Universidade Federal Da Paraíba

Departamento de Física

Pós Graduação em Física

Efeitos quânticos em graus de liberdade eletrônicos e fotônicos em dispositivos mesoscópicos caóticos

Thiago Conrado de Vasconcelos

João Pessoa - PB

29 de setembro de 2020

Universidade Federal Da Paraíba

Departamento de Física

Thiago Conrado de Vasconcelos

Efeitos quânticos em graus de liberdade eletrônicos e fotônicos em dispositivos mesoscópicos caóticos

Tese realisada sob a orientação do Prof. Dr. Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos, apresentada à Coordenação do Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física da Universidade Federal da Paraíba, em complementação aos requisitos para obtenção do Título de Doutor em Física, na Área de Concentração em Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos

João Pessoa - PB

29 de setembro de 2020

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

V331e Vasconcelos, Thiago Conrado de.
Efeitos quânticos em graus de liberdade eletrônicos e fotônicos em dispositivos mesoscópicos caóticos / Thiago Conrado de Vasconcelos. - João Pessoa, 2020.
221 f. : il.

Orientação: Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos.
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Física da matéria condensada. 2. Técnica Diagramática. 3. Flutuações Universais. 4. Efeito Hall Inverso de Spin. 5. Hanbury-Brown Twiss. 6. Sistemas Mesoscópico Caóticos. 7. Teoria de Matrizes Aleatórias. I. Ramos, Jorge Gabriel Gomes de Souza. II. Título.

UFPB/BC CDU 538.9(043)

Elaborado por Larissa Silva Oliveira de Mesquita - CRB-15/746

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de **Doutorado** do aluno **Thiago Conrado de Vasconcelos**, candidato ao Título de Doutor em Física na Área de Concentração Física da Matéria Condensada.

Aos vinte e quatro dias do mês de julho do ano de dois mil e vinte, às 14:00, reuniram-se, remotamente, os membros da Banca Examinadora constituída para examinar o candidato ao grau de Doutor em Física na área de Física da Matéria Condensada, **Thiago Conrado de Vasconcelos**. A comissão examinadora foi composta pelos professores doutores: *Jorge Gabriel Gomes de S. Ramos* (UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, *Roberto Menezes* (UFPB), *Fábio Leal de Melo Dahia* (UFPB), *João Rafael Lúcio dos Santos* (UFCG) e *Marcone Isidorio de Sena Júnior* (UPE). Dando início aos trabalhos, o Prof. Jorge Gabriel Gomes de S. Ramos comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para que o candidato fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de tese intitulado "*Efeitos Quânticos em graus de liberdade eletrônicos e bosônicos em dispositivos mesoscópicos caóticos*". Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o seguinte parecer: **"aprovado".** Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutor em Física na forma da lei. E para constar, eu, Jose Sérgio Trindade Silva, redigi esta ata que vai assinada por mim e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **24 de julho de 2020**.

Prof. Dr. Jorge Gabriel Gomes de S. Ramos _____
Orientador – PPGF/UFPB

Prof. Dr. Roberto Menezes _____
PPGF/UFPB

Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia _____
PPGF/UFPB

Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos _____
UFCG

Prof. Dr. Marcone Isidorio de Sena Júnior _____
UPE

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de **Doutorado** do aluno **Thiago Conrado de Vasconcelos**, candidato ao Título de Doutor em Física na Área de Concentração Física da Matéria Condensada.

Aos vinte e quatro dias do mês de julho do ano de dois mil e vinte, às 14:00, reuniram-se, remotamente, os membros da Banca Examinadora constituída para examinar o candidato ao grau de Doutor em Física na área de Física da Matéria Condensada, **Thiago Conrado de Vasconcelos**. A comissão examinadora foi composta pelos professores doutores: *Jorge Gabriel Gomes de S. Ramos* (UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, *Roberto Menezes* (UFPB), *Fábio Leal de Melo Dahia* (UFPB), *João Rafael Lúcio dos Santos* (UFCG) e *Marcone Isidorio de Sena Júnior* (UPE). Dando início aos trabalhos, o Prof. Jorge Gabriel Gomes de S. Ramos comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para que o candidato fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de tese intitulado "*Efeitos Quânticos em graus de liberdade eletrônicos e bosônicos em dispositivos mesoscópicos caóticos*". Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o seguinte parecer: **"aprovado"**. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutor em Física na forma da lei. E para constar, eu, Jose Sérgio Trindade Silva, redigi esta ata que vai assinada por mim e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **24 de julho de 2020**.

Prof. Dr. Jorge Gabriel Gomes de S. Ramos _____
Orientador – PPGF/UFPB

Prof. Dr. Roberto Menezes Roberto Menezes da Silva
PPGF/UFPB

Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia _____
PPGF/UFPB

Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos _____
UFCG

Prof. Dr. Marcone Isidorio de Sena Júnior _____
UPE

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de **Doutorado** do aluno **Thiago Conrado de Vasconcelos,** candidato ao Título de Doutor em Física na Área de Concentração Física da Matéria Condensada.

Aos vinte e quatro dias do mês de julho do ano de dois mil e vinte, às 14:00, reuniram-se, remotamente, os membros da Banca Examinadora constituída para examinar o candidato ao grau de Doutor em Física na área de Física da Matéria Condensada, **Thiago Conrado de Vasconcelos**. A comissão examinadora foi composta pelos professores doutores: *Jorge Gabriel Gomes de S. Ramos* (UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, *Roberto Menezes* (UFPB), *Fábio Leal de Melo Dahia* (UFPB), *João Rafael Lúcio dos Santos* (UFCG) e *Marcone Isidorio de Sena Júnior* (UPE). Dando início aos trabalhos, o Prof. Jorge Gabriel Gomes de S. Ramos comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para que o candidato fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de tese intitulado "*Efeitos Quânticos em graus de liberdade eletrônicos e bosônicos em dispositivos mesoscópicos caóticos*". Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o seguinte parecer: **"aprovado".** Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutor em Física na forma da lei. E para constar, eu, Jose Sérgio Trindade Silva, redigi esta ata que vai assinada por mim e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **24 de julho de 2020**.

Prof. Dr. Jorge Gabriel Gomes de S. Ramos _____
Orientador – PPGF/UFPB

Prof. Dr. Roberto Menezes _____
PPGF/UFPB

Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia _____
PPGF/UFPB

Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos _____
UFCG

Prof. Dr. Marcone Isidorio de Sena Júnior _____
UPE

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de **Doutorado** do aluno **Thiago Conrado de Vasconcelos**, candidato ao Título de Doutor em Física na Área de Concentração Física da Matéria Condensada.

Aos vinte e quatro dias do mês de julho do ano de dois mil e vinte, às 14:00, reuniram-se, remotamente, os membros da Banca Examinadora constituída para examinar o candidato ao grau de Doutor em Física na área de Física da Matéria Condensada, **Thiago Conrado de Vasconcelos**. A comissão examinadora foi composta pelos professores doutores: *Jorge Gabriel Gomes de S. Ramos* (UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, *Roberto Menezes* (UFPB), *Fábio Leal de Melo Dahia* (UFPB), *João Rafael Lúcio dos Santos* (UFCG) e *Marcone Isidorio de Sena Júnior* (UPE). Dando início aos trabalhos, o Prof. Jorge Gabriel Gomes de S. Ramos comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para que o candidato fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de tese intitulado "*Efeitos Quânticos em graus de liberdade eletrônicos e bosônicos em dispositivos mesoscópicos caóticos*". Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o seguinte parecer: **"aprovado".** Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutor em Física na forma da lei. E para constar, eu, Jose Sérgio Trindade Silva, redigi esta ata que vai assinada por mim e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **24 de julho de 2020**.

Prof. Dr. Jorge Gabriel Gomes de S. Ramos _____
Orientador – PPGF/UFPB
Prof. Dr. Roberto Menezes _____
PPGF/UFPB
Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia _____
PPGF/UFPB
Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos _____
UFCG
Prof. Dr. Marcone Isidorio de Sena Júnior _____
UPE

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de **Doutorado** do aluno **Thiago Conrado de Vasconcelos**, candidato ao Título de Doutor em Física na Área de Concentração Física da Matéria Condensada.

Aos vinte e quatro dias do mês de julho do ano de dois mil e vinte, às 14:00, reuniram-se, remotamente, os membros da Banca Examinadora constituída para examinar o candidato ao grau de Doutor em Física na área de Física da Matéria Condensada, **Thiago Conrado de Vasconcelos**. A comissão examinadora foi composta pelos professores doutores: *Jorge Gabriel Gomes de S. Ramos* (UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, *Roberto Menezes* (UFPB), *Fábio Leal de Melo Dahia* (UFPB), *João Rafael Lúcio dos Santos* (UFCG) e *Marcone Isidorio de Sena Júnior* (UPE). Dando início aos trabalhos, o Prof. Jorge Gabriel Gomes de S. Ramos comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para que o candidato fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de tese intitulado "*Efeitos Quânticos em graus de liberdade eletrônicos e bosônicos em dispositivos mesoscópicos caóticos*". Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o seguinte parecer: **"aprovado".** Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutor em Física na forma da lei. E para constar, eu, Jose Sérgio Trindade Silva, redigi esta ata que vai assinada por mim e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **24 de julho de 2020**.

Prof. Dr. Jorge Gabriel Gomes de S. Ramos _____
Orientador – PPGF/UFPB
Prof. Dr. Roberto Menezes _____
PPGF/UFPB
Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia _____
PPGF/UFPB
Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos _____
UFCG
Prof. Dr. Marcone Isidorio de Sena Júnior _____
UPE

Para minha mãe, por absolutamente tudo.

Agradecimentos

Antes de tudo, gostaria de deixar um agradecimento mais que especial ao meu amor Raíza, minha companheira de longínqua jornada a qual tenho a honra de dividir todos os momentos da minha vida. Obrigado pela correção da tese, pela paciência, pelas palavras, enfim, obrigado por tudo.

Agradeço aos meus grandes amigos da área acadêmica, tanto de graduação em Recife na UFPE quanto do mestrado na UFRPE e os que fiz nesta jornada em João Pessoa na UFPB, obrigado a todos. Em especial aos queridos companheiros do DF-UFPB Anderson e Cristino, além do companheiro de residência Felipe, meus sinceros Abraços. Não esquecendo, obviamente, da minha fraterna Ivana que contribuiu significativamente com excelentes discussões ao longo do trabalho, obrigado "Iv".

Um grande agradecimento à instituição do DF-UFPB com seu excelente quadro de profissionais, de limpeza, de coordenação, corpo de docentes e etc. Não poderia de deixar de agradecer, dentro desse corpo ao magníficico, à Seu Mariano que é responsável diretamente, com seu café, pela grande produtividade do departamento de física da UFPB.

Por fim, dentre tantos espectros de agradecimento gostaria de agradecer carinhosamente aos meus orientadores, tanto de mestrado Anderson Luiz da Rocha e Barbosa quanto de doutorado Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos. Gabriel, você que faz jus ao nome de Orientador. Foram excelentes anos, e apesar de tudo, você foi excelente para esta minha trajetória, sabemos que uma chama não se apaga quando originamos outra, portanto honrarei este título ao orientar as próximas gerações.

Agradeço aos amigos da infância, que sempre entenderam as minhas ausências devido aos meus estudos. Quero dizer que sou uma superposição de todos vocês em minha vida, cada um contribuiu da sua maneira. Por fim, quero agradecer à CAPES pelo efêmero apoio financeiro e a todo brasileiro que contribuiu para minha jornada ao pagar seus impostos.

"Eppur si muove."
- Galileu Galilei

Resumo

Neste trabalho investigamos tanto o transporte de cargas quanto de spin em dois aparatos distintos. No transporte de cargas iremos investigar a medida de correlação e a localização fraca no Efeito Hanbury-Brown Twiss Caótico em sistemas mesoscópicos. No transporte de spin temos como principal interesse calcular a flutuação universal do parâmetro λ_{IREE} no efeito hall de spin inverso. Esse parâmetro mede a conversão de corrente de spin em corrente de carga, iremos calcular a flutuação dele num ponto quântico caótico com simetria quiral a baixas temperaturas e em sistemas metálicos. Para efetuar os cálculos da correlação no efeito HBT caótico, assim como o cálculo da flutuação do parâmetro utilizamos a teoria de matrizes aleatória, o método diagramático e a sua expansão. No cálculo da correlação das partículas mostramos que há o anti-agrupamento de bósons mesmo que a amplitude de reflexão seja a mesma da amplitude de transmissão no aparato, mostramos que os efeitos de interferência quântica entre as partículas são desprezados quando aplicamos o campo magnético em um sistema metálico e em sistemas híbridos de metal/supercondutor, porém em sistemas com quiralidade não há esta supressão de interferência quântica entre as partículas mesmo com o campo magnético ligado. Também calculamos a flutuação do parâmetro no regime metálico λ_{IREE} e mostramos que ele flutua entre 0.11 até 0.33 na escala de nanometros dependendo do sistema analisado, esse resultado está em consonância com artigos experimentais da área e se olharmos o regime quiral encontramos a ordem de flutuação de 10^{-3}, cujo valor também está em consonância com resultados experimentais recentes da área.

Palavras-chave: Teoria de Matrizes Aleatórias, Técnica Diagramática, Flutuações Universais, Spintrônica, Efeito Hall Inverso de Spin, Efeito Hanbury-Brow Twiss, Sistemas Mesoscópicos Caóticos.

Abstract

In this work we investigate both particle and spin transport in two different devices. In particle transport we will investigate the correlation measurement and the weak location for the Hanbury-Brown Twiss Chaotic Effect in mesoscopic systems. In spin transport we have as main interest to calculate the universal fluctuation of parameter λ_{IREE} in the Inverse Hall Effect of Spin. This parameter measures the conversion of spin current into charge current, we will calculate its fluctuation in a chaotic quantum point with chiral symmetry at low temperatures and in the metallic regime. To perform the calculations of the correlation in the chaotic HBT effect, as well as the calculation of the parameter fluctuation, we use the theory of random matrices, the diagrammatic method and its expansion. Along the calculations the correlation of the particles we show that there is an antibunching of bosons even though the reflection amplitude is the same as the transmission amplitude in the apparatus. We show that the effects of quantum interference between particles are neglected when we apply the magnetic field in the metallic regime and in hybrid metal/superconducting systems, moreover we show that for chiral regimes, there is no suppression of quantum interference between the particles even with the magnetic field turned on. We also calculated the fluctuation of parameter in the metallic regime and showed that it fluctuates between 0.11 to 0.33 on the nanometer scale depending on the analyzed system. This result is in line with experimental articles in the area and if we look at the chiral regime we find the order of fluctuation is about 10 nanometers, in which the value is also in line with recent experimental results in the area.

Keywords: Random Matrix Theory, Diagrammatic Method, Universal Flutuactions , Spintronics, Inverse Spin Hall Effect, Hanbury-Brow Twiss Effect, Chaotic Mesoscopic Devices.

Sumário

Lista de Símbolos **xxvi**

1 Introdução **1**

1.1 Breve Introdução sobre os Capítulos 3

2 Revisão Teórica **5**

2.1 Física Mesoscópica 5

2.1.1 Comprimentos Característicos e Regimes de Transportes 6

2.1.2 Quantização da condutância 9

2.1.3 Flutuação Universal da Condutância 12

2.2 Teoria de Landauer-Büttiker 13

2.3 Matriz de Espalhamento e Teoria de Matrizes Aleatórias 17

2.3.1 Matriz de Espalhamento 20

2.3.2 Teoria de matrizes aleatórias 24

2.4 Efeito Hanbury-Brown Twiss determinístico 31

2.5 Spintrônica 38

2.5.1 Efeito Hall Clássico 41

2.5.2 Efeito Hall de Spin e Efeito Hall Inverso de Spin 45

3 Efeito Hanbury-Brown Twiss em dispositivos mesoscópicos caóticos 50

3.1 Introdução 50

3.2 Efeito Hanbury-Brown Twiss em uma cavidade caótica balística 51

3.3 Concatenação entre as equações de correlação e a técnica diagramática . . . 61

3.4 Cálculo das equações de correlação para um bilhar de Schrödiger 65

3.5 Cálculo das equações de correlação para um bilhar de Dirac 75

3.6 Cálculo das equações de correlação para um bilhar de Andreev 84

3.7 Considerações Finais 92

4 Efeito Multiterminal no experimento Hanbury-Brown Twiss em dispositivos mesoscópicos caóticos 95

4.1 Introdução 95

4.2 Efeito HBT Multiterminal em uma cavidade caótica balística 96

4.3 Equações de correlação e localização fraca para o efeito HBT Multiterminal num bilhar de Schrödinger 103

4.4 Equações de correlação e localização fraca para o efeito HBT Multiterminal num bilhar de Dirac 121

5 Conversão de corrente de spin em corrente de carga em dispositivos de gás elétron 2D e grafeno de camada única **133**

5.1 Introdução 133

5.2 Cálculo da flutuação do parâmetro λ_{IREE} em pontos quânticos caóticos . . . 135

6 Considerações finais e perspectivas **156**

A Breve informações acerca da técnica diagramática. **158**

Lista de Tabelas

2.1 Tabela de Cartan para os espaços simétricos [27]. Tabela mostrando a relação entre cada classe de simetria e o tipo de simetria que o sistema poderá apresentar, na tabela se houver quebra de simetria abaixo da respectiva simetria estará o valor 0, e, se houver preservação da simetria haverá valores ±1. . . . 25

2.2 Tabela de Cartan que representa a maneira que a matriz de espalhamento deverá ser decomposta em função de matrizes Unitárias, Ortogonais ou Simpléticas.[28] 26

3.1 Amplitudes das correlações das partículas nos terminais de saída. Essas correlações são para o sistema no regime metálico, e as medidas das correlações são para férmions e bósons com campo magnético (GUE) e sem campo magnético (GOE) respectivamente. 72

3.2 Amplitude dos termos de localização fraca (wl) para os sistemas fermiônico e bosônico respectivamente. 74

3.3 Tabela comparando em % a medida de correlação do sistema no regime metálico utilizando férmions em comparação à medida de correlação do sistema utilizando bósons. 75

3.4 Amplitudes de correlações para o sistema com quiralidade analisado, medida da correlação para férmions e bósons. 81

3.5 Comparação do ganho/perda da amplitude de correlação do sistema no regime quiral em relação ao sistema no regime metálico. 82

3.6 Amplitude dos termos de localização fraca (wl) para os sistemas fermiônico e bosônico respectivamente, para um ponto quântico com simetria de sub-rede. 83

3.7 Tabela comparando em % a medida de correlação do sistema quiral utilizando férmions em comparação à medida de correlação do sistema utilizando bósons. 84

3.8 Amplitudes de correlações para o sistema com supercondutividade, medida da correlação para férmions e bósons. 89

3.9 Amplitude dos termos de localização fraca (wl) para os sistemas fermiônico e bosônico, respectivamente, para um ponto quântico com simetria partícula-buraco. 91

3.10 Tabela comparando em % a medida de correlação das partículas do sistema com supercondutividade. 91

3.11 Tabela mostrando as amplitudes de correlações para as diversas classes de ensemble, utilizando partículas fermiônicas. 93

3.12 Tabela mostrando as amplitudes de correlações para as diversas classes de ensemble, utilizando bósons como partículas. 93

4.1 Número de estados acessíveis ao sistema para um intervalo de número total de terminais $2 \leq N_T \leq 6$. 101

4.2 Tabela referente à medida de correlação das partículas para o efeito HBT multiterminal com $2 \leq N_T \leq 6$, para o regime metálico, a classe de Wigner-Dyson com índice $\beta = 2$. 108

4.3 Tabela referente à medida de correlação das partículas para o efeito HBT multiterminal com $2 \leq N_T \leq 6$, para o regime metálico, representado pela classe de Wigner-Dyson com índice $\beta = 1$. 115

4.4 Tabela referente à medida do termo de localização em % para o efeito HBT multiterminal com $2 \leq N_T \leq 6$, para o regime metálico, representado pela classe de Wigner-Dyson. 120

4.5 Tabela referente à medida de correlação das partículas para o efeito HBT multiterminal com $2 \leq N_T \leq 6$, para o regime quiral unitário, com índice $\beta = 2$.125

4.6 Tabela referente à medida de correlação das partículas para o efeito HBT multiterminal com $2 \leq N_T \leq 6$, para o regime quiral ortogonal, com índice $\beta = 1$. 127

4.7 Tabela referente à medida da localização fraca (em %) das partículas para o efeito HBT multiterminal com $2 \leq N_T \leq 6$, para o regime quiral 131

Lista de Figuras

1.1 A imagem mostra a maneira com que, ao passar dos anos, mais transistores foram sendo incrementados nos microprocessadores. Imagem retirada de: https://abertoatedemadrugada.com/2015/07/ibm-cria-o-primeiro-chip-com-tecnologia.html . 2

2.1 A figura mostra, em **a)**, a escala de comprimento do material a baixas temperaturas. De acordo com essa escala, podemos caracterizar o sistema como microscópico ($L < \lambda_F$), mesoscópico ($\lambda_F < L < \ell_\phi$) ou macroscópico ($L > \ell_\phi$). Em **b)**, vê-se a caracterização do tipo de transporte eletrônico poderá ser balístico se ($\lambda_F < L \ll \ell_m$) e, em **c)**, difusivo se ($\ell_m \ll L < \xi$). 9

2.2 A figura mostra a resistência variando com a tensão aplicada nos terminais. É possível ver que a variação da resistência é discreta. A figura foi retirada da referência [3]. 10

2.3 A condutância do ponto de contato quântico varia de acordo com a voltagem aplicada na constrição. Observamos que há uma escada de condutância, revelando portanto a quantização da condutância em semicondutores. Figura retirada da referência [3]. 11

2.4 A figura **a)** mostra que existe um valor médio da condutância,que está entre 372 e 373, porém, essa medida não está livre de oscilações, as quais ocorrem independente do campo magnético. A amplitude da flutuação ao redor da média da condutância é chamada flutuação universal da condutância, portanto, existe **b)** uma distribuição da condutância numa região em que a medida mais provável é a média, e existem algumas medidas que estão abaixo de 372 e acima de 373. O valor da flutuação universal da condutância é da ordem de e^2/h 13

2.5 A figura mostra que a condutância no efeito Hall de spin em poços quânticos de HgTe tem flutuações quânticas em torno da média. Figura retirada da referência [8]. 14

2.6 A figura mostra um condutor mesoscópico ligado idealmente a dois terminais, que têm dimensões muito maiores que o condutor. Uma vez que o condutor é submetido a uma diferença de potencial eletroquímico as cargas saem do terminal T.1 e, ao encontrar o condutor, parte das cargas são transmitidas para o terminal T.2 e parte são refletidas para o terminal T.1. 15

2.7 A figura mostra um ponto quântico caótico em que a função de onda da partícula é descrita pela equação de Schrödinger. Esse ponto pode ser chamado de Bilhar de Schrödinger. As setas da direita mostram que a partícula entra embaixo, percorre todo o espaço de fase e sai no ponto de cima. Figura retirada de [14] 18

2.8 A figura mostra um ponto quântico caótico em que a função de onda da partícula é descrita pela equação de Dirac. Portanto, este ponto quântico pode ser chamado de Bilhar de Dirac. Figura retirada de [16]. 19

2.9 A figura mostra um ponto quântico híbrido com suas características básicas a) Micrografia eletrônica de um ponto quântico com uma interface Normal-Supercondutor-Normal e b) A imagem ampliada da heterojunção. Figura retirada de [17]. 19

2.10 Um condutor é ligado por contatos ideais a dois terminais, e existem 3 modos de propagação, a representa as amplitudes de onda que entram no condutor, e b, as amplitudes de onda que saem dele. A matriz de espalhamento S desse sistema é do tipo 3×3. 21

2.11 A figura representa o aparato experimental referente é análogo ao interferômetro de Hanbury-Brown Twiss. Nela, temos duas fontes (1 e 2) que servem únicamente para emitir partículas, as quais incidem num espelho semitransparente sendo espalhadas e seguem para os terminais de detecção (3 e 4). Figura baseada na figura do artigo de revisão [32]. Na figura temos as setas em azul mostrando as reflexões e as setas em vermelho mostrando as transmissões. As setas em azuis mostram a reflexão das partículas quando saem dos terminais 1 e 2 e chegam aos terminais 3 e 4, respectivamente. As setas em vermelhos mostram as tranmissões das partículas ao saírem dos terminais 1 e 2 e chegarem aos terminais 4 e 3 respectivamente. 32

2.12 Nessa figura, temos, à esquerda, o elétron, e, à direita, o planeta Terra, ambos com um movimento angular. Como o planeta Terra é um corpo extenso, dizemos que ele tem um momento angular. Em nosso planeta, essa rotação é responsável pela duração do dia; nos elétrons, ela é responsável por produzir o *spin* que poderá caracterizar a magnetização de um material. Notar que isso é uma analogia e que o spin não está vinculado a uma seta no espaço de coordenadas. 39

2.13 A figura é uma representação do efeito Hall. Quando uma corrente elétrica é submetida a um campo magnético **B**, os elétrons sofrem desvios, se acumulando na superfície do condutor, surgindo, portanto, uma tensão transversal chamada tensão Hall V_H. Devido a essa tensão, surge naturalmente um fluxo de cargas entre as faces do condutor, de forma que é possível determinar a resistência Hall R_H em função da espessura do condutor w. 42

2.14 A figura mostra o resultado do a) efeito Hall quantizado, observamos que para altos campos magnéticos e uma baixa temperatura a resistência Hall converge para o mesmo valor, esta figura foi retirada da referência[52]. b) Vemos o efeito Hall quântico fracionado, é possível observar com clareza um platô de resistência em $\nu = 1/3$, figura retirada da referência [53] 44

2.15 A figura mostra que ao bombear a corrente de carga para um condutor, existe a acumulação de spins com polarizações opostas nas extremidades opostas do condutor, ou seja, a corrente de carga gera uma corrente de spin, e essa corrente de spin é diametralmente separada devido à polarização das cargas; esse é o efeito Hall de spin. 46

2.16 A figura mostra que uma corrente de se propaga do reservatório 1 para a amostra. O reservatório 1 está polarizado com cargas com spin *up*, e entre o reservatório 2 e 3, é gerada uma diferença de potencial $\Delta V = V_3 - V_2$, a qual irá gerar a propagação de uma corrente eletrônica entre os terminais 2 e 3. . 47

2.17 A linha tracejada representa a energia de Fermi e a linha sólida vertical representa a energia do sistema. A cor vermelha representa a energia total das cargas que estão com spin *down* e a cor azul representa a energia total das cargas que estão com spin *up*. Em a), a distribuição de energia nos terminais está em equilíbrio. Como não existe desbalanceamento, não vai ocorrer propagação da corrente de spin, então, se faz necessário um desbalanceamento, que está representado em b). Com o desbalançeamento entre as energias das cargas com spin *down* e das cargas com spin *up*, vai existir a propagação de corrente polarizada, nesse caso, uma corrente pura de spin *down*. 48

2.18 Na figura mostra o fluxo de a)corrente pura de spin, $I_c = 0$ e $I_s \neq 0$ e b) representa corrente eletrônica pois $I_c \neq 0$ e $I_s \neq 0$. 49

3.1 O esquema gráfico mostra uma cavidade caótica balística com 4 terminais. Dessa maneira, fica nítido que as partículas (em branco) inicialmente se encontram no terminal 1 (T.1) e no terminal 2 (T.2). Em sequência, as partículas seguem os guias (em preto) e adentram no ponto quântico caótico (espelhado), podendo existir diversas formas de espalhamentos, como, por exemplo, elas se agruparem em um dos terminais após saírem do ponto quântico ou haver um espalhamento de tal forma que cada uma seguirá para um terminal diferente. Vale ressaltar que esse agrupamento ou espalhamento irá depender da natureza da partícula. 52

3.2 Nesta figura, tem-se os estados referentes a um sistema que só pode ocorrer caso as partículas sejam bósons, ou seja, temos os estados relacionados aos condensados. **a)** Condensado de reflexão no terminal 1, estado $|\Psi_{11}\rangle$. **b)** Condensado de reflexão no termial 2, estado $|\Psi_{22}\rangle$. **c)** Condensado de transmissão no terminal 3, estado $|\Psi_{33}\rangle$. **d)** Condensado de transmissão no terminal 4, estado $|\Psi_{44}\rangle$. 56

3.3 Esses são dois dos estados espalhados cujas partículas, após o espalhamento pelo ponto quântico, vão cada uma para um terminal. **a)** estado de reflexão total $|\Psi_{12}\rangle$ **b)** estado de transmissão total $|\Psi_{34}\rangle$. 57

3.4 Nesta figura, temos os estados mistos que ocorrem quando há sempre uma partícula em um dos terminais **T.1** ou **T.2**, enquanto a outra estará no terminal **T.3** ou **T.4**. **a)** estado misto $|\Psi_{13}\rangle$. **b)** estado misto $|\Psi_{14}\rangle$. **c)** estado misto $|\Psi_{23}\rangle$. **d)** estado misto $|\Psi_{24}\rangle$. 58

3.5 A primeira imagem da figura representa a matriz unitária U_{ab} enquanto a segunda representa a sua matriz complexa U^*_{ab}. Os pontos pretos caracterizam os índices a e α, enquanto os pontos brancos caracterizam os índices b e β. É importante ratificar que, dependendo da simetria do sistema, a matriz U_{ab} poderá ser real ou complexa. A terceira imagem da figura representa a matriz de projeção $\mathcal{P}_{ij}$, que seleciona os elementos responsáveis pelo transporte de partículas. No que tange à última, essa se refere à delta de Kronecker que será utilizada para calcular as médias das equações de correlação. 66

3.6 Os diagramas correspondem às equações referentes aos estados de agrupamento em forma de diagramas. As figuras correspondem respectivamente a) à equação (3.40) referente ao estado de agrupamento de reflexão no terminal **T.1**, b) à equação (3.41) referente ao estado de agrupamento de reflexão no terminal **T.2**, c) à equação (3.42) referente ao estado de agrupamento de transmissão no terminal **T.3** e d) à equação (3.43) referente ao estado de agrupamento de transmissão no terminal **T.4**. 68

3.7 A figura contém os diagramas que representam a equação (3.44) e se refere ao estado de espalhamento de reflexão total em forma de diagrama. 69

3.8 A figura contém os diagramas que representam a equação (3.45) e se refere ao estado misto no terminal **T.1** em forma de diagrama. 69

3.9 A figura contém os diagramas que representam a equação (3.46) e se refere ao estado misto no terminal **T.2** em forma de diagrama. 70

3.10 A figura contém os diagramas que representam a equação (3.47) e se refere ao estado de espalhamento de transmissão total em forma de diagrama. 70

3.11 As figuras correspondem aos diagramas que são referentes às equações dos estados de agrupamento em forma de diagramas. As figuras correspondem, respectivamente, a) à equação (3.55), referente ao estado de agrupamento de reflexão no terminal **T.1**, b) à equação (3.56), referente ao estado de agrupamento de reflexão no terminal **T.2**, c) à equação (3.57), referente ao estado de agrupamento de transmissão no terminal **T.3**, e d) à equação (3.58), referente ao estado de agrupamento de transmissão no terminal **T.4**. 79

3.12 A figura correspode aos diagramas da equação (3.59), e se refere ao estado de espalhamento de reflexão total em forma de diagrama. 79

3.13 A figura corresponde aos diagramas da equação (3.60), e se refere ao estado misto no terminal **T.1** em forma de diagrama. 80

3.14 A figura corresponde aos diagramas da equação (3.61) e se refere ao estado misto no terminal **T.2** em forma de diagrama. 80

3.15 A figura corresponde aos diagramas da equação (3.62) e se refere ao estado de espalhamento de transmissão total em forma de diagrama. 80

3.16 As figuras correspondem às equações referentes aos estados de agrupamento em forma de diagramas. Elas correspondem, respectivamente, a) à equação (3.66) referente ao estado de agrupamento de reflexão no terminal **T.1**; b) à equação (3.67) referente ao estado de agrupamento de reflexão no terminal **T.2**; c) à equação (3.68) referente ao estado de agrupamento de transmissão no terminal **T.3**; e d) à equação (3.69) referente ao estado de agrupamento de transmissão no terminal **T.4**. 87

3.17 A figura corresponde à equação (3.70), que se refere ao estado de espalhamento de reflexão total em forma de diagrama. 87

3.18 A figura que corresponde à equação (3.71) se refere ao estado misto no terminal **T.1** em forma de diagrama. 88

3.19 A figura corresponde à equação (3.72), que se refere ao estado misto no terminal **T.2** em forma de diagrama. 88

3.20 A figura corresponde à equação (3.73), que se refere ao estado de espalhamento de transmissão total em forma de diagrama. 88

4.1 A figura mostra uma cavidade caótica balística com N terminais. Do lado esquerdo da figura, mostram-se os terminais (**T.1**) e (**T.2**), que continuam sendo responsáveis pela introdução das partículas dentro do ponto quântico, enquanto, do lado direito, têm-se terminais que servem para detectar as partículas rotulados como (**T.3**) ... (**T.j**). Em nosso trabalho, os subíndices j e j' servirão para rotular qualquer terminal distinto dos terminais (**T.1**) e (**T.2**), ou seja, terminais que ficam à esquerda do ponto quântico. É importante salientar que com a adição de novos terminais irá aumentar significativamente o número de microestados acessíveis do sistema, o que será discutido a posteriori. 97

4.2 Figura mostrando os 2 tipos de diagramas a serem analisados no problema. Temos a representação diagramática a) da equação geral (4.8) e b) da equação geral (4.9), respectivamente. É importante perceber que o diagrama (a) dessa figura é o diagrama geral da figura (3.6) e os dois primeiros diagramas referentes às figuras (3.7 - 3.10), enquanto o diagrama (b) dessa figura é o diagrama geral dos diagramas entre parênteses nas figuras (3.7 - 3.10) 104

4.3 Nesta figura, representamos 4 gráficos, a primeira coluna, ou seja, os gráficos das alíneas (a) e (b), representa a medida de correlação individual de cada estado do sistema em função do número total de terminais canais abertos no problema. As alíneas (c) e (d) representam a amplitude de probabilidade de ser medido um conjunto de estados do sistema para, respectivamente, férmions e bósons. Note-se que, nas alíneas (c) e (d), nos referimos a uma medida coletiva, ou seja, aqui tem-se a soma de todas as medidas de correlação associadas a um estado envolvido, diferentemente das alíneas (a) e (b), em que temos as medidas individuais de cada estado do sistema. 113

4.4 A figura representa graficamente as equações referentes às medidas de localização do efeito HBT multiterminal (4.25 - 4.29). Nas partes superior e inferior temos, respectivamente, a medida de localização das partículas para o sistema bosônico e fermiônico. Cada paleta de cor descreve um estado acessível do sistema. Aqui temos as medidas da correlação do sistema para $N_T \geq 4$. 118

4.5 A figura mostra o único tipo de diagrama a ser analisado no problema em questão. Temos, nele, a representação diagramática geral das equações (3.55 - 3.62). A partir desse princípio, é possível encontrar todas as medidas de correlação das partículas para qualquer um dos 5 estados discutidos anteriormente. 123

4.6 A figura mostra dois gráficos, os quais estão relacionados com as equações de localização para o regime quiral (4.50 - 4.54). No gráfico superior, estão as equações de localização referentes ao sistema bosônico, e, no gráfico inferior, as referentes ao sistema fermiônico. 130

5.1 A figura mostra o modelo proposto, um ponto quântico caótico conectado idealmente a 3 guias. O guia 1 bombeia para dentro do ponto uma densidade de corrente pura de spin (J^{α}), fazendo com que a acumulação de spin dentro do ponto quântico gere uma corrente de carga entre os guias 2 e 3 devido a uma forte interação spin-órbita. 136

5.2 A figura mostra o resultado da simulação numérica do sistema no regime metálico e do sistema no regime quiral. Os quadrados e círculos vazados são referentes às médias do coeficiente característico dos dois regimes, em que o valor é zero sempre. Enquanto os quadrados e círculos preenchidos mostram o resultado referente à variância do parâmetro em questão, na parte esquerda do gráfico temos a variância para um regime simétrico ($N_i = N$) e percebemos que, nesse regime, ambos os resultados caem com N^2, enquanto, na parte à direita do gráfico, temos o resultado para a variância no regime assimétrico ($N_1 = N$ e $N_2 = N_3 = 1$) e também percebemos que esse resultado cai com N^3. As linhas pontilhadas mostram o valor teórico da convergência da variância, além de que o quadrado vermelho/vazado representa a variância/média do sistema no regime metálico, enquanto o círculo azul/vazado representa as mesmas medidas no regime quiral. 155

A.1 O diagrama mostrado nesta figura representa a equação (A.1). 159

A.2 A figura mostra as quatro combinações possíveis referente ao diagrama dado pela equação (A.1), estas quatro combinações possíveis é para a classe do ensemble circular unitário pertencente a classe de Wigner-Dyson com índice de simetria $\beta = 2$. 159

A.3 O diagrama mostrado nesta figura representa a equação (A.7). 161

A.4 A figura mostra as quatro combinações possíveis referente ao diagrama dado pela equação (A.7), estas quatro combinações possíveis é para a classe do ensemble circular unitário pertencente a classe de Wigner-Dyson com índice de simetria $\beta = 2$. 162

A.5 O diagrama mostrado nesta figura representa a equação (A.13) 164

Lista de Símbolos

λ_{IREE}	parâmetro característico de conversão de corrente de carga em corrente de spin no efeito inverso Rashba Edelstein.
HBT	Hanbury Brown-Twiss;
TMA	Teoria de Matrizes Aleatórias;
N_T	Número Total de canais abertos;
$ISHE$	Efeito Hall inverso de spin;
nm	Nanômetros;
λ_F	Comprimento de onda de Fermi;
l_m	Livre caminho médio;
ζ	Comprimento de localização;
l_{phi}	Comprimento de coerência de fase;
$GaAs$	Arsenieto de gálio;
$AlGaAs$	Arsenieto de gálio dopado com alumínio;
G	Condutância;
e	carga do elétron;
$\bar{h}$	Constante de Planck;
$rms[G]$	Dispersão da condutância;
μ_i	Potencial eletroquímico no terminal i;
I_i	Corrente de carga em um canal i;
T	Probabilidades de transmissão;
R	Probabilidades de reflexão;

V_i	Voltagem no terminal i;
M	Modos Transversais;
S	Matriz de Espalhamento do Sistema;
s_{ij}	Elemento da matriz de espalhamento do sistema;
SRT	Simetria de reversão temporal;
SRS	Simetria de rotação de spin;
SLS	Simetria de sub-rede;
PHS	Simetria partícula-buraco;
β	Índice de simetria;
$\mathbf{B}$	Campo magnético;
SC	Supercondutividade;
SO	Interação spin-órbita;
U	Matrizes do grupo unitário;
$\mathbf{S}_p$	Matrizes do grupo simplético;
Σ_z	Matriz de Dirac;
ECU	Ensemble circular unitário;
ECO	Ensemble circular ortogonal;
ECS	Ensemble circular simplético;
$chECU$	Ensemble circular unitário quiral;
$chECO$	Ensemble circular ortogonal quiral;
$chECS$	Ensemble circular simplético quiral;
Q	Fator topológico;
a, b	Operadores de aniquilação;
$a^\dagger, b^\dagger$	Operadores de criação;
n_i	Operador número;
$\|0\rangle$	Estado de vácuo;
$P(2,0), P(0,2)$	Probabilidade de agrupamento de duas partículas no mesmo terminal;
$P(1,1)$	Probabilidade de antiagrupamento das partículas;

SHE	Efeito Hall de spin;
G^q_{sH}	Condutância quantizada no efeito Hall de spin;
G^f_{sH}	Condutância fracionada no efeito Hall de spin;
wl	Localização fraca;
J^α	Densidade de corrente de spin;
J^0	Densidade de corrente de carga.

Capítulo 1

Introdução

No fim do século XIX e no início do século XX, a física teve um caloroso debate em relação às novas descobertas científicas que revolucionaram os estudos da época, porque emergia uma nova física chamada física quântica. Com essa nova abordagem, a natureza probabilística rompia com a natureza determinística. Por exemplo, o simples ato de lançar uma partícula e não ter certeza da sua posição, da sua velocidade, e, muito menos, da sua trajetória, intrigava completamente a comunidade científica. Por um lado, o mundo macroscópico, regido pelas leis da física clássica, saberia, mediante as condições iniciais, exatamente a trajetória, a posição e a velocidade dessa partícula após o lançamento. Por outro, o mundo microscópico, regido pelas leis da física quântica, nos daria apenas a probabilidade de o evento acontecer. O primeiro mundo (macroscópico) é aquele que a visão consegue perceber, ou seja, é um mundo que podemos enxergar, pois ele emerge devido ao agrupamento da matéria. Entretanto, essa matéria agrupada é formada de partículas menores, como os átomos, as moléculas e as partículas subatômicas. Nesse último caso, nós não podemos vê-las, apesar de sabermos que elas existem e estão se arranjando de tal forma que são responsáveis pela formação desses materiais macroscópicos.

Além disso, a mecânica clássica é responsável por descrever fenômenos de transporte em objetos macroscópicos, enquanto a mecânica quântica é responsável pelos objetos mi-

croscópicos. Contudo, quando um objeto macroscópico é miniaturizado, ele, antes de ser um objeto microscópico, passa a ser um objeto semiclássico (mesoscópico). Nessa interface, está situada a física mesoscópica. Outro aspecto a se salientar é que, com o advento de novas tecnologias, deixamos de ser meros observadores da natureza (seres passivos) ao longo do último século, passando a construir materiais nunca imaginados em laboratórios devido às altas tecnologias. Esses objetos podem ser notados, por exemplo, na miniaturização dos computadores ao longo das últimas décadas, como podemos ver na figura 1.1).

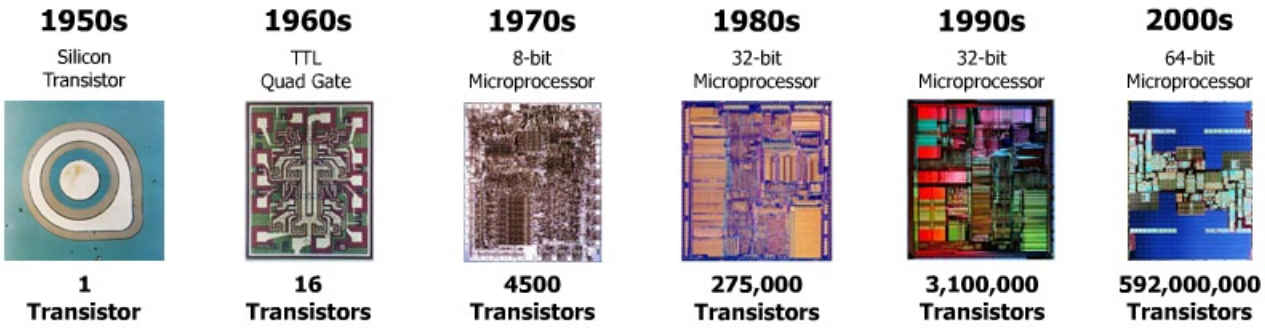

Figura 1.1: A imagem mostra a maneira com que, ao passar dos anos, mais transistores foram sendo incrementados nos microprocessadores. Imagem retirada de: https://abertoatedemadrugada.com/2015/07/ibm-cria-o-primeiro-chip-com-tecnologia.html

Ao passo que transformamos os materiais macroscópicos em mesoscópicos, conseguimos produzir computadores mais potentes com mais transistores/área, porém, é nítido que essa miniaturização, a priori, não pode ser infinita, como afirma a lei de Moore. Para continuar essa evolução, se faz necessário investimento em ciência e tecnologia, mais especificamente, nas áreas da física que estudam as nanoestruturas. Em vista disso, iremos tratar nesta tese de uma dessas partes da interface da física, a já mencionada física mesoscópica. Como dito, essa física é responsável por analisar objetos que nem podem ser considerados clássicos, nem quânticos extremos. Para ela, apenas uma realização de um observável físico não caracteriza a medição desse observável, mas um conjunto de medidas sobre o mesmo observável, de tal maneira que a média sobre a flutuação dessas medições é mais importante do que a própria medição individual.

Apesar de parecer apenas uma interface espremida entre duas físicas hegemônicas (a física clássica e quântica), a física mesoscópica é muito abrangente. Dentre os mais diversos ramos dela, estudam-se tanto o transporte eletrônico (transporte de partículas) como o mais recente transporte: o transporte de spin (a spintrônica). Nesta tese, iremos analisar o transporte de partículas no efeito Hanbury-Brown-Twiss(HBT) num dispositivo mesoscópico chamado ponto quântico caótico, assim como iremos analisar a spintrônica no chamado efeito Hall inverso de spin. Nele, investigaremos a eficiência da conversão de corrente de carga em corrente através de um parâmetro característico (λ_{IREE}) de conversão. Esse último efeito de conversão de corrente de carga em corrente de spin também será analisado num ponto quântico caótico.

1.1 Breve Introdução sobre os Capítulos

Neste capítulo introdutório foi apresentada uma breve motivação a respeito do estudo de física mesoscópica.

No capítulo 2 desta tese, iremos mostrar uma breve revisão teórica acerca do tema e de como os comprimentos característicos são importantes para sistemas de nanoestruturas. Também apresentaremos como foi abordado o problema da quantização da condutância e evidenciaremos que existe uma flutuação quântica em torno da média, pontuando, ademais, que, para alguns sistemas, a média não nos traz informações completas sobre um observável físico e, para isso, o cálculo da dispersão é mais eficaz. Ainda no mesmo capítulo, veremos como a teoria de Landauer-Buttikker sobre transporte de cargas e spin se conecta com a TMA e ambas descrevem o transporte eletrônico através da matriz de espalhamento, e, com isso, podemos analisar espalhamentos em dispositivos tipo Hanbury-Brown Twiss. Não menos importante, veremos que, além do transporte de cargas nos efeitos Hall clássico e quântico, também há o transporte de spin nos efeitos Hall de spin e inverso de spin.

No capítulo 3, será apresentado o efeito Hanbury-Brow Twiss em um sistema mesoscópico, porém, diferentemente do efeito HBT determinístico, esse efeito ocorre num sistema caótico,

ou seja, para o qual tem-se um espelho caótico, de tal forma que as partículas se espalham para todas as direções.

No capítulo 4, será apresentado o efeito HBT em questão, que será generalizado para N_T terminais abertos. Também observaremos como a ausência ou a presença de mais ou menos terminais de saída afetam diretamente a medida física da correlação das partículas.

No capítulo 5, iremos trabalhar com o transporte de spin no ISHE em sistemas para classe de Wigner-Dyson e em sistemas com quiralidade. Iremos calcular a dispersão do parâmetro λ_{IREE} nesses regimes, fator esse que mede a conversão de corrente de spin em corrente de carga. Faremos isso com a finalidade de conectar nossos resultados com medidas experimentais recentes.

Finalizando a tese, no capítulo 6, apresentaremos as conclusões deste trabalho e perspectivas de trabalhos futuros.

Capítulo 2

Revisão Teórica

2.1 Física Mesoscópica

A física mesoscópica é o ramo da física que estuda sistemas que estão na interface do quântico e do clássico, ou seja, ela se encontra no meio dos dois regimes. Uma das maneiras de se caracterizar a física mesoscópica é através do tamanho característico do objeto em questão. Suponhamos um fio condutor, este fio é clássico, quântico ou mesoscópico? Esta resposta é dada pelo comprimento característico do objeto em questão. Portanto, podemos dizer que o comprimento característico do objeto estudado em física mesoscópica é muito grande comparado ao tamanho de um átomo porém muito pequeno comparado ao micrômetro [1, 2]. Essa escala intermediária pode ser descrita como uma quantidade de átomos que, juntos, formam uma dimensão da ordem de $10^2 nm$ até $10^3 nm$ que é o tamanho aproximado entre um vírus e uma bactéria [1]. É importante lembrar que objetos macroscópicos, ao serem partidos em pedaçoes menores, vão se tornando objetos mesoscópicos e, portanto, as leis vigentes no mesmo objeto com as mesmas características, porém em escala menor, são as leis da mecânica quântica. Um bom exemplo físico, é que, ao se medir a condutância de um fio condutor clássico, como aqueles que são utilizados em residências, obtém-se [2]

$$G = \sigma \frac{W}{L}, \tag{2.1}$$

em que G é a condutância do material de que é feito o fio condutor, a qual é da ordem de Ω^{-1}; W é a área do condutor; e L é o comprimento do mesmo e σ é uma constante que depende do material de que é feito o condutor. Assim, à medida que diminuímos a sua área, a condutância do material também diminui e tende a ser quantizada de tal forma que o sistema obedecerá às leis da mecânica quântica.

2.1.1 Comprimentos Característicos e Regimes de Transportes

Discutimos um dos fatores mais importantes na física mesoscópica, que são as escalas de comprimento nas quais ocorre o transporte eletrônico. Dentre elas, temos

1) **Comprimento de Onda de de Broglie (λ)**: relaciona a que energia cinética o elétron adquire características ondulatórias.

$$\lambda = \frac{2\pi}{\kappa} = \frac{h}{\sqrt{2mE}}. \tag{2.2}$$

2) **Livre caminho médio (ℓ_m)**: é o caminho que um elétron percorre antes de sofrer um espalhamento elástico, alterando o seu momento inicial ($\overrightarrow{p_0}$). Ao mudar o seu momento inicial, ele altera apenas a direção do momento e preserva o seu módulo

$$|\overrightarrow{p}| = |\overrightarrow{p_0}|. \tag{2.3}$$

3) **Comprimento de coerência de fase (ℓ_ϕ)**: trata-se do caminho percorrido pelo elétron sem perder a sua natureza ondulatória. A coerência é uma medida da correlação entre as fases medidas em diferentes pontos de uma onda e pode ser escrita como

$$\ell_\phi = \sqrt{D\tau_\phi}, \tag{2.4}$$

em que D é chamado de coeficiente de difusão, e τ_ϕ é o tempo característico que é responsável pela perca de fase do elétron, chamado tempo de relaxação de fase.

4) **Dimensão do sistema**: o comprimento da amostra do sistema é um dos tamanhos característicos muito importantes em sistemas de transporte eletrônico, pois é com

base na dimensão do sistema em questão que conseguimos saber se as leis que regem o problema em voga obedecem às leis da mecânica quântica ou às leis da mecânica clássica.

5) **Comprimento de onda de Fermi (λ_F)**: em um reservatório, nem todos os elétrons têm a mesma energia, ou são responsáveis por gerar a corrente elétrica. Os responsáveis pelo transporte eletrônico são aqueles elétrons que estão próximo à energia de Fermi (ϵ_F). Eles têm um comprimento de onda caracteristico chamado comprimento de onda de Fermi (λ_F), escrito como

$$\lambda_F = \frac{2\pi}{\kappa_F} = \frac{h}{\sqrt{2m\epsilon_F}}. \tag{2.5}$$

6) **Comprimento magnético (ℓ_b)**: na presença de um campo magnético, as energias dos elétrons são quantizadas em níveis, chamados níveis de Landau. Os elétrons oscilam junto ao campo magnético de tal forma que as suas oscilações são dadas através do comprimento magnético, o qual é escrito como

$$\ell_b = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}. \tag{2.6}$$

7) **Comprimento de localização (ξ)**: relaciona-se com o alcance da função de onda do elétron. Se a amostra for um bom condutor (metal, por exemplo), então a função de onda se estende ao longo de toda amostra (o elétron consegue percorrer toda a amostra). Caso a amostra seja um mau condutor (um isolante), o pico da função de onda será em que o elétron está localizado, e, a partir disso, a função de onda irá decair exponencialmente, de tal forma que só poderemos encontrar o elétron numa região confinada, região esta chamada centro de localização.

De acordo com os comprimentos característicos acima, as partículas quânticas podem ser vistas como ondas se a escala de comprimento em que ocorre o transporte eletrônico estiver entre o comprimento (1) e o (7). Porém, se a escala de comprimento for ligeiramente maior que o comprimento de localização do elétron, ele pode perder a sua característica ondulatória e, por consequência, pode ser tratado como partícula clássica. O comprimento (L) de uma

amostra mesoscópica tem que se enquadrar entre o regime quântico e o regime clássico, ou seja, estar situado entre o comprimento de coerência de fase ($L = \ell_F$) dos elétrons e o comprimento de onda de Fermi ($L = \lambda_F$). Então temos que, se o comprimento da amostra for menor que o comprimento de onda de Fermi ($L < \lambda_F$), o sistema é microscópico; se o comprimento da amostra for maior que o comprimento de coerência de fase ($L > \ell_\phi$), o sistema é macroscópico; Por último, se o sistema estiver entre os dois regimes ($\lambda_F < L < \ell_\phi$) o sistema é mesocópico. A distinção dos regimes de acordo com o comprimento característico está mostrada na figura (2.1).

Como estamos abordando questões anteriores atinentes ao sistema mesoscópico, então, vamos caracterizar os tipos de regime como regime difusivo, regime balístico e regime localizado, os quais estão ilustrados na figura (2.1) os regimes balístico e difusivo. De acordo com o comprimento (L) característico do condutor em questão, temos que os regimes são caracterizados como

i) Se o comprimento L estiver entre o comprimento de onda de Fermi λ_F e o comprimento de livre caminho médio ℓ_m ($\lambda_F < L \ll \ell_m$), dizemos que o regime em que o transporte eletrônico se encontra é um regime balístico, e como, por exemplo, num transporte eletrônico que ocorre dentro de um ponto quântico.

ii) Se o comprimento L estiver entre o comprimento de livre caminho médio ℓ_m e o comprimento de localização ξ ($\ell_m \ll L < \xi$), dizemos que o regime em que o transporte eletrônico se encontra é um regime difusivo. Um exemplo, é o transporte eletrônico que ocorre através de um fio quântico desordenado.

iii) Se o comprimento L estiver entre o comprimento de localização ξ e o comprimento de coerência de fase ℓ_ϕ ($\xi \ll L < \ell_\phi$), dizemos que o regime em que o transporte eletrônico se encontra é um regime localizado.

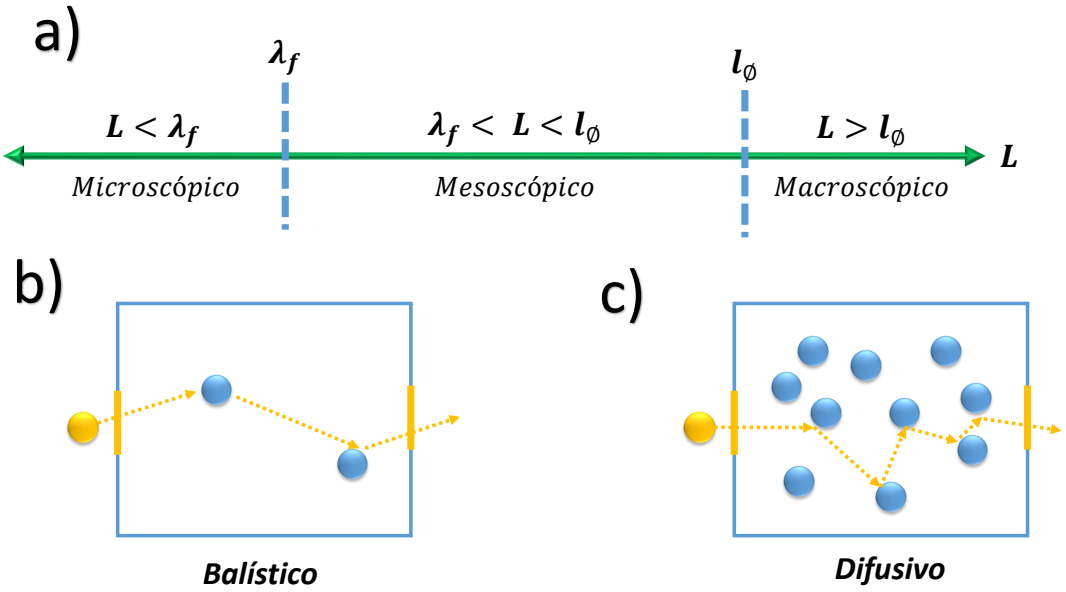

Figura 2.1: A figura mostra, em **a)**, a escala de comprimento do material a baixas temperaturas. De acordo com essa escala, podemos caracterizar o sistema como microscópico ($L < \lambda_F$), mesoscópico ($\lambda_F < L < \ell_\phi$) ou macroscópico ($L > \ell_\phi$). Em **b)**, vê-se a caracterização do tipo de transporte eletrônico poderá ser balístico se ($\lambda_F < L \ll \ell_m$) e, em **c)**, difusivo se ($\ell_m \ll L < \xi$).

2.1.2 Quantização da condutância

Independente do regime de transporte, de acordo com a equação da condutância (1.1), temos que à medida que diminuímos a área do condutor (W), a condutância irá diminuir ($G \to 0$). Porém, ao passo que diminuímos sua área, estamos consequentemente deixando o regime clássico para o regime mesoscópico, de tal maneira que haverá uma competição entre o tamanho da amostra e o tamanho da partícula no transporte e, portanto, será preciso levar em consideração a natureza ondulatória do elétron e suas consequências, como, por exemplo, o tunelamento quântico, fazendo, assim, com que exista um valor mínimo de condutância chamado: quantum de condutância. A figura (2.3) e a figura (2.4) são resultados experimentais e mostram que, quando a constrição W diminui, a resistência e a condutância do condutor mudam de forma discreta, forma esta que é uma das características de grandezas

quantizadas.

A quantização da condutância foi observada experimentalmente em heteroestruturas semicondutoras de GaAs e AlGaAs [3, 4]. Devido à alta mobilidade dos elétrons nessas estruturas, o sistema é considerado como um Gás de Elétrons Bidimensional e o transporte eletrônico pode ser considerado balístico. A propagação ocorre unicamente dos elétrons que se encontram na superfície de Fermi.

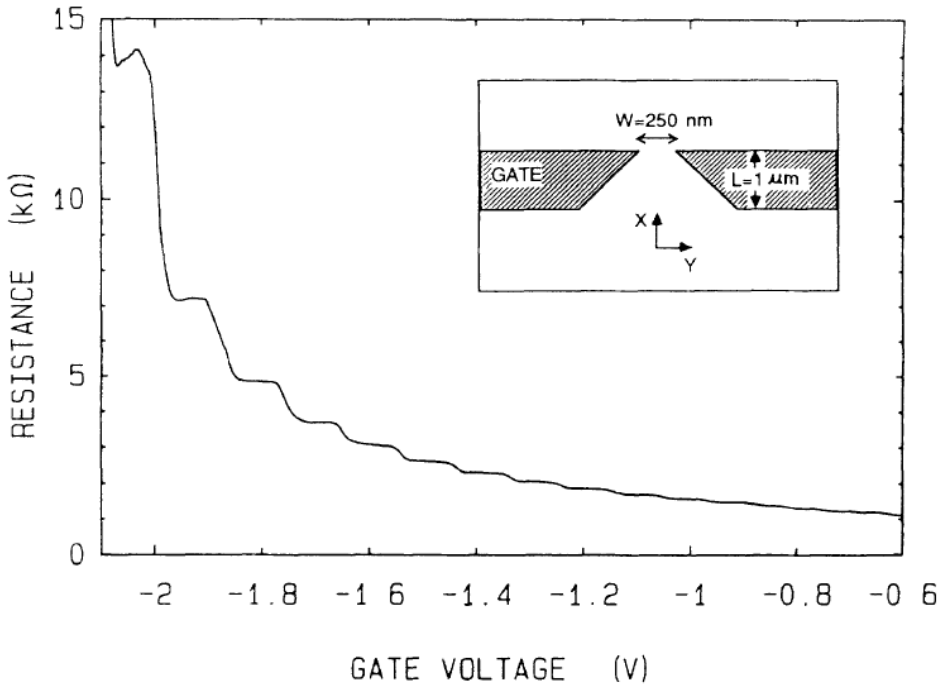

Figura 2.2: A figura mostra a resistência variando com a tensão aplicada nos terminais. É possível ver que a variação da resistência é discreta. A figura foi retirada da referência [3].

Na figura (2.3) é mostrado um ponto de contato quântico em que o transporte do sistema é balístico. Seguindo a referência [3], a condutância desse sistema é tal que

$$G = \frac{e^2}{\pi\hbar} \times \sum_{j=1}^{N} \tau_j \tag{2.7}$$

em que τ_j são os autovalores de transmissão e N é o número de canais abertos. Esse número é inteiro e menor que $k_f W/\pi$, no qual W é a largura da constrição. Então, de acordo com

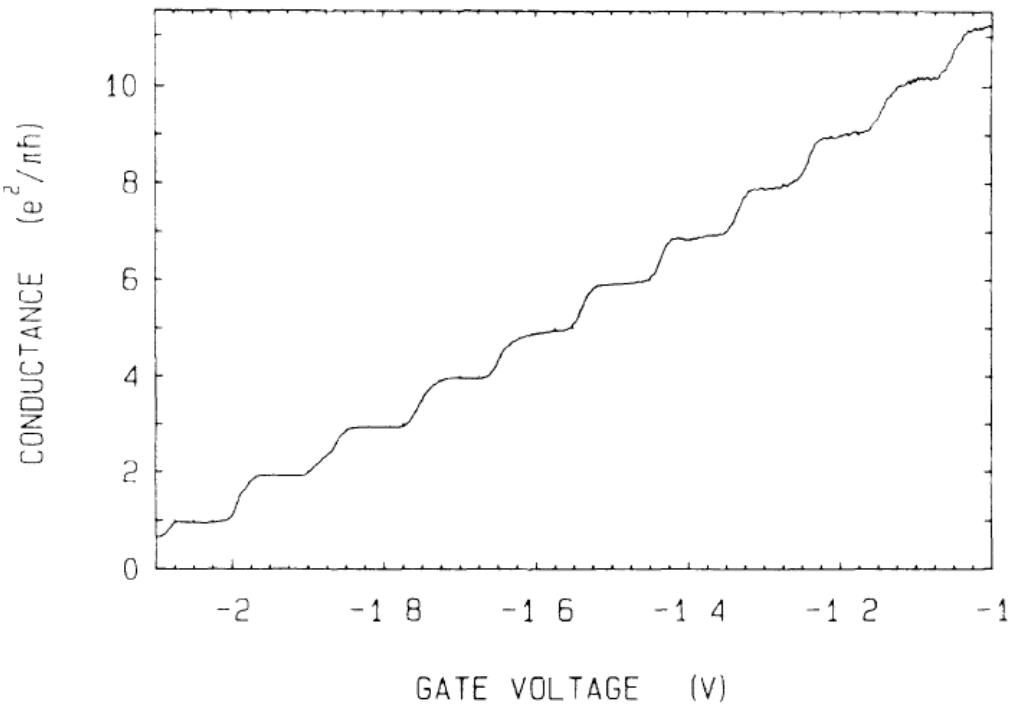

Figura 2.3: A condutância do ponto de contato quântico varia de acordo com a voltagem aplicada na constrição. Observamos que há uma escada de condutância, revelando portanto a quantização da condutância em semicondutores. Figura retirada da referência [3].

a equação (2.7), temos que a condutância ocorre para $N = 1, 2, 3...$, ou seja, quando N for um número inteiro, mostrando que houve a quantização da condutância. Na figura (2.4), podemos ver a quantização da condutância, pois o valor dela muda em degraus com valores múltiplos inteiros de $e^2/\pi\hbar = 2e^2/h$, de modo que o fator 2 vem do grau de liberdade do spin do elétron.

Porém se $k_f W \gg 1$ a equação (2.7) se reduzirá a

$$G = G_0 \times \frac{2W}{\lambda_F}, \tag{2.8}$$

λ_F é o comprimento de onda de Fermi da ordem de $30nm$, e G_0 é o quantum de condutância $G_0 = \frac{2e^2}{h}$, em que e é a carga do elétron, e h é a constante de Planck. Como a condutância e a resistência são grandezas inversas entre si, $G = R^{-1}$, então, pode-se medir o valor da resitência, $R = \frac{h}{2e}$, que é aproximadamente $R \approx 13k\Omega$. O efeito da quantização da

condutância foi primeiramente observado em heteroestruturas semicondutoras de GaAs e Al-GaAs nas referências [3, 4].

2.1.3 Flutuação Universal da Condutância

Pouco antes de Wees *et al.* [3] observarem a quantização da condutância, Lee e Stone [5] verificaram que, no regime de baixas temperaturas a condutância num metal apresenta um valor universal da ordem de e^2/h, que é uma característica universal no transporte quântico. Essa flutuação universal é causada por impurezas[6] dentro da amostra ou pela aplicação de um campo magnético [7], conforme a figura (2.5). A flutuação universal da condutância é dada por

$$rms[G] = \sqrt{var(G)} = \sqrt{\langle G^2 \rangle - \langle G \rangle^2} \sim \frac{e^2}{h}, \tag{2.9}$$

em que o $\langle G \rangle$ é a média da condutância, e $\langle G^2 \rangle$ é a média quadrática da condutância. O padrão de interferência causado pelo campo magnético da figura (2.5) apresenta o mesmo padrão de interferência causado pelas impurezas. A flutuação universal é calculada pelo desvio padrão da condutância como observamos na equação supracitada (2.9).

Em nosso trabalho, além de estudarmos sistemas no regime metálico, também estudaremos sistemas com simetrias de sub-rede. Esses sistemas são formados pelos materiais de Dirac. Os principais materiais de Dirac que vêm sendo investigados nas últimas décadas são o grafeno e os isolantes topológicos. É interessante mostrar que as flutuações universais ocorrem não só em materiais no regime metálico, como também em materiais com simetria quiral (materiais de Dirac). Na figura (2.6), podemos ver que existe um valor médio da condutância e pequenas flutuações podem ser observadas ao redor desse valor. Essas flutuações são as flutuações universais da condutância nos materiais citados, que detêm a simetria quiral.

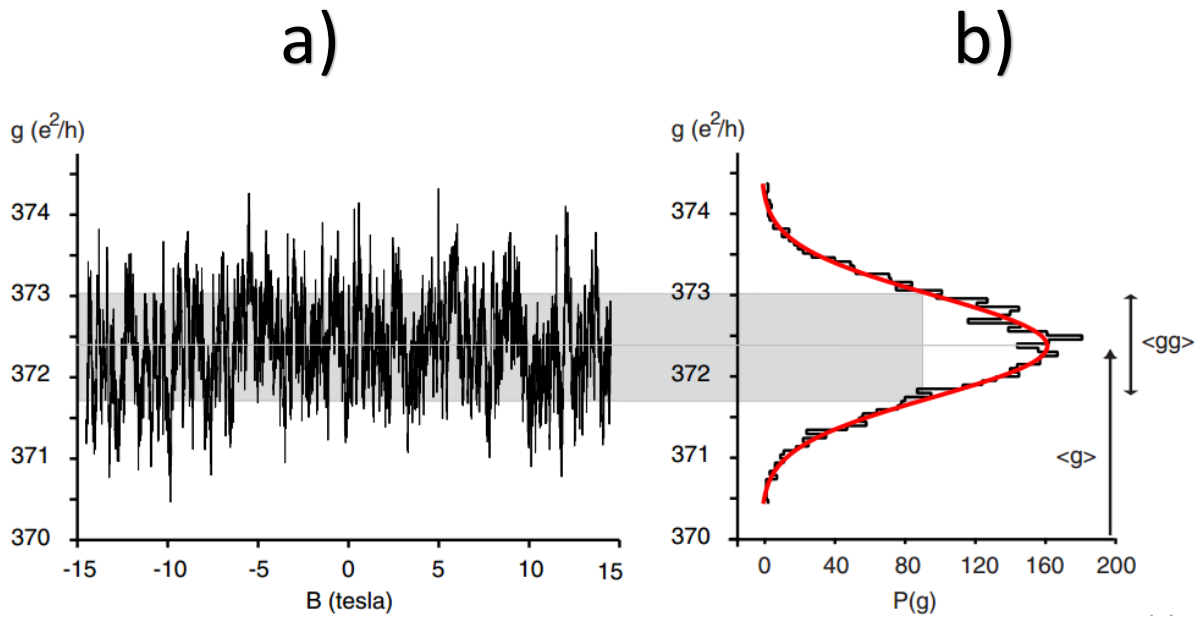

Figura 2.4: A figura **a)** mostra que existe um valor médio da condutância,que está entre 372 e 373, porém, essa medida não está livre de oscilações, as quais ocorrem independente do campo magnético. A amplitude da flutuação ao redor da média da condutância é chamada flutuação universal da condutância, portanto, existe **b)** uma distribuição da condutância numa região em que a medida mais provável é a média, e existem algumas medidas que estão abaixo de 372 e acima de 373. O valor da flutuação universal da condutância é da ordem de e^2/h

2.2 Teoria de Landauer-Büttiker

Nesta seção, iremos discutir a teoria de Landauer-Buttiker, a qual fornece a quantização da condutância vista na equação (2.9). Para isso, iremos seguir a referência [2]. No modelo proposto, o transporte eletrônico é balístico, portanto, para um transporte deste tipo é necessário fazer 3 considerações iniciais,

i) O contato entre o terminal e o guia é ideal, então não existe reflexões entre os terminais

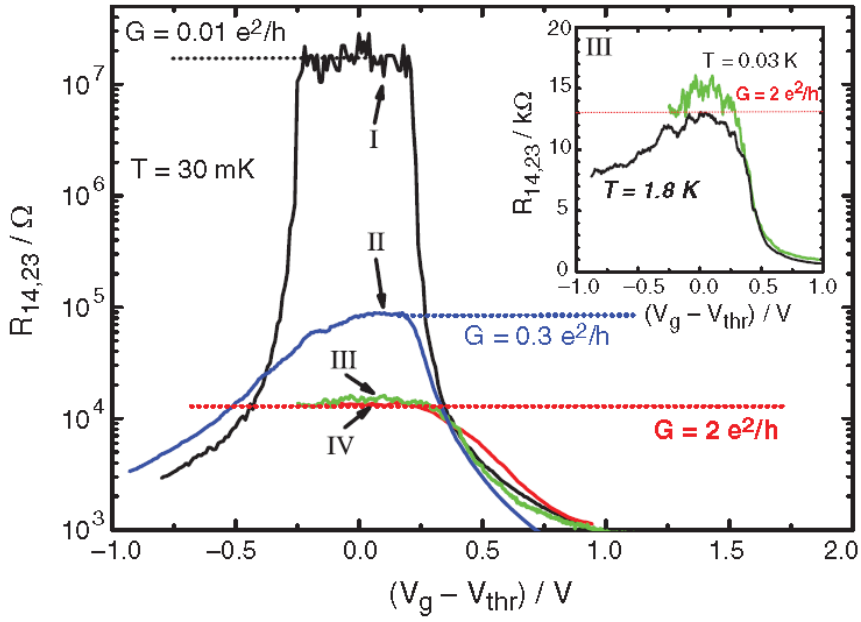

Figura 2.5: A figura mostra que a condutância no efeito Hall de spin em poços quânticos de HgTe tem flutuações quânticas em torno da média. Figura retirada da referência [8].

e o contato, de tal forma que todas as partículas que saem do terminal adentram no guia e seguem para o aparato espalhador;

ii) O condutor é balístico, portanto não existem reflexões dentro do próprio condutor;

iii) O transporte ocorre a baixas temperaturas, todos os elétrons responsáveis pela corrente se encontram no chamado mar de Fermi.

Antes de fazer uma dedução da fórmula de Landauer, vamos analisar a figura (2.7) que mostra um condutor conectado idealmente a dois terminais com potenciais diferentes μ_1 e μ_2. Dada a diferença de potencial entre eles $\Delta\mu = \mu_2 - \mu_1$, irá surgir uma corrente do terminal 1 (T.1) para o terminal 2 (T.2). Parte da corrente elétrica que sai do T.1 para o T.2, chamada I_1^+, ao encontrar um condutor, é transmitida para T.2, chamada I_2^+, e parte da corrente é refletida para T.1, chamada I_1^-. Se o condutor for ideal, $I_1^- = 0$, porém, sempre existirá uma probabilidade de transmissão T e uma probabilidade de reflexão R dos elétrons ao encontrar o condutor.

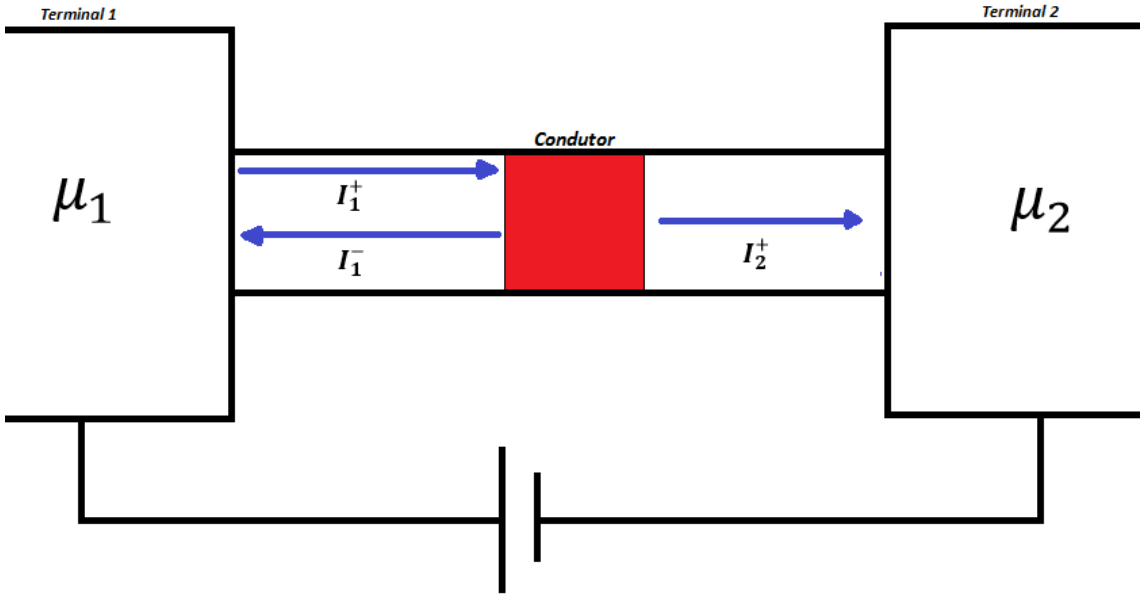

Figura 2.6: A figura mostra um condutor mesoscópico ligado idealmente a dois terminais, que têm dimensões muito maiores que o condutor. Uma vez que o condutor é submetido a uma diferença de potencial eletroquímico as cargas saem do terminal T.1 e, ao encontrar o condutor, parte das cargas são transmitidas para o terminal T.2 e parte são refletidas para o terminal T.1.

Podemos dizer, portanto, que a corrente que passa em cada terminal é dada por

$$I = G \times \Delta V, \tag{2.10}$$

em que pode-se escrever G em função do número de modos transversais (M) que encontram-se abertos em cada guia e em função da probabilidade de Transmissão (T) ou Reflexão ($1 - T$) do elétron ao passar pelo condutor. Assim sendo, a equação da condutância escrita em função dos modos transversais e da probabilidade de transmissão é dada por

$$G = \frac{2e^2}{h} \times MT, \tag{2.11}$$

e, como o transporte eletrônico está no nível de Fermi, então $\lambda_f < W$, portanto M é

$$M = int\left(\frac{2W}{\lambda_f}\right). \tag{2.12}$$

Aqui, cabe realçar que utilizaremos a relação da equação (2.12) no último capítulo desta tese,

pois iremos, no momento próprio, fazer uma análise dimensional do parâmetro característico em questão.

