

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sobre o Anel de Endomorfismos do Módulo de Cohomologia Local

José Gonçalves Junior

JOÃO PESSOA – PB
AGOSTO DE 2016

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sobre o Anel de Endomorfismos do Módulo de Cohomologia Local

por

José Gonçalves Junior

sob a orientação do

Prof. Dr. Roberto Callejas Bedregal
e coorientação do

Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta

João Pessoa – PB
Agosto de 2016

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

J83s Junior, José Gonçalves.
Sobre o Anel de Endomorfismos do Módulo de Cohomologia
Local / José Gonçalves Junior. - João Pessoa, 2016.
60 f.

Orientação: Roberto Callejas Bedregal.
Coorientação: Napoléon Caro Tuesta.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Cohomologia local. 3. Endomorfismos.
4. Dual de Matlis. I. Bedregal, Roberto Callejas. II.
Tuesta, Napoléon Caro. III. Título.

UFPB/BC

CDU 51(043)

Sobre o Anel de Endomorfismos do Módulo de Cohomologia Local

por

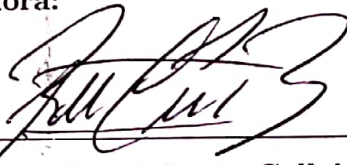
José Gonçalves Junior ¹

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

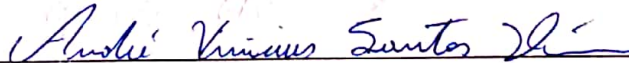
Área de Concentração: Álgebra

Aprovada em 11 de Agosto de 2016.

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Roberto Callejas Bedregal – UFPB
(Orientador)



Prof. Dr. André Vinícius Santos – UFS
(Examinador Externo)



Prof. Dr(a). Jacqueline Rojas – UFPB
(Examinador Interno)

¹O autor foi bolsista da CAPES durante a elaboração desta dissertação.

*A Luis Alba Sarria Um
pouco, mais ou menos,
muito obrigado !*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pelas oportunidades colocadas em minha vida, por me dar saúde e por me dar uma família que esteve sempre ao meu lado e capaz de me dar forças para superar momentos difíceis ao longo destes últimos anos. Agradeço a minha tia Solange, minha irmã Suênia e minha mãe Suely, as guerreiras da minha vida. Também não posso esquecer de uma pessoa mais que especial que infelizmente não está mais entre nós: minha tia Rejane, sei que ela me ajudou muito nesses dois anos de mestrado e que está muito feliz por mim. Gostaria de agradecer também a uma pessoa que me incentivou bastante no decorrer desses anos: Hariane Teles.

Sou grato a todos os professores que colaboraram em minha carreira acadêmica nesses dois anos de curso, Antônio Andrade, Elisandra Gloss, Cleto Brasileiro, Adriano Medeiros, Alberto Ohashi. Em especial ao meu orientador Roberto Bedregal e coorientador Napoleon Tuesta.

Ao fim dessa etapa da minha vida, fico feliz pelas amizades que fiz nesse percurso. agradeço aos ‘brothers’ Pedro, Tony, Wendel, Richardson seja pelas madrugadas de estudos ou pelas festinhas pós prova. Por falar em festinha agradeço também ao povo das festinhas (que costumam estudar de vez em quando): Cássio, Manu, Wastheny, Camila, Isabelly, Sally, Raiza, Franciélia, Esaú, Djair, Ricardo, Marcius entre tantos outros. Reservo um agradecimento final a Luis Alba uma pessoa dona de um coração enorme, humilde, e com um conhecimento matemático espetacular e sempre disposto a ajudar qualquer alma que esteja com dúvidas. A ele meu eterno agradecimento por tudo.

Resumo

Neste trabalho, estudamos o primeiro módulo de cohomologia local não nulo e seu anel de endomorfismos e o anel de endomorfismos de seu dual. Mostramos condições suficientes para que esses anéis sejam naturalmente isomorfos.

Palavras-chave: Cohomologia local, Endomorfismos, Dual de Matlis

Abstract

In this work, we study the first no-zero local cohomology module of a local Noetherian ring, its ring of endomorphisms and the ring of endomorphism of the dual of such module. We show sufficiency conditions in order to these rings being isomorphic.

Keywords: Local Cohomology, Endomorphisms, Matlis Duality.

Sumário

Introdução	2
1 Preliminares	3
1.1 Funtor Torção	3
1.2 Módulo de Cohomologia Local	6
1.3 Dualidade de Matlis	10
2 Uma Caracterização da I-profundidade	15
3 Sobre o Anel de Endomorfismos do Módulo de Cohomologia Local	24
3.1 Sobre o homomorfismo natural	24
3.2 O Caso de Aneis de Gorenstein	27
A Módulos Injetivos	31
A.1 Módulos injetivos	31
A.2 Extensões essenciais	33
A.3 Resoluções injetivas	35
A.4 Módulos injetivos sobre um anel comutativo noetheriano	37
A.5 Números de Bass	42
B Funtores aditivos e funtores derivados	44

Introdução

Neste trabalho consideraremos R um anel Noetheriano e $I \subseteq R$ um ideal de R de I -profundidade c . No caso em que $(R, \mathfrak{m}, k)$ seja um anel local, denotamos por $\hat{R}$ o completamento $\mathfrak{m}$ -ádico de R e por $E := E_R(k)$ a envoltória injetiva do corpo residual k . Considere $D(-) = \text{Hom}(-, E)$ o funtor dual de Matlis.

Recentes pesquisas([Sch09][Sch10]) demonstraram o interesse na estrutura do módulo de cohomologia local $H_I^c := H_I^c(R)$, em particular para o anel de endomorfismos de H_I^c e de $D(H_I^c)$. Através da aplicação natural $H_I^c \otimes D(H_I^c) \rightarrow E_R(k)$ podemos nos perguntar sob quais condições o anel de endomorfismos de $D(H_I^c)$ é isomorfo a R .

Para um R -módulo M , existe um homomorfismo natural:

$$R \rightarrow \text{Hom}(M, M) \quad r \mapsto m_r$$

de R no anel de endomorfismos de M . Aqui, m_r denota o homomorfismo de multiplicação por r . Este homomorfismo em geral não é nem injetivo e nem sobrejetivo. Neste trabalho, estamos interessados no estudo desse homomorfismo para o módulo de cohomologia local $H_I^c(R) := H_I^c$ e seu dual de matlis $D(H_I^c)$. Mostraremos condições suficientes para que tais homomorfismos sejam isomorfismos, como por exemplo no caso de $H_I^i = 0$ para todo $i \neq c$.

No capítulo 1, apresentamos conceitos preliminares que serão úteis ao longo deste trabalho como: o funtor torção, o módulo de cohomologia local e o Dual de Matlis bem como algumas de suas propriedades.

No capítulo 2, apresentamos alguns resultados que envolvem os funtores $\text{Ext}_R^i(M, R)$ e $\text{Tor}_i^R(M, E_R(k))$ com $i \leq c$. Além disso apresentamos uma caracterização da I -profundidade de R utilizando o funtor Tor .

No capítulo 3, encontramos algumas condições suficientes para que os homomorfismos $\hat{R} \rightarrow \text{Hom}_R(D(H_I^c), D(H_I^c))$ e $\hat{R} \rightarrow \text{Hom}_R(H_I^c, H_I^c)$ sejam isomorfismos.

Finalmente, nos apêndices A e B, são apresentados os módulos injetivos e os funtores derivados, que permitem definir os módulos de cohomologia local.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentamos o funtor torção, que nos permite calcular o objeto principal de estudo deste trabalho, o *módulo de cohomologia local*. Por fim, apresentamos algumas propriedades do funtor dual de Matlis que serão importantes nos próximos capítulos.

1.1 Funtor Torção

Definição 1.1. Para cada R -módulo M , a I -torção é definida por:

$$\Gamma_I(M) := \{m \in M : I^n m = 0 \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (0 :_M I^n)$$

Observe que $\Gamma_I(M)$ é um submódulo de M . Além disso,

$$\Gamma_I(M) = \{m \in M / V(\text{Ann } M) \subseteq V(I)\}.$$

De fato, se $m \in \Gamma_I(M)$, então $I^n m = 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $I^n \subseteq \text{Ann}(m)$. Daí, $V(\text{Ann}(m)) \subseteq V(I^n) = V(I)$. Reciprocamente, se $V(\text{Ann}(m)) \subseteq V(I)$, então $I \subseteq \sqrt{I} \subseteq \sqrt{\text{Ann}(m)}$. Como R é Noetheriano, segue que $I^n m = 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Cada homomorfismo de R -módulos $f : M \rightarrow N$ induz um homomorfismo de R -módulos:

$$\Gamma_I(f) : \Gamma_I(M) \rightarrow \Gamma_I(N),$$

definido por $\Gamma_I(f)(m) = f(m)$, ou seja $\Gamma_I(f) = f|_{\Gamma_I(M)}$. Notemos que $\Gamma_I(f)$ está bem definida pois $\text{Ann } f(m) \supseteq \text{Ann}(m) \Rightarrow V(\text{Ann } f(m)) \subseteq V(\text{Ann}(m))$.

Isto define um funtor linear $\Gamma_I(-)$ sobre a categoria dos R -módulos, chamado *funtor I -torção*.

Lema 1.2. O funtor I -torção é exato à esquerda.

Demonstração. Seja $0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$ uma sequência exata de R -módulos. Queremos mostrar que

$$0 \rightarrow \Gamma_I(L) \xrightarrow{\Gamma_I(f)} \Gamma_I(M) \xrightarrow{\Gamma_I(g)} \Gamma_I(N) \text{ é exato.}$$

Como f é um homomorfismo injetivo, então $\Gamma_I(f)$ claramente é injetivo. Por outro lado, $\Gamma_I(g) \circ \Gamma_I(f) = 0$, pois $g \circ f = 0$. Portanto $\text{im}(\Gamma_I(f)) \subseteq \ker(\Gamma_I(g))$. Para provar a inclusão contrária, seja $m \in \ker(\Gamma_I(g))$, isto é, $g(m) = 0$ e $m \in \Gamma_I(M)$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $I^n m = 0$. Como $\ker g = \text{im } f$, então $f(l) = m$ para algum $l \in L$. Note que $l \in \Gamma_I(L)$, de fato, para cada $r \in I^n$ temos $f(rl) = rf(l) = rm = 0 \Rightarrow rl = 0$ pois f é um homomorfismo injetor. Assim $I^n l = 0$. $\square$

Observação 1.3 (Propriedades do Funtor Torção). Sejam M um R -módulo e I, J ideais de R .

- 1) $\Gamma_0(M) = M$ e $\Gamma_R(M) = 0$
- 2) Se $J \subseteq I$ então $\Gamma_I(M) \subseteq \Gamma_J(M)$
- 3) Se $\sqrt{I} = \sqrt{J}$ então $\Gamma_I(M) = \Gamma_J(M)$
- 4) $\Gamma_{I+J}(M) = \Gamma_I(M) \cap \Gamma_J(M) = \Gamma_I(\Gamma_J(M))$

Definição 1.4. Um R -módulo M é chamado I -torção se $\Gamma_I(M) = M$ e é chamado livre de I -torção se $\Gamma_I(M) = 0$

Observação 1.5. (i) Na propriedade 5, tomando $I = J$, temos $\Gamma_I(\Gamma_I(M)) = \Gamma_I(M)$. Logo, $\Gamma_I(M)$ é I -torção.

(ii) Se M é de I -torção e N um submódulo de M , então N e M/N são de I -torção. Reciprocamente se N é um submódulo de M tal que N e M/N são I -torção, então M é de I -torção.

(iii) Sejam $r \in I$ e M um R -módulo I -torção, então $M \xrightarrow{r} M$ é injetivo $\Leftrightarrow M = 0$.

Exemplo 1.6. Seja $\mathfrak{p}$ ideal primo de R . O R -módulo $R/\mathfrak{p}$ é I -torção quando $I \subseteq \mathfrak{p}$ e é livre de I -torção quando $I \not\subseteq \mathfrak{p}$.

Observação 1.7. (i) Seja N extensão essencial de M , então $\Gamma_I(N)$ é uma extensão essencial de $\Gamma_I(M)$ (ver A.2). De fato, seja $0 \neq H \leq \Gamma_I(N)$, em particular, $0 \neq H \leq N$, logo existe $0 \neq h \in H \cap M$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $I^n h = 0$, portanto $h \in H \cap \Gamma_I(M)$

(ii) Seja E um R -módulo injetivo, então $\Gamma_I(E)$ é um R -módulo injetivo. [BS98, Proposição 2.1.4]

(iii) Se $E(M)$ denota a envoltória injetiva de um R -módulo M , então:

$$\Gamma_I(E(M)) = E(\Gamma_I(M))$$

De fato, por (i), $\Gamma_I(E(M))$ é extensão essencial de $\Gamma_I(M)$. Além disso, por (ii), $\Gamma_I(E(M))$ é injetivo. Logo, $\Gamma_I(E(M))$ é a envoltória injetiva de $\Gamma_I(M)$.

Exemplo 1.8. Seja $\mathfrak{p}$ ideal primo de R . O R -módulo $E_R(R/\mathfrak{p})$ é I -torção quando $I \subseteq \mathfrak{p}$ e é livre de I -torção quando $I \not\subseteq \mathfrak{p}$. De fato, a partir da observação anterior e do exemplo 1.6, temos:

$$\Gamma_I(E_R(R/\mathfrak{p})) = E_R(\Gamma_I(R/\mathfrak{p})) = \begin{cases} E(R/\mathfrak{p}) & ; \mathfrak{p} \supseteq I \\ 0 & ; \mathfrak{p} \not\supseteq I \end{cases}$$

A seguir apresentamos alguns resultados sobre módulos de I -torção e módulos livres de I -torção.

Lema 1.9. Sejam M um R -módulo e I um ideal de R .

- a) Se I contém um não divisor de zero de M , então M é livre de I -torção.
- b) Assuma agora que M é finitamente gerado. Então M é livre de I -torção se e somente se I contém um não divisor de zero de M .

Demonstração. a) Seja $r \in I$ um não divisor de zero de M , e seja $m \in \Gamma_I(M)$. Isto significa que existe $n \in \mathbb{N}$ com $I^n m = 0$. Isto é $r^n m = 0$ no qual deduz-se que $m = 0$.

- b) Uma implicação segue de a). Agora assuma que I consiste inteiramente de divisores de zero de M . Então $I \subseteq \bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Ass } M} \mathfrak{p}$ e, desde que M seja finitamente gerado, $\text{Ass } M$ é finito. Assim, pelo lema da esquivia, $I \subseteq \mathfrak{p}$ para algum $\mathfrak{p} \in \text{Ass } M$. Assim, M possui um submódulo cujo anulador é exatamente $\mathfrak{p}$ daí segue que $(0 :_M I) \neq 0$, portanto $\Gamma_I(M) \neq 0$

□

Lema 1.10. Seja M um R -módulo, o módulo $M/\Gamma_I(M)$ é livre de I -torção.

Demonstração. Seja $m \in M$ tal que o elemento $m + \Gamma_I(M) \in M/\Gamma_I(M)$ é anulado por I^n para algum $n \in \mathbb{N}$. Queremos mostrar que $m + \Gamma_I(M) = 0$, ou seja, $m \in \Gamma_I(M)$. Assim $I^n(m + \Gamma_I(M)) = 0 \Rightarrow I^n m \subseteq \Gamma_I(M)$. Desde que $I^n m$ é um submódulo finitamente gerado de $\Gamma_I(M)$ e cada elemento de $I^n m$ é anulado por alguma potência de I segue que existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $I^t I^n m = 0$. Portanto $m \in (0 :_M I^{t+n}) \subseteq \Gamma_I(M)$. □

Proposição 1.11. Seja M um R -módulo. Então $\text{Ass } \Gamma_I(M) = \text{Ass } M \cap V(I)$. Em particular, $\Gamma_I(M) \neq 0 \Leftrightarrow \text{Ass } M \cap V(I) \neq \emptyset$.

Demonstração. Seja $\mathfrak{p} \in \text{Ass } \Gamma_I(M)$, então $\mathfrak{p} = \text{Ann}(x)$ para algum $x \in \Gamma_I(M) \subseteq M$. Como $\Gamma_I(M)$ é um R -módulo I -torção (Obs 1.5), existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $I^n \subseteq \text{Ann}(x) = \mathfrak{p} \Rightarrow \mathfrak{p} \in V(I)$. Reciprocamente seja $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M) \cap V(I)$, então existe $0 \neq x \in M$ com $\mathfrak{p} = \text{Ann}(x)$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $I^n \subseteq \mathfrak{p}$, isto é, $I^n \subseteq \text{Ann}(x)$. Assim, $x \in \Gamma_I(M)$. Desde que $\mathfrak{p} = \text{Ann}(x)$, temos $\mathfrak{p} \in \text{Ass } \Gamma_I(M)$. $\square$

1.2 Módulo de Cohomologia Local

Definição 1.12. Seja $i \geq 0$, o i -ésimo funtor derivado a direita de $\Gamma_I(-)$ é denotado por $H_I^i(-)$ e é chamado *i -ésimo funtor de cohomologia local* com respeito ao ideal I . Isto é, para cada R -módulo M ,

$$H_I^i(M) = H^i(\Gamma_I(E^\bullet)),$$

onde $E^\bullet$ é uma resolução injetiva de M .

Para calcular $H_I^i(M)$ procedemos da seguinte forma: Tome uma resolução injetiva de M :

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{\alpha} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \rightarrow \dots \rightarrow E^n \xrightarrow{d^n} E^{n+1} \rightarrow \dots$$

Aplique o funtor $\Gamma_I(-)$ para obter:

$$0 \rightarrow \Gamma_I(E^0) \xrightarrow{\Gamma_I(d^0)} \dots \rightarrow \Gamma_I(E^n) \xrightarrow{\Gamma_I(d^n)} \Gamma_I(E^{n+1}) \rightarrow \dots$$

Tomando a i -ésima cohomologia deste complexo, obtemos:

$$H_I^i(M) = \ker(\Gamma_I(d^i)) / \text{im}(\Gamma_I(d^{i-1})).$$

Quando $M = R$, escreveremos apenas $H_I^i(R) := H_I^i$.

Proposição 1.13. Seja M um R -módulo e $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ ideais de R .

- a) $H_I^0(M) \simeq \Gamma_I(M)$ e $H_I^i(M)$ é I -torção para cada i .
- b) Se $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{b}}$, então $H_{\mathfrak{a}}^i(M) = H_{\mathfrak{b}}^i(M)$ para cada i .
- c) Seja $\{M_\lambda\}$ uma família de R -módulos. Para cada inteiro i , temos

$$H_{\mathfrak{a}}^i\left(\bigoplus_{\lambda} M_{\lambda}\right) = \bigoplus_{\lambda} H_{\mathfrak{a}}^i(M_{\lambda})$$

- d) Uma sequência exata de R -módulos $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ induz uma sequência exata em cohomologia local

$$\cdots \rightarrow H_I^n(M') \rightarrow H_I^n(M) \rightarrow H_I^n(M'') \rightarrow H_I^{n+1}(M') \rightarrow \cdots$$

Demonstração. Ver [ILL⁺07, Proposição 7.3]. □

Lembremos que se M é um R -módulo, um elemento $x \in R$ é dito M -regular se $xm \neq 0$ para todo $0 \neq m \in M$. Uma sequência $x_1, \dots, x_n$ de elementos de R é uma M -sequência (de comprimento n) se:

1) x_1 é M -regular, x_2 é (M/x_1M) -regular, $\dots$ x_n é $(M/\sum_{i=1}^{n-1} x_i M)$ -regular

2) $(M/\sum_{i=1}^n x_i M) \neq 0$

Dizemos que uma M -sequência $x_1, \dots, x_n \in I$ é *máxima* (em I) se para qualquer $x_{n+1} \in I$ a sequência $x_1, \dots, x_{n+1} \in I$ não é uma M -sequência.

