



Universidade Federal da Paraíba

Centro de Tecnologia

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

– DOUTORADO –

O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO ÀS TEORIAS DE PLACAS DE REISSNER, MINDLIN E REDDY

por

WEBER GEOVANNI MENDES MACIEL

*Tese de Doutorado apresentada à Universidade Federal da Paraíba para obtenção
do grau de Doutor*



Universidade Federal da Paraíba

Centro de Tecnologia

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

– DOUTORADO –

O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO ÀS TEORIAS DE PLACAS DE REISSNER, MINDLIN E REDDY

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor.

WEBER GEOVANNI MENDES MACIEL

Orientador: Prof. Dr. Ângelo Vieira Mendonça

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

M152m Maciel, Weber Geovanni Mendes.

O método dos elementos de contorno aplicado às teorias de placas de Reissner, Mindlin e Reddy / Weber Geovanni Mendes Maciel. - João Pessoa, 2020.
176 f. : il.

Orientação: Ângelo Vieira Mendonça.
Tese (Doutorado) - UFPB/CT.

1. Engenharia civil e ambiental. 2. Placa de Mindlin. 3. Placa de Reddy. 4. Carregamento polinomial de alta ordem. 5. Solução fundamental. 6. Equação integral. 7. Placa de Reissner. 8. MEC - Método dos Elementos de Contorno. I. Mendonça, Ângelo Vieira. II. Título.

UFPB/BC

CDU 624:504(043)



PPGECCAM

Programa de Pós-Graduação
Engenharia Civil e Ambiental

UFPB Universidade Federal da Paraíba

Mestrado e Doutorado



**O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO ÀS TEORIAS DE PLACAS
DE REISSNER, MINDLIN E REDDY**

WEBER GEOVANNI MENDES MACIEL

Tese aprovada em 10 de dezembro de 2020.

Período Letivo: 2020.2

**Prof. Dr. Ângelo Vieira Mendonça – UFPB
Orientador**

**Prof. Dr. Ricardo Almeida de Melo – UFPB
Examinador Interno**

**Prof. Dr. André Jacomel Torii – UNILA
Examinador Interno**

**Prof. Dr. João Batista de Paiva - USP
Examinador Externo**

**Prof. Dr. Leandro Palermo Júnior - UNICAMP
Examinador Externo**

**João Pessoa/PB
2020**

*Dedico esta tese de doutorado às minhas amadas
Kamyla e Alice, este trabalho é para vocês.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço à Deus, por permitir o início desta grande jornada e por permitir a conclusão da mesma.

À minha amada esposa Kamyla Maciel e à nossa amada filha Alice Maciel, por fazerem parte de minha vida, sempre me apoiando em todos os momentos dessa árdua caminhada.

Aos meus familiares Naci Gonçalves Mendes (*in memoriam*), Francisco de Assis Mendes (*in memoriam*), Gerlane Maria Gonçalves Mendes Maciel (*in memoriam*), Hortência Gonçalves e Kristianne Mendes, que mesmo na distância, sempre estiveram e estão presentes em meus pensamentos.

À família da minha esposa, em especial, Dona Senia, Seu João e suas irmãs, por terem nos ajudado sempre.

Ao orientador e amigo Prof. Dr. Angelo Vieira Mendonça, pela dedicação a esta tese de doutorado e pela transmissão de seus conhecimentos, que muito contribuíram na minha formação acadêmica e profissional, bem como, pelo seu exemplo de dedicação à ciência da engenharia de estruturas.

Aos amigos do LAMFIC/CT/UFPB, Arthur, Marciano, Welky, Jarbson e Paulo.

Aos amigos que testemunharam esta longa e importante caminhada, Marck da Silva, Edilon Ribeiro, João de Almeida, Felipe Oliveira, Ivy Marinho, Clenilda Marinho e Eduardo Moraes.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental da Universidade Federal da Paraíba pelo valioso conhecimento transmitido nas disciplinas cursadas por este discente.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB) pelo suporte dado ao autor, integrante do seu quadro de professores efetivos.

RESUMO

Neste trabalho o Método dos Elementos de Contorno (MEC) é aplicado às teorias de placas de Reissner, Mindlin e Reddy. Em um primeiro momento as teorias de placas de Reissner e Mindlin são discutidas, onde uma formulação pura do MEC é proposta estendendo a aplicação do Método da Reciprocidade Múltipla (MRM) a placas deformáveis por cortante regidas pelas hipóteses de Reissner e de Mindlin quando submetidas a cargas distribuídas polinomiais quaisquer. Além disso, soluções fundamentais de alta ordem que são essenciais na técnica MRM são deduzidas recursivamente e de forma explícita para todas as ordens requeridas. Em um segundo momento uma formulação regular do MEC para placas por cisalhamento terceira ordem é proposta, onde as hipóteses de Reddy são levadas em conta. Além disso, as equações integrais e soluções fundamentais, em deslocamentos e esforços, são deduzidas assim como a descrição da formação do sistema algébrico do MEC para o problema utilizando elementos lineares e circulares. Exemplos numéricos de placas são apresentados de modo a validar a implementação computacional realizada nas duas teorias de placas. Os resultados apresentados para diferentes casos de carregamento e condições de contorno validam a formulação do MEC apresentada para as teorias de placa de Reissner, de Mindlin e de Reddy.

Palavras-Chave: Placa de Reissner; Placa de Mindlin; Carregamento Polinomial de Alta Ordem; Placa de Reddy; MEC; Solução Fundamental; Equação Integral.

ABSTRACT

In this work, the Boundary Element Method (BEM) is applied to Reissner, Mindlin, and Reddy's plate theories. At first, the Reissner and Mindlin theories are discussed, where a pure formulation of the BEM is proposed extending the application of the Multiple Reciprocity Method (MRM) to shear deformable plates governed by Reissner and Mindlin hypotheses when subjected to arbitrary polynomial distributed loads. In addition, fundamental high-order solutions that are essential in the MRM technique are deduced recursively and explicitly for all required orders. In a second step, a regular formulation of the BEM for third-order shear plates is proposed, where Reddy's hypotheses are taken into account. In addition, the integral equations and fundamental solutions, in displacements and forces, are deduced as well as the description of the formation of the algebraic system of the BEM for the problem using linear and circular elements. Numerical examples of plates are presented in order to validate the computational implementation performed in the two plate theories. The results presented for different loading cases and boundary conditions validate the BEM formulation presented for the Reissner, Mindlin, and Reddy's plate theories.

Keywords: Reissner's Plate; Mindlin's Plate; Higher-Order Polynomial Loading; Reddy's Plate; BEM; Fundamental Solution; Integral Equation.

SUMÁRIO

Página

Agradecimentos	i
Resumo	ii
Abstract	iii
Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	ix
Lista de Símbolos	xi
 Capítulo 1	
Introdução	1
1.1 Fundamentos.....	1
1.2 Revisão Bibliográfica	1
1.3 Objetivos.....	10
1.4 Organização do Texto.....	11
 Capítulo 2	
O Método dos Elementos de Contorno nas Teorias de Placas de Reissner e Mindlin	13
2.1 Placas de Reissner	13
2.2 Placas de Mindlin	20
2.3 Soluções Fundamentais	23
2.4 Equações Integrais de Deslocamentos e Esforços	29
2.4.1 Equações Integrais em Coordenadas Globais.....	29
2.4.2 Transformação das Integrais de Domínio em Integrais de Contorno	33
2.4.2.1 Carregamento Constante	33
2.4.2.2 Carregamento Polinomial.....	34
2.4.3 Equações Integrais em Coordenadas Locais	38
2.5 Sistema Algébrico	40
2.5.1 Elemento Linear com Variação Linear dos Campos Físicos.....	44
2.5.2 Elemento Circular com Variação Linear dos Campos Físicos	45
2.6 Aplicações Numéricas	47

2.6.1 Placa circular engastada submetida a carregamento distribuído com variação linear....	47
2.6.2 Placa quadrada submetida a pressão hidrostática	49
2.6.3 Placa submetida a carregamento duplo quadrático.....	53
2.6.4 Placa sob carregamento exponencial.....	56
2.6.5 Placa submetida a carregamento duplo senoidal	59
2.6.6 Placa engastada com chanfro submetida a carregamento distribuído quadrático.....	62

Capítulo 3

O Método dos Elementos de Contorno na Teoria de Placas de Reddy	67
3.1 Introdução.....	67
3.2 Hipóteses Básicas	67
3.3 Equações de Equilíbrio.....	68
3.4 Solução Fundamental	76
3.5 Equações Integrais.....	84
3.5.1 Equações Integrais em Deslocamentos.....	84
3.5.1.1 Solução Fundamental do Momento de Alta Ordem	91
3.5.1.2 Solução Fundamental do Cortante Equivalente de Reddy	96
3.5.1.3 Transformação da integral de domínio em integrais de contorno equivalentes associadas com a equação integral dos deslocamentos	100
3.5.2 Equações Integrais de Curvaturas e Inclinações.....	101
3.5.2.1 Soluções fundamentais dos momentos para equações integrais dos esforços.....	103
3.5.2.2 Soluções fundamentais da cortante equivalente de Reddy para as equações integrais de esforços.....	105
3.5.2.3 Transformação das integrais de domínio em integrais de contorno equivalentes associadas com as equações integrais de curvaturas e inclinações	112
3.6 Sistema Algébrico	112
3.6.1 Introdução.....	112
3.6.2 Equações Integrais Discretizadas	113

Capítulo 4

Aplicações Numéricas do MEC nas Teorias de Placas de Reddy, Reissner e Mindlin	116
--	-----

4.1 Placa circular engastada submetida a carregamento constante	116
4.2 Placa circular simplesmente apoiada submetida a carregamento constante.....	118
4.3 Placa triangular submetida a carregamento uniformemente distribuído	120
4.4 Placas quadrangulares simplesmente apoiadas submetidas a carregamento constante.....	123
4.5 Placa quadrada simplesmente apoiada submetida a carregamento hidrostático.....	127
4.6 Placa engastada com chanfro submetida a carregamento distribuído linear	129

Capítulo 5

Conclusões.....	133
-----------------	-----

Referências Bibliográficas	135
---	------------

Anexo A

Soluções Analíticas	142
---------------------------	-----

A.1 Soluções de Navier para Placas Retangulares Simplesmente Apoiadas	142
---	-----

A.1.1 Placas de Reissner e de Mindlin	142
---	-----

A.1.2 Placas de Reddy.....	143
----------------------------	-----

A.2 Solução de Levy para Placas de Reissner e de Mindlin	144
--	-----

A.3 Solução analítica da teoria da elasticidade 3D para placas retangulares simplesmente apoiadas	147
--	-----

Apêndice A

Solução Analítica para Placa Circular Engastada Submetida a Carregamento Assimétrico...	151
---	-----

Apêndice B

Expansão das Integrais de Domínio em Somatória de Integrais de Contorno	153
---	-----

Apêndice C

Soluções Fundamentais do Vetor de Carga de Reddy.....	155
---	-----

LISTA DE FIGURAS

Página

Figura 2.1	Estado de tensões em um elemento infinitesimal de placa	14
Figura 2.2	Deslocamentos generalizados	14
Figura 2.3	Esforços resultantes de momentos fletores e esforços cortantes.....	16
Figura 2.4	Balanço de força e de momentos.....	22
Figura 2.5	Rotações no sistema de coordenadas: (a) sistema global; (b) sistema local	39
Figura 2.6	Exemplo de geometria circular com 16 elementos circulares e 16 nós	40
Figura 2.7	Elemento de contorno linear	44
Figura 2.8	Elemento de contorno com geometria circular	45
Figura 2.9	Placa circular engastada submetida a carregamento distribuído com variação linear.	47
Figura 2.10	Discretização em elementos de contorno da placa circular.....	48
Figura 2.11	Placa quadrada submetida a pressão hidrostática sob duas condições de contorno: (a) SSSS; (b) SCSC.....	50
Figura 2.12	Discretização em elementos de contorno das placas quadradas	51
Figura 2.13	Placa quadrada simplesmente apoiada submetida a um carregamento distribuído duplo quadrático.....	53
Figura 2.14	Momento fletor M_{xx} ($\times 10^{-1} \text{ kNm/m}$) ao longo da linha central para a placa simplesmente apoiada com $h = 0,025 \text{ m}$ submetida a carregamento quadrático	55
Figura 2.15	Esforço cortante Q_x ($\times 10^{-1} \text{ kN/m}$) ao longo da linha central para a placa simplesmente apoiada com $h = 0,025 \text{ m}$ submetida a carregamento quadrático	55
Figura 2.16	Placa quadrada simplesmente apoiada submetida a carregamento exponencial.....	56
Figura 2.17	Convergência dos resultados para $M_{xx \text{ MEC}}/M_{xx \text{ analítica}}$ no ponto central para uma placa com $h = 0,025 \text{ m}$: Malha 1 (MEC16); Malha 2 (MEC32); Malha 3 (MEC64); Malha 4 (MEC128)	58
Figura 2.18	Força de cisalhamento Q_x (kN/m) ao longo da linha central para uma placa simplesmente apoiada com $h = 0,025 \text{ m}$	59
Figura 2.19	Placa quadrada simplesmente apoiada submetida a carregamento duplo senoidal.....	60
Figura 2.20	Momento fletor adimensionalizado M_{yy}/M^0 ($\times 10^{-1}$) para a placa com $h = 0,04 \text{ m}$	61

Figura 2.21	Força de cisalhamento adimensionalizada Q_x/q_0a ($\times 10^{-1}$) ao longo da linha central para uma placa simplesmente apoiada com $h = 0,04\text{ m}$	62
Figura 2.22	Placa com chanfro submetido a carregamento distribuído quadrático.....	63
Figura 2.23	Placa chanfrada modelada em elementos finitos (5648 elementos <i>Plate Thick</i>).....	64
Figura 2.24	Discretização em elementos de contorno da placa com chanfro.....	64
Figura 2.25	Deslocamento w (m) ao longo da linha central da placa chanfrada sob carregamento quadrático, considerando as hipóteses de Reissner: (a) $h = 0,01\text{ m}$; (b) $h = 0,10\text{ m}$; (c) $h = 0,15\text{ m}$; (d) $h = 0,20\text{ m}$	65
Figura 2.26	Deslocamento w (m) ao longo da linha central da placa chanfrada sob carregamento quadrático, considerando as hipóteses de Mindlin: (a) $h = 0,01\text{ m}$; (b) $h = 0,10\text{ m}$; (c) $h = 0,15\text{ m}$; (d) $h = 0,20\text{ m}$	66
Figura 3.1	Teorias de placas com deslocamentos assumidos.....	68
Figura 3.2	Geometria: (a) sem discretização do contorno; (b) com discretização em elementos de contorno.....	113
Figura 4.1	Placa circular engastada submetida a carregamento constante.	116
Figura 4.2	Placa circular simplesmente apoiada submetida a carregamento constante	118
Figura 4.3	Placa triangular simplesmente apoiada submetida a carregamento uniformemente distribuído	120
Figura 4.4	Discretizações em elementos de contorno: (a) MEC-15; (b) MEC-30; (c) MEC-60	121
Figura 4.5	Placa quadrada simplesmente apoiada submetida a um carregamento constante.....	123
Figura 4.6	Discretização do MEC utilizando 32 e 64 elementos de contorno	124
Figura 4.7	Placa quadrada simplesmente apoiada submetida a carregamento hidrostático	127
Figura 4.8	Placa engastada com chanfro submetido a carregamento distribuído linear.....	129
Figura 4.9	Placa chanfrada modelada em elementos finitos (5648 elementos <i>Plate Thick</i>).....	130
Figura 4.10	Discretização em elementos de contorno da placa com chanfro.....	130
Figura 4.11	Momento fletor M_{xx} (kNm/m), ao longo da linha central, para a placa chanfrada com $h = 0,10\text{ m}$ sob carregamento linear.....	131
Figura A.1	Sistema de coordenadas da placa	147

LISTA DE TABELAS

Página

Tabela 2.1	Deflexão adimensionalizada $\hat{w} = wD/qa^4 (\times 10^{-2})$ no ponto $0.4a$, para a teoria de Reissner, considerando $\theta = 0^\circ$ e $\beta = \frac{q_1}{q_0}$	49
Tabela 2.2	Deflexão adimensionalizada $\hat{w} = wD/qa^4 (\times 10^{-2})$ no ponto $0.4a$, para a teoria de Mindlin, considerando $\theta = 0^\circ$ e $\beta = \frac{q_1}{q_0}$	49
Tabela 2.3	Deslocamento adimensionalizado $\hat{w} (\times 10^{-3})$ para placa submetida a carregamento linearmente distribuído, com condição de contorno SSSS, segundo a teoria de Reissner	52
Tabela 2.4	Deslocamento adimensionalizado $\hat{w} (\times 10^{-3})$ para placa submetida a carregamento linearmente distribuído, com condição de contorno SSSS, segundo a teoria de Mindlin	52
Tabela 2.5	Deslocamento adimensionalizado $\hat{w} (\times 10^{-3})$ para placa submetida a carregamento linearmente distribuído, com condição de contorno SCSC, segundo a teoria de Reissner	52
Tabela 2.6	Deslocamento adimensionalizado $\hat{w} (\times 10^{-3})$ para placa submetida a carregamento linearmente distribuído, com condição de contorno SCSC, segundo a teoria de Mindlin	52
Tabela 2.7	Deflexão $w = (\times 10^{-2} m)$ para a placa simplesmente apoiada submetida a um carregamento duplo quadrático, considerando a teoria de Reissner	54
Tabela 2.8	Deflexão $w = (\times 10^{-2} m)$ para a placa simplesmente apoiada submetida a um carregamento duplo quadrático, considerando a teoria de Mindlin	54
Tabela 2.9	Deflexão $w = (\times 10^{-2} m)$ para a placa simplesmente apoiada submetida a um carregamento exponencial, segundo a teoria de Reissner	57
Tabela 2.10	Deflexão $w = (\times 10^{-2} m)$ para a placa simplesmente apoiada submetida a um carregamento exponencial, segundo a teoria de Mindlin.....	58
Tabela 2.11	Deflexão adimensionalizada $\hat{w} = (4wD\pi^4/q_0a^4)$ para uma placa submetida a carregamento duplo senoidal com $h/a = 0,04$	60
Tabela 4.1	Deslocamento adimensionalizado $\hat{w} = wD/qa^4 (\times 10^{-2})$ para placa circular engastada submetida a carregamento uniformemente distribuído ($y = 0; x = a/2$).	117

Tabela 4.2	Inclinação da elástica $\frac{dw}{dx} (\times 10^{-4})$ para placa circular engastada submetida a carregamento uniforme ($y = 0; x = a/2$), segundo a Teoria de Reddy.....	117
Tabela 4.3	Deslocamento adimensionalizado $\hat{w} = wD/qa^4 (\times 10^{-2})$ para placa circular simplesmente apoiada submetida a carregamento uniformemente distribuído ($y = 0; x = a/2$).....	119
Tabela 4.4	Momentos radial M_{rr} e tangencial $M_{\theta\theta}$, adimensionalizados, para uma placa circular simplesmente apoiada, com raio a e espessura $h = 0,05 m$, considerando a teoria de Reddy.	119
Tabela 4.5	Deslocamento adimensionalizado $\hat{w} = wD/q_0a^4 (\times 10^{-3})$ no ponto central ($x = a/3, y = a/\sqrt{3}$)	122
Tabela 4.6	Deslocamento adimensionalizado $\hat{w} = wD/qa^4 (\times 10^{-3})$ no ponto: $x = a/4; y = a/2$, para a placa com razão $a/b = 1$	125
Tabela 4.7	Deslocamento adimensionalizado $\hat{w} = wD/qa^4 (\times 10^{-3})$ no ponto: $x = a/2; y = a/2$, para a placa com razão $a/b = 1$	125
Tabela 4.8	Deslocamento adimensionalizado $\hat{w} = wD/qa^4 (\times 10^{-4})$ no ponto: $x = 0,375a; y = 0,50b$, para a placa com razão $a/b = 2$	125
Tabela 4.9	Deslocamento adimensionalizado $\hat{w} = wD/qa^4 (\times 10^{-4})$ no ponto: $x = 0,75a; y = 0,50b$, para a placa com razão $a/b = 2$	126
Tabela 4.10	Tensão de cisalhamento $\tau_{xz} (kPa)$ para a placa quadrada com $h/a = 0,10$, no ponto: $x = 0,25 m; y = 0,50 m$	126
Tabela 4.11	Deslocamento adimensionalizado no ponto $\hat{w} = wD/qa^4 (\times 10^{-3})$ no ponto: $x = 0,25; y = 0,50$	128
Tabela 4.12	Deslocamento adimensionalizado no ponto $\hat{w} = wD/qa^4 (\times 10^{-3})$ no ponto: $x = 0,50; y = 0,50$	128
Tabela 4.13	Tensão de cisalhamento $\tau_{xz} (kPa)$ para a placa com $h/a = 0,10$, no ponto: $x = 0,25 m; y = 0,50 m$	128
Tabela 4.14	Deslocamento $w = (\times 10^{-3} m)$, no ponto $x = 0,50 m$ e $y = 0,50 m$, para a placa chanfrada sob carregamento linear.....	131

LISTA DE SÍMBOLOS

E	– Módulo de elasticidade longitudinal
ν	– Coeficiente de Poisson
$\delta(p, q)$	– Delta de Dirac
δ_{ij}	– Delta de Kronecker
a	– Dimensão da placa paralela ao eixo x; raio da placa circular
b	– Dimensão da placa paralela ao eixo y
h	– Espessura referente à placa
D	– Módulo de rigidez à flexão da placa
λ	– Parâmetro característico do modelo de placas de Reissner
κ	– Fator de correção de cisalhamento
r	– Distância entre ponto fonte e o ponto campo
q	– Carregamento
Ω	– Domínio dos corpos
ρ	– Massa específica da placa
G	– Matriz influência que contém as contribuições de todos os elementos de contorno, Módulo de elasticidade transversal da placa
H	– Matriz de influência que contém as contribuições de todos os elementos de contorno.
n, s	– Sistema de coordenadas local
ξ	– Coordenada adimensional
p	– Ponto fonte
s	– Ponto campo
∇^2	– Operador laplaciano
∇^4	– Operador biarmônico
Ω	– Domínio de um corpo genérico
Γ	– Contorno da placa
Γ_j	– Sub-região do contorno de um corpo genérico
$K_0(x), K_1(x)$	– Funções de Bessel Modificada de segunda espécie
ψ	– Matriz na qual estão inseridas as funções de interpolação

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 Fundamentos

Uma placa é um elemento estrutural bidimensional inicialmente plano, caracterizado por sua superfície média e sujeita a ação de cargas ortogonais a ela, apresentando espessura muito menor que as demais dimensões. Placas são um relevante componente estrutural superficial tendo aplicabilidade na engenharia civil em muitos casos, tais como: edifícios, pontes, pavimentos rígidos em rodovias e aeroportos.

A representação matemática de problemas de placas pode ser feita usando modelos com diversos níveis de detalhamento do problema, sendo os mais rigorosos baseados na teoria da elasticidade tridimensional até descrições mais simplificadas como as teorias de placas (em alguns casos, até mesmo teorias de vigas podem ser aplicadas).

Nos modelos baseados na elasticidade, tem-se um detalhamento minucioso das tensões e das deformações tanto no interior quanto nas interfaces do sólido elástico. No entanto, esses modelos requerem um tratamento matemático mais complexo para determinação da solução para todos os pontos do domínio 3D. Além disso, quando a solução desses modelos é obtida numericamente, geralmente requer um grande número de graus de liberdade demandando um alto custo computacional, limitando a aplicação desses modelos em casos específicos onde efeitos locais exijam uma representação das tensões e deformações de uma forma mais precisa.

Por outro lado, tem-se as teorias de placas em que a principal ideia é introduzir simplificações na teoria da elasticidade, representando as variáveis em deslocamento no plano médio e a descrição do estado de tensões é feita em termos de resultantes de tensões (esforços), reduzindo, portanto, o número de graus de liberdade no problema.

1.2 Revisão Bibliográfica

A primeira teoria para descrição do comportamento de placas foi proposta por Kirchhoff (1850). Ela ficou conhecida como Teoria Clássica de Placas (CPT) e é suficientemente precisa para a maioria das aplicações práticas associadas às placas delgadas. Por assumir a ortogonalidade entre o plano médio e as seções transversais durante o processo de deformação, os efeitos da deformação por cortante são desprezados nas respostas desse modelo de placas. Consequentemente,

isso limita a aplicabilidade da CPT em placas delgadas, ainda sim restrita a casos sem concentração de tensão ou em materiais anisotrópicos sem grandes variações de propriedades direcionais.

Uma teoria refinada de placas foi proposta por Reissner (1945). Essa teoria assume uma variação linear das tensões normais ao longo da espessura da placa, levando em consideração, também, uma variação quadrática das deformações cisalhantes transversais resultando em campos médios ponderados ao longo da espessura definidos no plano médio da placa. Mindlin (1951) propõe uma teoria, que leva em consideração a deformação por cisalhamento, assumindo que os deslocamentos horizontais variam linearmente com a espessura, sendo esta denominada de teoria de placas deformáveis por cisalhamento de primeira ordem (FSDT).

Ainda no contexto de teorias refinadas que levam em conta a deformação por cortante tem-se as teorias de alta ordem. A ideia nestas teorias é composta por uma cinemática assumida para os deslocamentos e de um sistema de equações diferenciais combinadas com condições de contorno associadas. As abordagens de cinemática de terceira ordem para os deslocamentos axiais propostas por Levinson (1980) e Murthy (1981) são as mais conhecidas. Bickford (1982) apresentou uma teoria de terceira ordem de vigas variacionalmente consistente incorporando a cinemática de Levinson; e Reddy (1984) estendeu essa mesma abordagem cinemática para um modelo de placas conhecido como teoria de placas por deformação por cortante de terceira ordem de Reddy. Já Shi (2007) desenvolveu uma teoria de placa de terceira ordem incorporando a abordagem cinemática cúbica de Murthy (1981). Consequentemente nesses modelos de placas de terceira ordem, a distribuição quadrática para as tensões transversais de cisalhamento é satisfeita automaticamente, ao contrário do modelo de placa de Mindlin, que tem uma distribuição constante para essas tensões, exigindo a incorporação de um fator de correção de cisalhamento no modelo.

As teorias de placas são regidas por equações diferenciais que descrevem o fenômeno físico do problema. A solução dessas equações pode ser realizada por meio de métodos analíticos, cuja solução é custosa e está disponível apenas para alguns casos mais simples, ou mais comumente obtida empregando métodos numéricos para solução aproximada dessas equações, tais como o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC), sendo este o método numérico empregado neste trabalho.

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) teve seu desenvolvimento depois que os chamados métodos de domínio, diferenças finitas e elementos finitos, já tinham suas formulações consolidadas e com vasto campo de aplicações. As principais características do MEC, mostradas desde as primeiras formulações, são a redução das aproximações envolvidas na análise numérica, a diminuição dos sistemas de equações lineares a serem resolvidos, a redução e a simplificação dos dados de entrada. Todas estas características são basicamente decorrentes da diminuição da

dimensão do problema. Por exemplo, em um problema tridimensional, a análise recairá no estudo de sua superfície. Convém ressaltar que a redutibilidade dimensional obtida com o MEC está condicionada a existência da solução para a Equação Diferencial Parcial (EDP) do problema fundamental associado ao problema real em questão. Se esse não for o caso, e for utilizada uma solução fundamental de um problema congênere surgirão integrais de domínio, embora as variáveis primárias do problema ainda estejam definidas no contorno.

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) para a teoria clássica das placas foi discutido pela primeira vez por Jaswon *et al.* (1967), onde os autores propuseram a solução da equação bi-harmônica, realizando a sua decomposição em duas equações harmônicas, resolvidas por meio de equações integrais, utilizando o método indireto. Na formulação indireta a solução do problema é obtida por meio de fontes fictícias aplicadas no contorno que, após a determinação destas, permitem o cálculo das variáveis físicas do problema.

Por outro lado, nas formulações diretas do MEC, as equações integrais contêm soluções fundamentais que multiplicam diretamente as variáveis do problema. Mais tarde, o desenvolvimento de uma formulação direta com base na teoria de Kirchhoff (1850) foi introduzido por Forbes e Robinson (1969). Na sequência, Bezine (1978), utilizando a formulação direta, utilizou a discretização com elementos constantes, sem transformar a integral de domínio devido ao carregamento em integrais de contorno. Além disso, as reações de canto não foram incorporadas nas equações integrais.

Só na formulação de Stern (1979) que as reações de canto foram incorporadas nas representações integrais do problema. Tottenham (1979) realizou a análise de placas apoiadas em base elástica e de cascas abatidas. Mais adiante Hartmann e Zomantel (1986) desenvolveram ainda mais o MEC e o implementaram para placas com geometrias e carregamentos complexos. Paiva (1987) apresentou uma formulação para análise de problemas isolados e placas enrijecidas por vigas, com qualquer geometria e quaisquer condições de contorno. Além da abordagem clássica de equações integrais compostas por deslocamento transversal e sua derivada direcional, Paiva também utilizou duas equações integrais em deslocamento sendo uma colocação singular (no contorno) e outra regular (no exterior). Além disso, existem aplicações do MEC em placas finas apoiadas sob fundação elástica de Winkler e Pasternak como descrito em Costa Jr e Brebbia (1985) e Balas *et al.* (1984), interagindo com o meio contínuo semi-infinito como descrito em Paiva (1993), Mendonça e Paiva (2000). Outras aplicações do MEC, na teoria clássica, ocorreram no estudo de placas anisotrópicas com os trabalhos de Shi e Bezine (1988), Albuquerque *et al.* (2006) e Daros (2015); flambagem em placas finas com Syngellakis e Elzein (1994), Katsikadelis e Babouskos (2012); análise de placas de multi-domínios com diferentes espessuras com o trabalho de Paiva e Aliabadi

(2000), e o estudo de Fernandes (2009) no qual é apresentada uma análise de placa reforçada por vigas usando diferentes materiais. Sapountzakis e Dikaros (2012) analisou grandes deslocamentos em placas reforçadas por vigas, Sasikala *et al.* (2015) trata de uma formulação não-singular para a análise de placas reforçadas por meio de vigas usando uma combinação do método dos elementos finitos (MEF) e do método dos elementos de contorno (MEC). Ugurlu (2016) utilizou o MEC para uma análise de vibração livre de placas finas sobre base flexível que servem de apoio para tanques de armazenagem de fluidos.

A primeira aplicação do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para placas considerando o efeito do cisalhamento foi realizada por Vander Weeën (1982) e associada a placas de Reissner. Convém notar que apenas as soluções fundamentais em deslocamentos foram explicitamente mostradas. Exemplos numéricos foram discutidos, já indicando um bom desempenho dessa técnica numérica em placas espessas.

Karam (1986) fez uma aplicação do MEC em placas finitas e infinitas, obtendo resultados muito bons para uma placa circular engastada, contrastando com os resultados obtidos por Van der Weeën. Além disso, as demais soluções fundamentais de interesse para as equações integrais de deslocamentos e esforços foram devidamente explicitadas. Continuando os seus estudos, Karam (1992) realiza uma análise de flexão de placas pelo MEC incluindo não-linearidade física.

Ribeiro (1992) trata de uma formulação do MEC para o problema de flexão de placas com ênfase nas hipóteses de Reissner, que levam a uma formulação mais consistente permitindo o atendimento de três condições físicas em cada ponto do contorno. No trabalho foi considerada a possibilidade de ocorrências de cargas concentradas, cargas distribuídas em subáreas da placa e carregamento em linha. O programa computacional desenvolvido por Ribeiro utilizou elementos de contorno de geometria linear com variação parabólica para as variáveis de contorno, e as equações são geradas para pontos de colocação fora do domínio (MEC regular). Os resultados obtidos ao analisar placas quadradas sob diferentes condições de contorno e de carregamento mostraram a boa precisão do MEC.

Outro relevante trabalho na área de placas de Reissner é apresentado por Rashed (2000a), na qual são apresentadas formulações de elementos de contorno para analisar flexão de placas apoiadas em bases elásticas. Vale destacar a apresentação tanto das soluções fundamentais quanto das equações integrais de placas espessas sobre fundações elásticas de Winkler e Pasternak.

Westphal Jr (1990), De Barcellos e Silva (1997) e Andrade (2001) discutiram as implicações de se tratar as teorias de Reissner e Mindlin pelo MEC. Além disso, Andrade (2001) realizou um estudo com a formulação alternativa de Palermo Jr. (2000) para a teoria de Mindlin. Essa

formulação alternativa trata da conexão da teoria de Mindlin com a teoria clássica, sendo uma somatória da teoria clássica com o efeito da deformação devido ao esforço cortante.

Palermo Júnior (2007) apresenta estudo sobre a resposta harmônica de placas usando a solução no domínio da frequência em conjunto com a equação integral de contorno direta para o modelo de placas de Mindlin. A deformação por cisalhamento e os efeitos de inércia rotacional nesse modelo podem ser desativados na formulação dele, e a equação integral para o modelo clássico de flexão é obtido, incluindo um grau de liberdade adicional para a rotação tangencial no contorno. As respostas de frequência foram obtidas para mapear o comportamento da placa e foram calculadas com e sem os efeitos da deformação por cisalhamento e da inércia rotacional.

Maia (2013) trata de uma implementação da teoria de Reissner para placas por meio do MEC em ambiente computacional orientado a objetos e com aplicações correntes da engenharia civil com especial atenção na análise de lajes com pilares em seu domínio.

Pisa e Aliabadi (2013) utilizam o método dos elementos de contorno “*dual*” para modelar o crescimento de fissuras por fadiga em estruturas de placas espessas agrupadas. O método adotado para simular a propagação das fissuras é o incremento da extensão destas mesmas fissuras na qual cada nova fissura é modelada com novos elementos de contorno e a direção é obtida por meio do critério das tensões principais máximas. O tamanho do incremento pode ser escolhido arbitrariamente, desde que isso dependa apenas do número de cargas por ciclo na qual a estrutura está sujeita.

Costa (2014) realiza a análise de estruturas formadas por meio de uma associação tridimensional de placas espessas. Esta abordagem apresenta seis graus de liberdade por nó, sendo três deslocamentos e três rotações. É construída a partir da associação das formulações de elasticidade plana e placas deformáveis por cisalhamento. A partir destas, dois deslocamentos vêm da formulação plana, um deslocamento e duas rotações da formulação de placas. Para que se obtenha a terceira rotação, uma equação da *drilling rotation* é incluída aplicando a equação integral de contorno na elasticidade plana na expressão analítica da rotação, oriunda da teoria da elasticidade. No arranjo tridimensional, cada placa é definida como uma subregião e os termos locais são calculados. Após a necessária transformação dessas equações para um plano de referência comum, as condições de compatibilidade de deslocamentos e rotações, e equilíbrio de momentos e forcas de superfície são impostas.

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) é aplicado por Altoé *et al.* (2015) na análise de placas apoiadas sobre fundações do tipo Pasternak, considerando a teoria de Reissner. A metodologia empregada faz uso da conhecida solução fundamental do MEC para placas. As reações na fundação são as variáveis do problema. Elementos de contorno quadráticos com continuidade e

descontinuidade são usadas na implementação numérica. Os resultados dos exemplos numéricos são comparados com soluções analíticas.

O Método dos Elementos de Contorno é aplicado no estudo, feito por Rashed (2015), de uma laje submetida ao carregamento de pós-tração. O modelo de flexão de placas sujeitas a deformação por cisalhamento é empregado. O efeito dos cabos de pré-tração é levado em conta através do método de carga equivalente. A formulação é aplicada usando elementos de contorno quadráticos. O método proposto é eficaz em termos de processamento.

Samaan *et al.* (2015) apresentam uma nova solução para placas de Reissner baseado no Método dos Elementos de Contorno (MEC) com multipolos. As soluções fundamentais são expressas na forma de potenciais e estas, por sua vez, expandidas por meio da série de Taylor. É feita uma acoplagem do MEC com um algoritmo iterativo (*Generalized Minimal Residual Method - GMRES*). O custo computacional é reduzido. A eficiência do método com multipolos é demonstrada por meio da comparação de resultados com MEC convencional.

O trabalho de Caicedo e Portela (2015) fornece uma verificação numérica de que o termo singular da autoexpansão da série de Williams pode ser usada como uma solução singular, válida na vizinhança de cada caminho da fissura, para a análise de elementos de contorno de placas planas com multi-fissuras. A série de Williams é válida para um vértice da fissura semi-infinita e para calcular os fatores de intensidade das tensões.

É apresentando por Pisa e Aliabadi (2015) uma aplicação do método de elementos de contorno (MEC) para análise de painéis enrijecidos fraturados e reparados com adesivo. Uma formulação multiregião é usada para simular os enrijecedores que são modelados agrupados. O MEC *dual* é usado para simular a presença de fissuras e os reparos, tratados como placas independentes que são juntadas ao painel com adesivos.

O trabalho de Marczak (2015) analisa os desenvolvimentos das formulações do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para resolver vários tipos de problemas de flexão em placas, incluindo flexão não linear. A formulação é desenvolvida e resolvida usando o procedimento padrão do MEC. Uma implementação baseada em orientação a objetos é analisada no trabalho. Resultados foram obtidos para flexão elástica linear e não linear incluindo caso de variação na espessura sob regime de grandes deslocamentos.

O estudo de vibrações em cascas é um aspecto importante no projeto de estruturas de paredes finas. Em geral, as soluções analíticas para as frequências naturais de cascas não estão disponíveis, e técnicas computacionais são exigidas. A formulação baseada na integração direta no domínio do tempo usa soluções fundamentais da elastoplasticidade para placas sujeitas a

deformação por cisalhamento, sendo as integrais de domínio tratadas pelo método dos elementos de contorno (Useche e Harnish, 2016).

Mobassher *et al.* (2016) faz uso do conceito de um modelo BIM (Building Information Modeling) para análise estrutural e projeto de placas espessas de concreto armado baseado no Método dos Elementos de Contorno (MEC). Para cada componente BIM, padrões são fornecidos como objeto da estrutura, fluxo de dados e interface gráfica do usuário. O protótipo do estudo foi desenvolvido em linguagem de programação orientada objetos. Como aplicação do protótipo, uma análise estrutural de lajes e vigas são realizadas a partir das soluções apresentadas pelo MEC.

O trabalho apresentado por Yu *et al.* (2016) demonstra um estudo numérico da aplicação do Método dos Elementos de Contorno (MEC) sobre o comportamento à fadiga de placas de aço fissuradas nas extremidades. As placas são reforçadas com polímero de fibra de carbono (CFRP). Os estudos demonstram que o CFRP pode efetivamente reduzir o crescimento da fissura e prolongar a resistência à fadiga deste tipo de placa de aço.

Oliveira e Karam (2016) apresentam uma formulação para análise elastoplástica de placas, por meio do Método dos Elementos de Contorno, usando a teoria de Reissner. A teoria clássica da plasticidade é considerada, com uma deformação inicial e usando o critério de escoamento de *von Mises*. São utilizados elementos de contorno quadráticos e células triangulares internas, ambos com geometria linear. Um processo incremental-iterativo é usado com o objetivo de resolver as equações elastoplásticas.

O método estocástico dos elementos de contorno com *spline* fictícia (SFBEM) é empregado por Su e Xu (2015a) na análise de confiabilidade de problemas de flexão em placas de Reissner em conjunto com o método de confiabilidade de primeira ordem (FORM). A formulação dos gradientes tem sido derivada através do uso do SFBEM. A metodologia é validada com vários exemplos numéricos e com boa precisão com as soluções de simulação Monte Carlo. Su e Xu (2015b), em outro trabalho utilizando o SFBEM, apresentam uma análise estocástica de problemas de flexão em placas finas, com os parâmetros estruturais e de carregamento modelados com campos aleatórios, sendo o método validado por meio da comparação de soluções obtidas com simulação de Monte Carlo.

Shehata *et al.* (2018) apresentaram um estudo do MEC para radiês espessos estaqueados utilizando a solução de Reissner para placa e o solo assumido como um sólido elástico semi-infinito.

Uma das características mais importantes das formulações puras do MEC é o fato delas funcionarem exclusivamente com integrais de contorno, requerendo apenas a discretização e a interpolação das variáveis no contorno do problema, resultando em uma redução dimensional da

solução em uma ordem. Porém, em certos casos, como na presença de forças de corpo e comportamentos não-lineares, os termos da integral de domínio podem ser encontrados na representação integral do problema, eliminando a vantagem da redução de dimensionalidade do método.

As integrais de domínio no MEC podem ser tratadas usando diferentes técnicas, como o Método Direto de Integração do Domínio (MDID), Método da Reciprocidade Dual (MRD), Método da Reciprocidade Múltipla (MRM) e soluções particulares (Ingber *et al.*, 2001). O esquema MDID consiste em discretizar o domínio do problema em células internas, interpolando cada célula e realizando a integração numérica. Liu (1987), Purbolaksono e Aliabadi (2005), Syngellakis e Kang (1987), Xiao-Yan *et al.* (1990) usaram MDID no cálculo integrais de domínio para analisar a flexão de placas espessas submetidas a cargas distribuídas. Embora o método direto de integração do domínio possa fornecer resultados precisos, ele falha na propriedade de redução, em uma ordem, da dimensionalidade para uma solução do método dos elementos de contorno com formulação pura.

O MRD é uma das técnicas que transformam integrais de domínio em integrais de contorno, eliminando assim a discretização do domínio em células. Para este fim, o MRD requer que a parcela do domínio admitida "desconhecida" seja aproximada em certos pontos do domínio (também chamados de polos) com a ajuda de funções de base radial. Baiz e Aliabadi (2009), Doval *et al.* (2012) e Elzein e Syngellakis (1992), Soares *et al.* (2019) usaram a abordagem MRD na análise de estabilidade de placas, enquanto Wen *et al.* (1999) aplicaram-no em placas espessas submetidas a diversos carregamentos do tipo distribuído, como cargas lineares e senoidais. Em outro estudo, Wen *et al.* (2000) usam o MRD para uma placa quadrada simplesmente apoiada submetida a uma carga hidrostática, sendo o termo de carga aproximado por um conjunto de funções de base radial. De acordo com Rashed (2000b), o MRD é um método eficaz quando aplicado à integral de domínio contendo parcelas desconhecidas. Em contraste, quando aplicado em regiões com campos conhecidos do domínio, tais como em cargas distribuídas em placas, o MRD fornece aproximações desnecessárias nas soluções em elementos de contorno. Além disso, esta abordagem depende da escolha da função radial e não existe um método padrão sobre como distribuir os pontos de colocação internos no método da reciprocidade dual (Sladek e Sladek, 1996).

As integrais de domínio nos problemas de flexão de placas deformáveis por cortante submetidas a cargas distribuídas constantes foram transformadas em integrais de contorno usando o teorema da divergência, conforme Vander Weeën (1982), Oliveira e Karam (2016), Rashed (2000c) e Long *et al.* (1998).

El-Zafrany (2001), usando integrações por partes, reduziu as integrais de contorno equivalentes as integrais generalizadas de domínio em estudo de flexão de placas incorporando a deformação por cortante para carga linearmente distribuída sobre o domínio da placa.

Rashed (2000b) transformou a integral de domínio, contendo carga linearmente distribuída, em integrais de contorno usando soluções particulares para a teoria de placas espessas sob flexão. No entanto, nenhum exemplo numérico foi apresentado em seu artigo para validar sua solução.

O Método da Reciprocidade Múltipla (MRM) é outro método para transformar integrais de domínio em uma série (somatório) de integrais de contorno, aplicando a segunda identidade de Green de forma recursiva. Segundo Neves e Brebbia (1991), a dificuldade de aplicação do MRM ocorre no cálculo das primitivas na fórmula de recorrência para soluções fundamentais. Deve-se notar que 'primitivas' significam soluções fundamentais de ordem superior.

Conforme discutido anteriormente, o MRM é altamente dependente da solução fundamental do problema de interesse. Em problemas de placas o desenvolvimento dessa técnica de transformação de integrais está restrito a placas delgadas como descrito em Sladek e Sladek (1996). Há uma lacuna na literatura de como o MRM funcionaria em placas deformáveis por cortante. Diante deste fato, a presente tese tem como um dos seus objetivos o estabelecimento do MRM para placas de Reissner e Mindlin com intuito de viabilizar uma solução pura do MEC em placas submetidas tanto a carregamentos polinomiais quanto àqueles que podem ser aproximados por polinômios (tais como os senoidais, exponenciais, etc). Para este fim, as soluções fundamentais de alta ordem, que são essenciais na solução MRM, pretende-se mostra-las de uma forma explícita genérica compatível com os termos da série.

O desenvolvimento de soluções numéricas para teorias placas com deformações por cisalhamento de alta ordem tem sido feita utilizando métodos de domínio, tais como o método dos elementos finitos.

Chakrabarti e Sheikh (2012) apresentam um elemento finito triangular para análise de vibração de placas compósitas segundo a teoria de terceira ordem de Reddy (TSDT). Moita *et al.* (2011) desenvolveu um modelo de elementos finitos para análise de vibração de placas tipo sanduíche com multicamadas amortecidas, com um núcleo viscoelástico entre as camadas elásticas, incluindo, ainda, camadas piezelétricas. As camadas elásticas são modeladas usando a teoria clássica de placas e o núcleo é modelado usando a teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem de Reddy. O elemento finito é obtido pela montagem de N “elementos” através da espessura, usando-se suposições específicas sobre a continuidade de deslocamento nas interfaces entre as camadas. Para conseguir um mecanismo para o controle ativo da resposta da dinâmica estrutural, é utilizado um algoritmo de controle de *feedback*, acoplando o sensor e as camadas piezoelétricas

ativas. A análise dinâmica de estruturas é conduzida no domínio da frequência para obter as frequências naturais e os respectivos fatores de perda, e no domínio do tempo para o movimento harmônico em estado estacionário. Para ambas as análises, um código em elementos finitos foi implementado.

Belkaid *et al.* (2016) apresenta um elemento finito isoparamétrico de quatro nós simples e com cinco graus de liberdade, baseado na teoria de placas de Reddy, elaborado para analisar a flexão de placas laminadas. Os resultados obtidos são comparados com soluções dadas pela elasticidade tridimensional.

Em recente trabalho, Raghu *et al.* (2018) apresenta uma análise não linear por elementos finitos de placas compostas laminadas usando a teoria de placas de Reddy e a teoria de não-localidade de Eringen. As equações governantes da teoria TSDT com as deformações de von Kármán são derivadas empregando o modelo constitutivo de gradiente de tensão de Eringen. Foi utilizado um elemento finito retangular de quatro nós e com oito graus de liberdade por nó. Os coeficientes de matriz de rigidez e matriz de rigidez tangente são apresentados juntamente com o vetor de força não local. Exemplos numéricos são apresentados para ilustrar os efeitos da não-linearidade, anisotropia e da não linearidade de von Kármán no comportamento de flexão de placas compostas laminadas.

Apesar de existir recentes aplicações do Método dos Elementos de Contorno na solução de vigas regidas por teorias de deformação por cortante de terceira ordem (modelo de Bickford-Reddy) tais como na análise de vigas submetidas a flexão discutida em Maia *et al.* (2020) e flambagem de barras descrita em Maia (2016), há uma lacuna na literatura tratando o desenvolvimento de soluções do MEC para placas representadas por teorias incorporando deformações por cortante de terceira ordem. Convém notar que a extensão do MEC para vigas de Bickford-Reddy só ocorreu depois que as soluções do MEC já estavam estabelecidas para análise estática e dinâmica como mostradas em Banerjee e Butterfield (1981) e Providakis e Beskos (1986), análise estática e dinâmica de viga de Timoshenko como discutida por Antes (2003) e Antes *et al.* (2004).

Assim, após o estabelecimento das soluções do MEC para placas de Kirchhoff feito por Bazine (1978) e Stern (1979), e em seguida para placas de Reissner por Vander Weeën (1982), nesta tese tem-se o objetivo de desenvolver uma solução do MEC direto para análise estática de placas considerando a deformação por cortante de terceira ordem segundo as hipóteses de Reddy.

1.3 Objetivos

Os objetivos desta tese são:

- 1) Estabelecer o Método de Reciprocidade Múltipla para placas incorporando a deformação por

cortante com intuito de viabilizar uma formulação pura do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para placas de Reissner e Mindlin submetidas a carregamentos polinomiais quaisquer.

2) Estabelecer uma formulação regular do MEC aplicado a placas incorporando a deformação por cortante usando a Teoria de Placas de Reddy, desde a dedução das equações integrais e soluções fundamentais até a solução algébrica do problema.

3) Desenvolver e implementar os códigos compatíveis com cada uma das teorias de placas com posterior validação.

1.4 Organização do Texto

Este trabalho está estruturado em cinco capítulos, listagem de referências bibliográficas, um anexo e três apêndices. O Capítulo 1 apresentou uma revisão da literatura sobre a temática de placas e a aplicação do MEC neste tipo de componente estrutural.

O Capítulo 2 discute as soluções do MEC em placas regidas pelas teorias de Reissner e Mindlin. Um especial enfoque é dado na descrição da contribuição original de como o Método da Reciprocidade Múltipla pode estabelecido para prover uma solução pura do MEC em placas submetida a carregamentos polinomiais quaisquer. Exemplos numéricos com placas de diferentes geometrias e carregamentos de interesse fecham o capítulo mostrando a eficiência da técnica proposta.

O Capítulo 3 aborda a Teoria de Placas de Reddy, mostrando inicialmente seus fundamentos básicos. O enfoque especial do capítulo recai na descrição das contribuições originais associadas às deduções das soluções fundamentais, equações integrais, transformações das integrais de domínio em integrais de contorno para carregamentos com distribuições constantes e lineares. Neste capítulo, ainda, é descrita a construção dos sistemas algébricos.

No Capítulo 4, são apresentados resultados numéricos obtidos com a formulação das três teorias de placas de interesse: Reissner, Mindlin e Reddy. Exemplos numéricos com estudo de convergência da solução do MEC para diversas geometrias de placas e de carregamentos e com as pertinentes validações com soluções analíticas ou outras soluções numéricas são apresentadas.

No Capítulo 5, conclusões são apresentadas validando o trabalho proposto, seguidas de sugestões para trabalhos futuros.

Na sequência são apresentadas as Referências Bibliográficas utilizadas neste trabalho.

O Anexo A apresenta as soluções analíticas para placas quadradas simplesmente apoiadas, utilizando o Método de Navier aplicado às Teorias de Placas de Reissner, de Mindlin e de Reddy, as soluções analíticas para placas quadradas, sob condição de contorno simplesmente apoiadas em duas faces opostas e engastadas nas demais, utilizando o Método de Levy aplicado às Teorias de Placas de Reissner e de Mindlin, e as soluções analíticas para placas retangulares simplesmente apoiadas com base na Teoria da Elasticidade 3D.

O Apêndice A apresenta a solução analítica para a placa circular engastada submetida a carregamento assimétrico.

O Apêndice B apresenta a expansão das integrais de domínio em somatória de integrais de contorno.

O Apêndice C apresenta as soluções fundamentais para o vetor de carga, relacionado ao MEC aplicado à Teoria de Placas de Reddy.

CAPÍTULO 2

O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO NAS TEORIAS DE PLACAS DE REISSNER E MINDLIN

2.1 Placa de Reissner

As teorias de placas deformáveis por cortante surgiram da necessidade de suprir uma deficiência da CPT (Teoria Clássica de Placas) em representar os efeitos das distorções transversais no problema, principalmente em placas mais rígidas. Para estes tipos de placas, as hipóteses de Kirchhoff consideradas válidas para as placas finas deixam de ser admissíveis. Na teoria clássica de placas o sistema de equações é de quarta ordem implicando, em cada ponto, na ocorrência de duas condições de contorno. A teoria de placas pode ser modificada considerando-se que a espessura tem dimensões mais elevadas. Reissner (1945) e Mindlin (1951) desenvolveram modelos, em que os efeitos das deformações por cisalhamento transversal para estudar a deflexão de placas, gerando equações de sexta ordem e, por consequência, permitiram que as três condições de contorno do problema fossem satisfeitas.

No presente capítulo são apresentadas uma aplicação do Método dos Elementos de Contorno (MEC) ao modelo de placas de Reissner e Mindlin. Um ponto de destaque é a transformação das integrais de domínio para carregamentos polinomiais quaisquer em integrais de contorno. Diferentemente dos casos reportados na literatura, neste trabalho, o método da reciprocidade múltipla é estendido ao problema de placas de Reissner e Mindlin, onde as soluções fundamentais de alta ordem são deduzidas e apresentadas explicitamente.

As hipóteses básicas da teoria de placas de Reissner são dadas por:

- a) a placa possui pequena espessura quando comparada com a largura e o comprimento da mesma;
- b) o material é isotrópico e elástico linear homogêneo;
- c) as componentes de tensão que tangenciam as faces da placa têm valor nulo;
- d) as tensões normais são assumidas variarem linearmente com a espessura e as tensões tangenciais transversais são admitidas com distribuição quadrática na direção transversal.

O estado de tensões no elemento infinitesimal de placa, conforme mostrado na Figura 2.1.

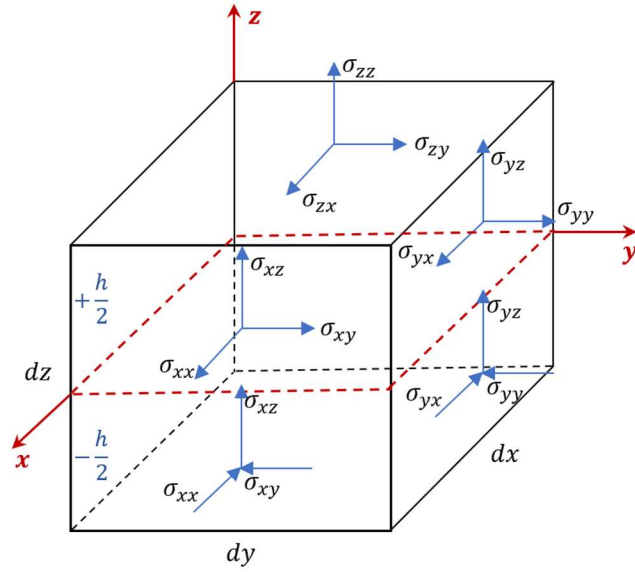


Figura 2.1 – Estado de tensões em um elemento infinitesimal de placa.

Considerando um elemento de placa com espessura h , como mostrado na Figura 2.2, com sua geometria no espaço x_k , para $k = 1, 2$ e 3 . No sistema de coordenadas $x_1 x_2 x_3$, define-se o plano médio da placa antes da deformação coincidindo este com $x_1 x_2$, e tendo em x_3 valor igual a zero. Os deslocamentos generalizados (médios ponderados) são denotados como u_i , onde u_α ($\alpha = 1, 2$) são as rotações (θ_1 e θ_2) e u_3 representa a deflexão transversal w . As condições de carregamento nas faces do elemento de placa são para $x_3 = \pm h/2$: $\sigma_{33} = \pm q/2$ e $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$.

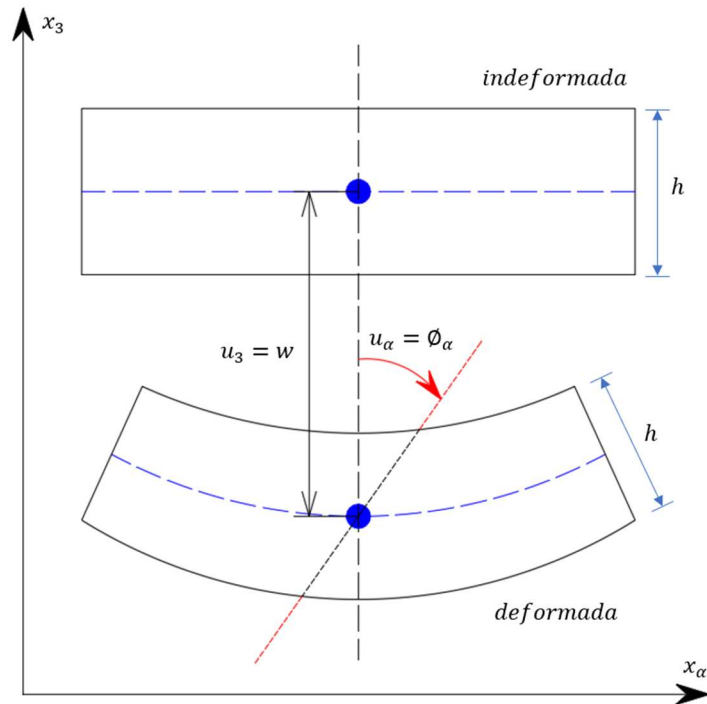


Figura 2.2 – Deslocamentos generalizados.

De acordo com as hipóteses básicas, apresentadas no item 2.2 alíneas (b) e (c), o campo de tensões estabelecido por Reissner (1945; 1950) é dado por:

$$\sigma_{xx} = \frac{12}{h^3} z M_{xx} \quad (2.1a)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{12}{h^3} z M_{yy} \quad (2.1b)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{12}{h^3} z M_{xy} \quad (2.1c)$$

$$\sigma_{xz} = \frac{Q_x}{2h/3} \left[1 - \left(\frac{z}{h/2} \right)^2 \right] \quad (2.1d)$$

$$\sigma_{yz} = \frac{Q_y}{2h/3} \left[1 - \left(\frac{z}{h/2} \right)^2 \right] \quad (2.1e)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{q}{2h^3} (h - z)(h + 2z)^2 \quad (2.1f)$$

Ou em notação indicial:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{12}{h^3} z M_{\alpha\beta} \quad (2.1g)$$

$$\sigma_{\alpha 3} = \frac{Q_\alpha}{2h/3} \left[1 - \left(\frac{z}{h/2} \right)^2 \right] \quad (2.1h)$$

$$\sigma_{33} = \frac{q}{2h^3} (h - z)(h + 2z)^2 \quad (2.1i)$$

onde: z é a coordenada cartesiana na direção transversal; h é a espessura da placa; M_{xx} e M_{yy} são, respectivamente, os momentos fletores nas direções x e y ; M_{xy} é o momento volvente; Q_x e Q_y são, respectivamente, o esforço cortante nas direções x e y ; σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} são as tensões normais; σ_{xy} é a tensão cisalhante; σ_{xz} e σ_{yz} são as tensões de cisalhamento transversais; q é o carregamento transversal sobre a placa; os índices α e β assumem valores 1 e 2.

Pelo campo de tensões postulado por Reissner, observa-se que as tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e a tensão cisalhante σ_{xy} são distribuídas linearmente ao longo da espessura da placa, as tensões de cisalhamento transversais σ_{xz} e σ_{yz} tem distribuição quadrática, e as tensões normais σ_{zz} têm variação cúbica sendo, estas últimas, desconsideradas em relação as demais tensões.

Realizando a integração das componentes de tensão, ao longo da espessura, são obtidos os momentos de flexão, por unidade de comprimento de maneira que (Vander Weeën, 1982):

$$M_{xx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} z \, dz \quad (2.2a)$$

$$M_{yy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yy} z \, dz \quad (2.2b)$$

$$M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} z \, dz \quad (2.2c)$$

Ou em notação indicial:

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\beta} z \, dz \quad (2.2d)$$

onde, os índices α e β assumem valores 1 e 2.

Por analogia, o esforço cortante, por unidade de comprimento é dado por (Vander Weeën, 1982):

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xz} z \, dz \quad (2.3a)$$

$$Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yz} z \, dz \quad (2.3b)$$

Ou em notação indicial:

$$Q_\alpha = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha 3} z \, dz \quad (2.3c)$$

onde, o índice α assume valores 1 e 2.

A Figura 2.3 ilustra um elemento de placa com as resultantes de tensão, na superfície média, e mostra, ainda, a convenção de sinais adotada.

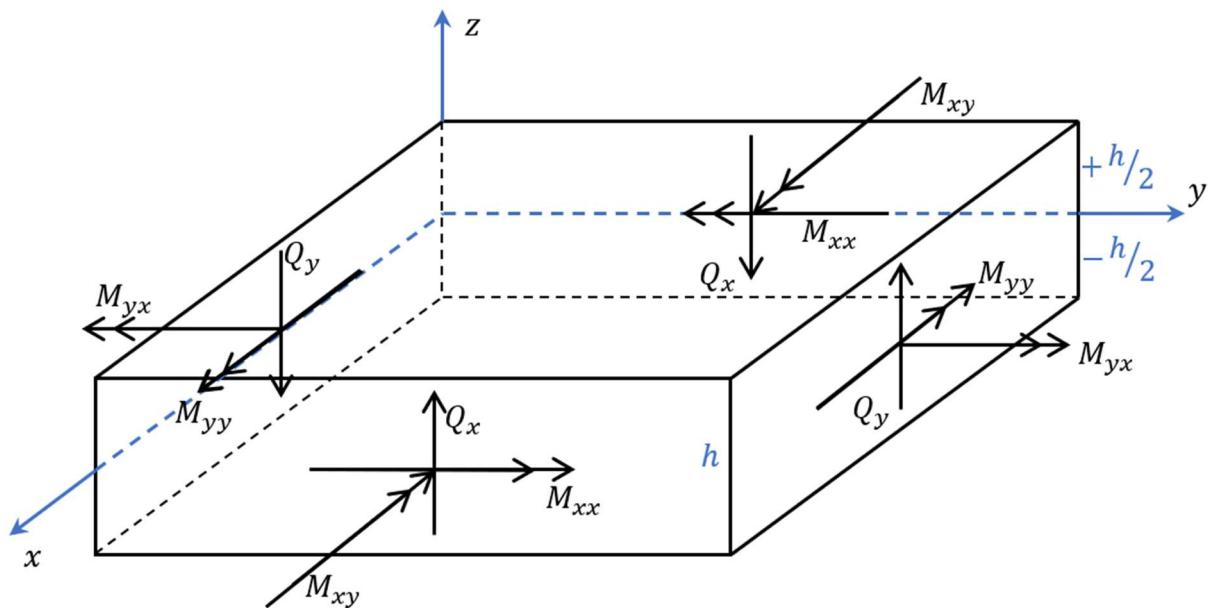


Figura 2.3 – Esforços resultantes de momentos fletores e esforços cortantes.

Aplicando o teorema do cálculo variacional, para uma placa elástica, tem-se:

$$\delta \left\{ \iiint_V \left(\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ij} \right) dV - \iint_S (q_i u_i) dS \right\} = 0 \quad (2.4)$$

Conforme estabelecido por Reissner (1950), substituindo as equações (2.1g-i) na equação variacional (2.4), são obtidos os deslocamentos generalizados, para pontos da superfície média da placa:

$$\phi_\alpha = \frac{12}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} u_\alpha z dz \quad (2.5a)$$

$$w = \frac{3}{2h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} u_3 \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] dz \quad (2.5b)$$

com o índice α variando 1 e 2; ϕ_α é rotação da normal (média ponderada) à superfície média indeformada; w é o deslocamento transversal (médio ponderado) da placa; u_α e u_3 são as componentes dos deslocamentos reais.

A equação variacional resultante da equação (2.4) é escrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \delta \left\{ \int_\Omega M_{xx} \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial x} d\Omega + \int_\Omega M_{yy} \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial y} d\Omega + \int_\Omega M_{xy} \left(\frac{\partial \delta \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial x} \right) d\Omega + \right. \\ & + \int_\Omega Q_x \left(\delta \phi_x + \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \right) d\Omega + \int_\Omega Q_y \left(\delta \phi_y + \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \right) d\Omega - \\ & - \int_\Omega q \delta w_0 d\Omega - \int_\Omega m_x \delta \phi_x d\Omega - \int_\Omega m_y \delta \phi_y d\Omega - \\ & - \frac{1}{2E} \int_\Omega \frac{12}{h^3} [M_{xx}^2 + M_{yy}^2 - 2\nu M_{xx} M_{yy} + 2(1+\nu) M_{xy}^2] d\Omega - \\ & \left. - \frac{1}{2E} \int_\Omega \left[\frac{12}{5h^3} (1+\nu) (Q_x^2 + Q_y^2) d\Omega - \frac{12\nu}{5h} (M_{xx} + M_{yy}) q \right] d\Omega \right\} = 0 \quad (2.6) \end{aligned}$$

onde ν é o coeficiente de *Poisson* da placa; E é o módulo de elasticidade longitudinal da placa; m_x e m_y são os momentos distribuídos por unidade de área.

A partir da Equação (2.6), após realizar as variações e integrar por partes, a seguinte equação é obtida

$$- \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x + m_x \right) \delta \phi_x \right] d\Omega - \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - Q_y + m_y \right) \delta \phi_y \right] d\Omega -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q \right) \delta w_0 \right] d\Omega + \int_{\Omega} \left\{ \left[\frac{\partial \phi_x}{\partial x} - \frac{12}{Eh^3} (M_{xx} - \nu M_{yy}) + \frac{6\nu}{5Eh} q \right] \delta M_{xx} \right\} d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} \left\{ \left[\frac{\partial \phi_y}{\partial y} - \frac{12}{Eh^3} (M_{yy} - \nu M_{xx}) + \frac{6\nu}{5Eh} q \right] \delta M_{yy} \right\} d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} - \frac{12}{Gh^3} M_{xy} \right) \delta M_{xy} \right] d\Omega + \int_{\Omega} \left[\left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{6}{5Gh} Q_x \right) \delta Q_x \right] d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} \left[\left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} - \frac{6}{5Gh} Q_y \right) \delta Q_y \right] d\Omega = 0
\end{aligned} \tag{2.7}$$

A partir da Equação (2.7) obtém-se as equações de equilíbrio da teoria de placas Reissner:

$$-\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + Q_x - m_x = 0 \tag{2.8a}$$

$$-\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + Q_y - m_y = 0 \tag{2.8b}$$

$$-\frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{\partial Q_y}{\partial y} - q = 0 \tag{2.8c}$$

ou, reescrevendo as equações de equilíbrio em notação indicial, tem-se:

$$-M_{\alpha\beta,\beta} + Q_{\alpha} = m_{\alpha} \tag{2.9}$$

$$-Q_{\alpha,\alpha} = q \tag{2.10}$$

A partir da Equação (2.7) são obtidas as relações esforço-deslocamento da teoria de placas de Reissner:

$$\frac{\partial \phi_x}{\partial x} - \frac{12}{Eh^3} (M_{xx} - \nu M_{yy}) + \frac{6\nu}{5Eh} q = 0 \tag{2.11a}$$

$$\frac{\partial \phi_y}{\partial y} - \frac{12}{Eh^3} (M_{yy} - \nu M_{xx}) + \frac{6\nu}{5Eh} q = 0 \tag{2.11b}$$

$$\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} - \frac{12}{Gh^3} M_{xy} = 0 \tag{2.11c}$$

$$\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{6}{5Gh} Q_x = 0 \tag{2.11d}$$

$$\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} - \frac{6}{5Gh} Q_y = 0 \tag{2.11e}$$

Podem ser explicitados os valores dos momentos fletores e esforços cisalhantes, a partir das equações (2.11a-e):

$$M_{xx} = D \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} q \quad (2.12a)$$

$$M_{yy} = D \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} q \quad (2.12b)$$

$$M_{xy} = \frac{D(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \quad (2.12c)$$

$$Q_x = \frac{D(1-\nu)}{2} \lambda^2 \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \quad (2.12d)$$

$$Q_y = \frac{D(1-\nu)}{2} \lambda^2 \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \quad (2.12e)$$

onde $\lambda^2 = \frac{10}{h^2}$ é um parâmetro característico do modelo de placas de Reissner; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ indica a rigidez da placa.

Reescrevendo (2.12a-e) em notação indicial:

$$M_{\alpha\beta} = D \frac{(1-\nu)}{2} \left(\phi_{\alpha,\beta} + \phi_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} \phi_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) + \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} q \delta_{\alpha\beta} \quad (2.13a)$$

$$Q_\alpha = D \frac{(1-\nu)}{2} \lambda^2 (\phi_\alpha + u_{3,\alpha}) \quad (2.13b)$$

Denominando Γ todo o contorno de uma placa, sendo Γ_u o contorno onde os deslocamentos generalizados ϕ_α e w são prescritos, e Γ_p o contorno onde as forças de superfície generalizadas p_α e p_3 são prescritas, tem-se:

- no contorno Γ_u : $u_j = \hat{u}_j$ (2.14a)

- no contorno Γ_p : $p_j = \hat{p}_j$ (2.14b)

sendo $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_p$; $\hat{u}$ e $\hat{p}$ são as variáveis prescritas. As forças de superfície generalizadas são definidas por:

$$p_\alpha = M_{\alpha\beta} n_\beta \quad (2.15a)$$

$$p_3 = Q_\alpha n_\alpha \quad (2.15b)$$

$$\hat{p}_\alpha = \hat{M}_{\alpha\beta} n_\beta \quad (2.15c)$$

$$\hat{p}_3 = \hat{Q}_\alpha n_\alpha \quad (2.15d)$$

Utilizando as Equações (2.8a-c) e após reordenamento dos termos, obtém-se

$$-\frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} \frac{\partial w_0}{\partial x} - \left[\frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} - \frac{D(1-\nu)}{2} \nabla^2 \right] \phi_x + \frac{D(1+\nu)}{2} \nabla^2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \frac{D(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} = -m_x - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \frac{\partial q}{\partial x} \quad (2.16)$$

$$-\frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2}\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{D(1+\nu)}{2}\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} - \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2}\phi_y + \frac{D(1-\nu)}{2}\nabla^2 \phi_y + \frac{D(1+\nu)}{2}\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} = -m_y - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2}\frac{\partial q}{\partial y} \quad (2.17)$$

$$\frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2}\left(\nabla^2 w_0 + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y}\right) = -q \quad (2.18)$$

Escrevendo na forma matricial as Equações (2.16), (2.17) e (2.18) e formando o sistema de equações de equilíbrio em termos dos deslocamentos, resulta em:

$$\begin{bmatrix} -s_1 + \frac{D(1-\nu)}{2}\nabla^2 + D\frac{(1+\nu)}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} & D\frac{(1+\nu)}{2}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -s_1\frac{\partial}{\partial x} \\ D\frac{(1+\nu)}{2}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -s_1 + D\frac{(1-\nu)}{2}\nabla^2 + D\frac{(1+\nu)}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} & -s_1\frac{\partial}{\partial y} \\ s_1\frac{\partial}{\partial x} & s_1\frac{\partial}{\partial y} & s_1\nabla^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ w_0 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} m_x + \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2}\frac{\partial q}{\partial x} \\ m_y + \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2}\frac{\partial q}{\partial y} \\ q \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

onde $s_1 = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2}$.

A equação (2.19) é chamada de equação governante, escrita na forma matricial.

2.2 Placas de Mindlin

A teoria de placas conhecida como teoria de placas por deformação por cortante de primeira ordem é proposta por Raymond Mindlin em 1951. As hipóteses básicas dessa teoria são:

- a) a placa possui pequena espessura quando comparada com a largura e o comprimento da mesma;
- b) o material é isotrópico e elástico linear homogêneo;
- c) as componentes que tangenciam as faces da placa têm valor nulo;
- d) os pontos pertencentes à normal ao plano médio da placa depois da deformação por flexão permanecem numa direção linear, mas não normal ao plano médio.

Além disso, a teoria de Mindlin parte de campos de deslocamentos nas direções axiais (u , v) e transversal (w) assumidos como:

$$\begin{cases} u(x, y, z) = z\phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = z\phi_y(x, y) \end{cases} \quad \text{ou} \quad u_\alpha = z\phi_\alpha \quad (2.20a)$$

$$W(x, y, z) = w(x, y) = u_3 \quad (2.20b)$$

onde ϕ_x , ϕ_y e w são as rotações e deslocamento transversal, definidos no plano médio da placa. Além disso, z é a coordenada na espessura.

As deformações angulares (distorções) podem ser escritas em função de (2.20a) e (2.20b) como:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{z}{2} (\phi_{\alpha,\beta} + \phi_{\beta,\alpha}) \quad (2.20c)$$

$$\varepsilon_{3\alpha} = \frac{1}{2} (\phi_\alpha + w_{,\alpha}) \quad (2.20d)$$

Convém notar que as distorções transversas em (2.20d) independem da coordenada z , sendo, portanto, constantes ao longo da espessura.

Considerando a placa composta de um material homogêneo, isotrópico, e elástico-linear, as relações tensão-deslocamento no plano podem ser escritas a partir de (2.20c) e da Lei de Hooke como:

$$\sigma_{\alpha\beta} = E \frac{(1-\nu)}{2} z \left(\phi_{\alpha,\beta} + \phi_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} \phi_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) \quad (2.20e)$$

Já as relações das tensões tangenciais transversas com os deslocamentos podem ser escritas combinando-se a lei de Hooke com (2.20d), resultando em:

$$\sigma_{3\alpha} = G (\phi_\alpha + w_{,\alpha}) \quad (2.20f)$$

onde G é o módulo de elasticidade transversal do material.

As resultantes de tensões associadas às Equações (2.20e) podem ser escritas como:

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\beta} z dz = \frac{D(1-\nu)}{2} (\phi_{\alpha,\beta} + \phi_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} \phi_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta}) \quad (2.20g)$$

onde $M_{\alpha\beta}$ são os momentos fletores (M_{11} , M_{22}) e momentos volventes (M_{12}).

