 114–117].

Agora, escrevendo $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_0 + ip_0)$, os valores esperados dos operadores $\hat{x}$, $\hat{p}$, $\hat{x}^2$ e $\hat{p}^2$, no estado $|\phi^N(\alpha)\rangle$, são dados por

$$\langle \phi^N | \hat{x} | \phi^N \rangle = \frac{x_0}{\mathcal{N}_N^2} \sum_{j,k=1}^{2^N} (2j-1) e^{-(x_0^2 + p_0^2)(j-l)^2}, \quad (3.28)$$

$$\langle \phi^N | \hat{p} | \phi^N \rangle = \frac{p_0}{\mathcal{N}_N^2} \sum_{j,k=1}^{2^N} (2j-1) e^{-(x_0^2 + p_0^2)(j-l)^2}, \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \langle \phi^N | \hat{x}^2 | \phi^N \rangle &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\mathcal{N}_N^2} \left\{ x_0^2 \sum_{j,l=1}^{2^N} [(2j-1)(j+l-1)] e^{-(x_0^2 + p_0^2)(j-l)^2} \right. \\ &\quad \left. - p_0^2 \sum_{j,l=1}^{2^N} [(2j-1)(j-l)] e^{-(x_0^2 + p_0^2)(j-l)^2} \right\}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \langle \phi^N | \hat{p}^2 | \phi^N \rangle &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\mathcal{N}_N^2} \left\{ -x_0^2 \sum_{j,l=1}^{2^N} [(2j-1)(j-l)] e^{-(x_0^2 + p_0^2)(j-l)^2} \right. \\ &\quad \left. + p_0^2 \sum_{j,l=1}^{2^N} [(2j-1)(j+l-1)] e^{-(x_0^2 + p_0^2)(j-l)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

A partir dessas equações, podemos determinar as variâncias das quadraturas $(\Delta\hat{x})^2 = \langle\hat{x}^2\rangle - \langle\hat{x}\rangle^2$ e $(\Delta\hat{p})^2 = \langle\hat{p}^2\rangle - \langle\hat{p}\rangle^2$, para o estado $|\phi^N(\alpha)\rangle$. Sem perda de generalidade, consideramos α real e positivo ($\phi = 0$), $\alpha = x_0/\sqrt{2} > 0$ com $p_0 = 0$. Através de rotações no espaço de fase podemos obter os resultados para o caso em que α possui valores complexos. Como vemos na figura 3.10(a), a componente de quadratura $\hat{p}$ é comprimida enquanto a variância da componente $\hat{x}$ aumenta bastante quando $r = |\alpha|$ cresce, garantindo assim que $(\Delta\hat{x})^2(\Delta\hat{p})^2 \geq 1/4, \forall r$. Observe que enquanto $|\alpha|$ varia no intervalo entre valores muito pequenos até valores consideráveis, e quando N aumenta, o estado $|\phi^N(\alpha)\rangle$ torna-se altamente comprimido, com $(\Delta\hat{p})^2$ tendendo a zero. Esse resultado concorda com os valores obtidos por Davidovich e coautores [109], o qual considera uma superposição estados coerentes distribuídos simetricamente em relação a origem. A figura 3.10(b) mostra o produto das variâncias das quadraturas como função de r para alguns valores de N . Podemos ver que para pequenos valores de $r = |\alpha|$ o estado $|\phi^N(\alpha)\rangle$ se aproxima de um estado de incerteza mínima. Entretanto o produto das variâncias das quadraturas cresce rapidamente quando r cresce. O comportamento assintótico das variâncias das quadraturas, considerando apenas correção de primeira ordem, isto é, $x_0 \gg 1$, é dado por

$$(\Delta\hat{x})^2 \simeq \frac{1}{2} + \frac{4}{3}(2^{2N} - 1)x_0^2 + 4(2^N - 1)2^N x_0^2 e^{-x_0^2} \quad (3.32)$$

$$(\Delta\hat{p})^2 \simeq \frac{1}{2} - 2\left(1 - \frac{1}{2^N}\right)x_0^2 e^{-x_0^2} \quad (3.33)$$

e mostra que a partir do limite da incerteza mínima aumenta quadraticamente com $|\alpha|^2$. Observe que, no limite assintótico, a primeira ordem do valor médio é $\langle\hat{x}\rangle \simeq x_0 + 2x_0 e^{-x_0^2}$, a qual aumenta linearmente com $|\alpha|$. De posse das equações (3.28)–(3.31), vemos que se $\alpha = ip_0/2$ com $p_0 > 0$, correspondendo ao valor $\phi = \pi/2$, a situação é revertida, onde a componente de quadratura $\hat{x}$ sendo altamente comprimida enquanto a componente $\hat{p}$ fica muito acima do valor limite, como esperado pela simetria.

3.4.3 Representação de Wigner

A representação do operador densidade (densidade de estados) no espaço de fase [21, 58, 117, 118], para descrever estados puros ou mistos, é de grande importância na discussão da evolução temporal dos estados em diversas situações e também para estudar os aspectos semiclássicos na fronteira clássico-quântico. A constatação de ruído sub-poissoniano leva a correlações de alta ordem no sistema que podem estar contidas

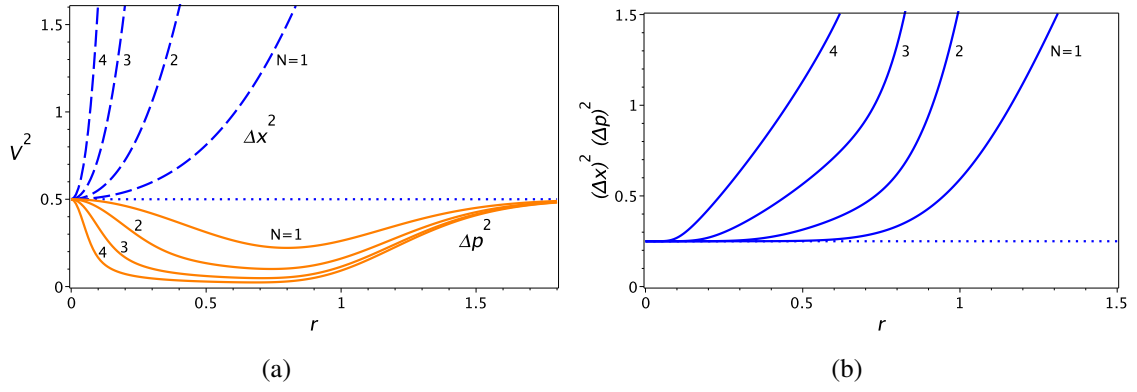


Fig. 3.10: Na figura (a) são mostradas as variâncias nas quadraturas, $(\Delta\hat{x})^2$ e $(\Delta\hat{p})^2$ (nas linhas tracejadas e sólidas, respectivamente), do mesmo SECR com $\alpha = x_0/2 > 0$, isto é, $\phi = 0$, como uma função de $r = |\alpha|$; onde a linha horizontal pontilhada é o limite mínimo. A figura (b) mostra o produto das variâncias das quadraturas x e p , onde a linha horizontal pontilhada indica o limite de incerteza mínima.

na função geratriz de cumulantes. Nesse sentido, empregamos a quase distribuição de probabilidade introduzida por Wigner [19], comumente chamada de função de Wigner.

Então, consideramos a FW descrevendo o estado SECR $|\phi^N(\alpha)\rangle$ dada por

$$W(x, p) = \int dz e^{ipz} \left\langle x - \frac{z}{2} \left| \hat{\rho}_N(\alpha) \right| x + \frac{z}{2} \right\rangle, \quad (3.34)$$

onde $\hat{\rho}_N(\alpha) = |\phi^N(\alpha)\rangle\langle\phi^N(\alpha)|$ é a matriz densidade correspondente enquanto as variáveis clássicas adimensionais x e p correspondem às componentes de quadratura $\hat{x}$ e $\hat{p}$. A FW pode ser definida em outras formas, por exemplo, como uma transformada de Fourier da função característica simétrica do operador densidade [93].

Para o estado $|\phi^N(\alpha)\rangle$ definido na equação (3.2), tomando $\alpha = (x_0 + ip_0)/\sqrt{2}$, a FW é dada pela expressão

$$\begin{aligned} W_N(x, p) = \frac{2}{\mathcal{N}_N^2} & \left\{ \sum_{j=1}^{2^N} \exp\{ -[x - (2j-1)x_0]^2 - [p - (2j-1)p_0]^2 \} \right. \\ & + 2 \sum_{j>l=1}^{2^N} \exp\{ -[x - (j+l-1)x_0]^2 - [p - (j+l-1)p_0]^2 \} \\ & \left. \times \cos[2(j-l)(x_0p - xp_0)] \right\}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

A partir daqui, por questão de simplicidade mas sem perda de generalidade, assumimos

$p_0 = 0$ e $x_0 > 0$, ou seja $\phi = 0$, e fixamos $\alpha = x_0/\sqrt{2}$. Dessa forma, a FW torna-se

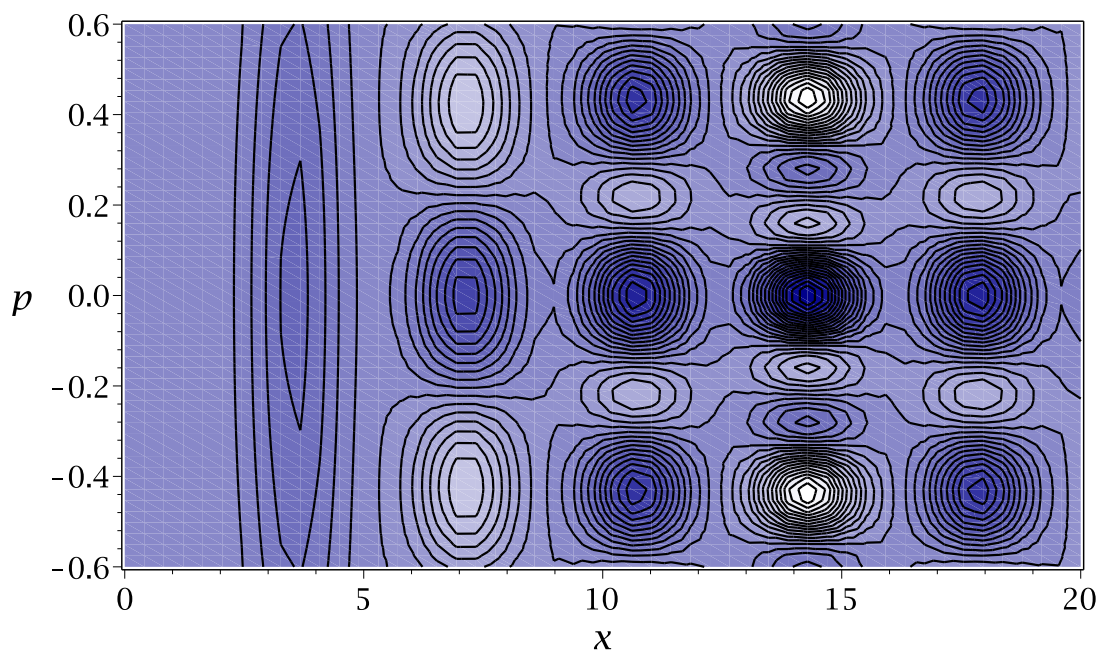
$$W_N(x, p) = \frac{2e^{-p^2}}{\mathcal{N}_N^2} \left\{ \sum_{j=1}^{2^N} \exp[-(x - (2j-1)x_0)^2] + 2 \sum_{j>l=1}^{2^N} \exp[-(x - (j+l-1)x_0)^2] \cos(2(j-l)x_0 p) \right\}. \quad (3.36)$$

A FW possui três características que coincidem com as de uma distribuição clássica no espaço de fase. Primeiramente, como ela é derivada de um operador hermitiano, ela assume apenas valores reais. Segundo, a integração sobre os momentos dá a distribuição de probabilidade das posições, isto é, $|\psi(x)|^2$. Por último, a integração sobre as posições dá a distribuição de probabilidade dos momentos, ou seja $|\psi(p)|^2$, conforme seguem,

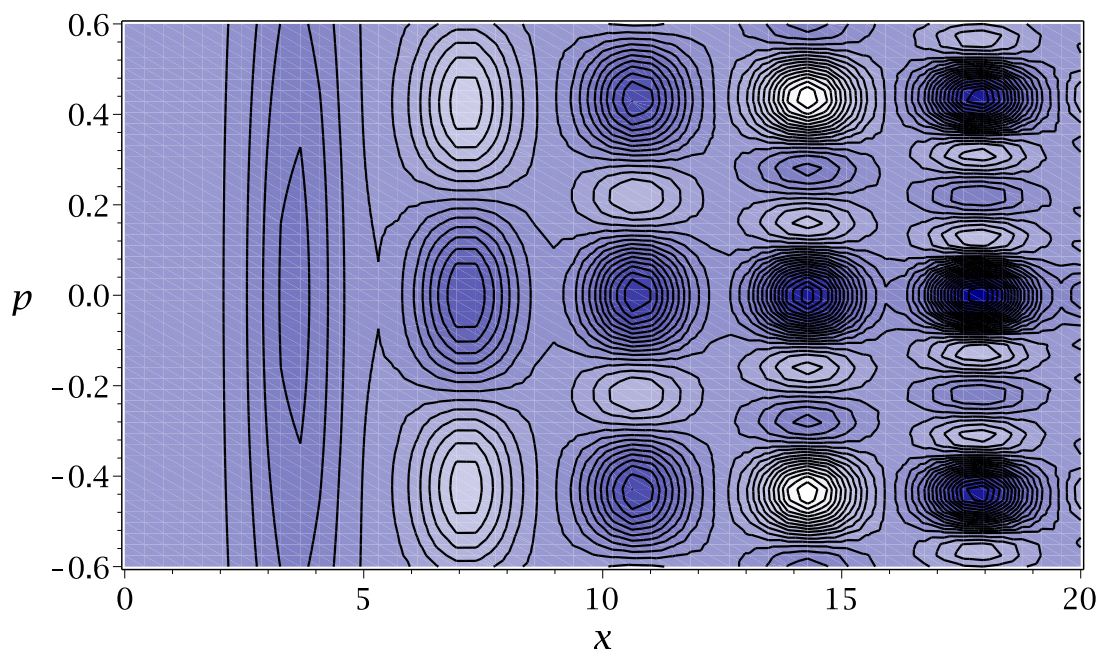
$$|\langle x | \psi \rangle|^2 = |\psi(x)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp W(x, p) \geq 0, \quad (3.37a)$$

$$|\langle p | \psi \rangle|^2 = |\psi(p)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx W(x, p) \geq 0. \quad (3.37b)$$

A figura (3.11) mostra que, para $N = 2$ e $N = 3$, os mínimos da FW são os mesmos, mas os pontos de máximo se deslocam na direção da componente de quadratura x . Como exemplificado na figura (3.12), para o caso de $N = 3$ e para pequenos valores de $|\alpha|$, a função de Wigner do estado SECR se assemelha à função de Wigner do estado comprimido. No entanto, para grandes valores de $|\alpha|$, a função de Wigner mostra explicitamente características não-clássicas, como as grandes oscilações entre valores positivos e negativos de $W(x, p)$. Observe que, quando $|\alpha|$ é aumentado, a região não-nula da função de Wigner torna-se menor no espaço de fase. Agora, no capítulo 4, obteremos um importante ponto da evolução temporal do SECR $|\phi^N(\alpha)\rangle$ em contato com um reservatório, o qual pode ser descrito por reservatório dissipativo ou pela interação com um reservatório de ganho, ingredientes que encontramos no *laser*.

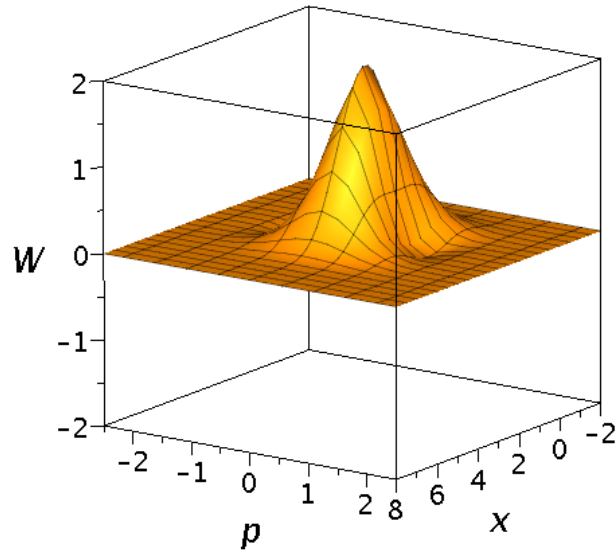


(a)

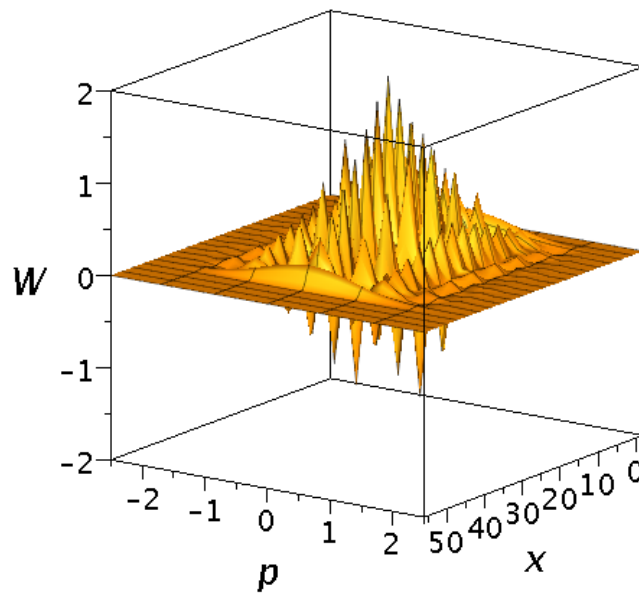


(b)

Fig. 3.11: Curvas de nível da função de Wigner mostrando os pontos de mínimo (regiões claras) e de máximo (regiões azuis) para $x_0 = 3.57$ ($\alpha \sim 2.5$), fazendo $p_0 = 0$: Na figura (a) para $N = 2$; Na figura (b) para $N = 3$.



(a)



(b)

Fig. 3.12: Função de Wigner do SECR $|\phi^N\rangle$, para $N = 3$ e fazendo $p_0 = 0$: (a) $x_0 = 0.3$ e (b) $x_0 = 3.0$.

