

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Multiplicidade de soluções nodais para um problema do tipo Yamabe

Lázaro Rangel Silva de Assis

JOÃO PESSOA – PB
JULHO DE 2020

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Multiplicidade de soluções nodais para um problema do tipo Yamabe

por

Lázaro Rangel Silva de Assis

sob a orientação do

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza

João Pessoa – PB
Julho de 2020

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

A848m Assis, Lázaro Rangel Silva de.

Multiplicidade de soluções nodais para um problema do tipo Yamabe / Lázaro Rangel Silva de Assis. - João Pessoa, 2020.
96 f.

Orientação: Manassés Xavier de Souza.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Problema de Yamabe. 3. Simetria. 4. Princípio de concentração e compacidade. 5. Métodos variacionais. I. Souza, Manassés Xavier de. II. Título.

UFPB/BC

CDU 51(043)

Multiplicidade de soluções nodais para um problema do tipo Yamabe

por

Lázaro Rangel Silva de Assis ¹

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

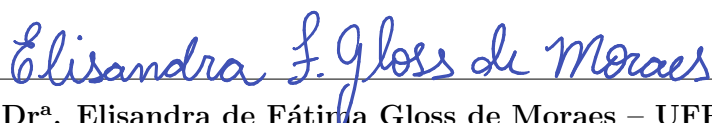
Área de Concentração: Análise.

Aprovada em 22 de Julho de 2020.

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza – UFPB
(Orientador)



Prof^a. Dr^a. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes – UFPB
(Examinador Interno)



Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva – UFAL
(Examinador Externo)

¹O autor foi bolsista do *CNPq* durante a elaboração desta dissertação.

Aos meus pais.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus que me concedeu a vida, me guiou pelos melhores caminhos e fez com que meus objetivos fossem alcançados.

Ao meu orientador Manassés Xavier de Souza, pelos ensinamentos e dedicação durante a realização deste trabalho, por me incentivar em momentos difíceis, pela ajuda e paciência que guiaram minha aprendizagem nesta etapa.

Aos professores Elisandra de Fátima Gloss de Moraes e Márcio Henrique Batista da Silva, aos suplentes Rodrigo Genuino Clemente e Allan George de Carvalho Freitas, por aceitarem participar da banca examinadora e pelas valiosas contribuições a este trabalho.

Aos meus familiares, pelo apoio demonstrado ao longo de toda minha formação. Especialmente, aos meus pais Adriana Marques Silva de Assis e José Francisco de Assis, pelos cuidados nos momentos difíceis e compreensão da minha ausência enquanto eu me dedicava ao mestrado.

A minha namorada e companheira Gilvaneide Evelyn Silva Araújo que sonhou comigo a realização de cada etapa desta trabalho, pelo apoio, amor incondicional e compreensão da minha ausência durante este percurso.

Aos professores do PPGMAT da Universidade Federal da Paraíba e aos do Curso de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco-CAA, pelas contribuições na minha formação acadêmica.

Aos amigos de longa jornada, Ezequiel Filipe, Filipe Gervásio, Ivanildo Carvalho, John Mateus, Thiago Assis e Washington Silva, pelo incentivo e por estarem sempre presentes.

Aos colegas que obtive no mestrado, Joyce Saraiva, Lorena Augusto, Ranieri França, Renato Burity e Victor Camillo, pelos momentos de estudos. A Antônio de Pádua, Ginaldo Santana, Marcos Aurélio e Renato Silvestre, por sempre me ajudarem antes e durante a realização deste trabalho.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico-CNPq, pelo apoio financeiro.

Por fim, agradeço a todos que participaram diretamente e indiretamente da realização deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho, estudamos a existência e multiplicidade de soluções para a seguinte classe de equações do tipo Yamabe

$$-\operatorname{div}_g(a(x)\nabla_g u) + b(x)u = c(x)|u|^{2^*-2}u,$$

onde (M, g) é uma variedade Riemanniana compacta sem bordo de dimensão $m \geq 3$, $a, b, c \in C^\infty(M)$, com a e c positivas, e $2^* = \frac{2m}{m-2}$ denota o expoente crítico de Sobolev. Assumindo que operador $-\operatorname{div}_g(a\nabla_g) + b$ é coercivo e algumas hipóteses de simetria sobre a variedade M , aplicando o princípio de concentração e compacidade e um método variacional para soluções nodais, provamos a existência de uma solução positiva e múltiplas soluções nodais.

Palavras-chave: Problema de Yamabe, Simetria, Princípio de Concentração e Compacidade, Métodos Variacionais.

Abstract

In this work, we study the existence and multiplicity of solutions for the following class of Yamabe-type equations

$$-\operatorname{div}_g(a(x)\nabla_g u) + b(x)u = c(x)|u|^{2^*-2}u,$$

where (M, g) is a compact Riemannian manifold without boundary of dimension $m \geq 3$, $a, b, c \in C^\infty(M)$, with a and c positive functions, and $2^* = \frac{2m}{m-2}$ denotes the critical Sobolev exponent. Assuming that the operator $-\operatorname{div}_g(a\nabla_g) + b$ is coercive and some hypotheses of symmetry on the manifold M , by applying the Concentration-Compactness Principle and a variational method for nodal solutions, we prove the existence of a positive solution and multiple nodal solutions.

Keywords: Yamabe problem, Symmetry, Concentration-Compactness Principle, Variational Methods.

Sumário

Introdução	1
1 Resultados Preliminares	5
1.1 Aspectos de Geometria Riemanianna	5
1.1.1 Operadores Diferenciáveis	5
1.1.2 Mudanças conformes da métrica	7
1.2 Espaços de Sobolev	8
1.3 Funcionais Diferenciáveis	10
1.4 Ação de Grupos Topológicos	16
1.5 Resultados de análise e EDO	23
2 Soluções para uma classe de equações do tipo Yamabe	26
2.1 Definições e Resultados Auxiliares	29
2.2 A Variedade de Nehari	32
2.3 Um Resultado de Compacidade	34
2.4 Um Princípio Variacional para Soluções Nodais	55
3 Prova dos Principais resultados	70
3.1 Prova do Teorema 2.0.1	71
3.2 Prova do Teorema 2.0.5	72
4 Não existência de soluções de energia mínima	76
Referências Bibliográficas	84

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- X' denota o dual topológico de um espaço de Banach X ;
- $B(x, r)$ ou $B_r(x)$ denota a bola aberta de centro x e raio r ;
- $B_g(p, r)$ denota a bola geodésica de centro p e raio r ;
- $\rightharpoonup, \rightarrow$ indicam convergências fraca e forte, respectivamente;
- $\hookrightarrow$ indica imersão contínua;
- $C, C_1, C_2, \dots$ denotam constantes positivas, possivelmente diferentes;
- $o_k(1)$ denota uma expressão que tende a zero quando $k \rightarrow \infty$;
- $f(x) = O(g(x))$ quando $x \rightarrow a$, significa que existe $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C|g(x)|$ para x suficientemente próximo de a ;
- $\square$ denota o final de uma demonstração;
- $\langle, \rangle$ denota produto interno;
- $|\cdot|$ denota a norma euclidiana;
- $|\cdot|_g$ denota a norma no espaço tangente a uma variedade Riemanniana (M, g) ;
- $Vol_g(M)$ denota o volume de uma variedade Riemanniana (M, g) ;
- $\text{supp}(f)$ denota o suporte de um função f ;
- q.t.p. denota quase todo ponto.

Introdução

Em diversas áreas da Matemática encontramos o interesse em classificar objetos. Na topologia, existe a classificação de objetos que são homeomorfos e na teoria de grupos, podemos destacar a classificação dos grupos simples finitos. Ainda referente a topologia, na teoria das variedades diferenciáveis, existe o interesse em classificar variedades que possuam certas propriedades topológicas. Em particular, no estudo de variedades Riemannianas, as noções de curvatura existentes permitem identificar, sob certas hipóteses, características importantes sobre a variedade. Nesta direção surgiu o famoso problema de Yamabe, formulado por Hidehiko Yamabe em 1960, o qual pode ser enunciado da seguinte forma:

Problema de Yamabe: Dada uma variedade Riemanniana compacta (M, g) suave de dimensão $m \geq 3$, existe uma métrica $\hat{g}$ conforme a g com curvatura escalar constante?

No intuito de obter uma forma analítica para resolver o problema de Yamabe muitos autores consideram $\hat{g}$ uma métrica conforme a g da seguinte forma $\hat{g} = u^{\frac{4}{m-2}}g$, onde u é uma função de classe $C^\infty(M)$ e positiva. É conhecido que as curvaturas escalares R_g e $R_{\hat{g}}$ associadas a tais métricas são relacionadas pela seguinte equação

$$R_{\hat{g}} = u^{-\frac{m+2}{m-2}} \left(\frac{4(m-1)}{m-2} \Delta_g u + R_g u \right).$$

Consequentemente, resolver o problema de Yamabe é equivalente a encontrar uma solução positiva $u \in C^\infty(M)$ para equação

$$\Delta_g u + \mathfrak{c}_m R_g u = \kappa |u|^{2^*-2} u \text{ em } M, \quad (1)$$

para alguma constante $\kappa \in \mathbb{R}$, onde $\Delta_g = -\operatorname{div}_g \nabla_g$ é o operador de Laplace-Beltrami, $\mathfrak{c}_m := \frac{m-2}{4(m-1)}$ e $2^* := \frac{2m}{m-2}$ é o expoente crítico de Sobolev. O percurso estabelecido por Yamabe [42] para encontrar uma solução para a Equação (1) foi baseado na procura de funções que realizem o ínfimo

$$\lambda(M, g) := \inf_{\substack{u \in C^\infty(M) \\ u > 0}} \frac{\int_M [\mathfrak{c}_m^{-1} |\nabla u|_g^2 + R_g u^2] dV_g}{\left(\int_M u^{2^*} dV_g \right)^{\frac{2}{2^*}}},$$

conhecido na literatura como *constante de Yamabe*.

Inicialmente, o próprio Yamabe em [42] acreditou ter resolvido o problema através de técnicas do cálculo variacional e equações diferenciais parciais elípticas. Porém, em sua demonstração existia um erro que foi descoberto por Neil Sidney Trudinger em 1968. No artigo [39], Trudinger adaptou os resultados estabelecidos por Yamabe ao introduzir algumas hipóteses sobre a constante de Yamabe e mostrou que a ideia de Yamabe estava correta, desde que $\lambda(M, g) \leq 0$. Mais ainda, verificou que existe uma constante positiva $\alpha(M)$ tal que se $\lambda(M, g) < \alpha(M)$, então o problema de Yamabe tem solução.

Mais tarde, Thierry Aubin em 1976 no artigo [4] conseguiu estender o resultado de Trudinger [39] mostrando que $\alpha(M) = \lambda(S^m)$ para qualquer variedade (M, g) , onde $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ é a esfera unitária munida da métrica usual. Ainda no mesmo trabalho, Aubin resolveu o problema de Yamabe para variedades não localmente conformemente flat com dimensões $m \geq 6$. Oito anos depois, Schoen [35] finalizou a prova do problema de Yamabe resolvendo os casos para dimensões $3 \leq m \leq 5$ e o caso em que a variedade é localmente conformemente flat e $m \geq 6$. É importante destacar que os resultados obtidos por Schoen foram devido ao uso do Teorema da Massa Positiva.

Assim, com os esforços combinados desses quatro matemáticos, o problema de Yamabe foi completamente resolvido. A solução desse problema foi uma conquista importante para a matemática, pois pela primeira vez foi estabelecida uma teoria de existência para uma equação diferencial parcial não linear envolvendo o expoente crítico de Sobolev. Mais detalhes sobre o problema de Yamabe podem ser encontrados em [5, 28].

Ainda sobre o problema de Yamabe, vale ressaltar que Obata em 1971 provou no artigo [31] que para uma métrica Einstein, a solução é única. Em outra partida, Pollack no artigo [33] mostrou que, quando a curvatura escalar R_g é positiva, existe um número prescrito de soluções para o problema de Yamabe, cujas as métricas com curvatura escalar constante pertencem a uma classe de métricas conformes que é arbitrariamente próxima de g na topologia C^0 , mostrando assim um exemplo da não unicidade do problema. Sob outra perspectiva, Hebey e Vaugon em 1993 realizaram estudos sobre o problema de Yamabe na presença de grupos isométricos no artigo [23], provando que para qualquer subgrupo Γ do grupo das isometrias de (M, g) , existe uma solução Γ -invariante de energia mínima.

Com o problema de Yamabe totalmente resolvido, surgiram trabalhos na tentativa de estender a Equação (1) e encontrar soluções nodais (soluções que mudam de sinal), consequentemente $\hat{g} = |u|^{\frac{4}{m-2}}g$ não é uma métrica, pois $\hat{g}$ não é suave e se anula no conjunto dos zeros de u . Ammann e Humbert chamaram $\hat{g}$ de *métrica generalizada* e provaram no artigo [3] que, se (M, g) não é localmente flat, a constante de Yamabe é não negativa, e $\dim M \leq 11$, então existe uma solução nodal de energia mínima para a

Equação (1). Mais recentemente, El Sayed [21] considerou o caso onde a constante de Yamabe de (M, g) é estritamente negativa e mostrou a existência de soluções nodais para a Equação (1) quando $\kappa \in \{-1, 0, 1\}$. Vale destacar que soluções nodais para a Equação (1) em variedades produto também já foram obtidas por Henry [24] e Petean [32]. Temos também o famoso trabalho [18], devido a Weiyue Ding, que provou a existência de infinitas soluções que mudam de sinal para este problema sobre a esfera unitária $(\mathbb{S}^m, g_0)$. Um texto agradável e acessível sobre esse trabalho é a dissertação [12].

Também surgiram problemas na tentativa de generalizar a Equação (1), conhecidos na literatura como problemas do tipo Yamabe. Por exemplo, soluções nodais para problemas dessa natureza foram exibidas por Holcman [25] e Djadli e Jourdain [19]. É importante mencionar que resultados de existência e multiplicidade de soluções positivas e nodais para algumas perturbações do problema de Yamabe também estão disponíveis nos trabalhos de Robert e Vétois [34], Morabito, Pistoia e Vaira [29] e as referências neles contidas.

A proposta desta dissertação é estudar o efeito das isometrias em uma variedade Riemanniana compacta (M, g) sem bordo de dimensão $m \geq 3$ em relação à multiplicidade de soluções nodais para a seguinte classe de problemas do tipo Yamabe

$$-\operatorname{div}_g(a(x)\nabla_g u) + b(x)u = c(x)|u|^{2^*-2}u, \quad u \in H_g^1(M), \quad (2)$$

onde $a, b, c \in C^\infty(M)$. Teremos ainda algumas hipóteses adicionais sobre as funções a, b, c e o operador $-\operatorname{div}_g(a\nabla_g) + b$. Nosso principal objetivo nesta dissertação é estudar os resultados de existência e multiplicidade de soluções nodais para o problema (2) obtidos por M. Clapp e J. C. Fernández no artigo [13] utilizando grupos de isometria.

É importante mencionar que a multiplicidade de soluções para uma classe especial de problemas do tipo Yamabe, foi tratada por Vétois [40] quando $m \geq 4$, $a = c \equiv 1$ e $\Delta_g + b$ é coercivo. Ele provou que o problema (2) possui pelo menos $\frac{m+2}{2}$ soluções, desde que $b(p_0) < \mathfrak{c}_m R_g(p_0)$ para algum ponto $p_0 \in M$. Contudo, esta última suposição exclui o problema de Yamabe (1). Além disso, nada é dito sobre o sinal das soluções, exceto nos casos em que a solução positiva é conhecida por ser única.

Aqui estudaremos os resultados obtidos em [13] que comprovam a existência de infinitas soluções nodais para o problema de Yamabe (1) sob algumas condições de simetria.

Nosso trabalho está estruturado da seguinte maneira.

No *Capítulo 1*, abordaremos os resultados preliminares que serão utilizadas no decorrer da dissertação, incluindo resultados de Geometria e Análise. Introduzimos os espaços de Sobolev em variedades Riemanniana e apresentamos algumas definições e resultados cruciais para o desenvolvimento da dissertação. Por fim, apresentamos o Princípio da

Criticalidade Simétrica de Palais.

No *Capítulo 2*, o mais longo, declaramos as hipóteses e apresentamos os principais resultados de existência e multiplicidade para o problema (2), segundo [13], que serão provados no *Capítulo 3*. Em seguida, apresentamos algumas definições importantes e estabelecemos resultados auxiliares. A última parte deste capítulo é dedicada a prova de um teorema de compacidade e um princípio variacional para soluções nodais.

O *Capítulo 3* é dedicado a prova dos principais resultados que foram apresentados no capítulo 2, que inclui a existência de um número prescrito de soluções nodais para o problema de Yamabe (1).

No *Capítulo 4* e último, provaremos um resultado de não existência de solução de energia mínima, ou seja, uma solução para o problema (2) nem sempre pode ser obtida por minimização.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste capítulo, temos como objetivo estabelecer alguns conceitos e resultados básicos que serão utilizados ao longo da dissertação. Mais precisamente, a Seção 1.1 é destinada aos operadores diferenciáveis e a alguns resultados de geometria conforme. Na Seção 1.2 introduzimos uma breve discussão sobre os espaços de Sobolev em variedades Riemannianas. Em seguida, na Seção 1.3, abordaremos alguns resultados sobre regularidade de funcionais diferenciáveis. Na Seção 1.4 definimos ação de grupos topológicos e apresentamos o Princípio da Criticalidade Simétrica. Por fim, a Seção 1.5 é dedicada a alguns resultados de análise e EDO.

1.1 Aspectos de Geometria Riemanianna

Nesta seção, (M, g) denotará uma variedade C^∞ de dimensão n com uma métrica Riemanniana g . Dado (x, U) um sistema de coordenadas locais, denotemos por $(\partial_1, \dots, \partial_n)$ os campos coordenados, $g_{ij}(p) = g_p(\partial_i(p), \partial_j(p))$ a expressão local da métrica e $g_p(v, w) = \langle v, w \rangle_g$, para todo $v, w \in T_p M$. Indicamos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto de todos os campos vetoriais de classe C^∞ em M .

1.1.1 Operadores Diferenciáveis

Uma prova detalhada dos resultados apresentados nesta subseção podem ser encontradas no trabalho [16].

Definição 1.1.1. O gradiente de uma função $f \in C^\infty(M)$ é o campo de vetores em M , $\nabla_g f : M \rightarrow TM$, definido por

$$\langle \nabla_g f(p), v \rangle_g = df_p(v),$$

para todo $v \in T_p M$.

Proposição 1.1.2. Sejam $f, h \in C^\infty(M)$. Então,

- (i) $\nabla_g(f + h) = \nabla_g f + \nabla_g h$;
- (ii) $\nabla_g(f \cdot h) = f \cdot \nabla_g h + h \cdot \nabla_g f$.

Proposição 1.1.3. Sejam $f \in C^\infty(M)$ e (U, x) um sistema de coordenadas locais em M . Então, em $x(U)$, temos

$$\nabla_g f = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \partial_i.$$

Consequentemente, $\nabla_g f \in \mathfrak{X}(M)$.

Observação 1.1.4. Dadas $u, v \in C^\infty(M)$, pela Proposição 1.1.3, obtemos

$$\langle \nabla_g u, \nabla_g v \rangle_g = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}.$$

De fato, temos que

$$\nabla_g u = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \partial_j \quad \text{e} \quad \nabla_g v = \sum_{k,l=1}^n g^{kl} \frac{\partial v}{\partial x_k} \partial_l.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle \nabla_g u, \nabla_g v \rangle_g &= \sum_{i,j,k,l=1}^n g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} g_{jl} g^{kl} \frac{\partial v}{\partial x_k} \\ &= \sum_{i,j,k=1}^n g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_k} \left(\sum_{l=1}^n g_{jl} g^{kl} \right) \\ &= \sum_{i,j,k=1}^n \delta_{jk} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_k} = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Como consequência, temos

$$|\nabla_g u|_g^2 = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

Definição 1.1.5. Sejam $X \in \mathfrak{X}(M)$ e, para cada $p \in M$, considere o operador linear $\nabla X : T_p M \longrightarrow T_p M$ definido por $\nabla X(v) = \nabla_v X(p)$. O divergente de X é a função $\operatorname{div} X : M \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\operatorname{div} X(p) = \operatorname{Tr} \nabla X,$$

onde Tr denota o traço do operador em questão e ∇ a conexão Riemanniana de M .

Proposição 1.1.6. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in C^\infty(M)$. Então, valem

- (i) $\operatorname{div} (X + Y) = \operatorname{div} X + \operatorname{div} Y$;

(ii) $\operatorname{div} (f \cdot X) = f \cdot \operatorname{div} X + \langle \nabla f, X \rangle_g$.

Proposição 1.1.7. Sejam $X \in \mathfrak{X}(M)$ e (x, U) um sistema de coordenadas locais em M de modo que, em $x(U)$, tenhamos $X = \sum_{i=1}^n a_i \partial_i$. Então, em $x(U)$, temos

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^n a_j \Gamma_{ij}^i,$$

onde Γ_{ij}^i são os símbolos de Christoffell da métrica de M em $x(U)$. Consequentemente, $\operatorname{div} X \in C^\infty(M)$.

Proposição 1.1.8. Sob as mesmas hipóteses da Proposição 1.1.7, tem-se

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{\det G}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i \sqrt{\det G}),$$

onde $G = (g_{ij})$ é a matriz da métrica.

Definição 1.1.9. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. O Laplaciano em M é o operador $\Delta_g : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$, também conhecido por operador de Laplace-Beltrami, definido por

$$\Delta_g u = \operatorname{div} \nabla_g u, \quad u \in C^\infty(M).$$

Observação 1.1.10. Usando a Proposição 1.1.8 é fácil verificar que em um sistema de coordenadas locais em M , o operador Laplaciano assume a forma:

$$\Delta_g u = \frac{1}{\sqrt{\det G}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g^{ij} \sqrt{\det G} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial u}{\partial x_k} \right).$$

Proposição 1.1.11. Sejam (M, g) e $(N, \hat{g})$ variedades Riemannianas. Dadas $u \in C^\infty(N)$ e $f : M \longrightarrow N$ uma isometria, verifica-se

(i) $\Delta_g(u \circ f) = (\Delta_{\hat{g}} u) \circ f$;

(ii) $|\nabla_g(u \circ f)|_g^2 = |\nabla_{\hat{g}} u|_{\hat{g}}^2 \circ f$.

Demonstração. Ver Teorema A.8.7 em [12]. □

1.1.2 Mudanças conformes da métrica

Definição 1.1.12. Sejam g e $\hat{g}$ métricas Riemannianas numa variedade diferenciável M . Dizemos que tais métricas são conformes se existe uma função $\varphi \in C^\infty(M)$ positiva tal que $\hat{g} = \varphi g$.

Teorema 1.1.13. *Se g e $\hat{g}$ são duas métricas conformes em uma variedade Riemanniana M tal que $\hat{g} = u^{\frac{4}{n-2}}g$, com $u \in C^\infty(M)$ e $u > 0$, então as curvaturas escalares R_g e $R_{\hat{g}}$ associadas a tais métricas são relacionadas pela seguinte equação*

$$-\Delta_g u + \mathfrak{c}_m R_g u = \mathfrak{c}_m R_{\hat{g}} u^{2^*-1}.$$

Demonstração. Veja o Teorema C.2 em [12]. □

Proposição 1.1.14. *Sejam M uma variedade diferenciável m -dimensional, e $\hat{g}$ e g duas métricas Riemannianas conformes em M com $\hat{g} = e^{2f}g$, onde $f \in C^\infty(M)$. Então, vale a seguinte transformação*

$$\Delta_{\hat{g}} u = e^{-2f} \left[\Delta_g u - (m-2) \langle \nabla_g f, \nabla_g u \rangle_g \right], \quad \forall u \in C^\infty(M).$$

Demonstração. Ver Lema 2.1 em [37]. □

1.2 Espaços de Sobolev

Nesta seção, iremos definir alguns espaços que utilizaremos no decorrer deste trabalho, incluindo alguns resultados de imersões. As demonstrações dos resultados que serão apresentados e mais detalhes podem ser encontrados em [22].

Seja (M, g) uma variedade C^∞ de dimensão m com uma métrica Riemanniana g . Dado um inteiro positivo k e $p \geq 1$ real, considere o espaço

$$C_k^p(M) := \{u \in C^\infty(M); \int_M |\nabla^j u|_g^p dV_g < \infty, \forall j = 0, \dots, k\},$$

onde $\nabla^k u$ é a k -ésima derivada covariante de u (com a convenção $\nabla^0 u = u$) e $|\nabla^j u|_g$ é a norma de $\nabla^j u$ no campo de tensores covariantes associados a métrica g . Por exemplo, as componentes de ∇u numa vizinhança coordenada são dadas por $(\nabla u)_i = (\partial_i u)$. Quando M é compacta, temos que $C_k^p(M) = C^\infty(M)$. Para $u \in C_k^p(M)$, a expressão

$$\|u\|_{H_g^{k,p}} := \sum_{j=0}^k \left(\int_M |\nabla^j u|_g^p dV_g \right)^{\frac{1}{p}}$$

define uma norma no espaço $C_k^p(M)$. Definimos o espaço de Sobolev $H_g^{k,p}(M)$ como segue.

Definição 1.2.1. Dada (M, g) uma variedade Riemanniana C^∞ , k um inteiro positivo e $p \geq 1$, o espaço de Sobolev $H_g^{k,p}(M)$ é o complemento de $C_k^p(M)$ em relação a norma de Sobolev $\|\cdot\|_{H_g^{k,p}}$.

Em particular, se M é compacta e $k = 1$, temos $H_g^{1,p}(M)$ como sendo o completamento do espaço $C^\infty(M)$ referente a norma

$$\|u\|_{H_g^{1,p}} = |u|_p + |\nabla_g u|_p, \quad u \in C^\infty(M),$$

em que $|\cdot|_p$ é a norma no espaço de Lebesgue $L^p(M)$.

Proposição 1.2.2. $H_g^{k,p}(M)$ é um espaço de Banach.

Trabalharemos nesta dissertação com o espaço $H_g^{1,2}(M)$, também denotado por $H_g^1(M)$, onde (M, g) é uma variedade Riemanniana compacta sem bordo. Na Definição 1.2.1, pode-se, naturalmente, substituir $\|\cdot\|_{H_g^{1,p}}$ por qualquer outra norma equivalente. Em particular, temos o seguinte resultado.

Proposição 1.2.3. Para qualquer inteiro positivo k , $H_g^{k,2}(M)$ é um espaço de Hilbert, equipado com a norma equivalente

$$\|u\| = \left(\sum_{j=0}^k \int_M |\nabla^j u|_g^2 dV_g \right)^{\frac{1}{2}},$$

cujo produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ associado a $\|\cdot\|$ é definido por

$$\langle u, v \rangle = \sum_{j=0}^k \int_M \langle \nabla^j u, \nabla^j v \rangle_g dV_g,$$

onde a expressão $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ é o produto interno no campo de tensores 2-covariantes associados a métrica g .

Ademais, estes espaços tem a propriedade de serem reflexivos, como mostra a seguinte proposição.

Proposição 1.2.4. Se $p > 1$, então $H_g^{k,p}(M)$ é reflexivo.

A seguir, enunciaremos alguns resultados de imersão.

Teorema 1.2.5 (*Imersão de Sobolev para variedade compacta*). *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta m -dimensional. Valem as seguintes afirmações:*

- (i) *Se $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \frac{k}{m}$, então $H_g^{k,p}(M)$ está imerso continuamente em $L^q(M)$.*
- (ii) (*Rellich-Kondrachov*) *Se $\frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \frac{k}{m}$, então a imersão no item (i) é compacta.*

1.3 Funcionais Diferenciáveis

Os resultados desta seção seguem algumas ideias abordadas no livro do Willem [41].

Definição 1.3.1. Considere o funcional $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$, onde E é um espaço vetorial normado. O funcional I tem derivada de Fréchet $f \in E'$ em $u \in E$ se

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} |I(u+h) - I(u) - f(h)| = 0.$$

Dizemos que o funcional $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ quando a derivada de Fréchet de I existir e for contínua sobre E . O funcional I tem derivada de Gateaux $f \in E'$ em $u \in E$ se, para cada $h \in E$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [I(u+th) - I(u) - f(th)] = 0.$$

A derivada de Gateaux de I em u é denotada por $I'(u)$.

Observação 1.3.2.

(i) Se E é um espaço de Hilbert e I tem Derivada de Gateaux em $u \in E$, pelo Teorema da Representação de Riesz, existe um único vetor $u_{I'} \in E$ tal que

$$I'(u) \cdot h = \langle u_{I'}, h \rangle_E, \quad \forall h \in E,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ denota o produto interno em E . Além disso,

$$\|I'(u)\|_{E'} = \|u_{I'}\|_E.$$

Assim, para efeitos didáticos, denotamos $u_{I'}$ por $\nabla I(u)$, o qual chamamos de gradiente de I em u .

(ii) A Derivada de Gateaux de I em $u \in E$ é dada por

$$I'(u) \cdot h := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [I(u+th) - I(u)].$$

(iii) Todo funcional $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$ Fréchet Diferenciável é também Gateaux Diferenciável.

Proposição 1.3.3. Se o funcional I tem derivada de Gateaux contínua sobre E , então $I \in C^1(E, \mathbb{R})$.

Demonstração. Ver Proposição A.1 em [10]. □

Definição 1.3.4. Seja $I \in C^1(E, \mathbb{R})$. O funcional I tem uma segunda derivada de Fréchet $L \in \mathcal{L}(E, E')$ em $u \in E$ se

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{[I'(u+h) - I'(u) - L(h)]}{\|h\|} = 0.$$

Dizemos que o funcional $I \in C^2(E, \mathbb{R})$ se a derivada segunda de Fréchet existir e for contínua em E . O funcional I tem uma segunda derivada de Gateaux $L \in \mathcal{L}(E, E')$ em $u \in E$ se, para cada $h, v \in E$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{[I'(u + th) - I'(u) - L(th)] \cdot v}{t} = 0.$$

A derivada segunda de Gateaux de I em $u \in E$ é denotada por $I''(u)$.

Observação 1.3.5. (i) A derivada segunda de Gateaux é dada por

$$(I''(u) \cdot h) \cdot v = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [I'(u + th) - I'(u)] \cdot v.$$

(ii) Toda derivada segunda de Fréchet é uma derivada segunda de Gateaux.

Proposição 1.3.6. Se I tem derivada segunda de Gateaux contínua em E , então $I \in C^2(E, \mathbb{R})$.

A prova desta proposição segue-se de modo semelhante a demonstração da Proposição 1.3.3.

A seguir, mostraremos que o funcional $J_g : H_g^1(M) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$J_g(u) = \frac{1}{2} \int_M [a|\nabla_g u|_g^2 + bu^2] dV_g - \frac{1}{2^*} \int_M c|u|^{2^*} dV_g,$$

com $a, b, c \in C^\infty(M)$ e a e c positivas, está bem definido e $J_g \in C^1(H_g^1(M), \mathbb{R})$, com derivada de Fréchet dada por

$$J'_g(u) \cdot v = \int_M [a\langle \nabla_g u, \nabla_g v \rangle_g + buv] dV_g - \int_M c|u|^{2^*-2} uv dV_g, \quad \forall u, v \in H_g^1(M).$$

Afirmção 1. O funcional J_g está bem definido.

De fato, seja $\mu_0 = \max\{|a|_\infty, |b|_\infty\}$. Então,

$$\int_M [a|\nabla_g u|^2 + bu^2] dV_g \leq \mu_0 \int_M [|\nabla_g u|_g^2 + u^2] dV_g = \mu_0 \|u\|_{H_g^1}^2 < \infty.$$

Por outro lado, temos que

$$\int_M c|u|^{2^*} dV_g \leq |c|_\infty \int_M |u|^{2^*} dV_g = |c|_\infty \|u\|_{2^*}^{2^*} < \infty.$$

Portanto, o funcional J_g está bem definido.

Afirmção 2. O funcional $J_g \in C^1(H_g^1(M), \mathbb{R})$.

Esta afirmação será provada através dos seguintes lemas.

Lema 1.3.7. O funcional $I_1 : H_g^1(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $I_1(u) = \int_M a|\nabla_g u|_g^2 dV_g$ é de classe $C^1(H_g^1(M), \mathbb{R})$ e

$$I_1'(u) \cdot v = 2 \int_M a \langle \nabla_g u, \nabla_g v \rangle_g dV_g, \quad \forall u, v \in H_g^1(M).$$

Demonstração. Como $a \in C^\infty(M)$ é positiva, a aplicação

$$\langle u, v \rangle_a = \int_M a \langle \nabla_g u, \nabla_g v \rangle_g dV_g, \quad u, v \in H_g^1(M)$$

define um produto interno em $H_g^1(M)$, cuja norma correspondente é dada por

$$\|u\|_a = \left(\int_M a|\nabla_g u|_g^2 dV_g \right)^{1/2}, \quad u \in H_g^1(M).$$

Portanto, é fácil verificar que $I_1 \in C^1(H_g^1(M), \mathbb{R})$ e

$$I_1'(u) \cdot v = 2 \int_M a \langle \nabla_g u, \nabla_g v \rangle_g dV_g, \quad \forall u, v \in H_g^1(M).$$

(veja [10], p. 107). □

Lema 1.3.8. O funcional $I_2 : H_g^1(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $I_2(u) = \int_M bu^2 dV_g$ é de classe $C^1(H_g^1(M), \mathbb{R})$ e

$$I_2'(u) \cdot v = 2 \int_M buvdV_g, \quad \forall u, v \in H_g^1(M).$$

Demonstração. É evidente que I_2 está bem definido.