Utilizando a relação entre potencial químico e tensão, $\mu_i = eV_i$, a corrente de transmissão que passa no terminal 1 é escrita utilizando a equação (2.10) e (2.11). Dessa forma, temos que I_1^+ em função de μ é dada por

$$I_1^+ = \frac{2e}{h} \times M\Delta\mu, \tag{2.13}$$

em que $T = 1$ pois não existem reflexões entre os terminais e o guia, e $\Delta V = \Delta\mu/e$. A corrente I_2^+ é dada por

$$I_2^+ = \frac{2e}{h} \times MT\Delta\mu, \tag{2.14}$$

em que T é a probabilidade de transmissão do elétron atravessar o condutor. Pela lei de conservação de carga, a carga total refletida será dada pela subtração da carga transmitida (2.13) e da carga refletida (2.14). Por fim, a corrente I_1^- fica escrita como

$$I_1^- = \frac{2e}{h} \times M(1-T)\Delta\mu. \tag{2.15}$$

Poderíamos olhar o termo $(1 - T)$ na equação como a probabilidade de o elétron ser refletido ao passar pelo condutor, já que, ao somar todas as probabilidades de ocorrer um evento o resultado é 1. Como só existe a probabilidade T de o elétron passar pelo condutor (T) e a probabilidade de ele ser refletido R, então, $T + R = 1$, o que nos leva à relação entre R e T como $R = 1 - T$.

A corrente efetiva que passa pelo condutor é dada pela equação (1.15). Ela depende exclusivamente da probabilidade de transmissão (T), da diferença de potencial químico em que está conectado o condutor e do número total de canais que encontram-se abertos no guia. Como exemplo, considerando um condutor conectado a 3 terminais, teríamos que a corrente efetiva no terminal 1 é

$$I_1^+ = \frac{2e}{h} \times \left[T_{21}\mu_1 - T_{12}\mu_2 + T_{31}\mu_1 - T_{13}\mu_3\right], \tag{2.16}$$

já no terminal 2 temos

$$I_2^+ = \frac{2e}{h} \times \left[T_{12}\mu_2 - T_{21}\mu_1 + T_{32}\mu_2 - T_{23}\mu_3\right], \tag{2.17}$$

e no terminal 3 ficamos com

$$I_3^+ = \frac{2e}{h} \times \left[T_{13}\mu_3 - T_{31}\mu_1 + T_{23}\mu_3 - T_{32}\mu_2\right]. \tag{2.18}$$

Como a probabilidade de um elétron passar do guia i para o guia j é T_{ij} e essa probabilidade é a mesma se o elétron passar do guia j para o guia i, então, $T_{ij} = T_{ji}$. Portanto, podemos escrever o potencial químico em função da tensão aplicada em cada terminal ($\mu_i = eV_i$) e generalizar a equação da corrente acima para um terminal p qualquer. Essa generalização é dada por

$$I_p = G_0 \times \sum_p \left[T_{pq}\left(V_p - V_q\right)\right]. \tag{2.19}$$

Para calcularmos a condutância, utilizamos a fórmula de Landauer [9]:

$$G = G_0 \times \sum_{pq} |t_{pq}|^2, \tag{2.20}$$

na qual t_{pq} são os coeficientes de transmissão que estão relacionados à transmissão da partícula de um guia p para um guia q, respectivamente.

Desde a física clássica, percebe-se que condutância e resistência são grandezas inversamente proporcionais, de tal forma que, se as analisarmos com base apenas na física clássica, à medida que a resistência de um fio ideal vai convergindo para zero, consequentemente, sua condutância aumenta indefinidamente. Contudo, os experimentos elencados mostram que a condutância num fio ideal é finita e, por consequência, sempre irá existir uma resistência. Ainda que haja um contato perfeito entre o condutor e o reservatório, essa resistência vai existir e será chamada resistência de contato, sendo inevitável devido ao fato da quantização da condutância[2].

2.3 Matriz de Espalhamento e Teoria de Matrizes Aleatórias

A teoria de matrizes aleatórias [10] é uma teoria consolidada e vem tendo uma vasta aplicação em transportes eletrônicos, em que a dinâmica da partícula durante o transporte

é caótica [6, 11, 12]. Nesses sistemas, não interessam o grau de desordem nem a composição molecular mas, apenas simetrias fundamentais, como simetria de reversão temporal, simetria de subrede/quiral, simetria partícula-buraco, e simetria de rotação de spin.

Os dispositivos eletrônicos modernos em que podemos aplicar a TMA são as cavidades balísticas caóticas. Essas cavidades balísticas são também conhecidas como pontos quânticos caóticos, ou Bilhares caóticos de Schrödinger como podemos ver na figura (2.8) que mostra uma heterojunção de GaAs-AlGaAs. Nesses bilhares, a função de onda da partícula é descrita pela equação de Schrödinger [13].

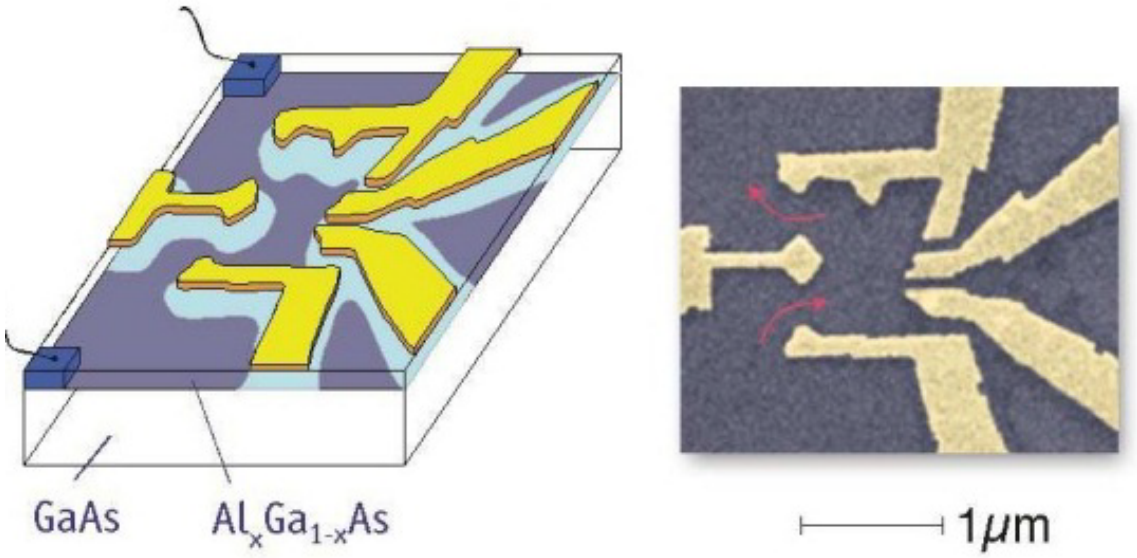

Figura 2.7: A figura mostra um ponto quântico caótico em que a função de onda da partícula é descrita pela equação de Schrödinger. Esse ponto pode ser chamado de Bilhar de Schrödinger. As setas da direita mostram que a partícula entra embaixo, percorre todo o espaço de fase e sai no ponto de cima. Figura retirada de [14]

O transporte eletrônico também pode ocorrer em um bilhar quântico conhecido como Bilhar caótico de Dirac, como o grafeno e os isolantes topológicos figura (2.9). Nesses materiais, a função de onda das partículas é descrita pela equação de Dirac [15].

Além dos dois transportes supracitados, novos mateirais híbridos emergem nas últimas décadas, como, por exemplo, os dispositivos que utilizam uma junção de supercondutor-

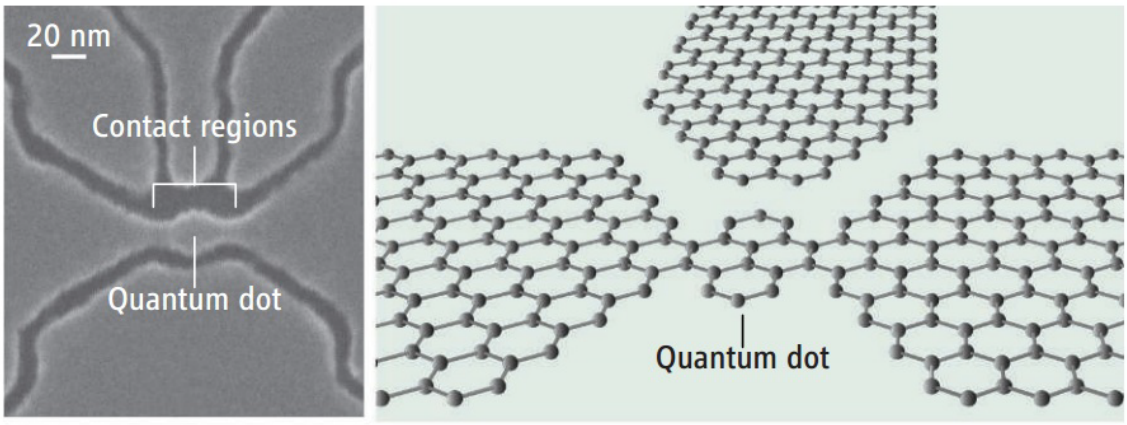

Figura 2.8: A figura mostra um ponto quântico caótico em que a função de onda da partícula é descrita pela equação de Dirac. Portanto, este ponto quântico pode ser chamado de Bilhar de Dirac. Figura retirada de [16].

metal. Esses sistemas não se enquadram nos bilhares anteriores e fazem vir à tona mais um bilhar quântico: o Bilhar de Andreev. Nele, a reflexão de Andreev e os pares de Cooper induzem a simetria partícula-buraco no sistema [10].

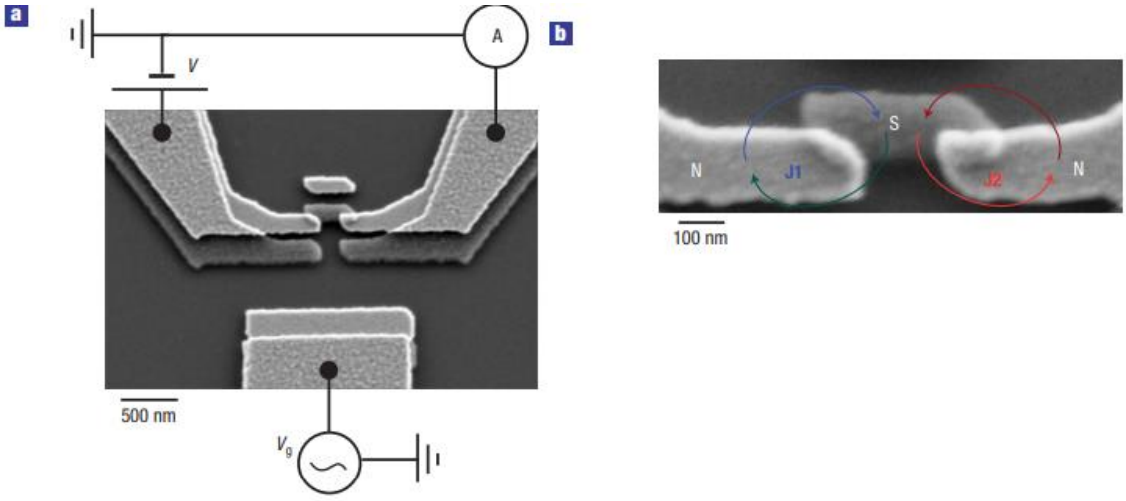

Figura 2.9: A figura mostra um ponto quântico híbrido com suas características básicas a) Micrografia eletrônica de um ponto quântico com uma interface Normal-Supercondutor-Normal e b) A imagem ampliada da heterojunção. Figura retirada de [17].

2.3.1 Matriz de Espalhamento

Na seção anterior, escrevemos a condutância de um material em função das amplitudes de probabilidade de transmissão entre os canais que se conectam a ele (2.10). Nesta seção, iremos mostrar que as amplitudes de transmissão e reflexão são elementos de uma matriz, chamada matriz de espalhamento do sistema.

Como dito, o transporte eletrônico através de condutores pode ser caracterizado pela matriz de espalhamento S do sistema. Essa matriz conecta as amplitudes de probabilidade das ondas que entram no condutor com as amplitudes de probabilidade das ondas que saem dele [2, 18]. Nesta seção, será abordado um exemplo físico de um transporte eletrônico como fizemos na seção anterior, porém, agora desenvolveremos a nossa análise tendo em vista que a matriz de espalhamento do sistema é a responsável por conectar as correntes de entrada e saída do transporte em questão. Para tal, observamos na figura (2.11) um condutor que está conectado a 2 terminais e tem 3 modos de propagação de onda. As amplitudes de propagação que entram no condutor são representadas por $\mathbf{a}_i$, em que $\mathbf{a}$ representa a amplitude de entrada, e $\mathbf{i}$ representa em qual modo está se propagando a onda. Portanto, como temos 3 modos de propagação teremos, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, e $\mathbf{a}_3$, e as amplitudes de propagação que saem do condutor são representadas por $\mathbf{b}_i$, de modo que $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, e $\mathbf{b}_3$ representam as amplitudes da onda de saída do condutor.

Ao escrever as amplitudes das ondas de saída em função das amplitudes das ondas de entrada, temos

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

em que s_{ij} são números que representam o espalhamento da função de onda.

A probabilidade de transmissão T_{pq} é obtida pelo módulo quadrado da magnitude que correspem que ao seu elemento na matriz de espalhamento,

$$T_{pq} = |s_{pq}|^2. \tag{2.22}$$

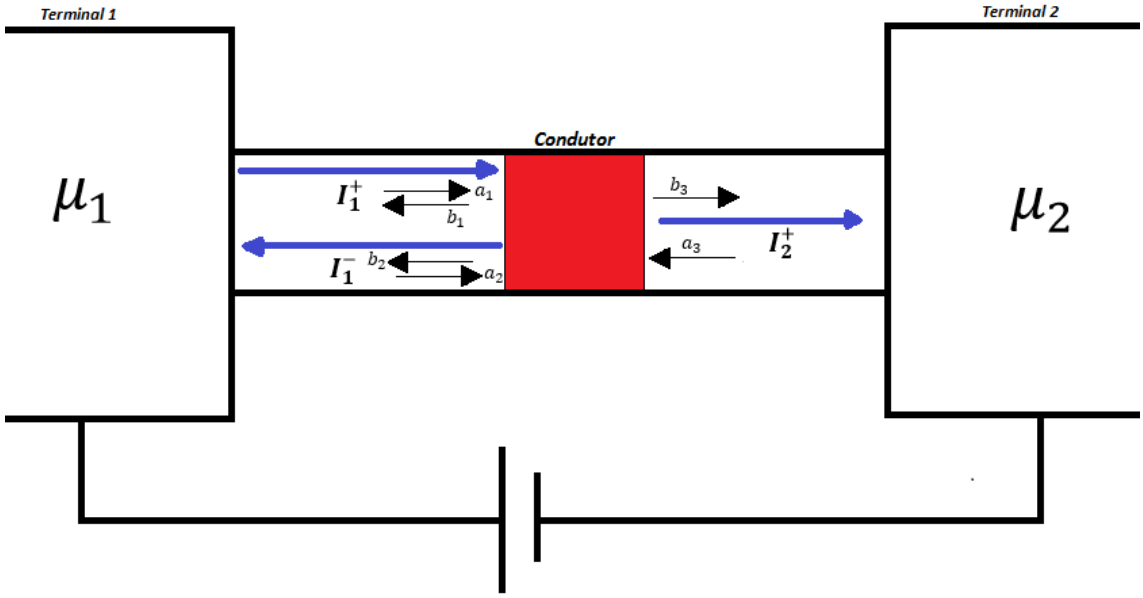

Figura 2.10: Um condutor é ligado por contatos ideais a dois terminais, e existem 3 modos de propagação, a representa as amplitudes de onda que entram no condutor, e b, as amplitudes de onda que saem dele. A matriz de espalhamento S desse sistema é do tipo 3×3.

Isso representa a probabilidade que um elétron tem de passar de um guia p para o guia q, $0 < |s_{pq}|^2 < 1$, e, então, a probabilidade de reflexão,

$$R_{pq} = |r_{pq}|^2 = 1 - T_{pq} = 1 - |s_{pq}|^2. \tag{2.23}$$

A matriz de espalhamento $\mathbf{S}$ sempre será uma matriz quadrada do tipo $M \times M$, que depende do número de canais abertos no guia a que o condutor está conectado, portanto podemos generalizar a equação (2.21), da seguinte forma

$$[\mathbf{b}] = [\mathbf{S}]_{M\times M} [\mathbf{a}], \tag{2.24}$$

em que $[\mathbf{b}]$ é o vetor coluna que representa a amplitude das ondas de saída do condutor e $[\mathbf{a}]$ é o vetor coluna que representa a amplitude das ondas de entrada no condutor. A matriz de espalhamento sempre irá trazer todas as informações necessárias referente ao transporte eletrônico do sistema.

Pela lei da conservação da carga, temos que se somarmos todas as amplitudes das ondas

que entram no condutor, o resultado da operação terá que ser igual às amplitudes das ondas que saem, pois, caso contrário, a corrente elétrica total não seria igual à soma da corrente transmitida com a corrente refletida. Dessa forma, podemos escrever

$$\sum_m |a_m|^2 = \sum_m |a_m||a_m^\dagger| = \sum_m |b_m|^2 = \sum_m |b_m||b_m^\dagger|, \tag{2.25}$$

o que nos leva à conclusão de que

$$|a||a|^\dagger = |b||b|^\dagger, \tag{2.26}$$

então, podemos utilizar a equação (2.24) e escrever

$$|b| = |S||a| \tag{2.27}$$

e

$$|b|^\dagger = |a|^\dagger |S|^\dagger. \tag{2.28}$$

Multiplicando (2.27) e (2.28), temos

$$|b|^\dagger |b| = |a|^\dagger |S|^\dagger |S||a| \tag{2.29}$$

o que nos leva a concluir que a relação (2.25) só é verdadeira se

$$S^\dagger S = \mathbf{1}. \tag{2.30}$$

A relação acima nos leva à unitariedade da matriz de espalhamento [2], que tem como consequência física a conservação de carga, ou seja, no transporte eletrônico, nenhuma carga é destruída ou absorvida pelo centro espalhador, de tal forma que ou a carga foi refletida, ou transmitida.

Como a matriz é unitária, chegamos também à conclusão de que

$$S^\dagger = S^{-1}, \tag{2.31}$$

em termos dos elementos da matriz S

$$\sum_{m=1}^{M_T} |s_{mn}|^2 = \sum_{m=1}^{M_T} |s_{nm}|^2, \tag{2.32}$$

a transmissão entre dois guias quaisquer é a mesma independente do espalhamento ir de um guia n para um guia m ou o inverso.

Podemos separar a matriz de espalhamento (que é responsável pela transmissão do transporte eletrônico) em blocos conforme mostramos abaixo

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

de modo que, r, r' são as matrizes de reflexão, enquanto t,t' são as matrizes de transmissão.

Portanto, podemos relacionar a condutância de Landauer com os blocos de transmissão da matriz de espalhamento [2, 11, 19, 20, 21]:

$$G = G_0 \times \mathrm{Tr}\left(tt^\dagger\right). \tag{2.34}$$

Quando a matriz de espalhamento for simétrica ela irá descrever fenômenos que preservam a simetria de reversão temporal [13], assim,

$$SS^* = \mathbf{1}, \quad S = S^T, \tag{2.35}$$

em que o termo sobrescrito quer dizer que a matriz de espalhamento é transposta. A equação (2.35) satisfaz a condição de reversão temporal. Caso seja aplicado um campo magnético no sistema, essa condição de simetria é quebrada , de modo que não podemos mais escrever essa relação, ficando apenas com a condição de unitariedade da matriz de espalhamento (2.30).

Outra simetria da matriz de espalhamento é quando leva-se em conta o grau de liberdade do spin dos elétrons. Para esse caso, os elementos da matriz de espalhamento s_{ij} na equação (2.21) serão quatérnions[21] e haverá grau de liberdade o grau de liberdade de rotação, devido ao spin das partículas. Portanto, podemos perceber que dependendo do problema a matriz de espalhamento em certas condições deverá satisfazer algumas simetrias, porém para todos os problemas a condição de conservação de carga é sempre satisfeita. Essas simetrias serão discutidas um pouco mais na próxima subseção, a qual se refere à aplicação da teoria de matrizes aleatóras em transporte eletrônico.

2.3.2 Teoria de matrizes aleatórias

A teoria de matrizes aleatória (TMA) [10] foi utilizada pela primeira vez em física nuclear com Wigner na década de 50, quando utilizou-se o conceito de distribuição estatística para entender a distribuição do espaçamento dos níveis de energia de núcleos de átomos pesados. Nesses átomos, existe uma grande quantidade de cargas distribuída ao longo das órbitas, portanto para analisar a distribuição dos níveis de energia, Wigner utilizou distribuição estatística, e ensembles de matrizes aleatórias [22]. Em seguida Dyson, estabeleceu os fundamentos matemáticos da teoria de matrizes aleatórias [23], sendo o responsável pela classificação dos ensembles de acordo com a dependência de simetrias, como a simetria de reversão temporal e a simetria de rotação de spin. Na TMA, que refere-se à universalidade dos transportes [6], os fenômenos são considerados universais, no sentido de que não dependem do tamanho da amostra ou do grau de desordem do sistema, apenas de algumas simetrias.

Primeiramente, na TMA, foram introduzidas três classes de ensembles por Wigner e Dyson [22, 23], as quais são caracterizadas de acordo com a presença ou quebra de simetrias fundamentais como a simetria de reversão temporal (SRT), a simetria de rotação de spin (SRS), a simetria de sub-rede (SLS) e a simetria partícula-buraco (PHS). Em seguida, foram introduzidas mais três classes de ensembles por Shuryak [24] e Verbaarschot [25]. Com essas três classes, foi possível observar fenômenos em sistemas que têm redes bipartidas, como são os sistemas quirais. Esses sistemas preservam a simetria PHS, por isso, com a introdução dessas novas três classes, houve uma expansão da aplicação da TMA. Nas novas classes introduzidas por Wigner e Dyson, a PHS não é preservada e não era suficiente para estudar sistemas com quiralidade. Por fim, foram introduzidas mais 4 classes de ensemble por Altland e Zimbauer [26] de maneira que a TMA foi aplicada a sistemas em contato com supercondutores.

Todas as classes estão representadas na tabela (2.1), na qual relacionamos a classe de simetria com os seus respectivos ensembles. Cada ensemble é representado por um índice de simetria β, índice este que representa os graus de liberdades dos elétrons no transporte. Além disso, relacionamos os ensembles com exemplos físicos que têm um sistema específico. Na

coluna que mostra os exemplos físicos, temos: quando $\mathbf{B} = 0$, o sistema não apresenta campo magnético; se $\mathbf{SC} = 0$, o sistema não apresenta supercondutividade e, caso $\mathbf{SO} = 0$, o sistema não apresenta uma forte interação spin-órbita. Em vista disso, constatamos na tabela (2.1) que apenas os ensembles que estão na classe de Altland-Zimbauer podem descrever sistemas com supercondutividade, e todos os ensembles da classe quiral apresentam SLS, que é uma característica intríseca de sistemas com quiralidade.

Classe de Simetria	Ensemble	β	SRT	PHS	SLS	Exemplos Físicos
Wigner Dyson	A (Unitário)	2	0	0	0	$\mathbf{B} = 0, \mathbf{SC} = 0$
	AI (Ortogonal)	1	+1	0	0	$\mathbf{B} = 0, \mathbf{SO} = 0, \mathbf{SC} = 0$
	AII (Simplético)	4	-1	0	0	$\mathbf{B} = 0, \mathbf{SO} \neq 0, \mathbf{SC} = 0$
Quiral	AIII (Unitário)	2	0	0	1	$\mathbf{B} \neq 0, \mathbf{SC} = 0$
	BDI (Ortogonal)	1	+1	+1	1	$\mathbf{B} = 0, \mathbf{SO} = 0, \mathbf{SC} = 0$
	CII (Simplético)	4	-1	-1	1	$\mathbf{B} = 0, \mathbf{SO} \neq 0, \mathbf{SC} = 0$
Altland-Zimbauer	D	2	0	+1	0	$\mathbf{B} \neq 0, \mathbf{SO} \neq 0, \mathbf{SC} \neq 0$
	C	2	0	-1	0	$\mathbf{B} \neq 0, \mathbf{SO} = 0, \mathbf{SC} \neq 0$
	DIII	1	-1	+1	1	$\mathbf{B} = 0, \mathbf{SO} \neq 0, \mathbf{SC} \neq 0$
	CI	4	+1	-1	1	$\mathbf{B} = 0, \mathbf{SO} = 0, \mathbf{SC} \neq 0$

Tabela 2.1: Tabela de Cartan para os espaços simétricos [27]. Tabela mostrando a relação entre cada classe de simetria e o tipo de simetria que o sistema poderá apresentar, na tabela se houver quebra de simetria abaixo da respectiva simetria estará o valor 0, e, se houver preservação da simetria haverá valores ± 1.

A tabela (2.2) é muito importante para o estudo de transporte eletrônico através da teoria de matrizes aleatórias, pois ela vai conectar a matriz de espalhamento do sistema com as classes de simetria em que cada sistema se encontra, portanto a partir desta conexão poderemos decompor a matriz de espalhamento a fim de simplificar o problema e então teremos uma ferramenta matemática poderosa para fazer cálculos analíticos.

De acordo com a teoria de matrizes aleatórias, como podemos ver nas tabelas (2.1) e (2.2), existem 10 ensembles para descrever todas as 3 classes de simetria. Nos problemas

Classe de Simetria	Ensemble	β	$\mathbf{U}$	$\boldsymbol{S}$
Wigner Dyson	A (Unitário)	2	$\mathbf{U}$(N)	$\boldsymbol{S} = \mathbf{U}$
	AI (Ortogonal)	1	$\mathbf{U}$(N)	$\boldsymbol{S} = \mathbf{U}^T\mathbf{U}$
	AII (Simplético)	4	$\mathbf{U}$(2N)	$\boldsymbol{S} = \mathbf{J}\mathbf{U}^T\mathbf{J}^{-1}\mathbf{U}$
Quiral	AIII (Unitário)	2	$\mathbf{U}$(2N)	$\boldsymbol{S} = \Sigma_z\mathbf{U}^\dagger\Sigma_z\mathbf{U}$
	BDI (Ortogonal)	1	$\mathbf{SO}$(2N)	$\boldsymbol{S} = \Sigma_z\mathbf{U}^T\Sigma_z\mathbf{U}$
	CII (Simplético)	4	$\mathbf{S}_p$(4N)	$\boldsymbol{S} = \Sigma_z\mathbf{U}^\dagger\Sigma_z\mathbf{U}$
Altland-Zimbauer	D	2	$\mathbf{SO}$(2N)	$\boldsymbol{S} = \mathbf{U}$
	C	2	$\mathbf{S}_p$(2N)	$\boldsymbol{S} = \mathbf{U}$
	DIII	1	$\mathbf{SO}$(4N)	$\boldsymbol{S} = \mathbf{J}\mathbf{U}^T\mathbf{J}^{-1}\mathbf{U}$
	CI	4	$\mathbf{S}_p$(4N)	$\boldsymbol{S} = \Sigma_z\mathbf{U}^\dagger\Sigma_z\mathbf{U}$

Tabela 2.2: Tabela de Cartan que representa a maneira que a matriz de espalhamento deverá ser decomposta em função de matrizes Unitárias, Ortogonais ou Simpléticas.[28]

analisados nesta tese, utilizamos todas as três classes de ensembles (Wigner Dyson,Classe Quiral e Altlant-Zimbauer). Os termos referentes às classes quirais Σ_z e Altrland-Zimbauer $\mathbf{J}$ da tabela (2.2) são dados por

$$\Sigma_z = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{N_T} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_{N_T} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1}_{N_T} \\ \mathbf{1}_{N_T} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.36}$$

Teoria de matrizes aletatórias para a classe de simetria de Wigner Dyson

Para a classe de Wigner Dyson, temos 3 ensembles e podemos dizer de acordo com a tabela (2.1) que os sistemas físicos que essa classe pode representar são:

(i) Preservando a simetria de reversão temporal, não existindo a simetria partícula-buraco e nem a simetria de subrede, o campo magnético externo é nulo ($\mathbf{B} = 0$), o ensemble que descreve a matriz de espalhamento do sistema é o ensemble circular ortogonal (ECO), representado pelo índice de simetria $\beta = 1$.

(ii) Simetria de reversão temporal quebrada devido a um campo magnético não nulo $\mathbf{B} \neq 0$, não existindo a simetria partícula-buraco nem a simetria de subrede, o ensemble que descreve a matriz de espalhamento do sistema é o ensemble circular unitário (ECU), representado pelo índice de simetria $\beta = 2$.

(iii) Preservando a simetria de reversão temporal, não existindo a simetria partícula-buraco e nem a simetria de subrede, o campo magnético externo é nulo $\mathbf{B} = 0$, havendo uma forte interação spin-órbita $\mathbf{SO} \neq 0$. O ensemble que descreve a matriz de espalhamento do sistema é o ensemble circular simplético (ECS), representado pelo índice de simetria $\beta = 4$.

Para um simples condutor ligado a dois terminais a matriz de espalhamento do sistema terá um tamanho $N_T \times N_T$, em que $N_T = N_1 + N_2$, escrevendo em termos dos coeficientes de transmissão e reflexão, temos

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} r_{11} & t_{12} \\ t_{21} & r_{22} \end{pmatrix}. \tag{2.37}$$

A condutância pode ser dada pela fórmula de Landauer (2.34):

$$\frac{G}{G_0} = \mathrm{Tr}\left(t_{21}t_{12}^{\dagger}\right) = \mathrm{Tr}\left(\mathbf{C}_1 S \mathbf{C}_2 S^{\dagger}\right). \tag{2.38}$$

As matrizes $\mathbf{C}_1$ e $\mathbf{C}_2$ são chamadas matrizes de projeção:

$$\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{N_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{N_2} \end{pmatrix}. \tag{2.39}$$

As matrizes de projeção são sempre matrizes que obedecem a operação de multiplicação $\mathrm{Tr}\left(\mathbf{C}_i\mathbf{C}_j\right) = \delta_{ij}$, e cujo traço é sempre não nulo, $\mathrm{Tr}\left(\mathbf{C}_i\right) = N_i$, revelando o número de canais abertos no guia i. Com isso, seguindo as referências [21, 29], podemos chegar à conclusao de que a média da condutância para as três classes de Wigner Dyson é

$$\langle G \rangle = G_0 \times \frac{N_1 N_2}{N_T - 1 + 2/\beta}, \tag{2.40}$$

e a variância da condutância,

$$\mathrm{var}\left[G\right] = G_0^2 \times \frac{2N_1N_2\left(N_1 - 1 + 2/\beta\right)\left(N_2 - 1 + 2/\beta\right)}{\beta\left(N_T - 1 + 4/\beta\right)\left(N_T - 2 + 2/\beta\right)\left(N_T - 1 + 2/\beta\right)^2}, \tag{2.41}$$

em que β representa o índice de simetria de cada classe.

Teoria de matrizes aletatórias para a classe de simetria quiral

Para a classe quiral, também temos três ensembles, e os sistemas físicos que representam essa classe são:

(1) Preservando a simetria de reversão temporal, a simetria partícula-buraco a simetria de subrede, tendo o campo magnético externo nulo $\mathbf{B} = 0$, e sem interação spin-órbita $\mathbf{SO} = 0$. O ensemble que descreve a matriz de espalhamento do sistema é o ensemble circular ortogonal quiral (chECO), o qual é representado pelo índice de simetria $\beta = 1$. De acordo com a tabela (2.2), a matriz de espalhamento poderá ser decomposta em matrizes ortogonais.

(2) A simetria de reversão temporal quebrada devido a um campo magnético não nulo $\mathbf{B} \neq 0$, não existindo a simetria partícula-buraco e preservando a simetria de subrede, o ensemble que descreve a matriz de espalhamento do sistema é o ensemble circular unitário quiral (chECU), o qual é representado pelo índice de simetria $\beta = 2$. De acordo com a tabela (2.2), a matriz de espalhamento deverá ser decomposta em matrizes unitárias.

(3) Preservando a simetria de reversão temporal, assim como a simetria partícula-buraco e simetria de subrede, o campo magnético externo é nulo $\mathbf{B} = 0$, havendo uma forte interação spin-órbita $\mathbf{SO} \neq 0$. O ensemble que descreve a matriz de espalhamento do sistema é o ensemble circular simplético quiral (chECS), o qual é representado pelo índice de simetria $\beta = 4$. De acordo com a tabela (2.2), a matriz de espalhamento deverá ser decomposta em matrizes.

A grande diferença entre a classe de Wigner Dyson para a classe quiral é a presença da simetria de subrede, que é intrínsseca para materiais de Dirac.

Para sistemas quirais a matriz de espalhamento deverá satisfazer a seguinte relação [25]

$$S = \Sigma_z S^\dagger \Sigma_z \quad \text{ou} \quad S\Sigma_z = \Sigma_z S^\dagger. \tag{2.42}$$

Essa relação é a responsável pela introdução da quiralidade na matriz de espalhamento. Portanto, a matriz de espalhamento na equação (2.37) deverá ser decomposta de acordo com a tabela (2.2), satisfazendo a equação (2.42) e a expressão irá assumir a seguinte forma

$$\frac{G}{G_0} = \mathrm{Tr}\left(tt^\dagger\right) = \mathrm{Tr}\left(\Sigma_z U \mathbf{C}_1 U^\dagger \Sigma_z U \mathbf{C}_2 U^\dagger\right). \tag{2.43}$$

O cálculo da flutuação universal da condutância em materiais de Dirac vem sendo de interesse de estudo do nosso grupo. Esses resultados podem ser vistos com mais detalhes nas referências [12, 29]. Através delas, podemos chegar à compreensão de que a média da condutância para as três classes quirais é

$$\langle G\rangle = G_0 \times \frac{4\beta N_1 N_2 N_T}{(\beta N_T + 1)(2N_T - 1)}, \tag{2.44}$$

em que β representa o índice de simetria de cada classe.

Portanto, é importante ver que o resultado referente à média da condutância para o caso quiral (2.44) é ligeiramente diferente do mesmo na classe de Wigner Dyson(2.41), fato este dado pela diferença entre as simetrias presentes no sistema nos dois regimes. A teoría de matrizes aleatórias é consistente em mostrar essa diversidade de resultados em diferentes sistemas de transporte caótico. Por fim, iremos, na próxima subseção, falar brevemente sobre a aplicação da TMA na classe Altland-Zimbauer.

TMA para a classe Altland-Zimbauer

Como última classe de ensemble, temos a classe Altland-Zimbauer, na qual há quatro categorias de ensembles, e os sistemas físicos que representam essa classe são todos com heterojunções de sistemas híbridos metal-supercondutor. Além disso, também consideramos que as simetrias supracitadas principais, a saber, reversão temporal e interação spin-órbita. A presença ou ausência dessas simetrias faz surgir quatro classes desse ensemble.

A simetria rotacional da rotação (SRS) está presente nas classes C e CI e ausente nas classes D e DIII. Além disso, temos que a simetria de reversão termporal é quebrada nas

classes D e C e preservada nas classes CI e DIII. Em todas as classes nesse ensemble, há simetria partícula-buraco devido à supercondutividade. Misturando esses fatores mencionados, emergem quatro classes, descritas detalhadamente abaixo:

(1) Mediante a quebra da simetria de reversão temporal devido a um campo magnético não nulo ($\mathbf{B} \neq 0$) e com a simetria de rotação de spin ($\mathbf{SO} \neq 0$), a classe C descreve a matriz de espalhamento do sistema, a qual é representada pelo índice de simetria $\beta = 2$.

(2) Mediante a preservação da simetria de reversão temporal devido à ausência do campo magnético externo ($\mathbf{B} = 0$) e da simetria de rotação de spin ($\mathbf{SO} \neq 0$), a classe CI descreve a matriz de espalhamento do sistema, a qual é representada pelo índice de simetria $\beta = 4$.

(3) Mediante a quebra da simetria de reversão temporal devido a um campo magnético não nulo ($\mathbf{B} \neq 0$) e com a ausência da simetria de rotação de spin ($\mathbf{SO} = 0$), a classe D descreve a matriz de espalhamento do sistema, a qual é representada pelo índice de simetria $\beta = 2$.

(4) Mediante a simetria de reversão temporal preservada devido à ausência do campo magnético externo ($\mathbf{B} = 0$) e da simetria de rotação de spin ($\mathbf{SO} = 0$), a classe D descreve a matriz de espalhamento do sistema, a qual é representada pela índice de simetria $\beta = 1$.

A diferença entre as classes de Wigner Dyson e quiral para a classe Altland-Zimbauer é que, nesta última, existe a presença de supercondutividade no sistema, preservando, assim, a simetria partícula-buraco em todas as classes. Para tal sistema, a matriz de espalhamento deverá satisfazer a seguinte relação: [27]

$$S = JS^{\dagger}J^{-1}, \tag{2.45}$$

a qual é a responsável pela introdução da supercondutividade na matriz de espalhamento. Portanto, a matriz de espalhamento na equação (2.38) deverá ser decomposta de acordo com

a tabela (2.2), satisfazendo a equação (2.46) na seguinte forma para a condutância:

$$\frac{G}{G_0} = \mathrm{Tr}\left(tt^{\dagger}\right) = \mathrm{Tr}\left(JU\mathbf{C}_1U^{\dagger}J^{-1}U\mathbf{C}_2U^{\dagger}\right). \tag{2.46}$$

Segundo as referências [30, 31], a média da condutância para a classe Altland-Zimbauer depende de um fator topológico (Q) e é dada por

$$\langle G\rangle = \frac{G_0}{4} \times \left(2N_T + \frac{4Q^2 - 2N_T}{2N_T - 1}\right). \tag{2.47}$$

Eealçamos que todos os resultados das equações (2.41 - 1.47) são analíticos e foram obtidos pelo nosso grupo de pesquisa em física da matéria cem quensada. Eles foram determinados utilizando a técnica diagramática para sistemas, cujo ensemble que descreve é a classe de Wigner Dyson, e a expansão da técnica diagramática para sistemas com simetria quiral e supercondutividade.

2.4 Efeito Hanbury-Brown Twiss determinístico

Como vimos nas seções anteriores, o transporte eletrônico em sistemas mesoscópicos pode ser modelado por equações que envolvem elementos de transmissão e reflexão da matriz de espalhamento do sistema. Vimos, também, que a teoria de Landauer-Büttiker vem se mostrando uma forte candidata a modelar esse transporte e que, através dela, chega-se à quantização da condutância. Além disso, vimos que, segundo a TMA, as simetrias fundamentais são prepem querantes no chamado regime universal, no qual observáveis físicos flutuam ao redor de uma média e em que a dispersão dessa flutuação é uma característica universal que depende das simetrias fundamentais da mecânica quântica. Por tal motivo, através da TMA, classes de ensembles emergem para descrever sistemas físicos de interesse. Mostramos, que o cálculo sobre a média e, consequentemente, a dispersão destes observáveis são realizados utilizando a técnica diagramática, por meio da qual o nosso grupo vem obtendo excelentes resultados.

Nesta seção, iremos seguir o artigo de revisão [32], para explanar resultados sobre o

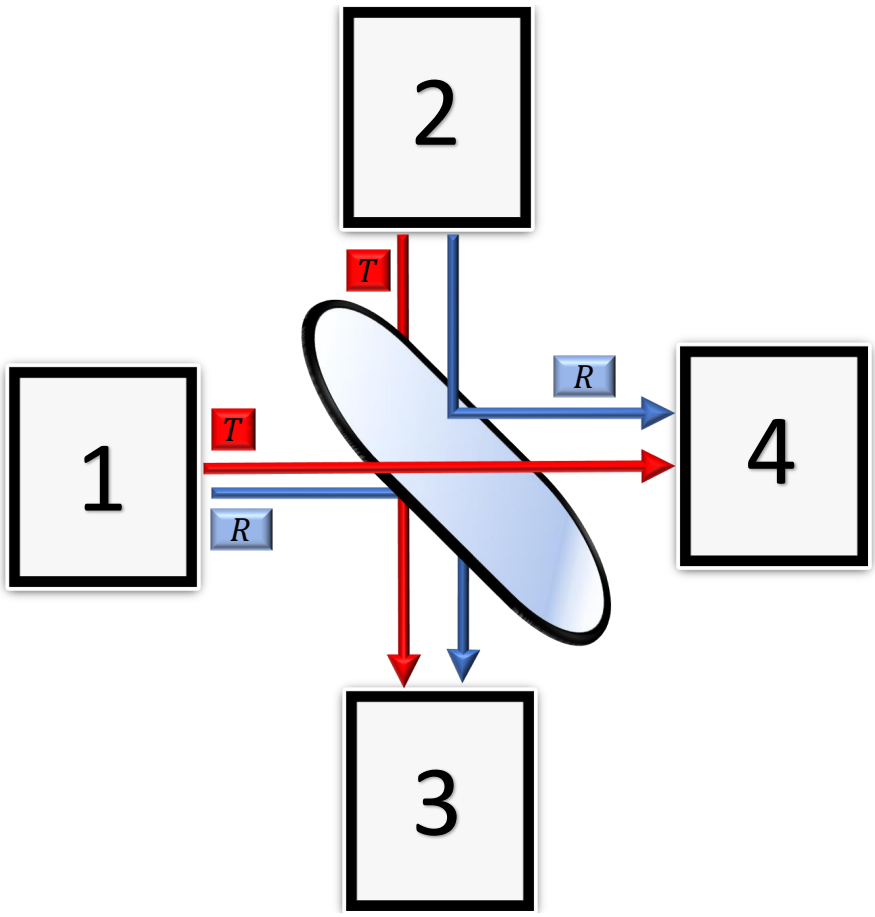

Figura 2.11: A figura representa o aparato experimental referente é análogo ao interferômetro de Hanbury-Brown Twiss. Nela, temos duas fontes (1 e 2) que servem únicamente para emitir partículas, as quais incidem num espelho semitransparente sendo espalhadas e seguem para os terminais de detecção (3 e 4). Figura baseada na figura do artigo de revisão [32]. Na figura temos as setas em azul mostrando as reflexões e as setas em vermelho mostrando as transmissões. As setas em azuis mostram a reflexão das partículas quando saem dos terminais 1 e 2 e chegam aos terminais 3 e 4, respectivamente. As setas em vermelhos mostram as tranmissões das partículas ao saírem dos terminais 1 e 2 e chegarem aos terminais 4 e 3 respectivamente.

efeito Hanbury-Brown Twiss determinístico numa cavidade mesoscópica. O aparato de investigação é um arranjo semelhante ao mostrado na figura (2.12). Esse aparato é um tipo de interferômetro utilizado em experiências de óptica quântica e é conhecido como inter-

ferômetro de Hanbury Brown - Twiss, pois esses pesquisadores foram os pioneiros a utilizar esse aparato para investigar o comportamento dos fótons em meados do século passado [33].

Na figura em questão, conseguimos perceber que as partículas provêm dos terminais 1 e 2 e são detectadas nos terminais 3 e 4, porém, essa esta detecção só acontece após o espalhamento no espelho semi-transparente. Por construção, há uma probabilidade da partícula sair do terminal 1 e atingir o terminal 4 do lado oposto ou o terminal 3 que está do lado adjacente. Toda vez que a partícula atravessar o espelho indo para o terminal oposto àquele de que veio, dizemos que houve uma transmissão. Se a partícula for detectada no terminal adjacente, podemos dizer que houve uma reflexão. Portanto, temos que $s_{41} = t$ é a amplitude de transmissão de uma partícula do terminal 1 para o detector 4 e $s_{31} = r$ é a amplitude de reflexão de uma partícula que saiu do terminal 1 para o detector 3. Ao assumirmos que a partícula que sai da fonte 2 é idêntica a partícula que saiu da fonte 1 e o espelho não privilegia o espalhamento para nenhum lado, então temos que $s_{42} = r$ e $s_{32} = t$, visto que a partícula, ao sair da fonte 2, atravessa o espelho (transmissão) e chega ao detector 3, mas em contrapartida, ela é refletida (reflexão) pelo espelho e vai para o detector 4.

Em vista do fato de a matriz do espalhamento do sistema ser unitária, e com isto conservar a carga no espalhamento, temos que $|r|^2 + |t|^2 = 1$ e $tr^\dagger + t^\dagger r = 0$. Queremos escrever os diversos estados de saída após o espalhamento do espelho semitransparente. Para tal, utilizaremos os operadores de criação e aniquilação ($a^\dagger$ e a). Os estados incidentes são descritos pelos operadores de criação $a_i^\dagger$ e aniquilação a_i com $i = 1, 2$; enquanto os estados espalhados são descritos pelos operadores de criação $b_j^\dagger$ e aniquilação b_j com $j = 3, 4$. Assim, como fizemos em seções anteriores, podemos conectar os operadores de entrada e saída através da matriz de espalhamento do sistema, de tal forma que temos

$$\begin{pmatrix} b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{31} & s_{32} \\ s_{41} & s_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \tag{2.48}$$

de modo que conseguimos conectar os termos referentes aos operadores de saída com os operadores de entrada. Essa conexão é dada pelas entradas da matriz de espalhamento do sistema. Similarmente, é possível mostrar a relação entre os operadores $b_j^\dagger$, $a_i^\dagger$ e a matriz $S^\dagger$.

Realçamos que bósons seguem relação de comutação ($\left[a_i, a_j^\dagger\right] = \delta_{ij}$). Em contrapartida, os férmions seguem a relação de anticomutação ($\{a_i, a_j^\dagger\} = \delta_{ij}$). Aqui, destacamos que os elétrons emitidos possuem o mesmo spin, entretanto futuramente pode-se tratar do problema no qual os elétrons têm spins em orientações distintas e as relações de anticomutação devem ser modificadas para $\{a_{i,\sigma}, a_{j,\sigma'}^\dagger\} = \delta_{ij}, \delta_{\sigma,\sigma'}$ e o operador número será dado por $n_i = \sum_\sigma a_{i\sigma}^\dagger, a_{i\sigma}$. Em nosso caso, como a natureza de spin das partícuas não é prepem querante para o sistema, temos os operadores números n_i e n_j, que se referem à ocupação das partículas nas fontes e nos detectores, respectivamente, de tal maneira que temos $n_i = a_i^\dagger a_i$ e $n_j = b_j^\dagger b_j$. Em vista disso, podemos utilizar a unitariedade da matriz S, assim como os operadores de criação e aniquilação de cada estado e relacionar o número de ocupações dos estados espalhados em função do número de ocupação dos estados incidentes através da equação

$$\begin{pmatrix} \langle n_3 \rangle \\ \langle n_4 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & T \\ T & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle n_1 \rangle \\ \langle n_2 \rangle \end{pmatrix}, \tag{2.49}$$

em que $R = |r|^2$ a amplitude de probabilidade de reflexão e $T = |t|^2$ a amplitude de probabilidade de Transmissão.

Se considerarmos uma fonte emitindo partículas para o espelho semitransparente, o número de ocupação dessa fonte é 1 enquanto a outra fonte é 0. Por exemplo, se tomarmos a média $\langle n_1 \rangle = 1$, pois ela é a única fonte de partículas, consequentemente, $\langle n_2 \rangle = 0$ e, utilizando a relação anterior, temos que $\langle n_3 \rangle = R$ e $\langle n_4 \rangle = T$. Esse seria o equivalente de um efeito HBT com apenas uma fonte, o que é discutido no artigo de revisão [32]. Tal problema abordado consiste em calcular a flutuação do número de partículas em função dos coeficientes R e T. Seja a definição da flutuação do número de partículas num guia i dado por $\Delta n_i = n_i - \langle n_i \rangle$, imediatamente conseguimos perceber que o número de flutuação de partículas nas fontes $\Delta n_1 = \Delta n_2 = 0$, porém por motivos distintos. O primeiro (Δn_1) é nulo porque a fonte 1 não tem flutuação de partículas, ou seja, há sempre a mesma quantidade de partículas lá, e o segundo caso é zero porque não há partículas na fonte 2 em nenhum momento (por construção).

Por outro lado, também é nula a correlação entre as partículas nos detectores 3 e 4, $\langle n_3 n_4 \rangle$,

visto que, no problema, só há uma fonte emitindo partículas, então, essa partícula estará no terminal 3 ou no terminal 4, de tal forma que não há de se localizar a mesma partícula em dois terminais após o espalhamento. Em vista disso, podemos calcular a flutuação do número de ocupação das partículas em cada detector, dado por $(\Delta n_3)^2$ e $(\Delta n_4)^2$, lembrando que $n_j = b_j^\dagger b_j$, $\langle n_3 \rangle = R$ e $\langle n_4 \rangle = T$. Para esse caso, conseguimos chegar à seguinte dispersão para o número de partículas nos terminais 3 e 4, respectivamente, como:

$$\langle (\Delta n_3)^2 \rangle = \langle (\Delta n_4)^2 \rangle = -\langle \Delta n_3 \Delta n_4 \rangle = RT. \tag{2.50}$$

Essas flutuações ocorrem porque as partículas podem sofrer reflexão (R) ou transmissão (T) devido a um espalhador central. Tal flutuação é chamada de ruído de partição e é importante perceber que se o espelho apenas refletir ($R = 1$) ou apenas transmitir ($T = 1$) a medida da flutuação do número de partículas em cada detector é nula, fazendo com que não haja o ruído de partição. Entretanto, o ruído será máximo caso o espelho semitransparente apresente a mesma amplitude de probabilidade de transmissão e reflexão. Por exemplo, uma simples matriz de espalhamento utilizada em experimentos na óptica seria $r = i/\sqrt{2}$ e $t = 1/\sqrt{2}$. Essa realização levaria a um valor máximo do ruído de partição.

Ao considerar que as duas fontes emanam partículas para o espelho (assim como no aparato HBT original), temos que construir os estados de saída em função dos dois estados de entrada. Seja o estado de vácuo $|0\rangle$ um estado vazio para os terminais fontes, quanto para os terminais detectores. Consideremos agora que duas partículas idênticas saiam das fontes 1 e 2, de tal forma que, com a ajuda dos operadores de criação supracitados, podemos criar partículas incidentes nesses terminais a partir do estado de vácuo $|0\rangle$ através de $|\Psi\rangle = a_1^\dagger a_2^\dagger |0\rangle$, e após o espalhamento temos três possibilidades de estados acessíveis:

1) o primeiro estado é quando as duas partículas são detectadas no terminal 3. A probabilidade de ocorrer esse estado é dada por $P(2,0) = \langle \Psi | n_3 n_3 | \Psi \rangle$;

2) o segundo estado é quando as duas partículas são detectadas cada uma em um terminal diferente, ou seja, uma partícula no terminal 3 e outra no terminal 4. A probabilidade de ocorrer esse estado é dada por $P(1,1) = \langle \Psi | n_3 n_4 | \Psi \rangle$;

3) não menos importante, o último estado é dado na ocasião em que as duas partículas são detectadas no terminal 4. A probabilidade de ocorrer esse estado é dada por $P(0,2) = \langle\Psi|n_4 n_4|\Psi\rangle$;

Aqui frisamos que os estados em questão se enquadram em 2 estados de agrupamento (1° e 3°) e um estado de antiagrupamento (2°). Além disso, esses estados são criados no mesmo estado inicial com a mesma frequência, ratificando que a diferença da medição após o espalhamento é dada unicamente pela dinâmica caótica.

Mediante esses três estados discutidos acima, podemos utilizar os operadores de criação e aniquilação, assim como a álgebra de férmions e bósons, para escrever as amplitudes de probabilidade de detecção das partículas em função dos elementos de transmissão e reflexão da matriz de espalhamento do sistema em questão. Esse procedimento, nos permite obter a seguinte equação para a amplitude de probabilidade de detecção das partículas em terminais distintos:

$$P(1,1) = \langle\Psi|n_3 n_4|\Psi\rangle = \langle 0|a_2 a_1 b_3^\dagger b_3 b_4^\dagger b_4 a_1^\dagger a_2^\dagger|0\rangle = |\langle 0|b_3 b_4 a_1^\dagger a_2^\dagger|0\rangle|^2. \tag{2.51}$$

Utilizando a unitariedade da matriz de espalhamento ($SS^\dagger = \mathbf{I}$) e invertendo a relação da equação (2.49), além de lembrarmos que $s_{31} = r = s_{42}$ e $s_{32} = t = s_{41}$, conseguimos reescrever os operadores de entrada $a_1^\dagger$ e $a_2^\dagger$ em função dos operadores de saída b_3 e b_4, e, com isso ficaremos com

$$a_1^\dagger a_2^\dagger = rtb_3^\dagger b_3^\dagger + trb_4^\dagger b_4^\dagger + r^2 b_3^\dagger b_4^\dagger + t^2 b_4^\dagger b_3^\dagger. \tag{2.52}$$

A partir da relação (2.52), podemos utilizá-la na equação (2.51) a fim de encontrar a amplitude de probabilidade de detectar o estado, cujas partículas se encontram cada uma em um terminal distinto:

$$P(1,1) = (R \pm T)^2. \tag{2.53}$$

Na equação acima, foi utilizado o sinal + para férmions e o - para bósons. Também temos que R é a probabilidade de ocorrer a reflexão, enquanto T é a probabilidade de ocorrer

a transmissão, portanto, R+T = 1 sempre para férmions. Assim, concluímos que, se as partículas forem Fermiônicas, só haverá antiagrupamento. Por outro lado, se R = T = 1/2, que correspem que ao espelho ideal, cuja probabilidade de reflexão é igual à probabilidade de transmissão, não haverá agrupamento de bósons e portanto só haverá antiagrupamento.

Esse fato mostra que, para ocorrer um antiagrupamento de bósons, ou seja, os bósons serem detectados no mesmo terminal, o espelho não pode ser simétrico, ele tem que privilegiar uma direção após o espalhameno no transporte. No próximo capítulo, iremos tratar novamente desse experimento, porém, com um espelho caótico e iremos mostrar que, devido ao caos do espelho em questão, mesmo que o espelho seja ideal e tenha a mesma probabilidade de espalhamento para qualquer direção, surgirão estados de antiagrupamento para bósons. Essa questão é importante, visto que, é possível o desenvolvimento de novas tecnologias a partir do efeito de antiagrupamento de bósons, como chips ópticos e novas ferramentas para computação quântica.

Similarmente, para o agrupamento no mesmo terminal de saída, temos

$$P(2,0) = P(0,2) = 2RT, \tag{2.54}$$

em que o valor encontrado vale unicamente para bósons. Essa mesma situação foi encontrada em nosso sistema com o espelho caótico, o agrupamento só foi detectado para o sistema quando as partículas eram bósons. Nota-se que se o espelho for ideal, $P(2,0) = P(0,2) = 1/2$. Com efeito, $P(2,0) + P(0,2) + P(1,1) = 1$ para férmions ou bósons, fato esse que faz com que nenhuma partícula seja absorvida pelo espelho no efeito HBT determinístico. Essa conservação de probabilidade também é um fator elencado no efeito HBT caótico, que discutiremos a posteriori.

Esta seção mostrou duas realizações simples do experimento HBT determinístico, com uma única fonte emanando partícula para o espelho semitransparente, e quando duas fontes emanam partículas para o espelho. A grande diferença do efeito visto nesse problema para o efeito HBT que iremos abordar, é o fato de o espelho ser caótico e de que, além das transmissões para os detectores, também há reflexão para as fontes que são responsáveis por emitir as partículas para o espelho. Em virtude disso, haverá, no problema em questão,

mais termos de reflexão e transmissão. Além disso, o efeito antiagrupamento no efeito HBT determinístico só acontece se houver um desbalanço entre R e T em questão, enquanto no efeito HBT caótico esse antiagrupamento de bósons acontece inevitavelmente. Ademais, o efeito HBT em dispositivos mesoscópicos caóticos será discutido com mais detalhes nos capítulos 2 e 3 desta tese.

2.5 Spintrônica

Uma das mais importantes descobertas cientificas do século XIX foi a descoberta do elétron por Joseph John Thomson (J.J Thomson). Através dela, foi dado início ao entendimento da estrutura atômica. A manipulação de fluxos de cargas elétricas que impacta na eletrodinâmica é responsável também por aplicações tecnológicas utilizando a carga do elétron. Porém, os elétrons têm outra característica muito importante, que é a natureza do seu *spin*. As partículas dotadas de cargas podem conter *spin*, que é uma grandeza física fundamental e não pode ser derivada de nenhuma outra grandeza física [13]. O *spin* não tem nenhum análogo clássico, embora seja muito semelhante ao momento angular de um corpo rígido que depende da sua massa e de sua velocidade angular. Em vista disso, conseguimos associar na figura (2.13) a relação do *spin* do elétron com o movimento de rotação da Terra.

Uma das características dele é o fato de ser quantizado, ou seja, quando se mede o spin de uma partícula ele só poderá assumir valores discretos, dados por [13]

$$S^2 = \hbar^2 s(s+1), \tag{2.55}$$

em que s é um número inteiro $0, 1, 2...$, denominado número quântico de *spin*, e $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ é uma constante fundamental física, chamada constante de Planck, em homenagem ao seu proponente Max Planck.

A década de 1920 foi crucial para pôr o *spin* do elétron em evidência na teoria quântica. Uhlenbeck e Goudsmit [34] foram responsáveis por descobri-lo, algo que fizeram através da análise do famoso experimento de Stern-Gerlach [13], utilizando o princípio da exclusão de

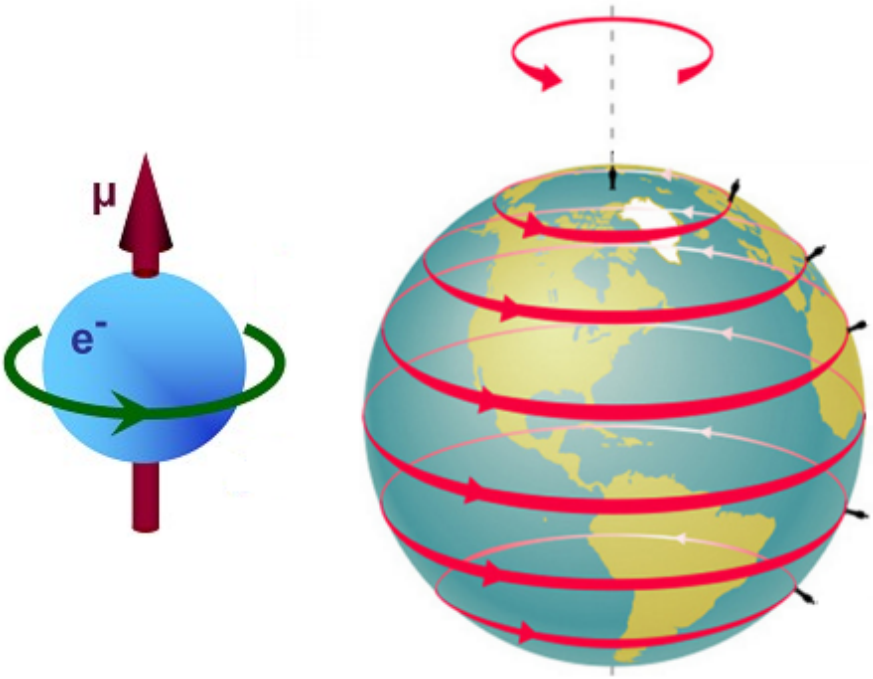

Figura 2.12: Nessa figura, temos, à esquerda, o elétron, e, à direita, o planeta Terra, ambos com um movimento angular. Como o planeta Terra é um corpo extenso, dizemos que ele tem um momento angular. Em nosso planeta, essa rotação é responsável pela duração do dia; nos elétrons, ela é responsável por produzir o *spin* que poderá caracterizar a magnetização de um material. Notar que isso é uma analogia e que o spin não está vinculado a uma seta no espaço de coordenadas.

Pauli [35]. A partir da descoberta do spin, fez-se necessário estudá-lo e averiguar possíveis aplicações práticas em nosso cotidiano. Com o passar dos anos, foi-se intensificando o estudo nessa área, até que fosse criada a spintrônica, que consiste no estudo de maneiras de criar, detectar e manipular correntes puras de spin, tendo como principal interesse as criações aplicáveis às novas tecnológias [36]. A spintrônica é uma área motivadora, pois a busca por dispositivos eletrônicos que funcionem à base de transporte de spin gerará uma revolução tecnológica com dispositivos que terão um grande poder de armazenamento e irão operar com baixo consumo de energia como, por exemplo, o computador quântico [37, 38].

Um dos grandes efeitos que emergem da spintrônica é o efeito Hall de spin (SHE), o qual

tem gerado um grande interesse dentro dessa área [39]. No SHE, conseguem-se manipular correntes puras de spin e sem a aplicação de um campo magnético, apenas com uma interação spin-órbita no dispositivo em questão. A corrente de spin, diferentemente da corrente de carga, pode ser transportada sem efeitos dissipativos, o que irá gerar dispositivos com baixa perdas de energia. O SHE já foi observado em isolantes topológicos [40], grafeno [41] e semicondutores [42]. O grafeno e os isolantes topológicos são conhecidos como materiais de Dirac, e, por isso, apresentam a simetria quiral. Em materiais que apresentam quiralidade, a condutância de spin-Hall (G^q_{sH}) é quantizada, o que quer dizer que ela adquire múltiplos inteiros de $e/4\pi$ [43]. Em materiais que não apresentam quiralidade, a condutância (G^f_{sH}) é fracionada, o que quer dizer que ela apresenta valores múltiplos não inteiros de $e/4\pi$ [44]. Em nossos trabalhos, Ref.[45, 46], calculamos a flutuação universal da condutância de spin-Hall no efeito Hall de spin em materiais de Dirac. Esse problema analítico encontrava-se em aberto desde 2008, e conseguimos finalizá-lo em 2016.

Seguindo a literatura sobre efeito Hall de spin, podemos observar que, em 2006, W.Ren *et al.*[44] calcularam a flutuação universal da condutância de spin Hall. No trabalho, foi feita uma simulação numérica, através da qual os pesquisadores chegaram à conclusão de que a dispersão da condutância adquire um valor aproximado igual $\mathrm{rms}(G^f_{sH}) \approx 0.18 \times e/4\pi$. Esse resultado foi confirmado um ano depois por Bardarson *et al.* [47] os quais utilizaram a teoria de matrizes aleatórias [11] e o método diagramático [21] para confirmar o resultado de W.Ren através de resultados analíticos.

Em 2008, Qiao *et al.* [43] estudaram o efeito Hall de spin em materiais de Dirac, utilizando simulações numéricas para calcular a flutuação da condutância e chegaram ao valor universal $\mathrm{rms}(G^q_{sH}) = 0.285 \pm 0.005 \times e/4\pi$. Recentemente, Barros fez uma extensão do método diagramático [29, 12] permitindo através da teoria de matrizes aleatórias, que se pudesse fazer cálculos exatos para sistemas que apresentam quiralidade. O principal resultado da dissertação de mestrado de Vasconcelos [45] foi o cálculo analítico da flutuação universal da condutância de spin-Hall $\mathrm{rms}(G^q_{sH}) = 0.283 \times e/4\pi$ em sistemas quirais. Esse resultado foi publicado na referência [46].

Diferentemente dos capítulos 2 e 3 desta tese, no capítulo 4, iremos trabalhar com o transporte de spin em um dispositivo mesoscópico caótico. Para tal, iremos investigaremos a conversão de corrente de spin em corrente de carga no efeito Hall inverso de spin [48] e, com isso, calcularemos a flutuação universal do parâmetro chamado λ_{IREE}, que é responsável por medir a conversão da corrente de spin em corrente de carga. Faremos o cálculo analítico da flutuação dessa conversão para a classe de Wigner Dyson e em materiais de Dirac. Mediante o nosso resultado, fizemos conexões com medidas experimentais vigentes. Os resultados estão publicados no artigo [49].

Para o cálculo analítico em questão, utilizamos, além da TMA [11], a extensão do método diagramático [29]. Também foi necessário fazer uma expansão semiclássica [50] com o objetivo de obter cálculos analíticos. Chegamos à conclusão de que, na média, a conversão de corrente de spin em corrente de carga é nula, e que é necessário fazer o cálculo da dispersão para se obter a flutuação da conversão de corrente de carga em corrente de spin através do efeito inverso de spin-Hall. Quando olhamos para a dispersão conseguimos encontrar resultados distintos para a classe de Wigner-Dyson e a classe quiral. Esses resultados estão expostos em nosso artigo que está em anexo e serão discutidos com mais detalhes ao longo do capítulo 4 desta tese.

Iremos, ao longo do restante deste tópico, fazer uma uma breve revisão sobre os principais resultados acerca do efeito Hall Clássico, Quântico, assim como o efeito Hall Inverso.

2.5.1 Efeito Hall Clássico

O efeito Hall foi descoberto em 1879 por Edwin Herbert Hall [51] na época do seu doutorado. Na figura (2.14) temos um semicondutor submetido a um campo elétrico $\mathbf{E}_x$. A corrente elétrica longitudinal i flui dentro dele da esquerda para direita e os elétrons estão com uma velocidade de deriva v no sentido da corrente. Quando não existe campo magnético, as partículas seguem quase em linha reta exceto pelas colisões devido às impurezas no semicondutor. Porém, quando se coloca um campo magnético (para dentro do plano do papel)

constante e perpendicular ao fluxo da corrente elétrica, ocorrerá um deslocamento das cargas devido à força magnética (força de Lorentz), e essas cargas irão se acoplar na face de baixo do semicondutor. A força de Lorentz é dada por

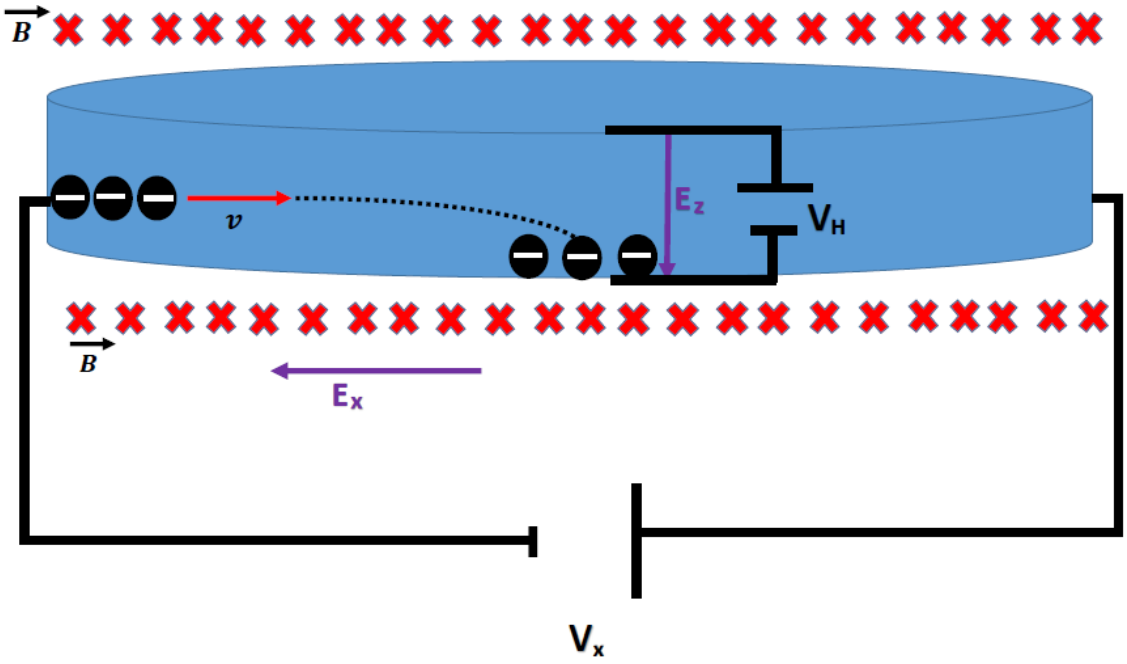

Figura 2.13: A figura é uma representação do efeito Hall. Quando uma corrente elétrica é submetida a um campo magnético **B**, os elétrons sofrem desvios, se acumulando na superfície do condutor, surgindo, portanto, uma tensão transversal chamada tensão Hall V_H. Devido a essa tensão, surge naturalmente um fluxo de cargas entre as faces do condutor, de forma que é possível determinar a resistência Hall R_H em função da espessura do condutor w.

$$\overrightarrow{F_m} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \tag{2.56}$$

e no equilíbrio temos que a força de Lorentz é igual à força eletrostática que ocorre transversalmente no semicondutor,

$$q\mathbf{E} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \tag{2.57}$$

Se w é a espessura do semicondutor, então, existe uma diferença de potencial dada por V_H entre a placa superior e placa inferior do semicondutor. Essa ddp é chamada de tensão Hall e podemos escrever a equação (2.57) em função da tensão Hall na forma de

$$q\frac{V_H}{w} = qvB. \tag{2.58}$$

Uma vez que, o ângulo entre **B** e a velocidade de deriva $\overrightarrow{v}$ é 90º, conseguimos encontrar a seguinte relação para a tensão Hall

$$V_H = vwB, \tag{2.59}$$

de modo que essa tensão pode ser medida com um simples voltímetro. Conhecendo o valor da tensão Hall é possível medir a velocidade de deriva v dos elétrons que se propagam no semicondutor, pois a densidade de corrente é dada por

$$j = nqv, \tag{2.60}$$

em que j é a densidade de corrente e n é a concentração de cargas. Podemos relacionar a tensão Hall com a densidade de corrente j, substituindo v da equação (2.60) na equação (2.59), então, temos que a tensão Hall, em função da densidade de corrente é dada por

$$V_H = \frac{jwB}{qn}. \tag{2.61}$$

Os elétrons ao sairem da placa inferior para a placa superior encontram uma resistência que é chamada de resistência Hall, dada por

$$R_H = \frac{V_H}{i} = \frac{B}{qn}\frac{w}{A}, \tag{2.62}$$

percebemos que w/A é um fator geométrico além disso temos que a resistência Hall aumenta linearmente com a tensão Hall senod mantida constante a corrente i.

Nota-se que, de acordo com a equação (2.61) a tensão Hall aumenta linearmente com o campo magnético, e de acordo com a equação (2.62), a resistência Hall também aumenta linearmente com o campo magnético, mantendo constante a corrente longitudinal. Porém, em 1980 Klitzing e seus colaboradores [52], estudando o efeito Hall em filmes finos semicondutores com um alto campo magnético $B = 18T$ e a baixas temperaturas $T = 1.5K$, descobriram que a tensão não era linear com o campo magnético. Verificou-se que, em vez dessa linearidade, a tensão Hall V_H apresentava uma série de platôs, ou seja, eles descobriram que V_H era quantizada. Desse modo, a resistência Hall R_H também é quantizada. A quantização da resistência é dada por

$$R_H = \frac{V_H}{i} = \frac{h}{e^2} \times \frac{1}{n} \tag{2.63}$$

em que os valores de n observados por Klitzing eram números inteiros positivos ($n = 1, 2, 3...$). Para $n = 1$, temos o valor de 25.781 Ω. Como podemos observar na figura (2.15), o valor encontrado no experimento de Klitzing [52] foi de $\approx 6.4\ k\Omega$.

Em 1982, Daniel Tsui e colaboradores [53], investigaram o efeito Hall em semicondutores de alta pureza e descobriram que os valores de n assumem valores fracionários, por isso a descoberta de Klitzing é conhecida como efeito Hall quantizado, e a descoberta de Tsui é conhecida como efeito Hall fracionado, como podemos observar na figura (2.15) [52, 53]. Klitzing e Tsui ganharam o Prêmio Nobel em 1985 e 1988, respectivamente.

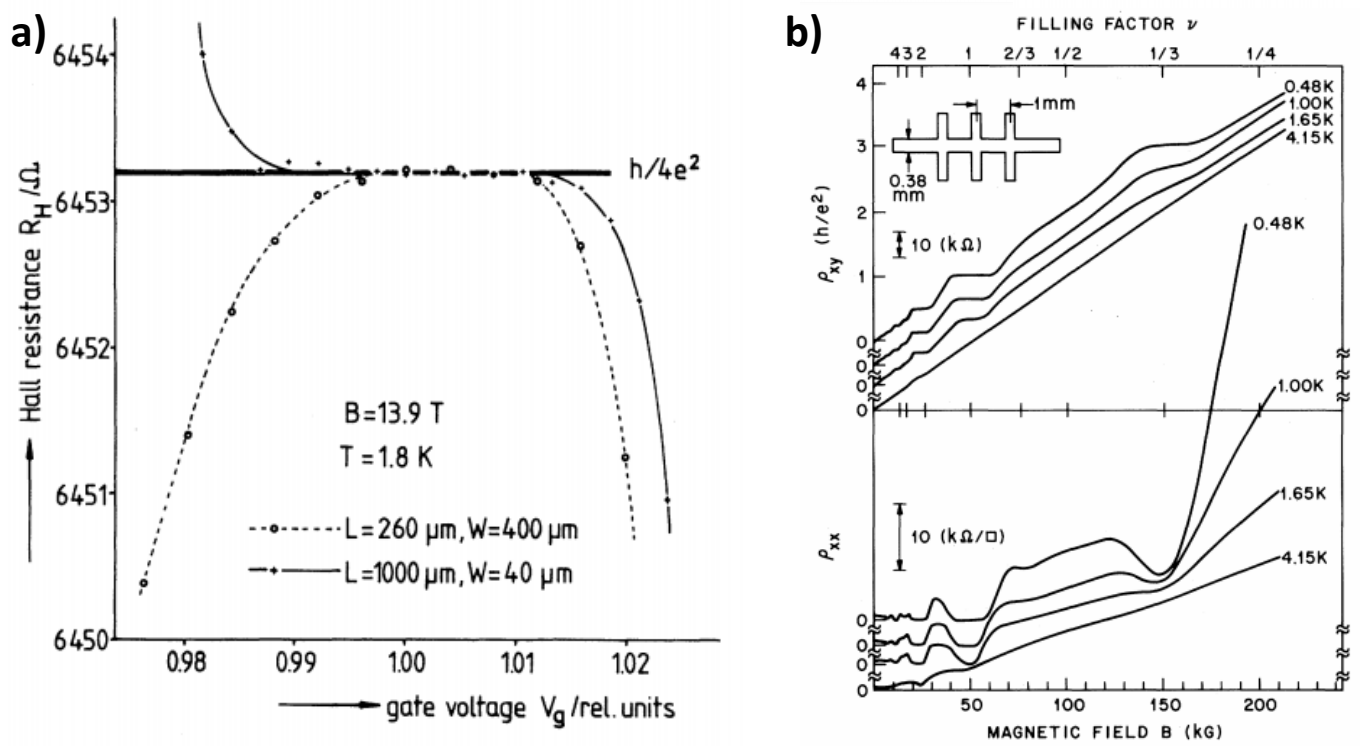

Figura 2.14: A figura mostra o resultado do a) efeito Hall quantizado, observamos que para altos campos magnéticos e uma baixa temperatura a resistência Hall converge para o mesmo valor, esta figura foi retirada da referência[52]. b) Vemos o efeito Hall quântico fracionado, é possível observar com clareza um platô de resistência em $\nu = 1/3$, figura retirada da referência [53]

.

