Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Soluções Radiais para uma Classe de Equações de Hénon

Caio Ilan Ferreira Rodrigues

João Pessoa - PB
Agosto de 2015

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Soluções Radiais para uma Classe de Equações de Hénon

por

Caio Ilan Ferreira Rodrigues

sob a orientação do

Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro

João Pessoa - PB
Agosto de 2015

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

R696s Rodrigues, Caio Ilan Ferreira.
Soluções Radiais para uma Classe de Equações de Hénon / Caio Ilan Ferreira Rodrigues. - João Pessoa, 2015.
71 f.

Orientação: Bruno Henrique Carvalho Ribeiro.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Equação de Hénon. 2. Solução radial. 3. Expoente subcrítico. 4. Expoente crítico. I. Ribeiro, Bruno Henrique Carvalho. II. Título.

UFPB/BC

Soluções Radiais para uma classe de equações de Hénon

por

Caio Ilan Ferreira Rodrigues [1]

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada em 28 de Agosto de 2015.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro - UFPB
(Orientador)

Prof. Dr. Wilberclay Gonçalves Melo – UFS
(Examinador Externo)

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo – UFPB
(Examinador Interno)

[1] O autor foi bolsista da CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Aos meus pais, José Acaci Rodrigues e Judite Ferreira Rodrigues.

Agradecimentos

-Aos meus pais, José Acaci Rodrigues e Judite Ferreira Rodrigues, por terem investido em minha educação desde o meu nascimento até hoje. Ao meu irmão Ciro, pelo companheirismo e dicas! E ao meu padrinho Iran Marrocos, que sempre acreditou que eu poderia ir muito mais longe nos meus estudos, e na vida.

- A minha namorada Raqueline, pelo amor, pela compreensão e apoio quando passei noites em claro estudando ou quando me ouviu falar por horas mesmo sem entender quase nada. Te amo!

- Ao Meu orientador Bruno Henrique Carvalho Ribeiro, por ter acreditado em mim, pelos conselhos e principalmente pela amizade. Enfim, agradeço pela paciência e pelo excelente trabalho de orientação.

- Aos Professores Wilberclay Gonçalves Melo e Uberlandio Batista Severo, por terem aceitado o convite para participarem da banca examinadora da minha dissertação.

- Ao professor Manassés Xavier de Souza, que foi fundamental para a produção desse trabalho, tanto ao me introduzir a Teoria de Pontos Críticos, quanto pelo interesse e tempo investido na correção dessa dissertação.

- Aos colegas da UFPB, Diego, Mauri, Franciélia, Rossane, Marcius, Wasthenny, Cássio e muitos outros pelo apoio e amizade em todos os momentos. Desejo toda felicidade do mundo para cada um de vocês!

- A todos aqueles que, de forma direta ou indireta, contribuíram para a realização deste trabalho e que infelizmente não me recordo neste momento.

- À CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo apoio financeiro e à Coordenação da Pós-Graduação em Matemática da UFPB.

Resumo

Neste trabalho, demonstramos a existência de solução radial para uma classe de problemas de Dirichlet relativos a equação de Hénon. Apresentamos problemas tanto envolvendo o caso subcrítico quanto o crítico. Na obtenção de nossos resultados usamos essencialmente o Lema Radial, o Lema da compacidade, o Princípio da Criticalidade Simétrica de Palais, o Teorema do Passo da Montanha e o Teorema do Multiplicador de Lagrange.

Palavras-chave: Equação de Hénon, solução radial, expoente subcrítico, expoente crítico.

Abstract

In this work, we demonstrate the existence of radial solution for a class of problems related to Dirichlet Hénon equation. We present problems involving both the subcritical case as critical. To obtain our results, we use essentially the Radial Lemma, the Compactness Lemma, the Principle of Symmetric Criticality of Palais, the Mountain Pass Theorem and the Lagrange Multiplier Theorem.

Keywords: Hénon equation, radially solution, subcritical exponent, critical exponent.

Sumário

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- X denota um espaço de Banach;
- X' denota o dual topológico de um espaço de Banach X;
- C, C_1, C_2, ... denotam constantes positivas, possivelmente diferentes;
- $\square$ denota o final de uma demonstração;
- $|\cdot|$ denota a norma euclidiana do $\mathbb{R}^N$;
- $\rightharpoonup$ denota convergência fraca em um espaço normado;
- $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ denota o gradiente da função $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$;
- $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2}$ denota o laplaciano de u;
- $f(s) = o(g(s))$ quando $s \to 0$ significa que $\lim\limits_{s\to 0} \dfrac{f(s)}{g(s)} = 0$;
- $f(s) = O(g(s))$ quando $s \to 0$ significa que $\lim\limits_{s\to 0} \dfrac{f(s)}{g(s)}$ é limitado;
- $C_0^\infty(\Omega)$ denota o conjunto de funções contínuas com suporte compacto;
- $\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$;
- $L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \; ; \; u$ é mensurável e $\|u\|_p < \infty\}$;
- $\|u\|_\infty = \inf\{C \geq 0 \; ; \; |\{x \in \Omega \; ; \; |u(x)| > C\}| = 0\}$;

- $L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}\ ;\ u \text{ é mensurável e } \|u\|_\infty < \infty\}$;

- $W^{1,p}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} u \in L^p(\Omega) ; \exists g_1, g_2, ..., g_n \in L^p(\Omega) \text{ tais que} \\ \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi,\ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \text{ e } \forall i = 1, 2, ..., n \end{array} \right\}$;

- $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_p^p + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$;

- $W_0^{1,p}(\Omega)$ denota o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ sob a norma $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$;

- $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$;

- $H_0^1(\Omega)$ denota o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ sob a norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$;

- $\|u\| = \|\nabla u\|_2$ denota a norma do espaço $H_0^1(\Omega)$;

- $\|u\|_{p,\sigma(x)} = \left(\int_\Omega \sigma(x)|u|^p\ dx\right)^{\frac{1}{p}}$;

- $L^p(\Omega, \sigma(x)) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}\ ;\ u \text{ é mensurável e } \|u\|_{p,\sigma(x)} < \infty\}$;

Introdução

Nessa dissertação, baseados nos artigos de Wei-Ming Ni [14] e Henrik Egnell [6], estudamos a solução de problemas inspirados por equação elíptica apresentada por Michel Hénon em um trabalho publicado em 1973. A equação em questão é

$$-\Delta u = |x|^{\alpha} u^{p-1} \text{ em } B(1,0), \tag{1}$$

onde $\alpha > 0$ e $p > 2$. Problemas desse tipo podem ser comparados à identidade de Pohozaev, que em seu trabalho toma como expoente crítico o valor $2^* = \frac{2N}{N-2}$ e garante não existência de solução para o problema

$$-\Delta u = u^{p-1} \text{ em } \Omega_1,$$

onde $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e estrelado e $p = 2^*$. Pelo ponto de vista de existência de solução para o problema (1), é interessante questionar se o expoente α tem alguma influência sobre o intervalo o qual p pertence para que (1) tenha solução. De fato, no *capítulo 2* mostraremos que tal influência existe e, nesse caso, a solução para (1) é encontrada quando p está no intervalo $\left(2, 2^* + \frac{2\alpha}{N-2}\right)$.

Estudamos questões relacionadas a existência de solução radial para o problema de Dirichlet (casos subcríticos e crítico) relativo a (1) sempre com Ω sendo a bola unitária no $\mathbb{R}^N$. No caso subcrítico analisamos so seguinte problema, que chamaremos de (P1):

$$\begin{cases} -\Delta u &= |x|^l u^\tau & \text{em } \Omega \\ u &> 0 & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

onde Ω é a bola unitária no $\mathbb{R}^N$.

No artigo de Wei-Ming Ni [14] ele se propõe a resolver um problema subcrítico mais geral que (P1) e, fazendo as devidas indicações, garante solução radial positiva para o seguinte problema, que chamaremos de (P2):

$$\begin{cases} \Delta u = b(|x|)f(u) & \text{em } \Omega \\ u > 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

onde Ω é a bola unitária no $\mathbb{R}^N$, $b(r)$ e $f(z)$ satisfazem satisfazem uma série de hipóteses, dentre elas as que mostram que b e f se comportam assintoticamente como funções polinomiais, outra sobre o comportamento subcrítico referente ao problema de Hénon e a hipótese de Ambrosetti-Rabinowitz. Ou seja, o problema (P2) é um caso mais geral do problema (P1).

Em especial, nos *capítulos 2 e 3*, utilizando-se do Lema Radial, Lema da Compacidade e a aplicação do Teorema do Passo da Montanha é possível se encontrar solução radial positiva para os problemas (P1) e (P2).

Para se trabalhar o problema crítico de Dirichlet relativo a (1) utilizamos o artigo de Egnell [6] que, por utilizar o Teorema do Multiplicador de Lagrange para se obter solução, enriquece o trabalho e prepara para estudar um âmbito maior de problemas. Em [8], Egnell estuda uma solução positiva para problema

$$-\Delta u = bu^p + \lambda hu \text{ em } \Omega$$

que foi de grande importância durante o trabalho com as sequências minimizantes (Egnell também observa o problema em [7] sendo que no caso m-Laplaciano). Como o objetivo inicial do trabalho é o caso Laplaciano, tomamos como base Egnell [6], com $m = 2$, para resolver o seguinte problema elíptico, que chamaremos de (P3):

$$\begin{cases} -\Delta u = |x|^\nu u^p + \lambda u & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $p + 1 = 2^* + \frac{2\nu}{N-2}$, λ é uma constante real, $N \geq 3$, $\nu > -2$ e Ω é a bola unitária no $\mathbb{R}^N$.
A solução do problema

$$-\Delta u = u^p + \lambda u \text{ em } \Omega$$

pode ser encontrada em Brezis-Nirenberg [3]. Isso juntamente com Egnell [6] é referência para solução do problema (P3).

O *Capítulo* 1 é dedicado aos estudo de alguns resultados que serão utilizados ao longo do trabalho, sendo que alguns serão enunciados sem demonstração e com as devidas referências para possíveis consultas. O Lema Radial o Lema da Compacidade são peças chaves na procura da solução radial em uma não linearidade que não tem compacidade garantida pelas imersões de Sobolev.

No *Capítulo* 2 estudaremos o Problema (P1) no caso em que a não linearidade tem crescimento subcrítico polinomial. Para garantir a existência de uma solução fraca não negativa e não trivial, associaremos ao problema um funcional energia e mostraremos que este tem a geometria do passo da montanha e satisfaz a condição de Palais-Smale. Então utilizaremos o Teorema do Passo da Montanha que nos garante a existência de um ponto crítico para o funcional no nível minimax do passo da montanha, o qual será a nossa solução fraca não trivial. Em seguida, no *Capítulo* 3 detalhamos a demonstração do problema (P2) do artigo [14] utilizando as hipóteses do problema de Wei-Ming Ni.

No *Capítulo* 4 estudaremos o problema (P3) quando a não linearidade tem crescimento polinomial crítico. Primeiramente mostraremos que o funcional minimizante associado ao problema atinge mínimo para certos intervalos de λ. Algo interessante a se acrescentar é que o problema apresenta conclusões diferentes para os casos em que $N = 3$ e $N \geq 4$ de modo que o problema (P3) terá solução para todo $\lambda \in (0, \lambda_0)$ onde $\lambda_0 = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} \|\nabla u\|_2^2 / \|u\|_2^2$ quando $N \geq 4$ e terá solução para todo $\lambda \in (\frac{\pi^2}{4}, \pi^2)$ quando $N = 3$ e Ω é a bola unitária no $\mathbb{R}^N$. Além disso, faremos uma estimativa para λ_0 e utilizaremos o Teorema do Multiplicador de Lagrange para encontrar um ponto crítico para o funcional energia associado ao Problema (P3).

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados e definições que serão utilizados em capítulos posteriores. Mais precisamente, enunciaremos o Princípio de Criticalidade Simétrica de Palais, o qual será utilizado nos *Capítulos* 2 e 3, o Lema Radial que será utilizado no capítulo 2 e um Lema de Compacidade que será utilizado em todos os capítulos. A principal referência utilizada neste capítulo foi o artigo de Wei-Ming Ni [14].

1.1 O Princípio da Criticalidade Simétrica de Palais

O Teorema apresentado nessa seção é utilizado para garantir que, se uma função é ponto crítico de um funcional restrito a um subespaço que satisfaz certas condições de simetria então esse também será ponto crítico no funcional todo. Para demonstrar o Princípio da Criticalidade Simétrica de Palais precisamos inicialmente estudar as seguintes definições algébricas:

Definição 1.1. Um **grupo topológico** é um espaço topológico $(G, \tau, +)$, munido de uma operação "+"que torna G um grupo ("τ"denota a topologia de G), tal que:

i) A aplicação $+ : G \times G \longrightarrow G$ definida por $+(g, h) = g + h$ é contínua;

ii) A função $I^{-1} : G \longrightarrow G$ definida por $I^{-1}(g) = g^{-1}$ é contínua.

Observação 1.1. O conjunto dos operadores lineares $A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, denotado por

$$O(N) = \{A \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \ ; \ \langle A(x), A(y)\rangle = \langle x, y\rangle, \forall x, y \in \mathbb{R}^N\},$$

munido com a operação produto de matrizes é um grupo topológico chamado de grupo de rotações em $\mathbb{R}^N$ e será denotado por $SO(N)$.

Observação 1.2. O conjunto

$$SO(N) = \{A \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \ ; \ \langle A(x), A(y)\rangle = \langle x, y\rangle \text{ e } \det A = 1\}$$

é um grupo topológico e é subgrupo de $O(N)$. A demonstração desse fato foge ao objetivo da dissertação e pode ser encontrada em Lima [13].

Definição 1.2. Uma **ação de um grupo topológico** G sobre um espaço vetorial E é uma aplicação contínua

$$\begin{array}{rlcll} \rho: & G \times E & \longrightarrow & E & \\ & (g,u) & \longmapsto & \rho(g,u) & = \ g \cdot u \end{array} \tag{1.1}$$

que satisfaz:

i) $1 \cdot u = u$ para todo $u \in E$;

ii) $(g+h) \cdot u = g \cdot (h \cdot u)$ para todos $g, h \in G$ e $u \in E$;

iii) $u \to g \cdot u$ é linear, para todo $g \in G$.

Observação 1.3. A aplicação

$$\begin{array}{rlclcllcl} \hat{\rho}: & SO(N) \times H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & H_0^1(\Omega) & & & & & \\ & (g,u) & \longmapsto & \hat{\rho}(g,u) & = & g \cdot u: & \Omega & \to & \mathbb{R} \\ & & & & & & x & \mapsto & g \cdot u(x) = u(g(x)) \end{array}$$

é uma ação de $SO(N)$ sobre $H_0^1(\Omega)$ onde Ω é a bola unitária no $\mathbb{R}^N$.

Para as definições 1.3, 1.4, 1.5 e 1.6, tomaremos ρ como na Definição 1.2.

Definição 1.3. Definimos o **conjunto dos pontos ρ-invariantes** como sendo

$$Fix(G) = \{u \in E \ ; \ g \cdot u = u, \text{ para todo } g \in G\}.$$

Pelo item iii) da Definição 1.2 é fácil ver que $Fix(G)$ é subespaço de G. Para mostrar que é fechado tome $\{u_n\} \subset Fix(G)$ e $u \in E$ tal que $u_n \to u$. Fixado $g \in G$, temos pela continuidade da ação que

$$u = \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} g \cdot u_n = g \cdot u, \text{ para todo } g \in G.$$

Logo, $u \in Fix(G)$ o que mostra que $Fix(G)$ é um subespaço fechado de G.

Definição 1.4. Seja W um subconjunto de E. Dizemos que W é um **conjunto ρ-invariante** se

$$g \cdot u = u, \text{ para todo } (g, u) \in G \times W.$$

Definição 1.5. Dizemos que o funcional $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é um **funcional ρ-invariante** se

$$\varphi(g \cdot u) = \varphi(u), \text{ para todo } (g, u) \in G \times E.$$

Definição 1.6. Se E é um espaço normado, dizemos que ρ é uma **ação isométrica** se

$$|g \cdot u| = |u|, \text{ para todo } (g, u) \in G \times E.$$

Teorema 1.1 (Princípio da Criticalidade Simétrica de Palais)**.** *Seja ρ uma ação isométrica do grupo topológico G sobre um espaço de Hilbert H. Se $\varphi \in C^1(H, \mathbb{R})$ é ρ-invariante, e u é um ponto crítico de φ restrito a $Fix(G)$, então u é ponto crítico de φ em H.*

Demonstração. Dado $\varphi \in C^1(H, \mathbb{R})$, para cada $g \in G$ e $u \in H$, como φ é invariante, temos

$$\begin{aligned} \varphi'(g \cdot u) \cdot v &= \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(g \cdot u + tv) - \varphi(g \cdot u)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(g^{-1} \cdot (g \cdot u + tv)) - \varphi(g^{-1} \cdot (g \cdot u))}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(u + tg^{-1} \cdot v) - \varphi(u)}{t} \\ &= \varphi'(u)(g^{-1} \cdot v) \end{aligned}$$

de onde segue que

$$\langle \nabla\varphi(g \cdot u), v \rangle = \langle \nabla\varphi(u), g^{-1} \cdot v \rangle \text{ para todo } v \in H. \tag{1.2}$$

Dado $u, v \in H$, pelo fato de que ρ é uma ação isométrica, temos

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \frac{1}{2}(|u + v|^2 - |u|^2 - |v|^2) \\ &= \frac{1}{2}(|g \cdot (u + v)|^2 - |g \cdot u|^2 - |g \cdot v|^2) \\ &= \frac{1}{2}(|g \cdot u + g \cdot v|^2 - |g \cdot u|^2 - |g \cdot v|^2) \\ &= \langle g \cdot u, g \cdot v \rangle. \end{aligned}$$

Logo, por (1.2), temos

$$\begin{aligned}\langle \nabla\varphi(g\cdot u), v\rangle &= \langle \nabla\varphi(u), g^{-1}\cdot v\rangle \\ &= \langle g\cdot \nabla\varphi(u), g\cdot (g^{-1}\cdot v)\rangle \\ &= \langle g\cdot \nabla\varphi(u), v\rangle\end{aligned}$$

de onde segue que

$$\nabla\varphi(g\cdot u) = g\cdot \nabla\varphi(u), \text{ para todo } u \in H. \tag{1.3}$$

Dado $u \in Fix(G)$ como na hipótese, por (1.3), temos

$$\nabla\varphi(u) = \nabla\varphi(g\cdot u) = g\cdot \nabla\varphi(u), \text{ para todo } u \in H,$$

ou seja, $\nabla\varphi(u) \in Fix(G)$. Por outro lado, como u é ponto crítico de φ restrito a $Fix(G)$, temos

$$\langle \nabla\varphi(u), v\rangle = \varphi'(u)\cdot v = 0 \text{ para todo } v \in Fix(G),$$

ou seja, $\nabla\varphi(u) \in Fix(G)^{\perp}$. Como foi mostrado na Definição 1.3, temos que $Fix(G)$ é um subespaço fechado de E, logo

$$Fix(G) \cap Fix(G)^{\perp} = \{0\}$$

o que implica

$$\nabla\varphi(u) = 0$$

e

$$\varphi'(u)\cdot v = \langle \nabla\varphi(u), v\rangle = 0, \text{ para todo } v \in H.$$

Portanto, u é ponto crítico de H. $\square$

1.2 Lema Radial

O resultado apresentado anterior nos dá ferramentas suficientes para que possamos nos restringir a funções pertencentes $H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$, que é um subespaço com condição de simetria, e para isso definimos um funcional radialmente simétrico e demonstramos o lema radial, uma ferramente que relaciona o módulo de u pontualmente com a norma de u em $H^1_0(\Omega)$.