O seguinte enunciado encontra-se demonstrado em [BH98, Teorema 1.2.5]

Teorema 1.14 (Rees). *Seja R um anel Noetheriano, M um R -módulo finitamente gerado, e I um ideal de R tal que $IM \neq M$. Então toda M -sequência regular máxima em I tem o mesmo comprimento n dado por*

$$n = \min\{i : \text{Ext}_R^i(R/I, M) \neq 0\}.$$

Definição 1.15. Sejam M um R -módulo e I um ideal de R tal que $IM \neq M$. Definimos a I -profundidade de M como sendo o maior comprimento de uma M -sequência com elementos em I . Denotamos a I -profundidade de M como $\text{grade}(I, M)$. No caso em que $M = R$, escrevemos a I -profundidade de R como $\text{grade } I$.

Definição 1.16. Seja $(R, \mathfrak{m})$ anel Noetheriano local e M um R -módulo finitamente gerado então a $\mathfrak{m}$ -profundidade de M é chamado profundidade de M , denotado por $\text{depth } M$.

Proposição 1.17. Seja R um anel Noetheriano, I ideais de R e M um R -módulo finitamente gerado. Então:

- a) $\text{grade}(I, M) = \inf\{\text{depth } M_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{p} \in V(I)\}$
- b) $\text{grade}(I, M) = \text{grade}(\sqrt{I}, M)$
- c) Se $x = x_1, \dots, x_n$ é uma M -sequência em I , então

$$\text{grade}(I, M/xM) = \text{grade}(I, M) - n.$$

Demonstração. Ver [BH98, Proposição 1.2.10]. $\square$

Teorema 1.18. *Seja M um R -módulo finitamente gerado tal que $IM \neq M$. Então $\text{grade}(I, M)$ é o menor inteiro i tal que $H_I^i(M) \neq 0$.*

Demonstração. Seja $c = \text{grade}(I, M)$. Usaremos indução em c . Quando $c = 0$, todo elemento de I deve ser um divisor de zero de M e então $\Gamma_I(M) \neq 0$ pelo lema 1.9. Agora suponha que $c > 0$ e que este resultado vale para cada R -módulo N finitamente gerado e com $IN \neq N$ e $\text{grade}(I, N) < c$.

Existe $x_1 \in I$ tal que x_1 é um não divisor de zero de M . Seja $M_1 := M/x_1M$. Observe que $x_1M_1 \neq M_1$ e $\text{grade}(I, M_1) = c - 1$. Portanto, pela hipótese de indução, $H_I^i(M_1) = 0$ para todo $i < c - 1$, enquanto $H_I^{c-1}(M_1) \neq 0$. A sequência exata

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{x_1} M \rightarrow M_1 \rightarrow 0$$

induz uma sequência exata longa

$$H_I^{i-1}(M) \rightarrow H_I^{i-1}(M_1) \rightarrow H_I^i(M) \xrightarrow{x_1} H_I^i(M)$$

Isto mostra que para $i < c$, o elemento x_1 é um não divisor de zero em $H_I^i(M)$, como este módulo é I -torção, ele deve ser zero (Observação 1.5 iii)). Temos portanto a sequência exata

$$0 \rightarrow H_I^{c-1}(M_1) \rightarrow H_I^c(M)$$

E desde que $H_I^{c-1}(M_1) \neq 0$, segue que $H_I^c(M) \neq 0$. $\square$

Definição 1.19. Seja x um elemento de R e seja R_x a localização de R em x . O complexo de Čech em x é o complexo:

$$\check{C}_x^\bullet : 0 \rightarrow R \xrightarrow{\iota} R_x \rightarrow 0,$$

com o módulo R de grau 1 e R_x de grau -1, onde $\iota(r) = r/1$ é a aplicação canônica. Para uma sequência $\underline{x} = x_1, \dots, x_n$ de elementos em R . Definimos o *Complexo de Čech* em $\underline{x}$ como sendo:

$$\check{C}_{\underline{x}}^\bullet = \check{C}_{x_n}^\bullet \otimes_R \cdots \otimes_R \check{C}_{x_1}^\bullet$$

Explicitamente

$$\begin{aligned} \check{C}_{\underline{x}}^\bullet &= \bigoplus_{i=1}^n \check{C}_{x_i}^\bullet \\ &= 0 \rightarrow R \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n R_{x_i} \rightarrow \bigoplus_{i < j} R_{x_i x_j} \rightarrow \cdots \rightarrow R_{x_1 \cdots x_n} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Para um R -módulo M , seja

$$\check{C}_{\underline{x}}^{\bullet}(M) = \check{C}_{\underline{x}}^{\bullet} \otimes_R M$$

O R -módulo

$$\check{H}_{\underline{x}}^i(M) = H^i(\check{C}_{\underline{x}}^{\bullet}(M))$$

é a i -ésima cohomologia de Čech de $\underline{x}$ em M .

Teorema 1.20. *Sejam M um R -módulo, I ideal de R e $\underline{x} = x_1, \dots, x_n$ sistema de elementos tais que $\sqrt{(\underline{x})} = \sqrt{I}$. Então:*

$$H_I^i(M) \simeq H^i(\check{C}_{\underline{x}} \otimes M) = H^i(\check{C}_{\underline{x}}(M))$$

Para demonstração deste teorema, ver [ILL⁺07, Teorema 7.13]

Proposição 1.21. O funtor $H_I^i(-), i \geq 0$, comuta com limites diretos, isto é, se $\{M_{\lambda} : \lambda \in \Lambda\}$ é um sistema direto de R -módulos, então existe isomorfismo natural:

$$H_I^i(\varinjlim_{\lambda} M_{\lambda}) \simeq \varinjlim_{\lambda} H_I^i(M_{\lambda})$$

para qualquer $i \geq 0$.

Demonstração. Segue diretamente do Teorema 1.20, e do fato que o limite direto comuta com produto tensorial. $\square$

Agora vamos descrever um método para calcular a cohomologia local a partir do limite direto de certo sistema direto de R -módulos.

Teorema 1.22. *Seja I ideal de R . Para cada R -módulo M e para cada $j \geq 0$, existe isomorfismo natural:*

$$\varinjlim_t \text{Ext}_R^j(R/I^t, M) \simeq H_I^j(M).$$

Demonstração. Para cada R -módulo M e inteiro não negativo t , temos uma identificação funtorial

$$\begin{aligned} \text{Hom}_R(R/I^t, M) &\xrightarrow{\simeq} \{x \in M : I^t x = 0\} \subseteq \Gamma_I(M) \\ f &\longmapsto f(1) \end{aligned}$$

Com esta identificação, temos o sistema direto:

$$\text{Hom}_R(R/I^t, M) \cdots \subseteq \text{Hom}_R(R/I^t, M) \subseteq \text{Hom}_R(R/I^{t+1}, M) \cdots$$

de submódulos de $\Gamma_I(M)$ é evidente que o limite direto, isto é, a união desses sistemas diretos é igual a $\Gamma_I(M)$, em outras palavras temos:

$$\varinjlim_t \operatorname{Hom}_R(R/I^t, M) = \Gamma_I(M)$$

Seja $M^\bullet$ resolução injetiva de M . Então:

$$\varinjlim_t \operatorname{Hom}_R(R/I^t, M^\bullet) = \Gamma_I(M^\bullet)$$

Desde que $H^j(-)$ comuta com limite direto, a identificação anterior resulta num isomorfismo natural:

$$\varinjlim_t \operatorname{Ext}_R^j(R/I^t, M) = \varinjlim_t H^j(\operatorname{Hom}_R(R/I^t, M^\bullet)) \simeq H^j(\Gamma_I(M^\bullet)) = H_I^j(M)$$

□

Proposição 1.23. Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e M um R -módulo finitamente gerado. Então:

$$H_{\mathfrak{m}}^i(M) \simeq H_{\mathfrak{m}}^i(M) \otimes_R \hat{R} \simeq H_{\hat{\mathfrak{m}}}^i(\hat{M}),$$

onde $\hat{M}$ denota o completamento $\mathfrak{m}$ -ádico de M .

Demonstração. Como $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ é Artiniano [BS98, Teorema 7.1.3], podemos escrevê-lo como limite direto de submódulos N_j de comprimento finito e para cada N_j temos $N_j \otimes_R \hat{R} \simeq N_j$. Assim,

$$H_{\mathfrak{m}}^i(M) \simeq \varinjlim N_j \simeq \varinjlim (N_j \otimes_R \hat{R}) \simeq (\varinjlim N_j) \otimes_R \hat{R} \simeq H_{\mathfrak{m}}^i(M) \otimes_R \hat{R}.$$

Usando o Teorema anterior e a platitudo de $\hat{R}$, temos:

$$H_{\mathfrak{m}}^i(M) \otimes_R \hat{R} \simeq \varinjlim_t \operatorname{Ext}_R^i(R/\hat{\mathfrak{m}}^t, M) \otimes_R \hat{R} \simeq \varinjlim_t \operatorname{Ext}_{\hat{R}}^i(\hat{R}/\hat{\mathfrak{m}}^t, \hat{M}) \simeq H_{\hat{\mathfrak{m}}}^i(\hat{M}).$$

□

1.3 Dualidade de Matlis

Seja $(R, \mathfrak{m})$ anel local, $E = E_R(R/\mathfrak{m})$ a envoltória injetiva do corpo residual $k = R/\mathfrak{m}$. Usaremos $\hat{R}$ para denotar o completamento $\mathfrak{m}$ -ádico $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} R/\mathfrak{m}^n$ e $D(-)$ o funtor R -linear, exato e contravariante $\operatorname{Hom}(-, E)$. Para cada R -módulo M , chamaremos $D(M)$ o *Dual de Matlis* de M . Note que $D(R) = \operatorname{Hom}(R, E) \simeq E$.

Para cada R -módulo M , seja

$$\begin{aligned} \mu : M &\longrightarrow DD(M) \\ m &\longmapsto \mu(m) = \mu_m : \text{Hom}(M, E) \longrightarrow E \\ f &\longmapsto f(m) \end{aligned}$$

Dizemos que um R -módulo qualquer N é um *cogerador injetivo*, se para todo M , R -módulo, dado $0 \neq x \in M$ existe homomorfismo $f : M \rightarrow N$; $f(x) \neq 0$. Em particular, se N é um cogerador injetivo o funtor $\text{Hom}(-, N)$ satisfaz $\text{Hom}(M, N) = 0 \Leftrightarrow M = 0$ para todo R -módulo M .

Observe que E é um cogerador injetivo, de fato, dado $0 \neq x \in M$ considere o homomorfismo sobrejetor $\phi : R \rightarrow Rx$, $\ker \phi = \text{Ann}(x) \subseteq \mathfrak{m}$. Pelo Teorema de isomorfismo tem-se $R/\text{Ann}(x) \simeq Rx \subseteq M$. Com isso,

$$\begin{aligned} Rx &\xrightarrow{\varphi} R/\text{Ann}(x) & \xrightarrow{i} R/\mathfrak{m} & \xrightarrow{j} E \\ x &\longmapsto 1 + \text{Ann}(x) & \longmapsto 1 + \mathfrak{m} & \longmapsto 1 + \mathfrak{m} \end{aligned}$$

onde i e j são aplicações naturais. Tome f como sendo a composição destas aplicações, assim temos: $f(x) = \varphi \circ i \circ j(x) \neq 0$.

Sabendo disso, temos que o homomorfismo μ citado anteriormente é injetivo, com efeito dados $m, n \in M$ $\mu(m) = \mu(n)$ implica que $f(m) = f(n)$ para todo $f \in \text{Hom}(M, E)$, logo $f(m-n) = 0$ para todo $f \in \text{Hom}(M, E)$. Se $m \neq n$ então existiria $f \in \text{Hom}(M, E)$ tal que $f(m-n) \neq 0$, absurdo.

Observação 1.24. Suponha $(R, \mathfrak{m})$ anel local e A um R -módulo Artiniano. Seja $0 \neq a \in A$ como o R -módulo Ra é Artiniano, $R/\text{Ann}(a)$ é um anel local Artiniano, então seu ideal maximal é nilpotente. Logo existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{m}^t a = 0$. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} \phi : \hat{R} \times A &\rightarrow A \\ (\hat{r}, a) &\rightarrow r_t a \end{aligned}$$

para cada $a \in A$ e cada $\hat{r} = (r_n + \mathfrak{m}^n) \in \hat{R}$. Note que a aplicação está bem definida, pois dados $\hat{r} = (r_n + \mathfrak{m}^n) = (r'_n + \mathfrak{m}^n) \in \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} R/\mathfrak{m}^n = \hat{R}$, então $r_n - r'_n \in \mathfrak{m}^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $r_{n+h} - r_n \in \mathfrak{m}^n$ para todo $n, h \in \mathbb{N}$. Logo, $r_{t+h} a = r_t a = r'_t a = r'_{t+h} a$ para todo $h \in \mathbb{N}$. Com isso temos que A admite uma estrutura de $\hat{R}$ -módulo. Em particular, sendo E um R -módulo Artiniano ([BS98, Teorema 10.2.5]), admite uma estrutura de $\hat{R}$ -módulo.

Proposição 1.25. O homomorfismo natural $\hat{R} \rightarrow D(E) = \text{Hom}(E, E)$ é um isomorfismo.

Demonstração. Considere $E_n = \{x \in E : \mathfrak{m}^n x = 0\}$. Então $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} E_n$.

Note que $R/\mathfrak{m}^n$ é Noetheriano, pois R também o é. Além disso $\dim R/\mathfrak{m}^n = 0$, logo, pelo Teorema de Akizuki $R/\mathfrak{m}^n$ é Artiniano. Por [BH98, Proposição 3.2.12 e) ii)] $R/\mathfrak{m}^n \rightarrow \text{Hom}_{R/\mathfrak{m}^n}(E_n, E_n)$ é um isomorfismo. Por outro lado, observe que para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos identificar $E_n = \text{Hom}(R/\mathfrak{m}^n, E)$. Com isso,

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{R/\mathfrak{m}^n}(E_n, E_n) &= \text{Hom}_{R/\mathfrak{m}^n}(E_n, \text{Hom}(R/\mathfrak{m}^n, E)) \\ &\simeq \text{Hom}_R(E_n \otimes_{R/\mathfrak{m}^n} R/\mathfrak{m}^n, E) \\ &\simeq \text{Hom}_R(E_n, E) = D_R(E_n) \end{aligned}$$

Assim, $R/\mathfrak{m}^n \xrightarrow{\simeq} D(E_n)$. Isto implica que

$$\varprojlim R/\mathfrak{m}^n \xrightarrow{\simeq} \varprojlim D(E_n)$$

Logo, $\hat{R} \rightarrow D(\varinjlim E_n) = D(E)$ é um isomorfismo. □

Teorema 1.26. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ anel Noetheriano local completo, N um R -módulo Artiniano e M um R -módulo finitamente gerado. Então*

- a) $D(R) = E$ e $D(E) = R$
- b) $D(M)$ é Artiniano e $D(N)$ é finitamente gerado
- b) $DD(N) \simeq N$ e $DD(M) \simeq M$

Para demonstração deste Teorema, ver [BH98, Teorema 3.2.13].

Proposição 1.27. *Sejam M um R -módulo injetivo e N um R -módulo plano. Então:*

- a) $D(M)$ é um R -módulo plano
- b) $D(N)$ é um R -módulo injetivo

Demonstração. a) Pelo critério de platitude [Mat86, Teorema 7.7], basta analisarmos $D(M)$ para um ideal finitamente gerado $\mathfrak{a} \subseteq R$. Considere a sequência exata $0 \rightarrow \mathfrak{a} \rightarrow R$ aplicando o funtor contravariante $\text{Hom}(-, M)$, exato pois M é injetivo, temos $\text{Hom}(R, M) \rightarrow \text{Hom}(\mathfrak{a}, M) \rightarrow 0$ que aplicando o funtor contravariante $D(-)$ tem-se

$$0 \rightarrow \text{Hom}(\text{Hom}(\mathfrak{a}, M), E) \rightarrow \text{Hom}(\text{Hom}(R, M), E)$$

Sendo que

$$\text{Hom}(\text{Hom}(\mathfrak{a}, M), E) \simeq \mathfrak{a} \otimes \text{Hom}(M, E) \text{ e } \text{Hom}(\text{Hom}(R, M), E) \simeq R \otimes \text{Hom}(M, E)$$

Com isso tem-se portanto que

$$0 \rightarrow \mathfrak{a} \otimes \text{Hom}(M, E) \rightarrow R \otimes \text{Hom}(M, E)$$

ou seja, $D(M)$ é um R -módulo plano.

- b) Considere uma sequência exata de R -módulos $0 \rightarrow L \rightarrow P$, Sendo N é R -módulo plano, temos:

$$0 \rightarrow L \otimes N \rightarrow P \otimes N$$

Aplicando o funtor contravariante $D(-)$ tem-se

$$\text{Hom}(P \otimes N, E) \rightarrow \text{Hom}(L \otimes N, E) \rightarrow 0$$

Pelo isomorfismo de adjunção:

$$\text{Hom}(P \otimes N, E) \simeq \text{Hom}(P, D(N)) \quad \text{e} \quad \text{Hom}(L \otimes N, E) \simeq \text{Hom}(L, D(N))$$

Logo,

$$\text{Hom}(P, D(N)) \rightarrow \text{Hom}(L, D(N)) \rightarrow 0$$

ou seja, $\text{Hom}(-, D(N))$ é exato daí segue que $D(N)$ é injetivo.

□

Proposição 1.28. Seja $f : M \rightarrow N$ um homomorfismo de R -módulos. Então:

$$f \text{ é um isomorfismo} \Leftrightarrow D(f) : D(N) \rightarrow D(M) \text{ é um isomorfismo.}$$

Demonstração. Como $D(-)$ é um funtor,

$$f : M \rightarrow N \text{ é isomorfismo} \Rightarrow D(f) : D(N) \rightarrow D(M) \text{ é um isomorfismo.}$$

Reciprocamente, o homomorfismo de R -módulos $f : M \rightarrow N$ induz a sequência exata:

$$0 \rightarrow \ker f \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow \text{coker } f \rightarrow 0$$

Aplicando o funtor exato contravariante $D(-)$:

$$0 \rightarrow D(\text{coker } f) \rightarrow D(N) \xrightarrow{D(f)} D(M) \rightarrow D(\ker f) \rightarrow 0$$

Assim, $D(\text{coker } f) = \ker D(f)$ e $D(\ker f) = \text{coker } D(f)$. Sendo $D(f)$ um isomorfismo, $\ker D(f) = 0 = \text{coker } D(f)$ Isto implica que $\ker f = 0 = \text{coker } f$, ou seja $f : M \rightarrow N$ é

um isomorfismo. □

Proposição 1.29. Sejam M e N dois R -módulos. Então:

a) $D(\text{Tor}_i^R(M, N)) \simeq \text{Ext}_R^i(M, D(N))$

b) Assumindo que M seja finitamente gerado, $D(\text{Ext}_R^i(M, N)) \simeq \text{Tor}_i^R(M, D(N))$.

Demonstração. a) Seja $\mathbb{F}$ resolução livre de M . Então $\text{Tor}_i^R(M, N) = H_i(\mathbb{F} \otimes N)$.