Já as resultantes de tensões tangenciais transversas na direção transversal (forças cortantes) são dadas por:

$$Q_\alpha = \kappa \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{3\alpha} z dz = \kappa G h (\phi_\alpha + w_{,\alpha}) \quad (2.20h)$$

onde κ é o fator de correção de cisalhamento (às vezes chamado de fator de forma) da seção transversal.

Convém notar que a finalidade desse fator κ é compatibilizar o valor da energia de deformação obtida por uma distribuição constante de tensões tangenciais transversas ao longo da espessura da placa com aquele valor esperado da energia de deformação que seria obtido se a distribuição de tensões tangenciais transversas ao longo da espessura fosse quadrática. Alguns valores para o fator de forma podem ser encontrados na literatura. No caso de vigas, tem-se: $\kappa = 5/6$, Wang *et al.* (2000); $\kappa = (5 + \nu)/(6 + \nu)$, Timoshenko (1922); $\kappa = 10(1 + \nu)/(12 + 11\nu)$, Cowper (1966). Para placas, tem-se por exemplo: $\kappa = \pi^2/12$, Andrade (2001); e $\kappa = 5/(6 - \nu)$, Stephen (1997). Além disso, Hull (2005) propõe uma expressão analítica complicada para o fator de correção para a placa de Mindlin $\kappa = (12D\rho\omega^2p^2 - \rho^2h^3\omega^4)/(12DGp^4 - G\rho h^3\omega^2\rho^2 - 12G\rho h\omega^2)$, levando-se em conta a dependência de várias propriedades tais como: o número de ondas (p) e frequência(ω) da resposta dinâmica, módulo de flexão (D), módulo de elasticidade transversal(G), densidade(ρ) e espessura(h) da placa.

Na seção 2.1, as equações de equilíbrio da placa de Reissner foram obtidas empregando-se o cálculo variacional. Nesta, as equações governantes da placa de Mindlin são obtidas pelo balanço direto de força e de momentos. Seja um estado de forças definido em uma região diferencial da placa conforme indicado na Figura 2.4.

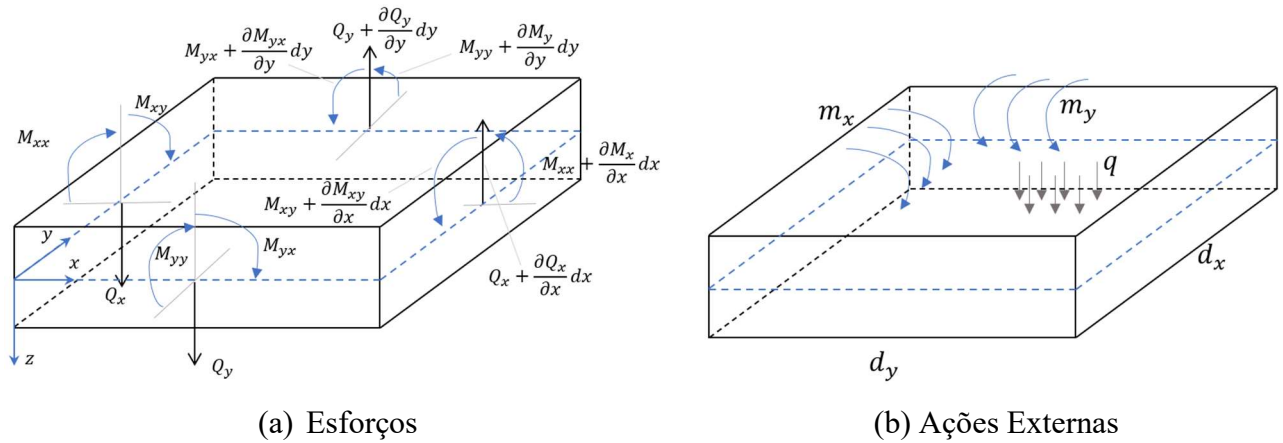


Figura 2.4 – Balanço de força e de momentos.

Fazendo-se o equilíbrio em momentos respectivamente nas direções x e y, fica:

$$\begin{aligned} \sum M_x = 0 &\rightarrow M_x dx + M_{yx} dx - \left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx\right) dy - \left(M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy\right) dx + Q_x dx dy - m_x dx dy = 0 \\ \sum M_y = 0 &\rightarrow M_y dx + M_{xy} dy - \left(M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy\right) dx - \left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx\right) dy + Q_y dx dy - m_y dx dy = 0 \end{aligned} \quad (2.20i)$$

Fazendo-se um equilíbrio de força vertical, resulta em:

$$\sum F = 0 \rightarrow Q_x dy + Q_y dx - \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy - \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx - q dx dy = 0 \quad (2.20j)$$

Após as simplificações nas equações (2.20i) e (2.20j), as equações governantes em esforços ficam:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + Q_x - m_x &= 0 \\ -\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + Q_y - m_y &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ ou } M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha + m_\alpha = 0 \quad (2.20l)$$

$$-\frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{\partial Q_y}{\partial y} - q = 0 \text{ ou } Q_{\alpha,\alpha} + q = 0 \quad (2.20m)$$

Substituindo-se convenientemente as relações (2.20g) e (2.20h) em (2.20l) e (2.20m), resulta na equação governante em deslocamentos da placa de Mindlin:

$$\begin{bmatrix} -s_1 + \frac{D(1-\nu)}{2} \nabla^2 + D \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & D \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -s_1 \frac{\partial}{\partial x} \\ D \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -s_1 + D \frac{(1-\nu)}{2} \nabla^2 + D \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & -s_1 \frac{\partial}{\partial y} \\ s_1 \frac{\partial}{\partial x} & s_1 \frac{\partial}{\partial y} & s_1 \nabla^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ w_0 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ q \end{Bmatrix} \quad (2.20n)$$

onde $s_1 = \frac{\kappa G h}{2}$.

Convém notar que a matriz dos operadores diferenciais da placa de Mindlin em (2.20n) é idêntico a matriz dos operadores no problema de Reissner em (2.19), se um fator de forma $\kappa = 5/6$ for usado em s_1 para Mindlin. No entanto, as variáveis tem significado distintos. Enquanto em Mindlin os deslocamentos são reais definidos no plano médio da placa, essas correspondentes variáveis no modelo de Reissner significam valores médios ponderados na espessura.

2.3 Soluções Fundamentais

A solução fundamental é formulada como a resposta, em um ponto genérico s (ponto campo), de um domínio fundamental infinito, causada pela aplicação de uma fonte pontual em outro ponto p (ponto fonte) desse domínio. O ponto fonte é representado pela função Delta de Dirac $\delta(p, s)$, que possui as seguintes propriedades (Aliabadi, 2002):

$$\delta(p, s) = 0, \text{ quando } p \neq s$$

$$\delta(p, s) = \infty, \text{ quando } p = s$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(s) \delta(p, s) d\Omega = u(p) \quad (2.21)$$

onde Ω representa o domínio do problema.

Analogamente ao problema real, Equação (2.19), a equação governante do problema fundamental, quando a fonte estiver aplicada em força, $q^{*q}(p, s) = \delta(p, s)$, $m_x^{*q} = 0$ e $m_y^{*q} = 0$, é dada por:

$$\begin{bmatrix} -s_1 + \frac{D(1-\nu)}{2} \nabla^2 + D \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & D \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -s_1 \frac{\partial}{\partial x} \\ D \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -s_1 + D \frac{(1-\nu)}{2} \nabla^2 + D \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & -s_1 \frac{\partial}{\partial y} \\ s_1 \frac{\partial}{\partial x} & s_1 \frac{\partial}{\partial y} & s_1 \nabla^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} m_x^{*q} \\ m_y^{*q} \\ q^{*q} \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

Da mesma forma, quando o problema fundamental estiver solicitado pela fonte em momento m_x tem-se $m_x^{*m_x}(p, s) = \delta(p, s)$, $q^{*m_x} = 0$ e $m_y^{*m_x} = 0$, sua equação governante fica:

$$\begin{bmatrix} -s_1 + \frac{D(1-\nu)}{2} \nabla^2 + D \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & D \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -s_1 \frac{\partial}{\partial x} \\ D \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -s_1 + D \frac{(1-\nu)}{2} \nabla^2 + D \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & -s_1 \frac{\partial}{\partial y} \\ s_1 \frac{\partial}{\partial x} & s_1 \frac{\partial}{\partial y} & s_1 \nabla^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} m_x^{*m_x} \\ m_y^{*m_x} \\ q^{*m_x} \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

Quando o problema fundamental estiver solicitado pela fonte em momento m_y tem-se $m_y^{*m_y}(p, s) = \delta(p, s)$, $q^{*m_y} = 0$ e $m_x^{*m_y} = 0$, reduzindo a equação governante a:

$$\begin{bmatrix} -s_1 + \frac{D(1-\nu)}{2} \nabla^2 + D \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & D \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -s_1 \frac{\partial}{\partial x} \\ D \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -s_1 + D \frac{(1-\nu)}{2} \nabla^2 + D \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & -s_1 \frac{\partial}{\partial y} \\ s_1 \frac{\partial}{\partial x} & s_1 \frac{\partial}{\partial y} & s_1 \nabla^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} m_x^{*m_y} \\ m_y^{*m_y} \\ q^{*m_y} \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

Pode-se expressar as Equações (2.22), (2.23) e (2.24) como:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} -s_1 + \frac{D(1-\nu)}{2} \nabla^2 + D \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & D \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -s_1 \frac{\partial}{\partial x} \\ D \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -s_1 + D \frac{(1-\nu)}{2} \nabla^2 + D \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & -s_1 \frac{\partial}{\partial y} \\ s_1 \frac{\partial}{\partial x} & s_1 \frac{\partial}{\partial y} & s_1 \nabla^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{bmatrix} \\
& = - \begin{bmatrix} \delta(p, s) & 0 & 0 \\ 0 & \delta(p, s) & 0 \\ 0 & 0 & \delta(p, s) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.25}$$

A equação (2.25) pode ser escrita da forma:

$$[B][U] = [f] \tag{2.26}$$

A Equação (2.26) define a matriz de influência $[B]$, a matriz dos deslocamentos $[U]$ e a matriz das fontes $[f]$.

$$[B] = \begin{bmatrix} -s_1 + \frac{D(1-\nu)}{2} \nabla^2 + D \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & D \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -s_1 \frac{\partial}{\partial x} \\ D \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -s_1 + D \frac{(1-\nu)}{2} \nabla^2 + D \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & -s_1 \frac{\partial}{\partial y} \\ s_1 \frac{\partial}{\partial x} & s_1 \frac{\partial}{\partial y} & s_1 \nabla^2 \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

$$[U] = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

$$[f] = - \begin{bmatrix} \delta(p, s) & 0 & 0 \\ 0 & \delta(p, s) & 0 \\ 0 & 0 & \delta(p, s) \end{bmatrix} = -\delta(p, s)[I] \tag{2.29}$$

Convém notar que a Equação (2.26) representa a equação de equilíbrio em deslocamentos. Tal qual no problema real (Eq. (2.19)), as equações governantes do problema fundamental podem ser escritas em função dos esforços como:

$$P_{\gamma\alpha}^* = M_{\gamma\alpha\beta}^* n_\beta \tag{2.30}$$

$$P_{\gamma 3}^* = Q_{\gamma\alpha}^* n_\alpha \tag{2.31}$$

$$M_{\gamma\alpha\beta,\beta}^* - Q_{\gamma\alpha}^* + F_{\gamma\alpha}^* = 0 \tag{2.32}$$

$$Q_{\gamma\alpha,\alpha}^* + F_{\gamma 3}^* = 0 \tag{2.33}$$

$$F_{\gamma\alpha}^* = \delta(p, s)\delta_{\gamma\alpha} \text{ e } F_{\gamma 3}^* = \delta(p, s)\delta_{3j}, \text{ com } j = 1, 2, 3; \gamma = 1, 2; \quad (2.34)$$

ou reescrevendo (2.34) em notação indicial:

$$F_{\gamma i}^* = \delta(p, s)\delta_{ij}, \text{ com } i, j = 1, 2, 3; \gamma = 1, 2; \quad (2.35)$$

sendo as Equações (2.30) e (2.31) as forças de superfície, as Equações (2.32) e (2.33) as equações de equilíbrio e os índices α e β variando de 1 e 2.

A Equação do problema fundamental da placa de Reissner (Equação (2.25)) constitui-se em um sistema acoplado de variáveis no qual o Método de Hörmander (1963) é utilizado para o desacoplamento. As soluções fundamentais do MEC para a teoria de placas de Reissner não são deduzidas neste trabalho, tendo sido obtidas por Vander Weeën (1982) e expressas por:

$$u_{\alpha\beta}^* = \frac{1}{8\pi D(1-\nu)} \{ [8B - (1-\nu)(2\ln z - 1)]\delta_{\alpha\beta} - [8A + 2(1-\nu)]r_{,\alpha}r_{,\beta} \} \quad (2.36a)$$

$$u_{\alpha 3}^* = -u_{3\alpha}^* \frac{1}{8\pi D} (2\ln z - 1) r r_{,\alpha} \quad (2.36b)$$

$$u_{33}^* = \frac{1}{8\pi D(1-\nu)\lambda^2} [(1-\nu)z^2(2\ln z - 1) - 8\ln z] \quad (2.36c)$$

onde:

r é a distância entre o ponto campo s e o ponto fonte p ;

$$z = \lambda r \quad (2.37a)$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{10}}{h} \quad (2.37b)$$

$$r_{,\alpha} = \frac{x_{\alpha}(s) - x_{\alpha}(p)}{r} \quad (2.38a)$$

$$r_{,\beta} = \frac{x_{\beta}(s) - x_{\beta}(p)}{r} \quad (2.38b)$$

os índices α e β variam de 1 a 2.

$$A = K_0(z) + \frac{2}{z} \left[K_1(z) - \frac{1}{z} \right] \quad (2.39)$$

$$B = K_0(z) + \frac{1}{z} \left[K_1(z) - \frac{1}{z} \right] \quad (2.40)$$

Sendo, respectivamente, $K_0(z)$ e $K_1(z)$ as funções de Bessel modificadas de segunda espécie de ordem zero e um, podendo ser calculadas através de polinômios dados por Abramowitz e Stegun (1965).

Além das soluções fundamentais em deslocamentos, outras soluções fundamentais associadas aos esforços podem ser escritas. Para este fim, tem-se a relação:

$$\begin{aligned}
 p_{\gamma\alpha}^*(p, s) &= M_{\alpha\beta\gamma}^*(p, s)n_\beta \\
 p_{3\alpha}^*(p, s) &= M_{\alpha\beta 3}^*(p, s)n_\beta \\
 p_{\gamma 3}^*(p, s) &= Q_{3\beta\gamma}^*(p, s)n_\beta \\
 p_{33}^*(p, s) &= Q_{3\beta 3}^*(p, s)n_\beta
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

sendo:

$M_{\alpha\beta\gamma}^*$ os momentos fundamentais no ponto s , causados por carregamento unitário aplicado no ponto fonte p , nas direções generalizadas γ ;

$M_{\alpha\beta 3}^*$ os momentos fundamentais no ponto s , causados por carregamento unitário aplicado no ponto fonte p , na direção x_3 ;

$Q_{3\beta\gamma}^*$ os esforços cortantes fundamentais no ponto s , causados por carga concentrada unitária aplicada no ponto fonte p , nas direções generalizadas γ ;

$Q_{3\beta 3}^*$ os esforços cortantes fundamentais no ponto s , causados por carga concentrada unitária aplicada no ponto fonte p , na direção x_3 .

Analogamente ao problema real (Equação (2.19)), as relações momento-curvatura para o problema fundamental ficam:

$$M_{\alpha\beta\gamma}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left(u_{\gamma\alpha,\beta}^* + u_{\gamma\beta,\alpha}^* + \frac{2\nu}{(1-\nu)} u_{\gamma\theta,\theta}^* \delta_{\alpha,\beta} \right) \tag{2.42a}$$

$$M_{\alpha\beta 3}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left(u_{3\alpha,\beta}^* + u_{3\beta,\alpha}^* + \frac{2\nu}{(1-\nu)} u_{3\theta,\theta}^* \delta_{\alpha,\beta} \right) \tag{2.42b}$$

$$Q_{\beta\gamma}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \lambda^2 (u_{\gamma\beta}^* + u_{\gamma 3,\beta}^*) \tag{2.42c}$$

$$Q_{\beta 3}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \lambda^2 (u_{3\beta}^* + u_{33,\beta}^*) \tag{2.42d}$$

As derivadas de u_{ij}^* , que aparecem nas equações (2.42), são obtidas derivando-se as equações (2.36a-c), em relação às coordenadas do ponto campo s . Considerando as equações (2.37) a (2.40) pode-se obter:

$$\frac{\partial z}{\partial x_\alpha(s)} = \lambda r_{,\alpha} \quad (2.43a)$$

$$\frac{\partial A}{\partial x_\alpha(s)} = -\frac{r_{,\alpha}}{r} (zK_1(z) + 2A) \quad (2.43b)$$

$$\frac{\partial B}{\partial x_\alpha(s)} = -\frac{r_{,\alpha}}{r} (zK_1(z) + A) \quad (2.43c)$$

$$\frac{\partial r_{,\beta}}{\partial x_\alpha(s)} = \frac{\delta_{\alpha\beta} - r_{,\alpha}r_{,\beta}}{r} \quad (2.43d)$$

Obtendo a derivada das equações (2.36a-c) em relação às coordenadas do ponto campo s e utilizando as equações (2.37) e (2.38), as seguintes derivadas dos deslocamentos fundamentais podem ser escritas (Karam, 1986):

$$\begin{aligned} u_{\alpha\beta,\gamma}^* &= -\frac{1}{4\pi D(1-\nu)r} [(4A + 4zK_1(z) + 1 - \nu)r_{,\gamma}\delta_{\alpha\beta} - \\ &\quad - 2(8A + 2zK_1(z) + 1 - \nu)r_{,\alpha}r_{,\beta}r_{,\gamma} + (4A + 1 - \nu)(\delta_{\alpha\gamma}r_{,\beta} + \delta_{\beta\gamma}r_{,\alpha})] \\ u_{\alpha 3,\gamma}^* &= \frac{1}{8\pi D} [\delta_{\alpha\beta}(2 \ln z - 1) + 2r_{,\alpha}r_{,\beta}] \\ u_{3\alpha,\beta}^* &= -u_{\alpha 3,\beta}^* \\ u_{\alpha 3,\gamma}^* &= \frac{r_{,\alpha}}{8\pi D(1-\nu)\lambda^2 r} [(1-\nu)z^2(2 \ln z - 1) - 8] \end{aligned} \quad (2.44)$$

Realizando a substituição de (2.36a-c) e (2.44) em (2.42a-d), após reagrupamento dos termos, tem-se:

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta\gamma}^* &= -\frac{1}{4\pi r} [(4A + 2zK_1(z) + 1 - \nu)(\delta_{\gamma\beta}r_{,\alpha} + \delta_{\gamma\alpha}r_{,\beta}) - \\ &\quad - 2(8A + 2zK_1(z) + 1 - \nu)r_{,\alpha}r_{,\beta}r_{,\gamma} + (4A + 1 + \nu)\delta_{\alpha\beta}r_{,\gamma}] \\ M_{\alpha\beta 3}^* &= -\frac{(1-\nu)}{8\pi} \left[\left(2 \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \ln z - 1 \right) \delta_{\alpha\beta} + 2r_{,\alpha}r_{,\beta} \right] \\ Q_{\beta\gamma}^* &= -\frac{\lambda^2}{2\pi} [B\delta_{\gamma\beta} - Ar_{,\gamma}r_{,\beta}] \\ Q_{\beta 3}^* &= -\frac{1}{2\pi\lambda} r_{,\beta} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Substituindo (2.45) em (2.41) obtém-se (Karam, 1986):

$$\begin{aligned}
p_{\gamma\alpha}^* &= -\frac{1}{4\pi r} \left[(4A + 2zK_1(z) + 1 - \nu)(\delta_{\alpha\gamma}r_{,n} + r_{,\alpha}n_{\gamma}) + \right. \\
&\quad \left. + (4A + 1 + \nu)r_{,\gamma}n_{\alpha} - 2(8A + 2zK_1(z) + 1 - \nu)r_{,\alpha}r_{,\gamma}r_{,n} \right] \\
p_{\gamma 3}^* &= \frac{\lambda^2}{2\pi} [Bn_{\gamma} - Ar_{,\gamma}r_{,n}] \\
p_{3\alpha}^* &= -\frac{(1-\nu)}{8\pi} \left[\left(2 \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \ln z - 1 \right) n_{\alpha} + 2r_{,\alpha}r_{,n} \right] \\
p_{33}^* &= -\frac{1}{2\pi\lambda} r_{,n}
\end{aligned} \tag{2.46}$$

onde $r_{,n}$ é a derivada de r em relação à normal no ponto campo s , sendo definida por:

$$r_{,n} = \frac{\partial r}{\partial n(s)} = r_{,\alpha}n_{\alpha} \tag{2.47}$$

2.4 Equações Integrais de Deslocamentos e Esforços

Nesta seção serão apresentadas as representações integrais para as placas de Reissner e Mindlin.

2.4.1 Equações Integrais em Coordenadas Globais

As equações governantes escritas em equações diferenciais parciais acopladas podem ser transformadas em equações integrais equivalentes usando técnicas como o método dos resíduos ponderados (MRP). A ideia do MRP é que se forem assumidas soluções aproximadas para deslocamentos e rotações, resíduos são produzidos na equação governante (Eq. (2.19)), no domínio e nas relações das condições de contorno do problema (Eq. (2.14)). Então, para distribuir o erro, ambos resíduos das equações de equilíbrio no domínio e relações de deslocamento e força no contorno são ponderados por funções-peso tomadas como as soluções fundamentais do problema. Assim, uma relação integral para a placa de Reissner pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} [(M_{\alpha\beta,\beta} - Q_{\alpha})u_{\gamma\alpha}^* + (Q_{\alpha,\alpha} + q)u_{\gamma 3}^*] d\Omega = \int_{\Gamma_u} (\bar{u}_j - u_j)p_{\gamma j}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_p} (p_j - \bar{p}_j)u_{\gamma j}^* d\Gamma \tag{2.48}$$

Integrando o primeiro termo da equação (2.48) por partes, obtém-se:

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} M_{\alpha\beta} u_{\gamma\alpha,\beta}^* d\Omega - \int_{\Omega} Q_{\alpha} (u_{\gamma\alpha}^* + u_{\gamma 3,\alpha}^*) d\Omega + \int_{\Omega} q u_{\gamma 3}^* d\Omega = \\
& = - \int_{\Gamma_p} p_j u_{\gamma j}^* d\Gamma - \int_{\Gamma_p} \bar{p}_j u_{\gamma j}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_u} (\bar{u}_j - u_j) p_{\gamma j}^* d\Gamma
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Considerando as expressões das deformações associadas ao campo de deslocamento, equações (2.2), e substituindo na equação (2.49):

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} M_{\gamma\alpha\beta}^* u_{\alpha,\beta} d\Omega - \int_{\Omega} Q_{\gamma\alpha}^* (u_{\alpha} + u_{3,\alpha}) d\Omega - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \int_{\Omega} q \delta_{\alpha\beta} u_{\gamma\alpha,\beta}^* d\Omega + \int_{\Omega} q u_{\gamma 3}^* d\Omega = \\
& = - \int_{\Gamma_u} p_j u_{\gamma j}^* d\Gamma - \int_{\Gamma_p} \bar{p}_j u_{\gamma j}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_u} (\bar{u}_j - u_j) p_{\gamma j}^* d\Gamma
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Integrando novamente por partes e utilizando as Equações (2.30) a (2.33), fica:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} Q_{\gamma\alpha}^* u_{\alpha} d\Omega - \int_{\Omega} F_{\gamma\alpha}^* u_{\alpha} d\Omega - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \int_{\Omega} q u_{\gamma\alpha,\alpha}^* d\Omega - \int_{\Omega} Q_{\gamma\alpha}^* u_{\alpha} d\Omega - \int_{\Omega} F_{\gamma 3}^* u_3 d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} q u_{\gamma 3}^* d\Omega = - \int_{\Gamma_u} p_j u_{\gamma j}^* d\Gamma - \int_{\Gamma_p} \bar{p}_j u_{\gamma j}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \bar{u}_j p_{\gamma j}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_p} u_j p_{\gamma j}^* d\Gamma
\end{aligned} \tag{2.51}$$

A Equação (2.51) pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} F_{\gamma j}^* u_j d\Omega + \int_{\Gamma} (u_j p_{\gamma j}^* - p_j u_{\gamma j}^*) d\Gamma = \int_{\Omega} q \left(u_{\gamma 3}^* - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{\gamma\alpha,\alpha}^* \right) d\Omega \tag{2.52}$$

Substituindo a equação (2.35) em (2.52) obtém-se:

$$\int_{\Omega} \delta(p, s) \delta_{ij} u_j(s) d\Omega + \int_{\Gamma} (u_j p_{\gamma j}^* - p_j u_{\gamma j}^*) d\Gamma = \int_{\Omega} q \left(u_{\gamma 3}^* - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{\gamma\alpha,\alpha}^* \right) d\Omega \tag{2.53}$$

Aplicando-se a propriedade de translação do delta de Dirac em (2.53), pode-se então obter as equações integrais para os deslocamentos generalizados sendo válidas para um ponto p qualquer situado no interior da região Ω :

$$\begin{aligned}
u_i &= \int_{\Gamma} [u_{ij}^*(p, s) p_j(s) - p_{ij}^*(p, s) u_j(s)] d\Gamma(s) + \\
&+ \int_{\Omega} \left[u_{i3}^*(p, s) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha,\alpha}^*(p, s) \right] q(s) d\Omega(s)
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Convém notar que a equação (2.54) é válida para pontos no domínio. Se uma solução singular do MEC for desejada, o ponto-fonte tem que ser colocado no contorno. Como

consequência ocorrem singularidades nas soluções fundamentais, necessitando a determinação de saltos "jumps" nas equações integrais para torná-las válidas em colocações no contorno. Em Karam (1986), são discutidos os procedimentos para tal fim de forma que as equações integrais de contorno podem ser expressas por:

$$C_{ij}(p)u_j(p) = \int_{\Gamma} [u_{ij}^*(p, s)p_j(x) - p_{ij}^*(p, s)u_j(s)]d\Gamma(s) + \int_{\Omega} \left[u_{i3}^*(p, s) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha, \alpha}^*(p, s) \right] q(s)d\Omega(s) \quad (2.55)$$

onde

$$C_{ij}(p) = c\delta_{ij} \quad (2.56a)$$

no qual c depende da região de colocação do ponto fonte p :

$$c \begin{cases} = 1 & \text{se } p \text{ é ponto no interior do domínio;} \\ = \frac{1}{2} & \text{se } p \text{ é ponto no contorno suave;} \\ = 0 & \text{se } p \text{ estiver no exterior (fora do domínio).} \end{cases} \quad (2.56b)$$

Westphal (1990) discute algumas implicações sobre a aplicação do MEC para placas de Reissner e Mindlin. Uma delas é que uma forma análoga às equações integrais de Reissner podem ser usadas para representar o problema de Mindlin se o último termo na integral de carga em (2.55) for desconsiderado. Então, uma equação para ambos os modelos pode ser escrita como:

$$C_{ij}(p)u_j(p) = \int_{\Gamma} [u_{ij}^*(p, s)p_j(x) - p_{ij}^*(p, s)u_j(s)]d\Gamma(s) + \int_{\Omega} [u_{i3}^*(p, s) - \text{fat } u_{i\alpha, \alpha}^*(p, s)]q(s)d\Omega(s) \quad (2.57)$$

onde

$$\text{fat} \begin{cases} = \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} & \text{para placas de Reissner;} \\ = 0 & \text{para placas de Mindlin.} \end{cases}$$

As resultantes de tensão associadas com os momentos fletores e os esforços cisalhantes são, respectivamente:

$$M_{\alpha\beta} = \frac{D(1-\nu)}{2} \left(u_{\alpha, \beta} + u_{\beta, \alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{\gamma, \gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) + q \text{ fat } \delta_{\alpha\beta} \quad (2.58a)$$

$$Q_{\alpha} = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} (u_{\alpha} + u_{3, \alpha}) \quad (2.58b)$$

onde $D = Eh^3/[12(1 - \nu^2)]$, $\lambda^2 = 10/h^2$, h é a espessura da placa, E e ν são, respectivamente, o modulo de Young e o coeficiente de Poisson.

Conforme a equação (2.58a), os momentos fletores/volventes podem ser escritos em função das curvaturas, e as forças cortantes (2.58b) podem ser escritas em função da rotação e da inclinação. Desta forma, antes de se determinar esses esforços no domínio é necessário escrever as equações integrais para as curvaturas e inclinações, conforme mostrado a seguir:

$$u_{\alpha,\beta}(p) = \int_{\Gamma} [u_{\alpha\gamma,\beta}^*(p,s)p_{\gamma}(s) - p_{\alpha\gamma,\beta}^*(p,s)u_{\gamma}(s)]d\Gamma(s) + \int_{\Omega} [u_{\alpha 3,\beta}^*(p,S) - \text{fat } u_{\alpha\gamma,\gamma\beta}^*(p,S)]q(S)d\Omega(S) \quad (2.59a)$$

$$u_{3,\beta}(p) = \int_{\Gamma} [u_{3\gamma,\beta}^*(p,s)p_{\gamma}(s) - p_{3\gamma,\beta}^*(p,s)u_{\gamma}(s)]d\Gamma(s) + \int_{\Omega} [u_{33,\beta}^*(p,S) - \text{fat } u_{3\gamma,\gamma\beta}^*(p,S)]q(S)d\Omega(S) \quad (2.59b)$$

onde $u_{\alpha\gamma,\gamma\beta}^*(p,s) = -\frac{1}{2\pi Dr^2}(\delta_{\alpha\beta} - 2r_{,\alpha}r_{,\beta})$ são dados por Karam (1986, pp. 44, 46); $u_{3\gamma,\gamma\beta}^*(p,s) = \frac{1}{2\pi Dr}r_{,\beta}$; $u_{\alpha\gamma,\beta}^*$ e $u_{3\gamma,\beta}^*$ são dadas por:

$$u_{\alpha\beta,\gamma}^* = \frac{1}{4\pi D(1-\nu)r} [(4A + 4zK_1(z) + 1 - \nu)r_{,\gamma}\delta_{\alpha\beta} - 2(8A + 2zK_1(z) + 1 - \nu)r_{,\alpha}r_{,\beta}r_{,\gamma} + (4A + 1 - \nu)(\delta_{\alpha\gamma}r_{,\beta} + \delta_{\beta\gamma}r_{,\alpha})] \quad (2.60a)$$

$$u_{\alpha 3,\gamma}^* = -\frac{1}{8\pi D} [\delta_{\alpha\beta}(2\ln z - 1) + 2r_{,\alpha}r_{,\beta}] \quad (2.60b)$$

$$u_{3\alpha,\beta}^* = -u_{\alpha 3,\beta}^* \quad (2.60c)$$

$$u_{\alpha 3,\gamma}^* = -\frac{r_{,\alpha}}{8\pi D(1-\nu)\lambda^2 r} [(1-\nu)z^2(2\ln z - 1) - 8] \quad (2.60d)$$

e $p_{\alpha\gamma,\beta}^*$ e $p_{3\gamma,\beta}^*$ são dadas por:

$$p_{\gamma\alpha,\beta}^* = \frac{1}{4\pi r^2} [(4A + 2zK_1(z) + 1 - \nu)(\delta_{\alpha\gamma}n_{\beta} + \delta_{\alpha\beta}n_{\gamma}) + (4A + 1 + \nu)\delta_{\gamma\beta}n_{\alpha} - 2(8A + 2zK_1(z) + z^2K_0(z) + 1 - \nu)(n_{\gamma}r_{,\beta}r_{,\alpha} + \delta_{\alpha\gamma}r_{,\beta}r_{,\alpha}) - 2(8A + 2zK_1(z) + 1 - \nu)(n_{\beta}r_{,\gamma}r_{,\alpha} + \delta_{\alpha\beta}r_{,\gamma}r_{,\alpha} + \delta_{\gamma\beta}r_{,\alpha}r_{,\alpha}) - 2(8A + 2zK_1(z) + 1 - \nu)n_{\alpha}r_{,\gamma}r_{,\beta} + 4(24A + 8zK_1(z) + z^2K_0(z) + 2 - 2\nu)r_{,\gamma}r_{,\alpha}r_{,\beta}r_{,\alpha}] \quad (2.61a)$$

$$p_{\gamma 3, \beta}^* = \frac{\lambda^2}{2\pi r} [(zK_1(z) + A)r_{, \beta}r_{, n} + Ar_{, \gamma}n_{\beta} - (4A + zK_1(z))r_{, \gamma}r_{, \beta}r_{, n} + A\delta_{\gamma \beta}r_{, n}] \quad (2.61b)$$

$$p_{3\alpha, \beta}^* = \frac{(1-\nu)}{8\pi} \left[\frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} n_{\alpha}r_{, \beta} - 2r_{, \alpha}r_{, \beta}r_{, n} + r_{, \alpha}r_{, \beta} + \delta_{\alpha \beta}r_{, n} \right] \quad (2.61c)$$

$$p_{33, \beta}^* = \frac{1}{2\pi r^2} [n_{\beta} - 2r_{, \beta}r_{, n}] \quad (2.61d)$$

2.4.2 Transformação das Integrais de Domínio em Integrais de Contorno

Nesta seção serão descritos os procedimentos para transformação de integrais de domínio em equações integrais de contorno equivalentes. Um ponto de destaque é a subseção 2.4.2.2 onde o Método da Reciprocidade Múltipla é estabelecido pela primeira vez para produzir uma formulação pura do MEC em placas de Reissner e Mindlin submetidas a carregamentos polinomiais arbitrários.

2.4.2.1 Carregamento Constante

As integrais de domínio nos problemas de flexão de placas, incorporando a deformação por cortante, submetidas a cargas distribuídas constantes foram transformadas em integrais de contorno usando o teorema da divergência, conforme Vander Weeën (1982), Long *et al.* (1998), Rashed (2000) e Oliveira & Karam (2016).

A integral de domínio que aparece na equação (2.55) representa a contribuição da carga transversal q . Essa integral da carga pode ser transformada em uma integrais de contorno por meio de manipulações apropriadas, conforme descrito em Vander Weeën (1982). Assim, considerando-se a carga uniformemente distribuída q e utilizando-se o teorema da divergência obtém-se:

$$\begin{aligned} q \int_{\Omega} [u_{i3}^*(p, s) - \text{fat } u_{i\alpha, \alpha}^*(p, s)] d\Omega(s) = \\ = q \int_{\Gamma} [v_{i, \alpha}^*(p, s) - \text{fat } u_{i\alpha}^*(p, s)] n_{\alpha} d\Gamma(s) \end{aligned} \quad (2.62)$$

onde a função $v_{i, \alpha}^*(p, s)$ deve satisfazer a

$$v_{i, \alpha\alpha}^*(p, s) = u_{i3}^*(p, s) \quad (2.63)$$

As expressões fundamentais $v_{i, \alpha}^*(p, s)$ que atendem à condição descrita na equação (2.63) são dadas por (Karam, 1986):

$$v_{\alpha,\beta}^* = \frac{r^2}{128\pi D} [\delta_{\alpha\beta}(4 \ln z - 5) + 2(4 \ln z - 3)r_{,\alpha}r_{,\beta}] \quad (2.64a)$$

$$v_{3,\beta}^* = -\frac{rr_{,\beta}}{128\pi D(1-\nu)\lambda^2} [32(2 \ln z - 1) - z^2(1-\nu)(4 \ln z - 5)] \quad (2.64b)$$

2.4.2.2 Carregamento Polinomial

Nesta seção é apresentada uma solução direta baseada no Método dos Elementos de Contorno, sem integrais de domínio, para placas de Reissner sujeitas a carregamentos polinomiais quaisquer. Com este propósito, é usado o Método da Reciprocidade Múltipla (MRM), que consiste em transformar integrais de domínio em uma série de integrais de contorno equivalentes, usando a segunda identidade de Green de modo recursivo. Além disso, as soluções fundamentais de alta ordem para flexão de placas incorporando a deformação por cortante, essenciais para o emprego do MRM, são também obtidas e apresentadas de forma explícita para todos os termos da série. Apesar da presente abordagem lidar diretamente com a distribuição do carregamento polinomial de qualquer ordem, esta solução via Método dos Elementos de Contornos (MEC) também pode ser aplicada a outras funções de distribuição de carga, se for possível expandi-las em séries polinomiais. Os resultados numéricos são apresentados para diferentes condições de contorno e funções de carga, como distribuições linear, duplo-quadrática, exponencial e duplo-senoidal. Os resultados do MEC são comparados às soluções analíticas e/ou numéricas, apresentando boa concordância entre os mesmos.

De acordo com Neves e Brebbia (1991), a grande restrição do uso do MRM em problemas genéricos é a dificuldade de se determinar explicitamente as soluções fundamentais de alta ordem usando a formula de recorrência. Em problemas de placas, a aplicação do MRM está restrita ao problema de Kirchhoff conforme mostrada por Sladek & Sladek (1996).

Na presente tese, é apresentada uma solução utilizando uma formulação pura do método dos elementos de contorno para os problemas de flexão em placa de Reissner e Mindlin submetidos a carregamentos polinomiais quaisquer. Usando a técnica da reciprocidade múltipla (MRM), as integrais de domínio de carregamento são transformadas em uma série de integrais de contorno equivalentes. Além disso, as soluções fundamentais de alta ordem, que são essenciais na solução MRM, são deduzidas de uma forma explícita, genérica e compatível com os termos da série. Finalmente, diferentes tipos de cargas distribuídas são apresentados para validar a eficácia desta solução em MEC puro.

As integrais de domínio nas equações (2.55), (2.59a) e (2.59b), respectivamente, mostram as contribuições da carga transversal na representação integral para deslocamento, curvatura e inclinação das placas de Reissner e Mindlin.

Se $g(S)$ é um polinômio de ordem n , contínuo em uma certa região Ω da placa, uma integral de domínio genérica associada às integrais de domínio da Eq. (2.55) pode ser expandida (conforme mostrado no Apêndice B) em uma somatória de integrais de contorno como se segue:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g(S) U_i^*(p, S) d\Omega(S) = & \sum_{k=1}^n \left(\int_{\Gamma} T_i^{*(k)}(p, s) \nabla^{2k-2} g(s) d\Gamma(s) \right) \\ & - \sum_{k=1}^n \left(\int_{\Gamma} \chi_i^{*(k)}(p, s) \nabla^{2k-2} q_{,j}(s) n_j d\Gamma(s) \right) \end{aligned} \quad (2.65)$$

onde $U_i^* = \begin{Bmatrix} U_{\alpha}^* \\ U_3^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{\alpha 3}^* - \text{fat } u_{\alpha\beta,\beta}^* \\ u_{33}^* - \text{fat } u_{3\beta,\beta}^* \end{Bmatrix}$, $T_i^{*(k)} = \begin{Bmatrix} T_{\alpha}^{*(k)} \\ T_3^{*(k)} \end{Bmatrix}$, $\chi_i^{*(k)} = \begin{Bmatrix} \chi_{\alpha}^{*(k)} \\ \chi_3^{*(k)} \end{Bmatrix}$, k é o número de vezes que a segunda identidade de Green é aplicada; $T_{\alpha}^{*(k)}$, $T_3^{*(k)}$, $\chi_{\alpha}^{*(k)}$, $\chi_3^{*(k)}$ são as soluções fundamentais de ordem k associadas com as integrais de contorno equivalentes das equações integrais de deslocamento.

A transformação da carga no domínio para a equação integral da rotação (Eq. 2.59a) é dada por:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g(S) W_{\alpha\gamma}^*(p, S) d\Omega(S) = & \sum_{k=1}^n \left(\int_{\Gamma} T_{\alpha,\gamma}^{*(k)}(p, s) \nabla^{2(k-1)} g(s) d\Gamma(s) \right) \\ & - \sum_{k=1}^n \left(\int_{\Gamma} \chi_{\alpha,\gamma}^{*(k)} \nabla^{2(k-1)}(p, s) g_{,j}(s) n_j d\Gamma(s) \right) \end{aligned} \quad (2.66)$$

onde $W_{\alpha\gamma}^* = \{u_{\alpha 3,\beta}^* - \text{fat } u_{\alpha\gamma,\gamma\beta}^*\}$; $T_{\alpha,\gamma}^{*(k)}$ e $\chi_{\alpha,\gamma}^{*(k)}$ são soluções fundamentais de alta ordem das integrais de contorno equivalentes associadas com as equações integrais de curvatura da placa.

A transformação da carga no domínio para a equação integral da inclinação (Eq. 2.59b) é dada por:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g(S) W_{3\gamma}^*(p, S) d\Omega(S) = & \sum_{k=1}^n \left(\int_{\Gamma} T_{3,\gamma}^{*(k)}(p, s) \nabla^{2(k-1)} g(s) d\Gamma(s) \right) \\ & - \sum_{k=1}^n \left(\int_{\Gamma} \chi_{3,\gamma}^{*(k)} \nabla^{2(k-1)}(p, s) q_{,j}(s) n_j d\Gamma(s) \right) \end{aligned} \quad (2.67)$$

onde $W_{3\gamma}^* = \{u_{33,\beta}^* - \text{fat } u_{3\gamma,\gamma\beta}^*\}$; $T_{3,\gamma}^{*(k)}$ e $\chi_{3,\gamma}^{*(k)}$ são soluções fundamentais de alta ordem das integrais de contorno equivalentes associadas com a equação integral da inclinação da placa.

A solução fundamental $\chi_i^{*(k)}$ é definida por meio da fórmula de recorrência:

$$\chi_i^{*(k+1)} = \nabla^2 \chi_i^{*(k)} \text{ e } \chi_i^{*(1)} = \nabla^2 U_i^* \quad (2.68)$$

onde k é o número de vezes que a segunda identidade de Green é aplicada; $i = \alpha, 3$ com $\alpha = 1, 2$.

Nesta tese é sugerida a seguinte solução para $\chi_\alpha^{*(k)}$ na Eq. (2.68):

$$\chi_\alpha^{*(k)} = \frac{2\beta_1 r_{,\alpha} r^{2k+1}}{8\pi D 4^k (k!)^2 (k+1)} - \text{fat} \cdot \psi \quad (2.69)$$

onde:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \left(\ln(\lambda r) - \sum_k \frac{4k+2}{4k(k+1)} - \frac{1}{2} \right) \\ \psi &= \begin{cases} -\frac{1}{2\pi D} \left(\frac{\ln(r)}{2} - \frac{1}{4} \right) r r_{,\alpha} & \text{se } k = 1; \\ -\frac{r_{,\alpha} r^{2k-1}}{2\pi D} \cdot \frac{1}{4^j (j!)^2 (j+1)} \beta_2 & \text{se } k > 1. \end{cases} \\ \beta_2 &= \left(\frac{\ln(r)}{2} - \sum_j \frac{2j+1}{4j(j+1)} - \frac{1}{4} \right) \quad \text{considerando } j = k-1. \end{aligned}$$

Nesta tese é sugerida a seguinte solução para $\chi_3^{*(k)}$ na Eq. (2.68):

$$\chi_3^{*(k)} = \frac{1}{8\pi D (1-\nu) \lambda^2} \left[\frac{\lambda^2 r^{2k+2} (1-\nu) (\beta_4 - 1)}{4^k [(k+1)!]^2} - \frac{8\beta_3 r^{2k}}{4^k (k!)^2} \right] + \text{fat} \cdot \frac{r^{2k}}{2\pi D} \left[\frac{1}{4^k (k!)^2} \beta_3 \right] \quad (2.70)$$

onde

$$\begin{aligned} \beta_3 &= \left(\ln(\lambda r) - 2 \sum_k \frac{1}{2k} \right) \\ \beta_4 &= \left(\ln(\lambda r) - 2 \sum_k \frac{1}{2k+2} \right) \end{aligned}$$

A solução fundamental $T_\alpha^{*(k)}$ pode ser obtida diretamente a partir da Eq. (2.69) usando

$$T_\alpha^{*(k)} = r_{,\beta} n_\beta \frac{\partial \chi_\alpha^{*(k)}}{\partial r}, \text{ que resulta em:}$$

$$T_\alpha^{*(k)} = \frac{r^{2k}}{4\pi D} \cdot \frac{[\beta_1 n_\alpha + r_{,\beta} n_\beta r_{,\alpha} (2\beta_1 k + 1)]}{4^k (k!)^2 (k+1)} - \text{fat} \cdot \gamma \quad (2.71)$$

onde:

$$Y = \begin{cases} -\frac{2 \ln(r) - 1}{8\pi D} n_\alpha - \frac{r_i n_i r_\alpha}{4\pi D} & \text{se } k = 1; \\ \frac{r^{2k-2} \{-4\beta_2 n_\alpha - r_{,\beta} n_\beta r_{,\alpha} [8(1-k)\beta_2 + 2]\}}{8\pi D \cdot 4^j (j!)^2 (j+1)} & \text{se } k > 1, \text{ com } j = k - 1. \end{cases}$$

A solução fundamental $T_3^{*(k)}$ pode ser obtida diretamente a partir da Eq. (2.70) usando

$$T_3^{*(k)} = r_{,\beta} n_\beta \frac{\partial \chi_3^{*(k)}}{\partial r}, \text{ que resulta em:}$$

$$T_3^{*(k)} = -\frac{r_{,\beta} n_\beta}{8\pi D (1-\nu) \lambda^2} \left\{ \frac{8r^{2k-1} (1 + 2k\beta_3)}{4^k (k!)^2} + \frac{\lambda^2 r^{2k+1} (1-\nu) [1 + 2k - 2\beta_4 (k+1)]}{4^k [(k+1)!]^2} \right\} + fat \cdot \frac{1}{2\pi D} \cdot \frac{r_{,\beta} n_\beta}{4^k (k!)^2} [r^{2k-1} (1 + 2k\beta_3)] \quad (2.72)$$

A solução fundamental $\chi_{\alpha,\gamma}^{*(k)}$ pode ser obtida pela derivada da Eq. (2.69) com relação ao ponto fonte x_γ , que resulta em:

$$T_{\alpha,\gamma}^{*(k)} = -\frac{P_1 \cdot r^{2k-1}}{4\pi D} \left\{ [(r_{,\alpha} n_\gamma + r_{,\gamma} n_\alpha + r_{,\beta} n_\beta \delta_{\alpha\gamma}) \beta_5 + 2r_{,\beta} n_\beta r_{,\alpha} r_{,\gamma} [(k-1)\beta_5 + k]] \right\} - fat \cdot \Phi \quad (2.73)$$

onde:

$$\Phi = \begin{cases} \frac{r_{,\alpha} n_\gamma + n_\alpha r_{,\gamma} + r_{,\beta} n_\beta \delta_{\alpha\gamma} - 2r_{,\beta} n_\beta r_{,\alpha} r_{,\gamma}}{4\pi D r} & \text{se } k = 1; \\ -\frac{P_2 \cdot r^{2k-3}}{4\pi D} \left\{ [(2kr_{,\alpha} r_{,\gamma} + \delta_{\alpha\gamma}) r_{,\beta} n_\beta + r_{,\alpha} n_\gamma + n_\alpha r_{,\gamma}] \beta_6 - [4\beta_6 - 2(1-k)] r_{,\beta} n_\beta r_{,\alpha} r_{,\gamma} \right\} & \text{se } k > 1, \text{ com } j = k - 1. \end{cases}$$

$$e P_1 = \frac{1}{4^k (k!)^2 (k+1)}; \beta_5 = 1 + 2k\beta_1; P_2 = \frac{1}{4^j (j!)^2 (j+1)}; \beta_6 = 4(1-k)\beta_2 - 1.$$

A solução fundamental $T_{3,\gamma}^{*(k)}$ pode ser obtida pela derivada da Eq. (2.72), com relação ao ponto fonte x_γ , que resulta em:

$$T_{3,\gamma}^{*(k)} = \frac{1}{8\pi D (1-\nu) \lambda^2} \left\{ n_\gamma [\beta_9 - \beta_8 (2\beta_7 - 1)] - 2r_{,\gamma} r_{,\beta} n_\beta [\beta_8 (1 + 2k\beta_7) + \beta_9 (1 - k) - \frac{8kr^{2k-2}}{4^k (k!)^2}] \right\} - fat \cdot \frac{1}{2\pi D} \cdot \frac{r^{2k-2}}{4^k (k!)^2} \left\{ n_\gamma (1 + 2k\beta_3) + 2r_{,\gamma} r_{,\beta} n_\beta [(k-1)(1 + 2k\beta_3) + k] \right\} \quad (2.74)$$

onde: $\beta_7 = \beta_4(1 + k) - k$; $\beta_8 = \frac{\lambda^2 r^{2k}(1-\nu)}{4^k[(k+1)!]^2}$; $\beta_9 = \frac{8r^{2k-2}(1+2k\beta_3)}{4^k(k!)^2}$

$$\chi_{\alpha,\gamma}^{*(k)} = -\frac{P_1 \cdot r^{2k}}{4\pi D} [(2kr_{,\alpha}r_{,\gamma} + \delta_{\alpha\gamma})\beta_1 + r_{,\alpha}r_{,\gamma}] - fat \cdot \Lambda \quad (2.75)$$

sendo:

$$\Lambda = \begin{cases} -\frac{1}{8\pi D} [(1 - 2 \ln(r))\delta_{\alpha\gamma} - 2r_{,\alpha}r_{,\gamma}] & \text{se } k = 1; \\ \frac{P_2 \cdot r^{2k-2}}{4\pi D} \{[(k-1)2r_{,\alpha}r_{,\gamma} + \delta_{\alpha\gamma}]2\beta_2 + r_{,\alpha}r_{,\gamma}\} & \text{se } k > 1, \text{ com } j = k - 1. \end{cases}$$

$$\chi_{3,\gamma}^{*(k)} = \frac{r_{,\gamma}}{8\pi D(1-\nu)\lambda^2} \left\{ (2k\beta_3 + 1) \left(\frac{8r^{2k-1}}{4^k(k!)^2} \right) + \frac{2\lambda^2 r^{2k+1} \left[k - (k+1)\beta_4 + \frac{1}{2} \right]}{4^k[(k+1)!]^2} (1-\nu) \right\} - fat \cdot \frac{r_{,\gamma}}{2\pi D \cdot 4^k(k!)^2} [r^{2k-1}(1 + 2k\beta_3)] \quad (2.76)$$

2.4.3 Equações Integrais em Coordenadas Locais

Grande parte dos trabalhos do MEC voltados para análise de placas espessas representam as equações integrais em coordenadas cartesianas como pode ser constatado em Vander Weeën (1982), Karam (1986), Westphal Jr (1990), Ribeiro (1992), Rashed (2000) e Maia (2013). No entanto, a imposição de certas condições contorno em bordas poligonais esconsas ou bordas curvas podem exigir manipulações adicionais no sistema cartesiano.

Além disso, os resultados em coordenadas globais também requerem ser transformados para se obter as componentes nos sistemas apropriados no contorno.

Com a finalidade de facilitar tanto a inserção de condições de contorno quanto a leitura das respostas, alguns trabalhos já utilizaram representações locais para o MEC em placas de Reissner e Mindlin tais como o de Andrade (2001).

No presente trabalho também será utilizada uma representação com dois sistemas locais de coordenadas, sendo o primeiro associado a direções de interesse no ponto-fonte e o segundo associado às direções normais e tangenciais do ponto campo no contorno.

Transformando as rotações em coordenadas globais para coordenadas locais (ver Figura 2.5)

definidos em um ponto no contorno, $\begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & s_1 & 0 \\ n_2 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_n \\ \phi_s \\ \phi_w \end{Bmatrix}$, a equação integral (2.55) é reescrita

da seguinte maneira:

$$c \begin{Bmatrix} u_m \\ u_t \\ u_3 \end{Bmatrix} + \int_{\Gamma} [ROT_p][H][ROT]\{u\} d\Gamma = \int_{\Gamma} [ROT_p][G][ROT]\{p\} d\Gamma + \int_{\Omega} [ROT_p]\{f\} d\Omega \quad (2.77)$$

onde:

$$[ROT_p] = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & 0 \\ -m_2 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

$$[ROT] = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & 0 \\ s_1 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[G] = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & u_{13}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & u_{23}^* \\ u_{31}^* & u_{32}^* & u_{33}^* \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

$$[H] = \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* & p_{13}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* & p_{23}^* \\ p_{31}^* & p_{32}^* & p_{33}^* \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

$$c \begin{cases} = 1 \text{ se } p \in \Omega; \\ = \frac{1}{2} \text{ se } p \in \Gamma; \\ = 0 \text{ se } p \notin \Omega \cup \Gamma \text{ estiver no} \\ \text{exterior (fora do domínio).} \end{cases} \quad (2.81)$$

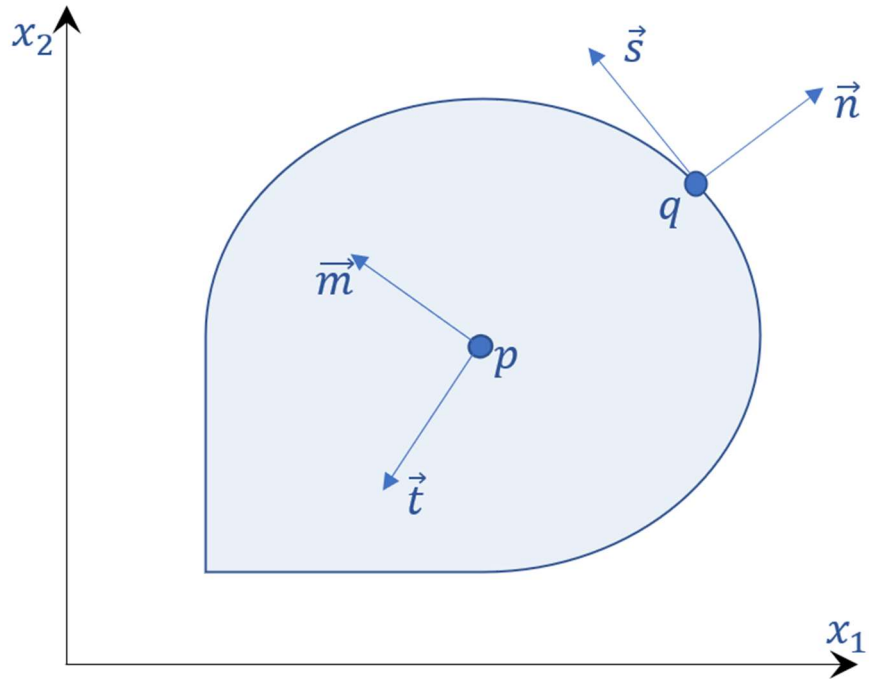


Figura 2.5 – Rotações no sistema de coordenadas: (a) sistema global; (b) sistema local.

2.5 Sistema Algébrico

Neste item descreve-se a metodologia que foi usada para a implementação computacional com base na formulação detalhada no item 2.4 deste capítulo.

O sistema de equações é composto de três equações para cada ponto nodal, sendo que cada equação corresponde a uma das três direções (transversal, normal e tangencial) no sistema local. Após a aplicação das condições de contorno e após a resolução do sistema equacionado, os valores de deslocamento e esforços nos pontos internos são calculados, a partir dos valores obtidos no contorno pelo sistema de equações.

O contorno Γ da geometria é discretizado em elementos, cada um destes possuindo um contorno Γ_i e contendo nós (Figura 2.6). Para cada nó teremos três componentes de deslocamento e três de forças de superfície, sendo uma para cada direção do sistema local. Assim, as equações integrais são escritas de forma discretizada. Os valores das funções a serem integradas, para um ponto qualquer do elemento do contorno, são obtidos por meio de interpolação dos valores nodais, ocorrendo o mesmo para as coordenadas. Para isso são utilizadas funções de interpolação linear, necessitando apenas de dois pontos para serem definidas.

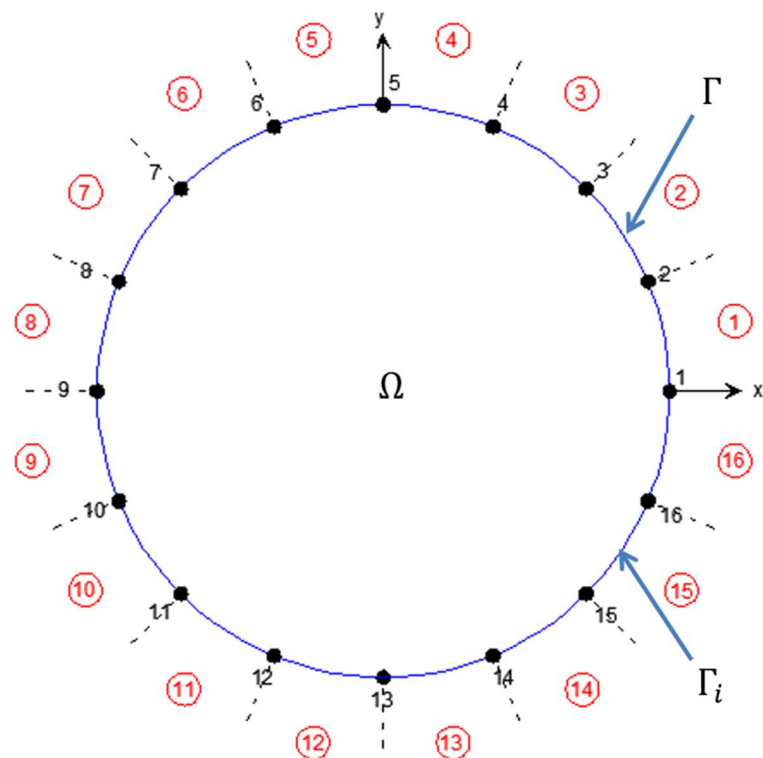


Figura 2.6 – Exemplo de geometria circular com 16 elementos circulares e 16 nós.

Resolvendo numericamente a equação (2.55), tem-se a seguinte equação discretizada, escrita para um ponto nodal ξ_i em forma matricial:

$$\begin{aligned}
cU_i = & \sum_{j=1}^{n_elementos} \left(\int_{\Gamma_j} \hat{U} d\Gamma \right) P_j - \sum_{j=1}^{n_elementos} \left(\int_{\Gamma_j} \hat{P} d\Gamma \right) U_j + \\
& + \sum_{j=1}^{n_elementos} \int_{\Gamma_j} \left(\sum_{k=1}^n [ROT_p] \{T_i^{*(k)}\} \nabla^{2k-2} q \right) d\Gamma - \\
& - \sum_{j=1}^{n_elementos} \int_{\Gamma_j} \left(\sum_{k=1}^n [ROT_p] \{\chi_i^{*(k)}\} \nabla^{2k-2} q_{,j} n_j \right) d\Gamma
\end{aligned} \tag{2.82}$$

onde:

c é a matriz na qual os elementos que a compõem são os termos C_{ij} da expressão (2.55);

$$U_i = \begin{Bmatrix} u_n \\ u_s \\ u_w \end{Bmatrix};$$

$n_elementos$ é a quantidade de elementos de contorno;

n é a ordem da reciprocidade;

$[\psi]$ é a matriz na qual estão inseridas as funções de interpolação;

$$\hat{U} = [ROT_p][U][\psi][ROT];$$

$$\hat{P} = [ROT_p][P][\psi][ROT];$$

$[ROT_p]$ e $[ROT]$ são as matrizes de transformação das rotações do sistema global para o sistema local, definidas na Eq. (2.78);

U_j e P_j são os vetores que contém as componentes dos deslocamentos e forças de superfície relativos aos pontos nodais do elemento que está sendo considerado;

T_i^* e χ_i^* são os vetores que contém as soluções fundamentais de alta ordem.

As integrais expressas em (2.82) são resolvidas numericamente através da quadratura de Gauss utilizando algoritmos de subelementação.

A expressão (2.82) pode ser reescrita como:

$$cU_i = \sum_{j=1}^{n_elementos} G_{ij} P_j - \sum_{j=1}^{n_elementos} H_{ij} U_j + \sum_{j=1}^{n_elementos} B_{ij} \tag{2.83}$$

onde:

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_j} \hat{U} d\Gamma \tag{2.84}$$

$$H_{ij} = \int_{\Gamma_j} \hat{P} d\Gamma \tag{2.85}$$

$$B_{ij} = \int_{\Gamma_j} \left(\sum_{k=1}^n [ROT_p] \{T_i^{*(k)}\} \nabla^{2k-2} q \right) d\Gamma - \int_{\Gamma_j} \left(\sum_{k=1}^n [ROT_p] \{\chi_i^{*(k)}\} \nabla^{2k-2} q_{,j} n_j \right) d\Gamma \quad (2.86)$$

Aplicando a equação (2.82) em todos os pontos nodais p do contorno, obtém-se um sistema com um número de equações totais igual a três vezes o número de nós, conforme é mostrado abaixo:

$$[H] \cdot \{U\} = [G] \cdot \{P\} + \{B\} \quad (2.87)$$

Os vetores $\{U\}$ e $\{P\}$ na expressão (2.87) contêm, respectivamente, os valores nos nós de deslocamentos e forças de superfície, onde se deve ter, para cada direção nodal, um dos dois valores como incógnita, sendo o outro prescrito.

Então, o sistema em (2.87) pode ser rearranjado, colocando-se todas as incógnitas num único

vetor X e todos os valores prescritos multiplicados pelos respectivos coeficientes de G ou H , juntamente com a parcela referente à carga e que é sempre conhecida, em um outro vetor, chamado aqui de F . Assim, obtém-se o sistema expresso por:

$$A \cdot X = F \quad (2.88)$$

onde A é a matriz de coeficientes que multiplicam as incógnitas, sendo cheia e não simétrica. O sistema de equações (2.88) é resolvido obtendo-se os valores de deslocamentos e forças de superfície desconhecidos.

Após a resolução do problema no contorno, os deslocamentos e esforços no contorno são determinados. Assim, os momentos e os esforços cortantes em qualquer ponto do domínio podem ser calculados aplicando-se as equações integrais discretizadas específicas para cada campo de interesse.

Para a determinação dos deslocamentos nos pontos internos é utilizada a expressão (2.54) discretizada ao longo do contorno. Obtém-se para cada ponto ξ_i do interior do domínio Ω :

$$\begin{aligned} U_i = & \sum_{l=1}^{n_{\text{elementos}}} \left(\int_{\Gamma_l} \hat{U} d\Gamma \right) P_j - \sum_{l=1}^{n_{\text{elementos}}} \left(\int_{\Gamma_l} \hat{P} d\Gamma \right) U_j + \\ & + \sum_{l=1}^{n_{\text{elementos}}} \int_{\Gamma_l} \left(\sum_{k=1}^n [ROT_p] \{T_i^{*(k)}\} \nabla^{2k-2} q \right) d\Gamma - \\ & - \sum_{l=1}^{n_{\text{elementos}}} \int_{\Gamma_l} \left(\sum_{k=1}^n [ROT_p] \{\chi_i^{*(k)}\} \nabla^{2k-2} q_{,l} n_l \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (2.89)$$

Para a determinação dos momentos e dos esforços cortantes nos pontos internos, primeiramente, são utilizadas as expressões integrais das curvaturas (2.59a) e inclinações (2.59b) discretizadas ao longo do contorno. Obtém-se para cada ponto ξ_i do interior do domínio Ω :

$$\begin{aligned}
u_{\alpha,\beta_i} = & \sum_{l=1}^{n_elementos} \left(\int_{\Gamma_l} \hat{U}_{\alpha\beta,\gamma} d\Gamma \right) P_j - \sum_{l=1}^{n_elementos} \left(\int_{\Gamma_l} \hat{P}_{\alpha\beta,\gamma} d\Gamma \right) U_j + \\
& + \sum_{l=1}^{n_elementos} \int_{\Gamma_l} \left(\sum_{k=1}^n [ROT_p] \{T_{\alpha,\gamma}^{*(k)}\} \nabla^{2k-2} q \right) d\Gamma - \\
& - \sum_{l=1}^{n_elementos} \int_{\Gamma_l} \left(\sum_{k=1}^n [ROT_p] \{\chi_{\alpha,\gamma}^{*(k)}\} \nabla^{2k-2} q_{,l} n_l \right) d\Gamma
\end{aligned} \tag{2.90}$$

$$\begin{aligned}
u_{3,\beta_i} = & \sum_{l=1}^{n_elementos} \left(\int_{\Gamma_l} \hat{U}_{3\beta,\gamma} d\Gamma \right) P_j - \sum_{l=1}^{n_elementos} \left(\int_{\Gamma_l} \hat{P}_{3\beta,\gamma} d\Gamma \right) U_j + \\
& + \sum_{l=1}^{n_elementos} \int_{\Gamma_l} \left(\sum_{k=1}^n [ROT_p] \{T_{3,\gamma}^{*(k)}\} \nabla^{2k-2} q \right) d\Gamma - \\
& - \sum_{l=1}^{n_elementos} \int_{\Gamma_l} \left(\sum_{k=1}^n [ROT_p] \{\chi_{3,\gamma}^{*(k)}\} \nabla^{2k-2} q_{,l} n_l \right) d\Gamma
\end{aligned} \tag{2.91}$$

onde:

$$\begin{aligned}
\hat{U}_{\alpha\beta,\gamma} &= [ROT_p][u_{\alpha\gamma,\beta}^*][\psi][ROT]; \quad \hat{P}_{\alpha\beta,\gamma} = [ROT_p][p_{\alpha\gamma,\beta}^*][\psi][ROT]; \\
\hat{U}_{3\beta,\gamma} &= [ROT_p][u_{3\gamma,\beta}^*][\psi][ROT]; \quad \hat{P}_{3\beta,\gamma} = [ROT_p][p_{3\gamma,\beta}^*][\psi][ROT];
\end{aligned}$$

Os valores obtidos em (2.90) e (2.91) são, respectivamente, substituídos em (2.58a) e (2.58b) para obtenção dos momentos e esforços cortantes nos pontos internos.

Neste trabalho são considerados elementos de contorno Γ_i retos e curvos. As coordenadas de um ponto genérico m , do elemento de contorno Γ_i são parametrizadas em função das coordenadas dos nós de extremidade, através de coordenadas locais homogêneas φ (ver Figura 2.7). Existem na literatura alguns trabalhos tratando sobre a geometria do elemento e as funções que interpolam os campos físicos de interesse. Os casos mais usuais são o isoparamétrico linear e isoparamétrico quadrático (contínuo e descontínuo) cujos detalhes adicionais podem ser vistos em trabalhos que lidam com placas com bordas curvas tais como Guminiak (2016) e Oliveira Neto e Paiva (1993), ambos para placas delgadas.

Assim, nas seções seguintes serão brevemente discutidos os elementos isoparamétricos lineares, assim como os elementos de geometria especial tais como a circular com variação de

campos linear. Com o intuito de representação exata de contornos circulares, parciais e totais, em problemas de placas.

2.5.1 Elemento Linear com Variação Linear dos Campos Físicos

A Figura 2.7 ilustra um elemento linear com variação linear dos campos físicos.

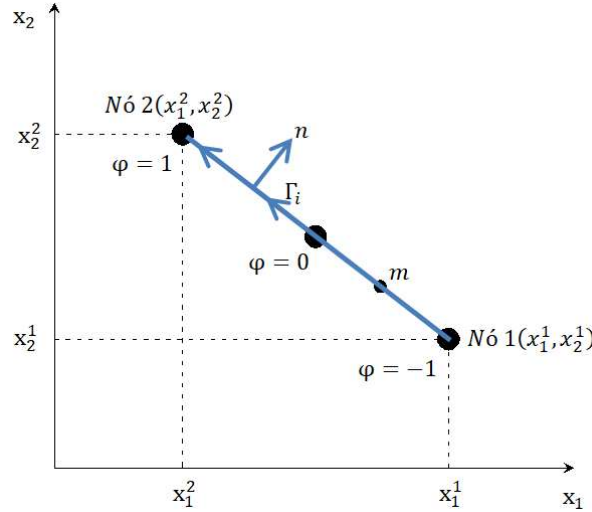


Figura 2.7 – Elemento de contorno linear.

As coordenadas do ponto genérico m são expressas por:

$$x_m = \psi(\varphi)x_N \quad (2.96)$$

onde:

$$x_m = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (2.97)$$

$$\psi(\varphi) = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

$$x_N = \begin{Bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_1^2 \\ x_2^2 \end{Bmatrix} \quad (2.99)$$

Sendo, x_1 e x_2 as coordenadas cartesianas, x_N o vetor de coordenadas nodais dos nós extremos, e ψ é a matriz das funções de interpolação, dadas em função da coordenada adimensional φ :

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{2}(1 - \varphi) \\ \phi_2 &= \frac{1}{2}(1 + \varphi) \end{aligned} \quad (2.100)$$

e possuem valor unitário no ponto nodal considerado e zero nos outros dois.

Os deslocamentos e forças de superfície são interpolados como nas expressões (2.83), nas quais para o elemento considerado, tem-se:

$$U_j = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (2.101)$$

$$P_j = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} \quad (2.102)$$

$$\psi = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \quad (2.103)$$

$$U_n = \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \end{Bmatrix} \quad (2.104)$$

$$P_n = \begin{Bmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_3^1 \\ p_1^2 \\ p_2^2 \\ p_3^2 \end{Bmatrix} \quad (2.105)$$

2.5.2 Elemento Circular com Variação Linear dos Campos Físicos

A Figura 2.8 ilustra uma geometria circular. As coordenadas do ponto genérico m são expressas por:

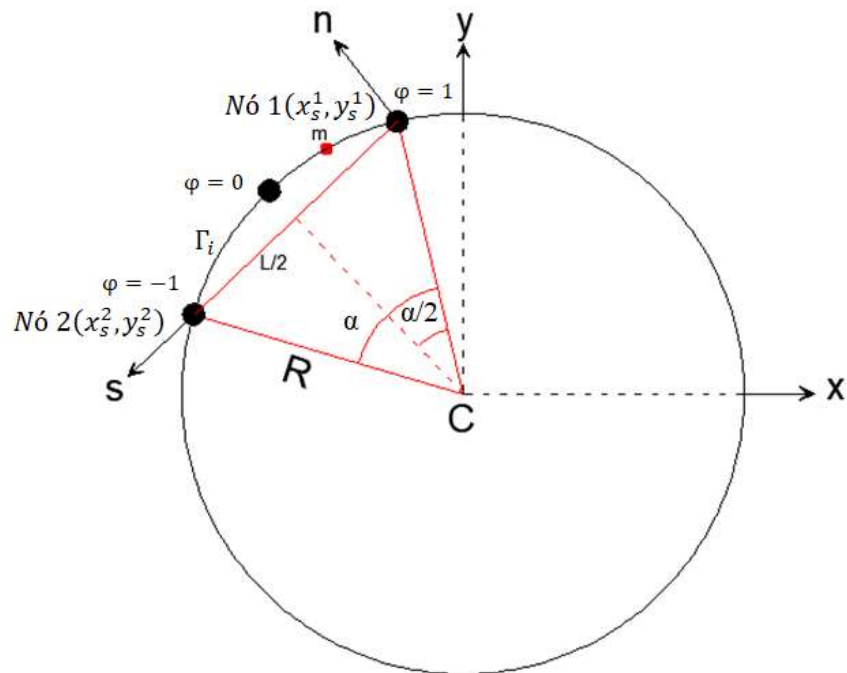


Figura 2.8 – Elemento de contorno com geometria circular.

As coordenadas do ponto genérico m , na geometria circular com variação linear, são expressas por:

$$x_m = \psi(\varphi)x_N \quad (2.106)$$

onde:

$$x_m = \begin{Bmatrix} x_s \\ y_s \end{Bmatrix} \quad (2.107)$$

$$\psi(\varphi) = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \quad (2.108)$$

$$x_N = \begin{Bmatrix} x_s^1 \\ y_s^1 \\ x_s^2 \\ y_s^2 \end{Bmatrix} \quad (2.109)$$

$$\begin{Bmatrix} x_s^1 \\ y_s^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos(\alpha)(x_1 - x_c) - \sin(\alpha)(y_1 - y_c) + x_c \\ \cos(\alpha)(y_1 - y_c) + \sin(\alpha)(x_1 - x_c) + y_c \end{Bmatrix} \quad (2.110)$$

$$\begin{Bmatrix} x_s^2 \\ y_s^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos(\alpha)(x_2 - x_c) - \sin(\alpha)(y_2 - y_c) + x_c \\ \cos(\alpha)(y_2 - y_c) + \sin(\alpha)(x_2 - x_c) + y_c \end{Bmatrix} \quad (2.111)$$

sendo:

$$\alpha = 2\arcsin\left(\frac{L}{2 \times R}\right) \quad (2.112)$$

Sendo, x_s e y_s as coordenadas locais, x_N o vetor de coordenadas nodais dos nós extremos, x_c e y_c as coordenadas do centro do círculo e ψ é a matriz das funções de interpolação, dadas em função da coordenada adimensional φ , definida anteriormente em (2.100).

Os deslocamentos e forças de superfície são interpolados como nas expressões (2.83), nas quais para o elemento considerado com variação linear, aplicam-se as mesmas expressões descritas de (2.101) a (2.105).