Definição 1.7. Denotaremos por $H^1_{0,rad}(\Omega)$ o seguinte espaço:

$$H^1_{0,rad}(\Omega) = Fix(SO(N)) = \{u \in H^1_0(\Omega)\ ;\ u(x) = u(g(x)), \forall g \in SO(N) \text{ e } \forall x \in \Omega\}.$$

Chamaremos as funções $u \in H^1_{0,rad}(\Omega)$ de funções radiais.

Proposição 1.2. Seja $u \in H^1_0(\Omega)$. Temos que $u \in H^1_{0,rad}(\Omega)$ se, e somente se, $u(x) = u(|x|)$, para todo $x \in \Omega$.

Demonstração. Suponha que $u \in H^1_{0,rad}(\Omega)$. Logo,

$$u(g(x)) = u(x), \text{ para todo } g \in SO(N) \text{ e } x \in \Omega. \tag{1.4}$$

Mostraremos que é possível definir uma função $\tilde{u}$ de modo que, $\tilde{u}(r) = u(x)$ para todo $x \in \Omega$ com $|x| = r$. Com efeito, seja $x_0 \in S[0, r]$, com $0 < r < 1$ (no nosso caso Ω é a bola unitária no $\mathbb{R}^N$). Então, dado $y \in S[0, r]$, considere uma rotação $g_y \in SO(N)$ tal que

$$g_y(y) = x_0. \tag{1.5}$$

Usando as igualdades (1.4) e (1.5), obtemos

$$u(y) = u(g_y(y)) = u(x_0),$$

o que implica em $u(y) = u(x_0)$ para todo $y \in S[0, r]$. Isso mostra que u é constante em cada esfera de raio $r \in (0, 1)$. Portanto, podemos definir $u(r) := u(x)$, onde $r = |x|$.
Por outro lado, suponha que

$$u(x) = u(|x|), \text{ para todo } x \in \Omega. \tag{1.6}$$

Tomando $g \in SO(N)$, temos

$$|g(x)|^2 = \langle g(x), g(x)\rangle = \langle x, x\rangle = |x|^2$$

o que implica

$$|g(x)| = |x|, \text{ para todo } x \in \Omega. \tag{1.7}$$

Por (1.6) e (1.7), temos

$$u(x) = u(|x|) = u(|g(x)|) = u(g(x)), \forall x \in \Omega, \text{ e } \forall g \in SO(N).$$

Ou seja, $u \in H^1_{0,rad}(\Omega)$. □

Vale ressaltar que a definição de função radial não necessita que Ω seja a bola unitária. No caso da bola de raio R a demonstração da proposição acima segue analogamente.

Lema 1.3 (Radial)**.** Seja u uma função radialmente simétrica de Ω (bola unitária no $\mathbb{R}^N$ com $N \geq 3$). Então

$$|u(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{\omega_N(N-2)}} \cdot \frac{\|\nabla u\|_2}{|x|^{\frac{N-2}{2}}}, \text{ para todo } x \in \Omega$$

onde ω_N é a área da superfície da bola unitária no $\mathbb{R}^N$.

Demonstração. Seja $x \in \Omega$ com $|x| = r$, temos então

$$\begin{aligned} -u(x) &= -u(|x|) \\ &= u(1) - u(r) \\ &= \int_r^1 u'(t)\ dt. \end{aligned}$$

Que em módulo, usando a Desigualdade de Hölder (Proposição A.8), temos

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \int_r^1 |u'(t)|\ dt \\ &= \int_r^1 |u'(t)| \cdot t^{\frac{N-1}{2}} \cdot t^{-\frac{N-1}{2}}\ dt \\ &\leq \left(\int_r^1 |u'(t)|^2 \cdot t^{N-1}\ dt\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_r^1 t^{-(N-1)}\ dt\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Note que, para $N \geq 3$:

$$\begin{aligned} \int_r^1 \frac{1}{t^{N-1}}\ dt &= \int_r^1 t^{-(N-1)}\ dt \\ &= \left(\frac{1}{-(N-1)+1} \cdot t^{-(N-1)+1}\right)\Bigg|_r^1 \\ &= \frac{1}{-(N-2)} - \frac{r^{-(N-2)}}{-(N-2)} \\ &= \frac{1}{-(N-2)} \cdot \left(1 - \frac{1}{r^{N-2}}\right) \\ &= \frac{1}{N-2} \cdot \left(\frac{1}{r^{N-2}} - 1\right) \\ &\leq \frac{1}{N-2} \cdot \frac{1}{r^{N-2}}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Para podermos estimar o outro termo em (1.8), observe que $u \in H^1_{0,\text{rad}}(\Omega)$ então

$u(x) = u(r)$, para todo $x \in \Omega$ com $|x| = r$. Desse modo

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{x_i}{|x|}$$

o que implica

$$|\nabla u(x)| = |u'(r)|. \tag{1.10}$$

Para finalizar a demonstração precisamos da seguinte afirmação:

Afirmação 1.1. Seja Ω a bola unitária do $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$. Se $u \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$, então

$$\|u\|_p^p = \omega_N \int_0^1 |u(r)|^p r^{N-1}\, dr,$$

onde $1 \leq p < \infty$ e ω_N é a área da esfera unitária no $\mathbb{R}^N$.

De fato, seja $\psi : U \subset \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{S}^{N-1}$ uma parametrização da esfera unitária do $\mathbb{R}^N$, onde U é um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^{N-1}$. Defina

$$\begin{aligned} \phi : (0,1) \times U &\to \Omega \\ (r, x) &\to r\psi(x) \end{aligned}$$

Observe que o jacobiano de ϕ é tal que

$$|J\phi| = \det \begin{pmatrix} \psi \\ r \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \\ r \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \\ \vdots \\ r \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_{N-2}} \\ r \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_{N-1}} \end{pmatrix} = r^{N-1} \cdot \det \begin{pmatrix} \psi \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_{N-2}} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_{N-1}} \end{pmatrix} = r^{N-1} \cdot \det(M_{J\phi})$$

onde $M_{J\phi} = \begin{pmatrix} \psi \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_{N-2}} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_{N-1}} \end{pmatrix}$ e que $|\phi(r,x)| = |r \cdot \psi(x)| = r \cdot |\psi(x)| = r \cdot 1 = r$.

Desse modo, pelo Teorema de Fubini (Teorema A.6) e pelo Teorema de Mudança de Variáveis (Teorema A.7), temos

$$\begin{aligned}
\int_{\phi((0,1)\times U)} |u(x)|^p \, dx &= \int_{(0,1)\times U} |u(\phi(r,x))|^p \cdot r^{N-1} \cdot \det(M_{J\phi}) \, dr \\
&= \int_{(0,1)\times U} |u(r)|^p \cdot r^{N-1} \cdot \det(M_{J\phi}) \, dr \\
&= \int_0^1 \left(\int_U |u(r)|^p \cdot r^{N-1} \cdot \det(M_{J\phi}) \, dx \right) dr \\
&= \left(\int_0^1 |u(r)|^p \cdot r^{N-1} \, dr \right) \cdot \left(\int_U \det(M_{J\phi}) \, dx \right) \\
&= \omega_N \cdot \int_0^1 |u(r)|^p \cdot r^{N-1} \, dr.
\end{aligned}$$

Desde que $\phi((0,1) \times U) = \Omega/0$, temos

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx = \omega_N \int_0^1 |u(t)|^p t^{N-1} \, dt \tag{1.11}$$

e assim a afirmação está demonstrada.

Por (1.10) e pela Afirmação 1.1 tomando $p = 2$, temos:

$$\begin{aligned}
\|u\|^2 &= \|\nabla u\|_2^2 \\
&= \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \\
&= \int_\Omega |u'(x)|^2 \, dx \\
&= \omega_N \int_0^1 |u'(t)|^2 t^{N-1} \, dt
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Substituindo (1.9) e (1.12) na desigualdade (1.8) se chega ao resultado esperado. □

1.3 Lema de Compacidade

Um resultado que decorre diretamente do Lema Radial é o Lema da Compacidade. Ele é uma ferramenta importante na hora de mostrar que as condições referentes a compacidade pedidas pelo Teorema do Passo da Montanha são satisfeitas. De certo modo, esse lema está diretamente ligado a imersão do $H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$ em $L^{p+1}(\Omega, |x|^l)$, de fato, essa imersão é compacta para o caso subcrítico de Hénon e é mostrada no final do *capítulo 2*.

Lema 1.4. A aplicação $u \longmapsto |x|^m \cdot u$ de $H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$ é compacta, para $p \in [1, \tilde{m})$

onde

$$\tilde{m} = \begin{cases} \dfrac{2N}{N-2-2m} & , \text{ se } m < \dfrac{N-2}{2} \\ \infty & , \text{ caso contrário} \end{cases} .$$

e Ω é a bola unitária no $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$.

Demonstração. Como só precisamos do resultado para $m < \frac{N-2}{2}$, a demonstração para o caso em que $m \geq \frac{N-2}{2}$ será omitida, mas pode ser encontrada em [5].

Pelo Lema Radial 1.3, pela Afirmação 1.1 e tomando $r = |x|$ temos

$$\begin{aligned} \||x|^m \cdot u\|_p^p &= \int_\Omega |x|^{mp} \cdot |u(x)|^p \, dx \\ &\leq \int_\Omega |x|^{mp} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\omega_N (N-2)}} \cdot \frac{\|\nabla u\|_2}{|x|^{\frac{N-2}{2}}} \right)^p dx \\ &\leq \frac{\|\nabla u\|_2^p}{(\sqrt{\omega_N (N-2)})^p} \cdot \int_\Omega |x|^{(m - \frac{N-2}{2}) \cdot p} \, dx \\ &\leq \frac{\|\nabla u\|_2^p}{(\sqrt{\omega_N (N-2)})^p} \cdot \left(\omega_N \int_0^1 r^{(m - \frac{N-2}{2}) \cdot p} \cdot r^{N-1} \, dr \right) \\ &= \left(\frac{\omega_N}{(\sqrt{\omega_N (N-2)})^p} \cdot \int_0^1 r^{(m - \frac{N-2}{2}) \cdot p} \cdot r^{N-1} \, dr \right) \cdot \|\nabla u\|_2^p \end{aligned} \tag{1.13}$$

Verifica-se que $(m - \frac{N-2}{2})p + N - 1 > -1$, desse modo (1.13) acarreta em $\||x|^m \cdot u\|_p \leq C \|u\|$ onde $C = \dfrac{\omega_N \left(\sqrt{\omega_N (N-2)} \right)^{-p}}{(m - \frac{N-2}{2})p + N}$. Ou seja, essa aplicação é contínua para todo $p \in \left[1, \dfrac{2N}{N-2-2m} \right)$.

Para provar a compacidade usemos a Desigualdade de Hölder (Proposição A.8) para $p = \frac{1}{a}$ e $q = \frac{1}{1-a}$ onde $a \in (0,1)$:

$$\begin{aligned} \||x|^m \cdot u\|_p^p &= \int_\Omega |x|^{mp} |u|^p \, dx \\ &= \int_\Omega |x|^{mp} |u|^{p-a} |u|^a \, dx \\ &\leq \left(\int_\Omega |u| \, dx \right)^a \cdot \left(\int_\Omega |x|^{\frac{mp}{1-a}} |u|^{\frac{p-a}{1-a}} \, dx \right)^{1-a} . \end{aligned}$$

Note que para $m^* = \dfrac{mp}{p-a}$ e $p^* = \dfrac{p-a}{1-a}$ temos

$$\||x|^m \cdot u\|_p \leq \left(\int_\Omega |u| \, dx \right)^{\frac{a}{p}} \cdot \left(\int_\Omega |x|^{m^* p^*} |u|^{p^*} \, dx \right)^{\frac{1-a}{p}} .$$

Afirmação 1.2. Existe $a \in (0,1)$ tal que $p^* \in \left[1, \dfrac{2N}{N-2-2m^*}\right)$, onde $m^* < \dfrac{N-2}{2}$.

De fato, suponha por contradição que $p^* = \dfrac{p-a}{1-a} \geq \dfrac{2N}{N-2-2\frac{mp}{p-a}}$ para todo $a \in (0,1)$. Fazendo $a \to 0^+$ temos $p \geq \dfrac{2N}{N-2-2m}$ o que é um absurdo, validando a afirmação.

Desse modo, por (1.13) existe C_1 constante tal que

$$\int_\Omega |x|^{m^* p^*} |u|^{p^*}\, dx \leq C_1 \left\|\nabla u\right\|_2^{p^*}$$

o que implica que

$$\left\| |x|^m \cdot u \right\|_p \leq C_1^{\frac{1-a}{p}} \left\|u\right\|_1^{\frac{a}{p}} \left\|u\right\|^{p^* \cdot \frac{1-a}{p}} = C_2 \left\|u\right\|_1^{\frac{a}{p}} \left\|u\right\|^{\frac{p-a}{p}}, \tag{1.14}$$

onde $C_2 = C_1^{\frac{1-a}{p}}$.
Pelo Teorema de Rellich-Kondrachov (Teorema A.1) temos $H^1_{0,rad}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ compactamente. Assim, dado (u_n) uma sequência limitada em $H^1_{0,rad}(\Omega)$ existe uma subsequencia $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ e $u \in H^1_{0,rad}(\Omega)$, tal que

$$u_{n_j} \to u \text{ em } L^1(\Omega), \text{ quando } j \to \infty$$

Por (1.14) temos

$$\begin{aligned} \left\| |x|^m \cdot u_{n_j} - |x|^m \cdot u \right\|_p &= \left\| |x|^m \cdot (u_{n_j} - u) \right\|_p \\ &\leq C_2 \left\| u_{n_j} - u \right\|_1^{\frac{a}{p}} \left\| u_{n_j} - u \right\|^{\frac{p-a}{p}} \end{aligned}$$

de modo que $\left\| |x|^m \cdot u_{n_j} - |x|^m \cdot u \right\|_p \to 0$ quando $j \to \infty$. Ou seja, dada uma sequencia $(u_n) \in H^1_{0,rad}(\Omega)$, existe $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ tal que $|x|^m \cdot u_{n_j}$ é convergente em $L^p(\Omega)$. Portanto, se $m < \frac{N-2}{2}$, $u \to |x|^m \cdot u$ é uma aplicação compacta. □

Capítulo 2

O Problema Crítico com a não Linearidade Polinomial

Neste capítulo, baseado em um trabalho publicado em 1982, por Wei-Ming Ni [14], demonstraremos a existência de solução radial positiva para o problema (P1).

A demonstração da existência de solução para o problema (P1) consiste em aplicar o Teorema do Passo da Montanha, devido a Ambrosetti e Rabinowitz (1973), ao funcional energia associado ao problema (P1), definido sobre o espaço $H^1_{0,rad}(\Omega)$. Dividimos a demonstração em três etapas. Na primeira etapa usamos o lema radial para mostrar que o funcional energia satisfaz a hipóteses geométricas do Teorema do Passo da Montanha. Na segunda etapa usamos o lema de compacidade para mostrar que o funcional energia satisfaz a condição de Palais-Smale. Finalmente, na terceira etapa, aplicamos o Teorema do Passo da Montanha, mostramos que o ponto crítico obtido é solução de (P1) restrito a $H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$ e usamos o Princípio da Criticalidade Simétrica de Palais para mostrar que é solução não nula de (P1).

2.1 A Geometria do Passo da Montanha

Nosso objetivo é encontrar solução fraca $u \in H^1_0(\Omega)$ para o seguinte problema

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u & = & |x|^l u^\tau & \text{em } \Omega \\ u & > & 0 & \text{em } \Omega \\ u & = & 0 & \text{em } \partial\Omega \end{array}\right. \tag{P1}$$

onde Ω é a bola unitária do $\mathbb{R}$, com $N > 2$, $l > 0$, $1 < \tau < 2^* - 1 + \dfrac{2l}{N-2}$ e $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ é o expoente crítico de Sobolev.

A motivação para a escolha desse expoente é consequência imediata do lema abaixo:

Lema 2.1. Seja Ω um domínio limitado com fronteira suave e $g : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $u \in C^2(\bar{\Omega})$ satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta u &=& g(x, u(x)) & \text{em } \Omega \\ u &>& 0 & \text{em } \Omega \\ u &=& 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

então

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} |\nabla u(x)|^2 x \cdot \eta(x)\, dx &= 2N \int_\Omega G(x, u(x))\, dx - (N-2) \int_\Omega g(x, u) u\, dx \\ &+ 2 \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega x_i G_{x_i}(x, u)\, dx \end{aligned}$$

onde $\eta(x)$ denota o vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$ no ponto x e $G(x, s) = \int_0^s g(x, t)\, dt$.