(i) Existência da Derivada de Gateaux de I_2 :

Seja $u \in H_g^1(M)$, então para cada $v \in H_g^1(M)$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [I_2(u + tv) - I_2(u)] &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_M [b(u + tv)^2 - bu^2] dV_g \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_M b(2uv + tv^2) dV_g \\ &= \int_M 2buv dV_g. \end{aligned}$$

Logo, existe a derivada de Gateaux de I_2 e $I_2'(u) \cdot v = 2 \int_M buvdV_g$.

(ii) Continuidade da Derivada de Gateaux de I_2 :

Seja (u_k) uma sequência tal que $u_k \rightarrow u$ em $H_g^1(M)$. Para todo $v \in H_g^1(M) \setminus \{0\}$, temos

$$\begin{aligned} |(I'_2(u_k) - I'_2(u)) \cdot v| &= \left| 2 \int_M bu_k v dV_g - 2 \int_M bu v dV_g \right| \\ &\leq 2|b|_\infty \int_M |u_k - u| |v| dV_g. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} |(I'_2(u_k) - I'_2(u)) \cdot v| &\leq 2|b|_\infty |u_k - u|_2 |v|_2 \\ &\leq C|b|_\infty \|u_k - u\|_{H_g^1} \|v\|_{H_g^1}, \end{aligned}$$

donde segue que

$$\|I'_2(u_k) - I'_2(u)\|_{(H_g^1(M))'} \leq C|b|_\infty \|u_k - u\|_{H_g^1}.$$

Assim, $\|I'_2(u_k) - I'_2(u)\|_{(H_g^1(M))'} \rightarrow 0$, o que implica que a derivada de Gateaux de I_2 é contínua. Portanto, $I_2 \in C^1(H_g^1(M), \mathbb{R})$ com derivada de Fréchet dada por

$$I'_2(u) \cdot v = 2 \int_M bu v dV_g,$$

finalizando a prova. □

Lema 1.3.9. O funcional $I_3 : H_g^1(M) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $I_3(u) = \int_M c|u|^p dV_g$, com $2 < p \leq 2^*$, é de classe $C^2(H_g^1(M), \mathbb{R})$ e

$$I'_3(u) \cdot v = p \int_M c|u|^{p-2} u v dV_g, \quad \forall u, v \in H_g^1(M).$$

Demonstração. Usando as imersões contínuas de $H_g^1(M)$ em $L^p(M)$ para $2 < p \leq 2^*$, temos que

$$\int_M c|u|^p dV_g \leq |c|_\infty \int_M |u|^p dV_g \leq C|c|_\infty \|u\|_{H_g^1}^p < \infty.$$

Logo, I_3 está bem definido.

(i) Existência da derivada de Gateaux de I_3 :

Sejam $u, v \in H_g^1(M)$. Defina $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(t) = c|u + tv|^p$. Dado $t \in (0, 1)$, pelo Teorema do Valor Médio, existe t_0 entre 0 e t tal que $f(t) - f(0) = f'(t_0)t$. Podemos escrever $t_0 = \varepsilon t$, com $\varepsilon \in (0, 1)$. Além disso, temos que

$$f'(t) = \frac{d}{dt} \left(c((u + tv)^2)^{p/2} \right) = pc|u + tv|^{p-2}(u + tv)v.$$

Assim,

$$\left| \frac{f(t) - f(0)}{t} \right| = \left| \frac{c|u + tv|^p - c|u|^p}{t} \right| = pc|u + \varepsilon tv|^{p-1}|v| \leq p|c|_\infty(|u| + |v|)^{p-1}|v|.$$

Desde que $u, v \in H_g^1(M)$, temos que $u, v \in L^p(M)$. Decorre disto que $(|u| + |v|)^{p-1}$ é uma função de $L^{\frac{p}{p-1}}(M)$. Então, pela Desigualdade de Hölder,

$$\int_M (|u| + |v|)^{p-1}|v| \leq \left(\int_M (|u| + |v|)^p dV_g \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_M |v|^p dV_g \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Pelo Teorema da Convergência dominada de Lebesgue, temos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I_3(u + tv) - I_3(u)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_M \frac{c|u + tv|^p - c|u|^p}{t} dV_g \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_M pc|u + \varepsilon tv|^{p-2}(u + \varepsilon tv)v dV_g \\ &= \int_M pc|u|^{p-2}uv dV_g. \end{aligned}$$

Portanto, existe a derivada de Gateaux de I_3 e vale

$$I'_3(u) \cdot v = p \int_M c|u|^{p-2}uv dV_g.$$

(ii) Continuidade da derivada de Gateaux de I_3 :

Seja (u_k) uma sequência tal que $u_k \rightarrow u$ em $H_g^1(M)$. Então, $u_k \rightarrow u$ em $L^p(M)$, consequentemente, $|u_k|^{p-2}u_k \rightarrow |u|^{p-2}u$ em $L^{\frac{p}{p-1}}(M)$. Assim, para todo $v \in H_g^1(M) \setminus \{0\}$, temos

$$\begin{aligned} |(I'_3(u_k) - I'_3(u)) \cdot v| &= \left| p \int_M c|u_k|^{p-2}u_k v dV_g - p \int_M c|u|^{p-2}u v dV_g \right| \\ &= \left| p \int_M c(|u_k|^{p-2}u_k - |u|^{p-2}u) v dV_g \right| \\ &\leq p|c|_\infty \int_M ||u_k|^{p-2}u_k - |u|^{p-2}u| |v| dV_g. \end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Hölder,

$$|(I'_3(u_k) - I'_3(u)) \cdot v| \leq p|c|_\infty ||u_k|^{p-2}u_k - |u|^{p-2}u|_{\frac{p}{p-1}} |v|_p.$$

Usando as imersões contínuas de $H_g^1(M)$ em $L^p(M)$ para $2 < p \leq 2^*$, obtemos

$$|(I'_3(u_k) - I'_3(u)) \cdot v| \leq p|c|_\infty ||u_k|^{p-2}u_k - |u|^{p-2}u|_{\frac{p}{p-1}} \|v\|_{H_g^1},$$

donde segue

$$\|I'_3(u_k) - I'_3(u)\|_{(H_g^1(M))'} \leq p|c|_\infty \left| |u_k|^{p-2}u_k - |u|^{p-2}u \right|_{\frac{p}{p-1}}.$$

Assim, $\|I'_3(u_k) - I'_3(u)\|_{(H_g^1(M))'} \rightarrow 0$, conseqüentemente, I'_3 é contínua $H_g^1(M)$. Portanto, pela Proposição 1.3.3, $I_3 \in C^1(H_g^1(M), \mathbb{R})$ com derivada de Fréchet dada por

$$I'_3(u) \cdot v = p \int_M c|u|^{p-2}uv dV_g.$$

(iii) Existência da segunda derivada de Gateaux de I_3 :

Sejam $u, h, v \in H_g^1(M)$. Defina $g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ por $g(t) = pc|u + th|^{p-2}(u + th)$. Dado $t \in (0, 1)$, pelo Teorema do Valor Médio, existe $t_0 \in (0, t)$ tal que $g(t) - g(0) = g'(t_0)t$. Podemos escrever $t_0 = \varepsilon t$, com $\varepsilon \in (0, 1)$. Além disso,

$$g'(t) = \frac{d}{dt} \left(pc((u + th)^2)^{\frac{(p-1)}{2}} \right) = p(p-1)c|u + th|^{p-2}h.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \left| \frac{[pc|u + th|^{p-2}(u + th) - pc|u|^{p-2}u]v}{t} \right| &= |p(p-1)c|u + \varepsilon th|^{p-2}hv| \\ &= p(p-1)|c|_\infty |u + \varepsilon th|^{p-2}|h||v| \\ &\leq p(p-1)|c|_\infty (|u| + |h|)^{p-2}|h||v| \\ &\leq p(p-1)|c|_\infty (|u| + |h|)^{p-1}|v|. \end{aligned}$$

De modo análogo ao feito para primeira derivada, temos que $(|u| + |h|)^{p-2}|v| \in L^1(M)$. Assim, pelo Teorema da convergência Dominada de Lebesgue,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[I'_3(u + th) - I'_3(u)] \cdot v}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_M \frac{[pc|u + th|^{p-2}(u + th) - pc|u|^{p-2}u]v}{t} dV_g \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_M p(p-1)c|u + \varepsilon th|^{p-2}hvdV_g \\ &= \int_M p(p-1)c|u|^{p-2}hvdV_g. \end{aligned}$$

Portanto, a segunda derivada de Gateaux de I_3 existe e vale

$$(I''_3(u) \cdot h) \cdot v = p(p-1) \int_M c|u|^{p-2}hvdV_g.$$

(iv) Continuidade da segunda derivada de Gateaux de I_3 :

Seja (u_k) uma sequência tal que $u_k \rightarrow u$ em $H_g^1(M)$. Então, $u_k \rightarrow u$ em $L^p(M)$,

consequentemente, $|u_k|^{p-2} \rightarrow |u|^{p-2}$ em $L^{\frac{p}{p-2}}(M)$. Para todos $h, v \in H_g^1(M) \setminus \{0\}$, temos

$$\begin{aligned} |[(I_3''(u_k) - I_3''(u)) \cdot h] \cdot v| &= \left| p(p-1) \int_M c |u_k|^{p-2} h v dV_g - p(p-1) \int_M c |u|^{p-2} h v dV_g \right| \\ &= \left| p(p-1) \int_M c (|u_k|^{p-2} - |u|^{p-2}) h v dV_g \right| \\ &\leq p(p-1) |c|_\infty \int_M ||u_k|^{p-2} - |u|^{p-2}| |h| |v| dV_g. \end{aligned}$$

Como $(|u_k|^{p-2} - |u|^{p-2}) \in L^{\frac{p}{p-2}}(M)$, $h, v \in L^p(M)$ e

$$\frac{1}{\frac{p}{p-2}} + \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = 1,$$

segue pela Desigualdade de Hölder que

$$|[(I_3''(u_k) - I_3''(u)) \cdot h] \cdot v| \leq p(p-1) |c|_\infty ||u_k|^{p-2} - |u|^{p-2}|_{\frac{p}{p-2}} \|h\|_p \|v\|_p dV_g.$$

Novamente usando as imersões contínuas de $H_g^1(M)$ em $L^p(M)$ para $2 < p \leq 2^*$, obtemos

$$|[(I_3''(u_k) - I_3''(u)) \cdot h] \cdot v| \leq p(p-1) |c|_\infty ||u_k|^{p-2} - |u|^{p-2}|_{\frac{p}{p-2}} \|h\|_{H_g^1} \|v\|_{H_g^1}.$$

Logo,

$$||I_3''(u_k) - I_3''(u)|| \leq p(p-1) |c|_\infty ||u_k|^{p-2} - |u|^{p-2}|_{\frac{p}{p-2}},$$

implicando que $||I_3''(u_k) - I_3''(u)|| \rightarrow 0$. Assim, a segunda derivada de Gateaux de I_3 é contínua em $H_g^1(M)$. Portanto, pela Proposição 1.3.6, $I_3 \in C^2(H_g^1(M), \mathbb{R})$. $\square$

Finalmente, pelos Lemas 1.3.7, 1.3.8 e 1.3.9, concluímos que $J_g \in C^1(H_g^1(M), \mathbb{R})$, com derivada de Fréchet dada por

$$J_g'(u) \cdot v = \int_M [a \langle \nabla_g u, \nabla_g v \rangle_g + b u v] dV_g - \int_M c |u|^{2^*-2} u v dV_g.$$

1.4 Ação de Grupos Topológicos

Nesta seção, apresentaremos algumas definições e resultados algébricos necessários para o desenvolvimento dos Capítulos 2 e 3. O teorema que será apresentado no final desta seção é utilizado afim de garantir que, se uma função é ponto crítico de um funcional restrito a um subespaço que cumpre certas condições de simetria, então essa também é um ponto crítico do funcional no espaço em que está definido.

Definição 1.4.1. Um grupo topológico é um espaço $(G, \cdot, \tau)$, munido de uma operação

“ $\cdot$ ” que torna G um grupo e de uma topologia τ de modo que

- (i) a operação $\cdot : G \times G \rightarrow G$ é contínua, onde consideramos em $G \times G$ a topologia produto;
- (ii) a aplicação $I^{-1} : G \rightarrow G$ definida por $I^{-1}(g) = g^{-1}$ é contínua.

Quando G é um grupo com estrutura de variedade diferenciável em que as operações definidas em (i) e (ii) são diferenciáveis, dizemos que G é um grupo de Lie.

Exemplo 1.4.2. Seja $M_n(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes quadradas com entradas reais. Considere em $M_n(\mathbb{R})$ a topologia da norma

$$\|(a_{ij})_{n \times n}\| = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}.$$

O conjunto $GL_n(\mathbb{R})$ das matrizes invertíveis de ordem n , munido com o produto usual e com a topologia induzida de $M_n(\mathbb{R})$ é um grupo topológico. Além disso, o conjunto $O(n) \subset GL_n(\mathbb{R})$ das matrizes ortogonais é um grupo topológico com a topologia induzida de $GL_n(\mathbb{R})$. Mais ainda, $O(n)$ é um Grupo de Lie compacto (veja [36], p. 4).

Exemplo 1.4.3. O círculo unitário $\mathbb{S}^1$ dos números complexos $\mathbb{C}$ é um grupo de Lie compacto com respeito a multiplicação e topologia de $\mathbb{C}$. Em particular, é um grupo topológico.

Exemplo 1.4.4. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. O conjunto

$$\text{Isom}_g(M) := \{f : M \rightarrow M; f \text{ é isometria}\},$$

munido da operação composição de funções e da topologia compacto-aberta é um grupo Lie. Além disso, se M é compacta, o mesmo vale para $\text{Isom}_g(M)$ (veja Myers-Steenrod [30]). Em particular, $\text{Isom}_g(M)$ é um grupo topológico.

Para um melhor estudo sobre grupos de Lie, indicamos os livros de Alexandrino e Bettiol [1], Lee [27] e Sepanski [36].

Definição 1.4.5. Uma ação (à esquerda) de um grupo Lie G sobre uma variedade diferenciável M é uma aplicação diferenciável $\phi : G \times M \rightarrow M$ tal que

- (i) $\phi(e, x) = x$, para todo $x \in M$, onde e é o elemento neutro de G ;
- (ii) $\phi(g_1, \phi(g_2, x)) = \phi(g_1 g_2, x)$, para todo $g_1, g_2 \in G$ e $x \in M$.

Quando (M, g) é uma variedade Riemanniana, dizemos que a ação ϕ é isométrica, quando a aplicação $\phi_g : M \rightarrow M$, dada por $\phi_g(p) = \phi(g, p)$, é uma isometria para todo $g \in G$. Neste caso, podemos identificar o conjunto das aplicações ϕ_g com um subgrupo de $\text{Isom}_g(M)$.

Para efeitos didáticos, denotaremos $\phi(g, x)$ como gx . Neste caso, o item (ii) descreve uma espécie de associatividade, ou seja, $g_1(g_2x) = (g_1g_2)x$.

Exemplo 1.4.6. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Então, dado $\Gamma \subset \text{Isom}_g(M)$ subgrupo fechado, a função $\phi : \Gamma \times M \rightarrow M$ definida por $\phi(\gamma, p) = \gamma(p)$ determina naturalmente uma ação isométrica de Γ em M .

Proposição 1.4.7. Seja G um grupo de Lie compacto e (M, g) uma variedade Riemanniana. Se $\phi : G \times M \rightarrow M$ é uma ação isométrica, então o conjunto formado pelas aplicações $\phi_g : M \rightarrow M$ pode ser identificado com um subgrupo fechado de $\text{Isom}_g(M)$. (veja [1], p. 52-70)

Um conceito importante no estudo de ações é o de órbita.

Definição 1.4.8. Seja G um grupo de Lie que atua sobre uma variedade M . Dado $x \in M$, o conjunto

$$G(x) = \{gx \in M; g \in G\}$$

é chamado de órbita de x por G (ou G -órbita). Mais geralmente, se A é subconjunto de G , então $A(x) = \{gx; g \in A\}$.

Cada G -órbita é uma classe de equivalência definida pela seguinte relação de equivalência: x se relaciona y se, e somente se, existe $g \in G$ tal que $y = gx$. Assim, duas órbitas são disjuntas ou coincidem.

Definição 1.4.9. Denotamos por M/G o conjunto das G -órbitas em M . Seja $\pi : M \rightarrow M/G$ a projeção canônica. Então, M/G munido da topologia quociente ($U \subset M/G$ é aberto se, e somente se, $\pi^{-1}(U)$ é aberto em M) é chamado de espaço das órbitas de M com respeito a G .

Definição 1.4.10. Seja G um grupo de Lie que atua sobre uma variedade M . O conjunto dos elementos de G que fixam $x \in M$ é definido por

$$G_x = \{g \in G; gx = x\}.$$

Proposição 1.4.11. O conjunto G_x é um subgrupo fechado de G , chamado de subgrupo G -isotrópico (ou subgrupo de isotropia). Além disso, esses subgrupos satisfazem $G_{gx} = gG_xg^{-1}$. (veja [6], p. 35)

Assim, os subgrupos de isotopia correspondentes a pontos na órbita $G(x)$ são subgrupos conjugados.

Proposição 1.4.12. Se G é um grupo de Lie compacto que atua sobre uma variedade M , então $G(x)$ é uma subvariedade de M e a ação induz um difeomorfismo de G/G_x em $G(x)$, para cada $x \in M$. Assim, dizemos que $G(x)$ é G -difeomórfica ao espaço homogêneo G/G_x . (veja [1], p. 62)

Antes de enunciar o princípio da criticalidade simétrica, veremos alguns resultados sobre ações de grupos topológicos sobre um espaço vetorial normado.

Definição 1.4.13. Uma ação de um grupo topológico $(G, \cdot, \tau)$ sobre um espaço vetorial normado H é uma aplicação contínua $\phi : G \times H \rightarrow H$ que satisfaz as seguintes condições:

- (i) $\phi(e, u) = u$ para todo $u \in H$, onde e é o elemento neutro em G ;
- (ii) $\phi(g_1 \cdot g_2, u) = \phi(g_1, \phi(g_2, u))$, para todo $g_1, g_2 \in G$ e $u \in H$;
- (iii) Dado $g \in G$ a aplicação $u \mapsto \phi(g, u)$ é linear;
- (iv) Se $\|\phi(g, u)\| = \|u\|$, para todo $g \in G$ e $u \in H$, então, a ação é dita isométrica.

Exemplo 1.4.14. Considere Γ um subgrupo fechado de $\text{Isom}_g(M)$. É claro que Γ é um grupo topológico com a topologia induzida de $\text{Isom}_g(M)$. A aplicação

$$\begin{aligned} \Phi : \Gamma \times H_g^1(M) &\longrightarrow H_g^1(M) \\ (\gamma, u) &\longmapsto \gamma u \end{aligned} \quad (1.1)$$

com $\gamma u : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\gamma u(p) = u(\gamma(p)). \quad (1.2)$$

é uma ação isométrica de Γ sobre $H_g^1(M)$. De fato, note que não é difícil verificar que se $\gamma \in \Gamma$ e $u \in H_g^1(M)$, então $\gamma u \in H_g^1(M)$. Primeiro mostraremos que aplicação definida em (1.1) e (1.2) é contínua. Para isso, seja (γ_k, u_k) uma sequência em $\Gamma \times H_g^1(M)$ tal que $(\gamma_k, u_k) \rightarrow (\gamma, u)$ em $\Gamma \times H_g^1(M)$. Logo, $\gamma_k \rightarrow \gamma$ em Γ e $u_k \rightarrow u$ em $H_g^1(M)$. Iremos verificar que

$$\|\gamma_k u_k - \gamma u\|_{H_g^1} \rightarrow 0. \quad (1.3)$$

Afirmção 1. $\langle \gamma u, \gamma v \rangle_{H_g^1} = \langle u, v \rangle_{H_g^1}$ para todo $\gamma \in \Gamma$ e $u, v \in H_g^1(M)$.

Com efeito,

$$\begin{aligned}
 \langle \gamma u, \gamma v \rangle_{H_g^1} &= \int_M \langle \nabla_g(\gamma u), \nabla_g(\gamma v) \rangle_g dV_g + \int_M \gamma u \gamma v dV_g \\
 &= \int_M \langle \nabla_g(u \circ \gamma), \nabla_g(v \circ \gamma) \rangle_g dV_g + \int_M (uv) \circ \gamma dV_g \\
 &= \int_M \langle \nabla_g u, \nabla_g v \rangle_g dV_g + \int_M uv dV_g \\
 &= \langle u, v \rangle_{H_g^1},
 \end{aligned}$$

onde usamos o Teorema da Mudança de Variáveis e o fato que $\gamma : M \rightarrow M$ é uma isometria, o que mostra a Afirmação 1.

Em particular, a Afirmação 1 implica que

$$\|\gamma u\|_{H_g^1} = \|u\|_{H_g^1}, \quad \forall \gamma \in \Gamma, \quad u \in H_g^1(M),$$

isto é, vale o item (iv) da Definição 1.4.13.

Afirmação 2. Para cada $\varphi \in C_c^\infty(M)$, temos que $\gamma_k \varphi \rightarrow \gamma \varphi$.

De fato,

$$\begin{aligned}
 \|\gamma_k \varphi - \gamma \varphi\|_{H_g^1}^2 &= \langle \gamma_k \varphi - \gamma \varphi, \gamma_k \varphi - \gamma \varphi \rangle_{H_g^1} \\
 &= \|\gamma_k \varphi\|_{H_g^1}^2 - 2 \langle \gamma_k \varphi, \gamma \varphi \rangle_{H_g^1} + \|\gamma \varphi\|_{H_g^1}^2 \\
 &= 2\|\varphi\|_{H_g^1}^2 - 2 \langle \gamma_k \varphi, \gamma \varphi \rangle_{H_g^1}.
 \end{aligned}$$

Assim, basta mostrar que

$$\langle \gamma_k \varphi, \gamma \varphi \rangle_{H_g^1} \rightarrow \|\gamma \varphi\|_{H_g^1}^2 = \|\varphi\|_{H_g^1}^2. \quad (1.4)$$

Como $\gamma_k \rightarrow \gamma$ em Γ e $\varphi \in C_c^\infty(M)$, segue que

$$\langle \nabla_g(\gamma_k \varphi), \nabla_g(\gamma \varphi) \rangle_g \rightarrow |\nabla_g(\gamma \varphi)|_g \text{ e } \gamma_k \varphi \rightarrow \gamma \varphi \text{ q.t.p em } K = \text{supp} \varphi.$$

Além disso,

$$|\langle \nabla_g(\gamma_k \varphi), \nabla_g(\gamma \varphi) \rangle_g| \leq C_1 \text{ e } |\gamma_k \varphi| \leq C_2 \text{ q.t.p em } K.$$

Logo, pelo Teorema da Convergência dominada de Lebesgue,

$$\int_M \langle \nabla_g(\gamma_k \varphi), \nabla_g(\gamma \varphi) \rangle_g dV_g \rightarrow \int_M |\nabla_g(\gamma \varphi)|_g^2 dV_g$$

e

$$\int_M (\gamma_k \varphi)^2 dV_g \rightarrow \int_M (\gamma \varphi)^2 dV_g,$$

o que mostra (1.4) e conclui a prova da Afirmação 2.

Para mostrarmos a convergência (1.3), dado $\varepsilon > 0$, considere $\varphi \in C_c^\infty(M)$ tal que $\|u - \varphi\|_{H_g^1} < \varepsilon/2$. Daí,

$$\begin{aligned} \|\gamma_k u_k - \gamma u\|_{H_g^1} &= \|\gamma_k u_k - \gamma_k u + \gamma_k u - \gamma_k \varphi + \gamma_k \varphi - \gamma \varphi + \gamma \varphi - \gamma u\|_{H_g^1} \\ &\leq \|\gamma_k u_k - \gamma_k u\|_{H_g^1} + \|\gamma_k u - \gamma_k \varphi\|_{H_g^1} + \|\gamma_k \varphi - \gamma \varphi\|_{H_g^1} + \|\gamma \varphi - \gamma u\|_{H_g^1} \\ &= \|u_k - u\|_{H_g^1} + \|u - \varphi\|_{H_g^1} + \|\gamma_k \varphi - \gamma \varphi\|_{H_g^1} + \|u - \varphi\|_{H_g^1} \\ &< \|u_k - u\|_{H_g^1} + \|\gamma_k \varphi - \gamma \varphi\|_{H_g^1} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\gamma_k u_k - \gamma u\|_{H_g^1} \leq \varepsilon.$$

Sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário, a convergência (1.3) vale e a continuidade está provada. Por fim, temos:

(i) Seja I a identidade em Γ . Então,

$$Iu(p) = u(I(p)) = u(p) \quad \forall p \in M,$$

o que implica $Iu = u$.

(ii) Sejam $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$. Daí, dado $p \in M$,

$$(\gamma_1 \circ \gamma_2)u(p) = u((\gamma_1 \circ \gamma_2)(p)) = u(\gamma_1(\gamma_2(p)))$$

e

$$\gamma_1(\gamma_2 u)(p) = \gamma_1 u(\gamma_2(p)) = u(\gamma_1(\gamma_2(p)))$$

implicam que $(\gamma_1 \circ \gamma_2)u = \gamma_1(\gamma_2 u)$.

(iii) Sejam $\gamma \in \Gamma$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u, v \in H_g^1(M)$. Assim,

$$\begin{aligned} \gamma(\alpha u + v)(p) &= (\alpha u + v)(\gamma(p)) \\ &= \alpha u(\gamma(p)) + v(\gamma(p)) \\ &= \alpha \gamma u(p) + \gamma v(p) \\ &= (\alpha \gamma u + \gamma v)(p), \end{aligned}$$

ou seja, para cada $\gamma \in \Gamma$, a aplicação $u \mapsto \gamma u$ é linear. Donde concluímos que a aplicação definida em (1.1) e (1.2) é uma ação isométrica de Γ sobre $H_g^1(M)$.

Definição 1.4.15. Considere a ação de um grupo topológico G sobre um espaço vetorial normado H . O conjunto dos pontos G -invariantes de H é definido como sendo

$$Fix(G) = \{u \in H; gu = u, \forall g \in G\}.$$

Proposição 1.4.16. $Fix(G)$ é um subespaço fechado de H .

Demonstração. Pelo item (iii) da Definição 1.4.13 é fácil verificar que $Fix(G)$ é subespaço de H . Para mostrar que $Fix(G)$ é fechado, seja (u_k) uma sequência em $Fix(G)$ tal que $u_k \rightarrow u$ em H . Dado $g \in G$, temos pela continuidade da ação que

$$u = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k = \lim_{k \rightarrow \infty} gu_k = gu,$$

e, conseqüentemente, $u \in Fix(G)$, o que mostra que $Fix(G)$ é subespaço fechado de H . $\square$

Exemplo 1.4.17. Sob as mesmas hipóteses do Exemplo 1.4.14, segue que o conjunto das funções Γ -invariantes de $H_g^1(M)$ é dado por

$$Fix(\Gamma) = \{u \in H_g^1(M); u(\gamma(p)) = u(p), \forall \gamma \in \Gamma, \forall p \in M\}.$$

Definição 1.4.18. Seja G um grupo topológico que atua sobre um espaço vetorial normado H . Uma funcional $J : H \rightarrow \mathbb{R}$ é dito invariante por G (ou G -invariante), se

$$J(gu) = J(u), \quad \forall g \in G \quad \text{e} \quad \forall u \in H.$$

Exemplo 1.4.19. Seja Γ um subgrupo fechado de $Isom_g(M)$ e considere ação de Γ em $H_g^1(M)$ definida no Exemplo 1.4.14. Então, o funcional $J_g : H_g^1(M) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$J_g(u) = \frac{1}{2} \int_M [a|\nabla_g u|_g^2 + bu^2] dV_g - \frac{1}{2^*} \int_M c|u|^{2^*} dV_g,$$

onde $a, b, c \in C^\infty(M)$ são Γ -invariantes, é invariante por Γ . Com efeito, dadas $\gamma \in \Gamma$ e $u \in H_g^1(M)$, temos

$$\begin{aligned} J_g(\gamma u) &= \frac{1}{2} \int_M [a|\nabla_g(\gamma u)|_g^2 + b(\gamma u)^2] dV_g - \frac{1}{2^*} \int_M c|\gamma u|^{2^*} dV_g \\ &= \frac{1}{2} \int_M [a|\nabla_g(u \circ \gamma)|_g^2 + b(u \circ \gamma)^2] dV_g - \frac{1}{2^*} \int_M c|u \circ \gamma|^{2^*} dV_g. \end{aligned}$$

Por outro lado, como γ é uma isometria e $a, b, c \in C^\infty(M)$ são Γ -invariantes, usando o

Teorema da Mudança de Variáveis e a Proposição 1.1.11, obtemos

$$\begin{aligned}
 J_g(u) &= \frac{1}{2} \int_M [a|\nabla_g u|_g^2 + bu^2] dV_g - \frac{1}{2^*} \int_M c|u|^{2^*} dV_g \\
 &= \frac{1}{2} \int_M [(a \circ \gamma)|\nabla_g u|_g^2 \circ \gamma + (b \circ \gamma)(u \circ \gamma)^2] dV_g - \frac{1}{2^*} \int_M (c \circ \gamma)|u \circ \gamma|^{2^*} dV_g \\
 &= \frac{1}{2} \int_M [a|\nabla_g(u \circ \gamma)|_g^2 + b(u \circ \gamma)^2] dV_g - \frac{1}{2^*} \int_M c|u \circ \gamma|^{2^*} dV_g.
 \end{aligned}$$

Portanto, $J_g(\gamma u) = J_g(u)$, isto é, J_g é invariante por Γ .

Teorema 1.4.20 (*Princípio da Criticalidade Simétrica*). *Suponha que uma ação de um grupo topológico G sobre um espaço de Hilbert H seja isométrica. Se $I \in C^1(H, \mathbb{R})$ é invariante e u é um ponto crítico de I restrito a $\text{Fix}(G)$, então u é ponto crítico de I em H .*

Demonstração. Ver Teorema 1.28 em [41]. □

1.5 Resultados de análise e EDO

Neste seção, apresentaremos outros teoremas e lemas que foram utilizados neste trabalho, alguns foram adaptados ao nosso estudo.

Teorema 1.5.1 (*Teorema da Mudança de Variáveis*). *Sejam (M, g) e $(N, \hat{g})$ variedades Riemannianas e $f : M \rightarrow N$ uma isometria. Se a função $u : N \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável, então*

$$\int_N u dV_{\hat{g}} = \int_M (u \circ f) dV_g.$$

Demonstração. Ver Teorema A.8.8 em [12]. □

Lema 1.5.2 (*Brézis-Lieb*). *Suponha que uma sequência (u_k) seja limitada em $L^p(M)$ e que $u_k \rightarrow u$ q.t.p em M , com $0 < p < \infty$. Então,*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (|u_k|_p^p - |u_k - u|_p^p) = |u|_p^p.$$

Demonstração. Ver Teorema 1 em [8]. □

Teorema 1.5.3 (*Teorema do Passo da Montanha*). *Sejam E um espaço de Banach real e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ um funcional satisfazendo as seguintes condições:*

- (i) *Existe $\delta > 0$ tal que I satisfaz a condição (PS) para níveis no intervalo $(0, \delta)$;*
- (ii) *Existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $I|_{\partial B_\rho(0)} \geq \alpha$;*

(iii) $I(0) < \alpha$ e existe $v \in E \setminus \overline{B}_\rho(0)$ tal que $I(v) \leq \alpha$.

Considere $\mathcal{B} := \{\beta \in C([0, 1], E); \beta(0) = 0 \text{ e } \beta(1) = v\}$ e seja

$$c = \inf_{\beta \in \mathcal{B}} \max_{t \in [0, 1]} I(\beta(t)) \geq \alpha,$$

Então, $c \in (0, \delta)$ e é um valor crítico de I .

Demonstração. Ver Teorema 2.1 em [2]. □

Teorema 1.5.4 (*Teorema de Separação de Mazur*). Sejam X um espaço de Banach, $C \subset X$ um conjunto aberto convexo não-vazio e $x_0 \in X \setminus C$. Então, existe um funcional linear contínuo $\ell \in X'$ tal que $\ell(x_0) < \ell(x)$ para todo $x \in C$. Em particular, o hiperplano $[\ell = \ell(x_0)]$ separa $\{x_0\}$ e C .

Demonstração. Ver Lema 1.3 em [7]. □

Teorema 1.5.5 (*Teorema de Extensão de Tietze*). Sejam X um espaço métrico, A um subconjunto fechado de X e Y um espaço vetorial localmente convexo. Se $f : A \rightarrow Y$ é uma aplicação contínua, então existe uma aplicação contínua $F : X \rightarrow Y$ tal que $F|_A = f$.