2.6 Aplicações Numéricas

Nesta seção, aplicações numéricas do Método dos Elementos de Contorno (MEC) são apresentadas para a teoria de placas de Reissner e de Mindlin submetidas a carregamentos distribuídos polinomiais. Um dos casos é associado a placas circulares e os demais a placas poligonais. Nos exemplos 2.6.2 a 2.6.5 são discutidas placas quadradas com coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. Além disso, os resultados são apresentados usando quatro discretizações diferentes com 16, 32, 64 e 128 elementos de contorno lineares e rotulados, respectivamente, como MEC16, MEC32, MEC64 e MEC128. Finalizando-se a seção, tem-se a análise de uma placa engastada com chanfro submetida a um carregamento distribuído quadrático onde as soluções do MEC são comparadas com o método dos elementos finitos.

2.6.1 Placa circular engastada submetida a carregamento distribuído com variação linear

Considere uma placa circular engastada de raio a submetida a um carregamento assimétrico do tipo $q(r, \theta) = q_0 + q_1 \frac{r}{a} \cos \theta$, conforme mostrado na Figura 2.9. Já na Figura 2.10 são mostradas as discretizações em elementos de contorno contendo elementos circulares para quatro malhas com 16, 32, 64 e 128 elementos.

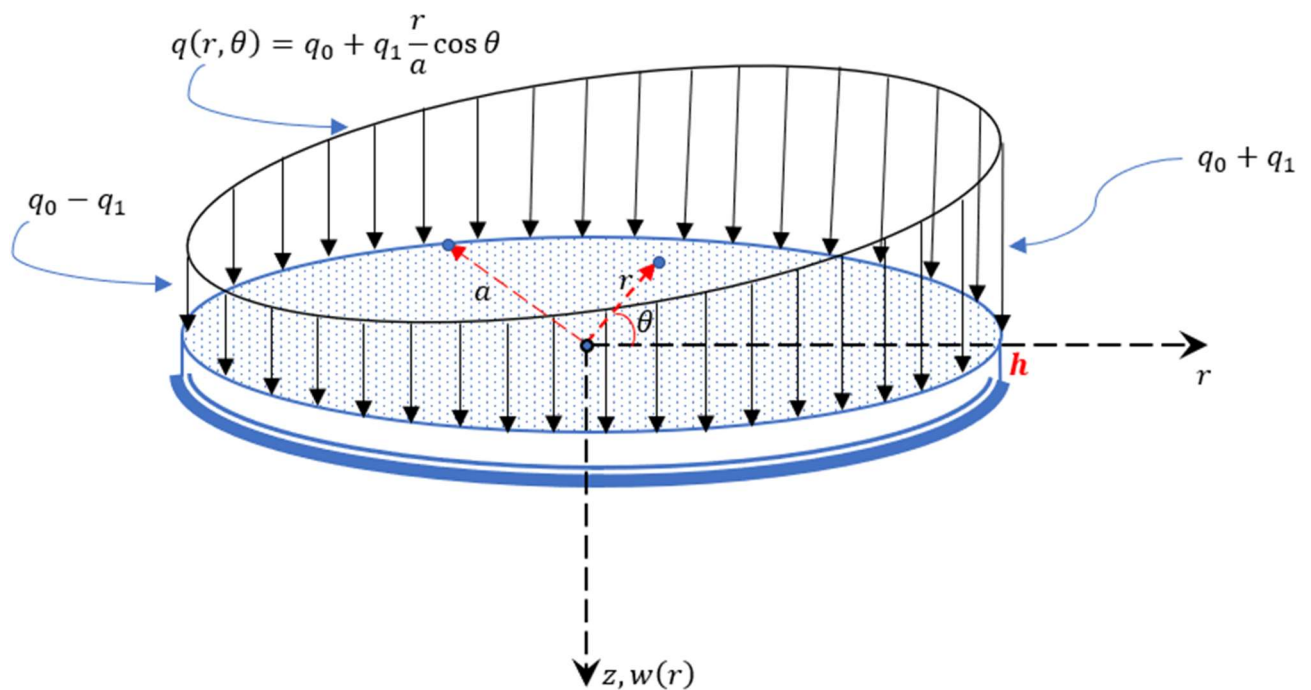


Figura 2.9 – Placa circular engastada submetida a carregamento distribuído com variação linear.

As Tabelas 2.1 e 2.2 apresentam uma comparação os resultados de deslocamentos obtidos com o MEC e as soluções analíticas de Reissner e de Mindlin, respectivamente. O cálculo do erro apresentado nas tabelas 2.1 e 2.2 foi comparado entre os resultados do MEC com a malha mais refinada e a respectiva solução analítica.

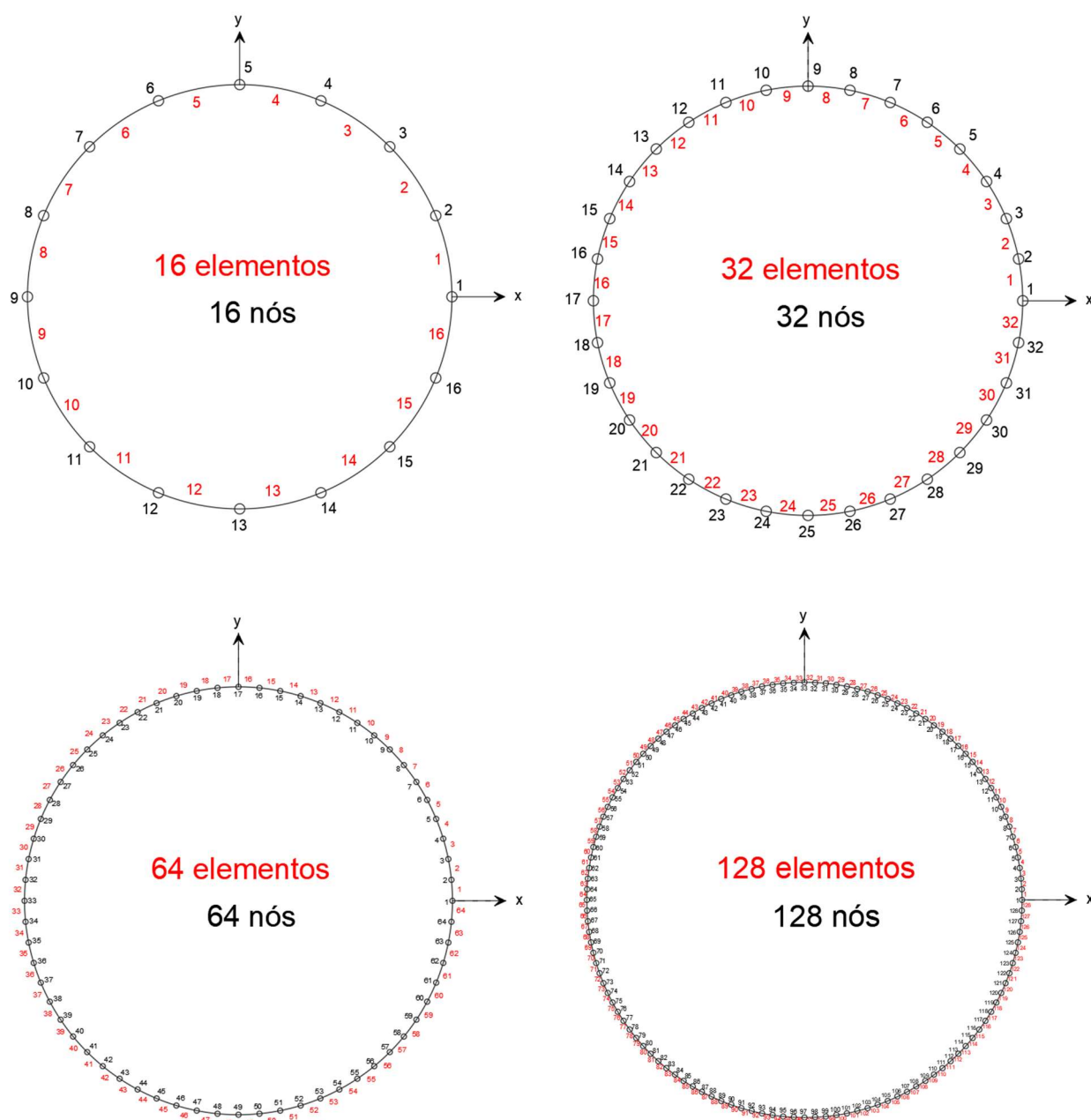


Figura 2.10 – Discretização em elementos de contorno da placa circular.

Tabela 2.1 – Deflexão adimensionalizada $\hat{w} = wD/\beta a^4 (\times 10^{-4})$ no ponto $0.4a$, para a teoria de Reissner, considerando $\theta = 0^\circ$ e $\beta = \frac{q_1}{q_0}$.

	<i>F</i>	MEC16	MEC32	MEC64	MEC128	Analítica Reissner	Erro (%)
REISSNER	0,01	8,7203	8,7158	8,7156	8,7158	8,7161	0,0032
	0,10	9,2172	9,2078	9,2066	9,2067	9,2071	0,0033
	0,15	9,8389	9,8269	9,8256	9,8259	9,8263	0,0040
	0,20	10,7063	10,6923	10,6912	10,6918	10,6924	0,0052

Tabela 2.2 – Deflexão adimensionalizada $\hat{w} = wD/\beta a^4 (\times 10^{-4})$ no ponto $0.4a$, para a teoria de Mindlin, considerando $\theta = 0^\circ$ e $\beta = \frac{q_1}{q_0}$.

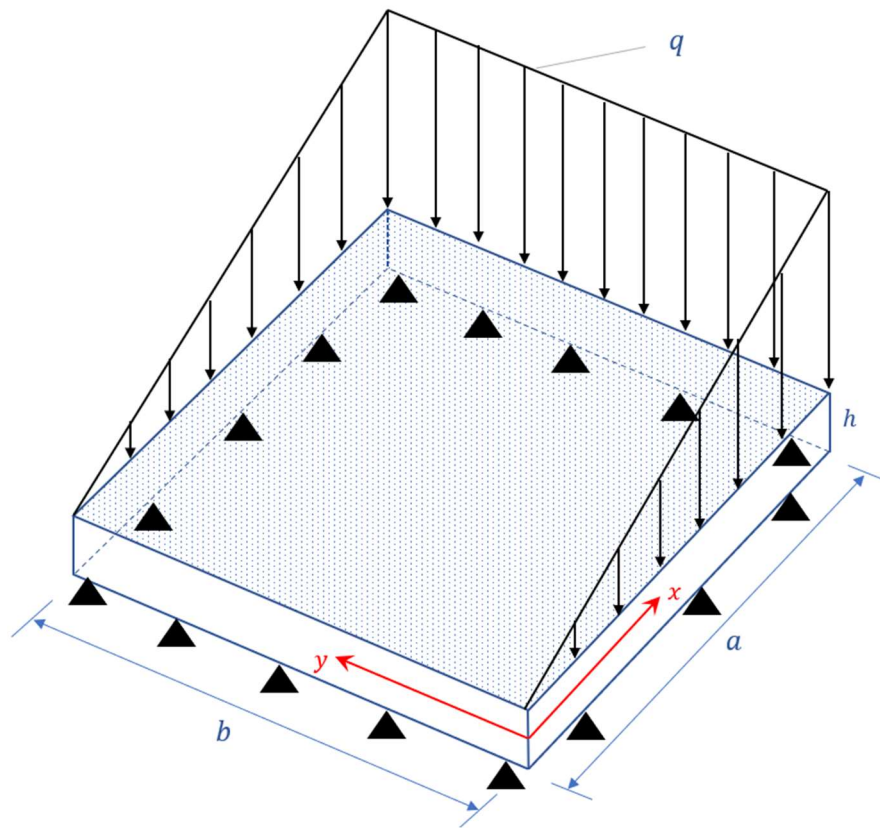
	<i>F</i>	MEC16	MEC32	MEC64	MEC128	Analítica Mindlin	Erro (%)
MINDLIN	0,01	8,7203	8,7158	8,7156	8,7158	8,7161	0,0032
	0,10	9,2177	9,2082	9,2069	9,2068	9,2071	0,0028
	0,15	9,8405	9,8280	9,8264	9,8263	9,8266	0,0026
	0,20	10,7095	10,6948	10,6930	10,6930	10,6932	0,0022

A partir da análise das Tabela 2.1 e 2.2, observa-se que os resultados obtidos por meio do MEC para as teorias de Reissner e de Mindlin têm convergência para a solução analítica ambas as teorias. O erro apresentado foi menor do que 0.0052% quando comparado a malha MEC128 com a teoria de Reissner, e foi menor do que 0.0032% quando comparado com a teoria de Mindlin. Vale registrar que as soluções analíticas apresentadas nas Tabelas 2.1 e 2.2, respectivamente, para Reissner e Mindlin estão mostradas no Apêndice A (Equações AA.5 e AA.6).

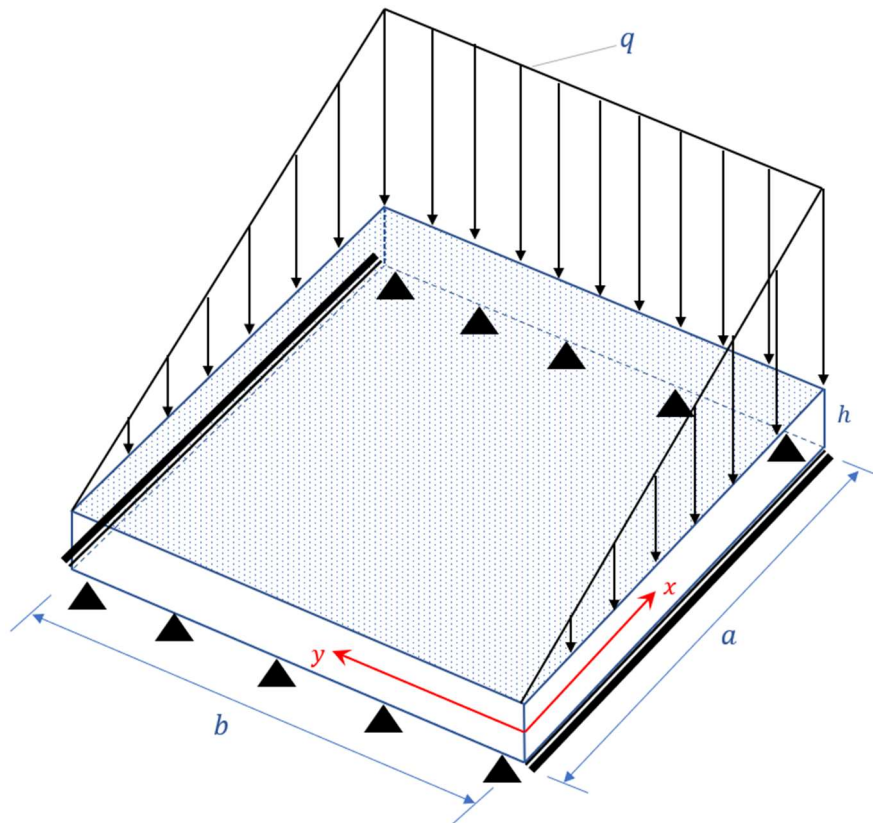
2.6.2 Placa quadrada submetida a pressão hidrostática

Considere dois casos de placa quadrada submetida a pressão hidrostática $g(Q) = q(x, y) = q_0 \cdot x/a$, conforme a Fig. 2.11. Os resultados do deslocamento adimensionalizado $\hat{w} = wD/ga^4$ no ponto central ($x = a/2, y = a/2$), para duas diferentes condições de contorno, são mostradas nas Tabelas 2.3 a 2.6.

As condições de contorno consideradas, neste exemplo, foram o caso em que todos os vértices da placa estão simplesmente apoiados (condição SSSS, ver Figura 2.11a) e a situação em que dois vértices estão engastados e os vértices opostos estão simplesmente apoiados (condição SCSC, ver Figura 2.11b). A Figura 2.12 mostra as discretizações em elementos de contorno para quatro malhas com 16, 32, 64 e 128 elementos.



(a)



(b)

Figura 2.11 – Placa quadrada submetida a pressão hidrostática sob duas condições de contorno:

(a) SSSS; (b) SCSC.

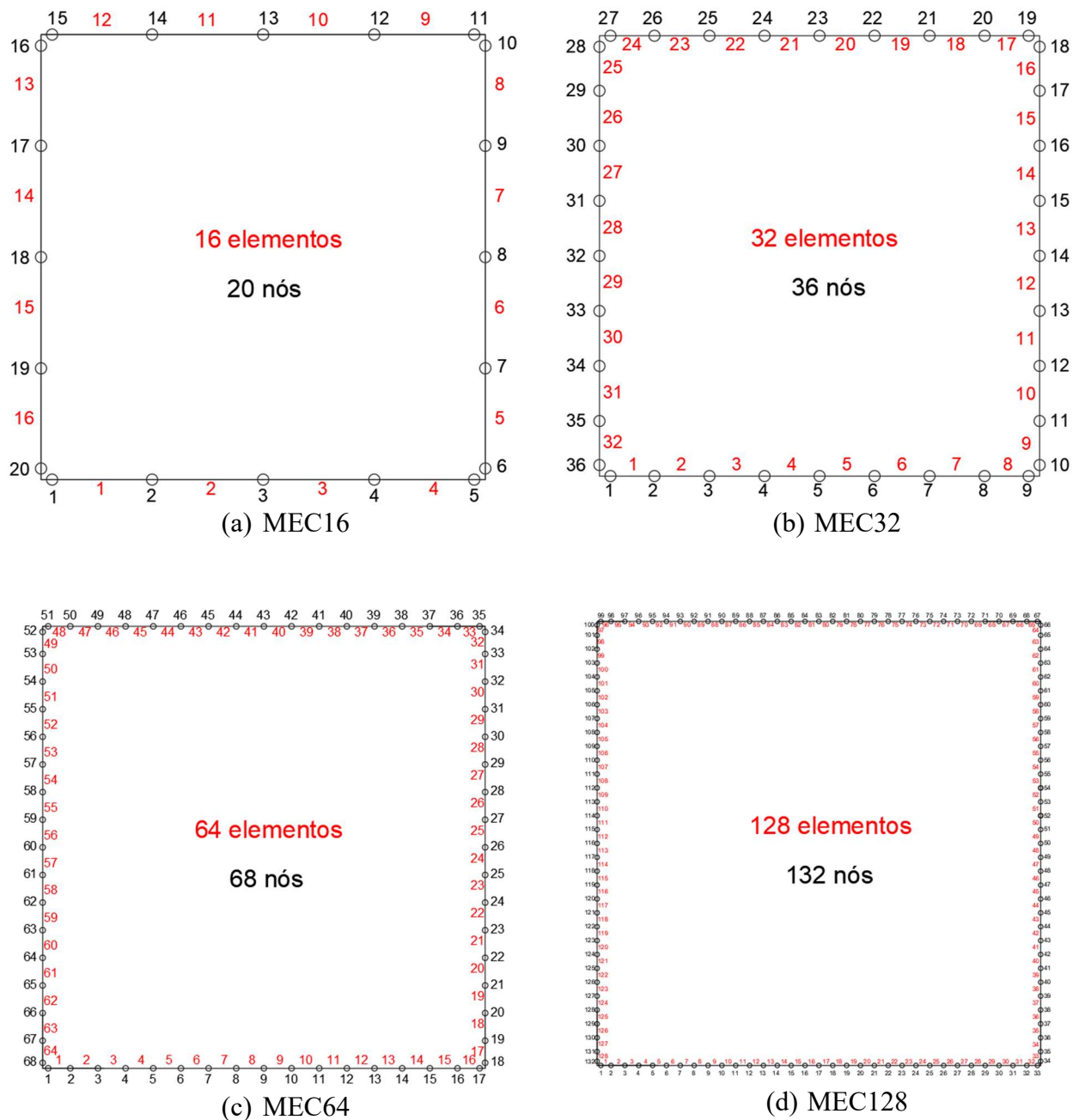


Figura 2.12 – Discretização em elementos de contorno das placas quadradas.

Nas Tabelas 2.3 e 2.4, são apresentados os resultados para a placa simplesmente apoiada (SSSS) e nas Tabelas 2.5 e 2.6 para a placa com duas faces opostas simplesmente apoiadas e as outras duas faces opostas engastadas (SCSC). Para a condição SSSS os resultados numéricos são comparados com a solução analítica de Navier para a teoria de Reissner e de Mindlin (ver anexo, seção A.1) e no caso da placa SCSC a solução numérica é comparada com as respectivas soluções analíticas baseadas em Levy (ver Anexo A, seção A.2).

Tabela 2.3 – Deslocamento adimensionalizado $\hat{w}$ ($\times 10^{-3}$) para placa submetida a carregamento linearmente distribuído, com condição de contorno SSSS, segundo a teoria de Reissner.

$\frac{h}{a}$	MEC				Analítica Reissner	Erro (%)
	16	32	64	128		
0,200	2,3602	2,3848	2,3884	2,3888	2,3890	0,0084
0,150	2,1952	2,2260	2,2313	2,2322	2,2325	0,0112
0,100	2,0738	2,1121	2,1190	2,1203	2,1207	0,0189
0,010	1,9635	2,0186	2,0292	2,0314	2,0321	0,0344

Tabela 2.4 – Deslocamento adimensionalizado $\hat{w}$ ($\times 10^{-3}$) para placa submetida a carregamento linearmente distribuído, com condição de contorno SSSS, segundo a teoria de Mindlin.

$\frac{h}{a}$	MEC				Analítica Mindlin	Erro (%)
	16	32	64	128		
0,200	2,4227	2,4479	2,4515	2,4520	2,4522	0,0082
0,150	2,2301	2,2614	2,2668	2,2677	2,2680	0,0132
0,100	2,0894	2,1274	2,1347	2,1360	2,1364	0,0187
0,010	1,9647	2,0188	2,0294	2,0316	2,0322	0,0295

Tabela 2.5 – Deslocamento adimensionalizado $\hat{w}$ ($\times 10^{-3}$) para placa submetida a carregamento linearmente distribuído, com condição de contorno SCSC, segundo a teoria de Reissner.

$\frac{h}{a}$	MEC				Analítica Reissner	Erro (%)
	16	32	64	128		
0,200	1,4897	1,4900	1,4907	1,4909	1,4910	0,0099
0,150	1,2666	1,2672	1,2677	1,2680	1,2681	0,0111
0,100	1,0978	1,0998	1,1001	1,1004	1,1005	0,0115
0,010	0,9557	0,9593	0,9597	0,9599	0,9601	0,0159

Tabela 2.6 – Deslocamento adimensionalizado $\hat{w}$ ($\times 10^{-3}$) para placa submetida a carregamento linearmente distribuído, com condição de contorno SCSC, segundo a teoria de Mindlin.

$\frac{h}{a}$	MEC				Analítica Mindlin	Erro (%)
	16	32	64	128		
0,200	1,5092	1,5095	1,5101	1,5105	1,5106	0,0066
0,150	1,2763	1,2769	1,2774	1,2777	1,2779	0,0157
0,100	1,1023	1,1035	1,1039	1,1042	1,1044	0,0181
0,010	0,9566	0,9594	0,9597	0,9599	0,9601	0,0208

Além disso, pode ser observado nas Tabelas 2.3 a 2.6 que os resultados do MEC são convergentes para soluções analíticas de deflexões de placas espessas e finas.

2.6.3 Placa submetida a carregamento duplo quadrático

Na Fig. 2.13, é mostrada uma placa quadrada simplesmente apoiada submetida a um carregamento duplo quadrático dado por:

$$q(Q) = q(x, y) = q_0[1 + (x/a)^2][1 + (y/b)^2] \quad (2.113)$$

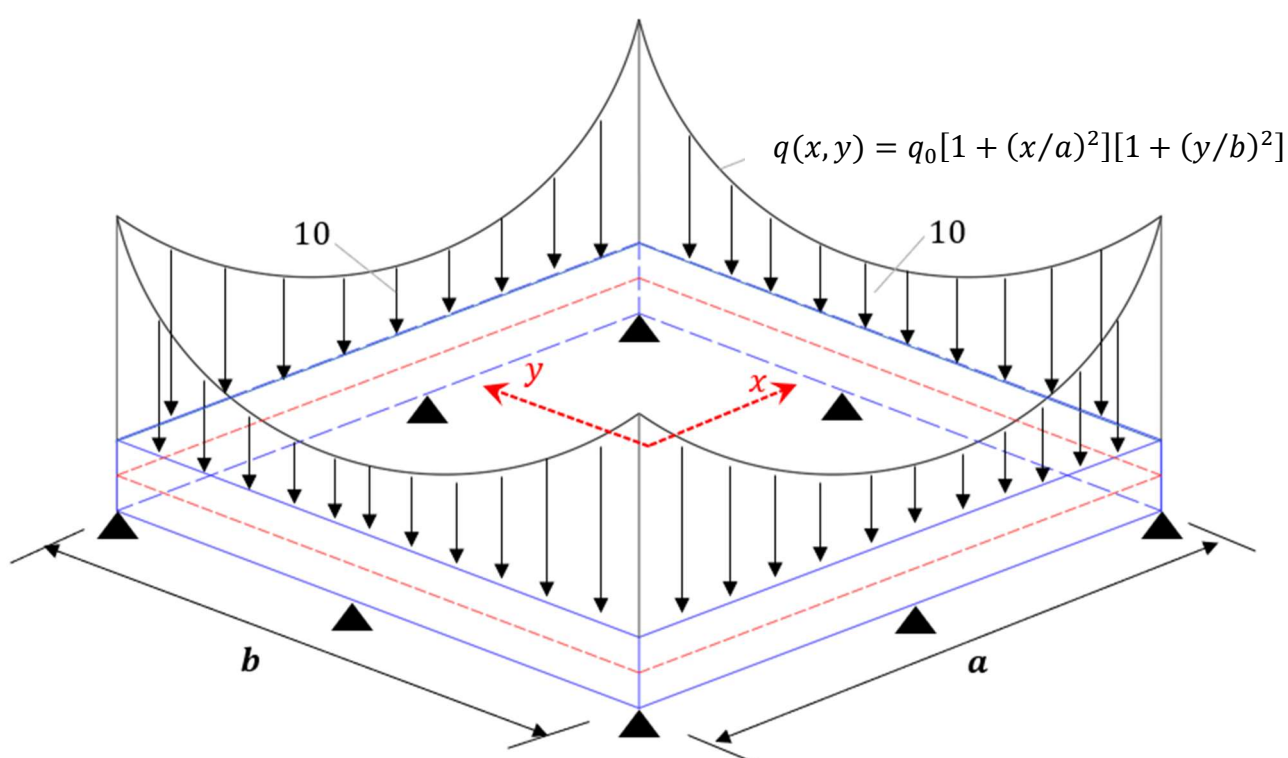


Figura 2.13 – Placa quadrada simplesmente apoiada submetida a um carregamento distribuído duplo quadrático.

Os parâmetros da placa, mostrada na Figura 2.13, são: $E = 200 \text{ MPa}$; $\nu = 0.30$; $a = 1.00 \text{ m}$; $b = 1.00 \text{ m}$; $q_0 = 10 \text{ kN/m}^2$.

Nas Tabelas 2.7 e 2.8 são comparados os resultados numéricos do MEC com a solução analítica de Reissner e de Mindlin, ao longo da linha central da placa, para a deflexão w , enquanto os esforços para os momentos fletores M_{xx} e para a força de cisalhamento Q_x são mostrados nas Figuras 2.16 e 2.17. Além disso, as soluções analíticas são fornecidas no Anexo A (ver seção A.1).

Tabela 2.7 – Deflexão w ($\times 10^{-2} m$) para a placa simplesmente apoiada submetida a um carregamento duplo quadrático, considerando a teoria de Reissner.

$\frac{h}{a}$	$x (m)$	MEC				Analítica Reissner	Erro (%)
		16	32	64	128		
0,200	-0,250	0,0376	0,0381	0,0381	0,0381	0,0381	0,0054
	-0,125	0,0490	0,0496	0,0496	0,0496	0,0497	0,0069
	0,000	0,0540	0,0545	0,0546	0,0546	0,0546	0,0062
	0,125	0,0516	0,0522	0,0523	0,0523	0,0523	0,0065
	0,250	0,0416	0,0420	0,0421	0,0421	0,0421	0,0065
0,100	-0,250	0,2638	0,2692	0,2701	0,2703	0,2703	0,0182
	-0,125	0,3452	0,3519	0,353	0,3533	0,3533	0,0170
	0,000	0,3796	0,3868	0,3881	0,3883	0,3883	0,0169
	0,125	0,3615	0,3683	0,3696	0,3698	0,3698	0,0162
	0,250	0,2882	0,2938	0,2948	0,2950	0,2950	0,0167
0,025	-0,250	16,0445	16,4943	16,5848	16,6029	16,6085	0,0337
	-0,125	2,1033	21,5915	21,7044	21,7271	21,7338	0,0305
	0,000	23,1270	23,7280	23,8500	23,8748	23,8818	0,0293
	0,125	21,9777	22,5536	22,6713	22,6951	22,7021	0,0308
	0,250	17,4444	17,9207	18,0182	18,0381	18,0440	0,0329
0,010	-0,250	249,2599	256,9749	258,5037	258,8095	258,9023	0,0359
	-0,125	326,8192	336,4234	338,3234	338,7056	338,8203	0,0338
	0,000	359,3608	369,7130	371,7659	372,1809	372,3065	0,0337
	0,125	341,4302	351,3674	353,3548	353,7534	353,8735	0,0339
	0,250	270,8924	279,1207	280,7750	281,1081	281,2064	0,0349

Tabela 2.8 – Deflexão w ($\times 10^{-2} m$) para a placa simplesmente apoiada submetida a um carregamento duplo quadrático, considerando a teoria de Mindlin.

$\frac{h}{a}$	$x (m)$	MEC				Analítica Mindlin	Erro (%)
		16	32	64	128		
0,200	-0,250	0,0386	0,0391	0,0391	0,0391	0,0391	0,0052
	-0,125	0,0503	0,0509	0,0509	0,0509	0,0509	0,0054
	0,000	0,0554	0,0560	0,0560	0,0560	0,0561	0,0049
	0,125	0,0531	0,0536	0,0537	0,0537	0,0537	0,0051
	0,250	0,0428	0,0433	0,0433	0,0433	0,0433	0,0047
0,100	-0,250	0,2658	0,2711	0,2721	0,2723	0,2724	0,0180
	-0,125	0,3478	0,3543	0,3556	0,3558	0,3559	0,0184
	0,000	0,3825	0,3895	0,3909	0,3911	0,3912	0,0181
	0,125	0,3643	0,3711	0,3724	0,3726	0,3727	0,0190
	0,250	0,2906	0,2962	0,2972	0,2974	0,2975	0,0202
0,025	-0,250	16,0673	16,5034	16,5928	16,6113	16,6166	0,0315
	-0,125	21,0607	21,6027	21,7146	21,7373	21,7443	0,0321
	0,000	23,1574	23,7406	23,8612	23,8860	23,8933	0,0307
	0,125	22,0074	22,5661	22,6825	22,7063	22,7133	0,0308
	0,250	17,4699	17,9315	18,0280	18,0479	18,0538	0,0329
0,010	-0,250	249,3964	257,0350	258,5255	258,8313	258,9241	0,0358
	-0,125	326,9885	336,4943	338,3562	338,7329	338,8476	0,0338
	0,000	359,5410	369,7894	371,7987	372,2137	372,3338	0,0323
	0,125	341,6049	351,4438	353,3876	353,7807	353,9008	0,0339
	0,250	271,0399	279,1862	280,8023	281,1299	281,2282	0,0349

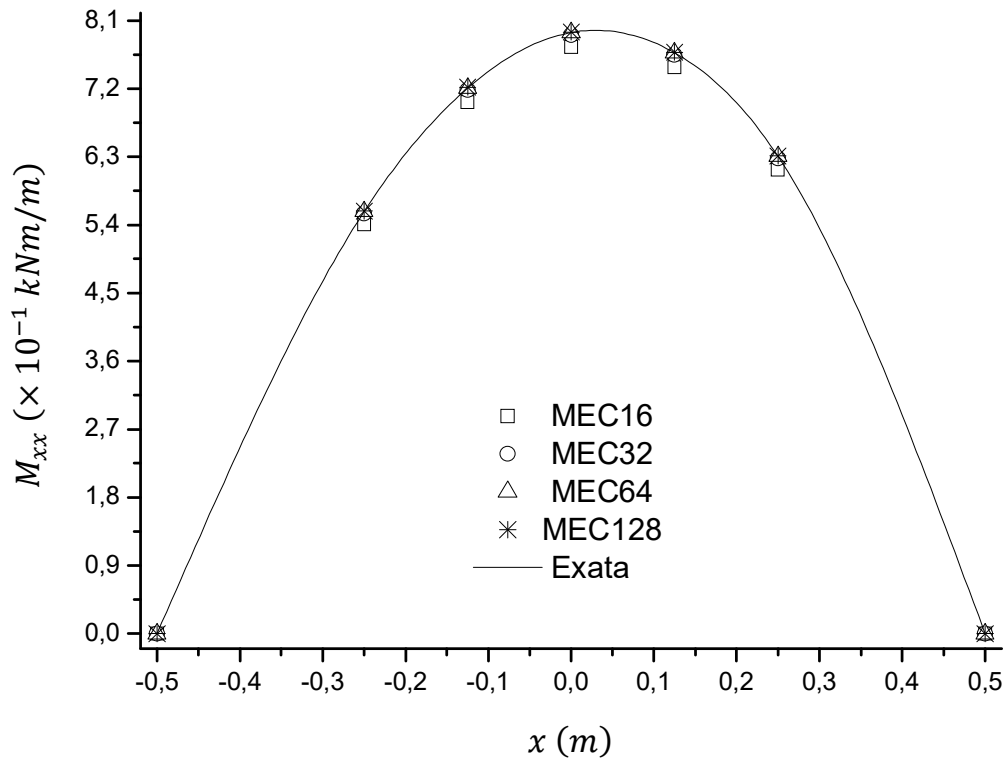


Figura 2.14 – Momento fletor M_{xx} ($\times 10^{-1} \text{ kNm/m}$) ao longo da linha central para a placa simplesmente apoiada com $h = 0,025 \text{ m}$ submetida a carregamento quadrático.

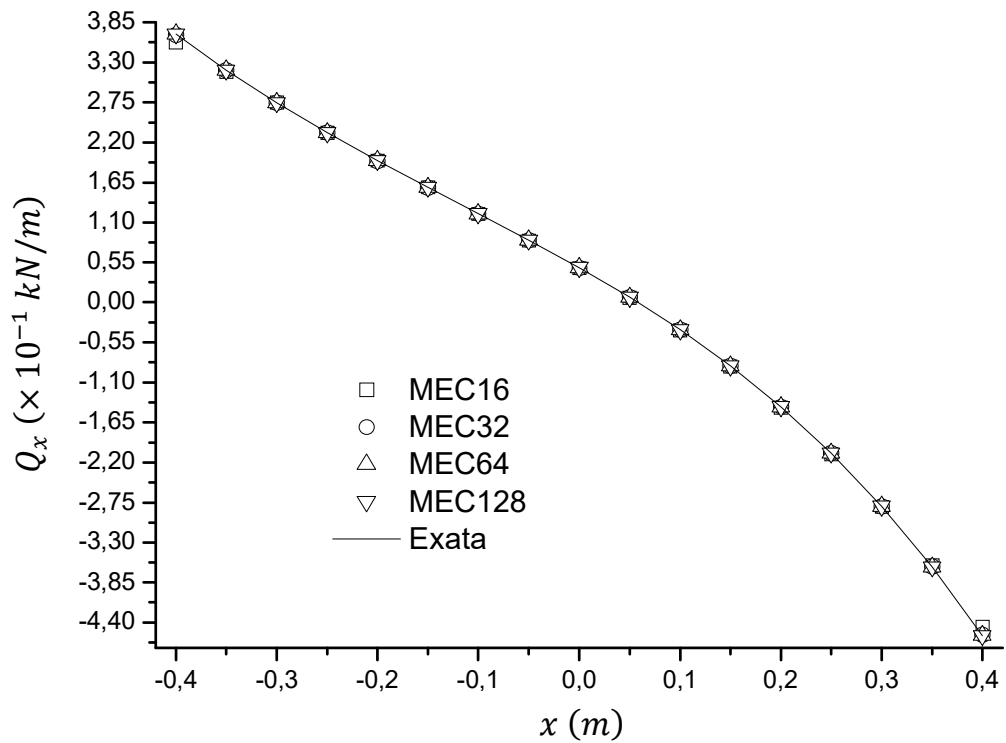


Figura 2.15 – Esforço cortante Q_x ($\times 10^{-1} \text{ kN/m}$) ao longo da linha central para a placa simplesmente apoiada com $h = 0,025 \text{ m}$ submetida a carregamento quadrático.

A partir das tabelas 2.7 e 2.8 e das Figuras 2.14 e 2.15, pode-se notar uma boa convergência dos resultados do MEC de ambas teorias de placas para as suas respostas analíticas. Isto mostra a consistência do MRM proposto proposto, em que foram aplicadas identidade de Green duas vezes recursivamente ($k = 2$) para transformar a integral de domínio em equações integrais de contorno equivalentes.

2.6.4 Placa sob carregamento exponencial

A ideia de desse exemplo é discutir que o MRM proposto pode lidar não apenas com carregamentos polinomiais quaisquer, mas também aqueles que podem ser aproximadas por series polinomiais. Assim, considere uma placa quadrada simplesmente apoiada submetida a um carregamento exponencial, conforme a Fig. 2.16. A carga $q = q_0 \cdot e^{x/a}$ pode ser expandida como uma série polinomial, sendo dada por:

$$q(Q) = q_0 \cdot e^{x/a} \cong q_0 \cdot \left\{ 1 + \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{x}{a} \right)^k \frac{1}{k!} \right] \right\} \quad (2.114)$$

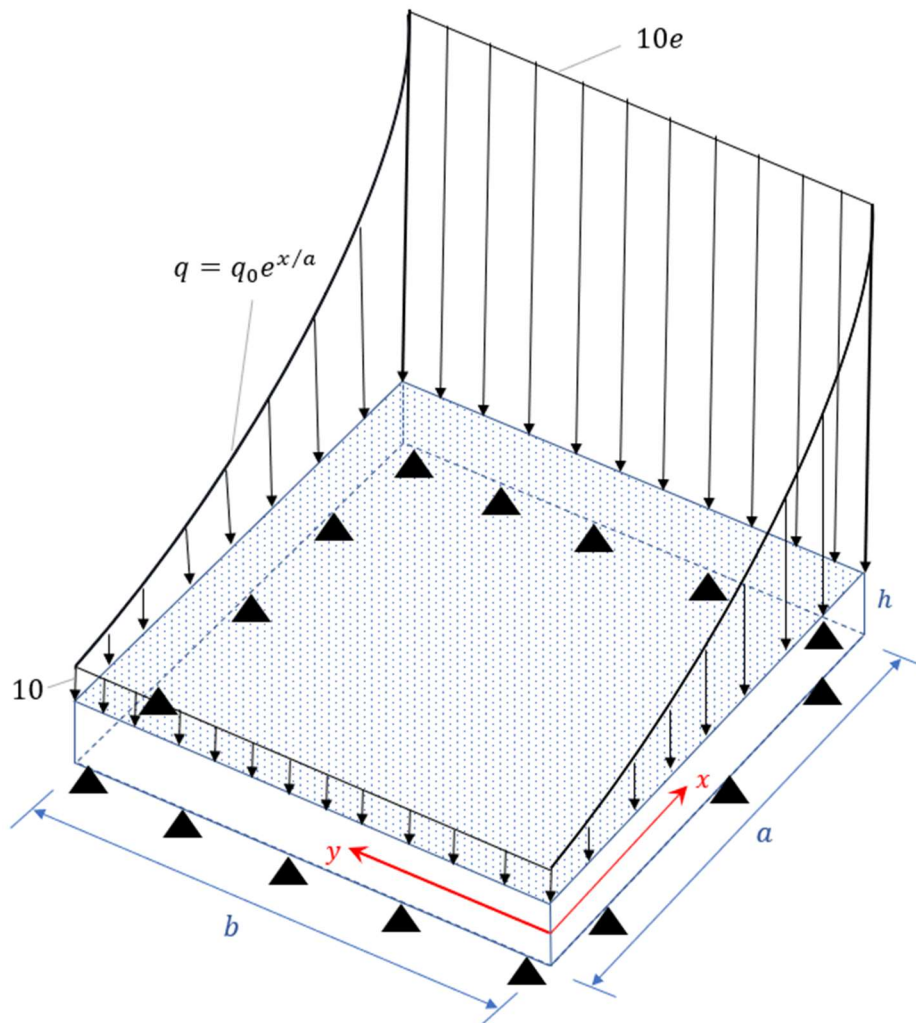


Figura 2.16 – Placa quadrada simplesmente apoiada submetida a carregamento exponencial.

Os parâmetros da placa, mostrada na Figura 2.16, são: $E = 200 \text{ MPa}$; $\nu = 0.30$; $a = 1.00 \text{ m}$; $b = 1.00 \text{ m}$; $q_0 = 10 \text{ kN/m}^2$.

Nas Tabelas 2.9 e 2.10 são apresentados os resultados analíticos e numéricos para o deslocamento w no centro da placa usando $n = 13$. Além disso, as soluções analíticas são fornecidas no Anexo A (ver seção A.1). Considerando os resultados de deflexão no centro da placa para a discretização MEC-128 em elementos de contorno, os erros relativos em relação à solução analítica são menores que 0,038% para a placa mais fina e 0,124% para a placa mais espessa.

As Figuras 2.17 e 2.18 mostram os resultados numéricos e analíticos no centro da placa para o momento adimensional M_{xx} e a força de cisalhamento associada à relação $h/a = 0,025$.

Tabela 2.9 – Deflexão w ($\times 10^{-2} \text{ m}$) para a placa simplesmente apoiada submetida a um carregamento exponencial, segundo a teoria de Reissner.

$\frac{h}{a}$	$x \text{ (m)}$	MEC				Analítica Reissner	Erro (%)
		16	32	64	128		
0,200	0,250	0,0290	0,0293	0,0294	0,0294	0,0294	0,0070
	0,375	0,0336	0,0340	0,0341	0,0341	0,0341	0,0060
	0,500	0,0329	0,0333	0,0333	0,0333	0,0333	0,0082
	0,625	0,0280	0,0283	0,0283	0,0284	0,0284	0,0048
	0,750	0,0200	0,0202	0,0203	0,0203	0,0203	0,0067
0,100	0,250	0,2036	0,2077	0,2085	0,2086	0,2086	0,0157
	0,375	0,2369	0,2414	0,2422	0,2424	0,2424	0,0180
	0,500	0,2316	0,2359	0,2366	0,2368	0,2368	0,0184
	0,625	0,1958	0,1995	0,2001	0,2003	0,2003	0,0164
	0,750	0,1385	0,1411	0,1416	0,1417	0,1417	0,0193
0,025	0,250	12,4069	12,7385	12,8066	12,8206	12,8248	0,0327
	0,375	14,4521	14,8177	14,8928	14,9085	14,9131	0,0305
	0,500	14,1195	14,4679	14,5402	14,5549	14,5594	0,0312
	0,625	11,9128	12,2084	12,2702	12,2832	12,2870	0,0313
	0,750	8,3859	8,6022	8,6476	8,6574	8,6602	0,0323
0,010	0,250	192,5906	198,4765	199,6285	199,8688	199,9288	0,0300
	0,375	224,3951	230,8816	232,1592	232,4213	232,4868	0,0282
	0,500	219,2299	225,4270	226,6501	226,9012	226,9667	0,0289
	0,625	184,9247	190,1936	191,2420	191,4604	191,5204	0,0314
	0,750	130,1118	133,9775	134,7528	134,9111	134,9548	0,0324

Nas Tabelas 2.9 e 2.10, os resultados apresentados mostram excelente convergência para as soluções analíticas das teorias de Reissner e de Mindlin. Vale registrar que a solução analítica apresentada nas mencionadas tabelas referem-se a solução analítica de Navier (Equação A.1) aplicada para placas simplesmente apoiadas submetidas a um carregamento polinomial q .

Tabela 2.10 – Deflexão w ($\times 10^{-2} m$) para a placa simplesmente apoiada submetida a um carregamento exponencial, segundo a teoria de Mindlin.

$\frac{h}{a}$	$x (m)$	MEC				Analítica Mindlin	Erro (%)
		16	32	64	128		
0,200	0,250	0,0298	0,0301	0,0301	0,0302	0,0302	0,0068
	0,375	0,0345	0,0349	0,0349	0,0349	0,0349	0,0059
	0,500	0,0338	0,0342	0,0342	0,0342	0,0342	0,0060
	0,625	0,0288	0,0291	0,0291	0,0291	0,0291	0,0047
	0,750	0,0206	0,0208	0,0209	0,0209	0,0209	0,0065
0,100	0,250	0,2051	0,2092	0,2100	0,2101	0,2102	0,0208
	0,375	0,2386	0,2431	0,2440	0,2441	0,2442	0,0179
	0,500	0,2333	0,2376	0,2384	0,2385	0,2386	0,0183
	0,625	0,1974	0,2010	0,2017	0,2018	0,2018	0,0189
	0,750	0,1397	0,1423	0,1428	0,1429	0,1429	0,0229
0,025	0,250	12,4128	12,7448	12,8126	12,8269	12,8311	0,0327
	0,375	14,4591	14,8246	14,8998	14,9155	14,9200	0,0304
	0,500	14,1261	14,4749	14,5472	14,5622	14,5664	0,0288
	0,625	11,9187	12,2147	12,2765	12,2895	12,2933	0,0313
	0,750	8,3904	8,6071	8,6525	8,6619	8,6651	0,0363
0,010	0,250	192,7271	198,5092	199,6394	199,8688	199,9397	0,0355
	0,375	224,5425	230,9252	232,1701	232,4267	232,5086	0,0352
	0,500	219,3664	225,4652	226,6664	226,9121	226,9886	0,0337
	0,625	185,0394	190,2319	191,2583	191,4713	191,5368	0,0342
	0,750	130,1992	134,0048	134,7637	134,9221	134,9657	0,0324

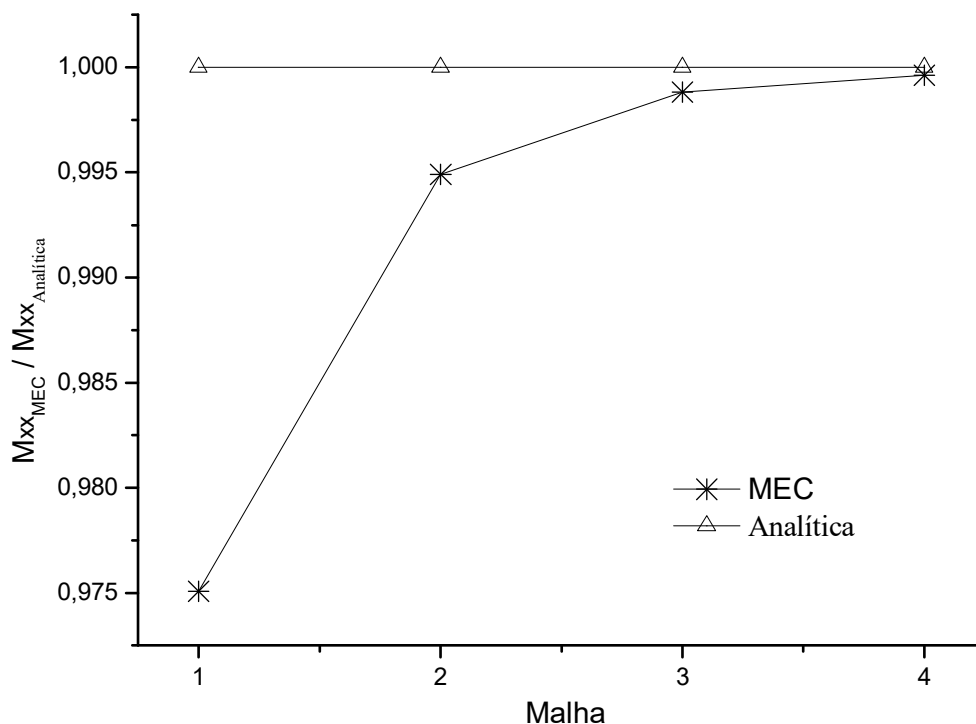


Figura 2.17 – Convergência dos resultados para $M_{xx_MEC} / M_{xx_analítica}$ no ponto central para uma placa com $h = 0,025 m$: Malha 1 (MEC16); Malha 2 (MEC32); Malha 3 (MEC64); Malha 4 (MEC128).

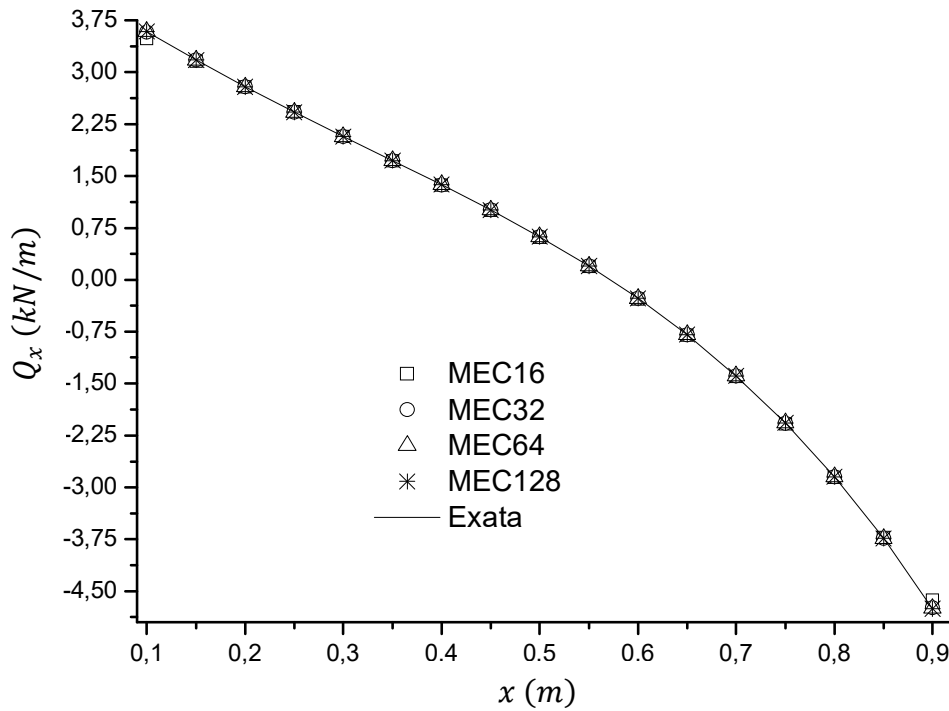


Figura 2.18 – Força de cisalhamento Q_x (kN/m) ao longo da linha central para uma placa simplesmente apoiada com $h = 0,025$ m.

As Figuras 2.17 e 2.18 mostram um excelente comportamento dos resultados de momento e de força de cisalhamento obtida com o MEC quando comparados com as soluções analíticas, mesmo para a malha de elemento de contorno menos refinada (MEC-16). Além disso, a aplicação do MRM para o carregamento exponencial representado por série são assumidos n termos ímpares na série da Eq. (2.124), implicando na aplicação recursiva $(n - 2)$ vezes da segunda identidade de Green.

2.6.5 Placa submetida a carregamento duplo senoidal

Um outro caso em que o carregamento não-polinomial pode ser aproximado por uma série de termos polinomiais é a distribuição bi-senoidal. Assim, considere uma placa quadrada simplesmente apoiada submetida a um carregamento duplo senoidal, conforme mostrado na Fig. 2.19, e dado por:

$$q(Q) = q_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (2.115)$$

A Equação (2.115) pode ser expandida em uma série polinomial, como mostrado a seguir:

$$q(Q) = q_0 \cdot q(x) \cdot q(y) \cong q_0 \cdot \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left(\frac{\pi x}{a}\right)^{2k-1} \frac{1}{(2k-1)!} \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left(\frac{\pi y}{b}\right)^{2k-1} \frac{1}{(2k-1)!} \right) \quad (2.116)$$

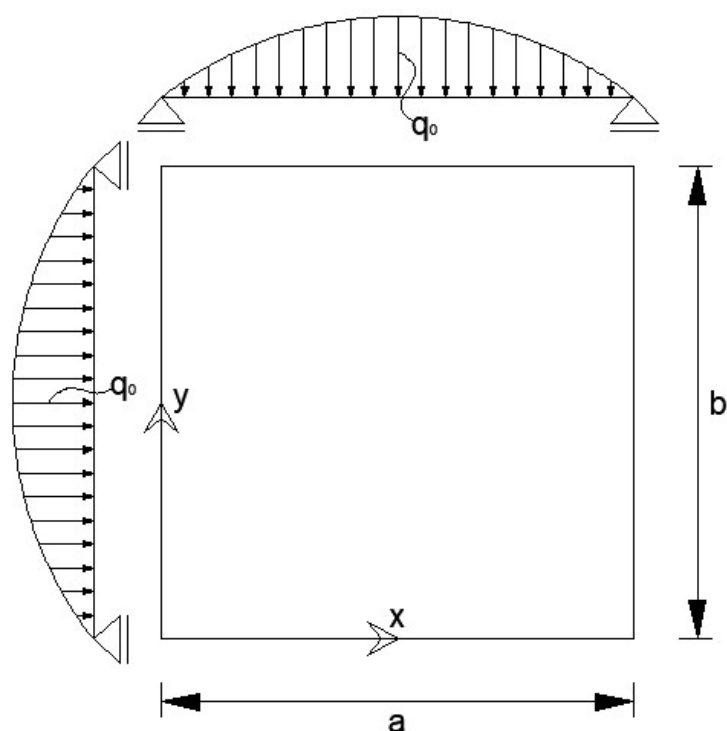


Figura 2.19 – Placa quadrada simplesmente apoiada submetida a carregamento duplo senoidal.

A análise pelo MEC e a solução analítica (ver seção A.1) para a deflexão adimensional $\hat{w} = (4wD\pi^4/q_0a^4)$, momento fletor M_{yy}/M^0 com $M^0 = \frac{(1+\nu)q_0a^2}{4\pi^2}$ e esforço cortante Q_x/Q^0 com $Q^0 = \frac{q_0a}{2\pi}$ são apresentados respectivamente na Tabela 2.11, Figuras 2.20 e 2.21.

Tabela 2.11 – Deflexão adimensionalizada $\hat{w} = (4wD\pi^4/q_0a^4)$ para uma placa submetida a carregamento duplo senoidal com $h/a = 0,04$.

Nº de termos (k)	x (m)	MEC			Analítica ($k = 6$)	Erro %
		16	32	64		
2	0,250	0,39827	0,40494	0,40652	0,71252	42,9462
	0,375	0,50411	0,51204	0,51389	0,93095	44,7994
	0,500	0,51795	0,52603	0,52790	1,00765	47,6108
	0,625	0,44239	0,44969	0,45137	0,93094	51,5146
	0,750	0,30309	0,30881	0,31012	0,71251	56,4750
4	0,250	0,68991	0,70445	0,70754	0,71252	0,6989
	0,375	0,90244	0,92030	0,92406	0,93095	0,7401
	0,500	0,97664	0,99556	0,99955	1,00765	0,8039
	0,625	0,90099	0,91881	0,92257	0,93094	0,8991
	0,750	0,68760	0,70209	0,70516	0,71251	1,0316
6	0,250	0,69427	0,70912	0,71230	0,71252	0,0309
	0,375	0,90858	0,92684	0,93074	0,93095	0,0226
	0,500	0,98396	1,00335	1,00748	1,00765	0,0169
	0,625	0,90864	0,92693	0,93083	0,93094	0,0118
	0,750	0,69436	0,70925	0,71245	0,71251	0,0084

Deve-se notar que um estudo de convergência dos resultados do MEC para a solução analítica assumindo seis termos na expansão da série dada na Eq. (2.116) é mostrado na Tabela 6. Quando são utilizados apenas dois termos para aproximar a carga senoidal na solução do MEC, mesmo usando a malha mais refinada, seu desempenho é ruim quando comparado à solução analítica. Este cenário muda quando mais termos são inseridos na solução do MEC. Por exemplo, usando 4 termos ($k = 4$) na série, o erro relativo no ponto central é de 0,80%, diminuindo para 0,017% quando as soluções do MEC são obtidas com 6 termos. Além disso, quanto se aumenta a ordem polinomial, os resultados do MEC em deflexão tendem a ser mais simétricos. Deve-se notar que resultados não simétricos também podem ser vistos na solução analítica de uma carga senoidal dupla representada por uma série com poucos termos.

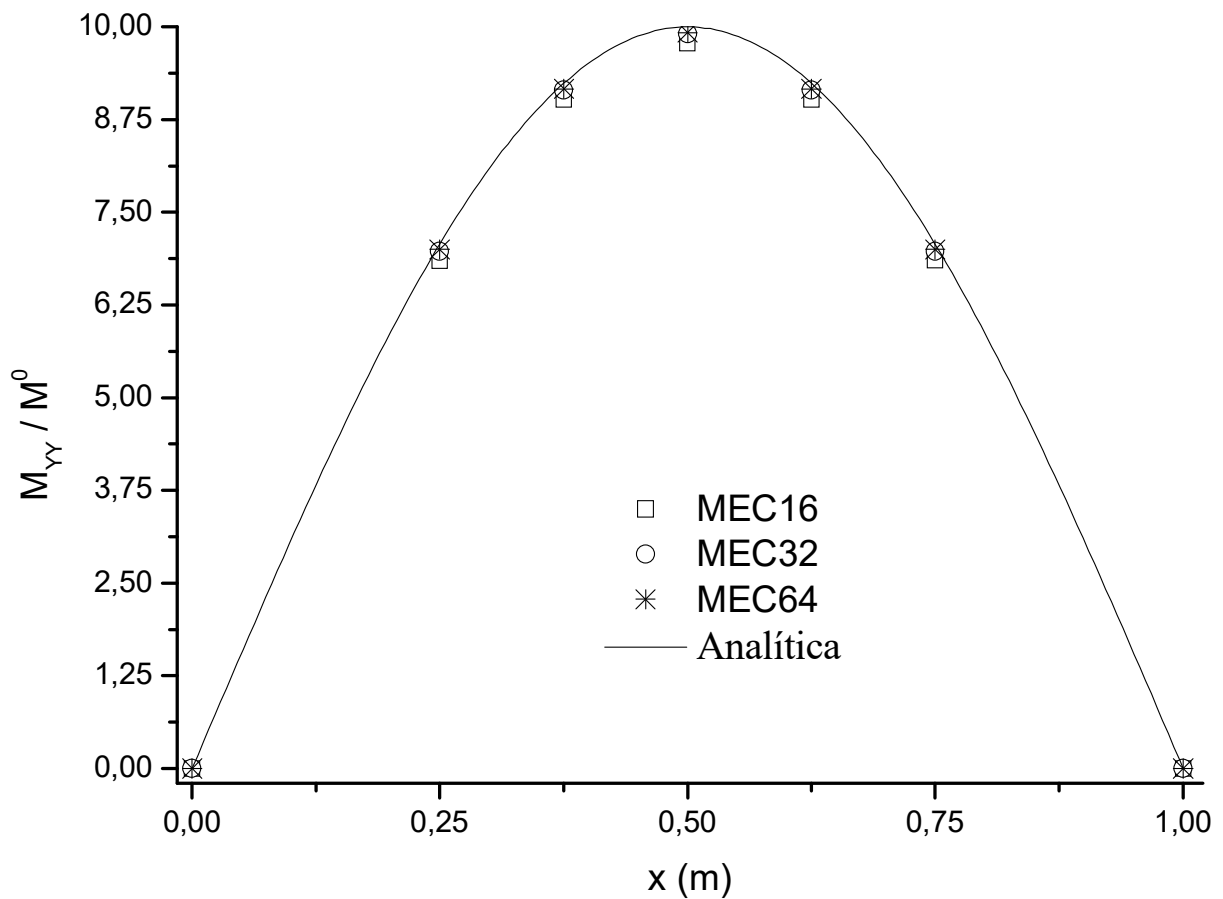


Figura 2.20 – Momento fletor adimensionalizado M_{yy}/M^0 ($\times 10^{-1}$) para a placa com $h = 0,04$ m.

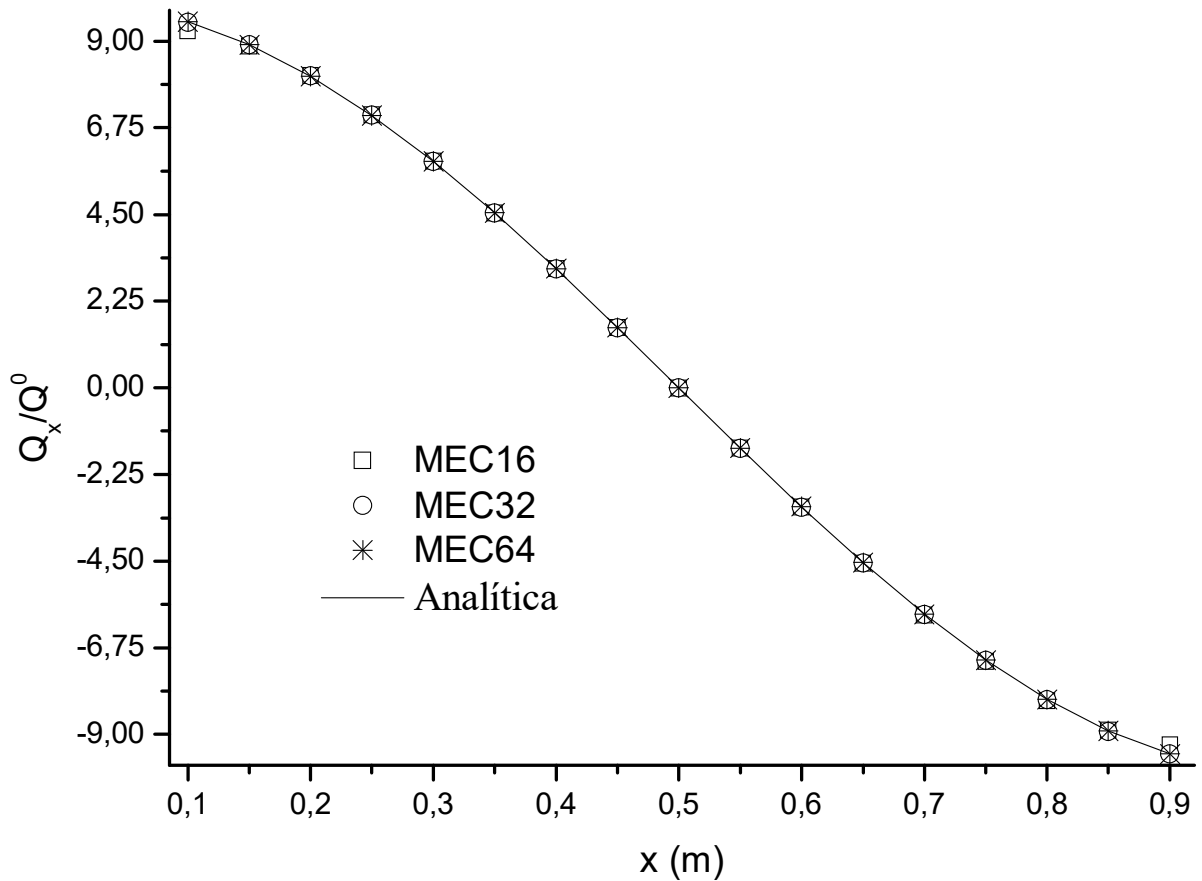


Figura 2.21 – Força de cisalhamento adimensionalizada Q_x/q_0a ($\times 10^{-1}$) ao longo da linha central para uma placa simplesmente apoiada com $h = 0,04$ m.

Pode ser observado nas Figuras 2.20 e 2.21 que os resultados do MEC apresentam excelente concordância com as soluções analíticas. Na aplicação do MRM para a carga dupla senoidal representada em séries polinomiais de n termos, a segunda identidade de Green deve ser aplicada n vezes recursivamente.

2.6.6 Placa engastada com chanfro submetida a carregamento distribuído quadrático

Considere uma placa com chanfro engastada submetida a um carregamento distribuído quadrático conforme indicada na Figura 2.22. Os parâmetros da placa são: $E = 200$ MPa; $\nu = 0.30$; $h = 0.10$ m; $a_1 = 0.50$ m; $a_2 = 1.00$ m; $b_1 = 0.50$ m; $b_2 = 0.50$ m; $q_0 = 10$ kN/m².

A expressão do carregamento quadrático é dada por:

$$q(Q) = q(x, y) = q_0 \left[\left(\frac{x}{a_2} \right)^2 + 1 \right] \quad (2.117)$$

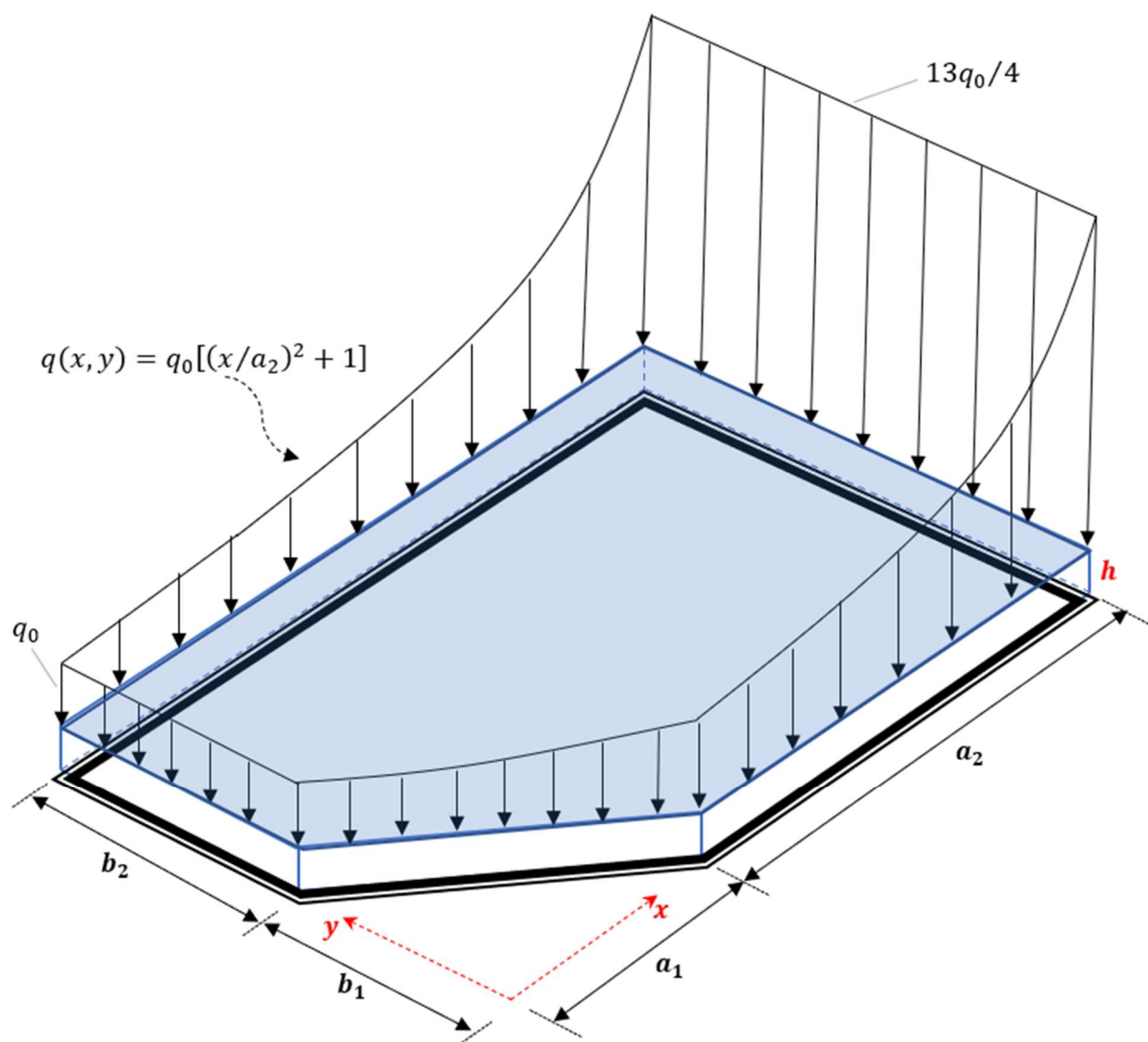


Figura 2.22 – Placa com chanfro submetida a carregamento distribuído quadrático.

Devido a inexistência de uma solução analítica para a placa com chanfro engastada, submetida a um carregamento quadrático, optou-se por realizar uma comparação dos resultados do MEC com as respostas obtidos pelo MEF.

A Figura 2.23 mostra a malha com 5.648 elementos finitos utilizando um tipo de elemento denominado de "Plate Thick" no software SAP2000 v.22 Ultimate.

Já a Figura 2.24 mostra três malhas do MEC com 16, 32, e 64 de elementos de contorno.

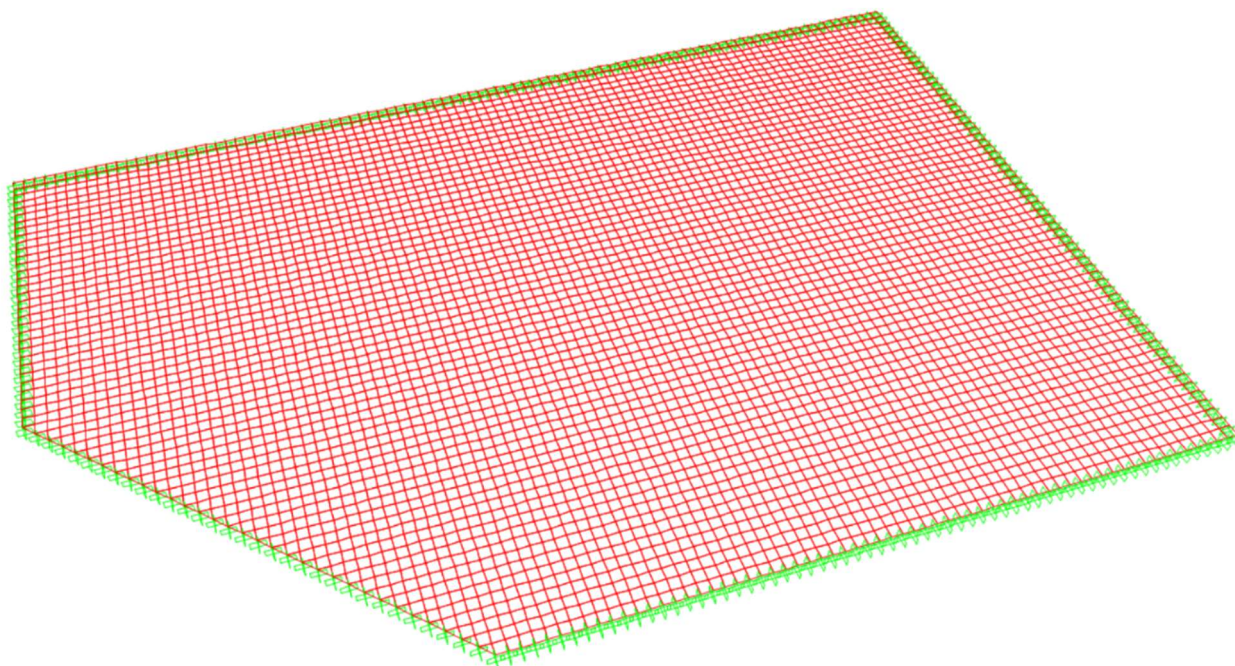


Figura 2.23 – Placa chanfrada modelada em elementos finitos (5648 elementos *Plate Thick*).