4 *Equação de Fokker-Planck e FW dependente do tempo*

Neste capítulo, investigamos como as propriedades do estado SECR são afetadas pela influência de um oscilador quântico parametricamente excitado. Para sermos mais realistas, consideramos que o sistema quantizado é aberto e sofre influência também de um meio externo que pode ser modelado por um reservatório amplificador ou dissipador, sensível à fase. Nesse sentido temos a equação mestra geral na representação da interação para o operador densidade $\hat{\rho}$ em um amplificador degenerado paramétrico linear. A inclusão de um reservatório sensível à fase é escrita na forma (com $\hbar = m = \omega = 1$)

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}}{dt} = & \frac{k}{2}[\hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^2, \hat{\rho}] + \Gamma_1(2\hat{a}^{\dagger}\hat{\rho}\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^{\dagger}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}\hat{a}^{\dagger}) + \Gamma_2(2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^{\dagger} - \hat{a}^{\dagger}\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^{\dagger}\hat{a}) \\ & + \Gamma_3(2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a} - \hat{a}\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}\hat{a}) + \Gamma_3^*(2\hat{a}^{\dagger}\hat{\rho}\hat{a}^{\dagger} - \hat{a}^{\dagger}\hat{a}^{\dagger}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^{\dagger}\hat{a}^{\dagger}), \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde o primeiro termo do lado direito corresponde à amplificação paramétrica e a constante k é real e independente do tempo, havendo ressonância entre o oscilador e a perturbação externa, enquanto os outros termos correspondem aos efeitos mais fracos do reservatório na forma bilinear dos operadores de aniquilação $\hat{a}$ e criação $\hat{a}^{\dagger}$ (com $[\hat{a}, \hat{a}^{\dagger}] = \hat{1}$) que preservam a hermiticidade e o traço do operador densidade [119–126]. Essa última propriedade requerida implica que os coeficientes Γ_1 e Γ_2 são reais e positivos e o coeficiente complexo Γ_3 deve satisfazer a desigualdade [119–126]

$$|\Gamma_3| \leq \sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}. \quad (4.2)$$

Em seguida, para resolver a equação (4.1), a reescrevemos na representação de Wigner para então chegamos à conhecida equação de Fokker-Planck

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{2}D_{xx}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + D_{xp}\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial p} + \frac{1}{2}D_{pp}\frac{\partial^2 W}{\partial p^2} - (k + \gamma)\frac{\partial}{\partial x}(xW) + (k - \gamma)\frac{\partial}{\partial p}(pW), \quad (4.3)$$

onde os parâmetros constantes são definidos da seguinte forma:

$$D_{xx} = \Gamma_0 - \Gamma_R, \quad (4.4a)$$

$$D_{xp} = \Gamma_I, \quad (4.4b)$$

$$D_{pp} = \Gamma_0 + \Gamma_R, \quad (4.4c)$$

$$\Gamma_0 = \Gamma_1 + \Gamma_2, \quad (4.4d)$$

$$\Gamma_R = \Gamma_3 + \Gamma_3^*, \quad (4.4e)$$

$$\Gamma_I = i(\Gamma_3^* - \Gamma_3), \quad (4.4f)$$

$$\gamma = \Gamma_1 - \Gamma_2. \quad (4.4g)$$

A condição dada na equação (4.2) implica que $|\Gamma_R| \leq 2\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2} \leq \Gamma_0$. Dessa forma, os coeficientes de difusão D_{xx} e D_{pp} são sempre positivos. Além disso, a equação (4.2) acarreta na desigualdade [127, 128]

$$D_{xx}D_{pp} - D_{xp}^2 \geq \gamma^2. \quad (4.5)$$

A solução formal da equação (4.3) é bem conhecida [119] e é dada por

$$W(x, p, t) = \int G(x, p; x', p'; t) W(x', p', 0) dx' dp', \quad (4.6)$$

em que $G(x, p; x', p'; t)$ é a função de Green dada por,

$$\begin{aligned} G(x, p; x', p'; t) = & \left(2\pi\sqrt{\Delta}\right)^{-1} \exp\{-(2\Delta)^{-1}[z_-x^2 + z_+p^2 - 2z_0xp \\ & + z_-e^{2(\gamma+k)t}x'^2 + z_+e^{2(\gamma-k)t}p'^2 - 2z_0e^{2\gamma t}x'p' \\ & + 2e^{(\gamma+k)t}(z_0p - z_-x)x' + 2e^{(\gamma-k)t}(z_0x - z_+p)p']\}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde,

$$z_{\pm}(t) = \frac{1}{2}\zeta_{\pm} \left(e^{2(\gamma \pm k)t} - 1\right), \quad (4.8a)$$

$$z_0(t) = \frac{1}{2}\zeta_0 (e^{2\gamma t} - 1), \quad (4.8b)$$

$$\Delta(t) = z_+z_- - z_0^2, \quad (4.8c)$$

$$\zeta_{\pm} = \frac{\Gamma_0 \pm \Gamma_R}{\gamma \pm k}, \quad (4.8d)$$

$$\zeta_0 = \frac{\Gamma_I}{\gamma}. \quad (4.8e)$$

Agora, substituindo a FW (3.36) na equação (4.6), obtem-se a FW em função do tempo associada ao estado $|\phi^N(\alpha)\rangle$

$$W(x, p; t) = \frac{2}{|N_N|^2 \sqrt{Y(t)}} \exp \left[-\frac{1}{Y(t)} C(x, p, t) \right] \left\{ \sum_{j=1}^{2^N} \exp \left[\frac{1}{Y(t)} A(x, p, t; j, j) \right] + 2 \sum_{j>l=1}^{2^N} \exp \left[\frac{1}{Y(t)} A(x, p, t; j, l) \right] \cos \left[\frac{1}{Y(t)} B(x, p, t; j, l) \right] \right\}, \quad (4.9)$$

onde,

$$Y = e^{4\gamma t} + 2z_- (2z_+ + e^{2(\gamma+k)t}) + 2z_+ e^{2(\gamma-k)t} - 4z_0^2, \quad (4.10)$$

$$C(x, p, t) = (2z_- + e^{2(\gamma-k)t})x^2 + (2z_+ + e^{2(\gamma+k)t})p^2 - 4z_0xp, \quad (4.11)$$

$$B(x, p, t; j, l) = 2x_0[2z_0xe^{(\gamma-k)t} - e^{(\gamma-k)t}(2z_+ + e^{2(\gamma+k)t})p - 2x_0z_0e^{2\gamma t}(j+l-1)](j-l), \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} A(x, p, t; j, l) = & -e^{2(\gamma+k)t}(2z_- + e^{2(\gamma-k)t})x_0^2(j+l-1)^2 \\ & + 2e^{(\gamma+k)t}[(2z_- + e^{2(\gamma-k)t})x - 2z_0p]x_0(j+l-1) \\ & - 2[z_-e^{2(\gamma+k)t} + 2\Delta]x_0^2(j-l)^2. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Desse ponto em diante usaremos a seguinte notação,

$$k = \Gamma_0 \kappa \quad (4.14a)$$

$$\gamma = \Gamma_0 \sigma, \quad (4.14b)$$

$$\Gamma_1 = \frac{\Gamma_0}{2}(1 + \sigma), \quad (4.14c)$$

$$\Gamma_2 = \frac{\Gamma_0}{2}(1 - \sigma), \quad (4.14d)$$

$$\Gamma_R = \Gamma_0 \chi \sqrt{1 - \sigma^2} \cos(\beta), \quad (4.14e)$$

$$\Gamma_I = \Gamma_0 \chi \sqrt{1 - \sigma^2} \sin(\beta), \quad (4.14f)$$

onde $\sigma = (\Gamma_1 - \Gamma_2)/(\Gamma_1 + \Gamma_2)$, de forma que $-1 \leq \sigma \leq 1$ e $0 \leq \chi \leq 1$. O parâmetro σ está associado à temperatura efetiva do reservatório por $\sigma = -\tanh[(2\Gamma)^{-1}]$. Quando o parâmetro σ é negativo (positivo) o reservatório é atenuador (amplificador). Desse modo, o valor $\sigma = -1$ corresponde à absorção máxima pelo reservatório, que ocorreria na temperatura zero absoluto. Em contrapartida, $\sigma = 0$ corresponde ao reservatório com temperatura “infinita” e $\sigma = +1$ corresponde à amplificação máxima com ruído mínimo (formalmente, isso pode ser interpretado como quando consideramos o sistema com temperatura negativa), no limite de temperatura nula. Já o parâmetro χ está associado à intensidade da interação mais fraca entre o reservatório e a fase, o valor $\chi = 0$ correspondendo à ausência de interação na forma bilinear dos operadores $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$, o reverso ocorrendo quando $\chi \neq 0$. A partir da parametrização definida em 4.14(a-f), podemos trabalhar com parâmetros adimensionais por meio do ajuste da medida do tempo em unidades de Γ_0^{-1} , o que é feito simplesmente fixando $\Gamma_0 = 1$.

4.1 Indicadores de não-classicalidade: Evolução temporal

A partir da FW dependente do tempo, podemos determinar a evolução temporal dos observáveis relativos ao sistema devido à interação do sistema com o meio externo. Nesse caso o estado inicialmente puro $|\phi^N(\alpha)\rangle$ vai evoluir com o passar do tempo, tornando-se pouco a pouco um estado de mistura, descrito pelo operador densidade $\rho_N(\alpha; t)$, obtido a partir de $W_N(x, p; t)$. Esse comportamento é descrito pela “impureza” do estado modificado temporalmente,

$$I(t) = 1 - \text{Tr}[\rho_N^2(\alpha; t)] = 1 - \frac{1}{2\pi} \int dx dp [W_N(x, p; t)]^2, \quad (4.15)$$

a qual é ilustrada na figura (4.1) para x_0 fixo e para alguns valores de parâmetros do reservatório. Notemos que, para um reservatório sensível à fase (seja atenuador ou amplificador), o grau de impureza aumenta com o tempo. Isso também ocorre para o caso de reservatórios não afetados pela fase. Em seguida, estudamos como os indicadores de não-classicalidade se alteram com o tempo quando o estado SECR sofre a influência de amplificação paramétrica linear e ainda em contato com um outro agente externo amplificador ou atenuador sensível à fase, iniciando com efeito de compressão de quadratura.

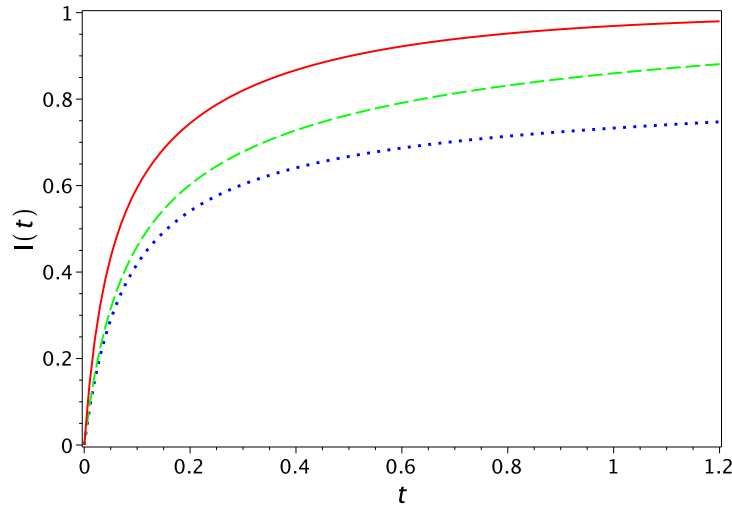


Fig. 4.1: Grau de impureza da SECR $|\phi^N(\alpha)\rangle$ como função do tempo, para $N = 3$, $x_0 = \sqrt{2}/2$, $\chi = 0.5$, $\beta = 0.0$ e: a) $\sigma = -0.09$, $\kappa = -0.5$ (linha pontilhada); b) $\sigma = 0.2$, $\kappa = 0.1$ (linha tracejada); c) $\sigma = 0.9$, $\kappa = 0.7$ (linha sólida). Aqui e nas figuras que seguem a escala de tempo é dada em *ms*.

4.1.1 Efeito de compressão

Como foi mostrado na seção 3.4.2, o estado $|\phi^N(\alpha)\rangle$ apresenta compressão (não simultâneas) nas quadraturas e a evolução temporal desse efeito é um ponto importante para ser estudado sob influência de um meio externo. Para analisarmos a evolução da compressão das quadraturas do SECR, determinamos o valor esperado temporalmente dos operadores $\hat{x}$, $\hat{x}^2$, $\hat{p}$ e $\hat{p}^2$ usando esse estado como base. Na representação de Wigner tem-se $\langle \hat{f}(\hat{x}, \hat{p}) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int dx dp f_W(x, p) W(x, p)$, onde $f_W(x, p)$ é a transformada de Weyl do operador $\hat{f}(\hat{x}, \hat{p})$ [39, 40, 129, 130]. Se o operador $\hat{f}$ é a soma de operadores dependendo apenas de $\hat{x}$ ou $\hat{p}$, na forma $\hat{f}(\hat{x}, \hat{p}) = \hat{f}_1(\hat{x}) + \hat{f}_2(\hat{p})$, então a transformada de Weyl é dada simplesmente por $f_W(x, p) = f_1(x) + f_2(p)$. Assim, usando as equações (3.37), nós obtemos

$$\langle \hat{x} \rangle(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{all} x W_N(x, p, t) dx dp, \quad (4.16a)$$

$$\langle \hat{x}^2 \rangle(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{all} x^2 W_N(x, p, t) dx dp, \quad (4.16b)$$

$$\langle \hat{p} \rangle(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{all} p W_N(x, p, t) dx dp, \quad (4.16c)$$

$$\langle \hat{p}^2 \rangle(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{all} p^2 W_N(x, p, t) dx dp. \quad (4.16d)$$

As integrações em todo o espaço de fase, com os integrandos envolvendo monômios e exponenciais gaussianas, podem ser realizadas e obtemos seguintes resultados

$$\langle \hat{x} \rangle(t) = e^{(\sigma+\kappa)t} \langle \hat{x} \rangle(0), \quad (4.17a)$$

$$\langle \hat{p} \rangle(t) = 0, \quad (4.17b)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}^2 \rangle(t) = \frac{1}{2\mathcal{N}_N^2} \sum_{j,l=1}^{2^N} & \left[2z_+ + e^{2(\sigma+\kappa)t} \right. \\ & \left. + 2x_0^2(2j-1)(j+l-1)e^{2(\sigma+\kappa)t} \right] e^{-x_0^2(j-l)^2}, \end{aligned} \quad (4.17c)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{p}^2 \rangle(t) = \frac{1}{2\mathcal{N}_N^2} \sum_{j,l=1}^{2^N} & \left[2z_- + e^{2(\sigma-\kappa)t} \right. \\ & \left. + 2x_0^2(2j-1)(j-l)e^{2(\sigma-\kappa)t} \right] e^{-x_0^2(j-l)^2}, \end{aligned} \quad (4.17d)$$

onde,

$$z_+(t; \sigma, \kappa, \chi, \beta) = \frac{1 + \chi \sqrt{1 - \sigma^2} \cos(\beta)}{2(\sigma + \kappa)} \left(e^{2(\sigma+\kappa)t} - 1 \right), \quad (4.18)$$

$$z_-(t; \sigma, \kappa, \chi, \beta) = \frac{1 - \chi \sqrt{1 - \sigma^2} \cos(\beta)}{2(\sigma - \kappa)} \left(e^{2(\sigma-\kappa)t} - 1 \right). \quad (4.19)$$

Notamos que a simetria da FW dependente do tempo, em relação às variáveis x e p , é preservada assegurando que $\langle \hat{p} \rangle$ permanece nulo enquanto $\langle \hat{x} \rangle$ adquire um fator exponencial temporal. Por outro lado, os valores esperados do quadrado dos operadores de quadratura variam significativamente, e também as variâncias das quadraturas devem variar com o tempo. Na figura (4.2) apresentamos a variância da quadratura $\hat{p}$, como função do tempo, para a SECR considerando a evolução na presença de amplificação paramétrica e reservatório, em diversas circunstâncias: (a) fixando κ , χ e variando σ , isso mostra que aumentando a intensidade da atenuação do reservatório insensível à fase produz um rápido desaparecimento da compressão na quadratura $\hat{p}$; (b) para um reservatório amplificador insensível à fase, com σ fixo, a compressão é favorecida pelo aumento da intensidade do acoplamento paramétrico κ ; por outro lado, em (c), fixando κ e σ para um reservatório atenuador, a compressão é modificada pela variação da sensibilidade do reservatório à fase; enquanto, em (d), para um reservatório atenuador sensível à fase, o aumento da fase do parâmetro complexo Γ_3 leva à redução da compressão. Observamos também que, independentemente dos valores dos outros parâmetros, tomando $\kappa \gg 1$, a variância da quadratura $\hat{p}$ decresce rapidamente, sendo mantida em valores muito baixos

ao longo do tempo. Resultado oposto ocorre se consideramos $\kappa < 0$ com valor absoluto muito elevado. Isso é mostrado na figura (4.3) onde traçamos a curva de $(\Delta\hat{p})^2 \times t$ para valores crescentes de $|\kappa|$.

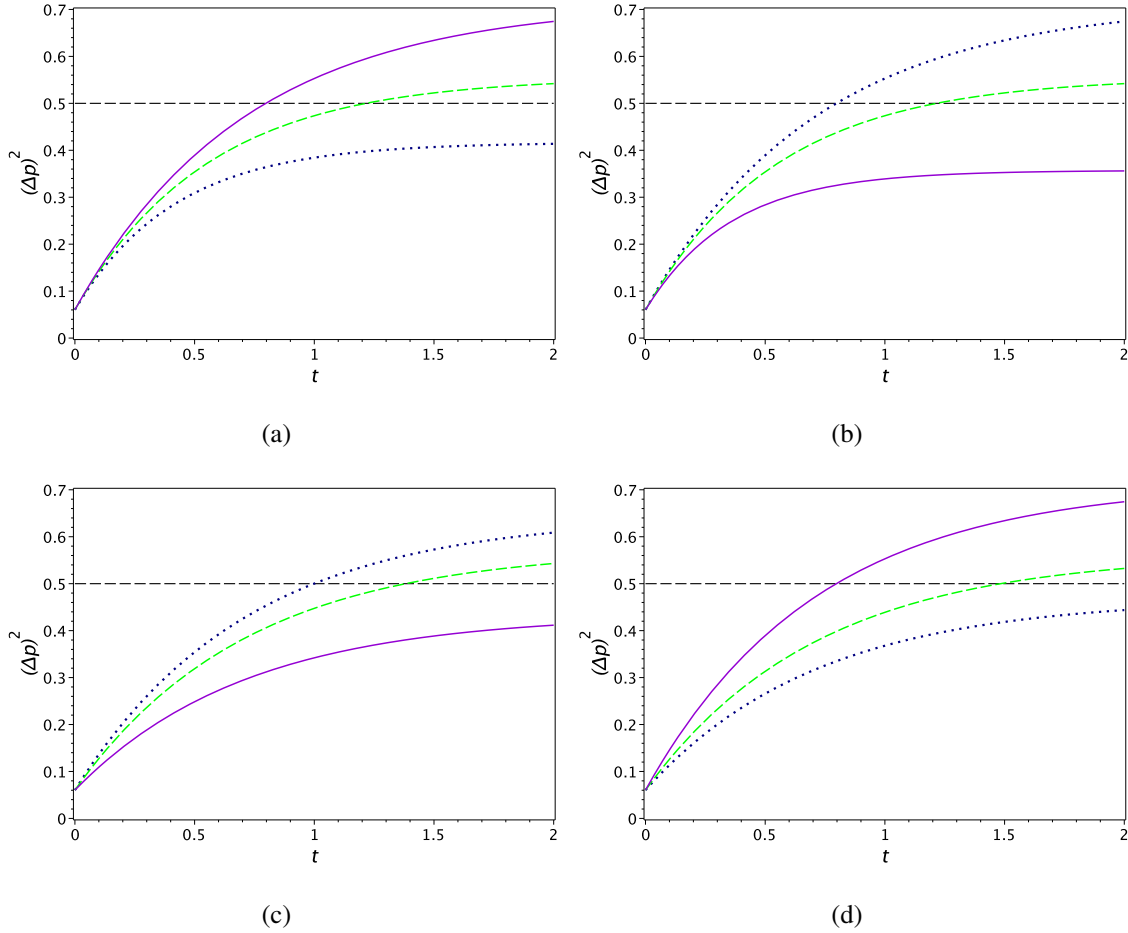


Fig. 4.2: Variância da quadratura $\hat{p}$ do estado $|\phi^N(\alpha)\rangle$, em função do tempo, para $N = 3$ e $x_0 = \sqrt{2}/2 \approx 0.70711$ ($\phi = 0$): (a) $\kappa = 1.0$, $\chi = 0.0$, e $\sigma = -0.2, 0.1, 0.3$ (linhas pontilhada, tracejada, e sólida, respectivamente); (b) $\sigma = -0.2$, $\chi = 0.0$, e $\kappa = 0.5, 0.7, 1.2$ (linhas pontilhada, tracejada e sólida, respectivamente); (c) $\sigma = -0.2$, $\kappa = 0.5$, $\beta = 0.0$, e $\chi = 0.1, 0.2, 0.4$ (linhas pontilhada, tracejada e sólida, respectivamente); (d) $\sigma = -0.2$, $\kappa = 0.5$, $\chi = 0.4$, e $\beta = 0.5, 1.0, 1.571$ (linhas pontilhada, tracejada e sólida, respectivamente). A linha pontilhada horizontal corresponde ao valor limite estabelecido pela relação de incerteza.