Demonstração. Multiplicando (2.1) por $(x \cdot \nabla u)$ e integrando em Ω obtemos

$$-\int_\Omega \Delta u (x \cdot \nabla u)\, dx = \int_\Omega g(x, u(x))(x \cdot \nabla u)\, dx. \tag{2.2}$$

Pela identidade de Pohozaev temos

$$-\int_\Omega \Delta u (x \cdot \nabla u)\, dx = \frac{N-2}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 x \cdot \eta(x)\, dx$$

e pelo fato de u ser solução de (2.1), temos

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx = \int_\Omega g(x, u) u\, dx,$$

logo

$$-\int_\Omega \Delta u (x \cdot \nabla u)\, dx = \frac{N-2}{2} \int_\Omega g(x, u) u\, dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 x \cdot \eta(x)\, dx. \tag{2.3}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x_i}(x, u(x)) &= \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial G}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x_i} + \frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_i} \\ &= \sum_{j=1}^{N} \delta_{i,j} G_{x_j}(x, u(x)) + g(x, u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_i} \end{aligned} \tag{2.4}$$

e pelo Teorema de Integração por Partes, temos

$$\int_\Omega x_i \frac{\partial G}{\partial x_i}(x,u(x))\,dx = -\int_\Omega G(x,u(x))\,dx. \tag{2.5}$$

Usando (2.4) e (2.5), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega g(x,u(x))(x\cdot\nabla u)\,dx &= \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) g(x,u(x))\,dx \\
&= \sum_{i=1}^N \int_\Omega x_i g(x,u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_i} \\
&= \sum_{i=1}^N \int_\Omega x_i \left(\frac{\partial G}{\partial x_i}(x,u(x)) - \sum_{j=1}^N \delta_{i,j} G_{x_j}(x,u(x))\right)\,dx \\
&= \sum_{i=1}^N \left(\int_\Omega x_i \frac{\partial G}{\partial x_i}(x,u(x))\,dx - \int_\Omega x_i \sum_{j=1}^N \delta_{i,j} G_{x_j}(x,u(x))\,dx\right) \\
&= \sum_{i=1}^N \left(\int_\Omega -G(x,u(x))\,dx - \int_\Omega x_i \sum_{j=1}^N \delta_{i,j} G_{x_j}(x,u(x))\,dx\right) \\
&= \sum_{i=1}^N \int_\Omega -G(x,u(x))\,dx - \sum_{i=1}^N \int_\Omega x_i \sum_{j=1}^N \delta_{i,j} G_{x_j}(x,u(x))\,dx \\
&= -N\int_\Omega G(x,u(x))\,dx - \sum_{i=1}^N \int_\Omega x_i G_{x_i}(x,u(x))\,dx \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Usando (2.3), (2.2) e (2.6) o resultado é imediato. □

Suponha que $u \in C^2(\bar{\Omega})$ é solução de (P1), logo vale

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} |\nabla u(x)|^2 x\cdot\eta(x)\,dx &= 2N\int_\Omega G(x,u(x))\,dx - (N-2)\int_\Omega g(x,u)u\,dx \\
&+ 2\sum_{i=1}^N \int_\Omega x_i G_{x_i}(x,u)\,dx
\end{aligned}$$

com $g(x,u(x)) = |x|^l|u|^\tau$. Como $\Omega = B(0,1)$ é estrelado temos $x\cdot\eta(x) > 0$ e, pelo Teorema da Divergência, temos

$$\int_{\partial\Omega} \nabla u(x)\eta(x)\,dx = -\int_\Omega \Delta u = \int_\Omega |x|^l u^\tau$$

que nos diz que não podemos ter $\Delta u \equiv 0$, pois caso contrário teríamos $u = 0$ o que contradiz o fato de u ser solução de (2.1). Desse modo

$$
\begin{aligned}
0 &< \int_{\partial\Omega} |\nabla u(x)|^2 x \cdot \eta(x)\ dx \\
&= 2N\int_{\Omega}\left(\frac{1}{\tau+1}|x|^l u^{\tau+1}\right)\ dx - (N-2)\int_{\Omega}\left(|x|^l u^{\tau+1}\right)\ dx \\
&+ 2\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} x_i\left(\frac{1}{\tau+1} l|x|^{l-2}x_i u^{\tau+1}\right)\ dx \\
&= \left(\frac{2N}{\tau+1}-(N-2)\right)\int_{\Omega}|x|^l u^{\tau+1}\ dx + \frac{2l}{\tau+1}\int_{\Omega}|x|^{l-2}\left(\sum_{i=1}^{N}{x_i}^2\right)|u|^{\tau+1} \\
&= \left(\frac{2N}{\tau+1}-(N-2)+\frac{2l}{\tau+1}\right)\int_{\Omega}|x|^l u^{\tau+1},
\end{aligned}
$$

que implica

$$\frac{2N+2l}{\tau+1}-(N-2)>0$$

que é equivalente a

$$\tau < 2^* - 1 + \frac{2l}{N-2}.$$

Ou seja, se $\tau \geq 2^* - 1 + \frac{2l}{N-2}$. o problema (P1) não possui solução.

Uma solução fraca para o problema (P1) é uma função $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ satisfazendo

$$\int_{\Omega}\nabla u_0 \nabla v\ dx - \int_{\Omega}|x|^l |u_0|^{\tau} v\ dx = 0 \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Para encontrar essa solução fraca, definimos o seguinte funcional associado ao problema (P1) restrito a $H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$, $J : H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por:

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega}|\nabla u|^2\ dx - \int_{\Omega}|x|^l F(u)\ dx$$

onde

$$F(u) = \int_0^u |t|^{\tau}\ dt = \begin{cases} \dfrac{1}{\tau+1}|u|^{\tau+1} & , u \geq 0 \\ -\dfrac{1}{\tau+1}|u|^{\tau+1} & , u < 0 \end{cases},$$

ou seja,

$$F(u) = \frac{u|u|^{\tau}}{\tau+1}.$$

Encontraremos ponto crítico u_0 para J e em seguida aplicaremos o Princípio da Criticalidade Simétrica de Palais afim de concluir que u_0 é solução de (P1).

Pelo Lema Radial 1.3, temos

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega |x|^l |u|^\tau u\ dx\right| &\leq \int_\Omega |x|^l |u|^{\tau+1}\ dx \\
&\leq \int_\Omega |x|^l \left(\frac{1}{\sqrt{\omega_N(N-2)}} \cdot \frac{\|u\|}{|x|^{\frac{N-2}{2}}}\right)^{\tau+1} dx \\
&\leq \left(\frac{\|u\|}{\sqrt{\omega_N(N-2)}}\right)^{\tau+1} \cdot \int_\Omega |x|^{l+\frac{2-N}{2}(\tau+1)}\ dx \\
&\leq \left(\frac{1}{\sqrt{\omega_N(N-2)}}\right)^{\tau+1} \cdot \omega_N \cdot \left(\int_0^1 r^{l+\frac{2-N}{2}(\tau+1)+N-1}\ dr\right) \|u\|^{\tau+1} \\
&= C\,\|u\|^{\tau+1}
\end{aligned}$$

onde

$$C = \left(\frac{1}{\sqrt{\omega_N(N-2)}}\right)^{\tau+1} \cdot \omega_N \cdot \left(\int_0^1 r^{l+\frac{2-N}{2}(\tau+1)+N-1}\ dr\right) \tag{2.7}$$

é constante visto que $\tau < \frac{N+2+2l}{N-2}$ o que implica que $l + \frac{2-N}{2}(\tau+1) + N - 1 > -1$, ou seja, $\int_0^1 r^{l+\frac{2-N}{2}(\tau+1)+N-1}\ dr$ converge.

Desse modo,

$$\left|\frac{\int_\Omega |x|^l |u|^\tau u\ dx}{\|u\|^2}\right| \leq C\,\|u\|^{\tau-1}$$

o que implica

$$\lim_{\|u\|\to 0}\left|\frac{\int_\Omega |x|^l |u|^\tau u\ dx}{\|u\|^2}\right| = 0.$$

Logo, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{\int_\Omega |x|^l |u|^\tau u\ dx}{\|u\|^2}\right| < \frac{\tau+1}{4},$$

$\forall u \in B(0,\delta)/\{0\} \subset H^1_{0,rad}(\Omega)$, o que implica

$$-\int_\Omega |x|^l |u|^\tau u\ dx > -\frac{\tau+1}{4}\,\|u\|^2,$$

$\forall u \in B(0,\delta)/\{0\} \subset H^1_{0,rad}(\Omega)$. Logo

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{\tau+1}\int_\Omega |x|^l|u|^\tau u\ dx \\ &> \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{\tau+1}\cdot\left(\frac{\tau+1}{4}\|u\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{4}\|u\|^2 \\ &= \frac{1}{4}\|u\|^2, \end{aligned} \tag{2.8}$$

$\forall u \in B(0,\delta)/\{0\} \subset H^1_{0,rad}(\Omega)$. Por outro lado, sejam $u_0 \in H^1_{0,rad}(\Omega)$ positivo e $r > 0$. Assim sendo,

$$\begin{aligned} J(ru_0) &= \frac{1}{2}r^2\|u_0\|^2 - \frac{r^{\tau+1}}{\tau+1}\int_\Omega |x|^l|u_0|^{\tau+1}\ dx \\ &= Ar^2 - Br^{\tau+1}, \end{aligned}$$

onde $A = \frac{1}{2}\|u_0\|^2$ e $B = \frac{1}{\tau+1}\int_\Omega |x|^l|u_0|^{\tau+1}\ dx$. Como $\tau+1 > 2$, temos

$$J(ru_0) \to -\infty \text{ quando } r \to \infty \tag{2.9}$$

De (2.8) e (2.9) é garantida a existência de $e \in H^1_{0,rad}(\Omega)$, $p \in (0, \|e\|)$ fixo e $\alpha > 0$ tais que $J(u) > \alpha$ se $\|u\| = p$ o que mostra que J satisfaz as hipóteses geométricas do Teorema do Passo da Montanha (Teorema A.2). Resta então provar que J satisfaz a condição de Palais-Smale.

2.2 A Condiçao de Palais-Smale

Como as hipóteses geométricas do Teorema do Passo da Montanha são satisfeitas, a fim de mostrar que o funcional J possui ponto crítico, basta mostrar que as hipóteses referentes a compacidade também são satisfeitas. Para isso, vamos mostrar que toda sequência quase-crítica $\{u_n\}$ possui subsequência convergente, ou seja, J satisfaz a condição de Palais-Smale.

Seja $\{u_n\}$ uma sequência em $H^1_{0,rad}(\Omega)$ tal que

(i) Existe $C > 0$ tal que $|J(u_n)| \leq C, \forall n \in \mathbb{N}$;

(ii) $J'(u_n) \to 0$ quando $n \to \infty$.

A derivada de J é dada por

$$J'(u)(v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v\ dx - \int_\Omega |x|^l|u|^\tau v\ dx, \text{ para } u, v \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega).$$

Tomando $u = v = u_n$, obtemos

$$J'(u_n)(u_n) = \|u_n\|^2 - \int_\Omega |x|^l |u_n|^\tau u_n \, dx.$$

Por (ii) existe n_0 suficientemente grande tal que

$$\begin{aligned} \left| \|u_n\|^2 - \int_\Omega |x|^l |u_n|^\tau u_n \, dx \right| &= |J'(u_n)(u_n)| \\ &\leq \|J'(u_n)\| \, \|u_n\| \\ &\leq \|u_n\| , \end{aligned} \tag{2.10}$$

para todo $n \geq n_0$. Pela limitação de $\{J(u_n)\}$ temos

$$\left| \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \, dx - \int_\Omega |x|^l |u_n|^\tau u_n \, dx \right| \leq C$$

que é equivalente a

$$\left| \|u_n\|^2 - \frac{2}{\tau+1} \int_\Omega |x|^l |u_n|^\tau u_n \, dx \right| \leq 2C,$$

ou seja,

$$\|u_n\|^2 - \frac{2}{\tau+1} \left| \int_\Omega |x|^l |u_n|^\tau u_n \, dx \right| \leq 2C. \tag{2.11}$$

De (2.10), temos

$$- \|u_n\|^2 + \left| \int_\Omega |x|^l |u_n|^\tau u_n \, dx \right| \leq \|u_n\|$$

donde

$$\left| \int_\Omega |x|^l |u_n|^\tau u_n \, dx \right| \leq \|u_n\| + \|u_n\|^2 .$$

Por (2.10) e (2.11) segue que

$$\begin{aligned} \|u_n\|^2 &\leq 2C + \frac{2}{\tau+1} \left| \int_\Omega |x|^l |u_n|^\tau u_n \, dx \right| \\ &\leq 2C + \frac{2}{\tau+1} \|u_n\| + \frac{2}{\tau+1} \|u_n\|^2 , \end{aligned}$$

e daí

$$\left(1 - \frac{2}{\tau+1}\right) \|u_n\|^2 \leq 2C + \frac{2}{\tau+1} \|u_n\| .$$

Como $\tau > 1$, temos $\left(1 - \dfrac{2}{\tau+1}\right) > 0$ o que implica $\{u_n\}$ ser limitada.

Para mostrar que $\{u_n\}$ possui subsequência convergente em $H^1_{0,rad}(\Omega)$ vamos definir um operador:

$$T : H^1_{0,rad}(\Omega) \longrightarrow H^1_{0,rad}(\Omega)$$

que satisfaz

$$\langle Tu, v\rangle_{H^1_{0,rad}(\Omega)} = \int_\Omega |x|^l |u|^\tau v \; dx.$$

e mostremos que, se $T(u_n)$ convergir a menos de subsequência, então u_n também converge a menos de subsequência. Primeiramente seja

$$\begin{array}{rcccl} (-\Delta)^{-1}: & H^{-1}(\Omega) & \longrightarrow & H^1_{0,rad}(\Omega) & \\ & \varphi & \longmapsto & (-\Delta)^{-1}(\varphi) & = \; w \end{array}$$

onde $\langle w, v\rangle = \int_\Omega (\nabla w)(\nabla v) \; dx = \varphi(v)$ e $H^{-1}(\Omega) = (H^1_{0,rad}(\Omega))'$.
Note que $(-\Delta)^{-1}$ está bem definido pela Teorema de representação de Riesz. No caso, dado $w \in H^1_{0,rad}$, existe $\varphi \in H^{-1}(\Omega)$ tal que $\langle w, v\rangle = \int_\Omega \nabla w \nabla v \; dx = \varphi(w)$ para todo $v \in H^1_{0,rad}$.
Se $(-\Delta)^{-1}(\varphi) = w$ então

$$\|\varphi\|_{H^{-1}(\Omega)} \geq \frac{\varphi(w)}{\|w\|} = \frac{\langle w, w\rangle}{\|w\|} = \left\|(-\Delta)^{-1}(\varphi)\right\|. \tag{2.12}$$

devido ao Teorema de representação de Riesz. Fixado $u \in H^1_{0,rad}(\Omega)$, defina

$$\varphi_u(v) = \int_\Omega |x|^l |u|^\tau v \; dx.$$

Afirmação 2.1. $\varphi_u \in H^{-1}(\Omega)$.

Temos φ_u linear e limitada. De fato,

$$\begin{aligned} \varphi_u(\alpha v + w) &= \int_\Omega |x|^l |u|^\tau (\alpha v + w) \; dx \\ &= \alpha \int_\Omega |x|^l |u|^\tau v \; dx + \int_\Omega |x|^l |u|^\tau w \; dx \\ &= \alpha \varphi_u(v) + \varphi_u(w) \end{aligned}$$

e, usando o Lema Radial 1.3, temos

$$
\begin{aligned}
|\varphi_u(v)| &= \left| \int_\Omega |x|^l |u|^\tau v \, dx \right| \\
&\leq \int_\Omega |x|^l |u|^\tau |v| \, dx \\
&\leq \int_\Omega |x|^l \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\omega_N (N-2)}} \cdot \frac{\|u\|}{|x|^{\frac{N-2}{2}}} \right)^\tau \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\omega_N (N-2)}} \cdot \frac{\|v\|}{|x|^{\frac{N-2}{2}}} \right) dx \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{\omega_N (N-2)}} \right)^{\tau+1} \cdot \left(\int_\Omega |x|^{l - \left(\frac{N-2}{2}\right)\cdot(\tau+1)} \, dx \right) \|u\|^\tau \|v\| \\
&\leq \frac{\omega_N}{\left(\sqrt{\omega_N (N-2)}\right)^{\tau+1}} \cdot \left(\int_0^1 r^{l - \left(\frac{N-2}{2}\right)\cdot(\tau+1) + N - 1} \, dr \right) \|u\|^\tau \|v\| \\
&= C \|u\|^\tau \|v\|, \qquad (2.13)
\end{aligned}
$$

$\forall v \in H^1_{0,rad}(\Omega)$, onde, como em (2.1),

$$
C = \frac{\omega_N}{\left(\sqrt{\omega_N (N-2)}\right)^{\tau+1}} \cdot \left(\int_0^1 r^{l - \left(\frac{N-2}{2}\right)\cdot(\tau+1) + N - 1} \, dr \right),
$$

é constante, o que conclui a prova da afirmação.

Desse modo T fica bem definido por $T(u) = (-\Delta)^{-1}(\varphi_u)$ e além disso

$$
\begin{aligned}
J'(u_n)v &= \int_\Omega (\nabla u_n)(\nabla v) \, dx - \int_\Omega |x|^l |u_n|^\tau v \, dx \\
&= \langle u_n, v \rangle - \langle T(u_n), v \rangle \\
&= \langle u_n - T(u_n), v \rangle.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\|u_n - T(u_n)\|^2 &= \langle u_n - T(u_n), u_n - T(u_n) \rangle \\
&= J'(u_n)(u_n - T(u_n)) \\
&\leq \|J'(u_n)\| \, \|u_n - T(u_n)\|
\end{aligned}
$$

o que implica $\|u_n - T(u_n)\| \leq \|J'(u_n)\|$. Usando o fato de que $\|J'(u_n)\| \to 0$ quando $n \to \infty$, temos

$$
\|u_n - T(u_n)\| \longrightarrow 0 \text{ quando } n \to \infty. \qquad (2.14)
$$

Resta então mostrar que existe uma subsequência $\{u_{n_k}\}$ de $\{u_n\}$ tal que $\{T(u_{n_k})\}$ seja convergente. Para isso mostremos que T é uma aplicação compacta. Tomemos

$T = T_5 \circ T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1$ onde

$$\begin{array}{rccc} T_1: & H^1_{0,rad}(\Omega) & \longrightarrow & L^{\frac{2N\tau}{N+2}}(\Omega) \\ & u & \longmapsto & |x|^{\frac{l}{\tau}}u \end{array},$$

$$\begin{array}{rccc} T_2: & L^{\frac{2N\tau}{N+2}}(\Omega) & \longrightarrow & L^{\frac{2N\tau}{N+2}}(\Omega) \\ & |x|^{\frac{l}{\tau}}u & \longmapsto & |x|^{\frac{l}{\tau}}|u| \end{array},$$

$$\begin{array}{rccc} T_3: & L^{\frac{2N\tau}{N+2}}(\Omega) & \longrightarrow & L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega) \\ & |x|^{\frac{l}{\tau}}|u| & \longmapsto & \left(|x|^{\frac{l}{\tau}}|u|\right)^{\tau} \end{array},$$

$$\begin{array}{rccc} T_4: & L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega) & \longrightarrow & H^{-1}(\Omega) \\ & \left(|x|^{\frac{l}{\tau}}|u|\right)^{\tau} & \longmapsto & \varphi_u \end{array} \quad \text{e}$$

$$\begin{array}{rccc} T_5: & H^{-1}(\Omega) & \longrightarrow & H^1_{0,rad}(\Omega) \\ & \varphi_u & \longmapsto & (-\Delta)^{-1}(\varphi_u) \end{array}.$$

Afirmação 2.2. O operador T_1 é compacto e os operadores T_2, T_3, T_4 e T_5 são contínuos.