2.5.2 Efeito Hall de Spin e Efeito Hall Inverso de Spin

O efeito Hall de spin (SHE) [39, 54, 55, 56, 57] e o efeito Hall Quântico de spin (SQHE) [41, 58] originaram-se devido ao bombeamento de correntes polarizadas de spin dentro de um condutor ou semicondutor com uma forte interação spin-órbita. Essa forte interação spin-órbita emerge devido ao movimenro relativo da partícula ao redor do núcleo. É possível mostrar que ela é proporcional ao número atômico (Z) do material em questão. Portanto, metais pesados apresentam uma forte interação spin-órbita. A diferença entre esses efeitos é que o SQHE ocorre em materiais de Dirac, nos quais há o efeito da quantização da condutância ao passo que SHE foi previsto em 1971 por Dyakonov e Perel [57, 59]. Apesar de o SHE ter sido previsto em 1971, levou 33 anos para que ele fosse pela primeira vez comprovado experimentalmente. O SHE foi observado por dois grupos distintos: o grupo de Awschalom foi o primeiro a observar o efeito *et al.* [55], em 2004 e o outro grupo composto por Sinova *et al.* [56], em 2005.

O SHE e o SQHE ocorrem quando uma corrente elétrica passando através de uma amostra consegue acumular spin com polarizações opostas nas laterais diametralmente opostas da amostra, como ilustramos na figura (2.16). Caso a superfície seja cilíndrica, o spin fica circulando ao redor da aplicação da corrente de carga, como ocorre com as linhas de campo magnético produzido por uma corrente elétrica. A acumulação induzida de spin é proporcional à corrente de carga que percorre a amostra. A separação de cargas com spin opostos em direções opostas foi confirmada experimentalmente [55, 56].

O termo SHE foi introduzido em 1999 [54]. Trata-se de um efeito análogo ao efeito Hall. Porém, nele não se faz necessária a aplicação de um campo magnético para ocorrer a separação das partículas em direções opostas; tal separação ocorre com uma forte interação spin-órbita e, com isso, há acumulação partículas com *spins* opostos em direções opostas.

Outro efeito muito importante na área da spintrônica é o efeito Hall inverso de spin (ISHE), que ocorre quando uma corrente de spin gera uma corrente de carga transversal, a qual é medida diretamente através da tensão com um múltimetro no laboratório. O efeito

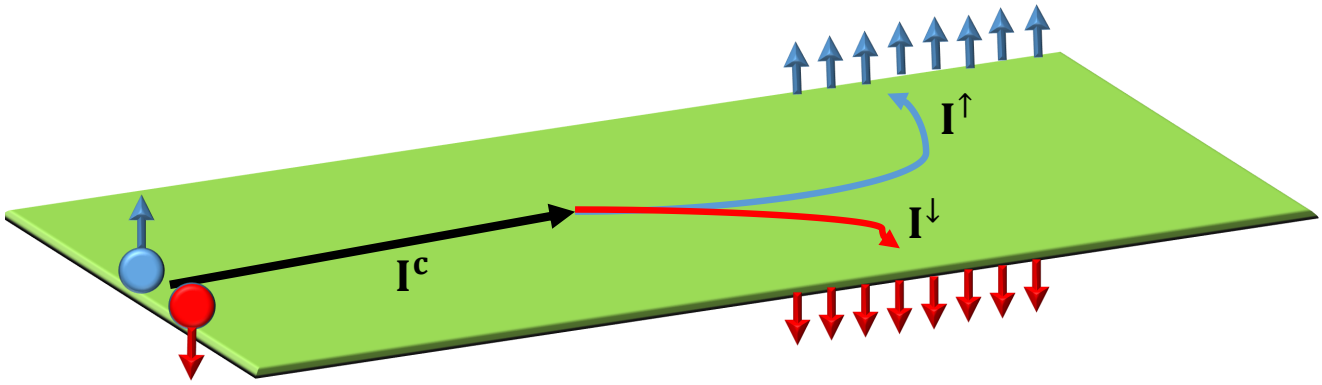

Figura 2.15: A figura mostra que ao bombear a corrente de carga para um condutor, existe a acumulação de spins com polarizações opostas nas extremidades opostas do condutor, ou seja, a corrente de carga gera uma corrente de spin, e essa corrente de spin é diametralmente separada devido à polarização das cargas; esse é o efeito Hall de spin.

está indicado na figura (2.17).

Ilustramos que, no reservatório 1 da figura (2.17), existe excesso de cargas polarizadas com spin *down*. Isso ocorre porque dentro do reservatório, há cargas polarizadas nas duas direções. A energia das cargas com spin *up* é dada por $\mu_1^{\uparrow}$, e a energia das cargas com spin *down* é dada por $\mu_1^{\downarrow}$, portanto, temos que o potencial do reservatório 1 é escrito como

$$\mu_1 = \mu_1^{\downarrow} - \mu_1^{\uparrow}. \tag{2.64}$$

Como os reservatórios 2 e 3 não têm cargas polarizadas com spin numa direção preferencial, então, $\mu_2 = \mu_3 = 0$. Na figura (2.18), podemos ver a banda de energia dos reservatórios 1, 2 e 3. O desbalançeamento dos níveis de energia das cargas com spin *up* e spin *down* leva

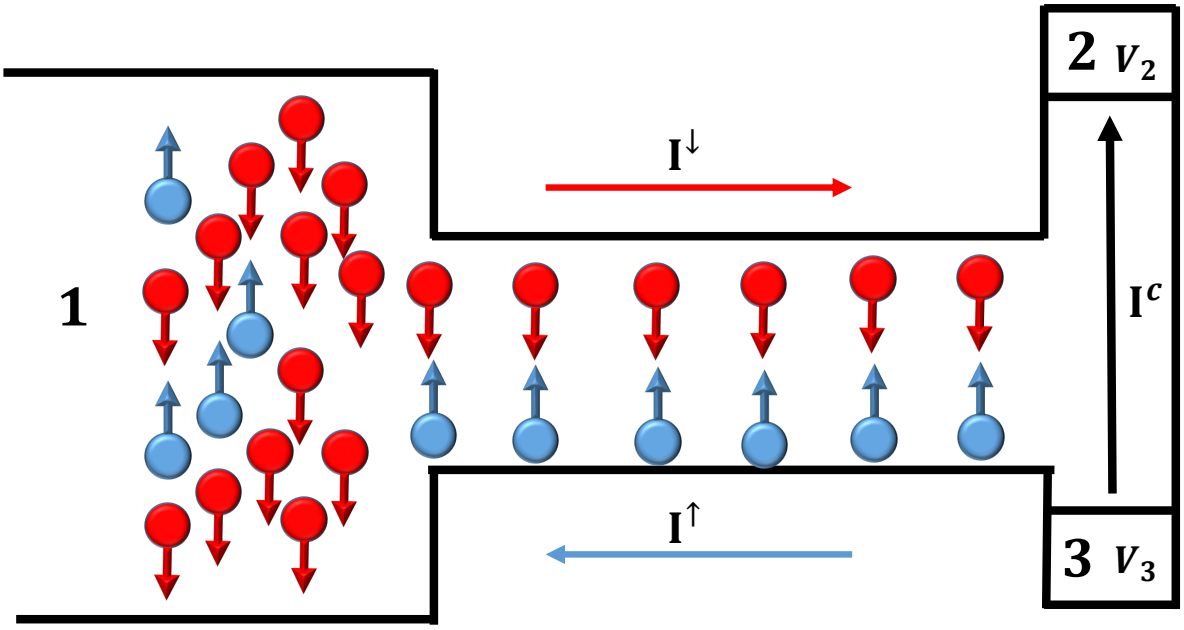

Figura 2.16: A figura mostra que uma corrente de se propaga do reservatório 1 para a amostra. O reservatório 1 está polarizado com cargas com spin *up*, e entre o reservatório 2 e 3, é gerada uma diferença de potencial $\Delta V = V_3 - V_2$, a qual irá gerar a propagação de uma corrente eletrônica entre os terminais 2 e 3.

à corrente de spin.

Podemos dizer que a corrente de spin de um sistema é dada por

$$I_s = I^{\uparrow} - I^{\downarrow}. \tag{2.65}$$

Quando se predominar o fluxo de elétrons com spin *up* ($I^{\uparrow}$) será gerada uma corrente efetiva pura de spin *up* e, se predominar o fluxo de elétrons com spin *down* ($I^{\downarrow}$), será gerada uma corrente efetiva pura de spin *down*. Portanto, a corrente de carga total num sistema é dada por

$$I_c = I^{\uparrow} + I^{\downarrow}. \tag{2.66}$$

De acordo com as equações (2.65) e (2.66), no ISHE podemos bombear uma amostra com

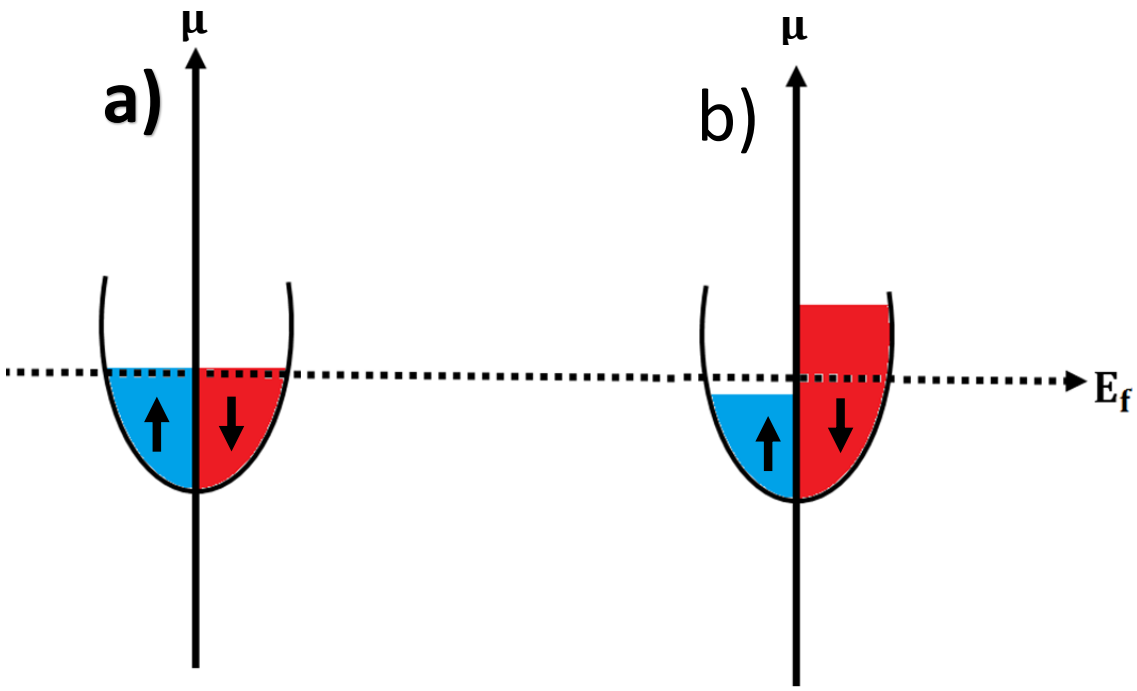

Figura 2.17: A linha tracejada representa a energia de Fermi e a linha sólida vertical representa a energia do sistema. A cor vermelha representa a energia total das cargas que estão com spin *down* e a cor azul representa a energia total das cargas que estão com spin *up*. Em a), a distribuição de energia nos terminais está em equilíbrio. Como não existe desbalanceamento, não vai ocorrer propagação da corrente de spin, então, se faz necessário um desbalanceamento, que está representado em b). Com o desbalançeamento entre as energias das cargas com spin *down* e das cargas com spin *up*, vai existir a propagação de corrente polarizada, nesse caso, uma corrente pura de spin *down*.

corrente pura de spin, e corrente de carga nula ($I_s \neq 0$ e $I_c = 0$) ou podemos bombear uma amostra com corrente de spin junta com corrente de carga ($I_s \neq 0$ e $I_c \neq 0$). As configurações mencionadas podem ser vistas na figura (2.19).

Os primeiros pesquisadores a fazerem medidas experimentais do ISHE, em 2005, foram Azevedo *et al.*[60], os quais realizaram as primeiras medidas de tensões elétricas dc geradas por bombeamento de spin. Em 2006, Saitoh *et al.*[48] fizeram um bombeamento de spin

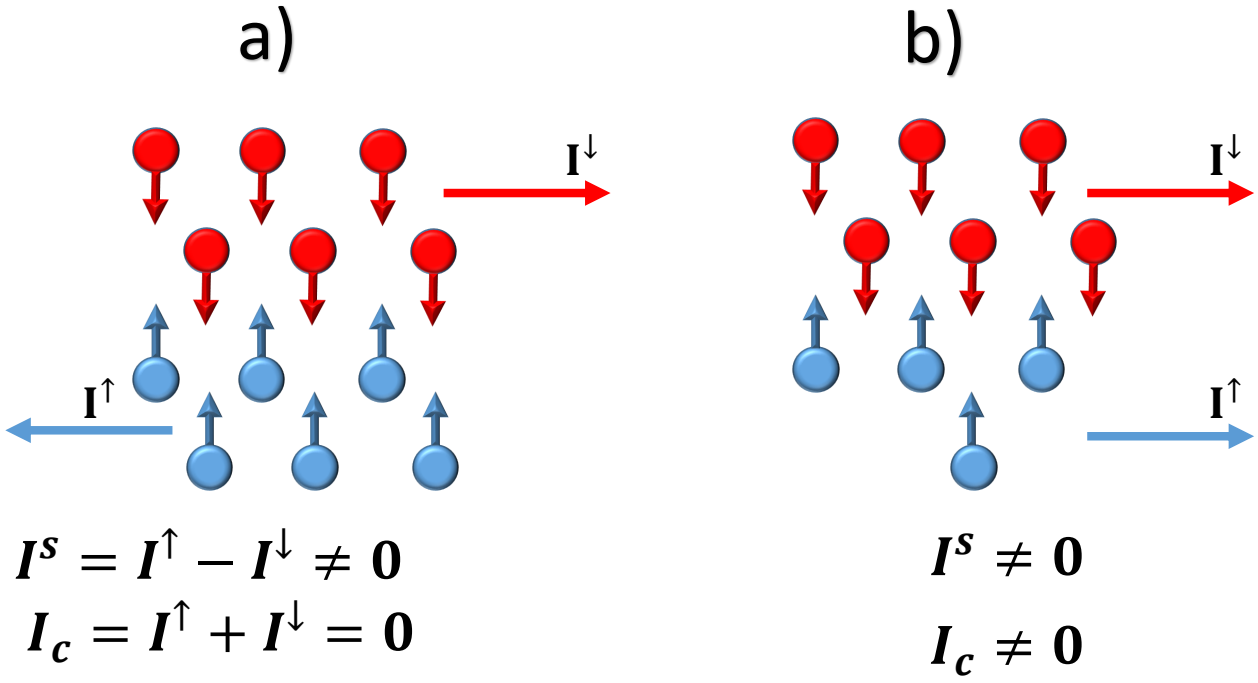

Figura 2.18: Na figura mostra o fluxo de a)corrente pura de spin, $I_c = 0$ e $I_s \neq 0$ e b) representa corrente eletrônica pois $I_c \neq 0$ e $I_s \neq 0$.

de um meio ferromagnético para um meio condutor não magnético. Pode-se criar corrente de carga através de corrente de spin por bombeiamento e pelo efeito Seebeck de spin. Esse último efeito foi observado em 2008 por Uchida e seus colaboradores [61] é consistente no transporte de corrente de spin devido a um gradiente de temperatura, o qual gera uma tensão nos terminais do condutor, levando, então, a uma propagação de corrente pura de spin, que, ao penetrar no condutor, irá gerar uma corrente eletrônica.

O SHE é um fenômeno de transporte de spin que foi previsto há muito tempo [57, 59], porém foi bastante estudado nas últimas décadas em materiais 2D [55, 56] e 3D [62]. O ISHE foi visto em materiais semicondutores [63, 64, 65] e condutores [66, 67]. Compreender e aplicar esses temas é promissor tanto na parte experimental, pelas vastas aplicações tecnológicas [67, 68], quanto na área teórica, para compreender melhor a interação do spin em sólidos.

Capítulo 3

Efeito Hanbury-Brown Twiss em dispositivos mesoscópicos caóticos

3.1 Introdução

A abordagem de espalhamento de Landauer para o transporte quântico [2, 69, 70] relaciona as propriedades de transporte com os autovalores da matriz de espalhamento. Se o transporte ocorre através de regiões com espalhamento caótico (típico de pontos quânticos), a teoria de matrizes aleatórias (TMA) fornece uma descrição estatística do problema [71, 72]. Apesar de as propriedades individuais dos sistemas caóticos serem modificadas de maneira contudente por parâmetros microscópicos da região de espalhamento, tais como a gemeotria ou as impurezas do material. Essas propriedades seguem quantitativamente uma estatística universal, independente dos detalhes previamente citados.

O caos é responsável pela universalidade na estatística de contagem, em escalas abaixo da energia de Thouless, conforme propõe Dyson [23]. A universalidade nos permite investigar o transporte em um sistema do tipo Hanbury-Brown Twiss (HBT) caótico, o qual possui a propriedade de fornecer uma medida da intensidade de correlação das partículas emitidas ao serem detectadas em terminais após o espalhamento.

Neste capítulo, iremos apresentar o sistema a ser estudado, cujo cerne consiste em calcular a correlação das partículas após serem espalhadas por uma cavidade caótica balística. Além disso, analisaremos como simetrias fundamentais da mecânica quântica modificam, de forma contudente, a medida da correlação das partículas após o espalhamento num dispositvo tipo Hanbury-Brown Twiss caótico em sistemas de nanoestruturas.

3.2 Efeito Hanbury-Brown Twiss em uma cavidade caótica balística

Como dito na introdução da tese, neste capítulo e no capítulo a seguir, iremos analisar o transporte de partículas num aparato tipo Hanbury-Brown Twiss. Esse aparato ficou reconhecido por esse nome devido aos seus autores [33], cujo grande efeito foi conseguir medir o agrupamento de bósons provenientes de fontes após serem separadas por um espelho semitransparente como mostrado na figura (1.12). Em vista disso, foi mostrado também no capítulo anterior, que motivados pelo dispositivo em questão, os autores adaptaram o efeito HBT determinístico em sistemas mesoscópicos como ficou evidente no artigo de revisão da Ref.[32]. Podemos realçar, conforme verificado no artigo citado, que, se o espelho semitransparente tiver a mesma amplitude de reflexão e transmissão não há antiagrupamento de bósons.

Em vista disso, propomos um modelo diferente do modelo citado: o dispositivo eletrônico analisado é uma cavidade caótica balística conectada a quatro terminais, como podemos ver na figura (3.1). Em nosso modelo, o espelho pode espalhar as partículas em questão para qualquer um dos terminais, ou seja, os terminais fontes (1 e 2) também detectam as partículas. Além disso, o espelho não privilegia o espalhamento em nenhuma direção.

Esse dispositivo contém quatro terminais (em azul), que estão submetidos a potenciais eletroquímicos. Os terminais estão rotulados por **T.1** (terminal 1), **T.2** (terminal 2), **T.3** (terminal 3) e **T.4** (teminal 4). Cada terminal contém o que comumente chamamos de modos

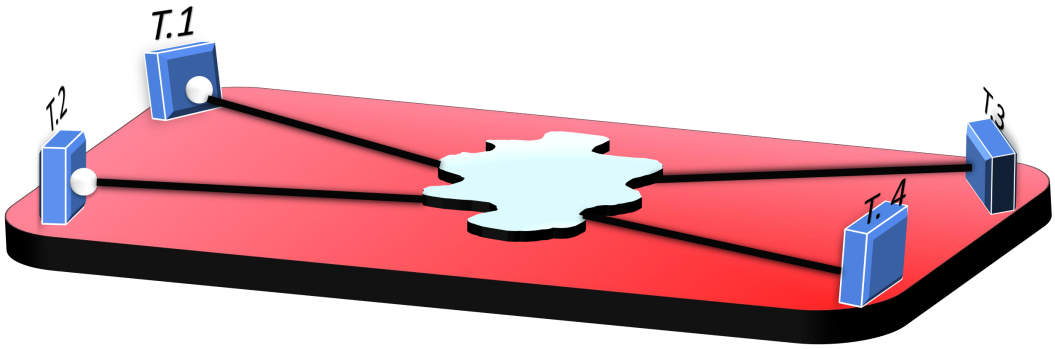

Figura 3.1: O esquema gráfico mostra uma cavidade caótica balística com 4 terminais. Dessa maneira, fica nítido que as partículas (em branco) inicialmente se encontram no terminal 1 (T.1) e no terminal 2 (T.2). Em sequência, as partículas seguem os guias (em preto) e adentram no ponto quântico caótico (espelhado), podendo existir diversas formas de espalhamentos, como, por exemplo, elas se agruparem em um dos terminais após saírem do ponto quântico ou haver um espalhamento de tal forma que cada uma seguirá para um terminal diferente. Vale ressaltar que esse agrupamento ou espalhamento irá depender da natureza da partícula.

propagantes. Tais modos são guias (ou canais) por onde ocorre o deslocamento da partícula, indo do terminal ao centro espalhador. Também por esse canal, a partícula se propagará após ser espalhada pelo centro espalhador, se deslocando até o terminal novamente. Cada terminal tem apenas um canal aberto (chamarei de canal daqui em diante), este canal se encontra em preto (na figura) tem como objetivo ser o elo que conecta os terminais ao ponto quântico e vice-versa. Os canais de propagação abertos são os únicos caminhos cujas partículas percorrem ao adentrarem e saírem do ponto quântico caótico.

Localizado no meio da figura (3.1), está o centro espalhador, ou ponto quântico, destacado

de forma espelhada, o que pode nos fazer lembrar diretamente uma reflexão. A fim de compreender que esse ponto quântico não apenas transmite as partículas dos terminais 1 e 2 para os terminais 3 e 4, como também reflete as partículas novamente para os terminais 1 e 2, que são os terminais em que se encontravam inicialmente as partículas. Além do mais, as partículas, ao entrarem no centro espalhador, poderão também ser espalhadas de forma mista, ou seja, uma das partículas poderá voltar para um dos terminais de que proveio (terminal 1 ou 2), enquanto a outra poderá ir para os terminais de transmissão (terminal 3 ou 4). Chamaremos cada configuração possível de ser encontrada após o espalhamento de estado do sistema espalhado e voltaremos a falar sobre estas configurações ao longo do trabalho.

Por fim, iremos falar sobre as duas partículas, que estão em branco na figura (3.1). A natureza e a distinguibilidade delas serão levadas em conta também em nosso modelo. As partículas, por construção, são indistinguíveis, de tal forma que não conseguimos rotular qual partícula estacionou no terminal final após ser espalhada. Além da indistiguibilidade, a natureza delas no sistema pode ser fermiônica ou bosônica, de tal forma que a sua distribuição ao longo dos terminais será bem distinta caso elas forem bósons ou férmions.

Inicialmente será construído um estado separável das duas partículas nos terminais 1 e 2 dado por

$$|\Psi_{entrada}\rangle = a_1^\dagger \times a_2^\dagger \cdot |0\rangle \times |0\rangle = a_1^\dagger a_2^\dagger |0\rangle = |n_1 n_2\rangle, \tag{3.1}$$

em que $a_i^\dagger$ corresponde ao operador de criação de um estado inicial no terminal i. Portanto, a formação do estado de entrada é a ocupação de uma partícula no terminal 1 e um partícula no terminal 2.

Iremos examinar abaixo, com atenção, o que significa cada termo explícito no $|\Psi_{entrada}\rangle$

- o número 1 na frente da equação (3.1) está explicitamente escrito para dizer que há uma probabilidade de 100% de chance do evento ocorrer,
- $a_1^\dagger$ e $a_2^\dagger|0\rangle$ mostra que o evento é a criação inicial de uma partícula no terminal 1 e no terminal 2 a partir do estado de vácuo,

- por fim, após os operadores de criação atuarem no estado de vácuo, criarão partículas nos terminais que estão rotulados de tal forma que $|\Psi_{entrada}\rangle = |n_1 n_2\rangle$.

A partir do estado inicial (3.1), as partículas que adentrarem no ponto quântico e formarão o estado de saída $|\Psi_{saída}\rangle$. Esse estado depende da natureza das partículas e da natureza probabilística da mecânica quântica. Cada estado de saída diferente possui uma amplitude de probabilidade de ser detectado. Essa amplitude está relacionada com os elementos da matriz de espalhamento do sistema (matriz S) conforme se segue:

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix}, \tag{3.2}$$

em que S_{ij} é o elemento da matriz de espalhamento S que descreve a propagação de uma partícula do estado inicial no canal do terminal i para o estado no canal do terminal j.

Dessa forma, a partir da matriz S e da álgebra dos operadores de criação e aniquilação, podemos construir todos os possíveis estados de saída do nosso problema. Para alcançarmos tais resultados iremos construir gradualmente cada estado de saída.

Os estados de espalhamento que iremos construir são os estados agrupados, que se dão quando as partículas se agrupam no mesmo terminal após o espalhamento. Eles têm as seguintes configurações:

1) ambas as partículas com uma certa amplitude de probabilidade são encontradas nos guias dos terminais fontes, rotulados pelo sub-índice i. Para essa configuração necessitamos do operador de criação $b_i^\dagger$ e dos elementos S_{ii} e $S_{ii'}$, com $i, i' = 1, 2$ e $i \neq i'$, portanto, o estado espalhado será dado por

$$|\Psi_{ii}\rangle = S_{ii} S_{i'i} b_i^\dagger b_i^\dagger |0\rangle, \tag{3.3}$$

2) ambas as partículas são encontradas no guia j com $j = 3, 4$. Para essa configuração necessitamos do operador de criação $b_j^\dagger$ e dos elementos S_{1j} e S_{2j}, portanto, o estado

espalhado será dado por

$$|\Psi_{jj}\rangle = S_{1j}S_{2j}b_j^\dagger b_j^\dagger|0\rangle. \tag{3.4}$$

Notemos que, pelo princípio da exclusão, as configurações descritas acima só são encontradas caso as partículas forem bósons, porque, dessa forma, as partículas foram encontradas no mesmo nível de energia. Como, por construção, as partículas têm o mesmo spin, os férmions com o mesmo spin não podem ser encontrados no mesmo nível de energia. Assim, para que ambas as partículas estejam agrupadas no mesmo terminal, **T.1**, **T.2**, **T.3** ou **T.4** devem ser bósons. Chamaremos os estados agrupados no terminal $i = 1, 2$ de estados agrupados de reflexão, e os estados agrupados nos terminais $j = 3, 4$ de estados agrupados de transmissão, visto que houve uma transmissão do lado esquerdo para o lado direito do espelho como mostramos na figura 3.1). Ambos os estados estão representados nas alíneas (a),(b),(c) e (d) da figura(3.2).

Por outro lado, no sistema, não há apenas estados agrupados porque as partículas podem ser espalhadas cada uma para um terminal distinto e serem detectadas em 2 terminais diferentes. Para essas configurações haverá os estados antiagrupados. Dentre eles destacaremos dois: o primeiro estado antiagrupado e o estado de reflexão total (R.T). Nesse último, após o espalhamento, as partículas voltam para os terminais de que provieram. Uma delas volta para o **T.1** e a outra volta para o **T.2**. Representando esse estado, temos a alínea (a) da figura(3.3). Mas, como as partículas são indistinguíveis não sabemos com exatidão qual partícula voltou para o seu terminal de origem, o que dá apenas para se inferir é que ambas as partículas voltaram aos terminais iniciais.

Outro antiagrupamento é o estado de transmissão total (T.T). Nele as partículas provenientes dos terminais **T.1** e **T.2** são espalhadas para os terminais **T.3** e **T.4**. Isso significa que houve globalmente de fato uma transmissão, pois nenhuma partícula retornou ao seu terminal de origem. Representando-o temos a alínea (b) da figura (3.3).

Por fim, há o estado misto (E.M). Chamaremos dessa forma esse estado pois as partículas estão antiagrupados da seguinte forma: uma partícula no terminal fonte e a outra no terminal

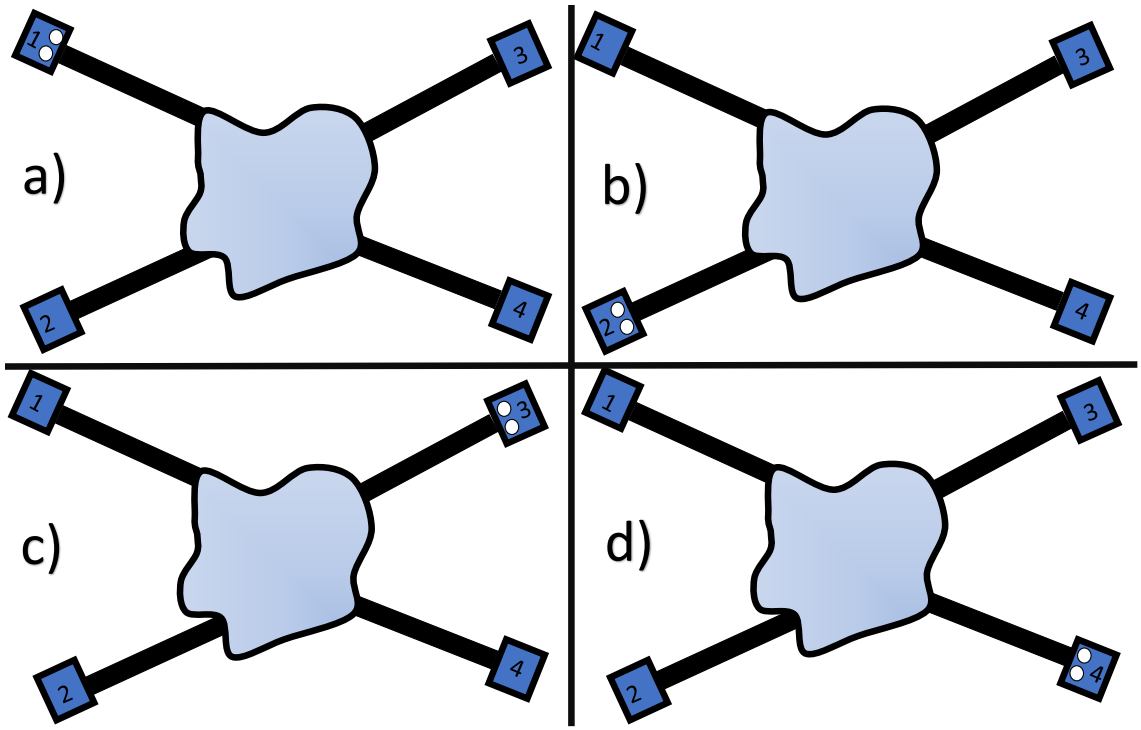

Figura 3.2: Nesta figura, tem-se os estados referentes a um sistema que só pode ocorrer caso as partículas sejam bósons, ou seja, temos os estados relacionados aos condensados. **a)** Condensado de reflexão no terminal 1, estado $|\Psi_{11}\rangle$. **b)** Condensado de reflexão no termial 2, estado $|\Psi_{22}\rangle$. **c)** Condensado de transmissão no terminal 3, estado $|\Psi_{33}\rangle$. **d)** Condensado de transmissão no terminal 4, estado $|\Psi_{44}\rangle$.

detector. Após o espalhamento uma das partículas é refletida de volta para um dos terminais que proveio de **T.1** ou de **T.2** enquanto a outra é transmitida para um dos outros terminais **T.3** ou **T.4**.

Por conseguinte, iremos construir todos estados de antiagrupamento:

3) para a configuração em que temos as partículas com uma certa amplitude de probabilidade, elas foram encontradas no guia 1 e no guia 2 respectivamente. Portanto, temos estado R.T e necessitamos dos operadores de criação $b_i^\dagger$ e $b_i'^\dagger$, além dos elementos S_{ii}, $S_{ii'}$. O estado espalhado será dado por

$$|\Psi_{ii'}\rangle = S_{ii}S_{i'i'}b_i^\dagger b_{i'}^\dagger|0\rangle + S_{ii'}S_{i'i}b_{i'}^\dagger b_i^\dagger|0\rangle. \tag{3.5}$$

4) quando as partículas com uma certa amplitude de probabilidade forem encontradas no guia 3 e no guia 4 respectivamente. Para isso necessitamos dos operadores de criação $b_j^\dagger$ e $b_j'^\dagger$, além dos elementos S_{ji}, $S_{j'i}$. Nesse estado, temos

$$|\Psi_{jj'}\rangle = S_{ij}S_{i'j'}b_j^\dagger b_{j'}^\dagger|0\rangle + S_{ij'}S_{i'j}b_{j'}^\dagger b_j^\dagger|0\rangle, \tag{3.6}$$

5) quando as partículas, com uma certa amplitude de probabilidade forem encontradas no guia i e no guia j. Para esse estado necessitamos dos operadores de criação $b_i^\dagger$ e $b_j^\dagger$, além dos elementos S_{ii}, S_{ij}. Portanto, o estado espalhado será dado por

$$|\Psi_{ij}\rangle = S_{ii}S_{i'j}b_i^\dagger b_j^\dagger|0\rangle + S_{ij}S_{i'i}b_j^\dagger b_i^\dagger|0\rangle. \tag{3.7}$$

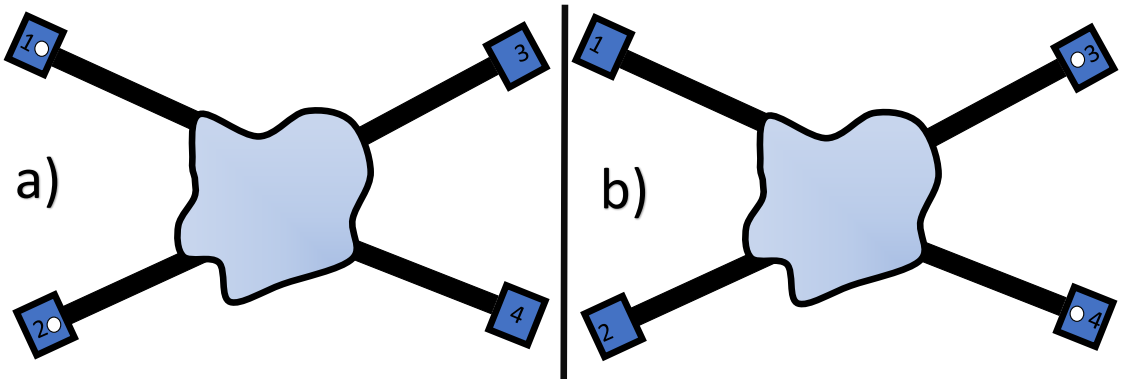

Figura 3.3: Esses são dois dos estados espalhados cujas partículas, após o espalhamento pelo ponto quântico, vão cada uma para um terminal. **a)** estado de reflexão total $|\Psi_{12}\rangle$ **b)** estado de transmissão total $|\Psi_{34}\rangle$.

A partir das equações de cada estado espalhado (3.3 - 3.7) podemos construir uma única equação referente ao estado total de saída do sistema após o espalhamento. Esse estado de saída será dado pela soma de cada estado discutido anteriormente. Para tal sistema temos que o estado total de saída é dado por

$$\begin{aligned} |\Psi_{\text{saída}}\rangle &= \sum_i |\Psi_{ii}\rangle + \frac{1}{2}\sum_{ij,i\neq j} |\Psi_{ij}\rangle = \sum_{i,j(i\leqslant j)} |\Psi_{ij}\rangle \\ &= |\Psi_{11}\rangle + |\Psi_{22}\rangle + |\Psi_{33}\rangle + |\Psi_{44}\rangle + |\Psi_{12}\rangle + |\Psi_{13}\rangle + |\Psi_{14}\rangle + |\Psi_{23}\rangle + |\Psi_{24}\rangle + |\Psi_{34}\rangle. \end{aligned} \tag{3.8}$$

É importante notar que o número total de partículas do sistema deve permanecer constante, ou seja, em cada estado de saída há sempre o mesmo número de partículas que existia

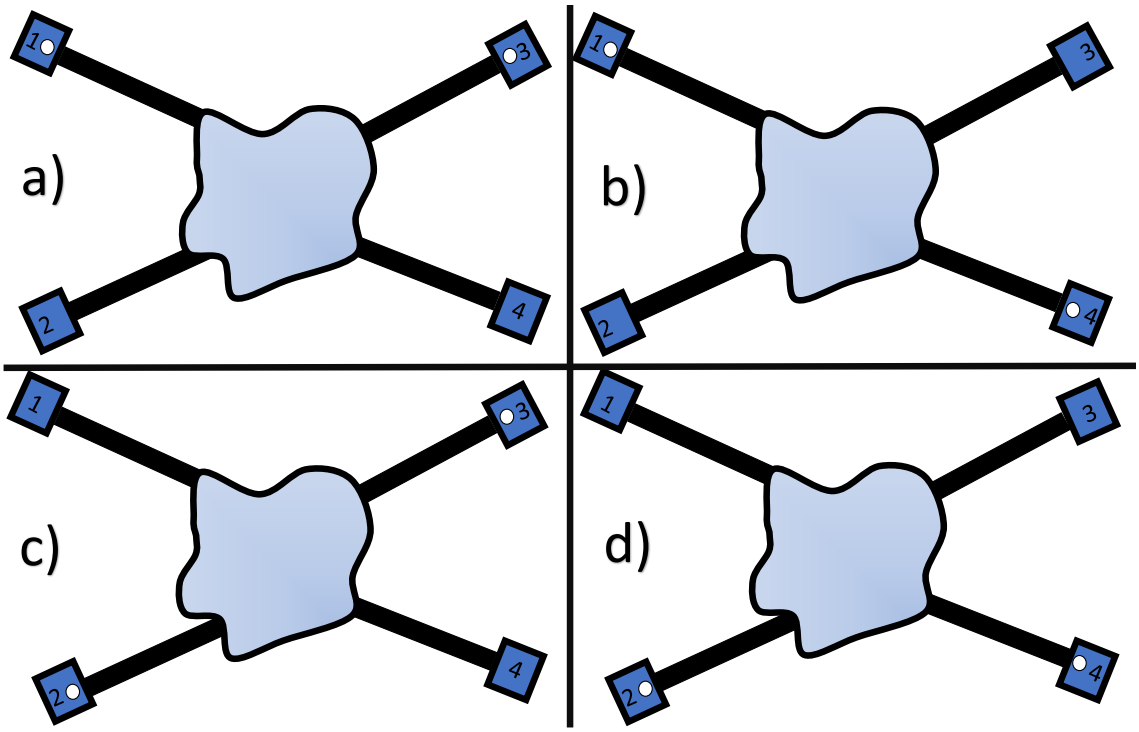

Figura 3.4: Nesta figura, temos os estados mistos que ocorrem quando há sempre uma partícula em um dos terminais **T.1** ou **T.2**, enquanto a outra estará no terminal **T.3** ou **T.4**. **a)** estado misto $|\Psi_{13}\rangle$. **b)** estado misto $|\Psi_{14}\rangle$. **c)** estado misto $|\Psi_{23}\rangle$. **d)** estado misto $|\Psi_{24}\rangle$.

incialmente, que são 2 partículas. Pretendemos encontrar as equações de correlação entre os canais de saída do sistema, a qual será calculada pela contribuição distinta de cada estado de saída. Por conseguinte iremos utilizar as equações (3.3 - 3.7) para o cálculo da correlação das partículas em cada canal posteriori ao espalhamento.

Utilizando as equações (3.3) e (3.4), podemos calcular qual a equação de correlação das partículas para os estados agrupados:

$$\langle\Psi_{ii}|\Psi_{ii}\rangle = \langle 0|b_i b_i S^*_{i'i} S^*_{ii} S_{ii} S_{i'i} b^\dagger_i b^\dagger_i|0\rangle = (1 \pm 1) \times |S_{ii}|^2 |S_{i'i}|^2, \tag{3.9}$$

$$\langle\Psi_{jj}|\Psi_{jj}\rangle = \langle 0|b_j b_j S^*_{i'j} S^*_{ij} S_{ij} S_{i'j} b^\dagger_j b^\dagger_j|0\rangle = (1 \pm 1) \times |S_{ij}|^2 |S_{i'j}|^2. \tag{3.10}$$

Notemos que, no fim das equações (3.9 - 3.10), há sempre o fator 2, fator este que se refere

ao resultado de como os operadores de criação $b_i^\dagger$ e aniquilação b_i atuam no estado de vácuo $|0\rangle$. Para tal, foi utilizada a estatística de férmions e bósons dos operadores de criação e aniquilação, visto que, intrinsecamente a álgebra desses operadores segue de maneira distinta, dependendo da natureza da partícula. Caso as partículas sejam bósons teremos a seguinte álgebra:

$$\left[b_i, b_i^\dagger\right] = b_i b_i^\dagger - b_i^\dagger b_i = 1 \therefore b_i b_i^\dagger = 1 + b_i^\dagger b_i; \quad \text{e} \quad \left[b_i^\dagger, b_j^\dagger\right] = 0 \therefore b_i^\dagger b_j^\dagger = b_j^\dagger b_i^\dagger, \tag{3.11}$$

enquanto, para os férmions, a álgebra que segue será dada por

$$\{b_i, b_i^\dagger\} = b_i b_i^\dagger + b_i^\dagger b_i = 1 \therefore b_i b_i^\dagger = 1 - b_i^\dagger b_i; \quad \text{e} \quad \{b_i^\dagger, b_j^\dagger\} = 0 \therefore b_i^\dagger b_j^\dagger = -b_j^\dagger b_i^\dagger. \tag{3.12}$$

Ao levar em conta a álgebra de bósons (3.11) e férmions (3.12), mostramos que (3.9 - 3.10) só valem para bósons, enquanto o resultado para férmions é 0.

Para continuar o cálculo das correlações iremos utilizar as equações (3.5) e (3.7), juntamente com a atuação dos operadores $(b_i^\dagger)$ no estado de vácuo $|0\rangle$.Baseando-nos nessas relações, temos que as equações de correlação para os estados antiagrupados de reflexão total, estados mistos e transmissão total são respectivamente

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_{ii'}|\Psi_{ii'}\rangle &= (\langle 0|b_{i'}b_i S^*_{i'i'}S^*_{ii} + \langle 0|b_i b_{i'} S^*_{ii'}S^*_{i'i}) \times (S_{ii}S_{i'i'}b_i^\dagger b_{i'}^\dagger|0\rangle + S_{i'i}S_{ii'}b_{i'}^\dagger b_i^\dagger|0\rangle \\
&= |S_{ii}|^2|S_{i'i'}|^2 + |S_{ii'}|^2|S_{i'i}|^2 \pm \left(S^*_{ii}S^*_{i'i'}S_{ii'}S_{i'i} + S_{ii}S_{i'i'}S^*_{ii'}S^*_{i'i}\right),
\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_{ij}|\Psi_{ij}\rangle &= \left(\langle 0|b_j b_i S^*_{ji'}S^*_{ii} + \langle 0|b_i b_j S^*_{ii'}S^*_{ji}\right) \times (S_{ii}S_{ji'}b_i^\dagger b_j^\dagger|0\rangle + S_{ji}S_{ii'}b_j^\dagger b_i^\dagger|0\rangle) \\
&= |S_{ii}|^2|S_{ji'}|^2 + |S_{ji}|^2|S_{ii'}|^2 \pm \left(S^*_{ii}S^*_{ji'}S_{ji}S_{ii'} + S_{ii}S_{ji'}S^*_{ii'}S^*_{ji}\right),
\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_{jj'}|\Psi_{jj'}\rangle &= \left(\langle 0|b_j b_{j'} S^*_{j'i'}S^*_{ji} + \langle 0|b_j b_{j'} S^*_{ji'}S^*_{j'i}\right) \times (S_{ji}S_{j'i'}b_j^\dagger b_{j'}^\dagger|0\rangle + S_{j'i}S_{ji'}b_{j'}^\dagger b_j^\dagger|0\rangle) \\
&= |S_{ji}|^2|S_{j'i'}|^2 + |S_{j'i}|^2|S_{ji'}|^2 \pm \left(S^*_{ji}S^*_{j'i'}S_{j'i}S_{ji'} + S_{j'i}S_{j'i'}S^*_{ji}S^*_{ji'}\right).
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Conforme a asserção anterior, a pequena diferença no sinal leva a conceitos físicos distintos. As equações (3.13 - 3.15) nos ratificam isso, em vista de que o símbolo $\pm$ foi utilizado, o sinal - do símbolo refere-se ao resultado do sistema caso as partículas forem férmions, e o sinal de + se as partículas em questão forem bósons.

Por didatismo, podemos explicitar todas as equações referidas com as álgebras também citadas, para mostrarmos todas as correlações das partículas após o espalhamento em cada canal de saída através das seguintes equações abaixo:

$$\langle \Psi_{11}|\Psi_{11}\rangle = 2 \times |S_{11}|^2|S_{21}|^2, \tag{3.16}$$

$$\langle \Psi_{22}|\Psi_{22}\rangle = 2 \times |S_{22}|^2|S_{12}|^2, \tag{3.17}$$

$$\langle \Psi_{33}|\Psi_{33}\rangle = 2 \times |S_{13}|^2|S_{23}|^2, \tag{3.18}$$

$$\langle \Psi_{44}|\Psi_{44}\rangle = 2 \times |S_{14}|^2|S_{24}|^2, \tag{3.19}$$

As equações anteriores medem a correlação das partículas quando ocorre um estado de agrupamento no mesmo terminal de saída.

Para situações em que as partículas se antiagrupam, temos as seguintes equações

$$\langle \Psi_{12}|\Psi_{12}\rangle = |S_{11}|^2|S_{22}|^2 + |S_{12}|^2|S_{21}|^2 \pm 1(S_{11}^* S_{22}^* S_{12} S_{21} + S_{11} S_{22} S_{12}^* S_{21}^*), \tag{3.20}$$

$$\langle \Psi_{13}|\Psi_{13}\rangle = |S_{11}|^2|S_{23}|^2 + |S_{13}|^2|S_{21}|^2 \pm 1(S_{11}^* S_{23}^* S_{13} S_{21} + S_{11} S_{23} S_{13}^* S_{21}^*), \tag{3.21}$$

$$\langle \Psi_{14}|\Psi_{14}\rangle = |S_{11}|^2|S_{24}|^2 + |S_{14}|^2|S_{21}|^2 \pm 1(S_{11}^* S_{24}^* S_{14} S_{21} + S_{11} S_{24} S_{14}^* S_{21}^*), \tag{3.22}$$

$$\langle \Psi_{23}|\Psi_{23}\rangle = |S_{22}|^2|S_{13}|^2 + |S_{23}|^2|S_{12}|^2 \pm 1(S_{22}^* S_{13}^* S_{23} S_{12} + S_{22} S_{13} S_{23}^* S_{12}^*), \tag{3.23}$$

$$\langle \Psi_{24}|\Psi_{24}\rangle = |S_{22}|^2|S_{14}|^2 + |S_{24}|^2|S_{12}|^2 \pm 1(S_{22}^* S_{14}^* S_{24} S_{12} + S_{22} S_{14} S_{24}^* S_{12}^*), \tag{3.24}$$

$$\langle \Psi_{34}|\Psi_{34}\rangle = |S_{13}|^2|S_{24}|^2 + |S_{14}|^2|S_{23}|^2 \pm 1\,(S_{13}^* S_{24}^* S_{14} S_{23} + S_{13} S_{24} S_{14}^* S_{23}^*)\,. \tag{3.25}$$

As equações (3.16) - (3.25) são utilizadas para calcular a correlação temporal das partículas que, em última instâcia, nos dá a informação do valor médio da ocupação de cada partícula

em um detector após o espalhamento. Portanto, o que temos de infomação para essas medições é qual a chance de encontrá-las no mesmo terminal (estado agrupados) ou em terminais distintos (estados antiagrupados). As equações (3.16) e (3.17) são utilizadas para calcular a correlação das partículas devido ao estado de agrupamento de reflexão, que ocorre no terminal 1 ou 2 respectivamente, enquanto as equações (3.18) e (3.19) são utilizadas para calcular o agrupamento de transmissão, que ocorre no terminal 3 ou 4. Esses dois fatos só ocorrerão se as partículas utilizadas no transporte forem bósons. Quando utilizarmos férmions, no transporte eletrônico, as equações (3.20 - 3.25) são as únicas a serem analisadas. Realçamos que, em primeiro momento, encontramos estados antiagrupados para bósons, e esse fato vai de encontro ao efeito HBT determinístico, discutido no tópico 1.5 do capítulo anterior. Nas próximas seções iremos utilizar essas equações de correlações aplicadas à técnica diagramática, para encontrar valores exatos das distintas correlações.

A generalidade das equações acima é o fenômeno mais interessante do ponto de vista físico, porque podemos medir a correlação entre os terminais de saída para sistemas cujas partículas são bosônicas ou fermiônicas. Além disso, essas equações também foram aplicadas em um sistema HBT determinístico, a fim de estudarmos a simetria de paridade e reversão temporal no efeito HBT [73, 74, 75]. Ao fim deste capítulo iremos conectar os nossos resultados com excelentes resultados experimentais obtidos em 2007 por T. Jelts *et al.* [76].

3.3 Concatenação entre as equações de correlação e a técnica diagramática

Nesta seção, iremos transformar as equações de correlação (3.16 - 3.25) em diagramas para, posteriormente, utilizar a técnica diagramática a fim de obtermos resultados analíticos e calcularmos a amplitude de probabilidade de encontrar cada partícula em um estado possível após o espalhamento. Visto que, para obtermos observáveis físicos em pontos quânticos, devemos obter a média de uma função polinomial, cujos elementos provém de uma matriz unitária. No caso específico de transporte eletrônico em pontos quânticos caóticos, essa

matriz unitária é representada pela matriz de espalhamento ($SS^{\dagger} = \mathbf{1}$). Para fazer a média sobre as funções polinomiais, a técnica diagramática proposta por Brouwer e Beenakker tornou-se uma ferramenta poderosa, com resultados expressivos e consolidados dentro do nossso grupo de pesquisa.

Para tal, precisamos transformar as equações de correlação em diagramas. Começaremos com os estados de agrupamento (3.16 - 3.19), em que cada elemento S_{ij} pode ser escrito em função da matriz S e de matrizes de projeção $\mathcal{P}_{ij}$. Aqui, a matriz de projeção é do tipo (4×4) e consiste na entrada do elemento 1 na linha i, e na coluna j. Portanto, temos, em nosso caso, um total de 16 projetores, indo desde $\mathcal{P}_{11}$ até $\mathcal{P}_{44}$. Esses projetores, atuando na matriz S, servem para selecionar os elementos responsáveis pelo observavél físico, cuja representação álgébrica faremos a seguir. Os projetores citados têm as seguintes propriedades:

$$\mathbf{Tr}\left[\mathcal{P}_{ij}\right] = \delta_{ij}; \quad \mathbf{Tr}\left[\mathcal{P}_{ij}\mathcal{P}_{kl}\right] = \delta_{il}\delta_{jk}. \tag{3.26}$$

O produto de dois projetores $\mathcal{P}_{ij}$, atuando à esquerda e à direita na matriz S, consegue selecionar qualquer elemento dessa matriz para ser diagonal de uma nova matriz. Desse modo, ao calcularmos o traço da nova matriz estaremos computando o traço do elemento selecionado. A álgebra que se segue é: $\mathcal{P}_{ij}S\mathcal{P}_{ki} = S_{jk}P_{ii}$, e portanto, Tr$[P_{ij}SP_{ki}]$=$S_{jk}$. Logo, $\mathcal{P}_{ij}S\mathcal{P}_{ki}$ seleciona o elemento S_{jk} da matriz S para a ser diagonal de uma nova matriz. Como simples exemplo, tomemos a seguinte operação: $\mathcal{P}_{11}S\mathcal{P}_{21}$

$$\mathcal{P}_{11}S\mathcal{P}_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

de tal forma que é equivalente calcular $\mathbf{Tr}[S_{12}] = \mathbf{Tr}[\mathcal{P}_{11}S\mathcal{P}_{21}]$.

Estamos reescrevendo os elementos S_{ij} em termos da matriz S, pois ela é a matriz mais importante de todo transporte eletrônico no sistema caótico. A matriz S conecta as amplitudes de probabilidade das funções de onda incidentes e emergentes. Toda a física do sistema está incorporada na matriz de espalhamento do sistema. Além do mais, é dessa forma, também, que Brouwer e Beenakker propuseram a técnica diagramática.

Começaremos a álgebra reescrevendo os estados de agrupamento de reflexão e transmissão (3.16-3.19) em termos dos projetores $\mathcal{P}_{ij}$ e das matrizes S e $S^\dagger$ (3.2). Para isso, iremos utilizar sistematicamente a álgebra e as propriedades dos projetores referidas nos exemplos acima. Lembramos que, ao atuarmos os projetores à direita e à esquerda da matriz de espalhamento, conseguimos selecionar qualquer elemento dessa matriz para ser diagonal. Portanto, podemos escrever as equações de correlação em função do traço do produto de matrizes de projeção com a matriz de espalhamento do sistema. Isso é importante, pois a matriz de espalhamento do sistema carrega consigo as informações físicas mais relevantes do problema. Além disso podemos simplificá-las utilizando a álgebra dos projetores e a propriedade cíclica do traço de matrizes, chegando, finalmente, às equações abaixo:

$$\begin{aligned}\langle\Psi_{11}|\Psi_{11}\rangle &= 2\times\mathbf{Tr}\left[\mathcal{P}_{11}S\mathcal{P}_{11}\mathcal{P}_{11}S^\dagger\mathcal{P}_{11}\mathcal{P}_{12}S\mathcal{P}_{11}\mathcal{P}_{11}S^\dagger\mathcal{P}_{21}\right]\\ &= 2\times\mathbf{Tr}\left[P_{21}SP_{11}S^\dagger P_{12}SP_{11}S^\dagger\right] \qquad (3.28)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle\Psi_{22}|\Psi_{22}\rangle &= 2\times\mathbf{Tr}\left[\mathcal{P}_{12}S\mathcal{P}_{21}\mathcal{P}_{12}S^\dagger\mathcal{P}_{21}\mathcal{P}_{11}S\mathcal{P}_{21}\mathcal{P}_{12}S^\dagger\mathcal{P}_{11}\right]\\ &= 2\times\mathbf{Tr}\left[P_{12}SP_{22}S^\dagger P_{21}SP_{22}S^\dagger\right] \qquad (3.29)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle\Psi_{33}|\Psi_{33}\rangle &= 2\times\mathbf{Tr}\left[\mathcal{P}_{11}S\mathcal{P}_{31}\mathcal{P}_{13}S^\dagger\mathcal{P}_{11}\mathcal{P}_{12}S\mathcal{P}_{31}\mathcal{P}_{13}S^\dagger\mathcal{P}_{21}\right]\\ &= 2\times\mathbf{Tr}\left[P_{21}SP_{33}S^\dagger P_{12}SP_{33}S^\dagger\right] \qquad (3.30)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle\Psi_{44}|\Psi_{44}\rangle &= 2\times\mathbf{Tr}\left[\mathcal{P}_{11}S\mathcal{P}_{41}\mathcal{P}_{14}S^\dagger\mathcal{P}_{11}\mathcal{P}_{12}S\mathcal{P}_{41}\mathcal{P}_{14}S^\dagger\mathcal{P}_{21}\right]\\ &= 2\times\mathbf{Tr}\left[P_{21}SP_{44}S^\dagger P_{12}SP_{44}S^\dagger\right]. \qquad (3.31)\end{aligned}$$

Para finalizarmos e termos todas as equações de correlação da maneira que precisamos para aplicar a técnica diagramática, faltam equações referentes aos estados de espalhamento (3.20 - 3.25). Para tal, após árduos trabalhos e de forma indutiva, chegamos ao seguinte algoritmo a fim de explicitar as equações dos estados de espalhamento como foi feito anteriormente

$$S_{jk}S^\dagger_{ml}S_{na}S^\dagger_{ib} = \mathbf{Tr}\left[\mathcal{P}_{ij}S\mathcal{P}_{kl}S^\dagger\mathcal{P}_{mn}S\mathcal{P}_{ab}S^\dagger\right]. \qquad (3.32)$$

Nota-se que, na equação acima, temos, do lado esquerdo, quatro quaisquer elementos das equações referentes a qualquer um do estado referenciado anteriormente e, do lado direito da equação, temos os projetores e a matriz de espalhamento como queremos. Portanto, utilizando o algorítimo (3.32) nas equações referentes aos estados de espalhamento, temos que elas podem ser reescritas, em função dos projetores e da matriz de espalhamento, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\langle\Psi_{12}|\Psi_{12}\rangle &= \mathbf{Tr}\left[P_{21}SP_{11}S^{\dagger}P_{12}SP_{22}S^{\dagger}\right] + \mathbf{Tr}\left[P_{21}SP_{22}S^{\dagger}P_{12}SP_{11}S^{\dagger}\right] \\
&\pm \left(\mathbf{Tr}\left[P_{11}S^{\dagger}P_{12}S^{\dagger}P_{21}SP_{22}S\right] + \mathbf{Tr}\left[P_{21}SP_{12}SP_{22}S^{\dagger}P_{11}S^{\dagger}\right]\right), \qquad (3.33)\\
\langle\Psi_{13}|\Psi_{13}\rangle &= \mathbf{Tr}\left[P_{21}SP_{11}S^{\dagger}P_{12}SP_{33}S^{\dagger}\right] + \mathbf{Tr}\left[P_{21}SP_{33}S^{\dagger}P_{12}SP_{11}S^{\dagger}\right] \\
&\pm \left(\mathbf{Tr}\left[P_{11}S^{\dagger}P_{13}S^{\dagger}P_{21}SP_{32}S\right] + \mathbf{Tr}\left[P_{21}SP_{12}SP_{33}S^{\dagger}P_{11}S^{\dagger}\right]\right), \qquad (3.34)\\
\langle\Psi_{14}|\Psi_{14}\rangle &= \mathbf{Tr}\left[P_{21}SP_{11}S^{\dagger}P_{12}SP_{44}S^{\dagger}\right] + \mathbf{Tr}\left[P_{21}SP_{44}S^{\dagger}P_{12}SP_{11}S^{\dagger}\right] \\
&\pm \left(\mathbf{Tr}\left[P_{11}S^{\dagger}P_{14}S^{\dagger}P_{21}SP_{42}S\right] + \mathbf{Tr}\left[P_{21}SP_{12}SP_{44}S^{\dagger}P_{11}S^{\dagger}\right]\right), \qquad (3.35)\\
\langle\Psi_{23}|\Psi_{23}\rangle &= \mathbf{Tr}\left[P_{12}SP_{22}S^{\dagger}P_{21}SP_{33}S^{\dagger}\right] + \mathbf{Tr}\left[P_{12}SP_{33}S^{\dagger}P_{21}SP_{22}S^{\dagger}\right] \\
&\pm \left(\mathbf{Tr}\left[P_{22}S^{\dagger}P_{23}S^{\dagger}P_{12}SP_{31}S\right] + \mathbf{Tr}\left[P_{12}SP_{21}SP_{33}S^{\dagger}P_{22}S^{\dagger}\right]\right), \qquad (3.36)\\
\langle\Psi_{24}|\Psi_{24}\rangle &= \mathbf{Tr}\left[P_{12}SP_{22}S^{\dagger}P_{21}SP_{44}S^{\dagger}\right] + \mathbf{Tr}\left[P_{12}SP_{44}S^{\dagger}P_{21}SP_{22}S^{\dagger}\right] \\
&\pm \left(\mathbf{Tr}\left[P_{22}S^{\dagger}P_{24}S^{\dagger}P_{12}SP_{41}S\right] + \mathbf{Tr}\left[P_{12}SP_{21}SP_{44}S^{\dagger}P_{22}S^{\dagger}\right]\right), \qquad (3.37)\\
\langle\Psi_{34}|\Psi_{34}\rangle &= \mathbf{Tr}\left[P_{21}SP_{33}S^{\dagger}P_{12}SP_{44}S^{\dagger}\right] + \mathbf{Tr}\left[P_{21}SP_{44}S^{\dagger}P_{12}SP_{33}S^{\dagger}\right] \\
&\pm \left(\mathbf{Tr}\left[P_{33}S^{\dagger}P_{14}S^{\dagger}P_{21}SP_{42}S\right] + \mathbf{Tr}\left[P_{21}SP_{32}SP_{44}S^{\dagger}P_{13}S^{\dagger}\right]\right). \qquad (3.38)
\end{aligned}$$

De forma resumida, conseguimos neste breve tópico, relacionar as equações dos estados após o espalhamento (3.16- 3.25) com os projetores $\mathcal{P}_{ij}$ e as matrizes S e $S^{\dagger}$. Para tal, utilizamos de forma indutiva o algoritmo (3.32) e finalmente conseguimos reescrevê-las como (3.28- 3.38). Dessa forma, fomos capazes de utilizar a técnica diagramática para obtermos resultados analíticos sobre a medida de correlação das partículas e calculamos a amplitude de probabilidade de encontra-lás após o espalhamento.

3.4 Cálculo das equações de correlação para um bilhar de Schrödiger

Como dito no capítulo anterior, os bilhares que estudamos nesta tese dependem de qual função de onda pode ser para os elétrons. O primeiro bilhar que iremos desenvolver para que possamos mostrar seus resultados é o bilhar de Schrödinger. Nele, a função de onda do elétron é dada pela equação de Schrödinger.

Considere-se que o ponto quântico caótico mostrado na figura (3.1) seja um dispositivo eletrônico no qual o ensemble de matrizes aleatórias que o descreve fisicamente é o ensemble de Wigner-Dyson. Nesse regime, não há simetrias subjacentes devido a sua estrutura, ou seja, não há simetrias emergentes devido a sua composição. Portanto, as únicas simetrias físicas presentes são as simetrias devido aos mecanismos externos, como, por exemplo, a simetria de reversão temporal, que depende de um campo magnético externo. Além dela, pode haver também a simetria de rotação de spin, que depende de uma forte interação spin-órbital no sistema. Note que essas duas simetrias são simetrias externas ao dispositivo.

Além de o sistema ser formado por heterojunção de metais, não existem barreiras no transporte. Em vista disso, o contato dos guias com os terminais e o contato dos terminais com o ponto quântico são ideais. Com base nisso, a matriz de espalhamento S é unitária ($SS^{\dagger} = \mathbf{I}$) e distribuída de acordo com o ensemble circular, podendo ser circular unitário, circular ortogonal ou circular simplético de acordo com a teoria de matrizes aleatórias. Com isso, Brower e Beanakker produziram a técnica diagramática. Com ela pode-se calcular a média das funções polinomiais compostas pelos elementos de uma matriz unitária, fato esse que faz com que possamos efetuar o cálculo das equações que medem a correlação das partículas nas seções anteriores (3.28-3.38).

De forma sucinta, mostraremos a realização do cálculo de correlação seguindo três passsos:

i) Em cada regime distinto, fazemos a decomposição da matriz de espalhamento de acordo com a tabela de Cartan referida no capítulo anterior. Em especial, para a classe de

Wigner-Dyson iremos decompor a matriz de espalhamento em termos de matrizes unitárias e substituiremos essa decomposição nas equações de correlação, ou seja, em

$$S = U \quad \text{e} \quad S^{\dagger} = U^{\dagger}; \tag{3.39}$$

ii) Transformaremos as equações de correlação em diagramas utilizando os símbolos referidos na figura (3.5). Vale realçar que nenhuma informação das equações de correlação pode ser suprimida nessas transformações;

iii) Por fim, aplicaremos as regras da técnica diagramática para obter os resultados analíticos das equações de correlação do sistema. Para informações mais detalhadas sobre a técnica e aplicação em outros sistemas, o leitor pode ver o artigo original [11] além dos artigos e teses do nosso grupo [12, 19, 20, 29, 31, 45].

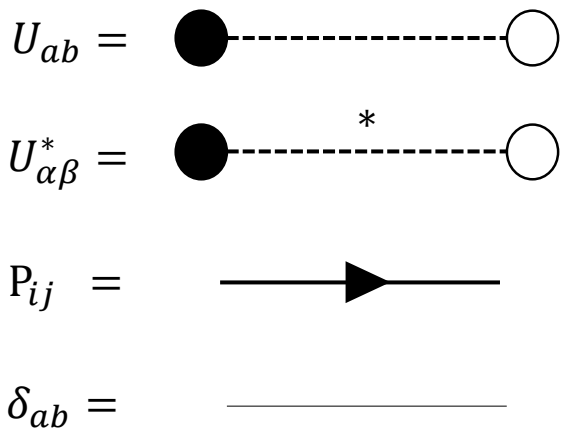

Figura 3.5: A primeira imagem da figura representa a matriz unitária U_{ab} enquanto a segunda representa a sua matriz complexa U^{*}_{ab}. Os pontos pretos caracterizam os índices a e α, enquanto os pontos brancos caracterizam os índices b e β. É importante ratificar que, dependendo da simetria do sistema, a matriz U_{ab} poderá ser real ou complexa. A terceira imagem da figura representa a matriz de projeção $\mathcal{P}_{ij}$, que seleciona os elementos responsáveis pelo transporte de partículas. No que tange à última, essa se refere à delta de Kronecker que será utilizada para calcular as médias das equações de correlação.

Após fazermos a decomposição da matriz de espalhamento como mencionado na alínea (i) acima, percebemos que as equações de correlação (3.28 - 3.38) ficam da seguinte forma

$$\langle \Psi_{11}|\Psi_{11}\rangle = 2 \times \mathbf{Tr}\left[P_{21}UP_{11}U^{\dagger}P_{12}UP_{11}U^{\dagger}\right] \tag{3.40}$$

$$\langle \Psi_{22}|\Psi_{22}\rangle = 2 \times \mathbf{Tr}\left[P_{12}UP_{22}U^{\dagger}P_{21}UP_{22}U^{\dagger}\right] \tag{3.41}$$

$$\langle \Psi_{33}|\Psi_{33}\rangle = 2 \times \mathbf{Tr}\left[P_{21}UP_{33}U^{\dagger}P_{12}UP_{33}U^{\dagger}\right] \tag{3.42}$$

$$\langle \Psi_{44}|\Psi_{44}\rangle = 2 \times \mathbf{Tr}\left[P_{21}UP_{44}U^{\dagger}P_{12}UP_{44}U^{\dagger}\right]. \tag{3.43}$$

$$\begin{aligned}\langle \Psi_{12}|\Psi_{12}\rangle &= \mathbf{Tr}\left[P_{21}UP_{11}U^{\dagger}P_{12}UP_{22}U^{\dagger}\right] + \mathbf{Tr}\left[P_{21}UP_{22}U^{\dagger}P_{12}UP_{11}U^{\dagger}\right] \\ &\pm \left(\mathbf{Tr}\left[P_{11}U^{\dagger}P_{12}U^{\dagger}P_{21}UP_{22}U\right] + \mathbf{Tr}\left[P_{21}UP_{12}UP_{22}U^{\dagger}P_{11}U^{\dagger}\right]\right),\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned}\langle \Psi_{1j}|\Psi_{1j}\rangle &= \mathbf{Tr}\left[P_{21}UP_{11}U^{\dagger}P_{12}UP_{jj}U^{\dagger}\right] + \mathbf{Tr}\left[P_{21}UP_{jj}U^{\dagger}P_{12}UP_{11}U^{\dagger}\right] \\ &\pm \mathbf{Tr}\left[P_{11}U^{\dagger}P_{1j}U^{\dagger}P_{21}UP_{j2}U\right] + \left(\mathbf{Tr}\left[P_{21}UP_{12}UP_{jj}U^{\dagger}P_{11}U^{\dagger}\right]\right),\end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned}\langle \Psi_{2j}|\Psi_{2j}\rangle &= \mathbf{Tr}\left[P_{12}UP_{22}U^{\dagger}P_{21}UP_{jj}U^{\dagger}\right] + \mathbf{Tr}\left[P_{12}UP_{jj}U^{\dagger}P_{21}UP_{22}U^{\dagger}\right] \\ &\pm \left(\mathbf{Tr}\left[P_{22}U^{\dagger}P_{2j}U^{\dagger}P_{12}UP_{j1}U\right] + \mathbf{Tr}\left[P_{12}UP_{21}UP_{jj}U^{\dagger}P_{22}U^{\dagger}\right]\right),\end{aligned} \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned}\langle \Psi_{34}|\Psi_{34}\rangle &= \mathbf{Tr}\left[P_{21}UP_{33}U^{\dagger}P_{12}UP_{44}U^{\dagger}\right] + \mathbf{Tr}\left[P_{21}UP_{44}U^{\dagger}P_{12}UP_{33}U^{\dagger}\right] \\ &\pm \left(\mathbf{Tr}\left[P_{33}U^{\dagger}P_{14}U^{\dagger}P_{21}UP_{42}U\right] + \mathbf{Tr}\left[P_{21}UP_{32}UP_{44}U^{\dagger}P_{13}U^{\dagger}\right]\right).\end{aligned} \tag{3.47}$$

Essas equações seguem idênticas às anteriores tomando $U \leftrightarrow S$.

Aqui, foram compactados os estados mistos em $\langle \Psi_{1j}|\Psi_{1j}\rangle$ e $\langle \Psi_{2j}|\Psi_{2j}\rangle$, sabendo que, ao substituir $j = 3, 4$, temos os mesmos estados mistos referentes às equações (3.34 - 3.37) anteriormente mostradas. Finalmente, temos as equações de correlação em função de matrizes do grupo unitário e, assim, podemos transformá-las em diagramas para efetuar o cálculo diagramático.

A primeira classe de ensemble apresentada aqui é a classe de Wigner-Dyson. Nela, emergem 3 tipos diferentes de ensemble, e cada um descreve um sistema físico de interesse distinto. Como supracitado, a matriz de espalhamento pode ser decomposta em termos de matrizes unitárias U seguindo a tabela de Cartan, e, através da decomposição da matriz S, junto com as imagens da figura (3.6), podemos transformar as equações (3.40 - 3.47) em diagramas como proposto por Brouwer e Beanakker, conforme são mostrados nas figuras (3.6 - 3.10).

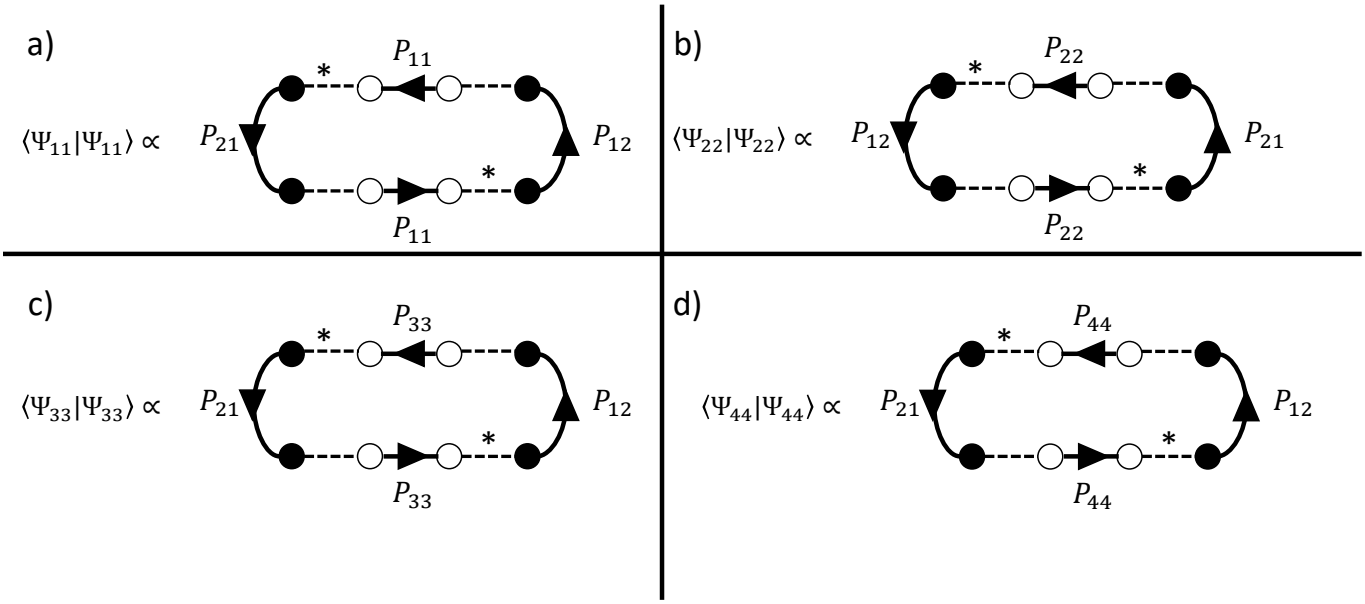

Figura 3.6: Os diagramas correspondem às equações referentes aos estados de agrupamento em forma de diagramas. As figuras correspondem respectivamente a) à equação (3.40) referente ao estado de agrupamento de reflexão no terminal **T.1**, b) à equação (3.41) referente ao estado de agrupamento de reflexão no terminal **T.2**, c) à equação (3.42) referente ao estado de agrupamento de transmissão no terminal **T.3** e d) à equação (3.43) referente ao estado de agrupamento de transmissão no terminal **T.4**.

Vale ressaltar que cada termo das equações referentes aos estados agrupados (3.40 - 3.43) está exposto em forma de diagrama na figura (3.6). As equações referentes aos estados de espalhamento estão representadas na forma de diagramas conforme as figuras (3.7 - 3.10).

Ratificamos que nenhum termo das equações pode está suprimido dos diagramas de tal forma que, de posse dos diagramas elencados nas figuras (3.6 - 3.10), pode-se utilizar a

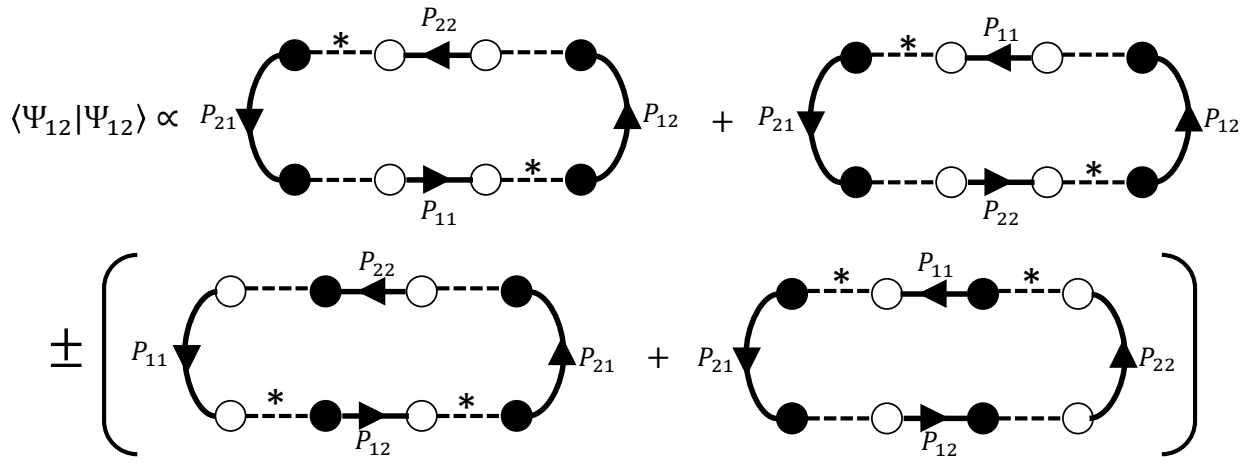

Figura 3.7: A figura contém os diagramas que representam a equação (3.44) e se refere ao estado de espalhamento de reflexão total em forma de diagrama.