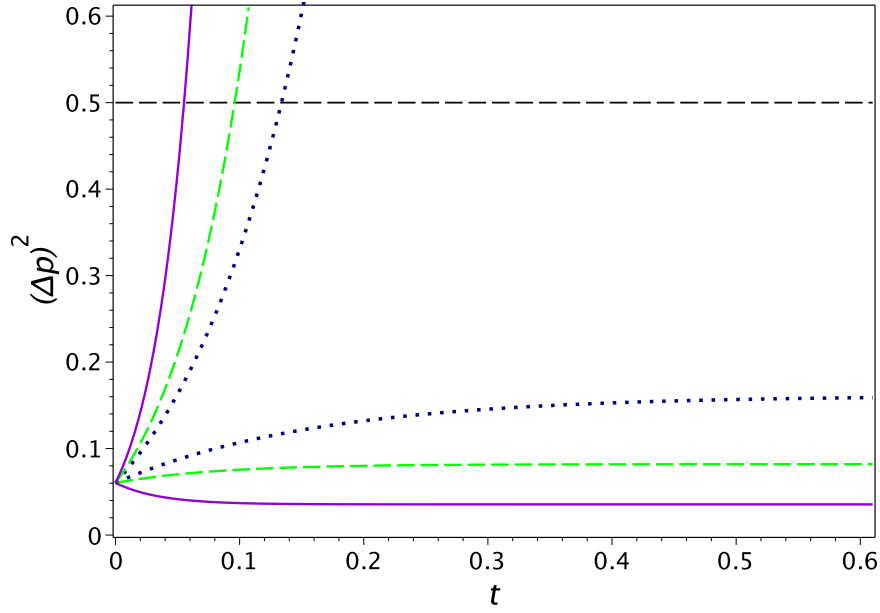


Fig. 4.3: Dependência temporal da variância da quadratura $\hat{p}$ no estado $|\phi^3(\alpha)\rangle$, com $x_0 = \sqrt{2}/2$ e $\phi = 0$ tomando $\sigma = 0.9$ e $\chi = 0$. Os valores de $|\kappa|$ são 4.0 (linhas pontilhadas), 7.0 (linhas tracejadas) e 15.0 (linhas sólidas). As curvas inferiores são para os valores $\kappa > 0$ enquanto as curvas superiores correspondem aos valores $\kappa < 0$.

4.2 Parâmetro de Mandel (PM): Evolução temporal

Nesta seção calculamos a evolução temporal do PM para investigarmos alguma eventual alteração na natureza da estatística do estado SECR em contato com um reservatório. Fazendo uso do formalismo da FW, obtemos os valores médios dos operadores $\hat{n}$ e $\hat{n}^2$ a partir de suas transformações de Weyl como

$$\langle \hat{n} \rangle(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{all} \frac{1}{2} (x^2 + p^2 - 1) W_N(x, p, t) dx dp, \quad (4.20)$$

$$\langle \hat{n}^2 \rangle(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{all} \frac{1}{4} [(x^2 + p^2 - 1)^2 - 1] W_N(x, p, t) dx dp. \quad (4.21)$$

Resolvendo as integrais, obtemos então

$$\langle \hat{n} \rangle(t) = \frac{1}{2\mathcal{N}_N^2} \sum_{j,l=1}^{2^N} \left[Z + (j+l-1)^2 x_0^2 e^{2(\sigma+\kappa)t} - (j-l)^2 x_0^2 e^{2(\sigma-\kappa)t} \right] e^{-x_0^2(j-l)^2}, \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{n}^2 \rangle(t) = & \frac{1}{4\mathcal{N}_N^2} \sum_{j,l=1}^{2^N} e^{-x_0^2(j-l)^2} \\
& \times \left\{ X + \frac{Y}{2} + (j+l-1)^4 x_0^4 e^{4(\sigma+\kappa)t} - 2(j+l-1)^2(j-l)^2 x_0^4 e^{4\sigma t} \right. \\
& - 2(j+l-1)^2 x_0^2 e^{2(\sigma+\kappa)t} + 2(j-l)^2 x_0^2 e^{2(\sigma-\kappa)t} + (j-l)^4 x_0^4 e^{4(\sigma-\kappa)t} \\
& + [(j+l-1)^2 x_0^2 e^{2(\sigma+\kappa)t} - 3(j-l)^2 x_0^2 e^{2(\sigma-\kappa)t} - 1](2z_- + e^{2(\sigma-\kappa)t}) \\
& \left. + [3(j+l-1)^2 x_0^2 e^{2(\sigma+\kappa)t} - (j-l)^2 x_0^2 e^{2(\sigma-\kappa)t} - 1](2z_+ + e^{2(\sigma+\kappa)t}) \right\},
\end{aligned} \tag{4.23}$$

onde Y é dado na equação (4.10) e

$$Z = z_+ + z_- + e^{2\sigma t} \cosh(2\kappa t) - 1, \tag{4.24}$$

$$X = 3z_+^2 + 3z_-^2 + 6z_0^2 + 3z_+ e^{2(\sigma+\kappa)t} + 3z_- e^{2(\sigma-\kappa)t} + \frac{3}{2} e^{4\sigma t} \cosh(4\kappa t). \tag{4.25}$$

Era de se esperar que o estado $|\phi^N(\alpha)\rangle$ mantivesse sua estatística super-poissoniana com o passar do tempo. Isso realmente ocorre quando assumimos $\sigma > 0$ e $\kappa > 0$. O comportamento de $Q(t)$ também pode ser insensível para alguns valores dos parâmetros χ e β . Entretanto, se considerarmos um reservatório altamente atenuador ($\sigma \approx -1.0$) e $\kappa < 0$, podemos encontrar PM decrescendo em um tempo curto, tornando-se sub-poissoniana rapidamente e, em seguida cresce até alcançar valores positivos no decorrer do tempo. Como podemos ver na figura 4.4(a), a redução da intensidade da atenuação do reservatório ($\sigma < 0$) elimina a ocorrência de estatística sub-poissoniana. Na figura 4.4(b), mesmo para um reservatório altamente atenuador, com $\sigma = -1$ (o menor valor possível), aumentando o parâmetro amplificador κ , de valores negativos até valores positivos, leva à redução do intervalo de tempo em que $Q(t) < 0$. Um comportamento similar é obtido quando fixamos $\sigma = -1$, $\kappa = -0.9$ e aumentamos x_0 , a amplitude inicial do estado coerente definindo o SECR, como visto na figura 4.4(c). Também observamos que (veja figura 4.4(d)), se fixarmos todos os parâmetros com valores favorecendo a existência de um intervalo de tempo em que dura o efeito sub-poissoniano, o aumento do número de componentes da superposição leva à redução do intervalo onde $Q(t) < 0$.

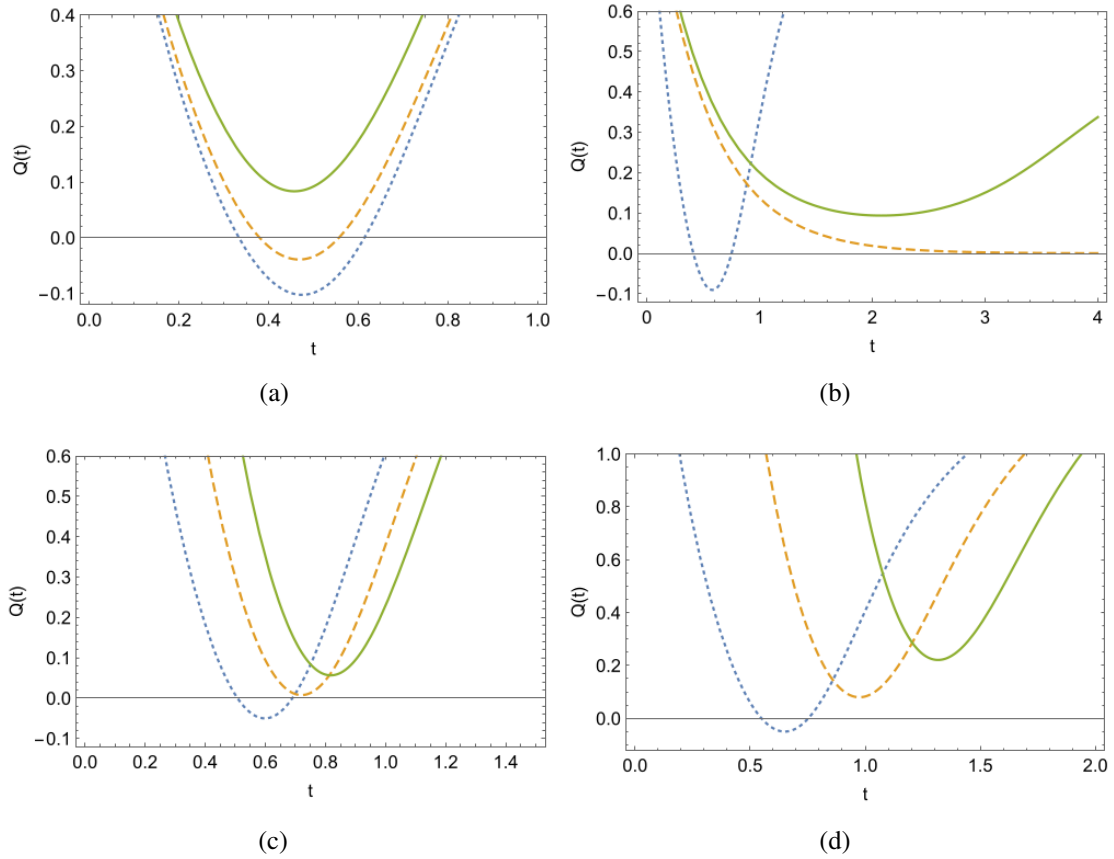


Fig. 4.4: PM do estado $|\phi^N(\alpha)\rangle$ como função do tempo, para $\chi = \beta = 0.0$, $N = 3$ e: (a) $x_0 = 0.2$, $\kappa = -0.8$ e $\sigma = -1.0, -0.9, -0.7$ (nas linhas pontilhada, tracejada e sólida, respectivamente); (b) $x_0 = 0.2$, $\sigma = -1.0$ e $\kappa = -0.6, 0.0, 0.05$ (nas linhas pontilhada, tracejada e sólida, respectivamente); (c) $\sigma = -1.0$, $\kappa = -0.9$ e $x_0 = 0.3, 0.4, 0.5$ (nas linhas pontilhada, tracejada e sólida, respectivamente); e (d) $x_0 = 0.3$, $\sigma = -1.0$, $\kappa = -0.8$ para $N = 3, 4, 5$, nas linhas pontilhada, tracejada e sólida, respectivamente.

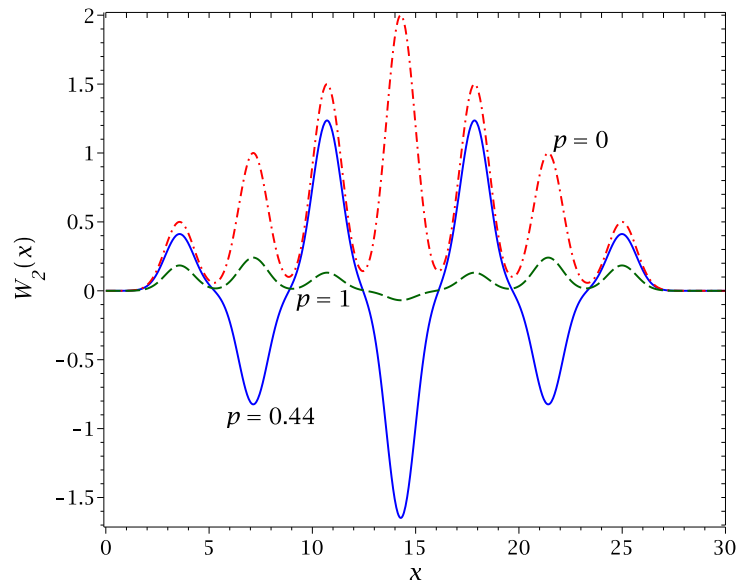
4.2.1 Negatividade da FW

Uma outra alternativa de investigar a degradação das características não-clássicas do estado $|\phi^N(\alpha)\rangle$ se faz analisando o desaparecimento da parte negativa da FW. Apresentar uma FW positiva sobre todo o espaço de fase é uma condição necessária para que um estado seja considerado clássico ou *quasi*-clássico (coerente). Porém, essa condição não é suficiente, exemplificado pelo estado coerente comprimido. Em geral, devemos esperar que superposições de estados coerentes tenham FW que apresentem sub-Planck estruturas [131–133] associadas ao padrão de interferência das componentes do estado.

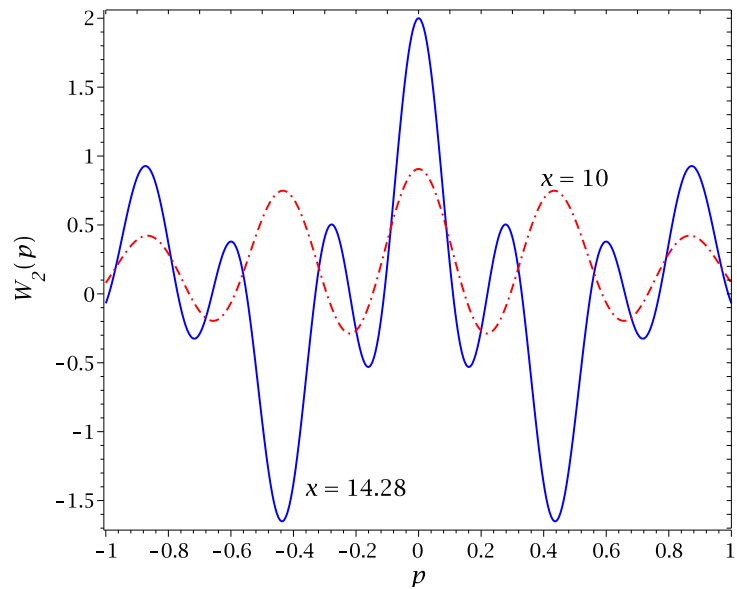
A sub-estrutura de Planck é um efeito marcante de interferência no espaço de fase. Explica a distribuição do número de fótons oscilantes dos estados compactados em um plano de fase. A distribuição de Wigner captura idealmente esses fenômenos de interferência não clássicos, pois pode ser negativa em uma região do espaço de fase. Zurek demonstrou pela primeira vez que tais estruturas oscilatórias resultantes de interferência quântica podem levar a uma área fundamental no espaço de fase, menor que a constante de Planck. A sensibilidade limitada por Heisenberg foi demonstrada para superposição de dois estados coerentes e um análogo clássico de óptica de ondas foi testado experimentalmente [131]. A evolução temporal na presença do meio externo leva à positivação da FW destruindo essas estruturas. Entretanto, em muitos casos a evolução indo até a positivação completa da FW é acompanhada pelo desaparecimento das propriedades não-clássicas do estado e isso é importante para avaliarmos o comportamento de $W_N(x, p; t)$ em detalhes. Aqui, seguimos a referência [120] e estudamos o tempo de positivação da FW. Nas figuras que seguem, primeiro mostramos como a FW evolui no tempo, no ponto onde ela alcança o valor mínimo global em $t = 0$. Dessa forma, nós estudamos como o tempo de positivação se altera quando mudamos os parâmetros do reservatório.

A equação (4.9), juntamente com as equações (4.8), (4.10)–(4.14), nos dá a evolução temporal exata do valor da FW em qualquer ponto no espaço de fase. Aqui, especificamente, avaliamos $W_N(x_{min}, p_{min}; t)$, onde (x_{min}, p_{min}) é um ponto no espaço de fase onde a FW, no instante inicial $t = 0$, possui seu valor mínimo. Por definição (conveniência), nós escolhemos analisar o caso de $N = 2$, tomando $x_0 = 3.57$ e $\phi = 0$. O valor de x_0 minimiza a FW (W_2) quando variamos a intensidade do estado coerente inicial, $|\alpha|^2 = x_0^2/2$. Para essa escolha, nós encontramos $x_{min} \simeq 14.28$ e $p_{min} \simeq 0.44$, com $W_2(14.28, 0.44; 0) \simeq -1.65$. A figura (4.5) mostra alguns perfis da FW (para $x_0 = 3.57$ e $p_0 = 0$) nas direções x e p , fixando x ou p em torno x_{min} e p_{min} , para ilustrar o comportamento de W_2 nas proximidades do ponto de mínimo.

Na figura (4.6) mostramos a dependência temporal da FW no ponto em que ela atinge seu valor mínimo em $t = 0$, no caso de um reservatório amplificador sensível à fase, para diversos valores de σ e β , fixando o valor de $|\kappa|$. O resultado é que, para pequenos valores de σ , como mostrado no quadro (a), os pares de curvas são diferentes para diferentes valores da fase β mas são bem próximos quando trocamos o sinal de κ , embora uma das curvas de cada par passe sobre a outra antes de $W_2(x_{min}, p_{min}; t)$ tornar-



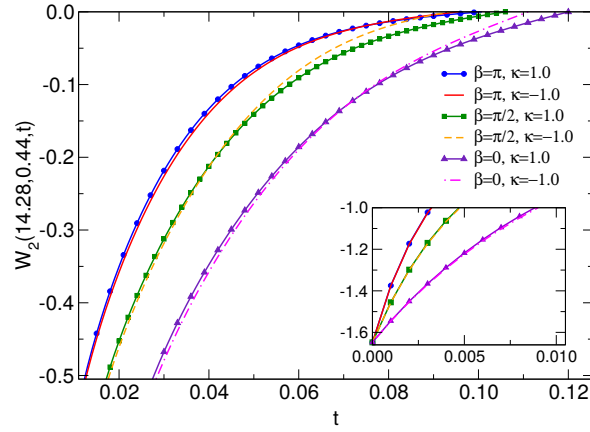
(a)



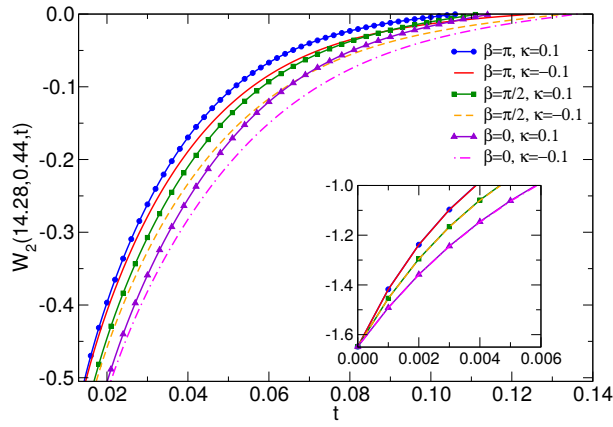
(b)

Fig. 4.5: Perfis da FW (W_2), em $t = 0$, para $x_0 = 3.57$ e $p_0 = 0$. Em (a), o perfil- x corresponde aos valores $p = 0.44$; 0.0 ; 1.0 . Em (b) tem-se o perfil- p para $x = 14.28$; 10.0 .

se positiva. O quadro (b) da figura (4.6) mostra as curvas de $W_2(x_{min}, p_{min}; t)$ para um valor muito alto do parâmetro de ganho do reservatório σ ($= 0.9$) e um pequeno valor de κ ($= 0.1$). Isso aponta uma distinção entre os pares de curvas (com o mesmo $|\kappa|$) fornecido pelo parâmetro de fase β é muito menos acentuado que quando para pequenos valores de σ . Além disso, as curvas de cada par não se cruzam durante o tempo em que $W_2(x_{min}, p_{min}; t)$ permanece negativa.