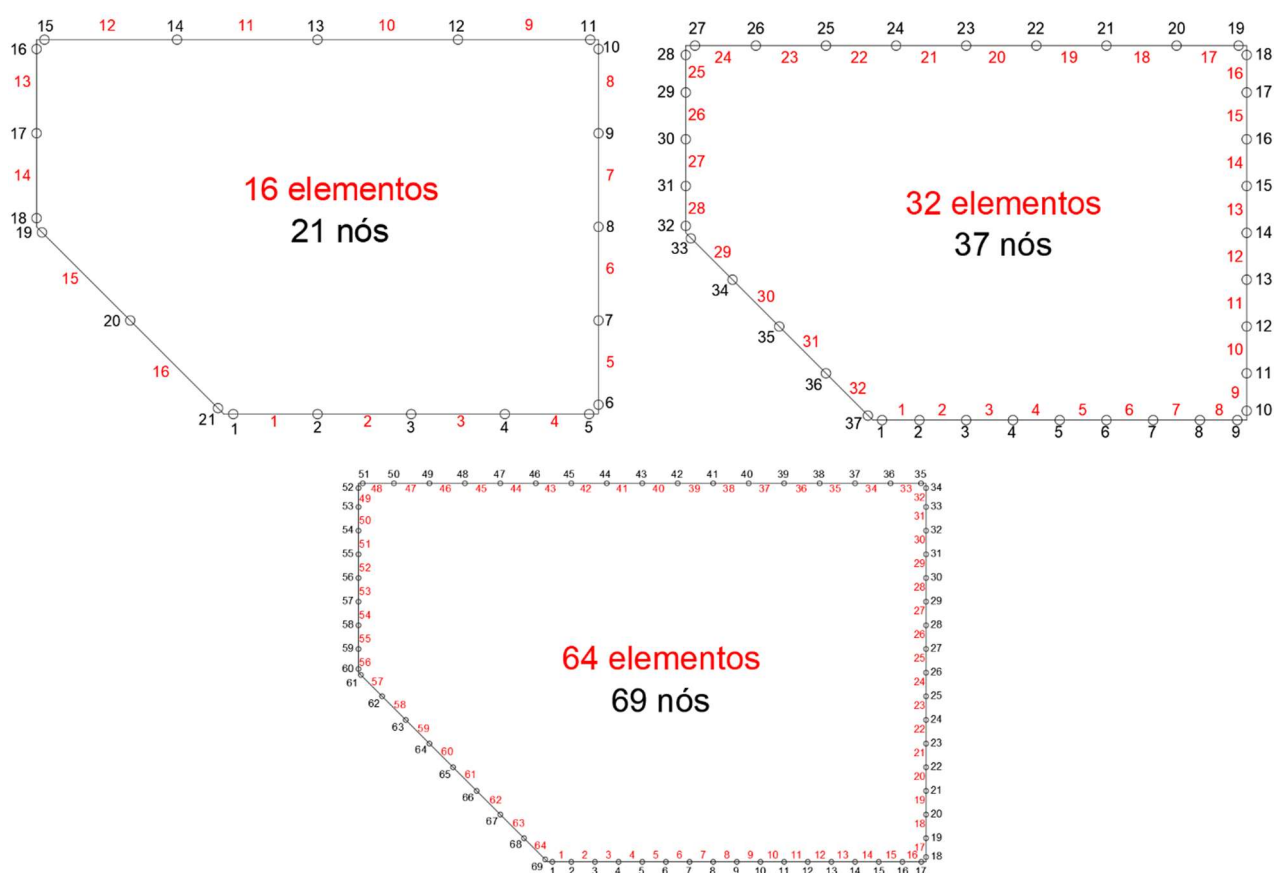


Figura 2.24 – Discretização em elementos de contorno da placa com chanfro.

A Figura 2.25 mostra os resultados numéricos obtidos para a placa chanfrada sob carregamento quadrático para o deslocamento, sob as hipóteses de Reissner, considerando quatro espessuras distintas, variando desde uma placa fina com $h = 0,01\text{ m}$ até uma placa espessa com $h = 0,20\text{ m}$.

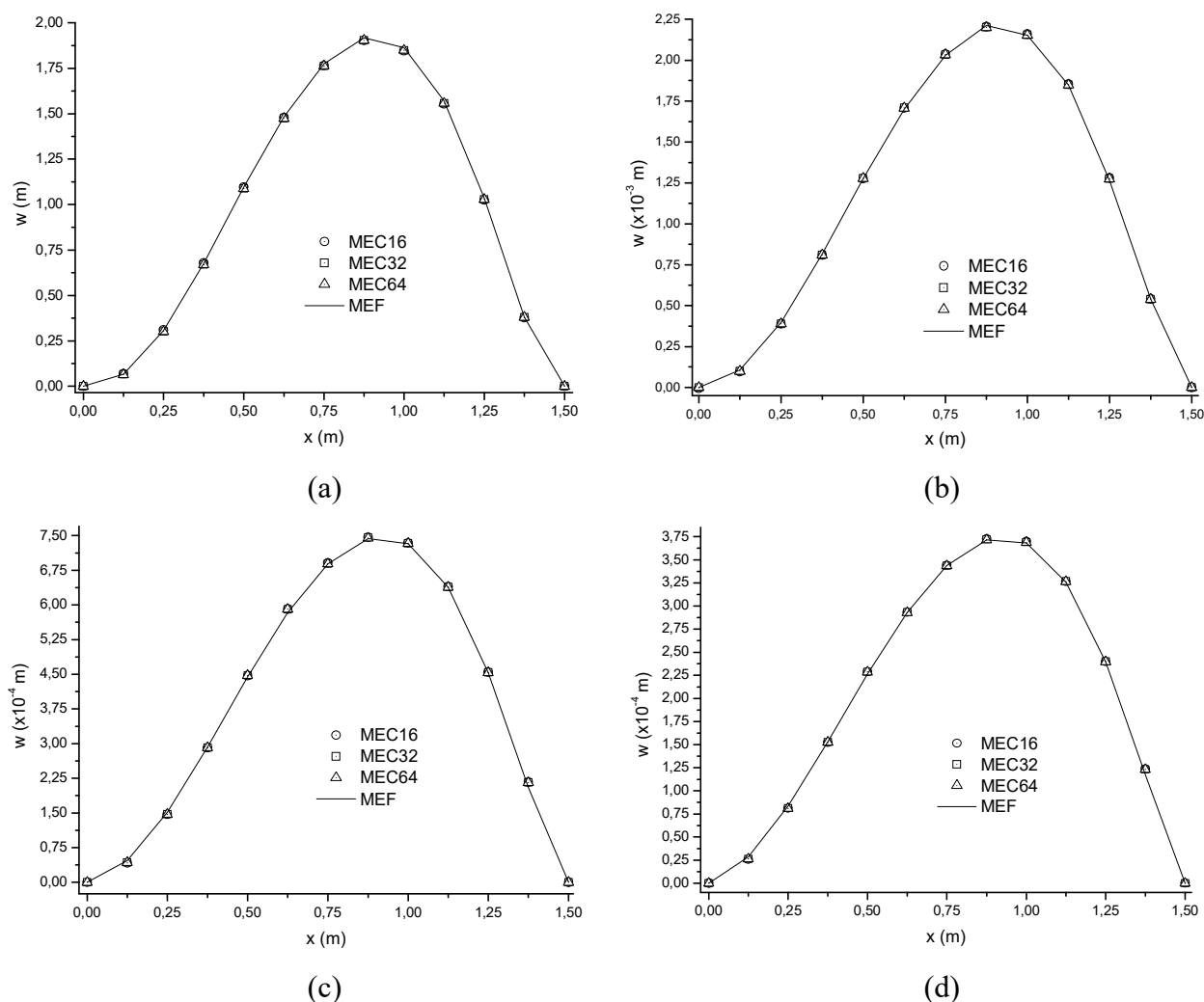


Figura 2.25 – Deslocamento w (m) ao longo da linha central da placa chanfrada sob carregamento quadrático, considerando as hipóteses de Reissner: (a) $h = 0,01\text{ m}$; (b) $h = 0,10\text{ m}$; (c) $h = 0,15\text{ m}$; (d) $h = 0,20\text{ m}$.

A Figura 2.26 mostra os resultados numéricos obtidos para a placa chanfrada sob carregamento quadrático para o deslocamento, sob as hipóteses de Mindlin, considerando quatro espessuras distintas, variando desde uma placa fina com $h = 0,01\text{ m}$ até uma placa espessa com $h = 0,20\text{ m}$.

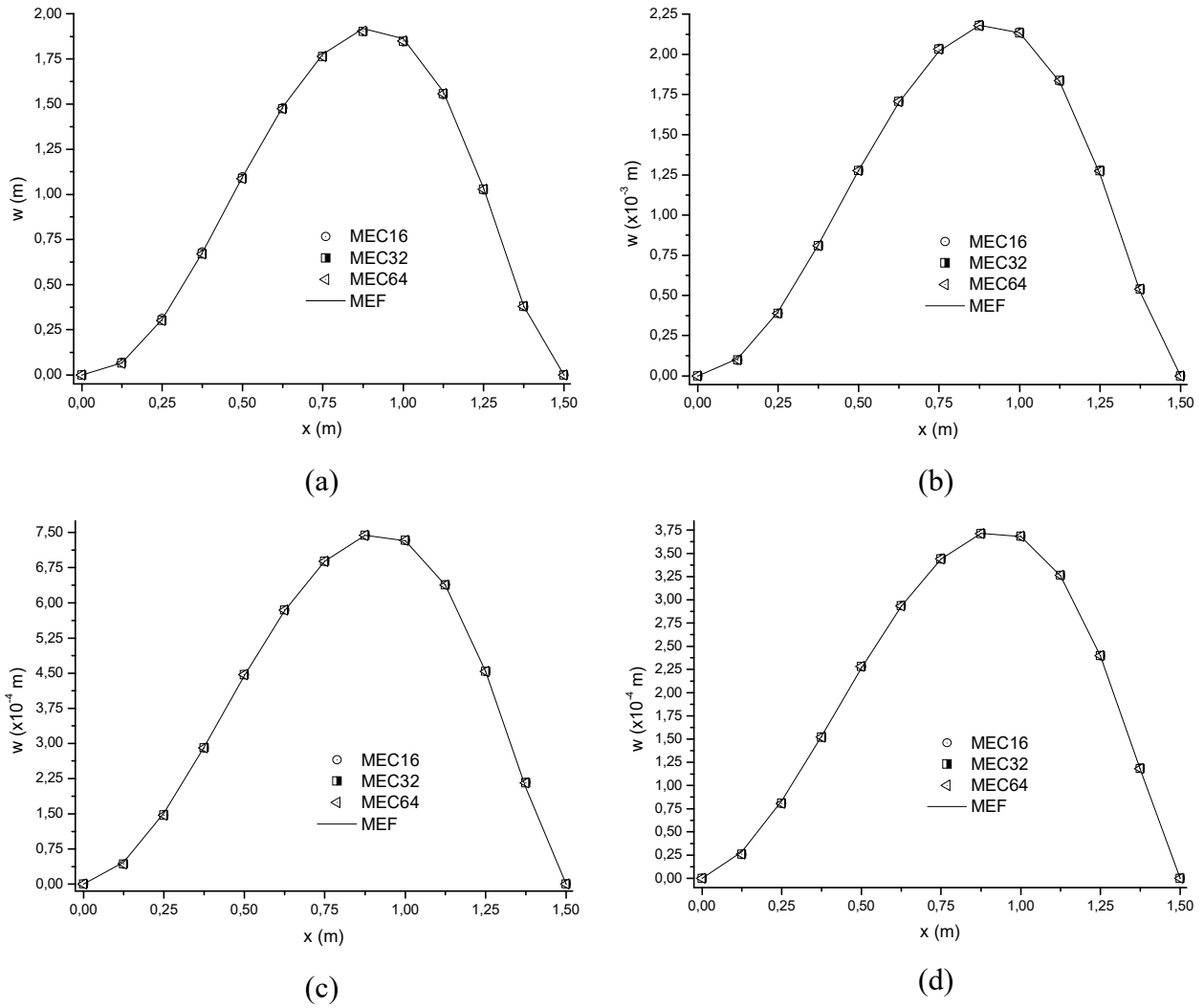


Figura 2.26 – Deslocamento w (m) ao longo da linha central da placa chanfrada sob carregamento quadrático, considerando as hipóteses de Mindlin: (a) $h = 0,01$ m; (b) $h = 0,10$ m; (c) $h = 0,15$ m; (d) $h = 0,20$ m.

Da análise das Figuras 2.25 e 2.26, observa-se que os deslocamentos obtidos via MEC pela teoria de Reissner e pela teoria de Mindlin são próximos daqueles obtidos via MEF, apresentando o mesmo comportamento ao longo das discretizações e das espessuras. Pode-se observar ainda que tanto o MEC quanto o MEF apresentam soluções convergentes.

CAPÍTULO 3

O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO NA TEORIA DE PLACAS DE REDDY

3.1 Introdução

Existem diversas teorias de placas que fornecem vários graus de robustez para a descrição do problema. Desde a teoria clássica das placas, que tem vasta aplicabilidade em problemas de engenharia associados a placas delgadas, a diversos grupos de teorias que levam em conta o efeito da deformação por cortante utilizando diferentes níveis de refinamento de abordagens. As teorias refinadas comumente conhecidas são as teorias de placas de Reissner, de Mindlin e de Reddy. Enquanto a primeira é baseada em campos de tensões assumidas, as duas últimas são formuladas a partir de leis cinemáticas de deslocamentos impostas. No capítulo 2, as formulações do MEC foram descritas para as teorias de Reissner e Mindlin. Neste, uma formulação do MEC é estabelecida baseada nas hipóteses da teoria de deformação por cortante de terceira ordem de Reddy.

Parte das contribuições originais desta tese está associada ao estabelecimento de uma formulação regular do Método dos Elementos de Contorno aplicado à Teoria de Placas de Reddy. Neste capítulo são deduzidas as soluções fundamentais de deslocamentos e de esforços, seguidas das equações integrais. Além disso, a discretização das equações integrais e a formação do sistema algébrico são mostradas brevemente, já que as descrições essenciais desses processos são análogas aos casos de placas de Reissner e Mindlin, que foram detalhadas no capítulo 2.

3.2 Hipóteses Básicas

A seguir, são descritas as hipóteses básicas sobre as quais se baseia a Teoria de Placas de Reddy:

- a) a espessura da placa é pequena se comparada às outras dimensões da placa;
- b) o material da placa é constituído de material de elástico linear, homogêneo e isotrópico;

A teoria de placas de Reddy consiste em um modelo refinado no qual se assume que a seção transversal não permanece plana durante o processo de flexão, uma vez que é adotado que os deslocamentos axiais têm variação cúbica ao longo da altura da seção transversal. Consequentemente, a condição de distribuição quadrática para as tensões de cisalhamento transversas é satisfeita automaticamente. Isto contrasta com o modelo de placa de Mindlin, que não

atende a tal condição pois prevê uma distribuição constante para essas tensões, exigindo a incorporação de um fator de correção de cisalhamento no modelo. A teoria de placas de Reddy é considerada uma teoria de placas deformáveis por cisalhamento de terceira ordem. A Figura 3.1 mostra uma placa com geometria não deformada e respectivas deformadas sob as considerações das teorias clássica, de primeira ordem e de terceira ordem.

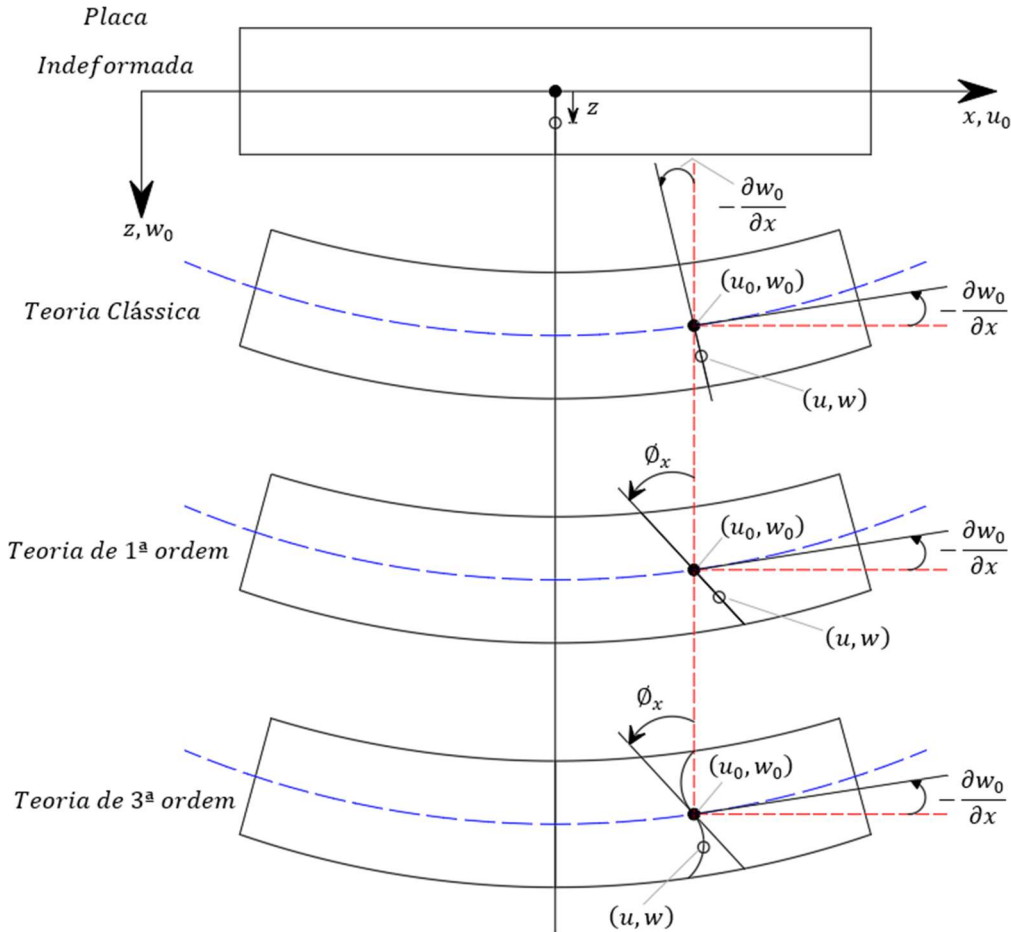


Figura 3.1 – Teorias de placas com deslocamentos assumidos.

3.3 Equações de Equilíbrio

De acordo com Levinson (1980) e Reddy (1984), os campos de deslocamentos axiais são assumidos com variação cúbica em função de z :

$$u(x, y, z) = z\phi_x(x, y) - \beta_1 z^3 \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \quad (3.1a)$$

$$v(x, y, z) = z\phi_y(x, y) - \beta_1 z^3 \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \quad (3.1b)$$

onde: $\beta_1 = \frac{4}{3h^2}$; h é a espessura da placa; ϕ_x e ϕ_y são as rotações da seção; $\frac{\partial w_0}{\partial x}$ e $\frac{\partial w_0}{\partial y}$ são as inclinações do plano médio.

Já os deslocamentos transversais são assumidos serem constantes ao longo da espessura, o que resulta em:

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (3.1c)$$

Reescrevendo o campo de deslocamentos (Eq. 3.1) em notação indicial, obtém-se:

$$u_3(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (3.1d)$$

$$u_\alpha(x, y, z) = z\phi_\alpha(x, y) - \beta_1 z^3(\phi_\alpha + u_{3,\alpha}) \quad (3.1e)$$

A partir de (2.20c), (2.20d), (3.1d) e (3.1e), as relações cinemáticas são dadas por:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} - \beta_1 z^3 \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \\ \varepsilon_{yy} &= z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} - \beta_1 z^3 \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\ \gamma_{xy} &= z \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) - \\ &\quad - \beta_1 z^3 \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= z \left(\frac{\phi_{\alpha,\beta} + \phi_{\beta,\alpha}}{2} \right) - \\ &\quad - \beta_1 z^3 \left(\frac{\phi_{\alpha,\beta} + \phi_{\beta,\alpha}}{2} + u_{3,\alpha\beta} \right) \end{aligned} \quad (3.2a)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xz} &= (1 - \beta_2 z^2) \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ \gamma_{yz} &= (1 - \beta_2 z^2) \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \varepsilon_{\alpha 3} = 2(1 - \beta_2 z^2)(\phi_\alpha + u_{3,\alpha}) \quad (3.2b)$$

onde os índices α e β variam 1 e 2; $\beta_2 = 3\beta_1$.

Usando o princípio dos trabalhos virtuais, tem-se:

$$\delta w = \delta U - \delta V = 0 \quad (3.3)$$

onde a variação de δU representa a variação das deformações e δV é a variação do trabalho externo.

A primeira variação δU é dada por:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} dz d\Omega + \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} dz d\Omega + \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy} dz d\Omega + \\ &\quad + \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz} dz d\Omega + \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz} dz d\Omega \end{aligned} \quad (3.4a)$$

Reescrevendo a equação (3.4a) em notação indicial, tem-se:

$$\delta U = \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta} dz d\Omega + 2 \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha 3} \delta \varepsilon_{\alpha 3} dz d\Omega \quad (3.4b)$$

onde os índices α e β variam 1 e 2.

Substituindo as equações (3.2) na equação (3.4b):

$$\begin{aligned} \delta U = & \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\beta} \left[z \left(\frac{\delta \phi_{\alpha,\beta} + \delta \phi_{\beta,\alpha}}{2} \right) - \beta_1 z^3 \left(\frac{\delta \phi_{\alpha,\beta} + \delta \phi_{\beta,\alpha}}{2} + \delta u_{3,\alpha\beta} \right) \right] dz d\Omega + \\ & + 2 \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha 3} [(1 - \beta_2 z^2)(\delta \phi_{\alpha} + \delta u_{3,\alpha})] dz d\Omega \end{aligned} \quad (3.5)$$

A variação do trabalho externo δV é dada por:

$$\delta V = - \int_{\Omega} q \delta u_3 d\Omega - \int_{\Omega} m_{\alpha} \delta \phi_{\alpha} d\Omega - \int_{\Gamma} (V_{n0}^R \delta u_3 + \hat{M}_{n0} \delta \phi_n + \hat{M}_{sn0} \delta \phi_t - \beta_1 P_{n0} \delta u_{3,n}) d\Gamma \quad (3.6)$$

onde q são as forças externas por unidade de área e m_{α} são os momentos por unidade de área; o índice α tem variação 1 e 2; V_{n0}^R , $\hat{M}_{n0}$, $\hat{M}_{sn0}$, P_{n0} são esforços prescritos no contorno.

As resultantes de tensão de alta ordem P_{xx} , P_{yy} , P_{xy} e R_x , R_y são dadas por (Wang *et al.*, 2000):

$$\left. \begin{aligned} P_{xx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} z^3 dz \\ P_{yy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yy} z^3 dz \\ P_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} z^3 dz \end{aligned} \right\} P_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\beta} z^3 dz \quad (3.7a)$$

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xz} z^2 dz \\ R_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yz} z^2 dz \end{aligned} \right\} R_{\alpha} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha 3} z^2 dz \quad (3.7b)$$

onde os índices α e β variam 1 e 2.

Utilizando na equação (3.3) os momentos fletores e volventes por unidade de comprimento, as forças de cisalhamento transversal por unidade de comprimento, estes já definidos anteriormente, e as resultantes de tensão, obtém-se:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} M_{\alpha\beta} \left(\frac{\delta\phi_{\alpha,\beta} + \delta\phi_{\beta,\alpha}}{2} \right) d\Omega - \beta_1 \int_{\Omega} P_{\alpha\beta} \left(\frac{\delta\phi_{\alpha,\beta} + \delta\phi_{\beta,\alpha}}{2} + \delta u_{3,\alpha\beta} \right) d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} Q_{\alpha} (\delta\phi_{\alpha} + \delta u_{3,\alpha}) d\Omega - \int_{\Omega} R_{\alpha} \beta_2 (\delta\phi_{\alpha} + \delta u_{3,\alpha}) d\Omega - \delta V = 0
\end{aligned} \tag{3.8}$$

onde os índices α e β variam 1 e 2.

Integrando-se a equação (3.8) por partes, resulta em:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (M_{\alpha\beta} n_{\beta} \delta\phi_{\alpha} + M_{\alpha\beta} n_{\alpha} \delta\phi_{\beta}) d\Gamma - \\
& - \frac{\beta_1}{2} \int_{\Gamma} (P_{\alpha\beta} n_{\beta} \delta\phi_{\alpha} + P_{\alpha\beta} n_{\alpha} \delta\phi_{\beta} + 2P_{\alpha\beta} n_{\alpha} \delta u_{3,\beta} - 2P_{\alpha\beta,\alpha} n_{\beta} \delta u_3) d\Gamma + \\
& + \int_{\Gamma} (Q_{\alpha} - \beta_2 R_{\alpha}) n_{\alpha} \delta u_3 d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (M_{\alpha\beta,\beta} \delta\phi_{\alpha} + M_{\alpha\beta,\alpha} \delta\phi_{\beta}) d\Omega + \\
& + \frac{\beta_1}{2} \int_{\Omega} (P_{\alpha\beta,\beta} \delta\phi_{\alpha} + P_{\alpha\beta,\alpha} \delta\phi_{\beta} - 2P_{\alpha\beta,\alpha\beta} \delta u_3) d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} (Q_{\alpha} \delta\phi_{\alpha} - Q_{\alpha,\alpha} \delta u_3) d\Omega - \int_{\Omega} \beta_2 (R_{\alpha} \delta\phi_{\alpha} - R_{\alpha,\alpha} \delta u_3) d\Omega - \delta V = 0
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Considerando que $M_{\alpha\beta} n_{\beta} \delta\phi_{\alpha} = M_{\alpha\beta} n_{\alpha} \delta\phi_{\beta}$, $P_{\alpha\beta} n_{\beta} \delta\phi_{\alpha} = P_{\alpha\beta} n_{\alpha} \delta\phi_{\beta}$, $M_{\alpha\beta,\beta} \delta\phi_{\alpha} = M_{\alpha\beta,\alpha} \delta\phi_{\beta}$ e $P_{\alpha\beta,\beta} \delta\phi_{\alpha} = P_{\alpha\beta,\alpha} \delta\phi_{\beta}$, e ainda reagrupando os termos das integrais na equação (3.9), resulta em:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} (M_{\alpha\beta} - \beta_1 P_{\alpha\beta}) n_{\beta} \delta\phi_{\alpha} d\Gamma - \beta_1 \int_{\Gamma} P_{\alpha\beta} n_{\alpha} \delta u_{3,\beta} d\Gamma + \\
& + \int_{\Gamma} [(Q_{\alpha} - \beta_2 R_{\alpha}) n_{\alpha} + \beta_1 P_{\alpha\beta,\alpha} n_{\beta}] \delta u_3 d\Gamma - \int_{\Omega} (M_{\alpha\beta,\beta} - \beta_1 P_{\alpha\beta,\beta} + \beta_2 R_{\alpha} - Q_{\alpha}) \delta\phi_{\alpha} d\Omega - \\
& - \int_{\Omega} (Q_{\alpha,\alpha} - \beta_2 R_{\alpha,\alpha} + \beta_1 P_{\alpha\beta,\alpha\beta}) \delta u_3 d\Omega - \delta V = 0
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Segundo Reddy (1984), os esforços usuais e os de alta ordem se relacionam como:

$$\hat{M}_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta} - \beta_1 P_{\alpha\beta} \tag{3.11}$$

$$\hat{Q}_{\alpha} = Q_{\alpha} - \beta_2 R_{\alpha} \tag{3.12}$$

Utilizando as equações (3.11) e (3.12), a equação (3.10) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\int_{\Gamma} \hat{M}_{\alpha\beta} n_{\beta} \delta\phi_{\alpha} d\Gamma - \beta_1 \int_{\Gamma} P_{\alpha\beta} n_{\alpha} \delta u_{3,\beta} d\Gamma + \int_{\Gamma} [\hat{Q}_{\alpha} n_{\alpha} + \beta_1 P_{\alpha\beta,\alpha} n_{\beta}] \delta u_3 d\Gamma -$$

$$-\int_{\Omega} (\hat{M}_{\alpha\beta,\beta} - \hat{Q}_{\alpha}) \delta\phi_{\alpha} d\Omega - \int_{\Omega} (\hat{Q}_{\alpha,\alpha} + \beta_1 P_{\alpha\beta,\alpha\beta}) \delta u_3 d\Omega - \delta V = 0 \quad (3.13)$$

As variáveis no contorno, na equação (3.13), estão escritas em relação ao sistema global (x, y) . Quando a geometria dos bordos da placa não é paralela a um deles, é conveniente transformar as variáveis no contorno para um sistema local (n, s) , resultando em:

$$\begin{aligned} u_{3,1} &= n_1 u_{3,\eta} + s_1 u_{3,t} \\ u_{3,2} &= n_2 u_{3,\eta} + s_2 u_{3,t} \\ \phi_1 &= n_1 \phi_{\eta} + s_1 \phi_t \\ \phi_2 &= n_2 \phi_{\eta} + s_2 \phi_t \end{aligned} \quad (3.14)$$

Inserindo as expressões (3.14) e (3.6) nas integrais de contorno em (3.13), obtém-se:

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma} (\hat{M}_{\alpha\beta} n_{\alpha} n_{\beta} \delta\phi_{\eta} + \hat{M}_{\alpha\beta} s_{\alpha} n_{\beta} \delta\phi_t) d\Gamma - \beta_1 \int_{\Gamma} (P_{\alpha\beta} n_{\alpha} n_{\beta} \delta u_{3,n} + P_{\alpha\beta} n_{\alpha} s_{\beta} \delta u_{3,t}) d\Gamma + \\ &+ \int_{\Gamma} [\hat{Q}_{\alpha} n_{\alpha} + \beta_1 P_{\alpha\beta,\alpha} n_{\beta}] \delta u_3 d\Gamma - \int_{\Omega} (\hat{M}_{\alpha\beta,\beta} - \hat{Q}_{\alpha} + m_{\alpha}) \delta\phi_{\alpha} d\Omega - \int_{\Omega} (\hat{Q}_{\alpha,\alpha} + \beta_1 P_{\alpha\beta,\alpha\beta} + q) \delta u_3 d\Omega - \\ &- \int_{\Gamma} (V_{n0}^R \delta u_3 + \hat{M}_{n0} \delta\phi_n + \hat{M}_{sn0} \delta\phi_t - \beta_1 P_{n0} \delta u_{3,n}) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

A quarta parcela das integrais de contorno em (3.15) pode ser reduzida por integral por partes em relação à direção t :

$$\int_{\Gamma} -\beta_1 P_{\alpha\beta} n_{\alpha} n_{\beta} \delta u_{3,t} d\Gamma = -\beta_1 [P_{\alpha\beta} s_{\alpha} n_{\beta} \delta u_3]_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} + \beta_1 \int_{\Gamma} \frac{\partial P_{ns}}{\partial t} \delta u_3 d\Gamma \quad (3.16)$$

onde $\frac{\partial P_{ns}}{\partial t} = P_{\alpha\beta,t} n_{\alpha} n_{\beta}$. Os pontos anterior e posterior a uma angulosidade no contorno são dados por Γ_1 , Γ_2 .

Substituindo-se (3.16) em (3.15), fica:

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma} [(\hat{M}_n - \hat{M}_{n0}) \delta\phi_n + (\hat{M}_{sn} - \hat{M}_{sn0}) \delta\phi_t] d\Gamma - \beta_1 \int_{\Gamma} (P_n - P_{n0}) \delta u_{3,n} d\Gamma + \\ &+ \int_{\Gamma} (V_n^R - V_{n0}^R) \delta u_3 d\Gamma - \beta_1 (R_c - R_{c0}) \delta u_3 - \int_{\Omega} (\hat{M}_{\alpha\beta,\beta} - \hat{Q}_{\alpha} + m_{\alpha}) \delta\phi_{\alpha} d\Omega - \\ &- \int_{\Omega} (\hat{Q}_{\alpha,\alpha} + \beta_1 P_{\alpha\beta,\alpha\beta} + q) \delta u_3 d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde $R_c = [P_{\alpha\beta} s_{\alpha} n_{\beta} \delta u_3]_{\Gamma_1}^{\Gamma_2}$ é a reação de canto de alta ordem; $V_n^R = \hat{Q}_n - \beta_1 P_{\alpha\beta,\alpha} n_{\beta} - \beta_1 \frac{\partial P_{ns}}{\partial t}$ é a cortante normal equivalente de Reddy; $\hat{M}_n = \hat{M}_{\alpha\beta} n_{\alpha} n_{\beta}$; $\hat{M}_{sn} = \hat{M}_{\alpha\beta} s_{\alpha} n_{\beta}$; $P_n = P_{\alpha\beta} n_{\alpha} n_{\beta}$; $\hat{Q}_n = \hat{Q}_{\alpha} n_{\alpha}$.

Para que a equação (3.17) seja sempre válida, as seguintes condições têm que ser atendidas:

- Domínio

$$\hat{M}_{\alpha\beta,\beta} - \hat{Q}_\alpha + m_\alpha = 0 \quad (3.18a)$$

$$\hat{Q}_{\alpha,\alpha} + \beta_1 P_{\alpha\beta,\alpha\beta} + q = 0 \quad (3.18b)$$

- Contorno

$$\delta\phi_n = 0 \quad \text{rotações normais prescritas em } \Gamma_u \text{ ou}$$

$$\hat{M}_n - \hat{M}_{n0} = 0 \quad \text{momentos fletores prescritos em } \Gamma_p$$

$$\delta\phi_t = 0 \quad \text{rotações tangenciais prescritas em } \Gamma_u \text{ ou}$$

$$\hat{M}_{sn} - \hat{M}_{sn0} = 0 \quad \text{momentos volventes prescritos em } \Gamma_p \quad (3.19)$$

$$\delta u_3 = 0 \quad \text{deslocamentos transversais prescritos em } \Gamma_u \text{ ou}$$

$$V_n^R - V_{n0}^R = 0 \quad \text{cortantes equivalentes de Reddy prescritos em } \Gamma_p$$

$$\delta u_{3,n} = 0 \quad \text{inclinações normais prescritas em } \Gamma_u \text{ ou}$$

$$P_n - P_{n0} = 0 \quad \text{momentos fletores de alta ordem prescritos em } \Gamma_p$$

Usando as relações de tensão-deformação nas equações de momento fletor/volvente por unidade de comprimento, nas forças de cisalhamento por unidade de comprimento e nas resultantes de tensão de alta ordem e, ainda, usando as relações deformação-deslocamento têm-se as equações constitutivas da placa:

$$M_{xx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} z dz = \frac{E}{(1-\nu^2)} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\epsilon_{xx} + \nu \epsilon_{yy}) z dz$$

$$M_{xx} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left\{ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} - \beta_1 z^3 \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \right] z dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \nu \left[z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} - \beta_1 z^3 \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \right] z dz \right\}$$

ou

$$M_{xx} = \frac{4D}{5} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) - \frac{D}{5} \nu \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \quad (3.20)$$

onde $\beta_1 = \frac{4}{3h^2}$; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$; E é o módulo de elasticidade longitudinal; ν é o coeficiente de Poisson.

Por analogia, os momentos podem ser escritos indicialmente como:

$$M_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\gamma\eta} \phi_{\gamma,\eta} - D_{\alpha\beta\gamma\eta} u_{3\gamma,\eta} \quad (3.21a)$$

onde:

$$C_{\alpha\beta\gamma\eta} = \frac{2D}{5} [\nu\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\eta} + (1-\nu)(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\eta} + \delta_{\alpha\eta}\delta_{\beta\gamma})] \quad (3.21b)$$

$$D_{\alpha\beta\gamma\eta} = \frac{2D}{5} \left[\frac{\nu}{2}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\eta} + \frac{1-\nu}{2}(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\eta} + \delta_{\alpha\eta}\delta_{\beta\gamma}) \right] \quad (3.21c)$$

Sintetizando ainda mais a expressão (3.14d), tem-se:

$$M_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\gamma\eta} \left(\phi_{\gamma,\eta} - \frac{1}{4}u_{3\gamma,\eta} \right) \quad (3.22)$$

Procedendo ao cálculo da componente de momento fletor de alta ordem P_{xx} :

$$P_{xx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} z^3 dz = \frac{E}{(1-\nu^2)} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) z^3 dz$$

ou

$$P_{xx} = \frac{4Dh^2}{35} \left(\frac{\partial\phi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial\phi_y}{\partial y} \right) - \frac{Dh^2}{28} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \quad (3.23)$$

Por analogia, os momentos fletores/volventes de alta ordem são escritos indicialmente como:

$$P_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta\gamma\eta} \left(\frac{1}{5}\phi_{\gamma,\eta} - \frac{1}{16}u_{3\gamma,\eta} \right) \quad (3.24)$$

onde:

$$E_{\alpha\beta\gamma\eta} = \frac{2Dh^2}{7} [\nu\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\eta} + (1-\nu)(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\eta} + \delta_{\alpha\eta}\delta_{\beta\gamma})]$$

Procedendo ao cálculo da componente de força cortante de Q_x :

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xz} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G\gamma_{xz} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G(1-\beta_2 z^2) \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) dz$$

ou

$$Q_x = \frac{2h}{3} G \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \quad (3.25)$$

Por analogia, os cortantes podem ser escritos indicialmente como:

$$Q_\alpha = \frac{2h}{3} G (\phi_\alpha + u_{3,\alpha}) \quad (3.26)$$

$$R_\alpha = \frac{h^3}{30} G (\phi_\alpha + u_{3,\alpha}) \quad (3.27)$$

onde o índice α varia 1 e 2.

Além disso as relações entre $\hat{M}_{\alpha\beta}$ e $\hat{Q}_\alpha$ com os respectivos deslocamentos são dadas por:

$$\hat{M}_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta} - \beta_1 P_{\alpha\beta} = \frac{C_{\alpha\beta\gamma\eta}}{21} (17\phi_{\gamma,\eta} - 4u_{3\gamma,\eta}) \quad (3.28)$$

$$\hat{Q}_\alpha = Q_\alpha - \beta_2 R_\alpha = \frac{8h}{15} G(\phi_\alpha + u_{3,\alpha}) \quad (3.29)$$

onde $C_{\alpha\beta\gamma\eta}$ está definida na expressão (3.21a).

Obtendo as equações de equilíbrio em termos dos deslocamentos, substitui-se as equações (3.28) e (3.29) nas equações (3.18):

$$\begin{aligned} \ddot{b}_1 \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) - \ddot{b}_2 \left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right) + \ddot{b}_1 \left(\frac{1-\nu}{2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) - \\ \ddot{b}_2 (1-\nu) \left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \right) - s_1 \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) = -m_x \end{aligned} \quad (3.30a)$$

$$\begin{aligned} \ddot{b}_1 \left(\frac{1-\nu}{2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) - \ddot{b}_2 \left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - \nu \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \right) + \ddot{b}_1 \left(\nu \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \right) - \\ \ddot{b}_2 \left(\nu \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right) - s_1 \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = -m_y \end{aligned} \quad (3.30b)$$

$$\begin{aligned} s_1 \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \beta_1 \left[\ddot{b}_3 \left(\frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^3 \phi_y}{\partial x^2 \partial y} \right) - \ddot{b}_4 \left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \right] + \\ 2\beta_1 \left(\frac{1-\nu}{2} \right) \left[\ddot{b}_3 \left(\frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \phi_y}{\partial x^2 \partial y} \right) - \ddot{b}_4 \left(2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \right] + \\ \beta_1 \left[\ddot{b}_3 \left(\nu \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \phi_y}{\partial y^3} \right) - \ddot{b}_4 \left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} + \nu \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \right] = -q \end{aligned} \quad (3.30c)$$

$$\text{onde: } \ddot{b}_1 = \frac{68D}{105}; \ddot{b}_2 = \frac{16D}{105}; \ddot{b}_3 = \frac{4h^2D}{35}; \ddot{b}_4 = \frac{h^2D}{28}; s_1 = \frac{8hG}{15}.$$

Escrevendo na forma matricial as equações (3.30a-c) e formando o sistema de equações de equilíbrio em termos dos deslocamentos, resulta em:

$$[B]\{u\} = \{f\} \quad (3.31)$$

onde:

$$[B] = \begin{bmatrix} \ddot{b}_1 \nabla^2 - \ddot{b}_1 \left(\frac{1+\nu}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} - s_1 & \ddot{b}_1 \left(\frac{1+\nu}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -(s_1 + \ddot{b}_2 \nabla^2) \frac{\partial}{\partial x} \\ \ddot{b}_1 \left(\frac{1+\nu}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \ddot{b}_1 \nabla^2 - \ddot{b}_1 \left(\frac{1+\nu}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - s_1 & -(s_1 + \ddot{b}_2 \nabla^2) \frac{\partial}{\partial y} \\ (s_1 + \ddot{b}_2 \nabla^2) \frac{\partial}{\partial x} & (s_1 + \ddot{b}_2 \nabla^2) \frac{\partial}{\partial y} & (s_1 \nabla^2 - \beta_1 \ddot{b}_4 \nabla^4) \end{bmatrix};$$

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ w_0 \end{Bmatrix}; \quad \{f\} = -\begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ q \end{Bmatrix}.$$

Tal qual no problema real (Eq. 3.31), as equações governantes do problema fundamental podem ser escritas em função dos esforços como:

$$\hat{M}_{\gamma\alpha\beta,\beta}^* - \hat{Q}_{\gamma\alpha}^* + F_{\gamma\alpha}^* = 0 \quad (3.32a)$$

$$\hat{Q}_{\gamma\alpha,\alpha}^* + \beta_1 P_{\gamma\alpha\beta,\alpha\beta}^* + F_{\gamma 3}^* = 0 \quad (3.32b)$$

$$F_{\gamma\alpha}^* = \delta(p, s)\delta_{\gamma\alpha} \text{ e } F_{\gamma 3}^* = \delta(p, s)\delta_{3j}, \text{ com } j = 1, 2, 3; \gamma = 1, 2; \quad (3.33a)$$

ou reescrevendo (3.33a) em notação indicial:

$$F_{\gamma i}^* = \delta(p, s)\delta_{ij}, \text{ com } i, j = 1, 2, 3; \gamma = 1, 2; \quad (3.33b)$$

3.4 Solução Fundamental

A solução fundamental é formulada como a resposta, em um ponto genérico s (ponto campo), de um domínio fundamental infinito, causada pela aplicação de uma fonte pontual em outro ponto p (ponto fonte) desse domínio.

Analogamente ao problema real, Equação (3.31), a equação governante do problema fundamental, quando a fonte estiver aplicada em força, $q^{*q}(p, s) = \delta(p, s)$, $m_x^{*q} = 0$ e $m_y^{*q} = 0$, é dada por:

$$\begin{bmatrix} \ddot{b}_1 \nabla^2 - \ddot{b}_1 \left(\frac{1+\nu}{2}\right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} - s_1 & \ddot{b}_1 \left(\frac{1+\nu}{2}\right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -(s_1 + \ddot{b}_2 \nabla^2) \frac{\partial}{\partial x} \\ \ddot{b}_1 \left(\frac{1+\nu}{2}\right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \ddot{b}_1 \nabla^2 - \ddot{b}_1 \left(\frac{1+\nu}{2}\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - s_1 & -(s_1 + \ddot{b}_2 \nabla^2) \frac{\partial}{\partial y} \\ (s_1 + \ddot{b}_2 \nabla^2) \frac{\partial}{\partial x} & (s_1 + \ddot{b}_2 \nabla^2) \frac{\partial}{\partial y} & (s_1 \nabla^2 - \beta_1 \ddot{b}_4 \nabla^4) \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \\ U_{31} \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} m_x^{*q} \\ m_y^{*q} \\ q^{*q} \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

Da mesma forma, quando o problema fundamental estiver solicitado pela fonte em momento m_x tem-se $m_x^{*m_x}(p, s) = \delta(p, s)$, $q^{*m_x} = 0$ e $m_y^{*m_x} = 0$, sua equação governante fica:

$$\begin{bmatrix} \ddot{b}_1 \nabla^2 - \ddot{b}_1 \left(\frac{1+\nu}{2}\right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} - s_1 & \ddot{b}_1 \left(\frac{1+\nu}{2}\right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -(s_1 + \ddot{b}_2 \nabla^2) \frac{\partial}{\partial x} \\ \ddot{b}_1 \left(\frac{1+\nu}{2}\right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \ddot{b}_1 \nabla^2 - \ddot{b}_1 \left(\frac{1+\nu}{2}\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - s_1 & -(s_1 + \ddot{b}_2 \nabla^2) \frac{\partial}{\partial y} \\ (s_1 + \ddot{b}_2 \nabla^2) \frac{\partial}{\partial x} & (s_1 + \ddot{b}_2 \nabla^2) \frac{\partial}{\partial y} & (s_1 \nabla^2 - \beta_1 \ddot{b}_4 \nabla^4) \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} U_{12} \\ U_{22} \\ U_{32} \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} m_x^{*m_x} \\ m_y^{*m_x} \\ q^{*m_x} \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

Quando o problema fundamental estiver solicitado pela fonte em momento m_y tem-se $m_y^{*m_y}(p, s) = \delta(p, s)$, $q^{*m_y} = 0$ e $m_x^{*m_y} = 0$, sua equação governante fica:

$$\begin{bmatrix} \ddot{b}_1 \nabla^2 - \ddot{b}_1 \left(\frac{1+\nu}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} - s_1 & \ddot{b}_1 \left(\frac{1+\nu}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -(s_1 + \ddot{b}_2 \nabla^2) \frac{\partial}{\partial x} \\ \ddot{b}_1 \left(\frac{1+\nu}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \ddot{b}_1 \nabla^2 - \ddot{b}_1 \left(\frac{1+\nu}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - s_1 & -(s_1 + \ddot{b}_2 \nabla^2) \frac{\partial}{\partial y} \\ (s_1 + \ddot{b}_2 \nabla^2) \frac{\partial}{\partial x} & (s_1 + \ddot{b}_2 \nabla^2) \frac{\partial}{\partial y} & (s_1 \nabla^2 - \beta_1 \ddot{b}_4 \nabla^4) \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} U_{13} \\ U_{23} \\ U_{33} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} m_x^{*m_y} \\ m_y^{*m_y} \\ q^{*m_y} \end{Bmatrix} \quad (3.36)$$

Pode-se expressar as Equações (3.34), (3.35) e (3.36) como:

$$\begin{bmatrix} \ddot{b}_1 \nabla^2 - \ddot{b}_1 \left(\frac{1+\nu}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} - s_1 & \ddot{b}_1 \left(\frac{1+\nu}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -(s_1 + \ddot{b}_2 \nabla^2) \frac{\partial}{\partial x} \\ \ddot{b}_1 \left(\frac{1+\nu}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \ddot{b}_1 \nabla^2 - \ddot{b}_1 \left(\frac{1+\nu}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - s_1 & -(s_1 + \ddot{b}_2 \nabla^2) \frac{\partial}{\partial y} \\ (s_1 + \ddot{b}_2 \nabla^2) \frac{\partial}{\partial x} & (s_1 + \ddot{b}_2 \nabla^2) \frac{\partial}{\partial y} & (s_1 \nabla^2 - \beta_1 \ddot{b}_4 \nabla^4) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{bmatrix} \\ = - \begin{bmatrix} \delta(p, s) & 0 & 0 \\ 0 & \delta(p, s) & 0 \\ 0 & 0 & \delta(p, s) \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

A equação (3.37) pode ser escrita da forma:

$$[B][U] = [f] \quad (3.38)$$

A Equação (3.38) define a matriz de influência $[B]$, a matriz dos deslocamentos $[U]$ e a matriz das fontes $[f]$.

$$[B] = \begin{bmatrix} \ddot{b}_1 \nabla^2 - \ddot{b}_1 \left(\frac{1+\nu}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} - s_1 & \ddot{b}_1 \left(\frac{1+\nu}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -(s_1 + \ddot{b}_2 \nabla^2) \frac{\partial}{\partial x} \\ \ddot{b}_1 \left(\frac{1+\nu}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \ddot{b}_1 \nabla^2 - \ddot{b}_1 \left(\frac{1+\nu}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - s_1 & -(s_1 + \ddot{b}_2 \nabla^2) \frac{\partial}{\partial y} \\ (s_1 + \ddot{b}_2 \nabla^2) \frac{\partial}{\partial x} & (s_1 + \ddot{b}_2 \nabla^2) \frac{\partial}{\partial y} & (s_1 \nabla^2 - \beta_1 \ddot{b}_4 \nabla^4) \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

$$[U] = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset_{11} & \emptyset_{12} & \emptyset_{13} \\ \emptyset_{21} & \emptyset_{22} & \emptyset_{23} \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

$$[f] = - \begin{bmatrix} \delta(p, s) & 0 & 0 \\ 0 & \delta(p, s) & 0 \\ 0 & 0 & \delta(p, s) \end{bmatrix} = -\delta(s, p)[I] \quad (3.41)$$

A Equação do problema fundamental da placa de Reddy (Equação (3.37)) constitui-se em um sistema acoplado de variáveis no qual será utilizado o Método de Hörmander (1963) para fazer

o desacoplamento. Pelo Método de Hörmander, a matriz $[U]$ é escrita em função do escalar $\Psi(p, s)$, como segue:

$$[U] = [B^{cof}]^T \Psi(p, s) \quad (3.42)$$

Substituindo a matriz dos deslocamentos, $[U]$, da Equação (3.42) na Equação (3.38), obtém-se:

$$[B][B^{cof}]^T \Psi(p, s) = [f] \quad (3.43)$$

Tem-se ainda a definição:

$$[B^{cof}]^T = [B^{-1}] \times \det[B] \quad (3.44)$$

A Equação (3.43) fica reduzida a:

$$[B][B^{-1}] \times \det[B] \times \Psi(p, s) = [f] \quad (3.45)$$

Utilizando a Equação (3.41) e reescrevendo a Equação (3.45), tem-se:

$$[I] \times \det[B] \times \Psi(s, p) = -\delta(p, s)[I] \quad (3.46a)$$

Simplificando (3.46a):

$$\det[B] \times \Psi(p, s) = -\delta(p, s) \quad (3.46b)$$

onde:

$$\begin{aligned} \det[B] = & (s_1 \nabla^2 - \beta_1 \ddot{b}_4 \nabla^4)(\ddot{b}_1 \nabla^2 - s_1)^2 + \nabla^2(\ddot{b}_1 \nabla^2 - s_1)(s_1 + \ddot{b}_2 \nabla^2)^2 - \\ & - \nabla^2(s_1 \nabla^2 - \alpha \ddot{b}_4 \nabla^4)(\ddot{b}_1 \nabla^2 - s_1) \ddot{b}_1 \left(\frac{1+v}{2} \right) - \nabla^4 \ddot{b}_1 \left(\frac{1+v}{2} \right) (s_1 + \ddot{b}_2 \nabla^2)^2 \end{aligned} \quad (3.46c)$$

Os valores explícitos das soluções fundamentais são obtidos a partir da função Ψ , usando a equação (3.42).

$$\begin{aligned} U_{11} = & \left[-\beta_1 \ddot{b}_1 \ddot{b}_4 \nabla^6 + \left(\ddot{b}_1 s_1 + \beta_1 \ddot{b}_4 s_1 + \frac{\beta_1 \ddot{b}_1 \ddot{b}_4 (1+v)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \ddot{b}_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \nabla^4 \right] \Psi + \\ & + \left[\left(2\ddot{b}_2 s_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\ddot{b}_1 s_1 (1+v)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - s_1^2 \right) \nabla^2 + s_1^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \Psi \end{aligned} \quad (3.47a)$$

$$U_{21} = \left\{ \left[\left(\frac{\beta_1 \ddot{b}_1 \ddot{b}_4 (1+v)}{2} - \ddot{b}_2^2 \right) \nabla^4 - \left(\frac{\ddot{b}_1 s_1 (1+v)}{2} + 2\ddot{b}_2 s_1 \right) \nabla^2 - s_1^2 \right] \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right\} \Psi \quad (3.47b)$$

$$U_{31} = \left\{ \left[-\frac{\ddot{b}_1 \ddot{b}_2 (1-v)}{2} \nabla^4 - \left(\frac{\ddot{b}_1 s_1 (1-v)}{2} - \ddot{b}_2 s_1 \right) \nabla^2 + s_1^2 \right] \frac{\partial}{\partial x} \right\} \Psi \quad (3.47c)$$

$$U_{12} = U_{21} \quad (3.47d)$$

$$U_{22} = \left[(-\beta_1 \ddot{b}_1 \ddot{b}_4) \nabla^6 + \left(\ddot{b}_1 s_1 + \beta_1 \ddot{b}_4 s_1 + \frac{\beta_1 \ddot{b}_1 \ddot{b}_4 (1 + \nu)}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \ddot{b}_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \nabla^4 \right] \Psi + \quad (3.47e)$$

$$+ \left[\left(2\ddot{b}_2 s_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\ddot{b}_1 s_1 (1 + \nu)}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - s_1^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \nabla^2 + s_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \Psi$$

$$U_{32} = \left\{ \left[-\frac{\ddot{b}_1 \ddot{b}_2 (1 - \nu)}{2} \nabla^4 - \left(\frac{\ddot{b}_1 s_1 (1 - \nu)}{2} - \ddot{b}_2 s_1 \right) \nabla^2 + s_1^2 \right] \frac{\partial}{\partial y} \right\} \Psi \quad (3.47f)$$

$$U_{13} = -U_{31} \quad (3.47g)$$

$$U_{23} = -U_{32} \quad (3.47h)$$

$$U_{33} = \left[\frac{\ddot{b}_1^2 (1 - \nu)}{2} \nabla^4 - \frac{\ddot{b}_1 s_1 (3 - \nu)}{2} \nabla^2 + s_1^2 \right] \Psi \quad (3.47i)$$

Para obter a equação da função escalar $\Psi(p, s)$, calcula-se o determinante da matriz dos operadores $[B]$ (Equação (3.39)) e substitui-se na Equação (3.46b), resultando na seguinte equação diferencial de oitava ordem:

$$-\nabla^4 (\bar{c}_1 - \nabla^2 \bar{c}_2 - \nabla^4 \bar{c}_3) \Psi = -\delta(p, s) \quad (3.48a)$$

onde:

$$\bar{c}_1 = s_1^2 (\ddot{b}_1 + \ddot{b}_2 + \beta_1 \ddot{b}_3 + \alpha \ddot{b}_4) \quad (3.48b)$$

$$\bar{c}_2 = \left(\frac{1 - \nu}{2} \right) s_1 \left[\ddot{b}_1^2 + \ddot{b}_1 \ddot{b}_2 + \beta_1 \ddot{b}_1 (\ddot{b}_3 + \ddot{b}_4) \right] + \beta_1 (\ddot{b}_1 \ddot{b}_4 - \ddot{b}_2 \ddot{b}_3) s_1 \quad (3.48c)$$

$$\bar{c}_3 = -\frac{\beta_1 \ddot{b}_1 (1 - \nu) (\ddot{b}_1 \ddot{b}_4 - \ddot{b}_2 \ddot{b}_3)}{2} \quad (3.48d)$$

Fazendo $z = \nabla^2$, na Equação (3.48a), tem-se:

$$\bar{c}_1 - \nabla^2 \bar{c}_2 - \nabla^4 \bar{c}_3 = 0 \quad (3.48e)$$

pode-se reescrever a Eq. (3.48e) como $\bar{c}_1 - z \bar{c}_2 - z^2 \bar{c}_3 = 0$, ou seja, tem-se uma equação do segundo grau com duas raízes positivas z_1 e z_2 .

Nesta tese propõe-se a seguinte solução para a Eq. (3.48a), sendo obtida a equação da função escalar $\Psi(p, s)$:

$$\Psi = a_1 K_0(r \sqrt{z_1}) + a_2 K_0(r \sqrt{z_2}) + a_3 (b_1 + b_2 \ln(r) + b_3 r^2 \ln(r)) \quad (3.49)$$

onde:

$$\begin{aligned}
a_1 &= -\frac{1}{2\pi\bar{c}_3 z_1^2(z_1 - z_2)} & a_2 &= \frac{1}{2\pi\bar{c}_3 z_2^2(z_1 - z_2)} & a_3 &= -\frac{1}{8\pi\bar{c}_3 z_1^2 z_2^2} \\
b_1 &= 4z_1 & b_2 &= 4(z_1 + z_2) & b_3 &= z_1 z_2
\end{aligned}$$

Calculando-se os operadores de ordem superior, tais como ∇^2 , ∇^4 e ∇^6 da equação (3.49) é obtido:

$$\nabla^2 \Psi = a_1 z_1 K_0(r\sqrt{z_1}) + a_2 z_2 K_0(r\sqrt{z_2}) + 4a_3 b_3 (\ln(r) + 1) \quad (3.50a)$$

$$\nabla^4 \Psi = a_1 z_1^2 K_0(r\sqrt{z_1}) + a_2 z_2^2 K_0(r\sqrt{z_2}) \quad (3.50b)$$

$$\nabla^6 \Psi = a_1 z_1^3 K_0(r\sqrt{z_1}) + a_2 z_2^3 K_0(r\sqrt{z_2}) \quad (3.50c)$$

Obtendo as derivadas da função escalar Ψ , equação (3.49), resulta em:

$$\frac{d(\Psi)}{dr} = \frac{1}{r} [a_3 b_2 + a_3 b_3 r^2 + 2a_3 b_3 r^2 \ln(r) - a_1 r \sqrt{z_1} K_1(r\sqrt{z_1}) - a_2 r \sqrt{z_2} K_1(r\sqrt{z_2})] \quad (3.51a)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2(\Psi)}{dr^2} &= \frac{1}{r^2} [3a_3 b_3 r^2 - a_3 b_2 + 2a_3 b_3 r^2 \ln(r) + a_1 r^2 z_1 K_0(r\sqrt{z_1}) + a_2 r^2 z_2 K_0(r\sqrt{z_2}) + \\
&\quad + a_1 r \sqrt{z_1} K_1(r\sqrt{z_1}) + a_2 r \sqrt{z_2} K_1(r\sqrt{z_2})] \quad (3.51b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^3(\Psi)}{dr^3} &= \frac{1}{r^3} \left[2a_3 b_2 + 2a_3 b_3 r^2 - a_1 r^3 \sqrt{z_1^3} K_1(r\sqrt{z_1}) - a_2 r^3 \sqrt{z_2^3} K_1(r\sqrt{z_2}) - a_1 r^2 z_1 K_0(r\sqrt{z_1}) - \right. \\
&\quad \left. - a_2 r^2 z_2 K_0(r\sqrt{z_2}) - 2a_1 r \sqrt{z_1} K_1(r\sqrt{z_1}) - 2a_2 r \sqrt{z_2} K_1(r\sqrt{z_2}) \right] \quad (3.51c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^4(\Psi)}{dr^4} &= \frac{1}{r^4} \left[a_1 r^4 z_1^2 K_0(r\sqrt{z_1}) - 2a_3 b_3 r^2 - 6a_3 b_2 + a_2 r^4 z_2^2 K_0(r\sqrt{z_2}) + 2a_1 r^3 \sqrt{z_1^3} K_1(r\sqrt{z_1}) + \right. \\
&\quad + 2a_2 r^3 \sqrt{z_2^3} K_1(r\sqrt{z_2}) + 3a_1 r^2 z_1 K_0(r\sqrt{z_1}) + 3a_2 r^2 z_2 K_0(r\sqrt{z_2}) + 6a_1 r \sqrt{z_1} K_1(r\sqrt{z_1}) + \\
&\quad \left. + 6a_2 r \sqrt{z_2} K_1(r\sqrt{z_2}) \right] \quad (3.51d)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^5(\Psi)}{dr^5} &= \frac{1}{r^5} \left[-2a_1 r^4 z_1^2 K_0(r\sqrt{z_1}) + 4a_3 b_3 r^2 + 24a_3 b_2 - a_2 r^4 z_2^2 K_0(r\sqrt{z_2}) - 2a_1 r^3 \sqrt{z_1^3} K_1(r\sqrt{z_1}) - \right. \\
&\quad - 7a_2 r^3 \sqrt{z_2^3} K_1(r\sqrt{z_2}) - a_1 r^5 \sqrt{z_1^5} K_1(r\sqrt{z_1}) - a_2 r^5 \sqrt{z_2^5} K_1(r\sqrt{z_2}) - 12a_1 r^2 z_1 K_0(r\sqrt{z_1}) - \\
&\quad \left. - 12a_2 r^2 z_2 K_0(r\sqrt{z_2}) - 24a_1 r \sqrt{z_1} K_1(r\sqrt{z_1}) - 24a_2 r \sqrt{z_2} K_1(r\sqrt{z_2}) \right] \quad (3.51e)
\end{aligned}$$

Já as derivadas do *laplaciano* da função Ψ , equação (3.50a), ficam:

$$\frac{d(\nabla^2 \Psi)}{dr} = \frac{1}{r} \left[4a_3 b_3 - a_1 r \sqrt{z_1^3} K_1(r\sqrt{z_1}) - a_2 r \sqrt{z_2^3} K_1(r\sqrt{z_2}) \right] \quad (3.52a)$$

$$\frac{d^2(\nabla^2 \Psi)}{dr^2} = \frac{1}{r^2} \left[a_1 r^2 z_1^2 K_0(r\sqrt{z_1}) - 4a_3 b_3 + a_2 r^2 z_2^2 K_0(r\sqrt{z_2}) + a_1 r \sqrt{z_1^3} K_1(r\sqrt{z_1}) + \right.$$

$$+a_2r\sqrt{z_2^3K_1(r\sqrt{z_2})}\Big] \quad (3.52b)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3(\nabla^2\Psi)}{dr^3} = \frac{1}{r^3} \Big[& 8a_3b_3 - a_1r^2z_1^2K_0(r\sqrt{z_1}) - a_2r^2z_2^2K_0(r\sqrt{z_2}) - a_1r^3\sqrt{z_1^5K_1(r\sqrt{z_1})} - \\ & - a_2r^3\sqrt{z_2^5K_1(r\sqrt{z_2})} - 2a_1r\sqrt{z_1^3K_1(r\sqrt{z_1})} - 2a_2r\sqrt{z_2^3K_1(r\sqrt{z_2})} \Big] \end{aligned} \quad (3.52c)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^4(\nabla^2\Psi)}{dr^4} = \frac{1}{r^4} \Big[& 3a_1r^2z_1^2K_0(r\sqrt{z_1}) - 24a_3b_3 + a_1r^4z_1^3K_0(r\sqrt{z_1}) + 3a_2r^2z_2^2K_0(r\sqrt{z_2}) + \\ & + a_2r^4z_2^3K_0(r\sqrt{z_2}) + 2a_1r^3\sqrt{z_1^5K_1(r\sqrt{z_1})} + 2a_2r^3\sqrt{z_2^5K_1(r\sqrt{z_2})} + \\ & + 6a_1r\sqrt{z_1^3K_1(r\sqrt{z_1})} + 6a_2r\sqrt{z_2^3K_1(r\sqrt{z_2})} \Big] \end{aligned} \quad (3.52d)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^5(\nabla^2\Psi)}{dr^5} = \frac{1}{r^5} \Big[& 96a_3b_3 - 12a_1r^2z_1^2K_0(r\sqrt{z_1}) - 2a_1r^4z_1^3K_0(r\sqrt{z_1}) - 12a_2r^2z_2^2K_0(r\sqrt{z_2}) - \\ & - 2a_2r^4z_2^3K_0(r\sqrt{z_2}) - 7a_1r^3\sqrt{z_1^5K_1(r\sqrt{z_1})} - 7a_2r^3\sqrt{z_2^5K_1(r\sqrt{z_2})} - a_1r^5\sqrt{z_1^7K_1(r\sqrt{z_1})} - \\ & - a_2r^5\sqrt{z_2^7K_1(r\sqrt{z_2})} - 24a_1r\sqrt{z_1^3K_1(r\sqrt{z_1})} - 24a_2r\sqrt{z_2^3K_1(r\sqrt{z_2})} \Big] \end{aligned} \quad (3.52e)$$

O cálculo das derivadas do *biharmônico* da função Ψ , equação (3.50b), fica:

$$\frac{d(\nabla^4\Psi)}{dr} = -a_1\sqrt{z_1^5K_1(r\sqrt{z_1})} - a_2\sqrt{z_2^5K_1(r\sqrt{z_2})} \quad (3.53a)$$

$$\frac{d^2(\nabla^4\Psi)}{dr^2} = \frac{a_1\sqrt{z_1^5K_1(r\sqrt{z_1})} + a_2\sqrt{z_2^5K_1(r\sqrt{z_2})} + a_1rz_1^3K_0(r\sqrt{z_1}) + a_2rz_2^3K_0(r\sqrt{z_2})}{r} \quad (3.53b)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3(\nabla^4\Psi)}{dr^3} = -\frac{1}{r^2} \Big[& 2a_1\sqrt{z_1^5K_1(r\sqrt{z_1})} + 2a_2\sqrt{z_2^5K_1(r\sqrt{z_2})} + a_1r^2\sqrt{z_1^7K_1(r\sqrt{z_1})} + \\ & + a_2r^2\sqrt{z_2^7K_1(r\sqrt{z_2})} + a_1rz_1^3K_0(r\sqrt{z_1}) + a_2rz_2^3K_0(r\sqrt{z_2}) \Big] \end{aligned} \quad (3.53c)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^4(\nabla^4\Psi)}{dr^4} = \frac{1}{r^3} \Big[& 6a_1\sqrt{z_1^5K_1(r\sqrt{z_1})} + 6a_2\sqrt{z_2^5K_1(r\sqrt{z_2})} + a_1r^3z_1^4K_0(r\sqrt{z_1}) + a_2r^3z_2^4K_0(r\sqrt{z_2}) + \\ & + 2a_1r^2\sqrt{z_1^7K_1(r\sqrt{z_1})} + 2a_2r^2\sqrt{z_2^7K_1(r\sqrt{z_2})} + 3a_1rz_1^3K_0(r\sqrt{z_1}) + 3a_2rz_2^3K_0(r\sqrt{z_2}) \Big] \end{aligned} \quad (3.53d)$$

$$\frac{d^5(\nabla^4\Psi)}{dr^5} = \frac{1}{r^4} \Big[24a_1\sqrt{z_1^5K_1(r\sqrt{z_1})} + 24a_2\sqrt{z_2^5K_1(r\sqrt{z_2})} + 2a_1r^3z_1^4K_0(r\sqrt{z_1}) +$$

$$\begin{aligned}
& + 2a_2 r^3 z_2^4 K_0(r\sqrt{z_2}) + 7a_1 r^2 \sqrt{z_1^7} K_1(r\sqrt{z_1}) + 7a_2 r^2 \sqrt{z_2^7} K_1(r\sqrt{z_2}) + a_1 r^4 \sqrt{z_1^9} K_1(r\sqrt{z_1}) + \\
& + a_2 r^4 \sqrt{z_2^9} K_1(r\sqrt{z_2}) + 12a_1 r z_1^3 K_0(r\sqrt{z_1}) + 12a_2 r z_2^3 K_0(r\sqrt{z_2}) \Big] \quad (3.53e)
\end{aligned}$$

O cálculo das derivadas do *laplaciano do biharmônico* da função Ψ , equação (3.50c), fica:

$$\frac{d(\nabla^6 \Psi)}{dr} = -a_1 \sqrt{z_1^7} K_1(r\sqrt{z_1}) - a_2 \sqrt{z_2^7} K_1(r\sqrt{z_2}) \quad (3.54)$$

$$\frac{d^2(\nabla^6 \Psi)}{dr^2} = \frac{a_1 \sqrt{z_1^7} K_1(r\sqrt{z_1}) + a_2 \sqrt{z_2^7} K_1(r\sqrt{z_2}) + a_1 r z_1^4 K_0(r\sqrt{z_1}) + a_2 r z_2^4 K_0(r\sqrt{z_2})}{r} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^3(\nabla^6 \Psi)}{dr^3} = & -\frac{1}{r^2} \left[2a_1 \sqrt{z_1^7} K_1(r\sqrt{z_1}) + 2a_2 \sqrt{z_2^7} K_1(r\sqrt{z_2}) + a_1 r^2 \sqrt{z_1^9} K_1(r\sqrt{z_1}) + \right. \\
& \left. + a_2 r^2 \sqrt{z_2^9} K_1(r\sqrt{z_2}) + a_1 r z_1^4 K_0(r\sqrt{z_1}) + a_2 r z_2^4 K_0(r\sqrt{z_2}) \right] \quad (3.56)
\end{aligned}$$

Utilizando as equações de (3.49) até (3.56), as soluções fundamentais em deslocamentos, baseadas da Teoria de Placas de Reddy, são dadas por (sendo $\alpha = \beta = 1$ e 2):

$$U_{\alpha\beta}^* = \left(A + \frac{B}{r} \right) r_{,\alpha} r_{,\beta} + \delta_{\alpha\beta} \left(C + \frac{D}{r} \right) \quad (3.57)$$

$$U_{3\alpha}^* = -F r_{,\alpha} \quad (3.58)$$

$$U_{\alpha 3}^* = -U_{3\alpha}^* \quad (3.59)$$

$$U_{\alpha 4}^* = \frac{dF}{dr} r_{,\alpha} r_{,n} + F \frac{n_{\alpha} - r_{,n} r_{,\alpha}}{r} \quad (3.60)$$

$$U_{4\alpha}^* = \frac{dF}{dr} r_{,\alpha} r_{,m} + F \frac{m_{\alpha} - r_{,m} r_{,\alpha}}{r} \quad (3.61)$$

$$U_{33}^* = E \quad (3.62)$$

$$U_{34}^* = \frac{dE}{dr} r_{,n} \quad (3.63)$$

$$U_{43}^* = -\frac{dE}{dr} r_{,m} \quad (3.64)$$

$$U_{44}^* = -\frac{d^2 E}{dr^2} r_{,n} r_{,m} - \frac{dE}{dr} \frac{m_n - r_{,n} r_{,m}}{r} \quad (3.65)$$

onde:

$$A = \frac{d^2(\Psi)}{dr^2} c_4 + \frac{d^2(\nabla^2 \Psi)}{dr^2} c_1 + \frac{d^2(\nabla^4 \Psi)}{dr^2} c_2 \quad (3.66)$$

$$B = \frac{d(\Psi)}{dr} c_6 + \frac{d(\nabla^2 \Psi)}{dr} c_5 + \frac{d(\nabla^4 \Psi)}{dr} c_3 \quad (3.67)$$

$$C = \nabla^2 \Psi c_4 + \nabla^4 \Psi c_7 + \nabla^6 \Psi c_{10} + \frac{d^2(\Psi)}{dr^2} c_6 + \frac{d^2(\nabla^2 \Psi)}{dr^2} c_9 + \frac{d^2(\nabla^4 \Psi)}{dr^2} c_8 \quad (3.68)$$

$$D = \frac{d(\nabla^2\Psi)}{dr}c_{11} + \frac{d(\nabla^4\Psi)}{dr}c_{12} \quad (3.69)$$

$$E = \Psi c_6 + \nabla^2\Psi c_{16} + \nabla^4\Psi c_{15} \quad (3.70)$$

$$F = \frac{d(\Psi)}{dr}c_6 + \frac{d(\nabla^2\Psi)}{dr}c_{14} + \frac{d(\nabla^4\Psi)}{dr}c_{13} \quad (3.71)$$

sendo:

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{s_1[\ddot{b}_1(1+\nu) + 4\ddot{b}_2]}{2} & c_9 &= 2\ddot{b}_2s_1 \\ c_2 &= \frac{\beta_1\ddot{b}_1\ddot{b}_4(1+\nu) - 2\ddot{b}_2^2}{2} & c_{10} &= -\beta_1\ddot{b}_1\ddot{b}_4 \\ c_3 &= -c_2 & c_{11} &= -\frac{\ddot{b}_1s_1(1+\nu)}{2} \\ c_4 &= -s_1^2 & c_{12} &= \frac{\beta_1\ddot{b}_1\ddot{b}_4(1+\nu)}{2} \\ c_5 &= -c_1 & c_{13} &= -\frac{\ddot{b}_1\ddot{b}_2(1-\nu)}{2} \\ c_6 &= -c_4 & c_{14} &= \ddot{b}_2s_1 - \frac{\ddot{b}_1s_1(1-\nu)}{2} \\ c_7 &= \ddot{b}_1s_1 + \beta_1\ddot{b}_4s_1 & c_{15} &= \frac{\ddot{b}_1^2(1-\nu)}{2} \\ c_8 &= \ddot{b}_2^2 & c_{16} &= -\frac{\ddot{b}_1s_1(3-\nu)}{2} \end{aligned} \quad (3.72)$$

As respectivas derivadas de primeira ordem até a quarta ordem, quando necessárias, para A , B , C , D , E e F são dadas respectivamente por:

$$\frac{d^a A}{dr^a} = \frac{d^{a+2}(\Psi)}{dr^{a+2}}c_4 + \frac{d^{a+2}(\nabla^2\Psi)}{dr^{a+2}}c_1 + \frac{d^{a+2}(\nabla^4\Psi)}{dr^{a+2}}c_2; \text{ sendo } a = 1 \text{ a } 3. \quad (3.73)$$

$$\frac{d^b B}{dr^b} = \frac{d^{b+1}(\Psi)}{dr^{b+1}}c_6 + \frac{d^{b+1}(\nabla^2\Psi)}{dr^{b+1}}c_5 + \frac{d^{b+1}(\nabla^4\Psi)}{dr^{b+1}}c_3; \text{ sendo } b = 1 \text{ a } 3. \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^c C}{dr^c} &= \frac{d^c(\nabla^4\Psi)}{dr^c}c_7 + \frac{d^{c+2}(\nabla^4\Psi)}{dr^{c+2}}c_8 + \frac{d^c(\nabla^2\Psi)}{dr^c}c_4 + \frac{d^{c+2}(\nabla^2\Psi)}{dr^{c+2}}c_9 + \frac{d^c(\nabla^6\Psi)}{dr^c}c_{10} + \\ &+ \frac{d^{c+2}(\Psi)}{dr^{c+2}}c_6; \text{ sendo } c = 1 \text{ a } 3. \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$\frac{d^d D}{dr^d} = \frac{d^{d+1}(\nabla^2\Psi)}{dr^{d+1}}c_{11} + \frac{d^{d+1}(\nabla^4\Psi)}{dr^{d+1}}c_{12}; \text{ sendo } d = 1 \text{ a } 3. \quad (3.76)$$

$$\frac{d^e E}{dr^e} = \frac{d^e(\Psi)}{dr^e}c_6 + \frac{d^e(\nabla^2\Psi)}{dr^e}c_{16} + \frac{d^e(\nabla^4\Psi)}{dr^e}c_{15}; \text{ sendo } e = 1 \text{ a } 5. \quad (3.77)$$

$$\frac{d^f F}{dr^f} = \frac{d^{f+1}(\Psi)}{dr^{f+1}}c_6 + \frac{d^{f+1}(\nabla^2\Psi)}{dr^{f+1}}c_{14} + \frac{d^{f+1}(\nabla^4\Psi)}{dr^{f+1}}c_{13}; \text{ sendo } f = 1 \text{ a } 4. \quad (3.78)$$

3.5 Equações Integrais

As equações diferenciais de equilíbrio do problema podem ser transformadas em equações integrais equivalentes, utilizando-se basicamente dois caminhos: no primeiro, aplicam-se os fundamentos de energia, no caso, o Teorema da Reciprocidade de Betty (TRB), e no segundo tem-se o Método dos Resíduos Ponderados (MRP). No capítulo 2 foi discutida a aplicação do MRP, e neste será aplicado o TRB para o problema de placas de Reddy.