Demonstração. Ver Teorema 4.1 em [20]. □

Teorema 1.5.6 (*Teorema de Borsuk-Ulam*). Seja Ω uma vizinhança aberta simétrica de 0 em $\mathbb{R}^n$ e limitada. Então, toda aplicação ímpar contínua $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, com $m < n$, possui um zero, isto é, existe $u \in \partial\Omega$ tal que $f(u) = 0$.

Demonstração. Ver Teorema 9.17-2 em [11]. □

Teorema 1.5.7 (*Propriedades do Fluxo Local*). Sejam X espaço de Banach, $U \subset X$ aberto e $f : U \rightarrow X$ um campo de vetores C^k , com $k \geq 1$. Então:

(i) Para todo $x_0 \in U$, o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\psi(t) = f(\psi(t)), \\ \psi(0) = x_0, \end{cases}$$

tem uma única solução $\psi_{x_0}(\cdot) := \psi(\cdot, x_0)$ definida no intervalo maximal $I_{x_0}(l_-(x_0), l_+(x_0))$ contendo 0.

(ii) O conjunto $D := \{(t, x_0) \in \mathbb{R} \times U; t \in I_{x_0}\}$ é aberto.

(iii) A aplicação $\psi_{x_0} : D \rightarrow X$ definida por $\psi_{x_0}(t) = \psi(t, x_0)$ é de Classe C^k .

(iv) (*Propriedade do fluxo*). Se $y_0 = \psi(t_0, x_0)$, com $t_0 \in I_{x_0}$, então $I_{y_0} = I_{x_0} - t_0 = \{t - t_0; \ t \in I_{x_0}\}$ e $\psi(s, y_0) = \psi(t_0 + s, x_0)$ para todo $s \in I_{y_0}$.

Consequentemente, os itens (iii) e (iv) implicam que se $(t, x_0) \in D$, então existe uma vizinhança V de x_0 em U tal que $\psi_t : V \longrightarrow \psi_t(V)$, definida por $\psi_t(x) = \psi(t, x)$, é um difeomorfismo.

Demonstração. Ver Teorema 4.0.4 e Observação 4.0.5 em [9]. □

Capítulo 2

Soluções para uma classe de equações do tipo Yamabe

Neste capítulo, temos como objetivo estudar a existência e multiplicidade de soluções para seguinte classe de problemas:

$$-\operatorname{div}_g(a(x)\nabla_g u) + b(x)u = c(x)|u|^{2^*-2}u, \text{ em } M, \quad (2.1)$$

em que (M, g) uma variedade Riemanniana compacta sem bordo de dimensão $m \geq 3$. Precisamente, assumindo algumas condições de simetria sobre a variedade M , estabeleceremos a existência de uma solução positiva e múltiplas soluções nodais para (2.1).

A fim de apresentar nossas hipóteses consideremos Γ um subgrupo fechado do grupo das isometrias $\operatorname{Isom}_g(M)$ de (M, g) , e denotemos por

$$\Gamma(p) = \{\gamma(p); \gamma \in \Gamma\}$$

a Γ -órbita do ponto $p \in M$ e por $\#\Gamma(p)$ a sua cardinalidade. Um subconjunto $X \subset M$ é dito Γ -invariante quando $\Gamma(x) \subset X$ para todo $x \in X$, e uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é Γ -invariante quando é constante em cada Γ -órbita $\Gamma(x)$ de X .

Ao longo deste trabalho, assumiremos que a, b, c são funções de classe $C^\infty(M)$ e Γ -invariantes, a e c são positivas e o operador $-\operatorname{div}(a\nabla_g(\cdot)) + b$ é coercivo no espaço de Sobolev

$$H_g^1(M)^\Gamma := \{u \in H_g^1(M); u \text{ é } \Gamma\text{-invariante}\}.$$

O objetivo principal deste trabalho é provar os seguintes resultados:

Teorema 2.0.1. *Se $-\operatorname{div}_g(a\nabla_g(\cdot)) + b$ é coercivo em $H_g^1(M)^\Gamma$ e $1 \leq \dim(\Gamma(p)) < m$ para todo $p \in M$, então o problema (2.1) tem pelo menos uma solução positiva e infinitas soluções nodais Γ -invariantes.*

Como uma consequência imediata do Teorema 2.0.1 temos o seguinte corolário para a equação de Yamabe:

Corolário 2.0.2. Se $\Delta_g(\cdot) + c_m R_g$ é coercivo em $H_g^1(M)^\Gamma$, $c = \kappa > 0$ e $1 \leq \dim(\Gamma(p)) < m$ para todo $p \in M$, então a Equação (1) tem pelo menos uma solução positiva e infinitas soluções nodais Γ -invariantes.

Algumas aplicações do Teorema 2.0.1 são dadas nos exemplos a seguir.

Exemplo 2.0.3. (i) Seja $(\mathbb{S}^m, g_0)$ a esfera padrão. Considere $\mathbb{R}^{m+1} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$, com $k + n = m + 1$ e $k, n \geq 2$. Então,

$$\mathbb{S}^m = \{(x, y); |x|^2 + |y|^2 = 1, x \in \mathbb{R}^k, y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Seja $\Gamma = O(k) \times O(n)$. Para $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma$, onde $\gamma_1 \in O(k)$ e $\gamma_2 \in O(n)$, a ação isométrica de Γ sobre $\mathbb{S}^m$ é dada naturalmente por

$$\gamma(x, y) = (\gamma_1(x), \gamma_2(y)), \gamma \in \Gamma, (x, y) \in \mathbb{S}^m.$$

Assim, Γ pode ser identificado como um subgrupo fechado do grupo das isometrias $O(m + 1)$ em $\mathbb{S}^m$. Além disso, as órbitas determinadas por Γ tem dimensão positiva, ou seja, $1 \leq \dim(\Gamma(x, y)) < m$ para todo $(x, y) \in \mathbb{S}^m$ (veja [27], p. 542). Portanto, se o operador $-\operatorname{div}_{g_0}(a \nabla_{g_0}(\cdot)) + b$ é coercivo em $H_{g_0}^1(\mathbb{S}^m)^\Gamma$, o problema (2.1) possui infinitas soluções nodais Γ -invariantes.

(ii) Seja $\mathbb{S}^{2n+1}$ a esfera unitária em $\mathbb{C}^{n+1}$. Considere a função $\phi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}$ definida por

$$\phi(z, x) = z \cdot x = (z \cdot x_1, \dots, z \cdot x_{n+1}).$$

Esta aplicação define uma ação suave de $\mathbb{S}^1$ em $\mathbb{S}^{2n+1}$, chamada de ação de Hopf, pois a multiplicação complexa é suave. Além disso, esta ação é por isometrias e cada órbita tem dimensão um. De fato, dado $z \in \mathbb{S}^1$, considere $\phi_z : \mathbb{S}^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}$ dada por $\phi_z(x) = \phi(z, x)$. A esfera $\mathbb{S}^{2n+1}$ tem a métrica Riemanniana g_0 induzida de $\mathbb{R}^{2n+2}$. Daí,

$$\begin{aligned} \langle \phi_z(x), \phi_z(y) \rangle_{g_0} &= \langle z \cdot x, z \cdot y \rangle_{g_0} = \sum_{i=1}^{n+1} z \cdot x_i \cdot \overline{z \cdot y_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} z \cdot \overline{z} \cdot x_i \cdot \overline{y_i} \\ &= \|z\| \langle x, y \rangle_{g_0} = \langle x, y \rangle_{g_0}, \end{aligned}$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{C}^{n+1}$. Neste caso, podemos identificar $\mathbb{S}^1$ com um subgrupo com-

pacto de $\text{Isom}_{g_0}(\mathbb{S}^{2n+1})$.

Agora, mostraremos que cada órbita tem dimensão um. Dado $x \in \mathbb{S}^{2n+1}$, a aplicação $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ definida por $F(z) = (z \cdot x_1, \dots, z \cdot x_{n+1})$ é linear e injetiva. Assim, sua imagem é um subespaço de $\mathbb{C}^{n+1}$ de dimensão real dois. Consequentemente, a órbita de x é interseção da imagem de F com $\mathbb{S}^{2n+1}$, ou seja, ela é a interseção de um plano com $\mathbb{S}^{2n+1}$, que é um círculo unitário. Logo, cada órbita tem dimensão um. Portanto, pelo Corolário 2.0.2, o problema de Yamabe (1) tem infinitas soluções nodais $\mathbb{S}^1$ -invariantes sobre $\mathbb{S}^{2n+1}$.

Mais exemplos podem ser obtido da seguinte forma.

Exemplo 2.0.4. Sejam $(\mathbb{S}^m, g_0)$ a esfera padrão, Γ um subgrupo fechado do grupo das isometrias de $\mathbb{S}^m$, (N, h) uma variedade Riemanniana compacta sem bordo de dimensão n e $f \in C^\infty(N)$ um função positiva. Considere $N \times_f \mathbb{S}^m$ o produto Warped. O produto Warped $N \times_f \mathbb{S}^m$ é a variedade produto $N \times \mathbb{S}^m$ munida da métrica Riemanniana $g = h + f^2 g_0$, definida por

$$g_{(p,q)}((v_1, v_2), (w_1, w_2)) = h_p(v_1, w_1) + f(p)^2 (g_0)_q(v_2, w_2),$$

onde $(v_1, v_2), (w_1, w_2) \in T_p N \oplus T_q \mathbb{S}^m$. Observe que a aplicação

$$\begin{aligned} \lambda : \Gamma \times (N \times_f \mathbb{S}^m) &\longrightarrow N \times_f \mathbb{S}^m \\ (\gamma, (p, q)) &\longmapsto (p, \gamma(q)) \end{aligned}$$

define uma ação isométrica em $N \times_f \mathbb{S}^m$, ou seja, a aplicação $(p, q) \mapsto (p, \gamma(q))$ é uma isometria, para cada $\gamma \in \Gamma$. Portanto, se $n + m \geq 3$, $\Delta_g(\cdot) + \mathfrak{c}_m R_g$ é coercivo em $H_g^1(N \times_f \mathbb{S}^m)^\Gamma$ e cada Γ -órbita de $\mathbb{S}^m$ tem dimensão positiva, então o problema de Yamabe tem infinitas soluções nodais Γ -invariantes sobre $N \times_f \mathbb{S}^m$.

Sendo $\dim(\Gamma(p)) \geq 1$, temos que $\#\Gamma(p) = \infty$ para todo $p \in M$. A seguir, estudaremos um caso em que M pode ter Γ -órbita finita. Para isso, consideraremos as seguintes hipóteses: Fixe um conjunto aberto Ω de M , uma métrica Riemanniana h sobre Ω e um subgrupo compacto Λ de $\text{Isom}_h(\Omega)$ tal que $0 \leq \dim(\Lambda(p)) < m$ para todo $p \in \Omega$. Além disso, suponha que as restrições de a, b e c ao conjunto Ω são funções Λ -invariantes e que operador $-\text{div}_h(a \nabla_h(\cdot)) + b$ é coercivo sobre o espaço $C_c^\infty(\Omega)^\Lambda$ das funções suaves Λ -invariantes com suporte compacto em Ω . Com essas hipóteses, provaremos o seguinte resultado de multiplicidade.

Teorema 2.0.5. *Existe uma sequência crescente (ℓ_k) de números reais positivos, dependendo apenas de (Ω, h) , a, b, c e Λ , com seguinte propriedade: para qualquer métrica Riemanniana g em M e subgrupo fechado Γ de $\text{Isom}_g(M)$ que satisfaz*

- (1) $g = h$ em Ω ;
- (2) Γ é um subgrupo de Λ e a, b, c são Γ -invariantes;
- (3) $-\operatorname{div}_g(a\nabla_g(\cdot)) + b$ é coercivo sobre $H_g^1(M)^\Gamma$;
- (4) $\min_{p \in M} \frac{a(p)^{m/2} \# \Gamma(p)}{c(p)^{(m-2)/2}} > \ell_k$;

o problema (2.1) possui pelo menos k pares de soluções Γ -invariantes $\pm u_1, \dots, \pm u_k$ tais que u_1 é positiva, $u_2, \dots, u_k$ mudam de sinal e

$$\int_M c|u_j|^{2^*} dV_g \leq \ell_j S^{m/2}, \quad \forall j = 1, \dots, k, \quad (2.2)$$

onde S é a melhor constante de Sobolev para a imersão $D^{1,2}(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^m)$.

Observe que o Teorema 2.0.5 assegura a existência de um número prescrito de soluções nodais para o problema (2.1), desde que exista uma métrica Riemanniana em M que estende a métrica Riemanniana especificada em Ω , para a qual algum grupo de isometrias tenha órbitas suficientemente grandes. Em particular, o Teorema 2.0.5 se aplica ao problema de Yamabe. Porém, a propriedade (4) requer que o grupo Λ tenha subgrupos grandes o suficiente.

Os Teoremas 2.0.1 e 2.0.5 serão provados no Capítulo 3. A prova é baseada em um resultado de compacidade e um princípio variacional para soluções nodais que serão provados, respectivamente, nas Seções 2.3 e 2.4 deste capítulo. Para isto, precisamos de algumas definições e resultados auxiliares.

2.1 Definições e Resultados Auxiliares

Inicialmente, observe que $u \in H_g^1(M)^\Gamma$ se, e somente se, $u(\gamma(p)) = u(p)$ para cada $p \in M$ e $\gamma \in \Gamma$. De fato, sejam $u \in H_g^1(M)^\Gamma$ e $p \in M$. Então, pela definição do conjunto, temos que $u(\gamma(p)) = u(I(p))$ para todo $\gamma \in \Gamma$, onde I é a identidade em Γ , assim, $u(\gamma(p)) = u(p)$. Reciprocamente, se $u(\gamma(p)) = u(p)$ para todo $\gamma \in \Gamma$, então u é constante em cada Γ -órbita $\Gamma(p)$, ou seja, $u \in H_g^1(M)^\Gamma$. Portanto, temos a seguinte caracterização:

$$H_g^1(M)^\Gamma = \{u \in H_g^1(M); u \circ \gamma = u, \text{ para todo } \gamma \in \Gamma\}.$$

Portanto, a definição de $H_g^1(M)^\Gamma$ pode ser naturalmente entendida sob o conceito de funções invariantes pela ação do subgrupo Γ sobre o espaço $H_g^1(M)$, dada no Exemplo

1.4.17, ou seja, $H_g^1(M)^\Gamma = \text{Fix}(\Gamma)$. Consequentemente, pela Proposição 1.4.16, $H_g^1(M)^\Gamma$ é subespaço fechado de $H_g^1(M)$.

Lema 2.1.1. A função $\|\cdot\|_{a,b} : H_g^1(M)^\Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\|u\|_{a,b} = \left(\int_M [a|\nabla_g u|_g^2 + bu^2] dV_g \right)^{\frac{1}{2}}$$

define uma norma em $H_g^1(M)^\Gamma$.

Demonstração. Considere em $H_g^1(M)^\Gamma$ a seguinte forma bilinear

$$\langle u, v \rangle_{a,b} = \int_M [a\langle \nabla_g u, \nabla_g v \rangle_g + buv] dV_g.$$

Pela linearidade da integral e da métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ valem as seguintes propriedades:

1. $\langle u + v, w \rangle_{a,b} = \langle u, w \rangle_{a,b} + \langle v, w \rangle_{a,b}, \forall u, v, w \in H_g^1(M)^\Gamma$;
2. $\langle u, v \rangle_{a,b} = \langle v, u \rangle_{a,b}, \forall u, v \in H_g^1(M)^\Gamma$;
3. $\langle \alpha u, v \rangle_{a,b} = \alpha \langle u, v \rangle_{a,b}, \forall u, v \in H_g^1(M)^\Gamma$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Agora, provaremos que valem:

4. $\langle u, u \rangle_{a,b} \geq 0, \forall u \in H_g^1(M)^\Gamma$;
5. $\langle u, u \rangle_{a,b} = 0$ se, e somente se, $u = 0$.

De fato, seja $u \in H_g^1(M)^\Gamma$. Então, como $-\text{div}(a\nabla g(\cdot)) + b$ é coercivo em $u \in H_g^1(M)^\Gamma$, existe $\mu > 0$ tal que

$$\langle u, u \rangle_{a,b} = \int_M [a|\nabla_g u|_g^2 + bu^2] dV_g \geq \mu \|u\|_{H_g^1}^2 \geq 0. \quad (2.3)$$

Além disso, se $u \in H_g^1(M)^\Gamma$ é tal que $\langle u, u \rangle_{a,b} = 0$, então por (2.3), tem-se $\|u\|_{H_g^1} = 0$ o que implica $u = 0$. De (1)-(5), concluímos que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{a,b}$ define um produto interno, portanto,

$$\|u\|_{a,b} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{a,b}}$$

define uma norma em $H_g^1(M)^\Gamma$. □

Lema 2.1.2. As normas $\|\cdot\|_{a,b}$ e $\|\cdot\|_{H_g^1}$ são equivalentes em $H_g^1(M)^\Gamma$.

Demonstração. Como $-\text{div}(a\nabla g(\cdot)) + b$ é coercivo em $H_g^1(M)^\Gamma$, existe $\mu > 0$ tal que

$$\mu \|u\|_{H_g^1}^2 \leq \int_M [a|\nabla_g u|_g^2 + bu^2] dV_g = \|u\|_{a,b}^2, \forall u \in H_g^1(M)^\Gamma.$$

Por outro lado, sendo $a, b \in C^\infty(M)$, temos que

$$\|u\|_{a,b}^2 = \int_M [a|\nabla_g u|^2 + bu^2] dV_g \leq \mu_0 \int_M [|\nabla_g u|_g^2 + u^2] dV_g = \mu_0 \|u\|_{H_g^1}^2,$$

onde $\mu_0 = \max\{|a|_\infty, |b|_\infty\}$. Portanto,

$$\mu^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H_g^1} \leq \|u\|_{a,b} \leq \mu_0^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H_g^1},$$

o que finaliza a prova. $\square$

Definição 2.1.3. Uma solução fraca para o problema (2.1) é uma função $u \in H_g^1(M)$ satisfazendo

$$\int_M [a\langle \nabla_g u, \nabla_g v \rangle_g + buv] dV_g = \int_M c|u|^{2^*-2} uv dV_g,$$

para todo $v \in H_g^1(M)$.

Dessa forma, pontos críticos para o funcional energia $J_g : H_g^1(M) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$J_g(u) = \frac{1}{2} \int_M [a|\nabla_g u|_g^2 + bu^2] dV_g - \frac{1}{2^*} \int_M c|u|^{2^*} dV_g$$

são soluções para o problema (2.1), e reciprocamente.

Note que a função $|\cdot|_{c,2^*} : L^{2^*}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$|u|_{c,2^*} = \left(\int_M c|u|^{2^*} dV_g \right)^{\frac{1}{2^*}}$$

define uma norma em $L^{2^*}(M)$ que é equivalente a norma usual $|\cdot|_{2^*}$. De fato, seja $c_0 = \min_M c$. Então,

$$c_0 \int_M |u|^{2^*} dV_g \leq \int_M c|u|^{2^*} dV_g \leq |c|_\infty \int_M |u|^{2^*} dV_g,$$

ou seja,

$$c_0^{\frac{1}{2^*}} |u|_{2^*} \leq |u|_{c,2^*} \leq |c|_\infty^{\frac{1}{2^*}} |u|_{2^*}.$$

Portanto, deste fato e do Lema 2.1.1, segue que J_g restrito a $H_g^1(M)^\Gamma$ é dado por

$$J_g(u) = \frac{1}{2} \|u\|_{a,b}^2 - \frac{1}{2^*} |u|_{c,2^*}^{2^*}.$$

Pelo Princípio da Criticabilidade Simétrica (Teorema 1.4.20) e o Exemplo 1.4.19, se u é um ponto crítico do funcional J_g restrito ao subespaço $H_g^1(M)^\Gamma$, então u é ponto crítico de J_g em $H_g^1(M)$, pois $J_g \in C^1(H_g^1(M), \mathbb{R})$.

2.2 A Variedade de Nehari

Esta seção é dedicada a prova de alguns resultados relacionados a variedade de Nehari.

Definição 2.2.1. A variedade de Nehari associada a $J_g|_{H_g^1(M)^\Gamma}$ é dada por

$$\mathcal{N}_g^\Gamma := \{u \in H_g^1(M)^\Gamma \setminus \{0\}; J'_g(u) \cdot u = 0\}.$$

É fácil de verificar que

$$\mathcal{N}_g^\Gamma = \{u \in H_g^1(M)^\Gamma \setminus \{0\}; \|u\|_{a,b}^2 = |u|_{c,2^*}^{2^*}\}.$$

Observe que se $u \neq 0$ é um ponto crítico de $J_g|_{H_g^1(M)^\Gamma}$, ou seja, $J'_g(u) = 0$, então $u \in \mathcal{N}_g^\Gamma$. Dessa forma, $\mathcal{N}_g^\Gamma$ é uma restrição natural para o problema de encontrar pontos críticos não triviais para J_g . Além disso, a abordagem de um problema via variedade de Nehari o transforma em um problema de minimização com vínculo.

A seguir, os resultados têm como referência o livro de David Costa [15]. Mostraremos que o conjunto $\mathcal{N}_g^\Gamma$ é de fato uma variedade, a qual é fechada e não vazia.

Proposição 2.2.2. A variedade de Nehari $\mathcal{N}_g^\Gamma$ é não vazia e é uma subvariedade de classe C^2 fechada em $H_g^1(M)^\Gamma$.

Demonstração. Considere $\Psi : H_g^1(M)^\Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\Psi(u) = J'_g(u) \cdot u = I(u) - G(u),$$

onde

$$I(u) = \|u\|_{a,b}^2 \text{ e } G(u) = |u|_{c,2^*}^{2^*}.$$

Por se tratar de uma norma proveniente de um produto interno é fácil verificar que $I \in C^2(H_g^1(M)^\Gamma, \mathbb{R})$ e $I'(u) \cdot v = 2\langle u, v \rangle_{a,b}$ (veja a Proposição A.3 em [10]). Assim, deste fato e do Lema 1.3.9, verifica-se que Ψ é de classe C^2 . Seja $v \in H_g^1(M)^\Gamma \setminus \{0\}$ fixo e considere a função $0 < t \longmapsto \Psi(tv)$. Então, pela imersão contínua de $H_g^1(M)$ em $L^{2^*}(M)$, obtemos que

$$\begin{aligned} \Psi(tv) &= t^2 \|v\|_{a,b}^2 - t^{2^*} |v|_{c,2^*}^{2^*} \\ &\geq t^2 \|v\|_{a,b}^2 - t^{2^*} C^{2^*} \|v\|_{a,b}^{2^*} \\ &> 0 \end{aligned}$$

para $t > 0$ suficientemente pequeno, pois $2 < 2^*$. Além disso, note que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Psi(tv) = \lim_{t \rightarrow +\infty} [t^2 \|v\|_{a,b}^2 - t^{2^*} |v|_{c,2^*}^{2^*}] = -\infty.$$

Assim, existe $t_0 > 0$ tal que $J'(t_0 v) \cdot (t_0 v) = 0$, ou seja, $t_0 v \in \mathcal{N}_g^\Gamma$. Donde concluímos que $\mathcal{N}_g^\Gamma \neq \emptyset$.

Agora, vejamos que Ψ não possui ponto crítico em $\mathcal{N}_g^\Gamma$. De fato, seja $u \in \mathcal{N}_g^\Gamma$, então

$$\begin{aligned} \Psi'(u) \cdot u &= I'(u) \cdot u - G'(u) \cdot u \\ &= 2\|u\|_{a,b}^2 - 2^*|u|_{c,2^*}^{2^*} \\ &= (2 - 2^*)\|u\|_{a,b}^2 \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Logo, $\Psi'(u) \neq 0$ para todo $u \in \mathcal{N}_g^\Gamma$. Denotemos $E = H_g^1(M)^\Gamma \setminus \{0\}$. Assim, 0 é o único ponto crítico em $\Psi^{-1}(0)$ e $0 \notin E$. Dessa forma, 0 é valor regular de $\Psi|_E$. Pelo Teorema da Submersão, temos que $\Psi^{-1}|_E(0) = \mathcal{N}_g^\Gamma$ é uma subvariedade de classe C^2 de $H_g^1(M)^\Gamma$.

Por fim, mostraremos que $\mathcal{N}_g^\Gamma$ é fechada em $H_g^1(M)^\Gamma$. Seja $(u_k) \subset \mathcal{N}_g^\Gamma$ tal que $u_k \rightarrow u$ em $H_g^1(M)^\Gamma$. Pela imersão contínua de Sobolev, segue que $u_k \rightarrow u$ em $L^{2^*}(M)$. Daí,

$$0 = J'_g(u_k) \cdot u_k = \|u_k\|_{a,b}^2 - |u_k|_{c,2^*}^{2^*} \longrightarrow \|u\|_{a,b}^2 - |u|_{c,2^*}^{2^*} = J'_g(u) \cdot u$$

Assim, $J'_g(u) \cdot u = 0$. Resta mostrar que $u \neq 0$. Sendo $u_k \in \mathcal{N}_g^\Gamma$, pela imersão contínua de $H_g^1(M)$ em $L^{2^*}(M)$, segue que

$$\|u_k\|_{a,b}^2 = |u_k|_{c,2^*}^{2^*} \leq C\|u_k\|_{a,b}^{2^*},$$

o que implica em

$$\|u_k\|_{a,b} \geq \left(\frac{1}{C}\right)^{\frac{1}{2^*-2}} > 0.$$

Portanto, $u \neq 0$, mostrando assim que $\mathcal{N}_g^\Gamma$ é fechado em $H_g^1(M)^\Gamma$. $\square$

Proposição 2.2.3. Dado $u \in H_g^1(M)^\Gamma \setminus \{0\}$, tem-se que $u \in \mathcal{N}_g^\Gamma$ se, e somente se $J_g(u) = \max_{t \geq 0} J_g(tu)$.

Demonstração. Seja $u \in H_g^1(M) \setminus \{0\}$. Suponha que $u \in \mathcal{N}_g^\Gamma$. Consideremos a função $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(t) = J_g(tu)$. Daí,

$$\begin{aligned} g'(t) &= J'_g(tu) \cdot u \\ &= t\|u\|_{a,b}^2 - t^{2^*-1}|u|_{c,2^*}^{2^*} \\ &= (t - t^{2^*-1})\|u\|_{a,b}^2. \end{aligned}$$

Como $u \neq 0$, então se $g'(t) = 0$, temos que $t = 0$ ou $t = 1$. Uma vez que $g(0) = 0$ e $g(t) = \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^{2^*}}{2^*}\right)\|u\|_{a,b}^2$ é crescente em $(0, 1)$ e decrescente para todo $t > 1$, concluímos

que $J(u) = g(1) = \max_{t \geq 0} J(tu)$. Reciprocamente, suponha que $J_g(u) = \max_{t \geq 0} J(tu)$. Então, $g'(1) = J'_g(u) \cdot u = 0$, pois o máximo de $g(t) = J_g(tu)$ é atingido em $t = 1$. Portanto, $u \in \mathcal{N}_g^\Gamma$. $\square$

Proposição 2.2.4. O funcional J_g restrito a variedade Nehari $\mathcal{N}_g^\Gamma$ é limitado inferiormente e

$$\tau_g^\Gamma := \inf_{\mathcal{N}_g^\Gamma} J_g > 0.$$

Demonstração. De fato, note que se $u \in \mathcal{N}_g^\Gamma$, então

$$J_g(u) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*} \right) \|u\|_{a,b}^2 > 0.$$

Logo, $J_g|_{\mathcal{N}_g^\Gamma}$ é limitado inferiormente. Vejamos agora que $\tau_g^\Gamma > 0$. Com efeito, suponha que $\tau_g^\Gamma = 0$, então existiria uma sequência (u_k) em $\mathcal{N}_g^\Gamma$ tal que

$$J_g(u_k) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*} \right) \|u_k\|_{a,b}^2 \leq \frac{1}{k}.$$

Assim, $\|u_k\|_{a,b} \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, implicando que $u_k \rightarrow 0$ em $H_g^1(M)^\Gamma$. Uma vez que $\mathcal{N}_g^\Gamma$ é fechada em $H_g^1(M)^\Gamma$ teríamos que $0 \in \mathcal{N}_g^\Gamma$, o que é uma contradição. $\square$

2.3 Um Resultado de Compacidade

Nesta seção, aplicaremos um método de concentração e compacidade para provar um resultado de compacidade (Teorema 2.3.4), que garante que o funcional J_g satisfaz a condição de Palais-Smale em $H_g^1(M)^\Gamma$ para determinados níveis. Primeiramente, apresentaremos algumas definições e resultados técnicos. Ademais, não assumiremos que o operador $-\operatorname{div}(a \nabla g(\cdot)) + b$ é coercivo, exceto quando provarmos o Teorema 2.3.4.

Definição 2.3.1. Seja (u_k) uma sequência em $H_g^1(M)$. Dizemos que (u_k) é uma sequência de Palais-Smale Γ -invariante (notação: sequência $(PS)_\tau^\Gamma$) para o funcional J_g no nível τ quando

$$(u_k) \subset H_g^1(M)^\Gamma, \quad J_g(u_k) \rightarrow \tau \quad \text{e} \quad J'_g(u_k) \rightarrow 0 \text{ em } (H_g^1(M))'.$$

Dizemos que o funcional J_g satisfaz a condição Palais-Smale Γ -invariante no nível τ em $H_g^1(M)$ (condição $(PS)_\tau^\Gamma$) se toda sequência $(PS)_\tau^\Gamma$ para o funcional J_g possui uma sub-sequência convergente.

Lema 2.3.2. Toda sequência de Palais-Smale para o funcional J_g é limitada em $H_g^1(M)$.