De fato, pelo Lema de Compacidade 1.4, para $m = \dfrac{l}{\tau}$, se $\dfrac{l}{\tau} < \dfrac{N-2}{2}$, então por $\tau < \dfrac{N+2+2l}{N-2}$, temos que $\dfrac{2N\tau}{N+2} < \dfrac{2N}{N-2-\frac{2l}{\tau}}$, ou seja, T_1 é compacto.
Observe que a aplicação T_2 é definida por $T_2(u) = |u|$, ou seja, $\|T_2(u)\|_{L^{\frac{2N\tau}{N+2}}(\Omega)} = \|u\|^{\frac{2N\tau}{N+2}}$. Portando T_2 é contínuo.
O operador T_3 é contínuo devido a sua definição

$$T_3(u) = u^{\tau}, \tau > 1$$

Para mostrar que aplicação T_4 definida por $\langle T_4(w), v\rangle = \int_{\Omega} wv\, dx$ é contínuo usemos a Desigualdade de Hölder (Proposição A.8) para o par de dualidade $\dfrac{2N}{N+2}$ e $\dfrac{2N}{N-2}$ e a imersão contínua $H^1_{0,rad}(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$:

$$
\begin{aligned}
|\langle T_4(w), v\rangle| &\leq \int_\Omega |w||v|\ dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |w|^{\frac{2N}{N+2}}\ dx\right)^{\frac{N+2}{2N}} \cdot \left(\int_\Omega |v|^{\frac{2N}{N-2}}\ dx\right)^{\frac{N-2}{2N}} \\
&= \|w\|_{\frac{2N}{N+2}} \|v\|_{2^*} \\
&\leq C\|w\|_{\frac{2N}{N+2}} \|v\|,
\end{aligned}
$$

o que implica que

$$\frac{|\langle T_4(w), v\rangle|}{\|v\|} \leq C\|w\|_{\frac{2N}{N+2}},$$

ou seja,

$$\|T_4(w)\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{v \in H^1_{0,rad}(\Omega)/\{0\}} \frac{|\langle T_4(w), v\rangle|}{\|v\|} \leq C\|w\|_{\frac{2N}{N+2}}$$

e isto prova a continuidade pois T_4 é linear. Como a continuidade do operador T_5 já foi mostrada durante a definição do operador T, em (2.2), temos que, por T ser composição de operadores contínuos com um compacto, T é compacto e assim a afirmação está demonstrada.

Logo, por (2.14), existe uma subsequência $\{u_{n_k}\}$ de $\{u_n\}$ tal que $J(u_{n_k})$ é convergente, ou seja, J satisfaz a condição de Palais-Smale.

2.3 Existência de Solução Radial Positiva para a Equação de Hénon

Como J satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha (Apêndice A.2) existe $u \in H^1_{0,rad}(\Omega)/\{0\}$ que é ponto critico de J em $H^1_{0,\text{rad}}(\Omega)$.

Lema 2.2. *u é uma solução fraca positiva para o problema P1.*

Demonstração. Para mostrar que u é uma solução para o problema P1 usaremos a Teoria de Regularização e o Princípio do Máximo (Apêndice A.4).
Defina $g : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por $g(x, s) = |x|^l |s|^\tau$ que, por definição, é uma função de

Carathéodory. Pelo fato de u ser radial, temos

$$
\begin{aligned}
|g(x,u)| &= |x|^l |u|^\tau \\
&= |x|^l |u|^{\tau - \frac{N+2}{N-2}} |u|^{\frac{N+2}{N-2}} \\
&\leq |x|^l \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\omega_N (N-2)}} \right)^{\tau - \frac{N+2}{N-2}} \cdot \left(\frac{\|u\|}{|x|^{\frac{N-2}{2}}} \right)^{\tau - \frac{N+2}{N-2}} \cdot |u|^{\frac{N+2}{N-2}} \\
&= \left(\frac{\|u\|}{\sqrt{\omega_N (N-2)}} \right)^{\tau - \frac{N+2}{N-2}} \cdot |x|^{l - \left(\tau - \frac{N+2}{N-2}\right) \cdot \frac{N-2}{2}} \cdot |u|^{\frac{N+2}{N-2}}. \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

Pela hipótese $\tau < \dfrac{N+2+2l}{N-2}$, temos

$$
\begin{aligned}
l - \left(\tau - \frac{N+2}{N-2} \right) \cdot \frac{N-2}{2} &> l - \left(\frac{N+2+2l}{N-2} - \frac{N+2}{N-2} \right) \cdot \frac{N-2}{2} \\
&= l - \frac{2l}{N-2} \cdot \frac{N-2}{2} \\
&= l - l \\
&= 0
\end{aligned}
$$

e portanto $|x|^{l - \left(\tau - \frac{N+2}{N-2}\right) \cdot \frac{N-2}{2}} \in L^\infty(\Omega)$. Logo, existe $M > 0$ tal que

$$
\left(\frac{\|u\|}{\sqrt{\omega_N (N-2)}} \right)^{\tau - \frac{N+2}{N-2}} \cdot |x|^{l - \left(\tau - \frac{N+2}{N-2}\right) \cdot \frac{N-2}{2}} \leq M \text{ q.t.p. em } \Omega.
$$

Substituindo na desigualdade (2.15), obtemos

$$
\begin{aligned}
|g(x,u)| &\leq M |u|^{\frac{N+2}{N-2}} \\
&= M |u|^{\frac{4}{N-2}} |u| \\
&= a(x) |u|,
\end{aligned}
$$

onde $a(x) = M|u|^{\frac{4}{N-2}}$ q.t.p. em Ω. Pela imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}$, segue que

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega (a(x))^{\frac{N}{2}} \, dx &= \int_\Omega (M|u|^{\frac{4}{N-2}})^{\frac{N}{2}} \, dx \\
&= M^{\frac{N}{2}} \int_\Omega |u|^{\frac{2N}{N-2}} \, dx \\
&= M^{\frac{N}{2}} \|u\|_{2^*}^{\frac{N-2}{2N}} \\
&< \infty.
\end{aligned}
$$

Ou seja, $|g(x,u)| \leq a(x)|u| \leq a(x)(1+|u|)$ q.t.p. em Ω com $a \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$. Pelo Teorema

A.11 (veja Apêndice) temos que $u \in L^2(\Omega)$ o que implica $u \in C^2(\Omega)$ e pelo Princípio do Máximo Clássico (Teorema A.4) temos $u > 0$. Pelo Princípio da Criticalidade Simétrica de Palais (Teorema 1.1), temos que u é solução fraca positiva do problema (P1) em $H_0^1(\Omega)$. $\square$

Capítulo 3

Problema Subcrítico com a não Linearidade Assintoticamente Polinomial

Assim como no capítulo anterior, iremos aplicar o Teorema do Passo da Montanha ao funcional energia associado ao problema P2. A demonstração seguirá com as mesmas três etapas: hipóteses geométricas do Teorema do Passo da Montanha, a condição de Palais-Smale, a aplicação o Teorema do Passo da Montanha para encontrar um ponto crítico que é solução de (P2) restrito a $H^1_{0,\text{rad}}(\Omega)$ e finalmente usamos o Princípio da Criticalidade Simétrica de Palais para mostrar que o ponto crítico é solução fraca de(P2).

3.1 A Geometria do Passo da Montanha

Nosso objetivo é encontrar solução fraca $u \in H^1_0(\Omega)$ para o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= b(|x|)f(u) & \text{em } \Omega \\ u &> 0 & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{P2}$$

onde Ω é a bola unitária no $\mathbb{R}^N$ e $b(r)$ e $f(s)$ satisfazem as seguintes hipóteses:

(b1) $b(r)$ é uma função localmente Hölder contínua positiva (para $r \neq 0$) com $b(0) = 0$.

(b2) $b(r) = O(r^l)$ em $r = 0$, para algum $l > 0$.

(f1) f é uma função localmente Hölder contínua, $f(s) \geq 0$, para todo $s > 0$, $f(s) = \text{o}(s)$ para $s = 0$ e $\dfrac{f(s)}{s} \to \infty$ quando $s \to \infty$.

(f2) $|f(s)| \leq C(1+|s|)^p$, onde $p < \dfrac{N+2}{N-2} + \dfrac{2l}{N-2}$, para s suficientemente grande.

(f3) Existem constantes $\theta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ e $M > 0$ tal que $F(s) = \int_0^s f(t)\ dt \leq \theta \cdot s \cdot f(s)$, para $s \geq M$.

Uma solução fraca para o problema é uma função $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ satisfazendo

$$\int_\Omega \nabla u_0 \nabla v\ dx - \int_\Omega b(|x|) f(u_0) v\ dx = 0 \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Para encontrar essa solução fraca, vamos definir o seguinte funcional associado ao problema (P2) restrito a $H^1_{0,\text{rad}}(\Omega)$ com f truncado, $J : H^1_{0,\text{rad}}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por:

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega b(|x|)\hat{F}(u)\ dx$$

onde

$$\hat{F}(u) = \int_0^u \hat{f}(t)\ dt.$$

e $\hat{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por:

$$\hat{f}(t) = \begin{cases} f(t) & , t > 0 \\ 0 & , t \leq 0 \end{cases}.$$

encontraremos ponto crítico u_0 para J e em seguida aplicaremos o Princípio da Criticalidade Simétrica de Palais afim de concluir que u_0 é solução de (P2).

A derivada de J é dada por

$$J'(u)(v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v\ dx - \int_\Omega b(|x|)\hat{f}(u) v\ dx,$$

para $u, v \in H^1_{0,\text{rad}}(\Omega)$.
Primeiro mostremos que $J(u)$ e $J'(u)(v)$ estão bem definidos. Para isso, seja

$$\begin{array}{rccccl} \Psi : & H^1_{0,\text{rad}}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} & & \\ & u & \longmapsto & \Psi(u) & = & \int_\Omega b(|x|)\hat{F}(u)\ dx \end{array}.$$

Desse modo

$$\begin{aligned} \frac{\Psi(u+hv) - \Psi(u)}{h} &= \frac{\int_\Omega b(|x|)\hat{F}(u+hv)\ dx - \int_\Omega b(|x|)\hat{F}(u)\ dx}{h} \\ &= \int_\Omega b(|x|)\frac{\hat{F}(u+hv) - \hat{F}(u)}{h}\ dx \\ &= \int_\Omega b(|x|)\frac{\hat{F}(u+hv) - \hat{F}(u)}{hv} \cdot v\ dx \end{aligned}$$

Pelo Teorema do Valor Médio existe u_0 pertencente ao intervalo fechado de extremos u e $u + hv$ tal que

$$\frac{\hat{F}(u+hv) - \hat{F}(u)}{hv} = \hat{F}'(u_0) = \hat{f}(u_0).$$

Fazendo $h \to 0$ temos $u_0 \to u$ q.t.p. em Ω e, para $h \in (0,1]$, temos os seguintes casos: para $u < u + hv$

$$|u_0| \leq |u + hv| \leq |u| + h|v| \leq |u| + |v|.$$

e para $u + hv < u$

$$hv < 0$$

o que implica

$$u - hv \geq u \geq u_0,$$

logo

$$|u_0| \leq |u - hv| \leq |u| + h|v| \leq |u| + |v|.$$

O que implica

$$b(|x|)\frac{\hat{F}(u+hv) - \hat{F}(u)}{hv} \cdot v = b(|x|)\hat{f}(u_0)v \to b(|x|)\hat{f}(u)v \tag{3.1}$$

q.t.p. em Ω quando $h \to 0$.

Afirmação 3.1. Existem constantes A e B tais que

$$\hat{f}(u) \leq A + B|u|^p \text{ para todo } u \geq 0.$$

De fato, pela hipótese (f1) dado $\varepsilon > 0$ existe $0 < \delta < 1$ tal que $|f(z)| < \varepsilon|z|$ para todo $z \in (-\delta, \delta)$ e pela hipótese (f2) existe $M > 1$ tal que $f(z) \leq C(1 + |z|)^p$ para todo $z \geq M$ onde $1 < p < \dfrac{N+2+2l}{N-2}$, de onde obtemos a desigualdade

$$|f(z)| \leq C(1 + |z|)^p \leq C(|z| + |z|)^p = 2^p C|z|^p \text{ para todo } z \geq M.$$

Ainda por (f1) existe $\bar{C}_\varepsilon > 0$ tal que $|f(z)| \leq \bar{C}_\varepsilon$ para $z \in [\delta, M]$ que implica

$$|f(z)| \leq \bar{C}_\varepsilon \frac{|z|^p}{|z|^p} < \frac{\bar{C}_\varepsilon}{\delta^p}|z|^p \text{ para todo } z \in [\delta, M].$$

Logo, pelas desigualdades anteriores e a Desigualdade de Young (Apêndice A.9) para

p e p' com $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$ temos

$$\begin{aligned} f(z) &< \varepsilon|z| + 2^p|z|^p + \frac{\bar{C}_\varepsilon}{\delta^p}|z|^p \\ &\leq \frac{1}{p'}\varepsilon^{p'} + \frac{1}{p}|z|^p + 2^pC|z|^p + \frac{\bar{C}_\varepsilon}{\delta^p}|z|^p \\ &= \frac{1}{p'}\varepsilon^{p'} + \left(\frac{1}{p} + 2^pC + \frac{\bar{C}_\varepsilon}{\delta^p}\right)|z|^p \\ &= A + B|z|^p, \end{aligned} \tag{3.2}$$

pata todo $z \geq 0$, onde $A = \dfrac{1}{p'}\varepsilon^{p'}$ e $B = \dfrac{1}{p} + 2^pC + \dfrac{\bar{C}_\varepsilon}{\delta^p}$. E assim a afirmação está demonstrada.

Pela hipótese (b2), para o $\varepsilon > 0$ escolhido, existe $\delta > 0$ tal que

$$b(|x|) \leq \varepsilon|x|^l \text{ se } |x| < \delta.$$

Por outro lado temos que b é contínua logo existe $\tilde{C} > 0$ tal que

$$\left|\frac{b(|x|)}{|x|^l}\right| \leq \tilde{C} \text{ se } \delta \leq |x| \leq 1.$$

Como b é não negativa, temos $b(|x|) \leq \tilde{C}|x|^l$ para $\delta \leq |x| \leq 1$. Logo, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$b(|x|) \leq C_\varepsilon |x|^l \text{ para todo } x \in \Omega \tag{3.3}$$

Por (3.1) e (3.3), temos

$$\begin{aligned} b(|x|)\frac{\hat{F}(u+hv) - \hat{F}(u)}{hv} \cdot v &= b(|x|)\hat{f}(u_0)v \\ &\leq C_\varepsilon|x|^l(A + B|u_0|^p)v \\ &\leq C_\varepsilon|x|^l[A + B(|u| + |v|)^p]v \\ &\leq C_\varepsilon|x|^l\{A + B[2^p(|u|^p + |v|^p)]\}v \\ &\leq C_\varepsilon A|x|^l|v| + C_\varepsilon 2^pB|x|^l|u|^p|v| + C_\varepsilon 2^pB|x|^l|v|^{p+1}. \end{aligned}$$

Por (2.13) é fácil ver que $|x|^l|v| \in L^1(\Omega)$, $|x|^l|u|^p|v| \in L^1(\Omega)$ e $|x|^l|v|^{p+1} \in L^1(\Omega)$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema A.12), temos

$$\frac{\partial\Psi}{\partial v}(u) = \int_\Omega b(|x|)\hat{f}(u)\cdot v\, dx.$$

Por (3.2) e (3.3), temos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial \Psi}{\partial v}(u)\right| &\leq \int_\Omega b(|x|)\cdot\left[\varepsilon|u| + \left(2^pC + \frac{\bar{C}_\varepsilon}{\delta^p}\right)|u|^p\right]\cdot v\ dx \\
&\leq \varepsilon\int_\Omega b(|x|)|u|v\ dx + \left(2^pC + \frac{\bar{C}_\varepsilon}{\delta^p}\right)\int_\Omega b(|x|)|u|^p v\ dx \\
&\leq \varepsilon\int_\Omega C_\varepsilon|x|^l|u||v|\ dx + \left(2^pC + \frac{\bar{C}_\varepsilon}{\delta^p}\right)\int_\Omega C_\varepsilon|x|^l|u|^p|v|\ dx \\
&= \varepsilon C_\varepsilon\int_\Omega |x|^l|u||v|\ dx + C_\varepsilon\left(2^pC + \frac{\bar{C}_\varepsilon}{\delta^p}\right)\int_\Omega |x|^l|u|^p|v|\ dx.
\end{aligned}$$

Note que, pelo Lema Radial 1.3, temos

$$\begin{aligned}
\varepsilon C_\varepsilon\int_\Omega |x|^l|u|^p|v|\ dx &\leq \varepsilon C_\varepsilon\int_\Omega |x|^l\left(\frac{1}{\sqrt{\omega_N(N-2)}}\frac{\|u\|}{|x|^{\frac{N-2}{2}}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{\omega_N(N-2)}}\frac{\|v\|}{|x|^{\frac{N-2}{2}}}\right)\ dx \\
&= \varepsilon C_\varepsilon\cdot\frac{\|u\|}{\omega_N(N-2)}\int_\Omega |x|^{l+2-N}\ dx\cdot\|v\| \\
&\leq \varepsilon C_\varepsilon\cdot\frac{\|u\|}{N-2}\int_0^1 r^{l+1}\ dr\cdot\|v\|
\end{aligned}$$

e também que

$$\begin{aligned}
\hat{C}_\varepsilon\int_\Omega |x|^l|u||v|\ dx &\leq \hat{C}_\varepsilon\cdot\frac{\|u\|^p}{(\sqrt{\omega_N(N-2)})^{p+1}}\int_\Omega |x|^{l+\frac{2-N}{2}\cdot(p+1)}\ dx\cdot\|v\| \\
&\leq \hat{C}_\varepsilon\cdot\frac{\|u\|^p\cdot\omega_N}{(\sqrt{\omega_N(N-2)})^{p+1}}\int_0^1 r^{l+\frac{2-N}{2}\cdot(p+1)+N-1}\ dr\cdot\|v\|,
\end{aligned}$$

onde $\hat{C}_\varepsilon = C_\varepsilon\left(2^pC + \frac{\bar{C}_\varepsilon}{\delta^p}\right)$.
Pelas desigualdades acima, temos

$$\left|\frac{\partial \Psi}{\partial v}(u)\right| \leq C^1_{u,\varepsilon}\|v\| + C^2_{u,\varepsilon}\|v\| = C_{u,\varepsilon}\|v\|, \tag{3.4}$$

onde

$$C^1_{u,\varepsilon} = \varepsilon C_\varepsilon\cdot\frac{\|u\|}{N-2}\int_0^1 r^{l+1}\ dr$$

e, como em (2.1),

$$C^2_{u,\varepsilon} = \hat{C}_\varepsilon\cdot\frac{\|u\|^p\cdot\omega_N}{(\sqrt{\omega_N(N-2)})^{p+1}}\int_0^1 r^{l+\frac{2-N}{2}\cdot(p+1)+N-1}\ dr$$

são constantes.