3.5.1 Equações Integrais em Deslocamentos

Considere o problema real da placa onde são mobilizadas tensões σ_{ij} e deformações ε_{ij} devido à aplicação de carregamentos externos. Por outro lado, considere também o problema fundamental da placa de Reddy submetido a três fontes concentradas não simultaneamente aplicadas mobilizando respectivamente os campos de tensões e deformações $(\sigma_{\alpha\beta 1}^*, \sigma_{3\alpha 1}^*)$, $(\varepsilon_{\alpha\beta 1}^*, \varepsilon_{3\alpha 1}^*)$, $(\sigma_{\alpha\beta 2}^*, \sigma_{3\alpha 2}^*)$, $(\varepsilon_{\alpha\beta 2}^*, \varepsilon_{3\alpha 2}^*)$, $(\sigma_{\alpha\beta 3}^*, \sigma_{3\alpha 3}^*)$ e $(\varepsilon_{\alpha\beta 3}^*, \varepsilon_{3\alpha 3}^*)$ ou compactamente escrito como $(\sigma_{\alpha\beta k}^*, \sigma_{3\alpha k}^*)$ e $(\varepsilon_{\alpha\beta k}^*, \varepsilon_{3\alpha k}^*)$ com $k = 1, 2, 3$.

As deformações reais e fundamentais podem ser escritas em função dos deslocamentos como:

$$\varepsilon_{\alpha\beta k}^* = \frac{z}{2}(\phi_{\alpha k, \beta}^* + \phi_{\beta k, \alpha}^*) - \frac{a}{2}z^3(\phi_{\alpha k, \beta}^* + \phi_{\beta k, \alpha}^* + 2w_{k, \alpha\beta}^*) \quad (3.79)$$

$$\varepsilon_{3\alpha k}^* = \phi_{\alpha k}^* + w_{k, \alpha}^* \quad (3.80)$$

O Teorema da Reciprocidade permite a escrita da seguinte identidade para os trabalhos virtuais δU :

$$\begin{aligned} \delta U = & \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x(s) \varepsilon_{xk}^*(p, s) dz d\Omega + \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y(s) \varepsilon_{yk}^*(p, s) dz d\Omega + \\ & + \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy}(s) \gamma_{xyk}^*(p, s) dz d\Omega + \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xz}(s) \gamma_{xzk}^*(p, s) dz d\Omega + \\ & + \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yz}(s) \gamma_{yzk}^*(p, s) dz d\Omega = \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varepsilon_x(s) \sigma_{xk}^*(p, s) dz d\Omega + \\ & + \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varepsilon_y(s) \sigma_{yk}^*(p, s) dz d\Omega + \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \gamma_{xy}(s) \sigma_{xyk}^*(p, s) dz d\Omega + \\ & + \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \gamma_{xz}(s) \sigma_{xzk}^*(p, s) dz d\Omega + \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \gamma_{yz}(s) \sigma_{yzk}^*(p, s) dz d\Omega \end{aligned} \quad (3.81)$$

ou

$$\begin{aligned}
\delta U &= \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\beta}(s) \varepsilon_{\alpha\beta k}^*(p, s) dz d\Omega + 2 \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha 3}(s) \varepsilon_{\alpha 3 k}^*(p, s) dz d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\beta}^*(s) \varepsilon_{\alpha\beta k}(p, s) dz d\Omega + 2 \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha 3}^*(s) \varepsilon_{\alpha 3 k}(p, s) dz d\Omega
\end{aligned} \tag{3.82}$$

onde $\beta_1 = \frac{4}{3h^2}$ e $\beta_2 = \frac{4}{h^2}$.

Substituindo as Equações (3.79) e (3.80) na Equação (3.82):

$$\begin{aligned}
\delta U &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}(s) \{z \varnothing_{\alpha k, \beta}^*(p, s) - \beta_1 z^3 [\varnothing_{\alpha k, \beta}^*(p, s) + w_{k, \alpha\beta}^*(p, s)]\} d\Omega dz \\
&+ 2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\Omega} \sigma_{\alpha 3}(s) (1 - \beta_2 z^2) [\varnothing_{\alpha k}^*(p, s) + w_{k, \alpha}^*(p, s)] d\Omega dz
\end{aligned} \tag{3.83}$$

As resultantes de tensão de alta ordem P_{ij} , e R_i são dadas por:

$$\begin{aligned}
P_{ij} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij} z^3 dz, \\
R_i &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{i3} z^2 dz.
\end{aligned}$$

Utilizando na Equação (3.83) os momentos fletores/volventes por unidade de comprimento, as forças de cisalhamento por unidade de comprimento, estes já definidos anteriormente, e as resultantes de tensão, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\delta U &= \int_{\Omega} M_{\alpha\beta}(s) \varnothing_{\alpha k, \beta}^*(p, s) d\Omega - \int_{\Omega} \beta_1 P_{\alpha\beta}(s) [\varnothing_{\alpha k, \beta}^*(p, s) + w_{k, \alpha\beta}^*(p, s)] d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} [Q_{\alpha}(s) - \beta_2 R_{\alpha}(s)] [\varnothing_{\alpha k}^*(p, s) + w_{k, \alpha}^*(p, s)] d\Omega
\end{aligned} \tag{3.84}$$

O trabalho virtual (3.84) também pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
\delta U &= \int_{\Omega} \varnothing_{\alpha, \beta}(s) M_{\alpha\beta k}^*(p, s) d\Omega - \int_{\Omega} [\varnothing_{\alpha, \beta}(s) + w_{\alpha\beta}(s)] \beta_1 P_{\alpha\beta k}^*(p, s) d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} [\varnothing_{\alpha k}(s) + w_{\alpha}(s)] [Q_{\alpha k}^*(p, s) - \beta_2 R_{\alpha k}^*(p, s)] d\Omega
\end{aligned} \tag{3.85}$$

Integrando-se convenientemente por partes (3.85) tem-se que:

$$\begin{aligned}
\delta U = & \int_{\Gamma} [M_{\alpha\beta}(s) - \beta_1 P_{\alpha\beta}(s)] n_{\beta} \phi_{\alpha k}^*(p, s) d\Gamma - \int_{\Omega} M_{\alpha\beta, \beta}(s) \phi_{\alpha k}^*(p, s) d\Omega \\
& - \int_{\Gamma} \beta_1 P_{\alpha\beta}(s) n_{\beta} w_{k, \alpha}^*(p, s) d\Gamma \\
& + \int_{\Omega} [Q_{\alpha}(s) - \beta_2 R_{\alpha}(s) + \beta_1 P_{\alpha\beta, \beta}(s)] [\phi_{\alpha k}^*(p, s) + w_{k, \alpha}^*(p, s)] d\Omega
\end{aligned} \tag{3.86}$$

Após integração conveniente em (3.86) resulta em:

$$\begin{aligned}
\delta U = & \int_{\Gamma} \hat{M}_{\alpha\beta}(s) n_{\beta} \phi_{\alpha k}^*(p, s) d\Gamma - \int_{\Gamma} \beta_1 P_{\alpha\beta}(s) n_{\beta} w_{k, \alpha}^*(p, s) d\Gamma \\
& + \int_{\Gamma} [\hat{Q}_{\alpha k}(s) + \beta_1 P_{\alpha\beta k, \beta}(s)] n_{\alpha} w_k^*(p, s) d\Gamma \\
& + \int_{\Omega} [\hat{Q}_{\alpha k}(s) - \hat{M}_{\alpha\beta, \beta}(s)] \phi_{\alpha k}^*(p, s) d\Omega - \int_{\Omega} [\hat{Q}_{\alpha, \alpha}(s) + \beta_1 P_{\alpha\beta, \alpha\beta}(s)] w_k^*(p, s) d\Omega
\end{aligned} \tag{3.87}$$

onde:

$$\hat{M}_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta} - \beta_1 P_{\alpha\beta},$$

$$\hat{Q}_{\alpha} = Q_{\alpha} - \beta_2 R_{\alpha}.$$

Substituindo-se as equações de equilíbrio ($\hat{Q}_{\alpha} - \hat{M}_{\alpha\beta, \beta} = m_{\alpha}$, $-\hat{Q}_{\alpha, \alpha} - \beta_1 P_{\alpha\beta, \alpha\beta} = q$) em (3.87) resulta:

$$\begin{aligned}
\delta U = & \int_{\Gamma} \hat{M}_{\alpha\beta}(s) n_{\beta} \phi_{\alpha k}^*(p, s) d\Gamma - \int_{\Gamma} \beta_1 P_{\alpha\beta}(s) n_{\beta} w_{k, \alpha}^*(p, s) d\Gamma + \int_{\Gamma} V_{\alpha}(s) n_{\alpha} w_k^*(p, s) d\Gamma \\
& + \int_{\Omega} m_{\alpha}(s) \phi_{\alpha k}^*(p, s) d\Omega + \int_{\Omega} q(s) w_k^*(p, s) d\Omega
\end{aligned} \tag{3.88}$$

onde:

$$V_{\alpha} = \hat{Q}_{\alpha} - \beta_1 P_{\alpha\beta, \beta}.$$

A equação (3.85) pode ser transformada por um procedimento análogo aplicado em (3.84), resultando em:

$$\begin{aligned}
\delta U = & \int_{\Gamma} \phi_{\alpha}(s) \hat{M}_{\alpha\beta k}^*(p, s) n_{\beta} d\Gamma - \int_{\Gamma} w_{,\alpha}(s) \beta_1 P_{\alpha\beta k}^*(p, s) n_{\beta} d\Gamma + \int_{\Gamma} w(s) V_{\alpha k}^*(p, s) n_{\alpha} d\Gamma + \\
& + \int_{\Omega} \phi_{\alpha}(s) [\hat{Q}_{\alpha k}^*(p, s) - \hat{M}_{\alpha\beta k, \beta}^*(p, s)] d\Omega \\
& - \int_{\Omega} w(s) [\hat{Q}_{\alpha k, \alpha}^*(p, s) + \beta_1 P_{\alpha\beta k, \alpha\beta}^*(p, s)] d\Omega
\end{aligned} \tag{3.89}$$

Substituindo-se as equações de equilíbrio $\hat{Q}_{\alpha k}^* - \hat{M}_{\alpha\beta k, \beta}^* = \delta(p, s) \delta_{\alpha k}$, $(\hat{Q}_{\alpha k, \alpha}^* + \beta_1 P_{\alpha\beta k, \alpha\beta}^*) = \delta(p, s) \delta_{3k}$ em (3.89) resulta:

$$\begin{aligned}
\delta U = & \int_{\Gamma} \phi_{\alpha}(s) \hat{M}_{\alpha\beta k}^*(p, s) n_{\beta} d\Gamma - \int_{\Gamma} w_{,\alpha}(s) \beta_1 P_{\alpha\beta k}^*(p, s) n_{\beta} d\Gamma + \int_{\Gamma} w(s) V_{\alpha k}^*(p, s) n_{\alpha} d\Gamma \\
& + \int_{\Omega} \phi_{\alpha}(s) \delta(p, s) (\delta_{\alpha k} - \delta_{\alpha 3}) d\Omega + \int_{\Omega} w(s) \delta(p, s) \delta_{3k} d\Omega
\end{aligned} \tag{3.90}$$

Utilizando a propriedade de translação do delta de Dirac $\int_{\Omega} f(s) \delta(p, s) d\Omega = f(p)$, as integrais de domínio de (3.90) ficam:

$$\int_{\Omega} \phi_{\alpha}(s) \delta(p, s) (\delta_{\alpha k} - \delta_{\alpha 3}) d\Omega + \int_{\Omega} w(s) \delta(p, s) \delta_{3k} d\Omega = \begin{cases} \phi_{\alpha}(p), & \text{se } k = 1, 2 \\ w(s), & \text{se } k = 3. \end{cases} \tag{3.91}$$

Substituindo-se (3.91) em (3.90) resulta em:

$$\begin{aligned}
\phi_{\hat{k}}(p) + & \int_{\Gamma} \phi_{\alpha}(s) \hat{M}_{\alpha\beta \hat{k}}^*(p, s) n_{\beta} d\Gamma - \int_{\Gamma} w_{,\alpha}(s) \beta_1 P_{\alpha\beta \hat{k}}^*(p, s) n_{\beta} d\Gamma + \\
& + \int_{\Gamma} w(s) V_{\alpha \hat{k}}^*(p, s) n_{\alpha} d\Gamma = \int_{\Gamma} \hat{M}_{\alpha\beta}(s) n_{\beta} \phi_{\alpha \hat{k}}^*(p, s) d\Gamma - \int_{\Gamma} \beta_1 P_{\alpha\beta}(s) n_{\beta} w_{\hat{k}, \alpha}^*(p, s) d\Gamma \\
& + \int_{\Gamma} V_{\alpha}(s) n_{\alpha} w_{\hat{k}}^*(p, s) d\Gamma + \int_{\Omega} m_{\alpha}(S) \phi_{\alpha \hat{k}}^*(p, S) d\Omega + \int_{\Omega} q(S) w_{\hat{k}}^*(p, S) d\Omega
\end{aligned} \tag{3.92}$$

$$\begin{aligned}
w(p) + & \int_{\Gamma} \phi_{\alpha}(s) \hat{M}_{\alpha\beta 3}^*(p, s) n_{\beta} d\Gamma - \int_{\Gamma} w_{,\alpha}(s) \beta_1 P_{\alpha\beta 3}^*(p, s) n_{\beta} d\Gamma + \\
& + \int_{\Gamma} w(s) V_{\alpha 3}^*(p, s) n_{\alpha} d\Gamma = \int_{\Gamma} \hat{M}_{\alpha\beta}(s) n_{\beta} \phi_{\alpha 3}^*(p, s) d\Gamma - \int_{\Gamma} \beta_1 P_{\alpha\beta}(s) n_{\beta} w_{3, \alpha}^*(p, s) d\Gamma \\
& + \int_{\Gamma} V_{\alpha}(s) n_{\alpha} w_3^*(p, s) d\Gamma + \int_{\Omega} m_{\alpha}(S) \phi_{\alpha 3}^*(p, S) d\Omega + \int_{\Omega} q(S) w_3^*(p, S) d\Omega
\end{aligned} \tag{3.93}$$

A placa de Reddy requer a determinação de cinco incógnitas no contorno em coordenadas globais. Convém notar que (3.92) são constituídas de três equações integrais requerendo duas equações adicionais para determinar a solução do problema. Assim, derivando-se (3.93) em relação a x_γ , obtém-se:

$$\begin{aligned}
w_{,\gamma}(p) + \int_{\Gamma} \phi_{\alpha}(s) \widehat{M}_{\alpha\beta 3,\gamma}^*(p, s) n_{\beta} d\Gamma - \int_{\Gamma} w_{,\alpha}(s) \beta_1 P_{\alpha\beta 3,\gamma}^*(p, s) n_{\beta} d\Gamma + \\
+ \int_{\Gamma} w(s) V_{\alpha 3,\gamma}^*(p, s) n_{\alpha} d\Gamma = \int_{\Gamma} \widehat{M}_{\alpha\beta}(s) n_{\beta} \phi_{\alpha 3,\gamma}^*(p, s) d\Gamma - \int_{\Gamma} \beta_1 P_{\alpha\beta}(s) n_{\beta} w_{3,\alpha\gamma}^*(p, s) d\Gamma \\
+ \int_{\Gamma} V_{\alpha}(s) n_{\alpha} w_{3,\gamma}^*(p, s) d\Gamma + \int_{\Omega} m_{\alpha}(S) \phi_{\alpha 3,\gamma}^*(p, S) d\Omega + \int_{\Omega} q(S) w_{3,\gamma}^*(p, S) d\Omega \quad (3.94)
\end{aligned}$$

Em forma explícita, (3.92) e (3.93) ficam:

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \phi_{\widehat{1}} \\ \phi_{\widehat{2}} \end{Bmatrix} + \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \widehat{M}_{1n\widehat{1}}^* & \widehat{M}_{2n\widehat{1}}^* \\ \widehat{M}_{1n\widehat{2}}^* & \widehat{M}_{2n\widehat{2}}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} d\Gamma - \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \beta_1 P_{1n\widehat{1}}^* & \beta_1 P_{2n\widehat{1}}^* \\ \beta_1 P_{1n\widehat{2}}^* & \beta_1 P_{2n\widehat{2}}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{,1} \\ w_{,2} \end{Bmatrix} d\Gamma + \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} V_{n\widehat{1}}^* \\ V_{n\widehat{2}}^* \end{bmatrix} w d\Gamma = \\
= \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \phi_{1\widehat{1}}^* & \phi_{2\widehat{1}}^* \\ \phi_{1\widehat{2}}^* & \phi_{2\widehat{2}}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \widehat{M}_{1n} \\ \widehat{M}_{2n} \end{Bmatrix} d\Gamma - \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} w_{\widehat{1},1}^* & w_{\widehat{1},2}^* \\ w_{\widehat{2},1}^* & w_{\widehat{2},2}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 P_{1n} \\ \beta_1 P_{2n} \end{Bmatrix} d\Gamma + \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} w_{\widehat{1}}^* \\ w_{\widehat{2}}^* \end{bmatrix} V_n d\Gamma + \\
+ \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \phi_{1\widehat{1}}^* & \phi_{2\widehat{1}}^* \\ \phi_{1\widehat{2}}^* & \phi_{2\widehat{2}}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix} d\Omega + \int_{\Omega} \begin{bmatrix} w_{\widehat{1}}^* \\ w_{\widehat{2}}^* \end{bmatrix} q d\Omega \quad (3.94a)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
w + \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \widehat{M}_{1n3}^* & \widehat{M}_{2n3}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} d\Gamma - \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \beta_1 P_{1n3}^* & \beta_1 P_{2n3}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{,1} \\ w_{,2} \end{Bmatrix} d\Gamma + \int_{\Gamma} V_{n3}^* w d\Gamma = \\
= \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \phi_{1\widehat{3}}^* & \phi_{2\widehat{3}}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \widehat{M}_{1n} \\ \widehat{M}_{2n} \end{Bmatrix} d\Gamma - \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} w_{\widehat{3},1}^* & w_{\widehat{3},2}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 P_{1n} \\ \beta_1 P_{2n} \end{Bmatrix} d\Gamma + \int_{\Gamma} w_{\widehat{3}}^* V_n d\Gamma + \\
+ \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \phi_{1\widehat{3}}^* & \phi_{2\widehat{3}}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix} d\Omega + \int_{\Omega} w_{\widehat{3}}^* q d\Omega \quad (3.94b)
\end{aligned}$$

Transformando as rotações em coordenadas globais para coordenadas locais definidos em um ponto no contorno, $\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & s_1 \\ n_2 & s_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_n \\ \phi_s \end{Bmatrix}$, as equações integrais (Eq. (3.94a)) ficam:

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \phi_{\widehat{1}} \\ \phi_{\widehat{2}} \end{Bmatrix} + \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \widehat{M}_{1n\widehat{1}}^* & \widehat{M}_{2n\widehat{1}}^* \\ \widehat{M}_{1n\widehat{2}}^* & \widehat{M}_{2n\widehat{2}}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 & s_1 \\ n_2 & s_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_n \\ \phi_s \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \beta_1 P_{1n\widehat{1}}^* & \beta_1 P_{2n\widehat{1}}^* \\ \beta_1 P_{1n\widehat{2}}^* & \beta_1 P_{2n\widehat{2}}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 & s_1 \\ n_2 & s_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{,n} \\ w_{,s} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{n\widehat{1}}^* \\ V_{n\widehat{2}}^* \end{bmatrix} w d\Gamma = \\
= \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \phi_{1\widehat{1}}^* & \phi_{2\widehat{1}}^* \\ \phi_{1\widehat{2}}^* & \phi_{2\widehat{2}}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 & s_1 \\ n_2 & s_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \widehat{M}_{nn} \\ \widehat{M}_{sn} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} w_{\widehat{1},1}^* & w_{\widehat{1},2}^* \\ w_{\widehat{2},1}^* & w_{\widehat{2},2}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 & s_1 \\ n_2 & s_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 P_{nn} \\ \beta_1 P_{sn} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{\widehat{1}}^* \\ w_{\widehat{2}}^* \end{bmatrix} V_n d\Gamma + \\
+ \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \phi_{1\widehat{1}}^* & \phi_{2\widehat{1}}^* \\ \phi_{1\widehat{2}}^* & \phi_{2\widehat{2}}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix} d\Omega + \int_{\Omega} \begin{bmatrix} w_{\widehat{1}}^* \\ w_{\widehat{2}}^* \end{bmatrix} q d\Omega
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
w + \int_{\Gamma} [\widehat{M}_{1n3}^* \quad \widehat{M}_{2n3}^*] \begin{bmatrix} n_1 & s_1 \\ n_2 & s_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_n \\ \phi_s \end{Bmatrix} - [\beta_1 P_{1n3}^* \quad \beta_1 P_{2n3}^*] \begin{bmatrix} n_1 & s_1 \\ n_2 & s_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{,n} \\ w_{,s} \end{Bmatrix} + V_{n3}^* w d\Gamma = \\
= \int_{\Gamma} [\phi_{1\widehat{3}}^* \quad \phi_{2\widehat{3}}^*] \begin{bmatrix} n_1 & s_1 \\ n_2 & s_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \widehat{M}_{nn} \\ \widehat{M}_{sn} \end{Bmatrix} d\Gamma - \int_{\Gamma} [w_{\widehat{3},1}^* \quad w_{\widehat{3},2}^*] \begin{bmatrix} n_1 & s_1 \\ n_2 & s_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 P_{nn} \\ \beta_1 P_{sn} \end{Bmatrix} d\Gamma + \int_{\Gamma} w_{\widehat{3}}^* V_n d\Gamma + \\
+ \int_{\Omega} [\phi_{1\widehat{3}}^* \quad \phi_{2\widehat{3}}^*] \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix} d\Omega + \int_{\Omega} w_{\widehat{3}}^* q d\Omega
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \phi_{\widehat{1}} \\ \phi_{\widehat{2}} \end{Bmatrix} + \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \widehat{M}_{nn\widehat{1}}^* & \widehat{M}_{sn\widehat{1}}^* \\ \widehat{M}_{nn\widehat{2}}^* & \widehat{M}_{sn\widehat{2}}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_n \\ \phi_s \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \beta_1 P_{nn\widehat{1}}^* \\ \beta_1 P_{sn\widehat{1}}^* \end{bmatrix} w_{,n} - \begin{bmatrix} \beta_1 P_{sn\widehat{1}}^* \\ \beta_1 P_{sn\widehat{2}}^* \end{bmatrix} w_{,s} + \begin{bmatrix} V_{n\widehat{1}}^* \\ V_{n\widehat{2}}^* \end{bmatrix} w d\Gamma = \\
= \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \phi_{n\widehat{1}}^* & \phi_{s\widehat{1}}^* \\ \phi_{n\widehat{2}}^* & \phi_{s\widehat{2}}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \widehat{M}_{nn} \\ \widehat{M}_{sn} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} w_{\widehat{1},n}^* \\ w_{\widehat{2},n}^* \end{bmatrix} \beta_1 P_{nn} - \begin{bmatrix} w_{\widehat{1},s}^* \\ w_{\widehat{2},s}^* \end{bmatrix} \beta_1 P_{sn} + \begin{bmatrix} w_{\widehat{1}}^* \\ w_{\widehat{2}}^* \end{bmatrix} V_n d\Gamma + \\
+ \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \phi_{1\widehat{1}}^* & \phi_{2\widehat{1}}^* \\ \phi_{1\widehat{2}}^* & \phi_{2\widehat{2}}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix} d\Omega + \int_{\Omega} \begin{bmatrix} w_{\widehat{1}}^* \\ w_{\widehat{2}}^* \end{bmatrix} q d\Omega
\end{aligned} \tag{3.95}$$

e

$$\begin{aligned}
w + \int_{\Gamma} [\widehat{M}_{nn3}^* \quad \widehat{M}_{sn3}^*] \begin{Bmatrix} \phi_n \\ \phi_s \end{Bmatrix} - \beta_1 P_{nn3}^* w_{,n} - \beta_1 P_{sn3}^* w_{,s} + V_{n3}^* w d\Gamma = \\
= \int_{\Gamma} [\phi_{n3}^* \quad \phi_{s3}^*] \begin{Bmatrix} \widehat{M}_{nn} \\ \widehat{M}_{sn} \end{Bmatrix} - w_{3,n}^* \beta_1 P_{nn} - w_{3,s}^* \beta_1 P_{sn} + w_3^* V_n d\Gamma + \\
+ \int_{\Omega} [\phi_{13}^* \quad \phi_{23}^*] \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix} d\Omega + \int_{\Omega} w_3^* q d\Omega
\end{aligned} \tag{3.96}$$

Já as inclinações do plano médio da placa ficam:

$$\begin{aligned}
w_{,\gamma} + \int_{\Gamma} [\widehat{M}_{nn3,\gamma}^* \quad \widehat{M}_{sn3,\gamma}^*] \begin{Bmatrix} \phi_n \\ \phi_s \end{Bmatrix} - \beta_1 P_{nn3,\gamma}^* w_{,n} - \beta_1 P_{sn3,\gamma}^* w_{,s} + V_{n3,\gamma}^* w d\Gamma = \\
= \int_{\Gamma} [\phi_{n3,\gamma}^* \quad \phi_{s3,\gamma}^*] \begin{Bmatrix} \widehat{M}_{nn} \\ \widehat{M}_{sn} \end{Bmatrix} - w_{3,n\gamma}^* \beta_1 P_{nn} - w_{3,s\gamma}^* \beta_1 P_{sn} + w_{3,\gamma}^* V_n d\Gamma + \\
+ \int_{\Omega} [\phi_{n3,\gamma}^* \quad \phi_{s3,\gamma}^*] \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix} d\Omega + \int_{\Omega} w_{3,\gamma}^* q d\Omega
\end{aligned}$$

Se forem aplicadas integrais por partes nos seguintes termos tem-se:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \beta_1 P_{sn\widehat{1}}^* \\ \beta_1 P_{sn\widehat{2}}^* \end{bmatrix} w_{,s} d\Gamma &= \begin{bmatrix} \beta_1 P_{sn\widehat{1}}^* \\ \beta_1 P_{sn\widehat{2}}^* \end{bmatrix} w \Big|_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} - \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \beta_1 P_{sn\widehat{1},s}^* \\ \beta_1 P_{sn\widehat{2},s}^* \end{bmatrix} w d\Gamma = \\
&= \begin{bmatrix} \beta_1 R_{c\widehat{1}}^* \\ \beta_1 R_{c\widehat{2}}^* \end{bmatrix} w_c - \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \beta_1 P_{sn\widehat{1},s}^* \\ \beta_1 P_{sn\widehat{2},s}^* \end{bmatrix} w d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.97}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \begin{bmatrix} w_{1,s}^* \\ w_{2,s}^* \end{bmatrix} \beta_1 P_{sn} d\Gamma &= \begin{bmatrix} w_{1,\hat{s}}^* \\ w_{2,\hat{s}}^* \end{bmatrix} \beta_1 P_{sn} \Big|_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} - \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} w_{1,\hat{s}}^* \\ w_{2,\hat{s}}^* \end{bmatrix} \beta_1 P_{sn,s} d\Gamma = \\
&= \begin{bmatrix} w_{1,\hat{s}}^* \\ w_{2,\hat{s}}^* \end{bmatrix} \beta_1 R_c - \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} w_{1,\hat{s}}^* \\ w_{2,\hat{s}}^* \end{bmatrix} \beta_1 P_{sn,s} d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.98}$$

Substituindo-se (3.97) e (3.98) em (3.95) e (3.96) resultando em:

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \phi_{\hat{1}} \\ \phi_{\hat{2}} \end{Bmatrix} + \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \hat{M}_{nn}^* & \hat{M}_{sn}^* \\ \hat{M}_{nn}^* & \hat{M}_{sn}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_n \\ \phi_s \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \beta_1 P_{nn}^* \\ \beta_1 P_{nn}^* \end{bmatrix} w_{,n} + \begin{bmatrix} \bar{V}_{n\hat{1}}^* \\ \bar{V}_{n\hat{2}}^* \end{bmatrix} w d\Gamma + \sum_{c=1}^{nc} \begin{bmatrix} \beta_1 R_{c\hat{1}}^* \\ \beta_1 R_{c\hat{2}}^* \end{bmatrix} w_c = \\
= \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \phi_{n\hat{1}}^* & \phi_{s\hat{1}}^* \\ \phi_{n\hat{2}}^* & \phi_{s\hat{2}}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{M}_{nn} \\ \hat{M}_{sn} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} w_{1,n}^* \\ w_{2,n}^* \end{bmatrix} \beta_1 P_{nn} + \begin{bmatrix} w_{1,\hat{n}}^* \\ w_{2,\hat{n}}^* \end{bmatrix} \bar{V}_n d\Gamma + \sum_{c=1}^{nc} \begin{bmatrix} w_{1,\hat{c}}^* \\ w_{2,\hat{c}}^* \end{bmatrix} \beta_1 R_c + \\
+ \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \phi_{1\hat{1}}^* & \phi_{2\hat{1}}^* \\ \phi_{1\hat{2}}^* & \phi_{2\hat{2}}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix} d\Omega + \int_{\Omega} \begin{bmatrix} w_{1,\hat{1}}^* \\ w_{2,\hat{2}}^* \end{bmatrix} q d\Omega
\end{aligned} \tag{3.99}$$

onde a cortante equivalente de Reddy e reação de canto de alta ordem são dados respectivamente por:

$$\bar{V}_{n\hat{k}} = \hat{Q}_n - \beta_1 P_{n\beta,\beta} - \beta_1 P_{sn\hat{k},s} \tag{3.100}$$

$$R_{c\hat{k}}^* = P_{sn\hat{k},s}^*(p, \Gamma_2) - P_{sn\hat{k},s}^*(p, \Gamma_1) \tag{3.101}$$

$$\begin{aligned}
w + \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \hat{M}_{nn}^* & \hat{M}_{sn3}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_n \\ \phi_s \end{Bmatrix} - \beta_1 P_{nn}^* w_{,n} + \bar{V}_{n3}^* w d\Gamma + \sum_{c=1}^{nc} \beta_1 R_{c\hat{3}}^* w_c = \\
= \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \phi_{n3}^* & \phi_{s3}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{M}_{nn} \\ \hat{M}_{sn} \end{Bmatrix} - w_{3,n}^* \beta_1 P_{nn} + w_{3,\hat{n}}^* \bar{V}_n d\Gamma + \sum_{c=1}^{nc} \beta_1 w_{c\hat{3}}^* R_c + \\
+ \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \phi_{13}^* & \phi_{23}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix} d\Omega + \int_{\Omega} w_{3,\hat{1}}^* q d\Omega
\end{aligned} \tag{3.102}$$

onde:

$$\bar{V}_{n3} = \hat{Q}_n - \beta_1 P_{n\beta,\beta} - \beta_1 P_{s3,s} \tag{3.103}$$

$$\begin{aligned}
w_{,\gamma} + \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \hat{M}_{nn3,\gamma}^* & \hat{M}_{sn3,\gamma}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_n \\ \phi_s \end{Bmatrix} - \beta_1 P_{nn,\gamma}^* w_{,n} + \bar{V}_{n3,\gamma}^* w d\Gamma + \sum_{c=1}^{nc} \beta_1 R_{c3,\gamma}^* w_c = \\
= \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \phi_{n3,\gamma}^* & \phi_{s3,\gamma}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{M}_{nn} \\ \hat{M}_{sn} \end{Bmatrix} - w_{3,n\gamma}^* \beta_1 P_{nn} + w_{3,\gamma}^* \bar{V}_n d\Gamma + \sum_{c=1}^{nc} \beta_1 w_{c3,\gamma}^* R_c + \\
+ \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \phi_{n3,\gamma}^* & \phi_{s3,\gamma}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix} d\Omega + \int_{\Omega} w_{3,\gamma}^* q d\Omega
\end{aligned} \tag{3.104}$$

Pré-multiplicando as equações integrais das rotações por $rot^T(p) = \begin{bmatrix} n_1 & s_1 \\ n_2 & s_2 \end{bmatrix}$ fica:

$$\begin{aligned}
& \begin{Bmatrix} \phi_{\hat{n}} \\ \phi_{\hat{s}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix} \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \hat{M}_{nn\hat{1}}^* & \hat{M}_{sn\hat{1}}^* \\ \hat{M}_{nn\hat{2}}^* & \hat{M}_{sn\hat{2}}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_n \\ \phi_s \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \beta_1 P_{nn\hat{1}}^* \\ \beta_1 P_{nn\hat{2}}^* \end{bmatrix} w_n + \\
& + \begin{bmatrix} \bar{V}_{n\hat{1}}^* \\ \bar{V}_{n\hat{2}}^* \end{bmatrix} wd\Gamma + \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix} \sum_{c=1}^{nc} \begin{bmatrix} \beta_1 R_{c\hat{1}}^* \\ \beta_1 R_{c\hat{2}}^* \end{bmatrix} w_c = \\
& = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix} \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \phi_{n\hat{1}}^* & \phi_{s\hat{1}}^* \\ \phi_{n\hat{2}}^* & \phi_{s\hat{2}}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{M}_{nn} \\ \hat{M}_{sn} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} w_{1,n}^* \\ w_{2,n}^* \end{bmatrix} \beta_1 P_{nn} + \begin{bmatrix} w_{\hat{1}}^* \\ w_{\hat{2}}^* \end{bmatrix} \bar{V}_n d\Gamma + \\
& + \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix} \sum_{c=1}^{nc} \begin{bmatrix} w_{\hat{1}}^* \\ w_{\hat{2}}^* \end{bmatrix} \beta_1 R_c + \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix} \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \phi_{1\hat{1}}^* & \phi_{2\hat{1}}^* \\ \phi_{1\hat{2}}^* & \phi_{2\hat{2}}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{\hat{1}}^* \\ w_{\hat{2}}^* \end{bmatrix} q d\Omega
\end{aligned} \tag{3.105}$$

Pré-multiplicando as equações integrais das inclinações do plano médio pelas componentes da normal ao contorno no ponto fonte fica:

$$\begin{aligned}
& w_n + n_{\gamma} \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \hat{M}_{nn}^* & \hat{M}_{sn\gamma}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_n \\ \phi_s \end{Bmatrix} - \beta_1 P_{nn\gamma}^* w_n + \bar{V}_{n\gamma}^* wd\Gamma + n_{\gamma} \sum_{c=1}^{nc} \beta_1 R_{c\gamma}^* w_c = \\
& = n_{\gamma} \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \phi_{n\gamma}^* & \phi_{s\gamma}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{M}_{nn} \\ \hat{M}_{sn} \end{Bmatrix} - w_{3,\gamma}^* \beta_1 P_{nn} + w_{3,\gamma}^* \bar{V}_n d\Gamma + n_{\gamma} \sum_{c=1}^{nc} \beta_1 w_{c\gamma}^* R_c + \\
& + n_{\gamma} \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \phi_{n\gamma}^* & \phi_{s\gamma}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix} + w_{3,\gamma}^* q d\Omega
\end{aligned} \tag{3.106}$$

3.5.1.1 Solução Fundamental do Momento de Alta Ordem

Na equação integral de deslocamentos, equações (3.102), (3.105) e (3.106), é requerido o cálculo das soluções fundamentais do momento de alta ordem. A expressão para este esforço é dada por:

$$\hat{M}_{\xi\alpha\beta}^* = M_{\xi\alpha\beta}^* - \frac{4}{3h^2} P_{\xi\alpha\beta}^* \tag{3.107}$$

para o índice ξ variando de 1 a 3. Quando ξ assume valores 1 e 2, após trocar o índice ξ por τ , tem-se:

$$M_{\tau\alpha\beta}^* = \frac{4D}{5} \left[\nu U_{\tau\gamma,\gamma}^* \delta_{\alpha\beta} + \frac{1-\nu}{2} (U_{\tau\alpha,\beta}^* + U_{\tau\beta,\alpha}^*) \right] - \frac{D}{5} [\nu U_{\tau 3\gamma,\gamma}^* \delta_{\alpha\beta} + (1-\nu) U_{\tau 3\alpha,\beta}^*] \tag{3.108}$$

onde:

$$U_{\tau\gamma,\gamma}^* = \left[\left(A + \frac{B}{r} \right) \frac{1}{r} - \frac{D}{r^2} - \frac{B}{r^2} + \frac{dA}{dr} + \frac{dC}{dr} + \frac{dB}{dr} \frac{1}{r} + \frac{dD}{dr} \frac{1}{r} \right] r_{,\tau} \tag{3.109}$$

$$U_{\tau\alpha,\beta}^* = \left[\left(A + \frac{B}{r} \right) \frac{1}{r} \right] (r_{,\alpha} \delta_{\tau,\beta} + r_{,\tau} \delta_{\alpha,\beta} - 2r_{,\beta} r_{,\alpha} r_{,\tau}) + \left[\frac{dA}{dr} - \frac{B}{r^2} + \frac{dB}{dr} \frac{1}{r} \right] (r_{,\beta} r_{,\alpha} r_{,\tau}) + \left[\frac{dC}{dr} - \frac{D}{r^2} + \frac{dD}{dr} \frac{1}{r} \right] (r_{,\beta} \delta_{\tau,\alpha}) \quad (3.110)$$

$$U_{\tau\beta,\alpha}^* = \left[\left(A + \frac{B}{r} \right) \frac{1}{r} \right] (r_{,\beta} \delta_{\tau,\alpha} + r_{,\tau} \delta_{\alpha,\beta} - 2r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\tau}) + \left[\frac{dA}{dr} - \frac{B}{r^2} + \frac{dB}{dr} \frac{1}{r} \right] (r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\tau}) + \left[\frac{dC}{dr} - \frac{D}{r^2} + \frac{dD}{dr} \frac{1}{r} \right] (r_{,\alpha} \delta_{\tau,\beta}) \quad (3.111)$$

$$U_{\tau 3\gamma,\gamma}^* = \left(\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} - \frac{F}{r^2} \right) r_{,\tau} \quad (3.112)$$

$$U_{\tau 3\alpha,\beta}^* = \left(\frac{F}{r^2} - \frac{dF}{dr} \frac{1}{r} \right) (r_{,\beta} \delta_{\tau,\alpha} + r_{,\tau} \delta_{\alpha,\beta} + r_{,\alpha} \delta_{\tau,\beta}) - \left(\frac{d^2 F}{dr^2} - \frac{3}{r} \frac{dF}{dr} + \frac{3F}{r^2} \right) r_{,\tau} r_{,\alpha} r_{,\beta} \quad (3.113)$$

Referente aos termos da terceira linha, quando ξ é igual a 3, tem-se:

$$M_{3\alpha\beta}^* = \frac{4D}{5} \left[\nu U_{3\gamma,\gamma}^* \delta_{\alpha\beta} + \frac{1-\nu}{2} (U_{3\alpha,\beta}^* + U_{3\beta,\alpha}^*) \right] - \frac{D}{5} [\nu U_{33\gamma,\gamma}^* \delta_{\alpha\beta} + (1-\nu) U_{33\alpha,\beta}^*] \quad (3.114)$$

onde:

$$U_{3\gamma,\gamma}^* = - \left(\frac{F}{r} + \frac{dF}{dr} \right) \quad (3.115)$$

$$U_{3\alpha,\beta}^* = - \left[\frac{F}{r} \delta_{\alpha\beta} + \left(\frac{dF}{dr} - \frac{F}{r} \right) r_{,\alpha} r_{,\beta} \right] \quad (3.116)$$

$$U_{3\beta,\alpha}^* = - \left[\frac{F}{r} \delta_{\beta\alpha} + \left(\frac{dF}{dr} - \frac{F}{r} \right) r_{,\beta} r_{,\alpha} \right] \quad (3.117)$$

$$U_{33\gamma,\gamma}^* = \frac{d^2 E}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE}{dr} \quad (3.118)$$

$$U_{33\alpha,\beta}^* = \frac{1}{r} \frac{dE}{dr} \delta_{\alpha\beta} + \left(\frac{d^2 E}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dE}{dr} \right) r_{,\alpha} r_{,\beta} \quad (3.119)$$

Fazendo analogia a $M_{\tau\alpha\beta}^*$ e $M_{3\alpha\beta}^*$, é possível determinar os valores $P_{\tau\alpha\beta}^*$ e $P_{3\alpha\beta}^*$:

$$P_{\tau\alpha\beta}^* = \frac{4h^2 D}{35} \left[\nu U_{\tau\gamma,\gamma}^* \delta_{\alpha\beta} + \frac{1-\nu}{2} (U_{\tau\alpha,\beta}^* + U_{\tau\beta,\alpha}^*) \right] - \frac{h^2 D}{28} [\nu U_{\tau 3\gamma,\gamma}^* \delta_{\alpha\beta} + (1-\nu) U_{\tau 3\alpha,\beta}^*] \quad (3.120)$$

$$P_{3\alpha\beta}^* = \frac{4h^2 D}{35} \left[\nu U_{3\gamma,\gamma}^* \delta_{\alpha\beta} + \frac{1-\nu}{2} (U_{3\alpha,\beta}^* + U_{3\beta,\alpha}^*) \right] - \frac{h^2 D}{28} [\nu U_{33\gamma,\gamma}^* \delta_{\alpha\beta} + (1-\nu) U_{33\alpha,\beta}^*] \quad (3.121)$$

Aplicando n_α e n_β na expressão do momento de alta ordem (3.107), determina-se $M_{\xi nn}^*$ e $P_{\xi nn}^*$, com o índice ξ variando de 1 a 3:

$$\hat{M}_{\xi nn}^* = M_{\xi nn}^* - \frac{4}{3h^2} P_{\xi nn}^* \quad (3.122)$$

onde:

$$M_{\xi nn}^* = \frac{4D}{5} \left[\nu U_{\xi\gamma,\gamma}^* \delta_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta + \frac{1-\nu}{2} (U_{\xi\alpha,\beta}^* + U_{\xi\beta,\alpha}^*) n_\alpha n_\beta \right] - \frac{D}{5} [\nu U_{\xi 3\gamma,\gamma}^* \delta_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta + (1-\nu) U_{\xi 3\alpha,\beta}^* n_\alpha n_\beta] \quad (3.123)$$

$$P_{\xi nn}^* = \frac{4h^2 D}{35} \left[\nu U_{\xi\gamma,\gamma}^* \delta_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta + \frac{1-\nu}{2} (U_{\xi\alpha,\beta}^* + U_{\xi\beta,\alpha}^*) n_\alpha n_\beta \right] - \frac{h^2 D}{28} [\nu U_{\xi 3\gamma,\gamma}^* \delta_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta + (1-\nu) U_{\xi 3\alpha,\beta}^* n_\alpha n_\beta] \quad (3.124)$$

Trocando o índice ξ por τ , nas Eqs. (3.123) e (3.124), e este assumindo valores 1 e 2, tem-se:

$$U_{\tau\gamma,\gamma}^* \delta_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta = \left[\frac{1}{r} \left(A + \frac{B}{r} \right) - \frac{D}{r^2} - \frac{B}{r^2} + \frac{dA}{dr} + \frac{dC}{dr} + \frac{1}{r} \frac{dB}{dr} + \frac{1}{r} \frac{dD}{dr} \right] r_{,\tau} \quad (3.125)$$

$$U_{\tau\alpha,\beta}^* n_\alpha n_\beta = \left[\left(A + \frac{B}{r} \right) \frac{1}{r} \right] (r_{,n} n_\tau + r_{,\tau} - 2r_{,n} r_{,n} r_{,\tau}) + \left[\frac{dA}{dr} - \frac{B}{r^2} + \frac{dB}{dr} \frac{1}{r} \right] (r_{,n} r_{,n} r_{,\tau}) + \left[\frac{dC}{dr} - \frac{D}{r^2} + \frac{dD}{dr} \frac{1}{r} \right] (r_{,n} n_\tau) \quad (3.126)$$

$$U_{\tau\beta,\alpha}^* n_\alpha n_\beta = U_{\tau\alpha,\beta} n_\alpha n_\beta \quad (3.127)$$

$$U_{\tau 3\gamma,\gamma}^* \delta_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta = \left(\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} - \frac{F}{r^2} \right) r_{,\tau} \quad (3.128)$$

$$U_{\tau 3\alpha,\beta}^* n_\alpha n_\beta = \left(\frac{F}{r^2} - \frac{dF}{dr} \frac{1}{r} \right) (2r_{,n} n_\tau + r_{,\tau}) - \left(\frac{d^2 F}{dr^2} - \frac{3}{r} \frac{dF}{dr} + \frac{3F}{r^2} \right) r_{,\tau} r_{,n} r_{,n} \quad (3.129)$$

E quando o índice ξ assume valor igual a 3, nas Eqs. (3.123) e (3.124), tem-se:

$$U_{3\gamma,\gamma}^* \delta_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta = - \left(\frac{F}{r} + \frac{dF}{dr} \right) \quad (3.130)$$

$$U_{3\alpha,\beta}^* n_\alpha n_\beta = - \left[\frac{F}{r} + \left(\frac{dF}{dr} - \frac{F}{r} \right) r_{,n} r_{,n} \right] \quad (3.131)$$

$$U_{3\beta,\alpha}^* n_\alpha n_\beta = U_{3\alpha,\beta} n_\alpha n_\beta \quad (3.132)$$

$$U_{33\gamma,\gamma}^* \delta_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta = \frac{d^2 E}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE}{dr} \quad (3.133)$$

$$U_{33\alpha,\beta}^* n_\alpha n_\beta = \frac{1}{r} \frac{dE}{dr} + \left(\frac{d^2 E}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dE}{dr} \right) r_{,n} r_{,n} \quad (3.134)$$

Aplicando n_α e s_β na expressão do momento de alta ordem (3.107), determina-se $M_{\xi ns}^*$ e $P_{\xi ns}^*$, com o índice ξ variando de 1 a 3:

$$\hat{M}_{\xi ns}^* = M_{\xi ns}^* - \frac{4}{3h^2} P_{\xi ns}^* \quad (3.135)$$

onde:

$$M_{\xi ns}^* = \frac{4D}{5} \left[\frac{1-\nu}{2} (U_{\xi\alpha,\beta}^* n_\alpha s_\beta + U_{\xi\beta,\alpha}^* n_\beta s_\alpha) \right] - \frac{D}{5} [(1-\nu) U_{\xi 3\alpha,\beta}^* n_\alpha s_\beta] \quad (3.136)$$

$$P_{\xi ns}^* = \frac{4h^2 D}{35} \left[\frac{1-\nu}{2} (U_{\xi\alpha,\beta}^* n_\alpha s_\beta + U_{\xi\beta,\alpha}^* n_\beta s_\alpha) \right] - \frac{h^2 D}{28} [(1-\nu) U_{\xi 3\alpha,\beta}^* n_\alpha s_\beta] \quad (3.137)$$

Trocando o índice ξ por τ , nas Eqs. (3.136) e (3.137), e este assumindo valores 1 e 2, tem-se:

$$U_{\tau\alpha,\beta}^* n_\alpha s_\beta = \left[\left(A + \frac{B}{r} \right) \frac{1}{r} \right] (r_{,n} s_\tau - 2r_{,s} r_{,n} r_{,\tau}) + \left[\frac{dA}{dr} - \frac{B}{r^2} + \frac{dB}{dr} \frac{1}{r} \right] (r_{,s} r_{,n} r_{,\tau}) + \left[\frac{dC}{dr} - \frac{D}{r^2} + \frac{dD}{dr} \frac{1}{r} \right] (r_{,s} n_\tau) \quad (3.138)$$

$$U_{\tau\beta,\alpha}^* n_\beta s_\alpha = U_{\tau\alpha,\beta}^* n_\alpha s_\beta \quad (3.139)$$

$$U_{\tau 3\alpha,\beta}^* n_\alpha s_\beta = \left(\frac{F}{r^2} - \frac{dF}{dr} \frac{1}{r} \right) (r_{,s} n_\tau + r_{,n} s_\tau) - \left(\frac{d^2 F}{dr^2} - \frac{3}{r} \frac{dF}{dr} + \frac{3F}{r^2} \right) r_{,\tau} r_{,n} r_{,s} \quad (3.140)$$

E quando o índice ξ assume valor igual a 3, nas Eqs. (3.136) e (3.137), tem-se:

$$U_{3\alpha,\beta}^* n_\alpha s_\beta = \left(\frac{dF}{dr} - \frac{F}{r} \right) r_{,n} r_{,s} \quad (3.141)$$

$$U_{3\beta,\alpha}^* n_\beta s_\alpha = U_{3\alpha,\beta}^* n_\alpha s_\beta \quad (3.142)$$

$$U_{3 3\alpha,\beta}^* n_\alpha s_\beta = \left(\frac{d^2 E}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dE}{dr} \right) r_{,n} r_{,s} \quad (3.143)$$

A terceira equação em (3.135) pode ser reescrita reagrupando os termos em comum que existem nas expressões de M_{3ns}^* e P_{3ns}^* , obtendo:

$$\hat{M}_{3ns}^* = \frac{4D}{105} \left\{ 17 \left[\frac{1-\nu}{2} (U_{3\alpha,\beta}^* + U_{3\beta,\alpha}^*) n_\alpha s_\beta \right] - 4[(1-\nu) U_{3 3\alpha,\beta}^* n_\alpha s_\beta] \right\} \quad (3.144)$$

Será obtida a derivada da equação (3.122), quando ξ assume valor igual a 3, em relação ao ponto fonte m . Para isso, primeiramente, serão renomeados os termos da mencionada equação, conforme mostrado a seguir:

$$U_{3\gamma,\gamma}^* = - \left(\frac{F}{r} + \frac{dF}{dr} \right) = J_1 \quad (3.145)$$

$$U_{3\alpha,\beta}^* n_\alpha n_\beta = - \left[\frac{F}{r} + \left(\frac{dF}{dr} - \frac{F}{r} \right) r_{,n} r_{,n} \right] = J_2 + J_3 r_{,n} r_{,n} \quad (3.146)$$

$$U_{3\beta,\alpha}^* n_\alpha n_\beta = U_{3\alpha,\beta}^* n_\alpha n_\beta = J_2 + J_3 r_{,n} r_{,n} \quad (3.147)$$

$$U_{33\gamma,\gamma}^* = \frac{d^2 E}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE}{dr} = J_4 \quad (3.148)$$

$$U_{33\alpha,\beta}^* n_\alpha n_\beta = \frac{1}{r} \frac{dE}{dr} + \left(\frac{d^2 E}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dE}{dr} \right) r_{,n} r_{,n} = J_5 + J_6 r_{,n} r_{,n} \quad (3.149)$$

Reescrevendo a Eq. (3.122), quando ξ assume valor igual a 3, utilizando as expressões de (3.145) a (3.149), obtém-se:

$$\hat{M}_{3nn}^* = \frac{4D}{105} \{ 17 [\nu J_1 + (1 - \nu) (J_2 + J_3 r_{,n} r_{,n})] - 4 [\nu J_4 + (1 - \nu) (J_5 + J_6 r_{,n} r_{,n})] \} \quad (3.150)$$

A partir de (3.150), obter-se-á a derivada em relação ao ponto fonte m .

$$\begin{aligned} \hat{M}_{3nn,m}^* = \frac{4D}{105} \Big\{ & 17 \left[\nu \frac{dJ_1}{dr} r_{,m} + (1 - \nu) \left(\frac{dJ_2}{dr} r_{,m} + \frac{dJ_3}{dr} r_{,m} r_{,n} r_{,n} + 2J_3 \frac{m_n - r_{,m} r_{,n}}{r} r_{,n} \right) \right] - \\ & - 4 \left[\nu \frac{dJ_4}{dr} r_{,m} + (1 - \nu) \left(\frac{dJ_5}{dr} r_{,m} + \frac{dJ_6}{dr} r_{,m} r_{,n} r_{,n} + 2J_6 \frac{m_n - r_{,m} r_{,n}}{r} r_{,n} \right) \right] \Big\} \end{aligned} \quad (3.151)$$

Por analogia a (3.151), apresenta-se a expressão de $P_{3nn,m}^*$:

$$\begin{aligned} P_{3nn,m}^* = \frac{4h^2 D}{35} \Big\{ & \left[\nu \frac{dJ_1}{dr} r_{,m} + (1 - \nu) \left(\frac{dJ_2}{dr} r_{,m} + \frac{dJ_3}{dr} r_{,m} r_{,n} r_{,n} + 2J_3 \frac{m_n - r_{,m} r_{,n}}{r} r_{,n} \right) \right] - \\ & - \frac{h^2 D}{28} \left[\nu \frac{dJ_4}{dr} r_{,m} + (1 - \nu) \left(\frac{dJ_5}{dr} r_{,m} + \frac{dJ_6}{dr} r_{,m} r_{,n} r_{,n} + 2J_6 \frac{m_n - r_{,m} r_{,n}}{r} r_{,n} \right) \right] \Big\} \end{aligned} \quad (3.152)$$

Convém notar que nas expressões (3.151) e (3.152) aparecem as derivadas dos termos J_i , definidos nas equações de (3.145) a (3.149). As respectivas derivadas dJ_i/dr são mostradas a seguir:

$$\frac{dJ_1}{dr} = \frac{1}{r^2} F - \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} - \frac{d^2 F}{dr^2} \quad (3.153)$$

$$\frac{dJ_2}{dr} = \frac{1}{r^2} F - \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} \quad (3.154)$$

$$\frac{dJ_3}{dr} = -\frac{1}{r^2} F + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} - \frac{d^2 F}{dr^2} \quad (3.155)$$

$$\frac{dJ_4}{dr} = \frac{d^3 E}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 E}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dE}{dr} \quad (3.156)$$

$$\frac{dJ_5}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d^2 E}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dE}{dr} \quad (3.157)$$

$$\frac{dJ_6}{dr} = \frac{d^3E}{dr^3} - \frac{1}{r} \frac{d^2E}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{dE}{dr} \quad (3.158)$$

Agora, será obtida a derivada da equação (3.144) em relação ao ponto fonte m . Para isso, primeiramente, serão renomeados os termos da mencionada equação, conforme mostrado a seguir:

$$U_{3\alpha,\beta}^* n_\alpha s_\beta = \left(\frac{dF}{dr} - \frac{F}{r} \right) r_n r_s = J_3 r_n r_s \quad (3.159)$$

$$U_{3\beta,\alpha}^* n_\beta s_\alpha = U_{3\alpha,\beta}^* n_\alpha s_\beta = J_3 r_n r_s \quad (3.160)$$

$$U_{33\alpha,\beta}^* n_\alpha s_\beta = \left(\frac{d^2E}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dE}{dr} \right) r_n r_s = J_6 r_n r_s \quad (3.161)$$

Reescrevendo (3.144) utilizando as expressões de (3.159) a (3.161), obtém-se:

$$\hat{M}_{3ns}^* = \frac{4D}{105} \{ 17[(1-\nu)(J_3 r_n r_s)] - 4[(1-\nu)(J_6 r_n r_s)] \} \quad (3.162)$$

A partir de (3.162), obter-se-á a derivada em relação ao ponto fonte m :

$$\begin{aligned} \hat{M}_{3ns,m}^* = \frac{4D}{105} \bigg\{ 17 \left[(1-\nu) \left(\frac{dJ_3}{dr} r_m r_n r_s + J_3 \frac{m_n - r_m r_n}{r} r_s + J_3 \frac{m_s - r_m r_s}{r} r_n \right) \right] - \right. \\ \left. - 4 \left[(1-\nu) \left(\frac{dJ_6}{dr} r_m r_n r_s + J_6 \frac{m_n - r_m r_n}{r} r_s + J_6 \frac{m_s - r_m r_s}{r} r_n \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.163)$$

3.5.1.2 Solução Fundamental do Cortante Equivalente de Reddy

Na equação integral de deslocamento, equações (3.102), (3.105) e (3.106), é necessário a forma explícita da cortante equivalente de Reddy. Considere inicialmente a expressão do cortante equivalente de Reddy dado na equação (3.100), no sistema de coordenadas cartesianas (n, s) :

$$\bar{V}_{n\hat{k}\tau}^* = \hat{Q}_{n\tau}^* - \beta_1 P_{n\beta,\beta\tau}^* - \beta_1 \bar{P}_{sn\hat{k},s\tau}^* \quad (3.164)$$

Na expressão (3.164) quando τ assume valores de 1 e 2, é obtido:

$$\hat{Q}_{n\tau}^* = \frac{8Gh}{15} \left[\left(C + \frac{D}{r} + \frac{F}{r} \right) n_\tau + \left(A + \frac{B}{r} - \frac{F}{r} + \frac{dF}{dr} \right) r_{,\tau} r_n \right] \quad (3.165)$$

$$P_{n\beta,\beta\tau}^* = \frac{4h^2D}{35} \left[\nu U_{\tau\gamma,\gamma\beta}^* + \frac{1-\nu}{2} (U_{\tau\alpha,\beta\beta}^* + U_{\tau\beta,\alpha\beta}^*) \right] - \frac{h^2D}{28} [\nu U_{\tau 3\gamma,\gamma\beta}^* + (1-\nu) U_{\tau 3\alpha,\beta\beta}^*] \quad (3.166)$$

$$\bar{P}_{sn\hat{k},s\tau}^* = \frac{4h^2D}{35} (1-\nu) \rho_\tau^* - \frac{h^2D}{28} (1-\nu) \varsigma_\tau^* \quad (3.167)$$

sendo:

$$U_{\tau\gamma,\gamma\beta}^* = \left(\frac{A}{r^2} - \frac{D}{r^3} + \frac{1}{r} \frac{dA}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{dB}{dr} + \frac{1}{r} \frac{dC}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{dD}{dr} \right) n_\tau + \left(\frac{3}{r^3} D - \frac{2}{r^2} A - \frac{2}{r^2} \frac{dB}{dr} - \frac{1}{r} \frac{dC}{dr} - \frac{3}{r^2} \frac{dD}{dr} + \frac{d^2 A}{dr^2} + \frac{d^2 C}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d^2 B}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d^2 D}{dr^2} \right) r_{,\tau} r_{,n} \quad (3.168)$$

$$U_{\tau\alpha,\beta\beta}^* = \left(\frac{2}{r^2} A + \frac{2}{r^3} B + \frac{1}{r^3} D + \frac{1}{r} \frac{dC}{dr} - \frac{1}{r^2} \frac{dD}{dr} + \frac{d^2 C}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d^2 D}{dr^2} \right) n_\tau + \left(\frac{1}{r} \frac{dA}{dr} - \frac{3}{r^3} B - \frac{4}{r^2} A - \frac{1}{r^2} \frac{dB}{dr} + \frac{d^2 A}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d^2 B}{dr^2} \right) r_{,\tau} r_{,n} \quad (3.169)$$

$$U_{\tau\beta,\alpha\beta}^* = \left(\frac{A}{r^2} - \frac{D}{r^3} + \frac{1}{r} \frac{dA}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{dB}{dr} + \frac{1}{r} \frac{dC}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{dD}{dr} \right) n_\tau + \left(\frac{3}{r^3} D - \frac{2}{r^2} A - \frac{2}{r^2} \frac{dB}{dr} - \frac{1}{r} \frac{dC}{dr} - \frac{3}{r^2} \frac{dD}{dr} + \frac{d^2 A}{dr^2} + \frac{d^2 C}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d^2 B}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d^2 D}{dr^2} \right) r_{,\tau} r_{,n} \quad (3.170)$$

$$U_{\tau 3\gamma,\gamma\beta}^* = - \left[\left(\frac{1}{r^2} \frac{dF}{dr} - \frac{1}{r^3} F + \frac{1}{r} \frac{d^2 F}{dr^2} \right) n_\tau + \left(\frac{3}{r^3} F - \frac{3}{r^3} \frac{dF}{dr} + \frac{d^3 F}{dr^3} \right) r_{,\tau} r_{,n} \right] \quad (3.171)$$

$$U_{\tau 3\alpha,\beta\beta}^* = U_{\tau 3\gamma,\gamma\beta}^* \quad (3.172)$$

$$\rho_\tau^* = \left(\frac{T_1}{r} - \frac{dT_1}{dr} \right) (-r_{,s}) r_{,n} s_\tau + \left[\left(\frac{T_3}{r} - \frac{dT_3}{dr} \right) (r_{,n})^2 + \frac{dT_3}{dr} \right] n_\tau - \left(4 \frac{T_1}{r} - 2 \frac{T_2}{r} - 2 \frac{dT_1}{dr} + \frac{dT_2}{dr} \right) r_{,\tau} (r_{,n})^3 + \left(\frac{T_2}{r} - 2 \frac{T_1}{r} \right) r_{,s} (r_{,n})^2 \chi_\tau - \left(\frac{T_2}{r} - 2 \frac{T_1}{r} + 2 \frac{dT_1}{dr} - \frac{dT_2}{dr} \right) r_{,\tau} r_{,n} \quad (3.173)$$

$$\zeta_\tau^* = \left(\frac{TT_2}{r} - \frac{dTT_2}{dr} \right) (-r_{,s}) r_{,n} s_\tau + \left[\left(\frac{TT_1}{r} - \frac{dTT_1}{dr} \right) (r_{,n})^2 + \frac{dTT_1}{dr} \right] n_\tau - \left(\frac{TT_3}{r} - \frac{dTT_3}{dr} \right) r_{,\tau} r_{,n} - \left(\frac{dTT_3}{dr} - 2 \frac{TT_3}{r} \right) r_{,\tau} (r_{,n})^3 + \frac{TT_3}{r} r_{,s} (r_{,n})^2 \chi_\tau \quad (3.174)$$

onde as variáveis χ_τ e s_τ são definidas pelos seguintes valores: $\begin{Bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -r_{,2} \\ r_{,1} \end{Bmatrix}$ e $\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -n_2 \\ n_1 \end{Bmatrix}$.

Nas expressões (3.173) e (3.174), os termos T_i , dT_i/dr , TT_i e dTT_i/dr , para $i = 1$ a 3 , são definidos a seguir:

$$T_1 = \frac{1}{r} \left(A + \frac{B}{r} \right) \quad (3.175)$$

$$T_2 = \frac{dA}{dr} - \frac{B}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{dB}{dr} \quad (3.176)$$

$$T_3 = \frac{dC}{dr} - \frac{D}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{dD}{dr} \quad (3.177)$$

$$dT_1 = -\frac{1}{r^2} A + \frac{1}{r} \frac{dA}{dr} - \frac{2}{r^3} B + \frac{1}{r^2} \frac{dB}{dr} \quad (3.178)$$

$$dT_2 = \frac{d^2 A}{dr^2} + \frac{2}{r^3} B - \frac{2}{r^2} \frac{dB}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d^2 B}{dr^2} \quad (3.179)$$

$$dT_3 = \frac{d^2 C}{dr^2} + \frac{2}{r^3} D - \frac{2}{r^2} \frac{dD}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d^2 D}{dr^2} \quad (3.180)$$

$$TT_1 = \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} - \frac{F}{r^2} \quad (3.181)$$

$$TT_2 = TT_1 \quad (3.182)$$

$$TT_3 = \frac{d^2 F}{dr^2} - \frac{3}{r} \frac{dF}{dr} + \frac{3}{r^2} F \quad (3.183)$$

$$dTT_1 = \frac{1}{r} \frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{2}{r^3} F - \frac{2}{r^2} \frac{dF}{dr} \quad (3.184)$$

$$dTT_2 = dTT_1 \quad (3.185)$$

$$dTT_3 = \frac{d^3 F}{dr^3} - \frac{3}{r} \frac{d^2 F}{dr^2} - \frac{6}{r^3} F + \frac{6}{r^2} \frac{dF}{dr} \quad (3.186)$$

Para o índice τ igual a 3, os termos da expressão (3.164) assumem os seguintes valores:

$$\bar{V}_{n\hat{k}3}^* = \hat{Q}_{n3}^* - \alpha P_{3n\beta,\beta}^* - \alpha \bar{P}_{3sn\hat{k},s}^* \quad (3.187)$$

sendo:

$$\hat{Q}_{n3}^* = \frac{8Gh}{15} \left[\left(\frac{dE}{dr} - F \right) r_{,n} \right] \quad (3.188)$$

$$P_{3n\beta,\beta}^* = \frac{4h^2 D}{35} \left[\nu U_{3\gamma,\gamma\beta}^* + \frac{1-\nu}{2} (U_{3\alpha,\beta\beta}^* + U_{3\beta,\alpha\beta}^*) \right] - \frac{h^2 D}{28} [\nu U_{33\gamma,\gamma\beta}^* + (1-\nu) U_{33\gamma,\gamma\beta}^*] \quad (3.189)$$

$$\bar{P}_{3sn\hat{k},s}^* = \frac{4h^2 D}{35} (1-\nu) \rho_3^* - \frac{h^2 D}{28} (1-\nu) \zeta_3^* \quad (3.190)$$

sendo:

$$U_{3\gamma,\gamma\beta}^* = \left(\frac{1}{r} \frac{dF}{dr} - \frac{F}{r^2} + \frac{d^2 F}{dr^2} \right) r_{,n} \quad (3.191)$$

$$U_{3\alpha,\beta\beta}^* = U_{3\gamma,\gamma\beta}^* \quad (3.192)$$

$$U_{3\beta,\alpha\beta}^* = U_{3\alpha,\beta\beta}^* \quad (3.193)$$

$$U_{33\gamma,\gamma\beta}^* = \left(\frac{d^3 E}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{dE}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d^2 E}{dr^2} \right) r_{,n} \quad (3.194)$$

$$U_{33\alpha,\beta\beta}^* = U_{33\gamma,\gamma\beta}^* \quad (3.195)$$

$$\rho_3^* = \left(\frac{dT_5}{dr} - \frac{T_5}{r} \right) (-r_{,s})^2 r_{,n} + \frac{T_5}{r} (r_{,n})^3 \quad (3.196)$$

$$\zeta_3^* = \left(\frac{dT_6}{dr} - \frac{T_6}{r} \right) (-r_{,s})^2 r_{,n} + \frac{T_6}{r} (r_{,n})^3 \quad (3.197)$$

Nas expressões (3.196) e (3.197), as variáveis T_i e dT_i , para $i = 5$ e 6 , são definidas como:

$$T_5 = \frac{dF}{dr} - \frac{F}{r} \quad (3.198)$$

$$T_6 = \frac{d^2E}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dE}{dr} \quad (3.199)$$

$$dT_5 = \frac{d^2F}{dr^2} + \frac{F}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} \quad (3.200)$$

$$dT_6 = \frac{d^3E}{dr^3} + \frac{1}{r^2} \frac{dE}{dr} - \frac{1}{r} \frac{d^2E}{dr^2} \quad (3.201)$$

Será obtida a derivada da equação (3.187) em relação ao ponto fonte m . Para isso, primeiramente, serão renomeados os termos da mencionada equação, conforme mostrado a seguir:

$$J_7 = \frac{dE}{dr} - F \quad (3.202)$$

$$J_8 = \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} - \frac{F}{r^2} + \frac{d^2F}{dr^2} \quad (3.203)$$

$$J_9 = \frac{d^3E}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{dE}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d^2E}{dr^2} \quad (3.204)$$

$$J_{10} = \frac{dT_5}{dr} - \frac{T_5}{r} \quad (3.205)$$

$$J_{11} = \frac{T_5}{r} \quad (3.206)$$

$$J_{12} = \frac{dT_6}{dr} - \frac{T_6}{r} \quad (3.207)$$

$$J_{13} = \frac{T_6}{r} \quad (3.208)$$

Reescrevendo as equações (3.188), (3.189) e (3.190) utilizando as expressões de (3.202) a (3.208), obtém-se:

$$\hat{Q}_{n3}^* = \frac{8Gh}{15} [J_7 r_{,n}] \quad (3.209)$$

$$P_{3n\beta,\beta}^* = \frac{4h^2D}{35} [J_8 r_{,n}] - \frac{h^2D}{28} [J_9 r_{,n}] \quad (3.210)$$

$$\bar{P}_{3n\wedge,s}^* = \frac{4h^2D}{35} (1 - \nu) [J_{10} (-r_{,s})^2 r_{,n} + J_{11} (r_{,n})^3] - \frac{h^2D}{28} (1 - \nu) [J_{12} (-r_{,s})^2 r_{,n} + J_{13} (r_{,n})^3] \quad (3.211)$$

Derivando as expressões de (3.209) a (3.211) em relação ao ponto fonte m , obtém-se:

$$\hat{Q}_{n3,m}^* = \frac{8Gh}{15} \left[\frac{dJ_7}{dr} r_n r_m + J_7 \frac{m_n - r_n r_m}{r} \right] \quad (3.212)$$

$$P_{3n\beta,\beta m}^* = \frac{4h^2 D}{35} \left[\frac{dJ_8}{dr} r_n r_m + J_8 \frac{m_n - r_n r_m}{r} \right] - \frac{h^2 D}{28} \left[\frac{dJ_9}{dr} r_n r_m + J_9 \frac{m_n - r_n r_m}{r} \right] \quad (3.213)$$

$$\begin{aligned} \bar{P}_{3sn\hat{k},sm}^* = & \frac{4h^2 D}{35} (1 - \nu) \left[\frac{dJ_{10}}{dr} r_n r_m (r_s)^2 + J_{10} \frac{m_n - r_n r_m}{r} (r_s)^2 + \right. \\ & + 2J_{10} \frac{m_s - r_s r_m}{r} r_s + \frac{dJ_{11}}{dr} (r_n)^3 r_m + 3J_{11} \frac{m_n - r_n r_m}{r} (r_n)^2 \left. \right] - \\ & - \frac{h^2 D}{28} (1 - \nu) \left[\frac{dJ_{12}}{dr} r_n r_m (r_s)^2 + J_{12} \frac{m_n - r_n r_m}{r} (r_s)^2 + \right. \\ & + 2J_{12} \frac{m_s - r_s r_m}{r} r_s + \frac{dJ_{13}}{dr} (r_n)^3 r_m + 3J_{13} \frac{m_n - r_n r_m}{r} (r_n)^2 \left. \right] \end{aligned} \quad (3.214)$$

As derivadas dJ_i/dr para $i = 7$ a 13 , expressas nas equações de (3.212) a (3.214), são definidas como:

$$\frac{dJ_7}{dr} = \frac{d^2 E}{dr^2} - \frac{dF}{dr} \quad (3.215)$$

$$\frac{dJ_8}{dr} = -\frac{2}{r^2} \frac{dF}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{2}{r^3} F + \frac{d^3 F}{dr^3} \quad (3.216)$$

$$\frac{dJ_9}{dr} = \frac{d^4 E}{dr^4} + \frac{2}{r^3} \frac{dE}{dr} - \frac{2}{r^2} \frac{d^2 E}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d^3 E}{dr^3} \quad (3.217)$$

$$\frac{dJ_{10}}{dr} = \frac{d^2 T_5}{dr^2} + \frac{1}{r^2} T_5 - \frac{1}{r} \frac{dT_5}{dr} \quad (3.218)$$

$$\frac{dJ_{11}}{dr} = -\frac{1}{r^2} T_5 + \frac{1}{r} \frac{dT_5}{dr} \quad (3.219)$$

$$\frac{dJ_{12}}{dr} = \frac{d^2 T_6}{dr^2} + \frac{1}{r^2} T_6 - \frac{1}{r} \frac{dT_6}{dr} \quad (3.220)$$

$$\frac{dJ_{13}}{dr} = -\frac{1}{r^2} T_6 + \frac{1}{r} \frac{dT_6}{dr} \quad (3.221)$$

Por fim, a equação (3.187) derivada em relação ao ponto fonte m é expressa por:

$$\bar{V}_{n\hat{k}3,m}^* = \hat{Q}_{n3,m}^* - \alpha P_{3n\beta,\beta m}^* - \alpha \bar{P}_{3sn\hat{k},sm}^* \quad (3.222)$$

3.5.1.3 Transformação da integral de domínio em integrais de contorno equivalentes associadas com a equação integral dos deslocamentos

Neste trabalho para placas de Reddy é assumido que o carregamento varie no máximo linearmente no domínio da placa. Essa transformação das integrais de domínio, que aparecem nas

equações integrais dos deslocamentos (Eqs. (3.102), (3.105) e (3.106)), pode ser feita utilizando uma simples aplicação da segunda identidade de Green integral de domínio resultando em:

$$\int_{\Omega} q(s) V_{\varphi k}^*(p, s) d\Omega(s) = \int_{\Gamma} T_{\varphi k}^*(p, s) q(s) d\Gamma - \int_{\Gamma} \chi_{\varphi k}^*(p, s) q_{,j}(s) n_j d\Gamma \quad (3.223)$$

onde:

$$T_{\varphi k}^* = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{b_1 b_2}{2} (1 - \nu) T_{\nabla^4 \psi, k}^* - \left[\frac{b_1 s_1}{2} (1 - \nu) - b_2 s_1 \right] T_{\nabla^2 \psi, k}^* + s_1^2 T_{\psi, k}^* \\ \frac{b_1^2}{2} (1 - \nu) T_{\nabla^4 \psi}^* - \left[\frac{b_1 s_1}{2} (3 - \nu) \right] T_{\nabla^2 \psi}^* + s_1^2 T_{\psi}^* \\ -\frac{b_1^2}{2} (1 - \nu) T_{\nabla^4 \psi, m}^* + \left[\frac{b_1 s_1}{2} (3 - \nu) \right] T_{\nabla^2 \psi, m}^* - s_1^2 T_{\psi, m}^* \end{array} \right\} \quad (3.224)$$

e

$$\chi_{\varphi k}^* = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{b_1 b_2}{2} (1 - \nu) \chi_{\nabla^4 \psi, k}^* - \left[\frac{b_1 s_1}{2} (1 - \nu) - b_2 s_1 \right] \chi_{\nabla^2 \psi, k}^* + s_1^2 \chi_{\psi, k}^* \\ \frac{b_1^2}{2} (1 - \nu) \chi_{\nabla^4 \psi}^* - \left[\frac{b_1 s_1}{2} (3 - \nu) \right] \chi_{\nabla^2 \psi}^* + s_1^2 \chi_{\psi}^* \\ -\frac{b_1^2}{2} (1 - \nu) \chi_{\nabla^4 \psi, m}^* + \left[\frac{b_1 s_1}{2} (3 - \nu) \right] \chi_{\nabla^2 \psi, m}^* - s_1^2 \chi_{\psi, m}^* \end{array} \right\} \quad (3.225)$$

Os termos que compõem $T_{\varphi k}^*$ e $\chi_{\varphi k}^*$ estão detalhados no Apêndice C.