Demonstração. Seja (u_k) uma sequência Palais-Smale para o funcional J_g no nível τ , isto é, $J_g(u_k) \rightarrow \tau$ e $J'_g(u_k) \rightarrow 0$ em $(H_g^1(M))'$. Uma vez que

$$J_g(u) = \frac{1}{2} \int_M [a|\nabla_g u|_g^2 + bu^2] dV_g - \frac{1}{2^*} \int_M c|u|^{2^*} dV_g$$

e

$$J'_g(u) \cdot v = \int_M [a\langle \nabla_g u, \nabla_g v \rangle_g + buv] dV_g - \int_M c|u|^{2^*-2} uv dV_g,$$

temos

$$J_g(u_k) - \frac{1}{2} J'_g(u_k) \cdot u_k = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*} \right) |u|_{c,2^*}^{2^*}.$$

Assim, como as normas $\|\cdot\|_{2^*}$ e $|\cdot|_{c,2^*}$ são equivalente, segue que

$$\|u_k\|_{2^*}^{2^*} \leq C \left(J_g(u_k) - \frac{1}{2} J'_g(u_k) \cdot u_k \right).$$

As condições $J_g(u_k) \rightarrow \tau$ e $J'_g(u_k) \rightarrow 0$ implicam em

$$\begin{aligned} \left| J_g(u_k) - \frac{1}{2} J'_g(u_k) \cdot u_k \right| &\leq |J_g(u_k)| + \frac{1}{2} \|J'_g(u_k)\|_{(H_g^1)'} \|u_k\|_{H_g^1} \\ &\leq C + C \|u_k\|_{H_g^1} \end{aligned}$$

Logo,

$$|u_k|_{2^*}^{2^*} \leq C + C \|u_k\|_{H_g^1}. \quad (2.4)$$

Usando novamente a equivalência das normas $|\cdot|_{2^*}$ e $|\cdot|_{c,2^*}$, e a desigualdade (2.4), obtemos

$$\begin{aligned} \int_M [a|\nabla_g u_k|_g^2 + bu_k^2] dV_g &= 2 \left(J_g(u_k) + \frac{1}{2^*} |u_k|_{c,2^*}^{2^*} \right) \\ &\leq C + C |u_k|_{2^*}^{2^*} \\ &\leq C + C \|u_k\|_{H_g^1}^{2^*}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Por outro lado, como M é compacta e $2 < 2^*$, pela desigualdade de Hölder, temos que

$$\begin{aligned} \int_M |u_k|^2 dV_g &\leq \left(\int_M (|u_k|^2)^{\frac{2^*}{2}} dV_g \right)^{\frac{2}{2^*}} \left(\int_M dV_g \right)^{\frac{2^*-2}{2^*}} \\ &= Vol_g(M)^{\frac{2^*-2}{2}} \left(\int_M |u_k|^{2^*} dV_g \right)^{\frac{2}{2^*}}. \end{aligned}$$

Disto, segue que $|u_k|_2 \leq C |u_k|_{2^*}$. Assim, pela desigualdade (2.4), resulta

$$|u_k|_2^{2^*} \leq C + C \|u_k\|_{H_g^1}^{2^*}.$$

Daí,

$$|u_k|_2^2 \leq \left(C + C\|u_k\|_{H_g^1}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq C + C\|u_k\|_{H_g^1}^{\frac{2}{2^*}} \quad (2.6)$$

Agora, seja $a_0 = \min_M a > 0$. Então, como b é limitada, temos

$$\begin{aligned} a_0\|u_k\|_{H_g^1}^2 &\leq \int_M [a|\nabla_g u_k|^2 + a_0|u_k|^2] dV_g \\ &= \int_M [a|\nabla_g u_k|^2 + b|u_k|^2] dV_g + \int_M (-b + a_0)|u_k|^2 dV_g \\ &\leq \int_M [a|\nabla_g u_k|^2 + b|u_k|^2] dV_g + C|u_k|_2^2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Combinando (2.7) com (2.5) e (2.6), obtemos

$$a_0\|u_k\|_{H_g^1}^2 \leq C + C\|u_k\|_{H_g^1} + C\|u_k\|_{H_g^1}^{\frac{2}{2^*}}.$$

Isto implica que (u_k) é limitada. De fato, suponha que não seja. Então, a menos de subsequência $\|u_k\|_{H_g^1} \rightarrow \infty$. Dividindo a desigualdade anterior por $\|u_k\|_{H_g^1}^2$, temos

$$a_0 \leq \frac{C}{\|u_k\|_{H_g^1}^2} + \frac{C}{\|u_k\|_{H_g^1}} + \frac{C}{\|u_k\|_{H_g^1}^{2-\frac{2}{2^*}}},$$

o que é um absurdo, pois o lado direito desta desigualdade tende a zero, enquanto que o lado esquerdo é uma constante positiva. Portanto, (u_k) é limitada em $H_g^1(M)$. $\square$

A seguir, considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta v = |v|^{2^*-2}v \\ v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^m) \end{cases} \quad (2.8)$$

e o seu funcional energia associado $J_\infty : D^{1,2}(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$J_\infty(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^m} |\nabla v|^2 dx - \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^m} |v|^{2^*} dx.$$

Proposição 2.3.3. Assuma que $b \equiv 0$. Seja (u_k) uma sequência de Palais-Smale Γ -invariante para o funcional J_g no nível $\tau > 0$ tal que $u_k \rightharpoonup 0$ em $H_g^1(M)$, mas não converge fortemente. Então, a menos de subsequência, existe um ponto $p \in M$ e uma solução não trivial $\hat{v}$ para o problema (2.8) de modo que $\#\Gamma(p) < \infty$ e

$$\tau \geq \left(\frac{a(p)^{m/2} \#\Gamma(p)}{c(p)^{(m-2)/2}} \right) J_\infty(\hat{v}) \geq \left(\min_{q \in M} \frac{a(q)^{m/2} \#\Gamma(q)}{c(q)^{(m-2)/2}} \right) \frac{1}{m} S^{m/2}.$$

Demonstração. Fixemos $\delta > 0$ tal que $3\delta \in (0, i_g)$, onde i_g é o raio de injetividade de M . Para cada $q \in M$ consideremos um sistema de coordenadas normais centrado em q e uma

bola geodésica $B_g(q, \rho)$ com centro em q e raio $\rho \in (0, 3\delta]$. Assim, para cada $\varphi \in C^\infty(M)$ e $s \in [1, \infty)$, podemos assumir que

$$\int_{B_g(q, \rho)} |\varphi|^s dV_g = \int_{B(0, \rho)} |\varphi \circ \exp_q|^s (1 + O(|x|^2)) dx$$

e

$$\int_{B_g(q, \rho)} |\nabla_g \varphi|^2 dV_g = \int_{B(0, \rho)} |\nabla_g(\varphi \circ \exp_q)|^2 (1 + O(|x|^2)) dx.$$

Denotemos $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \exp_q$. Assim, fixando $\rho > 0$ suficientemente pequeno, obtemos

$$(1 - \tilde{C}_1 \rho^2) \int_{B(0, \rho)} |\tilde{\varphi}|^s dx \leq \int_{B_g(q, \rho)} |\varphi|^s dV_g \leq (1 + \tilde{C}_1 \rho^2) \int_{B(0, \rho)} |\tilde{\varphi}|^s dx$$

e

$$(1 - \tilde{C}_2 \rho^2) \int_{B(0, \rho)} |\nabla \tilde{\varphi}|^2 dx \leq \int_{B_g(q, \rho)} |\nabla_g \varphi|^2 dV_g \leq (1 + \tilde{C}_2 \rho^2) \int_{B(0, \rho)} |\nabla \tilde{\varphi}|^2 dx.$$

Tomemos $\hat{C}_1, \hat{C}_2 > 1$ tais que

$$\hat{C}_1 \geq 1 + \tilde{C}_1 \rho^2, \quad \hat{C}_1^{-1} \leq 1 - \tilde{C}_1 \rho^2$$

e

$$\hat{C}_2 \geq 1 + \tilde{C}_2 \rho^2, \quad \hat{C}_2^{-1} \leq 1 - \tilde{C}_2 \rho^2.$$

Daí, considerando $C_1 = \max\{\hat{C}_1, \hat{C}_2\}$, obtemos $C_1 > 1$ tal que

$$C_1^{-1} \int_{B(0, \rho)} |\tilde{\varphi}|^s dx \leq \int_{B_g(q, \rho)} |\varphi|^s dV_g \leq C_1 \int_{B(0, \rho)} |\tilde{\varphi}|^s dx \quad (2.9)$$

e

$$C_1^{-1} \int_{B(0, \rho)} |\nabla \tilde{\varphi}|^2 dx \leq \int_{B_g(q, \rho)} |\nabla_g \varphi|_g^2 dV_g \leq C_1 \int_{B(0, \rho)} |\nabla \tilde{\varphi}|^2 dx. \quad (2.10)$$

Agora, lembremos que

$$J_g(u_k) - \frac{1}{2} J'_g(u_k) \cdot u_k = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*} \right) |u_k|_{c, 2^*}^{2^*} = \frac{1}{m} |u_k|_{c, 2^*}^{2^*}.$$

Pelo Lema 2.3.2, temos que

$$|u_k|_{c, 2^*}^{2^*} = m \left(J_g(u_k) - \frac{1}{2} J'_g(u_k) \cdot u_k \right) \longrightarrow m\tau =: \beta > 0. \quad (2.11)$$

Afirmamos que, a menos de subsequência, existe $q_0 \in M$ e $\lambda_0 \in (0, \beta)$ tal que

$$\int_{B_g(q_0, \delta)} c |u_k|^{2^*} dV_g \geq \lambda_0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Provaremos esta afirmação usando um argumento por contradição, isto é, para cada $j \in \mathbb{N}$, suponhamos que existe u_{k_j} de modo que

$$0 \leq \int_{B_g(q, \delta)} c|u_{k_j}|^{2^*} dV_g < \frac{1}{j}, \quad \forall q \in M. \quad (2.12)$$

Como M é compacta, existem $q_1, \dots, q_n \in M$ tais que $M = \bigcup_{i=1}^n B_g(q_i, \delta)$. Assim, por (2.12), temos

$$0 \leq \int_M c|u_{k_j}|^{2^*} dV_g \leq \sum_{i=1}^n \int_{B_g(q_i, \delta)} c|u_{k_j}|^{2^*} dV_g < \frac{n}{j}$$

Consequentemente, $\int_M c|u_{k_j}|^{2^*} dV_g \rightarrow 0$, o que é uma contradição com (2.11). Portanto, temos a afirmação.

Agora, para cada $k \in \mathbb{N}$, consideremos a função concentração de Levy $Q_k : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ dada por

$$Q_k(r) = \max_{q \in M} \int_{B_g(q, r)} c|u_k|^{2^*} dV_g.$$

Temos que Q_k é contínua, não-decrescente e satisfaz $Q_k(0) = 0$ e $Q_k(\delta) \geq \lambda_0$. Fixemos $\lambda \in (0, \lambda_0)$ tal que

$$\lambda < C_1^{-(m+1)} \left(\min_M c \right) \left[\frac{1}{2} S \left(\min_M a \right) \left(\max_M c \right)^{-1} \right]^{m/2}. \quad (2.13)$$

Então, para cada $k \in \mathbb{N}$, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $r_k \in (0, \delta]$ tal que $Q_k(r_k) = \lambda$. Consequentemente, pelo de Teorema de Weierstrass, existe $p_k \in M$ de modo que

$$Q_k(r_k) = \int_{B_g(p_k, r_k)} c|u_k|^{2^*} dV_g = \lambda. \quad (2.14)$$

E, como M é compacta, a menos de subsequência, existe p tal que $p_k \rightarrow p$ em M .

A seguir, fixemos uma função corte $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ tal que $0 \leq \zeta \leq 1$ e

$$\zeta(y) = \begin{cases} 1, & \text{se } y \in B[0, 2\delta], \\ 0, & \text{se } y \notin B(0, 3\delta). \end{cases}$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, definamos

$$v_k(x) := r_k^{(m-2)/2} (u_k \circ \exp_{p_k})(r_k x), \quad \zeta_k(x) := \zeta(r_k x),$$

$$a_k(x) := (a \circ \exp_{p_k})(r_k x) \quad \text{e} \quad c_k(x) := (c \circ \exp_{p_k})(r_k x).$$

Observe que $\text{supp}(\zeta_k v_k) \subset \overline{B(0, 3\delta r_k^{-1})}$. Daí, fazendo $\zeta_k v_k(x) = 0$ se $x \notin B(0, 3\delta r_k^{-1}x)$, temos que $\zeta_k v_k \in D^{1,2}(\mathbb{R}^m)$, pois $\zeta_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ e $v_k \in D^{1,2}(\mathbb{R}^m)$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Como

$\zeta \equiv 1$ em $B(0, r_k)$, usando (2.14), (2.9) e fazendo a mudança de variável $y = r_k x$, obtemos

$$\begin{aligned}
 0 < \lambda &= \int_{B_g(p_k, r_k)} c |u_k|^{2^*} dV_g \\
 &\leq C_1 \int_{B(0, r_k)} (c \circ \exp_{p_k}) |\zeta(u_k \circ \exp_{p_k})|^{2^*} dy \\
 &= C_1 \int_{B(0, 1)} r_k^m c_k |\zeta_k(u_k \circ \exp_{p_k})|^{2^*} dx \\
 &= C_1 \int_{B(0, 1)} c_k |r_k^{m/2^*} \zeta_k(u_k \circ \exp_{p_k})|^{2^*} dx \\
 &= C_1 \int_{B(0, 1)} c_k |\zeta_k v_k|^{2^*} dx.
 \end{aligned}$$

Como $c \in C^\infty$, temos que $|c_k(x)| = |c(\exp_{p_k}(r_k x))| \leq \|c\|_\infty$, para todo $x \in B(0, 1)$ e $k \in \mathbb{N}$. Logo,

$$0 < \lambda \leq C \int_{B(0, 1)} |\zeta_k v_k|^{2^*} dx. \quad (2.15)$$

Além disso, temos que

$$\begin{aligned}
 \int_{B(0, 3\delta r_k^{-1})} |\nabla(\zeta_k v_k)|^2 dx &= \int_{B(0, 3\delta r_k^{-1})} \left| \nabla \left(r_k^{(m-2)/2} \zeta(u_k \circ \exp_{p_k})(r_k x) \right) \right|^2 dx \\
 &= \int_{B(0, 3\delta r_k^{-1})} \left| r_k^{m/2} \nabla(\zeta(u_k \circ \exp_{p_k})(r_k x)) \right|^2 dx \\
 &= \int_{B(0, 3\delta)} |\nabla(\zeta(u_k \circ \exp_{p_k}))|^2 dy.
 \end{aligned}$$

Mas, note que

$$\begin{aligned}
 |\nabla(\zeta(u_k \circ \exp_{p_k}))|^2 &= |\zeta \nabla(u_k \circ \exp_{p_k}) + (u_k \circ \exp_{p_k}) \nabla \zeta|^2 \\
 &= \zeta^2 |\nabla(u_k \circ \exp_{p_k})|^2 + 2\zeta(u_k \circ \exp_{p_k}) \langle \nabla(u_k \circ \exp_{p_k}), \nabla \zeta \rangle \\
 &\quad + (u_k \circ \exp_{p_k})^2 |\nabla \zeta|^2.
 \end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned}
 |\nabla(\zeta(u_k \circ \exp_{p_k}))|^2 &\leq \zeta^2 |\nabla(u_k \circ \exp_{p_k})|^2 + 2\zeta |u_k \circ \exp_{p_k}| \cdot |\nabla(u_k \circ \exp_{p_k})| \cdot |\nabla \zeta| \\
 &\quad + (u_k \circ \exp_{p_k})^2 |\nabla \zeta|^2.
 \end{aligned}$$

Agora, usando a Desigualdade de Young,

$$\zeta |u_k \circ \exp_{p_k}| \cdot |\nabla(u_k \circ \exp_{p_k})| \cdot |\nabla \zeta| \leq \frac{1}{2} \zeta^2 |\nabla(u_k \circ \exp_{p_k})|^2 + \frac{1}{2} (u_k \circ \exp_{p_k})^2 |\nabla \zeta|^2.$$

Assim,

$$|\nabla(\zeta(u_k \circ \exp_{p_k}))|^2 \leq 2\zeta^2 |\nabla(u_k \circ \exp_{p_k})|^2 + 2(u_k \circ \exp_{p_k})^2 |\nabla\zeta|^2.$$

Disto, obtemos que

$$\begin{aligned} \int_{B(0, 3\delta r_k^{-1})} |\nabla(\zeta_k v_k)|^2 dx &\leq C \int_{B(0, 3\delta)} [\zeta^2 |\nabla(u_k \circ \exp_{p_k})|^2 + (u_k \circ \exp_{p_k})^2 |\nabla\zeta|^2] dy \\ &\leq C \int_{B(0, 3\delta)} [|\nabla(u_k \circ \exp_{p_k})|^2 + (u_k \circ \exp_{p_k})^2] dy. \end{aligned}$$

Pelas desigualdades (2.9) e (2.10), concluímos que

$$\int_{B(0, 3\delta r_k^{-1})} |\nabla(\zeta_k v_k)|^2 dx \leq C \int_{B(p_k, 3\delta)} [|\nabla_g u_k|_g^2 + u_k^2] dV_g \leq C \|u_k\|_{H_g^1(M)}^2.$$

Sendo (u_k) uma sequência $(PS)_\tau^\Gamma$ para o funcional J_g , segue do Lema 2.3.2 que (u_k) é limitada em $H_g^1(M)$, donde concluímos que $(\zeta_k v_k)$ é limitada em $D^{1,2}(\mathbb{R}^m)$. Portanto, a menos de subsequência, $\zeta_k v_k \rightharpoonup v$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^m)$, consequentemente, $\zeta_k v_k \rightarrow v$ em $L_{loc}^2(\mathbb{R}^m)$ e $\zeta_k v_k \rightarrow v$ q.t.p em $\mathbb{R}^m$.

Afirmção 1. $v \neq 0$.

Para provar esta afirmação, primeiro note que existe $C_2 > 1$ tal que, para cada $q \in M$, tem-se

$$C_2^{-1} |y - z| \leq d_g(\exp_q(y), \exp_q(z)) \leq C_2 |y - z|, \quad \forall y, z \in B(0, 2\delta), \quad (2.16)$$

onde d_g é a distância em M induzida pela métrica g . De fato, dados $y, z \in B(0, 2\delta)$ e $q \in M$, considere a curva $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ definida por $\alpha(t) = \exp_q(r(t))$, com $r(t) = y + t(z - y)$. Sendo $2\delta < i_g$ e desde que $\exp_q : B(0, 2\delta) \rightarrow B_g(q, 2\delta)$ é um difeomorfismo, obtemos

$$\begin{aligned} d_g(\exp_q(y), \exp_q(z)) \leq L_g(\alpha) &= \int_0^1 \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_g^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_0^1 \|d(\exp_q(r(t))) \cdot (z - y)\|_g dt \\ &\leq \int_0^1 \|d(\exp_q(r(t)))\|_g |z - y| dt \\ &\leq C |z - y|. \end{aligned}$$

Para a desigualdade do lado esquerdo usamos um argumento semelhante para inversa da função exponencial.

Seja $C_2 > 0$ dado em (2.16), e consideremos $\rho := C_2^{-1} < 1$. Então, $r_k \rho < r_k < \delta$ e,

para cada $z \in \overline{B(0, 1)}$, temos que

$$B_g(\exp_{p_k}(r_k z), r_k \rho) = \exp_{p_k}(B(r_k z, r_k \rho)) \subset B_g(\exp_{p_k}(r_k z), r_k). \quad (2.17)$$

Assumiremos por contradição que $v = 0$. Seja $\vartheta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ tal que $\text{supp}(\vartheta) \subset B(z, \rho)$ para algum $z \in \overline{B(0, 1)}$. Então, $\text{supp}(\vartheta) \subset B(0, 2)$, pois $\rho < 1$. Considere $\hat{\vartheta}_k := \vartheta(r_k^{-1} \exp_{p_k}^{-1}(q))$. Como $\zeta_k \equiv 1$ em $B(0, 2\delta r_k^{-1})$ e $B(0, 2) \subset B(0, 2\delta r_k^{-1})$, segue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} |\nabla(\vartheta \zeta_k v_k)|^2 dx &= \int_{B(0, 2)} |\nabla(\vartheta v_k(x))|^2 dx \\ &= \int_{B(0, 2r_k)} r_k^{-m} |\nabla(\vartheta v_k(r_k^{-1} y))|^2 dy \\ &= \int_{B(0, 2r_k)} r_k^{-m} r_k^2 |r_k^{-1} \nabla(\vartheta v_k(r_k^{-1} y))|^2 dy \\ &= \int_{B(0, 2r_k)} r^{2-m} \left| \nabla \left(\vartheta(r_k^{-1} y) r_k^{(m-2)/2} (u_k \circ \exp_{p_k})(y) \right) \right|^2 dy \\ &= \int_{B(0, 2r_k)} \left| \nabla \left((\hat{\vartheta}_k u_k) \circ \exp_{p_k} \right) \right|^2 dy. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade (2.10), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} |\nabla(\vartheta \zeta_k v_k)|^2 dx &\leq C_1 \int_{B(p_k, 2r_k)} \left| \nabla_g(\hat{\vartheta}_k u_k) \right|_g^2 dV_g \\ &\leq C_3 \int_{B(p_k, 2r_k)} a \left| \nabla_g(\hat{\vartheta}_k u_k) \right|_g^2 dV_g \\ &= C_3 \int_{B(p_k, 2r_k)} a \left[\left| \hat{\vartheta}_k \nabla_g u_k + u_k \nabla_g \hat{\vartheta}_k \right|_g^2 \right] dV_g =: E_{1,k}, \end{aligned}$$

onde $C_3 = C_1(\min_M a)^{-1}$. Podemos escrever $E_{1,k}$ como

$$\begin{aligned} E_{1,k} &= C_3 \int_{B(p_k, 2r_k)} a \left[\hat{\vartheta}_k^2 |\nabla_g u_k|_g^2 + 2\hat{\vartheta}_k u_k \langle \nabla_g u_k, \nabla_g \hat{\vartheta}_k \rangle_g + u_k^2 |\nabla_g \hat{\vartheta}_k|_g^2 \right] dV_g \\ &= C_3 \int_{B(p_k, 2r_k)} \left[a \langle \nabla_g u_k, \nabla_g(\hat{\vartheta}_k^2 u_k) \rangle_g + a u_k^2 |\nabla_g \hat{\vartheta}_k|_g^2 \right] dV_g. \end{aligned}$$

A fim de estimar cada termo da integral

$$E_{2,k} := \int_{B(p_k, 2r_k)} \left[a \langle \nabla_g u_k, \nabla_g(\hat{\vartheta}_k^2 u_k) \rangle_g + a u_k^2 |\nabla_g \hat{\vartheta}_k|_g^2 \right] dV_g,$$

notemos que

$$\begin{aligned} J'_g(u_k) \cdot (\hat{\vartheta}_k^2 u_k) &= \int_M a \langle \nabla_g u_k, \nabla_g (\hat{\vartheta}_k^2 u_k) \rangle_g dV_g - \int_M c |u_k|^{2^*-2} u_k (\hat{\vartheta}_k^2 u_k) dV_g \\ &= \int_{B(p_k, 2r_k)} a \langle \nabla_g u_k, \nabla_g (\hat{\vartheta}_k^2 u_k) \rangle_g dV_g - \int_{B(p_k, 2r_k)} c |u_k|^{2^*-2} (\hat{\vartheta}_k^2 u_k)^2 dV_g. \end{aligned}$$

Como $J'_g(u_k) \rightarrow 0$ em $(H_g^1(M))'$ e $\hat{\vartheta}_k^2 u_k$ é limitada em $H_g^1(M)$, temos

$$\int_{B(p_k, 2r_k)} a \langle \nabla_g u_k, \nabla_g (\hat{\vartheta}_k^2 u_k) \rangle_g dV_g = \int_{B(p_k, 2r_k)} c |u_k|^{2^*-2} (\hat{\vartheta}_k^2 u_k)^2 dV_g + o_k(1).$$

Além disso, pela desigualdade (2.9), temos

$$\begin{aligned} \int_{B(p_k, 2r_k)} a u_k^2 |\nabla_g \hat{\vartheta}_k|^2_g dV_g &\leq C \int_{B(0, 2r_k)} (u_k \circ \exp_{p_k})^2(x) |\nabla_g \vartheta(r_k^{-1}x)|^2 dx \\ &= C \int_{B(0, 2)} r_k^{m-2} (u_k \circ \exp_{p_k})^2(r_k y) |\nabla_g \vartheta(y)|^2 dy \\ &= C \int_{B(0, 2)} (\zeta_k v_k)^2 |\nabla \vartheta|^2 dy \\ &\leq C \int_{B(0, 2)} (\zeta_k v_k)^2 dy. \end{aligned}$$

Assim, desde que $\zeta_k v_k \rightarrow 0$ em $L_{loc}^2(\mathbb{R}^m)$, segue que

$$\int_{B(p_k, 2r_k)} a u_k^2 |\nabla_g \hat{\vartheta}_k|^2_g dV_g = o_k(1).$$

Combinando estas estimativas, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^m} |\nabla(\vartheta \zeta_k v_k)|^2 dx \leq C_3 \int_{B(p_k, 2r_k)} c |u_k|^{2^*-2} (\hat{\vartheta}_k^2 u_k)^2 dV_g + o_k(1).$$

Agora, usando a desigualdade (2.9) e denotando $C_4 = C_1(\max_M c)C_3$, resulta em

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} |\nabla(\vartheta \zeta_k v_k)|^2 dx &\leq C_4 \int_{B(0, 2r_k)} |u_k \circ \exp_{p_k}|^{2^*-2} \left((\hat{\vartheta}_k^2 u_k) \circ \exp_{p_k} \right)^2 dx + o_k(1) \\ &= C_4 \int_{B(0, 2r_k)} |(u_k \circ \exp_{p_k})(x)|^{2^*-2} \left(\vartheta(r_k^{-1}x) (u_k \circ \exp_{p_k})(x) \right)^2 dx + o_k(1) \\ &= C_4 \int_{B(0, 2)} r_k^m |(u_k \circ \exp_{p_k})(r_k y)|^{2^*-2} \left(\vartheta(y) (u_k \circ \exp_{p_k})(r_k y) \right)^2 dy + o_k(1) \\ &= C_4 \int_{B(0, 2)} \left| r_k^{\frac{m-2}{2}} (u_k \circ \exp_{p_k})(r_k y) \right|^{2^*-2} \left(\vartheta(y) r_k^{\frac{m-2}{2}} (u_k \circ \exp_{p_k})(r_k y) \right)^2 dy + o_k(1) \end{aligned}$$

$$= C_4 \int_{B(0,2)} |v_k|^{2^*-2} (\vartheta v_k)^2 dy + o_k(1).$$

Como $\text{supp}(\vartheta) \subset B(z, \rho) \subset B(0, 2)$ e $\zeta_k \equiv 1$ em $B(0, 2)$, usando a Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{B(0,2)} |v_k|^{2^*-2} (\vartheta v_k)^2 dx &= \int_{B(z,\rho)} |v_k|^{2^*-2} (\vartheta v_k)^2 dx \\ &\leq \left(\int_{B(z,\rho)} |v_k|^{2^*} dx \right)^{\frac{2^*-2}{2^*}} \left(\int_{B(z,\rho)} |\vartheta v_k|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \\ &= \left(\int_{B(z,\rho)} |v_k|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{m}} \left(\int_{B(0,2)} |\vartheta \zeta_k v_k|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}}. \end{aligned}$$

Então, usando a imersão contínua $D^{1,2}(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^m)$, concluímos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} |\nabla(\vartheta \zeta_k v_k)|^2 dx &\leq C_4 \left(\int_{B(z,\rho)} |v_k|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{m}} \left(\int_{B(0,2)} |\vartheta \zeta_k v_k|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} + o_k(1) \\ &\leq C_4 S^{-1} \left(\int_{B(z,\rho)} |v_k|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{m}} \int_{\mathbb{R}^m} |\nabla(\vartheta \zeta_k v_k)|^2 dx + o_k(1). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Como

$$\begin{aligned} \int_{B(z,\rho)} |v_k|^{2^*} dx &= \int_{B(z,\rho)} |r_k^{(m-2)/2} (u_k \circ \exp_{p_k})(r_k x)|^{2^*} dx \\ &= \int_{B(r_k z, r_k \rho)} |(u_k \circ \exp_{p_k})(y)|^{2^*} dy, \end{aligned}$$

usando (2.9), (2.17) e (2.14), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{B(z,\rho)} |v_k|^{2^*} dx &\stackrel{(2.9)}{\leq} C_1 \int_{B_g(\exp_{p_k}(r_k z), r_k \rho)} |u_k|^{2^*} dV_g \\ &\stackrel{(2.17)}{\leq} C_1 (\min_M c)^{-1} \int_{B_g(\exp_{p_k}(r_k z), r_k \rho)} c |u_k|^{2^*} dV_g \stackrel{(2.14)}{\leq} C_1 (\min_M c)^{-1} \lambda. \end{aligned}$$

Mas, segue de (2.13) que

$$\begin{aligned} \left(C_1 \left(\min_M c \right)^{-1} \lambda \right)^{\frac{2}{m}} &< C_1^{-2} \frac{1}{2} S \left(\min_M a \right) \left(\max_M c \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{2} S \left(C_1 \left(\max_M c \right) C_1 \left(\min_M a \right)^{-1} \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{2} S C_4^{-1}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\left(\int_{B(z,\rho)} |v_k|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{m}} \leq \frac{1}{2} SC_4^{-1}.$$

Assim, por (2.18), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^m} |\nabla(\vartheta \zeta_k v_k)|^2 dx < \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^m} |\nabla(\vartheta \zeta_k v_k)|^2 dx + o_k(1).$$

Portanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^m} |\nabla(\vartheta \zeta_k v_k)|^2 dx = 0.$$

Donde, pela imersão contínua $D^{1,2}(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^m)$, concluímos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^m} |\vartheta \zeta_k v_k|^{2^*} dx = 0$$

para todo $\vartheta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ tal que $\text{supp}(\vartheta) \subset B(z, \rho)$ para algum $z \in \overline{B(0, 1)}$. Como $B(0, 1)$ pode ser coberta por um número finito de bolas $B(z_j, \rho)$ com $z_j \in \overline{B(0, 1)}$, tomando a partição da unidade $\vartheta_j^{2^*}$ subordinada a esta cobertura, temos que $\sum_j \vartheta_j^{2^*}(x) = 1$ para todo $x \in B(0, 1)$ e $\text{supp}(\vartheta_j^{2^*}) \subset B(z_j, \rho)$. Assim,

$$\begin{aligned} \int_{B(0,1)} |\zeta_k v_k|^{2^*} dx &= \int_{B(0,1)} \left(\sum_j \vartheta_j^{2^*}(x) \right) |\zeta_k v_k|^{2^*} dx \\ &= \int_{B(0,1)} \sum_j |\vartheta_j \zeta_k v_k|^{2^*} dx \\ &= \sum_j \int_{B(0,1)} |\vartheta_j \zeta_k v_k|^{2^*} dx \\ &\leq \sum_j \int_{\mathbb{R}^m} |\vartheta_j \zeta_k v_k|^{2^*} dx. \end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B(0,1)} |\zeta_k v_k|^{2^*} dx = 0$. Isto finaliza a prova da Afirmação 1.

Afirmação 2. $\hat{v} = \left(\frac{c(p)}{a(p)} \right)^{(m-2)/4} v$ é uma solução não trivial para o problema (2.8).

Primeiro mostraremos que, a menos de subsequência, $r_k \rightarrow 0$. De fato, argumentando por contradição, suponha que $r_k > \theta > 0$ para todo k suficientemente grande. Então, como $\zeta_k v_k \rightarrow v$ em $L_{loc}^2(\mathbb{R}^m)$, $\text{supp}(\zeta_k v_k) \subset \overline{B(0, 3\delta r_k^{-1})}$ e $v \neq 0$, fazendo a mudança de variável $y = r_k x$, segue que

$$\begin{aligned}
0 < \int_{B(0,3\delta\theta^{-1})} |v|^2 dx &= \int_{B(0,3\delta\theta^{-1})} |\zeta_k v_k|^2 dx + o_k(1) \\
&= \int_{B(0,3\delta r_k^{-1})} |\zeta(r_k x) r_k^{\frac{m-2}{2}} (u_k \circ \exp_{p_k})(r_k x)|^2 dx + o_k(1) \\
&= r_k^{-2} \int_{B(0,3\delta)} |\zeta(u_k \circ \exp_{p_k})|^2 dy + o_k(1).
\end{aligned}$$

Usando o fato que $0 \leq \zeta \leq 1$ e a desigualdade (2.9), temos para k suficientemente grande que

$$\begin{aligned}
0 < \int_{B(0,3\delta\theta^{-1})} |v|^2 dx &\leq r_k^{-2} \int_{B(0,3\delta)} |u_k \circ \exp_{p_k}|^2 dy + o_k(1) \\
&\stackrel{(2.9)}{\leq} C_1 r_k^{-2} \int_{B_g(p_k, 3\delta)} |u_k|^2 dV_g + o_k(1) \\
&\leq C_1 \theta^{-2} \int_M |u_k|^2 dV_g + o_k(1) \\
&\leq C_1 \theta^{-2} |u_k|_2^2 + o_k(1).
\end{aligned}$$

Isto implica numa contradição, pois, como $u_k \rightharpoonup 0$ em $H_g^1(M)$, temos que $u_k \rightarrow 0$ em $L^2(M)$. Logo, $r_k \rightarrow 0$.

Agora, observe que provar a Afirmação 2 é equivalente mostrar que v é solução fraca do problema

$$\begin{cases} -a(p)\Delta v = c(p)|v|^{2^*-2}v \\ v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^m) \end{cases},$$

isto é, precisamos mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^m} a(p) \langle \nabla v, \nabla \varphi \rangle dx = \int_{\mathbb{R}^m} c(p) |v|^{2^*-2} v \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m). \quad (2.19)$$

Para isto, tome $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ e seja $R > 0$ tal que $\text{supp}(\varphi) \subset B(0, R)$. Como $r_k \rightarrow 0$, podemos tomar $k \in \mathbb{N}$ tal que $Rr_k < 2\delta$. Para cada k satisfazendo esta condição defina $\hat{\varphi}_k \in H_g^1(M)$ por

$$\hat{\varphi}_k(q) = r_k^{\frac{2-m}{2}} \varphi(r_k^{-1} \exp_{p_k}^{-1}(q)).$$

Como $p_k \rightarrow p$, $r_k \rightarrow 0$ e a aplicação exponencial é contínua, segue que $\exp_{p_k}(r_k x) \rightarrow \exp_p(0) = p$ para todo $x \in B(0, 3\delta r_k^{-1})$. Logo, $a_k(x) \rightarrow a(p)$ e $c_k(x) \rightarrow c(p)$ em $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^m)$.