(a)



(b)

Fig. 4.6: FW W_2 , no ponto $(x_{min}, p_{min}) \simeq (14.28, 0.44)$, como função do tempo para o reservatório amplificador sensível à fase com $\chi = 0.5$: no quadro (a) $\sigma = 0.01$, enquanto o quadro (b) é para $\sigma = 0.9$. Quando $|\kappa|$ é pequeno o tempo de posituação é maior.

Na figura (4.7) mostramos a influência de um reservatório insensível à fase ($\chi = 0$) no comportamento de $W_2(x_{min}, p_{min}; t)$. Alguns aspectos devem ser ressaltados: primeiro, para grandes valores de $|\sigma|$ ($= 0.9$, correspondendo a uma grande atenuação ou amplificação) e moderados valores de $|\kappa|$ (≈ 1.0), as curvas são muito próximas nesse intervalo, mostrando que a natureza do reservatório não interfere nesse regime. As outras curvas possuem comportamento similares, mas observa-se que pequenos valores de $|\kappa|$ levam a um rápido aumento de $W_2(x_{min}, p_{min}; t)$ quando comparado com grandes valores. O quadro geral é que $W_2(x_{min}, p_{min}; t)$ cresce monotonicamente, até o instante em que $W_2(14.28, 0.44, t) = 0$ e a FW torna-se positiva em todo o espaço de fase. Esse instante

define o tempo que a FW se torna positiva, e é conhecido como tempo de positivação. Sua dependência com os parâmetros do reservatório são explorados a seguir.

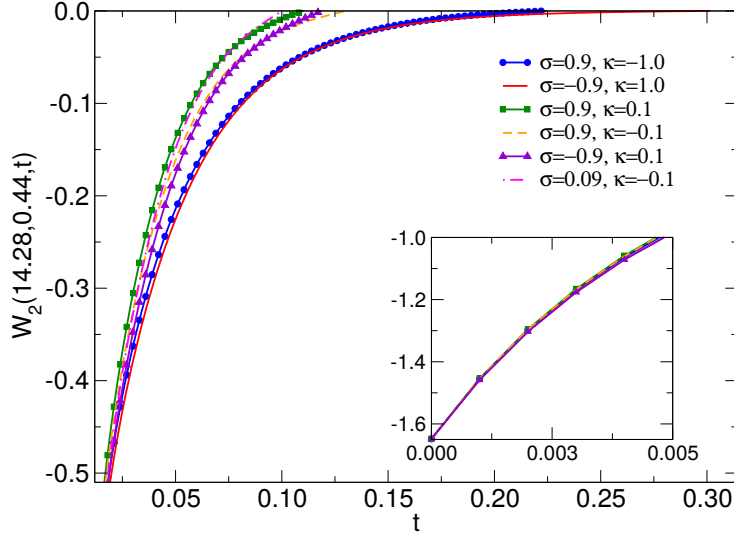
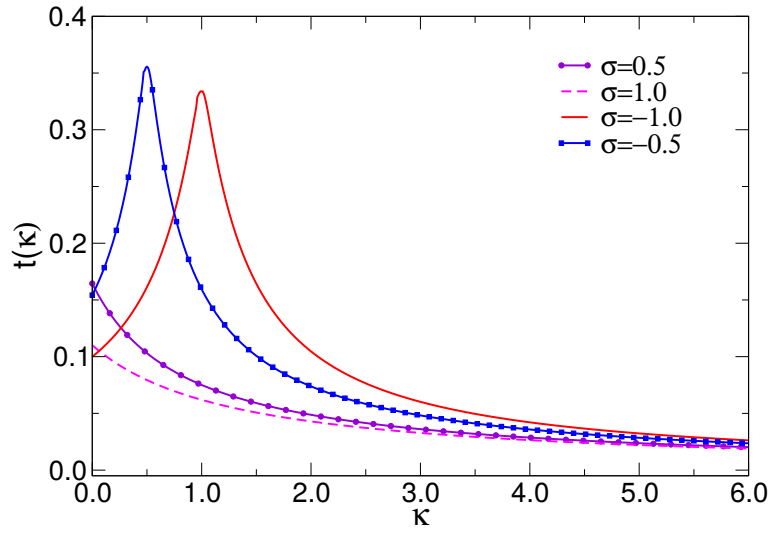


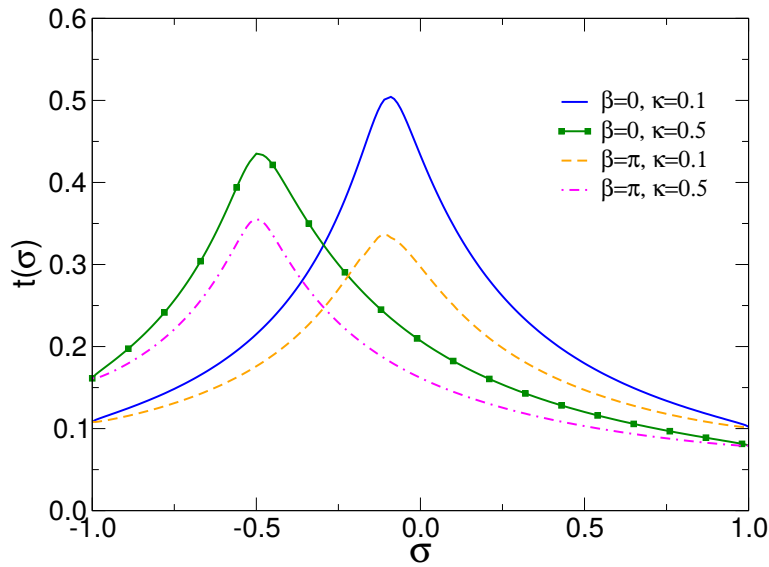
Fig. 4.7: FW $W_2(14.28, 0.44; t)$ para o caso de um reservatório insensível à fase ($\chi = 0$).

Na figura (4.8) é mostrado o comportamento do tempo de positivação na presença de um reservatório sensível à fase ($\chi > 0$). Fixando o parâmetro de fase $\beta (= \pi)$, notamos que o aumento de $\sigma > 0$ leva a uma rápida diminuição do tempo de positivação para todo $\kappa > 0$, como apresentado no quadro (a). No entanto, se $\sigma < 0$, então o tempo de positivação aumenta enquanto κ cresce a partir do zero, enquanto $\sigma + \kappa < 0$, alcançando um máximo quando $\sigma + \kappa = 0$ e então decresce para todos os valores de $\kappa > -\sigma$. Na figura 4.8(b), o tempo de positivação é mostrado como uma função de σ , para alguns valores de β e $\kappa > 0$. O comportamento é o mesmo que ocorre em (a), com o tempo de positivação aumentando para $-1 \leq \sigma < -\kappa$ e decrescendo para $-\kappa < \sigma \leq 1$. Além disso, o tempo de positivação para $\beta = 0$ é maior do que quando $\beta = \pi$, para todos os valores de σ , com exceção do valor limite $\sigma = \pm 1$, onde eles coincidem. Em todos os casos o aumento de κ reduz o tempo de positivação para todos os valores $\sigma > 0$.

Um comportamento similar é encontrado para um reservatório insensível à fase. A figura 4.9(a) and (b) mostram os tempos de positivação como função de κ e σ , no caso de $\chi = 0$ para o qual β desaparece na parametrização (4.14). Mais uma vez, o tempo de positivação aumenta com κ enquanto $0 \leq \kappa < -\sigma$ e decresce para $\kappa > -\sigma$. A mesma forma de pico aparece nas curvas do quadro (b) quando $\kappa < 1$, o valor máximo permitido



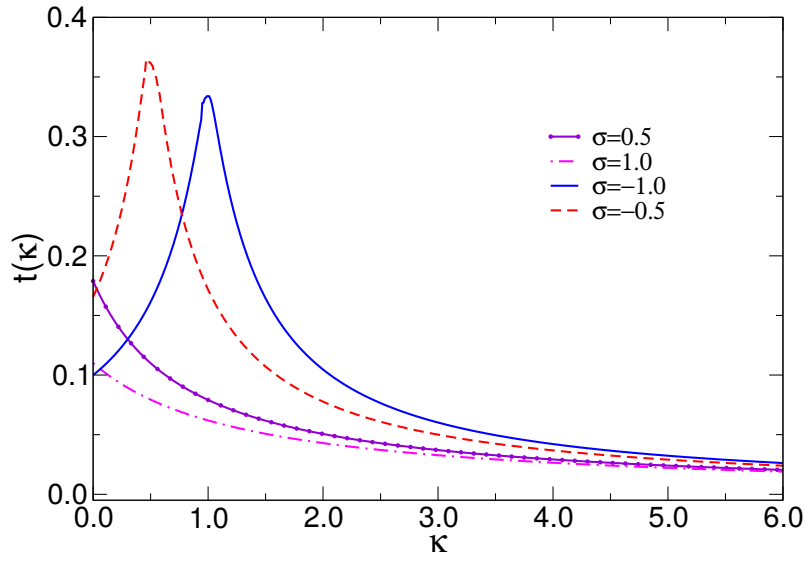
(a)



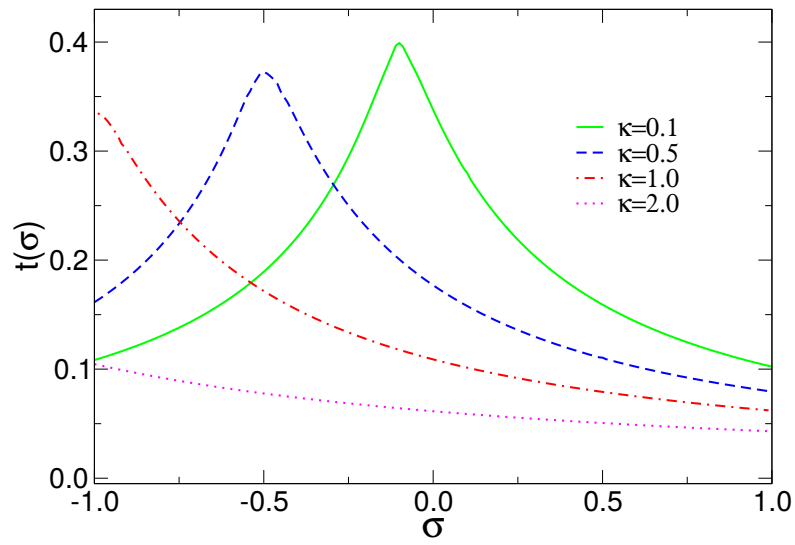
(b)

Fig. 4.8: Tempo de posituação de W_2 (para $x_0 = 3.57$, $p_0 = 0$) na presença de um reservatório sensível à fase, com $\chi = 0.5$: No quadro (a) $\beta = \pi$, enquanto em (b) mostra a dependência do tempo de posituação com σ , para alguns valores de β e κ .

de $|\sigma|$. Além disso, em todos os casos, o aumento $\sigma > 0$ ou $\kappa > 0$ leva à diminuição do tempo de posituação. Uma vez que o parâmetro κ não possui limite, a questão que surge é como $t(\kappa)$ tende assintoticamente para um valor finito, inclusive ser nulo.



(a)



(b)

Fig. 4.9: Tempo de positividade de W_2 (para $x_0 = 3.57$, $p_0 = 0$) na presença de um reservatório insensível à fase, $\chi = 0$. Os quadros (a) e (b) exibem a dependência do tempo de positividade com os parâmetros κ e σ , tomando um deles como variável independente em cada caso.

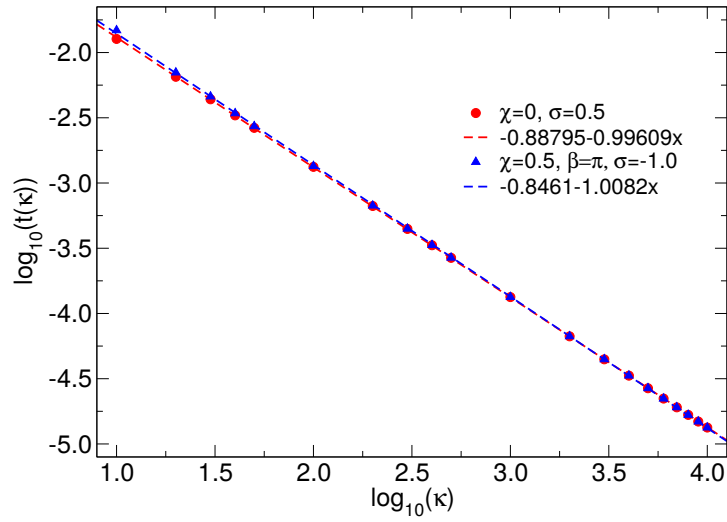


Fig. 4.10: Gráfico Log-Log de $t(\kappa) \times \kappa$.

Como mostra o gráfico Log-log da figura (4.10), o decaimento de $t(\kappa)$ para o valor zero quando $\kappa \rightarrow \infty$ segue uma lei de inverso de potência: $t(\kappa) \sim b\kappa^{-\eta}$ com $\eta \approx 1.0$ e $b \approx 0.13$ para o reservatório insensível à fase com $\sigma = 0.5$, enquanto $b \approx 0.14$ quando $\chi = 0.5$, $\beta = \pi$ e $\sigma = -1.0$.

5 Conclusões

Neste trabalho de tese, apresentamos um modo diferente de gerar o estado de fase, conjugado do estado de número. O estado que propusemos exibe uma distribuição de fase altamente concentrada, o que o aproxima do estado de fase ideal, este que na verdade é inatingível em laboratórios pelo fato de requerer energia infinita. Certas superposições de estados coerentes têm sido tentadas como um caminho de se aproximar do estado de fase ideal. Estados coerentes distribuídos regularmente sobre uma semirreta (abreviada como SECR) com vértice na origem do espaço de fase quântico é uma alternativa dentre outras. A superposição tem a forma, $|\phi^N(\alpha)\rangle = \mathcal{N}_N^{-1} \sum_{j=1}^{2^N-1} |(2j-1)\alpha\rangle$, com $\alpha = re^{i\phi}$.

Descrevemos um esquema experimental para gerar esse estado em um único modo de cavidade microondas e também em um único modo de onda viajante. A distribuição de fase do estado SECR, $P_N(\theta; \phi)$, possui um pico em torno de $\theta = \phi$ o qual torna-se mais elevado e estreito quando N e/ou $|\alpha|$ cresce. Porém, quando $P_N(\theta; \phi) \rightarrow \delta(\theta - \phi)$, a energia do estado SECR tende ao infinito quando $N \rightarrow \infty$. Decerto, tal limite não pode ser alcançado experimentalmente e a melhor aproximação deve ser definida pela limitação experimental para gerar o SECR, considerando a probabilidade de sucesso e a limitação de energia, como antes mencionado. Estudamos também as propriedades não-clássicas da SECR mostrando que eles são estados super-poissonianos, onde o PM é uma função crescente de $|\alpha|$ e N . Mas a SECR apresenta compressão em uma ou outra das quadraturas, com $(\Delta\hat{p})^2 < 1/2$, e diminuindo à medida que N aumenta, para α real e positivo. Esses resultados são obtidos para quaisquer α complexo.

Apresentamos também a representação de Wigner da SECR, a qual, por ser uma superposição finita de estados coerentes, possui a FW mostrando regiões com valores negativos, com grandes amplitudes de oscilações no espaço de fase, as quais correspondem às estruturas sub-Planck devido à interferência entre suas componentes. Consideramos a evolução temporal do estado SECR em contato com um reservatório, considerando os casos de processo dissipativo ou amplificador em uma aproximação Markoviana, com o

reservatório mais geral representado pela forma bilinear em termos dos operadores $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$, caracterizado pelos parâmetros σ , χ e β . Nós também consideramos, simultaneamente, o sistema interagindo com um meio de susceptibilidade de segunda ordem que se comporta como um amplificador paramétrico, quantificado pelo parâmetro κ . Entretanto, o sistema como um todo responde linearmente e assim pode ser resolvido exatamente para um estado inicial genérico. Nesse sentido, usamos a função de Green representando a equação mestra no espaço de fase, para discutir a evolução temporal do estado SECR. Tal tipo de estudo tem sido iniciado por Dodonov e coautores [119], onde o propagador, dado pela equação (4.7), foi calculado para o sistema em contato com um reservatório e um amplificador paramétrico, permitindo a determinação de $W(x, p; t)$ exatamente.

A partir da FW dependente do tempo, encontramos que, na presença de um reservatório, quaisquer que sejam os parâmetros envolvidos, a SECR evolui para um estado de mistura com grau de impureza aumentando com o tempo. Analisamos a evolução temporal das variâncias das quadraturas e encontramos que, em geral, o aumento da intensidade do parâmetro (σ) do reservatório insensível à fase leva à redução da compressão das quadraturas. Por outro lado, o aumento do parâmetro do amplificador paramétrico (κ) estimula a compressão. Fixando σ , κ e $\beta = 0$, e aumentando o parâmetro sensível à fase χ leva ao aumento da compressão das quadraturas. Isso é o reverso do comportamento em que aumentamos o parâmetro β no caso de um reservatório sensível à fase. Mas em todo caso, independente do valor dos outros parâmetros, tomando $\kappa > 1$ nos leva, ao longo do tempo, à estados que mantém forte compressão na quadratura $\hat{p}$, para α real. No caso contrário, quando $\kappa < 0$ com alto valor absoluto, a variância da quadratura $\hat{p}$ aumenta rapidamente com o tempo e a compressão é ocorre apenas em um intervalo de tempo muito curto. Investigamos o comportamento do PM do estado SECR evoluindo no tempo. Foi observado que, mesmo que o estado inicial seja super-poissoniano, pode existir um curto intervalo de tempo, em certas circunstâncias, durante o qual o estado evoluído torna-se sub-poissoniano. Um intervalo de tempo tão curto, no qual $Q(t) < 0$, acontece quando o reservatório é altamente atenuador ($\sigma \approx -1.0$) e $\kappa < 0$, com valores moderados. Aumentando σ , κ , x_0 ou N , anula-se quase totalmente a ocorrência de intervalos com estatística sub-poissoniana.