3.5.2 Equações Integrais de Curvaturas e Inclinações

A obtenção dos esforços em pontos do domínio é de grande importância para a solução de problemas de estruturas. Obtendo as derivadas numéricas dos deslocamentos nos pontos internos, é conveniente utilizar-se de um equacionamento integral para o cálculo das curvaturas e inclinações em pontos do domínio.

Com isso, as expressões (3.102), (3.105), (3.106), e respectivas derivadas em relação às coordenadas no ponto fonte, são modificadas nas relações de esforço-deslocamento, obtendo-se as mencionadas equações integrais de curvaturas e inclinações em pontos do domínio:

$$\begin{aligned} u_{\alpha, \gamma}(p) = & \int_{\Gamma} [u_{\alpha \gamma \beta}^*(p, S) p_{\beta}(S) - p_{\alpha \gamma \beta}^*(p, S) u_{\beta}(S)] d\Gamma(S) + \int_{\Omega} V_{\alpha, \gamma}^*(p, s) m_{\gamma}(s) d\Omega(s) + \\ & + \int_{\Omega} V_{\alpha, \gamma}^*(p, s) q(s) d\Omega(s) + \sum_{c=1}^{nc} \beta_1 w_{c \alpha \gamma \beta}^* R_c - \sum_{c=1}^{nc} \beta_1 R_{c \alpha \gamma \beta}^* w_c \end{aligned} \quad (3.226)$$

$$\begin{aligned} w_{, \gamma}(p) = & \int_{\Gamma} [u_{3 \gamma \beta}^*(p, S) p_{\beta}(S) - p_{3 \gamma \beta}^*(p, S) u_{\beta}(S)] d\Gamma(S) + \int_{\Omega} V_{3, \gamma}^*(p, s) m_{\gamma}(s) d\Omega(s) + \\ & + \int_{\Omega} V_{3, \gamma}^*(p, s) q(s) d\Omega(s) + \sum_{c=1}^{nc} \beta_1 w_{c 3 \gamma \beta}^* R_c - \sum_{c=1}^{nc} \beta_1 R_{c 3 \gamma \beta}^* w_c \end{aligned} \quad (3.227)$$

sendo:

$$u_{\alpha\gamma\beta}^* = \begin{bmatrix} U_{\alpha\beta,\gamma}^* & U_{\alpha 3,\gamma}^* & U_{\alpha 4,\gamma}^* \\ U_{3\alpha,\gamma}^* & U_{33,\gamma}^* & U_{34,\gamma}^* \\ U_{4\alpha,\gamma}^* & U_{43,\gamma}^* & U_{44,\gamma}^* \end{bmatrix} \quad (3.228)$$

$$p_{\alpha\gamma\beta}^* = \begin{bmatrix} \hat{M}_{\tau nn,\gamma}^* & \hat{M}_{\tau ns,\gamma}^* & \bar{V}_{n\hat{k}\tau,m\gamma}^* & -\beta_1 \hat{P}_{\tau nn,\gamma}^* \\ \hat{M}_{3nn,\gamma}^* & \hat{M}_{3ns,\gamma}^* & \bar{V}_{n\hat{k}3,\gamma}^* & -\beta_1 \hat{P}_{3nn,\gamma}^* \\ \hat{M}_{3nn,m\gamma}^* & \hat{M}_{3ns,m\gamma}^* & \bar{V}_{n\hat{k}3,m\gamma}^* & -\beta_1 \hat{P}_{3nn,m\gamma}^* \end{bmatrix} \quad (3.229)$$

com os índices α, β, τ e γ assumindo os valores 1 e 2. As integrais de domínio que aparecem nas expressões (3.226) e (3.227) são transformadas em integrais de contorno conforme procedimento descrito na seção 3.5.2.3.

Com as equações integrais das rotações, inclinações e curvaturas, os esforços associados aos momentos e cortantes podem ser obtidos no ponto-fonte utilizando as equações (3.22) e (3.26).

Os termos da Eq. (3.228), que representam as derivadas da solução fundamental em deslocamentos no ponto fonte, são dados por:

$$U_{\alpha\beta,\gamma}^* = - \left[\left(\frac{dA}{dr} - \frac{1}{r^2} B + \frac{1}{r} \frac{dB}{dr} \right) r_{,\gamma} r_{,\alpha} r_{,\beta} + \left(A + \frac{B}{r} \right) \left(\frac{\delta_{\gamma,\alpha} - r_{,\gamma} r_{,\alpha}}{r} r_{,\beta} + \frac{\delta_{\gamma,\beta} - r_{,\gamma} r_{,\beta}}{r} r_{,\alpha} \right) + \right. \\ \left. + \delta_{\alpha,\beta} r_{,\gamma} \left(\frac{dC}{dr} - \frac{1}{r^2} D + \frac{1}{r} \frac{dD}{dr} \right) \right] \quad (3.230a)$$

$$U_{3\alpha,\gamma}^* = \frac{dF}{dr} r_{,\alpha} r_{,\gamma} + F \left(\frac{\delta_{\gamma,\alpha} - r_{,\gamma} r_{,\alpha}}{r} \right) \quad (3.230b)$$

$$U_{\alpha 3,\gamma}^* = -U_{3\alpha,\gamma}^* \quad (3.230c)$$

$$U_{\alpha 4,\gamma}^* = (r_{,\gamma} n_{\alpha} + n_{\gamma} r_{,\alpha} + r_{,n} \delta_{\gamma,\alpha}) \left(\frac{F}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} \right) - r_{,n} r_{,\gamma} r_{,\alpha} \left(\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{3}{r^2} F - \frac{3}{r} \frac{dF}{dr} \right) \quad (3.230d)$$

$$U_{4\alpha,\gamma}^* = (r_{,\gamma} m_{\alpha} + m_{\gamma} r_{,\alpha} + r_{,m} \delta_{\gamma,\alpha}) \left(\frac{F}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} \right) - r_{,m} r_{,\gamma} r_{,\alpha} \left(\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{3}{r^2} F - \frac{3}{r} \frac{dF}{dr} \right) \quad (3.230e)$$

$$U_{33,\gamma}^* = -\frac{dE}{dr} r_{,\gamma} \quad (3.230f)$$

$$U_{34,\gamma}^* = \left(\frac{1}{r} \frac{dE}{dr} - \frac{d^2 E}{dr^2} \right) r_{,n} r_{,\gamma} - \frac{1}{r} \frac{dE}{dr} n_{\gamma} \quad (3.230g)$$

$$U_{43,\gamma}^* = \left(\frac{d^2 E}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dE}{dr} \right) r_{,m} r_{,\gamma} + \frac{1}{r} \frac{dE}{dr} m_{\gamma} \quad (3.230h)$$

$$U_{44,\gamma}^* = \left(\frac{d^3 E}{dr^3} + \frac{3}{r^2} \frac{dE}{dr} - \frac{3}{r} \frac{d^2 E}{dr^2} \right) r_{,n} r_{,m} r_{,\gamma} - \left(\frac{1}{r^2} \frac{dE}{dr} - \frac{1}{r} \frac{d^2 E}{dr^2} \right) (r_{,m} n_{\gamma} + r_{,n} m_{\gamma} + m_{\gamma} n_{\gamma}) \quad (3.230i)$$

onde o índice γ assume os valores 1 e 2.

3.5.2.1 Soluções fundamentais dos momentos para equações integrais dos esforços

A partir do momento de alta ordem expresso por (3.107), pode-se obter a curvatura, derivando-a em relação ao ponto fonte:

$$\widehat{M}_{\xi\alpha\beta,\gamma}^* = M_{\xi\alpha\beta,\gamma}^* - \frac{4}{3h^2} P_{\xi\alpha\beta,\gamma}^* \quad (3.231)$$

para o índice ξ variando de 1 a 3.

Aplicando n_α e n_β na expressão (3.231), determina-se $M_{\xi nn,\gamma}$ e $P_{\xi nn,\gamma}$, com o índice ξ variando de 1 a 3:

$$\begin{aligned} M_{\xi nn,\gamma}^* &= \frac{4D}{5} \left[\nu U_{\xi\gamma,\gamma\gamma}^* \delta_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta + \frac{1-\nu}{2} (U_{\xi\alpha,\beta\gamma}^* + U_{\xi\beta,\alpha\gamma}^*) n_\alpha n_\beta \right] \\ &\quad - \frac{D}{5} \left[\nu U_{\xi 3\gamma,\gamma\gamma}^* \delta_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta + (1-\nu) U_{\xi 3\alpha,\beta\gamma}^* n_\alpha n_\beta \right] \end{aligned} \quad (3.232)$$

$$\begin{aligned} P_{\xi nn,\gamma}^* &= \frac{4h^2 D}{35} \left[\nu U_{\xi\gamma,\gamma\gamma}^* \delta_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta + \frac{1-\nu}{2} (U_{\xi\alpha,\beta\gamma}^* + U_{\xi\beta,\alpha\gamma}^*) n_\alpha n_\beta \right] \\ &\quad - \frac{h^2 D}{28} \left[\nu U_{\xi 3\gamma,\gamma\gamma}^* \delta_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta + (1-\nu) U_{\xi 3\alpha,\beta\gamma}^* n_\alpha n_\beta \right] \end{aligned} \quad (3.233)$$

Substituindo em (3.232) e (3.233) o índice ξ por τ e este assumindo valores de 1 a 2, tem-se:

$$\begin{aligned} U_{\tau\gamma,\gamma\gamma}^* &= - \left\{ \frac{d^2 A}{dr^2} + \frac{d^2 C}{dr^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{d^2 B}{dr^2} + \frac{d^2 D}{dr^2} - \frac{dC}{dr} \right) - \frac{1}{r^2} \left[2 \left(A + \frac{dB}{dr} \right) + 3 \frac{dD}{dr} \right] + \frac{3}{r^3} D \right\} r_{,\gamma} r_{,\tau} - \\ &\quad - \delta_{\tau,\gamma} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{dA}{dr} + \frac{dC}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \left(A + \frac{dB}{dr} + \frac{dD}{dr} \right) - \frac{1}{r^3} D \right] \end{aligned} \quad (3.234)$$

$$\begin{aligned} U_{\tau\alpha,\beta\gamma}^* &= - \frac{2}{r} \left\{ \left[\frac{dA}{dr} + \frac{1}{r} \left(\frac{dB}{dr} - 2A \right) - \frac{3}{r^2} B \right] n_\gamma r_{,\tau} r_{,\beta} - r_{,\gamma} r_{,\tau} \left\{ \frac{d^2 A}{dr^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{d^2 B}{dr^2} - 5 \frac{dA}{dr} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{r^2} \left(8A - 7 \frac{dB}{dr} \right) + \frac{15}{r^3} B \right\} r_{,\beta}^2 + \frac{1}{r} \left[\frac{dA}{dr} + \frac{1}{r} \left(\frac{dB}{dr} - 2A \right) - \frac{3}{r^2} B \right] \right\} - \\ &\quad - \delta_{\tau,\gamma} \left\{ \frac{1}{r^2} \left(A + \frac{B}{r} \right) + r_{,\beta}^2 \left\{ \frac{1}{r} \left[\frac{dA}{dr} + \frac{1}{r} \left(\frac{dB}{dr} - 2A \right) - \frac{3}{r^2} B \right] \right\} - \right. \\ &\quad \left. - n_\tau r_{,\gamma} r_{,\beta} \left[\frac{d^2 C}{dr^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{d^2 D}{dr^2} - \frac{dC}{dr} + \frac{dA}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{dB}{dr} - 2A - 3 \frac{dD}{dr} \right) + \frac{3}{r^3} (D - B) \right] - \right. \\ &\quad \left. - n_\tau n_\gamma \left[\frac{1}{r} \frac{dC}{dr} + \frac{1}{r^2} \left(A + \frac{dD}{dr} \right) + \frac{1}{r^3} (B - D) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.235)$$

$$U_{\tau\beta,\alpha\gamma}^* = U_{\tau\alpha,\beta\gamma}^* \quad (3.236)$$

$$U_{\tau 3\gamma,\gamma\gamma}^* = - \left\{ \left[\frac{d^3 F}{dr^3} - \frac{3}{r^2} \left(\frac{dF}{dr} - \frac{F}{r} \right) \right] r_{,\gamma} r_{,\tau} - \left(\frac{F}{r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{dF}{dr} - \frac{1}{r} \frac{d^2 F}{dr^2} \right) \delta_{\tau,\gamma} \right\} \quad (3.237)$$

$$\begin{aligned}
U_{\tau 3\alpha, \beta\gamma}^* = & -(2n_\gamma n_\tau + \delta_{\tau, \gamma}) \frac{1}{r^2} \left(\frac{dF}{dr} - \frac{F}{r} \right) - \left\{ \left[\frac{1}{r} \frac{d^2 F}{dr^2} - \frac{3}{r^2} \left(\frac{dF}{dr} - \frac{F}{r} \right) \right] [r_{,n}^2 \delta_{\tau, \gamma} + r_{, \gamma} r_\tau + \right. \\
& \left. + 2r_{,n} (r_{, \gamma} n_\tau + n_\gamma r_{, \tau})] + r_{,n}^2 r_{, \gamma} r_\tau \left[\frac{d^3 F}{dr^3} + \frac{15}{r^2} \left(\frac{dF}{dr} - \frac{F}{r} \right) - \frac{6}{r} \frac{d^2 F}{dr^2} \right] \right\} \quad (3.238)
\end{aligned}$$

E quando o índice ξ assume valor igual a 3, nas expressões (3.232) e (3.233), tem-se:

$$U_{3\gamma, \gamma\gamma}^* = \left[\frac{1}{r} \left(\frac{dF}{dr} - \frac{F}{r} \right) + \frac{d^2 F}{dr^2} \right] r_{, \gamma} \quad (3.239)$$

$$U_{3\alpha, \beta\gamma}^* = \frac{2}{r} \left(\frac{dF}{dr} - \frac{F}{r} \right) n_\gamma r_{,n} + \left\{ \left[\left(\frac{d^2 F}{dr^2} \right) - \frac{3}{r} \left(\frac{dF}{dr} - \frac{F}{r} \right) \right] r_{,n}^2 + \frac{1}{r} \left(\frac{dF}{dr} - \frac{F}{r} \right) \right\} r_{, \gamma} \quad (3.240)$$

$$U_{3\beta, \alpha\gamma}^* = U_{3\alpha, \beta\gamma}^* \quad (3.241)$$

$$U_{33\gamma, \gamma\gamma}^* = - \left[\frac{d^3 E}{dr^3} + \frac{1}{r} \left(\frac{d^2 E}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dE}{dr} \right) \right] r_{, \gamma} \quad (3.242)$$

$$\begin{aligned}
U_{33\alpha, \beta\gamma}^* = & - \frac{2}{r} \left(\frac{d^2 E}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dE}{dr} \right) n_\gamma r_{,n} - \left\{ \left[\left(\frac{d^3 E}{dr^3} \right) - \frac{3}{r} \left(\frac{d^2 E}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dE}{dr} \right) \right] r_{,n}^2 + \frac{1}{r} \left(\frac{d^2 E}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dE}{dr} \right) \right\} r_{, \gamma} \\
& \quad (3.243)
\end{aligned}$$

Aplicando n_α e s_β na expressão do momento de alta ordem (3.231), determina-se $M_{\xi ns, \gamma}^*$ e $P_{\xi ns, \gamma}^*$, com o índice ξ variando de 1 a 3:

$$M_{\xi ns, \gamma}^* = \frac{4D}{5} \left[\frac{1-\nu}{2} (U_{\xi\alpha, \beta\gamma}^* n_\alpha s_\beta + U_{\xi\beta, \alpha\gamma}^* n_\beta s_\alpha) \right] - \frac{D}{5} [(1-\nu) U_{\xi 3\alpha, \beta\gamma}^* n_\alpha s_\beta] \quad (3.244)$$

$$P_{\xi ns, \gamma}^* = \frac{4h^2 D}{35} \left[\frac{1-\nu}{2} (U_{\xi\alpha, \beta\gamma}^* n_\alpha s_\beta + U_{\xi\beta, \alpha\gamma}^* n_\beta s_\alpha) \right] - \frac{h^2 D}{28} [(1-\nu) U_{\xi 3\alpha, \beta\gamma}^* n_\alpha s_\beta] \quad (3.245)$$

Substituindo em (3.244) e (3.245) o índice ξ por τ e este assumindo valores de 1 a 2, tem-se:

$$\begin{aligned}
U_{\tau\alpha, \beta\gamma}^* = & - \left\{ (r_{,n} r_{,s} \delta_{\tau, \gamma} + r_{,s} n_\gamma r_{, \tau} + r_{,n} s_\tau r_{, \gamma} + r_{,n} s_\gamma r_{, \tau}) \left[\frac{1}{r} \frac{dA}{dr} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{dB}{dr} - 2A \right) - \frac{3}{r^3} B \right] + \right. \\
& + \left[\frac{1}{r} \frac{dC}{dr} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{dD}{dr} - \frac{D}{r} \right) \right] s_\gamma n_\tau + \frac{1}{r^2} \left(A + \frac{B}{r} \right) s_\tau n_\gamma + \left\{ \frac{d^2 C}{dr^2} + \frac{1}{r} \left[\frac{d^2 D}{dr^2} - \frac{dC}{dr} - \frac{3}{r^2} \left(\frac{dD}{dr} - \frac{D}{r} \right) \right] \right\} r_{,s} n_\tau r_{, \gamma} \\
& \left. + \left[\frac{d^2 A}{dr^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{d^2 B}{dr^2} - 5 \frac{dA}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \left(8A - 7 \frac{dB}{dr} \right) + 15 \frac{B}{r^3} \right] r_{,n} r_{,s} r_{, \gamma} r_{, \tau} \right\} \quad (3.246)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{\tau\beta, \alpha\gamma}^* = & - \left\{ (r_{,n} r_{,s} \delta_{\tau, \gamma} + r_{,n} n_\tau r_{, \gamma} + r_{,s} n_\gamma r_{, \tau} + r_{,n} s_\gamma r_{, \tau}) \left[\frac{1}{r} \frac{dA}{dr} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{dB}{dr} - 2A \right) - \frac{3}{r^3} B \right] + \right. \\
& + \left[\frac{1}{r} \frac{dC}{dr} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{dD}{dr} - \frac{D}{r} \right) \right] s_\tau n_\gamma + \frac{1}{r^2} \left(A + \frac{B}{r} \right) s_\gamma n_\tau + \left\{ \frac{d^2 C}{dr^2} + \frac{1}{r} \left[\frac{d^2 D}{dr^2} - \frac{dC}{dr} - \frac{3}{r^2} \left(\frac{dD}{dr} - \frac{D}{r} \right) \right] \right\} r_{,n} s_\tau r_{, \gamma} \\
& \left. + \left[\frac{d^2 A}{dr^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{d^2 B}{dr^2} - 5 \frac{dA}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \left(8A - 7 \frac{dB}{dr} \right) + 15 \frac{B}{r^3} \right] r_{,n} r_{,s} r_{, \gamma} r_{, \tau} \right\} \quad (3.247)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{\tau 3\alpha, \beta\gamma}^* = & (r_{,n}r_{,s}\delta_{\tau,\gamma} + r_{,s}n_{\tau}r_{,\gamma} + r_{,s}n_{\gamma}r_{,\tau} + r_{,n}s_{\tau}r_{,\gamma} + r_{,n}s_{\gamma}r_{,\tau}) \left[\frac{1}{r} \frac{d^2 F}{dr^2} - \frac{3}{r^2} \left(\frac{dF}{dr} - \frac{F}{r} \right) \right] + \\
& + \frac{1}{r^2} \left(\frac{dF}{dr} - \frac{F}{r} \right) (n_{\gamma}s_{\tau} + s_{\gamma}n_{\tau}) + \left[\frac{d^3 F}{dr^3} + \frac{15}{r^2} \left(\frac{dF}{dr} - \frac{F}{r} \right) - \frac{6}{r} \frac{d^2 F}{dr^2} \right] r_{,n}r_{,s}r_{,\gamma}r_{,\tau}
\end{aligned} \quad (3.248)$$

E quando o índice ξ assume valor igual a 3, nas expressões (3.244) e (3.245), tem-se:

$$U_{3\alpha, \beta\gamma}^* = -(r_{,s}n_{\gamma} + r_{,n}s_{\gamma}) \frac{1}{r} \left(\frac{dF}{dr} - \frac{F}{r} \right) - r_{,n}r_{,s}r_{,\gamma} \left[\left(\frac{d^2 F}{dr^2} \right) - \frac{3}{r} \left(\frac{dF}{dr} - \frac{F}{r} \right) \right] \quad (3.249)$$

$$U_{3\beta, \alpha\gamma}^* = U_{3\alpha, \beta\gamma}^* \quad (3.250)$$

$$U_{33\alpha, \beta\gamma}^* = -(r_{,s}n_{\gamma} + r_{,n}s_{\gamma}) \frac{1}{r} \left(\frac{d^2 E}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dE}{dr} \right) - r_{,n}r_{,s}r_{,\gamma} \left[\left(\frac{d^3 E}{dr^3} \right) - \frac{3}{r} \left(\frac{d^2 E}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dE}{dr} \right) \right] \quad (3.251)$$

3.5.2.2 Soluções fundamentais da cortante equivalente de Reddy para as equações integrais de esforços

Considere inicialmente a expressão do cortante equivalente de Reddy dado na equação (3.164), no sistema de coordenadas cartesianas (n, s) . Derivando em relação ao ponto fonte, tem-se:

$$\bar{V}_{n\hat{k}\tau, \gamma}^* = \hat{Q}_{n\tau, \gamma}^* - \beta_1 P_{n\beta, \beta\tau\gamma}^* - \beta_1 \bar{P}_{sn\hat{k}, s\tau\gamma}^* \quad (3.252)$$

Na expressão (3.252) quando τ assume valores de 1 e 2, é obtido:

$$\begin{aligned}
\hat{Q}_{n\tau, \gamma}^* = & \left\{ -(n_{\gamma}r_{,\tau} + r_{,n}\delta_{\tau,\gamma}) \left[\frac{1}{r} \left(A + \frac{dF}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} (B - F) \right] - \right. \\
& - r_{,\gamma}n_{\tau} \left[\frac{dC}{dr} + \frac{1}{r} \left(\frac{dD}{dr} + \frac{dF}{dr} \right) - \frac{1}{r^2} (D + F) \right] - \\
& \left. - r_{,n}r_{,\gamma}r_{,\tau} \left[\frac{dA}{dr} + \frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{dB}{dr} - 2A - 3 \frac{dF}{dr} \right) - \frac{3}{r^2} (B - F) \right] \right\} \frac{8Gh}{15}
\end{aligned} \quad (3.253)$$

$$\begin{aligned}
P_{n\beta, \beta\tau\gamma}^* = & \frac{4h^2 D}{35} \left[\nu U_{\tau\gamma, \gamma\beta\gamma}^* + \frac{1-\nu}{2} (U_{\tau\alpha, \beta\beta\gamma}^* + U_{\tau\beta, \alpha\beta\gamma}^*) \right] - \\
& - \frac{h^2 D}{28} [\nu U_{\tau 3\gamma, \gamma\beta\gamma}^* + (1-\nu) U_{\tau 3\alpha, \beta\beta\gamma}^*]
\end{aligned} \quad (3.254)$$

$$\bar{P}_{sn\hat{k}, s\tau\gamma}^* = \frac{4h^2 D}{35} (1-\nu) \rho_{\tau, \gamma}^* - \frac{h^2 D}{28} (1-\nu) \varsigma_{\tau, \gamma}^* \quad (3.255)$$

onde:

$$\begin{aligned}
U_{\tau\gamma,\gamma\beta\gamma}^* = & -(r_{,\gamma}n_\tau + r_{,\tau}n_\gamma + r_{,n}\delta_{\tau,\gamma}) \left[\frac{1}{r} \left(\frac{d^2A}{dr^2} + \frac{d^2C}{dr^2} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{d^2D}{dr^2} + \frac{d^2B}{dr^2} - \frac{dC}{dr} \right) - \right. \\
& - \frac{1}{r^3} \left(2 \frac{dB}{dr} + 2A + 3 \frac{dD}{dr} \right) + \frac{3}{r^4} D \Big] - \\
& - r_{,n}r_{,\gamma}r_{,\tau} \left[\frac{d^3A}{dr^3} + \frac{d^3C}{dr^3} + \frac{1}{r} \left(\frac{d^3D}{dr^3} + \frac{d^3B}{dr^3} - 3 \frac{d^2C}{dr^2} - 2 \frac{d^2A}{dr^2} \right) - \right. \\
& - \frac{1}{r^2} \left(6 \frac{d^2D}{dr^2} + 5 \frac{d^2B}{dr^2} - 3 \frac{dC}{dr} + 2 \frac{dA}{dr} \right) + \\
& + \frac{1}{r^3} \left(8 \frac{dB}{dr} + 8A + 15 \frac{dD}{dr} \right) - \frac{15}{r^4} D \Big]
\end{aligned} \tag{3.256}$$

$$\begin{aligned}
U_{\tau\alpha,\beta\beta\gamma}^* = & -(r_{,\tau}n_\gamma + r_{,n}\delta_{\tau,\gamma}) \left[\frac{1}{r} \frac{d^2A}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{d^2B}{dr^2} + \frac{dA}{dr} \right) - \frac{1}{r^3} \left(4A + \frac{dB}{dr} \right) - \frac{3}{r^4} B \right] - \\
& - r_{,\gamma}n_\tau \left[\frac{d^3C}{dr^3} + \frac{1}{r} \left(\frac{d^3D}{dr^3} + \frac{d^2C}{dr^2} \right) - \frac{1}{r^2} \left(2 \frac{d^2D}{dr^2} + \frac{dC}{dr} - 2 \frac{dA}{dr} \right) + \right. \\
& + \frac{1}{r^3} \left(2 \frac{dB}{dr} - 4A + 3 \frac{dD}{dr} \right) - \frac{3}{r^4} (2B + D) \Big] - r_{,n}r_{,\gamma}r_{,\tau} \left[\frac{d^3A}{dr^3} + \frac{1}{r} \left(\frac{d^3B}{dr^3} - \frac{d^2A}{dr^2} \right) - \right. \\
& - \frac{1}{r^2} \left(4 \frac{d^2B}{dr^2} + 7 \frac{dA}{dr} \right) + \frac{1}{r^3} \left(\frac{dB}{dr} + 16A \right) + \frac{15}{r^4} B \Big]
\end{aligned} \tag{3.257}$$

$$U_{\tau\beta,\alpha\beta\gamma}^* = U_{\tau\gamma,\gamma\beta\gamma}^* \tag{3.258}$$

$$\begin{aligned}
U_{\tau 3\gamma,\gamma\beta\gamma}^* = & r_{,n}r_{,\gamma}r_{,\tau} \left[\frac{d^4F}{dr^4} - \frac{2}{r} \frac{d^3F}{dr^3} - \frac{3}{r^2} \frac{d^2F}{dr^2} + \frac{15}{r^3} \left(\frac{dF}{dr} - \frac{F}{r} \right) \right] + \\
& + (r_{,\gamma}n_\tau + r_{,\tau}n_\gamma + r_{,n}\delta_{\tau,\gamma}) \left[\frac{1}{r} \frac{d^3F}{dr^3} - \frac{3}{r^3} \left(\frac{dF}{dr} - \frac{F}{r} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.259}$$

$$U_{\tau 3\alpha,\beta\beta\gamma}^* = U_{\tau 3\gamma,\gamma\beta\gamma}^* \tag{3.260}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{\tau,\gamma}^* = & - \left\{ \frac{2}{r} \left(\frac{T_3}{r} - \frac{dT_3}{dr} \right) n_\gamma n_\tau r_{,n} + \left[\frac{1}{r^2} s_\gamma + \left(\frac{1}{r} - \frac{4}{r^2} \right) r_{,\gamma}r_{,s} \right] r_{,n}^2 \chi_\tau (T_2 - 2T_1) + \right. \\
& + \frac{2}{r^2} n_\gamma r_{,n}r_{,s} \chi_\tau (T_2 - 2T_1) + \frac{1}{r} r_{,n}^2 r_{,s} \chi_{\tau,\gamma} (T_2 - 2T_1) - \\
& - \delta_{\tau,\gamma} \left\{ r_{,n} \left[\frac{1}{r^2} (T_2 - 2T_1) - \frac{1}{r} \left(\frac{dT_2}{dr} - 2 \frac{dT_1}{dr} \right) \right] + r_{,n}^3 \left[\frac{1}{r} \left(\frac{dT_2}{dr} - 2 \frac{dT_1}{dr} \right) - \frac{2}{r^2} (T_2 - 2T_1) \right] \right\} - \\
& - r_{,\gamma}r_{,\tau} \left\{ r_{,n}^3 \left[\left(\frac{d^2T_2}{dr^2} - 2 \frac{d^2T_1}{dr^2} \right) + \frac{6}{r} \left(\frac{dT_2}{dr} - 2 \frac{dT_1}{dr} \right) + \frac{10}{r^2} (T_2 - 2T_1) \right] + \right. \\
& + r_{,n} \left[\frac{3}{r} \left(\frac{dT_2}{dr} - 2 \frac{dT_1}{dr} \right) - \frac{2}{r^2} (T_2 - 2T_1) - \left(\frac{dT_2}{dr} - 2 \frac{dT_1}{dr} \right) \right] \Big\} - n_\gamma r_{,\tau} \left[\frac{1}{r^2} (1 - 6r_{,n}^2) (T_2 - 2T_1) + \right. \\
& + \frac{1}{r} (3r_{,n}^2 - 1) \left(\frac{dT_2}{dr} - 2 \frac{dT_1}{dr} \right) \Big] + n_\tau r_{,\gamma} \left[\frac{d^2T_3}{dr^2} (1 - r_{,n}^2) - \frac{3}{r} r_{,n}^2 \left(\frac{T_3}{r} - \frac{dT_3}{dr} \right) \right] -
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{r}\left(\frac{T_1}{r}-\frac{dT_1}{dr}\right)s_\gamma s_\tau r_{,n}+r_{,\gamma}s_\tau r_{,n}r_{,s}\left[\frac{d^2T_1}{dr^2}+\frac{3}{r}\left(\frac{T_1}{r}-\frac{dT_1}{dr}\right)\right]+\frac{T_2}{r^2}r_{,n}r_{,\tau}-\frac{1}{r}\left(\frac{T_1}{r}-\frac{dT_1}{dr}\right)r_{,s}n_\gamma s_\tau\left\} \right. \quad (3.261)$$

$$\begin{aligned} \zeta_{\tau,\gamma}^* &= \frac{TT_3}{r}r_{,n}^2r_{,s}\chi_{\tau,\gamma}+\left[(r_{,n}s_\gamma-4r_{,n}r_{,s}r_{,\gamma}+2r_{,s}n_\gamma)\frac{TT_3}{r^2}r_{,n}+\frac{1}{r}\frac{dTT_3}{dr}r_{,n}^2r_{,s}r_{,\gamma}\right]\chi_\tau+ \\ &+\delta_{\tau,\gamma}\left[\frac{1}{r}\left(\frac{TT_3}{r}-\frac{dTT_3}{dr}\right)r_{,n}+\frac{1}{r}\left(\frac{dTT_3}{dr}-2\frac{TT_3}{r}\right)r_{,n}^3\right]- \\ &-n_\gamma r_{,\tau}\left[\frac{1}{r}\left(\frac{TT_3}{r}-\frac{dTT_3}{dr}\right)+\frac{3}{r}\left(\frac{dTT_3}{dr}-2\frac{TT_3}{r}\right)r_{,n}^2\right]- \\ &-r_{,\gamma}r_{,\tau}\left\{\left(\frac{d^2TT_3}{dr^2}-\frac{6}{r}\frac{dTT_3}{dr}+10\frac{TT_3}{r^2}\right)r_{,n}^3-\left[\frac{d^2TT_3}{dr^2}+\frac{3}{r}\left(\frac{TT_3}{r}-\frac{dTT_3}{dr}\right)\right]r_{,n}\right\}+ \\ &+r_{,\gamma}n_\tau\left\{\frac{d^2TT_1}{dr^2}-\left[\frac{d^2TT_1}{dr^2}+\frac{3}{r}\left(\frac{TT_1}{r}-\frac{dTT_1}{dr}\right)\right]r_{,n}^2\right\}- \\ &-(r_{,s}n_\gamma s_\tau+r_{,n}s_\gamma s_\tau)\frac{1}{r}\left(\frac{TT_2}{r}-\frac{dTT_2}{dr}\right)+ \\ &+\left[\frac{d^2TT_2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{TT_2}{r}-\frac{3}{r}\frac{dTT_2}{dr}\right]r_{,\gamma}s_\tau r_{,n}r_{,s}+\frac{TT_2}{r^2}r_{,n}r_{,s}s_\tau+\frac{2}{r}\left(\frac{TT_1}{r}-\frac{dTT_1}{dr}\right)r_{,n}n_\gamma n_\tau \end{aligned} \quad (3.262)$$

onde:

$$\chi_{\tau,\gamma}=(2\tau-3)\frac{\delta_{(3-\tau),\gamma}-r_{(3-\tau)}r_{,\gamma}}{r} \quad (3.263)$$

Para o índice τ igual a 3, os termos da expressão (3.252) assumem os seguintes valores:

$$\bar{V}_{n\hat{k}3,\gamma}^*=\hat{Q}_{n3,\gamma}^*-\beta_1P_{n\beta,\beta3\gamma}^*-\beta_1\bar{P}_{sn\hat{k},s3\gamma}^* \quad (3.264)$$

sendo:

$$\hat{Q}_{n3,\gamma}^*=-\frac{8Gh}{15}\left\{\left[\frac{d^2E}{dr^2}-\frac{dF}{dr}+\frac{1}{r}\left(F-\frac{dE}{dr}\right)\right]r_{,\gamma}r_{,n}-\frac{1}{r}\left(F-\frac{dE}{dr}\right)n_\gamma\right\} \quad (3.265)$$

$$\begin{aligned} P_{n\beta,\beta3\gamma}^* &= \frac{4h^2D}{35}\left[vU_{3\gamma,\gamma\beta\gamma}^*+\frac{1-v}{2}(U_{3\alpha,\beta\beta\gamma}^*+U_{3\beta,\alpha\beta\gamma}^*)\right]- \\ &-\frac{h^2D}{28}\left[vU_{33\gamma,\gamma\beta\gamma}^*+(1-v)U_{33\alpha,\beta\beta\gamma}^*\right] \end{aligned} \quad (3.266)$$

$$\bar{P}_{sn\hat{k},s3\gamma}^*=\frac{4h^2D}{35}(1-v)\rho_{3,\gamma}^*-\frac{h^2D}{28}(1-v)\zeta_{3,\gamma}^* \quad (3.267)$$

onde:

$$U_{3\gamma,\gamma\beta\gamma}^*=-\left\{\left[\frac{d^3F}{dr^3}-\frac{3}{r^2}\left(\frac{dF}{dr}-\frac{F}{r}\right)\right]r_{,\gamma}r_{,n}+\frac{1}{r}\left[\frac{d^2F}{dr^2}+\frac{1}{r}\left(\frac{dF}{dr}-\frac{F}{r}\right)\right]n_\gamma\right\} \quad (3.268)$$

$$U_{3\alpha,\beta\beta\gamma}^*=U_{3\gamma,\gamma\beta\gamma}^* \quad (3.269)$$

$$U_{3\beta,\alpha\beta\gamma}^* = U_{3\alpha,\beta\beta\gamma}^* \quad (3.270)$$

$$U_{33\gamma,\gamma\beta\gamma}^* = - \left\{ \left[\frac{d^4 E}{dr^4} - \frac{3}{r^2} \left(\frac{d^2 E}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dE}{dr} \right) \right] r_{,\gamma} r_{,n} + \frac{1}{r} \left[\frac{d^3 E}{dr^3} + \frac{1}{r} \left(\frac{d^2 E}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dE}{dr} \right) \right] n_{\gamma} \right\} \quad (3.271)$$

$$U_{33\alpha,\beta\beta\gamma}^* = U_{33\gamma,\gamma\beta\gamma}^* \quad (3.272)$$

$$\begin{aligned} \rho_{3,\gamma}^* = & - \left\{ \frac{2}{r} \left(\frac{dT_5}{dr} - \frac{T_5}{r} \right) s_{\gamma} r_{,n} r_{,s} + \left[\frac{d^2 T_5}{dr^2} - \frac{4}{r} \left(\frac{dT_5}{dr} - \frac{T_5}{r} \right) \right] r_{,\gamma} r_{,n} r_{,s}^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{r} \left(\frac{dT_5}{dr} - 4 \frac{T_5}{r} \right) r_{,n}^3 + \left[\frac{1}{r} \left(\frac{dT_5}{dr} - \frac{T_5}{r} \right) r_{,s}^2 + \frac{3}{r^2} T_5 r_{,n}^2 \right] n_{\gamma} \right\} \end{aligned} \quad (3.273)$$

$$\begin{aligned} \varsigma_{3,\gamma}^* = & - \left\{ \frac{2}{r} \left(\frac{dT_6}{dr} - \frac{T_6}{r} \right) s_{\gamma} r_{,n} r_{,s} + \left[\frac{d^2 T_6}{dr^2} - \frac{4}{r} \left(\frac{dT_6}{dr} - \frac{T_6}{r} \right) \right] r_{,\gamma} r_{,n} r_{,s}^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{r} \left(\frac{dT_6}{dr} - 4 \frac{T_6}{r} \right) r_{,n}^3 + \left[\frac{1}{r} \left(\frac{dT_6}{dr} - \frac{T_6}{r} \right) r_{,s}^2 + \frac{3}{r^2} T_6 r_{,n}^2 \right] n_{\gamma} \right\} \end{aligned} \quad (3.274)$$

Como é possível observar nas expressões (3.273) e (3.274) são necessários os termos de $d^2 T_i / dr^2$, para i variando 5 e 6. Para tanto, a partir das expressões (3.200) e (3.201), são obtidas as respectivas derivadas de segunda ordem:

$$\frac{d^2 T_5}{dr^2} = \frac{d^3 F}{dr^3} - \frac{1}{r} \frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{2}{r^2} \left(\frac{dF}{dr} - \frac{F}{r} \right) \quad (3.275)$$

$$\frac{d^2 T_6}{dr^2} = \frac{d^4 E}{dr^4} - \frac{1}{r} \frac{d^3 E}{dr^3} + \frac{2}{r^2} \left(\frac{d^2 E}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dE}{dr} \right) \quad (3.276)$$

A partir da expressão (3.151), obter-se-á a respectiva derivada em relação a m e, assim, obter o valor de $\hat{M}_{3nn,m\gamma}^*$.

$$\begin{aligned} \hat{M}_{3nn,m\gamma}^* = & \frac{4D}{105} \left\{ 17 \left\{ \left[\frac{d^2 J_1}{dr^2} r_{,m} r_{,\gamma} + \frac{dJ_1}{dr} \left(\frac{m_{\gamma} - r_{,m} r_{,\gamma}}{r} \right) \right] \nu + (1 - \nu) \left[\frac{1}{r} \left[\frac{dJ_2}{dr} + \left(\frac{dJ_3}{dr} - 2 \frac{J_3}{r} \right) r_{,n}^2 \right] m_{\gamma} + \right. \right. \right. \\ & \left. + \frac{2}{r} \left[\frac{J_3}{r} m_n + \left(\frac{dJ_3}{dr} - 2 \frac{J_3}{r} \right) r_{,m} r_{,n} \right] n_{\gamma} + \right. \\ & \left. + r_{,\gamma} \left[\left[\left(\frac{d^2 J_3}{dr^2} - \frac{1}{r} \left(5 \frac{dJ_3}{dr} - 8 \frac{J_3}{r} \right) \right) r_{,n}^2 + \frac{d^2 J_2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dJ_2}{dr} \right] r_{,m} + \frac{2}{r} \left(\frac{dJ_3}{dr} - 2 \frac{J_3}{r} \right) m_n r_{,n} \right] \right\} - \\ & - 4 \left\{ \left[\frac{d^2 J_4}{dr^2} r_{,m} r_{,\gamma} + \frac{dJ_4}{dr} \left(\frac{m_{\gamma} - r_{,m} r_{,\gamma}}{r} \right) \right] \nu + (1 - \nu) \left[\frac{1}{r} \left[\frac{dJ_5}{dr} + \left(\frac{dJ_6}{dr} - 2 \frac{J_6}{r} \right) r_{,n}^2 \right] m_{\gamma} + \right. \right. \\ & \left. + \frac{2}{r} \left[\frac{J_6}{r} m_n + \left(\frac{dJ_6}{dr} - 2 \frac{J_6}{r} \right) r_{,m} r_{,n} \right] n_{\gamma} + \right. \\ & \left. + r_{,\gamma} \left[\left[\left(\frac{d^2 J_6}{dr^2} - \frac{1}{r} \left(5 \frac{dJ_5}{dr} - 8 \frac{J_5}{r} \right) \right) r_{,n}^2 + \frac{d^2 J_5}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dJ_5}{dr} \right] r_{,m} + \frac{2}{r} \left(\frac{dJ_6}{dr} - 2 \frac{J_6}{r} \right) m_n r_{,n} \right] \right\} \right\} \end{aligned} \quad (3.277)$$

Por analogia a (3.277), chega-se a expressão de $P_{3nn,m\gamma}^*$.

$$\begin{aligned}
P_{3nn,m\gamma}^* = & \frac{4h^2D}{35} \left\{ \left[\frac{d^2J_1}{dr^2} r_{,m} r_{,\gamma} + \frac{dJ_1}{dr} \left(\frac{m_\gamma - r_{,m} r_{,\gamma}}{r} \right) \right] \nu + (1-\nu) \left[\frac{1}{r} \left[\frac{dJ_2}{dr} + \left(\frac{dJ_3}{dr} - 2 \frac{J_3}{r} \right) r_{,n}^2 \right] m_\gamma + \right. \right. \\
& + \frac{2}{r} \left[\frac{J_3}{r} m_n + \left(\frac{dJ_3}{dr} - 2 \frac{J_3}{r} \right) r_{,m} r_{,n} \right] n_\gamma + \\
& + r_{,\gamma} \left[\left[\left(\frac{d^2J_3}{dr^2} - \frac{1}{r} \left(5 \frac{dJ_3}{dr} - 8 \frac{J_3}{r} \right) \right) r_{,n}^2 + \frac{d^2J_2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dJ_2}{dr} \right] r_{,m} + \frac{2}{r} \left(\frac{dJ_3}{dr} - 2 \frac{J_3}{r} \right) m_n r_{,n} \right] \Bigg\} - \\
& - \frac{h^2D}{28} \left\{ \left[\frac{d^2J_4}{dr^2} r_{,m} r_{,\gamma} + \frac{dJ_4}{dr} \left(\frac{m_\gamma - r_{,m} r_{,\gamma}}{r} \right) \right] \nu + (1-\nu) \left[\frac{1}{r} \left[\frac{dJ_5}{dr} + \left(\frac{dJ_6}{dr} - 2 \frac{J_6}{r} \right) r_{,n}^2 \right] m_\gamma + \right. \right. \\
& + \frac{2}{r} \left[\frac{J_6}{r} m_n + \left(\frac{dJ_6}{dr} - 2 \frac{J_6}{r} \right) r_{,m} r_{,n} \right] n_\gamma + \\
& + r_{,\gamma} \left[\left[\left(\frac{d^2J_6}{dr^2} - \frac{1}{r} \left(5 \frac{dJ_5}{dr} - 8 \frac{J_5}{r} \right) \right) r_{,n}^2 + \frac{d^2J_5}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dJ_5}{dr} \right] r_{,m} + \frac{2}{r} \left(\frac{dJ_6}{dr} - 2 \frac{J_6}{r} \right) m_n r_{,n} \right] \Bigg\} \quad (3.278)
\end{aligned}$$

Como se pode observar nas expressões (3.277) e (3.278) aparecem derivadas de segunda ordem referentes à d^2J_i/dr^2 , com i variando de 1 a 6. Então, derivando as expressões de (3.153) a (3.158) resulta em:

$$\frac{d^2J_1}{dr^2} = -\frac{d^3F}{dr^3} - \frac{1}{r} \frac{d^2F}{dr^2} + \frac{2}{r^2} \left(\frac{dF}{dr} - \frac{F}{r} \right) \quad (3.279)$$

$$\frac{d^2J_2}{dr^2} = -\frac{1}{r} \frac{d^2F}{dr^2} + \frac{2}{r^2} \left(\frac{dF}{dr} - \frac{F}{r} \right) \quad (3.280)$$

$$\frac{d^2J_3}{dr^2} = -\frac{d^3F}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2F}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \left(\frac{dF}{dr} - \frac{F}{r} \right) \quad (3.281)$$

$$\frac{d^2J_4}{dr^2} = \frac{d^4E}{dr^4} - \frac{1}{r} \frac{d^3E}{dr^3} + \frac{2}{r^2} \left(\frac{d^2E}{dr^3} - \frac{1}{r} \frac{dE}{dr} \right) \quad (3.282)$$

$$\frac{d^2J_5}{dr^2} = \frac{1}{r} \frac{d^3E}{dr^3} - \frac{2}{r^2} \left(\frac{d^2E}{dr^3} - \frac{1}{r} \frac{dE}{dr} \right) \quad (3.283)$$

$$\frac{d^2J_6}{dr^2} = \frac{d^4E}{dr^4} - \frac{1}{r} \frac{d^3E}{dr^3} + \frac{2}{r^2} \left(\frac{d^2E}{dr^3} - \frac{1}{r} \frac{dE}{dr} \right) \quad (3.284)$$

A partir da expressão (3.163), obter-se-á a respectiva derivada em relação a m e, assim, obter o valor de $\hat{M}_{3ns,m\gamma}^*$.

$$\begin{aligned}
\hat{M}_{3ns,m\gamma}^* = & \frac{4D}{105} \left\{ 17 \left[(1-\nu) \left[[(m_n r_{,s} + m_s r_{,n}) r_{,\gamma} + r_{,m} r_{,s} n_{\gamma} + r_{,n} r_{,s} m_{\gamma} + r_{,m} r_{,s} s_{\gamma}] \frac{1}{r} \left(\frac{dJ_3}{dr} - 2 \frac{J_3}{r} \right) + \right. \right. \right. \\
& + (m_s n_{\gamma} + m_n s_{\gamma}) \frac{J_3}{r^2} + \left. \left. \left[\frac{d^2 J_3}{dr^2} - \frac{1}{r} \left(5 \frac{dJ_3}{dr} - 8 \frac{J_3}{r} \right) \right] r_{,m} r_{,n} r_{,s} r_{,\gamma} \right] \right] - \\
& - 4 \left[(1-\nu) \left[[(m_n r_{,s} + m_s r_{,n}) r_{,\gamma} + r_{,m} r_{,s} n_{\gamma} + r_{,n} r_{,s} m_{\gamma} + r_{,m} r_{,s} s_{\gamma}] \frac{1}{r} \left(\frac{dJ_6}{dr} - 2 \frac{J_6}{r} \right) + \right. \right. \\
& + (m_s n_{\gamma} + m_n s_{\gamma}) \frac{J_6}{r^2} + \left. \left. \left[\frac{d^2 J_6}{dr^2} - \frac{1}{r} \left(5 \frac{dJ_6}{dr} - 8 \frac{J_6}{r} \right) \right] r_{,m} r_{,n} r_{,s} r_{,\gamma} \right] \right] \right\} \quad (3.285)
\end{aligned}$$

A partir da expressão (3.264), obter-se-á a respectiva derivada em relação a m e, assim, obter o valor de $\bar{V}_{n\hat{k}3,m\gamma}^*$.

$$\bar{V}_{n\hat{k}3,m\gamma}^* = \hat{Q}_{n3,m\gamma}^* - \beta_1 P_{n\beta,\beta 3m\gamma}^* - \beta_1 \bar{P}_{sn\hat{k},s3m\gamma}^* \quad (3.286)$$

Derivando as expressões (3.265), (3.266) e (3.267) em relação m , são obtidos os termos da expressão (3.286):

$$\hat{Q}_{n3,m\gamma}^* = \frac{8Gh}{15} \left\{ [(3r_{,m} r_{,n} - m_n) r_{,\gamma} - (r_{,m} n_{\gamma} + r_{,n} m_{\gamma})] \frac{1}{r} \left(\frac{J_7}{r} - \frac{dJ_7}{dr} \right) + r_{,m} r_{,n} r_{,\gamma} \frac{d^2 J_7}{dr^2} \right\} \quad (3.286a)$$

$$\begin{aligned}
P_{n\beta,\beta 3m\gamma}^* = & \frac{4h^2 D}{35} \left\{ [(3r_{,m} r_{,n} - m_n) r_{,\gamma} - (r_{,m} n_{\gamma} + r_{,n} m_{\gamma})] \frac{1}{r} \left(\frac{J_8}{r} - \frac{dJ_8}{dr} \right) + r_{,m} r_{,n} r_{,\gamma} \frac{d^2 J_8}{dr^2} \right\} - \\
& - \frac{h^2 D}{28} \left\{ [(3r_{,m} r_{,n} - m_n) r_{,\gamma} - (r_{,m} n_{\gamma} + r_{,n} m_{\gamma})] \frac{1}{r} \left(\frac{J_9}{r} - \frac{dJ_9}{dr} \right) + r_{,m} r_{,n} r_{,\gamma} \frac{d^2 J_9}{dr^2} \right\} \quad (3.287)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{P}_{sn\hat{k},s3m\gamma}^* = & \frac{4h^2 D}{35} \left\{ (1-\nu) \left[[(m_n r_{,s}^2 + 2m_s r_{,n} r_{,s}) r_{,\gamma} + r_{,m} r_{,s}^2 n_{\gamma} + r_{,n} r_{,s}^2 m_{\gamma}] \frac{1}{r} \left(\frac{dJ_{10}}{dr} - 3 \frac{J_{10}}{r} \right) + \right. \right. \\
& + \frac{2}{r^2} (J_{10} m_s r_{,s} + 3J_{11} m_n r_{,n}) n_{\gamma} + \frac{1}{r} \left(\frac{dJ_{11}}{dr} - 3 \frac{J_{11}}{r} \right) (m_{\gamma} r_{,n}^3 + 3r_{,m} r_{,n}^2 n_{\gamma}) + \\
& + r_{,\gamma} \left[r_{,m} r_{,n}^3 \left[\frac{d^2 J_{11}}{dr^2} - \frac{1}{r} \left(7 \frac{dJ_{11}}{dr} - 15 \frac{J_{11}}{r} \right) \right] + 3m_n r_{,n}^2 \frac{1}{r} \left(\frac{d^2 J_{11}}{dr^2} - 3 \frac{J_{11}}{r} \right) + \right. \\
& + r_{,m} r_{,n} r_{,s}^2 \left[\frac{d^2 J_{10}}{dr^2} - \frac{7}{r} \frac{dJ_{10}}{dr} + \frac{3}{r} \left(J_{10} + 3 \frac{J_{10}}{r} \right) \right] \left. \right] + \\
& + \left[J_{10} \left[\frac{2}{r^2} (m_n r_{,s} + m_s r_{,n}) - \frac{3}{r} r_{,m} r_{,n} r_{,s} \right] + \frac{2}{r} \frac{dJ_{10}}{dr} r_{,m} r_{,n} r_{,s} \right] s_{\gamma} \left. \right\} - \\
& - \frac{h^2 D}{8} \left\{ (1-\nu) \left[[(m_n r_{,s}^2 + 2m_s r_{,n} r_{,s}) r_{,\gamma} + r_{,m} r_{,s}^2 n_{\gamma} + r_{,n} r_{,s}^2 m_{\gamma}] \frac{1}{r} \left(\frac{dJ_{12}}{dr} - 3 \frac{J_{12}}{r} \right) + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{r^2} (J_{12} m_s r_{,s} + 3J_{13} m_n r_{,n}) n_\gamma + \frac{1}{r} \left(\frac{dJ_{13}}{dr} - 3 \frac{J_{13}}{r} \right) (m_\gamma r_{,n}^3 + 3r_{,m} r_{,n}^2 n_\gamma) + \\
& + r_{,\gamma} \left[r_{,m} r_{,n}^3 \left[\frac{d^2 J_{13}}{dr^2} - \frac{1}{r} \left(7 \frac{dJ_{13}}{dr} - 15 \frac{J_{13}}{r} \right) \right] + 3m_n r_{,n}^2 \frac{1}{r} \left(\frac{d^2 J_{13}}{dr^2} - 3 \frac{J_{11}}{r} \right) + \right. \\
& + r_{,m} r_{,n} r_{,s}^2 \left[\frac{d^2 J_{12}}{dr^2} - \frac{7}{r} \frac{dJ_{12}}{dr} + \frac{3}{r} \left(J_{12} + 3 \frac{J_{12}}{r} \right) \right] \left. \right] + \\
& + \left[J_{12} \left[\frac{2}{r^2} (m_n r_{,s} + m_s r_{,n}) - \frac{3}{r} r_{,m} r_{,n} r_{,s} \right] + \frac{2}{r} \frac{dJ_{12}}{dr} r_{,m} r_{,n} r_{,s} \right] s_\gamma \left. \right\} \quad (3.288)
\end{aligned}$$

Como se pode observar nas expressões (3.286), (3.287) e (3.288), aparecem derivadas de segunda ordem referentes à $d^2 J_i / dr^2$, com i variando de 7 a 13. Então, derivando as expressões de (3.215) a (3.221) é obtido:

$$\frac{d^2 J_7}{dr^2} = \frac{d^3 E}{dr^3} - \frac{d^2 F}{dr^2} \quad (3.289)$$

$$\frac{d^2 J_8}{dr^2} = \frac{d^4 F}{dr^4} + \frac{1}{r} \frac{d^3 F}{dr^3} - \frac{3}{r^2} \left[\frac{d^2 F}{dr^2} - \frac{2}{r} \left(\frac{dF}{dr} + \frac{F}{r} \right) \right] \quad (3.290)$$

$$\frac{d^2 J_9}{dr^2} = \frac{d^5 E}{dr^5} + \frac{1}{r} \frac{d^4 E}{dr^4} - \frac{3}{r^2} \left[\frac{d^3 E}{dr^3} - \frac{2}{r} \left(\frac{d^2 E}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dE}{dr} \right) \right] \quad (3.291)$$

$$\frac{d^2 J_{10}}{dr^2} = \frac{d^3 T_5}{dr^3} - \frac{1}{r} \frac{d^2 T_5}{dr^2} + \frac{2}{r^2} \left(\frac{dT_5}{dr} - \frac{T_5}{r} \right) \quad (3.292)$$

$$\frac{d^2 J_{11}}{dr^2} = \frac{1}{r} \frac{d^2 T_5}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \left(\frac{dT_5}{dr} - \frac{T_5}{r} \right) \quad (3.293)$$

$$\frac{d^2 J_{12}}{dr^2} = \frac{d^3 T_6}{dr^3} - \frac{1}{r} \frac{d^2 T_6}{dr^2} + \frac{2}{r^2} \left(\frac{dT_6}{dr} - \frac{T_6}{r} \right) \quad (3.294)$$

$$\frac{d^2 J_{13}}{dr^2} = \frac{1}{r} \frac{d^2 T_6}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \left(\frac{dT_6}{dr} - \frac{T_6}{r} \right) \quad (3.295)$$

Como é possível observar nas expressões de (3.292) a (3.295) são necessários os termos de $d^3 T_i / dr^3$, para i variando 5 e 6. Para tanto, a partir das expressões (3.200) e (3.201), são obtidas as respectivas derivadas de terceira ordem:

$$\frac{d^3 T_5}{dr^3} = \frac{d^4 F}{dr^4} - \frac{1}{r} \frac{d^3 F}{dr^3} + \frac{3}{r^2} \left[\frac{d^2 F}{dr^2} - \frac{2}{r} \left(\frac{dF}{dr} - \frac{F}{r} \right) \right] \quad (3.296a)$$

$$\frac{d^3 T_6}{dr^3} = \frac{d^5 E}{dr^5} - \frac{1}{r} \frac{d^4 E}{dr^4} + \frac{3}{r^2} \left[\frac{d^3 E}{dr^3} - \frac{2}{r} \left(\frac{d^2 E}{dr^2} - \frac{dE}{dr} \right) \right] \quad (3.296b)$$

3.5.2.3 Transformação das integrais de domínio em integrais de contorno equivalentes associadas com as equações integrais de curvaturas e inclinações

Se $m_x = 0$ e $m_y = 0$, nas equações (Eq. 3.226) e (Eq. 3.227), a transformação das integrais de domínio em integrais de contorno é realizada da seguinte maneira:

$$\int_{\Omega} q(s) V_{\alpha\gamma}^*(p, s) d\Omega(s) = \int_{\Gamma} T_{\alpha,\gamma}^*(p, s) q(s) d\Gamma - \int_{\Gamma} \chi_{\alpha,\gamma}^*(p, s) q_{,j}(s) n_j d\Gamma \quad (3.297a)$$

$$\int_{\Omega} q(s) V_{3\gamma}^*(p, s) d\Omega(s) = \int_{\Gamma} T_{3,\gamma}^*(p, s) q(s) d\Gamma - \int_{\Gamma} \chi_{3,\gamma}^*(p, s) q_{,j}(s) n_j d\Gamma \quad (3.297b)$$

onde:

$$V_{\alpha\gamma}^* = u_{\alpha 3, \beta}^*; \quad V_{3\gamma}^* = u_{33, \beta}^*.$$

$$T_{\phi,\gamma}^* = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{b_1 b_2}{2} (1 - \nu) T_{\nabla^4 \psi, k\gamma}^* - \left[\frac{b_1 s_1}{2} (1 - \nu) - b_2 s_1 \right] T_{\nabla^2 \psi, k\gamma}^* + s_1^2 T_{\psi, k\gamma}^* \\ \frac{b_1^2}{2} (1 - \nu) T_{\nabla^4 \psi, \gamma}^* - \left[\frac{b_1 s_1}{2} (3 - \nu) \right] T_{\nabla^2 \psi, \gamma}^* + s_1^2 T_{\psi, \gamma}^* \\ -\frac{b_1^2}{2} (1 - \nu) T_{\nabla^4 \psi, m\gamma}^* + \left[\frac{b_1 s_1}{2} (3 - \nu) \right] T_{\nabla^2 \psi, m\gamma}^* - s_1^2 T_{\psi, m\gamma}^* \end{array} \right\} \quad (3.297c)$$

e

$$\chi_{\phi,\gamma}^* = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{b_1 b_2}{2} (1 - \nu) \chi_{\nabla^4 \psi, k\gamma}^* - \left[\frac{b_1 s_1}{2} (1 - \nu) - b_2 s_1 \right] \chi_{\nabla^2 \psi, k\gamma}^* + s_1^2 \chi_{\psi, k\gamma}^* \\ \frac{b_1^2}{2} (1 - \nu) \chi_{\nabla^4 \psi, \gamma}^* - \left[\frac{b_1 s_1}{2} (3 - \nu) \right] \chi_{\nabla^2 \psi, \gamma}^* + s_1^2 \chi_{\psi, \gamma}^* \\ -\frac{b_1^2}{2} (1 - \nu) \chi_{\nabla^4 \psi, m\gamma}^* + \left[\frac{b_1 s_1}{2} (3 - \nu) \right] \chi_{\nabla^2 \psi, m\gamma}^* - s_1^2 \chi_{\psi, m\gamma}^* \end{array} \right\} \quad (3.297d)$$

Os termos que compõem $T_{\phi,\gamma}^*$ e $\chi_{\phi,\gamma}^*$ estão detalhados no Apêndice C.

3.6 Sistema Algébrico

Neste tópico descreve-se a construção dos sistemas algébricos utilizando-se a filosofia do Método dos Elementos de Contorno (MEC) aplicado a Teoria de Placas de Reddy, em que as equações integrais de contorno são transformadas em um sistema algébrico de equações.

3.6.1 Introdução

Como é não possível obter-se a solução exata das equações integrais para a maioria dos casos de interesse prático, a alternativa é resolvê-las numericamente, transformando-as em equações algébricas. Essa transformação envolve a discretização do contorno da placa em segmentos, ditos

“elementos de contorno”, sobre os quais deslocamentos e esforços são aproximados por funções previamente escolhidas, vide Figura 3.2.

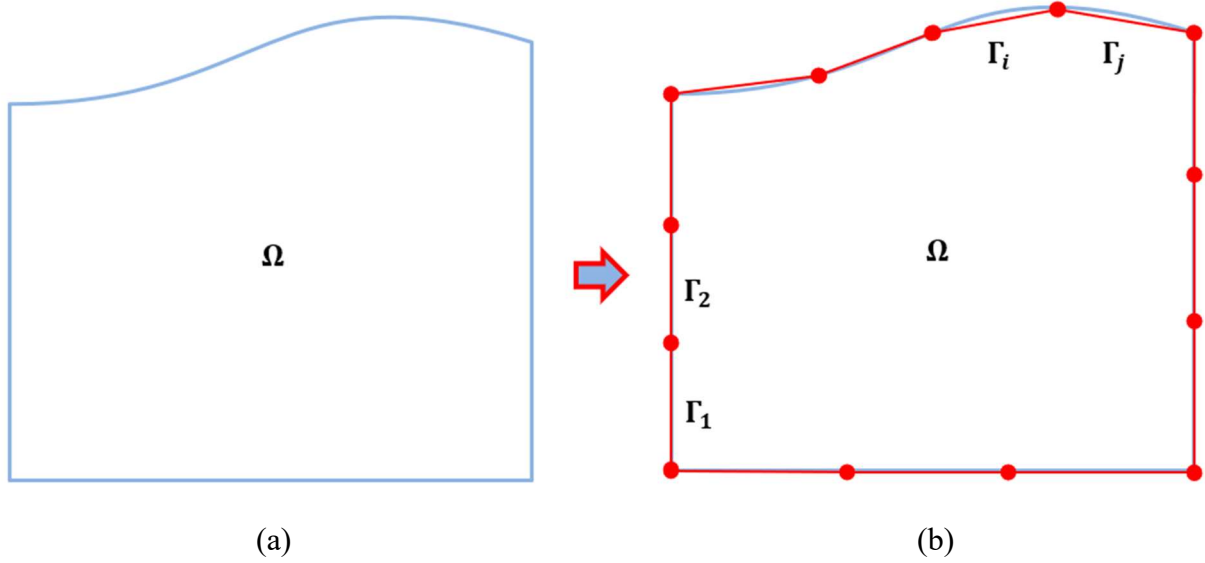


Figura 3.2 – Geometria: (a) sem discretização do contorno; (b) com discretização em elementos de contorno.

As equações algébricas resultantes das transformações das equações integrais constituem um sistema de equações lineares onde as incógnitas são deslocamentos e esforços em pontos definidos sobre o contorno. Após a imposição das condições de contorno e a resolução final do sistema de equações resultante no contorno, os valores do domínio podem ser obtidos.

3.6.2 Equações Integrais Discretizadas

Após a discretização do contorno do problema em elementos de contorno, definição de nós funcionais, interpolação dos campos de interesse, e desprezando-se as reações de canto de alta ordem, fazendo-se a colocação regular (fora do domínio), as equações integrais das rotações (Equação (3.105)) podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{\bar{m}} \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix} \int_{\Gamma_k} \left\{ [\Phi] \begin{bmatrix} \hat{M}_{nn\hat{1}}^* & \hat{M}_{sn\hat{1}}^* \\ \hat{M}_{nn\hat{2}}^* & \hat{M}_{sn\hat{2}}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_n \\ \phi_s \end{Bmatrix}_{\Gamma_k} - [\Phi] \begin{bmatrix} \beta_1 P_{nn\hat{1}}^* \\ \beta_1 P_{nn\hat{2}}^* \end{bmatrix} \{w_{,n}\}_{\Gamma_k} + \right. \\
 & \left. + [\Phi] \begin{bmatrix} \bar{V}_{n\hat{1}}^* \\ \bar{V}_{n\hat{2}}^* \end{bmatrix} \{w\}_{\Gamma_k} \right\} d\Gamma = \sum_{k=1}^{\bar{m}} \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix} \int_{\Gamma_k} \left\{ [\Phi] \begin{bmatrix} \phi_{n\hat{1}}^* & \phi_{s\hat{1}}^* \\ \phi_{n\hat{2}}^* & \phi_{s\hat{2}}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{M}_{nn} \\ \hat{M}_{sn} \end{Bmatrix}_{\Gamma_k} - \right. \\
 & \left. - [\Phi] \begin{bmatrix} w_{\hat{1},n}^* \\ w_{\hat{2},n}^* \end{bmatrix} \{\beta_1 P_{nn}\}_{\Gamma_k} + [\Phi] \begin{bmatrix} w_{\hat{1}}^* \\ w_{\hat{2}}^* \end{bmatrix} \{\bar{V}_n\}_{\Gamma_k} \right\} d\Gamma + \sum_{k=1}^{\bar{m}} \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix} \int_{\Gamma_k} \left\{ \begin{Bmatrix} T_1^* \\ T_2^* \end{Bmatrix} q - \begin{Bmatrix} \chi_1^* \\ \chi_2^* \end{Bmatrix} q_{,j} n_j \right\} d\Gamma
 \end{aligned}
 \tag{3.298}$$

Da mesma forma, a equação integral de deslocamento (Equação (3.102)) discretizada em elementos de contorno é dada por:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\bar{m}} \int_{\Gamma_k} \left\{ [\Phi] \begin{bmatrix} \hat{M}_{nn}^* & \hat{M}_{sn3}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_n \\ \phi_s \end{Bmatrix}_{\Gamma_k} - [\Phi] \beta_1 P_{nn}^* \{w_{,n}\}_{\Gamma_k} + [\Phi] \bar{V}_{n3}^* \{w\}_{\Gamma_k} \right\} d\Gamma = \\
& = \sum_{k=1}^{\bar{m}} \int_{\Gamma_k} \left\{ [\Phi] \begin{bmatrix} \phi_{n3}^* & \phi_{s3}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{M}_{nn} \\ \hat{M}_{sn} \end{Bmatrix}_{\Gamma_k} - [\Phi] w_{3,n}^* \{\beta_1 P_{nn}\}_{\Gamma_k} + [\Phi] w_3^* \{\bar{V}_n\}_{\Gamma_k} \right\} d\Gamma + \\
& + \sum_{k=1}^{\bar{m}} \int_{\Gamma_k} \{T_3^* q - \chi_3^* q_{,j} n_j\} d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.299}$$

De maneira análoga, a equação integral das inclinações do plano médio (Equação (3.106)) discretizada em elementos de contorno é dada por:

$$\begin{aligned}
& n_\gamma \sum_{k=1}^{\bar{m}} \int_{\Gamma_k} \left\{ [\Phi] \begin{bmatrix} \hat{M}_{nn,\gamma}^* & \hat{M}_{sn3,\gamma}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_n \\ \phi_s \end{Bmatrix}_{\Gamma_k} - [\Phi] \beta_1 P_{nn3,\gamma}^* \{w_{,n}\}_{\Gamma_k} + [\Phi] \bar{V}_{n3,\gamma}^* \{w\}_{\Gamma_k} \right\} d\Gamma = \\
& = n_\gamma \sum_{k=1}^{\bar{m}} \int_{\Gamma_k} \left\{ [\Phi] \begin{bmatrix} \phi_{n3,\gamma}^* & \phi_{s3,\gamma}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{M}_{nn} \\ \hat{M}_{sn} \end{Bmatrix}_{\Gamma_k} - [\Phi] w_{3,n\gamma}^* \{\beta_1 P_{nn}\}_{\Gamma_k} + [\Phi] w_{3,\gamma}^* \{\bar{V}_n\}_{\Gamma_k} \right\} d\Gamma + \\
& + n_\gamma \sum_{k=1}^{\bar{m}} \int_{\Gamma_k} \{T_{3,\gamma}^* q - \chi_{3,\gamma}^* q_{,j} n_j\} d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.300}$$

Nas equações (3.298), (3.299) e (3.300), $\bar{m}$ é o número total de elementos de contorno.

Após a inserção das funções interpoladoras, cálculo das integrações em 3.298 a 3.300, a representação algébrica para cada ponto de colocação no exterior pode ser obtida. Quando, o ponto fonte percorrer todos os pontos de colocação para montar o sistema de equações, matrizes de influência G, H e um vetor de carga f será formado, de uma maneira análoga ao descrito do capítulo 2. Assim, obtém-se um sistema com um número de equações totais igual a quatro vezes o número de nós, conforme é mostrado a seguir:

$$H \cdot U = G \cdot P + B \tag{3.301}$$

Os vetores U e P na expressão (3.301) contêm, respectivamente, os valores nos nós de deslocamentos e esforços no contorno, onde se deve ter, para cada direção nodal, um dos dois valores como incógnita, sendo o outro prescrito. Então, o sistema em (3.301) pode ser rearranjado, colocando-se todas as incógnitas num único vetor X e todos os valores conhecidos em um vetor independente, chamado aqui de F. Assim, obtém-se o sistema de equações a seguir:

$$A \cdot X = F \quad (3.302)$$

onde A é a matriz de coeficientes que multiplicam as incógnitas, sendo cheia e não simétrica. O sistema de equações (3.302) é resolvido obtendo-se os valores de deslocamentos e forças de superfície desconhecidos.

Após a resolução do problema, as variáveis no contorno são determinadas. A partir daí, os deslocamentos, os momentos e os esforços cortantes em qualquer ponto no domínio da placa podem ser então calculados utilizando-se as formas discretizadas das equações integrais de deslocamento, inclinações e curvaturas de acordo com o campo de interesse.

Os tipos de elementos de contorno lineares e circulares utilizados na placa de Reddy são análogos aos das placas de Reissner/Mindlin (discutidos no capítulo 2). A principal diferença é que os vetores nodais acomodam quatro graus de liberdade por nó na placa de Reddy.

CAPÍTULO 4

APLICAÇÕES NUMÉRICAS DO MEC NAS TEORIAS DE PLACAS DE REDDY, REISSNER E MINDLIN

Neste capítulo são apresentados os resultados do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para as teorias refinadas de Reissner, Mindlin e Reddy, cujos valores são comparados com soluções analíticas ou numéricas. Para este fim, placas circulares e poligonais sob diferentes condições de contorno e carregamentos são analisadas. Convém notar que na solução do MEC para placa de Mindlin é usado o fator de forma $K_s = 5/6$ em todos os exemplos.

4.1 Placa circular engastada submetida a carregamento constante

Considere uma placa circular engastada de raio a e submetida a um carregamento q uniformemente distribuído conforme mostrada na Figura 4.1. As propriedades mecânicas são o módulo de elasticidade E e coeficiente de Poisson $\nu = 0.30$.