Agora, observe que

$$\begin{aligned}
E_{k,3} &= \left| \int_{\mathbb{R}^m} a_k \langle \nabla(\zeta_k v_k), \nabla \varphi \rangle dx - \int_{\mathbb{R}^m} a(p) \langle \nabla v, \nabla \varphi \rangle dx \right| \\
&\leq \left| \int_{\mathbb{R}^m} (a_k - a(p)) \langle \nabla(\zeta_k v_k), \nabla \varphi \rangle dx \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^m} a(p) (\langle \nabla(\zeta_k v_k), \nabla \varphi \rangle - \langle \nabla v, \nabla \varphi \rangle) dx \right| \\
&\leq \|a_k - a(p)\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^m} |\langle \nabla(\zeta_k v_k), \nabla \varphi \rangle| dx + a(p) \left| \int_{\mathbb{R}^m} [\langle \nabla(\zeta_k v_k), \nabla \varphi \rangle - \langle \nabla v, \nabla \varphi \rangle] dx \right|
\end{aligned}$$

Porém, sendo $(\zeta_k v_k)$ limitada em $D^{1,2}(\mathbb{R}^m)$, pelas Desigualdades de Cauchy-Schwarz e Hölder, temos

$$\int_{\mathbb{R}^m} |\langle \nabla(\zeta_k v_k), \nabla \varphi \rangle| dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^m} |\nabla(\zeta_k v_k)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |\nabla \varphi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C.$$

Por outro lado, como $\zeta_k v_k \rightharpoonup v$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^m)$ e a aplicação

$$\begin{aligned}
\langle \cdot, \cdot \rangle_* : D^{1,2}(\mathbb{R}^m) \times D^{1,2}(\mathbb{R}^m) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
(u, v) &\longmapsto \int_{\mathbb{R}^m} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx
\end{aligned}$$

define um produto interno em $D^{1,2}(\mathbb{R}^m)$, segue que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^m} [\langle \nabla(\zeta_k v_k), \nabla \varphi \rangle - \langle \nabla v, \nabla \varphi \rangle] dx \right| = |\langle \zeta_k v_k, \varphi \rangle_* - \langle v, \varphi \rangle_*| = o_k(1).$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^m} a(p) \langle \nabla v, \nabla \varphi \rangle dx = \int_{\mathbb{R}^m} a_k \langle \nabla(\zeta_k v_k), \nabla \varphi \rangle dx + o_k(1). \quad (2.20)$$

Além disso, como $\text{supp}(\varphi) \subset B(0, R)$, temos

$$\begin{aligned}
E_{k,4} &= \left| \int_{\mathbb{R}^m} c_k |\zeta_k v_k|^{2^*-2} (\zeta_k v_k) \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^m} c(p) |v|^{2^*-2} v \varphi dx \right| \\
&\leq \left| \int_{B(0,R)} (c_k - c(p)) |\zeta_k v_k|^{2^*-2} (\zeta_k v_k) \varphi dx \right| + \left| \int_{B(0,R)} c(p) (|\zeta_k v_k|^{2^*-2} (\zeta_k v_k) - |v|^{2^*-2} v) \varphi dx \right| \\
&\leq \|c_k - c(p)\|_\infty \|\varphi\|_\infty \int_{B(0,R)} |\zeta_k v_k|^{2^*-1} dx + c(p) \|\varphi\|_\infty \int_{B(0,R)} \left| |\zeta_k v_k|^{2^*-2} (\zeta_k v_k) - |v|^{2^*-2} v \right| dx.
\end{aligned}$$

Sendo $(\zeta_k v_k)$ limitada em $D^{1,2}(\mathbb{R}^m)$ e $D^{1,2}(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^m)$, pela desigualdade de Hölder,

$$\int_{B(0,R)} |\zeta_k v_k|^{2^*-1} dx \leq \left(\int_{B(0,R)} dx \right)^{\frac{1}{2^*}} \left(\int_{B(0,R)} |\zeta_k v_k|^{2^*} dx \right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \leq C.$$

E, como $\zeta_k v_k \rightharpoonup v$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^m)$, temos que $\zeta_k v_k \rightarrow v$ em $L_{loc}^{2^*-1}(\mathbb{R}^m)$. Então,

$$\int_{B(0,R)} ||\zeta_k v_k|^{2^*-2}(\zeta_k v_k)| dx \rightarrow \int_{B(0,R)} ||v|^{2^*-2}v| dx,$$

ou seja,

$$\int_{B(0,R)} ||\zeta_k v_k|^{2^*-2}(\zeta_k v_k) - |v|^{2^*-2}v| dx = o_k(1).$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^m} c_k |\zeta_k v_k|^{2^*-2}(\zeta_k v_k) \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^m} c(p) |v|^{2^*-2}v \varphi dx + o_k(1). \quad (2.21)$$

A seguir, observe que, se (g_{ij}^k) é a métrica g escrita em coordenadas normais em torno de p_k , (g_k^{ji}) é a sua inversa, $|g^k| := \det(g_{ij}^k)$ e (∂^{ji}) é a matriz identidade, então, para cada $i, j = 1, \dots, m$,

$$\lim_{|y| \rightarrow 0} g_k^{ji}(y) = \partial^{ij} \quad \text{e} \quad \lim_{|y| \rightarrow 0} |g^k|^{\frac{1}{2}}(y) = 1. \quad (2.22)$$

uniformemente em k . Portanto, como $\text{supp}(\hat{\varphi}_k \circ \exp_{p_k}) \subset B(0, Rr_k)$, $r_k \rightarrow 0$, e $u_k \circ \exp_{p_k}$ e $\hat{\varphi}_k \circ \exp_{p_k}$ são limitadas em $D^{1,2}(\mathbb{R}^m)$, usando (2.22), obtemos que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^m} (a \circ \exp_{p_k}) \langle \nabla(u_k \circ \exp_{p_k}), \nabla(\hat{\varphi}_k \circ \exp_{p_k}) \rangle dy - \int_M a \langle \nabla_g u_k, \nabla_g \hat{\varphi}_k \rangle_g dV_g \\ &= \int_{B(0, Rr_k)} \sum_{i,j}^m (a \circ \exp_{p_k}) \partial_i(u_k \circ \exp_{p_k}) \partial_j(\hat{\varphi}_k \circ \exp_{p_k}) \partial^{ji} dy \\ & \quad - \int_{B_g(p_k, Rr_k)} \sum_{i,j}^m a \partial_i(u_k) \partial_j(\hat{\varphi}_k) g_k^{ji} dV_g \\ &= \sum_{i,j}^m \int_{B(0, Rr_k)} (a \circ \exp_{p_k}) \partial_i(u_k \circ \exp_{p_k}) \partial_j(\hat{\varphi}_k \circ \exp_{p_k}) \partial^{ji} dy \\ & \quad - \sum_{i,j}^m \int_{B(0, Rr_k)} (a \circ \exp_{p_k}) \partial_i(u_k \circ \exp_{p_k}) \partial_j(\hat{\varphi}_k \circ \exp_{p_k}) g_k^{ji} |g^k|^{\frac{1}{2}} dy \\ &= \sum_{i,j}^m \int_{B(0, Rr_k)} (a \circ \exp_{p_k}) (\partial^{ji} - |g^k|^{1/2} g_k^{ji}) \partial_i(u_k \circ \exp_{p_k}) \partial_j(\hat{\varphi}_k \circ \exp_{p_k}) dy \\ &= o_k(1). \end{aligned} \quad (2.23)$$

e

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^m} (c \circ \exp_{p_k}) |u_k \circ \exp_{p_k}|^{2^*-2} (u_k \circ \exp_{p_k}) (\hat{\varphi}_k \circ \exp_{p_k}) dy - \int_M c |u_k|^{2^*-2} u_k \hat{\varphi}_k dV_g \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} (c \circ \exp_{p_k}) |u_k \circ \exp_{p_k}|^{2^*-2} (u_k \circ \exp_{p_k}) (\hat{\varphi}_k \circ \exp_{p_k}) \left(1 - |g^k|^{\frac{1}{2}}\right) dy \\ &= o_k(1). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Como $J'_g(u_k) \rightarrow 0$ em $(H_g^1(M))'$, $(\hat{\varphi}_k)$ é limitada em $H_g^1(M)$ e

$$J'_g(u_k) \cdot (\hat{\varphi}_k) = \int_M a \langle \nabla_g u_k, \nabla_g \hat{\varphi}_k \rangle_g dV_g - \int_M c |u_k|^{2^*-2} u_k \hat{\varphi}_k dV_g,$$

segue que

$$\int_M a \langle \nabla_g u_k, \nabla_g \hat{\varphi}_k \rangle_g dV_g = \int_M c |u_k|^{2^*-2} u_k \hat{\varphi}_k dV_g + o_k(1). \quad (2.25)$$

Uma vez que $\text{supp}(\varphi) \subset B(0, R)$, $\zeta_k \equiv 1$ em $B(0, 2\delta r_k^{-1})$ e $B(0, R) \subset B(0, 2\delta r_k^{-1})$ para k suficientemente grande, por (2.20), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} a(p) \langle \nabla v, \nabla \varphi \rangle dx &\stackrel{(2.20)}{=} \int_{\mathbb{R}^m} a_k \langle \nabla(\zeta_k v_k), \nabla \varphi \rangle dx + o_k(1) \\ &= \int_{B(0, R)} (a \circ \exp_{p_k})(r_k x) \left\langle \nabla \left(r_k^{(m-2)/2} (u_k \circ \exp_{p_k})(r_k x) \right), \nabla \varphi(x) \right\rangle dx + o_k(1). \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $y = r_k x$, temos

$$\begin{aligned} &\int_{B(0, R)} (a \circ \exp_{p_k})(r_k x) \left\langle \nabla \left(r_k^{(m-2)/2} (u_k \circ \exp_{p_k})(r_k x) \right), \nabla \varphi(x) \right\rangle dx \\ &= \int_{B(0, R r_k)} (a \circ \exp_{p_k})(y) r_k^{-m} \left\langle r_k^{m/2} \nabla(u_k \circ \exp_{p_k})(y), \nabla \varphi(r_k^{-1} y) \right\rangle dy \\ &= \int_{B(0, R r_k)} (a \circ \exp_{p_k})(y) \left\langle \nabla(u_k \circ \exp_{p_k})(y), r_k^{(2-m)/2} \nabla \varphi(r_k^{-1} y) \right\rangle dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} (a \circ \exp_{p_k}) \langle \nabla(u_k \circ \exp_{p_k}), \nabla(\hat{\varphi}_k \circ \exp_{p_k}) \rangle dy. \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^m} a(p) \langle \nabla v, \nabla \varphi \rangle dx = \int_{\mathbb{R}^m} (a \circ \exp_{p_k}) \langle \nabla(u_k \circ \exp_{p_k}), \nabla(\hat{\varphi}_k \circ \exp_{p_k}) \rangle dy + o_k(1).$$

Agora, usando (2.23), (2.25) e (2.24), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} a(p) \langle \nabla v, \nabla \varphi \rangle dx &= \int_{\mathbb{R}^m} (a \circ \exp_{p_k}) \langle \nabla(u_k \circ \exp_{p_k}), \nabla(\hat{\varphi}_k \circ \exp_{p_k}) \rangle dy + o_k(1) \\ &\stackrel{(2.23)}{=} \int_M a \langle \nabla_g u_k, \nabla_g \hat{\varphi}_k \rangle_g dV_g + o_k(1) \\ &\stackrel{(2.25)}{=} \int_M c |u_k|^{2^*-2} u_k \hat{\varphi}_k dV_g + o_k(1) \\ &\stackrel{(2.24)}{=} \int_{\mathbb{R}^m} (c \circ \exp_{p_k}) |u_k \circ \exp_{p_k}|^{2^*-2} (u_k \circ \exp_{p_k}) (\hat{\varphi}_k \circ \exp_{p_k}) dy + o_k(1). \end{aligned}$$

Novamente, fazendo a mudança de variável $y = r_k x$, segue que

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^m} (c \circ \exp_{p_k}) |u_k \circ \exp_{p_k}|^{2^*-2} (\hat{\varphi}_k \circ \exp_{p_k}) dy \\
&= \int_{B(0, Rr_k)} (c \circ \exp_{p_k})(y) |(u_k \circ \exp_{p_k})(y)|^{2^*-2} (u_k \circ \exp_{p_k})(y) r_k^{(2-m)/2} \varphi(r_k^{-1} y) dy \\
&= \int_{B(0, R)} (c \circ \exp_{p_k})(r_k x) |(u_k \circ \exp_{p_k})(r_k x)|^{2^*-2} r_k^{(m+2)/2} (u_k \circ \exp_{p_k})(r_k x) \varphi(x) dx \\
&= \int_{B(0, R)} c_k |r_k^{(m-2)/2} (u_k \circ \exp_{p_k})(r_k x)|^{2^*-2} r_k^{(m-2)/2} (u_k \circ \exp_{p_k})(r_k x) \varphi(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} c_k |\zeta_k v_k|^{2^*-2} (\zeta_k v_k) \varphi dx.
\end{aligned}$$

E usando (2.21), temos

$$\int_{\mathbb{R}^m} (c \circ \exp_{p_k}) |u_k \circ \exp_{p_k}|^{2^*-2} (\hat{\varphi}_k \circ \exp_{p_k}) dy = \int_{\mathbb{R}^m} c(p) |v|^{2^*-2} v \varphi dx + o_k(1).$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^m} a(p) \langle \nabla v, \nabla \varphi \rangle dx = \int_{\mathbb{R}^m} c(p) |v|^{2^*-2} v \varphi dx + o_k(1).$$

Disto, obtemos (2.19), o que prova a Afirmação 2.

Afirmação 3. $\#\Gamma(p) < \infty$.

Sejam $\gamma_1(p) \cdots \gamma_n(p)$, n pontos distintos na Γ -órbita $\Gamma(p)$ de p . Desde que c e u_k são funções Γ -invariantes e γ_i é uma isometria, pelo teorema da mudança de variável para cada $\rho \in (0, \delta] \subset (0, i_g)$, temos que

$$\int_{B_g(p_k, \rho)} c |u_k|^{2^*} dV_g = \int_{B_g(p_k, \rho)} (c \circ \gamma_i) |u_k \circ \gamma_i|^{2^*} dV_g = \int_{\gamma_i(B_g(p_k, \rho))} c |u_k|^{2^*} dV_g.$$

Mas, note que $\gamma_i(B_g(p_k, \rho)) \subset B_g(\gamma_i(p_k), \rho)$, para cada $i = 1, \dots, n$. Assim,

$$\int_{\gamma_i(B_g(p_k, \rho))} c |u_k|^{2^*} dV_g \leq \int_{B_g(\gamma_i(p_k), \rho)} c |u_k|^{2^*} dV_g,$$

o que implica em

$$n \int_{B_g(p_k, \rho)} c |u_k|^{2^*} dV_g \leq \sum_{i=1}^n \int_{B_g(\gamma_i(p_k), \rho)} c |u_k|^{2^*} dV_g \leq \int_M c |u_k|^{2^*} dV_g. \quad (2.26)$$

Uma vez que $\lim_{|y| \rightarrow 0} |g^k|^{\frac{1}{2}}(y) = 1$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\rho \in (0, \delta]$ tal que

$$(1 + \varepsilon)^{-1} < |g^k|^{1/2}(y) < (1 + \varepsilon),$$

para todo $y \in B(0, \rho)$ e k suficientemente grande. Daí,

$$\begin{aligned} \int_{B_g(p_k, \rho)} c|u_k|^{2^*} dV_g &= \int_{B(0, \rho)} (c \circ \exp_{p_k}) |u_k \circ \exp_{p_k}|^{2^*} |g^k|^{1/2} dy \\ &\geq (1 + \varepsilon)^{-1} \int_{B(0, \rho)} (c \circ \exp_{p_k}) |u_k \circ \exp_{p_k}|^{2^*} dy. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Como $B(0, \rho r_k^{-1}) \subset B(0, 2\delta r_k^{-1})$, $\zeta_k \equiv 1$ em $B(0, 2\delta r_k^{-1})$, e $\chi_{B(0, \rho r_k^{-1})} c_k \rightarrow c(p)$ e $\zeta_k v_k \rightarrow v$ q.t.p em $\mathbb{R}^m$, pelo Lema de Fatou, (2.27), (2.26) e (2.11), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{n}{m} \int_{\mathbb{R}^m} c(p) |v|^{2^*} dx &= \frac{n}{m} \int_{\mathbb{R}^m} \liminf_{k \rightarrow \infty} \chi_{B(0, \rho r_k^{-1})} c_k |\zeta_k v_k|^{2^*} dx \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{n}{m} \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{B(0, \rho r_k^{-1})} c_k |\zeta_k v_k|^{2^*} dx \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{n}{m} \int_{B(0, \rho r_k^{-1})} c_k |v_k|^{2^*} dx \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{n}{m} \int_{B(0, \rho)} (c \circ \exp_{p_k}) |u_k \circ \exp_{p_k}|^{2^*} dy \\ &\stackrel{(2.27)}{\leq} (1 + \varepsilon) \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{n}{m} \int_{B_g(p_k, \rho)} c|u_k|^{2^*} dV_g \\ &\stackrel{(2.26)}{\leq} (1 + \varepsilon) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \int_M c|u_k|^{2^*} dV_g \\ &\stackrel{(2.11)}{=} (1 + \varepsilon) \tau. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Isto implica que $\#\Gamma(p) < \infty$. Com efeito, se $\#\Gamma(p) = \infty$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{m} \int_{\mathbb{R}^m} c(p) |v|^{2^*} dx = \infty$, o que contradiz (2.28). Logo, $\#\Gamma(p) < \infty$. Pela Afirmação 2, temos

$$J'_\infty(\hat{v}) \cdot \hat{v} = \int_{\mathbb{R}^m} |\nabla \hat{v}|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^m} |\hat{v}|^{2^*} dx = 0.$$

Daí,

$$\int_{\mathbb{R}^m} |\nabla \hat{v}|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^m} |\hat{v}|^{2^*} dx \quad \text{e} \quad J_\infty(\hat{v}) = \frac{1}{m} \int_{\mathbb{R}^m} |\hat{v}|^{2^*} dx. \quad (2.29)$$

Mas, como

$$S = \inf_{v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^m) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^m} |\nabla v|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^m} |v|^{2^*} dx \right)^{2/2^*}},$$

segue que

$$S^{1/2} \leq \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^m} |\nabla \widehat{v}| dx \right)^{1/2}}{\left(\int_{\mathbb{R}^m} |\widehat{v}|^{2^*} dx \right)^{1/2^*}} = \left(\int_{\mathbb{R}^m} |\widehat{v}|^{2^*} dx \right)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}} = \left(\int_{\mathbb{R}^m} |\widehat{v}|^{2^*} dx \right)^{\frac{1}{m}}.$$

Logo, por (2.29),

$$\frac{1}{m} S^{m/2} \leq J_\infty(\widehat{v}).$$

Portanto, sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário, tomando $n = \#\Gamma(p)$, concluímos por (2.28) que

$$\begin{aligned} \left(\min_{q \in M} \frac{a(q)^{m/2} \#\Gamma(q)}{c(q)^{(m-2)/2}} \right) \frac{1}{m} S^{m/2} &\leq \left(\frac{a(p)^{m/2} \#\Gamma(p)}{c(p)^{(m-2)/2}} \right) J_\infty(\widehat{v}) \\ &= \left(\frac{a(p)^{m/2} \#\Gamma(p)}{c(p)^{(m-2)/2}} \right) \frac{1}{m} \int_{\mathbb{R}^m} |\widehat{v}|^{2^*} dx \\ &= \left(\frac{a(p)^{m/2} \#\Gamma(p)}{c(p)^{(m-2)/2}} \right) \frac{1}{m} \left(\frac{c(p)}{a(p)} \right)^{m/2} \int_{\mathbb{R}^m} |v|^{2^*} dx \\ &= \frac{\#\Gamma(p)}{m} \int_{\mathbb{R}^m} c(p) |v|^{2^*} dx \\ &\stackrel{(2.28)}{\leq} \tau, \end{aligned}$$

o que finaliza a prova da proposição. $\square$

Teorema 2.3.4 (*Compacidade*). *O funcional J_g satisfaz a condição $(PS)_\tau^\Gamma$ em $H_g^1(M)$ para cada*

$$\tau < \left(\min_{q \in M} \frac{a(q)^{m/2} \#\Gamma(q)}{c(q)^{(m-2)/2}} \right) \frac{1}{m} S^{m/2},$$

onde S é a melhor constante de Sobolev para a imersão contínua $D^{1,2}(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^m)$. Em particular, se $\#\Gamma(p) = \infty$ para todo $p \in M$, então J_g satisfaz a condição $(PS)_\tau^\Gamma$ em $H_g^1(M)$ para todo $\tau \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Seja (u_k) uma sequência $(PS)_\tau^\Gamma$ tal que

$$\tau < \left(\min_{q \in M} \frac{a(q)^{m/2} \#\Gamma(q)}{c(q)^{(m-2)/2}} \right) \frac{1}{m} S^{m/2}.$$

Pelo Lema 2.3.2, (u_k) é limitada em $H_g^1(M)$, assim, a menos de subsequência, $u_k \rightharpoonup u$ em $H_g^1(M)$ e, conseqüentemente, $u \in H_g^1(M)^\Gamma$. Além disso, como M é compacta,

$$\begin{aligned} u_k &\rightarrow u \quad \text{em } L^q(M), \quad \forall q \in [1, 2^*) \\ u_k &\rightarrow u \quad \text{q.t.p em } M. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Afirmção 1. $|u_k|^{2^*-2}u_k \rightharpoonup |u|^{2^*-2}u$ em $L^r(M)$, com $r = \frac{2^*}{2^*-1}$.

De fato, como (u_k) é limitada em $L^{2^*}(M)$, temos que $(|u_k|^{2^*-2}u_k)$ é limitada em $L^r(M)$. Logo, $|u_k|^{2^*-2}u_k \rightharpoonup \omega$ em $L^r(M)$, para alguma função ω , ou seja,

$$\int_M |u_k|^{2^*-2}u_k v dV_g \longrightarrow \int_M \omega v dV_g, \quad \forall v \in L^{2^*}(M).$$

Daí, $|u_k|^{2^*-2}u_k v \rightarrow \omega v$ q.t.p em M . Mas, por (2.30) $|u_k|^{2^*-2}u_k v \rightarrow |u|^{2^*-2}uv$ q.t.p em M . Assim, $\omega = |u|^{2^*-2}u$ q.t.p em M , como queríamos.

Logo, pela Afirmção 1,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_M c|u_k|^{2^*-2}u_k v dV_g = \int_M c|u|^{2^*-2}uv dV_g, \quad \forall v \in H_g^1(M). \quad (2.31)$$

Agora, usando que $-\operatorname{div}_g(a\nabla_g(\cdot)) + b$ é coercivo em $H_g^1(M)^\Gamma$, pelo Lema 2.1.1, temos que

$$J_g(u) = \frac{1}{2} \|u\|_{a,b}^2 - \frac{1}{2^*} |u|_{c,2^*}^{2^*}.$$

Assim,

$$J'_g(u) \cdot v = \langle u, v \rangle_{a,b} - \int_M c|u|^{2^*-2}uv dV_g, \quad \forall v \in H_g^1(M).$$

Como $u_k \rightharpoonup u$ em $H_g^1(M)^\Gamma$, temos que $\langle u_k, v \rangle_{a,b} \rightarrow \langle u, v \rangle_{a,b}$ para todo $v \in H_g^1(M)^\Gamma$. Então, usando este fato e (2.31), obtemos que $J'_g(u_k) \cdot v \rightarrow J'_g(u) \cdot v$. Porém, como $J'_g(u_k) \rightarrow 0$, resulta que $J'_g(u_k) \cdot v \rightarrow 0$. Logo, $J'_g(u) \cdot v = 0$ para todo $v \in H_g^1(M)^\Gamma$, donde $J'_g(u) = 0$, isto é, u é ponto crítico de J_g . Em particular,

$$J'_g(u) \cdot u = \|u\|_{a,b}^2 - |u|_{c,2^*}^{2^*} = 0,$$

o que implica em $\|u\|_{a,b}^2 = |u|_{c,2^*}^{2^*}$. Daí, como $u_k \rightharpoonup u$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 \leq J_g(u) &= J_g(u) - \frac{1}{2^*} J'_g(u) \cdot u = \frac{1}{m} \|u\|_{a,b}^2 \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \|u_k\|_{a,b}^2 \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(J_g(u_k) - \frac{1}{2^*} J'_g(u_k) \cdot u_k \right) \quad (2.32) \\ &= \tau. \end{aligned}$$

Defina a sequência $\tilde{u}_k := u_k - u$. Claramente, $\tilde{u}_k \in H_g^1(M)^\Gamma$ e $\tilde{u}_k \rightharpoonup 0$ em $H_g^1(M)$. Observe que, por (2.32), temos

$$\tilde{\tau} := \tau - J_g(u) \leq \tau < \left(\min_{q \in M} \frac{a(q)^{m/2} \# \Gamma(q)}{c(q)^{(m-2)/2}} \right) \frac{1}{m} S^{m/2}. \quad (2.33)$$

Afirmção 2. $(\tilde{u}_k)$ é uma sequência $(PS)_{\tilde{\tau}}^\Gamma$ para o funcional J_g com $b \equiv 0$.

Com efeito, denotando por J_0 o funcional J_g com $b \equiv 0$, temos que

$$\begin{aligned}
 J_0(\tilde{u}_k) &= \frac{1}{2} \int_M a |\nabla_g \tilde{u}_k|_g^2 dV_g - \frac{1}{2^*} \int_M c |\tilde{u}_k|^{2^*} dV_g \\
 &= \frac{1}{2} \int_M a \left[|\nabla_g u_k|^2 - 2 \langle \nabla_g u_k, \nabla_g u \rangle_g + |\nabla_g u|_g^2 \right] dV_g + \frac{1}{2} \int_M b u_k^2 dV_g \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_M b u_k^2 dV_g + \frac{1}{2^*} \int_M c [|u_k|^{2^*} - |u_k - u|^{2^*}] dV_g - \frac{1}{2^*} \int_M c |u_k|^{2^*} dV_g \\
 &= J_g(u_k) - I_k,
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

onde

$$\begin{aligned}
 I_k &:= \int_M a \langle \nabla_g u_k, \nabla_g u \rangle_g dV_g - \frac{1}{2} \int_M a |\nabla_g u|_g^2 dV_g + \frac{1}{2} \int_M b u_k^2 dV_g \\
 &\quad - \frac{1}{2^*} \int_M c [|u_k|^{2^*} - |u_k - u|^{2^*}] dV_g.
 \end{aligned}$$

Uma vez que (u_k) é limitada em $L^{2^*}(M)$ e $u_k \rightarrow u$ q.t.p. em M , pelo Lema de Brézis - Lieb 1.5.2,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (|u_k|_{2^*}^{2^*} - |u_k - u|_{2^*}^{2^*}) = |u|_{2^*}^{2^*}.$$

Daí, como

$$\left| \int_M c [|u_k|^{2^*} - |u_k - u|^{2^*}] dV_g - \int_M c |u|^{2^*} dV_g \right| \leq |c|_\infty (|u_k|_{2^*}^{2^*} - |u_k - u|_{2^*}^{2^*} - |u|_{2^*}^{2^*}),$$

segue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2^*} \int_M c [|u_k|^{2^*} - |u_k - u|^{2^*}] dV_g = \frac{1}{2^*} \int_M c |u|^{2^*} dV_g. \tag{2.35}$$

Além disso, como $u_k \rightarrow u$ em $H_g^1(M)^\Gamma$, temos que $\langle u_k, u \rangle_{a,0} \rightarrow \langle u, u \rangle_{a,0}$, ou seja,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_M a \langle \nabla_g u_k, \nabla_g u \rangle_g dV_g = \int_M a |\nabla_g u|_g^2 dV_g. \tag{2.36}$$

E por (2.30), $u_k^2 \rightarrow u^2$ em $L^1(M)$. Então,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_M b u_k^2 dV_g = \frac{1}{2} \int_M b u^2 dV_g. \tag{2.37}$$

Assim, usando (2.35), (2.36) e (2.37), obtemos $I_k \rightarrow J_g(u)$. Portanto, como $J_g(u_k) \rightarrow \tau$, segue de (2.34) que $J_g(\tilde{u}_k) \rightarrow \tilde{\tau}$. Mostraremos agora que $J'_g(\tilde{u}_k) \rightarrow 0$. Dado $v \in H_g^1(M)$,

note que

$$\begin{aligned}
J'_0(\tilde{u}_k) \cdot v &= \int_M a \langle \nabla_g \tilde{u}_k, \nabla_g v \rangle_g dV_g - \int_M c |\tilde{u}_k|^{2^*-2} \tilde{u}_k v dV_g \\
&= \int_M \left[a \langle \nabla_g u_k, \nabla_g v \rangle_g + b u_k v \right] dV_g - \int_M c |u_k|^{2^*-2} u_k v dV_g - \int_M a \langle \nabla_g u, \nabla_g v \rangle_g dV_g \\
&\quad - \int_M b u_k v dV_g + \int_M c |u_k|^{2^*-2} u_k v dV_g - \int_M c |\tilde{u}_k|^{2^*-2} \tilde{u}_k v dV_g \\
&= J'_g(u_k) \cdot v - \tilde{I}_k - \int_M c |\tilde{u}_k|^{2^*-2} \tilde{u}_k v dV_g,
\end{aligned}$$

onde

$$\tilde{I}_k := \int_M a \langle \nabla_g u, \nabla_g v \rangle_g dV_g + \int_M b u_k v dV_g - \int_M c |u_k|^{2^*-2} u_k v dV_g.$$

Analogamente a Afirmação 1, temos que $|\tilde{u}_k|^{2^*-2} \tilde{u}_k \rightharpoonup 0$ em $L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(M)$. Assim,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_M c |\tilde{u}_k|^{2^*-2} \tilde{u}_k v dV_g = 0, \quad \forall v \in H_g^1(M). \quad (2.38)$$

Por outro lado, usando (2.30) e (2.31), segue que

$$\tilde{I}_k = J'_g(u) \cdot v + o_k(1).$$

Porém, sabemos que $J'_g(u) = 0$. Então, $\tilde{I}_k = o_k(1)$. Daí, usando (2.38), obtemos que

$$\begin{aligned}
|J'_0(\tilde{u}_k) \cdot v| &\leq |J'_g(u_k) \cdot v| + o_k(1) \\
&\leq \|J'_g(u_k)\|_{(H_g^1(M))'} \|v\|_{H_g^1} + o_k(1).
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\|J'_0(\tilde{u}_k)\|_{(H_g^1(M))'} \leq \|J'_g(u_k)\|_{(H_g^1(M))'} + o_k(1).$$

Logo, $J'_0(\tilde{u}_k) \rightarrow 0$ em $(H_g^1(M))'$. Com isto finalizamos a prova da Afirmação 2.

Por fim, suponha que em (2.32), tenha-se $J_g(u) < \tau$, ou seja, $u_k \rightharpoonup u$. Então, $\tilde{\tau} > 0$ e $\tilde{u}_k \rightharpoonup 0$. Assim, pela Afirmação 2 e Proposição 2.3.3,

$$\left(\min_{q \in M} \frac{a(q)^{m/2} \# \Gamma(q)}{c(q)^{(m-2)/2}} \right) \frac{1}{m} S^{m/2} \leq \tilde{\tau},$$

o que contradiz (2.33). Logo, $J_g(u) = \tau$. Assim, usando (2.32), segue que $\|u_k\|_{a,b} \rightarrow \|u\|_{a,b}$. Mas, como $H_g^1(M)$ é uniformemente convexo e $u_k \rightharpoonup u$, concluimos que $u_k \rightarrow u$ em $H_g^1(M)$, finalizando a prova. $\square$

2.4 Um Princípio Variacional para Soluções Nodais

Nesta seção, mostraremos inicialmente que existe uma vizinhança do conjunto das funções que não mudam de sinal em $H_g^1(M)^\Gamma$ que é invariante sob o fluxo gradiente negativo de J_g , com relação a um produto interno escolhido em $H_g^1(M)^\Gamma$. Por fim, iremos relembrar o conceito de gênero relativo, para mostrar a existência de soluções que mudam de sinal para o problema (2.1).

Observação 2.4.1. Uma vez que o operador $-\operatorname{div}(a\nabla_g(\cdot)) + b$ é coercivo em $H_g^1(M)^\Gamma$, existe $\mu_0 > 0$ tal que

$$\int_M [a|\nabla_g u|_g^2 + b|u|^2] dV_g \geq \mu_0 \int_M [|\nabla_g u|_g^2 + |u|^2] dV_g.$$

Desde que $a > 0$, temos

$$\mu_0 \int_M [|\nabla_g u|_g^2 + |u|^2] dV_g \geq \frac{\mu_0}{1 + \max_M a} \int_M [a|\nabla_g u|_g^2 + |u|^2] dV_g.$$

Denotando $\mu = \mu_0 (1 + \max_M a)^{-1}$, obtemos

$$\int_M [a|\nabla_g u|_g^2 + b|u|^2] dV_g \geq \mu \int_M [a|\nabla_g u|_g^2 + |u|^2] dV_g, \quad \forall u \in H_g^1(M)^\Gamma. \quad (2.39)$$

Fixe $A > \max\{1, \mu, |b|_\infty\}$. Analogamente ao Lema 2.1.1, temos que a aplicação

$$\langle u, v \rangle_{a,A} := \int_M [a|\nabla_g u|_g^2 + A|u|^2] dV_g. \quad (2.40)$$

define um produto interno em $H_g^1(M)^\Gamma$, cuja norma correspondente é

$$\|u\|_{a,A} = \left(\int_M [a|\nabla_g u|_g^2 + A|u|^2] dV_g \right)^{1/2}.$$

Similarmente ao Lema 2.1.2, verifica-se que $\|\cdot\|_{a,A}$ é equivalente a norma usual em $H_g^1(M)^\Gamma$.

Definição 2.4.2. Dados um subconjunto $\mathcal{D}$ de $H_g^1(M)^\Gamma$ e $\rho > 0$, definimos o conjunto

$$B_\rho(\mathcal{D}) := \{u \in H_g^1(M)^\Gamma; \operatorname{dist}_A(u, \mathcal{D}) \leq \rho\},$$

onde $\operatorname{dist}_A(u, \mathcal{D}) := \inf_{v \in \mathcal{D}} \|u - v\|_{a,A}$, como sendo uma vizinhança de $\mathcal{D}$.

Definição 2.4.3. O gradiente do funcional $J_g : H_g^1(M)^\Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ em $u \in H_g^1(M)^\Gamma$, com

respeito ao produto interno (2.40), é o único vetor $\nabla J_g(u)$ em $H_g^1(M)^\Gamma$ que satisfaz

$$\langle \nabla J_g(u), v \rangle_{a,A} = J'_g(u) \cdot v, \quad \forall v \in H_g^1(M)^\Gamma.$$

Observação 2.4.4. Note que esta definição faz sentido devido ao Teorema de Representação da Riesz (veja em [7]), visto que $J'_g(u)$ é linear e contínuo.