Portanto $\Psi \in C^1(H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega), \mathbb{R})$ e

$$\Psi'(u)(v) = \int_\Omega b(|x|)\hat{f}(u)v \, dx \text{ para todo } u, v \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega),$$

o que implica a boa definição de J. Agora, para mostrar que J satisfaz as hipóteses geométricas do Teorema do Passo da Montanha (Teorema A.2), observemos que por (3.2), dado $\varepsilon > 0$

$$f(z) \leq \varepsilon|z| + \left(2^p C + \frac{\bar{C}_\varepsilon}{\delta^p}\right)|z|^p, \text{ para todo } z \geq 0,$$

o que implica

$$\begin{aligned}
\hat{F}(z) &\leq \frac{\varepsilon}{2}|z|^2 + \left(\frac{2^p C}{p+1} + \frac{\bar{C}_\varepsilon}{\delta^p(p+1)}\right)|z|^{p+1} \\
&= \frac{\varepsilon}{2}|z|^2 + d_\varepsilon|z|^{p+1},
\end{aligned}$$

para todo $z \geq 0$, onde $d_\varepsilon = \dfrac{2^p C}{p+1} + \dfrac{\bar{C}_\varepsilon}{\delta^p(p+1)}$. Por (3.3), Lema Radial 1.3 e a Desigualdade de Poincaré (Teorema A.10), temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega b(|x|)\hat{F}(u) \, dx &\leq \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega b(|x|)|u|^2 \, dx + d_\varepsilon \int_\Omega b(|x|)|u|^{p+1} \, dx \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega C_\varepsilon |x|^l |u|^2 \, dx + d_\varepsilon \int_\Omega C_\varepsilon |x|^l |u|^{p+1} \, dx \\
&\leq \frac{\varepsilon \cdot C_\varepsilon}{2}\int_\Omega |x|^l |u|^2 \, dx + d_\varepsilon \cdot C_\varepsilon \int_\Omega |x|^l |u|^{p+1} \, dx \\
&\leq \frac{\varepsilon \cdot C_\varepsilon}{2}\|u\|_2^2 + d_\varepsilon \cdot C_\varepsilon \int_\Omega |x|^l |u|^{p+1} \, dx \\
&\leq \frac{\varepsilon \cdot C_\varepsilon}{2 \cdot \lambda_1}\|u\|^2 + d_\varepsilon \cdot C_\varepsilon \int_\Omega |x|^l \left(\frac{1}{\sqrt{\omega_N(N-2)}} \frac{\|u\|}{|x|^{\frac{N-2}{2}}}\right)^{p+1} dx \\
&\leq \frac{\varepsilon \cdot C_\varepsilon}{2 \cdot \lambda_1}\|u\|^2 \\
&+ \left(d_\varepsilon \cdot C_\varepsilon \cdot \frac{\omega_N}{\left(\sqrt{\omega_N(N-2)}\right)^{p+1}} \int_0^1 r^{l + \frac{2-N}{2}\cdot(p+1) + N - 1} \, dr\right)\|u\|^{p+1}.
\end{aligned}$$

Note que, pela hipótese $p < \dfrac{N+2+2l}{N-2}$ temos $l - \dfrac{N-2}{2}(p+1) + N - 1 > -1$, ou seja,

$$\int_0^1 r^{l - \frac{N-2}{2}(p+1) + N - 1} \, dr < \infty$$

de onde obtemos

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{C_\varepsilon \cdot \varepsilon}{2 \cdot \lambda_1}\right) \|u\|^2 & (3.5) \\ &- \left(d_\varepsilon \cdot C_\varepsilon \cdot \frac{\omega_N}{\left(\sqrt{\omega_N (N-2)}\right)^{p+1}} \int_0^1 r^{l + \frac{2-N}{2}\cdot(p+1)+N-1}\, dr\right) \|u\|^{p+1} \\ &= A\|u\|^2 - B\|u\|^{p+1} & (3.6) \end{aligned}$$

para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, onde

$$A = \frac{1}{2} - \frac{C_\varepsilon \cdot \varepsilon}{2 \cdot \lambda_1}$$

e

$$B = d_\varepsilon \cdot C_\varepsilon \cdot \frac{\omega_N}{\left(\sqrt{\omega_N (N-2)}\right)^{p+1}} \int_0^1 r^{l + \frac{2-N}{2}\cdot(p+1)+N-1}\, dr.$$

Afirmação 3.2. Existem constantes A e B positivas tais que

$$F(z) \geq Az^{\frac{1}{\theta}} - B \text{ para todo } z \geq 0.$$

De fato, por (f3) existem $\theta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ e $M > 0$ tais que

$$F(z) = \int_0^z f(t)\, dt \leq \theta \cdot z \cdot f(z) \text{ para todo } z \geq M$$

que é equivalente a

$$\frac{f(z)}{F(z)} \geq \frac{1}{\theta \cdot z} \text{ para todo } z \geq M.$$

Integrando ambos os lados obtemos

$$\int_M^z \frac{f(t)}{F(t)}\, dt \geq \int_M^z \frac{1}{\theta \cdot t}\, dt \text{ para todo } z \geq M$$

o que implica

$$\ln(F(t))\Big|_M^z = \frac{1}{\theta} \ln(t)\Big|_M^z \text{ para todo } z \geq M$$

que é equivalente a

$$\ln(F(z)) - \ln(F(M)) \geq \frac{1}{\theta}(\ln(z) - \ln(M)) \text{ para todo } z \geq M,$$

ou seja,
$$\ln\left(\frac{F(z)}{F(M)}\right) \geq \ln\left(\left(\frac{z}{M}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right) \text{ para todo } z \geq M$$
que, pelo crescimento estrito de $\ln(\cdot)$,
$$\frac{F(z)}{F(M)} \geq \frac{z^{\frac{1}{\theta}}}{M^{\frac{1}{\theta}}} \text{ para todo } z \geq M$$
e então
$$F(z) \geq \frac{F(M)}{M^{\frac{1}{\theta}}} \cdot z^{\frac{1}{\theta}} = A \cdot z^{\frac{1}{\theta}} \text{ para todo } z \geq M,$$
onde $A = \dfrac{F(M)}{M^{\frac{1}{\theta}}}$. Por outro lado, pela continuidade de F, existe $B_1 > 0$ tal que
$$|F(z)| \leq B_1, \text{ para todo } z \in [0, M] \tag{3.7}$$
o que implica $F(z) > -B_1$, para todo $z \in [0, M]$. Tome $B > 0$ tal que $B > AM^{\frac{1}{\theta}} + B_1$. Note que, se $z > M$:
$$F(z) \geq Az^{\frac{1}{\theta}} > Az^{\frac{1}{\theta}} - B,$$
e se $z \in [0, M]$
$$F(z) > -B_1 > AM^{\frac{1}{\theta}} - B \geq Az^{\frac{1}{\theta}} - B.$$
O que conclui a prova da afirmação.

Note que
$$\begin{aligned} \int_\Omega b(|x|)\hat{F}(u)\, dx &= \int_{[u>0]} b(|x|)\hat{F}(u)\, dx + \int_{[u\leq 0]} b(|x|)\hat{F}(u)\, dx \\ &= \int_{[u>0]} b(|x|)\hat{F}(u)\, dx, \end{aligned}$$
visto que $\hat{F}(u) = \int_0^u \hat{f}(t)\, dt = 0$ quando $u \leq 0$. Logo, pela afirmação acima, temos
$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega b(|x|)\hat{F}(u)\, dx \\ &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{[u>0]} b(|x|)\hat{F}(u)\, dx \\ &\leq \frac{1}{2}\|u\|^2 - A\int_{[u>0]} b(|x|)|u|^{\frac{1}{\theta}}\, dx - B\int_{[u>0]} b(|x|)\, dx \end{aligned}$$

Fixando $u_0 \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)/\{0\}$ positivo com suporte compacto onde b não se anula e $r > 0$, temos:
$$J(ru_0) = \bar{A}r^2 - \bar{B}r^{\frac{1}{\theta}} - \bar{C}$$

onde $\bar{A} = \dfrac{1}{2}\|u_0\|^2$, $\bar{B} = A\int_{[u>0]} b(|x|)|u_0|^{\frac{1}{\theta}}\, dx$ e $\bar{C} = B\int_{[u>0]} b(|x|)\, dx$.

Como $\theta \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ temos $\dfrac{1}{\theta} > 2$, o que implica

$$J(ru_0) \longrightarrow -\infty \text{ quando } r \to +\infty. \tag{3.8}$$

Agora, por (3.6) e (3.8) é possível escolher $r_0 > 0$ de modo a definir $e = r_0 u_0 \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega) - \{0\}$ tal que $\|e\| > \rho$ e $J(e) < 0$ satisfazendo assim as hipóteses geométricas do Teorema do Passo da Montanha (Teorema A.2).

3.2 A Condição de Palais-Smale

Como as hipóteses geométricas do Teorema do Passo da Montanha são satisfeitas, a fim de mostrar que o funcional J possui ponto crítico, basta mostrar que as hipóteses referentes a compacidade também são satisfeitas. Para isso, vamos mostrar que toda sequência quase-crítica $\{u_n\}$ possui subsequência convergente, ou seja, J satisfaz a condição de Palais-Smale.

Seja $\{u_n\}$ uma sequência em $H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$ que

(i) existe $D > 0$ tal que $|J(u_n)| \leq D$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e

(ii) $J'(u_n) \longrightarrow 0$ quando $n \to \infty$.

Pelas hipóteses acima, existe $n_0 > 0$ tal que

$$|J'(u_n)u_n| \leq \|u_n\| \text{ para todo } n > n_0,$$

o que implica que

$$\left| \|u_n\|^2 - \int_\Omega b(|x|)\hat{f}(u_n)u_n\, dx \right| \leq \|u_n\| \text{ para todo } n > n_0. \tag{3.9}$$

Pela limitação de $J(u_n)$ dada em (i) temos

$$\left| \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \int_\Omega b(|x|)\hat{F}(u_n)u_n\, dx \right| \leq D \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por (3.7) e (3.3) temos

$$\begin{aligned}
\|u_n\|^2 &= 2\cdot\left(\frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \int_\Omega b(|x|)\hat{F}(u_n)\ dx\right) + 2\cdot\int_\Omega b(|x|)\hat{F}(u_n)\ dx \\
&\leq 2D + 2\cdot\int_\Omega b(|x|)\hat{F}(u_n)\ dx \\
&= 2D + 2\cdot\int_{[0\leq u_n\leq M]} b(|x|)\hat{F}(u_n)\ dx + 2\cdot\int_{[u_n>M]} b(|x|)\hat{F}(u_n)\ dx \\
&\leq 2D + 2\cdot\int_{[0\leq u_n\leq M]} C_\varepsilon|x|^l B_1\ dx + 2\cdot\int_{[u_n>M]} b(|x|)\hat{F}(u_n)\ dx \\
&\leq 2\cdot\left(D + C_\varepsilon\cdot B_1\cdot\omega_N\int_0^1 r^{l+N-1}\ dr\right) + 2\cdot\int_{[u_n>M]} b(|x|)\hat{F}(u_n)\ dx \\
&= \hat{D} + 2\cdot\int_{[u_n>M]} b(|x|)\hat{F}(u_n)\ dx,
\end{aligned}$$

onde $\hat{D} = 2\cdot\left(D + C_\varepsilon\cdot B_1\cdot\omega_N\int_0^1 r^{l+N-1}\ dr\right)$.
Por (f1) e (3.9) temos

$$\begin{aligned}
\|u_n\|^2 &\leq \hat{D} + 2\cdot\int_{[u_n>M]} b(|x|)\hat{F}(u_n)\ dx \\
&\leq \hat{D} + 2\cdot\int_{[u_n>M]} b(|x|)\cdot\theta\cdot u_n\cdot\hat{f}(u_n)\ dx \\
&\leq \hat{D} + 2\cdot\int_\Omega b(|x|)\cdot\theta\cdot u_n\cdot\hat{f}(u_n)\ dx \\
&\leq \hat{D} + 2\theta\|u_n\|^2 + 2\theta\|u_n\|,
\end{aligned}$$

para todo $z > 0$, o que implica

$$(1-2\theta)\|u_n\|^2 < \hat{D} + 2\theta\|u_n\|,\ \text{para } n > n_0.$$

Como $\theta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ temos $2\theta < 1$ e portanto $\{u_n\}$ é uma sequência limitada (seja W tal limitante). E então, pelo Teorema de Kakutani (Proposição A.5), existe $u \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$ e uma subsequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}'\subset\mathbb{N}}$, tal que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega) \text{ quando } n\to\infty.$$

Por (ii) temos

$$\|u_n\|^2 = \int_\Omega b(|x|)\hat{f}(u_n)u_n\ dx + o_n(1)$$

e

$$\langle u_n, u\rangle = \int_\Omega b(|x|)\hat{f}(u_n)u\ dx + o_n(1).$$

Pelo fato de $\langle u, \cdot \rangle$ ser contínua, por (3.3), pela Afirmação 3.1 e o Lema Radial 1.3, temos

$$\begin{aligned}
\|u_n - u\|^2 &= \langle u_n - u, u_n - u\rangle \\
&= \|u_n\|^2 - \langle u_n, u\rangle - \langle u, u_n - u\rangle \\
&= \int_\Omega b(|x|)\hat{f}(u_n)u_n \, dx - \int_\Omega b(|x|)\hat{f}(u_n)u \, dx + o_n(1) \\
&= \int_\Omega b(|x|)\hat{f}(u_n)(u_n - u \, dx) + o_n(1) \\
&\leq C_\varepsilon \int_\Omega |x|^l (A + B|u_n|^p)|u_n - u| \, dx + o_n(1) \\
&= A \cdot C_\varepsilon \int_\Omega |x|^l |u_n - u| \, dx + B \cdot C_\varepsilon \int_\Omega |x|^l |u_n|^p |u_n - u| \, dx + o_n(1) \\
&\leq B \cdot C_\varepsilon \int_\Omega |x|^l \left(\frac{\|u_n\|}{\sqrt{\omega_N(N-2)}} \cdot \frac{1}{|x|^{\frac{N-2}{2}}} \right)^p |u_n - u| \, dx + o_n(1) \\
&= B \cdot \frac{C_\varepsilon}{(\sqrt{\omega_N(N-2)})^p} \cdot \|u_n\|^p \int_\Omega |x|^{l - \left(\frac{N-2}{2}\right)\cdot p} |u_n - u| \, dx + o_n(1) \\
&= B \cdot \tilde{C} \cdot \|u_n\|^p \int_\Omega |x|^{l - \left(\frac{N-2}{2}\right)\cdot p} |u_n - u| \, dx + o_n(1),
\end{aligned}$$

onde $\tilde{C} = \dfrac{C_\varepsilon}{(\sqrt{\omega_N(N-2)})^p}$. Pelo Teorema de Rellich-Kondrachov (Teorema A.1), $H_0^1(\Omega)$ está imerso compactamente em $L^q(\Omega)$ para $1 \leq q < 2^*$. Ou seja, a convergência fraca $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1_{0,\text{rad}}(\Omega)$ implica que $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p. em Ω a menos de subsequência e

$$|x|^{l - \left(\frac{N-2}{2}\right)\cdot p}(u_n(x) - u(x)) \longrightarrow 0 \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Pelo Lema Radial (1.3), temos

$$\begin{aligned}
\left| |x|^{l - \left(\frac{N-2}{2}\right)\cdot p}(u_n(x) - u(x)) \right| &\leq |x|^{l - \left(\frac{N-2}{2}\right)\cdot p} \cdot \left(\frac{\|u_n - u\|}{\sqrt{\omega_N(N-2)}} \cdot \frac{1}{|x|^{\frac{N-2}{2}}} \right) \\
&= \frac{\|u_n - u\|}{\sqrt{\omega_N(N-2)}} |x|^{l - \frac{N-2}{2}\cdot(p+1)} \\
&\leq \frac{\|u_n\| + \|u\|}{\sqrt{\omega_N(N-2)}} |x|^{l - \frac{N-2}{2}\cdot(p+1)} \\
&\leq \frac{W + \|u\|}{\sqrt{\omega_N(N-2)}} |x|^{l - \frac{N-2}{2}\cdot(p+1)} \\
&= \bar{W} h(x),
\end{aligned}$$

onde $\bar{W} = \dfrac{W + \|u\|}{\sqrt{\omega_N(N-2)}}$ e $h(x) = |x|^{l - \frac{N-2}{2}\cdot(p+1)}$. Como $h(x) \in L^1(\Omega)$, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema A.12), temos

$$\int_\Omega |x|^{l-\left(\frac{N-2}{2}\right)\cdot p}|u_n - u|\ dx \longrightarrow 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Desse modo $u_n \to u$ em $H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$ e J satisfaz a condição de Palais-Smale.

3.3 Existência de Solução Radial Positiva para o Problema Generalizado

Pelo Teorema do Passo da Montanha (Teorema A.2) existe $u_0 \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)/\{0\}$ ponto crítico de J que é solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= b(|x|)\hat{f}(u) \quad , \text{ em } \Omega \\ \quad u &= 0 \qquad\qquad , \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.10}$$

sob as hipóteses dadas no problema (P2). Pelo Princípio da Criticalidade Simétrica de Palais (Teorema 1.1), temos que u_0 é solução de (3.10) em $H^1_0(\Omega)$. Argumentando como no Lema 2.2 podemos mostrar que $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ e, pelo Princípio do Máximo Forte (Teorema A.4), temos $u_0 > 0$ que mostra que $\hat{f}(u_0) = f(u_0)$, ou seja, u_0 é solução para o problema (P2).

Capítulo 4

Problema Crítico com Pertubação Linear

Neste capítulo, baseado em um trabalho publicado em 1989, por Henrik Egnell [6], demonstraremos a existência de solução radial positiva para o problema (P3).

A demonstração da existência de solução para o problema crítico (P3) consiste em aplicar o Teorema do Multiplicador de Lagrange, mesmo método utilizado em Brezis-Nirenberg [3], de modo a encontrar um ponto crítico para funcional energia associado ao problema (P3) restrito ao espaço $H^1_{0,rad}(\Omega)$. Dividimos a demonstração em três etapas. Na primeira etapa mostramos um lema referente a imersão contínua no nível crítico referente a não linearidade trabalhada, definimos e mostramos que o funcional minimizante atinge ínfimo sobre certas condições impostas a λ. Na segunda estimamos o funcional minimizante utilizando funções apresentadas por Talenti em 1975 [17] de modo a definir o intervalo em que o funcional minimizante atinge o ínfimo. Finalmente, na terceira etapa aplicamos o Teorema do Multiplicador de Lagrange para obter um ponto crítico de uma expressão referente ao funcional energia associado ao problema (P3) e mostramos que o ponto crítico obtido é solução de (P1) através do Princípio da criticalidade simétrica de Palais.

4.1 O Funcional Minimizante

No nosso problema procuraremos solução fraca para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = |x|^{\nu} u^p + \lambda u & \text{em } \Omega \\ u > 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{P3}$$

onde $p+1 = 2^* + \frac{2\nu}{N-2}$, λ é uma constante real, $N \geq 3$, $\nu > -2$ e Ω é a bola unitária no $\mathbb{R}^N$. Mais especificamente, mostrar que é possível encontrar solução fraca para o problema quando $0 < \lambda < \lambda_0$ onde $\lambda_0 = \inf\limits_{u \in H^1_{0,rad}(\Omega)} \|\nabla u\|_2^2 \,/\, \|u\|_2^2$.