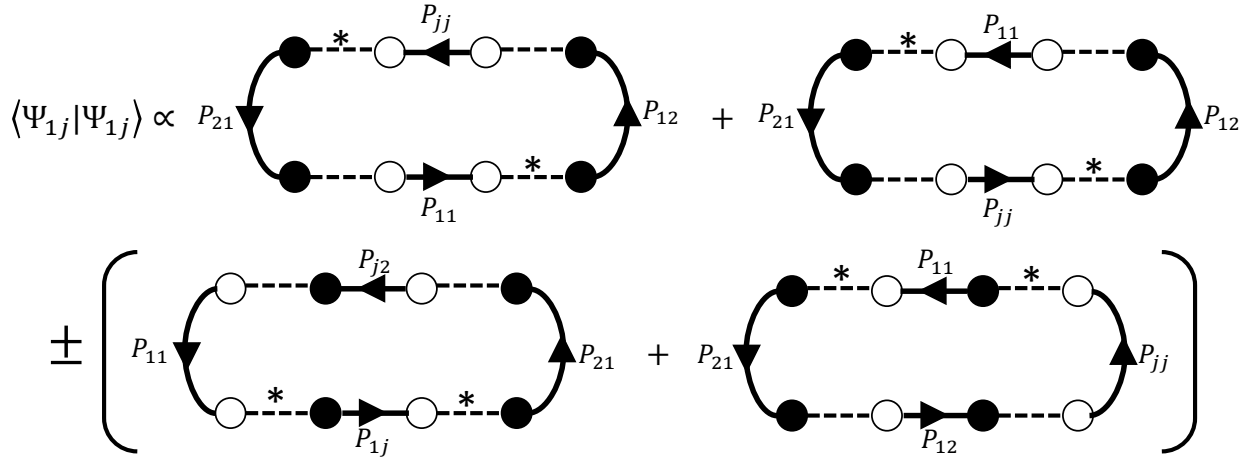

Figura 3.8: A figura contém os diagramas que representam a equação (3.45) e se refere ao estado misto no terminal **T.1** em forma de diagrama.

técnica diagramática referida para calcular os observavéis em questão. Além disso, deixamos explícito o cálculo referente a cada correlação utilizando a técnica diagramática (Apêndice A desta tese). Na seção a seguir, iremos discutir os resultados extraídos do cálculo utilizando a técnica diagramática.

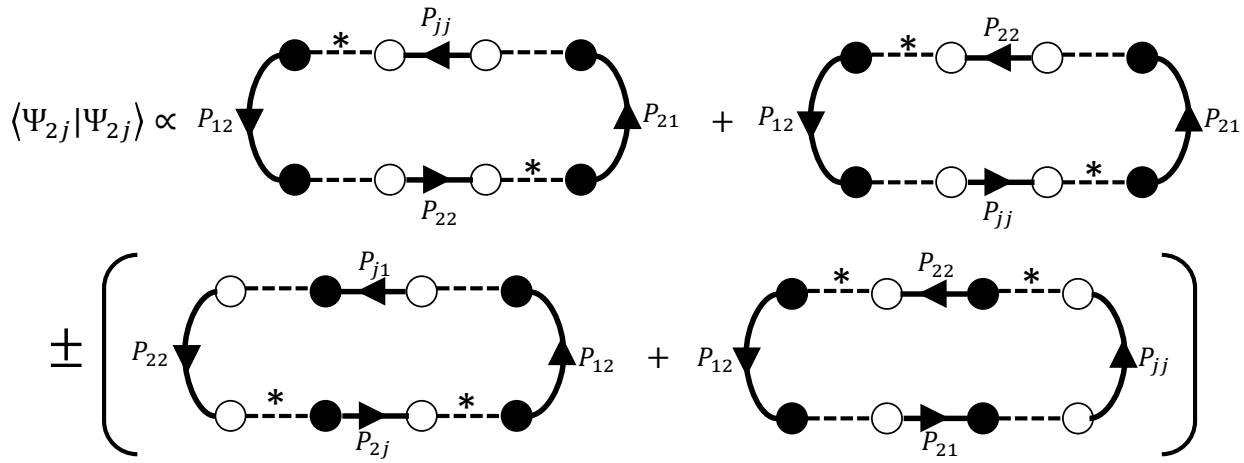

Figura 3.9: A figura contém os diagramas que representam a equação (3.46) e se refere ao estado misto no terminal **T.2** em forma de diagrama.

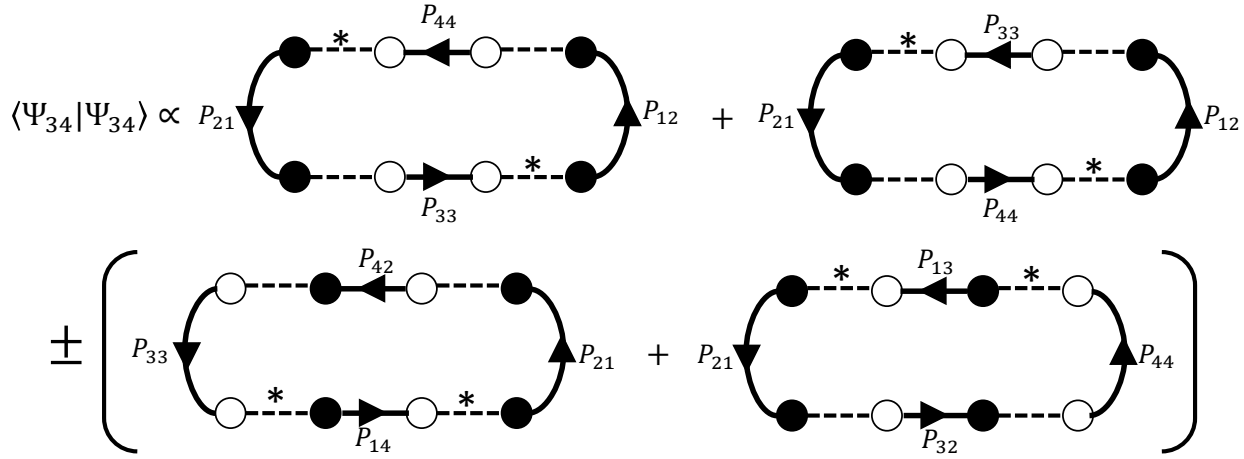

Figura 3.10: A figura contém os diagramas que representam a equação (3.47) e se refere ao estado de espalhamento de transmissão total em forma de diagrama.

Vale destacar que, neste capítulo, estaremos calculando as equações de correlação para a classe de Wigner-Dyson de acordo com a teoria de matrizes aleatórias. O ensemble que melhor descreve o sistema é o ensemble gaussiano unitárico (GUE), quando há campo magnético externo, e o ensemble gaussiano ortogonal (GOE), quando não há campo magnético. Juntos,

esses ensembles compõem toda a estatística do sistema através da matriz de espalhamento S, que contém todas as informações relevantes do transporte.

Em nosso sistema, no ensemble de Wigner-Dyson, estaremos interessados em comparar os resultados das equações de correlação entre os dois ensembles gaussianos GUE rotulado pelo índice $\beta = 2$ e GOE rotulado pelo índice $\beta = 1$. A diferença entre os dois é a aplicação de um campo magnético externo perpendicular ao ponto quântico, de tal forma que esse campo é responsável pela quebra de simetria de reversão temporal. O regime com SRT quebrada é descrito pelo GUE. Caso a simetria de reversão temporal seja preservada, o regime é descrito pelo GOE. Além desses dois ensembles, há também o ensemble gaussiano simplético (GSE $\beta = 4$), que é utilizado em sistemas que envolvem interação spin-órbita. Essa situação não foi abordada em nosso problema tendo em vista de que, por construção, ambas as partículas têm o mesmo grau de spin.

Os nossos resultados estão em forma de tabelas. A primeira tabela (3.1) mostra o resultado das correlações das partículas (sejam elas férmions ou bósons). Nelas, estão presentes as amplitudes de correlações para o sistema analisado. A primeira coluna se refere aos estados, já a segunda e a terceira colunas são os resultados das correlações para um sistema cujas partículas são férmions e bósons, respectivamente. Podemos evidenciar que a 2° e 3° colunas estão repartidas em três partes: a primeira parte se refere aos resultados encontrados quando o sistema for descrito pelo GUE; já a segunda, quando for descrito pelo GOE; e a terceira se refere a um ganho ($\uparrow$) ou a uma queda ($\downarrow$) na medida da correlação.

O primeiro resultado que podemos extrair dessa tabela é que para a situação cujo campo magnético externo esteja ligado ($\mathbf{B} \neq 0$), havendo assim quebra da simetria de reversão temporal, a correlação das partículas é igual e há a mesma amplitude de probabilidade de encontrá-las após o espalhamento seja em qual for o estado. A probabilidade de um estado acessível do sistema ser detectado é dada por

$$\langle \Psi_{ij} | \Psi_{ij} \rangle = \frac{1}{\sum_{estados}}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4. \tag{3.48}$$

O que ocorre é que, nesse regime metálico com o campo magnético externo ligado, há

Correlações	Férmions			Bósons		
	B$\neq 0$	**B** $= 0$	$\updownarrow$	**B**$\neq 0$	**B** $= 0$	$\updownarrow$
$\langle\Psi_{11}\|\Psi_{11}\rangle$	0	0	0	1/10	4/35	$\uparrow$
$\langle\Psi_{22}\|\Psi_{22}\rangle$	0	0	0	1/10	4/35	$\uparrow$
$\langle\Psi_{33}\|\Psi_{33}\rangle$	0	0	0	1/10	1/14	$\downarrow$
$\langle\Psi_{44}\|\Psi_{44}\rangle$	0	0	0	1/10	1/14	$\downarrow$
$\langle\Psi_{12}\|\Psi_{12}\rangle$	1/6	3/10	$\uparrow$	1/10	13/70	$\uparrow$
$\langle\Psi_{13}\|\Psi_{13}\rangle$ ou $\langle\Psi_{14}\|\Psi_{14}\rangle$	1/6	3/20	$\downarrow$	1/10	13/140	$\downarrow$
$\langle\Psi_{23}\|\Psi_{23}\rangle$ ou $\langle\Psi_{24}\|\Psi_{24}\rangle$	1/6	3/20	$\downarrow$	1/10	13/140	$\downarrow$
$\langle\Psi_{34}\|\Psi_{34}\rangle$	1/6	1/10	$\downarrow$	1/10	1/14	$\downarrow$

Tabela 3.1: Amplitudes das correlações das partículas nos terminais de saída. Essas correlações são para o sistema no regime metálico, e as medidas das correlações são para férmions e bósons com campo magnético (GUE) e sem campo magnético (GOE) respectivamente.

não só a quebra de simetria de reversão temporal, como também existe uma quebra na interferência das partículas, de tal forma que esse regime se aproxima do que chamamos de regime semiclássico.

Esse regime é aquele cujos efeitos quânticos são fracos ou inexistentes, portanto, o resultado se aproxima do resultado clássico esperado, ou seja, nesse caso, a probabilidade de encontrar um estado acessível do sistema é dada por uma estatística clássica e, consequentemente, pela equação referida acima (3.48). Como para o sistema fermiônico existem 6 estados acessíveis, a probabilidade de encontrar qualquer um deles é 1/6 e, se levarmos em conta o agrupamento no mesmo terminal, estaremos mudando a natureza da partícula de férmions para bósons e a quantidade de estados acessíveis aumenta de 6 para 10. Desse modo, no regime semiclássico, a probabilidade de se medir qualquer um dos estados acessíveis é 1/10, como podemos ver na tabela (3.1).

Por outro lado, quando é inexistente o campo magnético externo, a interferência quântica se sobrepõe ao regime semiclássico e quebra essa igualdade na medição das correlações de

tal forma que a amplitude de probabilidade de detectar as partículas não é a mesma independentemente dos estados que são medidos. Destarte, não podemos antever muita coisa sobre o resultado esperado (apenas calculando de fato). Ao fazê-lo, encontramos os resultados listados na tabela (3.1), e comparando com o resultado encontrado para o sistema com campo magnético, percebemos que nem sempre aumenta a medida da correlação e nem sempre diminui essa medição. Assim, conseguimos mostrar na 3ª parte da 2ª e 3ª colunas que ora a medida da correlação aumenta, ora ela diminui, fato este devido aos efeitos de interferência entre as partículas do sistema.

Esse ganho ou perda da correlação do sistema é comumente chamado de ruído. Como discutido anteriormente, esse ruído vem da discretização das partículas. Com os resultados encontrados das correlações, podemos medir o quanto o termo de interferência se sobrepõe ao termo clássico do sistema. Para isso, iremos calcular a medida da localização fraca, ou seja, o quanto (em porcentagem) o termo de interferência do sistema é responsável pela medida total da correlação do sistema. Isto é, dado que você meça a correlação do sistema, o quanto dessa medição vem da interferência do sistema? Visto que uma medida da correlação $\langle\Psi_{ij}|\Psi_{ij}\rangle^{\mathbf{B}=0}$ pode ser composta por dois termos:

$$\langle\Psi_{ij}|\Psi_{ij}\rangle^{\mathbf{B}=0} = \langle\Psi_{ij}|\Psi_{ij}\rangle^{\text{clássico}} + \langle\Psi_{ij}|\Psi_{ij}\rangle^{\text{interferência}}, \tag{3.49}$$

enquanto, para $\langle\Psi_{ij}|\Psi_{ij}\rangle^{\mathbf{B}\neq0}$ temos apenas o termo clássico, pois o campo magnético destrói essa interferência da partículas, nos levando a

$$\langle\Psi_{ij}|\Psi_{ij}\rangle^{\mathbf{B}\neq0} = \langle\Psi_{ij}|\Psi_{ij}\rangle^{\text{clássico}}. \tag{3.50}$$

Destarte, iremos calcular a grandeza que em certa medida quantifica esse ganho ou perda da medida de correlação devido à interferência das partículas no espalhamento. A localização (wl) do sistema será calculada em porcentagem de acordo com a seguinte equação:

$$wl = \frac{\langle\Psi_{ij}|\Psi_{ij}\rangle^{\mathbf{B}=0} - \langle\Psi_{ij}|\Psi_{ij}\rangle^{\mathbf{B}\neq0}}{\langle\Psi_{ij}|\Psi_{ij}\rangle^{\mathbf{B}=0}} \times 100. \tag{3.51}$$

Como às vezes há aumento e diminuição na medida da correlação, iremos rotular esse aumento com o sinal de $+$ e essa diminuição com sinal de $-$, de tal forma que compreendamos o que significa uma porcentagem negativa.

Correlações	Férmions			Bósons		
	B$\neq$ 0	**B = 0**	*wl*	**B$\neq$ 0**	**B = 0**	*wl*
$\langle\Psi_{11}\|\Psi_{11}\rangle$	0	0	0	1/10	4/35	+12.50%
$\langle\Psi_{22}\|\Psi_{22}\rangle$	0	0	0	1/10	4/35	+12.50%
$\langle\Psi_{33}\|\Psi_{33}\rangle$	0	0	0	1/10	1/14	-40.00%
$\langle\Psi_{44}\|\Psi_{44}\rangle$	0	0	0	1/10	1/14	-40.00%
$\langle\Psi_{12}\|\Psi_{12}\rangle$	1/6	3/10	+44.44%	1/10	13/70	+46.15%
$\langle\Psi_{13}\|\Psi_{13}\rangle$ ou $\langle\Psi_{14}\|\Psi_{14}\rangle$	1/6	3/20	-11.11%	1/10	13/140	-7.70%
$\langle\Psi_{23}\|\Psi_{23}\rangle\|\langle\Psi_{24}\|\Psi_{24}\rangle$	1/6	3/20	-11.11%	1/10	13/140	-7.70%
$\langle\Psi_{34}\|\Psi_{34}\rangle$	1/6	1/10	-66.66%	1/10	1/14	-40.00%

Tabela 3.2: Amplitude dos termos de localização fraca (*wl*) para os sistemas fermiônico e bosônico respectivamente.

A tabela (3.2) mostra a amplitude do termo de localização referente ao sistema HBT caótico, cujas partículas podem ser férmions ou bósons. Nesse resultado geral, é importante notar que, apesar de haver oscilação da contribuição do termo de interferência, que vai de um pouco mais de 7% até da ordem 67%, mostra o quanto o termo de interferência é crucial para a medida. O termo de interferência é tão grande que chega a ser da ordem da própria medida. Além disso, há grande dificuldade na manipulação em escala nanométrica, sendo assim, as medidas de correlação da ordem de 7% não devem ser desprezadas. Dessa forma, constatamos que o efeito de interferência contribui significativamente para a medição da correlação das partículas no Efeito Habury-Brown Twiss Caótico em pontos quânticos.

Por fim, temos a tabela (3.3), revelando que nosso resultado tem uma forte conexão com experimentos recentes nessa área, vide T. Jeltes *et al.*Em [76], os autores fizeram experimentos comparando o comprimento de correlação entre bósons e férmions no efeito HBT. Essa medida foi feita sob controle e de duas maneiras distintas: nesse experimento, foi detectado que o comprimento de correlação para férmions é 33% maior que o comprimento de correlação para bósons, assim, foram detectados comprimentos de correlação de 0.75 ± 0.07 mm e 0.56 ± 0.08 mm para férmions e bósons, respectivamente.

Correlações	**B$\neq$ 0**	**B = 0**
$\langle\Psi_{12}\|\Psi_{12}\rangle$	66.67%	61.53%
$\langle\Psi_{13}\|\Psi_{13}\rangle$ ou $\langle\Psi_{14}\|\Psi_{14}\rangle$	66.67%	61.53%
$\langle\Psi_{23}\|\Psi_{23}\rangle$ ou $\langle\Psi_{24}\|\Psi_{24}\rangle$	66.67%	61.53%
$\langle\Psi_{34}\|\Psi_{34}\rangle$	66.67%	40.00%

Tabela 3.3: Tabela comparando em % a medida de correlação do sistema no regime metálico utilizando férmions em comparação à medida de correlação do sistema utilizando bósons.

Contudo, levando em conta a barra de erro do referido artigo, o valor do comprimento de correlação detectado pelos férmions oscila entre 0.68 e 0.82. Por outro lado, o comprimento de correlação de bósons varia entre 0.48 à 0.64. Portanto, é possível inferir que o resultado de 33% pode ser interpretado como um valor médio, de tal forma que o comprimento de correlação oscila entre um máximo e um mínimo. Fazendo as devidas comparações com os nossos resultados nas tabelas (3.1 - 3.3), inferimos que o valor de correlação máxima e mínima de férmions é da ordem de 71% e 6.25% comparado com o comprimento de correlação dos bósons. Todavia, um comportamento que foi medido em todos os experimentos é que o comprimento de correlação de férmions sempre é maior que o comprimento de bósons, que também é mostrado na nossa última tabela (3.3).

3.5 Cálculo das equações de correlação para um bilhar de Dirac

Diferentemente da seção anterior, nesta seção iremos desenvolver e mostrar os resultados aplicados ao bilhar de Dirac, assim chamado porquea função de onda da partícula nesse bilhar é dada pela equação de Dirac. Uma realização física desse bilhar são os pontos quânticos de grafeno [27]. Por conseguinte, nesta seção o ponto quântico caótico mostrado na figura (3.1) é um dispositivo eletrônico que tem em sua estrutura fundamental a simetria de sub-rede; isso significa que, diferentemente do regime metálico, existem simetrias subjacentes

devido a sua composição. Portanto, além das simetrias físicas presentes como a simetria de reversão temporal e simetria de rotação de spin, há intrinssecamente a simetria quiral, simetria preponderante em uma estrutura de grafeno.

Continuaremos no transporte modelando um transporte sem barreira, de tal forma que S continua sendo uma matriz unitária ($SS^{\dagger} = \mathbf{I}$) e distribuída de acordo com o ensemble circular. Porém, devido à quiralidade do grafeno, as três classes de simetria de Wigner-Dyson não satisfazem a física do problema, pois nenhuma delas abarca a simetria preponderante de uma estrutura de grafeno, que é a Simetria de Sub-Rede (SLS).

Dessa forma, incrementando a teoria de matrizes aleatórias, Verbaarschot e Shuryak ampliaram seu alcance introduzindo mais três novas classes de ensembles: o ensemble circular unitário quiral (chECU), o ensemble circular ortogonal quiral (chECO) e o ensemble circular simplético quiral (chECS). Percebamos que há uma conexão entre os ensembles analisados na seção anterior (ECU, ECO e ECS) e os ensembles desta seção. Por exemplo, a conexão entre o chECU e o ECU é que ambos modelam sistemas físicos cuja simetria de reversão temporal é quebrada devido a um campo magnético externo ($\mathbf{B} \neq 0$). Por outro lado, a relação entre o chECO e o ECO é que os dois ensembles modelam sistemas cujo campo magnético é nulo ($\mathbf{B} = 0$). Além deles, temos novamente os ensembles ECS e chECS que modelam sistemas nos quais existe a simetria de rotação de spin, e assim como na seção anterior, nesta seção não iremos analisar essa simetria.

Devido a quiralidade do sistema, a matriz de espalhamento S além da unitariedade ($SS^{\dagger} = \mathbf{I}$ satisfaz a seguinte relação

$$S = \Sigma_z S^{\dagger} \Sigma_z \tag{3.52}$$

e será decomposta de acordo com a tabela de Cartan da seguinte maneira:

$$S = \Sigma_z U^{\dagger} \Sigma_z U \quad \text{e} \quad S^{\dagger} = U^{\dagger} \Sigma_z U \Sigma_z, \tag{3.53}$$

em que Σ_z é a uma das matrizes de Dirac dada por

$$\Sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{3.54}$$

Após fazer a decomposição da matriz de espalhamento como mencionado na equação acima, e substituir essa decomposição nas equações de correlação (3.28 - 3.38), podemos verificar que elas se modificam da seguinte forma:

$$\langle \Psi_{11}|\Psi_{11}\rangle = 2 \times \mathbf{Tr}\left[P_{21}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{11}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{12}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{11}U^{\dagger}\Sigma_z U\right] \tag{3.55}$$

$$\langle \Psi_{22}|\Psi_{22}\rangle = 2 \times \mathbf{Tr}\left[P_{12}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{22}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{21}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{22}U^{\dagger}\Sigma_z U\right] \tag{3.56}$$

$$\langle \Psi_{33}|\Psi_{33}\rangle = 2 \times \mathbf{Tr}\left[P_{21}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{33}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{12}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{33}U^{\dagger}\Sigma_z U\right] \tag{3.57}$$

$$\langle \Psi_{44}|\Psi_{44}\rangle = 2 \times \mathbf{Tr}\left[P_{21}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{44}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{12}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{44}U^{\dagger}\Sigma_z U\right]. \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{12}|\Psi_{12}\rangle &= \mathbf{Tr}\left[P_{21}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{11}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{12}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{22}U^{\dagger}\Sigma_z U\right] \\ &+ \mathbf{Tr}\left[P_{21}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{22}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{12}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{11}U^{\dagger}\Sigma_z U\right] \\ &\pm (\mathbf{Tr}\left[P_{11}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{12}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{21}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{22}U^{\dagger}\Sigma_z U\right] \\ &+ \mathbf{Tr}\left[P_{21}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{12}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{22}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{11}U^{\dagger}\Sigma_z U\right]), \end{aligned} \tag{3.59}$$

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{1j}|\Psi_{1j}\rangle &= \mathbf{Tr}\left[P_{21}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{11}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{12}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{jj}U^{\dagger}\Sigma_z U\right] \\ &+ \mathbf{Tr}\left[P_{21}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{jj}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{12}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{11}U^{\dagger}\Sigma_z U\right] \\ &\pm (\mathbf{Tr}\left[P_{11}U^{\dagger}\Sigma_z U^{\dagger} P_{1j}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{21}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{j2}U^{\dagger}\Sigma_z U\right] \\ &+ \mathbf{Tr}\left[P_{21}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{12}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{jj}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{11}U^{\dagger}\Sigma_z U\right]), \end{aligned} \tag{3.60}$$

$$\begin{aligned}
\langle\Psi_{2j}|\Psi_{2j}\rangle &= \mathbf{Tr}\left[P_{12}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{22}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{21}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{jj}U^{\dagger}\Sigma_z U\right] \\
&+ \mathbf{Tr}\left[P_{12}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{jj}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{21}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{22}U^{\dagger}\Sigma_z U\right] \\
&\pm (\mathbf{Tr}\left[P_{22}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{2j}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{12}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{j1}U^{\dagger}\Sigma_z U\right] \\
&+ \mathbf{Tr}\left[P_{12}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{21}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{jj}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{22}U^{\dagger}\Sigma_z U\right]), \qquad (3.61)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle\Psi_{34}|\Psi_{34}\rangle &= \mathbf{Tr}\left[P_{21}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{33}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{12}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{44}U^{\dagger}\Sigma_z U\right] \\
&+ \mathbf{Tr}\left[P_{21}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{44}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{12}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{33}U^{\dagger}\Sigma_z U\right] \\
&\pm (\mathbf{Tr}\left[P_{33}U^{\dagger}\Sigma_z U^{\dagger} P_{14}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{21}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{42}U^{\dagger}\Sigma_z U\right] \\
&+ \mathbf{Tr}\left[P_{21}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{32}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{44}U^{\dagger}\Sigma_z U P_{13}U^{\dagger}\Sigma_z U\right]). \qquad (3.62)
\end{aligned}$$

Da mesma forma que fizemos anteriormente, com as equações de correlação do ensemble de Wigner Dyson, reescreveremos as equações de correlação em função de matrizes do grupo quiral unitário a fim de transformá-las em diagramas para realizar o cálculo diagramático.

É de suma importância atentar ao fato de que, quando comparamos as equações de correlação para o efeito HBT em um sistema com quiralidade (3.55 - 3.62), com as equações de correlação no regime metálico (3.40 - 3.47), as equações do efeito HBT com a simetria de sub-rede são dimensionalmente maiores e, consequentemente, os diagramas também serão.

A representação diagramática das equações de correlação para o efeito HBT em sistemas que contêm a simetria quiral esta mostrada nas figuras (3.11-3.15)

Novamente, nenhum termo das equações referente aos diversos estados de espalhamento para o nosso sistema (3.55 - 3.62) está suprimido de algum dos diagramas expostos nas figuras (3.11 - 3.14). De posse dos diagramas elencados nas figuras acima, utilizamos a expansão da técnica diagramática referida, para calcular os observavéis em questão. A quantidade de permutações para o cálculo dos observáveis utilizando a análise diagramática para a classe quiral foi de 11.025 diagramas, enquanto, para a classe de Wigner-Dyson apenas uma ordem de 10^2 diagramas. Devido a esse número grande de diagramas analisados, não é possível explicitar o cálculo para esse regime, de tal forma que apenas os resultados serão expostos nas tabelas subsequentes.

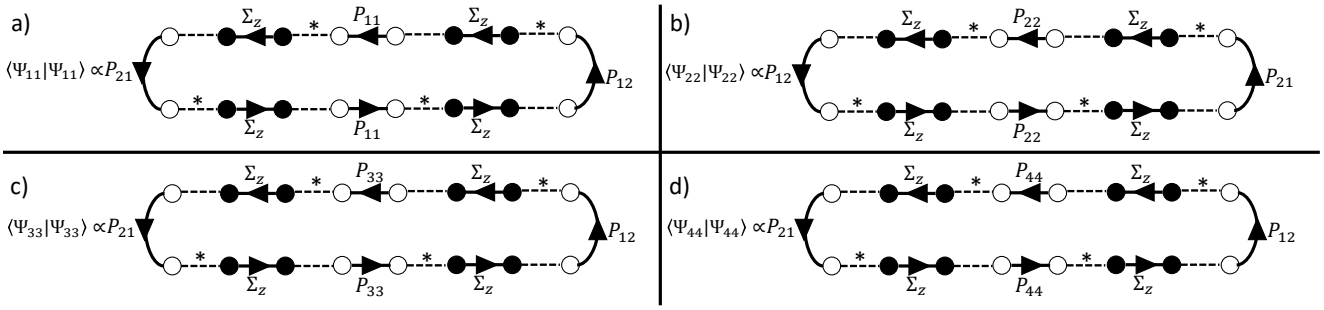

Figura 3.11: As figuras correspondem aos diagramas que são referentes às equações dos estados de agrupamento em forma de diagramas. As figuras correspondem, respectivamente, a) à equação (3.55), referente ao estado de agrupamento de reflexão no terminal **T.1**, b) à equação (3.56), referente ao estado de agrupamento de reflexão no terminal **T.2**, c) à equação (3.57), referente ao estado de agrupamento de transmissão no terminal **T.3**, e d) à equação (3.58), referente ao estado de agrupamento de transmissão no terminal **T.4**.

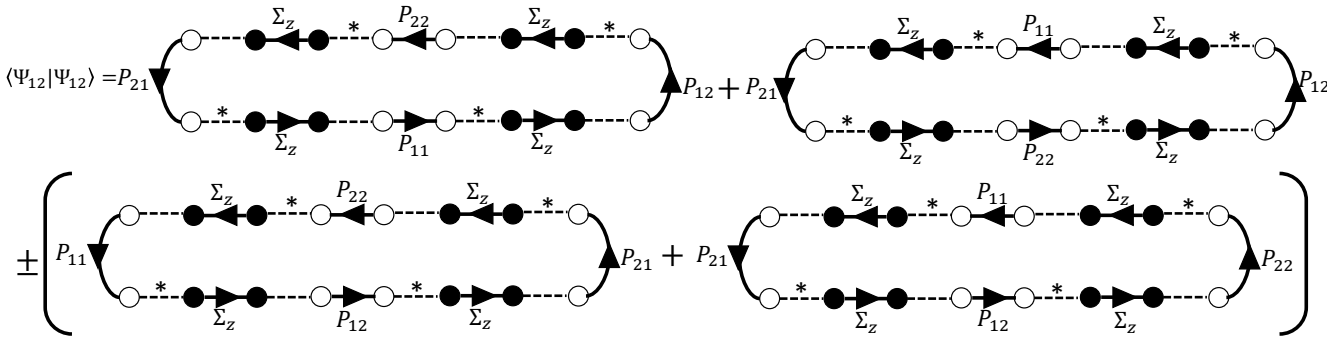

Figura 3.12: A figura correspode aos diagramas da equação (3.59), e se refere ao estado de espalhamento de reflexão total em forma de diagrama.

O primeiro fato que podemos extrair da tabela (3.4) é que, mesmo quando o campo magnético externo está ligado, preservando a simetria de reversão temporal, as correlações das partículas não são iguais. Portanto, há uma quebra na simetria encontrada para o mesmo caso na classe de Wigner-Dyson, na qual, para qualquer estado de espalhamento a correlação foi sempre 1/6 para sistemas fermiônicos e 1/10 para sistemas bosônicos como pode ser visto na tabela (3.1) e na equação (3.48) da seção anterior.

Destarte, conseguimos perceber que, nesse sistema a própria quiralidade é um emara-

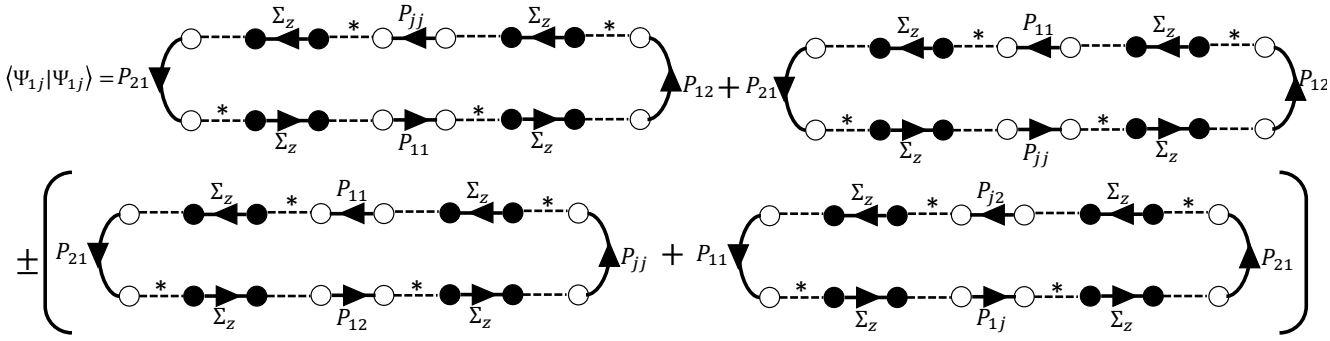

Figura 3.13: A figura corresponde aos diagramas da equação (3.60), e se refere ao estado misto no terminal **T.1** em forma de diagrama.

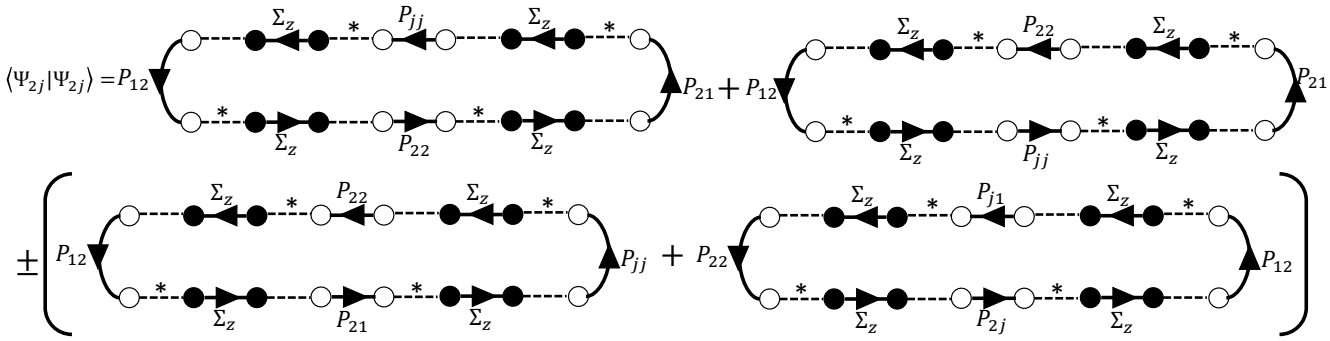

Figura 3.14: A figura corresponde aos diagramas da equação (3.61) e se refere ao estado misto no terminal **T.2** em forma de diagrama.

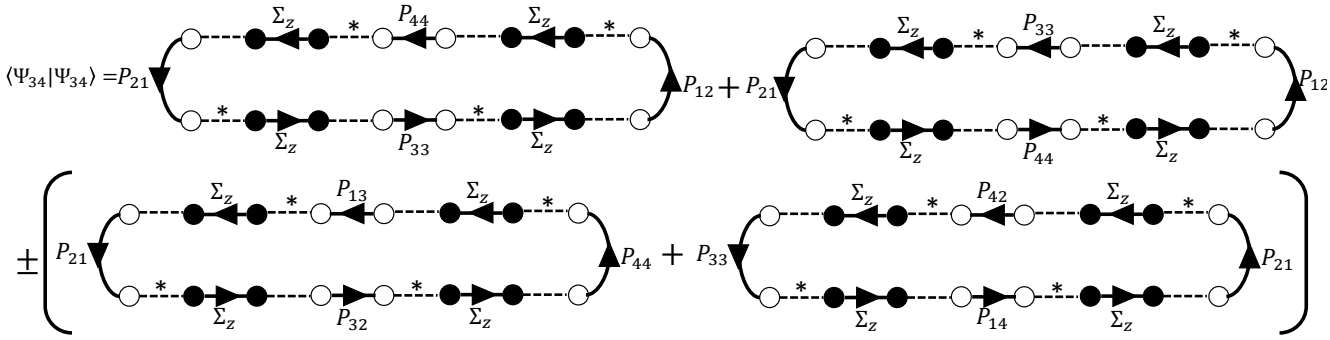

Figura 3.15: A figura corresponde aos diagramas da equação (3.62) e se refere ao estado de espalhamento de transmissão total em forma de diagrama.

Correlações	Férmions			Bósons		
	B$\neq 0$	**B** $= 0$	$\updownarrow$	**B**$\neq 0$	**B** $= 0$	$\updownarrow$
$\langle\Psi_{11}\|\Psi_{11}\rangle$	0	0	0	8/105	4/45	$\uparrow$
$\langle\Psi_{22}\|\Psi_{22}\rangle$	0	0	0	8/105	4/45	$\uparrow$
$\langle\Psi_{33}\|\Psi_{33}\rangle$	0	0	0	4/35	16/225	$\downarrow$
$\langle\Psi_{44}\|\Psi_{44}\rangle$	0	0	0	4/35	16/225	$\downarrow$
$\langle\Psi_{12}\|\Psi_{12}\rangle$	1/5	13/45	$\uparrow$	13/105	41/225	$\uparrow$
$\langle\Psi_{13}\|\Psi_{13}\rangle$ ou $\langle\Psi_{14}\|\Psi_{14}\rangle$	2/15	2/15	0	2/21	22/225	$\downarrow$
$\langle\Psi_{23}\|\Psi_{23}\rangle$ ou $\langle\Psi_{24}\|\Psi_{24}\rangle$	2/15	2/15	0	2/21	22/225	$\downarrow$
$\langle\Psi_{34}\|\Psi_{34}\rangle$	4/15	8/45	$\downarrow$	4/35	24/225	$\downarrow$

Tabela 3.4: Amplitudes de correlações para o sistema com quiralidade analisado, medida da correlação para férmions e bósons.

nhador natural das partículas, porque, mesmo quando o campo magnético externo esteja ligado, tentando destruir a interferência delas, ele não consegue o fazer devido à simetria de sub-rede. Portanto, se existir uma competição natural entre B e SLS, a simetria de sub-rede ganha, tendo assim um papel preponderante no emaranhamento das partículas, e sendo crucial em sistemas que necessitem de estados correlacionados.

Por outro lado, quando é inexistente o campo magnético externo, há dois tipos de interferência quântica: a interferência quântica devido à própria simetria de sub-rede e a interferência quântica devido à ausência do campo magnético, e essas interferências se sobrepõem ao regime semiclássico de modo que a medida da correlação é afetada por cada uma delas. Mais uma vez, não podemos antever o resultado esperado apenas calculando-o de fato.

Isso nos motivou a fazer duas comparações: a primeira delas cotejaria as amplitudes de correlação entre o sistema atual (quiral) e sistema anterior (metálico), mostrando a perda ou ganho dessa correlação devido unicamente à quiralidade do problema. A segunda compararia o resultado encontrado para o sistema com campo magnético em relação ao sistema sem

Correlações	Férmions		Bósons	
	B$\neq$ 0	**B = 0**	**B$\neq$ 0**	**B = 0**
$\langle\Psi_{ii}\|\Psi_{ii}\rangle$	0	0	-24%	-22%
$\langle\Psi_{jj}\|\Psi_{jj}\rangle$	0	0	+14%	-44%
$\langle\Psi_{12}\|\Psi_{12}\rangle$	+20%	-4%	+24%	-2%
$\langle\Psi_{ij}\|\Psi_{ij}\rangle$	-20%	-11%	-5%	+5%
$\langle\Psi_{34}\|\Psi_{34}\rangle$	+60%	+78%	+14%	+49%

Tabela 3.5: Comparação do ganho/perda da amplitude de correlação do sistema no regime quiral em relação ao sistema no regime metálico.

campo magnético, a fim de calcular o termo de localização wl no sistema quiral.

Ao confrontar a tabela de correlação para o sistema quiral (3.4) com a tabela de correlação no regime metálico (3.1) mostramos se há ganho ou perda da correlação das partículas unicamente devido à quiralidade do sistema (esse fato está exibido na tabela (3.5)).

Dizemos que esse ganho ou perda da correlação do sistema ocorre exclusivamente devido à quiralidade do problema, pois estamos comparando item a item das tabelas elencadas, de tal forma que a única diferença entre os sistemas é a quiralidade. Na tabela (3.5), $i = 1, 2$ enquanto $j = 3, 4$, de tal forma que os estados de agrupamento estão todos condensados em $\langle\Psi_{ii}|\Psi_{ii}\rangle$ para o estado de agrupamento de reflexão e $\langle\Psi_{jj}|\Psi_{jj}\rangle$ para o estado de agrupamento de trasmissão, enquanto os estados mistos estão simplificados em $\langle\Psi_{ij}|\Psi_{ij}\rangle$. Vemos o quanto a quiralidade influencia na medida da correlação das partículas nesta tabela, visto que o termo de correlação para um sistema com quiralidade tem sua interferência na medida da correlação em $\langle\Psi_{34}|\Psi_{34}\rangle$ da ordem de 78% da medida. Isso chega a ser quase da ordem da própria medida.

Por outro lado, como mencionamos anteriormente, a segunda interferência vem do ruído, e podemos medi-la novamente calculando a localização (wl) do sistema utilizando a mesma equação da seção anterior

Correlações	Férmions			Bósons		
	B$\neq 0$	**B** $= 0$	wl	**B**$\neq 0$	**B** $= 0$	wl
$\langle\Psi_{11}\|\Psi_{11}\rangle$	0	0	0	8/105	4/45	14.29%
$\langle\Psi_{22}\|\Psi_{22}\rangle$	0	0	0	8/105	4/45	+14.29%
$\langle\Psi_{33}\|\Psi_{33}\rangle$	0	0	0	4/35	16/225	-60.71%
$\langle\Psi_{44}\|\Psi_{44}\rangle$	0	0	0	4/35	16/225	-60.71%
$\langle\Psi_{12}\|\Psi_{12}\rangle$	1/5	13/45	+30.77%	13/105	41/225	+32.06%
$\langle\Psi_{13}\|\Psi_{13}\rangle$ ou $\langle\Psi_{14}\|\Psi_{14}\rangle$	2/15	2/15	0	2/21	22/225	+2.60%
$\langle\Psi_{23}\|\Psi_{23}\rangle$ ou $\langle\Psi_{24}\|\Psi_{24}\rangle$	2/15	2/15	0	2/21	22/225	+2.60%
$\langle\Psi_{34}\|\Psi_{34}\rangle$	4/15	8/45	-50%	4/35	24/225	-7.14%

Tabela 3.6: Amplitude dos termos de localização fraca (wl) para os sistemas fermiônico e bosônico respectivamente, para um ponto quântico com simetria de sub-rede.

$$wl = \frac{\langle\Psi_{ij}|\Psi_{ij}\rangle^{\mathbf{B}=0} - \langle\Psi_{ij}|\Psi_{ij}\rangle^{\mathbf{B}\neq 0}}{\langle\Psi_{ij}|\Psi_{ij}\rangle^{\mathbf{B}=0}} \times 100.$$

A tabela (3.6) mostra a amplitude do termo de localização referente ao sistema HBT caótico cujas partículas podem ser férmions ou bósons com a preservação da simetria de sub-rede, ou seja, em sistemas cuja quiralidade é preponderante no sistema.

Apesar de não termos encontrado experimentos na área mostrando a relação entre o comprimento de correlação dos férmions em relação aos bósons, podemos analisar essa razão como foi feito na seção passada. Para isso, comparamos os resultados da correlação de férmions e bósons na tabela (3.4) e conseguimos mostrar essa relação na tabela (3.7).

A tabela (3.6) nos mostra sucintamente o resultado referente à razão entre a medida de correlação dos férmions e a medida de correlação dos bósons, de tal forma que percebemos como a medida de correlação dos férmions para o sistema quiral continua superior à medida de correlação dos bósons. Essa superioridade consegue atingir a marca de mais de 100%, ratificando o quanto é preponderante a simetria quiral para o sistema, em comparação com o regime metálico.

Correlações	**B$\neq$ 0**	**B = 0**
$\langle\Psi_{12}\|\Psi_{12}\rangle$	61.54%	58.54%
$\langle\Psi_{ij}\|\Psi_{ij}\rangle$	40.00%	36.36%
$\langle\Psi_{34}\|\Psi_{34}\rangle$	133.34%	66.67%

Tabela 3.7: Tabela comparando em % a medida de correlação do sistema quiral utilizando férmions em comparação à medida de correlação do sistema utilizando bósons.

3.6 Cálculo das equações de correlação para um bilhar de Andreev

Nesta seção final, iremos desenvolver e mostrar os principais resultados aplicados ao bilhar de Andreev. Esse bilhar é assim chamado porque esses sistemas híbridos são feitos de uma junção normal-metal/supercondutor e têm um espalhamento Andreev de elétrons. Nessa dispersão surge a simetria partícula-buraco. Portanto, havendo supercondutividade no sistema ele não pode ser mais modelado pelas classes de ensemble discutidas anteriormente, ao passo que o sistema cai em uma nova classe de ensembles, chamada classe de Altland-Zirnbauer, como mostrado na tabela de Cartan.

Motivados pela referência [77], estudamos o transporte com um espalhamento sem barreira, de modo que S continua sendo uma matriz unitária ($SS^{\dagger} = \mathbf{I}$) e distribuída de acordo com o ensemble circular. Porém, devido à simetria partícula-buraco, nem o regime metálico nem a quiralidade satisfazem a física do problema, pois nenhuma delas abarca a simetria preponderante para um sistema de heterojunção metal/supercondutor que é a Simetria Partícula Buraco (PHS).

Dessa forma, incrementando a teoria de matrizes aleatórias, Altland e Zimbauer ampliaram seu alcance, introduzindo mais quatro novas classes de ensembles, quando os metais são justapostos a supercondutores: com Simetria de Rotação de Spin (C e CI), sem Simetria de Rotação de Spin (D e DIII), com Simetria de Reversão Temporal (CI e DIII) e sem Simetria de Reversão Temporal (C e D). A classe D representa sistemas físicos em que há

campo magnético externo e interação spin-órbita. Por outro lado, caso não haja interação spin-órbita, a classe que representa o sistema é a classe C. Quando não há campo magnético externo e há interação spin-órbita, o sistema é representado pela classe DIII. Porém, caso não haja campo magnético externo e nem interação spin órbita, a classe de ensemble que representa o sitema é a classe CI.

Por conseguinte, como estamos interessados apenas em analisar como o campo magnético e a simetria partícula buraco influenciam na medida da correlação do sistema as duas classes que modelam o nosso sistema são as classes C ($\mathbf{B} \neq 0$) e CI ($\mathbf{B} = 0$).

Devido à simetria PHS, a matriz de espalhamento S além da unitariedade ($SS^{\dagger} = \mathbf{I}$), satisfaz a seguinte relação

$$S = JS^{\dagger}J^{-1} \tag{3.63}$$

e será decomposta de acordo com a tabela de Cartan da seguinte maneira:

$$S = JU^{\dagger}J^{-1}U \quad \text{e} \quad S^{\dagger} = U^{\dagger}J^{-1}UJ, \tag{3.64}$$

em que J é a uma matriz dada por

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.65}$$

Após fazer a decomposição da matriz de espalhamento, como mencionado na equação acima, e substituir essa decomposição nas equações de correlação (3.28 - 3.38), podemos verificar que elas se modificam da seguinte forma:

$$\langle \Psi_{11} | \Psi_{11} \rangle = 2 \times \mathbf{Tr} \left[P_{21} U^{\dagger} J^{-1} U P_{11} U^{\dagger} J U P_{12} U^{\dagger} J^{-1} U P_{11} U^{\dagger} J U \right] \tag{3.66}$$

$$\langle \Psi_{22} | \Psi_{22} \rangle = 2 \times \mathbf{Tr} \left[P_{12} U^{\dagger} J^{-1} U P_{22} U^{\dagger} J U P_{21} U^{\dagger} J^{-1} U P_{22} U^{\dagger} J U \right] \tag{3.67}$$

$$\langle \Psi_{33}|\Psi_{33}\rangle = 2 \times \mathbf{Tr}\left[P_{21}U^{\dagger}J^{-1}UP_{33}U^{\dagger}JUP_{12}U^{\dagger}J^{-1}UP_{33}U^{\dagger}JU\right] \tag{3.68}$$

$$\langle \Psi_{44}|\Psi_{44}\rangle = 2 \times \mathbf{Tr}\left[P_{21}U^{\dagger}J^{-1}UP_{44}U^{\dagger}JUP_{12}U^{\dagger}J^{-1}UP_{44}U^{\dagger}JU\right] \tag{3.69}$$

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_{12}|\Psi_{12}\rangle &= \mathbf{Tr}\left[P_{21}U^{\dagger}J^{-1}UP_{11}U^{\dagger}JUP_{12}U^{\dagger}J^{-1}UP_{22}U^{\dagger}JU\right] \\
&+ \mathbf{Tr}\left[P_{21}U^{\dagger}J^{-1}UP_{22}U^{\dagger}JUP_{12}U^{\dagger}J^{-1}UP_{11}U^{\dagger}JU\right] \\
&\pm (\mathbf{Tr}\left[P_{11}U^{\dagger}J^{-1}UP_{12}U^{\dagger}JUP_{21}U^{\dagger}J^{-1}UP_{22}U^{\dagger}JU\right] \\
&+ \mathbf{Tr}\left[P_{21}U^{\dagger}J^{-1}UP_{12}U^{\dagger}JUP_{22}U^{\dagger}J^{-1}UP_{11}U^{\dagger}JU\right]),
\end{aligned} \tag{3.70}$$

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_{1j}|\Psi_{1j}\rangle &= \mathbf{Tr}\left[P_{21}U^{\dagger}J^{-1}UP_{11}U^{\dagger}JUP_{12}U^{\dagger}J^{-1}UP_{jj}U^{\dagger}JU\right] \\
&+ \mathbf{Tr}\left[P_{21}U^{\dagger}J^{-1}UP_{jj}U^{\dagger}JUP_{12}U^{\dagger}J^{-1}UP_{11}U^{\dagger}JU\right] \\
&\pm (\mathbf{Tr}\left[P_{11}U^{\dagger}J^{-1}U^{\dagger}P_{1j}U^{\dagger}JUP_{21}U^{\dagger}J^{-1}UP_{j2}U^{\dagger}JU\right] \\
&+ \mathbf{Tr}\left[P_{21}U^{\dagger}J^{-1}UP_{12}U^{\dagger}JUP_{jj}U^{\dagger}J^{-1}UP_{11}U^{\dagger}JU\right]),
\end{aligned} \tag{3.71}$$

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_{2j}|\Psi_{2j}\rangle &= \mathbf{Tr}\left[P_{12}U^{\dagger}J^{-1}UP_{22}U^{\dagger}JUP_{21}U^{\dagger}J^{-1}UP_{jj}U^{\dagger}JU\right] \\
&+ \mathbf{Tr}\left[P_{12}U^{\dagger}J^{-1}UP_{jj}U^{\dagger}JUP_{21}U^{\dagger}J^{-1}UP_{22}U^{\dagger}JU\right] \\
&\pm (\mathbf{Tr}\left[P_{22}U^{\dagger}J^{-1}U^{\dagger}P_{2j}U^{\dagger}JUP_{12}U^{\dagger}J^{-1}UP_{j1}U^{\dagger}JU\right] \\
&+ \mathbf{Tr}\left[P_{12}U^{\dagger}J^{-1}UP_{21}U^{\dagger}JUP_{jj}U^{\dagger}J^{-1}UP_{22}U^{\dagger}JU\right]),
\end{aligned} \tag{3.72}$$

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_{34}|\Psi_{34}\rangle &= \mathbf{Tr}\left[P_{21}U^{\dagger}J^{-1}UP_{33}U^{\dagger}JUP_{12}U^{\dagger}J^{-1}UP_{44}U^{\dagger}JU\right] \\
&+ \mathbf{Tr}\left[P_{21}U^{\dagger}J^{-1}UP_{44}U^{\dagger}JUP_{12}U^{\dagger}J^{-1}UP_{33}U^{\dagger}JU\right] \\
&\pm (\mathbf{Tr}\left[P_{33}U^{\dagger}J^{-1}U^{\dagger}P_{14}U^{\dagger}JUP_{21}U^{\dagger}J^{-1}UP_{42}U^{\dagger}JU\right] \\
&+ \mathbf{Tr}\left[P_{21}U^{\dagger}J^{-1}UP_{32}U^{\dagger}JUP_{44}U^{\dagger}J^{-1}UP_{13}U^{\dagger}JU\right]).
\end{aligned} \tag{3.73}$$

Da mesma forma que fizemos anteriormente, reescrevemos as equações de correlação em função de matrizes do grupo Altland-Zimbauer unitário, a fim de transformá-las em diagramas para efetuar o cálculo diagramático. É importante salientar que, assim como as equações de correlação para um sistema com quiralidade (3.55 - 3.62), as equaçãoes para o efeito HBT

com heterojunção metal/supercondutor (3.66 - 3.73) são dimensionalmente maiores do que o regime mais simples, que é o regime metálico (3.40 - 3.47) e consequentemente, os diagramas também continuarão dimensionalmente maiores.

A representação diagramática das equações de correlação para o efeito em questão está mostrada nas figuras (3.16-3.20)

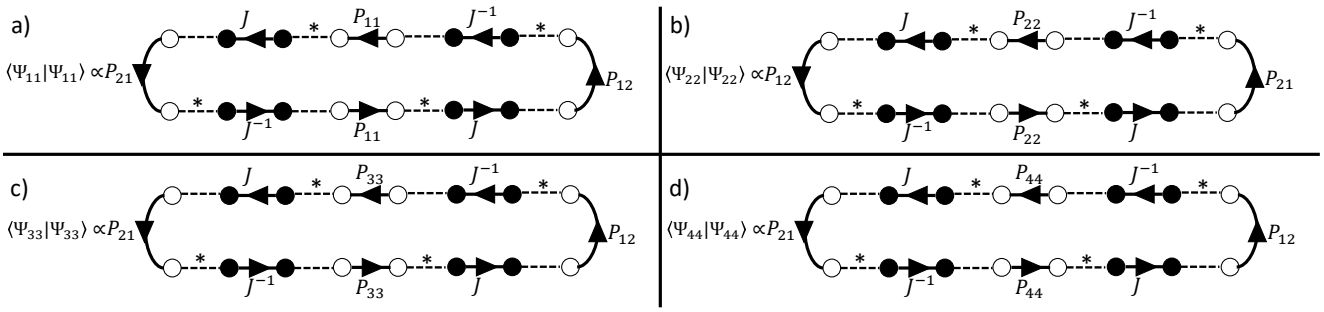

Figura 3.16: As figuras correspondem às equações referentes aos estados de agrupamento em forma de diagramas. Elas correspondem, respectivamente, a) à equação (3.66) referente ao estado de agrupamento de reflexão no terminal **T.1**; b) à equação (3.67) referente ao estado de agrupamento de reflexão no terminal **T.2**; c) à equação (3.68) referente ao estado de agrupamento de transmissão no terminal **T.3**; e d) à equação (3.69) referente ao estado de agrupamento de transmissão no terminal **T.4**.

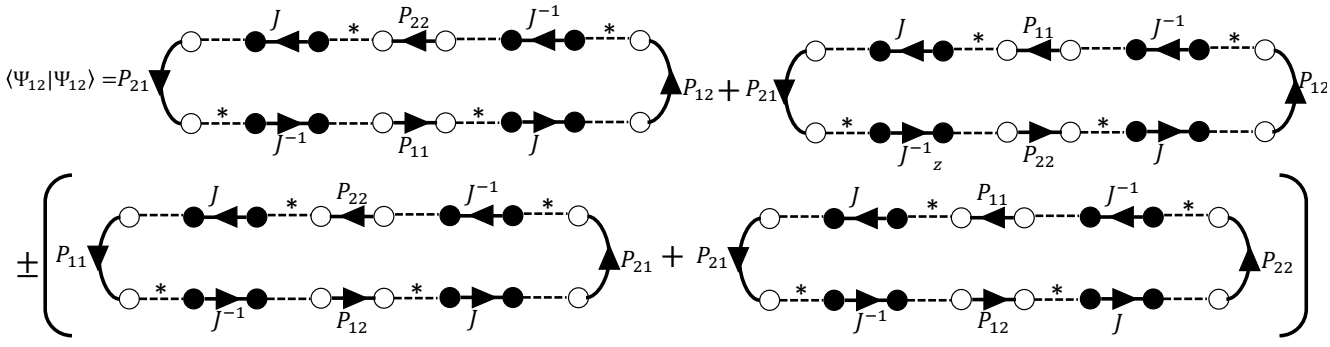

Figura 3.17: A figura corresponde à equação (3.70), que se refere ao estado de espalhamento de reflexão total em forma de diagrama.

Novamente, nenhum termo das equações referente aos diversos estados de espalhamento para o nosso sistema (3.66 - 3.73) está suprimido de algum dos diagramas expostos nas

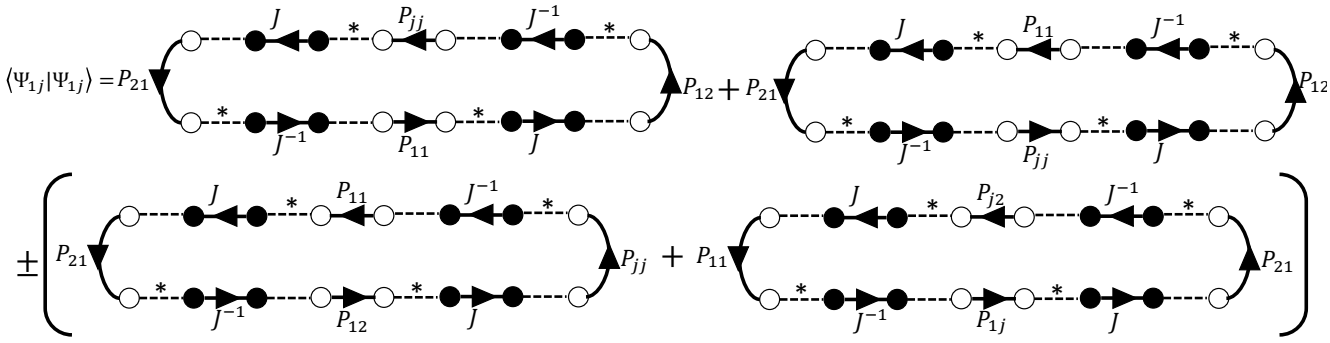

Figura 3.18: A figura que corresponde à equação (3.71) se refere ao estado misto no terminal **T.1** em forma de diagrama.

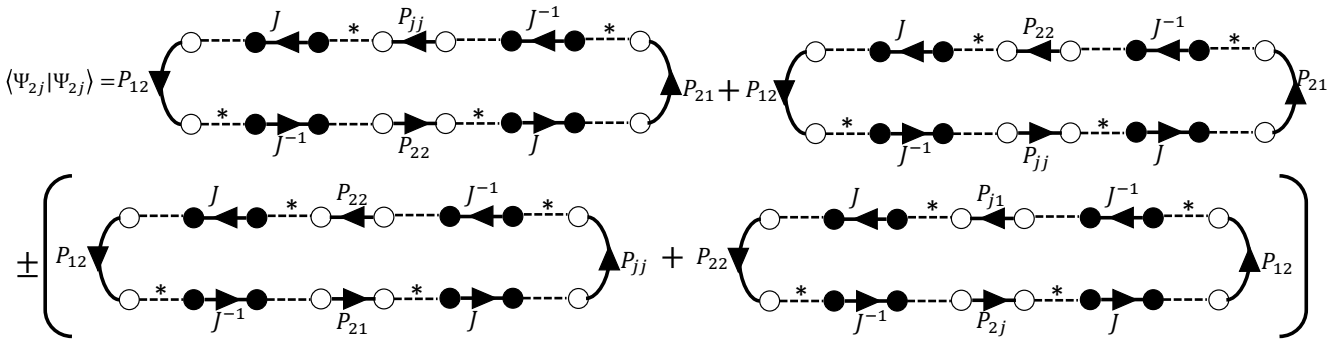

Figura 3.19: A figura corresponde à equação (3.72), que se refere ao estado misto no terminal **T.2** em forma de diagrama.

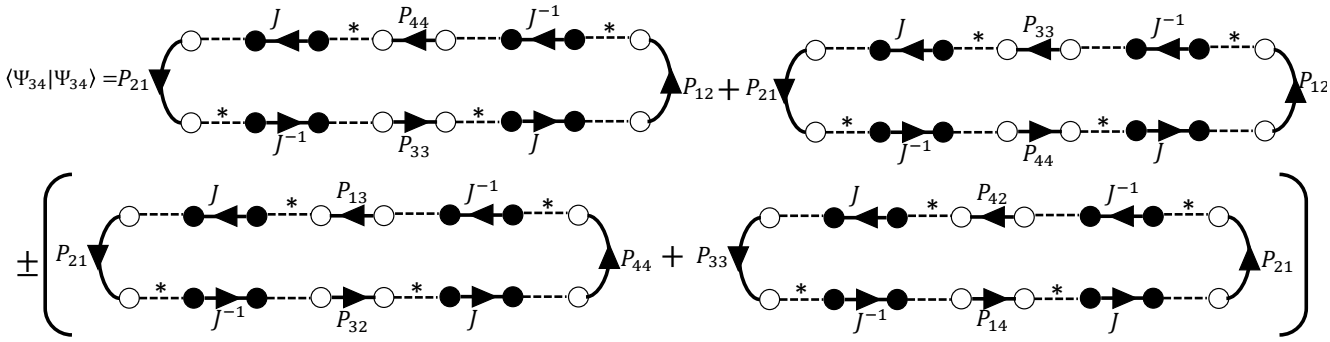

Figura 3.20: A figura corresponde à equação (3.73), que se refere ao estado de espalhamento de transmissão total em forma de diagrama.

Correlações	Férmions			Bósons		
	B$\neq 0$	**B** $= 0$	$\updownarrow$	**B**$\neq 0$	**B** $= 0$	$\updownarrow$
$\langle\Psi_{11}\|\Psi_{11}\rangle$	0	0	0	1/10	16/225	$\downarrow$
$\langle\Psi_{22}\|\Psi_{22}\rangle$	0	0	0	1/10	16/225	$\downarrow$
$\langle\Psi_{33}\|\Psi_{33}\rangle$	0	0	0	1/10	4/45	$\downarrow$
$\langle\Psi_{44}\|\Psi_{44}\rangle$	0	0	0	1/10	4/45	$\downarrow$
$\langle\Psi_{12}\|\Psi_{12}\rangle$	1/6	8/45	$\uparrow$	1/10	24/225	$\uparrow$
$\langle\Psi_{13}\|\Psi_{13}\rangle$ ou $\langle\Psi_{14}\|\Psi_{14}\rangle$	1/6	2/15	$\downarrow$	1/10	22/225	$\downarrow$
$\langle\Psi_{23}\|\Psi_{23}\rangle$ ou $\langle\Psi_{24}\|\Psi_{24}\rangle$	1/6	2/15	$\downarrow$	1/10	22/225	$\downarrow$
$\langle\Psi_{34}\|\Psi_{34}\rangle$	1/6	13/45	$\uparrow$	1/10	41/225	$\uparrow$

Tabela 3.8: Amplitudes de correlações para o sistema com supercondutividade, medida da correlação para férmions e bósons.

figuras (3.16 - 3.20).

De tal forma que, de posse dos diagramas elencados nas figuras acima, utilizamos a expsansão da técnica diagramática referida para calcular os observavéis em questão e, assim, como o efeito da quiralidade no problema foi necessário fazer a análise de uma ordem de 10^4 diagramas. Nesse regime, houve também esse um número grande de diagramas para serem analisados e, da mesma maneira, não é possível explicitar o cálculo para esse regime, de tal forma que apenas os resultados serão expostos nas tabelas subsequentes.

O primeiro fato que vem à tona na tabela (3.8) é que, para a classe C de Altland-Zimbauer, podemos inferir que apenas a simetria partícula-buraco não é suficiente para produzir interferência no sistema, e, consequentemente, as correlações das partículas nos terminais de saída são todas iguais a 1/6 para férmions e 1/10 para bósons. Algo similar aconteceu com as correlações no regime metálico na classe de Wigner-Dyson (mostrado na tabela (3.1)).

Portanto, o campo magnético suprime a correlação entre os pares de Cooper dentro do ponto quântico, de tal maneira que a correlação não é afetada pela reflexão de Andreev.

A correlação das partículas para essa classe também obedece, sem perda de generalidade, à equação de correlação para qualquer estado de espalhamento acessível do sistema que também é dada pela equação (3.48), como mencionado anteriormente.

Por outro lado, quando é inexistente o campo magnético externo, a interferência quântica devido à ausência do campo, emerge naturalmente de modo que a medida da correlação é afetada por ela e, novamente, não podemos antever o resultado esperado. É interessante notarmos que o resultado sem o campo magnético na tabela (3.8) é muito semelhante ao resultado sem campo magnético apresentado na tabela para o efeito HBT quiral (3.4) com uma elegante diferença: todas as medidas de correlação para reflexão (transmissão) encontradas no bilhar de Dirac são os resultados da correlação para a transmissão (reflexão) para o bilhar de Andreev. Portanto, a medida das correlações $\langle\Psi_{11}|\Psi_{11}\rangle$, $\langle\Psi_{22}|\Psi_{22}\rangle$ e $\langle\Psi_{12}|\Psi_{12}\rangle$ num sistema quiral é a mesma das correlações $\langle\Psi_{33}|\Psi_{33}\rangle$, $\langle\Psi_{44}|\Psi_{44}\rangle$ e $\langle\Psi_{34}|\Psi_{34}\rangle$ num sistema híbrido metal/supercondutor respectivamente, fato este dado pela simetria partícula-buraco.

A medida da localização nesse sistema será feita com a mesma equação das seções anteriores, portanto, utilizando a tabela (3.8, conseguimos chegar aos resultados referente a wl do sistema mostrados na tabela (3.9).

Por completeza, podemos mostrar a relação entre o comprimento de correlação dos férmions em relação aos bósons, comparando os resultados da correlação de férmions e bósons na tabela (3.8).

Novamente, percebemos que a assinatura do emaranhamento devido ao ruído do sistema faz com que o termo de interferência quântica entre as partículas seja uma parte crucial na medida da localização, não podendo, de maneira alguma ser desprezado do sistema. Encontramos esse fato em todas as medidas da localização do sistema HBT, seja em regime metálico, como elencado na tabela (3.2), seja em sistemas que têm a quiralidade como fator preponderante (3.6) ou em regimes com simetria partícula-buraco como mostrado nessa última tabela (3.9). Isso nos leva à tabela da localização e, com ela, podemos construir a tabela (3.10), que nos mostra sucintamente a razão entre o resultado das correlações dos férmions em relação à correlação dos bósons nos terminais de saída. Essa medida continua

Correlações	Férmions			Bósons		
	B$\neq 0$	**B** $= 0$	wl	**B**$\neq 0$	**B** $= 0$	wl
$\langle\Psi_{11}\|\Psi_{11}\rangle$	0	0	0	1/10	16/225	+63.11%
$\langle\Psi_{22}\|\Psi_{22}\rangle$	0	0	0	1/10	16/225	+63.11%
$\langle\Psi_{33}\|\Psi_{33}\rangle$	0	0	0	1/10	4/45	-12.50%
$\langle\Psi_{44}\|\Psi_{44}\rangle$	0	0	0	1/10	4/45	-12.50%
$\langle\Psi_{12}\|\Psi_{12}\rangle$	1/6	8/45	+6.25%	1/10	24/225	+6.25%
$\langle\Psi_{13}\|\Psi_{13}\rangle$ ou $\langle\Psi_{14}\|\Psi_{14}\rangle$	1/6	2/15	-25.00%	1/10	22/225	-2.27%
$\langle\Psi_{23}\|\Psi_{23}\rangle$ ou $\langle\Psi_{24}\|\Psi_{24}\rangle$	1/6	2/15	-25.00%	1/10	22/225	-2.27%
$\langle\Psi_{34}\|\Psi_{34}\rangle$	1/6	13/45	+42.31%	1/10	41/225	+45.12%

Tabela 3.9: Amplitude dos termos de localização fraca (wl) para os sistemas fermiônico e bosônico, respectivamente, para um ponto quântico com simetria partícula-buraco.

Correlações	**B**$\neq 0$	**B** $= 0$
$\langle\Psi_{12}\|\Psi_{12}\rangle$	66.67%	66.66%
$\langle\Psi_{ij}\|\Psi_{ij}\rangle$	66.67%	36.36%
$\langle\Psi_{34}\|\Psi_{34}\rangle$	66.67%	58.54%

Tabela 3.10: Tabela comparando em % a medida de correlação das partículas do sistema com supercondutividade.

superior à da correlação dos férmions em relação aos bósons.

3.7 Considerações Finais

Vimos neste capítulo que o Efeito Hanbury-Brow Twiss em sistemas mesocópicos pode ser analisado via TMA e, devido a essa teoria, conseguimos via técnica diagramática, calcular a medida da correlação das partículas nas 3 classes de ensembles. No ensemble de Wigner-Dyson, calculamos a medida de correlação das partículas nos diversos terminais e ao compararmos o resultado do HBT nessa classe com o HBT determinístico analisado no capítulo 1. Vimos como o espelho caótico produz estados de antiagrupamento mesmo quando as partículas do transporte forem bósons. No regime metálico vimos que o campo magnético destrói a interferência quântica das partículas e que a medida de correlação entre elas após o espalhamento é sempre a mesma (1/6 para férmions e 1/10 para bósons). Porém, ao se retirar o campo magnético a medida de correlação difere entre os estados acessíveis do sistema. Também no regime metálico comparamos nossos resultados com os resultados experimentais de [76], revelando que a medida de correlação entre férmions é ligeiramente maior do que a medida de correlação entre os bósons.

Para a classe quiral, vimos que as medida de correlação entre as partículas em diversos terminais são completamente diferentes mesmo que o campo magnético esteja ligado. Portanto, a interferência quântica subjacente devido à quiralidade se sobrepõe à tentativa do campo magnético de quebrar essa interferência quântica. Esse resultado é importante, pois ratifica a importância do regime quiral no transporte. Vimos que a amplitude da medida de correlação do sistema quiral em referência com o regime metálico é preponderante, ou seja, a quiralidade é um fator preponderante no sistema.

Para a classe de Altland-Zimbauer, mostramos que o campo magnético destrói os pares de Cooper, de tal forma que o resultado da medida de correlação é a mesmo seja para o regime metálico, seja para o regime híbrido normal/supercondutor. Esse resultado está em consonância com resultado de Samuelsson [77]. Além disso, vimos que as medidas de

	Wigner Dyson			Chiral Simetry			Altland - Zimbauer		
Correlações	$\mathbf{B} \neq 0$	$\mathbf{B} = 0$	wl	$\mathbf{B} \neq 0$	$\mathbf{B} = 0$	wl	$\mathbf{B} \neq 0$	$\mathbf{B} = 0$	wl
$\langle n_1 n_2 \rangle$	1/6	3/10	44.44	1/5	13/45	30.77	1/6	8/45	6.25
$\langle n_1 n_j \rangle$	1/6	3/20	-11.11	2/15	2/15	0	1/6	2/15	-25
$\langle n_3 n_4 \rangle$	1/6	1/10	-66.67	4/15	8/45	-50	1/6	13/45	42.31

Tabela 3.11: Tabela mostrando as amplitudes de correlações para as diversas classes de ensemble, utilizando partículas fermiônicas.

	Wigner Dyson			Chiral Simetry			Altland - Zimbauer		
Correlações	$\mathbf{B} \neq 0$	$\mathbf{B} = 0$	wl	$\mathbf{B} \neq 0$	$\mathbf{B} = 0$	wl	$\mathbf{B} \neq 0$	$\mathbf{B} = 0$	wl
$\langle n_i n_i \rangle$	1/10	4/35	12.50	8/105	4/45	14.29	1/10	16/225	-40.62
$\langle n_j n_j \rangle$	1/10	1/14	-40	4/35	16/225	-60.71	1/10	4/45	-12.5
$\langle n_1 n_2 \rangle$	1/10	13/70	46.15	13/105	41/225	32.06	1/10	24/225	6.25
$\langle n_i n_j \rangle$	1/10	13/140	-7.69	2/21	22/225	2.60	1/10	22/225	-2.27
$\langle n_3 n_4 \rangle$	1/10	1/14	-40	4/35	24/225	-7.14	1/10	41/225	45.13

Tabela 3.12: Tabela mostrando as amplitudes de correlações para as diversas classes de ensemble, utilizando bósons como partículas.

correlação do sistema com supercondutor e do sistema com quiralidade são bem parecidas com uma sutil diferença: a medida de correlação para os estados de reflexão no sistema quiral é a medida de correlação para os estados de transmissão no sistema híbrido e vice-versa. Também para todas as classes em questão, calculamos o termo de localização e mostramos que há localização ou antilocalização das partículas devido ao ganho ou perda da medida de correlação pela influência do campo magnético externo, quebrando a simetria de reversão temporal.

Por fim, concatenamos os principais resultados deste capítulo nas tabelas (3.11) e (3.12). Na tabela (3.11), constam os resultados para um transporte fermiônico, enquanto na tabela (3.12), são os resultados para um transporte de bósons.

Capítulo 4

Efeito Multiterminal no experimento Hanbury-Brown Twiss em dispositivos mesoscópicos caóticos

4.1 Introdução

A palavra multiterminal, empregada no título deste capítulo, evidencia diz que iremos continuaremos a analisar o efeito HBT, porém, agora iremos adicionar ou retirar terminais do problema, o que nos leva à seguinte questão: de que maneira, ao incluir ou remover terminais do efeito HBT, modifica-se a medida de correlação do sistema? Em trabalhos teóricos, foi sugerida a investigação de diferentes dispostivos HBT com multiterminal [78, 79]. Em nosso problema, queremos adicionar ou retirar terminais a fim de saber como a ausência ou presença de mais terminais afeta contudentemente a medida de correlação das partículas após o espalhamento do ponto quântico. Dessa maneira, neste capítulo, iremos trabalhar não apenas com as tabelas como fora feito anteriormente, mas também com as equações que regem a medida da correlação. Queremos, antes de tudo, encontrar as equações de correlação em função do número total de terminais abertos (N_T). Com isso poderemos, através dessas

equações analíticas, resgatar os resultados encontrados no capítulo anterior ao substituirmos $N_T = 4$.

Neste capítulo iremos, sem perda de generalidade, expandir as equações de correlação do efeito HBT (3.16-3.25) para um número qualquer N_T de terminais de saída, porém ainda continuará sendo um efeito no qual as partículas, por construção, estarão inicialmente apenas nos terminais **T.1** e **T.2**. Portanto, esses terminais continuarão sendo responsáveis por propagarem as duas partículas para dentro do ponto quântico caótico. Desse modo, o dispositivo eletrônico analisado será um dispositivo multiterminal de tal forma que podemos, através de um controle eficienciente, inserir ou retirar canais de detecção das partículas através de barreiras opacas. O principal interesse de investigação deste capítulo é a forma com que a incrementação ou redução de cada terminal afeta as medidas de correlação das partículas.

4.2 Efeito HBT Multiterminal em uma cavidade caótica balística

Como dito anteriormente, há, em nosso problema, no mínimo, os terminais (**T.1**) e (**T.2**), responsáveis por inserir as partículas dentro do ponto quântico caótico. O dispositivo em questão está mostrado na figura (4.1).