Agora, observe que

$$\begin{aligned} \langle \nabla J_g(u), v \rangle_{a,A} &= J'_g(u) \cdot v \\ &= \langle u, v \rangle_{a,A} - \int_M (A - b)uv dV_g - \int_M c|u|^{2^*-2}uv dV_g. \end{aligned}$$

Assim, $\nabla J_g(u) = u - L(u) - G(u)$, onde $L(u), G(u) \in H_g^1(M)^\Gamma$ são as únicas soluções para as equações

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(a\nabla_g L(u)) + A(L(u)) &= (A - b)u, \\ -\operatorname{div}(a\nabla_g G(u)) + A(G(u)) &= c|u|^{2^*-2}u. \end{aligned}$$

Em outras palavras, para cada $u \in H_g^1(M)^\Gamma$, $L(u)$ e $G(u)$ são unicamente determinados pelas relações

$$\langle L(u), v \rangle_{a,A} = \int_M (A - b)uv dV_g, \quad \forall v \in H_g^1(M)^\Gamma, \quad (2.41)$$

e

$$\langle G(u), v \rangle_{a,A} = \int_M c|u|^{2^*-2}uv dV_g, \quad \forall v \in H_g^1(M)^\Gamma. \quad (2.42)$$

Dessa forma, temos o seguinte resultado.

Lema 2.4.5. Seja $\bar{\mu} := \frac{A-\mu}{A+\mu} \in (0, 1)$. Então, para cada $u \in H_g^1(M)^\Gamma$, temos

$$\|L(u)\|_{a,A} \leq \bar{\mu} \|u\|_{a,A}.$$

Demonstração. Por (2.39), para cada $u \in H_g^1(M)^\Gamma$, segue que

$$\begin{aligned} \int_M (A - b)u^2 dV_g &= \int_M Au^2 dV_g - \int_M [a|\nabla_g u|_g^2 + b|u|^2] dV_g + \int_M a|\nabla_g u|_g^2 dV_g \\ &\stackrel{(2.39)}{\leq} \int_M Au^2 dV_g - \mu \int_M [a|\nabla_g u|_g^2 + |u|^2] dV_g + \int_M a|\nabla_g u|_g^2 dV_g \\ &= \int_M [a|\nabla_g u|_g^2 + A|u|^2] dV_g - \mu \int_M [a|\nabla_g u|_g^2 + |u|^2] dV_g. \end{aligned}$$

Como $A > 1$, temos

$$\frac{\mu}{A} \int_M [a|\nabla_g u|_g^2 + A|u|^2] dV_g \leq \mu \int_M [a|\nabla_g u|_g^2 + |u|^2] dV_g.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_M (A - b)u^2 dV_g &\leq \int_M [a|\nabla_g u|_g^2 + A|u|^2] dV_g - \frac{\mu}{A} \int_M [a|\nabla_g u|_g^2 + A|u|^2] dV_g \\ &= \frac{A - \mu}{A} \|u\|_{a,A}^2, \end{aligned}$$

para todo $u \in H_g^1(M)^\Gamma$. Daí, usando (2.41) e a desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned} \|L(u)\|_{a,A}^2 &= \int_M (A - b)uL(u) dV_g \leq \frac{1}{2} \int_M (A - b) [u^2 + L(u)^2] dV_g \\ &\leq \frac{A - \mu}{2A} (\|u\|_{a,A}^2 + \|L(u)\|_{a,A}^2). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\frac{A + \mu}{2A} \|L(u)\|_{a,A}^2 \leq \frac{A - \mu}{2A} \|u\|_{a,A}^2,$$

donde segue o resultado desejado. $\square$

Seja $u_0 \in H_g^1(M)^\Gamma$ e considere o seguinte problema de valor inicial de Cauchy em $H_g^1(M)^\Gamma$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\psi(t) = -\nabla J_g(\psi(t)), & t \geq 0 \\ \psi(0) = u_0 \end{cases}. \quad (2.43)$$

Pela teoria de Equações Diferenciais Ordinárias em espaço de Banach (ver em [17]), visto que J_g é de classe C^2 , o problema (2.43) tem uma única solução, denotada por $\psi(t, u_0)$, com intervalo maximal de existência à direita $[0, T(u_0))$. Observe que $T(u_0)$ pode ser um número real ou $+\infty$.

Agora, consideraremos o Fluxo Gradiente negativo $\psi : \mathcal{G} \rightarrow H_g^1(M)^\Gamma$ de J_g , definido pelo problema (2.43), onde

$$\mathcal{G} := \{(t, u); u \in H_g^1(M)^\Gamma, 0 \leq t < T(u)\}.$$

Definição 2.4.6. Um subconjunto $\mathcal{D}$ de $H_g^1(M)^\Gamma$ é dito *positivamente invariante* com respeito ao fluxo ψ , quando $\psi(t, u) \in \mathcal{D}$ para cada $u \in \mathcal{D}$ e $t \in (0, T(u))$.

Definição 2.4.7. Dizemos que $\mathcal{D}$ é *estritamente positivamente invariante* com respeito ao fluxo ψ quando $\psi(t, u) \in \text{int}(\mathcal{D})$ para cada $u \in \mathcal{D}$ e $t \in (0, T(u))$.

Proposição 2.4.8. Se $\mathcal{D} \subset H_g^1(M)^\Gamma$ é estritamente positivamente invariante pelo fluxo ψ , então o conjunto

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) := \{u \in H_g^1(M)^\Gamma; \psi(t, u) \in \mathcal{D} \text{ para algum } t \in (0, T(u))\}$$

é aberto em $H_g^1(M)^\Gamma$ e a aplicação tempo de entrada $e_{\mathcal{D}} : \mathcal{A}(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$e_{\mathcal{D}}(u) = \inf\{t \geq 0; \psi(t, u) \in \mathcal{D}\},$$

é contínua.

Demonstração. Suponha que $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ não seja aberto. Então, existe $u \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$ que não é ponto interior, assim, para todo $\delta > 0$, existe $v_\delta \in B_\delta(u)$ tal que $v_\delta \notin \mathcal{A}(\mathcal{D})$, isto é, $\psi(t, v_\delta) \notin \mathcal{D}$ para todo $t \in I_{v_\delta} := (0, T(v_\delta))$. Mas, pelas propriedades do fluxo local (veja Teorema 1.5.7), dado $t \in I_u := (0, T(u))$, existe $\delta_0 > 0$ tal que $t \in I_v$ para todo $v \in B_{\delta_0}(u)$. Daí,

$$\psi(t, v_{\delta_0}) \notin \mathcal{D}, \quad \forall t \in I_u. \quad (2.44)$$

Por outro lado, como $u \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$, temos que $u_0 := \psi(t_0, u) \in \mathcal{D}$ para algum $t_0 \in I_u$. Mas, sendo $\mathcal{D}$ estritamente positivamente invariante, então, pelas propriedades do fluxo,

$$\psi(s + t_0, u) = \psi(s, u_0) \in \text{int}(\mathcal{D}), \quad \forall s \in I_{u_0} := I_u - t_0 = \{t - t_0; t \in I_u\}.$$

Fixe $s_0 \in I_{u_0}$ e seja $\varepsilon := \text{dist}_A(\psi(s_0 + t_0, u), \partial\mathcal{D}) > 0$. Pela continuidade do fluxo, diminuindo $\delta_0 > 0$ se necessário, segue que

$$\|\psi(s_0 + t_0, u) - \psi(s_0 + t_0, v)\|_{a,A} < \varepsilon/2,$$

para todo $v \in B_{\delta_0}(u)$. Dessa forma, $\psi(s_0 + t_0, v_{\delta_0}) \in \text{int}(\mathcal{D})$, o que contradiz (2.44). Portanto, $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ é aberto em $H_g^1(M)^\Gamma$.

Por fim, como o fluxo $\psi(t, u)$ depende continuamente do valor inicial u , concluímos que $e_{\mathcal{D}}$ é contínua. $\square$

Definição 2.4.9. O conjunto das funções em $H_g^1(M)^\Gamma$ que não muda de sinal é dado por $\mathcal{P}_+^\Gamma \cup \mathcal{P}_-^\Gamma$, onde

$$\mathcal{P}_+^\Gamma := \{u \in H_g^1(M)^\Gamma; u \geq 0\} \quad \text{e} \quad \mathcal{P}_-^\Gamma := \{u \in H_g^1(M)^\Gamma; u \leq 0\}$$

são respectivamente os cones convexos das funções não-negativas e não-positivas.

Observação 2.4.10. As soluções nodais para o problema (2.1) estão no conjunto

$$\mathcal{E}_g^\Gamma := \{u \in \mathcal{N}_g^\Gamma; u^+, u^- \in \mathcal{N}_g^\Gamma\},$$

em que $u^+ = \max\{0, u\}$, $u^- = \min\{0, u\}$ e $\mathcal{N}_g^\Gamma$ é a Variedade de Nehari definida na Seção 2.2.

Lema 2.4.11. Sejam E um espaço vetorial normado e $D \subset E$ fechado. Suponha que uma aplicação $f : E \rightarrow E$ satisfaz

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda^{-1} \text{dist}(x + \lambda f(x), D) = 0, \quad \forall x \in D,$$

onde $\text{dist}(x, D) := \inf_{y \in D} \|x - y\|_E$. Se D é convexo com $\text{int}(D) \neq \emptyset$ e f é localmente Lipschitz, então D é positivamente invariante com respeito ao fluxo φ determinado pelo problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, x) = f(\psi(t, x)), & t \geq 0 \\ \varphi(0, x) = x \in E \end{cases},$$

ou seja, $\varphi(t, x) \in D$ para todo $t \in (0, T(x))$ e $x \in D$.

Demonstração. Veja o Teorema 5.2 em [17]. □

Lema 2.4.12. Existe $\rho_0 > 0$ tal que, para cada $\rho \in (0, \rho_0)$, verifica-se:

- (a) $[B_\rho(\mathcal{P}_+^\Gamma) \cup B_\rho(\mathcal{P}_-^\Gamma)] \cap \mathcal{E}_g^\Gamma = \emptyset$.
- (b) $B_\rho(\mathcal{P}_+^\Gamma)$ e $B_\rho(\mathcal{P}_-^\Gamma)$ são estritamente positivamente invariante pelo fluxo ψ .

Demonstração. (a) Inicialmente, note que

$$|u^-(p)| = |u(p) - u^+(p)| \leq |u(p) - v(p)|,$$

para cada $u, v : M \rightarrow \mathbb{R}$, com $v \geq 0$, e $p \in M$. Daí, como $L^{2^*}(M)$ é uniformemente convexo, $H_g^1(M)^\Gamma \subset L^{2^*}(M)$ e $\mathcal{P}_+^\Gamma$ é fechado e convexo, temos que

$$|u^-|_{c,2^*} = |u - u^+|_{c,2^*} = \min_{v \in \mathcal{P}_+^\Gamma} |u - v|_{c,2^*},$$

para todo $u \in H_g^1(M)^\Gamma$. Pela imersão contínua de $H_g^1(M)$ em $L^{2^*}(M)$, existe $C > 0$ tal que

$$|u^-|_{c,2^*} \leq C \min_{v \in \mathcal{P}_+^\Gamma} \|u - v\|_{a,A} = C \text{dist}_A(u, \mathcal{P}_+^\Gamma), \quad (2.45)$$

para cada $u \in H_g^1(M)^\Gamma$. Seja $u \in \mathcal{E}_g^\Gamma$, então $u^- \in \mathcal{N}_g^\Gamma$. Assim, pela Proposição 2.2.4,

$$|u^-|_{c,2^*}^{2^*} = m J_g(u^-) \geq m \tau_g^\Gamma > 0.$$

Portanto, desta desigualdade e de (2.45), obtemos ρ_1 tal que $\text{dist}_A(u, \mathcal{P}_+^\Gamma) \geq \rho_1 > 0$, para todo $u \in \mathcal{E}_g^\Gamma$. Mas, como $\mathcal{E}_g^\Gamma$ é simétrico com respeito a origem, temos que

$\text{dist}_A(u, \mathcal{P}_-^\Gamma) = \text{dist}_A(-u, \mathcal{P}_+^\Gamma) \geq \rho_1$. Com isso, concluímos que

$$[B_\rho(\mathcal{P}_+^\Gamma) \cup B_\rho(\mathcal{P}_-^\Gamma)] \cap \mathcal{E}_g^\Gamma = \emptyset, \quad \forall \rho \in (0, \rho_1).$$

(b) Primeiramente, mostraremos que se $v \in \mathcal{P}_+^\Gamma$, então $L(v), G(v) \in \mathcal{P}_+^\Gamma$. De fato, denote $L(v) = L(v)^+ + L(v)^-$, então por (2.41) temos

$$\|L(v)^-\|_{a,A}^2 = \langle L(v), L(v)^- \rangle_{a,A} = \int_M (A-b)vL(v)^- dV_g.$$

Sendo $v \geq 0$, $(A-b) \geq 0$ e $L(v)^- \leq 0$, obtemos $\|L(v)^-\|_{a,A} \leq 0$, ou seja, $L(v)^- = 0$. Logo, $L(v) = L(v)^+ \geq 0$ e segue que $L(v) \in \mathcal{P}_+^\Gamma$. Analogamente, usando (2.42), mostramos que $G(v) \in \mathcal{P}_+^\Gamma$.

Agora, dado $u \in H_g^1(M)^\Gamma$, seja $v \in \mathcal{P}_+^\Gamma$ tal que $\text{dist}_A(u, \mathcal{P}_+^\Gamma) = \|u - v\|_{a,A}$. Pelo Lema 2.4.5, temos

$$\text{dist}_A(L(u), \mathcal{P}_+^\Gamma) \leq \|L(u) - L(v)\|_{a,A} \leq \bar{\mu}\|u - v\|_{a,A} = \bar{\mu}\text{dist}_A(u, \mathcal{P}_+^\Gamma). \quad (2.46)$$

Por outro lado, como

$$\text{dist}_A(G(u), \mathcal{P}_+^\Gamma) \leq \|G(u) - G(u)^+\|_{a,A} = \|G(u)^-\|_{a,A},$$

usando (2.42), a desigualdade de Hölder e (2.45), obtemos

$$\begin{aligned} \text{dist}_A(G(u), \mathcal{P}_+^\Gamma) \|G(u)^-\|_{a,A} &\leq \|G(u)^-\|_{a,A}^2 = \langle G(u), G(u)^- \rangle_{a,A} \\ &= \int_M c|u|^{2^*-2} u G(u)^- dV_g \\ &\leq \int_M c|u^-|^{2^*-2} (u^-) G(u)^- dV_g \\ &\leq |u^-|_{c,2^*}^{2^*-1} \|G(u)^-\|_{c,2^*} \\ &\leq |u^-|_{c,2^*}^{2^*-1} C \|G(u)^-\|_{a,A} \\ &\stackrel{(2.45)}{\leq} C^{2^*} \text{dist}_A(u, \mathcal{P}_+^\Gamma)^{2^*-1} \|G(u)^-\|_{a,A}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\text{dist}_A(G(u), \mathcal{P}_+^\Gamma) \leq C^{2^*} \text{dist}_A(u, \mathcal{P}_+^\Gamma)^{2^*-1}, \quad \forall u \in H_g^1(M)^\Gamma. \quad (2.47)$$

Fixemos $\nu \in (\bar{\mu}, 1)$ e $\rho_2 > 0$ tal que $C^{2^*} \rho_2^{2^*-2} \leq \nu - \bar{\mu}$. Então, para $\rho \in (0, \rho_2)$ e

$u \in B_\rho(\mathcal{P}_+^\Gamma)$, usando as desigualdades (2.46) e (2.47), temos

$$\begin{aligned}
 \text{dist}_A(L(u) + G(u), \mathcal{P}_+^\Gamma) &\leq \text{dist}_A(L(u), \mathcal{P}_+^\Gamma) + \text{dist}_A(G(u), \mathcal{P}_+^\Gamma) \\
 &\leq \bar{\mu} \text{dist}_A(u, \mathcal{P}_+^\Gamma) + C^{2^*} \text{dist}_A(u, \mathcal{P}_+^\Gamma)^{2^*-1} \\
 &\leq \text{dist}_A(u, \mathcal{P}_+^\Gamma) (\bar{\mu} + C^{2^*} \text{dist}_A(u, \mathcal{P}_+^\Gamma)^{2^*-2}) \\
 &\leq \text{dist}_A(u, \mathcal{P}_+^\Gamma) (\bar{\mu} + C^{2^*} \rho_2^{2^*-2}) \\
 &\leq \nu \text{dist}_A(u, \mathcal{P}_+^\Gamma).
 \end{aligned}$$

Como $\nu < 1$, concluímos que $\text{dist}_A(L(u) + G(u), \mathcal{P}_+^\Gamma) < \rho$, para todo $u \in B_\rho(\mathcal{P}_+^\Gamma)$. Portanto, $L(u) + G(u) \in \text{int}(B_\rho(\mathcal{P}_+^\Gamma))$. Em particular, para cada número real $\lambda \in (0, 1]$ e $u \in B_\rho(\mathcal{P}_+^\Gamma)$,

$$\begin{aligned}
 \text{dist}_A(u - \lambda \nabla J_g(u), \mathcal{P}_+^\Gamma) &= \text{dist}_A(u - \lambda(u - L(u) - G(u)), \mathcal{P}_+^\Gamma) \\
 &\leq \text{dist}_A((1 - \lambda)u, \mathcal{P}_+^\Gamma) + \text{dist}_A(\lambda(L(u) + G(u)), \mathcal{P}_+^\Gamma) \\
 &\leq (1 - \lambda) \text{dist}_A(u, \mathcal{P}_+^\Gamma) + \lambda \text{dist}_A(L(u) + G(u), \mathcal{P}_+^\Gamma) \\
 &\leq (1 - \lambda) \text{dist}_A(u, \mathcal{P}_+^\Gamma) + \lambda \text{dist}_A(u, \mathcal{P}_+^\Gamma) \\
 &\leq \rho.
 \end{aligned}$$

Com isto, obtemos

$$\text{dist}_A(u - \lambda \nabla J_g(u), B_\rho(\mathcal{P}_+^\Gamma)) = 0, \quad \forall \lambda \in (0, 1] \text{ e } \forall u \in B_\rho(\mathcal{P}_+^\Gamma).$$

Assim, como $J_g \in C^2(H_g^1(M)^\Gamma, \mathbb{R})$ e $B_\rho(\mathcal{P}_+^\Gamma)$ é fechado, convexo e seu interior é não-vazio, o Lema 2.4.11 implica que

$$\psi(t, u) \in B_\rho(\mathcal{P}_+^\Gamma) \text{ para todo } t \in (0, T(u)) \text{ se } u \in B_\rho(\mathcal{P}_+^\Gamma). \quad (2.48)$$

Para concluir a prova, suponha por contradição que existem $u_0 \in B_\rho(\mathcal{P}_+^\Gamma)$ e $t_0 \in (0, T(u_0))$ tal que $\psi(t_0, u_0) \in \partial B_\rho(\mathcal{P}_+^\Gamma)$. Como $\text{int}(B_\rho(\mathcal{P}_+^\Gamma))$ é aberto e convexo, pelo teorema de separação de Mazur's (Teorema 1.5.4), existe um funcional linear contínuo $\ell \in (H_g^1(M))'$ tal que $\ell(\psi(t_0, u_0)) < \ell(u)$ para todo $u \in \text{int}(B_\rho(\mathcal{P}_+^\Gamma))$. Daí, como $\nabla J_g(u) = u - L(u) - G(u)$ e $L(u) + G(u) \in \text{int}(B_\rho(\mathcal{P}_+^\Gamma))$ para todo $u \in B_\rho(\mathcal{P}_+^\Gamma)$, segue que

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=t_0} \ell(\psi(t, u_0)) &= \ell(-\nabla J_g(\psi(t_0, u_0))) \\
 &= \ell(L(\psi(t_0, u_0)) + G(\psi(t_0, u_0))) - \ell(\psi(t_0, u_0)) \\
 &> 0.
 \end{aligned}$$

Logo, existe $\varepsilon > 0$ tal que a aplicação $t \mapsto \ell(\psi(t, u_0))$ é crescente em $(t_0 - \varepsilon, t_0]$. Assim, $\ell(\psi(t, u_0)) < \ell(\psi(t_0, u_0))$ para todo $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0)$. Então, por continuidade, $\psi(t, u_0)$ não pertence a $B_\rho(\mathcal{P}_+^\Gamma)$ para todo $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0)$, o que contradiz (2.48). Portanto, $B_\rho(\mathcal{P}_+^\Gamma)$ é estritamente positivamente invariante.

Finalmente, considerando $\rho_0 = \min\{\rho_1, \rho_2\}$, obtemos o resultado desejado. $\square$

Fixemos $\rho > 0$ como no Lema 2.4.12. Então, $B_\rho(\mathcal{P}_+^\Gamma) \cup B_\rho(\mathcal{P}_-^\Gamma)$ não possui pontos críticos que mudam de sinal. Para $d \in \mathbb{R}$, considere o conjunto

$$\mathcal{D}_d^\Gamma := B_\rho(\mathcal{P}_+^\Gamma) \cup B_\rho(\mathcal{P}_-^\Gamma) \cup J_g^d,$$

onde $J_g^d := \{u \in H_g^1(M)^\Gamma; J_g(u) \leq d\}$. Temos o seguinte resultado.

Corolário 2.4.13. Seja $d \in \mathbb{R}$. Se J_g não possui um ponto crítico que muda de sinal $u \in H_g^1(M)^\Gamma$ com $J_g(u) = d$, então o conjunto $\mathcal{D}_d^\Gamma$ é estritamente positivamente invariante pelo fluxo ψ . Além disso, a aplicação $\varrho_d : \mathcal{A}(\mathcal{D}_d^\Gamma) \rightarrow \mathcal{D}_d^\Gamma$ definida por

$$\varrho_d(u) = \psi(e_{\mathcal{D}_d^\Gamma}(u), u)$$

é ímpar e contínua, e satisfaz $\varrho_d(u) = u$ para cada $u \in \mathcal{D}_d^\Gamma$.

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{D}_d^\Gamma$. Se $u \in B_\rho(\mathcal{P}_+^\Gamma) \cup B_\rho(\mathcal{P}_-^\Gamma)$, então, pelo Lema 2.4.12, $\psi(t, u) \in \text{int}(B_\rho(\mathcal{P}_+^\Gamma)) \cup \text{int}(B_\rho(\mathcal{P}_-^\Gamma))$, para todo $t \in (0, T(u))$. Consequentemente, $\psi(t, u) \in \text{int}(\mathcal{D}_d^\Gamma)$, para todo $t \in (0, T(u))$. Se $u \in \mathcal{D}_d^\Gamma \setminus [B_\rho(\mathcal{P}_+^\Gamma) \cup B_\rho(\mathcal{P}_-^\Gamma)]$. Então, u muda de sinal e $J_g(u) \leq d$. Observe que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J_g(\psi(t, u)) &= \left\langle \nabla J_g(\psi(t, u)), \frac{d}{dt} \psi(t, u) \right\rangle_{a,A} \\ &= -\|\nabla J_g(\psi(t, u))\|_{a,A}^2 \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T(u))$. Logo, a aplicação $t \mapsto J_g(\psi(t, u))$ é não-crescente em $[0, T(u))$. Assim,

$$J_g(\psi(t, u)) \leq J_g(\psi(0, u)) = J_g(u) \leq d, \quad \forall t \in (0, T(u)). \quad (2.49)$$

Se $J_g(u) < d$, então $J_g(\psi(t, u)) < d$, para todo $t \in (0, T(u))$. Por outro lado, se $J_g(u) = d$, então, como J_g não possui ponto crítico que muda de sinal no nível d , segue que $\nabla J_g(\psi(0, u)) = \nabla J_g(u) \neq 0$. Logo, existe $\varepsilon > 0$ tal que a aplicação $t \mapsto J_g(\psi(t, u))$ é estritamente decrescente em $[0, \varepsilon)$. Assim, usando (2.49), obtemos

$$J_g(\psi(t, u)) < J_g(u) = d, \quad \forall t \in (0, T(u)).$$

Portanto, em ambos os casos, $\psi(t, u) \in \text{int}(\mathcal{D}_d^\Gamma)$, para todo $t \in (0, T(u))$.

A continuidade de ϱ_d segue da Proposição 2.4.8 e da continuidade do fluxo ψ . O fato de ϱ_d ser ímpar segue usando que $\nabla J_g(\psi(t, \cdot))$ é ímpar, uma vez que isto implica que o fluxo é ímpar. Por fim, se $u \in \mathcal{D}_d^\Gamma$ temos $\psi(0, u) = u$, o que implica $\varrho_d(u) = u$. $\square$

Corolário 2.4.14. Seja $u \in H_g^1(M)^\Gamma \setminus \{0\}$ um ponto crítico de J_g . Então, u muda de sinal se, e somente se, $u \in H_g^1(M)^\Gamma \setminus \mathcal{D}_0^\Gamma$. Consequentemente, $\mathcal{D}_0^\Gamma$ é estritamente positivamente invariante pelo fluxo ψ .

Demonstração. Se $u \in H_g^1(M)^\Gamma$ é um ponto crítico que muda de sinal de J_g , então, pelo item (a) do Lema 2.4.12 temos $u \notin B_\rho(\mathcal{P}_+^\Gamma) \cup B_\rho(\mathcal{P}_-^\Gamma)$. Além disso, temos que $\|u\|_{a,b}^2 = |u|_{c,2^*}^{2^*}$, assim,

$$J_g(u) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*} \right) \|u\|_{a,b}^2 > 0,$$

ou seja, $u \notin J_g^0$. Logo, u pertence ao complementar de $\mathcal{D}_0^\Gamma$. Reciprocamente, se $u \in H_g^1(M)^\Gamma \setminus \mathcal{D}_0^\Gamma$ é um ponto crítico de J_g , então, $u \notin \mathcal{P}_+^\Gamma \cup \mathcal{P}_-^\Gamma$, portanto, u muda de sinal.

Por fim, pelo que mostramos inicialmente, $\mathcal{D}_0^\Gamma$ não possui ponto crítico que muda de sinal de J_g . Consequentemente, J_g não possui ponto crítico que muda de sinal u em $H_g^1(M)^\Gamma$ com $J_g(u) = 0$. Então, pelo Corolário 2.4.13, $\mathcal{D}_0^\Gamma$ é estritamente positivamente invariante pelo fluxo ψ . $\square$

A fim de encontrar pontos críticos de J_g no complementar de $\mathcal{D}_0^\Gamma$, isto é, soluções nodais para o problema (2.1), usaremos as propriedades de gênero relativo.

Definição 2.4.15. Um subconjunto $\mathcal{Y}$ de $H_g^1(M)^\Gamma$ é dito simétrico quando $-u \in \mathcal{Y}$ para todo $u \in \mathcal{Y}$.

Observe que, desde que J_g é par, $\mathcal{D}_d^\Gamma$ é simétrico. Além disso, é fechado em $H_g^1(M)^\Gamma$.

Definição 2.4.16. Sejam $\mathcal{D}$ e $\mathcal{Y}$ subconjuntos simétricos de $H_g^1(M)^\Gamma$. O gênero de $\mathcal{Y}$ relativo a $\mathcal{D}$, denotado por $\mathfrak{g}(\mathcal{Y}, \mathcal{D})$, é o menor número natural n tal que $\mathcal{Y}$ pode ser coberto por $n + 1$ subconjuntos abertos simétricos $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$ de $H_g^1(M)^\Gamma$ com as seguintes propriedades:

- (i) $\mathcal{Y} \cap \mathcal{D} \subset \mathcal{U}_0$ e existe uma aplicação contínua ímpar $\vartheta_0 : \mathcal{U}_0 \longrightarrow \mathcal{D}$ tal que $\vartheta_0(u) = u$ para $u \in \mathcal{Y} \cap \mathcal{D}$.
- (ii) existem aplicações contínuas ímpares $\vartheta_j : \mathcal{U}_j \longrightarrow \{1, -1\}$ para cada $j = 1, \dots, n$.

Se não existe tal cobertura, definimos $\mathfrak{g}(\mathcal{Y}, \mathcal{D}) := \infty$. Se $\mathcal{D} = \emptyset$, então escrevemos $\mathfrak{g}(\mathcal{Y}) := \mathfrak{g}(\mathcal{Y}, \emptyset)$. Este é o gênero usual de Krasnoselskii, ou seja, $\mathfrak{g}(\mathcal{Y})$ é o menor $n \in \mathbb{N}$ tal que existe uma aplicação ímpar contínua $\vartheta : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (veja [38], p. 94).

Definição 2.4.17. Um conjunto $\mathcal{D} \subset H_g^1(M)^\Gamma$ é chamado de retração de vizinhança simétrica se existe uma vizinhança simétrica $\mathcal{U}$ de $\mathcal{D}$ em $H_g^1(M)^\Gamma$ e uma aplicação ímpar e contínua $\varrho : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{D}$ tal que $\varrho(u) = u$ para cada $u \in \mathcal{D}$.

Lema 2.4.18. Sejam $\mathcal{D}, \mathcal{Y}$ e $\mathcal{Z}$ subconjuntos fechados e simétricos de $H_g^1(M)^\Gamma$. O gênero relativo a $\mathcal{D}$ tem as seguintes propriedades:

- (a) (Monotonicidade) Se $\mathcal{D}$ é uma retração de vizinhança simétrica e existe uma aplicação ímpar e contínua $f : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Y}$ tal que $f(u) = u$ para cada $u \in \mathcal{D}$, então

$$\mathfrak{g}(\mathcal{Z}, \mathcal{D}) \leq \mathfrak{g}(\mathcal{Y}, \mathcal{D}).$$

Em particular, esta estimativa é satisfeita quando $\mathcal{D} \subset \mathcal{Z} \subset \mathcal{Y}$.

- (b) (Subaditividade) Se $\mathcal{Z} \cap \mathcal{D} = \emptyset$, então

$$\mathfrak{g}(\mathcal{Y} \cup \mathcal{Z}, \mathcal{D}) \leq \mathfrak{g}(\mathcal{Y}, \mathcal{D}) + \mathfrak{g}(\mathcal{Z}).$$

Demonstração. (a) Sejam $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$ abertos simétricos de $H_g^1(M)^\Gamma$ que cobrem $\mathcal{Y}$ e $\vartheta_0 : \mathcal{U}_0 \rightarrow \mathcal{D}$ e $\vartheta_j : \mathcal{U}_j \rightarrow \{-1, 1\}$ como na definição 2.4. Então, como f é ímpar e contínua, $f^{-1}(\mathcal{U}_j)$ é simétrico e aberto em $\mathcal{Z}$, isto é, existem $\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_n$ abertos simétricos em $H_g^1(M)^\Gamma$ tais que $f^{-1}(\mathcal{U}_j) = \mathcal{V}_j \cap \mathcal{Z}$. Diminuindo $\mathcal{U}_j$ se necessário, podemos assumir que ϑ_j está definida em $\overline{\mathcal{U}_j}$. Pelo teorema de extensão de Tietze (Teorema 1.5.5), existem funções ímpares e contínuas $\tilde{\vartheta}_j$ e F que estendem ϑ_j e f , respectivamente. Considere as aplicações $\eta_0 : \mathcal{V}_0 \rightarrow H_g^1(M)^\Gamma$ e $\eta_j : \mathcal{V}_j \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $\eta_0(u) = (\tilde{\vartheta}_0 \circ F|_{\mathcal{V}_0})(u)$ e $\eta_j(u) = (\tilde{\vartheta}_j \circ F|_{\mathcal{V}_j})(u)$, $j = 1, \dots, n$. Assim, η_j é ímpar e contínua e satisfaz $\eta_j(u) = \vartheta_j(f(u))$ para todo $u \in f^{-1}(\mathcal{U}_j)$ e $j = 0, 1, \dots, n$.

Por outro lado, como $\mathcal{D}$ é uma retração de vizinhança simétrica, existe uma vizinhança aberta e simétrica $\mathcal{U}$ de $\mathcal{D}$ e uma aplicação ímpar e contínua $\varrho : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{D}$ tal que $\varrho(u) = u$ para todo $u \in \mathcal{D}$. Considere os conjuntos $\mathcal{W}_0 = \eta_0^{-1}(\mathcal{U})$ e $\mathcal{W}_j = \eta_j^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Logo, $\mathcal{W}_j$ é aberto simétrico, para todo $j = 0, 1, \dots, n$, pois η_j é contínua e ímpar. Agora, defina as funções $\varphi_0 : \mathcal{W}_0 \rightarrow \mathcal{D}$ por $\varphi_0(u) = (\varrho \circ \eta_0)(u)$, e $\varphi_j : \mathcal{W}_j \rightarrow \{1, -1\}$ por

$$\varphi_j(u) = \begin{cases} 1, & \text{se } \eta_j(u) > 0 \\ -1, & \text{se } \eta_j(u) < 0. \end{cases}$$

Como ϱ e η_j , $j = 0, 1, \dots, n$, são ímpares e contínuas, temos que φ_j também é, para todo $j = 0, 1, \dots, n$. Temos $\mathcal{Z} \cap \mathcal{D} \subset \mathcal{W}_0$. De fato, seja $u \in \mathcal{Z} \cap \mathcal{D}$, então $u = f(u) \in \mathcal{Y} \cap \mathcal{D} \subset \mathcal{U}_0$,

consequentemente, $u \in f^{-1}(\mathcal{U}_0)$. Assim, como $\mathcal{D} \subset \mathcal{U}$, temos que

$$\eta_0(u) = \vartheta_0(f(u)) = \vartheta_0(u) = u \in \mathcal{U}, \quad (2.50)$$

o que implica em $u \in \mathcal{W}_0$, assim, $\mathcal{Z} \cap \mathcal{D} \subset \mathcal{W}_0$. Além disso, por (2.50), $\varphi_0(u) = u$ para todo $u \in \mathcal{Z} \cap \mathcal{D}$. Por fim, observe que $\{\mathcal{W}_j\}_{j=0}^n$ é uma cobertura de $\mathcal{Z}$. Portanto, $\mathfrak{g}(\mathcal{Z}, \mathcal{D}) \leq n$.