Com isso, $D(\text{Tor}_i^R(M, N)) = D(H_i(\mathbb{F} \otimes N)) \simeq H^i(D(\mathbb{F} \otimes N))$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} D(\mathbb{F} \otimes N) &= \text{Hom}_R(\mathbb{F} \otimes N, E) \\ &\simeq \text{Hom}_R(\mathbb{F}, \text{Hom}(N, E)) \\ &\simeq \text{Hom}_R(\mathbb{F}, D(N)) \end{aligned}$$

Tomando as cohomologias obtemos: $H^i(D(\mathbb{F} \otimes N)) \simeq H^i(\text{Hom}_R(\mathbb{F}, D(N)))$.

Assim, $D(\text{Tor}_i^R(M, N)) \simeq H^i(D(\mathbb{F} \otimes N)) \simeq H^i(\text{Hom}_R(\mathbb{F}, D(N))) \simeq \text{Ext}_R^i(M, D(N))$.

b) Seja $\mathbb{F}$ resolução livre de M . Como M é finitamente gerado, cada termo de $\mathbb{F}$ pode ser escolhido de posto finito. Então

$$\begin{aligned} \text{Tor}_i^R(M, D(N)) &= H_i(\mathbb{F} \otimes D(N)) \\ &= H_i(\mathbb{F} \otimes \text{Hom}(N, E)) \\ &\simeq H_i(\text{Hom}_R(\text{Hom}_R(\mathbb{F}, N), E)) \\ &\simeq H_i(D(\text{Hom}(\mathbb{F}, N))) \\ &\simeq D(H^i(\text{Hom}(\mathbb{F}, N))) \\ &\simeq D(\text{Ext}_R^i(M, N)). \end{aligned}$$

□

Capítulo 2

Uma Caracterização da I -profundidade

No capítulo anterior, introduzimos a noção de I -profundidade de um ideal $I \subseteq R$ assim como uma caracterização bem conhecida da I -profundidade utilizando o funtor Ext . Neste capítulo, apresentamos alguns resultados que envolvem os funtores $\text{Ext}_R^i(M, R)$ e $\text{Tor}_i^R(M, E_R(k))$ com $i \leq \text{grade } I$. Além disso apresentamos uma caracterização do $\text{grade } I$ utilizando o funtor Tor aplicado em certos R -módulos. Por vezes escreveremos simplesmente $E := E_R(k)$ denotando a envoltória injetiva do corpo residual $k = R/\mathfrak{m}$ de um anel local $(R, \mathfrak{m})$.

Começamos por alguns resultados técnicos:

Lema 2.1. Seja M um R -módulo. Suponha que $\text{Supp}_R(M) \subseteq V(\mathfrak{m})$. Então M admite uma estrutura única de $\hat{R}$ -módulo compatível com sua estrutura de R -módulo tal que a aplicação natural $M \otimes \hat{R} \rightarrow M$ é um isomorfismo.

Demonstração. Primeiro suponhamos que exista um número $r \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{m}^r M = 0$. Seja

$$\begin{aligned} \varphi : M \otimes_R \hat{R} &\longrightarrow M \\ m \otimes (a_i + \mathfrak{m}^i) &\longmapsto a_r m \end{aligned}$$

Note que φ é um homomorfismo e está bem definida, pois provém de uma aplicação bilinear.

Mostremos que φ é um isomorfismo, de fato, defina:

$$\begin{aligned} \psi : M &\longrightarrow M \otimes_R \hat{R} \\ m &\longmapsto m \otimes (1 + \mathfrak{m}^i) \end{aligned}$$

Note que $\varphi \circ \psi = \text{id}_M$, pois:

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{\psi} & M \otimes_R \hat{R} & \xrightarrow{\varphi} & M \\ m & \longmapsto & m \otimes (1 + \mathfrak{m}^i) & \longrightarrow & m \end{array}$$

E $\psi \circ \varphi = id_{M \otimes_R \hat{R}}$, pois:

$$\begin{array}{ccccc} M \otimes_R \hat{R} & \xrightarrow{\varphi} & M & \xrightarrow{\psi} & M \otimes_R \hat{R} \\ m \otimes (a_i + \mathfrak{m}^i) & \longmapsto & a_r m & \longrightarrow & a_r m \otimes (1 + \mathfrak{m}^i) \\ & & & & = m \otimes (a_r + \mathfrak{m}^i) \end{array}$$

Seja $i \in \mathbb{Z}$, para $i < r$, $a_i - a_r \in \mathfrak{m}^i$ e para $i \geq r$ $a_i - a_r \in \mathfrak{m}^r$. Portanto $(a_i + \mathfrak{m}^i) - (a_r + \mathfrak{m}^i) \in \widehat{\mathfrak{m}^r} = \mathfrak{m}^r \hat{R}$. Com isso existem $\alpha_j \in \mathfrak{m}^r, b_j \in \hat{R}$ tais que $(a_i + \mathfrak{m}^i) - (a_r + \mathfrak{m}^i) = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_s b_s$. Logo,

$$m \otimes ((a_i + \mathfrak{m}^i) - (a_r + \mathfrak{m}^i)) = m \otimes (\alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_s b_s) = \alpha_1 m \otimes b_1 + \cdots + \alpha_s m \otimes b_s = 0$$

Pois $\alpha_i m = 0$ para todo $1 \leq i \leq s$.

No caso geral, note que, por hipótese, temos $\text{Supp}_R(M) \subseteq V(\mathfrak{m})$, então:

$$M = \Gamma_I(M) = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} (0 :_M \mathfrak{m}^r) = \varinjlim_{r \in \mathbb{N}} (0 :_M \mathfrak{m}^r)$$

Para cada $r \in \mathbb{N}$ temos pelo caso anterior que $(0 :_M \mathfrak{m}^r) \otimes_R \hat{R} \simeq (0 :_M \mathfrak{m}^r)$. Tomando o limite direto temos:

$$\varinjlim (0 :_M \mathfrak{m}^r) \otimes_R \hat{R} \simeq \varinjlim (0 :_M \mathfrak{m}^r),$$

logo, $M \otimes_R \hat{R} \simeq M$

□

Lema 2.2. Seja M um R -módulo e N um $\hat{R}$ -módulo. Então:

- a) O módulo $\text{Ext}_R^i(M, N), i \in \mathbb{Z}$, pode ser considerado como um $\hat{R}$ -módulo tal que existe um isomorfismo natural $\text{Ext}_R^i(M, N) \simeq \text{Ext}_{\hat{R}}^i(M \otimes_R \hat{R}, N)$.
- b) O dual de Matlis $D(M)$ admite uma estrutura natural de $\hat{R}$ -módulo

Demonstração. a) Seja $P.(M)$ uma resolução livre de M .

$$\begin{aligned} \text{Ext}_R^i(M, N) &= H^i(\text{Hom}_R(P.(M), N)) \\ &\simeq H^i(\text{Hom}_R(P.(M), \text{Hom}_{\hat{R}}(\hat{R}, N))) \quad \text{pois } N \text{ é um } \hat{R}\text{-módulo.} \\ &\simeq H^i(\text{Hom}_{\hat{R}}(P.(M) \otimes_R \hat{R}, N)) \\ &\simeq \text{Ext}_{\hat{R}}^i(M \otimes_R \hat{R}, N) \end{aligned}$$

2. Uma Caracterização da I -profundidade

O último isomorfismo acontece pois $P(M) \otimes \hat{R}$ é uma resolução livre de $\hat{R}$ -módulo $M \otimes \hat{R}$.

- b) Basta tomar $i = 0$ e $N = E_R(k)$, que possui estrutura de $\hat{R}$ -módulo, no item anterior. Assim, $\text{Ext}_R^0(M, E_R(k)) = \text{Hom}(M, E_R(k)) = D(M)$ possui estrutura de $\hat{R}$ -módulo.

□

Lema 2.3. Seja I um ideal de um anel local $(R, \mathfrak{m})$. Sejam M, N dois R -módulos. Suponha que $\text{Supp}_R(M) \subseteq V(I)$. Então existem os seguintes isomorfismos naturais:

- a) $\text{Hom}_R(M, \Gamma_I(N)) \simeq \text{Hom}_R(M, N)$
b) $M \otimes_R \text{Hom}_R(\Gamma_I(N), E_R(k)) \simeq M \otimes_R \text{Hom}_R(N, E_R(k))$

Demonstração. a) 1° caso: M um R -módulo finitamente gerado.

Dado um R módulo N , considere a sequência exata:

$$0 \rightarrow \Gamma_I(N) \rightarrow N \rightarrow \frac{N}{\Gamma_I(N)} \rightarrow 0$$

Aplicando o funtor covariante $\text{Hom}_R(M, -)$, obtemos:

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(M, \Gamma_I(N)) \rightarrow \text{Hom}_R(M, N) \rightarrow \text{Hom}_R(M, \frac{N}{\Gamma_I(N)}) \quad (2.1)$$

Com isso, temos

$$\begin{aligned} \text{Ass}(\text{Hom}_R(M, \frac{N}{\Gamma_I(N)})) &= \text{Supp}_R(M) \cap \text{Ass}(\frac{N}{\Gamma_I(N)}) \quad ([\text{Bou89, Proposição 10}]) \\ &\subseteq V(I) \cap \text{Ass}(\frac{N}{\Gamma_I(N)}) \\ &= \text{Ass}(\Gamma_I(N/\Gamma_I(N))) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

pois $\frac{N}{\Gamma_I(N)}$ é um R -módulo livre de I -torção. Logo, $\text{Hom}(M, \frac{N}{\Gamma_I(N)}) = 0$. Com isso, a partir da sequência exata (2.1) temos:

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(M, \Gamma_I(N)) \rightarrow \text{Hom}_R(M, N) \rightarrow 0$$

Portanto, $\text{Hom}(M, \Gamma_I(N)) \simeq \text{Hom}(M, N)$

2° Caso: M um R -módulo qualquer Neste caso podemos escrever $M = \varinjlim_{\alpha} M_{\alpha}$; Onde $\{M_{\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda}$, (Λ conjunto de índices) é uma família de submódulos finitamente

gerados de M . Então

$$\begin{aligned}
 \text{Hom}_R(M, N) &\simeq \text{Hom}(\varinjlim_{\alpha} M_{\alpha}, N) \\
 &\simeq \varprojlim \text{Hom}(M_{\alpha}, N) \\
 &\simeq \varprojlim \text{Hom}(M_{\alpha}, \Gamma_I(N)) \quad \text{Pelo caso anterior} \\
 &\simeq \text{Hom}(\varinjlim_{\alpha} M_{\alpha}, \Gamma_I(N)) \\
 &\simeq \text{Hom}(M, \Gamma_I(N)).
 \end{aligned}$$

O segundo e o terceiro isomorfismo acontece pois um funtor contravariante transforma limites diretos em limites inversos e reciprocamente. ([Rot09, páginas 239-240])

- b) Por [Rot09, Lema 9.71], existe transformação natural $\text{Hom}(N, P) \otimes M \longrightarrow \text{Hom}(\text{Hom}(M, N), P)$

Tal transformação natural é um isomorfismo quando M é finitamente gerado e P é um R -módulo injetivo. Supondo M finitamente gerado, temos:

$$\begin{aligned}
 \text{Hom}(N, E_R(k)) \otimes M &\simeq \text{Hom}(\text{Hom}(M, N), E_R(k)) \\
 &\simeq \text{Hom}(\text{Hom}(M, \Gamma_I(N)), E_R(k)) \quad (\text{item a}) \\
 &\simeq \text{Hom}(\Gamma_I(N), E_R(k)) \otimes M
 \end{aligned}$$

Para o caso geral, escrevemos $M = \varinjlim_{\alpha} M_{\alpha}$; Onde $\{M_{\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda}$, (Λ conjunto de índices) é uma família de submódulos finitamente gerados de M . Assim,

$$\begin{aligned}
 \text{Hom}(N, E_R(k)) \otimes M &\simeq \text{Hom}(N, E_R(k)) \otimes \varinjlim_{\alpha} M_{\alpha} \\
 &\simeq \varinjlim_{\alpha} (\text{Hom}(N, E_R(k)) \otimes M_{\alpha}) \quad ([\text{Rot09, Pagina 239-240}]) \\
 &\simeq \varinjlim_{\alpha} (\text{Hom}(\Gamma_I(N), E_R(k)) \otimes M_{\alpha}) \quad (\text{Caso anterior}) \\
 &\simeq \text{Hom}(\Gamma_I(N), E_R(k)) \otimes \varinjlim_{\alpha} M_{\alpha} \quad ([\text{Rot09, Pagina 239-240}]) \\
 &\simeq \text{Hom}(\Gamma_I(N), E_R(k)) \otimes M
 \end{aligned}$$

□

O lema 2.3 estende-se a funtores derivados da seguinte maneira:

Teorema 2.4. *Seja I um ideal de um anel local $(R, \mathfrak{m})$. Seja $c = \text{grade } I$. Seja M um R -módulo com $\text{Supp}_R(M) \subseteq V(I)$*

- a) $\text{Ext}_R^i(M, R) = 0$ para $i < c$ e $\text{Ext}_R^c(M, R) \simeq \text{Hom}_R(M, H_I^c)$
- b) $\text{Tor}_i^R(M, E_R(k)) = 0$ para $i < c$ e $\text{Tor}_c^R(M, E_R(k)) \simeq M \otimes_R \text{Hom}_R(H_I^c, E_R(k))$

Demonstração. :

2. Uma Caracterização da I -profundidade

- a) Seja $R \xrightarrow{\sim} E_R$ uma resolução injetiva minimal de R . Então, pelo Teorema estrutural de Matlis,

$$E_R^i \simeq \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R} (E_R(R/\mathfrak{p})^{\mu_i(\mathfrak{p})})$$

Para cada $\mathfrak{p} \in \text{Spec } R$, temos que $\mu_i(\mathfrak{p}) = \dim \text{Ext}_{R_{\mathfrak{p}}}^i(k(\mathfrak{p}), R_{\mathfrak{p}})$. Assim,

$$\mu_i(\mathfrak{p}) \neq 0 \Leftrightarrow \text{Ext}_{R_{\mathfrak{p}}}^i(k(\mathfrak{p}), R_{\mathfrak{p}}) \neq 0.$$

Por outro lado, sabemos que:

$$\begin{aligned} c = \text{grade } I &= \min\{\text{depth } R_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{p} \supseteq I\} \\ &= \min_{\mathfrak{p} \supseteq I} \{\min\{i \in \mathbb{Z}; \text{Ext}_{R_{\mathfrak{p}}}^i(k(\mathfrak{p}), R_{\mathfrak{p}}) \neq 0\}\} \\ &= \min_{\mathfrak{p} \supseteq I} \{i \in \mathbb{Z}; \mu_i(\mathfrak{p}) \neq 0\} \end{aligned}$$

Logo, $\mu_i(\mathfrak{p}) = 0 \quad \forall i < c$.

Lembre que:

$$\Gamma_I(E_R^i) = \Gamma_I\left(\bigoplus_{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R} E(R/\mathfrak{p})^{\mu_i(\mathfrak{p})}\right) = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R} \Gamma_I(E(R/\mathfrak{p})^{\mu_i(\mathfrak{p})})$$

mas, temos que:

$$\Gamma_I(E_R(R/\mathfrak{p})) = \begin{cases} E(R/\mathfrak{p}) & ; \mathfrak{p} \supseteq I \\ 0 & ; \mathfrak{p} \not\supseteq I \end{cases}$$

Logo, $\Gamma_I(E_R^i) = \bigoplus_{\substack{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R \\ \mathfrak{p} \supseteq I}} E(R/\mathfrak{p})^{\mu_i(\mathfrak{p})}$. E como $\forall \mathfrak{p} \supseteq I, \mu_i(\mathfrak{p}) = 0 \quad \forall i < c$, então :

$$\Gamma_I(E_R^i) = 0 \quad \forall i < c.$$

Por hipótese, $\text{Supp } M \subseteq V(I)$. Pelo lema 2.3 a), temos $\text{Hom}(M, E_R^i) \simeq \text{Hom}(M, \Gamma_I(E_R^i))$, portanto $\text{Hom}(M, E_R^i) = 0$ para todo $i < c$, e portanto, tomando as cohomologias, temos $\text{Ext}_R^i(M, R) = 0$ para todo $i < c$.

Seja

$$0 \rightarrow R \rightarrow E^0 \rightarrow E^1 \rightarrow \dots \rightarrow E^c \xrightarrow{\partial^c} E^{c+1} \rightarrow \dots$$

resolução injetiva minimal de R , aplicando o funtor covariante $\Gamma_I(-)$ temos:

$$0 \rightarrow \Gamma_I(E^0) \rightarrow \Gamma_I(E^1) \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma_I(E^c) \xrightarrow{\Gamma_I(\partial^c)} \Gamma_I(E^{c+1}) \rightarrow \dots$$

Como

$$\Gamma_I(E_R^i) = 0 \quad \forall \quad i < c,$$

tem-se:

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \rightarrow 0 \rightarrow \Gamma_I(E^c) \xrightarrow{\Gamma_I(\partial^c)} \Gamma_I(E^{c+1}) \rightarrow \cdots$$

Tome a sequência exata:

$$0 \rightarrow \ker(\Gamma_I(\partial^c)) \rightarrow \Gamma_I(E^c) \xrightarrow{\Gamma_I(\partial^c)} \Gamma_I(E^{c+1})$$

Aplicando o funtor covariante $\text{Hom}(M, -)$, obtemos:

$$0 \rightarrow \ker \Gamma_I(\partial^c)_* \rightarrow \text{Hom}(M, \Gamma_I(E^c)) \xrightarrow{\Gamma_I(\partial^c)_*} \text{Hom}(M, \Gamma_I(E^{c+1}))$$

Sabemos que pelo lema 2.3a) temos os seguintes isomorfismos: $\text{Hom}(M, E_R^c) \simeq \text{Hom}(M, \Gamma_I(E_R^c))$ e $\text{Hom}(M, E_R^{c+1}) \simeq \text{Hom}(M, \Gamma_I(E_R^{c+1}))$. Com isso temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(M, \Gamma_I(E^c)) & \xrightarrow{\Gamma_I(\partial^c)_*} & \text{Hom}(M, \Gamma_I(E^{c+1})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}(M, E^c) & \xrightarrow{\partial_*^c} & \text{Hom}(M, E^{c+1}) \end{array} \quad (2.2)$$

Onde as flechas verticais são isomorfismos portanto temos um isomorfismo entre os núcleos: $\ker(\Gamma_I(\partial^c)_*) \simeq \ker(\partial_*^c)$. Observe que: $\ker(\Gamma_I(\partial^c)_*) = \text{Hom}(M, H_I^c(R))$ e $\ker(\partial_*^c) = \text{Ext}_R^c(M, R)$. Logo, $\text{Hom}(M, H_I^c(R)) = \text{Ext}_R^c(M, R)$, como queríamos.

- b) Lembre que o funtor Dual de Matlis transforma módulos injetivos em módulos planos (Proposição 1.27). Com isso, $R \xrightarrow{\sim} E_R^\cdot$, resolução injetiva minimal de R , induz $D(E_R^\cdot) \xrightarrow{\sim} D(R) \simeq E_R(k)$ resolução plana de $E_R(k)$. Pelo Lema 2.3 b), $M \otimes D(E_R^\cdot) \simeq M \otimes D(\Gamma_I(E_R^\cdot))$, como visto anteriormente, $\Gamma_I(E_R^i) = 0$ para todo $i < c$, logo, $M \otimes D(E_R^i) = 0 \quad \forall \quad i < c$. Tomando as homologias, temos: $H_i(M \otimes D(E_R^\cdot)) = \text{Tor}_i^R(M, E_R(k)) = 0$ para todo $i < c$.