Análogo àquele que consta na figura (3.1), o dispositivo eletrônico mostrado na figura (4.1) tem em seu cerne o ponto quântico caótico que é responsável pelo espalhamento das partículas para os terminais de saída, formando, assim, os estados acessíveis do sistema. Entretanto, neste novo sistema, o espalhador é descrito matematicamente pela matriz de espalhamento com uma sutil mudança. A matriz de espalhamento que descreve o sistema será dada por

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & \cdots & S_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{N1} & \cdots & S_{NN} \end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

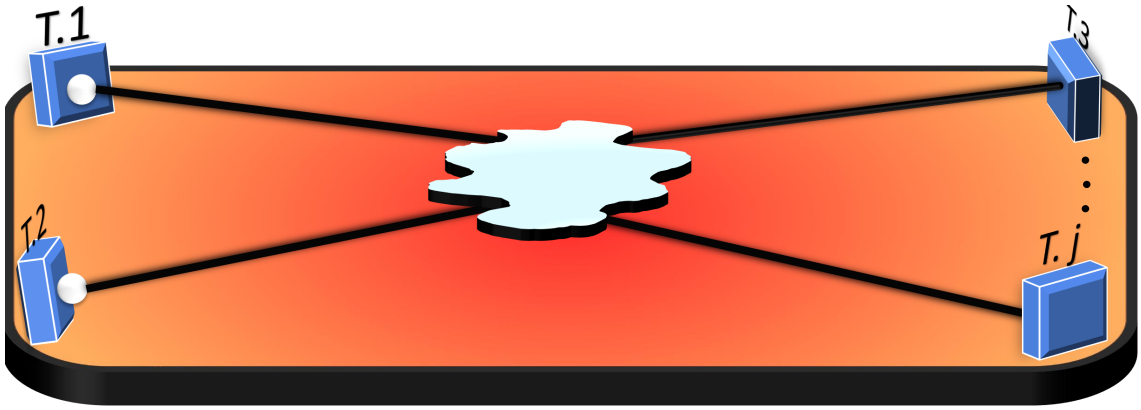

Figura 4.1: A figura mostra uma cavidade caótica balística com N terminais. Do lado esquerdo da figura, mostram-se os terminais (**T.1**) e (**T.2**), que continuam sendo responsáveis pela introdução das partículas dentro do ponto quântico, enquanto, do lado direito, têm-se terminais que servem para detectar as partículas rotulados como (**T.3**) ... (**T.j**). Em nosso trabalho, os subíndices j e j' servirão para rotular qualquer terminal distinto dos terminais (**T.1**) e (**T.2**), ou seja, terminais que ficam à esquerda do ponto quântico. É importante salientar que com a adição de novos terminais irá aumentar significativamente o número de microestados acessíveis do sistema, o que será discutido a posteriori.

Como há N terminais de saída, e cada terminal está conectado ao ponto quântico com 1 canal aberto, a forma da nova matriz de espalhamento do sistema $N \times N$. Essa matriz descreve o espalhamento do sistema. Em particular, se $N = 4$, retornamos ao efeito HBT original discutido no capítulo anterior. Nesse sistema, continuaremos com a mesma rotulação dos estados de espalhamento, apenas alguns estados aumentarão significativamente.

Sem perda de generalidade, seguindo a mesma álgebra do capítulo anterior, conseguimos compreender que as equações de correlação dos estados de espalhamento que dependem exclusivamente dos terminais (**T.1**) e (**T.2**) podem ser escritas da mesma maneira, como, por exemplo, os estados agrupados de reflexão (3.16 - 3.17):

$$\langle \Psi_{11}|\Psi_{11}\rangle = 2 \times |S_{11}|^2|S_{21}|^2 \text{ e } \langle \Psi_{22}|\Psi_{22}\rangle = 2 \times |S_{22}|^2|S_{12}|^2$$

e o estado de reflexão total (3.20):

$$\langle\Psi_{12}|\Psi_{12}\rangle = |S_{11}|^2|S_{22}|^2 + |S_{12}|^2|S_{21}|^2 \pm 1(S_{11}^* S_{22}^* S_{12} S_{21} + S_{11} S_{22} S_{12}^* S_{21}^*),$$

porque essas equações dependem apenas dos terminais de entrada (**T.1** - **T.2**), os quais não foram modificados no problema atual.

Por outro lado, podemos transfomar as equações de correlação referentes aos estados agrupados de transmissão, (3.18) ou (3.19); aos estado mistos (3.21 - 3.24); e ao estado de transmissão total (3.25) em equações mais gerais da seguinte forma:

$$\langle\Psi_{jj}|\Psi_{jj}\rangle = 2 \times |S_{1j}|^2|S_{2j}|^2, \tag{4.2}$$

$$\langle\Psi_{ij}|\Psi_{ij}\rangle = |S_{ii}|^2|S_{i'j}|^2 + |S_{ij}|^2|S_{i'i}|^2 \pm 1(S_{ii}^* S_{i'j}^* S_{ij} S_{i'i} + S_{ii} S_{i'j} S_{ij}^* S_{i'i}^*), \tag{4.3}$$

$$\langle\Psi_{jj'}|\Psi_{jj'}\rangle = |S_{1j}|^2|S_{2j'}|^2 + |S_{1j'}|^2|S_{2j}|^2 \pm 1\left(S_{1j}^* S_{2j'}^* S_{1j'} S_{2j} + S_{1j} S_{2j'} S_{1j'}^* S_{2j}^*\right), \tag{4.4}$$

de modo que os subíndices $j, j' = 3, 4, 5...$ representam terminais do lado direito da figura (4.1), enquanto $i, i' = 1, 2$ representam os terminais do lado esquerdo da mesma figura.

Ao generalizar o efeito HBT, temos um problema de contagem a ser resolvido: quantos estados existem para um valor genérico de N_T terminais de saída no problema apresentado? Para isso, iremos discutir cada estado de espalhamento envolvido e encontrar a relação entre a quantidade desses estados em função do número total de terminais de saída abertos do problema.

Por construção, suponhamos que há N_T terminais ligados ao ponto quântico caótico, conforme mostra a figura (4.1). Se dividirmos o problema novamente em:

i) estado agrupado de reflexão,

ii) estado agrupado de transmissão,

iii) estado de reflexão total,

iv) estado misto e

v) estado de transmissão total.

Assim como no capítulo anterior, percebemos que, para o estado agrupado de reflexão sempre há apenas dois estados acessíveis no sistema $\angle\Psi_{11}|\Psi_{11}\rangle$ e $\langle\Psi_{22}|\Psi_{22}\rangle$, ambos dados, respectivamente, pelas equações (3.28) e (3.29). Desse modo, não importa quantos terminais a mais ou a menos serão incrementados no problema; o número desse estado depende exclusivamente de quantos terminais inicialmente são fontes. Por outro lado, para o estado agrupado de transmissão, o número de estados é modificado cada vez que se modifica o número de terminais de saída, de tal forma que, se tivermos N_T terminais de saída, e desses, 2 terminais (**T.1**) e (**T.2**) são responsáveis pelo estado agrupado de reflexão, então, teremos um total de

$$E_{CT} = N_T - 2 \tag{4.5}$$

estados acessíveis ao estado agrupado de transmissão, que vão desde $\langle\Psi_{33}|\Psi_{33}\rangle$ até $\langle\Psi_{NN}|\Psi_{NN}\rangle$. Todos esses estados são estados agrupados de transmissão pelo fato das partículas se agruparem nos terminais do lado direito da figura (4.1). Além do mais, os estado agrupados de transmissão surgem apenas quando $N_T \geq 3$, de tal forma que não faz sentido conceber a existência de um estado agrupado de transmissão se houver apenas 1 ou 2 terminais de saída por não haver transmissão, apenas reflexão. Além do mais, estados agrupados só valem apenas para sistemas cujas partículas em questão forem bósons.

Além dos estados agrupados, há também os estados espalhados, aqueles cujas partículas estacionam em terminais de saída diferentes após o espalhamento. Para esses estados, há, por exemplo, os estado mistos. A fim de calcular o número de estados mistos para um total de N_T terminais de saída abertos, temos que lembrar o seguinte fato: neste estado uma das partículas sempre estacionará em um dos terminais de saída do lado direito do ponto quântico pós o espalhamento (**T.3**, **T.4** etc.) enquanto a outra partícula estacionará em um dos terminais do lado esquerdo (**T.1** ou **T.2**).

Em vista disso, para um total de N_T terminais de saída do problema, há $N_T - 2$ terminais disponíveis para a primeira partícula escolher após o espalhamento, enquanto, para a segunda

partícula, haverá apenas 2 terminais de saída do lado esquerdo do ponto quântico. Tendo em vista essas duas combinações, inferimos, portanto, que há um total de

$$E_{MM} = 2 \times (N_T - 2) \tag{4.6}$$

estados (referentes aos estados mistos) acessíveis para aferir a correlação das partículas.

Ademais, assim como no estado agrupado de transmissão, é necessário que o número mínimo de terminais de saída para produzir um único estado misto seja $N_T \geq 3$, de tal forma que não é coerente conceber a existência estado misto se houver apenas 1 ou 2 terminais de saída novamente, por não haver transmissão para os terminais localizados do lado direito do ponto quântico.

Por fim, temos o estado de reflexãototal, que se refere apenas aos terminais de saída do lado direito do ponto quântico, e a quantidade de estados acessíveis é afetada diretamente pela incrementação de terminais de saída. Para se calcular o número de estados de reflexão total, há de se lembrar que ambas as partículas, após o espalhamento, se agrupam em estados separáveis do lado direito do ponto quântico.

Portanto, se todos os terminais (do lado direito do ponto quântico) estão vazios para ambas as partículas ao saírem do ponto quântico, há, inicialmente $(N_T - 2)$, teminais acessíveis para elas. Enquanto uma partícula ocupa um desses $(N_T - 2)$ terminais, a outra terá $(N_T - 2 - 1) = (N_T - 3)$ terminais para ocupar. O total de $(N_T - 3)$ terminais é o resultado da seguinte álgebra: todos os terminais do sistema (N_T) - terminais excluídos inicialmente (**T.1** e **T.2**) - um terminal (**T.j**) do lado direito, que estará ocupado por uma das partículas após o espalhamento. Assim, o número total de estados de reflexão total no sistema é dado por

$$E_{TT} = \frac{1}{2} \times (N_T - 2) \times (N_T - 3). \tag{4.7}$$

O fator 1/2 vem para evitar a contagem dupla de estados, visto que em nosso sistema, se as partículas estiverem estacionadas respectivamente nos terminais **T.3** e **T.4** é o mesmo estado se as permutarmos, ou seja, $\langle \Psi_{34} | \Psi_{34} \rangle = \langle \Psi_{43} | \Psi_{43} \rangle$. Diferentemente dos outros estados de espalhamento, esse estado de reflexão total é valido apenas para $N_T \geq 4$.

N_T	Estados Agrupados		Espalhados			Número Total	
	reflexão	transmissão	R.T	M.M	T.T	Bósons	Férmions
2	2	0	1	0	0	3	1
3	2	1	1	2	0	6	3
4	2	2	1	4	1	10	6
5	2	3	1	6	3	15	10
6	2	4	1	8	6	21	15

Tabela 4.1: Número de estados acessíveis ao sistema para um intervalo de número total de terminais $2 \leq N_T \leq 6$.

A partir da discussão acima, faremos uma tabela explicitando o número de estados acessíveis do sistema para o efeito HBT desde $N_T = 2$ terminais de saída abertos (**T.1** e **T.2**) até $N_T = 6$ (**T.1**...**T.6**) a fim de ratificar os resultados esperados tanto para bósons quanto para férmions. Iremos explicitar a medida de correlação para um efeito HBT para uma quantidade de terminais de saída e, em seguida, generalizar com equações cada medida de correlação. É importante relembrar que esse resultado é geral, porém, nesta tese, iremos explicitar alguns casos a fim de testar a robustez da teoria.

A tabela (4.1), mostra em sua primeira coluna, o número total de terminais de saída abertos do sistema, que vão desde dois terminais até seis terminais abertos. Para as segunda e terceira colunas, há o número de estados referentes aos estados agrupados e espalhados. Dentro dos estados agrupados, há o estado agrupado de reflexão e O estado agrupado de transmissão. Notamos que, como discutido anteriormente, não importa a quantidade de terminais de saída abertos; podemos ver na tabela que o número de estados acessíveis do sistema para o estado agrupado de reflexão não muda, sendo sempre 2 e o número de estados acessíveis para o estado de reflexão total é sempre 1.

Porém, para o estado agrupado de transmissão, para o estado misto e para o estado de transmissão total, o número de estados acessíveis do sistema se modifica de maneira contudente ao se inserir ou retirar um terminal de saída no sistema. Desse modo, ao substituirmos

$N_T = 2 \rightarrow 6$ nas equações (4.5), (4.6) e (4.7) conseguiremos recuperar os resultados mostrados na coluna referente aos estados agrupados de transmissão, estados mistos e estado de transmissão total.

De outro modo, para os estados espalhados a tabela referente a essa parte se divide em 3 sub-colunas. A primeira é referente ao estado de reflexão total, o qual não é modificado pela presença de outros terminais. A segunda é referente ao estado misto, no qual o resultado é sempre 0 se $N_T = 2$, pois não há terminal do lado direito do dispositivo eletrônico. Ao substituirmos o número total de terminais na equação (4.6), conseguimos preencher a tabela com o número total de estados acessíveis do sistema referentes ao estado misto. Por último, temos o estado de transmissão total, que é modificado intensamente à medida que mudamos o número total de terminais do sistema. Ao substituirmos o número de terminais abertos na equação (4.7), conseguimos preencher a tabela (4.1), porém, só existe estado acessível para essa situação quando $N_T \geq 4$, por isso que há um zero na alínea referente a $N_T = 3$ abaixo da subcoluna $T.T$.

Por fim, temos a última coluna, que é dada pela soma dos estados acessíveis das colunas anteriores. Nessa última coluna temos o resultado do número total de estados do sistema para bósons e férmions, respectivamente. Notemos que quando $N_T = 4$, conseguimos recuperar o número de estados acessíveis do capítulo anterior, que são 10 estados acessíveis para um sistema com bósons e 6 estados para um sistema com férmions. Desses 10 estados acessíveis para bósons temos 4 estados agrupados, 2 de reflexão e 2 de transmissão além dos 6 espalhados, 1 referente ao estado de reflexão total, 4 referentes aos estados mistos e 1 referente ao estado de transmissão total, enquanto, para férmions, só há os estados espalhados. Isso nos leva a acreditar que as equações referentes aos números de estados acessíveis (4.5 - 4.7) estão de acordo com o esperado.

4.3 Equações de correlação e localização fraca para o efeito HBT Multiterminal num bilhar de Schrödinger

Assim como generalizamos as equações de correlação do capítulo anterior, nesta seção, generalizaremos os diagramas desenhados nas figuras (3.6 - 3.10), de tal forma que, ao utilizarmos a técnica diagramática sobre esses diagramas gerais, estaremos exprimindo o resultado da média de correlação em função de N_T terminais de saída. Para isso, é importante notar que, nas figuras mencionadas, há dois tipos distintos de diagramas: aqueles cuja linha tracejada com asterisco está na diagonal outros, nos quais os asteriscos estão colineares, seja colinearmente em cima, seja colinearmente embaixo.

Os diagramas do primeiro tipo vêm do fato de os termos U e $U^\dagger$, nas equações de correlação, estarem dispostos de maneira intercalada, algo que ocorre com todas as equações de correlação relacionadas aos estados agrupados (3.40 - 3.43) e os dois primeiros termos de todas equações de correlação para os estados espalhados (3.44 - 3.47).

Sem perda de generalidade, podemos utilizar a seguinte equação:

$$\mathbf{Tr}\left[\mathcal{P}_{ij}U\mathcal{P}_{kl}U^\dagger\mathcal{P}_{\mu\eta}U\mathcal{P}_{ab}U^\dagger\right], \tag{4.8}$$

equação essa que é geral, na qual os subíndices podem ser substituídos de tal maneira que conseguimos recuperar qualquer uma das equações mencionadas anteriormente. Por exemplo, se i=η=2 e j=k=l=μ=a=b=1 recuperamos $\mathbf{Tr}\left[\mathcal{P}_{21}U\mathcal{P}_{11}U^\dagger\mathcal{P}_{12}U\mathcal{P}_{11}U^\dagger\right]$, que é a equação de correlação para $\langle\Psi_{11}|\Psi_{11}\rangle$, e assim sucessivamente.

De outro modo, os diagramas do segundo tipo vêm do fato de os termos U e $U^\dagger$ não estarem dispostos de maneira intercalada nas equações de correlação. Esse fato ocorre apenas com os termos que estão entre parênteses nos estados espalhados mostrados nas equações (3.44 - 3.47). Destarte, podemos também utilizar

$$\mathbf{Tr}\left[\mathcal{P}_{ij}U^\dagger\mathcal{P}_{kl}U^\dagger\mathcal{P}_{\mu\eta}U\mathcal{P}_{ab}U\right] \tag{4.9}$$

para recuperar esses termos das equações.

Transformar as equações gerais (4.8 - 4.9) em diagramas também gerais, utilizando os símbolos referidos na figura (3.5), é crucial para resolver o problema do efeito HBT multiterminal e encontrar as equações de correlação em função do número de N_T. Para isso, desenhamos essas equações na figura (4.2). Novamente é importante notar que nenhuma informação das equações pode ser suprimida nessa transformação.

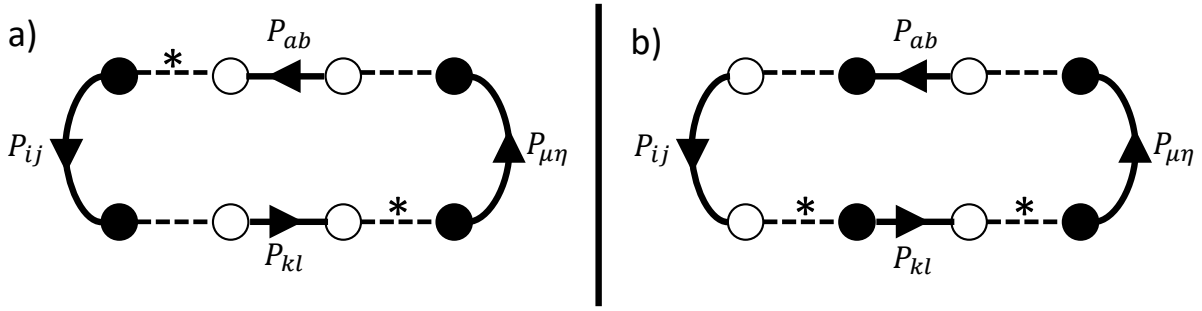

Figura 4.2: Figura mostrando os 2 tipos de diagramas a serem analisados no problema. Temos a representação diagramática a) da equação geral (4.8) e b) da equação geral (4.9), respectivamente. É importante perceber que o diagrama (a) dessa figura é o diagrama geral da figura (3.6) e os dois primeiros diagramas referentes às figuras (3.7 - 3.10), enquanto o diagrama (b) dessa figura é o diagrama geral dos diagramas entre parênteses nas figuras (3.7 - 3.10)

Por fim, iremos aplicar as regras da técnica diagramática para obtermos os resultados analíticos das equações de correlação do sistema. Diferentemente do que fora feito no capítulo anterior, neste capítulo, iremos utilizar o cálculo pertubativo a fim de chegar às equações analíticas gerais para o efeito HBT multiterminal e utilizaremos cinco equações que generalizem o efeito, equações essas em consonância com os cinco estados discutidos anteriormente. Começaremos mostrando as equações de correlação do regime metálico para um sistema cujo campo magnético externo esteja ligado. Esse sistema é dado pela classe de Wigner-Dyson com o índice $\beta = 2$, que é a classe dos ensembles circulares unitários (ECU).

A equação de correlação do efeito HBT multiterminal para o estado (i) discutido anteri-

ormente, que é referente ao estado agrupado de reflexão, é dada por

$$\langle \Psi_{ii}|\Psi_{ii}\rangle = 2 \times \frac{N_i N_{i'}(N_i N_T - 1)}{N_T(N_T+1)(N_T-1)}, \tag{4.10}$$

enquanto, para o estado agrupado de transmissão (ii), a equação de correlação é dada por

$$\langle \Psi_{jj}|\Psi_{jj}\rangle = 2 \times \frac{N_i N_j(N_j N_T - 1)}{N_T(N_T+1)(N_T-1)} \times \Theta(N_T - 3), \tag{4.11}$$

na qual os subíndices $i, i' = 1, 2$ com $i \neq i'$ referem-se aos terminais em que se constrói o estado separável inicial de onde provêm as partículas. Além disso, $j = 3, 4...$ são apenas terminais de saídas, ou seja, as partículas não provêm destes terminais, porém após o espalhamento elas podem ser detectadas neles. Essas duas equações de correlação acima são as equações de correlação para qualquer estado estado agrupado, seja estado agrupado de reflexão (4.10), seja para estado agrupado de transmissão (4.11).

Além do mais, é importante ratificar que os estados de condensação só valem para sistemas cujas partículas são bósons. Também é importante salientar que o termo N_k se refere ao número total de canais abertos no guia k, que está diretamente acoplado com o terminal de mesmo rótulo. Como estamos trabalhando no chamado regime quântico, então, apenas um único canal em cada guia está aberto, de tal forma que $N_k = 1$ para qualquer k.

Não só o número de canais abertos em cada guia é importante como também o número de canais abertos no problema inteiro. Essa importância se mostra no termo N_T, o qual faz referência ao número total de canais abertos, ou seja, $N_T = N_1 + N_2 + N_3....$ Como, em nosso problema, cada terminal tem um guia acoplado e cada guia tem apenas um único canal aberto, então, o número total de canais abertos N_T está diretamente associado ao número de terminais que há no problema, de tal maneira que, para o efeito HBT do capítulo anterior, $N_T = 4$, enquanto, neste capítulo, iremos analisar o efeito para $2 \leq N_T \leq 6$ como mostrado na tabela (4.1).

É importante fazer a conexão dessas equações com resultados anteriores mostrados na tabela (3.2). O primeiro resultado importante é que, quando utilizamos a simetria do problema ao substituirmos $N_i = N_i' = N_j = 1$, pois só há um único canal aberto em cada guia

as duas equações ficam iguais, de tal forma que temos

$$\langle \Psi_{ii}|\Psi_{ii}\rangle = \langle \Psi_{jj}|\Psi_{jj}\rangle = 2 \times \frac{1}{N_T(N_T+1)}. \tag{4.12}$$

Isso quer dizer que as medidas das correlações das partículas no estado agrupamento são sempre as mesmas para o efeito HBT multiterminal com um campo magnético externo ligado. Não há diferença se for um estado agrupado de reflexão ou um estado agrupado de transmissão. Em específico, quando $N_T = 4$, recuperamos o valor encontrado anteriormente, no qual temos que a medida de correlação para os estados agrupados de reflexão e estados agrupados de transmissão são iguais a 1/10 ($\langle \Psi_{ii}|\Psi_{ii}\rangle = \langle \Psi_{jj}|\Psi_{jj}\rangle = 1/10$).

Enquanto as equações (4.10-4.11) descrevem estados agrupados valendo apenas para bósons, de outra forma, os estados espalhados (iii - v) valem para bósons ou férmions como discutido anteriormente. Para o estado de reflexão total (iii), temos apenas $\langle \Psi_{12}|\Psi_{12}\rangle$. Para esse estado, a equação de correlação é dada por

$$\langle \Psi_{12}|\Psi_{12}\rangle = \frac{N_i\left(2N_1N_2N_T \pm (-N_1 - N_2)\right)}{N_T(N_T+1)(N_T-1)}, \tag{4.13}$$

com $i = 1, 2$ e, novamente, o sinal + será responsável pelo resultado da correlação das partículas quando elas forem bósons, enquanto o sinal − será responsável pelo resultado das partículas quando elas forem férmions. Além do mais, ao substituirmos $N_1 = N_2 = 1$, conseguimos deixar a equação (A) em função do número total de canais abertos em cada guia. Assim, a equação (A) fica da seguinte forma:

$$\langle \Psi_{12}|\Psi_{12}\rangle = \frac{2}{N_T(N_T \pm 1)}, \tag{4.14}$$

e, novamente, ao substituirmos $N_T = 4$ na equação mostrada acima, conseguimos encontrar $\langle \Psi_{12}|\Psi_{12}\rangle = 1/10$ para bósons e $\langle \Psi_{12}|\Psi_{12}\rangle = 1/6$ para férmions, ratificando os valores encontrados na tabela (3.2).

Para o estado misto (iv), enquanto uma partícula retorna para o terminal de que proveio a outra segue para qualquer um dos terminais de saída do lado direito da figura (4.1). Para esse estado, a equação que mede a correlação dessas partículas é dada por

$$\langle \Psi_{ij}|\Psi_{ij}\rangle = \frac{N_j\left(2N_iN_jN_T \pm (-N_i - N_j)\right)}{N_T(N_T+1)(N_T-1)} \times \Theta(N_T - 3), \tag{4.15}$$

com $i = 1, 2$ e $j = 3, 4, 5$ etc. Para essa equação, o termo $\Theta(N_T - 3)$ foi adicionado. Tal termo se refere à função degrau cujo valor é 0 se $N_T < 3$ e 1 se $N_T \geq 3$, de modo que deixamos explícito que a equação (4.15) vale apenas quando tivermos 3 ou mais terminais acoplados ao ponto quântico.

Por fim, para o estado (v) que se refere ao estado de transmissão total, todas as partículas estão nos terminais de saídas do lado direito, de tal forma que houve 100% de transmissão das partículas após o espalhamento do ponto quântico. Para esse estado, a equação de correlação das partículas é dada por

$$\langle \Psi_{jj'} | \Psi_{jj'} \rangle = \frac{N_{j'} \left(2N_j N_{j'} N_T \pm (-N_j - N_{j'})\right)}{N_T(N_T + 1)(N_T - 1)} \times \Theta(N_T - 4) \tag{4.16}$$

com $j, j' = 3, 4, 5$ etc. Assim como nas análises das equações anteriores, conseguimos fazer a conexão dessas últimas equações referentes aos estados misto e de transmissão total ao substituirmos os valores do número de canais num guia específico $N_k = 1$. Com isso, percebemos que não só as amplitudes de correlação mostradas anteriormente convergem para a mesma equação. Mostramos, também, que no regime quântico extremo (quando temos um único canal aberto em cada guia), apenas uma única equação de correlação serve para todas as medidas de correlação das partículas:

$$\langle \Psi_{ii} | \Psi_{ii} \rangle = \langle \Psi_{jj} | \Psi_{jj} \rangle = \langle \Psi_{12} | \Psi_{12} \rangle = \langle \Psi_{ij} | \Psi_{ij} \rangle = \langle \Psi_{jj'} | \Psi_{jj'} \rangle = \frac{2}{N_T(N_T \pm 1)}. \tag{4.17}$$

Os valores das medidas de correlação das partículas após o espalhamento são iguais aos resultados do capítulo anterior. Obedecendo a substituição de $N_T = 4$, temos o valor da medida de correlação para o efeito HBT com 4 terminais (os valores da medida de correlação dão 1/6 para férmions e 1/10 para bósons).

Nota-se que as equações encontradas para o efeito HBT multiterminal no regime metálico (4.10 - 4.16) com um campo magnético externo ligado destruindo a interferência quântica entre as partículas são, em essência, iguais entre si, de tal forma que fortalecem a teoria proposta de que, nesse regime, estamos no limite semiclássico e a amplitude de probabilidade de encontrar as partículas após serem espalhadas pelo ponto quâtico caótico é paritária, ou seja, a medida de correlação das partículas é igual e independe do estado acessível do

wl	Férmions					Bósons				
	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6
$\langle\Psi_{ii}\|\Psi_{ii}\rangle$	0	0	0	0	0	1/3	1/6	1/10	1/15	1/21
$\langle\Psi_{jj}\|\Psi_{jj}\rangle$	0	0	0	0	0	0	1/6	1/10	1/15	1/21
$\langle\Psi_{12}\|\Psi_{12}\rangle$	1	1/3	1/6	1/10	1/15	1/3	1/6	1/10	1/15	1/21
$\langle\Psi_{ij}\|\Psi_{ij}\rangle$	0	1/3	1/6	1/10	1/15	0	1/6	1/10	1/15	1/21
$\langle\Psi_{jj'}\|\Psi_{jj'}\rangle$	0	0	1/6	1/10	1/15	0	0	1/10	1/15	1/21

Tabela 4.2: Tabela referente à medida de correlação das partículas para o efeito HBT multiterminal com $2 \leq N_T \leq 6$, para o regime metálico, a classe de Wigner-Dyson com índice $\beta = 2$.

sistema. Desse modo, podemos inferir que essa medida é novamente dada pela equação (3.48) mostrada anteriormente.

A tabela (4.2) mostra, de forma compacta, a medida da correlação das partículas nos diversos estados acessíveis do sistema para o efeito HBT. Na tabela temos, na 1° coluna, os cinco possíveis estados do sistema e, a partir dessa coluna, percebamos que há o resultado referente ao sistema, caso as partículas forem férmions (2° coluna) ou bósons (3° coluna). Nessas colunas, há subdivisões que vão desde o número 2 até o 6, as quais foram assim estruturadas porque estamos analisando o problema HBT multiterminal e, em específico, estamos fazendo a análise desde $N_T = 2$ terminais de saída até $N_T = 6$. Por último, temos na tabela a própria medida de correlação das partículas. Associada a essa medida de correlação, existe um estado acessível e um número total de terminais no problema, sendo possível chegar aos resultados mostrados na tabela através das equações de correlação do efeito HBT multiterminal (4.10 - 4.16). Para chegar a tais resultados fazemos as seguintes substituições: ao substituirmos $N_k = 1 \vee k$, pois em guia há um canal aberto, e modificando N_T pelo número de terminais que se analisa o efeito HBT.

Por exemplo, se quisermos recuperar os valores encontrados na tabela (4.2) para o problema HBT com 3 terminais (terminais **T.1**, **T.2** e **T.3**) podemos substituir $N_T = 3$ na

equação (4.17) e, além disso, fazer a análise do sinal ± para bósons e férmions no problema. Por fim, chegamos às medidas de correlação de qualquer estado acessível do sistema para qualquer que seja a natureza da partícula. Todos esses resultados estão compactados e explicitados na tabela (4.2).

As equações referentes ao efeito HBT multiterminal já tinham nos mostrado que, no regime quântico, todas as equações convergem para a mesma equação de correlação. Isso nos retomou a conclusão de que a medida de correlação nesse regime é paritária, ou seja, não existe diferenciação entre as categorias de reflexão ou transmissão ou entre os estados acessíveis; há apenas diferença entre as correlações de bósons e férmions. Tudo isso é independente do número total de canais abertos no problema, pois todas as equações da medida de correlação convergem para $2/N_T(N_T \pm 1)$, como mostrado na equação (4.17).

Ademais, conseguimos perceber a conexão entre as tabelas (4.1 - 4.2), porque a primeira tabela referida tem, na sua última coluna, o número total de estados acessíveis do sistema para bósons e férmions, respectivamente, e, como a amplitude de correlação desse sistema específico, é paritária então, essa medida obedece à equação (3.48). Assim, percebemos que o denominador da medida de correlação de cada estado possível explícito na tabela (4.2), tem relação com o número total de estados acessíveis do sistema explícito na tabela (4.1), confirmando que cada estado acessível para esse sistema em específico tem a mema amplitude de probabilidade de ocorrer.

Por fim, podemos associar a medida de correlação das partículas com a amplitude de probabilidade de encontrá-las em cada estado após o espalhamento, e essa associação está relacionada a duas estatísticas distintas. A primeira estatística é uma estatística clássica, dada pela resposta da pergunta: quantos estados acessíveis podemos enumerar no problema HBT multiterminal para um total de N_T terminais de saída abertos? Essa resposta foi dada através das equações (4.5 -4.7), além do vínculo inicial, em que só há dois estados acessíveis possíveis para o estado agrupado de reflexão e um único estado para o estado de reflexão total.

A outra estatística é dada pela própria medida de correlação, que nos dá a amplitude de

probabilidade de encontrarmos as partículas em cada estado discutido anteriormente. Essa estatística é calculada mediante a técnica diagramática. O fato é que, em nosso problema de espalhamento, a partícula não é absorvida pelo ponto quântico e que, ao somarmos todas as amplitudes de probabilidade de cada estado acessível do sistema, queremos ter $\Sigma_{\text{correlações}} = 1$. Portanto, queremos que seja conservada a amplitude de probabilidade do sistema, e isso pode ser confirmado na tabela (4.2) ao se somar cada medida de correlação ponderada pela sua degenerescência, de tal forma que para N_T abertos no regime quântico extremo teremos

$$\Sigma_{\text{correlações}} = \frac{2}{N_T(N_T \pm 1)} \times (2 + E_{CT} + 1 + E_{MM} + E_{TT}) = 1. \tag{4.18}$$

Desse modo, temos que as equações referentes ao efeito HBT multiterminal no regime quântico extremo conservam a amplitude de probabilidade, como mostrado na equação (4.18). Porém, a conservação mostrada na equação é valida para $N_T \geq 4$, pois envolve todos os estados acessíveis possíveis. Para $N_T = 2, 3$ podemos analisar a tabela (4.1) e ver que há também a conservação de probabilidade no sistema, com efeito, há conservação da probabilidade para qualquer valor de N_T.

Portanto, as equações analisadas até aqui referem-se ao efeito HBT multiterminal no regime metálico, cujo ensemble responsável por descrever o sistema é o ensemble de Wigner-Dyson, com o índice de simetria $\beta = 2$. Com isso, vimos que todas as equações de correlação no regime quântico extremo se condensam em uma única (4.17) de tal forma que a amplitude de correlação das partículas continuam sendo satisfeitas em primeira ordem pela equação (3.48). Além do mais, esses resultados abarcam os resultados expostos no capítulo anterior para o mesmo sistema em questão e nos dão informações sobre as medidas de correlação para o efeito HBT multiterminal para qualquer valor de N_T.

Os resultados explorados até agora se dão quando um campo magnético destrói a interferência quântica entre as partículas do sistema e, apesar de haver um único canal aberto em cada guia, temos um resultado no regime semiclássico e, portanto, a interferência quântica entre as partículas não é preponderante na medida da correlação, de tal maneira que as medidas de correlação de todos os estados do sistema convergem para a equação (4.17). Porém,

ao desligarmos um campo magnético externo do sistema, iremos analisar as equações de correlação para o ensemble de Wigner-Dyson (ECO), com índice $\beta = 1$. Esse fato muda consideravelmente as equações de correlação do sistema visto que novas análises diagramáticas são feitas nos diagramas das figuras referidas.

Ao se fazer a análise geral do efeito HBT multiterminal para esse sistema, as mesmas equações serão utilizadas para os estado agrupados de reflexão (3.16 - 3.17). Para os estados agrupados de transmissão, utilizaremos a equação já generalizada (4.2), assim como para o os estados mistos (4.3) e o estado de transmissão total (4.4). Ao passo que transformar essas equações em diagramas como fora feito anteriormente, no caso mais geral possível, continuaremos analisando os diagramas desenhados na figura (4.2) com a sutil diferença de que a matriz de espalhamento é uma matriz simétrica real do grupo unitário de modo que $U^{\dagger} = U^{T}$ e, com isso, mais realizações na técnica diagramática são possíveis. Ademais, a própria estatística clássica discutida anteriormente, referente ao número de estados em função no número total de terminais no problema, também é a mesma, ou seja, as equações (4.5 - 4.7), que se referem ao ponderamento de quantos estados acessíveis existem no sistema não são modificadas pela presença ou pela ausência de um campo magnético externo.

Ao utilizarmos a técnica diagramática, conseguimos chegar às equações de correlação entre as partículas nos terminais de saída em função do número total de canais abertos no problema. Para cada estado, as equações são dadas das seguintes maneiras:

i) para o estado agrupado de reflexão,

$$\langle \Psi_{ii} | \Psi_{ii} \rangle = 2 \times \frac{2}{(N_T + 1)(N_T + 3)}; \tag{4.19}$$

ii) para o estado agrupado de transmissão,

$$\langle \Psi_{jj} | \Psi_{jj} \rangle = 2 \times \frac{1}{N_T(N_T + 3)} \times \Theta(N_T - 3); \tag{4.20}$$

iii) já para o estado de reflexão total,

$$\langle \Psi_{12} | \Psi_{12} \rangle = \frac{6N_T + 10 \pm (-8)}{N_T(N_T + 1)(N_T + 3)}; \tag{4.21}$$

iv) para o estado misto,

$$\langle \Psi_{ij}|\Psi_{ij}\rangle = \frac{3N_T + 5 \pm (-4)}{N_T(N_T+1)(N_T+3)} \times \Theta(N_T - 3); \tag{4.22}$$

v) por fim, para o estado de transmissão total,

$$\langle \Psi_{jj'}|\Psi_{jj'}\rangle = \frac{2N_T + 4 \pm (-2)}{N_T(N_T+1)(N_T+3)} \times \Theta(N_T - 4). \tag{4.23}$$

Nas equações, o sinal de + representa a medida de correlação para um sistema utilizando bósons e o -, o transporte utilizando férmions.

As equações (4.19 - 4.23) se referem ao efeito HBT multiterminal no regime metálico, o qual a simetria de reversão temporal é preservada, e o índice de simetria é $\beta = 1$. Essas equações representam o regime quântico extremo, ou seja, no qual já foi substituído $N_k = 1 \vee k$ de modo que a medida de correlação das partículas está em função exclusivamente do número total de canais abertos no problema. Podemos ver graficamente, na figura (4.3), como a medida da correlação das partículas evolui conforme incrementamos novos terminais de saídas ou seja, como a medida de correlação das partículas muda em função do N_T de terminais abertos no problema.

Na figura (4.3), compactamos quatro gráficos. Na parte superior da figura (alíneas (a) e (c)), temos as equações de correlação referentes ao sistema quando no espalhamento utilizarmos bósons, enquanto na parte de baixo da figura (alíneas (b) e (d)) temos a medida da correlação para os férmions. Durante toda a figura, cinco paletas de cores são utilizadas. Cada paleta está associada a um estado específico e, consequentemente, a uma equação referente a esse estado, de tal forma que, temos nas figuras, cinco estados acessíveis para bósons e três estados acessíveis para férmions.

Esses estados estão separados da seguinte maneira: os dois estados referentes aos estados agrupados, como $\langle \Psi_{ii}|\Psi_{ii}\rangle$, cuja equação da medida de correlação (4.19) está na figura de vermelho; e $\langle \Psi_{jj}|\Psi_{jj}\rangle$ cuja equação (4.20) está na figura verde. Além dos estados agrupados, temos três estados espalhados: $\langle \Psi_{12}|\Psi_{12}\rangle$, cuja equação que o descreve é (4.21) e está na figura em preto; o $\langle \Psi_{ij}|\Psi_{ij}\rangle$ descrito pela equação (4.22), que está na figura em vermelho;

e, por fim, $\langle \Psi_{jj'} | \Psi_{jj'} \rangle$ que é dado pela equação (4.23) e está na figura em marrom. É importante ressaltar que essa paleta de cores será utilizada da mesma maneira ao longo de todo o capítulo.

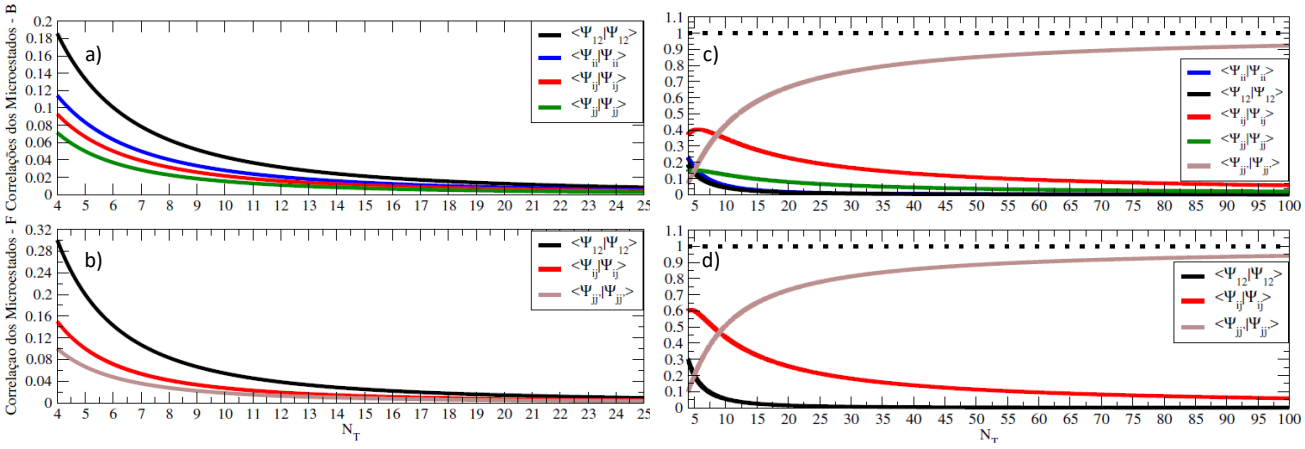

Figura 4.3: Nesta figura, representamos 4 gráficos, a primeira coluna, ou seja, os gráficos das alíneas (a) e (b), representa a medida de correlação individual de cada estado do sistema em função do número total de terminais canais abertos no problema. As alíneas (c) e (d) representam a amplitude de probabilidade de ser medido um conjunto de estados do sistema para, respectivamente, férmions e bósons. Note-se que, nas alíneas (c) e (d), nos referimos a uma medida coletiva, ou seja, aqui tem-se a soma de todas as medidas de correlação associadas a um estado envolvido, diferentemente das alíneas (a) e (b), em que temos as medidas individuais de cada estado do sistema.

Na primeira coluna temos na alínea (a) as equações de correlação referentes ao sistema bosônico. Evidencie-se que, quanto maior o número de terminais de saída acoplados ao problema, menor é a medida de correlação individual das partícuals, ou seja, menor é a medida de correlação associada a uma realização apenas. Além do mais, quanto maior é o número de terminais no problema, mais degenerada é a medida dessa correlação, pois mais estados vão surgindo conforme mostramos nas equações (4.5 - 4.7).

Ademais, percebemos que, quando as partículas forem bósons, há a convergência da equação de correlação para os estados $\langle \Psi_{jj} | \Psi_{jj} \rangle$ e $\langle \Psi_{jj'} | \Psi_{jj'} \rangle$, conforme mostramos nas equações (4.19) e (4.23). Da mesma maneira, não exibimos a equação de correlação para

$\langle\Psi_{jj}|\Psi_{jj'}\rangle$ na alínea (a) dessa figura. Acrescentamos, ainda, que, tanto para bósons na alínea (a) quanto para férmions na alínea (b) da referida figura, a medida de correlação individual de cada estado acessível do sistema das partículas tende a 0 quando $N_T \to \infty$, porém, elas tendem, como está explícito no gráfico, de maneiras distintas, o que torna o resultado ligeiramente diferente do sistema anterior, no qual vimos que todas as medidas de correlação dos sistemas convergiam para a mesma equação (4.17).

Apesar de as medidas individuais de correlação das partículas tenderem a zero individualmente, ao analisarmos o sistema como um todo, ou seja, ao medirmos a amplitude de probabilidade de encontrar as partículas com o aumento do número de terminais, tanto para bósons (alína (b)) quanto para férmions (alínea (d)), é possível ver que há uma convergência nos dois sistemas ao encontrarmos as partículas num estado de transmissão total. Isso ocorre porque, com o incremento de mais terminais de saída, a amplitude de probabilidade de se encontrar um estado de transmissão total é $\propto N_T^2$, enquanto, nos outros estados, as amplitudes são $\propto N_T$. Além disso, ao se fazer a análise da soma das correlações para o nosso sistema, temos

$$\Sigma_{\text{correlações}} = \begin{cases} 2 \times \frac{4}{(N_T+1)(N_T+3)} + E_{CT} \times \frac{2}{N_T(N_T+3)} + 1 \times \frac{6N_T+2}{N_T(N_T+1)(N_T+3)} \\ +E_{MM} \times \frac{3N_T+1}{N_T(N_T+1)(N_T+3)} + E_{TT} \times \frac{2}{N_T(N_T+3)} = 1, \quad \text{para bósons} \\ \\ 1 \times \frac{6}{N_T(N_T+1)} + E_{MM} \times \frac{3}{N_T(N_T+1)} + E_{TT} \times \frac{2}{N_T(N_T+1)} = 1, \quad \text{para férmions.} \end{cases} \tag{4.24}$$

Temos, em vermelho, a estatísitica clássica, discutida anteriormente, e, em azul, as equações de correlação obtidas pela técnica diagramática. Juntas, elas conservam a amplitude de probabilidade para o sistema com $N_T \geq 4$ e no regime quântico extremos, quando $N_k = 1 \vee k$. Em contrapartida, se observarmos novamente a tabela (4.3), perceberemos que a amplitude de probabilidade é conservada para $N_T \leq 3$, portanto, ratificamos que, em nosso problema, a amplitude de probabilidade de detectar as partículas nos terminais de saída após o espalhamento é conservada para qualquer valor de N_T, seja com o campo magnético externo ligado (4.18) ou na ausência de campo magnético externo (4.24).

Enquanto o campo externo leva as equações de correlação das partículas em quaisquer

Correlações	Férmions					Bósons				
	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6
$\langle\Psi_{ii}\|\Psi_{ii}\rangle$	0	0	0	0	0	4/15	1/6	4/35	1/12	4/63
$\langle\Psi_{jj}\|\Psi_{jj}\rangle$	0	0	0	0	0	0	1/9	1/14	1/20	1/27
$\langle\Psi_{12}\|\Psi_{12}\rangle$	1	1/2	3/10	1/5	1/7	7/15	5/18	13/70	2/15	19/189
$\langle\Psi_{ij}\|\Psi_{ij}\rangle$	0	1/4	3/20	1/10	1/14	0	5/36	13/140	1/15	19/378
$\langle\Psi_{jj'}\|\Psi_{jj'}\rangle$	0	0	1/6	1/15	1/21	0	0	1/14	1/20	1/27

Tabela 4.3: Tabela referente à medida de correlação das partículas para o efeito HBT multiterminal com $2 \leq N_T \leq 6$, para o regime metálico, representado pela classe de Wigner-Dyson com índice $\beta = 1$.

estados a serem iguais, nesta situação, ocorre exatamente o oposto. O desligamento do campo magnético, além de levar equações de correlação a equações distintas entre si, leva também a equações de correlação completamente diferentes das equações anteriores nos seus respectivos estados, fato que ocorre porque a interação entre as partículas se torna preponderante nessa situação. As equações encontradas para esse sistema (4.19 - 4.23) são diferentes da equação em que correlação que todos os estados convergiram na situação discutida anteriormente (4.17). Esse fato nos motivou, em situações anteriores, a calcular o termo relativo à localização (wl) nas amplitudes de correlação. Dessa forma, neste capítulo, calcularemos a equação de correlação que se refere ao termo de localização em função do número total de terminais do problema N_T.

Porém, antes de realizarmos esse cálculo, explicitaremos a medida de correlação das partículas para o efeito HBT multiterminal, partindo desde $N_T = 2$ terminais até $N_T = 6$. Isso será feito ao substituirmos o valor de N_T nas equações referentes ao HBT multiterminal sem um campo magnético externo aplicado (4.19 - 4.23). Os resultados da medida de correlação das partículas estão explícitos na tabela (4.3), na qual temos o valor da medida de correlação para cada um dos cinco estados acessíveis ao sistema.

Da mesma forma que fora feito antes, iremos calcular o termo de localização fraca das

partículas, porém, no efeito multiterminal, queremos encontrar a equação que rege a localização das partículas após o espalhamento, ou seja, encontraremos a função localização em termos do número total de canais abertos em cada guia e, a partir da equação geral, iremos recuperar os resultados do capítulo anterior e analisaremos como o efeito de localização muda com o incremento de mais terminais ou, no sentido oposto, com a retirada desses terminais.

Salientamos que, neste momento, a localização será não apenas um valor em porcentagem, como também, equações que se modificam ao mudarmos o valor de N_T do efeito HBT. Portanto, para cada $\langle\Psi_{kl}|\Psi_{kl}\rangle$, teremos uma equação de localização utilizando as equações referentes ao efeito HBT multiterminal no regime metálico com simetria de reversão temporal (4.17) e sem simetria de reversão temporal (4.21 - 4.23). É interessante lembrarmos que a equação de localização será regida pela seguinte equação:

$$wl = \frac{\langle\Psi_{ij}|\Psi_{ij}\rangle^{ECO} - \langle\Psi_{ij}|\Psi_{ij}\rangle^{ECU}}{\langle\Psi_{ij}|\Psi_{ij}\rangle^{ECO}},$$

observando os respectivos sinais para dinstinguirmos o sistema fermiônico do sistema bosônico.

Utilizando as equações referentes, a medida de correlação das partículas para o efeito HBT multiterminal, tanto no caso ECU (4.17) quanto no caso ECO (A - 4.23), além de fazer a distinção do sinal nas equações para bósons e férmions quando os substituímos na equação supracitada, viabiliza que possamos fazer a análise termo a termo e chegarmos às seguintes equações referentes ao termo de localização fraca do sistema HBT multiterminal:

$$wl_{ii} = \frac{1}{2} \times \frac{N_T - 3}{N_T}, \tag{4.25}$$

$$wl_{jj} = \frac{-2}{N_T + 1} \times \Theta(N_T - 3). \tag{4.26}$$

Percebemos que, para os dois estados de agrupamento, o transporte só é possível quando tratarmos o transporte eletrônico com bósons. Já quando as partículas forem férmions, podemos ter apenas os três estados a seguir.

Para o estado de reflexão total a equação de localização é dada por:

$$wl_{12} = \frac{2N_T - 3 \pm 1}{3N_T - 1 \pm 2}, \tag{4.27}$$

enquanto, para o estado misto, a equação de localização, possui a forma

$$wl_{ij} = \frac{N_T - 5}{3N_T + 2 \pm (-1)}; \tag{4.28}$$

por fim, temos o estado de transmissão total temos

$$wl_{jj'} = \frac{-2}{N_T \pm 1}. \tag{4.29}$$

Reiteramos que o sinal $\pm$ serve para distinguir as equações da medida de localização fraca para bósons (+) e para férmions (-), respectivamente.

As equações (4.25 - 4.29) estão graficamente mostradas na figura (4.4). Os gráficos revelam que as equações de localização, em sua maioria, são distintas entre si, salvo a equação de localização referente ao estado agrupado de transmissão (4.26) e a equação referente ao termo de localização para o estado de transmissão total (4.29), e apenas no caso específico em que há bósons no espalhamento. Devido a esses dois casos citados, podemos ver que, na parte superior da figura, só estão explícitas no gráfico 4 linhas referentes às medidas de correlação dos estados acessíveis, porque as linhas referentes aos estados $\langle\Psi_{jj}|\Psi_{jj}\rangle$ e $\langle\Psi_{jj'}|\Psi_{jj'}\rangle$ sobrepõem-se. Além disso, esses dois estados têm o termo de localização $wl \leq 0$, o que significa que, independentemente de adicionar ou retirar terminais, há sempre antilocalização. Além disso, para $\langle\Psi_{jj'}|\Psi_{jj'}\rangle$ há antilocalização tanto para o sistema bosônico, quanto fermiônico.

Entretanto, a medida de correlação para outros estados tem, antagonicamente aos estados $\langle\Psi_{jj}|\Psi_{jj}\rangle$ e $\langle\Psi_{jj'}|\Psi_{jj'}\rangle$, sempre valores positivos, portanto, a medida de localização desses estados implica em $wl \geq 0 \vee N_T$ como é o caso dos estados refletidos ($\langle\Psi_{ii}|\Psi_{ii}\rangle$ (4.25)) e o estado de reflexão total ($\langle\Psi_{12}|\Psi_{12}\rangle$).

Percebemos, também, que nem sempre só localizado (ou antilocalizado) é a medida da correlação. Por exemplo, para os estado mistos, tanto para bósons quanto para férmions, temos uma propriedade referente a esses sistemas: apenas nesses estados conseguimos ver que há uma transição de antilocalização para localização. Essa especificidade ocorre exatamente em $N_T = 5$ na equação (4.28). Isso significa que, para o efeito HBT, estudado no capítulo anterior, o termo de localização entre o estado misto era negativo, porém, ao se incrementarem mais terminais de saída e se analisarem as equações referentes aos resultados

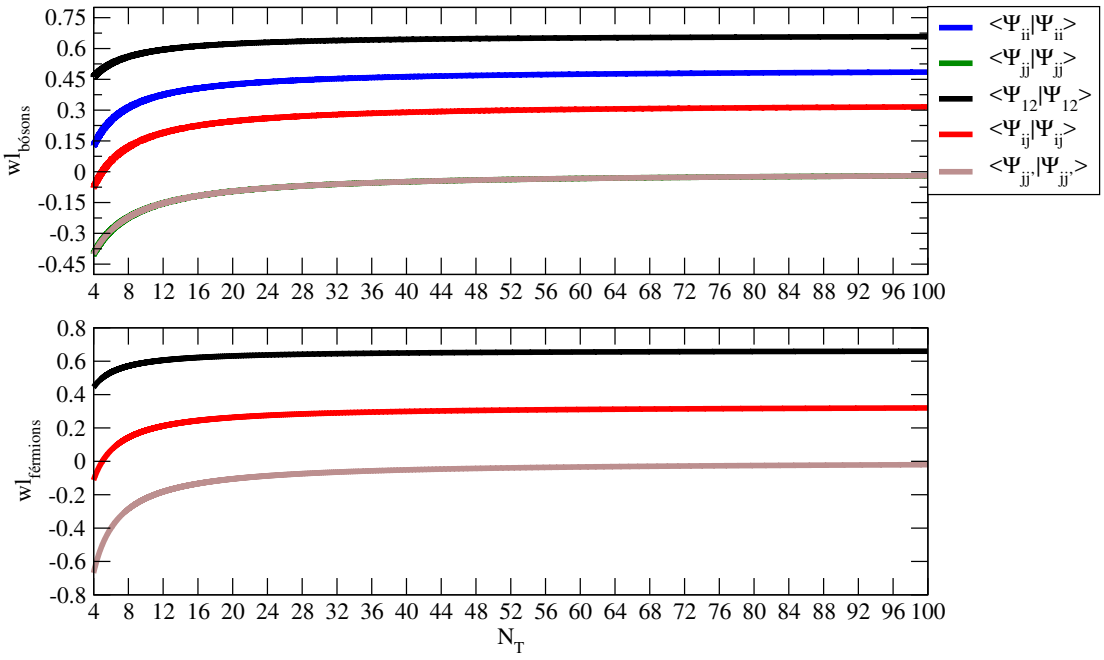

Figura 4.4: A figura representa graficamente as equações referentes às medidas de localização do efeito HBT multiterminal (4.25 - 4.29). Nas partes superior e inferior temos, respectivamente, a medida de localização das partículas para o sistema bosônico e fermiônico. Cada paleta de cor descreve um estado acessível do sistema. Aqui temos as medidas da correlação do sistema para $N_T \geq 4$.

da wl do estado misto percebemos que entre $N_T = 4$ e $N_T = 6$, há uma mudança de antilocalização para localização nesse estado acessível. Inclusive, percebemos que, para $N_T = 5$, a medida de localização é nula, o que diz que o termo de interferência, devido ao campo magnético do sistema, é indiferente, levando a mesma medida de localização para a classe de Wigner-Dyson com e sem campo magnético.

Por outro lado, em primeira ordem, podemos perceber que há convergências nas equações (4.25 - 4.29) na medida em que tomamos o seguinte limite: $N_T \to \infty$. Podemos confirmar essa convergência ao analisar os gráficos na imagem (4.4). Esse limite é chamado de limite semiclássico, visto que a medida de correlação de grosso modo é a superposição de um termo clássico com suas correções quânticas. Com o aumento do número de terminais mais próximo do límite clássico estará o sistema, pois os termos de interferência quântica ficam

tão pequenos que são desprezíveis.

Porém, esse fato é melhor analisado ao expandirmos as equações de localização em função do número total de terminais N_T. Como a técnica diagramática nos dá uma equação exata da medida de localização do sistema, podemos fazer a expansão para melhor compreendermos o que é o termo clássico e o que é a correção quântica da medida de localização do sistema em função de N_T.

Para tal, iremos fazer a expansão das equações de localização apenas até a segunda ordem. Tanto para o sistema bosônico quanto para o fermiônico, temos as seguintes expansões das equações de localização:

$$wl_{ii} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{N_T}\right), \tag{4.30}$$

$$wl_{jj} = \frac{-2}{N_T}\left(1 - \frac{1}{N_T} + \frac{1}{N_T^2} + ...\right), \tag{4.31}$$

$$wl_{12} = \frac{2N_T - 3 \pm 1}{3N_T}\left(1 \pm \frac{-1}{(2 \pm 1)N_T} + \frac{1}{((2 \pm 1)N_T)^2} + ...\right), \tag{4.32}$$

$$wl_{ij} = \frac{N_T - 5}{3N_T}\left(1 \pm \frac{-1}{(2 \pm 1)N_T} + \frac{1}{((2 \pm 1)N_T)^2} + ...\right), \tag{4.33}$$

$$wl_{jj'} = \frac{-2}{N_T}\left(1 \pm \frac{-1}{N_T} + \frac{1}{N_T^2} + ...\right). \tag{4.34}$$

Nas equações acima, temos a compactação das equações referentes aos termos de localização, utilizando bósons e férmions com sinais de + e - respectivamente.

Além disso, conseguimos perceber que o primeiro termo é o termo clássico da medida de localização, enquanto os demais termos (entre parênteses) são os termos referentes às correções quânticas. Em vista disso, pode-se tomar regime de muitos terminais abertos ($N_T \to \infty$), ou seja, no limite semiclássico apenas o primeiro termo da medida de localização é não nulo de tal forma que o 2° e 3° termo que são $\propto 1/N_T$ e $1/N_T^2$, vão a zero mais rapidamente.

wl	Férmions					Bósons				
	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6
wl_{ii}	0	0	0	0	0	-25	0	12.5	20	25
wl_{jj}	0	0	0	0	0	0	-50	-40	-33.33	-28
wl_{12}	0	33.33	44.44	50	53.33	28.57	40	46.15	50	52.63
wl_{ij}	0	-33.33	-11.11	0	6.66	0	-20	-7.69	0	5.26
$wl_{jj'}$	0	0	-66.66	-50	-40	0	0	-40	-33.33	-28.57

Tabela 4.4: Tabela referente à medida do termo de localização em % para o efeito HBT multiterminal com $2 \leq N_T \leq 6$, para o regime metálico, representado pela classe de Wigner-Dyson.

Dito isso, percebamos que assim como foi visto nas equações (4.26) e (4.29), as suas expansões seguem iguais e são os únicos dois termos que tendem a zero no limite semiclássico. Por outro lado, quando $N_T \to \infty$, temos que as medidas de correlação são, para sistemas bosônicos, respectivamente, $wl_{ii} = 1/2$, $wl_{12} = 2/3$ e $wl_{ij} = 1/3$. Essas assíntotas estão explícitas no gráfico superior da imagem (4.4), em formato de linha tracejada, e, para o sistema fermiônico temos as mesmas assíntotas, porém com estados acessíveis distintos, o que nos leva à seguinte conclusão: no regime semiclássico, não há distinguibilidade da natureza das partículas, férmions e bósons têm a mesma medida de correlação no sistema.

Utilizando as equações da localização das partículas (4.25 - 4.29) para o efeito HBT multiterminal e substituindo o valor de N_T com $2 \leq N_T \leq 6$, conseguimos chegar à tabela (4.4), cujos valores medem a localização do efeito HBT multiterminal em porcentagem. Os valores referidos na tabela são valores exatos para o termo de localização. É importante notar que, no sistema fermiônico, o termo wl_{12} é nulo, e isso significa que as medidas de correlação das partículas são as mesmas, de tal modo que haver ou não campo magnético externo é indiferente à medida da correlação. Isso podemos confirmar com as tabelas anteriores (4.3 - 4.2), cujos valores da correlação referentes ao estado $\langle \Psi_{12} | \Psi_{12} \rangle = 1$ para os dois sistemas.

Além do mais, podemos ver também que os valores da medida do termo de localização

quando $N_T = 4$ recuperam a tabela (3.2) da localização fraca para o efeito HBT discutido no capítulo anterior. Portanto, nossas equações (4.25 - 4.29), referentes ao termo de localização fraca do sistema HBT mutiterminal em função do número de terminais de saída N_T abertos do sistema satisfazem $\vee N_T$.

Nas próximas seções seremos mais sucintos ao discutirmos o efeito HBT multiterminal. Iremos utilizar a simetria quiral e observar de que maneira o termo de quiralidade afeta as equações de correlação e consequentemente as equações referentes ao termo de localização do sistema. Para isso, iremos generalizar os diagramas mostrados nas figuras anteriores, assim como as equações de correlação para o sistema quiral e seus respectivos termos de localização.

4.4 Equações de correlação e localização fraca para o efeito HBT Multiterminal num bilhar de Dirac

Ao generalizar as equações de correlação das partículas nos terminais de saída, ficamos abarcados de uma análise mais contudente de como a incrementeação (ou redução), de novos terminais de saída modifica a medida de correlação em férmions e bósons no efeito HBT multiterminal. Também vimos, em capítulos anteriores, que o efeito HBT em um dispositivo eletrônico com simetria de sub-rede nos dá uma física distinta daquele dispositivo no regime metálico, e também percebemos que a simetria de sub-rede é um emaranhador natural das partículas dentro do ponto quântico. Em vista disso, nesta seção, iremos generalizar as equações da medida de correlação das partículas nos terminais de saída para um dispositivo eletrônico com simetria de sub-rede.

Para tanto, generalizaremos os diagramas desenhados nas figuras (3.11 - 3.14) de tal forma que ao generalizá-los, a técnica diagramática será efetuada sobre um único diagrama, sendo ele um resultado geral referente à média da medida de correlação das partículas sobre qualquer um dos 5 estados discutidos previamente. Essa medida de correlação estará em

função de N_T terminais de saída. Diferentemente do regime metálico, no regime quiral há apenas 1 tipo de diagrama envolvido no problema, aquele cuja linha tracejada com $*$ está na diagonal intercalada com a linha tracejada e sem o $*$. Por esse motivo será apenas necessário analisar um único diagrama geral.

Esse único diagrama vem do fato de os termos U e $U^\dagger$, em todas equações de correlação para o caso quiral, estarem dispostos de maneira intercalada, como podemos ver nas equações (3.55 - 3.62).

Sem perda de generalidade, ao utilizarmos a simetria de quiralidade do problema ($S = \Sigma_z$ $S^\dagger$ Σ_z) e a decomposição da matriz S, como feito no capítulo anterior (baseado na Tabela de Cartan), na qual a matriz Σ_z continua sendo a matriz de Dirac. Utilizando essas relações, a equação geral para a classe do ensemble quiral é dada por

$$\mathbf{Tr}\left[\mathcal{P}_{ij}U^\dagger\Sigma_z U\mathcal{P}_{kl}U^\dagger\Sigma_z U\mathcal{P}_{\mu\eta}U^\dagger\Sigma_z U\mathcal{P}_{ab}UU^\dagger\Sigma_z U\right]. \tag{4.35}$$

Nessa equação, ao substituirmos os subíndices, podemos recuperar qualquer uma das equações mencionadas anteriormente. Por exemplo, se i=η=2 e j=k=l=μ=a=b=1, recuperamos $\mathbf{Tr}\left[\mathcal{P}_{21}U^\dagger\Sigma_z U\mathcal{P}_{11}U^\dagger\Sigma_z U\mathcal{P}_{12}U^\dagger\Sigma_z U\mathcal{P}_{11}U^\dagger\Sigma_z U\right]$, que é a equação de correlação para $\langle\Psi_{11}|\Psi_{11}\rangle$ no sistema quiral (3.55), e assim sucessivamente.

Transformar a equação geral (4.35) em diagramas gerais, utilizando os símbolos referidos na figura (3.5), é crucial para resolvermos o problema e encontrarmos as equações da medida de correlação das partículas em função do número N_T. Para isso, desenhamos essa equação na figura (4.5), na qual novamente ratificamos que nenhuma informação da equação pode ser suprimida nessa transformação.

Ao aplicarmos as regras da técnica diagramática utilizando o diagrama mostrado na figura (4.5) para obtermos os resultados analíticos das equações de correlação do sistema, chegaremos às equações analíticas para o efeito HBT multiterminal com simetria quiral. Em consonância com o disposto na seção anterior, utilizaremos os cinco estados espalhados. Começaremos mostrando as equações de correlação do regime quiral com um campo magnético externo ligado. Esse sistema é dado via TMA pela classe quiral rotulada com o

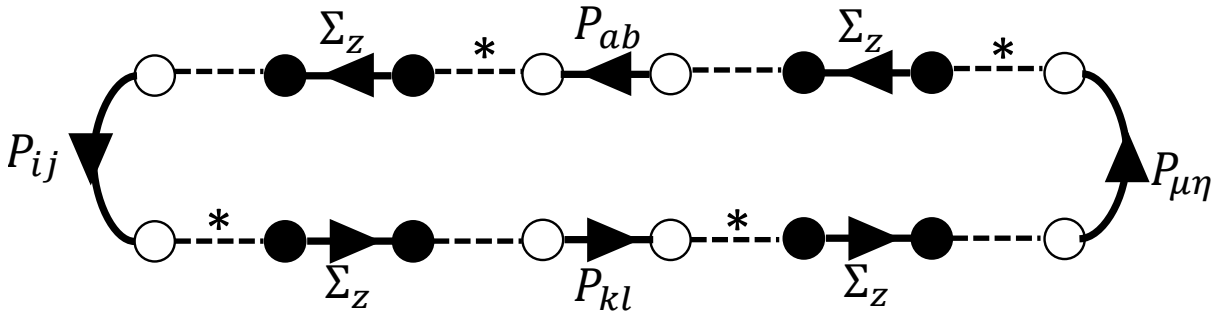

Figura 4.5: A figura mostra o único tipo de diagrama a ser analisado no problema em questão. Temos, nele, a representação diagramática geral das equações (3.55 - 3.62). A partir desse princípio, é possível encontrar todas as medidas de correlação das partículas para qualquer um dos 5 estados discutidos anteriormente.

índice $\beta = 2$, que é a classe dos ensembles circulares unitários quirais (chECU). Além disso, as equações mostradas a seguir são válidas para o regime quântico extremo, em que todos os guias têm apenas um único modo propagante aberto, ou seja, $N_k = 1 \vee k$. Ao utilizarmos a técnica diagramática, conseguimos chegar às equações de correlação entre as partículas nos terminais de saída em função no número total de canais abertos no problema, cujas relações são:

i) correlação referente ao estado agrupado de reflexão,

$$\langle \Psi_{ii} | \Psi_{ii} \rangle = 2 \times \frac{N_T}{(N_T + 3)(N_T^2 - 1)}; \tag{4.36}$$

ii) correlação referente ao estado agrupado de transmissão,

$$\langle \Psi_{jj} | \Psi_{jj} \rangle = 2 \times \frac{N_T + 2}{(N_T + 3)(N_T^2 - 1)} \times \Theta(N_T - 3); \tag{4.37}$$

iii) correlação referente ao estado de reflexão total,

$$\langle \Psi_{12} | \Psi_{12} \rangle = \frac{3N_T + 5 \pm (-4)}{(N_T^2 - 1)(N_T + 3)}; \tag{4.38}$$

iv) correlação referente ao estado misto,

$$\langle \Psi_{ij} | \Psi_{ij} \rangle = \frac{2N_T + 4 \pm (-2)}{(N_T^2 - 1)(N_T + 3)} \times \Theta(N_T - 3); \tag{4.39}$$

v) correlação de transmissão total,

$$\langle \Psi_{jj'} | \Psi_{jj'} \rangle = \frac{2N_T^2 - 12 \pm (-2N_T)}{(N_T^2 - 9)(N_T^2 - 1)} \times \Theta(N_T - 4). \tag{4.40}$$

As equações da medida de correlação para o sistema com quiralidade são dadas pelas equações acima (4.36 -4.40), de modo que conseguimos perceber que elas são distintas entre si. Ratifica-se, assim, o que expressamos na tabela (3.4), na qual a quiralidade quebra a igualdade da medida de correlação das partículas para o sistema HBT mesmo que exista um campo magnético externo acoplado ao sistema quebrando a simetria de reversão temporal. Isso elucida o fato de que a própria estrutura de grafeno é um emaranhador natural das partículas, fazendo com que as medidas de correlação em geral não se dirijam a uma única equação como foi visto anteriormente (4.17).

Por conseguinte, conseguimos calcular explicitamente o valor da medida de correlação para vários aparatos HBT, visto que nossas equações são universais e, à medida que mudamos N_T, conseguimos encontrar o valor da medida de correlação para férmions ou bósons utilizando as equações já mencionadas. Através desses resultados, conseguimos gerar a tabela (3.5), referente à medida de correlação das partículas para o efeito HBT desde $2 \leq N_T \leq 6$. Em específico, na tabela, temos que, para $N_T = 4$, recuperamos o valor de cada medida de correlação encontrado anteriormente e que estava explícito na tabela (3.4) quando tivermos o efeito HBT com B $\neq 0$.

Comparar resultados atuais com resultados anteriores é reconfortante no sentido de dar um norte para o trabalho que estamos realizando, por outro lado, novos resultados sempre são mais desafiadores de serem avaliados. Em vista disso, podemos perceber que, em todas as tabelas, (4.2,4.3 e 4.5) a medida de correlação para férmions no estado $\langle \Psi_{12} | \Psi_{12} \rangle$ é 100%. Esse fato que não ocorre por acaso, já que, se estivermos num efeito HBT em que haja apenas 2 terminais de saída e ao injetarmos sobre o ponto quântico duas partículas de spin 1/2 de tal forma que uma delas seja $|\uparrow\rangle$ e a outra $|\downarrow\rangle$, a medição de uma das partículas, após o espalhamento, levará a um sistema 100% correlacionado, ou seja, se uma das partículas medidas for $|\downarrow\rangle$, por exemplo, a outra necessariamente será $|\uparrow\rangle$. Esse sistema físico é comumente chamado de sistema quântico de dois níveis. Em nossa tese, conseguimos verificar

Correlações	Férmions					Bósons				
	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6
$\langle\Psi_{ii}\|\Psi_{ii}\rangle$	0	0	0	0	0	4/15	1/8	8/105	5/96	4/105
$\langle\Psi_{jj}\|\Psi_{jj}\rangle$	0	0	0	0	0	0	5/24	4/35	7/96	16/315
$\langle\Psi_{12}\|\Psi_{12}\rangle$	1	3/8	1/5	1/8	3/35	7/15	5/24	13/105	1/12	19/315
$\langle\Psi_{ij}\|\Psi_{ij}\rangle$	0	1/4	2/15	1/12	2/35	0	1/6	2/21	1/16	2/45
$\langle\Psi_{jj'}\|\Psi_{jj'}\rangle$	0	0	4/15	1/8	8/105	0	0	4/35	7/96	16/315

Tabela 4.5: Tabela referente à medida de correlação das partículas para o efeito HBT multiterminal com $2 \leq N_T \leq 6$, para o regime quiral unitário, com índice $\beta = 2$.

que a simetria de quiralidade preserva fortemente esse sistema.

Ao compararmos as tabelas referentes ao sistema quiral e ao sistema de Wigner Dyson para $N_T = 4$ no capítulo anterior, já tinhamos visto que a simetria quiral tem forte influência na medida de correlação das partículas, porém, mediante as equações supracitadas, podemos comparar os dois regimes com mais clareza e percebemos o quanto a quiralidade, apesar de ser preponderante, possui medição muito sutil, visto que podemos escrever as equações do regime metálico com um campo magnético externo ligado (4.17) em função das equações para o mesmo sitema, porém com quiralidade, e essa relação será dada por

$$\langle\Psi_{kl}|\Psi_{kl}\rangle_{wd} \sim \langle\Psi_{kl}|\Psi_{kl}\rangle_{ch} \times \left(1 + \frac{2}{N_T} - \frac{3}{N_T^2}\right), \tag{4.41}$$

em que utilizamos $\langle\Psi_{kl}|\Psi_{kl}\rangle$ para qualquer estado acessível do sistema e os subíndices wd e ch para dizer que a medida dessa correlação é da classe de Wigner-Dyson e Quiral, respectivamente. A equação anterior já foi analisada, tomando um limite semiclássico, quando $N_T \gg 1$, e pudemos perceber que as medidas de correlação das partículas no regime metálico (classe ECU) e no regime quiral (classe chECU) convergem e são idênticas quando $N_T \to \infty$. Além disso, no regime cujo $N_T \to \infty$, a medida das correlações individuais também tende a zero e a medida de correlação coletiva tende a 100% unicamente para o regime $\langle\Psi_{jj'}|\Psi_{jj'}\rangle$ pelo mesmo motivo discutido anteriormente na figura (4.3), de tal forma que não se faz necessário mais um gráfico elucidando o mesmo problema.

Se no regime quiral, com um campo magnético externo, vimos que as equações de correlação são distintas e a própria quiralidade faz com que as partículas se interferissem, tendo suas medidas de correlações distintas, sem o campo magnético externo, é de se esperar que essa distância se torne mais abrupta, de tal maneira que as equações referentes a esse sistema estejam em consonância com a tabela (3.4) quando $N_T = 4$, assim como a tabela da sua medida de correlação (wl_{ch}) na tabela (3.5).

Desse modo, não só analisaremos as equações de correlação como também seu ganho relativo em função do N_T. Além do mais, objetivamos saber qual termo da medida de correlação para o sistema quiral é referente ao termo clássico e qual é referente ao termo quântico, como fora feito na expansão da localização no regime metálico (2.30 - 2.34). A fim de conseguirmos atingir esse propósito, precisamos fazer a análise geral do efeito HBT multiterminal. Para esse sistema as mesmas equações serão utilizadas de tal forma que, ao transformar essas equações em diagramas continuaremos analisando o diagrama elucidado na figura (4.5). Entretanto, temos uma sutil diferença: a matriz de espalhamento é uma matriz simétrica real do grupo unitário, de tal forma que $U^\dagger = U^T$, e, com isso, mais realizações na técnica diagramática são possíveis.