Uma solução fraca para o problema é uma função $u_0 \in H^1_0(\Omega)$ satisfazendo

$$\int_\Omega \nabla u_0 \nabla v \; dx - \int_\Omega |x|^\nu {u_0}^p v \; dx - \lambda \int_\Omega u_0 v \; dx = 0 \text{ para todo } v \in H^1_0(\Omega).$$

Vale notar que se Ω é estrelado então, pelo lema (2.1) usando $g(x, u(x)) = |x|^\nu u^p + \lambda u$, temos

$$\begin{aligned}
0 &< \int_{\partial\Omega} |\nabla u(x)|^2 x \cdot \nu(x) \; dx \\
&= 2N \int_\Omega G(x, u(x)) \; dx - (N-2) \int_\Omega g(x,u) u \; dx \\
&+ 2 \sum_{i=1}^N \int_\Omega x_i G_{x_i}(x,u) \; dx \\
&= 2N \int_\Omega \left(\frac{1}{p+1} |x|^\nu u^{p+1} + \frac{\lambda}{2} |u|^2 \right) \; dx - (N-2) \int_\Omega \left(|x|^\nu u^{p+1} + \lambda |u|^2 \right) \; dx \\
&+ 2 \sum_{i=1}^N \int_\Omega x_i \left(\frac{1}{p+1} \nu |x|^{\nu-2} x_i u^{p+1} \right) \; dx \\
&= \left(\frac{2N}{p+1} - (N-2) \right) \int_\Omega |x|^\nu u^{p+1} \; dx + \frac{2\nu}{p+1} \int_\Omega |x|^{\nu-2} \left(\sum_{i=1}^N {x_i}^2 \right) |u|^{p+1} \; dx \\
&+ (N\lambda - (N-2)\lambda) \int_\Omega |u|^2 \; dx \\
&= \left(\frac{2N}{p+1} - (N-2) + \frac{2\nu}{p+1} \right) \int_\Omega |x|^\nu u^{p+1} \; dx + 2\lambda \int_\Omega |u|^2 \; dx.
\end{aligned}$$

Dividindo por $(N-2)$ obtemos

$$0 < \left(\frac{\frac{2N+2\nu}{N-2}}{p+1} - 1 \right) \int_\Omega |x|^\nu u^{p+1} \; dx + \frac{2\lambda}{N-2} \int_\Omega |u|^2 \; dx = \frac{2\lambda}{N-2} \int_\Omega |u|^2 \; dx$$

que implica $0 < \lambda$, ou seja, (P3) não possui solução quando $\lambda \leq 0$. Para observar a não existência de solução quando $\lambda \geq \lambda_0$ basta supor que $u_0 \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$ é solução de (P3). Seja v_0 a autofunção associada a λ_0, ou seja $\int_\Omega \nabla v_0 \nabla v \; dx = \lambda_0 \int_\Omega v_0 v \; dx$ para todo $v \in$

$H_0^1(\Omega)$ e assim

$$\begin{aligned}\lambda_0 \int_\Omega v_0 u_0 &= \int_\Omega \nabla v_0 \nabla u_0 \; dx \\ &= \int_\Omega |x|^\nu {u_0}^p v_0 \; dx + \lambda \int_\Omega u_0 v_0 \; dx \\ &> \lambda \int_\Omega u_0 v_0 \; dx,\end{aligned}$$

que implica $\lambda_0 > \lambda$, ou seja, (P3) não possui solução quando $\lambda_0 \leq \lambda$.

Para encontrar essa solução fraca, vamos definir o seguinte funcional minimizante associado ao problema (P3) restrito a $H^1_{0,\text{rad}}(\Omega)$, $\mathcal{J}_A : H^1_{0,\text{rad}}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, definido por:

$$\mathcal{J}_A(u) = \frac{\|\nabla u\|_2^2 - A\,\|u\|_{p+1,|x|^\nu}^2}{\|u\|_2^2},$$

encontraremos o ínfimo u_0 de $\mathcal{J}_A$, aplicaremos o Teorema do Multiplicador de Lagrange para mostrar que u_0 é ponto crítico do funcional energia associado ao problema e em seguida aplicaremos o Princípio da Criticalidade Simétrica de Palais afim de concluir que u_0 é solução de (P3). O funcional escolhido difere do usado no artigo de Brezis-Nirenberg [3], uma vez que no nosso funcional aparece o termo A. Essa diferença não altera o resultado em sí, visto que será provado que dado $\lambda \in (0, \lambda_0)$ existirá A dependente de λ tal que $\mathcal{J}_A$ atinge ínfimo, porém torna certas estimativas mais fáceis. Como em (1.4), teremos um lema referente a imersão de $H^1_{0,\text{rad}}(\Omega)$ em $L^{p+1}(\Omega, |x|^\nu)$, porem contínua, que é dada pelo seguinte lema.

Lema 4.1. Se $n \geq 3$ e $p + 1 = \frac{2(N+\nu)}{N-2}$ então a seguinte desigualdade

$$\|u\|_{p+1,|x|^\nu}^2 \leq C\,\|\nabla u\|_2^2$$

vale para todo $u \in H^1_{0,\text{rad}}(\Omega)$ se $\nu \geq -2$. Alem disso, se $\nu > -2$, então por Talenti em [17] temos que a melhor constante na desigualdade (e o ínfimo de $\mathcal{J}_A$) é atingido quando $\Omega = \mathbb{R}^N$ pelas funções que são dilatações e translações ($\nu = 0$) de

$$U(x) = (1 + |x|^{2+\nu})^{\frac{2-N}{2+\nu}}.$$

Usanndo o Lema Radial (1.3) e o Teorema de Mudança de Variáveis ($r \mapsto r^{\frac{2}{2+\nu}}$ e tomando $v(r) = u(r^{\frac{2}{2+\nu}}))$, temos

$$
\begin{aligned}
C &= \sup_{u \in H^1_{0,rad}(\mathbb{R}^N)} \frac{\|u\|^2_{p+1,|x|^\nu}}{\|u\|^2} \\
&= \sup_{u \in H^1_{0,rad}(\mathbb{R}^N)} \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} r^{\nu+N+1}\, dr\right)^{\frac{2}{p+1}}}{\int_{\mathbb{R}^N} |u'|^2 r^{N+1}\, dr} \\
&= \sup_{u \in H^1_{0,rad}(\mathbb{R}^N)} \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p+1} (r^{\frac{2}{2+\nu}})^{\nu+N+1} \left(\frac{2}{2+\nu}\right) r^{\left(\frac{2}{2+\nu}-1\right)}\, dr\right)^{\frac{2}{p+1}}}{\int_{\mathbb{R}^N} |u(r^{\frac{2}{2+\nu}})'|^2 (r^{\frac{2}{2+\nu}})^{N+1} \left(\frac{2}{2+\nu}\right) r^{\left(\frac{2}{2+\nu}-1\right)}\, dr} \\
&= \sup_{u \in H^1_{0,rad}(\mathbb{R}^N)} \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p+1} (r^{\frac{2}{2+\nu}})^{\nu+N+1} \left(\frac{2}{2+\nu}\right) r^{\left(\frac{2}{2+\nu}-1\right)}\, dr\right)^{\frac{2}{p+1}}}{\int_{\mathbb{R}^N} \left(|v'(r)|^2 \left(\frac{2}{2+\nu}\right)^{-2} \left(r^{\left(\frac{2}{2+\nu}-1\right)}\right)^{-2}\right) (r^{\frac{2}{2+\nu}})^{N+1} \left(\frac{2}{2+\nu}\right) r^{\left(\frac{2}{2+\nu}-1\right)}\, dr} \\
&= \left(\frac{2}{2+\nu}\right)^{\frac{2}{p+1}+1} \sup_{u \in H^1_{0,rad}(\mathbb{R}^N)} \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p+1} r^{\frac{2(\nu+N)}{2+\nu}-1}\, dr\right)^{\frac{2}{p+1}}}{\int_{\mathbb{R}^N} |v'|^2 r^{\frac{2(\nu+N)}{2+\nu}-1}\, dr} \qquad (4.1)
\end{aligned}
$$

O Lema 2 em Talenti [17] garante que o supremo em (4.1) é atingido pela função $U(x)$ citada acima e suas dilatações e translações.

Mostremos agora que o funcional $\mathcal{J}_A$ atinge mínimo:

Lema 4.2. Se existe $\delta > 0$ tal que $\lambda_{A+\delta} > -\infty$, então $\mathcal{J}_A$ atinge mínimo.

Demonstração. Seja $\{u_n\} \subset H^1_{0,rad}(\Omega)$ um sequência minimizante tal que $\|u_n\|_2 = 1$ e

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 - A \int_\Omega |u_n|^{p+1} |x|^\nu = \lambda_A + o(1) \text{ quando } n \to \infty$$

onde $\lambda_A = \inf_{u \in H^1_{0,rad}(\Omega)} \{\mathcal{J}_A(u)\}$. Usando o fato de que $|x| \leq 1$ temos Ω limitado e $p+1 > 2$, ou seja, temos a seguinte imersão contínua $L^{p+1}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, logo existe $C > 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
\|u_n\|^2 &= \|\nabla u_n\|_2^2 \\
&= \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \\
&= \lambda_A + A \int_\Omega |u_n|^{p+1} |x|^\nu\, dx + o(1) \\
&\leq \lambda_A + A \int_\Omega |u_n|^{p+1} 1\, dx + o(1) \\
&\leq \lambda_A + AC \int_\Omega |u_n|^2\, dx + o(1) \\
&\leq \lambda_A + AC + o(1).
\end{aligned}
$$

Desse modo temos $\{u_n\}$ limitada em $H^1_{0,rad}(\Omega)$. Como $H^1_{0,rad}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert reflexivo, existe $u \in H^1_{0,rad}(\Omega)$ tal que (u_n) converge fracamente para algum u em $H^1_{0,rad}(\Omega)$ a menos de subsequência. Segue por imersão compacta que (u_n) converge forte para u em $L^2(\Omega)$ a menos de subsequência e

$$u_n \longrightarrow u \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Tomando $v_n = u - u_n$ podemos utilizar o resultado apresentado por Brezis & Lieb [2] garantindo que

$$\|u_n\|^{p+1}_{p+1,|x|^\nu} = \|u\|^{p+1}_{p+1,|x|^\nu} + \|v_n\|^{p+1}_{p+1,|x|^\nu} + o(1) \tag{4.2}$$

Temos $v_n \rightharpoonup 0$ em $H^1_{0,rad}(\Omega)$ e portanto $v_n \to 0$ em $L^2(\Omega)$, assim obtemos

$$\begin{aligned} 1 &= \|u_n\|_2^2 \\ &= \|v_n + u\|_2^2 \\ &= \|v_n\|_2^2 + 2\int_\Omega v_n u \; dx + \|u\|_2^2 \\ &= o(1) + \|u\|_2^2 \end{aligned} \tag{4.3}$$

e

$$\begin{aligned} \lambda_A + o(1) &= \|\nabla u_n\|_2^2 - A\,\|u_n\|^{p+1}_{p+1,|x|^\nu} \\ &= \|\nabla v_n\|_2^2 + 2\int_\Omega |\nabla v_n||\nabla u| \; dx + \|\nabla u\|_2^2 - A\,\|u_n\|^{p+1}_{p+1,|x|^\nu} \\ &= \|\nabla v_n\|_2^2 + o(1) + \|\nabla u\|_2^2 - A\,\|u_n\|^{p+1}_{p+1,|x|^\nu} \end{aligned} \tag{4.4}$$

Note que a aplicação $x \in \mathbb{R}^+ \mapsto x^p$ com $p < 1$ é concava, logo

$$\begin{aligned} \|u_n\|^2_{p+1,|x|^\nu} &= \left(\|u_n\|^{p+1}_{p+1,|x|^\nu}\right)^{\frac{2}{p+1}} \\ &= \left(\|u\|^{p+1}_{p+1,|x|^\nu} + \|v_n\|^{p+1}_{p+1,|x|^\nu} + o(1)\right)^{\frac{2}{p+1}} \\ &= \left(\|u\|^{p+1}_{p+1,|x|^\nu} + \|v_n\|^{p+1}_{p+1,|x|^\nu}\right)^{\frac{2}{p+1}} + o(1) \\ &\leq \|u\|^2_{p+1,|x|^\nu} + \|v_n\|^2_{p+1,|x|^\nu} + o(1) \end{aligned} \tag{4.5}$$

Observe que $\left\|\frac{u}{\|u\|_2}\right\|_2 = 1$, logo vale $\lambda_A \leq \left\|\nabla\left(\frac{u}{\|u\|_2}\right)\right\|_2^2 - A\left\|\frac{u}{\|u\|_2}\right\|^2_{p+1,|x|^\nu}$ o que implica

$$\lambda_A\,\|u\|_2^2 - \|\nabla u\|_2^2 + A\,\|u\|^2_{p+1,|x|^\nu} \leq 0 \tag{4.6}$$

Logo, usando (4.3) - (4.5), obtemos

$$\begin{aligned}
\lambda_A \|u\|_2^2 + o(1) &= \lambda_A(\|u\|_2^2) + o(1)\\
&= \lambda_A + o(1)\\
&= \|\nabla v_n\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 - A\|u_n\|_{p+1,|x|^\nu}^2\\
&\geq \|\nabla v_n\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 - A\left(\|u\|_{p+1,|x|^\nu}^2 + \|v_n\|_{p+1,|x|^\nu}^2\right)
\end{aligned}$$

E assim, por (4.6) temos

$$\|\nabla v_n\|_2^2 - A\|v_n\|_{p+1,|x|^\nu}^2 \leq \lambda_A \|u\|_2^2 - \|\nabla u\|_2^2 + A\|u\|_{p+1,|x|^\nu}^2 + o(1) \leq o(1) \tag{4.7}$$

Observe que, por hipótese, existe $\delta > 0$ tal que

$$\lambda_{A+\delta}\|v_n\|_2^2 \leq \|\nabla v_n\|_2^2 - (A-\delta)\|v_n\|_{p+1,|x|^\nu}^2$$

que, junto com (4.7), implica

$$\begin{aligned}
\delta \|v_n\|_{p+1,|x|^\nu}^2 &\leq \|\nabla v_n\|_2^2 - A\|v_n\|_{p+1,|x|^\nu}^2 - \lambda_{A+\delta}\|v_n\|_2^2\\
&\leq (\lambda_A\|u\|_2^2 + A\|u\|_{p+1,|x|^\nu}^2 - \|\nabla u\|_2^2) + o(1) - \lambda_{A+\delta}\|v_n\|_2^2\\
&\leq o(1).
\end{aligned}$$

Portanto $v_n \to 0$ em $L^{p+1}(\Omega, |x|^\nu)$ e $u_n \to u$ em $L^{p+1}(\Omega, |x|^\nu)$, ou seja, o ínfimo de $\mathcal{J}_A(u)$ é atingido e

$$\mathcal{J}_A(u) = \lambda_A.$$

Defina os seguintes números:

$$A^* = \sup\{A \,;\, \lambda_A > -\infty\},$$

$$\lambda^* = \lambda_{A^*}.$$

Uma vez que, dado A, $\mathcal{J}_A$ atinge mínimo. Se $A^* = \infty$ a imersão $H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega, |x|^\nu)$ seria compacta, o que não é verdade devido a (2.1). Logo devemos ter $A^* < \infty$. Por outro lado, devido a (4.1), é possível mostrar que $\lambda_{\frac{1}{C}} > -\infty$ e assim obter $0 < A^*$. Para concluir, vamos mostrar que para cada $\lambda \in (\lambda^*, \lambda_0)$ existe algum $A \in (0, A^*)$ tal que $\lambda = \lambda_A$. Para isso mostremos que a seguinte aplicação $T : [0, A^*] \to [\lambda^*, \lambda_0]$ é contínua, e assim pelo Teorema do Valor Intermediário a existência desse A é garantido.
T é claramente definida por $A \longmapsto T(A) = \inf\limits_{u \in H^1_{0,rad}(\Omega)} \{\mathcal{J}_A(u)\}$ com $A \in (0, A^*)$,

$T(0) = \lambda_0$ e $T(A^*) = \lambda_*$. Uma vez que $\mathcal{J}_A$ é contínua, temos T semicontínua superiormente. Basta mostrar então que T é semicontínua inferiormente. Para isso tome uma sequência $\{A_n\}$ de modo que $A_n \searrow A \in [0, A^*]$ com $A_n < A^*$. Seja $\lambda^+ = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_{A_n} \leq \lambda_A$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ tome $u_n \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$ tal que $\mathcal{J}_{A_n}(u_n) = \lambda_{u_n}$ com $\|u_n\|_2 = 1$. Daí temos,

$$\lambda_{A_1} \leq \mathcal{J}_{A_1}(u_n) = \|u_n\|_2^2 - A_n \|u_n\|^2_{p+1,|x|^\nu} - (A_1 - A_n) \|u_n\|^2_{p+1,|x|^\nu},$$

o que implica $\|u_n\|^2_{p+1,|x|^\nu} \leq \frac{\lambda_{A_n} - \lambda_{A_1}}{A_1 - A_n}$, ou seja, existe $C > 0$ tal que $\|u_n\|^2_{p+1,|x|^\nu} < C$. Por outro lado, como A_n converge, temos

$$\mathcal{J}_A(u_n) = \lambda_{A_n} - (A - A_n) \|u_n\|^2_{p+1,|x|^\nu} \leq \lambda_{A_n} - (A - A_n)C = \lambda_{A_n} + o(1),$$

e aplicando o limite, obtemos $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{J}_A(u_n) \leq \lambda^+$. Uma vez que $\lambda_A = \inf\limits_{u \in H^1_{0,rad}(\Omega)} \{\mathcal{J}_A(u)\} \leq \mathcal{J}_A(u_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $\lambda_A \leq \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{J}_A(u_n) \leq \lambda^+$ e portanto $T(A_n) = \lambda_{A_n} \longrightarrow \lambda_A = T(A)$. Logo, T é contínua e segue que para cada $\lambda \in (\lambda^*, \lambda_0)$ existe algum $A \in (0, A^*)$ tal que $\mathcal{J}_A(u)$ atinge ínfimo e $\lambda = \inf\limits_{u \in H^1_{0,rad}(\Omega)} \{\mathcal{J}_A(u)\}$.

$\square$

4.2 Estimativas

Para provar a existência de mínimo para $\mathcal{J}_A$ referente a todo $\lambda \in (0, \lambda_0)$ quando $N \geq 4$, basta então provar que $\lambda^* = 0$. Para isso seja $\{u_\epsilon\} \subset H^1_{0,rad}(\Omega)$ definida por

$$u_\epsilon(x) = \varphi(x) \left(\epsilon + |x|^{2+\nu}\right)^{\frac{2-N}{2+\nu}}$$

onde $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ é uma função radial não negativa que é igual a 1 em uma vizinhança de zero. Ou seja, $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ e

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } x \in B(0, r) \\ 0 & , \text{ se } x \in \Omega / B(0, 2r) \end{cases}$$

onde $B(0, 2r) \subsetneq \Omega$.

Agora vamos estimar algumas normas de u_ϵ de modo a mostrar que, para o caso $N \geq 4$, $\mathcal{J}_{A^*}(u_\epsilon) \to 0$ quando $\epsilon \to 0$. Como citado anteriormente, o cálculo das estimativas é diferente para os casos em que $N = 3$, $N = 4$ e $N \geq 5$ e serão trabalhadas separadamente.