A negatividade da FW foi analisada através da evolução temporal $W_N(x, p; t)$ no ponto (x_{min}, p_{min}) no espaço de fase, onde ela adquire seu valor mínimo absoluto em $t = 0$ com $x_0 = \sqrt{2}\alpha = 3.57$. Fixamos especificamente $N = 2$. Observamos que, para um reservatório amplificador sensível à fase, com um pequeno valor de σ , as curvas são bastante

próximas independente do sinal do parâmetro amplificador κ , enquanto que são bem distintas para diferentes valores do parâmetro de fase β . Isso não acontece quando consideramos $\sigma \sim 1$ e pequenos valores de $|\kappa|$. No caso de reservatório insensível à fase, as curvas de $W_N(x_{min}, p_{min}; t)$ são quase indistinguíveis quando consideramos grandes valores de $|\sigma|$ e valores moderados de $|\kappa|$, indicando que a natureza atenuante/amplificadora do reservatório não possui papel importante nesse regime.

Também encontramos que, para pequenos $|\kappa|$, o aumento de $W_N(x_{min}, p_{min}; t)$ ocorre mais lentamente quando comparado com o caso de grandes valores de $|\kappa|$. Nesse caso, concluímos que, de modo geral, com a evolução temporal o valor mínimo da FW desaparece em algum instante. Foi observado que o tempo de positivação diminui mais rapidamente quando aumentamos $\sigma > 0$, independente do valor de $\kappa > 0$, no caso de um reservatório sensível à fase. Por outro lado, vimos que um aumento de $\kappa > 0$ acarreta uma redução do tempo de positivação para todo $\sigma > 0$. Resultados similares são obtidos para o caso de um reservatório insensível à fase, com o tempo de positivação sendo reduzido quando aumentamos $\sigma > 0$ ou $\kappa > 0$. Entretanto, para $-1 \leq \sigma < 0$, o tempo de positivação aumenta quando $\kappa > 0$ cresce, enquanto $\sigma + \kappa > 0$, exibe um pico quando $\sigma + \kappa = 0$ e então decresce para todos $\kappa > -\sigma$. No caso de um reservatório sensível à fase, o tempo de positivação decresce quando β aumenta, para todos valores de σ para $\sigma = \pm 1$, onde eles coincidem. Em todos esses casos notamos que quando $\kappa \rightarrow \infty$, o tempo de positivação decai para zero segundo uma lei do inverso de potência, $t(\kappa) \sim \kappa^{-1}$. Como citado acima, o uso do método da função de Green nos fornece a solução da equação de Fokker-Planck, dando-nos a evolução de qualquer estado na presença de um reservatório e/ou amplificador paramétrico.

Como perspectiva, pretendemos estudar como outros estados do campo de modo único evoluem no tempo nessas circunstâncias, em particular as superposições de estados coerentes sobre um círculo no espaço de fase. Para determinados valores dos parâmetros envolvidos, essa superposição pode gerar certos estados de número, em muito boa aproximação [95].

APÊNDICE A – Evolução temporal

A.1 Cálculo explícito da evolução temporal da Função de Wigner com $N = 2$

A função $W(x, p; t)$ está relacionada com a função inicial $W(x', p'; 0)$ por meio da transformação linear

$$W(x, p; t) = \int G(x, p; x', p'; t) W(x', p'; 0) dx' dp', \quad (\text{A.1})$$

onde $G(x, p; x', p'; t)$ é o propagador que é dado por

$$\begin{aligned} G(x, p; x', p'; t) = & (2\pi\sqrt{\Delta})^{-1} \exp\{-(2\Delta)^{-1} [z_-x^2 + z_+p^2 - 2z_0xp \\ & + z_-e^{2t(\gamma+k)}x'^2 + z_+e^{2t(\gamma-k)}p'^2 - 2z_0e^{2t\gamma}x'p' \\ & + 2e^{(\gamma+k)t}(z_0p - z_-x)x' + 2e^{(\gamma-k)t}(z_0x - z_+p)p']\}, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

onde $\Delta = z_+z_- - z_0^2$. Podemos agora reescrever a equação (A.1) como

$$\begin{aligned} W(x', p'; 0) = & \frac{2e^{-p'^2}}{\eta^2} \{ [e^{-(x'-x_0)^2} + e^{-(x'-3x_0)^2} + e^{-(x'-5x_0)^2} + e^{-(x'-7x_0)^2}] \\ & + (e^{-(x'-2x_0)^2} + e^{-(x'-4x_0)^2} + e^{-(x'-6x_0)^2}) (e^{2ip'x_0} + e^{-2ip'x_0}) \\ & + (e^{-(x'-3x_0)^2} + e^{-(x'-5x_0)^2}) (e^{4ip'x_0} + e^{-4ip'x_0}) \\ & + e^{-(x'-4x_0)^2} (e^{6ip'x_0} + e^{-6ip'x_0}) \}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Podemos reescrever a equação (A.3) como

$$\begin{aligned} W(x', p'; 0) = & \frac{2}{\eta^2} (E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5 + E_6 + E_7 + E_8 + E_9 + E_{10} \\ & + E_{11} + E_{12} + E_{13} + E_{14} + E_{15} + E_{16}), \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

onde

$$E_1 = \exp(-x'^2 - x_0^2 + 2x_0x' - p'^2),$$

$$E_2 = \exp(-x'^2 - 9x_0^2 + 6x_0x' - p'^2),$$

$$E_3 = \exp(-x'^2 - 25x_0^2 + 10x_0x' - p'^2),$$

$$E_4 = \exp(-x'^2 - 49x_0^2 + 14x_0x' - p'^2),$$

$$E_5 = \exp(-x'^2 - 4x_0^2 + 4x_0x' + 2ip'x_0 - p'^2),$$

$$E_6 = \exp(-x'^2 - 16x_0^2 + 8x_0x' + 2ip'x_0 - p'^2),$$

$$E_7 = \exp(-x'^2 - 36x_0^2 + 12x_0x' + 2ip'x_0 - p'^2),$$

$$E_8 = \exp(-x'^2 - 4x_0^2 + 4x_0x' - 2ip'x_0 - p'^2),$$

$$E_9 = \exp(-x'^2 - 16x_0^2 + 8x_0x' - 2ip'x_0 - p'^2),$$

$$E_{10} = \exp(-x'^2 - 36x_0^2 + 12x_0x' - 2ip'x_0 - p'^2),$$

$$E_{11} = \exp(-x'^2 - 9x_0^2 + 6x_0x' + 4ip'x_0 - p'^2),$$

$$E_{12} = \exp(-x'^2 - 25x_0^2 + 10x_0x' + 4ip'x_0 - p'^2),$$

$$E_{13} = \exp(-x'^2 - 9x_0^2 + 6x_0x' - 4ip'x_0 - p'^2),$$

$$E_{14} = \exp(-x'^2 - 25x_0^2 + 10x_0x' - 4ip'x_0 - p'^2),$$

$$E_{15} = \exp(-x'^2 - 16x_0^2 + 8x_0x' + 6ip'x_0 - p'^2),$$

$$E_{16} = \exp(-x'^2 - 16x_0^2 + 8x_0x' - 6ip'x_0 - p'^2).$$

Assim, a função de Wigner evoluída no tempo é

$$\begin{aligned} W(x, p; t) &= \frac{2(2\pi)^{-1}}{\eta^2\sqrt{\Delta}} \int E \times (E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5 + E_6 + E_7 + E_8 + E_9 + E_{10} \\ &\quad + E_{11} + E_{12} + E_{13} + E_{14} + E_{15} + E_{16}) dx' dp' \\ &= \frac{2(2\pi)^{-1}}{\eta^2\sqrt{\Delta}} \left\{ \int E \times E_1 dx' dp' + \int E \times E_2 dx' dp' + \int E \times E_3 dx' dp' \right. \\ &\quad + \int E \times E_4 dx' dp' + \int E \times E_5 dx' dp' + \int E \times E_6 dx' dp' \\ &\quad + \int E \times E_7 dx' dp' + \int E \times E_8 dx' dp' + \int E \times E_9 dx' dp' \\ &\quad + \int E \times E_{10} dx' dp' + \int E \times E_{11} dx' dp' + \int E \times E_{12} dx' dp' \\ &\quad + \int E \times E_{13} dx' dp' + \int E \times E_{14} dx' dp' \\ &\quad \left. + \int E \times E_{15} dx' dp' + \int E \times E_{16} dx' dp' \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

onde escrevemos E no lugar de $G(x, p; x', p'; t)$. Resolvendo a integral $\int E \times E_1 dx' dp'$, encontramos

$$\begin{aligned} &\int \exp(-x'^2 - x_0^2 + 2x_0x' - p'^2) \times \exp \left\{ -(2\Delta)^{-1} [z_-x^2 \right. \\ &\quad + z_+p^2 - 2z_0xp + z_-e^{2t(\gamma+k)}x'^2 + z_+e^{2t(\gamma-k)}p'^2 - 2z_0e^{2t\gamma}x'p' \\ &\quad \left. + 2e^{(\gamma+k)t}(z_0p - z_-x)x' + 2e^{(\gamma-k)t}(z_0x - z_+p)p'] \right\} dx' dp'. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

A solução da integral é do tipo

$$\int \exp(-\mathbf{zGz}^T + \mathbf{Fz}^T) dx' dp' = \frac{\pi}{\sqrt{\det(G)}} \exp \left(\frac{1}{4} \mathbf{FG}^{-1} \mathbf{F}^T \right), \quad (\text{A.7})$$

onde

$$\mathbf{z} = (q', p'),$$

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F} = (f_1, f_2),$$

$\mathbf{z}^T$ e $\mathbf{F}^T$ são as transpostas de $\mathbf{z}$ e $\mathbf{F}$, respectivamente. Fazendo então o desenvolvimento do integrando da equação (A.7) temos,

$$\begin{aligned} -\mathbf{z}G\mathbf{z}^T + \mathbf{F}\mathbf{z}^T &= -(q', p') \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q' \\ p' \end{pmatrix} + (f_1, f_2) \begin{pmatrix} q' \\ p' \end{pmatrix} \\ &= -(q', p') \begin{pmatrix} g_{11}q' + g_{12}p' \\ g_{12}q' + g_{22}p' \end{pmatrix} + f_1q' + f_2p' \\ &= -(g_{11}q'^2 + 2g_{12}q'p' + g_{22}p'^2) + f_1q' + f_2p'. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Uma vez que

$$G^{-1} = \frac{1}{\det(G)} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix},$$

então,

$$\mathbf{F}G^{-1}\mathbf{F}^T = \frac{f_1^2g_{22} - 2f_1f_2g_{12} + f_2^2g_{11}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2},$$

logo, podemos reescrever a equação (A.7) como

$$\begin{aligned} &\int \exp(-g_{11}q'^2 - 2g_{12}q'p' - g_{22}p'^2 + f_1q' + f_2p') dq' dp' \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} \exp\left(\frac{1}{4} \frac{f_1^2g_{22} - 2f_1f_2g_{12} + f_2^2g_{11}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Assim, comparando o lado esquerdo da equação (A.9) com a equação (A.6) podemos

obter imediatamente os seguintes índices:

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1 + \frac{z_- e^{2t(\gamma+k)}}{2\Delta}, \\ g_{22} &= 1 + \frac{z_+ e^{2t(\gamma-k)}}{2\Delta}, \\ g_{12} &= -\frac{z_0 e^{2t\gamma}}{2\Delta}, \\ f_1 &= \frac{e^{(\gamma+k)t}}{\Delta} (z_- x - z_0 p) + 2x_0, \\ f_2 &= \frac{e^{(\gamma-k)t}}{\Delta} (z_+ p - z_0 x). \end{aligned}$$

Agora obtemos imediatamente que

$$\det(G) = \frac{e^{4t\gamma} + 2z_- (2z_+ + e^{2t(\gamma+k)}) + 2z_+ e^{2t(\gamma-k)} - 4z_0^2}{4\Delta}.$$

Portanto, podemos concluir que

$$\begin{aligned} \int E \times E_1 dx' dp' &= 2\pi \sqrt{\frac{\Delta}{Y}} \exp \left\{ -\frac{2}{Y} [\sigma_{pp} x^2 + \sigma_{xx} p^2 - 2\sigma_{xp} xp] \right. \\ &\quad \left. + \frac{4x_0}{Y} (\sigma_{pp} x - \sigma_{xp} p) e^{t(\gamma+k)} - x_0^2 a(t) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Resolvendo a integral $\int E \times E_2 dx' dp'$, encontramos

$$\begin{aligned} &\int \exp(-x'^2 - 9x_0^2 + 6x_0 x' - p'^2) \times \exp \{ -(2\Delta)^{-1} [z_- x^2 \\ &+ z_+ p^2 - 2z_0 x p + z_- e^{2t(\gamma+k)} x'^2 + z_+ e^{2t(\gamma-k)} p'^2 - 2z_0 e^{2t\gamma} x' p' \\ &+ 2e^{(\gamma+k)t} (z_0 p - z_- x) x' + 2e^{(\gamma-k)t} (z_0 x - z_+ p) p'] \} dx' dp', \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Agora podemos obter os seguintes índices

$$\begin{aligned}
g_{11} &= 1 + \frac{z_- e^{2t(\gamma+k)}}{2\Delta}, \\
g_{22} &= 1 + \frac{z_+ e^{2t(\gamma-k)}}{2\Delta}, \\
g_{12} &= -\frac{z_0 e^{2t\gamma}}{2\Delta}, \\
f_1 &= \frac{e^{(\gamma+k)t}}{\Delta} (z_- x - z_0 p) + 6x_0, \\
f_2 &= \frac{e^{(\gamma-k)t}}{\Delta} (z_+ p - z_0 x).
\end{aligned}$$

Portanto, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\int E \times E_2 dx' dp' &= 2\pi \sqrt{\frac{\Delta}{Y}} \exp \left\{ -\frac{2}{Y} [\sigma_{pp} x^2 + \sigma_{xx} p^2 - 2\sigma_{xp} xp] \right. \\
&\quad \left. + \frac{12x_0}{Y} (\sigma_{pp} x - \sigma_{xp} p) e^{t(\gamma+k)} - 9x_0^2 a(t) \right\}. \quad (\text{A.12})
\end{aligned}$$

Resolvendo a integral $\int E \times E_3 dx' dp'$, encontramos

$$\begin{aligned}
&\int \exp(-x'^2 - 25x_0^2 + 10x_0 x' - p'^2) \times \exp \{ -(2\Delta)^{-1} [z_- x^2 \\
&+ z_+ p^2 - 2z_0 x p + z_- e^{2t(\gamma+k)} x'^2 + z_+ e^{2t(\gamma-k)} p'^2 - 2z_0 e^{2t\gamma} x' p' \\
&+ 2e^{(\gamma+k)t} (z_0 p - z_- x) x' + 2e^{(\gamma-k)t} (z_0 x - z_+ p) p'] \} dx' dp', \quad (\text{A.13})
\end{aligned}$$

Agora podemos obter os seguintes índices

$$\begin{aligned}
g_{11} &= 1 + \frac{z_- e^{2t(\gamma+k)}}{2\Delta}, \\
g_{22} &= 1 + \frac{z_+ e^{2t(\gamma-k)}}{2\Delta}, \\
g_{12} &= -\frac{z_0 e^{2t\gamma}}{2\Delta}, \\
f_1 &= \frac{e^{(\gamma+k)t}}{\Delta} (z_- x - z_0 p) + 10x_0, \\
f_2 &= \frac{e^{(\gamma-k)t}}{\Delta} (z_+ p - z_0 x).
\end{aligned}$$

Portanto, podemos concluir que

$$\int E \times E_3 dx' dp' = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta}{Y}} \exp \left\{ -\frac{2}{Y} [\sigma_{pp} x^2 + \sigma_{xx} p^2 - 2\sigma_{xp} xp] \right. \\ \left. + \frac{20x_0}{Y} (\sigma_{pp} x - \sigma_{xp} p) e^{t(\gamma+k)} - 25x_0^2 a(t) \right\}. \quad (\text{A.14})$$

Resolvendo a integral $\int E \times E_4 dx' dp'$, encontramos

$$\int \exp(-x'^2 - 49x_0^2 + 14x_0 x' - p'^2) \times \exp \{ -(2\Delta)^{-1} [z_- x^2 \\ + z_+ p^2 - 2z_0 xp + z_- e^{2t(\gamma+k)} x'^2 + z_+ e^{2t(\gamma-k)} p'^2 - 2z_0 e^{2t\gamma} x' p' \\ + 2e^{(\gamma+k)t} (z_0 p - z_- x) x' + 2e^{(\gamma-k)t} (z_0 x - z_+ p) p'] \} dx' dp', \quad (\text{A.15})$$

Agora podemos obter os seguintes índices

$$g_{11} = 1 + \frac{z_- e^{2t(\gamma+k)}}{2\Delta}, \\ g_{22} = 1 + \frac{z_+ e^{2t(\gamma-k)}}{2\Delta}, \\ g_{12} = -\frac{z_0 e^{2t\gamma}}{2\Delta}, \\ f_1 = \frac{e^{(\gamma+k)t}}{\Delta} (z_- x - z_0 p) + 14x_0, \\ f_2 = \frac{e^{(\gamma-k)t}}{\Delta} (z_+ p - z_0 x).$$

Portanto, podemos concluir que

$$\int E \times E_4 dx' dp' = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta}{Y}} \exp \left\{ -\frac{2}{Y} [\sigma_{pp} x^2 + \sigma_{xx} p^2 - 2\sigma_{xp} xp] \right. \\ \left. + \frac{28x_0}{Y} (\sigma_{pp} x - \sigma_{xp} p) e^{t(\gamma+k)} - 49x_0^2 a(t) \right\}. \quad (\text{A.16})$$

Resolvendo a integral $\int E \times E_5 dx' dp'$, encontramos

$$\begin{aligned} & \int \exp(-x'^2 - 4x_0^2 + 4x_0x' + 2ix_0p' - p'^2) \times \exp\{-(2\Delta)^{-1}[z_-x^2 \\ & + z_+p^2 - 2z_0xp + z_-e^{2t(\gamma+k)}x'^2 + z_+e^{2t(\gamma-k)}p'^2 - 2z_0e^{2t\gamma}x'p' \\ & + 2e^{(\gamma+k)t}(z_0p - z_-x)x' + 2e^{(\gamma-k)t}(z_0x - z_+p)p']\} dx' dp', \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Agora podemos obter os seguintes índices

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1 + \frac{z_-e^{2t(\gamma+k)}}{2\Delta}, \\ g_{22} &= 1 + \frac{z_+e^{2t(\gamma-k)}}{2\Delta}, \\ g_{12} &= -\frac{z_0e^{2t\gamma}}{2\Delta}, \\ f_1 &= \frac{e^{(\gamma+k)t}}{\Delta}(z_-x - z_0p) + 4x_0, \\ f_2 &= \frac{e^{(\gamma-k)t}}{\Delta}(z_+p - z_0x) + 2ix_0. \end{aligned}$$