As inclusões naturais $\Gamma_I(E^c) \hookrightarrow E^c$ e $\Gamma_I(E^{c+1}) \hookrightarrow E^{c+1}$ induzem as sobrejeções: $D(E^c) \twoheadrightarrow D(\Gamma_I(E^c))$ e $D(E^{c+1}) \twoheadrightarrow D(\Gamma_I(E^{c+1}))$. Assim temos o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} D(\Gamma_I(E^{c+1})) & \longrightarrow & D(\Gamma_I(E^c)) \\ \uparrow & & \uparrow \\ D(E^{c+1}) & \longrightarrow & D(E^c) \end{array}$$

Tensorizando por M obtemos:

$$\begin{array}{ccc} M \otimes D(\Gamma_I(E^{c+1})) & \longrightarrow & M \otimes D(\Gamma_I(E^c)) \\ \uparrow & & \uparrow \\ M \otimes D(E^{c+1}) & \longrightarrow & M \otimes D(E^c) \end{array} \tag{2.3}$$

Onde as flechas verticais são isomorfismos (lema 2.3 b)), logo temos um isomorfismo entre os conúcleos: $\text{coker}(1_M \otimes D(\Gamma_I(\partial^c))) \simeq \text{coker}(1_M \otimes D(\partial^c))$. Por outro lado, $\text{coker}(1_M \otimes D(\Gamma_I(\partial^c))) = M \otimes H_I^c(R)$ e $\text{coker}(1_M \otimes D(\partial^c)) = \text{Tor}_c^R(M, E_R(k))$.

Portanto, $M \otimes H_I^c(R) \simeq \text{Tor}_c^R(M, E_R(k))$ como queríamos.

□

A parte a) do Teorema 2.4 é uma leve generalização de [Gro66, Proposição 3.1]. Existe uma generalização direta para um R -módulo M ao invés de R . Para este caso, o item a) foi feito por Khashyarmansh, ver [Khaar], para um diferente método da demonstração.

Corolário 2.5. Seja $I \subseteq R$ ideal de um anel local $(R, \mathfrak{m})$. Então:

$$\text{grade } I = \inf\{n \in \mathbb{Z} : \text{Tor}_n^R(R/I, E) \neq 0\}$$

Demonstração. Seja $c = \text{grade } I$. Pelo Teorema 2.4b) com $M = R/I$, temos

$$\begin{aligned} \text{Tor}_c^R(R/I, E) &\simeq R/I \otimes_R \text{Hom}_R(H_I^c, E) \\ &\simeq \text{Hom}_R(\text{Hom}_R(R/I, H_I^c), E) \\ &= D(\text{Hom}(R/I, H_I^c)) \\ &\simeq D(\text{Ext}_R^c(R/I, R)) \end{aligned} \tag{Teorema 2.4 a)}$$

Note que

$$c = \text{grade } I = \inf\{i \in \mathbb{Z} : \text{Ext}_R^i(R/I, R) \neq 0\} \text{ ([BH98, Teorema 1.2.5])}$$

Logo, $D(\text{Ext}_R^c(R/I, R)) \neq 0$ e portanto

$$c = \text{grade } I = \inf\{n \in \mathbb{Z} : \text{Tor}_n^R(R/I, E) \neq 0\}.$$

□

Proposição 2.6. Seja $\underline{x} = x_1, \dots, x_r$ um sistema de elementos de R e $\mathfrak{a} = \underline{x}R$ o ideal gerado por $\underline{x}$. Para um complexo X de R -módulos, existe uma aplicação de cadeias:

$$\Gamma_{\mathfrak{a}}(X) \rightarrow \check{C}_{\underline{x}} \otimes X$$

e A demonstração desta proposição encontra-se em [Sch03, Proposição 3.1]. Desde que R seja Noetheriano, o morfismo da proposição anterior induz um isomorfismo de cohomologias.

Lema 2.7. Seja I um ideal de um anel local $(R, \mathfrak{m})$ tal que $H_I^i(R) = 0 \ \forall \ i \neq c$. Então: $\text{Tor}_i^R(H_I^i, E_R(k)) = 0 \ \forall \ i \neq c$ e $\text{Tor}_c^R(H_I^c, E_R(k)) \simeq E_R(k)$. Mais ainda, $E_R(k) \simeq H_I^c \otimes D(H_I^c) \simeq H_I^c(D(H_I^c))$

Demonstração. Seja $R \xrightarrow{\sim} E_R$ resolução injetiva minimal de R .

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow \dots$$

Aplicando o funtor $\Gamma_I(-)$:

$$0 \longrightarrow \Gamma_I(E^0) \longrightarrow \Gamma_I(E^1) \longrightarrow \dots \longrightarrow \Gamma_I(E^c) \longrightarrow \Gamma_I(E^{c+1}) \longrightarrow \dots$$

Na demonstração do Teorema 2.4 vimos que $\Gamma_I(E^i) = 0$ para todo $i < c$ e $H_I^c = \ker(\Gamma_I(E^c) \longrightarrow \Gamma_I(E^{c+1}))$. Por hipótese, $H_I^i(R) = 0 \ \forall \ i \neq c$, com isso temos a seguinte sequência exata:

$$0 \longrightarrow H_I^c \longrightarrow \Gamma_I(E^c) \longrightarrow \Gamma_I(E^{c+1}) \longrightarrow \Gamma_I(E^{c+2}) \longrightarrow \dots$$

Com isso, $H_I^c \xrightarrow{\sim} \Gamma_I(E^c(R)[c])$ é uma resolução injetiva de H_I^c . Seja $\check{C}_{\underline{x}}$ o complexo de Čech com respeito a $\underline{x} = x_1, x_2, \dots, x_r$ tal que $\sqrt{I} = \sqrt{(x_1, \dots, x_r)R}$.

De $R \xrightarrow{\sim} E_R$, tensorizando por $\check{C}_{\underline{x}}$ temos:

$$(I) \quad \check{C}_{\underline{x}} \otimes R \simeq \check{C}_{\underline{x}} \xrightarrow{\sim} \check{C}_{\underline{x}} \otimes E_R,$$

pois tensorizar por um complexo limitado a direita de R -módulos planos preserva quasi-

isomorfismos. Pela Proposição 2.6, existe quasi-isomorfismo

$$\Gamma_I(E_R) \xrightarrow{\sim} \check{C}_{\underline{x}} \otimes E_R.$$

Seja

$$(II) \mathbb{F}. \xrightarrow{\sim} E_R(k)$$

resolução livre de $E_R(k)$

Tensorizando (I) por $\mathbb{F}$ temos $\check{C}_{\underline{x}} \otimes \mathbb{F}. \xrightarrow{\sim} \check{C}_{\underline{x}} \otimes E_R \otimes \mathbb{F}.$

Tensorizando (II) por $\check{C}_{\underline{x}}$ temos: $\check{C}_{\underline{x}} \otimes \mathbb{F}. \xrightarrow{\sim} \check{C}_{\underline{x}} \otimes E_R(k) \simeq E_R(k)$, este último isomorfismo se deve ao fato de que:

$$(\check{C}_{\underline{x}} \otimes E_R(k))^0 = E_R(k) \text{ e } (\check{C}_{\underline{x}} \otimes E_R(k))^n = 0, \text{ para todo } n \neq 0$$

pois $x_{i_1} \cdots x_{i_r} \in \mathfrak{m}$ implica que $R_{x_{i_1} \cdots x_{i_r}} \otimes E_R(k) = E_R(k)_{x_{i_1} \cdots x_{i_r}} = 0$. (Lema A.18)

Observe que

$$\begin{aligned} \mathrm{Tor}_{i+c}^R(H_I^c, E_R(k)) &= H_{i+c}(H_I^c \otimes \mathbb{F}.) \\ &\simeq H_{i+c}(\Gamma_I(E_R[c]) \otimes \mathbb{F}.) \\ &\simeq H_i(\Gamma_I(E_R) \otimes \mathbb{F}.) \\ &\simeq H_i(\check{C}_{\underline{x}} \otimes E_R \otimes \mathbb{F}.) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathrm{Tor}_c^R(H_I^c, E_R(k)) &= H_0(\check{C}_{\underline{x}} \otimes E_R \otimes \mathbb{F}.) \\ &\simeq H_0(\check{C}_{\underline{x}} \otimes \mathbb{F}.) \\ &\simeq H_0(E_R(k)) \\ &\simeq E_R(k). \end{aligned}$$

Portanto, $E_R(k) \simeq \mathrm{Tor}_c^R(H_I^c, E_R(k)) \simeq H_I^c \otimes D(H_I^c)$ Este último isomorfismo segue do Teorema 2.4 b).

□

—

Capítulo 3

Sobre o Anel de Endomorfismos do Módulo de Cohomologia Local

Seja $I \subseteq R$ ideal de I -profundidade c . Estamos interessados no estudo do homomorfismo natural $R \rightarrow \text{Hom}(M, M)$ no caso em que o R -módulo $M = H_I^c$ e $M = D(H_I^c)$. Neste capítulo encontramos algumas condições suficientes para que tais homomorfismos sejam isomorfismos e finalizamos estudando um pouco dessa estrutura num anel de Goreinstein.

3.1 Sobre o homomorfismo natural

Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local. Para um ideal $I \subseteq R$ com $c = \text{grade } I$, estamos interessados na estrutura de $D(H_I^c)$. O estudo deste módulo começou com Hellus [Hel07] e [Kha07]. Para um R -módulo M consideramos o homomorfismo natural

$$\begin{aligned} M \otimes D(M) &\longrightarrow E_R(k) \\ m \otimes f &\longmapsto f(m) \end{aligned} \quad ,$$

em geral este homomorfismo não é nem injetivo nem sobrejetivo. No caso de um anel completo, tomando o dual deste homomorfismo natural obtemos:

$$D(E_R(k)) \longrightarrow D(M \otimes D(M)) \Rightarrow R \longrightarrow \text{Hom}(D(M), D(M)).$$

Estamos interessado sob que condições esta aplicação se torna um isomorfismo para o caso em que $M = H_I^c$.

Teorema 3.1. *Seja $(R, \mathfrak{m})$ anel local. Seja $I \subseteq R$ um ideal. Então existe um isomorfismo natural: $\text{Hom}_{\hat{R}}(H_{I\hat{R}}^c, H_{I\hat{R}}^c) \simeq \text{Hom}_R(D(H_I^c), D(H_I^c))$ onde $c = \text{grade } I$*

Demonstração. Observe que:

1) Por adjunção,

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_R(D(H_I^c), D(H_I^c)) &\simeq \mathrm{Hom}_R(D(H_I^c), \mathrm{Hom}(H_I^c, E_R(k))) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_R(D(H_I^c) \otimes H_I^c, E_R(k)) \\ &\simeq D(H_I^c \otimes D(H_I^c)).\end{aligned}$$

2) Pelo teorema 2.4b), $\mathrm{Tor}_c^R(H_I^c, E_R(k)) \simeq H_I^c \otimes_R \mathrm{Hom}_R(H_I^c, E_R(k)) = H_I^c \otimes_R D(H_I^c)$.

3) Pela Proposição 1.29 a), Tomando $M = H_I^c$ e $N = E_R(k)$, tem-se $D(\mathrm{Tor}_c^R(H_I^c, E_R(k))) \simeq \mathrm{Ext}_R^c(H_I^c, D(E_R(k))) \simeq \mathrm{Ext}_R^c(H_I^c, \hat{R})$

4) Pelo Teorema de Mudança de Base Plana, $H_I^c(R) \otimes_R \hat{R} \simeq H_{I\hat{R}}^c(R \otimes_R \hat{R}) = H_{I\hat{R}}^c(\hat{R})$

$$\text{Pelo lema 2.2a) } \mathrm{Ext}_R^c(H_I^c, \hat{R}) \simeq \mathrm{Ext}_{\hat{R}}^c(H_I^c \otimes_R \hat{R}, \hat{R}) = \mathrm{Ext}_{\hat{R}}^c(H_{I\hat{R}}^c, \hat{R})$$

Portanto,

$$\mathrm{Hom}_R(D(H_I^c), D(H_I^c)) \simeq D(H_I^c \otimes D(H_I^c)) \quad (1)$$

$$\simeq D(\mathrm{Tor}_c^R(H_I^c, E_R(k))) \quad (2)$$

$$\simeq \mathrm{Ext}_R^c(H_I^c, \hat{R}) \quad (3)$$

$$\simeq \mathrm{Ext}_{\hat{R}}^c(H_{I\hat{R}}^c, \hat{R}) \quad (4)$$

$$\simeq \mathrm{Hom}_{\hat{R}}(H_{I\hat{R}}^c, H_{I\hat{R}}^c) \quad \text{Teorema 2.4 a)}$$

□

Corolário 3.2. Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local com $E_R(k)$ a envoltória injetiva do corpo residual k . Seja $I \subseteq R$ ideal com $c = \text{grade } I$. Então as seguintes condições são equivalentes:

i) $H_I^c \otimes D(H_I^c) \rightarrow E_R(k)$ é um isomorfismo.

ii) $\hat{R} \rightarrow \mathrm{Hom}_{\hat{R}}(H_{I\hat{R}}^c, H_{I\hat{R}}^c)$ é um isomorfismo.

iii) $\hat{R} \rightarrow \mathrm{Hom}_R(D(H_I^c), D(H_I^c))$ é um isomorfismo.

Demonstração. $ii) \Leftrightarrow iii)$ Segue do Teorema 3.1.

$i) \Leftrightarrow iii)$

Lembre que :

$$(1) \ D(E_R(k)) \simeq \hat{R}$$

$$\begin{aligned}(2) \ D(H_I^c \otimes D(H_I^c)) &= \mathrm{Hom}(H_I^c \otimes D(H_I^c), E_R(k)) \simeq \mathrm{Hom}(D(H_I^c), \mathrm{Hom}(H_I^c, E_R(k))) \\ &\simeq \mathrm{Hom}(D(H_I^c), D(H_I^c))\end{aligned}$$

$$(3) \ M \xrightarrow{f} N \text{ é isomorfismo} \Leftrightarrow D(N) \xrightarrow{D(f)} D(M) \text{ é um isomorfismo.}$$

Então, por (3), $H_I^c \otimes D(H_I^c) \rightarrow E_R(k)$ é um isomorfismo se e somente se $D(E_R(k)) \rightarrow D(H_I^c \otimes D(H_I^c))$ é um isomorfismo, ou seja, $\hat{R} \rightarrow \text{Hom}(D(H_I^c), D(H_I^c))$ é um isomorfismo. $\square$

No corolário anterior se considerarmos o anel completo, então temos algumas condições para que o homomorfismo

$$R \rightarrow \text{Hom}_R(H_I^c, H_I^c)$$

seja um isomorfismo.

Teorema 3.3. *Seja $I \subseteq R$ um ideal com $c = \text{grade } I$. Seja $\check{C}_{\underline{x}}$ o complexo de Čech com respeito a $\underline{x} = x_1, x_2, \dots, x_r$, um sistema de elementos tais que $\sqrt{I} = \sqrt{(x_1, x_2, \dots, x_r)}R$. Então:*

- a) *O morfismo $\check{C}_{\underline{x}} \otimes D(\check{C}_{\underline{x}}) \rightarrow E_R(k)$ induz um isomorfismo em cohomologias.*
- b) *Existe uma aplicação natural $\text{Tor}_c^R(H_I^c, E_R(k)) \simeq H_I^c \otimes_R D(H_I^c) \rightarrow E_R(k)$*

Demonstração. b) Pelo Teorema 2.3 b) tem-se $\text{Tor}_c^R(H_I^c, E_R(k)) \simeq H_I^c \otimes D(H_I^c)$.

Dado $m \in H_I^c$ e $f \in D(H_I^c)$ tome a aplicação natural

$$\begin{aligned} H_I^c \otimes D(H_I^c) &\longrightarrow E_R(k) \\ m \otimes f &\longmapsto f(m) \end{aligned}$$

e assim tem-se o desejado.

- a) uma vez que $\check{C}_{\underline{x}}$ é um complexo de R -módulos planos, temos que $D(\check{C}_{\underline{x}})$ é um complexo de R -módulos injetivos.

Sabemos que

$$(1) \quad \Gamma_I(M) \simeq \varinjlim \text{Hom}(R/I^\alpha, M)$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \Gamma_I(D(\check{C}_{\underline{x}})) &\simeq \varinjlim \text{Hom}(R/I^\alpha, D(\check{C}_{\underline{x}})) = \varinjlim \text{Hom}(R/I^\alpha, \text{Hom}(\check{C}_{\underline{x}}, E_R(k))) \\ &\simeq \varinjlim \text{Hom}(R/I^\alpha \otimes \check{C}_{\underline{x}}, E_R(k)) \end{aligned}$$

Tensorizar o morfismo de complexos $\check{C}_{\underline{x}} \xrightarrow{\sim} R$ por R/I^α induz um quasi-isomorfismo

$$R/I^\alpha \otimes \check{C}_{\underline{x}} \xrightarrow{\sim} R/I^\alpha.$$

Aplicando o funtor $D(-)$ tem-se:

$$\text{Hom}(R/I^\alpha, E_R(k)) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(R/I^\alpha \otimes \check{C}_{\underline{x}}, E_R(k)).$$

Tomando o limite direto temos:

$$\varinjlim \operatorname{Hom}(R/I^\alpha, E_R(k)) \xrightarrow{\sim} \varinjlim \operatorname{Hom}(R/I^\alpha \otimes \check{C}_{\underline{x}}, E_R(k)).$$

Logo, de (1) e (2), obtemos o quasi-isomorfismo:

$$E_R(k) = \Gamma_I(E_R(k)) \xrightarrow{\sim} \Gamma_I(D(\check{C}_{\underline{x}})).$$

Portanto,

$$H^n(E_R(k)) \simeq H^n(\Gamma_I(D(\check{C}_{\underline{x}})))$$

Pela Proposição 2.6, existe um quasi-isomorfismo de complexos

$$\Gamma_I(D(\check{C}_{\underline{x}})) \xrightarrow{\sim} \check{C}_{\underline{x}} \otimes D(\check{C}_{\underline{x}}).$$

Logo,

$$H^n(\Gamma_I(D(\check{C}_{\underline{x}}))) \simeq H^n(\check{C}_{\underline{x}} \otimes D(\check{C}_{\underline{x}}))$$

Com isso temos o isomorfismo em cohomologias $H^n(\check{C}_{\underline{x}} \otimes D(\check{C}_{\underline{x}})) \simeq H^n(E_R(k))$. □

Observação 3.4. Seja $J \subseteq I$ dois ideais de grade c de um anel local $(R, \mathfrak{m})$. Então existe os seguintes diagramas comutativos:

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_R(H_J^c, H_J^c) \\ \parallel & & \downarrow \\ R & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_R(H_I^c, H_I^c) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} H_I^c \otimes D(H_I^c) & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \parallel \\ H_J^c \otimes D(H_J^c) & \longrightarrow & E \end{array}$$

Os homomorfismos verticais são construídos a partir do homomorfismo natural $H_I^c \rightarrow H_J^c$ e os resultados do Teorema 2.4 para $M = H_I^c$, e respectivamente $M = H_J^c$. Isto é, para dois ideias $J \subseteq I$ de grade c o homomorfismo natural $H_I^c \otimes D(H_I^c) \rightarrow E$ se fatora através da aplicação correspondente por J . Mais ainda, o homomorfismo natural $R \rightarrow \operatorname{Hom}_R(H_I^c, H_I^c)$ se fatora através da aplicação correspondente por J .