O caso em que $N = 3$ (que pode ser encontrado em [6] no Teorema 3 para $m = 2$)

estima $\mathcal{J}_{A^*}$ de modo a encontrar $\lambda^* = \dfrac{\pi^2}{4}$ e a solução do problema existe quando $\lambda \in \left(\dfrac{\pi^2}{4}, \pi^2\right)$. Para que o trabalho pudesse ser finalizado, as estimativas para $N = 3$ não serão feitas, mas podem ser obtidas argumentando como em [3].

Quando $N \geq 4$ temos as seguintes estimativas:

$$\|\nabla u_\epsilon\|_2^2 = K_1 \epsilon^{\frac{2-N}{2+\nu}} + O(1) \tag{4.8}$$

$$\|u_\epsilon\|_{p+1,|x|^\nu}^2 = K_2 \epsilon^{\frac{2-N}{2+\nu}} + O(1) \tag{4.9}$$

$$\|u_\epsilon\|_2^2 > \begin{cases} K_3 \epsilon^{\frac{4-N}{2+\nu}} & \text{, se } N \geq 5 \\ K_3 |\ln \epsilon| & \text{, se } N = 4 \end{cases} \tag{4.10}$$

com $\epsilon \to 0$ e K_1, K_2 e K_3 são constantes positivas.
Verificação de (4.8):
Observe que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_i} &= \frac{\varphi_{x_i}(x)\left(\epsilon + |x|^{2+\nu}\right)^{\frac{N-2}{2+\nu}} - \frac{N-2}{2+\nu}\left(\epsilon + |x|^{2+\nu}\right)^{\frac{N-4-\nu}{2+\nu}} (2+\nu) x_i |x|^\nu \varphi(x)}{\left(\epsilon + |x|^{2+\nu}\right)^{2 \cdot \frac{N-2}{2+\nu}}} \\ &= \frac{\varphi_{x_i}(x)}{\left(\epsilon + |x|^{2+\nu}\right)^{\frac{N-2}{2+\nu}}} - \frac{(N-2)\varphi(x) x_i |x|^\nu}{\left(\epsilon + |x|^{2+\nu}\right)^{\frac{N+\nu}{2+\nu}}}. \end{aligned}$$

De onde obtemos

$$\nabla u_\epsilon(x) = \frac{\nabla \varphi(x)}{\left(\epsilon + |x|^{2+\nu}\right)^{\frac{N-2}{2+\nu}}} + \frac{(N-2)\varphi(x)|x|^\nu x}{\left(\epsilon + |x|^{2+\nu}\right)^{\frac{N+\nu}{2+\nu}}}.$$

O que implica

$$\begin{aligned} \|\nabla u_\epsilon\|_2^2 &= \int_\Omega |\nabla u_\epsilon(x)|^2 \, dx \\ &= \int_{B(0,r)} |\nabla u_\epsilon(x)|^2 \, dx + \int_{B(0,2r)/B(0,r)} |\nabla u_\epsilon(x)|^2 \, dx + \int_{\Omega/B(0,2r)} |\nabla u_\epsilon(x)|^2 \, dx. \end{aligned}$$

Note que $\int_{\Omega/B(0,2r)} |\nabla u_\epsilon(x)|^2 \, dx = 0$ visto que $\varphi \equiv 0$ quando restrito a $\Omega/B(0,2r)$. Observe que $\int_{B(0,2r)/B(0,r)} |\nabla u_\epsilon(x)|^2 \, dx$ é limitado devido a limitação do gradiente de $\varphi(x)$. De fato, para $U = B(0,2r)/B(0,r)$, temos

$$\begin{aligned} \int_U |\nabla u_\epsilon(x)|^2 \, dx &= \int_U \frac{|\nabla \varphi(x)|^2}{\left(\epsilon + |x|^{2+\nu}\right)^{2 \cdot \frac{N-2}{2+\nu}}} \, dx - 2 \int_U \frac{\nabla \varphi(x)(N-2)\varphi(x)|x|^\nu x}{\left(\epsilon + |x|^{2+\nu}\ \right)^{\frac{2N+\nu-2}{2+\nu}}} \, dx \\ &+ \int_U \frac{(N-2)^2 (\varphi(x))^2 |x|^{2+2\nu}}{\left(\epsilon + |x|^{2+\nu}\right)^{2 \cdot \frac{N+\nu}{2+\nu}}} \, dx. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Para o primeiro termo na soma (4.11), temos

$$\begin{aligned}\int_U \frac{|\nabla\varphi(x)|^2}{(\epsilon+|x|^{2+\nu})^{2\cdot\frac{N-2}{2+\nu}}}\,dx &\leq C\int_U \frac{1}{(\epsilon+|x|^{2+\nu})^{2\cdot\frac{N-2}{2+\nu}}}\,dx\\ &\leq C\int_U \frac{1}{|x|^{2N-4}}\\ &< \infty.\end{aligned}$$

Para o segundo termo na soma (4.11), temos

$$\begin{aligned}\int_U \frac{\nabla\varphi(x)(N-2)\varphi(x)|x|^{\nu}x}{(\epsilon+|x|^{2+\nu})^{\frac{2N+\nu-2}{2+\nu}}}\,dx &\leq \int_U \frac{|\nabla\varphi(x)|(N-2)\varphi(x)|x|^{1+\nu}}{(\epsilon+|x|^{2+\nu})^{\frac{2N+\nu-2}{2+\nu}}}\,dx\\ &\leq C(N-2)\int_U \frac{|x|^{1+\nu}}{(\epsilon+|x|^{2+\nu})^{\frac{2N+\nu-2}{2+\nu}}}\,dx\\ &\leq C(N-2)\int_U \frac{|x|^{1+\nu}}{|x|^{\frac{2N+\nu-2}{2+\nu}}}\,dx\\ &= C(N-2)\int_U \frac{1}{|x|^{\frac{2N+\nu-2}{2+\nu}-(1+\nu)}}\,dx\\ &< \infty.\end{aligned}$$

Para o terceiro termo na soma (4.11), temos

$$\begin{aligned}\int_U \frac{(N-2)^2(\varphi(x))^2|x|^{2+2\nu}}{(\epsilon+|x|^{2+\nu})^{2\cdot\frac{N+\nu}{2+\nu}}}\,dx &\leq C(N-2)^2\int_U \frac{|x|^{2+2\nu}}{(\epsilon+|x|^{2+\nu})^{2\cdot\frac{N+\nu}{2+\nu}}}\,dx\\ &\leq C(N-2)^2\int_U \frac{|x|^{2+2\nu}}{|x|^{2(N+\nu)}}\,dx\\ &= C(N-2)^2\int_U \frac{1}{|x|^{2N-2}}\,dx\\ &< \infty.\end{aligned}$$

Ou seja, como a soma (4.11) é limitada, temos $\int_{B(0,2r)/B(0,r)} |\nabla u_\epsilon|^2\,dx = O(1)$. Como $\varphi\equiv 1$ quando restrito a $B(0,r)$, temos

$$\int_{B(0,r)} |\nabla u_\epsilon|^2\,dx = \int_{B(0,r)} \frac{(N-2)^2|x|^{2(1+\nu)}}{(\epsilon+|x|^{2+\nu})^{2\cdot\frac{N+\nu}{2+\nu}}}\,dx$$

desse modo

$$\|\nabla u_\epsilon\|_2^2 = (N-2)^2\int_{B(0,r)} \frac{|x|^{2(1+\nu)}}{(\epsilon+|x|^{2+\nu})^{2\cdot\frac{N+\nu}{2+\nu}}}\,dx + O(1).$$

Fazendo uma mudança de variável em $\int_{B(0,r)} \frac{|x|^{2(1+\nu)}}{(\epsilon+|x|^{2+\nu})^{2\cdot\frac{N+\nu}{2+\nu}}}\,dx$ sendo $y=\frac{x}{\epsilon^{\frac{1}{2+\nu}}}$ temos

$dy = \dfrac{dx}{\left(\epsilon^{\frac{1}{2+\nu}}\right)^N}$ de onde segue:

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,r)} \frac{|x|^{2(1+\nu)}}{(\epsilon + |x|^{2+\nu})^{2\cdot\frac{N+\nu}{2+\nu}}}\, dx &= \int_{B(0,r)} \frac{|\epsilon^{\frac{1}{2+\nu}} y|^{2(1+\nu)} \epsilon^{\frac{N}{2+\nu}}}{\left(\epsilon + |\epsilon^{\frac{1}{2+\nu}} y|^{2+\nu}\right)^{2\cdot\frac{N+\nu}{2+\nu}}}\, dy \\
&= \frac{1}{\epsilon^{\frac{N-2}{2+\nu}}} \int_{B(0,r/\epsilon^{\frac{1}{2+\nu}})} \frac{|y|^{2(1+\nu)}}{(1 + |y|^{2+\nu})^{2\cdot\frac{N+\nu}{2+\nu}}}\, dy.
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,r/\epsilon^{\frac{1}{2+\nu}})} \frac{|y|^{2(1+\nu)}}{(1 + |y|^{2+\nu})^{2\cdot\frac{N+\nu}{2+\nu}}}\, dy &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|y|^{2(1+\nu)}}{(1 + |y|^{2+\nu})^{2\cdot\frac{N+\nu}{2+\nu}}}\, dy \\
&- \int_{\mathbb{R}^N/B(0,r/\epsilon^{\frac{1}{2+\nu}})} \frac{|y|^{2(1+\nu)}}{(1 + |y|^{2+\nu})^{2\cdot\frac{N+\nu}{2+\nu}}}\, dy.
\end{aligned}$$

Onde o ultimo termo é limitado devido a argumentos utilizados na limitação de (4.11). Logo

$$\|\nabla u_\epsilon\|_2^2 = \frac{K_1}{\epsilon^{\frac{N-2}{2+\nu}}} + O(1)$$

onde

$$K_1 = (N-2)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^{2(1+\nu)}}{(1 + |x|^{2+\nu})^{2\cdot\frac{N+\nu}{2+\nu}}}\, dx.$$

Verificação de (4.9):

Observe que

$$\int_\Omega |x|^\nu |u_\epsilon|^{p+1}\, dx = \int_\Omega \frac{|x|^\nu (\varphi(x))^{p+1}}{(\epsilon + |x|^{2+\nu})^{2\cdot\frac{N+\nu}{2+\nu}}}\, dx$$

e note que, pela limitação de φ, temos

$$\begin{aligned}
\int_U \frac{|x|^\nu (\varphi(x))^{p+1}}{(\epsilon + |x|^{2+\nu})^{2\cdot\frac{N+\nu}{2+\nu}}}\, dx &\le \int_U \frac{|x|^\nu}{(\epsilon + |x|^{2+\nu})^{2\cdot\frac{N+\nu}{2+\nu}}}\, dx \\
&\le \int_U \frac{|x|^\nu}{|x|^{2(N+\nu)}}\, dx \\
&= \int_U \frac{1}{|x|^{2N+\nu)}}\, dx \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Note que $\int_{\Omega/B(0,2r)} \frac{|x|^\nu (\varphi(x))^{p+1}}{(\epsilon+|x|^{2+\nu})^{2\cdot\frac{N+\nu}{2+\nu}}} dx = 0$ visto que $\varphi \equiv 0$ quando restrito a $\Omega/B(0,2r)$. Como $\varphi \equiv 1$ quando restrito a $B(0,r)$, temos

$$\int_{B(0,r)} \frac{|x|^\nu (\varphi(x))^{p+1}}{(\epsilon + |x|^{2+\nu})^{2\cdot\frac{N+\nu}{2+\nu}}}\, dx = \int_{B(0,r)} \frac{|x|^\nu}{(\epsilon + |x|^{2+\nu})^{2\cdot\frac{N+\nu}{2+\nu}}}\, dx$$

e, repetindo a mudança de variável utilizada na estimativa anterior, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{B(0,r)} \frac{|x|^\nu}{(\epsilon+|x|^{2+\nu})^{2\cdot\frac{N+\nu}{2+\nu}}}\,dx &= \int_{B(0,r)} \frac{|\epsilon^{\frac{1}{2+\nu}}y|^\nu\left(\epsilon^{\frac{1}{2+\nu}}y\right)^N}{\left(\epsilon+|\epsilon^{\frac{1}{2+\nu}}y|^{2+\nu}\right)^{2\cdot\frac{N+\nu}{2+\nu}}}\,dy\\ &= \frac{1}{\epsilon^{\frac{N+\nu}{2+\nu}}}\int_{B(0,r/\epsilon^{\frac{1}{2+\nu}})} \frac{|y|^\nu}{(1+|y|^{2+\nu})^{2\cdot\frac{N+\nu}{2+\nu}}}\,dy.\end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}\int_{B(0,r/\epsilon^{\frac{1}{2+\nu}})} \frac{|y|^\nu}{(1+|y|^{2+\nu})^{2\cdot\frac{N+\nu}{2+\nu}}}\,dy &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|y|^\nu}{(1+|y|^{2+\nu})^{2\cdot\frac{N+\nu}{2+\nu}}}\,dy\\ &- \int_{\mathbb{R}^N/B(0,r/\epsilon^{\frac{1}{2+\nu}})} \frac{|y|^\nu}{(1+|y|^{2+\nu})^{2\cdot\frac{N+\nu}{2+\nu}}}\,dy\end{aligned}$$

Onde o ultimo termo é limitado devido a argumentos utilizados na limitação de (4.11). Desse modo

$$\|u_\epsilon\|_{p+1,|x|^\nu}^{p+1} = \frac{1}{\epsilon^{\frac{N+\nu}{2+\nu}}}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^\nu}{(1+|x|^{2+\nu})^{2\cdot\frac{N+\nu}{2+\nu}}}\,dx + O(1).$$

Elevando ambos os membros a $\frac{2}{p+1} = \frac{N-2}{N+\nu}$, obtemos

$$\begin{aligned}\|u_\epsilon\|_{p+1,|x|^\nu}^2 &= \frac{1}{\epsilon^{\frac{N-2}{2+\nu}}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^\nu}{(1+|x|^{2+\nu})^{2\cdot\frac{N+\nu}{2+\nu}}}\,dx\right)^{\frac{2}{p+1}} + O(1)\\ &= \frac{K_2}{\epsilon^{\frac{N-2}{2+\nu}}} + O(1)\end{aligned}$$

onde

$$K_2 = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^\nu}{(1+|x|^{2+\nu})^{2\cdot\frac{N+\nu}{2+\nu}}}\,dx\right)^{\frac{2}{p+1}}.$$

Repetindo os mesmos argumentos usados para provar (4.8) (4.9) é fácil mostrar que $K_1 = \|\nabla U\|_2^2$ e $K_2 = \|U\|_{p+1,|x|^\nu}^2$ e alem disso $A^* = \frac{K_1}{K_2}$. De fato, temos

$$0 \le \lambda^* \le \frac{\|\nabla u_\epsilon\|_2^2 - A^*\|u_\epsilon\|_{p+1,|x|^\nu}^2}{\|u_\epsilon\|},$$

o que implica

$$\begin{aligned}
A^* &\leq \frac{\|u_\varepsilon\|^2}{\|u_\varepsilon\|^2_{p+1,|x|^\nu}} \\
&= \frac{K_1 + O(1)\varepsilon^{\frac{N-2}{2+\nu}}}{K_2 + O(1)\varepsilon^{\frac{N-2}{2+\nu}}} \\
&= \frac{K_1}{K_2} + \frac{K_1 + O(1)\varepsilon^{\frac{N-2}{2+\nu}}}{K_2 + O(1)\varepsilon^{\frac{N-2}{2+\nu}}} - \frac{K_1}{K_2} \\
&= \frac{K_1}{K_2} + \frac{K_1K_2 + K_2O(1)\varepsilon^{\frac{N-2}{2+\nu}} - K_1K_2 - K_1O(1)\varepsilon^{\frac{N-2}{2+\nu}}}{K_2^2 + K_2O(1)\varepsilon^{\frac{N-2}{2+\nu}}} \\
&= \frac{K_1}{K_2} + \frac{(K_2 - K_1)O(1)\varepsilon^{\frac{N-2}{2+\nu}}}{K_2^2 + K_2O(1)\varepsilon^{\frac{N-2}{2+\nu}}} \\
&= \frac{K_1}{K_2} + o(1),
\end{aligned}$$

ou seja, $A^* \leq \frac{K_1}{K_2}$.
Por outro lado, (4.1) implica

$$\lambda_{\frac{K_1}{K_2}} = \inf_{u \in H^1_{0,rad}(\Omega)} \{\mathcal{J}_{\frac{K_1}{K_2}}(u)\} \geq \inf_{u \in H^1_{0,rad}(\Omega)} \left\{ \frac{\|u\|^2 - \left(\frac{\|u\|^2}{\|u\|^2_{p+1,|x|^\nu}} \right) \|u\|^2_{p+1,|x|^\nu}}{\|u\|_2^2} \right\} = 0 > -\infty$$

e assim $\frac{K_1}{K_2} \leq A^*$. Unindo as duas desigualdades obtemos $A^* = \frac{K_1}{K_2}$.