Portanto, podemos concluir que

$$\begin{aligned} \int E \times E_5 dx' dp' &= 2\pi\sqrt{\frac{\Delta}{Y}} \exp\left\{-\frac{2}{Y}[\sigma_{pp}x^2 + \sigma_{xx}p^2 - 2\sigma_{xp}xp] \right. \\ &\quad + \frac{8x_0}{Y}(\sigma_{pp}x - \sigma_{xp}p)e^{t(\gamma+k)} + \frac{4ix_0}{Y}(\sigma_{xx}p - \sigma_{xp}x)e^{t(\gamma-k)} \\ &\quad \left. + \frac{8ix_0^2}{Y}\sigma_{xp}e^{2t\gamma} - \frac{2x_0^2}{Y}(5z_-e^{2t(\gamma+k)} + 2e^{4t\gamma} + 2\Delta)\right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Resolvendo a integral $\int E \times E_6 dx' dp'$, encontramos

$$\begin{aligned} & \int \exp(-x'^2 - 16x_0^2 + 8x_0x' + 2ix_0p' - p'^2) \times \exp\{-(2\Delta)^{-1}[z_-x^2 \\ & + z_+p^2 - 2z_0xp + z_-e^{2t(\gamma+k)}x'^2 + z_+e^{2t(\gamma-k)}p'^2 - 2z_0e^{2t\gamma}x'p' \\ & + 2e^{(\gamma+k)t}(z_0p - z_-x)x' + 2e^{(\gamma-k)t}(z_0x - z_+p)p']\} dx' dp', \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Agora podemos obter os seguintes índices

$$\begin{aligned}
 g_{11} &= 1 + \frac{z_- e^{2t(\gamma+k)}}{2\Delta}, \\
 g_{22} &= 1 + \frac{z_+ e^{2t(\gamma-k)}}{2\Delta}, \\
 g_{12} &= -\frac{z_0 e^{2t\gamma}}{2\Delta}, \\
 f_1 &= \frac{e^{(\gamma+k)t}}{\Delta} (z_- x - z_0 p) + 8x_0, \\
 f_2 &= \frac{e^{(\gamma-k)t}}{\Delta} (z_+ p - z_0 x) + 2ix_0.
 \end{aligned}$$

Portanto, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
 \int E \times E_6 dx' dp' &= 2\pi \sqrt{\frac{\Delta}{Y}} \exp \left\{ -\frac{2}{Y} [\sigma_{pp} x^2 + \sigma_{xx} p^2 - 2\sigma_{xp} xp] \right. \\
 &\quad + \frac{16x_0}{Y} (\sigma_{pp} x - \sigma_{xp} p) e^{t(\gamma+k)} + \frac{4ix_0}{Y} (\sigma_{xx} p - \sigma_{xp} x) e^{t(\gamma-k)} \\
 &\quad \left. + \frac{16ix_0^2}{Y} \sigma_{xp} e^{2t\gamma} - \frac{2x_0^2}{Y} (17z_- e^{2t(\gamma+k)} + 8e^{4t\gamma} + 2\Delta) \right\}. \quad (A.20)
 \end{aligned}$$

Resolvendo a integral $\int E \times E_7 dx' dp'$, encontramos

$$\begin{aligned}
 &\int \exp(-x'^2 - 36x_0^2 + 12x_0 x' + 2ix_0 p' - p'^2) \times \exp\{-(2\Delta)^{-1} [z_- x^2 \\
 &\quad + z_+ p^2 - 2z_0 xp + z_- e^{2t(\gamma+k)} x'^2 + z_+ e^{2t(\gamma-k)} p'^2 - 2z_0 e^{2t\gamma} x' p' \\
 &\quad + 2e^{(\gamma+k)t} (z_0 p - z_- x) x' + 2e^{(\gamma-k)t} (z_0 x - z_+ p) p']\} dx' dp', \quad (A.21)
 \end{aligned}$$

Agora podemos obter os seguintes índices

$$\begin{aligned}
 g_{11} &= 1 + \frac{z_- e^{2t(\gamma+k)}}{2\Delta}, \\
 g_{22} &= 1 + \frac{z_+ e^{2t(\gamma-k)}}{2\Delta}, \\
 g_{12} &= -\frac{z_0 e^{2t\gamma}}{2\Delta}, \\
 f_1 &= \frac{e^{(\gamma+k)t}}{\Delta} (z_- x - z_0 p) + 12x_0, \\
 f_2 &= \frac{e^{(\gamma-k)t}}{\Delta} (z_+ p - z_0 x) + 2ix_0.
 \end{aligned}$$

Portanto, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
 \int E \times E_7 dx' dp' &= 2\pi \sqrt{\frac{\Delta}{Y}} \exp \left\{ -\frac{2}{Y} [\sigma_{pp} x^2 + \sigma_{xx} p^2 - 2\sigma_{xp} xp] \right. \\
 &\quad + \frac{24x_0}{Y} (\sigma_{pp} x - \sigma_{xp} p) e^{t(\gamma+k)} + \frac{4ix_0}{Y} (\sigma_{xx} p - \sigma_{xp} x) e^{t(\gamma-k)} \\
 &\quad \left. + \frac{24ix_0^2}{Y} \sigma_{xp} e^{2t\gamma} - \frac{2x_0^2}{Y} (37z_- e^{2t(\gamma+k)} + 18e^{4t\gamma} + 2\Delta) \right\}. \quad (A.22)
 \end{aligned}$$

Resolvendo a integral $\int E \times E_8 dx' dp'$, encontramos:

$$\begin{aligned}
 &\int \exp(-x'^2 - 4x_0^2 + 4x_0 x' - 2ix_0 p' - p'^2) \times \exp\{-(2\Delta)^{-1} [z_- x^2 \\
 &\quad + z_+ p^2 - 2z_0 xp + z_- e^{2t(\gamma+k)} x'^2 + z_+ e^{2t(\gamma-k)} p'^2 - 2z_0 e^{2t\gamma} x' p' \\
 &\quad + 2e^{(\gamma+k)t} (z_0 p - z_- x) x' + 2e^{(\gamma-k)t} (z_0 x - z_+ p) p']\} dx' dp', \quad (A.23)
 \end{aligned}$$

Agora podemos obter os seguintes índices

$$\begin{aligned}
 g_{11} &= 1 + \frac{z_- e^{2t(\gamma+k)}}{2\Delta}, \\
 g_{22} &= 1 + \frac{z_+ e^{2t(\gamma-k)}}{2\Delta}, \\
 g_{12} &= -\frac{z_0 e^{2t\gamma}}{2\Delta}, \\
 f_1 &= \frac{e^{(\gamma+k)t}}{\Delta} (z_- x - z_0 p) + 4x_0, \\
 f_2 &= \frac{e^{(\gamma-k)t}}{\Delta} (z_+ p - z_0 x) - 2ix_0.
 \end{aligned}$$

Portanto, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
 \int E \times E_8 dx' dp' &= 2\pi \sqrt{\frac{\Delta}{Y}} \exp \left\{ -\frac{2}{Y} [\sigma_{pp} x^2 + \sigma_{xx} p^2 - 2\sigma_{xp} xp] \right. \\
 &\quad + \frac{8x_0}{Y} (\sigma_{pp} x - \sigma_{xp} p) e^{t(\gamma+k)} - \frac{4ix_0}{Y} (\sigma_{xx} p - \sigma_{xp} x) e^{t(\gamma-k)} \\
 &\quad \left. - \frac{8ix_0^2}{Y} \sigma_{xp} e^{2t\gamma} - \frac{2x_0^2}{Y} (5z_- e^{2t(\gamma+k)} + 2e^{4t\gamma} + 2\Delta) \right\}. \quad (A.24)
 \end{aligned}$$

Resolvendo a integral $\int E \times E_9 dx' dp'$, encontramos:

$$\begin{aligned}
 &\int \exp(-x'^2 - 16x_0^2 + 8x_0 x' - 2ix_0 p' - p'^2) \times \exp\{-(2\Delta)^{-1} [z_- x^2 \\
 &\quad + z_+ p^2 - 2z_0 xp + z_- e^{2t(\gamma+k)} x'^2 + z_+ e^{2t(\gamma-k)} p'^2 - 2z_0 e^{2t\gamma} x' p' \\
 &\quad + 2e^{(\gamma+k)t} (z_0 p - z_- x) x' + 2e^{(\gamma-k)t} (z_0 x - z_+ p) p']\} dx' dp', \quad (A.25)
 \end{aligned}$$

Agora podemos obter os seguintes índices

$$\begin{aligned}
 g_{11} &= 1 + \frac{z_- e^{2t(\gamma+k)}}{2\Delta}, \\
 g_{22} &= 1 + \frac{z_+ e^{2t(\gamma-k)}}{2\Delta}, \\
 g_{12} &= -\frac{z_0 e^{2t\gamma}}{2\Delta}, \\
 f_1 &= \frac{e^{(\gamma+k)t}}{\Delta} (z_- x - z_0 p) + 8x_0, \\
 f_2 &= \frac{e^{(\gamma-k)t}}{\Delta} (z_+ p - z_0 x) - 2ix_0.
 \end{aligned}$$

Portanto, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
 \int E \times E_9 dx' dp' &= 2\pi \sqrt{\frac{\Delta}{Y}} \exp \left\{ -\frac{2}{Y} [\sigma_{pp} x^2 + \sigma_{xx} p^2 - 2\sigma_{xp} xp] \right. \\
 &\quad + \frac{16x_0}{Y} (\sigma_{pp} x - \sigma_{xp} p) e^{t(\gamma+k)} - \frac{4ix_0}{Y} (\sigma_{xx} p - \sigma_{xp} x) e^{t(\gamma-k)} \\
 &\quad \left. - \frac{16ix_0^2}{Y} \sigma_{xp} e^{2t\gamma} - \frac{2x_0^2}{Y} (17z_- e^{2t(\gamma+k)} + 8e^{4t\gamma} + 2\Delta) \right\}. \quad (A.26)
 \end{aligned}$$

Resolvendo a integral $\int E \times E_{10} dx' dp'$, encontramos:

$$\begin{aligned}
 &\int \exp(-x'^2 - 36x_0^2 + 12x_0 x' - 2ix_0 p' - p'^2) \times \exp\{-(2\Delta)^{-1} [z_- x^2 \\
 &\quad + z_+ p^2 - 2z_0 xp + z_- e^{2t(\gamma+k)} x'^2 + z_+ e^{2t(\gamma-k)} p'^2 - 2z_0 e^{2t\gamma} x' p' \\
 &\quad + 2e^{(\gamma+k)t} (z_0 p - z_- x) x' + 2e^{(\gamma-k)t} (z_0 x - z_+ p) p']\} dx' dp', \quad (A.27)
 \end{aligned}$$

Agora podemos obter os seguintes índices

$$\begin{aligned}
 g_{11} &= 1 + \frac{z_- e^{2t(\gamma+k)}}{2\Delta}, \\
 g_{22} &= 1 + \frac{z_+ e^{2t(\gamma-k)}}{2\Delta}, \\
 g_{12} &= -\frac{z_0 e^{2t\gamma}}{2\Delta}, \\
 f_1 &= \frac{e^{(\gamma+k)t}}{\Delta} (z_- x - z_0 p) + 12x_0, \\
 f_2 &= \frac{e^{(\gamma-k)t}}{\Delta} (z_+ p - z_0 x) - 2ix_0.
 \end{aligned}$$

Portanto, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
 \int E \times E_{10} dx' dp' &= 2\pi \sqrt{\frac{\Delta}{Y}} \exp \left\{ -\frac{2}{Y} [\sigma_{pp} x^2 + \sigma_{xx} p^2 - 2\sigma_{xp} xp] \right. \\
 &\quad + \frac{24x_0}{Y} (\sigma_{pp} x - \sigma_{xp} p) e^{t(\gamma+k)} - \frac{4ix_0}{Y} (\sigma_{xx} p - \sigma_{xp} x) e^{t(\gamma-k)} \\
 &\quad \left. - \frac{24ix_0^2}{Y} \sigma_{xp} e^{2t\gamma} - \frac{2x_0^2}{Y} (37z_- e^{2t(\gamma+k)} + 18e^{4t\gamma} + 2\Delta) \right\}. \quad (A.28)
 \end{aligned}$$

Resolvendo a integral $\int E \times E_{11} dx' dp'$, encontramos:

$$\begin{aligned}
 &\int \exp(-x'^2 - 9x_0^2 + 6x_0 x' + 4ix_0 p' - p'^2) \times \exp\{-(2\Delta)^{-1} [z_- x^2 \\
 &\quad + z_+ p^2 - 2z_0 xp + z_- e^{2t(\gamma+k)} x'^2 + z_+ e^{2t(\gamma-k)} p'^2 - 2z_0 e^{2t\gamma} x' p' \\
 &\quad + 2e^{(\gamma+k)t} (z_0 p - z_- x) x' + 2e^{(\gamma-k)t} (z_0 x - z_+ p) p']\} dx' dp', \quad (A.29)
 \end{aligned}$$

Agora podemos obter os seguintes índices

$$\begin{aligned}
g_{11} &= 1 + \frac{z_- e^{2t(\gamma+k)}}{2\Delta}, \\
g_{22} &= 1 + \frac{z_+ e^{2t(\gamma-k)}}{2\Delta}, \\
g_{12} &= -\frac{z_0 e^{2t\gamma}}{2\Delta}, \\
f_1 &= \frac{e^{(\gamma+k)t}}{\Delta} (z_- x - z_0 p) + 6x_0, \\
f_2 &= \frac{e^{(\gamma-k)t}}{\Delta} (z_+ p - z_0 x) + 4ix_0.
\end{aligned}$$

Portanto, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\int E \times E_{11} dx' dp' &= 2\pi \sqrt{\frac{\Delta}{Y}} \exp \left\{ -\frac{2}{Y} [\sigma_{pp} x^2 + \sigma_{xx} p^2 - 2\sigma_{xp} xp] \right. \\
&\quad + \frac{12x_0}{Y} (\sigma_{pp} x - \sigma_{xp} p) e^{t(\gamma+k)} + \frac{8ix_0}{Y} (\sigma_{xx} p - \sigma_{xp} x) e^{t(\gamma-k)} \\
&\quad \left. + \frac{24ix_0^2}{Y} \sigma_{xp} e^{2t\gamma} - \frac{2x_0^2}{Y} (13z_- e^{2t(\gamma+k)} + \frac{9}{2} e^{4t\gamma} + 8\Delta) \right\}. \quad (A.30)
\end{aligned}$$

Resolvendo a integral $\int E \times E_{12} dx' dp'$, encontramos:

$$\begin{aligned}
&\int \exp(-x'^2 - 25x_0^2 + 10x_0 x' + 4ix_0 p' - p'^2) \times \exp\{-(2\Delta)^{-1} [z_- x^2 \\
&+ z_+ p^2 - 2z_0 xp + z_- e^{2t(\gamma+k)} x'^2 + z_+ e^{2t(\gamma-k)} p'^2 - 2z_0 e^{2t\gamma} x' p' \\
&+ 2e^{(\gamma+k)t} (z_0 p - z_- x) x' + 2e^{(\gamma-k)t} (z_0 x - z_+ p) p']\} dx' dp', \quad (A.31)
\end{aligned}$$

Agora podemos obter os seguintes índices

$$\begin{aligned}
g_{11} &= 1 + \frac{z_- e^{2t(\gamma+k)}}{2\Delta}, \\
g_{22} &= 1 + \frac{z_+ e^{2t(\gamma-k)}}{2\Delta}, \\
g_{12} &= -\frac{z_0 e^{2t\gamma}}{2\Delta}, \\
f_1 &= \frac{e^{(\gamma+k)t}}{\Delta} (z_- x - z_0 p) + 10x_0, \\
f_2 &= \frac{e^{(\gamma-k)t}}{\Delta} (z_+ p - z_0 x) + 4ix_0.
\end{aligned}$$

Portanto, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\int E \times E_{12} dx' dp' &= 2\pi \sqrt{\frac{\Delta}{Y}} \exp \left\{ -\frac{2}{Y} [\sigma_{pp} x^2 + \sigma_{xx} p^2 - 2\sigma_{xp} xp] \right. \\
&\quad + \frac{20x_0}{Y} (\sigma_{pp} x - \sigma_{xp} p) e^{t(\gamma+k)} + \frac{8ix_0}{Y} (\sigma_{xx} p - \sigma_{xp} x) e^{t(\gamma-k)} \\
&\quad \left. + \frac{40ix_0^2}{Y} \sigma_{xp} e^{2t\gamma} - \frac{2x_0^2}{Y} (29z_- e^{2t(\gamma+k)} + \frac{25}{2} e^{4t\gamma} + 8\Delta) \right\}. \quad (A.32)
\end{aligned}$$

Resolvendo a integral $\int E \times E_{13} dx' dp'$, encontramos:

$$\begin{aligned}
&\int \exp(-x'^2 - 9x_0^2 + 6x_0 x' - 4ix_0 p' - p'^2) \times \exp\{-(2\Delta)^{-1} [z_- x^2 \\
&+ z_+ p^2 - 2z_0 xp + z_- e^{2t(\gamma+k)} x'^2 + z_+ e^{2t(\gamma-k)} p'^2 - 2z_0 e^{2t\gamma} x' p' \\
&+ 2e^{(\gamma+k)t} (z_0 p - z_- x) x' + 2e^{(\gamma-k)t} (z_0 x - z_+ p) p']\} dx' dp', \quad (A.33)
\end{aligned}$$

Agora podemos obter os seguintes índices

$$\begin{aligned}
 g_{11} &= 1 + \frac{z_- e^{2t(\gamma+k)}}{2\Delta}, \\
 g_{22} &= 1 + \frac{z_+ e^{2t(\gamma-k)}}{2\Delta}, \\
 g_{12} &= -\frac{z_0 e^{2t\gamma}}{2\Delta}, \\
 f_1 &= \frac{e^{(\gamma+k)t}}{\Delta} (z_- x - z_0 p) + 6x_0, \\
 f_2 &= \frac{e^{(\gamma-k)t}}{\Delta} (z_+ p - z_0 x) - 4ix_0.
 \end{aligned}$$

Portanto, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
 \int E \times E_{13} dx' dp' &= 2\pi \sqrt{\frac{\Delta}{Y}} \exp \left\{ -\frac{2}{Y} [\sigma_{pp} x^2 + \sigma_{xx} p^2 - 2\sigma_{xp} xp] \right. \\
 &\quad + \frac{12x_0}{Y} (\sigma_{pp} x - \sigma_{xp} p) e^{t(\gamma+k)} - \frac{8ix_0}{Y} (\sigma_{xx} p - \sigma_{xp} x) e^{t(\gamma-k)} \\
 &\quad \left. - \frac{24ix_0^2}{Y} \sigma_{xp} e^{2t\gamma} - \frac{2x_0^2}{Y} (13z_- e^{2t(\gamma+k)} + \frac{9}{2} e^{4t\gamma} + 8\Delta) \right\}. \quad (A.34)
 \end{aligned}$$

Resolvendo a integral $\int E \times E_{14} dx' dp'$, encontramos:

$$\begin{aligned}
 &\int \exp(-x'^2 - 25x_0^2 + 10x_0 x' - 4ix_0 p' - p'^2) \times \exp\{-(2\Delta)^{-1} [z_- x^2 \\
 &\quad + z_+ p^2 - 2z_0 xp + z_- e^{2t(\gamma+k)} x'^2 + z_+ e^{2t(\gamma-k)} p'^2 - 2z_0 e^{2t\gamma} x' p' \\
 &\quad + 2e^{(\gamma+k)t} (z_0 p - z_- x) x' + 2e^{(\gamma-k)t} (z_0 x - z_+ p) p']\} dx' dp', \quad (A.35)
 \end{aligned}$$

Agora podemos obter os seguintes índices

$$\begin{aligned}
g_{11} &= 1 + \frac{z_- e^{2t(\gamma+k)}}{2\Delta}, \\
g_{22} &= 1 + \frac{z_+ e^{2t(\gamma-k)}}{2\Delta}, \\
g_{12} &= -\frac{z_0 e^{2t\gamma}}{2\Delta}, \\
f_1 &= \frac{e^{(\gamma+k)t}}{\Delta} (z_- x - z_0 p) + 10x_0, \\
f_2 &= \frac{e^{(\gamma-k)t}}{\Delta} (z_+ p - z_0 x) - 4ix_0.
\end{aligned}$$