3.2 O Caso de Aneis de Gorenstein

A seguir, daremos uma certa variação do Teorema de Dualidade Local [BS98, Teorema 11.2.6] para um anel de Gorenstein n -dimensional, mas antes de continuarmos, façamos algumas considerações. $(R, \mathfrak{m})$. Seja $\underline{y} = y_1, y_2, \dots, y_n$ um sistema de

parâmetros. Então o complexo de Čech $\check{C}_{\underline{y}}$ fornece uma resolução plana de $E_R(k)$. De fato, $\check{C}_{\underline{y}} \otimes R : 0 \rightarrow R \rightarrow R_{y_1} \oplus \cdots \oplus R_{y_n} \rightarrow \cdots \rightarrow R_{y_1 \cdots y_n} \rightarrow 0$.

Como R um anel de Gorenstein, então existe uma resolução injetiva de R com:

$$0 \rightarrow E^0(R) \rightarrow E^1(R) \rightarrow \cdots \rightarrow E^n(R) = E_R(R/\mathfrak{m}) \rightarrow 0$$

onde $E^i(R) = \bigoplus_{ht\mathfrak{p}=i} E_R(R/\mathfrak{p})$. Aplicando $\Gamma_{\mathfrak{m}}(-)$ temos:

$$0 \rightarrow \Gamma_{\mathfrak{m}}(E^0(R)) \rightarrow \Gamma_{\mathfrak{m}}(E^1(R)) \rightarrow \cdots \rightarrow \Gamma_{\mathfrak{m}}(E^n(R)) = E_R(R/\mathfrak{m}) \rightarrow 0$$

Note que $\Gamma_{\mathfrak{m}}(E^i(R)) = 0 \quad \forall \quad i < c$, pois $E^i(R) = \bigoplus_{ht\mathfrak{p}=i} E_R(R/\mathfrak{p})$ e $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathfrak{m} \quad \forall \quad i < c$.

Portanto $H_{\mathfrak{m}}^n(R) = E_R(k)$. Sendo $\underline{y}$ um sistema de parâmetros $H^i(\check{C}_{\underline{y}} \otimes R) \simeq H_{\mathfrak{m}}^i(R)$, então: $H^i(\check{C}_{\underline{y}} \otimes R) \simeq E_R(k)[-n]$

Proposição 3.5. Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel de Gorenstein n -dimensional. Então existe isomorfismo

$$\mathrm{Tor}_{n-i}^R(M, E_R(k)) \simeq H_{\mathfrak{m}}^i(M), i \in \mathbb{Z}$$

para um R -módulo qualquer M .

Demonstração. Seja M um R -módulo qualquer. Observe que

$$\mathrm{Tor}_{n-i}^R(M, E_R(k)) = H_{n-i}(M \otimes \check{C}_{\underline{y}}[n]) \simeq H_{-i}(M \otimes \check{C}_{\underline{y}}) \simeq H^i(M \otimes \check{C}_{\underline{y}}) \simeq H_{\mathfrak{m}}^i(M)$$

□

No caso de M na proposição anterior ser finitamente gerado, implica no isomorfismo natural $H_{\mathfrak{m}}^i(M) \simeq \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ext}_R^{n-i}(M, R), E_R(k))$ o Teorema de Dualidade Local usual.

Teorema 3.6. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ em um anel local Gorenstein. Seja $J \subseteq I$ dois ideais de altura c .*

a) Existe um homomorfismo natural

$$\mathrm{Hom}_R(H_J^c, H_J^c) \rightarrow \mathrm{Hom}_R(H_I^c, H_I^c)$$

b) Suponha que $\sqrt{JR_{\mathfrak{p}}} = \sqrt{IR_{\mathfrak{p}}}$ para todo $\mathfrak{p} \in V(I)$ com $\dim R_{\mathfrak{p}} \leq c+1$. Então o homomorfismo em a) é um isomorfismo.

Para demonstração do teorema acima ver [Sch09, Teorema 1.2]

Lema 3.7. *Sejam $J \subseteq I$ dois ideais de mesmo I -profundidade em um anel local $(R, \mathfrak{m})$. Seja $\hat{R}$ o completamento de R . Então:*

a) $\text{grade } I = \text{grade } I\hat{R}$

b) Se $\sqrt{JR_{\mathfrak{p}}} = \sqrt{IR_{\mathfrak{p}}}$ para todo $\mathfrak{p} \in V(I)$ então $\sqrt{J\hat{R}_{\mathfrak{q}}} = \sqrt{I\hat{R}_{\mathfrak{q}}}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I\hat{R})$

Demonstração. a) Sabemos que para dois R -módulos M, N , com M sendo finitamente gerado, tem-se: $\text{Ext}_R^i(M, N) \otimes \hat{R} \simeq \text{Ext}_{\hat{R}}^i(M \otimes \hat{R}, N \otimes \hat{R})$ [Mat86, Teorema 7.11]. Com isso temos:

$$\begin{aligned} \text{grade } I\hat{R} &= \min\{i : \text{Ext}_{\hat{R}}^i(\hat{R}/I\hat{R}, \hat{R}) \neq 0\} \\ &= \min\{i : \text{Ext}_{\hat{R}}^i(R/I \otimes \hat{R}, R \otimes \hat{R}) \neq 0\} \\ &= \min\{i : \text{Ext}_R^i(R/I, R) \otimes \hat{R} \neq 0\} \\ &= \min\{i : \text{Ext}_R^i(R/I, R) \neq 0\} \\ &= \text{grade } I \end{aligned}$$

b) Pelo [Mat86, Teorema 7.3], para todo todo primo $\mathfrak{p} \in R$, existe um primo $\mathfrak{q} \in \hat{R}$ tal que $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap R$. Por hipótese $\sqrt{JR_{\mathfrak{p}}} = \sqrt{IR_{\mathfrak{p}}}$, então:

$$\sqrt{JR_{\mathfrak{q} \cap R}} = \sqrt{IR_{\mathfrak{q} \cap R}} \Rightarrow \sqrt{JR_{\mathfrak{q} \cap R}\hat{R}_{\mathfrak{q}}} = \sqrt{IR_{\mathfrak{q} \cap R}\hat{R}_{\mathfrak{q}}} \Rightarrow \sqrt{J\hat{R}_{\mathfrak{q}}} = \sqrt{I\hat{R}_{\mathfrak{q}}}$$

Sabemos que $I\hat{R}_{\mathfrak{q}} \subseteq \sqrt{I\hat{R}_{\mathfrak{q}}} \subseteq \sqrt{I\hat{R}_{\mathfrak{q}}}$ e $J\hat{R}_{\mathfrak{q}} \subseteq \sqrt{J\hat{R}_{\mathfrak{q}}} \subseteq \sqrt{J\hat{R}_{\mathfrak{q}}}$, tomando o radical e sabendo que $\sqrt{J\hat{R}_{\mathfrak{q}}} = \sqrt{I\hat{R}_{\mathfrak{q}}}$, temos portanto:

$$\sqrt{I\hat{R}_{\mathfrak{q}}} = \sqrt{\sqrt{I\hat{R}_{\mathfrak{q}}}} = \sqrt{\sqrt{I\hat{R}_{\mathfrak{q}}}} = \sqrt{\sqrt{J\hat{R}_{\mathfrak{q}}}} = \sqrt{\sqrt{J\hat{R}_{\mathfrak{q}}}} = \sqrt{J\hat{R}_{\mathfrak{q}}}$$

Como queríamos. □

Teorema 3.8. *Sejam $J \subseteq I$ dois ideais de altura c em um anel local Gorenstein $(R, \mathfrak{m})$ com $n = \dim R$.*

a) *Suponha que $\sqrt{JR_{\mathfrak{p}}} = \sqrt{IR_{\mathfrak{p}}}$ para todo $\mathfrak{p} \in V(I)$ com $\dim R_{\mathfrak{p}} \leq c + 1$. Então o homomorfismo*

$$\text{Hom}_R(D(H_J^c), D(H_J^c)) \rightarrow \text{Hom}_R(D(H_I^c), D(H_I^c))$$

é um isomorfismo.

b) *Suponha também que o anel seja completo e que $H_J^i(R) = 0$ para todo $i \neq c$. Então $\hat{R} \rightarrow \text{Hom}_R(D(H_I^c), D(H_I^c))$ é um isomorfismo.*

Demonstração. a) Pelo lema 3.7, $c = \text{grade } I = \text{grade } I\hat{R}$ e $\sqrt{J\hat{R}_{\mathfrak{q}}} = \sqrt{I\hat{R}_{\mathfrak{q}}}$ para todo $\mathfrak{q} \in V(I\hat{R})$. Assim podemos utilizar o teorema 3.6 considerando o anel $\hat{R}$. Portanto temos:

$$\begin{aligned} \text{Hom}(D(H_J^c), D(H_J^c)) &\simeq \text{Hom}_{\hat{R}}(H_{J\hat{R}}^c, H_{J\hat{R}}^c) && \text{Teorema 3.1} \\ &\simeq \text{Hom}_{\hat{R}}(H_{I\hat{R}}^c, H_{I\hat{R}}^c) && \text{Teorema 3.6 a)} \\ &\simeq \text{Hom}(D(H_I^c), D(H_I^c)) && \text{Teorema 3.1} \end{aligned}$$

b) Por hipótese, $H_J^i(R) = 0$ para todo $i \neq c$. Pelo lema 2.7, temos o isomorfismo: $E_R(k) \simeq H_I^c \otimes D(H_I^c)$, que pelo corolário 3.2 implica no isomorfismo:

$$\begin{aligned} \hat{R} &\simeq \text{Hom}_R(D(H_J^c), D(H_J^c)) \\ &\simeq \text{Hom}_R(D(H_I^c), D(H_I^c)) \quad \text{pelo item anterior.} \end{aligned}$$

O corolário 1.53 implica no isomorfismo $\hat{R} \simeq \text{Hom}_R(H_{I\hat{R}}^c, H_{I\hat{R}}^c)$. Por sua vez, como o anel é completo temos o isomorfismo desejado: $R \simeq \text{Hom}_R(H_I^c, H_I^c)$

□

Apêndice A

Módulos Injetivos

Neste apêndice, R denotará um anel comutativo. Se M e N são R -módulos, “ M é um submódulo de N ” (notada $M \subseteq N$) e “existe um homomorfismo injetor $\iota : M \rightarrow N$ ” são equivalentes e serão usadas neste texto de maneira indistinta, identificando-se assim o módulo M com sua imagem $\iota(M)$ em N .

A.1 Módulos injetivos

Um R -módulo E é dito *injetivo* se para cada homomorfismo injetivo $\alpha : M' \rightarrow M$ e cada homomorfismo $f : M' \rightarrow E$, existe um *levantamento* $g : M \rightarrow E$ (isto é, $g\alpha = f$). Equivalentemente, o R -módulo E é injetivo quando o funtor contravariante $\text{Hom}_R(-, E) : R\text{-mód} \rightarrow R\text{-mód}$ é *exato*, isto é, $\text{Hom}_R(-, E)$ transforma seqüências exatas curtas em seqüências exatas curtas (observe que $\text{Hom}_R(\alpha, E)(g) = g\alpha$ para quaisquer morfismos $\alpha : M' \rightarrow M$ e $g : M \rightarrow E$).

Se $E = \prod_{i \in \Lambda} E_i$, então, E é injetivo se, e somente se, cada E_i for injetivo. Isto vem do fato de que todo homomorfismo $M' \rightarrow E$ é determinado de maneira única pelas projeções $M' \rightarrow E_i$.

Na prática, não é necessário testar todos os homomorfismos possíveis entre R -módulos para comprovar injetividade.

Lema A.1 (Critério de Baer). Um R -módulo E é injetivo se, e somente se, todo homomorfismo $\mathfrak{b} \rightarrow E$ estende a um homomorfismo $R \rightarrow E$ para todo ideal $\mathfrak{b}$ de R .

Demonstração. Se E é injetivo, então, todo homomorfismo $\mathfrak{b} \rightarrow E$ estende a um homomorfismo $R \rightarrow E$ para todo ideal $\mathfrak{b}$ de R : faça $M' = \mathfrak{b}$, $M = R$ e $\alpha = \iota$ a inclusão.

Reciprocamente, considere um homomorfismo injetivo $\alpha : M' \rightarrow M$ e um homomorfismo $f : M' \rightarrow E$. Considere também a família de pares

$$\mathcal{F} = \{(N, g_N) : \alpha(M') \subseteq N \subseteq M \text{ e } g_N : N \rightarrow E \text{ é tal que } g_N\alpha = f\}.$$

Esta família satisfaz as hipóteses do Lema de Zorn com a ordem $(N, g_N) \leq (N', g_{N'})$ quando $N \subseteq N'$ e $g_{N'}|_N = g_N$. Então, existe um elemento maximal (H, g) . Se $H \neq M$, considere $x \in M - H$ e $\mathfrak{b} = (H :_R x)$. Existe uma aplicação

$$\varphi : \mathfrak{b} \xrightarrow{\mu_x} H \xrightarrow{g} E.$$

Logo, esta aplicação estende a $\tilde{\varphi} : R \rightarrow E$. Defina $\psi : H + Rx \rightarrow E$ como $\psi(h + rx) = g(h) + \tilde{\varphi}(r)$. Observemos que ψ está bem definida: se $h + rx = h' + r'x$, então, $h - h' = (r' - r)x$ e $g(h) - g(h') = g((r' - r)x)$. Por outro lado, $r' - r \in \mathfrak{b}$ e $\tilde{\varphi}(r') - \tilde{\varphi}(r) = \tilde{\varphi}(r' - r) = g((r' - r)x)$. Logo, $g(h) + \tilde{\varphi}(r) = g(h') + \tilde{\varphi}(r')$. Além disso, ψ é um homomorfismo, $H \subsetneq H + Rx$ e $\psi|_H = g$, o que é uma contradição com a maximalidade do par (H, g) . $\square$

Agora provaremos que existem “suficiente” módulos injetivos. Mais precisamente,

Teorema A.2. *Todo módulo é submódulo de um módulo injetivo.*

Demonstração. Defina $\varphi : M \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M)$ como $m \mapsto \varphi_m$ onde $\varphi_m : R \rightarrow M$ é definida como $r \mapsto \varphi_m(r) = rm$. Observe que φ é um homomorfismo injetor de grupos. Também, existe um grupo abeliano injetivo D e um homomorfismo injetor de grupos $\iota : M \rightarrow D$. Agora, $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \iota) : \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$ é um homomorfismo injetor. Mais ainda, $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \iota)\varphi : M \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$ é um homomorfismo de R -módulos: de fato, $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \iota)\varphi(rm) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \iota)(\varphi_{rm}) = \iota\varphi_{rm} : a \mapsto \iota(arm)$. Por outro lado, $r \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \iota)\varphi(m) = r\iota\varphi_m$ e $r\iota\varphi_m(a) = \iota\varphi_m(ar) = \iota(arm)$ para cada $a \in R$, concluindo o requerido. $\square$

Uma seqüência exata curta

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\pi} M'' \longrightarrow 0$$

é dita “cindida” (*splits* ou *is split*) se existe um homomorfismo $j : M'' \rightarrow M$ tal que $\pi j = \text{id}_{M''}$.

Equivalentemente, tal seqüência cinde se, e somente se, existe um homomorfismo $q : M \rightarrow M'$ tal que $q\iota = \text{id}_{M'}$. De fato, defina $q(m) = \iota^{-1}(m - j\pi(m))$ para cada $m \in M$, expressão que faz sentido pois $\pi(m - j\pi(m)) = \pi(m) - \pi(m) = 0$. Reciprocamente, defina $j(m'') = m - \iota q(m)$ onde $m \in \pi^{-1}(m'')$. O homomorfismo j é bem definido pois se $\pi(m) = m'' = \pi(n)$, então, $m - n \in \ker(\pi)$ e existe um único $m' \in M'$ com $\iota(m') = m - n$. Logo, $m' = q(m) - q(n)$ e $m - n = \iota q(m) - \iota q(n)$, donde $m - \iota q(m) = n - \iota q(n)$.

Observe também que se dita seqüência cinde, então, $M \cong M' \oplus M''$ via os isomorfismos $M \rightarrow M' \oplus M''$, $m \mapsto (q(m), \pi(m))$, e $M' \oplus M'' \rightarrow M$, $(a, b) \mapsto \iota(a) + j(b)$.

Existe mais uma caracterização de módulos injetivos via seqüências cindidas.

Lema A.3. Um módulo E é injetivo se, e somente se, toda seqüência exata curta $0 \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ cinde.

Demonstração. Se E é injetivo e $\iota : E \rightarrow M$ é um homomorfismo injetor, então, existe um homomorfismo $q : M \rightarrow E$ tal que $q\iota = \text{id}_E$.

Reciprocamente, existem um módulo injetivo E' e um homomorfismo injetor $\iota : E \rightarrow E'$ pelo Teorema A.2. Logo, $E' = E \oplus \frac{E'}{E}$, donde E é injetivo. $\square$

O anterior lema permite-nos concluir que um módulo injetivo E é somando direto de qualquer módulo que o contém.

A.2 Extensões essenciais

Sejam $M \subseteq N$ módulos. N é uma *extensão essencial* de M se todo submódulo não-nulo H de N satisfaz $H \cap M \neq 0$. Tal extensão essencial é dita *própria* se $M \subsetneq N$ (trivialmente, M sempre é extensão essencial de si mesmo, inclusive quando $M = 0$).

Existem outras formas de verificar se uma extensão é essencial.

Lema A.4. Sejam $M \subseteq N$ módulos. As condições são equivalentes:

1. N é uma extensão essencial de M .
2. Todo elemento não-nulo $n \in N$ possui um múltiplo não-nulo $rn \in M$.
3. Se $\varphi : N \rightarrow M'$ é um homomorfismo tal que $\varphi|_M := \varphi\iota$ é injetivo, então, φ é injetivo.

Demonstração. Suponha que N é uma extensão essencial de M e seja n um elemento não-nulo de N . Logo, Rn é um submódulo não-nulo de N e existe $r \in R$ tal que $0 \neq rn \in M$.

Se a condição 2 é satisfeita e $\varphi : N \rightarrow M'$ é um homomorfismo tal que $\varphi|_M$ é injetor, considere um elemento não-nulo $h \in \ker \varphi$. Então, $rh \in M - \{0\}$ para algum $r \in R$. Assim, $0 = r\varphi(h) = \varphi(rh) \neq 0$, o que é absurdo.

Agora, se a condição 3 é satisfeita e H é um submódulo de N , considere a projeção $\pi : N \rightarrow \frac{N}{H}$. Então, $\ker \pi|_M = H \cap M$. Se $H \cap M = 0$, então, $\pi|_M$ é injetor, donde π é injetor e $0 = \ker \pi = H$. Logo, N é uma extensão essencial de M . $\square$

Se M é um submódulo de N , a existência de extensões essenciais maximais de M em N fica garantida graças ao Lema de Zorn. Os módulos injetivos ficam caracterizados pela não existência de extensões essenciais próprias.

Lema A.5. Um módulo é injetivo se, e somente se, não possui extensões essenciais próprias.

Demonstração. Se E é injetivo e $E \subseteq M$, então, $M = E \oplus M''$ para algum submódulo M'' de M pelo Lema A.3. Se $E \neq M$, então, $M'' \neq 0$ e M não é uma extensão essencial de E .

Reciprocamente, se E não possui extensões essenciais próprias, considere $E \subsetneq M$, onde M é injetivo. Então, existe um submódulo não-nulo H de M tal que $H \cap E = 0$. Pelo Lema de Zorn, existe um submódulo maximal N de M tal que $H \subseteq N$ e $N \cap E = 0$. Agora, existe um homomorfismo injetor natural $E \rightarrow \frac{M}{N}$ que, de fato, define uma extensão essencial $E \subseteq \frac{M}{N}$ pelo Lema A.4. Deste modo, $E = \frac{M}{N}$. Portanto, $E + N = M$, donde $M = E \oplus N$ e E é injetivo. $\square$

Deste modo, se M é submódulo de um módulo injetivo E , então, todas as extensões essenciais possíveis de M devem estar contidas em E . Assim, não é mais necessário especificar “o contexto” de M estar contido em módulo algum graças ao Teorema A.2.