Ao utilizarmos a técnica diagramática, conseguimos chegar às equações de correlação entre as partículas nos terminais de saída em função no número total de canais abertos no problema com as respectivas correlações:

i) correlação referente ao estado agrupado de reflexão,

$$\langle \Psi_{ii} | \Psi_{ii} \rangle = 2 \times \frac{2N_T}{(N_T - 1)(N_T + 6)(N_T + 2)}; \tag{4.42}$$

ii) correlação referente ao estado agrupado de transmissão,

$$\langle \Psi_{jj} | \Psi_{jj} \rangle = 2 \times \frac{N_T(N_T + 4)}{(N_T^2 - 1)(N_T + 6)(N_T + 2)} \times \Theta(N_T - 3); \tag{4.43}$$

iii) correlação de reflexão total,

$$\langle \Psi_{12} | \Psi_{12} \rangle = \frac{7N_T^2 + 28N_T - 12 \pm (-12N_T)}{(N_T^2 - 1)(N_T + 6)(N_T + 2)}; \tag{4.44}$$

Correlações	Férmions					Bósons				
	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6
$\langle\Psi_{ii}\|\Psi_{ii}\rangle$	0	0	0	0	0	1/4	2/15	4/45	5/77	1/20
$\langle\Psi_{jj}\|\Psi_{jj}\rangle$	0	0	0	0	0	0	7/60	16/225	15/308	1/28
$\langle\Psi_{12}\|\Psi_{12}\rangle$	1	19/40	13/45	11/56	1/7	1/2	11/40	41/225	81/616	1/10
$\langle\Psi_{ij}\|\Psi_{ij}\rangle$	0	9/40	2/15	5/56	9/140	0	19/120	28/225	125/1848	1/20
$\langle\Psi_{jj'}\|\Psi_{jj'}\rangle$	0	0	8/45	5/56	2/35	0	0	8/75	115/1848	3/70

Tabela 4.6: Tabela referente à medida de correlação das partículas para o efeito HBT multiterminal com $2 \leq N_T \leq 6$, para o regime quiral ortogonal, com índice $\beta = 1$.

iv) correlação referente ao estado misto,

$$\langle\Psi_{ij}|\Psi_{ij}\rangle = \frac{N_T(3N_T+14) \pm (-4N_T)}{(N_T^2-1)(N_T+6)(N_T+2)} \times \Theta(N_T-3); \tag{4.45}$$

v) correlação referente ao estado de transmissão total,

$$\langle\Psi_{jj'}|\Psi_{jj'}\rangle = \frac{2N_T(N_T^2+3N-12) \pm (-2N^2)}{(N_T-3)(N_T^2-1)(N_T+6)(N_T+2)}. \tag{4.46}$$

Apesar da extensão das equações acima, elas são as equações gerais para o efeito HBT multiterminal em um dispositivo eletrônico com quiralidade para qualquer valor de N_T. Essas equações são válidas tanto para o transporte de férmions quanto para o transporte de bósons, desde que haja duas partículas partindo do estado separado, como referido anteriormente. Dessa forma, ao substituirmos $N_T = 4$ nas equações (4.42 -4.46), recuperamos os valores esperados e explícitos na tabela (3.4) anteriormente analisados, como podemos ver na tabela (4.6).

A tabela (4.6) mostra explicitamente a medida de correlação para o nosso sistema entre $2 \leq N_T \leq 6$. Nela, podemos ver que, quando $N_T = 2$, para um sistema fermiônico, temos novamente um sistema de dois níveis, e esse valor se repete ao longo de todas as medidas de correlação, independente de estarmos no regime metálico (4.2-4.3) ou no regime quiral (4.5 -4.6), com ou sem campo magnético externo, ou seja, para $\beta = 1$ ou $\beta = 2$ em ambos regimes.

Assim como fizemos outrora, o cálculo da localização fraca das partículas depende das equações de correlação do sistema no regime descrito pelo ensemble da classe quiral unitária (4.36 -4.40), assim como pelo ensemble da classe quiral ortogonal (4.42 - 4.23), sendo observado detalhadamente o sinal para se misturarem as medidas de correlação do sistema fermiônico e bosônico, respectivamente. Para o sistema quiral, assim como para as classes anteriores, a equação de localização do sistema é dada por

$$wl = 100 \times \frac{\langle \Psi_{kl}|\Psi_{kl}\rangle^{chECO} - \langle \Psi_{kl}|\Psi_{kl}\rangle^{chECU}}{\langle \Psi_{kl}|\Psi_{kl}\rangle^{chECO}}, \tag{4.47}$$

em que a medida dessa localização se refere (em %) a quanto da medida de correlação do sistema é dado pela interferência quântica (exclusivamente) entre as partículas. Apesar de a correlação para o chECU ($\mathbf{B} \neq 0$) ter 2 medidas associadas para o sistema com quiralidade,

$$\langle \Psi_{kl}|\Psi_{kl}\rangle^{chECU} = \langle \Psi_{kl}|\Psi_{kl}\rangle^{\text{clássico}} + \langle \Psi_{kl}|\Psi_{kl}\rangle^{\text{quiral}}. \tag{4.48}$$

Haja vista que a quiralidade do problema faz com que as partículas interfiram entre si ao desligarmos o campo magnético externo, passamos para classe chECO, e isso resulta em mais um ingrediente nessa mistura de interferência. Nessa classe, a medida de correlação das partículas tem um fator a mais de interferência, de tal forma que para a classe chECO, temos três medidas que se sobrepõem na medida de correlação das partículas, de modo que

$$\langle \Psi_{kl}|\Psi_{kl}\rangle^{chECO} = \langle \Psi_{kl}|\Psi_{kl}\rangle^{\text{clássico}} + \langle \Psi_{kl}|\Psi_{kl}\rangle^{\text{quiral}} + \langle \Psi_{kl}|\Psi_{kl}\rangle^{\text{interferência}}, \tag{4.49}$$

e, portanto, ao subtrairmos as duas equações supracitadas, conseguimos medir apenas o termo de interferência exclusivamente das partículas utilizando a equação de localização do sistema (4.47).

Utilizando a equação da localização fraca (4.47) temos as seguintes equações de localização fraca para o sistema quiral

$$chwl_{ii} = \frac{1}{2} \times \frac{N_T^2 - 6}{(N_T + 3)(N_T + 1)}, \tag{4.50}$$

$$chwl_{jj} = -\frac{3N_T^2 + 16N_T + 24}{N_T(N_T + 4)(N_T + 3)}, \tag{4.51}$$

para os dois estados de agrupamento.

Para os estados de espalhamento, as equações de localização fraca são dadas por:

$$chwl_{12} = \begin{cases} \dfrac{4(N_T^3 + 3N_T^2 - 2N_T - 12)}{(7N_T^2 + 16N_T - 12)(N_T + 3)}, & \text{para bósons;} \\ \\ \dfrac{4(N_T - 2)}{7N_T - 2}, & \text{para férmions,} \end{cases} \tag{4.52}$$

$$chwl_{ij} = \begin{cases} \dfrac{N_T^3 + N_T^2 - 10N_T - 24}{N_T(3N_T + 10)(N_T + 3)}, & \text{para bósons;} \\ \\ \dfrac{1}{3} \times \dfrac{N_T - 4}{N_T}, & \text{para férmions,} \end{cases} \tag{4.53}$$

$$chwl_{jj'} = \begin{cases} -\dfrac{2(N_T^3 + 2N_T^2 - 12N_T - 36)}{N_T(N_T^2 + 2N_T - 12)(N_T + 3)}, & \text{para bósons;} \\ \\ \dfrac{-2}{N_T}, & \text{para férmions.} \end{cases} \tag{4.54}$$

Nas equações (4.50 -4.54), utilizamos o termo *ch* para disntinguir a medida de localização no sistema quiral das equações (4.25 -4.29), que são as equações da medida de localização referentes ao regime metálico. Elas estão mostradas através dos gráficos na figura (4.6), que revelam a medida de localização das partículas em função do número total de terminais de saídas (N_T) pra $N_T \geq 4$.

Podemos ver, no gráfico superior, que a simetria quiral consegue fazer com que nenhuma equação de localização seja igual a outra, ou seja, quebra totalmente a degenerescência da localização fraca, de tal forma que as medidas da localização dos estados acessíveis diferem entre si. Porém, conforme incrementam-se mais terminais de saídas e mais estados acessíveis, pode-se ver que a medida de localização do sistema vai convergindo a uma assíntota.

Essa assíntota se refere ao valor da medida de correlação quando $N_T \gg 4$, ou seja, quando há tantos terminais de saída que podemos dizer que estamos no limite semiclássico (regime de altas energias). Nesse regime específico, o valor da medida de correlação para os estados

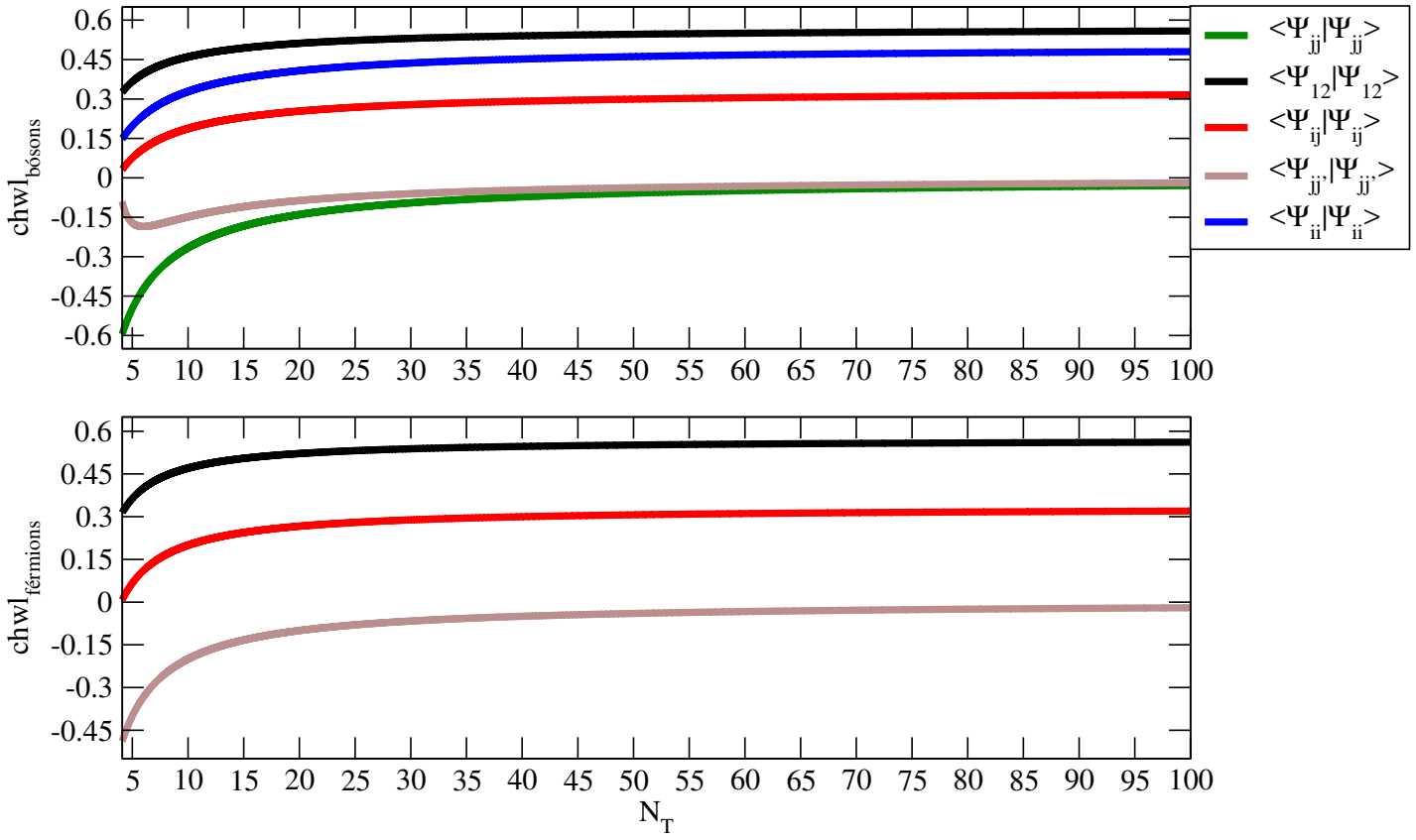

Figura 4.6: A figura mostra dois gráficos, os quais estão relacionados com as equações de localização para o regime quiral (4.50 - 4.54). No gráfico superior, estão as equações de localização referentes ao sistema bosônico, e, no gráfico inferior, as referentes ao sistema fermiônico.

$\langle\Psi_{jj}|\Psi_{jj}\rangle$ e $\langle\Psi_{jj'}|\Psi_{jj'}\rangle$ convergem ambos para 0. Isso significa que a medida de correlação para cada um destes valores é a mesma, independente de haver ou não um campo magnético externo ligado, fato esse também visto no gráfico de localização referente ao regime metálico (sem quiralidade) mostrado na figura (4.4). Porém nesse caso, não havia distinção entre o que era medida de localização para o estado $\langle\Psi_{jj}|\Psi_{jj}\rangle$ e $\langle\Psi_{jj'}|\Psi_{jj'}\rangle$ no sistema bosônico, e, no regime quiral, essa degenerescência é quebrada.

Vimos, também, que a medida de localização fraca no regime metálico pode ser expandida em termos de N_T, de tal forma que conseguimos distinguir o que é o termo principal e o que é o termo de interferência, como fora feito nas equações (4.30 - 4.34). No regime quiral, podemos

perceber que no limite semiclássico, as medidas de localização para os estados $\langle\Psi_{ii}|\Psi_{ii}\rangle$, $\langle\Psi_{12}|\Psi_{12}\rangle$ e $\langle\Psi_{ij}|\Psi_{ij}\rangle$ são diferentes de zero, e elas têm seus valores, respectivamente, $1/2 = 50\%$, $4/7 \approx 57.14\%$ e $1/3 \approx 33.33\%$. Além do mais, essa convergência se repete independente das partículas em questão serem bósons ou férmions, portanto, no regime semiclássico não há distinguibilidade da natureza das partículas.

Mas, mesmo no limite semiclássico, a impressão da quiralidade não pode ser desprezada para o estado acessível de reflexão total, pois esse é o único estado cuja medida de localização fraca no regime quiral diverge do seu valor no regime metálico. No regime quiral, quando $N_T \to \infty$, a medida de localização para o estado referido é $4/7 \approx 57.14\%$ em contraste com seu valor no regime metálico, que é $2/3 \approx 66.66\%$ e que pode ser visto no gráfico (4.4).

chwl	Férmions					Bósons				
	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6
$\langle\Psi_{ii}\|\Psi_{ii}\rangle$	0	0	0	0	0	-6.67	6.25	14.29	19.79	23.81
$\langle\Psi_{jj}\|\Psi_{jj}\rangle$	0	0	0	0	0	0	-78.57	-60.71	-49.72	-42.22
$\langle\Psi_{12}\|\Psi_{12}\rangle$	0	21.05	30.77	36.36	40	6.67	24.24	32.06	36.62	39.68
$\langle\Psi_{ij}\|\Psi_{ij}\rangle$	0	-11.11	0	6.67	11.11	0	-5.26	2.60	7.60	11.11
$\langle\Psi_{jj'}\|\Psi_{jj'}\rangle$	0	0	-50	-40	-33.33	0	0	-7.14	-17.17	-18.52

Tabela 4.7: Tabela referente à medida da localização fraca (em %) das partículas para o efeito HBT multiterminal com $2 \leq N_T \leq 6$, para o regime quiral

Por fim, podemos utilizar as equações (4.50 - 4.54) para recuperarmos os resultados encontrados no capítulo anterior, quando $N_T = 4$, e observarmos como as medidas de correlação mudam paulatinamente ao passo que incrementamos mais (ou menos) N_T no efeito HBT multiterminal no regime quiral, resultados esses que podem ser vistos na tabela (4.7).

Assim como podemos verificar na tabela e na imagem (4.6), a medida de correlação para os estados de transmissão, seja o estado agrupado de transmissão ou o estado espalhado de transmissão total, tem sempre o valor da sua localização negativa e, à proporção que aumentamos o N_T, a medida de localização fraca desses estados vai paulatinamente convergindo ao

valor nulo e que o estado de reflexão total tem uma transição na medida de antilocalização para a medida de localização em $N_T = 4$. Esse dado foi verificado anteriormente na tabela (3.4) para o efeito HBT, confirmado pelas equações gerais (4.39) e (4.45) e mostrado explicitamente nas tabelas (4.5 - 4.6), evidenciando que a medida de localização para o estado misto ($\langle\Psi_{ij}|\Psi_{ij}\rangle$) é nula em $N_T = 4$, porque a medida de correlação para esse estado é sempre 2/15 independente de haver ou não um campo magnético externo. Portanto, essa igualdade na medida da correlação leva a um valor nulo de wl, de tal forma que para $N \leq 4$ esses estados passam a ter uma $wl > 0$, enquanto para $N \geq 4$, eles passam a ter uma medida de $wl < 0$, ocorrendo, assim, uma transição entre antilocalização e localização.

Em linhas gerais, vimos nesse capítulo o efeito HBT multiterminal para o regime metálico e o regime quiral, com e sem campo magnético externo aplicado, para o transporte de férmions e bósons. Vimos também que, no regime metálico com campo magnético externo aplicado, todas as equações de correlação das partículas convergem para o mesmo resultado (4.17), enquanto, para o sistema sem um campo magnético externo cada estado acessível tem sua equação de correlação (4.19 -4.23).

Já no regime quiral, isso não acontece. Vimos que o fato de a medida de correlação ser diferente com e sem campo magnético nos incentiva a calcular as equações referentes aos termos de localização fraca das partículas para a classe de Wigner Dyson (4.25 -4.26) e para a classe quiral (4.50 - 4.54). Ademais, todas as equações de correlação e de localização recuperaram o resultado esperado do capítulo anterior para o efeito HBT apenas ao substituir o valor de $N_T = 4$, como pôde ser visto nas tabelas (4.2 -4.6).

Capítulo 5

Conversão de corrente de spin em corrente de carga em dispositivos de gás elétron 2D e grafeno de camada única

5.1 Introdução

Nos dois capítulos anteriores estudamos um modelo de espalhamento baseado no transporte exclusivamente de partículas as quais poderiam ser férmions ou bósons. Entretanto, em pesquisas mais recentes, é possível ver dispositivos quânticos capazes de analisar o transporte não apenas da carga das partículas como também do spin delas. Esse transporte é baseado no movimento de cargas com a mesma orientação de spin e comumente é chamado de corrente de spin. A área que submerge a partir dessa manipulação é chamada de spintrônica, em analogia com a eletrônica, visto que ela fez o mesmo com o transporte de elétrons em séculos passados. A spintrônica tem como objetivo criar, manipular, gerar e polarizar correntes de spin [36].

Um dos efeitos no qual consegue-se a conversão de corrente de carga em corrente de spin através de uma forte interação spin-órbita é chamado Efeito Hall de spin (SHE) [39]-[90]. Além desse efeito, também é possível gerar corrente de carga através de um bombeamento de corrente de spin. Comumente, bombeia-se uma corrente de spin na interface de um meio magnético e um meio condutor não magnético, de modo que tal bombeamento gera uma corrente DC. Esse efeito é chamado Efeito Hall Inverso de spin (ISHE) [48, 87].

A eficiência da conversão de corrente de spin em corrente de carga é dada pelo parâmetro do ângulo Hall de spin, no qual $\theta_{sH} \sim I^c/I^\alpha$, em que I^c e I^α são, respectivamente, a densidade de corrente de carga e a densidade da corrente de spin no ISHE. Percebemos que a amplitude de θ_{sH} varia entre dois valores nos extremo. Esse fator será zero quando não houver transformação da corrente de spin em corrente de carga, entretanto, se a amplitude de θ_{sH} for igual a um, então, é possível inferir que toda a corrente de spin foi transformada em corrente de carga, consequentemente, temos que $0 < \theta_{sH} < 1$.

Trabalhos recentes investigaram a conversão da corrente de spin em corrente de carga através do efeito Inverso Rashba-Edelstein (IREE) [80, 89], efeito esse que é recíproco ao processo Rashba [82] e ao efeito Edelstein [83]. Similar ao ângulo de spin-Hall, a eficiência da conversão de corrente de carga em corrente de spin no IREE é dada pelo parâmetro λ_{IREE}.

Movidos pela referência [85], neste capítulo, calculamos analiticamente a amplitude da flutuação do parâmetro λ_{IREE}. Em consonância com experimentos recentes, será feita uma estimativa para mostrar que rms$[\lambda_{IREE}]\approx 0.11$, concordando com o resultado do experimento proposto por Zhang *et al.* [89], no qual os autores mediram a amplitude da flutuação do parâmetro λ_{IREE} na interface Ag/Bi que pode ser considerado como um gás de elétrons bidimensional (2DEG).

Para esse fim, continuaremos utilizando, no cálculo analítico, a teoria de matrizes aleatórias (TMA) [11] e o método diagramático. Em especial, neste capítulo, assumiremos que o ponto quântico caótico tem a simetria de rotação de spin quebrada devido a uma forte interação spin-órbita, assim como assumiremos que a simetria de reversão temporal é preservada, portanto, diferentemente dos capítulos anteriores e em consonância com a TMA,

o ensemble circular simplético (CSE) descreve o sistema para um ponto quântico no regime metálico e o ensemble circular quiral simplético (chECS) descreve o sistema quando o ponto quântico tiver também a simetria de sub-rede, como vemos em pontos quânticos de grafeno.

5.2 Cálculo da flutuação do parâmetro λ_{IREE} em pontos quânticos caóticos

Nós utilizamos o ISHE, no modelo da referência [85], no qual o transporte eletrônico ocorre numa cavidade caótica com uma forte interação spin-órbita e o comprimento de relaxação de spin é maior que o comprimento de livre caminho médio da partícula dentro da cavidade. Portanto, a carga percorre toda a cavidade com o spin alinhado numa direção já polarizada dentro dos reservatórios, efeito que pode ser percebido no dispositivo eletrônico analisado na figura (5.1).

Podemos perceber que o ponto quântico caótico está conectado idealmente a três guias. No guia 1, temos um reservatório eletroquímico que bombeia para dentro do ponto quântico uma corrente pura de spin (I^{α}) e, devido à forte interação spin-órbita, essa corrente de spin se acumula de tal forma que uma diferença de potencial é produzida entre os guias transversais ao bombeamento da corrente de spin (guias 2 e 3, respectivamente). Tal diferença gera uma corrente efetiva de carga entre esses guias. Com efeito, portanto, mediante o controle da corrente de spins é possível fazer uma medida direta da tensão V_2 e V_3 com um multimétro apropriado e, por conseguinte, determinar a corrente de carga (I^{c}) que flui entre os guias 2 e 3.

O sistema analisado consiste em um sistema balístico, com uma cavidade caótica que tem três terminais conectados a ela. Cada terminal está acoplado a um guia distinto, de modo que cada guia pode ter uma quantidade N_j de canais abertos. Em vista disso, podemos utilizar equação de Landauer-Buttiker para calcular a corrente de spin que flui no í-ésimo canal em função dos potenciais eletroquímicos acoplados aos guias. Essa corrente de spin é

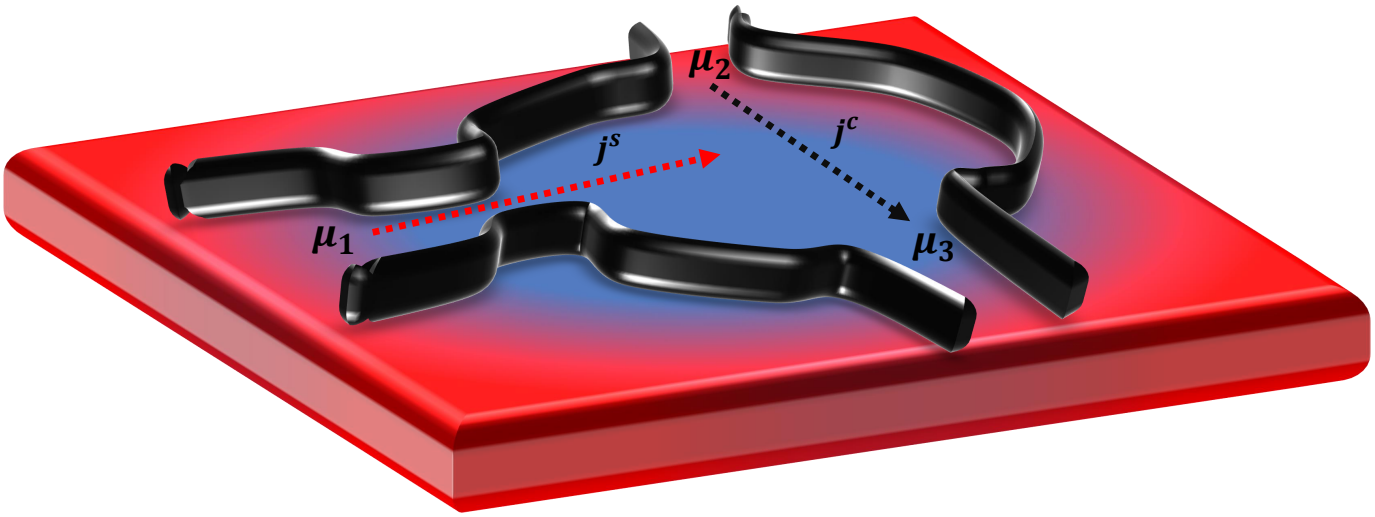

Figura 5.1: A figura mostra o modelo proposto, um ponto quântico caótico conectado idealmente a 3 guias. O guia 1 bombeia para dentro do ponto uma densidade de corrente pura de spin (J^{α}), fazendo com que a acumulação de spin dentro do ponto quântico gere uma corrente de carga entre os guias 2 e 3 devido a uma forte interação spin-órbita.

dada por [86]

$$I_i^{\alpha} = \frac{e}{h}\sum_{\beta}\left(2N_i\delta_{\alpha\beta} - S_{ii}^{\alpha\beta}\right)\mu_i^{\beta} - \frac{e}{h}\sum_{j\neq i,\beta} S_{ij}^{\alpha\beta}\mu_j^{\beta} \tag{5.1}$$

cujos coeficientes $S_{ij}^{\alpha\beta}$ são os mesmos coeficientes de transmissão referidos nos capítulos anteriores. Eles são elementos da matriz de espalhamento do sistema e são obtidos através da soma das amplitudes de probabilidades de transmissão de um elétron que está num estado de spin α no guia i para ir para um estado de spin β no guia j. Essa é a grande diferença dos elementos deste capítulo para o capítulo anterior. O fato de haver spin na transmissão das partículas faz necessário rotular os elementos S da matriz de espalhamento com novos índices, para os quais escolhemos letras gregas.

Notemos que, se $\alpha = 0$, estaremos falando explicitamente de corrente efetiva de carga, visto que não há o termo referente ao spin da partícula. O termo $\delta_{\alpha\beta}$ é a função delta de Kronecker , na qual vale 0 se $\alpha \neq \beta$ e 1 caso contrário, e N_i é o número de canais abertos

no guia i. Temos também, na equação, os potenciais eletroquímicos (V_1, V_2 e V_3). Esses potenciais são dados por $\mu_i^0 = eV_i$, em que V_i é a tensão aplicada no terminal i e μ_i^β é o potencial químico no terminal i que tem cargas polarizadas com spin alinhados na direção β. Ademais, podemos ver que a corrente de carga e a corrente de spin que passa no guia i são dadas por $I_i^0 = I_i$ e I_i^α.

Utilizando a equação geral da corrente de carga/spin (5.1) no modelo dos 3 terminais, podemos encontrar a equação que modela a corrente de carga/spin que perpassa em cada um desses terminais, conforme vemos abaixo:

$$I_1^\alpha = \frac{e}{h}\sum_\beta \left(2N_1\delta_{\alpha\beta} - S_{11}^{\alpha\beta}\right)\mu_1^\beta - \frac{e}{h}\left(\sum_\beta S_{12}^{\alpha\beta}\mu_2^\beta + S_{13}^{\alpha\beta}\mu_3^\beta\right), \tag{5.2}$$

$$I_2^\alpha = \frac{e}{h}\sum_\beta \left(2N_2\delta_{\alpha\beta} - S_{22}^{\alpha\beta}\right)\mu_2^\beta - \frac{e}{h}\left(\sum_\beta S_{21}^{\alpha\beta}\mu_1^\beta + S_{23}^{\alpha\beta}\mu_3^\beta\right), \tag{5.3}$$

$$I_3^\alpha = \frac{e}{h}\sum_\beta \left(2N_3\delta_{\alpha\beta} - S_{33}^{\alpha\beta}\right)\mu_3^\beta - \frac{e}{h}\left(\sum_\beta S_{31}^{\alpha\beta}\mu_1^\beta + S_{32}^{\alpha\beta}\mu_2^\beta\right). \tag{5.4}$$

Modelamos o sistema de tal forma que só exista corrente de spin passando no guia 1, por conseguinte, as correntes de spin nos outros guias são nulas, portanto $I_2^\alpha = I_3^\alpha = 0$ e apenas $I_1^\alpha \neq 0$. No que tange à corrente de carga, ela só existe entre os guias 2 e 3, portanto, podemos utilizar $I_1 = 0$ e $I_2 = I_3 \neq 0$, além do que, devido à conservação da corrente de carga temos $I_2 = -I_3 = I$.

Além dos termos referentes às correntes nas equações (5.2 - 5.4), temos também os termos referentes aos potenciais eletroquímicos. Como mencionado anteriormente, só há acumulação de spin ao longo do guia 1 e, devido a esse fato, podemos utilizar $\mu_1^\beta \neq 0$ e $\mu_2^\beta = \mu_3^\beta = 0$. Em virtude das discussões físicas antecedentes temos a seguinte conclusão para a equação da corrente de spin no guia 1:

$$I_1^\alpha = \frac{e^2}{h}\left(2N_1\delta_{\alpha 0} - S_{11}^{\alpha 0}\right)V_1 + \frac{e}{h}\sum_{\beta\neq 0}\left(2N_1\delta_{\alpha\beta} - S_{11}^{\alpha\beta}\right)\mu_1^\beta, \tag{5.5}$$

por outro lado, a corrente de carga no guia $j = 2, 3$ é dada por

$$I_j^0 = -\frac{e^2}{h}S_{j1}^{00}V_1 - \frac{e}{h}\sum_{\beta\neq 0} S_{j1}^{0\beta}\mu_1^\beta. \tag{5.6}$$

Ao utilizarmos o fato de que no guia 1 não há corrente de carga ($I_1^0 = 0$), podemos encontrar a tensão V_1 fazendo essa substituição, e com isso, temos que

$$V_1 = \frac{1}{e}\sum_{\beta\neq 0}\left(\frac{S_{11}^{0\beta}\mu_1^{\beta}}{(2N_1 - S_{11}^{00})}\right), \tag{5.7}$$

em que conseguimos encontrar a equação da tensão no terminal 1 (V1 5.7) em função dos coeficientes de transmissão das partículas e também em função dos potenciais eletroquímicos de spin.

Por fim, podemos substituir a equação referente à V1 (5.7) na equação referente à corrente de spin (5.5), a fim de encontrarmos a equação geral da corrente de spin que flui ao longo do terminal 1. Isso será feito utilizando a condição de que o reservatório só contém cargas polarizadas na mesma direção da corrente de spin. Assim, podemos escrever que $\alpha = \beta \neq 0$ nas equações citadas e encontramos a equação geral da corrente de spin que passa no guia 1:

$$I_1^{\alpha} = \frac{e}{h}\frac{(-S_{11}^{\alpha 0}S_{11}^{0\alpha}) + (2N_1 - S_{11}^{\alpha\alpha})(2N_1 - S_{11}^{00})}{(2N_1 - S_{11}^{00})}\mu_1^{\alpha}, \tag{5.8}$$

enquanto a corrente geral de carga que passa no guia $j = 2, 3$ é dada por

$$I_j^0 = -\frac{e}{h}\frac{(S_{j1}^{00}S_{11}^{0\alpha}) + S_{j1}^{0\alpha}(2N_1 - S_{11}^{00})}{(2N_1 - S_{11}^{00})}\mu_1^{\alpha}. \tag{5.9}$$

É importante salientar que queremos encontrar a conversão da corrente de spin em corrente de carga e que essa conversão oscila entre zero e um, como mencionamos anteriormente. Isso será feito ao dividirmos a equação geral de carga (5.9) pela equação geral de spin (5.8). Com isso encontraremos a expressão para o parâmetro de conversão, chamado de parâmetro λ_{IREE}, e ele estará apenas em função dos coeficientes de transmissão:

$$\lambda_{IREE} = \frac{I^c}{I^s} = \frac{I_j^0}{I_1^{\alpha}} = \frac{A}{B} = \frac{S_{j1}^{00}S_{11}^{0\alpha} + 2N_1S_{j1}^{0\alpha} - S_{j1}^{0\alpha}S_{11}^{00}}{S_{11}^{\alpha 0}S_{11}^{0\alpha} - (2N_1 - S_{11}^{\alpha\alpha})(2N_1 - S_{11}^{00})}. \tag{5.10}$$

É interessante deixar λ_{IREE} em função apenas dos coeficientes de transmissão, pois seguindo a técnica diagramática e a teoria de matrizes aleatórias, como fora feito em capítulos anteriores, já sabemos como calcular a média, a variância e a covariância dos coeficientes de transmissão se o o sistema for um 2DEG [21, 85] ou se for um material de Dirac [29, 45].

Portanto, temos que a equação da média de λ_{IREE} é dada por

$$\langle\lambda_{IREE}\rangle = \langle\frac{I_j^0}{I_1^\alpha}\rangle = \langle\frac{A}{B}\rangle = \langle\frac{S_{j1}^{00}S_{11}^{0\alpha} + 2N_1S_{j1}^{0\alpha} - S_{j1}^{0\alpha}S_{11}^{00}}{S_{11}^{\alpha0}S_{11}^{0\alpha} - 4N_1^2 + 2N_1S_{11}^{\alpha\alpha} + 2N_1S_{11}^{00} - S_{11}^{\alpha\alpha}S_{11}^{00}}\rangle. \tag{5.11}$$

Contudo, para fazer a média sobre a equação supracitada, foi preciso utilizar a expansão semiclássica, seguindo a referência [84]:

$$\langle\lambda_{IREE}\rangle = \frac{\langle A\rangle}{\langle B\rangle} + \frac{\langle\delta A\rangle\langle B\rangle - \langle\delta B\rangle\langle A\rangle}{\langle B\rangle^2}, \tag{5.12}$$

na qual os termos são escritos em função dos coeficientes de transmissão. As médias sobre os termos são diretamente responsáveis pela média sobre o parâmetro λ_{IREE}, de tal forma que, ao calcularmos as médias sobre esses termos, temos

$$\langle A\rangle = \langle S_{j1}^{00}S_{11}^{0\alpha}\rangle + 2N_1\langle S_{j1}^{0\alpha}\rangle - \langle S_{j1}^{0\alpha}S_{11}^{00}\rangle, \tag{5.13}$$

$$\langle B\rangle = \langle S_{11}^{\alpha0}S_{11}^{0\alpha}\rangle - 4N_1^2 + 2N_1\langle S_{11}^{\alpha\alpha}\rangle + 2N_1\langle S_{11}^{00}\rangle - \langle S_{11}^{\alpha\alpha}S_{11}^{00}\rangle, \tag{5.14}$$

$$\langle\delta A\rangle = \langle\delta S_{j1}^{00}\rangle\langle S_{11}^{0\alpha}\rangle + \langle S_{j1}^{00}\rangle\langle\delta S_{11}^{0\alpha}\rangle + 2N_1\langle\delta S_{j1}^{0\alpha}\rangle - \langle\delta S_{j1}^{0\alpha}\rangle\langle S_{11}^{00}\rangle - \langle S_{j1}^{0\alpha}\rangle\langle\delta S_{11}^{00}\rangle, \tag{5.15}$$

$$\langle\delta B\rangle = \langle\delta S_{11}^{\alpha0}\rangle\langle S_{11}^{0\alpha}\rangle + \langle S_{11}^{\alpha0}\rangle\langle\delta S_{11}^{0\alpha}\rangle + 2N_1\langle\delta S_{11}^{00}\rangle + 2N_1\langle\delta S_{11}^{\alpha\alpha}\rangle - \langle\delta S_{11}^{00}\rangle\langle S_{11}^{\alpha\alpha}\rangle - \langle S_{11}^{00}\rangle\langle\delta S_{11}^{\alpha\alpha}\rangle. \tag{5.16}$$

Levando em conta a média das equações acima, podemos encontrar a média sobre o parâmetro λ_{IREE}, uma vez que as medidas na mecânica quântica não são fixas e flutuam em torno da média, de tal maneira que, podemos fazer um ensemble de medidas e retirarmos sobre ele a média dessas medidas. Essa média é de fato o valor esperado sobre a medida. Mesmo a média contém flutuações, de tal forma que apenas ela não descreve o observável físico de interesse por completo. Assim, precisamos calcular, além da média, a variância e a covariância do termo em questão.

Utilizando a técnica diagramática sobre a média, variância e covariância dos elementos de transmissão nas equações (5.13-5.16), encontramos a medida referente à média de cada

termo em questão, de tal forma que, temos para A e B

$$\langle A\rangle = 0, \tag{5.17}$$

$$\langle B\rangle = -\frac{4N_1^2(N_2+N_3)(2N_T+1)}{N_T(2N_T-1)} \tag{5.18}$$

e para o termo de flutuação δA e δB, temos as seguintes médias:

$$\langle \delta A\rangle = 0, \tag{5.19}$$

$$\langle \delta B\rangle = \frac{8N_1^2(2N_1^2+2N_1N_2+2N_1N_3-N_1-2N_2-2N_3)}{(2N_T-1)^2}. \tag{5.20}$$

Substituindo as referentes médias e flutuações de cada termo equações (5.17 - 5.20) na equação referente à média do parâmetro λ_{IREE}, (5.11) encontramos um valor nulo para sua média, conforme se segue:

$$\langle \lambda_{IREE}\rangle = 0 \tag{5.21}$$

fato esse, que se dá devido ao de as equações (5.17) e (5.19) serem nulas e estarem no denominador tanto do termo principal quanto do termo expandido na equação (5.11).

Mas, apesar de a sua média ser nula, não significa que não há medidas feitas para o parâmetro λ_{IREE}, isso significa apenas que as suas medidas flutuam em torno do zero. Com isso, torna-se fundamental calcular a dispersão do parâmetro λ_{IREE}, visto que há flutuações na sua medida. Para saber a amplitude de sua flutução ao redor da média, a dispersão se faz necessária, e essa dispersão é dada por

$$\mathrm{rms}\,[\lambda_{IREE}] = \sqrt{\mathrm{var}[\lambda_{IREE}]} = \sqrt{\langle\lambda_{IREE}^2\rangle - \langle\lambda_{IREE}\rangle^2} = \sqrt{\langle\lambda_{IREE}^2\rangle}, \tag{5.22}$$

de tal forma que a flutuação do parâmetro λ_{IREE} depende diretamente do segundo cumulante, tendo em vista que a média do parâmentro é nula.

Porém, assim como utilizamos a expansão semiclássica para calcular a média sobre o parâmetro λ_{IREE}, também o faremos para calcular o seu segundo cumulante, de tal forma

que, ao utilizarmos a expansão, poderemos encontrar a variação do parâmetro da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\mathrm{var}[\lambda_{IREE}] &= \langle\lambda_{IREE}^2\rangle = \frac{\langle A\rangle^2}{\langle B\rangle^2} + \frac{\langle\delta A^2\rangle\langle B\rangle^2 + \langle\delta B^2\rangle\langle A\rangle^2 - 2\langle\delta A\delta B\rangle\langle A\rangle\langle B\rangle}{\langle B\rangle^4} \\ &+ 2\frac{\langle\delta A\rangle\langle A\rangle\langle B\rangle - \langle\delta B\rangle\langle A\rangle^2}{\langle B\rangle^3}, \end{aligned} \tag{5.23}$$

a qual pode ser simplificada para:

$$\mathrm{var}[\lambda_{IREE}] = \langle\lambda_{IREE}^2\rangle = \frac{\langle\delta A^2\rangle\langle B\rangle^2}{\langle B\rangle^4} = \frac{\langle\delta A^2\rangle}{\langle B\rangle^2} \tag{5.24}$$

devido ao fato de $\langle\delta A\rangle = \langle A\rangle = 0$.

Apesar da simplificação da equação referente à variância do parâmetro, temos que escrever o termo δA^2 em função dos coeficientes de transmissão, e isso é feito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}&\langle\delta A^2\rangle = \mathrm{var}[S_{j1}^{00}]\langle S_{11}^{01}\rangle^2 + 2\mathrm{covar}[S_{j1}^{00}, S_{11}^{01}]\langle S_{11}^{01}\rangle\langle S_{j1}^{00}\rangle + 4N_1\mathrm{covar}[S_{j1}^{00}, S_{1j}^{01}]\langle S_{11}^{01}\rangle \\ -\ &2\mathrm{covar}[S_{j1}^{00}, S_{1j}^{01}]\langle S_{11}^{01}\rangle\langle S_{11}^{00}\rangle - 2\mathrm{covar}[S_{j1}^{00}, S_{11}^{00}]\langle S_{11}^{01}\rangle\langle S_{1j}^{01}\rangle + \mathrm{var}[S_{11}^{01}]\langle S_{j1}^{00}\rangle^2 \\ &+4N_1\mathrm{covar}[S_{11}^{01}, S_{1j}^{01}]\langle S_{j1}^{00}\rangle - 2\mathrm{covar}[S_{11}^{01}, S_{1j}^{01}]\langle S_{j1}^{00}\rangle\langle S_{11}^{00}\rangle - 2\mathrm{covar}[S_{11}^{01}, S_{11}^{00}]\langle S_{j1}^{00}\rangle\langle S_{1j}^{01}\rangle \\ &+4N_1^2\mathrm{var}[S_{1j}^{01}] - 4N_1\mathrm{var}[S_{1j}^{01}]\langle S_{11}^{00}\rangle - 4N_1\mathrm{covar}[S_{1j}^{01}, S_{11}^{00}]\langle S_{1j}^{01}\rangle + \mathrm{var}[S_{1j}^{01}]\langle S_{11}^{00}\rangle^2 \\ &+2\mathrm{covar}[S_{1j}^{01}, S_{11}^{00}]\langle S_{11}^{00}\rangle\langle S_{1j}^{01}\rangle + \mathrm{var}[S_{11}^{00}]\langle S_{1j}^{01}\rangle^2. \end{aligned} \tag{5.25}$$

na qual, ao utilizamos a técnica diagramática, conseguimos encontrar o termo δA^2 em função do número de canais abertos em cada guia N_j. Essa expressão é dada por

$$\langle\delta A^2\rangle = \frac{64N_1^3N_2N_3(N_T - N_1)(N_T - 1)}{N_T(2N_T - 1)^3(2N_T - 3)}. \tag{5.26}$$

Substituindo as equações (5.18) e (5.26), em (5.24), podemos calcular a flutuação da medida do parâmetro λ_{IREE}, em torno do seu valor médio, e esta medida é dada, em função do número de canais abertos em cada guia, por

$$\mathrm{var}[\lambda_{IREE}] = \frac{1}{4}\frac{N_2N_3}{N_1(N_2 + N_3)N_T^2} \tag{5.27}$$

de modo que $N_T = N_1 + N_2 + N_3$ é o número total de canais abertos em cada guia no problema.

Essa equação (5.27) mostra que apesar da média do parâmetro ser nula, há ainda uma grande medida da sua amplitude devido ao regime de flutuações universais intrínsseco das medições em dispositivos mesoscópicos caóticos. Iremos, a partir dela, fazer a conexão do resultado encontrado na equação citada com a medida experimental encontrada por Zhang *et al.* [89], o qual mediram o parâmetro λ_{IREE} e mediram o valor equivalente a 0.11 ± 0.02nm.

A equação (5.27) está em função apenas do número de guias da figura (5.1). Para fazer a conexão com o resultado experimental, iremos analisar o regime simétrico dessa equação. Esse regime é dado quando todos os guias têm o mesmo número de canais abertos no sistema. Portanto, podemos substituir $N_1 = N_2 = N_3 = N$ na equação da variância (5.27). Substituindo essa condição na equação (5.27), temos o seguinte resultado:

$$\mathrm{var}[\lambda_{IREE}] = \frac{1}{72} \times \frac{1}{N^2}. \tag{5.28}$$

Como utilizamos a expansão semiclássica, a equação (5.28) vale no regime de altas energias $N \gg 1$.

Calculamos a variância do parâmetro de conversão tomando o limite semiclássico e simétrico ao mesmo tempo e, ao substituirmos a equação da variância (5.28) na equação da dispersão (5.22), temos o valor da dispersão do parâmetro λ_{IREE}, o qual é dado por

$$\mathrm{rms}[\lambda_{IREE}] = \sqrt{\frac{1}{72}} \times \sqrt{\frac{1}{N^2}} = \frac{1}{12}\sqrt{2} \times \frac{1}{N} \approx 0.11 \times \frac{1}{N}. \tag{5.29}$$

A equação (5.29) é o resultado para o valor da flutuação universal do parâmetro de conversão de corrente de spin em corrente de carga para o regime metálico num sistema simétrico, nos quais todos os guias têm o mesmo número de canais abertos. Apesar de muito parecido com o valor encontrado no experimento citado, há mais um passo para contundentemente fazermos a conexão entre o nosso resultado analítico e a medida experimental. Esse passo é conseguirmos fazer a conexão entre $1/N$ e a medida em nanômetros.

Para tal, iremos isolar apenas o termo da amplitude e, com isso, temos a seguinte expressão:

$$\mathrm{rms}\left[\frac{I^c \times N}{I^\alpha}\right] \approx 0.11, \tag{5.30}$$

que podemos manipular através de uma multiplicação e divisão pelo fator de N, de tal forma que ficamos com

$$\text{rms}\left[\frac{I^c \times N^2}{I^\alpha \times N}\right] \approx 0.11. \tag{5.31}$$

Aqui, podemos definir uma densidade de corrente por unidade de canais, de tal forma que teremos uma densidade de corrente de carga (J^c) e uma densidade de corrente de spin (J^α) conforme podemos ver na seguintes expressões:

$$J^c = \frac{I^c}{N} \quad J^\alpha = \frac{I^\alpha}{N^2} \tag{5.32}$$

e a dispersão é dada pela equação (5.29), que pode ser escrita em função de J^c e J^α, como

$$\text{rms}\left[\frac{J^c}{J^\alpha}\right] \approx 0.11. \tag{5.33}$$

Além do mais, o número de canais abertos num guia é dado pela seguinte relação[2]:

$$N \approx \text{Int}\left[\frac{W}{\lambda_f}\right], \tag{5.34}$$

em que W é o tamanho da constrição do guia e λ_f é o comprimento de onda de Fermi do material, que é da ordem de nanômetros (nm). Através disso, podemos definir uma densidade de corrente de carga j^c por unidade de W e uma densidade de corrente de spin j^α por unidade de W^2, de tal forma que

$$j^c \approx \frac{J^c}{W} \times \lambda_f \quad j^\alpha \approx \frac{J^\alpha}{W^2} \times \lambda_f^2. \tag{5.35}$$

Por fim, podemos escrever a equação (5.29) em função desses últimos termos (W ,λ_f, j^c), a fim de percebermos que a medida da dispersão do parâmetro λ_{IREE} é escrita em função do comprimento de onda de Fermi para o regime em questão, conforme podemos ver na equação que segue:

$$\text{rms}\left[\lambda_{IREE}\right] = \text{rms}\left[\frac{j^c}{j^\alpha}\right] \approx 0.11 \times \lambda_f \approx 0.11 \text{ nm}. \tag{5.36}$$

Isso nos leva a uma estimativa de que a amplitude da flutuação de λ_{IREE} no regime metálico é da ordem de nanômetros, concordando com o resultado obtido por Zhang *et al*[89].

Entretanto, outro experimento mostra uma flutuação na medição de λ_{IREE} variando de $0.2\ nm$ até $0.33\ nm$ [80]. Para explicar teoricamente esses valores, o primeiro modelo exposto não é suficiente, entretanto, iremos propor um novo modelo para o mesmo efeito e, com isso, pretendemos elucidar as diferentes medidas do mesmo efeito para ambas as situações.

No modelo proposto inicialmente, tínhamos que o reservatório era preenchido com cargas cujo spin está orientado para uma única direção. Por esse fato, utilizamos apenas o rótulo α sobrescrito nos coeficientes de transmissão quando havia transporte de spin, e o rótulo 0 quando era transporte de carga. Portanto, em nosso segundo modelo, haverá correntes de spin com a orientação do spin apontado em qualquer uma das direções (x, y ou z), algo que podemos agora rotular nas equações com índices $\alpha = \beta = \gamma \neq 0$. Nesse segundo modelo será proposto que o reservatório contenha cargas com spin apontado igualmente para qualquer uma dessas três direções, de tal forma que haverá polarizações iguais com os índices de spin α, β e γ.

Com esse fato em voga, precisamos calcular a corrente total de spin, a qual terá a contribuição de cada corrente de spin em uma dada direção, assim como a corrente de carga para um sistema cujos reservatórios tenham cargas com spins apontados em qualquer direção.

Utilizando a equação referente à corrente de spin (5.2) e introduzindo os efeitos explanados até agora, a corrente de spin no guia 1 na direção α será dada por

$$I_1^\alpha = \frac{e}{h}\left((-S_{11}^{\alpha 0})\mu_1^0 + (2N_1 - S_{11}^{\alpha\alpha})\mu_1^\alpha + (-S_{11}^{\alpha\beta})\mu_1^\beta + (-S_{11}^{\alpha\gamma})\mu_1^\gamma\right). \tag{5.37}$$

Como o spin das cargas dentro do reservatório está apontado igualmente em qualquer direção, podemos dizer que a acumulação de spin numa dada direção é a mesma, o que significa que $\mu^\alpha = \mu^\beta = \mu^\gamma$. É importante lembrar $\mu^0 = eV_1$, portanto, a equação acima pode ser escrita como

$$I_1^\alpha = \frac{e}{h}\left((-S_{11}^{\alpha 0})eV_1 + (2N_1 - S_{11}^{\alpha\alpha} - S_{11}^{\alpha\beta} - S_{11}^{\alpha\gamma})\mu_1^{\alpha\beta\gamma}\right), \tag{5.38}$$

em que foi introduzido o termo $\mu_1^{\alpha\beta\gamma} = \mu_1^\alpha = \mu_1^\beta = \mu_1^\gamma$ que não diferencia nenhum potencial.

Novamente, utilizando a condição de que não existe corrente de carga passando através do guia 1 $I_1 = 0$, conseguimos encontrar o potencial V_1 em função dos elementos de transmissão

e do potencial químico elucidado anteriormente. Assim, a equação referente ao potencial é:

$$V_1 = \frac{\mu_1^{\alpha\beta\gamma}}{e}\frac{(S_{11}^{0\alpha}+S_{11}^{0\beta}+S_{11}^{0\gamma})}{(2N_1-S_{11}^{00})}. \tag{5.39}$$

Nota-se que, paulatinamente, novos termos vão surgindo devido ao fato elucidado, substituindo a equação do potencial na equação (5.38), e utilizando o fato de que não há distinção entre os potenciais eletroquímicos de spin, encontramos a corrente de spin na direção α em função dos coeficientes de transmissão:

$$I_1^{\alpha} = \frac{e}{h}\frac{\mu_1^{\alpha\beta\gamma}}{(2N_1-S_{11}^{00})}\left((-S_{11}^{\alpha 0})(S_{11}^{0\alpha}+S_{11}^{0\beta}+S_{11}^{0\gamma})+(2N_1-S_{11}^{00})(2N_1-S_{11}^{\alpha\alpha})-(2N_1-S_{11}^{00})(S_{11}^{\alpha\beta}+S_{11}^{\alpha\gamma})\right), \tag{5.40}$$

na qual percebemos que a corrente geral de spin, nesse caso, depende do potencial eletroquímico e da contribuição de cada termo referente aos coeficientes de transmissão de spin. Por outro lado, a corrente de carga no canal j será também modificada e dada por

$$I_2 = -\frac{e}{h}\frac{\mu_1^{\alpha\beta\gamma}}{(2N_1-S_{11}^{00})}\left(S_{j1}^{00}(S_{11}^{0\alpha}+S_{11}^{0\beta}+S_{11}^{0\gamma})+(2N_1-S_{11}^{00})(S_{j1}^{0\alpha}+S_{j1}^{0\beta}+S_{j1}^{0\gamma})\right). \tag{5.41}$$

A definição do parâmetro λ_{IREE} não é modificada pela presença de mais graus de liberdades de corrente de spin; ela continua sendo a razão entre a corrente de carga e a corrente de spin, porém, nesse segundo modelo, temos mais contribuições em cada corrente. Portanto, a nova equação do parâmetro λ_{IREE} pode ser escrita fazendo a razão entre (5.41) e (5.40), ficando da seguinte forma:

$$\lambda_{IREE}^{\alpha} = \frac{I_j}{I_1^{\alpha}} = \frac{S_{j1}^{00}(S_{11}^{0\alpha}+S_{11}^{0\beta}+S_{11}^{0\gamma})+(2N_1-S_{11}^{00})(S_{j1}^{0\alpha}+S_{j1}^{0\beta}+S_{j1}^{0\gamma})}{(S_{11}^{\alpha 0})(S_{11}^{0\alpha}+S_{11}^{0\beta}+S_{11}^{0\gamma})-(2N_1-S_{11}^{00})(2N_1-S_{11}^{\alpha\alpha})+(2N_1-S_{11}^{00})(S_{11}^{\alpha\beta}+S_{11}^{\alpha\gamma})}. \tag{5.42}$$

Note que, diferentemente da equação (5.10), nessa equação, foi rotulado um sobre-índice α no parâmetro λ_{IREE} para que fique bem claro que, apesar de o terminal estar composto de cargas com spin em todas as direções, no guia 1, excepcionalmente, só irão se propagar as cargas cujo spin estiver orientado na direção α. Embora a diferença de potencial químico dentro do reservatório seja dada por $\Delta\mu = \Delta\mu_\alpha + \Delta\mu_\beta + \Delta\mu_\gamma$ a corrente de spin no guia 1 é polarizada na direção α. Com isso, podemos definir um vetor $\overrightarrow{\lambda}_{IREE}$, dado por

$$\overrightarrow{\lambda}_{IREE} = \sum_{\alpha}\lambda_{IREE}^{\alpha}\times\widehat{e}_{\alpha}, \tag{5.43}$$

em que o módulo desse vetor é dado pela equação (5.42), a qual podemos simplificar da seguinte maneira:

$$\lambda^{\alpha}_{IREE} = \frac{\sum_{\alpha} S^{00}_{j1}(S^{0\alpha}_{11}) + (2N_1 - S^{00}_{11})(S^{0\alpha}_{j1})}{(S^{\alpha 0}_{11})(\sum_{\alpha} S^{0\alpha}_{11}) - (2N_1 - S^{00}_{11})(2N_1 - S^{\alpha\alpha}_{11}) + (2N_1 - S^{00}_{11})(\sum_{\alpha\neq\beta} S^{\alpha\beta}_{11})}. \quad (5.44)$$

Novamente, fazendo a expansão da equação (5.44) como fora feito antes e chamando o numerador de A e o denominador de B, novamente, iremos encontrar que os únicos termos não nulos são $\langle B\rangle$ e $\langle \delta B\rangle$, cuja conclusão é

$$\langle \overrightarrow{\lambda}_{IREE}\rangle = \sum_{\alpha}\langle\lambda^{\alpha}_{IREE}\rangle \times \widehat{e}_{\alpha} = 0, \quad (5.45)$$

ou seja, a média sobre o parâmetro $\overrightarrow{\lambda}_{IREE}$ é nula. No entanto, precisamos calcular a variância do vetor $\overrightarrow{\lambda}_{IREE}$, visto que a dispersão é mais importante do que a sua média, devido às flutuações universais nos sistemas mesoscópicos.

Ao se calcular o produto interno do equação vetorial de $\overrightarrow{\lambda}_{IREE}$, temos

$$\overrightarrow{\lambda}^{2}_{IREE} = (\lambda^{\alpha}_{IREE})^2 + (\lambda^{\beta}_{IREE})^2 + (\lambda^{\gamma}_{IREE})^2, \quad (5.46)$$

em que podemos perceber que, caso existam correntes de spin polarizadas em direções diferentes, os outros fatores irão contribuir para o segundo cumulante do parâmetro. Porém, em nosso modelo, há apenas uma única direção de corrente de spin passando através do guia 1, por exemplo, α, portanto temos que $(\lambda^{\beta}_{IREE})^2 = (\lambda^{\gamma}_{IREE})^2 = 0$.

Para calcularmos $(\lambda^{\alpha}_{IREE})^2$, foi utilizada a mesma técnica da equação (5.24), que consiste em uma expansão semiclássica do termo de $(\lambda^{\alpha}_{IREE})^2$. Ao se fazer essa expansão encontramos a variância e a dispersão do vetor $\overrightarrow{\lambda}_{IREE}$ em questão. Para isso, precisamos calcular a sua dispersão conforme fizemos no modelo anterior, baseando-nos na equação da dispersão de $\overrightarrow{\lambda}_{IREE}$, que é dada por

$$\mathrm{rms}\left[\overrightarrow{\lambda}_{IREE}\right] = \sqrt{\mathrm{var}\left[\overrightarrow{\lambda}_{IREE}\right]} = \sqrt{\langle \overrightarrow{\lambda}^{2}_{IREE}\rangle - \langle \overrightarrow{\lambda}_{IREE}\rangle^2} = \sqrt{\langle(\lambda^{\alpha}_{IREE})^2\rangle}, \quad (5.47)$$

em que novamente a média referente ao parâmetro é nula.

Substituindo os resultados encontrados via técnica diagramática da média, da variância e da covariância dos coeficientes de transmissão referentes ao segundo cumulante do parâmetro $\overrightarrow{\lambda}_{IREE}$, encontramos a variância do vetor, conforme segue abaixo:

$$\text{var}\left[\overrightarrow{\lambda}_{IREE}\right] \approx \frac{3}{4}\frac{N_2N_3}{N_1(N_T-N_1)N_T^2}. \tag{5.48}$$

Observamos que esse resultado é exatamente o triplo do resultado encontrado anteriormente (5.27). Esse fato, atrelado à independência e à equidade de polarização da corrente de spin, ou seja, cada grau de propagação da corrente de spin em uma certa direção, incrementou a mais a medida da variância e, consequentemente, a dispersão do parâmetro de conversão.

Esse incremento é dado nas mesmas proporções, uma vez que temos três direções de polarização da corrente de spin (α, β e γ), de maneira que cada amplitude de propagação contribui com o mesmo fator no total da medida do parâmetro de conversão spin-carga no problema. Como na medida anterior só tinhamos uma única polarização, então, o resultado foi dado pela equação (5.27). Contudo, em nosso problema temos três polarizações da corrente de spin em conjunto, logo, a equação da variância foi incrementada de um fator 3 conforme demonstramos em (5.48). Dessa forma, podemos relacionar a nova medida referente $\overrightarrow{\lambda}_{IREE}$ em função da medida anterior por meio da seguinte equação:

$$\text{var}\left[\overrightarrow{\lambda}_{IREE}\right] = 3 \times \text{var}\left[\lambda_{IREE}\right], \tag{5.49}$$

portanto, temos que, para um regime simétrico (regime no qual $N_1 = N_2 = N_3 = N$),

$$\text{var}\left[\overrightarrow{\lambda}_{IREE}\right] = 3 \times \frac{1}{72} \times \frac{1}{N^2} = \frac{1}{24} \times \frac{1}{N^2}, \tag{5.50}$$

enquanto a dispersão é dada por

$$\text{rms}\left[\overrightarrow{\lambda}_{IREE}\right] = \sqrt{3} \times \sqrt{\frac{1}{72} \times \frac{1}{N^2}} = \sqrt{3} \times 0.11 \times \frac{1}{N} = 0.1905 \times \frac{1}{N}. \tag{5.51}$$

Utilizando a mesma análise dimensional para a corrente de carga e a corrente de spin como fizemos anteriormente, encontramos que a flutuação do parâmetro $\overrightarrow{\lambda}_{IREE}$ para esse novo modelo é dada por:

$$\text{rms}\left[\overrightarrow{\lambda}_{IREE}\right] = \text{rms}\left[\frac{j^c}{j^\alpha}\right] = 0.19 \times \lambda_f \approx 0.20 \text{ nm}, \tag{5.52}$$

e, nesse caso, a medida encontrada também é da mesma ordem de nm, visto que o comprimento de onda de Fermi, nessa situação, ainda é dado pelo regime metálico.

Com o resultado encontrado na equação supracitada, conseguimos perceber que demos uma explicação teórica para o menor valor encontrado para o parâmetro via resultados experimentais do artigo citado. Porém, é preciso lembrar que o parâmetro de conversão no resultado experimental tem uma taxa de variação desde 0.2 até 0.33 e, para obtê-lo, precisamos de uma sutil modificação em nossa teoria.

Em nosso modelo proposto inicialmente, o reservatório continha uma única polarização de spin, na direção α, a qual fazia com que a corrente de spin na mesma direção se propagasse do guia 1 para o ponto quântico. Essa acumulação de corrente de spin levou a um parâmetro de conversão na ordem de 0.11, o que está em consonância com o primeiro resultado experimental [89] encontrado. Porém, um outro excelente resultado experimental [80] mostrou uma taxa de variação da medida de correlação desde 0.2 até 0.33, e, para explicá-lo, modelamos o problema com o fato de haver, dentro do ponto quântico, três polarizações diferentes de spin, as quais, em conjunto, produzem uma corrente de spin polarizada em apenas uma única direção para o ponto quântico. Desse modo, obtivemos um parâmetro vetor $\overrightarrow{\lambda}_{IREE}$ que resultou em um valor de conversão dado por 0.2.

Tendo em mente que o resultado encontrado mediante a equação (5.51) é dado apenas pela acumulação da corrente de spin na direção α adentrando no guia 1, podemos modelar o sistema de tal maneira que não só a corrente de spin na direção α se acumule dentro do ponto quântico como também corrente de spins nas direções β e γ, visto que no terminal há potenciais de cargas com spins nessa direção.

Portanto, nesse novo modelo, existem correntes de spin em outras direções passando pelo guia 1 e adentrando no ponto quântico. Como foi dito que o terminal está preenchido simetricamente, é natural esperarmos que a amplitude de probabilidade de uma corrente de spin na direção α passar pelo guia 1 é a mesma amplitude de probabilidade de uma corrente de spin em qualquer outra direção passar pelo mesmo guia. Portanto, a média da corrente que passa pelo guia é a mesma independente da direção em que estiver a corrente de spin.

Isso nos leva à seguinte relação:

$$\lambda^{\alpha}_{IREE} \times \widehat{e}_{\alpha} = \lambda^{\beta}_{IREE} \times \widehat{e}_{\beta} = \lambda^{\gamma}_{IREE} \times \widehat{e}_{\gamma}, \tag{5.53}$$

e a média, dessa forma, será

$$\langle \overrightarrow{\lambda}_{IREE} \rangle = \sum_{\alpha} \langle \lambda^{\alpha}_{IREE} \rangle \times \widehat{e}_{\alpha} = \langle \lambda^{\alpha}_{IREE} \rangle \times \widehat{e}_{\alpha} + \langle \lambda^{\beta}_{IREE} \rangle \times \widehat{e}_{\beta} + \langle \lambda^{\gamma}_{IREE} \rangle \times \widehat{e}_{\gamma} = 3 \times \langle \lambda^{\alpha}_{IREE} \rangle \times \widehat{e}_{\alpha} = 0. \tag{5.54}$$

Apesar de a média ser nula, as flutuações universais levam novamente à dispersão do parâmetro de conversão, sendo assim, é preciso calcular o novo produto interno. Visto que cada polarização contribui com uma parte para a corrente total de spin, podemos reescrever o produto interno da seguinte forma:

$$\overrightarrow{\lambda}^{2}_{IREE} = (\lambda^{\alpha}_{IREE})^2 + (\lambda^{\beta}_{IREE})^2 + (\lambda^{\gamma}_{IREE})^2 = 3 \times (\lambda^{\alpha}_{IREE})^2, \tag{5.55}$$

devido à equidade da polarização do spin nas direções α, β e γ respectivamente.

Portanto, assim como o fato de a polarização de spin dentro dos terminais ter levado a um fator de três na medida da variância em relação ao resultado original do parâmetro de conversão, o incremento de novas correntes de spin polarizadas em direções diferentes, propagando-se do terminal 1 para o ponto quântico levou também a um fator três na medida da variância em relação ao modelo passado. Portanto, a medida da variação do parâmetro $\overrightarrow{\lambda}_{IREE}$ pode ser escrita como

$$\text{var}\left[\overrightarrow{\lambda}^{2}_{IREE}\right] = (\lambda^{\alpha}_{IREE})^2 + (\lambda^{\beta}_{IREE})^2 + (\lambda^{\gamma}_{IREE})^2 = 3 \times (\lambda^{\alpha}_{IREE})^2. \tag{5.56}$$

Podemos comparar a equação acima (5.56) com a equação (5.47) e perceber que ela tem um fator três em relação à anterior. No que tange à dispersão, esse fator é carregado de tal forma que a equação referente à medida da dispersão do parâmetro $\overrightarrow{\lambda}_{IREE}$ pode ser escrita como

$$\text{rms}\left[\overrightarrow{\lambda}^{2}_{IREE}\right] = \sqrt{(\lambda^{\alpha}_{IREE})^2 + (\lambda^{\beta}_{IREE})^2 + (\lambda^{\gamma}_{IREE})^2} = \sqrt{3} \times (\lambda^{\alpha}_{IREE})^2. \tag{5.57}$$

A equação acima conta com a contribuição das correntes de spin em direções diferentes. Analisando esse parâmetro de conversão no regime simétrico, em que cada guia tem o mesmo

número N de canais abertos, podemos substituir os resultados da equação (5.48) na equação citada e encontrarmos que a amplitude de flutuação do vetor $\overrightarrow{\lambda}_{IREE}$ é expressa do seguinte modo:

$$\text{rms}\left[\overrightarrow{\lambda}_{IREE}\right] = \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{\frac{1}{72} \times \frac{1}{N^2}} = 3 \times 0.11 \times \frac{1}{N} = 0.33 \times \frac{1}{N}. \tag{5.58}$$

Ademais, podemos também verificar que a análise dimensional feita se repete da mesma forma e, portanto, temos que a medida da dispersão do parâmetro $\overrightarrow{\lambda}_{IREE}$ é dada por

$$\text{rms}\left[\overrightarrow{\lambda}_{IREE}\right] = \text{rms}\left[\frac{j^c}{\overrightarrow{j^s}}\right] = 0.33 \text{ nm}. \tag{5.59}$$

Assim, é possível evidenciar que, se levarmos em conta que há apenas uma única corrente polarizada de spin em uma única direção propagando ao longo do guia 1, temos a menor taxa de dispersão do parâmetro estudado, que é da ordem de 0.2. Por outro lado, se não polarizarmos a corrente de spin em uma única direção e levarmos em conta a contribuição das correntes de spin em outras direções, há um incremento na acumulação de spin no ponto quântico, de tal forma que o parâmetro sobe para um valor máximo de 0.33. Esses dois resultados foram medidos experimentalmente no artigo de Rojas *et al.* [80] e estão em consonância com os nossos modelos teóricos.

O nosso modelo teórico elucidado até agora fez conexão com os resultados experimentais mostrados nos artigos citados. Contudo, o dispositivo mesoscópico 2D em questão consiste em uma heterojunção de arseneto de gálio e arseneto de gálio dopado com alumínio. Esse dispositivo mesoscópico balístico 2D (figura 5.1) se encontra no regime metálico e foi descrito via teoria de matrizes aleatórias pelo ensemble de Wigner-Dyson especificamente na classe de ensembles ECS. Entretanto, medidas experimentais mais recentes da medição do parâmetro de conversão de corrente de spin para corrente de carga foram realizadas em dispositivos análogos a pontos quânticos de grafeno. Vale lembrar que esses pontos quânticos têm as funções de ondas eletrônicas descritas pela equação de Dirac sem massa do correspondente relativístico da mecânica quântica, em vez da equação de Schrödinger. Consequentemente, uma nomenclatura apropriada para eles é o ponto quântico Dirac.

Como no cálculo anterior, principal interesse desse cálculo está na comparação com a

medida experimental, medida essa que é da ordem de grandeza da flutuação do parâmetro λ_{IREE} numa configuração experimental em que o mais relevante do dispositivo mesoscópico é um ponto quântico caótico de Dirac com a preservação da simetria de reversão temporal (campo magnético de ausência). Além disso, nessa configuração, o ponto quântico caótico de Dirac preserva também a Simetria de Sub-Rede/Espelho/Quiral.

Ademais, continuaremos a ter a presença de uma forte interação spin-órbita dentro do ponto quântico. A matriz de espalhamento que descreve o sistema é, nessas configurações, um membro do conjunto quiral circular simplético (chECS) no âmbito da teoria de matrizes aleatórias, permitindo, assim, usar, da mesma forma como descrito em capítulos anteriores, a extensão do método diagramático para calcular a média, a variância e a covariância dos elementos de transmissão nos dispositivos de Dirac.

Novamente, utilizamos a mesma equação para o cálculo de λ_{IREE} (5.10), Ao empregarmos essa equação, foi necessário fazer a expansão semiclássica ($N_T \gg 1$) para o cálculo da média (5.11). Porém, a fim de que fosse possível calcular os termos referentes aos coeficientes de transmissão (5.17 - 5.20), para o sistema quiral, foi necessário utilizarmos a expansão da técnica diagramática. Ao substituirmos os resultados encontrados via expansão da técnica diagramática chegamos a seguinte conclusão: mesmo em sistema onde a quiralidade, predomina a média referente a conversão de corrente de spin em corrente de carga - $\langle \lambda_{IREE} \rangle$ - é nula.

Entretanto, como discutimos anteriormente, o principal interesse desse resultado está na medida da flutuação do coeficiente característico. Tomando o limite semiclássico da variância desse coeficiente medido em dispositivos eletrônicos feitos de materiais de Dirac, temos que a equação da variância referente ao primeiro modelo teórico (5.27) se altera e fica neste sistema quiral da seguinte forma:

$$\mathrm{var}\left[\lambda^{q}_{IREE}\right] = \frac{1}{8}\frac{N_2 N_3}{N_1(N_2+N_3)N_T^2}, \tag{5.60}$$

em que utilizamos o índice sobrescrito q para mostrar que esse resultado é atingido devido ao fato de o dispositivo em questão pertencer à classe dos dispositivos de Dirac, preservando, assim, a quiralidade do problema, visto que não abrimos um subtópico para tratar

exclusivamente desse regime como fizemos nos capítulos anteriores.

É possível perceber que há um fator 2 entre a equação para a variância do parâmetro no regime quiral (5.60) e no regime metálico (5.27), $\mathrm{var}\left[\lambda_{IREE}\right] = 2 \times \mathrm{var}\left[\lambda^{q}_{IREE}\right]$, algo que se dá porque a dimensão do hamiltoniano com simetria quiral é da ordem de duas vezes em relação ao hamiltoniano sem essa simetria, como tínhamos no regime metálico.

Porém, o resultado mostrado na equação (5.60) vale para o primeiro modelo teórico, no qual o terminal está polarizado única e exclusivamente com as cargas orientadas com spin em uma única direção. Ao utilizarmos o segundo modelo teórico, em que, dentro do terminal há cargas polarizadas em direções distintas (α, β e γ), a medida da variância é acrescida de um valor de três como foi visto na equação (5.47). Utilizando os cálculos para o regime quiral, esse fator não é diferente, de tal forma que, para o segundo modelo teórico, a medida da variância do coeficiente em questão é dada por

$$\mathrm{var}\left[\overrightarrow{\lambda^{q}}_{IREE}\right] = \frac{3}{8}\frac{N_2 N_3}{N_1(N_2+N_3)N_T^2}, \tag{5.61}$$

na qual o valor continua sendo o triplo do valor encontrado no 1° modelo teórico para a estrutura de grafeno (5.60). Observamos também que existe um fator dois se relacionarmos (5.61) com (5.47), que seriam as relações do transporte nos regimes quiral e metálico, respectivamente.

Em sistemas quirais, a medida experimental da dispersão do coeficiente característico foi dada apenas em ordem de grandeza. De acordo com os resultados experimentais medidos pelo grupo de Azevedo *et al.* [60], essa medida experimental levou a um fator de $\lambda^{q}_{IREE} \approx 10^{-3}$ nm. Portanto, o resultado encontrado da medida do coeficiente característico é completamente diferente daquele que se obteve no regime metálico. Em vista disso, iremos utilizar as equações (5.60) e (5.61) para tentar trazer uma explicação para isso via teoria de matrizes aleatórias.

No regime metálico, fizemos a análise de um sistema simétrico, no qual cada guia continha o mesmo número N de canais de propagação, de tal modo que o número total de canais $N_T = 3N$ e, assim, a expansão em ordens superiores do primeiro e do segundo cumulantes em

relação ao coeficiente característico foi dada tomando o limite semiclássico em que $N_T \gg 1$. Note-se que, para satisfazer o limite semiclássico, o número total de canais no problema tem que ser muito maior que 1.

Dessa forma, podemos olhar as equações também num regime assimétrico, ou seja, num regime em que os guias 2 e 3 têm apenas um único canal aberto ($N_2 = N_3 = 1$), e o guia que propaga a corrente de spin para o ponto quântico tem $N \gg 1$ canais abertos, de tal maneira que $N_T = N + 2 \gg 1$. Essa assimetria satisfaz dois pontos: (i) as equações foram expandidas e só valem para o regime semiclássico, nessa situação $N_T \gg 1$ e (ii) a classe universal quiral é relevante apenas com baixa energia, o que significa que o número de canais de ondas de propagação (N_2 e N_3) precisa ser pequeno, além do fato de que, no regime semiclássico simétrico, em altas energias e longe do ponto zero, as flutuações universais de Wigner-Dyson e Quiral levam aos mesmos resultados.

De acordo com as discussões anteriores, analisando as equações (5.60) e (5.61) no regime assimétrico, ou seja, substituindo $N_2 = N_3 = 1$ e $N_1 = N \gg 1$ nas equações anteriores, temos

$$\mathrm{rms}\left[\lambda^q_{IREE}\right] = \mathrm{rms}\left[\frac{I^c}{I^s}\right] = \sqrt{\mathrm{var}\left[\lambda^q_{IREE}\right]} = \sqrt{\frac{1}{16}\frac{1}{N^3}} = 0.25 \times \frac{1}{N} \times \sqrt{\frac{1}{N}}, \tag{5.62}$$

$$\mathrm{rms}\left[\overrightarrow{\lambda^q}_{IREE}\right] = \mathrm{rms}\left[\frac{I^c}{\overrightarrow{I^s}}\right] = \sqrt{\mathrm{var}\left[\overrightarrow{\lambda^q}_{IREE}\right]} = \sqrt{\frac{3}{16}\frac{1}{N^3}} = 0.43 \times \frac{1}{N} \times \sqrt{\frac{1}{N}}, \tag{5.63}$$

de modo que percebemos que as equações de dispersão acima se distinguem por serem proporcionais a $N^{-3/2}$, enquanto, no regime simétrico, as equações equivalentes da dispersão foram proporcionais a N^{-1} em (5.29) e (5.51).