(b) Para subaditividade basta considerar famílias como na Definição 2.4.17, isto é, para $\mathcal{Y}$ temos:

- (i) $\mathcal{Y} \cap \mathcal{D} \subset \mathcal{U}_0$ e existe uma aplicação contínua ímpar $\vartheta_0 : \mathcal{U}_0 \rightarrow \mathcal{D}$ tal que $\vartheta_0(u) = u$ para $u \in \mathcal{Y} \cap \mathcal{D}$.
- (ii) existem aplicações contínuas ímpares $\vartheta_j : \mathcal{U}_j \rightarrow \{1, -1\}$ para cada $j = 1, \dots, n$.

E para $\mathcal{Z}$, como $\mathcal{Z} \cap \mathcal{D} = \emptyset$, temos apenas:

- (iii) existem aplicações contínuas ímpares $\tilde{\vartheta}_i : \tilde{\mathcal{U}}_i \rightarrow \{1, -1\}$ para cada $i = 1, \dots, \ell$.

Então para $\mathcal{Y} \cup \mathcal{Z}$, família $(\vartheta_j, \tilde{\vartheta}_i, \mathcal{U}_j, \tilde{\mathcal{U}}_i)$, $j = 0, 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, \ell$, cumpre as condições da Definição 2.4.17, assim a subaditividade segue de forma imediata. $\square$

No que segue, consideremos $\mathcal{D}_c^\Gamma := B_\rho(\mathcal{P}_+^\Gamma) \cup B_\rho(\mathcal{P}_-^\Gamma) \cup J_g^c$ e defina

$$c_j := \inf\{c > 0; \mathfrak{g}(\mathcal{D}_c^\Gamma, \mathcal{D}_0^\Gamma) \geq j\},$$

para $j \in \mathbb{N}$. O seguinte resultado é baseado na Proposição 3.6 em [14].

Lema 2.4.19. Suponha que J_g satisfaz $(PS)_{c_j}^\Gamma$ em $H_g^1(M)$. Então, verifica-se:

- (a) J_g tem um ponto crítico que muda de sinal $u \in H_g^1(M)^\Gamma$ com $J_g(u) = c_j$.
- (b) Se existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $c_j = c_{j+1}$, então J_g possui infinitos pontos críticos que mudam de sinal $u \in H_g^1(M)^\Gamma$ com $J_g(u) = c_j$.

Consequentemente, se J_g satisfaz $(PS)_c^\Gamma$ em $H_g^1(M)$ para cada $c \leq d$, então J_g tem pelo menos $\mathfrak{g}(\mathcal{D}_d^\Gamma, \mathcal{D}_0^\Gamma)$ pares de pontos críticos que mudam de sinal $\pm u \in H_g^1(M)^\Gamma$ com $J_g(u) \leq d$.

Demonstração. (a) Suponha por contradição que J_g não possui ponto crítico que muda de sinal $u \in H_g^1(M)^\Gamma$ com $J_g(u) = c_j$. Então, como J_g satisfaz a condição $(PS)_{c_j}^\Gamma$ em $H_g^1(M)$, existe $\varepsilon \in (0, c_j)$ e $\beta > 0$ tal que $\|\nabla J_g(u)\|_{a,b} \geq \beta$ para cada $u \in J_g^{-1}([c_j - \varepsilon, c_j + \varepsilon]) \setminus \mathcal{D}_0^\Gamma$.

Consequentemente, $\mathcal{D}_{c_j+\varepsilon}^\Gamma \subset \mathcal{A}(\mathcal{D}_{c_j-\varepsilon}^\Gamma)$. Com efeito, seja $u \in \mathcal{D}_{c_j+\varepsilon}^\Gamma$. Se $u \in B_\rho(\mathcal{P}_+^\Gamma) \cup B_\rho(\mathcal{P}_-^\Gamma)$, então, pelo item (b) do Lema 2.4.12, $u \in \mathcal{A}(\mathcal{D}_{c_j-\varepsilon}^\Gamma)$. Por outro lado, se $u \in J_g^{c_j+\varepsilon}$, então, argumentando de forma semelhante ao lema de deformação (veja [41]), mostra-se que $\psi(t, u) \in J_g^{c_j-\varepsilon}$ para algum $t \in (0, T(u))$. Portanto, $\mathcal{D}_{c_j+\varepsilon}^\Gamma \subset \mathcal{A}(\mathcal{D}_{c_j-\varepsilon}^\Gamma)$. Pelo Corolário 2.4.13, o conjunto $\mathcal{D}_{c_j-\varepsilon}^\Gamma$ é estritamente positivamente invariante pelo fluxo ψ e, além disso, a aplicação $\varrho_{c_j-\varepsilon} : \mathcal{A}(\mathcal{D}_{c_j-\varepsilon}^\Gamma) \rightarrow \mathcal{D}_{c_j-\varepsilon}^\Gamma$ é ímpar e contínua, e satisfaz $\varrho_{c_j-\varepsilon}(u) = u$ para todo $u \in \mathcal{D}_{c_j-\varepsilon}^\Gamma$. Considere a aplicação $f : \mathcal{D}_{c_j+\varepsilon}^\Gamma \rightarrow \mathcal{D}_{c_j-\varepsilon}^\Gamma$ dada por $f(u) = \varrho_{c_j-\varepsilon}(u)$. Consequentemente, f é ímpar e contínua, satisfazendo $f(u) = u$ para todo $u \in \mathcal{D}_0^\Gamma$, pois $\mathcal{D}_0^\Gamma \subset \mathcal{D}_{c_j-\varepsilon}^\Gamma \subset \mathcal{D}_{c_j+\varepsilon}^\Gamma$. Assim, segue que $\mathcal{D}_0^\Gamma$ é uma retração de vizinhança simétrica. Portanto, como $\mathcal{D}_0^\Gamma \subset \mathcal{D}_{c_j}^\Gamma \subset \mathcal{D}_{c_j+\varepsilon}^\Gamma$, pela monotonicidade do gênero relativo a $\mathcal{D}_0^\Gamma$, obtemos

$$j \leq \mathfrak{g}(\mathcal{D}_{c_j}, \mathcal{D}_0^\Gamma) \leq \mathfrak{g}(\mathcal{D}_{c_j+\varepsilon}^\Gamma, \mathcal{D}_0^\Gamma) \leq \mathfrak{g}(\mathcal{D}_{c_j-\varepsilon}^\Gamma, \mathcal{D}_0^\Gamma).$$

Daí, $c_j \leq c_j - \varepsilon$, o que é uma contradição. Isto prova o item (a).

(b) Seja $c := c_j = c_{j+1}$. Suponha por contradição que J_g possui uma quantidade finita de pontos críticos que mudam de sinal $\pm u_1, \dots, \pm u_n$ com $J_g(u_i) = c$. Fixe $\delta > 0$ menor que a metade da distância entre cada um desses pontos e menor que a distância de cada um deles ao conjunto $\mathcal{D}_0^\Gamma$. Denote $\mathcal{U}_r = B_r(\{\pm u_j\})$, $j = 1, \dots, n$. Então, $\mathcal{U}_\delta \cap \mathcal{D}_0^\Gamma = \emptyset$. Além disso, pelas propriedades do gênero de Krasnoselskii, $\mathfrak{g}(\mathcal{U}_\delta) = 1$ (veja [38], p. 95). Desde que J_g satisfaz a condição $(PS)_c^\Gamma$ em $H_g^1(M)$, existe $\varepsilon \in (0, c)$ e $\beta > 0$ tal que $\|\nabla J_g(u)\|_{a,b} \geq \beta$ para cada $u \in J_g^{-1}([c_j - \varepsilon, c_j + \varepsilon]) \setminus (\mathcal{D}_0^\Gamma \cup \mathcal{U}_{\delta/2})$.

Afirmção. $\mathcal{D}_{c+\varepsilon}^\Gamma \setminus \text{int}(\mathcal{U}_\delta) \subset \mathcal{A}(\mathcal{D}_{c-\varepsilon}^\Gamma)$.

De fato, seja $u \in \mathcal{D}_{c+\varepsilon}^\Gamma \setminus \text{int}(\mathcal{U}_\delta)$. Se $u \in B_\rho(\mathcal{P}_+^\Gamma) \cup B_\rho(\mathcal{P}_-^\Gamma)$, então, pelo item (b) do Lema 2.4.12, $u \in \mathcal{A}(\mathcal{D}_{c-\varepsilon}^\Gamma)$. Suponha que $u \in J_g^{c+\varepsilon}$. Se $\psi(t, u) \notin \mathcal{U}_{\delta/2}$ para todo $t \in (0, T(u))$, então $u \in \mathcal{A}(\mathcal{D}_{c-\varepsilon}^\Gamma)$. Por outro lado, se $\psi(t, u) \in \mathcal{U}_{\delta/2}$ para algum t , então, tomando $t_0 := \min\{t \in (0, T(u)); \psi(t, u) \in \mathcal{U}_{\delta/2}\}$ e $\varepsilon < \frac{\beta\delta}{4}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{2} &\leq \|\psi(t_0, u) - u\|_{a,A} &\leq \int_0^{t_0} \left\| \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, u) \right\|_{a,A} dt \\ &&\leq \frac{1}{\beta} \int_0^{t_0} \|\nabla J_g(\psi(t, u))\|_{a,A}^2 dt \\ &&\leq \frac{\delta}{4\varepsilon} \int_0^{t_0} \|\nabla J_g(\psi(t, u))\|_{a,A}^2 dt \\ &= \frac{\delta}{4\varepsilon} \int_0^{t_0} -\frac{\partial(J_g \circ \psi)}{\partial t}(t, u) dt. \\ &= \frac{\delta}{4\varepsilon} (J_g(u) - J_g(\psi(t_0, u))). \end{aligned}$$

Daí, $J_g(\psi(t_0, u)) \leq J_g(u) - 2\varepsilon \leq c - \varepsilon$ e, conseqüentemente, $u \in \mathcal{A}(\mathcal{D}_{c-\varepsilon}^\Gamma)$, o que finaliza a prova da Afirmação.

Novamente pelo Corolário 2.4.13, temos que a aplicação $g : \mathcal{D}_{c+\varepsilon}^\Gamma \setminus \text{int}(\mathcal{U}_\delta) \rightarrow \mathcal{D}_{c-\varepsilon}^\Gamma$ definida por $g(u) = \varrho_{c-\varepsilon}(u)$ é ímpar e contínua, e satisfaz $g(u) = u$ para todo $u \in \mathcal{D}_0^\Gamma$, pois $\mathcal{D}_0^\Gamma \subset \mathcal{D}_{c-\varepsilon}^\Gamma \cap (\mathcal{D}_{c+\varepsilon}^\Gamma \setminus \text{int}(\mathcal{U}_\delta))$. Assim, pela monotonicidade do gênero relativo a $\mathcal{D}_0^\Gamma$, seque que

$$\mathfrak{g}(\mathcal{D}_{c+\varepsilon}^\Gamma \setminus \text{int}(\mathcal{U}_\delta), \mathcal{D}_0^\Gamma) \leq \mathfrak{g}(\mathcal{D}_{c-\varepsilon}^\Gamma, \mathcal{D}_0^\Gamma).$$

Agora, como $\mathcal{U}_\delta \cap \mathcal{D}_0^\Gamma = \emptyset$, pela subaditividade e monotonicidade, obtemos

$$\begin{aligned} j+1 \leq \mathfrak{g}(\mathcal{D}_c, \mathcal{D}_0^\Gamma) &\leq \mathfrak{g}(\mathcal{D}_{c+\varepsilon}, \mathcal{D}_0^\Gamma) \\ &= \mathfrak{g}(\mathcal{D}_{c+\varepsilon} \setminus \text{int}(\mathcal{U}_\delta) \cup \text{int}(\mathcal{U}_\delta), \mathcal{D}_0^\Gamma) \\ &\leq \mathfrak{g}(\mathcal{D}_{c+\varepsilon} \setminus \text{int}(\mathcal{U}_\delta), \mathcal{D}_0^\Gamma) + \mathfrak{g}(\text{int}(\mathcal{U}_\delta)) \\ &\leq \mathfrak{g}(\mathcal{D}_{c-\varepsilon}^\Gamma, \mathcal{D}_0^\Gamma) + \mathfrak{g}(\mathcal{U}_\delta) \\ &\leq \mathfrak{g}(\mathcal{D}_{c-\varepsilon}^\Gamma, \mathcal{D}_0^\Gamma) + 1, \end{aligned}$$

o que implica em $j \leq \mathfrak{g}(\mathcal{D}_{c-\varepsilon}^\Gamma, \mathcal{D}_0^\Gamma)$. Assim, $c < c - \varepsilon$, o que é uma contradição, provando assim o item (b). $\square$

A seguir, mostraremos uma versão do “Teorema do Passo da Montanha” para soluções nodais.

Teorema 2.4.20 (*Pontos críticos que mudam de sinal*). *Seja W um subespaço de dimensão finita não trivial de $H_g^1(M)^\Gamma$. Se J_g satisfaz a condição $(PS)_\tau^\Gamma$ em $H_g^1(M)$ para cada $\tau \leq \sup_W J_g$, então J_g tem pelo menos um ponto crítico positivo u_1 e $\dim(W) - 1$ pares de pontos críticos que mudam de sinal $\pm u_2, \dots, \pm u_k$ em $H_g^1(M)^\Gamma$ tais que $J_g(u_1) = \tau_g^\Gamma$ e $J_g(u_i) \leq \sup_W J_g$ para todo $i = 1, \dots, k$.*

Demonstração. Inicialmente, como estamos interessados em obter um ponto crítico positivo, o funcional energia associado ao problema (2.1) pode ser dado por

$$I_g(u) = \frac{1}{2} \|u\|_{a,b}^2 - \frac{1}{2^*} \int_M c(u^+)^{2^*} dV_g,$$

o qual está bem definido e é de classe C^1 em $H_g^1(M)^\Gamma$. Além disso, sua derivada é dada por

$$I'_g(u) \cdot v = \langle u, v \rangle_{a,b} - \int_M c(u^+)^{2^*-1} v dV_g. \quad (2.51)$$

Mostraremos que I_g satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha. De fato, usando que $(u^+)^{2^*} \leq |u|^{2^*}$ e a imersão contínua $H_g^1(M) \hookrightarrow L^{2^*}(M)$, seque que

$$\begin{aligned} I_g(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|_{a,b}^2 - \frac{1}{2^*}|u|_{c,2^*}^{2^*} \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|_{a,b}^2 - \frac{C}{2^*}\|u\|_{a,b}^{2^*} = \|u\|_{a,b}^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{C}{2^*}\|u\|_{a,b}^{2^*-2} \right). \end{aligned}$$

Se $\|u\|_{a,b} = \rho$, então

$$I_g(u) \geq \rho^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{C}{2^*}\rho^{2^*-2} \right).$$

Logo, para $\rho > 0$ suficientemente pequeno, temos que

$$\alpha := \rho^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{C}{2^*}\rho^{2^*-2} \right) > 0.$$

Assim, $I_g(u) \geq \alpha > 0$, para todo $u \in \partial B_\rho(0)$. Além disso, notemos que $I_g(0) = 0 < \alpha$. Agora, se $u \in H_g^1(M)^\Gamma \setminus \{0\}$, $(u^+) \neq 0$ e $t > 0$, então

$$\begin{aligned} I_g(tu) &= \frac{t^2}{2}\|u\|_{a,b}^2 - \frac{t^{2^*}}{2^*}|u^+|_{c,2^*}^{2^*} \\ &= t^{2^*} \left(\frac{1}{2t^{2^*-2}}\|u\|_{a,b}^2 - \frac{1}{2^*}|u^+|_{c,2^*}^{2^*-2} \right). \end{aligned}$$

Assim, podemos escolher $v = tu$, com $t > 0$ suficientemente grande, tal que $I_g(v) \leq 0 < \alpha$ e $v \in H_g^1(M)^\Gamma \setminus \overline{B}_\rho(0)$. Seja $d := \sup_W J_g$. Como $\dim W < \infty$, as normas $\|\cdot\|_{a,b}$ e $|\cdot|_{c,2^*}$ são equivalentes em W . Então, sendo $2^* > 2$, temos

$$\lim_{\|u\|_{a,b} \rightarrow \infty} J_g(u) = -\infty,$$

com $u \in W$, ou seja, existe $s > 0$ tal que $J_g(u) \leq 0$ para todo $u \in W$ com $\|u\|_{a,b} \geq s$. Logo, $d \in (0, \infty)$. Portanto, como I_g satisfaz a condição $(PS)_\tau^\Gamma$ para cada $\tau \leq d$, pelo Teorema do Passo da Montanha 1.5.3, I_g possui um ponto crítico não trivial $u_1 \in H_g^1(M)^\Gamma$. Notemos que u_1 é ponto crítico não negativo de J_g . Com efeito, considerando $v = u_1^- \in H_g^1(M)^\Gamma$ em (2.51), segue que

$$\langle u_1, u_1^- \rangle_{a,b} - \int_M c(u_1^+)^{2^*-1} u_1^- dV_g = 0,$$

donde obtemos que $\|u_1^-\|_{a,b}^2 = 0$, isto é, $u_1^- = 0$. Dessa forma, $u_1 = u_1^+ \geq 0$ e de (2.51) temos que u_1 é ponto crítico de J_g . Por fim, pelo Princípio do Máximo, u_1 é positivo.

A seguir, mostraremos a existência dos pontos críticos que mudam de sinal. Como J_g satisfaz $(PS)_\tau^\Gamma$ em $H_g^1(M)$ e $\tau \leq d$, Pelo Lema 2.4.19, precisamos apenas mostrar que $n := \mathfrak{g}(\mathcal{D}_d^\Gamma, \mathcal{D}_0^\Gamma) \geq \dim(W) - 1$. Sejam $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$ de $H_g^1(M)^\Gamma$ abertos simétricos que cobrem $\mathcal{D}_d^\Gamma$ com $\mathcal{D}_0^\Gamma \subset \mathcal{U}_0$ e sejam $\vartheta_0 : \mathcal{U}_0 \rightarrow \mathcal{D}_0^\Gamma$ e $\vartheta_j : \mathcal{U}_j \rightarrow \{-1, 1\}$, com $j = 1, \dots, n$, aplicações contínuas e ímpares tal que $\vartheta_0(u) = u$ para todo $u \in \mathcal{D}_0^\Gamma$. Diminuindo $\mathcal{U}_0$

se necessário, podemos assumir que ϑ_0 está definida em $\overline{U}_0$. Assim, pelo teorema de extensão de Tietze, existe uma aplicação ímpar e contínua $\tilde{\vartheta}_0 : H_g^1(M)^\Gamma \rightarrow H_g^1(M)^\Gamma$ tal que $\tilde{\vartheta}_0|_{\overline{U}_0} = \vartheta_0$. Seja $\mathcal{B}$ a componente conexa do complementar da variedade Nehari $\mathcal{N}_g^\Gamma$ em $H_g^1(M)^\Gamma$ que contém a origem. Logo, $\mathcal{B}$ é aberto por ser conexo. Considere o conjunto $\mathcal{O} := \{u \in W; \tilde{\vartheta}_0(u) \in \mathcal{B}\}$. Note que $\mathcal{O} = W \cap \tilde{\vartheta}_0^{-1}(\mathcal{B})$. Então, $\mathcal{O}$ é uma vizinhança aberta simétrica de 0 em W , pois $\tilde{\vartheta}_0$ é contínua e ímpar. Temos ainda que $\mathcal{O}$ é limitado. Com efeito, suponha por contradição que $\mathcal{O}$ não é limitado. Então, para todo $R_0 > 0$, existe $v_0 \in \mathcal{O}$ tal que $\|v_0\| \geq R_0$ e $J_g(v_0) \leq 0$. Consequentemente, $\tilde{\vartheta}_0(v_0) = \vartheta_0(v_0) = v_0 \in \mathcal{B}$. Mas, como a variedade de Nehari é homeomorfa a esfera unitária em $H_g^1(M)^\Gamma$, ela divide o espaço $H_g^1(M)^\Gamma$ em duas componentes conexas. Então, $\mathcal{N}_g^\Gamma$ desconecta a origem e $[B(0, R)]^c$ para algum $R > 0$, assim como R_0 é arbitrário podemos considerar $R_0 > R$. Assim, obtemos que $v_0 \in [B(0, R)]^c$, o que é uma contradição, pois $\mathcal{B}$ é conexo.

Agora, considere $\mathcal{V}_j := \mathcal{U}_j \cap \partial\mathcal{O}$, $j = 0, 1, \dots, n$. Então, $\mathcal{V}_j$ são conjuntos simétricos e abertos em $\partial\mathcal{O}$. Além disso, usando a definição de $\mathcal{V}_0$ e o Corolário 2.4.14, temos

$$\vartheta_0(\mathcal{V}_0) \subset \mathcal{D}_0^\Gamma \cap \mathcal{N}_g^\Gamma \subset \mathcal{N}_g^\Gamma \setminus \mathcal{E}_g^\Gamma.$$

Observe que

$$\mathcal{N}_g^\Gamma \setminus \mathcal{E}_g^\Gamma = \mathcal{N}_+ \cup \mathcal{N}_-,$$

onde $\mathcal{N}_+ = \{u \in \mathcal{N}_g^\Gamma; u \geq 0\}$ e $\mathcal{N}_- = \{u \in \mathcal{N}_g^\Gamma; u \leq 0\}$, ou seja, $\mathcal{N}_g^\Gamma \setminus \mathcal{E}_g^\Gamma$ consiste de duas componentes conexas. Então, existe uma aplicação ímpar e contínua $\eta : \mathcal{N}_g^\Gamma \setminus \mathcal{E}_g^\Gamma \rightarrow \{1, -1\}$. Sejam $\eta_j : \mathcal{V}_j \rightarrow \{1, -1\}$ definidas por

$$\eta_j(u) = \begin{cases} (\eta \circ \vartheta_0)(u), & \text{se } j = 0 \\ \vartheta_j(u), & \text{se } j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Temos que η_j é ímpar e contínua para todo $j = 0, \dots, n$. Considere a partição da unidade $\{\pi_j : \partial\mathcal{O} \rightarrow [0, 1]; j = 0, \dots, n\}$ subordinada a cobertura $\{\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_n\}$ que consiste de funções pares e $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^{n+1}$. Assim, a aplicação $\Psi : \partial\mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ definida por

$$\Psi(u) = \sum_{j=0}^n \eta_j(u) \pi_j(u) e_{j+1}$$

é ímpar e contínua, satisfazendo $\Psi(u) \neq 0$ para todo $u \in \partial\mathcal{O}$.

Afirmamos que $\dim(W) \leq n + 1$. De fato, suponha que $\dim(W) > n + 1$, então, como $\mathcal{O} \subset W$ é uma vizinhança aberta simétrica de 0 em W e limitada, pelo teorema de Borsuk-Ulam (Teorema 1.5.6), existe $v \in \partial\mathcal{O}$ tal que $\Psi(v) = 0$, o que é uma contradição. Portanto, $\dim(W) \leq n + 1$, como desejávamos. $\square$

Capítulo 3

Prova dos Principais resultados

Antes de provarmos os Teoremas que foram apresentados no capítulo anterior, enunciaremos algumas definições e resultados necessários. A prova e mais detalhes podem ser encontrados nas referências [1, 6, 26]. Lembre-se que (M, g) é uma variedade Riemanniana compacta sem bordo de dimensão $m \geq 3$ e Γ é um subgrupo fechado de $\text{Isom}_g(M)$.

Definição 3.0.1. O espaço das Γ -órbitas de um subconjunto Γ -invariante X de M é o conjunto X/Γ de todas as Γ -órbitas em X , munido da topologia quociente definida pela seguinte relação de equivalência em M : p se relaciona com q se, e somente se, existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma(p) = q$.

Assim, cada Γ -órbita é uma classe de equivalência, ou seja, as Γ -órbitas de um conjunto X o particionam em conjuntos disjuntos.

Definição 3.0.2. Sejam $p \in M$. O conjunto dos elementos de Γ que deixam p fixo é definido por

$$\Gamma_p := \{\gamma \in \Gamma; \gamma(p) = p\}.$$

Proposição 3.0.3. O conjunto Γ_p é um subgrupo fechado de Γ , chamado de subgrupo Γ -isotrópico (ou subgrupo de isotropia de Γ em p). Além disso, os subgrupos de isotropia satisfazem $\Gamma_{\gamma(p)} = \gamma\Gamma_p\gamma^{-1}$.

Assim, os subgrupos de isotropia correspondentes a pontos na mesma órbita $\Gamma(p)$ são conjugados, isto é, todo subgrupo que é conjugado de um subgrupo de isotropia também é um subgrupo de isotropia.

Definição 3.0.4. A classe de conjugação de um subgrupo H de Γ é o conjunto de subgrupos $(H) := \{\gamma H \gamma^{-1}; \gamma \in \Gamma\}$.

Proposição 3.0.5. A Γ -órbita $\Gamma(p)$ de cada ponto p de uma variedade M é uma subvariedade de M Γ -difeomorfa ao espaço homogêneo Γ/Γ_p .

Teorema 3.0.6. *Seja M uma variedade conexa suave de dimensão m com uma ação suave de um grupo de Lie compacto Γ . Então, existe um subgrupo fechado H de Γ tal que o conjunto $M_{(H)} := \{p \in M; (\Gamma_p) = (H)\}$ é aberto, Γ -invariante e denso em M . Além disso, o seu espaço das órbitas $M_{(H)}/\Gamma$ é uma variedade suave de dimensão $m - \dim(\Gamma/H)$ e a aplicação quociente $\pi : M_{(H)} \rightarrow M_{(H)}/\Gamma$ é um fibrado com fibra Γ/H .*

Demonstração. A prova desse resultado segue dos Teoremas 3.1, 3.3 e 3.8 do capítulo IV em [6]. $\square$

3.1 Prova do Teorema 2.0.1

Sendo M compacta, temos que $\text{Isom}_g(M)$ é um grupo de Lie compacto, consequentemente, Γ é compacto. Pelo Teorema 3.0.6, existe um subgrupo fechado H de Γ tal que o conjunto $\Omega := M_{(H)}$ é aberto, Γ -invariante e denso em M . Além disso, como a projeção canônica $\pi : \Omega \rightarrow \Omega/\Gamma$ é um fibrado com fibra Γ/H , para cada Γ -órbita $\Gamma(p)$ em Ω/Γ , existe um aberto U_p que contém $\Gamma(p)$ em Ω/Γ tal que $U_p \times \Gamma/H$ é homeomorfo a $\Omega_p := \pi^{-1}(U_p)$. Então, por definição do espaço quociente Ω/Γ , Ω_p é aberto em Ω e $\Gamma(p) \subset \Omega_p$. Temos ainda que Ω_p é Γ -invariante. De fato, dado $q \in \Gamma(\Omega_p)$, temos $q \in \Gamma(x)$ para algum $x \in \Omega_p$. Como as Γ -órbitas são partições disjuntas de Ω , segue que $\Gamma(q) = \Gamma(x)$. Logo, $\pi(q) \in \pi(\Omega_p)$, isto é, $q \in \pi^{-1}(\pi(\Omega_p))$. Mas, como π é sobrejetiva, temos que

$$\Omega_p = \pi^{-1}(U_p) = \pi^{-1}(\pi(\Omega_p)),$$

o que implica em $\Gamma(\Omega_p) \subset \Omega_p$, ou seja, Ω_p é Γ -invariante. Agora, como H é conjugado de Γ_p para todo $p \in \Omega$, pela Proposição 3.0.5, a Γ -órbita $\Gamma(p)$ de cada ponto $p \in \Omega$ é Γ -difeomorfa ao espaço Γ/H . Então, como $\dim(\Gamma(p)) < m$, pelo Teorema 3.0.6, $\dim(\Omega/\Gamma) = m - \dim(\Gamma/H) \geq 1$. Assim, para cada $k \in \mathbb{N}$, podemos escolher k diferentes Γ -órbitas $\Gamma(p_1), \dots, \Gamma(p_k) \subset \Omega$ e vizinhanças Γ -invariantes Ω_{p_i} de $\Gamma(p_i)$ em Ω , com $\Omega_{p_i} \cap \Omega_{p_j} = \emptyset$ se $i \neq j$, pois argumentando como anteriormente, podemos considerar os abertos U_{p_i} de modo que $U_{p_i} \cap U_{p_j} = \emptyset$, já que o espaço das órbitas Ω/Γ é Hausdorff. Dessa forma, podemos escolher funções Γ -invariantes $\omega_i \in C_c^\infty(\Omega_{p_i}) \setminus \{0\}$, para cada $i = 1, \dots, k$.

Seja $W := [\omega_1, \dots, \omega_k]$ o subespaço de $H_g^1(M)^\Gamma$ gerado por $\{\omega_1, \dots, \omega_k\}$. Como as funções ω_i e ω_j possuem suportes disjuntos para $i \neq j$, segue que o conjunto $\{\omega_1, \dots, \omega_k\}$ é ortogonal em $H_g^1(M)^\Gamma$, ou seja, $\langle \omega_i, \omega_j \rangle_{a,b} = 0$ para todo $i \neq j$. Então, $\dim W = k$. Por outro lado, sendo $\dim(\Gamma(p)) \geq 1$, temos que $\#\Gamma(p) = \infty$ para todo $p \in M$. Assim, pelo Teorema 2.3.4, J_g satisfaz $(PS)_\tau^\Gamma$ em $H_g^1(M)$ para todo $\tau \in \mathbb{R}$. Portanto, o Teorema 2.4.20 implica que o problema (2.1) possui pelo menos uma solução positiva e $k - 1$ soluções

nodais em $H_g^1(M)^\Gamma$. Por fim, como $k \in \mathbb{N}$ é arbitrário, concluímos que existem infinitas soluções nodais.

3.2 Prova do Teorema 2.0.5

Inicialmente, mostraremos a existência da sequência (ℓ_k) . Pelo Teorema 3.0.6, substituindo Ω por um subconjunto aberto Λ -invariante dele, se necessário, podemos assumir que a Λ -órbita $\Lambda(p)$ é Λ -difeomorfa a Λ/H para todo $p \in \Omega$ e algum subgrupo fechado de Λ fixado. Seja $\mathcal{P}_1(\Omega)$ a família de todos os abertos não-vazios Λ -invariantes de Ω e, para cada $\tilde{\Omega} \in \mathcal{P}_1(\Omega)$, considere o conjunto

$$\mathcal{D}(\tilde{\Omega}) = \{\varphi \in C_c^\infty(\tilde{\Omega}); \varphi \text{ é } \Lambda\text{-invariante, } \varphi \neq 0, \|\varphi\|_{h,a,b}^2 = |\varphi|_{h,c,2^*}^{2^*}\}.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja

$$\mathcal{P}_k(\Omega) := \{(\Omega_1, \dots, \Omega_k); \Omega_i \in \mathcal{P}_1(\Omega), \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \text{ se } i \neq j\}.$$

Sendo $\dim(\Lambda(p)) < m$, argumentando como na prova do Teorema 2.0.1, podemos ver que $\mathcal{P}_k(\Omega) \neq \emptyset$ e $\mathcal{D}(\tilde{\Omega}) \neq \emptyset$. Agora, considere

$$\tau_k := \inf \left\{ \sum_{i=1}^k \frac{1}{m} \|\varphi_i\|_{h,a,b}^2; \varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega_i), (\Omega_1, \dots, \Omega_k) \in \mathcal{P}_k(\Omega) \right\}$$

e defina

$$\ell_k := \left(\frac{1}{m} S^{m/2} \right)^{-1} \tau_k.$$

Estendendo $\varphi \in \mathcal{D}(\tilde{\Omega})$ por zero fora de $\tilde{\Omega}$, temos que $\varphi \in H_h^1(\Omega)^\Lambda$. Por definição de τ_k , temos

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{m} \|\varphi_i\|_{h,a,b}^2 = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{m} \|\varphi_i\|_{h,a,b}^2 + \frac{1}{m} \|\varphi_k\|_{h,a,b}^2 \geq \tau_{k-1} + \tau_1 > \tau_{k-1},$$

o que implica em $\tau_k > \tau_{k-1} > 0$, para todo $k \geq 2$. Portanto, (ℓ_k) é estritamente crescente.