Proposição A.6. Se N é uma extensão essencial maximal de M , então, N é injetivo.

Demonstração. Suponha que N possui uma extensão essencial Q . Então, Q é uma extensão essencial de M . Logo, $N = Q$, pois N é extensão essencial maximal de M . Deste modo, N não possui extensões essenciais próprias, logo, N é injetivo pelo Lema A.5. $\square$

Mais ainda, quaisquer duas extensões essenciais maximais de um módulo M devem ser isomorfas.

Teorema A.7. Se N e N' são duas extensões essenciais maximais de M , então, $N \cong N'$.

Demonstração. Sejam $\alpha : M \rightarrow N$ e $\beta : M \rightarrow N'$ homomorfismo injetors. Logo, α estende para um homomorfismo injetor $\varphi : N' \rightarrow N$ pelo Lema A.4 e pela Proposição A.6, isto é, $\alpha = \varphi\beta$. Logo, N' é um submódulo de N , donde $N' \cong N$. $\square$

Chamamos de *envoltória injetiva* (*injective hull*) de M qualquer extensão essencial maximal de M a qual é denotada por $E_R(M)$.

Recolhemos a seguir uma série de exemplos elementares de extensões essenciais e envoltórias injetivas:

Exemplo 1. Todo anel comutativo é extensão essencial de cada um de seus ideais que contêm pelo menos um elemento regular.

Exemplo 2. Se R é um anel comutativo, denote por S o conjunto de todos os elementos regulares de R . Verifica-se que $S^{-1}R$ é uma extensão essencial de R .

Exemplo 3. Mais ainda, se R é um domínio de integridade, então, seu corpo de frações é um R -módulo injetivo: de fato, se $\mathfrak{b}$ é um ideal (não-nulo) de R e $\varphi : \mathfrak{b} \rightarrow \text{Frac}(R)$ é um homomorfismo, fixe $i \in \mathfrak{b} - \{0\}$ e defina $\psi : R \rightarrow \text{Frac}(R)$ como $\psi(r) = \frac{\varphi(ri)}{i}$. Observa-se que ψ é um homomorfismo que estende φ . Concluimos assim que $E_R(R) = \text{Frac}(R)$ quando R é um domínio de integridade.

Exemplo 4. Se $N \subseteq M$, então, $E_R(N) \subseteq E_R(M)$: de fato, a composição injetora $N \rightarrow M \rightarrow E_R(M)$ e a injeção $N \rightarrow E_R(N)$ induzem um homomorfismo injetor $E_R(N) \rightarrow E_R(M)$. Por outro lado, obtemos também um homomorfismo não-nulo $E_R(M) \rightarrow E_R(N)$. Além disso, se M é uma extensão essencial de N , então, $E_R(M) = E_R(N)$.

Exemplo 5. De maneira similar ao exemplo anterior, pode-se concluir que se $M \subseteq M_1 \oplus \cdots \oplus M_s$, então, $E_R(M) \subseteq E_R(M_1) \oplus \cdots \oplus E_R(M_s)$.

A.3 Resoluções injetivas

Seja M um R -módulo. Então, é possível construir uma seqüência exata de R -módulos $0 \rightarrow M \rightarrow E^0 \rightarrow E^1 \rightarrow \cdots$ onde cada E^i é injetivo graças ao Teorema A.2. Toda esta situação motiva algumas definições.

Definição A.8. Seja $\mathcal{X}$ uma classe de módulos. Dizemos que existem $\mathcal{X}$ -módulos suficientes quando, para cada módulo M , existem um módulo X da classe $\mathcal{X}$ (doravante, X é um $\mathcal{X}$ -módulo) e um homomorfismo injetor $M \rightarrow X$. Uma $\mathcal{X}$ -resolução de M é um cocomplexo $\mathbf{X}(M)$ de $\mathcal{X}$ -módulos

$$0 \longrightarrow X^0 \xrightarrow{d^0} X^1 \xrightarrow{d^1} X^2 \longrightarrow \cdots$$

tal que $H^0(\mathbf{X}(M)) = \ker d^0 = M$ e $H^i(\mathbf{X}(M)) = 0$ para cada $i \geq 1$.

Para cada $i \geq 0$, o quociente $V^i = \frac{X^i}{\ker d^i}$ é chamado de i -ésima cosizígia de $\mathbf{X}(M)$. Assim, o homomorfismo $d^i : X^i \rightarrow X^{i+1}$ fica fatorado como $d_i = \bar{d}^i \pi^i$ onde $\bar{d}^i : V^i \rightarrow X^{i+1}$ é um homomorfismo injetor e $\pi^i : X^i \rightarrow V^i$ é um epimorfismo para cada $i \geq 0$.

Neste texto, consideraremos de maneira exclusiva a classe $\mathcal{X}$ dos módulos injetivos. Se $f : M \rightarrow N$ é um homomorfismo de módulos e $\mathbf{X}(M)$ e $\mathbf{X}(N)$ são, respectivamente, resoluções injetivas

$$0 \longrightarrow D^0 \xrightarrow{d^0} D^1 \xrightarrow{d^1} D^2 \longrightarrow \cdots$$

e

$$0 \longrightarrow E^0 \xrightarrow{e^0} E^1 \xrightarrow{e^1} E^2 \longrightarrow \cdots$$

de M e N , então, pode-se construir uma aplicação de cadeias

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\beta} & E^0 & \xrightarrow{e^0} & E^1 & \xrightarrow{e^1} & E^2 & \longrightarrow & \dots \\
 & & \uparrow f & & \uparrow f^0 & & \uparrow f^1 & & \uparrow f^2 & & \\
 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\alpha} & D^0 & \xrightarrow{d^0} & D^1 & \xrightarrow{d^1} & D^2 & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

que será chamada de *resolução de f* . Aqui, α e β são os homomorfismos injetores que fazem que as linhas do diagrama sejam exatas. De fato, f^0 é um levantamento de βf via o homomorfismo injetor α , pois E^0 é injetivo. Supondo que foram encontradas todos os homomorfismos até $f^n : D^n \rightarrow E^n$, temos um homomorfismo injetor $\bar{d}_n : V_M^n \rightarrow D^{n+1}$ induzido por d^n , mais exatamente, $\bar{d}_n \pi^n = d^n$ onde $\pi^n : D^n \rightarrow V_M^n$ é a projeção canônica. Define-se, também, um homomorfismo (é, de fato, bem definido!) $\lambda^n : V_M^n \rightarrow E^{n+1}$ como $\lambda^n(a + \ker d^n) = e^n f^n(a)$. Portanto, existe $f^{n+1} : D^{n+1} \rightarrow E^{n+1}$ tal que $f^{n+1} \bar{d}_n = \lambda^n$. Assim, $f^{n+1} d^n = f^{n+1} \bar{d}_n \pi^n = \lambda^n \pi^n = e^n f^n$.

Observe, também, que se fora construída outra resolução $(g^i)_{i \geq 0}$ de f , então, ambas aplicações de cadeias são *homotópicas*, isto é, existe uma aplicação $t = (t^n : D^n \rightarrow E^{n-1})$ de grau 1 (ou cograu -1) tal que $f^n - g^n = e^{n-1} t^n + t^{n+1} d^n$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \xleftarrow{e^{-1}} & E^0 & \xleftarrow{e^0} & E^1 & \xleftarrow{e^1} & E^2 & \longrightarrow & \dots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & f^0 - g^0 & & f^1 - g^1 & & f^2 - g^2 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 0 & \xleftarrow{d^{-1}} & D^0 & \xleftarrow{d^0} & D^1 & \xleftarrow{d^1} & D^2 & \longrightarrow & \dots \\
 & & \nwarrow t^0 & & \nwarrow t^1 & & \nwarrow t^2 & &
 \end{array}$$

De fato, observe que $M \cong \text{im } \alpha \subseteq \ker(f^0 - g^0)$ e defina $\lambda^0 : V_M^0 \rightarrow E^0$ como $\lambda^0(a + \ker d^0) = (f^0 - g^0)(a)$, isto é, $\lambda^0 \pi^0 = f^0 - g^0$, onde $\pi^0 : D^0 \rightarrow V_M^0$ é a projeção natural. Mas $\bar{d}^0 \pi^0(x) = d^0(x)$ para todo $x \in E^0$. Por ser E^0 injetivo, defina $t^1 : D^1 \rightarrow E^0$ estendendo λ^0 , ou seja, $\lambda^0 = t^1 \bar{d}^0$. Logo, $f^0 - g^0 = \lambda^0 \pi^0 = e^{-1} t^0 + t^1 d^0$.

Supondo que já foram encontrados todos os homomorfismos até $t^n : D^n \rightarrow E^{n-1}$, considere, análogo ao primeiro passo, o homomorfismo $\lambda^n : V_M^n \rightarrow E^n$ definido por $\lambda^n \pi^n = f^n - g^n - e^{n-1} t^n$. Define-se um levantamento $t^{n+1} : D^{n+1} \rightarrow E^n$ de λ^n via $\bar{d}^n$ (isto é, $t^{n+1} \bar{d}_n = \lambda^n$) e verifica-se que $f^n - g^n = e^{n-1} t^n + t^{n+1} d^n$.

Fica, então, demonstrado o seguinte resultado.

Proposição A.9. Quaisquer duas resoluções injetivas de um mesmo módulo são *homotopicamente equivalentes*, isto é, se $\mathbf{E}(M)$ e $\mathbf{D}(M)$ são resoluções injetivas de M , então, existem aplicações de cadeias $f : \mathbf{E}(M) \rightarrow \mathbf{D}(M)$ e $g : \mathbf{D}(M) \rightarrow \mathbf{E}(M)$ tais que

fg é homotópica a $\text{id}_{\mathbf{D}(M)}$ e gf é homotópica a $\text{id}_{\mathbf{E}(M)}$.

Uma resolução injetiva $\mathbf{E}(M) = (E^i(M), d^i)_{i \geq 0}$ de M é *minimal* se o termo de cograu n é extensão essencial da $(n-1)$ -ésima cosizígia para cada $n \geq 0$ (convenimos $V^{-1} = M$).

Existem muitas razões para as resoluções injetivas minimais terem este nome. Uma delas é a seguinte.

Proposição A.10. Sejam $\mathbf{D}(M)$ e $\mathbf{E}(M)$ duas resoluções injetivas de M , sendo a segunda delas minimal. Então, para cada $n \geq 0$, cada termo de $\mathbf{E}(M)$ de cograu n é somando direto do termo de $\mathbf{D}(M)$ do mesmo cograu. Em particular, para cada $n \geq 0$, os termos de cograu n de quaisquer duas resoluções injetivas minimais do mesmo módulo são isomorfos.

Demonstração. Construiremos uma aplicação de cadeias $(\text{id}_M^i)_{i \geq 0} : (\mathbf{E}(M), e) \rightarrow (\mathbf{D}(M), d)$ induzida pelo isomorfismo identidade $\text{id}_M : M \rightarrow M$ e injetora. De fato, id_M^0 satisfaz $\text{id}_M^0 \alpha = \beta \text{id}_M$, sendo o lado direito um homomorfismo injetor. Logo, id_M^0 é injetora pelo Lema A.4 e E^0 é somando direto de D^0 .

Suponha, agora, que id_M^i é injetora para cada $i \in \{0, \dots, n\}$. Observe que $x \in \ker e^i$ se, e somente se, $\text{id}_M^i(x) \in \ker d^i$. Defina $\lambda^n : V_{\mathbf{E}}^n \rightarrow D^{n+1}$ como $\lambda^n(a + \ker e^n) = d^n \text{id}_M^n(a)$. Verifica-se que λ^n é injetora: de fato, $\text{id}_M^n(a) \in \ker d^n$ se, e somente se, $a \in \ker e^n$. Deste modo, λ^n estende-se a um homomorfismo injetor $\text{id}_M^{n+1} : E^{n+1} \rightarrow D^{n+1}$ pois $\bar{e}^n : V_{\mathbf{E}}^n \rightarrow E^{n+1}$ é uma extensão essencial. Portanto, E^n é somando direto de D^n para cada $n \geq 0$ pelo Lema A.3. $\square$

A.4 Módulos injetivos sobre um anel comutativo noetheriano

Antes de continuarmos com o estudo de módulos injetivos, lembremos algumas propriedades dos módulos de homomorfismos. Para qualquer conjunto de índices I , existe um homomorfismo injetor de grupos $\varphi : \bigoplus_{i \in I} \text{Hom}_R(M, N_i) \rightarrow \text{Hom}_R\left(M, \bigoplus_{i \in I} N_i\right)$ dado por $\varphi(f_{i_1} + \dots + f_{i_s}) = f_{i_1} + \dots + f_{i_s} : M \rightarrow \bigoplus_{i \in I} N_i$ quando $f_{i_j} \in \text{Hom}_R(M, N_{i_j})$. Observa-se que φ é um isomorfismo quando M é finitamente gerado: de fato, a imagem de $f \in \text{Hom}_R\left(M, \bigoplus_{i \in I} N_i\right)$ está contida numa quantidade finita de N_i neste caso, logo, $f \in \text{Hom}_R\left(M, \bigoplus_{i \in F} N_i\right)$ onde F é um subconjunto finito de I . Mas neste

último caso, o homomorfismo injetor $\varphi|_F : \bigoplus_{i \in F} \text{Hom}_R(M, N_i) \rightarrow \text{Hom}_R\left(M, \bigoplus_{i \in F} N_i\right)$ é, de fato, um isomorfismo (independente de M ser finitamente gerado). Assim, existe $g \in \bigoplus_{i \in F} \text{Hom}_R(M, N_i) \subseteq \bigoplus_{i \in I} \text{Hom}_R(M, N_i)$ tal que $\varphi(g) = \varphi|_F(g) = f$.

Os anéis noetherianos ficam caracterizados pelo comportamento dos módulos injetivos.

Proposição A.11. Um anel é noetheriano se, e somente se, toda soma direta de módulos injetivos é injetiva.

Demonstração. Seja $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$ uma soma direta de módulos injetivos e considere um ideal $\mathfrak{a}$ de um anel noetheriano R . A inclusão $\mathfrak{a} \rightarrow R$ induz um homomorfismo $\text{Hom}_R(R, E) \rightarrow \text{Hom}_R(\mathfrak{a}, E)$. Como cada E_i é injetivo, temos também que cada homomorfismo $\text{Hom}_R(R, E_i) \rightarrow \text{Hom}_R(\mathfrak{a}, E_i)$ é sobrejetor. Logo, $\bigoplus_{i \in I} \text{Hom}_R(R, E_i) \rightarrow \bigoplus_{i \in I} \text{Hom}_R(\mathfrak{a}, E_i)$ é sobrejetor. Como $\mathfrak{a}$ é finitamente gerado, temos o isomorfismo natural $\bigoplus_{i \in I} \text{Hom}_R(\mathfrak{a}, E_i) \cong \text{Hom}_R\left(\mathfrak{a}, \bigoplus_{i \in I} E_i\right)$. Portanto, o homomorfismo $\text{Hom}_R(R, E) \rightarrow \text{Hom}_R(\mathfrak{a}, E)$ é sobrejetor, donde E é um módulo injetivo pelo Critério de Baer.

Reciprocamente, suponha que R não é noetheriano. Exibiremos uma soma direta de módulos injetivos que não é injetiva. Existe uma cadeia ascendente $\mathfrak{a}_1 \subsetneq \mathfrak{a}_2 \subsetneq \cdots$ de ideais de R . Seja $\mathfrak{a} = \bigcup_{i \geq 1} \mathfrak{a}_i$. Existem projeções naturais $\pi_i : \mathfrak{a} \rightarrow E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{a}_i}\right)$ para cada $i \geq 1$, donde obtemos um homomorfismo $\pi : \mathfrak{a} \rightarrow \prod_{i \geq 1} E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{a}_i}\right)$. Se $a \in \mathfrak{a}$, então, $a \in \mathfrak{a}_j$ para algum inteiro $j \geq 1$. Assim, $\pi_i(a) = 0$ quando $i \geq j$. Portanto, o contradomínio de π é o submódulo $\bigoplus_{i \geq 1} E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{a}_i}\right)$ de $\prod_{i \geq 1} E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{a}_i}\right)$. Se existisse $\psi : R \rightarrow \bigoplus_{i \geq 1} E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{a}_i}\right)$ estendendo π , então, $\psi(1) = e_1 + \cdots + e_s$ para alguns $e_i \in E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{a}_i}\right)$ e $s \geq 1$. Agora, $\pi(a) = a\psi(1)$ para cada $a \in \mathfrak{a}$. Mas se $a \in \mathfrak{a}_{s+2} - \mathfrak{a}_{s+1}$, então, $\pi_{s+1}(a) \neq 0$ e chegamos a uma contradição. $\square$

Lembremos que um módulo é dito *simples* quando não tem submódulos não-triviais. Um módulo será dito *indecomponível* quando não for uma soma direta de submódulos não-triviais. Um módulo será dito *uniforme* quando satisfizer alguma das condições equivalentes:

1. Não contém somas diretas não-triviais.
2. Todo submódulo não-nulo é indecomponível.

3. É extensão essencial de cada um de seus submódulos não-nulos.

Todo módulo simples é uniforme e todo módulo uniforme é indecomponível. Agora provaremos que todo módulo injetivo indecomponível é uniforme.

Teorema A.12. *Seja E um módulo injetivo. As condições são equivalentes:*

1. E é indecomponível.
2. $E \neq 0$ e $E = E_R(M)$ para qualquer submódulo não-nulo M de E .
3. $E = E_R(U)$ para algum submódulo uniforme U de E .
4. $E = E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{a}}\right)$ onde $\mathfrak{a}$ é irredutível, isto é, se $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}' = \mathfrak{a}$, então, $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ ou $\mathfrak{b}' = \mathfrak{a}$.
5. O anel $\text{End}_R(E)$ dos endomorfismos do R -módulo E é local.

Demonstração. Se E é um módulo injetivo e $0 \neq M \subseteq E$, então, toda extensão essencial de M está contida em E . Em particular, $E_R(M) \subseteq E$, donde $E_R(M) = E$, pois E é indecomponível. Deste modo, a condição 1 implica na condição 2.

Se $E = E_R(M)$ para qualquer submódulo não-nulo M de E , então, E é uniforme. Assim, $U = E$ satisfaz a condição 3 quando E satisfaz a condição 2.

Suponha que $E = E_R(U)$ para algum submódulo uniforme U de E e considere um submódulo cíclico V de U , isto é, $V = \frac{R}{\mathfrak{a}}$ para algum ideal $\mathfrak{a}$ de R . Como U é uniforme, temos que U é uma extensão essencial de V . Portanto, $E_R(U)$ é uma extensão essencial de V . Finalmente, se $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}' = \mathfrak{a}$, considere os submódulos cíclicos $W = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$ e $W' = \frac{\mathfrak{b}'}{\mathfrak{a}}$ de $V \subseteq U$. Se $W \neq 0$, então, $W' = 0$, pois $W \cap W' = 0$ e U é uniforme. Fica demonstrado deste modo que a condição 3 implica na condição 4.