Verificação de (4.10):
Notemos que

$$\begin{aligned}
\|u_\epsilon\|_2^2 &= \int_\Omega \frac{(\varphi(x))^2}{\left(\epsilon + |x|^{2+\nu}\right)^{2\cdot\frac{N-2}{2+\nu}}}\, dx \\
&= \int_{B(0,r)} \frac{(\varphi(x))^2}{\left(\epsilon + |x|^{2+\nu}\right)^{2\cdot\frac{N-2}{2+\nu}}}\, dx + \int_{B(0,2r)/B(0,r)} \frac{(\varphi(x))^2}{\left(\epsilon + |x|^{2+\nu}\right)^{2\cdot\frac{N-2}{2+\nu}}}\, dx \\
&+ \int_{\Omega/B(0,2r)} \frac{(\varphi(x))^2}{\left(\epsilon + |x|^{2+\nu}\right)^{2\cdot\frac{N-2}{2+\nu}}}\, dx
\end{aligned}$$

Por argumentos já utilizados temos

$$\int_{B(0,r)} \frac{(\varphi(x))^2}{\left(\epsilon + |x|^{2+\nu}\right)^{2\cdot\frac{N-2}{2+\nu}}}\, dx = \int_{B(0,r)} \frac{1}{\left(\epsilon + |x|^{2+\nu}\right)^{2\cdot\frac{N-2}{2+\nu}}}\, dx,$$

$$\int_{B(0,2r)/B(0,r)} \frac{(\varphi(x))^2}{(\epsilon+|x|^{2+\nu})^{2\cdot\frac{N-2}{2+\nu}}}\,dx < \infty \text{ e}$$
$$\int_{\Omega/B(0,2r)} \frac{(\varphi(x))^2}{(\epsilon+|x|^{2+\nu})^{2\cdot\frac{N-2}{2+\nu}}}\,dx = 0.$$

Logo
$$\|u_\epsilon\|_2^2 = \int_{B(0,r)} \frac{1}{(\epsilon+|x|^{2+\nu})^{2\cdot\frac{N-2}{2+\nu}}}\,dx + O(1).$$

Para $N \geq 5$, temos

$$\begin{aligned}
\|u_\epsilon\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(\epsilon+|x|^{2+\nu})^{2\cdot\frac{N-2}{2+\nu}}}\,dx - \int_{\mathbb{R}^N/B(0,r)} \frac{1}{(\epsilon+|x|^{2+\nu})^{2\cdot\frac{N-2}{2+\nu}}}\,dx + O(1)\\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(\epsilon+|x|^{2+\nu})^{2\cdot\frac{N-2}{2+\nu}}}\,dx + O(1).
\end{aligned}$$

Repetindo a mudança de variável obtemos

$$\begin{aligned}
\|u_\epsilon\|_2^2 &= \frac{1}{\epsilon^{\frac{N-4}{2+\nu}}} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(1+|y|^{2+\nu})^{2\cdot\frac{N-2}{2+\nu}}}\,dy + O(1)\\
&> \frac{K_3}{\epsilon^{\frac{N-4}{2+\nu}}}
\end{aligned}$$

onde
$$K_3 = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(1+|y|^{2+\nu})^{2\cdot\frac{N-2}{2+\nu}}}\,dy.$$

Para $N = 4$,utilizaremos a fórmula da Coárea:

$$\begin{aligned}
\|u_\epsilon\|_2^2 &= \int_{B(0,r)} \frac{1}{(\epsilon+|x|^{2+\nu})^{\frac{4}{2+\nu}}}\,dx + O(1)\\
&= \int_0^r \left(\int_{S_s} \frac{1}{(\epsilon+s^{2+\nu})^{\frac{4}{2+\nu}}}\,dt \right) ds + O(1)\\
&= \int_0^r \frac{|S_s|}{(\epsilon+s^{2+\nu})^{\frac{4}{2+\nu}}}\,ds + O(1).
\end{aligned}$$

Como em $\mathbb{R}^4$ temos $|S_s| = s^3|S_1|$, logo

$$\int_{B(0,r)} \frac{1}{(\epsilon+|x|^{2+\nu})^{\frac{4}{2+\nu}}}\,dx = |S_1| \int_0^r \frac{s^3}{(\epsilon+s^{2+\nu})^{\frac{4}{2+\nu}}}\,ds.$$

Note que
$$(\epsilon+s^{2+\nu})^{\frac{4}{2+\nu}} \leq 2^{\frac{4}{2+\nu}}(\epsilon^{\frac{4}{2+\nu}} + (s^{2+\nu})^{\frac{4}{2+\nu}})$$

, ou seja,

$$|S_1|\int_0^r \frac{s^3}{(\epsilon+s^{2+\nu})^{\frac{4}{2+\nu}}}\,ds \geq \frac{|S_1|}{2^{\frac{4}{2+\nu}}}\int_0^r \frac{s^3}{(\epsilon^{\frac{4}{2+\nu}}+s^4)}\,ds.$$

Fazendo uma mudança de variável tomando $t=\epsilon^{\frac{4}{2+\nu}}+s^4$ e $dt=4s^3\,ds$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|u_\epsilon\|_2^2 &\geq \frac{|S_1|}{2^{\frac{4}{2+\nu}}}\int_0^r \frac{s^3}{(\epsilon^{\frac{4}{2+\nu}}+s^4)}\,ds\\
&= \frac{|S_1|}{2^{\frac{4}{2+\nu}}}\int_{\epsilon^{\frac{4}{2+\nu}}}^{\epsilon^{\frac{4}{2+\nu}}+r^4} \frac{s^3}{4ts^3}\,dt\\
&= \frac{|S_1|}{4\cdot 2^{\frac{4}{2+\nu}}}\int_{\epsilon^{\frac{4}{2+\nu}}}^{\epsilon^{\frac{4}{2+\nu}}+r^4} \frac{1}{t}\,dt\\
&= \frac{|S_1|}{4\cdot 2^{\frac{4}{2+\nu}}}\left(\ln(\epsilon^{\frac{4}{2+\nu}}+r^4)-\ln(\epsilon^{\frac{4}{2+\nu}})\right).
\end{aligned}$$

Sabendo que $\dfrac{|S_1|\ln(\epsilon^{\frac{4}{2+\nu}}+r^4)}{4\cdot 2^{\frac{4}{2+\nu}}}=O(1)$ e tomando $K_3=\dfrac{|S_1|}{2^{\frac{4}{2+\nu}}(2+\nu)}$, temos

$$\|u_\epsilon\|_2^2 \geq K_3(-\ln(\epsilon))+O(1).$$

Pelo fato de $0<\epsilon<1$ temos $\ln(\epsilon)<0$ o que implica $(-\ln(\epsilon))=|\ln(\epsilon)|$, logo

$$\|u_\epsilon\|_2^2 \geq K_3|\ln(\epsilon)| > K_3|\ln(\epsilon)|+O(1).$$

Aplicando as estimativas em $\mathcal{J}_{A^*}(u_\epsilon)$, obtemos:
Quando $N\geq 5$, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{A^*}(u_\epsilon) &= \frac{\|\nabla u_\epsilon\|_2^2 - A^*\,\|u_\epsilon\|_{p+1,|x|^\nu}^2}{\|u_\epsilon\|}\\
&< \frac{K_1\epsilon^{\frac{2-N}{2+\nu}}-A^*K_2\epsilon^{\frac{2-N}{2+\nu}}+O(1)}{K_3\epsilon^{\frac{4-N}{2+\nu}}}\\
&= \frac{K_1\epsilon^{\frac{2-N}{2+\nu}}-\left(\frac{K_1}{K_2}\right)K_2\epsilon^{\frac{2-N}{2+\nu}}+O(1)}{K_3\epsilon^{\frac{4-N}{2+\nu}}}\\
&= \frac{O(1)\epsilon^{\frac{N-4}{2+\nu}}}{K_3}
\end{aligned}$$

que converge para zero quando $\epsilon\to 0$.

Quando $N = 4$, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{A^*}(u_\epsilon) &= \frac{\|\nabla u_\epsilon\|_2^2 - A^* \|u_\epsilon\|_{p+1,|x|^\nu}^2}{\|u_\epsilon\|} \\
&< \frac{K_1 \epsilon^{\frac{2-N}{2+\nu}} - A^* K_2 \epsilon^{\frac{2-N}{2+\nu}} + O(1)}{K_3 |\ln(\epsilon)|} \\
&= \frac{K_1 \epsilon^{\frac{2-N}{2+\nu}} - \left(\frac{K_1}{K_2}\right) K_2 \epsilon^{\frac{2-N}{2+\nu}} + O(1)}{K_3 |\ln(\epsilon)|} \\
&= \frac{O(1)}{K_3 |\ln(\epsilon)|}
\end{aligned}$$

que converge para zero quando $\epsilon \to 0$.
Portanto

$$\lambda^* = \inf\{\mathcal{J}_{A^*}\} = 0 \tag{4.12}$$

4.3 Existência de Solução Radial Positiva para o Problema Crítico

Iremos obter solução radial positiva para o problema (P3) fazendo uso do Teorema do Multiplicador de Lagrange (Apêndice A.3). Para isso, tomemos $u \in H^1_{0,rad}(\Omega)$ como no lema 4.2.

Defina $F, G : H^1_{0,rad}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$F(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx - \frac{A}{p+1} \int_\Omega |v|^{p+1} |x|^\nu \, dx \text{ e}$$

$$G(v) = \frac{1}{2} \left(\int_\Omega |v|^2 \, dx - 1 \right)$$

e defina $M = \{v \in H^1_{0,rad}(\Omega) \ ; \ \|v\|_2 = 1\}$. Pelo lema 4.2, $\mathcal{J}_A$ atinge mínimo quando restrito a M. Assumimos sem perda de generalidade que $u \geq 0$ em Ω (Caso contrário tome $|u|$ no lugar de u). Logo, pelo Teorema do Multiplicador de Lagrange existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$F'(u)w = \mu G'(u)w, \forall w \in H^1_{0,rad}(\Omega).$$

Em particular para $w = u$, temos

$$F'(u)u = \mu G'(u)u$$

que implica
$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - A\int_\Omega |u|^{p+1}|x|^\nu \, dx = \mu \int_\Omega |u|^2 \, dx.$$
Temos então $\mu = \lambda_A$ e $\lambda > 0$ visto que $\lambda \in (\lambda^*, \lambda_0)$ e $\lambda^* = 0$ por (4.12) . Assim u é solução de
$$-\Delta u - A|u|^p|x|^\nu = \lambda_A u.$$

Mostremos que $w_0 = (A^{\frac{1}{p-1}})u$ é ponto crítico do funcional energia associado ao problema (P3) restrito a $H^1_{0,\mathrm{rad}}(\Omega)$. Observe que, dado $w \in H^1_{0,rad}(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla w_0||\nabla w| \, dx - \int_\Omega |w_0|^p|w||x|^\nu \, dx &= A^{\frac{1}{p-1}} \int_\Omega |\nabla u||\nabla w| \, dx \\
&- \int_\Omega \left(A^{\frac{1}{p-1}}\right)^p |u|^p|w||x|^\nu \, dx \\
&= A^{\frac{1}{p-1}} \left(\int_\Omega |\nabla u||\nabla w| \, dx - A\int_\Omega |u|^p|w||x|^\nu \, dx\right) \\
&= A^{\frac{1}{p-1}} \left(\lambda_A \int_\Omega |u||w| \, dx\right) \\
&= \lambda_A \int_\Omega \left|\left(A^{\frac{1}{p-1}}\right) u\right| |w| \, dx \\
&= \lambda_A \int_\Omega |w_0||w| \, dx.
\end{aligned}$$

Fazendo $w = w_0$, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla w_0|^2 \, dx - \int_\Omega |w_0|^{p+1}|x|^\nu \, dx = \lambda_A \int_\Omega |w_0|^2 \, dx.$$

Pelo Princípio da Criticalidade Simétrica de Palais (Teorema 1.1) temos que w_0 é solução do funcional energia associado a problema (P3). Alem disso $w_0 \geq 0$, pois $u \geq 0$. Argumentando como no lema 2.2 podemos mostrar que $w_0 \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ e, Pelo Princípio do Máximo (Apêndice A.4), temos $w_0 > 0$ e assim é solução para (P3).

Apêndice A

Resultados Básicos

Neste capítulo, apresentamos alguns resultados que foram utilizados no decorrer dos capítulos anteriores. Usamos a letra E para denotar um espaço vetorial normado, exceto especificações.

A.1 Primeiros Resultados

Teorema A.1 (Rellich-Kondrachov)**.** *Se Ω é um domínio limitado de classe C^1, então as imersões seguintes*

i) Se $p < N$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, p^*)$ onde $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$;

ii) Se $p = N$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, +\infty)$;

iii) Se $p > N$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^1(\Omega)$.

são compactas.

Demonstração. Ver [10], p. 103. □

Definição A.1 (Condição de Palais-Smale)**.** Dizemos que um funcional $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfaz a condição de Palais-Smale se qualquer sequência $\{u_n\} \subset E$ que satisfaz:

i) $J(u_n)$ é limitada;

ii) $J'(u_n) \longrightarrow 0$ quando $n \to 0$,

possui uma subsequência convergente.

Teorema A.2 (Passo da montanha)**.** *Sejam X um espaço de Banach e $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ um funcional satisfazendo a condição de Palais-Smale (PS). Se $e \in X$ e $0 < r < \|e\|$ é tal que*

$$a =: \max\{\varphi(0), \varphi(e)\} < \inf_{\|u\|=r} \varphi(u) := b,$$

então

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} \varphi(\gamma(t))$$

é um valor crítico de φ com $c \geq b$. (Onde, Γ é o conjunto dos caminhos que ligam 0 e e, ou seja, $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X)\ ;\ \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = e\}$.)

Demonstração. Ver [4], p. 31. □

Teorema A.3 (Multiplicador de Lagrange)**.** *Sejam X um espaço de Banach, F e G funções de Classe $C^1(X, \mathbb{R})$, e $x_0 \in X$ um ponto crítico de F restrito ao conjunto*

$$M = \{x \in X\ ;\ G(x) = 0\}.$$

Se $G'(x_0) \neq 0$ então existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$F'(x_0) = \mu G'(x_0).$$

Isto é

$$F'(x_0)w = \mu G'(x_0)w, \forall w \in X.$$

Demonstração. Ver [4], p. 51. □

Teorema A.4 (Princípio do Máximo Forte)**.** *Considere o seguinte problema*

$$\begin{cases} -\Delta v &= f \quad, \ em\ \Omega \\ \quad v &= 0 \quad, \ em\ \partial\Omega \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$ e $f \geq 0$ em Ω. Então, se $u \in H_0^1(\Omega)/\{0\}$ é uma solução fraca para o problema, temos $u > 0$ em Ω.

Demonstração. Ver [1], p. 507. □

A.2 Definições e Outros Resultados

Proposição A.5. Seja E um espaço de Banach reflexivo e seja (x_n) uma sequência limitada em E. Então existe uma subsequência (x_{n_j}) que converge fracamente em $\sigma(E, E')$ para algum $x \in E$, ou seja, $x_{n_j} \rightharpoonup x$.

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponha que $\|x_n\| \leq 1$. Seja $M = \overline{span\,\{x_n\}}$, um subespaço fechado de E. Portanto M é reflexivo e separável. Logo M' é separável o que implica que B_M é metrizável na topologia fraca $\sigma(M, M')$. Como B_M é compacta na topologia fraca $\sigma(M, M')$ e metrizável, existe uma subsequência (x_{n_j}) que converge fracamente $\sigma(M, M')$ para algum $x \in B_M$, ou seja,

$$\left\langle f, x_{n_j} \right\rangle \to \langle f, x \rangle\,,\ \forall f \in M' \Rightarrow \left\langle f, x_{n_j} \right\rangle \to \langle f, x \rangle\,,\ \forall f \in E' \Rightarrow x_{n_j} \rightharpoonup x.$$

□

Teorema A.6 (Fubini). *Se $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Então para cada $x \in \Omega_1$,*

$$F(x,y) \in L^1_y(\Omega_1) \ e \ \int_{\Omega_2} F(x,y)\ dy \in L^1_x(\Omega_1).$$

De modo análogo, para cada $y \in \Omega_2$,

$$F(x,y) \in L^1_x(\Omega_2) \ e \ \int_{\Omega_1} F(x,y)\ dx \in L^1_y(\Omega_2).$$

Além disso,

$$\iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x,y)\ dx\ dy = \int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x,y)\ dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x,y)\ dx.$$

Demonstração. Ver [15], p. 58. □

Teorema A.7 (Mudança de Variáveis). *Sejam A um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^N$ e $g : A \to \mathbb{R}^N$ uma função injetiva e continuamente diferenciável, tal que* $\det g' \neq 0$ *para todo $x \in A$. Se $f : g(A) \to \mathbb{R}$ é integrável, então*

$$\int_{g(A)} f(x)\ dx = \int_A (f \circ g)(x) |\det g'|\ dx.$$

Demonstração. Ver [15], p. 67. □

A.3 Desigualdades e Resultados de Convergência

Proposição A.8 (Desigualdade de Holder). Sejam Ω um domínio em $\mathbb{R}^N$, $1 < p < +\infty$ e $1 < q < +\infty$ com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, então

$$f \cdot g \in L^1(\Omega) \text{ e } \int_\Omega |f \cdot g|\ dx \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver [1], p. 92. □

Teorema A.9 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam* $1 < p < +\infty$ *e* $1 < q < +\infty$ *com* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Se* $a, b \in \mathbb{R}$, *então*

$$|a \cdot b| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}.$$

Demonstração. Ver demonstração da Desigualdade de Hölder em [1], p. 92. □

Teorema A.10 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio com medida finita e* $1 \leq p < \infty$, *então existe uma constante* $K = K(p)$ *tal que*

$$\|\varphi\|_{L^p(\Omega)} \leq K \|\nabla\varphi\|_{L^p(\Omega)},$$

para toda função $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Demonstração. Ver [1], p. 290. □

Teorema A.11. *Seja* Ω *um domínio em* $\mathbb{R}^N$ *e seja* $g : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função de Caratheodory tal que*

$$|g(u, x)| \leq a(x)(1 + |u|) \ \ q.t.p. \ \ em \ \Omega,$$

onde $a \in L^{\frac{N}{2}}_{Loc}(\Omega)$ *e* u *satisfaz* $-\Delta u = g(\cdot, u)$. *Se* $u \in H_0^1(\Omega)$ *e* $a \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$ *então* $u \in L^q(\Omega)$ *para todo* $1 \leq q < +\infty$.

Demonstração. Ver [16], p. 269. □

Teorema A.12 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)**.** *Seja* $\{f_n\}$ *uma sequência de funções em* $L^1(\Omega)$. *Suponha que*

i) $f_n(x) \to f(x)$ *q.t.p. em* Ω,

ii) Existe uma função $h \in L^1(\Omega)$ *tal que para todo* $n \in \mathbb{N}$, *verifica-se:* $|f_n(x)| \leq h(x)$ *q.t.p. em* Ω.

Então,

$$f \in L^1(\Omega) \ \ e \ \ \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0.$$

Demonstração. Ver [1], p. 90. □

Referências Bibliográficas

[1] Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010.

[2] Brezis, H. & Lieb, E., *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals.* Proc. Amer. Math. Soc., to appear.

[3] Brezis, H. & Nirenberg, L., *Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Expoents.* Comm. Pure Appl. Math. 4 (1983), 437-477.

[4] Costa, D. G., *An invitation to Varitational Mathods in Diferential Equations*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, NY, 2007.

[5] Costa, J. *Soluções radiais e não radiais para a Equação de Hénon na bola unitária*, Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, 2010.

[6] Egnell, H., *Elliptic Boundary Value Problems with Singular Coefficients and Critical Nonlinearities.* Indiana University Math Journal. Vol 38, Nº 2, 1989.

[7] Egnell, H., *Existence and Nonexistence for m-Laplace Equations Involving Critical Sobolev Exponents.* Arch. Rational Mech. Anal. 104, 57-77, 1988.

[8] Egnell, H., *Semilinear Elliptc Equations Involving Critical Sobolev Exponents.* Archive for Rational Mechanics and Analysis, Theory, Methods & Aplications. 1988.

[9] Evans, L. C., *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1997.

[10] Figueiredo, D. G de, *Equações Elípticas não Lineares*, 11° Colóquio Brasileiro de Matemátia, IMPA, Poços de Caldas, 1977.

[11] Ghergu, M. & Radulescu, V., *Singular Elliptic Problems with lack of Compactness*, Departament of Mathematics, University of Craiova, 200585 Craiova, Romania, 2005.

[12] Gilbarg, D. & Trundiger, N. S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[13] Lima, E, L., *Álgebra Linear, (6ª Edição).* Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 2003.

[14] Ni, W.-M., *A non linear problem on the unit ball and its applications.*, Indiana Univ. Math. Jour. 31(6), 801-807 , 1982.

[15] Spivak, M., *Calculus on Manifolds*, Addison-Wesley, New York, 1965.

[16] Struwe, M., *Variational Methods*, Springer Verlag, 4° Ed., 2007.

[17] Talenti, G., *Best Constants in Sobolev Inequality.* Annali di Mat 110 (1976), 353-372.

[18] Willem, M., *Minimax Theorems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 24, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996.

.