A seguir, mostraremos que a sequência (ℓ_k) tem a propriedade desejada. De fato, fixe $k \in \mathbb{N}$, e sejam (M, g) uma variedade Riemanniana fechada e Γ um subgrupo fechado de $\text{Isom}_g(M)$ que satisfaz (1)-(4). Como $g = h$ em Ω e Γ é subgrupo de Λ , estendendo $\varphi \in \mathcal{D}(\tilde{\Omega})$ por zero fora de $\tilde{\Omega}$, temos que φ é Γ -invariante, isto é, $\varphi \in H_g^1(M)^\Gamma$. Assim, por definição, temos $\varphi \in \mathcal{N}_g^\Gamma$. Logo, $D(\tilde{\Omega}) \subset \mathcal{N}_g^\Gamma$ para todo $\tilde{\Omega} \in \mathcal{P}_1(\tilde{\Omega})$ e

$$J_g(\varphi) = \frac{1}{m} \|\varphi\|_{a,b}^2, \quad \forall \varphi \in D(\tilde{\Omega}),$$

consequentemente, pela Proposição 2.2.4, $\tau_1 \geq \tau_g^\Gamma > 0$. Desde que

$$\ell_{a,c}^\Gamma := \min_{p \in M} \frac{a(p)^{m/2} \# \Gamma(p)}{c(p)^{(m-2)/2}} > \ell_k,$$

podemos tomar $\varepsilon \in (0, \tau_1)$ tal que

$$\tau_k + \varepsilon < \ell_{a,c}^\Gamma \left(\frac{1}{m} S^{m/2} \right).$$

Então, por definição de τ_k , existem $(\Omega_1, \dots, \Omega_k) \in \mathcal{P}_k(\Omega)$ e $\omega_i \in \mathcal{D}(\Omega_i)$ tais que

$$\tau_k \leq \sum_{i=1}^k J_g(\omega_i) < \tau_k + \varepsilon. \quad (3.1)$$

Para cada $n = 1, \dots, k$, considere $W_n := [\omega_i, \dots, \omega_n]$. Como ω_i e ω_j têm suportes disjuntos para $i \neq j$, o conjunto $\{\omega_1, \dots, \omega_k\}$ é ortogonal em $H_g^1(M)^\Gamma$. Portanto, $\dim W_n = n$, além disso, se $u \in W_n$, tem-se

$$u = \sum_{i=1}^n t_i \omega_i, \quad t_i \in \mathbb{R}$$

e, daí,

$$J_g(u) = \sum_{i=1}^n J_g(t_i \omega_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{m} \underbrace{|t_i|}_{\tilde{t}_i \geq 0} \|\omega_i\|_{a,b}^2 = \sum_{i=1}^n J_g(\tilde{t}_i \omega_i).$$

Mas, como $\omega_i \in \mathcal{N}_g^\Gamma$, pela Proposição 2.2.3, segue que $J(\omega_i) = \max_{t \geq 0} J_g(t \omega_i)$. Assim, desse fato e de (3.1), obtemos

$$J(u) \leq \sum_{i=1}^n J_g(\omega_i) < \tau_k + \varepsilon, \quad \forall u \in W_n, \quad (3.2)$$

o que implica em

$$\sigma_n := \sup_{W_n} J_g < \tau_k + \varepsilon < \ell_{a,c}^\Gamma \left(\frac{1}{m} S^{m/2} \right).$$

Logo, pelo Teorema 2.3.4, J_g satisfaz a condição $(PS)_\tau^\Gamma$ em $H_g^1(M)$, para todo $\tau \leq \sigma_n$. Portanto, aplicando o Teorema 2.4.20 para W_n , obtemos um ponto crítico positivo u_1 e $n-1$ pares de pontos críticos que mudam de sinal $\pm u_{n,2}, \dots, \pm u_{n,n}$ de J_g em $H_g^1(M)^\Gamma$ tais que $J_g(u_1) = \tau_g^\Gamma \leq \tau_1$ e

$$J_g(u_{n,i}) \leq \sigma_n, \quad \forall i = 2, \dots, n.$$

Agora, para cada $2 \leq n \leq k$, escolhemos indutivamente $u_n \in \{u_{n,2}, \dots, u_{n,n}\}$ tal que $u_n \neq u_j$ para todo $1 \leq j < n$. Note que $\tau_1 \leq J_g(\omega_i)$ para todo $i = 1, \dots, k$,

consequentemente, para cada $2 < n \leq k$, obtemos

$$\sum_{i=1}^n J_g(\omega_i) + (n - k)\tau_1 \leq \sum_{i=1}^n J_g(\omega_i) + \sum_{i=n+1}^k J_g(\omega_i) = \sum_{i=1}^k J_g(\omega_i).$$

Então, por (3.1) e (3.2), resulta

$$\sigma_n + (n - k)\tau_1 \leq \sum_{i=1}^n J_g(\omega_i) + \sum_{i=n+1}^k J_g(\omega_i) < \tau_k + \varepsilon.$$

Sendo $\varepsilon \in (0, \tau_1)$, então, para todo $n < k$, temos

$$\sigma_n + (k - n)\tau_1 < \tau_k + \varepsilon < \tau_k + \tau_1,$$

donde concluímos que

$$J_g(u_n) \leq \sigma_n < \tau_k, \quad \forall n < k, \quad \text{e} \quad J_g(u_k) \leq \sigma_k < \tau_k + \varepsilon.$$

A prova de que os u_j 's podem ser escolhidos para que a desigualdade (2.2) seja satisfeita segue das seguintes afirmações:

Afirmação 1: J_g possui k pares de pontos críticos $\pm v_1, \dots, \pm v_k$ em $H_g^1(M)^\Gamma$ tais que v_1 é positivo, $v_2, \dots, v_k$ mudam de sinal e

$$J_g(v_n) \leq \tau_k, \quad \forall n = 1, \dots, k.$$

Com efeito, seja $\varepsilon_l > 0$ tal que $\varepsilon_l \in (0, \tau_1)$ e $\varepsilon_l \rightarrow 0$ quando $l \rightarrow \infty$. Pelo que mostramos inicialmente, para cada $l \in \mathbb{N}$, existem k pares de pontos críticos $\pm w_{l,1}, \dots, \pm w_{l,k}$ de J_g em $H_g^1(M)^\Gamma$ tais que $w_{l,1}$ é positivo, $w_{l,2}, \dots, w_{l,k}$ mudam de sinal,

$$J_g(w_{l,n}) < \tau_k, \quad \forall n = 1, \dots, k - 1, \quad \text{e} \quad J_g(w_{l,k}) < \tau_k + \varepsilon_l. \quad (3.3)$$

Se existir l_0 tal que $J_g(w_{l_0,k}) \leq \tau_k$, então as funções $v_n := w_{l_0,n}$, com $n = 1, \dots, k$, verificam o desejado. Por outro lado, se $J_g(w_{l,k}) > \tau_k$ para todo l , então, por (3.3), $J_g(w_{l,k}) \rightarrow \tau_k$ quando $l \rightarrow \infty$. Mas, como $J'_g(w_{l,k}) = 0$ e, pelo Teorema 2.3.4, J_g satisfaz $(PS)_{\tau_k}^\Gamma$, existe $v_k \in H_g^1(M)$ tal que, a menos de subsequência, $w_{l,k} \rightarrow v_k$ quando $l \rightarrow \infty$. Assim, v_k é ponto crítico de J_g com $J_g(v_k) = \tau_k$. Observe que v_k é positivo se $k = 1$ e muda de sinal se $k \geq 2$. Além disso, como $J_g(w_{1,n}) < \tau_k$ para todo $n = 1, \dots, k - 1$, tomando $v_n := w_{1,n}$ para $n = 1, \dots, k - 1$, temos que $v_k \neq v_n$ para todo $n = 1, \dots, k - 1$, o que prova a Afirmação 1.

Afirmção 2: J_g possui k pares de pontos críticos $\pm u_1, \dots, \pm u_k$ em $H_g^1(M)^\Gamma$ tais que u_1 é positivo, $u_2, \dots, u_k$ mudam de sinal e

$$J(u_j) \leq \tau_j, \quad \forall j = 1, \dots, k.$$

De fato, uma vez que $\ell_{a,c}^\Gamma > \ell_k$, temos $\ell_{a,c}^\Gamma > \ell_n$ para todo $n = 1, \dots, k$, pois ℓ_k é crescente. Assim, aplicando a Afirmção 1, para cada $n = 1, \dots, k$, obtemos n pares de pontos críticos $\pm v_{n,1}, \dots, \pm v_{n,n}$ de J_g em $H_g^1(M)^\Gamma$ tais que $v_{n,1}$ é positivo, $v_{n,2}, \dots, v_{n,n}$ mudam de sinal e

$$J(v_{n,i}) \leq \tau_n, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Seja $u_1 := v_{1,1}$ e, para cada $2 \leq n \leq k$, escolha indutivamente $u_n \in \{v_{n,2}, \dots, v_{n,n}\}$ tal que $u_n \neq u_i$ para todo $i = 2, \dots, n-1$. Portanto, $\pm u_1, \dots, \pm u_k$ são pontos críticos de J_g em $H_g^1(M)^\Gamma$ tais que u_1 é positivo, $u_2, \dots, u_k$ mudam de sinal e

$$J_g(u_j) \leq \tau_j, \quad \forall j = 1, \dots, k.$$

Finalmente, pela Afirmção 2, concluímos que

$$\int_M c|u_j|^{2^*} dV_g = mJ_g(u_j) \leq m\tau_j = m\ell_j \left(\frac{1}{m} S^{m/2} \right) = \ell_j S^{m/2},$$

para todo $j = 1, \dots, k$.

Capítulo 4

Não existência de soluções de energia mínima

Neste capítulo, iremos mostrar que nem sempre uma solução para Equação (2.1) pode ser obtida por minimização, ou seja, a Equação (2.1) pode não ter uma solução de energia mínima. Esse resultado será provado na Proposição 4.0.6. Para tanto precisamos inicialmente estudar os seguintes resultados.

Lema 4.0.1. Sejam h e g duas métricas em M tais que $g = \varphi^{2^*-2}h$, com $\varphi \in C^\infty(M)$ e positiva. Se $v = \varphi u$, com $u \in C^\infty(M)$, então

$$\Delta_g u + \mathfrak{c}_m R_g u = \varphi^{1-2^*} (\Delta_h v + \mathfrak{c}_m R_h v).$$

Demonstração. Inicialmente, vejamos que

$$\begin{aligned} \Delta_h v &= -\operatorname{div}_h(\nabla_h v) \\ &= -\operatorname{div}_h(\nabla_h(\varphi u)) \\ &= -\operatorname{div}_h(\varphi \nabla_h u + u \nabla_h \varphi) \\ &= -\operatorname{div}_h(\varphi \nabla_h u) - \operatorname{div}_h(u \nabla_h \varphi) \\ &= -(\varphi \operatorname{div}_h(\nabla_h u) + \langle \nabla_h \varphi, \nabla_h u \rangle_h) - (u \operatorname{div}_h(\nabla_h \varphi) + \langle \nabla_h u, \nabla_h \varphi \rangle_h) \\ &= \varphi \Delta_h u + u \Delta_h \varphi - 2 \langle \nabla_h \varphi, \nabla_h u \rangle_h. \end{aligned}$$

Assim, multiplicando a última igualdade por φ , obtemos

$$\varphi \Delta_h v - v \Delta_h \varphi = \varphi^2 \Delta_h u - 2\varphi \langle \nabla_h \varphi, \nabla_h u \rangle_h.$$

Disto, segue que

$$\varphi^{-2^*}(\varphi \Delta_h v - v \Delta_h \varphi) = \varphi^{2-2^*} \Delta_h u - 2\varphi^{1-2^*} \langle \nabla_h \varphi, \nabla_h u \rangle_h. \quad (4.1)$$

Como g e h são métricas conformes com $g = \varphi^{2^*-2}h$, fazendo $e^{2f} = \varphi^{2^*-2}$, $f \in C^\infty(M)$, pela Proposição 1.1.14 vale a seguinte transformação

$$\Delta_g u = \varphi^{2-2^*} \left(\Delta_h u - \frac{2}{\varphi} \langle \nabla_h \varphi, \nabla_h u \rangle_h \right). \quad (4.2)$$

Combinando (4.1) e (4.2), obtemos

$$\Delta_g u = \varphi^{-2^*} (\varphi \Delta_h v - v \Delta_h \varphi). \quad (4.3)$$

Por outro lado, sabemos que as curvaturas escalares R_h e R_g são relacionadas pela seguinte equação

$$\Delta_h \varphi + \mathbf{c}_m R_h \varphi = \mathbf{c}_m R_g \varphi^{2^*-1}. \quad (4.4)$$

Assim, combinando (4.3) com (4.4), obtemos que

$$\begin{aligned} \Delta_g u + \mathbf{c}_m R_g u &= \varphi^{1-2^*} \Delta_h v - \varphi^{1-2^*} u \Delta_h \varphi + \mathbf{c}_m R_g u \\ &= \varphi^{1-2^*} \Delta_h v - \varphi^{1-2^*} u (\mathbf{c}_m R_g \varphi^{2^*-1} - \mathbf{c}_m R_h \varphi) + \mathbf{c}_m R_g u \\ &= \varphi^{1-2^*} \Delta_h v - \mathbf{c}_m R_g u - \varphi^{1-2^*} \mathbf{c}_m R_h v + \mathbf{c}_m R_g u. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\Delta_g u + \mathbf{c}_m R_g u = \varphi^{1-2^*} (\Delta_h v + \mathbf{c}_m R_h v),$$

finalizando a prova. $\square$

A seguir, consideremos a esfera $\mathbb{S}^m$ com a métrica usual $h = (\delta_{ij})$ e $\sigma : \mathbb{S}^m \setminus \{P\} \rightarrow \mathbb{R}^m$ a projeção estereográfica, onde $P = (0, \dots, 0, 1)$. Tomemos $f := \sigma^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{S}^m \setminus \{P\}$, ou seja,

$$f(x) = \left(\frac{2x_1}{1+|x|^2}, \dots, \frac{2x_n}{1+|x|^2}, \frac{|x|^2-1}{1+|x|^2} \right).$$

Temos que a função f também é uma parametrização para $\mathbb{S}^m$ e, pelo fato de f ser um difeomorfismo conforme, podemos induzir em $\mathbb{R}^m$ uma métrica g_0 tal que suas coordenadas dada pela parametrização f são $(g_0)_{ij} = \varphi^{2^*-2} \delta_{ij}$, onde

$$\varphi(x) = \left(\frac{2}{1+|x|^2} \right)^{\frac{m-2}{2}},$$

ou seja, g_0 é conforme a h .

Observação 4.0.2. A curvatura escalar R_{g_0} de $\mathbb{S}^m$ nesta parametrização é dada por $R_{g_0} = m(m-1)$ (Ver [12], p. 56).

Lema 4.0.3. Seja $b \in C^\infty(\mathbb{S}^m)$ tal que $b \geq \mathbf{c}_m R_{g_0} = \frac{m(m-2)}{4}$. Então, definindo $\tilde{b} = (\varphi \circ f)^{2^*-2}(b \circ f - \mathbf{c}_m R_{g_0})$, temos que

$$\inf_{u \in C^\infty(\mathbb{S}^m) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{S}^m} [|\nabla_{g_0} u|_{g_0}^2 + bu^2] dV_{g_0}}{\left(\int_{\mathbb{S}^m} |u|^{2^*} dV_{g_0} \right)^{2/2^*}} = \inf_{v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^m) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^m} [|\nabla v|^2 + \tilde{b}v^2] dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^m} |v|^{2^*} dx \right)^{2/2^*}} =: S_b.$$

Demonstração. Primeiramente, observe que

$$\begin{aligned} dV_{g_0} &= \sqrt{\det(g_0)_{ij}} dx \\ &= \sqrt{\det(\varphi^{2^*-2} \delta_{ij})} dx \\ &= \sqrt{(\varphi^{2^*-2})^m} dx \\ &= \varphi^{2^*} dx. \end{aligned}$$

Para cada $u \in C^\infty(\mathbb{S}^m)$, considere $v = (\varphi \circ f)(u \circ f)$. Pelo Lema 4.0.1, temos

$$\begin{aligned} \Delta_g u + \mathbf{c}_m R_{g_0} u &= \varphi^{1-2^*} (\Delta_h v + \mathbf{c}_m R_h v) \\ &= \varphi^{1-2^*} \Delta_h(\varphi u), \end{aligned}$$

pois $R_h \equiv 0$ por ser a curvatura escalar de $\mathbb{R}^m$. Multiplicando esta igualdade por u e integrando em $\mathbb{S}^m$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^m} [|\nabla_{g_0} u|_{g_0}^2 + \mathbf{c}_m R_{g_0} u^2] dV_{g_0} &= \int_{\mathbb{S}^m} \varphi^{1-2^*} u \Delta_h(\varphi u) dV_{g_0} \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} (\varphi \circ f)^{1-2^*} (u \circ f) \Delta_h((\varphi \circ f)(u \circ f)) (\varphi \circ f)^{2^*} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} v \Delta_h v dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} |\nabla v|^2 dx. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Agora, vejamos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^m} (b - \mathbf{c}_m R_{g_0}) u^2 dV_{g_0} &= \int_{\mathbb{R}^m} (b \circ f - \mathbf{c}_m R_{g_0}) (u \circ f)^2 (\varphi \circ f)^{2^*} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} (\varphi \circ f)^{2^*-2} (b \circ f - \mathbf{c}_m R_{g_0}) ((\varphi \circ f)(u \circ f))^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \tilde{b} v^2 dx. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Combinando (4.5) e (4.6), obtemos

$$\int_{\mathbb{S}^m} [|\nabla_{g_0} u|_{g_0}^2 + bu^2] dV_{g_0} = \int_{\mathbb{R}^m} [|\nabla v|^2 + \tilde{b}v] dx.$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^m} |u|^{2^*} dV_{g_0} &= \int_{\mathbb{R}^m} |u \circ f|^{2^*} (\varphi \circ f)^{2^*} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} |(\varphi \circ f)(u \circ f)|^{2^*} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} |v|^{2^*} dx. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Daí, segue de (4.7) que

$$\frac{\int_{\mathbb{S}^m} [|\nabla_{g_0} u|_{g_0}^2 + bu^2] dV_{g_0}}{\left(\int_{\mathbb{S}^m} |u|^{2^*} dV_{g_0} \right)^{2/2^*}} = \frac{\int_{\mathbb{R}^m} [|\nabla v|^2 + \tilde{b}v^2] dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^m} |v|^{2^*} dx \right)^{2/2^*}}, \quad \forall u \in C^\infty(\mathbb{S}^m) \setminus \{0\}. \tag{4.8}$$

Além disso, por (4.5) e (4.7), temos que, para cada $u \in C^\infty(\mathbb{S}^m)$, $|\nabla v| \in L^2(\mathbb{R}^m)$ e $v \in L^{2^*}(\mathbb{R}^m)$, donde $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^m)$. Assim, pelas propriedades de ínfimo, segue o resultado. $\square$

Observação 4.0.4. Notemos que se $b \equiv \frac{m(m-2)}{4}$, então $\tilde{b} \equiv 0$ e, assim, $S_b = S$, onde S é a melhor constante de Sobolev para a imersão $D^{1,2}(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^m)$, isto é,

$$S = \inf_{v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^m) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^m} |\nabla v|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^m} |v|^{2^*} dx \right)^{2/2^*}}.$$

É conhecido na literatura que esta constante é atingida pela função

$$U(x) = [m(m-2)]^{\frac{m-2}{4}} \left(\frac{1}{1+|x|^2} \right)^{\frac{m-2}{2}}.$$

Lema 4.0.5. Se $b \geq \frac{m(m-2)}{4}$, então $S_b = S$.

Demonstração. Como $b \geq \frac{m(m-2)}{4} = \mathbf{c}_m R_{g_0}$, temos que $\tilde{b} = (\varphi \circ f)^{2^*-2} (b \circ f - \mathbf{c}_m R_{g_0}) \geq 0$. Assim, pelo Lema 4.0.3, segue que $S_b \geq S$. Por outro lado, consideremos a família de funções $U_\varepsilon = \varepsilon^{\frac{2-m}{2}} U(\frac{x}{\varepsilon})$, com $\varepsilon \in (0, 1)$. Como $\mathbb{S}^m$ é compacta, $b \in C^\infty(\mathbb{S}^m)$ e f é um

difeomorfismo C^∞ , então existe uma constante $C := C(m) > 0$ tal que

$$\tilde{b}(x)U_\varepsilon^2(x) \leq C\varphi^{2^*-2}(x) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + |x|^2} \right)^{m-2} = C \left(\frac{1}{1 + |x|^2} \right)^2 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + |x|^2} \right)^{m-2}. \quad (4.9)$$

Sendo $\varepsilon \in (0, 1)$, temos que

$$\frac{1}{1 + |x|^2} < \frac{1}{\varepsilon^2 + |x|^2}.$$

Daí,

$$\left(\frac{1}{1 + |x|^2} \right)^\alpha < \left(\frac{1}{\varepsilon^2 + |x|^2} \right)^\alpha.$$

Fixando $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$, segue que

$$\left(\frac{1}{1 + |x|^2} \right)^2 < \left(\frac{1}{1 + |x|^2} \right)^\alpha.$$

Consequentemente,

$$\left(\frac{1}{1 + |x|^2} \right)^2 < \left(\frac{1}{\varepsilon^2 + |x|^2} \right)^\alpha. \quad (4.10)$$

Combinando (4.9) com (4.10), obtemos

$$\tilde{b}(x)U_\varepsilon^2(x) \leq C\varepsilon^{m-2} \left(\frac{1}{\varepsilon^2 + |x|^2} \right)^{m-2+\alpha} \quad (4.11)$$

Agora, observemos que

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^m} \tilde{b}(x)U_\varepsilon^2(x)dx = I_1 + I_2$$

onde

$$I_1 = \int_{|x| \leq \varepsilon} \tilde{b}(x)U_\varepsilon^2(x)dx \quad \text{e} \quad I_2 = \int_{|x| \geq \varepsilon} \tilde{b}(x)U_\varepsilon^2(x)dx.$$

Vamos estimar estas integrais. Com efeito, como $\tilde{b} \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, temos que

$$I_1 \leq C \int_{|x| \leq \varepsilon} U_\varepsilon^2(x),$$

onde C é uma constante positiva. Daí, temos

$$I_1 \leq C \int_{|x| \leq \varepsilon} \varepsilon^{2-m} U^2 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) dx.$$

Fazendo a mudança de variável $y = \frac{x}{\varepsilon}$, obtemos

$$I_1 \leq C\varepsilon^{2-m} \int_{|y| \leq 1} \varepsilon^m U^2(y) dy \leq C\varepsilon^2,$$

pois, para todo $|y| \leq 1$, tem-se

$$0 < U^2(y) = [m(m-2)]^{\frac{m-2}{2}} \left(\frac{1}{1+|y|^2} \right)^{m-2} \leq [m(m-1)]^{\frac{m-2}{2}}.$$

Agora, por (4.11), segue que

$$\begin{aligned} I_2 &\leq C\varepsilon^{m-2} \int_{|x| \geq \varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon^2 + |x|^2} \right)^{m-2+\alpha} dx \\ &\leq C\varepsilon^{m-2} \int_{|x| \geq \varepsilon} \left(\frac{1}{|x|^2} \right)^{m-2+\alpha} dx \\ &= C\varepsilon^{m-2} \int_{\varepsilon}^{+\infty} r^{m-1} r^{-2m+4-2\alpha} dr \\ &= C\varepsilon^{m-2} \left. \frac{r^{-m+4-2\alpha}}{-m+4-2\alpha} \right|_{\varepsilon}^{+\infty} \\ &= C\varepsilon^{m-2} \left(\frac{\varepsilon^{-m+4-2\alpha}}{m-4+2\alpha} \right) \\ &= C\varepsilon^{2-2\alpha}, \end{aligned}$$

pois $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$. Logo,

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^m} \tilde{b}(x) U_{\varepsilon}^2(x) dx \leq C\varepsilon^2 + C\varepsilon^{2(1-\alpha)}.$$

Uma vez que $\alpha < 1$, concluímos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^m} \tilde{b}(x) U_{\varepsilon}^2(x) dx = 0.$$

Por outro lado, fazendo a mudança de variável $y = \frac{x}{\varepsilon}$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} |U_{\varepsilon}|^{2^*} dx &= \int_{\mathbb{R}^m} \left| \varepsilon^{\frac{2-m}{2}} U \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right|^{2^*} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \varepsilon^{-m} \left| U \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right|^{2^*} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \varepsilon^{-m} \varepsilon^m |U(y)|^{2^*} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} |U(y)|^{2^*} dy. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^m} |\nabla U_\varepsilon|^{2^*} dx &= \int_{\mathbb{R}^m} \left| \varepsilon^{\frac{2-m}{2}} \nabla U \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right|^2 dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^m} \varepsilon^{-m} \left| \nabla U \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right|^2 dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^m} \varepsilon^{-m} \varepsilon^m |\nabla U(y)|^2 dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^m} |\nabla U(y)|^2 dx.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{\mathbb{R}^m} (|\nabla_\varepsilon U|^2 + \tilde{b} U_\varepsilon^2) dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^m} |U_\varepsilon|^{2^*} dx \right)^{2/2^*}} = \frac{\int_{\mathbb{R}^m} |\nabla U|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^m} |U|^{2^*} dx \right)^{2/2^*}} = S.$$

Donde segue que $S \geq S_b$. Portanto, $S = S_b$. $\square$

Proposição 4.0.6. Seja $(\mathbb{S}^m, g_0)$ a esfera padrão. Se $b \in C^\infty(\mathbb{S}^m)$ é tal que $b \geq \mathfrak{c}_m R_{g_0} = \frac{m(m-2)}{4}$ e $b \not\equiv \mathfrak{c}_m R_{g_0}$, então a equação

$$\Delta_{g_0} u + bu = |u|^{2^*-2} u, \quad u \in C^\infty(\mathbb{S}^m), \quad (4.12)$$

não admite uma solução de energia mínima, isto é,

$$\inf_{u \in C^\infty(\mathbb{S}^m) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{S}^m} [|\nabla_{g_0} u|_{g_0}^2 + bu^2] dV_{g_0}}{\left(\int_{\mathbb{S}^m} |u|^{2^*} dV_{g_0} \right)^{2/2^*}} = S_b$$

não é atingido.

Demonstração. Suponha que existisse $u \in C^\infty(\mathbb{S}^m)$ tal que S_b fosse atingido. Então, pelo Lema 4.0.5,

$$S = S_b = \frac{\int_{\mathbb{S}^m} [|\nabla_{g_0} u|_{g_0}^2 + bu^2] dV_{g_0}}{\left(\int_{\mathbb{S}^m} |u|^{2^*} dV_{g_0} \right)^{2/2^*}}.$$

Considerando v como no Lema 4.0.3, temos por (4.8) que

$$S = S_b = \frac{\int_{\mathbb{R}^m} [|\nabla v|^2 + \tilde{b} v^2] dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^m} |v|^{2^*} dx \right)^{2/2^*}}. \quad (4.13)$$

Como $b \geq \mathfrak{c}_m R_{g_0}$ e $b \neq \mathfrak{c}_m R_{g_0}$, segue que $\tilde{b} \geq 0$ e $\tilde{b} \neq 0$. Então, por (4.13), obtemos

$$S = S_b > \frac{\int_{\mathbb{R}^m} |\nabla v|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^m} |v|^{2^*} dx \right)^{2/2^*}} \geq S,$$

que é uma contradição. Assim completamos a prova. □

Referências Bibliográficas

- [1] Alexandrino, M. M.; Bettiol, R. G. *Lie Groups and Geometric Aspects of Isometric Actions*. Springer (2011).
- [2] Ambrosetti, A.; Rabinowitz, P. H. *Dual variational methods in critical point theory and applications*. J. Funct. Anal. **14**, 349-381 (1973).
- [3] Ammann, B.; Humbert, E. *The second Yamabe invariant*. J. Funct. Anal. **235**(2), 377-412 (2006).
- [4] Aubin, T. *Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire*. J. Math. Pures Appl. (9) **55**(3), 269-296 (1976).
- [5] Aubin, T. *Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Berlin (1998).
- [6] Brendon, G. E. *Introduction to Compact Transformation Groups*. Pure and Applied Mathematics, vol. 46. Academic Press, New York (1972).
- [7] Brezis, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer (2010).
- [8] Brezis, H.; Lieb, E. *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*, Proc. Amer. Math. Soc. **88**, 486-490 (1983).
- [9] Castro Junior, A. A. *Curso de Equações Diferenciais Ordinárias*, Instituto de matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro (2009).
- [10] Cavalcante, L. P. L. *Existência de Soluções Positivas para uma Classe de Problemas Elípticos não Lineares em Domínios não limitados*, Dissertação de Mestrado, Campina Grande-PB (2004).
- [11] Ciarlet, P. G. *Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia (2013).

- [12] Chagas, J. G. *Sobre a Existência de Infinitas Soluções com Energia Finita de Uma Equação Elíptica em $\mathbb{S}^n$* , Dissertação de Mestrado, Campina Grande-PB (2005).
- [13] Clapp, M.; Fernández, J. C. *Multiplicity of nodal solutions to the Yamabe problem*. Calculus of Variations and PDE, **56**:145 (2017).
- [14] Clapp, M.; Pacella, F., *Multiple solutions to the pure critical exponent problem in domains with a hole of arbitrary size*. Math. Z., **259**(3), 575-589 (2008).
- [15] Costa, D. G. *An Invitation to Variational Methods in Differential Equations*. Birkhauser, Boston-Besel-Berlin (2007).
- [16] Costa, R. P. *Propriedades de simetria para soluções de equações elípticas quase lineares em modelos riemannianos*. Tese de Doutorado. UFPB-UFCG, João Pessoa-PB (2014).
- [17] Deimling, K.. *Ordinary Differential Equations in Banach Spaces*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 596. Springer-Verlag, Berlin (1977).
- [18] Ding, W. Y. *On a conformally invariant elliptic equation on $\mathbb{R}^n$* . Commun. Math. Phys. **107**(2), 331-335 (1986).
- [19] Djadli, Z.; Jourdain, A. *Nodal solutions for scalar curvature type equations with perturbation terms on compact Riemannian manifolds*. Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. **5**(1), 205-226 (2002).
- [20] Dugundji, J. *An Extension of Tietze's Theorem*, Pacific Journal of Mathematics. **1**(3), 353-367 (1951).
- [21] El Sayed, S. *Second eigenvalue of the Yamabe operator and applications*. Calc. Var. Partial Differ. Equ. **50**(3-4), 665-692 (2014).
- [22] Hebey, E. *Nonlinear analysis on manifolds: Sobolev spaces and inequalities*. Courant Lecture Notes in Mathematics, New York (1999).
- [23] Hebey, E.; Vaugon, M. *Le problème de Yamabe équivariant..* Bull. Sci. Math. **117**(2), 241-286 (1993).
- [24] Henry, G. *Second Yamabe constant on Riemannian products*. J. Geom. Phys. **114**, 260-275 (2017).
- [25] Holcman, D. *Solutions nodales sur les variétés riemanniennes*. J. Funct. Anal. **161**(1), 219-245 (1999).

- [26] Kawakubo, K. *The Theory of Transformation Groups*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York (1991).
- [27] Lee, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds*. Second Edition. Graduate Texts in Mathematics, vol. 218. Springer-Verlag, New York (2012).
- [28] Lee, J. M.; Parker, T. H. *The Yamabe problem*. Bull. Am. Math. Soc. (N.S.) **17**(1), 37-91 (1987).
- [29] Morabito, F.; Pistoia, A.; Vaira, G. *Towering phenomena for the Yamabe equation on symmetric manifolds*. Potential Anal. **47**(1), 53-102 (2017).
- [30] Myers, S. B.; Steenrod, N. E. *The group of isometries of a Riemannian manifold*. Annals of Mathematics, **40**(2), 400-416 (1939).
- [31] Obata, M. *The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds*. J. Differ. Geom. **6**, 247-258 (1971-1972).
- [32] Petean, J. *On nodal solutions of the Yamabe equation on products*. J. Geom. Phys. **59**(10), 1395-1401 (2009).
- [33] Pollack, D. *Nonuniqueness and high energy solutions for a conformally invariant scalar equation*. Commun. Anal. Geom. **1**(3-4), 347-414 (1993).
- [34] Robert, F.; Vétois, J. *Sign-changing solutions to elliptic second order equations: gluing a peak to a degenerate critical manifold*. Calc. Var. Partial Differ. Equ. **54**(1), 693-716 (2015).
- [35] Schoen, R. *Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature*. J. Differ. Geom. **20**(2), 479-495 (1984).
- [36] Sepanski, M. R., *Compact Lie Groups*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 235. Springer-Verlag, New York (2007).
- [37] Silva, S. D. *Solução do Problema de Yamabe*. Dissertação de Mestrado. UFAL, Maceió-AL (2015).
- [38] Struwe, M. *Variational Methods*. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems. Fourth Edition. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 34. Springer, Berlin (2008).
- [39] Trudinger, N. S. *Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **22**(3), 265-274 (1968).

- [40] Vétois, J. *Multiple solutions for nonlinear elliptic equations on compact Riemannian manifolds*. Int. J. Math. **18**(9), 1071-1111 (2007).
- [41] Willem, M. *Minimax Theorems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, vol. 24, Birkhäuser Boston, Inc., Boston (1996).
- [42] Yamabe, H. *On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds*. Osaka Math. J. **12**, 21-37 (1960).