Seja $E = E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{a}}\right)$ onde $\mathfrak{a}$ é irredutível. Observe que o módulo $U = \frac{R}{\mathfrak{a}}$ é uniforme. Considere um elemento não-invertível $\alpha \in \text{End}_R(E)$. Então, $\ker \alpha \neq 0$, pois caso contrário, $E \cong \text{im } \alpha \subsetneq E$, o que é absurdo, pois E é injetivo. Assim, $U \cap \ker \alpha \neq 0$. Considerando outro elemento não-invertível $\beta \in \text{End}_R(E)$, obtemos igualmente que $U \cap \ker \beta \neq 0$. Logo, $\ker \alpha + \ker \beta \supseteq \ker \alpha \cap \ker \beta \supseteq (U \cap \ker \alpha) \cap (U \cap \ker \beta) \neq 0$. Portanto, o conjunto dos elementos não-invertíveis de $\text{End}_R(E)$ é um ideal, concluindo assim que a condição 4 implica na condição 5.

Finalmente, se $E = E_1 \oplus E_2$, então, $\text{id}_{E_1} \oplus 0$ e $0 \oplus \text{id}_{E_2}$ são elementos idempotentes de $\text{End}_R(E)$. Assim, a condição 5 implica na condição 1 e o enunciado fica estabelecido. $\square$

Um módulo N é dito *primo* se $\text{Ann}(N') = \text{Ann}(N)$ para todo submódulo não-nulo N' de N . Pode-se demonstrar que o ideal $\text{Ann}(N)$ é primo sob esta condição: de fato, se $ab \in \text{Ann}(N)$ e $a \notin \text{Ann}(N)$, considere $n \in N$ tal que $na \neq 0$. Assim, o submódulo

$N' = naR$ de N deve satisfazer $\text{Ann}(N') = \text{Ann}(N)$. Como $b \in \text{Ann}(N')$, a afirmação segue.

Um ideal primo $\mathfrak{p}$ é dito *associado* ao módulo (à direita) M quando $\mathfrak{p} = \text{Ann}(N)$ para algum submódulo primo N de M e o conjunto de ideais primos associados de M é denotado por $\text{Ass}(M)$. Observe que a presente definição de ideal primo associado coincide com a usual no caso comutativo.

Uma das vantagens de considerarmos estas novas definições é a seguinte.

Lema A.13. Se E é uma extensão essencial de M , então, $\text{Ass}(E) = \text{Ass}(M)$. Em particular, $\text{Ass}(E_R(M)) = \text{Ass}(M)$.

Demonstração. Seja H um submódulo primo de E . Então, $H \cap M \neq 0$, donde $\mathfrak{p} = \text{Ann}(H) = \text{Ann}(H \cap M)$. Agora, $H \cap M$ é um submódulo primo de M . Assim, $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M)$. A recíproca é tranqüila. $\square$

Se $\mathfrak{p}$ é um ideal primo de um anel comutativo R , então, o R -módulo $\frac{R}{\mathfrak{p}}$ é uniforme, donde $E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{p}}\right)$ é indecomponível pelo Teorema A.12. Observe que $\text{Ass}_R\left(\frac{R}{\mathfrak{p}}\right) = \{\mathfrak{p}\}$. De fato, todos os módulos uniformes satisfazem esta condição.

Lema A.14. Todo módulo uniforme possui, no máximo, um ideal primo associado.

Demonstração. Suponha que $\text{Ann}(H_1)$ e $\text{Ann}(H_2)$ são ideais primos associados de um módulo uniforme U , onde H_1 e H_2 são submódulos primos de U . Então, $H_1 \cap H_2 \neq 0$ e $\text{Ann}(H_1) = \text{Ann}(H_1 \cap H_2) = \text{Ann}(H_2)$. $\square$

O objetivo agora é decompor todo módulo injetivo em indecomponíveis. Isto pode ser feito no contexto comutativo noetheriano e o anel base terá estas características daqui para frente.

Teorema A.15. Seja E um módulo injetivo não-nulo sobre um anel comutativo noetheriano R . Então, $E \cong \bigoplus_i E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{p}_i}\right)$ onde cada $\mathfrak{p}_i$ é um ideal primo de R .

Demonstração. Observe que se E é um módulo injetivo indecomponível, então, $E = E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{a}}\right)$ onde $\mathfrak{a}$ é um ideal irredutível. Demonstraremos que se R é comutativo noetheriano, então, $\mathfrak{a}$ pode ser escolhido como um ideal primo. Seja $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(E)$. Então, existe um homomorfismo injetor $\frac{R}{\mathfrak{p}} \rightarrow E$. Como E é indecomponível, temos que E é uma extensão essencial de $\frac{R}{\mathfrak{p}}$ pelo Teorema A.12, donde $E = E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{p}}\right)$.

Em geral, seja $e \in E$ e considere $\mathfrak{a} = \text{Ann}(e)$. Então, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_s$ onde cada $\mathfrak{a}_i$ é um ideal irredutível (veja [?, página 40]). Logo, $Re = \frac{R}{\mathfrak{a}} \subseteq \frac{R}{\mathfrak{a}_1} \oplus \cdots \oplus \frac{R}{\mathfrak{a}_s}$, donde $Re \subseteq E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{a}_1}\right) \oplus \cdots \oplus E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{a}_s}\right)$. Como cada $\mathfrak{a}_i$ é irredutível, existem ideais primos $\mathfrak{p}_i$ tais que $E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{a}_i}\right) = E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{p}_i}\right)$ para cada i pelo argumento anterior e concluimos o enunciado. $\square$

Deste modo, o conjunto $\left\{ E_R \left(\frac{R}{\mathfrak{p}} \right) \right\}_{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R}$ fornece uma lista completa dos módulos injetivos indecomponíveis sobre o anel comutativo noetheriano R . Assim, dados dois ideais primos, $\mathfrak{p}$ e $\mathfrak{q}$, de R , teremos que $E_R \left(\frac{R}{\mathfrak{p}} \right) = E_R \left(\frac{R}{\mathfrak{q}} \right)$ se, e somente se, $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$: de fato, se $x \in \mathfrak{p} - \mathfrak{q}$, então, a multiplicação por x é um automorfismo em $E_R \left(\frac{R}{\mathfrak{q}} \right)$ e não é um automorfismo em $E_R \left(\frac{R}{\mathfrak{p}} \right)$.

Extensões essenciais e injetividade são preservadas via localização.

Lema A.16. Considere um conjunto multiplicativo S de um anel comutativo noetheriano R . Se E é um R -módulo injetivo, então, $S^{-1}E$ é injetivo como $S^{-1}R$ -módulo e como R -módulo.

Demonstração. Se $\mathfrak{a}$ é um ideal de $S^{-1}R$, então, $\mathfrak{a} = S^{-1}\mathfrak{b}$ para algum ideal $\mathfrak{b}$ de R . Temos a seqüência exata $\text{Hom}_R(R, E) \rightarrow \text{Hom}_R(\mathfrak{b}, E) \rightarrow 0$. Como $S^{-1}(-)$ é um funtor exato da categoria dos R -módulos à categoria dos $S^{-1}R$ -módulos, obtemos a seqüência exata $S^{-1}\text{Hom}_R(R, E) \rightarrow S^{-1}\text{Hom}_R(\mathfrak{b}, E) \rightarrow 0$. Agora, como R é noetheriano, todos seus ideais são de apresentação finita e a seqüência anterior transforma-se em $\text{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}R, S^{-1}E) \rightarrow \text{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}\mathfrak{b}, S^{-1}E) \rightarrow 0$ via isomorfismos naturais (veja [?, Proposition 12.21]). Deste modo, $S^{-1}E$ é um $S^{-1}R$ -módulo injetivo pelo Critério de Baer.

Finalmente, considere dois R -módulos $M \subseteq N$ e um homomorfismo de R -módulos $\lambda : M \rightarrow S^{-1}E$. O homomorfismo canônico $\psi : S^{-1}E \rightarrow S^{-1}E$ é um isomorfismo de $S^{-1}R$ -módulos. Deste modo, $\psi^{-1}S^{-1}\lambda : S^{-1}M \rightarrow S^{-1}E$ é um homomorfismo de $S^{-1}R$ -módulos. Agora, existe um homomorfismo de $S^{-1}R$ -módulos $\mu' : S^{-1}N \rightarrow S^{-1}E$ que estende $\psi^{-1}S^{-1}\lambda$. Deste modo, o homomorfismo canônico $\theta : N \rightarrow S^{-1}N$ induz um homomorfismo de R -módulos $\mu'\theta : N \rightarrow S^{-1}E$ que estende λ concluindo que $S^{-1}E$ é também R -injetivo. $\square$

Lema A.17. Seja S um conjunto multiplicativo de um anel comutativo noetheriano R e considere um homomorfismo de R -módulos $f : L \rightarrow M$ tal que $\text{im } f \subseteq M$ é uma extensão essencial. Então, $S^{-1}M$ é uma extensão essencial de $\text{im } S^{-1}f$.

Demonstração. Seja $\frac{x}{s}$ um elemento não-nulo de $S^{-1}M$. Logo, existe $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(Rx)$ tal que $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$. Assim, $\mathfrak{p} = \text{Ann}(rx)$ para algum $r \in R$, isto é, podemos escolher $r \in R$ de maneira que Rrx seja um R -módulo primo. Como M é uma extensão essencial de $\text{im } f$, existe $r' \in R$ tal que $0 \neq r'rx = f(y)$ para algum $y \in L$. Como Rrx é um R -submódulo primo de Rx , temos que $\text{Ann}(r'rx) = \mathfrak{p}$, donde $0 \neq \frac{r'r}{1} \frac{x}{s} = \frac{f(y)}{s} = S^{-1}f \left(\frac{y}{s} \right)$. Conclui-se que $S^{-1}M$ é uma extensão essencial de $\text{im } S^{-1}f$. $\square$

Lema A.18. Considere um conjunto multiplicativo S de um anel comutativo noetheriano R . Então, os $S^{-1}R$ -módulos injetivos indecomponíveis são os módulos $E_R \left(\frac{R}{\mathfrak{p}} \right)$, com $\mathfrak{p}$ primo, tais que $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$.

Demonstração. Pelo Teorema A.15, os $S^{-1}R$ -módulos injetivos indecomponíveis são os módulos $E_{S^{-1}R}\left(\frac{S^{-1}R}{S^{-1}\mathfrak{p}}\right)$ onde $\mathfrak{p}$ é um ideal primo de R tal que $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$. Agora, $E_{S^{-1}R}\left(\frac{S^{-1}R}{S^{-1}\mathfrak{p}}\right) = S^{-1}E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{p}}\right)$, pois $S^{-1}E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{p}}\right)$ é $S^{-1}R$ -injetivo pelo Lema A.16 e uma extensão essencial do $S^{-1}R$ -módulo $S^{-1}\left(\frac{R}{\mathfrak{p}}\right) = \frac{S^{-1}R}{S^{-1}\mathfrak{p}}$ pelo Lema A.17. Afirmamos que, quando $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, o R -módulo $E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{p}}\right)$ possui estrutura de $S^{-1}R$ -módulo e, além disso, que é isomorfo ao $S^{-1}R$ -módulo $E_{S^{-1}R}\left(\frac{S^{-1}R}{S^{-1}\mathfrak{p}}\right)$: de fato, a primeira afirmação segue porque a multiplicação por qualquer elemento $s \in S$ é um automorfismo em $E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{p}}\right)$, ficando definido $\frac{e}{s} = \mu_s^{-1}(e)$ para cada $e \in E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{p}}\right)$ e cada $s \in S$. Quanto à segunda afirmação, note que a estrutura de $S^{-1}R$ -módulo em $E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{p}}\right)$ é única (veja [?, Proposition 12.1]). Deste modo, $E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{p}}\right) = S^{-1}E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{p}}\right) = E_{S^{-1}R}\left(\frac{S^{-1}R}{S^{-1}\mathfrak{p}}\right)$ e conclui-se o requerido. $\square$

Proposição A.19. Seja $\mathfrak{p}$ um ideal primo de um anel comutativo noetheriano R e considere os módulos $E = E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{p}}\right)$ e $\kappa(\mathfrak{p}) = \text{Frac}\left(\frac{R}{\mathfrak{p}}\right) = \frac{R_{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}$. Então, $\text{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}(\kappa(\mathfrak{p}), E) = \kappa(\mathfrak{p})$ e $\text{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}\left(\kappa(\mathfrak{p}), E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{q}}\right)_{\mathfrak{p}}\right) = 0$ para todo ideal primo $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$.

Demonstração. Observe que $\text{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}(\kappa(\mathfrak{p}), E) = (0 :_E \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}})$. Afirmamos que $(0 :_E \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}) = \kappa(\mathfrak{p})$: de fato, $\kappa(\mathfrak{p}) \subseteq (0 :_E \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}})$ e $(0 :_E \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}})$ é um $\kappa(\mathfrak{p})$ -espaço vetorial, donde $\kappa(\mathfrak{p})$ é somando direto de $(0 :_E \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}})$. Por outro lado, E é extensão essencial de todos seus submódulos não-nulos pelo Lema A.18. Assim, $(0 :_E \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}) = \kappa(\mathfrak{p})$.

Para o segundo isomorfismo, consideremos primeiro um ideal primo $\mathfrak{q} \not\subseteq \mathfrak{p}$. Assim, $E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{q}}\right)_{\mathfrak{p}}$ é uma extensão essencial de $\left(\frac{R}{\mathfrak{q}}\right)_{\mathfrak{p}} = 0$ pelo Lema A.17. Se $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$, então, $\text{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}\left(\kappa(\mathfrak{p}), E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{q}}\right)_{\mathfrak{p}}\right) = (0 :_{E_R(\frac{R}{\mathfrak{q}})_{\mathfrak{p}}} \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}) = (0 :_{E_R(\frac{R}{\mathfrak{q}})} \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}})$, a última igualdade vinda do Lema A.18. Se $(0 :_{E_R(\frac{R}{\mathfrak{q}})} \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}) \neq 0$, então, $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$, pois $\text{Ass}\left(E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{q}}\right)\right) = \{\mathfrak{q}\}$ pelo Lema A.13. $\square$

A.5 Números de Bass

Análogo aos números de Betti das resoluções livres, encontramos invariantes no contexto comutativo noetheriano.

Teorema A.20. Seja E um módulo injetivo. Então, $E = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R} E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{p}}\right)^{\alpha_{\mathfrak{p}}}$, onde cada $\alpha_{\mathfrak{p}}$ depende somente de $\mathfrak{p}$.

Demonstração. Lembremos que $E = \bigoplus_i E_R\left(\frac{R}{\mathfrak{p}_i}\right)$ onde $\mathfrak{p}_i$ é um ideal primo de R para cada i . Lembremos, também, que existe um isomorfismo natural $\bigoplus_i \text{Hom}(N, M_i) \cong$

$\text{Hom} \left(N, \bigoplus_i M_i \right)$ quando N é finitamente gerado. Fixando o ideal primo $\mathfrak{p}$, a Proposição A.19 implica em $\text{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}(\kappa(\mathfrak{p}), E) = \kappa(\mathfrak{p})^{\alpha_{\mathfrak{p}}}$, onde $\alpha_{\mathfrak{p}}$ é o número (possivelmente infinito) de vezes que aparece $\mathfrak{p}$ numa decomposição de E em indecomponíveis. $\square$

Podemos definir os números de Bass a seguir.

Definição A.21. Seja M um módulo e considere uma resolução injetiva minimal $\mathbf{E}(M)$ de M . Assim, $E^i(M) = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R} E_R \left(\frac{R}{\mathfrak{p}} \right)^{\mu^i(\mathfrak{p}, M)}$ e o número $\mu^i(\mathfrak{p}, M)$ é o i -ésimo número de Bass de M com respeito a $\mathfrak{p}$.

Como já vimos na Proposição A.10, estes números estão bem definidos. O próximo resultado dá uma fórmula para calculá-los.

Teorema A.22. Para cada módulo M , cada primo $\mathfrak{p}$ e cada número inteiro $i \geq 0$, $\mu^i(\mathfrak{p}, M) = \dim_{\kappa(\mathfrak{p})} \text{Ext}_{R_{\mathfrak{p}}}^i(\kappa(\mathfrak{p}), M_{\mathfrak{p}})$. Em particular, os números de Bass com respeito a $\mathfrak{p}$ de um módulo finitamente gerado são finitos. (Veja [BS98, Teorema 11.1.8])

Apêndice B

Funtores aditivos e funtores derivados

Neste Apêndice é apresentado a ideia de funtor dentro da categoria dos R - módulos. Para uma visão mais geral desse tema na Teoria de Categorias, ver [Rot09, seção 6.2]

Um *funtor* (covariante) F é uma correspondência entre R -módulos tal que:

- i) Para cada R -módulo M associa um R -módulo $F(M)$.

$$\begin{array}{ccc} F : R - \text{mod} & \longrightarrow & R - \text{mod} \\ M & \longmapsto & F(M) \end{array}$$

- ii) Para cada homomorfismo de R -módulos $f : M \rightarrow N$ associa um homomorfismo de R -módulos $F(f) : F(M) \rightarrow F(N)$ tal que:

1. $F(\text{id}_M) = \text{id}_{F(M)}$
2. Dados dois homomorfismos de R -módulos f, g , temos $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$

Uma correspondência entre R -módulos satisfaz i) e a condição seguinte:

- ii*) Para cada homomorfismo de R -módulos $f : M \rightarrow N$ associa um homomorfismo de R -módulos $F(f) : F(N) \rightarrow F(M)$ tal que:

- 1*. $F(\text{id}_M) = \text{id}_{F(M)}$
- 2*. Dados dois homomorfismos de R -módulos f, g , temos $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$

É chamado *funtor contravariante*.

Um funtor F (de qualquer variância) é dito *aditivo* quando $F(f + g) = F(f) + F(g)$ para quaisquer dois homomorfismos de R -módulos, f e g . Estes funtores preservam

complexos, ou os tornam cocomplexos no caso dos contravariantes. Mais explicitamente, se (C, d) é um complexo de R -módulos, então, $(F(C), F(d))$ é um complexo de R -módulos ou um cocomplexo se F for contravariante. Mais ainda, estes funtores também preservam homotopias: se f e g são aplicações de cadeia homotópicas, então, $F(f)$ e $F(g)$ também são aplicações de cadeia homotópicas.

Observe que $F(M \oplus N) = F(M) \oplus F(N)$ para quaisquer R -módulos, M e N , e qualquer functor aditivo (de qualquer variância) F graças à cisão $0 \hookrightarrow M \hookrightarrow M \oplus N \hookrightarrow N \hookrightarrow 0$. Assim, tal cisão transforma-se na cisão $0 \hookrightarrow F(M) \hookrightarrow F(M \oplus N) \hookrightarrow F(N) \hookrightarrow 0$ no caso covariante e em $0 \hookrightarrow F(N) \hookrightarrow F(M \oplus N) \hookrightarrow F(M) \hookrightarrow 0$ no caso contravariante.

Definição B.1. Seja F um functor exato à esquerda $f : M \rightarrow N$ um homomorfismo de R -módulos. Dadas quaisquer resoluções injetivas, $(E^*(M), d^*)$, $(I^*(N), \delta^*)$ e f^* , de M , N e f respectivamente, denota-se o i -ésimo functor derivado à direita de F por $R^i F$ e define-se como $(R^i F)(M) = H^i(F(E^*(M)), F(d^*))$ e $(R^i F)(f) = H^i(F(f^*))$. Dualmente, seja F um functor exato à direita e seja $f : M \rightarrow N$ um homomorfismo de R -módulos. Dadas quaisquer resoluções projetivas, $(P_*(M), d_*)$, $(Q_*(N), \delta_*)$ e f_* , de M , N e f respectivamente, denota-se o i -ésimo functor derivado à esquerda de F por $L_i F$ e define-se como $(L_i F)(M) = H_i(F(P_*(M)), F(d_*))$ e $(L_i F)(f) = H_i(F(f_*))$.