Por fim, realizaremos a análise dimensional como fora feito anteriormente. Para isso, é preciso retirar dos dados experimentais a espessura da amostra do sistema, em específico, para o experimento mostrado na referência [60], no qual foi utilizada a espessura da amostra (W) da ordem de milímetros, enquanto o comprimento de onda de Fermi característico é da ordem de nanômetros. Tendo em vista esse fato, podemos ver que $N \propto W/\lambda_f \propto 10^6$nm. O fator $1/N \to$ nm, portanto, ao substituirmos esses resultados nas equações (5.62) e (5.63),

temos

$$\text{rms}\left[\overrightarrow{\lambda^q}_{IREE}\right] = \text{rms}\left[\frac{j^c}{j^s}\right] = 0.25 \times 10^{-3}\text{nm}, \tag{5.64}$$

$$\text{rms}\left[\overrightarrow{\lambda^q}_{IREE}\right] = \text{rms}\left[\frac{j^c}{j^s}\right] = 0.43 \times 10^{-3}\text{nm}. \tag{5.65}$$

Por fim, podemos dizer que apresentamos um estudo analítico completo da conversão de corrente de spin em corrente de carga no regime universal para os dispositivos mesoscópicos mostrados na figura (5.1). Obtivemos duas expressões para o coeficiente de conversão característico λ_{IREE} utilizando dois modelos teóricos distintos, (5.10) e (5.44), e todas essas equações foram encontradas utilizando a equação de Landauer-Buttiker, cuja aplicação perpassa por diversos sistemas mesoscópicos. Nossos resultados analíticos foram confirmados via simulação utilizando a teoria de matrizes aleatórias, conforme podemos ver na figura (5.2):

Além do mais, conectamos nossos resultados analíticos com medidas experimentais recentes [89, 80, 60], apresentando uma explicação via teoria de matrizes aleatórias tanto sobre as discrepâncias entre as medidas encontradas no regime metálico quanto a diferença encontrada no regime quiral.

Finalmente, mostramos que a diferença entre as medidas experimentais para um gás de elétrons confinado em 2D da ref.[89] e a mesma medida para um sistema quiral da ref.[60] é um efeito de dispositivo geométrico gerado por assimetria na configuração dos guias.

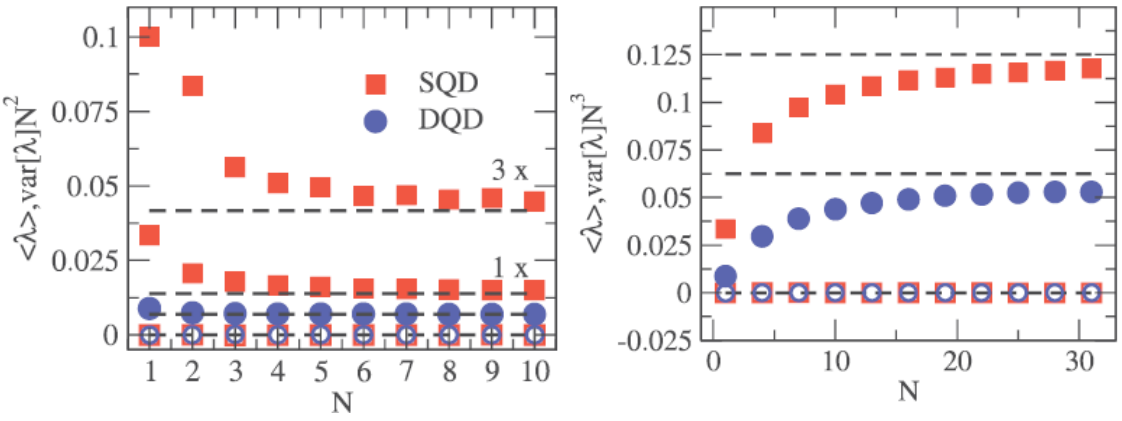

Figura 5.2: A figura mostra o resultado da simulação numérica do sistema no regime metálico e do sistema no regime quiral. Os quadrados e círculos vazados são referentes às médias do coeficiente característico dos dois regimes, em que o valor é zero sempre. Enquanto os quadrados e círculos preenchidos mostram o resultado referente à variância do parâmetro em questão, na parte esquerda do gráfico temos a variância para um regime simétrico ($N_i = N$) e percebemos que, nesse regime, ambos os resultados caem com N^2, enquanto, na parte à direita do gráfico, temos o resultado para a variância no regime assimétrico ($N_1 = N$ e $N_2 = N_3 = 1$) e também percebemos que esse resultado cai com N^3. As linhas pontilhadas mostram o valor teórico da convergência da variância, além de que o quadrado vermelho/vazado representa a variância/média do sistema no regime metálico, enquanto o círculo azul/vazado representa as mesmas medidas no regime quiral.

Capítulo 6

Considerações finais e perspectivas

Conseguimos nesse trabalho analisar o transporte de cargas no efeito Hanbury-Brown Twiss caótico, e obtemos resultados analíticos exatos da medida de correlação e localização fraca das partículas nos terminais posteriori ao espalhamento do ponto quântico caótico nas três classes de ensembles vigentes da teoria de matrizes aleatórias. Específicamente no regime metálico conseguimos conectar os resultados analíticos com resultados experimentais mostrando que a medida de correlação entre férmions é ligeiramente superior a medida de correlação de bósons. Mostramos também que o campo magnético suprime a interferência quântica entre as partículas na classe de Wigner-Dyson e na classe de Altland-Zimbauer, porém na classe quiral isto não ocorre, visto que, as medidas de correlação das partículas são distintas entre si. Por fim, conseguimos generalizar o efeito HBT Catótico em função do número total de canais abertos no sistema N_T, com isto foi possível mostrar que a medida em que $N_T \to \infty$ a medida de correlação das partículas referente aos férmions e bósons são as mesmas, realçando que no regime semi-clássico não há distinção na medida de correlação entre férmions e bósons.

Futuramente é interessante analisar o efeito HBT caótico multiterminal levando em conta a natureza do spin das partículas, ou seja, fazer medidas de correlação das partículas (férmions e bósons), com o ponto quântico caótico dotado interação spin-órbital.

Neste trabalho obtemos resultados analíticos acerca da flutuação universal do parâmetro λ_{IREE} no efeito Hall inverso de spin em uma cavidade caótica de Dirac e em uma cavidade caótica no regime metálico. Mostramos que a expressão para a dispersão do parâmetro numa cavidade caótica de Dirac é da ordem de 10^{-3} nm, diferentemente do valor numa cavidade caótica de Schrödinger que tem uma taxa que vai desde 0.11 nm até 0.33 nm. Conseguimos conectar esses resultados com resultados experimentais vigentes.

Como uma das perspectivas do nosso trabalho acerca da spintrônica é que podemos analisar o parâmetro de conversão da corrente de carga em corrente de spin no efeito Hall quântico de spin, ou seja, analisar o efeito Hall quântico de spin e medir a flutuação da conversão de corrente de carga em corrente de spin nesse efeito.

Apêndice A

Breve informações acerca da técnica diagramática.

Primeiramente vamos lembrar que podemos escrever a equação geral da medida de correlação para a classe de Wigner-Dyson utilizando duas equações, a primeira é com os elementos U e $U^{\dagger}$ intercalados

$$\mathbf{Tr}\left[\mathcal{P}_{ij}U\mathcal{P}_{kl}U^{\dagger}\mathcal{P}_{\mu\eta}U\mathcal{P}_{ab}U^{\dagger}\right], \tag{A.1}$$

está será a primeira equação que iremos explícitar a equação de correlação utilizando a técnica diagramática, e em seguida iremos aplicar a uma medida de correlação.

Seguindo as referências [[21],[29]], podemos escrever a equação (A.1) como um diagrama conforme mostramos na figura (A.1). Portanto, precisamos utilizar o diagrama elencado na figura (A.1) para utilizar na técnica diagramática, para este diagrama e específicamente para a classe unitária do ensemble Wigner-Dyson, apenas quatro combinações são possíveis, essas combinações estão representadas na figura (A.2).

Para cada permutação realizada elencado na imagem da figura (A.2) temos uma equação associada. Cada equação tem um peso e traços dos projetores. Os pesos provém do ciclo dos pesos e os traços do ciclo dos traços. Para os diagramas mostrados na figura (A.2) temos as

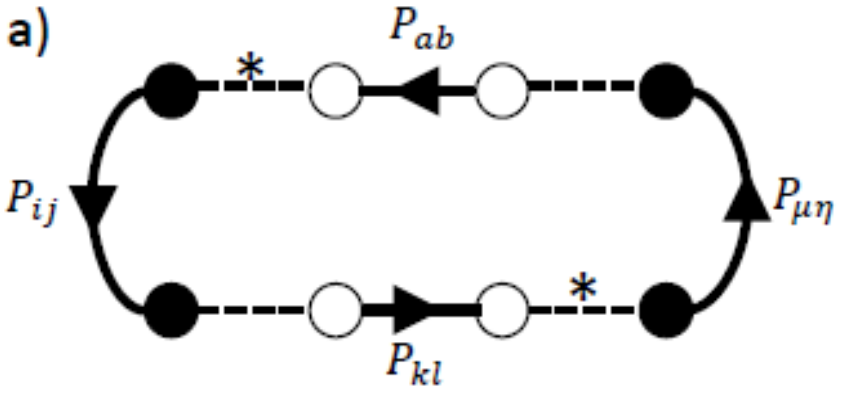

Figura A.1: O diagrama mostrado nesta figura representa a equação (A.1).

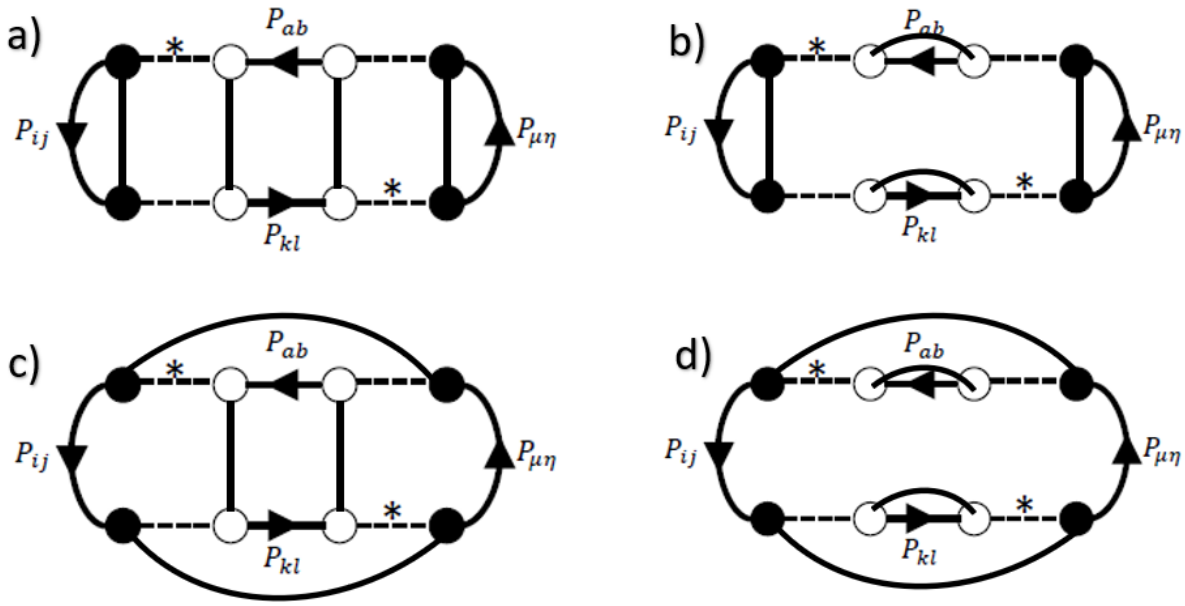

Figura A.2: A figura mostra as quatro combinações possíveis referente ao diagrama dado pela equação (A.1), estas quatro combinações possíveis é para a classe do ensemble circular unitário pertencente a classe de Wigner-Dyson com índice de simetria $\beta = 2$.

seguintes equações:

1) A combinação da alínea a) da figura (A.2) dá a seguinte equação

$$V_{1,1}\mathrm{Tr}\left[P_{ij}\right]\mathrm{Tr}\left[P_{ab}P_{kl}\right]\mathrm{Tr}\left[P_{\mu\eta}\right], \tag{A.2}$$

2) entretanto, a combinação da alínea b) da figura (A.2) dá a seguinte equação

$$V_{2}\mathrm{Tr}\left[P_{ij}\right]\mathrm{Tr}\left[P_{ab}\right]\left[P_{kl}\right]\mathrm{Tr}\left[P_{\mu\eta}\right], \tag{A.3}$$

3) já a combinação da alínea c) da figura (A.2) dá a seguinte equação

$$V_{2}\mathrm{Tr}\left[P_{ij}P_{\mu\eta}\right]\mathrm{Tr}\left[P_{ab}P_{kl}\right], \tag{A.4}$$

4) por fim, a combinação da alínea d) da figura (A.2) nos dá a seguinte equação

$$V_{1,1}\mathrm{Tr}\left[P_{ij}P_{\mu\eta}\right]\mathrm{Tr}\left[P_{ab}\right]\mathrm{Tr}\left[P_{kl}\right]. \tag{A.5}$$

Nas equações acima os pesos são dados por

$$V_{1,1}=\frac{1}{((N_T+1)(N_T-1))}$$

e

$$V_{2}=\frac{-1}{(N_T(N_T+1)(N_T-1))}.$$

No qual $N_T=N_1+N_2+N_3+N_4$? é o número total de canais abertos no sistema, em nosso caso específico no capítulo três $N_T=4$.

Neste momento é oportudo para fazer explícitamente o cálculo de uma realização. Relembramos que para o estado agrupado, temos a equação $\langle\Psi_{11}|\Psi_{11}\rangle=2\times S_{11}S_{11}^{\dagger}S_{21}S_{21}^{\dagger}=\mathrm{Tr}[P_{21}UP_{11}U^{\dagger}P_{12}UP_{11}U^{\dagger}]$. Substituindo $i=\eta=2$ e $j=k=l=\mu=a=b=1$, teremos quatro diagramas no total dos quais dois são nulos e dois são não nulos. Então, a equação final para o estado agrupado é

$$\langle\Psi_{11}|\Psi_{11}\rangle=2\times\left(\frac{1}{(N_T+1)(N_T-1)}+\frac{(-1)}{(N_T(N_T+1)(N_T-1)}\right)=2\times\frac{1}{N_T(N_T+1)} \tag{A.6}$$

que é a mesma equação mostrada anteriormente (4.12). Para o efeito HBT estudado primeiramente temos $N_T=4$ e encontramos $\langle\Psi_{11}|\Psi_{11}\rangle=1/10$.

Entretanto como vimos anteriorente, precisamos de outra equação para calcular todas as possíveis correlações para a classe Wigner-Dyson. Esta equação é quando os elementos U e $U^{\dagger}$ adjacentes conforme relembramos na equação a seguir

$$\mathbf{Tr}\left[\mathcal{P}_{ij}U^{\dagger}\mathcal{P}_{kl}U^{\dagger}\mathcal{P}_{\mu\eta}U\mathcal{P}_{ab}U\right]. \tag{A.7}$$

Seguindo a técnica diagramática para a equação (A.7) também podemos desenhar o diagrama equivalente como fizemos com a equação (A.1), este diagrama está representado na figura (A.3) e todas as suas permutações estão representadas na figura (A.4).

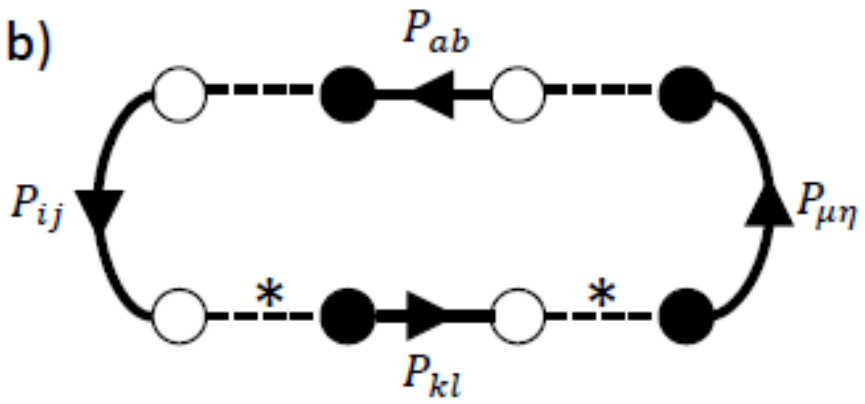

Figura A.3: O diagrama mostrado nesta figura representa a equação (A.7).

Portanto, precisamos utilizar o diagrama elencado na figura (A.3) para utilizar na técnica diagramática, para este diagrama e específicamente para a classe unitária do ensemble Wigner-Dyson, apenas quatro combinações são possíveis, essas combinações estão representadas na figura (A.4).

Para cada permutação realizada elencado na imagem da figura (A.4) temos uma equação associada. Novamente, cada equação tem um peso e traços dos projetores os quais provem dos ciclos dos pesos e os traços, respectivamente. Para os diagramas mostrados na figura (A.4) temos as seguintes equações:

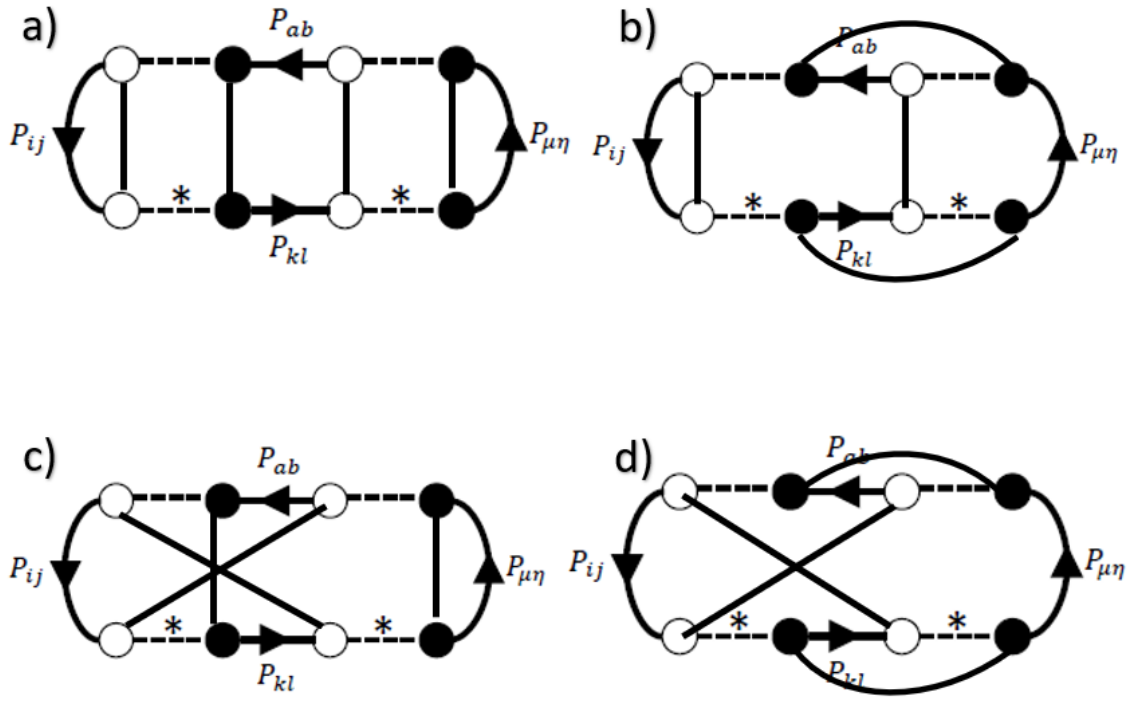

Figura A.4: A figura mostra as quatro combinações possíveis referente ao diagrama dado pela equação (A.7), estas quatro combinações possíveis é para a classe do ensemble circular unitário pertencente a classe de Wigner-Dyson com índice de simetria $\beta = 2$.

1) A combinação da alínea a) da figura (A.7) dá a seguinte equação

$$V_{1,1}\mathrm{Tr}\left[P_{ij}\right]\mathrm{Tr}\left[P_{ab}P_{kl}\right]\mathrm{Tr}\left[P_{\mu\eta}\right], \tag{A.8}$$

2) entretanto, a combinação da alínea b) da figura (A.7) dá a seguinte equação

$$V_{2}\mathrm{Tr}\left[P_{ij}\right]\mathrm{Tr}\left[P_{ab}P_{\eta\mu}P_{kl}\right], \tag{A.9}$$

3) já a combinação da alínea c) da figura (A.7) dá a seguinte equação

$$V_{2}\mathrm{Tr}\left[P_{ij}P_{ab}P_{kl}\right]\mathrm{Tr}\left[P_{\mu\eta}\right], \tag{A.10}$$

4) por fim, a combinação da alínea d) da figura (A.7) nos dá a seguinte equação

$$V_{2}\mathrm{Tr}\left[P_{ij}P_{ab}P_{\eta\mu}P_{kl}\right]. \tag{A.11}$$

Aqui iremos fazer uma realização para o estado anti-agrupado $\langle\Psi_{12}|\Psi_{12}\rangle = S_{11}S_{11}^{\dagger}S_{22}S_{22}^{\dagger} + S_{12}S_{12}^{\dagger}S_{21}S_{21}^{\dagger} \pm (S_{11}^{*}S_{22}^{*}S_{12}S_{21} + S_{11}S_{22}S_{12}^{*}S_{21}^{*})$. Como temos quatro termos para o estado de anti-agrupamento $\langle\Psi_{12}|\Psi_{12}\rangle$, iremos tratar de cada termo individualmente, para o termo $S_{11}S_{11}^{\dagger}S_{22}S_{22}^{\dagger} = Tr[P_{21}UP_{11}U^{\dagger}P_{12}UP_{22}U^{\dagger}]$ precisamos substituir $i = \eta = a = b = 2$ e $j = k = l = \mu = 1$, e com isso, temos apenas a equação (A.11) não nula.

Para o segundo termo, temos $S_{12}S_{12}^{\dagger}S_{21}S_{21}^{\dagger} = Tr[P_{21}UP_{22}U^{\dagger}P_{12}UP_{11}U^{\dagger}]$, para esse termo precisamos substituir $i = k = l = \eta = 2ej = \mu = a = b1$, com isso temos novamente a equação (A.11) não nula.

Por fim, para os últimos termos que estão entre parênteses na equação do estado anti-agrupado $\langle\Psi_{12}|\Psi_{12}\rangle$, precisamos substituir $a = j = \mu = \eta = 1$ e $i = k = l = b = 2$, para $S_{11}^{*}S_{22}^{*}S_{12}S_{21} = Tr[P_{11}U^{\dagger}P_{12}U^{\dagger}P_{21}UP_{22}U]$ e, $a = j = k = b = 1ei = l = \mu = \eta = 2$ para $S_{11}S_{22}S_{12}^{*}S_{21}* = Tr[P_{21}UP_{12}UP_{22}U^{\dagger}P_{11}U^{\dagger}]$. Com essas substituições teremos duas equações não nulas, ambas são dadas pela equação (A.10).

Substituindo os valores dos pesos encontramos nas quatro equações não nulas encontramos a equação da medida da correlação para o estado anti-agrupado $\langle\Psi_{12}|\Psi_{12}\rangle$ como

$$\langle\Psi_{12}|\Psi_{12}\rangle = \frac{2}{(N_T+1)(N_T-1)} \pm \left(\frac{-2}{N_T(N_T+1)(N_T-1)}\right) = \frac{2}{N_T(N_T \pm 1)}. \qquad \text{(A.12)}$$

Note que a equação (A.12) é a mesma equação mostrada em (), onde + serve para bósons e - para férmions. Além do mais, vemos que quanto $N_T = 4$, o valor para $\langle\Psi_{12}|\Psi_{12}\rangle$ é 1/10 e 1/6, respectivamente.

Por fim, percebemos que para a classe ECU ? WD $\beta = 2$ cada diagrama elencado na medida das correlações tem quatro permutações possíveis e uma permutação não nula. Nesta classe devido a matriz pertencer a classe do ensemble unitário apenas os pontos pretos/brancos com (*) pode ser conectado aos pontos pretos/brancos (sem *). Entretanto, se o campo magnético externo é desligado o ensemble que descreve o problema é o ensemble da classe ortogonal e com isso além das conexões pretas/pretas e brancas/brancas na permutação dos diagramas há também conexões entre os pontos pretos e brancos. Porém, a regra de conectar pontos com (*) a pontos (sem *) continua sendo vália. Com isso, mais

permutações são adicionadas, pois é possível conectar os pontos pretos aos pontos brancos, e os pesos $V_{1,1}$ e V_2 são modificados de maneira contundente. Para a classe ECO, os pesos são

$$V_{1,1} = \frac{(N_T + 2)}{(N_T(N_T + 1)(N_T + 3)}$$

e

$$V_2 = \frac{-1}{N_T(N_T + 1)(N_T + 3)},$$

respectivamente. Para essa classe é preciso analisar 24 permutações para cada diagrama, e por esse motivo não será explícita aqui nesta tese.

Ratificamos que fizemos cálculos analíticos para sistemas cujo ponto quântico caótico tem simetria de sub-rede e pertence a classe quiral, para esses casos a matriz de espalhamento segue a seguinte decomposição $S = \Sigma_z S^\dagger \Sigma_z$, e por esse fato a equação geral de correlação é dada por

$$\mathbf{Tr}\left[\mathcal{P}_{ij}U^\dagger\Sigma_z U\mathcal{P}_{kl}U^\dagger\Sigma_z U\mathcal{P}_{\mu\eta}U^\dagger\Sigma_z U\mathcal{P}_{ab}UU^\dagger\Sigma_z U\right], \tag{A.13}$$

o diagrama necessário para fazer a análise diagramática e consequentemente as suas permutações está mostrado na figura (A.5).

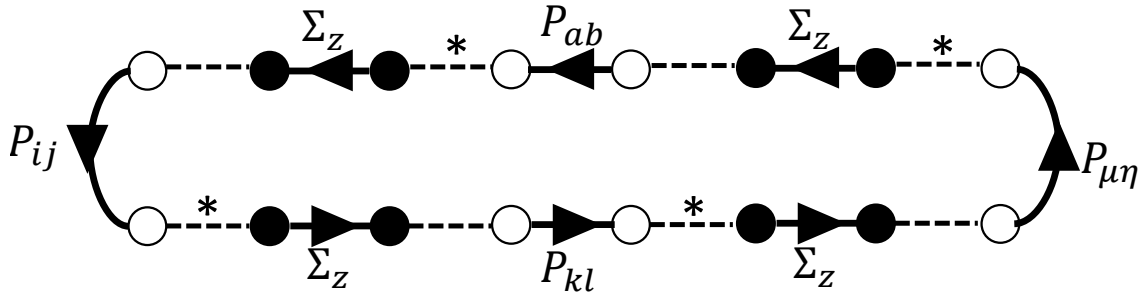

Figura A.5: O diagrama mostrado nesta figura representa a equação (A.13)

Para o diagrama mostrado na figura (A.5) percebemos que há o dobro de pontos pretos e o dobro de pontos brancos dos diagramas utilizados na classe de Wigner-Dyson, mostrados nas figuras (A.1) e (A.3). Por esse motivo, há um aumento significativo do número de combinações na análise diagramática. Por exemplo, para o caso chECU onde podemos

ligar pontos pretos/brancos aos pontos pretos/brancos, porém só pode ligar pontos com (*) a pontos sem (*) há 216 diagramas não nulos, enquanto para o caso chECO podemos ligar pontos pretos/brancos aos pontos pretos/brancos independentes de terem ou não (*). Para esse caso há 11025 combinações possíveis, das quais 6300 são permutações não nulas! Exatamente por esse motivo não conseguimos explicitar todas as combinações nesta tese.

Referências Bibliográficas

[1] Nazarov, Y e Blanter, Y. **Quantum Transport**. Cambridge University Press, 2009.

[2] Datta, S. **Transport in Mesoscopic Systems**. Cambridge, University Press 1995.

[3] Vas Wees, B. J. *et al.* **Quantized Conductance of Point Contacts in a Two-Dimensional Electron Gas**. *Phys. Rev. Lett.* 60:848-850, 1988.

[4] Wharam, D. *et al.* **One-Dimensional Transport and the Quantization of Ballistic Resistance**. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, 21:209?214, 1988.

[5] Lee, P. A. e Stone, A. D. **Universal Conductance Fluctuations in Metals**. *Phys. Rev. Lett.* 55:1622?1625, 1985.

[6] Beenakker, C. W. J. **Random-matrix theory of quantum transport**. *Rev.Mod. Phys.* 69:731?808, 1997.

[7] Mohanty, P. e Webb,R. A. **Anomalous Conductance Distribution in Quasi- One-Dimensional Gold Wires: Possible Violation of the One-Parameter Scaling Hypothesis**. *Phys. Rev. Lett.* 88:146601, 2002.

[8] Köning, M. *et al.* **Quantum Spin Hall Insulator State in HgTe Quantum Wells** *Science*, 318:766-770 2007.

[9] Landauer,R. **Can a length of perfect conductor have a resistance?**. *Phys. Lett.* 85A:91 1981.

[10] Mehta, M. L. **Random Matrices**. 688 p. ISBN: 0-12-088409-7, 2004.

[11] Beenakker, C. W. J. **Applications of random matrix theory to condensed matter and optical physics**. arXiv:0904.1432v2, 2009.

[12] Barros, M. S. M. *et al.* **Open chaotic Dirac billiards: Weak(anti) localization, conductance fluctuations and decoherence**. *Phys. Rev. B.* 88:245133 2013.

[13] Napolitano, J.; Sakurai, J. J. **Mecânica Quântica Moderna**, tradução técnica: Sílvio Renato Dahmen, 2ed.-Porto Alegre, 2013.

[14] Kouwenhoven, L. P.; Marcus, C. M. **Quantum dots**. Phys.World, pag. 35, junho, 1998.

[15] Greiner, W. **Relativistic quantum mechanics: wave equations**. 3 ed., Spring, (1990).

[16] Westervelt, R. M. **Graphene nanoelectronic**. Science, 320:324325, 2008.

[17] Pekola J. P.; Vartianien J. J.; MÖTTÖNEN M.; Saira O.; Meschke M. e Averin D. V. **Hybrid single-electron transistor as a source of quantized electric current**. *Nat. Phys* 4, 120 (2008).

[18] Mello, P. A.; Kumanr, N. **Quantum Transport in Statistical Fluctuations**. Oxford University Press, New York 2004.

[19] Barbosa, A. L. R. **Estatística de Contagem de Carga e Efeitos de Interferência em Sistemas Mesoscópicos**. Tese, UFPE, 2009.

[20] Ramos, J. G. G. de S. **Modelo Sigma não-linear supersimétrico: aplicações em nanoestruturas caóticas**. Tese, UFPE, 2010.

[21] Beenakker, C.W. J.; Brouwer, P.W. **Diagrammatic method of integration over the unitary group, with applications to quantum transport in mesoscopic systems**. *J. Math. Phys.* 37,4904, 1996.

[22] Wigner, E. P. **Characteristic Vectors of Bordered Matrices With Infinite Dimensions**. *Annals of Mathematics.* 62(3):548?564, 1955.

[23] Dyson, F. J. **Statistical Theory of the Energy Levels of Complex Systems**. *I. Journal of Mathematical Physics*, 3(1):140?156, 1962.

[24] Shuryak, E. V. e Verbaarschot, J. J. M.**Random matrix theory and spectral sum rules for the Dirac operator in QCD**. *Nucl. Phys. A*. 560:306 1993;

[25] Verbaarschot, J. J. M.**Spectrum of the QCD Dirac operator and chiral random matrix theory**. *Phys. Rev. Lett.* 72:2531 1994.

[26] A. Altland e M. R. Zirnbauer. **Nonstandard symmetry classes in mesoscopic normal-superconducting hybrid structures**. *Phys. Rev. B* 55:1142 1997.

[27] Jacquod, J. M. P.; Whitney, R. S.; Buttiker, M. **Onsager relations in coupled electric, thermoelectric, and spin transport: The tenfold way** . *Phys. Rev. B.* 86, 155118, 2012.

[28] Kamenev, A.; Nishigaki, S. M.; Gangardt, D. M. **Correlation functions of the bc calogero- sutherland model**. *J. Phys. A*: Math. Gen. 36, 2003.

[29] Barros, M. S. M. **Método Diagramático Aplicado ao Bilhar de Dirac Caótico**. Tese de mestrado, UFRPE, 2014.

[30] Diez M.; Dahlhaus, J. P.; Wimmer M. e Beenakker C. W. J. **Andreev reflection from a topological superconductor with chiral symmetry**. *Phys. Rev. B* 86, 94501 2012.

[31] Alves, E. M. **Fator Fano de uma Junção Normal-Supercondutor com Simetria Chiral**. *Dissertação de Mestrado*: Departamento de Física - UFRPE, Recife-PE (2017).

[32] Blanter,Ya. M. e Büttiker, M. **Shot Noise in Mesoscopic Conductors.** *Phys. Rep.* 336, 1, 2000.

[33] Hanbury Brown, R. e Twiss,R. Q. **Correlation between Photons in two Coherent Beams of Light** *Nature* 177, 1956. 27.

[34] Goudsmit S. A. e Uhlenbeck,G. E. **Spinning Electrons and the Structure of Spectra**. *Nature*, 117:264-265, 1926.

[35] Pauli W. **Über den Zusammenhang des Abschlusses der Elektronengruppen im Atom mit der Komplexstruktur der Spektren**. *Z. Phys.* 31:765-783, 1925.

[36] Zutic I.;Fabian J. e de Sarma, S. **Spintronics: Fundamentals and applications**. *Rev. Mod. Phys.*. 76: 323 2004.

[37] Prinz, G. **Magnetoeletronics**. *Science*. 282:1660, 1998.

[38] Wolf,S. A. *et. al.* **Spintronics: A Spin-Based Electronics Vision for the Future**. *Science*. 294:1488, 2001.

[39] Sinova, J. *et al.*. **Universal Intrinsic Spin Hall Effect**. *Phys. Rev. Lett.*, 92:126603-126606, 2004.

[40] Murakami,S.; Nagaosa, N. e Zhang,S. C. **Dissipationless quantum spin current at room temperature** *Science*, 301:1348-1351 2003.

[41] Kane,C. L. e Mele, E. J. **Quantum Spin Hall Effect in Graphene**. *Phys. Rev. Lett.*, 95:226801-226804, 2005.

[42] Bernevig, B.A. e Zhang,S.C.**Quantum Spin Hall Effect**. *Phys. Rev. Lett.* 96:106802, 2006.

[43] Zhenhua Qiao, Jian Wang, Yadong Wei e Hong Guo. **Universal Quantized Spin-Hall Condutance Flutuations in Graphene**. *Phys. Rev. Lett.* 101, 016804 (2008).

[44] Wein Ren, Zhenhua Qiao, Jian Wang, Qingfeng Sun, e Hong Guo. **Universal Spin-Hall Condutance Flutuations in Two Dimensions** *Phys. Rev. Lett.* 97, 066603 (2006).

[45] Vasconcelos, T. C. **Flutuações universais da condutância de Spin-Hall em uma cavidade caótica de Dirac**. *Dissertação de Mestrado*: Departamento de Física - UFRPE, Recife-PE (2016).

[46] Vasconcelos,T. C.; Ramos, J. G. G. S. e Barbosa,A. L.. **Universal spin Hall conductance fluctuations in chaotic Dirac quantum dots** *Phys. Rev. B.* 93, 115120, 2016.

[47] Bardarson,J. H. ;Adagideli, I. e Jacquod,Ph. . **Mesoscopic Spin Hall Effect**. *Phys. Rev. Lett* 98:196601 2007.

[48] Saitoh,E.; Ueda, M.;Miyajima, H. e Tatara,G.**Conversion of spin current into charge current at room temperature: Inverse spin-Hall effect**. *App. Phys. Let.*. 88:182509 2006

[49] Vasconcelos,T. C.;Ramos, J. G. G. S. e Barbosa,A. L. **Spin-to-charge conversion in 2D electron gas and single-layer graphene devices** *Journal of Applied Physics* 123, 034304 2018.

[50] Whitney, R.S.; Philippe Jacquod, e Cyril Petitjean. **Dephasing in quantum chaotic transport: A semiclassical approach**. *Phisical Review B* 77:045315 2008.

[51] Hall, E. H. **On a New Action of the Magnet on Electric Currents**. *American Journal of Mathematics*, 2:287-292 1879.

[52] Klitzing,K. V.; Dorda, G. e Pepper, M. **New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance**. *Phys. Rev. Lett.*, 45:494-497 1980.

[53] Tsui, D. C.; Stormer, H. L. e Gossard,A. C. **Two-Dimensional Magnetotransport in the Extreme Quantum Limit**. *Phys. Rev. Lett.* 48:1559 1982.

[54] Hirsch, J.E. **Spin Hall Effect**. *Phys. Rev. Lett.*83, 1834 1999

[55] Kato,Y. K.; Myers,R. C; Gossard, A. C. e Awschalom,D. D. **Observation of the Spin Hall Effect in Semiconductors** *Science*, 306:1910-1913 2004.

[56] Wunderlich,J.; KaestnerB.; Sinova,J. e Jungwirth T. **Experimental Observation of the Spin-Hall Effect in a Two-Dimensional Spin-Orbit Coupled Semiconductor System**. *Phys. Rev. Lett.*, 94:047204-047207, 2005.

[57] Dyakonov, M. I. e Perel, V. I. **Possibility of orientating electron spins with current**. *Sov. Phys. JETP Lett.* 13: 467 1971.

[58] Bernevig,B. A.; Hughes, T. L. e Zhang,S. C. **Quantum spin Hall insulator state in HgTe quantum wells**. *Science*, 314:1757-1761, 2006.

[59] Dyakonov,M. I. e Perel, V. I. **Current-induced spin orientation of electrons in semiconductors**. *Phys. Lett. A*. 35: 459 1971.

[60] Azevedo,A.; Vilela-Leao, L. H.; Rodriguez-Suarez,R. L. e Oliveira,A. B. and S. M. Rezende. **dc effect in ferromagnetic resonance: Evidence of the spin-pumping effect?**. *J. Appl. Phys.* 97, 10C715 2005.

[61] Uchida,K.; Takahashi, S.; Harii, K.; Koshibae,W.; Ando, K.; Maekawa,S. e Saitoh,E. **Observation of the spin Seebeck effect**. *Nature* 455:07321 2008.

[62] Sih,V.; Myers, R.C.; Kato,Y. K.; Lau, W.H.; Gossard, A.C. e Awschalom, D.D. **Spatial imaging of the spin Hall effect and current-induced polarization in two-dimensional electron gases**. *NaturePhysics* 1:31 2005.

[63] Bakun,A.A.; Zakharchenya,B.P.; Rogachev, A.A.; Tkachuk, M.N. e Fleisher, V.G.**Observation of a surface photocurrent caused by optical orientation of electrons in a semiconductor**. *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 40:464 1984.

[64] Tkachuk, M.N.; Zakharchenya,B.P. e Fleisher, V.G.*Zh. Eksp. Teor. Fiz. Pis'ma*, 44:47 1986.

[65] Zhao,H.; Loren, E. J.; van Driel, H. M. e Smirl,A. L. **Coherence Control of Hall Charge and Spin Currents**. *Phys. Rev. Lett.* 96:246601 2006.

[66] Valenzuela,S.O. e Tinkham,M. **Direct electronic measurement of the spin Hall effect**. *Nature* 442:176 2006.

[67] Kimura,T.; Otani, Y.; Sato, T.; Takahashi,S. e Maekawa, S. **Room-Temperature Reversible Spin Hall Effect**. *Phys. Rev. Lett.* 98:156601 2007.

[68] Stern, N.P.; Ghosh, S.; Xiang, G.; Zhu, M.; Samarth, N. e Awschalom, D.D. **Current-Induced Polarization and the Spin Hall Effect at Room Temperature**. *Phys. Rev. Lett.* 97:126603 2006.

[69] Y. Imry and R. Landauer, Rev. Mod. Phys. 71, S306 (1999).

[70] H. van Houten and C. W. J. Beenakker, Phys. Today 49 7 , 22 (1996).

[71] Y. Alhassid, Rev. Mod. Phys. 72, 895 (2000).

[72] T. Guhr, A. Muller-Groeling, and H. A. Weidenmuller, Phys. Rep. 299, 189 (1998).

[73] Silva, E. F. **Parity and Time Reversal Symmetry in Hanbury Brown-Twiss Effect**. *Europhysics Letters*, 117, 2017..

[74] Silva, E. F. **Simetrias de Paridade e de Reversão Temporal no Efeito Hanbury Brown-Twiss**. *Dissertação de Mestrado*: Departamento de Física - UFPB, João Pessoa-PB (2015).

[75] Silva, E. F. **Propriedades do transporte quântico de sistemas correlacionados: ruído de disparo, desigualdade de Bell e estrutura de bandas**. *Tese de Doutorado*: Departamento de Física - UFPB, João Pessoa-PB (2019).

[76] T. Jelts, J. M. McNamara, W. Hogervorst, W. Vassen, V. Krachmalnicoff, M. Schellekens, A. Perrin, H. Chang, D. Boiron, A. Aspect e C. I. Westbrook. **Comparison of the Hanbury Brown-Twiss effect for bosons and fermions**. *Nature*. 445, 402-405 (2007).

[77] Samuelsson, P. e Büttiker, M. **Chaotic dot-superconductor analog of the Hanbury Brown Twiss effect**. *Phys. Rev. Lett.* 89, 046601 (2018).

[78] Büttiker, M. **Scattering theory of thermal and excess noise in open conductors**. *Phys. Rev. Lett.* 65 2901 (1990).

[79] Martin, Th. e Landauer, R. **Wave-packet approach to noise in multichannel mesoscopic systems**. *Phys. Rev. B.* 45 1742 (1992).

[80] Rojas Sánchez, J. C. *et al. Nat. Commun. 4, 2944 2013.*

[81] Zhang, W.; Jung, M. B.; Jiang,W.; Pearson,J. E. e Hoffmann, A.*J. Appl.Phys. 117, 17C:727 2015.*

[82] Bychkov, Y. A. e Rashba,E. I. *JETP Lett. 39, 78 1984.*

[83] Edelstein, V. M. *Solid State Commun. 73, 233 1990.*

[84] Whitney, R.S.; Jacquod,P. e Petitjean, Cyril.*Phys. Rev. B. 77:045315 2008.*

[85] Adagideli, I.; Bardarson, J. H. e Jacquod,Ph. **Electrical probing of the spin conductance of mesoscopic cavities**. *J. Phys.: Condens. Matter* 21:155503 2009.

[86] BÜTTIKER, M. **Four-Terminal Phase-Coherent Conductance**. *Phys. Rev. Lett.* 57:1761 1986.

[87] Mendes,J. B. S.; Alves Santos,O.; Meireles,L. M.; Lacerda, R. G.; Vilela-Leão, L. H.; Machado,F. L. A.; Rodríguez-Suárez,R. L.; Azevedo, A. e Rezende, S. M. **Spin-Current to Charge-Current Conversion and Magnetoresistance in a Hybrid Structure of Graphene and Yttrium Iron Garnet**. *Phys. Rev. Lett.* 115:226601 2015.

[88] Balakrishnan, J. *et al.* **Giant spin Hall effect in graphene grown by chemical vapour deposition**. *Nature Communications*, 5:4748 (2014).

[89] Zhang, W.; Jungfleisch, M. B.; Jiang, W.; Pearson,J. E. e Hoffmann A. **Spin pumping and inverse Rashba-Edelstein effect in NiFe/Ag/Bi and NiFe/Ag/Sb**. *J. Appl. Phys.* 117, 17C:727 2015.

[90] Bernevig,B. A.; Hughes, T. L. e Zhang,S. C. *Science, 314:1757-1761, 2006.*

[91] Azevedo,A.; Vilela-Leão, L. H.; Rodríguez-Suárez, R. L.; Santos Lacerda, A. F. e Rezende, S. M. *Phys. Rev. B 83, 144402 (2011).*

Universal spin Hall conductance fluctuations in chaotic Dirac quantum dots

T. C. Vasconcelos,[1] J. G. G. S. Ramos,[2] and A. L. R. Barbosa[1]
[1]*Departamento de Física, Universidade Federal Rural de Pernambuco, 52171-900 Recife, Pernambuco, Brazil*
[2]*Departamento de Física, Universidade Federal da Paraíba, 58051-970 João Pessoa, Paraíba, Brazil*
(Received 17 October 2015; revised manuscript received 12 February 2016; published 11 March 2016)

We present complete analytical and numerical results that demonstrate the anomalous universal fluctuations of the spin Hall conductance in chiral materials such as graphene and topological insulators. We investigate both the corresponding fluctuations, the universal fractionated and the universal quantized, and also the open channel orbital number crossover between the two regimes. In particular, we show that the Wigner-Dyson symmetries do not properly describe such conductances and the preponderant role of the chiral classes on the Dirac quantum dots. The results are analytical and solve outstanding issues.

DOI: 10.1103/PhysRevB.93.115120

I. INTRODUCTION

The electronic transport through diffusive and ballistic mesoscopic devices has long been the subject of many theoretical [1,2] and experimental investigations [3]. The mesoscopic transport engenders some peculiar physical features [1,2], with special focus on universal conductance fluctuations (UCFs) [4–7]. The UCFs occur owing to quantum interferences and chaotic scattering processes, which give rise to the sample-to-sample fluctuations of charge conductances. It was found that in metals and semiconductors the electronic transport description is accommodated in Wigner-Dyson universal classes in the framework of random matrix theory (RMT) [1,8]. The universal classes are characterized by the presence or absence of two fundamental symmetries of nature: time-reversal (TRS) and spin-rotation symmetries (SRS) [8].

However, the control [9] of novel Dirac materials (such as graphene and topological insulators) introduces new fundamental symmetries, such as chiral/subÂ-lattice/mirror (CHS) and particle-hole symmetries, which became protagonists of a myriad of interesting quantum effects [10]. Accordingly, novel RMT ensembles emerge, which are known as chiral [11] and Atland-Zimbauer [12] universal classes. The chiral universal classes can be applied to bipartite systems, such as hexagonal and square lattices, whose main examples are graphene structures and topological insulators, respectively. There are three chiral classes: a chiral circular orthogonal ensemble (chCOE), characterized by the presence of CHS, TRS, and SRS ($\beta = 1$), a chiral circular unitary ensemble (CUE), which preserves CHS and has the TRS broken by an external magnetic field ($\beta = 2$), and a chiral circular symplectic ensemble (chCSE), which is characterized by the presence of CHS, TRS, and has the SRS broken by a strong spin-orbit interaction (SOI) ($\beta = 4$). Moreover, Atland-Zimbauer universal classes can be applied to electronic devices in contact with a superconductor.

With the generation and control of pure spin current through mesoscopic devices, investigations on its universal fluctuations became very compelling [13]. Motivated by Ref. [14], which found the survival of the spin Hall effect (SHE) in disordered two-dimensional (2D) mesoscopic devices, Ren *et al.* [15] show numerically, using tight-binding Hamiltonian models, that diffusive mesoscopic samples with strong SOI exhibit universal fractionated spin Hall conductance fluctuations (UFSCFs). The authors find a universal amplitude given by $\mathrm{rms}[G^f_{\mathrm{sH}}] \approx 0.18e/4\pi$. In order to give an explanation in the framework of RMT, Bardarson *et al.* [16] used a Landauer-Büttiker approach and a Wigner-Dyson universal class with strong SOI to obtain a analytical expression for UFSCFs of a chaotic quantum dot, confirming the result of Ref. [15].

Furthermore, the 2D Dirac material exhibits the famous *quantized* spin Hall effect, which mean that spin Hall conduction G^q_{sH} takes only integer multiples of $e/4\pi$ [17,18]. Motivated by this novel feature, Qiao *et al.* [19] show numerically, using three tight-binding Hamiltonian models, that diffusive 2D Dirac samples with and without strong SOI exhibit universal quantized spin Hall conductance fluctuations (UQSCFs) with an amplitude given by $\mathrm{rms}[G^q_{\mathrm{sH}}] = 0.285 \pm 0.005e/4\pi$, which does not follow the conventional value obtained in Refs. [15,16]. In recent work, Choe and Chang [20] study electronic transport numerically in a 2D Dirac device with strong SOI and CHS. Nevertheless, their studies were not enough to reach a definitive understanding of the behavior in terms of a UQSCF obtained in Ref. [19]. Thus, an understanding of UFSC remains open to date.

In this paper, we investigate analytically the UQSCF in a chaotic quantum dot with CHS, also known as a chaotic Dirac quantum dot [21,22], at low temperature. We assume a preserved TRS, SRS broken by a strong SOI (chCSE), and a mean dwell time of electrons in the quantum dot that is larger than the SOI time, $\tau_{\mathrm{dwell}} \gg \tau_{\mathrm{so}}$. We identified two regimes: The first one, when the CHS is broken, gives rise to the UFSCF and exhibits an amplitude $\mathrm{rms}[G^f_{\mathrm{sH}}] \approx \sqrt{2} \times 0.18e/4\pi$; The second one, when CHS is preserved, gives rise to the UQSCF, which assumes an amplitude $\mathrm{rms}[G^q_{\mathrm{sH}}] \approx 0.283e/4\pi$. The last is in agreement with Ref. [19].

II. THEORETICAL FRAMEWORK

We consider a multiterminal 2D device with CHS symmetry where the electrons flow under the influence of a strong SOI at low temperature. The 2D device is connected by ideal point contacts to four independent electronic reservoirs, as depicted in Fig. 1. We use the Landauer-Büttiker approach to write the α-direction spin-resolved current through the terminals as [23]

$$I_i^{\alpha} = \frac{e^2}{h} \sum_{j,\alpha'} \tau_{i,j}^{\alpha\alpha'} (V_i - V_j). \tag{1}$$

 ©2016 American Physical Society

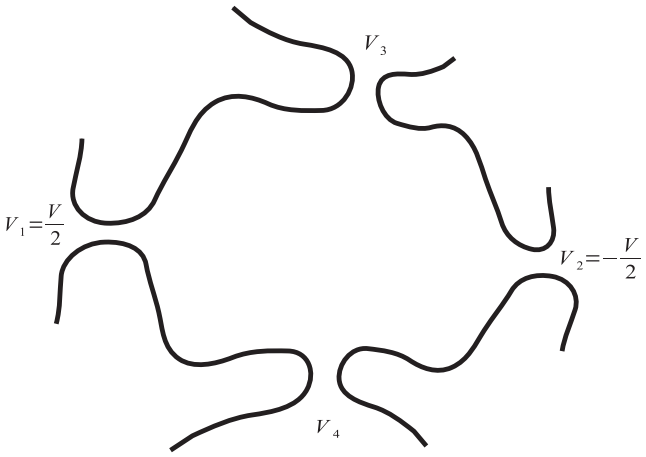

FIG. 1. A chaotic Dirac quantum dot connected through four leads to electron reservoirs with spin resolution. The 1 and 2 leads have specific potentials, $V/2$ and $-V/2$, while the 3 and 4 leads have potentials adjusted in a way that prevents the charge current from flowing. Therefore, a charge current between the 1 and 2 leads induces a spin current between the 3 and 4 leads.

The spin-dependent transmission coefficients can be obtained through $\tau_{i,j}^{\alpha\alpha'} = \sum_{m\in i,n\in j} |\mathcal{S}_{m,\alpha;n,\alpha'}|^2$, where α and α' are the spin projections in the $\alpha = x$, y, or z direction and $\mathcal{S}$ is the scattering matrix of order $2\bar{N}_T \times 2\bar{N}_T$. The $\mathcal{S}$ matrix describes the transport of electrons through the chaotic Dirac quantum dot. The total number of open orbital scattering channels is $\bar{N}_T = 2N_T = \sum_{i=1}^{4} 2N_i$, where $2N_i$ is the number of open channels in the ith lead point contact and the factor 2 came from two sublattices of the Dirac materials [24].

An applied bias voltage V between longitudinal electrodes 1 and 2 gives rise to a longitudinal electronic current I and, due to the *quantized* spin Hall effect, to spin currents $I_i^\alpha = I_i^1 - I_i^1 \neq 0$ at the transversal contacts 3 and 4 with $\alpha = x,y,z$ [25], as depicted in Fig. 1. Moreover, we consider the absence of net electric charge current at the transverse 3 and 4 leads, i.e., $I_i^0 = I_i^1 + I_i^1 = 0$. Therefore, the charge conservation implies $I = I_1^0 = -I_2^0$. Using those constraints in Eq. (1), it was shown in Ref. [16] that the transversal spin currents can be written as

$$J_i^\alpha = \frac{1}{2}\left(\tau_{i2}^\alpha - \tau_{i1}^\alpha\right) - \sum_{j=3,4} \tau_{ij}^\alpha \bar{V}_j, \tag{2}$$

for which we introduce the dimensionless currents $J = h/e^2(I/V)$ and the effective transverse voltages $\bar{V}_i = V_i/V$, given by

$$\bar{V}_i = \frac{1}{2}\frac{\tau_{ij}^0\left(\tau_{j2}^0 - \tau_{j1}^0\right) + \left(\tau_{i2}^0 - \tau_{i1}^0\right)\left(4N_j - \tau_{jj}^0\right)}{\tau_{43}^0\tau_{34}^0 - \left(4N_3 - \tau_{33}^0\right)\left(4N_4 - \tau_{44}^0\right)}, \tag{3}$$

where here $i,j = 3,4$ with $i \neq j$.

III. RANDOM MATRIX THEORY

Our calculation consists in the obtention of the average and the fluctuation amplitude of transversal spin currents, Eq. (2), for a chaotic Dirac quantum dot, within the framework of RMT. Therefore, the spin-dependent transmission coefficient can be written in an appropriate way through the following relation,

$$\tau_{ij}^\alpha = \mathrm{Tr}\left[\mathcal{P}_i^\alpha \mathcal{S}\mathcal{P}_j^0\mathcal{S}^\dagger\right], \quad \alpha = 0,x,y,z \tag{4}$$

where the scattering matrix $\mathcal{S}$ is a member of the chCSE ensemble, which means the system preserves the TRS (absence of magnetic field) and the SRS is broken by strong SOI [11]. The matrix $\mathcal{P}_i^\alpha = \mathcal{P}_i \otimes \sigma^\alpha$ represents a projector operator over the ith terminal. Its dimension is $2\bar{N}_T \times 2\bar{N}_T$ and its entries are $(\mathcal{P}_i^\alpha)_{m\mu,n\gamma} = \delta_{mn}\sigma_{\mu\gamma}^\alpha$, while $\sum_{j=1}^{i-1} 2N_j < m < \sum_{j=1}^{i} 2N_j$ and 0 otherwise [16]. The σ^0 and σ^α are the identity matrix and Pauli matrices, respectively.

The scattering matrix of Eq. (4) has an additional CHS symmetry, implying it satisfies the following commutation relation [10],

$$\mathcal{S} = \Sigma_z\mathcal{S}^\dagger\Sigma_z, \quad \Sigma_z \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{\bar{N}_T} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_{\bar{N}_T} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

at the Dirac point (null Fermi energy). To obtain the average of Eq. (4), it is convenient to decompose $\mathcal{S}$ as a function of the $\mathcal{U}$ matrix, which is a symplectic matrix of order $2\bar{N}_T \times 2\bar{N}_T$, as $\mathcal{S} = \Sigma_z\mathcal{U}^\dagger\Sigma_z\mathcal{U}$, as can be seen in Ref. [26]. Hence, Eq. (4) can be rewritten as

$$\tau_{ij}^\alpha = \mathrm{Tr}\left[\mathcal{P}_i^\alpha\mathcal{U}^\dagger\Sigma_z\mathcal{U}\mathcal{P}_j^0\mathcal{U}^\dagger\Sigma_z\mathcal{U}\right], \quad \alpha = 0,x,y,z. \tag{6}$$

Using the method of Ref. [22], developed for diagrammatic integration over chaotic Dirac quantum dots, we calculate the average and covariance of the spin-dependent transmission coefficient of Eq. (6). First, for the average of Eq. (6), we obtain

$$\left\langle\tau_{ij}^\alpha\right\rangle = 4\delta_{\alpha 0}\frac{N_T(4N_iN_j - \delta_{ij}N_i) + \delta_{ij}N_i}{(2N_T - 1)(N_T + 1)}. \tag{7}$$

Equation (7) is quite distinct from the result of Ref. [16], which studied the UFSCF of a Schrödinger (Wigner-Dyson) chaotic quantum dot. Second, following the same method of Ref. [22], the covariance of Eq. (6) reads

$$\mathrm{covar}[\tau_{ij}^\alpha,\tau_{kl}^\beta] = \left\langle\left(\tau_{ij}^\alpha - \left\langle\tau_{ij}^\alpha\right\rangle\right)\left(\tau_{kl}^\beta - \left\langle\tau_{kl}^\beta\right\rangle\right)\right\rangle$$

and prompted us to find 11 025 diagrams, of which 6300 are non-null. Therefore, the overall result for the covariance of the spin-dependent transmission coefficient involves 6300 terms and the algebraic final expression is cumbersome. Nevertheless, for the relevant configuration wherein $\alpha = \beta \neq 0$ and $i = k$, the general expression simplifies to

$$\frac{\mathrm{covar}\left[\tau_{ij}^\alpha,\tau_{il}^\alpha\right]}{D} = \begin{cases} (N_T - N_i)(4N_iN_T - 2N_T - 3), & i = j = l, \\ -4N_jN_lN_T, & i \neq j \neq l, \\ N_j\left(4N_T^2 - 4N_jN_T - 2N_T - 3\right), & i \neq j = l, \\ -N_l(4N_iN_T - 2N_T - 3), & i = j \neq l, \\ -N_j(4N_iN_T - 2N_T - 3), & i = l \neq j, \end{cases} \tag{8}$$

where $D = \frac{128N_iN_T}{(4N_T+3)(16N_T^2-1)(2N_T-3)(2N_T-1)}$.

IV. UNIVERSAL SPIN HALL CONDUCTANCE FLUCTUATIONS

We begin by using Eq. (7) to obtain the ensemble average of the transverse spin currents of Eq. (2). The result is

$$\langle J_i^\alpha \rangle = \frac{1}{2}(\langle \tau_{i2}^\alpha \rangle - \langle \tau_{i1}^\alpha \rangle) - \sum_{j=3,4} \langle \tau_{ij}^\alpha \rangle \langle \bar{V}_j \rangle = 0, \tag{9}$$

as expected even for $i = 3,4$ and $\alpha = x,y,z$. The ensemble average of the effective transverse voltages, Eq. (3), is obtained with the previous spin-dependent transmission coefficient general result for the covariance. We obtain

$$\langle \bar{V}_{3,4} \rangle = \frac{1}{2}\frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}. \tag{10}$$

The same expression was obtained in Ref. [16], indicating that the effective transverse voltage is CHS independent.

Although the transversal spin current ensemble average vanishes, Eq. (10) establishes an effective non-null transverse voltage. Accordingly, the transversal spin current J_i^α assumes finite values. The amplitude of the fluctuations of J_i^α is given by [16]

$$\begin{aligned} \mathrm{var}[J_i^\alpha] = {} & \frac{1}{4}\sum_{j=1,2} \mathrm{var}\big[\tau_{ij}^\alpha\big] - \frac{1}{2}\sum_{j=1,2} \mathrm{covar}\big[\tau_{i1}^\alpha, \tau_{i2}^\alpha\big] \\ & + \sum_{j=3,4} \Big(\mathrm{var}\big[\tau_{ij}^\alpha\big]\big\langle \bar{V}_j^2 \big\rangle + \mathrm{covar}\big[\big(\tau_{i1}^\alpha - \tau_{i2}^\alpha\big), \tau_{ij}^\alpha\big]\langle \bar{V}_j \rangle\Big) \\ & + 2\,\mathrm{covar}[\tau_{i3}^\alpha, \tau_{i4}^\alpha]\langle \bar{V}_3 \rangle \langle \bar{V}_4 \rangle. \end{aligned} \tag{11}$$

Substituting Eqs. (8) and (10) in Eq. (11), we obtain the following expression,

$$\begin{aligned} & \mathrm{var}\big[J_i^\alpha\big] \\ & = \frac{128 N_i N_1 N_2 N_T \big(4N_T^2 - 2N_T - 3\big)}{(4N_T + 3)\big(16N_T^2 - 1\big)(2N_T - 3)(2N_T - 1)(N_1 + N_2)}, \end{aligned} \tag{12}$$

which is the main result of our work. Equation (12) is quite distinct from the main result of Ref. [16], and reveals the full difference between the spintronics of a chaotic Dirac (CHS) quantum dot and a chaotic Schrödinger (Wigner-Dyson) quantum dot. In Fig. 2, we plot the average (9) and variance (12) of transverse spin current J_i^α for $i = 3,4$ and $\alpha = x,y,z$ as a function of both symmetric open leads, $N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = N$, and asymmetric open leads, $N_1 = N_3 = 2N_2 = 2N_4 = N$.

Using Eq. (12), we can analyze two relevant regimes of the chaotic Dirac quantum dots: the first one for the broken CHS, Eq. (5), and the second one when it is preserved. In accordance with Refs. [27,28], the CHS is relevant for the systems at zero Fermi energy and/or if there are few open channels in the leads. However, if the Fermi energies are away from zero and/or if there are many open channels in the terminals, the Wigner-Dyson universality classes and the chiral universality classes lead presumably to the same results.

We first investigate the setup with broken CHS employed whenever the system has a large number of open channels or high Fermi energy. For this system, we fix symmetric terminals, $N_1 = N_3 = N_2 = N_4 = N$, from the general result

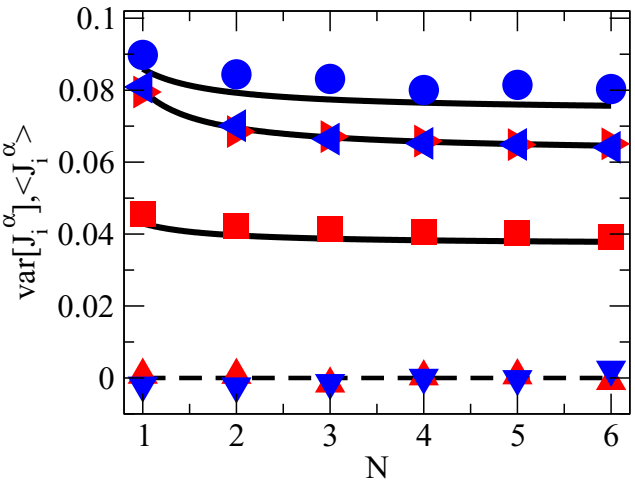

FIG. 2. Average (9) and variance (12) of transverse spin current J_i^α for $i = 3,4$ and $\alpha = x,y,z$ as a function of open channels N. The analytical results are represented by solid lines, while the numeric simulations, obtained by RMT, are represented by the symbols. Symmetric terminals ($N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = N$): var$[J_3^\alpha]$ (triangle left), and var$[J_4^\alpha]$ (triangle right). Asymmetric terminals ($N_1 = N_3 = 2N_2 = 2N_4 = N$): $\langle J_3^\alpha \rangle$ (triangle up), $\langle J_4^\alpha \rangle$ (triangle down), var$[J_3^\alpha]$ (square), and var$[J_4^\alpha]$ (circle).

with a large number of open channels $N \gg 1$ in Eq. (12), and we obtain $\mathrm{var}[J_i^\alpha] = 2 \times 1/32$. Therefore, the spin current fluctuates universally with amplitude $\mathrm{rms}[I_3^z] = 0.25e^2V/h$, which can be used to write the universal fluctuations of transversal spin conductance as

$$\mathrm{rms}\big[G_{\mathrm{sH}}^f\big] \approx \sqrt{2} \times 0.18\frac{e}{4\pi}. \tag{13}$$

In this regime, the universal conductance fluctuations has an amplitude $\sqrt{2}$ times higher than the result obtained in Refs. [15,16] for the Wigner-Dyson universality classes. Furthermore, the result is in agreement with Ref. [19] when the Fermi energies are $|E| > 1$ and with the studies concerning the universal conductance fluctuations in the two-dimensional topological insulators with strong SOI of Ref. [20].

However, without the CHS symmetry (Wigner-Dyson ensembles), the universal fluctuations of the transversal spin conductance of a chaotic Dirac quantum dot does not describe the result obtained in Ref. [19], i.e., $\mathrm{rms}[G_{\mathrm{sH}}^q] = (0.285 \pm 0.005)e/4\pi$, complying only if the number of channels is very small (quantized). For this reason, we fix from our general analytical result a small number of channels in order to preserve the CHS. Using a symmetric configuration with $N_1 = N_3 = N_2 = N_4 = 1$, known as a high quantum regime, in Eq. (12), we obtain $\mathrm{rms}[I_3^z] \approx 0.283e^2V/h$. The result can be rewritten in terms of the universal fluctuations of transversal spin conductance as

$$\mathrm{rms}\big[G_{\mathrm{sH}}^q\big] \approx 0.283\frac{e}{4\pi}, \tag{14}$$

which is agreement with Ref. [19] if the Fermi energies are $|E| < 1$. In the top panel of Fig. 3, we plot the universal fluctuations of transversal spin conductance as a function of

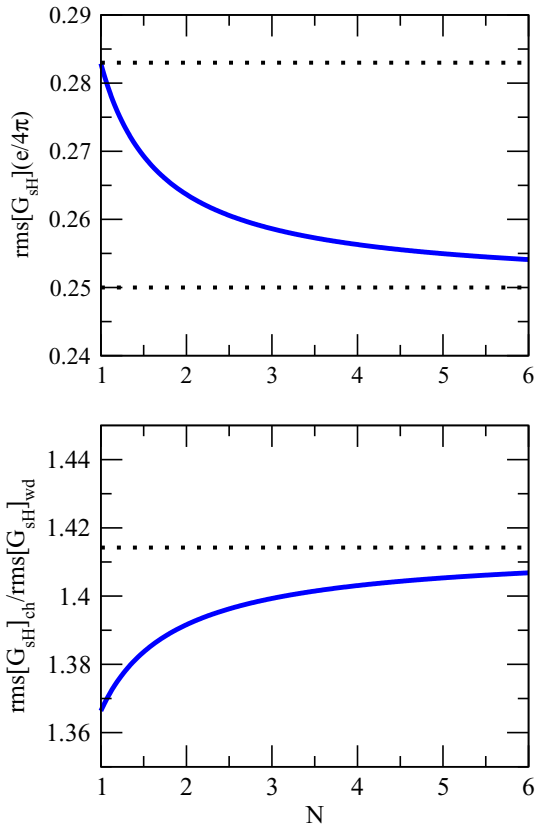

FIG. 3. Top: The universal fluctuations of transversal spin conductance plotted as an open channel crossover from Eq. (14) to Eq. (13). Bottom: The ratio between universal fluctuations of transversal spin conductances of the chiral universal classes and the one of the Wigner-Dyson universal classes $(\mathrm{rms}[G_{\mathrm{sH}}]_{\mathrm{ch}}/\mathrm{rms}[G_{\mathrm{sH}}]_{\mathrm{wd}})$; the $\sqrt{2}$ limit as a function of N.

N, which shows the break of CHS as an open channel crossover from Eq. (14) to Eq. (13).

Importantly, the result of Eq. (14) for the the variance of transversal spin current is incompatible with the one of Ref. [16], obtained for the Wigner-Dyson universal classes. In a high quantum regime, the result of Ref. [16] multiplied for $\sqrt{2}$ yields $\sqrt{2} \times \mathrm{rms}[G_{\mathrm{sH}}]_{\mathrm{wd}} \approx 0.292e/4\pi$, which is therefore outside the error bar of the tight-binding simulation of Ref. [19] that is valid for graphene and other chiral systems. In the bottom panel of Fig. 3, we depict the ratio between universal fluctuations of transversal spin conductances of the chiral universal classes and the Wigner-Dyson ones. Notice the ratio $(\mathrm{rms}[G_{\mathrm{sH}}]_{\mathrm{ch}}/\mathrm{rms}[G_{\mathrm{sH}}]_{\mathrm{wd}})$ tends to $\sqrt{2}$ as a function of N from the general analytical result.

V. NUMERIC SIMULATION

In order to confirm the analytical results, Eqs. (9) and (12), we use numerical simulations from the RMT [11]. The massless Dirac Hamiltonian satisfies the following anticommutation relation [10,11]

$$\mathcal{H} = -\lambda_z \mathcal{H} \lambda_z, \quad \lambda_z = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{2M} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_{2M} \end{bmatrix}. \tag{15}$$

The $\mathcal{H}$ matrix has dimension $4M \times 4M$. The anticommutation relation, Eq. (15), implies a Hamiltonian member that can be written as

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathcal{T} \\ \mathcal{T}^{\dagger} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

The quaternionic $\mathcal{T}$-matrix block of the $\mathcal{H}$ matrix has dimension $2M \times 2M$. The RMT establishes that the entries of the $\mathcal{T}$ matrix have a Gaussian distribution

$$P(\mathcal{T}) \propto \exp\left\{-\frac{2M}{\lambda^2}\mathrm{Tr}(\mathcal{T}^{\dagger}\mathcal{T})\right\}, \tag{17}$$

where $\lambda = 4M\Delta/\pi$ is the variance related to the electronic single-particle level spacing Δ. The Hamiltonian model for the scattering matrix can be written as [29]

$$\mathcal{S} = \mathbf{1} - 2\pi i \mathcal{W}^{\dagger}(\epsilon - \mathcal{H} + i\pi \mathcal{W}\mathcal{W}^{\dagger})^{-1}\mathcal{W}, \tag{18}$$

which satisfies Eq. (5). The $\mathcal{W} = (\mathcal{W}_1, \ldots, \mathcal{W}_4)$ matrix is a $4M \times 2\bar{N}_T$ deterministic matrix, describing the coupling of the resonances states of the chaotic Dirac quantum dot with the propagating modes in the four terminals. This deterministic matrix satisfies the nondirect process, i.e., the orthogonality condition $\mathcal{W}_p^{\dagger}\mathcal{W}_q = \frac{1}{\pi}\delta_{p,q}$ holds. Accordingly, we consider the relation $\lambda_z \mathcal{W} \Sigma_z = \mathcal{W}$, indicating the scattering matrix is symmetric (5). We consider the system on the Dirac point ($\epsilon = 0$), and, to ensure the chaotic regime and consequently the universality of the observable, the number of resonances inside the quantum dot is large ($M \gg N_T$).

The numerical simulations produce Fig. 2, which shows symbols obtained through 25×10^3 realizations compared with the analytical results, Eqs. (9) and (12). We use the $\mathcal{T}$ matrices, with dimension 800×800 ($M = 400$), and the corresponding $\mathcal{H}$ matrices with dimension 1600×1600 (1600 resonances).

VI. CONCLUSIONS

To summarize, we present a complete analytical study of UQSCFs of a chaotic Dirac quantum dot in the framework of RMT for the chiral universal symmetries in the absence of magnetic field. We show that the effective transverse voltage is CHS independent, Eq. (10). Moreover, in the regime of broken CHS, the UFSCFs exhibit a value $\mathrm{rms}[G^f_{\mathrm{sH}}] \approx \sqrt{2} \times 0.18e/4\pi$. However, the system with preserved CHS exhibits a UQSCF with amplitude $\mathrm{rms}[G^q_{\mathrm{sH}}] \approx 0.283e/4\pi$, which is in agreement with the numerical simulation of Ref. [19]. We can conclude that the quantized spin Hall effect in the absence of magnetic field is described by chiral universal classes in the framework of RMT. Perspectives of our work include the study of the universal classes of the UQSCFs in the presence of magnetic field, preserving the particle-hole symmetry.

ACKNOWLEDGMENT

This work was partially supported by CNPq, CAPES, and FACEPE (Brazilian Agencies).

[1] C. W. J. Beenakker, Rev. Mod. Phys. **69**, 731 (1997).

[2] P. A. Mello and N. Kumar, *Quantum Transport in Mesoscopic Systems: Complexity and Statistical Fluctuations* (Oxford University Press, Oxford, U.K., 2004).

[3] T. Heinzel, *Mesoscopic Electronics in Solid State Nanostructures* (Wiley-VCH, Weinheim, 2007).

[4] B. L. Altshuler, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **41**, 530 (1985) [JETP **41**, 648 (1985)].

[5] P. A. Lee and A. D. Stone, Phys. Rev. Lett. **55**, 1622 (1985); P. A. Lee, A. D. Stone, and H. Fukuyama, Phys. Rev. B **35**, 1039 (1987).

[6] J. G. G. S. Ramos, D. Bazeia, M. S. Hussein, and C. H. Lewenkopf, Phys. Rev. Lett. **107**, 176807 (2011).

[7] A. L. R. Barbosa, M. S. Hussein, and J. G. G. S. Ramos, Phys. Rev. E **88**, 010901(R) (2013).

[8] M. L. Mehta, *Random Matrices* (Academic, New York, 1991).

[9] T. O. Wehling, A. M. Black-Schaffer, and A. V. Balatsky, Adv. Phys. **63**, 1 (2014)

[10] P. Jacquod, R. S. Whitney, J. Meair, and M. Buttiker, Phys. Rev. B **86**, 155118 (2012).

[11] E. V. Shuryak and J. J. M. Verbaarschot, Nucl. Phys. A **560**, 306 (1993); J. Verbaarschot, Phys. Rev. Lett. **72**, 2531 (1994).

[12] A. Altland and M. R. Zirnbauer, Phys. Rev. B **55**, 1142 (1997).

[13] I. Zutić, J. Fabian, and S. Das Sarma, Rev. Mod. Phys. **76**, 323 (2004).

[14] B. K. Nikolić, L. P. Zârbo, and S. Souma, Phys. Rev. B **72**, 075361 (2005); E. M. Hankiewicz, L. W. Molenkamp, T. Jungwirth, and J. Sinova, *ibid.* **70**, 241301(R) (2004); L. Sheng, D. N. Sheng, and C. S. Ting, Phys. Rev. Lett. **94**, 016602 (2005).

[15] W. Ren, Z. Qiao, J. Wang, Q. Sun, and H. Guo, Phys. Rev. Lett. **97**, 066603 (2006).

[16] J. H. Bardarson, I. Adagideli, and Ph. Jacquod, Phys. Rev. Lett. **98**, 196601 (2007).

[17] C. L. Kane and E. J. Mele, Phys. Rev. Lett. **95**, 226801 (2005).

[18] D. A. Abanin, P. A. Lee, and L. S. Levitov, Phys. Rev. Lett. **96**, 176803 (2006).

[19] Z. Qiao, J. Wang, Y. Wei, and H. Guo, Phys. Rev. Lett. **101**, 016804 (2008).

[20] D.-H. Choe, and K. J. Chang, Sci. Rep. **5**, 10997 (2015).

[21] L. A. Ponomarenko, F. Schedin, M. I. Katsnelson, R. Yang, E. W. Hill, K. S. Novoselov, and A. K. Geim, Science **320**, 356 (2008).

[22] M. S. M. Barros, A. J. Nascimento Júnior, A. F. Macedo-Junior, J. G. G. S. Ramos, and A. L. R. Barbosa, Phys. Rev. B **88**, 245133 (2013).

[23] M. Buttiker, Phys. Rev. Lett. **57**, 1761 (1986).

[24] C. W. J. Beenakker, Rev. Mod. Phys. **80**, 1337 (2008).

[25] J. G. G. S. Ramos, A. L. R. Barbosa, D. Bazeia, M. S. Hussein, and C. H. Lewenkopf, Phys. Rev. B **86**, 235112 (2012).

[26] S. M. Nishigaki, D. M. Gangardt, and A. Kamenev, J. Phys. A: Math. Gen. **36**, 3137 (2003).

[27] S. Gnutzmann and B. Seif, Phys. Rev. E **69**, 056219 (2004).

[28] J. Wurm, K. Richter, and I. Adagideli, Phys. Rev. B **84**, 205421 (2011); J. Wurm, A. Rycerz, I. Adagideli, M. Wimmer, K. Richter, and H. U. Baranger, Phys. Rev. Lett. **102**, 056806 (2009).