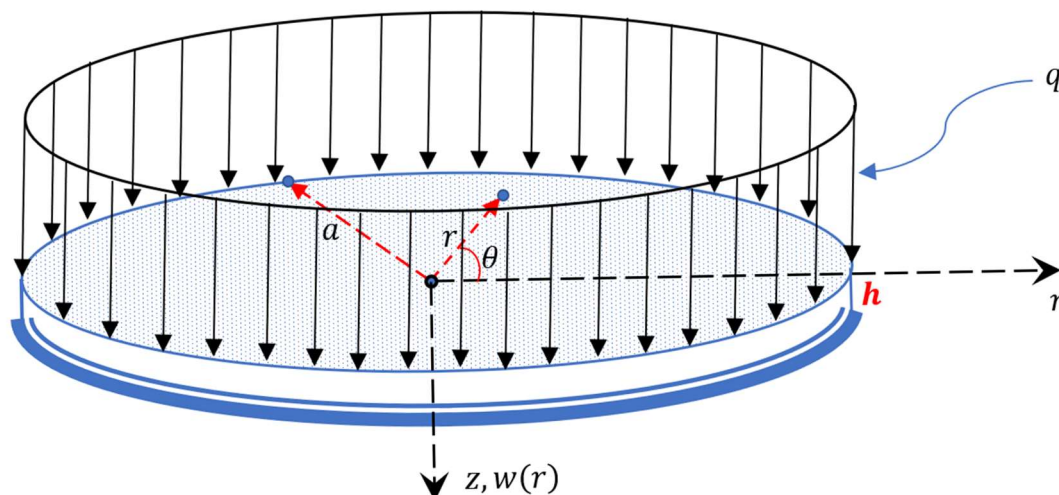


Figura 4.1 – Placa circular engastada submetida a carregamento constante.

As malhas de elementos de contorno circulares utilizadas na análise estão indicadas na Figura 2.10. Os resultados adimensionalizados no ponto $(y = 0; x = a/2)$ para o deslocamento estão mostrados para as três teorias de placas na Tabela 4.1. Já na Tabela 4.2 são apresentados os resultados numéricos para a inclinação da elástica $\frac{dw}{dx}$. As malhas do MEC com elementos circulares

estão indicadas na Figura 2.10. A solução analítica para a placa circular engastada no modelo de Reddy é dada por Reddy e Wang (1997). Já para a teoria de placas de Reissner, segundo Vander Weeën (1982), a solução exata fica:

$$w(r) = \frac{qa^4}{64D} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \left\{1 + 2 \left[\frac{1,6}{(1-\nu)} \frac{h^2}{a^2} \right] - \frac{r^2}{a^2} \right\} \quad (4.1)$$

Tabela 4.1 – Deslocamento adimensionalizado $\hat{w} = wD/qa^4$ ($\times 10^{-2}$) para placa circular engastada submetida a carregamento uniformemente distribuído ($y = 0$; $x = a/2$).

$\frac{h}{2a}$	Teoria	MEC				Analítica	Erro (%)
		16	32	64	128		
0,200	REISSNER	1,7330	1,7354	1,7359	1,7360	1,7360	0,0007
0,100		1,0912	1,0926	1,0931	1,0932	1,0932	0,0009
0,050		0,9336	0,9326	0,9325	0,9325	0,9325	0,0010
0,025		0,8930	0,8923	0,8923	0,8923	0,8923	0,0011
0,200	MINDLIN	1,7382	1,7382	1,7361	1,7360	1,7360	0,0007
0,100		1,0949	1,0933	1,0932	1,0932	1,0932	0,0009
0,050		0,9336	0,9326	0,9325	0,9325	0,9325	0,0010
0,025		0,8930	0,8923	0,8923	0,8923	0,8923	0,0011
0,200	REDDY	1,6877	1,7026	1,6908	1,6853	1,6821	0,1902
0,100		1,0872	1,1067	1,0868	1,0876	1,0865	0,0981
0,050		0,8856	0,9319	0,9316	0,9315	0,9316	0,0110
0,025		0,8777	0,8777	0,8829	0,8922	0,8922	0,0037

À medida que é inserida uma discretização mais rica do MEC, os resultados de Reissner e Mindlin tendem para os mesmos valores. Convém notar que as respostas analíticas de Reissner e Mindlin dão os mesmos valores para placas circulares engastadas sob carregamento constante.

Tabela 4.2 – Inclinação da elástica $\frac{dw}{dx}$ ($\times 10^{-4}$) para placa circular engastada submetida a carregamento uniforme ($y = 0$; $x = a/2$), segundo a Teoria de Reddy.

$\frac{h}{2a}$	MEC				Analítica Reddy	Erro (%)
	16	32	64	128		
0,20	-2,9693	-2,9768	-2,9768	-2,9750	-2,9745	0,0175
0,10	-17,8516	-17,9311	-17,9461	-17,9460	-17,9461	0,0005
0,05	-131,0287	-131,6812	-131,8296	-131,8589	-131,8688	0,0075
0,025	-1024,9345	-1031,1357	-1031,1357	-1031,4475	-1031,5500	0,0099

Na Tabela 4.1, os resultados para o deslocamento adimensionalizado mostram boa convergência da solução do MEC para cada um dos modelos de placas em relação suas respectivas soluções exatas, em todas as razões de aspecto de aspecto ($h/2a$) utilizadas na placa circular.

Na Tabela 4.2, percebe-se que quanto mais espessa é a placa, menor é a inclinação da elástica. Os resultados do MEC na Teoria de Placas de Reddy mostraram boa convergência dos resultados numéricos em relação a sua correspondente solução analítica. O erro percentual, para o caso da placa mais espessa ($h/2a = 0,20$) com a malha MEC128, foi menor do que 0,018%.

4.2 Placa circular simplesmente apoiada submetida a carregamento constante

Considere uma placa circular simplesmente apoiada, de raio a , e submetida a um carregamento uniforme q conforme mostrada na Figura 4.2. As propriedades mecânicas são o módulo de elasticidade e um coeficiente de Poisson $\nu = 0.30$. Os resultados adimensionalizados para o deslocamento no ponto ($y = 0; x = a/2$) estão mostrados para as três teorias de placas na Tabela 4.3. Já na Tabela 4.4 são apresentados os resultados da teoria de Reddy para os momentos radial M_{rr} e tangencial $M_{\theta\theta}$.

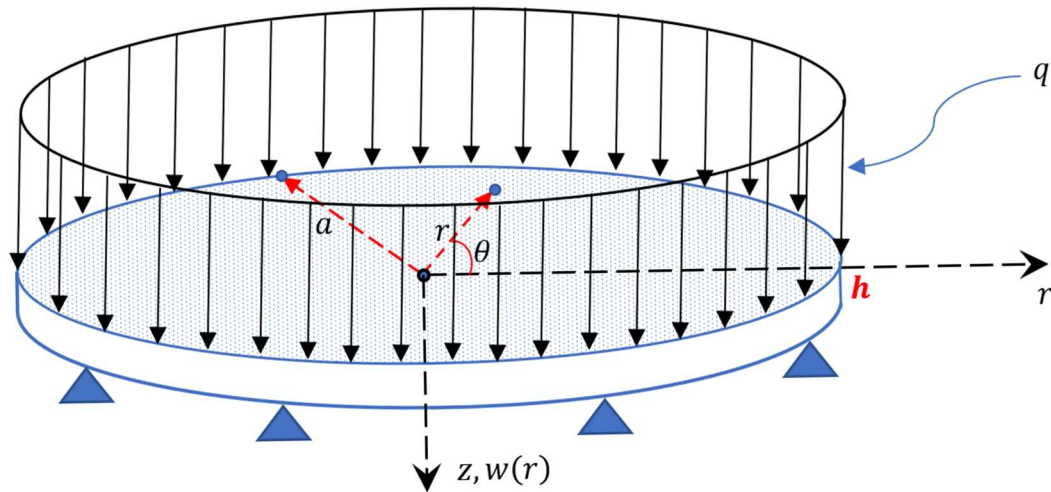


Figura 4.2 – Placa circular simplesmente apoiada submetida a carregamento constante.

As discretizações do MEC utilizadas nas análises são análogas àquelas descritas na Figura 2.10. A solução analítica para o deslocamento da placa circular engastada regida pelo modelo de Mindlin é dada por (Ozer, 2008):

$$w(r) = \frac{qa^4}{64D} \left[\frac{5+\nu}{1+\nu} - \frac{2(3+\nu)}{1+\nu} \left(\frac{r}{a}\right)^2 + \left(\frac{r}{a}\right)^4 \right] + \frac{M_a a^2}{2(1+\nu)D} \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2 \right] + \frac{qa^2}{4\kappa Gh} \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2 \right] \quad (4.2)$$

onde κ é o fator de correção ao cisalhamento e M_a é o carregamento em momentos na borda da placa.

Tabela 4.3 – Deslocamento adimensionalizado $\hat{w} = wD/qa^4$ ($\times 10^{-2}$) para placa circular simplesmente apoiada submetida a carregamento uniformemente distribuído ($y = 0; x = a/2$).

$\frac{h}{2a}$	Teoria	MEC				Analítica (*)	Erro (%)
		16	32	64	128		
0,200	REISSNER	5,1851	5,1534	5,1464	5,1446	5,3418	3,6920
0,100		4,6893	4,6587	4,6519	4,6501	4,6990	1,0402
0,050		4,5630	4,5344	4,5281	4,5264	4,5383	0,2606
0,025		4,5301	4,5030	4,4970	4,4955	4,4981	0,0575
0,200	MINDLIN	5,3854	5,3518	5,3444	5,3424	5,3418	0,0115
0,100		4,7393	4,7083	4,7013	4,6995	4,6990	0,0124
0,050		4,5754	4,5468	4,5405	4,5388	4,5383	0,0119
0,025		4,5332	4,5061	4,5001	4,4986	4,4981	0,0112
0,200	REDDY	4,6660	5,3084	5,3341	5,3378	5,3418	0,0755
0,100		4,5711	4,6716	4,6892	4,6966	4,6990	0,0512
0,050		4,5101	4,5319	4,5343	4,5351	4,5383	0,0698
0,025		4,4695	4,4911	4,4958	4,4965	4,4981	0,0342

(*) Solução analítica segundo: (a) Equação (4.2); (b) Reddy e Wang (1997).

Na Tabela 4.3, os resultados do MEC para o deslocamento adimensionalizado mostram boa convergência para as respectivas soluções exatas de Mindlin e Reddy. No caso da placa mais espessa ($h/2a = 0,20$), o erro relativo no modelo de Reddy foi menor do que 0,08%. Vale registrar que o erro apresentado pelo MEC na teoria de Reissner foi maior por ter sido comparado com a solução exata da teoria de Mindlin. Os resultados da placa de Reddy apresentados na tabela 4.4 para os momentos radial e tangencial, adimensionalizados, mostram a boa eficácia do MEC frente a suas correspondentes analíticas.

Tabela 4.4 – Momentos radial M_{rr} e tangencial $M_{\theta\theta}$, adimensionalizados, para uma placa circular simplesmente apoiada, com raio a e espessura $h = 0,05$ m, considerando a teoria de Reddy.

MEC	M_{rr}/qa^2 ($\times 10^{-1}$)			$M_{\theta\theta}/qa^2$ ($\times 10^{-1}$)		
	0,10a	0,30a	0,50a	0,10a	0,30a	0,50a
16	0,5062	0,4647	0,3818	0,5091	0,4853	0,4378
32	0,5080	0,4666	0,3836	0,5114	0,4876	0,4400
64	0,5084	0,4670	0,3840	0,5118	0,4880	0,4404
*Analítica	0,5094	0,4681	0,3856	0,5091	0,4853	0,4378
Erro (%)	0,1924	0,2482	0,4374	0,5385	0,5549	0,5810

(*) Reddy e Wang (1997).

É possível notar a convergência ascendente dos resultados numéricos para os momentos fletores, partindo da malha menos refinada (MEC16) até o modelo com mais elementos de contorno (MEC64). Os erros percentuais apresentados são baixos, atingindo o máximo de 0,44% na posição “0,50a” para o momento radial M_{rr} . O erro percentual médio para o momento tangencial foi 0,56%.

4.3 Placa triangular simplesmente apoiada submetida a carregamento uniformemente distribuído

Considere uma placa triangular simplesmente apoiada e submetida a um carregamento constante q_0 , conforme mostrado na Fig. 4.3, com coeficiente de Poisson $\nu = 0,30$ e $a = 1,00 \text{ m}$.

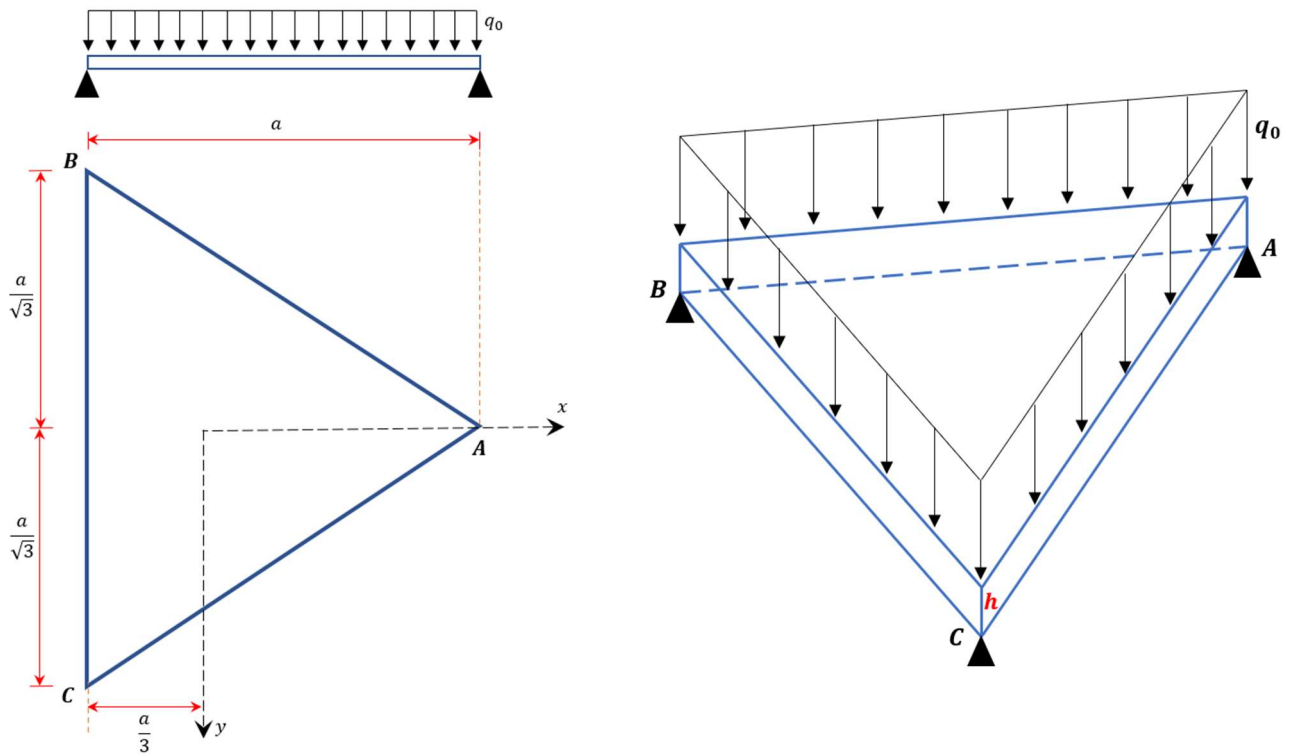


Figura 4.3 – Placa triangular simplesmente apoiada submetida a carregamento uniformemente distribuído.

As equações dos vértices, em relação ao sistema de coordenadas mostrado na Figura 2.9, são dadas por (Reddy, 2007):

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{1}{3} &= 0 && \text{em BC;} \\ \frac{\sqrt{3}x}{3a} + \frac{y}{a} - \frac{2\sqrt{3}}{9} &= 0 && \text{em AC;} \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \frac{x}{a} - \frac{y}{a} - \frac{2\sqrt{3}}{9} = 0 \quad \text{em AB.}$$

A placa triangular foi discretizada com três diferentes malhas com 15, 30 e 60 elementos de contorno, denotadas respectivamente por MEC-15, MEC-30 e MEC-60, conforme mostrado na Figura 4.4.

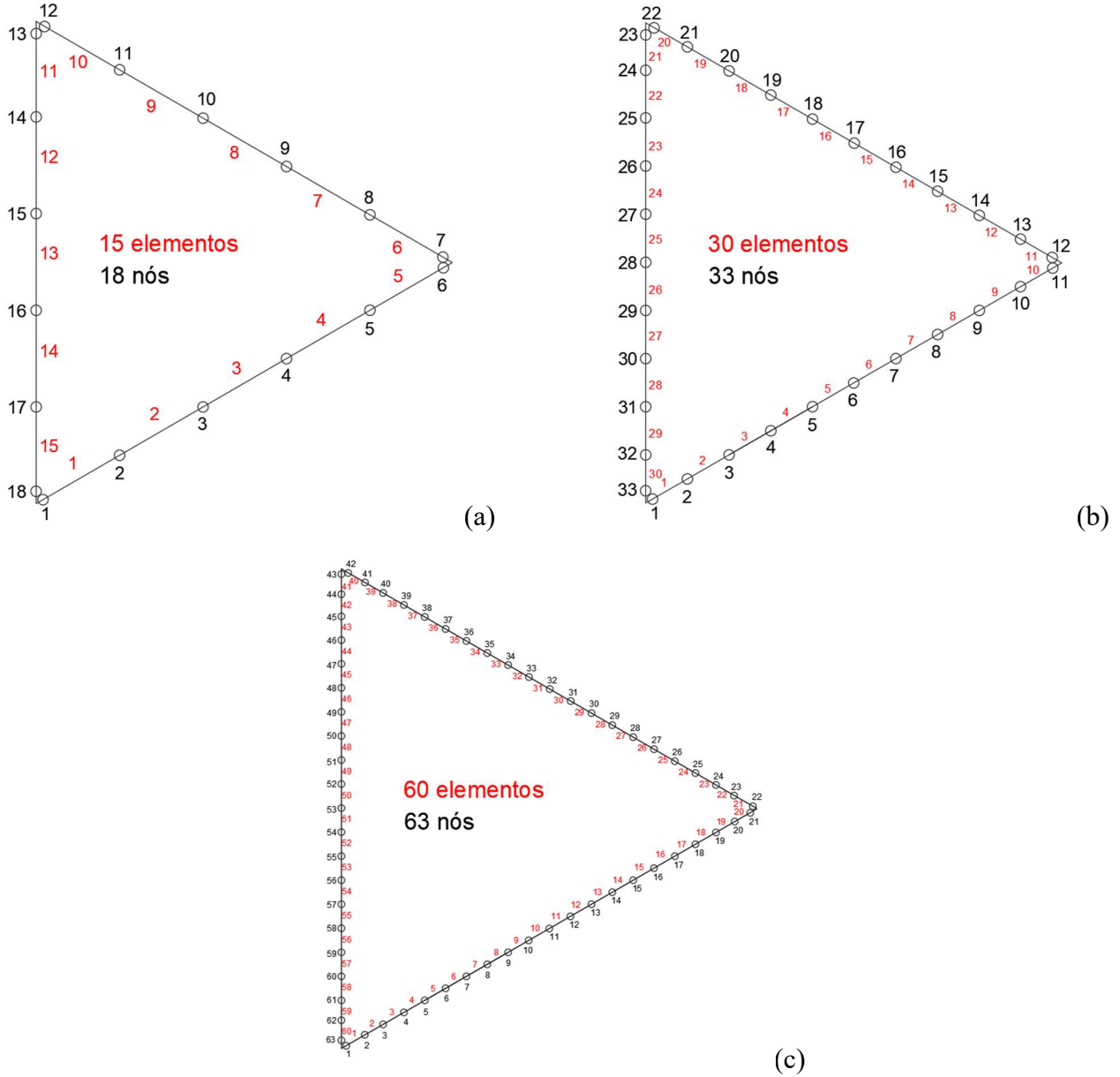


Figura 4.4 – Discretizações em elementos de contorno: (a) MEC-15; (b) MEC-30; (c) MEC-60.

A solução exata para o deslocamento transversal w^F de acordo com a teoria de placas de Mindlin é dada por (Reddy, 2007):

$$w^F = w^C + \frac{M^C}{K_s G h} \quad (4.4)$$

onde:

$$w^C = \frac{q_0 a^4}{64D} \left\{ \left(\frac{x}{a} \right)^3 - 3 \left(\frac{y}{a} \right)^2 \frac{x}{a} - \left[\left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{a} \right)^2 \right] + \frac{4}{27} \right\} \left[\frac{4}{9} - \left(\frac{x}{a} \right)^2 - \left(\frac{y}{a} \right)^2 \right] \quad (4.5)$$

$$M^C = -D \nabla^2 w^C \quad (4.6)$$

sendo $K_s = 5/6$ o fator de forma; w^C o deslocamento transversal; M^C o momento de Markus, ambos associados a teoria clássica de placas.

Os resultados do MEC para o deslocamento adimensionalizado $\hat{w} = wD/q_0 a^4$ no baricentro da placa ($x = a/3, y = a/\sqrt{3}$) e as respostas obtidas com a Equação (4.4) são mostrados na Tabela 4.5. Convém notar que soluções analíticas desse problema não estão disponíveis para ambas as placas de Reissner e Reddy.

Tabela 4.5 – Deslocamento adimensionalizado $\hat{w} = wD/q_0 a^4$ ($\times 10^{-3}$) no ponto central ($x = a/3, y = a/\sqrt{3}$).

	h (m)	MEC-15	MEC-30	MEC-60	Exata (Mindlin)	Diferença Relativa (%)
REISSNER	0,15	1,2283	1,2289	1,2301	1,2669	2,905
	0,10	1,1132	1,1159	1,1175	1,1346	1,507
	0,05	1,0440	1,0481	1,0500	1,0553	0,502
	0,01	1,0237	1,0267	1,0285	1,0299	0,136
MINDLIN	0,15	1,2638	1,2646	1,2658	1,2669	0,087
	0,10	1,1290	1,1318	1,1334	1,1346	0,106
	0,05	1,0480	1,0521	1,0540	1,0553	0,123
	0,01	1,0241	1,0270	1,0286	1,0299	0,126
REDDY	0,15	1,2539	1,2655	1,2729	1,2669	0,474
	0,10	1,1339	1,1366	1,1380	1,1346	0,300
	0,05	1,0533	1,0550	1,0556	1,0553	0,028
	0,01	1,0296	1,0297	1,0300	1,0299	0,010

Os resultados da tabela 4.5 mostram um bom desempenho das soluções do MEC quando comparados com a solução exata de Mindlin, sendo as menores diferenças relativas em relação a exata disponível obtidas respectivamente com as soluções numéricas de Mindlin e Reddy.

4.4 Placas quadrangulares simplesmente apoiadas submetidas a carregamento constante

Considere uma placa retangular de lados a e b , simplesmente apoiada, e submetida a um carregamento uniforme q conforme indicado na Figura 4.5. As propriedades mecânicas são o módulo de elasticidade $E = 200 \text{ MPa}$ e o coeficiente de Poisson $\nu = 0,30$. As discretizações do MEC estão indicadas na Figura 4.6. Para fins de comparação com os resultados do MEC, as expressões das soluções analíticas de placas simplesmente apoiadas de Reissner, Mindlin, e Reddy estão descritas no Anexo A (seção A.1). Além disso, no mesmo anexo, é mostrada uma quarta solução analítica baseada na teoria da elasticidade 3D (ver seção A.3).

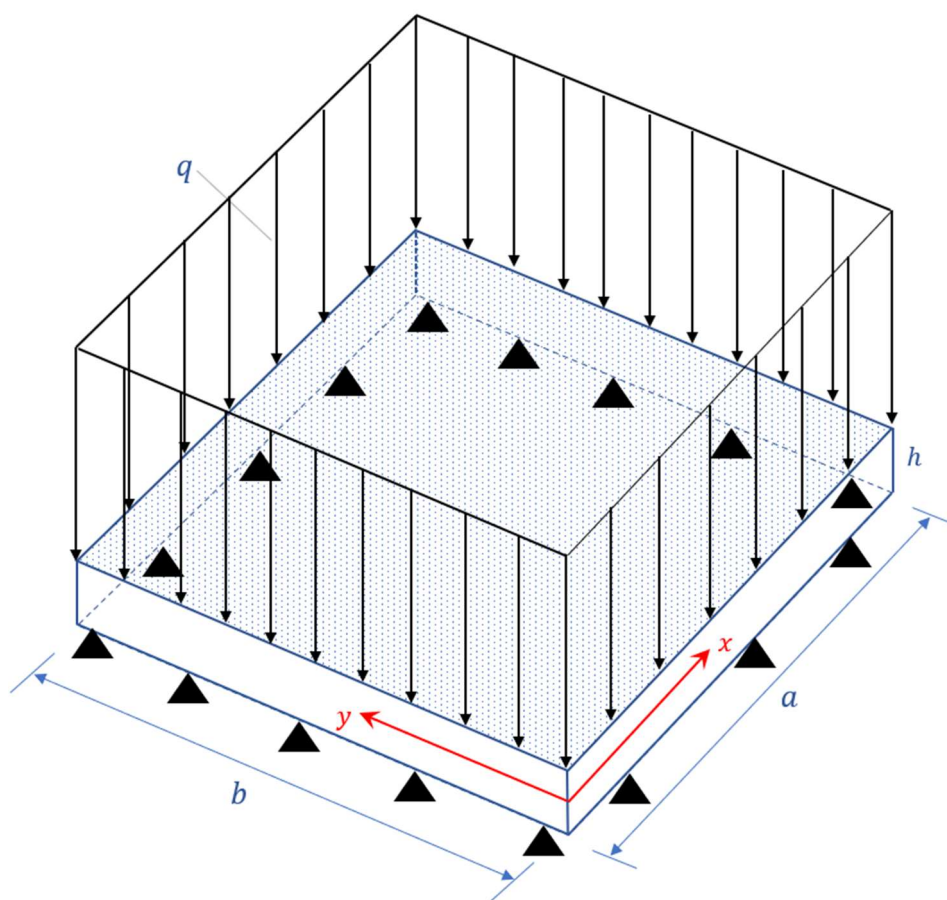
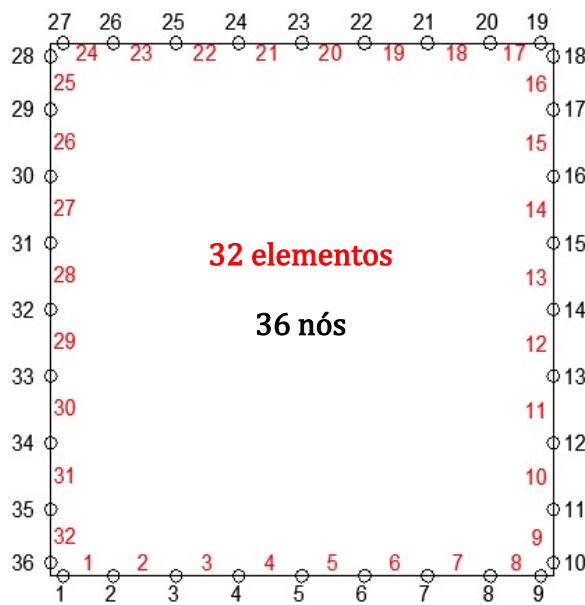


Figura 4.5 – Placa quadrada simplesmente apoiada submetida a um carregamento constante.



(a) MEC32



(b) MEC64

Figura 4.6 – Discretização do MEC utilizando 32 e 64 elementos de contorno.

As Tabelas 4.6 e 4.7 mostram os deslocamentos adimensionalizados em dois pontos $(x = \frac{a}{4}; y = \frac{a}{2})$ e $(x = \frac{a}{2}; y = \frac{a}{2})$ da placa quadrada ($a/b = 1$) obtidos com o MEC usando as teorias de placas de Reddy, Mindlin e Reissner. Um estudo análogo foi feito para placas retangulares ($a/b = 2$), cujos deslocamentos adimensionalizados nos pontos $(x = 0,75a; y = 0,50b)$ e $(x = 0,375a; y = 0,50b)$ estão indicados nas Tabelas 4.8 e 4.9. Convém notar que essas quatro tabelas também mostram quatro conjuntos de respostas analíticas associadas às três teorias de placas e a quarta associada à teoria da elasticidade tridimensional. Para o cálculo das tensões de cisalhamento transversas τ_{xz} foram admitidos os seguintes valores $a = b = 1 \text{ m}$, $h = 0,10 \text{ m}$, $q = 10 \text{ kN/m}^2$ e seus resultados são mostrados na Tabela 4.10 para as coordenadas $x = 0,25 \text{ m}$; $y = 0,50 \text{ m}$.

Conforme pode ser visto nas Tabelas 4.6 e 4.7, associadas à placa quadrada, e nas Tabelas 4.8 e 4.9, associadas à placa retangular, os resultados do MEC para o deslocamento adimensionalizado mostram boa convergência para as respectivas soluções analíticas associadas a cada um dos modelos de placas. Além disso, os resultados de deslocamento das três teorias têm um bom nível de coerência com a solução da elasticidade tridimensional para as razões de aspecto estudadas. Embora a teoria de Reissner trabalhe com campos médios ponderados, seus deslocamentos ficaram ainda mais próximos da solução da elasticidade 3D. Os resultados de Reddy ficaram ligeiramente melhores que os de Mindlin quando comparados com a solução 3D.

Tabela 4.6 – Deslocamento adimensionalizado $\hat{w} = wD/qa^4$ ($\times 10^{-3}$) no ponto: $x = a/4; y = a/2$, para a placa com razão $a/b = 1$.

a/b	h/a	MEC32			MEC64			Soluções Analíticas			
		Reddy	Mindlin	Reissner	Reddy	Mindlin	Reissner	Reddy	Mindlin	Reissner	3D*
1	0,01	2,9223	2,9190	2,9188	2,9341	2,9354	2,9351	2,9398	2,9398	2,9396	2,9396
	0,10	3,0838	3,0643	3,0635	3,1003	3,0749	3,0747	3,1019	3,1020	3,0774	3,0832
	0,20	3,5844	3,5869	3,4888	3,5898	3,5924	3,4941	3,5919	3,5934	3,4951	3,5136

(*) Srinivas *et al.* (1969).

Tabela 4.7 – Deslocamento adimensionalizado $\hat{w} = wD/qa^4$ ($\times 10^{-3}$) no ponto: $x = a/2; y = a/2$, para a placa com razão $a/b = 1$.

a/b	h/a	MEC32			MEC64			Soluções Analíticas			
		Reddy	Mindlin	Reissner	Reddy	Mindlin	Reissner	Reddy	Mindlin	Reissner	3D*
1	0,01	4,0517	4,0375	4,0372	4,0638	4,0587	4,0584	4,0645	4,0645	4,0641	4,0622
	0,10	4,2632	4,2547	4,2233	4,2685	4,2693	4,2377	4,2727	4,2728	4,2413	4,2488
	0,20	4,7693	4,8957	4,7696	4,8963	4,9030	4,7767	4,9028	4,9043	4,7780	4,8035

(*) Srinivas *et al.* (1969).

Tabela 4.8 – Deslocamento adimensionalizado $\hat{w} = wD/qa^4$ ($\times 10^{-4}$) no ponto: $x = 0,375a; y = 0,50b$, para a placa com razão $a/b = 2$.

a/b	h/a	MEC32			MEC64			Soluções Analíticas			
		Reddy	Mindlin	Reissner	Reddy	Mindlin	Reissner	Reddy	Mindlin	Reissner	3D*
2	0,01	3,9720	3,9574	3,9571	3,9837	3,9851	3,9849	3,9924	3,9924	3,9922	3,9922
	0,10	4,1118	4,1173	4,0948	4,1364	4,1369	4,1143	4,1421	4,1421	4,1195	4,1249
	0,20	4,5749	4,5787	4,4884	4,5898	4,5927	4,5020	4,5950	4,5960	4,5052	4,5241

(*) Srinivas *et al.* (1969).

Tabela 4.9 – Deslocamento adimensionalizado $\hat{w} = wD/qa^4$ ($\times 10^{-4}$) no ponto: $x = 0,75a$; $y = 0,50b$, para a placa com razão $a/b = 2$.

a/b	h/a	MEC32			MEC64			Soluções Analíticas			
		Reddy	Mindlin	Reissner	Reddy	Mindlin	Reissner	Reddy	Mindlin	Reissner	3D*
2	0,01	5,9700	5,9479	5,9476	5,9739	5,9788	5,9785	5,9861	5,9861	5,9858	5,9859
	0,10	6,1421	6,1519	6,1226	6,1730	6,1754	6,1460	6,1810	6,1810	6,1515	6,1587
	0,20	6,7373	6,7495	6,6320	6,7612	6,7678	6,6498	6,7708	6,7717	6,6536	6,6793

(*) Srinivas *et al.* (1969).

Tabela 4.10 – Tensão de cisalhamento τ_{xz} (KPa) para a placa quadrada com $h/a = 0,10$, no ponto: $x = 0,25 m$; $y = 0,50 m$.

z (m)	MEC32			MEC64			Soluções Analíticas			
	Reddy	Mindlin	Reissner	Reddy	Mindlin	Reissner	Reddy	Mindlin	Reissner	3D*
-0,050	0	1,6374	0	0	1,6367	0	0	1,6364	0	0
-0,025	1,5356	1,6374	1,5350	1,5346	1,6367	1,5343	1,5341	1,6364	1,5341	1,5341
0	2,0474	1,6374	2,046616	2,0462	1,6367	2,0458	2,0455	1,6364	2,0455	2,0455
0,025	1,5356	1,6374	1,5350	1,5346	1,6367	1,5343	1,5341	1,6364	1,5341	1,5341
0,050	0	1,6374	0	0	1,6367	0	0	1,6364	0	0

(*) Srinivas *et al.* (1969).

Na tabela 4.10 pode-se notar que as respostas do MEC para as tensões tangenciais transversas convergem para as respostas de suas respectivas soluções analíticas de placas. Além disso, as soluções de Reissner e Reddy exibem um bom nível de coerência com a solução da elasticidade 3D, sendo o desempenho do Reddy praticamente igual ao de Reissner. Neste quesito a teoria de Mindlin mostra a sua deficiência representando as tensões tangenciais com distribuição constante ao longo da espessura, ao invés das distribuições quadráticas obtidas com os modelos de Reddy e Reissner.

4.5 Placa quadrada simplesmente apoiada submetida a carregamento hidrostático

Uma placa quadrada, simplesmente apoiada e submetida a um carregamento linearmente distribuído q , é mostrada na Figura 4.7.

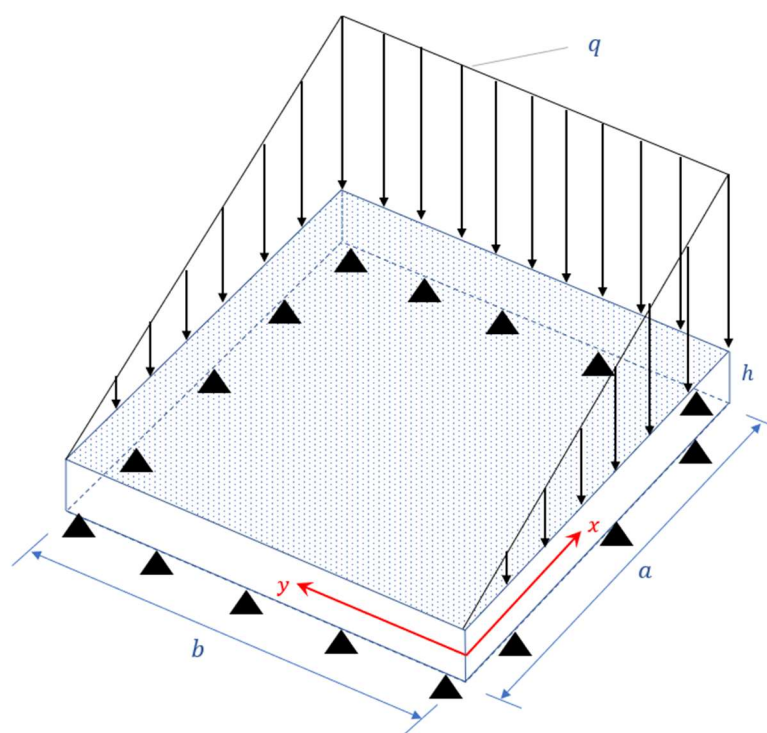


Figura 4.7 – Placa quadrada simplesmente apoiada submetida a carregamento hidrostático.

As propriedades mecânicas são o módulo de elasticidade $E = 200 \text{ MPa}$ e o coeficiente de Poisson $\nu = 0,30$. A discretização em elementos de contorno é a mesma da mostrada na Figura 4.6. As Tabelas 4.11 e 4.12 mostram os deslocamentos adimensionalizados para um conjunto de soluções numéricas do MEC e respostas analíticas associadas às teorias de placas de Reddy, Mindlin e Reissner, além de uma quarta solução exata obtida da teoria da elasticidade 3D. Para o cálculo das tensões de cisalhamento transversas τ_{xz} foram admitidos os seguintes valores $a = b = 1 \text{ m}$, $h = 0,10 \text{ m}$, $q = 10 \text{ kN/m}^2$ e seus resultados são mostrados na Tabela 4.13 para as coordenadas $x = 0,25 \text{ m}$; $y = 0,50 \text{ m}$.

Tabela 4.11 – Deslocamento adimensionalizado no ponto $\hat{w} = wD/qa^4 (\times 10^{-3})$ no ponto: $x = 0,25a$; $y = 0,50b$.

h/a	MEC32			MEC64			Soluções Analíticas			
	Reddy	Mindlin	Reissner	Reddy	Mindlin	Reissner	Reddy	Mindlin	Reissner	3D*
0,01	1,3086	1,3021	1,3020	1,3101	1,3095	1,3094	1,3114	1,3114	1,3114	1,3114
0,10	1,3688	1,3661	1,3569	1,3719	1,3712	1,3619	1,3724	1,3724	1,3632	1,3654
0,20	1,5501	1,5541	1,5173	1,5545	1,5567	1,5197	1,5567	1,5571	1,5202	1,5279

(*) Srinivas *et al.* (1969).

Tabela 4.12 – Deslocamento adimensionalizado no ponto $\hat{w} = wD/qa^4 (\times 10^{-3})$ no ponto: $x = 0,50a$; $y = 0,50b$.

h/a	MEC32			MEC64			Soluções Analíticas			
	Reddy	Mindlin	Reissner	Reddy	Mindlin	Reissner	Reddy	Mindlin	Reissner	3D*
0,01	2,0284	2,0188	2,0186	2,0305	2,0294	2,0292	2,0322	2,0322	2,0321	2,0321
0,10	2,1298	2,1273	2,1116	2,1354	2,1346	2,1189	2,1364	2,1364	2,1206	2,1244
0,20	2,4292	2,4478	2,3848	2,4482	2,4515	2,3883	2,4514	2,4522	2,3890	2,4017

(*) Srinivas *et al.* (1969).

Tabela 4.13 – Tensão de cisalhamento τ_{xz} (kPa) para a placa com $h/a = 0,10$, no ponto: $x = 0,25 m$; $y = 0,50 m$.

z (m)	MEC32			MEC64			Soluções Analíticas			
	Reddy	Mindlin	Reissner	Reddy	Mindlin	Reissner	Reddy	Mindlin	Reissner	3D*
-0,050	0	0,9427	0	0	0,9427	0	0	0,9428	0	0
-0,025	0,8790	0,9427	0,8838	0,8816	0,9427	0,8838	0,8833	0,9428	0,8837	0,8835
0	1,1733	0,9427	1,1783	1,1767	0,9427	1,1784	1,1778	0,9428	1,1783	1,1769
0,025	0,8790	0,9427	0,8838	0,8816	0,9427	0,8838	0,8833	0,9428	0,8837	0,8835
0,050	0	0,9427	0	0	0,9427	0	0	0,9428	0	0

(*) Srinivas *et al.* (1969).

Uma boa convergência do MEC para as respectivas soluções analíticas associadas a cada um dos modelos de placas pode ser vista nas Tabelas 4.11 e 4.12, assim como os resultados de deslocamento das três teorias têm um bom nível de coerência com a solução da elasticidade tridimensional. Os deslocamentos obtidos com o modelo de Reissner ficaram ainda mais próximos da solução da elasticidade 3D e com resultados de Reddy ligeiramente melhores que os de Mindlin em relação à solução 3D.

Na tabela 4.13 pode-se notar que as respostas do MEC para as tensões tangenciais transversas convergem para suas respectivas soluções analíticas de placas. Além disso, as soluções de Reissner e Reddy exibem um bom nível de coerência com a solução da elasticidade 3D, sendo o desempenho do Reddy ligeiramente melhor que o de Reissner. Como esperado, a teoria de Mindlin gera tensões tangenciais com distribuição constante ao longo da espessura, ao invés das distribuições quadráticas obtidas com os modelos de Reddy e Reissner.

4.6 Placa engastada com chanfro submetida a carregamento distribuído linear

Considere uma placa engastada com chanfro submetida a um carregamento distribuído linearmente conforme mostrado na Figura 4.8. Os parâmetros da placa são: $E = 200 \text{ MPa}$; $\nu = 0,30$; $h = 0,10 \text{ m}$; $a_1 = 0,50 \text{ m}$; $a_2 = 1,00 \text{ m}$; $b_1 = 0,50 \text{ m}$; $b_2 = 0,50 \text{ m}$; $q_0 = 10 \text{ kN/m}^2$. A expressão do carregamento linear é dada por $q(Q) = q(x, y) = q_0(1 + x/a_2)$.

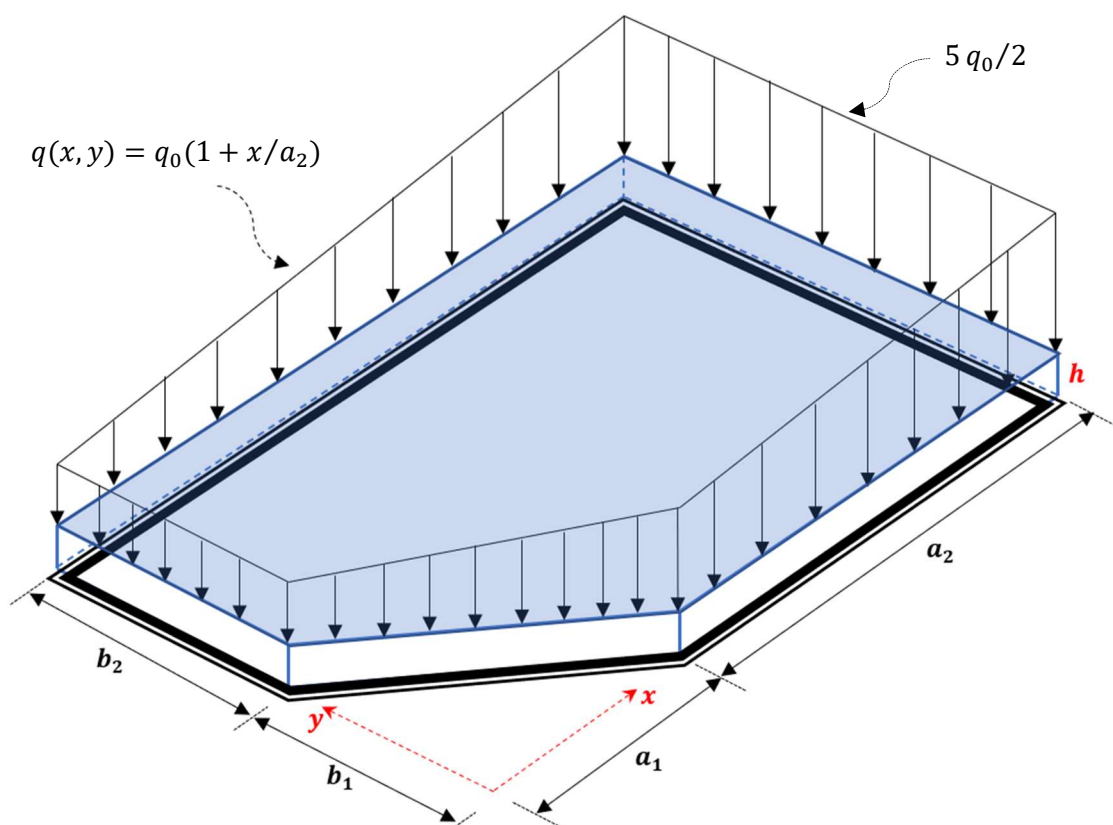


Figura 4.8 – Placa engastada com chanfro submetida a carregamento distribuído linear.

Devido à inexistência de uma solução analítica, para a placa com chanfro engastada, submetida a carregamento linear, optou-se por realizar uma comparação entre o Método dos Elementos Finitos e o Método dos Elementos de Contorno. A Figura 4.9 ilustra a malha de 5648 elementos finitos usando o tipo de elemento “Plate Thick” do software *SAP2000 v.22 Ultimate*. Já a Figura 4.10 mostra as discretizações utilizadas pelo MEC.

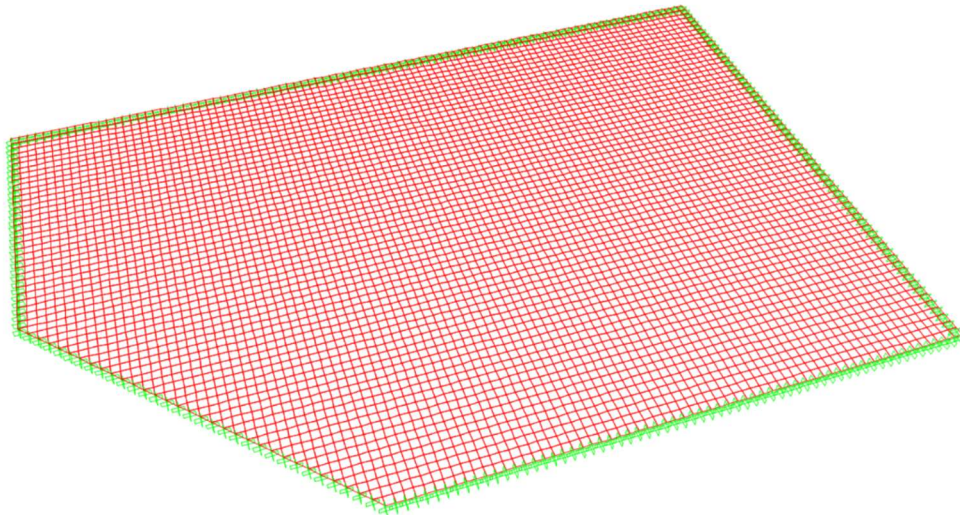


Figura 4.9 – Placa chanfrada modelada em elementos finitos (5648 elementos *Plate Thick*).

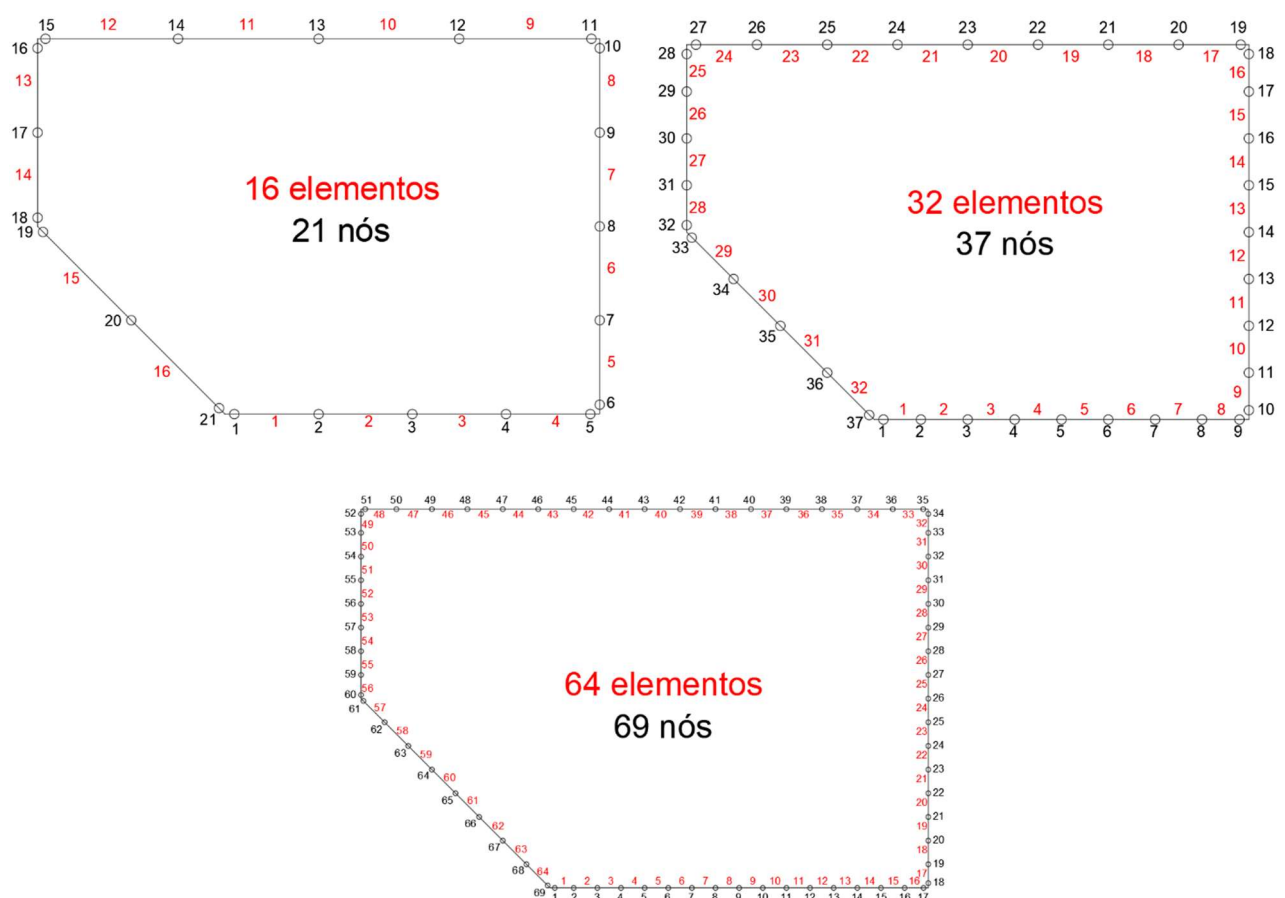


Figura 4.10 – Discretização em elementos de contorno da placa com chanfro.

A Tabela 4.14 e a Figura 4.11 mostram os resultados do MEF e do MEC obtidos para a placa chanfrada sob carregamento linear, respectivamente, para o deslocamento w e para o momento fletor M_{xx} . Na Fig. 4.11 o resultado de momento é mostrado apenas para a malha MEC64.

Tabela 4.14 – Deslocamento w ($\times 10^{-3} m$), no ponto $x = 0,50 m$ e $y = 0,50 m$, para a placa chanfrada sob carregamento linear.

	h (m)	MEC16	MEC32	MEC64	MEF	Diferença Relativa (%)
REISSNER	0,01	1221,8120	1216,379	1213,2127	1213,1772	0,0029
	0,10	1,4278	1,4276	1,4269	1,4251	0,1231
	0,15	0,5001	0,5000	0,4999	0,4961	0,7592
	0,20	0,2558	0,2557	0,2557	0,2537	0,7895
MINDLIN	0,01	1221,7567	1213,6381	1213,2127	1213,1772	0,0029
	0,10	1,4277	1,4275	1,4268	1,4251	0,1197
	0,15	0,5001	0,4999	0,4999	0,4962	0,7449
	0,20	0,2557	0,2556	0,2556	0,2537	0,7539
REDDY	0,01	1221,8453	1214,5115	1213,4216	1213,1772	0,0201
	0,10	1,4461	1,4355	1,4251	1,4251	0,0035
	0,15	0,5055	0,5013	0,4963	0,4962	0,0276
	0,20	0,2565	0,2560	0,2556	0,2537	0,7330

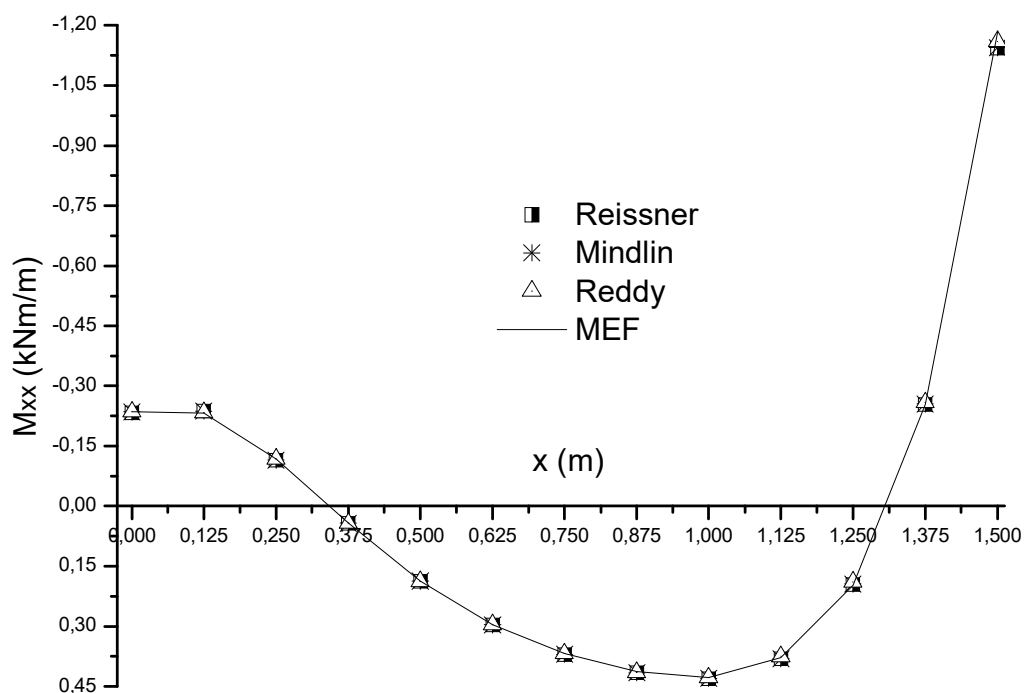


Figura 4.11 – Momento fletor M_{xx} (kNm/m), ao longo da linha central, para a placa chanfrada com $h = 0,10 m$ sob carregamento linear.

Os resultados são apresentados para placas chanfradas com quatro espessuras distintas, variando desde uma placa delgada com $h = 0,01\text{ m}$ até uma placa espessa com $h = 0,20\text{ m}$. Da análise da Tabela 4.14 os dois métodos numéricos apresentam um bom desempenho de resultados de deslocamentos do MEC (w_{MEC}) e do MEF (w_{MEF}), havendo uma pequena diferença relativa entre eles ($dif < 1\%$), onde $dif = (|w_{MEC} - w_{MEF}|/w_{MEF}) \times 100$. Analisando a Fig. 4.11 observa-se que os resultados para momento fletor obtidos através do MEC, aplicado às três teorias de placas, têm o mesmo comportamento do MEF ao longo da linha central da placa chanfrada.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES

O desenvolvimento desta tese foi caracterizado pela investigação e proposta de soluções em dois problemas para aplicação do Método de Elementos de Contorno (MEC) em análise estática de placas deformáveis por cortante.

Um dos caminhos para se estabelecer formulações puras do MEC (sem integrais de domínio) é aplicando-se o Método da Reciprocidade Múltipla (MRM). Conforme registro da literatura técnica, a dificuldade de aplicação do MRM em problemas de interesse ocorre devido ao cálculo das primitivas na fórmula de recorrência para soluções fundamentais. Sendo essas primitivas também conhecidas como soluções fundamentais de ordem superior e que estão presentes na operacionalização da transformação da integral de domínio de interesse em um somatório de integrais de contorno, cujo número de parcelas dependem do número de vezes (ordem) de aplicação recursiva da segunda identidade de Green. Neste cenário é que surge a primeira contribuição original desta tese, na qual consistiu no estabelecimento do Método da Reciprocidade Múltipla (MRM) para ambas as placas de Reissner e Mindlin, submetidas a carregamentos polinomiais genéricos, visando disponibilizar uma formulação pura do MEC. Para este fim, foram deduzidas soluções fundamentais de ordem superior compatíveis com aplicações genéricas recursivas da segunda identidade de Green (que é a essência do MRM).

Diversos exemplos numéricos foram apresentados os quais mostraram uma boa convergência dos resultados do MEC para soluções analíticas, desde os casos mais simples como as distribuições lineares de carregamento até os polinômios de ordens superiores. Vale ressaltar que o MRM aqui desenvolvido também pode lidar com outras funções contínuas não polinomiais desde que essas possam ser expandidas em séries polinomiais tais como os carregamentos exponenciais e senoidais.

A segunda contribuição original da tese foi estabelecer uma formulação pura regular do Método dos Elementos de Contorno para a Teoria de Placas por deformação por cortante de terceira ordem de Reddy. Para este fim, equações integrais, soluções fundamentais, transformações de integrais de domínio de carga em equações de contorno foram deduzidas pela primeira vez na literatura e o sistema algébrico resultante foi devidamente implementado em um código computacional. Estudos numéricos em placas com geometrias poligonais e circulares foram realizados e comparados com soluções analíticas e numéricas, mostrando que os resultados do MEC têm um bom desempenho.

De um modo geral nos exemplos analisados, percebe-se que as teorias de Reissner, Mindlin, e Reddy produzem resultados de deslocamentos próximos entre si, tendendo serem ainda mais próximos os resultados de Mindlin e Reddy (ambas baseadas na filosofia de deslocamentos assumidos nas direções do plano médio da placa). No caso de resultados de tensões tangenciais transversas o cenário muda, de forma que as respostas de Reissner e Reddy ficam mais próximas entre si, do que Mindlin. Isto decorre do fato que as duas primeiras representam quadraticamente a variação das tensões tangenciais transversas ao longo da espessura da placa, enquanto que em Mindlin essas tensões são constantes.

5.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

Podem ser explorados em trabalhos futuros:

- Estudar o MEC aplicado às placas de Reddy apoiadas sobre base elástica;
- Estudar numericamente os termos de alta ordem para as reações de canto, aplicando o MEC em placas de Reddy;
- Estudar o MEC aplicado à análise dinâmica de placas de Reddy;
- Estabelecer o Método da Reciprocidade Múltipla (MRM) para a placa de Reddy submetida a carregamentos polinomiais genéricos;
- Estudar o MEC aplicado às placas duplas elasticamente conectadas baseadas na teoria de placas de Reddy.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. *Mathematical Functions*. Technical Report, New York, EUA (1965).
- ALIABADI, F. M. H. *The Boundary Element Method: Applications in Solids and Structures, Volume 2*, Wiley. Chichester, 2002.
- ALTOÉ, M.; RIBEIRO, N. S.; KARAM, V. J. Analysis of simply supported and clamped Reissner's plates on Pasternak-type foundation by the Boundary Element Method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 52, 64 – 70 (2015).
- ANDRADE, R. C. Uma Análise das Soluções Fundamentais Aplicáveis as Placas Espessas pelas Teorias de Reissner e Mindlin e suas Relações com a Teoria Clássica para o Uso no Método dos Elementos de Contorno. Dissertação (Mestrado). Faculdade de Engenharia Civil. Universidade Estadual de Campinas (2001).
- ANTES, H. Fundamental solution and integral equations for Timoshenko beams. Pergamon. *Computers and Structures*, 81, 383 – 396 (2003).
- ANTES, H.; SHANZ, M.; ALVERMANN, S. Dynamic analyses of plane frames by integral equations for bars and Timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration*, 276, 807 – 836 (2004).
- BAIZ, P. M.; ALIABADI, M. H. Local buckling of thin-walled structures by the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 33 (3), 302 – 313 (2009).
- BANERJEE, P.K.; BUTTERFIELD, R. *Boundary Element Methods in Engineering*. Science, McGraw-Hill. London, 1981.
- BALAS, J.; SLADEK, V.; SLADEK, J. The Boundary Integral Equation Method for Plates Resting on a Two Parameter Foundation. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 51, 574 – 580 (1984).
- BELKAID, K.; TATI, A.; BOUMARAF, R. A Simple Finite Element with Five Degrees of Freedom Based on Reddy's Third-Order Shear Deformation Theory. *Mechanics of Composite Materials*, 52, 257 – 270 (2016).
- BEZINE, G. Boundary integral formulation for plate flexure with arbitrary boundary conditions. *Mechanics Research Communications*, 5 (4), 197–206 (1978).
- BICKFORD, W. B. A consistent higher order beam theory. *Developments in Theoretical and Applied Mechanics*, 11, 37 – 50 (1982).
- CAICEDO, J.; PORTELA, A. Cracked plate analysis with the dual boundary element method and Williams' eigenexpansion. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 52, 16 – 23 (2015).

- CHAKRABARTI, A.; SHEIKH A. H. A new triangular element based on higher order shear deformation theory for flexural vibration of composite plates. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2, 163 – 184 (2002).
- COSTA, D. I. G. Nova formulação do método dos elementos de contorno para associação de placas espessas. Tese (Doutorado). Universidade de Brasília, 133 páginas (2014).
- COSTA JR, J. A.; BREBBIA, C. A. The boundary element method applied to plates on elastic foundations. *Engineering Analysis*, 2(4), 174–183 (1985).
- COWPER, G. R. The shear coefficient in Timoshenko's beam theory. *Journal of Applied Mechanics*, 33, 335 – 340 (1966).
- DAROS, C. H. The dynamic fundamental solution and BEM formulation for laminated anisotropic Kirchhoff plates. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 54, 19 – 27 (2015).
- DE BARCELLOS, C. S.; SILVA, L. H. M. A Boundary Element Formulation for the Mindlin's Plate Model. In: Brebbia, C.A., Venturini, W.S., eds., *Boundary Element Techniques: Applications in Stress Analysis and Heat Transfer*, Southampton (1987).
- DOVAL, P. C. M.; ALBUQUERQUE, E. L.; SOLLERO, P. Numerical aspects of the radial integration method in boundary element formulation for stability analysis of thin perforated plates of laminated composites. *Proceedings of the 10th World Congress on Computational Mechanics*; 2012 Jul 8-13; São Paulo, BR. São Paulo: Blucher, 1 (1), 3879 – 3887 (2014).
- ELZEIN, A.; SYNGELLAKIS, S. Dual reciprocity in boundary element formulations of the plate buckling problem. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 9 (2), 175 – 184 (1992).
- EL-ZAFRANY, A. Boundary Element Stress Analysis of Thick Reissner Plates in Bending under Generalized Loading. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2 (1), 27 – 38 (2001).
- Fernandes, G. BEM formulation for linear bending analysis of plates reinforced by beams considering different materials. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 33 (8–9), 1132 – 1140 (2009).
- FORBES, D. J.; ROBINSON, A. R. Numerical analysis of elastic plates and shallow shells by an integral equation method. Structural research series report no 345. Urbana, USA: University of Illinois (1969).
- GUMINIAK, M. Static and Free Vibration Analysis of Thin Plates of the Curved Edges by the Boundary Element Method Considering an Alternative Formulation of Boundary Conditions. *Engineering Transactions*, 64 (1), 3 – 32 (2016).
- HARTMANN, F.; ZORMANTEL, R. The direct boundary element method for plate bending. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23, 2049 – 2069 (1986).
- HÖRMANDER, L. *Linear Partial Differential Operators*. Berlin, Springer-Verlag, 287 páginas (1964).
- HULL, A. J. An exact analytical expression of the shear coefficient in the Mindlin plate equation. *Journal of the Acoustical Society of America*, 117(4), 2601–2601 (2005).

- INGBER, M. S.; MAMMOLI, A. A.; BROWN, M. J. A comparison of domain integral evaluation techniques for boundary element methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52, 417 – 32 (2001).
- JASWON, M. A.; MAITI, M.; SYMM, G. T. Numerical biharmonic analysis and some applications. *Int. J. Solids Struct*, 3: 309 - 332 (1967).
- KARAM, V. J. Aplicação do Método dos Elementos de Contorno à Teoria de Reissner para Flexão de Placas. Dissertação de Mestrado, COPPE, Rio de Janeiro, 142 páginas (1986).
- KARAM, V. J.; TELLES, J. C. On boundary elements for Reissner's plate theory. *Engineering Analysis*, 5(1), 21 – 27 (1988).
- KARAM, V. J. Análise de Flexão de Placas pelo MEC incluindo Não-Linearidade Física. Tese (Doutorado). COPPE. Universidade Federal do Rio de Janeiro (1992).
- KATSIKADELIS, J. T.; BABOUSKOS, N. G. Stiffness and buckling optimization of thin plates with BEM. *Arch Appl Mech*, 82 (10–11), 1403 – 1422 (2012).
- KIRCHHOFF, G. Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 40, 51-88 (1850).
- LEVINSON, M. An accurate simple theory of statics and dynamics of elastic plates. *Mechanics Research Communications*, 7, 340 – 350 (1980).
- LIU, Y. Elastic stability analysis of thin plate by the boundary element method – A new formulation. *Engineering Analysis*, 4(3): 160 – 164 (1987).
- LONG, S. Y.; BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F. A Boundary element bending analysis of moderately thick plates. *Engineering Analysis*, 5(2): 64 – 74 (1998).
- MAIA, A. F. Implementação da teoria de Reissner para placas com o Método dos elementos de Contorno em ambiente computacional orientado a objetos. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia – Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas. Universidade Federal de Minas Gerais (2013).
- MAIA, C. D. Flexão e estabilidade de barras usando o método de Bickford-Reddy: Uma abordagem pelo método dos elementos de contorno. Dissertação (Mestrado). Centro de Tecnologia. Universidade Federal da Paraíba (2016).
- MAIA, C. D.; BRITO, W. K. F.; MENDONÇA, A. V. A static boundary element solution for Bickford–Reddy beam. *Engineering with Computers*, 36, 1435 – 1451 (2020).
- MARCZAK, R. J. Revisiting Some Developments of Boundary Elements for Thick Plates in Brazil. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 12, 948 – 979 (2015).
- MENDONÇA, A.V.; PAIVA, J. B. A boundary element formulation for the static analysis of raft foundations on piles. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 24, 237 – 247 (2000).
- MINDLIN, R. D. A force at the interior point of a semi-infinite solid. *Physics*, 7, 195 – 202 (1951).

- MINDLIN, R. D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic, elastic plates. *J. Appl. Mech.* 18, 31 – 38 (1951).
- MOBASSHER, M. E.; RASHED, Y. F.; ELHADDAD, W. E. BIM Standards for Automated BEM Structural Analysis and Design of RC Plates. *Journal of Computing in Civil Engineering*, 30 (4), 1 – 17 (2016).
- MOITA, J. S.; ARAÚJO, A. L.; MARTINS, P. G.; SOARES, C. M. M.; SOARES, C. A. M. Analysis of Active-Passive Plate Structures Using a Simple and Efficient Finite Element Model. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 18, 159 – 169 (2011).
- MURTHY, V. V. An improved transverse shear deformation theory for laminate anisotropic plates. NASA Technical Paper 1903 (1981).
- NEVES, A. C.; BREBBIA, C. A. The multiple reciprocity boundary method element method in elasticity: a new approach for transforming domain integrals to the boundary. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31, 709 – 727 (1991).
- OLIVEIRA, S. R. C.; KARAM, V. J. Elastoplastic analysis of Reissner's plates by the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 64, 247 – 254 (2016).
- OLIVEIRA NETO, L.; PAIVA, J. B. Analysis of curved edge plates by the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 12, 57 – 64 (1993).
- OZER, H. A Variational Formulation and Analysis of Polar Orthotropic Circular Plates Using an Energy Principle, Part II: Thick Plates. *Science and Engineering of Composite Materials*, 15, 59 – 70 (2008).
- PAIVA, J. B. Formulação do método dos elementos de contorno para a análise da interação solo-estrutura. Tese (Livre-docência). Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo (1993).
- PAIVA, J. B. Formulação do método dos elementos de contorno para flexão de placas e suas aplicações em engenharia de estruturas. Tese (Doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo (1987).
- PAIVA, J. B.; ALIABADI, M. H. Boundary element analysis of zoned plates in bending. *Computational Mechanics*, 25, 560 – 566 (2000).
- PALERMO JÚNIOR, L. On the harmonic response of plates with the shear deformation effect using the elastodynamic solution in the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 31, 176 – 183 (2007).
- PALERMO JÚNIOR, L. Análise Elástica de Placas e o Método dos Elementos de Contorno. Tese (Livre-Docência). Faculdade de Engenharia Civil. Universidade Estadual de Campinas (2000).
- PISA, C.; ALIABADI, M. H. Boundary element analysis of stiffened panels with repair patches. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 56, 162 – 175 (2015).

- PISA, C.; ALIABADI, M. H. Fatigue crack growth analysis of assembled plate structures with dual boundary element method. *Engineering Fracture Mechanics* 98, 200 – 213 (2013).
- PROVIDASKIS, C. P. e BESKOS, D. E. Dynamic analysis of beams by the boundary element method. *Computers and Structures*, 22 (6), 957-964 (1986).
- PURBOLAKSONO, J.; ALIABADI, M. H. Buckling analysis of shear deformable plates by boundary element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62(4): 537 – 563 (2005).
- RAGHU, P.; RAJAGOPAL, A.; REDDY, J. N. Nonlocal nonlinear finite element analysis of composite plates using TSDT. *Composite Structures*, 185, 38 – 50 (2018).
- RASHED, Y. F. An alternative treatment of body forces in the BEM for thick plates resting on elastic foundations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 24: 491 – 501 (2000a).
- RASHED, Y. F. Derivation of particular solutions for linear loading in the thick plate theory. *Computational Mechanics*, 25: 385 – 393 (2000b).
- RASHED, Y. F. *Boundary element formulations for thick plates*. WIT Press, Southampton, UK (2000c).
- RASHED, Y. F. Boundary element analysis of post-tensioned slabs. *International Journal of Advanced Structural Engineering*, 7, 143 – 158 (2015).
- REDDY, J. N. *Theory and analysis of elastic plates and shells*. CRC Press (2007).
- REDDY, J. N. A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation. *International Journal of Solids Structures*, 20, 881– 896 (1984).
- REDDY, J. N.; WANG, C. M. Relationships Between Classical and Shear Deformation Theories of Axisymmetric Circular Plates. *AIAA Journal*, 35, 1862 – 1868 (1997).
- REISSNER, E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J. Appl Mech.*, 12, 69-76 (1945).
- RIBEIRO, G. O. Sobre a Formulação do Método dos Elementos de Contorno para a Flexão de Placas Usando as Hipóteses de Reissner. Tese de Doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo – EESC/USP, 284 páginas (1992).
- SAPOUNTZAKIS, E. J.; DIKAROS, I. C. Large deflection analysis of plates stiffened by parallel beams. *Engineering with Computers*, 35, 254 – 271 (2012).
- SASIKALA, D.; AMEEN, M.; NAMBUDIRIPAD, K. B. M. Nonsingular boundary element flexural analysis of stiffened plates. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 52, 81 – 91, (2015).
- SAMAAN, M.F.; NASSAR, M. E.; RASHED, Y. F. Taylor series fast multipole boundary element method for solution of Reissner's shear deformable plate bending problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 59, 23 – 35 (2015).
- SHEHATA, O. E.; FARIDA, A. F.; RASHED, Y. F. (2018) Practical boundary element method for piled rafts. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 97, 67 – 81 (2018).

- SHI, G. A new simple third-order shear deformation theory of plates. *International Journal of Solids and Structures*, 44, 4399 – 4417 (2007).
- SHI, G., BEZINE, G. A general boundary integral formulation for the anisotropic plate bending problems. *J Compos Mater*, 22, 694 – 716 (1988).
- SLADEK, V.; SLADEK, J. Multiple reciprocity method in BEM formulations for solution of plate bending problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 17, 161 – 173 (1996).
- SOARES JR., R. A.; PALERMO J. R.; WROBEL, L. C. Application of the dual reciprocity method for the buckling analysis of plates with shear deformation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 106, 427 – 439 (2019).
- SRINIVAS, S.; RAO, A. K.; RAO, C. V. J. Flexure of Simply Supported Thick Homogeneous and Laminated Rectangular Plates. *Z. angew. Math. Mech.*, 49, 449-458 (1969).
- STEPHEN, N. G. Mindlin Plate Theory: Best shear coefficient and higher spectra validity. *Journal of Sound and Vibration*, 202(4), 539 – 553 (1997).
- STERN, M. A general boundary integral formulation for the numerical solution of plate bending problems. *Int. J. Sol. Struct*, 15, 769-782 (1979).
- SU, C.; XU, J. Reliability analysis of Reissner plate bending problems by stochastic spline fictitious boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 51, 37 – 43, (2015).
- SU, C.; XU, J. Stochastic spline fictitious boundary element method for analysis of thin plate bending problems with random fields. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 58, 86 – 98, (2015).
- SYNGELLAKIS, S.; ELZEIN, A. Plate buckling loads by the boundary element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37, 1763 – 1778 (1994).
- SYNGELLAKIS, S.; KANG, M. A Boundary Element Solution of the Plate Buckling Problem. *Engineering Analysis*, 4(2): 75 – 81 (1987).
- TIMOSHENKO, S. P.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. Theory of plates and shells. McGraw-Hill: Singapore; 1959.
- TIMOSHENKO, S. P. On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section. *Philosophical Magazine*, 43, 125 – 131 (1922).
- TOTTENHAM, H. The boundary element method for plates and shells. In: Developments in boundary element methods—I. London: Applied Science, 173–205 (1979).
- UGURLU, B. Boundary element method based vibration analysis of elastic bottom plates of fluid storage tanks resting on Pasternak foundation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 62, 163 – 176 (2016).
- USECHE, J.; HARNISH, C. A boundary element method formulation for modal analysis of doubly curved thick hollow shells. *Applied Mathematical Modelling*, 40, 3591 – 3600 (2016).
- VANDER WEEËN, F. Application of the boundary integral equation method to Reissner's plate model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18, 1 – 10 (1982).