Esclarecemos que, para definirmos os funtores derivados, não é necessária a hipótese de semiexatidão. Porém, é uma condição cômoda e significativa pois se F é exato à esquerda, então, $R^0 F$ é naturalmente isomorfo a F : de fato, $(R^0 F)(M) = \ker F(d^0) = F(\ker d^0) = F(M)$, $(R^0 F)(N) = \ker F(\delta^0) = F(\ker \delta^0) = F(N)$ e o diagrama a seguir comuta:

$$\begin{array}{ccc} F(M) & \xrightarrow{F(\alpha)} & \ker F(d^0) \\ \downarrow F(f) & & \downarrow F(f^0)|_{\ker F(d^0)} \\ F(N) & \xrightarrow{F(\beta)} & \ker F(\delta^0). \end{array}$$

As linhas do diagrama anterior são isomorfismos. Similarmente, se F é exato à direita, então, $L_0 F$ é naturalmente isomorfo a F .

Exemplos imediatos de funtores derivados são os funtores $\text{Ext}_R^i(M, -)$ e $\text{Tor}_i^R(-, N)$. O primeiro é derivado do functor $\text{Hom}_R(M, -)$ e o segundo é derivado de $- \otimes_R N$. Como $\text{Hom}_R(M, -)$ é exato à esquerda, temos que $\text{Ext}_R^0(M, -)$ é naturalmente isomorfo a $\text{Hom}_R(M, -)$. Também, $\text{Tor}_0^R(-, N)$ é naturalmente isomorfo a $- \otimes_R N$.

Os funtores contravariantes também definem funtores derivados. Como este tipo de funtores transforma complexos em cocomplexos, as homologias transformam-se em cohomologias e viceversa.

Definição B.2. Seja F um functor contravariante exato à esquerda e seja $f : M \rightarrow N$

um homomorfismo de R -módulos. Dadas quaisquer resoluções projetivas, $(P_*(M), d_*)$, $(Q_*(N), \delta_*)$ e f_* , de M , N e f respectivamente, denota-se o i -ésimo funtor derivado à direita de F por $R^i F$ e define-se como $(R^i F)(M) = H^i(F(P_*(M)), F(d_*))$ e $(R^i F)(f) = H^i(F(f_*))$. Dualmente, seja F um funtor exato à direita e seja $f : M \rightarrow N$ um homomorfismo e entre objetos de $\mathcal{A}$. Dadas quaisquer resoluções injetivas, $(E^*(M), d^*)$, $(I^*(N), \delta^*)$ e f^* , de M , N e f respectivamente, denota-se o i -ésimo funtor derivado à esquerda de F por $L_i F$ e define-se como $(L_i F)(M) = H_i(F(E^*(M)), F(d^*))$ e $(L_i F)(f) = H_i(F(f^*))$.

Um exemplo de funtor contravariante exato à esquerda é o funtor $\text{Hom}_R(-, N)$ e definem-se seus funtores derivados à direita $\text{Ext}_R^i(-, N)$.

Os funtores derivados encontram-se *conectados* graças ao seguinte teorema e às propriedades de cisão dos objetos injetivos e projetivos.

Teorema B.3. *Se $0 \rightarrow (C', \delta) \rightarrow (C, d) \rightarrow (C'', \bar{d}) \rightarrow 0$ é uma seqüência exata de complexos, então, existe uma seqüência exata*

$$\cdots \longrightarrow H_i(C') \xrightarrow{H_i(\iota)} H_i(C) \xrightarrow{H_i(\pi)} H_i(C'') \xrightarrow{\partial_i} H_{i-1}(C') \longrightarrow \cdots$$

Demonstração. Define-se $\partial_i(x''_i + \text{im } \bar{d}_{i+1}) = \iota_{i-1}^{-1} d_i \pi_i^{-1}(x''_i) + \text{im } \delta_i$. Demonstra-se que esta aplicação está bem definida: com efeito, se $x''_i \in \ker \bar{d}_i$, então, $d_i(x_i) \in \ker \pi_{i-1} = \text{im } \iota_{i-1}$ para cada $x_i \in \pi_i^{-1}(x''_i)$. Logo, existe um único $x'_{i-1} \in \iota_{i-1}^{-1} d_i(x_i)$. Além disso, $\iota_{i-2} \delta_{i-1}(x'_{i-1}) = d_{i-1} \iota_{i-1}(x'_{i-1}) = 0$, concluindo-se que $\delta_{i-1}(x'_{i-1}) = 0$ e $x'_{i-1} \in \ker \delta_{i-1}$. Se $y_i \in \pi_i^{-1}(x''_i)$, chamemos $y'_{i-1} = \iota_{i-1}^{-1} d_i(y_i)$. Então, $\pi_i(x_i - y_i) = 0$. Logo, existe um único $z'_i \in C'_i$ com $\iota_i(z'_i) = x_i - y_i$. Deste modo, $d_i(x_i) = d_i(y_i) + \iota_{i-1} \delta_i(z'_i)$ e $x'_{i-1} = \iota_{i-1}^{-1} d_i(x_i) = \iota_{i-1}^{-1} d_i(y_i) + \delta_i(z'_i) = y'_{i-1} + \delta_i(z'_i)$. Assim, $x'_{i-1} + \text{im } \delta_i = y'_{i-1} + \text{im } \delta_i$. Se $x''_i \in \text{im } \bar{d}_{i+1}$, então, $x''_i = \pi_i d_{i+1}(x_{i+1})$ para algum $x_{i+1} \in C_{i+1}$. Também, $x_i - d_{i+1}(x_{i+1}) \in \ker \pi_i$ para qualquer $x_i \in \pi_i^{-1}(x''_i)$ e existe um único $x'_i \in C'_i$ tal que $\iota_i(x'_i) = x_i - d_{i+1}(x_{i+1})$. Tome $x_i = d_{i+1}(x_{i+1})$. Logo, $d_i(x_i) = 0$ e $x'_{i-1} = \iota_{i-1}^{-1} d_i(x_i) = 0 \in \text{im } \delta_i$. Finalmente, $\partial_i(x''_i + y''_i + \text{im } \bar{d}_{i+1}) = \iota_{i-1}^{-1} d_i \pi_i^{-1}(x''_i + y''_i) + \text{im } \delta_i$. Se $\pi_i(x_i) = x''_i$ e $\pi_i(y_i) = y''_i$, então, $\pi_i(x_i + y_i) = x''_i + y''_i$. Deste modo, $\partial_i(x''_i + y''_i + \text{im } \bar{d}_{i+1}) = \partial_i(x''_i + \text{im } \bar{d}_{i+1}) + \partial_i(y''_i + \text{im } \bar{d}_{i+1})$.

Devemos demonstrar exatidão em seis etapas para cada $i \in \mathbb{Z}$:

1. $\text{im } H_i(\iota) \subseteq \ker H_i(\pi)$: como $H(-)$ é um funtor *aditivo* (ou seja, $H(f + g) = H(f) + H(g)$ para quaisquer aplicações de cadeias f e g), temos que $H(0) = 0$ e, portanto, $H(\pi)H(\iota) = H(\pi\iota) = H(0) = 0$.
2. $\text{im } H_i(\iota) \supseteq \ker H_i(\pi)$: se $x_i \in \ker d_i$ é tal que $\pi_i(x_i) \in \text{im } \bar{d}_{i+1}$, então, $\pi_i(x_i) = \bar{d}_{i+1}(x'_{i+1})$ para algum $x'_{i+1} \in C'_{i+1}$. Mais ainda, existe $x_{i+1} \in C_{i+1}$ tal que

$\pi_{i+1}(x_{i+1}) = x''_{i+1}$. Agora, $\bar{d}_{i+1}\pi_{i+1}(x_{i+1}) = \pi_i(x_i)$. Mas $\bar{d}_{i+1}\pi_{i+1}(x_{i+1}) = \pi_i d_{i+1}(x_{i+1})$. Assim, $\pi_i(x_i - d_{i+1}(x_{i+1})) = 0$ e existe (um único) $x'_i \in C'_i$ tal que $\iota_i(x'_i) = x_i - d_{i+1}(x_{i+1})$. Portanto, $x_i + \text{im } d_{i+1} = \iota_i(x'_i) + \text{im } d_{i+1}$. Finalmente, $\iota_{i-1}\delta_i(x'_i) = d_i \iota_i(x'_i) = d_i(x_i) = 0$. Como ι é injetora, temos que $x'_i \in \ker \delta_i$ e $x_i + \text{im } d_{i+1} = H_i(\iota)(x'_i + \text{im } \delta_{i+1})$.

3. $\text{im } H_i(\pi) \subseteq \ker \partial_i$: seja $x''_i \in \ker \bar{d}_i$ tal que $x''_i + \text{im } \bar{d}_{i+1} = H_i(\pi)(x_i + \text{im } d_{i+1})$ para algum $x_i \in \ker d_i$. Logo, $x''_i - \pi_i(x_i) = \bar{d}_{i+1}(x''_{i+1})$ para algum $x''_{i+1} \in C''_{i+1}$. Como $\partial_i(x''_i + \text{im } \bar{d}_{i+1}) = \iota_{i-1}^{-1} d_i \pi_i^{-1}(x''_i) + \text{im } \delta_i$, podemos escolher $\pi_i(x_i) = x''_i$, isto é, $x_i \in \pi_i^{-1}(x''_i)$. Portanto, $\iota_{i-1}^{-1} d_i(x_i) = 0$ e $x''_i + \text{im } \bar{d}_{i+1} \in \ker \partial_i$.
4. $\text{im } H_i(\pi) \supseteq \ker \partial_i$: se $x''_i \in \ker \bar{d}_i$ é tal que $\iota_{i-1}^{-1} d_i \pi_i^{-1}(x''_i) \subseteq \text{im } \delta_i$, então, para cada $x'_{i-1} \in \iota_{i-1}^{-1} d_i \pi_i^{-1}(x''_i)$ existe $x'_i \in C'_i$ tal que $x'_{i-1} = \delta_i(x'_i)$. Logo, $\iota_{i-1}(x'_{i-1}) = \iota_{i-1}\delta_i(x'_i) = d_i \iota_i(x'_i) = d_i(x_i)$ para algum $x_i \in \pi_i^{-1}(x''_i)$ e $d_i(x_i - \iota_i(x'_i)) = 0$. Deste modo, $H_i(\pi)(x_i - \iota_i(x'_i) + \text{im } d_{i+1}) = x''_i + \text{im } \bar{d}_{i+1}$.
5. $\text{im } \partial_i \subseteq \ker H_{i-1}(\iota)$: seja $x'_{i-1} \in \ker \delta_{i-1}$ tal que $x'_{i-1} - \iota_{i-1}^{-1} d_i \pi_i^{-1}(x''_i) \subseteq \text{im } \delta_i$ para algum $x''_i \in \ker \bar{d}_i$. Então, $\iota_{i-1}(x'_{i-1}) - d_i \pi_i^{-1}(x''_i) \subseteq \text{im } \iota_{i-1} \delta_i = \text{im } d_i \iota_i \subseteq \text{im } d_i$ e isto implica que $\iota_{i-1}(x'_{i-1}) \in \text{im } d_i$.
6. $\text{im } \partial_i \supseteq \ker H_{i-1}(\iota)$: seja $x'_{i-1} \in \ker \delta_{i-1}$ tal que $\iota_{i-1}(x'_{i-1}) = d_i(x_i)$ para algum $x_i \in C_i$. Considere $x''_i = \pi_i(x_i)$. Então, $\bar{d}_i(x''_i) = \bar{d}_i \pi_i(x_i) = \pi_{i-1} d_i(x_i) = \pi_{i-1} \iota_{i-1}(x'_{i-1}) = 0$. Portanto, $x''_i \in \ker \bar{d}_i$ e $\partial_i(x''_i + \text{im } \bar{d}_{i+1}) = x'_{i-1} + \text{im } \delta_i$.

□

Um corolário importante do teorema anterior é o Lema da Serpente.

Teorema B.4. *Seja F um funtor e considere uma seqüência exata $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ de R -módulos. Então, existe uma seqüência exata $0 \rightarrow (R^0 F)(M') \rightarrow (R^0 F)(M) \rightarrow (R^0 F)(M'') \rightarrow (R^1 F)(M') \rightarrow (R^1 F)(M) \rightarrow (R^1 F)(M'') \rightarrow (R^2 F)(M') \rightarrow \dots$.*

Demonstração. Observe que se $(E^*(M'), d^*) = (E^i, d^i)_{i \geq 0}$ e $(I^*(M''), \delta^*) = (I^i, \delta^i)_{i \geq 0}$ são resoluções injetivas de M' e M'' respectivamente, então, $(E^i \oplus I^i)_{i \geq 0}$ é uma resolução

injetiva de M . Mais ainda, o diagrama a seguir, com linhas exatas cindidas, comuta:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & E^0 & \longrightarrow & E^0 \oplus I^0 & \longrightarrow & I^0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow d^0 & & \downarrow & & \downarrow \delta^0 \\
 0 & \longrightarrow & E^1 & \longrightarrow & E^1 \oplus I^1 & \longrightarrow & I^1 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow d^1 & & \downarrow & & \downarrow \delta^1 \\
 0 & \longrightarrow & E^2 & \longrightarrow & E^2 \oplus I^2 & \longrightarrow & I^2 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Como cada E^i é injetivo, as linhas continuam exatas ao aplicar o funtor F desta maneira:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & F(E^0) & \longrightarrow & F(E^0 \oplus I^0) & \longrightarrow & F(I^0) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow F(d^0) & & \downarrow & & \downarrow F(\delta^0) \\
 0 & \longrightarrow & F(E^1) & \longrightarrow & F(E^1 \oplus I^1) & \longrightarrow & F(I^1) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow F(d^1) & & \downarrow & & \downarrow F(\delta^1) \\
 0 & \longrightarrow & F(E^2) & \longrightarrow & F(E^2 \oplus I^2) & \longrightarrow & F(I^2) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

O resultado segue, então, do teorema anterior. □

De maneira totalmente análoga, obtém-se o mesmo resultado para funtores exatos

à direita e seus funtores derivados à esquerda.

Teorema B.5. *Seja F um funtor considere uma seqüência exata $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ de R -módulos. Então, existe uma seqüência exata $\cdots \rightarrow (L_2 F)(M'') \rightarrow (L_1 F)(M') \rightarrow (L_1 F)(M) \rightarrow (L_1 F)(M'') \rightarrow (L_0 F)(M') \rightarrow (L_0 F)(M) \rightarrow (L_0 F)(M'') \rightarrow 0$.*

Como corolário, temos que $R^0 F$ (respectivamente, $L_0 F$) sempre é exato à esquerda (respectivamente, exato à direita). Ou seja, de alguma forma, o 0-ésimo funtor derivado indica como “deveria” ser definido o funtor para ter pelo menos uma semiexatidão.

O resultado é mantido nos funtores contravariantes.

Teorema B.6. *Seja F um funtor contravariante e considere uma seqüência exata $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ de R -módulos. Então, existe uma seqüência exata $0 \rightarrow (R^0 F)(M'') \rightarrow (R^0 F)(M) \rightarrow (R^0 F)(M') \rightarrow (R^1 F)(M'') \rightarrow (R^1 F)(M) \rightarrow (R^1 F)(M') \rightarrow (R^2 F)(M'') \rightarrow \cdots$.*

Se F é um funtor e $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ é uma seqüência exata de R -módulos, então, existe uma seqüência exata $\cdots \rightarrow (L_2 F)(M') \rightarrow (L_1 F)(M'') \rightarrow (L_1 F)(M) \rightarrow (L_1 F)(M') \rightarrow (L_0 F)(M'') \rightarrow (L_0 F)(M) \rightarrow (L_0 F)(M') \rightarrow 0$.

A seguir apresentamos alguns resultados a cerca dos funtores derivados mais utilizados neste trabalho: Tor e Ext.

Corolário B.7. O funtor derivado $L_0 F(-)$ é naturalmente isomorfo a $- \otimes M$ para algum R -módulo M . Além disso, $L^n F(-)$ é naturalmente isomorfo a $\text{Tor}_n^R(-, M)$ para todo $n \geq 0$

Teorema B.8. *Os funtores $\text{Tor}_n^R(A, -)$ e $\text{Tor}_n^R(-, B)$ pode ser calculado usando resolução plana de quaisquer variáveis; mais precisamente para toda resolução plana $\mathbb{F}$ e $\mathbb{G}$ de A e B , respectivamente, e para todo $n \geq 0$,*

$$H_n(\mathbb{F}_A \otimes B) \simeq \text{Tor}_n^R(A, B) \simeq H_n(A \otimes \mathbb{G}_B)$$

Proposição B.9. *Seja $\{B_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ um sistema direto de R -módulos sobre uma família de índices Λ , então para todo R -módulo A e todo $n \geq 0$ existe um isomorfismo:*

$$\text{Tor}_n^R(A, \varinjlim B_\lambda) \simeq \varinjlim \text{Tor}_n^R(A, B_\lambda)$$

Demonstração. Seja $\mathbb{P}_A$ resolução livre do R -módulo A . Então:

$$\begin{aligned} \text{Tor}_n^R(A, \varinjlim B_\lambda) &= H_n(\mathbb{P}_A \otimes \varinjlim B_\lambda) \\ &= \varinjlim (H_n(\mathbb{P}_A \otimes B_\lambda)) \\ &= \varinjlim \text{Tor}_n^R(A, B_\lambda) \end{aligned}$$

□

Referências Bibliográficas

- [BFR07] P. Brodmann, S. Fumasoli, and F. Rohrer. *First Lectures on Local Cohomology*. University of Zürich, 2007.
- [BH98] W. Bruns and J. Herzog. *Cohen-Macaulay Rings*. Cambridge University Press, second edition, 1998.
- [Bou89] N. Bourbaki. *Elements of Mathematics: Commutative Algebra - Chapters 1–7*. Springer, 1989.
- [BS98] M. P. Brodmann and R. Y. Sharp. *Local Cohomology: An Algebraic Introduction with Geometric Applications*. Cambridge University Press, second edition, 1998.
- [Gro66] A. Grothendieck. *Local Cohomology*, volume 20 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1966.
- [Hel07] M. Hellus. Finiteness properties of duals of local cohomology modules. *Commun. Algebra*, (35):3590–3602, 2007.
- [ILL⁺07] S. Iyengar, G. Leuschke, A. Leykin, C. Miller, and E. Miller. *Twenty-four hours of local cohomology*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2007.
- [Kha07] K. Khashyarmanesh. On the matlis duals of local cohomology modules. *Arch. Math.*, (88):413–418, 2007.
- [Khaar] K. Khashyarmanesh. On the endomorphism rings of local cohomology modules. *Canadian Math. Bulletin*, to appear.
- [Mat86] H. Matsumura. *Commutative Ring Theory*. Cambridge University Press, 1986.
- [Rot09] J. J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra*. Springer, second edition, 2009.

- [Sch03] P. Schenzel. Proregular sequences, local cohomology, and completion. *Math. Scand.*, (92):161–180, 2003.
- [Sch07] P. Schenzel. On formal local cohomology and connectedness. *J. Algebra*, 315:894–923, 2007.
- [Sch09] P. Schenzel. On endomorphism rings and dimensions of local cohomology modules. *Proc. Amer. Math. Soc.*, (137):1315–1322, 2009.
- [Sch10] P. Schenzel. Matlis duals of local cohomology modules and their endomorphism rings. *Arch. Math.*, (95):115–123, 2010.
- [TTY09] R. Takahashi, Y. Yoshino, and T. Yoshizawa. Local cohomology based on a nonclosed support defined by a pair of ideals. *J. Pure Appl. Algebra*, 213(4):582–600, 2009.