[29] C. Mahaux and H. A. Weidenmuller, *Shell Model Approach to Nuclear Reactions* (North-Holland, Amsterdam, 1969).

JOURNAL OF APPLIED PHYSICS **123**, 034304 (2018)

Spin-to-charge conversion in 2D electron gas and single-layer graphene devices

J. G. G. S. Ramos,[1] T. C. Vasconcelos,[1] and A. L. R. Barbosa[2,a)]
[1]*Departamento de Física, Universidade Federal da Paraíba, 58297-000 João Pessoa, Paraíba, Brazil*
[2]*Departamento de Física, Universidade Federal Rural de Pernambuco, 52171-900 Recife, Pernambuco, Brazil*

(Received 28 October 2017; accepted 9 December 2017; published online 18 January 2018)

We investigate the spin-to-charge conversion emerging from a mesoscopic device connected to multiple terminals. We obtain analytical expressions to the characteristic coefficient of spin-to-charge conversion, which are applied in two kinds of ballistic chaotic quantum dots at low temperature. We perform analytical diagrammatic calculations in the universal regime for two-dimensional electron gas and single-layer graphene with the strong spin-orbit interaction in the universal regime. Furthermore, our analytical results are confirmed by numerical simulations. Finally, we connect our analytical findings to recent experimental measures giving a conceptual explanation about the apparent discrepancies between them. *Published by AIP Publishing.*
https://doi.org/10.1063/1.5010973

I. INTRODUCTION

Charge-to-spin and spin-to-charge conversions are key aspects of spintronics and have been the focus of a large number of experimental and theoretical investigations.[1–5] They are experimentally performed in materials with large spin-orbit interaction (SOI) as some normal metals,[2,6,7] two-dimensional electron gas (2DEG),[3,4,8–11] single-layer graphene (SLG),[12–15] and topological insulators (TIs).[16] In bulk materials, the former case is known as spin Hall effect (SHE), for which a longitudinal charge current crossing a region with SOI gives rise to a transversal pure spin current. The latter case is known as inverse spin Hall effect (ISHE), which is the Onsager reciprocal of the SHE,[17] i.e., a longitudinal pure spin current produces a transversal charge current. The efficiency of the ISHE is commonly identified with a characteristic coefficient, the spin Hall angle $\Theta_{\rm SHE}$ is given by the ratio between the charge current (A/m), and the spin current (A/m^2) densities, $\Theta_{\rm SHE} t/2 = j^c/j^s$. It is also assumed the spin diffusion length typically much larger than the material thickness (t).

Differently of bulk materials, the charge-to-spin conversion mechanism in 2DEG is determined by the Rashba-Edelstein effect (REE).[18–20] The Hamiltonian that describes the SOI in the REE can be written as $\mathrm{H_R} = \alpha_{\rm R}(\mathbf{k}\times\hat{z})\cdot\boldsymbol{\sigma}$, where $\alpha_{\rm R}$ is the Rashba coefficient, whereas $\hat{z}$ and $\boldsymbol{\sigma}$ are, respectively, the unit vectors perpendicular to the plane of the 2DEG and the Pauli matrix vector. Similar to the SHE/ISHE reciprocity, there is a reciprocal effect of the REE which is known as inverse Rashba-Edelstein effect (IREE).[3,4] The efficiency of the IREE can be also obtained from the ratio between charge current and spin current densities, generating the IREE characteristic conversion parameter, $\lambda_{\rm IREE} = j^c/j^s$. However, it is proportional to the momentum relaxation time τ and the Rashba coefficient as $\lambda_{\rm IREE} = \alpha_{\rm R}\tau/\hbar$.

The first experimental measure of $\lambda_{\rm IREE}$ was reported in Ref. 3. Rojas-Sanchez *et al.* injected a pure spin current using a spin pumping from NiFe layer into a 2DEG surface formed on Ag/Bi interface and obtained values of $\lambda_{\rm IREE}$ ranging from 0.2 to 0.33 nm. However, Zhang *et al.*,[8] after some time, performed the same experiment in samples of NiFe/Ag/Bi and obtained values of $\lambda_{\rm IREE}$ in the interval 0.11 ± 0.02 nm, which are two or three times smaller compared with the results obtained in Ref. 3. Therefore, the relevant question emerges: what are the physical concepts behind the experimental discrepancies between Refs. 3 and 8?

Furthermore, Mendes *et al.*[13] reported an experiment that inject a pure spin current using a spin pumping from a ferromagnetic insulator composed of yttrium iron garnet into the SLG. They interpreted the spin-to-charge conversion in SLG as a manifestation of the IREE and obtained that the value of characteristic conversion parameter is $\lambda_{\rm IREE} \approx 10^{-3}$ nm, that is two orders of magnitude smaller than was obtained by Ref. 3. Nevertheless, Ohshima *et al.*,[12] which in an earlier moment performed an experiment with similar results of Ref. 13, interpreted spin-to-charge conversion in SLG as ISHE. The latter interpretation is also supported by Dushenko *et al.*[14] Despite this disagreement, it is correct to assert that $j^c/j^s \approx 10^{-3}$ nm for SLG from Ref. 13. Again, arise an essential question: what is the physical concept behind the experimental discrepancies between Refs. 3 and 13?

In this work, we investigate the spin-to-charge conversion using the Landauer-Büttiker formulation.[21] We obtain expressions to the characteristic coefficient of spin-to-charge conversion in this framework. Moreover, we apply the analytical results to the universal ballistic chaotic quantum dots with SOI at low temperature. We calculate the ensemble average and sample-to-sample universal fluctuations of the characteristic transport coefficient using the random matrix theory (RMT) framework,[22,23] i.e., admitting a spin-orbit interaction time much smaller than the dwell time of charges in the quantum dot, $\tau_{\rm dwell} \gg \tau_{\rm SOI}$.[24] Our analytical diagrammatic results

a)Electronic mail: anderson.barbosa@ufrpe.br

are obtained to very distinct mesoscopic devices, those whose 2DEG electrons are wave functions described by the Schrödinger equation and also to relativistic Dirac wave functions (SLG). Furthermore, our results are connected with the experimental measures of Refs. 3, 8, and 13 giving a conceptual explanation about the apparent discrepancies between the empirical results in the scattering framework. Moreover, our analytical results are confirmed by numerical simulations found on the Mahaux-Weidenmüller model of a ballistic chaotic quantum dot.[25]

II. THEORETICAL SCATTERING FRAMEWORK

We consider a 2D mesoscopic device connected to three electronic reservoirs by ideal leads. Inside the device, the electrons flow under the influence of a large SOI at low temperature. A schematic design of the device is depicted in Fig. 1. The reservoir indexed by 1 is hold by a spin pump that injects a pure spin current in the 2D device. Therefore, the ISHE or the IREE generates a pure charge current through the leads indexed by 2 and 3.

We consider the Landauer-Büttiker formulation[21] to describe the spin-to-charge current conversion through the 2D device. The spin and charge currents in the ith lead are defined as $I_i^\alpha = I_i^\uparrow - I_i^\downarrow$ and $I_i^0 = I_i^\uparrow + I_i^\downarrow$, respectively, with $I_i^\uparrow$ ($I_i^\downarrow$) is the charge current with spin-up (down) crossing the ith lead.[24] The general expression of current is given in Ref. 17 as follows:

$$I_i^\alpha = \frac{e}{h}\sum_\beta \left(2N_i\delta_{\alpha\beta} - \tau_{ii}^{\alpha\beta}\right)\mu_i^\beta - \frac{e}{h}\sum_{j\neq i,\beta}\tau_{ij}^{\alpha\beta}\mu_j^\beta. \tag{1}$$

The Latin characters indicate the current flow lead index ($i = 1, 2, 3$), whereas the Greek indices were introduced to differentiate charge current ($\alpha = 0$) and spin current ($\alpha = x, y, z$). The sum on j and β runs over 1, 2, 3 and 0, x, y, z, respectively. The dimensionless integer N_i is the number of propagating wave channels in the ith lead, which is defined as the reason between the lead width (W_i) and Fermi wavelength (λ_F), $N_i \propto W_i/\lambda_F$. The electrochemical potential and spin accumulation of ith reservoir connected to the ith lead are defined as $\mu_i^0 = eV_i$ and $\mu_i^\beta = (\mu_i^\uparrow - \mu_i^\downarrow)/2$, respectively, with $\mu_i^\uparrow$ ($\mu_i^\downarrow$) denoting the chemical potential of spin-up (down) along the β axis.[17] The spin-dependent transmission coefficient $\tau_{ij}^{\alpha\beta}$ gives the spin or charge current transmitted through the jth lead from the polarized reservoir μ_j^β to the ith lead with the corresponding polarized reservoir μ_i^α. It can be obtained from transmissions and reflections blocks of the corresponding scattering matrix as[17]

$$\tau_{ij}^{\alpha\beta} = \mathbf{Tr}\left[(\mathcal{S}_{ij})^\dagger \sigma^\alpha \mathcal{S}_{ij}\sigma^\beta\right] \tag{2}$$

with the scattering $\mathcal{S}$-matrix written as

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} r_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & r_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & r_{33} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Moreover, the $\mathcal{S}$-matrix is unitary ($\mathcal{S}\mathcal{S}^\dagger = 1$) and has $2N_T \times 2N_T$ dimensional, with N_T denoting the total number of propagating wave channels given by $N_T = N_1 + N_2 + N_3$. The σ^0 and σ^α are the identity and Pauli matrices, respectively. The trace of Eq. (2) is taken over both number of channels and spin spaces.

Following Ref. 26, a requirement to the existence of spin current flux through the lead 1 is the set of no charge current flow through it for a specific corresponding electrochemical potential. Therefore, the electrochemical potential of reservoir 1 is set as $\mu_1^0 = eV_1$ keeping the charge current null $I_1^0 = 0$ and a nonnull spin current $I_1^\alpha \neq 0$ in Eq. (1). Accordingly, a pure charge current will emerge through the leads 2 and 3 as a function of the spin accumulations (μ_1^α) in the reservoir 1, which means, due to conservation law, that $I_2^0 = -I_3^0$ in Eq. (1). Hence, these findings imply that all the spin current, the electrochemical potential, and the spin accumulations in reservoirs 2 and 3 are analytically set as nulls, $I_2^\alpha = I_3^\alpha = 0$ and $\mu_2^0 = \mu_3^0 = \mu_2^\alpha = \mu_3^\alpha = 0$. Using these constraints in Eq. (1), we can write the pure spin current as

$$I_1^\alpha = \frac{e}{h}\sum_{\beta\neq 0}\left[\left(2N_1\delta_{\alpha\beta} - \tau_{11}^{\alpha\beta}\right) - \frac{\tau_{11}^{\alpha 0}\tau_{11}^{0\beta}}{2N_1 - \tau_{11}^{00}}\right]\mu_1^\beta \tag{4}$$

for $\alpha = x, y, z$, and the pure charge current as

$$I_i^0 = -\frac{e}{h}\sum_{\beta\neq 0}\left[\frac{\tau_{i1}^{00}\tau_{11}^{0\beta}}{2N_1 - \tau_{11}^{00}} + \tau_{i1}^{0\beta}\right]\mu_1^\beta, \quad i = 2, 3. \tag{5}$$

The spin and charge currents [Eqs. (4) and (5)] are functions of spin accumulation μ_1^β of reservoir 1 without dependence on electrochemical potential $\mu_1^0 = eV_1$. Therefore, the spin accumulation tends to zero as the spin and charge currents vanish. Furthermore, we can inspect that Eq. (5) satisfies the conservation law $\sum_{i=1}^3 I_i^0 = 0$ as expected.

Equations (4) and (5) allow one to obtain the dimensionless characteristic coefficient $\lambda_\alpha = I_i^0/I_1^\alpha$ of the spin-to-charge conversion as a function of $\tau_{i1}^{\alpha\beta}$ and μ_1^β. However, there are two experimental regimes that deserve attention. The first one is taken when only one of the three spin accumulation components of reservoir 1 contributes to spin current or, more specifically, when $\mu_1^\beta = \delta_{\alpha\beta}\mu_1^\alpha$ in Eqs. (4) and (5), for which we obtain

$$\lambda_\alpha = \frac{\tau_{i1}^{00}\tau_{11}^{0\alpha} + (2N_1 - \tau_{11}^{00})\tau_{i1}^{0\alpha}}{\tau_{11}^{\alpha 0}\tau_{11}^{0\alpha} - (2N_1 - \tau_{11}^{00})(2N_1 - \tau_{11}^{\alpha\alpha})}, \quad i = 2, 3. \tag{6}$$

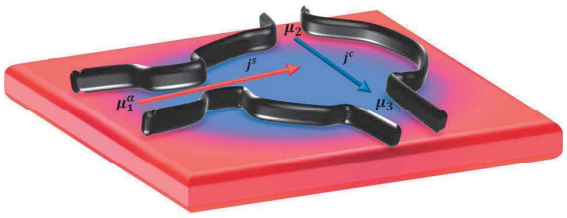

FIG. 1. A ballistic chaotic quantum dot connected to three electron reservoirs that are set with electrochemical potential and spin accumulation given by $\mu_i^0 = eV_i$ and $\mu_i^\beta = (\mu_i^\uparrow - \mu_i^\downarrow)/2$, respectively. The spin-to-charge conversion takes place if the reservoir 1 injects a pure spin current j^s inside the device, which is given rise a pure charge current j^c between the leads 2 and 3.

The second case is taken when the three spin accumulation components of reservoir 1 are symmetric $\mu_1^x = \mu_1^y = \mu_1^z$. Hence, we obtain that

$$\lambda_\alpha = \frac{\sum_\beta \tau_{i1}^{00}\tau_{11}^{0\beta} + (2N_1 - \tau_{11}^{00})\tau_{i1}^{0\alpha}}{\sum_\beta \tau_{11}^{\alpha 0}\tau_{11}^{0\beta} + (2N_1 - \tau_{11}^{00})\left[\sum_{\beta\neq\alpha}\tau_{11}^{\alpha\beta} - (2N_1 - \tau_{11}^{\alpha\alpha})\right]}. \tag{7}$$

Equations (6) and (7) can be applied to any type of electronic device. In Sec. III, we will use these results to investigate two kinds of chaotic quantum dots and to connect our analytical diagrammatic finds with experimental measures of Refs. 3, 8, and 13.

III. APPLIED IN CHAOTIC QUANTUM DOT

A. Chaotic Schrödinger quantum dot

A typical 2D ballistic mesoscopic device, which is schematically depicted in Fig. 1, is known as ballistic chaotic quantum dot. The wave functions of the electrons through the device are described by the Schrödinger equation in such a way that it is better called as ballistic chaotic Schrödinger quantum dot (SQD).

Let us focus on the experimentally relevant case of a coherent SQD, which preserve the time-reversal symmetry (absence of the magnetic field). If there is a strong SOI on the SQD, the scattering matrix of Eq. (3) is a member of the circular symplectic ensemble in the framework of RMT.[22] This allows one to use the standard diagrammatic method[27,28] to obtain the average and the universal fluctuations of the characteristic coefficients expressed on Eqs. (6) and (7).

First, the large N_T analytical calculation of λ_α through the diagrammatic method[24,29,30] renders for both experimental regimes [Eqs. (6) and (7)],

$$\langle\lambda_\alpha\rangle = \frac{\langle I_i^0\rangle}{\langle I_1^\alpha\rangle} = 0, \quad \alpha = x, y, z. \tag{8}$$

Equation (8) shows, from the statistic point of view, that when a spin current is pumping inside the chaotic quantum dot, there is the same probability to appear a charge current flux from lead 2 to 3 as from lead 3 to 2, and, consequently, its average is null (see the Appendix for further calculation details). However, for a specific mesoscopic device connected to a spin pump reservoir 1, λ_α is in general finite, information encoded on the variance (universal fluctuation) of the characteristic coefficient that we calculate henceforth. Analyzing Eq. (6) on the first regime, the diagrammatic method renders for large N_T

$$\mathrm{var}[\lambda_\alpha] = \frac{1}{4}\frac{N_2N_3}{N_1(N_2+N_3)N_T^2}. \tag{9}$$

Equation (9) is our first main result. It shows that, although the average of characteristic coefficient is null, Eq. (8), a single experimental measure of λ_α can assume a large amplitude in the universal regime owing to the universal current fluctuations intrinsic of all disorder mesoscopic devices.

Equation (9) can be connected with the experimental measure $\lambda_{\mathrm{IERR}} = 0.11 \pm 0.02\,\mathrm{nm}$ of Ref. 8 taking the fully symmetric configuration, $N_i = N$. Therefore, the characteristic coefficient holds a universal fluctuation given by

$$\mathrm{rms}[\lambda_\alpha] = \mathrm{rms}\left[\frac{I_i^0}{I_1^\alpha}\right] = \sqrt{\frac{1}{72}\times\frac{1}{N^2}} \approx 0.11 \times \frac{1}{N}. \tag{10}$$

Notice first the number of propagating wave channels N is proportional to the reason between the lead width (W) and the Fermi wavelength (λ_F), $N \propto W/\lambda_F$. Then, with a very good approximation, we can set henceforth the observable amplitudes in unities of λ_F (nm). Furthermore, the charge current per unit width and the spin current per unit width squared can be written as $j^c \propto I_i^0/W$ and $j^s \propto I_1^\alpha/W^2$, respectively. Accordingly, the universal fluctuation of $\lambda_{\mathrm{IERR}} = j^c/j^s$ in unities of λ_F (nm) is $\mathrm{rms}[\lambda_{\mathrm{IERR}}] = \mathrm{rms}[j^c/j^s] \approx \mathrm{rms}[I_i^0/I_1^\alpha] \times W \approx 0.11 \times \lambda_F$, from Eq. (10). Hence, we can estimate that $\mathrm{rms}[\lambda_{\mathrm{IERR}}] \approx 0.11\,\mathrm{nm}$, which is in agreement with Ref. 8.

The diagrammatic calculation to the second regime, Eq. (7), in the limit of large N_T renders

$$\mathrm{var}[\lambda_\alpha] = \frac{3}{4}\frac{N_2N_3}{N_1(N_2+N_3)N_T^2}. \tag{11}$$

Equation (11) is our second main result and, fortuitously, three times the one expressed in Eq. (9). Taking the fully symmetric configuration, $N_i = N$, the characteristic coefficient Eq. (11) supplies the following universal fluctuation:

$$\mathrm{rms}[\lambda_\alpha] = \mathrm{rms}\left[\frac{I_i^0}{I_1^\alpha}\right] = \sqrt{\frac{3}{72}\times\frac{1}{N^2}} \approx 0.20 \times \frac{1}{N}. \tag{12}$$

Using the same previously dimension analyses of $\lambda_{\mathrm{IERR}} = j^c/j^s$, we can estimate that $\mathrm{rms}[\lambda_{\mathrm{IERR}}] \approx 0.20\,\mathrm{nm}$. Furthermore, the total characteristic coefficient can be defined as a linear combination $\lambda = (\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z)$, implying that $\mathrm{rms}[\lambda] = \sqrt{\sum_\alpha \mathrm{var}[\lambda_\alpha]} = \sqrt{3\times 3/72\times 1/N^2} \approx 3\times 0.11\times 1/N \approx 0.33\times 1/N$. Hence, we can estimate that $\mathrm{rms}[\lambda_{\mathrm{IERR}}] \approx 0.33\,\mathrm{nm}$. Our results are agreement with the experimental measure of Ref. 3, which predicts values of λ_{IERR} ranging from 0.2 nm to 0.33 nm. The results explain the difference between experimental measures of Refs. 3 and 8.

B. Chaotic Dirac quantum dot (DQD)

The 2D ballistic mesoscopic devices performed with SLG or/and TIs have the electronic wave functions described by the massless Dirac equation of the corresponding relativistic quantum mechanics, instead of the Schrödinger equation. Accordingly, an appropriate nomenclature for them is ballistic chaotic Dirac quantum dot (DQD).

As in the previous calculation, the main interest is on the experimentally relevant configuration of a coherent DQD with the time-reversal symmetry (absence magnetic field). Furthermore, the DQD preserves also the sublattice/mirror/chiral symmetry in the Dirac point.[17,23,31] In the presence of large SOI inside the DQD, the scattering matrix of Eq. (3) is a member of the chiral circular symplectic ensemble in the

framework of RMT,[23] allowing to use the extension of diagrammatic method for Dirac devices.[32,36]

Again, we expand the ensemble averages of λ_α for large N_T using the extension of the diagrammatic method in both the experimental regimes, (6) and (7). We obtain that $\langle\lambda_\alpha\rangle = 0$ as for the SQD. However, as previously discussed, the main interest is on the characteristic coefficient variance. Taking the limit of large N_T to the first regime, Eq. (6), the result is

$$\mathrm{var}[\lambda_\alpha] = \frac{1}{8}\frac{N_2N_3}{N_1(N_2+N_3)N_T^2}. \tag{13}$$

Equation (13) is our third main result and half times the one expressed in Eq. (9). The factor 2 appears because the chiral symmetric makes the Dirac Hamiltonian two times larger than Schrödinger ones. To the second regime [Eq. (7)], we obtain

$$\mathrm{var}[\lambda_\alpha] = \frac{3}{8}\frac{N_2N_3}{N_1(N_2+N_3)N_T^2}, \tag{14}$$

which is three times the result expressed in Eq. (13).

Equations (13) and (14) can establish a relevant connection with the experimental result $\lambda_{\mathrm{IERR}} \approx 10^{-3}$ nm of Ref. 13. Notice first, according to Refs. 33–37, the chiral universal class is only relevant at low energy, which means in our analytical diagrammatic calculation that the number of propagating wave channels needs to be kept small. If the Fermi energy is set way from zero, the Wigner-Dyson e Chiral universal classes lead to the same results. Hence, the symmetric configuration ($N_i = N$) used in the SQD will not reveal the difference between SQD and DQD. Actually, we take the asymmetric configuration given by $N_1 = N$ and $N_2 = N_3 = 1$. Accordingly, we obtain from Eq. (13)

$$\mathrm{rms}[\lambda_\alpha] = \mathrm{rms}\left[\frac{I_i^0}{I_1^\alpha}\right] = \sqrt{\frac{1}{16}\times\frac{1}{N^3}} = 0.25\times\sqrt{\frac{1}{N}}\times\frac{1}{N}, \tag{15}$$

whereas, from Eq. (14)

$$\mathrm{rms}[\lambda_\alpha] = \mathrm{rms}\left[\frac{I_i^0}{I_1^\alpha}\right] = \sqrt{\frac{3}{16}\times\frac{1}{N^3}} \approx 0.43\times\sqrt{\frac{1}{N}}\times\frac{1}{N}. \tag{16}$$

Reference 13 uses a device with lead width (W) in the order of mm. Therefore, we can estimate that $\sqrt{1/N} \approx \sqrt{\lambda_F/W} \approx \sqrt{\mathrm{nm}/(10^6\,\mathrm{nm})} \approx \sqrt{10^{-6}} = 10^{-3}$, which allow us to rewrite Eqs. (15) and (16) as $\mathrm{rms}[\lambda_\alpha] \approx 10^{-3}\times 1/N$. Finally, using the same previously dimensional analyses to $\lambda_{\mathrm{IERR}} = j^c/j^s$, we obtain $\mathrm{rms}[\lambda_{\mathrm{IERR}}] \approx 10^{-3}$ nm, which is in agreement with Ref. 13. Therefore, we conclude that the difference between experimental measures of Refs. 3 and 13 is a device effect generated by a geometrically asymmetric configuration lead.

IV. NUMERICAL SIMULATION

In order to confirm the analytical results, Eqs. (8), (9), (11), (13), and (14), we perform a numerical simulation founded on the Mahaux-Weidenmüller formulation.[25] The scattering matrix of Eq. (3) is written as a function of both the electronic energy (ϵ) and the Hamiltonian ($\mathcal{H}$) which describe the resonances states inside the ballistic chaotic quantum dot. The general expression is

$$\mathcal{S} = \mathbf{1} - 2i\pi\mathcal{W}^\dagger(\epsilon - \mathcal{H} + i\pi\mathcal{W}\mathcal{W}^\dagger)^{-1}\mathcal{W}. \tag{17}$$

The coupling of the resonances states with the propagating modes (channels) in the three leads is given by the deterministic matrix $\mathcal{W} = (\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3)$. Moreover, this deterministic matrix satisfies the non-direct process, i.e., the orthogonality condition $\mathcal{W}_i^\dagger\mathcal{W}_j = \frac{1}{\pi}\delta_{i,j}$ holds.

In the framework of RMT, the Schrödinger Hamiltonian, which describes an SQD with reversal-time symmetry and also a large SOI, is a member of the Gaussian symplectic ensemble (GSE).[22] Furthermore, its entries have the Gaussian distribution given by

$$\mathcal{P}(\mathcal{H}) \propto \exp\left\{-\frac{M}{\lambda^2}Tr(\mathcal{H}^\dagger\mathcal{H})\right\},$$

where $\lambda = M\Delta/\pi$ is the variance related to the electronic single-particle level spacing, Δ, whereas M is the dimension of the $\mathcal{H}$-matrix and number of resonances states inside of SQD. To ensure the chaotic regime and consequently the universality of the observables, the number of resonances inside the quantum dot is taken as large ($M \gg N_T$).[29] Using Eqs. (2), (6), (7), and (17), we execute the numerical simulations whose results appear in Fig. 2-up for full symmetric

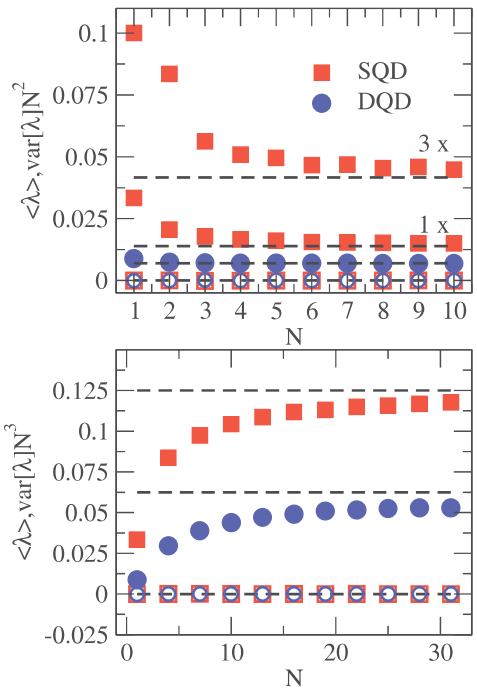

FIG. 2. The numerical simulation of the SQD and the DQD. The open symbols are average of characteristic coefficient (λ_z), whereas close symbols are its variance for (up) full symmetric open channels $N_i = N$ and (down) asymmetrical open channels $N_1 = N$ and $N_2 = N_3 = 1$. The lines are Eqs. (8), (9), (11), (13), and (14).

open channels ($N_i = N$) and in Fig. 2-down for non-symmetrical open channels ($N_1 = N$ and $N_2 = N_3 = 1$). Each symbol of Fig. 2 was obtained through 25×10^3 realizations and with $M = 300$. The open square symbols are the average of λ_α, whereas the close ones are the variance. Moreover, the lines represent the analytical results, Eqs. (8), (9), and (11). For large N, the numerical simulations are in great agreement with analytical results.

The massless Dirac Hamiltonian satisfy the following anti-commutation relation:[23]

$$\mathcal{H} = -\lambda_z \mathcal{H} \lambda_z, \quad \lambda_z = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{2M} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_{2M} \end{bmatrix},$$

where we interpret the $2M$ of 1's and -1's as the number of atoms in the chaotic graphene quantum dot sub-lattices. The anti-commutation relation above implies that the Dirac Hamiltonian is

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathcal{T} \\ \mathcal{T}^\dagger & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

In the framework of RMT, the massless Dirac Hamiltonian, which describes the DQD with reversal-time symmetry and large SOI, is an element of the chiral Gaussian symplectic ensemble (chGSE).[38] Furthermore, the entries of $\mathcal{T}$-matrix have the Gaussian distribution given by

$$P(\mathcal{T}) \propto \exp\left\{ -\frac{2M}{\lambda^2} Tr(\mathcal{T}^\dagger \mathcal{T}) \right\},$$

where $\lambda = 2M\Delta/\pi$. Using Eqs. (2), (6), (7), (17), and (18), we develop the numerical simulations for DQD that appear in Fig. 2-up for full symmetric open channels ($N_i = N$) and Fig. 2-down for non-symmetrical open channels ($N_1 = N$ and $N_2 = N_3 = 1$), which was obtained through 25×10^3 realizations and with $M = 300$. The open circle symbols are the average of λ_α, whereas the close ones are the variance. Moreover, the lines represent the analytical results, Eqs. (8), (13), and (14). For large N, the numerical simulations are in great agreement with the analytical results, as expected.

V. CONCLUSIONS

We present a complete analytical study of the spin-to-charge conversion in the universal regime for a myriad of mesoscopic devices. We obtain two expressions to the characteristic conversion coefficient [Eqs. (6) and (7)] using the Landauer-Büttiker framework that can be applied to any kind of electronic devices. The results are applied to different universal chaotic quantum dots with strong spin-orbit interaction. We use a diagrammatic calculation and obtain analytical expression for a characteristic coefficient at Wigner-Dyson and Chiral universal classes. The analytical results are confirmed by numerical simulations in the random matrix theory framework. We connected our analytical results with recent experimental measures of Refs. 3, 8, and 13 giving an explanation about the apparent discrepancies between them. Finally, we show that the difference between experimental measures from 2DGE of Ref. 3 and SLG of Ref. 13 is a geometric device effect generated by asymmetric configuration leads.

ACKNOWLEDGMENTS

This work was partially supported by CNPq, CAPES, and FACEPE (Brazilian Agencies).

APPENDIX: AVERAGE AND VARIANCE OF CHARACTERISTIC COEFFICIENT

We show how to obtain the average and variance of the characteristic coefficient λ_α [Eqs. (8) and (9)]. We take the average of characteristic coefficient [Eq. (6)] in the limit of large number of open channels N_T

$$\langle \lambda_\alpha \rangle = \left\langle \frac{I_i^0}{I_1^\alpha} \right\rangle \approx \frac{\langle I_i^0 \rangle}{\langle I_1^\alpha \rangle} = \frac{\langle \tau_{i1}^{00} \tau_{11}^{0\alpha} + (2N_1 - \tau_{11}^{00}) \tau_{i1}^{0\alpha} \rangle}{\langle \tau_{11}^{\alpha 0} \tau_{11}^{0\alpha} - (2N_1 - \tau_{11}^{00})(2N_1 - \tau_{11}^{\alpha\alpha}) \rangle}, \tag{A1}$$

where $i = 2, 3$. The average of λ_α can be calculated analytically in the framework of random matrix theory expanding it as a function of N_T as in the following:

$$\langle \lambda_\alpha \rangle \approx \frac{\langle T^c \rangle}{\langle T^s \rangle} + \frac{\langle \delta T^c \rangle \langle T^s \rangle - \langle \delta T^s \rangle \langle T^c \rangle}{\langle T^s \rangle^2} + \mathcal{O}(N_T^{-1}), \tag{A2}$$

where $T^c = \tau_{i1}^{00} \tau_{11}^{0\alpha} + (2N_1 - \tau_{11}^{00}) \tau_{i1}^{0\alpha}$ and $T^s = \tau_{11}^{\alpha 0} \tau_{11}^{0\alpha} - (2N_1 - \tau_{11}^{00})(2N_1 - \tau_{11}^{\alpha\alpha})$. From Eq. (A2), we can write

$$\langle T^c \rangle = \langle \tau_{i1}^{00} \tau_{11}^{0\alpha} \rangle + 2N_1 \langle \tau_{i1}^{0\alpha} \rangle - \langle \tau_{i1}^{0\alpha} \tau_{11}^{00} \rangle,$$
$$\langle T^s \rangle = \langle \tau_{11}^{\alpha 0} \tau_{11}^{0\alpha} \rangle - 4N_1^2 + 2N_1 \langle \tau_{11}^{\alpha\alpha} \rangle + 2N_1 \langle \tau_{11}^{00} \rangle - \langle \tau_{11}^{\alpha\alpha} \tau_{11}^{00} \rangle,$$

and

$$\langle \delta T^c \rangle = 2\langle \tau_{j1}^{00} \rangle \langle \tau_{11}^{0\alpha} \rangle + 2N_1 \langle \tau_{j1}^{0\alpha} \rangle - 2\langle \tau_{j1}^{0\alpha} \rangle \langle \tau_{11}^{00} \rangle,$$
$$\langle \delta T^s \rangle = 2\langle \tau_{11}^{\alpha 0} \rangle \langle \tau_{11}^{0\alpha} \rangle + 2N_1 \langle \tau_{11}^{00} \rangle + 2N_1 \langle \tau_{11}^{\alpha\alpha} \rangle - 2\langle \tau_{11}^{00} \rangle \langle \tau_{11}^{\alpha\alpha} \rangle.$$

For a chaotic Schrödinger quantum dot in the presence of time-reversal symmetry and strong spin-orbit interaction, we can use the standard diagrammatic method of Refs. 24, 27, and 29. Performing the calculations, we obtain

$$\langle T^c \rangle = 0, \tag{A3}$$

$$\langle T^s \rangle = -\frac{4N_1^2(N_2 + N_3)}{N_T}, \tag{A4}$$

$$\langle \delta T^c \rangle = 0, \tag{A5}$$

$$\langle \delta T^s \rangle = \frac{8N_1^2(2N_1^2 + 2N_1N_2 + 2N_1N_3 - N_1 - 2N_2 - 2N_3)}{(2N_T - 1)^2}. \tag{A6}$$

We replace Eqs. (A3)–(A6) in Eq. (A2) and obtain

$$\langle \lambda_\alpha \rangle = 0.$$

Furthermore, we can do the same procedure to obtain the variance of λ_α. The variance is defined as

$$\mathrm{var}[\lambda_\alpha] = \langle\lambda_\alpha^2\rangle - \langle\lambda_\alpha\rangle^2 = \langle\lambda_\alpha^2\rangle.$$

Expanding in order of $\mathcal{O}(N_T^{-1})$, we have that

$$\begin{aligned}\mathrm{var}[\lambda_\alpha] = \langle\lambda_\alpha^2\rangle \approx{}& \frac{\langle T^c\rangle^2}{\langle T^s\rangle^2} \\ &+ \frac{\langle\delta T^{c2}\rangle\langle T^s\rangle^2 + \langle\delta T^{s2}\rangle\langle T^c\rangle^2 - 2\langle\delta T^c\delta T^s\rangle\langle T^c\rangle\langle T^s\rangle}{\langle T^s\rangle^4} \\ &+ 2\frac{\langle\delta T^c\rangle\langle T^c\rangle\langle T^s\rangle - \langle\delta T^s\rangle\langle T^c\rangle^2}{\langle T^s\rangle^3} + \mathcal{O}(N_T^{-1}).\end{aligned} \tag{A7}$$

From Eqs. (A3) to (A6), Eq. (A7) simplifies to

$$\mathrm{var}[\lambda_\alpha] \approx \frac{\langle\delta T^{c2}\rangle}{\langle T^s\rangle^2}. \tag{A8}$$

Using Refs. 24, 27, and 29, we obtain that

$$\langle\delta T^{c2}\rangle = \frac{4N_1^3N_2N_3(N_2+N_3)}{N_T^4}. \tag{A9}$$

Replacing Eqs. (A4) and (A9) in Eq. (A8), finally we obtain that

$$\mathrm{var}[\lambda_\alpha] = \frac{N_2N_3}{4N_1(N_2+N_3)N_T^2}. \tag{A10}$$

Equations (11), (13), and (14) can be obtained following the same procedure.

[1]Y. Niimi and Y. Otani1, Rep. Prog. Phys. **78**, 124501 (2015).
[2]J. Sinova, S. O. Valenzuela, J. Wunderlich, C. H. Black, and T. Jungwirth, Rev. Mod. Phys. **87**, 1213 (2015).
[3]J.-C. Rojas-Sanchez, L. Villa, G. Desfonds, S. Gambarelli, J. P. Attane, J. M. De Teresa, C. Magen, and A. Fert, Nat. Commun. **4**, 2944 (2013).
[4]K. Shen, G. Vignale, and R. Raimondi, Phys. Rev. Lett. **112**, 096601 (2014).
[5]S. Bhattacharjee1, S. Singh1, D. Wang, M. Viret, and L. Bellaiche1, J. Phys.: Condens. Matter **26**, 315008 (2014).
[6]Y. Zhang, X. S. Wang, H. Y. Yuan, S. S. Kang, H. W. Zhang, and X. R. Wang, J. Phys.: Condens. Matter **29**, 095806 (2017).
[7]X. Huang, Z. Dai, L. Huang, G. Lu, M. Liu, H. Piao, D.-H. Kim, S.-C. Yu, and L. Pan, J. Phys.: Condens. Matter **28**, 476006 (2016).
[8]W. Zhang, M. B. Jungfleisch, W. Jiang, J. E. Pearson, and A. Hoffmann, J. Appl. Phys. **117**, 17C727 (2015).
[9]M. Isasa, M. C. Martnez-Velarte, E. Villamor, C. Magn, L. Morelln, J. M. De Teresa, M. Ricardo Ibarra, G. Vignale, E. V. Chulkov, E. E. Krasovskii, L. E. Hueso, and F. Casanova, Phys. Rev. B **93**, 014420 (2016).
[10]P. Stano and P. Jacquod, Phys. Rev. Lett. **106**, 206602 (2011).
[11]F. Nichele, S. Hennel, P. Pietsch, W. Wegscheider, P. Stano, P. Jacquod, T. Ihn, and K. Ensslin, Phys. Rev. Lett. **114**, 206601 (2015).
[12]R. Ohshima, A. Sakai, Y. Ando, T. Shinjo, K. Kawahara, H. Ago, and M. Shiraishi, Appl. Phys. Lett. **105**, 162410 (2014).
[13]J. B. S. Mendes, O. Alves Santos, L. M. Meireles, R. G. Lacerda, L. H. Vilela-Leão, F. L. A. Machado, R. L. Rodríguez-Suárez, A. Azevedo, and S. M. Rezende, Phys. Rev. Lett. **115**, 226601 (2015).
[14]S. Dushenko, H. Ago, K. Kawahara, T. Tsuda, S. Kuwabata, T. Takenobu, T. Shinjo, Y. Ando, and M. Shiraishi, Phys. Rev. Lett. **116**, 166102 (2016).
[15]W. S. Torres, J. F. Sierra, L. A. Benítez, F. Bonell, M. V. Costache, and S. O. Valenzuela, 2D Mater. **4**, 041008 (2017).
[16]J.-C. Rojas-Snchez, S. Oyarzn, Y. Fu, A. Marty, C. Vergnaud, S. Gambarelli, L. Vila, M. Jamet, Y. Ohtsubo, A. Taleb-Ibrahimi, P. Le Fvre, F. Bertran, N. Reyren, J.-M. George, and A. Fert, Phys. Rev. Lett. **116**, 096602 (2016).
[17]P. Jacquod, R. S. Whitney, J. Meair, and M. Buttiker, Phys. Rev. B **86**, 155118 (2012).
[18]Y. A. Bychkov and E. I. Rashba, JETP Lett. **39**, 78 (1984).
[19]V. M. Edelstein, Solid State Commun. **73**, 233 (1990).
[20]A. G. Aronov and Y. B. Lyanda-Geller, JETP Lett. **50**, 431 (1989).
[21]M. Buttiker, Phys. Rev. Lett. **57**, 1761 (1986).
[22]M. L. Mehta, *Random Matrices* (Academic, New York, 1991).
[23]E. V. Shuryak and J. J. M. Verbaarschot, Nucl. Phys. A **560**, 306 (1993); J. Verbaarschot, Phys. Rev. Lett. **72**, 2531 (1994).
[24]J. H. Bardarson, I. Adagideli, and P. Jacquod, Phys. Rev. Lett. **98**, 196601 (2007).
[25]C. Mahaux and H. A. Weidenmuller, *Shell Model Approach to Nuclear Reactions* (North-Holland, Amsterdam, 1969).
[26]I. Adagideli, J. H. Bardarson, and Ph. Jacquod, J. Phys.: Condens. Matter **21**, 155503 (2009).
[27]P. W. Brouwer and C. W. J. Beenakker, J. Math. Phys. **37**, 4904 (1996).
[28]J. G. G. S. Ramos, A. L. R. Barbosa, and A. M. S. Macêdo, Phys. Rev. B **78**, 235305 (2008); A. L. R. Barbosa, J. G. G. S. Ramos, and D. Bazeia, *ibid.* **84**, 115312 (2011); A. L. R. Barbosa, J. G. G. S. Ramos, and A. M. S. Macêdo, J. Phys. A **43**, 075101 (2010).
[29]J. G. G. S. Ramos, A. L. R. Barbosa, D. Bazeia, M. S. Hussein, and C. H. Lewenkopf, Phys. Rev. B **86**, 235112 (2012).
[30]P. Jacquod and I. Adagideli, Phys. Rev. B **88**, 041305(R) (2013).
[31]I. Hagymási, P. Vancsó, A. Plinkás, and Z. Osváth, Phys. Rev. B **95**, 075123 (2017).
[32]M. S. M. Barros, A. J. Nascimento Júnior, A. F. Macedo-Junior, J. G. G. S. Ramos, and A. L. R. Barbosa, Phys. Rev. B **88**, 245133 (2013).
[33]S. Gnutzmann and B. Seif, Phys. Rev. E **69**, 056219 (2004).
[34]J. Wurm, K. Richter, and I. Adagideli, Phys. Rev. B **84**, 205421 (2011).
[35]J. G. G. S. Ramos, M. S. Hussein, and A. L. R. Barbosa, Phys. Rev. B **93**, 125136 (2016).
[36]T. C. Vasconcelos, J. G. G. S. Ramos, and A. L. R. Barbosa, Phys. Rev. B **93**, 115120 (2016).
[37]Z. Qiao, J. Wang, Y. Wei, and H. Guo, Phys. Rev. Lett. **101**, 016804 (2008).
[38]A. J. Nascimento Jnior, M. S. M. Barros, J. G. G. S. Ramos, and A. L. R. Barbosa, Eur. Phys. J. B **89**, 194 (2016).

Rapid Communications

Spin Hall angle fluctuations in a device with disorder

F. A. F. Santana,[1] J. M. da Silva,[1] T. C. Vasconcelos,[2] J. G. G. S. Ramos,[2] and A. L. R. Barbosa[1,*]

[1]*Departamento de Física, Universidade Federal Rural de Pernambuco, 52171-900 Recife, PE, Brazil*

[2]*Departamento de Física, Universidade Federal da Paraíba, 58297-000 João Pessoa, Paraíba, Brazil*

(Received 5 May 2020; revised 23 June 2020; accepted 25 June 2020; published 6 July 2020)

We investigate a disorderly mesoscopic device that supports spin-orbit interaction. The system is connected to four semi-infinite leads embedded in the Landauer-Buttiker setup for quantum transport and, according to our analysis, exhibits spin Hall angle fluctuations. We show analytically and numerically the fingerprint of the universal fluctuation of the polarization mediated by the conversion of charge current into spin current. Our investigation shows the complete compatibility of our analytical and numerical results with the most recent experiments. Furthermore, we show nonzero and universal features of spin Hall effect in Rashba two-dimensional electron gas with disorder. All the results show the relevance of microscopic parameters for electronic transport with charge-spin conversion and, in many cases, inevitably lead to universal numbers.

DOI: 10.1103/PhysRevB.102.041107

Introduction. The spin-orbit interaction (SOI) is a relativistic effect which is found in many branches of condensed matter physics [1–5]. Such coupling permeates the history of quantum mechanics through its numerous manifestations and applications that include the hyperfine structure in atomic spectroscopy, the modification of shell models in nuclear physics, and, more recently, spintronics [6–15]. One of the most relevant manifestations of the spintronic is the spin Hall effect (SHE) [16,17], which was proposed in the Refs. [18,19] and measured for the first time in Refs. [20,21]. The main mechanism underlying the effect is an electric field applied to the device in the longitudinal direction generating a pure longitudinal charge current, as usual. However, the up-spin electrons are deflected to a diametrically opposite side of the down-spin electrons, in the same amount, giving rise to a pure transversal spin Hall current due to SOI. To quantify the efficiency of charge-to-spin conversion, the spin Hall angle (SHA) is commonly used, which is defined as the ratio between the vertical spin Hall current and the longitudinal charge current. Its experimental values can range between 0.01% and 58% for different materials in the disorderly regime [22–34].

The SHE fluctuations were theoretically investigated in Ref. [35] in a disordered four-leads device using a tight-binding model. The authors showed the presence of a universal spin Hall conductance fluctuation with a universal number $\mathbf{rms}[G_{\mathrm{sH}}] = 0.18e/4\pi$ in the presence of the SOI. Motivated by this numerical result, the authors of Ref. [36] were able to recover this universal number analytically using the Landauer-Buttiker formulation (LBF) [37] and the random matrix theory (RMT) [38]. Furthermore, they demonstrated the universal behavior established with the circular symplectic ensemble in the framework of RMT. In the current literature, there are many SHA theoretical studies [12,39]; however, a theoretical investigation of SHA fluctuations concatenating both by numerical calculation and all the analytical results is completely missing.

Given this scenario, a relevant question that remains open is, what information regarding electronic transport is provided by a measurement of SHA fluctuations? We will show, analytically using LBF, RMT, Dorokhov-Mello-Pereyra-Kumar (DMPK) equation [40], and central limit theorem (CLT) [41], that the SHA deviation is a function of only three variables in the disorderly regime with strong SOI: the sample thickness, longitudinal length, and the free-electron path. In addition to these results, we show that if the sample length is long enough, the SHA maximum deviation holds a universal relation with dimensionless conductivity $\Theta_{\mathrm{sH}} \times \sigma = 0.18$ which is independent of the material and its specific features. This universal relation is supported by five different experimental data and a numerical calculation. Furthermore, despite the consensus of a vanishing SHE due to disorder [5,8], we show that the zero SHE are irrelevant for realistic finite-size systems where self-averaging over an infinite system size is avoided [1,7].

SHA fluctuations. The device is designed with four semi-infinite leads (black) connected to a scattering region with disorder and strong SOI (blue) as depicted in Fig. 1. An electric potential difference V is applied between leads 1 and 2, which gives rise to a pure longitudinal charge current.

From the LBF, Refs. [6,7,36] were able to obtain the following expression for the vertical spin Hall current

$$I^{s}_{i,\alpha} = \frac{e^2}{h}\left[\left(\tau^{\alpha}_{i2} - \tau^{\alpha}_{i1}\right)\frac{V}{2} - \tau^{\alpha}_{i3}V_3 + \tau^{\alpha}_{i4}V_4\right], \quad i = 3, 4, \tag{1}$$

and also for longitudinal charge current

$$I^{c} = \frac{e^2}{h}\left[\left(4N + \tau^{0}_{12} + \tau^{0}_{21} - \tau^{0}_{11} - \tau^{0}_{22}\right)\frac{V}{4} + \left(\tau^{0}_{23} - \tau^{0}_{13}\right)\frac{V_3}{2} + \left(\tau^{0}_{24} - \tau^{0}_{14}\right)\frac{V_4}{2}\right]. \tag{2}$$

The dimensionless integer N is the number of propagating wave modes in the leads, which is proportional to both the lead

*anderson.barbosa@ufrpe.br

 ©2020 American Physical Society

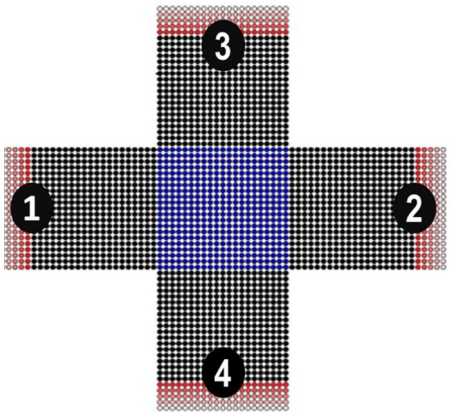

FIG. 1. The spin Hall device design. The scattering sample with disorder and strong SOI (blue) is connected to four semi-infinite leads.

width (W) and the Fermi vector (k_F) through the equation $N = k_F W/\pi$, while $V_{3,4}$ are the vertical leads potential. The transmission coefficients τ_{ij}^{α} can be obtained from transmission and reflection blocks of the corresponding device scattering $\mathcal{S}$ matrix as

$$\tau_{ij}^{\alpha} = \mathbf{Tr}\left[(\mathcal{S}_{ij})^{\dagger}\sigma^{\alpha}\mathcal{S}_{ij}\right], \quad \mathcal{S} = \begin{bmatrix} r_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & r_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & r_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & r_{44} \end{bmatrix},$$

with σ^0 and σ^{α} denoting the identity and Pauli matrices, respectively, with polarization direction $\alpha = x, y, z$.

The SHA is defined as the ratio between vertical spin Hall and longitudinal charge currents

$$\Theta_{\mathrm{sH}} = \frac{I^s}{I^c}. \tag{3}$$

To develop the ensemble average of Eq. (), the CLT can be implemented. Hence, taking a high Fermi energy limit $E \gg 0$, which means that the device thickness is large, $N \gg 1$, Eq. (3) can be expanded as

$$\langle\Theta_{\mathrm{sH}}\rangle = \frac{\langle I^s\rangle}{\langle I^c\rangle} + \frac{\langle\delta I^s\rangle\langle I^c\rangle - \langle\delta I^c\rangle\langle I^s\rangle}{\langle I^c\rangle^2} + O(N^{-1}). \tag{4}$$

This methodology is often used for electronic transport in RMT [42–47]. As shown in Refs. [36,47], the spin Hall current average is null, $\langle I^s\rangle = \langle\delta I^s\rangle = 0$, which leads us to deduce

$$\langle\Theta_{\mathrm{sH}}\rangle = 0. \tag{5}$$

Equation (5) for the SHA implies a Gaussian distribution with maximum in zero and also that all relevant information may be contained in its fluctuations. The device under study is disorderly, which induces universal spin Hall and charge current fluctuations [35]. Hence, it is reasonable to expect that the SHA has universal fluctuations. In the usual way, we define the SHA deviation as

$$\mathbf{rms}[\Theta_{\mathrm{sH}}] = \sqrt{\langle\Theta_{\mathrm{sH}}^2\rangle - \langle\Theta_{\mathrm{sH}}\rangle^2} = \sqrt{\langle\Theta_{\mathrm{sH}}^2\rangle}.$$

We follow the same methodology above to develop the ensemble average and obtain

$$\langle\Theta_{\mathrm{sH}}^2\rangle = \frac{\langle I^s\rangle^2}{\langle I^c\rangle^2} + 2\frac{\langle\delta I^s\rangle\langle I^s\rangle\langle I^c\rangle - \langle\delta I^c\rangle\langle I^s\rangle^2}{\langle I^c\rangle^3} + \frac{\langle\delta I^{s2}\rangle\langle I^c\rangle^2 + \langle\delta I^{c2}\rangle\langle I^s\rangle^2 - 2\langle\delta I^s\delta I^c\rangle\langle I^s\rangle\langle I^c\rangle}{\langle I^c\rangle^4} + O(N^{-3}).$$

Using the zero mean again for the current, $\langle I^s\rangle = 0$, it simplifies to

$$\mathbf{rms}[\Theta_{\mathrm{sH}}] = \sqrt{\frac{\langle\delta I^{s2}\rangle}{\langle I^c\rangle^2}}, \tag{6}$$

that is, we can infer the SHA deviation with the knowledge of the spin Hall current fluctuations and the charge current average.

Applying the diagrammatic method [48] to scattering matrices in the circular symplectic ensemble (strong SOI), the following expression was obtained for spin Hall current fluctuation [36,47]:

$$\langle\delta I^{s2}\rangle = \left(\frac{e^2V}{h}\right)^2\left[\frac{1}{32} + O(N^{-1})\right]. \tag{7}$$

At this point, we must invoke calculations that incorporate length scales that are not covered by the diagrammatic method [48]. The longitudinal charge current average is appropriately described by the result provided by DMPK [40,42]:

$$\langle I^c\rangle = \frac{e^2V}{h}\left[\frac{N}{1+\frac{L}{l_e}} + O(N^{-1})\right], \tag{8}$$

where L and l_e are the device longitudinal length and free electron path, respectively. The limit $L/l_e \gg 1$ leads to the diffusive regime while $L/l_e \ll 1$ to the ballistic regime, assuming that phase coherence length L_ϕ satisfies $L_\phi > L$. Substituting Eqs. (7) and (8) in Eq. (6), we obtain

$$\mathbf{rms}[\Theta_{\mathrm{sH}}] = \frac{0.18}{N}\left(1 + \frac{L}{l_e}\right). \tag{9}$$

Equation (9) is the main outcome of this work, which expresses the universal fluctuation as a function of three variables relevant to the electronic transport. Equation (9) drives two important interpretations: (1) disorder increases the SHA; the more scattering the spin carrier suffers the greater the charge-spin conversion; (2) decreasing of device thickness N increases SHA. The authors of Ref. [39] have used the Drude model and found that the SHA can be enhanced by decreasing film thickness, which is in accordance with Eq. (9).

Taking the limit $L/l_e \ll 1$, the SHA attains a maximum deviation with the limit of Eq. (9) resulting in

$$\Theta_{\mathrm{sH}} \times g = 0.18, \tag{10}$$

which is valid to chaotic ballistic billiard and accordingly $g = N$ is the dimensionless conductance. Furthermore, taking the limit $L/l_e \gg 1$, Eq. (9) can be written as a function of dimensionless conductivity $\sigma = Nl_e/L$ as

$$\Theta_{\mathrm{sH}} \times \sigma = 0.18, \tag{11}$$

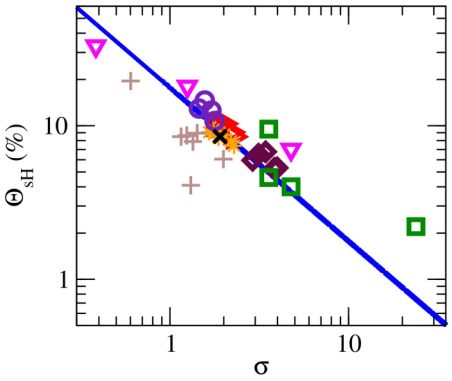

FIG. 2. The SHA $\Theta_{sH}(\%)$ as a function of dimensionless conductivity σ. The symbols circle, star, diamond, and triangle right are experimental data obtained from Ref. [24]. The experimental square, plus, triangle down, and times symbols are obtained from Refs. [25–28], respectively. The continuous line (blue) is the analytical result of Eq. (11).

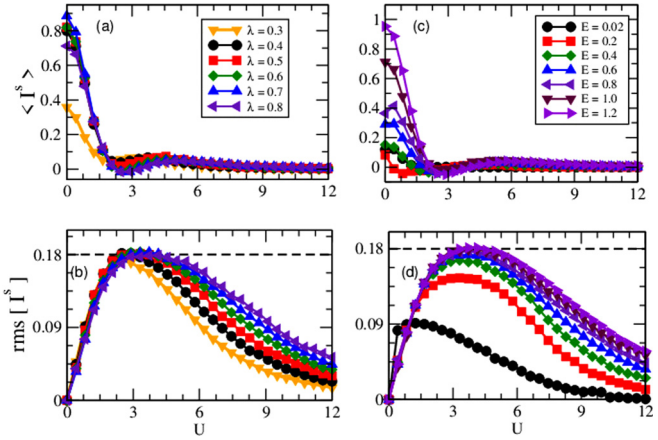

FIG. 3. (a) and (c) show the spin current average while (b) and (d) show the spin current deviation as a function of the disorder U. (a) and (b) are for different values of SOI λ at fixed $E = 1$, while (c) and (d) are for different values of E at fixed $\lambda = 0.8$. In both cases the spin Hall current deviation results in $\mathbf{rms}[I^s] = 0.18$ (dashed line), Ref. [35].

which indicates the decrease in SHA as a power law as a function of conductivity for films with strong SOI in the disorderly regime. Moreover, Eq. (11) means that the product between Θ_{sH} and σ has a universal value 0.18, which is independent of the material and its specific features.

Experimental analysis. Figure 2 shows $\Theta_{sH}(\%)$ as a function of dimensionless conductivity σ. The symbols circle, star, diamond, and triangle right are experimental data obtained from Fig. 4 of Ref. [24]. Pt films were used in the moderately dirt regime. The conductivity axis of experiment was normalized as $\sigma = \sigma_{\text{expt.}}(\Omega^{-1}\,\text{cm}^{-1})/10^4(\Omega^{-1}\,\text{cm}^{-1})$.

The experimental square symbols are obtained from Table 1 of Ref. [25] for films of NiFe/Pt, CoFe/Pt, CoFe/Pd, and CoFe/Au from $\rho_N(\mu\Omega\,\text{cm})$ and Θ_{SHE} (1D analytical) (%) columns. The plus symbols are obtained from Figs. 2(a) and 2(b) of Ref. [26] for films based on W by mixing with Hf with concentration $\geqslant 0.7$. Moreover, the triangle down symbols are obtained from Table 1 of Ref. [27] for β-W thin films, while the times symbols are obtained from Ref. [28] for p-Si thin film.

Also in Fig. 2, we plot Eq. (11) as a continuous line (blue) and, as depicted, we conclude the compatibility between the five experiments [24–28] and our analytical results satisfactorily follow the universal relation $\Theta_{sH} \times \sigma = 0.18$.

Numerical results. We developed a numerical calculation of SHA fluctuations and we established a direct comparison with Eqs. (5) and (9). The device design is depicted in Fig. 1 and the tight-binding Hamiltonian of the scattering region (blue) is [49,50]

$$H = -t \sum_{\langle i,j\rangle,\sigma} c^{\dagger}_{i\sigma} c_{j\sigma} + \sum_{i\sigma} (4t + \epsilon_i) c^{\dagger}_{i\sigma} c_{i\sigma} - i\lambda \sum_{\langle i,j\rangle} (c^{\dagger}_i \sigma_y c_j - c^{\dagger}_i \sigma_x c_j). \quad (12)$$

The first term represents the usual nearest-neighbor interaction, where c_i ($c^{\dagger}_i$) is the annihilation (creation) operator and $t = \hbar^2/2m^*a^2$ is the nearest-neighbor hopping energy [51]. The second term is an Anderson disorder term. The disorder is realized by an electrostatic potential ϵ_i which varies randomly from site to site according to a uniform distribution in the interval $(-U/2, U/2)$, where U is the disorder strength. The last term, $\lambda = \hbar\alpha_R/2a$, describes the strength of the Rashba SOI. The numerical calculations [51] are implemented in the KWANT software [52].

Figure 3 shows the universal spin Hall current fluctuation in agreement with the previous numerical [35] and analytical [36] results. Figures 3(a) and 3(c) represent the spin Hall current average, Eq. (1), as a function of disorder U for different values of λ and energy, respectively. In both cases, we observe oscillations in the tails of the spin Hall current average, which were not announced before. The oscillations have as the underlying mechanism the fluctuations in potentials $V_{3,4}$. Furthermore, Figs. 3(b) and 3(d) show the spin Hall current deviation as a function of U. In the former, the energy was fixed in $E = 1$ for different SOI values λ. In all cases, the maximum deviations are $\mathbf{rms}[I^s] = e^2V/h \times 0.18$ (dashed line), as expected. In the latter, the SOI value was fixed in $\lambda = 0.8$ for different energy values. For low energy ($E = 0.02$) the spin Hall current has its minimum deviation, while for high energies ($E \geqslant 0.6$) it has its maximum deviation.

The longitudinal charge current behavior, Eq. (2), is depicted in Fig. 4. Figures 4(a) and 4(c) show the charge current average as a function of U for different values of λ and energy, respectively, while the Figs. 4(b) and 4(d) are their respective deviations. Differently from the spin Hall current average, depicted in Figs. 3(a) and 3(c), the charge current average does not present oscillations, Figs. 4(a) and 4(c). Furthermore, the charge current maximum deviation, Fig. 4(b), occurs for disorder strength values ($U \geqslant 6$) larger than spin Hall maximum deviation ($U \approx 3$), Fig. 3(b). However, the spin Hall and charge current deviations have the same behavior—the growth as a function of energy [Fig. 4(d)]. For low energy ($E = 0.02$) the charge current has its minimum deviation, while for high energies ($E \geqslant 0.6$) it has its maximum. Hence, from the numeric data of Figs. 4(b)

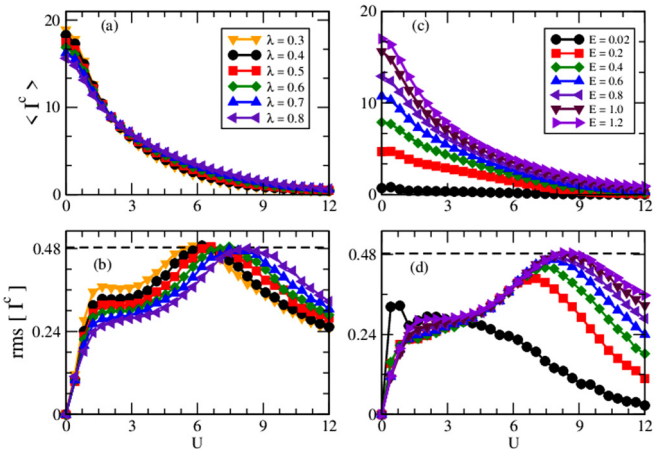

FIG. 4. (a) and (c) show the charge current average while (b) and (d) show the charge current deviation as a function of disorder U. (a) and (b) are for different SOI values λ at fixed $E = 1$, while (c) and (d) are for different values of E at fixed $\lambda = 0.8$. In both cases the charge current deviation holds a maximum in $\mathbf{rms}[I^c] = 0.48$ (dashed line).

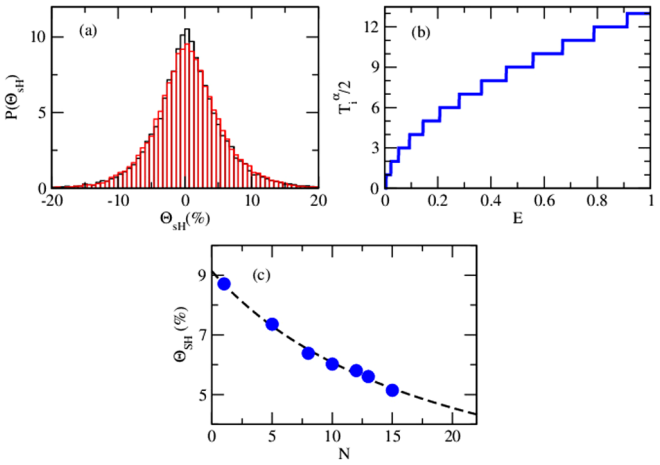

FIG. 6. (a) Histograms of SHA for $E = 1$, $U = 8$, and $\lambda = 0.7, 0.8$. (b) The transmission coefficient $T_i^{\alpha}(E)/2 = N$ as a function of energy. (c) The SHA maximum deviations of Fig. 5(d) as a function of thickness N. The dashed line is a numeric data fit.

and 4(d) we estimate the charge current maximum deviation as $\mathbf{rms}[I^c] = e^2V/h \times 0.48$ (dashed line).

At this point, we can analyze the SHA, Eq. (3), which is depicted in Fig. 5. Figures 5(a) and 5(c) show the SHA average as a function of U for different values of λ and energy, respectively, while Figs. 5(b) and 5(d) are their respective deviations. As we can see in Figs. 5(a) and 5(c), the SHA average keeps the oscillations present in the spin Hall current average. However, the SHA maximum deviations happen only for $U \geqslant 6$ [Fig. 5(b)], which means that the efficiency increase is not related with the spin Hall current fluctuations increase, but with the charge current fluctuations increase. The more the charge current fluctuates, the more efficient the charge-to-spin conversion, in accordance with Eq. (9).

Although Figs. 3(d) and 4(d) demonstrate an increase of the maximum deviations with energy, converging to a finite value, the SHA maximum deviations decrease with energy without the convergence, as demonstrated in the Fig. 5(d). Therefore, for smaller energy $E = 0.02$ the SHA has its maximum deviation $\Theta_{\mathrm{sH}} \approx 9\%$, which means the SHA increases with decreasing energy, in agreement with Eq. (9).

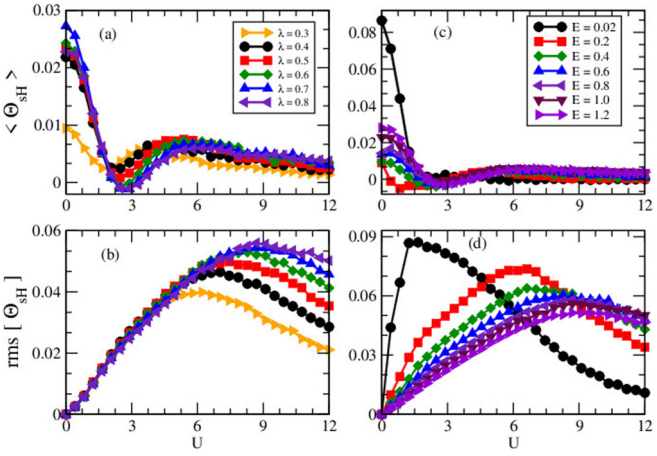

FIG. 5. (a) and (c) show the SHA average while (b) and (d) show the one deviation as a function of disorder U. (a), (b) Each curve is for a different value of SOI λ at fixed energy $E = 1$. (c), (d) Each curve is for a different value of E at fixed $\lambda = 0.8$.

Finally, we are in a position to directly connect the numerical result and the CLT hypothesis/results [Fig. 5 and Eqs. (5) and (9)]. Figure 6 displays the connection. In Fig. 6(a) we plot the histograms of SHA for $E = 1$, $U = 8$, and $\lambda = 0.7, 0.8$ and we demonstrate the Gaussian distribution with zero average in accordance with the CLT, as previously stated in Eq. (5). Figure 6(b) shows the transmission coefficient $T_i^{\alpha}(E) = \sum_j \tau_{ij}^{\alpha}(E) = 2N$ as a function of Fermi energy, which gives the relation between $E = 0.02, 0.2, 0.4, \ldots$ and $N = 1, 5, 8, \ldots$. Hence, Fig. 6(c) shows the SHA maximum deviations of Fig. 5(d) as a function of N. The dashed line is the numerical data fit, $\Theta_{\mathrm{sH}} = (10.9 + 0.55 \times N)^{-1}$. Taking the limit of large values of N, for which Eq. (9) is valid, it goes to $\Theta_{\mathrm{sH}} = 1.8/N$. Comparing the latter with Eq. (11), we obtain $\sigma = Nl_e/L = N/10$, which drives to a universal relation $\Theta_{\mathrm{sH}} \times \sigma = 0.18$, as previously stated.

Conclusions. In this work, we studied the SHA fluctuations of a device in the disorderly regime with strong SOI. We were able to show that the SHA deviation depends on only three variables. Furthermore, in the limit for which the sample length is long enough, the product between SHA maximum deviation and dimensionless conductivity holds a universal number, which is independent of the material and its specific features. This universal relation is supported by an extensive theoretical numerical calculation. In addition, it was compared with five different experimental data as shown in Fig. 2, obtained from Refs. [24–28]. This result sheds light on the concept of SHE fluctuations and their importance in spintronics.

Acknowledgments. This work was supported by CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (307474/2018-6)) and FACEPE (Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco).

[1] B. K. Nikolić and R. L. Dragomirova, Semicond. Sci. Technol. **24**, 064006 (2009).

[2] A. Soumyanarayanan, N. Reyren, A. Fert, and C. Panagopoulos, Nature (London) **539**, 509 (2016).

[3] F. Hellman, A. Hoffmann, Y. Tserkovnyak, G. S. D. Beach, E. E. Fullerton, C. Leighton, A. H. MacDonald, D. C. Ralph, D. A. Arena, H. A. Durr *et al.*, Rev. Mod. Phys. **89**, 025006 (2017).

[4] A. Manchon, H. C. Koo, J. Nitta, S. M. Frolov, and R. A. Duine, Nat. Mater. **14**, 871 (2015).

[5] G. Vignale, J. Supercond. Novel Magn. **23**, 3 (2010).

[6] B. K. Nikolić, L. P. Zârbo, and S. Souma, Phys. Rev. B **72**, 075361 (2005).

[7] B. K. Nikolić and L. P. Zârbo, Europhys. Lett. **77**, 47004 (2007).

[8] M. Milletari, M. Offidani, A. Ferreira, and R. Raimondi, Phys. Rev. Lett. **119**, 246801 (2017).

[9] L. Liu, C.-F. Pai, Y. Li, H. W. Tseng, D. C. Ralph, and R. A. Buhrman, Science **336**, 555 (2012).

[10] K. Gupta, R. J. H. Wesselink, R. Liu, Z. Yuan, and P. J. Kelly, Phys. Rev. Lett. **124**, 087702 (2020).

[11] Y. Wang, R. Ramaswamy, and H. Yang, J. Phys. D: Appl. Phys. **51**, 273002 (2018).

[12] L. Wang, R. J. H. Wesselink, Y. Liu, Z. Yuan, K. Xia, and P. J. Kelly, Phys. Rev. Lett. **116**, 196602 (2016).

[13] A. M. Bozkurt, B. Pekerten, and I. Adagideli, Phys. Rev. B **97**, 245414 (2018).

[14] J. G. G. S. Ramos, T. C. Vasconcelos, and A. L. R. Barbosa, J. Appl. Phys. **123**, 034304 (2018).

[15] T. C. Vasconcelos, J. G. G. S. Ramos, and A. L. R. Barbosa, Phys. Rev. B **93**, 115120 (2016).

[16] J. Sinova, S. O. Valenzuela, J. Wunderlich, C. H. Back, and T. Jungwirth, Rev. Mod. Phys. **87**, 1213 (2015).

[17] Y. Niimi and Y. Otani, Rep. Prog. Phys. **78**, 124501 (2015).

[18] M. Dyakonov and V. Perel, Phys. Lett. A **35**, 459 (1971).

[19] J. E. Hirsch, Phys. Rev. Lett. **83**, 1834 (1999).

[20] Y. K. Kato, R. C. Myers, A. C. Gossard, and D. D. Awschalom, Science **306**, 1910 (2004).

[21] J. Wunderlich, B. Kaestner, J. Sinova, and T. Jungwirth, Phys. Rev. Lett. **94**, 047204 (2005).

[22] K. Ando and E. Saitoh, Nat. Commun. **3**, 629 (2012).

[23] M. Althammer, S. Meyer, H. Nakayama, M. Schreier, S. Altmannshofer, M. Weiler, H. Huebl, S. Geprags, M. Opel, R. Gross *et al.*, Phys. Rev. B **87**, 224401 (2013).

[24] E. Sagasta, Y. Omori, M. Isasa, M. Gradhand, L. E. Hueso, Y. Niimi, Y. C. Otani, and F. Casanova, Phys. Rev. B **94**, 060412(R) (2016).

[25] V. T. Pham, L. Vila, G. Zahnd, A. Marty, W. Savero-Torres, M. Jamet, and J.-P. Attane, Nano Lett. **16**, 6755 (2016).

[26] K. Fritz, S. Wimmer, H. Ebert, and M. Meinert, Phys. Rev. B **98**, 094433 (2018).

[27] C.-F. Pai, L. Liu, Y. Li, H. W. Tseng, D. C. Ralph, and R. A. Buhrman, Appl. Phys. Lett. **101**, 122404 (2012).

[28] P. C. Lou, A. Katailiha, R. G. Bhardwaj, T. Bhowmick, W. P. Beyermann, R. K. Lake, and S. Kumar, Phys. Rev. B **101**, 094435 (2020).

[29] G. Okano, M. Matsuo, Y. Ohnuma, S. Maekawa, and Y. Nozaki, Phys. Rev. Lett. **122**, 217701 (2019).

[30] L. Zhu, D. C. Ralph, and R. A. Buhrman, Phys. Rev. Appl. **10**, 031001 (2018).

[31] H. L. Wang, C. H. Du, Y. Pu, R. Adur, P. C. Hammel, and F. Y. Yang, Phys. Rev. Lett. **112**, 197201 (2014).

[32] O. Alves-Santos, E. F. Silva, M. Gamino, R. O. Cunha, J. B. S. Mendes, R. L. Rodríguez-Suárez, S. M. Rezende, and A. Azevedo, Phys. Rev. B **96**, 060408(R) (2017).

[33] O. A. Santos, E. F. Silva, M. Gamino, J. B. S. Mendes, S. M. Rezende, and A. Azevedo, AIP Adv. **9**, 035025 (2019).

[34] W. Zhang, W. Han, X. Jiang, S.-H. Yang, and S. S. P. Parkin, Nat. Phys. **11**, 496 (2015).

[35] W. Ren, Z. Qiao, J. Wang, Q. Sun, and H. Guo, Phys. Rev. Lett. **97**, 066603 (2006).

[36] J. H. Bardarson, I. Adagideli, and P. Jacquod, Phys. Rev. Lett. **98**, 196601 (2007).

[37] P. Jacquod, R. S. Whitney, J. Meair, and M. Buttiker, Phys. Rev. B **86**, 155118 (2012).

[38] M. L. Mehta, *Random Matrices*, 3rd ed. (Elsevier, San Diego, 2004).

[39] L. Zhou, V. L. Grigoryan, S. Maekawa, X. Wang, and J. Xiao, Phys. Rev. B **91**, 045407 (2015).

[40] P. A. Mello and N. Kumar, *Quantum Transport in Mesoscopic Systems* (Oxford University Press, New York, 2004).

[41] L. E. Reichl, *A Modern Course in Statistical Physics* (Arnold, London, 1980).

[42] C. W. J. Beenakker, Rev. Mod. Phys. **69**, 731 (1997).

[43] M. S. M. Barros, A. J. Nascimento Junior, A. F. Macedo-Junior, J. G. G. S. Ramos, and A. L. R. Barbosa, Phys. Rev. B **88**, 245133 (2013).

[44] A. L. R. Barbosa, D. Bazeia, and J. G. G. S. Ramos, Phys. Rev. E **90**, 042915 (2014).

[45] J. G. G. S. Ramos, A. L. R. Barbosa, and A. M. S. Macedo, Phys. Rev. B **84**, 035453 (2011).

[46] A. L. R. Barbosa, J. G. G. S. Ramos, and A. M. S. Macedo, J. Phys. A: Math. Theor. **43**, 075101 (2010).

[47] J. G. G. S. Ramos, A. L. R. Barbosa, D. Bazeia, M. S. Hussein, and C. H. Lewenkopf, Phys. Rev. B **86**, 235112 (2012).

[48] P. W. Brouwer and C. W. J. Beenakker, J. Math. Phys. **37**, 4904 (1996).

[49] Z. Zhu, Q.-F. Sun, B. Chen, and X. C. Xie, Phys. Rev. B **74**, 085327 (2006).

[50] T. Vercosa, Y.-J. Doh, J. G. G. S. Ramos, and A. L. R. Barbosa, Phys. Rev. B **98**, 155407 (2018).

[51] The a and m^* being the square lattice constant and the effective mass, respectively. The values of Fermi energy, disorder strength U, and Rashba SO λ given in units of t while the device width and length $W = L = 40$ in units of a. All the numerical results were obtained from 15 000 disorder realizations.

[52] C. W. Groth, M. Wimmer, A. R. Akhmerov, and X. Waintal, New J. Phys. **16**, 063065 (2014).