- WANG, C. M.; NAZMUL, I. M.; MATSUMOTO, T.; WANG, Q. Bending Solutions of Sectorial Thick Plates Based on Reissner Plate Theory. *Mechanics Based Design of Structures and Machines: An International Journal*, 33:1, 51-77 (2005).
- WANG, C. M.; LIM, G. T. Bending solutions of sectorial Mindlin plates from Kirchhoff plates. *Journal of Engineering Mechanics*, 126(4): 367-372 (2000).
- WANG, C. M.; REDDY, J. N.; LEE, K. H. Shear Deformable Beams and Plates: Relationships with Classical Solutions. Elsevier (2000).
- WEN, P. H.; ALIABADI, M. H.; YOUNG, A. Transformation of domain integrals to boundary integrals in BEM analysis of shear deformable plate bending problems. *Comp Mech*, 24, 304 – 309 (1999).
- WEN, P. H.; ALIABADI, M. H.; YOUNG, A. Application of dual reciprocity method to plates and shells. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 24, 583 – 590 (2000).
- WESTPHAL JUNIOR, T. Abordagem direta dos modelos de placa de Reissner e Mindlin pelo método dos elementos de contorno. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina. Centro Tecnológico (1990).
- XIAO-YAN, L.; MAO-KUANG, H.; XIUXI, W. Geometrically nonlinear analysis of a Reissner type plate by the boundary element method. *Computers and Structures*, 37(6), 911 – 916 (1990).
- YU, Q. Q.; CHEN, T.; GU, X. L.; ZHAO, X. L. Boundary element analysis of edge cracked steel plates strengthened by CFRP laminates. *Thin-Walled Structures*, 100, 147–157 (2016).

ANEXO A

Soluções Analíticas

A.1 Soluções de Navier para Placas Retangulares Simplesmente Apoiadas

A.1.1 Placas de Reissner e de Mindlin

De acordo com Reddy (2007), para obtenção dos deslocamentos e rotações, em uma placa simplesmente apoiada, as soluções analíticas para as placas de Reissner e de Mindlin são dadas por:

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (\text{A.1})$$

$$\phi_x(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (\text{A.2})$$

$$\phi_y(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Y_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (\text{A.3})$$

Ademais, o carregamento pode ser expandido em série como mostrado a seguir:

$$g(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (\text{A.4})$$

Usando as equações (A.1), (A.2) e (A.3) os momentos e forças cisalhantes analíticos são dados por:

$$M_{xx}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} D \left(\frac{\partial \phi_x(x, y)}{\partial x} + \nu \frac{\partial \phi_y(x, y)}{\partial y} \right) \quad (\text{A.5})$$

$$M_{yy}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} D \left(\frac{\partial \phi_y(x, y)}{\partial y} + \nu \frac{\partial \phi_x(x, y)}{\partial x} \right) \quad (\text{A.6})$$

$$Q_x(x, y) = C_1 \left[\phi_x(x, y) + \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \right] \quad (\text{A.7})$$

$$Q_y(x, y) = C_1 \left[\phi_y(x, y) + \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \right] \quad (\text{A.8})$$

Os coeficientes das equações (A.1)-(A.3) podem ser determinados pela resolução do sistema a seguir:

$$[Z]\{U\} = \{V\} \quad (\text{A.9})$$

onde:

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix}, \{U\} = \begin{Bmatrix} W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{Bmatrix}, \{V\} = \begin{Bmatrix} -Q_{mn}/C_1 \\ m\pi Q_{mn}C_4 \\ n\pi Q_{mn}C_4 \end{Bmatrix}, Z_{11} = -\frac{\pi^2(a^2n^2+b^2m^2)}{a^2b^2}, Z_{12} = -\frac{\pi m}{a},$$

$$Z_{13} = -\frac{\pi n}{b}, Z_{21} = -\frac{\pi m}{a}C_1, Z_{22} = C_5 + C_3\frac{\pi^2m^2}{a^2}, Z_{23} = C_3\frac{\pi^2mn}{ab}, Z_{31} = \frac{\pi n}{b}C_1, Z_{32} = C_3\frac{\pi^2mn}{ab},$$

$$Z_{33} = C_5 + C_3\frac{\pi^2n^2}{b^2}. C_1 = \frac{K_s E h}{2(1+\nu)}, C_2 = \frac{D(1-\nu)}{2}, C_3 = \frac{D(1+\nu)}{2}, C_5 = C_2\frac{\pi^2(a^2n^2+b^2m^2)}{a^2b^2} + C_1; K_s = \frac{5}{6};$$

$$\lambda^2 = \frac{10}{\sqrt{h}}; h \text{ é a espessura da placa.}$$

Além disso, os coeficientes para os termos de carga em (A.4) são dados por:

$$Q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy \quad (\text{A.10})$$

Vale registrar, ainda, que $C_4 = \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2}$ para a placa de Reissner e $C_4 = 0$ para a placa de Mindlin em $\{V\}$ da Equação (A.9).

A.1.2 Placas de Reddy

De maneira análoga à seção A.1.1, os coeficientes das equações (A.1), (A.2) e (A.3) para a Teoria de Placas de Reddy, podem ser determinados pela resolução do sistema a seguir:

$$[R]\{U\} = \{T\} \quad (\text{A.11})$$

onde

$$[R] = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}, \{U\} = \begin{Bmatrix} W_{mn}^R \\ X_{mn}^R \\ Y_{mn}^R \end{Bmatrix}, \{T\} = \begin{Bmatrix} Q_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, R_{11} = -s_1 A - \alpha b_4 A^2, R_{12} = B, R_{13} = C,$$

$$R_{21} = B, R_{22} = E + F\left(\frac{\pi^2 n^2}{b^2}\right), R_{23} = DD, R_{31} = C, R_{32} = DD, R_{33} = E + F\left(\frac{\pi^2 m^2}{a^2}\right);$$

$$A = \frac{\pi^2(a^2n^2+b^2m^2)}{a^2b^2}; B = -s_1\left(\frac{\pi m}{a}\right) + b_2\left[\frac{\pi^3 m(a^2n^2+b^2m^2)}{a^3b^2}\right]; C = -s_1\left(\frac{\pi n}{b}\right) + b_2\left[\frac{\pi^3 n(a^2n^2+b^2m^2)}{a^2b^3}\right];$$

$DD = -b_1 \left(\frac{1+\nu}{2} \right) \frac{\pi^2 mn}{ab}$; $E = -b_1 A - s_1$; $F = b_1 \left(\frac{1+\nu}{2} \right)$; h é a espessura da placa; Q_{mn} é dado pela equação (A.10).

Portanto, a solução analítica dos deslocamentos, considerando a teoria de Reddy, é dada por:

$$w^R(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{mn}^R \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (\text{A.12})$$

$$\phi_x^R(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_{mn}^R \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (\text{A.13})$$

$$\phi_y^R(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Y_{mn}^R \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (\text{A.14})$$

Usando as equações (A.12), (A.13) e (A.14), os momentos e forças cisalhantes analíticos são dados por:

$$M_{xx}^R(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4D}{5} \left(\frac{\partial \phi_x^R(x, y)}{\partial x} + \nu \frac{\partial \phi_y^R(x, y)}{\partial y} \right) - \frac{D}{5} \left(\frac{\partial^2 w^R(x, y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w^R(x, y)}{\partial y^2} \right) \quad (\text{A.15})$$

$$M_{yy}^R(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} D \left(\frac{\partial \phi_y^R(x, y)}{\partial y} + \nu \frac{\partial \phi_x^R(x, y)}{\partial x} \right) - \frac{D}{5} \left(\frac{\partial^2 w^R(x, y)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w^R(x, y)}{\partial x^2} \right) \quad (\text{A.16})$$

$$Q_x^R(x, y) = \frac{2hG}{3} \left[\phi_x^R(x, y) + \frac{\partial w^R(x, y)}{\partial x} \right] \quad (\text{A.17})$$

$$Q_y^R(x, y) = \frac{2hG}{3} \left[\phi_y^R(x, y) + \frac{\partial w^R(x, y)}{\partial y} \right] \quad (\text{A.18})$$

A.2 Solução de Levy para Placas de Reissner e de Mindlin

Considere uma placa retangular com duas bordas opostas simplesmente apoiadas, uma solução baseada em Levy em termos de séries trigonométricas para deslocamento, rotações e carregamento pode ser assumida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} A_m(y) \sin(X_m x), & g(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} G_m(y) \sin(X_m x), \\ \theta_y(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} B_m(y) \sin(X_m x), & \theta_x(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} C_m(y) \cos(X_m x). \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

onde $X_m = m\pi x/a$.

Substituindo a Eq. (A.19) nas Eqs. (2.9) e (2.10), as equações governantes são reduzidas a:

$$\begin{aligned} a_1 \frac{\partial^2 C_m}{\partial y^2} - (X_m^2 + s_1)C_m + b_1 X_m \frac{\partial B_m}{\partial y} - s_1 X_m A_m &= -X_m G_m f a t / D, \\ -b_1 X_m \frac{\partial C_m}{\partial y} - a_1 (X_m^2 + s_1)B_m + \frac{\partial^2 B_m}{\partial y^2} - s_1 \frac{\partial A_m}{\partial y} &= -\frac{\partial G_m}{\partial y} f a t / D, \\ -s_1 X_m C_m + s_1 \frac{\partial B_m}{\partial y} + s_1 \left(-X_m^2 A_m + \frac{\partial^2 A_m}{\partial y^2} \right) &= -G_m / D, \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

onde:

$$f a t = \begin{cases} \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2}, & \text{Reissner} \\ 0, & \text{Mindlin} \end{cases}, \quad a_1 = \frac{1-\nu}{2}, \quad b_1 = \frac{1+\nu}{2}, \quad s_1 = \left(\frac{1-\nu}{2}\right)\lambda^2 \text{ and } \lambda^2 = \frac{10}{h^2}.$$

A solução geral da Eq. (A.20) pode ser dividida em soluções homogêneas e particulares. Considerando apenas a parte homogênea da Eq. (A.20) e usando manipulações algébricas convenientes, as seguintes equações podem ser escritas:

$$0 = X_m^4 \bar{A}_m + \frac{\partial^4 \bar{A}_m}{\partial y^4} - 2X_m^2 \frac{d^2 \bar{A}_m}{dy^2}, \quad (\text{A.21})$$

$$a_1 \frac{d^2 \bar{B}_m}{dy^2} - (a_1 X_m^2 + s_1) \bar{B}_m = (s_1 - b_1 X_m^2) \frac{d \bar{A}_m}{dy} + b_1 \frac{d^3 \bar{A}_m}{dy^3}, \quad (\text{A.22})$$

$$a_1 \frac{d^2 \bar{C}_m(y)}{dy^2} - (a_1 X_m^2 + s_1) \bar{C}_m = (s_1 - b_1 X_m^2) X_m \bar{A}_m + b_1 X_m \frac{d^2 \bar{A}_m}{dy^2}. \quad (\text{A.23})$$

As soluções das Eqs. (A.21), (A.22) e (A.23) são dadas, respectivamente, por:

$$\bar{A}_m(y) = c_{1m} \sinh(yX_m) + c_{2m} y X_m \sinh(yX_m) + c_{3m} \cosh(yX_m) + c_{4m} y X_m \cosh(yX_m) \quad (\text{A.24})$$

$$\begin{aligned} \bar{B}_m &= -c_{1m} X_m \cosh(yX_m) - c_{3m} X_m \sinh(yX_m) + \\ &+ c_{2m} X_m^2 \left[-y \cosh(yX_m) - 2 \frac{X_m}{s_1} \left(a_1 + b_1 + \frac{s_1}{2X_m^2} \right) \sinh(yX_m) \right] + \\ &+ c_{4m} X_m^2 \left[-y \sinh(yX_m) - 2 \frac{X_m}{s_1} \left(a_1 + b_1 + \frac{s_1}{2X_m^2} \right) \cosh(yX_m) \right] + \\ &+ c_{5m} \sinh \left(y \sqrt{X_m^2 + \frac{s_1}{a_1}} \right) + c_{6m} \cosh \left(y \sqrt{X_m^2 + \frac{s_1}{a_1}} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

$$\begin{aligned}
\bar{C}_m = & -c_{1m}X_m \sinh(yX_m) - c_{3m}X_m \cosh(yX_m) + \\
& + c_{2m}X_m^2 \left[-y \sinh(yX_m) - 2 \frac{X_m}{s_1} (a_1 + b_1) \cosh(yX_m) \right] + \\
& + c_{4m}X_m^2 \left[-y \cosh(yX_m) - 2 \frac{X_m}{s_1} (a_1 + b_1) \sinh(yX_m) \right] + \\
& + c_{5m} \sinh \left(y \sqrt{X_m^2 + \frac{s_1}{a_1}} \right) + c_{6m} \cosh \left(y \sqrt{X_m^2 + \frac{s_1}{a_1}} \right)
\end{aligned} \tag{A.26}$$

onde c_{1m} até c_{6m} são as constantes a serem determinadas de acordo com as condições de contorno prescritas da placa.

Soluções particulares para a Eq. (A.20) dependem do tipo de carregamento usado. Se for assumido que as cargas têm distribuição constante ao longo da direção y e $B_{m0} = 0$, as Eqs. (A.24-A.26) são reduzidas a um sistema algébrico da seguinte forma

$$-(X_m^2 + s_1)C_{m0} - s_1X_mA_{m0} = -\frac{X_mG_mfat}{D}, \quad s_1C_{m0} + s_1X_mA_{m0} = \frac{G_m}{X_mD}. \tag{A.27}$$

Resolvendo a Eq. (A.27), tem-se:

$$C_{m0} = \frac{G_m}{X_mD} \left(fat - \frac{1}{X_m^2} \right), A_{m0} = \frac{G_m}{s_1DX_m^4} [s_1 + X_m^2 - X_m^2s_1fat] \tag{A.28}$$

As expressões finais para deslocamentos e rotações são dadas por:

$$\begin{aligned}
w(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} [\bar{A}_m(y) + A_{m0}(y)] \sin(X_mx) \\
\theta_x(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} [\bar{C}_m(y) + C_{m0}(y)] \cos(X_mx) \\
\theta_y(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \bar{B}_m(y) \sin(X_mx)
\end{aligned} \tag{A.29}$$

onde $\bar{A}_m$, $\bar{B}_m$ e $\bar{C}_m$ são respectivamente dados pelas Eqs. (A.25-A.26), enquanto C_{m0} e A_{m0} são mostrados na Eq. (A.28).

Além disso, os coeficientes do termo de carga em (A.20) são dados por:

$$G_{mn} = \frac{2}{a} \int_0^a g(x, y) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \tag{A.30}$$

Para a placa sob condição SCSC, as condições de contorno são $w(x, \mp b/2) = \theta_x(x, \mp b/2) = \theta_y(x, \mp b/2) = 0$.

A.3 Solução analítica da teoria da elasticidade 3D para placas retangulares simplesmente apoiadas

Seja a placa homogênea dada pela Figura A.1:

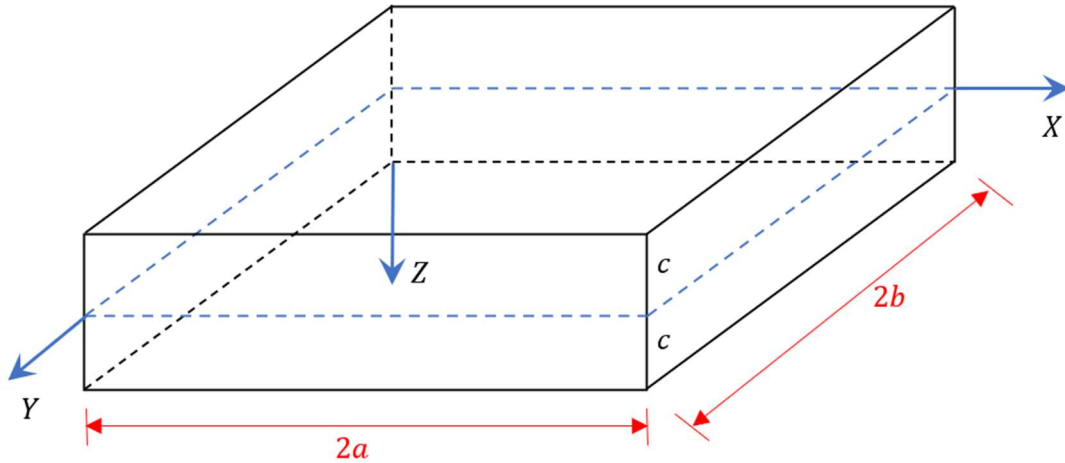


Figura A.1 – Sistema de coordenadas da placa.

De acordo com Srinivas *et al.* (1969), para obtenção das tensões, em uma placa simplesmente apoiada, as soluções analíticas, baseadas na elasticidade 3D, em placas retangulares são dadas por:

As tensões normais (σ_x , σ_y e σ_z) e as tensões de cisalhamento (τ_{xz} , τ_{yz} e τ_{xy}) em um ponto i são dadas por:

$$\sigma_{x_i} = -2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[MAe^{gz} + MRe^{-gz} + \frac{(MA + NB - gC)}{(3 - 4\nu)g} (2vg + M^2Z)e^{gz} + \frac{(MR + NS + gT)}{(3 - 4\nu)g} (2vg + M^2Z)e^{-gz} \right] \sin\left(\frac{m\pi X}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi Y}{2}\right) \quad (A.31)$$

$$\sigma_{y_i} = -2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[NB e^{gz} + NSe^{-gz} + \frac{(MA + NB - gC)}{(3 - 4\nu)g} (2vg + N^2Z)e^{gz} + \frac{(MR + NS + gT)}{(3 - 4\nu)g} (2vg + N^2Z)e^{-gz} \right] \sin\left(\frac{m\pi X}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi Y}{2}\right) \quad (A.32)$$

$$\sigma_{z_i} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[gC e^{gZ} + gT e^{-gZ} + \frac{(MA + NB - gC)}{(3 - 4v)g} (1 - 2v + gZ) e^{gZ} + \right. \\ \left. + \frac{(MR + NS + gT)}{3 - 4v} (1 - 2v - gZ) e^{-gZ} \right] \sin\left(\frac{m\pi X}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi Y}{2}\right) \quad (\text{A.33})$$

$$\tau_{xz_i} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[gA e^{gZ} - gR e^{-gZ} + MC e^{gZ} + MT e^{-gZ} + \frac{(MA + NB - gC)}{(3 - 4v)g} M(1 + 2gZ) e^{gZ} - \right. \\ \left. - \frac{(MR + NS + gT)}{(3 - 4v)g} M(1 - 2gZ) e^{-gZ} \right] \cos\left(\frac{m\pi X}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi Y}{2}\right) \quad (\text{A.34})$$

$$\tau_{yz_i} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[gB e^{gZ} - gS e^{-gZ} + NC e^{gZ} + NT e^{-gZ} + \frac{(MA + NB - gC)}{(3 - 4v)g} N(1 + 2gZ) e^{gZ} - \right. \\ \left. - \frac{(MR + NS + gT)}{(3 - 4v)g} N(1 - 2gZ) e^{-gZ} \right] \sin\left(\frac{m\pi X}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi Y}{2}\right) \quad (\text{A.35})$$

$$\tau_{xy_i} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[NA e^{gZ} - NR e^{-gZ} + MB e^{gZ} + MS e^{-gZ} + \frac{(MA + NB - gC)}{(3 - 4v)g} 2MNZ e^{gZ} - \right. \\ \left. - \frac{(MR + NS + gT)}{(3 - 4v)g} 2MNZ e^{-gZ} \right] \cos\left(\frac{m\pi X}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi Y}{2}\right) \quad (\text{A.36})$$

sendo as variáveis A, R, B, S, C e T obtidas pela resolução do sistema:

$$\begin{pmatrix} A \\ R \\ B \\ S \\ C \\ T \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & L_{15} & L_{16} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} & L_{25} & L_{26} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} & L_{35} & L_{36} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} & L_{45} & L_{46} \\ L_{51} & L_{52} & L_{53} & L_{54} & L_{55} & L_{56} \\ L_{61} & L_{62} & L_{63} & L_{64} & L_{65} & L_{66} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \\ 0 \\ f_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.37})$$

onde:

$$L_{11} = M(1 - 2v + gZ_1) e^{gZ_1}; L_{12} = M(1 - 2v + gZ_1) e^{-gZ_1}; L_{13} = N(1 - 2v + gZ_1) e^{gZ_1}; \\ L_{14} = N(1 - 2v - gZ_1) e^{-gZ_1}; L_{15} = -g(2v + gZ_1 - 2) e^{gZ_1}; L_{16} = -g(gZ_1 - 2v + 2) e^{-gZ_1}; \\ L_{21} = \left[g(3 - 4v) + \frac{M^2}{g} (1 + 2gZ_1) \right] e^{gZ_1}; L_{22} = \left[-\frac{M^2}{g} (1 - 2gZ_1) - g(3 - 4v) \right] e^{-gZ_1}; \\ L_{23} = \frac{MN}{g} (1 + 2gZ_1) e^{gZ_1}; L_{24} = -\frac{MN}{g} (1 - 2gZ_1) e^{-gZ_1}; L_{25} = 2M(1 - 2v - gZ_1) e^{gZ_1}; \\ L_{26} = 2M(gZ_1 - 2v + 1) e^{-gZ_1}; L_{31} = \frac{MN}{g} (1 + 2gZ_1) e^{gZ_1}; L_{32} = -\frac{MN}{g} (1 - 2gZ_1) e^{-gZ_1};$$

$$\begin{aligned}
L_{33} &= \left[g(3-4\nu) + \frac{N^2}{g}(1+2gZ_1) \right] e^{gZ_1}; L_{34} = \left[-g(3-4\nu) - \frac{N^2}{g}(1-2gZ_1) \right] e^{-gZ_1}; \\
L_{35} &= 2N(1-2\nu-gZ_1)e^{gZ_1}; L_{36} = 2N(gZ_1-2\nu+1)e^{-gZ_1}; L_{41} = M(1-2\nu+gZ_2)e^{gZ_2}; \\
L_{42} &= M(1-2\nu+gZ_2)e^{-gZ_2}; L_{43} = N(1-2\nu+gZ_2)e^{gZ_2}; L_{44} = N(1-2\nu-gZ_2)e^{-gZ_2}; \\
L_{45} &= -g(2\nu+gZ_2-2)e^{gZ_2}; L_{46} = -g(gZ_2-2\nu+2)e^{-gZ_2}; \\
L_{51} &= \left[g(3-4\nu) + \frac{M^2}{g}(1+2gZ_2) \right] e^{gZ_2}; L_{52} = \left[-\frac{M^2}{g}(1-2gZ_2) - g(3-4\nu) \right] e^{-gZ_2}; \\
L_{53} &= \frac{MN}{g}(1+2gZ_2)e^{gZ_2}; L_{54} = -\frac{MN}{g}(1-2gZ_2)e^{-gZ_2}; L_{55} = 2M(1-2\nu-gZ_2)e^{gZ_2}; \\
L_{56} &= 2M(gZ_2-2\nu+1)e^{-gZ_2}; L_{61} = \frac{MN}{g}(1+2gZ_2)e^{gZ_2}; L_{62} = -\frac{MN}{g}(1-2gZ_2)e^{-gZ_2}; \\
L_{63} &= \left[g(3-4\nu) + \frac{N^2}{g}(1+2gZ_2) \right] e^{gZ_2}; L_{64} = \left[-g(3-4\nu) - \frac{N^2}{g}(1-2gZ_2) \right] e^{-gZ_2}; \\
L_{65} &= 2N(1-2\nu-gZ_2)e^{gZ_2}; L_{66} = 2N(gZ_2-2\nu+1)e^{-gZ_2}; \\
g &= \sqrt{M^2 + N^2}; M = \frac{m\pi c}{2a}; N = \frac{n\pi c}{2b}; X = \frac{x}{a}; Y = \frac{y}{b}; Z = \frac{z}{c}; 2a, 2b \text{ e } 2c \text{ são, respectivamente, o} \\
&\text{comprimento, a largura e a espessura da placa.}
\end{aligned}$$

Originalmente Srinivas *et al.* (1969), admitiu toda a carga aplicada na superfície superior da placa atribuindo $f_1 = -Q_{mn} \frac{(3-4\nu)}{2}$ e $f_2 = 0$ em (A.37). Com o intuito de que a solução produza tensões axiais nulas no plano médio, nesta tese admitiu-se que metade do carregamento é aplicada na superfície superior da placa e a outra metade na superfície inferior resultando em $f_1 = -Q_{mn} \frac{(3-4\nu)}{4}$ e $f_2 = Q_{mn} \frac{(3-4\nu)}{4}$.

O carregamento g pode ser expandido em série como mostrado a seguir:

$$g(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (\text{A.38})$$

sendo os coeficientes para os termos de carga em (A.38) dados por:

$$Q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b g(x, y) \sin \left(\frac{m\pi X}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi Y}{b} \right) dx dy \quad (\text{A.39})$$

Os deslocamentos u , v e w são dados por:

$$\begin{aligned}
u &= \frac{c}{G} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[A e^{gZ} + R e^{-gZ} + \frac{(MA + NB - gC)}{(3-4\nu)g} M Z e^{gZ} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{(MR + NS + gT)}{(3-4\nu)g} M Z e^{-gZ} \right] \cos \left(\frac{m\pi X}{2} \right) \sin \left(\frac{n\pi Y}{2} \right) \quad (\text{A.40})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v = & \frac{c}{G} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[B e^{gZ} + S e^{-gZ} + \frac{(MA + NB - gC)}{(3 - 4\nu)g} N Z e^{gZ} - \right. \\
& \left. - \frac{(MR + NS + gT)}{(3 - 4\nu)g} N Z e^{-gZ} \right] \sin\left(\frac{m\pi X}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi Y}{2}\right)
\end{aligned} \tag{A.41}$$

$$\begin{aligned}
w = & \frac{c}{G} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[C e^{gZ} + T e^{-gZ} + \frac{(MA + NB - gC)}{3 - 4\nu} Z e^{gZ} + \right. \\
& \left. + \frac{(MR + NS + gT)}{3 - 4\nu} Z e^{-gZ} \right] \sin\left(\frac{m\pi X}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi Y}{2}\right)
\end{aligned} \tag{A.42}$$

APÊNDICE A

Solução Analítica para Placa Circular Engastada Submetida a Carregamento Assimétrico

Apresentam-se as soluções analíticas de deflexão para placa circular com carregamento linearmente distribuído, sob a condição de contorno de engastamento.

Convém comentar que as soluções de placas circulares assimétricas podem ser deduzidas com ajustes convenientes na solução de placas setoriais. No caso específico de placas de Mindlin e Reissner, as soluções de placas setoriais são dadas em Wang *et al.* (2000) e Wang *et al.* (2007). Então fazendo-se os ajustes apropriados, as soluções de placas circulares sob carregamento linear assimétrico foram deduzidas nesta tese e mostradas a seguir:

$$w^K(r, \theta) = \left[\frac{q_0 a^4}{64D} + \frac{q_1 a^4}{192D} \left(\frac{r}{a} \right) \cos \theta \right] \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right]^2 \quad (\text{AA.1})$$

$$w_0^K(r, \theta) = \frac{q_0 a^4}{64D} \left[\frac{(a-r)^2(a+r)^2}{a^4} \right] + \frac{q_0 a^2}{4kGh} \left[\frac{(a-r)(a+r)}{a^2} \right] \quad (\text{AA.2})$$

$$w_1^K(r, \theta) = \left[\frac{q_1 a^4}{192D} \left(\frac{r}{a} \right) \cos \theta \right] \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right]^2 \quad (\text{AA.3})$$

$$\Delta w = \left(1 - \frac{\nu}{2} \epsilon \right) \frac{\cos \theta q_1 r (2a^2 - 3r^2)}{24\kappa G h} + \left[\frac{C_{1m}(a^2 - r^2)}{4(\mu + 1)} - \left(1 - \frac{\nu}{2} \epsilon \right) \Omega_m a^{-\mu} \right] r^\mu \cos(\mu\theta) \quad (\text{AA.4})$$

onde:

$$C_{1m} = \frac{\left(1 - \frac{\nu}{2} \epsilon \right) \Omega_m (\lambda a \omega \mu^2 - \mu) + \frac{\nu}{2} \epsilon \left(\lambda a^2 \mu \omega \frac{d\Omega}{dr} - \frac{d\Omega}{d\theta} \right)}{a^{\mu+2} \left\{ \frac{\mu}{(\lambda a)^2} \frac{2}{1-\nu} - \mu \lambda a \omega \left[\frac{1}{2(\mu+1)} + \frac{\mu}{(\lambda a)^2} \frac{2}{1-\nu} \right] \right\}}$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{10}}{h}; \mu = 1; \Omega_m = -\frac{a^2(q_1 \cos \theta)}{24}; \frac{d\Omega}{dr} = -\frac{7aq_1 \cos \theta}{24\kappa G h}; \frac{d\Omega}{d\theta} = \frac{a^2 q_1 \sin \theta}{24\kappa G h}; z = \lambda a; \kappa = \frac{5}{6};$$

$$\omega = \frac{\nu}{z} + \left\{ \sum_{k=1}^N \frac{\left(\frac{1}{4} \right)^k 2kz^{2k-1}}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \right\} / \left\{ \sum_{k=1}^N \frac{\left(\frac{1}{4} z^2 \right)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \right\}; \Gamma \text{ é a função gama (Abramowitz e Stegun, 1965).}$$

As soluções analíticas para a deflexão segundo Mindlin e Reissner são dadas por:

$$w^R(r, \theta) = w_0^K(r, \theta) + w_1^K(r, \theta) + \Delta w, \text{ quando } \epsilon = 1. \quad (\text{AA.5})$$

$$w^M(r, \theta) = w_0^K(r, \theta) + w_1^K(r, \theta) + \Delta w, \text{ quando } \epsilon = 0; \quad (\text{AA.6})$$

onde o índice R em (AA.5) denota a solução de Reissner e o índice M em (AA.6) denota a solução de Mindlin.

APÊNDICE B

Expansão das Integrais de Domínio em Somatória de Integrais de Contorno

Seja a integral de domínio dada por:

$$I = \int_{\Omega} f \cdot W^* d\Omega \quad (B.1)$$

onde f e W^* são continuamente diferenciáveis duas vezes na região Ω .

Se é assumido que $\varsigma^* = \nabla^2 W^*$, e com o auxílio da integração por partes e do teorema da divergência, a seguinte identidade pode ser escrita:

$$\int_{\Omega} \varsigma^* f_{,\alpha\alpha} d\Omega = \int_{\Gamma} f_{,\alpha} n_{\alpha} \varsigma^* d\Gamma - \int_{\Omega} f_{,\alpha} \varsigma_{,\alpha}^* d\Omega \quad (B.2)$$

e usando integração por partes no ultimo termo da Eq. (B.2) a seguinte relação pode ser escrita:

$$\int_{\Omega} \varsigma^* f_{,\alpha\alpha} d\Omega = \int_{\Gamma} f_{,\alpha} n_{\alpha} \varsigma^* d\Gamma - \int_{\Gamma} f \varsigma_{,\alpha}^* n_{\alpha} d\Gamma + \int_{\Omega} f_{,\alpha} \varsigma_{,\alpha\alpha}^* d\Omega \quad (B.3)$$

Substituindo a Eq. (B.1) na Eq. (B.3) fornece:

$$\int_{\Omega} f W^* d\Omega = \int_{\Omega} \varsigma^* f_{,\alpha\alpha} d\Omega + \int_{\Gamma} f \varsigma_{,\alpha}^* n_{\alpha} d\Gamma - \int_{\Gamma} f_{,\alpha} n_{\alpha} \varsigma^* d\Gamma \quad (B.4)$$

A Eq. (B.4) é conhecida como a segunda identidade de Green.

Se $f_{,\alpha\alpha} = 0$, por exemplo, quando f é uma função linear, a Eq. (B.4) é reduzida a:

$$\int_{\Omega} f \varsigma^* d\Omega = \int_{\Gamma} f \varsigma_{,\alpha}^* n_{\alpha} d\Gamma - \int_{\Gamma} f_{,\alpha} n_{\alpha} \varsigma^* d\Gamma \quad (B.5)$$

ou reescrevendo a Eq. (B.5), tem-se:

$$\int_{\Omega} f \varsigma^* d\Omega = \int_{\Gamma} f R^* d\Gamma - \int_{\Gamma} f_{,\alpha} n_{\alpha} \varsigma^* d\Gamma \quad (B.6)$$

onde $R^* = r_{,\alpha} n_{\alpha} \frac{\partial \varsigma^*}{\partial r}$.

Para o caso quando f é uma função continuamente diferenciável por seis vezes, uma identidade pode ser obtida pelo uso recursivo por três vezes da Eq. (B.4), resultando em:

$$\begin{aligned}
I = \int_{\Omega} f \cdot R^* d\Omega &= \int_{\Gamma} f \cdot R^{*(1)} d\Gamma - \int_{\Gamma} f_{,\alpha} n_{\alpha} \cdot \zeta^{*(1)} d\Gamma + \\
&+ \int_{\Gamma} \nabla^2 f \cdot R^{*(2)} d\Gamma - \int_{\Gamma} \nabla^2 f_{,\alpha} n_{\alpha} \cdot \zeta^{*(2)} d\Gamma + \\
&+ \int_{\Gamma} \nabla^4 f \cdot R^{*(3)} d\Gamma - \int_{\Gamma} \nabla^4 f_{,\alpha} n_{\alpha} \cdot \zeta^{*(3)} d\Gamma
\end{aligned}$$

$$\text{onde } R^{*(1)} = r_{,\alpha} n_{\alpha} \frac{\partial \zeta^{*(1)}}{\partial r}, R^{*(2)} = r_{,\alpha} n_{\alpha} \frac{\partial \zeta^{*(2)}}{\partial r}, R^{*(3)} = r_{,\alpha} n_{\alpha} \frac{\partial \zeta^{*(3)}}{\partial r}, \nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2.$$

Ou para uma função f diferenciável $2n$ vezes, a Eq. (B.5) torna-se:

$$I = \int_{\Omega} f \cdot R^* d\Omega = \sum_{k=1}^n \left(\int_{\Gamma} R_{\alpha}^{*(k)} \nabla^{2(k-1)} f d\Gamma - \int_{\Gamma} \zeta_{\alpha}^{*(k)} (\nabla^{2(k-1)} f_{,\alpha}) n_{\alpha} d\Gamma \right) \quad (\text{B.7})$$

$$\text{onde } R_{\alpha}^{*(k)} = r_{,\alpha} n_{\alpha} \frac{\partial \zeta_{\alpha}^{*(k)}}{\partial r}$$

APÊNDICE C

Soluções Fundamentais do Vetor de Carga de Reddy

Neste apêndice são apresentadas as expressões dos termos que compõem os vetores T^* e χ^* .

O vetor T^* é representado por:

$$T^* = \begin{pmatrix} -\frac{b_1 b_2}{2} (1 - \nu) T_{\nabla^4 \psi, k}^* - \left[\frac{b_1 s_1}{2} (1 - \nu) - b_2 s_1 \right] T_{\nabla^2 \psi, k}^* + s_1^2 T_{\psi, k}^* \\ \frac{b_1^2}{2} (1 - \nu) T_{\nabla^4 \psi}^* - \left[\frac{b_1 s_1}{2} (3 - \nu) \right] T_{\nabla^2 \psi}^* + s_1^2 T_{\psi}^* \\ -\frac{b_1^2}{2} (1 - \nu) T_{\nabla^4 \psi, m}^* + \left[\frac{b_1 s_1}{2} (3 - \nu) \right] T_{\nabla^2 \psi, m}^* - s_1^2 T_{\psi, m}^* \end{pmatrix}$$

onde:

$$T_{\nabla^4 \psi}^* = \frac{\sqrt{z_1} z_2 K_1(r\sqrt{z_1}) - \sqrt{z_2} z_1 K_1(r\sqrt{z_2})}{2\pi c_3 z_1 z_2 (z_1 - z_2)} r_{,n} \quad (C.1)$$

$$T_{\nabla^2 \psi}^* = \frac{4[\sqrt{z_1} z_2^2 K_1(r\sqrt{z_1}) - \sqrt{z_2} z_1^2 K_1(r\sqrt{z_2})] + r(z_1 z_2^2 - z_2 z_1^2)(1 + 2 \ln(r))}{2\pi c_3 z_1 z_2 (z_1 - z_2)} r_{,n} \quad (C.2)$$

$$T_{\psi}^* = -\frac{1}{256\pi c_3 z_1^3 z_2^3 (z_1 - z_2)} \left[128 \left(z_1^3 \sqrt{z_2} K_1(r\sqrt{z_2}) - z_2^3 \sqrt{z_1} K_1(r\sqrt{z_1}) \right) - 64 r z_1^2 z_2^2 + \right. \\ \left. - 32 r (z_1 z_2^3 - z_1^3 z_2) (1 + 2 \ln(r)) + r^3 (z_1^2 z_2^3 - z_1^3 z_2^2) (2 - 8 \ln(r)) \right] r_{,n} \quad (C.3)$$

$$T_{\nabla^4 \psi, k}^* = \frac{1}{2\pi r c_3 \sqrt{z_1} \sqrt{z_2} (z_1 - z_2)} \left\{ r_{,n} r_{,k} \left[2 \left(\sqrt{z_1} K_1(r\sqrt{z_2}) - \sqrt{z_2} K_1(r\sqrt{z_1}) \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - r \sqrt{z_1} \sqrt{z_2} \left(K_0(r\sqrt{z_1}) - K_0(r\sqrt{z_2}) \right) \right] - n_k \left[\sqrt{z_1} K_1(r\sqrt{z_2}) - \sqrt{z_2} K_1(r\sqrt{z_1}) \right] \right\} \quad (C.4)$$

$$T_{\nabla^4 \psi, m}^* = \frac{1}{2\pi r c_3 \sqrt{z_1} \sqrt{z_2} (z_1 - z_2)} \left\{ r_{,n} r_{,m} \left[2 \left(\sqrt{z_1} K_1(r\sqrt{z_2}) - \sqrt{z_2} K_1(r\sqrt{z_1}) \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - r \sqrt{z_1} \sqrt{z_2} \left(K_0(r\sqrt{z_1}) - K_0(r\sqrt{z_2}) \right) \right] - m_n \left[\sqrt{z_1} K_1(r\sqrt{z_2}) - \sqrt{z_2} K_1(r\sqrt{z_1}) \right] \right\} \quad (C.5)$$

$$T_{\nabla^2 \psi, k}^* = \frac{1}{8\pi r c_3 \sqrt{z_1^3} \sqrt{z_2^3} (z_1 - z_2)} \left\{ r_{,n} r_{,k} \left[8 \left(\sqrt{z_1^3} K_1(r\sqrt{z_2}) - \sqrt{z_2^3} K_1(r\sqrt{z_1}) \right) + 2r \left(\sqrt{z_1} \sqrt{z_2^3} - \sqrt{z_2} \sqrt{z_1^3} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - 4r \left(\sqrt{z_1} \sqrt{z_2^3} K_0(r\sqrt{z_1}) - \sqrt{z_2} \sqrt{z_1^3} K_0(r\sqrt{z_2}) \right) \right] - n_k \left[4 \left(\sqrt{z_1^3} K_1(r\sqrt{z_2}) - \sqrt{z_2^3} K_1(r\sqrt{z_1}) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + r \left(\sqrt{z_1} \sqrt{z_2^3} - \sqrt{z_2} \sqrt{z_1^3} \right) (1 - 2 \ln(r)) \right] \right\} \quad (C.6)$$

$$T_{\nabla^2\psi,m}^* = \frac{1}{8\pi r c_3 \sqrt{z_1^3} \sqrt{z_2^3} (z_1 - z_2)} \left\{ r_n r_m \left[8 \left(\sqrt{z_1^3} K_1(r\sqrt{z_2}) - \sqrt{z_2^3} K_1(r\sqrt{z_1}) \right) + 2r \left(\sqrt{z_1} \sqrt{z_2^3} - \sqrt{z_2} \sqrt{z_1^3} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - 4r \left(\sqrt{z_1} \sqrt{z_2^3} K_0(r\sqrt{z_1}) - \sqrt{z_2} \sqrt{z_1^3} K_0(r\sqrt{z_2}) \right) \right] - m_n \left[4 \left(\sqrt{z_1^3} K_1(r\sqrt{z_2}) - \sqrt{z_2^3} K_1(r\sqrt{z_1}) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + r \left(\sqrt{z_1} \sqrt{z_2^3} - \sqrt{z_2} \sqrt{z_1^3} \right) (1 - 2 \ln(r)) \right] \right\} \quad (C.7)$$

$$T_{\psi,k}^* = \frac{1}{128\pi r c_3 \sqrt{z_1^5} \sqrt{z_2^5} (z_1 - z_2)} \left\{ r_n r_k \left[128 \left(\sqrt{z_1^5} K_1(r\sqrt{z_2}) - \sqrt{z_2^5} K_1(r\sqrt{z_1}) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + 2r^3 \left(\sqrt{z_1^3} \sqrt{z_2^5} - \sqrt{z_2^3} \sqrt{z_1^5} \right) (1 + 4 \ln(r)) + 32r \left(\sqrt{z_1} \sqrt{z_2^5} - \sqrt{z_2} \sqrt{z_1^5} \right) - 64r \left(\sqrt{z_1} \sqrt{z_2^5} K_0(r\sqrt{z_1}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \sqrt{z_2} \sqrt{z_1^5} K_0(r\sqrt{z_2}) \right) \right] - n_k \left[64 \left(\sqrt{z_1^5} K_1(r\sqrt{z_2}) - \sqrt{z_2^5} K_1(r\sqrt{z_1}) \right) + \right. \\ \left. \left. + r^3 \left(\sqrt{z_1^3} \sqrt{z_2^5} - \sqrt{z_2^3} \sqrt{z_1^5} \right) (1 - 4 \ln(r)) + 16r \left(\sqrt{z_1} \sqrt{z_2^5} - \sqrt{z_2} \sqrt{z_1^5} \right) (1 - 2 \ln(r)) \right] \right\} \quad (C.8)$$

$$T_{\psi,m}^* = \frac{1}{128\pi r c_3 \sqrt{z_1^5} \sqrt{z_2^5} (z_1 - z_2)} \left\{ r_n r_m \left[128 \left(\sqrt{z_1^5} K_1(r\sqrt{z_2}) - \sqrt{z_2^5} K_1(r\sqrt{z_1}) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + 2r^3 \left(\sqrt{z_1^3} \sqrt{z_2^5} - \sqrt{z_2^3} \sqrt{z_1^5} \right) (1 + 4 \ln(r)) + 32r \left(\sqrt{z_1} \sqrt{z_2^5} - \sqrt{z_2} \sqrt{z_1^5} \right) - 64r \left(\sqrt{z_1} \sqrt{z_2^5} K_0(r\sqrt{z_1}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \sqrt{z_2} \sqrt{z_1^5} K_0(r\sqrt{z_2}) \right) \right] - m_n \left[64 \left(\sqrt{z_1^5} K_1(r\sqrt{z_2}) - \sqrt{z_2^5} K_1(r\sqrt{z_1}) \right) + \right. \\ \left. \left. + r^3 \left(\sqrt{z_1^3} \sqrt{z_2^5} - \sqrt{z_2^3} \sqrt{z_1^5} \right) (1 - 4 \ln(r)) + 16r \left(\sqrt{z_1} \sqrt{z_2^5} - \sqrt{z_2} \sqrt{z_1^5} \right) (1 - 2 \ln(r)) \right] \right\} \quad (C.9)$$

O vetor χ^* é representado por:

$$\chi^* = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{b_1 b_2}{2} (1 - \nu) \chi_{\nabla^4\psi,k}^* - \left[\frac{b_1 s_1}{2} (1 - \nu) - b_2 s_1 \right] \chi_{\nabla^2\psi,k}^* + s_1^2 \chi_{\psi,k}^* \\ \frac{b_1^2}{2} (1 - \nu) \chi_{\nabla^4\psi}^* - \left[\frac{b_1 s_1}{2} (3 - \nu) \right] \chi_{\nabla^2\psi}^* + s_1^2 \chi_{\psi}^* \\ -\frac{b_1^2}{2} (1 - \nu) \chi_{\nabla^4\psi,m}^* + \left[\frac{b_1 s_1}{2} (3 - \nu) \right] \chi_{\nabla^2\psi,m}^* - s_1^2 \chi_{\psi,m}^* \end{array} \right\}$$

onde:

$$\chi_{\nabla^4\psi}^* = \frac{z_1 K_0(r\sqrt{z_2}) - z_2 K_0(r\sqrt{z_1})}{2\pi c_3 z_1 z_2 (z_1 - z_2)} \quad (C.10)$$

$$\chi_{\nabla^2\psi}^* = -\frac{4[z_2^2 K_0(r\sqrt{z_1}) - z_1^2 K_0(r\sqrt{z_2})] + r^2 \ln(r) (z_2 z_1^2 - z_1 z_2^2)}{8\pi c_3 z_1^2 z_2^2 (z_1 - z_2)} \quad (\text{C.11})$$

$$\begin{aligned} \chi_{\psi}^* = & -\frac{1}{256\pi c_3 z_1^3 z_2^3 (z_1 - z_2)} [-r^4 (z_1^3 z_2^2 - z_1^2 z_2^3) (1 - 2 \ln(r)) - 32r^2 (z_1^3 z_2 - z_1 z_2^3) (1 - \ln(r)) \\ & - 32r^2 z_1^2 z_2^2 + 128 (z_2^3 K_0(r\sqrt{z_1}) - z_1^3 K_0(r\sqrt{z_2}))] \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

$$\chi_{\nabla^4\psi,k}^* = -\frac{\sqrt{z_1} K_1(r\sqrt{z_2}) - \sqrt{z_2} K_1(r\sqrt{z_1})}{2\pi c_3 \sqrt{z_1} \sqrt{z_2} (z_1 - z_2)} r_{,k} \quad (\text{C.13})$$

$$\chi_{\nabla^4\psi,m}^* = -\frac{\sqrt{z_1} K_1(r\sqrt{z_2}) - \sqrt{z_2} K_1(r\sqrt{z_1})}{2\pi c_3 \sqrt{z_1} \sqrt{z_2} (z_1 - z_2)} r_{,m} \quad (\text{C.14})$$

$$\chi_{\nabla^2\psi,k}^* = -\frac{4 \left[\sqrt{z_1^3} K_1(r\sqrt{z_2}) - \sqrt{z_2^3} K_1(r\sqrt{z_1}) \right] - r \left(\sqrt{z_2} \sqrt{z_1^3} - \sqrt{z_1} \sqrt{z_2^3} \right) (1 - 2 \ln(r))}{8\pi c_3 \sqrt{z_1^3} \sqrt{z_2^3} (z_1 - z_2)} r_{,k} \quad (\text{C.15})$$

$$\chi_{\nabla^2\psi,m}^* = -\frac{4 \left[\sqrt{z_1^3} K_1(r\sqrt{z_2}) - \sqrt{z_2^3} K_1(r\sqrt{z_1}) \right] - r \left(\sqrt{z_2} \sqrt{z_1^3} - \sqrt{z_1} \sqrt{z_2^3} \right) (1 - 2 \ln(r))}{8\pi c_3 \sqrt{z_1^3} \sqrt{z_2^3} (z_1 - z_2)} r_{,m} \quad (\text{C.16})$$

$$\begin{aligned} \chi_{\psi,k}^* = & -\frac{1}{128\pi c_3 \sqrt{z_1^5} \sqrt{z_2^5} (z_1 - z_2)} \left[r^3 \left(\sqrt{z_1^5} \sqrt{z_2^3} - \sqrt{z_2^5} \sqrt{z_1^3} \right) (1 - 4 \ln(r)) + \right. \\ & \left. + 16r \left(\sqrt{z_1^5} \sqrt{z_2} - \sqrt{z_2^5} \sqrt{z_1} \right) (1 - 2 \ln(r)) + 64 \left(\sqrt{z_2^5} K_1(r\sqrt{z_1}) - \sqrt{z_1^5} K_1(r\sqrt{z_2}) \right) \right] r_{,k} \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

$$\begin{aligned} \chi_{\psi,m}^* = & -\frac{1}{128\pi c_3 \sqrt{z_1^5} \sqrt{z_2^5} (z_1 - z_2)} \left[r^3 \left(\sqrt{z_1^5} \sqrt{z_2^3} - \sqrt{z_2^5} \sqrt{z_1^3} \right) (1 - 4 \ln(r)) + \right. \\ & \left. + 16r \left(\sqrt{z_1^5} \sqrt{z_2} - \sqrt{z_2^5} \sqrt{z_1} \right) (1 - 2 \ln(r)) + 64 \left(\sqrt{z_2^5} K_1(r\sqrt{z_1}) - \sqrt{z_1^5} K_1(r\sqrt{z_2}) \right) \right] r_{,m} \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

Nas expressões de (C.1) a (C.18), k assume valores de 1 e 2.

O vetor $T_{,\gamma}^*$ é representado por:

$$T_{,\gamma}^* = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{b_1 b_2}{2} (1-\nu) T_{\nabla^4 \psi, k\gamma}^* - \left[\frac{b_1 s_1}{2} (1-\nu) - b_2 s_1 \right] T_{\nabla^2 \psi, k\gamma}^* + s_1^2 T_{\psi, k\gamma}^* \\ \frac{b_1^2}{2} (1-\nu) T_{\nabla^4 \psi, \gamma}^* - \left[\frac{b_1 s_1}{2} (3-\nu) \right] T_{\nabla^2 \psi, \gamma}^* + s_1^2 T_{\psi, \gamma}^* \\ -\frac{b_1^2}{2} (1-\nu) T_{\nabla^4 \psi, m\gamma}^* + \left[\frac{b_1 s_1}{2} (3-\nu) \right] T_{\nabla^2 \psi, m\gamma}^* - s_1^2 T_{\psi, m\gamma}^* \end{array} \right\}$$

onde:

$$T_{\nabla^4 \psi, \gamma}^* = \frac{1}{2\pi c_3 r \sqrt{z_1} \sqrt{z_2} (z_1 - z_2)} \{ 2[\sqrt{z_2} K_1(r\sqrt{z_1}) - \sqrt{z_1} K_1(r\sqrt{z_2})] + r\sqrt{z_1} \sqrt{z_2} [K_0(r\sqrt{z_1}) - K_0(r\sqrt{z_2})] r_{,n} r_{,\gamma} + [\sqrt{z_1} K_1(r\sqrt{z_2}) - \sqrt{z_2} K_1(r\sqrt{z_1})] n_\gamma \} \quad (C.19)$$

$$T_{\nabla^2 \psi, \gamma}^* = -\frac{1}{8\pi c_3 r \sqrt{z_1^3} \sqrt{z_2^3} (z_1 - z_2)} \left\{ \left[(1 - 2K_0(r\sqrt{z_2})) r\sqrt{z_2} - 4K_1(r\sqrt{z_2}) \right] 2\sqrt{z_1^3} - \left[(1 - 2K_0(r\sqrt{z_1})) r\sqrt{z_1} - 4K_1(r\sqrt{z_1}) \right] 2\sqrt{z_2^3} \right\} r_{,n} r_{,\gamma} + \left\{ [(1 + 2\ln(r)) r\sqrt{z_2} + 4K_1(r\sqrt{z_2})] \sqrt{z_1^3} - [(1 + 2\ln(r)) r\sqrt{z_1} + 4K_1(r\sqrt{z_1})] \sqrt{z_2^3} \right\} n_\gamma \quad (C.20)$$

$$T_{\psi, \gamma}^* = -\frac{1}{128\pi c_3 r \sqrt{z_1^5} \sqrt{z_2^5} (z_1 - z_2)} \left\{ \left[64K_1(r\sqrt{z_2}) - (1 + 4\ln(r)) r^3 \sqrt{z_2^3} - (1 - 2K_0(r\sqrt{z_2})) 16r\sqrt{z_2} \right] \sqrt{z_1^5} - \left[64K_1(r\sqrt{z_1}) - (1 + 4\ln(r)) r^3 \sqrt{z_1^3} - (1 - 2K_0(r\sqrt{z_1})) 16r\sqrt{z_1} \right] \sqrt{z_2^5} \right\} 2r_{,n} r_{,\gamma} - \left\{ [(1 + 2\ln(r)) 16r\sqrt{z_2} + 64K_1(r\sqrt{z_2}) - (1 - 4\ln(r)) r^3 \sqrt{z_2^3}] \sqrt{z_1^5} + [(1 - 2\ln(r)) 16r\sqrt{z_1} - 64K_1(r\sqrt{z_1}) + (1 - 4\ln(r)) r^3 \sqrt{z_1^3}] \sqrt{z_2^5} - 32r \sqrt{z_1^3} \sqrt{z_2^3} \right\} n_\gamma \quad (C.21)$$

$$T_{\nabla^4 \psi, k\gamma}^* = \frac{1}{2\pi r c_3 \sqrt{z_1} \sqrt{z_2} (z_1 - z_2) r^2} \{ (2r_{,n} r_{,k} r_{,\gamma} - r_{,n} \delta_{\gamma,k} - n_\gamma r_{,k}) \{ 2[\sqrt{z_1} K_1(r\sqrt{z_2}) - \sqrt{z_2} K_1(r\sqrt{z_1})] - r\sqrt{z_1} \sqrt{z_2} [K_0(r\sqrt{z_1}) - K_0(r\sqrt{z_2})] \} + r_{,n} r_{,k} r_{,\gamma} \{ 4[\sqrt{z_1} K_1(r\sqrt{z_2}) - \sqrt{z_2} K_1(r\sqrt{z_1})] - r^2 [z_1 \sqrt{z_2} K_1(r\sqrt{z_1}) - z_2 \sqrt{z_1} K_1(r\sqrt{z_2})] - 2r \sqrt{z_1} \sqrt{z_2} [K_0(r\sqrt{z_1}) - K_0(r\sqrt{z_2})] \} + r_{,\gamma} n_k \{ 2[\sqrt{z_1} K_1(r\sqrt{z_2}) - \sqrt{z_2} K_1(r\sqrt{z_1})] - r\sqrt{z_1} \sqrt{z_2} [K_0(r\sqrt{z_1}) - K_0(r\sqrt{z_2})] \} \} \quad (C.22)$$

$$T_{\nabla^4 \psi, m\gamma}^* = \frac{1}{2\pi r c_3 \sqrt{z_1} \sqrt{z_2} (z_1 - z_2) r^2} \{ (2r_{,n} r_{,m} r_{,\gamma} - r_{,m} n_\gamma - m_\gamma r_{,n}) \{ 2[\sqrt{z_1} K_1(r\sqrt{z_2}) - \sqrt{z_2} K_1(r\sqrt{z_1})] -$$

$$\begin{aligned}
& -r\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}[K_0(r\sqrt{z_1}) - K_0(r\sqrt{z_2})] + r_n r_m r_\gamma \{4[\sqrt{z_1}K_1(r\sqrt{z_2}) - \sqrt{z_2}K_1(r\sqrt{z_1})] - \\
& -r^2[z_1\sqrt{z_2}K_1(r\sqrt{z_1}) - z_2\sqrt{z_1}K_1(r\sqrt{z_2})] - 2r\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}[K_0(r\sqrt{z_1}) - K_0(r\sqrt{z_2})]\} + \\
& + r_\gamma m_n \{2[\sqrt{z_2}K_1(r\sqrt{z_1}) - \sqrt{z_1}K_1(r\sqrt{z_2})] + r\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}[K_0(r\sqrt{z_1}) - K_0(r\sqrt{z_2})]\} \quad (C.23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{\nabla^2\psi, k\gamma}^* &= \frac{1}{8\pi r c_3 \sqrt{z_1^3} \sqrt{z_2^3} (z_1 - z_2) r^2} \left\{ (2r_n r_k r_\gamma - r_n \delta_{\gamma, k} - n_\gamma r_k) \left[8 \left(\sqrt{z_1^3} K_1(r\sqrt{z_2}) - \sqrt{z_2^3} K_1(r\sqrt{z_1}) \right) + \right. \right. \\
& + 2r \left[\sqrt{z_1} \sqrt{z_2^3} (1 - 2K_0(r\sqrt{z_1})) - \sqrt{z_2} \sqrt{z_1^3} (1 - 2K_0(r\sqrt{z_2})) \right] \Big] + \\
& + r_n r_k r_\gamma \left[4 \left(\sqrt{z_1^3} (K_1(r\sqrt{z_2})(4 + r^2 z_2) + 2r\sqrt{z_2} K_0(r\sqrt{z_2})) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \sqrt{z_2^3} (K_1(r\sqrt{z_1})(4 + r^2 z_1) + 2r\sqrt{z_1} K_0(r\sqrt{z_1})) \right) \right] + \\
& + 2n_k r_\gamma \left[\sqrt{z_2^3} (4K_1(r\sqrt{z_1}) - r\sqrt{z_1} (1 - 2K_0(r\sqrt{z_1}))) - \right. \\
& \left. \left. - \sqrt{z_1^3} (4K_1(r\sqrt{z_2}) - r\sqrt{z_2} (1 - 2K_0(r\sqrt{z_2}))) \right) \right] \Big\} \quad (C.24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{\nabla^2\psi, m\gamma}^* &= \frac{1}{8\pi r c_3 \sqrt{z_1^3} \sqrt{z_2^3} (z_1 - z_2) r^2} \left\{ (2r_n r_m r_\gamma - r_m n_\gamma - m_\gamma r_n) \left[8 \left(\sqrt{z_1^3} K_1(r\sqrt{z_2}) - \sqrt{z_2^3} K_1(r\sqrt{z_1}) \right) + \right. \right. \\
& + 2r \left[\sqrt{z_1} \sqrt{z_2^3} (1 - 2K_0(r\sqrt{z_1})) - \sqrt{z_2} \sqrt{z_1^3} (1 - 2K_0(r\sqrt{z_2})) \right] \Big] + \\
& + r_n r_m r_\gamma \left[4 \left(\sqrt{z_1^3} (K_1(r\sqrt{z_2})(4 + r^2 z_2) + 2r\sqrt{z_2} K_0(r\sqrt{z_2})) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \sqrt{z_2^3} (K_1(r\sqrt{z_1})(4 + r^2 z_1) + 2r\sqrt{z_1} K_0(r\sqrt{z_1})) \right) \right] + \\
& + 2m_n r_\gamma \left[\sqrt{z_2^3} (4K_1(r\sqrt{z_1}) - r\sqrt{z_1} (1 - 2K_0(r\sqrt{z_1}))) - \right. \\
& \left. \left. - \sqrt{z_1^3} (4K_1(r\sqrt{z_2}) - r\sqrt{z_2} (1 - 2K_0(r\sqrt{z_2}))) \right) \right] \Big\} \quad (C.25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{\psi, k\gamma}^* &= \frac{1}{128\pi r c_3 \sqrt{z_1^5} \sqrt{z_2^5} (z_1 - z_2) r^2} \left\{ (2r_n r_k r_\gamma - r_n \delta_{\gamma, k} - n_\gamma r_k) \left[128 \left(\sqrt{z_1^5} K_1(r\sqrt{z_2}) - \sqrt{z_2^5} K_1(r\sqrt{z_1}) \right) + \right. \right. \\
& + 2r^3 \left(\sqrt{z_1^3} \sqrt{z_2^5} - \sqrt{z_2^3} \sqrt{z_1^5} \right) (1 + 4 \ln(r)) + 32r \left(\sqrt{z_1} \sqrt{z_2^5} - \sqrt{z_2} \sqrt{z_1^5} \right) - 64r \left(\sqrt{z_1} \sqrt{z_2^5} K_0(r\sqrt{z_1}) - \right. \\
& \left. \left. - \sqrt{z_2} \sqrt{z_1^5} K_0(r\sqrt{z_2}) \right) \right] - n_k r_\gamma \left[64 \left(\sqrt{z_1^5} K_1(r\sqrt{z_2}) - \sqrt{z_2^5} K_1(r\sqrt{z_1}) \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +r^3 \left(\sqrt{z_1^3} \sqrt{z_2^5} - \sqrt{z_2^3} \sqrt{z_1^5} \right) (1 - 4 \ln(r)) + 16r \left(\sqrt{z_1} \sqrt{z_2^5} - \sqrt{z_2} \sqrt{z_1^5} \right) (1 - 2 \ln(r)) \Big] + \\
& +r_n r_{,k} r_{,\gamma} \left[64 \left(\sqrt{z_1^5} \left(K_1(r\sqrt{z_2})(4 + r^2 z_2) + 2r\sqrt{z_2} K_0(r\sqrt{z_2}) \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \sqrt{z_2^5} \left(K_1(r\sqrt{z_1})(4 + r^2 z_1) + 2r\sqrt{z_1} K_0(r\sqrt{z_1}) \right) \right) - 4r^3 \left(\sqrt{z_1^3} \sqrt{z_2^5} - \sqrt{z_2^3} \sqrt{z_1^5} \right) (3 + 4 \ln(r)) \right] \Big\}
\end{aligned} \tag{C.26}$$

$$\begin{aligned}
T_{\psi, m\gamma}^* &= \frac{1}{128\pi r c_3 \sqrt{z_1^5} \sqrt{z_2^5} (z_1 - z_2) r^2} \left\{ (2r_n r_{,m} r_{,\gamma} - r_{,m} n_\gamma - m_\gamma r_{,n}) \left[128 \left(\sqrt{z_1^5} K_1(r\sqrt{z_2}) - \sqrt{z_2^5} K_1(r\sqrt{z_1}) \right) \right. \right. \\
& + 2r^3 \left(\sqrt{z_1^3} \sqrt{z_2^5} - \sqrt{z_2^3} \sqrt{z_1^5} \right) (1 + 4 \ln(r)) + 32r \left(\sqrt{z_1} \sqrt{z_2^5} - \sqrt{z_2} \sqrt{z_1^5} \right) - 64r \left(\sqrt{z_1} \sqrt{z_2^5} K_0(r\sqrt{z_1}) - \right. \\
& \left. \left. - \sqrt{z_2} \sqrt{z_1^5} K_0(r\sqrt{z_2}) \right) \right] - m_n r_{,\gamma} \left[64 \left(\sqrt{z_1^5} K_1(r\sqrt{z_2}) - \sqrt{z_2^5} K_1(r\sqrt{z_1}) \right) + \right. \\
& + r^3 \left(\sqrt{z_1^3} \sqrt{z_2^5} - \sqrt{z_2^3} \sqrt{z_1^5} \right) (1 - 4 \ln(r)) + 16r \left(\sqrt{z_1} \sqrt{z_2^5} - \sqrt{z_2} \sqrt{z_1^5} \right) (1 - 2 \ln(r)) \Big] + \\
& + r_n r_{,m} r_{,\gamma} \left[64 \left(\sqrt{z_1^5} \left(K_1(r\sqrt{z_2})(4 + r^2 z_2) + 2r\sqrt{z_2} K_0(r\sqrt{z_2}) \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \sqrt{z_2^5} \left(K_1(r\sqrt{z_1})(4 + r^2 z_1) + 2r\sqrt{z_1} K_0(r\sqrt{z_1}) \right) \right) - 4r^3 \left(\sqrt{z_1^3} \sqrt{z_2^5} - \sqrt{z_2^3} \sqrt{z_1^5} \right) (3 + 4 \ln(r)) \right] \Big\}
\end{aligned} \tag{C.27}$$

O vetor $\chi_{,\gamma}^*$ é representado por:

$$\chi_{,\gamma}^* = \left\{ \begin{aligned} & -\frac{b_1 b_2}{2} (1 - \nu) \chi_{\nabla^4 \psi, k\gamma}^* - \left[\frac{b_1 s_1}{2} (1 - \nu) - b_2 s_1 \right] \chi_{\nabla^2 \psi, k\gamma}^* + s_1^2 \chi_{\psi, k\gamma}^* \\ & \frac{b_1^2}{2} (1 - \nu) \chi_{\nabla^4 \psi, \gamma}^* - \left[\frac{b_1 s_1}{2} (3 - \nu) \right] \chi_{\nabla^2 \psi, \gamma}^* + s_1^2 \chi_{\psi, \gamma}^* \\ & -\frac{b_1^2}{2} (1 - \nu) \chi_{\nabla^4 \psi, m\gamma}^* + \left[\frac{b_1 s_1}{2} (3 - \nu) \right] \chi_{\nabla^2 \psi, m\gamma}^* - s_1^2 \chi_{\psi, m\gamma}^* \end{aligned} \right\}$$

onde:

$$\chi_{\nabla^4 \psi, \gamma}^* = \frac{\sqrt{z_2} z_1 K_1(r\sqrt{z_2}) - \sqrt{z_1} z_2 K_1(r\sqrt{z_1})}{2\pi c_3 z_1 z_2 (z_1 - z_2)} r_{,\gamma} \tag{C.28}$$

$$\chi_{\nabla^2 \psi, \gamma}^* = -\frac{4[\sqrt{z_1} z_2^2 K_1(r\sqrt{z_1}) - \sqrt{z_2} z_1^2 K_1(r\sqrt{z_2})] + r(z_1 z_2^2 - z_2 z_1^2)[1 + 2 \ln(r)]}{8\pi c_3 z_1^2 z_2^2 (z_1 - z_2)} r_{,\gamma} \tag{C.29}$$

$$\chi_{\psi, \gamma}^* = \frac{1}{256\pi c_3 z_1^3 z_2^3 (z_1 - z_2)} \{ 128[z_1^3 \sqrt{z_2} K_1(r\sqrt{z_2}) - z_2^3 \sqrt{z_1} K_1(r\sqrt{z_1})] - 64r z_1^2 z_2^2 +$$

$$+2r^3(z_1^2z_2^3 - z_1^3z_2^2)[1 - 4\ln(r)] + 32r(z_1z_2^3 - z_1^3z_2)[1 - 2\ln(r)]\}r_\gamma \quad (C.30)$$

$$\begin{aligned} \chi_{\nabla^4\psi,k\gamma}^* &= \frac{1}{2\pi c_3\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}(z_1 - z_2)r} \left\{ \left[2\left(\sqrt{z_2}K_1(r\sqrt{z_1}) - \sqrt{z_1}K_1(r\sqrt{z_2})\right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + r\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}\left(K_0(r\sqrt{z_1}) - K_0(r\sqrt{z_2})\right)\right] r_{,k}r_{,\gamma} + \left[\sqrt{z_1}K_1(r\sqrt{z_2}) - \sqrt{z_2}K_1(r\sqrt{z_1})\right]\delta_{\gamma,k} \right\} \end{aligned} \quad (C.31)$$

$$\begin{aligned} \chi_{\nabla^4\psi,m\gamma}^* &= \frac{1}{2\pi c_3\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}(z_1 - z_2)r} \left\{ \left[2\left(\sqrt{z_2}K_1(r\sqrt{z_1}) - \sqrt{z_1}K_1(r\sqrt{z_2})\right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + r\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}\left(K_0(r\sqrt{z_1}) - K_0(r\sqrt{z_2})\right)\right] r_{,m}r_{,\gamma} + \left[\sqrt{z_1}K_1(r\sqrt{z_2}) - \sqrt{z_2}K_1(r\sqrt{z_1})\right]m_\gamma \right\} \end{aligned} \quad (C.32)$$

$$\begin{aligned} \chi_{\nabla^2\psi,k\gamma}^* &= \frac{1}{8\pi c_3\sqrt{z_1^3}\sqrt{z_2^3}(z_1 - z_2)r} \left\{ \left[8\left(\sqrt{z_2^3}K_1(r\sqrt{z_1}) - \sqrt{z_1^3}K_1(r\sqrt{z_2})\right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2r\left(\sqrt{z_1}\sqrt{z_2^3}\left(1 + 2K_0(r\sqrt{z_1})\right) - \sqrt{z_2}\sqrt{z_1^3}\left(1 + 2K_0(r\sqrt{z_2})\right)\right)\right] r_{,k}r_{,\gamma} + \right. \\ &\quad \left. + \left[4\left(\sqrt{z_1^3}K_1(r\sqrt{z_2}) - \sqrt{z_2^3}K_1(r\sqrt{z_1})\right) + r\left(\sqrt{z_1}\sqrt{z_2^3} - \sqrt{z_2}\sqrt{z_1^3}\right)[1 - 2\ln(r)] \right] \delta_{\gamma,k} \right\} \end{aligned} \quad (C.33)$$

$$\begin{aligned} \chi_{\nabla^2\psi,m\gamma}^* &= \frac{1}{8\pi c_3\sqrt{z_1^3}\sqrt{z_2^3}(z_1 - z_2)r} \left\{ \left[8\left(\sqrt{z_2^3}K_1(r\sqrt{z_1}) - \sqrt{z_1^3}K_1(r\sqrt{z_2})\right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2r\left(\sqrt{z_1}\sqrt{z_2^3}\left(1 + 2K_0(r\sqrt{z_1})\right) - \sqrt{z_2}\sqrt{z_1^3}\left(1 + 2K_0(r\sqrt{z_2})\right)\right)\right] r_{,m}r_{,\gamma} + \right. \\ &\quad \left. + \left[4\left(\sqrt{z_1^3}K_1(r\sqrt{z_2}) - \sqrt{z_2^3}K_1(r\sqrt{z_1})\right) + r\left(\sqrt{z_1}\sqrt{z_2^3} - \sqrt{z_2}\sqrt{z_1^3}\right)[1 - 2\ln(r)] \right] m_\gamma \right\} \end{aligned} \quad (C.34)$$

$$\begin{aligned} \chi_{\psi,k\gamma}^* &= -\frac{1}{128\pi c_3\sqrt{z_1^5}\sqrt{z_2^5}(z_1 - z_2)r} \left\{ \left[128\left(\sqrt{z_1^5}K_1(r\sqrt{z_2}) - \sqrt{z_2^5}K_1(r\sqrt{z_1})\right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2r^3\left(\sqrt{z_1^3}\sqrt{z_2^5} - \sqrt{z_2^3}\sqrt{z_1^5}\right)(1 + 4\ln(r)) + 32r\left(\sqrt{z_1}\sqrt{z_2^5}\left(1 - 2K_0(r\sqrt{z_1})\right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sqrt{z_2}\sqrt{z_1^5}\left(1 - 2K_0(r\sqrt{z_2})\right)\right)\right] r_{,k}r_{,\gamma} + \left[64\left(\sqrt{z_1^5}K_1(r\sqrt{z_2}) - \sqrt{z_2^5}K_1(r\sqrt{z_1})\right) + \right. \\ &\quad \left. + r^3\left(\sqrt{z_1^3}\sqrt{z_2^5} - \sqrt{z_2^3}\sqrt{z_1^5}\right)(1 - 4\ln(r)) + 16r\left(\sqrt{z_1}\sqrt{z_2^5} - \sqrt{z_2}\sqrt{z_1^5}\right)(1 - 2\ln(r)) \right] \delta_{\gamma,k} \right\} \end{aligned} \quad (C.35)$$

$$\begin{aligned}
\chi_{\psi, m_\gamma}^* = & -\frac{1}{128\pi c_3 \sqrt{z_1^5} \sqrt{z_2^5} (z_1 - z_2) r} \left\{ \left[128 \left(\sqrt{z_1^5} K_1(r\sqrt{z_2}) - \sqrt{z_2^5} K_1(r\sqrt{z_1}) \right) + \right. \right. \\
& + 2r^3 \left(\sqrt{z_1^3} \sqrt{z_2^5} - \sqrt{z_2^3} \sqrt{z_1^5} \right) (1 + 4 \ln(r)) + 32r \left(\sqrt{z_1} \sqrt{z_2^5} (1 - 2K_0(r\sqrt{z_1})) - \right. \\
& \left. \left. - \sqrt{z_2} \sqrt{z_1^5} (1 - 2K_0(r\sqrt{z_2})) \right) \right] r_m r_\gamma + \left[64 \left(\sqrt{z_1^5} K_1(r\sqrt{z_2}) - \sqrt{z_2^5} K_1(r\sqrt{z_1}) \right) + \right. \\
& \left. \left. + r^3 \left(\sqrt{z_1^3} \sqrt{z_2^5} - \sqrt{z_2^3} \sqrt{z_1^5} \right) (1 - 4 \ln(r)) + 16r \left(\sqrt{z_1} \sqrt{z_2^5} - \sqrt{z_2} \sqrt{z_1^5} \right) (1 - 2 \ln(r)) \right] m_\gamma \right\}
\end{aligned} \tag{C.36}$$

Nas expressões de (C.19) a (C.36) γ assume valores de 1 e 2.