Portanto, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\int E \times E_{14} dx' dp' &= 2\pi \sqrt{\frac{\Delta}{Y}} \exp \left\{ -\frac{2}{Y} [\sigma_{pp} x^2 + \sigma_{xx} p^2 - 2\sigma_{xp} xp] \right. \\
&\quad + \frac{20x_0}{Y} (\sigma_{pp} x - \sigma_{xp} p) e^{t(\gamma+k)} - \frac{8ix_0}{Y} (\sigma_{xx} p - \sigma_{xp} x) e^{t(\gamma-k)} \\
&\quad \left. - \frac{40ix_0^2}{Y} \sigma_{xp} e^{2t\gamma} - \frac{2x_0^2}{Y} (29z_- e^{2t(\gamma+k)} + \frac{25}{2} e^{4t\gamma} + 8\Delta) \right\}. \quad (A.36)
\end{aligned}$$

Resolvendo a integral $\int E \times E_{15} dx' dp'$, encontramos:

$$\begin{aligned}
&\int \exp(-x'^2 - 16x_0^2 + 8x_0 x' + 6ix_0 p' - p'^2) \times \exp\{-(2\Delta)^{-1} [z_- x^2 \\
&+ z_+ p^2 - 2z_0 xp + z_- e^{2t(\gamma+k)} x'^2 + z_+ e^{2t(\gamma-k)} p'^2 - 2z_0 e^{2t\gamma} x' p' \\
&+ 2e^{(\gamma+k)t} (z_0 p - z_- x) x' + 2e^{(\gamma-k)t} (z_0 x - z_+ p) p']\} dx' dp', \quad (A.37)
\end{aligned}$$

Agora podemos obter os seguintes índices

$$\begin{aligned}
g_{11} &= 1 + \frac{z_- e^{2t(\gamma+k)}}{2\Delta}, \\
g_{22} &= 1 + \frac{z_+ e^{2t(\gamma-k)}}{2\Delta}, \\
g_{12} &= -\frac{z_0 e^{2t\gamma}}{2\Delta}, \\
f_1 &= \frac{e^{(\gamma+k)t}}{\Delta} (z_- x - z_0 p) + 8x_0, \\
f_2 &= \frac{e^{(\gamma-k)t}}{\Delta} (z_+ p - z_0 x) + 6ix_0.
\end{aligned}$$

Portanto, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\int E \times E_{15} dx' dp' &= 2\pi \sqrt{\frac{\Delta}{Y}} \exp \left\{ -\frac{2}{Y} [\sigma_{pp} x^2 + \sigma_{xx} p^2 - 2\sigma_{xp} xp] \right. \\
&\quad + \frac{16x_0}{Y} (\sigma_{pp} x - \sigma_{xp} p) e^{t(\gamma+k)} + \frac{12ix_0}{Y} (\sigma_{xx} p - \sigma_{xp} x) e^{t(\gamma-k)} \\
&\quad \left. + \frac{48ix_0^2}{Y} \sigma_{xp} e^{2t\gamma} - \frac{2x_0^2}{Y} (25z_- e^{2t(\gamma+k)} + 8e^{4t\gamma} + 18\Delta) \right\}. \quad (A.38)
\end{aligned}$$

Resolvendo a integral $\int E \times E_{16} dx' dp'$, encontramos:

$$\begin{aligned}
&\int \exp(-x'^2 - 16x_0^2 + 8x_0 x' - 6ix_0 p' - p'^2) \times \exp\{-(2\Delta)^{-1} [z_- x^2 \\
&\quad + z_+ p^2 - 2z_0 xp + z_- e^{2t(\gamma+k)} x'^2 + z_+ e^{2t(\gamma-k)} p'^2 - 2z_0 e^{2t\gamma} x' p' \\
&\quad + 2e^{(\gamma+k)t} (z_0 p - z_- x) x' + 2e^{(\gamma-k)t} (z_0 x - z_+ p) p']\} dx' dp', \quad (A.39)
\end{aligned}$$

Agora podemos obter os seguintes índices

$$\begin{aligned}
 g_{11} &= 1 + \frac{z_- e^{2t(\gamma+k)}}{2\Delta}, \\
 g_{22} &= 1 + \frac{z_+ e^{2t(\gamma-k)}}{2\Delta}, \\
 g_{12} &= -\frac{z_0 e^{2t\gamma}}{2\Delta}, \\
 f_1 &= \frac{e^{(\gamma+k)t}}{\Delta} (z_- x - z_0 p) + 8x_0, \\
 f_2 &= \frac{e^{(\gamma-k)t}}{\Delta} (z_+ p - z_0 x) - 6ix_0.
 \end{aligned}$$

Portanto, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
 \int E \times E_{16} dx' dp' &= 2\pi \sqrt{\frac{\Delta}{Y}} \exp \left\{ -\frac{2}{Y} [\sigma_{pp} x^2 + \sigma_{xx} p^2 - 2\sigma_{xp} xp] \right. \\
 &\quad + \frac{16x_0}{Y} (\sigma_{pp} x - \sigma_{xp} p) e^{t(\gamma+k)} - \frac{12ix_0}{Y} (\sigma_{xx} p - \sigma_{xp} x) e^{t(\gamma-k)} \\
 &\quad \left. - \frac{48ix_0^2}{Y} \sigma_{xp} e^{2t\gamma} - \frac{2x_0^2}{Y} (25z_- e^{2t(\gamma+k)} + 8e^{4t\gamma} + 18\Delta) \right\}. \quad (A.40)
 \end{aligned}$$

Por fim, a função de Wigner dependente do tempo é

$$\begin{aligned}
 W(x, p, t) = & \frac{2}{\eta^2 \sqrt{Y}} \exp \left[-\frac{2}{Y} (\sigma_{pp} x^2 + \sigma_{xx} p^2 - 2\sigma_{xp} xp) \right] \\
 & \times \left\{ \exp(-x_0^2) \exp \left[\frac{4x_0}{Y} (\sigma_{pp} x - \sigma_{xp} p) e^{t(\gamma+k)} \right] \right. \\
 & + \exp(-9x_0^2) \exp \left[\frac{12x_0}{Y} (\sigma_{pp} x - \sigma_{xp} p) e^{t(\gamma+k)} \right] \\
 & + \exp(-25x_0^2) \exp \left[\frac{20x_0}{Y} (\sigma_{pp} x - \sigma_{xp} p) e^{t(\gamma+k)} \right] \\
 & + \exp(-49x_0^2) \exp \left[\frac{28x_0}{Y} (\sigma_{pp} x - \sigma_{xp} p) e^{t(\gamma+k)} \right] \\
 & + 2 \left\{ \exp \left[\frac{2x_0}{Y} \left(4(\sigma_{pp} x - \sigma_{xp} p) e^{t(\gamma+k)} - x_0(5z_- e^{2t(\gamma+k)} + 2e^{4\gamma t} + 2\Delta) \right) \right] \right. \\
 & \times \cos \left(\frac{4x_0}{Y} \left((\sigma_{xx} p - \sigma_{xp} x) e^{t(\gamma-k)} + 2\sigma_{xp} x_0 e^{2\gamma t} \right) \right) \\
 & + \exp \left[\frac{2x_0}{Y} \left(8(\sigma_{pp} x - \sigma_{xp} p) e^{t(\gamma+k)} - x_0(17z_- e^{2t(\gamma+k)} + 8e^{4\gamma t} + 2\Delta) \right) \right] \\
 & \times \cos \left(\frac{4x_0}{Y} \left((\sigma_{xx} p - \sigma_{xp} x) e^{t(\gamma-k)} + 4\sigma_{xp} x_0 e^{2\gamma t} \right) \right) \\
 & + \exp \left[\frac{2x_0}{Y} \left(12(\sigma_{pp} x - \sigma_{xp} p) e^{t(\gamma+k)} - x_0(37z_- e^{2t(\gamma+k)} + 18e^{4\gamma t} + 2\Delta) \right) \right] \\
 & \times \cos \left(\frac{4x_0}{Y} \left((\sigma_{xx} p - \sigma_{xp} x) e^{t(\gamma-k)} + 6\sigma_{xp} x_0 e^{2\gamma t} \right) \right) \\
 & + \exp \left[\frac{2x_0}{Y} \left(6(\sigma_{pp} x - \sigma_{xp} p) e^{t(\gamma+k)} - x_0(13z_- e^{2t(\gamma+k)} + \frac{9}{2}e^{4\gamma t} + 8\Delta) \right) \right] \\
 & \times \cos \left(\frac{8x_0}{Y} \left((\sigma_{xx} p - \sigma_{xp} x) e^{t(\gamma-k)} + 3\sigma_{xp} x_0 e^{2\gamma t} \right) \right) \\
 & + \exp \left[\frac{2x_0}{Y} \left(10(\sigma_{pp} x - \sigma_{xp} p) e^{t(\gamma+k)} - x_0(29z_- e^{2t(\gamma+k)} + \frac{25}{2}e^{4\gamma t} + 8\Delta) \right) \right] \\
 & \times \cos \left(\frac{8x_0}{Y} \left((\sigma_{xx} p - \sigma_{xp} x) e^{t(\gamma-k)} + 5\sigma_{xp} x_0 e^{2\gamma t} \right) \right) \\
 & + \exp \left[\frac{2x_0}{Y} \left(8(\sigma_{pp} x - \sigma_{xp} p) e^{t(\gamma+k)} - x_0(25z_- e^{2t(\gamma+k)} + 8e^{4\gamma t} + 18\Delta) \right) \right] \\
 & \times \cos \left(\frac{12x_0}{Y} \left((\sigma_{xx} p - \sigma_{xp} x) e^{t(\gamma-k)} + 4\sigma_{xp} x_0 e^{2\gamma t} \right) \right) \left. \right\} \Bigg\}. \tag{A.41}
 \end{aligned}$$

Simplificando, podemos escrever que

$$\begin{aligned}
W(x, p; t) = & \frac{2}{\eta^2 \sqrt{Y}} \exp \left[-\frac{2}{Y} (\sigma_{pp} x^2 + \sigma_{xx} p^2 - 2\sigma_{xp} xp) \right] \\
& \times \left\{ \exp(-x_0^2) \exp \left(\frac{4x_0}{Y} \chi_1 \right) + \exp(-9x_0^2) \exp \left(\frac{12x_0}{Y} \chi_1 \right) \right. \\
& + \exp(-25x_0^2) \exp \left(\frac{20x_0}{Y} \chi_1 \right) + \exp(-49x_0^2) \exp \left(\frac{28x_0}{Y} \chi_1 \right) \\
& + 2 \left\{ \exp \left(\frac{2x_0}{Y} (4\chi_1 - x_0(5x_2 + 2e^{4t\gamma} + 2\Delta)) \right) \cos \left(\frac{4x_0}{Y} (\chi_3 - 2\chi_4) \right) \right. \\
& + \exp \left[\frac{2x_0}{Y} (8\chi_1 - x_0(17x_2 + 8e^{4t\gamma} + 2\Delta)) \right] \cos \left(\frac{4x_0}{Y} (\chi_3 - 4\chi_4) \right) \\
& + \exp \left[\frac{2x_0}{Y} (12\chi_1 - x_0(37x_2 + 18e^{4t\gamma} + 2\Delta)) \right] \cos \left(\frac{4x_0}{Y} (\chi_3 - 6\chi_4) \right) \\
& + \exp \left[\frac{2x_0}{Y} (6\chi_1 - x_0(13x_2 + \frac{9}{2}e^{4t\gamma} + 8\Delta)) \right] \cos \left(\frac{8x_0}{Y} (\chi_3 - 3\chi_4) \right) \\
& + \exp \left[\frac{2x_0}{Y} (10\chi_1 - x_0(29x_2 + \frac{25}{2}e^{4t\gamma} + 8\Delta)) \right] \cos \left(\frac{8x_0}{Y} (\chi_3 - 5\chi_4) \right) \\
& \left. \left. + \exp \left[\frac{2x_0}{Y} (8\chi_1 - x_0(25x_2 + 8e^{4t\gamma} + 18\Delta)) \right] \cos \left(\frac{12x_0}{Y} (\chi_3 - 4\chi_4) \right) \right\} \right\},
\end{aligned}
\tag{A.42}$$

onde,

$$\sigma_{xp} = z_0,$$

$$\sigma_{xx} = z_+ + \frac{e^{2t(\gamma+k)}}{2},$$

$$\sigma_{pp} = z_- + \frac{e^{2t(\gamma-k)}}{2},$$

$$\chi_1 = (\sigma_{pp}x - \sigma_{xp}p)e^{t(\gamma+k)},$$

$$\chi_2 = z_- e^{2t(\gamma+k)},$$

$$\chi_3 = (\sigma_{xx}p - \sigma_{xp}x)e^{t(\gamma-k)},$$

$$\chi_4 = \sigma_{xp}x_0 e^{2t\gamma},$$

$$Y = e^{4t\gamma} + 2z_- (2z_+ + e^{2t(\gamma+k)}) + 2z_+ e^{2t(\gamma-k)} - 4z_0^2 = 4(\sigma_{xx}\sigma_{pp} - \sigma_{xp}^2),$$

$$\Delta = (z_+ z_- - z_0^2),$$

$$\eta^2 = 4 + 6\exp(-2|\alpha|^2) + 4\exp(-8|\alpha|^2) + 2\exp(-18|\alpha|^2).$$

APÊNDICE B – Produção científica

B.1 Artigos publicados

- ★ FERREIRA, C.J.S.; VALVERDE, C.; BASEIA, B., Atom-field interaction in optical cavities: Calibration of the atomic velocities to obtain a list of field states with preselected properties. *INTERNATIONAL JOURNAL OF MODERN PHYSICS B*, v. **32**, p. 1850222, 2018.
<https://doi.org/10.1142/S0217979218502223>

- ★ FERREIRA, C.J.S.; VALVERDE, C.; BASEIA, B., Evolution of Statistical Properties of Hybrid System Starting from Binary Field States Constructed in Experiments. *BRAZILIAN JOURNAL OF PHYSICS*, v. **49**, p. 173-182, 2019.
<https://doi.org/10.1007/s13538-019-00646-9>

- ★ FERREIRA, C.J.S.; VALVERDE, C.; AVELAR, A.T.; BASEIA, B.; MALBOUIS-SON, J.M.C., Obtaining phase-optimized states from superpositions of coherent states in phase-sensitive attenuating/amplifying reservoirs. *ANNALS OF PHYSICS*, v. **406**, p. 86-107, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.aop.2019.03.027>

- ★ FERREIRA, C.J.S.; SILVA, T.M.; BASEIA, B., Time evolution of statistical properties of a radiation field described by a density operator that interpolates between pure and mixing states. *EUROPEAN PHYSICAL JOURNAL B*, v. **92**, p. 257, 2019. <https://doi.org/10.1140/epjb/e2019-100335-3>

- ★ CUSTODIO, JEAN M.F.; TERNAVISK, RICARDO R.; **FERREIRA, CRISTINO J.S.**; FIGUEREDO, ANDREZA S.; AQUINO, GILBERTO L.B.; NAPOLITANO, HAMILTON B.; VALVERDE, CLODOALDO; BASEIA, BASÍLIO. Using the Supermolecule Approach To Predict the Nonlinear Optics Potential of a Novel Asymmetric Azine. JOURNAL OF PHYSICAL CHEMISTRY A, v. **123**, p. 153-162, 2019. <https://doi.org/10.1021/acs.jpca.8b07872>

- ★ BASEIA, BASÍLIO; **FERREIRA, CRISTINO JOSE DOS SANTOS**; VALVERDE, CLODOALDO; VAZ, GABRIELA RODRIGUES. Classical and Quantum Optics and Their Influences on Science and Society. Fronteiras: Journal of Social, Technological and Environmental Science, v. **8**, p. 104-131, 2019. <https://doi.org/10.21664/2238-8869.2019v8i2.p104-131>

B.2 Apresentação de trabalho

- ★ VALVERDE, C.; BASEIA, B.; **FERREIRA, C.J.S.**; MALBOUISSON, J.M.C., The influence of reservoir in the Wigner function for coherent states on a straight line in the phase space. 2016. (Apresentação de Trabalho/Congresso). <http://www1.sbfisica.org.br/eventos/enf/2016/sys/resumos/R0221-1.pdf>

Referências Bibliográficas

- [1] A. Ashkin. “Acceleration and trapping of particles by radiation pressure”. *Phys. Rev. Lett.* **24**, 156 (1970).
- [2] The Nobel Prize in Physics 1997. NobelPrize.org, Nobel Media AB 2019, Tue. 9 Jul 2019, <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1997/summary/>.
- [3] The Nobel Prize in Physics 2001. NobelPrize.org, Nobel Media AB 2019, Tue. 9 Jul 2019, <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2001/summary/>.
- [4] The Nobel Prize in Physics 2018. NobelPrize.org, Nobel Media AB 2019, Tue. 9 Jul 2019, <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2018/summary/>.
- [5] M. Fox. *Quantum Optics: An Introduction*. Oxford Master Series in Atomic, Optical and Laser Physics. Oxford University Press Inc., New York (2006). Pag.04.
- [6] P. A. M. Dirac. “The quantum theory of the emission and absorption of radiation”. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* **114**, 243 (1927).
- [7] M. Sargent III, M. Scully, W. Lamb. *Laser Physics*. Advanced book program. Addison-Wesley (1974).
- [8] H. J. Kimble, M. Dagenais, L. Mandel. “Photon antibunching in resonance fluorescence”. *Physical Review Letters* **39**, 691 (1977).
- [9] M. C. Teich, B. E. A. Saleh. *Progress in Optics*, vol. XXVI, chap. Photon bunching and antibunching. North-Holland, Amsterdam (1988). Edited by E. Wolf. Pag.1–104.
- [10] H. J. Carmichael, D. F. Walls. “Proposal for the measurement of the resonant Stark effect by photon correlation techniques”. *Journal of Physics B: Atomic and Molecular Physics* **9**, L43 (1976).
- [11] T. H. Maiman. “Stimulated optical radiation in Ruby”. *Nature* **187**, 494 (1960).
- [12] R. J. Glauber. “Photon correlations”. *Physical Review Letters* **10**, 84 (1963).
- [13] R. J. Glauber. “Coherent and Incoherent States of the Radiation Field”. *Physical Review* **131**, 2766 (1963).

-
- [14] R. Loudon. “Non-classical effects in the statistical properties of light”. *Reports on Progress in Physics* **43**, 913 (1980).
- [15] R. J. Glauber. “The Quantum Theory of Optical Coherence”. *Physical Review* **130**, 2529 (1963).
- [16] The Nobel Prize in Physics 2005. NobelPrize.org, Nobel Media AB 2019, Tue. 9 Jul 2019, <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2005/summary/>.
- [17] J. R. Klauder. “Continuous-Representation Theory. I. Postulates of Continuous-Representation Theory”. *Journal of Mathematical Physics* **4**, 1055 (1963).
- [18] E. C. G. Sudarshan. “Equivalence of semiclassical and Quantum Mechanical descriptions of statistical light beams”. *Physical Review Letters* **10**, 277 (1963).
- [19] E. P. Wigner. “On the quantum correction for thermodynamic equilibrium”. *Physical Review* **40**, 749 (1932).
- [20] A. Kenfack, K. yczkowski. “Negativity of the Wigner function as an indicator of non-classicality”. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics* **6**, 396 (2004).
- [21] R. R. Puri. *Mathematics Methods of Quantum Optics*. Springer, Berlin (2001). Pag.96–97.
- [22] C. C. Gerry, P. L. Knight. *Introductory Quantum Optics*. Cambridge University Press, Cambridge (2005). Pag.60,70.
- [23] L. Mandel. “Sub-Poissonian photon statistics in resonance fluorescence”. *Opt. Lett.* **4**, 205 (1979).
- [24] R. Short, L. Mandel. “Observation of sub-Poissonian photon statistics”. *Physical Review Letters* **51**, 384 (1983).
- [25] R. Hanbury-Brown. *The intensity interferometer: its application to astronomy*. Taylor and Francis, London (1974).
- [26] R. Hanbury-Brown, R. Twiss. “Correlation between photons in two coherent beams of light”. *Nature* **177**, 27 (1956a).
- [27] R. Hanbury-Brown, R. Twiss. “The question of correlation between photons in coherent light rays”. *Nature* **178**, 1447 (1956b).
- [28] R. E. Slusher, L. W. Hollberg, B. Yurke, J. C. Mertz, J. F. Valley. “Observation of Squeezed States Generated by Four-Wave Mixing in an Optical Cavity”. *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2409 (1985).
- [29] R. Loudon, P. L. Knight. “Squeezed light”. *J. of Mod. Opt.* **34**, 709 (1987).
- [30] L. Mandel. “Fluctuations of Photon Beams: The Distribution of the Photo-Electrons”. *Proceedings of the Physical Society* **74**, 233 (1959).

- [31] X. T. Zou, L. Mandel. “Photon-antibunching and sub-Poissonian photon statistics”. *Physical Review A* **41**, 475 (1990).
- [32] K. E. Cahill, R. J. Glauber. “Density Operators and Quasiprobability Distributions”. *Physical Review* **177**, 1882 (1969).
- [33] M. Hillery, R. F. O’Connell, M. O. Scully, E. P. Wigner. “Distribution functions in physics: Fundamentals.” *Phys. Rep.* **106**, 121 (1984).
- [34] G. S. Agarwal. “Interference in complementary spaces”. *Foundations of Physics* **25**, 219 (1995).
- [35] J. Bertrand, P. Bertrand. “A tomographic approach to Wigner’s function”. *Found. of Phys.* **17**, 397 (1987).
- [36] U. Leonhardt. “Quantum-state tomography and discrete Wigner function”. *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4101 (1995).
- [37] L. G. Lutterbach, L. Davidovich. “Method for direct measurement of the Wigner function in cavity QED and ion traps”. *Physical review letters* **78**, 2547 (1997).
- [38] M. S. Kim, G. Antesberger, C. T. Bodendorf, H. Walther. “Scheme for direct observation of the Wigner characteristic function in cavity QED”. *Physical Review A* **58**, R65 (1998).
- [39] W. P. Schleich, J. P. Dahl. “An elementary aspect of the Weyl–Wigner representation”. *Fortschr. Phys.* **51**, 85 (2003).
- [40] W. B. Case. “Wigner functions and Weyl transforms for pedestrians”. *Am. J. Phys.* **76**, 937 (2008).
- [41] N. Spagnolo, C. Vitelli, T. De Angelis, F. Sciarrino, F. De Martini. “Wigner-function theory and decoherence of the quantum-injected optical parametric amplifier”. *Phys. Rev. A* **80**, 032318 (2009).
- [42] X.-G. Meng, Z. Wang, J.-S. Wang, H.-Y. Fan. “Wigner function, optical tomography of two-variable Hermite polynomial state, and its decoherence effects studied by the entangled-state representations”. *JOSA B* **30**, 1614 (2013).
- [43] A. Royer. “Measurement of the Wigner function”. *Physical Review Letters* **55**, 2745 (1985).
- [44] D. T. Smithey, M. Beck, M. G. Raymer, A. Faridani. “Measurement of the Wigner distribution and the density matrix of a light mode using optical homodyne tomography: Application to squeezed states and the vacuum”. *Physical Review Letters* **70**, 1244 (1993).
- [45] G. Nogues, A. Rauschenbeutel, S. Osnaghi, P. Bertet, M. Brune, J. M. Raimond, S. Haroche, L. G. Lutterbach, L. Davidovich. “Measurement of a negative value for the Wigner function of radiation”. *Phys. Rev. A* **62**, 054101 (2000).

- [46] C. J. Villas-Bôas, G. A. Prata, M. H. Y. Moussa. “Direct measurement of the Wigner distribution of a traveling field”. *Physical Review A* **64**, 065801 (2001).
- [47] P. Bertet, A. Auffèves, P. Maioli, S. Osnaghi, T. Meunier, M. Brune, J. M. Raimond, S. Haroche. “Direct Measurement of the Wigner Function of a One-Photon Fock State in a Cavity”. *Physical Review Letters* **89**, 200402 (2002).
- [48] A. T. Avelar, B. Baseia, J. M. C. Malbouisson. “Scheme for direct measurement of the Wigner characteristic function of traveling fields”. *Opt. Commun.* **259**, 754 (2006).
- [49] N. Sridhar, R. Shahrokhshahi, A. J. Miller, B. Calkins, T. Gerrits, A. Lita, S. W. Nam, O. Pfister. “Direct measurement of the Wigner function by photon-number-resolving detection”. *JOSA B* **31**, B34 (2014).
- [50] E. T. Jaynes, F. W. Cummings. “Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser”. *Proc. of the IEEE* **51**, 89 (1963).
- [51] B. W. Shore, P. L. Knight. “The jaynes–cummings model”. *J. Mod. Opt.* **40**, 1195 (1993).
- [52] T. Gallagher. *Rydberg atoms*. Cambridge University Press, Cambridge (1994).
- [53] P. Treutlein, C. Genes, K. Hammerer, M. Poggio, P. Rabl. “Hybrid mechanical systems”. In *Cavity Optomechanics*, pages 327–351. Springer (2014).
- [54] A. T. Avelar. *Preparação de Estados Não-Clássicos do Campo Eletromagnético*. Ph.D. thesis, Instituto de Física-Universidade de Brasília (UnB), Brasília/DF (2006).
- [55] L. A. Howard, T. J. Weinhold, F. Shahandeh, J. Combes, M. Vanner, A. G. White, M. Ringbauer. “Quantum hypercube states”. *Phys. Rev. Lett.* **123**, 020402 (2019).
- [56] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë. *Quantum Mechanics*, vol. I. John Wiley & Sons (1977).
- [57] J. J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics: Revised Edition*. Addison-Wesley, New York, 2nd ed. (1995). Edited by S. F. Tuan.
- [58] W. Louisell. *Quantum Statistical Properties of Radiation*. Wiley, New York (1973).
- [59] E. Merzbacher. *Quantum Mechanics*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 3rd ed. (1998).
- [60] R. Shankar. *Principles of Quantum Mechanics*. Springer Science & Business Media, New York, 2nd ed. (2012).
- [61] K. Gottfried, T.-M. Yan. *Quantum Mechanics: Fundamentals*. Springer Science & Business Media, New York, 2nd ed. (2003).

-
- [62] L. D. Landau, E. M. Lifshitz. *Quantum Mechanics: Non-relativistic Theory*, vol. 3 of *Course of Theoretical Physics*. Pergamon Press Inc., Oxford, 3rd ed. (1991).
- [63] M. Verschuren. *Coherent states in Quantum Mechanics*. Master's thesis, Radboud University Nijmegen. Faculty of Science, Department of Mathematical Physics, Netherlands (2011).
- [64] R. J. Glauber. *Quantum Optics and Electronics*, chap. Optical Coherence and Photon Statistics. Gordon and Breach Science Publishers, Inc., New York (1965). Editado por C. de Witt *et al.*
- [65] C. L. Mehta, E. C. G. Sudarshan. "Time evolution of coherent states". *Physics Letters* **22**, 574 (1966).
- [66] B. Crosignani, P. Di Porto, S. Solimeno. "Evolution of a coherent state of an harmonic oscillator with time-dependent frequency". *Physics Letters A* **28**, 271 (1968).
- [67] H. Letz. "Evolution operator and stable coherent states". *Physics Letters A* **60**, 399 (1977).
- [68] R. R. Puri, S. V. Lawande. "Time-dependent invariants and stable coherent states". *Physics Letters* **70A**, 69 (1979).
- [69] G. D'Ariano, M. Rasetti, M. Vadicchino. "Stability of coherent states". *J. Phys. A: Math. Gen.* **18**, 1295 (1985).
- [70] A. Piza. *Mecânica Quântica Vol. 51*. Edusp, São Paulo (2003). Pag. 107, 153–154.
- [71] O. Svelto. *Principles of Lasers*. Springer US, New York, 4 ed. (1998). Translated from italian and edited by David C. Hanna.
- [72] M. Hillery. "Classical pure states are coherent states". *Phys. Lett. A* **111**, 409 (1985).
- [73] Y. Fang, F. Wu, B. Wu. "Quantum phase space with a basis of wannier functions". *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* **2018**(2), 023113 (2018).
- [74] I. Segal, *et al.* "Mathematical characterization of the physical vacuum for a linear bose-einstein field". *Illinois Journal of Mathematics* **6**(3), 500 (1962).
- [75] V. Bargmann. "On a hilbert space of analytic functions and an associated integral transform part I". *Communications on pure and applied mathematics* **14**(3), 187 (1961).
- [76] H. Nussenzveig. *Introduction to Quantum Optics*. Documents on Modern Physics: Gordon and Breach. Gordon and Breach Science Publishers, New York (1973).
- [77] L. Mandel, E. Wolf. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, Cambridge (1995).

-
- [78] M. O. Scully, M. S. Zubairy. *Quantum Optics*. Cambridge University Press, Cambridge (1997).
- [79] J. Katriel. “Combinatorial aspects of boson algebra”. *Lettere al Nuovo Cimento (1971-1985)* **10**, 565 (1974).
- [80] J. Katriel. “Normal ordering formulae for some boson operators”. *Journal of Physics A: Mathematical and General* **16**, 4171 (1983).
- [81] J. Katriel. “Bell numbers and coherent states”. *Physics Letters A* **273**, 159 (2000).
- [82] M. Abramowitz, I. A. Stegun(Eds.). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. Applied Mathematician Series, 55. National Bureau of Standards, Washington, DC (1964). Pag.824,835.
- [83] M. Hillery. “Amplitude-squared squeezing of the electromagnetic field”. *Phys. Rev. A* **36**, 3796 (1987).
- [84] V. V. Dodonov, I. A. Malkin, V. I. Man’Ko. “Even and odd coherent states and excitations of a singular oscillator”. *Physica* **72**, 597 (1974).
- [85] W. Schleich, M. Pernigo, F. L. Kien. “Nonclassical state from two pseudoclassical states”. *Phys. Rev. A* **44**, 2171 (1991).
- [86] R. Loudon. *The quantum theory of light*. Oxford University Press Inc., New York (1973). P.141.
- [87] P. Carruthers, M. M. Nieto. “Phase and Angle Variables in Quantum Mechanics”. *Rev. Mod. Phys.* **40**, 411 (1968).
- [88] S. M. Barnett, J. A. Vaccaro. *The Quantum Phase Operator: A Review*. Taylor & Francis, Boca Raton (2007).
- [89] V. V. Dodonov, V. I. Man’ko. *Theory of nonclassical states of light*. Taylor & Francis, London (2003). P.01.
- [90] L. Susskind, J. Glogower. “Quantum mechanical phase and time operator”. *Physics* **1**, 49 (1964).
- [91] D. T. Pegg, S. M. Barnett. “Phase properties of the quantized single-mode electromagnetic field”. *Physical Review A* **39**, 1665 (1989).
- [92] D. T. Pegg, J. A. Vaccaro, S. M. Barnett. “Quantum-optical phase and canonical conjugation”. *Journal of Modern Optics* **37**, 1703 (1990).
- [93] D. Walls, G. Milburn. *Quantum Optics*. Springer Study Edition. Springer-Verlag, Berlin (1994).
- [94] A. Aragão, A. T. Avelar, B. Baseia. “States of the quantized electromagnetic field with highly concentrated phase distribution”. *Physics Letters A* **331**, 366 (2004).

- [95] J. M. C. Malbouisson, B. Baseia. “Higher-generation Schrödinger cat states in cavity QED”. *Journal of Modern Optics* **46**, 2015 (1999).
- [96] L. P. A. Maia, B. Baseia, A. T. Avelar, J. M. C. Malbouisson. “Sculpturing coherent states to get highly excited fock states for stationary and travelling fields”. *J. of Opt. B: Quantum and Semiclassical Optics* **6**, 351 (2004).
- [97] D. F. W. M. J. Holland, P. Zoller. “Quantum nondemolition measurements of photon number by atomic beam deflection”. *Phys. Rev. Lett.* **67**, 1716 (1991).
- [98] D. James, J. Jerke. “Effective Hamiltonian theory and its applications in quantum information”. *Can. J. Phys.* **85**, 625 (2007).
- [99] C. J. S. Ferreira, C. Valverde, B. Baseia. “Atom-field interaction in optical cavities: Calibration of the atomic velocities to obtain a list of field states with preselected properties”. *International Journal of Modern Physics B* **32**, 1850222 (2018).
- [100] C. C. Gerry, P. L. Knight. “Quantum superpositions and Schrödinger cat states in quantum optics”. *Amer. J. of Phys.* **65**, 964 (1997).
- [101] J. Gea-Banacloche, M. Scully, M. Zubairy. “Vacuum fluctuations and spontaneous emission in quantum optics”. *Phys. Scr.* **T21**, 81 (1988).
- [102] H. Baker, R. Singleton. “Non-Hermitian quantum dynamics”. *Phys. Rev. A* **42**, 10 (1990).
- [103] H. Lee, W. I’Yi. “Non-hermitian techniques of canonical transformations in quantum mechanics”. *Phys. Rev. A* **51**, 982 (1995).
- [104] S. Longhi. “Optical realization of relativistic non-Hermitian quantum mechanics”. *Phys. Rev. Lett.* **105**, 013903 (2010).
- [105] J. Gea-Banacloche. “Collapse and revival of the state vector in the Jaynes-Cummings model: an example of state preparation by a quantum apparatus”. *Phys. Rev. Lett.* **65**, 3385 (1990).
- [106] C. J. S. Ferreira, C. Valverde, B. Baseia. “Evolution of statistical properties of hybrid system starting from binary field states constructed in experiments”. *Brazilian Journal of Physics* **49**, 173 (2019).
- [107] L. Davidovich, M. Brune, J. M. Raimond, S. Haroche. “Mesoscopic quantum coherences in cavity QED: Preparation and decoherence monitoring schemes”. *Phys. Rev. A* **53**, 1295 (1996).
- [108] M. Brune, S. Haroche, J. M. Raimond, L. Davidovich, N. Zagury. “Manipulation of photons in a cavity by dispersive atom-field coupling: Quantum-nondemolition measurements and generation of “Schrödinger cat” states”. *Physical Review A* **45**, 5193 (1992).
- [109] L. G. Lutterbach, L. Davidovich. “Production and detection of highly squeezed states in cavity QED”. *Phys. Rev. A* **61**, 023813 (2000).

- [110] C. J. S. Ferreira, C. Valverde, A. T. Avelar, B. Baseia, J. M. C. Malbouisson. “Obtaining phase-optimized states from superpositions of coherent states in phase-sensitive attenuating/amplifying reservoirs”. *Annals of Physics* **406**, 86 (2019).
- [111] S. Szabo, P. Adam, J. Janszky, P. Domokos. “Construction of quantum states of the radiation field by discrete coherent-state superpositions”. *Physical Review A* **53**, 2698 (1996).
- [112] C. C. Gerry. “Generation of optical macroscopic quantum superposition states via state reduction with a Mach-Zehnder interferometer containing a Kerr medium”. *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics* **59**(5), 4095 (1999).
- [113] A. Aragão, A. T. Avelar, J. M. C. Malbouisson, B. Baseia. “Generation of states $a|k2^N\rangle + b|(k+1)2^N\rangle$ for electromagnetic fields”. *Phys. Lett. A* **329**, 284 (2004).
- [114] H. P. Yuen. “Generalized coherent states and the statistics of two-photon lasers”. *Phys. Lett. A* **51**, 1 (1975).
- [115] H. P. Yuen. “Two-photon coherent states of the radiation field”. *Phys. Rev. A* **13**, 2226 (1976).
- [116] D. Stoler. “Generalized coherent states”. *Phys. Rev. D* **4**, 2309 (1971).
- [117] W. P. Schleich. *Quantum Optics in Phase Space*. Wiley-VCH, Berlin (2001).
- [118] J. M. C. Malbouisson, B. Baseia. “On the measure of nonclassicality of field states”. *Phys. Scripta* **67**, 93 (2003).
- [119] V. V. Dodonov, C. Valverde, L. S. Souza, B. Baseia. “Classicalization times of parametrically amplified “Schrödinger cat” states coupled to phase-sensitive reservoirs”. *Phys. Lett. A* **375**, 3668 (2011).
- [120] V. V. Dodonov, C. Valverde, L. S. Souza, B. Baseia. “Decoherence of odd compass states in the phase-sensitive amplifying/dissipating environment”. *Annals of Phys.* **371**, 296 (2016).
- [121] C. W. Gardiner, M. J. Collett. “Input and output in damped quantum systems: Quantum stochastic differential equations and the master equation”. *Phys. Rev. A* **31**, 3761 (1985).
- [122] C. W. Gardiner. “Inhibition of atomic phase decays by squeezed light: A direct effect of squeezing”. *Phys. Rev. Lett.* **56**, 1917 (1986).
- [123] M.-A. Dupertuis, S. Stenholm. “Rigged-reservoir response I. General theory”. *JOSA B* **4**, 1094 (1987).
- [124] G. J. Milburn, M. L. Steyn-Ross, D. F. Walls. “Linear amplifiers with phase-sensitive noise”. *Phys. Rev. A* **35**, 4443 (1987).
- [125] T. A. B. Kennedy, D. F. Walls. “Squeezed quantum fluctuations and macroscopic quantum coherence”. *Phys. Rev. A* **37**, 152 (1988).

- [126] P. Tombesi. “Parametric oscillator in a squeezed bath”. *Phys. Lett. A* **132**, 241 (1988).
- [127] A. Barchielli. “Continual measurements for quantum open systems”. *Il Nuovo Cimento B (1971-1996)* **74**, 113 (1983).
- [128] H. Dekker, M. C. Valsakumar. “A fundamental constraint on quantum mechanical diffusion coefficients”. *Phys. Lett. A* **104**, 67 (1984).
- [129] B. Leaf. “Weyl transformation and the classical limit of quantum mechanics”. *J. of Math. Phys.* **9**, 65 (1968).
- [130] B. Leaf. “Weyl transform in nonrelativistic quantum dynamics”. *J. of Math. Phys.* **9**, 769 (1968).
- [131] W. Zurek. “Sub-planck structure in phase space and its relevance for quantum decoherence”. *Nature* **412**(6848), 712 (2001).
- [132] G. Agarwal, P. Pathak. “Mesoscopic superposition of states with sub-planck structures in phase space”. *Phys. Rev. A* **70**, 053813 (2004).
- [133] F. Toscano, D. Dalvit, L. Davidovich, W. Zurek. “Sub-planck phase-space structures and Heisenberg-limited measurements”. *Phys. Rev. A* **73**, 023803 (2006).